



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA DE SISTEMAS – INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

OPTIMIZACIÓN DE AUTOBUSES PARA EL SISTEMA PUMABÚS
(RUTA 9) USANDO PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
CITLALLI ELIZABETH DORANTES BOLAÑOS

TUTOR:
DR. JUAN MANUEL ESTRADA MEDINA, FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D.F. JUNIO 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

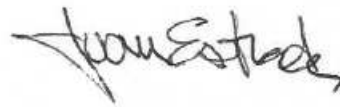
El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: DRA. IDALIA FLORES DE LA MOTA
Secretario: DRA. ESTHER SEGURA PÉREZ
Vocal: DR. JUAN MANUEL ESTRADA MEDINA
1^{er} Suplente: M. I. ANN GODELIEVE WELLENS PURNAL
2^{do} Suplente: M. I. FRANCISCA IRENE SOLER ANGUIANO

Lugar donde se realizó la tesis:
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM.

TUTOR DE TESIS:
DR. JUAN MANUEL ESTRADA MEDINA



FIRMA

Dedicatorias y Agradecimientos

A mis padres: nunca les terminaré de agradecer el apoyo incondicional, la confianza y las palabras de aliento que nunca me han faltado; pero sobre todo, gracias por todo el amor que me han dado desde antes de nacer. Sin ustedes jamás habría llegado hasta aquí. Mis logros son sus logros.

A Ricardo: pocas personas te llegarán a conocer de toda la vida y muchas menos te llegarán a querer como yo... con mucho cariño para ti hermano.

A Renato: gracias por ser mi compañero de viaje en esta vida, sin importar el destino.

A mi familia y amigos que siempre me han mostrado su apoyo y su amistad desinteresada.

Agradezco a mi profesor y tutor, el Dr. Juan Manuel Estrada Medina, por sus consejos y enseñanzas fuera y dentro del salón de clases. Gracias por cada minuto que dedicó a esta tesis, por brindarme su amistad y hacerme sentir siempre con la confianza suficiente para acercarme y comentarle mis dudas.

A la Dra. Idalia Flores de la Mota: le agradezco sus observaciones como parte del jurado para mejorar este trabajo, así como su amistad y su interés por impulsarnos a continuar en este camino del conocimiento.

Gracias a mis sinodales: la Dra. Esther Segura, la M. I. Ann Wellens y la M. I. Francis Soler, porque cada uno de sus comentarios enriqueció esta tesis.

Por último, estoy infinitamente agradecida con mi Alma Máter por acogerme en sus aulas... mi querida Universidad, que ha sido mi segundo hogar durante 9 años y cuyo nombre siempre pondré en alto.

Índice general

1	Marco general	1
1.1	Introducción	1
1.2	Planteamiento del problema	2
1.3	Justificación	5
1.4	Objetivos	6
1.5	Preguntas de investigación	6
2	Marco conceptual	8
2.1	Herramientas estadísticas	8
2.1.1	Instrumentos de captación	8
2.1.2	Tipos de variables	10
2.1.3	Variables aleatorias	11
2.1.4	Funciones de distribución y función de densidad	11
2.2	Herramientas utilizadas en el trabajo	13
2.3	Programación entera y el algoritmo de ramificación y acotamiento . .	14
2.4	Programación estocástica y sus métodos de solución	21
2.5	Demanda de transporte	27
2.5.1	Conceptos	27
2.5.2	Características de la demanda de transporte	29
2.5.3	Características de la oferta de transporte	30
2.5.4	Equilibrio entre la oferta y la demanda	30
2.6	Métodos para el pronóstico de la demanda de transporte	32
2.6.1	Modelos de tendencia	32
2.6.2	Regresión múltiple	35
2.6.3	Programación lineal	36

3 Metodología	38
3.1 Recolección de datos	39
3.1.1 Número de autobuses	40
3.1.2 Horario de interés	40
3.1.3 Tiempo de recorrido de la ruta 9	41
3.1.4 Tiempo entre llegadas	41
3.1.5 Demanda de la ruta 9	41
3.2 Validación de información	42
3.3 Modelo	42
4 Modelo	43
4.1 Análisis de datos	43
4.1.1 Número de autobuses	43
4.1.2 Tiempo de recorrido de la ruta 9	44
4.1.3 Tiempo entre llegadas	46
4.2 Análisis de la demanda de la ruta 9	49
4.3 Modelo matemático	53
4.4 Solución del modelo	55
4.5 Resultados	62
Conclusiones	64
Bibliografía	66
Anexo I. Datos: Tiempo de recorrido	69
Anexo II. Distribución uniforme continua	70
Anexo III. Datos: Tiempo de llegada	72
Anexo IV. Datos: Demanda	74

CAPÍTULO 1

Marco general

1.1 Introducción

El sistema de transporte de cada ciudad depende en gran medida del tamaño y la localización de las mismas teniendo como resultado, la mayoría de las veces, un sistema amplio para ciudades grandes y un sistema pequeño para localidades de menor tamaño. México, al ser una de las ciudades con mayor densidad demográfica en el mundo, se ha visto en la necesidad de acrecentar su sistema de transporte, un ejemplo reciente de ello es la creación de la línea 12 del Sistema de Transporte Colectivo (Metro).

Problemas como la congestión en el tránsito, el elevado consumo de tiempo en el traslado de un lugar a otro, la contaminación ambiental, entre otros, han orillado a los gobiernos a tomar decisiones orientadas a la maximización de los servicios de transporte, al mismo tiempo que se minimizan los problemas mencionados anteriormente. Tal fue el caso de Ciudad Universitaria, que con el incremento tanto de su población como del uso del automóvil dentro del campus, se producía un tránsito intenso en los circuitos, limitando a los automovilistas a un sólo carril para circular. Por ello, en los últimos años, el sistema de transporte interno de la Universidad ha crecido considerablemente: en la década de los noventa contaba con tan solo 3 rutas, hoy en día cuenta con 12 rutas, las cuales tratan de cubrir en su totalidad el campus. Cuando el Sistema de Transporte Interno PumaBús fue creado e implementado tenía como algunos de sus objetivos principales el traslado de la población universitaria de manera eficiente, es decir, que los tiempos de traslado, desde la espera del autobús hasta el punto final del recorrido, se realizaran en el menor tiempo posible, así como ser un transporte confortable para sus pasajeros, en su mayoría estudiantes y

académicos. No obstante, hoy en día es posible notar que el sistema no está cumpliendo con algunos objetivos primordiales. En este contexto, el presente trabajo se enfocó en estudiar el sistema delimitando la investigación a una de sus principales rutas. Los resultados del presente trabajo sirven de base para proponer mejoras en el funcionamiento del sistema, por ejemplo, utilizar algunos autobuses de otras rutas menos demandadas en horas pico.

La tesis se organizó de la siguiente manera: el primer capítulo muestra la justificación y los objetivos del presente trabajo, así como algunas preguntas relevantes que sirvieron de guía para la investigación.

En el segundo capítulo se presenta una serie de conceptos útiles para un mejor entendimiento del trabajo. Se explica a detalle en qué consisten las herramientas utilizadas en la resolución del problema. Asimismo, se muestran algunos de los métodos más comunes para pronosticar la demanda de transporte.

En el tercer capítulo se describe la metodología que se llevó a cabo para el desarrollo de la tesis, así como la validación de la información recabada en campo.

En el cuarto y último capítulo se explica a detalle la realización del modelo matemático, así como su solución y los resultados finales.

1.2 Planteamiento del problema

El Sistema de Transporte Interno PumaBús es un servicio gratuito que ofrece la UNAM a todas las personas que deseen plazarse por las calzadas del campus de Ciudad Universitaria. Los autobuses circulan a lo largo de los circuitos de Ciudad Universitaria por un carril exclusivo, por ello no está permitido estacionar vehículos en ambos costados de las calzadas. Los automóviles particulares, pertenecientes a alumnos o académicos de la Universidad, pueden estacionarse de manera gratuita y segura en los estacionamientos del Estadio Olímpico Universitario. Estas restricciones permiten que el recorrido se efectúe casi de una manera continua y con un mínimo de contratiempos, por ejemplo: la espera por semáforos, la detención momentánea porque algún auto particular o taxi hizo una parada en dicho carril para abordaje o descenso de pasajeros o el impedimento debido a que un auto tiene que cruzar el

carril exclusivo para entrar a un estacionamiento; sin embargo, dichos retrasos suelen ser menores a un minuto.

Como se mencionó en la sección anterior, el funcionamiento del sistema PumaBús no es del todo eficiente, por ejemplo, tanto en horas pico como en las que no lo son, se presentan de manera notoria las siguientes situaciones:

- No se satisface la demanda de pasajeros (muchas veces los pasajeros no abordan porque ya no hay capacidad y deben esperar el siguiente PumaBús).
- Suele ocurrir que dos PumaBuses de una misma ruta vienen “pegados”, es decir, casi juntos, con menos de 2 minutos de tiempo de retraso entre ellos, lo que genera que alguno de los dos vaya casi vacío, o bien, que ambos vayan muy llenos debido a que antes de su llegada ya se habían tardado demasiado.

Para examinar con mayor detalle esta problemática, se construyó el mapa conceptual de la Figura 1.1. Con base en éste se observó que uno de los problemas principales que enfrenta este sistema se debe a una cobertura inapropiada de la demanda y todos los problemas que se derivan de éste. Por ejemplo, una deficiente cobertura en la demanda genera que los pasajeros busquen nuevas formas de transportarse, como el uso de taxis (un gasto económico inesperado), caminar hacia su destino (en caso de tratarse de trayectos cortos), malestar en el usuario, amontonamientos en un sólo autobús, etc. Pero, ¿qué sucede si se trata de un trayecto largo, o si el usuario tiene prisa por llegar a un examen o una actividad académica importante?

En horas pico, que coinciden con el cambio de turno en las facultades, se observa palpablemente que los PumaBuses de ciertas rutas transitan por los circuitos completamente llenos, por lo que muchas veces al pasar de una parada a la siguiente, los pasajeros ya no pueden abordar y tienen que esperar al siguiente autobús, lo que ocasiona líneas de espera largas, conocidas como “colas” en el ámbito de la IDO, y tiempos de espera largos.

Dentro de las 12 rutas con las que cuenta el sistema, una de las más importantes es la ruta 9 (Metrobús Ciudad Universitaria - Facultades), conocida como “ruta de las facultades” la cual, como su nombre lo indica, recorre el circuito de las facultades, comenzando su trayecto en la parada “Metrobús”, pasando por el Estadio de Prácticas, el Museo Universitario de Ciencias y Artes (MUCA), Rectoría; las facultades de: Psicología, Filosofía y Letras, Derecho, Economía, Odontología y Medicina; el Invernadero, el Posgrado de Ingeniería, la estación “Camino Verde” (Anexo de la Facultad de Ingeniería), Contaduría, la Escuela Nacional de Trabajo Social (ENTS) y regresa a la parada “Metrobús”.

La importancia de esta ruta radica en que recorre la mayoría de las facultades con mayor matrícula, como son la facultad de Derecho, la de Medicina o el Anexo de Ingeniería, que conecta con la facultad de Ingeniería, así como la parada más cercana a la estación de metrobús “Ciudad Universitaria”, la cual mucha de la población universitaria (aproximadamente entre 16 mil y 18 mil personas a la semana) utiliza para llegar a la escuela o casa. Además, pese a que esta ruta no realiza paradas en la facultad de Veterinaria, ni en la de Ciencias, muchos estudiantes de estas facultades la utilizan debido a que realiza paradas cerca de ellas. Esta ruta cuenta con un recorrido de 4.1 kilómetros a lo largo de 15 paradas, con un tiempo de trayecto estimado ¹ en 19 minutos y con un parque vehicular de 4 autobuses.

En este contexto, la investigación se abocó a estudiar la demanda de la ruta 9 en un horario pico, ya que la demanda en horas pico es muy distinta a un horario que no lo es.

1.3 Justificación

Considerando lo anterior, resulta evidente que existe un problema en el Sistema de Transporte Interno PumaBús que afecta de manera considerable a la comunidad universitaria. Por ello, la realización de esta investigación resulta valiosa, puesto que ofrece sugerencias para mejorar el funcionamiento del sistema completo, apoyándose en la solución de la optimización de una ruta en particular. Cabe señalar que actual-

¹Al momento de la implementación del Sistema de Transporte Interno PumaBús, en el año 2008.

mente no existen trabajos que hayan abordado este problema, a excepción de una sola tesis [1]; sin embargo, ésta no trata la cuestión de la presente investigación.

1.4 Objetivos

Como objetivo principal, se busca optimizar y/o proponer mejoras al Sistema de Transporte Interno PumaBús, con el fin de disminuir los tiempos de espera, enfocando el estudio a la ruta 9; para ello se utilizaron las herramientas de la Programación Estocástica, debido a que engloba restricciones de carácter aleatorio.

Cabe destacar que el estudio se llevó a cabo desde la perspectiva del usuario (no del trabajador).

Objetivos particulares

Para acometer el problema planteado, una cuestión fundamental fue determinar la demanda así como el tiempo de espera razonable para los usuarios, ambos parámetros de carácter aleatorio (estocástico) y particulares para cada ruta.

Este análisis permitió aclarar los siguientes aspectos:

1. Entender cómo está operando el sistema de transporte PumaBús, en especial la ruta seleccionada.
2. Identificar los factores que afectan la cobertura eficiente de la demanda en las horas pico.
3. Proponer mejoras para hacer más eficiente el servicio en dicha ruta.

1.5 Preguntas de investigación

Las siguientes preguntas sirvieron como guía para desarrollar el estudio:

- ¿Cuál es la herramienta matemática más adecuada para abordar el problema?
- ¿Resulta factible analizar el sistema completo o enfocarse a una sola ruta?

- El conocimiento de cómo está funcionando la ruta elegida, ¿podría arrojar un entendimiento del funcionamiento del sistema global?
- ¿Se requiere introducir un mayor número de autobuses para hacer más eficiente la ruta seleccionada?
- ¿Qué parámetros se deben tomar en cuenta en la modelación?
- ¿Se trata de un problema de asignación / organización de dicha ruta?, por ejemplo, ¿cómo se asignan los tiempos de salida que se emplean actualmente?
- ¿Se presentan colas en el servicio –de cuánto tiempo y en qué puntos–?

CAPÍTULO 2

Marco conceptual

En la literatura, es relativamente fácil encontrar problemas relacionados con el nivel de producción de cierto producto restringido a cierta demanda aleatoria; un ejemplo clásico de este tipo de problemas es el *Problema del Periodiquero*.

Por otro lado, la *Programación Estocástica* es la más adecuada para resolver problemas que involucran una demanda aleatoria [2]. Una de las primeras aplicaciones de la programación estocástica fue la decisión sobre la asignación de aeronaves en las rutas aéreas (asignación de flota), realizado por Dantzing y Ferguson en 1956. Dicho problema es el más cercano al que se estudiará en la presente Tesis.

Así, el problema se abordó mediante el uso de la programación estocástica, con el fin de modelar la demanda de la ruta 9. A continuación se presenta una explicación de los conceptos que fueron relevantes para la investigación; en algunos casos se dan ejemplos para tener un mayor entendimiento de los mismos.

2.1 Herramientas estadísticas

2.1.1 Instrumentos de captación

El primer paso para abordar un problema de tipo matemático consiste en la recolección de datos, los cuales después le servirán al investigador para desarrollar un modelo matemático. Existen varias técnicas para recolectar la información, la selección de algunas de ellas depende de los objetivos y el tipo de estudio. Debe considerarse que cada método tiene sus propios alcances y limitaciones [3].

Entrevistas

Se define como una conversación entre un entrevistador y un entrevistado que proporciona determinada información.

Básicamente existen dos tipos de entrevistas: *entrevista dirigida*, estructurada y guiada que sigue un procedimiento fijado de antemano por un cuestionario y la *entrevista no dirigida*, que deja a la iniciativa del entrevistado la narración del tema de interés. En el último caso, el entrevistador realiza algunas preguntas que dan pie a que el entrevistado manifieste libremente sus opiniones.

Como ejemplo, en alguna investigación clínica-epidemiológica es necesario realizar entrevistas dirigidas, con lo que se logra una mayor confiabilidad y validez de la información captada.

Las entrevistas conllevan riesgos importantes, ya que para obtener información útil es necesario que el entrevistador prepare de antemano el tema de la entrevista para así poder plantear preguntas adecuadas e interpretar acertadamente la información que dé el entrevistado.

Cuestionarios

En un cuestionario las preguntas se formulan por escrito y no siempre es necesaria la presencia del entrevistador. Conviene que el cuestionario esté diseñado de tal modo que su información pueda incorporarse fácilmente a la memoria de una computadora. Para poder diseñar un cuestionario adecuado deben haberse definido de antemano cuáles son los objetivos de la investigación y con qué recursos económicos, físicos, humanos y de tiempo se cuenta para realizarla. Debe darse especial atención a los tipos, orden y grupos de preguntas, así como a la formulación de las mismas.

La secuencia de las preguntas debe diseñarse de tal manera que evite la llamada “contaminación”, que consiste en la influencia o sesgo que el orden de las preguntas puede ejercer en las respuestas del informante.

Se recomienda, antes de aplicar el cuestionario, diseñar los tabulares en los que se “vaciarán” los datos para poder prever las dificultades de este proceso.

2.1.2 Tipos de variables

Las variables son las características medibles en las unidades de estudio por lo que deben elegirse en relación con los propósitos planteados. En su selección, hay que considerar aspectos tales como: complejidad, claridad, tipo y relevancia para los objetivos de la investigación. En ocasiones las variables resultan complejas tanto en su medición como en su definición, por lo que es necesario aclararlas mediante definiciones operacionales y determinar el tipo de escala que se utilizará para medirlas. De esta manera se tendrán los menores sesgos en la información captada, y además el trabajo realizado podrá ser interpretado fácilmente por otras personas.

Asimismo, es importante especificar la utilidad de cada una de las variables antes de definir las, de preferencia determinando el tipo de análisis estadístico en el que intervendrán. Sin embargo, no siempre es posible definir un número exacto de variables, ya que éste dependerá de las metas que se pretendan alcanzar y del tipo de estudio. Esta situación se formula mediante la pregunta: ¿Cuántas variables se deben medir? Una respuesta podría ser: “*tantas como sea necesario y el menor número posible.*” Existen diversas clasificaciones de variables [3], y algunas de ellas son las siguientes:

1. *Variables de interés primario*: Son aquéllas que permiten medir en forma directa los aspectos fundamentales del estudio, por ejemplo: el peso y la talla en un estudio de crecimiento y desarrollo.
2. *Variables sustitutas a interés primario*: Cuando no se pueden medir las variables de interés primario, por motivos tecnológicos, éticos o de tiempo, éstas se sustituyen por otras que sean equivalentes o que estén asociadas fuertemente con las de interés primario: el pliegue cutáneo como indicador del estado nutricional.
3. *Variables auxiliares*: Son aquéllas que a pesar de no ser fundamentales proporcionan información adicional al proceso estudiado. Por ejemplo: en un estudio de crecimiento y desarrollo, las variables que representan el estado socioeconómico y lugar de procedencia de las personas, pueden tratarse como variables auxiliares.

2.1.3 Variables aleatorias

En ocasiones, dado un experimento aleatorio, se está interesado en alguna característica numérica de un evento, por ejemplo, al considerar el lanzamiento de un par de dados, el interés puede ser el resultado específico que se obtiene de su suma. El valor numérico obtenido depende de la realización específica del experimento, así, la característica numérica de interés puede representarse mediante una función [4] $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ donde Ω corresponde al espacio muestral (o conjunto de todos los posibles casos).

Ahora bien, como el valor de X depende del resultado del experimento, evidentemente antes de efectuarse, no se conoce su valor; sin embargo, sí se tiene definida una función de probabilidad: dado un conjunto B de números reales es posible calcular la probabilidad del conjunto $X \in B$, siempre que X represente un evento.

2.1.4 Funciones de distribución y función de densidad

Afirmar que una variable aleatoria puede tomar un valor de un conjunto de posibles valores, no proporciona mucha información, ya que diferentes variables aleatorias pueden admitir el mismo conjunto de probables valores. Esencialmente lo que interesa de una variable aleatoria es el valor que va a tomar en un experimento y no únicamente el conjunto de sus posibles valores; sin embargo, esto no se puede conocer antes de realizar el experimento. Por ello, lo más importante de una variable aleatoria es la información sobre las probabilidades con que puede tomar sus diferentes posibles valores. Este conocimiento lo proporciona la **función de distribución** [4].

Definición

Si X es una variable aleatoria real, la función $F_X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, definida por:

$$F_X(x) = P[X \leq x]$$

es la llamada *función de distribución de X* , donde $P[X \leq x]$ es la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor menor o igual que x .

Clasificación de variables aleatorias

1. *Variable aleatoria continua:* X es una variable aleatoria continua si su función de distribución es continua, es decir, X toma valores en un conjunto no numerable.

Definición

La función de distribución F_X de la variable aleatoria X es absolutamente continua si existe una función no negativa $f_X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ integrable, tal que:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La función f_X , definida por $f_X(x) = P[X = x]$, es llamada **función de densidad de X** y debe satisfacer las siguientes propiedades:

- (a) $0 \leq f_X(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 - (b) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$
2. *Variable aleatoria discreta:* Si existe una colección finita o infinita numerable de números reales x_1, x_2, \dots , tales que:

$$P[X = x_k] > 0 \quad \forall x_k$$

donde $\{x_1, x_2, \dots\}$ es el conjunto de posibles valores de X , entonces X es una variable aleatoria discreta.

Definición

Si X es una variable aleatoria discreta, entonces la función $f_X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f_X(x) = P[X = x]$ es llamada **función de densidad de la variable aleatoria discreta X** , y debe satisfacer las siguientes propiedades:

- (a) $0 \leq f_X(x) \leq 1$
- (b) $\sum_k P[X = x_k] = 1$

2.2 Herramientas utilizadas en el trabajo

Desde el advenimiento de la revolución industrial el mundo ha tenido un notable crecimiento en la magnitud y complejidad de las organizaciones. Un problema relacionado es que a medida que se incrementa la complejidad y especialización de una organización, se vuelve más difícil asignar los recursos disponibles a sus diversas actividades de manera que sea lo más efectivo para la organización como un todo. Este tipo de problemas y la necesidad de hallar la mejor manera de resolverlos motivó el surgimiento de un conjunto de métodos y técnicas comprendidas en lo que actualmente se denomina **investigación de operaciones**. Generalmente se ha atribuido sus inicios a su uso en los servicios militares al principio de la Segunda Guerra Mundial. Debido al esfuerzo de guerra, se presentó la urgente necesidad de asignar recursos escasos a las diversas operaciones militares. Como consecuencia, la administración militar británica y después la de los Estados Unidos llamaron a un gran número de científicos con el fin de aplicar un procedimiento científico para tratar tanto éste como otros problemas tácticos y estratégicos [5].

Gradualmente la industria empezó a interesarse en esta nueva disciplina; por ejemplo, en 1951 ya había penetrado en la Gran Bretaña y estaba en proceso de hacerlo en EUA. Desde entonces el campo se ha desarrollado con mucha rapidez. Un factor que dio gran ímpetu a su crecimiento fue la revolución de las computadoras, ya que por lo general se requiere una gran cantidad de cálculos para tratar de modo más efectivo los complejos problemas que típicamente son considerados por la investigación de operaciones.

Una de las cuestiones relevantes que aborda la investigación de operaciones es la toma de decisiones óptimas en sistemas determinísticos y probabilistas que se originan en la vida real y su la modelación matemática. *Decidir* es un proceso de selección de cursos de acción. Su fin es que, de acuerdo con ciertos criterios, los resultados esperados se acerquen lo más posible a los objetivos o metas establecidas. Un proceso de decisión puede realizarse bajo los principios de la *metodología científica* o de la *improvisación*.

El enfoque presentado en el presente trabajo se basó en la metodología científica, es decir, la aplicación secuencial de:

1. *Observación del sistema:* En este caso, la ruta 9 del sistema PumaBús.
2. *Identificación y definición del problema:* No se cubre la demanda del sistema y la espera de los usuarios es muy grande.
3. *Construcción de un modelo:* La estructuración de la situación real en un modelo matemático, mediante la abstracción de los elementos esenciales de modo que el modelo sea una representación adecuada de la realidad representada y proporcionar una solución factible para los objetivos en la toma de decisiones y examinar dicha solución en el contexto del problema.
4. *Solución del modelo:* utilizando alguna de las herramientas de la investigación de operaciones.
5. *Verificación de resultados:* Comparación de los resultados del modelo con el sistema real.

Algunas de las herramientas más comunes de la investigación de operaciones son: programación lineal, programación entera, programación dinámica, simulación, teoría de redes, teoría de inventarios.

En el presente trabajo se construyó un modelo *entero* utilizando la *programación estocástica*, ello debido a la naturaleza del problema, ya que las variables involucradas son de carácter aleatorio. A continuación se explica en qué consisten ambas herramientas.

2.3 Programación entera y el algoritmo de ramificación y acotamiento

Existe una gran cantidad de problemas en los cuales las variables de decisión tienen sentido sólo si la solución son valores enteros. Por ejemplo, con frecuencia es necesario asignar hombres, máquinas y vehículos a las actividades, ésto debe hacerse

en cantidades enteras (pues no es posible asignar medio hombre, o medio vehículo a un proceso). En la práctica, un enfoque común para resolver los problemas de *programación lineal entera* ha sido el uso del método símplex (ignorando la(s) restricción(es) entera(s)) y después redondear los valores de la solución no enteros a enteros. Sin embargo, existen riesgos al utilizar este acercamiento, por ejemplo, que la solución óptima del programa lineal *no es necesariamente factible* después de redondearla, además resulta difícil saber cuándo se mantiene la factibilidad. Incluso puede ser necesario cambiar el valor de algunas variables en una o más unidades después del redondeo. A manera de ilustración supóngase que algunas de las restricciones son:

$$-x_1 + x_2 \leq 3.5$$

$$x_1 + x_2 \leq 16.5$$

cuya solución óptima no entera es $x_1 = 6.5$ y $x_2 = 10$. Nótese que es imposible redondear x_1 a 6 o 7 y mantener la factibilidad. Esto sólo podría hacerse si cambiamos también el valor entero de x_2 . Es fácil imaginar lo mucho que se puede complicar este procedimiento cuando existen decenas o cientos de restricciones y/o variables. Aún cuando la solución óptima del problema no entero se redondee de manera satisfactoria, existe otro peligro: no hay garantía de que ésta sea la solución óptima del problema entero.

Por estas razones se ha desarrollado un número considerable de algoritmos que ayudan a resolver problemas de este tipo. Desafortunadamente, ninguno posee una eficiencia en los cálculos que sea siquiera remotamente comparable al método símplex (excepto en tipos especiales de problemas). Algunos de los algoritmos más comunes son: Ramificación y Acotamiento, Ralph Gomory, Algoritmo de Land-Doig, entre otros [5].

Algoritmo de ramificación y acotamiento

Conocido también como Algoritmo de Branch & Bound (en inglés), es el algoritmo utilizado por la mayoría de los softwares dedicados a la solución de problemas lineales, enteros o no.

La idea básica de esta técnica es la siguiente:

Supóngase que se debe *minimizar, sin pérdida de generalidad*, una función objetivo, y que se dispone de una *cota superior* para el valor óptimo de esta función. El primer paso es hacer una *partición* del conjunto de todas las soluciones factibles en *varios subconjuntos*, y se obtiene para cada uno una *cota inferior* para el valor de la función objetivo de las soluciones que están en ese subconjunto. Aquéllos subconjuntos cuyas cotas inferiores sean mayores que la cota superior actual para el valor de la función objetivos, se excluyen de toda consideración futura (un subconjunto que se excluye, se dice que está *sondeado*). Después se hace una nueva partición en *varios subconjuntos* de uno de los subconjuntos restantes. Se obtienen a su vez las cotas inferiores de los nuevos subconjuntos y se usan como antes, para excluir algunos de ellos de futuras consideraciones. Se selecciona otro subconjunto de entre *todos* los restantes para hacer una nueva partición, y así sucesivamente.

Este proceso se repite una y otra vez hasta que se encuentra una solución factible tal que el valor correspondiente de la función objetivo no sea mayor que la cota inferior de ningún subconjunto. Tal solución debe ser óptima, ya que ninguno de los subconjuntos puede contener una mejor [5].

Ejemplo

Se ilustrará la técnica de ramificación y acotamiento aplicada a un problema de asignación con la tabla de costo mostrada a continuación.

	Asignación			
	1	2	3	4
A	9	5	4	5
B	4	3	5	6
C	3	1	3	2
D	2	4	3	6

Tabla 2.1: Tabla de costo para el problema de asignación

El objetivo es asignar cada uno de los cuatro beneficiarios a su asignación única, de manera que se minimice la suma de las cuatro entradas correspondientes en la matriz de costo. Existen $4! (= 24)$ soluciones factibles.

Enseguida se detallan los pasos del algoritmo.

Paso de ramificación. Además de seleccionar una regla de ramificación (en este caso será la regla de la mejor cota), es necesario especificar cómo se hará la partición del subconjunto restante seleccionado.

Una manera natural de hacer la partición para el problema de asignación es enumerar las diferentes maneras de hacer las asignaciones restantes. Por ejemplo, el conjunto completo de 24 soluciones factibles puede partirse en cuatro subconjuntos de 6 soluciones factibles cada uno, asignando A, B, C y D a la asignación 1, respectivamente. Se puede hacer una nueva partición de cada uno de estos subconjuntos en 3 subconjuntos de 2 soluciones factibles cada uno, asignando respectivamente cada uno de los 3 beneficiarios no asignados, a la asignación 2.

Por último, cada uno de estos nuevos subconjuntos de 2 soluciones factibles puede partirse en dos subconjuntos de una solución factible cada uno, asignando respectivamente cada uno de los dos beneficiarios no asignados, a la asignación 3 (y por tanto, el otro beneficiario no asignado, a la asignación 4).

Este procedimiento se usará, en donde cada subconjunto que se genera se identificará con una lista de los beneficiarios asignados en orden.

Paso de acotamiento. Para cada nuevo subconjunto de soluciones factibles que se genere en el paso de ramificación, el paso de acotamiento debe establecer en forma eficiente una *cota inferior* Z_L para el costo total, para cualquiera de las soluciones del subconjunto.

El método que se ha escogido es agregar el mínimo costo posible de las asignaciones respectivas, sin preocuparse si éste corresponde o no a una solución factible. Por ejemplo, una cota inferior de este tipo, sobre el conjunto completo de todas las soluciones factibles es la suma de los mínimos de las columnas respectivas de la Tabla 2.1: $2 + 1 + 2 + 2 = 7$.

De igual manera, si el beneficiario C se asignara a la asignación 1, entonces la cota inferior para el subconjunto C resultante de seis soluciones factibles sería el costo de esta asignación más la suma de los costos mínimos (ignorando el renglón C) de las tres últimas columnas, $3 + (3 + 2 + 5) = 13$.

A continuación se describen las iteraciones.

Iteración 0. Considerese el conjunto de las 24 soluciones factibles. Su cota inferior se obtuvo en el *paso de acotamiento*: $Z_L = 7$. Esta cota inferior corresponde a la solución **no factible**: $DCDC$. Por lo tanto, este conjunto es el *subconjunto restante*, en condiciones de partirse en nuevos subconjuntos para dar comienzo a la primera iteración completa.

Iteración 1. Se hace una partición del conjunto de las 24 soluciones factibles en los 4 subconjuntos correspondientes a las 4 maneras en que puede hacerse la asignación 1. Las cotas inferiores correspondientes (Z_L) son:

$$9 + (1 + 2 + 2) = 14 \text{ para el subconjunto } A,$$

$$4 + (1 + 2 + 2) = 9 \text{ para el subconjunto } B,$$

$$3 + (3 + 2 + 5) = 13 \text{ para el subconjunto } C \text{ y}$$

$$2 + (1 + 3 + 2) = 8 \text{ para el subconjunto } D.$$

Como sucede que la cota $Z_L = 13$ corresponde a una solución factible, $CBDA$, es también una cota superior para el costo total de la solución óptima, y esta solución se convierte en la *solución actual*. Por lo tanto el subconjunto C queda sondeado. Además, A también queda sondeado, puesto que ($14 > 13$), de manera que los subconjuntos B y D son los únicos subconjuntos restantes. Estos resultados se resumen por medio del árbol de la Figura 2.1.

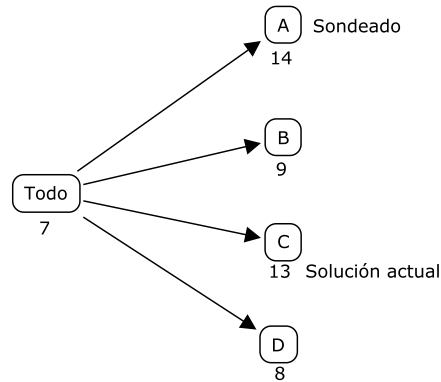


Figura 2.1: Resultados de la primera iteración.

Iteración 2. Ahora, con sólo dos subconjuntos restantes, la regla de la mejor cota selecciona al subconjunto D para hacer una partición en nuevos subconjuntos, ya que tiene un valor menor que el subconjunto B ($8 < 9$). La partición se realiza conservando al beneficiario D en la asignación 1 y haciendo la asignación 2 en las tres maneras posibles (A, B o C), obteniendo así los subconjuntos DA, DB y DC , de donde las cota inferior (Z_L) para cada subconjunto es:

$$2 + 5 + (3 + 2) = 12 \text{ para } DA,$$

$$2 + 3 + (3 + 2) = 10 \text{ para } DB \text{ y}$$

$$2 + 1 + (4 + 5) = 12 \text{ para } DC.$$

Como ninguna de las soluciones puede ser sondeada, los subconjuntos restantes son: B (de la iteración 1), DA, DB y DC .

Iteración 3. Entre los cuatro subconjuntos restantes, el que tiene la menor cota inferior es B , de modo que se hace una partición en los tres nuevos subconjuntos: BA, BC y BD . Sus cotas inferiores Z_L son:

$$4 + 5 + (2 + 2) = 13 \text{ para } BA,$$

$$4 + 1 + (2 + 5) = 12 \text{ para } BC \text{ y}$$

$$4 + 4 + (3 + 2) = 13 \text{ para } BD.$$

Puesto que las dos primeras cotas corresponden a soluciones factibles y la última es igual a la *solución actual* = 13, de inmediato todos estos subconjuntos quedan sondeados. Más aún, la solución para el subconjunto BC ($BCDA$) tiene un valor de

la función objetivo menor que la actual, así que ésta se convierte en la nueva solución actual ($12 < 13$). Todo esto se resume en la Figura 2.2.

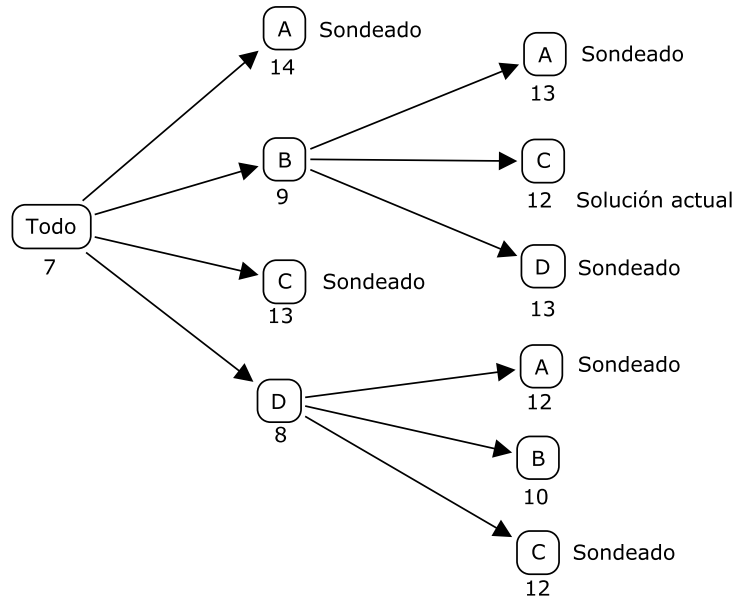


Figura 2.2: Resultados de la tercera iteración.

Iteración 4. Se hace la partición del subconjunto restante DB en los nuevos subconjuntos DBA y DBC , que tienen cotas inferiores Z_L :

$$2 + 3 + 4 + (2) = 11 \text{ y}$$

$$2 + 3 + 3 + (5) = 13 \text{ respectivamente.}$$

Dado que ambas cotas corresponden a soluciones factibles, los dos nuevos subconjuntos quedan sondeados. Además, la solución factible $DBAC$, para el subconjunto DBA , es mejor que la solución de la iteración 3 ($11 < 12$), de manera que se convierte en la nueva solución actual. Pero ya no quedan subconjuntos restantes para sondear (Figura 2.3), por lo tanto esta nueva solución ($DBAC$) debe ser también la óptima, y el algoritmo se detiene.

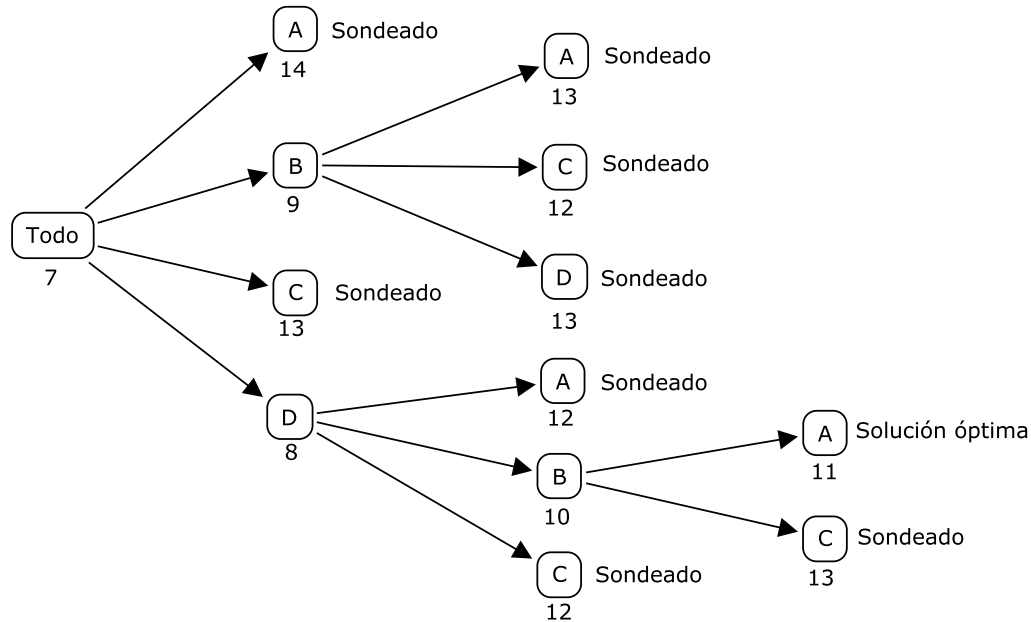


Figura 2.3: Resultados de la cuarta y última iteración.

2.4 Programación estocástica y sus métodos de solución

La estocasticidad o incertidumbre [6] aparece en la mayoría de los sistemas, particularmente en el objeto de estudio de la presente investigación. Puede deberse a la ausencia de datos, a la falta de fiabilidad de los datos acumulados, a errores de medida o al uso de parámetros que representan información futura. La incertidumbre surge principalmente en la demanda y precios futuros.

La programación estocástica es una metodología que acomete este tipo de problemas; ha recibido un considerable impulso teórico y de aplicación en los últimos años. Sin embargo, se encuentra en una etapa con algunos problemas teóricos importantes, aún no resueltos, algunos relevantes se mencionan a continuación:

1. Problemas de estimación de parámetros aleatorios en términos de funciones que se manejen fácilmente.
2. Problemas de replanteamiento de las pruebas de hipótesis en el marco conceptual de la programación estocástica.

3. Problemas dimensionales de computación.

Prékopa [7] definió la programación estocástica como “la resolución de problemas de programación matemática en los que algunos o todos los parámetros son variables aleatorias”.

La programación estocástica ha tenido algunas aplicaciones de tipo empírico. Se distinguen en agricultura, secuenciación de aviones, industria química, teoría de control, finanzas, mercadotecnia, redes, transportes, entre otras.

La formulación de un problema de programación estocástica se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \text{Opt } f(X) \\ & \text{s.a.} \\ & g_i(X) \geq 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \\ & X \in \mathbb{D}^n \end{aligned}$$

donde algunos de los parámetros de las funciones $f(X)$, $g_i(X) \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$ son variables aleatorias, es decir, la función objetivo o alguna (o todas) las restricciones son variables aleatorias. El caso más estudiado es cuando el modelo tiene la forma lineal:

$$\begin{aligned} & \text{máx } Z = cX \\ & \text{s.a.} \\ & A(X) < b \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

las componentes de A , b y c son total o parcialmente aleatorias.

Considerando que las variables del problema son aleatorias, una vez que se resuelve la incertidumbre, es decir, una vez que las variables aleatorias toman un valor fijo, es posible que la solución obtenida sea no factible o que, aún siendo factible, no sea óptima. Así, para cada valor fijo de las variables aleatorias, el problema de programación estocástica se transforma en un problema determinista: el conjunto de soluciones factibles del problema será distinto para cada valor fijo.

Por tanto, en un problema de programación estocástica no existe un vector x que sea óptimo para todas las realizaciones de la variable aleatoria.

Tinter [8] distingue dos tipos básicos de programación estocástica: el pasivo y el activo. En el modelo pasivo se espera a que ocurra el valor de la(s) variable(s) aleatoria(s); entonces se pueden derivar soluciones exactas o *aproximadas*. En el modelo activo, se toman decisiones sobre la variable X *antes* de que ocurran todos los eventos aleatorios; esto se puede hacer considerando un conjunto de posibles realizaciones, tomando valores esperados y penalizando la función objetivo, de manera que se eviten desviaciones no tolerables de los valores esperados.

Un ejemplo de esta última clase es fijar los niveles de producción X_i de n productos antes de conocer los precios r_i como se venderán en el mercado. Dichos precios son variables aleatorias con distribución de probabilidad conocida. Una vez determinados los niveles de producción, el mercado fijará los valores de los precios. Es importante observar que el decisor tiene control sobre las variaciones de decisión X_i y no sobre los parámetros aleatorios r_i .

En el presente estudio, se consiguió ajustar una función de distribución de probabilidad a los datos, por lo tanto, fue un problema de *programación estocástico pasivo*.

Métodos de solución

Kall [9] distingue cuatro planteamientos distintos para resolver problemas que involucran aleatoriedad. A continuación se describen brevemente estos cuatro enfoques. Para ello se considerará el problema de programación estocástica en el que, sin pérdida de generalidad, se ha adoptado como criterio de optimización el de minimizar.

$$\text{mín}f(X)$$

s.a.

$$g_i(X) \leq 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$X \in \mathbb{D}^n$$

Resolución mediante teoría de juegos

Corresponde a situaciones en las que no se conoce exactamente la distribución de probabilidad del vector de parámetros aleatorios del problema, y sólo puede suponerse que su función de distribución, f , pertenece a una cierta clase de funciones de distribución F . Para resolver el problema estocástico se puede utilizar una estrategia propuesta usualmente en teoría de juegos, en concreto en juegos bipersonales de suma cero: elegir el punto de vista más pesimista, escogiendo aquella distribución $f \in F$, para la que el valor esperado del objetivo sea mayor.

Un reciente trabajo que aborda este tipo de problemas es el de Rustem y Howe [10].

Obtención de soluciones eficientes

La base de este enfoque es la definición de un concepto de solución eficiente para el problema de programación estocástica y, en base a este concepto, la obtención del conjunto de soluciones eficientes del problema. Se han definido en la literatura distintos conceptos de *solución eficiente*. Para ello se buscan definiciones que sean coherentes matemáticamente y, además, tengan un significado para el problema que se plantea.

Ben Abdelaziz [11] realiza un análisis exhaustivo de este enfoque y agrupa estos conceptos de solución en dos bloques: *la eficiencia puntual* y *la eficiencia en distribución*.

En el primero de ellos, eficiencia puntual, se encuadran todos los conceptos que se basan en la determinación de las posibles consecuencias de todos los posibles eventos o estados de la naturaleza que puedan darse en el problema y en la búsqueda del subconjunto formado por las soluciones eficientes de este conjunto de posibles resultados.

La eficiencia en distribución se basa en la teoría clásica de la utilidad esperada de von Neumann y Morgenstern. En este caso se supone que la estructura de preferencias del decisor satisface los axiomas de esta teoría, lo que implica que existe una función u , llamada función de utilidad. A partir de esto, el análisis de la eficiencia en distribución se reduce a fijar la función de utilidad del individuo y determinar la

elección que maximiza su nivel de utilidad esperada. Evidentemente, la solución a este problema determinista dependerá del tipo de preferencias del individuo que se materializan en el tipo de función de utilidad del problema. Este enfoque se utiliza frecuentemente en estudios de teoría económica de análisis de elección bajo incertidumbre.

De entre los trabajos más recientes en los que se analiza eficiencia en distribución cabe destacar el de Ben-Talí y Teboulle [12] que analizan la resolución de problemas de programación no lineal con restricciones estocásticas mediante el enfoque de la teoría de la utilidad esperada.

Modelos que penalizan la violación de restricciones

La resolución de problemas de programación estocástica mediante esta técnica conlleva la transformación del problema estocástico en uno determinista denominado *problema determinista equivalente*. Dicha transformación se realiza con base en las características estadísticas del problema estocástico y a las preferencias del decisor. Mediante este enfoque, para obtener el problema determinista equivalente, se penaliza la posible violación del conjunto de restricciones del problema. Dado el problema de programación estocástica:

$$\begin{aligned} & \text{mín} f(X) \\ & \text{s.a.} \\ & g_i(X) \leq 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \\ & X \in \mathbb{D}^n \end{aligned}$$

podemos cuantificar esta penalización mediante la función $Q(X)$, que se define de la siguiente forma:

$$Q(X) = \begin{cases} h(g_1(X), g_2(X), \dots, g_m(X)) & \text{si algún } g_i(X) > 0, i = 0, 1, \dots, m \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Esta función, que penaliza la violación de las restricciones, se interpreta como un costo extra o una pérdida debida a la posible infactibilidad de la solución del pro-

blema, una vez que se han determinado las variables aleatorias del mismo. Después de haber definido la función $Q(X)$, se plantea el siguiente problema:

$$\text{mín } f(X) + Q(X)$$

s.a.

$$X \in \mathbb{D}^n$$

problema estocástico que se transforma en determinista siguiendo alguna regla de decisión. Generalmente, en estos modelos se utiliza el criterio de valor esperado para obtener el determinista equivalente, con lo cual el problema de decisión que hemos de resolver es:

$$\text{mín } \mathbb{E}[f(X) + Q(X)]$$

s.a.

$$X \in \mathbb{D}^n$$

La resolución de estos problemas ha sido ampliamente estudiada hasta ahora. Cabe destacar los trabajos de Kall y Wallace [13] y de Prékopa [7]. En ambos trabajos se estudian las características de estos problemas y los métodos existentes en la literatura para resolverlos.

Programación con restricciones probabilísticas o de azar

Al igual que en el enfoque anterior, estas técnicas transforman el problema estocástico en uno determinista, denominado *problema determinista equivalente*, cuya solución es considerada solución del problema estocástico. Para transformar las restricciones estocásticas en deterministas se fija una probabilidad y se exige que se verifiquen las restricciones estocásticas con esa probabilidad. En cuanto a la función objetivo se suele tomar su valor esperado, si bien existen distintos criterios para transformar el objetivo en una función determinista. Este método es el que se utiliza para resolver el modelo del presente estudio.

La existencia de más de un concepto de solución de un problema de programación

estocástica puede dar lugar a cierta confusión. Kall [9] señala que la elección de un método de resolución u otro depende del tipo de problema que se pretenda resolver y deberá de realizarse con base en las características del problema concreto que se pretende resolver y a las preferencias del decisor. Incluso, se puede considerar la posibilidad de combinar más de un criterio para poder elegir aspectos deseables de la solución al problema, pero, en general, no es posible ordenar estos conceptos.

De todo esto se deduce que la resolución de cualquier problema de programación estocástica lleva implícita la necesidad de elegir un concepto de solución y esta elección debe llevarse a cabo en función de las características del problema real que se desee resolver.

2.5 Demanda de transporte

Considerando que el problema planteado involucra una ruta de transporte, fue necesario conocer la demanda de dicha ruta, para ello fue indispensable algunos conceptos [14] relevantes para llevar a cabo una recolección de datos, realizar el análisis, y finalmente formular un modelo que proporcionó una solución al problema.

2.5.1 Conceptos

1. Oferta de transporte en un horario fijo

Dada una ruta (i, j) , donde i es el origen de la ruta y j el destino, la oferta en un horario fijo se define como el número total n ($n \in \mathbb{R}$) de pasajeros que pueden ser transportados por un vehículo (en este caso, un autobús) sobre dicha ruta, en el periodo requerido. La oferta se determina por la siguiente expresión:

$$O_s = C_u \cdot F_o \cdot I_o$$

donde:

O_s = Oferta de transporte en un horario fijo

C_u = Capacidad unitaria de vehículos

F_o = Frecuencia de operación del transporte

I_o = Nivel de ocupación vehicular (%)

2. Capacidad unitaria de vehículos

Se refiere al número de pasajeros que es posible transportar en cada vehículo.

3. Frecuencia de operación del transporte

Es la periodicidad con la que cada autobús pasa por un punto dado, en un horario fijo.

4. Nivel de ocupación vehicular

Es el porcentaje de ocupación de cada autobús.

Considerando las definiciones anteriores, es claro que no tendría sentido hablar de “oferta” si no tomamos en cuenta la “demanda” (y viceversa), ya que por sí solos, ambos serían indicadores sin valor estadístico. Enseguida se definen algunos conceptos relacionados con la *demanda del transporte*.

1. Demanda de transporte

Se define como el número de pasajeros que desean utilizar un servicio de autobuses en una ruta (i, j) , donde i es el origen de la ruta y j el destino, durante un periodo determinado.

En el marco de la teoría económica, pero en diferente contexto, se requiere que se cumpla la “ley de la oferta y la demanda”:

Oferta de transporte = Demanda de transporte –la cual corresponde a la restricción con parámetros aleatorios del modelo–.

La mayoría de los problemas que presentan los transportes son debidos a las fluctuaciones de horario o estacionales de la propia demanda, es decir, las llamadas “horas pico”, cuestión central que acometió el presente estudio, por ello la demanda fue analizada en un determinado horario.

2. Demanda en un punto

Es la demanda asociada a un lugar de ámbito reducido. Ejemplos de este tipo son: la demanda en una terminal, en un punto de parada intermedio.

3. Demanda a lo largo de un corredor

Es la demanda asociada a una vialidad específica. Este tipo de demanda es el que se analizó en el presente trabajo de tesis.

4. **Variación horaria de la demanda**

Este concepto alude a los cambios que presenta la demanda a lo largo de la jornada. Por ejemplo, la demanda de un transporte específico no es la misma a las 7:00 a.m. que a las 11:00 a.m. En general, la demanda presenta alzas agudas en ciertas horas y bajas pronunciadas en otras, debido a hábitos laborales y sociales de la población. Es muy conocida la noción de “hora pico” que designa al periodo que corresponde a la hora de mayor afluencia de pasaje.

5. **Variación diaria semanal**

De manera similar al caso anterior, la demanda del día no es igual entre semana que en sábado y/o domingo. Incluso, no es igual en lunes que en viernes. Para tratar esta variabilidad es común que se utilice un día que represente a los demás, ó bien, se utiliza el concepto de **demanda media diaria**.

6. **Demanda media diaria**

Es el promedio de la demanda de una semana o un periodo.

7. **Variaciones estacionales**

Éstas obedecen al hecho de que a lo largo de un periodo suceden ciertos eventos que alteran la actividad urbana y repercuten en la operación de los transportes, modificando los patrones de la demanda. Por ejemplo: periodos vacacionales, festividades masivas, religiosas o políticas. Para tratar estas variabilidades habrá que realizar, especialmente para estos días, los ajustes que se requieran en los servicios (a partir de observaciones directas, experiencia de periodos anteriores, etc.).

2.5.2 **Características de la demanda de transporte**

La demanda de servicios del transporte es altamente cualitativa y diferenciada. Existe una amplia gama de demandas específicas de transporte que se diferencian por hora del día, día de la semana, motivo del viaje, tipo de mercancía, importancia de la velocidad y frecuencia, entre otros.

Un servicio de transporte sin los atributos que permitan satisfacer esta demanda

puede ser totalmente inútil. Estas características hacen más difícil analizar y predecir la demanda por servicios de transporte. Es evidente que un buen sistema de transporte amplía las oportunidades para satisfacer dichas necesidades, así como un sistema muy congestionado o mal conectado limita las opciones de movilidad.

La oferta y demanda de transporte tienen elementos dinámicos muy potentes. Una parte importante de la demanda de transporte se concentra especialmente, durante unas pocas horas del día, tal como fue el caso estudiado en la presente tesis. Esta característica de variabilidad de la demanda en el tiempo hace que su análisis y cálculo de previsiones sean complejas y que lo hace interesante investigar. Sin embargo, es posible que un sistema de transporte funcione adecuadamente para la demanda promedio de viajes pero que se colapse durante las horas pico [15].

2.5.3 Características de la oferta de transporte

Un atributo importante de la oferta de transporte es que se trata de un *servicio* y no una mercancía, por lo tanto, no se puede almacenar para ser utilizada cuando exista una demanda mayor. Un servicio de transporte tiene que ser consumido cuándo y dónde se produce, si no pierde su beneficio. Por esta razón, es muy importante estimar la demanda con la mayor precisión posible y entonces ajustar la oferta de servicios de transporte, de esta manera se ahorrarían recursos.

Otra peculiaridad importante de la oferta de transporte es el grado de *congestión* que se alcanza, sobre todo, en áreas urbanas. No obstante, en esta situación se presenta una cuestión de “percepción”, ya que lo que se considera congestión excesiva en ciudades pequeñas, en ciudades grandes se consideraría normal. Esta saturación surge cuando la intensidad de la demanda se aproxima a la capacidad de la instalación (calle, carretera, estación, etc.) y el tiempo requerido para utilizarla sobrepasa muy por encima la media establecida bajo condiciones de baja demanda [15].

2.5.4 Equilibrio entre la oferta y la demanda

En términos generales, dado un sistema de transporte con una cierta capacidad de operación, la función de la planificación del transporte es asegurar la satisfacción

de una cierta demanda D de movimiento de personas y mercancías con diferentes motivos de viaje, en distintos momentos del día, semana, mes y año.

Como en el caso de la mayoría de los bienes y servicios, se espera que el nivel de demanda D dependa del nivel de servicio ofrecido por el sistema de transporte y también de la distribución de las actividades. Sin embargo, al variar el nivel de servicio en el espacio y en el tiempo, el sistema de actividades probablemente cambiará, determinando dos conjuntos diferentes de puntos de equilibrio: a corto y a largo plazo. El objetivo de la planificación del transporte es prever y gestionar la evolución en el tiempo de estos puntos de equilibrio de forma que se maximice el bienestar social. Algunas relaciones causa-efecto muy simples se pueden representar gráficamente para ayudar a comprender la naturaleza de algunos problemas de transporte. Un ejemplo típico es el círculo vicioso auto/transporte que se muestra en la siguiente figura [15].

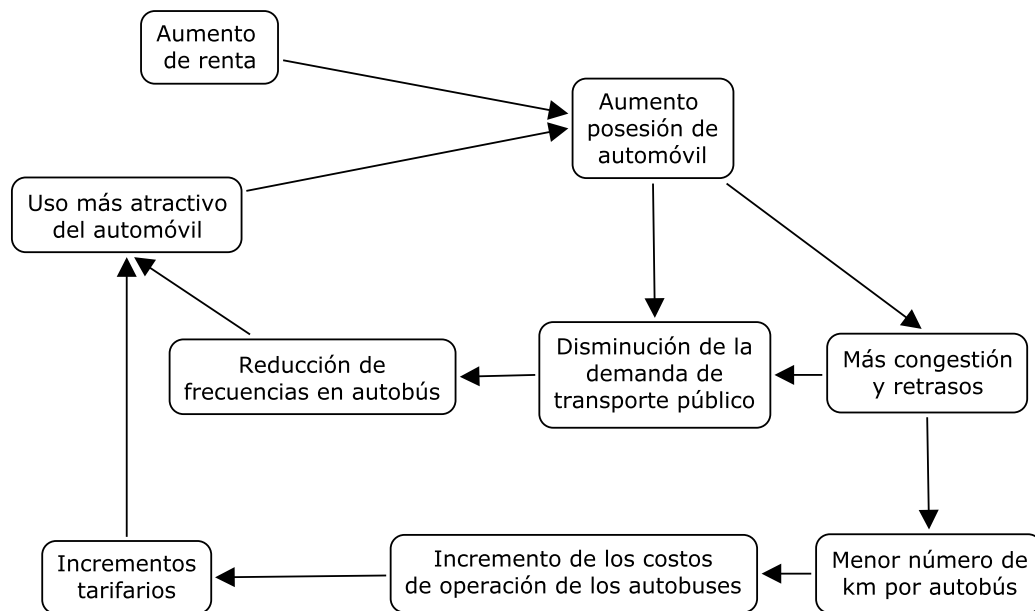


Figura 2.4: Círculo vicioso auto/transporte.

2.6 Métodos para el pronóstico de la demanda de transporte

Hoy en día, existen diversas técnicas y modelos para estimar la demanda del transporte, como son: *los modelos de tendencia, las estimaciones econométricas de modelos de regresión múltiple, la programación lineal, las técnicas de simulación con la matriz insumo producto, y los modelos secuenciales o de las cuatro fases*, entre otros. A continuación, se hace una breve descripción de los modelos más usados [16]. Se dispone de algunas herramientas analíticas para el tratamiento de los diversos aspectos que engloban los sistemas de transporte, particularmente la demanda.

2.6.1 Modelos de tendencia

La principal característica de estos modelos de estimación de la demanda radica en que asocian la variación de la demanda al paso del tiempo. Así, se asume que los factores que afectan la demanda de transporte van a mantener en el futuro la tendencia o comportamiento pasado.

Entre los modelos de estimación de la demanda más comunes se encuentran los siguientes:

- * Tendencia lineal
- * Tendencia geométrica
- * Tendencia exponencial
- * Tendencia exponencial modificada
- * Curva de Goempertz
- * Curva logística

Tendencia lineal

Se asume un comportamiento lineal, el cual se representa mediante la expresión:

$$y = mt + b$$

donde:

y = demanda de transporte (en este caso pasajeros)

t = tiempo (año, periodo, etc.)

m, b = parámetros a obtener por el método de mínimos cuadrados

Cabe mencionar que la aplicación de este modelo esta sujeta a que el fenómeno de crecimiento realmente sea lineal, es decir, a una tasa de crecimiento constante y que tal modelo se asuma como un primer acercamiento al estudio de la tendencia de la demanda. Este punto es de gran importancia puesto que el paso del tiempo no es realmente lo que explica el comportamiento de la demanda de transporte sino el hecho de que, con el paso del tiempo, se presentan otros fenómenos, por ejemplo: mayor cantidad de personas, menores niveles de ingreso, incremento de la urbanización, etcétera, que están causalmente relacionados con la demanda de transporte.

Tendencia geométrica

Sigue un patrón de crecimiento a una tasa constante (bajo un esquema similar a los modelos de crecimiento con interés compuesto). Este se expresa mediante la expresión:

$$y_f = y_p(1 + r)^t$$

donde:

y_f = demanda futura

y_p = demanda presente

r = tasa de crecimiento por periodo, año, etc.

t = tiempo (año, periodo, etc.)

Tendencia exponencial

Estos modelos muestran un crecimiento aún más notorio que los modelos de tendencia geométrica. Están representados por:

$$y = a(bt)$$

o bien, aplicando logaritmos:

$$\log y = \log a + t \log b$$

donde:

y = demanda de transporte (en este caso pasajeros)

t = tiempo (año, periodo, etc.)

a y b = parámetros a determinar por regresión lineal simple

Este modelo se considera más realista, ya que en la mayoría de los casos en que se analiza la demanda de transporte, se caracteriza por tener un gran dinamismo que involucra un crecimiento no constante —comportamiento típico de la demanda—.

Tendencia exponencial modificada

En este modelo se asume que la demanda tiende a crecer hasta un límite predeterminado, el cual podría considerarse un nivel de saturación o de capacidad.

Se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$y = K + a(bt)$$

donde:

K = es el límite de crecimiento; las demás variables se definen como en los casos anteriores.

La principal diferencia entre este modelo y el anterior radica en el factor K , que reconoce un límite al crecimiento de la demanda. Este puede ser el caso del crecimiento de flujo vehicular que pasa por una arteria determinada y que no podría tener un

valor superior a la capacidad de dicha vía. Para el tratamiento de estos modelos se requieren programas para funciones no-lineales.

Curva de Goempertz

En este caso se tiene un comportamiento en forma de “S” inclinada hacia delante. Este fenómeno implica un crecimiento muy lento al principio, una fase de gran crecimiento, una fase de disminución de la tasa de crecimiento y una fase de saturación y mucho menor tasa de crecimiento. La ecuación que los representa es:

$$\log y = \log K + (bt) \log a$$

donde las variables se definen igual que en el caso anterior.

Curva logística

Este es un modelo con un comportamiento similar al anterior, pero más “suavizado” y con una estructura matemática radicalmente diferente, como se puede observar a continuación:

$$y = \frac{K}{1 + be^{at}}$$

donde e es la base de los logaritmos neperianos, y los demás elementos se definen como en los casos anteriores.

2.6.2 Regresión múltiple

La principal limitante de los modelos tendenciales como los que se describieron en la sección anterior, radica en que casi toda —o toda— la capacidad explicativa del modelo depende del paso del tiempo.

Sin embargo, existen situaciones en las cuales se requiere disponer de modelos que consideren el efecto de otras variables vinculadas con el **comportamiento de la demanda de transporte**.

En estos casos, se pueden usar las técnicas econométricas de regresión múltiple para tratar de estimar funciones lineales o no lineales de varias variables.

Comúnmente, la variable dependiente es la unidad de demanda que se desea estimar; y se pueden emplear diversas variables independientes o explicativas. Por ejemplo, si se desea conocer la demanda total del sector transporte medida en el valor bruto de la producción, se podrían usar algunas variables como son el producto interno bruto, la población, la tarifa promedio, etc.

2.6.3 Programación lineal

Este método ayuda a resolver el problema conocido como “*problema de transporte*”.

Se formula de la siguiente manera:

Sean: m un conjunto de puntos origen y n un conjunto de puntos destino, como se muestra en la Figura 2.5.

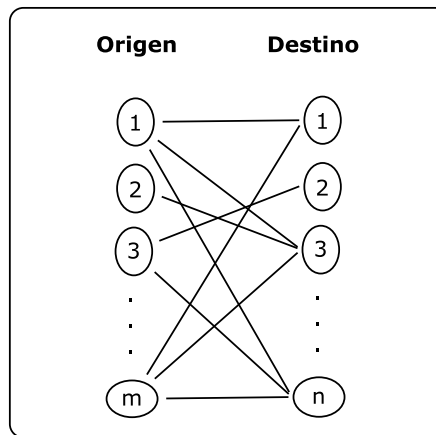


Figura 2.5: Esquema del Problema de Transporte.

Cada origen tiene asociado una oferta a_i y cada destino, una demanda d_j ; se tiene un costo unitario de transporte c_{ij} por cada unidad de flujo –personas, objetos, ect.– enviada desde un punto de oferta i a un punto de demanda j . Consideremos:

$$x_{ij} = \text{número de unidades enviadas desde el origen } i \text{ al destino } j.$$

Entonces, la formulación general del problema de transporte queda determinado por:

$$\text{mín } z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad \text{minimiza la función de costos}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \geq a_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad \text{restricciones de demanda}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq d_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad \text{restricciones de oferta}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

El modelo puede interpretarse como el problema de minimizar los costos totales por desplazar ciertas cantidades de carga o pasajeros de los orígenes a los destinos deseados, pero debe satisfacer todas las demandas a_i y las disponibilidades d_j .

La no-negatividad implica que sólo se aceptan sólo envíos y no regresos o devoluciones.

La solución al problema anterior consiste en encontrar el conjunto de flujos factibles y óptimos, esto es, las x_{ij} que minimizan el costo satisfaciendo todas las restricciones.

CAPÍTULO 3

Metodología

En el presente apartado se describen las fases importantes para alcanzar los objetivos planteados. Considerando que el propósito de la investigación es optimizar el número de PumaBuses de la ruta 9, un punto importante para lograrlo fue calcular la demanda de dicha ruta, cuyo comportamiento es aleatorio. Para ello se requirió recolectar información que fue fundamental para construir un modelo estocástico. El problema que abordó el estudio pertenece al área de transporte, así los datos relevantes tienen características similares a los de transporte, como son: número de autobuses destinados a la ruta 9, tiempo promedio de recorrido, horario en el que se realizó el estudio y la demanda de la ruta en dicho horario. El siguiente esquema muestra la metodología que se siguió y, las secciones siguientes describen cada etapa.

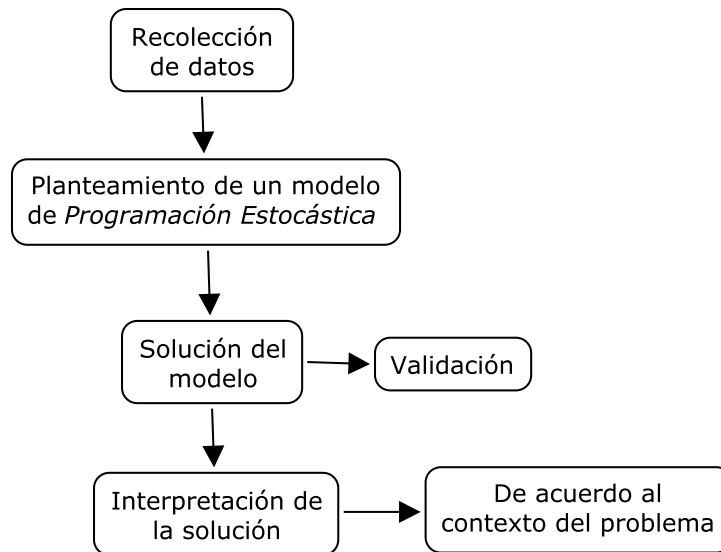


Figura 3.1: Metodología.

3.1 Recolección de datos

Una parte importante en la realización de un estudio, como el que se abordó en el presente trabajo, es la carencia de información. Hasta hace algunos años, el principal problema era que no existía información concentrada en bases de datos, por lo que había que diseñar estrategias para su obtención, y sobre todo, ser suficientemente creativos para buscar fuentes alternas para su recolección. Un fracaso común en los estudios que involucran la etapa de acopio de datos, se debe a que muchas veces se extraen más datos de los necesarios. Por ello, algunas preguntas que pueden ayudar a no caer en el error antes mencionado son [17]:

1. ¿Qué datos son necesarios?
2. ¿Cómo se obtendrán esos datos?
3. ¿Cuánto tiempo tomará la realización del acopio de datos?
4. ¿Cuál es la estrategia más adecuada para la recopilación de datos?

La recolección mencionada sirve para especificar los parámetros del modelo y las *distribuciones de probabilidad* necesarias para el análisis del modelo.

El enfoque de recolección de datos más apropiado para una situación dada está fuertemente influenciada por las limitaciones prácticas: duración del estudio, horizonte del estudio, límites geográficos, recursos dedicados al estudio [16].

Al enfrentar el problema una primera dificultad que se presentó fue que no se disponía de información que permitiera el tratamiento cuantitativo del problema, entonces fue necesario llevar a cabo la *recolección de datos en campo*. Es decir, los datos fueron recabados manualmente, con ayuda de un cronómetro y un contador. A continuación se describe con más detalle la recolección de información de interés correspondiente a la ruta 9: número de autobuses, tiempo de recorrido, tiempo de llegada entre cada autobús y demanda.

3.1.1 Número de autobuses

El número de autobuses fue proporcionado por el personal que labora en la Dirección General de Servicios Generales (DGSG) en el Módulo de Control que se encuentra ubicado en la estación “Metrobús Universidad”; a saber, la ruta 9 cuenta con 4 autobuses, de los cuales al menos 2 se encuentran siempre en circulación, y a lo más 3.

La DGSG aceptó que no disponen de una base de datos que almacenará el resto de los datos requeridos para la investigación: horas pico, demanda de las rutas, tiempo de recorrido del circuito, tiempo de llegada entre cada autobús.

3.1.2 Horario de interés

¿Por qué el estudio abarca el horario de 13:00 a 14:30 horas?

Considerando que no se contaba con información sobre la demanda de la ruta 9 y por lo tanto no se tenía conocimiento de algún horario en el que la afluencia fuera mayor, fue necesario observar el comportamiento de esta ruta en diferentes horarios y distintas estaciones, también se preguntó a los conductores de la ruta 9 en qué horario se presentaba la mayor demanda, la mayoría respondió que los horarios de mayor demanda eran: de 7:00 a 8:30 y de 12:30 a 14:30. Datos que fueron verificados por las observaciones realizadas.

Se observó que el rango del segundo horario es mayor, y esto se explica porque corresponde a un horario tanto de entrada como de salida de estudiantes y profesores para realizar sus labores. Asimismo, por tratarse de un horario más extenso, el segundo (de 13:00 a 14:30 horas) fue el que se eligió para llevar a cabo el estudio.

Es importante señalar que la ruta 9 recorre la mayoría de las facultades (10 de ellas), además de que uno de sus principales puntos de acceso es la estación del Metrobús Universidad, el cual es otro medio de transporte que utiliza una gran parte de la comunidad universitaria para dirigirse a sus hogares, o bien, para llegar a su centro de estudios. De ahí la justificación e importancia de haber elegido dicho horario y la ruta 9.

3.1.3 Tiempo de recorrido de la ruta 9

Para obtener los tiempos de esta variable, fue necesario recolectar los datos mediante recorridos a bordo de la ruta 9. Los viajes se realizaron en el lapso de 13:00 a 14:30 horas durante 30 días (6 observaciones por cada día de la semana), comenzando siempre en la estación “Metrobús Universidad” y terminando el recorrido en este mismo punto.

Se utilizó un cronómetro para medir el tiempo de recorrido en cada viaje y se consideraron hasta las centésimas de segundo al momento de registrar los tiempos.

3.1.4 Tiempo entre llegadas

En este caso, el acopio de información se realizó en cada una de las 15 estaciones que conforman el circuito de la ruta 9, ésto con el fin de distinguir si había patrones de algún tipo, como retrasos en la llegada debido a semáforos, o a la interrupción en el trayecto por autobuses de otras rutas.

Las mediciones se realizaron durante 30 días y las estaciones fueron elegidas cada día de manera aleatoria, de tal manera que hubo dos mediciones por estación, es decir, cada estación fue objeto de estudio por dos días en el horario de interés.

Para ello se consideraron 10 vueltas en cada parada. Por ejemplo, una vez que un PumaBús se detuvo en una determinada estación, se recolectó el tiempo que tardaba el siguiente PumaBús en pasar por dicha estación, así hasta recolectar 10 tiempos. Los tiempos fueron medidos con ayuda de un cronómetro y se tomaron en cuenta hasta centésimas de segundo.

3.1.5 Demanda de la ruta 9

Al igual que para los parámetros anteriores, los datos relacionados con la demanda requirieron para su acopio un mes. Fue necesario llevar a cabo el conteo a mano con ayuda de un contador. La información recolectada fue: personas que descienden del autobús, personas que abordan y personas que no logran abordar, todo ello en el transcurso de las 13:00 a las 14:30 horas.

3.2 Validación de información

La información recolectada fue procesada utilizando ExcelTM, no obstante, debido a que la Dirección General de Servicios Generales, encargada de la gestión del Sistema de Transporte Interno PumaBús, no cuenta con una base de datos relacionada con la demanda, tiempo de recorrido, tiempo de espera de los usuarios, entre otros datos, no era posible validar los datos observados en el estudio comparándolos con información histórica, como es lo usual. Sin embargo, esta etapa del modelo fue realizada utilizando como referencia los resultados de estudios de demanda que se llevaron a cabo antes de la implementación de la ruta 9 por la Consultoría *Cal y Mayor y Asociados* [18], a principios del año 2008.

Por otro lado, el ajuste de datos a las distribuciones de probabilidad se llevó a cabo mediante el uso del software EasyFitTM.

3.3 Modelo

Previo a la realización del modelo matemático, se llevó a cabo un análisis de la información recabada.

Primero, se ajustaron los siguiente parámetros a una función de distribución con el fin de entender mejor el comportamiento de los datos:

1. Tiempo de recorrido
2. Tiempo entre llegadas

Luego se estudiaron los datos relacionados con la demanda de la ruta 9. Con base en esta información se formuló un modelo matemático de programación estocástica, en el cual sus restricciones tienen un carácter aleatorio.

CAPÍTULO 4

Modelo

En este Capítulo se presentan tanto la información que fue indispensable para construir el modelo de programación estocástica, particularmente para calcular la demanda, así como el modelo.

Se analizaron los datos correspondientes al tiempo de recorrido de los autobuses de la ruta 9, el tiempo entre llegadas de los autobuses de la misma ruta y su demanda.

4.1 Análisis de datos

Para el análisis de los datos fue necesario hacer uso tanto del software EasyFit™ como de Microsoft Excel™, el primero fue utilizado para realizar el ajuste de las curvas de distribución de probabilidad, mientras que el segundo para la organización de la información y cálculos como media, varianza, entre otros. En este apartado se hace el análisis de los datos que fueron considerados para formular el modelo matemático.

4.1.1 Número de autobuses

La ruta 9 del sistema PumaBús cuenta con 4 autobuses, de los cuales 2 ó 3 siempre se encuentran en circulación, dejando uno o dos autobuses fuera de servicio, ya sea para “descanso”, reparación, ó bien, para cargar gasolina (mientras los otros se encuentran en servicio). Cada autobús tiene una capacidad de 110 pasajeros.

Hay ocasiones en las que más de un autobús se encuentra en reparación, por lo que es necesario tomar autobuses de otras rutas para que presten servicio a la ruta 9.

4.1.2 Tiempo de recorrido de la ruta 9

Como se explicó en el capítulo anterior, la recolección de datos correspondiente al tiempo de recorrido se llevó a cabo de manera manual —con ayuda de un cronómetro— durante 30 días y se obtuvieron los siguientes resultados² (en minutos):

Día	Tiempo promedio de recorrido	Tiempo máx. de recorrido	Tiempo mín. de recorrido
Lunes	18:16	19:50	16:20
Martes	21:09	24:21	17:05
Miércoles	19:55	21:13	18:26
Jueves	19:09	22:10	16:33
Viernes	21:45	22:48	20:42

Tabla 4.1: Tiempo de recorrido de la ruta 9 (por día)

La tabla anterior muestra que, sin importar el día en el que se recabaron los datos, no existe una variabilidad considerable en el tiempo de recorrido.

Ahora bien, considerando las 30 observaciones sin tomar en cuenta el día en el que se realizaron, la información se concentra en la siguiente tabla:

N° de obs.	Tiempo promedio de recorrido	Tiempo máx. de recorrido	Tiempo mín. de recorrido	σ en tiempo de recorrido
30	20:09	24:21	16:20	2:13

Tabla 4.2: Tiempo de recorrido de la ruta 9

La tabla anterior indica que el tiempo promedio de recorrido de la ruta 9 es de 20:09 minutos, con una desviación estándar de $\pm 2:13$ minutos, por ejemplo, el tiempo total de recorrido de un PumaBús de la ruta 9 es aproximadamente de 20:09 \pm 2:13 minutos, resultando un tiempo promedio máximo de 22:22 minutos y un tiempo

²Ver Anexo I.

promedio mínimo de 17:56 minutos. Sea X el tiempo de recorrido de la ruta 9, si redondeamos a minutos los resultados anteriores, se tiene que:

$$\bar{X} = 20 \text{ min}$$

$$\sigma(X) = 2 \text{ min}$$

$$X_M = 22 \text{ min}$$

$$X_m = 18 \text{ min}$$

donde X_M representa el tiempo de recorrido máximo y X_m el tiempo de recorrido mínimo.

Considérese el total de los datos recolectados como una variable aleatoria continua X , es decir, se ajusta una función de probabilidad continua a los datos, resultando una *distribución uniforme*³ con parámetros $a = 16.15$ y $b = 23.80$:

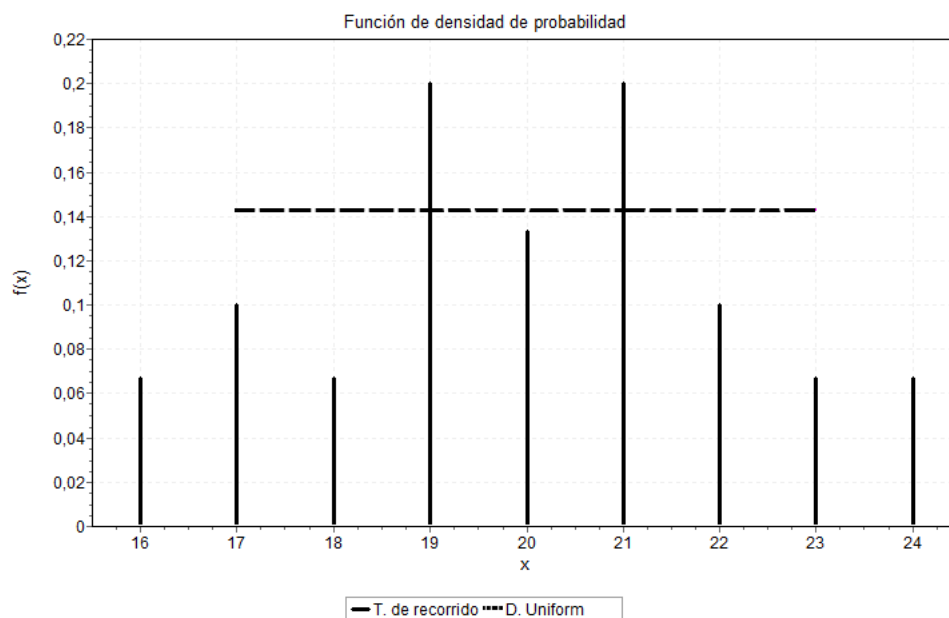


Figura 4.1: Distribución uniforme ajustada a los tiempos de recorrido de la ruta 9.

³Ver Anexo II.

Con los parámetros de la distribución es posible calcular de manera directa la media y la varianza de los datos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{7.65} & \text{para } 16.15 \leq x \leq 23.80 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{X} = (16.15 + 23.80)/2 = 19.98$$

$$\text{var}(X) = (23.80 - 16.15)^2/12 = 4.88$$

$$\Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{4.88} = 2.21$$

En efecto, el tiempo total de recorrido de un PumaBús de la ruta 9 es aproximadamente de 19.98 ± 2.21 minutos, resultados congruentes con los analizados de la tabla anterior, por lo tanto, es correcto afirmar que el recorrido de la ruta 9 (representado con la variable aleatoria X) se ajusta a una distribución uniforme continua con parámetros ($a = 16.15$, $b = 23.80$), además los resultados redondeados son:

$$\bar{X} = 20 \text{ min}$$

$$\sigma(X) = 2 \text{ min}$$

$$X_M = 22 \text{ min}$$

$$X_m = 18 \text{ min}$$

4.1.3 Tiempo entre llegadas

Otro de los principales problemas del sistema PumaBús es la demora de los autobuses; por ejemplo, una vez que un autobús ha partido de cierta estación, es necesario esperar más de 6 minutos para que otro autobús arribe a la misma estación.

En el presente estudio se analizó si ello se debe a una falta de autobuses, o bien a una mala organización en el sistema, o incluso si es posible obtener una mejoría combinando ambos: aumentar el número de autobuses y una mejor organización.

En la siguiente tabla se muestra el promedio de retardo entre cada autobús, por estación, dichos datos fueron recabados de manera manual con ayuda de un cronómetro, los datos crudos se presentan en el Anexo III.

Tiempo promedio entre cada autobús (minutos)			
Estación	Tiempo promedio	Estación	Tiempo promedio
Estadio de Prácticas	08:15	Medicina	07:30
MUCA	07:14	Invernadero	05:35
Rectoría	07:09	Posgrado de Ing.	06:21
Psicología	07:05	Anexo de Ing.	04:44
Filosofía	06:24	Contaduría	04:47
Derecho	04:59	ETS	05:20
Economía	04:37	Metrobús	05:17
Odontología	05:47	Prom. Total	06:04

Tabla 4.3: Tiempo promedio entre cada autobús

La interpretación de la tabla es la siguiente: una vez que un PumaBús de la ruta 9 ha visitado la estación de Medicina tendrán que pasar, en promedio, 7:30 minutos para que otro autobús de la misma ruta visite de nuevo ésta estación. El promedio total de espera, según la tabla, es de aproximadamente 6 minutos.

Sin embargo, si se consideran otros datos relevantes que arrojó la información recolectada, se obtiene la siguiente tabla:

Tiempo de retardo entre cada autobús (minutos)			
Estación	Tiempo promedio	Tiempo máximo	Tiempo mínimo
Estadio de Prácticas	08:15	17:19	01:04
MUCA	07:14	19:52	00:32
Rectoría	07:09	14:15	01:47
Psicología	07:05	17:12	00:30
Filosofía	06:24	14:35	01:08
Derecho	04:59	19:06	00:43
Economía	04:37	12:18	00:14

Odontología	05:47	16:15	00:11
Medicina	07:30	21:35	00:01
Invernadero	05:35	11:22	00:13
Posgrado de Ing.	06:21	24:21	00:02
Anexo de Ing.	04:44	13:07	00:02
Contaduría	04:47	09:23	01:33
ETS	05:20	15:21	00:05
Metrobús	05:17	12:45	00:44
Total	06:04	24:21	00:01

Tabla 4.4: Tiempo de Retardo entre cada Autobús

Obsérvese que en este caso, la *media* no es un buen indicador para la variable “tiempo entre llegadas”, ya que los tiempos extremos (tiempos máximos y mínimos) influyen sobre el valor de la media.

Se esperaría que el tiempo de llegada entre un autobús y otro se distribuyera de manera uniforme continua, es decir, que cada autobus llegara con una frecuencia constante [19]; sin embargo, al momento de ajustar los datos observados, utilizando de nueva cuenta el software EasyFitTM, se obtiene la Figura 4.2, la cual corresponde a una distribución geométrica.

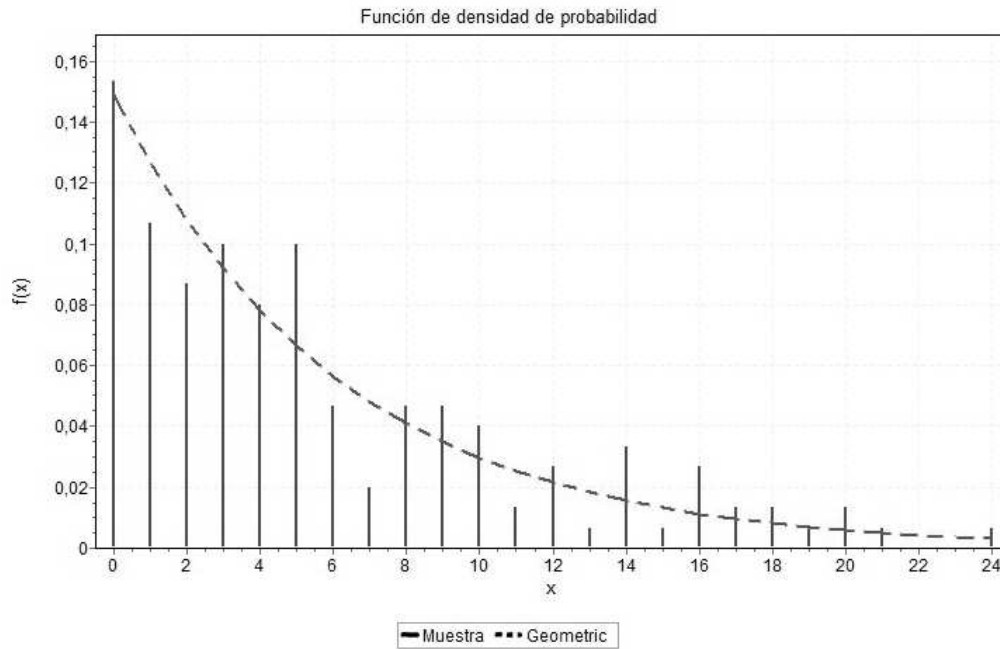


Figura 4.2: Distribución Geométrica ajustada a los tiempos entre llegadas de los autobuses para la ruta 9.

Lo anterior confirma lo que ya antes se ha mencionado: no es posible dar un tiempo promedio de llegada entre un autobús y otro debido a que los tiempos máximos y mínimos influyen en la media.

Para el presente trabajo fue de suma importancia analizar esta variable puesto que tuvo relevancia en el modelo matemático, esto porque al tiempo de satisfacer la demanda se requirió contemplar el tiempo de espera, de manera que éste último no se saliera del límite considerado como aceptable por el usuario (hasta 5 minutos).

4.2 Análisis de la demanda de la ruta 9

Con base en el análisis de los datos mostrado hasta el momento, la problemática existente en el sistema PumaBús es más visible, particularmente en la ruta 9. Por ejemplo, se observan dos problemas principales: primero, el tiempo máximo de espera de los usuarios se prolonga, en algunos casos, por más de 20 minutos, y segundo, la

demanda no se satisface como debiera ser.

Recuérdese que un punto fundamental del estudio fue la obtención de la demanda, para lo cual se recolectaron los datos correspondientes a los pasajeros que abordaban, que descendían y que no lograban abordar –debido al sobrecupo–, todo ello con ayuda de un contador. El resumen de los datos se presenta en la siguiente tabla⁴:

Pasajeros en la ruta 9			
Estación	Ascienden	Descienden	No logran ascender
Metrobús	123	108	23
Estadio de Prácticas	20	74	5
MUCA	38	25	2
Rectoría	27	25	0
Psicología	78	72	2
Filosofía	67	49	5
Derecho	58	27	11
Economía	98	53	7
Odontología	35	155	2
Medicina	17	17	0
Invernadero	17	10	1
Posgrado de Ing.	10	19	1
Anexo de Ing.	75	77	13
Contaduría	106	49	3
ETS	29	9	3
Total	848	769	78

Tabla 4.5: Demanda de la ruta 9 en el horario de 13:00 a 14:30 horas

⁴Ver Anexo IV.

La tabla anterior muestra el total de pasajeros que abordaron, descendieron y que no lograron abordar el Pumabús en cada estación durante la hora y media que abarca el estudio.

Se observa que aproximadamente el 9.2% no logra subir al autobús.

Basados en estos datos, fue posible calcular la demanda aproximada en este horario pico de la siguiente manera:

$$D_T = \sum_{i=1}^{15} s_i + \sum_{i=1}^{15} n_i$$

donde:

D_T = Demanda total para la ruta 9, en el horario de 13:00 a 14:30 horas

i = La i -ésima estación de Pumabús, comenzando por la estación “Metrobús Ciudad Universitaria”

s_i = Pasajeros que abordan en la estación i

n_i = Pasajeros que no logran subir en la estación i

Utilizando la expresión anterior obtuvimos una demanda aproximada para un día promedio y en el horario mencionado:

$$\begin{aligned} D_T &= \sum_{i=1}^{15} s_i + \sum_{i=1}^{15} n_i \\ &= 848 + 78 \\ &= 926 \end{aligned}$$

Esto significa que hay 926 pasajeros que *desean* abordar la ruta 9; sin embargo no todos lo logran.

Con el fin de verificar que este resultado concuerda con la realidad, se realizan las siguientes operaciones:

1. Un día tiene dos horarios pico (tal como se mencionó en la sección 3.1.2), por lo que podemos suponer que ambos tienen una demanda semejante: 926 pasajeros. Es decir, la demanda total en horas pico asciende a 1,852 pasajeros.

2. Durante el resto del día, aproximadamente 12 horas restantes de servicio del Pumabús, se tienen 8 períodos de hora y media. Se sabe que en cada período la demanda es menor a 926 pasajeros además, basados en la experiencia [20], la suma de la demanda en horas pico es mayor o igual al 50 % de la demanda total en el día. En este caso supondremos que la demanda en horas pico contempla el 50 % de la demanda total, ello significa que el 50 % faltante está distribuido en los 8 periodos correspondientes a las horas no pico. Por lo tanto, obtenemos una demanda total durante el día aproximada de $(1,800)(2) = 3,704$ pasajeros.
3. Así, en un día promedio la demanda total es de: $920 + 920 + 1,800 = 3,704$ pasajeros. En una semana, la demanda total aproximada será: $(3,704)(5) = 18,520$, solución que corrobora los datos mencionados en la sección 1.2.

Debido a que el resultado de la demanda en horas pico es aproximado (926 pasajeros), se realizó un análisis de la varianza para los datos recolectados en cada uno de los recorridos completos que los PumaBuses realizan de las 13:00 a las 14:30 horas. Durante el horario de interés, es posible cubrir el circuito aproximadamente 7 veces, es decir, se realizan 7 vueltas completas al circuito que cubre la ruta 9. De la información recolectada se obtuvo la siguiente tabla:

Varianza de la demanda		
N°. de vuelta	Varianza (Var)	Desviación estándar (σ)
1	72.28	± 8.50
2	123.10	± 11.09
3	143.73	± 11.99
4	133.67	± 11.56
5	148.87	± 12.20
6	175.11	± 13.23
7	53.180	± 7.29
Suma		± 75.87

Tabla 4.6: Varianza de la demanda según el recorrido

La tabla anterior muestra la varianza de pasajeros por cada vuelta completa al circuito de la ruta 9. Se observa que no existe una variabilidad considerable entre cada vuelta. Asimismo, muestra la desviación estándar de cada una de ellas, la cual fue utilizada para obtener la desviación estándar de la demanda total (σ_{DT}), siendo ésta la suma de las desviaciones estándar de cada vuelta.

$$\begin{aligned}\sigma_{DT} &= \sum_{i=1}^7 \sigma_i \\ &= \pm 75.87 \\ \Rightarrow \sigma_{DT} &= \pm \frac{75.87}{926} \\ &= \pm 0.08\end{aligned}$$

Por lo tanto, la desviación estándar de la demanda total es $\sigma_{DT} = 8\%$. Con este último resultado se obtuvo una de las restricciones del modelo, que a continuación se enuncia y que más adelante se presenta en lenguaje matemático:

“La demanda de la ruta 9 se distribuye de manera uniforme continua con parámetros ($a = 850, b = 1002$)”.

4.3 Modelo matemático

Con base en los resultados obtenidos en las secciones anteriores se formuló el siguiente modelo de programación estocástica.

Supuestos:

1. La demanda de la ruta 9 es una variable aleatoria (X) que se distribuye de manera uniforme continua: $X \sim U(850, 1002)$.
2. Los usuarios están dispuestos a esperar el PumaBús entre 3 y 5 minutos.
3. Lo anterior implica que la variable aleatoria que representa el tiempo entre llegadas, Y , tiene una distribución uniforme continua: $Y \sim U(3, 5)$.

4. El tiempo máximo del recorrido completo de la ruta 9 es de 22 minutos. Esto significa que un sólo autobús puede completar hasta 4 veces el circuito.

Variable de decisión

Sea w = número de autobuses necesarios en el horario de 13:00 a 14:30 horas.

Restricciones

Como era de esperarse, los supuestos enumerados anteriormente representan las restricciones del modelo:

$$110(4w) \geq X \quad (4.1)$$

$$\frac{22}{w} \leq Y \quad (4.2)$$

La restricción (4.1) indica que la oferta debe cubrir por completo la demanda, es decir, que el total de pasajeros que pueden ser transportados en el horario de interés por un autobús tiene que estar en el rango de valores que puede tomar la variable aleatoria X correspondiente a la demanda, por ello la restricción es una desigualdad de tipo “mayor que”. La constante 110 es la capacidad de cada autobús [21] y el producto $(4w)$ representa las vueltas completas que un autobús puede dar en el horario de estudio. Así, un sólo autobús tiene la capacidad de transportar a $110(4) = 440$ pasajeros en los 90 minutos que abarca la investigación.

Por otro lado, debido a que en el peor de los casos, un PumaBús puede demorar hasta 22 minutos en recorrer por completo el circuito, entonces este tiempo entre el número de autobuses debe estar comprendido en el tiempo de espera de los usuarios Y (restricción (4.2)). En este caso consideramos que es posible obtener un tiempo menor al que los usuarios están dispuestos a esperar, lo cual incluso sería mejor para los usuarios, por ello dicha restricción involucra una desigualdad de tipo “menor que” en lugar de la igualdad.

Modelo

$$\text{mín } z = w \tag{4.3}$$

s.a.

$$440w \geq X \tag{4.4}$$

$$\frac{22}{w} \leq Y \tag{4.5}$$

$$w \in \mathbb{Z} \tag{4.6}$$

La función objetivo (4.3) es minimizar el número de PumaBuses en el horario de 13:00 a 14:30 horas para la ruta 9, sujeta a una demanda aleatoria X (4.4) y a un tiempo entre llegadas aleatorio Y (4.5). Además, w debe ser una variable entera.

4.4 Solución del modelo

Como puede notarse, las restricciones que involucra el modelo son de tipo probabilísticas o estocásticas. Para resolver este tipo de modelos se han desarrollado técnicas que *transforman* el problema estocástico en uno determinista⁵, denominado **problema determinista equivalente**. Para realizar dicha transformación, se fija una probabilidad y se exige que se verifiquen las restricciones estocásticas con esa probabilidad, es decir, la transformación del objetivo estocástico en determinista se efectúa con base en las propiedades estadísticas del objetivo y depende de las preferencias del decisor.

Existen distintos métodos para llevar a cabo esta transformación. En los primeros trabajos de programación estocástica con restricciones de azar se fijaba como regla el valor esperado de las funciones de distribución, posteriormente se han establecido otros criterios. A continuación se explica el método utilizado para resolver el modelo planteado [22].

⁵Ver Sección 2.6.

Restricciones estocásticas y coeficientes técnicos deterministas.

Supongamos que la i -ésima restricción del problema estocástico es de la forma:

$$a_i x \leq \tilde{b}_i \quad (4.7)$$

con $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Su determinista equivalente mediante el criterio de restricciones probabilísticas separadas, fijando una probabilidad $\alpha_i \in (0, 1)$ para la restricción, es:

$$P(a_i x \leq \tilde{b}_i) \geq \alpha_i \quad (4.8)$$

Puesto que se verifica que:

$$P(a_i x \leq \tilde{b}_i) = 1 - P(\tilde{b}_i \leq a_i x)$$

la restricción estocástica (4.8) es equivalente a:

$$P(\tilde{b}_i \leq a_i x) = F_{\tilde{b}_i}(a_i x) \leq 1 - \alpha_i \quad (4.9)$$

donde $F_{\tilde{b}_i}$ corresponde a la función de distribución de la variable \tilde{b}_i .

Obsérvese que la restricción del problema determinista equivalente depende de las características de la función de distribución de la variable aleatoria \tilde{b}_i , $F_{\tilde{b}_i}$.

Por lo tanto, si la función de distribución de la variable aleatoria \tilde{b}_i es estrictamente creciente, tal como aparece en la Figura 4.3, para determinar la restricción (4.9) basta con determinar el valor η del soporte de distribución de la variable aleatoria \tilde{b}_i tal que $F_{\tilde{b}_i}(\eta) = 1 - \alpha_i$, con lo cual $F_{\tilde{b}_i}^{-1}(1 - \alpha_i) = \eta$ y la restricción probabilística del problema se transforma en:

$$\begin{aligned} P(a_i x \leq \tilde{b}_i) \geq \alpha_i &\Rightarrow F_{\tilde{b}_i}(a_i x) \leq 1 - \alpha_i \\ &\Rightarrow a_i x \leq F_{\tilde{b}_i}^{-1}(1 - \alpha_i) = \eta \end{aligned}$$

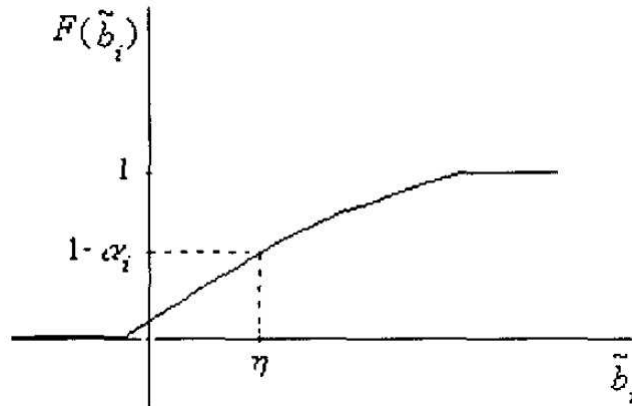


Figura 4.3: Función de distribución estrictamente creciente.

Sin embargo, tal como señala Vajda [23], en general, la función de distribución de la variable aleatoria \tilde{b}_i no tiene por qué ser estrictamente creciente. Consideremos el caso en el que la función de distribución de la variable aleatoria \tilde{b}_i no es estrictamente creciente, sino sólo no decreciente, por ejemplo, la Figura 4.4.

En este caso, cualquier $\eta \in [b_1, b_2]$ es tal que $F_{\tilde{b}_i}(\eta) = 1 - \alpha_i$. Puesto que lo que se desea es que $P(a_i x \leq \tilde{b}_i) \geq \alpha_i$, elegimos en este caso el mayor η tal que $F_{\tilde{b}_i}(\eta) = 1 - \alpha_i$.

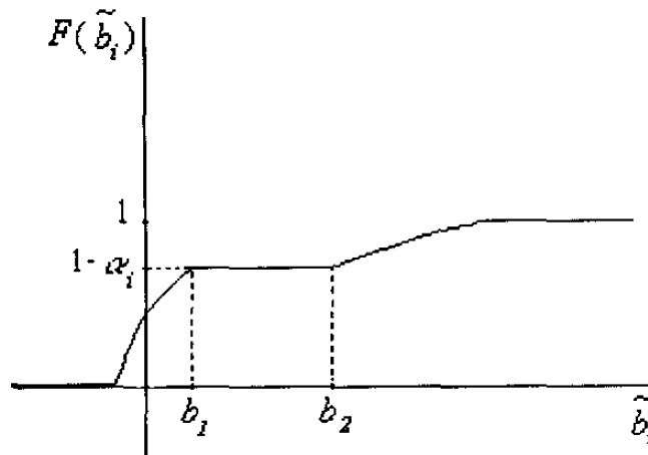


Figura 4.4: Función de distribución no decreciente.

Así, definimos $\hat{F}_{\tilde{b}_i}^{-1}(\theta)$ como el mayor valor η tal que $F_{\tilde{b}_i}(\eta) \leq \theta$, es decir:

$$\hat{F}_{\tilde{b}_i}^{-1}(\theta) = \sup\{\eta \mid F_{\tilde{b}_i}(\eta) \leq \theta\}$$

y la restricción probabilística del problema es ahora:

$$a_i x \leq \hat{F}_{\tilde{b}_i}^{-1}(1 - \alpha_i)$$

puesto que:

$$a_i x \leq \sup\{\eta \mid F_{\tilde{b}_i}(\eta) \leq 1 - \alpha_i\} = \hat{F}_{\tilde{b}_i}^{-1}(1 - \alpha_i)$$

De esta manera, exigiendo:

$$a_i x \leq \hat{F}_{\tilde{b}_i}^{-1}(1 - \alpha_i)$$

se tiene que:

$$a_i x \leq \eta \mid \eta \leq \hat{F}_{\tilde{b}_i}^{-1}(1 - \alpha_i) \text{ y}$$

$$F_{\tilde{b}_i}(\eta) \approx 1 - \alpha_i$$

además la variable aleatoria \tilde{b}_i puede alcanzar el valor de $\hat{F}_{\tilde{b}_i}^{-1}(1 - \alpha_i)$.

Por lo tanto, si la i -ésima restricción del problema es tal que los coeficientes técnicos de la misma son parámetros deterministas y sólo el recurso \tilde{b}_i es una variable aleatoria, la restricción probabilística asociada a la restricción estocástica es lineal, la cual tiene la forma:

$$a_i x \leq \hat{F}_{\tilde{b}_i}^{-1}(1 - \alpha_i)$$

con $\hat{F}_{\tilde{b}_i}^{-1}(1 - \alpha) = \sup\{\eta \mid F_{\tilde{b}_i}(\eta) \leq 1 - \alpha_i\}$ para el caso en el que la función de distribución de la variable aleatoria \tilde{b}_i sea no decreciente, y $\hat{F}_{\tilde{b}_i}^{-1}(1 - \alpha) = F_{\tilde{b}_i}^{-1}(1 - \alpha)$ para el caso en el que la función de distribución de \tilde{b}_i sea estrictamente creciente.

Solución

Reescribiendo las restricciones del modelo que se quiere resolver:

$$440w \geq X \quad (4.10)$$

$$\frac{22}{w} \leq Y \quad (4.11)$$

Tanto X como Y son variables aleatorias que se distribuyen de manera uniforme continua. Primero calculamos F_X^{-1} cuando $a < x < b$, para ello se requiere conocer la función de distribución de probabilidad, que en este caso es una uniforme continua.

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_x(x) &= \frac{x - a}{b - a} \\ \Rightarrow y &= \frac{x - a}{b - a} \end{aligned}$$

Para hallar la función inversa intercambiamos y por x y despejamos a y :

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= \frac{y - a}{b - a} \\ \Rightarrow y - a &= x(b - a) \\ \Rightarrow y &= x(b - a) + a \end{aligned}$$

$$\therefore F_X^{-1}(x) = x(b - a) + a \quad (4.12)$$

A continuación se realizan las transformaciones para cada una de las restricciones estocásticas que se presentan en el modelo (4.3).

1. **Restricción (4.9):**

$$440w \geq X$$

$$X \sim U(850, 1002)$$

La restricción estocástica correspondiente, para una probabilidad α_1 es:

$$P(440w \geq X) = P(X \leq 440w) = F_X(440w) \leq 1 - \alpha_1$$

Se fija $\alpha_1 = 0.15$, lo cual indica que con una probabilidad de 0.85 la restricción (4.10) se cumple, o dicho de otra manera, existe una probabilidad de $\alpha_1 = 0.15$ de que la restricción (4.10) no se cumpla. Entonces:

$$F_X^{-1}(1 - \alpha_1) = F_X^{-1}(0.85)$$

Utilizando (4.12):

$$F_X^{-1}(0.85) = (0.85)(1002 - 850) + 850 = 979.2$$

con lo cual la restricción probabilística (4.10) es equivalente a:

$$440w \geq 979.2$$

2. **Restricción (4.11):**

$$\frac{22}{w} \leq Y$$

$$Y \sim U(3, 5)$$

La restricción estocástica correspondiente, para una probabilidad α_2 es:

$$P\left(\frac{22}{w} \leq Y\right) \geq \alpha_2$$

que se puede expresar también como:

$$P\left(Y \leq \frac{22}{w}\right) = F_Y\left(\frac{22}{w}\right) \leq 1 - \alpha_2$$

Se fija $\alpha_2 = 0.85$, lo cual indica que con una probabilidad de 0.85 la restricción (4.10) se cumple. Entonces:

$$F_Y^{-1}(1 - \alpha_2) = F_Y^{-1}(0.15)$$

Utilizando (4.12):

$$F_Y^{-1}(0.15) = (0.15)(5 - 3) + 3 = 3.3$$

por lo tanto, la restricción probabilística (4.11) es equivalente a:

$$\begin{aligned}\frac{22}{w} &\leq 3.3 \\ \Rightarrow 3.3w &\geq 22\end{aligned}$$

En efecto, hemos transformado las restricciones estocásticas en restricciones lineales. Así, el modelo (4.3) queda escrito de la siguiente manera:

$$\text{mín } z = w \tag{4.13}$$

s.a.

$$440w \geq 979.2$$

$$3.3w \geq 22$$

$$w \in \mathbb{Z}$$

Ahora el modelo (4.13) es lineal y puede resolverse con algún software. En este caso se utilizó el software *Lindo*, obteniendo la solución: $w = 7$

Obsérvese que en el modelo (4.3) fue posible sustituir las restricciones probabilísticas por las *medias* correspondientes a cada variable aleatoria, logrando el siguiente modelo determinista:

$$\text{mín } z = w \quad (4.14)$$

s.a.

$$440w \geq 926$$

$$4w \geq 22$$

$$w \in \mathbb{Z}$$

De nuevo, empleando el software *Lindo* resulta la solución óptima: $w = 6$.

4.5 Resultados

En la Sección anterior se dio solución al modelo utilizando dos métodos que consisten en la transformación del problema estocástico a uno determinista:

1. *Las restricciones estocásticas se cumplen con probabilidad a priori.*

En efecto, en el apartado anterior bajo este criterio se *exige* que, con una determinada probabilidad, se verifiquen las restricciones estocásticas. La solución obtenida utilizando éste método fue: $w = 7$. Significa que, si queremos que las restricciones se cumplan con una probabilidad de 0.85, o bien, con una certeza del 85 %, entonces será necesario tener disponibles 7 autobuses para recorre el circuito de la ruta 9 en el horario de 13:00 a 14:30 horas, con un intervalo de salidas de aproximadamente 3.3 minutos y sobre todo se garantiza cubrir la demanda con una probabilidad de 0.85.

2. *Utilización del valor esperado.*

También es posible transformar el modelo estocástico a un modelo lineal sustituyendo las variables aleatorias por su valor esperado. Empleando este método la solución fue: $w = 6$. Este resultado supone una espera de los usuarios de 4 minutos, es decir, las salidas entre cada autobús debe ser cada 4 minutos, asimismo, con 6 PumaBuses se asegura satisfacer una demanda de 926 pasajeros.

Nótese que con el primer método resulta una espera menor de los usuarios (40 segundos menos), además de satisfacer una demanda de 53 pasajeros más que con el segundo modelo. Sin embargo, este primer criterio arroja como resultado añadir un autobús más, lo que implica un mayor costo operativo.

Como la segunda solución resulta factible, pues cumple con las restricciones del modelo, es posible afirmar que ésta es mejor que la primera al considerar un autobús menos y cumplir con el tiempo de espera de los usuarios y la demanda de la ruta 9 en dicho horario. Por lo tanto, la solución a elegir es la ocupación de 6 autobuses en el horario de 13:00 a 14:30 horas para la ruta 9 del sistema PumaBús.

Conclusiones

El problema planteado en el estudio se resolvió mediante el diseño de un modelo de programación estocástica, el cual fue transformado en dos modelos deterministas. Para encontrar su solución se utilizaron dos métodos, a saber, (1) fijando una probabilidad a cada una de las variables aleatorias y (2) utilizando el valor esperado de las variables aleatorias. Así, las soluciones encontradas fueron $w = 7$ y $w = 6$, respectivamente.

Los dos resultados anteriores indican una coherencia con el problema modelado, por ejemplo, con el primer modelo resulta una espera menor por parte de los usuarios (40 segundos menos), además satisface una demanda de 53 pasajeros que con el segundo modelo. Sin embargo, éste implica añadir un autobús adicional, lo que significa un mayor costo. Por lo tanto, se recomienda elegir la solución del segundo modelo, el cual arroja como resultado utilizar 6 autobuses en el horario de 13:00 a 14:30 horas para la ruta 9. Es importante señalar que actualmente la ruta 9 opera con 2 o 3 unidades en horas pico, este número representa la mitad de autobuses que son necesarios para cubrir la demanda y el tiempo de espera requerido por los usuarios. En este caso, es conveniente echar mano de autobuses de otras rutas que no tengan una demanda alta —por ejemplo, la ruta 11— y asignarlos a la ruta 9 en este horario.

Por otro lado, la presente investigación mostró las complicaciones que conlleva diseñar modelos estocásticos, por ejemplo:

1. Obtener las distribuciones de cada variable aleatoria, y que en el mejor de los casos, éstas sean “manejables”.
2. Transformar cada una de las restricciones estocásticas en una lineal.
3. Resolver el modelo de manera que permanezca la factibilidad. En caso de que en esta transformación deje de ser factible, será necesario volver a modificar las restricciones pero con una probabilidad de cumplimiento menor. Esto implica

que la variable aleatoria toma valores cada vez más próximos a la cota inferior del rango de su distribución de probabilidad; sin embargo, con ello el modelo resulta menos eficiente.

El modelo desarrollado en este trabajo aparentemente resultó sencillo, debido a la forma simple en su formulación —ya que sólo cuenta con una variable de decisión y 2 restricciones—; sin embargo, construirlo no fue una cuestión fácil, por ejemplo, en el tratamiento de las restricciones estocásticas se presentó la dificultad de tener que transformar el modelo estocástico en un modelo de carácter lineal, que permitió resolver el problema de origen. Este paso no fue un asunto trivial.

Cabe resaltar que la metodología desarrollada para acometer el problema de la ruta 9, centralmente el punto de la demanda, puede extenderse para estudiar otras rutas, y de esta manera adquirir información y/o conocimiento sobre el funcionamiento del Sistema de Transporte Interno PumaBús como un todo. Es decir, el modelo propuesto se puede emplear para estudiar la problemática en otras rutas del sistema —tanto en horas pico como en las que no lo son— con el fin de obtener el número de autobuses óptimo para cada ruta que cumpla con la demanda y el tiempo de espera. Finalmente, para un futuro estudio se sugiere:

Considerar el presente modelo como base para resolver problemas de asignación de autobuses; utilizar los resultados para diseñar escenarios de simulación. Estos ayudarían a conseguir soluciones más robustas. Extrapolar los resultados obtenidos para otras rutas que presenten tanto una demanda como un tiempo de recorrido próximos al de la ruta 9 —para ello se requiere un análisis tanto de la demanda de cada ruta como del tiempo aproximado de recorrido—. Para aquellas rutas cuya demanda no sea aproximada a la de la ruta 9, es suficiente sustituir la restricción correspondiente a la demanda en la ecuación (4.4), dejando intacta la ecuación (4.5) siempre y cuando el tiempo de recorrido sea cercano, de no ser así, se pueden sustituir ambas ecuaciones y obtener un modelo adecuado para la ruta en cuestión. Una vez planteados los modelos para cada ruta del sistema PumaBús, es posible resolverlos en un tiempo breve, siguiendo alguno de los dos métodos utilizados en el presente trabajo.

Bibliografía

- [1] LOPEZ, David. *Híper rutas más cortas con respecto del tiempo entre las instalaciones dentro de Ciudad Universitaria: un modelo de transporte multimodal*. Tesis Maestría. Posgrado de Ingeniería, UNAM, 2010. 138p.
- [2] BIRGE, John; LOUVEAUX, F. *Introduction to Stochastic Programming*. Nueva York: Ed. Springer, 1997. pp. 3-43.
- [3] MENDEZ, I.; NAMIHIRA, D. et al. *El Protocolo de Investigación*. México: Ed. Trillas, 2007. pp. 189-200.
- [4] GARCÍA ÁLVAREZ, M.A. *Introducción a la Teoría de la Probabilidad, Vol. 1*. México. Departamento de Matemáticas, UNAM, 2003.
- [5] HILLIER; LIBERMAN. *Introducción a la Investigación de Operaciones*. México: Ed. McGraw-Hill, 1986.
- [6] PRAWDA WITENBERG, Juan. *Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones, Vol. 2 Modelos Estocásticos*. México: Ed. Limusa, 2000. pp. 316-329, 461-529.
- [7] PRÉKOPA, A. *Stochastic Programming*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [8] TINTNER, G. *Stochastic Linear Programming with Applications to Agricultural Economics*. Washington, 1955. pp. 197-228.
- [9] KALL, P. *Stochastic Programming*. European Journal of Operational Research, Vol. 10, 1982. pp. 125-130.

-
- [10] RUSTEM, B.; HOWE M. *An approach to continuous minimax: The Basic Algorithm*. Society for Computational Economics, 1998.
- [11] BEN ABDELAZIZ, E. (1992). *L'efficacité en Programmation Multi-objectifs Stochastique*. Ph. D. Thesis. Université de Laval. Québec, 1992.
- [12] BEN-TAL, A.; TEBOULLE, M. *Expected Utility, Penalty Functions and Duality in Stochastic Nonlinear Programming*. Management Science, 32, 11, 1986. pp. 1445-1466.
- [13] KALL, P.; WALLACE, S. *Stochastic Programming*. John Wiley and Sons. Chichester. 1994.
- [14] FLORES DE LA MOTA, Idalia. *Métodos Cuantitativos para Determinar la Oferta y Demanda del Transporte*. México: SEDESOL, 2001.
- [15] ORTUZAR, J.; WILLUMSEN, L. *Modelos de Transporte*. España: Universidad de Cantabria, 2008. pp. 29-48.
- [16] ISLAR, V.; RIVERA, C.; TORRES, G. *Estudio de la Demanda de Transporte*. México: SCT, IMT, 2002. Publicación Técnica No. 213.
- [17] FLORES DE LA MOTA, I.; ELIZONDO, M. *Apuntes de Simulación*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2006. p. 25.
- [18] Boletín UNAM-DGCS-088 Ciudad Universitaria, 2008. *Entra en Funcionamiento la Fase dos del PumaBús a partir del 15 de Febrero*. http://www.dgcs.unam.mx/boletin/bdboletin/2008_088.html Consultada en 2011.
- [19] Curso de Estadística, 2007. *Modelos de Distribuciones Continuos*. <http://www.eui.upm.es/~rafami/Estadistica/Material/Tema5-Apuntes.pdf> Consultada en 2013.

-
- [20] MÖLLER, R.; BELTRÁN, D.; JIMÉNEZ, F. *La Alternativa para el Transporte Público Colectivo en Colombia*. Colombia, 2004. Universidad del Valle-Programa Editorial.
- [21] CAL MAYOR Y ASOCIADOS. *Sistema PumaBús*. Presentación PowerPoint. Coordinación de Proyectos Especiales. UNAM, 2008.
- [22] MUÑOZ MARTOS, M. *Programación Estocástica: Algunas Aportaciones Teóricas y Computacionales*. Universidad Complutense de Madrid: 1998. pp. 531.
- [23] VAJDA, S. *Probabilistic Programming*. Nueva York, 1972. Academic Press.

Anexo I.

Datos: Tiempo de recorrido

El tiempo de recorrido del circuito que comprende la ruta 9 se contabilizó durante 30 días por medio de un cronómetro, mediante el método de observación. El siguiente tabular muestra el tiempo de recorrido promedio por cada día de observación.

Ruta 9 PumaBús: Tiempo de recorrido (minutos)										
Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tiempo total	24:00	23:15	19:45	20:43	19:00	21:00	17:10	18:03	19:05	21:25
Día	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Tiempo total	22:35	20:33	22:48	20:42	16:22	16:20	19:15	17:05	19:04	21:28
Día	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Tiempo total	18:26	21:13	22:10	16:33	19:25	21:30	19:50	19:33	24:21	21:37

Tabla 1: Observaciones correspondientes al tiempo de recorrido de la ruta 9

De la información anterior se desprende el siguiente cuadro a manera de resumen.

Ruta 9 PumaBús: Tiempo de recorrido (minutos)			
Núm. de días	Promedio	T. Máximo	T. Mínimo
30	20:09	24:21	16:20

Tabla 2: Cuadro de resumen del tiempo de recorrido de la ruta 9

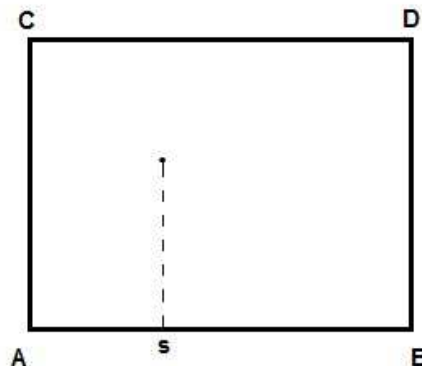
Anexo II.

Distribución uniforme continua

Definición. Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución uniforme continua en el intervalo (a, b) si su función de densidad está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in (a, b) \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

La distribución uniforme continua surge como una extensión al caso continuo del concepto de equiprobabilidad. Thomas Bayes consideró el experimento aleatorio que consiste en lanzar una bola W sobre un rectángulo con base AB y altura AC , de tal manera que existe la misma probabilidad de que la bola W caiga en cualquiera de dos partes iguales del rectángulo [4]. A través del punto en donde cae la bola W , se traza una recta paralela a AC , la cual corta al segmento AB en el punto s . Encontró entonces que la probabilidad de que el punto s caiga entre cualquier par de puntos del segmento AB es igual a la razón de la distancia entre los dos puntos a la longitud del segmento AB . Es decir, mostró que la distribución del punto s en el segmento AB es uniforme.



Su función de distribución está dada por:

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

Sus medidas de tendencia central son:

$$\begin{aligned} \text{media} &= \frac{a+b}{2} \\ \text{mediana} &= \frac{a+b}{2} \\ \text{varianza} &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

Anexo III.

Datos: Tiempo de llegada

La siguiente información corresponde al tiempo de arribo (en minutos) entre cada autobús de la ruta 9 del sistema PumaBús. Los datos fueron recabados mediante el método de observación, durante 30 días.

Indicador	Ruta 9 PumaBús: Tiempo de llegada (minutos)								
	Metrobús	Estadio de Prácticas	MUCA	Rectoría	Psicología	Filosofía	Derecho	Economía	Odontología
Medición 1	03:25	11:19	04:52	14:15	01:29	03:21	00:56	00:14	08:13
Medición 2	06:44	02:53	02:52	04:28	10:28	08:00	00:43	05:49	00:21
Medición 3	04:32	10:39	19:52	07:26	16:10	10:42	19:06	04:57	11:52
Medición 4	05:39	02:26	01:24	10:43	01:39	02:00	02:13	04:46	10:09
Medición 5	00:44	08:10	01:19	01:47	03:33	05:47	02:37	01:35	04:18
Medición 6	08:16	09:17	18:23	07:26	17:12	08:31	04:39	08:57	04:40
Medición 7	04:43	01:04	02:20	09:04	03:06	01:08	06:24	01:20	16:15
Medición 8	01:21	17:19	00:32	03:40	00:44	14:35	03:24	05:42	00:14
Medición 9	04:45	03:01	18:03	06:17	00:30	02:15	04:21	00:34	00:11
Medición 10	12:45	16:24	02:45	06:20	16:02	07:40	05:23	12:18	01:38
Suma	52:54	22:32	12:22	11:26	10:53	03:59	49:46	46:12	57:51
Promedio	05:17	08:15	07:14	07:09	07:05	06:24	04:59	04:37	05:47
Máx	12:45	17:19	19:52	14:15	17:12	14:35	19:06	12:18	16:15
Mín	00:44	01:04	00:32	01:47	00:30	01:08	00:43	00:14	00:11

Indicador	Ruta 9 PumaBús: Tiempo de llegada (minutos)					
	Medicina	Invernadero	Posgrado de Ing.	Anexo de Ing.	Contaduría	ETS
Medición 1	08:35	08:22	05:42	13:07	09:23	00:05
Medición 2	03:38	02:06	20:10	00:36	01:33	12:40
Medición 3	05:16	10:30	00:11	00:03	08:55	02:58
Medición 4	14:08	01:58	00:54	05:11	03:45	02:53
Medición 5	00:01	08:58	24:21	09:28	05:25	00:09
Medición 6	06:18	04:37	00:02	04:56	02:23	15:21
Medición 7	14:21	04:14	01:34	00:02	05:57	02:16
Medición 8	00:50	00:13	05:58	05:42	01:57	00:43
Medición 9	00:17	11:22	00:26	05:44	04:52	01:28
Medición 10	21:35	03:33	04:16	02:31	03:45	14:47
Suma	14:59	55:53	03:34	47:20	47:55	53:20
Promedio	07:30	05:35	06:21	04:44	04:47	05:20
Máx	21:35	11:22	24:21	13:07	09:23	15:21
Mín	00:01	00:13	00:02	00:02	01:33	00:05

Tabla 3: Observaciones correspondientes al tiempo de arribo entre cada autobús de la ruta 9, según la estación

De las tablas anteriores se desprende el siguiente cuadro de resumen.

Estación Ruta 9 PumaBús	Tiempo entre llegada		
	Promedio	Máx	Mín
Metrobús	05:17	12:45	00:44
Estadio de Prácticas	08:15	17:19	01:04
MUCA	07:14	19:52	00:32
Rectoría	07:09	14:15	01:47
Psicología	07:05	17:12	00:30
Filosofía	06:24	14:35	01:08
Derecho	04:59	19:06	00:43
Economía	04:37	12:18	00:14
Odontología	05:47	16:15	00:11
Medicina	07:30	21:35	00:01
Invernadero	05:35	11:22	00:13
Posgrado de Ingeniería	06:21	24:21	00:02
Anexo de Ingeniería	04:44	13:07	00:02
Contaduría	04:47	09:23	01:33
Escuela de Trabajo Social	05:20	15:21	00:05

Tabla 4: Cuadro de resumen del tiempo de arribo entre cada autobús de la ruta 9

El cuadro anterior muestra los tiempos máximos y mínimos entre llegadas de los autobuses a cada estación al momento de la recabación de datos. Asimismo se muestra el promedio del tiempo entre llegadas; sin embargo, este promedio no resulta significativo puesto que los valores máximos y mínimos muestran mucha variabilidad.

Anexo IV.

Datos: Demanda

La siguiente tabla muestra los datos recolectados al contabilizar la demanda, se consideraron aquéllos pasajeros que ascienden y que no lograron ascender al atobús para conformar la demanda total.

Obs.	Estación	Pasajeros		
		Abordan	Descienden	NO abordan
1	Estadio de Prácticas	2	13	0
2	Estadio de Prácticas	3	3	0
3	Estadio de Prácticas	5	14	0
4	Estadio de Prácticas	0	8	0
5	Estadio de Prácticas	3	13	1
6	Estadio de Prácticas	2	8	0
7	Estadio de Prácticas	5	15	4
1	MUCA	10	4	0
2	MUCA	0	5	0
3	MUCA	4	2	0
4	MUCA	7	1	2
5	MUCA	4	1	0
6	MUCA	0	11	0
7	MUCA	13	1	0
1	Rectoría	5	3	0
2	Rectoría	5	5	0
3	Rectoría	1	1	0
4	Rectoría	2	1	0
5	Rectoría	2	4	0
6	Rectoría	5	3	0
7	Rectoría	7	8	0
1	Psicología	3	12	0
2	Psicología	5	3	0
3	Psicología	13	18	2
4	Psicología	5	7	0
5	Psicología	16	7	0
6	Psicología	25	11	0
7	Psicología	11	14	0
1	Filosofía	5	1	0
2	Filosofía	14	10	0
3	Filosofía	9	3	0
4	Filosofía	4	15	0
5	Filosofía	21	4	3
6	Filosofía	5	9	0
7	Filosofía	9	7	2

Tabla 5: Demanda de la ruta 9, según la estación

Obs.	Estación	Pasajeros		
		Abordan	Descienden	NO abordaron
1	Derecho	6	3	0
2	Derecho	14	4	2
3	Derecho	2	3	0
4	Derecho	5	1	1
5	Derecho	14	11	8
6	Derecho	17	3	0
7	Derecho	9	2	0
1	Economía	9	11	0
2	Economía	11	7	1
3	Economía	10	11	0
4	Economía	5	3	0
5	Economía	12	10	6
6	Economía	3	2	0
7	Economía	8	9	0
1	Odontología	2	19	0
2	Odontología	24	30	0
3	Odontología	15	35	2
4	Odontología	6	0	0
5	Odontología	15	22	0
6	Odontología	30	25	0
7	Odontología	6	24	0
1	Medicina	8	0	0
2	Medicina	3	3	0
3	Medicina	7	3	0
4	Medicina	2	2	0
5	Medicina	4	2	0
6	Medicina	5	4	0
7	Medicina	6	3	0
1	Invernadero	10	0	0
2	Invernadero	1	0	0
3	Invernadero	0	0	0
4	Invernadero	1	3	0
5	Invernadero	3	4	0
6	Invernadero	1	3	0
7	Invernadero	1	0	1

Tabla 6: Demanda de la ruta 9, según la estación

Obs.	Estación	Pasajeros		
		Abordan	Descienden	NO abordan
1	Posgrado de Ing.	1	4	0
2	Posgrado de Ing.	2	2	1
3	Posgrado de Ing.	3	0	0
4	Posgrado de Ing.	0	7	0
5	Posgrado de Ing.	2	3	0
6	Posgrado de Ing.	1	2	0
7	Posgrado de Ing.	1	1	0
1	Anexo de Ing.	11	8	0
2	Anexo de Ing.	4	22	2
3	Anexo de Ing.	19	8	3
4	Anexo de Ing.	11	9	0
5	Anexo de Ing.	10	11	6
6	Anexo de Ing.	14	14	2
7	Anexo de Ing.	6	5	0
1	Contaduría	18	8	0
2	Contaduría	23	9	0
3	Contaduría	22	7	2
4	Contaduría	18	6	1
5	Contaduría	9	14	0
6	Contaduría	10	4	0
7	Contaduría	6	1	0
1	ETS	4	2	1
2	ETS	2	1	0
3	ETS	3	1	0
4	ETS	6	2	2
5	ETS	5	1	0
6	ETS	1	2	0
7	ETS	8	0	0
1	Metrobús	14	18	8
2	Metrobús	13	25	0
3	Metrobús	23	2	0
4	Metrobús	23	20	7
5	Metrobús	20	18	3
6	Metrobús	12	15	0
7	Metrobús	18	10	5

Tabla 7: Demanda de la ruta 9, según la estación