



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**ESTUDIO DE MÉTODOS DE FUSIÓN DE
ADQUISICIONES 3D DE LA OREJA HUMANA
USANDO MEDIDAS DE ENTROPÍA**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

MARIO ALBERTO MERCADO SÁNCHEZ



**DIRECTOR DE TESIS: DR. JORGE MÁRQUEZ
FLORES**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi madre

Agradecimientos

A mi familia y a las tías Romo.

Al Dr. Jorge Márquez por su paciencia y el apoyo proporcionado para desarrollar esta tesis.

A la UNAM y a la comunidad que conforma la Facultad de Ciencias.

Manifiesto mi agradecimiento al Dr. Leopoldo Ruiz y al Dr. Alberto Caballero del grupo de Micromecánica y Mecatrónica del CCADET de la UNAM así como al Mtro. José Luis Villareal encargado del Laboratorio de Visualización de DGSCA por su apoyo en la realización de este proyecto.

Resumen

El tema principal de la tesis es la exploración de métodos estadísticos basados en la Entropía e Información Mutua, para el registro y fusión de imágenes tridimensionales de una oreja humana con el propósito de generar un modelo virtual. Los problemas prácticos derivados de realizar adquisiciones con un escáner laser 3D de la oreja de una persona normal o un paciente como lo son los errores en el registro producidos por la movilidad del sujeto durante el tiempo que dura la adquisición de datos y el problema de oclusión en la toma de datos derivados de la forma de la oreja (información incompleta), proporcionan un campo adecuado para la aplicación de métodos estadísticos. Estos métodos están basados en la estadística Bayesiana a través de los parámetros de Entropía, Información Mutua y divergencia Kullback Leibler. Se utiliza un modelo 3D de oreja como objeto de estudio, el cual fue impreso en una resina de material termoplástico, para poder aplicar y evaluar los métodos propuestos. La implementación de estos métodos estadísticos se hace a partir de las proyecciones de profundidad del modelo 3D proporcionados por un escaner 3D. A partir de estas proyecciones se estudian propiedades de la Entropía importantes para la implementación de un registro automático como son; un estudio de la variación de la Entropía al aumentar el tamaño de la partición, de la invariancia de la Entropía ante traslaciones, de su comportamiento ante rotaciones, aplicamos también el método de ejes principales para encontrar la orientación adecuada en la cual se maximiza la información total de los datos. La implementación del parámetro de Información Mutua tal como se utiliza en la literatura representa un problema no resuelto en esta tesis. Se estudia entonces un parámetro similar llamado parámetro de KL, ante traslaciones y rotaciones, y se aplican los resultados en la automatización del registro de un par de imágenes. El estudio del comportamiento del parámetro de divergencia KL nos muestra que sus mínimos en los tres planos de proyección coinciden cuando tenemos una alineación óptima.

Índice

1. Introducción.....	1
1.1 Organización de la tesis.....	1
1.2. Descripción del problema y antecedentes.....	1
1.3. Objetivos.....	4
2. Materiales y Métodos.....	5
2.1 Escáner	5
2.2. Imágenes.....	6
2.3. Software.....	8
2.4. Fusión.....	8
2.5. Métodos Bayesianos	12
3. Pruebas y Resultados.....	16
3.1 Sobre los problemas prácticos derivados de la toma de imágenes.....	16
3.2 Estudio del método de análisis de componentes principales.....	17
3.3 Estudio de la variación de entropía de una imagen con el tamaño de la partición.....	18
3.4 Estudio del comportamiento de la entropía de una imagen ante traslaciones.....	21
3.5 Estudio del comportamiento de la entropía de una imagen con ante rotaciones.....	23
3.6 Estudio del comportamiento de la divergencia KL entre dos imágenes ante la traslaciones.....	24
3.7 Estudio del comportamiento de la divergencia KL entre dos imágenes ante rotaciones.....	27
3.8 Registro de un par de imágenes a través de la divergencia KL.....	28
4. Conclusiones.....	31

Anexo I.....	35
Anexo II	37
Anexo III	45
Anexo IV.....	49
Literatura citada.....	54

1. Introducción

1.1 Organización de la tesis

Con esta tesis se propone resolver problemas asociados a la adquisición de imágenes 3D, en especial del problema de registro de imágenes. Es así que en el primer capítulo se hace una descripción de la problemática relacionada con la adquisición de imágenes al igual que de conceptos relacionados con el registro y fusión de estas. En la última sección de este capítulo se exponen los objetivos de este trabajo.

En el segundo capítulo se describen los materiales y el software utilizado, así como los métodos empleados y sus particularidades; adicionalmente se amplía la información proporcionada relativa a la fusión de imágenes, para una mejor comprensión de estos métodos.

En el capítulo tres se concentran las pruebas realizadas con los métodos propuestos y los resultados obtenidos. En el capítulo cuatro se exponen las conclusiones y trabajo a futuro.

En el Anexo 1 se expone la información necesaria acerca del tema de probabilidad para la aplicación de los conceptos de Entropía e Información Mutua, asimismo en el Anexo 2 se presentan los conceptos de Entropía e Información Mutua.

1.2 Planteamiento del problema

El procesamiento digital de imágenes médicas es un área de investigación muy extensa que se nutre del conocimiento de campos muy diversos como la biomedicina, ingeniería, física y matemáticas aplicadas. Esto se debe a que las imágenes médicas constituyen hoy un componente vital en gran número de aplicaciones fundamentales en la medicina; como en el diagnóstico de enfermedades, seguimiento y evaluación de tratamientos, o en el diseño de planes quirúrgicos.

La cantidad y calidad de la información obtenida por distintos medios y las dificultades para controlar, clasificar y analizar los datos obtenidos, han hecho necesario utilizar y desarrollar métodos que los relacionen, aporten información adicional y mejoren la precisión del diagnóstico [Plataniotis, 2000]. Una de estas herramientas es la fusión de imágenes.

En el caso de la visualización de imágenes 3D la fusión de imágenes tiene el propósito de construir un modelo 3D completo. Un modelo 3D es útil en cuanto a que tenemos la facultad de visualización del objeto desde cualquier punto de vista, así como de manipular desplazamientos del mismo. Los tipos de objetos virtuales 3D pueden ser de tres tipos: los modelos de alambre, superficie o sólidos con volumen. Los modelos de alambre contienen elementos que definen la aristas del objeto y es muy eficiente trabajar con ellos. Los modelos de superficie permiten representar modelos más complejos definiendo una superficie cerrada a partir de superficies más simples. Los modelos de sólidos permiten análisis de propiedades físicas y su creación se realiza a partir de primitivas (esfera, cono...) y operaciones como unión o diferencia.

En este trabajo se busca fusionar la información contenida en diferentes imágenes de un mismo objeto pero tomadas desde diferentes sistemas de referencia por lo que se tendrán fenómenos de información incompleta, redundante y complementaria, como se muestra en Fig.1.1.

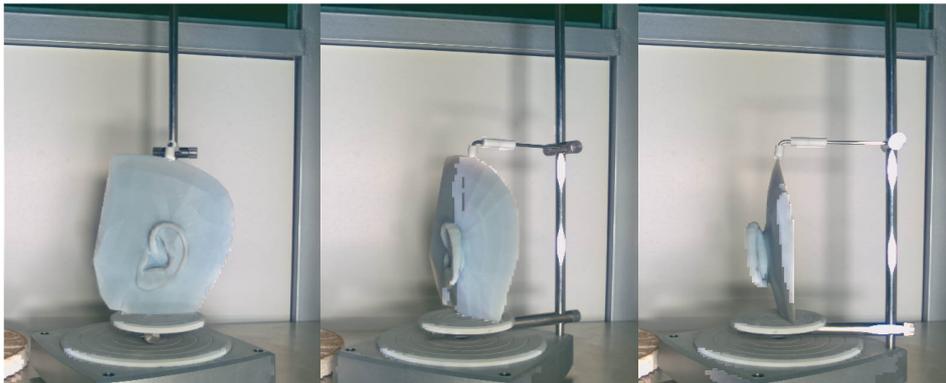


Fig. 1. 1 Vistas parciales del modelo de resina termoplástica.

El problema de discriminar que información es relevante y que información no

lo es, se complica en la adquisición de imágenes 3D de , donde el tiempo de adquisición de cada punto de vista necesario para la reconstrucción de un modelo completo, depende de la calidad deseada en la imagen y del área captada, pues este es proporcional a la cantidad de datos que se tomarán de muestra, que en la práctica puede abarcar un intervalo de 2 minutos por toma para imágenes de baja calidad hasta intervalos de 20 minutos por toma para imágenes de alta calidad. Esto conlleva problemas pues el proceso de escaneo es muy sensible al movimiento. Una persona tendría que estar inmóvil durante todo el tiempo que dure el proceso de adquisición, lo cual en la práctica no es posible. Por lo tanto, tendremos imágenes que no estarán registradas en un mismo marco de referencia.

Aún cuando el modelo no tuviera movimiento y que las imágenes correspondieran a un mismo sistema de referencia, fenómenos como el ruido y otros fenómenos de degradación de imagen pueden alterar significativamente el proceso de registro y fusión de la imagen [Katartzis, 2008]. Estos también pueden ser tratados a partir de métodos estadísticos.

El problema de la oclusión es característico dada la forma de la oreja. Hay partes que ocultan información en ciertos ángulos de la toma de datos, de manera que tenemos un fenómeno de adquisición de información incompleta. Es interesante notar que también se tendrán fenómenos de información redundante y complementaria a lo largo de varias adquisiciones. Por ejemplo, la información obtenida de una adquisición no aparece en otra adquisición diferente (información complementaria) o, en algunos casos, la información recolectada se repite (información redundante) o finalmente esta información se presenta con pequeñas variaciones.

El proceso más general para hacer un modelo 3D consiste en adquirir diferentes tomas del objeto desde diferentes ángulos, dado que una sola adquisición no contiene la información completa del objeto. Los datos que se obtiene son nubes de puntos en un espacio tridimensional sobre las cuales se puede establecer un mallado que las convierta en superficies poligonales. Una vez que se obtienen estas superficies estas se someten a un proceso de alineación.

El proceso de alinear las diferentes tomas o imágenes 3D tomadas por nuestro

dispositivo tiene una componente humana importante, puesto que el sistema visual humano es capaz de realizar una “fusión mental” integrando e interpretando información de manera semejante a cómo funciona la visión en estéreo, pero con el riesgo de caer en errores de apreciación debido a las limitaciones propias del sistema visual humano que hacen juzgar inadecuadamente relaciones espaciales entre imágenes. Por ello, es necesario recurrir a técnicas computacionales que proporcionen métodos objetivos que faciliten esta labor. El diseñador utiliza un proceso de alineación por marcas fiduciaras en las cuales aprovechando las características geométricas del objeto se colocan pares de marcas correspondientes sobre las superficies a alinear. Este proceso puede ser iterativo a discreción del diseñador. Existen métodos de optimización como lo son el de puntos cercanos (*closest points*), en el cual se minimiza el error entre los puntos de ambas superficies, pero que pueden no converger en una solución óptima. Luego se fusionaran los datos en un modelo único en lo cual lo que se busca es obtener una superficie cerrada, por lo que por lo general se tendrá que hacer una edición final del modelo con el objeto de corregir errores como huecos que hallan quedado en la malla o imperfecciones del modelo para hacer una última optimización del mallado.

[Castellanos, 2010], [Botello, 2008], [Acharya, 2005], [Schechner, 2008], [Katartzis, 2008], [Oudre, 2008], proponen diferentes métodos de fusión para tratar de resolver problemas de registro similares como lo son los métodos de registro superficial, transformaciones rígidas y deformables o a través de la minimizar de diferentes parámetros de similitud.

[Wang, 2008] presenta métodos de evaluación de las técnicas de fusión a partir de diferentes parámetros por lo que se pueden evaluar de manera objetiva los resultados de la fusión.

1.3 Objetivos

Uno de los objetivos de este trabajo es investigar y desarrollar técnicas estadísticas de fusión-registro de imágenes 3D de una oreja humana, que permitan ayudar a los especialistas a obtener información relevante en cuanto a los errores de

registro y de oclusión de las imágenes para su posterior integración en un modelo completo.

Los problemas a considerar son la oclusión (información incompleta) y el movimiento del sujeto, lo que da lugar a errores en el registro y por lo tanto en la fusión.

Dadas las características de estos problemas se propone el uso de métodos estadísticos por su flexibilidad en el manejo de la información relevante, lo que nos permite incluir información con mucha variación, además de manejar la presencia de ruido. Se estudia entonces el comportamiento de diferentes parámetros estadísticos importantes para la definición del parámetro de Información Mutua, como la entropía y la divergencia KL ante fenómenos de traslación y rotación.

2. Materiales y Métodos

Escáner

El escáner que se utiliza es el ScanStudio HD 1.2.0 de la marca Next Engine, el cual es un dispositivo que puede reunir datos tanto de la profundidad de la escena así como información de color.



Fig. 2. 1 Scan Studio HD 1.2.0 de Next Engine.

El propósito es generar una nube de puntos a partir de muestras tomadas por el láser sobre la superficie del objeto de tal manera que se pueda extrapolar la forma del objeto (reconstrucción).



Fig. 2. 2 Modelo y nube de puntos generada.

Generalmente no es posible reconstruir un modelo completo a partir de una sola imagen por lo que se requieren de diversas tomas desde direcciones diferentes que después tienen que integrar en un sistema común de referencia.

2.1 Imágenes

Los datos con los que se trabaja son puntos archivados como texto con formato organizado en tres columnas, que contienen la información acerca de las coordenadas espaciales de cada adquisición hecha por el scanner. Estas nubes de puntos corresponden a las superficies visibles al láser del escáner y cuentan con un promedio de 2,000 a 30,000 puntos dependiendo de la calidad de imagen deseada y el área de la superficie captada. En este trabajo se hace una comparación al trabajar con

imágenes de baja calidad con un promedio de 3,000 puntos e imágenes de mediana calidad con 30,000 puntos en promedio.

Los parámetros estadísticos con los que se trabaja están representados en la Fig 2.3. Se muestra en esta figura la nube de puntos visualizada a través del programa *PowerShape-e 2011R3* y el correspondiente histograma de profundidad con respecto a un plano determinado. El histograma de profundidad se refiere a la ordenación que hacemos de las alturas con respecto a un plano determinado. Por ejemplo, si se toma el histograma de profundidad con respecto al plano XY, entonces nos referimos al histograma de las coordenadas Z de la imagen. Dado que suponemos que la información contenida en tres planos es una aproximación a la información volumétrica, el inciso D nos muestra los histogramas de frecuencias de profundidad con respecto a los planos XY, YZ y XZ.

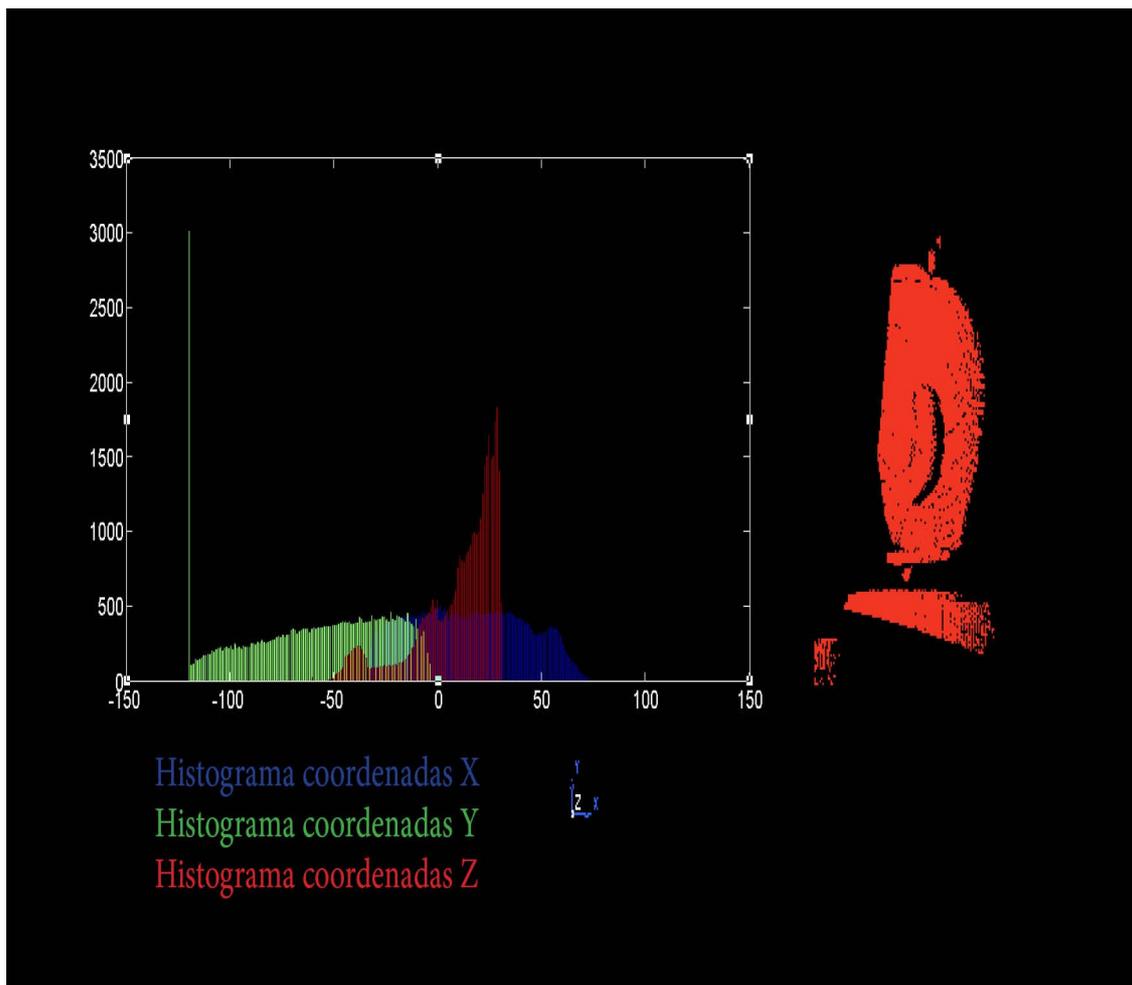


Fig. 2. 3 Histogramas de profundidad generados a partir de la nube de puntos.

2.2 Software

2.2.1. Matlab

Es un lenguaje de programación en un entorno interactivo desarrollado por Mathworks, para desarrollo de algoritmos, análisis y visualización de datos y cálculo numérico. Es especialmente útil debido a que cuenta con conjuntos de herramientas orientadas a aplicaciones específicas, como el procesamiento de imágenes, denominadas *toolboxes*. Además, permite la elaboración de GUIs (Graphical User Interface, interfaz gráfica de usuario), con herramientas que facilitan su diseño y construcción. Se utilizó la versión 7.8. (R2009a) de MATLAB para WINDOWS para desarrollar los métodos propuestos.

2.2.2. Power Shape-e 2011 R3

Es un CAD para diseño tridimensional que nos ayuda a modelar a través de sólidos y superficies, mallados o nube de puntos. Muy importante para la visualización del proceso de registro y fusión y en la aplicación de ingeniería inversa.

2.4 Fusión

La información es el objeto de trabajo de los métodos de fusión. El concepto de información se usa en un amplio sentido, tanto datos como medidas, imágenes, señales, hasta conocimiento *a priori* en forma de restricciones genéricas o específicas, todo forma parte del campo de aplicación de los métodos de fusión. Intuitivamente la información se refiere a cualquier elemento que pueda ser codificado para ser almacenados, procesados o transmitido.

Al conjunto de técnicas, cuyo objetivo es combinar información de distintas fuentes para mejorar u obtener información adicional, se les denomina fusión de datos. La fusión de datos constituye entonces un método objetivo mediante el cual los datos originados por diferentes fuentes o clases, pueden ser expresados en un mismo sistema de referencia, en la búsqueda de información completa y consistente.

Las aplicaciones en el campo de la fusión son muy variadas dependiendo de la formulación de diferentes preguntas: ¿Cuál es el objetivo de la fusión?, ¿Qué es la información que queremos fusionar?, ¿De dónde viene la información?, ¿Cuáles son las características de esta información?, ¿Qué metodología se debe usar para validar los resultados de la fusión?

[Katartzis,2008], [Pradham,2008] plantean este tipo de preguntas para tratar de encontrar el método de fusión óptimo a utilizar en diferentes situaciones.

Se tienen en cuenta 3 modalidades de fusión: intra-sujeto, inter-sujeto y multimodal. En la fusión de imágenes en la modalidad **intra-sujeto**, la información procede del mismo sujeto. Fusionar estas imágenes para su posterior visualización y análisis es muy importante aquí pues lo que se busca es realizar mediciones antropométricas, además de que esta modalidad es muy usada para observar la evolución de una enfermedad, un tratamiento en progreso y también para compensar las diferencias causadas por el desplazamiento del paciente en el proceso de captura de información.

Otra aplicación se tiene en la modalidad **inter-sujeto** en donde la segmentación y cuantificación objetiva de anormalidades se hace por medio de la comparación de la anatomía del paciente con un atlas estandarizado, el cual es uno de los objetivos a largo plazo de este proyecto.

La fusión multimodal se aplica por ejemplo en el caso de usar marcas fiduciarias pues éstas se hacen sobre la imagen a color que deberá corresponderse con la imagen 3D. En particular los métodos estadísticos de fusión han dado muy buenos resultados en la **fusión multimodal** [Maes,1997], [Huang,2008], donde la comparación de la información es partir de múltiples modalidades de imagen, relacionando, por ejemplo, el funcionamiento del tejido con su anatomía. Un caso de especial importancia es la integración de imágenes funcionales (**SPECT y PET**) e imágenes anatómicas (**TAC, MR**) de las cuales se encuentra referencia en [Baum,2007], [Yamamura,2006], [Isis Lazaro,2011], los cuales nos presentan técnicas para la fusión de imágenes anatómicas y funcionales. Las imágenes del PET son utilizadas para la detección de anomalías funcionales aunque no precisan su ubicación exacta. En

cambio las imágenes tomadas por RM o TAC pueden caracterizar anomalías morfológicas y su relación anatómica por lo que ambas imágenes tienen un carácter complementario. Ver Fig 2.4.

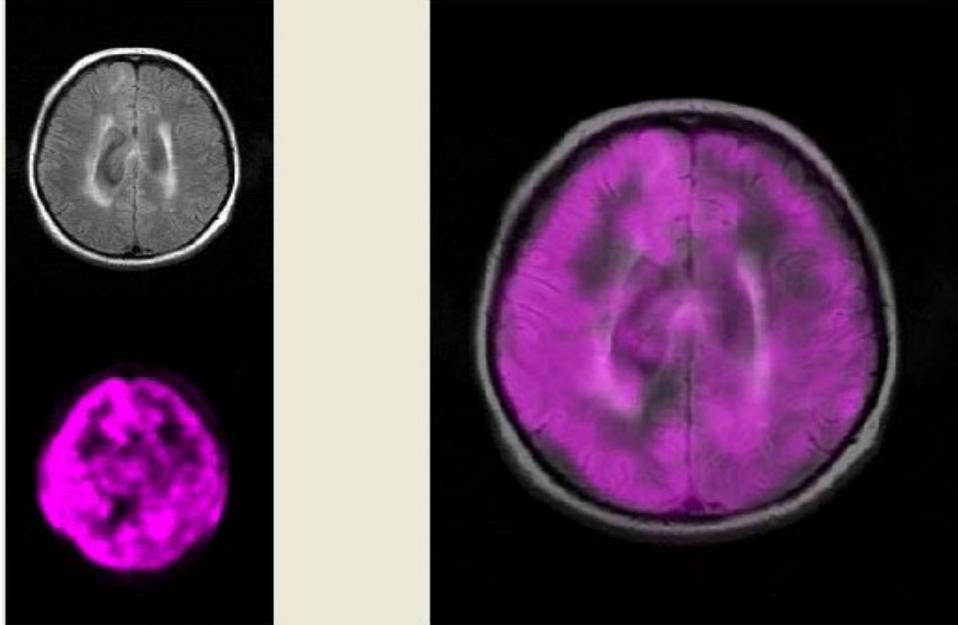


Fig. 2. 4 Registro de imagen MT y PET del cerebro.

2.4.1 Registro de imágenes

Una parte importante del proceso de fusión es el registro. El objetivo es situar en un mismo sistema de referencia espacial las imágenes. En general se busca una transformación T (global o local), que mapee cada imagen a un mismo sistema de referencia. Esta transformación a menudo se obtiene a través de la minimización de medidas de similitud, como por ejemplo los parámetros de *Coefficiente de Correlación Cruzada (CCC)*, el *Error Cuadrático Medio (ECM)* o en nuestro caso la *Información Mutua (IM)* y el parámetro de *divergencia Kullback-Lieber (KL)* [Xiang, 1999], [Wang, 2008].

Las *transformaciones globales* funcionan sobre todo el modelo y tienen forma analítica. También se les llama *transformaciones paramétricas* y la manipulación de la imagen se hace a través de los parámetros dentro de la forma analítica de la transformación. Dos tipos de estas transformaciones son por ejemplo las *transformaciones afines*, las cuales conservan líneas rectas e incluyen rotaciones,

traslaciones y escalamientos y las *transformaciones de perspectiva*, que ocurren cuando la toma del eje óptico de la cámara no está en el infinito. *Las transformaciones locales o no paramétricas* incluyen deformaciones elásticas y pueden estar definidas por la información *a priori* que dispongamos sobre los objetos de la imagen. Nosotros utilizamos solo transformaciones de traslación y de rotación para el estudio de los diferentes parámetros estadísticos.

En general cuando registramos imágenes 2D-2D las transformaciones afectan la intensidad del pixel y no las ubicaciones espaciales y lo que se busca es la correspondencia biunívoca entre los pixeles de un par de imágenes, pero en el caso del registro 3D las trabajaremos con la información proporcionada por las coordenadas espaciales.

Existen diversas técnicas para el registro de imágenes [Baum, 2007] Nosotros utilizamos dos: una técnica por superficie y otra estadística.

En el registro por superficie el concepto es obtener superficies sobre la imagen, [Besl, 1992]. El poder obtener una superficie virtual óptima está en dependencia directa con el método usado para la obtención de los datos de la imagen y también con la modalidad de las imágenes. Por ejemplo, en el caso de imágenes tomadas mediante la modalidad de *Positron Emission Tomography (PET)*, su baja resolución espacial implica que la segmentación necesaria para generar una superficie se torne un problema complejo.

Los métodos basados en *marcas fiduciarias (landmark registration)* pertenecen a esta clase, [Bookstein, 1991]. Se busca tener un marco de referencia rígido sobre el modelo que pueda ser fácilmente identificado en las imágenes. Dado que tener un marco de referencia rígido representa un problema práctico en muchas aplicaciones, esto puede ser resuelto por la colocación de puntos característicos que constituyen las marcas fiduciarias sobre la superficie del modelo con la limitante que tienen que ver con la incertidumbre para detectar los puntos registrados y hacerlos corresponder uno a uno.

Esta técnica es la más ampliamente usada pues tiene un bajo costo

computacional y debido también a que existen herramientas que nos permiten usar la información de color del modelo (registro 2D-3D) para obtener puntos de registro sin necesidad de alterar físicamente el modelo y poder dar una aproximación a la alineación adecuada. Esta herramienta no siempre es adecuada pues es sensible a la complejidad de la forma y al nivel de exactitud exigido.

2.5 Métodos Bayesianos

Los métodos Bayesianos que se utilizan tanto en el proceso de fusión, como en el registro de imágenes, ofrecen un rico conjunto de técnicas y herramientas. Éstas son aplicables independientemente del propósito de la fusión, de los diferentes niveles de abstracción y de los diferentes tipos de imágenes.

Básicamente lo que se busca es correlacionar distribuciones de probabilidad que pueden referirse a distintas fuentes de información, como lo pueden ser la intensidad de pixel o de voxel, color, posición, etc.

En el uso de estos parámetros estadísticos para el registro 2D por ejemplo, no se asume una relación lineal entre los valores de intensidad de los pixeles en las dos imágenes, en su lugar se contempla que la ocurrencia de los valores más probables en las dos imágenes se maximiza en el proceso de registro. El hecho de que la información mutua sea una medida de tipo estadístico resulta, especialmente apropiado para estas aplicaciones de registro multimodal.

La fundamentación axiomática de la estadística Bayesiana está dada por los axiomas de Kolmogorov de probabilidad, pero donde la estadística clásica interpreta la probabilidad como un límite de una frecuencia de eventos cuando se repite infinitamente, la estadística Bayesiana lo interpreta como un grado de plausibilidad. [Anexo 2].

En general el modelo numérico que usemos para representar nuestro conocimiento acerca de un sistema se expresará a través de conceptos de probabilidad, funciones de plausibilidad y conjuntos difusos [Beyerer, 2008].

La desventaja de este tipo de métodos es la perspectiva global desde la cual maneja los datos contenidos en la imagen, lo cual puede ocasionar un excesivo costo computacional.

2.5.1 Métodos de Entropía Conjunta e Información Mutua

El uso de estos métodos está basado en el *Principio de Máxima Entropía (MaxEnt)*. Este principio sirve fundamentalmente como un procedimiento para generar distribuciones de probabilidad de forma sistemática y objetiva. La idea es tomar de todas aquellas distribuciones compatibles con las restricciones dadas del problema, aquella que conlleve una mayor “incertidumbre” o lo que es lo mismo que represente una ganancia máxima de información, basados en que el escoger otra implica tomar en cuenta de manera consciente o inconsciente información que no estaba dada de antemano. Esto significa que se tiene en la entropía un parámetro objetivo para generar una distribución de probabilidad de manera objetiva.

El uso de métodos basados en la entropía como una medida de la información contenida en la imagen es una aportación de la Teoría de la Información con fundamentos en la teoría de la medida. La búsqueda de una medida de la información contenida en un mensaje dio lugar a la primera definición de información y de entropía realizada por Hartley en 1928 y continuadas posteriormente por Shannon.

[Viola, 1997] expone una variedad de métodos de registro en los que es usado el parámetro de Información Mutua; en aplicaciones tan diversas como en el registro de imágenes de resonancia magnética (MR) y de tomografías (CT), en la alineación de formas complejas 3D, así como alineación y reconocimiento de imágenes tomadas en secuencias de video.

Existen diferentes definiciones de entropía que son generalizaciones del modelo de Shannon, y que varían dependiendo, por ejemplo, de si se toma en cuenta o no la dependencia de las variables aleatorias (píxeles vecinos), o de si el modelo

corresponde a un caso continuo o discreto. Se han propuesto como medidas de información [Rodríguez, 1998] [Jumarie, 1997] por ejemplo las medidas paramétricas que expresan la información proporcionada por los datos acerca de un parámetro θ como lo es el parámetro de Fisher que mide a través del tercer momento estándar la asimetría de la Función de Densidad de Probabilidad (PDF), o las no paramétricas que miden la “distancia” o afinidad entre dos distribuciones como la medida de Kullback-Leibler.

2.5.2 Métodos Bayesianos aplicados a imágenes 2D y 3D

En el [Anexo I] exponemos toda la herramienta estadística necesaria para implementar estos métodos.

Una parte importante de los métodos de información mutua es definir el concepto de lo que es el histograma conjunto dependiendo la aplicación. En el caso del registro de imágenes 2D el significado del histograma conjunto es contar el número de pixeles de coordenadas $[x,y]$ en el sistema de referencia mutuo, tienen la clase conjunta $[a,b]$ donde a pertenece al intervalo de clases para A que es la imagen de referneacia y b al intervalo de clases para la imagen B que es la imagen a alinear. Es decir, comparar la intensidad de un pixel de la imagen A contra la intensidad de un pixel de la imagen B , ambos ubicados en la misma posición. Por lo tanto las clases corresponden a los nivel de intensidad de gris de los pixeles comparados.

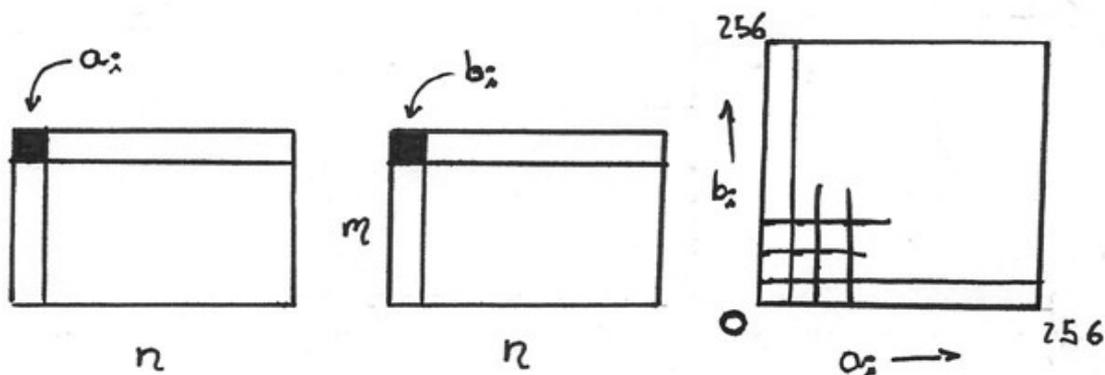


Fig I. Histograma conjunto 2D.

Si el histograma conjunto entre la imagen A y la imagen B es una gráfica de las clases a_i que pueden tomar los pixeles de la imagen A contra las clases b_i de la imagen B . Dado que en el caso 2D, estas clases corresponden ambos niveles de grises (0-256), entonces el histograma conjunto es un plano $256*256$ donde se representa el conteo de clases conjuntas (a_i, b_i) . Ver Fig I.

En el caso de la entropía conjunta entre dos imágenes 3D la clase en este caso se refiere a la variable de profundidad sobre la que estamos midiendo. Lo que tendríamos que haber hecho es comparar por ejemplo los histogramas con respecto al plano XY. Entonces la clase a_i se refiere justamente a los valores de profundidad de la primera imagen y la clase b_i a los valores de profundidad de la segunda imagen, ambas con respecto al eje Z. Es entonces que el problema de oclusión se hace presente pues mientras en el caso de imágenes 2D estas relaciones son biunívocas no es así en el caso 3D.

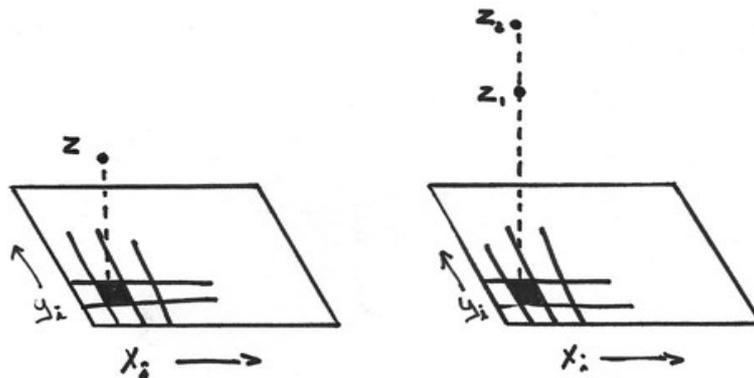


Fig II. Problema con el histograma conjunto 3D.

Aquí a pesar de que se puede establecer un histograma conjunto hay que resolver el problema de ambigüedad, porque observando la Fig II ¿con quién se debe relacionar Z , con Z_1 o con Z_2 ?

El problema para utilizar la misma definición en el caso de registro de imágenes 3D a través de la nube de puntos, es definir qué es la Información Mutua en el caso de imágenes 3D.

Aunque no logramos obtener una definición clara de lo que es la información mutua para este caso podemos estudiar parámetros intrínsecamente relacionados con él

como lo son la Entropía y la Divergencia KL. El comportamiento de estos parámetros nos dará una idea muy buena de cómo podrían aplicarse los Métodos de Información Mutua.

3. Pruebas y Resultados

3.1 Sobre los problemas prácticos derivados de la toma de imágenes.

Lo que se busca en las diferentes tomas de imágenes del modelo es la identificación de lo que es la información mutua contenida en ambas imágenes, así como la información complementaria.

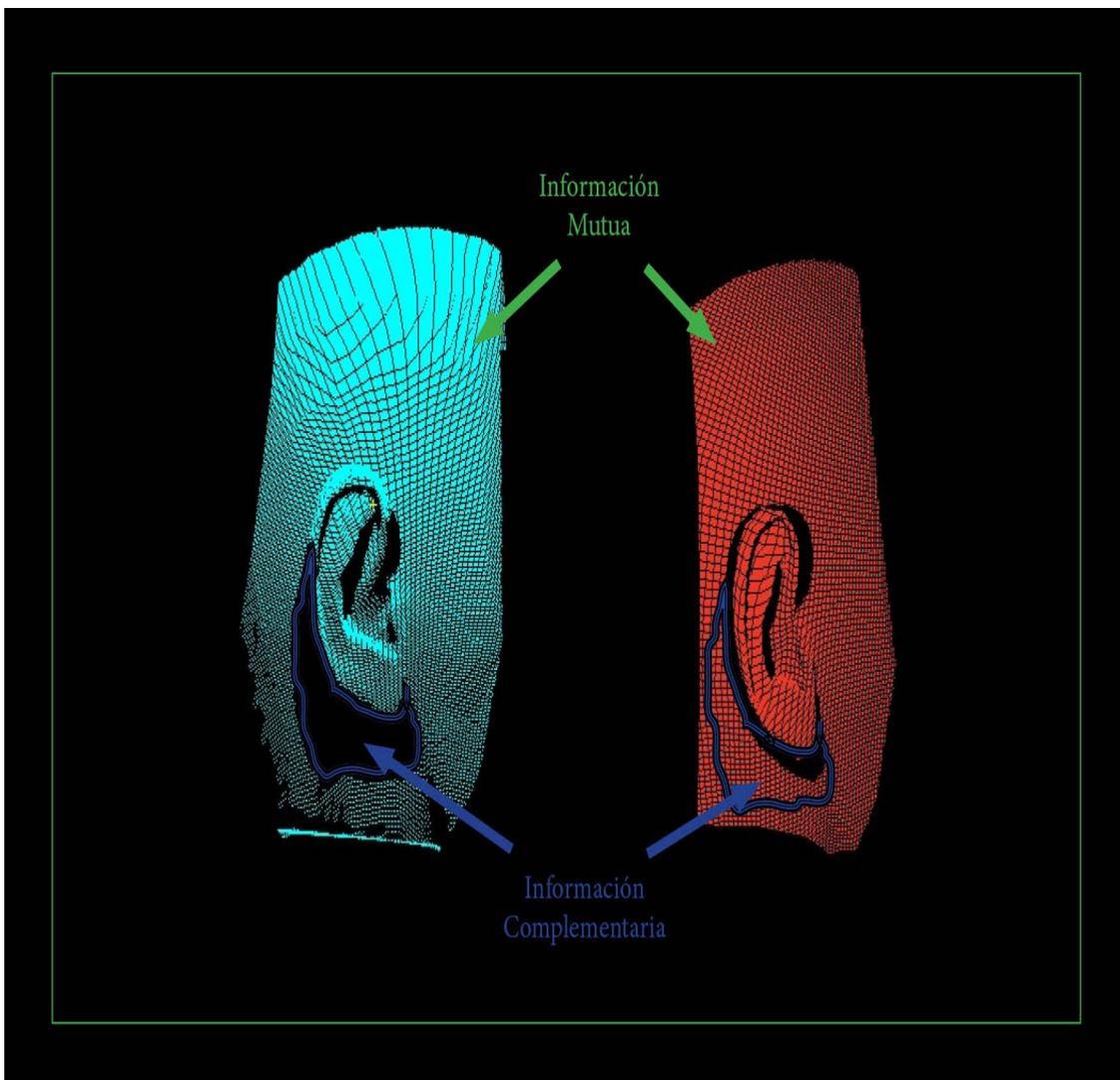


Fig. 3. 1 Información Mutua y Complementaria.

La cantidad de información mutua es afectada por la diferencia entre los ángulos bajo los cuales se realizan las diferentes adquisiciones y del movimiento del sujeto de estudio (en el caso de una toma a una persona real y no a un maniquí). Esto hace que se tengan imágenes situadas en diferentes sistemas de referencia y en consecuencia, un problema apropiado para la aplicación de métodos estadísticos.

3.2 Estudio del método de Análisis de Componentes Principales.

En el Anexo 3 se encuentra la explicación detallada de este método. Este es un método eficaz mediante el cual se puede maximizar la información obtenida de los histogramas de profundidad desde un plano determinado. Básicamente lo que se obtiene es un histograma por cada coordenada, que está centrado en la media y que en el eje (X) recoge la mayor cantidad de información.

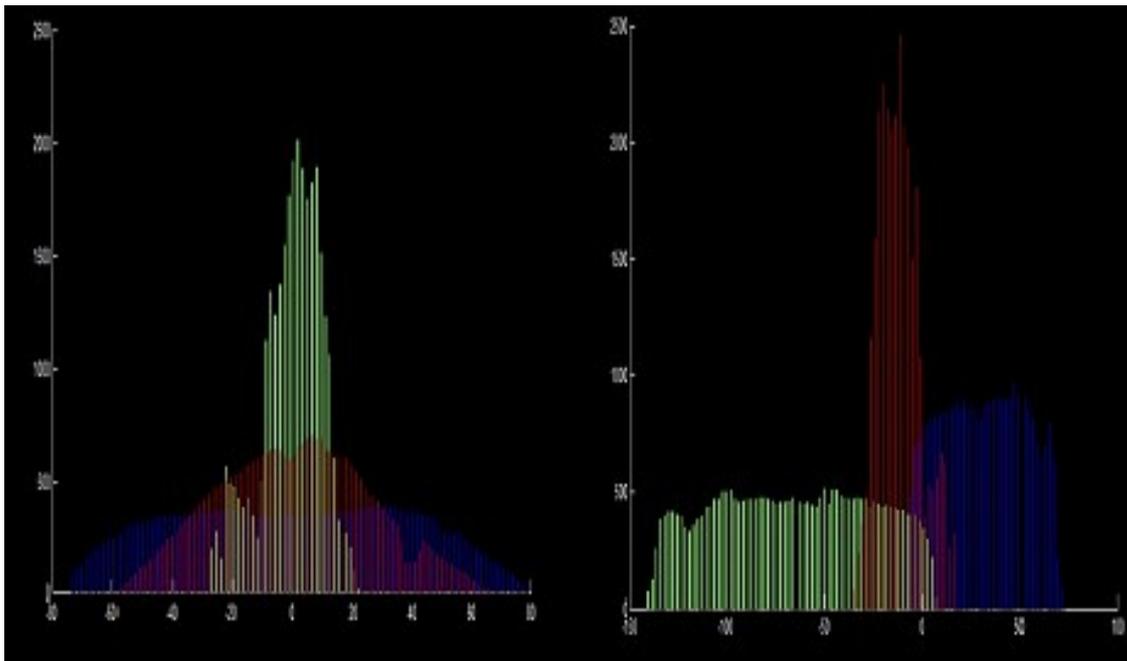


Fig. 3. 2 Histograma procesado con el método de CP y sin procesar.

La figura 3.2 se muestran los tres histogramas (X-azul, Y-verde, Z-rojo) centrados en el origen y donde el eje X recoge la mayor cantidad de información, en comparación de los histogramas sin alterar que se ven en la figura de la derecha.

Esto proporciona vistas preferenciales que vienen representadas en el cuadrante I de la siguiente figura 3.3. En el cuadrante II se observan los intervalos para cada variable donde el intervalo en el eje X es el que contiene más información; además todos los intervalos están centrados en la media aritmética. En el cuadrante III se observan los histogramas correspondientes y en el IV la nube de puntos analizada.

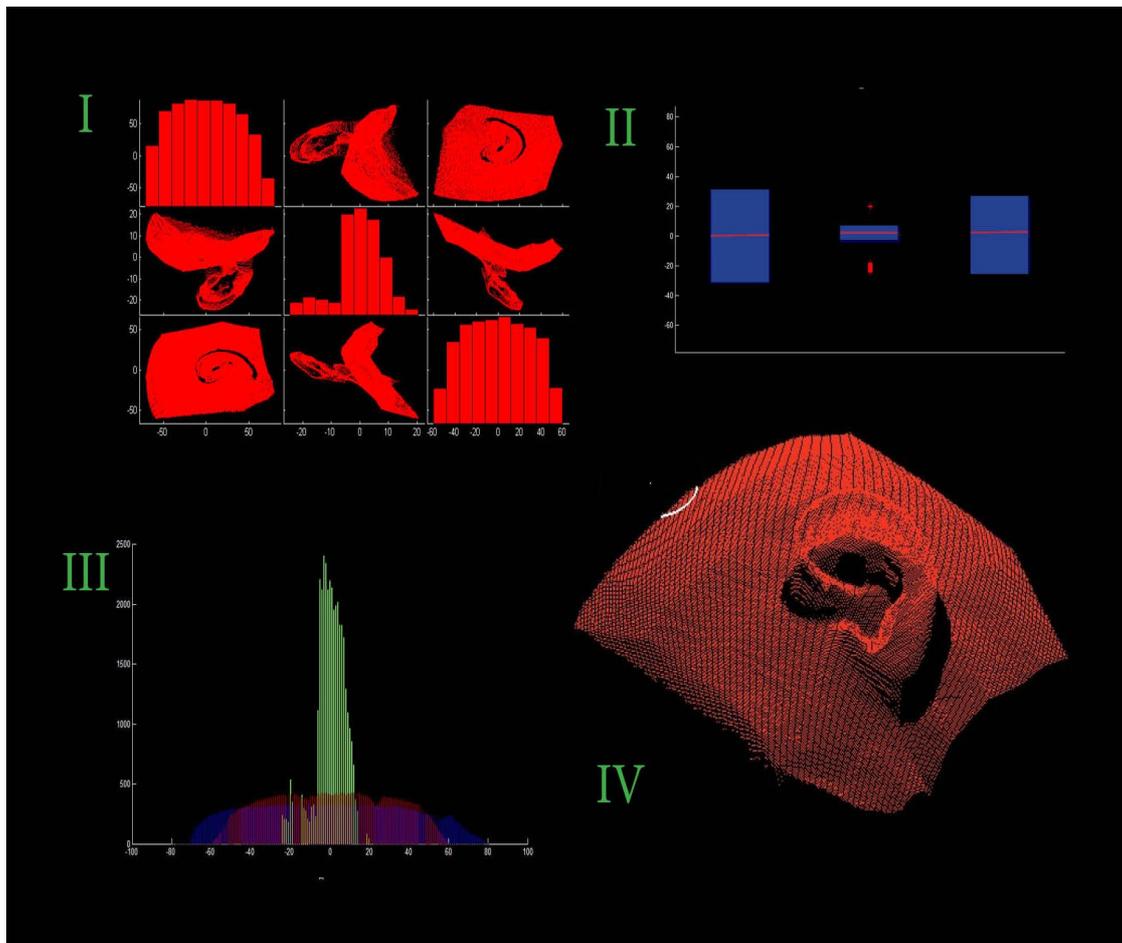


Fig. 3.3 I. Vistas principales, II Intervalos , III Histograma, IV Nube de puntos.

Este es un método muy útil pues sitúa el modelo en una vista en la cual se tiene un máximo de información en una de las componentes, en este caso la componente en X.

3.3 Estudio de la variación de entropía de una imagen con el tamaño de la partición

El estudio de las propiedades cualitativas del parámetro de Entropía es

importante pues en él están basados parámetros como el de Información Mutua y la Divergencia KL, como lo expresa la ecuación 2.5:

$$H = n \log s = \log s^n \quad (2.5)$$

La entropía, en particular la de Shannon, tiene como parámetro el tamaño de la partición o el número de clases mediante el cual definimos el histograma. Entonces se aplica el siguiente algoritmo:

- Calcular la entropía de Shannon para los tres ejes (X , Y , Z) con una partición de i elementos. Esta partición tiene los límites de -100:100 que abarca los intervalos para los tres ejes de la imagen.
- Se varía el tamaño de la partición desde 10 a 12,000 clases, haciendo la partición cada vez más pequeña.
- Se obtienen los histogramas de distribución de cada variable (X -azul, Y -verde, Z -rojo), para cada partición.
- A través del histograma se obtiene la entropía para cada partición y graficamos.
-

En la figura 3.4 se observa el aumento de la entropía conforme aumentamos el número de clases.

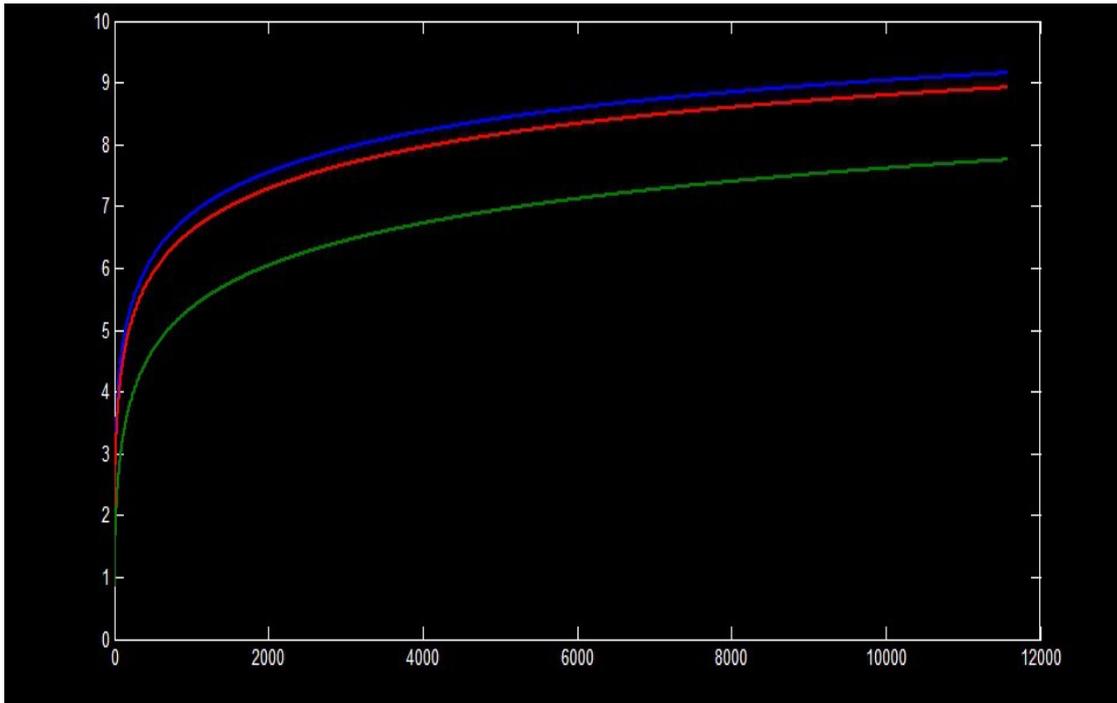


Fig. 3. 4 Entropía vs Número de clases.

Se observa que el valor de la entropía es creciente con el tamaño de la partición. El número de clases apropiado para una muestra agrupada, como en este caso, está determinado por el nivel de confianza que requerimos de la muestra. Si queremos un nivel de confianza del 90% entonces el número de clases tiene magnitud comparable a \sqrt{n} , donde n es el número de datos que manejamos y que en este caso se trató de 27,000 puntos por lo que tendríamos una partición recomendada de 167 intervalos.

A pesar que la entropía crece rápidamente para los primeros 300 valores, se observa que la tendencia se estabiliza aunque no tiene un comportamiento asintótico; sin embargo podemos medir también el porcentaje de información aportado por cada eje. Lo que haremos será lo siguiente:

- Se toma la entropía total que será la suma de las entropías para cada coordenada $E = E_x + E_y + E_z$,
- Para cada paso se graficará E_x/E (azul turquesa), E_y/E (amarillo), E_z/E (verde) contra el número de clases usado.

En este caso la gráfica que corresponde al porcentaje de información si es asintótica.

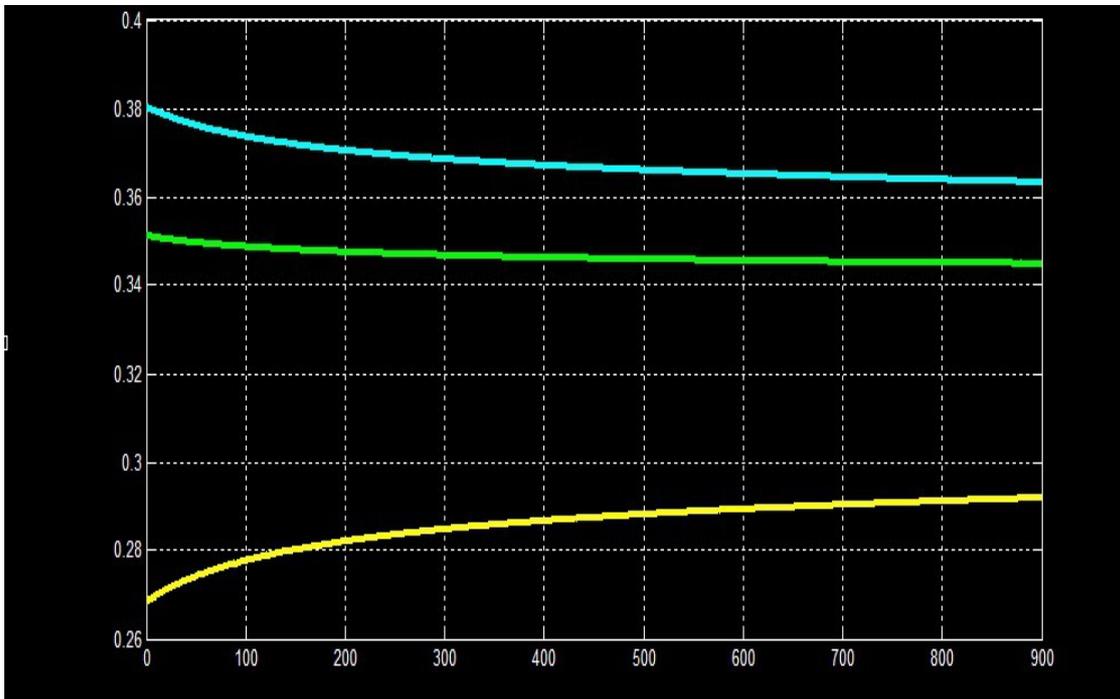


Fig. 3. 5 Porcentaje de información vs Número de clases.

3.4 *Comportamiento de la entropía de una imagen ante traslaciones*

La invariancia de la entropía ante traslaciones es una propiedad importante de la entropía. Se revisará que nuestra aproximación mediante la cual consideramos que la información contenida en tres planos sea cualitativamente equivalente a la información volumétrica de nuestra imagen 3D. El algoritmo es el siguiente:

- Se toma la imagen A para luego aplicar una transformación de traslación de un milímetro por paso a lo largo de 40 centímetros primero en dirección del eje X representado en la primera gráfica, luego del eje Y en la segunda gráfica, y al final del eje Z en la gráfica final (X -azul, Y -verde, Z -rojo).
- Se calcula la entropía en cada paso para X , Y , y Z .
- Se grafica la entropía contra el desplazamiento.

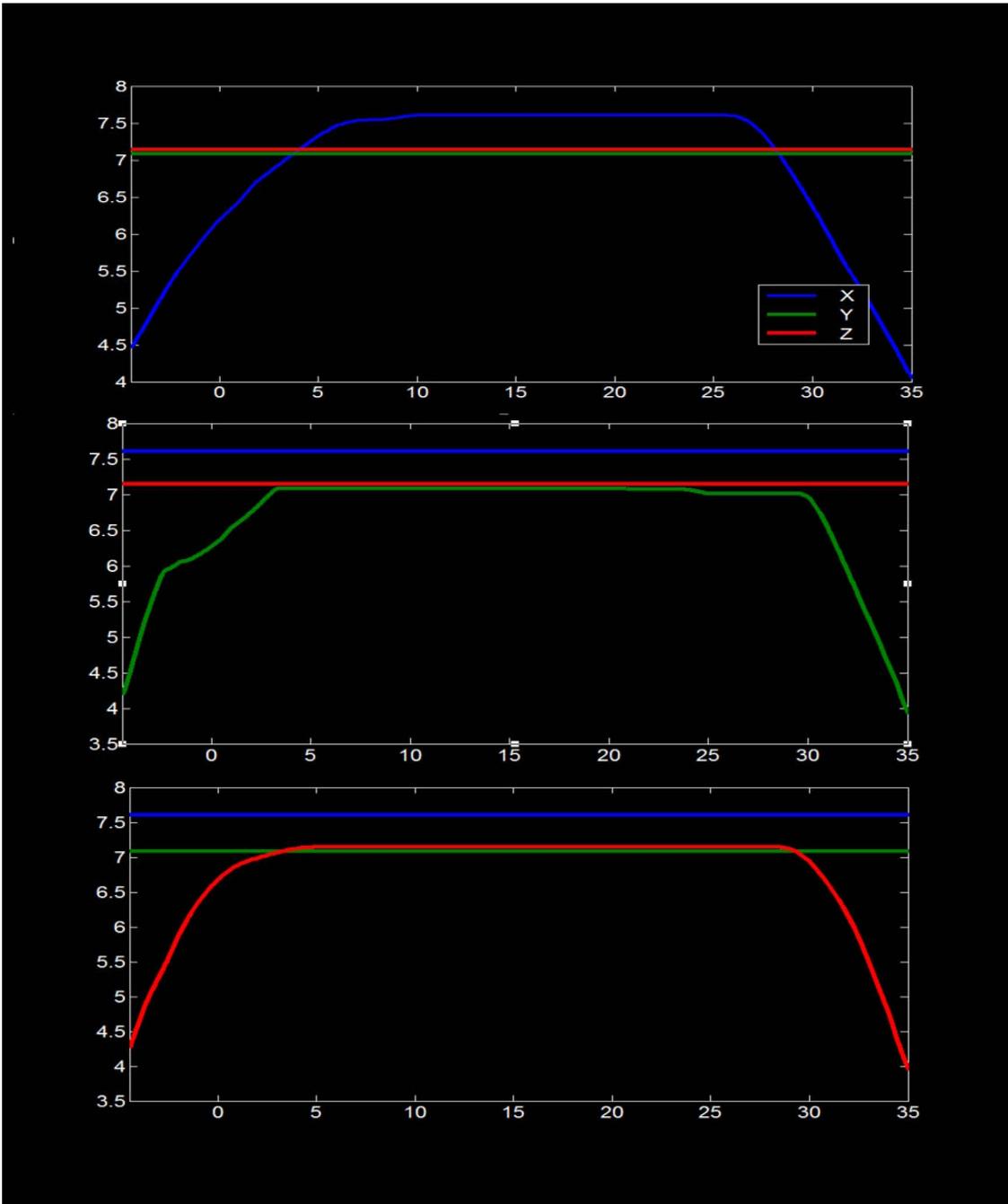


Fig. 3. 6 Entropía vs Desplazamiento.

La Fig 3.6 nos muestra que la entropía tomada de esta manera (a partir de las proyecciones) se conserva ante traslaciones espaciales 3D. Las regiones donde ésta se decremента, que es en las orillas de las gráficas, es debido a que parte de la información va saliendo del dominio del histograma lo cual es congruente pues a menor información menor entropía.

3.5 Estudio del comportamiento de la entropía de una imagen con rotaciones

El algoritmo a seguir es este:

- Se toma una imagen A y aplicamos el método de componentes principales.
- Aplicar una transformación de rotación alrededor del eje X primero, con un incremento de 0.05 radianes del parámetro theta desde $0-2\pi$ (620 pasos) en la matriz de rotación.
- Calcular la entropía en cada paso (X-azul, Y-verde, Z-rojo) así como la entropía total $E = E_x + E_y + E_z$ (turquesa).
- Graficar la entropía contra el ángulo de rotación medido en radianes.

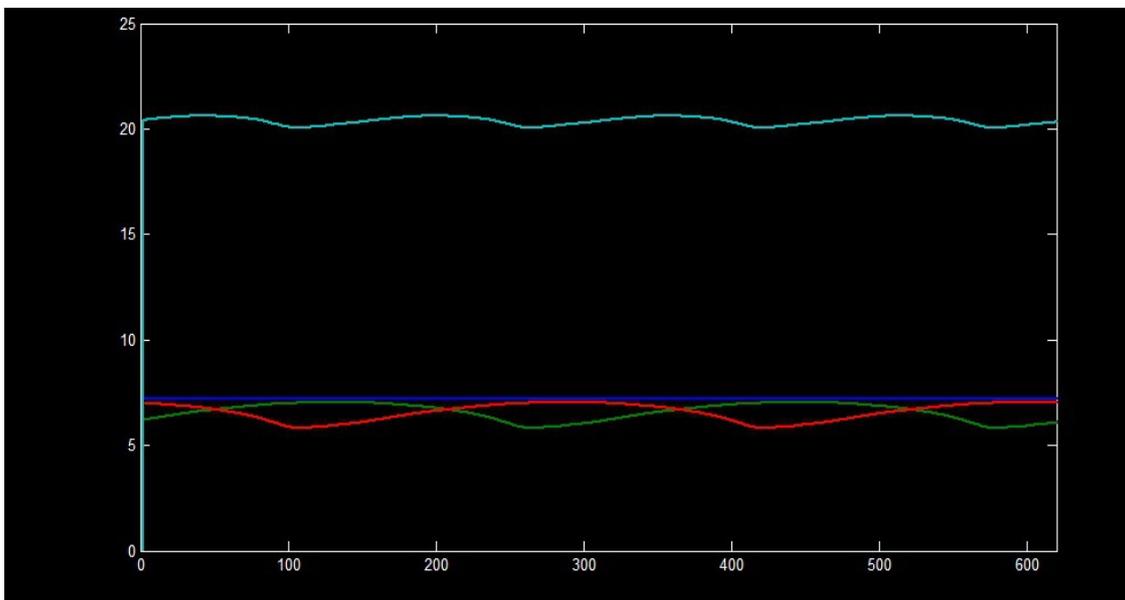


Fig. 3. 7 Entropía vs Ángulo de rotación.

En la Fig. 3.7 se puede notar que la entropía no se mantiene constante ante las rotaciones tridimensionales. Recordemos que se está trabajando con proyecciones 2D por lo que es de esperar que la información pueda decrementarse o aumentar conforme cambie el ángulo de visión. Lo importante es notar que estos cambios parecen compensarse de tal manera que la desviación estándar de $E_x+E_y+E_z$ tiene unos márgenes de variación pequeños.

También se puede notar que la entropía para el eje X permanece invariante pues es nuestro eje de rotación. También dado que se utiliza una imagen que previamente

había sido ajustada por el método de componentes principales se podrá ver que en el eje X tenemos un máximo de entropía que nunca es alcanzado por las otras componentes.

3.6 Estudio del comportamiento de la divergencia KL entre dos imágenes ante traslaciones

La Información Mutua está definida en términos de entropía pero también en términos de la divergencia KL según la ecuación 2.10:

$$D(A \parallel B) := \sum a_i \log \frac{a_i}{b_i} \quad (2.10)$$

En términos prácticos este parámetro mide la similitud entre distribuciones de probabilidad. Lo que hacemos entonces es comparar dos distribuciones de probabilidad como en la figura 3.8.

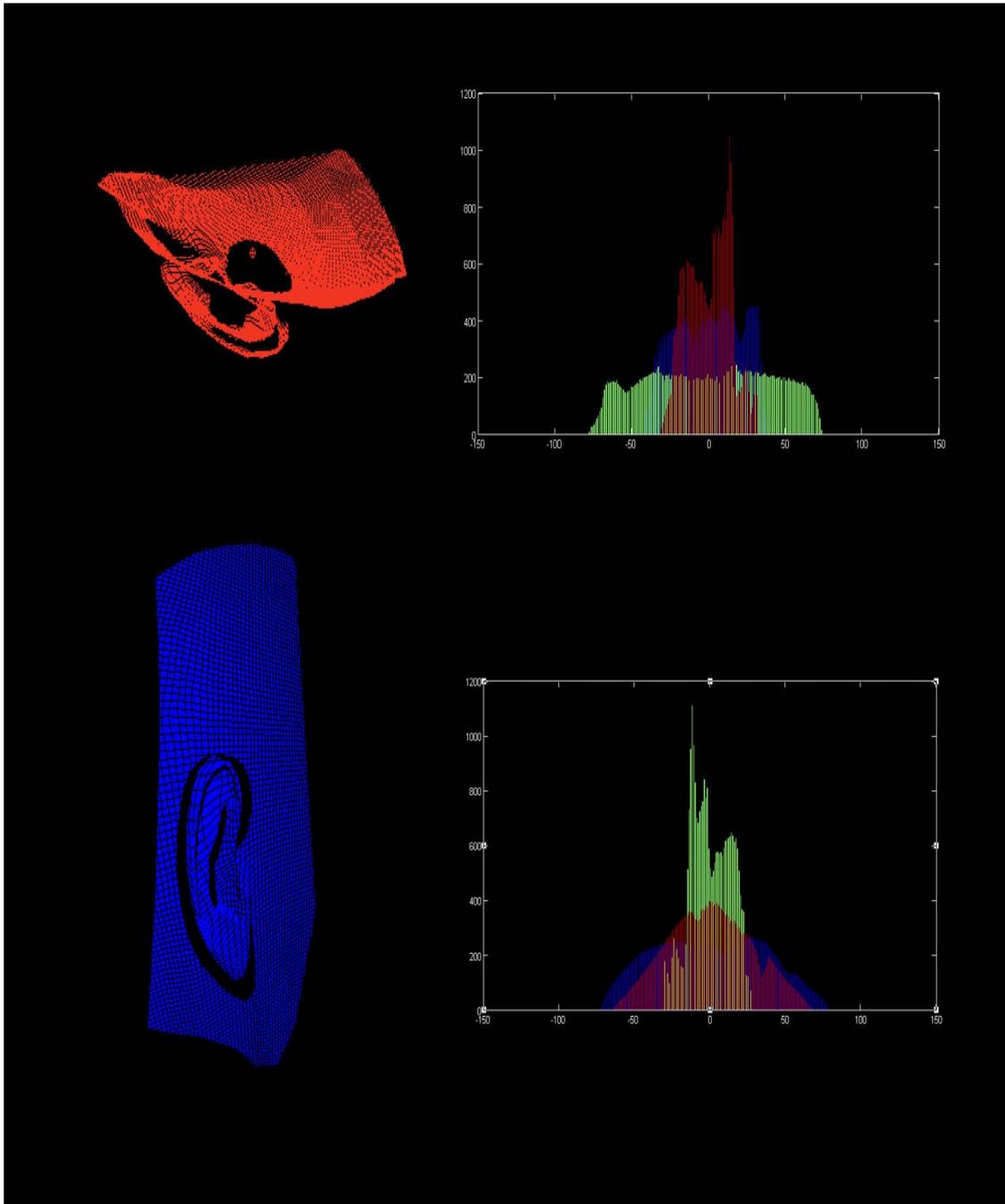


Fig. 3. 8 Par de nube de puntos a comparar mediante sus histogramas.

El algoritmo que se usara es el siguiente:

- Tomar una imagen A y la compararemos con una copia de ella misma, imagen B , pero a la cual se aplicara una transformación de traslación de un centímetro por paso a lo largo de cada eje en un intervalo de 80 centímetros.
- Calcular la Divergencia KL a cada paso.
- Graficar el valor de la Divergencia KL contra el desplazamiento (X-azul, Y-

verde, Z-rojo, divergencia KL total-turquesa).

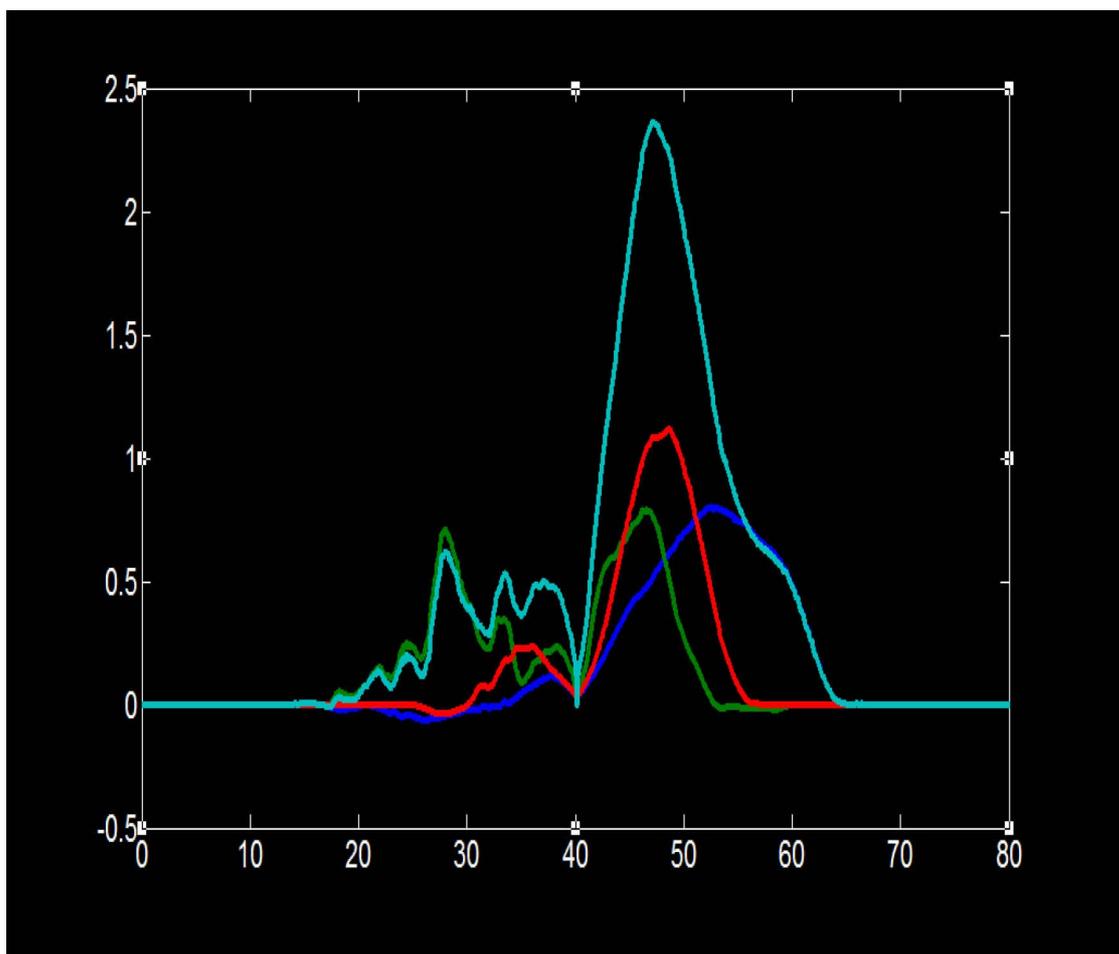


Fig. 3. 9 Divergencia KL vs Desplazamiento.

Lo que se muestra en la gráfica es que los mínimos coinciden cuando tenemos una alineación óptima, lo cual se da a los 40 centímetros.

Se nota también que antes de los 20 centímetros y después de los 40 centímetros el valor de la divergencia KL es 0 dado que ya no tenemos información mutua pues las dos imágenes están completamente desfasadas. Usamos una medida tan grande (cm) para poder tener una visión cualitativa del comportamiento de este parámetro.

3.7 Comportamiento de la divergencia KL entre dos imágenes ante rotaciones

El algoritmo que se seguirá será el siguiente:

- Tomar una imagen A y se comparará con una copia de ella misma, imagen B , pero a la cual se le aplica previamente una rotación como se muestra en la figura 3.10.

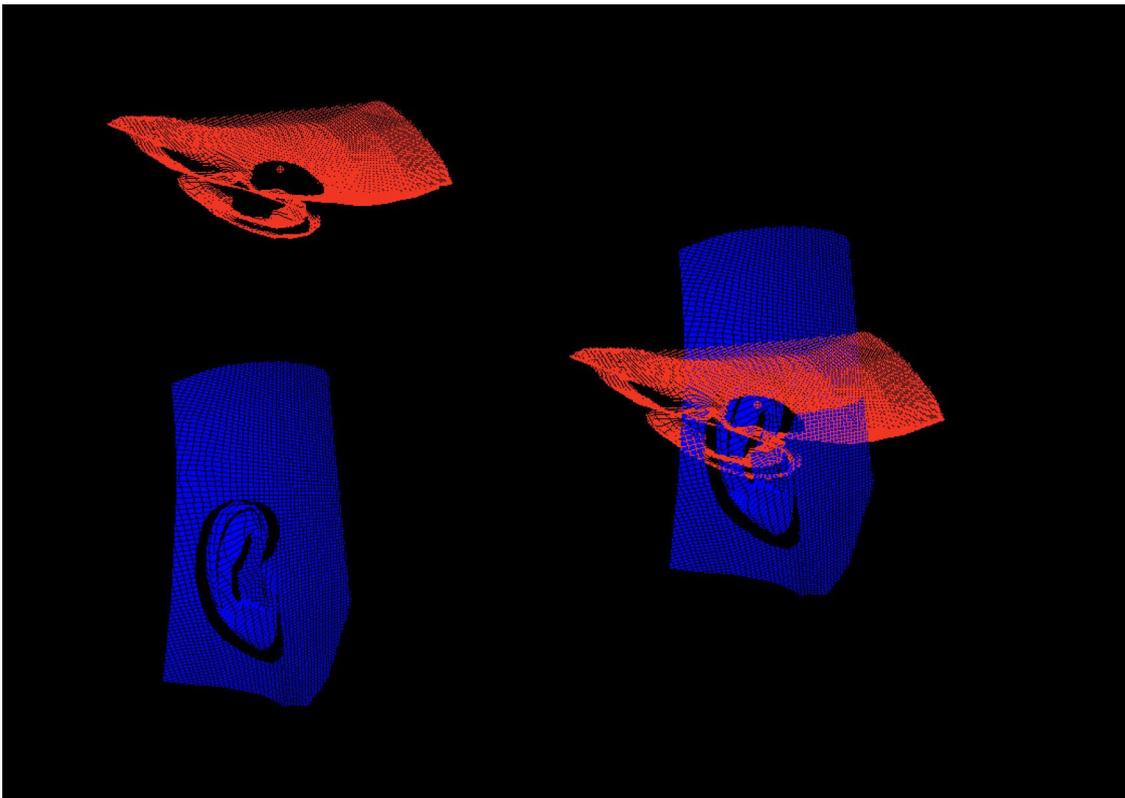


Fig. 3. 10 Comparación de un par de nube de puntos mediante la Divergencia KL.

- Aplicar una transformación de rotación alrededor del eje X, con un incremento de 0.05 radianes del parámetro de rotación Θ desde 0 hasta 2π en la matriz de rotación.
- Calcular la divergencia KL (ecuación 2.10) en cada paso.
- Graficar contra el ángulo de rotación (X-azul, Y-verde, Z-rojo) así como la divergencia KL total (turquesa).

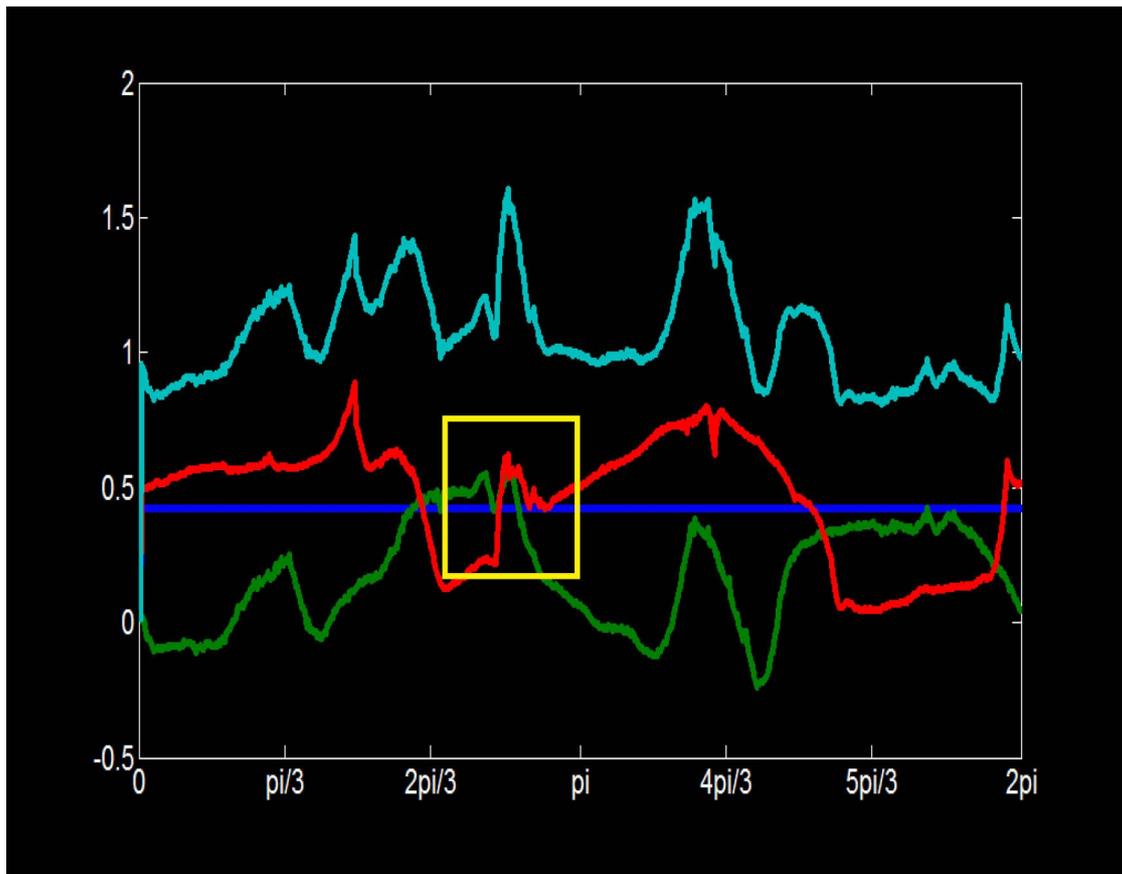


Fig. 3. 11 Divergencia KI vs Ángulo de rotación en radianes.

Es muy interesante observar que los mínimos coinciden aproximadamente a los 150° , lo cual se muestra en el rectángulo amarillo y que representa una alineación óptima.

Se nota que mientras más “semejantes” sean las distribuciones comparadas, más cercano a 0 es el valor de la divergencia KL.

3.8 Registro de un par de imágenes a través de la divergencia KL

Lo que se hará ahora será tratar de registrar un par de imágenes a través de la divergencia KL. Dejaremos de lado el caso de la traslación para concentrarnos en la rotación. El algoritmo que utilizamos es el siguiente.

- Tomar una imagen A y la comparamos con una copia de ella misma, que se llamará imagen B , pero a la cual se le aplica previamente una rotación.

- Aplicar una transformación de rotación primero alrededor del eje X, luego alrededor del eje Y, y por último alrededor del eje Z con un incremento de 0.05 radianes del parámetro Θ desde $0-2\pi$ en la matriz de rotación.
- Graficar el valor de la Divergencia KL contra el parámetro de rotación (X-azul, Y-verde, Z-rojo) .

Básicamente lo que se busca es comparar los histogramas pertenecientes a cada imagen y ubicar un ángulo preferencial bajo el cual el parámetro de la divergencia KL se minimice. Este ángulo será en general una combinación lineal de una rotación alrededor del eje X, del eje Y, y del eje Z por lo que se hará será buscar en la tres gráficas, aquella que nos defina mejor un mínimo del parámetro de la divergencia KL.

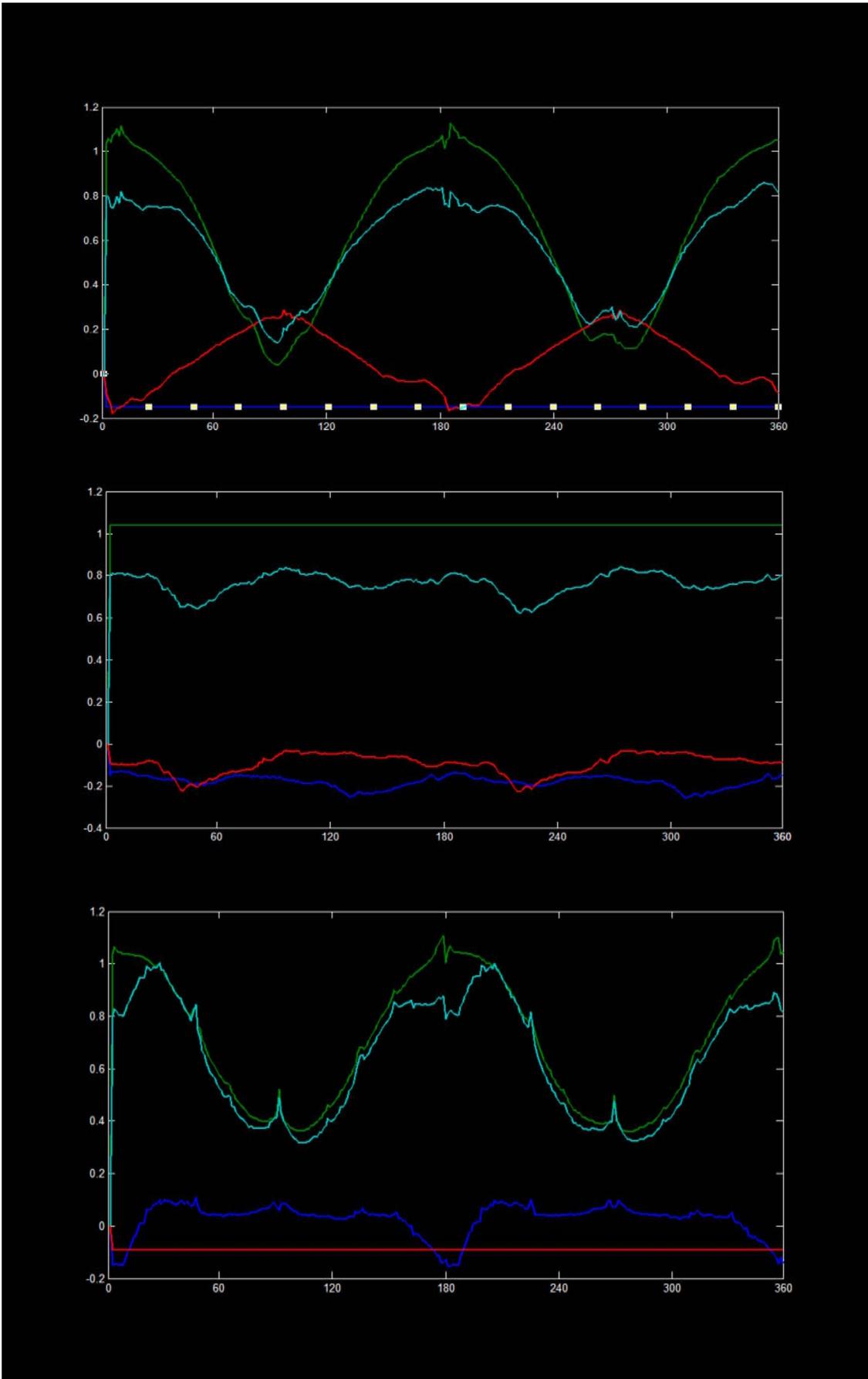


Fig. 3. 12 Divergencia KL vs ángulo de rotación con respecto al eje X, Y y Z.

Así en la Fig. 3.12 se puede observar las tres gráficas referidas anteriormente. Igualmente se observa que las gráficas que nos proporcionan más información relevante son la primera y la tercera gráfica. En la primera, que corresponde a una rotación sobre el eje X, los ángulos relevantes están aproximadamente en los 90° y 270° . Coincidentemente, en la tercera gráfica los ángulos relevantes son también 90° y 270° .

4. Conclusiones

Los problemas más importantes derivados del proceso de toma de adquisiciones de un sujeto real observados en este trabajo son los de oclusión y el movimiento propio del paciente.

En los problemas de oclusión, debido a la forma de la oreja, en donde las adquisiciones presentan efectos de información incompleta, redundante y complementaria donde pueden aplicarse los Métodos de Entropía e Información Mutua, si se logra hacer una segmentación de la misma en un par de imágenes. Se puede entonces por ejemplo delimitar regiones de interés y excluir aquellas regiones que puedan tener una influencia negativa en el registro. En el contexto en el que se trabajó dentro de la imagen aparecen zonas que no pertenecen propiamente al modelo como los son la base y el soporte del modelo. Aunque se pueden eliminar estas zonas desde un principio éstas son útiles en cuanto a que proporcionan información acerca de la ubicación espacial del modelo.

Con respecto al problema del movimiento inherente del paciente debido al tiempo que tarda el escáner en tomar las adquisiciones necesarias, también resulta apropiado para ser tratado con métodos estadísticos. Dado que el resultado es que tenemos nubes de puntos situadas en diferentes sistemas de referencia, los métodos estadísticos ofrecen una aproximación objetiva basada en la minimización de un parámetro estadístico. Aunque el tipo de magnitud que se maneja fue del orden de centímetros lo cual para nada satisface la precisión de otros métodos. Lo que se estudió fue un comportamiento cualitativo de los parámetros estadísticos. Un dato muy importante que falta trabajar es el comportamiento de estos métodos con respecto al porcentaje de información mutua existente en las imágenes a fusionar.

Otro problema que se observa son procesos de degradación que deterioran la calidad e integridad de la misma. Estos procesos son debido a los fenómenos como los límites del sensor, los algoritmos de reconstrucción y procesamiento utilizados. Estos procesos se manifiestan en múltiples formas: ambigüedad, tendencia, ruido,

incompletez, imprecisión, incertidumbre, inconsistencia o conflicto de los datos. Es importante identificar diferentes modelos de degradación de imagen para implementar algoritmos de corrección adecuados.

Con respecto a la entropía

La entropía es un parámetro fundamental para establecer otro tipo de parámetros como lo son la información mutua o la divergencia KL. Hay diferentes tipos de entropía utilizados en la literatura [Rodríguez, 1998] [Jumarie, 1997]. La entropía de Shannon es la más usada, aunque se pueden usar otras diferentes, por ejemplo la entropía de Renyi o la entropía de Jumarie que es una versión normalizada de la entropía de Shannon aplicada no a una distribución de probabilidad sino a una función de las diferencias de intensidad entre pixeles vecinos. También se puede relacionar la entropía con un gradiente entre magnitud de niveles de gris de pixeles por ejemplo, y aplicarlo entonces al espacio de características de la imagen. En realidad dado que la entropía es un parámetro que categoriza las distribuciones de probabilidad de cualquier tipo de información entonces podemos utilizar las relaciones que más convengan a nuestro problema, el cual puede variar dependiendo el tipo información utilizado, por la normalización o por las adaptaciones hechas por la información espacial.

En este caso se estudió la entropía de Shannon y se propuso el uso del parámetro de Información Mutua, el cual no se logro implementar por ambigüedades en la aplicación, dado que no se pudo establecer un histograma conjunto pues no hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de ambas imágenes. Ante esta problemática utilizamos el parámetro de Kullback Lieber, el cual es más fácil de implementar y que parece resolver los problemas enunciados como objetivos de la tesis.

Dado el costo computacional de los métodos estadísticos usados, es pertinente hacer una primera aproximación de registro con algún método de superficie como las marca fiduciarias (landmarks).

Con respecto a la normalización de la entropía esto puede ser necesario dado el

efecto de oclusión. El área de traslape entre un par de imágenes puede afectar la medida de la información mutua en dos formas: primero porque al decrecer el tamaño de las partes que se traslapan, el poder estadístico de la herramienta de información mutua también decrece y en segundo porque se pueden encontrar casos donde la desalineación de las imágenes aumente el parámetro de información mutua. Esto puede ocurrir cuando las entropías marginales crecen más rápido que la entropía conjunta.

Conceptos de probabilidad

La teoría de la probabilidad es una rama de la teoría de la medida que tiene sus fundamentos en los axiomas que Andrei Kolmogorov formuló en 1933. A pesar de que formalmente está bien cimentado el concepto de probabilidad hay varios enfoques de interpretación. [López, 2009], [Romero, 2008],[Jaynes, 1979].

La interpretación clásica se debe a Laplace y la idea es definir la probabilidad a través del conteo del número de casos en los que un evento puede ocurrir y dividir este número entre los casos totales, suponiendo que todos los casos son “equiprobables”. Este enfoque presenta dos problemas principales; primero su circularidad pues presupone casos “igualmente probables” y el segundo es que no muy frecuentemente podemos contar el número de casos totales.

La interpretación frecuentista o empírica construye la probabilidad como una frecuencia relativa. Estrictamente la probabilidad toma sentido cuando se refiere a una secuencia infinita de casos por lo que se utiliza la **Ley de Estabilidad de las Frecuencias**, que nos asegura que las frecuencias relativas tienden a estabilizarse conforme aumenta el número de repeticiones. El principal problema es que se requiere una secuencia infinita de eventos para calcularla.

El enfoque bayesiano considera a la probabilidad como una medida de la “plausibilidad” [Richard T Cox] que le deberíamos otorgar a cierta proposición A, dado el conocimiento que tenemos de cierta información I. La plausibilidad es una medida relacionada con la información que tenemos acerca de una proposición.

$$P(A | I) \tag{1.1}$$

Esta cantidad corresponde entonces a un estado de la información que tenemos

sobre A dado que ya conocemos I y no se define en términos de proposiciones más simples sino que estas mismas probabilidades condicionadas son los elementos fundamentales de la teoría. Hay que notar inmediatamente que A ya no solo se refiere a conjuntos sino a proposiciones (que pueden referirse a conjuntos). Se considera entonces a la probabilidad como una extensión de la lógica.

Variable aleatoria es una aplicación del espacio muestral asociado a una tirada o experimento aleatorio en R , que a cada resultado de dicho experimento le asigna un número real. El conjunto imagen de esa aplicación es el conjunto de valores, también llamados clases, que puede tomar la variable aleatoria y que serán denotados por letras minúsculas.

$$p_i = P(A = a_i) \quad (1.2)$$

Estas p_i constituyen la **distribución de A** y P constituye la **función de probabilidad o función de masa**. También se puede clasificar las variables aleatorias en discretas y continuas en función del conjunto de valores que pueden tomar.

La **función de distribución F**, de una variable aleatoria se define como una aplicación:

$$F : x_0 \rightarrow F(x_0) = P(A \leq a_0) \quad (1.3)$$

Tal que en el caso discreto tenemos:

$$F(a_i) = \sum_1^i P(A = a_i) \quad (1.4)$$

Para el caso continuo se puede definir la **función de distribución** como:

$$F(a_0) = P(A \leq a_0) = \int_{-\infty}^{a_0} f(x) dx \quad (1.5)$$

donde se utiliza una **función de densidad f(A)**, que es una idealización de los histogramas de frecuencias discretos, en donde suponemos que en tanto las particiones se van haciendo más pequeñas, los histogramas tienden a estabilizarse en una curva

suave $f(\mathbf{A})$. Notar que se puede obtener f a partir de F simplemente derivando.

Se podrá verificar que cualquier función es función de densidad si cumple con dos condiciones:

$$\begin{aligned} f(a) &\geq 0, \forall a \in A \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= 1 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Distribución conjunta Las características conjuntas de un par de variables aleatorias (A,B) se pueden estudiar a través de las muestras $(a_1,b_1), \dots, (a_n,b_n)$. Supongamos que las clases que puede tomar una variable aleatoria A son a_1, \dots, a_i y las que puede tomar una variable aleatoria B son b_1, \dots, b_j . Entonces se puede definir algunos conceptos:

Frecuencia absoluta conjunta Es el número de individuos n_{ij} que muestran la clase a_i de A y b_j de B y se le conoce como frecuencia absoluta del par (a_i, b_j)

Frecuencia relativa conjunta Sea n el número total de individuos:

$$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n} \quad (1.7)$$

La **distribución de frecuencias conjunta** es el resultado de organizar en una tabla de doble entrada en donde representemos las clases correspondientes a las dos variables aleatorias (A,B) con base en sus frecuencias absolutas o relativas.

A partir de estas distribuciones se pueden obtener las **distribuciones marginales** que son las frecuencias unidimensionales que resultan de sumar todas las frecuencias de una determinada clase de la variable unidimensional.

$$n_{i.} = \sum_j n_{ij} \quad n_{.j} = \sum_i n_{ij} \quad (1.8)$$

$$f_{i.} = \sum_j f_{ij} \quad f_{.j} = \sum_i f_{ij}$$

Distribución condicionada La distribución de A condicionada a $B=b_j$, es la

distribución unidimensional de A sabiendo que B tomo la clase b_j

$$\begin{aligned}n_{i/j} &= n_{ij}, (\forall a_i \in A) \\f_{i/j} &= \frac{n_{ij}}{n_{.j}} = \frac{f_{ij}}{f_{.j}}, (\forall a_i \in A)\end{aligned}\tag{1.9}$$

Probabilidad conjunta Sean A y B dos variables aleatorias entonces la probabilidad conjunta de que A tome la clase a_i y B b_i es:

$$p_{ij} = P(A = a_i, B = b_j)\tag{1.10}$$

La tabla conformada por los valores p_{ij} es llamada distribución de probabilidad conjunta. Así se pueden obtener las distribuciones *marginales conjuntas* como:

$$p_{i.} = \sum_j p_{ij}\tag{1.11}$$

$$p_{.j} = \sum_i p_{ij}$$

Probabilidad condicionada Si ya sabemos que B tomó la clase b_i entonces esta información modificará la distribución de probabilidad de A por lo que se puede definir la probabilidad condicionada por medio de la probabilidad conjunta:

$$P(A/B = b_i) = \frac{P(b_i, a_i)}{P(b_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}, \forall a_i \in A\tag{1.12}$$

Conceptos de Información, Entropía e Información Mutua

Información

Intuitivamente la información se refiere a la cantidad de información obtenida cuando ocurre un evento dado que ya conocíamos su probabilidad de ocurrencia. Así el concepto de información tiene que ver con la reducción en la incertidumbre después de conocer el resultado de un evento aleatorio. Si S representa la incertidumbre con respecto a alguna situación e I la información, entonces:

$$I_{AB} = S_A - S_B \quad (2.1)$$

Por lo tanto primero será definir una medida de la incertidumbre. Consideremos una variable aleatoria con A y B posibles resultados. Intuitivamente se busca una medida de la incertidumbre que cumpla con tres propiedades:

$$\begin{aligned} S &\geq 0 \\ S(1) &= 0 \\ S(A; B) &= S(A) + S(B) \end{aligned} \quad (2.2)$$

La primera condición es conveniente pero no necesaria. La segunda condición se refiere a la nula información que proporciona un experimento con un resultado único. La tercera condición refleja el deseo de que dado dos eventos independientes A y B , su incertidumbre conjunta sea la suma de las incertidumbres individuales.

Estas condiciones son cumplidas por la función logaritmo:

$$S(A) = k \log A \quad (2.3)$$

Ahora se puede definir una medida de información basada en esto y en el

concepto de probabilidad como:

$$I(A) = \log\left(\frac{1}{P(A)}\right) = -\log(P(A)) \quad (2.4)$$

Esta fórmula refleja muy bien la idea de que si ocurre un suceso con una probabilidad baja entonces obtenemos mucha más información de la que teníamos previamente, pero si ocurre un suceso con alta probabilidad entonces la incertidumbre no disminuye mucho y se tiene poca información relevante que incorporar a nuestro modelo.

Concepto de Entropía

La búsqueda de una medida de la información contenida en un mensaje dio lugar a la primera definición de información y de entropía realizada por Hartley en 1928 y posteriormente por Shannon.

Hartley trata de conseguir una medida de la información contenida en un mensaje o cadena de n símbolos con s posibilidades para cada símbolo, que se incremente linealmente con n y que estuviera también relacionada con s^n , el número de mensajes. La define entonces de la siguiente manera:

$$H = n \log s = \log s^n \quad (2.6)$$

Obtiene entonces una medida que se incrementa con el número posible de mensajes. Hay que notar que se consideran todos los símbolos equiprobables lo cual no es generalmente cierto. Por eso Shannon la define de la siguiente forma. Sea X una variable aleatoria discreta, con valores x_i y con distribución de probabilidad $p_i := P(X=x_i)$.

$$\begin{aligned} H(P) &:= EI(X = x_i) \\ H(P) &:= -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i \end{aligned} \quad (2.7)$$

Donde se adopta la convención de que $0\log(0)=0$ por razones de continuidad.

Lo que dice esta ecuación es que la cantidad de información obtenida de un evento es inversamente proporcional a la probabilidad con que este tiene lugar. Mientras más raro es el evento entonces más significado es asignado a la ocurrencia de este.

La entropía de Shannon es también una medida de la dispersión de una distribución de probabilidad (*PDF*). Mientras más dispersa se la distribución mayor es la entropía.

Propiedades de la entropía

Las propiedades más generales de la entropía son:

La entropía siempre es mayor o igual que cero. En particular la H es igual a cero cuando ocurre que un valor i cualquiera, acumula toda la probabilidad de que el suceso ocurra.

Si todos los resultados son equiprobables (distribución uniforme) la entropía coincide con la medida de Hartley aparte este es un máximo de la entropía.

Manteniendo la equiprobabilidad de los resultados, la entropía aumenta con el número de datos. La entropía varía en función de las N variables, reflejando la distinta concentración relativa ya que recoge el efecto que causado por el número de elementos.

La entropía es una función simétrica de sus elementos con respecto a permutaciones de p_i . De esta propiedad se deriva que como la entropía no depende del orden en el que están situados los elementos es posible determinar la entropía sin tener que ordenar las observaciones y que en particular la entropía de Shannon es invariante ante transformaciones de escala y traslaciones

$$H(aX + b) = H(X) \quad (2.8)$$

Es una función cóncava de las p_i

Dadas dos variables aleatorias A y B entonces

$$H(A, B) \leq H(A) + H(B) \quad (2.9)$$

donde (A, B) es la distribución conjunta de A y B y la igualdad solo se alcanza cuando A y B son independientes.

Entropía diferencial

En el caso continuo se puede proponer una generalización de la entropía de Shannon como:

$$H_{dif}(X) := - \int f(x) \log f(x) dx \quad (2.10)$$

Tiene algunas particularidades que dificultan su manejo:

- 3.8.1. Las entropías diferenciales pueden ser magnitudes negativas.
- 3.8.2. Puede tomar el valor de $-\infty$.
- 3.8.3. Depende únicamente de la densidad f , por lo que no es invariante al cambio de escala.

Entropía Relativa (Divergencia Kullback-Leibler)

La característica de ser invariante bajo cambios de escala se puede resolver por la divergencia de Kullback-Leibler o entropía cruzada:

$$D(A \| B) := \sum a_i \log \frac{a_i}{b_i} \quad (2.11)$$

donde A y B son distribuciones de probabilidad y que se puede generalizar al caso

continuo por:

$$D(f \parallel g) := \int_b^a f(x) \log \frac{f(x)}{g(x)} dx \quad (2.12)$$

Esta posee propiedades muy útiles:

1. $D(A \parallel B) \geq 0$, Es igual a 0 si y solo si $A=B$ siendo este un mínimo
2. $D(B \parallel A) \neq D(A \parallel B)$

Entropía Conjunta

[Hill,2007] construye un *espacio de características o histograma conjunto*, que es una gráfica bidimensional de un par de variables discretas que pueden representar por ejemplo la correlación de imágenes bit a bit o voxel a voxel, o la correlación coordenadas en un par de imágenes 3D.

Este espacio de características cambia con la alineación de las imágenes y es donde se pueden identificar estructuras así como verificar registro de imágenes dado que cuando las imágenes están correctamente alineadas se corresponden entonces estructuras anatómicas sobrepuestas con estructuras en el espacio de características. En el caso de imágenes multimodales esto resulta muy útil pues se pueden identificar regiones definidas en el espacio de características que corresponderán entonces a la misma estructura en diferentes imágenes multimodales.

Usando estas características del histograma conjunto, se podrá medir la dispersión para medir la alineación de las imágenes. [Hill,2007] propone el tercer momento central del histograma conjunto, el cual mide el aplanamiento de una distribución. [Collignon,1995] and [Studholme,1994] sugieren otras medidas de entropía como la entropía de Renyi o de Jumarie.

La entropía de Shannon para una distribución conjunta está definida por:

$$H(A, B) = - \sum_{A, B} P(a_i, b_j) \log P(a_i, b_j) \quad (2.13)$$

Información Mutua

En teoría de probabilidad y de la información, la Información Mutua de dos variables aleatorias es una cantidad que mide la dependencia estadística de las dos variables o conjunto de datos.

$$\begin{aligned} I(A; B) &= H(B) - H(B|A) \\ I(A; B) &= H(A) - H(A|B) \\ I(A; B) &= H(B) + H(A) - H(B, A) \end{aligned} \quad (2.14)$$

En la primera definición, $H(B)$ es la entropía de Shannon y $H(B|A)$ es la entropía condicional la cual está basada en una probabilidad condicional $P(B|A)$. Tomando la interpretación en la cual la entropía es una medida de la incertidumbre, entonces la entropía condicionada nos habla de la incertidumbre en B dado que ya se conoce A , o la cantidad de información de B contenida en A .

La ventaja de usar el parámetro de Información Mutua sobre el de entropía conjunta es que este incluye la entropía marginal de ambas imágenes.

Un problema de estos parámetros estadísticos, es que basan su eficacia en la zona de traslape entre las imágenes a registrar por lo cual estos parámetros son sensibles a una mayor o menor zona de traslape. Para resolver esto podemos usar la entropía normalizada y usar otras formas de definición de este coeficiente:

$$\begin{aligned} I(A; B) &= \sum_B p(b) \sum_A p(a|b) \log \frac{p(a|b)}{p(a)} \\ I(A; B) &= \sum_B p(b) D \left[\frac{p(a|b)}{p(a)} \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

También son posibles casos donde la maximización de la información mutua no corresponda a una alineación debido a la existencia de máximos relativos.

Si se combina la medida de la información mutua normalizada (*Normalized Mutual Information, NMI*), con estrategias piramidales o jerárquicas (con resolución creciente), se puede conseguir una aceleración importante del proceso de registro. De forma similar a la *NMI*, y también proveniente de la teoría de la información, se puede emplear otra medida de similitud basada en la entropía cruzada, el denominado coeficiente de correlación de entropía (*Entropy Correlation Coefficient, ECC*).

Anexo 3

Método de componentes principales

Este método es muy práctico en la búsqueda de un sistema coordenado de referencia adecuado para recoger la mayor cantidad de información de la nube de puntos que estamos manejando.

Para determinar este sistema coordenado para un número arbitrario de datos $P_1..P_n$ donde $P_i=(x,y,z)$. Primero se calcula la media posicional con la siguiente formula:

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_i \quad (3.1)$$

Se construye ahora la **matriz de covarianza**:

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (P_i - m)(P_i - m)^T \quad (3.2)$$

Esta matriz está compuesta de 6 únicas entradas:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^2 \\ C_{22} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - m_y)^2 \\ C_{33} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (z_i - m_z)^2 \\ C_{12} &= C_{21} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)(y_i - m_y) \\ C_{13} &= C_{31} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)(z_i - m_z) \\ C_{23} &= C_{32} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - m_y)(z_i - m_z) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Esta representa la relación entre cada par de coordenadas X, Y y Z . Si el valor es 0 significa que las entradas son independientes. Ahora se tiene que si la matriz de covarianza esta diagonalizada entonces se tiene que todas las coordenadas no están correlacionadas o lo que es lo mismo, son independientes. Dado que esta matriz C es una matriz simétrica y real entonces el problema se traduce en encontrar los eigenvalores y eigenvectores de la matriz de covarianza los cuales representaran los nuevos ejes principales.

Anexo 4

Los programas fueron realizados en Matlab R2009a.

1.- Obtiene la matriz de covarianza C , la matriz con centro en la media Am , la matriz de eigenvectores V y de eigenvalores E , así como el porcentaje de información de cada eigenvalor λ de la nube de puntos A de tamaño T . Tiene como entrada A la nube de puntos.

```
function [ C,Am,V,E,lambda,T ] = covyep( A )
T=size(A);
B=sum(A)/T(1,1);
Am(:,1)=A(:,1)-B(1,1);
Am(:,2)=A(:,2)-B(1,2);
Am(:,3)=A(:,3)-B(1,3);
Am2=Am.^2;
D=sum(Am2);
C=ones(3);
C(1,1)=D(1,1)/T(1,1);
C(2,2)=D(1,2)/T(1,1);
C(3,3)=D(1,3)/T(1,1);
C(1,2)=sum(Am(:,1).*Am(:,2))/T(1,1);
C(2,1)=C(1,2);
C(1,3)=sum(Am(:,1).*Am(:,3))/T(1,1);
C(3,1)=C(1,3);
C(2,3)=sum(Am(:,2).*Am(:,3))/T(1,1);
C(3,2)=C(2,3);
[V,E]=eig(C);
for i=1:3
    lambda(1,i)=E(i,i)/(E(1,1)+E(2,2)+E(3,3));
end
```

2.- Calcula la entropía de Shannon de la nube de puntos donde la variable aleatoria es cada coordenada. Se considera que $0 \log 0 = 0$. n es la matriz [partición, número de coordenadas] y T el número de puntos, p es la matriz de distribución de probabilidad de la nube de puntos A . Devuelve H que es la entropía.

```

function H = entropia(n,T)
Tn=size(n);
p=n/T(1,1);
for i=1:Tn(1,2)
for j=1:Tn(1,1)
if p(j,i)==0
p(j,i)=1;
end
end
end
for k=1:T(1,2)
H(1,k)=-sum(p(:,k).*log(p(:,k)));
end
end

```

3.- Calcula la entropía de una nube de puntos A de tamaño T variando el parámetro de la partición i . Devuelve la *matrizH* que contiene los valores de la entropía para cada valor de i .

```

function matrizH = particion(A,T)
matrizH=[0,0,0];
for i=10:T(1,1)/3
[n,xout]=hist(A,i);
H=entropia(n,T);
matrizH=cat(1,matrizH,H);
end

```

4.- Nos proporciona el valor de la entropía para cada coordenada y de la suma total, de una nube de puntos A de tamaño T y partición x de tamaño T variando el parámetro de traslación t a lo largo del eje x . Devuelve la *matrizH* que contiene los valores de la entropía para cada t .

```

function matrizH = enttrasl(A,x)
matrizH=[0,0,0];
T=size(A);
B=A;
for t=-200:1:200

```

```

for i=1:T(1,1)
    B(i,1)=A(i,1)+t;
end
[n,xout]=hist(B,x);
H=entropia(n,T);
matrizH=cat(1,matrizH,H);
end

```

5.- Nos proporciona el valor de la entropía para cada coordenada y de la suma total, de una nube de puntos A de tamaño T y partición x de tamaño T variando el parámetro de rotación Θ de 0 a 2π alrededor del eje X,Y o Z según la opción C.

```

function matrizH = entrot(A,x,C)
matrizH=[0,0,0,0];
T=size(A);
for theta=0:.02:2*pi
    if C==1
        R=[1 0 0 ;0 cos(theta) sin(theta) ; 0 -sin(theta) cos(theta)];
    elseif C==2
        R=[cos(theta) 0 -sin(theta) ;0 1 0 ; sin(theta) 0 cos(theta)];
    elseif C==3
        R=[ cos(theta) sin(theta) 0 ; -sin(theta) cos(theta) 0 ; 0 0 1 ];
    end
for i=1:T(1,1)
    B(i,:)=A(i,:)*R;
end
[nB,xout]=hist(B,x);
H=cat(2,entropia(nB,T),sum(entropia(nB,T)));
matrizH=cat(1,matrizH,H);
end

```

6.- Calcula la divergencia KL de un par nube de puntos donde la variable aleatoria es cada coordenada, $p1$ y $p2$ son la matrices de distribución de probabilidad de cada nube de puntos. Devuelve H que es la divergencia KL de cada coordenada y HT la divergencia KL total.

```

function [H,HT] = divergenciaKL(p1,p2)

```

```

T=size(p1);
q=zeros(T(1,1),T(1,2));
for i=1:T(1,2)
for j=1:T(1,1)
if (p1(j,i)==1)
q(j,i)=0;
elseif (p2(j,i)==1)
q(j,i)=0;
else
q(j,i)=p1(j,i)*log(p1(j,i)/p2(j,i));
end
end
end
for k=1:T(1,2)
H(1,k)=sum(q(:,k));
end
HT=sum(H);

```

7.- Calcula la divergencia *KL* entre dos nubes de puntos *A* y *B* variando el parámetro de traslación *t*, con la partición *x*. Devuelve *matrizH* que es la divergencia *KL* para cada coordenada así como la suma total.

```

function matrizH = HKLtraslacion(A,B,x)
matrizH=[0,0,0,0];
[nA,xout]=hist(A,x);
[HA,pA] = entropiap(nA,size(A));
T=size(B);
Btras=B;
for t=-400:400
for i=1:T(1,1)
Btras(i,:)=B(i,:)+t;
end
[nB,xout]=hist(Btras,x);
[HB,pB] = entropiap(nB,size(B));
[H,HT] = divergenciaKL(pA,pB);
matrizH=cat(1,matrizH,cat(2,H,HT));
end

```

8.- Calcula la divergencia KL entre dos nubes de puntos A y B variando el parámetro de rotación Θ de 0 a 2π alrededor del eje X , Y o Z según la opción C .

```
function matrizH = HKLrot(A,B,x,C)
matrizH=[0,0,0,0];
T=size(B);
Brot=B;
for theta=0:.01:2*pi
    if C==1
        R=[1 0 0 ;0 cos(theta) sin(theta) ; 0 -sin(theta) cos(theta)];
    elseif C==2
        R=[cos(theta) 0 -sin(theta) ;0 1 0 ; sin(theta) 0 cos(theta)];
    elseif C==3
        R=[ cos(theta) sin(theta) 0 ; -sin(theta) cos(theta) 0 ; 0 0 1 ];
    end
    for i=1:T(1,1)
        Brot(i,:)=B(i,:)*R;
    end
end
[nA,xout]=hist(A,x);
[nB,xout]=hist(Brot,x);
[HA,pA] = entropiap(nA,size(A));
[HB,pB] = entropiap(nB,size(B));
[H,HT] = divergenciaKL(pA,pB);

matrizH=cat(1,matrizH,cat(2,H,HT));
end
```

Literatura citada

[Acharya, 2005], T.y Ray, A.K., *Image Procesing- Principles an aplicaciones*, Wiley, 2005.

[Aiazzi, 2008], Bruno, Stefano Baronti y Massimo Selva, *Image fusion through multiresolution oversampled decompositions*, Image Fusion: Algorithms and Applications, 2008.

[Alpert, 1996], N. M., Berdichevsky, D., Levin, Z., Morris y Fishman, A.J., *Imporved methods for image registration*, NeuroImage, Vol. 3, No. 1,pp 10-18, Feb. 1996.

[Baum, 2007], E. Schmidt, K. Rafferty, Maria Helguera, H. Feiglin, y Andrzej Krol, *Investigation of PET/MRI Image Fusion Schemes for Enhanced Breast Cancer Diagnosis*, Nuclear Science Symposium Conference, 2007.

[Besl, 1992]; McKay, H.D., *A method for registration of 3-D shapes IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Volume 14, Issue 2, 1992.

[Beyerer, 2008], Jurgen, Michael Heizmann, Jennifer Sander y Ioana Gheta, *Bayesian methods for image fusion*, Image Fusion: Algorithms and Applications, 2008.

[Bloch I., Hunter], *Fusion: General Concepts and Characteristics*, International Journal of Intelligent Systems, vol. 16, no. 10, p. 1107-1134, October 2001.

[Botello, 2003], J.L Marroquín, *El método de los elementos finitos en el registro de*

imágenes de resonancia magnética, Comunicación Técnica, No I-03-08, CC/CIMAT, 2003.

[Bookstein, 1991], *Morphometric tools for landmark data: geometry and biology*, Cambridge Univ. Press, Nueva York, 1991.

[Collignon, 1995] D. Vandermeulen, P. Suetens, y G. Marchal, *3D multimodality medical image registration using feature space clustering*, Computer Vision, Virtual Reality, and Robotics in Medicine, N. Ayache, Ed. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1995.

[Castellanos, 2010], *A 3D geometric transformation for a nonrigid image registration method*, *Electrical Engineering Department*, Vol XXI, No2, UAM, México, D.F, 2010.

[Garzelli, 2008], Andrea, Luca Capobianco y Filippo Nancini, *Fusion of multispectral and panchromatic images as an optimisation problem*, Image Fusion: Algorithms and Applications, 2008.

[Hai-ping, 2001], Ren, Hu Yang, Wen-kai Wu, *Multi-resolution three-dimensional multi-modality image registration by maximization of mutual information* *Engineering in Medicine and Biology Society*, Proceedings of the 23rd Annual International Conference of the IEEE, Volume 3, 25-28 Oct. 2001.

[Hill, 1994] Studholme, y Hawkes, *Voxel similarity measures for automated image registration*, Visualization in Biomedical Computing, Bellingham, WA, 1994.

[Huang, 2008], Xiaoyang, Boliang Wang, Ruhuan Liu, Xiaoping Wang, Zhijian Wu, ***CT-MR image registration in liver treatment by maximization of mutual information IT in Medicine and Education***, ITME 2008.

[Jumarie, 1997], ***A new information theoretic approach to the entropy of non-random discrete maps relation to fractional dimension and temperature of curves***, Chaos, Solitons, Fractals, 1997.

[Katartzis, 2008], Antonis y Maria Petrou, ***Current trend in super-resolution image reconstruction***, Image Fusion: Algorithms and Applications, 2008.

[Lázaro, 2011], Isis , ***Fusión de imágenes multimodales del cerebro humano***, Tesis, Facultad de Ingeniería, UNAM, Enero 2011.

[Maes, 1997], Collignon, A., Vandermeulen, D., Marchal, G.; Suetens, P.; ***Multimodality image registration by maximization of mutual information***, Transactions on Medical Imaging, Volume 16, Issue 2, April 1997.

[Marquez, 2007], Jorge, Alfonso Gastellum y Miguel A Padilla, ***Image fusion operators for 3D anatomical and functional analysis of the brain***, Engineering in Medicine and Biology Society, 2007.

[Oudre, 2008], Laurent, Tania Stathaki y Nicalaos Mitianoudis, ***Image fusion using optimisation os statical measurements***, Image Fusion: Algorithms and Applications, 2008.

[Pateiro, 2009], López, *Estadística, Ingeniería Química USC Curso 2008-2009*,
<http://eio.usc.es/pub/pateiro/files/IQ0809Pateiro.pdf>

[Plataniotis, 2000], K.N. y Venetsanopolus, A.N., *Color image processing and applications*, Springer-Verlag, 2000.

[Romero, 2008], Méndez, Máxima Entropía, FENOMECC, 2008.

[Rodríguez, 1998], Carranza y M. H. Loew, *A weighted and deterministic entropy measure for image registration using mutual information*, in Medical Imaging: Image Processing, Ed. Bellingham, 1998.

[Pradham, 2008], Pushkar, Nicolas H Younan y Roger L King, *Concepts of image fusion in remote sensing applications*, Image Fusion: Algorithms and Applications, 2008.

[Schechner, 2008], Yoav Y., y Shree K Nayar, *Multidimensional fusion by image mosaics*, Image Fusion: Algorithms and Applications, 2008.

[Sung Lee, 2002], Jae, Jin Su Kim, Dong Soo Lee, Kwang Suk Park, *Three-dimensional reconstruction of rat brain from autoradiographic images using image registration by maximization of mutual information*, Nuclear Science Symposium Conference Record, IEEE, Volume 3, 2002.

[Viola, 1997], Paul y William M. Wells III, *Alignment by Maximization of Mutual Information*, International Journal of Computer Vision, 1997.

[Wang, 2008], Qiang, Yi Shen y Jing Jin, *Performanceevaluation of image fusion techniques*, Image Fusion: Algorithms and Applications, 2008.

[Xiang, 1999], Li, Luo Shuqian, Li Kuncheng, *Registration of CT and MR images using maximization of mutual information*, Engineering in Medicine and Biology, 21st Annual Conf., 1999.

[Yamamura, 2006], Yutaro, Hyungseop Kim, and Akiyoshi Yamamoto, *A Method for Image Registration by Maximization of Mutual Information*, SICE-ICASE International Joint Conference, Busan, Korea, 2006.

[Zibaeifard, 2006], Rahmati, M., *An adaptive simulated annealing scheme for multi-modality medical image registration by maximization of mutual information Signal Processing*, The 8th International Conference on Volume 2, 16-20 2006.