Universidad Nacional Autónoma
de México

Facultad de Ciencias

# PLANOS PROYECTIVOS Y ANILLOS TERNARIOS PLANOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

EDMUNDO AVENDAÑO MEJÍA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. OCTAVIO PÁEZ OSUNA

2012

**Hoja de Datos del Jurado**

1. Datos del alumno
Avendaño
Mejía
Edmundo
55 32 40 15
Universidad Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
304558186

2. Datos del tutor
Dr.
Octavio
Páez
Osuna

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Rodolfo
San Agustín
Chi

4. Datos del sinodal 2
Dra.
Bertha María
Tomé
Arreola

5. Datos del sinodal 3
M. en C.
Francisco de Jesús
Struck
Chávez

6. Datos del sinodal 4
Mat.
Anayanzi Delia
Martínez
Hernández

7. Datos del trabajo escrito
Planos Proyectivos y Anillos Ternarios Planos
68 p.
2012

# Índice general

# Introducción

Trabajar con el concepto de plano proyectivo como estructura de incidencia es una manera moderna de abordar el estudio de la geometría proyectiva. Al trabajar de este modo, es natural preguntarse cuales teoremas de la geometría proyectiva clásica se siguen cumpliendo en dichas estructuras de incidencia. Resulta que uno de los teoremas fundamentales, el Teorema de Desargues, deja de ser válido en general. Sin embargo, construir ejemplo de planos proyectivos no–Desarguesianos no es un problema trivial.

El objetivo de este trabajo es desarrollar con detalle una clasificación ya existente de cierto tipo de planos poryectivos no–Desarguesianos. Dicha clasificación recurre al concepto de anillo ternario plano que es un tipo de estrutura algebraica. La idea principal es asociar a cada plano proyectivo, un anillo ternario plano de modo tal que estudiando el anillo asociado, se recuperan propiedades del plano inicial. Culmina el trabajo con la construcción de un ejemplo de un plano proyectivo no–Desarguesiano usando las herramientas desarrolladas en el mismo.

Hay pocos textos que profundicen el estudio de los planos proyectivos vistos como estructuras de incidencia y menos aún que hagan un estudio detallado sobre planos proyectivos no–Desarguesianos. Este proyecto aspira a tener un formato accesible para todo aquél que desee empezar a estudiar dichos temas.

La tesis está dividida en cinco capítulos. Como este texto pretende estar autocontenido, los primeros tres capítulos abarcan las definiciones, proposiciones y teoremas sobre planos proyectivos y anillos ternarios planos que se requieren para la comprensión del tema. Los primeros dos están dedicados a los planos proyectivos. Surgen de manera natural el Teorema de Desargues y el concepto de plano proyectivo no–Desarguesiano. El tercer capítulo trata de anillos ternarios planos. Se estudia un método para dar coordenadas a un plano proyectivo en un anillo ternario plano. Surge el concepto de cuadrado latino, un ente matemático de tipo combinatorio que será de utilidad.

En el cuarto capítulo se estudia con profundidad la relación entre planos proyectivos y anillos ternarios planos lineales lo cual da lugar a la clasificación antes mencionada. Por último, se hace un breve estudio de los cuasicampos, que son cierto tipo de anillos ternarios planos lineales. Se examinan los cuasicampos de Hall con el fin de construir un ejemplo interesante.

# Capítulo 1

# Propiedades elementales de planos proyectivos y afines

## 1.1. Conceptos básicos

**Definición 1.1.1.** *Un* ***espacio*** $S$ *es una pareja* $(P_S, L_S)$ *donde* $P_S$ *es un conjunto no–vacío y* $L_S$ *es un conjunto no–vacío de subconjuntos de* $P_S$*. Los elementos de* $P_S$ *se llaman* ***puntos*** *de* $S$ *y los elementos de* $L_S$ *se llaman* ***líneas*** *o* ***bloques*** *de* $S$*.*

Hay diversos tipos de espacios dependiendo de las propiedades que cumplen sus puntos y sus líneas. Nosotros estudiaremos los espacios llamados *planos proyectivos*.

**Definición 1.1.2.** *Un* ***plano proyectivo*** *es un espacio* $\Pi$ *que satisface los siguientes axiomas:*

- *(PP1) Cualesquiera dos puntos están en una única línea.*
- *(PP2) Cualesquiera dos líneas tienen elementos en común.*
- *(PP3) Existen cuatro puntos tales que cualesquiera tres de ellos no están en una línea común.*

**Observación 1.1.1.** *Un espacio* $C$ *que cumple (PP1) y (PP2) recibe el nombre de* ***configuración cerrada****. Una configuración cerrada que no cumple (PP3) recibe el nombre de* ***plano degenerado****. Es fácil ver que solo hay tres tipos de planos degenerados:*

- *Si alguna línea de* $C$ *tiene a todos los puntos de* $C$*. En este caso se tiene que* $L_C = \{P_C\}$ *o* $L_C = \{\{P\}, P_C\}$ *donde* $P \in P_C$*.*
- *En caso contrario,* $C$ *tiene al menos 3 puntos que no están en una línea común y* $L_C = \{P_C \setminus \{P\}, \{P, Q\}_{Q \in P_C \setminus \{P\}}\}$ *donde* $P \in P_C$*.*

Sea $\Pi$ un plano proyectivo. Veamos un poco de terminología y notación:

- Si $A \in P_\Pi$, $l \in L_\Pi$ y $A \in l$ decimos que $A$ incide en $l$, $l$ incide en $A$, $A$ está en $l$ o $l$ pasa por $A$.

- Si $R \subseteq P_\Pi$, $l \in L_\Pi$ y $R \subseteq L_\Pi$ se dice que los elementos de $R$ son colineales. Si $A \in P_\Pi$, $H \subseteq L_\Pi$ y $A \in l\ \forall l \in H$ se dice que los elementos de $H$ concurren en $A$.

- Para $A \in P_\Pi$ definimos $b_\Pi(A) = \{l \in L_\Pi : A \in l\}$, el haz de líneas que pasa por $A$.

- Si $\{A, B\} \subseteq P_\Pi$ a la única línea $l$ que contiene a ambos puntos se le denota $AB$ o $BA$ y decimos que $l$ une $A$ con $B$.

- Un **triángulo** es un conjunto que consta de tres puntos no–colineales $A, B, C$ junto con las líneas $AB, BC, CA$.
 Se denota $\Delta = \langle A, B, C, BC, CA, AB\rangle$ o simplemente $ABC$.

- Un **cuadrángulo** es un conjunto de cuatro puntos tales que cualesquiera tres de ellos no son colineales.

- Un **cuadrilátero** es un conjunto de cuatro líneas tales que cualesquiera tres de ellas no son concurrentes.

**Proposición 1.1.1.** *Sea $\Pi$ un plano proyectivo. Si $l, m \in L_\Pi$ y $l \neq m \Rightarrow |l \cap m| = 1$. En este caso, si $l \cap m = \{A\}$ escribimos $A = l \cap m$.*

*Demostración.* Se tiene que $|l \cap m| \geq 1$ por (PP2). Si $|l \cap m| \geq 2$ se contradice el axioma (PP1). $\square$

**Proposición 1.1.2.** *Todo plano proyectivo admite al menos un cuadrilátero.*

*Demostración.* Sea $\Pi$ un plano proyectivo. Por (PP3) $\Pi$ admite al menos un cuadrángulo, digamos $\{A, B, C, D\}$. Consideremos las líneas $AB$, $BC$, $CD$ y $DA$ y supongamos que tres de ellas, digamos $AB$, $CD$ y $DA$, concurren en el punto T. Notamos que, como $\{A, B, C, D\}$ es un cuadrángulo, las cuatro líneas en cuestión son distintas entre sí.

Como $A, T \in AB \cap DA$ se sigue que $A = T$ de la proposición anterior. De manera similar, considerando las líneas $CD$ y $DA$, obtenemos que $T = D$ lo cual contradice que $A, B, C$ y $D$ son distintos entre sí.

$\therefore \{AB, BC, CD, DA\}$ es un cuadrilátero. $\square$

**Proposición 1.1.3.** *Sean $\Pi$ un plano proyectivo y $l, m \in L_\Pi$, $l \neq m$. Entonces $l \cup m \subsetneq P_\Pi$.*

*Demostración.* Supongamos, al contrario, que $l \cup m = P_\Pi$. Sea $\{A, B, C, D\}$ un cuadrángulo de $\Pi$. Por hipótesis, $\{A, B, C, D\} \subseteq l \cup m$ de modo que podemos suponer $\{A, B\} \subseteq l$ y $\{C, D\} \subseteq m$ al ser $\{A, B, C, D\}$ un cuadrángulo. Sea $X = AC \cap BD \in l \cup m$.

Supongamos que $X \in l = AB$. Como $A, B$ y $C$ no son colineales, $AB \neq AC$ y entonces $A = AB \cap AC = X \in BD$ lo cual es imposible. De manera similar, $X \in m$ es imposible y entonces $X \in P_\Pi \setminus (l \cup m)$ lo cual es una contradicción.

$\therefore l \cup m \subsetneq P_\Pi$. $\square$

**Teorema 1.1.1.** *Sea $\Pi$ un plano proyectivo.*

1. *Si $l, m \in L_\Pi$ entonces $|l| = |m|$.*

*2. Si* $A \in P_\Pi$ *y* $l \in L_\Pi$ *entonces* $|b_\Pi(A)| = |l|$.

*Demostración.* 1. Supongamos que $l \neq m$. Por la proposición anterior, encontramos $O \in P_\Pi \setminus (l \cup m)$. Definimos $f : l \to m$ como $f(X) = OX \cap m \ \forall X \in l$. Notamos que $O \in P_\Pi \setminus (l \cup m)$ implica $OW \neq m, l \ \forall W \in P_\Pi$ y así $|OX \cap m| = 1 \ \forall X \in l$ i.e. f está bien definida en $l$.

Ahora, si $Y \in m \setminus l$ entonces $Y = f(Z)$ donde $Z = OY \cap l$ pues en este caso, $OZ = OY$ y así $OZ \cap m = OY \cap m = Y$. Si $Y = l \cap m$ entonces $f(Y) = Y$. Supongamos que $X, X' \in l$ y $f(X) = f(X')$. Entonces $X = Of(X) \cap l = Of(X') \cap l = X'$ $\therefore$ f es una biyección y $|l| = |m|$.

2. Hay dos posibilidades:

- $A \notin l$: Es claro que $f : b_\Pi(A) \to l$, $f(m) = m \cap l \ \forall m \in b_\Pi(A)$ es una biyección y por lo tanto $|b_\Pi(A)| = |l|$.
- $A \in l$: Como $\Pi$ admite al menos un cuadrilátero $\exists m \in L_\Pi$ tal que $A \notin m$ y así $|b_\Pi(A)| = |m| = |l|$.

□

Decimos que un plano proyectivo es finito si cada línea tiene un número finito de puntos y que es infinito en caso contrario. Usando el teorema anterior tenemos el siguiente:

**Teorema 1.1.2.** *Sea* $\Pi$ *un plano proyectivo finito. Entonces existe un entero positivo* $n \geqslant 2$ *tal que:*

- $|l| = n + 1 \ \forall l \in L_\Pi$
- $|b_\Pi(A)| = n + 1 \ \forall A \in P_\Pi$
- $|P_\Pi| = |L_\Pi| = n^2 + n + 1$

*Al número* $n$ *se le llama el* ***orden*** *de* $\Pi$*. Se escribe* $o(\Pi) = n$.

*Demostración.* Del teorema anterior tenemos que $|b_\Pi(A)| = |l| = k \ \forall A \in P_\Pi, \forall l \in L_\Pi$ para algún $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Sea $\{A, B, C, D\}$ un cuadrángulo de $\Pi$. Notamos que $AB \cap CD \in AB \setminus \{A, B, C, D\}$ y así podemos escribir $k = n + 1$ para algún $n \geqslant 2$.

Sea $A \in P_\Pi$ cualquiera. Tenemos que cada punto de $\Pi$ distinto de A está en una única línea en $b_\Pi(A)$ por (PP1). Como cada línea tiene $n$ puntos distintos de $A$ se tiene que $|P_\Pi| - 1 = |P_\Pi \setminus \{A\}| = |b_\Pi(A)| \cdot n = (n + 1) \cdot n = n^2 + n$ y entonces $|P_\Pi| = n^2 + n + 1$. Ahora $|P_\Pi| \cdot (n+1)$ es el número de puntos multiplicado por el número de líneas por punto. Como cada línea tiene $n + 1$ puntos, se sigue que cada línea se cuenta $n + 1$ veces en el cálculo anterior y así

$$|L_\Pi| = \frac{|P_\Pi| \cdot (n + 1)}{(n + 1)} = |P_\Pi| = n^2 + n + 1$$

□

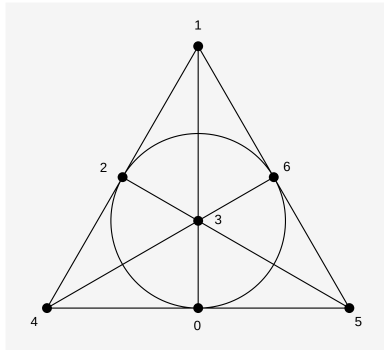


Figura 1.1: Plano de Fano

El teorema anterior sugiere la siguiente pregunta: Dado $n$ un entero positivo ¿existe algún plano proyectivo de orden $n$?. Este es uno de los problemas fundamentales acerca de los planos proyectivos. Más adelante desarrollaremos algunos métodos que nos permitirán ver que dicho problema es equivalente a otros que surgen en otras ramas de las matemáticas. De momento enunciamos un célebre teorema debido a Bruck y Ryser que muestra la imposibilidad de la existencia de un plano proyectivo con un orden dado. La demostración se omite pues utiliza resultados de teoría de números que son ajenos al contexto de este trabajo (para más detalles, ver [5]).

**Teorema** (Bruck–Ryser)**.** *Si existe un plano proyectivo de orden $n$ y $n \equiv 1$ ó $n \equiv 2 \pmod 4$ entonces $n = l^2 + m^2$ p.a. $l, m \in \mathbb{Z}$.*

Éste teorema, por ejemplo, descarta la existencia de planos proyectivos de orden 6 y 14 pero no restringe la existencia de un plano proyectivo de orden 10. De hecho se probó, computacionalmente, que no existe un plano proyectivo de orden 10 lo cual muestra que no es válido el recíproco.

**Observación 1.1.2.** *Del Teorema 1.1.2 podemos concluir que si $\Pi$ es cualquier plano proyectivo, finito o infinito, entonces $|P_\Pi|, |L_\Pi| \geq 7$ y $|l|, |b_\Pi(A)| \geq 3$ $\forall l \in L_\Pi$, $\forall A \in P_\Pi$. Veamos un ejemplo en donde se dan las igualdades anteriores:*

**Ejemplo 1** (Plano proyectivo de los 7 puntos)**.** *También conocido como plano de Fano, lo denotaremos $\mathfrak{F}$ y está definido como sigue:*

$$P_{\mathfrak{F}} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$L_{\mathfrak{F}} = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{0, 4, 5\}, \{1, 5, 6\}, \{0, 2, 6\}, \{0, 1, 3\}\}$$

*Se suele representar como en la Figura 1.1.*

El siguiente ejemplo es sumamente importante

**Ejemplo 2.** *Sea $K$ un campo no–conmutativo. Sea $V = K^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Definimos la siguiente relación en $V$: $(x_1, x_2, x_3) \sim (x_1', x_2', x_3') \Leftrightarrow \exists \lambda \in K \setminus \{0\}$ tal que $x_i' = x_i\lambda$ para*

*$i = 1, 2, 3$ (nótese que estamos multiplicando $\lambda$ por la derecha). Es fácil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia en $V$. A la clase de equivalencia módulo $\sim$ de $(x, y, z) \in V$ la denotamos $[x : y : z]$ y se dice que $[x : y : z]$ son las **coordenadas homogéneas** del punto $(x, y, z)$.*
*Definimos el **plano proyectivo sobre** $K$, denotado $\Pi_2(K)$, de la siguiente manera:*

$$P_{\Pi_2(K)} = \{[x : y : z] : (x, y, z) \in V\}$$
$$L_{\Pi_2(K)} = \{[l, m, n] : (l, m, n) \in V\}$$

*donde $[x : y : z] \in [l, m, n] \Leftrightarrow lx + my + nz = 0$. Nótese que para determinar los puntos de $[l, m, n]$ se multiplica por la izquierda de modo que la ecuación anterior, efectivamente, define un conjunto de clases de equivalencia. Es fácil verificar que se satisfacen (PP1), (PP2) y (PP3).*
*Si $K$ es finito entonces es un campo (a este resultado se le conoce como "pequeño teorema de Wedderburn", ver [6].) y $K \cong GF(q)$ donde $q$ es potencia de algún primo (ver [2]). En este caso, el plano proyectivo sobre $K$ se denota $\Pi_2(q)$. Es fácil ver que $\Pi_2(q)$ tiene $q^2 + q + 1$ puntos y por lo tanto $o(\Pi_2(q)) = q$.*

Tenemos que $\mathfrak{F}$ y $\Pi_2(2)$ son planos proyectivos de orden 2. Sin embargo, no está claro si son esencialmente distintos o si solamente son dos representaciones diferentes de un mismo plano proyectivo. Es por este tipo de circunstancias que se introduce el siguiente concepto.

**Definición 1.1.3.** *Sean $\Pi$, $\Pi'$ dos planos proyectivos. Decimos que $\Pi$ es isomorfo a $\Pi'$, denotado $\Pi \cong \Pi'$, si existe $f : P_\Pi \to P_{\Pi'}$ biyectiva tal que $f[l] \in L_{\Pi'}$ $\forall l \in L_\Pi$. En tal caso, se dice que la función $f$ es un **isomorfismo de planos proyectivos**.*

**Observación 1.1.3.** *Notamos lo siguiente:*

- *$f^{-1}[l'] \in L_\Pi$ $\forall l' \in L_{\Pi'}$. Efectivamente, si $\{P, Q\} \subseteq l'$ entonces $\exists! X, Y \in P_\Pi$, $X \neq Y$ tales que $f(X) = P$ y $f(Y) = Q$. Por hipótesis, $f[XY] = PQ$ y así $f^{-1}[l'] = f^{-1}[PQ] = XY \in L_\Pi$.*

- *De lo anterior se sigue que la relación $\cong$ es de equivalencia en la clase de los planos proyectivos.*

- *Si $\Pi$ y $\Pi'$ son finitos y $\Pi \cong \Pi'$ entonces $o(\Pi) = o(\Pi')$.*

**Proposición 1.1.4.** *Hay un único plano de orden dos salvo isomorfismo.*

*Demostración.* Sea $\Pi$ un plano proyectivo de orden dos. Entonces $|P_\Pi| = 7$ y así escribimos $P_\Pi = \{p_0, p_1, \ldots, p_6\}$. Como $p_1$ está en exactamente tres líneas, podemos suponer, renombrando los elementos de $P_\Pi$ de ser necesario, que dichas líneas son $\{p_1, p_2, p_4\}$, $\{p_0, p_1, p_3\}$ y $\{p_1, p_5, p_6\}$. El punto $p_2$ también está en exactamente tres líneas y una de ellas es $\{p_1, p_2, p_4\}$. Nuevamente, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que las otras dos líneas son $\{p_2, p_3, p_5\}$ y $\{p_0, p_2, p_6\}$. Los puntos $p_0$ y $p_4$ están en una única línea cuyo tercer punto solamente puede ser $p_5$ por (PP1). De manera similar, $\{p_3, p_4, p_6\} \in L_\Pi$. Así pues, $f : P_\Pi \to P_{\mathfrak{F}}$, $f(p_i) = i$ es un isomorfismo. □

El siguiente concepto es sumamente útil en el estudio de los planos proyectivos pues tiene la virtud de producir resultados nuevos de manera inmediata.

**Definición 1.1.4.** *Sea* $\Pi$ *un plano proyectivo. Definimos el* ***plano (proyectivo) dual*** $\Pi^*$ *de* $\Pi$ *como* $P_{\Pi^*} = L_\Pi$, $L_{\Pi^*} = \{b_\Pi(A) : A \in P_\Pi\}$.

**Teorema 1.1.3.** *Si* $\Pi$ *es un plano proyectivo entonces su dual* $\Pi^*$ *también lo es.*

*Demostración.* Sea $\{l, m\} \subseteq L_\Pi = L_{\Pi^*}$. Entonces $|l \cap m| = 1$ y así $l, m \in b_\Pi(l \cap m) \in L_{\Pi^*}$ pues $l \cap m \in P_\Pi$. Por lo tanto $\Pi^*$ satisface (PP1).

Sean $b_\Pi(A), b_\Pi(B) \in L_{\Pi^*}$. Si $A = B$ entonces $b_\Pi(A) = b_\Pi(B)$ y así $|b_\Pi(A) \cap b_\Pi(B)| = |b_\Pi(A)| \geq 3$. Si $A \neq B$ entonces $AB \in b_\Pi(A) \cap b_\Pi(B)$. Así las cosas, $b_\Pi(A) \cap b_\Pi(B) \neq \phi$. Por lo tanto $\Pi^*$ satisface (PP2).

Sabemos que $\Pi$ admite al menos un cuadrilátero. Es fácil ver que dicho cuadrilátero da lugar a un cuadrángulo en $\Pi^*$. Por lo tanto $\Pi^*$ satisface (PP3). □

**Ejemplo 3.** *Sea* $q$ *potencia de un primo. Cálculos sencillos muestran que* $\phi : P_{\Pi_2(q)} \to L_{\Pi_2(q)}$ *dada por* $\phi([x : y : z]) = [x, y, z]$ *es biyectiva con* $\phi[[l, m, n]] = b_{\Pi_2(q)}([l : m : n])$. *Es decir,* $\Pi_2(q) \cong (\Pi_2(q))^*$ *mediante* $\phi$.

**Observación 1.1.4.** *Notamos lo siguiente:*

- $(\Pi^*)^* \cong \Pi$. *En efecto, es fácil ver que* $f : P_\Pi \to P_{(\Pi^*)^*}$ *dada por* $f(A) = b_\Pi(A)$ $\forall A \in P_\Pi$ *es un isomorfismo.*

- *Si* $o(\Pi) = n$ *entonces* $|b_\Pi(A)| = n + 1$ $\forall A \in P_\Pi$ *i.e.* $|l| = n + 1$ $\forall l \in L_{\Pi^*}$ *y así* $o(\Pi^*) = n$.

El teorema anterior nos permite establecer uno de los resultados fundamentales en el estudio de los planos proyectivos.

**Teorema 1.1.4** (Principio de dualidad)**.** *Sea* $T$ *cualquier teorema acerca de planos proyectivos. Sea* $T^*$ *el enunciado dual de* $T$, *que se obtiene de* $T$ *intercambiando las palabras:*

$$\begin{aligned} \textit{punto} &\leftrightarrow \textit{línea} \\ \textit{está en} &\leftrightarrow \textit{pasa por} \\ \textit{colineales} &\leftrightarrow \textit{concurrentes} \\ \textit{intersección} &\leftrightarrow \textit{une} \\ &\textit{etc.} \end{aligned}$$

*Entonces* $T^*$ *también es un teorema acerca de planos proyectivos.*

*Demostración.* $T^*$ es un teorema acerca de planos proyectivos duales. Como todo plano proyectivo es, esencialmente, el dual de otro, se sigue que $T^*$ también es un teorema acerca de planos proyectivos. □

## 1.2. Configuraciones

**Definición 1.2.1.** *Sean* $\Pi$ *un plano proyectivo y* $S$ *un espacio. Decimos que* $S$ *es una* ***configuración*** *de* $\Pi$ *si se satisfacen las dos condiciones siguientes:*

- $P_S \subseteq P_\Pi$
- $\forall m \in L_S\ \exists l \in L_\Pi$ *tal que* $m \subseteq l$*. En ésta situación, dicha línea* $l$ *es única por (PP1) e introducimos la siguiente notación:* $m_{L_\Pi} = l$*.*

**Definición 1.2.2.** *Sea* $\Pi$ *un plano proyectivo y* $\Pi_0$ *una configuración de* $\Pi$*. Si* $\Pi_0$ *también es un plano proyectivo, decimos que* $\Pi_0$ *es un* ***subplano*** *de* $\Pi$*. Se denota* $\Pi_0 \leq \Pi$*.*

Si $\Pi$ es un plano proyectivo, el orden de cualquiera de sus subplanos está restringido por el siguiente teorema debido a Bruck.

**Teorema 1.2.1** (Bruck)**.** *Sea* $\Pi$ *un plano proyectivo de orden* $n$ *y* $\Pi_0 \lneq \Pi$, $\Pi_0$ *de orden* $m$*. Entonces* $n = m^2$ *ó* $n \geqslant m^2 + m$*.*

*Demostración.* Como $\Pi_0 \neq \Pi$ se tiene que $m < n$. Sean $l_0 \in L_{\Pi_0}$ y $l = l_{0_{L_\Pi}}$. Como $|l| = n+1$ y $|l_0| = m+1$ se sigue que $l$ tiene $m+1$ elementos de $P_{\Pi_0}$ y $(n+1)-(m+1)$ elementos de $P_\Pi \setminus P_{\Pi_0}$. Sea pues $P \in l \setminus P_{\Pi_0}$. Supongamos que $m \in b_\Pi(P) \setminus \{l\}$ y $|m \cap P_{\Pi_0}| \geqslant 2$. Entonces $\exists m_0 \in L_{\Pi_0}$ tal que $m_0 \subseteq m \cap P_{\Pi_0}$. Ahora $m \neq l$ implica $m_0 \neq l_0$ y como $\Pi_0$ es un plano proyectivo, $m_0 \cap l_0 = Q \in P_{\Pi_0}$. Pero $m_0 \cap l_0 \subseteq m \cap l = P$ y entonces $P = Q \in P_{\Pi_0}$ lo cual es imposible. Por lo tanto $|m \cap P_{\Pi_0}| \leqslant 1\ \forall m \in b_\Pi(P) \setminus \{l\}$.

Como cada elemento de $P_{\Pi_0}$ determina un único elemento en $b_\Pi(P)$ y hay $(m^2+m+1)-(m+1) = m^2$ puntos en $P_{\Pi_0} \setminus l_0$ se sigue que $n+1 = |b_\Pi(P)| \geqslant m^2+1$ o bien $n \geqslant m^2$. Si $n+1 > m^2+1$ entonces $\exists k \in b_\Pi(P)$ tal que $|k \cap P_{\Pi_0}| = 0$. Así las cosas, si $\{h, h'\} \subseteq L_{\Pi_0}$ entonces $h_{L_\Pi} \cap k \neq h'_{L_\Pi} \cap k$ de modo que $m^2+m+1 \leqslant |k| = n+1$ i.e. $n \geqslant m^2+m$ (obsérvese que $n \geqslant m^2+m \Rightarrow n > m^2$ pues $m > 0$). Esto es suficiente para probar el teorema. Sin embargo veremos otro argumento con el fin de obtener una equivalencia importante.

El razonamiento es válido para cada línea de $\Pi_0$. Como hay $m^2+m+1$ líneas en $\Pi_0$ se tiene que $|A_{\Pi_0}| = (m^2+m+1)(n-m)$ donde $A_{\Pi_0} = \{P \in P_\Pi : \exists l \in b_\Pi(P)$ tal que $l \cap P_{\Pi_0}$ contiene un elemento de $L_{\Pi_0}\}$. Ahora $P_{\Pi_0} \subseteq A_{\Pi_0} \subseteq P_\Pi \Rightarrow n^2+n+1 = |P_\Pi| \geq |A_{\Pi_0}| = (m^2+m+1)(n-m) + (m^2+m+1) \Rightarrow 0 \leq (m^2-n)(n-m) \Rightarrow n \geq m^2$ pues $n > m$. Si $n+ > m^2$ entonces $\exists R \in P_\Pi$ tal que $|m \cap P_{\Pi_0}| \leqslant 1\ \forall m \in b_\Pi(R) \setminus \{l\}$ y así, puntos distintos de $\Pi_0$ determinan líneas distintas en $b_\Pi(R)$. Como la totalidad de dichas líneas es $n+1$, se tiene que $n+1 \geqslant m^2+m+1$ i.e. $n \geqslant m^2+m$ (obsérvese que $n = m^2 \Leftrightarrow |P_\Pi| = |A_{\Pi_0}|$). $\square$

La prueba del teorema ilustra la siguiente definición.

**Definición 1.2.3.** *Sea* $S$ *una configuración propia de* $\Pi$*. Si* $S$ *cumple que:*

- $P_\Pi = A_S = \{P \in P_\Pi : \exists l \in b_\Pi(P)$ *tal que* $l \cap P_S$ *contiene un elemento de* $L_S\}$
- $\forall l \in L_\Pi\ l \cap P_S \neq \phi$

*entonces se dice que $S$ es un **conjunto denso o de Baer** de $\Pi$.*

Como consecuencia de la prueba del teorema anterior tenemos el siguiente:

**Teorema 1.2.2.** *Sean $\Pi_0$ y $\Pi$ planos proyectivos de órdenes $m$ y $n$ respectivamente y con $n > m$. Entonces $\Pi_0$ es un subplano de Baer de $\Pi \Leftrightarrow n = m^2 \Leftrightarrow P_\Pi = A_{\Pi_0} \Leftrightarrow \forall l \in L_\Pi$ $l \cap P_{\Pi_0} \neq \phi$*

## 1.3. Planos afines

Concluimos este capítulo con el concepto de plano afín y algunas de sus propiedades. Como veremos, los planos afines y los planos proyectivos están fuertemente relacionados.

Sean $\Pi$ un plano proyectivo y $l \in L_\Pi$. Consideramos el espacio $\Pi^l$ donde $P_{\Pi^l} = P_\Pi \setminus l$ y $L_{\Pi^l} = \{m^l = m \setminus (m \cap l) : m \in L_\Pi \setminus \{l\}\}$. Si $\{X, Y\} \subseteq P_{\Pi^l} \subseteq P_\Pi$ entonces $\{X, Y\} \subseteq (XY)^l \in L_{\Pi^l}$. Así pues, el espacio $\Pi^l$ satisface el axioma (PP1) (la unicidad es evidente).

Veamos que $\Pi^l$ no satisface el axioma (PP2). Sean $A \in l$ y $k, m \in b_\Pi(A) \setminus \{l\}$. Tenemos que $k^l, m^l \in L_{\Pi^l}$ pero $k^l \cap m^l = \phi$ ya que $k \cap m = A \notin P_{\Pi^l}$. Ahora observemos lo siguiente. Si $B \in P_{\Pi^l} \setminus m^l$ se tiene que $AB \in L_\Pi \setminus \{l\}$ y $(AB)^l \cap m^l = \phi$. Claramente $(AB)^l$ es única en $L_{\Pi^l}$ con la propiedad anterior pues $\Pi$ satisface (PP1).

Ahora veamos que sucede con el axioma (PP3). Sea $\{A, B, C, D\}$ un cuadrángulo en $\Pi$. Entonces $S = \{A, B, C, D\} \cap l$ consta de 0, 1 ó 2 elementos. En el primer caso, $A, B, C \in P_{\Pi^l}$ y no están los tres en un elemento de $L_{\Pi^l}$. Si $S = \{D\}$, $A, B, C$ siguen cumpliendo lo anterior. Finalmente, si $S = \{C, D\}$ encontramos $X \in P_\Pi \setminus (l \cup AB)$ y entonces $A, B, X \in P_{\Pi^l}$ y no están los tres en un elemento de $L_{\Pi^l}$.

Las observaciones anteriores dan lugar a la siguiente definición:

**Definición 1.3.1.** *Un **plano afín** es un espacio $\Lambda$ que satisface los siguientes axiomas:*

- *(A1) Cualesquiera dos puntos están en una única línea.*
- *(A2) Dada cualquier línea y cualquier punto fuera de ella, existe una única línea que pasa por el punto dado y que no interseca a la línea dada.*
- *(A3) Existen tres puntos no-colineales.*

**Ejemplo 4** (Plano euclidiano)**.** *Sea $\mathcal{E}$ el espacio cuyos puntos son parejas ordenadas $(x, y)$ de números reales. Una línea de $\mathcal{E}$ es un conjunto de puntos $(x, y)$ que satisfacen una ecuación de la forma $y = ax + b$ ó $x = c$ p.a. $a, b, c \in \mathbf{R}$ fijos. Es fácil ver que $\mathcal{E}$ es un plano afín.*

La discusión anterior se resume en el siguiente:

**Teorema 1.3.1.** *Sean $\Pi$ un plano proyectivo y $l \in L_\Pi$. Entonces $\Pi^l$ es un plano afín.*

**Notación 1.3.1.** *Si $k \in L_{\Pi^l}$ entonces $k = m^l$ p.a. $m \in L_\Pi \setminus \{l\}$. En este caso, escribimos $k_l = m$.*

**Definición 1.3.2.** *Sean $\Lambda$ un plano afín y $l, m \in L_\Lambda$. Decimos que $l$ es paralela a $m$, denotado $l \parallel m$, si $l = m$ ó $l \cap m = \phi$.*

**Proposición 1.3.1.** *En cualquier plano afín la relación de paralelismo es de equivalencia. Más aún, cada punto está en exactamente una línea de cada clase.*

*Demostración.* La reflexividad y la simetría son inmediatas. Sean $l, m, n$ líneas tales que $l \parallel m$ y $m \parallel n$. Si dos de ellas son iguales, es inmediato que $l \parallel n$. Supongamos pues que las tres líneas en cuestión son distintas entre sí. Si $A \in l \cap m$ entonces $A \notin m$ por hipótesis y así, $A$ está en dos líneas distintas que no intersecan a $m$ lo cual contradice (A2). Por lo tanto $l \parallel n$ y la relación de paralelismo es de equivalencia. Denotamos $[l]$ a la clase de equivalencia del elemento $l \in L_\Lambda$.

Ahora, sean $A$ un punto y $l$ una línea cualesquiera. Si $A \in l$ no hay nada más que hacer pues $l \in [l]$. Si $A \notin l$, por (A2) encontramos una línea $m$ que pasa por $A$ y que no interseca a $l$. Entonces $l$ y $m$ son paralelas de modo que $A \in m \in [l]$. La unicidad se sigue inmediatamente de la definición de paralelismo. $\square$

La noción de isomorfismo de planos afines es prácticamente igual a la del caso proyectivo: dos planos afines son isomorfos si existe una biyección entre sus puntos que manda líneas en líneas. Nótese que los primeros dos puntos de la observación 1.1.3 siguen siendo válidos pues la única proposición de tipo geométrico que se utiliza para argumentar su validez es el axioma (A1) (de hecho el tercer punto también es válido y será claro una vez que definamos el orden de un plano afín).

**Observación 1.3.1.** *Si $f : P_\Lambda \to P_{\Lambda'}$ es un isomorfismo de planos afines y $l, m \in L_\Lambda$ entonces $l \parallel m \Leftrightarrow f[l] \parallel f[m]$. Esto se sigue de la definición de paralelismo y la biyectividad de $f$.*

**Proposición 1.3.2.** *Los planos afines $\Pi^l, (\Pi')^{l'}$ son isomorfos si y solamente si existe un isomorfismo de planos proyectivos $f : P_\Pi \to P_{\Pi'}$ tal que $f[l] = l'$.*

*Demostración.* Sea $g : P_{\Pi^l} \to P_{(\Pi')^{l'}}$ un isomorfismo (de planos afines). Definimos $f : P_\Pi \to P_{\Pi'}$ como:

$$f(X) = \begin{cases} g(X), & \text{si } X \notin l \\ (g[m^l])_{l'} \cap l', & \text{si } X \in l \text{ donde } m \in b_\Pi(X) \setminus \{l\} \end{cases}$$

Veamos que $f$ está bien definida en los puntos de $l$. Sean $X \in l$ y $\{m, k\} \subseteq b_\Pi(X) \setminus \{l\}$. Entonces $m^l \parallel k^l$ en $\Pi^l$ y así $g[m^l] \parallel g[k^l]$ en $(\Pi')^{l'}$ con $g[m^l] \neq g[k^l]$. Si $(g[m^l])_{l'} \cap l' \neq (g[k^l])_{l'} \cap l' \Rightarrow (g[m^l])_{l'} \cap (g[k^l])_{l'} \in P_{(\Pi')^{l'}} \Rightarrow g[m^l] \cap g[k^l] \neq \phi$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $f$ está bien definida en $P_\Pi$.

Es claro que $f$ es inyectiva. Ahora, sea $Y \in P_{\Pi'}$. Sea $r \in b_{\Pi'}(Y) \setminus \{l'\}$. Si $Z = (g^{-1}[r^{l'}])_l \cap l$ entonces $f(Z) = Y$ y por lo tanto $f$ es suprayectiva.

Es fácil ver que $f[m] = (g[m^l])_{l'} \in L_{\Pi'}$ y $f[l] = l'$. Por lo tanto $f$ es el isomorfismo buscado.

Ahora supongamos que $f : P_{\Pi} \to P_{\Pi'}$ es un isomorfismo de planos proyectivos tal que $f[l] = l^{'}$. Como $f$ es biyectiva y $f[l] = l^{'}$ se sigue que $g : P_{\Pi^l} \to P_{(\Pi')^{l'}}$ es biyectiva donde $g$ es la restricción de $f$ en $P_{\Pi^l}$.

Si $m^l \in L_{\Pi^l}$ entonces $f[m] \in L_{\Pi'}$ y, como $f$ es biyectiva y $f[l] = l^{'}$, $g[m^l] = f[m]^{l^{'}} \in L_{(\Pi')^{l'}}$ y por lo tanto $g$ es un isomorfismo de planos afines. □

Obtuvimos el concepto de plano afín a partir del de plano proyectivo. Veamos el procedimiento inverso.

**Teorema 1.3.2.** *Dado $\Lambda$ un plano afín existe un plano proyectivo $\Pi$ tal que $\Lambda = \Pi^l$ p.a. $l \in L_{\Pi}$. Además, dicho plano es único salvo isomorfismo.*

*Demostración.* Definimos $\Pi$ de la siguiente manera:

$$P_{\Pi} = P_{\Lambda} \cup \{[l] : l \in L_{\Lambda}\},\ (P_{\Lambda} \cap \{[l] : l \in L_{\Lambda}\} = \phi)$$
$$L_{\Pi} = \{\{l \cup \{[l]\} : l \in L_{\Lambda}\}, \{[l]\}_{l \in L_{\Lambda}}\},\ l_{\infty} = \{[l]\}_{l \in L_{\Lambda}}$$

Para ver que $\Pi$ es un plano proyectivo basta verificar lo siguiente (los casos fáciles se omiten):
Si $[l] \neq [m]$ entonces $[l], [m] \in l_{\infty}$. Si $P \in P_{\Lambda}$ entonces $\exists! k \in L_{\Lambda}$ tal que $P \in k \in [l]$ y así $P, [l] \in k \cup \{k\} \in L_{\Pi}$. Por lo tanto $\Pi$ satisface (PP1) (la unicidad es clara).
Si $l, m \in L_{\Lambda}$ y $l \parallel m$ entonces $[l] = [m]$ de modo que $[l] \in (l \cup \{[l]\} \cap m \cup \{[m]\}$. Por lo tanto $\Pi$ satisface (PP2).
Sean $A, B, C \in P_{\Lambda}$ no–colineales. Como $AB \nparallel BC$ se tiene que $[AB] \neq [BC]$ y así $\{A, C, [AB], [BC]\}$ constituye un cuadrángulo en $\Pi$. Por lo tanto $\Pi$ satisface (PP3).
Así las cosas, $\Pi$ es un plano proyectivo y $\Pi^{l_{\infty}} = \Lambda$ por construcción. Al plano $\Pi$ construido de esta manera lo denotamos $\Pi(\Lambda)$.

Ahora supongamos que $\Lambda = \Pi^l = (\Pi^{'})^{l^{'}}$. Entonces $\mathrm{Id}_{\Lambda}$ es un isomorfismo entre los planos afines $\Pi^l$ y $(\Pi^{'})^{l^{'}}$ y así, en virtud de la proposición anterior, se tiene que $\Pi \cong \Pi^{'}$. □

**Ejemplo 5.** *Al plano $\Pi(\mathcal{E})$ se le conoce como **plano real extendido** o **plano proyectivo real**.*

Si $\Lambda = \Pi^l$ se dice que $\Lambda$ está asociado con $\Pi$ y $l$ ó simplemente, si $l$ no es de particular interés, que $\Lambda$ está asociado con $\Pi$. Observamos que, según la proposición 1.3.2, planos afines no–isomorfos pueden estar asociados al mismo plano proyectivo.

El teorema anterior nos dice que cada plano afín está asociado con un plano proyectivo y que además dicha asociación es única salvo isomorfismo. Así pues, definimos el orden de un plano afín como el orden de cualquier plano proyectivo asociado con el. Finalizamos el capítulo con el siguiente teorema:

**Teorema 1.3.3.** *Sea $\Lambda$ un plano afín de orden $n$. Entonces:*

- $|l| = n \ \forall l \in L_{\Lambda}$
- $|b_{\Lambda}(A)| = n + 1 \ \forall A \in P_{\Lambda}$

- $|P_\Lambda| = n^2, |L_\Lambda| = n^2 + n$
- $|[l]| = n \ \forall l \in L_\Lambda \ y \ |\{[l]\}_{l \in L_\Lambda}| = n + 1$

*Demostración.* Basta considerar $\Pi(\Lambda)$ y usar el teorema 1.1.2. $\square$

# Capítulo 2

# Colineaciones de planos proyectivos

En el capítulo anterior establecimos el concepto de isomorfismo entre planos proyectivos. En este capítulo estudiaremos las propiedades de cierto tipo de isomorfismos y de manera natural surgirá la configuración de Desargues que jugará un papel fundamental en lo que resta de este trabajo.

## 2.1. Conceptos básicos

**Definición 2.1.1.** *Una **colineación** o **automorfismo** de un plano proyectivo o afín es un isomorfismo de dicho plano en sí mismo.*

Es claro que el conjunto de todos los automorfismos de un plano $\Pi$ es un grupo bajo la composición usual de funciones. Denotaremos a este grupo $\Sigma\Pi$ y si no hay riesgo de confusión usaremos simplemente $\Sigma$. Al grupo $\Sigma\Pi$ se le suele llamar **grupo completo de colineaciones** de $\Pi$. Un **grupo de colineaciones** de $\Pi$ es simplemente un subgrupo de $\Sigma\Pi$.

Los siguientes resultados con corolarios de la proposición 1.3.2.

**Proposición 2.1.1.** *Si $f \in \Sigma\Pi^l$ entonces $\exists! g \in \Sigma\Pi$ tal que $g \restriction_{\Pi^l} = f$ y $g[l] = l$*

**Proposición 2.1.2.** $\Pi^l \cong \Pi^m \Leftrightarrow \exists f \in \Sigma\Pi$ *tal que* $f[l] = m$.

**Definición 2.1.2.** *Sean $\alpha \in \Sigma\Pi$, $A \in P_\Pi$ y $l \in L_\Pi$. Decimos que $\alpha$ fija al punto $A$ si $\alpha(A) = A$. Se dice que $\alpha$ fija a la línea $l$ si $\alpha[l] = l$.*

**Observación 2.1.1.** *Nótese que $\alpha[l] = l$ no necesariamente significa $\alpha(Q) = Q$ $\forall Q \in l$. En caso de ser así, se dice que $\alpha$ **fija a la línea** $l$ **puntualmente**. Dualmente, decimos que $\alpha$ **fija al punto** $A$ **linealmente** si fija a cada línea de $b_\Pi(A)$.*

Para $\alpha \in \Sigma\Pi$ definimos los siguientes conjuntos:

$$P_\alpha = \{A \in P_\Pi : \alpha(A) = A\},\ L_\alpha = \{l \cap P_\alpha : l \in L_\Pi, \alpha[l] = l\}$$

**Proposición 2.1.3.** *Si $\alpha \in \Sigma\Pi$, $\mathcal{F}(\alpha) = (P_\alpha, L_\alpha)$ es una configuración cerrada de $\Pi$.*

*Demostración.* Es claro que $\mathcal{F}(\alpha)$ es una configuración de $\Pi$. Sean $A$ y $B$ puntos distintos de $\mathcal{F}(\alpha)$. Como $\alpha$ es biyectiva y manda líneas en líneas se tiene que $\alpha[AB] = \alpha[A]\alpha[B] = AB$ y así $A, B \in AB \cap P_\alpha \in L_\alpha$. Por lo tanto $\mathcal{F}(\alpha)$ cumple (PP1) (la unicidad es inmediata). Si $l \cap P_\alpha, m \cap P_\alpha$ son dos líneas distintas de $\mathcal{F}(\alpha)$, se tiene que $l \neq m$ y entonces $\alpha[l \cap m] = \alpha[l] \cap \alpha[m] = l \cap m$ de modo que $l \cap m \in (l \cap P_\alpha) \cap (m \cap P_\alpha)$. Por lo tanto $\mathcal{F}(\alpha)$ satisface (PP2) y es una configuración cerrada de $\Pi$. □

**Observación 2.1.2.** *Si $\alpha$ fija un cuadrángulo entonces $\mathcal{F}(\alpha) \leqslant \Pi$. En este caso se dice que $\alpha$ es una **colineación planar**. Si $\mathcal{F}(\alpha)$ es un subplano de Baer, se le llama **colineación de Baer**.*

**Proposición 2.1.4.** *Sean $\Pi$ un plano proyectivo y $\mathcal{B}$ una configuración cerrada de Baer de $\Pi$. Entonces $\mathcal{B}$ es un subplano (de Baer) o existen $P \in P_\Pi$ y $l \in L_\Pi$ tales que $P_\mathcal{B} = \{P\} \cup l$ y $L_\mathcal{B} = \{l\} \cup \{m \cap P_\mathcal{B} : m \in b_\Pi(P)\}$.*

*Demostración.* Supongamos que $\mathcal{B}$ no es un subplano. Entonces $\mathcal{B}$ es un plano degenerado y tenemos los siguientes casos (ver la observación 1.1.1):

- $\mathcal{B}$ admite tres puntos no–colineales:
  En este caso, $L_\mathcal{B} = \{P_\mathcal{B} \setminus \{P\}, \{P, Q\}_{Q \in P_\mathcal{B} \setminus \{P\}}\}$ donde $P \in P_\mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ es un configuración de $\Pi$, $\exists l \in L_\Pi$ tal que $P_\mathcal{B} \setminus \{P\} \subseteq l$. Sean $A \in l$ y $m \in b_\Pi(A) \setminus \{l, PA\}$. Por hipótesis $m \cap P_\mathcal{B} \neq \phi$ y como $P \notin m$ se tiene que $m \cap P_\mathcal{B} \in l$ de modo que $A \in P_\mathcal{B}$ y la conclusión se da.

- Alguna línea de $\mathcal{B}$ contiene a todos los puntos de $\mathcal{B}$:
  Como $\mathcal{B}$ es de Baer y $\Pi$ es proyectivo, $\mathcal{B}$ tiene al menos dos puntos y al menos dos líneas. Así las cosas, se tiene que $L_\mathcal{B} = \{\{P\}, P_\mathcal{B}\}$ donde $P \in P_\mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ es un configuración de $\Pi$, $\exists l \in L_\Pi$ tal que $P_\mathcal{B} \subseteq l$. Sean $A \in l$ y $m \in b_\Pi(A) \setminus \{l, PA\}$. Por hipótesis $m \cap P_\mathcal{B} \neq \phi$. Así pues, $m \cap P_\mathcal{B} \in l$ de modo que $A \in P_\mathcal{B}$ y la conclusión se da.

□

**Proposición 2.1.5.** *Sean $\Pi$ un plano proyectivo y $\Pi_0 \leq \Pi$. Si $l \subseteq P_{\Pi_0}$ p.a. $l \in L_\Pi$ entonces $\Pi_0 = \Pi$.*

*Demostración.* Sean $A \in P_\Pi$ y $\{B, C\} \subseteq P_{\Pi_0} \setminus l$ tales que $AB \neq AC$ (esto es posible gracias a que $\Pi_0$ es proyectivo). Sean $X = AB \cap l, Y = AC \cap l \in l \subseteq P_{\Pi_0}$. Así pues, $XB \cap P_{\Pi_0}, YC \cap P_{\Pi_0}$ son líneas distintas de $\Pi_0$ por lo cual $|XB \cap YC \cap P_{\Pi_0}| = 1$. Por lo tanto $P \in P_{\Pi_0}$ i.e. $P_\Pi = P_{\Pi_0}$. Como cada línea de $\Pi$ consta ya de puros puntos de $P_{\Pi_0}$ se tiene que, como $\Pi_0$ es una configuración de $\Pi$, $L_\Pi = L_{\Pi_0}$ y por lo tanto $\Pi_0 = \Pi$. Nótese que si $\Pi$ es finito la conclusión se sigue de que entonces $\Pi$ y $\Pi_0$ tienen el mismo orden. □

## 2.2. Perspectividades y la configuración de Desargues

**Teorema 2.2.1.** *Sean* $\Pi$ *un plano proyectivo y* $\alpha \in \Sigma \setminus \{Id\}$ *una colineación que fija puntualmente a la línea* $l$*. Entonces* $\alpha$ *fija linealmente a algún punto de* $\Pi$*. Más aún,* $\alpha$ *no fija a otros elementos de* $\Pi$*.*

*Demostración.* Veamos que $\mathcal{F}(\alpha)$ es de Baer. Como cada línea de $\Pi$ interseca a la línea $l$, cada línea de $\Pi$ tiene por lo menos un punto de $\mathcal{F}$.
Como $l \subseteq P_\alpha$ se tiene que $l \in L_\alpha$. Ahora, sean $P \in P_\Pi \setminus l$ y $Q \in l$ cualquiera. Si $\alpha(P) = P$ entonces $\alpha[PQ] = \alpha[P]\alpha[Q] = PQ$ y así $P \in PQ$ y $PQ \cap P_\alpha \in L_\alpha$. Si $\alpha(P) \neq P$ consideramos $X = P\alpha(P) \cap l$. Entonces $\alpha[PX] = \alpha[P]\alpha[X] = \alpha[P]X = PX$ de modo que $P \in PX$ y $PX \cap P_\alpha \in L_\alpha$. Por lo tanto $\mathcal{F}(\alpha)$ es de Baer y por la proposición 2.1.3 $\mathcal{F}(\alpha)$ es una configuración cerrada de $\Pi$. Como $l \subseteq P_\alpha$ y $\alpha \neq \mathrm{Id}$, la conclusión se sigue de las proposiciones 2.1.4 y 2.1.5. □

El siguiente teorema es el dual del anterior:

**Teorema 2.2.2.** *Sean* $\Pi$ *un plano proyectivo y* $\alpha \in \Sigma \setminus \{Id\}$ *una colineación que fija linealmente a un punto* $P$*. Entonces* $\alpha$ *fija puntualmente a alguna línea de* $\Pi$*. Más aún,* $\alpha$ *no fija a otros elementos de* $\Pi$*.*

Los dos teoremas anteriores motivan la siguiente definición:

**Definición 2.2.1.** *Sean* $\Pi$ *un plano proyectivo y* $\alpha \in \Sigma\Pi$ *una colineación que fija puntualmente a la línea* $l$ *y linealmente al punto* $V$*. Entonces, decimos que* $\alpha$ *es una* $(V, l)-$ ***perspectividad*** *o una* $(V, l)-$ ***colineación central****. El punto* $V$ *y la línea* $l$ *son el* ***centro*** *y el* ***eje*** *de* $\alpha$ *respectivamente. La colineación* $\alpha$ *recibe el nombre de* $(V, l)-$ ***elación*** *si* $V \in l$*. Si* $V \notin l$ *se le llama* $(V, l)-$ ***homología****. Por conveniencia, Id es tanto elación como homología.*

**Observación 2.2.1.** *Si* $\alpha \in \Sigma\Pi$ *es una* $(V, l)-$ *perspectividad entonces* $V, P, \alpha(P)$ *son colineales* $\forall P \in P_\Pi$*.*

Sean $\Pi$ un plano proyectivo, $l$ una línea y $V$ un punto. Es claro que el conjunto de todas las $(V, l)-$ perspectividades bajo la composición usual de funciones constituye un subgrupo de $\Sigma\Pi$. Dicho subgrupo será denotado $\Sigma_{(V,l)}\Pi$ o simplemente $\Sigma_{(V,l)}$ si no hay riesgo de confusión.

**Proposición 2.2.1.** *Sean* $\Pi$ *un plano proyectivo y* $k, l \in L_\Pi$*. Definimos* $\Sigma_{(k,l)} = \bigcup_{A \in k} \Sigma_{(A,l)}$*. Entonces* $\Sigma_{(k,l)}$ *es un subgrupo de* $\Sigma$*.*

*Demostración.* Basta verificar la cerradura. Sean $\alpha \in \Sigma_{(A,l)}$, $\beta \in \Sigma_{(B,l)}$ con $A, B \in k$, $A \neq B$. Es claro que $\alpha\beta$ fija puntualmente a $l$. Sea pues $V$ el centro de $\alpha\beta$. Supongamos que $V \notin k$. Como $VB = (\alpha\beta)[VB] = \alpha[\beta[VB]] = \alpha[VB]$ se tiene que, por el Teorema 2.2.1, $A \in VB$ i.e $V \in VB = k$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $V \in k$ y $\alpha\beta \in \Sigma_{(k,l)}$ como se quería. □

**Proposición 2.2.2.** *Sea* $\Pi$ *un plano proyectivo. Si* $\alpha \in \Sigma_{(V,l)}$ *y* $\beta \in \Sigma$ *entonces* $\beta\alpha\beta^{-1} \in \Sigma_{(\beta(V),\beta[l])}$*.*

*Demostración.* Sea $X \in \beta[l]$. Entonces $\beta^{-1}(X) \in l$ de modo que $\alpha(\beta^{-1}(X)) = \beta^{-1}(X)$ y así $(\beta\alpha\beta^{-1})(X) = X$ i.e. $\beta\alpha\beta^{-1}$ fija puntualmente a $\beta[l]$. De manera similar, $\beta\alpha\beta^{-1}$ fija linealmente a $\beta(V)$. □

**Proposición 2.2.3.** *Sea $\Pi$ un plano proyectivo. Si $\alpha \in \Sigma_{(A,l)} \setminus \{Id\}$ y $\beta \in \Sigma_{(B,l)} \setminus \{Id\}$ con $A \neq B$ entonces $\alpha \circ \beta \in \Sigma_{(C,l)} \setminus \{Id\}$ p.a. $C \in P_\Pi \setminus \{A, B\}$*

*Demostración.* Supongamos que $\alpha\beta = \mathrm{Id}$. Como $\alpha$ y $\beta$ son invertibles, se tiene que entonces que $\beta = \alpha^{-1} \in \Sigma_{(A,l)}$ lo cual es imposible pues $A \neq B$.
En virtud de la proposición 2.2.1, tenemos que $\alpha\beta$ fija linealmente a algún punto $C \in AB$. Supongamos que $C = A$. Sea $m \in b_\Pi(A) \setminus \{l, AB\}$. Entonces $(\alpha\beta)[m] = [m] \Rightarrow \beta[m] = \alpha^{-1}[m] = m \Rightarrow m \in b_\Pi(B)$ por el Teorema 2.2.1 lo cual es imposible. Analogamente, $C = B$ es imposible. □

El siguiente teorema será util más adelante:

**Teorema 2.2.3.** *Sea $\Pi$ un plano proyectivo. Si $\Sigma_{(P,l)}$ es no–trivial para dos puntos distintos en $l$ entonces $\Sigma_{(l,l)}$ es abeliano.*

*Demostración.* Veamos primero que elaciones no–triviales con mismo eje y centros distintos conmutan. Sean $\alpha \in \Sigma_{A,l} \setminus \{\mathrm{Id}\}$ y $\beta \in \Sigma_{B,l} \setminus \{\mathrm{Id}\}$, $A \neq B$. Por la proposición 2.2.2, $\beta^{-1}\alpha\beta \in \Sigma_{(\beta^{-1}(A),\beta^{-1}[l])}$ y como $l$ es el eje de $\beta$ se sigue que $\beta^{-1}\alpha\beta \in \Sigma_{(A,l)}$. De manera similar, $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha \in \Sigma_{(B,l)}$.
Ahora $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta = \alpha^{-1}(\beta^{-1}\alpha\beta) \in \Sigma_{(A,l)}$. También
$\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta = (\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha)\beta \in \Sigma_{(B,l)}$ de modo que $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta \in \Sigma_{(A,l)} \cap \Sigma_{(B,l)} = \{\mathrm{Id}\}$ puesto que $A \neq B$. Por lo tanto $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Para probar que $\Sigma_{(l,l)}$ es abeliano nos resta verificar que dos elementos suyos con el mismo centro conmutan. Sean $\alpha, \alpha \in \Sigma_{(A,l)} \setminus \{\mathrm{Id}\}$ y $\beta \in \Sigma_{(B,l)} \setminus \{\mathrm{Id}\}$ con $B \neq A$. Por lo anterior, $\alpha_1\beta = \beta\alpha_1$ y $\alpha_2\beta = \beta\alpha_2$. Por la proposición 2.2.3 el centro de $\alpha_1\beta$ es distinto de $A$. Esto implica que $\alpha_1\beta$ conmuta con $\alpha_2$ y así $\alpha_2(\alpha_1\beta) = (\alpha_1\beta)\alpha_2 = \alpha_1(\beta\alpha_2) = \alpha_1\alpha_2\beta$ pues $\alpha_2\beta = \beta\alpha_2$. Cancelando $\beta$ tenemos que $\alpha_1\alpha_2 = \alpha_2\alpha_1$ y $\Sigma_{(l,l)}$ es abeliano. □

Sea $\alpha \in \Sigma_{(V,l)}\Pi$. ¿Está $\alpha$ completamente determinada por $V$ y $l$? Resulta que no. Sea $\Pi = \Pi(\mathcal{E})$. Es fácil ver que si $k \in R \setminus \{0\}$, la función $f_k : P_\Pi \to P_\Pi$ definida como $f_k(x, y) = (kx, ky)\ \forall (x, y) \in R^2$ y $f_k([l]) = [l]\ \forall [l] \in l_\infty$ es una $((0, 0), l_\infty)-$perspectividad y claramente $k \neq k' \Rightarrow f_k \neq f_{k'}$. El siguiente resultado nos dice cuando una colineación central está completamente determinada.

**Proposición 2.2.4.** *Una colineación central queda determinada por su centro $V$, su eje $l$ y su efecto en cualquier otro punto $X \notin \{V\} \cup l$.*

*Demostración.* Sean $\alpha \in \Sigma_{(V,l)}\Pi$ y $X \notin \{V\} \cup l$. Como $\alpha$ es un automorfismo, $\alpha[l] = l$ y $X \notin l$ se sigue que $\alpha(X) \notin l$. Sea $Y \notin VX \cup l$. Definimos $k = XY \cap l$, un punto fijo de $\alpha$. Como $Y = VY \cap KX$ se sigue que $\alpha(Y) = VY \cap K\alpha(X)$ (ver las figuras 2.1 y 2.2).
Así pues, hemos determinado $\alpha(Y)$ para todos los puntos $Y \notin VX$. Si $Z \in VX$, hallamos $X' \notin VX \cup l$ y usamos $X', \alpha(X')$ como en la discusión anterior para obtener $\alpha(Z)$. □

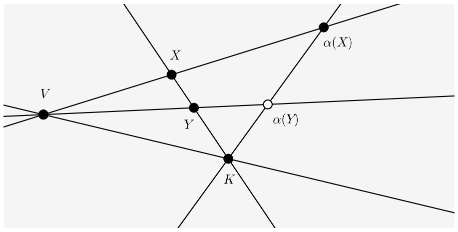


Figura 2.1: $\alpha$ una homología

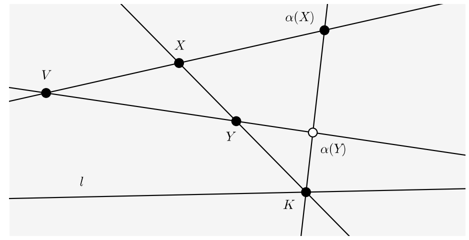


Figura 2.2: $\alpha$ una elación

**Ejemplo 6.** *Si $\alpha \in \Sigma_{(V,l)}\mathfrak{F} \setminus \{Id\}$ entonces $\alpha$ es una elación i.e. $V \in l$. Para ver esto supongamos, al contrario, que $V \notin l$. Sea $m \in b_{\mathfrak{F}}(V)$. Como $o(\mathfrak{F}) = 3$, $\exists! X \in m \setminus \{V, l \cap m\}$ i.e. $m = \{V, X, l \cap m\}$. Como $\alpha \in \Sigma_{(V,l)}\mathfrak{F}$, se tiene que $\alpha(X) \in \{V, X, l \cap m\} \setminus \{V, l \cap m\}$ y así $\alpha(X) = X$. Entonces $\alpha = Id$ según el teorema anterior lo cual es imposible. Por lo tanto $V \in l$ y $\alpha$ es una elación.*

Sean $\alpha \in \Sigma_{(C,l)}\Pi \setminus \{\mathrm{Id}\}$ y $X, Y, Z$ puntos fuera de $\{C\} \cup l$ tales que $\{C, X, Y, Z\}$ es un cuadrángulo. Sean $X', Y', Z'$ los puntos $\alpha(X), \alpha(Y), \alpha(Z)$ respectivamente. Sean $U = YZ \cap l, V = ZX \cap l, W = XY \cap l$.
Supongamos que conocemos $X'$. Según la discusión de la proposición anterior, $Y'$ queda determinado por $X'$ como $Y' = CY \cap WX'$. De manera semejante, podemos determinar $Z'$ a partir de $X'$ o $Y'$ como $Z' = CZ \cap VX' = VZ \cap CX'$. La situación anterior se ilustra en las figuras 2.3 y 2.4.

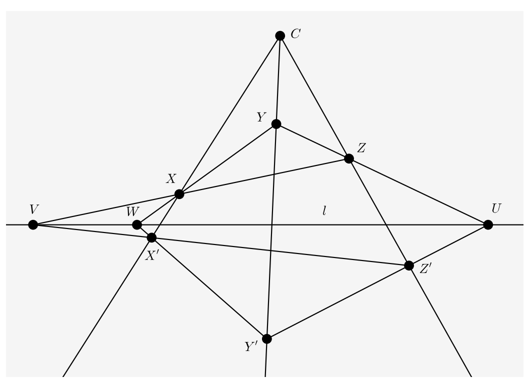


Figura 2.3: $\alpha$ una homología

**Definición 2.2.2.** *Sean $\Pi$ un plano proyectivo, $\Delta_i = \langle A_i, B_i, C_i, a_i, b_i, c_i \rangle$, $i = 1, 2$ triángulos distintos en $\Pi$ y $V \in P_\Pi, l \in L_\Pi$. Decimos que $\Delta_1$ **y** $\Delta_2$ **están en perspectiva desde** $V$ si $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$ concurren en $V$. Dualmente, decimos que $\Delta_1$ **y** $\Delta_2$ **están en perspectiva desde** $l$ si $a_1 \cap a_2, b_1 \cap b_2, c_1 \cap c_2$ están en $l$. Al punto $V$ y a la línea $l$ se les llama **centro** y **eje** de perspectividad respectivamente.*

La discusión anterior se resume en el siguiente:

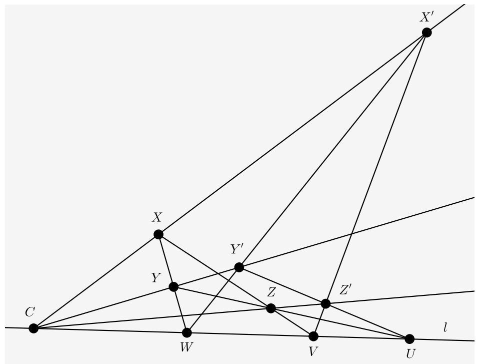


Figura 2.4: $\alpha$ una elación

**Teorema 2.2.4.** *Sean $\alpha \in \Sigma_{(C,l)}\Pi$ y $\Delta$ un triángulo tal que ni sus puntos ni sus lados pertenecen a $\mathcal{F}(\alpha)$. Entonces $\Delta$ y $\alpha[\Delta]$ están en perspectiva desde $C$ y desde $l$.*

**Observación 2.2.2.** *Si $\alpha \in \Sigma_{(C,l)}\Pi$ es una homología no–trivial y $o(\Pi) \geq 3$, siempre podemos encontrar un triángulo tal que $\alpha$ no fija a ninguno de sus elementos de la siguiente manera. Sean $W \in l$, $X \in P_\Pi \setminus (CW \cup l)$ y $m \in b_\Pi(X) \setminus \{XC, XW\}$. Si $Y \in m \setminus \{X, m \cap l, m \cap CW\}$ y $Z \in CW \setminus \{C, m \cap CW, W\}$ entonces $\{C, X, Y, Z\}$ es un cuadrángulo y $\alpha$ no fija a ninguno de los elementos del triángulo $XYZ$.*

**Definición 2.2.3.** *Sean $\Delta_i = \langle A_i, B_i, C_i, a_i, b_i, c_i \rangle$, $i = 1, 2$ triángulos en perspectiva desde el punto $V$ y la línea $l$. La configuración que consta de los diez puntos $V, A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, a_1 \cap a_2, b_1 \cap b_2, c_1 \cap c_2$ y las diez líneas $l, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, VA_1A_2, VB_1B_2, VC_1C_2$ recibe el nombre de* ***configuración de Desargues*** *si $V \notin l$. Si $V \in l$, se le llama* ***configuración de Desargues pequeña****.*

**Observación 2.2.3.** *La configuración de Desargues consta de 10 puntos y 10 líneas. Cada punto está en tres líneas y cada línea consta de tres puntos. Es por esto que la configuración de Desargues se representa con el símbolo $(10_3)$.*

La figura 2.3 representa una configuración de Desargues mientras que la figura 2.4 representa una configuración de Desargues pequeña. Nótese que las dos definiciones anteriores no dependen de la existencia de perspectividades en el plano $\Pi$ (aunque si están inspiradas en el comportamiento de las perspectividades respecto a triángulos). No se sabe con certeza si $\Sigma\Pi \neq \{\mathrm{Id}\}$ cuando $\Pi$ es finito. Sin embargo, el siguiente teorema debido a Ostrom nos muestra que todo plano proyectivo finito de orden $n \geq 5$ admite al menos una configuración de Desargues.

**Teorema 2.2.5** (Ostrom)**.** *Sea $\Pi$ un plano proyectivo finito de orden $n \geq 5$. Entonces $\Pi$ contiene un par de triángulos en perspectiva desde un punto y desde una línea. Más aún, dichos triángulos son tales que inducen una configuración de Desargues en $\Pi$.*

*Demostración.* Sean $l \in L_\Pi$ y $V \in P_\Pi \setminus l$ cualesquiera. Sean $\{l_1, l_2, l_3\} \subseteq b_\Pi(V)$ y $\{A, B\} \subseteq l \setminus (l_1 \cup l_2 \cup l_3)$ (esto es posible gracias a que $o(\Pi) \geq 5$).

Construimos una función de los puntos de $\{l_1 \setminus \{V, l \cap l_1\}$ en los puntos de $l \setminus \{A, B, l \cap l_1, l \cap l_3\}$ de la siguiente manera: dado $X \in \{l_1 \setminus \{V, l \cap l_1\}$ determinamos $X_2 = AX \cap l_2$ y $X_3 = BX_2 \cap l3$ y definimos $\alpha(X) = XX_3 \cap l$. Es claro que $\alpha$ está bien definida en $\{l_1 \setminus \{V, l \cap l_1\}$ y que $\alpha(X) \in l \setminus \{A, B, l \cap l_1, l \cap l_3\}$ $\forall X \in \{l_1 \setminus \{V, l \cap l_1\}$ (por ejemplo, si $\alpha(X) = A \Rightarrow A, X, X_3$ son colineales $\Rightarrow X_3 \in AX \cap BX_2 = X_2$ i.e. $X_2 = X_3$ lo cual es imposible). Como $|\{l_1 \setminus \{V, l \cap l_1\}| = n-1$ y $|l \setminus \{A, B, l \cap l_1, l \cap l_3\}| = n-3$ se sigue que, por el Principio del Palomar, existen $Y, Z \in \{l_1 \setminus \{V, l \cap l_1\}$ distintos tales que $\alpha(Y) = \alpha(Z)$.
Observamos que si $P, Q \in \{l_1 \setminus \{V, l \cap l_1\}$, los triángulos $PP_2P_3$ y $QQ_2Q_3$ están en perspectiva desde $V$ y, como $PP_2 \cap QQ_2 = A \in l$ y $P_2P_3 \cap Q_2Q_3 = B \in l$, están en perspectiva desde $l$ si y sólo si $PP_3 \cap QQ_3 \in l$ i.e. si y solamente si $\alpha(P) = \alpha(Q)$. Por lo tanto, los triángulos $YY_2Y_3$ y $ZZ_2Z_3$ están en perspectiva desde $V$ y desde $l$. Como $V \notin l$ y $Y, Y_2, Y_3, Z, Z_2, Z_3$ son distintos entre sí y distintos de $V$, se tiene que los triángulos en cuestión inducen una configuración de Desargues.
Nótese que $l_2$ es una línea de la configuración de Desargues que resulta del razonamiento anterior. Si $n = 4$, la función $\alpha$ solo puede tomar el valor $l_2 \cap l$ de modo que $l_2$ tendría 4 puntos de la configuración i.e. no se obtiene una configuración de Desargues auténtica. $\square$

Hemos visto que si $\Pi \neq \mathfrak{F}$, la existencia de una homología no–trivial implica la existencia de al menos una configuración de Desargues en $\Pi$. Como no se sabe si $\Sigma\Pi \neq \{\mathrm{Id}\}$ cuando $\Pi$ es finito, no se sabe si la existencia de una configuración de Desargues en un plano proyectivo finito garantiza la existencia de perspectividades no–triviales en dicho plano. Sin embargo, veremos ahora que la existencia de “suficientes” configuraciones de Desargues equivale a la existencia de perspectividades no–triviales.

**Definición 2.2.4.** *Sean* $\Pi$ *un plano proyectivo,* $V \in P_\Pi$ *y* $l \in L_\Pi$*. Decimos que* $\Pi$ *es* $(V, l)$ *–* ***desarguesiano*** *si para cualesquiera dos triángulos* $\Delta_i = \langle A_i, B_i, C_i, a_i, b_i, c_i \rangle$, $i = 1, 2$ *tales que:*

- $\Delta_1, \Delta_2$ *están en perspectiva desde* $V$ *(*$V \neq A_i, B_i, C_i$ $i = 1, 2$*)*
- $a_1 \cap a_2, b_1 \cap b_2 \in l$

*se sigue que* $c_1 \cap c_2 \in l$

**Definición 2.2.5.** *Sean* $\Pi$ *un plano proyectivo,* $V \in P_\Pi$ *y* $l \in L_\Pi$*. Decimos que* $\Pi$ *es* $(V, l)$ *–* ***transitivo*** *si* $\forall \{X, X'\} \subseteq P_\Pi \setminus (\{V\} \cup l)$ *tales que* $V, X, X'$ *son colineales,* $\exists \alpha \in \Sigma_{(V,l)}\Pi$ *tal que* $\alpha(X) = X'$*.*

**Teorema 2.2.6** (Baer)**.** $\Pi$ *es* $(V, l)$*– transitivo si y solamente si es* $(V, l)$*– desarguesiano.*

*Demostración.* Sean $\Delta_i = \langle A_i, B_i, C_i, a_i, b_i, c_i \rangle$, $i = 1, 2$ dos triángulos en perspectiva desde $V$ $((V \neq A_i, B_i, C_i \ i = 1, 2))$ y supongamos que $a_1 \cap a_2, b_1 \cap b_2 \in l$.
Como se está suponiendo la existencia de las intersecciones de lados correspondientes, puede haber a lo más una coincidencia de vértices correspondientes. Sin embargo, de existir esa coincidencia la conclusión es trivial pues dos intersecciones de lados correspondientes serían iguales y por lo tanto las tres estarían trivialmente en una línea. Así las cosas, supondremos que vértices correspondientes son distintos. Como $A_1 \neq A_2$ y $V, A_1, A_2$ son colineales, por hipótesis $\exists \alpha \in \Sigma_{(V,l)}\Pi$ tal que $\alpha(A_1) = A_2$. Como $b_1 \cap b_2 \in l$ se sigue que

$\alpha(C_1) = C_2$. Como $a_1 \cap a_2 \in l$ y $\alpha(C_1) = C_2$ se sigue que $\alpha(B_1) = B_2$. Pero también podemos determinar $\alpha(B_1)$ sabiendo que $\alpha(A_1) = A_2$. Sea $X = C \cap l$. Como $B_1 = A_1X \cap B_2V \Rightarrow B_2 = \alpha[A_1X] \cap \alpha[B_2V] = A_2X \cap B_2V$. Como $B_2 \in A_2B_2 = c_2$, $B \in A_2X$ implica $C_2 = A_2X$ de modo que $X \in c_2$ y así $c_1 \cap c_2 = X \in l$.

Supongamos que $\Pi$ es $(V,l)-$ desarguesiano. Sea $\{A, A_1\} \subseteq P_\Pi \setminus (\{V\} \cup l)$ tales que $V, A, A_1$ son colineales. Hay que construir una $(V,l)-$ perspectividad $\rho$ con $\rho(A) = A_1$. Empezamos definiendo una función $\alpha = \gamma_{AA_1}$ en los puntos de $\{V\} \cup (P_\Pi \setminus AA_1)$ como sigue:

- $\alpha(X) = X \ \forall X \in l$
- $\alpha(V) = V$
- Si $X \notin l \cup AA_1$ sean $Y = l \cap AX$, $X_1 = A_1 \cap VX$ y definimos $\alpha(X) = X_1$

Sean $B \notin l \cup AA_1$ y $B_1 = \alpha(B)$. Definimos $\beta = \gamma_{BB_1}$ de manera análoga. Veamos que $\alpha(C) = \beta(C)\ \forall C \notin l \cup AA_1 \cup BB_1$. Si $C \in AB$ es claro que $\alpha(C) = \beta(C)$ (se usa que $B_1 = \alpha(B)$). Supongamos $C \notin AB$. Sean $C_1 = \alpha(C), P = AB \cap l, Q = BC \cap l, R = CA \cap l$. Los triángulos $ABC, A_1B_1C_1$ están en perspectiva desde $V$. Por definición de $\alpha$, $P = AB \cap A_1B_1$ y $R = CA \cap C_1A_1$. Como $P, R \in l$ y $\Pi$ es $(V,l)-$ desarguesiano, $BC \cap B_1C_1 \in l$. Pero $Q = BC \cap l$ de modo que $Q, B_1, C_1$ son colineales y entonces $\beta(C) = C_1 = \alpha(C)$.
Así las cosas, definimos $\rho = \alpha \cup \beta$. Es claro que $\rho$ es biyectiva (de hecho, $\rho^{-1} = \alpha' \cup \beta'$ donde $\alpha' = \gamma_{A_1A}$, $\beta' = \gamma_{B_1B}$ y, en este caso, $B = \alpha'(B_1)$). También se tiene ya que $\rho$ fija linealmente a $V$ y puntualmente a $l$.
Sean $m$ una línea distinta de $AA_1$, $l$ que no pase por $V$ y $T \in m \setminus (AA_1 \cup l$. Como el punto $B$ era cualquiera fuera de $l \cup AA_1$, está claro que $T$ puede jugar el papel de $B$ en la construcción de $\rho$ y entonces $\rho[m]$ es la línea que une $l \cap m$ con $\rho(T)$.
$\therefore \rho \in \Sigma_{(V,l)}\Pi$. □

**Definición 2.2.6.** *Se dice que un plano proyectivo $\Pi$ es* ***Desarguesiano*** *si es $(V,l)-$ desarguesiano para cualesquiera $V \in P_\Pi$, $l \in L_\Pi$.*

El concepto de plano proyectivo $(V,l)-$desarguesiano es fundamental en el estudio de los planos proyectivos. Tan es así que existen maneras de clasificar a los planos proyectivos de acuerdo a dicho concepto. Una de ellas es listar todas las posibilidades para la configuración que consiste de los puntos $V$ y las líneas $l$ para los cuales un plano proyectivo puede ser $(V,l)-$desarguesiano. Este método da lugar a la llamada clasificación de Lenz–Barlotti. En este trabajo lo que haremos es asociar a cada plano proyectivo un objeto algebraico cuyas propiedades nos darán información acerca de la $(V,l)-$ transitividad del plano en cuestión. Este método da lugar a la llamada clasificación por anillos ternarios planos.

## 2.3. $(V,l)-$ transitividad

Para concluir este capítulo, veremos algunas definiciones y resultados relacionados con el concepto de $(V,l)-$ transitividad que nos serán útiles más adelante.

**Definición 2.3.1.** *Sean $\Pi$ un plano proyectivo, $P, Q \in P_\Pi$ y $l, m \in L_\Pi$*

- *Se dice que $\Pi$ es $(m, l)-$ **transitivo** si es $(R, l)-$ transitivo $\forall R \in m$*
- *Dualmente, se dice que $\Pi$ es $(P, Q)-$ **transitivo** si es $(P, k)-$ transitivo $\forall k \in b_\Pi(Q)$*
- *Si $\Pi$ es $(l, l)-$ transitivo se dice que $l$ es una **línea de traslación** de $\Pi$ y que $\Pi$ es un **plano de traslación respecto a** $l$.*
- *Dualmente, si $\Pi$ es $(P, P)-$ transitivo se dice que $P$ es un **punto de traslación** de $\Pi$ y que $\Pi$ es un **plano de traslación dual respecto a** $P$.*
- *Si toda línea de $\Pi$ es de traslación se dice que $\Pi$ es un **plano de Moufang**.*

**Proposición 2.3.1.** *Si $\Pi$ es $(C, l)-$ transitivo y $\alpha \in \Sigma$ entonces $\Pi$ es $(\alpha(C), \alpha[l])-$ transitivo*

*Demostración.* Sea $\{\alpha(A), \alpha(B)\} \subseteq P_\Pi \setminus (\{\alpha(A)\} \cup \alpha[l]$ tales que $\alpha(A), \alpha(B)$ y $\alpha(C)$ son colineales. Como $\alpha$ es una colineación $A, B$ y $C$ son colineales, distintos entre sí y $A, B \notin \{C\} \cup l$. Como $\Pi$ es $(C, l)-$transitivo, $\exists \beta \in \Sigma_{(C,l)}$ tal que $\beta(A) = B$. Sea $\gamma = \alpha\beta\alpha^{-1}$. Vemos que $\gamma \in \Sigma$, $\gamma$ fija a $\alpha(C)$ y a cada punto de $\alpha[l]$. También $\gamma(\alpha(A)) = \alpha(B)$. De esto último y el Teorema 2.2.1 se sigue que $\gamma$ fija linealmente a $\alpha(C)$ i.e. $\gamma \in \Sigma_{(\alpha(C),\alpha[l])}$. □

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior tenemos la siguiente:

**Proposición 2.3.2.** *Si $l$ es una línea de traslación de $\Pi$ y $\alpha \in \Sigma$ entonces $\alpha[l]$ también es una línea de traslación de $\Pi$.*

**Proposición 2.3.3.** *Sea $\Pi$ un plano proyectivo*

*(i) Si $l, m$ son líneas de traslación distintas de $\Pi$ entonces $k$ es línea de traslación de $\Pi$ $\forall k \in b_\Pi(l \cap m)$.*

*(ii) Si $\Pi$ tiene tres líneas de traslación no–concurrentes entonces $\Pi$ es de Moufang.*

*Demostración.* Sean $Q = l \cap m$ y $k \in b_\Pi(Q) \setminus \{l, m\}$. Sean $A \in l$ y $B \in m, C \in k$ colineales y distintos de $Q$. Como $l$ es de traslación, $\Pi$ es $(A, l)-$ transitivo. Sea $\alpha \in \Sigma_{(A,l)}$ tal que $\alpha(B) = C$. Así las cosas, $\alpha[m] = \alpha[QB] = \alpha[Q]\alpha[B] = QK = k$. El resultado se sigue entonces de la proposición anterior.

Sean $l, m, n$ tres líneas de traslación de $\Pi$ no–concurrentes y $A = m \cap n, B = l \cap n, C = l \cap m$. Sea $k \in L_\Pi$. Para ver que $k$ es de traslación, por (i), podemos suponer que $A, B, C \notin k$. Sean $X = k \cap l, Y = k \cap m, Z = k \cap n$. Por la propiedad anterior, $BY$ es de traslación y entonces $\Pi$ es $(B, BY)-$ transitivo. Sea $\alpha \in \Sigma_{(B,BY)}$ tal que $\alpha(A) = Z$. Así las cosas, $\alpha[m] = \alpha[AY] = \alpha[A]\alpha[Y] = ZY = k$. El resultado se sigue entonces de la proposición anterior. □

**Proposición 2.3.4.** *Sean $\Pi$ un plano proyectivo, $P \in P_\Pi$ y $l \in L_\Pi$. Si existen $m \in b_\Pi(P)$ y $Q \in m \setminus \{P\}$ tales que $\forall R \in m \setminus (\{P\} \cup l)$ $\exists \alpha \in \Sigma_{(P,l)}$ tal que $\alpha(Q) = R$ entonces $\Pi$ es $(P, l)-$ transitivo.*

*Demostración.* Sea $\{A, B\} \subseteq P_\Pi \setminus (\{P\} \cup l)$ tal que $P, A, B$ son colineales. Debemos encontrar $f \in \Sigma_{(P,l)}$ con $f(A) = B$.
Si $A, B \in m$, tomamos $f = \alpha\beta^{-1}$ donde $\alpha, \beta \in \Sigma_{(P,l)}$ cumplen $\alpha(Q) = B, \beta(Q) = A$. Dichas colineaciones existen por hipótesis.
Si $A, B \notin m$, definimos $S = AQ \cap l$ y $R = BS \cap l$. Por hipótesis, $\exists f \in \Sigma_{(P,l)}$ tal que $f(Q) = R$. La discusión de la proposición 2.2.4 muestra que $f(A) = B$. $\square$

**Proposición 2.3.5.** *Si* $\Pi$ *es* $(A, l) -$ *transitivo y* $(B, l) -$ *transitivo con* $A \neq B$ *entonces* $\Pi$ *es* $(AB, l) -$ *transitivo*

*Demostración.* Sean $C \in AB, \{X, Y\} \subseteq P_\Pi \setminus (\{C\} \cup l)$ tales que $CX = CY$ y sea $Z = AX \cap BY$. Por el teorema anterior podemos suponer $XY \neq AB$. Como $\Pi$ es $(A, l) -$ transitivo $\exists \alpha \in \Sigma_{(A,l)}$ tal que $\alpha(X) = Z$. Como $\Pi$ es $(B, l) -$ transitivo $\exists \beta \in \Sigma_{(B,l)}$ tal que $\beta(Z) = Y$. Por la Proposición 2.2.1, tenemos que $\beta\alpha \in \Sigma_{V,l}$ donde $V \in AB$. Además $(\beta\alpha)(X) = Y$. Consideremos $W = XY \cap l$. Como $X, Y \notin l$, $W \neq X, Y$. Así pues

$$(\beta\alpha)[XY] = (\beta\alpha)[XW] = (\beta\alpha)(X) \cap (\beta\alpha)(W) = YW = XY$$

y entonces $V \in XY$. Por lo tanto $V = AB \cap XY = C$ y el resultado se da. $\square$

**Proposición 2.3.6.** *Si* $\Pi$ *es* $(A, l) -$ *transitivo y* $(B, l) -$ *transitivo para* $\{A, B\} \subseteq l$ *entonces* $l$ *es una línea de traslación de* $\Pi$

*Demostración.* Esto es consecuencia inmediata de la proposición anterior. $\square$

La siguiente proposición es la dual de la anterior:

**Proposición 2.3.7.** *Si* $\Pi$ *es* $(A, l) -$ *transitivo y* $(A, m) -$ *transitivo para* $\{l, m\} \subseteq b_\Pi(A)$ *entonces* $A$ *es un punto de traslación de* $\Pi$.

**Proposición 2.3.8.** *Sea* $\Pi$ *un plano de Moufang. Si* $\Pi$ *es* $(A, m) -$ *transitivo p.a.* $A \in P_\Pi,\ l \in L_\Pi$ *con* $A \notin m$ *entonces* $\Pi$ *es* $(V, l) -$ *transitivo para cualesquiera* $V \in P_\Pi,\ l \in L_\Pi$.

*Demostración.* Empecemos viendo que $\Pi$ es $(P, m) -$ transitivo $\forall P \in P_\Pi$. Sean $k \in b_\Pi(A)$ y $B = k \cap m$. Como $a \notin m$ se sigue que $A \neq B$. Por hipótesis $\Pi$ es $(A, m) -$ transitivo y como $\Pi$ es un plano de Moufang, también es $(B, m) -$ transitivo. De la Proposición 2.3.5 se sigue que $\Pi$ es $(k, m) -$ transitivo. Como $\forall P \in P_\Pi\ \exists! k \in b_\Pi(A)$ tal que $P \in k$ se sigue que $\Pi$ es $(P, m) -$ transitivo $\forall P \in P_\Pi$.
Sean $l \in L_\Pi \setminus \{m\}$, $Q = l \cap m$ y $r \in b_\Pi(Q) \setminus \{l, m\}$. Como $\Pi$ es un plano de Moufang tenemos que $r$ es una línea de traslación de $\Pi$. Como en la prueba de la Proposición 2.3.3(i) podemos encontrar $\alpha \in \Sigma_{(Q,r)}$ tal que $\alpha[m] = l$. Sea $X \in P_\Pi \setminus m$. Como $\alpha$ es una colineación se sigue que $\alpha(X) \notin l$. Ya tenemos que $\Pi$ es $(X, m) -$ transitivo de modo que, por la Proposición 2.3.1, $\Pi$ es $(\alpha(X), \alpha[m]) -$ transitivo i.e. $\Pi$ es $(\alpha(X), l) -$ transitivo. Razonando como en la primera parte de la demostración, se sigue que $\Pi$ es $(P, l) -$ transitivo $\forall P \in P_\Pi$. Por lo tanto $\Pi$ es $(V, l) -$ transitivo para cualesquiera $V \in P_\Pi,\ l \in L_\Pi$. $\square$

# Capítulo 3

# Coordenadas en planos proyectivos

Asignar coordenadas a un plano proyectivo es una de las herramientas más poderosas en el estudio de los mismos ya que nos proporciona maneras de representarlos y trabajar con ellos indirectamente. Dedicaremos este capítulo a su estudio y así surgirán conexiones entre los planos proyectivos y otros entes matemáticos: los anillos ternarios y los cuadrados latinos.

## 3.1. Asignación de coordenadas

Sean $\Pi$ un plano proyectivo de orden $n$ y $R$ un conjunto de $n$ símbolos con dos elementos distinguidos 0 y 1, $0 \neq 1$. Introduciremos un sistema de coordenadas en $\Pi$ usando el conjunto $R \cup \{\infty\}$, donde $\infty$ es un símbolo que no está en $R$, respecto a un cuadrángulo dado. (Si $\Pi$ es infinito, pedimos que $|R \cup \{\infty\}| = |l|$ p.a. $l \in L_\Pi$).
Sea $\{O, X, Y, I\}$ un cuadrángulo de $\Pi$. Consideramos las líneas $l_\infty = XY$, $l_1 = OY$, $l_2 = OX$ y los puntos $A = XI \cap l_1$, $B = YI \cap l_2$, $J = AB \cap l_\infty$. Ahora asignamos, biunivocamente, los elementos de $R$ a los puntos de $l_1 \setminus \{Y\}$ de manera arbitraria a excepción de 0 y 1 que estarán asignados a $O$ y $A$ respectivamente.

- Si $c \in R$ está asignado al punto $C \in l_1 \setminus \{Y\}$, las coordenadas de $C$ son $(0, c)$. Ahora, si $D \in l_2 \setminus \{X\}$ consideramos $D' = JD \cap l_1 \in l_1 \setminus \{Y\}$. Si las coordenadas de $D'$ son $(0, d)$ entonces las de $D$ serán $(d, 0)$ (ver Figura 3.1).

- Para $H \notin l_\infty$ definimos $H_1 = XH \cap l_1 \in l_1 \setminus \{Y\}$ y $H_2 = YH \cap l_2 \in l_2 \setminus \{X\}$. Si $H_1$ y $H_2$ son $(0, g)$ y $(h, 0)$ respectivamente, entonces las coordenadas de $H$ son $(h, g)$. Nótese que $A, B, I$ tienen coordenadas$(0, 1), (1, 0), (1, 1)$ respectivamente (ver Figura 3.2). Así las cosas, a cada elemento de $P_\Pi \setminus l_\infty$ se le han asignado coordenadas de la forma $(x, y)$, $x, y \in R$ de manera única.

- Para $M \in l_\infty \setminus \{Y\}$ definimos $M' = MB \cap l_1 \in l_1 \setminus \{Y\}$. Si $M'$ es $(0, m)$, asociamos a $M$ la coordenada $(m)$ (ver Figura 3.2). Al punto $Y$ le asociamos la coordenada $(\infty)$. Nótese que $X$ y $J$ tienen coordenadas $(0)$ y $(1)$ respectivamente.

- Ahora le asignamos coordenadas a las líneas de $\Pi$. Sea $l \in L_\Pi$. Si $Y \notin l$, consideramos los puntos $M = l \cap l_\infty \in l_\infty \setminus \{Y\}$, $K = l \cap l_1 \in l_1 \setminus \{Y\}$. Si $M = (m)$ y $K = (0, k)$ entonces $l$ tiene coordenadas $[m, k]$ (ver Figura 3.3). Nótese que $l_2$ tiene coordenadas $[0, 0]$.

- Si $Y \in l$ y $l \neq l_\infty$, consideramos el punto $S = l \cap l_2 \in l_2 \setminus \{X\}$. Si $S = (s, 0)$ entonces $l$ tiene coordenada $[s]$ (ver Figura 3.3). Finalmente, $l_\infty$ tiene coordenada $[\infty]$. Nótese que $l_1$ tiene coordenada $[0]$.

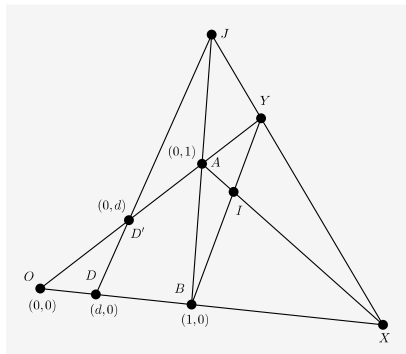


Figura 3.1:

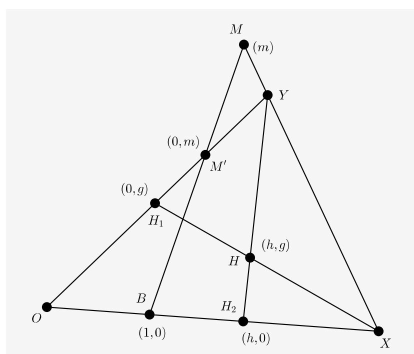


Figura 3.2:

Así pues, hemos asignado coordenadas a cada punto y a cada línea de $\Pi$ de manera única. Dicha asignación solo depende del cuadrángulo inicial y de la asignación entre los elementos de $R$ y los puntos de $l_1 \setminus \{Y\}$. Cabe mencionar que esta no es la única manera de asignar coordenadas a un plano proyectivo. Sin embargo, cuando digamos que un plano proyectivo tiene coordenadas en un conjunto $R$ se asumirá que se usó el método aquí descrito.
Ahora debemos establecer un método que nos permita saber cuando dos elementos de $\Pi$ son incidentes a partir de sus coordenadas.

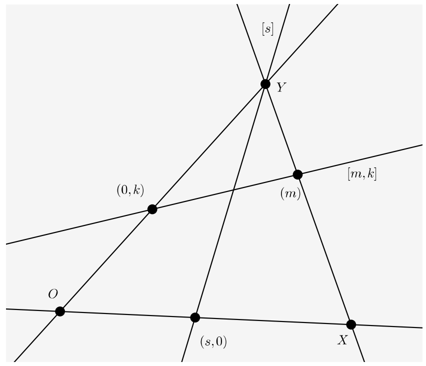


Figura 3.3:

## 3.2. Anillos ternarios planos

**Definición 3.2.1.** *Sea $\mathcal{R}$ un conjunto. Una operación ternaria es una función $T : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$. Al par $(\mathcal{R}, T)$ se le llama* ***anillo ternario****.*

Usando la incidencia de $\Pi$ definimos una operación ternaria en $R$. Sean $a, b, c \in R$. Definimos $T : R \times R \times R \to R$ como $T(a, b, c) = k \Leftrightarrow (b, c) \in [a, k]$. Es decir, $(o, k)$ es la intersección de $l_1$ con la línea que une $(a)$ con $(b, c)$ de modo que dados cualesquiera $a, b, c \in R$ el valor $T(a, b, c)$ está bien definido pues $a, b, c \in R$ implica $(b, c) \notin l_\infty, (a) \neq (\infty)$ y entonces la línea que une $(a)$ con $(b, c)$ no es $l_1$ y no pasa por $(\infty)$ y así la intersección de dicha línea con $l_1$ está en $l_1 \setminus \{(\infty)\}$ y entonces es de la forma $(0, k)$ p.a. $k \in R$ (ver Figura 3.4).

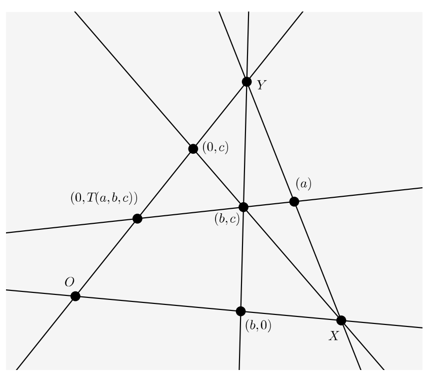


Figura 3.4:

**Teorema 3.2.1.** *Sea $\Pi$ un plano proyectivo con coordenadas en un conjunto $R$. Si definimos $T(a, b, c) = k \Leftrightarrow (b, c) \in [a, k]$ entonces $(R, T)$ es un anillo ternario con las siguientes propiedades:*

*(A)* $T(a, 0, c) = T(0, b, c) = c \ \forall a, b, c \in R$

*(B)* $T(a,1,0) = T(1,a,0) = a \ \forall a \in R$

*(C)* $\forall a,b,c,d \in R, a \neq c \ \exists! x \in R$ *tal que* $T(x,a,b) = T(x,c,d)$

*(D)* $\forall a,b,c \in R \ \exists! x \in R$ *tal que* $T(a,b,x) = c$

*(E)* $\forall a,b,c,d \in R, a \neq c \ \exists!(x,y) \in R \times R$ *tal que* $T(a,x,y) = b$, $T(c,x,y) = d$

*Demostración.* (A) $T(a,0,c) = k$ implica que $(0,c)$ está en la línea $[a,k]$ que une $(a)$ con $(0,k)$. Dicha línea interseca a $l_1$ en un único punto y así, $(0,c) = (0,k)$ i.e. $c = k$ y por lo tanto $T(a,0,c) = c$.
Ahora $T(0,b,c) = k$ implica que $(b,c)$ está en la línea $[0,k]$ que une $(0)$ con $(0,k)$. Por definición $(b,c)$ es la intersección de la línea que une $(0)$ con $(0,c)$ con la línea que une $(\infty)$ con $(b,0)$. Como la línea por $(0)$ y $(b,c)$ interseca a $l_1$ en un único punto se sigue que $(0,c) = (0,k)$ i.e. $c = k$ y por lo tanto $T(0,b,c) = c$.

(B) $T(a,1,0) = k$ implica que $(1,0)$ está en la línea $[a,k]$ que une $(a)$ con $(0,k)$. Por definición $(a)$ es la intersección de la línea que une $(a,0)$ con $(1,0)$ con la línea $[\infty]$ y así, como la línea por $(a)$ y $(1,0)$ interseca a $l_1$ en un único punto se sigue que $(0,a) = (0,k)$ i.e. $a = k$ y por lo tanto $T(a,1,0) = a$.
$T(1,a,0) = k$ significa que $(a,0)$ está en la línea $[1,k]$ que une $(1)$ con $(0,k)$. Por definición $(a,0)$ es la intersección de $l_2$ con la línea que une $(1)$ con $(0,a)$ y así $(0,a) = (0,k)$ i.e. $a = k$ y por lo tanto $T(1,a,0) = a$.

(C) Como $a \neq c$, $(a,b) \neq (c,d)$ y entonces hay una única línea $l$ que los une. Como $a \neq c$, dicha línea no pasa por $(\infty)$ y entonces interseca a $[\infty]$ en un único punto de la forma $(m)$, $m \in R$. Así pues, si $(0,k)$ es la intersección de $l$ con $l_1$ entonces $T(x,a,b) = T(x,c,d) = k$. La unicidad se sigue de la unicidad de $l$.

(D) $T(a,b,x) = c$ si y solamente si $(b,x)$ está en la línea $[a,c]$ que une $(a)$ con $(0,c)$. Para cada $x \in R$, $(b,x)$ está en la línea $[b]$ que une $(\infty)$ con $(b,0)$. Como $[a,c]$ y $[b]$ se intersecan en un único punto, se sigue que $\exists! x \in R$ tal que $T(a,b,x) = c$.

(E) $T(a,x,y) = b \Leftrightarrow (x,y) \in [a,b]$ y $T(c,x,y) = d \Leftrightarrow (x,y) \in [c,d]$. Las líneas $[a,b]$ y $[c,d]$ son distintas (pues $a \neq c$) y por lo tanto se intersecan en un único punto $P$. Como $a \neq c$, $p \notin l_\infty$ y por lo tanto $P = (x,y)$ con $x,y \in R$. Así las cosas, $\exists!(x,y) \in R \times R$ tal que $T(a,x,y) = b$, $T(c,x,y) = d$. $\square$

**Definición 3.2.2.** *Sea $(\mathcal{R},T)$ un anillo ternario que satisface las propiedades (A)–(E) del teorema anterior. Entonces se dice que $(\mathcal{R},T)$ es un* ***anillo ternario plano*** *(se abrevia* ***ATP****).*

**Observación 3.2.1.** *Si $(R,T)$ es un ATP entonces hay una única pareja $(0,1) \in R \times R$ con las propiedades (A) y (B). Efectivamente, si $(0',1') \in R \times R$ también satisface (A) y (B) entonces $1 = T(1,1',0) = 1'$ por (B) y $0 = T(1,0',0) = 0'$ por (A) y (B).*

**Ejemplo 7.** *Si $(K,+,\cdot)$ es un campo no-conmutativo y $T(a,b,c) = a \cdot b + c \ \forall a,b,c \in K$ entonces $(K,T)$ es un ATP.*

Hemos visto como asociar un ATP a un plano proyectivo dado. Veamos el procedimiento inverso.

**Teorema 3.2.2.** *Si* $(R, T)$ *es ATP, la siguiente estructura* $\Pi$ *es un plano proyectivo:*

$$P_\Pi = \{(x, y) : x, y \in R\} \cup \{(x) : x \in R\} \cup \{(\infty)\}$$
$$L_\Pi = \{[m, k] : m, k \in R\} \cup \{[k] : k \in R\} \cup \{[\infty]\}$$

*donde las líneas quedan determinadas de la siguiente manera:*

- $[m, k] = \{(x, y) \in R \times R : T(m, x, y) = k\} \cup \{(m)\}$
- $[k] = \{(k, y) : y \in R\} \cup \{(\infty)\}$
- $[\infty] = \{(x) : x \in R\} \cup \{(\infty)\}$

*Demostración.* Verifiquemos los axiomas de plano proyectivo para $\Pi = (P_\Pi, L_\Pi)$:

(PP1) Si $a \neq c$, por (C), $\forall b, d \in R\ \exists! m \in R$ tal que $T(m, a, b) = T(m, c, d)$. Así, si $a \neq c$ los puntos $(a, b), (c, d)$ están en una única línea: $[m, T(m, a, b)]$.
Los puntos $(a, b), (a, d)$, $b \neq d$, están en la línea $[a]$. Si estuvieran en una línea de la forma $[m, k]$ se tendría que $T(m, a, b) = k = T(m, a, d)$ lo cual contradice (D). Por lo tanto cualesquiera dos puntos fuera de $[\infty]$ están en una única línea de $\Pi$.
Sean $(m) \in [\infty] \setminus \{(\infty)\}$ y $(a, b) \in P_\Pi \setminus [\infty]$. Las líneas que pasan por $(m)$ son $[\infty]$ y las líneas de la forma $[m, k], k \in R$. Por definición, $(a, b) \in [m, k] \Leftrightarrow T(m, a, b) = k$. Ahora, $T$ es una operación ternaria de modo que el valor $T(m, a, b)$ está determinado de manera únics por $m, a, b$. Así las cosas $[m, T(m, a, b)]$ es la única línea de $\Pi$ que pasa por $(m)$ y $(a, b)$.
Ahora, las únicas líneas distintas de $[\infty]$ que pasan por $(\infty)$ son de la forma $[k], k \in R$. Por lo tanto $[a]$ es la única línea que pasa por $(\infty)$ y $(a, b)$. Claramente $(m), (n)$ están en $[\infty]$ únicamente. Por lo tanto $\Pi$ satisface (PP1).

(PP2) Veamos que cualesquiera dos líneas (distintas) tienen puntos en común. Primero consideramos las líneas $[m_1, k_1], [m_2, k_2]$. Si $m_1 \neq m_2$, por (E), $\exists! (a, b) \in R \times R$ tal que $T(m_1, a, b) = k_1$ y $T(m_2, a, b) = k_2$ i.e. $(a, b) \in [m_1, k_1] \cap [m_2, k_2]$. Si $m_1 = m_2$, $(m_1) \in [m_1, k_1] \cap [m_2, k_2]$. Así pues, cualesquiera dos líneas de la forma $[m, k]$ se intersecan.
Notamos que $(m \in [m, k] \cap [\infty])$. Sea $s \in R$. Entonces $(s, t) \in [m, k] \cap [s]$ donde $t$ cumple $T(m, s, t) = k$ y su existencia está garantizada por (D). Cuales quiera dos líneas de la forma $[k]$ tienen al punto $(\infty)$. Por lo tanto $\Pi$ satisface (PP2).

(PP3) Sean $A = (0), B = (\infty), C = (0, 0), D = (1, 1)$. Como $AB = [\infty], BC = [0], CA = [0, 0]$ y ninguna de ellas incluye a los dos puntos restantes, se sigue que $\{A, B, C, D\}$ es un cuadrángulo en $\Pi$. Por lo tanto $\Pi$ satisface (PP3).

Nótese que el orden de $\Pi$ es precisamente $|R|$. Observamos que si le asignamos coordenadas en el conjunto $R$ al plano $\Pi$ que obtuvimos eligiendo $(\infty)$ como $Y$, $(0)$ como $X$, $(0, 0)$ como $O$, $(1, 1)$ como $I$ y a $r \in R$ le asignamos $(0, r) \in OY$, el ATP que obtendremos será precisamente $(R, T)$. $\square$

**Definición 3.2.3.** *Sean* $(\mathcal{R}, T)$, $(\mathcal{R}', T')$ *dos anillos ternarios. Decimos que* $(\mathcal{R}, T)$ *es isomorfo a* $(\mathcal{R}', T')$ *si existe* $\alpha : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ *biyectiva tal que* $\alpha(T(a, b, c)) = T'(\alpha(a), \alpha(b), \alpha(c))$ $\forall a, b, c \in \mathcal{R}$.

**Observación 3.2.2.** *De la observación 3.2.1 se sigue que si* $(R,T),(R',T')$ *son anillos ternarios planos y* $\alpha : R \to R'$ *es un isomorfismo de anillos ternarios entonces* $\alpha(0) = 0'$ *y* $\alpha(1) = 1'$.

**Proposición 3.2.1.** *Sea* $\Pi$ *un plano proyectivo. Si* $\Pi$ *tiene coordenadas en un conjunto* $R$ *respecto a un cuadrángulo* $\{O, X, Y, I\}$ *y si* $(R,T),(R',T')$ *son anillos ternarios planos que surgen asignando los elementos de* $R$ *a los puntos de* $OY \setminus \{Y\}$ *de maneras distintas entonces* $(R,T) \cong (R',T')$.

*Demostración.* Sean $f : l_2 \to l_1$, $g : l_\infty \to l_1$ las biyecciones dadas por el teorema 1.1.1 respecto a los puntos $J$ y $B$ respectivamente. Sea $\gamma : R \to OY \setminus \{Y\}$ una biyección cualquiera con $\gamma(0) = O, \gamma(1) = A$. Sean $U \in l_\infty \setminus \{Y\}, V \notin l_\infty, W = UV \cap l_1$. Notamos que $W \neq Y$. Sean $V_1 = YV \cap l_2, V_2 = XV \cap l_1$. Por definición, las coordenadas de los puntos $U, V, W$ respecto a la asignación $\gamma$ son $(\gamma^{-1}g(U)), (\gamma^{-1}f(V_1), \gamma^{-1}(V_2)), (0, \gamma^{-1}(W))$ respectivamente.
Sean pues $\alpha : R \to OY \setminus \{Y\}, \beta : R \to OY \setminus \{Y\}$ dos biyecciones que mandan 0 en $O$ y 1 en $A$. Sea $\lambda = \beta^{-1}\alpha : R \to R$. Claramente $\lambda$ es biyectiva. Como $U, V, W$ son colineales, considerando coordenadas respecto a las asignaciones $\alpha, \beta$ respectivamente, tenemos que:

$$T_\alpha(\alpha^{-1}g(U), \alpha^{-1}f(V_1), \alpha^{-1}(V_2)) = \alpha^{-1}(W) \tag{3.1}$$
$$T_\beta(\beta^{-1}g(U), \beta^{-1}f(V_1), \beta^{-1}(V_2)) = \beta^{-1}(W) \tag{3.2}$$

Cambiando $\beta^{-1}$ por $\beta^{-1}\alpha\alpha^{-1}$ en 3.2 y considerando 3.1 tenemos que

$$\lambda(T_\alpha(m, a, b)) = T_\beta(\lambda(m), \lambda(a), \lambda(b))$$

donde

$$a = \alpha^{-1}f(V_1) \qquad m = \alpha^{-1}g(U)$$
$$b = \alpha^{-1}(V_2) \qquad k = \alpha^{-1}(W)$$

Como $\alpha, f, g$ son biyecciones, cuando $U, V$ varían en sus respectivos dominios, $(m, a, b)$ varía en todo $R \times R \times R$ y por lo tanto $(R, T_\alpha) \cong (R, T_\beta)$. $\square$

**Proposición 3.2.2.** *Sea* $\Pi$ *un plano proyectivo. Si* $\Pi$ *tiene coordenadas en* $(R,T)$ *respecto a* $\{O, X, Y, I\}$ *y coordenadas en* $(R',T')$ *respecto a* $\{O', X', Y', I'\}$ *entonces* $(R,T) \cong (R',T')$ *si y solamente si* $\exists f \in \Sigma$ *tal que* $f(O) = O', f(X) = X', f(Y) = Y', f(I) = I'$.

*Demostración.* Supongamos que existe $\alpha : R \to R'$ biyectiva tal que $\alpha(T(a,b,c)) = T'(\alpha(a), \alpha(b), \alpha(c))\ \forall a, b, c \in R$. Usamos ( ), [ ] y ( )′, [ ]′ para denotar coordenadas respecto a $\{O, X, Y, I\}$ y $\{O', X', Y', I'\}$ respectivamente. Es fácil ver que entonces $f : P_\Pi \to P_\Pi$ dada por

$$(\infty) \mapsto (\infty)'$$
$$(m) \mapsto (\alpha(m))'$$
$$(a, b) \mapsto (\alpha(a), \alpha(b))'$$

es el automorfismo buscado. De hecho $f[m,k] = [\alpha(m), \alpha(k)]'$, $f[k] = [\alpha(k)]'$ y $f[\infty] = [\infty]'$.

Ahora supongamos que $\exists f \in \Sigma$ tal que $f(O) = O', f(X) = X', f(Y) = Y', f(I) = I'$. Si $\beta : R \to OY \setminus \{Y\}, \beta' : R' \to O'Y' \setminus \{Y'\}$ son las asignaciones que dan lugar a $(R,T)$ y $(R',T')$ respectivamente, es fácil ver que $\alpha = (\beta')^{-1} f \beta : R \to R'$ es el isomorfismo buscado (la prueba es muy similar a la de la proposición anterior). $\square$

## 3.3. Algunas propiedades algebraicas

**Definición 3.3.1.** *Un conjunto no vacío $G$ con una operación binaria $\cdot$ es un **lazo** si satisface lo siguiente:*

- $\forall a, b \in G\ \exists! x \in G$ *tal que* $a \cdot x = b$
- $\forall a, b \in G\ \exists! y \in G$ *tal que* $y \cdot a = b$
- $\exists e \in G$ *tal que* $e \cdot x = x \cdot e = x\ \forall x \in G$. *El elemento $e$ recibe el nombre de neutro o identidad.*

**Observación 3.3.1.** *Un grupo es lo mismo que un lazo asociativo (ver [2], pp. 63).*

**Teorema 3.3.1.** *Sean $R$ un ATP y $R^* = R \setminus \{0\}$. Se definen*

$$a + b = T(1, a, b),\ a \cdot b = ab = T(a, b, 0)\ \forall a, b \in R$$

*Entonces $(R, +), (R^*, \cdot)$ son lazos con identidades 0 y 1 respectivamente.*

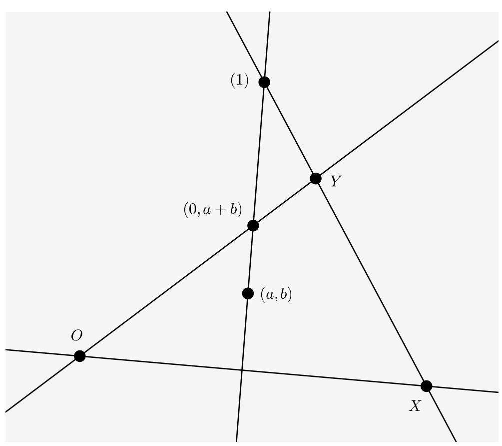


Figura 3.5: La suma en $R$

*Demostración.* Para $(R, +)$: Dada $a \in R$, $0 + a = T(1, 0, a) = a$ y $a + 0 = T(1, a, 0) = a$ por las propiedades (A) y (B). Por lo tanto 0 es neutro para $(R, +)$.
Por (D), $\forall a, b \in R\ \exists! x \in R$ tal que $T(1, a, x) = b$ i.e. $\forall a, b \in R\ a + x = b$ tiene una única

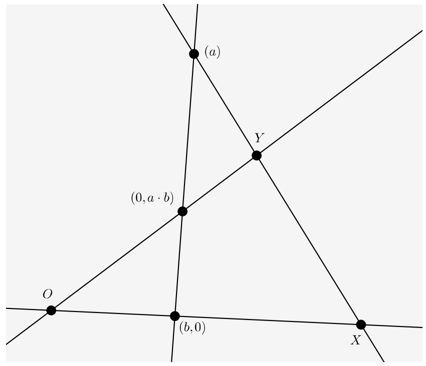


Figura 3.6: El producto en $R$

solución en $x$.
Sean $a, b \in R$. La ecuación $x+a = b$ tiene solución única en $x$ si y solamente si $T(1, x, a) = b$ tiene solución única en $x$. Por (E), $\exists!(x, y \in R \times R)$ tal que $T(1, x, y) = b$ y $T(0, x, y) = a$. Por (A), $T(0, x, v) = a$ tiene $v = a$ como única solución y entonces $\exists! x \in R$ tal que $T(1, x, a) = b$. Por lo tanto $(R, +)$ es un lazo.

Para $(R^*, \cdot)$: Veamos primero que $ab \in R^*$ siempre que $a, b \in R^*$. Supongamos que $ab = 0$ y $b \neq 0$. Consideramos la ecuación $T(u, b, 0) = T(u, 0, 0)$. Por (C), dicha ecuación tiene solución única para $u$. Claramente $u = 0$ es solución y por lo tanto es la única solución. Como $ab = 0$ entonces $T(a, b, 0) = 0$ y se tiene que $T(a, 0, 0) = 0$ por (A) de modo que $a = 0$. Por lo tanto $R^*$ es cerrado bajo $\cdot$.
Dados $a, b \in R^*$, la ecuación $ax = b$ tiene solución única en $x$ si y solamente si $T(a, x, 0) = b$ tiene solución única en $x$. Por (E) $\exists!(x, y) \in R \times R$ tal que $T(a, x, y) = b$ y $T(0, x, y) = 0$. Por (A) la segunda igualdad implica $y = 0$ y así $T(a, x, 0) = b$ tiene solución única en $x$. Ahora, la ecuación $xa = b$ tiene solución única en $x$ si y solamente si $T(x, a, 0) = b$ tiene solución única en $x$. Como $a \neq 0$ la propiedad (C) garantiza que $T(x, a, 0) = T(x, 0, b)$ tiene solución única en $x$ y como $T(x, 0, b) = b$ por (A), se sigue que $T(x, a, 0) = b$ tiene solución única en $x$. Por lo tanto $(R^*, \cdot)$ es un lazo. $\square$

**Proposición 3.3.1.** *Sea $(R, T)$ un anillo ternario finito ($|R| < \infty$). Entonces $(R, T)$ satisface $(C)$ y $(D)$ si y solamente si satisface $(D)$ y $(E)$.*

*Demostración.* Supongamos que $(R, T)$ satisface $(C)$ y $(D)$. Veamos que satisface $(E)$. Sean $a, c \in R, a \neq c$. Consideramos $T_{a,c} : R \times R \to R \times R$ dada por $T_{a,c}(x, y) = (T(a, x, y), T(c, x, y))$. Queremos ver que $T_{a,c}$ es biyectiva. Como $R$ es finito basta ver que $T_{a,c}$ es suprayectiva. Si $T_{a,c}^{-1}[\{b, d\}] = \phi$ p.a. $(b, d) \in R \times R$, como $R$ es finito, se tendría que $\exists b', d' \in R$ tales que el sistema $T(a, x, y) = b'$, $T(c, x, y) = d'$ tiene al menos dos soluciones para $(x, y)$. Así las cosas, basta ver que $\forall a, b, c, d \in R, a \neq c$, el sistema $T(a, x, y) = b$, $T(c, x, y) = d$ admite a lo más una solución en $(x, y)$.
Supongamos que $T(a, x, y) = b = T(a, u, v)$ y $T(c, x, y) = d = T(c, u, v)$. Si $x = u$, $T(c, x, y) = d = T(c, x, v)$ y entonces $y = v$ por (D). Si $x \neq u$ entonces $T(z, x, y) = T(z, u, v)$ tiene soluciones $z = a, c$ distintas lo cual contradice (C). Por lo tanto $T(a, x, y) =$

$b$, $T(c, x, y) = d$ admite a lo más una solución en $(x, y)$ y así, $(R, T)$ satisface (E).

Supongamos que $(R, T)$ satisface $(D)$ y $(E)$. Veamos que satisface $(C)$. Dados $a, b, c \in R, a \neq c$, definimos para cada $x \in R$ el elemento $f(x) \in R$ dado por $T(x, a, b) = T(x, c, f(x))$ que existe y es único por (D). Así las cosas, basta ver que $f : R \to R$ es biyectiva y como $R$ es finito es suficiente ver que es inyectiva. Supongamos que $x, y \in R, x \neq y$ pero $f(x) = f(y)$. Entonces $T(x, a, b) = T(x, c, f(x)) = g$ y $T(y, a, b) = T(y, c, f(y)) = h$ de modo que el sistema $T(x, u, v) = g$, $T(y, u, v) = h$ tiene soluciones $(u, v) = (a, b), (c, f(x))$. Como $x \neq y$ la propiedad (E) garantiza que dicho sistema tiene solución única en $(u, v)$ y entonces $a = c$ lo cual es imposible. Por lo tanto $f$ es inyectiva y $(R, T)$ satisface (C). $\square$

La segunda parte de la prueba de la proposición anterior tiene la siguiente consecuencia:

**Proposición 3.3.2.** *Si un anillo ternario finito $(R, T)$ satisface (D) y las ecuaciones de la forma $T(x, a, b) = T(x, c, d), a \neq c$ tienen a lo más una solución en $x$ entonces tienen exactamente una solución en $x$.*

**Definición 3.3.2.** *Sean $(R, T)$ un anillo ternario y $R_0 \subseteq R$. Se dice que $(R_0, T)$ es un **subanillo ternario** de $(R, T)$ siempre que $cod(T \downharpoonleft_{R_0 \times R_0 \times R_0}) = R_0$.*

Las dos proposiciones anteriores nos permiten probar el siguiente teorema acerca de subestructuras finitas de anillos ternarios planos:

**Teorema 3.3.2.** *Sean $(R, T)$ un ATP y $(R_0, T)$ un subanillo ternario de $(R, T)$. Si $R_0 \neq \phi$ es finito entonces $R_0 = \{0\}$ ó $(R_0, T)$ es un ATP.*

*Demostración.* Sean $a, b \in R_0$ fijos. Definimos $S : R_0 \to R_0$ como $S(x) = T(a, b, x) \in R_0$ pues $(R_0, T)$ es subanillo de $(R, T)$. Como $(R, T)$ es plano, usando (D) tenemos que $S$ es inyectiva y como $R_0$ es finito se sigue que $S$ es biyectiva. Por lo tanto $(R_0, T)$ satisface (D).
Como $R_0 \subseteq R$, las ecuaciones de la forma $T(x, a, b) = T(x, c, d)$ con
$a, b, c, d \in R_0, a \neq c$, tienen a lo más una solución en $R_0$ (pues, por (C), tienen exactamente una solución en $R$ que podría no estar en $R_0$). Por la proposición 3.3.2 dichas ecuaciones tienen exactamente una solución en $R_0$ i.e. $(R_0, T)$ cumple (C),(D) y por lo tanto cumple (C), (D), (E) en virtud de la proposición 3.3.1.
Supongamos que $R_0 = \{a\}$. Como $R_0$ es cerrado bajo $T$ se tiene que $T(a, a, a) = a$. Si $a \neq 0$, la ecuación $T(x, a, a) = T(x, 0, a)$ tendría soluciones distintas $x = 0, a$ en $R$ pues $T(a, 0, a) = T(0, 0, a) = T(0, a, a) = a$ por (A) (en $R$) lo cual contradice (C) (en $R$). Entonces $a = 0$ y $R_0 = \{0\}$.
Supongamos que $a, b \in R_0$, $a \neq b$. Consideremos la ecuación $T(x, a, c) = T(x, b, c)$ con $c \in R_0$ cualquiera. Las ecuaciones de este tipo tienen solución única en $R$ (por (C)) y por la proposición 3.3.2 dicha solución está en $R_0$. Por (A) (en $R$) $x = 0$ es solución y por lo tanto $0 \in R_0$. De manera similar, suponiendo que $a \neq 0$ y considerando la ecuación $T(x, a, 0) = T(x, 0, a)$ se tiene que $1 \in R_0$ y por lo tanto $(R_0, T)$ es un ATP. $\square$

**Ejemplo 8.** *Si $R = \mathbb{Q}$ y $T(a, b, c) = ab + c \ \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ entonces $(R, T)$ es un ATP. Si $R_0 = \mathbb{Z}$ entonces $(R_0, T)$ es un subanillo ternario de $(R, T)$ que no es plano.*

El siguiente ejemplo es de suma importancia:

**Ejemplo 9.** *Sea* $(K, +, \cdot)$ *un campo no–conmutativo. Aplicaremos nuestro método para introducir coordenadas al plano* $\Pi_2(K)$*. Elegimos* $[0 : 0 : 1]$ *como* $O$*,* $[1 : 0 : 0]$ *como* $X$*,* $[0 : 1 : 0]$ *como* $Y$ *y* $[1 : 1 : 1]$ *como* $Z$*. Cálculos sencillos muestran que entonces* $l_1 = [1, 0, 0]$*,* $l_2 = [0, 1, 0]$*,* $l_\infty = [0, 0, 1]$*,* $XI = [0, 1, -1]$*,* $YI = [-1, 0, 1]$*,* $A = [0 : 1 : 1]$*,* $B = [1 : 0 : 1]$*,* $AB = [-1, -1, 1]$ *y* $J = [1 : -1 : 0]$*.*
*Ahora* $[1, 0, 0] = \{[0 : k : 1] : k \in K\} \cup \{[0 : 1 : 0]\}$ *de modo que tomamos* $R = K$ *y asignamos* $k \in K$ *al punto* $[0 : k : 1]$ *i.e.* $(0, k) = [0 : k : 1]$*. La línea que une* $(1)$ *con* $(0, k)$ *es* $[-1, -1, k]$ *y entonces se tiene que* $(k, 0) = [k : 0 : 1]$*. Las líneas que unen* $(0)$ *con* $(0, g)$ *y* $(\infty)$ *con* $(h, 0)$ *son* $[0, -1, g]$ *y* $[-1, 0, h]$ *respectivamente. Así pues,* $(h, g) = [h : g : 1]$*. De manera similar, la línea que une* $(1, 0)$ *con* $(0, m)$ *es* $[m, 1, -m]$ *y entonces* $(m) = [1 : -m : 0]$*. Cálculos sencillos muestran que entonces* $[m, k] = [m, 1, -k]$ *y* $[k] = [1, 0, -k]$*.*
*Ahora determinamos la operación ternaria* $T$*. Sean* $\oplus, \odot$ *la suma y la multiplicación de* $(K, T)$ *respectivamente. Sean* $a, b \in K$*. Por definición* $a \oplus b = T(1, a, b)$*. Ahora,* $T(1, a, b) = k \Leftrightarrow (a, b) \in [1, k] \Leftrightarrow [a : b : 1] \in [1, 1, -k] \Leftrightarrow a + b - k = 0$ *y por lo tanto* $\oplus = +$*. De manera similar,* $a \odot b = T(a, b, 0)$ *y* $T(a, b, 0) = k \Leftrightarrow (b, 0) \in [a, k] \Leftrightarrow [b : 0 : 1] \in [a, 1, -k] \Leftrightarrow ab + 0 \cdot 1 - k = 0$*. Por lo tanto* $\odot = \cdot$*.*
*Por último,* $T(m, x, y) = k \Leftrightarrow (x, y) \in [m, k] \Leftrightarrow [x : y : 1] \in [m, 1, -k] \Leftrightarrow mx + y - k = 0$*. Así las cosas,* $T(m, x, y) = m \cdot x + y = m \odot x \oplus y$*. Esto nos lleva a la siguiente definición.*

**Definición 3.3.3.** *Sean* $(R, T)$ *un ATP. Si* $T(a, b, c) = ab + c \ \forall a, b, c \in R$ *decimos que* $(R, T)$ *es un* ***anillo ternario plano lineal****.*

**Proposición 3.3.3.** *Es posible darle coordenadas al plano* $\Pi_2(K)$ *con un ATP lineal isomorfo a* $K$*.*

La discusión del ejemplo anterior muestra que la recíproca de la proposición anterior también es válida, es decir:

**Proposición 3.3.4.** *Si* $K$ *es un campo no–conmutativo, el plano proyectivo que surge de* $K$ *considerado como ATP es isomorfo a* $\Pi_2(K)$*.*

Combinando la proposición anterior con las proposiciones 3.2.1 y 3.2.2 tenemos la siguiente:

**Proposición 3.3.5.** *Sea* $K$ *un campo no–conmutativo. Si* $\Pi_2(K)$ *tiene coordenadas en* $(R, T)$ *un ATP entonces* $(R, T)$ *es isomorfo a* $K$*.*

*Demostración.* Esto se sigue de la siguiente propiedad que poseen los planos proyectivos de la forma $\Pi_2(K)$ (ver [4]): dados $\{A', B', C', D'\}, \{A, B, C, D\}$ cuadrángulos de $\Pi_2(K)$, $\exists \alpha \in \Sigma\Pi_2(K)$ tal que $\alpha(A) = A', \alpha(B) = B'$, $\alpha(C) = C', \alpha(D) = D'$ (si $K$ es un campo entonces dicho automorfismo es único). □

## 3.4. Cuadrados latinos

Hemos visto que hay un vínculo entre los planos proyectivos y los anillos ternarios planos. En el siguiente cápítulo veremos que ciertas propiedades algebráicas de los anillos ternarios planos se pueden traducir en propiedades geométricas de los planos proyectivos y recíprocamente. Antes estudiaremos brevemente la relación entre los anillos ternarios planos y los llamados cuadrados latinos que a su vez nos ayudaran en el estudio de los planos proyectivos.

**Definición 3.4.1.** *Un **cuadrado latino de orden** $n$ es una matriz $A \in Mat(n \times n, R)$ donde $R$ es un conjunto con $n$ elementos tal que*
$\{a_{i0}, a_{i1}, \ldots, a_{in-1}\} = \{a_{0j}, a_{1j}, \ldots, a_{n-1j}\} = R \ \forall i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. *Por lo general usaremos $R = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Denotamos $\mathcal{L}(n \times n, R)$ al conjunto de cuadrados latinos de orden $n$ con entradas en el conjunto $R$.*

**Definición 3.4.2.** *Sean $A, B \in \mathcal{L}(n \times n, R)$. Decimos que $A$ y $B$ son **ortogonales**, denotado $A \perp B$, si $\{(A_{ij}, B_{ij}) : i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\} = R \times R$. Es decir, dos cuadrado latinos son ortogonales si al superponerlos obtenemos todas las posibles parejas con elementos en $R$.*

Veremos ahora una relación entre los cuadrados latinos ortogonales y los anillos ternarios planos. Sea $(R, T)$ un ATP de orden $n$ ($|R| = n$), $R = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Dado $x \in R \setminus \{0\}$ definimos $\{x\} \in Mat(n \times n, R)$ como $\{x\}_{ij} = T(x, i, j)$.

**Proposición 3.4.1.** *Si $\{x\}$ está definida como en el párafo anterior:*

1. *$\{x\}$ es un cuadrado latino*
2. *$x \neq y \Rightarrow \{x\} \perp \{y\}$*

*Demostración.* 1. Para $i$ fija tenemos que $T(x, i, j) = T(x, i, k) \Rightarrow i = k$ por la propiedad (D).
Sea $j$ fija. Supongamos que $\exists i, k \in R$, $i \neq k$ tales que $T(x, i, j) = T(x, k, j)$. Como $T(0, i, j) = T(0, k, j) = j$, se sigue de (C) que $x = 0$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $T(x, i, j) = T(x, k, j) \Rightarrow i = k$.
Así pues, hemos probado que cada renglón tiene entradas distintas y lo mismo para las columnas. Como $R$ es finito se sigue que $\{x\}$ es un cuadrado latino.

2. Supongamos que $\{x\}$ no es ortogonal a $\{y\}$ con $x \neq y$. Entonces $\exists a, b, c, d \in R$ tales que $(T(x, a, b), T(y, a, b)) = (T(x, c, d), T(y, c, d))$. Como $\{x\}$ es latino, $T(x, a, b) = T(x, c, d)$ implica $a \neq c, b \neq d$. Entonces la ecuación $T(u, a, b) = T(u, c, d)$ con $a \neq c$ tiene soluciones distintas $u = x, y$ lo cual contradice la propiedad (C). Por lo tanto $\{x\} \perp \{y\}$. □

**Definición 3.4.3.** *Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(n \times n, R)$. Se dice que $\mathcal{F}$ es una **familia de cuadrados latinos mutuamente ortogonales**, abreviado **CLMO**, si $A \perp B \ \forall A, B \in \mathcal{F}$.*

**Definición 3.4.4.** *Sean $A, B \in \mathcal{L}(n \times n, R)$. Decimos que $A$ es equivalente a $B$, denotado $A \sim B$, si $\exists \alpha \in \{0, 1, \ldots, n-1\}^{\{0,1,\ldots,n-1\}}$ biyectiva tal que*

$$(A^{\alpha(0)}, A^{\alpha(1)}, \ldots, A^{\alpha(n-1)}) = (B^0, B^1, \ldots, B^{n-1})$$

*ó*

$$\begin{pmatrix} A_{\alpha(0))} \\ A_{\alpha(1)} \\ \vdots \\ A_{\alpha(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_{n-1} \end{pmatrix}$$

Veamos algunas propiedades que cumplen las familias de cuadrados latinos mutuamente ortogonales.

**Proposición 3.4.2.** *Sea $\mathcal{F}$ una familia de CLMO de orden $n$. Entonces $F$ es equivalente a una familia $\mathcal{F}^{'}$ de CLMO ($\forall A \in \mathcal{F}\ \exists! A^{'} \in \mathcal{F}^{'}$ tal que $A \sim A^{'}$) tal que $A_0 = (0, 1, \ldots, n-1)$ $\forall A \in \mathcal{F}^{'}$. Se dice que la familia $\mathcal{F}^{'}$ está en forma normal.*

*Demostración.* Es claro que si $A \in \mathcal{L}(n \times n, R)$ y $\alpha \in R^R$ es biyectiva entonces $\alpha(A) \in \mathcal{L}(n \times n, R)$ donde $\alpha(A)_{ij} = \alpha(A_{ij})$ $\forall i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. También $\forall B \in \mathcal{L}(n \times n, R)$ $A \perp B \Rightarrow \alpha(A) \perp B$. Así pues, $\mathcal{F}$ se puede poner en forma normal en a lo más $|\mathcal{F}|$ pasos. $\square$

**Proposición 3.4.3.** *Sea $\mathcal{F}$ una familia de CLMO de orden $n$. Entonces $|\mathcal{F}| \leq n-1$. Si $|\mathcal{F}| = n-1$ se dice que $\mathcal{F}$ es completa.*

*Demostración.* Por la proposición anterior podemos suponer que $\mathcal{F}$ está en forma normal. Cualesquiera dos elementos de $\mathcal{F}$ tienen valores distintos en la posición $(1, 0)$ (pues en caso contrario, al superponerlos el par $(s, s)$ aparecería en las posiciones $(1, 0)$ y $(0, s)$ p.a. $s \in R$).Además, ninguno de los elementos de $\mathcal{F}$ puede tener al 0 en la posición $(1, 0)$ pues cada uno de ellos tiene a 0 en la posición $(0, 0)$. Así las cosas, solo hay $n-1$ posibilidades para la posición $(1, 0)$ y como cuadrados distintos tienen valores distintos en dicha posición, se sigue que $|\mathcal{F}| \leq n-1$. $\square$

**Proposición 3.4.4.** *Sea $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_t\}$ una familia de CLMO de orden $n$ en forma normal. Entonces se puede suponer que $(A_1)^0 = (0, 1, \ldots, n-1)^T$.*

*Demostración.* Sea $A_k = (a_{ij}^{(k)})$. Definimos $\beta \in \{0, 1, \ldots, n-1\}^{\{0,1,\ldots,n-1\}}$ de la siguiente manera: si $a_{i0}^{(1)} = s$ entonces $\beta(i) = s$. Como $A_1$ es latino, $\beta$ es biyectiva. Definimos:

$$A_k^{\beta} = \begin{pmatrix} (A_k)_{\beta(0)} \\ (A_k)_{\beta(1)} \\ \vdots \\ (A_k)_{\beta(n-1))} \end{pmatrix}$$

Es claro que $A_k \perp A_s \Rightarrow A_k^{\beta} \perp A_s^{\beta}$ (pues se permutaron de la misma manera los renglones de cada cuadrado). Por lo tanto $\{A_1^{\beta}, A_2^{\beta}, \ldots, A_t^{\beta}\}$ es una familia de CLMO equivalente a $\mathcal{F}$ y $(A_k^{\beta})^0 = (0, 1, \ldots, n-1)^T$. $\square$

El siguiente teorema relaciona el estudio de los cuadrados latinos con el estudio de los planos proyectivos.

**Teorema 3.4.1.** *Existe un plano proyectivo de orden $n$ si y sólo si existe una familia completa de CLMO de orden $n$.*

*Demostración.* Si $\Pi$ es un plano proyectivo de orden $n$, entonces se le pueden dar coordenadas en $(R,T)$ un ATP con $R = \{0,1,\ldots,n-1\}$. Por la proposición 3.4.1 dicho ATP da lugar a una familia de $n-1$ cuadrados latinos mutuamente ortogonales de orden $n$.

Sea $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$ una familia de CLMO de orden $n$ en forma normal con $(A_1)^0 = (0,1,\ldots,n-1)^T$. Como no hay dos cuadrados con la misma entrada en la posición $(1,0)$ podemos etiquetar a cada cuadrado como $\{x\}$ donde $\{x\}$ es el cuadrado tal que en la entrada $(1,0)$ aparece el elemento $x \in R$.
Definimos $T : R \times R \times R \to R$ como $T(x,i,j) = \{x\}_{ij}$ si $x \neq 0$ y $T(0,i,j) = j$ $\forall i,j \in R$. Veamos que $(R,T)$ satisface las propiedades (A),(B),(D) y (E). Esto basta para ver que $(R,T)$ es un ATP por la proposición 3.3.1.
(A) Como cada cuadrado está en forma normal, $T(x,0,c) = c$ $\forall x \in R$.
(B) Como $\{a\}$ es el cuadrado con $a$ en la posición $(0,1)$, se sigue que $T(a,1,0) = a$ $\forall a \in R$ (si $a = 0$ se da por definición). Como $\{1\}$ tiene a $(0,1,\ldots,n-1)^T$ como primer columna, se sigue que $T(1,a,0) = a$ $\forall a \in R$.
(D) En cada renglón del cuadrado $\{a\}$ aparece cada elemento de $R$ exactamente una vez. Así pues, dados $a,b,c \in R$, $a \neq 0$, $\exists! \in R$ tal que $T(a,b,x) = c$. Si $a = 0$, $T(0,b,x) = c \Leftrightarrow x = c$ por definición.
(E) Sean $a,b,c,d \in R$, $a \neq c$. Si $a,c \neq 0$, como $\{a\} \perp \{c\}$ $\exists!(x,y) \in R \times R$ tal que $(\{a\}_{xy}, \{c\}_{xy}) = (b,d)$ i.e. $T(a,x,y) = b$ y $T(c,x,y) = d$. Si $a = 0$, $T(0,x,y) = b \Leftrightarrow y = b$. Como $\{c\}$ es un cuadrado latino ($c \neq 0$), $T(c,x,b) = d$ tiene solución única para $x$.
Por lo tanto, $(R,T)$ es un ATP de orden $n$ que da lugar a un plano proyectivo de orden $n$ según el teorema 3.2.2. □

Ahora caracterizaremos la linealidad de un ATP finito a través de su correspondiente familia completa de CLMO.

**Teorema 3.4.2.** *Un ATP finito $(R,T)$ es lineal si y sólo si su correspondiente familia de CLMO $\mathcal{F}$ cumple que $\{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}\} = \{B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}\}$ $\forall A,B \in \mathcal{F}$.*

*Demostración.* Supongamos que $(R,T)$ es lineal. Sean $a,b,x \in R$, $x \neq 0$. Por definición, $\{x\}_{ab} = T(x,a,b) = x \cdot a + b = T(1, x \cdot a, b) = \{1\}_{x \cdot ab}$. Así pues, el $a$–ésimo renglón de $\{x\}$ es igual al $x \cdot a$–ésimo renglón de $\{1\}$.

Supongamos que $\{x\}$ y $\{1\}$ tienen los mismos renglones (como vectores). Entonces $\exists \alpha_x \in \{0,1,\ldots,n-1\}^{\{0,1,\ldots,n-1\}}$ biyectiva tal que $\{x\}_{ab} = \{1\}_{\alpha_x(a)b}$ $\forall a,b \in R$. Así las cosas, $T(x,a,b) = T(1,\alpha_x(a),b) = \alpha_x(a) + b$.Haciendo $b = 0$, $T(x,a,0) = x \cdot a = \alpha_x(a)$ de modo que $T(x,a,b) = x \cdot a + b$ y $(R,T)$ es lineal. □

Para concluir este capítulo, veremos una aplicación de los cuadrado latinos al estudio de los planos proyectivos. Probaremos que $\Pi_2(4)$ es el único plano proyectivo de orden cuatro salvo isomorfismo, de manera relativamente sencilla, mediante las siguientes proposiciones:

**Proposición 3.4.5.** *Los únicos lazos de orden cuatro son los dos grupos de orden cuatro.*

*Demostración.* Es claro que todo grupo es un lazo. Consideramos las tablas de Cayley de los dos grupos de orden cuatro, $(R, *)$ el grupo cíclico de orden cuatro y $(R, \oplus)$ el grupo de Klein con $R = \{0, 1, 2, 3\}$ y 0 el elemento neutro en ambos casos:

| $*$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

| $\oplus$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |

Sea $(R, \cdot)$ un lazo y supongamos que 0 es su elemento neutro. Es fácil ver que la tabla de Caley de cualquier lazo es un cuadrado latino. Así pues, clasificamos las posibles tablas de Cayley de $(R, \cdot)$ de acuerdo al valor de $1 \cdot 1$.
Si $1 \cdot 1 = 0$ hay exactamente dos posibilidades:

| $\cdot$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 3 | 1 | 0 |
| 3 | 3 | 2 | 0 | 1 |

| $\cdot$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |

En el primer caso, intercambiando 1 y 2, tenemos que $(R, \cdot) \cong (R, *)$. En el segundo caso es claro que $(R, \cdot) \cong (R, \oplus)$.
Ahora mostramos las posibles tablas de Cayley para los casos $1 \cdot 1 = 2$ y $1 \cdot 1 = 3$ respectivamente:

| $\cdot$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |

| $\cdot$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 3 | 0 | 2 |
| 2 | 2 | 0 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |

En el primer caso es inmediato que $(R, \cdot) \cong (R, *)$. En el segundo caso, intercambiando 2 y 3, vemos que $(R, \cdot) \cong (R, *)$. Por lo tanto, los únicos lazos de orden cuatro son los dos grupos de orden cuatro. $\square$

**Proposición 3.4.6.** *No hay cuadrados latinos ortogonales a*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

*Demostración.* Supongamos que hubiera algún cuadrado latino $A$ ortogonal al cuadrado dado. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A$ está en forma normal. Hay dos casos de acuerdo al valor de $A_{10}$.
*Caso 1.* Si $A_{10} = 2$. Esto obliga a que $A^0 = (0, 2, 3, 1)^T$ lo cual implica que $A^1 =$

$(1,0,2,3)^T$. Lo anterior fuerza que $A_{13} = 3$ lo cual contradice la condición de ortogonalidad.
*Caso 2.* Si $A_{10} = 3$. Entonces $A^0 = (0,3,1,2)^T$ de modo que $A_{11} = 0$. Así las cosas $A_{21} = 2$ ó $A_{21} = 3$. En cualquier caso, se contradice la condición de ortogonalidad. $\square$

**Proposición 3.4.7.** *La familia $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{a\}, \{b\}\}$ es una familia de CLMO donde*

$$\{1\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & b \\ 1 & 0 & b & a \\ a & b & 0 & 1 \\ b & a & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \{a\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & b \\ a & b & 0 & 1 \\ b & a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & b \end{pmatrix} \qquad \{b\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & b \\ b & a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b & a \\ a & b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Más aún, $\{a\}$ queda completamente determinado una vez que $a$ ocupa la posición $(1,0)$ y esto último determina completamente a $\{b\}$.*

*Demostración.* Esto se sigue por inspección. $\square$

La proposición anterior nos dice que hay una única familia completa de CLMO de orden cuatro en forma normal que tiene al cuadrado $\{1\}$ definido como en la proposición. Dicha familia es la que se obtiene haciendo $a = 2,\ b = 3$.
Sean $(R, T)$ un ATP de orden cuatro y $\mathcal{G}$ su correspondiente familia completa de CLMO. Sabemos que podemos describir la suma en $R$ por medio de $\mathcal{G}$, es decir

$$x + y = T(1, x, y) = \{1\}_{xy} \ \forall x, y \in R$$

Así pues, $\{1\}$ es la tabla de Cayley de $(R, +)$. Como $(R, +)$ es un lazo, la Proposición 3.4.5 nos muestra que de hecho $(R, +)$ es un grupo de orden cuatro. Como $\{1\}$ es ortogonal a los otros dos cuadrados latinos de $\mathcal{G}$, la Proposición 3.4.6 implica que $(R, +) \cong (R, \oplus)$. De la Proposición 3.4.7 se sigue que entonces $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. El producto en $R^*$ también se puede describir por medio de $\mathcal{G}$ como sigue

$$x \cdot y = T(x, y, 0) \ \forall x, y \in R^*$$

Así las cosas, obtenemos la tabla de Cayley de $(R^*, \cdot)$ usando $\mathcal{G}$:

| $\cdot$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 1 | 2 |

Así pues $(R, \cdot) \cong C_3$, el grupo cíclico de orden tres. Por inspección, la Proposición 3.4.2 nos garantiza que $(R, T)$ es lineal. Todo lo anterior prueba el siguiente teorema:

**Teorema 3.4.3.** *$GF(4)$ es el único ATP de orden cuatro salvo isomorfismo (considerano a $GF(4)$ como ATP de manera natural) y entonces $\Pi_2(4)$ es el único plano proyectivo de orden cuatro salvo isomorfismo.*

# Capítulo 4

# Propiedades algebraicas de anillos ternarios planos

En este capítulo discutiremos la relación entre la estructura geométrica de un plano proyectivo con coordenadas en un ATP lineal y las propiedades algebraicas de este último. Este estudio dará lugar a una clasificación de cierto tipo de planos proyectivos. A lo largo de este capítulo, $\Pi$ será un plano proyectivo con coordenadas en $(R, T)$ un ATP.

## 4.1. Linealidad

Empezamos caracterizando la propiedad de linealidad a través de ciertas configuraciones de Desargues pequeñas.

**Teorema 4.1.1.** $(R, T)$ *es lineal si y sólo si para cualesquiera triángulos* $\Delta_i = \langle A_i, B_i, C_i, a_i, b_i, c_i \rangle$, $i = 1, 2$ *en perspectiva desde* $(\infty)$ *tales que* $A_1, A_2 \in [0]$ *y tales que* $b_1 \cap b_2, c_1 \cap c_2 \in [\infty]$ *se cumple que* $a_1$ *pasa por* $(0)$ *si y sólo si* $a_2$ *pasa por* $(0)$.

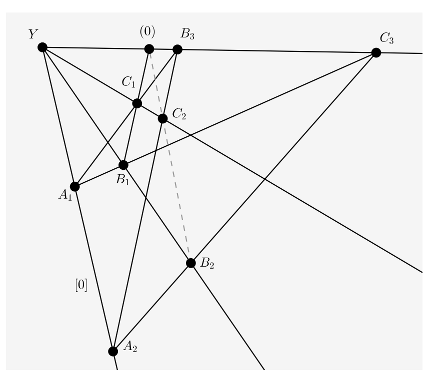


Figura 4.1:

*Demostración.* Sean pues $\Delta_i = \langle A_i, B_i, C_i, a_i, b_i, c_i \rangle$, $i = 1, 2$ dos triángulos en perspectiva desde $(\infty)$ tales que $A_1, A_2 \in [0]$ y tales que $b_1 \cap b_2, c_1 \cap c_2 \in [\infty]$. Sean $B_1B_2 = [u], C_1C_2 = [v], C_3 = c_1 \cap c_2 = (m), B_3 = b_1 \cap b_2 = (n)$ y $a_1 \cap [\infty] = (0)$. Así las cosas, $A_1 = (0, a), A_2 = (0, d), B_1 = (u, b)$ y $B_2 = (u, c)$. Como $C_1 = [v] \cap [0, b]$ se tiene que $C_1 = (v, b)$. Sea $C_2 = (v, f)$.

Supongamos que $(R, T)$ es lineal. Basta probar que $f = c$. Como $A_1, B_1$ y $C_3$ son colineales tenemos que $a = T(m, u, b) = mu + b$. De manera similar, la colinealidad de $A_1, B_3, C_1$ implica $nv + b = a$. Como $(R, +)$ es un lazo, la ecuación $x + b = a$ tiene solución única en $x$ y entonces $mu = nv$.
A su vez, la colinealidad de $A_2, B_2, C_3$ y $A_2, B_3, C_2$ implica $mu + c = d = nv + f$. Así las cosas, $mu + c = mu + f$ y como $(R, +)$ es un lazo se sigue que $f = c$.

Ahora, notamos que la configuración en cuestión queda determinada por los parámetros $m, u, b, n, c$. Efectivamente, $u$ y $b$ determinan a $B_1$, $u$ y $c$ determinan a $B_2$. El valor $m$ determina a $C_3$ quien, junto con $B_1$ y $B_2$, determina a los puntos $A_1, A_2$ y por lo tanto a los valores $a, d$. El valor $n$ determina a $B_3$. Ahora, recuérdese que estamos en el caso en el que $C_1$ está en la línea que une $(0)$ con $B_1$. Como $C_1 \in A_3B_3$ entonces $C_1$ queda determinado y por lo tanto también el valor $v$. Esto último determina a $C_2 = [v] \cap A_2B_3$ y por lo tanto el valor $f$ queda determinado. Así las cosas, la hipótesis nos permite suponer $f = c$. Considerando las mismas colinealidades que en la primera mitad de la prueba vemos que $\forall m, u, b, n, c \in R$ existen $v, a, d \in R$ adecuados tales que:

$$T(m, u, b) = T(n, v, b) = a \tag{4.1}$$
$$T(m, u, c) = T(n, v, c) = d \tag{4.2}$$

Haciendo $c = 0, n = 1$ ($m, u, b$ arbitrarios) se tiene por 4.2 que $mu = v = d$ que sustituyendo en 4.1 nos da $T(m, u, b) = T(1, v, b) = v + b = mu + b$. Por lo tanto $(R, T)$ es lineal. $\square$

**Observación 4.1.1.** *Si $(R, T)$ es lineal entonces $(x, y) \in [m, k]$ si y sólo si $mx + y = k$. Efectivamente,*

$$(x, y) \in [m, k] \Leftrightarrow T(m, x, y) = k \Leftrightarrow mx + y = k$$

## 4.2. La estructura aditiva de $(R, T)$

Ahora estudiaremos la estructura aditiva de $(R, T)$

**Teorema 4.2.1.** *$(R, T)$ es lineal con suma asociativa si y sólo si $\Pi$ es $((\infty), [\infty])-$ transitivo.*

*Demostración.* Supongamos que la suma en $(R, T)$ es asociativa.
Sea $\{A, B\} \subseteq P_\Pi \backslash [\infty]$ tal que $A, B, (\infty)$ son colineales. Debemos construir una $((\infty), [\infty])-$ perspectividad que mande $A$ en $B$. Por la proposición 1.3.2 basta exhibir una colineación de $\Pi^{[\infty]}$ que fije a cada $m^\infty$ con $m \in b_\Pi((\infty)) \setminus \{[\infty]\}$, que no fije puntos de $\Pi^{[\infty]}$ y que mande $A$ en $B$ (dicha colineación se extenderá, de manera única, a una colineación de $\Pi$ que fija linealmente a $(\infty)$ y, como no fija puntos de $\Pi^{[\infty]}$, fijará puntualmente a $[\infty]$ por

el Teorema 2.2.2).
Sea $A = (u, v)$. Como $(\infty), A, B$ son colineales se sigue que $B = (u, w)$ p.a. $w \in R$. Como $(R, +)$ es un lazo, $\exists! a \in R$ tal que $w = v + a$ y así $B = (u, v + a)$. Definimos $\phi_a : P_{\Pi^{[\infty]}} \to P_{\Pi^{[\infty]}}$ como $\phi_a(x, y) = (x, y + a)$. Nótese que $\phi_a(A) = B$ y que al ser $(R, +)$ un lazo, $\phi_a$ es una biyección. Además, como $A \neq B$, $\phi_a$ no fija puntos de $\Pi^{[\infty]}$. Veamos que $\phi_a$ manda líneas en líneas:

$$\begin{aligned}
\phi_a(x, y) \in [m, k + a] &\Leftrightarrow (x, y + a) \in [m, k + a] && \\
&\Leftrightarrow mx + (y + a) = k + a && \text{(linealidad)} \\
&\Leftrightarrow (mx + y) + a = k + a && \text{(asociatividad)} \\
&\Leftrightarrow mx + y = k && \text{((}R, +\text{) es un lazo)} \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in [m, k] && \text{(linealidad)}
\end{aligned}$$

i.e. $\phi_a[[m, k]^{[\infty]}] = [m, k + a]^{[\infty]}$.
Ahora

$$(x, y) \in [k] \Leftrightarrow x = k \Leftrightarrow (x, y + a) \in [k] \Leftrightarrow \phi_a(x, y) \in [k]$$

i.e. $\phi_a[[k]^{[\infty]}] = [k]^{[\infty]}$. Por lo tanto $\phi_a \in \Sigma\Pi^{[\infty]}$ es la colineación que buscabamos.

Supongamos que $\Pi$ es $((\infty), [\infty])-$transitivo. Entonces $\Pi$ es $((\infty), [\infty])-$desarguesiano por el Teorema 2.2.6 y así, $(R, T)$ es lineal por el Teorema 4.1.1.
Por hipótesis, $\forall a \in R^* \; \exists \phi_a \in \Sigma_{((\infty),[\infty])}$ tal que $\phi_a(0, 0) = (0, a)$. Como $(\infty)$ es el centro de $\phi_a$ se tiene que $\phi_a[[k]] = [k] \; \forall k \in R$. Haciendo $k = 0$ tenemos que $\exists \alpha_a : R \to R$ biyectiva tal que $\phi_a(0, y) = (0, \alpha_a(y)) \; \forall y \in R$ y $\alpha_a(0) = a$. Ahora, como $\phi_a$ fija a $(0)$ y preserva incidencia se sigue que

$$\phi_a(x, y) = (x, \alpha_a(y)) \; \forall x, y \in R$$

Como $[\infty]$ es el eje de $\phi_a$ tenemos que $\phi_a((m)) = (m) \; \forall m \in R$ de modo que

$$\phi_a[[m, k]] = [m, \alpha_a(k)] \; \forall m, k \in R$$

Como $(R, T)$ es lineal, de lo anterior se sigue que $mx + y = k$ si y sólo si $mx + \alpha_a(y) = k$ es decir

$$mx + \alpha_a(y) = \alpha_a(mx + y) \; \forall m, x, y \in R \tag{4.3}$$

Haciendo $y = 0, m = 1$ tenemos que $x + \alpha_a(0) = \alpha_a(x)$ de donde $\alpha_a(x) = x + a \; \forall x \in R$. Usando lo anterior en 4.3 con $m = 1$ tenemos que

$$x + (y + a) = (x + y) + a \; \forall x, y, a \in R$$

$\therefore$ $(R, +)$ es asociativo. □

**Definición 4.2.1.** *Si $(R, T)$ es un ATP lineal con suma asociativa se dice que $(R, T)$ es un* ***grupo cartesiano****.*

**Teorema 4.2.2.** *Sea $(R, T)$ un grupo cartesiano. $(R, T)$ satisface distributividad por la izquierda si y sólo si $\Pi$ es $((0), [\infty]) -$ transitivo.*

*Demostración.* Supongamos que $(R,T)$ satisface distributividad por la izquierda. Sea $\{A,B\} \subseteq P_\Pi \setminus [\infty]$ tal que $A, B, (0)$ son colineales. Debemos construir una $((0),[\infty])-$perspectividad que mande $A$ en $B$. Como vimos en la prueba del teorema pasado, basta construir una colineación apropiada de $\Pi^{[\infty]}$.
Sea $A = (u,v)$. Como $A, B, (0)$ son colineales, $B = (w,v)$ p.a. $w \in R$. Como $(R,+)$ es una lazo $\exists! a \in R$ tal que $w = a+u$ y así $B = (a+u,v)$. Definimos $\phi_a : P_{\Pi^{[\infty]}} \to P_{\Pi^{[\infty]}}$ como $\phi_a(x,y) = (a+x,y)$. Nótese que $\phi_a(A) = B$ y que al ser $(R,+)$ un lazo, $\phi_a$ es una biyección. Además, como $A \neq B$, $\phi_a$ no fija puntos de $\Pi^{[\infty]}$. Veamos que $\phi_a$ manda líneas en líneas:

$$\begin{aligned}
\phi_a(x,y) \in [m, ma+k] &\Leftrightarrow (a+x,y) \in [m, ma+k] && \\
&\Leftrightarrow m(a+x)+y = ma+k && \text{(linealidad)} \\
&\Leftrightarrow (ma+mx)+y = ma+k && \text{(distributividad)} \\
&\Leftrightarrow ma+(mx+y) = ma+k && \text{(asociatividad)} \\
&\Leftrightarrow mx+y = k && \text{((}R,+\text{) es un lazo)} \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in [m,k] && \text{(linealidad)}
\end{aligned}$$

i.e. $\phi_a[[m,k]^{[\infty]}] = [m, ma+k]^{[\infty]}$.
Ahora:

$$\phi_a(x,y) \in [a+k] \Leftrightarrow (a+x,y) \in [a+k] \Leftrightarrow a+x = a+k \Leftrightarrow x = k \Leftrightarrow x \in [k]$$

i.e. $\phi_a[[k]^{[\infty]}] = [a+k]^{[\infty]}$. Por lo tanto $\phi_a \in \Sigma\Pi^{[\infty]}$. Haciendo $m=0$ vemos que $\phi_a[k^\infty] = k^\infty \ \forall k \in b_\Pi((0)) \setminus \{[\infty]\}$ y por lo tanto es la colineación buscada.

Supongamos que $\Pi$ es $((0),[\infty])-$transitivo. Por hipótesis, $\forall a \in R^* \ \exists \phi_a \in \Sigma_{((0),[\infty])}$ tal que $\phi_a(0,0) = (a,0)$. Como en la prueba del teorema pasado, podemos escribir $\phi_a(x,y) = (\beta_a(x), y)$ donde $\beta_a : R \to R$ es biyectiva y $\beta_a(0) = a$ (pues el centro de $\phi_a$ es $(0)$ y $\phi_a((\infty)) = (\infty)$).
Consideremos la línea $[m,k]$. Como $\phi_a$ no fija puntos de $\Pi^{[\infty]}$, $\phi_a[[m,k]] = [m,h]$ p.a. $h \in R$. Ahora:

$$(0,k) \in [m,k] \Rightarrow \phi_a(o,k) \in [m,h] \Rightarrow (a,k) \in [m,h] \Rightarrow ma+k = h$$

i.e. $\phi_a[[m,k]] = [m, ma+k] \ \forall m,k \in R$. Así las cosas, se tiene que $mx+y = k$ si y sólo si $m\beta_a(x)+y = ma+k$ es decir

$$m\beta_a(x)+y = (ma+mx)+y \ \forall m,x,y,a \in R$$

Haciendo $m=1, y=0$ tenemos que $\beta_a(x) = a+x \ \forall x \in R$ y sustituyendo obtenemos $m(a+x)+y = (ma+mx)+y$ y como $(R,+)$ es un lazo se sigue que:

$$m(a+x) = ma+mx \ \forall m,a,x \in R$$

. ☐

**Definición 4.2.2.** *Sea $(R,T)$ un grupo cartesiano. Si $(R,T)$ satisface la distributividad por la izquierda (derecha) se dice que $(R,T)$ es un **cuasicampo (derecho)**.*

El teorema anterior junto con la Proposición 2.3.6 nos dan la siguiente:

**Proposición 4.2.1.** $\Pi$ *tiene coordenadas en un cuasicampo con la línea* $l$ *con coordenada* $[\infty]$ *si y sólo si* $l$ *es una línea de traslación de* $\Pi$.

De la proposición anterior se sigue que:

**Proposición 4.2.2.** *Si* $\Pi$ *tiene coordenadas en un cuasicampo para una elección particular de los puntos* $X = (0), Y = (\infty)$ *entonces* $\Pi$ *tiene coordenadas en un cuasicampo para cualquier elección de los puntos* $(0), (\infty)$ *en la línea* $XY$.

**Teorema 4.2.3.** *Si* $(R, T)$ *es un cuasicampo entonces* $(R, +)$ *es abeliano.*

*Demostración.* Por los teoremas 4.2.1 y 4.2.2 se tiene que $\Pi$ es $((\infty), [\infty]) -$ transitivo y $((0), [\infty]) -$ transitivo y entonces, por el teorema 2.2.3, $\Sigma_{([\infty],[\infty])}$ es abeliano. En particular $\Sigma_{((\infty),[\infty])}$ es abeliano. Tenemos que $\phi_a \in \Sigma_{((\infty),[\infty])}$ $\forall a \in R^*$ donde $\phi_a$ se define como en la primera parte de la prueba del Teorema 4.2.1. Así las cosas, $\phi_a\phi_b = \phi_b\phi_a$ $\forall a, b \in R^*$. Ahora, como la suma es asociativa se tiene que $\phi_a\phi_b = \phi_{a+b}$ $\forall a, b \in R^*$ y el resultado se da. □

## 4.3. La estructura multiplicativa de $(R, T)$

**Teorema 4.3.1.** *Sea* $(R, T)$ *un ATP.* $(R, T)$ *es lineal con multiplicación asociativa si y sólo si* $\Pi$ *es* $((0), [0]) -$ *transitivo.*

*Demostración.* Supongamos que $(R, T)$ es lineal con multiplicación asociativa. Por la Proposición 2.3.4 basta exhibir para cada $a \in R^*$ una $((0), [0]) -$ homología que mande $(1, 0)$ en $(a, 0)$. Definimos

$$\begin{aligned} \phi_a : P_\Pi &\to P_\Pi \\ (x, y) &\mapsto (ax, y) \\ (m) &\mapsto (ma^{-1}) \\ (\infty) &\mapsto (\infty) \end{aligned}$$

donde $t = a^{-1}$ es la única solución para $ta = 1$ en $R^*$. Es fácil ver que $\phi_a$ es biyectiva. Notamos que $\phi_a$ fija a la línea $[0]$ puntualmente y que $\phi_a(A) = B$. Veamos que manda líneas en líneas:
Se tiene que $\phi_a[[\infty]] = [\infty]$ por definición de $\phi_a$ y porque $(R^*, \cdot)$ es un lazo.

$$\begin{aligned} \phi_a(x, y) \in [ma^{-1}, k] &\Leftrightarrow (ax, y) \in [ma^{-1}, k] \\ &\Leftrightarrow (ma^{-1})(ax) + y = k && \text{(linealidad)} \\ &\Leftrightarrow mx + y = k && \text{(asociatividad)} \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in [m, k] && \text{(linealidad)} \end{aligned}$$

i.e. $\phi_a[[m, k]] = [ma^{-1}, k]$.
Ahora:

$$\phi_a(x, y) \in [ak] \Leftrightarrow (ax, y) \in [ak] \Leftrightarrow ax = ak \Leftrightarrow x = k \Leftrightarrow (x, y) \in [ak]$$

i.e.$\phi_a[[k]] = [ak]$.
Como $\phi_a[[\infty]] = [\infty]$ y $\phi_a[[0,k]] = [0,k]$ $\forall k \in R$ se sigue que $\phi_a$ fija linealmente a $(0)$ y por lo tanto es la colineación buscada.

Supongamos que $\Pi$ es $((0),[0])-$ transitivo. Por hipótesis, $\forall a \in R^* \ \exists \phi_a \in \Sigma_{((0),[0])}$ tal que $\phi_a(1,0) = (a,0)$. Como $(0)$ y $[0]$ son el centro y el eje de $\phi_a$ respectivamente, se tiene que $\phi_a((m)) = \alpha_a(m)$ y $\phi_a(x,y) = (\beta_a(x), y)$ donde $\alpha_a, \beta_a : R \to R$ son biyectivas con $\alpha_a(0) = 0, \beta_a(0) = 0, \beta_a(1) = a$. Es fácil ver que entonces $\phi_a[[m,k]] = [\alpha_a(m), k]$ de modo que

$$T(m,x,y) = T(\alpha_a(m), \beta_a(x), y) \ \forall m,x,y \in R$$

Haciendo $y = 0$ tenemos que:

$$\alpha_a(m)\beta_a(x) = mx \ \forall m,x \in R$$

Haciendo $x = 1$ obtenemos:

$$\alpha_a(m)a = m \ \forall m \in R \tag{4.4}$$

Sea $\gamma_a : R^* \to R^*$ dada por $\gamma_a(x) = xa \ \forall x \in R^*$. Como $(R^*, \cdot)$ es un lazo $\gamma_a$ es biyectiva y por (4.4) $\alpha_a$ es inversa derecha de $\gamma_a$ de modo que $\alpha_a = \gamma_a^{-1}$ y así:

$$mx = \gamma_a^{-1}(m)\beta_a(x) \ \forall m,x \in R$$

Haciendo $m = a$ y usando que $\gamma_a^{-1}(a) = 1$ tenemos que $\beta_a(x) = ax \ \forall x \in R$. Entonces:

$$mx = \gamma_a^{-1}(m)(ax) \ \forall m,x \in R \tag{4.5}$$

Como $\gamma_a$ es biyectiva $\forall m \in R^* \ \exists! u \in R^*$ tal que $\gamma_a(u) = m$. Como $m$ es arbitrario $u$ también lo es al ser $\gamma_a$ una biyección. Sustituyendo en (4.5) tenemos que

$$(ua)x = \gamma_a^{-1}\gamma_a(u)(ax) = u(ax) \ \forall u,a,x \in R^*$$

$\therefore (R^*, \cdot)$ es asociativo.
Veamos que $(R,T)$ es lineal. Sean $m,a,x,y \in R, a \neq 0$. Entonces
$T(m,x,y) = T(ma^{-1}, ax, y)$ donde $a^{-1} \in R^*$ es único con la propiedad $a^{-1}a = 1$. Haciendo $m = a$ tenemos que $T(a,x,y) = T(1,ax,y) = ax + y$. $\square$

**Definición 4.3.1.** *Un **casicampo** es un cuasicampo con multiplicación asociativa.*

**Proposición 4.3.1.** *Un cuasicampo $(R,T)$ es un casicampo si y sólo si $\Pi$ es $((0),[0])-$ transitivo.*

*Demostración.* Esto es inmediato del teorema anterior. $\square$

**Teorema 4.3.2.** *Sea $(R,T)$ un ATP lineal. $(R,T)$ tiene multiplicación asociativa y satisface distributividad por la izquierda si y sólo si $\Pi$ es $((\infty),[0,0])-$ transitivo.*

*Demostración.* Supongamos que $(R, T)$ tiene multiplicación asociativa y satisface distributividad por la izquierda. Argumentando como en las demostraciones de los teoremas pasados tenemos que si para cada $a \in R^*$ definimos

$$\begin{aligned} \phi_a : P_\Pi &\to P_\Pi \\ (x, y) &\mapsto (x, ay) \\ (m) &\mapsto (am) \\ (\infty) &\mapsto (\infty) \end{aligned}$$

entonces $\phi_a$ es biyectiva, $\phi_a[[m, k]] = [am, ak]$, $\phi_a[[k]] = [k]$ y $\phi_a[[\infty]] = [\infty]$. Así pues, $\phi_a$ es una $((\infty), [0, 0]) -$ homología con $\phi_a(0, 1) = (0, a)$ lo cual prueba, por la Proposición 2.3.4, que $\Pi$ es $((\infty), [0, 0]) -$ transitivo.

Supongamos que $\Pi$ es $(\infty), [(0, 0]) -$ transitivo. Por hipótesis $\forall a \in R^* \setminus \{1\}$ $\exists \phi_a \in \Sigma_{(\infty), [(0,0])}$ tal que $\phi_a(0, 1) = (0, a)$. Como en la prueba del teorema anterior, existen biyecciones $\alpha_a, \beta_a : R \to R$ con $\alpha_a(0) = \beta_a(0) = 0, \beta_a(1) = a$ tales que $\phi_a((m)) = \alpha_a(m)$, $\phi_a(x, y) = (x, \beta_a(y))$. Así las cosas, $\phi_a[[m, k]] = [\alpha_a(m), \beta_a(k)]$ y usando la linealidad de $(R, T)$ tenemos que

$$\alpha_a(m)x + \beta_a(y) = \beta_a(mx + y) \ \forall m, x, y \in R$$

Haciendo $x = 1, \ y = 0$ tenemos que $\alpha_a(m) = \beta_a(m) \ \forall m \in R$ i.e. $\alpha_a = \beta_a$ y así

$$\alpha_a(m)x + \alpha_a(y) = \alpha_a(mx + y) \ \forall m, x, y \in R$$

Haciendo $y = 0, \ m = 1$ y usando que $\alpha_a(1) = a$ tenemos que $\alpha_a(x) = ax \ \forall x \in R$ de modo que

$$(am)x + ay = a(mx + y) \ \forall m, x, y \in R \ \forall a \in R^*$$

Haciendo $y = 0$ vemos que $(R^*, \cdot)$ es asociativo. Haciendo $m = 1$ vemos que $(R, T)$ satisface distributividad por izquierda. $\square$

**Teorema 4.3.3.** *Sea $(R, T)$ un grupo cartesiano. $(R, T)$ satisface distributividad por la derecha si y sólo si $\Pi$ es $((\infty), [0]) -$ transitivo.*

*Demostración.* Supongamos que $(R, T)$ satisface distributividad por la derecha. Sea $a \in R^*$. Como $(R, +)$ es un lazo, encontramos $b \in R$ tal que $b + a = 0$. Definimos

$$\begin{aligned} \phi_a : P_\Pi &\to P_\Pi \\ (x, y) &\mapsto (x, bx + y) \\ (m) &\mapsto (m + a) \\ (\infty) &\mapsto (\infty) \end{aligned}$$

Como en las demostraciones de los teoremas anteriores, es fácil ver que $\phi_a$ es biyectiva, $\phi_a[[m, k]] = [m + a, k]$, $\phi_a[[k]] = [k]$, $\phi_a[[\infty]] = [\infty]$. Así pues, $\phi_a$ es una $((\infty), [0]) -$ homología con $\phi_a((0)) = (a)$ lo cual prueba, por la Proposición 2.3.4, que $\Pi$ es $((\infty), [0]) -$ transitivo.

Supongamos que $\Pi$ es $((\infty),[0])-$ transitivo. Por hipótesis, $\forall a \in R^* \; \exists \phi_a \in \Sigma_{((\infty),[0])}$ tal que $\phi_a((0)) = (a)$. Como en las demostraciones anteriores, existen $\alpha : R \to R$ biyectiva y $\beta_a : R \times R \to R$ tales que $\phi_a((m)) = (\alpha_a(m))$, $\phi_a(x,y) = (x, \beta_a(x,y))$ con $\alpha_a(0)$, $\beta_a(0,y) = y \; \forall y \in R$ y $\beta_a(1,0) = b$ donde $t = b$ es la única solución de $a + s = 0$ en $R$ (ver la demostración de la Proposición 2.2.4). Así pues, $\phi_a[[m,k]] = [\alpha_a(m), k]$. Usando la linealidad de $(R,T)$ obtenemos

$$mx + y = \alpha_a(m)x + \beta_a(x,y) \; \forall m,x,y \in R \tag{4.6}$$

Consideremos la función $\gamma_a(u) = u + b \in R \; \forall u \in R$. Como $(R,+)$ es un lazo, $\gamma_a$ es una biyección. Como $a + b = 0$ se sigue que $f_a(u) = u + a$ es una inversa derecha para $\gamma_a$ y por lo tanto $f_a = \gamma_a^{-1}$. Haciendo $y = 0,\; x = 1$ en (4.6) tenemos que $m = \alpha_a(m) + b$ lo cual implica que $\alpha_a$ es inversa derecha de $\gamma_a$ y así $\alpha_a = \gamma_a^{-1} = f_a$.
Haciendo $m = 0$ en (4.6) tenemos que $y = ax + \beta_a(x,y) \; \forall x,y \in R$. Sustituyendo en (4.6) tenemos que

$$mx + (ax + \beta_a(x,y)) = (m+a)x + \beta_a(x,y)$$

usando la asociatividad de la suma

$$(mx + ax) + \beta_a(x,y) = (m+a)x + \beta_a(x,y)$$

y como $(R,+)$ es un lazo

$$mx + ax = (m+a)x \; \forall m,a,x \in R,\; a \neq 0$$

$\therefore (R,T)$ satisface distributividad por la derecha. $\square$

**Proposición 4.3.2.** $(R,T)$ *es un cuasicampo derecho si y sólo si* $(\infty)$ *es un punto de traslación.*

*Demostración.* Esto se sigue de la Proposición 2.3.7, del Teorema 4.2.1 y del teorema anterior. $\square$

**Definición 4.3.2.** *Un* ***semicampo*** *es un cuasicampo que satisface distributividad por la derecha.*

Como consecuencia de los teoremas 4.2.2 y 4.3.3 tenemos el siguiente

**Teorema 4.3.4.** $(R,T)$ *es un semicampo si y sólo si* $\Pi$ *es* $((\infty),[\infty]),\; ((0),[\infty]),\; ((\infty),[0])$ *transitivo si y sólo si* $\Pi$ *es un plano de traslación respecto a* $[\infty]$ *y dual de traslación respecto a* $(\infty)$.

*Demostración.* La última doble implicación se sigue de las proposiciones 2.3.6 y 2.3.7. $\square$

## 4.4. Semicampos

**Definición 4.4.1.** *Se dice que un lazo $(G,\cdot)$ tiene la* ***propiedad del inverso derecho (PID)*** *si $\forall x \in G\ \exists z_x \in G$ tal que $(y \cdot x) \cdot z_x = y\ \forall y \in G$.*
*Análogamente, se dice que el lazo $(G,\cdot)$ tiene la* ***propiedad del inverso izquierdo*** *si $\forall x \in G\ \exists z_x \in G$ tal que $z_x \cdot (x \cdot y) = y\ \forall y \in G$.*

**Proposición 4.4.1.** *Sea $(G,\cdot)$ un lazo con PID o PII. Entonces $\forall x \in G\ z_x \cdot x = e = x \cdot z_x$ y $z_{z_x} = x$.*

*Demostración.* Supongamos que, por ejemplo, $(G,\cdot)$ cumple PID. Dado $x \in G$ se tiene que $(y \cdot x) \cdot z_x = y\ \forall y \in G$. Haciendo $y = z_x$ tenemos que $(z_x \cdot x) \cdot z_x = z_x$ y entonces $z_x \cdot x = e$ pues $s \cdot z_x = z_x$ tiene solución única y $e$ es solución. Haciendo $y = e$ tenemos que $x \cdot z_x = e$ y por lo tanto $z_x \cdot x = e = x \cdot z_x$ y $z_{z_x} = x$. □

**Observación 4.4.1.** *Para cada $x \in G$ el elemento $z_x$ es único y se denota $x^{-1}$. Esto se sigue de la proposición anterior usando que $(G,\cdot)$ es un lazo.*

Si $(R,T)$ es un semicampo entonces es un cuasicampo de modo que $(R,+)$ es un grupo (abeliano) y todo grupo satisface PID y PII. Entonces, por ejemplo, el enunciado $(R,T)$ cumple PID quiere decir que $(R^*,\cdot)$ cumple PID. Ahora caracterizaremos PID y PII geometricamente.

**Teorema 4.4.1.** *Sea $(R,T)$ un semicampo. $(R,T)$ cumple PID si y sólo si $\Pi$ es $((0,0),[0])-$ transitivo.*

*Demostración.* Primero supongamos que $\Pi$ es $((0,0),[0])-$ transitivo. Para cada $b \in R^*$ sea $\phi_b \in \Sigma_{((0,0),[0])}$ tal que $\phi_b((0)) = (b,0)$. Como $(0,0)$ es el centro de $\phi_b$ se tiene que $\phi_b[[m,0]] = [m,0]\ \forall m \in R$. Como $(m) = [\infty] \cap [m,0]$, $\phi_b((m)) = \phi_b[[\infty]] \cap [m,0] = [b] \cap [m,0]$ i.e. $\phi_b(m) = (b,w)$ p.a. $w \in R$. Como también $(b,w) \in [m,0]$, por linealidad tenemos que $mb + w = 0$ y así

$$\phi_b((m)) = (b, -(mb))\ \forall m \in R$$

Sean $m, x \in R$, $x \neq= 0, -b$ y sean $u, n$ determinados por $\phi_b(x,0) = (u,0)$ y $\phi_b[[m,mx]] = [n,mx]$. Como $(m),(x,0) \in [m,mx]$ se sigue que
$\phi_b((m)), \phi_b(x,0) \in \phi_b[[m,mx]]$. Usando la linealidad de $(R,T)$ tenemos que

$$nb - mb = mx$$
$$nu = mx$$

Dados $m, b, x$ el valor $n$ queda determinado por la primer ecuación. La segunda ecuación entonces determina el valor de $u$. Si para $x, b \in R$ dados, $k$ es el valor particular de $n$ cuando $m = 1$ entonces $ku = x$ y $kb = b + x$. Entonces, si $k, b, x, u$ son tales que $kb = b + x, ku = x$ $(\phi_b((1)), \phi_b(x,0) \in \phi_b[[1,1x]] = [k,x])$ y si $nb = m(b+x)$ p.a. $m \in R$ $(\phi_b((m)) \in \phi_b[[m,mx]] = [n,mx])$ entonces $nu = mx$ (pues $(u,0) = \phi_b(x,0) \in \phi_b[[m,mx]]$). En el caso especial en que $b = -1$, las condiciones $k = 1 - x, ku = x$ y $n = m(1-x)$ implican $(mk)u = nu = mx = m(ku)$. Como $\Pi$ es $((0,0),[0])-$ transitivo, conforme $x$ y $b$ varíen en sus respectivos dominios $k$ variará en todos los posibles valores de $R^*$. Así las cosas, si $m, k \in R$ y $u \in R$ es tal que $k = 1 - ku$ entonces

$$(mk)u = m(ku) \tag{4.7}$$

Sea $v = 1 + u$. Entonces $kv = 1$ y así

$$\begin{aligned}
(mk)v = (mk)(1+u) &= mk + (mk)u && \text{(distributividad por la izquierda)}\\
&= mk + (mk)u && \text{(por 4.7)}\\
&= m(k(1+u)) && \text{(distributividad por la izquierda)}\\
&= m(kv) = m && \text{ya que } kv = 1
\end{aligned}$$

Como $k$ estaba definido por $\phi_b[[1, x]] = [k, x]$ entonces, conforme $b$ varía en $R^*$, $k$ toma todos los valores en $R^*$ de modo que $(R^*, \cdot)$ cumple PID.

Supongamos que $(R^*, \cdot)$ cumple PID. Para $b \in R^*$ definimos

$$\begin{aligned}
\phi_b : P_\Pi &\to P_\Pi\\
(x, y) &\mapsto ((b^{-1} + x^{-1})^{-1}, yx^{-1}(b^{-1} + x^{-1})^{-1}) && \text{si } x \neq 0, -b\\
(0, y) &\mapsto (0, y)\\
(-b, y) &\mapsto (yb^{-1})\\
(m) &\mapsto (b, -(mb))\\
(\infty) &\mapsto (\infty)
\end{aligned}$$

Es fácil ver que $\phi_b$ es biyectiva. Además

$$\phi_b[m, k] = [m + kb^{-1}, k], \quad \phi_b[k] = [(b^{-1} + k^{-1})^{-1}] \text{ si } k \neq 0, -b$$

$$\phi_b[0] = [0], \quad \phi_b[-b] = [\infty], \quad \phi_b[\infty] = [b]$$

Solo verificaremos la primera de las igualdades para puntos del tipo $(x, y)$ con $x \neq 0, -b$. El resto de los casos es similar.

$$\phi_b(x, y) \in \phi_b[m, k] \Leftrightarrow (m + kb^{-1})(b^{-1} + x^{-1})^{-1} + (yx^{-1})(b^{-1} + x^{-1})^{-1} = k$$

$$\Leftrightarrow [(m + kb^{-1})(b^{-1} + x^{-1})^{-1} + (yx^{-1})(b^{-1} + x^{-1})^{-1}](b^{-1} + x^{-1}) = k(b^{-1} + x^{-1})$$

Usando distributividad por la derecha, la Proposición 4.4.1 y PID la ecuación anterior implica la siguiente

$$m + kb^{-1} + yx^{-1} = k(b^{-1} + x^{-1})$$

Como $(R, +)$ es abeliano podemos cancelar $kb^{-1}$ y así la ecuación anterior implica

$$m + yx^{-1} = kx^{-1}$$

que a su vez, multiplicando cada miembro por $x$ a la derecha y usando distributividad por la derecha, la proposición 4.4.1 y PID implica que

$$mx + y = k$$

lo cual implica que $(x, y) \in [m, k]$. Nótese que todos los pasos son reversibles. $\square$

**Teorema 4.4.2.** $(R,T)$ *es un semicampo con PID si y sólo si* $l$ *es línea de traslación de* $\Pi$ $\forall l \in b_{\Pi}((\infty))$.

*Demostración.* Si $(R,T)$ es un semicampo entonces, por el Teorema 4.3.4, $\Pi$ es $((\infty),[\infty])$, $((0),[\infty])$, $((\infty),[0])$–transitivo. Si $(R^*,\cdot)$ cumple PID entonces $\Pi$ es $((0,0),[0])-$transitivo por el teorema anterior. La Proposición 2.3.6 implica que entonces $[0]$ y $[\infty]$ son líneas de traslación de $\Pi$ lo cual implica, por la Proposición 2.3.3 (i), que toda línea que pasa por $(\infty)$ es de traslación de $\Pi$. La prueba en el sentido contrario es fácil. □

**Teorema 4.4.3.** *Sea* $(R,T)$ *un semicampo con PID. Entonces* $(R,T)$ *tiene PII si y sólo si* $\Pi$ *es* $((0,0),[0,0])$ – *transitivo.*

*Demostración.* Supongamos que $\Pi$ es $((0,0),[0,0])$ – transitivo. Sea $\alpha \in \Sigma_{((0,0),[0,0])}$ tal que $\alpha(\infty) = (0,-1)$. Para $m \in R^*$ tenemos que $\alpha(m) = \alpha[m,0] \cap \alpha[\infty] = [m,0] \cap [0,-1]$, de manera que si $\alpha(m) = (t,-1)$ entonces $mt - 1 = 0$, es decir

$$\alpha(m) = (m^{-1}, 1) \ \forall m \in R^* \tag{4.8}$$

Como $\alpha(0,y) \in [0]$, $\alpha(0,y)$ es $(\infty)$ o tiene la forma $(0,w)$ p.a. $w \in R$. Para $y \neq 0$ tenemos que $\alpha(0,y)$ está en la línea que une $\alpha(y) = (y^{-1},1)$ con $\alpha(1,0) = (1,0)$ y así

$$\alpha(0,y) = (0,(y^{-1}-1)^{-1}) \ \forall y \in R^* \setminus \{1\} \tag{4.9}$$

Si $a,b \neq 0$ entonces $ab \neq 0$ por PID y tenemos que $(ab)^{-1} - 1 = (ab^{-1})(1-ab)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
[(ab^{-1}) - 1][(1-ab)^{-1} - 1] &= [(ab)^{-1}(1-ab)](1-ab)^{-1} - [(ab)^{-1} - 1] \\
&= (ab)^{-1} - [(ab)^{-1} - 1] \\
&= 1
\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que

$$[(1-ab)^{-1} - 1]^{-1} = (ab)^{-1} - 1 \tag{4.10}$$

Haciendo $y = 1 - ab$ en (4.9) obtenemos

$$\alpha(0, 1-ab) = (0, (ab)^{-1} - 1) \tag{4.11}$$

La línea $\alpha[b]$ une $\alpha(b,0) = (b,0)$ con $\alpha(\infty) = (0,-1)$ de modo que

$$\alpha[b] = [-b^{-1}, -1] \tag{4.12}$$

De manera similar,

$$\alpha(b, 1-ab) \in \alpha[b] \cap \alpha[a - b^{-1}, 0] = [-b^{-1}, -1] \cap [a - b^{-1}, 0]$$

Cálculos sencillos muestran que $(a^{-1}, b^{-1}a^{-1} - 1)$ está en ambas líneas y entonces

$$\alpha(b, 1-ab) = (a^{-1}, b^{-1}a^{-1} - 1) \tag{4.13}$$

Pero por (4.11) tenemos que $\alpha(0,1-ab)=(0,(ab)^{-1}-1)$ de modo que

$$\alpha(b,1-ab)=(c,(ab)^{-1}-1) \quad \text{p.a. } c\in R \tag{4.14}$$

De las últimas dos ecuaciones se sigue que $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ de modo que $b^{-1}=(ab)^{-1}a$ y así

$$a^{-1}(ab)=[(ab)^{-1}a]^{-1}=(b^{-1})^{-1}$$

Por lo tanto $(R,T)$ tiene PII.

Supongamos que $(R,T)$ tiene PII. Basándonos en la prueba anterior definimos

$$
\begin{array}{rll}
\alpha : P_\Pi \to P_\Pi & & \\
(x,y) \mapsto (z_y^{-1}, x^{-1}z_y^{-1}-1) & \text{si } x\neq 0,1 \ y\neq 0 \text{ y } z_y\in R^* & \text{cumple } x=1-z_y x \\
(0,y) \mapsto (0,(y^{-1}-1)^{-1}) & \text{si } y\neq 0,1 & \\
(0,1) \mapsto (\infty) & & \\
(1,y) \mapsto ((y^{-1}-1)^{-1}+1,(y^{-1}-1)^{-1}) & \text{si } y\neq 0,1 & \\
(1,1) \mapsto (-1) & & \\
(m) \mapsto (m^{-1},-1) & \text{si } m\neq 0 & \\
(\infty) \mapsto (0,-1) & & \\
P \mapsto P & \text{si } P\in[0,0] &
\end{array}
$$

Se puede verificar que $\alpha$ es una $((0,0),[0,0])-$ elación que manda $[\infty]$ en $[0,-1]$. De la Proposición 2.3.1 tenemos que $[0,-1]$ es una línea de traslación de $\Pi$ y entonces, usando la Proposición 2.3.3(i) se tiene que toda línea que pasa por $(0)$ es de traslación. En particular $[0,0]$ es de traslación y $\Pi$ es $((0,0),[0,0])-$ transitivo. □

Si $(R,T)$ cumple PID entonces toda línea que pasa por $(\infty)$ es de traslación. Si $(R,T)$ también cumple PII, la recta $[0,-1]$ también es de traslación de modo que $\Pi$ tiene tres líneas de traslación no–concurrentes lo cual implica, por la Proposición 2.3.3(ii) que toda línea de $\Pi$ es de traslación. Así las cosas, podemos reescribir el teorema anterior de la siguiente manera:

**Teorema 4.4.4.** *Si $(R,T)$ es un semicampo con PID entonces $(R,T)$ cumple PII si y sólo si $\Pi$ es un plano de Moufang.*

Usando el teorema anterior junto con el Teorema 4.3.1 y la Proposición 2.3.8 tenemos el siguiente:

**Teorema 4.4.5.** *$(R,T)$ es un campo no–conmutativo si y sólo si $\Pi$ es $(V,l)-$ transitivo para cualesquiera $V\in P_\Pi,\ l\in L_\Pi$.*

## 4.5. La configuración de Pappus

Cuando $(R,T)$ resulta ser un campo no–conmutativo (i.e. un semicampo con multiplicación asociativa pero, posiblemente, no conmutativa) la Proposición 3.3.4 nos dice que $\Pi$ es $\Pi_2(R)$. Veremos ahora como la geometría de $\Pi_2(R)$ nos dice cuando $(R^*, \cdot)$ es conmutativo y por lo tanto cuando $(R, T)$ es un campo. A este resultado se le conoce como Teorema de Pappus.

**Teorema 4.5.1.** *Sea $(K, +, \cdot)$ un campo no–conmutativo. Sean $\{X, Y, Z\} \subseteq l$, $\{X', Y', Z'\} \subseteq m$ donde $l, m \in L_{\Pi_2(K)}$ son líneas distintas y $l \cap m \notin \{X, Y, Z\}, \{X', Y', Z'\}$. Sean $U = XY' \cap X'Y$, $V = XZ' \cap X'Z$, $W = YZ' \cap Y'Z$. Entonces, $U, V, W$ son colineales si y sólo si $(K, +, \cdot)$ es un campo.*

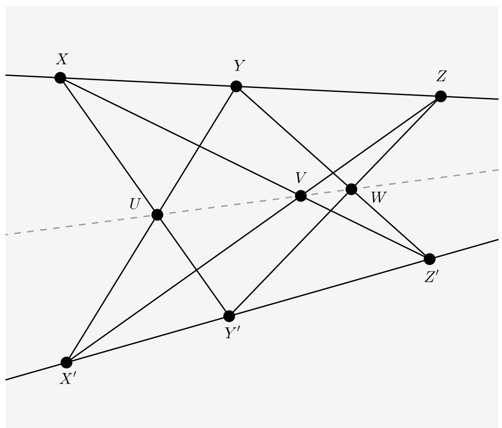


Figura 4.2: La configuración de Pappus

*Demostración.* Supongamos que $X, Y, Z, X', Y', Z', U, V, W$ están dados como en el enunciado del teorema. Como $X, Y, X', Y'$ constituyen un cuadrángulo, podemos suponer que sus coordenadas homogéneas son $[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1], [1 : 1 : 1]$ respectivamente (ver la Proposición 3.3.5). Como $Z \in XY$ entonces $Z = [1 : s : 0]$ p.a. $s \neq 0$. De manera similar, como $Z' \in X'Y'$ entonces $Z = [1 : 1 : 1 + t]$ p.a. $t \neq 0$.
Como $U \in XY' \cap X'Y$, $U = [\alpha + 1 : 1 : 1] = [0 : 1 : \beta]$ p.a. $\alpha, \beta \in K$. Así pues, podemos escribir $U = [0 : 0 : 1]$.
Como $V \in XZ' \cap X'Z$, $V = [1 : s : \alpha] = [\beta : 1 : 1 + t]$ p.a. $\alpha, \beta \in K$. Entonces, podemos escribir $V = [1 : s : (1 + t)s]$.
Ahora, $W \in YZ' \cap Y'Z$ implica $W = [1 : \alpha : 1 + t] = [1 + \beta : 1 + s\beta : 1]$ p.a. $\alpha, \beta \in K$. Se sigue que $\alpha = (1 + s\beta)(1 + t) = 1 + t + s\beta + s\beta t$ y $1 = (1 + \beta)(1 + t) = 1 + \beta + t + \beta t$. La segunda igualdad implica que $-t = \beta + \beta t$ y así $-st = s\beta + s\beta t$. Por lo tanto $\alpha = 1 + t - st$ y escribimos $W = [1 : 1 + t - st : 1 + t]$.
Cálculos sencillos muestran que $UV = [ts, 1, -1]$. Así pues, $W \in UV$ si y sólo si

$$(ts)1 + 1(1 + t - st) + (-1)(1 + t) = 0$$

es decir, si y sólo si $ts + (1 + t - st) - (1 + t) = 0$ lo cual sucede precisamente cuando $ts = st$.
Como $s$ y $t$ varían en $K \setminus \{0\}$ conforme $Z$ y $Z'$ varían en $XY$ y $X'Y'$ respectivamente, tenemos que la conmutatividad de $K$ es suficiente y necesaria para que $U, V, W$ sean colineales. $\square$

La configuración de los nueve puntos y las nueve líneas que se describen en el teorema anterior recibe el nombre de **configuración de Pappus** (ver Figura 4.2). Un plano proyectivo en el que $U, V, W$ son colineales siempre que se construyan como en el teorema de Pappus recibe el nombre de **plano Pappiano**. Resulta que esta última condición es muy fuerte por sí sola en el siguiente sentido:

**Teorema 4.5.2.** *Todo plano Pappiano es Desarguesiano.*

*Demostración.* Sea $\Pi$ un plano Pappiano. Sean $X_1X_2X_3, Y_1Y_2Y_3$ dos triángulos en perspectiva desde un punto $C$ con $C \neq X_i, Y_i$ y $X_i \neq Y_i$, $i = 1, 2$.
Empezamos por observar la siguiente propiedad. Supongamos que no existe una permutación $(i, j, k)$ de $\{1, 2, 3\}$ tal que, a la vez, $X_i, Y_j, Y_k$ y $X_i, X_j, Y_k$ son no–colineales. Se afirma que entonces, ó $X_a, Y_b, Y_c$ son colineales para cualquier permutación $(a, b, c)$ de $\{1, 2, 3\}$ ó $Y_a, X_b, X_c$ son colineales para cualquier permutación $(a, b, c)$ de $\{1, 2, 3\}$ (la exclusión se da porque estamos trabajando con triángulos). Para ver esto podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $Y_1, X_2, X_3$ son no–colineales. Se sigue entonces que $X_2, Y_1, Y_3$ son colineales y $X_3, Y_1, Y_2$ son colineales. Es claro que entonces $X_2, X_1, Y_3$ no pueden ser colineales y así, por hipótesis, $X_1, Y_2, Y_3$ son colineales. Por lo tanto $X_a, Y_b, Y_c$ son colineales para cualquier permutación $(a, b, c)$ de $\{1, 2, 3\}$.
Sean $U_i = X_jX_k \cap Y_jY_k$, $i = 1, 2, 3$ y $(i, j, k)$ una permutación de $\{1, 2, 3\}$. Debemos verificar que $U_1, U_2, U_3$ son colineales.
*Caso 1.* Supongamos que hay una permutación $(i, j, k)$ de $\{1, 2, 3\}$ tal que $X_i, Y_j, Y_k$ son no–colineales y $X_i, X_j, Y_k$ son no–colineales. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $(i, j, k) = (1, 2, 3)$. Definimos $V = X_1X_2 \cap Y_2Y_3$. Es fácil ver que $V \neq X_i, Y_i$ $i = 1, 2$. Además $CX_1 \neq CX_2$ implica $V \neq C$. Considerando las ternas $Y_3, X_3, C$ y $X_2, V, X_1$ (en ese orden), tenemos que

$$\begin{aligned} U_1 &= Y_3V \cap X_2X_3 \\ X &= CX_2 \cap X_1Y_3 \\ Z &= X_3X_1 \cap VC \end{aligned}$$

son colineales. De manera similar, usando las ternas $X_1, Y_1, C$ y $Y_2, V, Y_3$ (es fácil comprobar que los puntos en cuestión satisfacen las condiciones del Teorema de Pappus) tenemos que

$$\begin{aligned} &U_2 \\ &X \\ Z^{'} &= Y_1Y_3 \cap VC \end{aligned}$$

son colineales. Ahora, tanto $V, Z, Z^{'}$ como $X, Y_3, X_1$ son colineales y todos los puntos en cuestión son distintos entre sí. Además es fácil ver que $V, Z, Z^{'} \notin X_1Y_3$. Así las cosas

$$\begin{aligned} U_1 &= XZ \cap VY_3 \\ U_2 &= XZ^{'} \cap X_1Z \\ U_3 &= X_1V \cap Z^{'}Y_3 \end{aligned}$$

son colineales como se quería.
*Caso 2.* Supongamos que no existe una permutación $(i, j, k)$ de $\{1, 2, 3\}$ tal que $X, Y, Y$ son no–colineales y $X, X, Y$ son no–colineales. Se sigue que ó $X_a, Y_b, Y_c$ son colineales para cualquier permutación $(a, b, c)$ de $\{1, 2, 3\}$ ó $Y_a, X_b, X_c$ son colineales para cualquier permutación $(a, b, c)$ de $\{1, 2, 3\}$. Supongamos pues, sin pérdida de generalidad, que $X_1, Y_2, Y_3$ son colineales, $X_2, Y_1, Y_3$ son colineales y $X_3, Y_1, Y_2$ son colineales.
Notamos que ningún $U_i$ es igual a algún $X_j$ o $Y_k$. Definimos $V_1 = CX_1 \cap Y_3U_3$ y $V_2 = CX_2 \cap Y_3U_3$. Observamos que $Y_3U_3 \neq Y_1Y_3, Y_2Y_3, X_3Y_3$. Entonces los puntos $U_3, V_1, V_2, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3, C$ son distintos entre sí. Además, las ternas $C, X_3, X_3$ y $U_3, X_1, X_2$ están en líneas distintas. Consideradas en el orden anterior tenemos que

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= CX_1 \cap X_3U_3 \\
V_2 &= CX_2 \cap U_3Y_3 \\
U_1 &= X_2X_3 \cap X_1Y_3
\end{aligned}
$$

son colineales. Considerando las mismas ternas en el orden $X_3, X_3, C$ y $X_1, X_2, U_3$ se sigue que

$$
\begin{aligned}
V_2 &= CX_2 \cap U_3Y_3 \\
Y_1 &= CX_1 \cap X_3U_3 \\
U_1 &= X_2X_3 \cap X_1Y_3
\end{aligned}
$$

son colineales. Por último, considerando las ternas $Y_1, V_1, X_1$ y $Y_2, X_2, V2$ se sigue que

$$
\begin{aligned}
U_2 &= Y_1X_2 \cap V_1Y_2 \\
U_1 &= X_1Y_2 \cap Y_1V_2 \\
U_3 &= V_1V_2 \cap X_1X_2
\end{aligned}
$$

son colineales como se quería. □

## 4.6. Semicampos alternativos

**Definición 4.6.1.** *Se dice que un lazo $(G, \cdot)$ tiene la* ***propiedad alternativa derecha (PAD)*** *si $\forall x, y \in G$, $x \cdot (y^2) = (x \cdot y) \cdot y$.*
*Análogamente, se dice que un lazo $(G, \cdot)$ tiene la* ***propiedad alternativa izquierda (PAI)*** *si $\forall x, y \in G$, $(x^2) \cdot y = x \cdot (x \cdot y)$.*

Si $(R, T)$ es un semicampo entonces es un cuasicampo de modo que $(R, +)$ es un grupo (abeliano) que ciertamente satisface PAD y PAI. Así pues, de manera similar al caso de PID y PII, el enunciado $(R, T)$ cumple PAD significa que $(R^*, \cdot)$ cumple PAD, etc.

**Proposición 4.6.1.** *Sea $(R, T)$ un semicampo. Si $(R, T)$ cumple PID (PII) entonces $(R, T)$ cumple PAD (PAI).*

*Demostración.* Probaremos que $\forall x, y, z \in R$ $x((yz)y) = ((xy)z)y$. Para $y, z$ apropiados consideramos $t = [(yz)y + y][y^{-1} - (y + z^{-1})^{-1}]$ (si $y, z$ son tales que la expresión anterior no tiene sentido, la propiedad que queremos probar se trivializa o es consecuencia inmediata de PID). Entonces

$$\begin{aligned}
t(y+z^{-1}) &= [yz+1-((yz)y)(y+z^{-1})^{-1}-y(y+z^{-1})](y+z^{-1})\\
&= (yz+1)(y+z^{-1})-((yz)y)-y\\
&= (yz)y+y+y+z^{-1}-(yz)y-y\\
&= y+z^{-1}
\end{aligned}$$

Así pues, $t=1$ y $[(yz)y+y]^{-1}=y^{-1}-(y+z^{-1})^{-1}$. Ahora

$$\begin{aligned}
x &= (x[(yz)y+y])[y^{-1}-(y+z^{-1})^{-1}] && \text{por PID}\\
&= (x((yz)y)+xy)(y^{-1}-(y+z^{-1})^{-1})
\end{aligned}$$

Sea $w=(((xy)z)+xy)(y^{-1}-(y+z^{-1})^{-1})$. Basta probar que $w=x$.

$$\begin{aligned}
w(y+z^{-1}) &= [(xy)z+x-(((xy)z)y)(y+z^{-1})^{-1}-xy(y+z^{-1})^{-1}](y+z^{-1})\\
&= ((xy)z+x)(y+z^{-1})-((xy)z)y-xy\\
&= ((xy)z)y+xy+xy+xz^{-1}-((xy)z)y-xy\\
&= xy+xz^{-1}=x(y+z^{-1})
\end{aligned}$$

Como $(R^*,\cdot)$ es un lazo se sigue que $w=x$. □

**Definición 4.6.2.** *Un semicampo que satisface PAD y PAI recibe el nombre de* ***semicampo alternativo****.*

La proposición anterior nos dice que un semicampo con PI (i.e. PID y PII) también cumple PA (i.e. PAD y PAI). Así las cosas, el Teorema 4.4.4 implica que es posible darle coordenadas a un plano de Moufang con un semicampo alternativo. Resulta ser que de hecho un semicampo alternativo también cumple PI i.e. estas dos clases de semicampos son iguales aunque históricamente se han estudiado de manera independiente y por ello han estado algo separadas. A continuación veremos unos cuantos resultados extremadamente importantes que nos permitiran sacar conclusiones bastante fuertes. Las demostraciones, si bien son instructivas, se omiten pues son demasiado extensas y carecen de contenido geométrico. Para más detalles, ver [5].

**Teorema** (Skornyakov–San Soucie)**.** *Todo semicampo con PID es alternativo.*

**Teorema.** *Todo campo alternatipo cumple PI.*

Los dos teoremas anteriores muestran que PID implica PI y entonces, usando los teoremas 4.4.2 y 4.4.4, tenemos el siguiente:

**Teorema 4.6.1.** $\Pi$ *es un plano de Moufang si y sólo si* $\Pi$ *tiene al menos dos líneas de traslación distintas.*

Es decir, la presencia de dos líneas de traslación distintas implica que todas las líneas son de traslación. Dualmente, la presencia de dos puntos de traslación distintos implica que todos los puntos son de traslación. Nótese que si todas las líneas son de traslación entonces todos los puntos son de traslación y recíprocamente.

**Teorema** (Artin–Zorn)**.** *Todo semicampo alternativo finito es campo.*

Como consecuencia del Teorema de Artin–Zorn tenemos el siguiente:

**Teorema 4.6.2.** *Todo plano de Moufang finito es Pappiano (y por lo tanto Desarguesiano).*

Es decir, la presencia de dos líneas (o puntos) de traslación en un plano proyectivo finito obliga al plano a ser de la forma $\Pi_2(q)$ para algún número $q$ adecuado.

Hemos visto la relación que existe entre las propiedades geométricas de un plano proyectivo y las propiedades algebraicas del anillo ternario en el cual dicho plano tiene coordenadas. Se resumen en una tabla las relaciones más importantes. Es importante notar que en cada caso la condición algebraica es equivalente a la condición geométrica. A veces la condición geométrica está escrita en varias formas equivalentes (checar las equivalencias es fácil). Es interesante notar que en el caso finito los primeros tres tipos de planos se colapsan en el primero. Es posible construir ejemplos propios (aunque en la mayoría de los casos no es una tarea sencilla) para cada tipo de plano i.e. la tabla no es redundante. En esta tabla solo estamos considerando planos proyectivos que tienen coordenadas en un ATP lineal. Hay ejemplos de planos proyectivos que no admiten coordenadas en ningún anillo ternario plano y lineal aunque, desde luego, admiten coordenadas en por lo menos un anillo ternario plano.

**Observación 4.6.1.** *Hacemos algunas observaciones simples sobre la siguiente tabla:*

- *Los planos del tipo* (*a*)*,* (*b*) *y* (*c*) *cumplen que todos los ATP's que les dan coordenadas tienen la misma estructura algebraica (incluso, según vimos, los tipos* (*a*) *y* (*b*) *cumplen que todos sus ATP's son isomorfos).*

- *En los planos de los tipos restantes hay elementos que juegan un papel especial al momento de asignar coordenadas. Por ejemplo, un plano de traslación propio tiene una única línea de traslación que* debe *jugar el papel de* $[\infty]$ *al momento de asignarle coordenadas si lo que se busca es obtener un cuasicampo.*

- *El dual de un plano del tipo* (*a*)*,* (*b*)*,* (*c*) *o* (*d*) *vuelve a ser del mismo tipo (incluso vimos que todo plano Pappiano es su propio dual). El dual de un plano del tipo* (*g*) *es del tipo* (*h*) *y el de un plano del tipo* (*e*) *es del tipo* (*f*)*.*

| ATP | Propiedades geométricas de $\Pi$ | Nombre |
|---|---|---|
| (a) Campo | $(V, k)$ – transitividad para cualesquiera $V$ y $k$ y validez del Teorema de Pappus | Plano Pappiano |
| (b) Campo no–conmutativo | $(V, k)$ – transitividad para cualesquiera $V$ y $k$; ó<br>$(V, k)$ – transitividad para cualesquiera $V$ y $k$ incidentes y $(P, m)$ – transitividad para alguna pareja $(P, m)$ no–incidente | Plano Desarguesiano |
| (c) Semicampo alternativo o Semicampo con PI | $(V, k)$ – transitividad para cualesquiera $V$ y $k$ incidentes; ó<br>$(k, k)$ – transitividad para cualquier $k$; ó<br>$(V, V)$ – transitividad para cualquier $V$; ó<br>$(k, k)$ – transitividad para dos $k$ distintas; ó<br>$(V, V)$ – transitividad para dos $V$ distintos | Plano de Moufang |
| (d) Semicampo | $(k, k)$ – transitividad y $(V, k)$ – transitividad para una pareja $(V, k)$ incidente (entonces $V = (\infty)$ y $k = [\infty]$) | Plano de semicampo |
| (e) Casicampo | $(k, k)$ – transitividad y $(V, m)$ – transitividad para $V$ en $k$ y no en $m$ (entonces $k = [\infty]$ y, ó $V = (0)$ y $m$ pasa por $(\infty)$ ó $V = (\infty)$ y $m$ pasa por $(0)$) | Plano de casicampo |
| (f) Casicampo derecho | $(V, V)$ – transitividad y $(W, k)$ – transitividad para $V$ en $k$ y $W$ no en $k$ (entonces $V = (\infty)$) y, ó $k = [\infty]$ y $[0]$ pasa por $W$ ó $k = [0]$ y $[\infty]$ pasa por $W$) | Plano de casicampo dual |
| (g) Cuasicampo | $(k, k)$ – transitividad para una $k$; ó<br>$(V, k)$ – transitividad para puntos distintos $V$ en la línea $k$ (en ambos casos $k = [\infty]$) | Plano de traslación |
| (h) Cuasicampo derecho | $(V, V)$ – transitividad para un punto $V$; ó<br>$(V, k)$–transitividad para dos líneas distintas $k$ que pasan por $V$ (en ambos casos $V = (\infty)$) | Plano de traslación dual |

# Capítulo 5

# Cuasicampos

Hemos visto que existen, al menos teóricamente, diversos tipos de anillos ternarios planos. Hay cierta clase de anillos ternarios planos que juegan un papel importante: los cuasicampos, que son aquellos que corresponden a planos proyectivos para los cuales todas las posibles elaciones con eje $[\infty]$ existen i.e. planos de traslación. Los ejemplos más comunes de planos de traslación son los planos Desarguesianos (tipos (a) y (b)) pero no son ejemplos propios. En este capítulo haremos un muy breve estudio de los cuasicampos. El material será suficiente para construir ejemplos simples de cuasicampos propios y por lo tanto de planos proyectivos no–Desarguesianos.

## 5.1. Propiedades básicas de cuasicampos

Empezamos dando una definición puramente algebraica de cuasicampo.

**Definición 5.1.1.** *Sea $Q$ un conjunto con dos operaciones binarias $+$ y $\cdot$. Decimos que $(Q, +, \cdot)$ es un **cuasicampo** si*

1. $(Q, +)$ *es un grupo*
2. $(Q^*, \cdot)$ *es un lazo*
3. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \ \forall x, y, z \in Q$
4. $0 \cdot x = 0 \ \forall x \in Q$
5. $ax = bx + c$ *tiene solución única en $x$ dados $a, b, c \in Q$, $a \neq b$*

**Observación 5.1.1.** *Sea $(Q, +, \cdot)$ un cuasicampo de acuerdo a la definición anterior.*

- *Si consideramos $T(a, b, c) = a \cdot b + c \in Q \ \forall a, b, c \in Q$ entonces $(Q, T)$ es un anillo ternario plano lineal. Más aún, $(Q, T)$ es un cuasicampo de acuerdo a la Definición 4.2.2.*
- *Considerando lo anterior, el Teorema 4.2.3 nos muestra que si $(Q, +, \cdot)$ es un cuasicampo entonces $(Q, +)$ es, de hecho, un grupo abeliano.*

Definimos ahora una estructura algebraica ligeramente más general que la de cuasicampo que nos será útil más adelante.

**Definición 5.1.2.** *Sea $W$ un conjunto con dos operaciones binarias $+$ y $\cdot$. Decimos que $(W, +, \cdot)$ es un* ***cuasicampo débil*** *si*

1. $(W, +)$ *es un grupo abeliano*
2. $(W^*, \cdot)$ *es un lazo*
3. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
4. $0 \cdot x = 0 \ \forall x \in W$

Es claro que todo cuasicampo es un cuasicampo débil. Veamos dos propiedades sencillas pero útiles que satisfacen los cuasicampos débiles.

**Proposición 5.1.1.** *Si $(W, +, \cdot)$ es un cuasicampo débil entonces*

1. $a \cdot 0 = 0 \ \forall a \in W$
2. $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) \ \forall a, b \in W$

*Demostración.* 1. $a = a \cdot 1 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a + a \cdot 0$. Como $(W, +)$ es un grupo, se sigue que $a \cdot 0 = 0$.
2. Usando 1. tenemos que $0 = a \cdot 0 = a \cdot (b + (-b))$ y así $a \cdot b + a \cdot (-b) = 0$ lo cual implica $-(ab) = a \cdot (-b)$ al ser $(W, +)$ un grupo. □

**Definición 5.1.3.** *Sea $(W, +, \cdot)$ un cuasicampo débil. Se define el* ***núcleo*** *de $W$ como el conjunto $K$ de todos los elementos $k \in W$ tales que*

- $(x + y)k = xk + yk$
- $(xy)k = x(yk)$

*para cualesquiera $x, y \in W$.*

**Proposición 5.1.2.** *El núcleo $K$ de un cuasicampo débil $(W, +, \cdot)$ es un campo no–conmutativo. Más aún, $W$ es un especio vectorial derecho sobre $K$ de manera natural.*

*Demostración.* Sean $a, b \in W$, $h, k \in K$.

$$\begin{aligned}
(a+b)(h-k) &= (a+b)h + (a+b)(-k) \\
&= ah + bh + a(-k) + b(-k) \\
&= ah + a(-k) + bh + b(-k) \\
&= a(h-k) + b(h-k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ab)(h-k) &= (ab)h + (ab)(-k) \\
&= (ab)h - (ab)k \\
&= a(bh) - a(bk) \\
&= a(bh - bk) \\
&= a(b(h-k))
\end{aligned}$$

Así las cosas, $K$ es cerrado bajo la resta y es no–vacío ($0, 1 \in K$). Por lo tanto $(K, +)$ es un subgrupo (abeliano) de $(W, +)$.
Hay que probar que $(K^*, \cdot)$ es un grupo. Por definición de $K$, la multiplicación en $K$ es asociativa y $1 \in K$. Entonces basta probar que $K$ es cerrado bajo la multiplicación y que todo elemento de $K^*$ tiene inverso izquierdo en $K^*$.
Sean $a, b \in W$ y $l, k \in K$

$$(a+b)(kl) = [(a+b)k]l = (ak + bk)l = (ak)l + (bk)l = a(kl) + b(kl)$$

$$(ab)(kl) = ((ab)k)l = (a(bk))l = a((bk)l) = a(b(kl))$$

$\therefore kl \in K$.
Supongamos que $k \in K^*$. Como $(W^*, \cdot)$ es un lazo, $\exists! h \in W$ tal que $hk = 1$. Veamos que $h \in K$.

$$\begin{aligned}
((a+b)h)k &= (a+b)(hk) \\
&= (a+b) \cdot 1 \\
&= a \cdot 1 + b \cdot 1 \\
&= a(hk) + b(hk) \\
&= (ah)k + (bh)k \\
&= (ah + bh)k
\end{aligned}$$

Como $(W^*, \cdot)$ es un lazo y $k \in K^*$ se sigue que $(a+b)h = ah + bh$. De manera similar

$$((ab)h)k = (ab)(hk) = (ab) \cdot 1 = a(b \cdot 1) = a(b(hk)) = a((bh)k) = (a(bh))k$$

Como $(W^*, \cdot)$ es un lazo y $k \in K^*$ se sigue que $a(bh) = (ab)h$. Por lo tanto, $h \in K$ y $(K^*, \cdot)$ es un grupo. Por definición, $(K, +, \cdot)$ cumple ambas leyes distributivas de modo que $(K, +, \cdot)$ es un campo no–conmutativo. Usando $+$ y $\cdot$ como suma vectorial y producto por escalar respectivamente, es claro que $W$ es un espacio vectorial derecho sobre $K$ (y de hecho, sobre cualquier subcampo no–conmutativo de $K$). $\square$

El siguiente resultado nos será de mucha utilidad.

**Teorema 5.1.1.** *Sean $(W^*, \cdot)$ un cuasicampo débil con núcleo $K$ y $H$ un subcampo no–conmutativo de $K$. Si $W$ es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $H$ entonces $(W^*, \cdot)$ es un cuasicampo.*

*Demostración.* Veamos que $\forall a, b, c \in W$ con $a \neq b$ la ecuación $ax = bx + c$ tiene solución única en $x$.
Dado $r \in W$ definimos

$$\begin{aligned} L_r : W &\to W \\ x &\mapsto rx \end{aligned}$$

Como $W$ cumple distributividad por la izquierda y $H \subseteq K$ se sigue que $L_r$ es lineal $\forall r \in W$. Dado que $(W^*, \cdot)$ es un lazo, $L_r$ es singular si y solamente si $r = 0$.
Hay que verificar que $L_a(x) = L_b(x) + c$ tiene solución única para $x$. Esto equivale a ver que $(L_a - L_b)(x) = c$ tiene solución única para $x$. Como la dimensión de $W$ sobre $H$ es finita, $(L_a - L_b)(x) = c$ tiene solución única en $x$ si y solamente si $L_a - L_b$ es no–singular. Si $L_a - L_b$ es singular entonces $\exists w \in W^*$ tal que $(L_a - L_b)(w) = 0$ lo cual implica que $aw - bw = 0$ i.e. $aw = bw$ y así, como $w \neq 0$, $a = b$ lo cual es imposible. Por lo tanto $L_a - L_b$ es no–singular y $(W^*, \cdot)$ es un cuasicampo. $\square$

Como consecuencia inmediata del Teorema anterior tenemos que todo cuasicampo débil finito es un cuasicampo.

## 5.2. Los cuasicampos de Hall

A continuación estudiaremos un método debido a Marshall Hall para construir cuasicampos.
Sea $F$ un campo y $f(s) = s^2 - as - b$ un polinomio cuadrático e irreducible en $F$. Sea $H$ el espacio vectorial derecho de dimensión dos sobre $F$ con con las operaciones usuales i.e.

$$\begin{aligned} H &= \{(x, y) : x, y \in F\} \\ (x, y) + (z, w) &= (x + z, y + w) & \forall x, y, z, w \in F \\ (x, y)\mu &= (x\mu, y\mu) & \forall x, y, \mu \in F \end{aligned}$$

Definimos la siguiente multiplicación entre elementos de $H$

$$(x, y) \cdot (z, w) = (xz - y^{-1}wf(x), yz - xw + aw) \qquad \text{si } y \neq 0 \tag{5.1}$$

$$(x, 0) \cdot (z, w) = (xz, xw) \tag{5.2}$$

Está claro que las ecuaciones anteriores definen una multiplicación en $H$. Más aún:

**Teorema 5.2.1.** $(H, +, \cdot)$ *es un cuasicampo*

*Demostración.* Observamos que los miembros derechos tanto de (5.1) como de (5.2) son lineales en $z$ y en $w$ razón por la cual se cumple la distributividad por la derecha. La suma en $H$ es conmutativa y claramente $(0, 0) \cdot (x, y) = (0, 0)$. Para ver que $H$ es un cuasicampo débil nos resta ver que $(H^*, \cdot)$ es un lazo. Claramente $(1, 0)$ es la identidad multiplicativa. Resolver $(x, y) \cdot (z, w) = (p, q)$, $(x, y), (p, q) \neq (0, 0)$, para $(z, w)$ es equivalente a resolver

$$\begin{aligned} xz - y^{-1}tf(x) &= p \\ yz - xw + aw &= q \end{aligned} \tag{5.3}$$

si $y \neq 0$, y

$$xz = p, \qquad xt = q \tag{5.4}$$

si $y = 0$. Si $y = 0$ entonces, como $(x, y) \neq (0, 0)$, se tiene que $x \neq 0$ de modo que $z = x^{-1}p$, $w = x^{-1}q$ son las únicas soluciones. Si $y \neq 0$ entonces(5.3) tiene solución única para $z$ y $w$ si y solamente si el determinante $x(a - x) + yy^{-1}f(x)$ es distinto de cero. Dicho determinante se simplifica y su valor es $-b$ el cual es distinto de cero pues en caso contrario $f(x) = s^2 - as$ sería reducible. Claramente $(z, w) \neq (0, 0)$.
Ahora resolvemos $(x, y) \cdot (z, w) = (p, q)$, $(x, y), (p, q) \neq (0, 0)$, para $(x, y)$. Si $w = 0$ entonces, como $(z, w) \neq (0, 0)$, se tiene que $z \neq 0$ y que hay una solución con $y = 0$ si y sólo si $q = 0$. En este caso la solución es $(x, y) = (z^{-1}p, 0)$. De manera similar, si $z = 0$ entonces hay una solución con $y = 0$ si y sólo si $p = 0$. En este caso la solución es $(x, y) = (w^{-1}q, 0)$.
Si $w, z \neq 0$ entonces hay una solución con $y = 0$, $x = pz^{-1}$ si y sólo si $pz^{-1} = qw^{-1}$. Así las cosas, resta probar que si, ó $z = p = 0$ ó $w = q = 0$ ó $pz^{-1} = qw^{-1}$ entonces no hay solución si $y \neq 0$ pero que en cualquier otro caso hay solución única con $y \neq 0$.
Multiplicando la primer ecuación de (5.3) por $y$, la segunda por $x$ y restando tenemos que

$$bw = py - qx$$

Combinando la ecuación anterior con la segunda ecuación de (5.3) tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales que tiene las mismas soluciones en $x$ y $y$, $y \neq 0$, que el sistema (5.3):

$$\begin{aligned} py - qx &= bw \\ zy - wx &= q - aw \end{aligned} \tag{5.5}$$

Si $w = 0$, el sistema anterior tiene solución única $(x, y) = (pz^{-1}, qz^{-1})$ de modo que $q = 0$ implica $y = 0$. Si $w \neq 0$, multiplicando la segunda ecuación de (5.5) por $qw^{-1}$ y restándosela a la primera tenemos que $y(p - qw^{-1}z) = bw - q^2w^{-1} + aq$ es decir

$$y(pw - qz) = -w^2 f(qw^{-1})$$

Como $w \neq 0$ y $f$ es irreducible en $F$, el miembro derecho de la ecuación anterior es siempre distinto de cero. Así pues, si $pw - qz = 0$ (i.e. si ó $p = z = 0$ ó $z \neq 0$ y $pz^{-1} = qw^{-1}$), entonces el sistema 5.5 es inconsistente y por lo tanto (5.3) no tiene solución si $y \neq 0$. Finalmente, si $pw - qz \neq 0$ entonces

$$y = \frac{-w^2 f(qw^{-1})}{(pt - qz)} \neq 0$$

como se quería.
Ya probamos que $(H, +, \cdot)$ es un cuasicampo débil. Cálculos sencillos muestran que $F$ (los elementos de la forma $(x, 0)$) está contenido en el núcleo de $H$. Como $H$ tiene estructura de espacio vectorial derecho sobre $F$ de dimensión dos, el Teorema 5.1.1 prueba que $(H, +, \cdot)$ es un cuasicampo. $\square$

**Observación 5.2.1.** *Notamos lo siguiente acerca de* $(H, +, \cdot)$*:*

- *Podemos identificar a* $F$ *con* $F' = \{(x, 0) : x \in F\}$. *Considerando lo anterior,* $F \subseteq K$, $K$ *el núcleo de* $H$. *Además, el producto "$\cdot$" que definimos en* $H$ *es compatible con el producto de* $F$ *y con el producto por escalar que tiene* $H$ *como espacio vectorial derecho sobre* $F$.

- *Cálculos sencillos muestran que* $f(\alpha) = 0\ \forall \alpha \in H \setminus F$ *(i.e. elementos* $\alpha$ *de la forma* $(x, y)$ *con* $y \neq 0$*) y que* $F$ *conmuta con todos los elementos de* $H$ *bajo* $\cdot$ *(desde luego que también bajo* $+$*).*

Ahora veremos un par de resultados que nos dicen cuando $(H, +, \cdot)$ resulta ser más que un cuasicampo.

**Proposición 5.2.1.** $(H, +, \cdot)$ *es un campo si y sólo si* $F = GF(2)$

*Demostración.* Supongamos que $(H, +, \cdot)$ es un campo. Según la observación anterior, todo elemento de $H \setminus F$ es raíz del polinomio $f$. Como un polinomio de grado dos tiene a lo más dos raíces en cualquier campo, $H$ tendría a lo más dos elementos fuera de su subcampo $F$ y por lo tanto $F = GF(2)$.

Si $F = GF(2)$ entonces $H$ es de orden cuatro. El Teorema 3.4.3 nos muestra que $GF(4)$ es el único ATP de orden cuatro salvo isomorfismo y por lo tanto $H$ es un campo. □

**Proposición 5.2.2.** $(H, +, \cdot)$ *tiene producto asociativo (i.e. es un casicampo) si y sólo si* $F = GF(2)$ *ó* $F = GF(3)$ *y* $f(s) = s^2 + 1$.

*Demostración.* Supongamos que el producto en $H$ es asociativo. Sea $x \in F$, $x \neq 0$. Ahora,

$$\begin{aligned}(0,1) \cdot ((x,0) \cdot (0,1)) &= (0,1) \cdot ((0,1) \cdot (x,0)) \\ &= (0,1)^2 \cdot (x,0) \\ &= (b,a) \cdot (x,0) \\ &= (bx, ax)\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}((0,1) \cdot (x,0)) \cdot (0,1) &= [((0,1) \cdot (x,0)) \cdot ((0,1) \cdot (x,0))] \cdot (x^{-1}, 0) \\ &= (b, xa) \cdot (x^{-1}, 0) \\ &= (bx^{-1}, a)\end{aligned}$$

Como el producto en $H$ es asociativo tenemos que entonces

$$bx = bx^{-1} \qquad \forall x \in F,\ x \neq 0 \tag{5.6}$$

$$ax = a \qquad \forall x \in F,\ x \neq 0 \tag{5.7}$$

Supongamos que $F \neq GF(2)$. Si $y \in F \setminus \{0, 1\}$ de (5.7) se sigue que $a = 0$ y como $b \neq 0$ (pues $f$ es irreducible sobre $F$), de (5.6) se sigue que $x^2 = 1\ \forall x \in F$, $x \neq 0$. El único campo con la propiedad anterior es $GF(3)$ y el único polinomio de grado dos irreducible sobre $GF(3)$ con $a = 0$ es $f(s) = s^2 + 1$.

Vimos que si $F = GF(2)$ entonces $(H, +, \cdot)$ es un campo y por lo tanto el producto en $H$ es asociativo. Si $F = GF(3)$ y $f(s) = s^2 + 1$ el producto en $H$ toma la siguiente forma:

$$(x, y) \cdot (z, w) = (xz - yw(x^2 + 1), yz - xw)$$

Cálculos sencillos muestran que entonces "$\cdot$" es asociativo. $\square$

## 5.3. Un ejemplo interesante

Para concluir, usaremos los resultados de la sección anterior para exhibir un ejemplo propio de un plano de traslación de orden 25. Obtendremos así un valioso ejemplo de un plano proyectivo no–desarguesiano.

Construimos un cuasicampo propio de la siguiente manera (notación como en la sección pasada). Sean $F = GF(5) \cong \mathbb{Z}_5$ (clases de residuos módulo 5 con las operaciones usuales) y $f(s) = s^2 + s + 1 \in \mathbb{Z}_5[s]$ ($f$ es irreducible sobre $F$ ya que $f$ no tiene ceros en $F$).
Consideramos $H = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ con las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} (x, y) + (z, w) &= (x + z, y + w) \\ (x, y) \cdot (z, w) &= (xz - y^3 w(x^2 + x + 1), yz - xw - w) \qquad \text{si } y \neq 0 \\ (x, 0) \cdot (z, w) &= (xz, xw) \end{aligned}$$

Según el Teorema 5.2.1, $(H, +, \cdot)$ es un cuasicampo. Más aún, las proposiciones 5.2.1 y 5.2.2 nos garantizan que $(H, +, \cdot)$ es un cuasicampo propio.
Ahora, según el Teorema 3.2.2, $\Pi = (P_\Pi, L_\Pi)$ es un plano proyectivo donde

$$\begin{aligned} P_\Pi &= \{(x, y) : x, y \in H\} \cup \{(x) : x \in H\} \cup \{(\infty)\} \\ L_\Pi &= \{[m, k] : m, k \in H\} \cup \{[k] : k \in H\} \cup \{[\infty]\} \end{aligned}$$

- $[m, k] = \{(x, y) \in H \times H : m \cdot x + y = k\} \cup \{(m)\}$
- $[k] = \{(k, y) : y \in H\} \cup \{(\infty)\}$
- $[\infty] = \{(x) : x \in H\} \cup \{(\infty)\}$

Como $(H, +, \cdot)$ es un cuasicampo propio, $\Pi$ es un plano de traslación propio de orden $|H| = 25$. Así pues:

(i) $|P_\Pi| = |L_\Pi| = 651$

(ii) $|l| = |b_\Pi(A)| = 26 \ \forall l \in L_\Pi, \ \forall A \in P_\Pi$

Ahora algunos cálculos no–triviales (realizados con ayuda de una computadora). Mostramos la tabla de Cayley de $(H, \cdot)$ (la tabla de Cayley de $(H, +)$ se omite pues es fácil de obtener). El símbolo $xy$ denota a la pareja $(x, y)$. Los pares se toman en orden lexicográfico i.e. $00 < 01 < \ldots < 10 < 11 < \ldots < 44$.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 |
| 00 | 44 | 33 | 22 | 11 | 01 | 40 | 34 | 23 | 12 | 02 | 41 | 30 | 24 | 13 | 03 | 42 | 31 | 20 | 14 | 04 | 43 | 32 | 21 | 10 |
| 00 | 24 | 43 | 12 | 31 | 02 | 21 | 40 | 14 | 33 | 04 | 23 | 42 | 11 | 30 | 01 | 20 | 44 | 13 | 32 | 03 | 22 | 41 | 10 | 34 |
| 00 | 34 | 13 | 42 | 21 | 03 | 32 | 11 | 40 | 24 | 01 | 30 | 14 | 43 | 22 | 04 | 33 | 12 | 41 | 20 | 02 | 31 | 10 | 44 | 23 |
| 00 | 14 | 23 | 32 | 41 | 04 | 13 | 22 | 31 | 40 | 03 | 12 | 21 | 30 | 44 | 02 | 11 | 20 | 34 | 43 | 01 | 10 | 24 | 33 | 42 |
| 00 | 01 | 02 | 03 | 04 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 |
| 00 | 23 | 41 | 14 | 32 | 11 | 34 | 52 | 25 | 43 | 22 | 40 | 13 | 31 | 54 | 33 | 01 | 24 | 42 | 15 | 44 | 12 | 30 | 53 | 21 |
| 00 | 13 | 21 | 34 | 42 | 12 | 20 | 33 | 41 | 54 | 24 | 32 | 40 | 53 | 11 | 31 | 44 | 52 | 10 | 23 | 43 | 51 | 14 | 22 | 30 |
| 00 | 43 | 31 | 24 | 12 | 13 | 51 | 44 | 32 | 25 | 21 | 14 | 52 | 40 | 33 | 34 | 22 | 10 | 53 | 41 | 42 | 30 | 23 | 11 | 54 |
| 00 | 33 | 11 | 44 | 22 | 14 | 42 | 20 | 53 | 31 | 23 | 51 | 34 | 12 | 40 | 32 | 10 | 43 | 21 | 54 | 41 | 24 | 52 | 30 | 13 |
| 00 | 02 | 04 | 01 | 03 | 20 | 22 | 24 | 21 | 23 | 40 | 42 | 44 | 41 | 43 | 10 | 12 | 14 | 11 | 13 | 30 | 32 | 34 | 31 | 33 |
| 00 | 32 | 14 | 41 | 23 | 21 | 03 | 35 | 12 | 44 | 42 | 24 | 01 | 33 | 15 | 13 | 40 | 22 | 04 | 31 | 34 | 11 | 43 | 25 | 02 |
| 00 | 42 | 34 | 21 | 13 | 22 | 14 | 51 | 43 | 35 | 44 | 31 | 23 | 15 | 52 | 11 | 03 | 40 | 32 | 24 | 33 | 20 | 12 | 54 | 41 |
| 00 | 12 | 24 | 31 | 43 | 23 | 30 | 42 | 54 | 11 | 41 | 03 | 10 | 22 | 34 | 14 | 21 | 33 | 40 | 52 | 32 | 44 | 01 | 13 | 20 |
| 00 | 22 | 44 | 11 | 33 | 24 | 41 | 13 | 35 | 52 | 43 | 10 | 32 | 54 | 21 | 12 | 34 | 51 | 23 | 40 | 31 | 03 | 20 | 42 | 14 |
| 00 | 03 | 01 | 04 | 02 | 30 | 33 | 31 | 34 | 32 | 10 | 13 | 11 | 14 | 12 | 40 | 43 | 41 | 44 | 42 | 20 | 23 | 21 | 24 | 22 |
| 00 | 21 | 42 | 13 | 34 | 31 | 02 | 23 | 44 | 15 | 12 | 33 | 04 | 25 | 41 | 43 | 14 | 35 | 01 | 22 | 24 | 40 | 11 | 32 | 03 |
| 00 | 11 | 22 | 33 | 44 | 32 | 43 | 54 | 15 | 21 | 14 | 20 | 31 | 42 | 53 | 41 | 02 | 13 | 24 | 35 | 23 | 34 | 40 | 51 | 12 |
| 00 | 41 | 32 | 23 | 14 | 33 | 24 | 15 | 51 | 42 | 11 | 02 | 43 | 34 | 25 | 44 | 30 | 21 | 12 | 53 | 22 | 13 | 04 | 40 | 31 |
| 00 | 31 | 12 | 43 | 24 | 34 | 10 | 41 | 22 | 53 | 13 | 44 | 20 | 51 | 32 | 42 | 23 | 54 | 30 | 11 | 21 | 02 | 33 | 14 | 40 |
| 00 | 04 | 03 | 02 | 01 | 40 | 44 | 43 | 42 | 41 | 30 | 34 | 33 | 32 | 31 | 20 | 24 | 23 | 22 | 21 | 10 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 00 | 45 | 35 | 25 | 15 | 41 | 31 | 21 | 11 | 01 | 32 | 22 | 12 | 02 | 42 | 23 | 13 | 03 | 43 | 33 | 14 | 04 | 44 | 34 | 24 |
| 00 | 25 | 45 | 15 | 35 | 42 | 12 | 32 | 52 | 22 | 34 | 04 | 24 | 44 | 14 | 21 | 41 | 11 | 31 | 01 | 13 | 33 | 03 | 23 | 43 |
| 00 | 35 | 15 | 45 | 25 | 43 | 23 | 03 | 33 | 13 | 31 | 11 | 41 | 21 | 01 | 24 | 04 | 34 | 14 | 44 | 12 | 42 | 22 | 02 | 32 |
| 00 | 15 | 25 | 35 | 45 | 44 | 04 | 14 | 24 | 34 | 33 | 43 | 03 | 13 | 23 | 22 | 32 | 42 | 02 | 12 | 11 | 21 | 31 | 41 | 01 |

El producto en $H$

En base a la tabla anterior, calculamos las siguientes líneas de $\Pi$:

[01,21]={(00,21),(01,32),(02,43),(03,04),(04,10),(10,20),(11,31),(12,42),(13,03),(14,14),(20,24),(21,30),(22,41),(23,02),(24,13),(30,23),(31,34),(32,40),(33,01),(34,12),(40,22),(41,33),(42,44),(43,00),(44,11),(01)}

[03,21]={(00,21),(01,42),(02,13),(03,34),(04,00),(10,23),(11,44),(12,10),(13,31),(14,02),(20,20),(21,41),(22,12),(23,33),(24,04),(30,22),(31,43),(32,14),(33,30),(34,01),(40,24),(41,40),(42,11),(43,32),(44,03),(03)}

[11,34]={(00,34),(01,11),(02,43),(03,20),(04,02),(10,23),(11,00),(12,32),(13,14),(14,41),(20,12),(21,44),(22,21),(23,03),(24,30),(30,01),(31,33),(32,10),(33,42),(34,24),(40,40),(41,22),(42,04),(43,31),(44,13),(11)}

[13,21]={(00,21),(01,33),(02,40),(03,02),(04,14),(10,13),(11,20),(12,32),(13,44),(14,01),(20,00),(21,12),(22,24),(23,31),(24,43),(30,42),(31,04),(32,11),(33,23),(34,30),(40,34),(41,41),(42,03),(43,10),(44,22),(13)}

[23,11]={(00,11),(01,04),(02,42),(03,30),(04,23),(10,43),(11,31),(12,24),(13,12),(14,00),(20,20),(21,13),(22,01),(23,44),(24,32),(30,02),(31,40),(32,33),(33,21),(34,14),(40,34),(41,22),(42,10),(43,03),(44,41),(23)}

[31,30]={(00,30),(01,14),(02,43),(03,22),(04,01),(10,04),(11,33),(12,12),(13,41),(14,20),(20,23),(21,02),(22,31),(23,10),(24,44),(30,42),(31,21),(32,00),(33,34),(34,13),(40,11),(41,40),(42,24),(43,03),(44,32),(31)}

[32,24]={(00,24),(01,13),(02,02),(03,41),(04,30),(10,42),(11,31),(12,20),(13,14),(14,03),(20,10),(21,04),(22,43),(23,32),(24,21),(30,33),(31,22),(32,11),(33,00),(34,44),(40,01),(41,40),(42,34),(43,23),(44,12),(32)}

[43,11]={(00,11),(01,31),(02,01),(03,21),(04,41),(10,23),(11,43),(12,13),(13,33),(14,03),(20,30),(21,00),(22,20),(23,40),(24,10),(30,42),(31,12),(32,32),(33,02),(34,22),(40,04),(41,24),(42,44),(43,14),(44,34),(43)}

[44,03]={(00,03),(01,43),(02,33),(03,23),(04,13),(10,14),(11,04),(12,44),(13,34),(14,24),(20,20),(21,10),(22,00),(23,40),(24,30),(30,31),(31,21),(32,11),(33,01),(34,41),(40,42),(41,32),(42,22),(43,12),(44,02),(44)}

[33,03]={(00,03),(01,12),(02,21),(03,30),(04,44),(10,20),(11,34),(12,43),(13,02),(14,11),(20,42),(21,01),(22,10),(23,24),(24,33),(30,14),(31,23),(32,32),(33,41),(34,00),(40,31),(41,40),(42,04),(43,13),(44,22),(33)}

Notamos, por inspección, que los triángulos

$$\langle (10,23),(02,43),(30,42),[31,30],[43,11],[11,34]\rangle$$
$$\langle (20,20),(11,31),(32,11),[32,24],[44,03],[23,11]\rangle$$

están en perspectiva desde (00,21) pero que

$$[31,30]\cap[32,24]=(41,40),\quad [43,11]\cap[44,03]=(23,24),\quad [11,34]\cap[23,11]=(41,22)$$

no son colineales pues $(41,22)\notin[33,03]=(23,24)(41,40)$. Así las cosas, vemos que $\Pi$ no es $((00,21),[33,03])$–desarguesiano y por lo tanto es un plano proyectivo no–desarguesiano.

# Bibliografía


[1] Batten, L.M., *Combinatorics of Finite Geometries*, Cambridge University Press, 1986.

[2] Bhattacharya, P.B., Jain, S.K., Nagpaul S.R., *Basic Abstract Algebra*, Cambridge University Press, 1994.

[3] Colbourne C.J., Dinitz J.H., *The CRC Handbook of Combinatorial Designs*, CRC Press, 1996.

[4] Hartshorne, R., *Foundations of Projective Geometry*, W.A. Benjamin, 1967.

[5] Hughes, D.R., Piper, F.C., *Projective Planes*, Springer–Verlag, 1973.

[6] Lam, T., *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer–Verlag, 2001.

[7] Weibel, C., *Survey of Non–Desarguesian Planes*, Notices of the AMS V. 54 No. 10, 2007.