

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE CIENCIAS



## GEOMETRÍA TROPICAL

---

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
MATEMÁTICO PRESENTA:

*AUTOR:*  
SERGIO LUGO GUTIÉRREZ

*DIRECTORA:*  
LUCÍA LÓPEZ DE MEDRANO  
ÁLVAREZ

---

2012, CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos.

A mi padre, sus enseñanzas, sus reflexiones, sus buenos valores y todo su apoyo en las diferentes etapas de mi vida, siendo ésta una de las más importantes. A mi madre, su paciencia, perseverancia y buena actitud que todavía el día de hoy envidio. A mi hermano, cuyas diferencias conmigo me han servido para entender otras maneras de pensar y de vivir.

A mis amigos, en especial a los que conozco desde la preparatoria o incluso la secundaria, Ahtziri, Alberto, Federico, Hugo, Liliana y Ximena, por su apoyo, ánimo y por su amistad, que ha trascendido el tiempo.

A quienes empezaron como compañeros de clase y terminaron siendo buenos amigos: Alberto, Alejandro, Aurelio, Pablo, Paulina, Rodolfo, Rosalía y Tania, entre otros, quienes sus ideas y personalidades tuvieron un fuerte impacto. A Jesús y Alejandro, por su amistad, grata compañía y por hacer de los videojuegos algo más que un pasatiempo.

A Juan Morales, cuyo apoyo fue invaluable durante mi servicio social y cuya aproximación hacia la enseñanza de las matemáticas ha cambiado mi manera de pensar respecto a ella.

Por supuesto a Lucía López de Medrano, por haber confiado en mí sin siquiera conocerme, por su buena actitud, su apoyo y tremenda paciencia durante toda la tesis. En verdad, gracias. También un agradecimiento especial a Adolfo Guillot Santiago, sus comentarios ayudaron en gran medida a pulir este proyecto.

Finalmente, quisiera agradecer al proyecto PAPIIT IN117110 por su apoyo.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>I</b>
<b>1. Conceptos Preliminares.</b>	<b>1</b>
1.1. Retículas. . . . .	1
1.2. Espacios Afines. . . . .	2
1.3. Poliedros . . . . .	4
1.4. Subdivisión de un Poliedro. . . . .	8
1.5. Conos y Abanicos. . . . .	9
1.6. Suma de Minkowski y Área Mixta. . . . .	12
1.7. Métrica de Hausdorff. . . . .	14
<b>2. Geometría Tropical.</b>	<b>17</b>
2.1. El Semi-anillo Tropical. . . . .	17
2.2. Polinomios Tropicales. . . . .	18
2.3. Subdivisiones Duales. . . . .	24
2.4. Teoremas de Bernstein y Bézout Tropicales. . . . .	39
<b>3. Tropicalización.</b>	<b>45</b>
3.1. Amibas y sus Complementos. . . . .	45
3.2. Familias de Amibas y sus Límites. . . . .	48
3.3. Campo de Series de Puiseux Generalizado. . . . .	50
<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>

# Introducción.

Esta tesis tiene como principal objetivo dar una introducción a una rama de las matemáticas relativamente nueva, llamada *Geometría Tropical*. Dicha rama reduce problemas algebraicos a unos del tipo combinatorio, que en ocasiones son más sencillos de tratar. El *Dr. Imre Simon* (1943-2009), matemático brasileño, es considerado el fundador del álgebra tropical y es precisamente esa la razón por la cual esta geometría lleva ese peculiar adjetivo:

“En 1978 el autor fue guiado a la investigación de conjuntos reconocibles con multiplicidades en otro semi-anillo, denotado  $\mathcal{M}$ , [...] Éste es justamente el semi-anillo de los números naturales extendido con  $\infty$  bajo las operaciones de tomar mínimos y la adición. Tal semi-anillo, a veces llamado el semi-anillo Min-Plus, es importante en investigación de operaciones donde es usado en problemas de costo de minimización [...] Aquí, lo llamaremos el *semi-anillo tropical*, una sugerencia de Christian Choffrut.”<sup>1</sup>

Como el mismo autor menciona, la geometría tropical se aplica en otras ramas de la ciencia y por un tiempo la gente sólo estuvo interesada en ello por sus aplicaciones. Se aplica en la Geometría Enumerativa, en la Geometría Algebraica Real y Compleja, en la Ciencia Computacional y en las Matemáticas Discretas (específicamente a la *Programación Dinámica*), entre otras.

Más adelante, se empezó a estudiar a la Geometría Tropical por sí misma, específicamente el anillo de polinomios con coeficientes en el semi-anillo tropical. Teniendo ya una teoría sobre polinomios con las operaciones usuales de  $\mathbb{R}$  se empezaron a enunciar resultados conocidos de Geometría Algebraica Clásica (con las operaciones usuales en  $\mathbb{R}$ ) en el contexto tropical. Se definieron los conceptos usuales de raíz de un polinomio y de hipersuperficie. Actualmente, algunos conceptos todavía no están bien definidos, como el de variedad.

Esta tesis consiste de 3 partes: la primera formada por definiciones y resultados que son importantes para entender los conceptos básicos de la Geometría Tropical; la segunda formada por dichos conceptos, junto con resultados conoci-

---

<sup>1</sup>Simon, Imre. *Recognizable Sets with Multiplicities in the Tropical Semi-ring*. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil.

dos que permiten entender el mundo tropical; y finalmente la tercera verá cómo se aplica la geometría tropical en la geometría algebraica compleja.

Esta tesis no se basó en un sólo libro, se utilizaron artículos de Mikhalkin, Allermann y Sturmfels, entre otros.

# Capítulo 1

## Conceptos Preliminares.

En este capítulo se introducirán conceptos y resultados relevantes para desarrollar una introducción a la Geometría Tropical, principalmente de la Geometría Convexa. Se tratarán poliedros, las partes que los componen, subespacios que determinan así como una operación en ellos que será de gran utilidad en los siguientes capítulos. También se hablará de un caso particular importante de poliedro muy apegado a la Geometría Tropical: el cono.

Por último, se recordará una métrica que será de importancia en el último capítulo: la métrica de Hausdorff.

### 1.1. Retículas.

**Definición 1.1** Sean  $\mathbb{R}$  el campo de los números reales,  $\mathbb{Z}$  el anillo de los enteros y  $\mathbb{R}^n$  visto como espacio vectorial  $n$ -dimensional sobre  $\mathbb{R}$ . Sea  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  una base de  $\mathbb{R}^n$ . Definimos la  $\mathbb{Z}$ -Retícula  $\Lambda$  generada por  $\beta$  como:

$$\Lambda := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i \mid a_i \in \mathbb{Z}, v_i \in \beta \right\}.$$

En este caso, llamamos a  $\beta$  base de  $\Lambda$ .

Es decir,  $\Lambda$  consiste de las combinaciones lineales de elementos en  $\beta$  con coeficientes enteros. Intuitivamente,  $\Lambda$  es una malla discreta de puntos en  $\mathbb{R}^n$ . Por comodidad, pediremos que  $v_i \in \mathbb{Z}^n, \forall i, 1 \leq i \leq n$ .

Diremos que dos retículas son isomorfas si existe una transformación biyectiva entre bases de retículas. Como se pide que dicha base, también sea base del espacio vectorial, basta que se trate de una transformación lineal inyectiva o suprayectiva para obtener automáticamente el isomorfismo entre retículas.

En la Figura 1.1 se describe la situación: Sea  $\alpha$  la base canónica y  $\beta = \{(2, 1), (-1, 2)\}$ . Aquí la transformación es la correspondiente a la matriz:

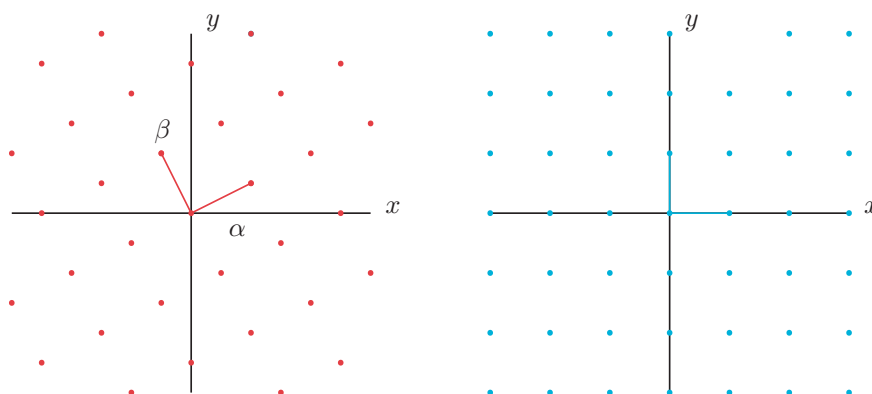


Figura 1.1: Dos retículas isomorfas en  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Así como en el caso de espacios vectoriales, un conjunto finito de elementos en la retícula es linealmente independiente si la única combinación de dichos elementos que da cero, es la combinación donde todos los coeficientes son cero. Diremos que un conjunto  $\beta$  genera a la retícula si todo elemento en ella se escribe como combinación lineal de elementos en  $\beta$  con coeficientes en  $R$ . Llamaremos *base* al conjunto de vectores de mayor cardinalidad en  $\Lambda$  que sea linealmente independiente y que genere a la retícula.

Si  $R = \mathbb{Z}$ , los vectores que forman dicha base serán llamados *primitivos* al no ser múltiplos no triviales de algún otro vector, específicamente:

**Definición 1.2** Sea  $u \in \mathbb{Z}^n$ . Diremos que  $u = (u_1, \dots, u_n)$  es un vector primitivo si  $\text{mcd}\{u_1, \dots, u_n\} = 1$ , es decir, sus coordenadas son primos relativos.

Más generalmente, sea  $\Lambda$  una  $\mathbb{Z}$ -retícula en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $u \in \Lambda$ . Decimos que  $u$  es un vector primitivo si existe un isomorfismo  $\varphi : \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^n$  tal que  $\varphi(u)$  es un vector primitivo.

## 1.2. Espacios Afines.

**Definición 1.3** Sea  $V$  un espacio vectorial  $n$ -dimensional. Un espacio afín  $\mathcal{A}$  es un subconjunto de  $V$  tal que para cualquier  $a \in \mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A} - a$$



es un subespacio vectorial de  $V$ , donde  $\mathcal{A} - a = \{x - a | x \in \mathcal{A}\}$ .

Si  $A$  es un subespacio afín y  $a \in A$  definiremos la *dimensión de  $A$*  como  $\dim(A-a)$ , que sí es un subespacio lineal de  $\mathbb{R}^n$ .

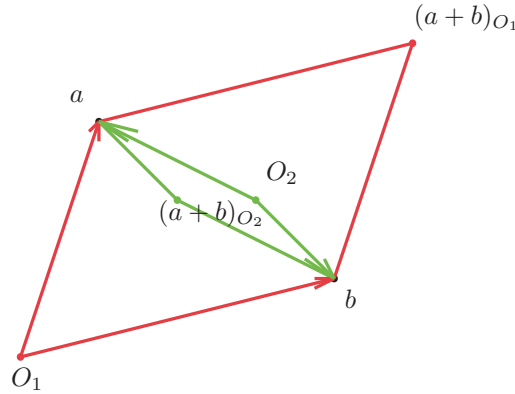


Figura 1.2: Dos orígenes diferentes, en general, dan lugar a definiciones de adición diferentes.

Note que lo que diferencia a  $A$  de  $V$  es el hecho de no haber un “origen” en el primero y este hecho repercute en que la suma de dos puntos en  $A$  no esté bien definida en  $A$  (Figura 1.2).

Es decir, si  $a, b \in A$ , en general,  $a + b$  no tiene por qué ser un elemento en  $A$ . Entonces para definir la suma de manera que sea cerrada tomaremos  $O_1 \in A$  y definiremos la suma como sigue:

$$(a + b)_{O_1} = (a - O_1) + (b - O_1) + O_1.$$

Note que, de la definición de espacio afín, se sigue que dicha suma es cerrada, ya que  $\mathcal{A} - O_1$  es un espacio vectorial.

En general, dicha suma depende del “origen” que se elija, excepto cuando los coeficientes de los vectores  $a$  y  $b$  suman 1:

$$\begin{aligned} (\lambda a + (1 - \lambda)b)_{O_1} &= O_1 + \lambda(a - O_1) + (1 - \lambda)(b - O_1) \\ &= O_1 + \lambda a - \lambda O_1 + (1 - \lambda)b - O_1 + \lambda O_1 \\ &= \lambda a + (1 - \lambda)b \end{aligned}$$

que es la suma usual de  $\lambda a$  y  $(1 - \lambda)b$  en  $V$ .

Además, dichas combinaciones caracterizan al espacio afín. Es así que si  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$  hablaremos del *Espacio Afín asociado a  $B$* ,  $Aff(B)$ ,

como el conjunto de puntos de la forma

$$\sum_{k=1}^m s_k v_k,$$

con  $s_k \in \mathbb{R}$  tal que

$$\sum_{k=1}^m s_k = 1.$$

Diremos que dos subespacios afines  $B$  y  $C$  son *Ortogonales*,  $B \perp C$ , si dado  $c_0 \in C$

$$\forall b \in B, \forall c \in C, \langle b, c_0 - c \rangle = cte.$$

### 1.3. Poliedros

Un hiperplano en  $\mathbb{R}^n$  es el conjunto de ceros de una función lineal que tiene dimensión  $n - 1$ . Un semi-espacio es el conjunto de puntos que quedan de un lado de un hiperplano.

**Definición 1.4** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función. Llamaremos a  $f$  afín cuando su regla de correspondencia sea de la forma

$$f(x) = ax + b,$$

donde  $a \in \mathbb{R}$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ .

**Definición 1.5** Sea  $f$  una función afín. Definimos un semi-espacio como el conjunto de puntos de la forma

$$\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \geq 0\}.$$

En esta tesis, consideraremos a un poliedro como intersección finita de semi-espacios, en particular pueden ser no acotados.

**Definición 1.6** Llamaremos Poliedro al conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^n$  de la forma

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n | f_1(x) = 0, \dots, f_k(x) = 0, f_{k+1}(x) \leq 0, \dots, f_m(x) \leq 0\}$$

donde  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es afín.

Es posible caracterizar a un poliedro compacto de la siguiente forma:

**Definición 1.7** Sea  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^n$ . El Politopo  $\Delta$  generado por las  $a_k$  es su envolvente convexa, denotado por  $\text{Conv}\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ .

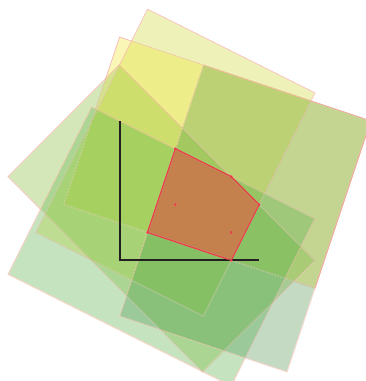


Figura 1.3: Un poliedro en  $\mathbb{R}^2$  es la intersección finita de semi-espacios.

Es decir, es el conjunto de puntos de la forma:

$$\sum_{k=1}^m s_k a_k$$

donde los  $s_k$  son reales no negativos tales que  $\sum_{k=1}^m s_k = 1$  (Figura 1.3).

La ventaja de los espacios afines es poder definir en subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  conceptos que no podríamos definir directamente en los subconjuntos, por ejemplo el de ortogonalidad. Dados dos poliedros  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  decimos que son *Ortogonales* si  $\text{Aff}(\Delta_1) \perp \text{Aff}(\Delta_2)$ .

Dado un subconjunto  $Y$  de un espacio topológico  $X$  con la topología  $\mathcal{T}$ , podemos dotar de una topología a  $Y$  intersecando los abiertos de  $\mathcal{T}$  con  $Y$ , obteniendo la *topología relativa*. Recordemos que

$$\text{int}(Y) := \bigcup_{T \in \mathcal{T}, T \subseteq Y} T$$

es el interior de  $Y$ . Es el abierto más grande contenido en  $Y$ . Entonces el *interior relativo* de  $Y$  sería el interior con respecto a la topología relativa. En este sentido uno se refiere al interior relativo en la siguiente definición.

**Definición 1.8** Sea  $\Delta$  un poliedro en  $\mathbb{R}^k$ . Un poliedro  $\Delta'$  es una cara de  $\Delta$  si existe  $H$  semi-espacio de  $\mathbb{R}^k$  tal que:

$$\Delta' = \Delta \cap H \text{ y } H \cap \text{int}(\Delta) = \phi$$

donde  $\text{int}(B)$  denota el interior relativo de  $B$  con respecto al  $\text{Aff}(B)$ .

Note que, en esta definición de cara,  $\Delta$  no es una cara de sí mismo. Llamaremos *vértice* a una cara de dimensión cero. Llamaremos a  $\Delta'$  una faceta de  $\Delta$  si  $\dim(\Delta') = \dim(\Delta) - 1$ . La frontera del poliedro será la unión disjunta de los interiores relativos de todas sus caras. En la Figura 1.4 se muestra un poliedro generado por 4 vectores del plano  $xy$ , junto con su espacio afín.

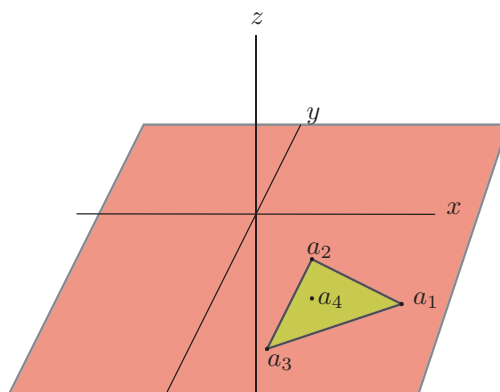


Figura 1.4: El poliedro  $\Delta$  junto con  $\text{Aff}(\Delta)$ , en este caso, el plano  $z = 0$ .

Se probará el siguiente resultado: Todo punto en el interior relativo de un poliedro se puede escribir como combinación convexa de sus vértices, donde todos los coeficientes de los vértices son no nulos.

**Lema 1.9** Sea  $\Delta$  un poliedro compacto y sea  $I = \{\alpha_i\}_{i=1}^k$  su conjunto de vértices. Si  $p \in \text{int}(\Delta)$ , entonces

$$p = \sum_{i=1}^k \sigma_{\alpha_i} \alpha_i$$

$$\text{con } \sum_{i=1}^k \sigma_{\alpha_i} = 1 \text{ y } \sigma_{\alpha_i} > 0.$$

**Demostración :** Se hará por inducción sobre la cardinalidad de  $I$ .

Para  $k = 1$  el lema se cumple trivialmente. Para  $k = 2$  es conocido que todo punto en el interior relativo de un segmento entre  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  es de la forma

$$\sigma \alpha_1 + (1 - \sigma) \alpha_2,$$

donde  $\sigma$  está en el intervalo abierto  $(0, 1)$ .

Supongamos el resultado válido para  $k - 1$  vértices y se demostrará que se cumple para  $k$ .

Sea  $p \in \text{int}(\Delta)$ . Consideremos el rayo que parte de  $\alpha_k$  y que pasa por  $p$ . Sea  $q \in \text{int}(\Delta')$  un punto en dicho rayo de tal manera que  $p$  esté en el segmento entre  $\alpha_k$  y  $q$ , con  $\Delta'$  el poliedro generado por  $I \setminus \{\alpha_k\}$ . Por definición de  $q$ , existe  $\sigma_k \in (0, 1)$  tal que

$$p = \sigma_k q + (1 - \sigma_k)\alpha_k$$

y por hipótesis de inducción en  $\Delta'$ ,

$$q = \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_{\alpha_i} \alpha_i, \quad \sum_{i=1}^k \sigma_{\alpha_i} = 1, \quad \text{y } \sigma_{\alpha_i} > 0, \quad \forall i,$$

por lo que

$$p = \sigma_k \left( \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_{\alpha_i} \alpha_i \right) + (1 - \sigma_k)\alpha_k$$

con

$$\sigma_k \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_{\alpha_i} + (1 - \sigma_k) = \sigma_k \cdot 1 + (1 - \sigma_k) = 1$$

de donde se sigue el resultado (Figura 1.5).

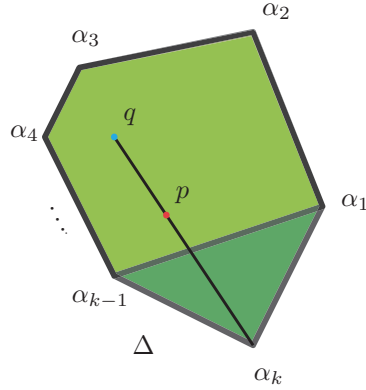


Figura 1.5: Dado  $p \in \text{int}(\Delta)$ , siempre podemos encontrar  $q \in \text{int}(\Delta')$  tal que  $p$  esté en el segmento de  $q$  a  $\alpha_k$ .

□

**Definición 1.10** Sea  $v \in \mathbb{R}^n$  y sea  $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$  un poliedro  $n$ -dimensional. Se denotará a

$$\pi_v : \Delta \rightarrow H$$

como la proyección sobre el espacio vectorial  $H$  ortogonal a  $v$ . Si  $x \in \text{Im}(\pi_v)$  denotaremos por

$$M_x = \text{máx}\{\lambda \in \mathbb{R} \mid x + \lambda v \in \Delta\}.$$

Definimos la sombra de  $\Delta$  con respecto de  $v$  como

$$S_v(\Delta) := \{x + M_x v \mid x \in \text{Im}(\pi_v)\}.$$

Es decir, la “tapa superior” de un poliedro  $\Delta$  es su sombra con respecto de  $e_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, 1)$  (Fig. 1.6).

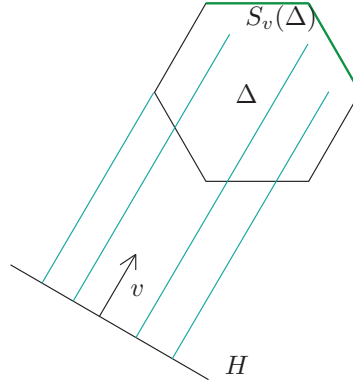


Figura 1.6: La sombra de  $\Delta$ .

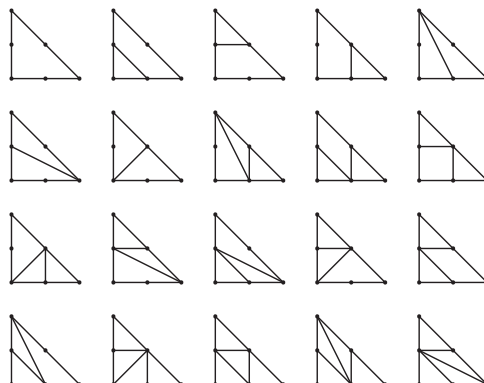
## 1.4. Subdivisión de un Poliedro.

**Definición 1.11** Sea  $\Delta$  un poliedro en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\Gamma = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto finito de poliedros. Decimos que  $\Gamma$  es una subdivisión de  $\Delta$  si:

1.  $\Delta_i \cap \Delta_k \neq \emptyset \Rightarrow \Delta_i \cap \Delta_k \in \Gamma$ .
2.  $\text{int}(\Delta_i) \cap \text{int}(\Delta_k) = \emptyset$ , si  $i \neq k$ .
3.  $\Delta_i \cap \Delta_j$  es una cara de  $\Delta_i$  y es una cara de  $\Delta_k$ .
4.  $\bigcup_{\Delta_i \in \Gamma} \text{int}(\Delta_i) = \Delta$ .

Diremos que un Poliedro es *Entero*, si todos sus vértices son vectores en la retícula  $\mathbb{Z}^n$  y en ese caso una subdivisión de éste con únicamente poliedros enteros será una *Subdivisión Entera*. A menos que se diga lo contrario, de aquí en adelante sólo se considerarán poliedros y subdivisiones enteras.

**Ejemplo 1.12** Subdivisiones del triángulo  $\Delta$  con vértices en  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$  y el origen.

Figura 1.7: Subdivisiones enteras de  $\Delta$ .

Aquí se presentan algunas subdivisiones de  $\Delta$  (Fig. 1.7). Dichas subdivisiones juegan un papel muy importante a lo largo de toda la tesis.

Es claro que no se trata de todas las subdivisiones de dicho triángulo, pero sí de todas sus subdivisiones enteras.

**Definición 1.13** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Decimos que  $f$  es cóncava si se tiene que para cada  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y cada  $t \in \mathbb{R}$  se tiene que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Intuitivamente en una función cóncava, la gráfica de la función en cualesquiera dos puntos queda siempre por encima del segmento comprendido entre ellos.

**Definición 1.14** Sea  $\Delta$  un poliedro  $n$ -dimensional y  $\Gamma$  una subdivisión de éste. Llamaremos a  $\Gamma$  regular si existe una función  $\gamma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  continua, cóncava y que satisface:

1.  $\gamma|_{\Delta'}$  es afín  $\forall \Delta' \in \Gamma$ .
2.  $\gamma|_{\Delta' \cup \Delta''}$  no es afín  $\forall \Delta', \Delta'' \in \Gamma$  con  $\Delta', \Delta''$  de dimensión máxima.

Note que existe literatura donde se consideran funciones convexas en lugar de cóncavas.

## 1.5. Conos y Abanicos.

**Definición 1.15** Sea  $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ . Llamaremos a  $\sigma$  cono, cuando dicho conjunto esté determinado, a través de igualdades o desigualdades, por funciones lineales en  $\mathbb{R}^n$ , es decir, si existen funciones lineales

$$f_1, f_2, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

tales que

$$\sigma = \{x \in V \mid f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \dots, f_k(x) = 0, f_{k+1} \leq 0, \dots, f_n(x) \leq 0\}.$$

En particular, todo cono es un poliedro.

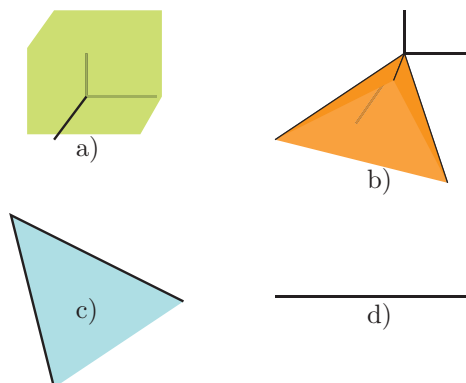


Figura 1.8: Diferentes conos en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.16** Un abanico  $X$  es un conjunto finito de conos en  $V$  que satisfacen las siguientes condiciones:

a) La intersección de dos conos en  $X$ , pertenece a  $X$ .

b) Cada cono  $\sigma \in X$  es la unión disjunta  $\sigma = \bigcup_{\tau \in X: \tau \subseteq \sigma} \text{int}(\tau)$ , donde  $\text{int}(\tau)$  denota el interior relativo de  $\tau$ .

La segunda condición evita encimar un cono sobre otro.

El inciso b) de la figura 1.9 no es un abanico porque dos de los tres abanicos de dimensión dos (en colores naranja y azul), no pueden ser vistos como unión ajena de los interiores relativos de sus subconos en  $X$ . Como es de esperarse, definiremos la *dimensión* de un abanico  $X$  como el máximo de las dimensiones de los conos contenidos en él. Un abanico  $X$  es *puro dimensional* o *de dimensión pura* si cada inclusión maximal de un cono en  $X$  tiene la dimensión de  $X$ . La unión de todos los conos en  $X$  se denotará por  $|X| \subseteq V$ .

**Definición 1.17** Sean  $Y, X$  abanicos en  $V$ .  $Y$  es un subabanico de  $X$  (denotado  $Y \triangleleft X$ ) si para cada cono  $\sigma \in Y$  existe un cono  $\sigma' \in X$  tal que  $\sigma \subseteq \sigma'$ . Con esto podemos definir una función  $C_{Y,X} : Y \rightarrow X$  que manda a  $\sigma$  al único cono incluido minimalmente  $\sigma' \in X$  con  $\sigma \subseteq \sigma'$ .



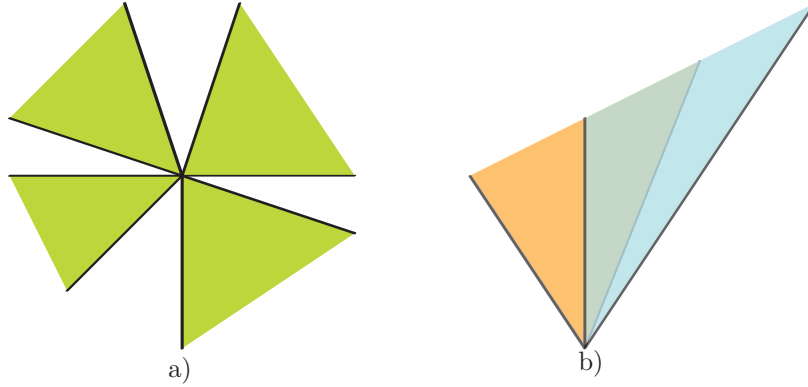


Figura 1.9: El inciso b no es un abanico.

Sea  $X$  un abanico y  $\sigma \in X$  un cono. Decimos que un cono  $\tau \in X$  es *una cara de  $\sigma$*  si  $\tau \subset \sigma$ , en cuyo caso escribimos  $\tau < \sigma$ . Por supuesto que  $Aff(\tau) \subset Aff(\sigma)$ ,  $\Lambda_\tau \subset \Lambda_\sigma$ .

*Construcción: Vectores Normales.* Sean  $\tau < \sigma$  conos en un abanico  $X$  con  $\dim(\tau) = \dim(\sigma) - 1$ . Esto quiere decir que existe una funcional lineal

$$f : Aff(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}$$

que se anula en  $\tau$ , es no negativa en todo  $\sigma$  y es diferente de cero en  $\sigma$ . Como

$$\Lambda_\sigma / \Lambda_\tau \cong \mathbb{Z}^{\dim(\sigma)} / \mathbb{Z}^{\dim(\tau)} \cong \mathbb{Z}$$

podemos elegir un vector  $u_\sigma \in \Lambda_\sigma$  cuya clase en  $\Lambda_\sigma / \Lambda_\tau$  sea generador. Denotaremos a dicha clase por  $u_{\sigma/\tau} = [u_\sigma] \in \Lambda_\sigma / \Lambda_\tau$  y será llamada *el vector (primitivo) normal de  $\sigma$  relativo a  $\tau$* .

Se denotará por  $X^{(k)}$  al conjunto de todos los conos  $k$ -dimensionales de  $X$ . Llamaremos Abanico Ponderado  $(X, \omega_X)$  de dimensión  $k$  al abanico  $X$  de dimensión pura  $k$ , junto con una función

$$\omega_X : X^{(k)} \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Al entero  $\omega_X(\sigma)$  se le conoce como el peso de la cara  $\sigma \in X^{(k)}$ . Por simplicidad solemos escribir  $\omega(\sigma)$  en lugar de  $\omega_X(\sigma)$ .

Se escribirá, abusando de la notación, al abanico ponderado  $X$ , en lugar de  $(X, \omega_X)$  cuando sea claro del contexto de qué función  $\omega_X$  se habla. Note que estamos agregando pesos sólo a los elementos del abanico de mayor dimensión.

**Definición 1.18** *Sea  $X$  un abanico ponderado de dimensión pura  $k$ . Decimos que  $X$  es un Abanico Balanceado ó que cumple la Condición de Balance si para*

cada  $\tau \in X$  de dimensión  $k - 1$  se cumple

$$\sum_{\sigma \supset \tau} \omega_\sigma u_{\sigma/\tau} = 0,$$

donde  $u_{\sigma/\tau}$  es el vector primitivo normal de  $\sigma$  relativo a  $\tau$  y  $\omega_\sigma$  es el peso de la faceta  $\sigma$ .

## 1.6. Suma de Minkowski y Área Mixta.

Se definirá una operación binaria en poliedros.

**Definición 1.19** Sean  $B$  y  $C$  subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . Se define la Suma de Minkowski como

$$B \oplus C := \{b + c \mid b \in B, c \in C\}.$$

Si  $\Delta$  y  $\Delta'$  son poliedros,  $\Delta \oplus \Delta'$  también es un poliedro. De hecho, si  $B = \{\beta\}_i$  y  $C = \{\gamma\}_j$  son los conjuntos de vértices de  $\Delta$  y  $\Delta'$ , respectivamente, entonces el conjunto de vértices de  $\Delta \oplus \Delta'$  está contenido en  $B \oplus C$ . Eso es un caso particular de la siguiente proposición.

**Proposición 1.20** Sean  $B$  y  $C$  subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces

$$\text{Conv}\{B\} \oplus \text{Conv}\{C\} = \text{Conv}\{B \oplus C\}.$$

Veamos unos ejemplos. Considere dos triángulos  $\Delta$  y  $\Delta'$  como en la figura 1.10.

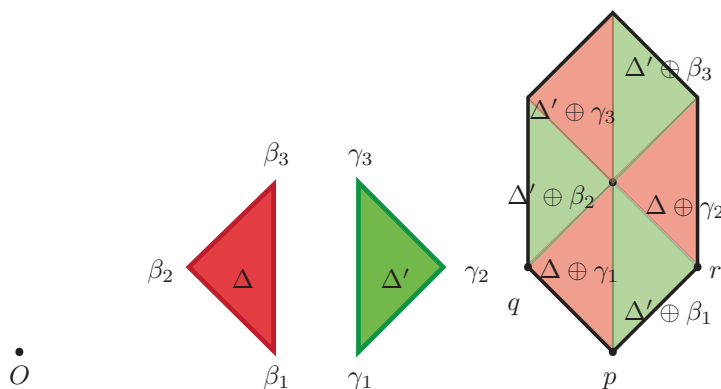


Figura 1.10: Suma de Minkowski de dos triángulos.

Considerando  $O$  como el origen,  $\Delta \oplus \Delta'$  se puede pensar de la siguiente forma: fijando algún vértice ya sea de  $\Delta$  o  $\Delta'$  vamos formando  $\Delta \oplus \Delta'$ .

Fijemos pues  $\beta_1$ . La suma de  $\beta_1$  con cada uno de los puntos en el segmento de  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$  forma, en la  $\Delta \oplus \Delta'$  el segmento entre  $p$  y  $r$ , según la **Prop. 1.20**. De hecho, al correr la suma sobre todo  $\Delta'$ , obtenemos un triángulo congruente a  $\Delta'$  (esquina inferior derecha). Fijando ahora  $\beta_2$  y sumándolo con todo elemento de  $\Delta'$ , obtenemos el de en medio a la izquierda. Análogamente, fijando vértices de  $\Delta'$  obtenemos triángulos congruentes a  $\Delta$  dentro de  $\Delta \oplus \Delta'$ .

Note que el origen sólo cambia la ubicación de la suma pero no su forma ni su tamaño. También note que, en general,

$$B, C \not\subseteq B \oplus C,$$

pero si  $0 \in B$ , entonces  $C \subseteq B \oplus C$ .

En general, se puede dotar al conjunto de poliedros en  $\mathbb{R}^n$  de una operación binaria, considerando a la Suma de Minkowski. La operación es cerrada, debido a que se cumple **Prop. 1.20**. Hay un elemento neutro, es decir, si  $\Delta$  es un poliedro en  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\{0\} \oplus \Delta = \Delta \oplus \{0\} = \Delta,$$

además es asociativa, módulo relación de semejanza entre los poliedros.

Es decir, diremos que dos poliedros  $\Delta$  y  $\Delta'$  están relacionados si y sólo si son semejantes.

**Definición 1.21** Sean  $\Delta$  y  $\Delta'$  dos poliedros en  $\mathbb{R}^n$ . El Área Mixta de  $\Delta$  y  $\Delta'$  se define como

$$\mathcal{M}(\Delta, \Delta') = \text{Area}(\Delta \oplus \Delta') - \text{Area}(\Delta) - \text{Area}(\Delta').$$

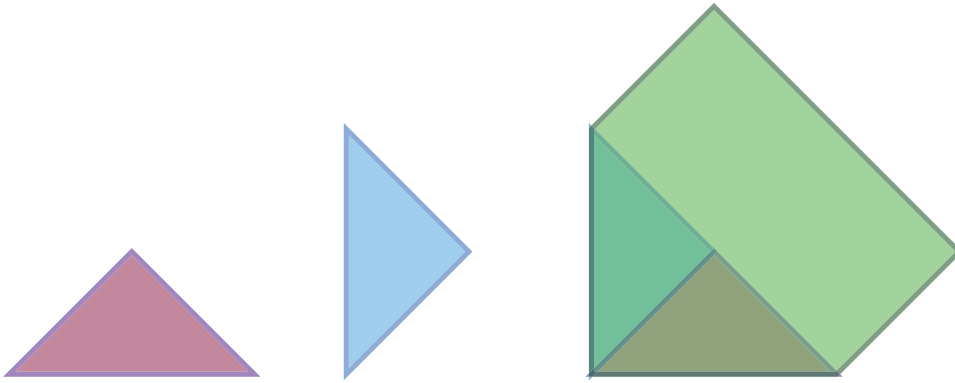


Figura 1.11: Área Mixta de dos triángulos.

## 1.7. Métrica de Hausdorff.

**Definición 1.22** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, con una métrica  $d$ . Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $X$ . La distancia de Hausdorff se define como

$$d_H(A, B) := \max\{d'(A, B), d'(B, A)\},$$

donde

$$d'(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b).$$

Entonces la distancia de Hausdorff intuitivamente nos dice que dos subconjuntos están tan alejados como lo están, de los puntos más cercanos, los más alejados, según la métrica  $d$  (Figura 1.12).

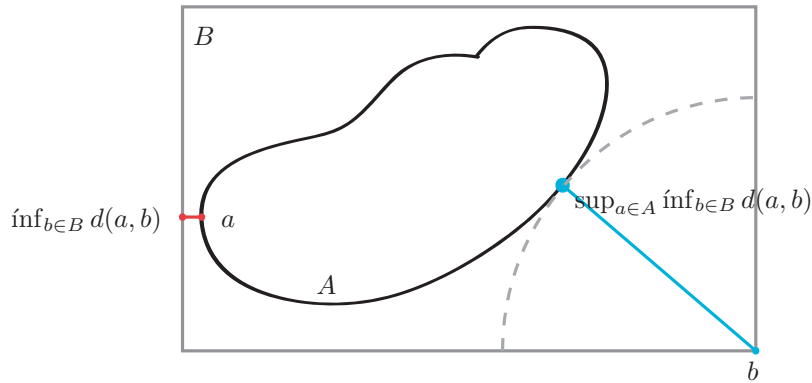


Figura 1.12: La distancia de Hausdorff entre  $A$  y  $B$  es, intuitivamente, la mayor distancia entre los puntos ‘más cercanos’ de  $A$  y  $B$ .

Note que es posible  $d_H(A, B) = \infty$ . De las definiciones, se obtiene  $d_H(A, A) \geq 0$ ,  $d_H(A, B) = d_H(B, A)$  así como la desigualdad del triángulo: Si  $A, B$  y  $C$  son subconjuntos no vacíos de  $X$ ,

$$d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B).$$

Al considerarse subconjuntos arbitrarios de  $X$ , es posible encontrar subconjuntos diferentes cuya distancia de Hausdorff sea cero, es decir,  $d_H$  es una *Pseudométrica* en el conjunto de subconjuntos no vacíos de  $X$ . Pero, si  $A$  y  $B$  son subconjuntos cerrados,

$$d_H(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B.$$

Más aún, si  $A$  y  $B$  son compactos, la distancia se alcanza en algún punto de  $A$  y  $B$ .

Entonces,  $d_H$  define una métrica en el conjunto de subconjuntos cerrados de  $X$ , que son los de nuestro interés. Podemos introducir la convergencia bajo la métrica de Hausdorff.

**Definición 1.23** *Sea  $\{A_t\}_{t \in \mathbb{N}}$  una familia de subconjuntos cerrados de un espacio métrico  $X$ . Decimos de dicha familia converge en compactos con la métrica de Hausdorff a  $\mathcal{A}$ , si para cada compacto  $C$  existe una vecindad  $U \subseteq C$  tal que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_H(A_t \cap U, \mathcal{A} \cap U) = 0.$$

## Capítulo 2

# Geometría Tropical.

En este capítulo se introducirán las definiciones y conceptos básicos relativos a la geometría tropical.

### 2.1. El Semi-anillo Tropical.

Sea  $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ . Denotaremos por  $(\mathbb{T}, "+", "\cdot")$  o abusando de la notación, por  $\mathbb{T}$  al semi-anillo tropical que consta de las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{ll} "+": \mathbb{T} \times \mathbb{T} \mapsto \mathbb{T} & "\cdot": \mathbb{T} \times \mathbb{T} \mapsto \mathbb{T} \\ (x,y) \mapsto \max\{x,y\} & (x,y) \mapsto x + y \end{array}$$

Donde  $+$  es la suma usual de los números reales. Definiremos además

$$"x + (-\infty)" = \max\{x, -\infty\} = x, \forall x \in \mathbb{T}$$

$$"x \cdot -\infty" = x + (-\infty) = -\infty, \forall x \in \mathbb{T},$$

$$"a^0" = 0, \forall a \in \mathbb{T}.$$

Es decir, se cumplen:

$$"3 + 0" = 3, \quad "(-\infty) \cdot (-\infty)" = (-\infty), \quad "5 \cdot (-5)" = 0,$$

$$"5^2" = 10, \quad "7^{-1}" = -7 \quad " - 2 \cdot (3 + 1)" = 1$$

$$"1 + (-\infty \cdot -1)" = \max\{1, -\infty + (-1)\} = \max\{1, -\infty\} = 1.$$

Observe que, en general, se tiene

$$"a + a" = a, \forall a \in \mathbb{T}.$$

Es decir,  $\mathbb{T}$  es idempotente con la adición. Note que no hay inversos aditivos en  $\mathbb{T}$ , pero más aún, ¡no puede haber inversos aditivos! Es claro que la adición tropical es cerrada, asociativa y tiene neutro  $(-\infty)$  por lo que si  $\mathbb{T}$  tuviese inversos aditivos contradiría un resultado de la Teoría de Grupos:

Si  $G$  es un grupo y existe un elemento  $a \in G$  tal que  $a + a = a$ , entonces  $a = 0_G$ .

Por lo tanto, con estas operaciones,  $\mathbb{T}$  es solamente un monoide con la adición y es un grupo con el producto. También se cumple que,  $\forall a, b, c \in \mathbb{T}$ ,

$$“(a + b) \cdot c” = \text{máx}\{a, b\} + c = \text{máx}\{a + c, b + c\} = “a \cdot c + b \cdot c”,$$

es decir, en  $\mathbb{T}$  el producto se distribuye sobre la suma.

Tener la Ley Distributiva nos va a permitir realizar simplificaciones de polinomios por término común como en los polinomios con las operaciones usuales de  $\mathbb{R}$ .

Recuerde que al escribir “ $3 - 3$ ”, realmente uno se está refiriendo a “ $3 + (-3)$ ” =  $\text{máx}\{3, -3\} = 3$ . Uno debe evitar caer en el siguiente error:

$$“3 - 3” = “3(1 - 1)” = 3 + \text{máx}\{1, -1\} = 4.$$

Existe literatura donde se considera a la adición como tomar el mínimo en lugar del máximo. En ese caso, el neutro “aditivo” sería  $\infty$  y todo resultado escrito aquí tiene su contraparte con estas operaciones. Más adelante se definirán funciones cóncavas. Tomando el mínimo se consideran funciones convexas.

La idea es formular una teoría lo más análoga posible a la de la Geometría Algebraica sobre los polinomios formados con estas dos operaciones. Y para ello, lo primero que necesitamos es entender cómo son dichos polinomios.

## 2.2. Polinomios Tropicales.

Sea  $\mathbb{T}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  el anillo de polinomios en  $n$  variables con coeficientes en  $\mathbb{T}$ . Si  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ . Denotaremos por

$$“x^\alpha” = “x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}” = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \langle x, \alpha \rangle,$$

el producto interno usual de  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $f \in \mathbb{T}[x]$ , entonces:

$$f(x) = “ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha x^\alpha ” \in \mathbb{T}[x]$$

$$f(x) = \text{máx}_{\alpha \in \varepsilon(f)} \{a_\alpha + \langle x, \alpha \rangle\}$$

con

$$\varepsilon(f) = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid a_\alpha \neq -\infty\}$$

denotando al conjunto de exponentes de los monomios de  $f$  con coeficiente distinto del neutro aditivo, justo como en la teoría clásica.

**Definición 2.1** Sea  $f \in \mathbb{T}[x]$ . El Politopo de Newton se define como la envolvente convexa de  $\varepsilon(f)$ . En símbolos,

$$\Delta_f = \text{Conv}\{\varepsilon(f)\}.$$

Denotaremos por

$$m_\alpha^f(x) = a_\alpha + \langle x, \alpha \rangle,$$

al monomio de  $f$  correspondiente al exponente  $\alpha$ .

### Ejemplo 2.2

Escrito así, el polinomio tropical en dos variables  $f(x_1, x_2) = "2x_1^0x_2^0 - 1x_1x_2^2 - \infty x_1^3x_2^0"$  es

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= "2 \cdot 0 \cdot 0 - 1x_1^1x_2^2 - \infty x_1^3x_2^0" \\ &= "2 - 1x_1x_2^2 - \infty x_1^3" \\ &= \text{máx}\{2, -1 + x_1 + 2x_2, -\infty + 3x_1\} \\ &= \text{máx}\{2, -1 + x_1 + 2x_2, -\infty\} \\ &= \text{máx}\{2, -1 + x_1 + 2x_2\} \\ &= \text{máx}\{2 + \langle (x_1, x_2), (0, 0) \rangle, -1 + \langle (x_1, x_2), (1, 2) \rangle\} \end{aligned}$$

En el caso del polinomio de este polinomio,  $\varepsilon(f) = \{(0, 0), (1, 2)\}$ .

Así como en el caso de los polinomios en  $\mathbb{R}$  con las operaciones usuales, podemos definir el *grado* de un polinomio.

**Definición 2.3** Sea  $f \in \mathbb{T}[x_1, \dots, x_n]$ . El grado de  $f$  se define como

$$\text{máx}_{\alpha \in \varepsilon(f)} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \mid \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \right\}$$

Definimos el grado del polinomio ‘cero’ como  $-\infty$ . El polinomio del ejemplo 2.2 tiene grado 3 por el monomio  $"-1x_1x_2^2"$ .

Hay que tener cuidado al escribir  $"x^n"$ , ya que es diferente escribir  $"1x" = "x + 1"$  y  $x = x + 0 = "0x" = "x"$ . También observe de la última línea la



razón por la cual no nos interesan los monomios cuyos coeficientes son  $-\infty$ . Esos monomios sencillamente no se toman en cuenta.

Así,  $f$  se reduce a ser una función afín lineal a trozos, lo cual es mucho más sencillo que un polinomio en  $n$ -variables con las operaciones usuales de  $\mathbb{R}$ .

El polinomio  $g(x, y) = "(x + y)(x - y)"$ , es en realidad,

$$\begin{aligned} g(x, y) &= "x \cdot x + x \cdot (-y) + y \cdot x + y \cdot (-y)" \\ &= "x^2 + (-1) \cdot xy + 0 \cdot xy + 0 \cdot (-1)y^2" \\ &= "x^2 + (-1 + 0)xy + (-1)y^2" \\ &= "x^2 + xy - y^2" \\ &= \text{máx}\{2x, x + y, 2y - 1\} \\ &= "x^2 + xy - y^2" \end{aligned}$$

por lo que  $\varepsilon(g) = \{(2, 0), (1, 1), (0, 2)\}$ . En este caso,  $\Delta_g$  es el triángulo con vértices en  $(2, 0)$ ,  $(1, 1)$  y  $(0, 2)$ .

Mientras en la teoría clásica las raíces de los polinomios son los puntos donde el polinomio se anula, en geometría tropical, las raíces de un polinomio son los puntos donde el polinomio sea igual a por lo menos dos de sus monomios. Es decir, que al calcular el máximo de las funciones afines correspondientes a monomios, haya por lo menos 2 donde el máximo se alcanza. Al tratar un solo polinomio, al conjunto de raíces se le conoce como *Hipersuperficie Tropical*, análogamente al caso clásico, el de la Geometría Algebraica.

**Definición 2.4** Sea  $f \in \mathbb{T}[x]$ . La *Hipersuperficie Tropical* definida por  $f$  es

$$H_f := \{x \in \mathbb{T}^n \mid \exists \alpha, \beta \in \varepsilon(f), f(x) = m_\alpha^f(x) = m_\beta^f(x), \text{ con } \alpha \neq \beta\}.$$

Es decir, el conjunto de puntos que constituyen el punto de quiebre de la gráfica de  $f$ . Así como donde la gráfica del polinomio no es diferenciable.

Note que la gráfica de  $f$  se forma por hiperplanos. La derivada en cada hiperplano es constante (su vector normal) por lo que los únicos lugares donde dicha gráfica no es diferenciable es donde dos hiperplanos se intersecan.

### Ejemplo 2.5

Pensemos en el siguiente polinomio en una sola variable:

$$f(x) = "-9x^4 - 3x^3 + x^2 + 1x + 0" = \text{máx}\{4x - 9, 3x - 3, 2x, x + 1, 0\}.$$

Su gráfica está formada por segmentos de líneas rectas. Sus raíces serán un conjunto finito de puntos.

Además,  $\mathbb{R}$  se descompone en puntos e intervalos abiertos, que corresponden a partes donde domina una función afín sobre las demás y donde dos coinciden (ver figura 2.1).

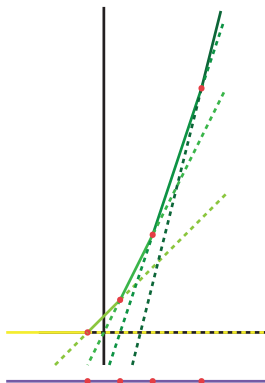


Figura 2.1: Descomposición de  $\mathbb{R}$  en 5 intervalos abiertos y 4 puntos.

¿Exactamente cómo? En primer lugar,  $H_f$  está formado por la proyección en  $\mathbb{R}$  de los puntos en la intersección de las rectas  $y = m_i^f(x)$ ,  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  que alcancen el máximo en dichos puntos. Observe que no hablamos de todas las intersecciones.

Específicamente, la proyección de los puntos en dicha intersección son  $\{-1, 0, 1, 2, 9/4, 3, 10/3, 9/2, 6\}$ . Los puntos donde se alcanza el máximo en por lo menos dos monomios son  $\{-1, 1, 3, 6\} = H_f$ . En lugar de obtener los puntos de intersección y ponerse a verificar si el máximo se alcanza en dichos puntos, recurra a la gráfica de dichas funciones y verifique quién está por encima en qué subconjuntos de  $\mathbb{R}$ .

En el caso de 2 variables, las hipersuperficies tropicales son llamadas *Curvas Tropicales*.

### Ejemplo 2.6 Recta Tropical.

Sea  $f(x, y) = "x + y + 0" = \max\{x, y, 0\}$ . Para saber cómo es la gráfica de  $f$  basta saber en qué partes del plano tropical  $\mathbb{T}^2$  dominan cada una de las funciones afines  $x$ ,  $y$  y  $0$ .

La función  $0$  domina en las parejas  $(x, y)$  cuyas entradas son no positivas, la función  $x$  domina donde la primer entrada es positiva y además están por debajo de la recta  $x = y$ , es decir, cuando  $y < x$ . Por último, la función  $y$  domina en las parejas cuya segunda entrada es positiva y que están por arriba de la recta  $x = 0$ . (Figura 2.2).

Los demás subconjuntos del plano corresponden a lugares donde dos monomios alcanzan el máximo. Específicamente las partes negativas de los ejes coordenados junto con la parte positiva de la gráfica de la función identidad, y el origen,

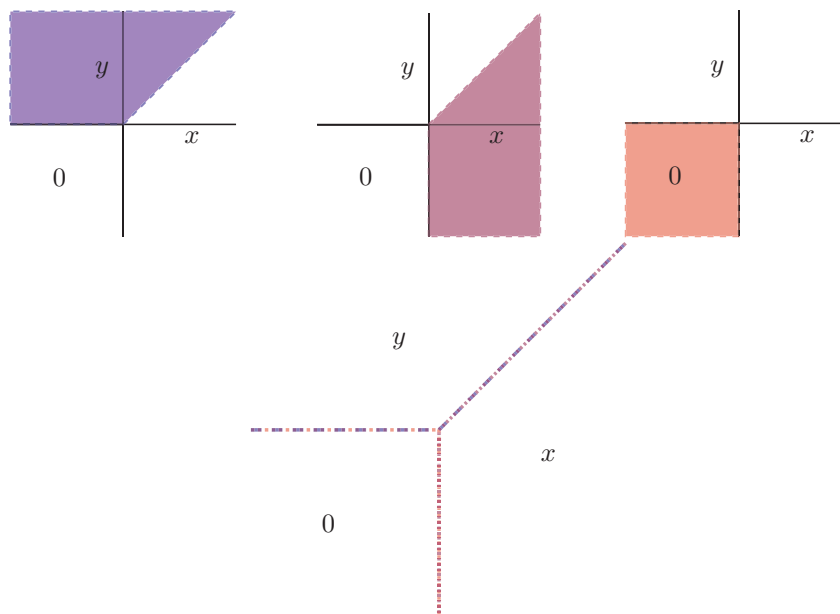


Figura 2.2: La dominancia de los diferentes monomios en  $\mathbb{R}^2$ .

donde los tres monomios son iguales y por ende es igual a  $f(0, 0)$ . Dichos puntos constituyen la Recta Tropical.

Si queremos trabajar de manera local, ya sea en ciertos puntos de  $\mathbb{R}^n$  o en un exponente en  $\varepsilon(f)$ , es mejor tomar en cuenta un subconjunto adecuado de  $\Delta_f$ , además a través de ellos podemos subdividir tanto a  $\Delta_f$  como descomponer en poliedros a  $\mathbb{R}^n$ :

**Definición 2.7** Sea  $f \in \mathbb{T}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ . El Poliedro asociado a  $x$  se define como

$$\Delta_x := \text{Conv}\{\alpha \in \varepsilon(f) \mid f(x) = a_\alpha + \langle x, \alpha \rangle\}.$$

La Celda o Célula de  $x$ ,

$$C_x = \overline{\{y \in \mathbb{R}^n \mid \Delta_y = \Delta_x\}},$$

donde  $\bar{A}$  es la cerradura topológica de  $A$ .

En este caso, nos referimos a la cerradura bajo la topología usual de  $\mathbb{R}^n$ . A una celda de dimensión cero le llamamos *vértice*.

Observe que inmediatamente se puede definir la Hipersuperficie Tropical de  $f$  en términos de los Poliedros asociados a los puntos  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ :

$$H_f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Delta_x \text{ no es un punto}\}.$$

Claro, porque si  $\Delta_x = \alpha_0$  entonces el único monomio que alcanza el máximo en  $x$  es el correspondiente al exponente  $\alpha_0$  y por lo tanto no pertenece a la Hipersuperficie Tropical de  $f$ .

Ahora, definiendo la relación de equivalencia “ $x \approx y$ ” si y solamente si  $C_x = C_y$ , obtenemos una partición de  $\mathbb{R}^n$  que llamaremos *Descomposición Poliedral de  $\mathbb{R}^n$  inducida por  $f$* . Es decir, si  $\mathcal{P}$  es el conjunto de clases de equivalencia,

$$\bigsqcup_{[x] \in \mathcal{P}} \text{int}(C_x) = \mathbb{R}^n,$$

donde  $\text{int}(A)$  es el interior relativo de  $A$  y  $\sqcup$  denota la unión disjunta.

Note que, en el ejemplo 2.5, en puntos negativos menores que 1, el único monomio que es de interés es el coeficiente constante 0, mientras que en -1 dominan tanto el término constante como el de primer grado. De hecho, no hay un solo punto en  $\mathbb{R}$  en donde todos los monomios alcancen el máximo. Es decir, al trabajar localmente, podemos prescindir de ciertos monomios de  $f$ .

He ahí donde entran las *Partes Iniciales* de un punto.

**Definición 2.8** Sean  $f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha x^\alpha \in \mathbb{T}[x]$  y  $z \in \mathbb{R}^n$ . Definimos la *z-Parte Inicial de  $f$*  como

$$In_z f(x) := \sum_{\alpha \in \varepsilon(f), m_\alpha^f(z) = f(z)} a_\alpha x^\alpha.$$

Note que  $\Delta_z = \Delta_{In_z(f)}$ . Si solamente nos fijamos en el punto  $z$  y en una vecindad suya suficientemente pequeña,  $In_z f(x)$  es un polinomio que coincide con  $f(x)$ .

Diremos que dos puntos  $x, y \in \mathbb{R}^2$  están en *posición general* si el segmento formado por ellos tiene pendiente distinta de 0, 1 ó  $\infty$ . También diremos que dos rectas tropicales (dos hipersuperficies generadas por un polinomio tropical de grado 1) están en *posición general* si por lo menos dos monomios son ‘múltiplo tropical’ de los monomios correspondientes en el otro polinomio.

Es decir, si  $f, g \in \mathbb{T}[x, y]$ , son de grado 1 y  $\varepsilon(f) = \varepsilon(g)$ , diremos que  $H_f$  y  $H_g$  están (rectas tropicales) en *posición general* si existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$“\lambda m_\alpha^f(x) = m_\alpha^g(x)” \text{ y } “\lambda m_\beta^f(x) = m_\beta^g(x)”$$

para  $\alpha, \beta \in \varepsilon(f)$  con  $\alpha \neq \beta$ .

Es en este sentido en que las rectas tropicales (las hipersuperficies generadas por un polinomio tropical de grado 1) tienen las mismas propiedades que las rectas ‘usuales’ (la curva generada por un polinomio con las operaciones usuales de  $\mathbb{R}^n$ ): dos puntos en posición general determinan una única recta y dos rectas no paralelas se intersectan en un solo punto (Fig. 2.3).

**Ejemplo 2.9** *La Ecuación General de la Recta Tropical.*

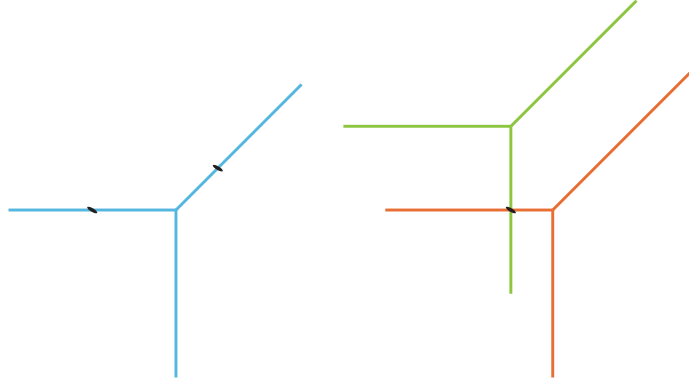


Figura 2.3: Dos rectas en posición general se intersecan en un punto y dos puntos en posición general determinan una única recta.

Sea  $f(x, y) = "ax + by + c" = \text{máx}\{x + a, y + b, c\}$ . Atacaremos el problema de encontrar  $H_f$  y  $\Delta_f$ .

Primero encontraremos los vértices  $v$  de  $H_f$ , que en este caso sólo es uno, determinando los puntos donde los tres monomios coinciden y, por ende, sean iguales a  $f(v)$ . Específicamente,

$$\begin{aligned} x + a &= y + b = c, \\ \Rightarrow x &= c - a, y = c - b, \end{aligned}$$

por lo que  $(c - a, c - b)$  es el vértice de  $H_f$ .

De ahí que los demás puntos de la Hipersuperficie Tropical de  $f$  son en los que  $f$  coincide en dos funciones y supera a la tercera. Dando esas tres posibilidades restantes lugar a los tres rayos que parten de  $(c - a, c - b)$  (figura 2.4).

$$\begin{aligned} y = x + a > c & & y + b = c > x + a & & x + a = y + b > c \\ \Rightarrow y = x + a \text{ y } x > c - a & \Rightarrow y > x + a \text{ y } y = c - b & \Rightarrow y = x + a - b \text{ y } y > c - b \end{aligned}$$

Note que si sólo un coeficiente de dicho polinomio es  $-\infty$ ,  $H_f$  se reduce a ser una línea recta clásica de pendiente 0,  $\infty$  o 1. Si  $f$  es un solo monomio,  $H_f$  sería por definición el conjunto vacío (figura 2.5).

Además,  $\varepsilon(f)$  es un conjunto de, a lo más, 3 elementos. Por lo tanto,  $\Delta_f$  es el triángulo con vértices en  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  y el origen, alguno de sus lados o alguno de sus vértices.

### 2.3. Subdivisiones Duales.

**Definición 2.10** Sea  $f \in \mathbb{T}[x]$ . La Subdivisión Dual de  $f$  es

$$\Gamma_f = \{\Delta_x | x \in \mathbb{R}^n\}$$

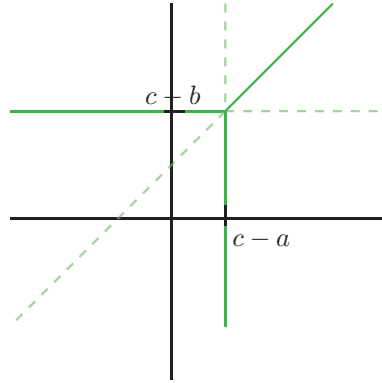


Figura 2.4: La recta recta tropical consta de un solo vértice:  $(c - a, c - b)$ .

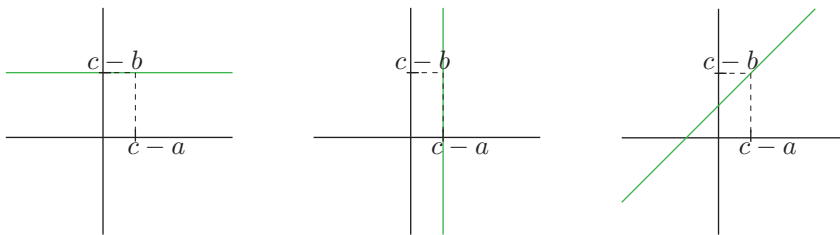


Figura 2.5: Rectas Tropicales dadas por polinomios con sólo 2 monomios.

siendo  $\Delta_x$  el Poliedro asociado a  $x$  (ver **Def. 2.7**).

Se probará que  $\Gamma_f$  es una subdivisión regular de  $\Delta_f$  y algunas propiedades de dicha subdivisión. Específicamente cómo son sus poliedros y una condición de ortogonalidad.

**Teorema 2.11** Sean  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha x^\alpha \in \mathbb{T}[x]$  y  $\Gamma_f$  la Subdivisión Dual asociada a  $f$ .

Entonces,  $\Gamma_f$  es una subdivisión regular de  $\Delta_f$ .

**Demostración :**

Primero que nada,  $\Gamma_f$  es un conjunto finito de poliedros al ser  $|\varepsilon(f)| < \infty$ ,  $|\Gamma_f| < 2^{|\varepsilon(f)|} < \infty$ .

Construiremos un poliedro  $(n+1)$ -dimensional ( $\tilde{\Delta}$ ) a partir de  $\Delta_f$ . Con ello definiremos una función cóncava ( $\gamma_f$ ) en  $\Delta_f$ . Dicha función estará dada por los monomios de  $f$  que alcanzan el máximo en algún punto de  $\mathbb{R}^n$ .

Tomaremos la proyección ( $\pi_{n+1}$ ) en  $\mathbb{R}^n$  de ciertas caras de  $\tilde{\Delta}$  de vuelta a  $\Delta_f$  y, dicha proyección dará lugar a una subdivisión  $\Gamma$  en  $\Delta_f$ . Por último, verificaremos que, en realidad, dicha subdivisión es  $\Gamma_f$ .

Sea pues  $\tilde{\Delta} = \text{Conv}\{(\alpha, a_\alpha)\}$ . Definimos  $\gamma_f : \Delta_f \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\gamma_f(p) = \text{máx}\{\lambda \in \mathbb{R} \mid (p, \lambda) \in \tilde{\Delta}\}.$$

Note que

$$f(x) = \text{máx}\{a_\alpha + \langle x, \alpha \rangle\} = \text{máx}\{\langle (\alpha, a_\alpha), (x, 1) \rangle\}.$$

Sea  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Llamaremos

$$M_\xi = \text{máx}_{p \in \Delta_f} \{\langle (p, \gamma_f(p)), (\xi, 1) \rangle\},$$

$$F_\xi = \{(p, \gamma_f(p)) \mid \langle (p, \gamma_f(p)), (\xi, 1) \rangle = M_\xi\}.$$

Al hacer variar  $\xi$  en  $\mathbb{R}^n$ , considerar  $F_\xi$  es tomar parte de la “tapa superior” del poliedro  $\tilde{\Delta}$  (ver **Def. 1.10**) ortogonal a  $(\xi, 1)$ . Claro,  $F_\xi$  es el conjunto de puntos cuyo producto interior con  $(\xi, 1)$  es constante. Proyectar  $F_\xi$  en  $\Delta_f$  para toda  $\xi \in \mathbb{R}^n$  dará, por construcción, una subdivisión regular en él. Llamémosle  $\Gamma$  a dicha subdivisión (Figura 2.6).

Se probará que si  $m_\alpha^f(x)$ ,  $\alpha \in \varepsilon(f)$  coincide con  $f(x)$  en  $\xi$ , entonces  $(\alpha, a_\alpha) \in F_\xi$ . Llamando

$$\pi_{n+1}(A) = \{(a_1, \dots, a_n) \mid (a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in A\},$$

definimos  $\Gamma = \{\pi_{n+1}(F_\xi) \mid \xi \in \mathbb{R}^n\}$ . Obtendremos que  $\pi_{n+1}(F_\xi) \in \Gamma_f$ .

Sea  $\alpha \in \Delta_\xi \cap \varepsilon(f)$ . Como  $\alpha \in \Delta_\xi$ , tenemos que

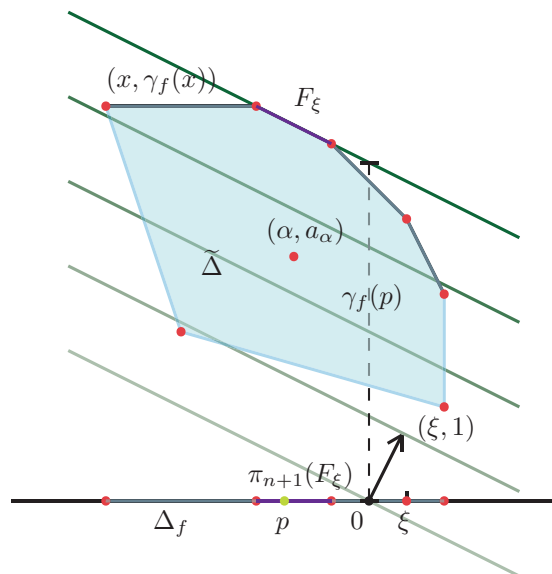


Figura 2.6: Idea geométrica en el caso unidimensional.

$$\begin{aligned}
 f(\xi) = m_\alpha^f(\xi) &= \max_{\beta \in \varepsilon(f)} \{ \langle (\beta, a_\beta), (\xi, 1) \rangle \} \\
 &= \max_{\beta \in \Delta(f)} \{ \langle (\beta, \gamma_f(\beta)), (\xi, 1) \rangle \} = M_\xi
 \end{aligned}$$

Tomar el máximo con  $a_\beta$  y con  $\gamma_f(\beta)$  da exactamente lo mismo, porque entre los  $\beta$  se encuentran los  $\alpha$  que forman la “parte de arriba” de  $\tilde{\Delta}$ . Además, basta fijarnos en los vértices de  $\tilde{\Delta}$ , porque es en ellos donde se alcanzan los valores máximos y mínimos de  $\gamma_f$ .

Por ende, es claro que si

$$M_\xi = \max_{p \in \Delta_f} \{ \langle (p, \gamma_f(p)), (\xi, 1) \rangle \},$$

entonces el mismo máximo tomado ahora sobre los  $\{\alpha\}$  que generan (con combinaciones convexas) a  $\Delta_\xi$ , debe ser exactamente  $M_\xi$ , justo la última igualdad.

Ahora, acabamos de concluir que los  $\alpha \in \varepsilon(f)$  cuyos monomios dominan en  $\xi$ , pertenecen a  $\pi_{n+1}(F_\xi)$ . Y debe ser claro que la otra contención también se cumple: los monomios que pertenecen a  $\pi_{n+1}(F_\xi)$  son justo los que dominan en  $\xi$ .



Por lo tanto,

$$\Gamma_f = \{\pi_{n+1}(F_\xi)\}_{\xi \in \mathbb{R}^n} = \Gamma,$$

de lo que se sigue el teorema.

□

**Teorema 2.12** Sean  $f(x) \in \mathbb{T}[x]$ ,  $H_f$  la Hipersuperficie Tropical de  $f$  y  $\Gamma_f$  su Subdivisión Dual. Entonces  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$Aff(\Delta_x) \perp Aff(C_x),$$

y

$$\dim(Aff(\Delta_x)) + \dim(Aff(C_x)) = n.$$

**Demostración :**

Sea  $z \in \mathbb{R}^n$ . Demostraremos que

$$\langle z - y, p - p' \rangle = 0, \forall y \in Aff(C_z), \forall p, p' \in Aff(\Delta_z).$$

Es decir, que los subespacios afines  $Aff(C_z)$  y  $Aff(\Delta_z)$  son ortogonales (ver **Conceptos Preliminares**). Se demostrará para los vértices  $\alpha$  de  $\Delta_z$ .

Así, sean  $\alpha \in \varepsilon(In_z f)$  y  $x, y \in C_z$ . Lo último implica que  $\forall \beta \in \varepsilon(In_z f)$

$$f(y) = m_\alpha(y) = m_\beta(y), f(x) = m_\alpha(x) = m_\beta(x). \quad (2.1)$$

Entonces

$$\langle y, \beta - \alpha \rangle = a_\alpha - a_\beta = \langle x, \beta - \alpha \rangle,$$

de lo que se sigue el resultado.

Para cualquier par de puntos de  $\Delta_z$ , se sigue exactamente el mismo argumento, si  $p, p' \in \Delta_z$ ,

$$p = \sum_{\alpha \in \varepsilon(In_z f)} \sigma_\alpha \alpha, p' = \sum_{\alpha \in \varepsilon(In_z f)} \sigma'_\alpha \alpha$$

y como se sigue cumpliendo (2.1), entonces

$$\sum_{\alpha \in \varepsilon(In_z f)} \sigma_\alpha m_\alpha(y) = \sum_{\alpha \in \varepsilon(In_z f)} \sigma'_\alpha m_\alpha(y), \sum_{\alpha \in \varepsilon(In_z f)} \sigma_\alpha m_\alpha(x) = \sum_{\alpha \in \varepsilon(In_z f)} \sigma'_\alpha m_\alpha(x)$$

y de manera análoga,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \varepsilon(I_{n_z f})} \sigma_\alpha a_\alpha - \sum_{\alpha \in \varepsilon(I_{n_z f})} \sigma'_\alpha a_\alpha &= \langle y, \sum_{\alpha \in \varepsilon(I_{n_z f})} \sigma'_\alpha \alpha - \sum_{\alpha \in \varepsilon(I_{n_z f})} \sigma_\alpha \alpha \rangle \\ &= \langle x, \sum_{\alpha \in \varepsilon(I_{n_z f})} \sigma'_\alpha \alpha - \sum_{\alpha \in \varepsilon(I_{n_z f})} \sigma_\alpha \alpha \rangle. \end{aligned}$$

De donde se sigue que,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\alpha \in \varepsilon(I_{n_z f})} \sigma_\alpha \langle y - x, \alpha \rangle - \sum_{\alpha \in \varepsilon(I_{n_z f})} \sigma'_\alpha \langle y - x, \alpha \rangle \\ &= \langle y - x, \sum_{\alpha \in \varepsilon(I_{n_z f})} \sigma_\alpha \alpha \rangle - \langle y - x, \sum_{\alpha \in \varepsilon(I_{n_z f})} \sigma'_\alpha \alpha \rangle \\ &= \langle y - x, p \rangle - \langle y - x, p' \rangle \end{aligned}$$

De igual manera basta demostrar dicha igualdad para el conjunto generador de  $Aff(C_z)$ .

Se utilizarán los espacios lineales en lugar de los afines para obtener la igualdad de las dimensiones usando el Teorema de la Dimensión.

Como  $\dim(Aff(C_z)) = k$ , eso significa que para cualquier vector  $\alpha \in C_z$ ,  $\dim(Aff(C_z) - \alpha) = k$ , visto como subespacio vectorial lineal de  $\mathbb{R}^n$ . De hecho, es isomorfo a  $\mathbb{R}^k$ . Supondremos que dicho  $\alpha$  es un vértice de  $\Delta_z$ . Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que  $B = \{\alpha_i - \alpha\}_{i=1}^k$  es una base de  $Aff(C_z) - \alpha$ , donde  $\alpha_i \in \varepsilon(f)$ ,  $\alpha_i \neq \alpha$ .

Sea  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  definida por

$$L(x) = (\langle x, \alpha_i - \alpha \rangle)_i,$$

es decir,  $L$  es una matriz rectangular de  $k \times n$  con  $\langle x, \alpha_i - \alpha \rangle$  en el  $i$ -ésimo renglón.

$L$  es claramente lineal. También, note que el núcleo de  $L$ , son exactamente los puntos ortogonales a  $Aff(C_z) - \alpha$ , ¡Que acabamos de demostrar que son  $Aff(\Delta_z) - p$ ! Además,

$$L(\alpha_i - \alpha) = (\|\alpha_i - \alpha\|)_i \neq 0.$$

De hecho,  $Im(B)$  es un base de  $Im(L)$ , por lo que  $Im(L)$  es isomorfo a  $Aff(C_z) - \alpha$ . Así, del teorema de la dimensión obtenemos

$$\dim(Aff(\Delta_z)) = \dim(Nuc(L)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(Im(L)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(Aff(C_z)) = n - k.$$

Por lo tanto,  $\dim(Aff(\Delta_z)) + \dim(Aff(C_z)) = n$ .

□

Cabe hacer notar que diferentes polinomios tropicales pueden tener el mismo Politopo de Newton y la misma Subdivisión Dual. Específicamente los monomios que no corresponden a vértices de poliedros en la subdivisión no afectarán la curva tropical. Consideremos, por ejemplo, el caso en dos variables.

Sea  $f(x, y) = "x^2 + y + x + 0" \in \mathbb{T}[x, y]$ . Es claro que el monomio  $x$ , correspondiente al punto  $(1, 0)$ , no afecta a  $H_f$  ni a  $\Delta_f$ , es decir, si  $g(x, y) = "x^2 + y + 0"$ , entonces  $H_f = H_g$  y  $\Delta_f = \Delta_g$  (Figura 2.7).

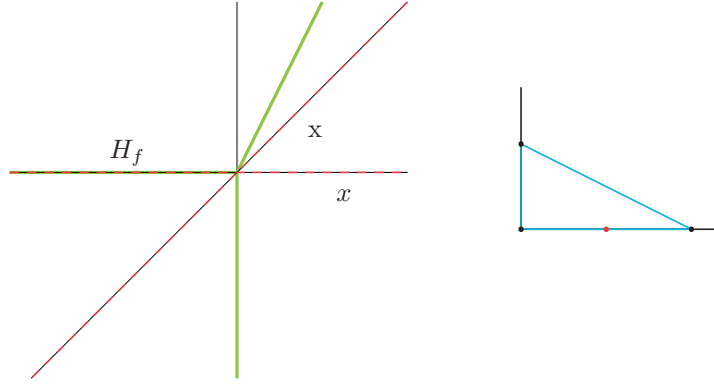


Figura 2.7: El monomio  $x$  es irrelevante.

Dado un polinomio tropical hemos obtenido un poliedro y una subdivisión de él. Se hará un proceso inverso: dado un poliedro  $\Delta$  y una subdivisión de él  $\Gamma$  obtendremos un polinomio  $g$  tal que  $\Delta_g = \Delta$  y  $\Gamma_g = \Gamma$ . Consideremos  $\Delta$  y  $\Gamma$  como en la figura 2.8.

Recordemos que, en el caso de existir, el **Teo. 2.12** asegura que  $g$  determina una curva tropical cuyos rayos y segmentos son ortogonales a los correspondientes en  $\Gamma$ . Es decir,  $H_g$  sería de la forma de la figura 2.9.

Cada rayo o segmento, es la intersección de dos hiperplanos, que corresponden a monomios en  $g$ , por lo que requerimos por lo menos de seis monomios, correspondientes a las seis regiones que separan los rayos y segmentos. También se puede pensar que, visto desde  $\Gamma$ , por cada vértice de un poliedro en  $\Gamma$  obtenemos un monomio, y tenemos seis vértices:  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$  y  $(1, 1)$ .

Entonces, cada uno de los monomios debe tener coeficiente distinto de  $-\infty$ , por lo que  $g$  tiene que ser de la forma  $g(x, y) = "ax^0y^0 + bx^1y^0 + cx^0y^1 + dx^2y^0 + ex^0y^2 + fx^1y^1"$ . Basta determinar los coeficientes de manera que se obtenga a  $\Gamma$  como subdivisión dual.

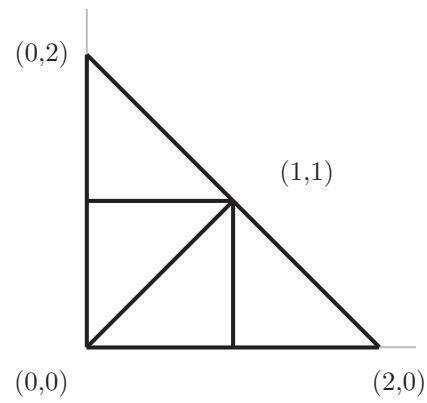


Figura 2.8: Un triángulo  $\Delta$  y su subdivisión  $\Gamma$ .

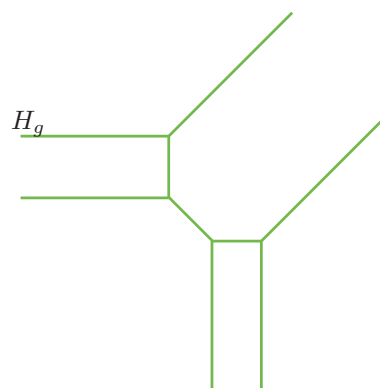


Figura 2.9: Posible curva tropical dual a  $\Gamma$ .

Los coeficientes de los monomios deben ser escogidos de tal forma que cada monomio domine a los demás en alguna región abierta del plano. Recordemos de la demostración del **Teo. 2.11** que los coeficientes de los monomios que eran relevantes para la subdivisión del poliedro de Newton, inducían una función cóncava en el poliedro (Figura 2.10).

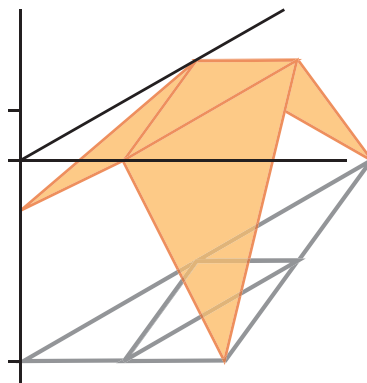


Figura 2.10: Una función cóncava en  $\Delta$

En realidad, el inverso también es cierto: de una función cóncava, en un poliedro adecuado con una subdivisión dada, podemos obtener un polinomio tropical que corresponda a dicho poliedro y a dicha subdivisión (**Teorema 2.13**).

Es así que tomando

$$g(x, y) \equiv "0 \cdot xy + (-4) \cdot x^2 + (-4) \cdot y^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot y - 1" = \max\{x+y, 2x-4, 2y-4, x, y, -1\},$$

obtenemos el polinomio deseado (Figura 2.11).

Entonces, dado un poliedro  $\Delta \in \mathbb{R}^n$  y una subdivisión  $\Gamma$  de éste, hay una condición para asegurar que existe algún polinomio en  $n$ -variables cuya subdivisión dual es  $\Gamma$  y ésta es que dicha subdivisión sea *Regular* (Ver **Conceptos Preliminares**).

En general, se tiene el siguiente resultado cuya demostración es análoga a la del **Teorema 2.11**.

**Teorema 2.13** *Sea  $\Delta$  un poliedro  $n$ -dimensional con vértices en  $\mathbb{Z}^n$  con entradas no negativas y  $\Gamma$  una subdivisión regular de  $\Delta$ . Entonces existe un polinomio tropical  $f \in \mathbb{T}[x_1, \dots, x_n]$  tal que  $\Delta_f = \Delta$  y  $\Gamma_f = \Gamma$ .*

**Demostración :**

Como  $\Gamma$  es regular, existe  $\gamma : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface 1 y 2 en **Def. 1.14**.

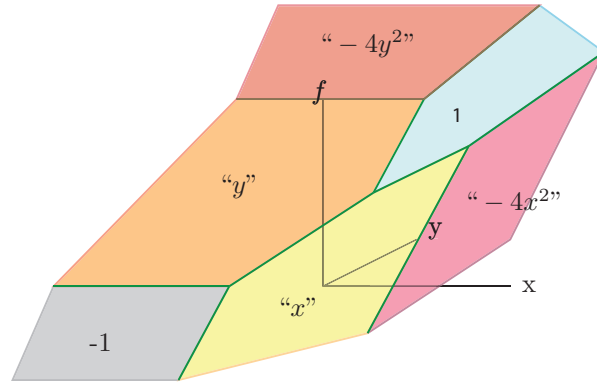


Figura 2.11: La gráfica de  $g$

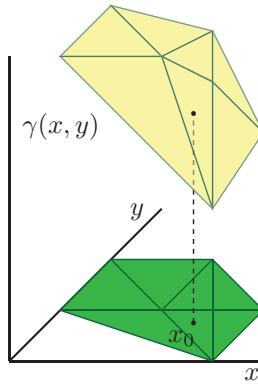


Figura 2.12: Una subdivisión regular de un poliedro.

Denotemos por  $\mathcal{V}$  al conjunto de elementos de  $\Gamma$  de dimensión cero. Definimos

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{V}} \gamma(\alpha) x^\alpha.$$

De inmediato se obtiene que  $\Delta_f = \Delta$ .

Utilizando el mismo argumento de la demostración del **Teorema 2.11** concluimos que la “tapa superior” del poliedro  $\tilde{\Delta} = \text{Conv}\{(\alpha, \gamma(\alpha))\}$  conforma los elementos de la subdivisión dual de  $f$ , pero también, por construcción, es la gráfica de la función  $\gamma$ , que por ser regular es exactamente  $\Gamma$  (Figura 2.12).

Por lo tanto,  $\Gamma_f = \Gamma$ .

□

Cabe hacer notar que hasta el momento en que se escribe esta tesis, o por lo menos hasta donde sabe el autor, no hay ningún criterio que ayude a decidir cuándo una subdivisión es regular más que el de construir la función misma.

Sin embargo, es un hecho conocido que todas las subdivisiones (cuyos elementos tienen vértices en  $\mathbb{Z}^2$ ) de poliedros dentro de un cuadrado de lado 2 son regulares. En particular, todas las subdivisiones del triángulo  $\Delta$  con vértices en  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$  y el origen son regulares. Cada una corresponde a una curva tropical dada por un polinomio tropical cuadrático. De hecho, para conocer todas las diferentes curvas tropicales de dichos polinomios ( $f(x, y) = "ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f"$  donde  $a, c, f \neq -\infty$ ) basta fijarnos en todas las subdivisiones que tenga  $\Delta$ .

Dichas curvas, se conocen como *Cónicas Tropicales* y están determinadas, salvo traslaciones y la longitud de sus aristas compactas, por las subdivisiones de éste (Figura 2.13).

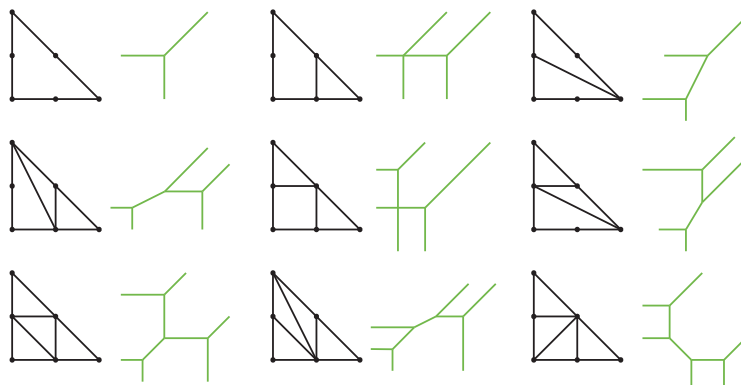


Figura 2.13: Algunas Curvas Tropicales y su subdivisión dual.

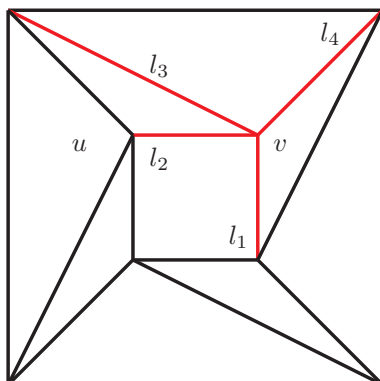
No todas las subdivisiones de poliedros, incluso de dimensión dos, son regulares. Por ende, hay subdivisiones de poliedros que no son subdivisiones duales a ningún polinomio tropical.

### Ejemplo 2.14

En efecto, no toda subdivisión está dada por un polinomio. Consideremos el poliedro de la figura 2.14.

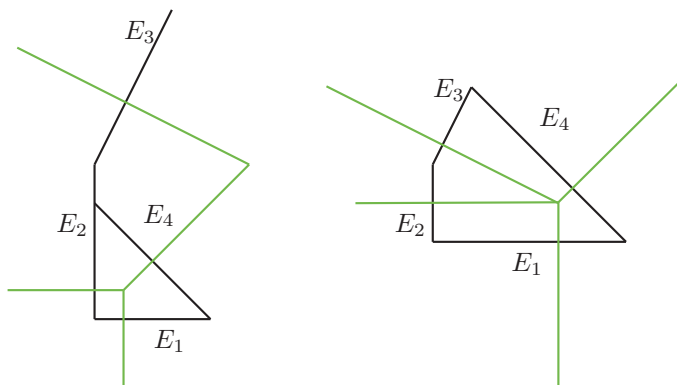
Para mostrar que dicha subdivisión no es regular, supondremos por el contrario que sí lo es y que por ende está dada por un polinomio, en este caso de dos variables. Consideraremos a uno de sus vértices  $v$  y las aristas  $l_1, l_2, l_3$  y  $l_4$  que parten de él.

Como la curva tropical de dicho polinomio tiene rayos perpendiculares a las aristas que parten de  $v$ , digamos  $E_1, E_2, E_3, E_4$  respectivamente, entonces para

Figura 2.14: Los diferentes segmentos que parten de  $v$ .

que  $E_4$  no interseque a  $E_2$  en vez de a  $E_3$ ,  $E_1$  debe ser más largo que  $E_2$  (Figs. 2.15 y 2.16).

Pero considerando ahora el vértice  $u$  podemos repetir dicho argumento en los cuatro vértices del cuadrado central obteniendo siempre que, moviéndonos en el sentido contrario de las manecillas del reloj, el rayo que corresponde a uno de los lados del cuadrado central es más largo que el rayo correspondiente al lado anterior, con lo que llegaríamos, por transitividad, a que  $E_1$  es más largo que sí mismo. He ahí la contradicción (Figura 2.15). Por lo tanto, dicha subdivisión *no* es regular.

Figura 2.15:  $E_1$  debe ser más largo que  $E_2$ .

La subdivisión dual de un polinomio tropical juega un papel importante a la hora de clasificar hipersuperficies tropicales. Sin embargo, le falta un aspecto



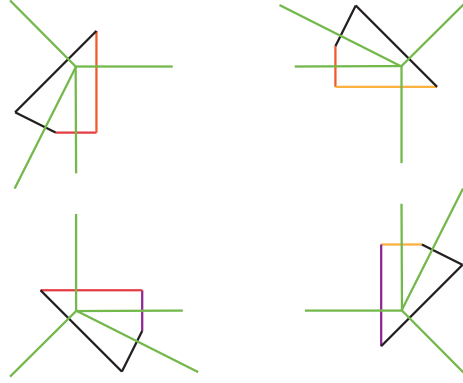


Figura 2.16: Vecindades de los vértices del cuadrado interior.

para poder diferenciar totalmente a una curva tropical de otra. Ése es el caso en la figura 2.17:

Aquí se tienen dos subdivisiones diferentes que dan lugar a la misma Hipersuperficie Tropical. Necesitamos otro concepto que ayude a hacer distinción en estos casos.

Sea  $f \in \mathbb{T}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  y sea  $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$  una celda  $(n-1)$ -dimensional. Por el **Teo. 2.12**,  $\Delta_\sigma$  el politopo dual a  $\sigma$  tiene dimensión 1. Es decir,  $\Delta_\sigma$  es un segmento de recta. Entonces podemos medir la longitud de dicho segmento y asociar esa longitud a  $\sigma$ .

**Definición 2.15** Sea  $f \in \mathbb{T}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . La Hipersuperficie Tropical Ponderada  $(H_f, \omega_f)$ , consta de  $H_f$  junto con la siguiente función:

Si  $\sigma \subset \mathbb{R}^n$  es una celda  $(n-1)$ -dimensional,  $v$  un vértice de  $\Delta_\sigma$  y  $p \in \mathbb{R}^n$  un vector primitivo, se define el peso de  $\sigma$  como

$$\omega_\sigma = \max_{\lambda \in \mathbb{R}} \{ \lambda p \mid \lambda p + v \in \Delta_\sigma \}.$$

Note que estamos agregando pesos sólo a las caras de la Hipersuperficie Tropical de mayor dimensión. Hay muchos autores que suelen llamar a la Hipersuperficie Tropical Ponderada, *Hipersuperficie Tropical*. Se gana algo agregando pesos y se verá a continuación.

En la figura 2.17, esas dos subdivisiones darían lugar a dos hipersuperficies tropicales diferentes.

Intuitivamente, sólo hablamos de las veces que “cabe” el vector primitivo en su cara correspondiente.

En la figura 2.18, se puso el peso de cada rayo o segmento alrededor de cada vértice por la siguiente observación:

Fijémonos en un vértice  $v$  de la hipersuperficie tropical de la izquierda. Considerémoslo en el origen. Tomando en cuenta la retícula  $\mathbb{Z}^2$ , para cada rayo

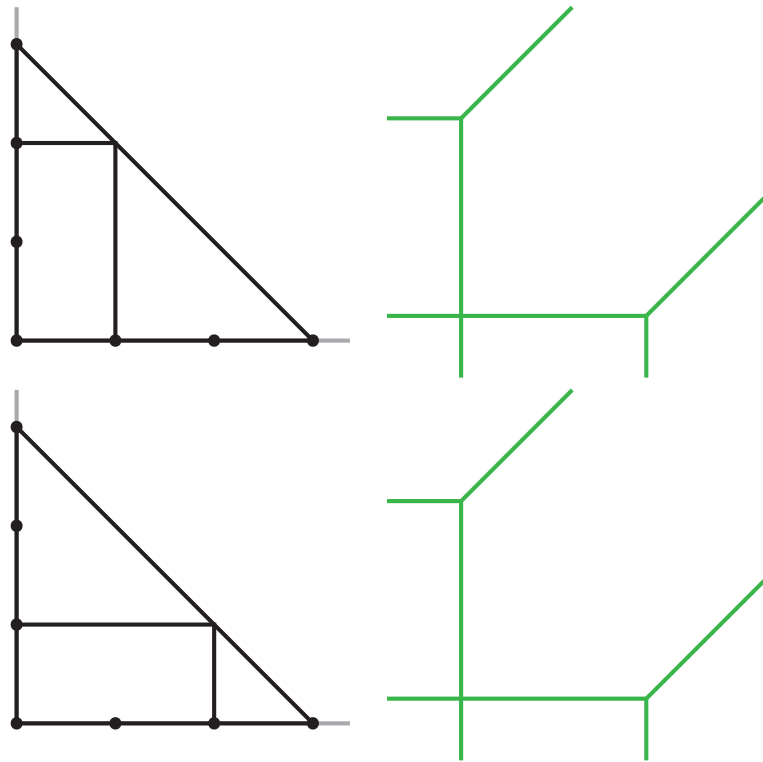


Figura 2.17: Dos subdivisiones distintas que dan la misma curva tropical.

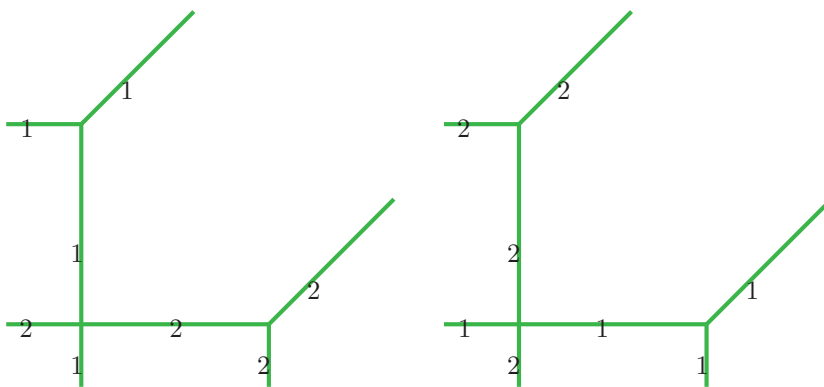


Figura 2.18: Dos hipersuperficies tropicales ponderadas.

o segmento  $\sigma$  que parta de  $v$ , consideremos al vector primitivo  $u_\sigma$  que genera a la retícula de  $\sigma$ , también anclado en el origen.

Por otro lado, en  $\Delta_v$  (que, en este caso, es un poliedro bidimensional), podemos pensar, de manera análoga, por cada cara de  $\Delta_v$ , en el vector primitivo que genere a su  $\mathbb{Z}^2$  retícula. Por cada cara, hay dos vectores primitivos. Para escoger alguno, utilice el sentido contrario a las manecillas del reloj y un punto en el interior de  $\Delta_v$ .

En realidad, el vector primitivo de  $\Delta_\sigma$ , el de una de las caras de  $\Delta_v$ , es el vector primitivo de  $\sigma$  rotado  $\pi/2$  en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Vea que la suma de todos los vectores primitivos, multiplicados por su peso correspondiente, suman cero, ya sea considerando a los vectores en la hipersuperficie tropical o en el poliedro de newton.

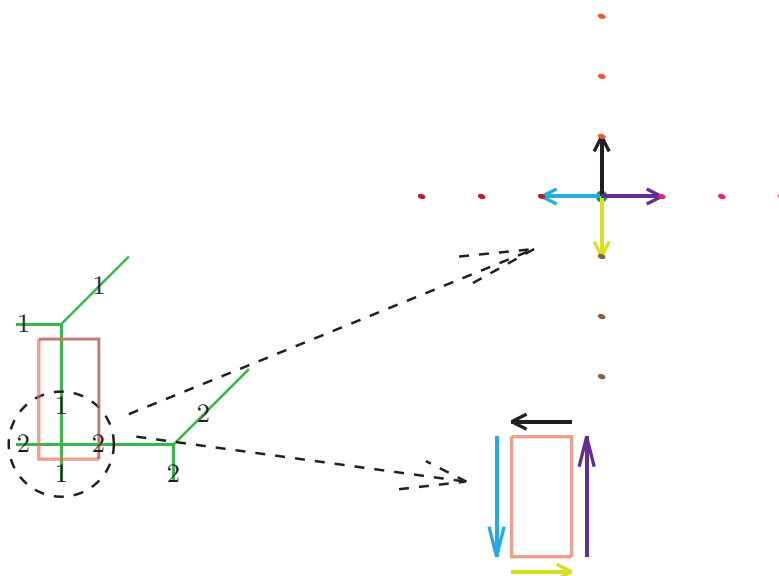


Figura 2.19: Un vértice en la Hipersuperficie Tropical junto con sus vectores primitivos y retículas y pesos correspondientes.

O lo que es lo mismo, uno le da toda la vuelta al poliedro del vértice, considerando los lados y pesos de cada cara (figura 2.19).

Reformularemos la Condición de Balance dada en el capítulo anterior.

**Definición 2.16** (*Condición de Balance*) Sea  $C$  un abanico bidimensional. Sea  $v$  un vértice de  $C$  y  $\sigma$  un rayo o segmento de recta que parte de  $v$ . Si se cumple

$$\sum_{\sigma} \omega_{\sigma} u_{\sigma} = 0,$$

donde  $u_\sigma$  es un vector primitivo de  $\sigma$ , decimos que  $C$  es un abanico tropical.

En realidad, ¡todas las hipersuperficies tropicales no degeneradas cumplen dicha condición en cada uno de sus vértices! Hay definiciones para dimensión mayor que 2 de abanico tropical (ver **Conceptos Preliminares**).

## 2.4. Teoremas de Bernstein y Bézout Tropicales.

En esta sección se verá una breve y básica introducción a la teoría de intersección tropical. Se dará la contraparte tropical de un resultado clásico en geometría algebraica: el Teorema de Bernstein.

### **Teorema 2.17** (*Bernstein*)

Sean  $h$  y  $g$  dos polinomios genéricos complejos en dos variables, entonces el número de soluciones de  $h(x, y) = g(x, y) = 0$  en  $(\mathbb{C}^*)^2$  contando multiplicidades es, a lo más, el Área Mixta  $\mathcal{M}(\Delta_h, \Delta_g)$ .

Y como caso particular, se tiene un resultado más conocido:

### **Teorema 2.18** (*Bézout*)

Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos curvas algebraicas complejas proyectivas suaves distintas de grados  $d_1$  y  $d_2$ , respectivamente. La intersección  $C_1 \cap C_2$  consiste de un conjunto de a lo más  $d_1 d_2$  puntos.

De hecho la igualdad se da contando a los puntos en la intersección con su multiplicidad local de intersección en  $C_1$  y  $C_2$ .

Es decir, dadas ciertas condiciones sobre las curvas y una definición adecuada de multiplicidad, podemos determinar de manera precisa la cantidad de puntos en su intersección. El teorema de Bernstein nos dice que esta cantidad está en función de las curvas.

Los siguientes párrafos ahondarán en cómo son las intersecciones de curvas tropicales y en cómo conviene definir la multiplicidad de un punto en su intersección.

Dados dos polinomios tropicales  $f, g \in \mathbb{T}[x, y]$  y sus curvas tropicales  $H_f$  y  $H_g$ , primero debemos preguntarnos cómo será su intersección.

Considere el polinomio producto " $f \cdot g$ ", que de aquí en adelante se denotará simplemente por  $fg$ . Por la definición del producto tropical de cualquier elemento de  $\mathbb{T}$  con  $-\infty = 0_{\mathbb{T}}$ ,  $\mathbb{T}$  es un dominio entero. Note que los exponentes de los monomios de  $fg$  son todas las sumas de un exponente de un monomio de  $f$  con un exponente de un monomio de  $g$ . Por ende, al igual que en el caso clásico,

$$\varepsilon(fg) = \varepsilon(f) \oplus \varepsilon(g),$$

donde  $\oplus$  es la Suma de Minkowski definida en el capítulo anterior.

Entonces utilizando la **Prop. 1.20** obtenemos que el Politopo de Newton de  $fg$  es la Suma de Minkowski de los politopos de Newton de  $f$  y  $g$ .

En particular, si  $x \in \mathbb{R}^n$  y denotamos por  $\Delta_x^f$  al politopo de  $x$  con respecto al polinomio  $f$ , entonces del razonamiento anterior obtenemos que

$$\Delta_x^{fg} = \Delta_x^f \oplus \Delta_x^g, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces  $\Delta_x^{fg}$  es un punto si y sólo si  $\Delta_x^f$  y  $\Delta_x^g$  son puntos. Recuerde que se puede pensar a la Curva Tropical de un polinomio como el conjunto de puntos cuyo poliedro no es un punto. De esto se sigue la siguiente proposición.

**Proposición 2.19** Sean  $f, g \in \mathbb{T}[x, y]$ . La Curva Tropical del producto de  $f$  y  $g$  es la unión de las Curvas Tropicales de  $f$  y  $g$ , en símbolos,

$$H_{fg} = H_f \cup H_g.$$

Ahora, como la curva tropical del producto es la unión de las curvas de sus factores, se deduce que al intersecar dos curvas tropicales podemos no obtener un conjunto finito. Considere

$$f(x) = "x + y + 0" \text{ y } g(x) = "x + y + 1".$$

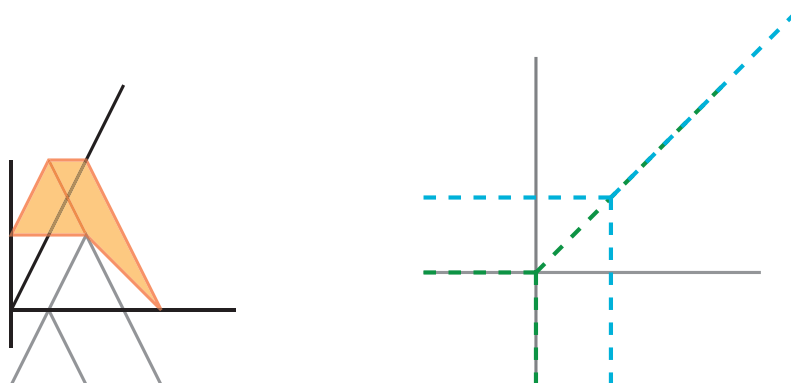
En este caso,  $H_f$  y  $H_g$  son las rectas tropicales con vértices en el origen y en el  $(1, 1)$ , respectivamente. Por otro lado, el polinomio producto es

$$\begin{aligned} "f(x)g(x)" &= "(x + y + 0)(x + y + 1)" \\ &= "x^2 + xy + 1x + xy + y^2 + 1y + x + y + 1" \\ &= "x^2 + (xy + xy) + y^2 + (1 + 0)(x + y) + 1" \\ &= "x^2 + xy + y^2 + 1(x + y) + 1" \\ &= "x^2 + xy + y^2 + 1x + 1y + 1" \end{aligned}$$

Por lo que  $\Delta_{fg}$  es un triángulo con vértices en  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$  y el origen. Éste viene equipado con una función regular que determina la subdivisión dual de  $fg$  y por ende, la forma su curva tropical (Figura 2.20).

Note que su intersección es la semirecta  $1 \leq y = x$ . Claramente si alguna de las dos rectas tropicales estuviera trasladada por un vector suficientemente pequeño, en una dirección adecuada, la intersección sería finita. Observe que hay muchas direcciones en la que esto se puede lograr y que en dado caso, la intersección sería siempre sólo un punto.

Esto motiva la siguiente definición.

Figura 2.20:  $H_{fg}$  es la unión de  $H_f$  y  $H_g$ .

**Definición 2.20** Sean  $f, g \in \mathbb{T}[x, y]$ . Decimos que  $H_f$  y  $H_g$  se intersecan transversalmente si  $H_f \cap H_g$  es un conjunto finito de puntos que no son vértices de  $H_f$  ni de  $H_g$ .

Que  $H_f$  y  $H_g$  sean transversales significa exactamente que ningún vértice de  $H_f$  pertenezca a  $H_g$  y viceversa. Entonces, todo vértice  $v$  de  $H_{fg}$  cumple una y sólo una de las siguientes propiedades:

- $v$  es un vértice de  $H_f$ .
- $v$  es un vértice de  $H_g$ .
- $v \in H_f \cap H_g$ .

Recuerde que a vértices en la curva tropical les corresponden politopos de dimensión máxima en la subdivisión dual (**Teo. 2.12**). Supongamos primero que  $v$  es un vértice de  $H_f$ . Entonces, salvo traslación,  $\Delta_v^f$  y  $\Delta_v^{fg}$  son el mismo politopo en  $\Gamma_f$  y en  $\Gamma_{fg}$ , respectivamente. Análogamente si  $v$  es un vértice de  $H_g$ .

Eso quiere decir que los vértices en el tercer caso van a dar a diferentes politopos que no formaban parte ni de  $\Gamma_f$  ni de  $\Gamma_g$ . Como esos son todos los vértices de  $H_{fg}$ , éstos deben ser todos los politopos de dimensión máxima en  $\Gamma_{fg}$ . Con esos terminamos de determinar a la subdivisión dual del politopo de Newton del producto (Figura 2.21).

Es decir, si  $v$  es un vértice de  $H_f$ , entonces  $v \notin H_g$ , por lo que  $\Delta_v^g$  es un punto, digamos  $x_0$ . Entonces

$$\Delta_v^{fg} = \Delta_v^f \oplus x_0 = \Delta_v^f + x_0,$$

una traslación de  $\Delta_v^f$ .

Por lo tanto, cada elemento de  $\Gamma_f$  y  $\Gamma_g$  tiene una copia en  $\Gamma_{fg}$ . Entonces, los demás elementos de dimensión máxima en  $\Gamma_{fg}$  son los dados por vértices en  $H_f \cap H_g$ .

Además, note que en ese caso,  $\Delta_v^f$  y  $\Delta_v^g$  tienen dimensión 1, son segmento de recta no paralelos y por lo tanto su suma de Minkowsky es siempre un paralelogramo.

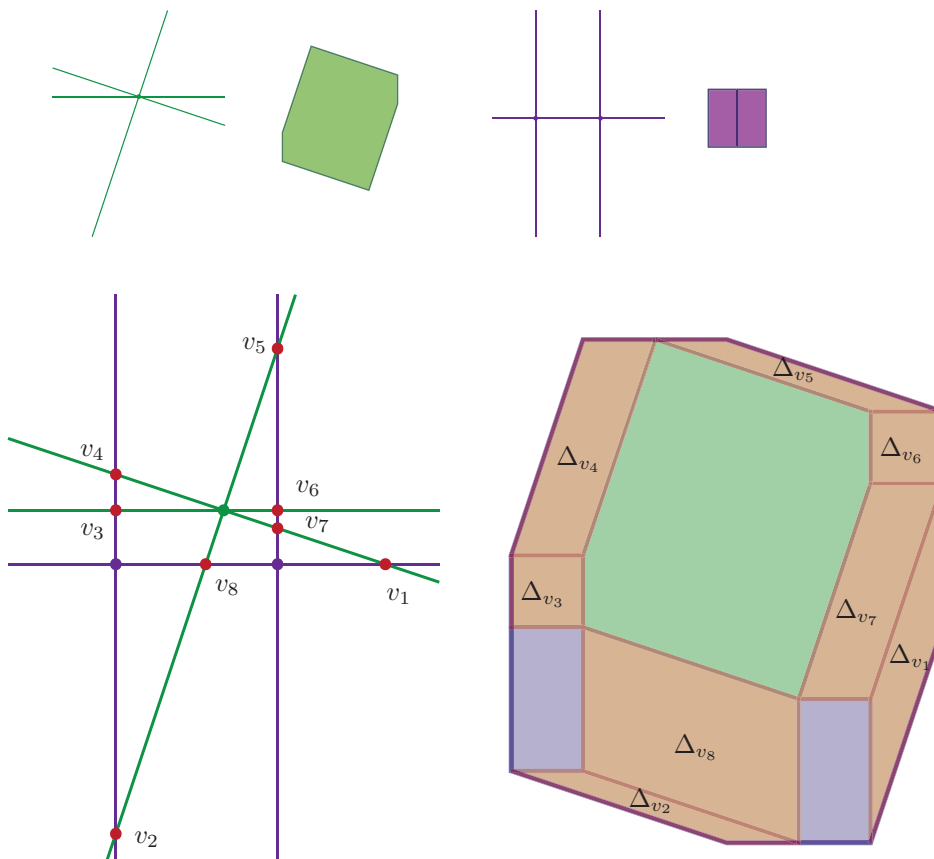


Figura 2.21: En este caso si  $v \in H_f \cap H_g$ ,  $\Delta_v$  es un paralelogramo en  $\Delta_{fg}$ .

Ahora, nos falta definir la multiplicidad de intersección de dos curvas transversales en un punto de la intersección.

**Definición 2.21** Sean  $f, g \in \mathbb{T}[x, y]$  dos polinomios tropicales cuyas curvas tropicales se intersecan transversalmente. Sea  $v \in H_f \cap H_g$ . Se define la multiplicidad de  $v$  en  $H_{fg}$ , denotada por  $\mu(v)$  como el área del paralelogramo  $\Delta_v^{fg}$ .

Con ésto es suficiente para probar el caso más sencillo de intersección de curvas tropicales.

**Teorema 2.22** (Bernstein)

Sean  $f, g \in \mathbb{T}[x, y]$  dos polinomios grado  $c$  y  $d$ , respectivamente. Supongamos que sus curvas tropicales  $H_f$  y  $H_g$  se intersecan transversalmente. Entonces

$$\sum_{v \in H_f \cap H_g} \mu(v) = \mathcal{M}(\Delta_f, \Delta_g),$$

siendo  $\mathcal{M}(\Delta, \Delta')$  el Área Mixta de  $\Delta$  y  $\Delta'$  y contando a cada punto con su multiplicidad de intersección.

**Demostración :**

Considere la curva tropical  $H_{fg}$ . Como bien sabemos,

$$\Delta_{fg} = \Delta_f \oplus \Delta_g.$$

Además, hay una correspondencia 1 a 1 entre los vértices de la curva tropical y los politopos de dimensión dos en la subdivisión dual de  $fg$ . En particular, a cada punto  $v \in H_f \cap H_g$  le corresponde un único paralelogramo  $\Delta_v$  cuya área es  $\mu(v)$ . Como los demás politopos bidimensionales en  $\Delta_{fg}$  corresponden a puntos en  $H_f$  y  $H_g$ , la suma de sus áreas es

$$\text{Area}(\Delta_f) + \text{Area}(\Delta_g),$$

por lo que la suma de las multiplicidades de los puntos en  $H_f \cap H_g$  es

$$\text{Area}(\Delta_{fg}) - \text{Area}(\Delta_f) - \text{Area}(\Delta_g),$$

que justo es el Área Mixta de  $\Delta_f$  y  $\Delta_g$ .

□

Como caso particular se tiene la versión tropical del Teorema de Bézout, pero necesitamos unas definiciones antes. Éstas son condiciones sobre las curvas, análogamente al caso clásico.

**Definición 2.23** Sea  $f \in \mathbb{T}[x, y]$ . Decimos que  $f$  es genérico de grado  $d$  si  $\Delta_f$  es el triángulo con vértices en  $(d, 0)$ ,  $(0, d)$  y el origen.

Llamaremos *Curva Genérica* a la curva tropical de un polinomio genérico. Denotando por  $\Delta_d$  al triángulo con vértices en  $(d, 0)$ ,  $(0, d)$  y el origen, ya estamos listos para probar la versión tropical del Teorema de Bézout:

**Corolario 2.24** (Bézout Tropical)

Sean  $f, g \in \mathbb{T}[x, y]$  dos polinomios genéricos de grado  $c$  y  $d$ , respectivamente. Supongamos que sus curvas tropicales  $H_f$  y  $H_g$  se intersecan transversalmente. Entonces la suma de las multiplicidades de los puntos en  $H_f \cap H_g$  es exactamente  $cd$ .



**Demostración :**

En este caso  $\Delta_{fg} = \Delta_c \oplus \Delta_d$ . El Teorema de Bernsteins nos dice que sólo basta calcular el Área Mixta de  $\Delta_c$  y  $\Delta_d$ .

Pero, como  $\Delta_c = \text{Conv}\{(c, 0), (0, c), (0, 0)\}$  y  $\Delta_d = \text{Conv}\{(d, 0), (0, d), (0, 0)\}$ , entonces

$$\Delta_{fg} = \text{Conv}\{(c + d, 0), (c, d), (c, 0), (0, c + d), (d, c), (0, c), (0, 0)\}$$

y éste último en realidad es  $\text{Conv}\{(c + d, 0), (0, c + d), (0, 0)\} = \Delta_{c+d}$ .

Es así que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\Delta_c, \Delta_d) &= \text{Area}(\Delta_{fg}) - \text{Area}(\Delta_c) - \text{Area}(\Delta_d) \\ &= \text{Area}(\Delta_{c+d}) - \text{Area}(\Delta_c) - \text{Area}(\Delta_d) \\ &= 1/2(c + d)^2 - 1/2c^2 - 1/2d^2 \\ &= cd \end{aligned}$$

□

## Capítulo 3

# Tropicalización.

En este capítulo se verá como la geometría tropical se aplica para estudiar problemas de geometría algebraica compleja.

Es decir, para estudiar ciertas propiedades de objetos algebraicos se definirán contrapartes en el mundo de la geometría tropical que revelen información sobre los objetos originales.

### 3.1. Amibas y sus Complementos.

**Definición 3.1** Sea  $f$  un polinomio en  $\mathbb{C}[x, y]$ . La hipersuperficie definida por  $f$  se define como

$$V_f = \{(x, y) \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid f(x, y) = 0\},$$

donde  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Definiremos la siguiente transformación de  $(\mathbb{C}^*)^2$  al plano real.

$$\begin{aligned} \text{Log} : (\mathbb{C}^*)^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow (\log|x|, \log|y|), \end{aligned}$$

donde  $\log$  es el logaritmo natural con base el irracional  $e$  y  $|a|$  denota el módulo del complejo  $a$ .

**Definición 3.2** Sea  $f \in \mathbb{C}[x, y]$ . Definimos la Amiba de  $f$  como

$$\mathcal{A}_f = \text{Log}(V_f).$$

Así como en el caso de polinomios tropicales, si  $f(x, y) = \sum c_{pq}x^p y^q$ , consideramos al conjunto de exponentes de  $f$  como  $\varepsilon(f) = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid c_{pq} \neq 0\}$  y al Politopo de Newton  $\Delta$  de  $f$  como la envolvente convexa de  $\varepsilon(f)$ .

**Ejemplo 3.3**

Sea  $f(x, y) = x - y - 1$ . Por el momento fijémonnos exclusivamente en la parte real de  $V_f$ . Consta de los puntos en la recta que pasa por  $(1, 0)$  y  $(0, -1)$  excepto estos dos últimos. La Amiba de  $f$  es aplicar  $\text{Log}$  a los puntos  $(|x|, |x - 1|)$ , los cuales son dos rayos y un segmento. Note que al acercarse a  $(1, 0)$  nos acercamos al eje  $y$  asintóticamente; en puntos cercanos a  $(0, 1)$  obtenemos puntos cercanos al eje  $x$  y al hacer crecer el valor absoluto de  $x$ , la imagen de  $(|x|, |x - 1|)$  bajo  $\text{Log}$  se acerca a la diagonal (Figura 3.1).

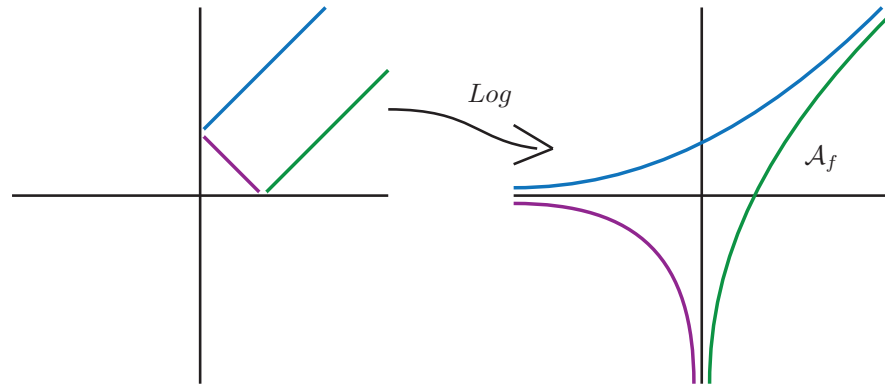


Figura 3.1: Parte Real de la Amiba de una Hipersuperficie.

Algunas observaciones de las amibas:

- Son bidimensionales, al ser imagen de una superficie en un espacio real 4-dimensional.
- Son conexas, porque son la imagen bajo una función continua de un conexo.
- Son no acotadas. Tomemos un punto en la intersección del polinomio con alguno de los ejes. Una vecindad  $V$  suficientemente pequeña, a través del mapeo  $\text{Log}$ , manda a dichos puntos a infinito. Llamaremos un *tentáculo* a las imágenes de dichos puntos que se acercan a  $\infty$  o  $-\infty$  (Figura 3.2).
- Son conjuntos cerrados del plano.
- Cada tentáculo tiene cabida para un rayo al que se acerca asintóticamente.
- Dichos rayos corresponden a lados del polígono de Newton y, como en el caso tropical, son ortogonales a sus lados correspondientes.
- Por cada lado de  $\Delta$ , hay por lo menos un rayo y el número máximo de rayos está dado por la longitud entera del lado correspondiente.

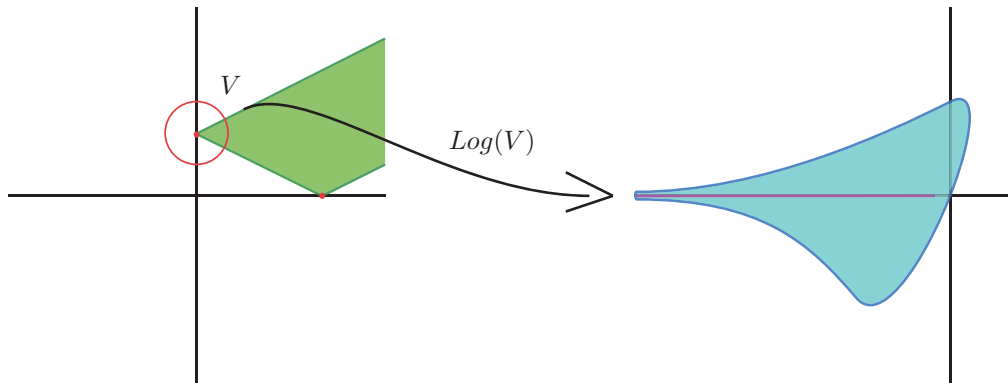


Figura 3.2: A la izquierda, el módulo de la curva algebraica, a la derecha, un tentáculo de su amiba con su rayo correspondiente.

- Tienen área finita. Más aún,

$$Area(\mathcal{A}) \leq \pi^2 Area(\Delta).$$

Las amibas cuya área cumplen la igualdad son particularmente especiales, son llamadas *Curvas Simples de Harnack*. Tienen la particularidad de tener el número máximo de componentes en  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}$  (Figura 3.3).

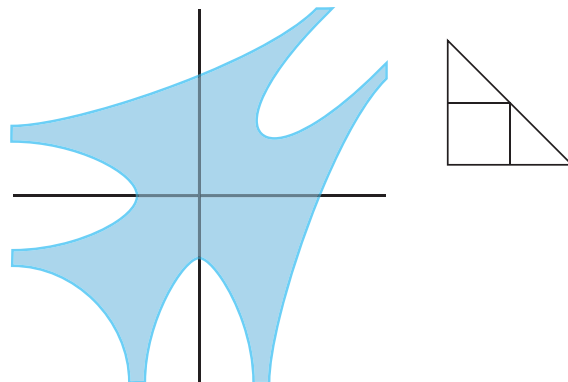


Figura 3.3: Curva Simple de Harnack de segundo grado.

Del complemento de una amiba:

- Cada componente conexa de  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}$  es convexa.
- Existe una función 1 a 1 entre las componentes del complemento y los puntos en  $\varepsilon(f)$ . Por ende, el número máximo de componentes conexas no excede al número de puntos enteros en el Polígono de Newton.

- Algunas de sus componentes conexas son acotadas y ellas corresponden a puntos enteros interiores de  $\Delta$ . Sin embargo, hay puntos interiores que no corresponden a ninguna componente conexa.
- Solamente los vértices de  $\Delta$  forzosamente corresponden a componentes del complemento de la amiba. Por lo tanto, el número mínimo de dichas componentes es el número de vértices en  $\Delta$ .

### 3.2. Familias de Amibas y sus Límites.

Queremos asociarle un objeto tropical a la amiba de una variedad algebraica. Para ésto definiremos una transformación que “adelgace” a la amiba.

$$\begin{aligned} \text{Log}_t : (\mathbb{C}^*)^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow \text{Log}_t(x, y) = \left( \frac{\log(|x|)}{\log(t)}, \frac{\log(|y|)}{\log(t)} \right) = \frac{1}{\log(t)} \text{Log}(x, y) \end{aligned}$$

Como se hizo anteriormente, si  $f \in \mathbb{C}[x, y]$  es un polinomio y  $V_f$  es su variedad correspondiente, definimos su amiba como  $\mathcal{A}_t = \text{Log}_t(V_f)$ . Note que a medida que  $t$  crece, la frontera de los tentáculos de  $\mathcal{A}_t$  se va acercando a dichos rayos.

**Definición 3.4** *Definimos el límite de la familia de amibas como*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{A}_t.$$

Debemos tratar con cuidado dicho límite, la palabra nos da una idea de convergencia y necesitamos hablar de convergencia aunque sea en subconjuntos del plano. Ésta se obtendrá de una métrica en el conjunto de subconjuntos cerrados: la *Métrica de Hausdorff* (ver **Def. 1.23**).

Es, en este sentido, que nos referimos al límite de una familia de amibas  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{A}_t$ .

Dicho límite siempre es un abanico tropical. El problema es que no toma en cuenta ‘hoyos’, es decir, las componentes acotadas del complemento de la amiba. También puede suceder que aplaste varios tentáculos en un solo. Se pierde demasiada información (Fig. 3.4).

Por otro lado, en el momento en que se le pone un subíndice a la variedad algebraica  $V$ , se está pensando que se tiene toda una familia de variedades algebraicas o que se tiene una sola que va cambiando con respecto al parámetro  $t$ .

Empecemos con una hipersuperficie  $V$ . Ésta depende únicamente del polinomio  $f$  que la define, entonces para que  $V_t$  vaya cambiando con respecto a  $t$ , el polinomio  $f$  tendría que ir cambiando con respecto a ese mismo parámetro  $t$ .

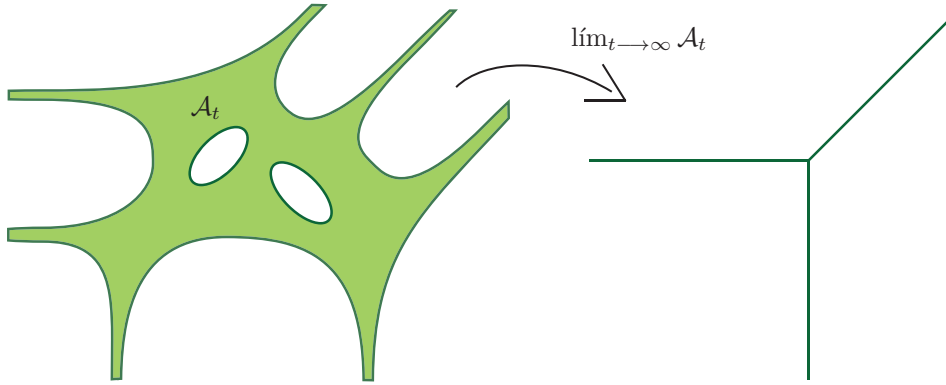


Figura 3.4: Tomar el límite de una amiba es proceso demasiado agresivo.

Es decir, ya no basta pensar en el anillo de polinomios  $\mathbb{C}[x, y]$ , hay que meter polinomios cuyos coeficientes sean, por lo menos, polinomios en una variable  $t$ . Resulta que serán algo más que eso. Veamos un ejemplo antes.

### Ejemplo 3.5

Tomemos de nuevo  $f(x, y) = x - y - 1$ . Entonces,  $\mathcal{A}_t = \{Log_t(|x|, |x - 1|) \mid x \in \mathbb{C}\}$  y notemos que el punto  $(x_0, y_0) \in V_f$  con  $x_0 = 1/2(1 + \sqrt{3}i)$  y  $y_0 = 1/2(-1 + \sqrt{3}i)$  va a dar al único vértice del límite de  $\mathcal{A}_t$ :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} Log_t(x_0, y_0) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\log|x_0|}{\log(t)}, \frac{\log|y_0|}{\log(t)} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{0}{\log(t)}, \frac{0}{\log(t)} \right) \\ &= (0, 0) \end{aligned}$$

De hecho, si  $\mathcal{A}$  es el límite de la familia de amibas, los complejos  $x$  en el círculo unitaria van a dar a puntos de la forma  $(0, s)$  en  $\mathcal{A}$  y los de la forma  $|x - 1| = 1$  van a dar a puntos  $(s, 0)$  en  $\mathcal{A}$ .

Note que, en la práctica, este proceso es complicado. Es difícil obtener el límite de una familia de amibas. Resulta que hay una forma de llegar al límite sin pasar por la amiba y luego calcularlo explícitamente usando a la Geometría Tropical. De esa forma la geometría tropical se aplica en la geometría algebraica compleja.

La idea, como el argumento puesto arriba sugiere, es expandir el campo de coeficientes. Ya no sólo consideraremos a  $\mathbb{C}$ , sino por lo menos a  $\mathbb{C}[t]$ . Neces-

tamos un campo que contenga todas las soluciones de ecuaciones, por ejemplo, del estilo

$$x^2 = 1 + t$$

en dicho caso, la solución está en términos de Series de Laurent:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} t^k,$$

donde  $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$ ,  $r \in \mathbb{R}$  y  $0 < t < 1$ . Pero dichas series no son suficientes, podríamos tener ecuaciones de la forma:

$$x^2 = (t + t^2)^3,$$

dichas ecuaciones no serían Series de Laurent, habría que permitir exponentes fraccionarios, pero acotados y con un denominador en común,

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2/3}{k} t^{(3k+2)/3},$$

con  $0 < t < 1$ . Además, vamos a querer poder evaluar dichas series en ciertos reales  $t$  cercanos al cero, por lo que habrá que pedir además eso. Todo esto nos lleva a lo siguiente.

### 3.3. Campo de Series de Puiseux Generalizado.

**Definición 3.6** Sea  $F$  un campo. Definimos el Campo de Series de Puiseux como

$$\mathcal{P}\{t\} := \left\{ \phi : U \rightarrow \mathbb{R} \mid \phi(t) = \sum_{i \in I} a_i t^i, a_i \in F^*, i \in I \subset \mathbb{R}, t \in U \right\},$$

donde  $U \subseteq \mathbb{R}$  es una vecindad del 0 donde  $\phi$  converge e  $I$  está bien ordenado. Es decir, todo subconjunto de  $I$  tiene un primer elemento.

Cabe hacer notar que el Campo de Series de Puiseux sólo considera series con exponentes racionales que tienen un denominador en común. De ahí que el definido aquí es una generalización. Se puede probar que si  $F$  es algebraicamente cerrado y de característica cero,  $\mathcal{P}\{t\}$  es la cerradura algebraica de  $F((t))$ , el Campo de Series de Laurent de  $F$ .

Entonces, en lugar de una familia de polinomios, ya tenemos *un solo* polinomio que guarda en sus coeficientes la información de toda una familia. Necesitamos poderle asociar algo en  $\mathbb{T}$  que sea el símil del límite de la familia de amibas original.

Es decir, daremos una función de  $\mathcal{P}\{t\}$  a  $\mathbb{T}$  que oculte el proceso de límite de una familia de curvas algebraicas con coeficientes en un campo  $F$ . Después se enunciará un teorema que asegure obtener exactamente lo mismo usando series o usando límites de familias de amibas.

**Definición 3.7** *Sea  $K$  un campo. Llamaremos una valuación en  $K$  a la función*

$$\text{val} : K \longrightarrow \mathbb{T}$$

que satisfice  $\forall a, b \in K$ :

1.  $\text{val}(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$ .
2.  $\text{val}(ab) = \text{val}(a) + \text{val}(b)$ .
3.  $\text{mín}\{\text{val}(a), \text{val}(b)\} \leq \text{val}(a + b)$

Si  $F = \mathbb{C}$ , notemos las siguientes propiedades de la series de Puiseux con respecto al límite y al logaritmo en base  $t$ . Sea  $j \in I$  el elemento mínimo de  $I$  y  $\phi(t) = \sum_{i \in I} a_i t^i \in \mathcal{P}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \log_t(\phi(t)) &= \lim_{t \rightarrow 0} \log_t \left( \sum_{i \in I} a_i t^i \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \log_t \left( t^j \sum_{i \in I} a_i t^{i-j} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \log_t(t^j) + \log_t \left( \sum_{i \in I} a_i t^{i-j} \right) \\ &= j + \lim_{t \rightarrow 0} \log_t \left( \sum_{i \in I} a_i t^{i-j} \right) \\ &= j \end{aligned}$$

donde  $i - j \geq 0$ .

Porque a medida de que  $t$  se acerca a cero, dicha serie se acerca al valor del coeficiente del exponente más pequeño, es decir, si  $t \rightarrow 0$ ,

$$\log_t \left( \sum_{i \in I} a_i t^{i-j} \right) \longrightarrow \log_t(a_j) \longrightarrow 0.$$

Además, si  $j' \in I'$  es el elemento mínimo de  $I'$  y  $\varphi(t) = \sum_{i' \in I'} a_{i'} t^{i'} \in \mathcal{P}$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \log_t(\varphi(t)\phi(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \log_t(\varphi(t)) + \lim_{t \rightarrow 0} \log_t(\phi(t)) = j' + j.$$



Estas observaciones conllevan a la siguiente valuación en  $\mathcal{P}$ :

$$\begin{aligned} \text{val} : \quad \mathcal{P} &\longrightarrow \mathbb{T} \\ \sum_{i \in I} a_i t^i &\longrightarrow \min(I) \end{aligned}$$

es decir, enviar al mínimo exponente de la serie, el correspondiente al elemento mínimo de  $I$ .

Definiendo  $\text{val}(0) = \infty$ , basta probar  $\mathcal{B}$ . para que  $\text{val}$  sea una valuación. Eso se sigue de observar que la igualdad se tiene cuando  $\text{val}(\varphi(t)) \neq \text{val}(\phi(t))$  o  $a_{j'} \neq -a_j$ , en otro caso, dada la definición de  $\mathcal{P}$ ,  $\text{val}(\varphi(t) + \phi(t))$  debe ser estrictamente mayor que  $\text{val}(\varphi(t))$  y  $\text{val}(\phi(t))$ .

Podemos suponer que  $\text{val}$  es una función que contiene al 1, ya que si  $\text{val}$  es una valuación en  $K$ , entonces  $1/\lambda \text{val}$  es una valuación en  $K$ ,  $\forall \lambda > 0$ .

Tomando  $-\text{val}$  en lugar de  $\text{val}$ , hemos encontrado exactamente cómo asociarle a polinomios con coeficientes en  $\mathcal{P}$  objetos tropicales:

**Definición 3.8** Sea  $f(x, y) = \sum_{\phi \in \varepsilon(f)} \phi(t) x^i y^j \in \mathcal{P}\{t\}[x, y]$  un polinomio de dos variables con coeficientes en el Campo de Series de Puiseux. Se define la Tropicalización de  $f$ ,  $\text{Trop}_f \in \mathbb{T}[x, y]$  como el polinomio dado por

$$\text{Trop}_f(x, y) = \sum_{\phi \in \varepsilon(f)} -\text{val}(\phi) x^i y^j.$$

$\text{Trop}_f$  es un polinomio cuyos coeficientes constan de lo único que quedaba al tomar el límite de los logaritmos en base  $t$ .

Pero así como se hizo en  $\mathbb{C}[x, y]$  podemos pensar en la amiba asociada a un polinomio en  $\mathcal{P}[x, y]$ , basta definir una norma en el Campo de Series de Puiseux y tomar el logaritmo en base  $t$ .

Es así que si  $\phi(t) = \sum_{i \in I} a_i t^i$  podemos definir la siguiente norma en  $\mathcal{P}$ :

$$\begin{aligned} | \cdot |_{-\text{val}} : \quad \mathcal{P} &\longrightarrow \mathbb{T} \\ |\phi|_{-\text{val}} &\longrightarrow e^{-\text{val}(\phi)} \end{aligned}$$

Dicha norma cumple una versión *no Arquimedea* de la desigualdad del triángulo:

$$|\phi + \varphi|_{-\text{val}} \leq \max\{|\phi|_{-\text{val}}, |\varphi|_{-\text{val}}\}.$$

Recordemos que si  $|\cdot|$  denota el valor absoluto,  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $|a| < |b|$ , la Propiedad Arquimedea nos asegura que existe un natural  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$|b| < n|a|.$$

Observe que dicha propiedad no se cumple en absoluto en  $\mathcal{P}$ . Si  $\phi, \varphi \in \mathcal{P}$ ,  $|\phi|_{-\text{val}} < |\varphi|_{-\text{val}}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$n|\phi|_{-\text{val}} = |\phi + \phi + \dots + \phi|_{-\text{val}} = |\phi|_{-\text{val}} < |\varphi|_{-\text{val}}.$$

Como se hizo anteriormente para curvas algebraicas complejas, podemos definir la *Amiba No Arquimedea* sobre  $\mathcal{P}$ . Sea  $V_{\mathcal{P}} \subseteq (\mathcal{P}^*)^n$  una variedad algebraica. Definimos, de manera análoga, el mapeo logaritmo como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Log}_{\mathcal{P}} : \quad (\mathcal{P}^*)^n &\longrightarrow (\mathbb{R})^n \\ \text{Log}_{\mathcal{P}}(\phi_1, \dots, \phi_n) &\longrightarrow (\log|\phi_1|_{-val}, \dots, \log|\phi_n|_{-val}) \end{aligned}$$

Note que, en realidad,  $(\log|\phi_1|_{-val}, \dots, \log|\phi_n|_{-val}) = (-val(\phi_1), \dots, -val(\phi_n))$ .

**Definición 3.9** Sea  $f \in \mathcal{P}[x, y]$ . Sea  $V_f$  su variedad algebraica correspondiente. Definimos la *Amiba no Arquimedea* de  $f$  como

$$\mathcal{A}_f = \text{Log}_{\mathcal{P}}(V_f \setminus (\mathcal{P}^*)^2).$$

El hecho de que dicha amiba es en realidad una curva tropical que guarda la información de  $f$  queda expresado en el siguiente teorema:

**Teorema 3.10** (Kapranov) Sea  $f \in \mathcal{P}[x, y]$ . La *Hipersuperficie de la Tropicalización* de  $f$  coincide con su *Amiba (no Arquimedea)*, en símbolos,  $H_{\text{Trop}_f} = \mathcal{A}_{V_f}$ .

Finalmente la conexión entre los 3 mundos: Sea  $f$  un polinomio con coeficientes en el Campo de Series de Puiseux.

Por un lado, cada  $t$  en una vecindad suficientemente cercana al 0 obtenemos un polinomio  $f_t \in \mathbb{C}[x, y]$  que define una curva algebraica compleja. Por lo que dicha vecindad del 0 define una familia de curvas algebraicas  $V_{f_t}$ , una familia de amibas  $\mathcal{A}_t$  y un límite  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{A}_t$  en  $\mathbb{T}[x, y]$  (En este último límite se piensa a  $t = 1/k$ , donde  $k$  es el parámetro del Campo de Series de Puiseux).

Por otro lado,  $f$  tiene su correspondiente *Amiba No Arquimedea*, denotada  $\mathcal{A}_f$ . Resulta que estamos hablando de la misma curva tropical:

**Teorema 3.11** (Viro Patchworking) Sea  $V_t$  una variedad algebraica compleja con parámetro  $t$  y  $V_{\mathcal{P}}$  su correspondiente variedad en  $(\mathcal{P}^*)^2$ . Entonces la *Amiba no Arquimedea*  $\mathcal{A}(V_{\mathcal{P}})$  es el límite de las amibas  $\mathcal{A}(V_t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  con respecto a la métrica de Hausdorff en compactos. En particular,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{A}(V_t)$  existe en ese sentido.

Tanto el Teorema de Kapranov como el de Viro se pueden extender a Ideales de polinomios, además de que se puede generalizar a  $n$  indeterminadas.

# Bibliografía

- [1] Andreas Gathmann, *Tropical Algebraic Geometry*, to appear in Jahresbericht der DMV, 2006.
- [2] Bernd Sturmfels, Diane Maclagan, *Introduction to Tropical Geometry*, in progress, 2009.
- [3] Jürgen Richter-Gebert, Bernd Sturmfels, Thorsten Theobald, *First Steps in Tropical Geometry*, to appear in Proc. Conference on Idempotent Mathematics and Mathematical Physics, 2006.
- [4] Lars Allermann, Johannes Rau, *First Steps in Tropical Intersection Theory*, to appear in Mathematische Zeitschrift, 2009.
- [5] Ilia Itenberg, Grigory Mikhalkin, Eugenii Shustin, *Tropical Algebraic Geometry*, Birkhäuser Verlag, Reading, MA, 2009.