



**Universidad Nacional Autónoma de México**

---

---

**Facultad de Ingeniería**

**Análisis de los Métodos de Exploración  
del Haz de Arreglos de Antenas Basados en  
Osciladores Acoplados**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

**Ingeniero Eléctrico y Electrónico**

PRESENTA:

**Roberto Zepeda Puebla**

DIRECTOR DE TESIS:

**Dr. José Ismael Martínez López**



Ciudad Universitaria, México, D.F.

2013



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **Agradecimientos**

Me gustaría agradecer a la Universidad por haberme dado una formación de la más alta calidad y a todos los excelentes profesores que tuve a lo largo de la carrera por haberme transmitido sus conocimientos, en especial a mi director de tesis, el Dr. José Ismael Martínez López, por su tiempo y asesoría que hicieron posible la realización de este trabajo y por ser un ejemplo a seguir en mis decisiones profesionales.

Esta tesis la dedico a mis padres, Georgina y Roberto, como un pequeño agradecimiento por su amor y apoyo incondicional.

# Índice

I.	Introducción	1
II.	Osciladores Acoplados y Sincronización	4
2.a.	Sincronicidad	4
2.b.	¿Qué es la Sincronización?	5
2.c.	Modelo Simple de Osciladores Acoplados	6
2.d.	Simulaciones Numéricas	9
III.	Encadenamiento por Inyección entre Osciladores Acoplados de Stephan	13
3.a.	El Fenómeno de Encadenamiento por Inyección	13
3.b.	Arreglos de Encadenamiento por Inyección Unilateral	17
3.c.	Encadenamiento por Inyección Bilateral o Sincronización Mutua	19
3.d.	Simulaciones Numéricas	24
IV.	Métodos de Exploración de Haz Basados en Osciladores Acoplados	29
4.a.	Modelo de Fase Generalizado	30
4.b.	Método de Desintonización de York	33
4.c.	Control por Fases de Acoplamiento con Red Recíproca de Hwang y Myung	36
4.d.	Control por Fases de Acoplamiento de un Arreglo Parcialmente No-Recíproco de Heath	42
4.e.	Control por Fases de Acoplamiento de un Arreglo Completamente No-Recíproco de Heath	44
4.f.	Simulaciones Numéricas	47

V.	Análisis de Estabilidad	61
5.a.	Análisis de Estabilidad del Método de Control por Fases de Acoplamiento de un Arreglo Completamente No-Recíproco de Heath	65
5.b.	Análisis de Estabilidad del Método de Desintonización de York	72
5.c.	Análisis de Estabilidad del Método de Control por Fases de Acoplamiento de un Arreglo Parcialmente No-Recíproco de Heath	73
5.d.	Análisis de Estabilidad del Método de Control por Fases de Acoplamiento con Red Recíproca de Hwang y Myung	78
5.e.	Simulaciones Numéricas	80
VI.	Conclusiones	85
	Referencias	87
	Apéndice	91

## I. Introducción

La exploración de haz electrónica o sin inercia es una pieza de tecnología clave en diversas aplicaciones comerciales y militares, incluyendo radar, vigilancia aérea, detección de colisiones, y antenas inteligentes para comunicaciones inalámbricas [33]. Normalmente, los arreglos de fase dependen de dispositivos llamados desplazadores de fase para asegurar el ajuste de fase apropiado en cada elemento del arreglo. Estos dispositivos pueden actuar sobre cada elemento por separado o entre elementos adyacentes; de cualquier modo, el número de desplazadores de fase es equiparable con el número de elementos presentes en el arreglo [34]. La utilización de estos métodos viene con ciertas dificultades: los desplazadores de fase son el elemento más caro y voluminoso de los arreglos de fase, son difíciles de integrar monolíticamente y presentan pérdidas considerables a frecuencias de microondas. Sin embargo, existen varias técnicas de exploración de haz alternativas que no requieren del uso de desplazadores de fase, tales como escaneo de frecuencia y redes de formadores de haces múltiples (ejemplos de esto son las lentes de Rotman y las matrices de Butler) [35][36]. En los últimos veinte años, se ha explorado la posibilidad de explotar las propiedades de sincronización de osciladores acoplados no-lineales como un método compacto y de bajo costo para lograr la exploración del haz de un arreglo de antenas.

La primera observación de la que se tiene registro sobre la sincronización de osciladores acoplados fue por parte de Huygens en 1665 [37]. Desde entonces, este fenómeno ubicuo ha sido encontrado también en sistemas no-mecánicos, con ejemplos presentes en los campos de la electrónica, biología y óptica [38]-[41]. Aunque existen varias definiciones de sincronización, todas ellas comparten una misma característica: a través de sus interacciones, sistemas no-lineales distintos evolucionarán dinámicamente tal que se lleguen a comportar de forma similar; además, dichos sistemas son auto-regulatorios, es decir, cualquier desviación con respecto a este comportamiento es eliminada intrínsecamente. Un dispositivo muy conocido que opera justo con este principio es el lazo de fase encadenada. En lo que sigue, a elementos distintos (osciladores no-lineales) se les permitirá interactuar entre ellos (por medio un acoplamiento mutuo en lugar del acoplamiento unidireccional que se utiliza en el lazo de fase encadenada) y eventualmente encadenarse en fase, es decir sincronizarse con una diferencia de fase estática, bien definida entre elementos adyacentes.

En los sistemas de osciladores acoplados, es común que existan múltiples modos de operación, pero en el caso de aplicaciones de exploración de haz, se prefieren sistemas de sincronización mutua o de forma externa de un solo modo. El funcionamiento adecuado del arreglo se define mediante un análisis de estabilidad.

Uno de los primeros en proponer la utilización de la sincronización de osciladores acoplados como un método de exploración de haz sin necesidad de desplazadores de fase fue Stephan [1][12][14]. Aprovechando el fenómeno de encadenamiento por inyección, se propuso permitir la interacción entre los osciladores, y de esta forma, se podía obtener una progresión de fase constante a lo largo del arreglo que se podía controlar a través de modificar la diferencia de fase entre dos

señales inyectadas a los extremos del arreglo. Este esquema reducía la complejidad del circuito a un solo desplazador de fase. Al final, las limitaciones más importantes de esta técnica afectaban el rango de exploración y el número de osciladores.

La posibilidad de explotar las propiedades de la dinámica de osciladores acoplados para la exploración de haz fue después explorada por York [7][10], quien propuso un método que no necesitaba de desplazador de fase alguno ya que eliminaba la necesidad de inyectar señales a los extremos del arreglo. Este esquema utilizaba la desintonización de las frecuencias de carrera libre de los elementos de los extremos como parámetro de control. El método de York se veía igualmente limitado en el rango de exploración, pero no en el número de osciladores.

Hwang y Myung, por su parte, propusieron un esquema que utilizaba las fases de acoplamiento de los extremos del arreglo como parámetro de control [17]. La ventaja más importante con respecto al método de York era que en este método, la relación entre el parámetro de control y el gradiente de fase deseado era lineal mientras que para el método de York la relación era no-lineal. Sin embargo, esta técnica presentaba la misma limitación en el rango de exploración.

Otros dos métodos de exploración de haz que utilizaban las fases de acoplamiento como parámetro de control fueron propuestos por Heath [18]. En estos métodos, se introdujo un acoplamiento no-recíproco que permitía realizar la exploración de haz con dos esquemas, uno parcial y otro totalmente no-recíproco. El método parcialmente no-recíproco era similar al de Hwang y Myung en que se manipulaban las fases de los extremos, con la excepción de que todos los osciladores contribuían a la potencia radiada; en el método de Hwang y Myung, se debían de excluir los dos osciladores de los extremos. En el método totalmente no-recíproco, se manipulaban todas las fases de acoplamiento del arreglo y esto maximizaba el rango de exploración al hemisferio completo.

Esta tesis presenta un análisis comparativo de los diferentes métodos de exploración del haz de arreglos de antenas basados en osciladores acoplados. El objetivo principal será el de estimar la respuesta de los arreglos a partir de sus modelos matemáticos. Para esto, el enfoque de este trabajo estará en encontrar las condiciones bajo las cuales ciertos parámetros del sistema pueden ser ajustados de forma que ocurra la sincronización que establezca la relación de fases necesaria para la exploración de haz, así como las soluciones explícitas del modelo de fase (asumiendo que la dinámica de la amplitud ha alcanzado el estado estable) que den como resultado un gradiente de fase espacialmente uniforme a lo largo de un arreglo unidimensional. Finalmente, el análisis de estabilidad revelará la diferencia más importante que existe de un método a otro al definir el rango de ángulos de exploración obtenible con cada método.

El contenido de esta tesis se encuentra estructurado de la siguiente forma: El capítulo II introduce en cierto detalle el concepto de sincronización y otros conceptos importantes presentes en la dinámica de osciladores acoplados. El capítulo III describe las primeras aplicaciones de arreglos de osciladores acoplados a la exploración de haz, principalmente con el método de encadenamiento por inyección de Stephan. El capítulo IV presenta el análisis matemático de los métodos de exploración de haz de York, Hwang y Myung, y los dos métodos desarrollados por Heath.

Finalmente, en el capítulo V se desarrolla el análisis de estabilidad de las soluciones asociadas a cada esquema del capítulo IV; las limitaciones en el rango de exploración se deducen a partir de los exponentes de Lyapunov. Cada capítulo se complementa con simulaciones numéricas que respaldan los resultados obtenidos analíticamente; en el apéndice de esta tesis se incluyen los códigos de MATLAB de estas simulaciones.

## II. Osciladores Acoplados y Sincronización

En este capítulo, se introduce el concepto de sincronización en el contexto de la dinámica de osciladores acoplados y se presenta un ejemplo básico de dos osciladores. Esta información ayudará al entendimiento de temas posteriores presentes en este trabajo de tesis.

### 2.a. *Sincronicidad*

El estudio de la sincronización de osciladores acoplados precede a la mecánica Newtoniana. En 1665, Christian Huygens se percató de que las masas de dos relojes de péndulo montados sobre una tabla sostenida por dos sillas oscilaban a la misma frecuencia [37]. Curiosamente, este estado de movimiento era resistente a la presencia de perturbaciones; al golpear ligeramente una de las masas, los relojes regresarían, después de un intervalo de tiempo, a su estado de oscilación síncrona. Huygens conjeturó que este comportamiento era el resultado de interacciones imperceptibles entre los dos relojes a través de vibraciones en la viga de donde se encontraban colgados. Aunque Huygens no contaba con las herramientas matemáticas necesarias para desarrollar una teoría, otros han tratado de explicar lo que vio [42].

Existen numerosos ejemplos de sincronización en física y biología, incluyendo láseres [43]-[48], circuitos eléctricos [49]-[51], las células marcapasos del corazón [52]-[56], el destello de las luciérnagas [57][58], el ritmo circadiano [59] y los ciclos menstruales de las mujeres [60]. En cada uno, se considera que los osciladores individuales (láseres, luciérnagas, células marcapasos, etc.) poseen frecuencias naturales ligeramente distintas entre sí. Solos, sus oscilaciones no se correlacionan. Sin embargo, al interactuar unos con otros, es posible que las oscilaciones resultantes compartan una frecuencia en común. El destello sincrónico de las luciérnagas es probablemente el ejemplo más sorprendente visualmente: árboles enteros repletos de miles de luciérnagas destellando al unísono. En este caso, se cree que la interacción se da a través de un estímulo visual.

Debido a su naturaleza ubicua, una cantidad sustancial de trabajo se le ha dedicado al desarrollo de una teoría cuantitativa general para describir este fenómeno [61]-[71]. Sin embargo, lo que hace difícil que exista progreso, es que la sincronización requiere de no-linealidades; en otras palabras, osciladores lineales no pueden sincronizarse. Debido a la superposición, osciladores lineales no-idénticos interactuando entre sí, sólo pueden producir beats, no una sola frecuencia.

Un discurso exhaustivo sobre la literatura dedicada a este problema podría llenar volúmenes de libros y por lo tanto, está mucho más allá del enfoque de esta tesis. El propósito de esta sección es el de establecer lo amplio y diverso que es este fenómeno, su contexto histórico y el hecho de que su origen es inherentemente no-lineal. El resto de este capítulo está dedicado a la descripción, en cierto detalle, de varios tipos de sincronización y a la presentación de un problema importante que ilustra conceptos fundamentales relacionados a la sincronización de osciladores acoplados.

## 2.b. ¿Qué es la Sincronización?

Por lo general, la gente tiene un entendimiento intuitivo del concepto de sincronización. Si se les pidieran ejemplos, una banda de guerra o un desfile militar puede que sean respuestas comunes; el comportamiento idéntico de los participantes es fácil de visualizar. En el estudio de la dinámica de osciladores acoplados, sin embargo, se utilizan varias definiciones diferentes de sincronización. Las más frecuentes son sincronización completa, sincronización de fase y sincronización de frecuencia.

El desfile militar es un ejemplo clásico de sincronización completa. Los diferentes elementos (en este caso, personas) se comportan exactamente de forma idéntica. Expresado matemáticamente, considérense los dos sistemas siguientes:

$$\dot{x} = F(x, y, \rho), \quad (2.1)$$

$$\dot{y} = G(x, y, \sigma), \quad (2.2)$$

en donde  $x$  y  $y$  son las variables dinámicas,  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$  son sus derivadas,  $\rho$  y  $\sigma$  son ciertos juegos de parámetros y  $F$  y  $G$  son funciones. En el caso de sincronización completa,  $x = y$  para todo instante de tiempo. Trazando la gráfica de  $x$  contra  $y$ , la curva resultante sería una línea recta de  $45^\circ$ . Como su nombre lo indica, la sincronización completa es la definición de sincronización más restrictiva posible.

Sincronización de fase (o encadenamiento de fase) es una definición ligeramente más general. Una de las formas más fáciles de entender el concepto de sincronización de fase es visualizando dos puntos moviéndose alrededor de un círculo a velocidad constante. Si los dos puntos se encuentran uno sobre otro, se dice que están exactamente en-fase (y, en ese caso, son un ejemplo de sincronización completa); sin embargo, si se encuentran separados un cierto ángulo, pero esa diferencia angular nunca cambia, se dice que los dos objetos están sincronizados en fase. El movimiento de los brazos de una persona al caminar es un buen ejemplo de esto: los brazos se van balanceando hacia adelante y hacia atrás con un desfase de aproximadamente  $180^\circ$ , también conocido como fuera-de-fase o contrafase.

Sincronización de frecuencia (o encadenamiento de frecuencia) es aún más general. Este tipo de sincronización se puede ejemplificar claramente mediante un sistema de dos péndulos giratorios idénticos. Primeramente, trate de visualizar sólo uno de los péndulos: a medida que va girando, su velocidad angular va cambiando (avanza más rápido cuando pasa por el punto más bajo del movimiento). Ahora, agregue un segundo péndulo idéntico al primero. Al ser idénticos, ambos tendrán la misma frecuencia natural; consecuentemente, cada uno completará una oscilación en el mismo periodo de tiempo. Debido a su rotación no-uniforme, cualquier diferencia de fase diferente de cero estará variando en el tiempo. En otras palabras, en cada instante de tiempo, uno

de los osciladores estará moviéndose más rápido que el otro y por esta razón la separación angular entre ellos no puede mantenerse constante en el tiempo. A pesar de que no están completamente sincronizados, ni tampoco sincronizados en fase, sí comparten una misma frecuencia, y en ese sentido, están sincronizados.

En esta tesis se considerarán ambos conceptos: sincronización de fase y sincronización de frecuencia. La siguiente sección consiste de un ejemplo diseñado para ilustrar estos dos conceptos de forma básica mediante un modelo simple de dos osciladores acoplados. En este ejemplo, se le dará una descripción matemática concreta a las nociones de sincronización de fase y jale de frecuencia.

### **2.c. Modelo Simple de Osciladores Acoplados**

Considérese el siguiente modelo simple de dos osciladores acoplados no-idénticos:

$$\dot{\phi}_1 = \omega_1 + k_1 \sin(\phi_2 - \phi_1), \quad (2.3)$$

$$\dot{\phi}_2 = \omega_2 + k_2 \sin(\phi_1 - \phi_2), \quad (2.4)$$

en donde  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son las fases de los osciladores y las magnitudes de acoplamiento,  $k_1$  y  $k_2$ , son ambas positivas. Si los osciladores no estuvieran acoplados, es decir  $k_1 = k_2 = 0$ , las fases evolucionarían de acuerdo a sus respectivas frecuencias de carrera libre,  $\omega_1$  y  $\omega_2$ :

$$\phi_1 = \omega_1 t, \quad (2.5)$$

$$\phi_2 = \omega_2 t, \quad (2.6)$$

en donde, por simplicidad, se asume que ambas comienzan en cero. Vistos como puntos moviéndose alrededor de un círculo, los puntos rotarían a diferente razón con el oscilador más rápido rebasando al más lento cada  $|\omega_1 - \omega_2|^{-1}$  segundos. Por lo tanto, en la ausencia de acoplamiento, estos osciladores no están sincronizados.

El tipo de acoplamiento presente en este modelo sugiere que los dos osciladores podrían sincronizarse. Si el oscilador 1 se adelanta al oscilador 2, el segundo término en (2.3) se vuelve negativo. Entonces, la frecuencia del oscilador 1 decrece hasta que el oscilador 2 lo rebasa. En ese momento, el segundo término se vuelve positivo y el oscilador 1 incrementa de regreso su velocidad. De la forma de (2.4), el oscilador 2 se comporta de manera similar. Cualitativamente, este proceso parece favorecer a dos osciladores corriendo a la misma frecuencia.

Utilizando (2.3) y (2.4), la diferencia de fase entre los dos osciladores,  $\theta \equiv \phi_2 - \phi_1$ , obedece la siguiente ecuación dinámica:

$$\dot{\theta} = \omega_2 - \omega_1 - k_2 \sin \theta - k_1 \sin \theta . \quad (2.7)$$

O, simplificando la notación

$$\dot{\theta} = \omega_2 - \omega_1 - k \sin \theta , \quad (2.8)$$

en donde  $k = k_2 + k_1$ . Si los osciladores están sincronizados en fase (encadenados en fase), entonces la diferencia de fase debe ser un valor constante:  $\theta = cte$ . Por lo tanto,

$$0 = \omega_2 - \omega_1 - k \sin \theta . \quad (2.9)$$

Despejando,

$$\sin \theta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k} . \quad (2.10)$$

Esta expresión relaciona la diferencia de fase entre los osciladores sincronizados a sus frecuencias de carrera libre y magnitudes de acoplamiento. Para que se pueda satisfacer esta ecuación (es decir, para que ocurra el encadenamiento de fase), el lado derecho de la igualdad debe ser menor a uno en magnitud; en otras palabras, el acoplamiento debe ser lo suficientemente fuerte para sobreponerse a la diferencia que existe entre las frecuencias de carrera libre de los osciladores.

El resultado cualitativo tiene sentido. Considérese lo que este significa en el contexto del caso maestro-esclavo:  $k_1 = 0, k_2 \neq 0$ . Para un acoplamiento muy pequeño, el esclavo (oscilador 2) no sigue al maestro (oscilador 1). Sin embargo, si el maestro ejerce influencia suficiente (es decir, si el acoplamiento es lo suficientemente fuerte), entonces puede dictar el comportamiento del esclavo. A pesar de que no existe mucha distinción en lo que se refiere a maestro y esclavo para el caso más general de acoplamiento bidireccional ( $k_1, k_2 \neq 0$ ), el hecho de que sólo es necesaria una

cantidad mínima de acoplamiento para lograr la sincronización no es tan sorprendente y probablemente coincide con lo que podría esperarse intuitivamente.

Vale la pena mencionar dos aspectos importantes de la ecuación (2.10). El primero es que cuando ocurre el encadenamiento de fase, coexisten dos soluciones: una más en-fase (más cercana a cero) y otra más fuera-de-fase (más cercana a  $\pi$ ). Es fácil demostrar que cuál de ellas es estable depende del signo de  $k$ ; en particular, para  $k$  positiva, la solución estable es la que está más en-fase. El segundo punto es que a medida que la magnitud de acoplamiento se vuelve muy grande con respecto a la diferencia entre las frecuencias de carrera libre, los osciladores no-idénticos actúan más como osciladores idénticos.

La frecuencia de los osciladores sincronizados en fase también se puede determinar. Dado que están encadenados en fase, los osciladores deben tener siempre frecuencias instantáneas idénticas. Por lo tanto,

$$\dot{\phi}_1 = \omega = \omega_1 + k_1 \sin \theta , \quad (2.11)$$

$$\dot{\phi}_2 = \omega = \omega_2 - k_2 \sin \theta . \quad (2.12)$$

Sumando estas dos ecuaciones,

$$2\omega = \omega_2 + \omega_1 + (k_1 - k_2) \sin \theta . \quad (2.13)$$

Despejando,

$$\omega = \frac{1}{2} [\omega_2 + \omega_1 + (k_1 - k_2) \sin \theta] . \quad (2.14)$$

O, utilizando (2.10),

$$\omega = \frac{1}{2} \left[ \omega_2 + \omega_1 + \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right) (\omega_2 - \omega_1) \right] . \quad (2.15)$$

Esta relación indica algo significativo: en general, los osciladores se sincronizarán con una frecuencia que difiere del simple promedio de las frecuencias de carrera libre. De hecho, sólo si se encuentran acoplados de forma idéntica tendrán una frecuencia de sincronización igual a la frecuencia de carrera libre promedio. Después de pensarlo unos momentos, este resultado no es tan sorprendente; parecería bastante inusual si, a pesar de tener diferentes magnitudes de acoplamiento, los osciladores en fase encadenada rotaran siempre a la frecuencia de carrera libre promedio. Por ejemplo, considérese el caso maestro-esclavo: es evidente que el esclavo oscilará a la frecuencia de carrera libre del maestro. Ahora, permitiendo que el esclavo influya ligeramente sobre el maestro; el comportamiento del maestro debería permanecer relativamente sin cambio alguno. Esto es, los osciladores deberían sincronizarse a una frecuencia muy cercana a la frecuencia de carrera libre del maestro, en lugar de al valor promedio.

Dos ideas importantes surgen de este modelo simple:

1. El acoplamiento provee un medio para alterar la frecuencia de los osciladores (también conocido como jale de frecuencia) tal que las frecuencias resultantes coinciden:  $\omega_1, \omega_2 \rightarrow \omega$ .
2. A fin de que la sincronización ocurra, el acoplamiento debe exceder un valor crucial; en particular,  $k_2 + k_1 > |\omega_2 - \omega_1|$ .

Aunque este resultado cualitativo es bastante representativo, no debe ser sobre-generalizado. Existen sistemas en los que incrementar la magnitud de acoplamiento puede anular, en lugar de mejorar, la sincronización [72][73]. Además, la sincronización no es sinónimo de diferencias de fase independientes del tiempo. Un buen ejemplo de esto es el de los dos péndulos giratorios: puede que completen una rotación en el mismo periodo de tiempo (que estén en frecuencia encadenada), sin tener nunca las mismas frecuencias instantáneas. A pesar de que comparten una frecuencia de vuelco en común, debido al carácter no-uniforme de su rotación, sus diferencias de fase crecen y disminuyen periódicamente en el tiempo.

Es cierto que los resultados cualitativos de este ejemplo simple no pueden ser vistos como “leyes” de la sincronización. Aun así, este modelo sirve como una buena introducción a ciertos temas recurrentes en el estudio de la dinámica de osciladores acoplados. A pesar de la complejidad de sistemas más sofisticados, las ideas encontradas en esta sección (jale de frecuencia, magnitud de acoplamiento crítica, etc.) siguen siendo muy relevantes.

## **2.d. Simulaciones Numéricas**

Para complementar y comprobar la información y las expresiones analíticas que surgen del modelo simple de dos osciladores acoplados de la sección anterior, se simuló el sistema de ecuaciones diferenciales de (2.3) y (2.4) en MATLAB; se introdujeron valores numéricos a las variables para obtener gráficas representativas de los conceptos que este ejemplo hace posible observar.

Se definieron

$$\omega_1 = 2 \text{ [rad/s] ,}$$

$$\omega_2 = 1 \text{ [rad/s] ,}$$

y

$$k_1 = 0.4 \text{ [rad/s] ,}$$

$$k_2 = 0.8 \text{ [rad/s] .}$$

En la figura 2.1, se muestra la gráfica de las fases de los osciladores resultantes. Claramente, después de cierto intervalo de tiempo, los osciladores se sincronizan con una diferencia de fase constante. Esta diferencia de fase se puede calcular mediante la ecuación (2.10) y queda como:

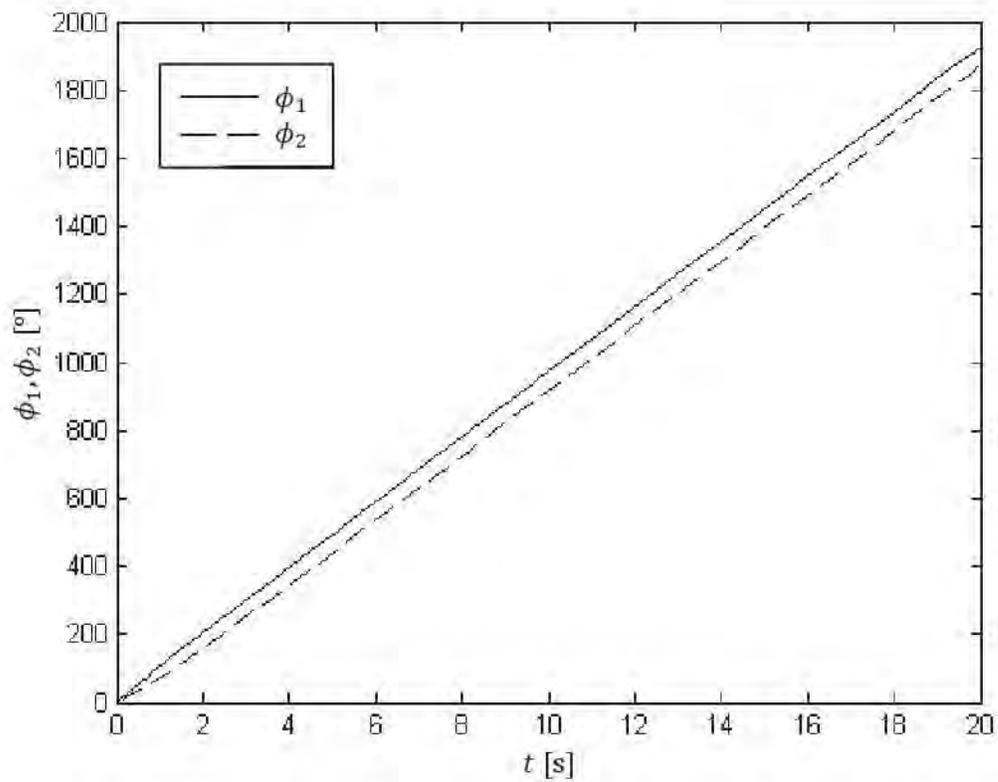
$$\theta = -56.4 \text{ [}^\circ\text{] .}$$

En la gráfica de la figura 2.2, se muestra la curva de  $\theta = \phi_2 - \phi_1$ . Con esta gráfica, se comprueba el valor calculado con la ecuación (2.10).

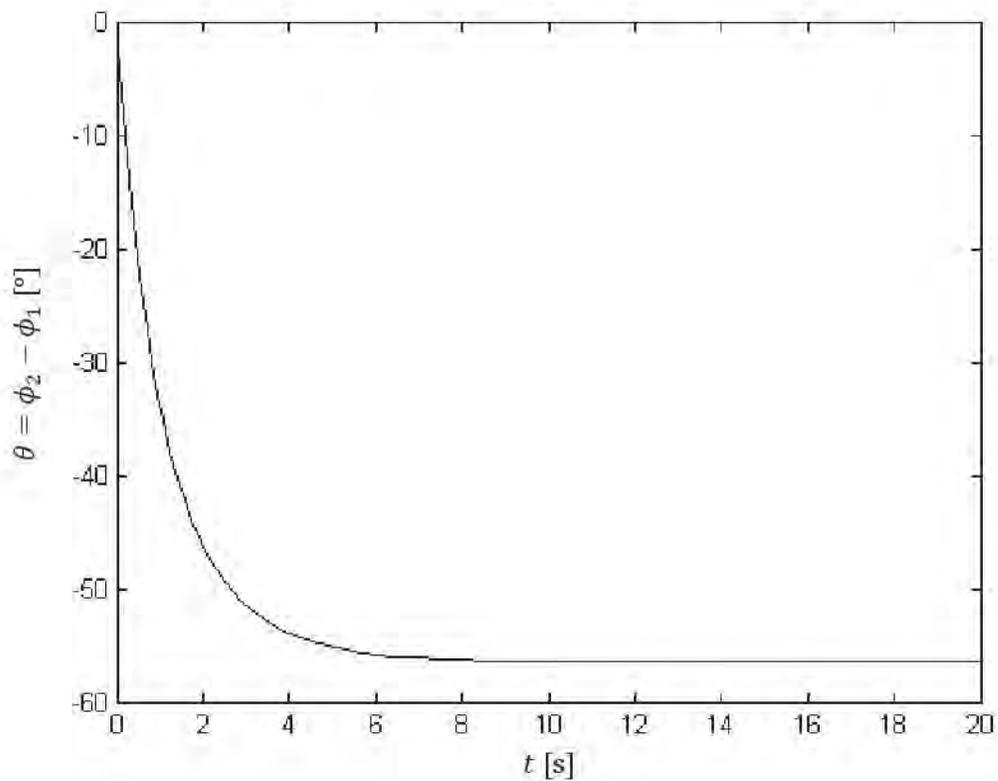
Finalmente, por medio de la ecuación (2.15) se puede calcular la frecuencia de sincronización de los osciladores. Se obtiene:

$$\omega = 1.67 \text{ [rad/s] .}$$

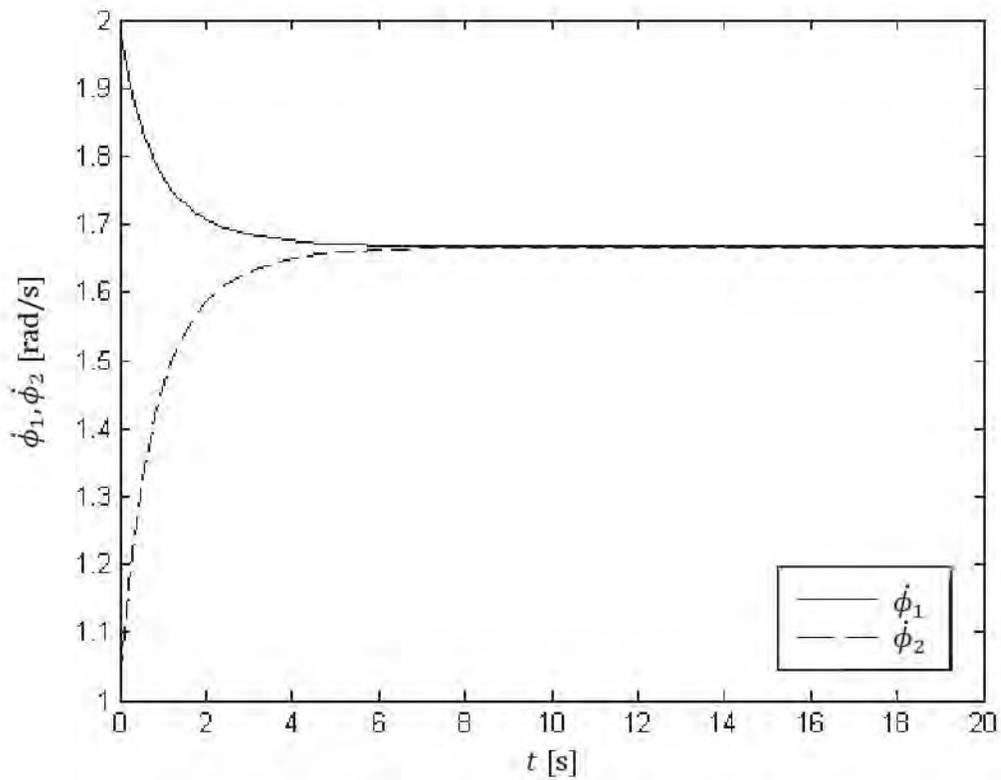
Esto coincide con el valor observable en la figura 2.3, correspondiente a la gráfica de la primera derivada de las fases de los osciladores. La frecuencia de sincronización resulta más cercana a la del oscilador 1 debido a que  $k_2 > k_1$ . De esta forma, se puede apreciar el fenómeno de jale de frecuencia.



**Figura 2.1.** Fases de los osciladores del modelo simple de dos osciladores acoplados.



**Figura 2.2.** Diferencia de fase entre los osciladores del modelo simple de dos osciladores acoplados.



**Figura 2.3.** Derivada con respecto al tiempo de las fases de los osciladores del modelo simple de dos osciladores acoplados.

Ahora que se tiene una mejor idea sobre los conceptos que serán utilizados en este trabajo de tesis, se puede proceder a hablar sobre las aplicaciones en arreglos de fase de esta propiedad de sincronización mutua entre osciladores. En el siguiente capítulo, se hablará sobre uno de los primeros métodos de exploración de haz basado en la dinámica de osciladores acoplados: el método de encadenamiento por inyección entre osciladores acoplados de Stephan.

### III. Encadenamiento por Inyección entre Osciladores Acoplados de Stephan

El primer arreglo de osciladores acoplados en el que fue posible obtener una sincronización mutua entre los elementos del arreglo fue propuesto por Stephan [1]. El arreglo de Stephan fue también uno de los primeros en usar sistemas de osciladores para la exploración del haz de un arreglo de antenas. El control de la fase por medio de osciladores no-lineales se basa en el fenómeno de encadenamiento por inyección. Stephan presentó un nuevo circuito que controlaba la fase de salida de cada elemento del arreglo por medio de un método único que utilizaba este efecto. Su método difería respecto a otras aplicaciones de encadenamiento por inyección a arreglos de antenas [2] en que aprovechaba el acoplamiento entre los osciladores, lo cual se veía anteriormente como algo no deseado.

Ejemplos de sistemas mecánicos que entran en sincronía con una fuente externa ya se conocían. Las primeras observaciones de las que se tiene registro fueron hechas por Huygens en sistemas de péndulos mecánicos sincronizados [3][37]. Adler fue uno de los primeros en estudiar el fenómeno de encadenamiento en osciladores electrónicos [4]. Adler desarrolló una expresión para el rango de frecuencias en el que un oscilador se mantendrá en encadenamiento con la fase de una señal inyectada. Mackey extendió el análisis de Adler al incluir los efectos de la modulación de la fase de la señal inyectada y encontró que los amplificadores de encadenamiento por inyección tienen ventajas importantes sobre amplificadores convencionales en la región de las microondas [5].

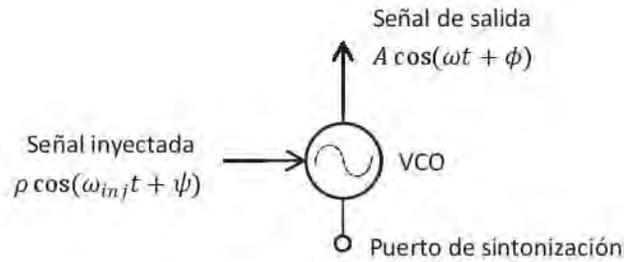
A continuación se presenta la teoría del concepto de encadenamiento por inyección a partir de la ecuación de Adler.

#### 3.a. El Fenómeno de Encadenamiento por Inyección

Utilizando un modelo simple de un oscilador sintonizado a una sola frecuencia, se puede demostrar que la fase de salida de un oscilador con una señal inyectada está dada por la ecuación de Adler [4][6][7]. Considerando que la amplitud de oscilación  $A$  es aproximadamente la amplitud de carrera libre de oscilación  $\alpha$ , la ecuación de Adler describe la dinámica de la fase del oscilador como

$$\dot{\phi} = \omega_0 - \omega_{inj} + \frac{\rho \omega_0}{\alpha 2Q} \sin(\psi - \phi), \quad (3.1)$$

en donde  $\omega_0$  es la frecuencia de carrera libre,  $\alpha$  es la amplitud de carrera libre de oscilación,  $Q$  es el factor de calidad del circuito resonante del oscilador,  $\omega_{inj}$  es la frecuencia de la señal inyectada,  $\rho$  es la amplitud de la señal inyectada,  $\psi$  es la fase de la señal inyectada y  $\phi$  es la fase a la salida del oscilador, esto se ilustra en la figura 3.1.



**Figura 3.1.** Oscilador controlado por voltaje (VCO) de encadenamiento por inyección.

La variable  $\Delta\omega_m$  estará definida por

$$\Delta\omega_m = \frac{\rho \omega_0}{\alpha 2Q}. \quad (3.2)$$

Si existe una solución de estado estable para la cual  $\dot{\phi} = 0$ , esto indica que el oscilador está sincronizado con la señal inyectada. Resolviendo para la diferencia de fase de estado estable entre la señal inyectada y el oscilador ( $\Delta\phi = \psi - \phi$ ), se obtiene

$$\Delta\phi = \sin^{-1} \left( \frac{\omega_{inj} - \omega_0}{\Delta\omega_m} \right), \quad (3.3)$$

lo cual indica que una solución de encadenamiento por inyección es posible sólo cuando la señal inyectada se encuentra dentro del "rango de captura" del oscilador, dado por  $\omega_0 \pm \Delta\omega_m$ .

La función seno inverso da varias posibles soluciones para la diferencia de fase en este rango; la solución correcta se encuentra a partir de un análisis de estabilidad.

Sea  $\phi = \phi^* + \eta$  la solución con perturbación, sustituyendo esto en (3.1), queda

$$\dot{\phi}^* + \dot{\eta} = \omega_0 - \omega_{inj} + \Delta\omega_m \sin(\psi - \phi^* - \eta)$$

ó

$$\dot{\phi}^* + \dot{\eta} = \omega_0 - \omega_{inj} + \Delta\omega_m \sin(\Delta\phi - \eta).$$

Utilizando la identidad trigonométrica para el seno de la suma de dos ángulos

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y ,$$

se obtiene

$$\dot{\phi}^* + \dot{\eta} = \omega_0 - \omega_{inj} + \Delta\omega_m [\sin \Delta\phi \cos \eta - \cos \Delta\phi \sin \eta] .$$

Dado que las perturbaciones son cantidades pequeñas y

$$\cos x \approx 1 ,$$

$$\sin x \approx x ,$$

para  $x$  pequeña, queda

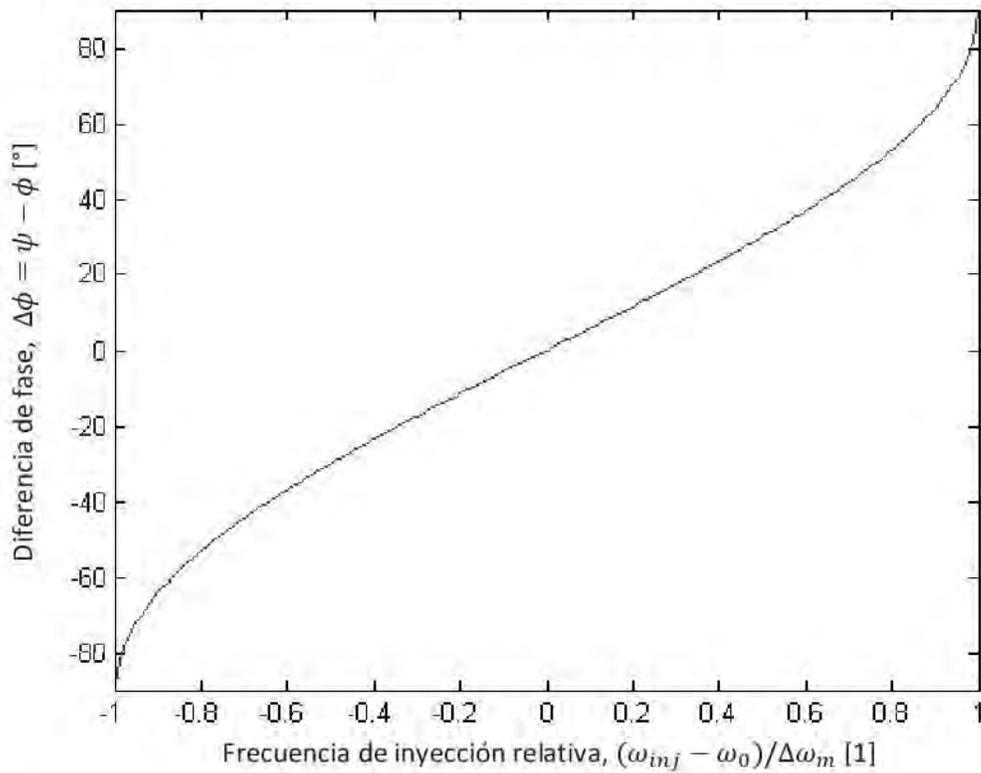
$$\dot{\phi}^* + \dot{\eta} = \omega_0 - \omega_{inj} + \Delta\omega_m [\sin \Delta\phi - \cos \Delta\phi \eta] . \quad (3.4)$$

Pero como

$$\dot{\phi}^* = \omega_0 - \omega_{inj} + \Delta\omega_m \sin \Delta\phi , \quad (3.5)$$

entonces

$$\dot{\eta} = -\Delta\omega_m \cos \Delta\phi \eta . \quad (3.6)$$



**Figura 3.2.** Diferencia de fase entre la señal inyectada y el oscilador en función de la frecuencia inyectada referida a la frecuencia de carrera libre del oscilador y al rango de captura.

La perturbación decaerá en el tiempo si  $\cos \Delta\phi \geq 0$ , lo cual restringe la diferencia de fase a

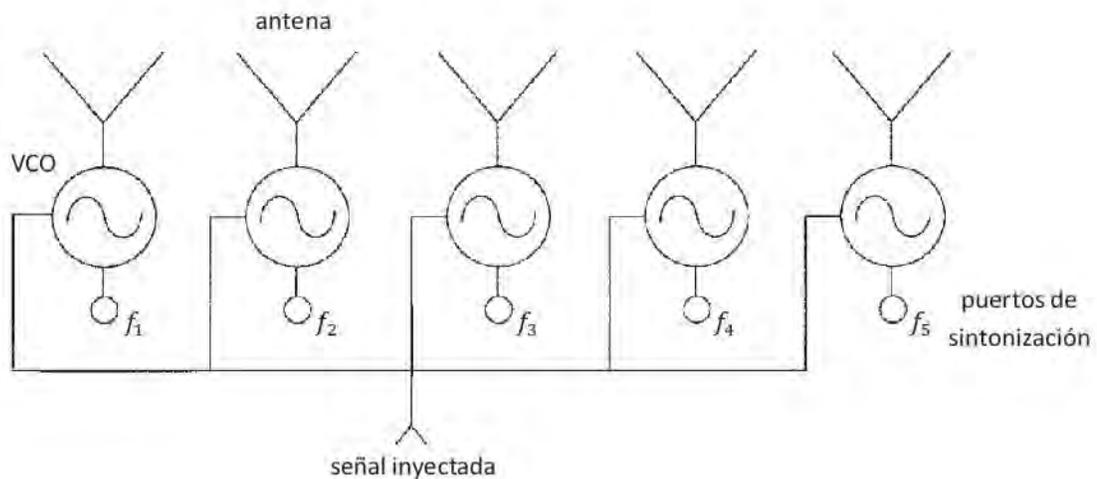
$$-\frac{\pi}{2} \leq \Delta\phi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3.7)$$

De acuerdo a (3.3), a medida que la señal inyectada es sintonizada a lo largo del rango de captura, la diferencia de fase entre el oscilador y la señal inyectada varía entre  $\pm\pi/2$ ; esto se muestra en la figura 3.2. Este cambio de fase inducido sugiere posibles esquemas para arreglos de fase utilizando encadenamiento por inyección, los cuales serán descritos a continuación.

### 3.b. Arreglos de Encadenamiento por Inyección Unilateral

#### Arreglo de Encadenamiento por Inyección con Alimentación Colectiva

La aplicación más directa del fenómeno de encadenamiento por inyección a un arreglo de osciladores para la exploración del haz de un arreglo de antenas es la que se muestra en la figura 3.3. Cada elemento del arreglo es un oscilador controlado por voltaje (VCO) que entrega energía a una antena. Los osciladores son alimentados por una señal en común (la señal de salida deseada). La fase de cada oscilador con respecto a la señal inyectada (y por lo tanto, con respecto al resto de los osciladores) puede ser modificada ajustando la frecuencia de carrera libre del oscilador de acuerdo a la figura 3.2.



**Figura 3.3.** Arreglo de encadenamiento por inyección con alimentación convencional. El haz a la salida puede ser orientado mediante el control electrónico del voltaje de sintonización de cada oscilador.

Arreglos como este sirven también para combinar potencia de forma eficiente; de hecho, varias de las técnicas que se describirán en este capítulo surgieron a partir de investigaciones de métodos para combinar potencia.

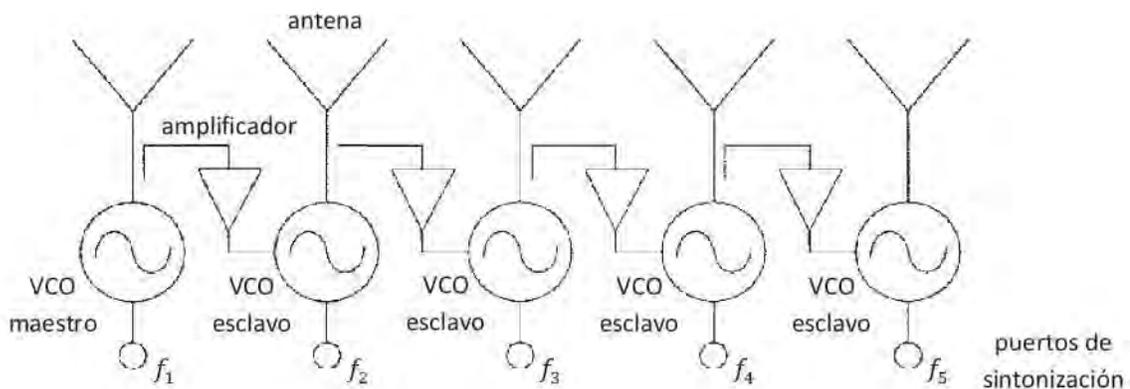
Como todas las demás técnicas de encadenamiento por inyección, este enfoque se ve limitado en banda por el rango de encadenamiento de los osciladores, que a su vez está definido por el factor de calidad y por la amplitud de la señal inyectada.

Un arreglo de antenas de 4x4 elementos que utiliza la topología de la figura 3.3 ha sido reportado en [8], aunque el énfasis fueron los aspectos del arreglo para combinar potencia y no la posible característica de escaneo de haz.

### Arreglo Acoplado en Cascada

Una variación de la idea anterior que elimina la estructura de alimentación colectiva involucra un arreglo de encadenamiento por inyección en cascada, en el cual cada elemento del arreglo aparece como esclavo del elemento que lo precede. Este concepto se ilustra en la figura 3.4 y ha sido probado en aplicaciones de exploración de haz [9].

Para asegurar que el encadenamiento por inyección sea unilateral, se usan amplificadores entre los osciladores, resultando en una matriz activa de acoplamiento no-recíproca. Como resultado, la dinámica de cada oscilador se rige esencialmente por la ecuación de Adler (3.1), y así el desfaseamiento relativo se establece ajustando la frecuencia de carrera libre de cada elemento de acuerdo a la figura 3.2. La presencia de los amplificadores aumenta la complejidad del circuito, pero ayuda a elevar el nivel de la señal inyectada para obtener un mayor rango de captura y por lo tanto, ancho de banda. Los amplificadores también sirven para acoplar sólo una pequeña parte de la potencia de salida de cada oscilador y de esta forma se logra que el acoplamiento no afecte demasiado el desempeño de cada oscilador y la mayor parte de la potencia se le entregue a la antena. Un arreglo de antenas de 4x1 elementos ha sido diseñado y probado para demostrar este concepto [10].



**Figura 3.4.** Osciladores acoplados mediante encadenamiento por inyección en cascada en configuración de esclavos a un oscilador maestro de bajo ruido. Cambiando los voltajes de sintonización se puede crear un cambio de fase progresivo a lo largo de arreglo.

Una característica propia de cualquier arreglo de encadenamiento por inyección es que los osciladores adoptarán las propiedades de ruido de la señal de referencia, aun cuando los osciladores sean bastante ruidosos. La red de acoplamiento también influirá en la reducción del ruido. El arreglo de la figura 3.4 tendrá en conjunto un bajo ruido de fase siempre y cuando la señal inyectada provenga de una fuente poco ruidosa. Sin embargo, un análisis muestra que existe una degradación por ruido al incrementar el número de elementos del arreglo [11].

### 3.c. Encadenamiento por Inyección Bilateral o Sincronización Mutua

La extensión más importante del concepto de encadenamiento por inyección es la de un arreglo de osciladores sincronizados de forma mutua, un arreglo de este tipo se muestra en la figura 3.5. Cada elemento se encuentra acoplado de forma bilateral a sus elementos vecinos en el arreglo. Este sistema fue propuesto por primera vez por Stephan [1][12]. Por medio del proceso de encadenamiento por inyección se consigue una coherencia mutua, pero las relaciones de fase en estado estable son más difíciles de calcular debido a que cada oscilador depende de la fase de los elementos adyacentes a él. Para poder determinar las relaciones de fase se debe resolver un sistema de ecuaciones simultáneas no-lineales [13]. Sin embargo, se pueden introducir las condiciones para la obtención del gradiente de fase necesario para la exploración del haz y de esta forma obtener una relación lineal que posteriormente será corroborada en la simulación del sistema de ecuaciones en MATLAB.

El arreglo de Stephan, como ya se mencionaba, fue uno de los primeros sistemas de osciladores para la exploración del haz de un arreglo de antenas. El arreglo de la figura 3.5 es un arreglo acoplado bilateralmente con señales inyectadas en los extremos del arreglo. Las dos señales inyectadas son iguales con una fase relativa variable, lo cual se implementa al dividir la señal proveniente de un oscilador maestro y creando un retraso en uno de los canales. Esta es una gran ventaja sobre las técnicas anteriores: las fases de un arreglo de muchos osciladores pueden ser controladas utilizando tan sólo dos señales inyectadas y además, con sólo cambiar la fase de una de ellas. Stephan encontró que, bajo ciertas condiciones, la diferencia de fase entre las señales inyectadas se divide uniformemente a lo largo del arreglo para producir una progresión de fase constante. Esto se puede modelar utilizando una versión modificada de la ecuación de Adler para múltiples osciladores acoplados con señales externas inyectadas. Asumiendo que las amplitudes son prácticamente las mismas, se puede demostrar [7] que un sistema de este tipo está descrito por las siguientes ecuaciones:

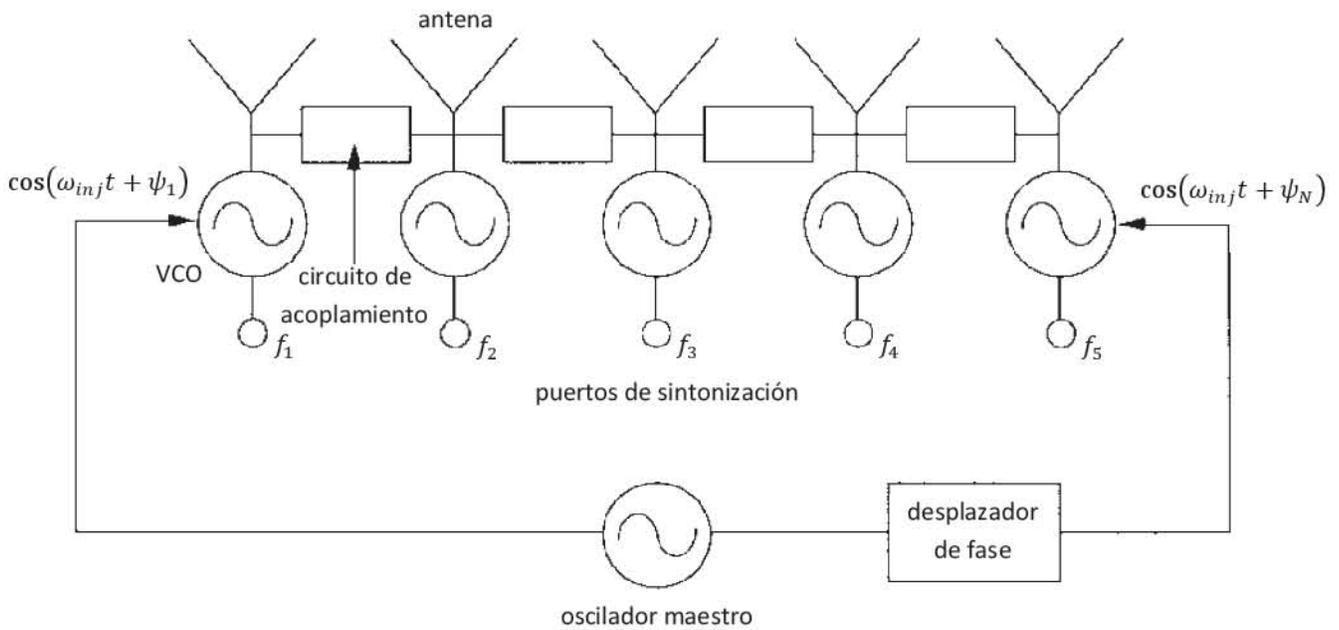
$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= \omega_1 - \omega_{inj} + \frac{\epsilon\omega_1}{2Q} \sin(\phi_2 - \phi_1) + \frac{\rho\omega_1}{2Q} \sin(\psi_1 - \phi_1) & j = 1 \\ \dot{\phi}_j &= \omega_j - \omega_{inj} + \frac{\epsilon\omega_j}{2Q} [\sin(\phi_{j+1} - \phi_j) + \sin(\phi_{j-1} - \phi_j)] & j = 2, \dots, N-1 \\ \dot{\phi}_N &= \omega_N - \omega_{inj} + \frac{\epsilon\omega_N}{2Q} \sin(\phi_{N-1} - \phi_N) + \frac{\rho\omega_N}{2Q} \sin(\psi_N - \phi_N) & j = N,\end{aligned} \quad (3.8)$$

en donde  $\omega_j$  y  $\phi_j$  son las frecuencias de carrera libre y la fase del oscilador  $j$ -ésimo,  $\epsilon$  es la fuerza de acoplamiento con respecto a la amplitud del oscilador,  $\rho$  es la amplitud de la señal inyectada con respecto a la amplitud del oscilador y  $\psi_j$  es la fase de la señal inyectada.

Defínase la variable  $k$  como

$$k = \frac{\epsilon \omega_j}{2Q}. \quad (3.9)$$

La cantidad  $k$  tiene el mismo papel en la definición del “rango de captura” que  $\Delta\omega_m$ . Esta notación será utilizada en el análisis de los siguientes métodos pero no se restringe a la definición (3.9).



**Figura 3.5.** Arreglo de exploración de haz propuesto por Stephan en donde la diferencia de fase entra las señales inyectadas se divide uniformemente a lo largo del arreglo a consecuencia del acoplamiento bilateral.

Por simplicidad, supongamos que la amplitud de la señal inyectada es igual a la fuerza de acoplamiento,  $\rho = \epsilon$ .

Las diferencias de fase entre osciladores adyacentes se definen como

$$\theta_j \equiv \phi_{j+1} - \phi_j \quad j = 1, \dots, N - 1. \quad (3.10)$$

De esta definición, también se tiene

$$\theta_{j-1} = \phi_j - \phi_{j-1} \quad j = 2, \dots, N.$$

Sustituyendo en (3.8), se obtienen

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \omega_1 - \omega_{inj} + k[\sin \theta_1 + \sin(\psi_1 - \phi_1)] & j = 1 \\ \dot{\phi}_j &= \omega_j - \omega_{inj} + k[\sin \theta_j - \sin \theta_{j-1}] & j = 2, \dots, N-1 \\ \dot{\phi}_N &= \omega_N - \omega_{inj} + k[-\sin \theta_{N-1} + \sin(\psi_N - \phi_N)] & j = N. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Se busca la solución en estado estable en la que

$$\dot{\phi}_j = 0 \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.12)$$

Sustituyendo (3.12) en (3.11), quedan

$$\begin{aligned} \omega_{inj} &= \omega_1 + k[\sin \theta_1 + \sin(\psi_1 - \phi_1)] & j = 1 \\ \omega_{inj} &= \omega_j + k[\sin \theta_j - \sin \theta_{j-1}] & j = 2, \dots, N-1 \\ \omega_{inj} &= \omega_N + k[-\sin \theta_{N-1} + \sin(\psi_N - \phi_N)] & j = N. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Un gradiente de fase constante entre los osciladores dado por

$$\theta_j = \theta_{j-1} = \theta \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (3.14)$$

es una solución válida a (3.8).

Sustituyendo (3.14) en (3.13),

$$\begin{aligned}
 \omega_{inj} &= \omega_1 + k[\sin \theta + \sin(\psi_1 - \phi_1)] & j = 1 \\
 \omega_{inj} &= \omega_j & j = 2, \dots, N - 1 \\
 \omega_{inj} &= \omega_N + k[-\sin \theta + \sin(\psi_N - \phi_N)] & j = N .
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Asumiendo que todas las frecuencias de carrera libre son iguales a la frecuencia de la señal inyectada:

$$\omega_{inj} = \omega_j \quad j = 1, \dots, N . \tag{3.16}$$

Entonces, de acuerdo a (3.15), se deben tener

$$\theta = \phi_1 - \psi_1 \tag{3.17}$$

y

$$\theta = \psi_N - \phi_N . \tag{3.18}$$

Si se establece la fase de una de las señales inyectadas como referencia,  $\psi_1 = 0$ , entonces se tienen

$$\begin{aligned}
 \theta &= \phi_1 - 0 & \Rightarrow & \phi_1 = \theta \\
 \theta &= \phi_2 - \phi_1 = \phi_2 - \theta & \Rightarrow & \phi_2 = 2\theta \\
 \theta &= \phi_3 - \phi_2 = \phi_3 - 2\theta & \Rightarrow & \phi_3 = 3\theta \\
 &\dots & & \\
 \theta &= \phi_N - \phi_{N-1} = \phi_N - (N - 1)\theta & \Rightarrow & \phi_N = N\theta .
 \end{aligned}$$

Así que, de forma general,

$$\phi_j = j\theta \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.19)$$

Sustituyendo este resultado en (3.18),

$$\theta = \psi_N - N\theta.$$

Resolviendo, se obtiene finalmente

$$\psi_N = (N + 1)\theta \quad (3.20)$$

ó

$$\theta = \frac{\psi_N}{N + 1}. \quad (3.21)$$

Esto implica que la diferencia de fase entre las señales inyectadas se divide uniformemente a lo largo de arreglo. Para señales senoidales, la diferencia más grande, no ambigua, entre las dos señales es  $\pi$ , con lo que se obtiene un desfaseamiento entre elementos de  $\theta = \pi/(N + 1)$ .

A este resultado se le debe probar estabilidad [7]. Un análisis de este tipo se presenta más adelante en esta tesis. Para el caso del método de Stephan, lleva a la restricción

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3.22)$$

Justo como en los sistemas simples de encadenamiento por inyección, el desfaseamiento máximo entre elementos adyacentes es  $\pm\pi/2$ .

Stephan reportó un sistema de cuatro osciladores utilizando la configuración de la figura 3.5 [14]. Las mediciones de las fases de salida correspondientes a cada valor de la diferencia de fase entre las señales inyectadas ( $\psi_N - \psi_1$ ) mostraron una buena correspondencia a la teoría aquí descrita.

Las desviaciones con respecto a la progresión de fase perfectamente uniforme y a la dependencia lineal con la diferencia de fase de las señales inyectadas se pueden atribuir a los aspectos despreciados en el análisis como son los efectos del ruido, la no-uniformidad de los parámetros de carrera libre, la dinámica de las amplitudes, y la no-uniformidad de la carga y del acoplamiento de los elementos del arreglo.

La restricción más importante es sin duda el rango de exploración obtenible con esta técnica. En un arreglo de fase, el patrón de radiación es re-direccionado a una posición en particular al establecer una progresión de fase constante a lo largo del arreglo. En un arreglo lineal, re-direccionar el haz hasta un ángulo  $\Theta$  con respecto a la dirección normal requiere un gradiente de fase  $\theta$  entre osciladores adyacentes [15] dado por

$$\theta = \frac{2\pi d}{\lambda_0} \sin \Theta, \quad (3.23)$$

en donde  $d$  es la distancia entre antenas y  $\lambda_0$  es la longitud de onda en el espacio libre. Por lo tanto, para el gradiente máximo de  $\pm 90^\circ$ , con una distancia entre antenas de  $\lambda_0/2$ , se obtiene un ángulo máximo de exploración de  $\pm 30^\circ$  con respecto a la normal. Este rango es aún menor en un sistema real por las razones que ya se mencionaban. Con un sistema experimental de tres osciladores se demostró que progresiones de fase en el orden de  $45^\circ$  son fáciles de obtener y simulaciones del mismo sistema sugirieron que diferencias de  $60^\circ$  eran posibles antes de que un modo no-deseado ocurriera [1].

Otra restricción de este tipo de arreglo es que de acuerdo a (3.22), el gradiente de fase obtenible y por lo tanto el rango de exploración disminuyen al aumentar el tamaño del arreglo. Esto llevó a otros investigadores a buscar alternativas que resolvieran este problema, mismas que se irán analizando en el capítulo siguiente.

### **3.d. Simulaciones Numéricas**

El sistema de ecuaciones diferenciales (3.8) fue resuelto numéricamente utilizando la función *ode45* de MATLAB con el propósito de verificar la teoría desarrollada en la sección anterior para el método de exploración de haz de Stephan. Se introdujeron valores numéricos a las variables necesarias y se obtuvieron gráficas representativas del funcionamiento de este tipo de arreglo. Los valores utilizados en la simulación fueron los siguientes:

- Número de osciladores  $N = 4$ .
- Gradiente de fase deseado  $\theta = -30$  [°].
- Magnitudes de acoplamiento  $k = 3 \times 10^9$  [rad/s].
- Frecuencia de sincronización deseada  $f = 5$  [GHz].
- Frecuencia de la señal inyectada  $f_{inj} = 5$  [GHz].

Las frecuencias de carrera libre de los osciladores, y de la señal inyectada, quedan como

$$\omega_j = \omega_{inj} = 2\pi f = 2\pi f_{inj} = 3.1416 \times 10^{10} \text{ [rad/s]} \quad j = 1, \dots, N.$$

De acuerdo a la ecuación (3.20), se definió la fase de la señal inyectada al oscilador  $N$ -ésimo  $\psi_N$ , dado que  $\psi_1 = 0$ , como

$$\psi_N = -150^\circ.$$

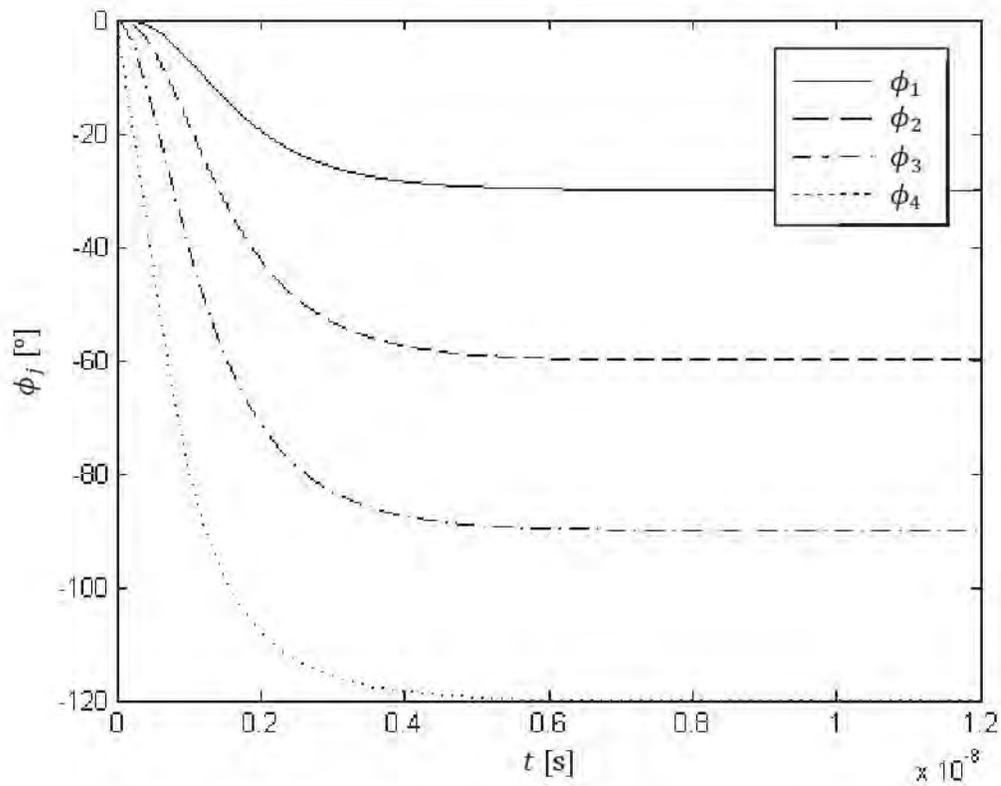
En la figura 3.6, se muestran las fases de los cuatro osciladores, calculadas con este juego de valores. En la gráfica se observa claramente que se establece una progresión de fase constante, uniforme de un oscilador al otro.

En la figura 3.7, se trazaron las gráficas de las primeras derivadas de las fases de los cuatro osciladores. Con esto se comprueba lo que se asume con la condición (3.12) y por lo tanto, se valida de otra forma el resto del procedimiento.

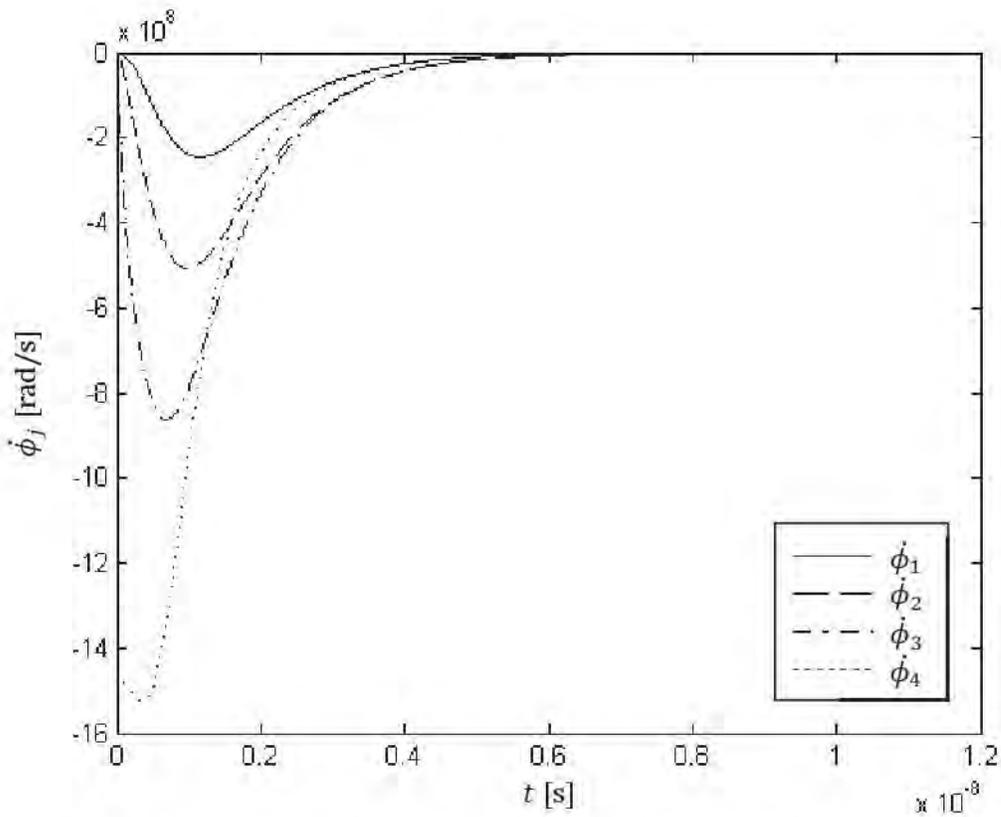
Finalmente, las fases calculadas pueden introducirse en señales senoidales si se trazan las gráficas de las funciones

$$x_j(t) = \sin(\omega_j t + \phi_j).$$

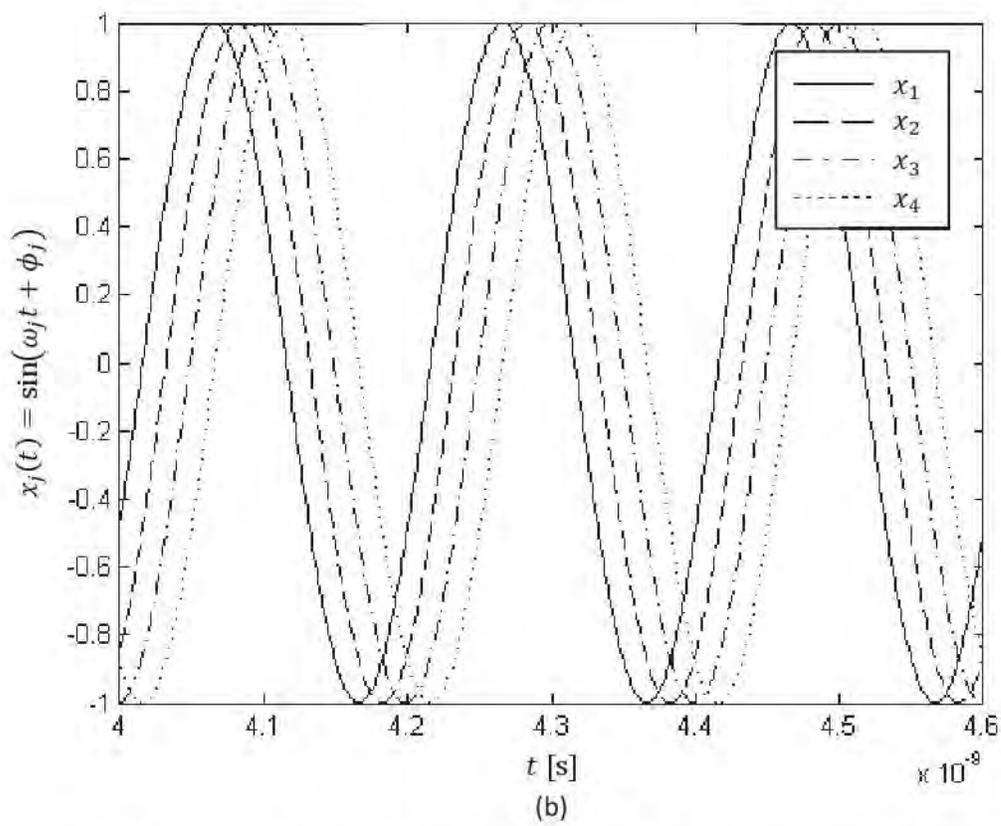
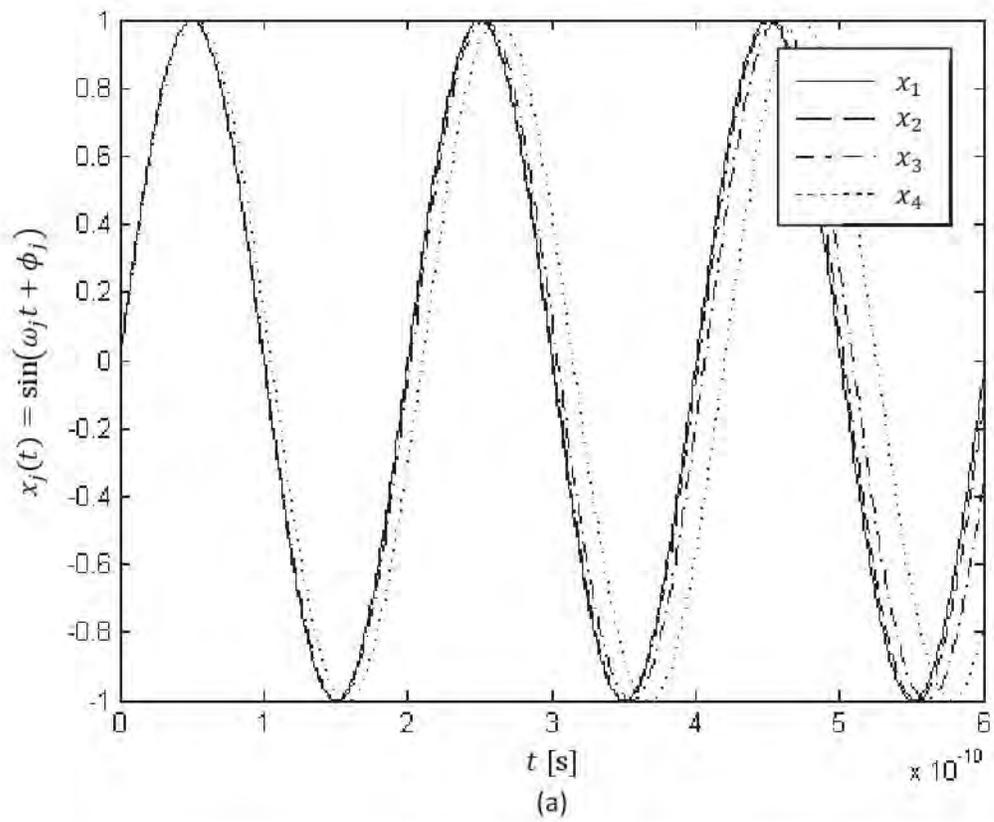
En la figura 3.8, se muestran tales resultados.



**Figura 3.6.** Fases de los osciladores de un arreglo de cuatro elementos calculadas mediante el modelo matemático del método de Stephan.



**Figura 3.7.** Derivada con respecto al tiempo de las fases de los osciladores de un arreglo de cuatro elementos obtenidas a partir del modelo matemático del método de Stephan.



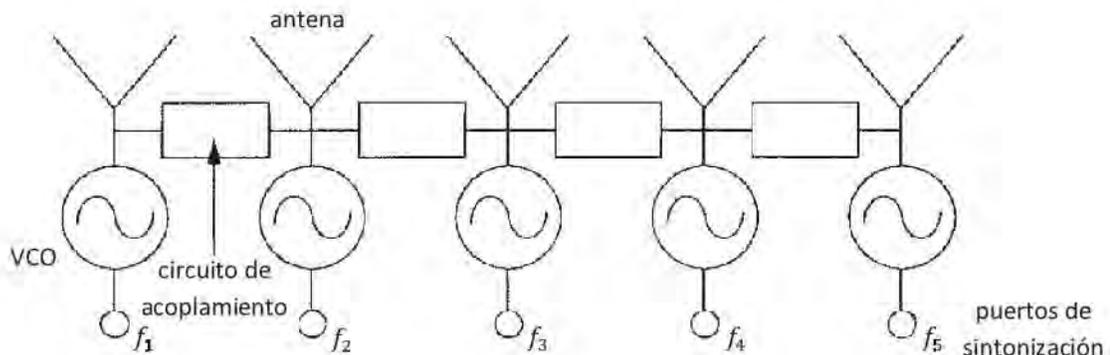
**Figura 3.8.** Funciones senoidales calculadas con las fases de los osciladores de un arreglo de cuatro elementos obtenidas con el método de Stephan. (a) Al inicio de la simulación y (b) en el estado estable.

El método de exploración de haz de encadenamiento por inyección entre osciladores de Stephan sirvió como punto de partida para los métodos de exploración de haz que se presentarán en el siguiente capítulo. El primero de estos métodos fue desarrollado por York, quien se dio cuenta de la fuerte dependencia de la distribución de fases con respecto a las frecuencias de carrera libre de los osciladores presente en (3.8) y la explotó para lograr la progresión de fase entre los osciladores; utilizando solamente las propiedades intrínsecas del arreglo, se eliminó la necesidad de inyectar señales externas. El resto de los métodos que se analizarán partieron de ideas similares pero eligieron controlar un parámetro de las redes de acoplamiento en vez de controlar las frecuencias de carrera libre que son un parámetro de los osciladores. A continuación, se analizarán las condiciones necesarias para lograr la exploración de haz con cada una de estas topologías.

## IV. Métodos de Exploración de Haz Basados en Osciladores Acoplados

En el capítulo anterior se habló sobre el arreglo propuesto por Stephan [1][12]. Por medio de inyectar señales a los extremos del arreglo, se encontró que la dinámica de osciladores acoplados producía un gradiente de fase uniforme entre los elementos del arreglo. En este tipo de arreglo, las frecuencias de carrera libre de los osciladores fueron diseñadas de modo que igualaran a las de las señales inyectadas. En otras palabras, los elementos del arreglo se encontraban sincronizados con las señales inyectadas pero esta sincronización era por diseño y no por la dinámica inherente de los osciladores.

York desarrolló otro método basado en la dinámica de osciladores acoplados [13][16]. En (3.8) se puede ver que la distribución de las fases de los osciladores en el estado estable depende fuertemente de las frecuencias de carrera libre, es decir, de la sintonización de los osciladores, como es de esperarse de acuerdo a la teoría de encadenamiento por inyección. York investigó las condiciones de sintonización en los osciladores con las cuales se podía obtener una progresión de fase uniforme sin la presencia de señales externas (véase la figura 4.1) [7][10][13]. Estas condiciones serán analizadas más adelante.



**Figura 4.1.** Arreglo de osciladores acoplados bilateralmente sin la presencia de señales inyectadas.

Hwang y Myung presentaron una alternativa al método de York utilizando las fases de acoplamiento de los extremos del arreglo como parámetros de control [17]. Heath extendió el método de Hwang y Myung presentando todos los esquemas posibles que explotaran las fases de acoplamiento [18]; además de incluir el análisis de estabilidad completo. Estos métodos también serán analizados en este capítulo.

Independientemente de la topología, los osciladores que controlan un arreglo de antenas deben satisfacer los dos requerimientos clave de los que ya se ha hablado: los dispositivos deben sincronizarse a una frecuencia en común y mantener una relación de fases deseada en el estado

estable. Lo primero se logra acoplando los dispositivos entre ellos o mediante señales externas, y se basa en el fenómeno de encadenamiento por inyección [3][4][6]. En la práctica, garantizar una determinada relación de fases es especialmente difícil. Para el caso de elementos idénticos [19][20], se puede determinar una distribución de fases y las condiciones necesarias para mantener esta distribución.

Sin embargo, esto no garantiza que dicha distribución de fases sea estable, o que la solución persista para un arreglo real en donde la suposición de elementos idénticos no sea válida. Para determinar la relación de fases de un arreglo se requiere de un análisis dinámico de las interacciones no lineales entre dispositivos y de una descripción dinámica del arreglo para estudiar la estabilidad de los diferentes modos.

En este capítulo se pretenden obtener las condiciones de los diferentes métodos bajo las cuales ciertos parámetros del sistema pueden ser ajustados de forma que la sincronización que establezca la relación de fases necesaria para la exploración del haz de un arreglo de antenas basado en osciladores acoplados ocurra; así como las soluciones explícitas del modelo de fase que den como resultado un gradiente de fase espacialmente uniforme a lo largo de un arreglo unidimensional. Se pretende también presentar las simulaciones que comprueban el análisis mediante la resolución del sistema de ecuaciones dinámicas que describe a cada topología. Con estos resultados, se podrá avanzar al análisis de estabilidad completo para cada método.

#### **4.a. Modelo de Fase Generalizado**

El siguiente es el modelo de fase generalizado [18] que describe la dinámica de las fases de un arreglo de osciladores acoplados no lineales, y a partir del cual se pueden obtener las ecuaciones de cualquier método de exploración del haz de un arreglo de antenas basado en osciladores acoplados, asumiendo que las amplitudes de los osciladores alcanzan rápidamente un valor de estado estable en común:

$$\dot{\phi}_j = \omega_j + \sum_{n=1}^N k_{n,j} \sin(\phi_n - \phi_j + \Phi_{n,j}), \quad (4.1)$$

en donde la magnitud y fase de acoplamiento del oscilador  $i$ -ésimo al oscilador  $j$ -ésimo están representadas por  $k_{i,j}$  y  $\Phi_{i,j}$ , respectivamente, mientras que las frecuencias de carrera libre de los osciladores están dadas por  $\omega_j$ . Todos los parámetros son reales.

El arreglo de Stephan, por ejemplo, es el caso particular del modelo de fase generalizado en el que se agregan los términos correspondientes a dos señales inyectadas a los extremos del arreglo, se asume una fase de acoplamiento  $\Phi_{i,j} = 0$  y se consideran solamente las interacciones entre elementos adyacentes.

Las ecuaciones dinámicas de este modelo tienen una relevancia física muy importante. Lo que motiva la elección de estas ecuaciones para el análisis aquí presentado es que éstas aparecen en un sinnúmero de diferentes sistemas físicos. Tales ecuaciones han aparecido en modelos de arreglos de láseres de estado sólido [21][22], arreglos de osciladores electrónicos tales como diodos Gunn [23][24], MESFETs [11][16][23]-[28] e IMPATTs [13] así como en arreglos de osciladores de Van der Pol [29]. En todos estos estudios, la suposición de amplitudes de oscilación idénticas conduce a la dinámica de fases que se especifica en (4.1). Por lo tanto, el análisis aquí presentado debe ser aplicable a todos estos sistemas.

Vale la pena describir algunas características destacadas del modelo de fase generalizado. En (4.1) hay tres tipos de parámetros presentes, a saber, las frecuencias de carrera libre de los osciladores, las magnitudes o fuerzas de acoplamiento y las fases de acoplamiento. Dado que el objetivo es manipular la distribución de fases del arreglo de osciladores para el propósito de la exploración de haz, cualquier conjunto de parámetros (o combinación de estos) se puede utilizar para realizar este control. El esquema de York hacía uso de la sintonización de los osciladores. Hwang y Myung, por su parte, eligieron manipular las fases de acoplamiento al igual que Heath. En lo que a (4.1) se refiere, no existe justificación alguna, a priori, para elegir algún tipo de parámetro sobre otro; se deben hacer consideraciones de facilidad de uso e implementación, por ejemplo. Independientemente de la elección del tipo de parámetros elegidos como controles, el objetivo principal se mantiene: ajustar los valores de los parámetros inteligentemente con el fin de afectar la dinámica del arreglo de modo que se llegue a la distribución de fases deseada. Aun así, podemos hacer una distinción entre el uso de la sintonización de los osciladores y el uso de las magnitudes y fases de acoplamiento: el ajuste de la sintonización de los osciladores significa realizar el control a través de una propiedad intrínseca de los osciladores mientras que el manipular las magnitudes y/o las fases de acoplamiento representa realizar el control a través de las interacciones entre los osciladores.

De aquí en adelante, el sistema bajo consideración es el modelo de fase generalizado para un arreglo unidimensional de osciladores no lineales con interacciones entre elementos adyacentes, con posibilidad de poseer magnitud y fase de acoplamiento distintas a lo largo del arreglo:

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}_1 &= \omega_1 + k_{2,1} \sin(\phi_2 - \phi_1 + \Phi_{2,1}) & j = 1 \\
 \dot{\phi}_j &= \omega_j + k_{j+1,j} \sin(\phi_{j+1} - \phi_j + \Phi_{j+1,j}) + k_{j-1,j} \sin(\phi_{j-1} - \phi_j + \Phi_{j-1,j}) & j = 2, \dots, N - 1 \\
 \dot{\phi}_N &= \omega_N + k_{N-1,N} \sin(\phi_{N-1} - \phi_N + \Phi_{N-1,N}) & j = N. \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

De nuevo, las diferencias de fase entre osciladores están dadas por

$$\theta_j \equiv \phi_{j+1} - \phi_j \quad j = 1, \dots, N - 1. \quad (4.3)$$

De esta misma definición, también se tienen

$$\theta_{j-1} = \phi_j - \phi_{j-1} \quad j = 2, \dots, N.$$

Sustituyendo en (4.2), quedan

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \omega_1 + k_{2,1} \sin(\theta_1 + \Phi_{2,1}) & j = 1 \\ \dot{\phi}_j &= \omega_j + k_{j+1,j} \sin(\theta_j + \Phi_{j+1,j}) - k_{j-1,j} \sin(\theta_{j-1} - \Phi_{j-1,j}) & j = 2, \dots, N - 1 \\ \dot{\phi}_N &= \omega_N - k_{N-1,N} \sin(\theta_{N-1} - \Phi_{N-1,N}) & j = N. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Las soluciones deseadas, no-lineales al arreglo de osciladores acoplados para el propósito de la exploración de haz son estados de fases sincronizadas o fases encadenadas, por lo que los osciladores comparten una misma frecuencia de sincronización  $\omega$ . De esta forma, se deben cumplir

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1 + k_{2,1} \sin(\theta_1 + \Phi_{2,1}) & j = 1 \\ \omega &= \omega_j + k_{j+1,j} \sin(\theta_j + \Phi_{j+1,j}) - k_{j-1,j} \sin(\theta_{j-1} - \Phi_{j-1,j}) & j = 2, \dots, N - 1 \\ \omega &= \omega_N - k_{N-1,N} \sin(\theta_{N-1} - \Phi_{N-1,N}) & j = N. \end{aligned} \quad (4.5)$$

En este momento, los parámetros ajustables que pueden ser utilizados para satisfacer estas ecuaciones y por lo tanto garantizar la existencia de la solución deseada para la exploración de haz son las frecuencias de carrera libre, las magnitudes de acoplamiento o las fases de acoplamiento. El enfoque de los métodos que se analizarán es utilizar las frecuencias de carrera libre o las fases

de acoplamiento y no las magnitudes de acoplamiento, así que se puede introducir la condición de magnitudes de acoplamiento idénticas:

$$k_{j+1,j} = k_{j-1,j} = k . \quad (4.6)$$

Esta última condición, da finalmente

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1 + k \sin(\theta_1 + \Phi_{2,1}) & j &= 1 \\ \omega &= \omega_j + k[\sin(\theta_j + \Phi_{j+1,j}) - \sin(\theta_{j-1} - \Phi_{j-1,j})] & j &= 2, \dots, N-1 \\ \omega &= \omega_N - k \sin(\theta_{N-1} - \Phi_{N-1,N}) & j &= N . \end{aligned} \quad (4.7)$$

En las secciones siguientes, se obtendrán las soluciones particulares de cada método utilizando las ecuaciones (4.7).

#### **4.b. Método de Desintonización de York**

En el método de York, la distribución de fases que se está buscando se logra manipulando las frecuencias de carrera libre de los osciladores. Para la exploración de haz, requerimos una progresión de fase constante espacialmente uniforme dada por

$$\theta_j = \theta \quad j = 1, \dots, N-1 . \quad (4.8)$$

Para este método se introduce la condición de fases de acoplamiento iguales a cero:

$$\Phi_{i,j} = 0 , \quad (4.9)$$

para cualquier par de valores  $i, j$  de las ecuaciones (4.7).

Sustituyendo (4.8) y (4.9) en (4.7), se obtienen

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_1 + k \sin \theta & j &= 1 \\ \omega &= \omega_j & j &= 2, \dots, N - 1 \\ \omega &= \omega_N - k \sin \theta & j &= N .\end{aligned}\tag{4.10}$$

De la primera y de la última ecuación de (4.10), se pueden despejar

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\omega - \omega_1}{k} , \\ \sin \theta &= \frac{\omega_N - \omega}{k} .\end{aligned}\tag{4.11}$$

Los numeradores del lado derecho de las igualdades representan una cantidad  $\Delta\omega$ , esto es

$$\sin \theta = \frac{\Delta\omega}{k}\tag{4.12}$$

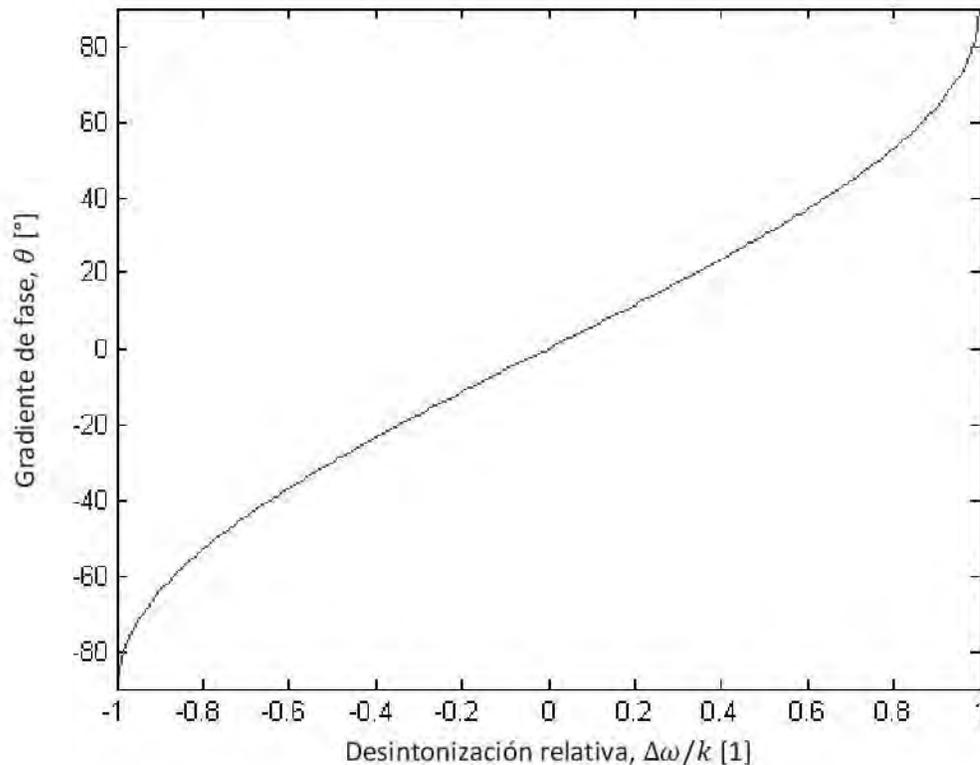
ó

$$\Delta\omega = k \sin \theta ,\tag{4.13}$$

que de regreso en (4.11), resulta en

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega - \Delta\omega , \\ \omega_N &= \omega + \Delta\omega .\end{aligned}\tag{4.14}$$

Esto indica que el gradiente de fase constante que se está buscando se puede establecer por medio de desintonizar los elementos de los extremos del arreglo en la misma magnitud  $\Delta\omega$ , pero en direcciones opuestas. Aquí aparece una ventaja de este método sobre algunos otros que se revisaron en el capítulo anterior: sólo los elementos de los extremos necesitan ser controlados por voltaje.



**Figura 4.2.** Gradiente de fase entre osciladores adyacentes contra el parámetro de control que en este caso es la desintonización de los elementos de los extremos del arreglo.

Se verá más adelante que el análisis de estabilidad limita el rango de las diferencias de fase entre osciladores a  $\pm\pi/2$ . Este análisis simplificado sirve para presentar el concepto de exploración de haz, pero en la práctica, la dinámica del arreglo se complica por diversos factores que se han dejado fuera de (4.2), tales como la dinámica de amplitudes y las no-uniformidades, dependencia en frecuencia de las redes de acoplamiento, interacciones con elementos no adyacentes, perfiles de sintonización no uniformes de los osciladores controlados por voltaje, y dependencia en frecuencia de las características de los dispositivos. Algunos de estos problemas se consideran más cuidadosamente en otros trabajos de York [7].

York demostró experimentalmente la exploración del haz de arreglos de cuatro, seis y ocho elementos utilizando este método en una serie de artículos [16][25][26][30]. El arreglo de ocho elementos [30], por ejemplo, fue diseñado para operar a 8.4 GHz con una separación entre

elementos de media longitud de onda. Por lo tanto, el rango máximo de exploración era de  $\pm 30^\circ$  con respecto a la normal. Variando la sintonización de los osciladores de los extremos del arreglo de acuerdo a (4.13), fue posible hacer un escaneo de  $-15^\circ$  a  $+30^\circ$  con respecto a la normal. Este rango de exploración significa que se obtuvieron cambios de fase en el rango  $-47^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$ . De acuerdo a estos resultados se puede ver que el rango de exploración está centrado fuera de la normal, cosa que se le atribuyó a un ángulo de acoplamiento diferente de cero que no fue considerado en este diseño en particular.

En el arreglo de Stephan, el control de la fase se lograba modificando la diferencia de fase entre las señales inyectadas a los extremos, esta diferencia se dividía uniformemente a lo largo del arreglo y por lo tanto para arreglos más grandes sólo se podían obtener cambios de fase pequeños. El método de York, en cambio, es independiente del número de osciladores, lo que permite obtener rangos de exploración más amplios.

En trabajos posteriores, York encontró que al incluir duplicadores de frecuencia, el rango correspondiente a espaciamentos de media longitud de onda, de  $\pm 30^\circ$ , teóricamente podía ser extendido a un rango de exploración del hemisferio completo, es decir, ángulos en el rango de  $\pm 90^\circ$  con respecto a la normal [31].

#### **4.c. Control por Fases de Acoplamiento con Red Recíproca de Hwang y Myung**

Hwang y Myung desarrollaron una alternativa al método de York en la que consideraron un arreglo de osciladores acoplados por redes recíprocas (es decir,  $\Phi_{i,j} = \Phi_{j,i}$ ) [17]. Para este tipo de arreglo, determinaron que al elegir el conjunto apropiado de fases de acoplamiento se podía obtener un gradiente de fase espacialmente uniforme, pero sólo entre los elementos interiores (excluyendo a los dos elementos de los extremos), como se verá a continuación.

Hwang y Myung notaron que debido a la relación no-lineal entre las frecuencias de sintonización de los osciladores y el gradiente de fase deseado en el método de York, la mayor parte de la variación en la progresión de fase ocurre para cambios en la frecuencia cercanos a los límites del rango de captura, en donde el sistema es más susceptible al ruido de fase y a variaciones en la amplitud de los osciladores de los extremos. Argumentaron que consecuentemente, el arreglo de osciladores no se sincronizará a una sola frecuencia bajo estas condiciones y que estos problemas resultarían en un rango de exploración mucho menor al que predice el análisis de estabilidad.

Anteriormente, en el método de York, las soluciones deseadas de estados con gradiente de fase uniforme se consiguieron alterando las frecuencias de los osciladores; ahora, se asume que todos los osciladores poseen la misma frecuencia de carrera libre:

$$\omega_j = \omega_0, \quad (4.15)$$

Sustituyendo esta condición en (4.7), se obtienen

$$\begin{aligned}
 \omega &= \omega_0 + k \sin(\theta_1 + \Phi_{2,1}) & j &= 1 \\
 \omega &= \omega_0 + k [\sin(\theta_j + \Phi_{j+1,j}) - \sin(\theta_{j-1} - \Phi_{j-1,j})] & j &= 2, \dots, N-1 \\
 \omega &= \omega_0 - k \sin(\theta_{N-1} - \Phi_{N-1,N}) & j &= N.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

En los tres métodos que siguen, contando a éste, son las fases de acoplamiento y no las frecuencias de los osciladores las que se utilizan para generar y manipular los estados de gradiente de fase uniforme.

Nótese que en (4.16) se mantiene la posibilidad de que no todas las diferencias de fase entre osciladores sean iguales ( $\theta_j \neq \theta$ ).

Si se sustituye el siguiente juego de fases de acoplamiento en (4.16), asumiendo reciprocidad

$$\begin{aligned}
 \Phi_{2,1} &= \Phi_{1,2} = \Phi, \\
 \Phi_{N-1,N} &= \Phi_{N,N-1} = -\Phi,
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

junto con

$$\Phi_{i,j} = 0 \tag{4.18}$$

para el resto de valores  $i, j$  de las ecuaciones (4.16), se podrán obtener las soluciones deseadas.

Expandiendo un poco las ecuaciones (4.16),

$$\begin{aligned}
 \omega &= \omega_0 + k \sin(\theta_1 + \Phi_{2,1}) & j &= 1 \\
 \omega &= \omega_0 + k[\sin(\theta_2 + \Phi_{3,2}) - \sin(\theta_1 - \Phi_{1,2})] & j &= 2 \\
 \omega &= \omega_0 + k[\sin(\theta_j + \Phi_{j+1,j}) - \sin(\theta_{j-1} - \Phi_{j-1,j})] & j &= 3, \dots, N-2 \\
 \omega &= \omega_0 + k[\sin(\theta_{N-1} + \Phi_{N,N-1}) - \sin(\theta_{N-2} - \Phi_{N-2,N-1})] & j &= N-1 \\
 \omega &= \omega_0 - k \sin(\theta_{N-1} - \Phi_{N-1,N}) & j &= N.
 \end{aligned}$$

Utilizando las fases de acoplamiento definidas en (4.17) y (4.18), quedan

$$\begin{aligned}
 \omega &= \omega_0 + k \sin(\theta_1 + \Phi) & j &= 1 \\
 \omega &= \omega_0 + k[\sin \theta_2 - \sin(\theta_1 - \Phi)] & j &= 2 \\
 \omega &= \omega_0 + k[\sin \theta_j - \sin(\theta_{j-1})] & j &= 3, \dots, N-2 \\
 \omega &= \omega_0 + k[\sin(\theta_{N-1} - \Phi) - \sin \theta_{N-2}] & j &= N-1 \\
 \omega &= \omega_0 - k \sin(\theta_{N-1} + \Phi) & j &= N.
 \end{aligned}$$

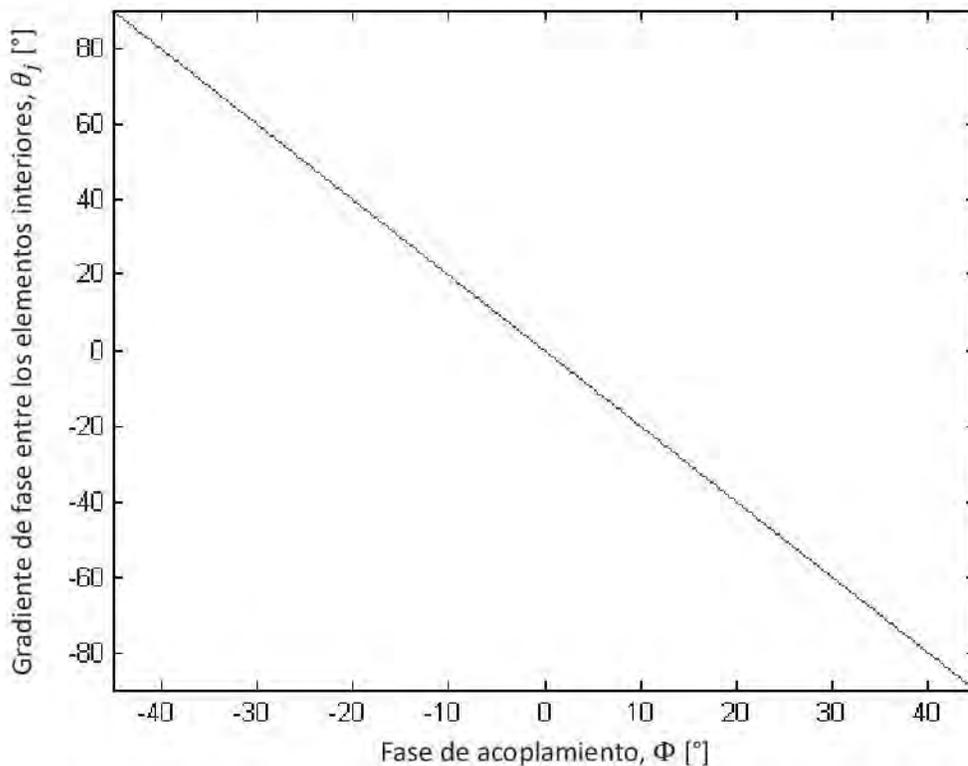
Y finalmente,

$$\begin{aligned}
 0 = \theta_1 + \Phi & \Rightarrow \theta_1 = -\Phi \\
 \theta_2 = \theta_1 - \Phi = -\Phi - \Phi & \Rightarrow \theta_2 = -2\Phi \\
 \theta_3 = \theta_2 = -2\Phi & \Rightarrow \theta_3 = -2\Phi \\
 \dots & \\
 \theta_{N-2} = \theta_{N-3} = -2\Phi & \Rightarrow \theta_{N-2} = -2\Phi \\
 \theta_{N-1} - \Phi = \theta_{N-2} = -2\Phi & \Rightarrow \theta_{N-1} = -\Phi \\
 0 = \theta_{N-1} + \Phi & \Rightarrow \theta_{N-1} = -\Phi.
 \end{aligned}$$

O de forma más general,

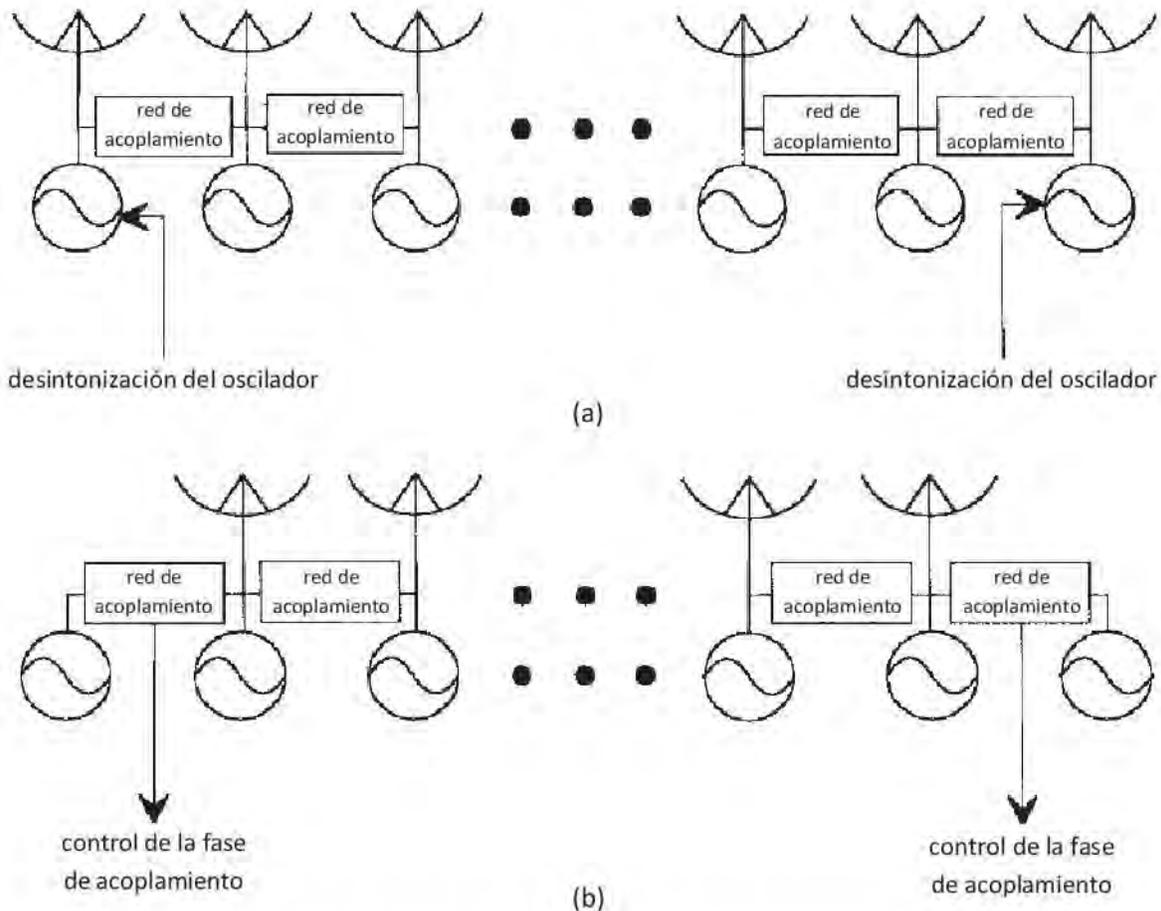
$$\begin{aligned}\theta_1 &= -\Phi & j &= 1 \\ \theta_j &= -2\Phi = \theta & j &= 2, \dots, N-2 \\ \theta_{N-1} &= -\Phi & j &= N-1.\end{aligned}\quad (4.19)$$

Las ecuaciones (4.17), (4.18) y (4.19) revelan que existe una relación *lineal* entre el gradiente de fase de los elementos interiores y las fases de acoplamiento entre los elementos de la periferia (véase la figura 4.3), es decir, las fases de acoplamiento entre el primero y el segundo elemento, y entre el elemento  $N$  y el elemento  $N-1$ . La diferencia de fase entre los osciladores se puede variar modificando estas dos fases de acoplamiento en cantidades iguales pero con signos contrarios.



**Figura 4.3.** Relación *lineal* entre el gradiente de fase entre los elementos interiores  $\theta_j$  para  $j = 2, \dots, N-2$  y la fase de acoplamiento  $\Phi$  definida en (4.17).

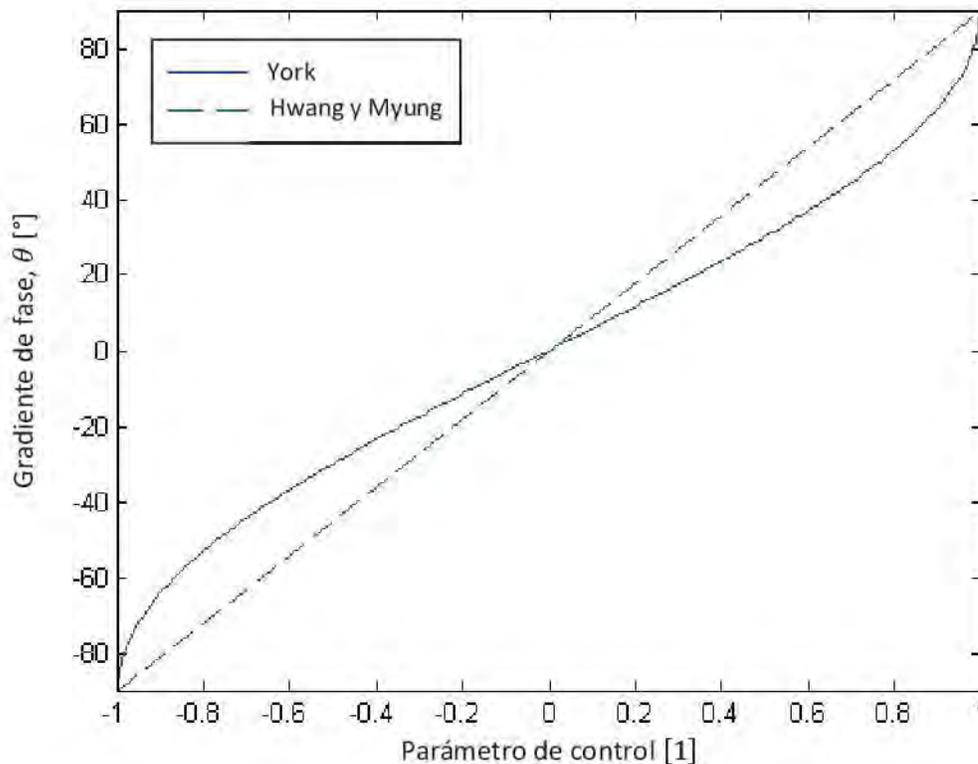
Al establecer la existencia de dicha relación, Hwang y Myung demostraron que la dinámica de un arreglo de osciladores acoplados puede ser controlada a través de modificar las fases de desintonización sin cambiar la distribución de frecuencias (véase la figura 4.4) y por lo tanto, eliminando los problemas que se mencionaban al inicio de esta sección.



**Figura 4.4.** (a) Arreglo de osciladores acoplados para escaneo de haz mediante desintonización de los elementos de los extremos propuesto por York y (b) arreglo de escaneo de haz mediante el control de las fases de las redes de acoplamiento de los extremos propuesto por Hwang y Myung.

La progresión de fase que es posible obtener mediante el método de Hwang y Myung, al igual que mediante el método de York, es independiente del número de osciladores presentes en el arreglo, y a diferencia del método de York, independiente del rango de captura. Sin embargo, en el método de Hwang y Myung existe una restricción que no afecta el control del arreglo directamente pero que sí tiene que ver con el número de osciladores. En (4.19) se puede observar que, aunque la participación de los elementos de la periferia es crucial para el funcionamiento apropiado el arreglo, éstos no pueden contribuir a la potencia radiada ya que sus fases relativas son distintas a las de los elementos interiores. Por lo tanto, el mínimo de osciladores necesarios para lograr la

exploración de haz es de cuatro osciladores; precisamente, el método fue demostrado experimentalmente utilizando un arreglo de osciladores acoplados de cuatro elementos [17]. En este arreglo, el acoplamiento lo formaban tres líneas de longitud variable, la línea del centro se mantuvo en una separación de 37.2 mm ó  $0.76\lambda_0$  a 6.16 GHz, mientras que las líneas de los extremos se fueron variando de acuerdo a (4.17) y (4.19). Con esta separación, el rango de exploración teórico es de  $-19.2^\circ$  a  $+19.2^\circ$  con respecto a la normal. Experimentalmente se obtuvo un rango de  $-17^\circ$  a  $+18^\circ$  con respecto a la normal. Que este rango de exploración resultara más pequeño que el rango teórico se atribuyó principalmente a que el control de la fase de acoplamiento del circuito de acoplamiento de los extremos variando la longitud de la línea no es exacto. No obstante, el rango de exploración obtenido se dijo estar más cercano al rango esperado que en cualquier otro arreglo propuesto anteriormente al no presentar los mismos problemas.



**Figura 4.5.** Comparación entre las relaciones de gradiente de fase contra parámetro de control (figuras 4.2 y 4.3) en el método de York y en el método de Hwang y Myung. En el método de York la mayor parte de la variación ocurre para cambios cercanos a los límites del rango de captura.

Como se mencionaba al principio de esta sección, el método de Hwang y Myung está basado en una red de acoplamiento recíproca. Permitiendo una red de acoplamiento no-recíproca, otros dos métodos fueron desarrollados por Heath [18]. Será demostrado que, contrariamente al arreglo de Hwang y Myung, en un arreglo parcialmente o completamente no-recíproco, todos los osciladores

pueden contribuir al patrón de radiación. En las siguientes dos secciones se analizarán estos dos métodos.

#### **4.d. Control por Fases de Acoplamiento de un Arreglo Parcialmente No-Recíproco de Heath**

Heath desarrolló dos métodos para la exploración de haz utilizando las fases de acoplamiento como parámetro de control basados en una red de acoplamiento no-recíproca. El primero se trata de un arreglo parcialmente no-recíproco, ya que como se verá, sólo se necesitan redes no-recíprocas para los acoplamientos de la periferia.

Del mismo modo que en el método de York, el gradiente de fase espacialmente uniforme necesario para la exploración de haz está dado por

$$\theta_j = \theta \quad j = 1, \dots, N - 1. \quad (4.21)$$

Con esta definición y con la condición de frecuencias de carrera libre idénticas

$$\omega_j = \omega_0, \quad (4.22)$$

las ecuaciones (4.7) quedan como

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + k \sin(\theta + \Phi_{2,1}) & j &= 1 \\ \omega &= \omega_0 + k[\sin(\theta + \Phi_{j+1,j}) - \sin(\theta - \Phi_{j-1,j})] & j &= 2, \dots, N - 1 \\ \omega &= \omega_0 - k \sin(\theta - \Phi_{N-1,N}) & j &= N, \end{aligned} \quad (4.23)$$

En (4.23) se puede identificar de forma casi inmediata una alternativa para encontrar las soluciones que lleven al gradiente de fase deseado  $\theta$  utilizando las fases de acoplamiento de la periferia, esto es

$$\begin{aligned}\Phi_{2,1} &= -\theta, \\ \Phi_{N-1,N} &= \theta.\end{aligned}\tag{4.24}$$

Con estas dos fases de acoplamiento definidas de esta forma, el resto de las fases de acoplamiento deben ser tales que satisfagan

$$\sin(\theta + \Phi_{j+1,j}) - \sin(\theta - \Phi_{j-1,j}) = 0 \quad j = 2, \dots, N-1.\tag{4.25}$$

O, de forma equivalente,

$$\begin{aligned}\sin\left(\theta + \frac{1}{2}\Phi_{j+1,j} - \frac{1}{2}\Phi_{j-1,j} + \frac{1}{2}\Phi_{j+1,j} + \frac{1}{2}\Phi_{j-1,j}\right) \\ - \sin\left(\theta + \frac{1}{2}\Phi_{j+1,j} - \frac{1}{2}\Phi_{j-1,j} - \frac{1}{2}\Phi_{j+1,j} - \frac{1}{2}\Phi_{j-1,j}\right) = 0\end{aligned}$$

para  $j = 2, \dots, N-1$ . Utilizando la siguiente identidad trigonométrica:

$$\cos x \sin y = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2},$$

queda

$$\cos\left(\theta + \frac{1}{2}[\Phi_{j+1,j} - \Phi_{j-1,j}]\right) \sin\left(\frac{1}{2}[\Phi_{j+1,j} + \Phi_{j-1,j}]\right) = 0 \quad j = 2, \dots, N-1.\tag{4.26}$$

Para satisfacer esta ecuación, se debe cumplir que cualquiera de los dos factores involucrados sea igual a cero. Es decir, que se cumpla ya sea

$$\Phi_{j+1,j} - \Phi_{j-1,j} = m\pi - 2\theta \quad (4.27)$$

para cualquier número entero impar  $m$ , para el término coseno.

O que se cumpla

$$\Phi_{j+1,j} + \Phi_{j-1,j} = 2m\pi \quad (4.28)$$

para cualquier número entero  $m$ , para el término seno.

De (4.28), es evidente que la distribución más simple para el resto de las fases de acoplamiento ocurre cuando  $m = 0$  y

$$\Phi_{j+1,j} = \Phi_{j-1,j} = 0. \quad (4.29)$$

Es evidente que dos de las fases de acoplamiento necesitan de una red no-recíproca como se muestra en la figura 4.6(a). La exploración de haz que resulta de esta distribución de fases de acoplamiento se asemeja al método de York así como al de Hwang y Myung en que sólo es necesario controlar activamente los elementos de la periferia. Al igual que en el método de Hwang y Myung, existe una relación lineal entre el gradiente de fase deseado y las fases de acoplamiento; sin embargo, la distinción importante de este método es que el acoplamiento que une a los elementos de la periferia con los elementos interiores debe estar formado por una red no-recíproca mientras que el resto de los acoplamientos son recíprocos. Todos los elementos del arreglo contribuyen al patrón de radiación a diferencia del método de Hwang y Myung. Curiosamente, el análisis de estabilidad de este método resulta idéntico al del método de Hwang y Myung como se verá en el siguiente capítulo.

#### **4.e. Control por Fases de Acoplamiento de un Arreglo Completamente No-Recíproco de Heath**

Como alternativa a la distribución de fases de acoplamiento del método parcialmente no-recíproco de Heath, este autor presentó también la distribución que se muestra a continuación,

que aunque más compleja en el sentido de que involucra manipular activamente el total de las  $2(N - 1)$  fases de acoplamiento para la exploración de haz, será demostrado que este método maximiza el rango de valores obtenibles del gradiente de fase [18].

Regresando a las ecuaciones (4.23) y definiendo de la misma forma las dos fases de acoplamiento de (4.24), el resto de las fases de acoplamiento deben satisfacer ya sea (4.27) ó (4.28).

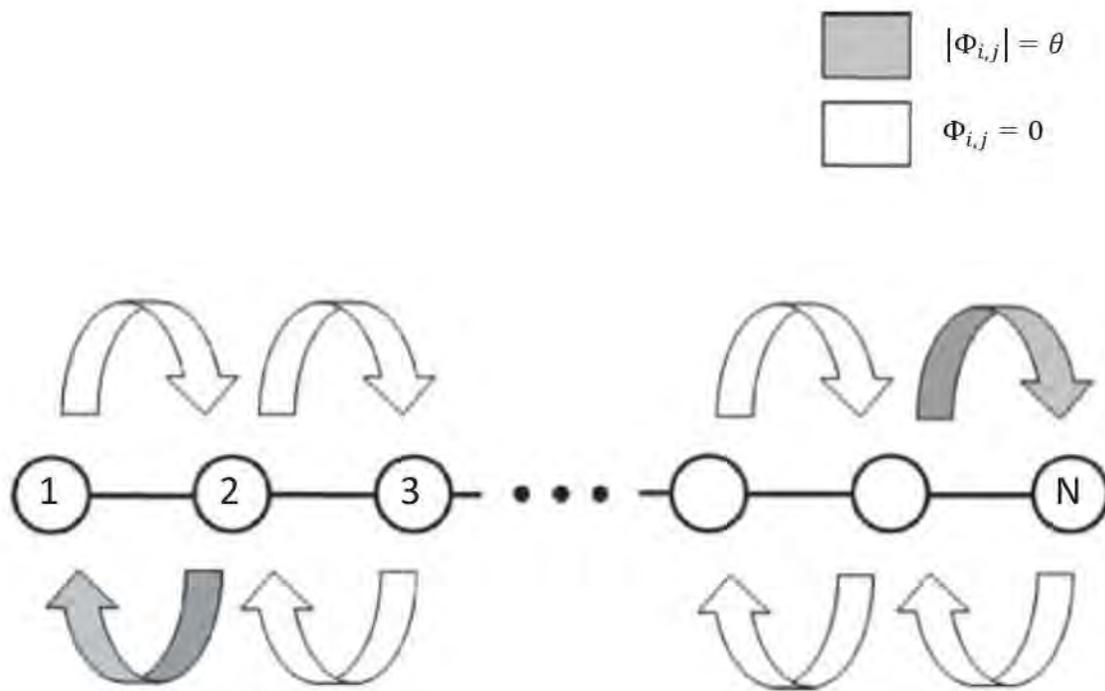
Mientras que en la distribución de fases del método anterior se utilizaba (4.28) con  $m = 0$ , en su lugar puede utilizarse (4.27), con  $m = 0$  y las fases de acoplamiento:

$$\begin{aligned}\Phi_{j+1,j} &= -\theta, \\ \Phi_{j-1,j} &= \theta,\end{aligned}\tag{4.30}$$

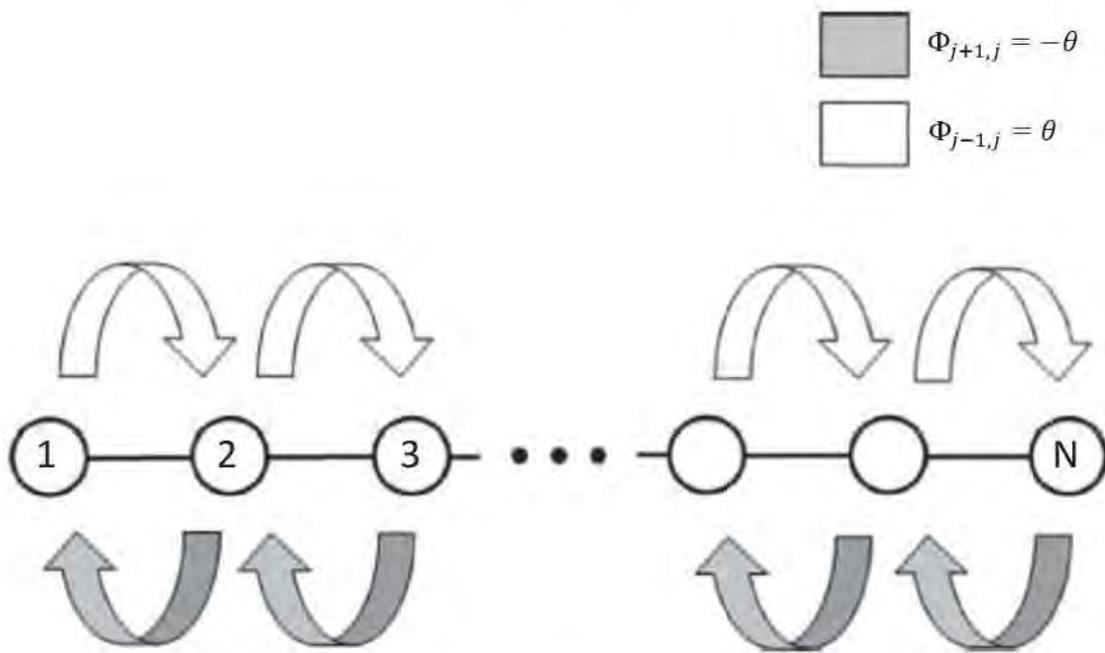
para  $j = 1, \dots, N$ , con lo cual se siguen satisfaciendo las ecuaciones (4.25). En la figura 4.6(b) se puede apreciar gráficamente que este conjunto de fases de acoplamiento representa un arreglo formado completamente por redes de acoplamiento no-recíprocas. A pesar de que este método requiere ajustar todas las redes de acoplamiento, su principio básico es relativamente simple: esencialmente, una red bidireccional que utiliza dos valores de fases de acoplamiento, por lo que su implementación podría resultar no más compleja que el método anterior.

El hecho de que este método hace posible alcanzar un amplio rango de exploración no se puede establecer simplemente por la relación entre el gradiente de fase deseado y los valores de las fases de acoplamiento de las expresiones (4.30). Al igual que con los demás métodos basados en la dinámica de osciladores acoplados, el rango de valores posibles del ángulo de exploración está limitado por el rango de soluciones estables. El análisis lineal de estabilidad de las soluciones generadas por esta técnica de acoplamiento completamente no-recíproco será presentado en el siguiente capítulo. En este análisis, será demostrado que este método de orientación de haz maximiza el rango de exploración alcanzable.

Es importante mencionar que la fase de acoplamiento, como se define en [18], es una función de las cantidades relativas de acoplamiento a través de la variable dinámica y su derivada en el tiempo; si, por ejemplo, la variable dinámica fuera un voltaje, entonces la fase de acoplamiento dependería de las magnitudes relativas de las interacciones de voltaje y corriente entre los elementos del arreglo. De esta forma, se podría pensar en cambiar la fase de acoplamiento por medio de ajustar esta proporción (quizás mediante amplificadores de voltaje y de corriente por separado), en lugar de utilizar otro método como el alterar la longitud de la línea entre los elementos. Esto es especialmente significativo si es que se han de elegir las fases de acoplamiento como parámetro de control. El propósito de explotar las propiedades de sincronización de los arreglos de osciladores acoplados es el proporcionar un método alternativo de exploración de haz sin necesidad de desplazadores de fase. El escoger a las fases de acoplamiento como parámetro de



(a)



(b)

**Figura 4.6.** Dos diferentes arreglos unidimensionales de osciladores acoplados con interacciones entre elementos adyacentes. Los círculos numerados representan los osciladores no-lineales individuales, las flechas simbolizan las interacciones *desde* un elemento asociado a la cola de la flecha *hasta* otro asociado con la punta de la flecha. (a) Método parcialmente no-recíproco en el que los acoplamientos de la periferia se ajustan en cantidades iguales pero con signos contrarios mientras que las demás fases de acoplamiento se mantienen en cero y (b) método completamente no-recíproco en el que se requieren ajustar todas las redes de acoplamiento.

control parecería implicar la necesidad de desplazadores de fase en las líneas de acoplamiento, anulando por completo el propósito de utilizar osciladores acoplados. En efecto, Hwang y Myung utilizaron líneas de longitud variable (en esencia, desplazadores de fase mecánicos) para alterar las fases de acoplamiento [17]; a pesar de que se requerían dos en vez de  $N$  desplazadores de fase, este no era un método que eliminara los desplazadores de fase como lo hacía el método de York que utilizaba la desintonización de las frecuencias de los osciladores como parámetro de control. Sin embargo, la definición que Heath utiliza en [18], proporciona una posible solución a este dilema al revelar la dependencia que guarda la fase de acoplamiento con respecto al tipo de interacciones (por ejemplo, a través de voltaje y corriente) entre los elementos del arreglo, en principio, permitiendo ajustar las fases de acoplamiento sin recurrir a desplazadores de fase necesariamente.

#### 4.f. Simulaciones Numéricas

Para comprobar los resultados teóricos, las ecuaciones del modelo de fase generalizado (4.1) se simularon numéricamente utilizando el solucionador de ecuaciones diferenciales ordinarias *ode45* de MATLAB para cada uno de los cuatro métodos de exploración de haz presentados en este capítulo. Para resolver el sistema de ecuaciones, se introducen los parámetros necesarios de (4.1), ajustando los parámetros de control de acuerdo al análisis de cada método con el fin de lograr el gradiente de fase deseado. A continuación se presenta una simulación representativa correspondiente al método de desintonización de York.

Se introdujeron los siguientes parámetros:

- Número de osciladores  $N = 4$ .
- Gradiente de fase deseado  $\theta = -30$  [°].
- Magnitudes de acoplamiento  $k_{j+1,j} = k_{j-1,j} = k = 3 \times 10^9$  [rad/s] y  $k_{i,j} = 0$  [rad/s] para cualquier otro par de valores  $i, j$ .
- Fases de acoplamiento  $\Phi_{i,j} = 0$  para cualquier par de valores  $i, j$ , de acuerdo a (4.9).
- Frecuencia de sincronización deseada  $f = 5$  [GHz].

A partir de estos parámetros, las frecuencias de carrera libre de los elementos interiores, de acuerdo a (4.10), se introducen como

$$\omega_j = \omega = 2\pi f = 3.1416 \times 10^{10} \text{ [rad/s]} \quad j = 2, \dots, N - 1.$$

La cantidad de desintonización para los elementos de los extremos, de acuerdo a (4.13), queda

$$\Delta\omega = k \sin\theta = -1.5 \times 10^9 \text{ [rad/s]} .$$

Por lo que, las dos frecuencias de carrera libre de los osciladores de los extremos se ajustan, de acuerdo a (4.14), a

$$\omega_1 = \omega - \Delta\omega = 3.2916 \times 10^{10} \text{ [rad/s]} ,$$

$$\omega_N = \omega + \Delta\omega = 2.9916 \times 10^{10} \text{ [rad/s]} .$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtienen las fases de los osciladores  $\phi_j$  para  $j = 1, \dots, N$ . Las gráficas correspondientes se muestran en la figura 4.7.

Los resultados se pueden interpretar más claramente si se utilizan las fases obtenidas en señales senoidales:

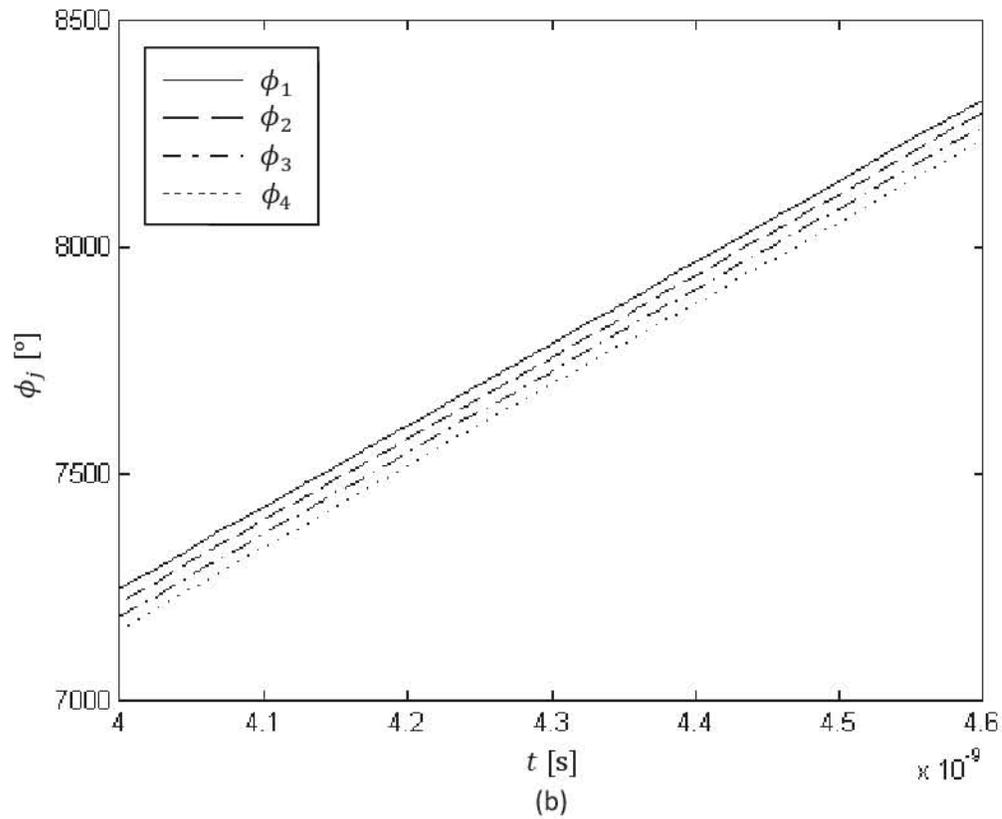
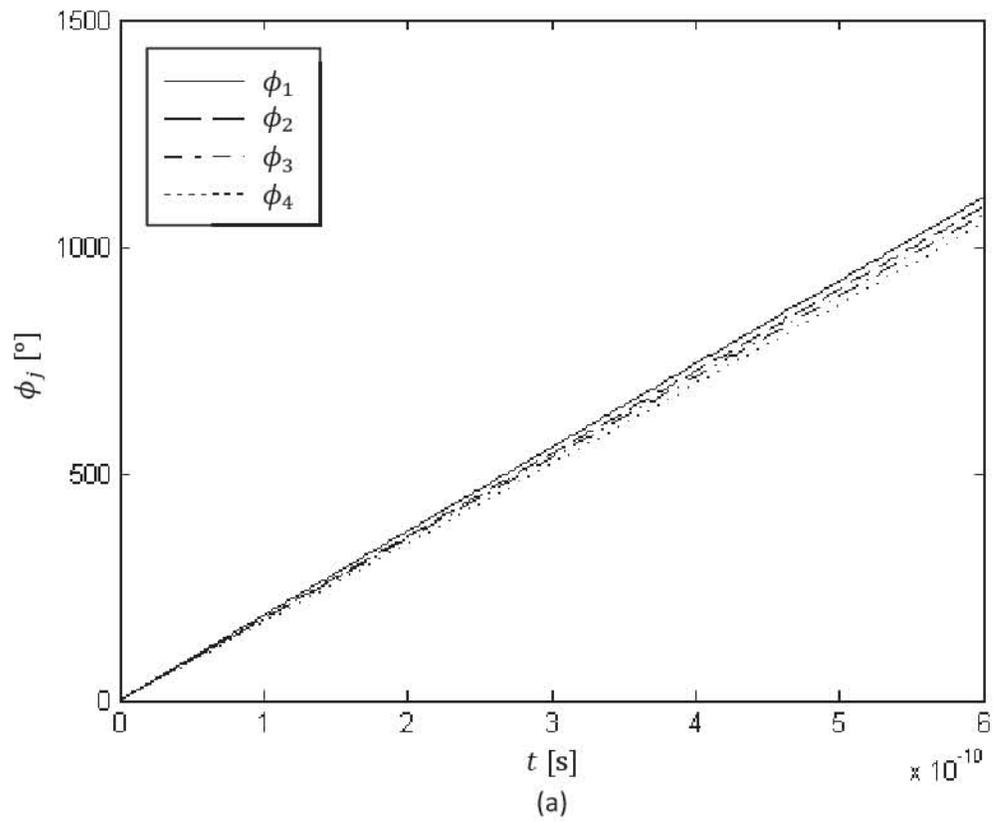
$$x_j(t) = \sin \phi_j .$$

En la figura 4.8 se muestran las gráficas correspondientes a estas funciones. De esta forma, se puede observar más claramente que existe una progresión de fase constante entre los osciladores.

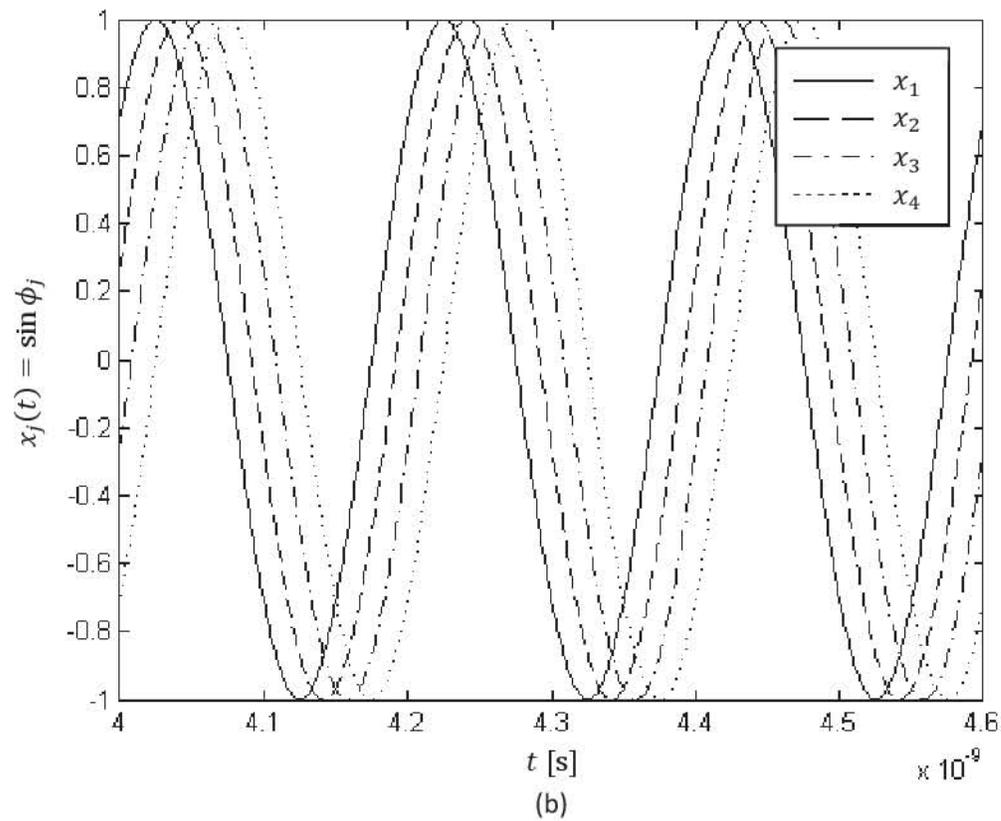
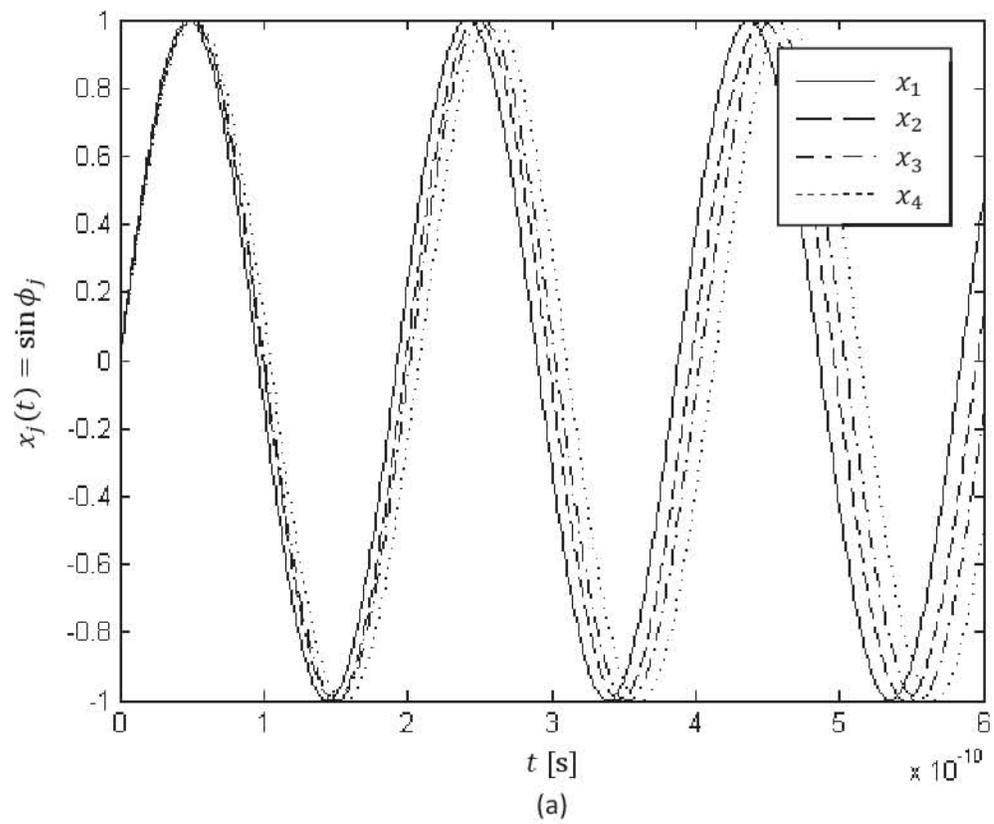
También, se puede comprobar que los osciladores se sincronizan a una misma frecuencia  $\omega$  si se trazan las gráficas de  $\dot{\phi}_j$  para  $j = 1, \dots, N$ . En la figura 4.9 se muestran estos resultados.

En el estado estable, cuando los osciladores se sincronizan a una misma frecuencia  $\omega$ , las fases de los osciladores se pueden escribir como

$$\phi_j = \omega t + \alpha_j \qquad j = 1, \dots, N .$$



**Figura 4.7.** Fases de los osciladores para un arreglo de cuatro elementos obtenidas mediante el método de desintonización de York. (a) Al inicio de la simulación y (b) en el estado estable.



**Figura 4.8.** Funciones senoidales calculadas con las fases de los osciladores de un arreglo de cuatro elementos obtenidas mediante el método de York. (a) Al inicio de la simulación y (b) en el estado estable.

Si se hace

$$\omega_j = \omega = 0 \text{ [rad/s]} \quad j = 2, \dots, N - 1,$$

las frecuencias de los osciladores de los extremos quedan

$$\omega_1 = -\Delta\omega = 1.5 \times 10^9 \text{ [rad/s]},$$

$$\omega_N = \Delta\omega = -1.5 \times 10^9 \text{ [rad/s]},$$

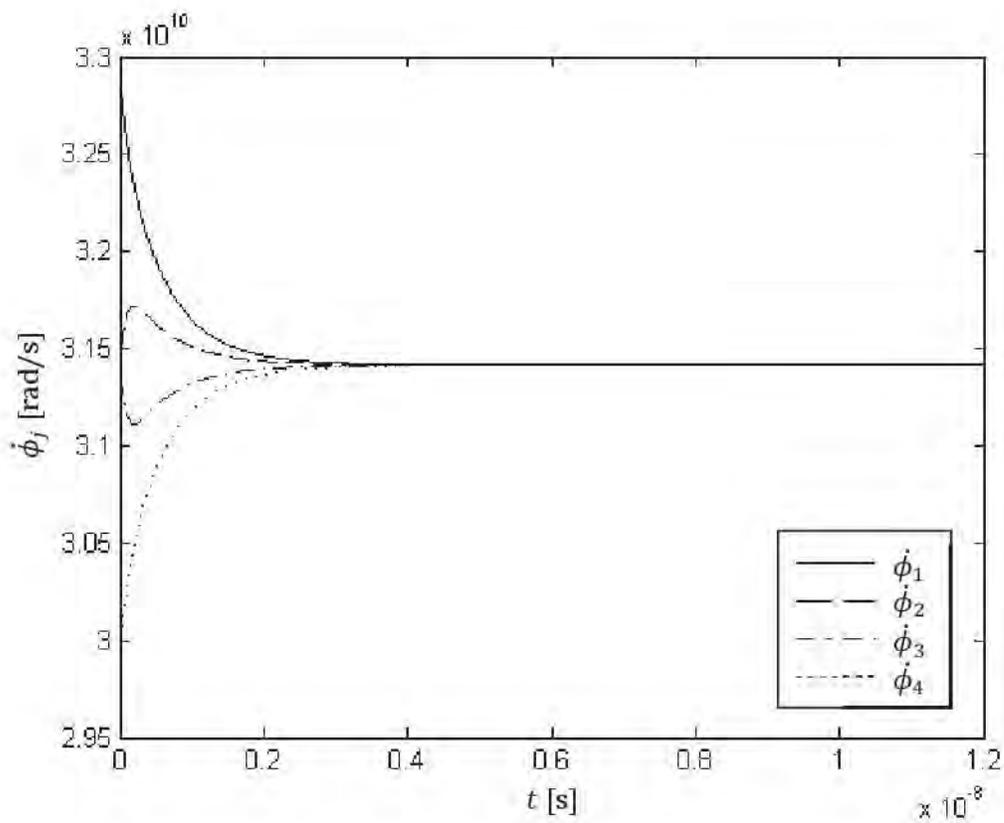
y por lo tanto, los osciladores se sincronizan a una frecuencia igual a cero y se podrá observar solamente el desfase  $\alpha_j$  de cada uno de los osciladores. En la figura 4.10 se muestran estos resultados.

En la figura 4.10, se observa claramente que la diferencia de fase entre osciladores adyacentes es igual a  $-30^\circ$ , es decir el valor deseado.

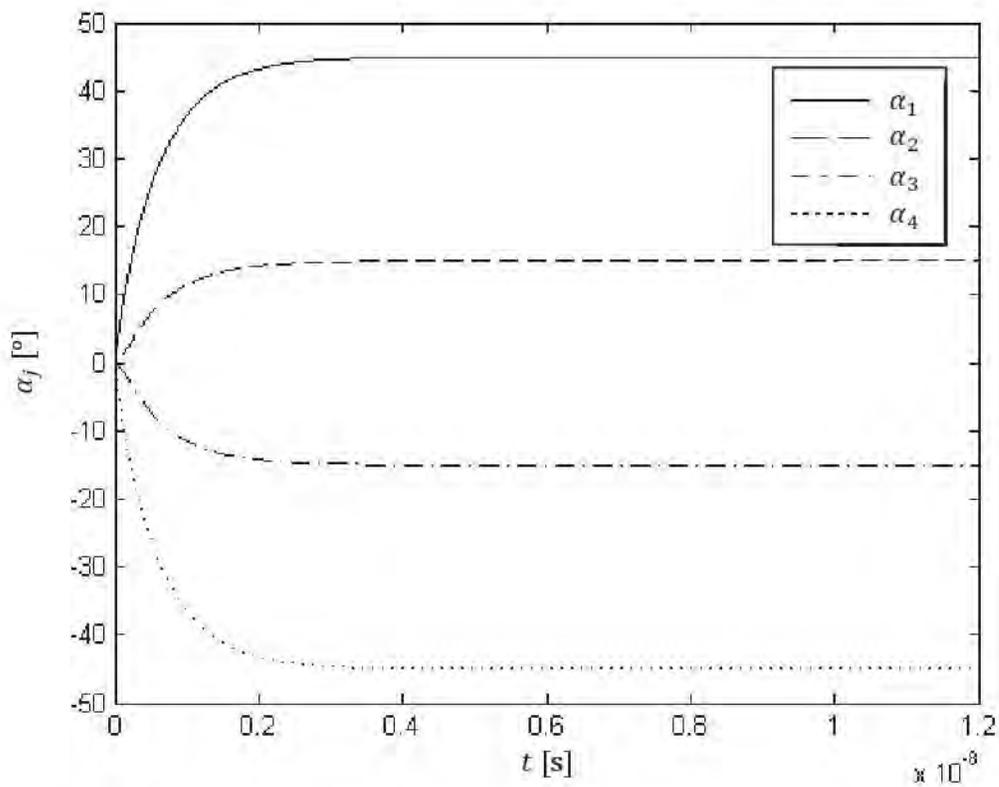
La distribución de fases de los osciladores en el estado estable que se obtuvo en estas simulaciones se utilizó también para calcular el factor del arreglo y así obtener la forma del patrón de radiación. Para hacer esto gráficamente más interesante, se modificó el número de osciladores a  $N = 25$ , manteniendo los demás parámetros de la simulación anterior. En la figura 4.11 se muestra el desfase de los osciladores y en la figura 4.12 se muestra el factor de arreglo resultante para un espaciamiento de media longitud de onda entre elementos.

Para las simulaciones numéricas del método de control por fases de acoplamiento de Hwang y Myung se eligieron los siguientes parámetros:

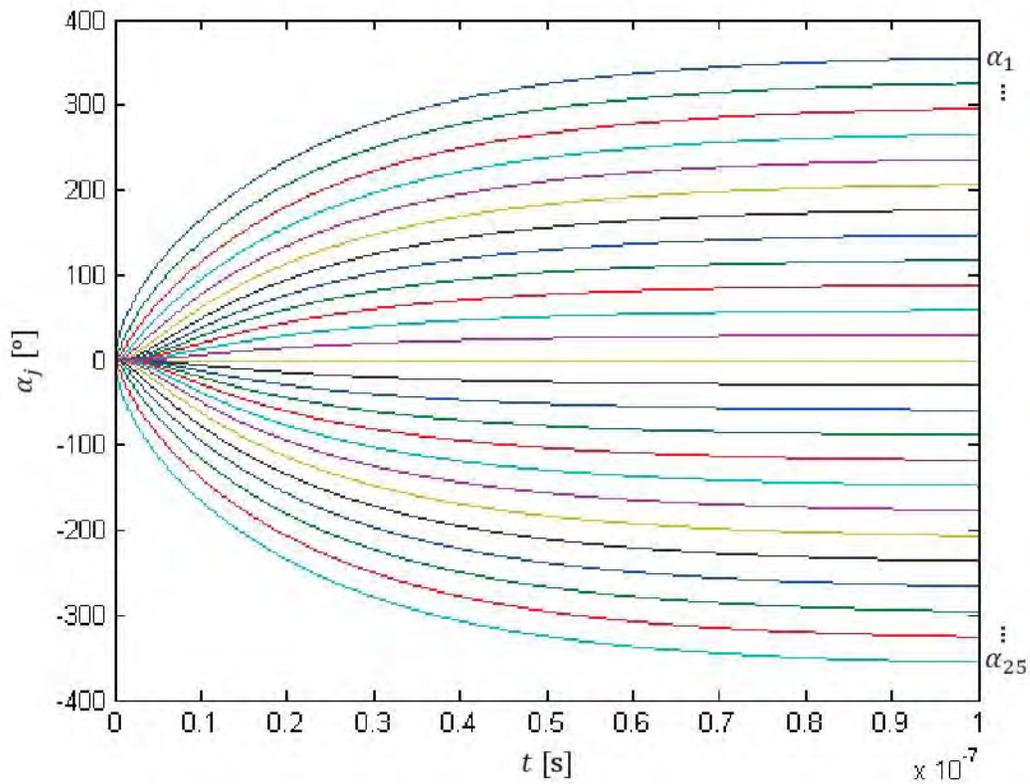
- Número de osciladores  $N = 4$ .
- Gradiente de fase deseado (elementos interiores)  $\theta = -30^\circ$ .
- Magnitudes de acoplamiento  $k_{j+1,j} = k_{j-1,j} = k = 3 \times 10^9 \text{ [rad/s]}$  y  $k_{i,j} = 0 \text{ [rad/s]}$  para cualquier otro par de valores  $i, j$ .
- Frecuencia de sincronización deseada  $f = 5 \text{ [GHz]}$ .



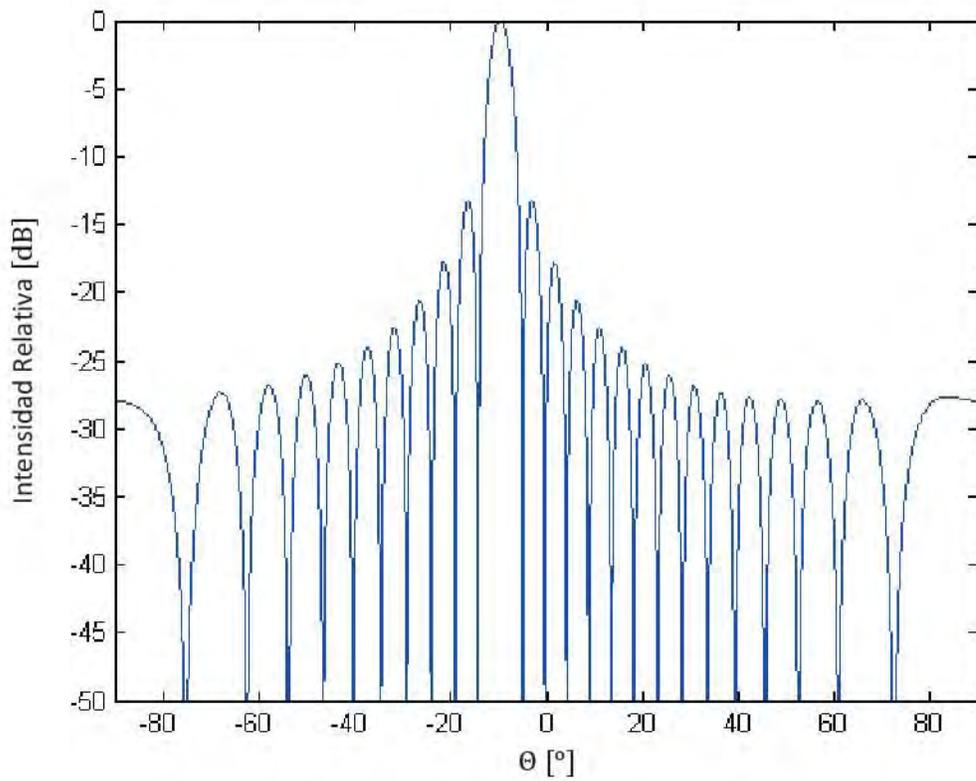
**Figura 4.9.** Derivada con respecto al tiempo de las fases de los osciladores para un arreglo de cuatro elementos obtenidas mediante el método de York.



**Figura 4.10.** Desfasamientos de los osciladores para un arreglo de cuatro elementos obtenidos mediante el método de desintonización de York.



**Figura 4.11.** Desfasamientos de los osciladores para un arreglo de veinticinco elementos obtenidos mediante el método de desintonización de York.



**Figura 4.12.** Patrón de radiación (intensidad relativa contra ángulo de exploración medido con respecto a la normal) de un arreglo de veinticinco elementos obtenido mediante el método de desintonización de York.

De acuerdo a (4.15), se introducen frecuencias de carrera libre idénticas para todos los osciladores:

$$\omega_j = \omega_0 = \omega = 2\pi f = 3.1416 \times 10^{10} \text{ [rad/s]} \quad j = 1, \dots, N.$$

Para las fases de acoplamiento, de acuerdo a (4.19), se tiene

$$\Phi = -\frac{\theta}{2} = 15^\circ.$$

Por lo que, utilizando las ecuaciones (4.17) y (4.18), se definen

$$\begin{aligned} \Phi_{2,1} = \Phi_{1,2} &= \Phi = -15^\circ, \\ \Phi_{N-1,N} = \Phi_{N,N-1} &= -\Phi = 15^\circ, \end{aligned}$$

junto con  $\Phi_{i,j} = 0$  para el resto de valores  $i, j$ .

Al igual que en las simulaciones del método anterior, se trazaron las gráficas de: las fases de los osciladores directamente, las fases de los osciladores utilizando funciones senoidales, las primeras derivadas para comprobar la frecuencia de sincronización y los desfases de los osciladores. Los resultados se muestran en las figuras 4.13, 4.14, 4.15 y 4.16, respectivamente.

En esta simulación es evidente la restricción más importante de este método, que tiene que ver con el número de osciladores. Si se desean obtener resultados similares a los de las simulaciones de los demás métodos, se necesitan dos osciladores adicionales. La figura 4.17 muestra el desfase de los osciladores para un arreglo con  $N = 6$ , con el resto de los parámetros anteriores.

En este resultado se puede observar más claramente que los dos osciladores de los extremos no podrán contribuir al patrón de radiación ya que sus fases relativas son distintas a las de los demás elementos, como se demostró en las ecuaciones (4.19).

Finalmente, se simuló un arreglo con  $N = 27$  y se calculó el factor del arreglo. El desfase de los osciladores se muestra en la figura 4.18 mientras que el factor del arreglo se muestra en la figura 4.19 y resulta igual al de la figura 4.12, ya que se tiene la misma distribución de fase en los

veinticinco elementos interiores y se utilizaron también espaciamentos de media longitud de onda.

Para las simulaciones de los dos métodos de exploración de haz de Heath, se fijaron los siguientes parámetros:

- Número de osciladores  $N = 4$ .
- Gradiente de fase deseado (elementos interiores)  $\theta = -30^\circ$ .
- Magnitudes de acoplamiento  $k_{j+1,j} = k_{j-1,j} = k = 3 \times 10^9$  [rad/s] y  $k_{i,j} = 0$  [rad/s] para cualquier otro par de valores  $i, j$ .
- Frecuencia de sincronización deseada  $f = 5$  [GHz].

De acuerdo a (4.22), se introducen frecuencias de carrera libre idénticas para todos los osciladores:

$$\omega_j = \omega_0 = \omega = 2\pi f = 3.1416 \times 10^{10} \text{ [rad/s]} \quad j = 1, \dots, N.$$

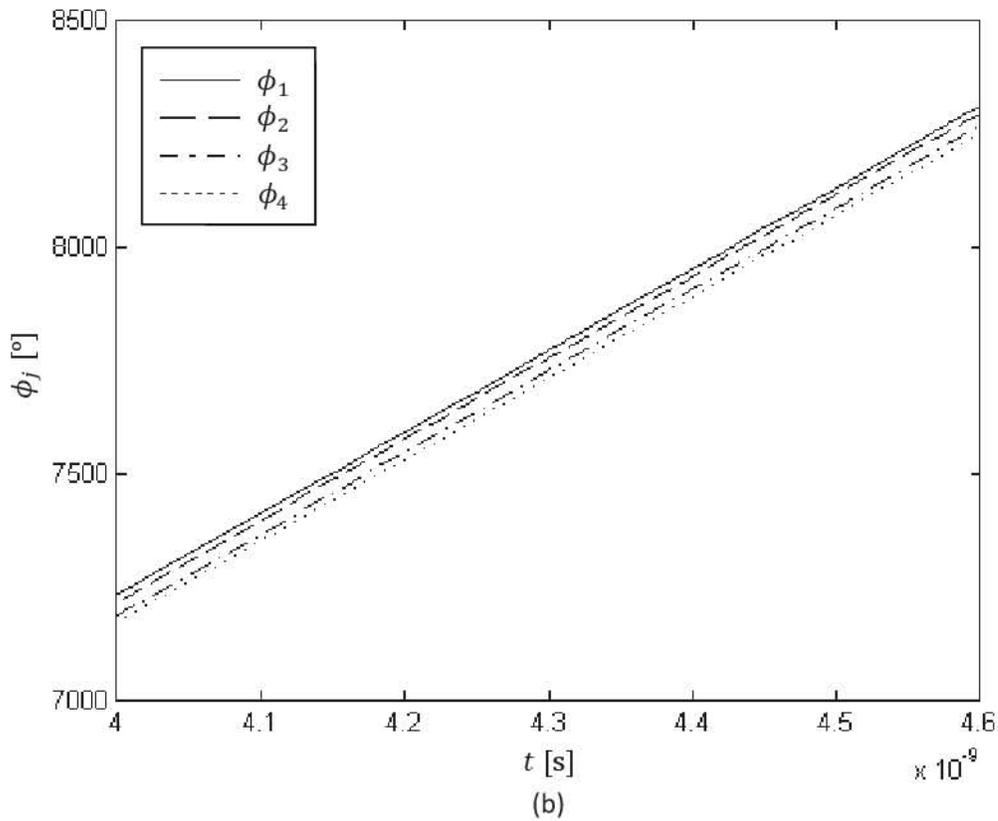
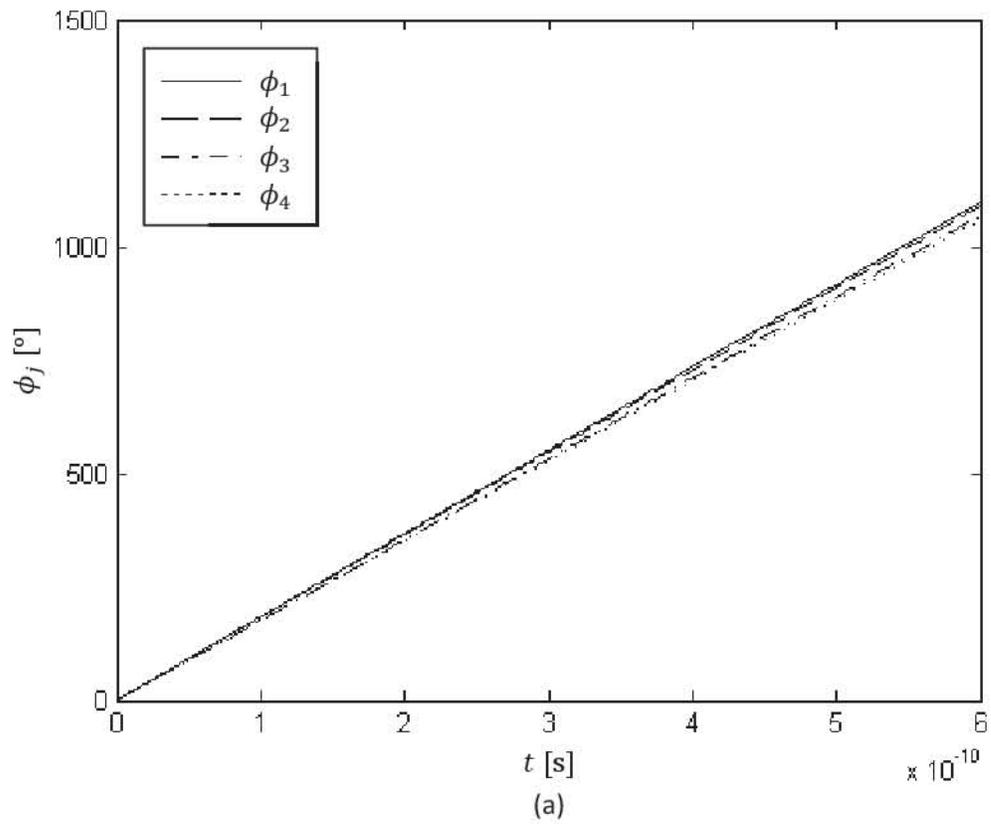
Para el método de control por fases de acoplamiento parcialmente no-recíproco, de acuerdo a (4.24), se definen las siguientes dos fases de acoplamiento:

$$\Phi_{2,1} = -\theta = 30^\circ,$$

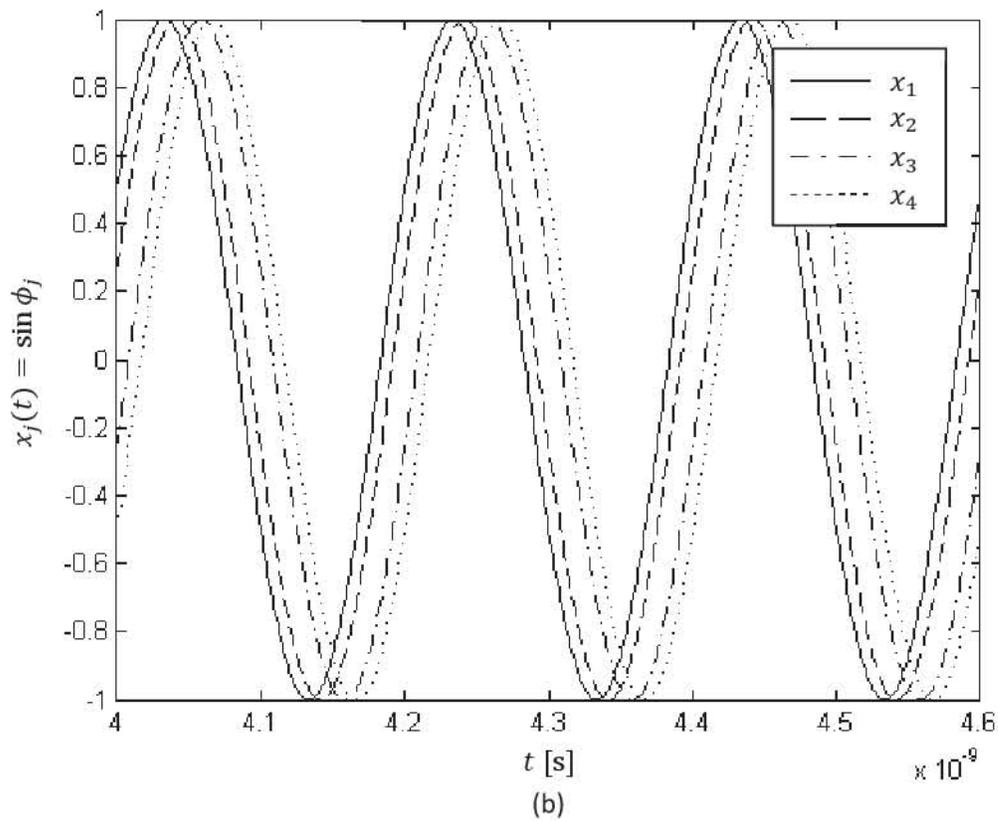
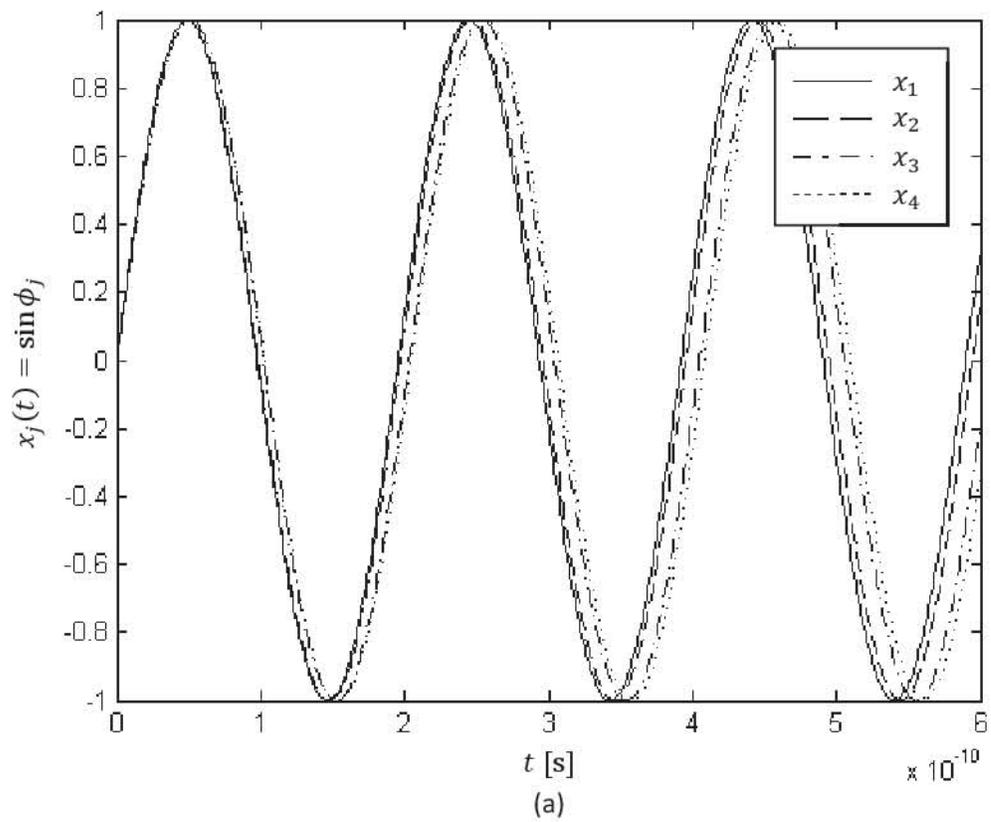
$$\Phi_{N-1,N} = \theta = -30^\circ,$$

El resto de las fases de acoplamiento son iguales a cero de acuerdo a (4.29).

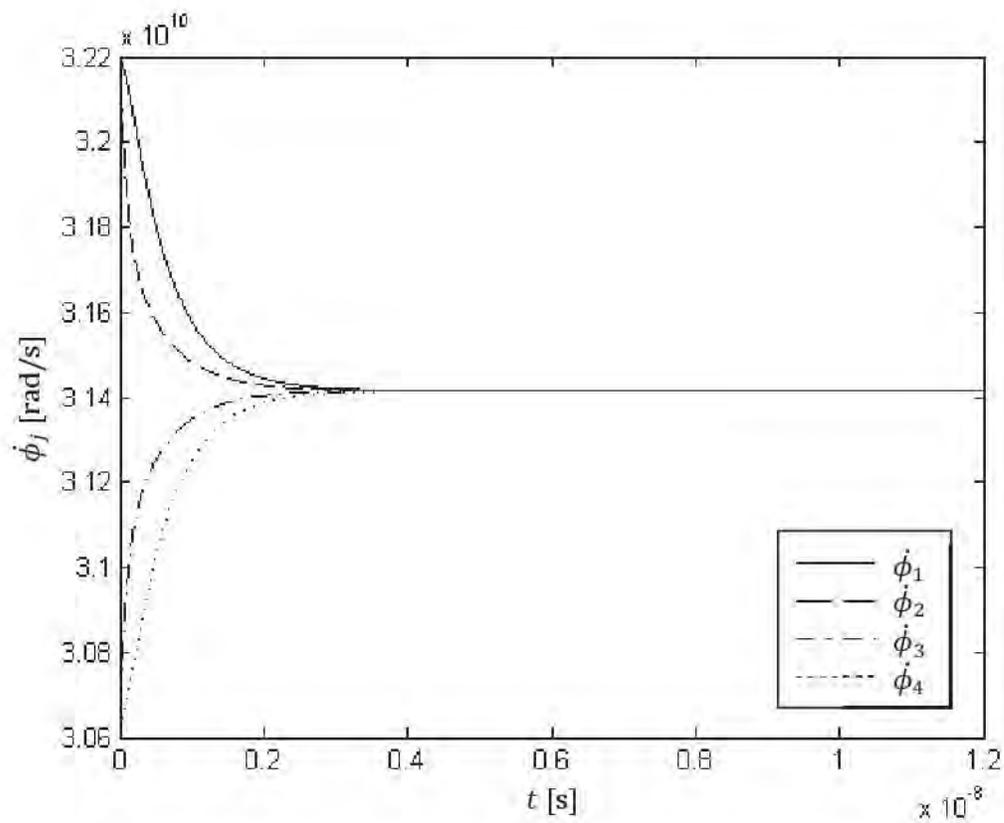
Las gráficas resultantes de esta simulación son las mismas que las de la simulación del método de desintonización de York. Aparentemente, la diferencia está solamente en la relación entre el parámetro de control y el gradiente de fase. Otras diferencias no son evidentes a simple vista para este caso en particular.



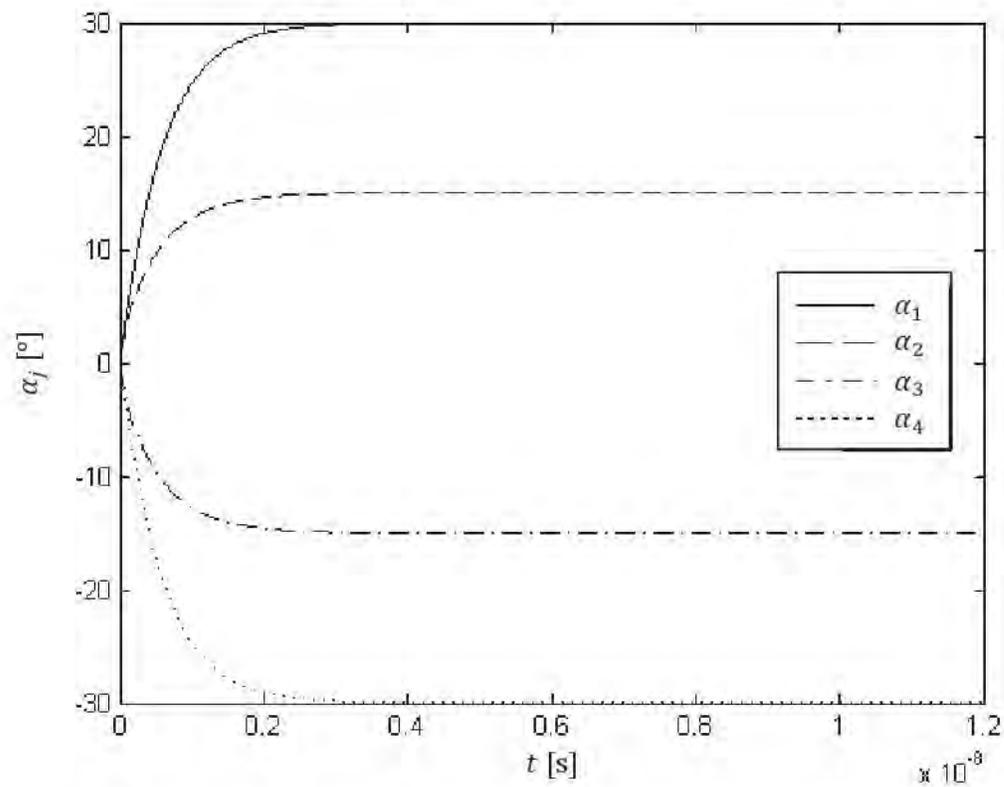
**Figura 4.13.** Fases de los osciladores para un arreglo de cuatro elementos obtenidas mediante el método de Hwang y Myung. (a) Al inicio de la simulación y (b) en el estado estable.



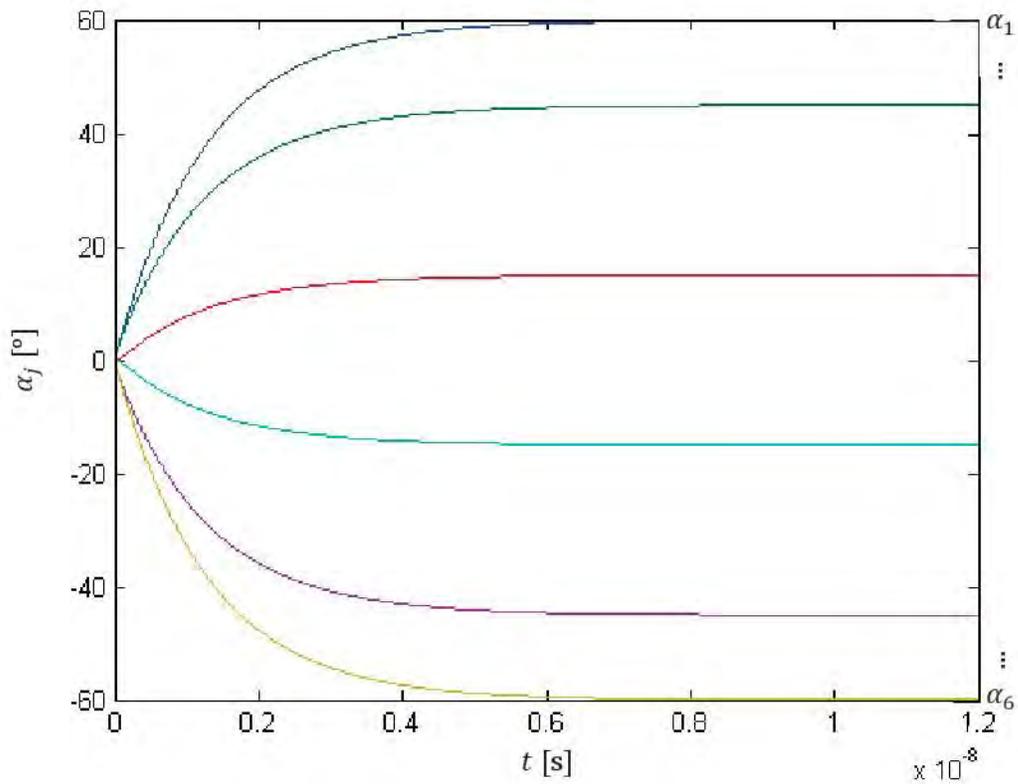
**Figura 4.14.** Funciones senoidales calculadas con las fases de los osciladores de un arreglo de cuatro elementos obtenidas mediante el método de Hwang y Myung. (a) Al inicio de la simulación y (b) en el estado estable.



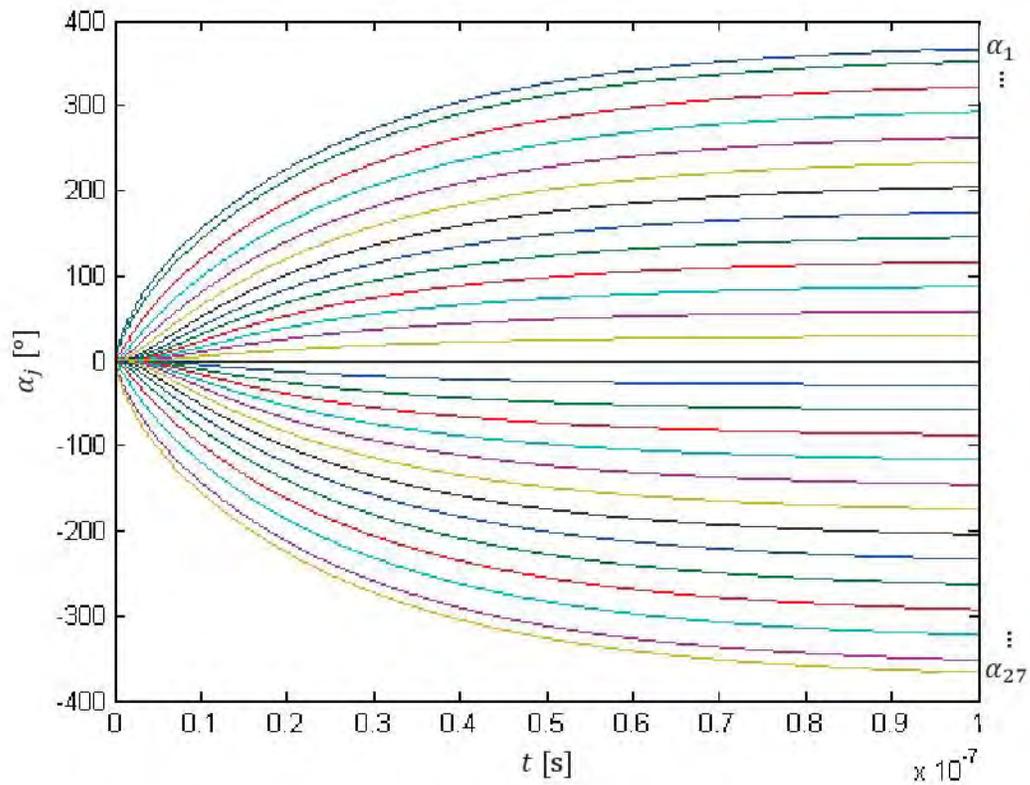
**Figura 4.15.** Derivada con respecto al tiempo de las fases de los osciladores para un arreglo de cuatro elementos obtenidas mediante el método de Hwang y Myung.



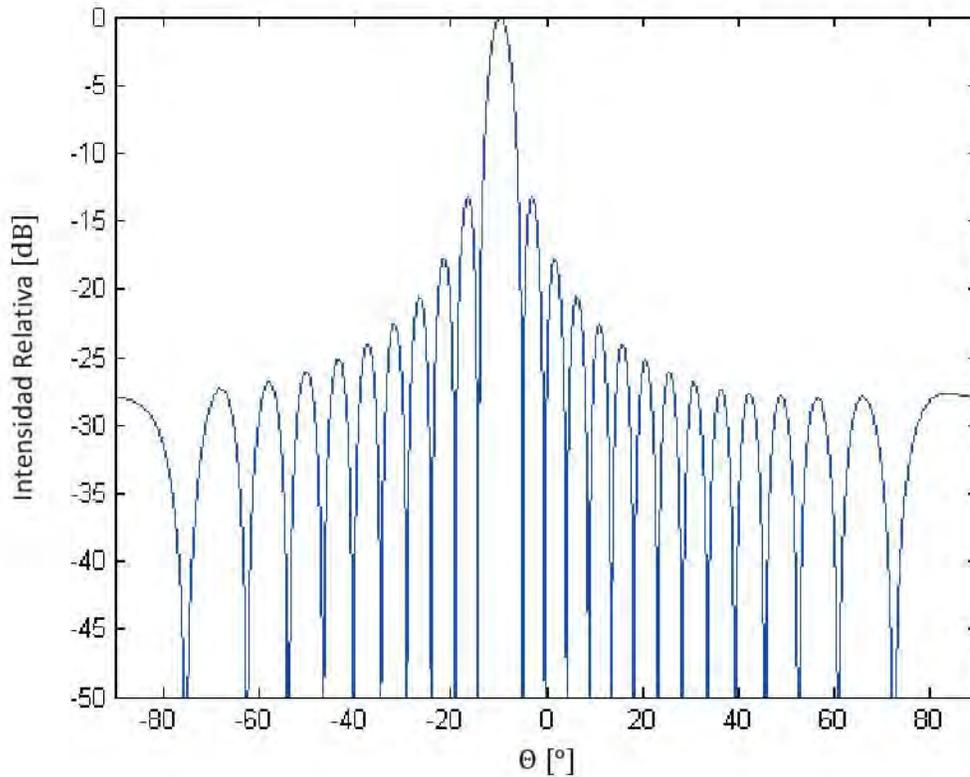
**Figura 4.16.** Desfasamientos de los osciladores para un arreglo de cuatro elementos obtenidos mediante el método de Hwang y Myung.



**Figura 4.17.** Desfasamientos de los osciladores para un arreglo de cuatro elementos obtenidos mediante el método de Hwang y Myung.



**Figura 4.18.** Desfasamientos de los osciladores para un arreglo de veintisiete elementos obtenidos mediante el método de Hwang y Myung.



**Figura 4.19.** Patrón de radiación (intensidad relativa contra ángulo de exploración medido con respecto a la normal) de un arreglo de veintisiete elementos obtenido mediante el método de Hwang y Myung, tomando solamente los veinticinco elementos interiores.

Para la simulación del método de control por fases de acoplamiento completamente no-recíproco de Heath, se mantienen los parámetros de la simulación del método parcialmente no-recíproco, a excepción de las fases de acoplamiento, que de acuerdo a (4.30), quedan como

$$\Phi_{j+1,j} = -\theta = 30^\circ,$$

$$\Phi_{j-1,j} = \theta = -30^\circ,$$

para  $j = 1, \dots, N$ . El resto de las fases de acoplamiento son iguales a cero.

Al igual que para el método parcialmente no-recíproco de Heath, las gráficas de esta simulación son las mismas que las del método de desintonización York. De nuevo, aparentemente, la única diferencia está en la relación que guardan el parámetro de control y el gradiente de fase. Las ventajas o desventajas más importantes de un método sobre otro se revisarán a detalle en el siguiente capítulo, cuando se obtenga el análisis de estabilidad que definirá el rango de exploración que es posible obtener con cada método.

## V. Análisis de Estabilidad

En el capítulo IV se definió cómo es que deben ser ajustados los parámetros de cada uno de los cuatro métodos de exploración de haz presentados para asegurar la existencia de las soluciones correspondientes al gradiente de fase deseado. Sin embargo, simplemente demostrar que las soluciones deseadas existen no es suficiente. Para que cualquiera de estos esquemas funcione como medio práctico para la exploración de haz, las soluciones asociadas deben además ser estados estables de las ecuaciones dinámicas. En otras palabras, cualquier perturbación con respecto al gradiente de fase espacialmente uniforme debe decaer rápidamente a cero. La estabilidad de una solución puede restringir el ángulo de exploración obtenible del sistema, es decir, definir el ángulo máximo con respecto a la normal al que es posible orientar el haz principal. A continuación se presenta el análisis de estabilidad de las ecuaciones generales que permitirá obtener el análisis por separador de cada uno de los métodos descritos en el capítulo IV.

La solución con perturbación se representa como

$$\phi_j = \phi_j^* + \eta_j. \quad (5.1)$$

Sustituyendo (5.1) en (4.2), se obtienen

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1^* + \dot{\eta}_1 &= \omega_1 + k_{2,1} \sin(\phi_2^* + \eta_2 - \phi_1^* - \eta_1 + \Phi_{2,1}) & j = 1 \\ \dot{\phi}_j^* + \dot{\eta}_j &= \omega_j + k_{j+1,j} \sin(\phi_{j+1}^* + \eta_{j+1} - \phi_j^* - \eta_j + \Phi_{j+1,j}) \\ &\quad + k_{j-1,j} \sin(\phi_{j-1}^* + \eta_{j-1} - \phi_j^* - \eta_j + \Phi_{j-1,j}) & j = 2, \dots, N-1 \\ \dot{\phi}_N^* + \dot{\eta}_N &= \omega_N + k_{N-1,N} \sin(\phi_{N-1}^* + \eta_{N-1} - \phi_N^* - \eta_N + \Phi_{N-1,N}) & j = N. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Simplificando términos mediante (4.3) y (4.6),

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1^* + \dot{\eta}_1 &= \omega_1 + k \sin(\theta_1 + \Phi_{2,1} + \eta_2 - \eta_1) & j = 1 \\ \dot{\phi}_j^* + \dot{\eta}_j &= \omega_j + k [\sin(\theta_j + \Phi_{j+1,j} + \eta_{j+1} - \eta_j) \\ &\quad - \sin(\theta_{j-1} - \Phi_{j-1,j} + \eta_j - \eta_{j-1})] & j = 2, \dots, N-1 \\ \dot{\phi}_N^* + \dot{\eta}_N &= \omega_N - k \sin(\theta_{N-1} - \Phi_{N-1,N} + \eta_N - \eta_{N-1}) & j = N. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Utilizando la identidad trigonométrica para el seno de la suma de dos ángulos

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y ,$$

se obtienen

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1^* + \dot{\eta}_1 = \omega_1 + k[\sin(\theta_1 + \Phi_{2,1}) \cos(\eta_2 - \eta_1) \\ + \cos(\theta_1 + \Phi_{2,1}) \sin(\eta_2 - \eta_1)] \end{aligned} \quad j = 1$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_j^* + \dot{\eta}_j = \omega_j + k[\sin(\theta_j + \Phi_{j+1,j}) \cos(\eta_{j+1} - \eta_j) \\ + \cos(\theta_j + \Phi_{j+1,j}) \sin(\eta_{j+1} - \eta_j) \\ - \sin(\theta_{j-1} - \Phi_{j-1,j}) \cos(\eta_j - \eta_{j-1}) \\ - \cos(\theta_{j-1} - \Phi_{j-1,j}) \sin(\eta_j - \eta_{j-1})] \end{aligned} \quad j = 2, \dots, N - 1$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_N^* + \dot{\eta}_N = \omega_N - k[\sin(\theta_{N-1} - \Phi_{N-1,N}) \cos(\eta_N - \eta_{N-1}) \\ + \cos(\theta_{N-1} - \Phi_{N-1,N}) \sin(\eta_N - \eta_{N-1})] \end{aligned} \quad j = N .$$

Dado que las perturbaciones son cantidades pequeñas y

$$\cos x \approx 1 ,$$

$$\sin x \approx x ,$$

para  $x$  pequeña, se obtienen

$$\dot{\phi}_1^* + \dot{\eta}_1 = \omega_1 + k[\sin(\theta_1 + \Phi_{2,1}) + \cos(\theta_1 + \Phi_{2,1})(\eta_2 - \eta_1)] \quad j = 1$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_j^* + \dot{\eta}_j = \omega_j + k[\sin(\theta_j + \Phi_{j+1,j}) + \cos(\theta_j + \Phi_{j+1,j})(\eta_{j+1} - \eta_j) \\ - \sin(\theta_{j-1} - \Phi_{j-1,j}) \\ - \cos(\theta_{j-1} - \Phi_{j-1,j})(\eta_j - \eta_{j-1})] \end{aligned} \quad j = 2, \dots, N - 1$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_N^* + \dot{\eta}_N = \omega_N - k[\sin(\theta_{N-1} - \Phi_{N-1,N}) \\ + \cos(\theta_{N-1} - \Phi_{N-1,N})(\eta_N - \eta_{N-1})] \end{aligned} \quad j = N . \quad (5.4)$$

Pero como

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}_1^* &= \omega_1 + k \sin(\theta_1 + \Phi_{2,1}) & j = 1 \\
 \dot{\phi}_j^* &= \omega_j + k[\sin(\theta_j + \Phi_{j+1,j}) - \sin(\theta_{j-1} - \Phi_{j-1,j})] & j = 2, \dots, N-1 \\
 \dot{\phi}_N^* &= \omega_N - k \sin(\theta_{N-1} - \Phi_{N-1,N}) & j = N, \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

quedan

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_1 &= k[\cos(\theta_1 + \Phi_{2,1})(\eta_2 - \eta_1)] & j = 1 \\
 \dot{\eta}_j &= k[\cos(\theta_j + \Phi_{j+1,j})(\eta_{j+1} - \eta_j) - \cos(\theta_{j-1} - \Phi_{j-1,j})(\eta_j - \eta_{j-1})] & j = 2, \dots, N-1 \\
 \dot{\eta}_N &= -k[\cos(\theta_{N-1} - \Phi_{N-1,N})(\eta_N - \eta_{N-1})] & j = N. \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

O simplemente,

$$\dot{\eta}_j = k[\cos(\theta_j + \Phi_{j+1,j})(\eta_{j+1} - \eta_j) - \cos(\theta_{j-1} - \Phi_{j-1,j})(\eta_j - \eta_{j-1})] \quad (5.7)$$

con las condiciones

$$\begin{aligned}
 \eta_0 &= \eta_1 \\
 \eta_{N+1} &= \eta_N. \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

Agrupando,

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_j &= k[\cos(\theta_j + \Phi_{j+1,j})\eta_{j+1} - \cos(\theta_j + \Phi_{j+1,j})\eta_j - \cos(\theta_{j-1} - \Phi_{j-1,j})\eta_j \\
 &\quad + \cos(\theta_{j-1} - \Phi_{j-1,j})\eta_{j-1}] \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

y de forma simplificada,

$$\dot{\eta}_j = a \eta_{j+1} + b \eta_j + c \eta_{j-1}, \quad (5.10)$$

en donde

$$\begin{aligned} a &= k \cos(\theta_j + \Phi_{j+1,j}) \\ b &= -(a + c) \\ c &= k \cos(\theta_{j-1} - \Phi_{j-1,j}). \end{aligned} \quad (5.11)$$

O de forma matricial,

$$\dot{\eta}_j = J \eta_j, \quad (5.12)$$

en donde  $J$  es una matriz tri-diagonal dada por

$$J = \begin{bmatrix} b & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & b & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & b \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (5.13)$$

Las pequeñas perturbaciones sobre las soluciones deseadas para los diferentes métodos de exploración de haz del capítulo IV evolucionan de acuerdo al sistema de ecuaciones acopladas lineales de (5.10).

Matemáticamente, los exponentes de Lyapunov son los valores propios de la matriz de estabilidad definida por (5.10); cualitativamente, estos valores describen el ritmo exponencial de crecimiento o decrecimiento de los diferentes modos de (5.10). En general, para que una solución en particular sea estable, la parte real de los valores propios de la matriz de estabilidad asociada deben ser

negativos. Sin embargo, si la solución de interés es una órbita periódica (como es el caso para las soluciones de exploración de haz), uno de los valores propios será igual a cero, correspondiendo a perturbaciones a lo largo de la órbita (traslados en el tiempo); se dice que una órbita periódica es estable si la parte real del resto de los valores propios son negativos (lo que significa que perturbaciones fuera de la órbita periódica decaen rápidamente y de forma exponencial)[18]. Si una solución es linealmente estable, entonces es auto-correctible con respecto a perturbaciones pequeñas; un esquema viable para la exploración de haz basado en las propiedades de sincronización de osciladores acoplados debe poseer esta característica.

Los valores propios de la matriz de estabilidad (5.10) son los exponentes de Floquet o exponentes característicos de la órbita periódica  $\phi_j^*$ . La parte real de los exponentes de Floquet son los exponentes de Lyapunov. Para obtener los valores propios de una matriz basta con diagonalizarla.

En las secciones siguientes se presenta el resto del análisis de estabilidad en donde se obtendrán expresiones que definan directamente los exponentes de Lyapunov para cada uno de los métodos del capítulo IV. La matriz tri-diagonal de (5.13) servirá para obtener numéricamente los exponentes de Lyapunov y así verificar las expresiones obtenidas.

### **5.a. Análisis de Estabilidad del Método de Control por Fases de Acoplamiento de un Arreglo Completamente No-Recíproco de Heath**

En esta sección se encontrarán las expresiones analíticas correspondientes a los exponentes de Lyapunov del método de control por fases de acoplamiento de un arreglo completamente no-recíproco de Heath. La razón para comenzar por el método de Heath es que a partir de estos resultados se podrán obtener más fácilmente las expresiones para el resto de los métodos.

Utilizando la definición de gradiente de fase espacialmente uniforme (4.21), se puede reescribir (5.6) como

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_1 &= k[\cos(\theta + \Phi_{2,1})\eta_2 - \cos(\theta + \Phi_{2,1})\eta_1] & j = 1 \\
 \dot{\eta}_j &= k[\cos(\theta + \Phi_{j+1,j})\eta_{j+1} - \cos(\theta + \Phi_{j+1,j})\eta_j \\
 &\quad - \cos(\theta - \Phi_{j-1,j})\eta_j + \cos(\theta - \Phi_{j-1,j})\eta_{j-1}] & j = 2, \dots, N \\
 \dot{\eta}_N &= k[-\cos(\theta - \Phi_{N-1,N})\eta_N + \cos(\theta - \Phi_{N-1,N})\eta_{N-1}] & j = N.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Introduciendo las fases de acoplamiento (4.30), quedan

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_1 &= k[\eta_2 - \eta_1] & j &= 1 \\
 \dot{\eta}_j &= k[\eta_{j+1} - 2\eta_j + \eta_{j-1}] & j &= 2, \dots, N \\
 \dot{\eta}_N &= k[-\eta_N + \eta_{N-1}] & j &= N.
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Las ecuaciones (5.15) forman la matriz de estabilidad lineal asociada a las soluciones de gradiente de fase espacialmente uniforme de este método de exploración de haz.

Primeramente, será demostrado que al menos uno de los valores propios es igual a cero, como es de esperarse para órbitas periódicas. Considérense perturbaciones iguales sobre la fase de cada oscilador:

$$\eta_j = \eta \quad j = 1, \dots, N. \tag{5.16}$$

De acuerdo al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (5.15), la derivada con respecto al tiempo de este tipo de perturbación en particular está dada por

$$\dot{\eta}_j = 0 \quad j = 1, \dots, N. \tag{5.17}$$

Esto significa que una perturbación tal ni crece ni disminuye en el tiempo. Por otra parte, la perturbación (5.16) es un vector propio de la matriz de estabilidad con valor propio igual a cero. Por lo tanto, cualquier perturbación a lo largo de la órbita es neutralmente estable, significando un traslado en el tiempo. Lo que resta es considerar perturbaciones fuera de la órbita periódica.

Hace falta determinar los  $j = 1, \dots, N - 1$  valores propios restantes. Para esto es necesario considerar ecuaciones de cambio para las diferencias

$$u_j = \eta_{j+1} - \eta_j \quad j = 1, \dots, N - 1. \tag{5.18}$$

Las ecuaciones (5.15) se pueden reescribir de forma simplificada de la siguiente manera:

$$\dot{\eta}_j = k[\eta_{j+1} - 2\eta_j + \eta_{j-1}] \quad j = 1, \dots, N, \quad (5.19)$$

introduciendo las condiciones

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \eta_1, \\ \eta_{N+1} &= \eta_N. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Para evaluar las diferencias  $u_j$ , se necesita también la ecuación

$$\dot{\eta}_{j+1} = k[\eta_{j+2} - 2\eta_{j+1} + \eta_j]. \quad (5.21)$$

Sustituyendo (5.19) y (5.21) en (5.18), se obtienen

$$u_j = k[\eta_{j+2} - 2\eta_{j+1} + \eta_j - \eta_{j+1} + 2\eta_j - \eta_{j-1}].$$

Reordenando,

$$u_j = k[\eta_{j+2} - \eta_{j+1} - 2\eta_{j+1} + 2\eta_j + \eta_j - \eta_{j-1}].$$

Agrupando,

$$u_j = k[\eta_{j+2} - \eta_{j+1} - 2(\eta_{j+1} - \eta_j) + \eta_j - \eta_{j-1}].$$

Reduciendo términos de acuerdo a (5.18) y a

$$u_{j+1} = \eta_{j+2} - \eta_{j+1},$$

$$u_{j-1} = \eta_j - \eta_{j-1},$$

queda finalmente

$$\dot{u}_j = k[u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}] \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (5.22)$$

Sustituyendo las condiciones (5.20) en (5.18), quedan

$$u_0 = u_N = 0. \quad (5.23)$$

Estas ecuaciones de cambio se diagonalizan por medio de la siguiente transformación:

$$\dot{u}_j = \sum_{n=1}^{N-1} A_n \sin\left(\frac{\pi n j}{N}\right). \quad (5.24)$$

Nótese que (5.24) satisface las condiciones (5.23).

Sustituyendo (5.24) en (5.22), se obtiene

$$\sum_{n=1}^{N-1} \dot{A}_n \sin\left(\frac{\pi n j}{N}\right) = k \left[ \sum_{n=1}^{N-1} A_n \sin\left(\frac{\pi n(j+1)}{N}\right) - 2 \sum_{n=1}^{N-1} A_n \sin\left(\frac{\pi n j}{N}\right) + \sum_{n=1}^{N-1} A_n \sin\left(\frac{\pi n(j-1)}{N}\right) \right]$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} \dot{A}_n \sin\left(\frac{\pi nj}{N}\right) = k \left[ \sum_{n=1}^{N-1} A_n \sin\left(\frac{\pi nj}{N} + \frac{\pi n}{N}\right) - 2 \sum_{n=1}^{N-1} A_n \sin\left(\frac{\pi nj}{N}\right) + \sum_{n=1}^{N-1} A_n \sin\left(\frac{\pi nj}{N} - \frac{\pi n}{N}\right) \right].$$

Utilizando la identidad trigonométrica para el seno de la suma de dos ángulos

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

queda

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} \dot{A}_n \sin\left(\frac{\pi nj}{N}\right) &= k \left[ \sum_{n=1}^{N-1} A_n \left\{ \sin\left(\frac{\pi nj}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) + \cos\left(\frac{\pi nj}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{N}\right) - 2 \sin\left(\frac{\pi nj}{N}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin\left(\frac{\pi nj}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) - \cos\left(\frac{\pi nj}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{N}\right) \right\} \right] \end{aligned}$$

Reduciendo terminos,

$$\sum_{n=1}^{N-1} \dot{A}_n \sin\left(\frac{\pi nj}{N}\right) = k \left[ \sum_{n=1}^{N-1} A_n \left\{ 2 \sin\left(\frac{\pi nj}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) - 2 \sin\left(\frac{\pi nj}{N}\right) \right\} \right].$$

Reordenando y agrupando,

$$\sum_{n=1}^{N-1} \dot{A}_n \sin\left(\frac{\pi nj}{N}\right) = \sum_{n=1}^{N-1} A_n 2k \left\{ \cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) - 1 \right\} \sin\left(\frac{\pi nj}{N}\right). \quad (5.25)$$

Aplicando

$$\sum_{j=1}^{2N} \sin\left(\frac{\pi m j}{N}\right) \quad (5.26)$$

a ambos lados de (5.25), intercambiando el orden de las sumas y utilizando la siguiente propiedad de ortogonalidad:

$$\sum_{j=1}^{2N} \sin\left(\frac{\pi n j}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi m j}{N}\right) = N \delta_{n,m} , \quad (5.27)$$

queda

$$\sum_{n=1}^{N-1} A_n N \delta_{n,m} = \sum_{n=1}^{N-1} A_n 2k \left\{ \cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) - 1 \right\} N \delta_{n,m} ,$$

en donde  $\delta_{n,m}$  denota la delta de Kronecker, que se define como

$$\delta_{n,m} \equiv \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

y para la cual se tiene

$$\sum_{n=1}^M \delta_{n,m} a_n = a_m .$$

Por lo que queda

$$\dot{A}_m = A_m 2k \left\{ \cos\left(\frac{\pi m}{N}\right) - 1 \right\}, \quad (5.28)$$

de donde se observa que los  $N - 1$  exponentes de Lyapunov son

$$\lambda_m = -2k \left\{ 1 - \cos\left(\frac{\pi m}{N}\right) \right\} \quad m = 1, \dots, N - 1. \quad (5.29)$$

Inspeccionando este resultado, como  $|\cos(\pi m/N)| < 1$ , todos y cada uno de los  $N - 1$  valores propios son negativos y por lo tanto la solución correspondiente a la exploración de haz es estable.

Uno de los exponentes de Lyapunov es igual a cero como se esperaba, correspondiendo a perturbar la fase de cada oscilador en la misma cantidad (equivalente a un traslado en el tiempo); el resto de los exponentes son estrictamente negativos sin importar el valor del gradiente de fase. Esto significa que, como se verá en las siguientes secciones, a diferencia de los otros métodos de exploración de haz, todos los valores de gradiente de fase son linealmente estables para este esquema. En términos de ángulos de exploración alcanzables, este método de exploración de haz es teóricamente capaz de cubrir el hemisferio completo para elementos con espaciamiento de media longitud de onda, eliminando la necesidad de duplicadores de frecuencia que los otros métodos requerirían para alcanzar el mismo nivel de cobertura [10][31]. Además, haciendo una comparación entre las ecuaciones (5.29) y (5.38), las propiedades de estabilidad de este método de exploración de haz completamente no-recíproco son superiores a las de las otras técnicas en que las magnitudes de los valores propios no disminuyen en función del ángulo de exploración. Consecuentemente, se puede esperar que este método exhiba un funcionamiento más robusto en presencia de ruido y variaciones en la amplitud de los osciladores.

También es evidente que los exponentes de Lyapunov diferentes de cero son funciones del número de elementos del arreglo, entre más grande sea el número de elementos, más cercanos a cero se volverán (en magnitud) los valores propios más pequeños. Consecuentemente, las perturbaciones tomarán más tiempo en desaparecer en arreglos grandes y es posible que se presente un límite práctico en cuanto al número de elementos del arreglo debido al debilitamiento de la estabilidad en función de  $N$  y por la presencia de ruido y desajustes en los parámetros de los osciladores. Sin embargo, independientemente del tamaño del arreglo, la solución de exploración de haz deseada seguirá siendo, en principio, linealmente estable, una propiedad que también poseen los demás métodos de exploración.

### 5.b. *Análisis de Estabilidad del Método de Desintonización de York*

A partir de los resultados de la sección 5.a, se pueden obtener fácilmente las expresiones analíticas para los exponentes de Lyapunov del método de desintonización de York. Con la condición de fases de acoplamiento iguales a cero de (4.9), las ecuaciones (5.14) quedan

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= k \cos \theta [\eta_2 - \eta_1] & j &= 1 \\ \dot{\eta}_j &= k \cos \theta [\eta_{j+1} - 2\eta_j + \eta_{j-1}] & j &= 2, \dots, N \\ \dot{\eta}_N &= k \cos \theta [-\eta_N + \eta_{N-1}] & j &= N.\end{aligned}\quad (5.30)$$

Claramente, las ecuaciones (5.30) son las ecuaciones (5.15) pero con un factor  $\cos \theta$  del lado derecho de las igualdades, por lo que siguiendo el mismo procedimiento, el primer valor propio es igual a cero y el resto de los valores están dados por

$$\lambda_m = -2k \cos \theta \left\{ 1 - \cos \left( \frac{\pi m}{N} \right) \right\} \quad m = 1, \dots, N - 1. \quad (5.31)$$

En el resultado anterior se puede observar que, a diferencia del método completamente no-recíproco de Heath, en este método donde las frecuencias de carrera libre son el parámetro de control, los exponentes de Lyapunov diferentes de cero dependen fuertemente del gradiente de fase. El término  $\cos \theta$  restringe los posibles valores del gradiente de fase a  $\pm\pi/2$  para que los exponentes de Lyapunov resulten negativos y la solución deseada sea estable. Con esta limitación, un arreglo de este tipo sólo puede alcanzar ángulos de  $\pm 30^\circ$  con respecto a la normal para elementos con espaciamiento de media longitud de onda. Para alcanzar a cubrir el hemisferio completo como lo hace posible el método completamente no-recíproco de Heath, York propuso introducir un circuito duplicador de frecuencia al final de cada oscilador. Esta técnica fue demostrada con un arreglo de cinco elementos [10][31].

### 5.c. *Análisis de Estabilidad del Método de Control por Fases de Acoplamiento de un Arreglo Parcialmente No-Recíproco de Heath*

En esta sección se obtendrán las expresiones analíticas para los exponentes de Lyapunov correspondientes al método de control por fases de acoplamiento de un arreglo parcialmente no-recíproco de Heath. Con las fases de acoplamiento (4.24) y (4.29), las ecuaciones (5.14) quedan

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_1 &= k[\eta_2 - \eta_1] & j &= 1 \\
 \dot{\eta}_j &= k \cos \theta [\eta_{j+1} - 2\eta_j + \eta_{j-1}] & j &= 2, \dots, N \\
 \dot{\eta}_N &= k[-\eta_N + \eta_{N-1}] & j &= N.
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Al igual que en la sección 5.a, se puede demostrar directamente que perturbar cada oscilador en cantidades idénticas es un vector propio de la matriz de estabilidad con valor propio igual a cero.

Vale la pena mencionar que las ecuaciones de cambio de las perturbaciones tienen una estructura de Laplaciano discreto. Consecuentemente, uno esperaría poder obtener expresiones analíticas en forma cerrada para los exponentes de Lyapunov. Sin embargo, el factor  $\cos \theta$  es dependiente del índice de la ecuación, es decir, no aparece en las ecuaciones de  $\dot{\eta}_1$  y  $\dot{\eta}_N$ . Por esta razón, no se ha tenido éxito en la obtención de las expresiones analíticas para los exponentes de Lyapunov. No obstante, la matriz de estabilidad es lo suficientemente simple para establecer los límites del intervalo de valores en el que caerán el resto de los exponentes de Lyapunov. En el método de York y en el método completamente no-recíproco, debido a la estructura de Laplaciano discreto del lado derecho de las igualdades y a la ausencia de coeficientes que dependieran del índice de la ecuación, los exponentes de Lyapunov se lograron obtener con éxito.

Las condiciones (5.20) permiten reescribir (5.32) como

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_1 &= k[\eta_2 - \eta_1 - \cos \theta \eta_1 + \cos \theta \eta_0] & j &= 1 \\
 \dot{\eta}_j &= k \cos \theta [\eta_{j+1} - 2\eta_j + \eta_{j-1}] & j &= 2, \dots, N \\
 \dot{\eta}_N &= k[-\eta_N + \eta_{N-1} - \cos \theta \eta_N + \cos \theta \eta_{N+1}] & j &= N.
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Cuyas diferencias están definidas de nuevo por (5.18). Las condiciones (5.20) son las mismas y también resultan en las condiciones (5.23).

Para los índices  $j = 2, \dots, N - 2$ , se puede seguir el mismo procedimiento que en la sección 5.a, para obtener

$$\dot{u}_j = k \cos \theta [u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}] \quad j = 2, \dots, N - 2. \quad (5.34)$$

Los índices  $j = 1$  y  $j = N - 1$  necesitan de un desarrollo diferente. Para  $j = 1$ , se tiene

$$u_1 = \eta_2 - \eta_1.$$

Sustituyendo con las ecuaciones (5.33),

$$\dot{u}_1 = k \cos \theta [\eta_3 - 2\eta_1 + \eta_2] - k[\eta_2 - \eta_1 - \cos \theta \eta_1 + \cos \theta \eta_0].$$

Reordenando,

$$\dot{u}_1 = k \cos \theta [\eta_3 - \eta_2 - \eta_2 + \eta_1 + \eta_1 - \eta_0] - k[\eta_2 - \eta_1].$$

Simplificando las diferencias,

$$\dot{u}_1 = k \cos \theta [u_2 - u_1 + u_0] - k u_1.$$

Completando la ecuación para obtener una forma similar a la de (5.34),

$$\dot{u}_1 = k \cos \theta [u_2 - u_1 + u_0] - k u_1 + k \cos \theta [u_1 - u_1].$$

Reordenando,

$$\dot{u}_1 = k \cos \theta [u_2 - 2u_1 + u_0] - k u_1 + k \cos \theta u_1 .$$

Agrupando,

$$\dot{u}_1 = k \cos \theta [u_2 - 2u_1 + u_0] + k[\cos \theta - 1]u_1 .$$

Para  $j = N - 1$ , se tiene

$$u_{N-1} = \eta_N - \eta_{N-1} .$$

Sustituyendo con las ecuaciones (5.33),

$$\dot{u}_{N-1} = k[-\eta_N + \eta_{N-1} - \cos \theta \eta_N + \cos \theta \eta_{N+1}] - k \cos \theta [\eta_N - 2\eta_{N-1} + \eta_{N-2}] .$$

Reordenando,

$$\dot{u}_{N-1} = k[-\eta_N + \eta_{N-1}] - k \cos \theta [\eta_N - \eta_{N-1} - \eta_{N-1} + \eta_{N-2} + \eta_N - \eta_{N+1}] .$$

Simplificando las diferencias,

$$\dot{u}_{N-1} = -k u_{N-1} - k \cos \theta [u_{N-1} - u_{N-2} - u_N] .$$

Reordenando y completando la ecuación para obtener una forma similar a la de (5.34),

$$\dot{u}_{N-1} = k \cos \theta [u_N - u_{N-1} + u_{N-2}] - k u_{N-1} + k \cos \theta [u_{N-1} - u_{N-1}].$$

Agrupando,

$$\dot{u}_{N-1} = k \cos \theta [u_N - 2u_{N-1} + u_{N-2}] + k[\cos \theta - 1]u_{N-1}.$$

Finalmente, se puede escribir (5.34) y las dos ecuaciones anteriores en una sola ecuación como

$$\dot{u}_j = k \cos \theta [u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}] + (\delta_{j,1} + \delta_{j,N-1})k[\cos \theta - 1]u_j, \quad (5.35)$$

para  $j = 1, \dots, N - 1$ , con las condiciones (5.23) y en donde  $\delta_{n,m}$  corresponde a la delta de Kronecker, dada por

$$\delta_{n,m} \equiv \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

En lugar de obtener expresiones analíticas exactas para los exponentes de Lyapunov, se obtendrán el valor máximo y el valor mínimo entre los cuales estarán acotados los valores propios desconocidos utilizando los valores propios de las dos “partes” de (5.35) por separado. El establecimiento de estos límites está basado en el siguiente teorema de Weyl [32]:

Sean  $A$  y  $B$  dos matrices Hermitianas, ordénense, en forma creciente, los valores propios de  $A$ ,  $B$ , y  $A + B$ , denotados como  $\lambda_m(A)$ ,  $\lambda_m(B)$  y  $\lambda_m(A + B)$ , respectivamente. Para cada índice  $m = 1, \dots, N - 1$ , se tiene

$$\lambda_m(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_m(A + B) \leq \lambda_m(A) + \lambda_{N-1}(B).$$

En otras palabras, este teorema dice que el  $m$ -ésimo valor propio de  $A + B$  está acotado por el  $m$ -ésimo valor propio de  $A$  y el mayor  $\lambda_{N-1}(B)$  y el menor  $\lambda_1(B)$  de los valores propios de  $B$ , siempre y cuando  $A$  y  $B$  sean matrices Hermitianas.

Vistas como matrices, las dos partes de (5.35) son claramente Hermitianas. Además, los valores propios de las dos partes por separado se obtienen directamente;  $B$  ya se encuentra diagonalizada mientras que los detalles para diagonalizar  $A$  se obtuvieron en la sección 5.a.

$$\begin{aligned}\lambda_m(A) &= -2k \cos \theta \left\{ 1 - \cos \left( \frac{\pi m}{N} \right) \right\} \\ \lambda_m(B) &= -k[1 - \cos \theta], -k[1 - \cos \theta], 0, \dots, 0\end{aligned}\tag{5.36}$$

para  $m = 1, \dots, N - 1$  y donde  $-\pi/2 \leq \theta \leq +\pi/2$ . De acuerdo al teorema de Weyl, el  $m$ -ésimo exponente de Lyapunov de (5.35),  $\lambda_m$ , está delimitado por

$$-2k \cos \theta \left\{ 1 - \cos \left( \frac{\pi m}{N} \right) \right\} - k[1 - \cos \theta] \leq \lambda_m \leq -2k \cos \theta \left\{ 1 - \cos \left( \frac{\pi m}{N} \right) \right\}\tag{5.37}$$

De este resultado se puede concluir finalmente que todos los exponentes de Lyapunov restantes residen dentro de los límites:

$$\begin{aligned}\lambda_{m\hat{x}} &= -2k \cos \theta \left\{ 1 - \cos \left( \frac{\pi}{N} \right) \right\} \\ \lambda_{m\hat{m}} &= -k \left[ 1 + \cos \theta \left( 1 + 2 \cos \left( \frac{\pi}{N} \right) \right) \right]\end{aligned}\tag{5.38}$$

De las expresiones obtenidas se pueden hacer varias observaciones. Primero, los exponentes de Lyapunov son funciones del número de osciladores, la magnitud de acoplamiento y el gradiente de fase deseado. Segundo, siempre que el valor del gradiente de fase se encuentra dentro de  $\pm\pi/2$ , los  $N - 1$  exponentes de Lyapunov restantes son estrictamente negativos. Esto significa que para este rango de valores de gradiente de fase, la solución correspondiente a la exploración de haz es estable. Para valores de gradiente de fase mayores a  $\pm\pi/2$ , uno o más de los exponentes de Lyapunov son positivos lo que implica que perturbaciones fuera de la solución correspondiente a la exploración de haz crecen exponencialmente rápido; esta inestabilidad hace que sea prácticamente imposible alcanzar los ángulos de exploración asociados. Tercero, si  $\theta = \pm\pi/2$ ,

entonces dos de los valores propios son  $-1$  y los  $N - 3$  restantes son cero, estableciendo el límite entre estabilidad e inestabilidad. Este punto de bifurcación define el valor más grande de gradiente de fase alcanzable y por consiguiente, establece un límite absoluto hacia arriba en el ángulo de exploración para un sistema ideal sin ruido [18].

Como se verá en la siguiente sección, los resultados aquí obtenidos para el método de control por fases de acoplamiento de un arreglo parcialmente no-recíproco de Heath son exactamente los mismos para el método de Hwang y Myung. El valor de la restricción en el ángulo de exploración dependerá del espaciamiento entre los elementos del arreglo; por ejemplo, para espaciamiento de media longitud de onda,  $\Psi_{m\acute{a}x} = \pm 30^\circ$ , mientras que para el espaciamiento de  $0.76\lambda$  utilizado por Hwang y Myung,  $\Psi_{m\acute{a}x} = \pm 19.2^\circ$  [17].

Finalmente, debido a la proporcionalidad de los exponentes con el gradiente de fase, el sistema es menos estable entre más se separe el haz de la normal. Esto significa que experimentalmente se pudiera observar un límite en la estabilidad mucho menor al valor teórico. Esta indeseable e inevitable propiedad no es exclusiva de este método o del método de Hwang y Myung sino que también se presenta en el método de York.

#### **5.d. Análisis de Estabilidad del Método de Control por Fases de Acoplamiento con Red Recíproca de Hwang y Myung**

Como ya se mencionó, el análisis de estabilidad del método de control por fases de acoplamiento de Hwang y Myung resulta idéntico al obtenido en la sección anterior para el método parcialmente no-recíproco de Heath. A continuación, se demostrará que las ecuaciones de cambio de las perturbaciones son las mismas para ambos métodos.

Expandiendo las ecuaciones (5.6), se tienen

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= k[\cos(\theta_1 + \Phi_{2,1})(\eta_2 - \eta_1)] & j = 1 \\ \dot{\eta}_2 &= k[\cos(\theta_2 + \Phi_{3,2})(\eta_3 - \eta_2) - \cos(\theta_1 - \Phi_{1,2})(\eta_2 - \eta_1)] & j = 2 \\ \dot{\eta}_j &= k[\cos(\theta_j + \Phi_{j+1,j})(\eta_{j+1} - \eta_j) - \cos(\theta_{j-1} - \Phi_{j-1,j})(\eta_j - \eta_{j-1})] & j = 3, \dots, N-2 \\ \dot{\eta}_{N-1} &= k[\cos(\theta_{N-1} + \Phi_{N,N-1})(\eta_N - \eta_{N-1}) \\ &\quad - \cos(\theta_{N-2} - \Phi_{N-2,N-1})(\eta_{N-1} - \eta_{N-2})] & j = N-1 \\ \dot{\eta}_N &= -k[\cos(\theta_{N-1} - \Phi_{N-1,N})(\eta_N - \eta_{N-1})] & j = N. \end{aligned}$$

Sustituyendo las fases de acoplamiento (4.17) y (4.18),

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_1 &= k[\cos(\theta_1 + \Phi)(\eta_2 - \eta_1)] & j = 1 \\
 \dot{\eta}_2 &= k[\cos \theta_2 (\eta_3 - \eta_2) - \cos(\theta_1 - \Phi)(\eta_2 - \eta_1)] & j = 2 \\
 \dot{\eta}_j &= k[\cos \theta_j (\eta_{j+1} - \eta_j) - \cos \theta_{j-1} (\eta_j - \eta_{j-1})] & j = 3, \dots, N - 2 \\
 \dot{\eta}_{N-1} &= k[\cos(\theta_{N-1} - \Phi)(\eta_N - \eta_{N-1}) - \cos \theta_{N-2} (\eta_{N-1} - \eta_{N-2})] & j = N - 1 \\
 \dot{\eta}_N &= -k[\cos(\theta_{N-1} + \Phi)(\eta_N - \eta_{N-1})] & j = N.
 \end{aligned}$$

Utilizando (4.19),

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_1 &= k[\eta_2 - \eta_1] & j = 1 \\
 \dot{\eta}_2 &= k[\cos \theta (\eta_3 - \eta_2) - \cos(-2\Phi)(\eta_2 - \eta_1)] & j = 2 \\
 \dot{\eta}_j &= k[\cos \theta (\eta_{j+1} - \eta_j) - \cos \theta (\eta_j - \eta_{j-1})] & j = 3, \dots, N - 2 \\
 \dot{\eta}_{N-1} &= k[\cos(-2\Phi)(\eta_N - \eta_{N-1}) - \cos \theta (\eta_{N-1} - \eta_{N-2})] & j = N - 1 \\
 \dot{\eta}_N &= k[-\eta_N + \eta_{N-1}] & j = N.
 \end{aligned}$$

Utilizando (4.19) una vez más,

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_1 &= k[\eta_2 - \eta_1] & j = 1 \\
 \dot{\eta}_2 &= k[\cos \theta (\eta_3 - \eta_2) - \cos \theta (\eta_2 - \eta_1)] & j = 2 \\
 \dot{\eta}_j &= k[\cos \theta (\eta_{j+1} - \eta_j) - \cos \theta (\eta_j - \eta_{j-1})] & j = 3, \dots, N - 2 \\
 \dot{\eta}_{N-1} &= k[\cos \theta (\eta_N - \eta_{N-1}) - \cos \theta (\eta_{N-1} - \eta_{N-2})] & j = N - 1 \\
 \dot{\eta}_N &= k[-\eta_N + \eta_{N-1}] & j = N.
 \end{aligned}$$

Finalmente, reduciendo la notación,

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= k[\eta_2 - \eta_1] & j &= 1 \\ \dot{\eta}_j &= k \cos \theta [\eta_{j+1} - 2\eta_j + \eta_{j-1}] & j &= 2, \dots, N-1 \\ \dot{\eta}_N &= k[-\eta_N + \eta_{N-1}] & j &= N.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el análisis de estabilidad de este método resulta idéntico al de la sección anterior.

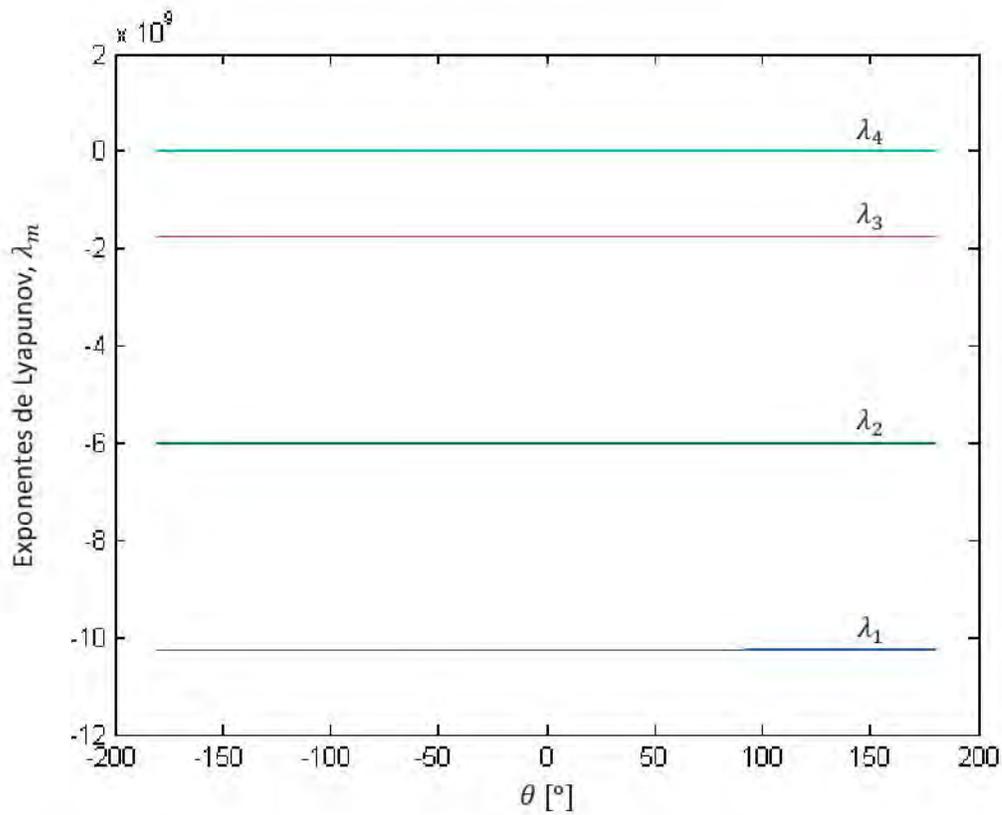
### 5.e. Simulaciones Numéricas

Para verificar los resultados teóricos obtenidos en este capítulo, se simuló las matrices de estabilidad. Primero, se utilizó la expresión (5.13) para diagonalizar numéricamente por medio de la función *eig* de MATLAB la matriz de estabilidad correspondiente a cada método y de esta forma, se obtuvieron los exponentes de Lyapunov. En seguida, se calcularon los exponentes de Lyapunov utilizando las expresiones cerradas obtenidas para el método completamente no-recíproco de Heath y el método de desintonización de York. De igual forma, se calcularon las expresiones que delimitan los exponentes de Lyapunov para el caso del método parcialmente no-recíproco de Heath y el método de Hwang y Myung. Para todos los casos, se trazaron las gráficas de los exponentes de Lyapunov utilizando los parámetros de las simulaciones del capítulo anterior en donde se tenían  $N = 4$  y  $k = 3 \times 10^9$  [rad/s], para cada valor de gradiente de fase en el intervalo  $-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  con incrementos de  $1^\circ$ .

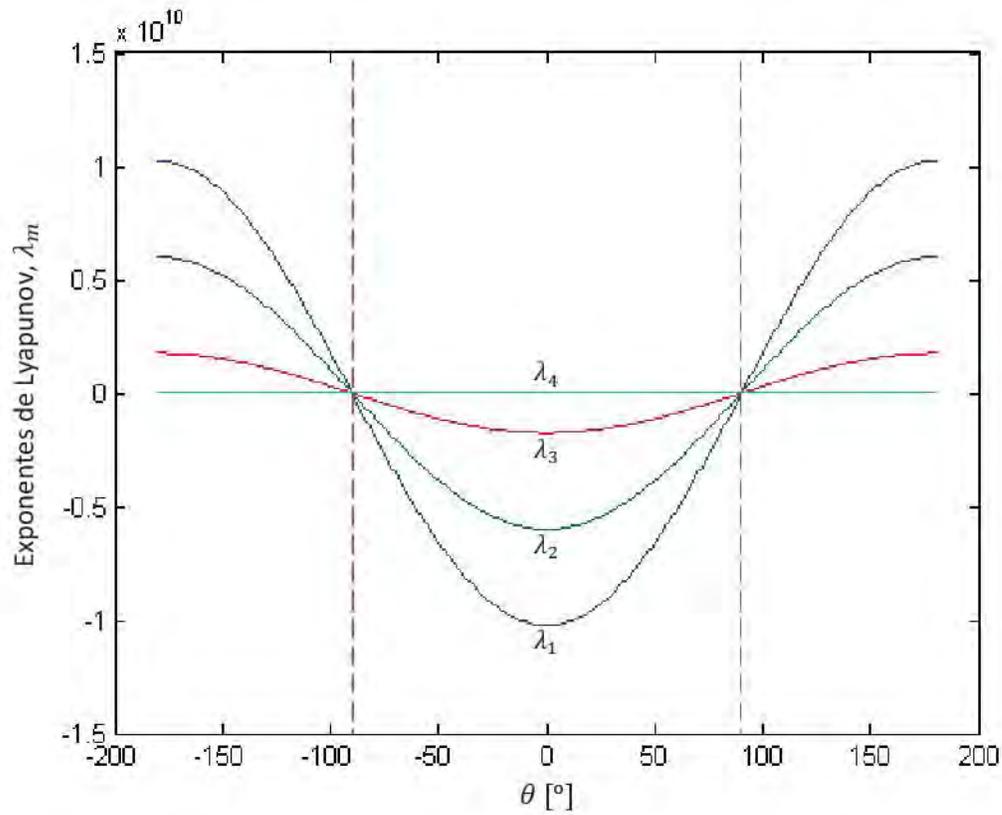
Para el caso de los métodos en los que fue posible encontrar una expresión cerrada para los exponentes de Lyapunov, se compararon los resultados obtenidos mediante las expresiones analíticas con los obtenidos con la expresión (5.13) y se comprobó que de las dos formas, se obtienen los mismos resultados. En las figuras 5.1 y 5.2 se muestran las gráficas para el método parcialmente no-recíproco de Heath y el método de desintonización de York, respectivamente.

En la figura 5.3, se muestran las gráficas para el método parcialmente no-recíproco de Heath y el método de Hwang y Myung correspondientes a los exponentes de Lyapunov calculados mediante la expresión (5.13) y en la figura 5.4, se muestran las gráficas de los límites (5.38). Con estas dos figuras se justifica que no es posible obtener expresiones cerradas para estos dos métodos y por esta razón, se calcula el intervalo donde caen todos los exponentes a partir del teorema de Weyl.

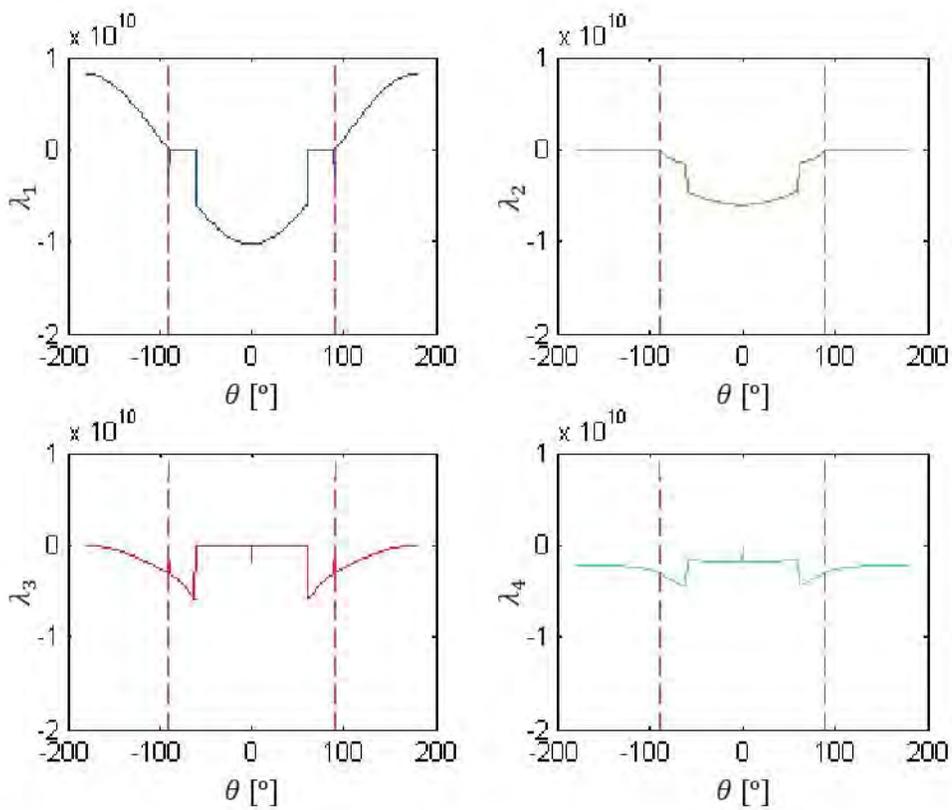
Por otro lado, utilizando las simulaciones del capítulo anterior para el caso de veinticinco elementos, se comprobaron de otra manera los resultados del análisis de estabilidad. Los cuatro métodos presentados fueron capaces de generar gradientes de fase en el intervalo de  $\pm 90^\circ$ , que dan como resultado ángulos de exploración en el intervalo de  $\pm 30^\circ$  para espaciamentos de media longitud de onda como se observa en la figura 5.5. Pero, el único método capaz de sobrepasar esta limitación y de generar un patrón de radiación que excede los  $\pm 30^\circ$  en ángulo de exploración como el que se muestra en la figura 5.6, es el método completamente no-recíproco de Heath.



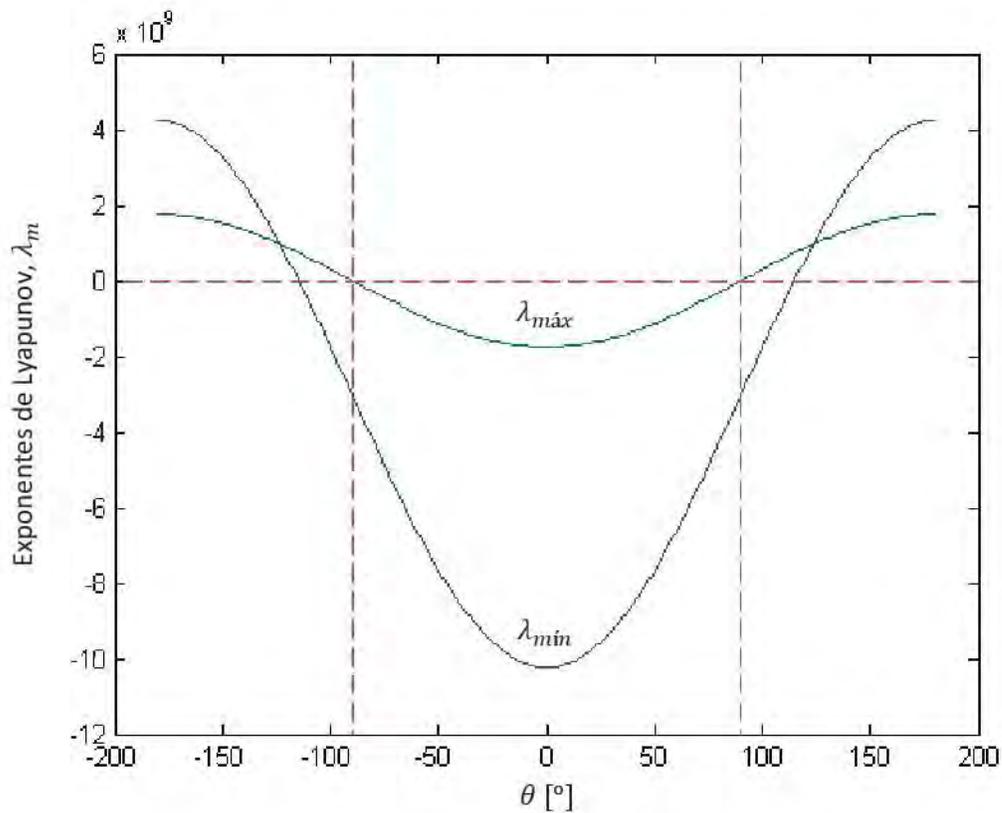
**Figura 5.1.** Exponentes de Lyapunov de un arreglo de cuatro elementos contra gradiente de fase para el método completamente no-recíproco de Heath.



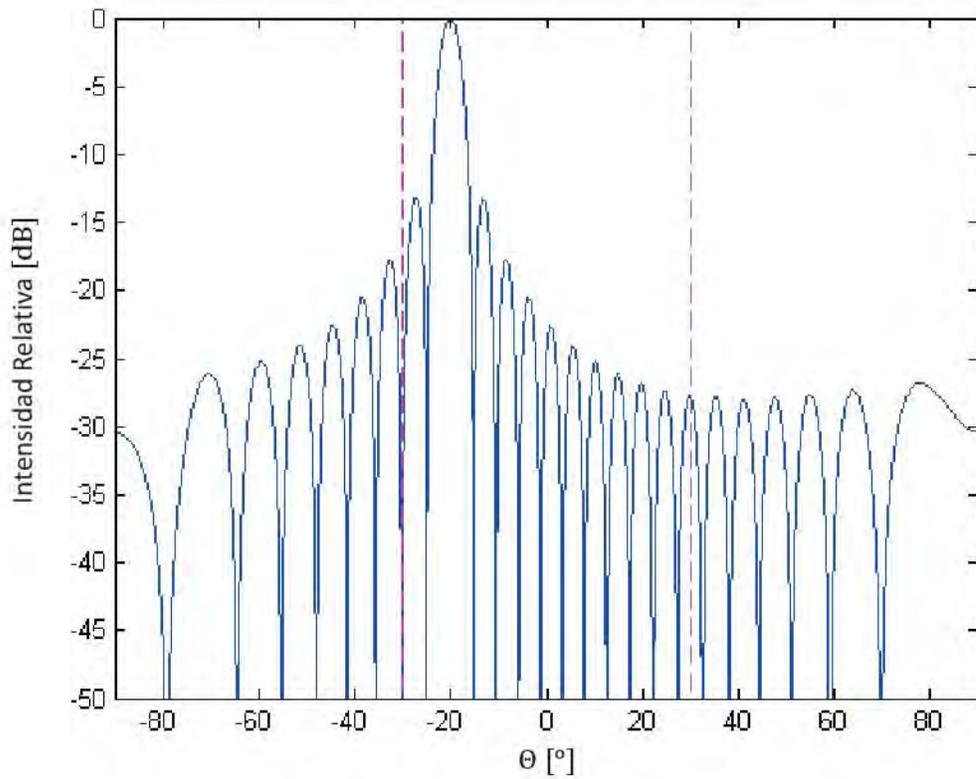
**Figura 5.2.** Exponentes de Lyapunov de un arreglo de cuatro elementos contra gradiente de fase para el método de desintonización de York.



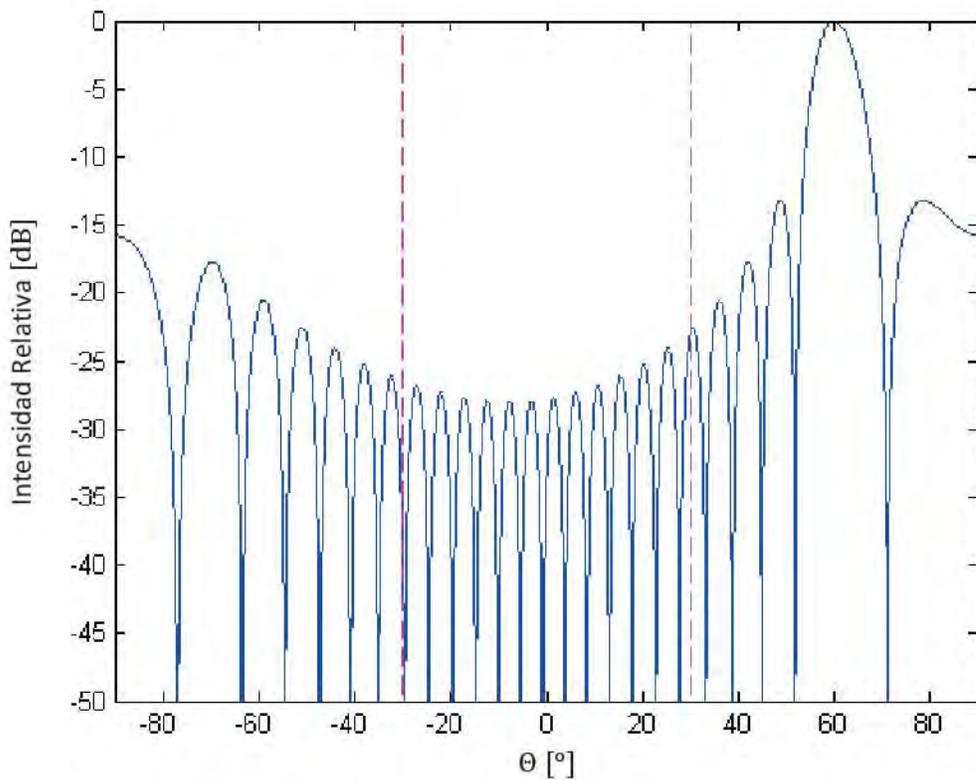
**Figura 5.3.** Exponentes de Lyapunov de un arreglo de cuatro elementos contra gradiente de fase para el método parcialmente no-recíproco de Heath y el método de Hwang y Myung; ambos métodos comparten los mismos resultados.



**Figura 5.4.** Límites de los exponentes de Lyapunov de un arreglo de cuatro elementos contra gradiente de fase para el método parcialmente no-recíproco de Heath y el método de Hwang y Myung; ambos métodos comparten los mismos resultados.



**Figura 5.5.** Patrón de radiación (intensidad relativa contra ángulo de exploración medido con respecto a la normal) de un arreglo de veinticinco elementos obtenible con cualquiera de los métodos del capítulo IV.



**Figura 5.6.** Patrón de radiación (intensidad relativa contra ángulo de exploración medido con respecto a la normal) de un arreglo de veinticinco elementos obtenible solamente mediante el método completamente no-recíproco de Heath.

En la siguiente tabla se hace una comparación entre los métodos de exploración de haz de Stephan, York, Hwang y Myung (H y M), y los dos métodos de Heath: parcialmente no-recíproco (PNR) y completamente no-recíproco (CNR), resumiendo el contenido de este trabajo de tesis.

	<b>Stephan</b>	<b>York</b>	<b>H y M</b>	<b>PNR Heath</b>	<b>CNR Heath</b>
Número de elementos del arreglo de fase para $N$ osciladores	$N$	$N$	$N - 2$	$N$	$N$
El gradiente de fase depende del número de osciladores	Sí	No	No	No	No
Parámetro de control	Diferencia de fase entre dos señales externas	Desintonización de las frecuencias de carrera libre	Fases de acoplamiento	Fases de acoplamiento	Fases de acoplamiento
Parámetro de control contra gradiente de fase	Lineal	No-lineal	Lineal	Lineal	Lineal
Número de parámetros de control a ajustar	1	2	2	2	$2(N - 1)$
Rango de gradientes de fase estables	$\pm\pi/2$	$\pm\pi/2$	$\pm\pi/2$	$\pm\pi/2$	$\pm\pi$
La estabilidad depende del ángulo de exploración	Sí	Sí	Sí	Sí	No
Acoplamiento recíproco	Sí	Sí	Sí	No	No

**Tabla 1.** Comparación entre los cinco métodos de exploración del haz de arreglos de antenas basados en osciladores acoplados analizados a lo largo de esta tesis.

Para finalizar este trabajo, en el siguiente capítulo se presentan las conclusiones generales.

## VI. Conclusiones

En esta tesis se realizó un análisis comparativo entre los métodos de exploración del haz de arreglos de antenas basados en osciladores acoplados. Se encontraron las condiciones para lograr distribuciones de fase espacialmente uniformes primero mediante la variación de la diferencia de fase entre dos señales externas en el método de Stephan en el capítulo III; en seguida, en el capítulo IV, se obtuvieron las condiciones para asegurar la existencia de estas soluciones a partir del modelo de fase generalizado para el método de desintonización de frecuencias de carrera libre de York y para otros tres métodos que utilizaban la manipulación de las fases de acoplamiento como parámetro de control: el método de Hwang y Myung, y los métodos parcial y completamente no-recíprocos de Heath. Se encontraron expresiones que dictaban cómo deben ser ajustados los parámetros de control correspondientes para cada topología y se comprobaron estos resultados mediante la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales que describe a cada método utilizando MATLAB.

Los métodos del capítulo IV eliminaban una restricción importante del método de Stephan (uno de los primeros en presentar una alternativa en la que se explotaba la dinámica de osciladores acoplados para llevar a cabo la exploración de haz) en que el gradiente de fase obtenible no dependía del número de osciladores presentes en el arreglo; esto era debido a que la diferencia de fase entre las dos señales inyectadas se dividía de manera uniforme a lo largo del arreglo en el método de Stephan, y entre más osciladores se incluyeran, menos sería el gradiente de fase entre ellos. Además, los métodos posteriores al método de Stephan aprovechaban mejor las propiedades de sincronización de los osciladores acoplados; en sus experimentos, Stephan tenía que sintonizar manualmente cada uno de los osciladores para igualarlos a la frecuencia de las señales externas, así que la sincronización del arreglo con las señales inyectadas era por diseño y no por la dinámica inherente entre los osciladores. Sin embargo, la dinámica entre osciladores era capaz de proporcionar el gradiente de fase.

Por otra parte, con respecto a los métodos del capítulo IV, en particular, se encontró que debido a la relación no-lineal entre la desintonización de los osciladores y el gradiente de fase del método de York, el sistema es más susceptible al ruido de fase y a variaciones en la amplitud de los osciladores de los extremos. Esto resulta en un rango de exploración práctico menor al rango teórico que sugiere el análisis de estabilidad. Este problema fue resuelto por los métodos posteriores que utilizaban las fases de acoplamiento como parámetro de control y que guardaban una relación lineal con respecto al gradiente de fase.

En esta primera parte del análisis se consideraron varias simplificaciones para obtener las soluciones que hacen posible la exploración de haz, pero en la práctica, la dinámica del arreglo se complica por diversos factores que se han dejado fuera de los modelos matemáticos de cada método; tales como: la dinámica de amplitudes, las no uniformidades, la dependencia en frecuencia de las redes de acoplamiento, las interacciones con elementos no adyacentes, y la dependencia en frecuencia de las características de los dispositivos. Los cinco métodos que se analizaron en esta tesis, a excepción de los dos métodos de exploración de haz de Heath, fueron

probados experimentalmente por sus autores; sin embargo, estos arreglos prácticos presentaban problemas y discrepancias con respecto a lo que predicen sus modelos matemáticos debido a las simplificaciones que se hicieron. Uno de los pasos siguientes a este trabajo de tesis que se propone es el de demostrar los métodos del capítulo IV en una simulación de un circuito real y a partir de estas pruebas, explorar la posibilidad de incluir algunas de las características que se han despreciado y así obtener resultados más rigurosos. El circuito se podría caracterizar para realizar una comparación con la teoría obtenida en este trabajo introduciendo los datos de la caracterización en las simulaciones que se realizaron en MATLAB.

El análisis de estabilidad del capítulo V sirvió para encontrar la distinción más importante de un método a otro: el rango de ángulos de exploración posibles de la antena. Este análisis se realizó por medio de encontrar o acotar los exponentes de Lyapunov, según fue el caso, para cada uno de los métodos del capítulo IV partiendo del modelo de fase generalizado y obteniendo expresiones particulares a cada topología.

Lo más destacado de este análisis de estabilidad fue que se comprobó que con el método de control por fases de acoplamiento de un arreglo completamente no-recíproco de Heath es posible obtener ángulos de exploración que cubren el hemisferio completo (ángulos de  $\pm 90^\circ$  con respecto a la normal) para un espaciamiento de  $\lambda/2$ , mientras que para todos los demás métodos, el rango de exploración teórico es de  $\pm 30^\circ$  con respecto a la normal con ese mismo espaciamiento entre elementos. Además, en lo que se refiere al método completamente no-recíproco de Heath en particular, las magnitudes de los valores propios no disminuyen en función del gradiente de fase. Consecuentemente, se podría esperar un funcionamiento más robusto en presencia de ruido y variaciones en la amplitud de los osciladores. La superioridad de este método sobre los demás sugiere que una investigación sobre la implementación de la red de acoplamiento no-recíproca dentro de un arreglo de este tipo es necesaria para trabajos posteriores a esta tesis.

Los problemas que se han encontrado al tratar de implementar arreglos de osciladores acoplados para aplicaciones de exploración de haz impiden que se resuelvan necesidades reales y en algunos casos, desmotivan a la comunidad científica. Lo que es un hecho es que la dinámica de los osciladores con la que se logra la sincronización está ahí, lo que hace falta es tener un entendimiento completo de ésta. De encontrarse soluciones o de mejorar el desempeño del arreglo, estos métodos de exploración de haz serían una alternativa compacta y de bajo costo a los arreglos que utilizan desplazadores de fase, el elemento más voluminoso y costoso de los arreglos de fase y que además presenta pérdidas considerables en aplicaciones de microondas.

## Referencias

- [1] K. D. Stephan, "Inter-injection-locked oscillators for power combining and phased arrays," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-34, pp. 1017-1025, Oct. 1986.
- [2] A. H. Al-Ani, A. L. Cullen, and J. R. Forrester, "A phase-locking method for beam steering of active array antennas," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-22, pp. 698-703, June 1974.
- [3] A. E. Siegman, *Lasers*. Mill Valley, CA: University Science Books, 1986.
- [4] R. Adler, "A study of locking phenomena in oscillators," *Proc. IRE*, vol. 34, pp. 351-357, June 1946.
- [5] R. C. Mackey, "Injection locking of klystron oscillators," *IRE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-10, pp. 228-235, July 1962.
- [6] K. Kurokawa, "Injection-locking of solid-state microwave oscillators," *Proc. IEEE*, vol. 61, pp. 1386-1409, Oct. 1973.
- [7] J. J. Lynch, H.-C. Chang, and R. A. York, "Coupled-oscillator arrays and scanning techniques," in *Active and Quasi-Optical Arrays for Solid-State Power Combining*, R. York and Z. Popovic, Eds. New York: Wiley, 1997, ch. 4.
- [8] J. Birkeland and T. Itoh, "A 16-element quasi-optical FET oscillator power combining array with external injection locking," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 40, pp. 475-481, Mar. 1992.
- [9] J. Lin, S. T. Chew, and T. Itoh, "A unilateral injection-locking type active phased array for beam scanning," in *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, San Diego, CA, May 1994, pp. 1231-1234.
- [10] R. A. York, "Injection- and phase-locking techniques for beam control," *IEEE Transactions On Microwave Theory and Techniques*, vol. 46, no. 11, pp. 1920-1929, November 1998.
- [11] H.-C. Chang, X. Cao, U. Mishra, and R. A. York, "Phase noise in coupled oscillators: Theory and experiment," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 45, pp. 604-615, May 1997.
- [12] K. D. Stephan and W. A. Morgan, "Analysis of inter-injection-locked oscillators for integrated phased arrays," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-35, pp. 771-781, July 1987.
- [13] R. A. York, "Nonlinear analysis of phase relationships in quasi-optical oscillator arrays," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 41, pp. 1799-1809, Oct. 1993.
- [14] W. A. Morgan and K. D. Stephan, "An X-band experimental model of a millimeter-wave interinjection-locked phased array system," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 36, pp. 1641-1645, Nov. 1988.

- [15] W. L. Stutzman and G. A. Thiele, *Antenna Theory and Design*. New York: Wiley, 1981.
- [16] P. Liao and R. A. York, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 41, pp. 1810, 1993.
- [17] J.-H. Hwang and N.-H. Myung, "A new beam-scanning technique by controlling the coupling angle in a coupled oscillator array," *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, vol. 8, pp. 191-193, May 1998.
- [18] T. Heath, "Beam steering of nonlinear oscillator arrays through manipulation of coupling phases," *IEEE Transactions on antennas and propagation*, vol. 52, no. 7, pp. 1833-1842, July 2004.
- [19] Z. B. Popovic, R. M. Weikle, M. Kim, and D. B. Rutledge, "A 100-MESFET planar grid oscillator," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 39, pp. 193-200, Feb. 1991.
- [20] J. Heinbockel and A. Mortazawi, "A periodic spatial power combining MESFET oscillator," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, Albuquerque, June 1992.
- [21] Y. Braiman, T. A. B. Kennedy, K. Wiesenfeld and A. Khibnik, *Phys. Rev. A*, vol. 52, pp. 1500, 1995.
- [22] A. I. Khibnik, Y Braiman, T. A. B. Kennedy and K. Wiesenfeld, *Physica D*, vol. 11, pp. 295, 1998.
- [23] R. A. York and R. C. Compton, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 39, pp. 1000, 1991.
- [24] R. A. York and R. C. Compton, *J. Appl. Phys.*, vol. 71, pp. 2959, 1992.
- [25] P. Liao and R. A. York, *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 4, pp. 20, 1994.
- [26] P. Liao and R. A. York, *IEEE Antennas and Propagation International Symposium*, vol. 2, pp. 836, 1994.
- [27] R. A. York, P. Liao and J. J. Lynch, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 42, pp. 2040, 1994.
- [28] H.-C. Chang, E. S. Shapiro and R. A. York, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 45, pp. 1232, 1997.
- [29] G. V. Osipov and M. M. Sushchik, *Phys. Rev. E*, vol. 58, pp. 7198, 1998.
- [30] \_\_\_\_\_, "A 1-W X-band power-combining array using coupled VCO's," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, San Diego, CA, May 1994, pp. 1235-1238.
- [31] A. Alexanian, H.-C. Chang, and R. A. York, "Enhanced scanning range of coupled oscillator arrays utilizing frequency multipliers," *Proc. Antennas Propagation Soc. Int. Symp.*, vol. 2, 1995, pp. 1308-1310.
- [32] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 1985, p. 181.

- [33] T. C. Cheston and J. Frank, "Phased array radar antennas," in *Radar Handbook*, 2nd ed, M. I. Skolnik, Ed. New York: McGraw-Hill, 1990, pp. 7-1-7-69.
- [34] Hansen, *Phased array antennas*, John Wiley & Sons, New York, 1998.
- [35] J. S. Ajioka, "Frequency-scan antennas," in *Antenna Engineering Handbook*, 3rd ed, R. C. Johnson, Ed. New York: McGraw-Hill, 1993, pp. 19-1-19-30.
- [36] P. S. Hall and S. J. Vetterlein, "Review of radio frequency beamforming techniques for scanned and multiple beam antennas," *Proc. Inst. Elect. Eng.*, pt. H, vol. 137, no. 5, pp. 293-303, Oct. 1990.
- [37] C. Huygens, *Oeuvres Completes de Christiaan Huygens*, M. Nijhoff, Ed. The Hague, The Netherlands: Societe Hollandaise des Sciences, 1893, vol. 5, pp. 243-244.
- [38] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2002.
- [39] S. H. Strogatz and I. Stewart, "Coupled oscillators and biological synchronization," *Sci. Amer.*, vol. 269, no. 6, pp. 102-109, Dec. 1993.
- [40] H. G. Winful and S. S. Wang, "Stability of phase locking in coupled semiconductor laser arrays," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 53, no. 20, pp. 1894-1896, Nov. 1988.
- [41] S. H. Strogatz, Norbert Wiener's brain waves, in *Lecture Notes in Biomath.*, vol. 100, pp. 122-138, 1994.
- [42] I. I. Blekman, *Synchronization In Science and Technology*, ASME Press, New York, 1988.
- [43] D. R. Scifres, R.D. Burnham and W. Streifer, *Appl. Phys. Lett.*, vol. 32(12), pp. 1015, 1978.
- [44] S. S. Wang and H. G. Winful, *Appl. Phys. Lett.*, vol. 52(21), pp. 1774, 1988.
- [45] H. G. Winful, *Phys. Rev. A*, vol. 46(9), pp. 6093, 1992.
- [46] L. Fabiny, P. Colet and R. Roy, *Phys. Rev. A*, vol. 47(5), pp. 4287, 1993.
- [47] R. Roy and K. S. Thornburg, Jr., *Phys. Rev. Lett.*, vol. 72(13), pp. 2009, 1994.
- [48] K. S. Thornburg, Jr., M. Moller and R. Roy, *Phys. Rev. E*, vol. 55(4), pp. 3865, 1997.
- [49] H. D. Jensen, A. Larsen and J. Mygind, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 25(2), pp. 1412, 1989.
- [50] L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, pp. 821, 1990.
- [51] A. I. Panas, T. Yang and L. O. Chua, *Int. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Eng.*, vol. 8(3), pp. 639, 1998.

- [52] C. S. Peskin, *Mathematical Aspects of Heart Physiology*, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1975.
- [53] J. R. Clay and R. L. DeHaan, *Biophysical Journal*, vol. 28, pp. 377, 1979.
- [54] J. Honerkamp, *J. Math. Biology*, vol. 18, pp. 69, 1983.
- [55] D. C. Michaels, E. P. Matyas and J. Jalife, *Circulation Res.*, vol. 61, pp. 704, 1987.
- [56] D. R. Chialvo and J. Jalife, *Nature (UK)*, vol. 330(6150), pp. 749, 1987.
- [57] J. Buck, *Q. Rev. Biol.*, vol. 63, pp. 265, 1988.
- [58] B. Ermentrout, *Journal of Mathematical Biology*, vol. 29(6), pp. 571, 1991.
- [59] C. A. Czeisler, et al., *Science*, vol. 233(4764), pp. 667, 1986.
- [60] M. K. McClintock, *Nature*, vol. 229, pp. 244, 1971.
- [61] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [62] G. B. Ermentrout and N. Kopell, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 15, pp. 215, 1984.
- [63] N. Kopell and G. B. Ermentrout, *Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 39, pp. 623, 1986.
- [64] S. H. Strogatz and R. E. Mirollo, *Physica D*, vol. 31, pp. 143, 1988.
- [65] E. Niebur, H. G. Schuster, D. M. Kammen and C. Koch, *Phys. Rev. A*, vol. 44(10), pp. 6895, 1991.
- [66] D. Golomb, D. Hansel, B. Shraiman and H. Sompolinsky, *Phys. Rev. A*, vol. 45(6), pp. 3516, 1992.
- [67] K. Okuda, *Physica D*, vol. 63, pp. 424, 1993.
- [68] P. Tass and H. Haken, *Z. Phys. B*, vol. 100, pp. 303, 1996.
- [69] P. Tass, *Phys. Rev. E*, vol. 56(2), pp. 2043, 1997.
- [70] J. K. Hale, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, vol. 9(1), pp. 1, 1997.
- [71] H. Diado, *Int. J. Bifur. Chaos*, vol. 7(4), pp. 807, 1997.
- [72] J. F. Heagy, T. L. Carroll and L. M. Pecora, *Phys. Rev. E*, vol. 50, pp. 1874, 1994.
- [73] J. F. Heagy, L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74, pp. 4185, 1995.