



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PROPIEDADES COMBINATORIAS SOBRE ÁRBOLES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
MANUEL ALEJANDRO LARA MARY

MICHAEL HRUSAK
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS MORELIA

MÉXICO, D. F. 6 DE FEBRERO DE 2013.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

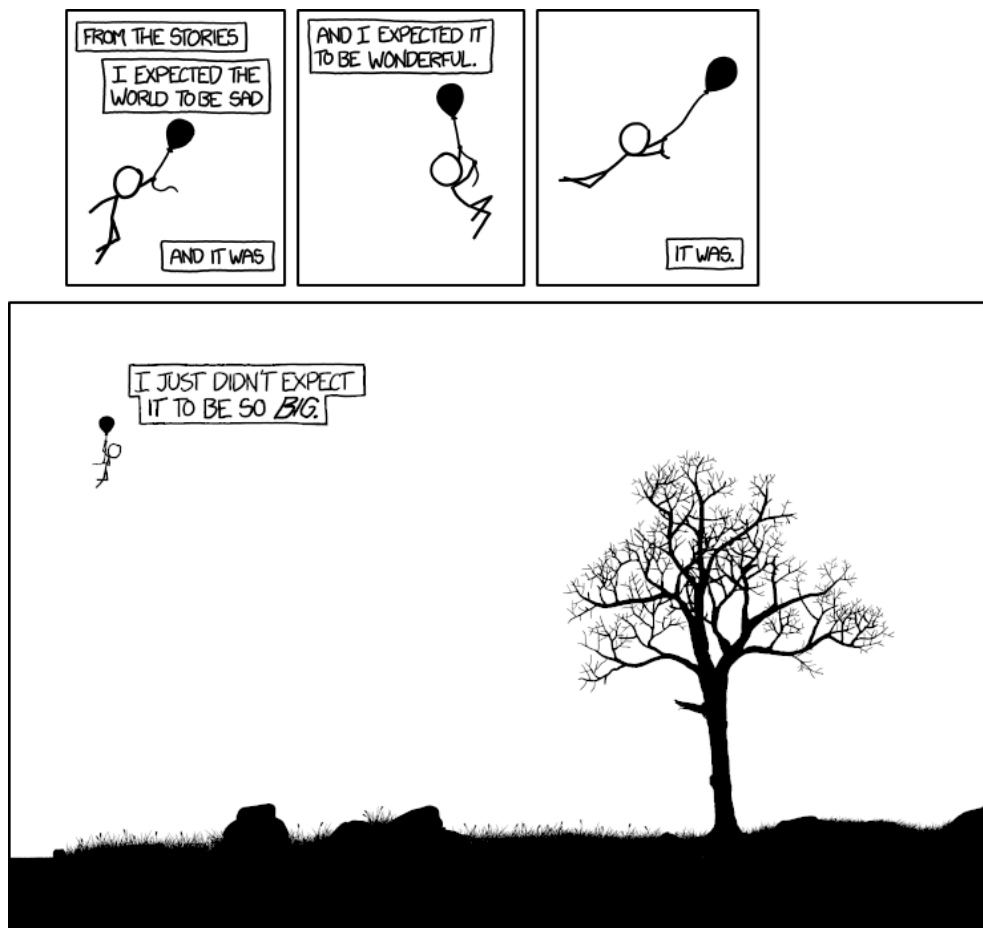
DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi papá y mamá...

A Zitla, por sacarme a bailar tan delicioso baile...



A Rodrigo y Ariet, por mostrarme una forma tan bella y genuina de hacer

Las tiras cómicas que en este trabajo se citan son obra de Randall Munroe y se encuentran bajo la licencia *Creative Commons Attribution-NonCommercial 2.5*. En orden de aparición: Click and Drag (fragmento), Nihilism, Proof, Broomstick, Applied Math, Ultimate Game, Click and Drag (fragmento), Click and Drag (fragmento), Apocalypse. Se pueden consultar en: <http://xkcd.com/>

Índice general

Introducción	ix
1. Preliminares: Un mundo repleto de árboles	1
2. De árboles coloreados y flechas onduladas	19
3. Sigue esa flecha y te topará con una propiedad interesante	29
4. El reino de las pruebas de consistencia	43
5. La prueba final	53
A. Un par de resultados técnicos	63
Bibliografía	65
Índices	65

Introducción

La semilla de esta tesis (es decir, la motivación y la fuente de preguntas que se resuelven aquí) es el artículo de Hrušak, Simon y Zindulka “Weak Partition Properties on Trees”, [4]. En dicho artículo, los autores introducen una noción combinatoria que surge de manera natural al probar una generalización del siguiente famoso teorema de Hurewicz (el cual se puede consultar en [5] o [7]):

Teorema 1. *Sea X un espacio analítico. Entonces es cierto uno y sólo uno de los siguientes enunciados:*

- X es σ -compacto,
- X tiene un subconjunto cerrado homeomorfo al conjunto de los irracionales.

La generalización de este teorema no tiene mayor trascendencia para el trabajo que aquí se desarrollará, pero dada su belleza citémoslo:

Teorema 2. *Sea X un espacio Čech-analítico. Entonces es cierto uno y sólo uno de los siguientes enunciados:*

- X es σ -localmente compacto,
- X tiene un subconjunto cerrado homeomorfo al conjunto de los irracionales.

Lo que sí es relevante para este trabajo, y además constituye nuestro punto de partida, es precisamente la noción combinatoria subyacente a la prueba de la generalización citada. De hecho, al indagar en la prueba de dicha generalización, la propiedad de la que extraeremos nuestra materia prima es esta:

Proposición 3. *Dada cualquier función $c : \omega_1^{<\omega} \rightarrow (0, \infty)$ existe un árbol $T \subseteq \omega_1^{<\omega}$ ω -ramificado¹ tal que para toda $n \in \omega$:*

$$\inf\{c(p) : p \in T, |p| = n\} > 0$$

El que tal ínfimo sea mayor a 0 nos dice que los elementos del n -ésimo nivel de T no van a dar bajo la función c a una sucesión convergente a 0. En otras palabras, para cualquier función del árbol $\omega_1^{<\omega}$ en el intervalo $(0, \infty)$ hay un subárbol de $\omega_1^{<\omega}$ tal que en cada piso esquiva a las sucesiones que convergen a 0. Observemos la proposición desde otro ángulo: dada una función $c : \omega_1^{<\omega} \rightarrow (0, \infty)$ consideremos la coloración $c' : \omega_1^{<\omega} \rightarrow \omega$ tal que para toda $p \in \omega_1^{<\omega}$

$$c'(p) = n \text{ si y sólo si } n = \min\{m \in \omega : c(p) \geq \frac{1}{m}\}.$$

Así, la proposición anterior se puede replantear de la siguiente manera: para cualquier función $c : \omega_1^{<\omega} \rightarrow \omega$ hay un árbol ω -ramificado $T \subseteq \omega_1^{<\omega}$ tal que cada uno de sus pisos está coloreado por c con tan sólo una cantidad finita de colores. Esto lo denotaremos —siguiendo la clásica notación de la teoría de Ramsey²— con esta peculiar flecha:

$$\omega_1 \rightsquigarrow (\omega)_\omega^{<\omega}.$$

¿Para qué cardinales se da la relación \rightsquigarrow ? En términos generales, la noción que estudiaremos es una propiedad de tipo Ramsey definida sobre cualquier cardinal κ que busca entender qué estructuras se preservan al colorear (o partir) a placer —aunque con la cantidad de colores restringida— los nodos del árbol $\kappa^{<\omega}$. Esto es, nos preguntaremos qué tipo de subárboles de $T = \kappa^{<\omega}$ es posible hallar pigmentados de manera homogénea, después de que T ha sido coloreado arbitrariamente. Por supuesto, tendremos una de estas propiedades por cada tipo de subárbol homogéneo que pretendamos encontrar. Inicialmente³ centraremos nuestra atención

¹Cada nodo tiene ω sucesores.

²Cuya pregunta principal es: ¿cuántos elementos debe tener una estructura para la existencia de una propiedad particular?

³Lo que en nuestro caso quiere decir: a partir del segundo capítulo, pues el primer capítulo estará dedicado a la revisión de las nociones básicas que utilizaremos a lo largo del texto.

en el caso en el que dicho subárbol es un λ -árbol (esto nos da la relación ya mencionada \rightsquigarrow).

Mientras que en el segundo capítulo estudiaremos las características básicas de la flecha \rightsquigarrow , en el tercero examinaremos un par de flechas más débiles y estrechamente relacionadas: la flecha débil (valga la redundancia) y la flecha escoba, denotadas respectivamente por \rightsquigarrow_d y \rightsquigarrow_e . Este par de flechas están asociadas a una propiedad combinatoria más: **la propiedad de la acotación**, protagonista del principal resultado de este trabajo. Decimos que κ tiene dicha propiedad si cada vez que tomamos una sucesión de longitud κ de funciones de ω en ω hay κ de ellas puntualmente acotadas. La propiedad de la acotación es también analizada a lo largo del tercer capítulo. Dicho análisis nos lleva a concluir que para los cardinales κ que están por arriba de \beth y para aquellos por debajo de \beth , κ tiene la propiedad de la acotación si y sólo si también la tiene su cofinalidad. Este descubrimiento motiva la pregunta fundamental que se plantea abajo.

Por supuesto, al trabajar con combinatoria infinita es inevitable arribar al reino de los resultados de consistencia. Así, en el cuarto capítulo se dan con detalle varios de los resultados de consistencia que se presentan en [4] y se resuelven un par de preguntas emanadas de los análisis llevados a cabo en los capítulos previos. Por último, en el quinto capítulo se da respuesta a una pregunta planteada en [4]:

Pregunta Fundamental. ¿ Es consistente la existencia de un cardinal κ tal que su cofinalidad tiene la propiedad de la acotación, pero κ no la tiene?

Mientras que en los capítulos anteriores las herramientas utilizadas se presentan de forma sucinta en el capítulo inicial, el capítulo final asume una comprensión mucho mayor del forcing, en particular del forcing iterado.

A tono personal, agradezco profundamente la ayuda incondicional que siempre me ofrecieron Michael Hrusak y Osvado Guzmán, fue junto a ellos que poco a poco fui develando lo que aquí presento, además de que indirectamente me mostraron valiosos aspectos de la vida más allá de los correspondientes a la parte académica.

Capítulo 1

Preliminares: Un mundo repleto de árboles



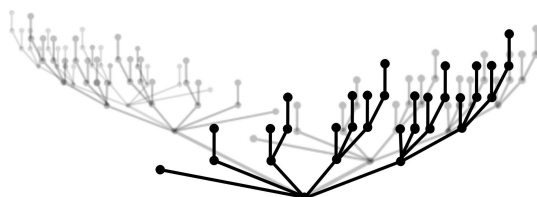
Este capítulo tiene dos propósitos: introducir las herramientas y nociones básicas que utilizaremos a lo largo del trabajo y convenir la notación correspondiente. Por supuesto no pretendemos hacer aquí un estudio exhaustivo de dichas herramientas, al contrario, la idea es darles apenas un vistazo, que si bien puede ser un tanto superficial, pretende hacer de la tesis un material autocontenido (hasta donde se pueda¹). Haremos énfasis en la definición de forcing y en la de los invariantes cardinales del continuo \mathfrak{b} , \mathfrak{d} y \mathfrak{p} . La mayor parte del contenido de este capítulo se

¹Este trabajo presupone conocimiento básico de teoría de conjuntos y de teoría de modelos. Si el lector conoce los conceptos de cardinal, cofinalidad, modelo y submodelo elemental, entonces no tendrá ningún problema con la lectura de este escrito (lo cual no implica que no se requiera de esfuerzo para entenderlo a cabalidad).

puede consultar con más detalle en alguno de estos tres excelentes libros: [3], [6], [8]. Aquel para el que estos temas sean viejos conocidos puede saltar al siguiente capítulo sin mayor remordimiento. Comencemos.

Como bien lo sugiere el título de este capítulo, los árboles serán la estructura fundamental a estudiar a lo largo de la tesis. Nuestro interés estará centrado en investigar ciertas propiedades de tipo Ramsey en ellos. Asimismo, los árboles nos serán de ayuda para plasmar de forma breve y axiomática el método de forcing, un método descubierto por Paul Cohen a través del cual podemos construir extensiones de un modelo V de ZFC². Entendemos por extensión, claro está, un modelo también de ZFC que contiene a V , posee nuevos conjuntos y está cerrado bajo las operaciones conjuntistas. La importancia de este método radica en que nos permite dar pruebas de consistencia.

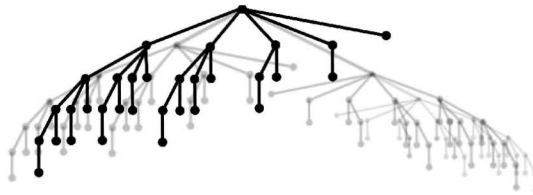
Antes que nada dejemos claro qué entendemos formalmente por árbol (y observemos que salvo la ausencia de follaje, raíces, corteza y otras cosas accesorias, los árboles conjuntistas se parecen en gran medida a los del mundo que habitamos). Un **árbol** es un orden parcial $\langle T, \leq \rangle$ ³ con elemento mínimo (llamado raíz) tal que para todo elemento (o nodo) $t \in T$ el conjunto de sus antecesores $\{s \in T : s < t\}$ está bien ordenado por la relación \leq . Si vemos a los elementos del árbol como nodos de una gráfica cuyas aristas están definidas por la relación, entonces un ejemplo de árbol es este:



Por cuestiones prácticas (o quizá sea más sensato decir *por costumbre*) veremos a los árboles boca abajo, es decir los pensaremos con el orden invertido $\langle T, \geq \rangle$ y la raíz será el nodo máximo. He aquí un árbol desde nuestra concepción:

²El sistema axiomático clásico de la teoría de conjuntos en el que estaremos trabajando: Zermelo-Fraenkel junto con el axioma de elección.

³Siempre que no cause confusión omitiremos el orden y denotaremos al orden parcial simplemente por el conjunto subyacente.



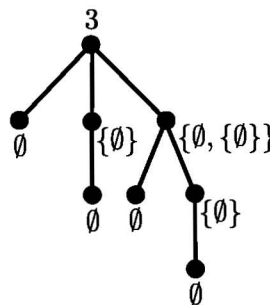
A continuación definimos algunos elementos arbóreos:

Definición 4. • Dado un nodo $t \in T$, definimos la altura de t como el tipo de orden del conjunto de sus antecesores.

- Dado un ordinal α , el nivel α -ésimo de T , denotado por T_α , es el conjunto de todos los nodos de altura α .
- La altura de T , denotada por $ht(T)$, es el mínimo ordinal α tal que $T_\alpha = \emptyset$.
- Un nodo s es sucesor inmediato de un nodo t si $t \leq s$ y la altura de s supera por uno a la altura de t . Al conjunto de los sucesores de t lo denotamos por $suc_T(t)$.

Un ejemplo clásico de árbol es el siguiente. Dado un conjunto x , definimos $x^{<\omega}$ como el conjunto de todas las funciones cuyo dominio es un número natural y cuya imagen es un subconjunto de x . A este conjunto lo podemos ver como un árbol al darle el orden de la contención.

La gran cualidad de los árboles es que nos codifican información de una forma eficaz y singular, lo que los hace herramientas combinatorias de suma relevancia para la teoría de conjuntos. Por ejemplo, el axioma de buena fundación nos permite asociarle a todo conjunto —via la relación \ni — un árbol bien fundado, es decir, un árbol sin ramas infinitas. Así, el conjunto $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ tiene asociado el árbol:



Por otro lado, a todo árbol bien fundado se le puede asociar un conjunto: etiquetamos con el conjunto vacío los nodos terminales y nodo a nodo vamos asociando el conjunto de etiquetas de los nodos anteriores. Este proceso termina en la raíz y la etiqueta que a esta le corresponde es el conjunto buscado. Así, el conjunto asociado al árbol inaugural es el 7. La idea fundamental del forcing es cambiar ligeramente este proceso de manera que a cada nodo le corresponda no sólo un conjunto, sino también una probabilidad de tornarse en dicho conjunto. Esto se hace a través de un orden parcial $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ con elemento máximo 1, al que llamaremos **noción de forcing**. A los elementos de \mathbb{P} les llamaremos condiciones y fungirán como las probabilidades que le asignamos a cada nodo, siendo el 1 la probabilidad más alta.

Dadas dos condiciones $p, q \in \mathbb{P}$, diremos que q extiende a p si $q \leq p$; y diremos que p y q son **incompatibles**, en símbolos $p \perp q$, si no existe $r \in \mathbb{P}$ que extienda tanto a p como a q . A los árboles de probabilidades les llamaremos **\mathbb{P} -nombres**, pues se encargarán de designar objetos en el nuevo modelo. Así, los árboles con probabilidad 1 en cada uno de sus nodos codificarán a los conjuntos ya existentes, mientras que aquellos que tengan distintos elementos del orden parcial en sus nodos cifrarán en algunos casos a nuevos conjuntos. Pero, ¿cómo decidir qué posibilidades se tornarán reales y cuáles no? El ingrediente para lograr esto será un subconjunto no vacío G del orden parcial \mathbb{P} que no pertenece al modelo V y al que llamaremos **filtro \mathbb{P} -genérico sobre V** . Este conjunto tiene las siguientes características:

- (i) Si $p \in G$ y $p \leq q$, entonces $q \in G$,
- (ii) para cualesquiera $p, q \in G$ existe $r \in G$ tal que $p \geq r \leq q$,
- (iii) G interseca a todo subconjunto denso de \mathbb{P} perteneciente al modelo V .

Donde $D \subseteq \mathbb{P}$ es **denso** si para cualquier $p \in \mathbb{P}$ existe un elemento $q \in D$ tal que $q \leq p$. Las dos primeras condiciones nos dicen que G es un filtro, mientras que la última es la que alude a su genericidad. A veces nos resultará más útil ver la tercer condición de una manera equivalente. Decimos que un subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ es una **anticadena** si cualesquiera dos de sus elementos son incompatibles. Una anticadena es maximal si no está contenida propiamente en ninguna anticadena, o en otras palabras, si todo $p \in \mathbb{P}$ es compatible con algún $a \in A$. Así un filtro G cumple (iii) si y sólo si G interseca a toda anticadena maximal que pertenece a V .

Al asignarle un conjunto a los \mathbb{P} -nombres según el criterio de G (esto es, dejando vivos únicamente a aquellos nodos con probabilidad en G) obtenemos un nuevo modelo de ZFC que extiende a V , denotado por $V[G]$. Lo que hemos hecho con este procedimiento es agregar G al *universo*.⁴ Esto último es fácil de ver, ya que el árbol que corresponde a \mathbb{P} y que le asigna probabilidad p tanto al nodo correspondiente al elemento $p \in \mathbb{P}$ como a todos los nodos por debajo de él se *transmuta* en G . Diremos que este nuevo modelo es una **extensión genérica de V** . Dicha extensión cumple además que cualquier otra extensión de V que tiene a G como elemento extiende a $V[G]$.

Dado un conjunto $x \in V[G]$ denotaremos por \dot{x} al \mathbb{P} -nombre que describe cómo ha sido construido tal objeto. Gracias a los \mathbb{P} -nombres disponemos de un lenguaje similar al de primer orden con el que podemos hablar sobre $V[G]$ desde el modelo base, cuyo distintivo es que sus parámetros son precisamente los \mathbb{P} -nombres. A este lenguaje le llamaremos el lenguaje de forcing. Resulta asombroso que, pese a que los habitantes de V no conocen a G y por lo tanto aparentemente poco pueden decir acerca de $V[G]$, lo cierto es que les basta conocer a los elementos de \mathbb{P} para determinar la verdad o falsedad en la extensión genérica de cualquier enunciado en el lenguaje de forcing. Para aclarar esto definiremos una relación \Vdash entre elementos de \mathbb{P} y enunciados en el lenguaje en cuestión. Dados $p \in \mathbb{P}$ y φ un enunciado en el lenguaje de forcing, escribiremos

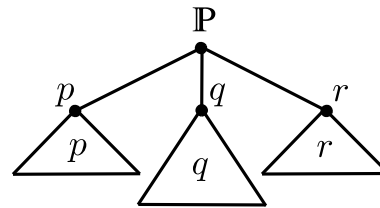


Figura 1.1: \mathbb{P} -nombre para el filtro G , \dot{G} .

para indicar que para todo filtro \mathbb{P} -genérico sobre V , si $p \in G$, entonces $V[G] \models \varphi$ ⁵. En este caso diremos que p **fuerza** a φ . La relación \Vdash cumple además

$$p \Vdash \varphi$$

para indicar que para todo filtro \mathbb{P} -genérico sobre V , si $p \in G$, entonces $V[G] \models \varphi$ ⁵. En este caso diremos que p **fuerza** a φ . La relación \Vdash cumple además

⁴Una buena analogía (o quizá una metáfora) es el campo de los números racionales (un modelo para los axiomas de campo), al que le podemos agregar el número $\sqrt{2}$ obteniendo así un nuevo campo que extiende a \mathbb{Q} . Continuando con la analogía, un nombre para $\sqrt{2}$ en el campo de los racionales es la cortadura de Dedekind determinada por $\sqrt{2}$.

⁵Evidentemente en esta fórmula los parámetros dejan de ser \mathbb{P} -nombres y son sustituidos por sus respectivas transmutaciones.

que si $V[G] \models \varphi$, entonces existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \Vdash \varphi$. He aquí una descripción del comportamiento de esta relación:

1. Si $p \Vdash \varphi$ y $q \leq p$, entonces $q \Vdash \varphi$.
2. Ninguna condición fuerza tanto a φ como a $\neg\varphi$.
3. Toda condición $p \in \mathbb{P}$ tiene una extensión q que decide φ , es decir, $q \Vdash \varphi$ o $q \Vdash \neg\varphi$.
4. Si $p \Vdash \varphi$ y $p \Vdash \varphi \rightarrow \psi$, entonces $p \Vdash \psi$.
5. $p \Vdash \neg\varphi$ si y sólo si ninguna condición que extiende a p fuerza a φ .
6. $p \Vdash \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $p \Vdash \varphi$ y $p \Vdash \psi$.
7. $p \Vdash \varphi \vee \psi$ si y sólo si hay $q \leq p$ tal que $q \Vdash \varphi$ o $q \Vdash \psi$.
8. $p \Vdash \forall x\varphi$ si y sólo si para todo \mathbb{P} -nombre \dot{x} $p \Vdash \varphi(\dot{x})$.
9. $p \Vdash \exists x\varphi$ si y sólo si para todo $q \leq p$ existe $r \leq q$ y existe \dot{x} , un \mathbb{P} -nombre, tal que $r \Vdash \varphi(\dot{x})$.
10. Si $p \Vdash \exists x\varphi$, entonces hay \dot{x} , un \mathbb{P} -nombre, tal que $p \Vdash \varphi(\dot{x})$

Una consecuencia inmediata de esto es que $1 \Vdash \varphi$ si y sólo si para todo $p \in \mathbb{P}$ existe $q \leq p$ de manera que $q \Vdash \varphi$. En este caso escribiremos tan sólo $\Vdash \varphi$. He ahí todo lo que necesitamos para empezar a forzar, ¿no es maravilloso?

A lo largo de esta introducción veremos tres ejemplos del método recién descrito que nos serán de utilidad más adelante y que esperamos tengan la propiedad de asentarlos y disipar todo aspecto que, por la naturaleza de la introducción, haya quedado nebuloso. Por ahora, detengámonos muy brevemente (y con el mismo espíritu resumido) en la noción con la que empezó todo, el forcing de Cohen, al que denotaremos por la letra \mathbb{C} . Cohen desarrolló la técnica de forcing para —de la mano con el trabajo de Gödel— establecer el estatus ontológico de la famosa **hipótesis del continuo** (de aquí en adelante denotada como CH por sus siglas en inglés), la afirmación de que no hay un conjunto cuya cardinalidad sea estrictamente mayor a la del conjunto de los números naturales y estrictamente menor

a la del conjunto de los números reales⁶. Tan conocida hipótesis resulta ser un excelente ejemplo de un enunciado independiente de *ZFC*.⁷

Por lo general, los elementos de las nociones de forcing son aproximaciones al objeto que buscamos introducir al universo. En el caso del forcing de Cohen lo que se desea es agregar un real nuevo, es decir, un nuevo subconjunto de los números naturales. Una buena manera de aproximar un conjunto de esta naturaleza es a través de funciones cuyo dominio es un subconjunto finito de ω y que toman valores en 2. Al conjunto de todas estas funciones lo denotaremos por $F_n(\omega, 2)$. Así $\mathbb{C} = \langle F_n(\omega, 2), \supseteq \rangle$. No es difícil ver (a través de un simple argumento de densidad) que si G es un filtro \mathbb{C} -genérico, entonces $\bigcup G$ es una función con dominio ω que no pertenece a V . Decimos que una función (o un subconjunto de ω) obtenida de esta manera es un **real de Cohen sobre V** . Así, si c es un real de Cohen, entonces $\{c \upharpoonright_n : n \in \omega\}$ es un filtro \mathbb{C} -genérico sobre V . Cuando sea conveniente escribiremos $V[c]$ (en lugar de $V[G]$) para denotar a la extensión genérica obtenida al agregar el real de Cohen c .

En general, dados dos conjuntos cualquiera x y y , $F_n(x, y)$ denotará al conjunto de las funciones parciales de x en y , es decir, las funciones cuyo dominio es un subconjunto finito de x y su contradominio es y . Habiendo aclarado esto, notemos que, dado cualquier cardinal κ , la noción de forcing $\mathbb{C}_\kappa = \langle F_n(\kappa \times \omega, 2), \supseteq \rangle$ se encarga de introducir κ nuevos reales⁸. Un hecho importante que usaremos bastante y que constituirá el primer lema de esta tesis es que introducir un real de Cohen es equivalente a introducir ω reales de Cohen en el sentido de que producen las mismas extensiones genéricas, esto es, para todo G filtro \mathbb{C} -genérico sobre V hay H un filtro \mathbb{C}_ω -genérico de manera que $V[G] = V[H]$.

Lema 5. *Dado cualquier ordinal numberable α , \mathbb{C} y \mathbb{C}_α producen las mismas extensiones genéricas.*

Demostración. Para verificar el lema necesitamos una pequeña definición. Sean \mathbb{P} y \mathbb{Q} dos nociones de forcing y sea $h : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ una función. Decimos que h es un **encaje denso** si cumple estas dos condiciones:

⁶Bajo el axioma de elección *CH* es equivalente a la afirmación $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. La generalización de la hipótesis del continuo, *GCH*, afirma que para todo ordinal α , $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

⁷Tanto *CH* como $\neg CH$ son consistentes con *ZFC*.

⁸El mismo efecto tienen las nociones de forcing $F_n(\kappa, 2)$, $F_n(\kappa, \omega)$, etc. por lo que a lo largo del trabajo nos tomaremos la libertad de usar sin previo aviso como \mathbb{C}_κ la noción que resulte más conveniente.

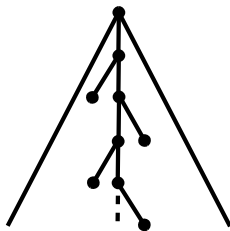
- h preserva el orden, es decir, para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$, $p \leq_{\mathbb{P}} q$ si y sólo si $h(p) \leq_{\mathbb{Q}} h(q)$,
- Para todo $q \in \mathbb{Q}$ existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $h(p) \leq_{\mathbb{Q}} q$.

Se sabe que dos nociones de forcing \mathbb{P} y \mathbb{Q} producen las mismas extensiones genéricas si existe un encaje denso $h : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$. Así, consideremos nuestra biyección favorita $f : \omega \times \alpha \rightarrow \omega$ y sea $h : Fn(\omega \times \alpha, 2) \rightarrow Fn(\omega, 2)$ de manera que para todo $p \in Fn(\omega \times \alpha, 2)$, el dominio de $h(p)$ es $f[dom(p)]$ y $h(p)(n) = p(f^{-1}(n))$. Al ser h un encaje denso (de hecho, un isomorfismo), tenemos el resultado. \square

Tras este raudo repaso de forcing, veamos un ejemplo que de árboles trata y que más adelante nos será de utilidad. Para ello requerimos de un par de definiciones. Un **árbol de Suslin** es un árbol T de altura ω_1 tal que todas sus anticadenas y todas sus ramas tienen tamaño a lo sumo numerable. Por razones de eficiencia añadiremos tres condiciones a esta definición⁹:

- Cada nodo de T tiene por lo menos dos sucesores inmediatos.
- Para todo $t \in T$ hay un elemento $s \in T$ en cada nivel superior de manera que $t < s$.
- El árbol T es extensional, es decir, si dos nodos en un nivel límite tienen los mismos antecesores, entonces son iguales.

Decimos que un árbol es **bien podado** si cumple la condición (ii), mientras que un árbol que cumple las condiciones (i)-(iii) es llamado **normal**. Notemos que si un árbol normal carece de anticadenas no numerables, entonces sus ramas son a lo sumo numerables, pues de lo contrario tendríamos la siguiente situación:



⁹Estas condiciones son inofensivas, pues se puede demostrar que si hay un árbol de Suslin en el sentido original, entonces hay un árbol que las satisface. Lo ventajoso de dichas condiciones es que vuelven a los árboles sumamente operables.

Así, de aquí en adelante entenderemos por árbol de Suslin a un árbol normal sin anticadenas no numerables. Aún nos espera la segunda de las dos definiciones anunciadas: un orden parcial es σ -**cerrado** si toda sucesión decreciente tiene cota inferior. La importancia de este tipo de órdenes radica en que al forzar con ellos cualquier función en la extensión genérica cuyo dominio es ω yace en el modelo base. En particular los órdenes σ -cerrados no agregan nuevos reales al universo y no colapsan a ω_1 . Un orden con esta propiedad irrumpirá en la empresa que aquí nos atañe, a saber, añadir un árbol de Suslin al universo V .

Teorema 6. *Hay una extensión genérica del universo en la cual existe un árbol de Suslin.*

Demostración. Trabajaremos con un conjunto parcialmente ordenado \mathbb{P} cuyos elementos son aproximaciones al árbol que buscamos incorporar. Así $T \in \mathbb{P}$ si y sólo si existe $\alpha < \omega_1$ tal que $T \subseteq \omega^{<\alpha}$ es normal numerable. El orden en \mathbb{P} está dado como sigue: T' extiende a T si y sólo si $T \subseteq T'$ y en los niveles de T coinciden los nodos de ambos árboles (esto lo denotamos por $T' \sqsubseteq T$).

Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre V . Observemos primero que en efecto \mathbb{P} es una noción de forcing σ -cerrada, pues dada una cadena de árboles en \mathbb{P} , su unión pertenece a \mathbb{P} . Así, el ordinal ω_1 de $V[G]$ coincide con el del modelo base. Veremos que $S = \bigcup G$ es un árbol de Suslin. Para empezar, S es un árbol normal ya que los elementos de G son árboles comparables entre sí. Además S tiene altura ω_1 . Esto lo podemos verificar rápidamente al considerar para cada $\alpha < \omega_1$ el conjunto $D_\alpha = \{T \in \mathbb{P} : ht(T) \geq \alpha\}$. La densidad de dicho conjunto está clara. Así G interseca a cada D_α , es decir, G tiene elementos de cualquier altura menor a ω_1 , lo que establece la propiedad deseada. Por último, veamos que S no tiene anticadenas maximales no numerables¹⁰. Sea $A \in V[G]$ una anticadena maximal de S y sea $T_0 \in \mathbb{P}$ tal que

$$T_0 \Vdash \dot{A} \text{ es anticadena maximal.}$$

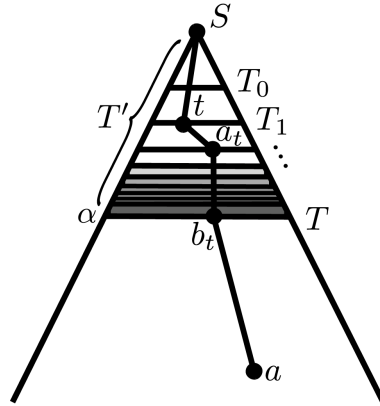
Mostraremos que hay $T' \sqsubseteq T_0$ tal que fuerza a la anticadena A a ser numerable, con lo que habremos acabado. Para empezar construiremos una extensión $T_1 \sqsubseteq T_0$ tal que para cualquier $t \in T_0$ hay $a_t \in T_1 \cap A$ que extiende a t . Como T_0 fuerza a \dot{A} a ser una anticadena maximal en \dot{S} , dado $t \in T_0$, hay una extensión $T_t \sqsubseteq T_0$ y hay $a_t \in T_t$ de modo que t y a_t son comparables y $T_t \Vdash a_t \in \dot{A}$. Como T_0 es

¹⁰Esto es suficiente, pues toda anticadena puede ser extendida a una anticadena maximal.

numerable y \mathbb{P} es σ -cerrado, tras repetir este proceso una cantidad numerable de veces obtenemos un árbol T_1 de manera que para cada $t \in T_0$ existe $a_t \in T_1$ tal que $T_1 \Vdash a_t \in \dot{A}$. Si además pedimos que para cada árbol T_t y para cada $a \in T_0 \cap A$, $T_t \Vdash \dot{a} \in \dot{T}_0 \cap \dot{A}$, entonces $T_1 \Vdash \dot{a} \in \dot{T}_0 \cap \dot{A}$, es decir, T_1 conoce a $T_0 \cap A$. Repetimos el procedimiento para cada $n \in \omega$, generando así en cada paso un árbol $T_{n+1} \sqsubseteq T_n$ que conoce a $T_n \cap A$ y que cumple además que para cada $t \in T_n$ hay $a_t \in T_{n+1} \cap A$ tal que $a_t \leq t$. Sea $T' = \bigcup_{n \in \omega} T_n$.

Observemos que T' conoce a $T' \cap A$ y además $T' \cap A$ es anticadena maximal numerable en T' , puesto que para todo $t \in T'$ hay $n \in \omega$ tal que $t \in T_n$, y por lo tanto hay $a_t \in T_{n+1} \cap A \subseteq T' \cap A$ que extiende a t .

Para terminar extenderemos a T' por un nivel. Supongamos que T' tiene altura límite α . Dado $t \in T'$ seleccionamos una rama de longitud α que pase por a_t y en el nivel α -ésimo colocamos un nodo b_t que extiende a todos los elementos de dicha rama. Así, definimos $T = T' \cup \{b_t : t \in T'\}$.



Claramente T es una condición, pues sólo le agregamos ω nodos y T sigue siendo normal. Además T tiene la cualidad de que $A = T \cap A$, ya que de lo contrario habría $a \in A \setminus T$ y $t \in T$ tales que $a \leq b_t \leq a_t$, una contradicción. Así, hemos obtenido una condición T que extiende a T_0 y que fuerza a la anticadena A a ser numerable.

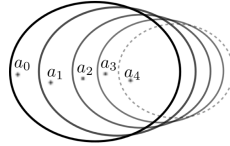
□

Toca la hora de definir el primer invariante cardinal. No está de más mencionar antes que un invariante cardinal es un cardinal no numerable menor o igual al continuo \mathfrak{c} (la cardinalidad de los números reales) que describe una propiedad

combinatoria. Para empezar, un poco de notación. Si x es un conjunto cualquiera y κ es un cardinal, $[x]^\kappa$ denotará al conjunto de todos los subconjuntos de x de tamaño κ . Asimismo la notación $[x]^{<\kappa}$ hará referencia al conjunto de todos los subconjuntos de x de tamaño estrictamente menor a κ . Dados dos conjuntos $x, y \subseteq \omega$ decimos que x está **casi contenido** en y , en símbolos $x \subseteq^* y$, si $x \setminus y$ es finito. Por otro lado, definimos una **pseudointersección** para una familia $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ como un conjunto infinito que está casi contenido en todos los miembros de \mathcal{F} . También, llamaremos a una familia $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ **centrada** si cualquier intersección de una cantidad finita de sus miembros es infinita. Así, el cardinal \mathfrak{p} , o **número de pseudointersección** es el tamaño más pequeño de una familia $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ centrada sin pseudointersección, es decir,

$$\mathfrak{p} = \{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega \text{ es centrada y no tiene pseudointersección}\}.$$

Como todo ultrafiltro¹¹ no principal en $[\omega]^\omega$ es centrado y carece de pseudointersección, \mathfrak{p} está obligado a ser menor o igual que \mathfrak{c} . Por otro lado, el siguiente dibujo nos deja ver que \mathfrak{p} necesariamente es mayor a ω , donde el conjunto $\{a_n : n \in \omega\}$ es una pseudointersección:



El invariante \mathfrak{p} tiene una caracterización tipo Martin que nos será de ayuda. Decimos que un subconjunto x de un orden parcial \mathbb{P} es **centrado** si para cualesquiera $p, q \in x$ hay $r \in x$ tal que $r \leq p, q$. Así, un orden parcial es **σ -centrado** si es unión numerable de subconjuntos centrados. Dado un cardinal κ , $MA(\kappa)_{\sigma\text{-centrado}}$ abrevia el siguiente enunciado: para cualquier orden parcial σ -centrado \mathbb{P} y cualquier familia \mathcal{D} de subconjuntos densos de \mathbb{P} , con $|\mathcal{D}| \leq \kappa$, hay un filtro que intersecta a todos los elementos de \mathcal{D} . Por un teorema de M. G. Bell [1] tenemos que \mathfrak{p} es igual al mínimo cardinal κ para el cual no se satisface la proposición $MA(\kappa)_{\sigma\text{-centrado}}$. Usaremos las dos definiciones de \mathfrak{p} indistintamente.

Veamos como segundo ejemplo de forcing lo que sucede con \mathfrak{p} al agregar un real de Cohen.

¹¹Un ultrafiltro es un filtro maximal con respecto a la contención.

Teorema (Roitman, 1979). *Al agregar un real de Cohen, el invariante \mathfrak{p} de la extensión genérica es mayor o igual al del modelo original.*

Demostración. Tomemos un cardinal $\kappa < \mathfrak{p}$ y sea $\{\dot{x}_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ un \mathbb{C} -nombre para una familia centrada. La idea será encontrar una pseudointersección para dicha familia. Para lograrlo nos valdremos del orden parcial \mathbb{P} cuyos elementos son parejas $\langle f, A \rangle$ tales que:

- i) Hay $n \in \omega$ tal que $\text{dom}(f) = 2^{\leq n}$,
- ii) $\text{ran}(f) \subseteq [\omega]^{\leq 1}$,
- iii) $A \in [\kappa]^{< \omega}$,

Así, las funciones f toman como valores a todas las condiciones de \mathbb{C} que están por debajo de algún número natural y les asignan a su vez el conjunto vacío o un conjunto con un número natural como único elemento¹². El orden en \mathbb{P} está definido por $\langle f, A \rangle \leq \langle f', A' \rangle$ si y sólo si $f' \subseteq f$, $A' \subseteq A$ y para todo $p \in \text{dom}(f) \setminus \text{dom}(f')$

$$p \Vdash f(p) \subseteq \bigcap_{\alpha \in A'} \dot{x}_\alpha.$$

Nuestra pretensión es que las imágenes de cada f sean aproximaciones de la pseudointersección buscada, he ahí la razón de la promesa que constituye este último requisito. Notemos que para cada f , el conjunto $\mathbb{P}_f = \{\langle f, A \rangle \in \mathbb{P} : A \in [\kappa]^{< \omega}\}$ es centrado, pues si $\langle f, A \rangle, \langle f, B \rangle \in \mathbb{P}_f$, entonces $\langle f, A \cup B \rangle$ es una extensión común. Como fruto de esto $\mathbb{P} = \bigcup \{\mathbb{P}_f : f \text{ satisface las condiciones (i) y (ii)}\}$ es σ -centrado. Al ser $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_{\sigma\text{-centrado}}$, para cualquier familia de κ densos de \mathbb{P} hay un filtro que los intersecta. Con esto en mente, consideremos un par de familias. Para empezar, para cada $\alpha \in \kappa$ sea $D_\alpha = \{\langle f, A \rangle \in \mathbb{P} : \alpha \in A\}$. Claramente cada uno de estos conjuntos es denso. La situación no es tan evidente en el caso de la siguiente familia. Para cada $n \in \omega$ consideremos el conjunto E_n , donde $\langle f, A \rangle \in E_n$ si y sólo si

- a) existe $m \geq n$ tal que $\text{dom}(f) = 2^{\leq m}$ y

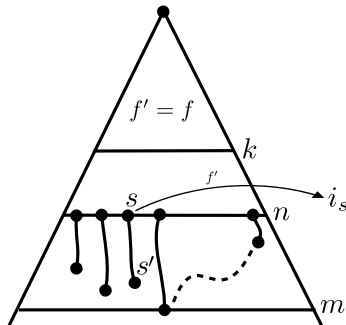
¹²En la discusión subsecuente asociaremos a dicho conjunto con el número natural que tiene como elemento, es decir, si $f(p) = \{n\}$, por facilidad escribiremos $f(p) = n$.

b) para todo $p \in 2^{\leq n}$ existe una extensión $p' \in 2^m$ tal que $f(p' \upharpoonright_n) \geq n$.

Veamos que para cada $n \in \omega$ el conjunto E_n es denso. Sea $\langle f, A \rangle \in \mathbb{P}$ tal que para algún $k < n$, $\text{dom}(f) = 2^{\leq k}$.¹³ Extenderemos f a una función f' , mientras que dejaremos intacto al conjunto A . Por un lado, a todas las condiciones entre el nivel k y el nivel n les asociamos el conjunto vacío. En cuanto a las condiciones del n -ésimo nivel, sabemos lo siguiente: para cada $s \in 2^n$

$$s \Vdash \left| \bigcap_{\alpha \in A} \dot{x}_\alpha \right| = \omega.$$

Así, hay $s' \supseteq s$ y hay $i_s \geq n$ tales que $s' \Vdash i_s \in \bigcap_{\alpha \in A} \dot{x}_\alpha$. Le asignamos a $f'(s)$ el valor i_s . Sea $m = \max\{|s'| : s \in 2^n\}$. Definimos f' como la función con dominio $2^{\leq m}$ que extiende a f y que a cada condición $s \in 2^n$ la manda a su correspondiente i_s . El resto de los elementos del dominio los mandamos al conjunto vacío. Un dibujo puede ser ilustrador.



Es así que $\langle f', A \rangle \leq \langle f, A \rangle$ y en consecuencia E_n es denso. Ahora, sea G filtro que intersecta a cada uno de los densos definidos anteriormente. Definimos la función

$$F = \bigcup \{f : \exists A (\langle f, A \rangle \in G)\}.$$

¹³El lector notará que no tiene mayor dificultad trasladar el argumento para los casos en los que $k \geq n$.

Por construcción, F es una función cuyo dominio es \mathbb{C} y posee la siguiente característica: dados $\alpha \in \kappa$ y $\langle f, A \rangle \in G$, con $\alpha \in A$, para cada $p \in \mathbb{C} \setminus \text{dom}(f)$ tenemos que

$$p \Vdash F(p) \subseteq \dot{x}_\alpha.$$

Esto último se debe a que G intersecta a todos los densos de la forma D_α . Así, si c es un real de Cohen sobre V , entonces

$$V[c] \models \forall \alpha \in \kappa \left(\bigcup_{n \in \omega} F(c \upharpoonright_n) \subseteq^* x_\alpha \right).$$

Además, como G intersecta a todos los conjuntos E_n , $V[c] \models |\bigcup_{n \in \omega} F(c \upharpoonright_n)| = \omega$. Así hemos encontrado una pseudointersección para la familia centrada que tomamos arbitrariamente en un principio.

□

A continuación definiremos dos invariantes cardinales más: \mathfrak{b} y \mathfrak{d} . Dadas un par de funciones $f, g \in \omega^\omega$ decimos que f **domina** a g , en símbolos $g <^* f$, si para casi todo $n \in \omega$, $f(n) < g(n)$, donde *casi* quiere decir *salvo una cantidad finita*. Una familia $B \subseteq \omega^\omega$ es **acotada** si existe $f \in \omega^\omega$ tal que para toda $g \in B$, $g <^* f$. Una familia $D \subseteq \omega^\omega$ es **dominante** si para toda $g \in \omega^\omega$ hay $f \in D$ tal que $g <^* f$. Así, podemos definir el **número de acotación** \mathfrak{b} y el **número de dominancia** \mathfrak{d} como sigue:

$$\mathfrak{b} = \min\{|B| : B \subseteq \omega^\omega \text{ es una familia no acotada}\}$$

$$\mathfrak{d} = \min\{|D| : D \subseteq \omega^\omega \text{ es una familia dominante}\}.$$

Ambos números están acotados por \mathfrak{c} ya que $|\omega^\omega| = \mathfrak{c}$. Por otro lado, como toda familia dominante es no acotada, $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$. Por último, dada una familia $B = \{f_n \in \omega^\omega : n \in \omega\}$, la función $g \in \omega^\omega$ definida por $g(n) = f_0(n) + \dots + f_n(n) + 1$ es cota superior de B y por lo tanto $\omega_1 \leq \mathfrak{b}$. Así $\omega_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$. Cabe agregar que $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{b}$ y que bajo el axioma de Martin $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$.

El tercer ejemplo de forcing será esencial para el resultado principal del quinto capítulo. Sea $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ una familia de funciones. Definimos el **mini forcing de Hechler** $\mathbb{H}_{\mathcal{F}}$ cuyos elementos son pares ordenados $\langle s, F \rangle$, donde $s \in \omega^{<\omega}$ pretende aproximar a una función que domine a \mathcal{F} , mientras que $F \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$. El orden está dado de la siguiente manera: $\langle s', F' \rangle \leq \langle s, F \rangle$ si y sólo si $s \subseteq s'$, $F \subseteq F'$ y para todo $n \in \text{dom}(s') \setminus \text{dom}(s)$ y para todo $f \in F$, $f(n) < s'(n)$. Así, F constituye la promesa de que cualquier extensión de s le ganará a los elementos de F en los nuevos miembros del dominio. Las anticadenas de esta noción de forcing son a lo sumo numerables, pues cualesquiera dos condiciones de $\mathbb{H}_{\mathcal{F}}$ con idéntica primer entrada son compatibles y sólo hay una cantidad numerable de sucesiones finitas de naturales. Llamamos a esta propiedad **condición de la anticadena numerable**, abreviada ccc por sus siglas en inglés¹⁴. Dejemos registro de este hecho y de que en verdad este forcing introduce al universo una cota para \mathcal{F} .

Proposición 7. $\mathbb{H}_{\mathcal{F}}$ es una noción de forcing ccc.

Proposición 8. Si G es un filtro $\mathbb{H}_{\mathcal{F}}$ -genérico sobre V , entonces $V[G] \models \mathcal{F}$ es una familia acotada.

Demostración. Sea $h = \bigcup_{\langle s, F \rangle \in G} s$. Veamos que $h \in \omega^\omega$. Para ello consideremos para cada $n \in \omega$ el conjunto $D_n = \{\langle s, F \rangle \in \mathbb{H}_{\mathcal{F}} : n \in \text{dom}(s)\}$. Dicho conjunto es denso, pues dada una condición cualquiera $\langle s, F \rangle$, con $F = \{f_1, \dots, f_m\}$, la función s' definida por

$$s'(i) = \begin{cases} s(i) & \text{si } i \in \text{dom}(s) \\ \sum_{j=1}^m f_j(i) & \text{si } \text{dom}(s) \leq i \leq n \end{cases}$$

extiende a s y claramente $\langle s', F \rangle \in D_n$ es una condición más fuerte que $\langle s, F \rangle$. Como G intersecta a cada D_n , $\text{dom}(h) = \omega$. Un argumento similar prueba que la imagen de h también es ω . Veamos ahora que h es cota para la familia \mathcal{F} , con lo que habremos acabado. Para cada $f \in \mathcal{F}$ consideramos el conjunto $D_f = \{\langle s, F \rangle \in \mathbb{H}_{\mathcal{F}} : f \in F\}$. De nuevo, el conjunto D_f es trivialmente denso pues para cualquier $\langle s, F \rangle \in \mathbb{H}_{\mathcal{F}}$, la condición $\langle s, F \cup \{f\} \rangle$ es una extensión en D_f . Así $G \cap D_f \neq \emptyset$ y por lo tanto h sólo puede ser más chica que f en el dominio de s , es decir, h domina a f para toda $f \in \mathcal{F}$. □

¹⁴Pese a que esta condición habla de anticadenas, en inglés se le llama *countable chain condition*.

En el caso en el que $\mathcal{F} = \omega^\omega$, llamamos a $\mathbb{H}_{\mathcal{F}}$ forcing de **Hechler**. Al forzar con dicha noción tenemos que en la extensión genérica \mathfrak{b} es igual a ω_1 (esto se puede consultar en [2]).

Un buen ejercicio para el lector que apenas se inicia en la técnica de forcing es este hecho fundamental:

Lema (Rasiowa – Sikorski). *Dados un orden parcial \mathbb{P} , un elemento p del orden y una familia numerable D de subconjuntos densos de \mathbb{P} , existe un filtro F al que pertenece p y que interseca a todos los miembros de D .*

Dado un cardinal $\kappa > \aleph_0$, ¿será cierto el lema para familias de κ densos? La respuesta afirmativa para todos aquellos cardinales menores a \mathfrak{c} en el caso particular de órdenes parciales ccc es conocida como el **Axioma de Martin** (*MA* por sus siglas en inglés) y como su nombre lo indica se trata de una afirmación independiente de *ZFC*. Para obtener un modelo de *MA* es necesario iterar la técnica de forcing, pero ese ya es otro tema que bien podría abarcar muchas más hojas de las que aquí se pretende. Para nuestros propósitos (capítulo 4) basta saber que tales modelos existen.

Tras nuestros valiosos ejemplos de forcing retornemos a las cuestiones arbóreas. A lo largo de este trabajo estaremos estudiando propiedades de homogeneidad en subárboles de $\kappa^{<\omega}$, con κ un cardinal. Esto es, nuestro interés estará centrado en aquellos órdenes $T \subseteq \kappa^{<\omega}$ para los cuales sucede que si $s \subseteq t \in T$, entonces $s \in T$. En este contexto, el nivel enésimo de T es el conjunto $T_n = \{t \in T : |t| = n\}$ y la altura de T corresponde a $ht(T) = \min \{n : T_n = \emptyset\}$. Si para todo $n \in \omega$, $T_n \neq \emptyset$, entonces $ht(T) = \omega$. Dado $s \in T$, $suc_T(s) = \{t \in T : s \subseteq t \text{ y } |t| = |s| + 1\}$ y $dg_T(s) = |suc_T(s)|$. Un árbol T es **λ -ramificado** si todo nodo $t \in T$ tal que $|t| < ht(T) - 1$ tiene por lo menos λ sucesores. Diremos que T es un **λ -árbol** si es λ -ramificado y tiene altura ω . Por último, la notación $t \hat{\wedge} \beta$ hará referencia al nodo sucesor de t que al natural $|t| + 1$ le asigna el valor β .¹⁵

Hemos visto que a través de la noción de árbol podemos dar una visión intuitiva y breve del forcing. Por otro lado los subárboles de $\kappa^{<\omega}$ serán los objetos centrales de esta tesis. Es así que los árboles tienen un papel protagónico, al tiempo que se mantienen tras bambalinas como un hilo conductor.

P. S. Una noción más que se puede expresar en términos de árboles es la de juego, aunque aquí no lo haremos así, pues no hace falta. Para nuestros propósitos

¹⁵Es importante notar que dado $t \in T$ puede ocurrir que $t \hat{\wedge} \beta \notin T$

definiremos un **juego** de la siguiente manera. En él participarán dos jugadores y habrá un conjunto de posibles tiros para cada uno, además de una regla para determinar quién es el ganador tras una cantidad numerable de turnos. Una **estrategia** para alguno de los jugadores es una regla que le indica al jugador qué tirar en cada turno, es decir, una función que a cada turno le asigna un posible tiro. Una **estrategia** es **ganadora** si lleva al jugador que la emplea a ganar independientemente de cómo juegue el contrincante. Decimos que un juego es **determinado** si en cualquier instancia del juego uno de los jugadores posee una estrategia ganadora. Por último, un juego es **cerrado** si siempre que el segundo jugador pierde es porque tras una cantidad finita de turnos ya no tenía oportunidad de ganar. En la tesis haremos uso del siguiente teorema, cuya demostración es parte de otra historia:

Teorema (Gale – Stewart). *Todo juego cerrado está determinado.*

Capítulo 2

De árboles coloreados y flechas onduladas



La idea es muy simple, se trata de tomar un árbol de un tamaño dado y pintarlo con cierta cantidad de colores, para luego estudiar qué tan homogénea es la coloración obtenida. Pero, ¿a qué nos referimos con una coloración homogénea? De forma general, lo que queremos es encontrar una parte del árbol lo suficientemente grande e interesante (un subárbol con ciertas características) tal que en cada nivel dicha parte quede coloreada con una cantidad diminuta de colores (donde *diminuto* dependerá del contexto). Estudiaremos para qué cardinales se da esta relación de homogeneidad, denotada por la flecha \rightsquigarrow .

Definición 9. Sean κ, λ, μ cardinales.

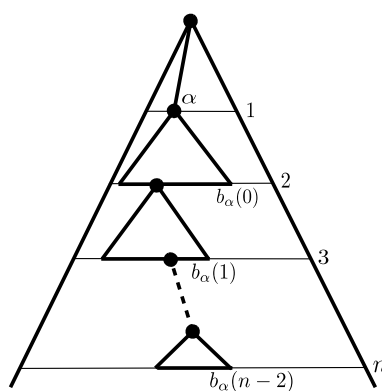
1. Dados un conjunto x y una coloración del árbol $x^{<\omega}$ con μ colores, $c : x^{<\omega} \rightarrow \mu$, diremos que un subárbol $T \subseteq x^{<\omega}$ es **c -homogéneo** si tiene una cantidad finita de colores en cada nivel.
2. La notación $\kappa \rightsquigarrow (\lambda)_\mu^{<\omega}$ querrá decir que para cualquier coloración $c : \kappa^{<\omega} \rightarrow \mu$, hay un λ -árbol $T \subseteq \kappa^{<\omega}$ que es c -homogéneo.

A la definición anterior se le pueden hacer algunas modificaciones para obtener distintas nociones de homogeneidad. Por ejemplo, una función $g \in \omega^\omega$ o un cardinal ν pueden determinar qué tan laxa o rígida será la homogeneidad. Es así que si \bullet denota a g o a ν , escribiremos $\kappa \rightsquigarrow (\lambda)_\mu^{<\omega, \bullet}$ para indicar que cualquier coloración $c : \kappa^{<\omega} \rightarrow \mu$ tiene un λ -subárbol (c, \bullet) -homogéneo, donde esto último significa que la cantidad de colores con la que teñimos cada nivel está acotada por \bullet ¹. También le podemos exigir distintas condiciones al subárbol homogéneo, cambiando la noción de grande que entraña un λ -árbol por aquellas de λ -árbol de Laver o de Miller, o pidiendo que el árbol sea bien podado y tenga cardinalidad λ . A la relación que pide esto último le llamaremos flecha débil, en símbolos \rightsquigarrow_d y será estudiada, con detalle en el siguiente capítulo. Veamos un primer ejemplo que no requiere mayor tecnología.

¹Donde el que g acote a un árbol coloreado T quiere decir que $g(n)$ acota los colores del nivel T_n . Por ejemplo, si $c[T_n] = \{3, 5, 7, 11\}$, un posible valor para $g(n)$ es 11. Evidentemente un árbol T es c -homogéneo si y sólo si hay $g \in \omega^\omega$ tal que T es (c, g) -homogéneo.

Teorema 10. $\mathfrak{b} \not\rightsquigarrow (\mathfrak{b})_\omega^{<\omega}$.

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{b} \rightsquigarrow (\mathfrak{b})_\omega^{<\omega}$. Sea $B = \{b_\alpha \in \omega^\omega : \alpha < \mathfrak{b}\}$ una familia no acotada creciente. Daremos una coloración c para el árbol $\mathfrak{b}^{<\omega}$ con ω colores. A los elementos del primer nivel les asignamos el color 0. Ahora, al nodo $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \in \mathfrak{b}^{<\omega}$, con $n > 1$, le asignamos el color $b_{\alpha_1}(n-2)$. Esto no es más que pintar a todos los sucesores de un nodo dado con un mismo color, determinado por el nodo del primer nivel.



Para la coloración c hay un \mathfrak{b} -árbol $T \subseteq \mathfrak{b}^{<\omega}$ y hay una función $g \in \omega^\omega$ tal que para todo $n \in \omega$, $c[T_n] \subseteq g(n)$. Sea $A = \{b_\xi : \xi \in T_1\}$. Notemos que A es subfamilia no acotada de B . Por otro lado, para todo $n \in \omega \setminus 2$, $b_\xi(n-2) < g(n)$. Así la función $h \in \omega^\omega$, definida por $h(n) = g(n+2)$, acota a A . Esto es una contradicción.

□

Tras este pequeño ejemplo dediquémonos a estudiar las propiedades de la flecha \rightsquigarrow que nos serán de utilidad más adelante. Para ello caracterizaremos a la relación unoaria $\kappa \rightsquigarrow (\kappa)_\omega^{<\omega}$ con un juego. Sean κ y μ un par de cardinales y sea $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\mu)^\omega$. Nuestro juego involucra a dos jugadores, una heroína y un villano, y sus reglas son las siguientes: en su primer turno el villano le dará una coloración c con μ colores al árbol $\kappa^{<\omega}$, a lo que la heroína responderá con una función $G \in \mathcal{G}$. En los pasos subsecuentes el villano elegirá un conjunto $J_n \in [\kappa]^{<\kappa}$ y la heroína contestará con un ordinal $\alpha_n \notin J_n$. La heroína ganará el juego si para cada $n \in \omega$, $c(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in G(n)$. En otro caso el villano es quien gana. A este juego lo denotaremos por $\Gamma_{\mathcal{G}}$ y se ve así:

Villano	$c : \kappa^{<\omega} \rightarrow \mu$		J_0		J_1		...	
Heroína		$G \in \mathcal{G}$		$\alpha_0 \notin J_0$		$\alpha_1 \notin J_1$...	$c(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in G(n)$

En otras palabras, el villano colorea el árbol $\kappa^{<\omega}$ y la heroína elige por cada nivel un conjunto de colores, sus favoritos. Al árbol lo podemos pensar como una serie de posibles caminos por los que la heroína transitará, aunque sólo lo hará si en cada nivel del camino se encuentra con uno de los colores que eligió desde un principio. El trabajo del villano será cerrarle los caminos a la heroína, así en cada tiro elegirá menos de κ ordinales por los que estará prohibido pasar. Si a pesar de los caminos restringidos, en cada nivel la heroína encuentra cómo proseguir su camino a través de los colores de su elección, entonces habrá ganado.

Visto de esta forma, es claro que el juego es cerrado, es decir, si la heroína pierde, es porque tras una cantidad finita de pasos fue incapaz de proseguir su travesía. En consecuencia, por el teorema de Gale-Stewart, $\Gamma_{\mathcal{G}}$ es un juego determinado: alguno de los dos jugadores tiene estrategia ganadora. Veamos bajo qué condiciones la heroína tiene estrategia ganadora. Una lectura somera del juego nos arroja el siguiente resultado, que no encierra mayor profundidad: para que la heroína gane debe tener una amplia variedad de opciones para caminar, es decir, un κ -árbol debidamente coloreado.

Teorema 11. *La heroína tiene estrategia ganadora en el juego $\Gamma_{\mathcal{G}}$ si y sólo si*

$$\forall c : \kappa^{<\omega} \rightarrow \mu \exists G \in \mathcal{G} \exists T \subseteq \kappa^{<\omega} \kappa\text{-árbol} \forall n \in \omega (c[T_n] \subseteq G(n)). \quad (2.1)$$

Demostración. Supongamos que la heroína tiene estrategia ganadora en $\Gamma_{\mathcal{G}}$ y supongamos también que han sido tiradas tanto la coloración $c : \kappa^{<\omega} \rightarrow \mu$ como la función $G \in \mathcal{G}$.² Consideremos E el conjunto de todos los juegos que comienzan con c y G en los que la heroína siguió su estrategia ganadora. Dado un elemento $f \in E$, $f = \langle J_0, \alpha_0, J_1, \alpha_1, \dots \rangle$, llamaremos \hat{f} a los tiros de la heroína $\langle \alpha_0, \alpha_1, \dots \rangle$. El árbol que buscamos no es otro si no el que tiene que ser:

$$T = \{\hat{f} \upharpoonright n : f \in E, n \in \omega\}.$$

² G es la función tirada por la heroína de acuerdo a su estrategia ganadora.

Por definición T cumple que para toda $n \in \omega$, $c[T_n] \subseteq G(n)$. Además T es un κ -árbol, pues para toda $J \in [\kappa]^{<\kappa}$ hay $\beta \in \kappa$ tal que $\beta \notin J$, por lo que dado $p \in T$, el conjunto $\{p \hat{\ } \beta : \beta \in \kappa\} \cap T$ no puede tener tamaño menor a κ , es decir, p tiene κ sucesores.

Ahora supongamos cierta la condición 2.1. En este caso es claro cuál es la estrategia a seguir, pues una vez dada la coloración, la heroína no hace más que tirar la sucesión $G \in \mathcal{G}$ que la condición 2.1 le indica; y ante cualquier J_n , ella responde con un $\alpha \notin J_n$ tal que $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_n \rangle \in T$, lo cual siempre es factible ya que $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \rangle$ tiene κ sucesores. \square

Esta caracterización con árboles nos conduce a otra caracterización destacable:

Teorema 12. *Si $\mathcal{G} = \omega^\omega$ (o para tener mayor apego a la definición original del juego, si $\mathcal{G} = \{\langle g(n) + 1 : n \in \omega \rangle : g \in \omega^\omega\}$), entonces la heroína tiene estrategia ganadora para $\Gamma_{\mathcal{G}}$ si y sólo si $\kappa \rightsquigarrow (\kappa)_{\omega}^{<\omega}$.*

La demostración es sencilla y no consiste más que en traducir el teorema 11 al caso particular en el que $\mathcal{G} = \omega^\omega$ y $\mu = \omega$. Este teorema y el siguiente lema arrojan una gran cantidad de resultados de homogeneidad; sin embargo en este capítulo nos centraremos sólo en unos cuantos de ellos, pues no es la idea alejarse demasiado del propósito principal del trabajo, a saber, entender bien la propiedad de la acotación y resolver una de las preguntas que surge tras su buen entendimiento. El lector interesado en profundizar en estos resultados puede consultar [4].

Lema 13. *Sean κ, μ cardinales. Si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\mu)^\omega$ cumple que:*

- Para toda $g \in \mu^\omega$ hay $G \in \mathcal{G}$ tal que para toda $n \in \omega$, $g(n) \in G(n)$, y
- $|\mathcal{G}| < cf(\kappa)$,

Entonces la heroína tiene estrategia ganadora para el juego $\Gamma_{\mathcal{G}}$.

Demostración. Ya sabemos que el juego en cuestión es determinado, por lo que si la heroína carece de estrategia ganadora, entonces es el villano quien la tiene. Supongamos que este es el caso, lo cual quiere decir que hay una coloración $c : \kappa^{<\omega} \rightarrow \mu$ tal que para cada $G \in \mathcal{G}$ el villano puede seguir una estrategia τ_G que lo llevará al éxito. Pese a ello, la condición que alude a la cardinalidad de

\mathcal{G} es lo suficientemente fuerte como para garantizarnos que para cada n los subconjuntos de κ que cada estrategia τ_G propone como enésimo tiro no cubren a κ ; como consecuencia la heroína puede elegir tranquilamente un $\gamma_n \in \kappa$ que evite a cualquier tiro del villano. Sea $f_c \in \mu^\omega$ una función definida en cada natural n por $f_c(n) = c(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1})$. Por hipótesis, hay $G \in \mathcal{G}$ tal que para todo $n \in \omega$, $f_c(n) \in G(n)$. Claramente si la heroína tira en su primer turno a G y en los subsiguientes va tirando los correspondientes ordinales γ_n , al final habrá ganado sin importar si el villano jugó según la estrategia τ_G , lo que nos lleva a una contradicción.

□

Observemos que en el lema anterior las condiciones que se piden son tan fuertes que la estrategia ganadora de la heroína es totalmente independiente de lo que tire el villano.

Sin mayor dilación, pasemos a los primeros resultados de homogeneidad. Para ello recordemos que es posible obtener una familia $\mathcal{A} \subseteq [\omega_n]^\omega$ de tamaño ω_n y cofinal en $[\omega_n]^\omega$. A grosso modo esto se hace recursivamente como sigue: el caso inicial, ω_1 , no presenta ninguna dificultad; en lo que respecta a ω_2 , cada $\alpha < \omega_2$ es numerable o de cardinalidad ω_1 , por lo que para cada uno de estos elementos es posible encontrar $\mathcal{A}_\alpha \subseteq [\alpha]^\omega$ de tamaño ω_1 y cofinal en $[\alpha]^\omega$; así, la familia $\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha < \omega_2} \mathcal{A}_\alpha$ tiene tamaño ω_2 y es cofinal en $[\omega_2]^\omega$, pues cualquier conjunto numerable está contenido en algún \mathcal{A}_α . El caso general queda claro. Demos comienzo a la sucesión de resultados.

Lema 14. Si $\kappa \rightsquigarrow (\kappa)_{\omega_n}^{<\omega}$ y $cf(\kappa) > \omega_n$, entonces $\kappa \rightsquigarrow (\kappa)_{\omega_n}^{<\omega}$.³

Demostración. Consideremos una familia \mathcal{A} del tipo descrito en el párrafo anterior, es decir, $\mathcal{A} \subseteq [\omega_n]^\omega$, $|\mathcal{A}| = \omega_n$ y \mathcal{A} es cofinal en $[\omega_n]^\omega$. Sea $\mathcal{G} = \{g_A : A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{P}(\omega_n)^\omega$, donde $g_A(n) = A$ para toda $n \in \omega$. Claramente $|\mathcal{G}| = \omega_n < cf(\kappa)$. Por otro lado, \mathcal{G} cumple la primera condición del lema 13, ya que si tomamos $g \in \omega_n^\omega$, y puesto que \mathcal{A} es cofinal en $[\omega_n]^\omega$, hay $A \in \mathcal{A}$ tal que $Im(g) \subseteq A$, lo que se traduce en que existe $g_A \in \mathcal{G}$ tal que para toda $n \in \omega$, $g(n) \in g_A(n) = A$. Ya que \mathcal{G} satisface las hipótesis del lema 13, la heroína posee estrategia ganadora para el juego $\Gamma_{\mathcal{G}}$, esto es, dada una coloración $c : \kappa^{<\omega} \rightarrow \omega_n$ hay $A \in \mathcal{A}$ y hay un κ -árbol $T \subseteq \kappa^{<\omega}$ tal que para toda $n \in \omega$, $c[T_n] \subseteq A$. Así, T está pintado con ω colores,

³ Aquí estamos suponiendo que $n > 0$, pues $\omega_0 = \omega$.

y como $\kappa \rightsquigarrow (\kappa)_{\omega}^{<\omega}$, hay $T' \subseteq T$ κ -árbol tal que para cada natural n , $c[T'_n]$ es un conjunto finito, es decir, $\kappa \rightsquigarrow (\kappa)_{\omega_n}^{<\omega}$.

□

Teorema 15. Si $cf(\kappa) > \mathfrak{d}$, entonces $\kappa \rightsquigarrow (\kappa)_{\omega_1}^{<\omega}$.

Demostración. Por el lema anterior, basta probar que $\kappa \rightsquigarrow (\kappa)_{\omega}^{<\omega}$. Bajo esta perspectiva, consideremos $x = \{g_{\alpha} : \alpha < \mathfrak{d}\}$ una familia dominante y sea $\mathcal{G} = \{G_{\alpha} : \alpha < \mathfrak{d}\}$, donde $G_{\alpha}(n) = g_{\alpha}(n) + 1$ para toda $n \in \omega$. Una vez más veremos que \mathcal{G} cumple las condiciones del lema 13. Sin embargo esto no representa mayor desafío, pues por ser x dominante, para toda $f \in \omega^{\omega}$, existe $G_{\alpha} \in \mathcal{G}$ tal que para toda $n \in \omega$, $f(n) \in G_{\alpha}(n)$; además es inmediato que $|\mathcal{G}| = \mathfrak{d} < cf(\kappa)$. Es así que la heroína tiene estrategia ganadora para el juego $\Gamma_{\mathcal{G}}$ y por lo tanto $\kappa \rightsquigarrow (\kappa)_{\omega}^{<\omega}$.

□

Lema 16. Si $\kappa \rightsquigarrow (\kappa)_{\mu, \nu}^{<\omega}$, entonces $cf(\kappa) \rightsquigarrow (cf(\kappa))_{\mu, \nu}^{<\omega}$.

Demostración. Sea $\langle \kappa_{\alpha} : \alpha \in cf(\kappa) \rangle$ una sucesión de cardinales que convergen a κ . Para todo $\beta < \kappa$ defino $\hat{\beta} = \min\{\alpha : \beta \in \kappa_{\alpha}\}$. A su vez, dado $p = \langle \beta_0, \dots, \beta_n \rangle \in \kappa^{<\omega}$ defino su gorro $\hat{p} = \langle \hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_n \rangle$. Esto no es más que aplastar según la función $\hat{\cdot}$ cada nivel del árbol $\kappa^{<\omega}$, para así obtener un árbol $cf(\kappa)$ -ramificado. Por último, dada la coloración $c : cf(\kappa)^{<\omega} \rightarrow \mu$, le asignamos el correspondiente gorro $\hat{c} : \kappa^{<\omega} \rightarrow \mu$, definido por $\hat{c}(p) = c(\hat{p})$. Por hipótesis hay un κ -árbol $T \subseteq \kappa^{<\omega}$ (\hat{c}, ν)-homogéneo. Sea $\hat{T} = \{\hat{p} : p \in T\} \subseteq cf(\kappa)^{<\omega}$. Claramente \hat{T} es un $cf(\kappa)$ -árbol y es (c, ν) -homogéneo.

□

El resultado que a continuación presentamos es asombroso, pues una de sus consecuencias es que si κ es un cardinal regular mayor a \mathfrak{c} , entonces se satisface $\kappa \rightsquigarrow (\kappa)_{\omega, 1}^{\omega}$, es decir, para cualquier coloración de $\kappa^{<\omega}$ en ω colores es factible encontrar un κ -subárbol tal que cada uno de sus niveles es monocromático.

Teorema 17. Si $cf(\kappa) > \mathfrak{c}$ y $\mu^{\omega} < \kappa$, entonces $\kappa \rightsquigarrow (\kappa)_{\mu, 1}^{<\omega}$.

Demostración. Supongamos que $\mu^{\omega} < \kappa$. Si a cada $g \in \mu^{\omega}$ le asociamos una función $\hat{g} \in \mathcal{P}(\mu)^{\omega}$ definida por $\hat{g}(n) = \{g(n)\}$, y además, consideramos el conjunto $\mathcal{G} = \{\hat{g} : g \in \mu^{\omega}\}$, entonces estamos ante la situación planteada en el lema 13.

Así la heroína tiene estrategia ganadora para el juego $\Gamma_{\mathcal{G}}$, lo que por el Teorema 11 se traduce en que $\kappa \rightsquigarrow (\kappa)_{\mu,1}^{<\omega}$.

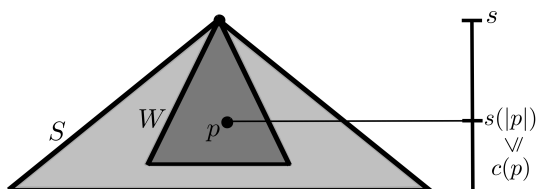
□

Para culminar este capítulo veamos cuál es la situación de \mathfrak{p} en todo este embrollo. Para la demostración del siguiente teorema haremos uso de la caracterización de \mathfrak{p} como número de Martin, es decir, \mathfrak{m}_{σ} -centrado.

Teorema 18. *Si $\kappa < \mathfrak{p}$ es regular no numerable, entonces $\kappa \rightsquigarrow (\kappa)_{\omega}^{<\omega}$.*

Demostración. Iniciemos con una coloración $c : \kappa^{<\omega} \rightarrow \omega$. Trabajaremos con un orden parcial \mathbb{P} definido de la siguiente manera. Los elementos de \mathbb{P} serán pares (W, s) con las siguientes características:

- i) $W \subseteq \kappa^{<\omega}$ es un árbol finito,
- ii) $s \in \omega^{<\omega}$ y $|s| \geq htW$,
- iii) existe un árbol κ -ramificado $S \supseteq W$ de altura $|s|$ tal que para todo $p \in S$, $c(p) \leq s(|p|)$.



Como es de esperarse, el orden de \mathbb{P} será el siguiente: $(W, s) \leq (W', s')$ si y sólo si $W \supseteq W'$ y $s \supseteq s'$. Al árbol S lo llamaremos el controlador de W y nos dará suficientes elementos para poder extender a W de forma adecuada. Los árboles finitos fungirán como aproximaciones al subárbol homogéneo que buscamos, mientras que las funciones s se encargarán de aproximar a la función que será testigo de la homogeneidad del árbol final.

Convenientemente \mathbb{P} es un orden parcial σ -centrado no vacío. Veamos esto. La no vacuidad de \mathbb{P} se debe a que $(\emptyset, \emptyset) \in \mathbb{P}$. Aunado a esto, si para cada $t \in \omega^{<\omega}$ consideramos el conjunto $\mathbb{P}_t = \{(W, s) \in \mathbb{P} : s = t\}$, entonces $\mathbb{P} = \bigcup_{t \in \omega^{<\omega}} \mathbb{P}_t$. Cada

\mathbb{P}_t es centrado: sean $(W_0, t), (W_1, t) \in \mathbb{P}_t$ con controladores S_0 y S_1 respectivamente, entonces $S_0 \cup S_1$ es controlador de $W_0 \cup W_1$, con lo que $(W_0, t), (W_1, t) \geq (W_0 \cup W_1, t)$.

Consideremos el siguiente par de familias:

- a) para toda $\alpha < \kappa$, $R_\alpha = \{(W, s) \in \mathbb{P} : \text{para todo } p \in W \text{ con } |p| < htW, \text{ hay } \gamma > \alpha \text{ tal que } \gamma \in \text{succ}_W(p)\}$,
- b) para toda $n \in \omega$, $A_n = \{(W, s) \in \mathbb{P} : ht(W) = |s| \geq n\}$.

De ser densos cada uno de estos conjuntos, y puesto que $\kappa < m_{\sigma\text{-centrado}}$, tendremos un \mathbb{P} -genérico que nos arrojará un árbol κ -ramificado (por (a)) y de altura ω (por (b)). Aboquémonos a la tarea de establecer la densidad.

- a) Sea $\alpha < \kappa$ y sea $(W, s) \in \mathbb{P}$. Si S es el controlador de W , entonces extendemos recursivamente a W partiendo desde la raíz del árbol y añadiendo a cada habitante de cada piso (salvo el último) un sucesor en S mayor a α . Esto nos genera un árbol finito $W' \supseteq W$ tal que $(W', s) \leq (W, s)$.
- b) Este caso es más engorroso. Es suficiente demostrar que si $(W, s) \in \mathbb{P}$, entonces es posible extender a s un nivel, obteniendo una función s' , $|s'| = |s| + 1$, y un controlador S' de (W, s') . Así, s puede extenderse recursivamente n niveles al tiempo que le agregamos a W una cantidad finita de ramas del nuevo controlador para llevarlo a la altura precisa. Supongamos que $|s| = m$ y sea S el controlador de W . Definimos el árbol

$$\hat{S} = S \cup \{p \hat{\ } \alpha : \alpha \in \kappa \wedge p \in S_{m-1}\}$$

que no es más que extender a S de todas las maneras posibles. Lo siguiente será definir recursivamente una función $h : \hat{S} \rightarrow \omega$ que, basándose en los colores que se repiten κ veces, nos indique posibles sucesores de cada elemento de S , para así refinar \hat{S} al controlador S' . Formalmente, si $p \in \hat{S}_m$, entonces $h(p) = c(p)$. En el caso de que $p \in S_j$ con $j < m$, consideramos $\delta_p \in \omega$ tal que $|\{q \in \text{succ}_{\hat{S}}(p) : h(q) \leq \delta_p\}| = \kappa$ (lo cual es posible ya que $cf(\kappa) > \omega$). Sea $h(p) = \delta_p + \max h[W_{j+1}]$.

Llegada la hora, definamos la función y el controlador tras los cuales andamos. La función está dada por $s' \upharpoonright_m = s$ y $s'(m) = h(\emptyset)$. En cuanto al

controlador, $\emptyset \in S'$ y $\text{succ}_{S'}(p) = \{q \in \text{succ}_S(p) : h(q) \leq h(p)\}$. Veamos que S' es en efecto un controlador. Por construcción S' es κ -ramificado, ya que $\text{succ}_{S'}(p) \supseteq \{q \in \text{succ}_S(p) : h(q) \leq \delta(p)\}$. Un simple argumento nos deja ver que $W \subseteq S'$: sea $p \in W$ y $q \in \text{succ}_W(p)$, entonces $h(q) \leq h(p)$, pues $h(p) \leq \max h[W_{|p|+1}]$; así $q \in S'$. Por último, si $p \in S'$, entonces $c(p) \leq s'(|p|)$: los p 's de altura menor a m cumplen esto por hipótesis, en tanto que para los de altura m se da la desigualdad $c(p) \leq h(\emptyset)$.

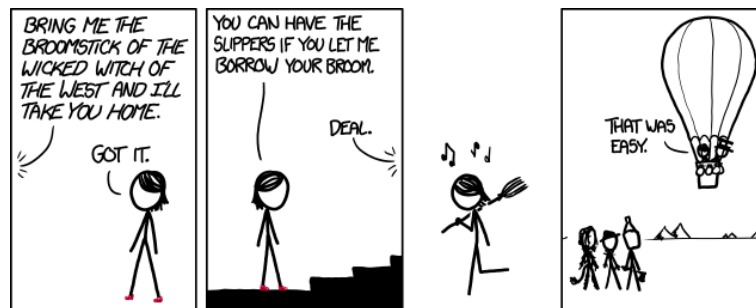
Para terminar, sea G \mathbb{P} -genérico. Definimos el árbol $T = \bigcup\{W : (W, s) \in G\}$ y $g = \bigcup\{s : (W, s) \in G\}$.

□

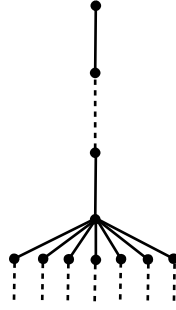
El resultado inicial y el último conllevan a un par de preguntas interesantes planteadas en [4]: ¿es consistente que $\mathfrak{p} \rightsquigarrow (\mathfrak{p})_\omega^{<\omega}$?, ¿es $\mathfrak{b} = \min\{\kappa : \kappa \text{ es regular} \wedge \kappa \not\rightsquigarrow (\kappa)_\omega^{<\omega}\}$? Hasta aquí lo que nos interesa por el momento de \rightsquigarrow .

Capítulo 3

Sigue esa flecha y te topará con una propiedad interesante



Exploremos ahora un par de flechas distintas que están estrechamente vinculadas, la flecha escoba y la flecha débil. Esta última ya fue mencionada en el capítulo anterior, pero tendremos el cuidado de recordar la definición. En cuanto a la flecha escoba, su nombre puede parecer ligeramente disparatado, pero la siguiente definición, de la mano con un dibujo, pueden resultar esclarecedores. Diremos que un árbol es κ -escoba si únicamente uno de sus nodos posee κ sucesores, mientras que los restantes poseen exactamente un sucesor. Un árbol de este tipo se ve así:



Definición 19. Escribiremos $\kappa \rightsquigarrow_d (\lambda)_\omega^{<\omega}$ para indicar que para cualquier coloración $c : \kappa^{<\omega} \rightarrow \omega$ existe un subárbol de $\kappa^{<\omega}$ bien podado, de cardinalidad λ y c -homogéneo. Asimismo, la notación $\kappa \rightsquigarrow_e (\lambda)_\omega^{<\omega}$ nos dirá que el subárbol c -homogéneo es λ -escoba.

Por supuesto la flecha estudiada en el capítulo anterior implica a la flecha escoba, que a su vez implica a la flecha débil. A partir de ahora nuestro interés estará centrado en las relaciones $\kappa \rightsquigarrow_d (\kappa)_\omega^{<\omega}$ y $\kappa \rightsquigarrow_e (\kappa)_\omega^{<\omega}$, que para nuestros propósitos serán *casi* intercambiables. ¿A qué nos referimos con *casi*? Es posible demostrar en ZFC que estas relaciones no son equivalentes, sin embargo, en el caso de cardinales de cofinalidad mayor a ω , ambas nociones coinciden.

Lema 20. Si $cf(\kappa) > \omega$, entonces $\kappa \rightsquigarrow_d (\kappa)_\omega^{<\omega}$ si y sólo si $\kappa \rightsquigarrow_e (\kappa)_\omega^{<\omega}$.

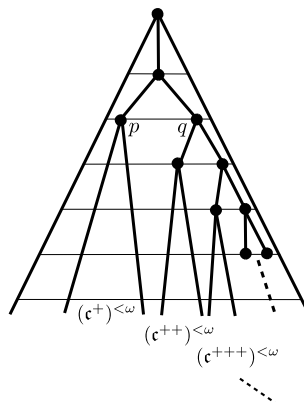
La prueba de este lema no amerita más que unas cuantas palabras: un árbol bien podado de cardinalidad κ y altura ω está obligado a κ -ramificarse en algún momento y un árbol κ -escoba es bien podado y tiene tamaño κ . El siguiente lema es un primer paso para ver que en general las flechas difieren.

Lema 21. Sea $\kappa = \min\{\lambda : cf(\lambda) = \omega \wedge \lambda > c\}$. Entonces $\kappa \rightsquigarrow_d (\kappa)_\omega^{<\omega}$.

Demostración. Sea $c : \kappa^{<\omega} \rightarrow \omega$ una coloración. Construiremos un subárbol de $\kappa^{<\omega}$ al cual le podremos extraer a su vez un árbol bien podado, de tamaño κ y c -homogéneo. El punto clave está en notar que κ es la unión de los primeros ω cardinales sucesores de c y por el teorema 17 cada uno de estos cumple la relación \rightsquigarrow . Así pues, manos a la obra. Tomemos un nodo del primer nivel y consideremos un par de sus sucesores, digamos p y q . Como bajo¹ p hay un árbol isomorfo a

¹Aquí usamos la palabra *bajo* de manera gráfica, es decir, pensando en la visión de los árboles invertidos con la que hemos venido trabajando.

$\kappa^{<\omega}$, podemos restringirnos al árbol $(\mathfrak{c}^+)^{<\omega}$ y colgarlo de p . Repetimos el proceso para q con una ligera diferencia: consideramos un par de sus sucesores y a uno de ellos le colgamos el subárbol de $\kappa^{<\omega}$, $(\mathfrak{c}^{++})^{<\omega}$. Así sucesivamente. Llamemos T al árbol que obtenemos.



Como $\mathfrak{c}^+ \rightsquigarrow (\mathfrak{c}^+)_{\omega,1}^{<\omega}$ (teorema 17), hay un \mathfrak{c}^+ -árbol $T_1 \subseteq (\mathfrak{c}^+)^{<\omega}$ c -homogéneo. De igual manera nos es posible hallar un \mathfrak{c}^{++} -árbol $T_2 \subseteq (\mathfrak{c}^{++})^{<\omega}$ c -homogéneo. Continuando con este proceso obtenemos un árbol c -homogéneo para cada uno de los ω sucesores de \mathfrak{c} , cuya unión nos da un subárbol de T —y por lo tanto de $\kappa^{<\omega}$ — que es c -homogéneo y que evidentemente es bien podado y de tamaño κ .

□

Muy pronto probaremos que para el cardinal κ definido en el lema anterior no se da la relación \rightsquigarrow_e . De hecho, dicha relación no se da para ningún cardinal de cofinalidad ω . Por otro lado como consecuencia del lema tenemos que si $\mathfrak{c} < \aleph_\omega$ (en particular bajo CH), entonces $\aleph_\omega \rightsquigarrow_d (\aleph_\omega)_\omega^{<\omega}$. De manera natural surge la siguiente pregunta:

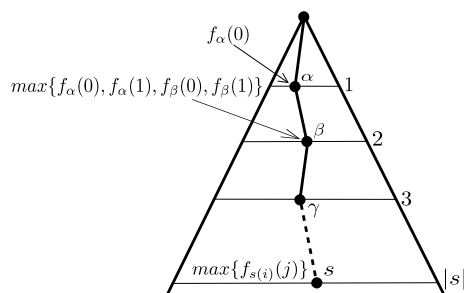
¿es consistente que $\aleph_\omega \not\rightsquigarrow_d (\aleph_\omega)_\omega^{<\omega}$? (P1)

La respuesta es positiva, pero la demostración de este hecho habrá de esperar al siguiente capítulo. Por ahora veamos una buena forma de caracterizar tanto a la flecha débil como a la flecha escoba vía la siguiente propiedad.

Definición 22. Sea κ un cardinal. Decimos que κ tiene la **propiedad de acotación** si y sólo si para toda sucesión de longitud κ de funciones de ω^ω , $\langle f_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$, existe $g \in \omega^\omega$ tal que $|\{\alpha : f_\alpha \leq g\}| = \kappa$, es decir, si hay un conjunto A de cardinalidad κ tal que para toda $\alpha \in A$, g domina puntualmente a f_α . El símbolo $BP(\kappa)$ denotará que κ tiene la propiedad de acotación².

Teorema 23. Sea κ cardinal de cofinalidad mayor a ω . Entonces $\kappa \rightsquigarrow_d (\kappa)_{\omega}^{<\omega}$ si y sólo si $BP(\kappa)$.

Demostración. Supongamos que $\kappa \rightsquigarrow_d (\kappa)_{\omega}^{<\omega}$ y veamos que $BP(\kappa)$. Esta prueba será una generalización de la demostración del teorema 10. Dada $\langle f_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle \subseteq \omega^\omega$ fabricaremos una coloración similar a la que dimos en la prueba mencionada. La diferencia en este caso radica en que al obtener el árbol homogéneo no sabemos en qué momento se ramifica en κ nodos. Para solucionar esto, cada nodo tendrá que ir cargando con la información de los nodos anteriores. Es así que dado $s \in \kappa^{<\omega}$, definimos la coloración c como $c(s) = \max\{f_{s(i)}(j) : i < |s| \wedge j \leq |s|\}$.

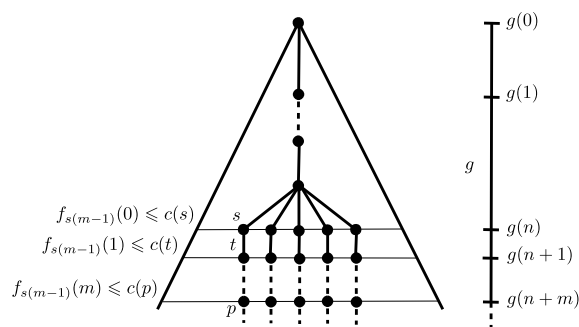


Por hipótesis hay un árbol κ -escoba T que es c -homogéneo vía alguna función $g \in \omega^\omega$ (Lema 20). Supongamos que T se ramifica en κ nodos hasta el nivel n . Sea $h \in \omega^\omega$ dada por $h(m) = g(m+n)$. Entonces, para cada $s \in T$ con dominio n y para cada $m \in \omega$,

$$f_{s(n-1)}(m) \leq g(m+n) = h(m).$$

²En inglés esta propiedad se llama Boundedness Property.

Quizá un dibujo sea más explícito (casi siempre lo es):



Es así que el conjunto $A = \{s(n-1) : s \in T \wedge |s| = n\}$ cumple que para toda $\alpha \in A$, $f_\alpha \leq h$. Además $|A| = \kappa$. Por lo tanto $BP(\kappa)$.

Para probar la otra dirección, tomemos una coloración $c : \kappa^{<\omega} \rightarrow \omega$. Para cada $s \in \kappa^{<\omega}$ elijamos $\hat{s} \in \kappa^\omega$ tal que \hat{s} extiende a s . Esta elección nos provee de la κ -sucesión $\langle f_s : s \in \kappa^{<\omega} \rangle \subseteq \omega^\omega$ definida para cada $n \in \omega$ por $f_s(n) = c(\hat{s} \upharpoonright_n)$. Como $BP(\kappa)$, hay $A \in [\kappa^{<\omega}]^\kappa$ y hay $g \in \omega^\omega$ tal que para toda $s \in A$, $f_s \leq g$. Esto se traduce en que el árbol $T = \{\hat{s} \upharpoonright_n : s \in A \wedge n \in \omega\}$ es bien podado y tiene tamaño κ . Además T es (c, g) -homogéneo, pues si $p = \hat{s} \upharpoonright_n \in T$, entonces

$$c(p) = c(\hat{s} \upharpoonright_n) = f_s(n) \leq g(n) = g(|p|).$$

Esto concluye la demostración. □

Notemos que en la demostración de la ida realmente lo que hicimos fue probar que para cualquier cardinal κ , si $\kappa \rightsquigarrow_e (\kappa)_{\omega}^{<\omega}$, entonces $BP(\kappa)$.

Recordemos que si κ está en la relación \rightsquigarrow , entonces su cofinalidad también (lema 16). Algo similar sucede³ con las flechas recién definidas, aunque claro, bajo las circunstancias pertinentes: si κ tiene la propiedad de acotación, entonces $cf(\kappa)$ también. Por otro lado, para los cardinales κ por encima de \mathfrak{d} y para aquellos por debajo de \mathfrak{b} , se da la equivalencia

³Todas las afirmaciones de este párrafo serán probadas más adelante.

$BP(\kappa)$ si y sólo si $BP(cf(\kappa))$.

Esto da pie a preguntarse qué es lo que ocurre entre \mathfrak{b} y \mathfrak{d} , cuestión que constituye el motivo principal de este trabajo. Desglosemos todo lo que se ha dicho.

Lema 24. *Si $BP(\kappa)$, entonces $BP(cf(\kappa))$.*

Demostración. Tomemos una $cf(\kappa)$ -sucesión $\langle f_\alpha : \alpha \in cf(\kappa) \rangle \subseteq \omega^\omega$ arbitraria. Ahora, partimos a κ en $cf(\kappa)$ pedazos, $\kappa = \bigcup_{\alpha \in cf(\kappa)} B_\alpha$, y consideramos la κ -sucesión $\langle g_\gamma : \gamma \in \kappa \rangle$, donde f_α coincide con g_γ para todo $\gamma \in B_\alpha$. Como $BP(\kappa)$, existe $A \in [\kappa]^\kappa$ y existe $g \in \omega^\omega$ tal que para toda $\gamma \in A$, $g_\gamma \leq g$. Evidentemente A interseca a la partición en $cf(\kappa)$ elementos, por lo que si para cada B_α interseccionado tomamos $\zeta_\alpha = \min\{\gamma : \gamma \in A \cap B_\alpha\}$, entonces la $cf(\kappa)$ -sucesión $\langle g_{\zeta_\alpha} : A \cap B_\alpha \neq \emptyset \rangle$ está acotada por g , lo que concluye la demostración. □

Este resultado nos permite aventurarnos a explorar qué cardinales no tienen la propiedad de acotación. El caso más sencillo es el de aquellos cardinales cuya cofinalidad es ω , pues ω mismo no tiene la propiedad. Quien testifica esto es la sucesión que para cada $n \in \omega$ toma la función constante n . Una consecuencia inmediata es que si κ es un cardinal de cofinalidad ω , entonces $\kappa \not\rightsquigarrow_e (\kappa)_\omega^{<\omega}$, lo que junto con el lema 21 establece la diferencia entre las flechas \rightsquigarrow_d y \rightsquigarrow_e . Continuemos con el análisis de qué cardinales no cumplen la propiedad de acotación:

Lema 25. *En los siguientes casos $\neg BP(\kappa)$:*

- i) $cf(\kappa) = \mathfrak{b}$,
- ii) $cf(\kappa) = cf(\mathfrak{d})$.

Demostración. i) Basta ver que $\neg BP(\mathfrak{b})$. En este caso nos sirve cualquier familia de funciones $\{b_\alpha \in \omega^\omega : \alpha \in \mathfrak{b}\}$ no acotada creciente. Notemos que cualquier conjunto $B \in [\mathfrak{b}]^\mathfrak{b}$ es cofinal en \mathfrak{b} , por lo que el conjunto $\{b_\alpha : \alpha \in B\}$ es no acotado.

- ii) De nuevo, mostraremos que $\neg BP(cf(\mathfrak{d}))$. Para ello supondremos lo contrario. Sea $D = \{d_\alpha \in \omega^\omega : \alpha \in \mathfrak{d}\}$ una familia dominante y supongamos

que $\delta = \bigcup_{\xi \in cf(\delta)} \alpha_\xi$. Para cada $\xi < cf(\delta)$ se tiene que $\{d_\gamma : \gamma < \alpha_\xi\}$ no es dominante y, por ende, existe $f_\xi \in \omega^\omega$ de tal modo que $f_\xi \not\leq d_\gamma$, para toda $\gamma < \alpha_\xi$. Así, para la $cf(\delta)$ -sucesión $\langle f_\xi : \xi \in cf(\delta) \rangle$, hay $A \in [cf(\delta)]^{cf(\delta)}$ y hay $g \in \omega^\omega$ tal que para toda $\beta \in A$, $f_\beta < g$. Como D es dominante, hay γ tal que $g \leq d_\gamma$, sin embargo para alguna $\beta \in cf(\kappa)$, $f_\beta \not\leq d_\gamma$, lo que constituye un disparate.

□

Lo anterior nos lleva a que δ no tiene la propiedad de acotación. Por supuesto, como la cofinalidad de δ es no numerable, lo anterior es sinónimo de que $\delta \not\rightsquigarrow_d (\delta)^\omega$. Una lectura de este hecho es que la cota impuesta en el teorema 15 es la mejor posible. Así hemos resuelto el problema para \flat y para δ . Ahora nos dedicaremos a ver qué sucede por debajo de \flat y por arriba de δ .

Lema 26. *Si $\kappa > \delta$, entonces $BP(\kappa)$ si y sólo si $BP(cf(\kappa))$.*

Demostración. La ida ya fue demostrada, por lo que basta checar el regreso. Para ello probaremos que si $\kappa > \delta$, entonces $BP(\kappa)$ si y sólo si

$$cf(\kappa) > \delta \text{ o } (cf(\kappa) \leq \flat \text{ y } BP(cf(\kappa))).$$

De este resultado se sigue inmediatamente lo que queremos.⁴ La ida es sencilla, pues si $BP(\kappa)$ y $cf(\kappa) \leq \delta$, entonces trivialmente $cf(\kappa) \leq \flat$ y por el lema 24, $BP(cf(\kappa))$. En lo que respecta al regreso, tenemos dos casos. Por un lado, si $cf(\kappa) > \delta$, entonces el teorema 15 nos dice que $\kappa \rightsquigarrow (\kappa)^\omega$ y por lo tanto $\kappa \rightsquigarrow_d (\kappa)^\omega$, que en este caso equivale a decir que κ tiene la propiedad de acotación.

En cuanto al caso en el que $cf(\kappa) \leq \flat$ y $BP(cf(\kappa))$, tomemos $\langle \kappa_\alpha : \alpha < cf(\kappa) \rangle$ una sucesión creciente de cardinales regulares que convergen a κ y supongamos que $\kappa_0 > \delta$. Probaremos que $\kappa \rightsquigarrow_d (\kappa)^\omega$ y para ello no haremos más que parafrasear la prueba del lema 21. Como de costumbre, comencemos considerando una coloración $c : \kappa^{<\omega} \rightarrow \omega$. Haciendo uso del teorema 15, para cada $\alpha < cf(\kappa)$ existen una función $g_\alpha \in \omega^\omega$ y un árbol κ_α -ramificado $T \subseteq \kappa^{<\omega}$ que es (c, g_α) -homogéneo. Así tenemos una $cf(\kappa)$ -sucesión $\langle g_\alpha : \alpha \in cf(\kappa) \rangle$ para la cual es posible encontrar un conjunto $A \subseteq cf(\kappa)$ de tamaño $cf(\kappa)$ y una función $g \in \omega^\omega$

⁴Por hipótesis $BP(cf(\kappa))$. Además $cf(\kappa)$ tiene de dos sopas: $cf(\kappa) > \flat$ (en cuyo caso $cf(\kappa) > \delta$) o $cf(\kappa) \leq \flat$. Cada uno de estos casos corresponde a cada disyunto en la equivalencia.

que acota puntualmente a cada g_α cuyo índice pertenezca a A . Consideremos al árbol bien podado $T = \bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha$. Notemos que $|T| = \sup_{\alpha \in A} |T_\alpha| = \kappa$. Aún más, T es (c, g) -homogéneo: si $p \in T$, entonces hay $\alpha \in A$ tal que $p \in T_\alpha$, por lo tanto $c(p) \leq g_\alpha(|p|) \leq g(|p|)$. Esto concluye la prueba. □

Este resultado, aunado a los teoremas 15 y 23, tiene como consecuencia inmediata el siguiente lema:

Lema 27. *Si $cf(\kappa) > \mathfrak{d}$, entonces $BP(\kappa)$.*

Lema 28. *Si $\kappa < \mathfrak{b}$ tiene cofinalidad no numerable, entonces $BP(\kappa)$.*

Demostración. Tomemos un subconjunto x de ω^ω de tamaño $\kappa < \mathfrak{b}$. Como x es \leq^* -acotado, lo podemos ver como unión numerable de conjuntos \leq -acotados. Para finalizar, como $cf(\kappa) > \omega$, necesariamente uno de los conjuntos que conforman la unión debe de tener cardinalidad κ . □

En conclusión, si κ es un cardinal regular no numerable que está por debajo de \mathfrak{b} o por encima de \mathfrak{d} , entonces $BP(\kappa)$, o equivalentemente, $\kappa \rightsquigarrow_d (\kappa)_\omega^{<\omega}$. Esto redondea el estudio de la propiedad de acotación y deja abierta la pregunta acerca de la suerte que podría correr la propiedad entre los invariantes \mathfrak{b} y \mathfrak{d} . El siguiente corolario no es más que una traducción literal del desarrollo anterior en términos de la flecha débil.

Corolario 29. *i) Si $\kappa < \mathfrak{b}$, entonces $\kappa \rightsquigarrow_d (\kappa)_\omega^{<\omega}$ si y sólo si $cf(\kappa) > \omega$.⁵*

ii) Si $cf(\kappa) > \mathfrak{d}$, entonces $\kappa \rightsquigarrow_d (\kappa)_\omega^{<\omega}$.

iii) Si $cf(\kappa) = \mathfrak{b}$ o $cf(\kappa) = cf(\mathfrak{d})$, entonces $\kappa \not\rightsquigarrow_d (\kappa)_\omega^{<\omega}$.

iv) $\mathfrak{b} \not\rightsquigarrow_d (\mathfrak{b})_\omega^{<\omega}$ y $\mathfrak{d} \not\rightsquigarrow_d (\mathfrak{d})_\omega^{<\omega}$.

Antes de dar paso al siguiente capítulo, mencionemos una generalización de la propiedad de acotación.

⁵Esta equivalencia es consecuencia del lema 28 y del hecho de que los cardinales de cofinalidad numerable no cumplen la propiedad de la acotación.

Definición 30. Decimos que dos cardinales κ y λ forman una **buena pareja**, denotado por $BP(\kappa, \lambda)$, si para toda κ -sucesión $\langle f_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle \subseteq \omega^\omega$ existen $A \in [\kappa]^\lambda$ y $g \in \omega^\omega$ tales que para toda $\alpha \in A$, $f_\alpha \leq g$.

Si $\lambda < \kappa$ y existe un cardinal μ entre λ y κ tal que tiene la propiedad de acotación, entonces se da la relación $BP(\kappa, \lambda)$. La razón de esto es que dada cualquier κ -sucesión de funciones, esta tiene una μ -subsucesión a la que le podemos encontrar μ funciones acotadas puntualmente, por lo que cualesquiera λ de ellas atestiguan que $BP(\kappa, \lambda)$.

Proposición 31. Si existe μ tal que $\lambda \leq \mu \leq \kappa$ y $BP(\mu)$, entonces $BP(\kappa, \lambda)$.

Es natural preguntarse si lo anterior da una caracterización para la relación de buena pareja, es decir, si el regreso es verdadero. Por otro lado, notemos que $BP(\kappa, \kappa) = BP(\kappa)$, por lo que \flat y \flat no forman buenas parejas consigo mismos. Pero

¿podrán \flat y \flat formar una buena pareja? (P2)

De ser afirmativa la respuesta, tendríamos que no es posible caracterizar la relación $BP(\kappa, \lambda)$ como pretendemos. Dejemos esto en suspenso por un momento. Por lo pronto quedémonos con la siguiente caracterización cuya demostración es completamente análoga a la del teorema 23:

Teorema 32. Sea κ un cardinal de cofinalidad no numerable. Entonces

$$\kappa \rightsquigarrow_e (\lambda)_\omega^{<\omega} \text{ si y sólo si } BP(\kappa, \lambda).$$

Lo anterior nos será de ayuda para entender qué sucede con la flecha débil en el caso de cardinales de cofinalidad ω .

Teorema 33. Si $cf(\kappa) = \omega$, entonces $\kappa \rightsquigarrow_d (\kappa)_\omega^{<\omega}$ si y sólo si para toda $\lambda < \kappa$ hay $\lambda < \mu < \kappa$ tal que $\mu \rightsquigarrow_d (\lambda)_\omega^{<\omega}$.

Demostración. Para la ida supongamos que el consecuente es falso. Esto quiere decir que hay $\lambda < \kappa$ tal que para cualquier $\lambda < \mu < \kappa$, $\mu \not\rightsquigarrow_d (\lambda)_\omega^{<\omega}$, lo que a su vez

implica que $\mu \not\rightsquigarrow_e (\lambda)_{\omega}^{<\omega}$, o equivalentemente $\neg BP(\mu, \lambda)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que λ es regular, pues de no serlo, también λ^+ cumple que $\neg BP(\mu, \lambda^+)$ para toda $\lambda^+ < \mu < \kappa$. Consideremos $A = \{\mu_n : n \in \omega\}$ un conjunto de cardinales mayores a λ cofinal en κ . Así, para cada $n \in \omega$ existe una μ_n -sucesión de funciones $\langle f_{\alpha}^n : \alpha \in \mu_n \rangle \subseteq \omega^{\omega}$ tal que cualesquiera λ de ellas no están puntualmente acotadas. Como A es cofinal en κ , la sucesión que resulta de concatenar cada una de las μ_n -sucesiones es de longitud κ . Llamémosle $\langle f_{\alpha} : \alpha < \kappa \rangle$. Esto nos permite dar una coloración c al árbol $\kappa^{<\omega}$ similar a la expuesta en el teorema 23: para todo $s \in \kappa^{<\omega}$, $c(s) = \max\{f_{s(i)}(j) : i < |s| \wedge j \leq |s|\}$. Por hipótesis existe un subárbol $T \subseteq \kappa^{<\omega}$ de tamaño κ que es c -homogéneo via una función $g \in \omega^{\omega}$.

Tenemos dos casos. Veamos que ninguno es factible. Para el primer caso suponemos que cada nodo en T tiene menos de κ sucesores. Probaremos de hecho que cada nodo está obligado a tener menos de λ sucesores. Para ello, dados $n \in \omega$ y $s \in T_n$ consideremos el árbol escoba T_s . Al igual que en el teorema 23 definimos $h_s \in \omega^{\omega}$ como $h_s(m) = g(m + n)$. De esta manera para todo $p \in \text{suc}(s)$ y para todo $m \in \omega$, $f_{p(n)}(m) \leq g(m + n) = h_s(m)$. En otras palabras h_s acota al conjunto $x = \{f_{p(n)} : p \in \text{suc}(s)\}$. De tener s λ o más sucesores —y como λ es regular— habría un $n \in \omega$ tal que λ o más funciones en x son de la forma f_{α}^n , lo cual es imposible, pues contradice que $\neg BP(\mu_n, \lambda)$. Esto demuestra que s se ramifica en menos de λ nodos, lo que implica que $|T| \leq \lambda$, que evidentemente es una contradicción. En otro caso, T se ramifica en κ nodos en algún momento, por lo que podemos extraer un subárbol κ -escoba y con un procedimiento completamente análogo al del teorema 23 tenemos κ funciones acotadas puntualmente, de las cuales κ deben ser de la forma f_{α}^n para algún $n \in \omega$, lo que es imposible, pues μ_n y λ no forman una buena pareja. Así, para cada $\lambda < \kappa$ existe $\lambda < \mu < \kappa$ tal que $\mu \rightsquigarrow_d (\lambda)_{\omega}^{<\omega}$.

Avoquémonos ahora a demostrar el regreso del teorema. En este caso la prueba seguirá el mismo patrón que aquella dada en el lema 21, por lo que la desarrollaremos sin mayor detalle. Sea $c : \kappa^{<\omega} \rightarrow \omega$ una coloración y sea $\{\lambda_n : n \in \omega\}$ un conjunto de cardinales cofinal en κ . Por hipótesis, para cada λ_n hay $\mu_n < \kappa$ tal que $\mu_n \rightsquigarrow_d (\lambda_n)_{\omega}^{<\omega}$. Construimos un subárbol T c -homogéneo como sigue: para cada $n \geq 1$ elegimos un par de vértices $p_0^n, p_1^n \in (\kappa^{<\omega})_n$ de manera que $p_0^{n+1}, p_1^{n+1} \in \text{suc}(p_1^n)$ y p_0^n es la raíz de un subárbol $T^n \subseteq \kappa^{<\omega}$ μ_n -ramificado. Ahora, dado $n \in \omega$, como $\mu_n \rightsquigarrow_d (\lambda_n)_{\omega}^{<\omega}$, existe un subárbol $\tilde{T}^n \subseteq T^n$ de tamaño λ_n que es c -homogéneo. Sea T el subárbol de $\kappa^{<\omega}$ cuyos nodos son

$$\{p_i^n : i \in 2 \wedge n \in \omega\} \cup \{p : p \in \tilde{T}^n \text{ para algún } n \in \omega\}.$$

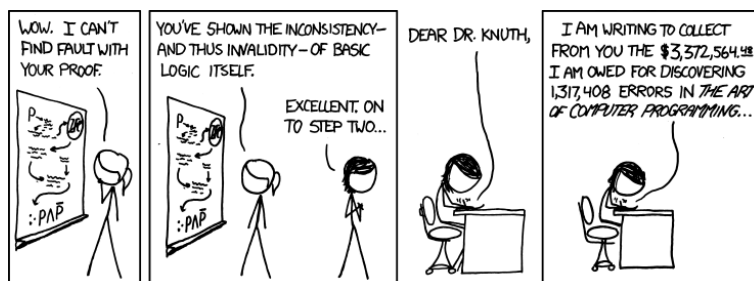
Es fácil ver que T es c -homogéneo, con lo que hemos terminado la prueba.

□

Con esto tenemos el material necesario para dar respuesta a el par de preguntas que dejamos sin contestar, **P1** y **P2** , sin embargo esto está más allá del reino de ZFC. A partir de ahora dejaremos atrás el estudio de todo aquello que es demostrable desde ZFC para internarnos en el mundo de las pruebas de consistencia.

Capítulo 4

El reino de las pruebas de consistencia



A modo de calentamiento, presentamos en este capítulo una miscelanea de resultados de consistencia que son sencillos en espíritu. Daremos por hecho la existencia de modelos de CH y MA , cuyas construcciones son estandar y abundan en la literatura, por ejemplo, se pueden consultar en [3]. Por supuesto daremos comienzo con el par de preguntas que dejamos pendientes en el capítulo anterior, $P1$ y $P2$. Recordemos que si $\kappa < \aleph_\omega$, entonces $\aleph_\omega \rightsquigarrow_d (\aleph_\omega)^{<\omega}$. Veamos que también es consistente lo contrario, es decir, $\aleph_\omega \not\rightsquigarrow_d (\aleph_\omega)^{<\omega}$.

Usaremos con frecuencia este sencillo lema:

Lema 34. *Sea κ un cardinal regular y sea \mathbb{C}_κ la noción de forcing que introduce κ reales de Cohen $\{c_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ y sea G un \mathbb{C}_κ -genérico. Entonces $(\omega^\omega)^{V[G]} = \bigcup_{\alpha \in \kappa} (\omega^\omega)^{V[c_\alpha]}$. Es decir, toda función de $(\omega^\omega)^{V[G]}$ aparece en una extensión intermedia.*

Teorema 35. $Con(ZFC + \aleph_\omega \not\rightarrow_d (\aleph_\omega)^\omega)$.

Demostración. Sea V modelo de ZFC. Consideremos el forcing $\mathbb{C}_{\aleph_\omega} = Fn(\aleph_\omega, \omega)$ que agrega \aleph_ω reales de Cohen, digamos $\{c_\alpha : \alpha \in \aleph_\omega\}$. La idea será ver que dado un filtro $\mathbb{C}_{\aleph_\omega}$ -genérico G , para todo $n \in \omega$,

$$V[G] \models \neg BP(\omega_n, \omega_1). \quad (4.1)$$

De lograr nuestro objetivo, por el teorema 33 tendremos que la extensión genérica $V[G]$ es modelo de $\aleph_\omega \not\rightarrow_d (\aleph_\omega)^\omega$. De hecho, es muy sencillo ver que se cumple 4.1, pues cada función en ω^ω aparece en una extensión intermedia resultado de meter tan sólo ω reales de Cohen (o equivalentemente, de meter un real de Cohen). Es decir, dado $f \in \omega^\omega$ existe $\alpha \in \aleph_\omega$ y \dot{f} un nombre para una función tales que

$$V[c_\alpha] \models \dot{f}[c_\alpha] = f.$$

Esto nos garantiza que la función en cuestión no puede acotar a más de ω reales, pues el forcing de Cohen no añade reales dominantes. Así, dada una ω_n -sucesión $\langle f_\gamma : \gamma \in \omega_n \rangle$, $|\{\gamma : f_\gamma \leq f\}| \leq \omega$. Esto es cierto para cualquier función $f \in \omega^\omega$, por lo que $\neg BP(\omega_n, \omega_1)$.

□

El segundo pendiente, P2, es una cuestión que al finalizar el capítulo anterior en suspenso se quedó: ¿será cierto que si $BP(\kappa, \lambda)$, entonces hay $\lambda \leq \mu \leq \kappa$ tal que $BP(\mu)$? O replanteando la pregunta, ¿es acaso posible que \aleph y \mathfrak{b} formen una buena pareja? La respuesta se condensa en las siguientes dos proposiciones.

Proposición 36. $Con(ZFC + \mathfrak{b} = \omega_1 + \aleph = \omega_2 + BP(\aleph, \mathfrak{b}))$.

Demostración. Partimos de un modelo $V \models MA + \mathfrak{c} = \omega_2$. Claramente en este modelo $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} = \aleph = \mathfrak{c} = \omega_2$. Esta vez introducimos ω_1 reales de Cohen $\{c_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ a través de la noción de forcing \mathbb{C}_{ω_1} . Sea G un filtro \mathbb{C}_{ω_1} -genérico sobre V . Haremos la demostración en tres pasos:

- Por un lado, la extensión genérica es modelo de $\mathfrak{b} = \omega_1$, pues dada $f \in (\omega^\omega)^{V[G]}$ hay $\alpha \in \omega_1$ tal que $f \in V[c_\alpha]$ (lema 34) y por lo tanto f no acota a c_α . Así, en $V[G]$, $\{c_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es una familia no acotada.
- También $V[G] \models \mathfrak{d} = \omega_2$. Para convencernos de esto basta probar que $V[G] \models \mathfrak{d} \geq \mathfrak{d}^V$, o en otras palabras, que cada familia dominante en $V[G]$ tiene asociada una familia dominante en V del mismo tamaño. Para esto lo que haremos es demostrar que para cualquier función $f \in (\omega^\omega)^{V[G]}$ hay una función $g_f \in (\omega^\omega)^V$ tal que para toda $h \in (\omega^\omega)^V$, si $h \leq^* f$, entonces $h \leq^* g_f$. Sea \dot{f} un \mathbb{C}_{ω_1} -nombre para f de manera que $\Vdash \dot{f} \in \omega^\omega$. Para cada condición $p \in \mathbb{C}_{\omega_1}$ definimos una función $f_p \in (\omega^\omega)^V$ tal que a cada $n \in \omega$ le asocia el menor valor posible por debajo de p para $\dot{f}(n)$:

$$f_p(n) = \min\{i \in \omega : \exists q \leq p (q \Vdash \dot{f}(n) = i)\}.$$

Como $|\mathbb{C}_{\omega_1}| = \omega_1$ y $V \models \mathfrak{b} > \omega_1$, la familia $\{f_p : p \in \mathbb{C}_{\omega_1}\}$ es acotada via una función g_f que claramente está en el modelo base. De esta manera, si $h \in (\omega^\omega)^V$ y $p \Vdash h \leq^* f$, entonces $h \leq^* f_p \leq^* g_f$.

- Por último, $V[G] \models BP(\mathfrak{d}, \mathfrak{b})$. Para corroborar esto tomemos una ω_2 -sucesión $x = \langle f_\gamma : \gamma < \omega_2 \rangle \subseteq \omega^\omega$. Notemos que, por el lema 34, hay una extensión intermedia en la que se introducen ω_2 funciones pertenecientes a x , pero en la cual sólo han aparecido ω reales de Cohen, o equivalentemente, un real de Cohen. Supongamos que dicha extensión es $V[c_\alpha]$ y que $x' \subseteq x$ es el conjunto de las ω_2 funciones introducidas en $V[c_\alpha]$. Restrinjamos nuestra atención a $V[c_\alpha]$. Por el teorema de Roitman, en $V[c_\alpha]$ \mathfrak{p} es igual a \mathfrak{c} y por lo tanto $V[c_\alpha] \models \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$. Así, toda familia de funciones de cardinalidad ω_1 está acotada. Consideremos $y = \{g_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ un conjunto de funciones pertenecientes a x' y sea h tal que $g_\alpha \leq^* h$ para toda $\alpha \in \omega_1$. Sólo hace falta arreglar la sutil desviación provocada por la relación \leq^* , para así obtener ω_1 sucesiones acotadas puntualmente. Para lograr esto definimos $F : y \rightarrow [\omega]^{<\omega}$ la función que a cada g_α le asocia el conjunto de naturales en los que h no le gana a g_α :

$$F(g_\alpha) = \{n \in \omega : h(n) < g_\alpha(n)\}.$$

Como $|y| = \omega_1$, hay $A \subseteq [\omega_1]^{\omega_1}$ tal que para cualesquiera $\beta, \delta \in A$, $F(g_\beta) = F(g_\delta)$. Así, modificando a h de manera que para cada $\alpha \in A$ le gane a

cada g_α en $F(g_\alpha)$, obtenemos una función h' que junto con A atestigua que $BP(\omega_2, \omega_1)$, o en los términos que nos interesan, que $BP(\delta, \mathfrak{b})$.

□

De manera sencilla podemos forzar un modelo en el que de nuevo $\mathfrak{b} = \omega_1$ y $\delta = \omega_2$, y sin embargo no forman una buena pareja. Curiosamente esto lo logramos introduciendo ω_2 reales de Cohen a un modelo en el que $\delta = \omega_2$ (puede ser el mismo modelo con el que trabajamos en la proposición anterior), pues si consideramos la ω_2 -sucesión de los reales de Cohen, cualquier función en ω^ω aparece en una extensión intermedia y por lo tanto sólo le gana a ω de ellos. Una consecuencia de esto es que no nos es posible dar un buen teorema que relacione invariantes cardinales a través de la propiedad de ser buena pareja. Idealmente hubiera sido magnífico demostrar que entre dos invariantes siempre uno flecha al otro, pero ese no es el caso. Por otro lado, observemos que en realidad el argumento anterior mostró que ω_1 y ω_2 no forman buena pareja, sin importar los valores de \mathfrak{b} y δ . Exactamente el mismo argumento funciona en el caso de ω_1 y cualquier cardinal mayor o igual a ω_2 , por lo que podemos separar a \mathfrak{b} y a δ tanto como queramos sin que formen una buena pareja. Lo mismo ocurre en el caso de la proposición 36, es decir, hay modelos en los que \mathfrak{b} y δ están terriblemente lejos, pero pese a ello forman una buena pareja. Dejemos constancia del pequeño resultado cuya prueba se ha bosquejado en este párrafo.

Proposición 37. *Es consistente con ZFC y $\delta \geq \omega_2$ arbitrariamente grande que $\mathfrak{b} = \omega_1$ y $\neg BP(\delta, \mathfrak{b})$.*

Los siguientes resultados están tomados de [4] y aquí se desarrollan con mayor detalle. El primer teorema no es más que producto de situar los resultados de los capítulos anteriores en el modelo adecuado.

Teorema 38. *Las tres afirmaciones siguientes son consistentes con ZFC y con c arbitrariamente grande:*

- i) *Para todo κ , $cf(\kappa) > \omega_1$ si y sólo si $\kappa \rightsquigarrow (\kappa)_\omega^{<\omega}$.*
- ii) *$c \not\rightsquigarrow (c)_\omega^{<\omega}$ y para todo $\kappa \neq c$ regular no numerable, $\kappa \rightsquigarrow (\kappa)_\omega^{<\omega}$.*
- iii) *Para todo $\kappa \leq c$ infinito, $\kappa \not\rightsquigarrow (\kappa)_\omega^{<\omega}$.*

Demostración. (i) Sea V modelo de $\mathfrak{d} = \omega_1$. La ida es trivial, pues recordemos que el teorema 15 afirma que si $cf(\kappa) > \mathfrak{d}$, entonces $\kappa \rightsquigarrow (\kappa)_{\omega_1}^{<\omega}$. La otra dirección no es menos sencilla: si $\kappa \rightsquigarrow (\kappa)_{\omega}^{<\omega}$, evidentemente $cf(\kappa) > \omega$. Así, $cf(\kappa) > \omega_1$, pues de lo contrario $cf(\kappa) = \omega_1 = \mathfrak{d} = cf(\mathfrak{d})$ y por el corolario 29 (iii) $\kappa \not\rightsquigarrow_d (\kappa)_{\omega}^{<\omega}$, por lo que $\kappa \not\rightsquigarrow (\kappa)_{\omega}^{<\omega}$.

(ii) En este caso tomaremos V un modelo de MA . Como en V \mathfrak{c} es igual a \mathfrak{d} y en general \mathfrak{d} no satisface la flecha débil, $\mathfrak{c} \not\rightsquigarrow (\mathfrak{c})_{\omega}^{<\omega}$. Por otro lado, invocando una vez más al teorema 15 tenemos que para todo cardinal regular κ mayor a \mathfrak{c} , $\kappa \rightsquigarrow (\kappa)_{\omega_1}^{<\omega}$, lo que nos da el resultado en este caso. Para aquellos cardinales κ no numerables regulares por debajo de \mathfrak{c} basta recurrir al teorema 18.

(iii) Ahora partiremos de V un modelo de CH . Dado un cardinal regular no numerable λ tal que $\lambda^{\omega} = \lambda$, consideremos el orden parcial $\mathbb{C}_{\lambda} = Fn(\lambda \times \omega, \omega)$. Sea G un filtro \mathbb{C}_{λ} -genérico sobre V . Claro está que $V[G] \models \lambda = \mathfrak{c}$. Además, bien podemos pensar a la función $\bigcup G : \lambda \times \omega \rightarrow \omega$ como un conjunto de λ funciones $A = \{f_{\gamma} \in \omega^{\omega} : \gamma < \lambda\}$, donde $f_{\gamma}(n) = \bigcup G(\gamma, n)$. Probaremos que en $V[G]$, $\neg BP(\kappa)$ para todo $\kappa \leq \mathfrak{c}$, con lo que habremos acabado, pues en ese caso $\kappa \not\rightsquigarrow_e (\kappa)_{\omega}^{<\omega}$ ¹ y por lo tanto $\kappa \not\rightsquigarrow (\kappa)_{\omega}^{<\omega}$. Dicho esto, tomemos $\kappa \leq \mathfrak{c}$ y consideremos $A_{\kappa} = \{f_{\gamma} \in A : \gamma \in \kappa\}$. De nuevo, dada una función $g \in V[G]$, esta aparece en una extensión intermedia en la que sólo se han introducido ω reales de Cohen y por lo tanto cualquier función $f_{\gamma} \in A_{\kappa}$ que no está en la extensión intermedia no es dominada por g . Así

$$V[G] \models \forall g \in \omega^{\omega} (\{f \in F_{\kappa} : f \leq g\} \leq \omega).$$

Esto nos dice que no hay un conjunto $A \subseteq F_{\kappa}$ de tamaño κ acotado puntualmente, por lo que $\neg BP(\kappa)$. Queda concluida la demostración.

□

Vale la pena hacer unos comentarios sobre el teorema anterior. Una consecuencia de (i) es que es consistente que ω_1 sea el único cardinal regular no numerable para el cual no se da la flecha \rightsquigarrow . Por otro lado, la prueba del inciso (iii) se puede expresar de una manera ligeramente distinta que nos conviene analizar, pues será la manera en la que abordaremos el teorema principal del trabajo.

¹Aquí estamos haciendo uso de la observación que mencionamos tras la prueba del teorema 23.

Teorema 39. *Es consistente con ZFC que $\mathfrak{b} = \omega_1$, $\mathfrak{d} = \omega_3$ y $\omega_2 \rightsquigarrow (\omega_2)_{\omega}^{<\omega}$.*

Por un lado sabemos que los cardinales regulares por debajo de \mathfrak{p} satisfacen la flecha \rightsquigarrow , pero no sabemos qué ocurre en el caso de \mathfrak{p} . Por otro lado, recordemos que $\mathfrak{b} \not\rightsquigarrow (\mathfrak{b})_{\omega}^{<\omega}$.

Teorema 40. *Con(ZFC + $\mathfrak{p} = \omega_1 + \mathfrak{b} = \omega_3 + \omega_2 \rightsquigarrow (\omega_2)_{\omega}^{<\omega}$).*

Demostración. Partimos de un modelo V en el que $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} = \omega_3$ y además hay \mathbb{T} un árbol de Suslin. Un modelo de esta naturaleza es factible gracias al teorema 6. Esta vez forzaremos poniendo de cabeza al árbol de Suslin \mathbb{T} (es decir, con $\langle \mathbb{T}, \supseteq \rangle$) y considerando G un filtro \mathbb{T} -genérico sobre V . De nuevo haremos la prueba en tres pasos que, pese a su longitud, no dejan de ser sencillos:

- Para empezar, en $V[G]$, $\mathfrak{p} = \omega_1$. Para verificar esto construiremos un árbol de Suslin \mathbb{T}' isomorfo a \mathbb{T} cuyos nodos serán conjuntos infinitos de ω ordenados por \subseteq^* y tal que cada nivel formará una familia casi disjunta. Una vez hecho esto veremos que la rama genérica G vista en \mathbb{T}' no puede tener pseudointersección, con lo que habremos acabado, pues G es una \subseteq^* -cadena decreciente de tamaño ω_1 . Construyamos al árbol \mathbb{T}' de forma recursiva. Para empezar, definimos $\mathbb{T}'_0 = \{\omega\}$. Ahora, dado $\alpha < \omega_1$, supongamos que hemos definido para cada $t \in \mathbb{T}'_{\alpha}$ el subconjunto de ω $x_t \in \mathbb{T}'_{\alpha}$. Para definir $\mathbb{T}'_{\alpha+1}$ simplemente partimos a cada x_t en $|suc(t)|$ cachos y los colocamos como sus sucesores. En el caso en el que α es un ordinal límite —y han sido construidos los niveles \mathbb{T}'_{β} con $\beta < \alpha$ — consideremos para cada $t \in \mathbb{T}'_{\alpha}$ el conjunto $x'_t = \{x_s : s < t\}$. Como $|x'_t| = \omega$, x tiene una pseudointersección a la que tomamos como el elemento $x_t \in \mathbb{T}'_{\alpha}$. Con esto hemos acabado la construcción del árbol \mathbb{T}' , que claramente es isomorfo a \mathbb{T} y cumple que cada nivel forma una familia casi disjunta.

Sea $G' = \{x_t : t \in G\}$. Afirmamos que G' no tiene pseudointersección. En caso contrario, si llamamos p a la pseudointersección de G' , entonces $G' = \{x_t : p \subseteq^* x_t\}$ está en el modelo base, una contradicción.

- Veamos ahora que $V[G] \models \mathfrak{b} = \mathfrak{b}^V$. Primero, el argumento de que $V[G] \models \mathfrak{b} \geq \mathfrak{b}^V$ recae en la existencia de las funciones g_f postuladas en la prueba de la proposición 36, es decir, para cada función f en la extensión genérica existe una función g_f en el modelo base de tal modo que para toda

$h \in (\omega^\omega)^V$, si $h \leq^* f$, entonces $h \leq^* g_f$. En este caso, dichas funciones existen pues $|\mathbb{T}| = \omega_1 < \mathfrak{b}^V$. Tomemos una familia B en V no acotada y suponemos que hay $f \in (\omega^\omega)^{V[G]}$ tal que f es cota para B . Entonces $g_f \in (\omega^\omega)^V$ también lo es, una contradicción que deja establecida la primer desigualdad. En cuanto a la segunda, tomemos $y \subseteq \omega^\omega$ de cardinalidad menor a \mathfrak{b}^V y veamos que es un conjunto acotado. Para cada $t \in \mathbb{T}$ consideramos el conjunto $x_t = \{f \in \omega^\omega : t \Vdash \hat{f} \in \dot{y}\}$, que pertenece a V . En consecuencia el conjunto $x = \bigcup_{t \in \mathbb{T}} x_t$ también pertenece a V . Evidentemente, para toda $t \in \mathbb{T}$, $|x_t| < \mathfrak{b}^V$ y por lo tanto $|x| < \omega_1 \cdot \mathfrak{b}^V = \mathfrak{b}^V$. Así x es un conjunto acotado y con mayor razón y lo es ($y \subseteq x$ y \mathbb{T} no agrega recales).

- Para ver que $V[G] \models \omega_2 \rightsquigarrow (\omega_2)_{\omega}^{<\omega}$ primero observemos que $V \models \omega_2 \rightsquigarrow (\omega_2)_{\omega}^{<\omega}$. Esto se tiene ya que $V \models \mathfrak{p} > \omega_2$ y por lo tanto $\omega_2 \rightsquigarrow (\omega_2)_{\omega}^{<\omega}$ (teorema 18), lo que a su vez implica que $\omega_2 \rightsquigarrow (\omega_2)_{\omega_1}^{<\omega}$ (lema 14). Apoyándonos en este hecho, para cualquier coloración c en $V[G]$ con ω colores construiremos una coloración c' en V con ω_1 colores que nos arrojará un árbol c -homogéneo.

Sea \dot{c} un \mathbb{T} -nombre de manera que

$$\Vdash \dot{c} : \omega_2^{<\omega} \rightarrow \omega.$$

Al ser \mathbb{T} un árbol de Suslin, para cada $p \in \omega_2^{<\omega}$ hay un nivel de \mathbb{T} en el que se decide el color de p^2 . Esto es, hay $\alpha_p < \omega_1$ y $f_p : \mathbb{T}_{\alpha_p} \rightarrow \omega$ tal que para toda $t \in \mathbb{T}_{\alpha_p}$

$$t \Vdash \dot{c}(p) = f_p(t).$$

Ahora, en V definimos la coloración $c' : \omega_2^{<\omega} \rightarrow \omega_1$ como $c'(p) = \alpha_p$. Como ya vimos, $V \models \omega_2 \rightsquigarrow (\omega_2)_{\omega}^{<\omega}$ y por lo tanto hay un ω_2 -árbol $T \subseteq \omega_2^{<\omega}$ que es c' -homogéneo, lo cual implica que \mathbb{T} es pintado con una cantidad numerable de colores permitiéndonos así considerar $\alpha = \sup\{\alpha_p : p \in T\}$. Esto nos garantiza que en el nivel α -ésimo de \mathbb{T} ya se ha decidido el destino de \dot{c} , es decir, para todo $p \in T$, hay $g_p : \mathbb{T}_{\alpha} \rightarrow \omega$ tal que para todo $t \in \mathbb{T}_{\alpha}$

$$t \Vdash \dot{c}(p) = g_p(t).$$

²Dada una anticadena maximal, esta es numerable y como el árbol es de tamaño ω_1 , hay un nivel en el que cada miembro de la anticadena tiene una extensión. Esta propiedad de los árboles de Suslin es la que los hace uno de los ejemplos más sencillos de un forcing no trivial.

Para terminar, condensemos la información que cada $t \in \mathbb{T}_\alpha$ nos da definiendo en V la coloración $c_t : T \rightarrow \omega$ como $c_t(p) = g_p(t)$. Así, para cada $t \in \mathbb{T}_\alpha$ hay un subárbol $T_t \subseteq T$ ω_2 -ramificado y c_t -homogéneo, lo que se traduce en que

$$t \Vdash T_t \text{ es } \dot{c}\text{-homogéneo.}$$

Como \mathbb{T}_α es una anticadena maximal en el árbol de Suslin \mathbb{T} ,

$$\Vdash \text{hay un subárbol de } \omega_2^{<\omega} \text{ que es } \omega_2\text{-ramificado y } \dot{c}\text{-homogéneo.}$$

□

Una breve observación. El argumento esgrimido en el segundo punto de la demostración se puede poner en términos mucho más generales. Dada una relación \rightarrow entre los elementos de un conjunto A y los elementos de un conjunto B , decimos que la terna (A, B, \rightarrow) es un **invariante** si todo elemento de A flecha a uno de B y ninguno de B es flechado por todos los elementos de A . Definimos la evaluación del invariante (A, B, \rightarrow) por

$$\langle A, B, \rightarrow \rangle = \min\{|B'| : B' \subseteq B \text{ es dominante}\},$$

donde $B' \subseteq B$ es dominante si para toda $a \in A$ existe $b \in B'$ tal que $a \rightarrow b$. Así $\mathfrak{b} = \langle \omega^\omega, \omega^\omega, \not\leq^* \rangle$ y $\mathfrak{d} = \langle \omega^\omega, \omega^\omega, \leq^* \rangle$. Muchos otros invariantes cardinales del continuo pueden ser descritos de esta forma. Ahora, si modificamos superficialmente el segundo punto de la demostración precedente tenemos que al forzar con un árbol de Suslin se preserva la evaluación de cualquier invariante. Esto nos dice que no es posible ver a \mathfrak{p} como evaluación de algún invariante.

Para el siguiente resultado haremos una prueba con el mismo espíritu que la anterior, pero con las modificaciones adecuadas al contexto. La idea es análoga, hacemos a \mathfrak{b} chico, a \mathfrak{d} grande y en medio encontramos alguien que cumple la flecha.

Teorema 41. *Es consistente con ZFC que $\mathfrak{b} = \omega_1$, $\mathfrak{d} = \omega_3$ y $\omega_2 \rightsquigarrow (\omega_2)_{\omega}^{<\omega}$.*

Demostración. En este caso el modelo base será $V \models MA + \mathfrak{c} = \omega_3$. Al igual que en el teorema precedente, $V \models \omega_2 \rightsquigarrow (\omega_2)_{\omega_1}^{<\omega}$. Sea G un filtro \mathbb{C}_{ω_1} -genérico

sobre V . La demostración de que $V[G] \models \mathfrak{b} = \omega_1 \wedge \mathfrak{d} = \omega_3$ ya fue presentada con detalle en la proposición 36. Así, sólo hace falta ver que en la extensión genérica $\omega_2 \rightsquigarrow (\omega_2)_{\omega}^{<\omega}$. Sea $\dot{c} : \omega_2^{<\omega} \rightarrow \omega$ un \mathbb{C}_{ω_1} -nombre para una coloración. Siguiendo el mismo esquema de la demostración anterior construiremos una coloración en V con ω_1 -colores. Dados $p \in \omega_2^{<\omega}$ y una anticadena A que decide el valor de $\dot{c}(p)$, hay $\alpha_p < \omega_1$ tal que $A \subseteq \mathbb{C}_{\alpha_p}$, pues A es numerable³. Definimos $c' : \omega_2^{<\omega} \rightarrow \omega_1$ como $c'(p) = \alpha_p$. Esta coloración está en V y como $V \models \omega_2 \rightsquigarrow (\omega_2)_{\omega_1}^{<\omega}$, hay un subárbol $T \subseteq \omega_2^{<\omega}$, ω_2 -ramificado y c' -homogéneo. Si $\alpha = \sup\{\alpha_s : s \in T\}$, entonces en \mathbb{C}_{α} aparecen todas las anticadenas que deciden el color asignado por c a los elementos de T , o en otras palabras, $c \upharpoonright_T \in V[G_{\alpha}]$. Sin embargo, por el teorema de Roitman, $V[G_{\alpha}] \models \mathfrak{p} = \omega_3$ y por lo tanto $V[G_{\alpha}] \models \omega_2 \rightsquigarrow (\omega_2)_{\omega}^{<\omega}$, esto es, T tiene un subárbol ω_2 -ramificado c -homogéneo.

□

Esto nos regresa a una de las vertientes de este río, el problema de la propiedad de acotación entre \mathfrak{b} y \mathfrak{b} . La respuesta nos aguarda en el siguiente capítulo.

³Observemos que no hay forma de conocer a la coloración completa en un paso intermedio, pero perfectamente podemos conocer el color que le da a p .

Capítulo 5

La prueba final



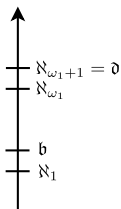
Este capítulo estará dedicado completamente a la demostración del siguiente teorema:

Teorema 42. *Es consistente con ZFC la existencia de un cardinal κ tal que $BP(cf(\kappa))$, pero $\neg BP(\kappa)$.*

En comparación con los capítulos anteriores, la demostración de tal afirmación exige mayor dominio del forcing por parte del lector, pues esta requiere de forcing iterado (con soporte finito) y hace uso de un par de resultados que se enuncian en el Apéndice.

Demostración. Partiremos de un modelo $V \models GCH$ y lo extenderemos a un nuevo modelo en el que deambule un cardinal κ con las características que indica el

teorema 42. Evidentemente un cardinal de esa naturaleza debe encontrarse entre \mathfrak{b} y \mathfrak{d}^1 . Así, buscaremos (guiados por la eficiencia) que $\mathfrak{b} \geq \aleph_2$, $\mathfrak{d} = \aleph_{\omega_1+1}$ y $\kappa = \aleph_{\omega_1}$.



Con esto en mente definiremos una iteración con soporte finito:

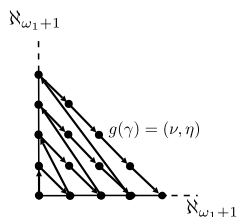
$$\mathbb{P} = \mathbb{C}_{\aleph_{\omega_1+1}} * \langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{Q}_\alpha ; \alpha \in \aleph_{\omega_1+1} \rangle,$$

de manera que si G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre V , entonces $V[G] \models \mathfrak{b} \geq \aleph_2 \wedge \mathfrak{d} = \aleph_{\omega_1+1} \wedge \neg BP(\aleph_{\omega_1})$. Recordemos que $\mathbb{C}_{\aleph_{\omega_1+1}}$ es la noción de forcing que introduce \aleph_{ω_1+1} reales de cohen al universo, digamos $\{c_\alpha : \alpha < \aleph_{\omega_1+1}\}$. En cuanto a la segunda parte de la iteración lo que buscamos es que cada \dot{Q}_α corresponda a algún $\mathbb{H}_{\mathcal{F}}$,² donde $\mathcal{F} \subseteq (\omega^\omega)^{V[G]}$ es una familia de tamaño ω_1 . Para asegurarnos de que la iteración abarque todos los subconjuntos de $(\omega^\omega)^{V[G]}$ de tamaño ω_1 consideremos una función suprayectiva $g : \aleph_{\omega_1+1} \rightarrow \aleph_{\omega_1+1} \times \aleph_{\omega_1+1}$ en V que se comporte de manera tal que para todo $\gamma \in \aleph_{\omega_1+1}$, si $g(\gamma) = (\nu, \eta)$, entonces $\nu \leq \gamma$.³ Observemos que si $g(\gamma) = (\nu, \eta)$, entonces $V[G \upharpoonright_\nu] \subseteq V[G \upharpoonright_\gamma]$ y por lo tanto, cualquier $\mathcal{F} \subseteq (\omega^\omega)^{V[G \upharpoonright_\nu]}$ de tamaño ω_1 también pertenece a $V[G \upharpoonright_\gamma]$. Enumeremos los subconjuntos de $(\omega^\omega)^{V[G \upharpoonright_\nu]}$ de tamaño ω_1 , $\{\mathcal{F}_\zeta : \zeta \in \aleph_{\omega_1+1}\}$. Entonces, usando

¹De no resultar tan evidente esta afirmación, basta con retornar al corolario 29.

²Esta noción de forcing ha sido definida y estudiada brevemente en la parte final del primer capítulo.

³He aquí una función con tal característica:



recursión transfinita, definimos para cada $g(\gamma) = (\nu, \eta)$ al γ -ésimo elemento \dot{Q}_γ de la iteración como sigue:

$$\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} \dot{Q}_\gamma = \mathbb{H}_{\mathcal{F}_\eta}.$$
⁴

Como g es suprayectiva, tenemos por seguro que al final abarcaremos todos los subconjuntos requeridos. El procedimiento que acabamos de describir es un procedimiento estandar cuyo nombre en inglés es *bookkeeping*.

Por razones técnicas trabajaremos con un subconjunto denso de la noción de forcing \mathbb{P} , a saber, consideraremos únicamente las condiciones $(p, \dot{a}) \in \mathbb{P}$ tales que para todo $\alpha \in \aleph_{\omega_1+1}$,

$$\Vdash \dot{a}(\alpha) \in \dot{Q}_\alpha.$$

En general no tiene por que ser cierto que tal subconjunto es denso, sin embargo en nuestro caso nos podemos permitir trabajar con dicho suborden ya que:

Lema 43. Si $\mathbb{E} = \langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{Q}_\alpha; \alpha < \beta \rangle$ es una iteración con soporte finito de órdenes ccc, entonces el conjunto de todas las condiciones $p \in \mathbb{E}$ tales que para todo $\alpha < \beta$, $\Vdash p(\alpha) \in \dot{Q}_\alpha$, es denso en la iteración.

Una vez hecha esta acotación, verifiquemos que en el modelo obtenido los objetos se comportan como buscamos que lo hagan. Para empezar, $V[G]$ posiciona a los invariantes \mathfrak{b} y \mathfrak{d} en donde queremos:

- $V[G] \models \mathfrak{b} \geq \omega_2$, pues por construcción, en $V[G]$ toda familia de reales de tamaño ω_1 es acotada⁵.
- $V[G] \models \mathfrak{d} = \aleph_{\omega_1+1}$. En realidad podremos aseverar esto hasta que hayamos probado que $\neg BP(\aleph_{\omega_1})$, pues de ser cierta esta última afirmación y como $BP(\aleph_1)$, por el lema 26, $\aleph_{\omega_1} \leq \mathfrak{d}$. Además, dado que $\neg BP(cf(\mathfrak{d}))$, el lema 27 nos asegura que $\aleph_{\omega_1} < \mathfrak{d}$. Por otro lado, en $V[G]$, \mathfrak{d} está acotado por $\aleph_{\omega_1+1} = \mathfrak{c}$ y por lo tanto $\mathfrak{d} = \aleph_{\omega_1+1}$.

⁴Como parte de la recursión, estamos suponiendo que para γ la iteración $\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{Q}_\alpha; \alpha < \gamma \rangle$ ya fue definida.

⁵Ver proposición 8.

De esta manera, lo único que nos resta es mostrar que en efecto \aleph_{ω_1} no tiene la propiedad de la acotación. Preparemos los ingredientes para ello. Para empezar partiremos a \aleph_{ω_1+1} en \aleph_{ω_1+1} pedazos cada uno de tamaño ω , $\aleph_{\omega_1+1} = \bigcup\{x_\alpha : \alpha \in \aleph_{\omega_1+1}\}$. Mostraremos que si \dot{g} es un nombre para un real (una función en $(\omega^\omega)^{V[G]}$), entonces

$$\Vdash |\{\alpha : c_\alpha \leq \dot{g}\}| \leq \omega_2,$$

donde c_α hace referencia al real añadido por la noción de forcing $Fn(x_\alpha, 2)$. Observemos que lo que estamos por probar es bastante fuerte, a saber, que ningún cardinal entre \aleph_3 y \aleph_{ω_1} posee la propiedad de la acotación. Sea θ un cardinal lo suficientemente grande como para que podamos considerar un submodelo elemental $M < H(\theta)$ ⁶ de manera que $\{x_\alpha : \alpha \in \aleph_{\omega_1+1}\}, \mathbb{P}, \dot{g} \in M, M^{\omega_1} \subseteq M$ (es decir, M es cerrado bajo sucesiones de longitud ω_1) y $|M| = \omega_2$. Fijemos un ordinal $\xi \in \aleph_{\omega_1+1} \setminus M$. Demostraremos que $\Vdash c_\xi \not\leq \dot{g}$, con lo que habremos acabado.

Para el análisis subsecuente llamaremos \mathbb{C} a la noción de forcing $Fn(x_\xi, 2)$. Por otro lado llamaremos \mathbb{P}_M a $\mathbb{P} \cap M$. Consideremos la función $i_\xi : \mathbb{C} \times \mathbb{P}_M \rightarrow \mathbb{P}$ que manda al par $(p, (q, \dot{a}))$ a $(p \cup q, \dot{a})$. Observemos que i_ξ es una función bien definida, pues si $q \in \mathbb{C}_{\aleph_{\omega_1+1}} \cap M$, entonces su dominio pertenece a M y en consecuencia $dom(q) \cap x_\xi = \emptyset$.⁷ De ser i_ξ un encaje completo tendremos que:

$$V[G] = V[H_0][H_1],⁸$$

donde H_0 es un filtro $\mathbb{C} \times \mathbb{P}_M$ -genérico que puede ser separado a su vez de la siguiente manera:

$$V[G] = V[K_0][c_\xi][H_1].$$

donde K_0 es un filtro \mathbb{P}_M -genérico y c_ξ es el real de Cohen correspondiente a \mathbb{C} . Esto último nos dice que c_ξ es un real de Cohen sobre una extensión en la que vive

⁶ $H(\theta)$ es el conjunto de todos aquellos conjuntos cuya cerradura transitiva es de tamaño menor a θ . Siempre podemos encontrar un cardinal θ lo suficientemente grande como para que se cumpla lo que a continuación se pide.

⁷De lo contrario ξ sería definible en M como el único elemento de \aleph_{ω_1+1} para el cual $x_\xi \cap dom(q) \neq \emptyset$.

⁸Esta afirmación y la subsecuente se derivan del par de resultados enunciados en el apéndice A.

g y por lo tanto $\Vdash c_\xi \not\leq \dot{g}$. Así, nuestra tarea final será demostrar que de verdad i_ξ es un encaje completo. Veámoslo.

- (i) i_ξ preserva el orden: sean $(p, (q, \dot{a})), (r, (s, \dot{b})) \in \mathbb{C} \times \mathbb{P}_M$ tales que $(p, (q, \dot{a})) \leq (r, (s, \dot{b}))$. Entonces $p \cup q \leq r \cup s$ y como $q \Vdash \dot{a} \leq \dot{b}$, con mayor razón $p \cup q \Vdash \dot{a} \leq \dot{b}$.
- (ii) i_ξ preserva incompatibilidad: sean $(p, (q, \dot{a})), (r, (s, \dot{b})) \in \mathbb{C} \times \mathbb{P}_M$ tales que $(p, (q, \dot{a})) \perp (r, (s, \dot{b}))$. En los casos en los que $p \perp r$ o $q \perp s$, las imágenes también son incompatibles. En otro caso $p \cup q \Vdash \dot{a} \perp \dot{b}$.
- (iii) Demostraremos que todo elemento de \mathbb{P} tiene una reducción. Así, sea $(s, \dot{a}) \in \mathbb{P}$. La idea será quedarnos con aquellos elementos de la condición en cuestión que pertenecen a M . Eso lo haremos a través de la siguiente función:

$$\begin{aligned} _{}^M : V^{\mathbb{P}} &\rightarrow V^{\mathbb{P}} \\ \dot{a} &\mapsto \dot{a}^M \end{aligned}$$

donde \dot{a}^M está definido recursivamente como $\dot{a}^M = \{(p \cap M, \dot{b}^M) : (p, \dot{b}) \in \dot{a}\}$.

Lema 44. Llamemos \mathbb{H} a la iteración $\langle \mathbb{P}_\alpha, \mathbb{Q}_\alpha; \alpha \in \aleph_{\omega_1+1} \rangle$. Si $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{a} \in \mathbb{H}$, entonces $\dot{a}^M \in M$.

Para probar esto requerimos de dos lemas:

Lema 45. Si $\Vdash |\dot{a}| \leq \omega_1$, entonces hay \dot{b} tal que $|\dot{b}| = \omega_1$ y $\Vdash \dot{a} = \dot{b}$.

Demostración. Esto se tiene ya que para cada elemento de \dot{a} sólo hay ω posibles opciones, dado que \mathbb{C} es un forcing ccc. Así, como $\Vdash |\dot{a}| \leq \omega_1$, para describir a \dot{a} nos es suficiente con disponer de $\omega_1^\omega = \omega_1$ objetos.

□

Lema 46. Si $\Vdash \dot{a} \in \mathbb{H}$, entonces hay \dot{b} tal que $|\dot{b}| = \omega_1$ y $\Vdash \dot{a} = \dot{b}$.

Demostración. El trasfondo de esta afirmación es que si identificamos a \dot{a} con su soporte, cada uno de los elementos de este tiene una cantidad numerable de opciones (una vez más, esto se debe a que \mathbb{C} es una noción de forcing ccc). A su vez, cada una de las opciones tiene asociado un nombre

para un real de Hechler, el cual, por el lema anterior, podemos considerar de tamaño ω_1 .

□

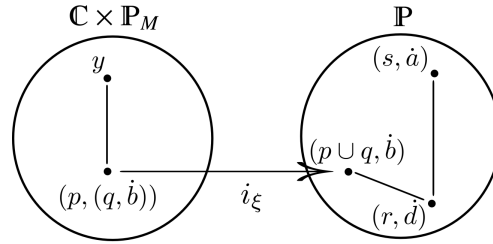
Demostración del Lema 44. La prueba será inductiva. Para empezar, por el lema 46, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $|\dot{a}| = \omega_1$. Dado $(q, \dot{b}) \in \dot{a}$, evidentemente $q \cap M \in M$ y por hipótesis inductiva $\dot{b}^M \in M$. Así $(q \cap M, \dot{b}^M) \in M$ y como \dot{a}^M tiene ω_1 de estos elementos y M es cerrado bajo ω_1 -sucesiones, entonces $\dot{a}^M \in M$.

□

Con todo esto podemos definir la reducción para (s, \dot{a}) como

$$y = (s \upharpoonright_{x_\xi}, (s \cap M, \dot{a}^M)).$$

Por el lema 44 $y \in \mathbb{C} \times \mathbb{P}_M$. Veamos que y de verdad es una reducción. Para ello consideremos una extensión $(p, (q, \dot{b})) \leq y$ y tratemos de encontrar una extensión común (r, \dot{d}) de (s, \dot{a}) y $(p \cup q, \dot{b})$.



Ya tenemos lo necesario para definir la extensión común. Dado $r = p \cup q \cup s$, definimos \dot{d} de modo que:

$$\text{Si } \alpha \in M, r \Vdash \text{“} \dot{d} \upharpoonright_\alpha \Vdash \dot{d}(\alpha) = \dot{b}(\alpha)\text{”},$$

$$\text{Si } \alpha \notin M, r \Vdash \text{“} \dot{d} \upharpoonright_\alpha \Vdash \dot{d}(\alpha) = \dot{a}(\alpha)\text{”}.$$

Una cuidadosa inspección de r nos deja ver que pertenece a $\mathbb{C}_{\aleph_{\omega_1+1}}$. Como \dot{a} y \dot{b} tienen soporte finito, entonces \dot{d} también lo tiene. Similarmente $r \Vdash \text{“} \dot{d} \upharpoonright_\alpha \Vdash \dot{d}(\alpha) \in \mathbb{Q}_\alpha\text{”}$. Claramente (r, \dot{d}) es extensión de $(p \cup q, \dot{b})$. Para ver que (r, \dot{d}) es extensión de (s, \dot{a}) requerimos del siguiente lema:

Lema 47. Si $\alpha \in M$ y $\Vdash \dot{a} \in \dot{Q}_\alpha$, entonces hay $\dot{b} \in M$ tal que $\Vdash \dot{a} = \dot{b}$ y $\dot{b}^M = \dot{b}$.

Demostración. Supongamos (S.P.G.) una vez más que $|\dot{a}| = \omega_1$. La prueba será por inducción. Así, dado $(t, \dot{e}) \in \dot{a}$ hay $\dot{f}_e \in M$ tal que $\Vdash \dot{e} = \dot{f}_e$ y $\dot{f}_e^M = \dot{f}_e$. Como M es cerrado bajo ω_1 -sucesiones, el nombre $\dot{b} = \{(t, \dot{f}_e) \mid (t, \dot{e}) \in \dot{a}\}$ pertenece a M .

□

Con esto tenemos que \dot{a} y \dot{a}^M coinciden dentro de M , y como \dot{b} coincide a su vez con \dot{a}^M (en M), tenemos el resultado: (r, \dot{d}) es extensión de (s, \dot{a}) . Esto finaliza la prueba y pone punto final a este trabajo.

Esperemos que este viaje a través de flechas haya sido tan emocionante para el lector como lo fue para el autor de este texto. Por supuesto este trabajo sólo devela un pequeñísimo fragmento de las flechas onduladas y las propiedades combinatorias asociadas a ellas. Quedan abiertas muchas preguntas, la enorme y bella estructura matemática que la humanidad ha construido navega por un infinito mar de interrogantes.





Apéndice A

Un par de resultados técnicos

El par de resultados que aquí se enuncian resultan necesarios para el desarrollo de la prueba del último capítulo. Estos resultados sobre encajes completos son estándar y se pueden consultar en [8].

Teorema 48. *Dados dos ordenes parciales \mathbb{P} , \mathbb{Q} y un encaje completo $i : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{P}$, todos pertenecientes a M , se cumple que:*

1. *Si G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , entonces $i^{-1}(G)$ es un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre M y $M[i^{-1}(G)] \subset M[G]$.*
2. *Si H_0 es un filtro \mathbb{Q} -genérico sobre M , entonces hay G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M tal que $H_0 = i^{-1}(G)$. Además, existen $\mathbb{R} \in M[H_0]$ un orden parcial y H_1 un filtro \mathbb{R} -genérico sobre $M[H_0]$ tal que $M[G] = M[H_0][H_1]$.*

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es el siguiente lema:

Lema 49. *Si $\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1 \in M$ son un par de ordenes parciales, G es un filtro $\mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1$ -genérico sobre M y las funciones $i_0 : \mathbb{P}_0 \rightarrow \mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1$ e $i_1 : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1$ son los encajes completos obvios, entonces $i_0^{-1}(G)$ es un filtro \mathbb{P}_0 -genérico sobre M , $i_1^{-1}(G)$ es un filtro \mathbb{P}_1 -genérico sobre M y $G = i_0^{-1}(G) \times i_1^{-1}(G)$.*

Bibliografía

- [1] Murray G. Bell: On the Combinatorial Principle $P(\mathfrak{c})$. *Fund. Math.* 114 (1981), no. 2, 149-157.
- [2] Jörg Brendle, Haim Judah, Saharon Shelah: Combinatorial Properties of Hechler Forcing. *Ann. Pure Appl. Logic* 58 (1992), no. 3, 185-199.
- [3] Lorenz J. Halbeisen: *Combinatorial Set Theory With a Gentle Introduction to Forcing*. Springer Monographs in Mathematics. Springer (2012).
- [4] Michael Hrušák, Petr Simon, and Ondřej Zindulka: *Weak Partition Properties on Trees*. Preprint.
- [5] Witold Hurewicz: Relatif perfecte Teile von Punktmengen und Mengen (A). *Fund. Math.* 12 (1928), 78-109.
- [6] Thomas Jech: *Set Theory. The Third Millennium Edition, Revised and Expanded*. Springer Monographs in Mathematics. Springer (2003).
- [7] Alexander S. Kechris: *Classical descriptive set theory*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 156. Springer (1995).
- [8] Kenneth Kunen: *Set Theory. Studies in Logic*, 34. College Publications (2011).

Índice de términos

- Altura de un árbol, 3
- Altura de un nodo, 2
- Anticadena, 4
- Anticadena Maximal, 4
- Árbol, 2
- Árbol bien podado, 8
- Árbol c -homogéneo, 19
- Árbol de Suslin, 8
- Árbol κ -escoba, 29
- Árbol λ -ramificado, 16
- Árbol normal, 8
- Axioma de Martin, 16

- Buena Pareja, 36

- Casi contención, 11
- Condición de la anticadena numerable, 15
- Conjunto centrado, 11

- Denso, 4
- Dominar, 14

- Encaje denso, 7
- Estrategia, 17
- Estrategia Ganadora, 17
- Extensión Genérica, 5

- Familia acotada, 14
- Familia Centrada, 11
- Familia Dominante, 14
- Filtro, 4
- Filtro \mathbb{P} -genérico sobre V , 4
- Flecha Débil, 29
- Flecha Escoba, 29
- Forcing de Cohen, 6

- Forcing de Hechler, 16
- Fuerza, 5

- Hipótesis del continuo, 6
- Hipótesis generalizada del continuo, 6

- Incompatible, 4
- Invariante, 46
- Invariante Cardinal, 10

- Juego, 17
- Juego cerrado, 17
- Juego determinado, 17

- λ -árbol, 16
- Lema de Rasiowa - Sikorski, 16

- Mini forcing de Hechler, 15

- Número de Acotación, 14
- Número de Pseudointersección, 11
- Número de Dominancia, 14
- Noción de forcing, 4
- Nombre, 4

- Propiedad de Acotación, 31
- Pseudointersección, 11

- Raíz, 2
- Real de Cohen, 7

- σ -centrado, 11
- σ -cerrado, 9

- Teorema de Gale - Stewart, 17
- Teorema de Roitman, 12

- Ultrafiltro, 11

Índice de símbolos

ZFC , 1	$BP(\kappa, \lambda)$, 36
T_α , 3	(A, B, \rightarrow) , 46
$ht(T)$, 3	
$suc_T(t)$, 3	
$x^{<\omega}$, 3	
\perp , 4	
$V[G]$, 4	
\dot{x} , 5	
\Vdash , 5	
\mathbb{C} , 6	
CH , 6	
GCH , 6	
$Fn(x, y)$, 7	
\mathbb{C}_κ , 7	
\mathfrak{c} , 10	
$[x]^\kappa$, 10	
$[x]^{<\kappa}$, 11	
\subseteq^* , 11	
\mathfrak{p} , 11	
$MA(\kappa)_{\sigma\text{-centrado}}$, 11	
$<^*$, 14	
\mathfrak{b} , 14	
\mathfrak{d} , 14	
$\mathbb{H}_{\mathcal{F}}$, 15	
ccc , 15	
MA , 16	
$dg_T(s)$, 16	
$t \hat{\sim} \beta$, 16	
$\kappa \rightsquigarrow (\lambda)_\mu^{<\omega}$, 19	
$\kappa \rightsquigarrow (\lambda)_{\mu, g}^{<\omega}$, 19	
$\kappa \rightsquigarrow (\lambda)_{\mu, \nu}^{<\omega}$, 19	
$\kappa \rightsquigarrow_d (\lambda)_\omega^{<\omega}$, 29	
$\kappa \rightsquigarrow_e (\lambda)_\omega^{<\omega}$, 29	
$BP(\kappa)$, 31	

