



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
SISTEMAS – INGENIERIA INDUSTRIAL

**APLICACIÓN DE CADENAS DE MARKOV AL POSICIONAMIENTO  
EN EL MERCADO EN UN SECTOR DE FÁBRICAS DE  
ADHESIVOS INDUSTRIALES**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
NEWMAN EDMUNDO MONTES SAMAYOA

TUTOR PRINCIPAL  
DR. ABEL CAMACHO GALVAN - FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. MAYO 2013



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. José Jesús Acosta Flores

Secretario: Dra. Patricia Balderas Cañas

Vocal: Dr. Abel Camacho Galván

1<sup>er.</sup> Suplente: M.I. Ann Godelieve Wellens Purnal

2<sup>d o.</sup> Suplente: M.I. Francisca Irene Soler Anguiano

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Grupo Adhempa en Acolman, Edo. de México

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Abel Camacho Galván

-----  
**FIRMA**

---

## **AGRADECIMIENTOS**

Al CONACYT por el apoyo otorgado para realizar mis estudios de maestría.

A mi alma mater , la UNAM por formarme académicamente de manera integral, ética en las ciencias, las humanidades y la técnica para forjar mi profesión.

Gracias al equipo imparable que se ha forjado a través de las pruebas más complicadas de nuestras vidas que han acontecido desde poco antes de recibir la noticia de mi aceptación en ésta maestría y que me apoyaron a no claudicar a pesar de la adversidad, y a mantenerme firme para enfocarme en ésta meta en el largo y sinuoso proceso que se resume y cristaliza con este trabajo.

A mi padre que con su intelecto me ha inducido a instaurar nuevos paradigmas en mi entorno para ser un hombre nuevo.

A mi madre que con su paciencia y cariño me ha mostrado la senda de la perseverancia y tranquilidad para conseguir mis objetivos.

A mi hermana que con su coraje y tenacidad siempre ha sido mi modelo a seguir inspirándome imitar sus logros.

A mis “wingmen” R2D2 y Miguel Ángel que han sido un soporte incondicional y siempre oportuno.

A mi socio y amigo Raúl que me ha ayudado a crecer profesionalmente permitiéndome desarrollar mis habilidades en los proyectos que hemos emprendido y llevado a buen término.

Al CIMMYT y colegas del SIU por alentarme y permitirme darle continuidad a este proceso en esta etapa final.

Al Dr. Abel Camacho Galván, Dra. Patricia Balderas Cañas y Dr. José Jesús Acosta Flores, quienes me dieron la oportunidad de colaborar y aprender de ellos, y me ofrecieron la guía para darle curso a este trabajo de investigación.

A la M.I. Ann Godelieve Wellens Purnal y M.I. Francisca Irene Soler Anguiano por su importante soporte en la conclusión de este trabajo, ya que me permitieron estructurarlo de la mejor manera.

Por último pero de manera muy especial a mi hermosa Paty que no sólo es la pieza clave en mi vida sino que con su perspicacia, ingenio y amor me ha complementado en todos los aspectos, haciendo que mis debilidades se conviertan en fortalezas y me motiva incansablemente a perseguir las metas que nos hemos propuesto ya que sin su apoyo y perfeccionismo no habría sido posible concluir este trabajo de la mejor manera.

Todos ellos aportaron parte importante de este proceso y les estoy profundamente agradecido.

---

---

# Índice

Resumen.....	iii
Abstract.....	iv
Introducción.....	1
1 La empresa de estudio .....	5
1.1 Antecedentes de la empresa.....	5
1.2 Situación actual de Grupo Adhempa.....	5
1.3 Descripción general del proceso .....	7
1.4 Productos .....	9
1.5 Factores de mejora requeridos .....	10
1.6 Resumen.....	11
2 Marco teórico .....	12
2.1 Teoría de la probabilidad.....	12
2.2 Procesos estocásticos discretos .....	13
2.3 Cadenas de Markov .....	14
2.4 Herramienta computacional Maple.....	17
2.5 Factores de mejora .....	17
2.6 Resumen.....	20
3 Metodología.....	21
3.1 Elementos de análisis .....	22
3.2 Análisis del modelo con valores actuales.....	25
3.3 Análisis del modelo con factores de mejora .....	28
3.4 Resumen.....	29

---

4	Estudio de caso .....	30
4.1	Elementos de análisis .....	30
4.2	Análisis del modelo con valores actuales.....	33
4.3	Análisis del modelo con factores de mejora .....	42
4.4	Resumen.....	51
5	Propuestas de factores de mejora .....	52
5.1	Control de inventarios .....	52
5.2	Manejo de materiales .....	60
5.3	Resumen.....	69
	Conclusiones generales .....	70
	Referencias bibliográficas .....	73
	Mesografía.....	75
	Anexos .....	76
	Anexo 1 Estimación de la evolución del mercado a mediano plazo utilizando valores actuales. ....	77
	Anexo 2. Estimación de la evolución del mercado a largo plazo utilizando valores actuales.....	80
	Anexo 3. Estimación de la evolución del mercado incluyendo factores de mejora para el corto, mediano y largo plazos. ....	82
	Anexo 4. Modelación de un sistema de inventario para 260 días de Grupo Adhempa.....	100

---

## Resumen

Esta investigación se llevó a cabo en una empresa que se dedica a la fabricación y comercialización de adhesivos industriales en el D.F. y zona metropolitana cuya razón social es Grupo Adhempa, S.A. de C.V., y está interesada en mejorar su posicionamiento en el mercado con respecto a sus competidores directos, para lo cual requiere estimar su evolución si implementara factores de mejora en sus procesos.

El objetivo de este trabajo es obtener un modelo que permita representar el estado actual de la empresa y estimar su evolución si llegara a implementar factores de mejora en sus procesos, con el fin de aportar elementos de decisión a Grupo Adhempa que contribuyan a mejorar su competitividad y optimizar sus procesos industriales

Para lograr lo anterior, se hace uso de la teoría probabilística a través de las cadenas de Markov, simulando dos escenarios en el corto, mediano y largo plazo. En el primer escenario se estima el posicionamiento de la empresa sin que esta haga cambios en sus procesos. En el segundo escenario se modela la evolución en el mercado pero ahora introduciendo factores de mejora con el fin de determinar si contribuyen de manera positiva en la posición de Grupo Adhempa en el mercado.

Finalmente se proponen factores de mejora que pueden ser introducidos en los procesos de recepción, fabricación y distribución del producto, así como en el control de inventarios en la búsqueda de optimizar el funcionamiento de la empresa y aumentar su competitividad en el mercado.

---

## **Abstract**

This research was made in a company dedicated to manufacturing and marketing of industrial adhesives in México City and metropolitan area named Grupo Adhempa S.A. de C.V., which is interested in improving its market position with respect to its direct competitors and requires estimating its evolution by applying improvement factors in their process.

The work's objective is to obtain a model to represent the company's current situation and the evolution of its market position through time integrating improvement factors in their processes and provide decision elements to contribute to improve competitiveness and optimize its industrial processes.

To achieve this, the probabilistic theory was used through chains Markov, simulating two scenarios in short, medium and long term. The first scenario estimates the position of the company without making changes in its processes. The second scenario estimates the evolution in the market but now introducing improvement factors to determine if they contribute positively in Grupo Adhempa position.

Finally, the proposal is to introduce improvement factors in reception, manufacture and distribution of product, as well as control inventory to optimize company's operation and increase its market competitiveness.

---

## Introducción

En la actualidad existe una gran competencia entre las empresas para reforzar su posicionamiento en el mercado tanto actual como futuro, por lo que centran sus decisiones en la optimización de la producción, comercialización y distribución de su producto en la búsqueda de mayores beneficios y a su vez, para disminuir o evitar las prácticas monopólicas y el acaparamiento ilegal del mercado.

El acceso rápido y eficiente a una información confiable y precisa permite adoptar una posición adecuada a la hora de tomar una decisión para solucionar un problema con un menor costo. Las organizaciones precisan gerenciar inteligentemente todos sus procesos y recursos. Esto requiere una eficaz y efectiva gestión de la información y del conocimiento, de modo que propicie una adecuada toma de decisiones (Grijalva, 2009).

Una de las preocupaciones centrales de toda empresa es el hecho de enfrentarse a la competencia, que se ha visto fortalecida por la exigencia cada vez más fuerte por parte de los consumidores de comprar productos de mayor calidad y precio competitivo, ocasionando que las empresas nacionales no solo compitan entre ellas, sino también con las empresas extranjeras y causando inquietud en lo que se refiere a su posicionamiento actual en el mercado y su proyección futura.

Aunado a lo anterior, en los procedimientos generales de la industria nacional, frecuentemente se presentan diversos componentes inherentes a la transformación y evolución de la producción que suelen ser insuficientes por sí mismos, por lo que resulta necesario que se complementen con otros factores o elementos de mejora en sus procesos, tales como cadena de suministros, manejo de materiales, distribución, atención especializada al cliente, inventarios, precio del producto y otros elementos relacionados con la logística.

Sin embargo, estos elementos no son independientes entre sí, sino que forman parte integral de un sistema en el que cualquier perturbación o alteración en alguno de ellos repercute necesariamente en el comportamiento de los restantes, afectando el equilibrio global del sistema mismo.

Cuando se introducen estrategias de comercialización que puedan alterar el comportamiento armónico del mercado, es importante tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

- 
1. ¿Cómo estas estrategias afectan el comportamiento del posicionamiento en el mercado de la empresa o empresas?
  2. ¿Cómo se puede cuantificar el efecto de estas estrategias sobre el posicionamiento en el mercado?
  3. ¿Cómo se puede cuantificar el comportamiento del mercado si se consideran factores o elementos de mejora que encaminen a la empresa a captar un mayor número de clientes a costa de las demás empresas?
  4. ¿De qué manera se puede encontrar el nivel deseado por la empresa, es decir, como se pueden controlar los factores de mejora para alcanzar un nivel determinado respecto al posicionamiento en el mercado de las demás empresas?

Al buscar el incremento de ventas mediante agresivas estrategias de comercialización, deben tomarse en cuenta aquellos factores que pudiesen afectar el equilibrio del mercado mismo. A su vez, es de suma importancia que las empresas analicen la evolución de su posicionamiento en dicho mercado a través del tiempo cuando algún factor de mejora sea implementado.

Es necesario el estudio formal de los posibles escenarios del mercado en los contextos del inmediato, mediano y lejano plazo que requiere de la aplicación tanto de métodos cuantitativos como cualitativos a fin de sustentar la toma de decisiones de manera ecuánime, racional y equilibrada por parte de las empresas.

El análisis cualitativo se basa primordialmente en el razonamiento y la experiencia del administrador; incluye la “impresión” intuitiva que el administrador tiene del problema y constituye una faceta que puede ser identificada con el proceso de la toma de decisiones. Sin embargo, si el administrador ha tenido poca experiencia con problemas similares, o si el problema es lo suficientemente complejo, puede ser muy importante en la decisión final del administrador considerar otros puntos de vista y analizar desde una perspectiva diferente.

Al utilizar el enfoque cuantitativo, el analista se concentra en los hechos o los datos cuantitativos asociados al problema y desarrolla expresiones matemáticas que describen los objetivos, las restricciones y las relaciones existentes en el mismo. Utilizando uno o más métodos cuantitativos, el analista ofrece una recomendación con base en los aspectos cuantitativos planteados (Grijalva, 2009).

---

La contribución principal del enfoque de los métodos cuantitativos proviene principalmente de la estructuración de una situación de la vida real como un modelo matemático, logrando una abstracción de los elementos esenciales para que pueda buscarse una solución que concuerde con los objetivos del tomador de decisiones. Esto implica tomar en cuenta el problema dentro del contexto del sistema completo.

Cuando se piensa en el análisis del inmediato, mediano y largo plazo, se pueden utilizar diferentes métodos cuantitativos. Aunque varía su complejidad, todos emplean modelos matemáticos que requieren datos para las variables independientes con objeto de generar un pronóstico (Amaya, 2004). Existen diversas técnicas de métodos cuantitativos como los árboles de decisión, cadenas de Markov, CPM, distribución, flujo máximo, inventarios, PERT, previsión, programación dinámica, programación lineal, simulación, tablas de decisión, entre otros (Vicens, 1997).

Para encontrar el nivel deseado mediante el control de factores de mejora es necesario modelar el comportamiento de la empresa en su mutua interacción a través del tiempo, introduciendo variables que representen dichos factores durante la modelación y partiendo del estado actual de la empresa, sin tomar en cuenta sus estados anteriores. Tal comportamiento se ajusta a un enfoque cuantitativo conocido como cadenas de Markov, que se define como una sucesión de ensayos similares u observaciones en donde la probabilidad de cada resultado para un ensayo dado depende solo del resultado del ensayo inmediatamente precedente y no de cualquier resultado previo (Arya, 2002). A su vez, es un tipo de proceso estocástico que sirve para caracterizar una sucesión de variables aleatorias que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo.

La teoría probabilística o teoría de la probabilidad ofrece el marco matemático requerido para el estudio de procesos estocásticos, ya que surge del estudio de los fenómenos aleatorios y a partir de ella se puede representar un determinado sistema como un modelo mediante el cual se estudie su comportamiento a profundidad. En la teoría de la probabilidad se plantea el estudio de una determinada clase de experimentos mediante un modelo matemático (García, 2005).

En esta investigación, el mercado de interés es el comercio de adhesivos industriales en el Distrito Federal y zona metropolitana cubierto por tres empresas del ramo. Una de ellas, denominada Grupo Adhempa está interesada en robustecer su posición en el mercado a través de la intervención de elementos de mejora en sus procesos para hacer frente a la competencia actual. Además, al

---

optimizar sus procedimientos de recepción, fabricación y distribución del producto busca tener otros beneficios como la reducción de tiempos y costos.

Se requiere estudiar los posibles escenarios del mercado en cuestión en los contextos del corto, mediano y largo plazos, para modelar a partir del estado inicial de la empresa, la proyección de los estados futuros en su evolución. Se deben considerar dos aspectos; uno en el que la empresa no realice cambio alguno en sus prácticas, es decir que continúe como hasta ahora y otro en el que integre factores de mejora en sus procesos con el fin de realizar una comparación de los resultados en ambos casos y que Grupo Adhempa cuente con elementos que permitan afianzar la toma de decisiones en este aspecto.

Por lo anterior, el objetivo de este trabajo es obtener un modelo que permita representar el estado actual de una empresa de adhesivos industriales y la evolución de su posicionamiento en el mercado a través del tiempo integrando factores de mejora en sus procesos.

### **Objetivos específicos**

- Analizar la interacción de la empresa en estudio con las dos fábricas competidoras a través de un modelo que permita representar el estado actual de las tres en el mercado.
- Proponer una herramienta de modelación con la que se busque pronosticar la evolución y el comportamiento estocástico del mercado de adhesivos industriales considerando la migración poblacional que implica su conducta a través del tiempo.
- Utilizar la herramienta de modelación propuesta para analizar los estados futuros de las tres empresas en el corto, mediano y largo plazo en términos constantes.
- Utilizar la herramienta de modelación propuesta para analizar los estados futuros a corto, mediano y largo plazos introduciendo los factores de mejora que ayuden a alcanzar el nivel deseado por la empresa.
- Proponer factores de mejora que Grupo Adhempa pueda implementar de acuerdo a sus procesos, con la intención de mejorar su evolución en el mercado, así como disminuir tiempos y costos.

---

# **1 La empresa de estudio**

El propósito de este capítulo es dar a conocer la historia y situación actual de Grupo Adhempa, S.A. de C.V. con respecto a su posicionamiento en el mercado de pegamentos industriales en el D.F. y Zona Metropolitana.

## **1.1 Antecedentes de la empresa**

De acuerdo con las estimaciones del informe de Adhesive and Sealant Council (ASC) en junio de 2011, el mercado mundial de sellantes y adhesivos llegará en 2013 a los US\$40.5 mil millones en ventas. Se estima que la demanda mundial de vinilos para el mismo año crecerá un 31%, mientras que la del acrílico y los cauchos se incrementará en un 16% y 13% respectivamente. El uso y aplicación de las tecnologías tendrá una considerable representación en el mercado en los próximos dos años. Las que son a base agua ascenderán un 50%, y las de base solvente llegarán en 2013 a un 16% más (Inpralatina, 2013).

Grupo Adhempa fué fundada en el año 1989 y se especializa en la fabricación y venta de pegamentos, así como de colas naturales y sintéticas que tienen diferentes usos y aplicaciones industriales, domésticas y de construcción. Se localiza en el Estado de México en el municipio de Acolman, cerca de la carretera México-Texcoco, a 15 minutos del Circuito Exterior Mexiquense y las autopistas Pirámides-Tulancingo y México-Pachuca, lo que le da una posición geográfica favorable para la entrega de sus productos.

La empresa está enfocada al mercado nacional y principalmente al sector industrial. Su misión es proporcionar productos de calidad, servicios de entrega oportuna y respuesta inmediata según las solicitudes del cliente con precios de venta competitivos en el mercado.

## **1.2 Situación actual de Grupo Adhempa**

El volumen de venta más importante de los productos que Grupo Adhempa comercializa ha sido con la industria maquiladora, donde utilizan los adhesivos para el pegado de etiquetas, embalaje, empaques, etc., que exige un gran volumen de fabricación y el flujo constante de los pedidos por parte de otras industrias.

---

Existen otras dos empresas en el área dedicadas a la venta de pegamentos industriales y que son la competencia directa de Grupo Adhempa. La inquietud de los directivos de Adhempa radica en conocer la evolución de su posicionamiento en el mercado a través del tiempo, ya que podría ser muy útil en la toma de decisiones que definirá el rumbo de la organización.

Debido a que la mayoría de las ventas de Grupo Adhempa están enfocadas al sector industrial, el requerimiento de los productos de mayor demanda está regido por adhesivos con base en almidón de maíz. Esto implica que la concentración de almidón y agua representan más del 90% del producto y el porcentaje restante lo componen otros químicos que funcionan como aditivos para darle consistencia al pegamento. El almidón se considera la materia prima de mayor importancia para la producción y la empresa no puede prescindir de él.

La falta de un sistema eficaz y eficiente para realizar los pedidos de materia prima, han provocado que el almidón escasee y que en ocasiones la producción se vea detenida, ya que no cuentan con un control adecuado y óptimo para planificar el volumen y frecuencia en el abastecimiento del almidón. La fábrica tiene una demanda generalmente uniforme de sus productos y el abastecimiento de materia prima se limita a contar con el volumen necesario para satisfacer dicha demanda.

Sin embargo, cuando la empresa tiene un pedido extraordinario que rebasa la demanda usual, le lleva a incurrir en faltantes de materia prima ya que no maneja un stock de seguridad previendo estos casos. De acuerdo a los datos proporcionados por los directivos de Grupo Adhempa el requerimiento medio por día de almidón es de 29.14 ton, la capacidad máxima destinada para el almacenamiento de la materia prima es de 150 ton, los pedidos se hacen semanalmente y la entrega tarda tres días hábiles.

Actualmente, la empresa busca optimizar varios de sus procesos con el fin de mejorar su posición en el mercado. Su interés principal es proyectar su evolución en el tiempo comparado con la competencia si introduce elementos de mejora en sus procedimientos, a su vez espera que con estos cambios se disminuyan los costos de producción, aumente la seguridad en la planta y pueda llegar a abarcar entre un 70 u 80% del mercado con respecto a sus otros dos competidores.

---

### 1.3 Descripción general del proceso

Grupo Adhempa cuenta con una logística para llevar a cabo los procesos requeridos para la fabricación de los pegamentos industriales que se describen a continuación.

#### a) Recepción de materias primas

El agua utilizada es potable y se toma de la red de agua potable de la demarcación; sin embargo, en periodos de escasez es indispensable que soliciten el agua mediante el servicio de pipas.

El almidón, sosa en escamas, bórax, etc. son recibidos en costales de rafia tejida de polipropileno de 25 kg y en tarimas empleadas de 1 tonelada.

El ácido clorhídrico, el formol y otros líquidos corrosivos se reciben en tambos de 220 litros. En caso de que el volumen sea inferior manejan bidones de 10, 15 o 20 litros según se requiera.



Figura 1.1 Costales de rafia para la materia prima

#### b) Proceso de fabricación

En el proceso de fabricación, las materias primas se utilizan de acuerdo con el método de primeras entradas primeras salidas. Se procede a seleccionar los materiales que se van a utilizar con las cantidades requeridas y se llevan desde el almacén de materia prima hacia la parte superior del tapanco.

En el tapanco hay una báscula donde se pesan las cantidades de material a utilizar, se lleva a las mezcladoras o los reactores que están a la misma altura

---

para procesar los materiales y verterlos según se requiera de acuerdo con el producto que se esté elaborando.

Todo el proceso detallado anteriormente se realiza a mano sin ayuda de equipo especial. Se dispone de los costales, se suben al tapanco y el procesamiento es desempeñado por el personal capacitado para tales actividades donde se vierten los materiales en la maquinaria y equipo dispuesto para hacer las mezclas.

El adhesivo resultante del proceso anterior baja de los reactores o mezcladoras hacia los tambos (220 litros), contenedores (1,000 litros) o cubetas (20 litros) según sea el pedido. Para evitar contaminaciones y mantener la integridad del producto terminado se colocan 2 bolsas plásticas previamente a verter el adhesivo dentro de los tambos, contenedores o cubetas que facilitan la limpieza de estos. Finalmente el contenedor con el adhesivo se cierra con una tapa, su correspondiente aro metálico y se coloca en el almacén de producto terminado. Las figura 1.2 y 1.3 muestran la distribución del material y equipo en el área de mezcladores y reactores.



Figura 1.2. Báscula para el pesado de la materia prima



Figura 1.3. Área de mezcladoras y reactores

### **c) Distribución de producto terminado**

La empresa cuenta con camionetas de redilas de una ton, de tres y media ton y rabón de cinco ton, pero de ser necesario se subcontratan los servicios de algún camión thorton para transportar mayores volúmenes. En la figura 1.4 se observa el acomodo del producto terminado en el almacén.



Figura 1.4. Área de almacenamiento del producto terminado

## 1.4 Productos

Los productos que se fabrican en Grupo Adhempa son variados y se conjuntan en diferentes grupos.

- Pegamentos para laminación de corrugado a cartulina sulfatada, laminación de corrugado a caple, laminación de corrugado a Kraf, laminación de cartón a cartón, laminación de cartón a papel, laminación de papel a papel y laminación de películas sintéticas a cartón.
- Pegamentos para empaque como armado y cerrado de caja corrugada, caja microcorrugada y caja plegadiza, así como envoltura de rollos.
- Pegamentos utilizados para construcción como selladores vinílicos y acrílicos, pega tirol, pega yeso, pega concreto y resinas para texturizado interior y exterior.
- Pegamentos para ensamble, armado de muebles, enchapado y parquet.
- Pegamentos para etiquetado a vidrio con y sin resistencia a la humedad, etiquetado a plástico y pet, así como etiquetado a metal.
- Pegamentos para encuadernación manual o automatizada.
- Pegamentos para la conversión o fabricación de artículos de papel y cartón como sacos, bolsas, sobres, tubos espiral, esquineros, cuñetes, conos, cartulina ilustración, cascarón, crepados de papel kraft, china y bond.
- Pegamentos para uso doméstico.

---

## 1.5 Factores de mejora requeridos

La empresa tiene la posibilidad de realizar una sustancial mejora en el manejo de materiales mediante la reorganización de sus instalaciones, así como también en la optimización de la circulación de sus materiales. Esto puede hacerse desde el momento en que arriban a la planta los suministros hasta el punto en que se dispone de los productos terminados para su posterior distribución, sin descuidar la manera en que dispone de las materias primas para la elaboración de los pegamentos. Para la identificación de los posibles ámbitos de oportunidad es necesario responder los siguientes cuestionamientos:

- ¿Cómo se realizan actualmente los procedimientos?
- ¿De qué otra manera se pueden realizar?
- ¿Se obtiene algún beneficio económico o de reducción de tiempo de esta alternativa?
- ¿Qué se requiere para implementar dicha alternativa?

De acuerdo con la información proporcionada por Grupo Adhempa, la recepción de materias primas, su disposición en el almacén y el consecuente flujo hacia la maquinaria y equipo que se encarga de procesarlas, son los procesos que requieren mayor atención para implementar los factores de mejora, sobre todo en el aspecto de manejo de materiales.

A su vez, el control de inventarios es otro factor a considerar, dado que no se cuenta con un sistema que indique cuando es necesario realizar un pedido, determinar un stock de seguridad y eliminar los faltantes de materia prima cuando se tiene un pedido extraordinario.

En cuanto al proceso de fabricación, no se pueden realizar cambios sustanciales puesto que la disposición física de la maquinaria y equipo así como los procesos implicados para replicar las formulas de laboratorios no son elementos que requieran alterarse forzosamente ya que se aprecian eficientes y que trabajan sin problemas.

El proceso de distribución se realiza de manera eficiente ya que se considera el transporte adecuado para cada situación y se cuenta con varias unidades para atender cada caso. Sin embargo, no se utiliza la capacidad total del transporte si el pedido no es suficientemente grande y el regreso de las unidades es en vacío ya que los encargos se atienden de manera secuencial y en cuanto se terminan de fabricar se disponen para ser entregados a la brevedad posible.

---

## 1.6 Resumen

Grupo Adhempa es una empresa dedicada a la fabricación de pegamentos industriales y está enfocada principalmente al mercado nacional. Debido a su ubicación, cuenta con una posición geográfica favorable para la entrega de sus productos. Sin embargo, existen aspectos en su proceso de fabricación que son susceptibles a ser mejorados, sobre todo en la parte de abastecimiento de materia prima, su disposición en el almacén, así como su procesamiento con la ayuda de equipo especializado y el control de inventarios.

La empresa está interesada en estimar el desarrollo de su posicionamiento en el mercado si se llevaran a cabo las mejoras en sus procesos, con el fin de definir si los beneficios al hacerlo le permitirán obtener el nivel deseado, es decir, abarcar el 70 u 80% del mercado, mejorar la atención al cliente, disminuir costos y aumentar la seguridad en la planta. A su vez, existen dos empresas que son sus competidoras directas y cuya evolución también define la posición en el mercado de Grupo Adhempa.

Por lo anterior, la empresa requiere una proyección a partir de la cual sustentar sus decisiones para administrar sus recursos y establecer sus niveles operacionales para el futuro.

---

## 2 Marco teórico

### 2.1 Teoría de la probabilidad

La teoría de la probabilidad o teoría probabilística permite comprender de forma precisa la incertidumbre. Este conocimiento ayuda a hacer predicciones, tomar mejores decisiones, valorar los riesgos e incluso ganar dinero. En la vida diaria se utiliza la probabilidad para valorar el riesgo. A medida que los problemas a los que hay que enfrentarse se vuelven más complejos, se necesita refinar y desarrollar ideas intuitivas y aproximadas sobre probabilidad para obtener un enfoque más claro y preciso (Evans, 2004).

De acuerdo con la teoría probabilística, la forma de medir la ocurrencia de un determinado evento  $A$ , dentro de un espacio muestral  $\Omega$ , asociado a un experimento  $\mathcal{E}$ , constituye la probabilidad de la ocurrencia de dicho evento denotado como  $P(A)$ . De modo que si el interés es “medir” la ocurrencia de eventos como consecuencia de la realización de un fenómeno aleatorio; por cuanto dicha medida dará un determinado tipo de información tan valiosa que permitirá realizar alguna acción futura bajo el convencimiento de que existirá cierta certeza (en términos porcentuales) de la ocurrencia de un resultado favorable.

Un ejemplo particularmente importante lo proporcionan las denominadas “series de tiempo” o “series temporales”, que registran observaciones de un determinado proceso en función del tiempo. Se puede definir entonces a un proceso estocástico como una familia  $\{ X(t), t \in T \}$  de variables aleatorias, clasificadas mediante un parámetro  $t$ , que varía en un conjunto  $T$  (Rodríguez, 2002).

Una variable aleatoria proporciona un medio para describir los resultados experimentales empleando valores numéricos. Dicha variable asocia un valor numérico a cada uno de los resultados experimentales. Puede ser discreta o continua dependiendo del tipo de valores numéricos que asuma. Una variable aleatoria discreta es aquella que asume un número finito de valores o una sucesión infinita de valores tales como 0, 1, 2. En cambio, una variable aleatoria continua puede tomar cualquier valor numérico dentro de un intervalo o colección de intervalos tales como 0.1, 0.2, 0.3. (Anderson, 2008).

La teoría probabilística se ocupa de asignar un cierto número a cada posible resultado que pueda ocurrir en un experimento aleatorio con el fin de cuantificar dichos resultados y saber si un suceso es más probable que otro. Específicamente la teoría de la probabilidad estudia los fenómenos aleatorios estocásticos y se

---

encarga de modelar matemáticamente la incertidumbre o aleatoriedad de ciertas características de un fenómeno de interés.

La probabilidad permite estudiar los experimentos aleatorios, con el objeto de valorar el riesgo de tomar una decisión determinada. Un experimento aleatorio es un proceso de observación que se puede repetir en las mismas condiciones del que se conocen con antelación todos los resultados posibles y hay al menos dos diferentes, por tanto el resultado de cualquier realización no se puede asegurar de antemano. Por lo tanto, se puede repetir en idénticas ocasiones y no obtener el mismo resultado (González, 2009). Este tipo de fenómeno es opuesto al fenómeno determinista en el que conocer todos los factores de un experimento permite predecir el resultado del mismo.

Siempre que se estudie el comportamiento de una variable aleatoria a lo largo del tiempo, se está ante un proceso estocástico. En general, se trabaja con procesos estocásticos en cualquier caso en el que se intenta ajustar un modelo teórico que permita hacer predicciones sobre el comportamiento futuro de un proceso (Rodríguez, 2002).

Un proceso estocástico sirve para caracterizar una sucesión de variables aleatorias que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo. Cada una de las variables aleatorias del proceso tiene su propia función de distribución de probabilidad y entre ellas pueden estar relacionadas o no.

En la teoría de la probabilidad existe la probabilidad discreta y la probabilidad continua. La primera es aquella en la que la variable aleatoria discreta sólo puede tomar un número limitado de valores dentro de un intervalo. En la segunda, la variable aleatoria continua puede tomar un valor de una cantidad infinitamente grande de valores (Guerrero, 2007).

## **2.2 Procesos estocásticos discretos**

Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias  $\{ X_t : t \in T \}$  parametrizada por un conjunto  $T$ , llamado espacio parametral, en donde las variables toman valores en un conjunto  $S$  llamado espacio de estados. En los casos más sencillos se toma como espacio parametral el conjunto discreto  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$  y estos números se interpretan como tiempos. En este caso se dice que el proceso es a tiempo discreto, y en general este tipo de procesos se denota por  $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$ , o explícitamente  $X_0, X_1, X_2, \dots$ , así para cada  $n$ ,  $X_n$  es el valor del proceso o estado del sistema al tiempo  $n$  (Rincón, 2012). Este modelo

---

corresponde a un vector aleatorio de dimensión infinita como se muestra en la figura 2.1.

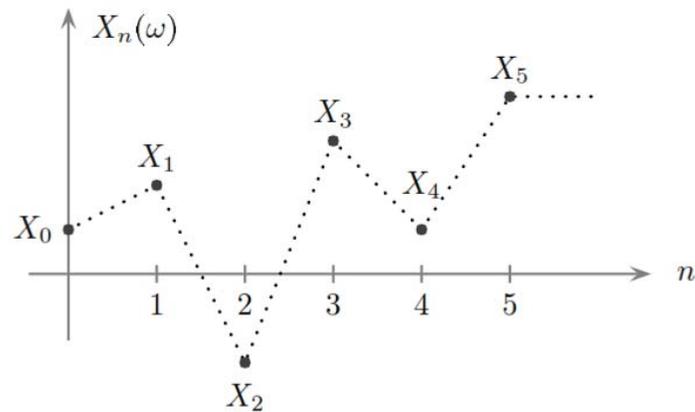


Figura 2.1. Vector aleatorio de dimensión finita

Un tipo especial de proceso estocástico discreto son las cadenas de Markov en los que, suponiendo que se conoce el estado presente del sistema, los estados anteriores no tienen influencia en los estados futuros del sistema (Rincón, 2012).

### 2.3 Cadenas de Markov

En las cadenas de Markov, la probabilidad de que ocurra un evento depende del evento inmediatamente anterior y pueden usarse para describir la probabilidad de que un consumidor A en un periodo compre la marca B en el siguiente periodo (Anderson, 2004). Es decir, se conoce la historia del sistema hasta su instante actual, por lo que su estado presente resume toda la información relevante para describir en probabilidad su estado futuro.

Los procesos de Markov han sido estudiados extensamente y existe un gran número de sistemas que surgen en muy diversas disciplinas del conocimiento para los cuales el modelo de proceso estocástico y la propiedad de Markov son razonables. En particular, los sistemas dinámicos deterministas dados por una ecuación diferencial pueden considerarse procesos de Markov, pues su evolución futura queda determinada por la posición inicial del sistema y la ley de movimiento especificada (Rincón, 2012).

Las cadenas de Markov son aplicadas también en áreas como la física en problemas de termodinámica y la física estadística, en modelos epidemiológicos, modelación de juegos de azar, así como en la economía y finanzas en aspectos como modelo de colapsos en la bolsa de valores, determinación de la volatilidad

---

de los precios, análisis de los patrones de compra de deudores morosos, planeación de las necesidades de personal, análisis de reemplazo de equipos, entre otros.

Frecuentemente el término cadena de Markov se usa para dar a entender que un proceso tiene un espacio de datos discreto (finito o numerable). Usualmente una cadena de Markov es definida para un conjunto discreto de tiempo (Everitt, 2010). Es útil para estudiar la evolución de sistemas a lo largo de ensayos repetidos, que a menudo son periodos sucesivos donde el estado del sistema, en cualquier periodo particular no puede determinarse con certeza.

Los fundamentos encaminados hacia la modelación mediante cadenas de Markov indican que lo primero que hay que tener en cuenta es entender que el espacio de muestreo es aquella colección de todos los posibles resultados donde acontecerán los eventos que serán definidos por medio de la variable aleatoria que de acuerdo a Brenaud, 1999:

- Una variable aleatoria  $X$  es una función real definida en el espacio muestral,  $\Omega$ , asociado a un experimento aleatorio, es decir  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , al evento  $\{X \leq \alpha\} = \{\omega_i; X(\omega) \leq \alpha\}$  pueda serle asignado una probabilidad esto es

$$\{X \leq \alpha\} \in F$$

Es decir, se considera el evento como una sucesión de variables aleatorias que toman valores en un conjunto finito considerado como espacio muestral que satisface las propiedades de Markov enunciadas a continuación (Brenaud, 1999):

1. El resultado de cada evento es parte de un conjunto finito de posibles resultados.
2. La probabilidad de cada resultado depende exclusivamente del evento anterior.
3. La probabilidad de pasar de un resultado a otro permanecerá constante en el transcurso de todos los ensayos.

---

Debido a que un proceso estocástico se da cuando existen valores en un espacio finito o donde la cantidad de valores posibles es enumerable, al conjunto de valores posibles del proceso referido se les puede denotar por el conjunto de enteros no negativos:

$$\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$$

Si  $X_n = i$ , se dice que el proceso está en el estado  $i$  en el tiempo  $n$ . Suponiendo que cuando al proceso este en el estado  $i$ , existe una probabilidad fija  $P_{ij}$  de que próximamente estará en el estado  $j$ , por lo que:

$$P \{X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\} = P_{ij}$$

Para todos los estados  $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j$  y para todo  $n \geq 0$ .

Los procesos estocásticos de este tipo cumplen con la siguiente propiedad de Markov:

- La distribución condicional de cualquier estado futuro  $X_{n+1}$  dados los estados pasados  $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$  y el estado presente  $X_n$ , es independiente de los estados pasados y depende únicamente del estado presente

El valor  $P_{ij}$  representa la probabilidad de que el proceso ocurrirá, del estado  $i$  al estado  $j$ . Dado que las probabilidades son no negativas y debido a que el proceso debe hacer una transición hacia algún estado se tiene que:

$$P_{ij} \geq 0; \quad i, j \geq 0; \quad \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1; \quad j = 0, 1, \dots$$

Para determinar las probabilidades de los diversos estados que ocurren en ensayos sucesivos, se requiere la información sobre la probabilidad de que un cliente permanezca con la misma fábrica de adhesivos industriales o cambie a la fábrica competidora conforme continúa el proceso de un intervalo de tiempo a otro y debido a que las probabilidades indican que un cliente puede moverse o hacer una transición de un estado en un periodo dado, a otro estado en el siguiente periodo, estas probabilidades se llaman probabilidades de transición.

---

## 2.4 Herramienta computacional Maple

Dado que se requiere un gran número de operaciones matriciales para los escenarios de modelación requeridos, se hace uso de la herramienta computacional Maple en la simulación matemática realizada en esta investigación.

Maple es un sistema de cálculo científico, es decir, simbólico, numérico y gráfico, que se viene desarrollando desde 1980 en la Universidad de Waterloo, Canada.

Entre sus características generales se pueden mencionar (Rincón, 1995):

- Es un sistema interactivo: el usuario introduce expresiones, el sistema las evalúa, muestra el resultado correspondiente y queda a la espera de nuevas instrucciones.
- Usa una sintaxis próxima a la notación matemática, dado que el objetivo primario es conseguir un lenguaje apropiado para expresar algoritmos matemáticos.

La herramienta Maple simplifica las operaciones matriciales requeridas debido a que la solución de muchas de ellas requiere no solo cálculos numéricos, sino también manipulaciones simbólicas y algebraicas, porque es necesario manejar fórmulas y los cálculos de modo exacto, de acuerdo con las reglas de álgebra. En estos casos, el análisis numérico que aproxima numéricamente las soluciones de los problemas resulta inapropiado, lo que hace que la utilización de herramientas matemáticas como Maple resulte de gran ayuda en estos casos (Rincón, 1995).

## 2.5 Factores de mejora

### a) Control de inventarios

Un inventario es el conjunto de artículos almacenados en espera de una demanda para su utilización. La demanda puede proceder (Arbones, 1989):

- Del mercado (inventario de artículos terminados)
- Del interior de la empresa (inventario de materias primas o productos en curso de fabricación)

---

La demanda puede ser determinística o probabilística. Por la determinística se entiende que la cantidad pedida en los diversos periodos es conocida con certidumbre. Además, la demanda en igual periodo de tiempo puede ser constante o variable, estas dos circunstancias son conocidas como demanda estática y demanda dinámica.

La demanda probabilística ocurre cuando la demanda en un cierto periodo es incierta (con incertidumbre) pero puede ser expresada por una distribución de probabilidad. También puede ser estática o dinámica.

Un sistema de control de inventarios responde a dos preguntas importantes ¿Qué cantidad se debe pedir? y ¿Cuándo se debe hacer el pedido? Cuando se selecciona un sistema de control de inventario para una aplicación en particular, la índole de las demandas impuestas sobre los artículos del inventario es un factor crucial (Krajewski, 2000).

#### **b) Manejo de materiales**

El manejo de materiales es una parte importante de cualquier operación de fabricación. Los materiales, las partes y productos en un proceso con frecuencia tienen que ser movidos, cargados, descargados, empacados y almacenados varias veces. Un manejo eficiente de materiales puede ayudar a que haya trabajo productivo directo continuamente, minimizando el tiempo y el espacio empleados en esperas o procesos secundarios (Garzón, 2001).

Dentro de una bodega o área de almacén el manejo de materiales es una actividad de mano de obra intensa, ya que la mayor parte del manejo de materiales en el mundo se realiza de manera manual, en el mejor de los casos en forma semiautomática. La disposición de la mercancía, la magnitud con la que se utiliza el equipo y el grado de automatización afectan a los costos de manejo de materiales. A través del manejo de materiales se busca obtener la mejor combinación de ellos (Ballou, 2004).

Un sistema integrado de manejo de materiales consta de los siguientes elementos básicos:

- Sistemas de almacenamiento para grandes cantidades de materiales.
- Sistemas de transporte para llevar los materiales desde los sitios de almacenamiento hasta el lugar de las operaciones de producción y ensamble.

- 
- Sistemas de transferencia de materiales para carga y descarga de las máquinas de producción.

Estos sistemas pueden estar automatizados individualmente, pero deben estar unidos por un sistema general de control con el fin de poder establecer una operación integrada de manufactura.

---

## 2.6 Resumen

La teoría de la probabilidad estudia los fenómenos aleatorios estocásticos y se encarga de modelar matemáticamente la incertidumbre o aleatoriedad de ciertas características de un fenómeno de interés. A través de ella se pueden realizar predicciones, tomar mejores decisiones y valorar los riesgos en las organizaciones y empresas.

Un fenómeno aleatorio se define como un fenómeno empírico que obedece a las leyes probabilísticas más que a las leyes deterministas. Un proceso estocástico es el fenómeno aleatorio que surge a través de un proceso que se desarrolla a lo largo del tiempo de forma controlada mediante leyes probabilísticas.

En la teoría de la probabilidad existe la probabilidad discreta y la probabilidad continua. La primera es aquella en la que la variable aleatoria discreta sólo puede tomar un número limitado de valores dentro de un intervalo. En la segunda, la variable aleatoria continua puede tomar un valor de una cantidad infinitamente grande de valores.

Las cadenas de Markov se utilizan para analizar el comportamiento de los procesos estocásticos discretos y representan un sistema que varía su estado a lo largo del tiempo, siendo cada cambio una transición en el sistema. Los fundamentos encaminados hacia la modelación mediante cadenas de Markov indican que lo primero que hay que tener en cuenta es entender que el espacio de muestreo es aquella colección de todos los posibles resultados donde acontecerán los eventos que serán definidos por medio de la variable aleatoria.

A través de la modelación por cadenas de Markov se obtienen elementos de decisión que permiten implementar factores de mejora de acuerdo a los requerimientos de una empresa para ayuden a mejorar su posicionamiento en el mercado.

---

### 3 Metodología

Debido a que el interés de Grupo Adhempa es conocer la evolución de su posicionamiento en el mercado de los adhesivos industriales a través del tiempo y éste a su vez es un fenómeno aleatorio medible dentro de un intervalo finito de valores, se utilizaron las cadenas de Markov para modelar el comportamiento de la empresa utilizando dos escenarios. El primer escenario consiste en la modelación del posicionamiento en el mercado si la empresa no realizara cambios en sus procesos, es decir con valores actuales. El segundo escenario consiste en simular el posicionamiento de Grupo Adhempa si se introdujeran factores de mejora en sus procedimientos, con el fin de comparar resultados y que la organización cuente con elementos de decisión para implementar los factores de mejora que consideren pertinentes.

Dado que para realizar las proyecciones a futuro de Grupo Adhempa, el tiempo  $n$  está expresado en función de variables aleatorias discretas, se tiene conocimiento del estado inicial y los estados anteriores no tienen influencia en el estado futuro del sistema, resulta factible utilizar las cadenas de Markov para modelar el comportamiento del posicionamiento en el mercado de dicha empresa. Se analizó la participación en el mercado de los clientes de las tres empresas, Adhempa, Tackbond y Pegasill; con el fin de determinar el porcentaje de clientes que tendrá cada una de ellas después de determinado tiempo abarcando los dos escenarios antes mencionados.

En cada uno de los escenarios modelados, fueron incluidas las dos empresas que conforman la competencia directa de Grupo Adhempa en el área, ya que el comportamiento de una incide en el posicionamiento en el mercado de las otras. Debido a la solicitud de confidencialidad de las dos empresas competidoras, se les cambió el nombre para efectos de este estudio, y se les nombró como Tackbond y Pegasill.

---

### 3.1 Elementos de análisis

Para cada cadena de Markov se tienen los siguientes elementos de análisis (Rodríguez, 2002):

- a) Espacio de datos, en el cual se establecen las variables aleatorias a considerar
- b) Probabilidad de transición del estado  $i$  al estado  $j$ , que designa la probabilidad de que el estado  $j$  suceda al estado  $i$  para cada dos estados  $a_i$  y  $a_j$  y es denotada como  $P_{ij}$
- c) Matriz de transición del proceso, donde se ordenan todas las probabilidades de transición
- d) Vector de probabilidad inicial formado por las probabilidades del estado inicial del sistema

La naturaleza estocástica determinada por el análisis indica que se requiere de una modelación matemática capaz de interpretar el estado actual y su evolución en función de la interacción de las empresas. La modelación del posicionamiento en el mercado de Grupo Adhempa se realiza bajo dos escenarios en los cuales intervienen los elementos de análisis antes mencionados.

- Primer escenario: análisis del modelo a corto, mediano y largo plazo con valores actuales, de acuerdo a la matriz de transición y al estado inicial  $X_0$  cuyos datos fueron proporcionados por grupo Adhempa. El análisis a corto plazo es de manera mensual por un período de tres meses para establecer su posicionamiento en el mercado al cabo de ese tiempo. Para el mediano plazo, la modelación es de manera anual hasta llegar a los tres años. Para el largo plazo se utiliza en la modelación un intervalo infinito de tiempo.
- Segundo escenario: análisis del modelo a corto, mediano y largo plazo, considerando los mismos intervalos de tiempo que en el caso anterior pero introduciendo en la simulación los factores de mejora de acuerdo a los intereses y posibilidades de Grupo Adhempa, con el fin de conocer la condición de su posicionamiento el mercado al introducir tales elementos y realizar una comparación con el primer escenario.

---

### a) Espacio de datos

Una cadena de Markov es un proceso estocástico a tiempo discreto  $\{X_n: n = 0, 1, \dots\}$  con espacio de estados discreto, y que satisface la propiedad de Markov, esto es, para cualquier entero  $n \geq 0$ , y para cualesquiera estados  $X_0, \dots, X_{n+1}$ , se cumple

$$P(X_{n+1} | X_0, \dots, X_n) = p(X_{n+1} | X_n)$$

Si al tiempo  $n+1$  se le considera como un tiempo futuro, al tiempo  $n$  como el presente y a los tiempos  $0, 1, \dots, n-1$  como el pasado, entonces la expresión anterior establece que la distribución de probabilidad del estado del proceso al tiempo futuro  $n+1$  depende únicamente del estado del proceso al tiempo  $n$ , y no depende de los estados en los tiempos pasados  $0, 1, \dots, n-1$  (Rincón, 2012).

### b) Probabilidad de transición

El análisis de Markov describe el movimiento o transición de un sistema desde cierta condición (estado) en la fase correspondiente (periodo de tiempo) a otro de los  $n$  estados posibles de la siguiente fase. El problema estará determinado si se conoce la probabilidad asociada con cualquier movimiento posible (transición). Esta probabilidad, denominada probabilidad de transición  $P_{ij}$ , es la probabilidad de que el sistema, actualmente en el estado  $i$ , se mueva al estado  $j$  en el siguiente periodo. El concepto de probabilidad de transición es la clave del análisis de Markov (Vicens, 1997). Sean  $i$  y  $j$  dos estados de una cadena de Markov, a la probabilidad:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

se le denota por  $P_{ij}(n, n+1)$ , y representa la probabilidad de transición del estado  $i$  en el tiempo  $n$ , al estado  $j$  en el tiempo  $n+1$ . Estas probabilidades se conocen como las probabilidades de transición (Rincón, 2012).

### c) Matriz de transición

Es una matriz cuadrada, donde el número de renglones y de columnas será igual al de estados que tenga la cadena de Markov, siendo cada elemento de la matriz, la probabilidad de transición respectiva de pasar del estado que encabeza el renglón donde está ubicado el elemento hacia el estado encabezado por la columna, así por ejemplo el elemento de la matriz correspondiente al primer renglón y a la segunda columna será la probabilidad de pasar del primer estado al segundo (Izar, 1998).

Tabla 1. Ejemplo de una matriz de transición de tres estados: A, B, y C

	A	B	C
A	0.50	0.30	0.20
B	0.25	0.45	0.30
C	0.30	0.15	0.50

En el ejemplo de la matriz de transición de tres estados, se observa que para el primer renglón las probabilidades de transición indican que habrá un 50% de los clientes que serán fieles a la marca (o estado) A, por su parte un 30% cambiarán de A a B y el 20% restante cambiará de A a C. Como puede verse, la suma de probabilidades de cada renglón es la unidad, dado que cada marca tendrá un 100% de sus clientes al inicio del proceso de Markov, de los cuales retendrá una parte y el resto cambiará a otras marcas.

Por medio de una matriz de transición en la que se ordenan las probabilidades de transición, se describe la manera en que el sistema cambia de un período al siguiente y se representa de la siguiente manera:

$$M = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{0j} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{1j} \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & P_{ij} \end{pmatrix}$$

Las probabilidades  $P_{ij}$  pueden disponerse en forma de matriz de transición, es decir:

$$M = \left| P_{ij} \right|$$

Donde  $P_{ij}$  es el elemento situado en la  $i$ -ésima fila y  $j$ -ésima columna de la matriz  $M$ , la cual es una matriz estocástica pues los elementos de cada una de sus columnas es no negativo y la suma de sus elementos es igual a la unidad. Con la matriz de transición y las probabilidades  $P_{ij}$  se denotan las siguientes igualdades:

$$M^2 = M \times M = \left| P_{ij}^2 \right|,$$

$$M^3 = M \times M^2 = M^2 \times M = \left| P_{ij}^3 \right|,$$

Se tiene en general que:

$$M^n = M \times M^{n-1} = M^{n-1} \times M = \left| P_{ij}^n \right|$$

---

#### d) Vector de probabilidad inicial

El vector formado por las probabilidades del estado inicial del sistema denominado vector de probabilidad inicial, tiene las siguientes características (Rodríguez, 2002)

$$P^{(0)} = (P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \dots, P_n^{(0)})$$

$$\sum_i P_i^{(0)} = 1$$

$$P_i \geq 0, \forall i$$

Dadas las expresiones anteriores, el vector de probabilidad inicial, es un vector estocástico. Al vector  $X_0$  que denota el vector de estado en el periodo 0, se le llama vector de estado inicial (Kolman, 2006). Partiendo de un cierto estado inicial dado  $X_0$ , se modela la evolución del sistema a través de etapas temporales.

En general puede considerarse que una cadena de Markov inicia su evolución partiendo de un estado  $i$  cualquiera, o más generalmente considerando una distribución de probabilidad inicial sobre el espacio de datos  $\{0,1,2,\dots\}$  es simplemente una distribución de probabilidad sobre este conjunto, es decir, es una colección de números  $P_0, P_1, P_2\dots$  que son no negativos y que suman uno. El número  $P_i$  corresponde a la probabilidad de que la cadena inicie en el estado  $i$  (Rincón, 2012).

### 3.2 Análisis del modelo con valores actuales

#### a) Corto plazo

Cuando  $n$  no es un número grande, es posible predecir el estado del mercado descrito por un vector  $X_n$  mediante la expresión:

$$X_n = M^n \cdot X_0, n \geq 1$$

Lo cual implica la ejecución de un número  $n$  de multiplicaciones de matrices cuadradas y una multiplicación de una matriz por un vector. A través de esta fórmula se puede estimar la evolución en el mercado de pegamentos a corto plazo de Grupo Adhempa y sus dos competidores directos.

---

## b) Mediano plazo

Aún cuando al mediano plazo es factible estimar la evolución del mercado aplicando la fórmula anterior, se optó por reducir el número de operaciones matriciales recurriendo a la diagonalización de la matriz M.

Una de las aplicaciones de la diagonalización de matrices es que, cuando ésta es posible, se simplifica el cálculo de potencias. En efecto, si la matriz M es diagonalizable, es sencillo calcular cualquier potencia de M pues entonces existe una matriz diagonal D cuyos elementos son los valores propios de M, y otra invertible P que tiene por columnas una base formada por vectores propios de M, de tal modo que (Sánchez, 2006):

$$D^n = P^{-1}M^nP \rightarrow M^n = P^{-1}D^nP$$

Siendo D la matriz diagonal cuyos elementos no nulos corresponden a los valores característicos de la matriz de transición M y P una matriz no singular cuyos vectores columna lo integran los respectivos vectores característicos. Para obtener D es necesario calcular el polinomio característico también conocido como eigenvalor de la matriz M.

Se llama polinomio característico de M al siguiente determinante (Alemany, 2003):

$$P_\lambda(\lambda) = |M - I \lambda|$$

Donde I es la matriz identidad de tamaño n x n.

Retomando la expresión utilizada en el corto plazo  $X_n = M^n X_0$ , y utilizando la fórmula para disminuir las operaciones matriciales, se tiene que para el mediano plazo la expresión a utilizar para la simulación es

$$X_n = (P^{-1}D^nP) X_0$$

Para el cálculo del polinomio característico de la matriz M se usa la definición de eigenvectores la cual es:

$$Mv = \lambda v$$

La parte derecha queda idéntica cuando se multiplica por la matriz identidad

$$Mv = I \lambda v$$

---

Así la primera ecuación queda:  $Mv = I \lambda v$

Entonces:  $Mv - I \lambda v = (M - I \lambda) v = 0$

De este modo:  $M - I \lambda = 0$

El determinante del primer término es un polinomio en términos de  $\lambda$ , el cual tiene el nombre de **polinomio característico de M**, el cual es:

$$P(\lambda) = \text{Det}[M - I \lambda] = 0$$

Por lo que la ecuación característica de M es  $\text{Det}[M - I \lambda] = 0$ , la cual expresa los eigenvalores de la matriz M.

Para obtener la matriz P, es necesario calcular sus respectivos vectores característicos. Sea P una matriz de n x n componentes reales, el número  $\lambda$  se denomina valor característico de P si existe un vector v diferente de cero tal que

$$Pv = \lambda v$$

El vector  $v \neq 0$  se denomina vector característico de P correspondiente al valor característico  $\lambda$ . Finalmente para obtener  $P^{-1}$  se calcula la matriz inversa de P. Se dice que una matriz P es inversa, si existe otra matriz  $P^{-1}$  con la propiedad de que

$$P \cdot P^{-1} = P^{-1} \cdot P = I$$

Siendo I la matriz identidad.

### c) Largo plazo

Para la estimación de la evolución del mercado a largo plazo, se utilizan valores muy grandes del parámetro n, por lo que se utiliza de nueva cuenta la expresión  $X_n = (P^{-1}D^nP) X_0$ , así como los valores de  $P^{-1}$ ,  $D^n$  y P obtenidos en el mediano plazo, pero ahora para demostrar la existencia o inexistencia de límite cuando  $n \rightarrow \infty$ .

De igual manera que en la estimación a mediano plazo, para el largo plazo se utiliza la fórmula  $M^n = P^{-1}D^nP$ , con el fin de reducir el número de operaciones matriciales.

---

### 3.3 Análisis del modelo con factores de mejora

Dado que al introducir los factores de mejora en la matriz de transición  $M$  se incrementa el número de operaciones matriciales requeridas en la simulación, se utiliza la fórmula  $X_n = (P^{-1}D^nP) X_0$  para la simulación de la evolución del mercado tanto en el corto, como en el mediano y largo plazos.

Para el corto plazo se realiza la modelación tomando en cuenta los tres primeros meses, para el mediano plazo se consideran tres años y para el largo plazo se lleva a cabo la simulación para demostrar la existencia o inexistencia de límite cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Se requiere obtener la matriz diagonal  $D$  cuyos elementos no nulos corresponden a los valores característicos de la matriz de transición  $M$ , la matriz  $P$ , así como su matriz inversa, es decir  $P^{-1}$ . Se utiliza el mismo procedimiento que en la modelación con parámetros actuales para el cálculo de dichas matrices.

Debido a que  $X_0$  representa el estado inicial del mercado para las tres empresas, significa que en ese momento no se han aplicado factores de mejora y que el valor para esta modelación es el mismo que se utiliza en la modelación con valores actuales.

En los tres casos mencionados, tanto en el modelo con datos actuales como el que contiene los factores de mejora, el vector  $X_n$  denota lo siguiente:

- $X_n(1)$  indica el porcentaje de clientes captados por Grupo Adhempa en el mes  $n$ .
- $X_n(2)$  indica el porcentaje de clientes captados por la empresa Tackbond en el mes  $n$ .
- $X_n(3)$  indica el porcentaje de clientes captados por la empresa Pegasill en el mes  $n$ .

Cada fila o columna de una matriz estocástica es un vector de probabilidad, también llamado vector estocástico, el cual puede definirse como un vector cuyos elementos están formados por números reales no negativos que suman 1.

Para efectos de la empresa en estudio, realizar la modelación tanto con parámetros actuales como con factores de mejora permite hacer una comparación de ambos casos con respecto a la evolución en el mercado de las tres empresas, lo que le proporciona a Grupo Adhempa un parámetro para la toma de decisiones.

---

### 3.4 Resumen

La teoría de la probabilidad surge del estudio de los fenómenos aleatorios. Lo que se busca en esta investigación es que a partir de ella se encuentre un modelo matemático que permita analizar a profundidad el fenómeno de interés, en este caso, la evolución del posicionamiento en el mercado de una empresa que fabrica adhesivos industriales, Grupo Adhempa, con respecto a su competencia directa.

Debido a que el fenómeno de estudio es un proceso que se desarrolla en el tiempo y en el que el resultado en cualquier etapa contiene algún elemento que depende del azar se denomina proceso estocástico. Un caso particular de procesos estocásticos ocurre cuando el resultado en cada etapa sólo depende del resultado de la etapa anterior y no de cualquiera de los resultados previos. Tal proceso se denomina proceso de Markov o cadena de Markov.

La evolución del mercado de adhesivos en este estudio, se desarrolla con las características de los procesos de Markov, lo que significa que para la modelación matemática en este caso se utilizan los elementos de análisis de las cadenas de Markov.

Se modelan dos escenarios, uno en el que Grupo Adhempa no realiza cambios en sus procesos, es decir con valores actuales y otro en el que se introducen elementos o factores de mejora, con el fin de estimar su evolución en el tiempo, analizar los resultados y obtener elementos de decisión para dicha empresa en la búsqueda de mejorar su posicionamiento en el mercado.

---

## 4 Estudio de caso

En este capítulo se presenta un análisis del comportamiento de las tres empresas antes mencionadas con respecto a su interacción comercial y posicionamiento en el mercado local en el inmediato, mediano y largo plazos. Para la modelación se utilizan los elementos de las cadenas de Markov y la herramienta computacional Maple para realizar las operaciones matriciales.

### 4.1 Elementos de análisis

#### a) Espacio de datos

El espacio de datos esta dado por el porcentaje de clientes en cada una de las empresas y su interacción, es decir Grupo Adhempa, Tackbond y Pegasill.

#### b) Probabilidad de transición

La permanencia o intercambio de los clientes entre las tres empresas se expresan en una matriz que resulto ser de tipo estocástica donde se describen las variaciones de manera mensual. La información proporcionada por Grupo Adhempa es la siguiente:

- 9 de cada 10 clientes permanecen en Grupo Adhempa (90%)
- 3 de cada 4 clientes permanecen en Tackbond (75%)
- 17 de cada 20 clientes permanecen en Pegasill (85%)
- 1 de cada 20 clientes emigra de Tackbond a Adhempa (5%)
- 1 de cada 20 clientes emigra de Pegasill a Adhempa (5%)
- 3 de cada 20 clientes emigran de Adhempa a Tackbond (15%)
- 1 de cada 10 clientes emigran de Pegasill a Tackbond (10%)
- 1 de cada 10 clientes emigran de Ahempa a Pegasill (10%)
- 1 de cada 20 clientes emigra de Tackbond a Pegasill (5%)

Representando los datos anteriores de manera gráfica en términos de porcentaje, se observa la interacción de clientes de cada una de las empresas mencionadas para el mercado de pegamentos industriales del área de interés en la figura 4.1.

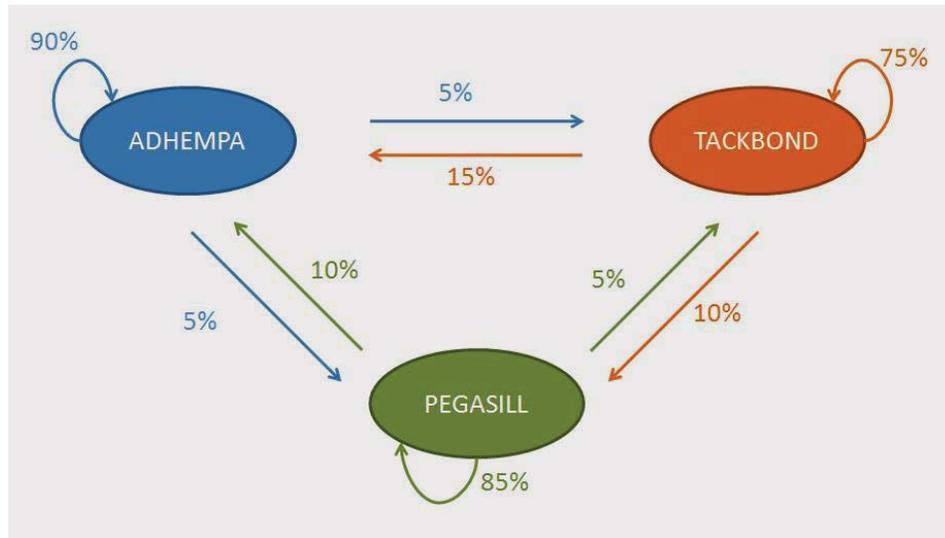


Figura 4.1. Situación actual del mercado de pegamentos del área de estudio

### c) Matriz de transición

Con la información anterior se definió el comportamiento del mercado mediante una matriz de transición  $M$  que cumple con las características de una cadena de Markov de tres estados.

		Adhempa	Tackbond	Pegasill
$M =$	Adhempa	$9/10$	$3/20$	$1/10$
	Tackbond	$1/20$	$3/4$	$1/20$
	Pegasill	$1/20$	$1/10$	$17/20$

Los elementos de la diagonal corresponden al porcentaje de los clientes que mantienen cada una de las tres empresas mencionadas.

1. El elemento  $P_{1,1} = 9/10$  indica el porcentaje fijo de clientes que permanecen en la empresa Adhempa en cada etapa
2. El elemento  $P_{2,2} = 3/4$  indica el porcentaje fijo de clientes que permanecen en la empresa Tackbond en cada etapa
3. El elemento  $P_{3,3} = 17/20$  indica el porcentaje fijo de clientes que permanecen en la empresa Pegasill en cada etapa

---

Los términos  $P_{ij}$  indican el porcentaje de los clientes que en cada etapa emigran de la empresa  $i$  a la empresa  $j$ .

1. El elemento  $P_{2,1} = 1/20$  indica el porcentaje de clientes que emigran de Tackbond a Adhempa
2. El elemento  $P_{3,1} = 1/20$  indica el porcentaje de clientes que emigran de Pegasill a Adhempa
3. El elemento  $P_{1,2} = 3/20$  indica el porcentaje de clientes que emigran de Adhempa a Tackbond
4. El elemento  $P_{3,2} = 1/10$  indica el porcentaje de clientes que emigran de Pegasill a Tackbond
5. El elemento  $P_{1,3} = 1/10$  indica el porcentaje de clientes que emigran de Adhempa a Pegasill
6. El elemento  $P_{2,3} = 1/20$  indica el porcentaje de clientes que emigran de Tackbond a Pegasill

Cada una de las columnas de la matriz  $M$  puede ser considerada como un vector estocástico, es decir:

$$M = (M(1), M(2), M(3))$$

La columna 1 de la matriz  $M$ , corresponde a los datos de Grupo Adhempa y al ser un vector estocástico, la suma de sus valores es igual a 1. La expresión del vector estocástico de Grupo Adhempa es:

$$M(1) = (9/10, 1/20, 1/20)^T$$

La columna 2, corresponde a los datos de la empresa Tackbond cuyo vector estocástico es el siguiente:

$$M(2) = (3/20, 3/4, 1/10)^T$$

La columna 3, corresponde a los datos de la empresa Pegasill cuyo vector estocástico es:

$$M(3) = (1/10, 1/20, 17/20)^T$$

En otros términos  $P(j) = (p_{1,j}, p_{2,j}, p_{3,j})$  para  $j = 1, 2, 3$ . Además se observa que los elementos de cada uno de los vectores son no negativos y la suma de sus elementos es igual a la unidad, por lo que cumplen con las características de las cadenas de Markov.

#### d) Vector de probabilidad inicial

En la posición inicial de los estados del modelo, los clientes se encuentran equitativamente distribuidos entre las tres empresas competidoras, por lo que cada una cubre una tercera parte del mercado en el área como se describe en el siguiente vector estocástico:

$$X_0 = (1/3, 1/3, 1/3)^T$$

De acuerdo a la información recabada de las tres empresas, se utilizaron los datos de número de clientes conservados, perdidos o adquiridos de cada empresa para modelar la evolución del mercado de pegamentos en el área de estudio.

## 4.2 Análisis del modelo con valores actuales

### 1. Corto plazo

La modelación a corto plazo corresponde a la estimación del porcentaje de clientes de cada una de las empresas durante tres meses a partir del estado inicial  $X_0$  establecido. Los estados a corto plazo se evalúan mediante la expresión:

$$X_n = M^n \cdot X_0, n \geq 1$$

La cual señala la distribución de los clientes entre las empresas del mercado de pegamentos del área estudiada en la etapa  $n, n = 1, 2, 3$ . Retomando la expresión  $M^n = M \times M^{n-1} = M^{n-1} \times M = |P_{ij}^n|$  se tiene que para el primer mes  $n=1$ ,

$$M^1 = M \times M^0 = \begin{vmatrix} 9/10 & 3/20 & 1/10 \\ 1/20 & 3/4 & 1/20 \\ 1/20 & 1/10 & 17/20 \end{vmatrix} \times 1 = \begin{vmatrix} 9/10 & 3/20 & 1/10 \\ 1/20 & 3/4 & 1/20 \\ 1/20 & 1/10 & 17/20 \end{vmatrix}$$

Sustituyendo valores en la expresión  $X_n = M^n \cdot X_0$ ,

$$X_1 = \begin{vmatrix} 9/10 & 3/20 & 1/10 \\ 1/20 & 3/4 & 1/20 \\ 1/20 & 1/10 & 17/20 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 23/60 \\ 17/60 \\ 1/3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 38.33\% \\ 28.33\% \\ 33.33\% \end{matrix}$$

Por lo tanto, para el primer mes se estima que Grupo Adhempa tendrá 38.33% de los clientes, Tackbond un 28.33% y Pegasill con 33.33%.

Para el segundo mes  $n=2$  se tiene que,

$$M^2 = M \times M^1 = \begin{vmatrix} 9/10 & 3/20 & 1/10 \\ 1/20 & 3/4 & 1/20 \\ 1/20 & 1/10 & 17/20 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 9/10 & 3/20 & 1/10 \\ 1/20 & 3/4 & 1/20 \\ 1/20 & 1/10 & 17/20 \end{vmatrix}$$

$$M^2 = \begin{vmatrix} 329/400 & 51.5/200 & 73/400 \\ 34/400 & 230/400 & 34/400 \\ 37/400 & 67/400 & 293/400 \end{vmatrix}$$

$$X_2 = M^2 \cdot X_0 = \begin{vmatrix} 329/400 & 51.5/200 & 73/400 \\ 34/400 & 230/400 & 34/400 \\ 37/400 & 67/400 & 293/400 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 101/240 \\ 149/600 \\ 397/1200 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 42.08\% \\ 24.83\% \\ 33.08\% \end{matrix}$$

De acuerdo con los resultados obtenidos se estima que al cabo de dos meses Grupo Adhempa tendrá 42.08% del mercado, Tackbond un 24.83% y Pegasill 33.08%.

Finalmente para el tercer mes  $n=3$  se tiene que,

$$M^3 = M^2 \times M = \begin{vmatrix} 329/400 & 51.5/200 & 73/400 \\ 34/400 & 230/400 & 34/400 \\ 37/400 & 67/400 & 293/400 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 9/10 & 3/20 & 1/10 \\ 1/20 & 3/4 & 1/20 \\ 1/20 & 1/10 & 17/20 \end{vmatrix}$$

$$M^3 = \begin{vmatrix} 3049/4000 & 1339/4000 & 1001/4000 \\ 438/4000 & 905/2000 & 219/2000 \\ 513/4000 & 851/4000 & 2561/4000 \end{vmatrix}$$

$$X_3 = M^3 \cdot X_0 = \begin{vmatrix} 3049/4000 & 1339/4000 & 1001/4000 \\ 438/4000 & 905/2000 & 219/2000 \\ 513/4000 & 851/4000 & 2561/4000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5389/12000 \\ 1343/6000 \\ 157/480 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 44.90\% \\ 22.38\% \\ 32.70\% \end{matrix}$$

Se estima que al cabo de tres meses a Grupo Adhempa le corresponderá el 44.9% del mercado, a Tackbond un 22.38% y a Pegasill un 32.70%. A continuación se resumen los resultados obtenidos para las tres empresas a corto plazo.

Tabla 2. Evolución del mercado a corto plazo

Tiempo/empresa	Adhempa	Tackbond	Pegasill
Estado inicial	33.3%	33.3%	33.3%
Primer mes	38.33%	28.33%	33.33%
Segundo mes	42.08%	24.83%	33.08%
Tercer mes	44.90%	22.38%	32.70%

En la figura 4.2 se representan los resultados obtenidos en la evolución del mercado a corto plazo y se puede observar la ventaja que se estima tendrá Grupo Adhempa al cabo de tres meses sobre las otras empresas competidoras.

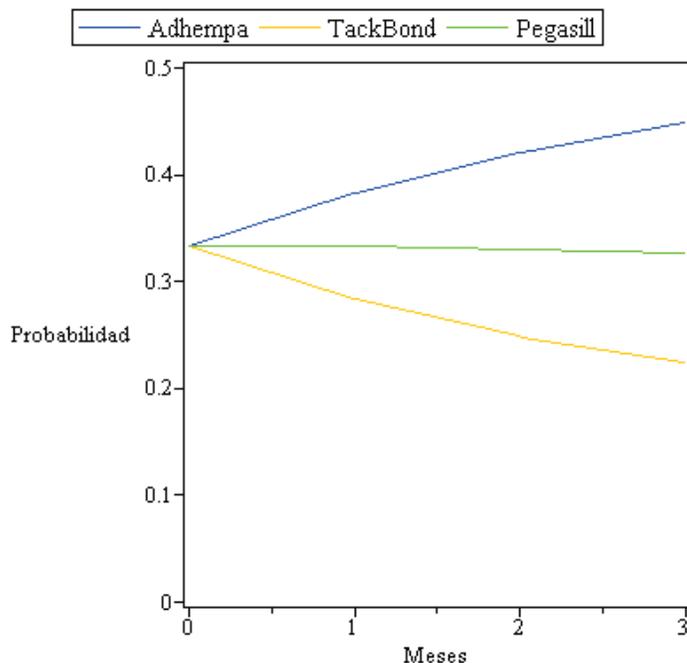


Figura 4.2 Comparativa de evolución del mercado a corto plazo

## 2. Mediano plazo

La estimación de los estados del modelo a mediano plazo de las tres empresas abarca un periodo de tres años, lo que implica un número grande de multiplicaciones matriciales para las evaluaciones correspondientes, por lo que se requirió el uso de Maple para simplificar el trabajo.

Para llevar a cabo la estimación del posicionamiento en el mercado a mediano plazo, se retoma la expresión  $X_n = M^n \cdot X_0$  y se lleva a cabo la diagonalización de la matriz de transición  $M$  al aplicar la siguiente fórmula:

$$M^n = P^{-1}D^nP$$

Sustituyendo:  $X_n = (P^{-1}D^nP) X_0$

Se requiere calcular el polinomio característico de la matriz  $M$  para obtener  $D$ . Retomando la expresión  $\text{Det} [ M - I \lambda ]$ , se tiene:

$$\text{Det} \left( \begin{array}{ccc|ccc|c} 9/10 & 3/20 & 1/10 & 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 1/20 & 3/4 & 1/20 & 0 & 1 & 0 & \\ 1/20 & 1/10 & 17/20 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \right) =$$

$$\text{Det} \left( \begin{array}{ccc|ccc|c} 9/10 & 3/20 & 1/10 & \lambda & 0 & 0 & \\ 1/20 & 3/4 & 1/20 & 0 & \lambda & 0 & \\ 1/20 & 1/10 & 17/20 & 0 & 0 & \lambda & \end{array} \right) =$$

$$\text{Det} \left( \begin{array}{ccc} 9/10 - \lambda & 3/20 & 1/10 \\ 1/20 & 3/4 - \lambda & 1/20 \\ 1/20 & 1/10 & 17/20 - \lambda \end{array} \right)$$

Para simplificar el cálculo del polinomio característico se utilizó la herramienta computacional maple y se obtuvo el valor de  $P(\lambda)$ , así como su gráfica correspondiente.

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \frac{5}{2} \lambda^2 + \frac{103}{50} \lambda - \frac{14}{25}$$

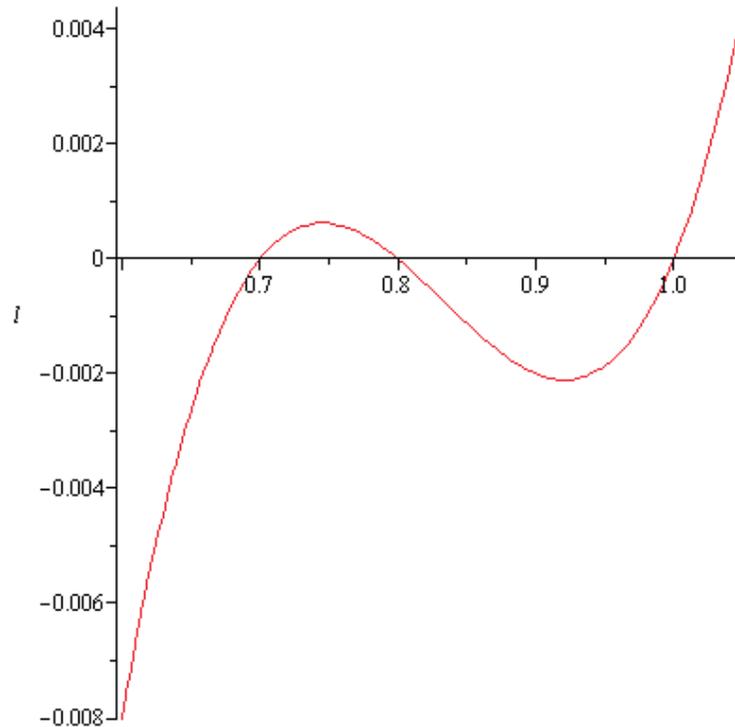


Figura 4.3 Polinomio característico obtenido

En la figura 4.3 se muestra que el polinomio característico tiene tres raíces en los números reales, dado que la gráfica corta al eje de las abscisas en tres puntos  $\lambda_1=1$ ,  $\lambda_2=4/5$  y  $\lambda_3=7/10$ . Estos puntos son denotados como los valores característicos del polinomio y a través de ellos se calcula la tendencia del comportamiento del polinomio a través del tiempo. Por lo tanto, los valores característicos que solucionan la ecuación  $P(\lambda)$  son:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{4}{5}, \lambda_3 = \frac{7}{10}$$

Siendo D la matriz diagonal cuyos elementos no nulos corresponden a los valores característicos de la matriz de transición M, se expresa de la siguiente manera:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 7/10 \end{vmatrix}$$

Para obtener la matriz P se requiere calcular los vectores característicos que la conforman. Retomando la expresión  $Pv = \lambda v$  se obtiene,

Para  $\lambda_1 = 1 \rightarrow \lambda_1 - 1 = 0 \rightarrow (M - I) v_1 = 0$ , sustituyendo

$$(M - I) = \begin{vmatrix} 9/10 & 3/20 & 1/10 \\ 1/20 & 3/4 & 1/20 \\ 1/20 & 1/10 & 17/20 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1/10 & 3/20 & 1/10 \\ 1/20 & -1/4 & 1/20 \\ 1/20 & 1/10 & -3/20 \end{vmatrix}$$

$$(M - I) v_1 = \begin{vmatrix} -1/10 & 3/20 & 1/10 \\ 1/20 & -1/4 & 1/20 \\ 1/20 & 1/10 & -3/20 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

De lo anterior se deriva el siguiente sistema de ecuaciones:

- (1)  $-1/10 X_1 + 3/20 X_2 + 1/10 X_3 = 0$
- (2)  $1/20 X_1 - 1/4 X_2 + 1/20 X_3 = 0$
- (3)  $1/20 X_1 + 1/10 X_2 - 3/20 X_3 = 0$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene que  $X_1 = 13/4$ ,  $X_2 = 1$  y  $X_3 = 7/4$ , lo que significa que para el valor característico de  $\lambda_1 = 1$ , el vector característico o eigenvector correspondiente es:  $v_1 = P_1 = (13/4, 1, 7/4)^T$

Para  $\lambda_2 = 4/5 \rightarrow \lambda_2 - 4/5 = 0 \rightarrow (M - 4/5 I) v_2 = 0$ , sustituyendo:

$$(M - 4/5 I) = \begin{vmatrix} 9/10 & 3/20 & 1/10 \\ 1/20 & 3/4 & 1/20 \\ 1/20 & 1/10 & 17/20 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/10 & 3/20 & 1/10 \\ 1/20 & -1/20 & 1/20 \\ 1/20 & 1/10 & 1/20 \end{vmatrix}$$

$$(M - 4/5 I) v_2 = \begin{vmatrix} 1/10 & 3/20 & 1/10 \\ 1/20 & -1/20 & 1/20 \\ 1/20 & 1/10 & 1/20 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

- (1)  $1/10 X_1 + 3/20 X_2 + 1/10 X_3 = 0$
- (2)  $1/20 X_1 - 1/20 X_2 + 1/20 X_3 = 0$
- (3)  $1/20 X_1 + 1/10 X_2 + 1/20 X_3 = 0$

Los valores que resuelven el sistema de ecuaciones son  $X_1 = -1$ ,  $X_2 = 0$  y  $X_3 = 1$ , lo que significa que para el valor característico  $\lambda_2 = 4/5$ , el vector característico o eigenvector correspondiente es:  $v_2 = P_2 = (-1, 0, 1)^T$

Para  $\lambda_3 = 7/10 \rightarrow \lambda_3 - 7/10 = 0 \rightarrow (M - 7/10 I) v_3 = 0$ , sustituyendo:

$$(M - 7/10 I) = \begin{vmatrix} 9/10 & 3/20 & 1/10 \\ 1/20 & 3/4 & 1/20 \\ 1/20 & 1/10 & 17/20 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 7/10 & 0 & 0 \\ 0 & 7/10 & 0 \\ 0 & 0 & 7/10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2/10 & 3/20 & 1/10 \\ 1/20 & 1/20 & 1/20 \\ 1/20 & 1/10 & 3/20 \end{vmatrix}$$

$$(M - 7/10 I) v_3 = \begin{vmatrix} 2/10 & 3/20 & 1/10 \\ 1/20 & 1/20 & 1/20 \\ 1/20 & 1/10 & 3/20 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

- (1)  $2/10 X_1 + 3/20 X_2 + 1/10 X_3 = 0$
- (2)  $1/20 X_1 + 1/20 X_2 + 1/20 X_3 = 0$
- (3)  $1/20 X_1 + 1/10 X_2 + 3/20 X_3 = 0$

Los valores que resultan del sistema de ecuaciones son  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = -2$  y  $X_3 = 1$ , lo que significa que para el valor característico de  $\lambda_3 = 7/10$ , el vector característico o eigenvector correspondiente es:  $v_3 = P_3 = (1, -2, 1)^T$ .

Derivado de lo anterior, la matriz P conformada por los vectores característicos calculados resulta ser:

$$P = \begin{vmatrix} 13/4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 7/4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Utilizando la herramienta maple se calculó la matriz  $P^{-1}$  quedando de la siguiente manera:

$$P^{-1} = \begin{vmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ -3/8 & 1/8 & 5/8 \\ 1/12 & -5/12 & 1/12 \end{vmatrix}$$

Retomando la expresión  $X_n = (P^{-1}D^nP) X_0$ , se sustituyen los valores calculados para la estimación del posicionamiento en el mercado de las tres empresas en el mediano plazo.

El estado inicial es  $X_0 = (1/3, 1/3, 1/3)^T$ . Al sustituir en la expresión se estima el estado al primer año,  $n=12$  meses,

$$X_{12}=(P^{-1}D^{12}P) X_0= \left| \begin{array}{ccc|c|ccc|c|c|c} 1/6 & 1/6 & 1/6 & x & 1 & 0 & 0 & x^{12} & 13/4 & -1 & 1 & x & 1/3 \\ -3/8 & 1/8 & 5/8 & & 0 & 4/5 & 0 & & 1 & 0 & -2 & & 1/3 \\ 1/12 & -5/12 & 1/12 & & 0 & 0 & 7/10 & & 7/4 & 1 & 1 & & 1/3 \end{array} \right|$$

Para el segundo año,  $n= 24$  meses,

$$X_{24}=(P^{-1}D^{24}P) X_0= \left| \begin{array}{ccc|c|ccc|c|c|c} 1/6 & 1/6 & 1/6 & x & 1 & 0 & 0 & x^{24} & 13/4 & -1 & 1 & x & 1/3 \\ -3/8 & 1/8 & 5/8 & & 0 & 4/5 & 0 & & 1 & 0 & -2 & & 1/3 \\ 1/12 & -5/12 & 1/12 & & 0 & 0 & 7/10 & & 7/4 & 1 & 1 & & 1/3 \end{array} \right|$$

Para el tercer año,  $n=36$  meses,

$$X_{36}=(P^{-1}D^{36}P) X_0= \left| \begin{array}{ccc|c|ccc|c|c|c} 1/6 & 1/6 & 1/6 & x & 1 & 0 & 0 & x^{36} & 13/4 & -1 & 1 & x & 1/3 \\ -3/8 & 1/8 & 5/8 & & 0 & 4/5 & 0 & & 1 & 0 & -2 & & 1/3 \\ 1/12 & -5/12 & 1/12 & & 0 & 0 & 7/10 & & 7/4 & 1 & 1 & & 1/3 \end{array} \right|$$

Debido al gran número de operaciones matriciales que deben realizarse, se utilizó la herramienta computacional maple para la estimación de los valores. La memoria de cálculo se encuentra en el anexo 1. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 3.

Tabla 3. Evolución del mercado a mediano plazo

Tiempo/empresa	Adhempa	Tackbond	Pegasill
Estado inicial	33.3%	33.3%	33.3%
Primer año	53.19%	16.89%	29.91%
Segundo año	54.10%	16.66%	29.22%
Tercer año	54.16%	16.66%	29.17%

Para el tercer año se estima que Grupo Adhempa cubra un poco más de la mitad del mercado con un 54.16% del total de clientes en el área, 16.66% para la empresa Tackbond y 29.17% para Pegasill. En la figura 4.4 se presenta una comparativa de la evolución de las tres empresas en el mercado de adhesivos industriales del área estudiada.

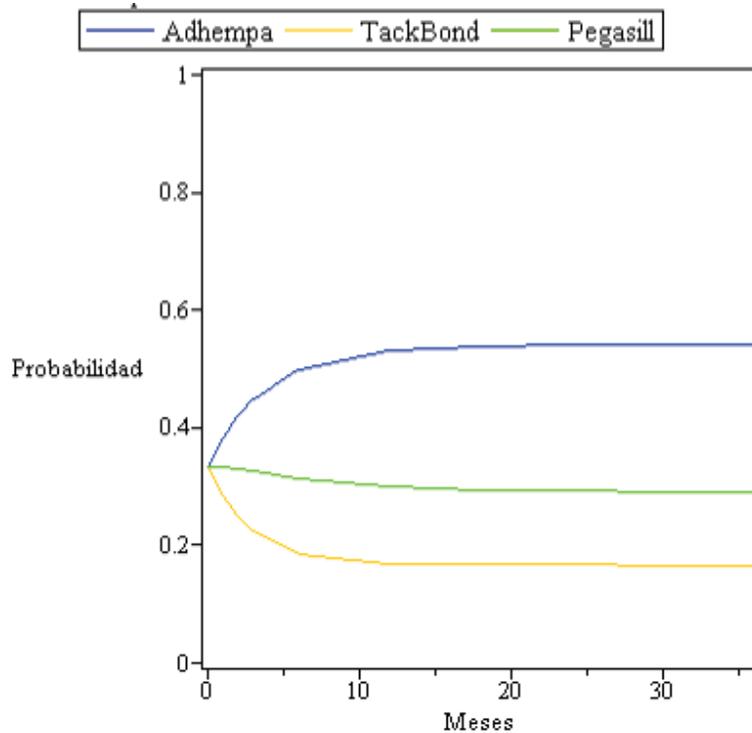


Figura 4.4 Comparativa de evolución del mercado a mediano plazo

### 3. Largo plazo

Con el fin de estimar si la distribución de los clientes en del mercado de pegamentos del área tiende a estabilizarse, se requiere estudiar el límite de la expresión  $X_n = M^n X_0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Asimismo, se retoma la expresión  $M^n = P^{-1}D^nP$  para las operaciones matriciales en el largo plazo.

$$X^n = (P^{-1}D^n P) X_0 = \begin{vmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ -3/8 & 1/8 & 5/8 \\ 1/12 & -5/12 & 1/12 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (4/5)^n & 0 \\ 0 & 0 & (7/10)^n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 13/4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 7/4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{vmatrix}$$

A través de la herramienta maple se llevó a cabo la estimación para el largo plazo. La memoria de cálculo se puede observar en el anexo 2. El valor obtenido para  $X_n$  es el siguiente:

$$X_n = \frac{13}{24} - \frac{1}{8} \left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{1}{12} \left(\frac{7}{10}\right)^n, \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \left(\frac{7}{10}\right)^n, \frac{7}{24} + \frac{1}{8} \left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{1}{12} \left(\frac{7}{10}\right)^n$$

Tomando en cuenta el principio de que todo número menor a uno y mayor a cero al elevarlo al infinito su valor es cero, se simplifica la ecuación anterior y se tiene que para  $X_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$  su valor es:

$$X_n = \left( \frac{13}{24}, \frac{1}{6}, \frac{7}{24} \right)$$

Expresando lo anterior en términos decimales se obtiene:

$$X_n = (0.5416, 0.1666, 0.2916)$$

El valor de  $X_n$  significa que el mercado ha alcanzado un estado permanente o estado estacionario en ese punto denominado como punto de equilibrio. Esto comprueba que el comportamiento del mercado de pegamentos del área de interés encuentra su balance en el eigenvector encontrado, que significa la estabilización en el mercado de Grupo Adhempa cuando este abarca 54.16% de los clientes, Tackbond con 16.66% y Pegasill con 29.16%.

### 4.3 Análisis del modelo con factores de mejora

#### a) Matriz de transición

Una vez que se estimó la evolución del mercado utilizando parámetros actuales, se procede a realizar la estimación del mismo a través de la variación de los factores de mejora. Se introducen los parámetros  $s$  y  $t$  cuyos valores corresponden a la disminución o aumento del porcentaje de clientes para cada empresa con el fin de emular el comportamiento del mercado.

Tomando en cuenta lo anterior, se expresa la matriz de transición  $M(M(i,j), i,j=1,2,3)$  de la siguiente manera:

$$M = \begin{array}{l} \text{Adhempa} \\ \text{Tackbond} \\ \text{Pegasill} \end{array} \left| \begin{array}{lll} \text{Adhempa} & \text{Tackbond} & \text{Pegasill} \\ 9/10 + s + t & 3/20 + s & 1/10 + t \\ 1/20 - s & 3/4 - s & 1/20 \\ 1/20 - t & 1/10 & 17/20 - t \end{array} \right|$$

---

Cada uno de los términos de la matriz de transición M se describe a continuación:

1. El elemento de la matriz M [1,1] corresponde al término  $9/10 + s + t$  y señala el cambio del porcentaje de clientes de Grupo Adhempa por unidad de tiempo
2. El elemento de la matriz M [1,2] corresponde al término  $3/20 + s$  y denota el porcentaje de consumidores de adhesivos industriales que pasan de Grupo Adhempa a la empresa Tackbond por unidad de tiempo
3. El elemento de la matriz M [1,3] corresponde al término  $1/10 + t$  y denota el porcentaje de consumidores de adhesivos industriales que pasan de Grupo Adhempa a Pegasill por unidad de tiempo
4. El elemento de la matriz M [2,1] corresponde al término  $1/20 - s$  y denota el porcentaje de consumidores de adhesivos industriales que pasan de Tackbond a Grupo Adhempa por unidad de tiempo
5. El elemento de la matriz M [2,2] corresponde al término  $3/4 - s$  y denota el cambio del porcentaje de clientes de la empresa Tackbond por unidad de tiempo
6. El elemento de la matriz M [2,3] corresponde al término  $1/20$  y denota el porcentaje de consumidores de adhesivos industriales que pasan de la empresa Tackbond a la empresa Pegasill por unidad de tiempo
7. El elemento de la matriz M [3,1] corresponde al término  $1/20 - t$  y denota el porcentaje de consumidores de adhesivos industriales que pasan de Pegasill a Grupo Adhempa por unidad de tiempo
8. El elemento de la matriz M [3,2] corresponde al término  $1/10$  y denota el porcentaje de consumidores de adhesivos industriales que pasan de la empresa Pegasill a la empresa Tackbond por unidad de tiempo
9. El elemento de la matriz M [3,3] corresponde al término  $17/20 - t$  y denota el cambio del porcentaje de clientes de la empresa Pegasill por unidad de tiempo

---

## b) Vector de probabilidad inicial

Para generar el modelo a corto, mediano y largo plazos utilizando los factores de mejora se hace uso de la expresión  $X_n = (P^{-1}D^nP) X_0$ , que es la misma que se utilizó en la estimación del mediano y largo plazo pero con parámetros actuales.

A su vez, se retoma el valor del estado inicial utilizado en el caso anterior:

$$X_0 = (1/3, 1/3, 1/3)^T.$$

### 1. Corto plazo

Para obtener la matriz diagonal D se requiere calcular el polinomio característico utilizando la fórmula del determinante  $Det [ M - I \lambda ]$  expresada de la siguiente manera:

$$\text{Det} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 9/10 + s + t & 3/20 + s & 1/10 + t & 1 & 0 & 0 \\ 1/20 - s & 3/4 - s & 1/20 & 0 & 1 & 0 \\ 1/20 - t & 1/10 & 17/20 - t & 0 & 0 & 1 \end{array} - \lambda \right) =$$

$$\text{Det} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 9/10 + s + t & 3/20 + s & 1/10 + t & \lambda & 0 & 0 \\ 1/20 - s & 3/4 - s & 1/20 & 0 & \lambda & 0 \\ 1/20 - t & 1/10 & 17/20 - t & 0 & 0 & \lambda \end{array} \right) =$$

$$\text{Det} \left( \begin{array}{ccc} 9/10 + s + t - \lambda & 3/20 + s & 1/10 + t \\ 1/20 - s & 3/4 - s - \lambda & 1/20 \\ 1/20 - t & 1/10 & 17/20 - t - \lambda \end{array} \right)$$

A través de la herramienta computacional Maple se llevaron a cabo las operaciones matriciales requeridas. La memoria de cálculo se puede ver en el anexo 3.

A partir del desarrollo del determinante de  $M_\lambda$  en función de lambda, se obtiene el siguiente polinomio característico de tercer orden:

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - \frac{5}{2}\lambda^2 + \left( -\frac{1}{20}s - st + \frac{103}{50} \right)\lambda + \frac{1}{20}s + st - \frac{14}{25}$$

Resolviendo la ecuación del polinomio característico  $P(\lambda)$  se obtienen tres valores característicos correspondientes los cuales son:

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{20}\sqrt{1 + 20s + 400st}$$

$$\lambda_3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{20}\sqrt{1 + 20s + 400st}$$

La gráfica del discriminante  $1 + 20s + 400st$  permite verificar la existencia de las tres soluciones en el campo de los números reales de la ecuación  $P(\lambda) = 0$  como se observa en la figura 4.5.

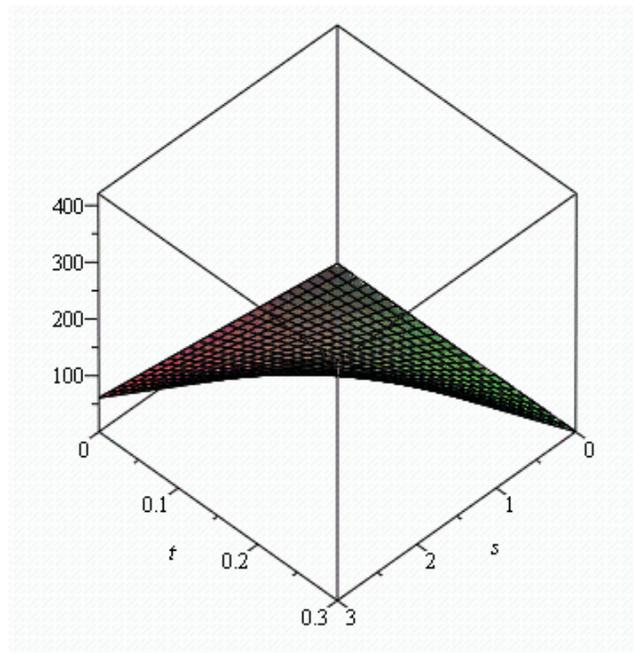


Figura 4.5 Representación del discriminante  $1 + 20s + 400st$

La matriz diagonal  $D$  está formada por los elementos no nulos que corresponden a los valores característicos, es decir los valores de  $\lambda$  tal que:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{9}{10} + s + t - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} - s - \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{20}\sqrt{1 + 20s + 400st} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{20} - t - \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{20}\sqrt{1 + 20s + 400st} \right) \end{vmatrix}$$

Al calcular los vectores característicos utilizando la herramienta maple se tienen los siguientes valores:

$$v_1 = P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \frac{100t + 13 + 60s + 400st}{-1 + 100st + 15s} \\ 1 \\ \frac{1}{4} \frac{100t - 7 + 20s + 400st}{-1 + 100st + 15s} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} \frac{20s + 1 + \sqrt{1 + 20s + 400st}}{s} \\ 1 \\ \frac{1}{20} \frac{\sqrt{1 + 20s + 400st} + 1}{s} \end{pmatrix}$$

$$v_3 = P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} \frac{20s + 1 - \sqrt{1 + 20s + 400st}}{s} \\ 1 \\ \frac{1}{20} \frac{\sqrt{1 + 20s + 400st} - 1}{s} \end{pmatrix}$$

Con los tres vectores característicos obtenidos se construye la matriz P, lo que permite calcular el producto  $P \times M^n \times P^{-1}$  para valores arbitrarios del parámetro n que indica el número de periodos a estimar.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \frac{100t + 13 + 60s + 400st}{-1 + 100st + 15s} & -\frac{1}{20} \frac{20s + 1 + \sqrt{1 + 20s + 400st}}{s} & -\frac{1}{20} \frac{20s + 1 - \sqrt{1 + 20s + 400st}}{s} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} \frac{100t - 7 + 20s + 400st}{-1 + 100st + 15s} & \frac{1}{20} \frac{\sqrt{1 + 20s + 400st} + 1}{s} & -\frac{1}{20} \frac{\sqrt{1 + 20s + 400st} - 1}{s} \end{pmatrix}$$

Finalmente se obtiene la matriz inversa de P, es decir  $P^{-1}$  cuya expresión se puede observar en el Anexo 3 y se sustituyen los valores calculados para la expresión  $X_n = (P^{-1}D^nP) X_0$  en el corto, mediano y largo plazos.

Para llevar a cabo la estimación a corto plazo al intervenir los factores de mejora se utiliza la expresión:

$$X_n = M^n X_0 = (P^{-1}D^nP) X_0$$

Utilizando la herramienta maple se obtienen los valores de  $X_n$  para los tres primeros meses de funcionamiento con los factores de mejora cuyos valores se muestran en la tabla 4.

Tabla 4. Evolución del mercado a corto plazo con factores de mejora

Tiempo/empresa	Adhempa	Tackbond	Pegasill
Estado inicial	33.3%	33.3%	33.3%
Primer mes	42.4%	27.6%	30.0%
Segundo mes	49.6%	23.7%	26.7%
Tercer mes	55.4%	20.9%	23.7%

Para el tercer mes se estima que Grupo Adhempa tendría una considerable ventaja con un 55.4% de los clientes frente a sus competidores con un 20.9% para Tackbond y 23.7% para Pegasill. Realizando una comparación entre los resultados obtenidos con los valores actuales y los resultados con factores de mejora, se observa que si Grupo Adhempa continua con sus prácticas actuales al tercer mes tendrá un 44.9% de los clientes del área. Sin embargo; si la empresa

---

considera la intervención de los factores de mejora, se estima que al tercer mes tendría un aumento de poco mas de 10% del mercado, es decir 55.4%.

En la figura 4.6 se muestra la evolución del mercado a corto plazo con factores de mejora de las tres empresas y en la que se observa una clara ventaja de Grupo Adhempa sobre las otras dos.

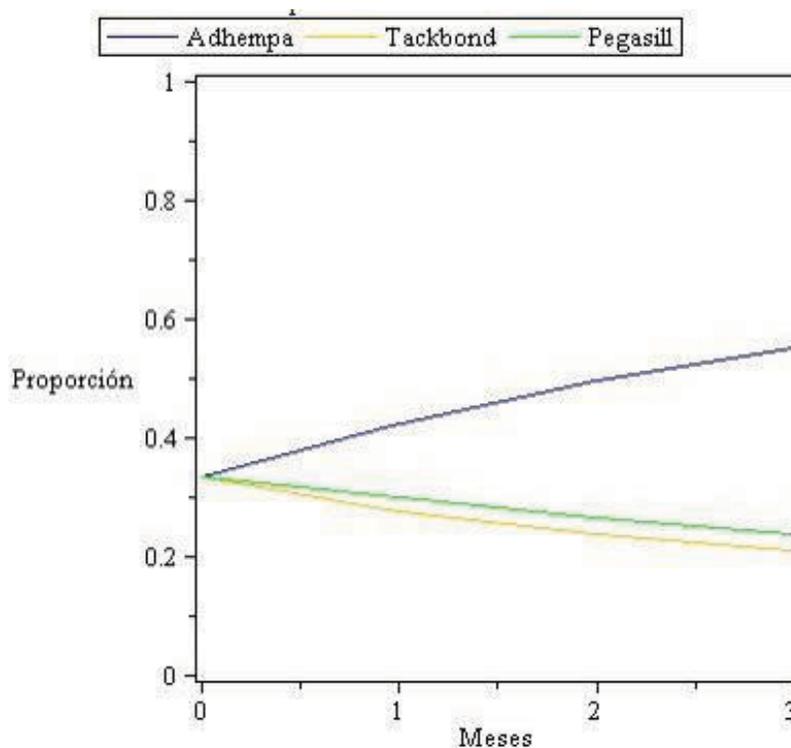


Figura 4.6 Comparativa de evolución de mercado a corto plazo con factores de mejora

## 2. Mediano plazo

Para la estimación de la evolución del mercado a mediano plazo se considera un periodo de tres años y se retoma la expresión  $X_n = (P^{-1}D^n P) X_0$  para la modelación. El valor de n se iguala a 12, 24 y 36 meses para obtener los correspondientes valores del primer al tercer año utilizando la herramienta Maple. Los resultados a mediano plazo se muestran en la tabla 5.

Tabla 5. Evolución del mercado a mediano plazo con factores de mejora

Tiempo/empresa	Adhempa	Tackbond	Pegasill
Estado inicial	33.3%	33.3%	33.3%
Primer año	76.2%	14.0%	9.8%
Segundo año	79.4%	13.6%	7.0%
Tercer año	79.6%	13.6%	6.8%

A partir de lo anterior se observa que incluyendo los factores de mejora en sus procesos, Grupo Adhempa podría abarcar hasta el 79.6% del mercado al cabo de tres años, comparado con 54.16% que tendría en ese tiempo con sus prácticas actuales, lo que hace una diferencia considerable de más del 20%.

Además la ventaja de Grupo Adhempa frente a las otras dos empresas también es considerable, ya que mientras en el tercer año se estima que la primera abarque el 79.6% del mercado, para Tackbond correspondería solamente el 13.6% y para Pegasill un 6.8%.

En la figura 4.7 se observa el comportamiento que tendrían las empresas en estudio durante tres años si Grupo Adhempa implementara factores de mejora.

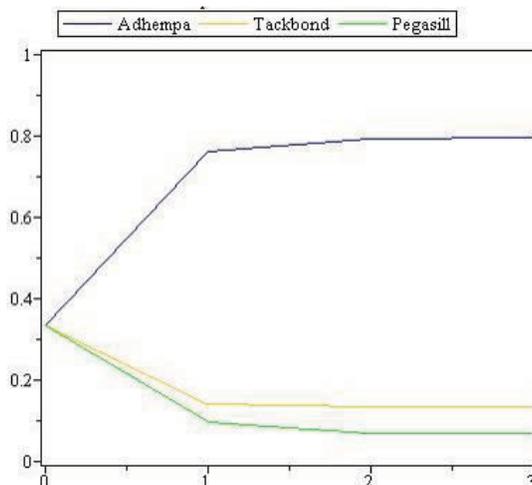


Figura 4.7 Comparativa de evolución de mercado a mediano plazo con factores de mejora

---

Al realizar la estimación de la evolución del mercado a largo plazo se busca determinar si la distribución de los clientes para las tres empresas tiende a estabilizarse en algún momento. Esto requiere estudiar el límite de la expresión  $X_n = (P^{-1}D^nP) X_0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . En el caso de que la distribución se estabilice en algún punto, entonces se puede estimar el porcentaje máximo que podría lograr Grupo Adhempa si implementa factores de mejora en sus procesos.

Utilizando la herramienta maple se llevó a cabo la estimación de los valores. La memoria de cálculo se puede observar en el Anexo 3.

Los datos obtenidos muestran que la distribución de los clientes tiende a estabilizarse en los siguientes puntos de equilibrio:

$$X_n = [0.7966, 0.1356, 0.678]$$

El valor de  $X_n$  significa que el comportamiento del mercado de adhesivos industriales en el área de interés encuentra su balance en esos puntos de equilibrio, es decir, que para Grupo Adhempa se estima que de implementar los factores de mejora en sus procesos, podría alcanzar hasta un 79.66% de los clientes, comparado con 54.16% que se estima tendría como máximo si continuara con sus prácticas actuales. Para el caso de Tackbond se estima que tendría un 13.56% del mercado y 6.78% para Pegasill.

De los resultados obtenidos tanto en el corto, como en el mediano y largo plazos, se observa que al implementar los factores de mejora en sus procesos, Grupo Adhempa puede obtener una ventaja considerable en el mercado frente a sus competidores directos y obtener el nivel deseado de entre 70% y 80% de los clientes. Además, podría disminuir o incluso eliminar sus faltantes al implementar un sistema de inventarios que le permita surtir pedidos que rebasen sus solicitudes habituales de pegamentos.

---

## 4.4 Resumen

A través de la modelación mediante cadenas de Markov, se obtuvo la estimación del posicionamiento en el mercado de Grupo Adhempa y su competencia a través del tiempo. La estimación se hizo en el corto plazo considerando un tiempo de 3 meses, en el mediano plazo para un tiempo de 3 años y finalmente para el largo plazo considerando un intervalo infinito de tiempo. Este último para determinar si el posicionamiento en el mercado logra un punto de equilibrio y tiende a estabilizarse en algún punto.

De acuerdo a los resultados obtenidos, si Grupo Adhempa continúa con sus prácticas actuales, se estima que en el largo plazo podría abarcar el 54.16% del mercado, con lo que lograría una ventaja con respecto a sus competidores directos, ya que Tackbond tendría 16.66% y Pegasill 29.17%.

Para que Grupo Adhempa llegue a los niveles deseados de entre 70 y 80% del mercado, es necesario que implemente factores de mejora en sus procesos, ya que de acuerdo a la modelación realizada, en el largo plazo podría tener hasta un 79.6% de los clientes comparado con 54.16% que tendría si no implementara dichos factores. Esto implica una diferencia considerable de 25% entre un estado y otro.

---

## 5 Propuestas de factores de mejora

El sistema actual de pedidos en Grupo Adhempa resulta ser ineficiente, ya que la más grave incidencia es que el almidón de maíz escasee porque eso detiene toda la producción.

La empresa no cuenta con sistema de control adecuado para planificar el tamaño y frecuencia de sus pedidos de materia prima. En este sentido, se observa que tienen una demanda uniforme en la que basan la cantidad solicitada de almidón de maíz. Lo que les lleva a incurrir en faltantes es un pedido extraordinario, pues no manejan un stock de seguridad previendo estos casos.

Derivado de lo anterior, se propone que los factores o elementos de mejora a considerar por parte de Grupo Adhempa se enfoquen a mejorar los aspectos deficientes, es decir, el manejo de materiales y control de inventarios.

### 5.1 Control de inventarios

Debido a que en Grupo Adhempa el almidón se considera la materia prima de mayor importancia, fundamental para la producción y de la cual no puede prescindir, se desarrolla un análisis, modelación y optimización en el abastecimiento del almidón de maíz para cubrir las necesidades de inventario de la empresa.

De acuerdo con la información proporcionada por Grupo Adhempa se tienen los siguientes datos:

- La media es de 29.14 toneladas diarias
- Los pedidos se hacen semanalmente
- La capacidad máxima destinada para el almacenamiento del almidón es de 150 toneladas
- La entrega tarda 3 días hábiles
- La demanda no surtida por falta de existencias representa ventas perdidas
- El costo de ordenar es de 1,457 unidades monetarias (U.M.)
- El costo de faltante es de 1.25U.M. /kg
- El costo de llevar el Inventario es 0.25U.M./kg

Con esta información se realizó una simulación en la que la demanda de almidón sigue una distribución exponencial, esto permite expresar el tiempo que pasa entre un pedido y otro tomando en cuenta que estos se hacen semanalmente y se trabaja de lunes a viernes.

Tabla 6. Simulación de la demanda de almidón en Grupo Adhempa

Día	Entregas del proveedor (kg)	Inventario inicial (kg)	Demanda (kg)	Ventas (kg)	Inventario final (kg)
0	145700.00	145700.00	19984.08	19984.08	125715.92
1	0.00	125715.92	6846.41	6846.41	118869.51
2	0.00	118869.51	13245.34	13245.34	105624.17
3	0.00	105624.17	5404.18	5404.18	100220.00
4	0.00	100220.00	21497.70	21497.70	78722.30
5	66977.70	145700.00	76564.58	76564.58	69135.42
6	0.00	69135.42	25805.33	25805.33	43330.09
7	0.00	43330.09	12810.98	12810.98	30519.11
8	0.00	30519.11	62553.75	30519.11	0.00
9	0.00	0.00	31453.61	0.00	0.00
10	145700.00	145700.00	32459.05	32459.05	113240.95
11	0.00	113240.95	15914.08	15914.08	97326.87
12	0.00	97326.87	43778.65	43778.65	53548.23
13	0.00	53548.23	8486.41	8486.41	45061.82
14	0.00	45061.82	22970.13	22970.13	22091.69
15	123608.31	145700.00	748.57	748.57	144951.43
16	0.00	144951.43	24004.93	24004.93	120946.50
17	0.00	120946.50	54477.69	54477.69	66468.82
18	0.00	66468.82	56970.99	56970.99	9497.83
19	0.00	9497.83	18526.96	9497.83	0.00
20	145700.00	145700.00	33914.21	33914.21	111785.79
21	0.00	111785.79	1927.72	1927.72	109858.07
22	0.00	109858.07	58186.36	58186.36	51671.71
23	0.00	51671.71	499.78	499.78	51171.93
24	0.00	51171.93	23272.19	23272.19	27899.74
25	117800.26	145700.00	76857.37	76857.37	68842.63
26	0.00	68842.63	3701.54	3701.54	65141.09
27	0.00	65141.09	23436.81	23436.81	41704.28
28	0.00	41704.28	16703.16	16703.16	25001.12
29	0.00	25001.12	79161.48	25001.12	0.00
30	145700.00	145700.00	14011.62	14011.62	131688.38
31	0.00	131688.38	66343.81	66343.81	65344.56
32	0.00	65344.56	5240.10	5240.10	60104.46

Día	Entregas del proveedor (kg)	Inventario inicial (kg)	Demanda (kg)	Ventas (kg)	Inventario final (kg)
33	0.00	60104.46	13560.46	13560.46	46544.00
34	0.00	46544.00	54344.92	46544.00	0.00

Se llevó a cabo la simulación de variables aleatorias en el modelo de un sistema de inventario para 260 días cuya memoria de cálculo se puede consultar en el anexo 4. La figura 5.1 muestra el comportamiento del inventario a lo largo del tiempo para un periodo simulado de 100 días. Cuando el intervalo no muestra ningún valor y queda en blanco es un indicativo de que el inventario se agotó y por tanto se han presentado pérdidas. Aunque es claro que no en todas las semanas se registran faltantes, el esquema actual da pie a que esto ocurra.

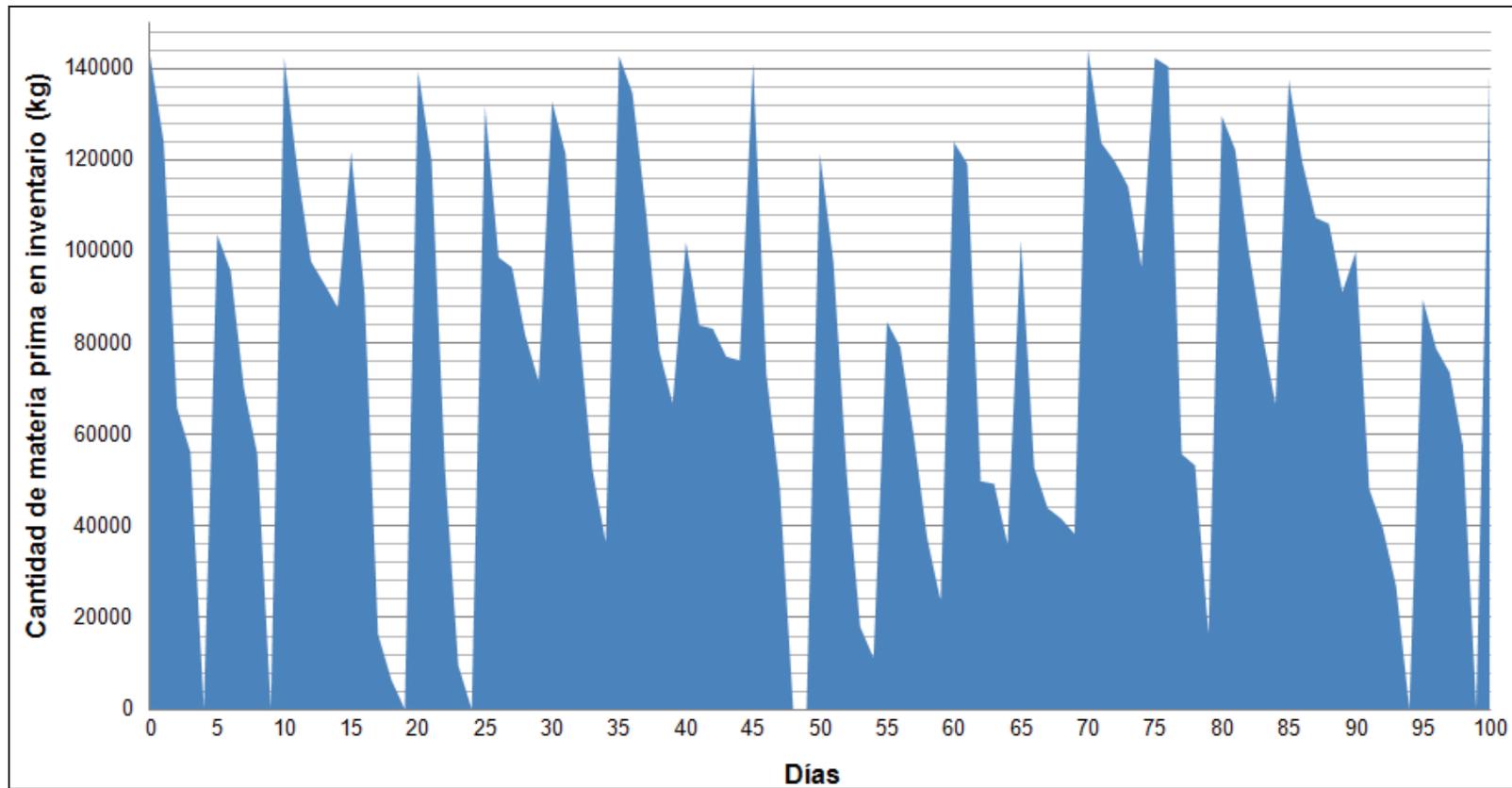


Figura 5.1 Comportamiento del inventario de Grupo Adhempa para un periodo simulado de 100 días

Es posible simular el costo total y promedio relacionándolo con los datos de la tabla 6, calculando los costos de ordenar, de llevar inventario y de faltantes. En la tabla 7 se muestra el costo promedio para el sistema de inventarios propuesto.

Tabla 7. Costo promedio del sistema de inventario propuesto

Día	Costo de Ordenar (U.M.)	Costo de llevar inventario (U.M.)	Costo de Faltante (U.M.)	Costo Total (U.M.)	Costo Promedio (U.M.)
0	1457	33926.99	0	35383.99	35383.99
1	0	30573.17	0	30573.18	32978.58
2	0	28061.71	0	28061.71	31339.63
3	0	25730.52	0	25730.52	29937.35
4	0	22367.78	0	22367.79	28423.44
5	1457	26854.42	0	28311.43	28404.77
6	0	14058.18	0	14058.19	26355.26
7	0	9231.14	0	9231.15	24214.74
8	0	3814.88	40043.29	43858.19	26397.35
9	0	0	39317.01	39317.01	27689.32
10	1457	32367.61	0	33824.62	28247.07
11	0	26320.97	0	26320.98	28086.56
12	0	18859.38	0	18859.39	27376.78
13	0	12326.25	0	12326.26	26301.74
14	0	8394.18	0	8394.19	25107.91
15	1457	36331.42	0	37788.43	25900.44
16	0	33237.24	0	33237.24	26332.01
17	0	23426.91	0	23426.92	26170.62
18	0	9495.83	0	9495.83	25293.00
19	0	1187.22	11286.41	12473.64	24652.03
20	1457	32185.72	0	33642.72	25080.16
21	0	27705.48	0	27705.48	25199.49
22	0	20191.22	0	20191.22	24981.74
23	0	12855.45	0	12855.45	24476.48
24	0	9883.95	0	9883.96	23892.78
25	1457	26817.82	0	28274.83	24061.32
26	0	16747.96	0	16747.96	23790.45
27	0	13355.67	0	13355.67	23417.78
28	0	8338.17	0	8338.18	22897.80
29	0	3125.13	67700.44	70825.59	24495.39
30	1457	34673.54	0	36130.55	24870.72
31	0	24629.11	0	24629.12	24863.17
32	0	15681.12	0	15681.13	24584.92
33	0	13331.05	0	13331.06	24253.93
34	0	5817.99	9751.14	15569.15	24005.79

---

### a) Cálculo del punto de pedido y stock de seguridad

De acuerdo a las características de Grupo Adhempa donde los pedidos no son regulares ni en tamaño ni en frecuencia, se sigue adoptando el modelo de lote económico con demanda incierta ( $r, q$ ). A través de la modelación del lote económico se busca optimizar la cantidad de pedidos y el punto en el que se debe ordenar nuevamente con el fin de no incurrir en faltantes.

La determinación del punto de pedido es importante, ya que de su cálculo correcto depende la buena marcha de la gestión de los stocks. Para calcular el punto de pedido cuando la demanda es aleatoria, es necesario basarse en estadísticas anteriores, así se puede conocer la distribución que sigue. Se puede tomar como forma de distribución de la variable aleatoria (demanda) una de las varias formas de distribución como es la ley Normal (Parra, 2005).

En la gestión de stocks, si la demanda es aleatoria y sigue una distribución Normal con un plazo de reposición conocido, la media aritmética estará referida al plazo de reposición, es decir, que  $n$  serán las salidas medias de almacén o salidas que por término medio se esperan durante el plazo de reposición, y  $\sigma$  la desviación estándar de dichas salidas.

De los 35 datos mostrados en la tabla 7, se conoce que el costo promedio es de 24005.79 U.M., si se calcula la desviación estándar a partir de ésta, se obtiene el valor de 2805 U.M. y una media de 25584.70 U.M. como se muestra a continuación.

Día	Costo Promedio	(Promedio - Media) <sup>2</sup>
0	35383.99	96025962.06
1	32978.58	54669434.70
2	31339.63	33119106.55
3	29937.35	18945508.91
4	28423.44	8058394.49
5	28404.77	7952754.35
6	26355.26	593749.29
7	24214.74	1876796.60
8	26397.35	660387.54
9	27689.32	4429377.82
10	28247.07	7088179.92
11	28086.56	6259283.05
12	27376.78	3211526.48

Media	25584.70 U.M.
Varianza	7868035.38 U.M.
Desv.Est.	2805.00 U.M.

Día	Costo Promedio	(Promedio - Media)^2
13	26301.74	514140.31
14	25107.91	227339.37
15	25900.44	99686.42
16	26332.01	558469.67
17	26170.62	343295.05
18	25293.00	85092.77
19	24652.03	869881.88
20	25080.16	254567.08
21	25199.49	148389.51
22	24981.74	363566.18
23	24476.48	1228165.89
24	23892.78	2862617.93
25	24061.32	2320707.76
26	23790.45	3219340.08
27	23417.78	4695554.40
28	22897.80	7219481.57
29	24495.39	1186609.94
30	24870.72	509779.75
31	24863.17	520617.99
32	24584.92	999564.56
33	24253.93	1770970.99
34	24005.79	2492972.33

Para este modelo se necesita conocer la esperanza de la demanda anual de almidón en Grupo Adhempa. A través de un simulador se calcula la demanda en 5 años. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Año	Demanda Anual (kg)
1	7,711,785.9
2	7,068,505.68
3	8,234,623.42
4	7,914,118.03
5	7,850,146.85
MEDIA	7,755,835.976
VARIANZA	147,509,702,219.04
DESV.EST.	384,069.91

---

La cantidad óptima a ordenar:

$$q^* = \text{RAIZ} \left( \frac{2 \times 1,457 \times 7,755,835.976}{0.25} \right) = 300,669.2936 \text{ kg}$$

La demanda aleatoria en el plazo de entrega es:

$$E(x) = \frac{3}{260} \times 7,755,835.976 = 89,490.4151 \text{ kg}$$

La desviación estándar es:

$$\sigma_x = \frac{384,069.9184}{\text{RAIZ}(3/260)} = 3,575,496.4 \text{ Kg}$$

Dado que el costo resultante por los faltantes es de 1.25U.M. /kg:

$$P(X \geq r) = \frac{0.25 \times 300669.2936}{(1.25 \times 7755835.976)} = 0.0077337$$

Para calcular el punto de reabastecimiento se obtiene la distribución normal inversa de los datos anteriores utilizando Excel, a partir de la probabilidad, la esperanza y la desviación estándar de X obteniendo como resultado 8,743,345.498 kg.

Por lo tanto el nivel de las existencias del stock seguridad para Grupo Adhempa debe ser de:

$$8,743,345.498 - 89,490.4151 = 8,653,855.083 \text{ kg}$$

Resulta deseable que Grupo Adhempa cuente con un sistema de software donde se pueda implementar la lógica del análisis anterior con la finalidad de introducir la información relevante y así poder llevar un control estadístico que a su vez, permita establecer los mecanismos para el cálculo del lote óptimo, realizar las mejoras pertinentes que básicamente minimicen el riesgo de incidir en faltantes y atender satisfactoriamente los pedidos extraordinarios.

---

## 5.2 Manejo de materiales

Se sugiere considerar el manejo de materiales en Grupo Adhempa como un actor de mejora tanto en la recepción de las materias primas, su disposición en el almacén y el consecuente flujo hacia la maquinaria y equipo que se encarga de procesarlas.

La propuesta consiste en adaptar los 20 principios del manejo de materiales (Meyers, 2006) a los problemas que enfrenta Grupo Adhempa en los aspectos antes mencionados, en la búsqueda de mejorar e incrementar la productividad de la misma mediante una reorganización del flujo de materiales.

### 1. Principio de planeación

- Metas
  - i. Agilizar la recepción y embarque de los químicos y pegamentos.
  - ii. Hacer eficiente el flujo de materias primas hacia la maquinaria.
  - iii. Optimizar el espacio de almacenamiento en la planta.
- Estrategia
  - i. Enfocar las mejoras en términos de reducción de tiempo de producción y entrega así como en los costos relacionados.
- Procedimientos
  - i. Análisis del estado actual y propuestas del estado de la técnica.

### 2. Principio de los sistemas

- Sistematizar todas las etapas que impliquen el manejo de materiales desde los químicos que los proveedores proporcionan hasta la distribución de los pegamentos hacia los clientes de tal manera de que se ajusten todos los elementos involucrados a las características de espacios, transportación, etc.
  - i. Uniformizar los productos que los proveedores entreguen en la justa manera en la que se van a utilizar.

- 
- ii. Cumplir con los requerimientos del manejo de materiales dentro de la empresa así como en las especificaciones del cliente en los productos que se entreguen al mismo.

### **3. Principio del flujo de materiales**

- Los siguientes 10 puntos en conjunto se refieren a este principio

### **4. Principio de simplificación**

- Combinar: Mover tambos en tarimas. Existen tarimas especiales para manejar 4 tambos y con protección contra derrames de productos corrosivos.
- Reencauzar: Reorganizar el almacén y diferenciar la materia prima del almacén de producto terminado.
- Simplificar: Utilizar carros de carga o carretillas y al menos un montacargas.

### **5. Principio de gravedad**

- Actualmente se hace uso de este principio de manera adecuada en la maquinaria y equipo, el cual está dispuesto a una altura de 2 metros, los suficientes para que los fluidos bajen hacia los contenedores.

### **6. Principio de la utilización del espacio**

- Aprovechar el espacio volumétrico de la planta. Se aprecia actualmente que el producto terminado se tiene en botes y estos sólo se apilan unos sobre otros cuando están vacíos pero no se tiene la infraestructura para tal efecto. Sin embargo; se propone que los tambos se conjunten en tarimas y se consigan racks de almacén para poder acondicionar ambos almacenes (materias primas y producto terminado) de manera vertical.
  - i. El primer beneficio es optimizar el espacio en la planta para la carga y descarga de materiales.

- ii. El segundo beneficio es ampliar los pasillos para poder maniobrar de manera más ágil y rápida respecto del flujo de materiales.

La propuesta de distribución del espacio en Grupo Adhempa se presenta de manera gráfica en la figura 5.2.

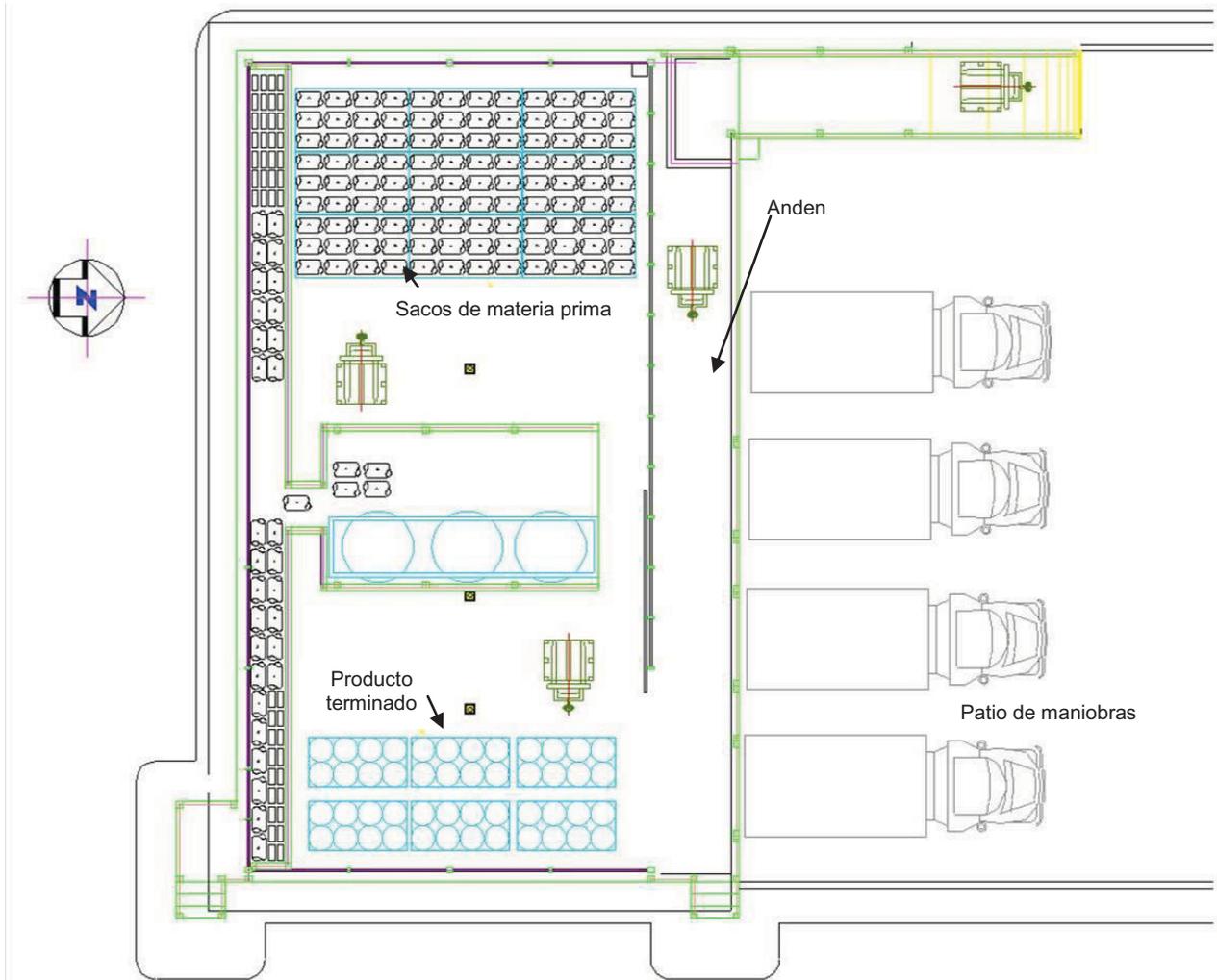


Figura 5.2. Propuesta de distribución de la materia prima en Grupo Adhempa

---

## 7. Principio del tamaño unitario

- Mover de manera conjunta tambos en tarimas para transportar 4 de una sola vez en lugar de 1 en 1 como se hace actualmente.
- Mover de manera conjunta 64 cubetas por tarima en lugar de hacerlo como actualmente se hace cubeta por cubeta.

## 8. Principio de mecanización

- Actualmente sólo utilizan tortugas de carga, pero se recomienda el uso de carretillas, carros de carga, patines y un montacargas, ya que es necesario para lograr apilar una tarima sobre otra y para surtir el rack de almacén que se prevé instalar.

## 9. Automatización

- Es un elemento muy atractivo, pero en este caso no parece viable pues implica una inversión muy fuerte y una reestructuración en todos los procesos productivos de la empresa.

## 10. Principio de selección de equipo

- ¿Por qué? Porque se requiere subir la materia prima del almacén al tapanco para preparar las cantidades apropiadas para la mezcla.
- ¿Qué? Principalmente costales de 25 kilogramos en cantidades variables.
- ¿Dónde? La trayectoria no es fija, pero la distancia es corta dado que los materiales cambian en volumen y posición pero además debe subirse al tapanco.
- ¿Cuándo? No es una actividad continua dado que en el momento en que se tiene el material en posición de ser procesado se interrumpe la actividad pero no es esporádico en el sentido de que se realiza cada vez que se le da seguimiento a un pedido.

- 
- ¿Cómo? Se propone llevar mediante un patín o carro de carga desde el almacén hasta un elevador de materiales que subirá éstos al tapanco.

### 11.Principio de estandarización

- Este principio actualmente se implementa de manera adecuada en la fábrica ya que los proveedores entregan el material de manera estándar en costales de 25 kg y tambos de 220 litros; y el producto terminado se entrega al cliente en tambos de 220 litros, contenedores de 1000 litros o cubetas de 20 litros.

### 12.Principio de adaptabilidad

- Para cumplir este principio se sugieren los siguientes puntos para adaptar la fábrica hacia los cambios y mejoras sin que estos impliquen un esfuerzo exhaustivo (ver figura 5.3).
  - i. Paletizar la carga
  - ii. Instalar rack de almacén
  - iii. Instalar un elevador de materiales
  - iv. Adquirir un montacargas para y transportar y acomodar los materiales del patio al almacén y viceversa.



Figura 5.3. Representación gráfica del principio de adaptabilidad

---

### **13.Principio del peso muerto**

- La manera en que se mueven los materiales parecen reducir en lo posible el peso muerto, por lo que no se ha ubicado un elemento del peso muerto que se pueda eliminar.

### **14.Principio de utilización**

- Se observó en el estado actual, que las tortugas de carga estaban subutilizadas ya que prefieren el movimiento de materiales manualmente argumentando que es más rápido, pero se debe en parte a la mala distribución de la planta dado que los pasillos no son respetados y se invaden con los tambos, lo que dificulta las maniobras con los carros de carga o tortugas. Con la distribución propuesta en el principio de la utilización del espacio se busca reducir este problema.

### **15.Principio de mantenimiento**

- Se recomienda iniciar un programa de inspección de las tarimas, los diferentes tipos de contenedores, la maquinaria, el resto del equipo así como el transporte de carga; para luego implementar un programa periódico de inspección y mantenimiento de estos elementos.

### **16.Principio de obsolescencia**

- La inspección a la que se hace referencia previamente, también puede ayudar a detectar el equipo que tienda a ser inservible en poco tiempo o que falla constantemente y por tanto remplazarlo por una mejor alternativa o al menos continuar con la misma opción pero renovarla.

## 17. Principio de control

- Actualmente la única herramienta de control que se utiliza es la impresión de etiquetas con códigos de barras que son adheridas a los tambos de producto terminado. Sin embargo; se aprecia que desde la recepción de materiales, el control se realiza a mano y no tienen un sistema automatizado que les facilite la tarea de inventariar los materiales.
- En este caso convendría implementar un sistema informático de inventarios sencillo que permita contabilizar los materiales existentes y a su vez, que alerte cuando algún suministro empiece a reducir su volumen como el que se propone en la tabla 8.

Tabla 8. Propuesta de un sistema informático de inventarios

CONCEPTO	4 horas trabajo/día		6 horas trabajo/día		8 horas trabajo/día		16 horas trabajo/día		24 horas trabajo/día	
	gasolina	eléctrica	gasolina	eléctrica	gasolina	eléctrica	gasolina	eléctrica	gasolina	eléctrica
<b>INVERSION</b>										
Costo de montacargas	\$39,676.00	\$51,116.00	\$39,676.00	\$51,116.00	\$39,676.00	\$51,116.00	\$39,676.00	\$51,116.00	\$39,676.00	\$51,116.00
Baterías	---	\$20,150.00	---	\$20,150.00	---	\$20,150.00	---	\$40,300.00	---	\$40,300.00
Grupo de carga		\$8,970.00		\$8,970.00		\$8,970.00		\$8,970.00		\$8,970.00
Instalación de grupo de carga	---	\$650.00	---	\$650.00	---	\$650.00	---	\$1,950.00	---	\$1,950.00
Abastecimiento de combustible	\$1,300.00	---	\$1,300.00	---	\$1,300.00	---	\$1,300.00	---	\$1,300.00	---
<b>INVERSION TOTAL</b>	<b>\$40,976.00</b>	<b>\$80,886.00</b>	<b>\$40,976.00</b>	<b>\$80,886.00</b>	<b>\$40,976.00</b>	<b>\$80,886.00</b>	<b>\$40,976.00</b>	<b>\$102,336.00</b>	<b>\$40,976.00</b>	<b>\$102,336.00</b>
<b>GASTOS FIJOS POR AÑO</b>										
Depreciación de montacargas	\$8,190.00	\$12,155.00	\$8,190.00	\$12,155.00	\$8,190.00	\$12,155.00	\$8,190.00	\$12,155.00	\$8,190.00	\$12,155.00
Impuestos y seguro (1%)	\$409.76	\$808.86	\$409.76	\$808.86	\$409.76	\$808.86	\$409.76	\$1,023.36	\$409.76	\$1,023.36
<b>TOTAL GASTOS FIJOS POR AÑO</b>	<b>\$8,599.76</b>	<b>\$12,963.86</b>	<b>\$8,599.76</b>	<b>\$12,963.86</b>	<b>\$8,599.76</b>	<b>\$12,963.86</b>	<b>\$8,599.76</b>	<b>\$13,178.36</b>	<b>\$8,599.76</b>	<b>\$13,178.36</b>

CONCEPTO	4 horas trabajo/día		6 horas trabajo/día		8 horas trabajo/día		16 horas trabajo/día		24 horas trabajo/día	
	gasolina	eléctrica	gasolina	eléctrica	gasolina	eléctrica	gasolina	eléctrica	gasolina	eléctrica
<b>GASTOS VARIABLES POR AÑO</b>										
Gasolina	\$1,600.00	---	\$2,400.00	---	\$3,200.00	---	\$6,400.00	---	\$9,600.00	---
Energia electrica		\$540.00		\$810.00		\$1,080.00		\$2,160.00		\$3,240.00
Depreciación de la batería	---	\$3,100.00	---	\$4,650.00	---	\$4,650.00	---	\$9,300.00	---	\$10,695.00
Aceite	\$105.00		\$275.00		\$375.00		\$750.00		\$1,125.00	
Revisión y engrases	\$1,875.00	\$1,875.00	\$1,875.00	\$1,875.00	\$1,875.00	\$1,875.00	\$3,750.00	\$3,750.00	\$5,625.00	\$5,625.00
Mantenimiento y piezas de cambio	\$2,000.00	\$1,000.00	\$3,000.00	\$1,500.00	\$4,000.00	\$2,000.00	\$10,000.00	\$4,400.00	\$18,000.00	\$7,200.00
<b>TOTAL DE GASTOS VARIABLES POR AÑO</b>	<b>\$5,580.00</b>	<b>\$6,515.00</b>	<b>\$7,550.00</b>	<b>\$8,835.00</b>	<b>\$9,450.00</b>	<b>\$9,605.00</b>	<b>\$20,900.00</b>	<b>\$19,610.00</b>	<b>\$34,350.00</b>	<b>\$26,760.00</b>
<b>TOTAL DE GASTOS POR AÑO</b>	<b>\$55,155.76</b>	<b>\$100,364.86</b>	<b>\$57,125.76</b>	<b>\$102,684.86</b>	<b>\$59,025.76</b>	<b>\$103,454.86</b>	<b>\$70,475.76</b>	<b>\$135,124.36</b>	<b>\$83,925.76</b>	<b>\$142,274.36</b>

Fuente: Información proporcionada por Grupo Adhempa

---

## **18.Principio de capacidad**

- Las propuestas que hasta el momento han sido detalladas, están enfocadas a agilizar y optimizar la manera en que se suministran los materiales en las mezcladoras y/o generadores para incrementar la producción ocupando la capacidad disponible de una manera más eficiente.

## **19.Principio del rendimiento**

- Se trata de estimar el costo unitario de los movimientos que implica el manejo de materiales actual y compararlo con la correspondiente estimación de las alternativas propuestas para evaluar si en realidad se consigue disminuir el costo.
- El rendimiento del manejo de materiales también se puede calcular en este sentido.
- Separar los costos totales de operación de los costos de manejar los materiales.

## **20.Principio de seguridad**

- La implementación de las soluciones propuestas también están encaminadas a la reducción de accidentes, ya que el manejo de materiales de manera manual propicia un mayor número de accidentes. Se propone mecanizar los movimientos haciendo uso de los equipos presentados, bajo un esquema de capacitación apropiado para explotar los métodos y procedimientos de manera óptima.

Con la implementación del control de inventarios y manejo de materiales, se busca que Grupo Adhempa cuente con elementos que le permitan mejorar su estructura operacional, con el fin de alcanzar los niveles deseados respecto a su posicionamiento en el mercado, atención a clientes y mejoras en la seguridad de sus procesos.

---

### **5.3 Resumen**

A través del control de inventarios y el manejo de materiales se establecen factores de mejora que se pueden implementar en Grupo Adhempa, con el fin de mejorar su posicionamiento en el mercado y aumentar su competitividad. Contar con un sistema de control que le permita conocer cuando deben realizar pedidos de materia prima y el stock de seguridad con el que requiere contar, será de gran ayuda para atender de manera efectiva la demanda normal y los pedidos extraordinarios.

A la vez, la mejora de sus procesos contribuye a una adecuada utilización de los espacios, disminución de costos y aumento en la seguridad de la planta. Se propone una distribución de la materia prima y el equipo dentro de la planta para mejorar el flujo de materiales en la misma. Con el control de inventarios se estableció el punto de pedido y el stock de seguridad idóneo para que Grupo Adhempa cumpla con sus pedidos y no incurra en faltantes.

Con lo anterior, Grupo Adhempa cuenta con elementos que contribuyan a una adecuada toma de decisiones en la optimización de sus procesos operativos, que le brinden mayores beneficios a la empresa.

---

## Conclusiones generales

A través de la teoría probabilística se logró simular la evolución en el tiempo de las tres empresas en su interacción en el mercado de adhesivos industriales. Debido a que el comportamiento de Grupo Adhempa es un fenómeno aleatorio medible dentro de un intervalo finito de valores, se utilizaron los procesos estocásticos discretos para llevar a cabo la modelación, específicamente las cadenas de Markov.

Partiendo del hecho de que en las cadenas de Markov la probabilidad de que ocurra un evento depende del evento inmediato anterior y pueden usarse para describir la probabilidad de que un consumidor A en un periodo compre la marca B en el siguiente periodo, se utilizaron los elementos de análisis de las cadenas de Markov como base para la modelación. A raíz de ello, se logró conocer la evolución en el mercado de Grupo Adhempa considerando dos escenarios, uno en el que no realiza cambios en sus procesos y otro en el que incluye factores de mejora como pueden ser el control de inventarios y el manejo de materiales.

Ambos escenarios se realizaron en el corto, mediano y largo plazos. Para el corto plazo se considero un tiempo de tres meses, para el mediano plazo tres años y para el largo plazo se realizó el análisis en un periodo infinito de tiempo con el fin de determinar la existencia de un punto de equilibrio en el que el mercado se estabilice.

En la modelación realizada, el espacio de datos está formado por el porcentaje de clientes que tiene cada una de las empresas y se obtuvo una matriz de transición de tres estados a partir de la cual se realizó el análisis correspondiente.

En el primer escenario, es decir, en el que no se llevan a cabo cambios en los procesos de la empresa, se estima que para el tercer mes Grupo Adhempa abarque 44.90% del total de clientes de pegamentos industriales, en cambio, para ese mismo tiempo se estima que Tackbond cuente con 22.38% del mercado y Pegasill con 32.70%. En el mediano plazo se estima que Grupo Adhempa abarque 54.16% del mercado, Tackbond 16.66% y Pegasill 29.17%. Finalmente en el largo plazo, el punto en el que el mercado se estabiliza es cuando Grupo Adhempa abarca 54.16% del mercado, nivel que se obtiene en el tercer año.

En la modelación realizada introduciendo los factores de mejora, se estima que para el tercer mes Grupo Adhempa abarque 55.4% del mercado, Tackbond 20.9% y Pegasill con 23.7%. Para el mediano plazo se estima que Grupo Adhempa

---

cuenta con el 79.6% del total de clientes en comparación con 12.6% de Tackbond y 6.8% de Pegasill. Finalmente, a largo plazo se estima que el punto en el que el mercado se estabiliza es cuando Grupo Adhempa tenga el 79.6% del mercado, Tackbond 12.6% y Pegasill 6.8%. Este equilibrio se obtiene al tercer año de operación con los factores de mejora.

De los resultados obtenidos, se observa que al introducir factores de mejora en sus procesos, Grupo Adhempa puede lograr ventaja sobre su competencia al abarcar la mayor parte del mercado. Esto representa información tangible para la empresa, que le permite adoptar una posición al momento de tomar decisiones en lo que se refiere a la optimización de sus procesos implementando los elementos de mejora.

Derivado de lo anterior, se propusieron factores de mejora que la empresa puede implementar de acuerdo a las necesidades operativas, con el fin de mejorar su evolución en el mercado, así como disminuir tiempos y costos.

Se propone un sistema de control de inventarios, debido a que se observan carencias de su principal materia prima, el almidón de maíz, pues la empresa actualmente se basa solamente en su experiencia para determinar las cantidades a pedir. Esto puede generar un deterioro en la imagen con los clientes cuando los pedidos no son surtidos a tiempo e incluso causar la pérdida de dicho cliente lo que impacta en las ganancias.

A través de un sistema de control, se analiza el comportamiento del producto de mayor importancia para la producción y se obtienen los valores óptimos del tamaño y frecuencia en que los pedidos deben realizarse adecuándolos a las necesidades de la empresa.

En función de lo anterior, es posible dar solución a un problema clave en la fábrica, a través del aumento de la productividad suprimiendo faltantes, reducción de costos evitando penalizaciones y pedidos de emergencia; y mejorando el servicio al cliente evitando retrasos en las entregas.

La necesidad de definir los niveles de inventarios adecuados para abastecer las operaciones de producción se da por las siguientes razones:

- Toda la materia prima y producto terminado genera un costo de oportunidad y un costo comercial relacionado a la obsolescencia del producto.

- 
- Falta de materia prima cuando se necesita para la producción de los pegamentos industriales.
  - Reducir el número de pedidos extraordinarios sin atender

Además, se sugiere un proceso de reingeniería, orientado al flujo y manejo de materiales que permita optimizar los procedimientos de recepción, fabricación y distribución de la producción. Se propone sistematizar todas las etapas del manejo de materiales desde los químicos que los proveedores proporcionan hasta la distribución del producto terminado hacia los clientes. Esto requiere una redistribución de los materiales dentro de la planta para diferenciar la materia prima del producto terminado; y a la vez optimizar la carga y descarga del material.

Al sistematizar el proceso se disminuye el trabajo manual de la planta y el peligro de accidentes. Es importante que se considere un programa de inspección y mantenimiento de tarimas, contenedores, maquinaria y equipo, así como del transporte de carga con el fin de que los procesos se den en las mejores condiciones y la operación no se vea disminuida o detenida por fallas que se pudieron evitar con un mantenimiento constante y adecuado.

---

## Referencias bibliográficas

Alemaný, M., (et. al.), 2003. Prácticas de álgebra con Mathematica. Editorial Universidad Politécnica de Valencia.

Amaya, J., 2004. Toma de decisiones gerenciales: métodos cuantitativos aplicados a la administración. Universidad Santo Tomás de Aquino.

Anderson, D., (et. al.), 2004 Métodos cuantitativos para los negocios. Editorial Thompson.

Anderson, D., (et. al.), 2008. Estadística para administración y economía. Cengage Learning Editores. México, D.F.

Arbones, E., 1989. Optimización industrial (II) Programación de recursos. Editorial Marcombo S.A. Barcelona, España.

Arya, J., (et. al.), 2002. Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía. Editorial Pearson Education. México, D.F.

Ballou, R., 2004. Logística. Editorial Pearson Educación. México, D.F.

Kolman, B., (et. al.), 2006. Álgebra lineal. Editorial Pearson Education. México, D.F.

Brenaud, Pierre., 1999. Markov Chains: Gibbs Fields, Monte Carlo simulation and queues. Francia, Springer.

Evans, J., (et. al.), 2004. Probabilidad y estadística. La ciencia de la incertidumbre. Editorial Reverté. Barcelona, España.

Everitt, B. S., (et. al.), 2010. The Cambridge Dictionary of Statistics. 4a edición. Editorial Cambridge University Press.

García Álvarez, M.A., 2005. Introducción a la teoría de la probabilidad. Fondo de Cultura Económica. México, D.F.

Garzón, Carlos, 2001. Sistemas integrados de información para producción. Universidad Nacional de Colombia.

---

González, M., (et. al.), 2009. Estadística aplicada. Una visión instrumental. Ediciones Díaz de Santos. España.

Grijalva, Yauri., 2009. Métodos cuantitativos para los negocios. Facultad de Ciencias Contables y Administrativas. Universidad Peruana Los Andes.

Guerrero, A., (et. al.), 2007. Estadística básica. Instituto Tecnológico Metropolitano. Medellin, Colombia.

Izar, J. M., 1998. Fundamentos de investigación de operaciones para administración Volumen II. Editorial Universitaria Potosina. Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Krajewski, L., (et. al.), 2000. Administración de las operaciones: estrategia y análisis. Editorial Pearson Educacion. México, D.F.

Meyers, F., (et. al.), 2006. Diseño de instalaciones de manufactura y manejo de materiales. 3ª ed. Editorial Prentice Hall.

Parra, F., 2005. Gestión de stocks. 3ª. ed. Editorial ESIC. España.

Rincón, L., 2012. Introducción a los procesos estocásticos. Facultad de Ciencias, UNAM. Departamento de Matemáticas.

Rincón, F., (1995). Cálculo científico con Maple. Universidad Politécnica de Madrid. España.

Rodríguez, T., 2002. Introducción a los métodos estadísticos, numéricos y probabilísticos. Colegio Marista.

Sánchez, L. M., (et. al.), 2006. Fundamentos de álgebra lineal y aplicaciones. Editorial Unidad Politécnica de Valencia.

Vicens, E., (et. al), 1997. Métodos cuantitativos, volumen 2. Universidad Politécnica de Valencia.

---

## Mesografía

Inpralatina, 2011 [web en línea] <<<http://www.inpralatina.com/201106222122/noticias/tecnologia/mercado-de-adhesivos-y-sellantes-crecera-33-cada-ano-hasta-2013.html>>> [Consulta: 2 enero 2013]

Grupo Adhempa, [web en línea] <<<http://www.grupoadhempa.com/Wcf1c42aca5950.htm>>> [Consulta: 16 noviembre 2012]

---

## **Anexos**

---

## Anexo 1 Estimación de la evolución del mercado a mediano plazo utilizando valores actuales.

>

restart;

> with(linalg):

>  $M := \text{matrix}\left(\left[\left[\frac{9}{10}, \frac{3}{20}, \frac{1}{10}\right], \left[\frac{1}{20}, \frac{3}{4}, \frac{1}{20}\right], \left[\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{17}{20}\right]\right]\right);$

$$M := \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{3}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{20} & \frac{3}{4} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{17}{20} \end{bmatrix}$$

>  $\text{sol} := \text{linsolve}(M - \text{diag}(1, 1, 1), \text{array}([0, 0, 0]));$

$$\text{sol} := \begin{bmatrix} \frac{13}{4} - t_1 & -t_1 & \frac{7}{4} - t_1 \end{bmatrix}$$

>  $\text{eigenvects}(M);$

$$\left[ \frac{7}{10}, 1, \{[1 \ -2 \ 1]\} \right], \left[ \frac{4}{5}, 1, \{[-1 \ 0 \ 1]\} \right], \left[ 1, 1, \left\{ \left[ \frac{13}{4} \ 1 \ \frac{7}{4} \right] \right\} \right]$$

>  $X_0 := \text{array}\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]\right);$

$$X_0 := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

>  $DI := \text{diag}\left(1, \frac{4}{5}, \frac{7}{10}\right)$

$$DI := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

>  $M := \text{transpose}\left(\text{array}\left(\left[\left[\frac{13}{4}, 1, \frac{7}{4}\right], [-1, 0, 1], [1, -2, 1]\right]\right)\right);$

$$M := \begin{bmatrix} \frac{13}{4} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ \frac{7}{4} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

---

>  $Minv := inverse(M);$

$$Minv := \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{12} & -\frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

>  $comprobacion := multiply(M, D1, Minv);$

$$comprobacion := \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{3}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{20} & \frac{3}{4} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{17}{20} \end{bmatrix}$$

>  $distribucion := n \rightarrow multiply\left(M, diag\left(1, \left(\frac{4}{5}\right)^n, \left(\frac{7}{10}\right)^n\right), Minv, X_0\right);$

$$distribucion := n \rightarrow linalg:-multiply\left(M, linalg:-diag\left(1, \left(\frac{4}{5}\right)^n, \left(\frac{7}{10}\right)^n\right), Minv, X_0\right)$$

>  $evalf(seq([1..j, distribucion(1..j)], j = 1..36));$

[1., [ 0.3833333333 0.2833333333 0.3333333333]], [2.,  
[ 0.4208333333 0.2483333333 0.3308333333]], [3.,  
[ 0.4490833333 0.2238333333 0.3270833333]], [4.,  
[ 0.4704583333 0.2066833333 0.3228583333]], [5.,  
[ 0.4867008333 0.1946783333 0.3186208333]], [6.,  
[ 0.4990945833 0.1862748333 0.3146305833]], [7.,  
[ 0.5085894083 0.1803923833 0.3110182083]], [8.,  
[ 0.5158911458 0.1762746683 0.3078341858]], [9.,  
[ 0.5215266501 0.1733922678 0.3050810821]], [10.,  
[ 0.5258909335 0.1713745875 0.3027344791]], [11.,  
[ 0.5292814761 0.1699622112 0.3007563126]], [12.,  
[ 0.5319232915 0.1689735479 0.2991031607]], [13.,

---

[ 0.5339873106 0.1682814835 0.2977312059 ]], [ 14.,  
[ 0.5356039226 0.1677970385 0.2965990389 ]], [ 15.,  
[ 0.5368729900 0.1674579269 0.2956690831 ]], [ 16.,  
[ 0.5378712884 0.1672205488 0.2949081628 ]], [ 17.,  
[ 0.5386580581 0.1670543842 0.2942875577 ]], [ 18.,  
[ 0.5392791657 0.1669380689 0.2937827653 ]], [ 19.,  
[ 0.5397702360 0.1668566483 0.2933731157 ]], [ 20.,  
[ 0.5401590212 0.1667996538 0.2930413250 ]], [ 21.,  
[ 0.5404671997 0.1667597576 0.2927730427 ]], [ 22.,  
[ 0.5407117476 0.1667318304 0.2925564220 ]], [ 23.,  
[ 0.5409059896 0.1667122812 0.2923817291 ]], [ 24.,  
[ 0.5410604058 0.1666985969 0.2922409974 ]], [ 25.,  
[ 0.5411832544 0.1666890178 0.2921277277 ]], [ 26.,  
[ 0.5412810544 0.1666823125 0.2920366331 ]], [ 27.,  
[ 0.5413589592 0.1666776187 0.2919634221 ]], [ 28.,  
[ 0.5414210483 0.1666743331 0.2919046186 ]], [ 29.,  
[ 0.5414705553 0.1666720332 0.2918574115 ]], [ 30.,  
[ 0.5415100459 0.1666704232 0.2918195309 ]], [ 31.,  
[ 0.5415415579 0.1666692963 0.2917891459 ]], [ 32.,  
[ 0.5415667111 0.1666685074 0.2917647815 ]], [ 33.,  
[ 0.5415867943 0.1666679552 0.2917452506 ]], [ 34.,  
[ 0.5416028332 0.1666675686 0.2917295982 ]], [ 35.,  
[ 0.5416156450 0.1666672980 0.2917170570 ]], [ 36.,  
[ 0.5416258809 0.1666671086 0.2917070105 ]]

---

## Anexo 2. Estimación de la evolución del mercado a largo plazo utilizando valores actuales.

>

*restart;*

> *with(linalg) :*

>  $M := \text{matrix}\left(\left[\left[\frac{9}{10}, \frac{3}{20}, \frac{1}{10}\right], \left[\frac{1}{20}, \frac{3}{4}, \frac{1}{20}\right], \left[\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{17}{20}\right]\right]\right);$

$$M := \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{3}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{20} & \frac{3}{4} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{17}{20} \end{bmatrix}$$

>  $\text{sol} := \text{linsolve}(M - \text{diag}(1, 1, 1), \text{array}([0, 0, 0]));$

$$\text{sol} := \begin{bmatrix} \frac{13}{4} & -t_1 & -t_1 \\ \frac{7}{4} & -t_1 & \end{bmatrix}$$

>  $\text{eigenvects}(M);$

$$\left[1, 1, \left\{\left\{\frac{13}{4}, 1, \frac{7}{4}\right\}\right\}\right], \left[\frac{4}{5}, 1, \left\{\left\{-1, 0, 1\right\}\right\}\right], \left[\frac{7}{10}, 1, \left\{\left\{1, -2, 1\right\}\right\}\right]$$

>  $X_0 := \text{array}\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]\right);$

$$X_0 := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

>  $DI := \text{diag}\left(1, \frac{4}{5}, \frac{7}{10}\right)$

$$DI := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

>  $M := \text{transpose}\left(\text{array}\left(\left[\left[\frac{13}{4}, 1, \frac{7}{4}\right], [-1, 0, 1], [1, -2, 1]\right]\right)\right);$

$$M := \begin{bmatrix} \frac{13}{4} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ \frac{7}{4} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

---

---

>  $Minv := inverse(M);$

$$Minv := \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{12} & -\frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

>  $comprobacion := multiply(M, D1, Minv);$

$$comprobacion := \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{3}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{20} & \frac{3}{4} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{17}{20} \end{bmatrix}$$

>  $distribucion := n \rightarrow multiply\left(M, diag\left(1, \left(\frac{4}{5}\right)^n, \left(\frac{7}{10}\right)^n\right), Minv, X_0\right);$

$$distribucion := n \rightarrow linalg:-multiply\left(M, linalg:-diag\left(1, \left(\frac{4}{5}\right)^n, \left(\frac{7}{10}\right)^n\right), Minv, X_0\right)$$

>  $distribucion(n);$

$$\left[ \frac{13}{24} - \frac{1}{8} \left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{1}{12} \left(\frac{7}{10}\right)^n, \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \left(\frac{7}{10}\right)^n, \frac{7}{24} + \frac{1}{8} \left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{1}{12} \left(\frac{7}{10}\right)^n \right]$$

>  $limite := map(limit, distribucion(n), n = infinity);$

$$limite := \left[ \frac{13}{24} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{7}{24} \right]$$

>  $evalf(map(limit, distribucion(n), n = infinity));$

$$\left[ 0.5416666667 \quad 0.1666666667 \quad 0.2916666667 \right]$$

---

## Anexo 3. Estimación de la evolución del mercado incluyendo factores de mejora para el corto, mediano y largo plazos.

>

*restart : with(linalg) : with(plots) :*

---

**Obtención del polinomio característico de la matriz de transición, eigenvectores y matriz P**

**$P^{*}(-1)^{*} A * P = \text{Matriz diagonal}$**

---

MATRIZ con dos parámetros ( $s$  y  $t$ , [ $w$  y  $t$  funciones de  $s$  y  $t$ ])

>  $M := \text{array}\left(\left[\left[\left[\frac{9}{10} + s + t, \frac{3}{20} + s, \frac{1}{10} + t\right], \left[\frac{1}{20} - s, \frac{3}{4} - s, \frac{1}{20}\right], \left[\frac{1}{20} - t, \frac{1}{10}, \frac{17}{20} - t\right]\right]\right];$

$$M := \begin{bmatrix} \frac{9}{10} + s + t & \frac{3}{20} + s & \frac{1}{10} + t \\ \frac{1}{20} - s & \frac{3}{4} - s & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} - t & \frac{1}{10} & \frac{17}{20} - t \end{bmatrix}$$

---

**Matriz lambda**

>  $Mlam := \text{evalm}(M - \text{diag}(\text{lambda}, \text{lambda}, \text{lambda}));$

$$Mlam := \begin{bmatrix} \frac{9}{10} + s + t - \lambda & \frac{3}{20} + s & \frac{1}{10} + t \\ \frac{1}{20} - s & \frac{3}{4} - s - \lambda & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} - t & \frac{1}{10} & \frac{17}{20} - t - \lambda \end{bmatrix}$$

---

**Polinomio característico**

>  $p1 := \text{collect}(\text{det}(Mlam), \text{lambda});$

$$p1 := -\lambda^3 + \frac{5}{2} \lambda^2 + \left(-\frac{103}{50} + s t + \frac{1}{20} s\right) \lambda - \frac{1}{20} s - s t + \frac{14}{25}$$

>  $pc := \text{collect}(\text{expand}(-p1), \text{lambda});$

$$pc := \lambda^3 - \frac{5}{2} \lambda^2 + \left( -\frac{1}{20} s + \frac{103}{50} - s t \right) \lambda + \frac{1}{20} s + s t - \frac{14}{25}$$

>  $polCar := (1 - \lambda) \cdot (\lambda \cdot 2 + B \cdot \lambda + C);$

$$polCar := (1 - \lambda) (\lambda^2 + B \lambda + C)$$

>  $e0 := collect(expand(p1 - polCar), \lambda);$

$$e0 := \left( \frac{3}{2} + B \right) \lambda^2 + \left( \frac{1}{20} s - \frac{103}{50} + s t - B + C \right) \lambda - \frac{1}{20} s - s t + \frac{14}{25} - C$$

>  $e1 := coeff(e0, \lambda \cdot 2); B := solve(e1, B);$

$$e1 := \frac{3}{2} + B$$

$$B := -\frac{3}{2}$$

>  $e2 := coeff(e0, \lambda); C := solve(e2, C);$

$$e2 := \frac{1}{20} s - \frac{14}{25} + s t + C$$

$$C := -\frac{1}{20} s - s t + \frac{14}{25}$$

### Polinomio característico

>  $expand(polCar) - expand(p1);$

0

>  $polCar;$

$$(1 - \lambda) \left( \lambda^2 - \frac{3}{2} \lambda - \frac{1}{20} s - s t + \frac{14}{25} \right)$$

>  $e3 := \lambda^2 - \frac{3}{2} \lambda - \frac{1}{20} s - s t + \frac{14}{25};$

$$e3 := \lambda^2 - \frac{3}{2} \lambda - \frac{1}{20} s - s t + \frac{14}{25}$$

>  $SL := solve(e3, \lambda);$

>  $s1 := SL[1];$

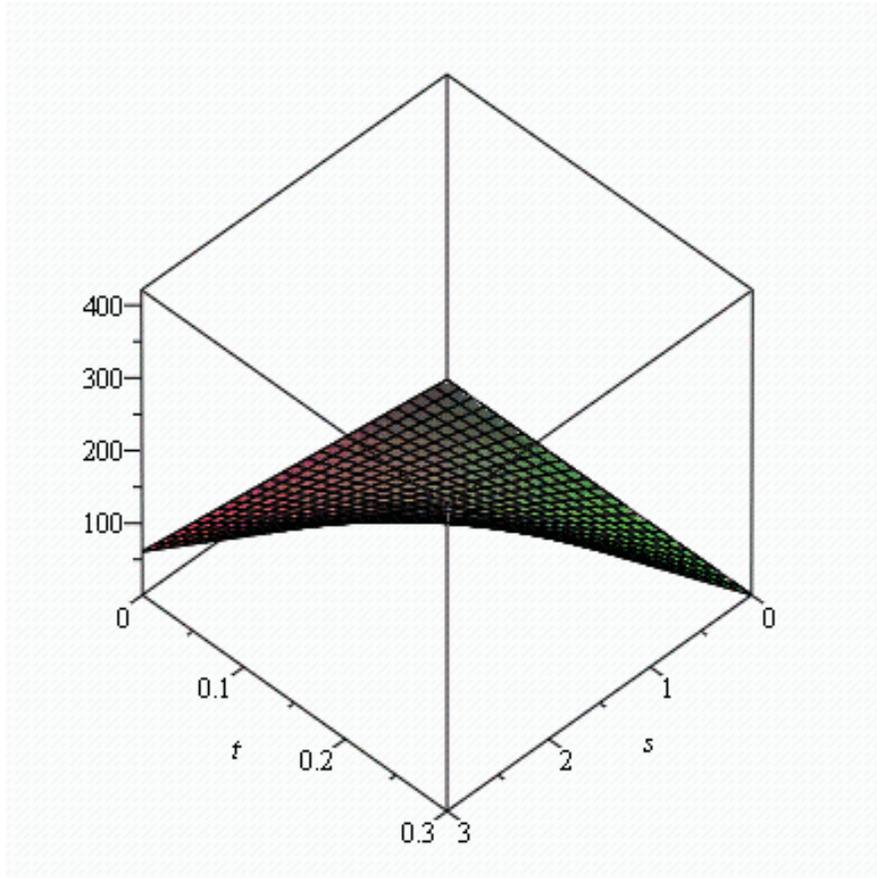
$$s1 := \frac{3}{4} + \frac{1}{20} \sqrt{1 + 20s + 400st}$$

>  $s2 := SL[2];$

$$s2 := \frac{3}{4} - \frac{1}{20} \sqrt{1 + 20s + 400st}$$

>  $ddcr := 1 + 20s + 400st$ ;

>  $plot3d(ddcr, s = 0..3, t = 0..0.3, axes = BOXED)$ ;



>  $plot3d(ddcr, s = 0..0.5, t = 0..0.5, axes = BOXED)$ ;

>  $lambda := s1 : X := matrix(3, 1, [[x], [y], [z]])$ ;

$$X := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

>  $M2 := evalm(Mlam)$ ;

$$M2 := \begin{bmatrix} \frac{9}{10} + s + t - \lambda & \frac{3}{20} + s & \frac{1}{10} + t \\ \frac{1}{20} - s & \frac{3}{4} - s - \lambda & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} - t & \frac{1}{10} & \frac{17}{20} - t - \lambda \end{bmatrix}$$

>  $M2X := multiply(M2, X)$ ;

---

>  $e1 := M2X[1, 1]$  ;

$$e1 := \left( \frac{3}{20} + s + t - \frac{1}{20} \sqrt{1 + 20s + 400st} \right) x + \left( \frac{3}{20} + s \right) y + \left( \frac{1}{10} + t \right) z$$

>  $e2 := M2X[2, 1]$ ;

$$e2 := \left( \frac{1}{20} - s \right) x + \left( -s - \frac{1}{20} \sqrt{1 + 20s + 400st} \right) y + \frac{1}{20} z$$

>  $e3 := M2X[3, 1]$  ;

$$e3 := \left( \frac{1}{20} - t \right) x + \frac{1}{10} y + \left( \frac{1}{10} - t - \frac{1}{20} \sqrt{1 + 20s + 400st} \right) z$$

>  $S1 := solve(\{e1, e2, e3\}, \{x, y, z\})$ ;

$$S1 := \left\{ x = -\frac{1}{20} \frac{y (20s + 1 + \sqrt{1 + 20s + 400st})}{s}, y = y, z = \frac{1}{20} \frac{y (\sqrt{1 + 20s + 400st} + 1)}{s} \right\}$$

>  $x2 := subs\left(y = 1, -\frac{1}{20} \frac{y (20s + 1 + \sqrt{1 + 20s + 400st})}{s}\right)$ ;

$$x2 := -\frac{1}{20} \frac{20s + 1 + \sqrt{1 + 20s + 400st}}{s}$$

>  $z2 := subs\left(y = 1, \frac{1}{20} \frac{y (\sqrt{1 + 20s + 400st} + 1)}{s}\right)$ ;

$$z2 := \frac{1}{20} \frac{\sqrt{1 + 20s + 400st} + 1}{s}$$

>  $y2 := subs(y = 1, y)$ ;

$$y2 := 1$$

>  $Vc2 := matrix(3, 1, [[x2], [y2], [z2]])$ ;

$$Vc2 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{20} \frac{20s + 1 + \sqrt{1 + 20s + 400st}}{s} \\ 1 \\ \frac{1}{20} \frac{\sqrt{1 + 20s + 400st} + 1}{s} \end{bmatrix}$$

>  $Vc2[1, 1]; Vc2[2, 1]; Vc2[3, 1]$ ;

$$-\frac{1}{20} \frac{20s + 1 + \sqrt{1 + 20s + 400st}}{s}$$

$$\frac{1}{20} \frac{\sqrt{1 + 20s + 400st} + 1}{s}$$

> lambda := s2;

$$\lambda := \frac{3}{4} - \frac{1}{20} \sqrt{1 + 20s + 400st}$$

> M3X := evalm(Mlam);

$$M3X := \begin{bmatrix} \frac{9}{10} + s + t - \lambda & \frac{3}{20} + s & \frac{1}{10} + t \\ \frac{1}{20} - s & \frac{3}{4} - s - \lambda & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} - t & \frac{1}{10} & \frac{17}{20} - t - \lambda \end{bmatrix}$$

> M3X := multiply(M3X, X) :

> e4 := M3X[1, 1];

$$e4 := \left( \frac{3}{20} + s + t + \frac{1}{20} \sqrt{1 + 20s + 400st} \right) x + \left( \frac{3}{20} + s \right) y + \left( \frac{1}{10} + t \right) z$$

> e5 := M3X[2, 1];

$$e5 := \left( \frac{1}{20} - s \right) x + \left( -s + \frac{1}{20} \sqrt{1 + 20s + 400st} \right) y + \frac{1}{20} z$$

> e6 := M3X[3, 1];

$$e6 := \left( \frac{1}{20} - t \right) x + \frac{1}{10} y + \left( \frac{1}{10} - t + \frac{1}{20} \sqrt{1 + 20s + 400st} \right) z$$

> S2 := solve({e4, e5, e6}, {x, y, z});

$$S2 := \left\{ x = -\frac{1}{20} \frac{y (20s - \sqrt{1 + 20s + 400st} + 1)}{s}, y = y, z = -\frac{1}{20} \frac{y (-1 + \sqrt{1 + 20s + 400st})}{s} \right\}$$

> y3 := subs(y = 1, y);

$$y3 := 1$$

$$> x3 := \text{subs}\left(y = 1, -\frac{1}{20} \frac{y(20s + 1 - \sqrt{1 + 20s + 400st})}{s}\right);$$

$$x3 := -\frac{1}{20} \frac{20s - \sqrt{1 + 20s + 400st} + 1}{s}$$

$$> z3 := \text{subs}\left(y = 1, -\frac{1}{20} \frac{y(-1 + \sqrt{1 + 20s + 400st})}{s}\right);$$

$$z3 := -\frac{1}{20} \frac{-1 + \sqrt{1 + 20s + 400st}}{s}$$

$$> Vc3 := \text{matrix}(3, 1, [[x3], [y3], [z3]]);$$

$$Vc3 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{20} \frac{20s - \sqrt{1 + 20s + 400st} + 1}{s} \\ 1 \\ -\frac{1}{20} \frac{-1 + \sqrt{1 + 20s + 400st}}{s} \end{bmatrix}$$

$$> Vc3[1, 1]; Vc3[2, 1]; Vc3[3, 1];$$

$$-\frac{1}{20} \frac{20s - \sqrt{1 + 20s + 400st} + 1}{s}$$

$$1$$

$$-\frac{1}{20} \frac{-1 + \sqrt{1 + 20s + 400st}}{s}$$

$$> \text{lambda} := 1;$$

$$\lambda := 1$$

$$> MIX := \text{evalm}(Mlam);$$

$$MIX := \begin{bmatrix} \frac{9}{10} + s + t - \lambda & \frac{3}{20} + s & \frac{1}{10} + t \\ \frac{1}{20} - s & \frac{3}{4} - s - \lambda & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} - t & \frac{1}{10} & \frac{17}{20} - t - \lambda \end{bmatrix}$$

$$> MIX := \text{multiply}(MIX, X);$$

$$MIX := \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{10} + s + t\right)x + \left(\frac{3}{20} + s\right)y + \left(\frac{1}{10} + t\right)z \\ \left(\frac{1}{20} - s\right)x + \left(-\frac{1}{4} - s\right)y + \frac{1}{20}z \\ \left(\frac{1}{20} - t\right)x + \frac{1}{10}y + \left(-\frac{3}{20} - t\right)z \end{bmatrix}$$

$$> e10 := MIX[1, 1];$$

---

>  $e11 := MIX[2, 1];$

>  $e12 := MIX[3, 1];$

>  $S3 := solve(\{e10, e11, e12\}, \{x, y, z\});$

$$S3 := \left\{ x = -\frac{1}{4} \frac{(100t + 13 + 60s + 400st)y}{-1 + 100st + 15s}, y = y, z \right. \\ \left. = \frac{1}{4} \frac{y(100t - 7 + 20s + 400st)}{-1 + 100st + 15s} \right\}$$

>  $x1 := subs\left(y = 1, -\frac{1}{4} \frac{(13 + 400st + 60s + 100t)y}{-1 + 15s + 100st}\right);$

$$x1 := -\frac{1}{4} \frac{100t + 13 + 60s + 400st}{-1 + 100st + 15s}$$

>  $y1 := subs(y = 1, y);$

$$y1 := 1$$

>  $z1 := subs\left(y = 1, \frac{1}{4} \frac{y(-7 + 400st + 20s + 100t)}{-1 + 15s + 100st}\right);$

$$z1 := \frac{1}{4} \frac{100t - 7 + 20s + 400st}{-1 + 100st + 15s}$$

>  $Vc1 := matrix(3, 1, [[x1], [y1], [z1]]);$

$$Vc1 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \frac{100t + 13 + 60s + 400st}{-1 + 100st + 15s} \\ 1 \\ \frac{1}{4} \frac{100t - 7 + 20s + 400st}{-1 + 100st + 15s} \end{bmatrix}$$

>  $evalm(Vc2);$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{20} \frac{20s + 1 + \sqrt{1 + 20s + 400st}}{s} \\ 1 \\ \frac{1}{20} \frac{\sqrt{1 + 20s + 400st} + 1}{s} \end{bmatrix}$$

>  $P11 := Vc1[1, 1];$

$$P11 := -\frac{1}{4} \frac{100t + 13 + 60s + 400st}{-1 + 100st + 15s}$$

>  $P21 := Vc1[2, 1];$

$$P21 := 1$$

>  $P31 := Vc1[3, 1];$

$$P31 := \frac{1}{4} \frac{100t - 7 + 20s + 400st}{-1 + 100st + 15s}$$

> P12 := Vc2[1, 1];

$$P12 := -\frac{1}{20} \frac{20s + 1 + \sqrt{1 + 20s + 400st}}{s}$$

> P22 := Vc2[2, 1];

$$P22 := 1$$

> P32 := Vc2[3, 1];

$$P32 := \frac{1}{20} \frac{\sqrt{1 + 20s + 400st} + 1}{s}$$

> P13 := Vc3[1, 1];

$$P13 := -\frac{1}{20} \frac{20s - \sqrt{1 + 20s + 400st} + 1}{s}$$

> P23 := Vc3[2, 1];

$$P23 := 1$$

> P33 := Vc3[3, 1];

$$P33 := -\frac{1}{20} \frac{-1 + \sqrt{1 + 20s + 400st}}{s}$$

> P := matrix(3, 3, [P11, P12, P13, P21, P22, P23, P31, P32, P33]);

$$P := \left[ \left[ \begin{array}{c} -\frac{1}{4} \frac{100t + 13 + 60s + 400st}{-1 + 100st + 15s}, \\ -\frac{1}{20} \frac{20s + 1 + \sqrt{1 + 20s + 400st}}{s}, \\ -\frac{1}{20} \frac{20s - \sqrt{1 + 20s + 400st} + 1}{s} \end{array} \right], \right. \\ \left. \left[ \begin{array}{c} 1, 1, 1 \end{array} \right], \right. \\ \left. \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{4} \frac{100t - 7 + 20s + 400st}{-1 + 100st + 15s}, \\ \frac{1}{20} \frac{\sqrt{1 + 20s + 400st} + 1}{s}, \\ -\frac{1}{20} \frac{-1 + \sqrt{1 + 20s + 400st}}{s} \end{array} \right] \right]$$

> det(P) :

> evalm(Vc1) :

> P[1, 1]; P[2, 1]; P[3, 1];

$$-\frac{1}{4} \frac{100t + 13 + 60s + 400st}{-1 + 100st + 15s}$$

$$\frac{1}{4} \frac{100t - 7 + 20s + 400st}{-1 + 100st + 15s}$$

> *evalm(Vc2)* :

> *P[1, 2]; P[2, 2]; P[3, 2]* :

$$-\frac{1}{20} \frac{20s + 1 + \sqrt{1 + 20s + 400st}}{s}$$

> *evalm(Vc3)* :

> *P[1, 3]; P[2, 3]; P[3, 3]* :

$$-\frac{1}{20} \frac{20s - \sqrt{1 + 20s + 400st} + 1}{s}$$

$$-\frac{1}{20} \frac{-1 + \sqrt{1 + 20s + 400st}}{s}$$

> *det(P)*;

$$-\frac{1}{10} \frac{\sqrt{1 + 20s + 400st} (-6 + 5s + 100st)}{(-1 + 100st + 15s)s}$$

> *IP := inverse(P)*;

$$\begin{aligned}
IP := & \left[ \left[ \frac{-1 + 100st + 15s}{-6 + 5s + 100st}, \frac{-1 + 100st + 15s}{-6 + 5s + 100st}, \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{-1 + 100st + 15s}{-6 + 5s + 100st} \right], \right. \\
& \left[ -\frac{1}{2} (1 + 400st - 50s - \sqrt{1 + 20s + 400st}) \right. \\
& + 100\sqrt{1 + 20s + 400st} st + 15s\sqrt{1 + 20s + 400st} \\
& + 100s^2 + 2000s^2t) / (\sqrt{1 + 20s + 400st} (-6 + 5s \\
& + 100st)), -\frac{5}{2} (-1 + \sqrt{1 + 20s + 400st} - 9s \\
& + 2s\sqrt{1 + 20s + 400st} + 100st + 20s^2 + 400s^2t) / \\
& (\sqrt{1 + 20s + 400st} (-6 + 5s + 100st)), -\frac{1}{2} (400st \\
& + 70s - \sqrt{1 + 20s + 400st} + 100\sqrt{1 + 20s + 400st} st \\
& + 15s\sqrt{1 + 20s + 400st} + 1) / (\sqrt{1 + 20s + 400st} (-6 \\
& + 5s + 100st))] , \\
& \left[ -\frac{1}{2} (-\sqrt{1 + 20s + 400st} + 100\sqrt{1 + 20s + 400st} st \right. \\
& + 15s\sqrt{1 + 20s + 400st} - 1 - 400st + 50s - 100s^2 \\
& - 2000s^2t) / (\sqrt{1 + 20s + 400st} (-6 + 5s + 100st)), \\
& -\frac{5}{2} (\sqrt{1 + 20s + 400st} + 1 + 2s\sqrt{1 + 20s + 400st} \\
& + 9s - 100st - 20s^2 - 400s^2t) / (\sqrt{1 + 20s + 400st} (-6 \\
& + 5s + 100st)), -\frac{1}{2} (-400st - 70s - 1 \\
& - \sqrt{1 + 20s + 400st} + 100\sqrt{1 + 20s + 400st} st \\
& + 15s\sqrt{1 + 20s + 400st}) / (\sqrt{1 + 20s + 400st} (-6 + 5s \\
& + 100st))] ]
\end{aligned}$$

>  $PIP := multiply(P, IP) :$

>  $normal(PIP[1, 1]);$

---

```

> normal(PIP[1, 2]);           1
> normal(PIP[1, 3]);           0
> normal(PIP[2, 1]);           0
> normal(PIP[2, 2]);           0
> normal(PIP[3, 2]);           1
> normal(PIP[3, 1]);           0
> normal(PIP[3, 2]);           0
> normal(PIP[3, 3]);           0
> X0 := matrix(3, 1, [[1/3], [1/3], [1/3]]);

```

$$X0 := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

```

>
> LLA := n → multiply(P, diag(1, s1 · n, s2 · n), IP, X0);
      LLA := n → linalg:-multiply(P, linalg:-diag(1, s1^n, s2^n), IP, X0)
> LLA(n) :

```

---

---

### Obtención de valores a corto plazo

---

---

> *limPP* := *map*(*limit*, %, *n* = 1) :

> *evalf*(*limPP*[1, 1]) :

> *limPP*[2, 1] :

> *limPP*[3, 1];

$$-\frac{2}{3}t + \frac{1}{3}$$

> *s* := 0.01 : *t* := 0.05 :

> *t1* := *limPP*[1, 1];

$$t1 := 0.4233333333$$

> *t2* := *limPP*[2, 1];

$$t2 := 0.2766666666$$

> *t3* := *limPP*[3, 1];

$$t3 := 0.3000000000$$

> *t1* + *t2* + *t3*;

$$1.000000000$$

> *limPP* := *map*(*limit*, %, *n* = 2) :

> *evalf*(*limPP*[1, 1]) :

> *limPP*[2, 1] :

> *limPP*[3, 1];

$$-\frac{2}{3}st - \frac{1}{30}s - \frac{5}{4}t + \frac{397}{1200}$$

> *s* := 0.01 : *t* := 0.05 :

> *t1* := *limPP*[1, 1];

$$t1 := 0.4956666666$$

> *t2* := *limPP*[2, 1];

$$t2 := 0.2366666666$$

> *t3* := *limPP*[3, 1];

$$t3 := 0.2676666666$$

---

>  $t1 + t2 + t3$ ;

1.000000000

>  $limPP := map(limit, \%, n = 3)$  :

>  $evalf(limPP[1, 1])$  :

>  $limPP[2, 1]$  :

>  $limPP[3, 1]$ ;

$$-\frac{2}{3} s t^2 - \frac{17}{10} s t - \frac{1}{12} s - \frac{1051}{600} t + \frac{157}{480}$$

>  $s := 0.01 : t := 0.05$  :

>  $t1 := limPP[1, 1]$ ;

$t1 := 0.5538566660$

>  $t2 := limPP[2, 1]$ ;

$t2 := 0.2083433330$

>  $t3 := limPP[3, 1]$ ;

$t3 := 0.2378000000$

>  $t1 + t2 + t3$ ;

1.000000000

---

### Obtención de valores a mediano plazo

---

>  $limPP := map(limit, \%, n = 12)$  :

>  $evalf(limPP[1, 1])$  :

>  $limPP[2, 1]$  :

>  $limPP[3, 1]$ ;

$$\begin{aligned}
& -\frac{6062194983}{1600000000}t - \frac{71963281}{3840000000}s^3 - \frac{975101}{1280000000}s^4 \\
& - \frac{10521}{1280000000}s^5 - \frac{374224867069}{800000000000}s - \frac{10197727}{80000}t^3s^2 \\
& - \frac{25}{4}t^6s^5 - \frac{274539}{1600}t^4s^3 - \frac{1149}{16}t^5s^4 - \frac{5273}{6400000}s^5t \\
& - \frac{21167}{640000}s^5t^2 - \frac{5323}{8000}s^5t^3 - \frac{10771}{1600}s^5t^4 - \frac{5573}{200}s^5t^5 \\
& - \frac{1}{800000}s^6t - \frac{1}{16000}s^6t^2 - \frac{1}{600}s^6t^3 - \frac{1}{40}s^6t^4 \\
& - \frac{1}{5}s^6t^5 - \frac{9166997}{8000000}s^3t - \frac{38040683}{1600000}s^3t^2 - \frac{2634923}{15000}s^3t^3 \\
& - \frac{3929129}{6400000}s^4t - \frac{2982753}{1600000}s^4t^2 - \frac{2036377}{80000}s^4t^3 \\
& - \frac{1090001}{8000}s^4t^4 - \frac{2959779757}{40000000}s^2t^2 - \frac{221237167847}{20000000000}s^2t \\
& - \frac{2449893407}{16000000000}s^2 - \frac{5154729989}{8000000000}s^2t - \frac{545995749}{16000000}s^2t^2 \\
& - \frac{1}{96000000}s^6 - \frac{2}{3}s^6t^6 + \frac{3589237927903}{12000000000000}
\end{aligned}$$

> s := 0.01 : t := 0.05 :

> t1 := limPP[1, 1];

t1 := 0.761012112:

> t2 := limPP[2, 1];

t2 := 0.140457958:

> t3 := limPP[3, 1];

t3 := 0.098529929'

> t1 + t2 + t3;

1.000000000

> limPP := map(limit, %, n = 24) :

> evalf(limPP[1, 1]) :

> limPP[2, 1] :

> limPP[3, 1] :

> s := 0.01 : t := 0.05 :

---

```

> t1 := limPP[1, 1];
                                     t1 := 0.7938163660
> t2 := limPP[2, 1];
                                     t2 := 0.1358498620
> t3 := limPP[3, 1];
                                     t3 := 0.07033377160
> t1 + t2 + t3;
                                     1.0000000000
> limPP := map(limit, %, n = 36) :
> evalf(limPP[1, 1]) :
> limPP[2, 1] :
> limPP[3, 1] :
> s := 0.01 : t := 0.05 :
> t1 := limPP[1, 1];
                                     t1 := 0.7963901980
> t2 := limPP[2, 1];
                                     t2 := 0.1356119420
> t3 := limPP[3, 1];
                                     t3 := 0.0679978590
> t1 + t2 + t3;
                                     1.0000000000

```

---

### Obtención de valores a largo plazo

---

```

> limPP := map(limit, %, n = infinity) :
> evalf(limPP[1, 1]) :
> limPP[2, 1] :
> limPP[3, 1];

```

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{4} \frac{100t - 7 + 20s + 400st}{-6 + 5s + 100st} \right. \\
& - \frac{1}{120} \left( (\sqrt{1 + 20s + 400st} + 1) \left( \frac{3}{4} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{20} \sqrt{1 + 20s + 400st} \right)^n (1 + 400st - 50s \right. \\
& - \sqrt{1 + 20s + 400st} + 100\sqrt{1 + 20s + 400st} st \\
& + \left. \left. 15s \sqrt{1 + 20s + 400st} + 100s^2 + 2000s^2 t) \right) \right) / \\
& \left( s \sqrt{1 + 20s + 400st} (-6 + 5s + 100st) \right) + \frac{1}{120} \left( \left( \right. \right. \\
& -1 + \sqrt{1 + 20s + 400st} \left. \left. \right) \left( \frac{3}{4} \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{1}{20} \sqrt{1 + 20s + 400st} \right)^n (-\sqrt{1 + 20s + 400st} \right. \\
& + \left. \left. 100\sqrt{1 + 20s + 400st} st + 15s \sqrt{1 + 20s + 400st} - 1 \right. \right. \\
& - \left. \left. 400st + 50s - 100s^2 - 2000s^2 t) \right) \right) / \\
& \left( s \sqrt{1 + 20s + 400st} (-6 + 5s + 100st) \right) \\
& - \frac{1}{24} \left( (\sqrt{1 + 20s + 400st} + 1) \left( \frac{3}{4} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{20} \sqrt{1 + 20s + 400st} \right)^n (-1 + \sqrt{1 + 20s + 400st} \right. \\
& - \left. \left. 9s + 2s \sqrt{1 + 20s + 400st} + 100st + 20s^2 + 400s^2 t) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left/ (s \sqrt{1 + 20s + 400st} (-6 + 5s + 100st)) + \frac{1}{24} \left( ( \right. \right. \\
& -1 + \sqrt{1 + 20s + 400st} ) \left( \frac{3}{4} \right. \\
& - \frac{1}{20} \sqrt{1 + 20s + 400st} )^n (\sqrt{1 + 20s + 400st} + 1 \\
& \left. \left. + 2s \sqrt{1 + 20s + 400st} + 9s - 100st - 20s^2 - 400s^2t) \right) \right) \\
& \left/ (s \sqrt{1 + 20s + 400st} (-6 + 5s + 100st)) \right. \\
& - \frac{1}{120} \left( (\sqrt{1 + 20s + 400st} + 1) \left( \frac{3}{4} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{20} \sqrt{1 + 20s + 400st} )^n (400st + 70s \right. \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{1 + 20s + 400st} + 100\sqrt{1 + 20s + 400st} st \right. \right. \\
& \left. \left. + 15s \sqrt{1 + 20s + 400st} + 1) \right) \left/ (s \sqrt{1 + 20s + 400st} ( \right. \right. \\
& -6 + 5s + 100st)) + \frac{1}{120} \left( (-1 \right. \\
& \left. + \sqrt{1 + 20s + 400st} ) \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{20} \sqrt{1 + 20s + 400st} )^n ( \right. \right. \\
& -400st - 70s - 1 - \sqrt{1 + 20s + 400st} \\
& \left. \left. + 100\sqrt{1 + 20s + 400st} st + 15s \sqrt{1 + 20s + 400st} ) \right) \right) \\
& \left/ (s \sqrt{1 + 20s + 400st} (-6 + 5s + 100st)) \right)
\end{aligned}$$

$${}_n \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{4} \frac{100t - 7 + 20s + 400st}{-6 + 5s + 100st} \right)$$

$$- \frac{1}{120} \left( (\sqrt{1 + 20s + 400st} + 1) \left( \frac{3}{4} \right. \right.$$

---

---

>  $s := 0.01 : t := 0.05 :$

>  $t1 := \text{limPP}[1, 1];$

$t1 := 0.796610169;$

>  $t2 := \text{limPP}[2, 1];$

$t2 := 0.135593220;$

>  $t3 := \text{limPP}[3, 1];$

$t3 := 0.0677966101;$

>  $t1 + t2 + t3;$

1.000000000

>

-----

---

---

**Los parámetros s y t pueden variar entre 0.0 y 0.05**

---

---

>

## Anexo 4. Modelación de un sistema de inventario para 260 días de Grupo Adhempa

Día	Entregas del proveedor	Inventario inicial	Demanda	Ventas	Inventario final	Costo de Ordenar	Costo de llevar inventario	Costo de Faltante	Costo Total	Costo Promedio
0	145700	145700	3133.61683	3133.61683	142566.383	1457	36033.2979	0	37490.2979	37490.2979
1	0	142566.383	18598.1966	18598.1966	123968.187	0	33316.8212	0	33316.8212	35403.5596
2	0	123968.187	58139.3592	58139.3592	65828.8273	0	23724.6267	0	23724.6267	31510.5819
3	0	65828.8273	9703.02579	9703.02579	56125.8015	0	15244.3286	0	15244.3286	27444.0186
4	0	56125.8015	71241.9156	56125.8015	0	0	7015.72519	18895.1426	25910.8678	27137.3885
5	145700	145700	42001.3826	42001.3826	103698.617	1457	31174.8272	0	32631.8272	28053.1282
6	0	103698.617	7872.40482	7872.40482	95826.2125	0	24940.6037	0	24940.6037	27608.4819
7	0	95826.2125	25685.7207	25685.7207	70140.4918	0	20745.838	0	20745.838	26750.6514
8	0	70140.4918	14439.2988	14439.2988	55701.193	0	15730.2106	0	15730.2106	25526.158
9	0	55701.193	137634.634	55701.193	0	0	6962.64913	102416.802	109379.451	33911.4872
10	145700	145700	3349.4743	3349.4743	142350.526	1457	36006.3157	0	37463.3157	34234.3807
11	0	142350.526	24895.9883	24895.9883	117454.537	0	32475.6329	0	32475.6329	34087.8184
12	0	117454.537	19639.629	19639.629	97814.9084	0	26908.6807	0	26908.6807	33535.5771
13	0	97814.9084	4891.46025	4891.46025	92923.4482	0	23842.2946	0	23842.2946	32843.1997
14	0	92923.4482	5180.88344	5180.88344	87742.5648	0	22583.2516	0	22583.2516	32159.2032
15	57957.4352	145700	23898.5949	23898.5949	121801.405	1457	33437.6756	0	34894.6756	32330.1702
16	0	121801.405	31126.2368	31126.2368	90675.1683	0	26559.5717	0	26559.5717	31990.7233
17	0	90675.1683	74267.6425	74267.6425	16407.5258	0	13385.3368	0	13385.3368	30957.0907
18	0	16407.5258	9969.4969	9969.4969	6438.02886	0	2855.69433	0	2855.69433	29478.0698
19	0	6438.02886	20415.2816	6438.02886	0	0	804.753607	17471.5659	18276.3195	28917.9823
20	145700	145700	6344.14826	6344.14826	139355.852	1457	35631.9815	0	37088.9815	29307.0775
21	0	139355.852	19498.0565	19498.0565	119857.795	0	32401.7059	0	32401.7059	29447.7424
22	0	119857.795	67165.61	67165.61	52692.1852	0	21568.7476	0	21568.7476	29105.1774
23	0	52692.1852	43144.1012	43144.1012	9548.08404	0	7780.03366	0	7780.03366	28216.6298

Día	Entregas del proveedor	Inventario inicial	Demanda	Ventas	Inventario final	Costo de Ordenar	Costo de llevar inventario	Costo de Faltante	Costo Total	Costo Promedio
24	0	9548.08404	114164.24	9548.08404	0	0	1193.5105	130770.195	131963.706	32366.5128
25	145700	145700	14088.068	14088.068	131611.932	1457	34663.9915	0	36120.9915	32510.9158
26	0	131611.932	32874.878	32874.878	98737.0541	0	28793.6233	0	28793.6233	32373.2383
27	0	98737.0541	2176.86817	2176.86817	96560.1859	0	24412.155	0	24412.155	32088.9139
28	0	96560.1859	14883.0089	14883.0089	81677.177	0	22279.6704	0	22279.6704	31750.6641
29	0	81677.177	10136.292	10136.292	71540.8849	0	19152.2577	0	19152.2577	31330.7173
30	74159.1151	145700	12936.334	12936.334	132763.666	1457	34807.9583	0	36264.9583	31489.8863
31	0	132763.666	11356.604	11356.604	121407.062	0	31771.341	0	31771.341	31498.6818
32	0	121407.062	37876.1366	37876.1366	83530.9254	0	25617.2484	0	25617.2484	31320.4565
33	0	83530.9254	30941.8359	30941.8359	52589.0894	0	17015.0018	0	17015.0018	30899.7079
34	0	52589.0894	16086.67	16086.67	36502.4194	0	11136.4386	0	11136.4386	30335.043
35	109197.581	145700	3005.60196	3005.60196	142694.398	1457	36049.2998	0	37506.2998	30534.2446
36	0	142694.398	8133.35121	8133.35121	134561.047	0	34656.9306	0	34656.9306	30645.6685
37	0	134561.047	25556.0861	25556.0861	109004.961	0	30445.751	0	30445.751	30640.4076
38	0	109004.961	30781.0118	30781.0118	78223.949	0	23403.6137	0	23403.6137	30454.8487
39	0	78223.949	11302.4978	11302.4978	66921.4512	0	18143.175	0	18143.175	30147.0569
40	78778.5488	145700	43665.5834	43665.5834	102034.417	1457	30966.8021	0	32423.8021	30202.5873
41	0	102034.417	18154.7213	18154.7213	83879.6953	0	23239.264	0	23239.264	30036.7939
42	0	83879.6953	753.035389	753.035389	83126.6599	0	20875.7944	0	20875.7944	29823.7474
43	0	83126.6599	6108.71802	6108.71802	77017.9419	0	20018.0752	0	20018.0752	29600.8912
44	0	77017.9419	777.995369	777.995369	76239.9465	0	19157.236	0	19157.236	29368.8099
45	69460.0535	145700	4439.87008	4439.87008	141260.13	1457	35870.0162	0	37327.0162	29541.8144
46	0	141260.13	68082.5802	68082.5802	73177.5497	0	26804.71	0	26804.71	29483.5782
47	0	73177.5497	24687.3154	24687.3154	48490.2343	0	15208.473	0	15208.473	29186.1801
48	0	48490.2343	54251.816	48490.2343	0	0	6061.27929	7201.97709	13263.2564	28861.2225
49	0	0	15470.0815	0	0	0	0	19337.6018	19337.6018	28670.7501

Día	Entregas del proveedor	Inventario inicial	Demanda	Ventas	Inventario final	Costo de Ordenar	Costo de llevar inventario	Costo de Faltante	Costo Total	Costo Promedio
50	145700	145700	24424.2367	24424.2367	121275.763	1457	33371.9704	0	34828.9704	28791.4995
51	0	121275.763	23623.4155	23623.4155	97652.3478	0	27366.0139	0	27366.0139	28764.0863
52	0	97652.3478	46662.1713	46662.1713	50990.1764	0	18580.3155	0	18580.3155	28571.9397
53	0	50990.1764	32990.7337	32990.7337	17999.4427	0	8623.70239	0	8623.70239	28202.5279
54	0	17999.4427	6782.57631	6782.57631	11216.8664	0	3652.03864	0	3652.03864	27756.1554
55	134483.134	145700	61105.5334	61105.5334	84594.4666	1457	28786.8083	0	30243.8083	27800.5778
56	0	84594.4666	5513.05507	5513.05507	79081.4115	0	20459.4848	0	20459.4848	27671.7867
57	0	79081.4115	19236.1137	19236.1137	59845.2978	0	17365.8387	0	17365.8387	27494.0979
58	0	59845.2978	22417.5749	22417.5749	37427.7229	0	12159.1276	0	12159.1276	27234.1831
59	0	37427.7229	13717.0936	13717.0936	23710.6293	0	7642.29402	0	7642.29402	26907.6517
60	121989.371	145700	21849.9992	21849.9992	123850.001	1457	33693.7501	0	35150.7501	27042.7844
61	0	123850.001	4719.07612	4719.07612	119130.925	0	30372.6157	0	30372.6157	27096.4914
62	0	119130.925	69314.9235	69314.9235	49816.0011	0	21118.3657	0	21118.3657	27001.6005
63	0	49816.0011	540.967048	540.967048	49275.0341	0	12386.3794	0	12386.3794	26773.2377
64	0	49275.0341	13216.6945	13216.6945	36058.3396	0	10666.6717	0	10666.6717	26525.4443
65	109641.66	145700	43291.871	43291.871	102408.129	1457	31013.5161	0	32470.5161	26615.5212
66	0	102408.129	49687.7192	49687.7192	52720.4098	0	19391.0673	0	19391.0673	26507.6935
67	0	52720.4098	8812.32063	8812.32063	43908.0892	0	12078.5624	0	12078.5624	26295.5004
68	0	43908.0892	2261.94319	2261.94319	41646.146	0	10694.2794	0	10694.2794	26069.3958
69	0	41646.146	3299.71928	3299.71928	38346.4267	0	9999.07159	0	9999.07159	25839.8197
70	107353.573	145700	1647.84821	1647.84821	144052.152	1457	36219.019	0	37676.019	26006.5267
71	0	144052.152	20327.8851	20327.8851	123724.267	0	33472.0523	0	33472.0523	26110.2146
72	0	123724.267	3990.60331	3990.60331	119733.663	0	30432.2413	0	30432.2413	26169.4204
73	0	119733.663	5491.11124	5491.11124	114242.552	0	29247.0269	0	29247.0269	26211.0097
74	0	114242.552	17633.0569	17633.0569	96609.4952	0	26356.5059	0	26356.5059	26212.9497
75	49090.5048	145700	3413.13909	3413.13909	142286.861	1457	35998.3576	0	37455.3576	26360.8761

Día	Entregas del proveedor	Inventario inicial	Demanda	Ventas	Inventario final	Costo de Ordenar	Costo de llevar inventario	Costo de Faltante	Costo Total	Costo Promedio
76	0	142286.861	1882.25885	1882.25885	140404.602	0	35336.4329	0	35336.4329	26477.4417
77	0	140404.602	84674.4919	84674.4919	55730.1101	0	24516.839	0	24516.839	26452.3058
78	0	55730.1101	2464.40231	2464.40231	53265.7078	0	13624.4772	0	13624.4772	26289.9282
79	0	53265.7078	36860.9028	36860.9028	16404.805	0	8708.8141	0	8708.8141	26070.1643
80	129295.195	145700	16113.4719	16113.4719	129586.528	1457	34410.816	0	35867.816	26191.123
81	0	129586.528	7345.37409	7345.37409	122241.154	0	31478.4603	0	31478.4603	26255.6027
82	0	122241.154	21928.0066	21928.0066	100313.147	0	27819.2877	0	27819.2877	26274.4423
83	0	100313.147	17860.7014	17860.7014	82452.4461	0	22845.6992	0	22845.6992	26233.6239
84	0	82452.4461	15811.3713	15811.3713	66641.0747	0	18636.6901	0	18636.6901	26144.2482
85	79058.9253	145700	8327.71854	8327.71854	137372.281	1457	35384.0352	0	36841.0352	26268.6295
86	0	137372.281	17801.5082	17801.5082	119570.773	0	32117.8818	0	32117.8818	26335.8622
87	0	119570.773	12173.0903	12173.0903	107397.683	0	28371.057	0	28371.057	26358.9895
88	0	107397.683	1341.082	1341.082	106056.601	0	26681.7855	0	26681.7855	26362.6164
89	0	106056.601	14966.2604	14966.2604	91090.3406	0	24643.3677	0	24643.3677	26343.5136
90	54609.6594	145700	45713.7993	45713.7993	99986.2007	1457	30710.7751	0	32167.7751	26407.5165
91	0	99986.2007	51827.7283	51827.7283	48158.4724	0	18518.0841	0	18518.0841	26321.7618
92	0	48158.4724	8445.62905	8445.62905	39712.8434	0	10983.9145	0	10983.9145	26156.8387
93	0	39712.8434	12720.6096	12720.6096	26992.2337	0	8338.13463	0	8338.13463	25967.278
94	0	26992.2337	62562.2446	26992.2337	0	0	3374.02922	44462.5136	47836.5429	26197.4808
95	145700	145700	56188.694	56188.694	89511.306	1457	29401.4133	0	30858.4133	26246.0322
96	0	89511.306	10749.5066	10749.5066	78761.7995	0	21034.1382	0	21034.1382	26192.3013
97	0	78761.7995	5156.67865	5156.67865	73605.1208	0	19045.865	0	19045.865	26119.3785
98	0	73605.1208	15962.5381	15962.5381	57642.5827	0	16405.9629	0	16405.9629	26021.2632
99	0	57642.5827	93700.8678	57642.5827	0	0	7205.32284	45072.8564	52278.1793	26283.8324
100	145700	145700	5906.83595	5906.83595	139793.164	1457	35686.6455	0	37143.6455	26391.3553
101	0	139793.164	28421.1373	28421.1373	111372.027	0	31395.6489	0	31395.6489	26440.417

Día	Entregas del proveedor	Inventario inicial	Demanda	Ventas	Inventario final	Costo de Ordenar	Costo de llevar inventario	Costo de Faltante	Costo Total	Costo Promedio
102	0	111372.027	104427.795	104427.795	6944.23157	0	14789.5323	0	14789.5323	26327.3016
103	0	6944.23157	34621.9533	6944.23157	0	0	868.028947	34597.1521	35465.1811	26415.1658
104	0	0	29000.0473	0	0	0	0	36250.0591	36250.0591	26508.8315
105	145700	145700	56562.182	56562.182	89137.818	1457	29354.7273	0	30811.7273	26549.4248
106	0	89137.818	10293.3627	10293.3627	78844.4553	0	20997.7842	0	20997.7842	26497.5403
107	0	78844.4553	23865.3836	23865.3836	54979.0717	0	16727.9409	0	16727.9409	26407.0811
108	0	54979.0717	11707.1709	11707.1709	43271.9008	0	12281.3716	0	12281.3716	26277.4874
109	0	43271.9008	27900.9147	27900.9147	15370.9861	0	7330.36086	0	7330.36086	26105.2408
110	130329.014	145700	84791.9599	84791.9599	60908.0401	1457	25826.005	0	27283.005	26115.8513
111	0	60908.0401	43632.2694	43632.2694	17275.7706	0	9772.97634	0	9772.97634	25969.9328
112	0	17275.7706	27635.1102	17275.7706	0	0	2159.47133	12949.1745	15108.6459	25873.8152
113	0	0	7132.23277	0	0	0	0	8915.29096	8915.29096	25725.0562
114	0	0	46754.4837	0	0	0	0	58443.1046	58443.1046	26009.561
115	145700	145700	29526.1847	29526.1847	116173.815	1457	32734.2269	0	34191.2269	26080.0926
116	0	116173.815	11213.1433	11213.1433	104960.672	0	27641.8109	0	27641.8109	26093.4406
117	0	104960.672	107735.905	104960.672	0	0	13120.084	3469.04122	16589.1252	26012.8955
118	0	0	66008.7273	0	0	0	0	82510.9091	82510.9091	26487.6688
119	0	0	88207.1976	0	0	0	0	110258.997	110258.997	27185.7632
120	145700	145700	6910.06235	6910.06235	138789.938	1457	35561.2422	0	37018.2422	27267.0233
121	0	138789.938	4548.30092	4548.30092	134241.637	0	34128.9468	0	34128.9468	27323.2686
122	0	134241.637	8340.36931	8340.36931	125901.267	0	32517.863	0	32517.863	27365.5011
123	0	125901.267	24631.4071	24631.4071	101269.86	0	28396.391	0	28396.391	27373.8147
124	0	101269.86	32500.427	32500.427	68769.4334	0	21254.9117	0	21254.9117	27324.8635
125	76930.5666	145700	14103.574	14103.574	131596.426	1457	34662.0533	0	36119.0533	27394.6586
126	0	131596.426	8959.52264	8959.52264	122636.903	0	31779.1662	0	31779.1662	27429.1823
127	0	122636.903	14976.1237	14976.1237	107660.78	0	28787.2104	0	28787.2104	27439.7919

Día	Entregas del proveedor	Inventario inicial	Demanda	Ventas	Inventario final	Costo de Ordenar	Costo de llevar inventario	Costo de Faltante	Costo Total	Costo Promedio
128	0	107660.78	37000.0694	37000.0694	70660.7104	0	22290.1863	0	22290.1863	27399.8725
129	0	70660.7104	35263.1492	35263.1492	35397.5611	0	13257.2839	0	13257.2839	27291.0833
130	110302.439	145700	23505.52	23505.52	122194.48	1457	33486.81	0	34943.81	27349.5011
131	0	122194.48	41815.5395	41815.5395	80378.9405	0	25321.6776	0	25321.6776	27334.1388
132	0	80378.9405	48695.1604	48695.1604	31683.7801	0	14007.8401	0	14007.8401	27233.9411
133	0	31683.7801	51263.891	31683.7801	0	0	3960.47251	24475.1386	28435.6111	27242.9087
134	0	0	11220.508	0	0	0	0	14025.635	14025.635	27145.003
135	145700	145700	49009.8081	49009.8081	96690.1919	1457	30298.774	0	31755.774	27178.9057
136	0	96690.1919	18961.7847	18961.7847	77728.4072	0	21802.3249	0	21802.3249	27139.6606
137	0	77728.4072	40260.5554	40260.5554	37467.8518	0	14399.5324	0	14399.5324	27047.3409
138	0	37467.8518	32771.4135	32771.4135	4696.43837	0	5270.53628	0	5270.53628	26890.6732
139	0	4696.43837	16065.796	4696.43837	0	0	587.054796	14211.697	14798.7518	26804.3023
140	145700	145700	97254.9735	97254.9735	48445.0265	1457	24268.1283	0	25725.1283	26796.6486
141	0	48445.0265	10112.4005	10112.4005	38332.626	0	10847.2066	0	10847.2066	26684.3286
142	0	38332.626	10412.1604	10412.1604	27920.4656	0	8281.63645	0	8281.63645	26555.6384
143	0	27920.4656	11638.2333	11638.2333	16282.2323	0	5525.33724	0	5525.33724	26409.5947
144	0	16282.2323	49242.5219	16282.2323	0	0	2035.27904	41200.362	43235.641	26525.6364
145	145700	145700	77528.4278	77528.4278	68171.5722	1457	26733.9465	0	28190.9465	26537.0426
146	0	68171.5722	5159.95827	5159.95827	63011.614	0	16397.8983	0	16397.8983	26468.0689
147	0	63011.614	13492.212	13492.212	49519.4019	0	14066.377	0	14066.377	26384.2736
148	0	49519.4019	75989.7808	49519.4019	0	0	6189.92524	33087.9736	39277.8989	26470.808
149	0	0	10504.9525	0	0	0	0	13131.1906	13131.1906	26381.8773
150	145700	145700	5845.86392	5845.86392	139854.136	1457	35694.267	0	37151.267	26453.1977
151	0	139854.136	20954.2295	20954.2295	118899.907	0	32344.2553	0	32344.2553	26491.9547
152	0	118899.907	5246.41008	5246.41008	113653.497	0	29069.1754	0	29069.1754	26508.7993
153	0	113653.497	6375.5611	6375.5611	107277.935	0	27616.429	0	27616.429	26515.9917

Día	Entregas del proveedor	Inventario inicial	Demanda	Ventas	Inventario final	Costo de Ordenar	Costo de llevar inventario	Costo de Faltante	Costo Total	Costo Promedio
154	0	107277.935	5625.18143	5625.18143	101652.754	0	26116.3362	0	26116.3362	26513.4132
155	44047.246	145700	43350.4443	43350.4443	102349.556	1457	31006.1945	0	32463.1945	26551.5529
156	0	102349.556	3674.77177	3674.77177	98674.784	0	25128.0425	0	25128.0425	26542.4859
157	0	98674.784	14525.035	14525.035	84149.7489	0	22853.0666	0	22853.0666	26519.1352
158	0	84149.7489	3737.37205	3737.37205	80412.3769	0	20570.2657	0	20570.2657	26481.7209
159	0	80412.3769	44166.6036	44166.6036	36245.7733	0	14582.2688	0	14582.2688	26407.3493
160	109454.227	145700	45673.1213	45673.1213	100026.879	1457	30715.8598	0	32172.8598	26443.1599
161	0	100026.879	12997.5931	12997.5931	87029.2856	0	23382.0205	0	23382.0205	26424.264
162	0	87029.2856	58754.8984	58754.8984	28274.3871	0	14412.9591	0	14412.9591	26350.575
163	0	28274.3871	121054.503	28274.3871	0	0	3534.29839	115975.145	119509.443	26918.6169
164	0	0	2529.95651	0	0	0	0	3162.44563	3162.44563	26774.6401
165	145700	145700	29794.99	29794.99	115905.01	1457	32700.6263	0	34157.6263	26819.1159
166	0	115905.01	12443.6453	12443.6453	103461.365	0	27420.7968	0	27420.7968	26822.7188
167	0	103461.365	35249.2395	35249.2395	68212.1252	0	21459.1862	0	21459.1862	26790.793
168	0	68212.1252	41917.5944	41917.5944	26294.5308	0	11813.332	0	11813.332	26702.169
169	0	26294.5308	72956.9508	26294.5308	0	0	3286.81635	58328.025	61614.8414	26907.5376
170	145700	145700	80298.3318	80298.3318	65401.6682	1457	26387.7085	0	27844.7085	26913.0182
171	0	65401.6682	4535.99862	4535.99862	60865.6696	0	15783.4172	0	15783.4172	26848.3112
172	0	60865.6696	51691.9781	51691.9781	9173.69153	0	8754.92014	0	8754.92014	26743.7251
173	0	9173.69153	18304.7221	9173.69153	0	0	1146.71144	11413.7882	12560.4996	26662.2123
174	0	0	29430.4693	0	0	0	0	36788.0866	36788.0866	26720.0745
175	145700	145700	29939.143	29939.143	115760.857	1457	32682.6071	0	34139.6071	26762.2309
176	0	115760.857	10075.7623	10075.7623	105685.095	0	27680.744	0	27680.744	26767.4202
177	0	105685.095	16996.2549	16996.2549	88688.8397	0	24296.7418	0	24296.7418	26753.54
178	0	88688.8397	43522.0476	43522.0476	45166.7921	0	16731.954	0	16731.954	26697.5535
179	0	45166.7921	8265.11067	8265.11067	36901.6814	0	10258.5592	0	10258.5592	26606.2258

Día	Entregas del proveedor	Inventario inicial	Demanda	Ventas	Inventario final	Costo de Ordenar	Costo de llevar inventario	Costo de Faltante	Costo Total	Costo Promedio
180	108798.319	145700	63801.7826	63801.7826	81898.2174	1457	28449.7772	0	29906.7772	26624.4609
181	0	81898.2174	35609.5458	35609.5458	46288.6716	0	16023.3611	0	16023.3611	26566.2131
182	0	46288.6716	3678.23391	3678.23391	42610.4377	0	11112.3887	0	11112.3887	26481.7659
183	0	42610.4377	11078.2358	11078.2358	31532.2019	0	9267.82994	0	9267.82994	26388.2119
184	0	31532.2019	10667.5318	10667.5318	20864.6701	0	6549.609	0	6549.609	26280.9762
185	124835.33	145700	2595.71675	2595.71675	143104.283	1457	36100.5354	0	37557.5354	26341.6029
186	0	143104.283	13284.6412	13284.6412	129819.642	0	34115.4907	0	34115.4907	26383.1745
187	0	129819.642	6931.12632	6931.12632	122888.516	0	31588.5197	0	31588.5197	26410.8625
188	0	122888.516	11624.1133	11624.1133	111264.402	0	29269.1148	0	29269.1148	26425.9855
189	0	111264.402	18619.3311	18619.3311	92645.0714	0	25488.6842	0	25488.6842	26421.0524
190	53054.9286	145700	61561.1494	61561.1494	84138.8506	1457	28729.8563	0	30186.8563	26440.7686
191	0	84138.8506	9227.39882	9227.39882	74911.4518	0	19881.2878	0	19881.2878	26406.6047
192	0	74911.4518	82392.4186	74911.4518	0	0	9363.93147	9351.20855	18715.14	26366.7525
193	0	0	37611.4369	0	0	0	0	47014.2961	47014.2961	26473.1831
194	0	0	7416.6753	0	0	0	0	9270.84413	9270.84413	26384.966
195	145700	145700	5642.16728	5642.16728	140057.833	1457	35719.7291	0	37176.7291	26440.026
196	0	140057.833	27463.7864	27463.7864	112594.046	0	31581.4849	0	31581.4849	26466.1248
197	0	112594.046	12384.8103	12384.8103	100209.236	0	26600.4103	0	26600.4103	26466.803
198	0	100209.236	1094.72926	1094.72926	99114.5068	0	24915.4678	0	24915.4678	26459.0074
199	0	99114.5068	10018.5324	10018.5324	89095.9744	0	23526.3101	0	23526.3101	26444.3439
200	56604.0256	145700	90653.5794	90653.5794	55046.4206	1457	25093.3026	0	26550.3026	26444.871
201	0	55046.4206	67000.4795	55046.4206	0	0	6880.80257	14942.5737	21823.3763	26421.9923
202	0	0	7418.23838	0	0	0	0	9272.79797	9272.79797	26337.5136
203	0	0	6305.82325	0	0	0	0	7882.27907	7882.27907	26247.0467
204	0	0	33478.1012	0	0	0	0	41847.6265	41847.6265	26323.1471
205	145700	145700	5846.41643	5846.41643	139853.584	1457	35694.1979	0	37151.1979	26375.7105

Día	Entregas del proveedor	Inventario inicial	Demanda	Ventas	Inventario final	Costo de Ordenar	Costo de llevar inventario	Costo de Faltante	Costo Total	Costo Promedio
206	0	139853.584	849.489209	849.489209	139004.094	0	34857.2097	0	34857.2097	26416.6839
207	0	139004.094	28867.3207	28867.3207	110136.774	0	31142.6085	0	31142.6085	26439.4047
208	0	110136.774	3243.74694	3243.74694	106893.027	0	27128.7251	0	27128.7251	26442.7029
209	0	106893.027	48191.2589	48191.2589	58701.7679	0	20699.3493	0	20699.3493	26415.3536
210	86998.2321	145700	11692.7809	11692.7809	134007.219	1457	34963.4024	0	36420.4024	26462.7709
211	0	134007.219	13654.2124	13654.2124	120353.007	0	31795.0282	0	31795.0282	26487.923
212	0	120353.007	47171.5389	47171.5389	73181.4678	0	24191.8093	0	24191.8093	26477.1431
213	0	73181.4678	1083.33291	1083.33291	72098.1349	0	18159.9503	0	18159.9503	26438.2778
214	0	72098.1349	26035.8219	26035.8219	46062.3129	0	14770.056	0	14770.056	26384.007
215	99637.6871	145700	9338.46847	9338.46847	136361.532	1457	35257.6914	0	36714.6914	26431.8342
216	0	136361.532	21520.1187	21520.1187	114841.413	0	31400.368	0	31400.368	26454.7307
217	0	114841.413	36801.3915	36801.3915	78040.0214	0	24110.1793	0	24110.1793	26443.9758
218	0	78040.0214	5607.63747	5607.63747	72432.3839	0	18809.0507	0	18809.0507	26409.1132
219	0	72432.3839	84106.7583	72432.3839	0	0	9054.04799	14592.9679	23647.0159	26396.5582
220	145700	145700	9769.06342	9769.06342	135930.937	1457	35203.8671	0	36660.8671	26443.003
221	0	135930.937	27168.3897	27168.3897	108762.547	0	30586.6854	0	30586.6854	26461.6683
222	0	108762.547	20726.6361	20726.6361	88035.9108	0	24599.8072	0	24599.8072	26453.3191
223	0	88035.9108	22387.1653	22387.1653	65648.7455	0	19210.582	0	19210.582	26420.9855
224	0	65648.7455	2236.94498	2236.94498	63411.8005	0	16132.5683	0	16132.5683	26375.2592
225	82288.1995	145700	18667.4455	18667.4455	127032.555	1457	34091.5693	0	35548.5693	26415.849
226	0	127032.555	4702.23922	4702.23922	122330.315	0	31170.3587	0	31170.3587	26436.794
227	0	122330.315	90801.9862	90801.9862	31528.3291	0	19232.3306	0	19232.3306	26405.1955
228	0	31528.3291	11177.5995	11177.5995	20350.7296	0	6484.88233	0	6484.88233	26318.2072
229	0	20350.7296	5254.86857	5254.86857	15095.861	0	4430.82382	0	4430.82382	26223.0447
230	130604.139	145700	38713.5269	38713.5269	106986.473	1457	31585.8091	0	33042.8091	26252.5675
231	0	106986.473	5386.00009	5386.00009	101600.473	0	26073.3683	0	26073.3683	26251.7951

Día	Entregas del proveedor	Inventario inicial	Demanda	Ventas	Inventario final	Costo de Ordenar	Costo de llevar inventario	Costo de Faltante	Costo Total	Costo Promedio
232	0	101600.473	2705.55419	2705.55419	98894.9188	0	25061.924	0	25061.924	26246.6883
233	0	98894.9188	32349.7002	32349.7002	66545.2186	0	20680.0172	0	20680.0172	26222.8991
234	0	66545.2186	26663.7909	26663.7909	39881.4277	0	13303.3308	0	13303.3308	26167.9222
235	105818.572	145700	9064.27539	9064.27539	136635.725	1457	35291.9656	0	36748.9656	26212.7572
236	0	136635.725	29079.5371	29079.5371	107556.187	0	30523.989	0	30523.989	26230.948
237	0	107556.187	15998.3709	15998.3709	91557.8166	0	24889.2505	0	24889.2505	26225.3106
238	0	91557.8166	53827.4853	53827.4853	37730.3313	0	16161.0185	0	16161.0185	26183.2006
239	0	37730.3313	1750.26702	1750.26702	35980.0643	0	9213.79945	0	9213.79945	26112.4948
240	109719.936	145700	135371.474	135371.474	10328.5261	1457	19503.5658	0	20960.5658	26091.1175
241	0	10328.5261	2973.51943	2973.51943	7355.00665	0	2210.44159	0	2210.44159	25992.437
242	0	7355.00665	64333.3313	7355.00665	0	0	919.375831	71222.9058	72142.2816	26182.3541
243	0	0	48475.228	0	0	0	0	60594.0349	60594.0349	26323.3855
244	0	0	2426.36264	0	0	0	0	3032.9533	3032.9533	26228.3225
245	145700	145700	6783.88603	6783.88603	138916.114	1457	35577.0142	0	37034.0142	26272.2481
246	0	138916.114	24526.2794	24526.2794	114389.835	0	31663.2436	0	31663.2436	26294.074
247	0	114389.835	45642.4353	45642.4353	68747.3992	0	22892.1542	0	22892.1542	26280.3566
248	0	68747.3992	54026.197	54026.197	14721.2022	0	10433.5752	0	10433.5752	26216.7149
249	0	14721.2022	15267.0243	14721.2022	0	0	1840.15028	682.277655	2522.42793	26121.9378
250	145700	145700	3344.96141	3344.96141	142355.039	1457	36006.8798	0	37463.8798	26167.1248
251	0	142355.039	629.373253	629.373253	141725.665	0	35510.088	0	35510.088	26204.2
252	0	141725.665	41764.0188	41764.0188	99961.6465	0	30210.914	0	30210.914	26220.0368
253	0	99961.6465	21976.2327	21976.2327	77985.4138	0	22243.3825	0	22243.3825	26204.3807
254	0	77985.4138	79741.3428	77985.4138	0	0	9748.17673	2194.91123	11943.088	26148.4541
255	145700	145700	26520.3897	26520.3897	119179.61	1457	33109.9513	0	34566.9513	26181.3388
256	0	119179.61	253.227303	253.227303	118926.383	0	29763.2492	0	29763.2492	26195.2762
257	0	118926.383	13500.2825	13500.2825	105426.1	0	28044.0604	0	28044.0604	26202.4421

---

---

<b>Día</b>	<b>Entregas del proveedor</b>	<b>Inventario inicial</b>	<b>Demanda</b>	<b>Ventas</b>	<b>Inventario final</b>	<b>Costo de Ordenar</b>	<b>Costo de llevar inventario</b>	<b>Costo de Faltante</b>	<b>Costo Total</b>	<b>Costo Promedio</b>
258	0	105426.1	12291.3807	12291.3807	93134.7198	0	24820.1025	0	24820.1025	26197.1048
259	0	93134.7198	21026.2898	21026.2898	72108.43	0	20655.3937	0	20655.3937	26175.7906
260	73591.57	145700	75.2285064	75.2285064	145624.771	1457	36415.5964	0	37872.5964	26220.6059