UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTADÍSTICA APLICADA A MODELOS DE PÉRDIDAS AGREGADAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

P R E S E N T A :

ANDREA IRENE MIRANDA PORTELA

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. JOSÉ SALVADOR ZAMORA MUÑOZ

ENERO 2013

1. Datos del alumno
Miranda
Portela
Andrea Irene
51 71 38 11
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
304026573

2. Datos del tutor
M. en C.
José Salvador
Zamora
Muñoz

3. Datos del sinodal 1
Mat.
Margarita Elvira
Chávez
Cano

4. Datos del sinodal 2
Act.
Jaime
Vázquez
Alamilla

5. Datos del sinodal 3
Act.
Erick
Mier
Moreno

5. Datos del sinodal 4
Act.
Ángel Manuel
Godoy
Aguilar

3. Datos del trabajo escrito
ESTADÍSTICA APLICADA A MODELOS DE PÉRDIDAS AGREGADAS
178 p.
2013

Índice General

Agradecimientos

Después de un ciclo extenso de preparación académica quiero agradecer a mi alma máter la Universidad Nacional Autónoma de México, que ha sido un lugar relevante en mi vida y un sitio ideal para mi desarrollo integral como ser humano. Gran parte de este agradecimiento pertenece a los profesores que desde la escuela preparatoria y durante toda la carrera universitaria me han dotado de grandes conocimientos y enseñanzas.

Quiero agradecer por la dirección de esta tesis al M. en C. Salvador Zamora por su apoyo incondicional en todo el proceso que conllevó a la culminación del presente trabajo, por su tiempo y sus conocimientos. Sin duda un reconocimiento especial a mis sinodales Mat. Margarita Elvira Chávez Cano, Act. Jaime Vázquez Alamilla, Act. Erick Mier Moreno y Act. Ángel Manuel Godoy Aguilar, por su apoyo con la revisión de mi trabajo.

Por otra parte en un ámbito más personal quiero dar gracias a mi familia, ellos que han sido testigos de mi desarrollo académico desde su comienzo hasta el término de mi carrera universitaria. Agradezco a mis hermanos Fabio y Alejandro, a mi papá Alejandro Miranda, pero sobre todo doy gracias a mi mamá Linda Portela quien siempre será un ejemplo de mujer, de persona y de madre, a ella que bajo cualquier circunstancia siempre ha estado conmigo como una gran compañera y amiga, dedico el presente trabajo.

Como parte de los agradecimientos familiares, quiero mencionar a mi segunda familia Romellón Portela, personas valiosas con quienes he compartido grandes momentos, gracias a Claudia Portela, Jorge Romellón, así como a mis primos Jorge y Daniel.

Finalmente quiero agradecer a mis amigos con quienes he aprendido diversas cosas de la vida, gracias a ellos por estar conmigo, por su amistad y por su ayuda también en el desarrollo de este trabajo, también a mis compañeros de trabajo y a todas las personas que estuvieron involucradas directa o indirectamente durante la realización del mismo.

Introducción

El presente trabajo fue realizado con la intención de complementar el estudio actuarial basado en temas estadísticos y probabilísticos que se dirijan a modelos para la medición de riesgos orientados al sector asegurador. Esta intención emana de la necesidad de dar a conocer al estudiante de la carrera de Actuaría un poco más acerca de las aplicaciones que tienen las materias de probabilidad y estadística con otras como lo son matemáticas actuariales del seguro de daños y teoría del riesgo, además de explorar temas que actualmente se deben considerar para su aplicación.

Para poder alcanzar este objetivo, se realizó una selección de temas y modelos bajo los cuales se pretenden conocer los riesgos a los que se expone una compañía aseguradora. Para esto se consultaron diversos libros y manuales de certificaciones internacionales que en conjunto y con su información cubren las necesidades que se plantean. Por otro lado, y con la finalidad de interactuar con un programa computacional estadístico que complemente la parte teórica de los modelos, se implementa el uso del programa R para los cálculos del trabajo.

Esta tesis está organizada en cuatro capítulos, que son los siguientes: el capítulo 1 contiene las bases de probabilidad que se utilizan para el desarrollo de los modelos de pérdidas agregadas descritos en el capítulo 2, estos temas involucran definiciones de las distribuciones tanto discretas como continuas que se estarán presentando a lo largo de los capítulos de este trabajo, a su vez, este capítulo introduce definiciones inherentes a las modificaciones de los contratos de seguros que se realizan en este sector y que influyen en el comportamiento de las distribuciones anteriormente mencionadas. Posteriomente, en los capítulos 2 y 3 se dan a conocer los modelos que siguen las distribuciones de las pérdidas agregadas, así como los métodos que se utilizan para describir estas distribuciones y, con base en ello, se puedan tener las herramientas necesarias para realizar los cálculos internos que requieran las aseguradoras. Es importante mencionar que la teoría se apoya de varios ejemplos que ayudan a ilustrar las ideas dentro de la misma. Finalmente, en el capítulo 4 se muestra la aplicación de la teoría presentada en este trabajo, utilizando una base de datos confidencial, que refleja la situación de los datos que se manejan en las compañías aseguradoras.

Como complemento, en las últimas secciones se adiciona un anexo de probabilidad y estadística que servirá como apoyo en el desarrollo de cada capítulo y también contiene los códigos en R mediante los cuales se realizan las aplicaciones del presente trabajo.

Capítulo 1

Aspectos introductorios

Existen diferentes tipos de riesgos en todos lados, comenzando por los riesgos que conllevan actividades cotidianas como cruzar una avenida, bajar unas escaleras o conducir un automóvil, pero es importante tener claro que el término *riesgo* concretamente se refiere a la posibilidad de que ocurra un evento incierto y que, como consecuencia, pueda dañarnos o perjudicarnos de alguna manera. Por esta razón, es lógico pensar que, en la mayoría de las ocasiones, se busque reducir, evitar o transferir ciertos riesgos, de tal manera que es necesario identificar los riesgos y posteriormente tratar de medirlos para controlarlos y manejarlos, sujetos a las necesidades que se tengan y a las posibilades de realizar este proceso.

En lo que concierne al ámbito actuarial, existen diversas formas de llevar a cabo un control, medición y análisis de riesgos, pero principalmente en este trabajo interesan aquéllos que impliquen pérdidas económicas ocasionadas por diferentes eventos. Por ejemplo, en el ámbito financiero uno de los objetivos que interesan es obtener el rendimiento deseado de las inversiones que se realicen. Para ello existen factores que se deben considerar al momento de analizar la información y tomar una decisión. Entre éstos está el estudio de ciertos riesgos como el de mercado y el de liquidez, etc. Ahora bien, si nos concentramos en el sector asegurador, que es el que concierne a este trabajo, el riesgo que se considerará, está enfocado a las pérdidas que absorben las compañías aseguradoras mediante sus *pólizas de seguros* emitidas; esto no es más que un contrato por medio del cual la aseguradora se protege de las futuras pérdidas que pudiera contraer como consecuencia de cubrir su portafolio de asegurados, ya sea a través de asegurar sus bienes materiales o personas.

Entonces, el conjunto de pérdidas que tiene una compañía aseguradora es uno de los principales elementos que la aquejan, de tal forma que calcular los costos de dichas pérdidas es una tarea díficil, y es por esta situación que la Actuaría se ha dedicado a proponer modelos que ayuden a realizar de mejor manera estos cálculos, mediante modelos matemáticos y numéricos, que nos ayuden a obtener resultados más cercanos a la realidad. Evidentemente, en este tipo de problemas el Actuario necesita saber la probabilidad de ocurrencia en diferentes tipos de siniestros, pues con ello intentará realizar cálculos para conocer, a futuro, la situación económica de la aseguradora y los aspectos que se deben tener en cuenta de conformidad al comportamiento de las pólizas.

En particular, para llevar a cabo cualquier tipo de modelo que se requiera, existen dos aspectos que se deben considerar: el primero de ellos se relaciona con el número esperado de reclamos que se presenten en un campo específico del seguro y en un tiempo determinado, este punto se denominará como *Frecuencia.* El segundo aspecto a considerar para evaluar los riesgos asociados a los contratos de seguros, es la *Severidad* que representa el costo absorbido por la compañía de los eventos asegurados.

De tal forma que la frecuencia y la severidad son indispensables para la valuación de los contatos de seguros, debido a que la combinación de estos elementos representa las pérdidas que debe afrontar la aseguradora para el portafolio de las pólizas que tiene aseguradas, y que reciben el nombre de *Pérdidas Agregadas.* En este sentido, el principal objetivo es desarrollar modelos actuariales basados en conceptos probabilísticos y estadísticos que ayuden a medir las pérdidas que se tengan en este campo, utilizando como medio la teoría de *Modelos de Pérdidas Agregadas.*

1.1 Distribuciones

Como introducción a la teoría de los modelos que se desarrollan en este trabajo, el primer punto que se plantea está asociado al valor esperado de la pérdida agregada por asegurado para un periodo determinado, que es conocido como *Prima Pura,* en donde están involucrados los conceptos, tanto de frecuencia como de severidad. Supóngase que en promedio 40 reclamaciones son recibidas un periodo anual y que el promedio de esas reclamaciones es de \$3,000, si asumimos que la frecuencia y la severidad son independientes, la prima pura sería de \$120,000. Por otro lado, dado el carácter positivo de los montos de reclamación, éstos se modelarán con variables aleatorias que tienen soporte en $\mathbb{R}^+$ o en algún subconjunto del mismo.

En este primer capítulo se introducen las distribuciones (modelos) más comunes para modelar tanto el tamaño de las pérdidas (severidad) como del número de reclamaciones en un periodo determinado (frecuencia). Evidentemente, en ambos casos el objetivo es encontrar distribuciones continuas y discretas que mejor ajusten a los tipos de datos, dependiendo de las circunstancias presentadas.

Las definiciones que se presentan a continuación caracterizan a algunas de las distribuciones que se estudiarán en este trabajo y por lo tanto es importante conocerlas.

Definición 1 *Una* distribución paramétrica *es una función de distribución que está determinada de acuerdo a uno o varios valores llamados* parámetros *los cuales son fijos y finitos.*

Esto sirve para todas las funciones de distribución conocidas, por ejemplo, la distribución Exponencial la caracteriza su parámetro $(1/\theta)$.

Definición 2 *Una* distribución de escala *es una distribución paramétrica que tiene la propiedad de que al multiplicar la variable aleatoria por una constante positiva, la distribución resultante de la nueva v.a. pertenece a la misma familia de distribuciones.*

Por ejemplo, la distribución Pareto (α, θ) es una distribución de este tipo, que posee un *parámetro de escala* θ, que al multiplicarse por una constante c, la nueva v.a. resulta una Pareto con parámetros $(\alpha, c\theta)$.

Demostración: Si $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \theta)$, $Y = cX$ variable aleatoria tiene la siguiente distribución:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(cX \leq y) = \mathbb{P}\left(X \leq \tfrac{y}{c}\right) = F_X\left(\tfrac{y}{c}\right)$$

Esto es $F_X\left(\frac{y}{c}\right) = 1 - \left[\dfrac{\theta}{\frac{y}{c} + \theta}\right]^{\alpha} = 1 - \left[\dfrac{c\theta}{y + c\theta}\right]^{\alpha}$ que es la función de distribución de una Pareto $(\alpha, c\theta)$.

1.1.1 Algunas distribuciones continuas

Determinar la familia de distribución a la que pertencen los datos de una muestra es uno de los objetivos de este trabajo, por lo cual este punto se restringe a mencionar algunas de las distribuciones que modelan la severidad, sujetas a las condiciones de tener soporte en los reales positivos. Entre ellas, están las distribuciones Exponencial, Gamma, Beta, Pareto, Pareto Inversa, Weibull, Lognormal y Gumbel.

A manera de resumen, a continuación se muestran las funciones de densidad de probabilidades, de distribución, de supervivencia, de riesgo, así como las características numéricas de algunas de las distribuciones continuas. Adicional a ello se incorporan los gráficos comparativos de sus funciones.

Cabe mencionar, que al interior del apéndice A se incluye información de las características para estas distribuciones, en donde se consideran algunas de las modificaciones de cobertura a las variables aleatorias.

Exponencial $(1/\theta)$	Gamma (α,θ)	Beta (a,b)
$f_X(x)=\dfrac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta}$; $0<x<\infty$	$f_X(x)=\dfrac{(x/\theta)^{\alpha}e^{-\frac{x}{\theta}}}{x\Gamma(\alpha)}$; $0<x<\infty$	$f_X(x)=\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$; $0<x<1$
$F_X(x)=1-e^{-\frac{x}{\theta}}$	$F_X(x)=\Gamma(\alpha;\frac{x}{\theta})$	$F_X(x)=\beta(a,b;x)$
$S_X(x)=e^{-\frac{x}{\theta}}$	$S_X(x)=1-\Gamma(\alpha;\frac{x}{\theta})$	$S_X(x)=1-\beta(a,b;x)$
$h_X(x)=1/\theta$	$\mathbb{E}(X)=\alpha\theta$	$\mathbb{E}(X)=\dfrac{a}{a+b}$
$\mathbb{E}(X)=\theta$	$Var(X)=\theta^2\alpha$	$Var(X)=\dfrac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$
		Donde
$Var(X)=\theta^2$	$M_X(t)=(1-\theta t)^{-\alpha}; t<\frac{1}{\theta}$	$\beta(a,b;x) := \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt;$ $a>0, b>0, 0<x<1$
	Donde	o bien
$M_X(t)=(1-\theta t)^{-1}; t<\frac{1}{\theta}$	$\Gamma(\alpha;\frac{x}{\theta}) = \int_0^x \dfrac{(\frac{y}{\theta})^{\alpha}e^{-\frac{y}{\theta}}}{y\Gamma(\alpha)}dy$	$\beta(a,b) := \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$

Pareto (α, θ)	Weibull (θ, τ)	Lognormal (μ, σ^2)
$f_X(x) = \dfrac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}}$; $0 < x < \infty$	$f_X(x) = \dfrac{\tau(x/\theta)^\tau e^{-(x/\theta)^\tau}}{x}$; $0 \leq x < \infty$	$f_X(x) = \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2})}$; $0 < x < \infty$
$F_X(x) = 1 - \left(\dfrac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha$	$F_X(x) = 1 - e^{-(x/\theta)^\tau}$	$F_X(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$
$S_X(x) = \left(\dfrac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha$	$S_X(x) = e^{-(x/\theta)^\tau}$	$S_X(x) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$
$h_X(x) = \dfrac{\alpha}{x+\theta}$	$h_X(x) = \dfrac{\tau(x/\theta)^\tau}{x}$	$\mathbb{E}(X) = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$
$\mathbb{E}(X) = \dfrac{\theta}{\alpha - 1}$	$\mathbb{E}(X) = \theta\Gamma(1 + \frac{1}{\tau})$	$Var(X) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$
$Var(X) = \dfrac{\alpha\theta^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$		

Exp $(1/\theta)$

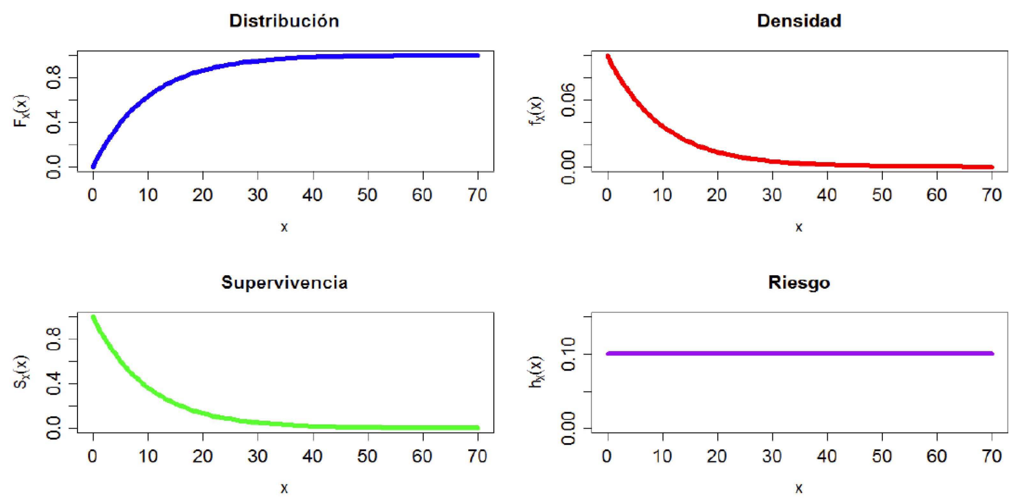

Fig. 1.1
Exponencial con parámetro (1/10)

Gamma (α, θ)

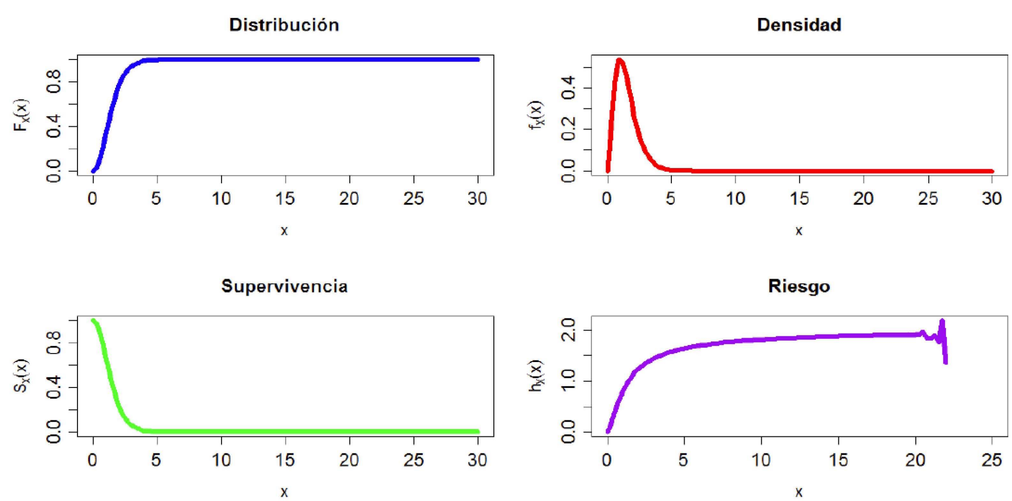

Fig. 1.2
Gamma con parámetros (3,1/2)

Beta (a, b)

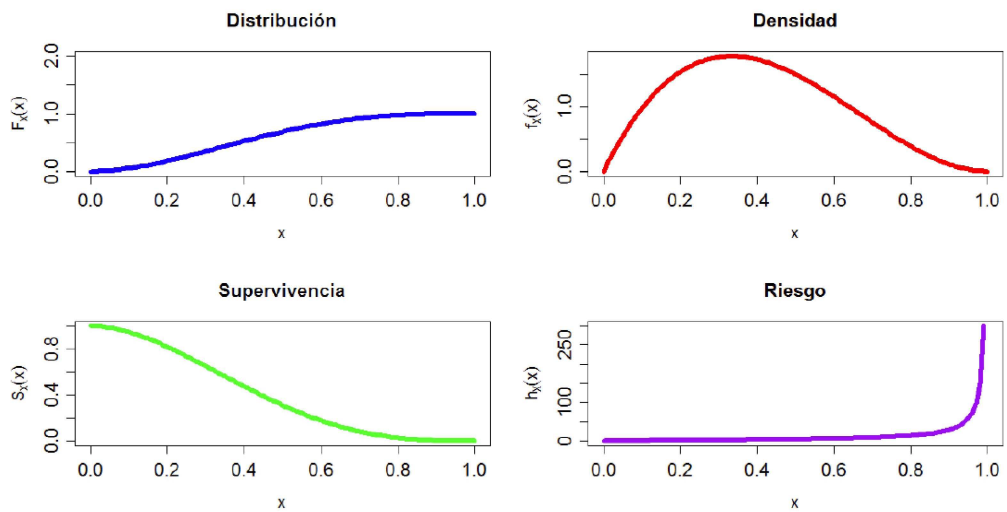

Fig. 1.3
Beta con parámetros (2,3)

Pareto (α, θ)

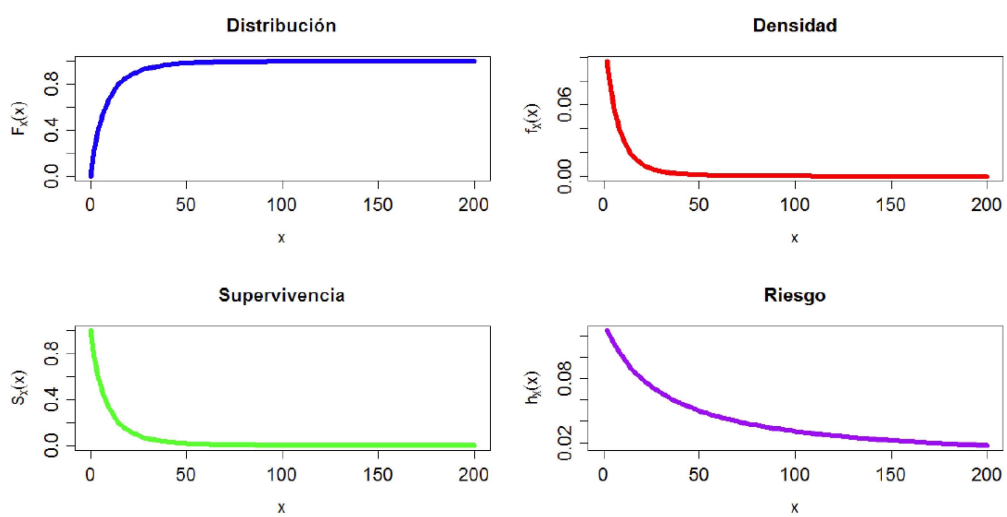

Fig. 1.4
Pareto con parámetros (4,30)

Weibull (θ, τ)

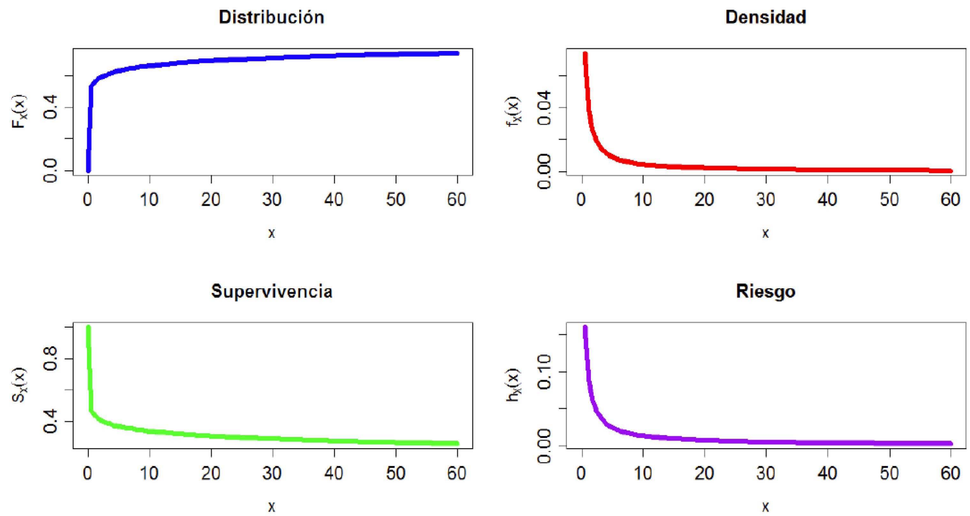

Fig. 1.5

Weibull con parámetros (5,1/18)

Lognormal (μ, σ^2)

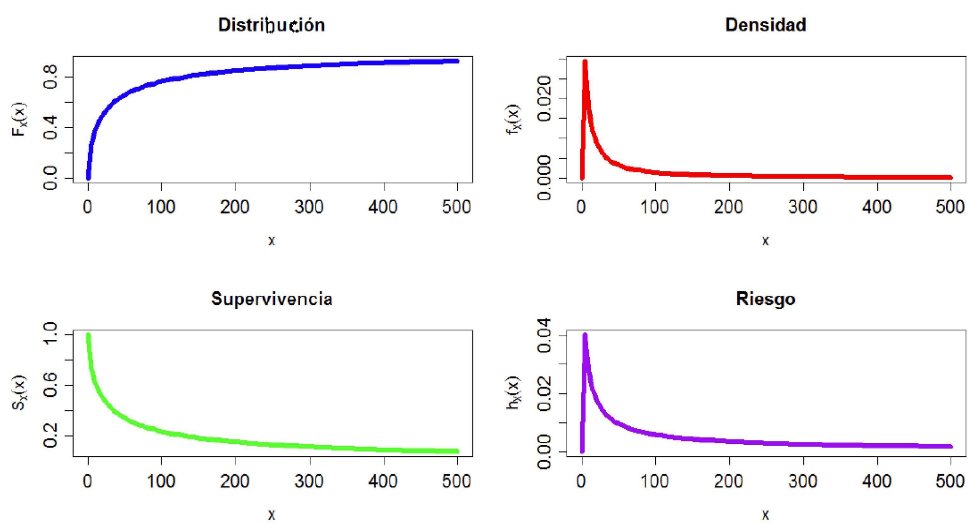

Fig. 1.6

Lognormal con parámetros (3,5)

Sumas de variables aleatorias

Es importante conocer algunos resultados acerca de sumas para las variables aleatorias que modelan la severidad en los datos, debido a que, con ellos, se pueden simplificar los resultados posteriores de nuestro análisis.

Supóngase que $X_1, X_2, ..., X_n$ son variables aleatorias independientes, se define $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, entonces:

Si $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \Rightarrow Y \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$
Si $X_i \sim Exp\left(\frac{1}{\lambda}\right) \Rightarrow Y \sim Gamma\left(\alpha = n, \theta = \frac{1}{\lambda}\right)$
Si $X_i \sim Gamma(\alpha_i, \theta) \Rightarrow Y \sim Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \theta\right)$
Si $X_i \sim Ji - cuadrada(k_i) \Rightarrow Y \sim Ji - cuadrada\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)$

Tabla 1.1

Colas de una distribución

Otra característica relevante de las distribuciones está relacionada con su *cola derecha,* que corresponde al peso de la distribución al final de los valores que toma. Es de tanta importancia la cola de las distribuciones debido a que en ocasiones habrá reclamos elevados dentro de nuestro portafolio de pólizas y al análizar las posibles distribuciones en los datos, el estudio de sus colas servirá para elegir un modelo, además que el impacto de esos reclamos tan elevados puede modificar de manera significativa el total de las pérdidas del portafolio.

Existen diversas formas para determinar qué tan pesada es la cola de una distribución, a continuación se presentan algunos métodos:

- Uno de los métodos está basado en la existencia de los momentos de las distribuciones y sirve para casos especiales puesto que, la existencia de todos los momentos de una distribución indica que su cola es ligera, mientras que, si para una distribución no están definidos todos sus momentos, entonces tendrá una cola pesada.

Un ejemplo claro de una cola pesada en una distribución es la Pareto pues su $k - \acute{e}simo$ momento existe sólo cuando $k < \alpha$.

- El segundo método que sirve para determinar la cola de alguna distribución es a través de la función de riesgo o "hazard" definida como:

$$h_X(x) = \frac{f_X(x)}{S_X(x)}$$

Debido a que la naturaleza de esta función es revelar información acerca de las colas de las distribuciones, el criterio para determinar las colas es el siguiente: si la función de riesgo es creciente significa que posee una cola ligera, mientras que, si es decreciente entonces la distribución tiene una cola pesada. Por otro lado, si la función de riesgo es constante como en la distribución exponencial que se muestra en la Fig. 1.1 no se puede definir que pertenezca a ninguna de estas dos clases de colas pesadas y ligeras.

- Finalmente, el último método propuesto para conocer qué tan pesada es la cola de una distribución es por medio de su función media de pérdida en exceso $(e(d))$, esto es, si $e(d)$ es creciente en d, entonces se considera que tiene cola pesada y si es decreciente tendrá cola ligera. Más adelante se explica cómo se obtiene esta función.

Adicional a estos métodos se cuenta con una alternativa para comparar colas entre dos distribuciones con la misma esperanza, esto se realiza tomando el límite del cociente de sus funciones de supervivencia, es decir:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{S_1(x)}{S_2(x)}$$

o bien de sus funciones de densidad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

Si la razón diverge a ∞ implica que la f.d.p del numerador es la que tiene la cola más pesada.

1.1.2 Distribuciones discretas

En esta sección se exponen las familias de distribuciones discretas que pueden describir la frecuencia de las reclamaciones en los datos de una compañía aseguradora y, en otros casos, incluso, la severidad de los mismos, pero este desarrollo se incluye más adelante en la sección *Modelos compuestos de frecuencia.* Aquí se presentan las características de cada una de ellas, que podrían ayudar a identificarlas para utilizarlas en una situación concreta.

Sea N la v.a. que cuenta el número de reclamaciones, entonces la función de probabilidad denotada como $p_k = \mathbb{P}(N = k)\,;\ k = 0, 1, 2, ...$ representa la probabilidad de que exactamente k reclamaciones ocurran. La función generadora de probabilidades (f.g.p.) para esta v.a. es:

$$P_N(z) = \mathbb{E}\left(z^N\right) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

Que además sirve para hallar los momentos de las variables aleatorias discretas, ya que

$$P_N\,'(1) = \mathbb{E}(N)$$
$$P_N\,''(1) = \mathbb{E}[N(N-1)] = \mathbb{E}\left(N^2\right) - \mathbb{E}(N)$$
$$Var(N) = P\,''(1) + P\,'(1) - [P\,'(1)]^2$$

Teniendo como base esta notación de las distribuciones, se puede comenzar a estudiar las principales distribuciones discretas que se utilizan para modelar la distribución del número de reclamaciones en las pólizas de seguros.

Binomial (m, q)

Esta distribución caracteriza el número de éxitos o fracasos, según sea el caso, en m ensayos Bernoulli independientes.
Su función de densidad de probabilidades (f.d.p.) es

$$p_k = \mathbb{P}(N = k) = \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k};\ k = 0, 1, 2..., m;$$
$$m \text{ entero positivo y } 0 < q < 1$$

Una característica propia de la distribución binomial, es que su varianza es menor que su media y, este hecho, puede ser útil para seleccionarla en una situación de modelación basada en datos reales.

Características numéricas

$$\mathbb{E}(N) = mq$$

$$Var(N) = mq(1-q)$$

$$P_N(z) = [1 + q(z-1)]^m$$

$$M_N(t) = \left[(1-q) + qe^t\right]^m$$

$$Moda = \begin{cases} \lfloor (m+1)q \rfloor & \text{si } (m+1)q \notin \mathbb{Z} \\ (m+1)q - 1 \text{ y } (m+1)q & \text{si } (m+1)q \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ejemplo 3 $N \sim Binomial(50, 0.6)$

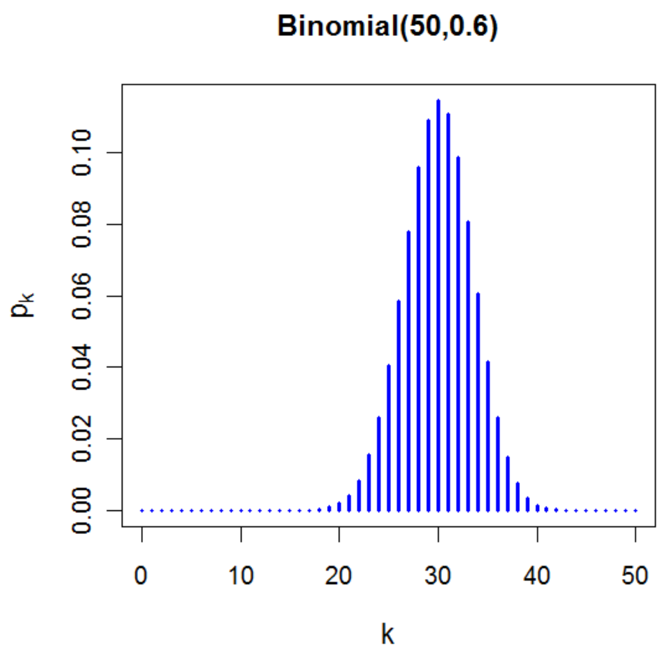

Fig. 1.7

Geométrica (β)

Con función de densidad de probabilidades

$$p_k = \mathbb{P}(N = k) = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k \frac{1}{1+\beta};\ k = 0, 1, 2, ...,\ \beta > 0$$

Características numéricas

$$\mathbb{E}(N) = \beta$$

$$Var(N) = \beta(1+\beta)$$

$$P_N(z) = [1 - \beta(z-1)]^{-1}$$

$$M_X(t) = \frac{1}{1+\beta(1-e^t)}$$

$$Moda = 0$$

Una propiedad relevante de la distribución geométrica es la llamada *pérdida de la memoria* y bajo el contexto que hemos manejado, como la distribución describe el número de reclamaciones, esto significa que: La probabilidad de que el número de reclamaciones sea mayor a $m+j$ reclamaciones, dado que ha habido al menos m reclamaciones, no depende de este valor; es decir sean $m, j \in \mathbb{Z}$, luego $N \sim Geom(\beta)$ entonces:

$$\mathbb{P}\left[N > m+j \mid N \geq m\right] = \mathbb{P}\left[N > j\right]$$

Ejemplo 4 $N \sim Geom(1.5)$

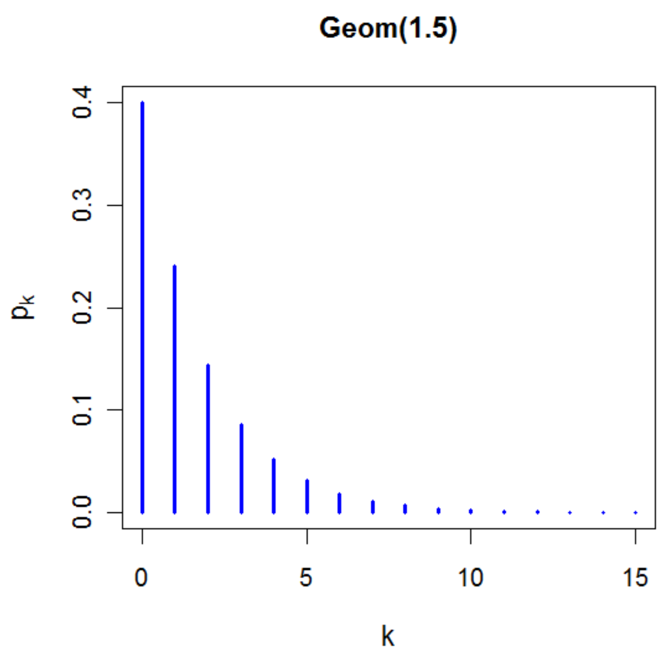

Fig.1.8

Binomial Negativa (β, r)

Para esta distribución su función de densidad de probabilidades es

$$\begin{aligned} p_k &= \mathbb{P}\left(N = k\right) = \left(\begin{array}{c} k+r-1 \\ k \end{array}\right) \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r; \\ k &= 0, 1, 2, ... \text{ donde } \beta > 0, r > 0 \end{aligned}$$

Características numéricas

$$\mathbb{E}(N) = r\beta$$

$$Var(N) = r\beta(1+\beta)$$

$$P_N(z) = [1-\beta(z-1)]^{-r}$$

$$M_X(t) = \left[\frac{1}{1+\beta(1-e^t)}\right]^r$$

Esta distribución, a diferencia de la binomial, tiene la propiedad de que su varianza es mayor a su media.

Ejemplo 5 $N \sim BinNeg(0.25, 15)$

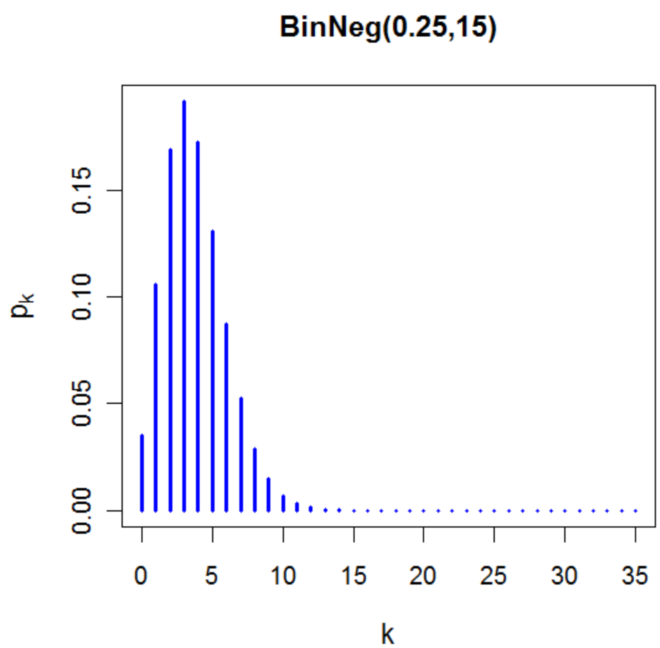

Fig. 1.9

Poisson (λ)

La distribución posee la siguiente f.d.p.

$$p_k = \mathbb{P}(N=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!};\ \lambda > 0, k = 0, 1, 2, ...$$

Características numéricas

$$\mathbb{E}(N) = \lambda$$

$$Var(N) = \lambda$$

$$P_N(z) = e^{\lambda(z-1)}$$

$$M_X(t) = e^{\lambda\left(e^t-1\right)}$$

$$Moda = \begin{cases} \lfloor\lambda\rfloor & \text{si } \lambda \notin \mathbb{Z} \\ \lambda \text{ y } \lambda-1 & \text{si } \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

En esta distribución se debe resaltar que su media es igual a la varianza.

Ejemplo 6 $N \sim Poisson(5)$

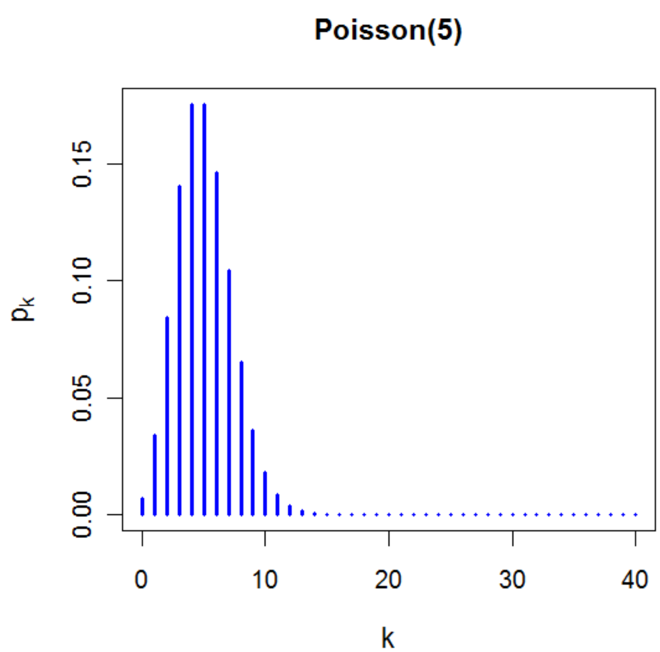

Fig. 1.10

Sumas de variables aleatorias

Una vez mostradas las distribuciones que pueden caracterizar las frecuencias de reclamaciones y antes de comenzar con el estudio de las clases a las que pueden pertenecer, se presentan las distribuciones de las sumas para dichas variables aleatorias cuando se supone independencia entre las mismas.

Sean $N_1, N_2, N_3, ..., N_m$ v.a´s independientes y sea $S = \sum_{i=1}^{m} N_i$ entonces:

Si $N_i \sim Geom(\beta) \Rightarrow S \sim BinNeg(\beta, m)$
Si $N_i \sim BinNeg(\beta, r_i) \Rightarrow S \sim BinNeg\left(\beta, \sum_{i=1}^{m} r_i\right)$
Si $N_i \sim Poisson(\lambda_i) \Rightarrow S \sim Poisson\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right)$

Tabla 1.2

Clases (a, b, 0) y (a, b, 1)

Existen dos clases mediante las cuales se caracteriza a las distribuciones discretas, esta clasificación se deriva de la modificación de las distribuciones de acuerdo con la probabilidad de que no existan reclamaciones, es decir $p_0 = P(N = 0)$. Dichas clases se conocen como (a, b, 0) y (a, b, 1), y cada una presenta particularidades específicas, en general, la clase (a, b, 0) se comporta como cualquier distribución discreta con un recorrido de la variable aleatoria desde $k = 0, 1, 2, ...$, mientras que las distribuciones de la clase (a, b, 1) tienen la característica de que la probabilidad de que no existieran reclamaciones (p_0) se encuentra modificada o bien truncada, esto es, que se modifica cuando p_0 tiene un valor mayor a cero, mientras que se trunca cuando se determina p_0 exactamente igual al valor cero.

La clase (a, b, 0)

Como se ha mencionado previamente, las distribuciones discretas que caracterizan el número de reclamaciones en una póliza de seguros tienen la característica de pertenecer a la clase (a, b, 0), o bien, bajo ciertos criterios a la clase (a, b, 1). En este punto, se entenderá que la distribución por sí sola y considerando que toma valores p_k con $k = 0, 1, 2, ...$ pertenece a una clase llamada (a, b, 0), dicha clase está compuesta de las cuatro distribuciones discretas que se desarrollaron anteriormente y tiene la característica de poder expresar las probabilidades de reclamación a través de la siguiente fórmula recursiva:

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k};\ k = 1, 2, ...$$

donde a y b son constantes propias de cada distribución, por lo que a continuación se muestran cada uno de sus valores, así como el valor de la función de probabilidad en cero, i.e. la probabilidad de que no hubiera reclamaciones $p_0 = P\,(N = 0)$.

Distribución	**a**	**b**	$\mathbf{p_0}$
Binomial	$-\frac{q}{1-q}$	$(m+1)\,\frac{q}{1-q}$	$(1-q)^m$
Geométrica	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$(1+\beta)^{-1}$
Binomial Negativa	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1)\,\frac{\beta}{1+\beta}$	$(1+\beta)^{-r}$
Poisson	0	λ	$e^{-\lambda}$

Tabla 1.3

Esta clase provee una forma de encontrar las probabilidades de las distribuciones discretas a través de la fórmula recursiva anteriormente presentada. Si reescribimos la fórmula de tal manera que quede como una función lineal, por medio de la pendiente de esta función se puede identificar la distribución de probabilidad, esto es, si la pendiente es igual a cero entonces se trata de una distribución Poisson, si es negativa entonces será Binomial y si es positiva es una distribución Binomial Negativa:

$$k\frac{p_k}{p_{k-1}} = ak + b;\ k = 1, 2, ...$$

De forma general:

Distribución	Función lineal
Poisson	$k\frac{p_k}{p_{k-1}} = \lambda$
Binomial	$k\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{q}{1-q}(m+1-k)$
Binomial Negativa	$k\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{\beta}{1+\beta}(k+r-1)$

Tabla 1.4

Ejemplo 7 *Obtener para las siguientes distribuciones, su f.d.p. con* $k = 0, 1, ..., 6$ *y posteriormente encontrar con la función lineal el comportamiento de sus pendientes.*

- $Poisson(5)$
- $Binomial(8, 0.3)$
- $BinNeg(1, 5)$

Para cada distribución se obtienen las probablidades:

k	$Poisson(p_k)$	$Binomial(p_k)$	$BinNeg(p_k)$
0	0.006737947	0.05764801	0.03125
1	0.033689735	0.19765032	0.078125
2	0.084224337	0.29647548	0.1171875
3	0.140373896	0.25412184	0.13671875
4	0.17546737	0.1361367	0.13671875
5	0.17546737	0.04667544	0.123046875
6	0.146222808	0.01000188	0.102539063

Tabla 1.5

Las pendientes asociadas son:

$Poisson(kp_k/p_{k-1})$	$Binomial(kp_k/p_{k-1})$	$BinNeg(kp_k/p_{k-1})$
–	–	–
5	3.428571429	2.5
5	3	3
5	2.571428571	3.5
5	2.142857143	4
5	1.714285714	4.5
5	1.285714286	5

Tabla 1.6

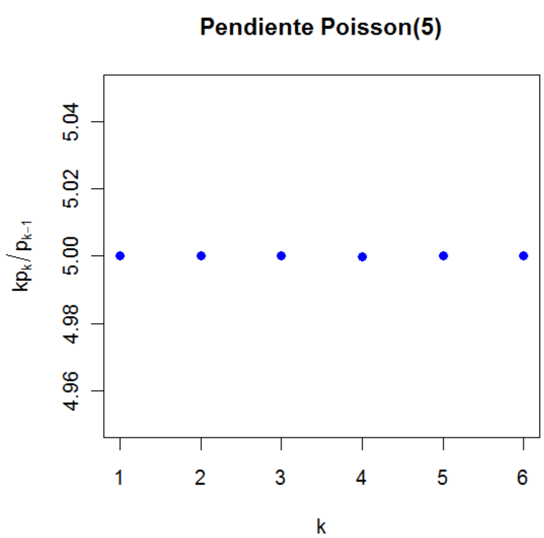

Fig. 1.11

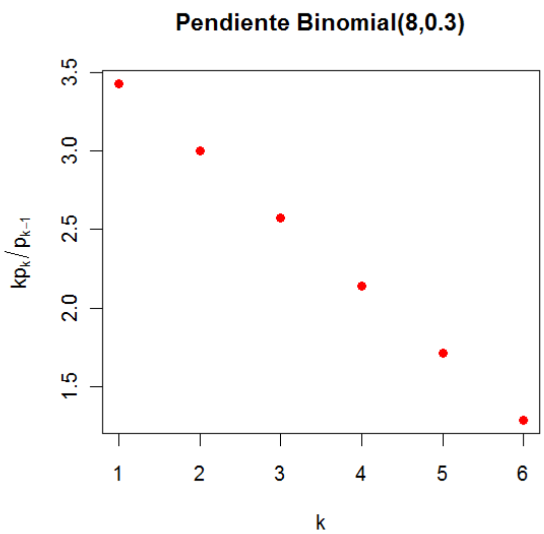

Fig. 1.12

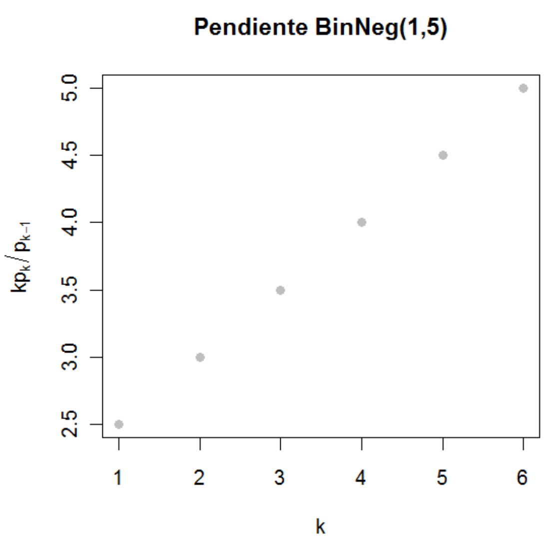

Fig. 1.13

La clase (a, b, 1)

A diferencia de la clase anterior (a, b, 0), en esta clase se omite o modifica la probabilidad en cero de las distribuciones que forman parte de ella, esto debido a que en ocasiones las distribuciones de la clase (a, b, 0) no describen bien a la distribución real en uno o varios puntos, generalmente en la cola izquierda de los datos, por lo que la fórmula recursiva para esta clase queda de la siguiente forma:

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k};\ k = 2, 3, 4, ...$$

Una de las justificaciones que tiene esta clase es que en el ámbito asegurador, la probabilidad en cero con distribuciones discretas es la probabilidad de que no ocurran reclamaciones. Esta probabilidad podría ser demasiado grande, reflejando que muchos asegurados no incurren en reclamaciones durante la vigencia de su póliza, o bien, se puede dar el caso en que la probabilidad de que no existan reclamaciones sea cero, dejando en claro que el portafolio de asegurados realiza por lo menos una reclamación en un determinado periodo de tiempo. Entonces, esta nueva clase será de utilidad en este tipo de situaciones.

Debido a que la probabilidad en cero debe ser ajustada para toda la distribución, entonces para esta clase (a, b, 1) tenemos dos subclases:

Truncada en cero	*Modificada en cero*
$\left(p_k^T\right)$	$\left(p_k^M\right)$
Cuando $p_0 = 0$	Cuando $p_0 > 0$

Se determina p_k^T a la probabilidad de que k reclamaciones ocurran dentro de una distribución de la clase truncada en cero, con T superíndice que refiere al nombre de la clase *Truncada* y p_k^M es la probabilidad de que existan k reclamaciones con M superíndice referente al nombre de la clase *Modificada* en cero.

Nótese que las fórmulas para la clase (a, b, 0) y (a, b, 1) son muy parecidas entre sí y por ello es que guardan la siguiente relación:

$$p_k^M = cp_k \text{ y } p_k^T = cp_k;\ k = 1, 2, 3, ...$$

Para encontrar la constante c, utilizaremos las f.g.p. tanto de los miembros de la clase (a, b, 0), $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, z^k$, como de la subclase modificada en cero $P^M(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^M\, z^k$. Entonces

$$P^M(z) = p_0^M + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^M\, z^k = p_0^M + c\sum_{k=1}^{\infty} p_k\, z^k = p_0^M + c\,[P(z) - p_0];$$

evaluando en $z = 1$ $(P^M(1) = P(1) = 1)$

$$1 = p_0^M + c\,[1 - p_0] \Longrightarrow c = \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0}$$ regresando al desarrollo

$$P^M(z) = p_0^M + \frac{1-p_0^M}{1-p_0}\left[P(z) - p_0\right]$$

$$= p_0^M + \frac{1-p_0^M}{1-p_0}P(z) + \frac{p_0^M - 1}{1-p_0}p_0$$

$$= \frac{p_0^M(1-p_0) + \left(p_0^M - 1\right)p_0}{1-p_0} + \frac{1-p_0^M}{1-p_0}P(z)$$

$$= \left[1 - \frac{1-p_0^M}{1-p_0}\right] + \frac{1-p_0^M}{1-p_0}P(z)$$

Considerando que $p_0^M = 0$ para la subclase truncada, se llega a lo siguiente:

$p_k^M = \frac{1-p_0^M}{1-p_0}p_k;\ k = 1, 2, ...$	$p_k^T = \frac{p_k}{1-p_0};\ k = 1, 2, ...$
$P^M(z) = \left[1 - \frac{1-p_0^M}{1-p_0}\right] + \frac{1-p_0^M}{1-p_0}P(z)$	$P^T(z) = \frac{P(z) - p_0}{1-p_0}$

Tabla 1.5

Además,

$$p_k^M = \left(1 - p_0^M\right)p_k^T \quad \text{y} \quad P^M(z) = p_0^M + \left(1 - p_0^M\right)P^T(z)$$

Al igual que en la clase (a, b, 0), las distribuciones Poisson, Geométrica, Binomial y Binomial Negativa también pertenecen a la clase (a, b, 1) pero se incluye además a la distribución Binomial Negativa Extendida que, a diferencia de la ya conocida, considera a su parámetro r entre los valores de -1 y 0 y se denomina *ETBN (Extended Truncated Negative Binomial).*

Ejemplo 8 *Para que estas subclases ilustren mejor las modificaciones que tienen las probabilidades, supóngase que el número de reclamaciones que recibe una compañía aseguradora se distribuye como una Binomial con parámetros* $m = 10$, $q = 0.3$, *veamos cómo son* p_k $k = 1, 2, 3, ...$ *para la clase (a, b, 0) y cada subclase de la (a, b, 1). Considerar para la clase modificada en cero, que el 40% de las pólizas no tuvieron reclamaciones*

Se pueden obtener los siguientes valores

$$a = -\frac{q}{1-q} = -0.42857$$

$$b = (m+1)\frac{q}{1-q} = 4.71428$$

$p_0 = (1-q)^m = 0.02824$

Para calcular las probabilidades asociadas a la clase (a, b, 0)

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1},\ k = 1, 2, 3, ...$$

$$p_1 = (-0.42847 + 4.71428)0.02824 = 0.12102$$

$$p_2 = \left(-0.42847 + \frac{4.71428}{2}\right) 0.12102 = 0.2333$$

$$p_3 = \left(-0.42847 + \frac{4.71428}{3}\right) 0.2333 = 0.26662$$

Considerando que la distribución Binomial pertenece a la subclase *Truncada en cero* p_k^T y tomando que $p_0^T = 0$, se generan las siguientes probabilidades

$$p_1^T = \frac{p_1}{1-p_0} = \frac{0.12102}{1-0.02824} = 0.12453$$

luego

$$p_2^T = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_1^T = \left(-0.42847 + \frac{4.71428}{2}\right) 0.12453 = 0.24014$$

$$p_3^T = \left(-0.42847 + \frac{4.71428}{3}\right) 0.24014 = 0.27444$$

Finalmente para la subclase *Modificada en cero* p_k^M se considera la probabilidad en cero como

$p_0 = 0.4 > 0$

$\Longrightarrow$

$$p_1^M = (1-p_0^M)p_1^T = (1-0.4)0.12453 = 0.074718 \text{ o bien}$$

$$p_1^M = \frac{1-p_0^M}{1-p_0} p_1 = \frac{1-0.4}{1-0.02824} 0.12102 = 0.074722$$

$$p_2^M = (1-0.4)0.24014 = 0.144084$$

$$p_3^M = (1-0.4)0.27444 = 0.164664$$

En resumen

k	p_k	p_k^T	p_k^M
0	0.02824752	0	0.4
1	0.12106082	0.1245799	0.07474794
2	0.23347444	0.2402612	0.14415674
3	0.26682793	0.2745843	0.16475055

Tabla 1.8

Nótese que para la distribución Binomial en la clase (a, b, 0) se determina la probabilidad en cero fija, de acuerdo a los parámetros estimados. Por otro lado, cuando se utiliza esta distribución en la subclase truncada en cero, se fuerza a que la probabilidad en cero sea cero, con esto lo que sucede es que la probabilidad en otros puntos aumenta y se distribuye de forma homogena. Este escenario nos estaría diciendo que la probabilidad de que no existan reclamaciones es exactamente cero, mientras que en la subclase modificada en cero, simplemente se determina la probabilidad de que no haya reclamaciones en este caso de 0.4. Evidentemente implica que las probabilidades cuando hay $1, 2$ y 3 reclamaciones sean más pequeñas comparadas con p_k y p_k^T.

1.2 Variables y modificaciones de cobertura

En esta sección se definen conceptos utilizados para el desarrollo de la teoría probabilística y estadística que abarcan los seguros. Primero hay que tener en claro que existen distintos tipos de acuerdos entre las compañías aseguradoras y el asegurado, bajo los cuales se buscan satisfacer las necesidades de ambos a través de las distintas coberturas que se ofrecen en las *pólizas de seguros.* Entonces, para desarrollar las modificaciones de cobertura de los contratos de seguros, es indispensable comenzar a definir las nuevas variables que generalmente se observan en los modelos y por medio de las cuales se apoya la teoría posterior.

Definición 9 *Para un valor establecido d, donde $\mathbb{P}(X > d) > 0$, la* variable aleatoria de pérdida en exceso o variable de pago *es*

$$Y^P = X - d \mid X > d$$

$$Y^P = \begin{cases} \text{no está definida} & X \leq d \\ X - d & X > d \end{cases}$$

Esta variable tiene dos características importantes, la primera de ellas es que está *truncada por la izquierda,* es decir que aquellas observaciones por debajo del valor d son omitidas y está *trasladada* debido a que los valores que toma la v.a. empiezan a partir de d.

Obsérvese gráficamente un caso particular de la función de densidad de probabilidades para la variable aleatoria Y^P cuando $d = 10$.

Ejemplo 10 *Si* $X \sim Pareto(4, 30)$

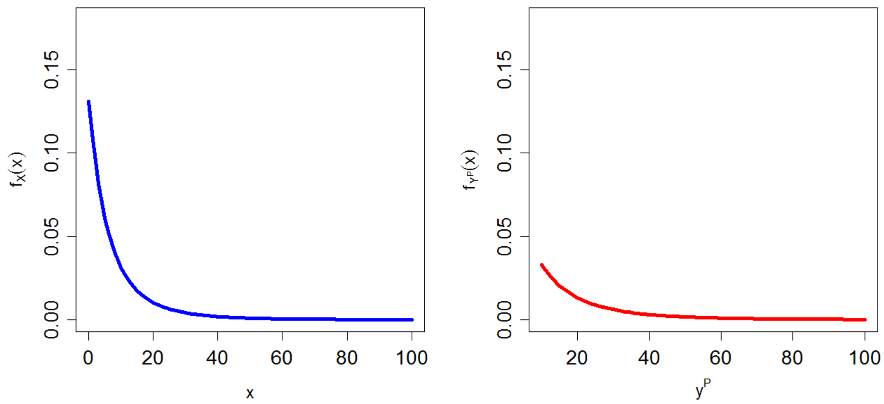

Fig. 1.14

Definición 11 *La esperanza de la variable de pago se conoce como* función media de pérdida en exceso *y se calcula como*

$$e_X(d) = e(d) = \mathbb{E}\left(Y^P\right) = \mathbb{E}(X - d \mid X > d)$$

$$e(d) = \begin{cases} \displaystyle\int_d^{\infty} \frac{(x-d) f_X(x)}{1 - F_X(d)} dx & \text{caso continuo} \\ \displaystyle\sum_{x=d}^{\infty} (x-d) \frac{\mathbb{P}(X = x)}{1 - F_X(d)} & \text{caso discreto} \end{cases}$$

Para el caso continuo e integrando por partes la expresión anterior se reduce a lo siguiente:

$$e(d) = \int_d^{\infty} \frac{(x-d) f_X(x)}{1 - F_X(d)} dx = \frac{-(x-d) S_X(x)\big|_d^{\infty} + \displaystyle\int_d^{\infty} S_X(x)\, dx}{S_X(d)}$$

$$= \int_d^{\infty} \frac{S_X(x)}{S(d)} dx$$

Esto representa el valor esperado de los montos pagados en una compañía aseguradora dado que ya se ha excedido el valor del deducible d. En efecto, este tipo de modificaciones en los contratos produce que los montos esperados a pagar por parte de la compañía, crezcan o se reduzcan considerablemente dependiendo del valor del deducible implementado.

Ejemplo 12 *Supóngase que los montos pagados se distribuyen exponencial con* $\theta = \frac{1}{8}$*, entonces ¿cuál es la esperanza de pago, con un deducible de 1000?.*

$$e\left(1000\right) = \int_{1000}^{\infty} \frac{e^{-8x}}{e^{-8000}} dx = \frac{1}{e^{-8000}} \left[-\frac{e^{-8x}}{8} \bigg|_{1000}^{\infty} \right] = \frac{1}{e^{-8000}} \left[-\frac{e^{-8000}}{8} \right] = \frac{1}{8}$$

Ejemplo 13 *Si las pérdidas se distribuyen Pareto*$(\alpha = 2, \theta = 800)$ *¿Cuál sería la esperanza de la variable de pago si se aplica un deducible* $d = 500$?

$$S_X\left(x\right) = \left(\frac{800}{x+800}\right)^2 \text{ y } S_X\left(500\right) = \left(\frac{800}{500+800}\right)^2 = 0.37869$$

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} e\left(500\right) &= \frac{800^2}{0.37869} \int_{500}^{\infty} \frac{1}{\left(x+800\right)^2} dx = \frac{800^2}{0.37869} \left[-\frac{1}{x+800} \bigg|_{500}^{\infty} \right] \\ &= \frac{800^2}{0.37869} \left[\frac{1}{500+800} \right] = 1300 \end{aligned}$$

En esta distribución la esperanza de pago es de 1300 cuando se aplica el deducible de 500, mientras que la esperanza de la distribución Pareto, antes de aplicar un deducible es de 800, por lo tanto $\mathbb{E}\left(X\right) < e\left(500\right)$. Esto quiere decir que sin considerar un deducible con valor de 1000 la compañía aseguradora espera pagar pérdidas por un valor de 800 mientras que al aplicar el deducible estaría esperando pagar pérdidas que alcancen un valor de 1300, de tal forma que cubriría únicamente pérdidas por valores mayores y no consideraría pagar aquellas que se encuentren por debajo del deducible.

Casos especiales

1. La función media de pérdida en exceso, cuando se tiene una distribución exponencial es igual a la esperanza de la distribución

$$e\left(d\right) = \theta$$

2. Para una distribución Pareto con $\alpha > 1$, la función media de pérdida en exceso depende del valor del deducible y esta función se encuentra por encima del valor de la esperanza de la distribución que no se afecta por el deducible. Esta función puede encontrarse al interior del apéndice A.

$$e\left(d\right) = \frac{\theta + d}{\alpha - 1}$$

3. Si la distribución es una Pareto trasladada con $\alpha > 1$, la función media de pérdida en exceso es :

$$e\left(d\right) = \frac{d}{\alpha - 1};\ d \geq \theta$$

Definición 14 *La* variable por pérdida o variable censurada por la izquierda y trasladada *es :*

$$Y^L = (X - d)_+ = \begin{cases} 0 & X \leq d \\ X - d & X > d \end{cases}$$

La variable anterior se entiende como censurada debido a que dicha varibale tiene conocimiento de los "datos" que están por debajo del valor d y para estos datos se asigna probabilidad igual a cero.

Si graficamos la f.d.p. para Y^L con la misma distribución del ejemplo utilizado para la variable de pago, cuando $d = 10$, se tiene que:

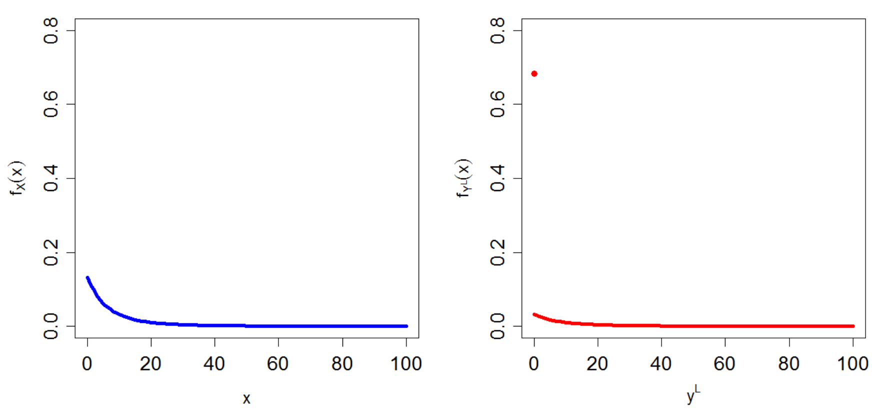

Fig. 1.15

La esperanza de esta variable se calcula :

$$\mathbb{E}\left(Y^L\right) = \mathbb{E}\left[(X - d)_+\right] = \begin{cases} \displaystyle\int_d^{\infty} (x - d)\, f_X\left(x\right) dx & \text{caso continuo} \\ \displaystyle\sum_{x=d}^{\infty} (x - d)\mathbb{P}\left(X = x\right) & \text{caso discreto} \end{cases}$$

Definición 15 *La* variable de pérdida limitada o variable censurada por la derecha *es:*

$$Y = X \wedge u = \begin{cases} X & X < u \\ u & X \geq u \end{cases}$$

Esta nueva variable aleatoria se define de tal manera porque se utiliza cuando se implementa un límite de póliza y debido a este concepto es que se llama censurada por la derecha, pero más adelante se explica cuál es la función de dicha variable.
Su esperanza, llamada *valor esperado limitado,* es:

$$\mathbb{E}\left[X \wedge u\right] = \begin{cases} \displaystyle\int_0^u x \ f_X\left(x\right) dx + u \ S_X\left(u\right) & \text{caso continuo} \\ \displaystyle\sum_{x=0}^{u} x\mathbb{P}\left(X = x\right) + u \ S_X\left(u\right) & \text{caso discreto} \end{cases}$$

Es relevante saber que por medio de estas variables se desarrollan todas las modificaciones que un contrato de seguro posee.

Algunas relaciones y consecuencias

1. $Y^P \quad = Y^L \mid Y^L > 0$

2. $\mathbb{E}\left(Y^L\right) = \mathbb{E}\left[\left(X - d\right)_+\right] = e\left(d\right) S_X\left(d\right)$

3. $\mathbb{E}\left(Y^L\right) = \displaystyle\int_d^\infty \left(x - d\right) f_X\left(x\right) dx = \int_d^\infty x f_X\left(x\right) dx - d\int_d^\infty f_X\left(x\right) dx$

$$= \int_0^\infty x f_X\left(x\right) dx - \int_0^d x f_X\left(x\right) dx - d\int_d^\infty f_X\left(x\right) dx$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left(Y^L\right) = \mathbb{E}\left(X\right) - \mathbb{E}\left[X \wedge d\right]$$

De lo anterior se observa

$$\mathbb{E}\left(Y^P\right) = \frac{\mathbb{E}\left(Y^L\right)}{1 - F_X\left(d\right)} = \frac{\mathbb{E}\left(X\right) - \mathbb{E}\left[X \wedge d\right]}{1 - F_X\left(d\right)}$$

Para el caso continuo

$$\mathbb{E}\left[X \wedge u\right] = \int_0^u x \ f_X\left(x\right) dx + u \ S_X\left(u\right); \text{ integrando por partes } \int_0^u x \ f_X\left(x\right) dx$$

donde $\begin{array}{cc} u = x & du = dx \\ dv = f_X(x) & v = F_X(x) \end{array}$ continuando con la integración

$$\mathbb{E}[X \wedge u] = xF_X(x)\big|_0^u - \int_0^u F_X(x)\,dx + u\ S_X(u)$$

$$= u\ F_X(u) - \int_0^u (1 - S_X(x))\,dx + u\ S_X(u)$$

$$= u - u\ S_X(u) - u + \int_0^u S_X(x)\,dx + u\ S_X(u)$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}[X \wedge u] = \int_0^u S_X(x)\,dx$$

Análogamente

$$\mathbb{E}\left(Y^L\right) = \int_d^\infty S_X(x)\,dx$$

Ejemplo 16 *Se determina que las pérdidas siguen una distribución lognormal con* $\mu = 10$ *y* $\sigma = 2$*, además se desea implementar un deducible de* 5000*, ¿Cuál será la esperanza de pérdida que se tiene con esta información ?. Nota: Revisar la sección de distribuciones del apéndice A, en donde se encuentra la expresión simplicada de la esperanza de cada distribución considerando la aplicación de un deducible.*

$$\mathbb{E}\left(Y^L\right) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}[X \wedge d]$$

$$\mathbb{E}(X)\ = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} = e^{10 + \frac{2^2}{2}} = 162754.79$$

$$\mathbb{E}[X \wedge d] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} * \phi\left[\frac{\ln(d) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right] + d\left[1 - F_X(d)\right]$$

$\Longrightarrow$

$$S_X(d) \ = 1 - \phi\left[\frac{\ln(d) - \mu}{\sigma}\right] = 1 - \phi\left[\frac{\ln(5000) - 10}{2}\right]$$

$$= 1 - \phi[-0.741403] = \phi[0.741403] = 0.7707754$$

$$\mathbb{E}[X \wedge d] = 162754.79 * \phi[-2.741403] + 5000[0.7707754]$$

$$= 162754.79 * (1 - \phi [2.741403]) + 3853.877$$

$$= 162754.79 * (1 - 0.9969411) + 3853.877 = 4351.7276$$

Por lo tanto $\mathbb{E}\left(Y^L\right) = 162754.79 - 4351.7276 = 158403.06$

Esta esperanza de pérdida es muy elevada y evidentemente para que disminuya su valor, el deducible que se implemente debe ser mayor.

Ejemplo 17 *Una póliza de seguro cubrirá el monto de un siniestro hasta un monto máximo de beneficio de* 200. *Supóngase que su f.d.p. es*

$$f_X(x) = \frac{3(50)^3}{x^4};\ x > 50$$

¿Cuál es el pago esperado por la compañía aseguradora?

La variable asociada es

$$Y = X \wedge 200 = \begin{cases} X & X < 200 \\ 200 & X \geq u \end{cases}$$

Dado que $\mathbb{E}[X \wedge u] = \int_0^u S_X(x)\,dx$, y como la distribución es una Pareto trasladada, si $x \in [a, \infty)$, se obtiene la esperanza de la v.a. a través de

$$\mathbb{E}(X) = a + \int_a^\infty S_X(x)\,dx$$

Entonces $\mathbb{E}[X \wedge 200] = 50 + \int_{50}^{200} \left(\frac{50}{x}\right)^3 dx = 50 + 50^3 \left[-\frac{1}{2x^2}\Big|_{50}^{200} \right] = 73.4375$

El pago esperado por la compañía es de 73.4375

1.2.1 Deducibles

Una vez definidas la variables anteriores que describen las pérdidas absorbidas por las compañías aseguradoras, se deben relacionar estas variables con los conceptos de modificaciones en los contratos de seguros más frecuentes que se utilizan para la reducción de los montos de las pérdidas que asumen las aseguradoras. Por lo tanto comenzaremos con una de las modificaciones más comunes que se implementan llamado *Deducible* y denotado por d, bajo el cual el asegurado se obliga a participar en las pérdidas de los siniestros ocurridos pagando únicamente el valor de d para que su siniestro pueda ser cubierto por la aseguradora, si el monto de la pérdida que sufre el asegurado está por debajo del deducible, generalmente lo que sucede es que el asegurado decide responsabilizarse del pago por el siniestro sin involucrar a la aseguradora en el pago de los daños.

Asimismo se puede implementar un *límite de póliza* u, o algún tipo de *coaseguro* α, para los contratos de seguros, pero más adelante se retoman los conceptos.

Deducible ordinario

Se conoce a este tipo de deducible como aquél que generalmente implementan las aseguradoras en donde se hace partícipe al asegurado de la pérdida X y por medio del cual se maneja la siguiente lógica: si la pérdida que sufre el asegurado es menor o igual al valor del deducible d, la aseguradora no paga al asegurado por los daños que cubre el seguro, dejando que éste asuma los gastos del siniestro, sin embargo, si las pérdidas rebasan el valor del deducible, la compañía aseguradora se ve obligada a pagarle el monto $X - d$. Para la aplicación de este deducible se puede hacer uso tanto de la variable de pérdida como la de pago; de hecho, en este caso no sufren ninguna modificación respecto a como se definieron anteriormente; así que se obtienen las siguientes funciones para cada una:

Y^P	Y^L
$F_{Y^P}(y) = \dfrac{F_X(y+d) - F_X(d)}{S_X(d)};\ y > 0$	$F_{Y^L}(y) = F_X(y+d);\ y \geq 0$
$f_{Y^P}(y) = \dfrac{f_X(y+d)}{S_X(d)};\ y > 0$	$f_{Y^L}(y) = \begin{cases} F_X(d) & y = 0 \\ f_X(y+d) & y > 0 \end{cases}$
$S_{Y^P}(y) = \dfrac{S_X(y+d)}{S_X(d)};\ y > 0$	$S_{Y^L}(y) = S_X(y+d);\ y \geq 0$
$h_{Y^P}(y) = h_X(y+d);\ y > 0$	$h_{Y^L}(y) = h_X(y+d);\ y > 0$

Tabla 1.9

Para el caso discreto sólo basta sustituir la f.d.p. por la probabilidad de ocurrencia en el punto que corresponda

Deducible franquicia

El deducible franquicia, a diferencia del deducible ordinario, se aplica con el siguiente criterio: en el momento que las pérdidas exceden el deducible d, la aseguradora se hace cargo de la pérdida total X y mientras los daños no superen el valor del deducible, el asegurado es quien paga el siniestro.

Bajo este deducible las variables de pago y pérdida se reducen a:

$$Y^P = \begin{cases} \text{no está definida} & X \leq d \\ X & X > d \end{cases}$$

$$Y^L = \begin{cases} 0 & X \leq d \\ X & X > d \end{cases}$$

Y sus funciones correspondientes son:

Y^P	Y^L
$F_{Y^P}(y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq y \leq d \\ \dfrac{F_X(y) - F_X(d)}{S_X(d)} & y > d \end{cases}$	$F_{Y^L}(y) = \begin{cases} F_X(d) & 0 \leq y \leq d \\ F_X(y) & y > d \end{cases}$
$f_{Y^P}(y) = \dfrac{f_X(y)}{S_X(d)};\ y > d$	$f_{Y^L}(y) = \begin{cases} F_X(d) & y = 0 \\ f_X(y) & y > d \end{cases}$
$S_{Y^P}(y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq y \leq d \\ \dfrac{S_X(y)}{S_X(d)} & y > d \end{cases}$	$S_{Y^L}(y) = \begin{cases} S_X(d) & 0 \leq y \leq d \\ S_X(y) & y > d \end{cases}$
$h_{Y^P}(y) = \begin{cases} 0 & 0 < y < d \\ h_X(y) & y > d \end{cases}$	$h_{Y^L}(y) = \begin{cases} 0 & 0 < y < d \\ h_X(y) & y > d \end{cases}$

Tabla 1.10

En consideración al deducible franquicia y de manera análoga al caso del deducible ordinario, las esperanzas de las variables (por pago y pérdida) son:

$$\mathbb{E}\left(Y^L\right) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}[X \wedge d] + d[1 - F_X(d)]$$

$$\mathbb{E}\left(Y^P\right) = \frac{\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}[X \wedge d]}{[1 - F_X(d)]} + d$$

Ejemplo 18 *Supóngase que la pérdida X tiene la siguiente función de distribución*

$$F_X(x) = 1 - 0.002e^{-0.0005x}$$

Determinar la f.d.p., la función de supervivencia, la función de riesgo y la esperanza para Y^P y Y^L cuando se implementa un deducible ordinario y un deducible franquicia.

$S_X(x) = 0.002e^{-0.0005x}$ y $f_X(x) = 0.000001e^{-0.0005x}$

Deducible ordinario

Para Y^P

- $$f_{Y^P}(y) = \frac{f_X(y+1000)}{S_X(1000)} = \frac{0.000001e^{-0.0005(y+1000)}}{0.002e^{-0.5}}$$

$$= \frac{0.000001e^{-0.0005y}e^{-0.5}}{0.002e^{-0.5}} = 0.0005e^{-0.0005y} \quad y > 0$$

- $$S_{Y^P}(y) = \frac{S_X(y+1000)}{S_X(1000)} = \frac{0.002e^{-0.0005(y+1000)}}{0.002e^{-0.5}} = e^{-0.0005y} \quad y > 0$$

- $$h_{Y^P}(y) = \frac{f_X(y+1000)}{S_X(y+1000)} = \frac{0.000001e^{-0.0005(y+1000)}}{0.002e^{-0.0005(y+1000)}} = 0.0005 \quad y > 0$$

Notemos que $Y^P \sim Exponencial(2000)$, entonces

- $\mathbb{E}\left(Y^P\right) = 2000$

Para Y^L

- $$f_{Y^L}(y) = \begin{cases} F_X(1000) = 0.99878 & y = 0 \\ f_X(y+1000) = 0.000001e^{-0.0005(y+1000)} & y > 0 \end{cases}$$

- $S_{Y^L}(y) = S_X(y+1000) = 0.002e^{-0.0005(y+1000)} \quad y \geq 0$

- $h_{Y^L}(y) = h_X(y+1000) = 0.0005 \quad y > 0$

- $$\mathbb{E}\left(Y^L\right) = \int_d^\infty S_X(x)\,dx = \int_{1000}^\infty 0.002e^{-0.0005x}$$

$$= 0.002\left[-\frac{e^{-0.0005x}}{0.0005}\Bigg|_{1000}^{\infty}\right] = 0.002\left[-\frac{e^{-0.0005(1000)}}{0.0005}\right] = 2.42612$$

Deducible franquicia

Para Y^P

- $f_{Y^P}(y) = \dfrac{f_X(y)}{S_X(1000)} = \dfrac{0.000001e^{-0.0005y}}{0.002e^{-0.5}} = 0.000824361e^{-0.0005y} \quad y > 1000$

- $S_{Y^P}(y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq y \leq 1000 \\ \dfrac{S_X(y)}{S_X(1000)} = \dfrac{0.002e^{-0.0005y}}{0.002e^{-0.5}} = 1.6487e^{-0.0005y} & y > 1000 \end{cases}$

- $h_{Y^P}(y) = \begin{cases} 0 & 0 < y < 1000 \\ h_X(y) = 0.0005 & y > 1000 \end{cases}$

- $\mathbb{E}\left(Y^P\right) = \dfrac{\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}[X \wedge 1000]}{[1 - F_X(1000)]} + d = 2000 + 1000 = 3000$

Para Y^L

- $f_{Y^L}(y) = \begin{cases} F_X(1000) = 0.99878 & y = 0 \\ f_X(y) = 0.000001e^{-0.0005y} & y > 1000 \end{cases}$

- $S_{Y^L}(y) = \begin{cases} S_X(1000) = 0.001213 & 0 \leq y \leq 1000 \\ S_X(y) = 0.002e^{-0.0005y} & y > 1000 \end{cases}$

- $h_{Y^L}(y) = \begin{cases} 0 & 0 < y < 1000 \\ h_X(y) = 0.0005 & y > 1000 \end{cases}$

- $\mathbb{E}\left(Y^L\right) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}[X \wedge 1000] + 1000[1 - F_X(1000)] = 2.42612 + 1000[0.001213]$
  $= 3.63912$

Razón de pérdida eliminada

En ocasiones es necesario medir de alguna manera el impacto debido a la aplicación de un deducible d, por lo que se considera el valor esperado de la pérdida sin la aplicación del deducible $(\mathbb{E}(X))$, así como el valor esperado de la variable por pérdida (Y^L), y de aquí surge la siguiente definición.

Definición 19 *La* razón de pérdida eliminada *es el cociente de decremento en el valor esperado del pago con un deducible ordinario respecto al valor esperado del pago sin la implementación del deducible.*

$$\frac{\mathbb{E}(X) - [\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge d)]}{\mathbb{E}(X)} = \frac{\mathbb{E}(X \wedge d)}{\mathbb{E}(X)}$$

siempre que $\mathbb{E}(X)$ exista.

Por lo que a través de este cociente se obtiene el porcentaje que puede ser eliminado en la pérdida X al introducir un deducible de monto d.

Ejemplo 20 *Considerando la distribución del ejemplo 18, ¿Cuál es la razón de pérdida eliminada que se tiene con un deducible de* 1000?

Debido a que la distribución tiene $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x 0.000001 e^{-0.0005x} dx$

$$\mathbb{E}(X) = 0.000001 \left[-\frac{xe^{-0.0005x}}{0.0005} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-0.0005x}}{0.0005} \right] = \frac{0.000001}{0.0005^2} = 4$$

y

$$\mathbb{E}(Y^L) = 2.42612 \Longrightarrow \frac{4 - 2.42612}{4} = 0.39347$$

Esto quiere decir que aproximadamente el 39% de las pérdidas pueden ser eliminadas si se considera un deducible de 1000.

1.2.2 Inflación, límite de póliza y coaseguro

Se ha dicho que existen diversas opciones para la modificación de las coberturas en una póliza de seguros, una de ellas se considera con la aplicación de un deducible, así que en esta sección se estudia lo que sucede cuando se modifica la variable de pérdida por fenómenos como la inflación, algún límite de póliza o un coaseguro, siempre y cuando se tenga claro que posterior a la aplicación de estas coberturas se debe implementar un deducible ordinario.

Entonces, primero hay que tomar en cuenta que los montos de reclamaciones durante un tiempo fijo se deben actualizar a la última de fecha del periodo estudiado, mediante el efecto inflacionario con una tasa, r. Esta situación es importante por el valor del dinero a través del tiempo puesto que el número de reclamaciones que se tenían a partir de un deducible d, se incrementarán a partir de considerar el efecto de la inflación, y aquellas reclamaciones que no rebasaban al deducible en un periodo específico, después de conocer su valor en la fecha de valuación, puede ser que estén por encima de él, provocando el incremento de pagos por parte de la aseguradora.
Bajo este esquema se sigue como referencia a la v.a. X que representa la pérdida ocurrida para cada póliza de seguro; pero en esta ocasión después de realizar la trasformación $Z = (1+r)\,X$ debida al efecto inflacionario, se tiene que introducir el deducible d a la variable aleatoria, puesto que éste no se incrementará al aplicar la tasa r.

Se desea saber cuál es el costo esperado por pérdida y pago de esta nueva variable. Anteriormente se obtuvo que: $\mathbb{E}\left[(X-d)_+\right] = \mathbb{E}\left(X\right) - \mathbb{E}\left[X \wedge d\right]$;

Se define $Z = (1+r)\,X$ y hemos de hallar el valor para $\mathbb{E}\left[(Z-d)_+\right] = \mathbb{E}\left(Z\right) - \mathbb{E}\left[Z \wedge d\right]$;

Si $Z = (1+r)\,X$ por el Teorema 48 referente a la transformación de variables aleatorias, ubicado en el apéndice A

$$f_Z\left(z\right) = \frac{1}{1+r} f_X\left(\frac{z}{1+r}\right) \text{ y } F_Z\left(z\right) = F_X\left(\frac{z}{1+r}\right)$$

desarrollando $\mathbb{E}\left[(Z-d)_+\right] = \mathbb{E}\left[Z\right] - \mathbb{E}\left[Z \wedge d\right] \ldots\ldots. (*)$

donde

$$\mathbb{E}\left[Z \wedge d\right] = \int_0^d z f_Z\left(z\right) dz + d\left[1 - F_Z\left(d\right)\right] =$$

$$= \int_0^d \frac{z}{1+r} f_X\left(\frac{z}{1+r}\right) dz + d\left[1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right]$$

$$= \int_0^{\frac{d}{(1+r)}} (1+r)\, x f_X\left(x\right) dx + d\left[1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right]$$

$$= (1+r)\left\{\int_0^{\frac{d}{(1+r)}} x f_X\left(x\right) dx + \frac{d}{(1+r)}\left[1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right]\right\}$$

$$= (1+r)\,\mathbb{E}\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]$$

regresando a $(*)$

$$\mathbb{E}\left[(Z-d)_{+}\right]=\mathbb{E}\left[(1+r)\,X\right]-(1+r)\,\mathbb{E}\left[X\wedge\frac{d}{1+r}\right]$$

$$=(1+r)\left\{\mathbb{E}\,(X)-\mathbb{E}\left[X\wedge\frac{d}{1+r}\right]\right\}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left(Y^{L}\right)=(1+r)\left\{\mathbb{E}\,(X)-\mathbb{E}\left[X\wedge\frac{d}{1+r}\right]\right\}$$

Siempre que $F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)<1.$

Y el valor esperado por pago es

$$\mathbb{E}\left(Y^{P}\right)=\frac{(1+r)\left\{\mathbb{E}\,(X)-\mathbb{E}\left[X\wedge\frac{d}{1+r}\right]\right\}}{1-F_X\left(\dfrac{d}{1+r}\right)}$$

Ejemplo 21 *La variable aleatoria X tiene una distribución Pareto($\alpha=4,\ \theta=500$), se quiere determinar cuál será el incremento esperado para la variable de pago Y^P si se conoce que habrá una inflación del* 3% *y se toma en cuenta un deducible de* 100

Si $\mathbb{E}\left(Y^{P}\right)=\displaystyle\int_d^{\infty}\frac{S_X\,(x)}{S\,(d)}dx$

$S_X\,(x)=\left(\dfrac{500}{x+500}\right)^4$ y $S_X\,(100)=\left(\dfrac{500}{100+500}\right)^4$

$\Longrightarrow$

$$\mathbb{E}\left(Y^{P}\right)=\frac{500^4}{0.4822}\int_{100}^{\infty}\frac{1}{(x+500)^4}=\frac{500^4}{0.4822}\left[-\frac{1}{3\,(x+500)^3}\Bigg|_{100}^{\infty}\right]$$

$$= \frac{500^4}{0.4822}\left[\frac{1}{3\,(100+500)^3}\right] = 200.02$$

Además $\mathbb{E}\left[X \wedge \frac{100}{1.03}\right] = \mathbb{E}\left[X \wedge 97.08\right] = \frac{500}{3}\left[1 - \left(\frac{500}{97.08+500}\right)^3\right] = 68.79$

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \frac{500}{3} = 166.66 \text{ y } S_X\left(\frac{100}{1.03}\right) = \left(\frac{500}{97.08+500}\right)^4 = 0.4917$$

Por lo tanto $\mathbb{E}\left(Y^P\right) = \dfrac{1.03\left[166.66 - 68.79\right]}{0.4917} = 205.01$

El incremento esperado en este ejemplo es del 2.5% después de actualizar la distribución de los montos con el efecto inflacionario y el deducible mencionados.

Por otra parte, además de la aplicación de un deducible en un póliza de seguro, se puede dar el caso de que las compañías de seguros se protejan con un límite de póliza, que, en su caso más sencillo y sin aplicar ninguna otra modificación de cobertura, corresponde a la definición de la *variable censurada por la derecha;* esto significa que al tener una pédida de monto X, si dicha cantidad no rebasa el valor del límite en la póliza u, la compañía aseguradora tiene que pagar dicho monto X por completo; sin embargo, si la pérdida es más grande que el límite de póliza, entonces la compañía se limita a pagar el monto u sin importar a cuánto asciendan las pérdidas totales.

Algunas propiedades de esta variable se desarrollaron, pero del mismo modo que se puede aplicar el efecto inflacionario en un contrato que se modifica por un deducible d, también se puede utilizar en uno que tiene límite de póliza. Entonces, análogamente y con la trasformación $Y = (1+r)X$, el valor esperado para esta nueva variable aleatoria es:

$$(1+r)\,\mathbb{E}\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right]$$

Cabe hacer mención que existen casos comunes utilizados en contratos de seguros, en los cuales se presenta la combinación de un deducible ordinario d, con un límite de póliza u, por lo cual se obtiene la variable Y como sigue

$$Y = \begin{cases} 0 & X \leq d \\ X - d & d < X < u \\ u - d & X \geq u \end{cases}$$

En cuyo caso su valor esperado (continuo), integrando por partes, es:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \int_d^u (x-d)\, f_X(x)\, dx + \int_u^\infty (u-d)\, f_X(x)\, dx \\ &= (u-d)\, F_X(u) + \int_d^u S_X(x)\, dx - (u-d) + (u-d)\, S_X(u) \\ &= \int_d^u S_X(x)\, dx\end{aligned}$$

En estos casos es relevante enteder conceptualmente que el *límite de póliza* es el *monto máximo a pagar* por parte de la aseguradora, pero que también existe el *monto máximo cubierto,* una cantidad fija por arriba de la cual no se pagarán beneficios adicionales. Una idea más fácil para comprender lo anterior es que en el caso de la variable censurada por la derecha llamamos al límite de póliza u y, como se mencionó, no existe más que una modificación de cobertura, motivo por el cual el límite de póliza = monto máximo cubierto. Sin embargo, al tomar en cuenta otras modificaciones como un deducible ordinario y límite de póliza se tiene la siguiente diferencia

$$\text{monto máximo a pagar} = u - d \neq \text{ monto máximo cubierto} = u$$

Por último, una de las modificaciones que en ocasiones llega a ser considerada en las pólizas de seguros es el *coaseguro.* Este concepto hace partícipe al asegurado de la pérdida ocurrida en el siniestro, de manera que sea cual sea el monto X de la pérdida, la aseguradora sólo pagará un porcentaje de ésta. Es decir, supongamos que α es el porcentaje de coaseguro, entonces la aseguradora absorberá los gastos de la variable aleatoria de pérdida $Y = \alpha X$, y evidentemente el asegurado pagará la cantidad $(1-\alpha)\, X$. Por ejemplo si $X = 100$ y $\alpha = .40$, entonces el la compañía pagará un monto igual a $Y = 40$ mientras que el asegurado tendrá que cubrir el resto.

Una vez estudiadas las características de las modificaciones en las coberturas de un seguro, se pueden contemplar las variables de pérdida y pago, en el sentido que cada una se vea afectada por *la inflación, el deducible, el límite de póliza y el coaseguro;* sin perder de vista que deben seguir ese orden al momento de modificar la variable X, entonces

$$Y^L = \begin{cases} 0 & X < \dfrac{d}{1+r} \\[2ex] \alpha\left[(1+r)\, X - d\right] & \dfrac{d}{1+r} \leq X < \dfrac{u}{1+r} \\[2ex] \alpha\,(u-d) & X \geq \dfrac{u}{1+r} \end{cases}$$

Mientras que Y^P será igual que Y^L excepto cuando $X < \dfrac{d}{1+r}$ puesto que no está definida en este caso.

Y los valores esperados de ambas variables, resultan en:

$$\mathbb{E}\left(Y^L\right) = \alpha\,(1+r)\left[\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{u}{1+r}\right) - \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right)\right]$$

$$\mathbb{E}\left(Y^P\right) = \frac{\mathbb{E}\left(Y^L\right)}{1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}$$

Si se quisieran hallar los momentos de estas variables, el cálculo se vuelve más difícil, sin embargo, por medio del segundo momento enunciado en el siguiente teorema se puede determinar la varianza de las mismas.

Teorema 22 *Para la variable de pérdida* Y^L,

$$\mathbb{E}\left[\left(Y^L\right)^2\right] = \alpha^2(1+r)^2\left\{\mathbb{E}\left[\left(X \wedge u^*\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(X \wedge d^*\right)^2\right] - 2d^*\mathbb{E}\left(X \wedge u^*\right) + 2d^*\mathbb{E}\left(X \wedge d^*\right)\right\}$$

donde $u^* = \dfrac{u}{1+r}$ y $d^* = \dfrac{d}{1+r}$. Para el segundo momento de la varible Y^P basta dividir la expresión anterior entre $\left[1 - F_X\left(d^*\right)\right]$.

Dem:

$$\mathbb{E}\left[\left(Y^L\right)^2\right] = \int_{d^*}^{u^*} \alpha^2\left[(1+r)\,x - d\right]^2 f_X(x)\,dx + \int_{u^*}^{\infty} \alpha^2\left[u-d\right]^2 f_X(x)\,dx$$

diviendo entre α^2

$$\frac{\mathbb{E}\left[\left(Y^L\right)^2\right]}{\alpha^2} = \int_{d^*}^{u^*}\left[(1+r)^2 x^2 - 2\,(1+r)\,xd + d^2\right] f_X(x)\,dx$$

$$+\,(u-d)^2\left[1 - F_X\left(u^*\right)\right] = (1+r)^2\left[\int_0^{u^*} x^2 f_X(x)\,dx - \int_0^{d^*} x^2 f_X(x)\,dx\right]$$

$$-2(1+r)d\left[\int_0^{u^*} x f_X(x)\,dx - \int_0^{d^*} x f_X(x)\,dx\right] + d^2\left[F_X\left(u^*\right) - F_X\left(d^*\right)\right]$$

$$+\,(u-d)^2\left[1 - F_X\left(u^*\right)\right]$$

$$= (1+r)^2 \left\{ \mathbb{E}[\,(X \wedge u^*)^2] - u^{*2}\left[1 - F_X(u^*)\right] - \mathbb{E}[\,(X \wedge d^*)^2] + d^{*2}\left[1 - F_X(d^*)\right] \right\}$$

$$-2\,(1+r)^2\, d^* \left\{ \mathbb{E}\,(X \wedge u^*) - u^*\left[1 - F_X(u^*)\right] - \mathbb{E}\,(X \wedge d^*) + d^*\left[1 - F_X(d^*)\right] \right\}$$

$$+\,(1+r)^2\, d^{*2}\left[F_X(u^*) - F_X(d^*)\right] + (1+r)^2\,(u^* - d^*)^2\left[1 - F_X(u^*)\right]$$

realizando el cociente con $(1+r)^2$

$$\frac{\mathbb{E}\left[\left(Y^L\right)^2\right]}{\left[\alpha\,(1+r)\right]^2} = \mathbb{E}[\,(X \wedge u^*)^2] - \mathbb{E}[\,(X \wedge d^*)^2] - 2d^*\left[\mathbb{E}\,(X \wedge u^*) - \mathbb{E}\,(X \wedge d^*)\right]_{\blacksquare}$$

Además, se tienen las siguientes funciones de densidad de probabilidades y de distribución para las variables de pago y pérdida, considerando tanto deducible ordinario como deducible franquicia:

- Deducible ordinario, límite de póliza, coaseguro e inflación

Para Y^P

$$F_{Y^P}(y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ \dfrac{F_X\left(\frac{y+\alpha d}{\alpha(1+r)}\right) - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}{1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} & 0 < y < \alpha(u-d) \\ 1 & y \geq \alpha(u-d) \end{cases}$$

$$f_{Y^P}(y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ \dfrac{1}{\alpha(1+r)} \dfrac{f_X\left(\frac{y+\alpha d}{\alpha(1+r)}\right)}{1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} & 0 < y < \alpha(u-d) \\ \dfrac{1 - F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)}{1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} & y = \alpha(u-d) \end{cases}$$

Para Y^L

$$F_{Y^L}(y) = \begin{cases} F_X\left(\frac{d}{1+r}\right) & y = 0 \\ F_X\left(\frac{y+\alpha d}{\alpha(1+r)}\right) & 0 < y < \alpha(u-d) \\ 1 & y \geq \alpha(u-d) \end{cases}$$

$$f_{Y^L}(y) = \begin{cases} F_X\left(\frac{d}{1+r}\right) & y = 0 \\ \frac{1}{\alpha(1+r)} f_X\left(\frac{y+\alpha d}{\alpha(1+r)}\right) & 0 < y < \alpha(u-d) \\ 1 - F_X\left(\frac{u}{1+r}\right) & y = \alpha(u-d) \end{cases}$$

- Deducible franquicia, límite de póliza, coaseguro e inflación

Para Y^P

$$F_{Y^P}(y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq y \leq \alpha d \\ \dfrac{F_X\left(\frac{y}{\alpha(1+r)}\right) - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}{1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} & \alpha d < y < \alpha u \\ 1 & y \geq \alpha u \end{cases}$$

$$f_{Y^P}(y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq y \leq \alpha d \\ \dfrac{1}{\alpha(1+r)} \dfrac{f_X\left(\frac{y}{\alpha(1+r)}\right)}{1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} & \alpha d < y < \alpha u \\ \dfrac{1 - F_X\left(\frac{u}{1+r}\right)}{1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} & y = \alpha u \end{cases}$$

Para Y^L

$$F_{Y^L}(y) = \begin{cases} F_X\left(\frac{d}{1+r}\right) & 0 \le y \le \alpha d \\ F_X\left(\frac{y}{\alpha(1+r)}\right) & \alpha d < y < \alpha u \\ 1 & y \ge \alpha u \end{cases}$$

$$f_{Y^L}(y) = \begin{cases} F_X\left(\frac{d}{1+r}\right) & y = 0 \\ \frac{1}{\alpha(1+r)} f_X\left(\frac{y}{\alpha(1+r)}\right) & \alpha d < y < \alpha u \\ 1 - F_X\left(\frac{u}{1+r}\right) & y = \alpha u \end{cases}$$

Ejemplo 23 *Las pérdidas* $X \sim Pareto(\alpha = 3, \theta = 200,000)$. *Se implementan modificaciones de cobertura considerando lo siguiente:*

1. $d = 50,000$
2. Límite de póliza de $150,000$
3. Coaseguro del 90%
4. Inflación 5%

Calcular el valor esperado de las pérdidas por pago de la póliza.

$$150000 = \alpha (u - d) \Longrightarrow u = \frac{150000}{0.9} + 50000 = 216666.67$$

Entonces

$$Y^P = \begin{cases} \text{indefinida} & X < \dfrac{50000}{1.05} \\ 0.9\left[(1.05)X - 50000\right] & \dfrac{50000}{1.05} \le X < \dfrac{216666.67}{1.05} \\ 150000 & X \ge \dfrac{216666.67}{1.05} \end{cases}$$

Luego

$$\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{216666.67}{1.05}\right) = \frac{200000}{2}\left[1 - \left(\frac{200000}{206349.2 + 200000}\right)^2\right] = 75775.15$$

$$\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{50000}{1.05}\right) = \frac{200000}{2}\left[1 - \left(\frac{200000}{47619.05 + 200000}\right)^2\right] = 34763.31$$

$$S_X\left(\frac{50000}{1.05}\right) = \left(\frac{200000}{47619.05 + 200000}\right)^3 = 0.5269117$$

Por lo tanto $\mathbb{E}\left(Y^P\right) = \dfrac{0.9\,(1.05)\,[75775.145 - 34763.31]}{0.526911} = 73553.47$

Esta variable de pérdida está afectada por todas las modificaciones de cobertura que hemos estudiado.

1.2.3 Modificaciones en los modelos de frecuencia

Debido a que las modificaciones utilizadas en la sección anterior influyen sobre los modelos continuos, es lógico pensar que para las distribuciones discretas también existen, y, a este respecto, son dos tipos de modificaciones las que se consideran: *Exposición y Cobertura.*

Las *modificaciones de exposición* se refieren al número de miembros pertenecientes a un grupo asegurado durante un tiempo determinado; en este tipo de modificaciones interesa adaptar los modelos de frecuencia ya conocidos cuando el número de individuos expuestos se ve alterado. Supóngase que el modelo original está basado en n_1 expuestos y que se requiere adaptar a un nuevo modelo con n_2 expuestos, entonces bajo las distribuciones conocidas se alteran los parámetros de tal manera que resultan las siguientes:

n_1 expuestos	n_2 expuestos
$Poisson(\lambda)$	$Poisson(\lambda\frac{n_1}{n_2})$
$Binomial(m, q)$; m entero	$Binomial(m\frac{n_1}{n_2}, q)$
$BinNeg(r, \beta)$	$BinNeg(r\frac{n_1}{n_2}, \beta)$

Tabla 1.11

Por otra parte, las *modificaciones de cobertura* se presentan al cambiar o implementar un deducible, por el efecto de la inflación o un límite de reclamación en el contrato. Por ejemplo, supongamos que el deducible se incrementa en una póliza de seguros, esto provoca que haya menos *pagos* por parte de la compañía debido a que los montos de las pérdidas menores al deducible de clientes que sufran algún siniestro, no serán sujetos de pago.

En general, en este tipo de modificaciones las frecuencias se siguen distribuyendo igual, pero con diferentes parámetros. Para este concepto, se debe utilizar la constante v, que representa la probabilidad de *pago* por parte de la aseguradora cuando se implementa alguna modificación en su cobertura; por ejemplo, si se implementa un deducible d, entonces dicha constante es:

$$v = \mathbb{P}(X > d) = 1 - F_X(d)$$

por lo que, además de usar la frecuencia, también se considera la distribución de severidad de los datos para obtener v, y se comienzan a mezclar las distribuciones de severidad con las de frecuencia. Finalmente, los parámetros de las distribuciones de frecuencia se habrán modificado por v siempre que haya pago, de la siguiente manera:

Distribución	Parámetros modificados
Poisson	$\lambda^* = \lambda v$
Poisson Modificada en cero	$p_0^* = \dfrac{p_0^M - e^{-\lambda} + e^{-v\lambda} - p_0^M e^{-v\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$ $\lambda^* = \lambda v$
Binomial	$q^* = vq$
Binomial Modificada en cero	$p_0^* = \dfrac{p_0^M - (1-q)^m + (1-vq)^m - p_0^M(1-vq)^m}{1-(1-q)^m}$ $q^* = vq$
Binomial Negativa	$\beta^* = v\beta$
BinNeg Modificada en cero	$p_0^* = \dfrac{p_0^M - (1+\beta)^{-r} + (1+v\beta)^{-r} - p_0^M(1+v\beta)^{-r}}{1-(1+\beta)^{-r}}$

Tabla 1.12

En el caso específico que un deducible quiera ser removido porque se requiere conocer la distribución de la frecuencia sin ninguna modificación, entonces el valor de v es:

$$v = \frac{1}{1 - F_X(d)}$$

Supóngase también que ya existe un deducible d y que está afectando la distribución de frecuencias de pago, pero se requiere implementar un nuevo deducible d^*, entonces

$$v = \frac{1 - F_X(d^*)}{1 - F_X(d)}$$

Cabe mencionar que esto aplica tanto para distribuciones de la clase (a,b,0) como de la clase (a,b,1).

1.2.4 Modelos compuestos de frecuencia

Antes de comenzar con el estudio de los modelos de pérdidas agregadas, se hará un breve acercamiento al concepto de crear una nueva distribución a partir de dos distribuciones discretas; lo cual hace pensar en una distribución *primaria* y otra *secundaria* que dan como resultado la distribución compuesta en cuestión. Esta idea posteriormente se generaliza al momento de conocer el modelo de riesgo colectivo, por lo que en esta primera instancia se asigna la siguiente notación; sin embargo, en el siguiente capítulo cambian algunos términos.

Sea N una variable aleatoria discreta con f.g.p $P_N(z)$ y $M_1, M_2, ..., M_N$ variables aleatorias discretas independientes e identicamente distribuidas con f.g.p $P_M(z)$. Además, supongamos que N y las $M\acute{j}s$ son independientes entre sí. Entonces, nuestra distribución compuesta $S = M_1 + M_2 + \cdots + M_N$ tiene su correspondiente f.g.p:

$$P_S(z) = P_N[P_M(z)]$$

Dem :

$$P_S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[S=k]\, z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[S=k \mid N=n]\,\mathbb{P}[N=n]\, z^k$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[N=n] \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[M_1 + M_2 + \cdots + M_n = k \mid N=n]\, z^k$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[N=n]\,[P_M(z)]^n = P_N[P_M(z)] \blacksquare$$

Y su esperanza se calcula por medio de:

$$\mathbb{E}(S) = P_S{}'(1)\,[P_N{}'(P_M(1)] = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(M)$$

Esta idea nos hace pensar entonces, que la distribución compuesta creada, se debe al monto de las reclamaciones recibidas así como al número de reclamaciones que se hayan tenido y que ambos conceptos poseen una distribución discreta; de tal forma que la suma que involucra frecuencia y severidad resultará el total del portafolio.

En general, esto nos sirve si existen miembros de las clases (a,b,0) ó (a,b,1) para las distribuciones primarias, es decir, a partir de:

$$\mathbb{P}[S=k] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[M_1 + M_2 + \cdots + M_N = k \mid N=n]\,\mathbb{P}[N=n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(M_1 + M_2 + \cdots + M_n = k\right) \mathbb{P}\left[N = n\right]$$

Se reescribe la expresión anterior renombrando las variables de la siguiente forma

$$g_n = \mathbb{P}\left[S = n\right], \; p_n = \mathbb{P}\left[N = n\right] \text{ y } f_n = \mathbb{P}\left[M = n\right]$$

entonces

$$g_k = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_k^{*n}$$

donde $f_k^{*n}, k = 0, 1, 2, 3, ...$ es la $n - \acute{e}sima$ convolución de $f_k, k = 0, 1, 2, ...$ que es la probabilidad de la suma de n variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas.

Esta nueva notación y teoría es de mucha utilidad para los modelos de pérdidas agregadas porque simplifican los cálculos posteriores en el momento de encontrar la distribución del riesgo S; motivo por el cual más adelante se retoma dicho modelo en la sección del *Método Recursivo.*

Ahora que ya se han estudiado previamente las variables aleatorias, las modificaciones en los contratos de seguros así como las distribuciones (con sus respectivas clases) que caracterizarán a los modelos de pérdidas agregadas, lo siguiente es pasar al tema principal de estudio y para el cual son necesarios los siguientes capítulos, con el fin de tener distintos modelos para su desarrollo.

Capítulo 2

Modelos de pérdidas agregadas

Las pérdidas que tiene una compañía aseguradora pueden surgir de manera individual o colectiva, dependiendo del tipo de seguro que se contrate, de tal manera que poner atención en este tipo de características juega un papel muy importante en las pérdidas que contraiga la empresa.

Como se ha mencionado, el objetivo principal del presente trabajo es el estudio del *riesgo agregado* que absorbe la compañía aseguradora cuando combina cada uno de los riegos individuales de su portafolio de asegurados. Así que, para alcanzar nuestro objetivo, es indispensable conocer los dos modelos que se apegan a la teoría propuesta para el desarrollo de este tema:

-Modelo de riesgo individual
-Modelo de riesgo colectivo

Antes de conocer las características para cada uno de los modelos, debe entenderse el concepto de pérdidas agregadas, como aquéllas que definen el total de pérdidas pagadas por la aseguradora en un periodo de tiempo dado. Esto involucra algunos temas que se han tocado anteriormente, lo relativo a que existe un número de reclamaciones y con ellas un monto asociado que determina las pérdidas que absorbe la compañía de seguros. Entonces, construir modelos que describan, de la mejor manera, la distribución de pérdidas agregadas contruibuirá en el desarrollo teórico de conceptos referentes al cálculo de reservas, primas y otros estudios actuariales que se basan en la información obtenida y que son cuestiones primordiales para la constitución de las compañías aseguradoras, aunque no se indagarán estas cuestiones en este trabajo.

Entrando en términos matemáticos, en general, los modelos agregados representan una suma de variables aleatorias denotadas por S que llamaremos *riesgo*; sin embargo, se deben conocer las características del modelo individual y colectivo para comprender de forma específica las diferencias que poseen y los criterios que consideran.

2.1 Modelo de riesgo individual

Bajo este modelo las pérdidas agregadas S, son el resultado de una suma de variables aleatorias:

$$S = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$$

donde n es un número fijo que determina el número de posibles reclamaciones que se tuvieron en un periodo de tiempo y cada uno de los montos de las pérdidas está representado por las variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_n$ de acuerdo a las n reclamaciones realizadas.
Entonces, para la pérdida agregada $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ se tiene la siguiente esperanza y varianza:

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) \quad \text{y} \quad Var(S) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

En este modelo las $X\H{i}s$, $i = 1, ..., n$ se asumen variables aleatorias independientes y generalmente poseen una probabilidad de masa en cero debido a que se presentarán casos en donde no existan pérdidas o pagos.

Un ejemplo que podría dar idea de cómo se presenta este modelo, es a través de contratos para grupos de vida en donde se cubre a cierto número de personas n, y cada una posee diferentes coberturas de acuerdo a las categorías que se establecen para su grupo. Esta situación produce que las personas tengan distintas probabilidades de pérdidas, sujetas a su edad o cualquier otra dependencia que exista y se determine en el contrato.
Para que el panorama quede más claro, supongamos un portafolio con n pólizas, cada póliza por individuo y a lo largo de un periodo de tiempo establecido. Entonces definamos q_i como la probabilidad de que el $i - ésimo$ asegurado efectúe exactamente una reclamación durante ese periodo definido y $(1 - q_i)$ que no haga ninguna reclamación, de tal forma que $q_i + (1 - q_i) = 1$. Esto claramente decribe una variable aleatoria Bernoulli que asigna valores de 1 y 0 respectivamente, a dicha variable la podemos llamar R_i.
Ahora bien, al momento que la $i - ésima$ póliza efectúe una reclamación se verá reflejado en el monto que la compañía aseguradora deberá asumir, entonces definimos la variable aleatoria $B_i > 0$ como el monto de reclamación de la $i - ésima$ póliza. Por lo tanto, el monto de la $i - ésima$ póliza está definida por:

$$X_i = \begin{cases} B_i R_i & \text{con probabilidad } q_i \text{, cuando } R_i = 1 \\ 0 & \text{con probabilidad } (1 - q_i) \text{; cuando } R_i = 0 \end{cases}$$

Con $B_i \perp R_i$

Si además se supone independencia entre cada una de las X_i's, se ha llegado al modelo $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ que se expone como el modelo de riesgo individual. Esta variable es el monto que debe asumir la compañía aseguradora por el concepto de la reclamaciones de sus asegurados y es por eso que se conoce como un "modelo de pérdidas agregadas".

Uno de los objetivos será conocer las características de esta nueva variable S, así que los conceptos de esperanza y varianza que se mencionan anteriormente, ahora son estudiados con el conocimiento de cómo se comporta cada X_i; y además agregaremos la función de distribución y la f.g.m. para el modelo individual.

Para cada X_i se tiene asociada una función de distribución $F_{Xi}(x)$, entonces la función de distibución del riesgo S queda en términos de convoluciones como:

$$F_S(x) = (F_{X_1} * \cdots * F_{X_n})(x)$$

sin embargo $F_S(x)$ se vuelve difícil de calcular debido a que las distribuciones de cada X_i pueden ser muy distintas entre sí, por lo cual es más sencillo identificar la distribución de cada una de ellas por separado y llegar a:

$$F_{X_i}(x) = (1-q_i)_{(x)_{(0,\infty)}} + q_i F_{B_i}(x)$$

donde F_{B_i} es la función de distribución de la v.a. de los montos de reclamación B_i.

Dem:

$$\begin{aligned}
F_{X_i}(x) &= \mathbb{P}[X_i \leq x] = \mathbb{P}[X_i \leq x \mid \textit{no hubo reclamación}]\,\mathbb{P}[\textit{no hubo reclamación}] \\
&\quad + \mathbb{P}[X_i \leq x \mid \textit{hubo reclamación}]\,\mathbb{P}[\textit{hubo reclamación}] \\
&= \mathbb{P}[X_i \leq x \mid R_i = 0]\,\mathbb{P}[R_i = 0] + \mathbb{P}[X_i \leq x \mid R_i = 1]\,\mathbb{P}[R_i = 1] \\
&= \mathbb{P}[X_i \leq x \mid R_i = 0]\,(1-q_i) + \mathbb{P}[X_i \leq x \mid R_i = 1]\; q_i \\
&= (1-q_i)_{(x)_{(0,\infty)}} + q_i F_{B_i}(x) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Luego, para la función generadora de momentos de S primero se tiene el caso de la f.g.m. para cada X_i

$$\begin{aligned}
M_{X_i}(t) &= \mathbb{E}\left[e^{tX_i}\right] = \mathbb{E}\left[e^{tX_i} \mid R_i = 0\right]\mathbb{P}[R_i = 0] + \mathbb{E}\left[e^{tX_i} \mid R_i = 1\right]\mathbb{P}[R_i = 1] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{0}\right](1-q_i) + \mathbb{E}\left[e^{tB_i}\right] q_i \\
&= (1-q_i) + M_{B_i}(t)\, q_i = 1 + q_i\,[M_{B_i}(t) - 1]
\end{aligned}$$

Entonces a partir de esto se obtiene $M_S(t)$ que, por el supuesto de independencia entre las $X_i\acute{}s$ es:

$$M_S\left(t\right)=\prod_{i=1}^{n}\left[1-q_i\left(M_{B_i}\left(t\right)-1\right)\right]$$

Analogamente la f.g.p. para X_i es

$$\begin{aligned} P_{Xi}\left(z\right)&=\mathbb{E}\left[z^{X_i}\right]=\mathbb{E}\left[z^{X_i}\mid R_i=0\right]\mathbb{P}\left[R_i=0\right]+\mathbb{E}\left[z^{X_i}\mid R_i=1\right]\mathbb{P}\left[R_i=1\right]\\ &=\mathbb{E}\left[z^{0}\right]\left(1-q_i\right)+\mathbb{E}\left[z^{B_i}\right]q_i\\ &=\left(1-q_i\right)+P_{B_i}\left(z\right)q_i \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$P_S\left(z\right)=\prod_{i=1}^{n}\left[1-q_i+q_iP_{B_i}\left(z\right)\right]$$

Si consideramos el valor de B_i como constante (b_i)
$\Longrightarrow$

$$P_S\left(z\right)=\prod_{i=1}^{n}\left[1-q_i+q_iz^{bi}\right]$$

Por otra parte la esperanza del riesgo S es:

$\mathbb{E}\left(S\right) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i\right)$ que ya se conocía desde un principio, pero con respecto a la definición de la variable X_i esto se modifica de tal forma que
$\mathbb{E}\left(S\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[B_iR_i\right]$; como$B_i$ y R_i son independientes $\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[B_i\right]\mathbb{E}\left[R_i\right]$.

Al ser $R_i\sim Bernoulli(q_i)$ entonces $\mathbb{E}\left[R_i\right]=q_i$ y $Var(R_i)=q_i(1-q_i)$, por lo cual la esperanza de S resulta

$$\mathbb{E}\left(S\right)=\sum_{i=1}^{n}q_i\mathbb{E}\left[B_i\right]$$

Sabemos que la $Var(S)=\sum_{i=1}^{n}Var\left(X_i\right)$, entonces para tener una expresión que involucre las probabilidades de reclamación y los montos, hagamos lo siguiente:

i) Primero se desarrolla el segundo momento de X_i considerando los supuestos de independencia y que $R_i\sim Bernoulli(q_i)$

$$\mathbb{E}\left(X_i^2\right)=\mathbb{E}\left(B_i^2R_i^2\right)=\mathbb{E}\left[B_i^2\right]\mathbb{E}\left[R_i^2\right]=\mathbb{E}\left[B_i^2\right]\left[Var(R_i)+\mathbb{E}^2\left(R_i\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[B_i^2\right]\left[q_i\left(1-q_i\right)+q_i^2\right] = q_i\mathbb{E}\left[B_i^2\right]$$

ii) De tal manera que para desarrollar la $Var\left(X_i\right)$

$$Var\left(X_i\right) = \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - \mathbb{E}^2\left(X_i\right)$$

$$= q_i\mathbb{E}\left[B_i^2\right] - \left[q_i\mathbb{E}\left[B_i\right]\right]^2 = q_i\mathbb{E}\left[B_i^2\right] - q_i^2\mathbb{E}^2\left[B_i\right]$$

$$= q_i\left[Var\left(B_i\right)+\mathbb{E}^2\left[B_i\right]\right] - q_i^2\mathbb{E}^2\left[B_i\right] = q_iVar\left(B_i\right) + q_i\mathbb{E}^2\left[B_i\right] - q_i^2\mathbb{E}^2\left[B_i\right]$$

$$= q_iVar\left(B_i\right) + q_i\left(1-q_i\right)\mathbb{E}^2\left[B_i\right]$$

Entonces de los resultados tenemos que la varianza de S es

$$Var(S) = \sum_{i=1}^{n} Var\left(X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[q_iVar\left(B_i\right) + q_i\left(1-q_i\right)\mathbb{E}^2\left[B_i\right]\right]$$

Se ha mencionado que la distribución de S es complicada de obtener, por este motivo no se utilizan las convoluciones como una alternativa a este problema, sin embargo, a partir del capítulo siguiente se desarrollan algunos métodos que, junto con los resultados anteriores, proporcionarán la distribución de las pérdidas agregadas en un modelo individual.

2.2 Modelo de riesgo colectivo

Este modelo representa las pérdidas agregadas como una suma aleatoria de variables aleatorias donde N es la varible aleatoria del número de reclamaciones realizadas y $X_1, X_2, ..., X_N$ son las variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas que representan los montos de cada reclamación, por lo que el modelo queda:

$$S = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_N,\ N = 0, 1, 2, ...$$

donde $S = 0$ cuando $N = 0$

Dicho modelo también es conocido como el *modelo compuesto de reclamaciones agregadas,* donde S es la *distribución compuesta,* N la *distribución primaria* (frecuencia de reclamaciones) y la distribución común entre las *Xi′s* será la *distribución secundaria* (severidad de las reclamaciones).

Además, el modelo colectivo considera ciertas características de independencia:

- Condicional a $N = n, X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias de severidad son independientes e idénticamente distribuidas; por lo que el monto de cada reclamación tiene la misma distribución y es independiente de cualquier otra.

- Las $X\acute{i}s$ son independientes de N; esto es, que la variable del número de reclamaciones es independiente del tamaño o monto de las mismas.

Nótese que en el modelo de riesgo individual cuando las $X\acute{i}s$ son i.d. entonces se convierte en un caso especial del modelo colectivo salvo porque $\mathbb{P}(N = n) = 1$.

Como el objetivo es encontrar la distribución que mejor ajuste a S, y esto se obtendrá a partir de la distribución que ajustemos para N y de la distribución de las $X\acute{i}s$; entonces la frecuencia y severidad se modelarán de forma separada pues trae consigo muchas ventajas, entre las cuales están las siguientes:

- Debido a que el número esperado de reclamaciones se ve afectado por el número de pólizas que se vayan asegurando y se irá actualizando basado en datos anteriores, el hecho de tener por separado la frecuencia es más práctico para ir modificando nuestros datos.

- El efecto de factores económicos como la inflación se ven reflejados en las pérdidas de la compañía por lo que identificar estos factores en los montos agregados se puede volver complicado, y si analizamos la frecuencia y severidad por separado esto resulta más sencillo.

- El impacto de deducibles, coaseguros y límites de pólizas se estudia de manera más sencilla tanto en las distribuciones de severidad como en las de frecuencia.

- Los modelos desarrollados para pérdidas que no están cubiertas, costos de reclamación de las aseguradoras y reaseguradoras suelen ser más consistentes.

- Debido a que la forma de la distribución de S depende de las distribuciones de X y N, el conocer cada una de ellas servirá para ajustar mejores distribuciones para S. Por ejemplo, si la cola de la distribución de X es mucho más pesada que la cola de N, la forma de la cola que tendrán las pérdidas agregadas será determinada por la severidad y será más insensible a la frecuencia.

Entonces los pasos a seguir para hallar la distribución más adecuada para el modelo propuesto de S son:

i) Desarrollar un modelo de la distribución para la frecuencia N basada en datos.

ii) Desarrollar un modelo para la distribución común de las pérdidas $X\acute{i}s$ basándonos en los datos.

iii) Usando estos dos modelos, llevar a cabo los cálculos necesarios para encontrar la distribución de S.

Lo primero que se debe establecer a partir del modelo $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ es su función de distribución

$$F_S(x) = \mathbb{P}(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \mathbb{P}(S \leq x|\ N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^{*n}(x)$$

llamada *distribución compuesta,* donde $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ es la función de distribución de las $X\H{i}s$, $p_n = \mathbb{P}(N = n)$ y $F_X^{*n}(x)$ es la n-ésima convolución de las v.a´s ($F_X^{*n}(x) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq x)$ que se obtiene por medio de:

$$F_X^{*0}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

y

$$F_X^{*k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X^{*(k-1)}(x-y) f_X(y)\, dy;\ k = 1, 2, ...$$

$$f_X^{*k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X^{*(k-1)}(x-y) f_X(y)\, dy;\ k = 1, 2, ...$$

Las colas para la distribución con $x \geq 0$, son:

$$1 - F_S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[1 - F_X^{*n}\right]$$

Si X es una v.a. con probabilidad cero para valores negativos, cuyo caso se presenta en el análisis de este trabajo debido a que los montos reclamados en una aseguradora únicamente tomarán valores mayores o iguales a cero, su función de distribución se reduce a:

$$F_X^{*k}(x) = \int_0^x F_X^{*(k-1)}(x-y) f_X(y)\, dy;\ k = 2, 3, ...$$

para $k = 1$ $F_X^{*1}(x) = F_X(x)$

y su f.d.p es

$$f_X^{*k}(x) = \int_0^x f_X^{*(k-1)}(x-y) f_X(y)\, dy;\ k = 1, 2, ...$$

Entonces si X es v.a. continua, la f.d.p de S es:

$$f_S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x)$$

con probabilidad de masa en cero $p_0 = \mathbb{P}(S = 0)$ en $x = 0$.

Si X tiene distribución discreta con probabilidades en $0, 1, 2, ...$ las funciones anteriores de distribución y densidad serán sustituidas por sumas en lugar de integrales sobre cada valor, tomado por la v.a. x; y en este caso S tendrá como función de probabilidad:

$$f_S(x) = \mathbb{P}(S = x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x), \; x = 0, 1, 2, ...$$

Su f.g.p, condicionando sobre el valor de N y tomando las hipótesis de independencia es:

$$P_S(z) = \mathbb{E}\left(z^S\right) = \mathbb{E}\left(z^{X_1 + \cdots + X_N}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(z^0\right) \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(z^{X_1 + \cdots + X_n} \mid N = n\right) \mathbb{P}(N = n)$$

$$= \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{n} z^{X_j}\right] \mathbb{P}(N = n)$$

$$= \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[P_X(z)\right]^n \mathbb{P}(N = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[P_X(z)\right]^n \mathbb{P}(N = n) = \mathbb{E}\left[P_X(z)^N\right] = P_N(P_X(z))$$

$$\boxed{P_S(z) = P_N(P_X(z))}$$

Siguiendo las mismas consideraciones, la f.g.m, la esperanza y la varianza para S se obtienen

$$M_S(t) = \mathbb{E}\left(e^{tS}\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{tS} \mid N\right]\right] = \mathbb{E}\left[\ \mathbb{E}\left[e^{t(X_1 + \cdots + X_N)} \mid N\right]\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{t(X_1 + \cdots + X_N)} \mid N = n\right] \mathbb{P}(N = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{t(X_1+\cdots+X_n)} \mid N=n\right] \mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{t(X_1+\cdots+X_n)}\right] \mathbb{P}(N=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right] \mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{tX_i}\right]\right] \mathbb{P}(N=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbb{E}\left[e^{tX_i}\right]\right)^n \mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} (M_X(t))^n \mathbb{P}(N=n) = \mathbb{E}\left[(M_X(t))^N\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{\log\left((M_X(t))^N\right)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{N\log((M_X(t)))}\right] = M_N(\log(M_X(t))$$

$$M_S(t) = M_N(\log(M_X(t))$$

y dejándola en términos de la f.g.p.

$$\boxed{M_S(t) = P_N(M_X(t))}$$

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S \mid N]] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N\right]\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \cdots + X_N \mid N=n] \mathbb{P}(N=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n \mid N=n] \mathbb{P}(N=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] \mathbb{P}(N=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}[X_i] \mathbb{P}(N=n)$$

Al ser las X_i's v.a.i.i.d. su esperanza es la misma y es $\mathbb{E}[X]$ en general, entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}[X_i] \mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{E}[X] \mathbb{P}(N=n) = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[N]$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left(S\right)=\mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[N\right]}$$

La varianza de S se calcula por medio de la fórmula de varianza iterada donde

$$\begin{aligned} Var\left(S\right) &= \mathbb{E}\left[Var\left(S\mid N\right)\right]+Var\left[\mathbb{E}\left(S\mid N\right)\right]=\mathbb{E}\left[NVar\left(X\right)\right]+Var\left[N\mathbb{E}\left(X\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left(N\right)Var(X)+Var(N)\mathbb{E}^{2}\left(X\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{Var\left(S\right)=\mathbb{E}\left(N\right)Var(X)+Var(N)\mathbb{E}^{2}\left(X\right)}$$

Y finalmente el tercer momento alrededor de la media para S, es:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(S-\mathbb{E}\left(S\right)\right)^{3}\right] = \mathbb{E}\left(N\right)\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}\left(X\right)\right)^{3}\right]+3Var\left(N\right)\mathbb{E}\left(X\right)Var\left(X\right) \\ +\mathbb{E}\left[\left(N-\mathbb{E}\left(N\right)\right)^{3}\right]\mathbb{E}\left(X\right)^{3} \end{aligned}}$$

Es posible verificar los resultados de la esperanza y varianza por medio de las propiedades de la f.g.m o bien de la f.g.p. ubicadas en el apéndice A.

Ejemplo 24 *Una compañía de seguros conoce que el número de reclamaciones para su seguro de automoviles sigue una distribución Poisson con esperanza* 3 *y* $n=0,1,2,3.$ *Además, las probabilidades que tiene cada monto de reclamación son las siguientes:*

Monto de reclamación	Probabilidad
1	0.60
2	0.25
3	0.15

Tabla 2.1

Calcular por medio de las convoluciones desarrolladas, el valor de $F_{S}\left(3\right).$

Como $N\sim Poisson(3)$, entonces $a=0$, $b=\lambda=3$ y

$$p_{0}=e^{-\lambda}=e^{-3}=0.049787068$$

$$p_{1}=3e^{-3}=0.149361205$$

$$p_{2}=\frac{3}{2}p_{1}=0.224041808$$

$$p_{3}=\frac{3}{3}p_{2}=0.224041808$$

Sabemos que $\mathbb{P}[N=0]=p_0 \implies f_0 = 0.049787068$

Si encontramos la distribución de la pérdida agregada de manera "lógica", es decir sin utilizar aún las convoluciones, se supone lo siguiente:

- $f_S(1)$ resulta sólo si se tiene una reclamación de monto igual a 1

$\implies f_S(1) = p_1 \mathbb{P}[X_1 = 1] = p_1 f_X^{*1}(1) = 0.149361205 * 0.60 = 0.089616723$

- Para $f_S(2)$ tendríamos 2 posibilidades, la primera es que haya una reclamación de monto 2 o bien 2 reclamaciones, cada una de monto 1.

$\implies f_S(2) = p_1 \mathbb{P}[X_1 = 2] + p_2 \mathbb{P}[X_1 + X_2 = 2] = p_1 f_X^{*1}(2) + p_2 f_X^{*2}(2)$

$$= (0.149361205 * 0.25) + (0.224041808 * 0.6^2) = 0.117995352$$

- Luego $f_S(3)$ se presenta bajo las siguientes opciones:
  - Una reclamación de monto 3
  - Dos reclamaciones, una de monto 2 y la otra de monto 1, o viceversa
  - Tres reclamaciones, cada una de monto 1

$\implies$

$$f_S(3) = p_1 \mathbb{P}[X_1 = 3] + p_2 \mathbb{P}[X_1 + X_2 = 3] + p_3 \mathbb{P}[X_1 + X_2 + X_3 = 3]$$

$$= p_1 f_X^{*1}(3) + p_2 f_X^{*2}(3) + p_3 f_X^{*3}(3) = (0.149361205 * 0.15)$$

$$+(0.224041808 * 2 * 0.6 * 0.25) + (0.224041808 * 0.6^3) = 0.138009754$$

$\implies$

$$F_S(3) = f_S(0) + f_S(1) + f_S(2) + f_S(3)$$

$$= 0.049787068 + 0.089616723 + 0.117995352 + 0.138009754 = 0.395408897$$

Este proceso no fue tan difícil puesto que las combinaciones entre el número de reclamaciones y el monto que debían tener eran sencillas de saber y de calcular, sin embargo, de forma general se debe realizar por medio de las convoluciones, como se vio anteriormente y se presenta a continuación:

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x)\,;\ x = 0, 1, 2, ...$$

Así que para el ejemplo en cuestión

$$f_S(3) = \sum_{n=0}^{3} p_n f_X^{*n}(x)\,;\ x = 0, 1, 2, ...$$

Como

$f_S(0) = p_0 = 0.049787068$

$f_S(0) = p_0 f_X^{*0}(0) = 0.049787068$

$f_X^{*0}(0) = 1$ y $f_X^{*0}(x) = 0\ \forall x \neq 0$

El siguiente paso es construir $f_X^{*n}(x)\,;\, x = 0, 1, 2, ...$ y para $n = 0, 1, 2, 3$

$\Longrightarrow$

$$f_X^{*k}(x) = \sum_{y=0}^{x} f_X^{*(k-1)}(x-y)\, f_X(y)\,;\ x = 0, 1, 2, ...$$

- Para $f_X^{*1}(x) = \sum_{y=0}^{x} f_X^{*0}(x-y)\, f_X(y)\,;\, x = 0, 1, 2, ...$; conocemos el valor de $f_X^{*0}(0) = 1$, entonces para $f_X^{*1}(x)$ siempre se tendrá la siguiente igualdad

$$f_X^{*1}(x) = f_X(x)$$

- Si $x = 0 \Longrightarrow f_X^{*1}(0) = f_X(0) = 0$
- Si $x = 1 \Longrightarrow f_X^{*1}(1) = f_X(1) = 0.60$
- Si $x = 2 \Longrightarrow f_X^{*1}(2) = f_X(2) = 0.25$
- Si $x = 3 \Longrightarrow f_X^{*1}(3) = f_X(3) = 0.15$

- Para $f_X^{*2}(x) = \sum_{y=0}^{x} f_X^{*1}(x-y)\, f_X(y)\,;\, x = 0, 1, 2, ..$

$x = 0$ y $y = 0 \Longrightarrow f_X^{*2}(0) = f_X^{*1}(0)\, f_X(0) = 0$
$x = 1$ y $y = 0 \Longrightarrow f_X^{*2}(1) = f_X^{*1}(1)\, f_X(0) = 0$
$x = 1$ y $y = 1 \Longrightarrow f_X^{*2}(1) = f_X^{*1}(0)\, f_X(1) = 0$
$x = 2$ y $y = 0 \Longrightarrow f_X^{*2}(2) = f_X^{*1}(2)\, f_X(0) = 0$
$x = 2$ y $y = 1 \Longrightarrow f_X^{*2}(2) = f_X^{*1}(1)\, f_X(1) = 0.6 * 0.6 = 0.36$
$x = 2$ y $y = 2 \Longrightarrow f_X^{*2}(2) = f_X^{*1}(0)\, f_X(2) = 0$

$x = 3$ y $y = 0 \Longrightarrow f_X^{*2}(3) = f_X^{*1}(3)\, f_X(0) = 0$

$x = 3$ y $y = 1 \Longrightarrow f_X^{*2}(3) = f_X^{*1}(2)\, f_X(1) = 0.25 * 0.6 = 0.15$

$x = 3$ y $y = 2 \Longrightarrow f_X^{*2}(3) = f_X^{*1}(1)\, f_X(2) = 0.6 * 0.25 = 0.15$

$x = 3$ y $y = 3 \Longrightarrow f_X^{*2}(3) = f_X^{*1}(0)\, f_X(3) = 0$

$x = 4$ y $y = 1 \Longrightarrow f_X^{*2}(4) = f_X^{*1}(3)\, f_X(1) = 0.15 * 0.6 = 0.09$

$x = 4$ y $y = 2 \Longrightarrow f_X^{*2}(4) = f_X^{*1}(2)\, f_X(2) = 0.25 * 0.25 = 0.0625$

$x = 4$ y $y = 3 \Longrightarrow f_X^{*2}(4) = f_X^{*1}(1)\, f_X(3) = 0.6 * 0.15 = 0.09$

$x = 5$ y $y = 2 \Longrightarrow f_X^{*2}(5) = f_X^{*1}(3)\, f_X(2) = 0.15 * 0.25 = 0.0375$

$x = 5$ y $y = 3 \Longrightarrow f_X^{*2}(5) = f_X^{*1}(2)\, f_X(3) = 0.25 * 0.15 = 0.0375$

$x = 6$ y $y = 3 \Longrightarrow f_X^{*2}(6) = f_X^{*1}(3)\, f_X(3) = 0.15 * 0.15 = 0.0225$

Finalmente

- \- Si $x = 0 \Longrightarrow f_X^{*2}(0) = 0$
  \- Si $x = 1 \Longrightarrow f_X^{*2}(1) = 0$
  \- Si $x = 2 \Longrightarrow f_X^{*2}(2) = 0.36$
  \- Si $x = 3 \Longrightarrow f_X^{*2}(3) = 0.15 + 0.15 = 0.3$
  \- Si $x = 4 \Longrightarrow f_X^{*2}(4) = 0.09 + 0.0625 + 0.09 = 0.2425$
  \- Si $x = 5 \Longrightarrow f_X^{*2}(5) = 0.0375 + 0.0375 = 0.075$
  \- Si $x = 6 \Longrightarrow f_X^{*2}(6) = 0.0225$

- Para $f_X^{*3}(x) = \sum_{y=0}^{x} f_X^{*2}(x-y)\, f_X(y)\,;\; x = 0, 1, 2, ..$

  $x = 0$ y $y = 0 \Longrightarrow f_X^{*3}(0) = f_X^{*2}(0)\, f_X(0) = 0$

  $x = 1$ y $y = 1 \Longrightarrow f_X^{*3}(1) = f_X^{*2}(0)\, f_X(1) = 0$

  $x = 2$ y $y = 1 \Longrightarrow f_X^{*3}(2) = f_X^{*2}(1)\, f_X(1) = 0$

  $x = 3$ y $y = 1 \Longrightarrow f_X^{*3}(3) = f_X^{*2}(2)\, f_X(1) = 0.36 * .06 = 0.216$

  $x = 4$ y $y = 1 \Longrightarrow f_X^{*3}(4) = f_X^{*2}(3)\, f_X(1) = 0.3 * 0.6 = 0.18$

  $x = 4$ y $y = 2 \Longrightarrow f_X^{*3}(4) = f_X^{*2}(2)\, f_X(2) = 0.36 * 0.25 = 0.09$

  $x = 5$ y $y = 1 \Longrightarrow f_X^{*3}(5) = f_X^{*2}(4)\, f_X(1) = 0.2425 * 0.6 = 0.1455$

  $x = 5$ y $y = 2 \Longrightarrow f_X^{*3}(5) = f_X^{*2}(3)\, f_X(2) = 0.3 * 0.25 = 0.075$

  $x = 5$ y $y = 3 \Longrightarrow f_X^{*3}(5) = f_X^{*2}(2)\, f_X(3) = 0.36 * 0.15 = 0.054$

  $x = 6$ y $y = 1 \Longrightarrow f_X^{*3}(6) = f_X^{*2}(5)\, f_X(1) = 0.075 * 0.6 = 0.045$

  $x = 6$ y $y = 2 \Longrightarrow f_X^{*3}(6) = f_X^{*2}(4)\, f_X(2) = 0.2425 * 0.25 = 0.060625$

  $x = 6$ y $y = 3 \Longrightarrow f_X^{*3}(6) = f_X^{*2}(3)\, f_X(3) = 0.3 * 0.15 = 0.045$

  $x = 7$ y $y = 1 \Longrightarrow f_X^{*3}(7) = f_X^{*2}(6)\, f_X(1) = 0.0225 * 0.6 = 0.0135$

$$x = 7 \text{ y } y = 2 \Longrightarrow f_X^{*3}(7) = f_X^{*2}(5)\, f_X(2) = 0.075 * 0.25 = 0.01875$$
$$x = 7 \text{ y } y = 3 \Longrightarrow f_X^{*3}(7) = f_X^{*2}(4)\, f_X(3) = 0.2425 * 0.15 = 0.036375$$
$$x = 8 \text{ y } y = 2 \Longrightarrow f_X^{*3}(8) = f_X^{*2}(6)\, f_X(2) = 0.0225 * 0.25 = 0.005625$$
$$x = 8 \text{ y } y = 3 \Longrightarrow f_X^{*3}(8) = f_X^{*2}(5)\, f_X(3) = 0.075 * 0.15 = 0.01125$$
$$x = 9 \text{ y } y = 3 \Longrightarrow f_X^{*3}(9) = f_X^{*2}(6)\, f_X(3) = 0.0225 * 0.15 = 0.003375$$

Entonces

- Si $x = 0 \Longrightarrow f_X^{*3}(0) = 0$
- Si $x = 1 \Longrightarrow f_X^{*3}(1) = 0$
- Si $x = 2 \Longrightarrow f_X^{*3}(2) = 0$
- Si $x = 3 \Longrightarrow f_X^{*3}(3) = 0.216$
- Si $x = 4 \Longrightarrow f_X^{*3}(4) = 0.18 + 0.09 = 0.27$
- Si $x = 5 \Longrightarrow f_X^{*3}(5) = 0.1455 + 0.075 + 0.054 = 0.2745$
- Si $x = 6 \Longrightarrow f_X^{*3}(6) = 0.045 + 0.060625 + 0.045 = 0.150625$
- Si $x = 7 \Longrightarrow f_X^{*3}(7) = 0.0135 + 0.01875 + 0.036375 = 0.068625$
- Si $x = 8 \Longrightarrow f_X^{*3}(8) = 0.005625 + 0.01125 = 0.016875$
- Si $x = 9 \Longrightarrow f_X^{*3}(9) = 0.003375$

En resumen, para la construcción de $f_S(3) = \sum_{n=0}^{3} p_n f_X^{*n}(x)$ y con ello $F_S(3)$, tenemos el siguiente cuadro resumen se presenta con la finalidad de ilustrar el ejercicio, dicho cuadro únicamente considera valores de $x = 0, 1, 2, ..., 9,$ por lo cual se observa que la función de distribución no suma 1 :

x	$f_X^{*0}(x)$	$f_X^{*1}(x)$	$f_X^{*2}(x)$	$f_X^{*3}(x)$	$f_S(x)$	$F_S(x)$
0	1	0	0	0	0.049787068	0.049787068
1	0	0.6	0	0	0.089616723	0.139403791
2	0	0.25	0.36	0	0.117995352	0.257399143
3	0	0.15	0.3	0.216	0.138009754	0.395408897
4	0	0	0.2425	0.27	0.114821427	0.510230324
5	0	0	0.075	0.2745	0.078302612	0.588532936
6	0	0	0.0225	0.150625	0.038719738	0.627252674
7	0	0	0	0.068625	0.015374869	0.642627543
8	0	0	0	0.016875	0.003780706	0.646408249
9	0	0	0	0.003375	0.000756141	0.64716439
p_n	0.049787068	0.149361205	0.224041808	0.224041808		

Tabla 2.2

Por ejemplo, para el valor de $f_S(3)$

$$f_S(3) = (0.049787068 * 0) + (0.149361205 * 0.15) + (0.224041808 * 0.3)$$

$$+(0.224041808 * 0.216) = 0.138009754$$

De tal manera que realizando lo mismo con x en $0, 1$ y 2 y acumulando la distribución

$$F_S(3) = 0.395408897$$

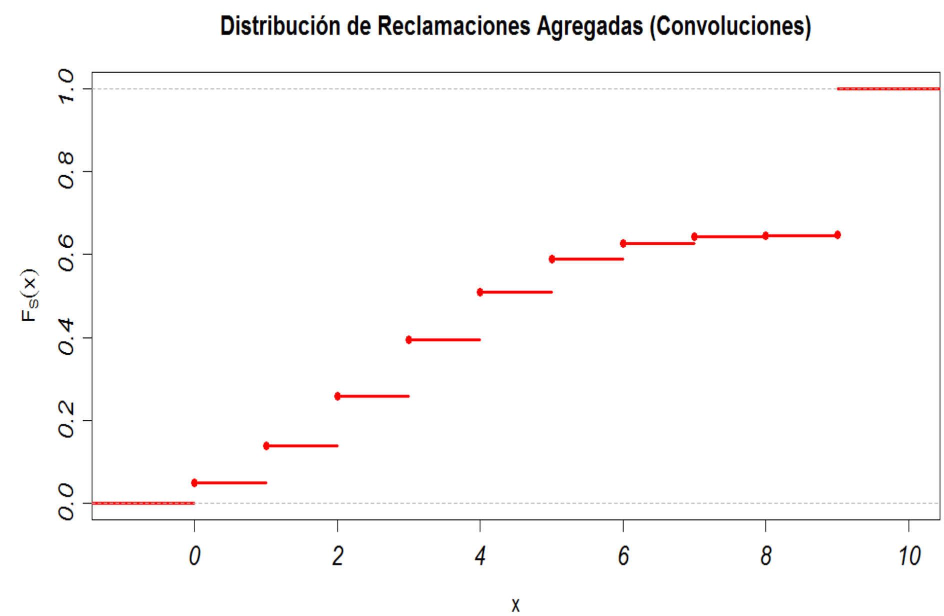

Fig. 2.1

2.2.1 Algunos resultados analíticos

De acuerdo con los resultados anteriores es que surgen algunos modelos específicos para la distribución de las pérdidas agregadas, y conocerlos en esta sección será de mucha utilidad para que, posteriormente, los cálculos númericos se vuelvan más sencillos.

Modelo Binomial Compuesto

Bajo este modelo el riesgo S tiene una distribución binomial compuesta cuando la frecuencia N se distribuye Binomial (n, p) y sus características numéricas son:

$$\mathbb{E}(S) = np\mathbb{E}(X)$$
$$Var(S) = np\left(\mathbb{E}\left(X^2\right) - p\mathbb{E}(X)^2\right)$$
$$M_S(t) = (1 - p + pM_X(t))^n$$

Modelo Binomial Negativo Compuesto

Cuando el número de reclamaciones tiene una distribución Binomial Negativa entonces el riesgo S se distribuye Binomial Negativa Compuesta y se tiene:

$$\mathbb{E}(S) = r\beta\mathbb{E}(X)$$
$$Var(S) = r\beta\left(\mathbb{E}\left(X^2\right) + \beta\mathbb{E}(X)^2\right)$$
$$M_S(t) = \left[\frac{1}{1+\beta(1-M_X(t))}\right]^r$$

Modelo Poisson Compuesto

Haciendo las mismas suposiciones que en los modelos anteriores, en este caso se tiene lo siguiente para S :

$$\mathbb{E}(S) = \lambda\mathbb{E}(X)$$
$$Var(S) = \lambda\mathbb{E}\left(X^2\right)$$
$$M_S(t) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}$$

Ejemplo 25 *Supongamos que $N \sim Poisson(\lambda)$ y que $X_i \sim Bernoulli(q)$, aplicando lo anterior para la distribución de S, tenemos que*

$M_S(t) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}$; donde $M_N(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$ y en particular para
$M_{X_1}(t) = (1-q) + qe^t$

por lo que $M_S(t) = e^{\lambda((1-q)+qe^t-1)} = e^{\lambda\left(qe^t-q\right)} = e^{\lambda q(e^t-1)}$

$\therefore S \sim Poisson(\lambda q)$

Estos modelos son un caso relativamente fácil de calcular y obtener, sin embargo, habrá casos en que la distribución asociada a S sea más difícil de identificar por lo que seleccionar modelos para la severidad que tengan una convolución conocida y fácil de obtener ayudará a encontrar resultados más rápido.

Otro modelo que ayuda para problemas computacionales si consideramos un grupo asegurado, donde cada miembro tenga un modelo Poisson compuesto para sus pérdidas agregadas, es el siguiente:

Teorema 26 *Supóngase que S_j tiene una distribución Poisson compuesta con parámetros λ_j y función de distribución para severidades $F_j(x)$ para $j = 1, 2, ..., n$. Además, que $S_1, S_2, ..., S_n$ son independientes. Entonces $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ tiene una distribución Poisson compuesta con parámetro $\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$ y función de distribución de severidad*

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda} F_j(x).$$

Dem:

Sea $M_j(t)$ la f.g.m. de $F_j(x)$ para $j = 1, 2, ..., n$. Entonces S_j tiene f.g.m. dada por:

$M_{S_j}(t) = \mathbb{E}\left(e^{tS_j}\right) = e^{\lambda_j(M_j(t)-1)}$ que por la independencia de las S_j´s, S tiene f.g.m.

$$M_S(t) = \prod_{j=1}^{n} M_{S_j}(t) = \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\lambda_j\left[M_j(t) - 1\right]\right) = \exp\left(\left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j M_j(t)\right] - \lambda\right)$$

$$= \exp\left(\lambda\left\{\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda} M_j(t)\right] - 1\right\}\right) \quad \blacksquare$$

Debido a que $\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda} M_j(t)$ es la f.g.m. de $F(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda} F_j(x)$, entonces $M_S(t)$ tiene la forma de la f.g.m. de una distribución Poisson compuesta.

2.2.2 Modificaciones en los modelos agregados

Ahora que se sabe cómo obtener más información acerca de la v.a. S, podemos comenzar a involucrar las variables por pérdida y por pago que hemos definido en un principio; esto porque la distribución de S también se verá afectada una vez que apliquemos modificaciones en la cobertura de contratos.

Supóngase un panorama sencillo bajo el cual el portafolio de pérdidas se modifique debido a la aplicación de un deducible d, en este caso la variable aleatoria S depende de N y de las X_i´s , entonces se tendrán que considerar dos posibilidades:

- La primera es que tengamos a N^L variable aleatoria por pérdida que modela la frecuencia de las *pérdidas agregadas*, mientras que las X_i´s determinan la severidad de las mismas. En este escenario a través de la variable por pérdida Y^L modificaremos las X_i´s que representan los montos, pues recordemos que:

$$Y^L = (X - d)_+ = \begin{cases} 0 & X \leq d \\ X - d & X > d \end{cases}$$

Así que la severidad de las reclamaciones se verá afectada, en este sentido, Y_i^L representa el pago por la i-ésima pérdida, mientras que la frecuencia seguirá distribuyendose de la misma forma puesto que, como su nombre lo indica, estamos considerando las pérdidas totales que sufre la compañía sin importar aquéllas que realmente se pagan.

Entonces, el modelo colectivo queda

$$S = Y_1^L + Y_2^L + \cdots + Y_{N^L}^L$$

donde $S = 0$ si $N^L = 0$

- La segunda opción es considerar a Y^P, llamada variable de *pago*, que reflejará los montos pagados por la compañía aseguradora una vez que han excedido el valor del deducible d ; pero además de ello, en este caso, la variable que modela la frecuencia de las reclamaciones N^P también se modificará, esto porque queremos ver reflejados en número de pagos efectuados, entonces los parámetros para N^P cambiarán conforme a lo que se revisó en las modificaciones de cobertura para modelos de frecuencia, donde se considera a la constante v como la probabilidad de pago por parte de la aseguradora. Entonces el modelo sería

$$S = Y_1^P + Y_2^P + \cdots + Y_{N^P}^P$$

donde $S = 0$ si $N^P = 0$ y Y_i^P es la variable de pago que representa el monto de la i-ésima pérdida bajo el concepto de Y^P que anteriormente definimos.

Es importante considerar las modificaciones de los contratos de seguros en los modelos colectivos, debido a que, bajo circunstancias apegadas a la realidad, generalmente esta información es la que se manejará.

Entonces, con cada uno de los conceptos de las variables por pérdida y por pago, ya sabíamos que $Y^P = Y^L | Y^L > 0$. Luego, retomando el concepto de v como la probabilidad de pago, las funciones de distribución de estas variables, guardan la siguiente relación:

$$F_{Y^L} = (1 - v) + vF_{Y^P}(y) \, ; \; y \geq 0$$

porque $1 - v = \mathbb{P}\left[Y^L = 0\right] = F_{Y^L}(0)$.

Y sus f.g.m.

$$M_{Y^L}(t) = (1 - v) + vM_{Y^P}(t)$$

que en términos de la esperanza son:

$$\mathbb{E}\left[e^{tY^L}\right] = \mathbb{E}\left[e^{tY^L} | Y^L = 0\right] \mathbb{P}\left[Y^L = 0\right] + \mathbb{E}\left[e^{tY^L} | Y^L > 0\right] \mathbb{P}\left[Y^L > 0\right]$$

Además, para el número de pérdidas N^L y el número de pagos N^P se tiene esta relación con sus f.g.p.

$$P_{N^P}(z) = P_{N^L}(1 - v + vz)$$

donde $P_{N^P}(z) = \mathbb{E}\left(z^{N^P}\right)$ y $P_{N^L}(z) = \mathbb{E}\left(z^{N^L}\right)$.

Finalmente con los resultados del Modelo Colectivo, las f.g.m. de S en términos de las variables por pérdida y por pago son:

$$M_S(t) = \mathbb{E}\left(e^{tS}\right) = P_{N^L}(M_{Y^L}(t))$$

y

$$M_S(t) = \mathbb{E}\left(e^{tS}\right) = P_{N^P}(M_{Y^P}(t))$$

que guardan la siguiente relación:

$$P_{N^L}[M_{Y^L}(t)] = P_{N^L}[1 - v + vM_{Y^P}(t)] = P_{N^P}[M_{Y^P}(t)]$$

Ejemplo 27 *Se conoce que el número de pérdidas en el Modelo de Riesgo Colectivo se distribuyen* $BinNeg(\beta = 1.5, r = 12)$ *y que los montos de las pérdidas (X_ís) tienen distribución* $Pareto(\alpha = 3, \theta = 150)$. *Además de esta información sabemos que se determina una inflación del* 3% *y se aplicarán las siguientes modificaciones de cobertura.*

Deducible $d = 40$
Límite de póliza $= 250$
Coaseguro $= 85\%$

Determinar la esperanza y la varianza de las pérdidas agregadas considerando que el monto de las pérdidas se ve modificado por la variable aleatoria de pérdida y por la variable aleatoria de pérdida en exceso (o variable de pago).

Primero encontremos $\mathbb{E}(S)$ y $Var(S)$, cuando las X_ís se modifican por Y^L; entonces consideramos la inflación, posteriormente el deducible, el límite de póliza y al final el coaseguro.

Para encontrar el valor de u

$$\alpha(u - d) = 250 \Longrightarrow u = \frac{250}{0.85} + 40 = 344.1176.$$

De tal manera que para cada X_i se tiene que :

$$Y^L = \begin{cases} 0 & X < \dfrac{40}{1.03} \\ \\ 0.85\left[(1.03)\,X - 40\right] & \dfrac{40}{1.03} \leq X < \dfrac{344.1176}{1.03} \\ \\ 250 & X \geq \dfrac{344.1176}{1.03} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

$$\mathbb{E}\left[Y^L\right] = \alpha\,(1+r)\left[\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{u}{1+r}\right) - \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right)\right]$$

$$= 0.85\,(1.03)\left[\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{344.1176}{1.03}\right) - \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{40}{1.03}\right)\right]$$

Para la $Pareto(3, 150)$

$$\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{344.1176}{1.03}\right) = \frac{150}{2}\left[1 - \left(\frac{150}{324.386 + 150}\right)^2\right] = 67.501$$

$$\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{40}{1.03}\right) = \frac{150}{2}\left[1 - \left(\frac{150}{38.834 + 150}\right)^2\right] = 27.676$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathbb{E}\left[Y^L\right] = 0.85(1.03)\left[67.501 - 27.676\right] = 34.8669$$

Luego para N^L sabemos que se distribuye $BinNeg(1.5, 12)$ pero esta variable, que representa el número de reclamaciones del modelo colectivo, no se modifica por ser variable de pédida y no de pago.

$$\Longrightarrow \mathbb{E}\left(N^L\right) = r\beta = 12 * 1.5 = 18$$

Por los resultados anteriores

$$\mathbb{E}\,(S) = \mathbb{E}(Y^L)\mathbb{E}\left(N^L\right) = 34.8669 * 18 = 627.6042$$

Aparte de esta situación, como el número de reclamaciones se distribuye Binomial Negativa, el modelo se reduce a un modelo Binomial Negativo Compuesto, razón por la cual, como se mostró en la sección anterior, la varianza de S es :

$$Var(S) = r\beta\left[\mathbb{E}\left(\left(Y^L\right)^2\right) + \beta\mathbb{E}\left(Y^L\right)^2\right].$$

Entonces hay que obtener el segundo momento en términos de Y^L, i.e. $\mathbb{E}[\left(Y^L\right)^2]$ que se vio en la sección de variables y modificaciones de cobertura.

$$\mathbb{E}[\left(Y^L\right)^2] = (.85)^2\,(1.03)^2\,\{\mathbb{E}\left[\left(X\wedge\frac{344.1176}{1.03}\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(X\wedge\frac{40}{1.03}\right)^2\right]$$

$$-2\left(\frac{40}{1.03}\right)\mathbb{E}\left(X\wedge\frac{344.1176}{1.03}\right) + 2\left(\frac{40}{1.03}\right)\mathbb{E}\left(X\wedge\frac{40}{1.03}\right)\}$$

Para la distribución Pareto

$$\mathbb{E}\left[\left(X\wedge\frac{344.1176}{1.03}\right)^2\right] \text{ y } \mathbb{E}\left[\left(X\wedge\frac{40}{1.03}\right)^2\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\left(X\wedge\frac{344.1176}{1.03}\right)^2\right] = \frac{150^2\Gamma(3)\,\Gamma(1)}{\Gamma(3)}\beta\left(3,1;\frac{324.386}{324.386+150}\right)$$

$$+(324.386)^2\left(\frac{150}{324.386+150}\right)^3 = 150^2\left[\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3)\,\Gamma(1)}\int_0^{0.68} t^2\,(1-t)^0\,dt\right]$$

$$+3326.6138 = 150^2\left[\frac{3!}{2!1!}\left(\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{0.68}\right)\right] + 3326.6138 = 10520.66021$$

$$\mathbb{E}\left[\left(X\wedge\frac{40}{1.03}\right)^2\right] = \frac{150^2\Gamma(3)\,\Gamma(1)}{\Gamma(3)}\beta\left(3,1;\frac{38.83495}{38.83495+150}\right)+(38.83495)^2\left(\frac{150}{38.83495+150}\right)^3$$

$$= 150^2\left[3\left(\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{0.205}\right)\right] + 755.9135756 = 951.6193487$$

Entonces

$$\mathbb{E}[\left(Y^L\right)^2] = (.85)^2\,(1.03)^2\,(10520.66021 - 951.6193487 - 2\left(\frac{40}{1.03}\right)(67.5014)$$

$$+2\left(\frac{40}{1.03}\right)(27.67626437)) = 4963.722677$$

Finalmente

$$Var(S) = r\beta\left[\mathbb{E}\left(\left(Y^L\right)^2\right) + \beta\mathbb{E}\left(Y^L\right)^2\right] = 18\left[4963.722677 + 1.5\,(34.8669)^2\right]$$

$$= 122170.9275$$

Como segundo punto también debemos calcular la $\mathbb{E}(S)$ y $Var(S)$ considerando a las Y_i^{P}'s y a N^P como la frecuencia.

La función para Y^P a diferencia de Y^L es sólo considerar que los valores para $X < \dfrac{40}{1.03}$ no están definidos, así que para la $\mathbb{E}\left[Y^P\right]$ basta dividir $\mathbb{E}\left[Y^L\right]$ entre $S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)$

$$S_X\left(\frac{40}{1.03}\right) = \left(\frac{150}{38.83495 + 150}\right)^3 = 0.501217$$

De ahí $\mathbb{E}\left[Y^P\right] = \dfrac{\mathbb{E}\left[Y^L\right]}{S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} = \dfrac{34.8669}{0.501217} = 69.56434365$

Para N^P debemos obtener $\mathbb{E}\left[N^P\right]$, entonces, como es la frecuencia correspondiente al pago que realiza la aseguradora, se modifica respecto al valor de v, donde :

$$v = \mathbb{P}\left(X > \frac{d}{1+r}\right) = 1 - F_X\left(\frac{40}{1.03}\right)$$

esto porque recordemos que es la probabilidad de pago una vez que se ha aplicado inflación y deducible en el número de reclamaciones, entonces

$$v = S_X\left(\tfrac{40}{1.03}\right) = 0.501217971983$$

Por lo tanto la Distribución Binomial Negativa considera los parámetros $r = 12$ y $\beta^* = v\beta = 0.751826958$

$$\Longrightarrow$$

$$\mathbb{E}\left[N^P\right] = r\beta^* = 9.021923496.$$

De esta forma $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}\left[Y^P\right]\mathbb{E}\left[N^P\right] = 627.6041864$

La $Var(S) = r\beta^*\left[\mathbb{E}\left[\left(Y^P\right)^2\right] + \beta^*\mathbb{E}\left(Y^P\right)^2\right]$

$$\Longrightarrow$$

$$\mathbb{E}\left[\left(Y^P\right)^2\right] = \frac{\mathbb{E}[\left(Y^L\right)^2]}{1 - F_X\left(\frac{40}{1.03}\right)} = \frac{4963.722677}{0.501217} = 9903.321418 \quad \text{y}$$

$$Var(S) = 9.021923496\left[9903.321418 + 0.751826958\left(69.56434365\right)^2\right]$$

$= 122170.9259$

Bajo el análisis de las variables por pago y por pérdida en este modelo de riesgo colectivo, la $\mathbb{E}(S)$ y $Var(S)$ no son muy distintas entre sí.

Así como la existencia de los contratos de seguros involucran tanto a la aseguradora como al asegurado de ciertos riesgos, también existe una forma de proteger el riesgo al que se exponen las aseguradoras por tener un amplio portafolio de asegurados, y esto es a través de las compañías *reaseguradoras,* por lo que surge la siguiente definición.

Definición 28 *El Reaseguro* Stop-Loss *es un contrato bajo el cual la compañía reaseguradora se compromete a cubrir hasta cierto nivel los riesgos que tiene una aseguradora, bajo la implementación de un deducible agregado que es aquél que se aplica a las pérdidas agregadas. El valor esperado de las pérdidas agregadas, suponiendo que se ha establecido un deducible d, se llama Prima Neta de Pérdida (*Net Stop-Loss Premium).

En general, si la distribución es continua el valor esperado se calcula

$$\mathbb{E}\left[(S-d)_+\right] = \int_d^\infty \left[1 - F_S(x)\right] dx \quad \text{ó bien para variables discretas}$$

$$\mathbb{E}\left[(S-d)_+\right] = \sum_{x>d} (x-d) f_S(x)$$

Capítulo 3

Métodos para encontrar la distribución de S

3.1 Aproximaciones

Una vez conocidos y estudiados los modelos de riesgo individual y colectivo, junto con sus características, lo primero que se vio es que existen algunos modelos definidos para determinar la distribución del riesgo S, sin embargo, en muchas ocasiones no se conoce de manera inmediata la distribución de frecuencias y severidades, por lo que, para conocer los datos que provengan del riesgo S, podemos hacer uso de diversos métodos propuestos. Uno de los métodos que sirven para esta labor es por medio de aproximaciones, que se utilizan tanto para el modelo individual como para el modelo colectivo, así que a continuación se presentan las siguientes:

- Normal
- Lognormal
- Gamma Trasladada
- Poisson compuesta

3.1.1 Aproximación Normal

A través del Teorema del Límite Central se puede aproximar la distribución de S por medio de una distribución normal.

Generalmente, este método de aproximación es de mayor utilidad cuando el número de reclamaciones N de nuestro riesgo S es muy grande, y por consecuencia, la $\mathbb{E}[N]$ también resulta ser grande.

Proposición 29 *Para cualquier* $s > 0$

$$F_S(s) = \mathbb{P}[S \leq s] \approx \phi\left(\frac{s - \mathbb{E}(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right)$$

Ahora bien, suponiendo que tanto la severidad como la frecuencia de los datos son discretas, entonces la distribución de las pérdidas agregadas será discreta; por lo cual, si se desea utilizar este método de aproximación, será necesario aplicar antes una *Corrección de Continuidad.* Es decir, supóngase que se quiere conocer $\mathbb{P}[n \leq S \leq m]$, para utilizar la aproximación normal, lo único que se hace es extender el intervalo de $[n, m]$ al intervalo $\left[n - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}\right]$, por lo cual la probabilidad bajo la corrección de continuidad será $\mathbb{P}\left[n - \frac{1}{2} \leq S \leq m + \frac{1}{2}\right]$. Una vez realizada esta corrección, se hace el mismo procedimiento de aproximación, considerando la $\mathbb{E}(S)$ y $Var(S)$ originales del riesgo S.

Ejemplo 30 *Una compañía aseguradora tiene una cartera con pólizas de seguro de vida con las características que se muestran en la tabla. Utilizando el modelo de riesgo individual, realizar la aproximación normal de tal manera que podamos encontrar el valor de* s *bajo el cual* $\mathbb{P}[S \leq s] = 0.95$

i	# de pólizas	Probabilidad de reclamación	Monto de Reclamación
1	1000	0.05	10
2	2000	0.10	5
3	500	0.02	20

Tabla 3.1

Primero veamos lo que sucede con $\mathbb{E}(B_i)$ y $Var(B_i)$ para $i = 1, 2, 3$

$\mathbb{P}(B_1 = 10) = 1$, $\mathbb{P}(B_1 = x) = 0$ si $x \neq 10$
$\mathbb{P}(B_2 = 5) = 1$, $\mathbb{P}(B_2 = x) = 0$ si $x \neq 5$
$\mathbb{P}(B_3 = 20) = 1$, $\mathbb{P}(B_3 = x) = 0$ si $x \neq 20$

$\Longrightarrow$
$\mathbb{E}(B_1) = 1 * 10 + 0 * x = 10 \;\; y \;\; Var(B_1) = 10^2 * 1 - 10^2 = 0$
$\mathbb{E}(B_2) = 5 \; y \;\; Var(B_2) = 0$
$\mathbb{E}(B_3) = 20 \; y \;\; Var(B_3) = 0$

Entonces

$$\mathbb{E}(S_1) = \sum_{j=1}^{1000} 0.05 * 10 = 500, \; \mathbb{E}(S_2) = \sum_{j=1}^{2000} 0.10 * 5 = 1000,$$
$$\mathbb{E}(S_3) = \sum_{j=1}^{500} 0.02 * 20 = 200$$

$\Longrightarrow \mathbb{E}(S) = 500 + 1000 + 200 = 1700$

Luego

$$Var(S_1) = \sum_{j=1}^{1000} \left(0.05 * 0 + 0.05 * 0.95 * 10^2\right) = 4750$$

$$Var(S_2) = \sum_{j=1}^{2000} \left(0.1 * 0 + 0.1 * 0.9 * 5^2\right) = 4500$$

$$Var(S_3) = \sum_{j=1}^{500} \left(0.02 * 0 + 0.02 * 0.98 * 20^2\right) = 3920$$

$\Longrightarrow$

$Var(S) = 4750 + 4500 + 3920 = 13170$

Se quiere $\mathbb{P}[S \leq s] = 0.95$, entonces $\mathbb{P}\left[\frac{S - \mathbb{E}(S)}{\sqrt{Var(S)}} \leq \frac{s - \mathbb{E}(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right] = 0.95$ el cuantil del 95% para una $N(0,1)$ es 1.644854

Por lo tanto $s = \sqrt{Var(S)} * 1.644854 + \mathbb{E}(S) = \sqrt{13170} * 1.644854 + 1700$

$= 1888.764$

Ejemplo 31 *Sea S_j, $j = 1, 2, 3, 4$ una distribución Poisson compuesta y para cada S_j se tienen los siguientes parámetros: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0.8$, $\lambda_3 = 0.2$ y $\lambda_4 = 4$. Por la definición de este modelo se sabe que las frecuencias de cada S_j son distribuciones Poisson y además se tienen las siguientes probabilidades de los montos de reclamación (X_i´s) pertenecientes a cada una de las S_j´s.*

Para S_1

$f_X(1) = 0.2$, $f_X(2) = 0.4$, $f_X(3) = 0.1$, $f_X(4) = 0.05$, $f_X(5) = 0.2$, $f_X(6) = 0.05$

Para S_2

$f_X(0) = 0.03$, $f_X(1) = 0.35$, $f_X(2) = 0.5$, $f_X(3) = 0.12$

Para S_3

$f_X(0) = 0.2$, $f_X(1) = 0.1$, $f_X(2) = 0.1$, $f_X(3) = 0.1$, $f_X(4) = 0.4$, $f_X(5) = 0.1$

Para S_4

$f_X(2) = 0.5$, $f_X(3) = 0.04$, $f_X(4) = 0.25$, $f_X(5) = 0.16$, $f_X(6) = 0.05$

Encontrar bajo la aproximación normal $F_S(25)$.

La severidad de cada S_j se muestran en la siguiente tabla:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0.03	0.2	0
1	0.2	0.35	0.1	0
2	0.4	0.5	0.1	0.5
3	0.1	0.12	0.1	0.04
4	0.05	0	0.4	0.25
5	0.2	0	0.1	0.16
6	0.05	0	0	0.05

Tabla 3.2

Además si

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \Longrightarrow S \sim \textit{Poisson Compuesta} \text{ con } \lambda = 2 + 0.8 + 0.2 + 4 = 7.$$

Primero hay que encontrar las correspondientes f.d.p. para los montos de las reclamaciones

x	$f_X(x) = \sum_{j=1}^{4} \frac{\lambda_j}{\lambda} f_j(x)$
0	$\frac{2}{7} * 0 + \frac{0.8}{7} * 0.03 + \frac{0.2}{7} * 0.2 + \frac{4}{7} * 0 = 0.009142857$
1	$\frac{2}{7} * 0.2 + \frac{0.8}{7} * 0.35 + \frac{0.2}{7} * 0.1 + \frac{4}{7} * 0 = 0.1$
2	$\frac{2}{7} * 0.4 + \frac{0.8}{7} * 0.5 + \frac{0.2}{7} * 0.1 + \frac{4}{7} * 0.5 = 0.46$
3	$\frac{2}{7} * 0.1 + \frac{0.8}{7} * 0.12 + \frac{0.2}{7} * 0.1 + \frac{4}{7} * 0.04 = 0.068$
4	$\frac{2}{7} * 0.05 + \frac{0.8}{7} * 0 + \frac{0.2}{7} * 0.4 + \frac{4}{7} * 0.25 = 0.168571429$
5	$\frac{2}{7} * 0.2 + \frac{0.8}{7} * 0 + \frac{0.2}{7} * 0.1 + \frac{4}{7} * 0.16 = 0.151428571$
6	$\frac{2}{7} * 0.05 + \frac{0.8}{7} * 0 + \frac{0.2}{7} * 0 + \frac{4}{7} * 0.05 = 0.042857143$

Tabla 3.3

De ahí,

$$\mathbb{E}(X) = (1 * 0.1) + (2 * 0.46) + (3 * 0.068) + (4 * 0.168571429)$$

$$+(5 * 0.151428571) + (6 * 0.042857143) = 2.912571429$$

$\Longrightarrow$

$$\mathbb{E}(S) = \lambda \mathbb{E}(X) = 7 * 2.912571429 = 20.388$$

Luego $Var\left(S\right) = \lambda \mathbb{E}\left(X^2\right)$, entonces

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = (1^2 * 0.1) + (2^2 * 0.46) + (3^2 * 0.068) + (4^2 * 0.168571429)$$

$$+(5^2 * 0.151428571) + (6^2 * 0.042857143) = 10.57771429$$

$$Var\left(S\right) = \lambda \mathbb{E}\left(X^2\right) = 7 * 10.57771429 = 74.04400001$$

Buscamos $F_S\left(25\right) = \mathbb{P}\left(S \leq 25\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S - 20.388}{\sqrt{74.04400001}} \leq \frac{25 - 20.388}{\sqrt{74.04400001}}\right)$

$$= \mathbb{P}\left(z \leq 0.53597479\right) = \phi\left(0.53597479\right) = 0.704012$$

Por lo tanto $F_S\left(25\right) = 0.704012$

La gráfica de la función de densidad obtenida directamente de los valores de su distribución si se realiza este proceso repetidas veces para todos los valores de s, es:

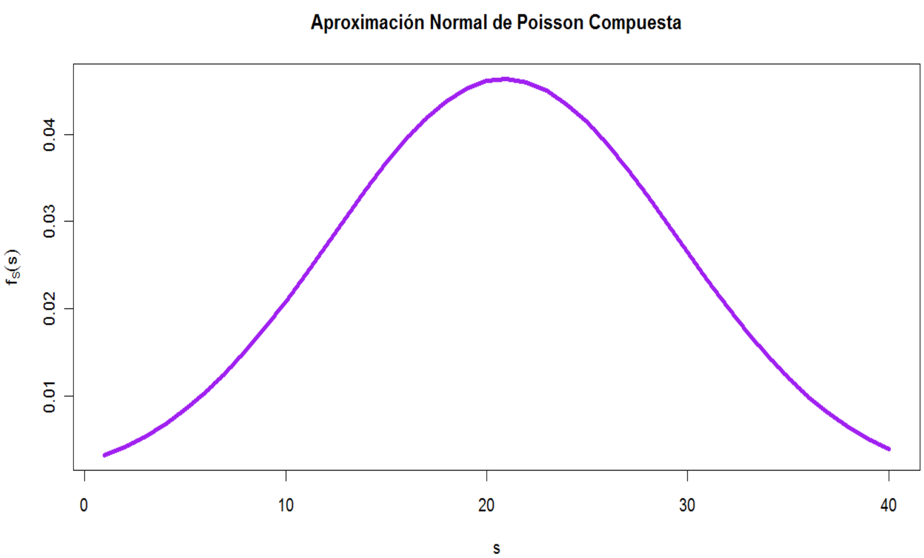

Fig. 3.1

3.1.2 Aproximación Lognormal

Cuando la $\mathbb{E}(N)$ no es lo suficientemente grande, y por lo mismo, en ocasiones la distribución de S posee una cola pesada, la distribución normal deja de ser apropiada para aproximar la distribución del riesgo. Es por esta situación que se sugiere usar la aproximación *Lognormal* aunque no exista la teoría suficiente para sustentar que dicha aproximación sea buena.

Proposición 32 *Para cualquier* $s > 0$

$$F_S(s) = \mathbb{P}[S \leq s] \approx \phi\left(\frac{\ln(s) - \mu}{\sigma}\right)$$

Recordando que para la distribución Lognormal se tiene la siguiente esperanza y segundo momento que son indispensables para obtener lo valores de μ y σ^2 :

$$\mathbb{E}(S) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \text{ y } \mathbb{E}\left(S^2\right) = e^{2\mu + 2\sigma^2}$$

Ejemplo 33 *Suponiendo un modelo de riesgo colectivo para las pérdidas agregadas de una compañía aseguradora y, en específico, un modelo Poisson compuesto donde* $N \sim$ *Poisson*$(\lambda = 0.7)$*, mientras que los montos de reclamación se distribuyen Gamma con* $\alpha = 2, \theta = 150$. *Utilizar la aproximación normal y lognormal para determinar las pérdidas agregadas por arriba de* 300.

Sabemos que $\mathbb{E}(S) = \lambda\mathbb{E}(X)$ y $Var(S) = \lambda\mathbb{E}\left(X^2\right)$

$\Longrightarrow \mathbb{E}(X) = \alpha\theta = 300$ y $\mathbb{E}\left(X^2\right) = Var(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 45000 + 300^2 = 135000$

$\Longrightarrow \mathbb{E}(S) = 0.7 * 300 = 210$ y $Var(S) = 0.7 * 135000 = 94500$

Para la aproximación normal

$$\begin{aligned} F_S(300) = \mathbb{P}[S \leq 300] &= \phi\left(\frac{300 - 210}{\sqrt{94500}}\right) \\ &= \phi(0.292770022) = 0.615151 \end{aligned}$$

Las pérdidas agregadas por arriba de 300 tienen una probabilidad de 0.384849 para la aproximación normal

Para la aproximación lognormal

$$\mathbb{E}\left(S\right) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} = 300 \text{ y } \mathbb{E}\left(S^2\right) = e^{2\mu+2\sigma^2} = 135000$$

$$\ln\left(300\right) = \mu + \frac{\sigma^2}{2} \text{ y } \ln(135000) = 2\mu + 2\sigma^2, \Longrightarrow \sigma^2 = 0.4054 \text{ y } \mu = 5.50108$$

Finalmente

$$F_S\left(300\right) = \mathbb{P}\left[S \leq 300\right] = \phi\left(\frac{\ln\left(300\right) - 5.50108}{0.6367}\right)$$

$$= \phi\left(0.318364182\right) = 0.6249019$$

Mientras que con la aproximación lognormal las pérdidas agregadas que rebasan 300 acumulan una probabilidad de 0.375098

A continuación se muestra gráficamente la comparación de ambas aproximaciones con respecto a sus funciones de densidad resultantes, en donde se puede observar que para valores muy grandes la cola de la distribución lognormal se encuentra por encima de la función de densidad normal, situación que caracteriza este tipo de distribucion. Además, algo que se puede destacar es que, aunque las esperanzas de las dos distribuciones no están tan alejadas, la varianza de la distribución normal es mayor, por poco más del doble que la varianza de la distribución lognormal. Y aunque para valores entre 150 y 300 las funciones de distribución acumulen probabilidades similares, en realidad para valores pequeños la distribución normal acumula probabilidades mayores a la lognormal y viceversa, para valores grandes se va acumulando mayor probabilidad en la distribución lognormal contra la normal.

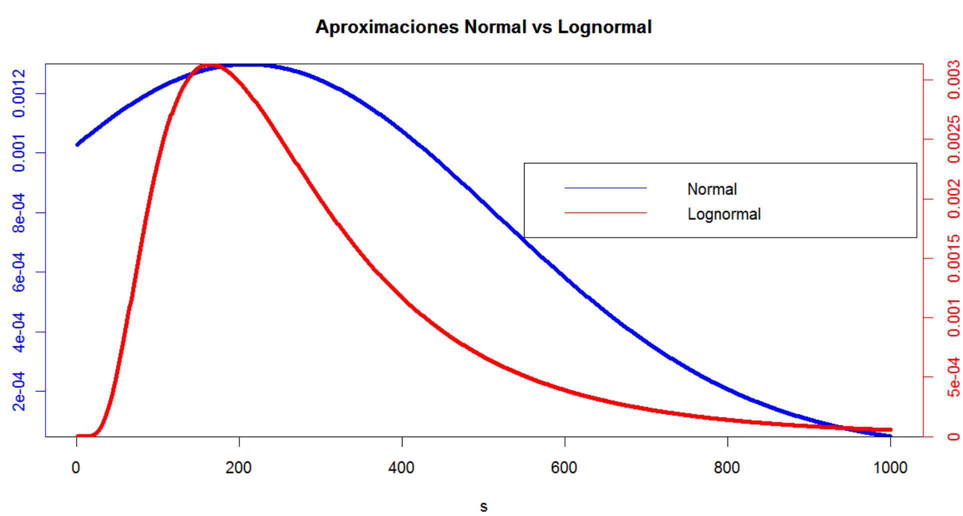

Fig. 3.2

3.1.3 Aproximación Gamma trasladada

Como su nombre lo expresa, bajo esta aproximación supondremos que el riesgo S asume una distribución Gamma, pero para conocer exactamente los parámetros que ajustan a esta distribución, se debe igualar las características numéricas de la distibución de S a las características numéricas de una nueva variable aleatoria que es:

$$k + Z$$

donde k es una constante y Z es la variable aleatoria que se distribuye $Gamma(\alpha, \theta)$ y tiene f.d.p.

$$f_Z(z) = \frac{\left(\frac{z}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{z}{\theta}}}{z\Gamma(\alpha)}$$

Entonces, primero se suponen conocidos o estimados los valores de $\mathbb{E}(S) = \mu$, $Var(S) = \sigma^2$ y el coeficiente de sesgo $\dfrac{\mathbb{E}\left[(S - \mathbb{E}(S))^3\right]}{[Var(S)]^{3/2}} = \tau$, éstos se igualarán a sus correspondientes de la v.a. $k + Z$ que son:

- $\mathbb{E}(k + Z) = k + \alpha\theta$
- $Var(k + Z) = \theta^2 \alpha$
- $\dfrac{\mathbb{E}\left[(k + Z - \mathbb{E}(k + Z))^3\right]}{[Var(k + Z)]^{3/2}} = \dfrac{2}{\sqrt{\alpha}}$

De forma que

$$\mu = k + \alpha\theta \quad \sigma^2 = \theta^2\alpha \quad \tau = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para determinar los valores k, α y θ.

$\sqrt{\alpha} = \dfrac{2}{\tau} \Longrightarrow \alpha = \dfrac{4}{\tau^2}$, luego de $\sigma^2 = \theta^2\alpha$ sustituyendo α se tiene

$$\sigma^2 = \theta^2 \frac{4}{\tau^2} \Longrightarrow \theta^2 = \frac{\sigma^2\tau^2}{4} \Longrightarrow \theta = \frac{\sigma\tau}{2}$$

y finalmente de $\mu = k + \alpha\theta$ se obtiene k

$$k = \mu - \alpha\theta = \mu - \frac{4}{\tau^2}\frac{\sigma\tau}{2} = \mu - \frac{2\sigma}{\tau}.$$

Así, por medio de la aproximación gamma trasladada, el riesgo S tiene una distribución aproximada

$$S \sim \mu - \frac{2\sigma}{\tau} + Gamma\left(\frac{4}{\tau^2}, \frac{\sigma\tau}{2}\right)$$

Habrá ocasiones en las cuales el parámetro θ puede ser reemplazado por $\frac{1}{\theta}$ y basta invertir las igualdades para construir la distribución Gamma de S.

Esta aproximación generalmente se sugiere realizarla cuando la distribución de S se muestra sesgada hacia la derecha, razón por la cual $\tau > 0$; y porque la forma que toma dicha distribución es aproximadamente la de una densidad Gamma con parámetros α y θ; sin embargo, además de considerar esto, se le suma la constante k para obtener menos errores en el ajuste.

Finalmente se llega a la siguiente proposición.

Proposición 34 *Para cualquier $s > 0$.*

$$F_S(s) = \mathbb{P}[S \leq s] \approx \Gamma\left(\alpha; \frac{s-k}{\theta}\right)$$

donde en general $\Gamma\left(\alpha; \frac{x}{\theta}\right) = \int_0^x \frac{\left(\frac{y}{\theta}\right)^\alpha e^{-\frac{y}{\theta}}}{y\Gamma(\alpha)} dy$

Ejemplo 35 *Supongamos que bajo el modelo Poisson compuesto, el número de reclamaciones $N \sim Poisson(\lambda = 10)$ y el monto de las reclamaciones $X_i \sim \chi^2_{(4)}$. Determinar $F_S(8)$ por medio de la aproximación gamma trasladada.*

En general $\chi^2_{(k)}$ es una distribución Gamma$\left(\frac{k}{2}, 2\right) \Longrightarrow$ Para cada X_i se tiene que $f_X(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2 e^{-\frac{x}{\theta}}}{x\Gamma(2)}$ donde $X_i \sim Gamma(2, 2)$

Lo primero es encontrar los tres primeros momentos de S, para lo cual utilizaremos las propiedades de la f.g.m. de las X_i y de ahí obtener los valores de μ, σ^2 y τ para S.

$\Longrightarrow$

$M_X(t) = (1 - \theta t)^{-\alpha} = (1 - 2t)^{-2}$

$M_X\acute{}(t) = -2(1-2t)^{-3}(-2) = 4(1-2t)^{-3}|_{t=0} = 4$, $\mathbb{E}(X) = 4$

$M_X\acute{}\acute{}(t) = -12(1-2t)^{-4}(-2) = 24(1-2t)^{-4}|_{t=0} = 24$, $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 24$

$M_X\acute{}\acute{}\acute{}(t) = -96(1-2t)^{-5}(-2) = 192(1-2t)^{-5}|_{t=0} = 192$, $\mathbb{E}\left(X^3\right) = 192$

De aquí podemos obtener

$$\mu = \lambda\mathbb{E}(X) = 10 * 4 = 40$$

$$\sigma^2 = \lambda\mathbb{E}\left(X^2\right) = 10 * 24 = 240$$

$$\tau = \frac{\mathbb{E}\left(X^3\right)}{\sqrt{\lambda\mathbb{E}\left(X^2\right)^3}} = \frac{192}{\sqrt{10(24)^3}} = \frac{8}{\sqrt{240}}$$

Por lo que $\alpha = \frac{4}{\tau^2} = \frac{4}{\frac{8^2}{240}} = 15,$

$$\theta = \frac{\sigma\tau}{2} = \frac{\sqrt{240}\frac{8}{\sqrt{240}}}{2} = 4 \text{ y } k = \mu - \frac{2\sigma}{\tau} = -20$$

$$\Longrightarrow S \sim -20 + Gamma(15, 4)$$

Por lo tanto $F_S(8) \approx \Gamma\left(15, \frac{8+20}{4}\right) = \Gamma(15, 7)$

Como sabemos que $F_X(x) = \Gamma\left(\alpha, \frac{x}{\theta}\right)$, cuando $X \sim Gamma(\alpha, \theta)$.

Para el ejemplo $S \sim Gamma(\alpha = 15, \theta = 8/7)$, evaluando directamente en R

$$F_S(8) = 0.005717202$$

La siguiente gráfica muestra la f.d.p. asociada

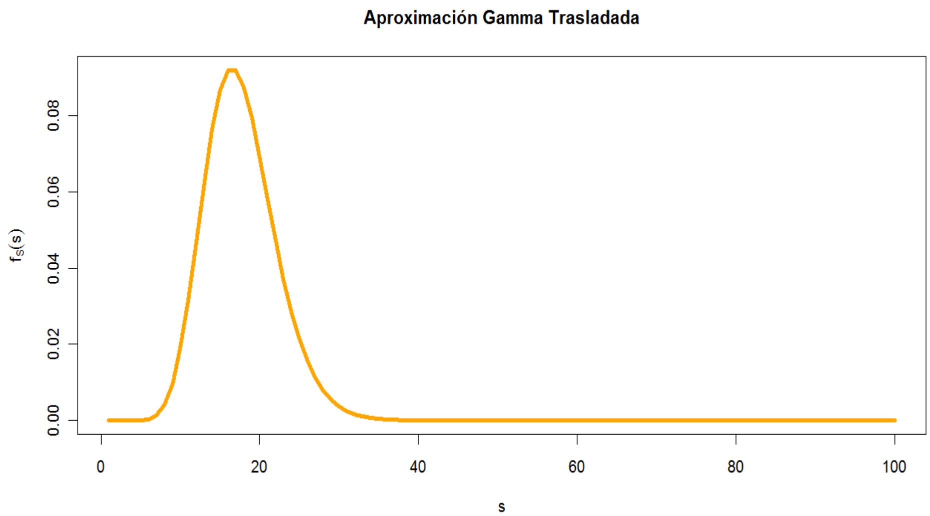

Fig. 3.3

3.1.4 Aproximación Poisson compuesta

En el capítulo anterior se hizo mención del modelo Poisson compuesto, que simplifica los cálculos al momento de encontrar información de las pérdidas agregadas. También se ha comentado la dificultad de conocer la función de distribución en un modelo de riesgo individual si se realizara por medio de convoluciones; pero en esta sección veremos la *Aproximación Poisson Compuesta* como otro método útil, bajo el cual se pretende aproximar el modelo de riesgo individual al modelo de riesgo colectivo, tal situación se realiza porque existen más métodos para el cálculo de la distribución de S en el modelo colectivo; incluso es indispensable saber que los siguientes métodos a desarrollar se basan en la construcción del modelo colectivo.

En el modelo individual $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ donde X_i $i = 1, 2, ..., n$ son v.a.´s independientes, $X_i = R_i B_i$ y B_i es el monto de la reclamación de la póliza i. Además, la v.a. Bernoulli (R_i) del modelo individual asigna el valor de 1 cuando se efectúa un reclamación con probabilidad q_i y 0 con probabilidad $(1 - q_i)$ de manera que su f.g.p. es:

$$P_{R_i} = (1 + q_i (z - 1))$$

Bajo este método la aproximación Poisson compuesta asume que la v.a. R_i se distribuirá Poisson (λ_i) , para ello se proponen 3 métodos que asignan diferentes valores al parámetro λ_i de esta distribución Poisson

1. El primero iguala las esperanzas de la v.a. Bernoulli(q_i) con la de una v.a. Poisson(λ_i), entonces:

$$\lambda_i = q_i;\ i = 1, 2, ..., n$$

Esta opción es buena para valores de q_i cercanos a cero.

2. El segundo iguala la probabilidad en cero de ambas variables aleatorias, es decir

$$1 - q_i = e^{-\lambda_i}$$

$\Longrightarrow$

$$\ln(1 - q_i) = -\lambda_i$$

$$\therefore\ \lambda_i = -\ln(1 - q_i);\ i = 1, 2, ...n \text{ y } -\ln(1 - q_i) > q_i$$

3. El último método fue propuesto por Kornya y usa el siguiente valor para cada λ_i

$$\lambda_i = \frac{q_i}{1 - q_i};\ i = 1, 2, ..., n$$

A su vez, el número esperado de pérdidas de este método es más grande que la esperanza del segundo.

Para el caso del Modelo individual la f.g.m. de S asociada es

$$M_S(t) = \prod_{i=1}^{n} P_{R_i}\left[M_{B_i}(t)\right]$$

considerando que R_i ahora se distribuye Poisson, entonces

$$M_S(t) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\lambda_i\left[M_{B_i}(t) - 1\right]\right)$$

por el Teorema 25

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,\ M_X(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} M_{B_i}(t) \text{ y } f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} f_{B_i}(x)$$

Ejemplo 36 *Considerando los datos de la compañía aseguradora del ejemplo 30 en donde se cubren 3 diferentes grupos de asegurados, utilizar la Aproximación Poisson Compuesta para el modelo individual y posteriormente con la aproximación normal encontrar* $F_S(1900)$ *para los 3 valores que puede tomar* λ.

- Con $\lambda_i = q_i$

$$\lambda = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = (1000 * 0.05) + (2000 * 0.10) + (500 * 0.02) = 260$$
$\Longrightarrow$

$$f_X(10) = \frac{1000 * 0.05 * 1}{260} + \frac{2000 * 0.10 * 0}{260} + \frac{500 * 0.02 * 0}{260} = 0.192307692$$

$$f_X(5) = \frac{1000 * 0.05 * 0}{260} + \frac{2000 * 0.10 * 1}{260} + \frac{500 * 0.02 * 0}{260} = 0.769230769$$

$$f_X(20) = \frac{1000 * 0.05 * 0}{260} + \frac{2000 * 0.10 * 0}{260} + \frac{500 * 0.02 * 1}{260} = 0.038461538$$

Por ser Poisson compuesto

$$\mathbb{E}(S) = \lambda \mathbb{E}(X) = 260 * [(10 * 0.192307692) + (5 * 0.769230769) + (20 * 0.038461538)]$$

$$= 260 * 6.538461525 = 1699.999$$

$$Var(S) = \lambda \mathbb{E}\left(X^2\right) = 260 * 53.84615363 = 13999.99994$$
$\Longrightarrow$
$$F_S(1900) = \mathbb{P}\left[\frac{S - 1699.999}{\sqrt{13999.99994}} \leq \frac{1900 - 1699.999}{\sqrt{13999.99994}}\right] = \mathbb{P}[z \leq 1.690317021]$$

$$= \phi(1.690317021) = 0.9545155$$

- Con $\lambda_i = -\ln(1 - q_i)$

$$\lambda = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = (1000 * (-\ln(0.95))) + (2000 * (-\ln(0.9))) + (500 * (-\ln(0.98)))$$

$$= 272.1156794$$

$$f_X(10) = \frac{1000 * (-\ln(0.95)) * 1}{272.1156794} = 0.188498121$$

$$f_X(5) = \frac{2000 * (-\ln(0.9)) * 1}{272.1156794} = 0.774380336$$

$$f_X(20) = \frac{500 * (-\ln(0.98)) * 1}{272.1156794} = 0.037121542$$

$\mathbb{E}(S) = 272.1156794 * 6.49931373 = 1768.565171$

$Var(S) = 272.1156794 * 53.0579373 = 14437.89666$

$$F_S(1900) = \mathbb{P}\left[z \leq \frac{1900 - 1768.565171}{\sqrt{14437.89666}}\right] = \mathbb{P}[z \leq 1.093851836]$$

$$= \phi(1.093851836) = 0.86299$$

- Para $\lambda_i = \dfrac{q_i}{1-q_i}$

$$\lambda = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = \left(1000 * \left(\frac{0.05}{0.95}\right)\right) + \left(2000 * \left(\frac{0.10}{0.9}\right)\right) + \left(500 * \left(\frac{0.02}{0.98}\right)\right)$$

$= 285.0578828$
$\Longrightarrow$

$$f_X(10) = \frac{1000 * (0.05/0.95) * 1}{285.0578828} = 0.184634708$$

$$f_X(5) = \frac{2000 * (0.1/0.9) * 1}{285.0578828} = 0.779568767$$

$$f_X(20) = \frac{500 * (0.02/0.98) * 1}{285.0578828} = 0.035796525$$

$\mathbb{E}(S) = 285.0578828 * 6.460121415 = 1841.508533$

$Var(S) = 285.0578828 * 52.27129998 = 14900.3461$

$$F_S(1900) = \mathbb{P}\left[z \leq \frac{1900 - 1841.508533}{\sqrt{14900.3461}}\right] = \mathbb{P}[z \leq 0.479175203]$$

$$= \phi(0.479175203) = 0.684093$$

El siguiente gráfico es el comparativo de las funciones de densidad de S que surgen de la aproximacion Poisson con cada uno de los métodos realizados, en él se observa que, aunque aparentemente no existe mucha diferencia en la función de densidad de cada distribución normal, para valores grandes de S, la función de distribución bajo el primer método habrá acumulado mayor probabilidad que implementando cualquiera de los otros dos métodos.

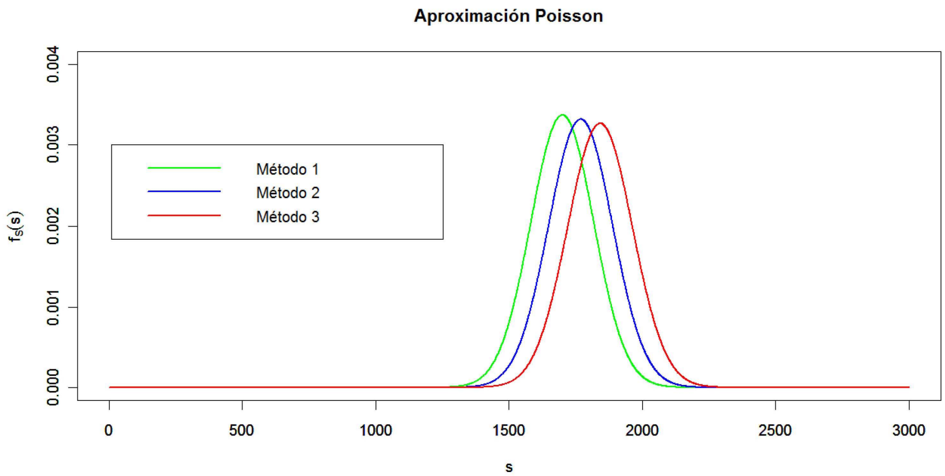

Fig. 3.4

Mediante las aproximaciones podemos ajustar la distribución para S, sin embargo, es factible que los resultados no se acerquen tanto a la realidad puesto que no se poseen muchas bases para justificar que las distintas aproximaciones (normal, lognormal o gamma) se ajusten a la distribución de los datos; y simplemente se pueden tomar estas decisiones por el aparente comportamiento del número de reclamaciones y de las colas que tengan. Por ejemplo, si tuvieramos el caso en que existe un límite de póliza para las pérdidas, sería muy probable que la severidad de nuestros datos tuviera una masa de probabilidad en este punto, debido a que todas las reclamaciones que hayan excedido el monto, u, sólo recibiran a lo más esta cantidad y eso determinaría dicha probabilidad, por lo cual esta situación generaría irregularidades en la forma de la distribución, y por tal situación, utilizar un método de aproximación no sería la mejor manera de conocer la distribución del riesgo. Por tal motivo, a continuación se desarrollarán otras propuestas de métodos que sirven para ajustar la distribución del riesgo S.

3.2 Métodos recursivos

3.2.1 Fórmula recursiva de Panjer

La distribución del riesgo S la mayoría de las ocasiones no es tan sencilla de obtener y a pesar de saber que se puede calcular en directo por medio de $F_S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^{*n}(x)$, esto no suele ser una cuestión trivial. Primero porque las convoluciones de $F_X^{*n}(x)$ no siempre tienen forma de alguna distribución conocida; pero lo más importante aún, esta situación se vuelve compleja porque mientras más elementos se tengan en la convolución, inclusive con las computadoras más potentes, al momento de realizar los cálculos, éstos no podrían ser resueltos porque el número de operaciones que se deben llevar a cabo, es muy elevado.

Es por esta razón que a través de la *Fórmula Recursiva de Panjer* los cálculos pueden ser minimizados. Para ello, debemos retomar los conceptos que manejamos en los modelos compuestos de frecuencia, donde considerabamos el modelo de riesgo colectivo considerando la distribución de frecuencia como la de severidad como distribuciones discretas entonces, la distribución compuesta de S

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

se obtenía mediante $g_k = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_k^{*n};$

donde $g_n = \mathbb{P}[S = n], p_n = \mathbb{P}[N = n]; f_n = \mathbb{P}[X = n]$
y $f_k^{*n}, k = 0, 1, ...$ es la n-ésima convolución de f_k.

Entonces, para determinar g_k del riesgo S, lo primero es contemplar que las distribuciones asociadas a la frecuencia y severidad, sean miembros de las clases (a,b,0) o (a,b,1). Esto porque las fórmulas desarrolladas por Panjer quedan expresadas con base en estas distribuciones.

- Si la distribución primaria es miembro de la clase (a,b,0), se tiene la fórmula recursiva:

$$g_k = \frac{1}{1 - af_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{bj}{k} \right) f_j g_{k-j}; k = 1, 2, 3, ...$$

Para el valor de g_0,

$$g_0 = \begin{cases} p_0 = \mathbb{P}[N = 0] & \text{si } f_0 = \mathbb{P}[X = 0] = 0 \\ P_N(f_0) \text{ o } M_N(\log f_0) & \text{si } f_0 = \mathbb{P}[X = 0] > 0 \end{cases}$$

Teorema 37 *Para cualquier distribución compuesta,* $g_0 = P_N(f_0)$*, donde* $P_N(z)$ *es la f.g.p. de la distribución primaria y* f_0 *es la probabilidad de la distribución secundaria cuando toma el valor de cero.*

Además necesitamos los siguientes resultados previos a la demostración de la Fórmula recursiva de Panjer:

$$\mathbb{E}\left[a+\frac{bX_1}{k}\;\middle|\;S=k\right]=a+\mathbb{E}\left[\frac{bX_1}{k}\;\middle|\;S=k\right]=a+\frac{b}{k}\mathbb{E}\left[X_1\mid S=k\right]$$

$$=a+\frac{b}{nk}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left[X_j\mid\sum_{i=1}^{n}X_i=k\right]$$

$$=a+\frac{b}{nk}\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n}X_j\mid\sum_{i=1}^{n}X_i=k\right]$$

$$=a+\frac{bk}{nk}=a+\frac{b}{n}$$

y se puede escribir como

$$\mathbb{E}\left[a+\frac{bX_1}{k}\mid S=k\right]=\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)\mathbb{P}\left[X_1=j\mid S=k\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)\frac{\mathbb{P}\left[X_1=j\right]\mathbb{P}\left[S-X_1=k-j\right]}{\mathbb{P}\left[S=k\right]}$$

Dem. (Fórmula Recursiva de Panjer):

$$g_k=\sum_{n=1}^{\infty}p_nf_k^{*n}=\sum_{n=1}^{\infty}p_n\mathbb{P}\left[X_1+X_2+\cdots+X_n=k\right]=\sum_{n=1}^{\infty}p_n\mathbb{P}\left[S=k\right]$$

además los miembros de la clase (a,b,0) satifacen que $p_n=\left(a+\dfrac{b}{n}\right)p_{n-1}$; $n=1,2,3,...$

$$\Longrightarrow g_k=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a+\frac{b}{n}\right)p_{n-1}\mathbb{P}\left[S=k\right]\text{ luego por los resultados previos}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}p_{n-1}\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)\mathbb{P}\left[X_1=j\right]\mathbb{P}\left[S-X_1=k-j\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)\mathbb{P}\left[X_1=j\right]\sum_{n=1}^{\infty}p_{n-1}\mathbb{P}\left[S-X_1=k-j\right]$$

con la notación de $g_n=\mathbb{P}\left[S=n\right],p_n=\mathbb{P}\left[N=n\right]$ y $f_n=\mathbb{P}\left[X=n\right]$ y notando que la última suma vuelve a quedar en términos de g, finalmente

$$g_k = \sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) f_j g_{k-j} = a f_0 g_k + \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) f_j g_{k-j}$$

$$g_k \left(1 - a f_0\right) = \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) f_j g_{k-j} \quad \blacksquare$$

por lo tanto

$$g_k = \frac{1}{(1 - a f_0)} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) f_j g_{k-j}$$

Análogamente

- Si la distribución primaria es miembro de la clase (a,b,1), la fórmula recursiva es:

$$g_k = \frac{\left[p_1 - (a+b)p_0\right] f_k + \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) f_j g_{k-j}}{1 - a f_0}; k = 1, 2, 3, ...$$

Estos resultados se pueden considerar de manera particular y tomando en cuenta la notación asociada con $f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x)$, es decir, supongamos que la distribución de severidad $f_X(x)$ está definida para los valores de $0, 1, 2, ..., m$, porque en efecto los montos de reclamación que recibe una compañía aseguradora generalmente tienen un tope de pago, y que la frecuencia de las reclamaciones es p_k, entonces:

- Para p_k de la clase (a,b,1)

$$f_S(x) = \frac{\left[p_1 - (a+b)p_0\right] f_X(x) + \sum_{y=1}^{x \wedge m} \left(a + \frac{by}{x}\right) f_X(y) f_S(x-y)}{1 - a f_X(0)}$$

donde $x \wedge m$ representa el $\min(x, m)$.

- Para p_k de la clase (a,b,0)

$$f_S(x) = \frac{\sum_{y=1}^{x \wedge m} \left(a + \frac{by}{x}\right) f_X(y) f_S(x-y)}{1 - a f_X(0)}$$

Cuando la distribución es Poisson, sabemos que $a = 0, b = \lambda$. Entonces la fórmula se reduce a:

$$f_S(x) = \frac{\lambda}{x} \sum_{y=1}^{x \wedge m} y f_X(y) f_S(x-y);\ x = 1, 2, 3, ..$$

Además, de igual forma que en la fórmulas recursivas anteriores, el valor inicial para determinar la densidad de S es $f_S(0) = P_N[f_X(0)]$

Ejemplo 38 *Utilizando el método recursivo encontrar la probabilidad de que haya más de tres reclamaciones agregadas, cosiderando que el modelo de riesgo colectivo se distribuye Poisson-Binomial Negativa. Entonces la distribución primaria es Poisson con* $\lambda = 2$ *de la clase (a,b,0), y la distribución secundaria es Binomial Negativa con* $\beta = 1.5$ *y* $r = 5$

Deseamos $1 - F_S(3)$. Entonces para la distribución Binomial Negativa

$$\alpha = \frac{\beta}{1+\beta} = 0.6 \text{ y } b = (r-1)\frac{\beta}{1+\beta} = 2.4$$

$$f_X(0) = (1+\beta)^{-r} = (1+1.5)^{-5} = 0.01024$$

$$f_X(1) = (0.6 + 2.4) * 0.01024 = 0.03072$$

$$f_X(2) = \left(0.6 + \frac{2.4}{2}\right) * 0.03072 = 0.055296$$

$$f_X(3) = \left(0.6 + \frac{2.4}{3}\right) * 0.055296 = 0.0774144$$

$$f_S(0) = P_N(f_X(0)) = e^{2(f_X(0)-1)} = e^{2(0.01024-1)} = 0.138135526$$

Para la distribución Poisson $a = 0$ y $b = \lambda = 2$

$\Longrightarrow$

$$f_S(x) = \frac{2}{x} \sum_{y=1}^{x} y f_X(y) f_S(x-y)$$

$$f_S(1) = \left(\frac{2}{1} * 0.03072 * 0.138135526\right) = 0.008487047$$

$$f_S(2) = \left(\frac{2}{2} * 0.03072 * 0.008487047\right) + \left(\frac{2}{2} * 2 * 0.055296 * 0.138135526\right)$$

$$= 0.015537406$$

$$f_S(3) = \left(\frac{2}{3} * 0.03072 * 0.015537406\right) + \left(\frac{2}{3} * 2 * 0.055296 * 0.008487047\right)$$

$$+ \left(\frac{2}{3} * 3 * 0.0774144 * 0.138135526\right) = 0.022331297$$

$$1 - F_S(3) = 1 - (0.138135526 + 0.008487047 + 0.015537406 + 0.022331297)$$

$$= 0.815508724$$

La probabilidad de que existan más de tres reclamaciones bajo el modelo agregado es 0.815508724. A continuación se muestran los valores de las funciones de densidad y la distribución de S que se generaron por medio de R y para los primeros 5 valores.

x	$f_S(x)$	$F_S(x)$
0	0.1381355	0.1381355
1	$8.487047e-03$	0.1466226
2	$1.553741e-02$	0.1621600
3	$2.233130e-02$	0.1844913
4	$2.785252e-02$	0.2123438
5	$3.175299e-02$	0.2440968

Tabla 3.4

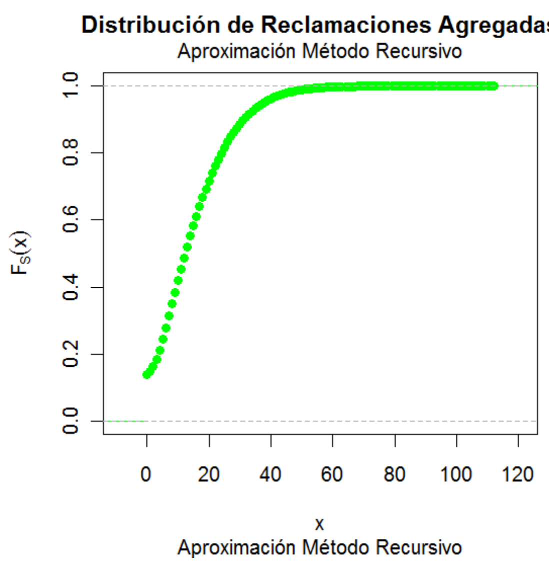

Fig. 3.5

De esta forma es como se implementa la fórmula recursiva de Panjer siempre que las distribuciones de frecuencia en las reclamaciones agregadas no sean a su vez distribuciones compuestas, puesto que cuando esta situación se presenta, para poder llevar a cabo el cálculo de $f_S(x)$ se debe aplicar dicha fórmula por partida doble; esto es, consideremos la f.g.p. para N :

$$P_N(z) = P_1[P_2(z)]$$

donde P_1 es la f.g.p. de la *distribución primaria de frecuencias* y P_2 la *secundaria.*

De tal manera que para las reclamaciones agregadas

$P_S(z) = P_N[P_X(z)] = P_1[P_2(P_X(z))]$ que podemos reescribir como

$P_S(z) = P_1[P_{S_1}(z)]$; claramente $P_{S_1} = P_2[P_X(z)]$.

Esta distribución de S_1 deberá ser la primera que se calcule mediante la fórmula de Panjer, dando como resultado $f_{S_1}(x)$; $x = 0, 1, 2, ...$ que funcionará como la nueva distribución de "severidad" para encontrar $f_S(x)$; es decir, nuevamente se aplicará la fórmula recursiva, comenzando por $f_S(0) = P_S(0) = P_1[f_{S_1}(0)]$ y posteriormente utilizando los valores de $f_{S_1}(x)$ como las probabilidades de la distribución de severidad mientras que p_n en esta segunda vuelta será determinada por la distribución primaria de frecuencias.

Se ha utilizado el supuesto de que la severidad posee una distribución discreta para poder aplicar el método recursivo; sin embargo, el análogo para este método, considerando que la severidad es continua, queda expresado por medio de una ecuación integral.

Teorema 39 *Para distribuciones de frecuencia de la clase (a,b,1) y cualquier distribución de severidad continua con soporte en los reales positivos, se tiene la siguiente ecuación integral que determina la densidad del riesgo S :*

$$f_S(x) = p_1 f_X(x) + \int_0^x \left(a + \frac{by}{x}\right) f_X(y) f_S(x-y)\, dy$$

Las ecuaciones integrales de esta forma corresponden a ecuaciones integrales de Volterra de segundo orden, y la demostración de este teorema queda fuera de los alcances que se tienen en este trabajo.

Existen soluciones numéricas para estas ecuaciones que pueden ser consultadas en el libro de Baker [13]. Sin embargo, en este estudio se utilizarán aproximaciones discretas para distribuciones continuas que modelen la severidad en las reclamaciones por medio del método de redondeo, con el propósito de implementar el método recursivo de Panjer.

Método de redondeo

Este método se utiliza para construir distribuciones discretas a partir de distribuciones de severidad que sean continuas, para ello se deben asignar probabilidades discretas en múltiplos de alguna unidad de medida establecida h, que recibe el nombre de *"span"* ; dicha distribución es llamada aritmética puesto que se define para enteros positivos.

El método de redondeo concentra la probabilidad de la mitad del span h, dividiendo la probabilidad entre $(j+1)h$ y jh, de manera que asigna dicha mitad al punto $j+1$ y la otra al punto j. Es decir, si f_j es la probabilidad comprendida en jh; $j = 0, 1, 2, ...$

$$f_0 = \mathbb{P}\left[X < \frac{h}{2}\right] = F_X\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$f_j = \mathbb{P}\left[jh - \frac{h}{2} \leq X < jh + \frac{h}{2}\right] = F_X\left(jh + \frac{h}{2}\right) - F_X\left(jh - \frac{h}{2}\right)$$

Cuando la distribución a discretizar no está acotada, lo más apropiado es limitar los valores que toma en algún punto m, que asegure una acumulación de probabilidades lo más cercana a uno que se pueda, entonces $f_m = 1 - F_X\left[(m-0.5)h\right]$. De tal manera que las probabilidades nunca sean negativas y la suma de ellas sea 1, para asegurar que realmente es una función de densidad de probabilidades.

Ejemplo 40 *Supóngase que la severidad de las pérdidas agregadas sigue una distribución Pareto con $\alpha = 4$ y $\theta = 50$. Obtener su distribución discreta mediante el método de redondeo con un span de* 0.9*.*

$X \sim Pareto(4, 50)$ y $h = 0.9$

$\Longrightarrow$

$$f_0 = F_X\left(\frac{0.9}{2}\right) = 1 - \left(\frac{50}{0.45+50}\right)^4 = 0.035204354$$

$$f_j = F_X\left(0.9j + 0.45\right) - F_X\left(0.9j - 0.45\right)$$

$$= \left(\frac{50}{(0.9j - 0.45) + 50}\right)^4 - \left(\frac{50}{(0.9j + 0.45) + 50}\right)^4$$

En términos generales la función de densidad discreta queda expresada con f_j, si valuamos la función para $j = 0, 1, ..., 9$ con el fin de mostrar sus valores en la siguiente tabla.

j	f_j
0	0.035204354
1	0.065881478
2	0.060352825
3	0.055371689
4	0.050875844
5	0.046811014
6	0.043129753
7	0.039790489
8	0.036756722
9	0.033996337

Tabla 3.5

Finalmente, la siguiente gráfica muestra el ajuste de la distribución continua a la distribución discreta

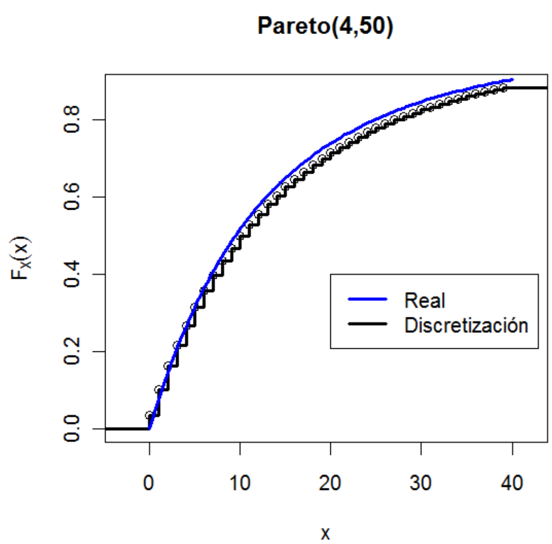

Fig. 3.6

Cabe señalar que si se consideran modificaciones de cobertura para las distribuciones de severidad como coaseguro, límite de póliza y deducible, lo que se debe hacer es aplicar las modificaciones antes de discretizar la función, y después, ya que se tiene la función distribución con base en la variable de pago o de pérdida, se lleva a cabo el método del redondeo. En este panorama el valor de $\alpha(u-d)$ debe ser múltiplo de h

3.2.2 Fórmula de De Pril

Para el modelo de riesgo individual también se desarrolló una fórmula recursiva que proporciona la distribución de S, este resultado fue hecho por Nelson De Pril en 1986 y considera un portafolio de n asegurados.
La nueva notación considera al número de asegurados n_{ij}, que representa en j a la probabilidad de reclamación q_j; $j = 1, 2, ..., m$ y en i corresponde al monto de la reclamación realizada con $i = 1, 2, ..., r$. De manera que

$$n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m} n_{ij}$$

Es indispensable que los montos de reclamación sigan una progresión aritmética, de manera que los valores que corren sobre i puedan representar la progresión que tiene la severidad, es decir para valores de $i = 1, 2, 3, 4$ se pueden considerar los montos de beneficio de los asegurados por las cantidades de $3000, 6000, 9000, 12000$.

Probabilidad de reclamación (j)

Monto de reclamación (i)		q_1	q_2	$\cdots$	q_m
	1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	n_{1m}
	2	n_{21}	n_{22}	$\cdots$	n_{2m}
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	r	n_{r1}	n_{r2}	$\cdots$	n_{rm}

Tabla 3.6

La función de densidad para S queda expresada por la siguiente fórmula recursiva

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{x \wedge r} \sum_{k=1}^{\lfloor x/i \rfloor} f_S(x - ik)\, h(i,k);\ x \geq 1 \\ f_S(0) &= \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{m} (1 - q_j)^{n_{ij}} \end{aligned}$$

Dem:

Considerando la f.g.p. de X_{ij} para este caso que involucra la probabilidad de reclamación q_j y al monto i, entonces con esta nueva notación

$$P_{X_{ij}}(z) = \left(1 - q_j + q_j z^i\right)$$

Luego la f.g.p. de S por la independencia de las X_{ij}´s será

$$P_S(z) = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{m} \left(1 - q_j + q_j z^i\right)^{n_{ij}}$$

tomando logaritmo y derivando respecto de z

$$\ln\left[P_S\left(z\right)\right] = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}\ln\left(1-q_j+q_jz^i\right)$$

$$\frac{d}{dz}\ln\left[P_S\left(z\right)\right] = \frac{P_S\acute{}(z)}{P_S\left(z\right)} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}\left(\frac{iq_jz^{i-1}}{1-q_j+q_jz^i}\right)$$

$\Longrightarrow$

$$P_S\acute{}(z) \ = P_S\left(z\right)\left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}\left(\frac{iq_jz^{i-1}}{1-q_j+q_jz^i}\right)\right]$$

$$zP_S\acute{}(z) = P_S\left(z\right)\left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}\left(\frac{iq_jz^{i}}{1-q_j+q_jz^i}\right)\right]$$

$$= P_S\left(z\right)\left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}\frac{iq_jz^{i}}{1-q_j+q_jz^i}\frac{1-q_j}{1-q_j}\right]$$

$$= P_S\left(z\right)\left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}\frac{iq_jz^{i}}{1-q_j}\left(1+\frac{q_jz^i}{1-q_j}\right)^{-1}\right]$$

como $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ para $|x| < 1$.Entonces

$$= P_S\left(z\right)\left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}\ i\frac{q_jz^{i}}{1-q_j}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-1\right)^{k-1}\left(\frac{q_jz^i}{1-q_j}\right)^{k-1}\right]$$

$$= P_S\left(z\right)\left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}\ i\sum_{k=1}^{\infty}\left(-1\right)^{k-1}\left(\frac{q_j}{1-q_j}\right)^{k} z^{ik}\right]$$

Luego se define $h\left(i,k\right) = i\left(-1\right)^{k-1}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}\left(\frac{q_j}{1-q_j}\right)^{k}$

Debido a que las sumas sobre k y j son absolutamente convergentes en cualquiera de los dos ordenes que se realicen, entonces es válido intercambiarlas, por lo tanto regresando

$$zP_S\acute{}(z) = P_S\left(z\right)\left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{\infty} h\left(i,k\right)z^{ik}\right]$$

como $P_S(z) = \mathbb{E}\left[z^S\right] = \sum_{x=0}^{\infty} z^x \mathbb{P}[S = x] = \sum_{x=0}^{\infty} z^x f_S(x)$ y

$P_S\acute{}(z) = \sum_{x=0}^{\infty} x z^{x-1} f_S(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x z^{x-1} f_S(x)$

$\Longrightarrow$

$z \sum_{x=1}^{\infty} x z^{x-1} f_S(x) = \sum_{x=0}^{\infty} z^x f_S(x) \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{\infty} h(i,k)\, z^{ik}$

$$\sum_{x=1}^{\infty} x z^x f_S(x) = \sum_{x=0}^{\infty} z^x f_S(x) \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{\infty} h(i,k)\, z^{ik}$$

El coeficiente para $x \geq 1$ de la parte izquierda de la igualdad de z^x es $x f_S(x)$ y para valores de i y k tales que $1 \leq ik \leq x$ el coeficiente para z^x del otro lado de la igualdad es la suma de $f_S(x - ik)\, h(i.k)$

$\Longrightarrow$

$x f_S(x) = \sum_{i=1}^{x \wedge r} \sum_{k=1}^{\lfloor x/i \rfloor} f_S(x - ik)\, h(i.k)$

$\therefore$ para $x \geq 1$ $\qquad f_S(x) = \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{x \wedge r} \sum_{k=1}^{\lfloor x/i \rfloor} f_S(x - ik)\, h(i,k)$

y para $S = 0$ que es cuando no se efectúa ninguna reclamación, entonces $x = 0$ y de ahí

$f_S(0) = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{m} (1 - q_j)^{n_{ij}} \quad \blacksquare$

Ejemplo 41 *Una aseguradora posee una cartera de 66 pólizas para un seguro de vida. La siguiente tabla muestra las probabilidades de reclamación y los montos de reclamación por grupo de asegurados. Obtener la función de densidad de las pérdidas agregadas para para valores de* $x = 0, 1, ..., 30$ *mediante la fórmula recursiva de Nelson De Pril*

# pólizas	Probabilidad de reclamación	Monto de reclamación
20	0.02	5000
14	0.012	10000
8	0.05	15000
24	0.013	20000

Tabla 3.7

Reescribiendo la tabla respecto a la Fórmula de De Pril:

		q_j			
		0.02	0.012	0.05	0.013
	1	20	0	0	0
i	2	0	14	0	0
	3	0	0	8	0
	4	0	0	0	24

Tabla 3.8

Donde:
q_j es la probabilidad de reclamación
i es el monto de reclamación

El desarrollo de este método se realiza completamente en R y el código asociado a este modelo se puede encontrar en el apéndice de códigos en R del presente trabajo. A continuación se muestra una tabla resumen de los primeros valores de la función de densidad y distribución de S, y su gráfica para $x = 0, 1, ..., 30$.

x	$f_S(x)$	$F_S(x)$
0	0.2732243	0.2732243
1	$1.115201e-01$	0.3847444
2	$6.808043e-02$	0.4528248
3	$1.366522e-01$	0.5894770
4	$1.408985e-01$	0.7303755
5	$6.588025e-02$	0.7962558

Tabla 3.9

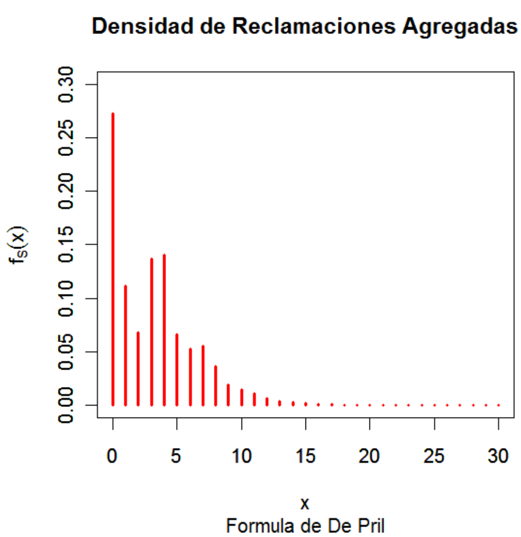

Fig. 3.7

3.3 Métodos de inversión

Hasta el momento hemos desarrollado diversos métodos para poder encontrar la distribución de las pérdidas agregadas correspondientes a los modelos que se pueden presentar en los datos de una aseguradora, entre ellos se utilizaron convoluciones, aproximaciones y la fómula recursiva de Panjer. Además, en la sección anterior, también conocimos el método de redondeo que se implementa para discretizar funciones continuas, de tal forma que posterior a este proceso se pueda aplicar el método recursivo y finalmente conocer la distribución del riesgo.

Otros métodos para encontrar la distribución de S se conocen como los de inversión. Estos métodos numéricos se basan en el hecho de la correspondencia única entre las distribuciones de las variables aleatorias con su función característica (f.c.), su función generadora de momentos (f.g.m.) y su función generadora de probabilidades (f.g.p.).

La razón por la cual se involucra a la función característica en los métodos de inversión, se justifica además de ser única siempre existe; por lo tanto, para una función característica dada, siempre tendremos su única y correspondiente función de distribución que finalmente es la que nos interesa hallar.

Dicha correspondencia también se respeta al tratarse de distribuciones compuestas, debido a que su función característica queda expresada como una composición de funciones que cumplen lo anterior.

Por lo tanto, la función característica asociada a la distribución de pérdidas agregadas es:

$$\varphi_S(z) = \mathbb{E}\left[e^{iSz}\right] = P_N\left[\varphi_X(z)\right]$$

donde P_N es la f.g.p. de la frecuencia y $\varphi_X(z)$ la función característica de la severidad.

3.3.1 Transformada rápida de Fourier (FFT)

Este algoritmo lo utilizaremos para obtener la función de densidad de variables aleatorias discretas con base en la transformación de sus funciones características. Entonces, la siguiente definición muestra la Transformada de Fourier adaptada para una f.d.p.

Definición 42 *Para cualquier función de densidad de probabilidades continua $f(x)$, la Transformada de Fourier (función característica) asociada es:*

$$\tilde{f}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{izx} dx$$

Y la f.d.p. que se obtiene a partir de la Transformada de Fourier es:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(z) e^{-izx} dz$$

Para el caso, $f(x)$ es una función definida en los reales y $\tilde{f}(z)$ en los números complejos. Mientras que la versión discreta es la siguiente

Definición 43 *Sea f_x una función definida en todos los valores enteros de x. Para el vector $(f_0,\ f_1, ..., f_{n-1})$ la Transformada de Fourier discreta que tiene el vector $\left(\tilde{f}_0,\ \tilde{f}_1, ..., \tilde{f}_{n-1}\right)$ se define por medio de*

$$\tilde{f}_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_j \exp\left(\frac{2\pi i}{n} jk\right);\ k = 0, 1, ...$$

Este mapeo es biyectivo puesto que se transforman n puntos en n puntos.
Y la Transformada de Fourier Inversa es:

$$f_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{f}_k \exp\left(-\frac{2\pi i}{n} kj\right);\ j = 0, 1, ...$$

Cabe señalar que la Transformada rápida de Fourier (FFT) es un algoritmo empleado para conocer la Transformada de Fourier, sin embargo no se estudiará el desarrollo del algoritmo, aunque es importante mencionar que reduce el número de cálculos realizados a un orden de $(n \log n)$ mientras que la evaluación directa de la transformada lo haría en n^2 operaciones, esto se vuelve más evidente a medida que el valor de n es más grande. Además, el único requerimiento que debemos considerar para aplicar este método es que el valor de n sea potencia de 2.

Entonces, el proceso a seguir para hacer uso de la FFT y con ello conocer la distribución de S es:

- Discretizar la función de severidad de las pérdidas agregadas por el método de redondeo y obtener el siguiente vector de probabilidades

  $$f_X(0),\ f_X(1), ...,\ f_X(n-1)$$

  con $n = 2^r$, r entero y n se define respecto a $f_S(s)$ que se desea obtener.

- Aplicar el algoritmo FFT al vector anterior para obtener la función característica de los montos de reclamación, en este caso $\varphi_X(s)$ que igual es un vector de n entradas.

- Una vez conocida la función característica de la severidad y con la función generadora de probabilidades de el número de reclamaciones, se hace la composición de estas dos para determinar la Transformadad de Fourier discreta (función característica) de las pérdidas agregadas.
- Finalmente se implementa el algoritmo de la Transformada rápida de Fourier en orden Inverso (IFFT) que proporcionará la f.d.p. del riesgo S.

Ejemplo 44 *Encontrar a través del método de la Transformada rápida de Fourier la función de densidad de S, considerando $n = 2^7$, que la distribución de severidad es Exponencial$(1/4)$, el número de reclamaciones se distribuye Binomial Negativa $(\beta = 0.25, r = 10)$ y que se tienen las siguientes coberturas en el seguro:*

Deducible $(d) = 5$
Límite de póliza $(\alpha\,(u - d)) = 40$
Coaseguro $(\alpha) = 80\%$

Utilizar un "span" de 0.4 para el método de redondeo y considerar que son pérdidas agregadas de pago.

La resolución de este ejemplo se hará mediante el uso de códigos en R explicando los pasos, esta situación es debido a que los cálculos de la FFT sólo son contemplados con el uso de este programa.

La distribución de Y^Pasociada y que se debe discretizar es

$$F_{Y^P} = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ \frac{F_X\left(\frac{y}{0.8}+5\right)-F_X(5)}{1-F_X(5)} & 0 < y < 40 \\ 1 & y \geq 40 \end{cases}$$

En este caso que $X \sim Exp(1/\theta)$ para F_{Y^P} cuando $0 < y < \alpha(u - d)$

$$F_{Y^P}(y) = \frac{\left(1 - e^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{y}{\alpha}+d\right)}\right) - \left(1 - e^{-\frac{d}{\theta}}\right)}{e^{-\frac{d}{\theta}}} = \frac{e^{-\frac{d}{\theta}} - e^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{y}{\alpha}+d\right)}}{e^{-\frac{d}{\theta}}} = \frac{e^{-\frac{d}{\theta}}\left(1 - e^{-\frac{y}{\alpha\theta}}\right)}{e^{-\frac{d}{\theta}}}$$

$$= 1 - e^{-\frac{y}{\alpha\theta}}$$

$\therefore Y^P \sim Exp(1/\alpha\theta)$, en el ejemplo $Y^P \sim Exp(0.3125)$

Código en R

```
a<- 0.8
d<- 5
l<- 40
```

```
u<- (l/a)+d
h<- 0.4
n<- 2^7
fy<- discretize( pexp(x,rate=.3125), method="rounding", from=0, to=n*h, step=h)
#Este vector resultante es la versión discreta y aproximada de la distribución de severidad con las modificaciones de cobertura del seguro.
fcy<- fft(fy, inverse=FALSE) #Función característica de los montos de reclamación.
```

Como el número de reclamaciones también se modifica por las coberturas, si $N \sim BinNeg(\beta, r)$

$\Longrightarrow N^P \sim BinNeg(\beta^* = \beta v, r)$ y $v = 1 - F_X(5)$

```
v<- (1-pexp(d,1/4))
r<- 10 b<- 0.25
beta<- (v*b)
```

La f.g.p. de N^P es $P_{N^P}(z) = [1 - \beta^*(z-1)]^{-r}$

La función característica de S

$$\varphi_S(s) = [1 - \beta^*(\varphi_{Y^P}(s) - 1)]^{-r}$$

```
fcS<- (1-beta*(fcy-1))^(-r)
```

Por último, se realiza la IFFT (Transformada rápida de Fourier Inversa) agregando la división entre n que no calcula la función de R pero que es parte de la fórmula para obtener la función de densidad de S de acuerdo a su defención.

```
fS<- Re(fft(fcS,inverse=TRUE))/n
```

Esta es la tabla resumen de valores para $\varphi_{Y^P}(s)$, $\varphi_S(s)$ y $f_S(s)$ con $n = 128$.

s	$\varphi_{Y^P}(s)$	$\varphi_S(s)$	$f_S(s)$
0	0.999999880	0.9999999	$5.214224e-01$
1	0.866304586	0.8802309	$3.862681e-02$
2	0.618238579	0.7162362	$3.566183e-02$
3	0.418398588	0.6236285	$3.290695e-02$
4	0.287939540	0.5768385	$3.034938e-02$
5	0.205446738	0.5516760	$2.797684e-02$
6	0.152087109	0.5369782	$2.577756e-02$
7	0.116303997	0.5277549	$2.374033e-02$
8	0.091418485	0.5216224	$2.185448e-02$

Tabla 3.10

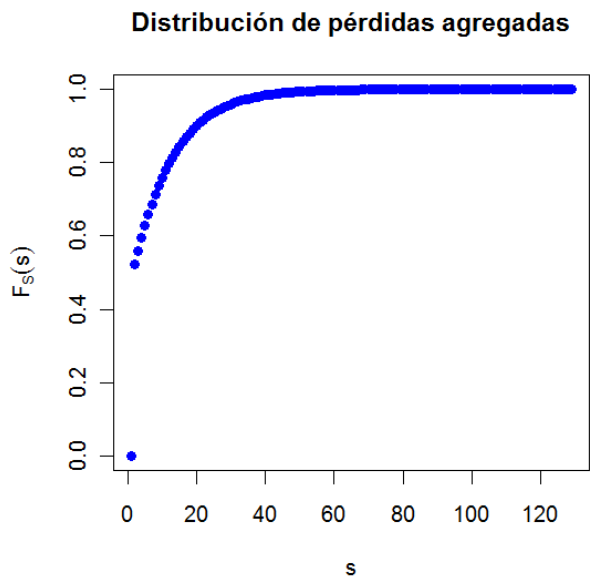
Distribución de pérdidas agregadas
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
$F_S(s)$
0
20
40
60
80
100
120
s

Fig. 3.8

Capítulo 4

Aplicación de modelos a datos reales

En este trabajo se han expuesto diversos métodos y temas que involucran los modelos de pérdidas agregadas, en este capítulo se pretende aterrizar los conceptos estudiados y realizar un análisis integral con base en datos reales para mostrar resultados en conjunto. Para ello se obtuvo una extracción de la base de datos de una aseguradora que cubre pólizas de seguros para automóviles. En esta selección de datos se buscó que cumplieran con los supuestos del modelo de riesgo colectivo. A continuación se realiza el análisis de los datos del seguro que cubre dichas polizas, en el cual se explicarán cada uno de los métodos que se siguieron con el fin de obtener conclusiones de acuerdo al estudio y a los resultados.

El seguro de autos involucrado en este estudio considera pólizas, que en particular aseguran automóviles modelo 2010, cada póliza con una misma suma asegurada de $250,904.00 y un deducible $ 17,563.28. Además se tiene información de las pólizas que relizaron reclamaciones durante el periodo de un año (2010), asociadas al monto de reclamación que reportaron. Estos datos permiten identificar la frecuencia de reclamaciones realizadas para este grupo de asegurados, así como la severidad de dichas reclamaciones. Cabe señalar que los datos proporcionados en esta base tuvieron que analizarse previamente a considerar la muestra elegida y que dentro de lo reportado se encontraron inconsistencias que tuvieron que ser eliminadas de la muestra a fin de conservar información coherente. La información extraída de la base de datos en donde se concentran los montos de las reclamaciones realizadas por los asegurados, así como la frecuencia de los mismos, incluyendo el número total de pólizas se encuentra en un archivo anexo al presente trabajo para su consulta.

Como se ha tratado a lo largo de este trabajo, se debe diferenciar el estudio de la frecuencia y severidad en los datos, con N variable aleatoria del número de reclamaciones realizadas y las $X\acute{i}s$ variables aleatorias de severidad independientes e identicamente distribuidas.

El primer aspecto es obtener una distribución ajustada al número de reclamaciones observadas. Para poder estimar los parámetros de las distribuciones discretas que ajusten mejor a la frecuencia de los datos, tomamos como valores inciales la media y la varianza de la muestra:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} kn_k \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} k^2 n_k - \hat{\mu}^2$$

Donde
n_k : número de observaciones con k reclamaciones.
n : total de reclamaciones

En general se utilizan las siguientes estimaciones de los parámetros para las distribuciones de las clases (a,b,0) y (a,b,1). Respecto a los datos de nuestro estudio, más adelante se exponen cuáles fueron las consideraciones que se tomaron y los resultados para el ajuste de la frecuencia.

Nota: Los parámetros expresados como $\hat{\lambda}$ son estimaciones a través del método de momentos y aquéllos expresados como $\tilde{\lambda}$ se estiman por medio de otros métodos, en ambos casos, los resultados de estas estimaciones se obtuvieron directamente de la literatura, con base en el A.S.M. Study Manual for Exam C/Exam 4 [2].

Clase (a,b,0)

Poisson	*Geométrica*	*Binomial*	*Binomial Negativa*
$\hat{\lambda} = \hat{\mu}$	$\hat{\beta} = \hat{\mu}$	$\hat{q} = \frac{\hat{\mu}}{m}$	$\hat{\beta} = \frac{\hat{\sigma}^2}{m} - 1$ $\hat{r} = \frac{\hat{\mu}^2}{\hat{\sigma}^2 - \hat{\mu}}$

Para cualquier miembro de esta clase

$$\mu_{(1)} = \frac{(a+b)}{(1-a)} \qquad \mu_{(j)} = \frac{(aj+b) * \mu_{(j-1)}}{(1-a)}$$

En particular la varianza

$$Var = \frac{(a+b)}{(1-a)^2}$$

Clase (a,b,1)

**Subclase truncada en cero :* Recordemos que para esta clase $p_o^T = 0$ y $p_k^T = \frac{p_k}{1-p_0}$ donde p_k y p_0 corresponden a las probabilidades de las distribuciones de la clase (a,b,0).

En este apartado incluiremos las fórmulas para el cálculo de probabilidades, esperanza, varianza, f.g.p y parámetros estimados de esta subclase que serán de utilidad para conocer información de los datos que pertenezcan a esta clase.

Poisson

$a = 0 \quad b = \lambda$

$$p_1^T = \frac{\lambda}{e^{\lambda} - 1} \qquad p_k^T = \frac{\lambda^k}{k!(e^{\lambda} - 1)}$$

$$\mathbb{E}\left(N\right) = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}} \qquad Var(N) = \frac{\lambda\left[1 - \left(\lambda + 1\right) e^{-\lambda}\right]}{(1 - e^{-\lambda})^2}$$

$$\tilde{\lambda} = \ln\left[\frac{n\hat{\mu}}{n_1}\right] \qquad P\left(z\right) = \frac{e^{\lambda z} - 1}{e^{\lambda} - 1}$$

Geométrica

$$a = \frac{\beta}{1 + \beta} \quad b = 0$$

$$p_1^T = \frac{1}{1 + \beta} \qquad p_k^T = \frac{\beta^{k-1}}{(1 + \beta)^k}$$

$$\mathbb{E}\left(N\right) = 1 + \beta \qquad Var(N) = \beta(1 + \beta)$$

$$\hat{\beta} = \hat{\mu} - 1 \qquad P\left(z\right) = \frac{\left[1 - \beta\left(z - 1\right)\right]^{-1} - \left(1 + \beta\right)^{-1}}{1 - (1 + \beta)^{-1}}$$

Binomial

$1 > q > 0$ y m entero

$$a = -\frac{q}{1 - q} \quad b = \frac{\left(m + 1\right) q}{1 - q}$$

$$p_1^T = \frac{m\left(1 - q\right)^{m-1} q}{1 - \left(1 - q\right)^m} \quad p_k^T = \frac{\binom{m}{k} q^k \left(1 - q\right)^{m-k}}{1 - (1 - q)^m}; \;\; k = 1, 2, ..., m$$

$$\mathbb{E}\left(N\right) = \frac{mq}{1 - (1 - q)^m} \qquad Var(N) = \frac{mq\left[(1 - q) - \left(1 - q + mq\right)\left(1 - q\right)^m\right]}{[1 - (1 - q)^m]^2}$$

$$\tilde{q} = \frac{\hat{\mu}}{m} \qquad P\left(z\right) = \frac{\left[1 + q\left(z - 1\right)\right]^m - \left(1 - q\right)^m}{1 - (1 - q)^m}$$

Binomial Negativa

$r > -1$, $r \neq 0$

$$a = \frac{\beta}{1+\beta} \quad b = \frac{(r-1)\,\beta}{1+\beta}$$

$$p_1^T = \frac{r\beta}{(1+\beta)^{r+1} - (1+\beta)} \quad p_k^T = \frac{r\,(r+1)\cdots(r+k-1)}{k![(1+\beta)^r - 1]}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k$$

$$\mathbb{E}\,(N) = \frac{r\beta}{1-(1+\beta)^{-r}} \qquad Var(N) = \frac{r\beta\left[(1+\beta) - (1+\beta+r\beta)\,(1+\beta)^{-r}\right]}{[1-(1+\beta)^{-r}]^2}$$

$$\tilde{\beta} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\mu}} - 1 \quad \tilde{r} = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}^2 - \hat{\mu}} \quad P\,(z) = \frac{[1-\beta\,(z-1)]^{-r} - (1+\beta)^{-r}}{1-(1+\beta)^{-r}}$$

**Subclase modificada en cero :* De acuerdo con el desarrollo de esta clase en el capítulo 1 a partir de las distribuciones de la clase (a,b,0) y de la subclase truncada en cero se pueden determinar los valores para p_k^M.

$$p_k^M = \left(\frac{1-p_0^M}{1-p_0}\right)p_k \quad ; \quad k = 1, 2, ...$$

y

$$p_k^M = \left(1-p_0^M\right)p_k^T \quad ; \quad k = 1, 2, ...$$

Mientras que el valor p_0^M se considera como un parámetro más dentro de esta clase que representa la probabilidad de no haber tenido reclamaciones, por lo tanto, el estimador máximo verosímil siempre corresponderá a la frecuencia de tener cero reclamaciones

$$\hat{p}_0^M = \frac{n_0}{n}$$

Además la función generadora de probabilidades para esta subclase es

$$P^M\,(z) = p_0^M + \left(1-p_0^M\right)P\,(z)$$

Donde $P\,(z)$ es la función generadora de probabilidades correspondiente a la distribución de la subclase truncada en cero.

Por otra parte, la esperanza y la varianza para las distribuciones de la subclase modificada en cero se obtienen mediante las que componen las truncadas en cero, es decir para cada distribución discreta

$$\mathbb{E}\left(N^M\right) = \mathbb{E}\left(N^T\right)(1-p_0^M)$$

$$Var(N^M) = (1 - p_0^M)Var(N^T) + p_0^M(1 - p_0^M)\sqrt{\mathbb{E}\left(N^T\right)}$$

Donde $\mathbb{E}\left(N^M\right)$ y $\mathbb{E}\left(N^T\right)$ son las esperanzas de las distribuciones de las subclases modificada y truncada respectivamente y $Var(N^M)$ y $Var(N^T)$ corresponde a las varianzas de estas mismas subclases.

De acuerdo con la información de los datos del seguro de autos el número total de pólizas aseguradas asciende a 1,728. De este total de pólizas se obtuvo el siguiente número de reclamaciones durante el periodo de estudio:

No. de reclamaciones k	No. de pólizas con k reclamaciones	p_k
0	1579	0.91377315
1	136	0.0787037
2	12	0.00694444
3	1	0.0005787

Tabla 4.1

Debido a que el número de reclamaciones pertenece a la clase (a,b,1) subclase modificada en cero, se realizan las siguientes estimaciones para determinar la distribución de la frecuencia

$$\hat{\mu} = 0.0943287 \quad \hat{\sigma}^2 = 0.10279191$$

Poisson

$p_0^M = 0.91377315 \qquad a = 0 \qquad b = 0.181095315$

$\tilde{\lambda} = 0.181095315$

$\mathbb{E}\left(N\right) = 0.094270017$

$Var(N) = 0.090663112$

Obtenemos las probabilidades $p_k^M \;\; k = 0, 1, 2, 3.$ correspondientes con $p_k^M = (1 - p_0^M)p_k^T$; donde $p_k^T = \dfrac{\lambda^k}{k!(e^\lambda - 1)}$

p_k^T	p_k^M
$p_1^T = 0.91218381$	$p_1^M = 0.07865474$
$p_2^T = 0.08259611$	$p_2^M = 0.007122$
$p_3^T = 0.00498592$	$p_3^M = 0.00042992$

Tabla 4.2

De aquí se observan primero las diferencias entre la media y varianza muestral respecto de la media y varianza ajustadas a la distribución Poisson

Diferencia esperanzas:0.0000587
Diferencia varianzas:0.0121288
Además, si consideramos la pendiente asociada a las probabilidades p_k^M con base en la función lineal $\dfrac{kp_k^M}{p_{k-1}^M}$ $k = 2, 3.$ es igual a cero.

k	$\dfrac{kp_k^M}{p_{k-1}^M}$
2	0.18109532
3	0.18109532

Tabla 4.3

Con base en el análisis de los datos, se detecta lo siguiente:

- La $\mathbb{E}(N)$ y $Var(N)$ poseen valores muy similares entre sí, recordamos que para una distribución Poisson $\mathbb{E}(N) = Var(N)$.
- Las diferencias entre la media y la varianza muestral contra la $\mathbb{E}(N)$ y $Var(N)$ son mínimas.
- La pendiente de acuerdo a la función lineal es igual a cero.

Los resultados anteriores son suficientes para considerar que la frecuencia de los datos provienen de una distribución Poisson con $\tilde{\lambda} = 0.181095315$, por lo tanto esta será la distribución que emplearemos para encontrar la distribución de las pérdidas agregadas conforme a los datos de las pólizas analizadas.

A continuación se realiza el mismo análisis para ajustar las distribuciones Binomial y Binomial Negativa, con el fin de comparar resultados en las estimaciones y corroborar que dichas distribuciones no describen el comportamiento dentro de la frecuencia de las reclamaciones.

Binomial

Para realizar este análisis se debe considerar, en primer lugar, que m y q son parámetros desconocidos, por lo tanto es necesario construir la verosimilitud para cada m igualando la media muestral con la teórica a fin de encontrar el valor de m bajo el cual se maximiza la verosimilitud. Entonces para igualar la media muestral:

$$\hat{\mu} = \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0} mq$$

Debido a que $p_0^M = (1 - q)^m$ es un polinomio de grado $m - 1$ se puede maximizar para $m \leq 3$. La posibilidad de que $m = 1$ fuera el máximo se presentaría si no existieran observaciones de más de una reclamación en la muestra, por lo tanto nos queda analizar el caso cuando $m = 2$ y $m = 3$.

Conocemos $p_0^M = 0.91377315$. Entonces para $m = 2$

$$\hat{\mu} = 0.0943287 = \frac{1 - 0.91377315}{1 - (1-q)^2} 2q = \frac{0.172453704q}{1 - (1-q)^2}$$

$$0.172453704q = [1 - (1-q)^2]0.0943287$$

$$0.172453704q = (2q - q^2)0.0943287$$

$$\hat{q} = 0.17177914$$

Las probabilidades para p_k^M utilizando $\dfrac{1 - p_0^M}{1 - p_0} p_k$ son:

$$p_0^M = 0.91377315$$

$$p_1^M = \frac{0.086226852(2q(1-q))}{1 - (1-q)^2}$$

$$p_2^M = \frac{0.086226852q^2}{1 - (1-q)^2}$$

p_3^M no es posible calcularla para valores de $m = 2$

Entonces nos queda que la máxima verosimilitud es para $m = 3$ y $\tilde{q} = \dfrac{\hat{\mu}}{m} = 0.031442901$

$a = 0.03246365 \quad b = 0.12985461$
$\mathbb{E}(N) = 0.08899581$

$Var(N) = 0.082785582$

p_k^T	p_k^M
$p_1^T = 0.96822766$	$p_1^M = 0.08348722$
$p_2^T = 0.03143221$	$p_2^M = 0.0027103$
$p_3^T = 0.00034013$	$p_3^M = 0.00002933$

Tabla 4.4

Diferencia esperanzas:0.0053329
Diferencia varianzas:0.0200063

k	$\frac{kp_k^M}{p_{k-1}^M}$
2	0.06492731
3	0.03246365

Tabla 4.5

Aquí encontramos que $\mathbb{E}(N)$ es mayor que la $Var(N)$. La pendiente de la función lineal coincide con el comportamiento de una distribución Binomial, sin embargo las diferencias de esperanzas y varianzas son mayores que las ajustadas mediante el modelo Poisson.

Binomial Negativa

$p_0^M = 0.91377315$ $\quad a = 0.08233339$ $\quad b = 0.83535521$

$\tilde{\beta} = 0.089720376$ $\quad \tilde{r} = 11.14574018$

$\mathbb{E}(N) = 0.139931404$

$Var(N) = 0.165705898$

p_k^T	p_k^M
$p_1^T = 0.57154904$	$p_1^M = 0.049282874$
$p_2^T = 0.7366927$	$p_2^M = 0.063522692$
$p_3^T = 0.26578237$	$p_3^M = 0.022917577$

Tabla 4.6

Diferencia esperanzas:-0.0456027
Diferencia varianzas:-0.0629140

k	$\frac{kp_k^M}{p_{k-1}^M}$
2	2.57788098
3	1.08233339

Tabla 4.7

Para el ajuste de la distribución Binomial Negativa $\mathbb{E}(N) < Var(N)$, las diferencias de esperanzas y varianzas son grandes y la pendiente no coincide con la que debiera tener este tipo de distribuciones.

Por los resultados anteriores se confirma que el análisis para ajustar la distribución discreta al número de reclamaciones recibidas por la aseguradora corresponde a una distribución Poisson de la clase (a,b,1) modificada en cero cuyos parámetros son:

$$p_0^M = 0.91377315 \quad \tilde{\lambda} = 0.18109515$$

En adelante esta información será utilizada. Por el momento procede realizar el análisis de los montos reclamados dentro de este seguro y se consideran los montos de reclamación mayores al deducible \$17,563.28 y por debajo de la suma asegurada \$250,904 conforme a lo que describe la variable de pago Y^P. Recordemos que si tuvieramos la distribución de montos conforme a la variable completa X, los datos deberían considerar una distribución empírica que debería ajustarse truncando los datos al valor del deducible d y obteniendo una distribución empírica conforme a lo siguiente:

$$F_X^*(x) = \begin{cases} 0 & x < d \\ \dfrac{F_X(x) - F_X(d)}{1 - F_X(d)} & x \geq d \end{cases}$$

$$f_X^*(x) = \begin{cases} 0 & x < d \\ \dfrac{f_X(x)}{1 - F_X(d)} & x \geq d \end{cases}$$

Sin embargo, los datos que se tienen dentro de la base del seguro de autos reflejan los montos censurados para el valor de la suma asegurada y truncados al deducible, por lo cual ya no se deben realizar estas modificaciones a los datos de severidad y se procede a trabajar directamente con la variable de pago. El histograma muestra la información directamente de los montos reclamados por la pólizas del seguro:

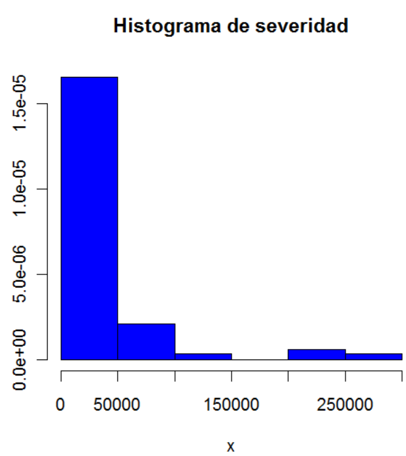

Fig. 4.1

El siguiente paso es realizar el ajuste de distribuciones continuas a los datos por medio de las siguientes pruebas de hipótesis:

- Kolmogorov-Smirov
- Anderson-Darling

Se presenta una breve descripción de cada prueba y los ajustes realizados para estas pruebas de implementan en R, de manera que sólo se exponen los resultados obtenidos.

En general para cada prueba se presentan las siguientes hipotesis:

$H_0 : F_X(x) = F^*(x)$
$H1 : F_X(x) \neq F^*(x)$

Donde $F^*(x)$ es la distribución que se espera ajuste a los datos.

Kolmogorov-Smirov

Sea d el punto donde se trunca la distribución de los montos reclamados por la izquierda y u el punto de censura por la derecha. Entonces la estadística de prueba en este caso es :

$$D_n = \max_{d \leq x \leq u} |F_n(x) - F^*(x)|$$

Se asume que el modelo de la función de distribución $F^*(x)$ es continuo en el rango considerado y si $d = 0$ simplemente no se trunca la función, pasando lo mismo para $u = \infty$.

Los valores críticos de uso común para esta prueba asociados al nivel de significancia α son:

α	0.10	0.05	0.01
D_n^α	$1.22/\sqrt{n}$	$1.36/\sqrt{n}$	$1.63/\sqrt{n}$

Tabla 4.8

Y la regla de decisión es Rechazar H_0 al nivel de significancia α si $D_n > D_n^\alpha$

Anderson-Darling

Esta prueba es similar a la anterior, pero se utiliza una métrica distinta para las diferencias entre las funciones de distribución. La estadística de prueba en este caso es :

$$A_n^2 = n \int_d^u \frac{[F_n(x) - F^*(x)]^2}{F^*(x)[1 - F^*(x)]} f^*(x)\, dx$$

Es un promedio ponderado de las diferencias de cuadrados entre la distribución empírica y el modelo de distribución propuesto. Esta prueba tiende a realizar mejores ajustes en las colas de las distribuciones. La integral anterior puede simplificarse a lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
A_n^2 &= -nF^*(u) + n\sum_{j=0}^{k}[1-F_n(y_j)]^2\{\ln[1-F^*(y_j)] - \ln[1-F^*(y_{j+1})]\} + \\
&\quad n\sum_{j=1}^{k}F_n(y_j)^2\{\ln[F^*(y_{j+1})] - \ln[F^*(y_j)]\}
\end{aligned}
$$

Donde los únicos puntos no censurados son $d = y_0 < y_1 < \cdots < y_k < y_{k+1} = u$. Los valores críticos para los siguientes niveles de significancia son:

α	0.10	0.05	0.01
A_n^α	1.933	2.492	3.857

Tabla 4.9

La regla de decisión es Rechazar H_0 al nivel de significancia α si $A_n^2 > A_n^\alpha$

Para realizar el ajuste de distribuciones se consideran los siguientes valores para conocer los valores iniciales de cada distribución:

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

A continuación se presenta un cuadro resumen con la información de las distribuciones que se pudieron ajustar en R a los montos de las reclamaciones reportadas, los datos muestran un total de 163 montos reclamados a lo largo del periodo de estudio con $m = 42,236.03$ y $t = 4,256,909,851$. Para las pruebas se considera un nivel de significancia $\alpha = 0.05$ y los valores críticos para las pruebas Kolmogorov-Smirnov (K-S) y Anderson-Darling (AD) son:

$$D_n^\alpha = 0.106523421 \quad A_n^2 = 2.492$$

Distribución	Valores iniciales	Prueba	Estadística de prueba	$p - value$
Gamma	$\hat{\alpha} = 9.713027e^{-1}$	$K - S$	$Dn = 0.2746$	$4.233e^{-11}$
	$\hat{\theta} = 5.85525e^4$	AD	$An = 25.0813$	$3.681e^{-6}$
Pareto	$\hat{\alpha} = 7.148070$	$K - S$	$Dn = 0.3754$	$2.2e^{-16}$
	$\hat{\theta} = 2.608954e^5$	AD	$An = 21.9377$	$3.681e^{-6}$
Lognormal	$\hat{\mu} = 10.352241$	$K - S$	$Dn = 0.2021$	$3.285e^{-6}$
	$\hat{\sigma} = 0.6381085$	AD	$An = 13.1396$	$3.681e^{-6}$

Tabla 4.10

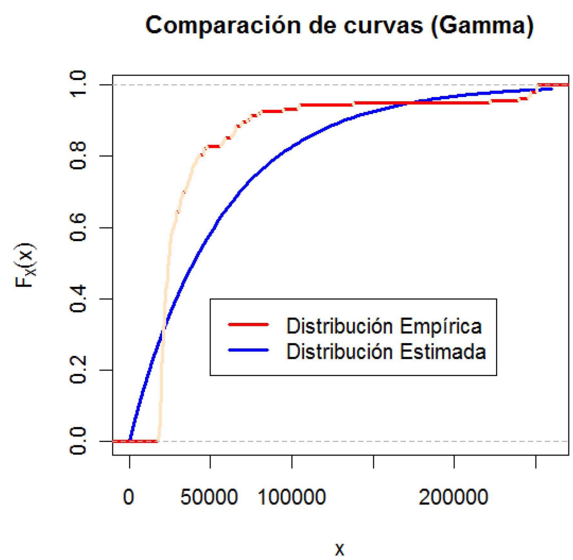
Comparación de curvas (Gamma)
Distribución Empírica
Distribución Estimada
$F_X(x)$
x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
50000
100000
200000

Fig. 4.2

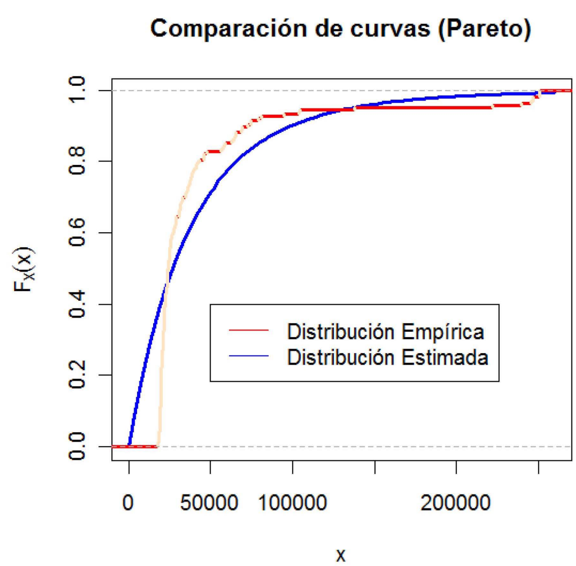
Comparación de curvas (Pareto)
Distribución Empírica
Distribución Estimada
$F_X(x)$
x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
50000
100000
200000

Fig. 4.3

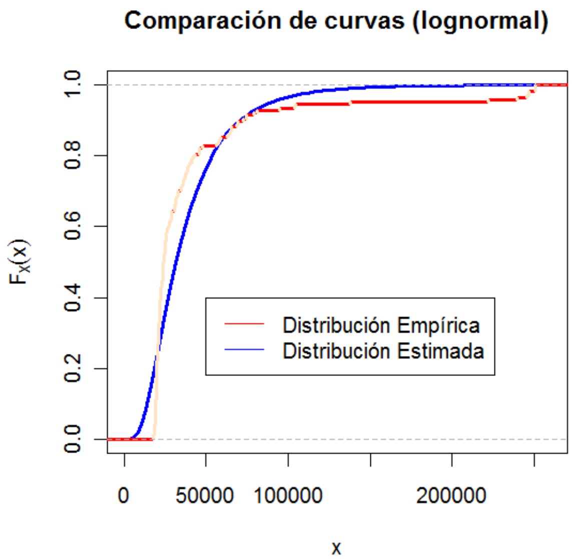

Fig. 4.4

Para cada una de las pruebas se rechaza la hipotesis de que los datos provengan de la distribución propuesta basándonos en los resultados de la tabla anterior. Y debido a que no se ajusta ninguna función de densidad continua conocida se utilizará la distribución empírica de los datos para analizar la distribución de las pérdidas agregadas.

Finalmente, se procede a implementar los modelos propuestos en este trabajo para encontrar la distribución de las pérdidas agregadas con base en los resultados obtenidos previamente. Para este punto se utiliza de nuevo R, implementando los modelos correspondientes que se ajustan a la información de los datos, sin embargo, los resultados obtenidos muestran una distribución claramente cargada a probabilidades cercanas a uno debido a diversas situaciones que se aclaran al final de esta sección. En seguida se presentan los modelos y sus respectivas gráficas de distribución resultantes, así como tablas que muestran algunos valores de la función de distribución de pérdidas agregadas. De cualquier forma dentro del código de R se pueden consultar los valores completos que toman cada una de las distribuciones.

Convoluciones

La siguiente gráfica muestra los valores que toma la distribución con base en el método de convoluciones, en la cual se observa una distribución que comienza con una probabilidad muy elevada, derivada de la alta concentración de pólizas que no realizaron reclamaciones.

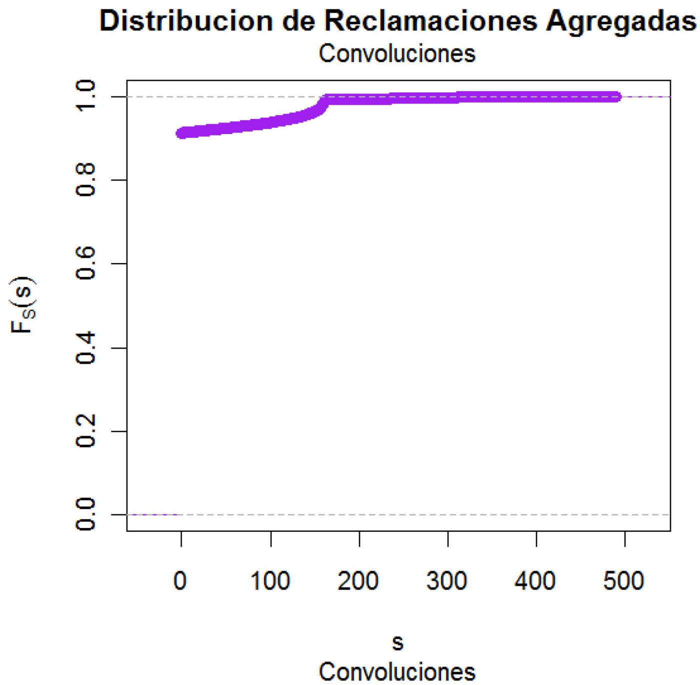

Fig. 4.5

La esperanza y la varianza que se reportan para esta distibución de S son:

$$\mathbb{E}(S) = 3,981.591 \quad Var(S) = 394,864,671$$

La siguiente tabla muestra los primeros valores de la función de distribución de S

s	$F_S(s)$
0	0.9137731
1	0.9139760
2	0.9141791
3	0.9143855
4	0.9145954
5	0.9148075

Tabla 4.11

Aproximación Normal

La función de distribución ajustada bajo esta aproximación se muestra mejor distribuida a lo largo de las probabilidades como se ve en el siguiente gráfico

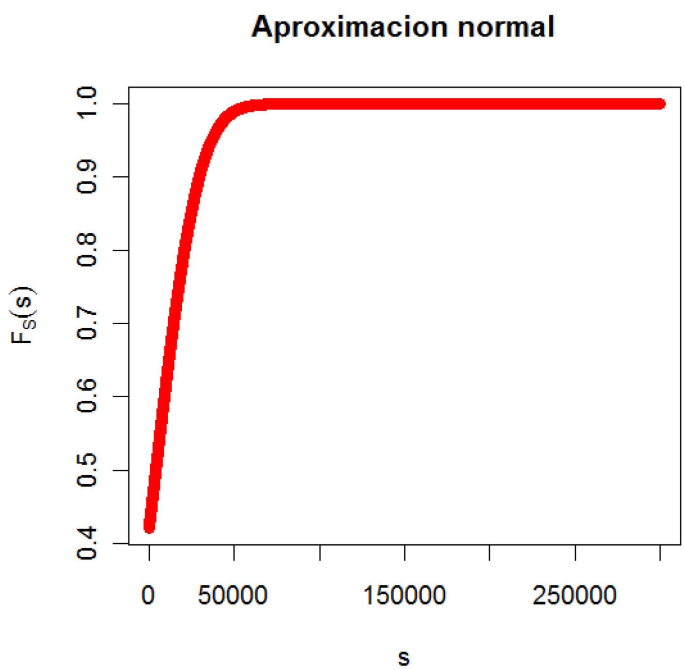

Fig. 4.6

Los valores de la distribución son

s	$F_S(s)$
0	0.4205956
1	0.4206153
2	0.4206350
3	0.4206547
4	0.4206744
5	0.4206940

Tabla 4.12

Aproximación lognormal

Este ajuste se realiza conforme al modelo desarrollado y los valores de la distribución se observan todavía mejor distribuidos que en la aproximación normal, esta gráfica muestra el comportamiento de los datos agregados y la tabla de los primeros valores también se agrega.

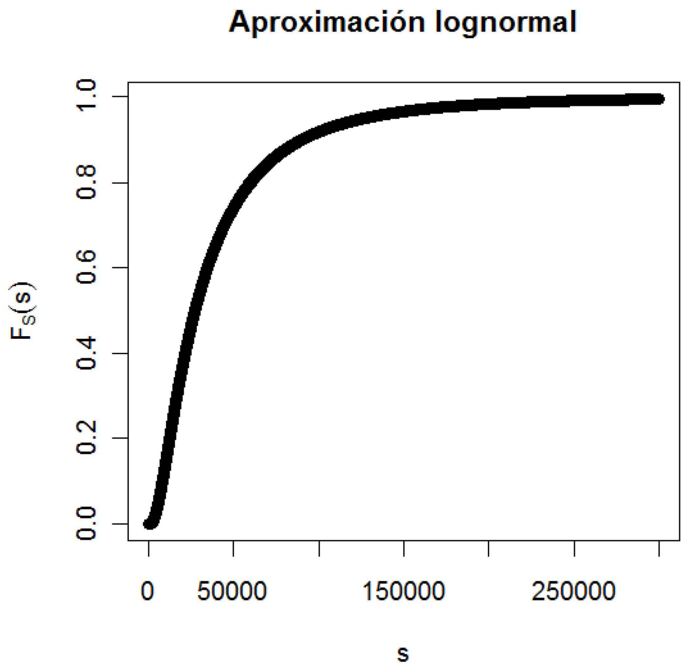

Fig. 4.7

s	$F_S(s)$
0	$0.000000e+00$
1	$3.163778e-28$
2	$8.834044e-25$
3	$7.107092e-23$
4	$1.426891e-21$
5	$1.369874e-20$

Tabla 4.13

Panjer

La implementación del modelo de Panjer arroja una distribución parecida a la que se calculó para el modelo de convoluciones, concentrando la distribuciones en probabilidades cercanas a uno.

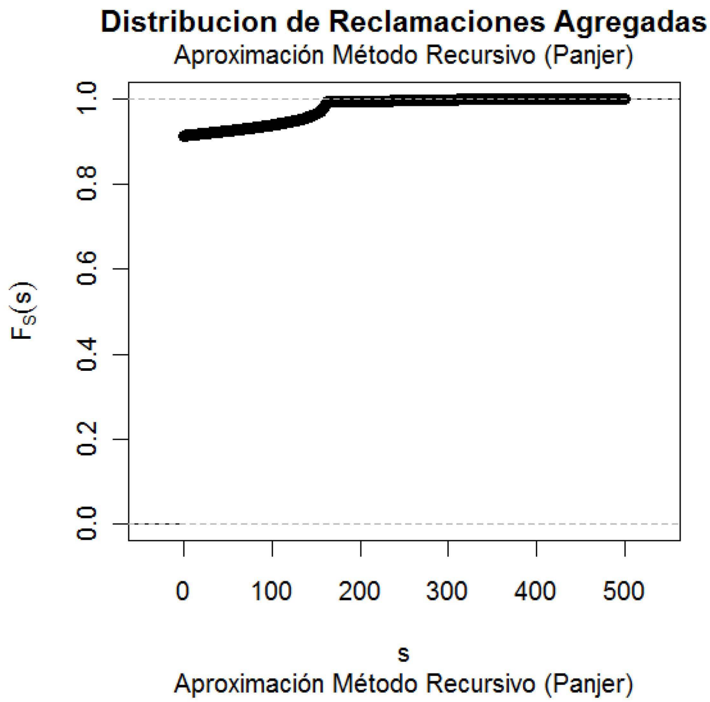

Fig. 4.8

s	$F_S(s)$
0	0.9137731
1	0.9139760
2	0.9141791
3	0.9143855
4	0.9145954
5	0.9148075

Tabla 4.14

Transformada Rápida de Fourier

Al aplicar este modelo se utilizó un "span" de 0.2 con $n = 2^7$ para discretizar la función empírica de los montos reclamados y con base en la f.g.p. de la distribución Poisson ajustada para la frecuencia de los datos, es decir:

$$P^M(z) = p_0^M + (1 - p_0^M)\frac{e^{\lambda z} - 1}{e^{\lambda} - 1}$$

Sin embargo los cálculos que realiza R arrojan un error numérico para este modelo al momento de discretizar la función, por lo tanto se emplea la distribución empírica para implementar la Transformada rápida de Fourier y arroja los siguientes datos:

s	$\varphi_{Y^P}(s)$	$\varphi_S(s)$	$f_S(s)$
0	1	1	1.170814
1	0.3488289	0.941743	0.0003022384
2	0.2319623	0.9320494	0.0003024854
3	0.1710779	0.9271136	0.0003069335
4	0.1250349	0.923413	0.0003113266
5	0.0901301	0.9206477	0.0003142159

Tabla 4.15

Notemos que el modelo de la Transformada Rápida de Fourier no funciona para los datos que se proporcionan en este seguro, debido a que la frecuencia de los datos concentra una alta probabilidad en asegurados que no realizaron ninguna reclamación durante el periodo de estudio, motivo por el cual la función de densidad muestra números sin sentido y gráficamente se puede revisar:

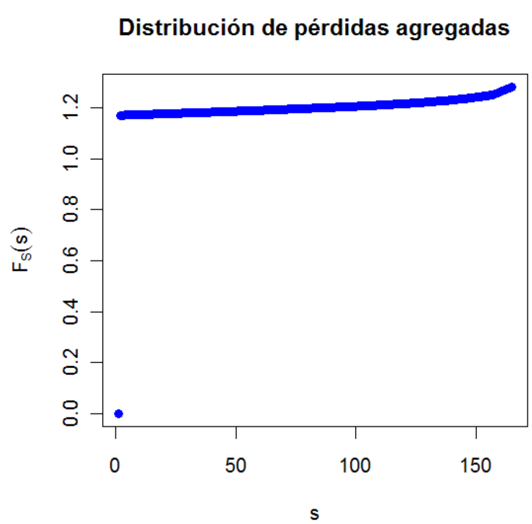

Fig. 4.9

Como podemos observar, dentro de los modelos empleados, las funciones de distribución para el modelo de convoluciones y el de Panjer coinciden, sin embargo, los resultados muestran una distribución considerablemenete sesgada. Por otro lado al utilizar la varianza y esperanza de S los ajustes por aproximaciones normal y lognormal distribuyen los datos de una forma más homogénea, mientras que la distribucion ajustada por la Transformada Rápida de Fourier tampoco funciona para los datos que se tienen.

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo del presente trabajo se han estudiado las bases que se requieren para medir el riesgo de un portafolio de pólizas con ciertas características. Este desarrollo implicó la aplicación de conocimientos de probabilidad y estadística, así como de nuevos temas bajo los cuales se pretendería que en la actualidad también hicieran análisis las compañías aseguradoras para medir sus pérdidas potenciales, y con ello fijar parámetros dentro de sus pólizas aseguradas.

Es claro que los modelos y los métodos utilizados son funcionales con algunas consideraciones, por esta misma razón es que los ejemplos que se usaron para la explicación de cada uno no tuvo ningún problema respecto a los resultados que arrojaban. Sin embargo, al usar una base de datos reales como la que se proporcionó a este trabajo, surgieron diversas situaciones que convergen en un análisis de información sesgada y por lo cual los resultados en los métodos implementados tuvieron esta misma forma. Entre los inconvenientes que se observan se tiene que la información de los montos de reclamación para este tipo de seguro se reportaron con problemas, al dejar cifras incoherentes e inconsistentes, que se eliminaron de la muestra; por otra parte, también se observa un número elevado de pólizas que no incurrieron en reclamaciones durante el periodo de estudio y finalmente a través de lo anterior se desconoce si la información incorporada en esta base es consistente y completa, con la información de pólizas y reclamaciones de seguros que realmente absorbió la aseguradora. Debido a este panorama es que los resultados obtenidos para el estudio del seguro de automóviles se muestran sesgados

Por lo anterior, es necesario que en caso que las compañías aseguradoras pretendan realizar un análisis de pérdidas agregadas con base en los conceptos que maneja este trabajo, será importante que la información recopilada y almacenada por parte de las empresas refleje la situación de sus portafolios de pólizas aseguradas y esté completa.

Finalmente, el objetivo de este trabajo se concretó, aunque se considera que todavía faltan muchas tareas por realizar para implementar este tipo de estudios a un nivel más allá del académico, por eso es relevante al menos en este nivel el conocimiento y desarrollo de aplicaciones actuariales permitan al estudiante obtener una visión más amplia de los temas actuales que pueden explotarse y eventualmente requerirán emplearse en el sector asegurador.

Apéndice A

Probabilidad y Estadística

Función de densidad de probabilidades (f.d.p.) para variables aleatorias discretas

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X una v.a. definida sobre éste. Asociada a toda v.a. discreta existe una f.d.p. $f_X(x)$

$$f_X(x) : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \subseteq \mathbb{R}^+$$

definida como $f_X(x) := \mathbb{P}[\{w \in \Omega \mid X(w) = x\}] = \mathbb{P}[X = x] \; \forall x \in \mathbb{R}$

Propiedades

1. $f_X(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\sum\limits_{\forall x \in S} f_X(x) = 1$ donde S es un conjunto a lo más numerable y es llamado soporte de la función.

Función de distribución $F_X(x)$ para variables aleatorias discretas

$F_X(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ es una función de distribución definida como:
$F_X(x) := \mathbb{P}\left[X^{-1}(-\infty, x]\right] = \mathbb{P}[\{w \in \Omega \mid X(w) \leq x\}] \in \mathcal{F}$ entonces

$$F_X(x) := \mathbb{P}[X \leq x] \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

en tal caso

$$F_X(x) = \sum_{t \leq x} f_X(t)\,; \;\; t \in S \text{ donde } S \text{ es el soporte de la función}$$

Propiedades de $F_X(x)$ para cualquier tipo de variable aleatoria X

1. $F_X(x)$ es monótona no decreciente
   Esto es, si $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$
2. $F_X(x)$ es continua por la derecha
   $\lim_{h\to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$
3. $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$
   $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

Función de densidad de probabilidades para variables aleatorias continuas

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Sea $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. X es v.a. continua si y sólo si :
$X^{-1}(-\infty, x] = \{w \in \Omega \mid X(w) \leq x\} \in \mathcal{F}$ y además $\mathbb{P}[X = x] = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ a este tipo de variables aleatorias se le conoce como absolutamente continua.
Asociada a toda v.a. continua se define una función de densidad de probabilidades que cumple:

$$\begin{aligned} f_X(\cdot) &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ en este caso continuo} \\ f_X(x) &\neq \mathbb{P}(X = x) \end{aligned}$$

Propiedades

1. $f_X(x) \geq 0 \ \forall x \in S \subseteq \mathbb{R}$ donde S es un conjunto no numerable
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$ o bien $\displaystyle\int_S f_X(x) = 1$

Función de distribución $F_X(x)$ para variables aleatorias continuas

$F_X(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ definida como $F_X(x) := \mathbb{P}[X \leq x]$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

- Para calcular una probabilidad sobre $A \subseteq \mathbb{R}$; $\mathbb{P}[X \in A] = \int_{A \cap S} f_X(x)\,dx$; S soporte de la función

  y cuando la v.a. es mixta, entonces supongamos que el soporte de la función es $S = S_D \cup S_C$ luego

  $\mathbb{P}[X \in A] = \sum_{x \in A \cap S_D} f_X(x) + \int_{x \in A \cap S_C} f_X(x)\,dx$

Probabilidad condicional a un evento dado A

Sea $f_X(x)$ la f.d.p. de una v.a. X y sea A un evento dado tal que $\mathbb{P}(X \in A) > 0$. Luego se define la f.d.p. condicional al evento A como:

$$f_X \mid_A (x) = \frac{f_X(x)_{(x)_A}}{\mathbb{P}(X \in A)}$$

Función de supervivencia $S_X(x)$ para variables aleatorias

$$S_X(x) = \mathbb{P}(X > x) = \begin{cases} \sum_{t > x} f_X(t) & \text{caso discreto} \\ \int_x^{\infty} f_X(t)\,dt & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Propiedades

1. $S_X(x)$ es monótona no creciente

   Esto es, si $x_1 \geq x_2 \Longrightarrow S_X(x_1) \geq S_X(x_2)$

2. $F_X(x)$ es continua por la derecha

   $\lim_{h \to 0^+} S_X(x+h) = S_X(x)$

3. $\lim_{x \to \infty} S_X(x) = 0$

   $\lim_{x \to -\infty} S_X(x) = 1$

Función de riesgo (hazard)

La función de riesgo (hazard) se define como la probabilidad de falla durante un intervalo de tiempo muy pequeño. Esta función es conocida también como la *tasa instantanea de mortalidad, fuerza de mortalidad* (usando como notación $\mu(x)$) o *tasa de mortalidad condicional,* y en el estudio de análisis de supervivencia es una medida que determina el riesgo de falla por unidad de tiempo durante el proceso de envejecimiento. Es decir mide la propensión de falla o muerte de un individuo como una función su edad (x) en el siguiente instante de tiempo, expresada como un índice de mortalidad por año. Esta función guarda la siguiente relación con la f.d.p. y la función de supervivencia:

$$h_X(x) = \frac{f_X(x)}{S_X(x)}$$

En donde hay probabilidades de masa discreta la función hazard no está definida

- *La función acumulada de riesgo es:*

$$H_X(x) = \int_0^x h_X(t)\,dt$$

- *Algunas relaciones entre las funciones anteriores*
  - $S_X(x) = 1 - F_X(x)$
  - $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = -\frac{d}{dx}S_X(x)$
  - $S_X(x) = \exp\left[-\int_0^x h_X(t)\,dt\right] = \exp\left[-H_X(x)\right]$
  - $h_X(x) = \dfrac{f_X(x)}{S_X(x)} = \dfrac{f_X(x)}{1-F_X(x)} = -\dfrac{S_X'(x)}{S_X(x)} = -\dfrac{d}{dx}\ln S_X(x)$

Características numéricas de variables aleatorias

Esperanza

Es el promedio de los valores que toma una v.a. X ponderados por su probabilidad. Sea X una v.a. el valor esperado de X se define como el valor real $\mathbb{E}(X)$ o μ, tal que:

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\forall x \in S} x\mathbb{P}[X = x] & \text{caso discreto;} \\ \\ \displaystyle\int_S x\ f_X(x) & \text{caso continuo} \end{cases} \qquad S \text{ soporte de la función}$$

Siempre que $\displaystyle\sum_{\forall x \in S} \mid x \mid f_X(x) < \infty$ y $\displaystyle\int_S \mid x \mid f_X(x) < \infty$.

Propiedades de $\mathbb{E}(X)$

1. $\forall c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(c) = c$

2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ y $g_1(X), g_2(X)$ funciones de X

$$\mathbb{E}[ag_1(X) \pm bg_2(X)] = a\mathbb{E}[g_1(X)] \pm b\mathbb{E}[g_2(X)]$$

3. Sea X una v.a. no negativa, entonces

$$\mathbb{E}(X) \geq 0$$

4. Propiedad de monotonia. Si $g_1(X) \leq g_2(X)$ $\forall x \in \mathbb{R}$,entonces

$$\mathbb{E}[g_1(X)] \leq \mathbb{E}[g_2(X)]$$

5. Para cualquier v.a. se cumple

$$\mathbb{E}[\mid X \mid] \geq \mid \mathbb{E}(X) \mid$$

6. Si X es una v.a. con media finita y simétrica con respecto a $a \in \mathbb{R}$,entonces

$$\mathbb{E}[X] = a$$

7. Si para algún $i \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}\left(X^i\right)$ existe, entonces $\mathbb{E}\left(X^j\right)$ existe $\forall j < i$

8. Si X es una v.a. continua con función de distribución $F_X(x)$ y soporte en:

   (a) $(-\infty, \infty)$, entonces

   $$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\,dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x)\,dx$$

   (b) $[0, \infty)$ entonces

   $$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (1 - F_X(x)) = \int_0^\infty S_X(x)\,dx$$

   (c) $[a, \infty)$ entonces

   $$\mathbb{E}[X] = a + \int_a^\infty (1 - F_X(x))\,dx$$

   $a > 0$.

   (d) $[a, b]$ entonces

   $$\mathbb{E}[X] = a + \int_a^b (1 - F_X(x))\,dx$$

9. La esperanza de X dado un evento A es

$$\mathbb{E}\left[X\right]_{\mid A} = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\sum_{x \in A \cap S} x f_{X(x)}}{\mathbb{P}\left[X \in A\right]} & \text{caso discreto} \\ \\ \dfrac{\displaystyle\int_{A \cap S} x f_X\left(x\right)}{\mathbb{P}\left[X \in A\right]} & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Ley del estadístico inconsciente

Sea X v.a. con f.d.p. $f_X\left(x\right)$. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función de la v.a. X, entonces:

$$\mathbb{E}\left[g\left(X\right)\right] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\forall x \in S} g\left(x\right) f_X\left(x\right) & \text{caso discreto} \\ \displaystyle\int_S g\left(x\right) f_X\left(x\right) dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Siempre que $\displaystyle\int_S \mid x \mid f_X\left(x\right) < \infty$ (o la serie)

R-ésimo momento de una v.a. alrededor de $c \in \mathbb{R}$

Sea X una v.a. con f.d.p. $f_X\left(x\right)$ se define el r-ésimo momento con $r \in \mathbb{Z}^+$ como:

$$\mathbb{E}\left[\left(X - c\right)^r\right] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\forall x \in S} \left(x - c\right)^r f_X\left(x\right) & \text{caso discreto} \\ \displaystyle\int_{\mathbb{S}} \left(x - c\right)^r f_X\left(x\right) dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Cuando $c = 0$. se define el $r-$*ésimo momento central o alrededor del cero* como:

$$\mathbb{E}\left[\left(X\right)^r\right] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\forall x \in S} x^r f_X\left(x\right) & \text{caso discreto} \\ \displaystyle\int_S x^r f_X\left(x\right) dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

R-ésimo momento central o alrededor de la media

Cuando $c = \mathbb{E}\left(X\right) = \mu$, entonces es $\mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}\left(X\right)\right)^r\right]$

Varianza

Sea X v.a. con segundo momento finito ($\mathbb{E}\left(X^2\right) < \infty$). se define la varianza de X como el valor real

$$Var\left(X\right) := \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}\left(X\right)\right)^2\right]$$

Propiedades de $Var\left(X\right)$:

1. $Var\left(X\right) \geq 0$ $\forall$ v.a. X y $Var\left(X\right) = 0 \Longleftrightarrow X \equiv c$
2. $Var\left(X\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(X\right)^2$
3. $\forall c \in \mathbb{R}$, $Var\left(X + c\right) = Var\left(X\right)$
4. $\forall c \in \mathbb{R}$, $Var\left(cX\right) = c^2 Var\left(X\right)$

Desviación estándar

Se define la desviación estándar de una v.a. X como la raíz positiva de la varianza; es decir:

$$\sigma = \sqrt{Var\left(X\right)}$$

Coeficiente de Variación

Sea X una v.a., se define el coeficiente de variación como

$$CV = \frac{\sigma}{\mu}$$

Coeficiente de Sesgo

$$\tau = \frac{\mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}\left(X\right)\right)^3\right]}{\sigma^3}$$

Si $\tau > 0$ asimétrico a la derecha
Si $\tau < 0$ asimétrico a la izquierda
Si $\tau = 0$ simétrico

Coeficiente de Kurtosis

$$\kappa = \frac{\mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}\left(X\right)\right)^4\right]}{\sigma^4}$$

Si $\kappa > 3$, leptocurtica (apuntalamiento mayor al de una normal).
Si $\kappa < 3$, platicurtica (la gráfica tiene una apuntalamiento menor al de una curva gaussiana estandarizada).
Si $\kappa \approx 3$, mesocurtica (apuntalamiento similar al de una normal).

Función generadora de momentos

Sea X v.a. con f.d.p. $f_X(x)$. Si $\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx < \infty$ (o la serie) para $-h < t < h$, $h > 0$. Entonces se define la función generadora de momentos (f.g.m.) denotada $M_X(t)$, como la función real definida:

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \begin{cases} \sum\limits_{\forall x \in S} e^{tx} f_X(x) & \text{discreta} \\ \int_S e^{tx} f_X(x)\,dx & \text{continua} \end{cases}$$

Propiedades de $\mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$:

1. $M_X(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k \mathbb{E}\left(X^k\right)}{k!}$
2. $M_X(0) = 1$
3. $\dfrac{d}{dt} M_X(t)\,|_{t\to 0} = \mathbb{E}(X)$
4. $\dfrac{d^2}{dt^2} M_X(t)\,|_{t\to 0} = \mathbb{E}\left(X^2\right)$
5. En general $\dfrac{d^r}{dt^r} M_X(t)\,|_{t\to 0} = \mathbb{E}(X^r)$
6. La f.g.m. tiene relación biunivoca con la f.d.p., es decir
   $f_X(x) \neq f_Y(y) \Longrightarrow M_X(t) \neq M_Y(t)$
   Nota: Definimos a la función $\Phi(t) := \ln(M_X(t))$
7. $\dfrac{d}{dt} \Phi(t)\,|_{t\to 0} = \mathbb{E}(X)$
8. $\dfrac{d^2}{dt^2} \Phi(t)\,|_{t\to 0} = Var(X)$

Función Característica

Sea $i = \sqrt{-1}$
Se define la función característica de la v.a. X como

$$\varphi_X(x) := \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \mathbb{E}\left[\cos(tX)\right] + i\mathbb{E}\left[sen(tX)\right]$$

Percentil

Sea $0 < p < 1$. Se define al percentil del $100p\%$ como aquel valor real tal que:

$$\mathbb{P}\left[X \leq \pi_p\right] = p = 1 - \mathbb{P}\left[X > \pi_p\right]$$

Mediana

Es aquel número real $\pi_{0.5}$, talque $\mathbb{P}[X \leq \pi_{0.5}] = \mathbb{P}[X > \pi_{0.5}] = \dfrac{1}{2}$

Moda

La moda es aquel valor que maximiza la función de densidad de probabilidades.

Nota: En caso discreto se busca x_j tal que $f_X(x_j) \leq f_X(x_{j+1})$ o bien $\dfrac{f_X(x_j)}{f_X(x_{j+1})} \leq 1$

Esperanza condicional

Sea $g(x)$ cualquier fución de la v.a. X. Se define la esperanza de $g(X)$ dado $Y = y$ como:

$$\mathbb{E}[g(X)|Y=y] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\forall x \in S_X} g(x)\,\mathbb{P}[X = x \mid Y = y] & \text{caso discreto} \\ \displaystyle\int_{S_X} g(x)\, f_{X \mid Y=y}(x \mid y)\, dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

S_X soporte de X

Teorema 45 *Sean X y Y v.a.´s con f.d.p. conjunta $f_{XY}(x,y)$. Entonces:*

1. $\mathbb{E}[c \mid Y = y] = c \quad \forall c \in \mathbb{R}$
2. $\mathbb{E}[ag_1(X) + bg_2(X) \mid Y = y] = a\mathbb{E}[g_1(X) \mid Y = y] + b\mathbb{E}[g_2(X)] \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
3. $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$ es una constante
4. $\mathbb{E}[X \mid Y]$ es una función que depende de Y y por lo tanto es variable aleatoria
5. $\mathbb{E}[g(X)h(Y) \mid Y = y] = h(Y)\,\mathbb{E}[g(X) \mid Y = y]$

Teorema 46 *Sean X y Y v.a.´s con f.d.p. conjunta $f_{XY}(x,y)$ tales que $\mathbb{E}[g(X) < \infty]$. Entonces*

1. $\mathbb{E}[g(X) \mid Y]$ es una v.a. que depende de Y
2. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[g(X) \mid Y]] = \mathbb{E}[g(X)]$ *Esperanza iterada*

Varianza condicional

Sean X y Y v.a.´s. Se define la varianza condicional de X dado Y como:

$$Var(X \mid Y) := \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X \mid Y))^2 \mid Y\right]$$

Propiedades

1. $Var\left(aX+b \mid Y\right) = a^2 Var(X \mid Y)$
2. $Var(X \mid Y) = \mathbb{E}\left(X^2 \mid Y\right) - \mathbb{E}\left(X \mid Y\right)^2$

Teorema 47 (Varianza iterada) *Sean X y Y cualesquiera dos variables aleatorias con $Var(X) < \infty$. Entonces*

$$Var(X) = \mathbb{E}\left[Var(X \mid Y)\right] + Var\left[\mathbb{E}\left(X \mid Y\right)\right]$$

Esperanza de g(X,Y) dado un evento B

Sea $\mathbb{X} = (X, Y)$ un vector aleatorio y sea $B \in F$ un evento tal que $\mathbb{P}(B) > 0$. Se define el valor esperado de la función $g(X, Y)$ dado el evento B como:

$$\mathbb{E}\left[g\left(X,Y\right) \ \mid \ (x,y)_B\right] = \frac{\mathbb{E}\left[g\left(X,Y\right)_{(x,y)_B}\right]}{\mathbb{P}\left[(X,Y) \in B\right]}$$

Función Gamma $\Gamma\left(\alpha\right)$

$$\Gamma\left(\alpha\right) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

Propiedades

- $\Gamma\left(\alpha+1\right) = \alpha\Gamma\left(\alpha\right)$
- Si $\alpha \in \mathbb{Z}^+ \Longrightarrow \Gamma\left(\alpha+1\right) = \alpha!$

  Nota: $\Gamma\left(1\right) = \int_0^\infty t^0 e^{-t} dt = 1$
- $\Gamma\left(1/2\right) = \sqrt{\pi}$

Función Beta(a, b)

$$\beta\left(a,b;x\right) := \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^x t^{a-1}\left(1-t\right)^{b-1} dt; \ a > 0, \ b > 0, \ 0 < x < 1$$

o bien

$$\beta\left(a,b\right) := \int_0^1 t^{a-1}\left(1-t\right)^{b-1} dt$$

Algunas distribuciones continuas

A continuación se muestran algunas de las distribuciones continuas con sus características y sus parámetros estimados a partir de los siguientes valores iniciales, estos servirán para poder realizar posteriormente las pruebas de hipotesis que se emplearán para ajustar las distribuciones.

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$p = 0.25 \qquad q = 0.75$$

Exponencial $(1/\theta)$

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta};\ 0 < x < \infty$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$$

$$\mathbb{E}\left(X^k\right) = \begin{cases} \theta^k \Gamma(k+1) & k > -1 \\ \theta^k k! & \text{si } k \text{ es entero positivo} \end{cases}$$

$$Var(X) = \theta^2$$

$$VaR_p(X) = -\theta \ln(1-p)$$

$$\mathbb{E}[X \wedge x] = \theta\left(1 - e^{-x/\theta}\right)$$

$$\mathbb{E}\left[(X \wedge x)^k\right] = \begin{cases} \theta^k \Gamma(k+1)\,\Gamma(k+1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta} & k > -1 \\ \theta^k k!\,\Gamma(k+1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta} & \text{si } k > -1 \text{ es entero} \end{cases}$$

$$M_X(t) = (1-\theta t)^{-1};\ t < \frac{1}{\theta}$$

$$Moda = 0; Me = \theta \ln(2)$$

$$\hat{\theta} = m$$

Gamma (α, θ)

$$f_X(x) = \frac{(x/\theta)^{\alpha} e^{-\frac{x}{\theta}}}{x\Gamma(\alpha)};\ 0 < x < \infty$$

$$F_X(x) = \Gamma\left(\alpha; \tfrac{x}{\theta}\right)$$

Si $X \sim Gamma(\alpha, \theta); \alpha \in Z^{+}$

$$F_X(x) = 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^k e^{-\frac{x}{\theta}}}{k!}$$

$$\mathbb{E}\left(X^k\right) = \begin{cases} \dfrac{\theta^k \Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} & k > -\alpha \\ \theta^k (\alpha + k - 1) \cdots \alpha & \text{si } k \text{ es entero positivo} \end{cases}$$

$$Var(X) = \theta^2 \alpha$$

$$\mathbb{E}\left[(X \wedge x)^k\right] = \begin{cases} \begin{matrix} \frac{\theta^k \Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \Gamma\left(\alpha + k; \frac{x}{\theta}\right) \\ +x^k \left[1 - \Gamma\left(\alpha; \frac{x}{\theta}\right)\right] \end{matrix} & k > -\alpha \\ \begin{matrix} \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+k-1) \theta^k \Gamma\left(\alpha + k; \frac{x}{\theta}\right) \\ +x^k \left[1 - \Gamma\left(\alpha; \frac{x}{\theta}\right)\right] \end{matrix} & \text{si } k \text{ es entero positivo} \end{cases}$$

$$M_X(t) = (1 - \theta t)^{-\alpha}; t < \tfrac{1}{\theta}$$

$$Moda = \begin{cases} \theta(\alpha - 1) & \alpha > 1 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{m^2}{t - m^2}; \hat{\theta} = \frac{t - m^2}{m}$$

Beta (a,b)

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,;\ 0<x<1$$

$$F_X(x) = \beta(a,b;x)$$

$$\mathbb{E}\left(X^k\right) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+b)\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+k)} & k>-a \\ \\ \dfrac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+k-1)} & \text{si } k \text{ es entero positivo} \end{cases}$$

$$Var(X) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$$

$$\mathbb{E}\left[(X\wedge x)^k\right] = \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+k-1)}\beta(a+k,b;x) + x^k\left[1-\beta(a,b;x)\right]$$

$$Moda = \begin{cases} \frac{a-1}{a+b-2} & a>1; b>1 \\ 1 & a>1; b<1 \\ 0 & a<1; b>1 \\ 0\ y\ 1 & a<1; b<1 \end{cases}$$

$$\hat{a} = \frac{m^2-mt}{t-m^2};\ \hat{b} = \frac{(m-t)(1-m)}{t-m^2}$$

Pareto (α,θ)

$$f_X(x) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}};\ 0 < x < \infty$$

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha$$

$$\mathbb{E}\left(X^k\right) = \begin{cases} \dfrac{\theta^k\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(a)} & -1 < k < \alpha \\ \dfrac{\theta^k k!}{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k)} & \text{si } k \text{ es entero positivo} \end{cases}$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\theta^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$$

$$VaR_p(X) = \theta\left[(1-p)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right]$$

$$\mathbb{E}[X \wedge x] = \begin{cases} \dfrac{\theta}{\alpha-1}\left[1 - \left(\dfrac{\theta}{x+\theta}\right)^{\alpha-1}\right] & \alpha \neq 1 \\ -\theta\ln\left(\dfrac{\theta}{x+\theta}\right) & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\left[(X \wedge x)^k\right] = \frac{\theta^k\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}\beta\left[k+1, \alpha-k; x/x+\theta\right] + x^k\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha;\ \text{para toda } k$$

$$Moda = 0$$

$$\hat{\alpha} = 2\frac{t-m^2}{t-2m^2};\ \hat{\theta} = \frac{mt}{t-2m^2}$$

Pareto trasladada (α, θ)

$$f_X(x) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x)^{\alpha+1}};\ \theta < x < \infty$$

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^\alpha$$

$$\mathbb{E}\left(X^k\right) = \frac{\alpha\theta^k}{\alpha - k};\ k < \alpha$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\theta^2}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2}$$

$$\mathbb{E}\left[X \wedge x\right]^k = \frac{\alpha\theta^k}{\alpha - k} - \frac{k\theta^\alpha}{(\alpha - k)\, x^{\alpha - k}}$$

$$Moda = \theta$$

$$\hat{\alpha} = \frac{m}{m - \theta}$$

Pareto inversa (τ, θ)

$$f_X(x) = \frac{\tau\theta x^{\tau-1}}{(x+\theta)^{\tau+1}}$$

$$F_X(x) = \left(\frac{x}{x+\theta}\right)^{\tau}$$

$$\mathbb{E}\left(X^k\right) = \begin{cases} \dfrac{\theta^k \Gamma(\tau+k)\Gamma(1-k)}{\Gamma(\tau)} & -\tau < k < 1 \\ \\ \dfrac{\theta^k (-k)!}{(\tau-1)\cdots(\tau+k)} & \text{si } k \text{ entero negativo} \end{cases}$$

$$VaR_p(X) = \theta \left[p^{-\frac{1}{\tau}} - 1 \right]^{-1}$$

$$\mathbb{E}\left[(X \wedge x)^k\right] = \theta^k \tau \int_0^{x/(x+\theta)} y^{\tau+k-1} (1-y)^{-k} \, dy$$
$$+ x^k \left[1 - \left(\tfrac{x}{x+\theta}\right)^{\tau}\right]; k > -\tau$$

$$Moda = \begin{cases} \theta \frac{\tau-1}{2} & \tau > 1 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases}$$

Weibull (θ, τ)

$$f_X(x) = \frac{\tau (x/\theta)^{\tau} e^{-(x/\theta)^{\tau}}}{x};\ 0 \leq x < \infty$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-(x/\theta)^{\tau}}$$

$$\mathbb{E}\left(X^k\right) = \theta^k \Gamma\left(1 + \tfrac{k}{\tau}\right); k > -\tau$$

$$VaR_p(X) = \theta\left[-\ln(1-p)\right]^{1/\tau}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(X \wedge x)^k\right] = {} & \theta^k \Gamma\left(1 + \tfrac{k}{\tau}\right) \Gamma\left(1 + \tfrac{k}{\tau}; \left(\tfrac{x}{\theta}\right)^{\tau}\right) \\ & + x^k e^{-(x/\theta)^{\tau}}; k > -\tau\end{aligned}$$

$$Moda = \begin{cases} \theta\left(\dfrac{\tau - 1}{\tau}\right)^{1/\tau} & \tau > 1 \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

$$\hat{\theta} = \exp\left(\frac{g\ln(p) - \ln(q)}{g - 1}\right); g = \frac{\ln(\ln(4))}{\ln\left(\ln\left(\frac{4}{3}\right)\right)}$$

$$\hat{\tau} = \frac{\ln(\ln(4))}{\ln(q) - \ln\left(\hat{\theta}\right)}$$

Lognormal (μ, σ^2)

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)};\ 0 < x < \infty$$

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{E}\left(X^k\right) = \exp\left(k\mu + \tfrac{1}{2}k^2\sigma^2\right)$$

$$Var(X) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

$$\mathbb{E}\left[(X \wedge x)^k\right] = \exp\left(k\mu + \tfrac{1}{2}k^2\sigma^2\right) + \Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu-k\sigma^2}{\sigma}\right)$$
$$+ x^k \left[1 - F_X(x)\right]$$

$$Moda = \exp\left(\mu - \sigma^2\right)$$

$$\hat{\mu} = \ln(m) - \tfrac{1}{2}\hat{\sigma}^2;\ \hat{\sigma} = \sqrt{\ln(t) - 2\ln(m)}$$

Gumbel (θ, μ)

$f_X(x) = \frac{1}{\theta} e^{-y} \exp\left[-\exp(-y)\right]; y = \frac{x-\mu}{\theta}; -\infty < x < \infty$

$F_X(x) = \exp\left[-\exp(-y)\right]$

$\mathbb{E}(X) = \mu + 0.57721566490153\theta$

$Var(X) = \frac{\pi^2\theta^2}{6}$

$\mathbf{VaR}_p(X) = \mu + \theta$

$Moda = \exp\left(\mu - \sigma^2\right)$

$\hat{\mu} = \ln(m) - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2;\ \hat{\sigma} = \sqrt{\ln(t) - 2\ln(m)}$

Transformaciones de variables aleatorias

Teorema 48 *Sea X v.a. continua con f.d.p. $f_X(x)$ y función de distribución $F_X(x)$. Sea $Y = g(X)$ una función uno a uno. Luego Y será la nueva v.a. cuya función de densidad de probabilidades es*

$$f_Y(y) = \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| f_X\left(g^{-1}(y)\right)$$

Si la variable aleatoria es discreta, y $Y = g(X)$ una función uno a uno, entonces

$$f_Y(y) = \mathbb{P}[Y = y] = f_X\left(g^{-1}(y)\right)$$

Teorema 49 *Sean X y Y v.a.´s continuas con función de densidad de probabilidad conjunta $f_{XY}(x, y)$. Sea*

$T = \begin{cases} U = g_1(X, Y) \\ V = g_2(X, Y) \end{cases}$ una transformación uno a uno del vector $\mathbb{X} = (X, Y)$ con inversa

$$T^{-1} = \begin{cases} X = g^{-1}(U,V) \\ \\ Y = g_2^{-1}(U,V) \end{cases} \quad \text{cuyo Jacobiano sea} \neq 0$$

Luego la f.d.p conjunta de U y V será:

$$f_{UV}(u,v) = |J_{T^{-1}}| \ f_{XY}\left(g_1^{-1}(u,v), g_2^{-1}(u,v)\right)$$

donde

$$J_{T^{-1}} = \begin{vmatrix} \frac{d}{du} g_1^{-1}(u,v) & \frac{d}{dv} g_1^{-1}(u,v) \\ \\ \frac{d}{du} g_2^{-1}(u,v) & \frac{d}{dv} g_2^{-1}(u,v) \end{vmatrix}$$

Covarianza

Se define la covarianza entre dos variables aleatorias X, Y como el número real

$$Cov(X,Y) := \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X)) - (Y - \mathbb{E}(Y))\right]$$

Si $Cov(X,Y) > 0$ significa que en caso de que X crezca de igual forma pasará esto con Y

Propiedades

1. $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
2. $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
3. $Cov(X,X) = Var(X)$
4. $Cov(aX+b, cY+d) = acCov(X,Y)$
5. $Cov(aX+bY+c, dW+eZ+f) = adCov(X,W) + aeCov(X,Z) + bdCov(Y,W) + beCov(Y,Z)$
6. Si X yY son v.a.´s independientes, entonces $Cov(X,Y) = 0$
7. $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2Cov(X,Y)$

Coeficiente de correlación

El coeficiente de correlación entre dos v.a.´s X y Y con segundos momentos finitos, se define como:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

- $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$, ie $|\rho_{XY}| \leq 1$ dándose la igualdad si y solo si $\exists\ a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Tales que $\mathbb{P}[Y = aX + b] = 1$

y además

$\rho_{XY} = 1$ si $a > 0$
$\rho_{XY} = -1$ si $a < 0$

- Si X y Y son v.a.´s independientes $\Longrightarrow \rho_{XY} = 0$

Suma de variables aleatorias

1. Sea $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ variable aleatoria, donde X_i $i = 1, 2, ..., n$, entonces

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] \quad \text{y} \quad Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} Cov(X_i, X_j)$$

2. Sea $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ variable aleatoria. Si $X_1, X_2, ..., X_n$ son variables aleatorias independientes, entonces:

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \quad \text{y} \quad M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t)$$

si además son v.a´s identicamente distribuidas:

$$M_Y(t) = [M_X(t)]^n$$

3. Si $X_i; i = 1, 2, ..., n$ y $Y_j; j = 1, 2, ..., m$ son variables aleatorias y $a_1, a_2, ..., a_n, b, c_1, c_2, ..., c_m, d$ constantes, entonces

$$Cov\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b, \sum_{j=1}^{m} c_j Y_j + d\right] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i c_j Cov(X_i, Y_j)$$

Media Muestral

Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ v.a.´s. Se define la media muestral de las v.a´s como:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Propiedades

- $\mathbb{E}\left[\bar{X}\right] = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i\right)$; si son indenticamente distribuidas con media μ

$$\mathbb{E}\left[\bar{X}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{1}{n}n\mu = \mu$$

- $Var\left(\bar{X}\right) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)$; si las v.a.´s son identicamente distribuidas con varianza σ_i^2

$$Var\left(\bar{X}\right) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Teorema Central del Límite

Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas tales que

$$\mathbb{E}\left(X_i\right) = \mu \;\text{ y }\; Var(X_i) = \sigma^2 < \infty;\ \forall i = 1, 2, ..., n$$

luego

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \quad - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \text{ cuando } n \to \infty\text{; converge en distribución a una } N\left(0,1\right)$$

o bien

$$\frac{\sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu\right)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \text{ cuando } n \to \infty\text{; converge en distribución a una } N\left(0,1\right)$$

VaR (Value at Risk)

El Valor en Riesgo con un nivel de seguridad de p para la variable aleatoria X, denotado como $VaR_p(X)$ es el $100p\%$ percentil de X :

$$VaR_p(X) = \mathbb{P}\left[X > \pi_p\right] = 1 - p$$

generalmente p se busca cercano a 95%, 99% o 99.5%.
Esta medida del riesgo nos determina la pérdidas que puede sufrir una compañía con un determinado nivel de probabilidad.
En particular tenemos lo siguiente:

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$VaR_p(X) = \mu + z_p\sigma$
$X \sim LogNormal$	$VaR_p(X) = e^{\mu + z_p\sigma}$
$X \sim Exp(1/\theta)$	$VaR_p(X) = -\theta \ln(1-p)$
$X \sim Pareto(\alpha, \theta)$	$VaR_p(X) = \dfrac{\theta(1-\sqrt[\alpha]{1-p})}{\sqrt[\alpha]{1-p}}$

z_p es el percentil del $100p\%$ de una normal estándar.

TVaR (Tail-Value at Risk)

El TVaR de una variable aleatoria continua X con un nivel de seguridad p, es la pérdida esperada dado que ésta excede el valor del precentil del $100p\%$ de la distribución de X :

$$TVaR_p\left(X\right) = \mathbb{E}\left(X \mid X > \pi_p\right) = \frac{\displaystyle\int_{\pi_p}^{\infty} x f_X\left(x\right) dx}{1 - F_X\left(\pi_p\right)}$$

Esta medida de riesgo representa el valor esperado de las pérdidas de la compañía sujeto a que se ha excedido el nivel de seguridad determinado desde un inicio. También recibe el nombre de *Conditional Tail Expectation* (CTE), *Tail Conditional Expectation* (TCE) y *Expected Shortfall* (ES)

Otra forma de calcular el TVaR es:

$$TVaR_p\left(X\right) = \frac{\displaystyle\int_{p}^{1} VaR_y(x) dy}{1 - p}$$

Esta medida es mucho más útil que la VaR, puesto que proporciona mayor información sobre la distribución en valores cercanos a su cola y es más utilizada en eventos cuyos valores extremos se reflejan en el comportamiento de su distribución.

Además el TVaR para cualquier percentil π_p puede ser calculada para distribuciones continuas con media finita como

$$TVaR_p\left(X\right) = \pi_p + e\left(\pi_p\right) = \pi_p + \frac{\mathbb{E}\left(X\right) - \mathbb{E}\left(X \wedge \pi_p\right)}{S\left(\pi_p\right)}$$

donde $e\left(\pi_p\right)$ es la función media de pérdida en exceso

o bien

$$TVaR_p\left(X\right) = \pi_p + \frac{\displaystyle\int_{\pi_p}^{\infty} (x - \pi_p) f_X\left(x\right) dx}{1 - p} = VaR_p\left(X\right) + e\left(\pi_p\right)$$

Esta relación indica que el TVaR es mayor que el VaR debido al promedio de aquellas reclamaciones que exceden el valor de π_p.

Tanto el VaR como el TVaR son medidas difíciles de calcular puesto que representan valores de las colas de los datos y generalmente cuando se estima una distribución; aquellos valores que poseen mayores errores de estimación son justamente los de las colas.

Apéndice B

Códigos de R

```
library(actuar)
library(graphics)
library(plotrix)
library(ADGofTest)
library(MASS)
library(BB)
library(numDeriv)
library(fitdistrplus)
library(survival)
library(evir)
library(evd)

###Exp(1/10)

par(mfrow = c(2,2), cex.axis=1.4, cex.main=1.4,cex.lab=1.2, font=3)
curve(pexp(x,rate=1/10),xlab="x",ylab=expression(F[X](x)),
xlim=c(0,70),main="Distribucion",col="blue",lwd=5)
curve(dexp(x,rate=1/10),xlab="x",ylab=expression(f[X](x)),
xlim=c(0,70),main="Densidad",col="red",lwd=5)
curve(1-pexp(x,rate=1/10),xlab="x",ylab=expression(S[X](x)),
xlim=c(0,70),main="Supervivencia",col="green",lwd=5)
curve((dexp(x,rate=1/10)/(1-pexp(x,rate=1/10))),xlab="x",
ylab=expression(h[X](x)),xlim=c(0,70),ylim=c(0,0.15),main="Riesgo",
col="purple",lwd=5)

###Gamma(alpha=3,tetha=1/2)

par(mfrow = c(2,2), cex.axis=1.4, cex.main=1.4,cex.lab=1.2, font=3)
curve(pgamma(x,shape=3,scale=1/2),xlab="x",ylab=expression(F[X](x)),
xlim=c(0,30),main="Distribucion",col="blue",lwd=5)
curve(dgamma(x,shape=3,scale=1/2),xlab="x",ylab=expression(f[X](x)),
```

```
xlim=c(0,30),main="Densidad",col="red",lwd=5)
curve(1-pgamma(x,shape=3,scale=1/2),xlab="x",ylab=expression(S[X](x)),
xlim=c(0,30),main="Supervivencia",col="green",lwd=5)
curve((dgamma(x,shape=3,scale=1/2)/(1-pgamma(x,shape=3,scale=1/2))),
xlab="x",ylab=expression(h[X](x)),xlim=c(0,25),main="Riesgo",
col="purple",lwd=5)

###Beta(2,3)

par(mfrow = c(2,2), cex.axis=1.4, cex.main=1.4,cex.lab=1.2, font=3)
curve(pbeta(x,shape1=2,shape2=3),xlab="x",ylab=expression(F[X](x)),
xlim=c(0,1),ylim=c(0,2),main="Distribucion",col="blue",lwd=5)
curve(dbeta(x,shape1=2,shape2=3),xlab="x",ylab=expression(f[X](x)),
xlim=c(0,1),main="Densidad",col="red",lwd=5)
curve(1-pbeta(x,shape1=2,shape2=3),xlab="x",ylab=expression(S[X](x)),
xlim=c(0,1),main="Supervivencia",col="green",lwd=5)
curve((dbeta(x,shape1=2,shape2=3)/(1-pbeta(x,shape1=2,shape2=3))),
xlab="x",ylab=expression(h[X](x)),xlim=c(0,1),main="Riesgo",
col="purple",lwd=5)

###Pareto(4,30)

par(mfrow = c(2,2), cex.axis=1.4, cex.main=1.4,cex.lab=1.2, font=3)
curve(ppareto(x,shape=4,scale=30),xlab="x",ylab=expression(F[X](x)),
xlim=c(0,200),main="Distribucion",col="blue",lwd=5)
curve(dpareto(x,shape=4,scale=30),xlab="x",ylab=expression(f[X](x)),
xlim=c(0,200),main="Densidad",col="red",lwd=5)
curve(1-ppareto(x,shape=4,scale=30),xlab="x",ylab=expression(S[X](x)),
xlim=c(0,200),main="Supervivencia",col="green",lwd=5)
curve((dpareto(x,shape=4,scale=30)/(1-ppareto(x,shape=4,scale=30))),
xlab="x",ylab=expression(h[X](x)),xlim=c(0,200),main="Riesgo",
col="purple",lwd=5)

###Weibull(tetha=5,thau=1/8)

par(mfrow = c(2,2), cex.axis=1.4, cex.main=1.4,cex.lab=1.2, font=3)
curve(pweibull(x,shape=1/8,scale=5),xlab="x",ylab=expression(F[X](x)),
xlim=c(0,60),main="Distribucion",col="blue",lwd=5)
curve(dweibull(x,shape=1/8,scale=5),xlab="x",ylab=expression(f[X](x)),
xlim=c(0,60),main="Densidad",col="red",lwd=5)
curve(1-pweibull(x,shape=1/8,scale=5),xlab="x",ylab=expression(S[X](x)),
xlim=c(0,60),main="Supervivencia",col="green",lwd=5)
curve((dweibull(x,shape=1/8,scale=5)/(1-pweibull(x,shape=1/8,scale=5))),
xlab="x",ylab=expression(h[X](x)),xlim=c(0,60),main="Riesgo",
col="purple",lwd=5)
```

```
###Lognormal(3,5)

par(mfrow = c(2,2), cex.axis=1.4, cex.main=1.4,cex.lab=1.2, font=3)
curve(plnorm(x,meanlog=3,sdlog=sqrt(5)),xlab="x",ylab=expression(F[X](x)),
xlim=c(0,500),main="Distribuci\U{f3}n",col="blue",lwd=5)
curve(dlnorm(x,meanlog=3,sdlog=sqrt(5)),xlab="x",ylab=expression(f[X](x)),
xlim=c(0,500),main="Densidad",col="red",lwd=5)
curve(1-plnorm(x,meanlog=3,sdlog=sqrt(5)),xlab="x",ylab=expression(S[X](x)),
main="Supervivencia",xlim=c(0,500),col="green",lwd=5)
curve((dlnorm(x,meanlog=3,sdlog=sqrt(5))/(1-plnorm(x,meanlog=3,sdlog=sqrt(5)))),
xlab="x",ylab=expression(h[X](x)),main="Riesgo",xlim=c(0,500),
col="purple",lwd=5)


###Ejemplo 3. Binomial(50,0.6)

x<- c(0:50)
fdp<- dbinom(x,size=50,prob=0.6)
a<- data.frame(x,fdp)
plot(a,type="h",pch=19,main="Binomial(50,0.6)",col="blue", lwd=4)


###Ejemplo 4. Geometrica(1.5)

x<- c(0:15)
fdp<- dgeom(x,prob=0.4)
b<- data.frame(x,fdp)
plot(b,type="h",pch=19,main="Geom(1.5)",col="blue", lwd=4)


###Ejemplo 5. BinNeg(0.25,15)

x<- c(0:35)
fdp<- dnbinom(x,size=15,prob=0.8)
c<- data.frame(x,fdp)
plot(c,type="h",pch=19,main="BinNeg(0.25,15)",col="blue", lwd=4)


###Ejemplo 6. Poisson(5)

x<- c(0:40)
fdp<- dpois(x,lambda=5)
d<- data.frame(x,fdp)
plot(d,type="h",pch=19,main="Poisson(5)",col="blue", lwd=4)
```

```
###Ejemplo 7. Clase(a,b,0)

x<-c(0:6)
Poisson1<-dpois(x,lambda=5)
Binomial1<-dbinom(x,size=8,prob=0.3)
BinNeg1<-dnbinom(x,size=5,prob=0.5)
rectadistr <- function( dist ){

recta<-c(0)

dist<- dist

n<- length(dist)

for (i in 0:(n-1)){
recta[i]=i*(dist[i+1]/dist[i])

}
recta

}

rectapoiss<-rectadistr(Poisson1)
rectabineg<-rectadistr(BinNeg1)
rectabin<-rectadistr(Binomial1)

k<-c(1:6)

rectas<- data.frame(k,rectapoiss,rectabin,rectabineg)

rectas

plot(rectas[,1],rectas[,2],xlab="k",ylab=expression(k*p[k]/p[k-1]),type="p",
pch=19,main="Pendiente Poisson(5)",col="blue")
plot(rectas[,1],rectas[,3],xlab="k",ylab=expression(k*p[k]/p[k-1]),type="p",
pch=19,main="Pendiente Binomial(8,0.3)",col="red")
plot(rectas[,1],rectas[,4],xlab="k",ylab=expression(k*p[k]/p[k-1]),type="p",
pch=19,main="Pendiente BinNeg(1,5)",col="gray")


###Ejemplo 8. Binomial(10,0.3)

m<- 10
q<- 0.3
a<- -(q/(1-q))
b<- ((m+1)*q)/(1-q)
```

```
p0<- (1-q)^m
p1<- (a+b)*p0
p2<- (a+(b/2))*p1
p3<- (a+(b/3))*p2
pT0<- 0
pT1<- p1/(1-p0)
pT2<- (a+(b/2))*pT1
pT3<- (a+(b/3))*pT2
pM0<- 0.4
pM1<- (1-pM0)*pT1
pM2<- (1-pM0)*pT2
pM3<- (1-pM0)*pT3

k<- c(0:3)
pk<- c(p0,p1,p2,p3)
pT<- c(pT0,pT1,pT2,pT3)
pM<- c(pM0,pM1,pM2,pM3)
t<- data.frame(k,pk,pT,pM)

###Ejemplo 10. Y^P Pareto(4,30) d=10

par(mfrow = c(1,2), cex.axis=1.4, cex.main=1.4,cex.lab=1.2, font=3)
f<- coverage(dpareto, ppareto, deductible=10)
curve(dpareto(x, shape=4, scale=30), xlab="x", ylab=expression(f[X](x)),
xlim=c(0.1,100),ylim=c(0,0.18), col="blue", cex.lab=1.2, lwd=4)
curve(f(x, shape=4, scale=30), xlab=expression(y^P),
ylab=expression(f[Y^P](x)), xlim=c(10,100), ylim=c(0,0.18),
col="red",lwd=4)

### Para Y^L Pareto(4,30) d=10

par(mfrow = c(1,2), cex.axis=1.4, cex.main=1.4,cex.lab=1.2, font=3)
curve(dpareto(x, shape=4, scale=30), xlab="x",ylab=expression(f[X](x)),
xlim=c(0.1,100),ylim=c(0,0.8), col="blue", lwd=4)
g<- coverage(dpareto, ppareto, deductible=10, per.loss=TRUE)
curve(g(x, shape=4, scale=30), xlab=expression(y^L),
ylab=expression(f[Y^L](x)), xlim=c(0.1,100), ylim=c(0,.8), col="red",
cex.lab=1.2, lwd=4)
points(0, g(0,4,30), pch=19, col="red")

###Ejemplo 16

a<- mlnorm(1,meanlog=10,sdlog=2)
b<- levlnorm(limit=5000,meanlog=10,sdlog=2,order=1)
a-b
```

```
###Ejemplo 17

EY<- levpareto1(limit=200,shape=3,min=50,order=1)

###Ejemplo 21

r<- 1.03
d<- 100
Ex<- mpareto(order=1, shape=4, scale=500)
Exd<- levpareto(limit=d, shape=4, scale=500, order=1)
Sd<- 1-ppareto(d, shape=4, scale=500)
EYP<- (Ex-Exd)/Sd
Exd_<- levpareto(limit=(d/r), shape=4, scale=500, order=1)
Sd_<- 1-ppareto((d/r), shape=4, scale=500)
EYP_<- ((r*(Ex-Exd_))/Sd_)
Incremento<- (EYP_/EYP)-1

###Ejemplo 23

a<- 0.9
r<- 1.05
d<- 50000
l<- 150000
u<- (l/a)+d
Exu_<- levpareto(limit=(u/r), shape=3, scale=200000, order=1)
Exd_<- levpareto(limit=(d/r), shape=3, scale=200000, order=1)
Sd_<- 1-ppareto((d/r), shape=3, scale=200000)
EYP<- ((a*r*(Exu_-Exd_))/Sd_)


#f.d.p grafica

YP<- coverage(dpareto, ppareto, deductible=d, franchise=FALSE, limit=((l/a)+d),
coinsurance=a, inflation=0.05, per.loss=FALSE)
curve(YP(x, shape=3,scale=200000), xlab="y", ylab=expression(f[Y^P](y)),
xlim=c(0.1,149999.9), ylim=c(0,.6), main="Pareto(3,200000)", col="blue")
points(0,YP(0,3,200000),pch=19,col="blue")
points(150000,YP(150000,3,200000),pch=19,col="blue")



###Ejemplo 24. Convoluciones

fx<- c(0, 0.60, 0.25, 0.15)
x<- c(0:3)
pn<- dpois(x, lambda=3)
```

```
Fs<- aggregateDist("convolution", model.freq=pn, model.sev=fx)
Fs(3)

plot(Fs, main="Distribucion de Reclamaciones Agregadas (Convoluciones)",
sub=" ")
valFS<- Fs(knots(Fs))#Funcion de distribucion
valfS<- diff(valFS)#funcion de densidad


###Ejemplo 27

Frecuencia BinNeg(1.5,12)
Severidad Pareto(3,150)

#Para Y^L

d<- 40
l<- 250
c<- 0.85
r<- 1.03
u=(l/c)+d
YL<- coverage(dpareto, ppareto, deductible=d, franchise=FALSE, limit=u,
coinsurance=c, inflation=.03, per.loss=TRUE)
Exu_<- levpareto(limit=(u/r), shape=3, scale=150, order=1)
Exd_<- levpareto(limit=(d/r), shape=3, scale=150, order=1)
EYL<- c*r*(Exu_-Exd_)

ENL<-1.5*12
ESL<- EYL*ENL

Exu_2<- levpareto(limit=(u/r), shape=3, scale=150, order=2)
Exd_2<- levpareto(limit=(d/r), shape=3, scale=150, order=2)
EYL2<- (c^2)*(r^2)*(Exu_2-Exd_2-(2*(d/r)*Exu_)+(2*(d/r)*Exd_))

VarSL<- (1.5*12)*(EYL2+(1.5*(EYL^2)))

#Para Y^P

Sd_<- 1-ppareto((d/r), shape=3, scale=150)
EYP<- EYL/Sd_
v<- Sd_
ENP<- 1.5*12*v

ESP<- EYP*ENP
EYP2<- EYL2/Sd_
VarSP<- (1.5*12*v)*(EYP2+(1.5*v*(EYP^2)))
```

```
###Ejemplo 30

q1<- 0.05
q2<- 0.1
q3<- 0.02
q<- c(q1,q2,q3)
EB1<- 10
EB2<- 5
EB3<- 20
EB<- c(EB1,EB2,EB3)
VB<- c(0,0,0)
n1<- 1000
n2<- 2000
n3<- 500
n<- c(n1,n2,n3)
ES<- sum(n*q*EB)
VS<- sum(n*(q*VB+q*(1-q)*(EB^2)))
s<- (sqrt(VS)*qnorm(0.95,mean=0, sd=1, lower.tail=TRUE, log.p=FALSE))+ES


###Ejemplo 31

lambdai<- c(2,0.8,0.2,4)
lambda<- sum(lambdai)
f0<- c(0, 0.03, 0.2, 0)
f1<- c(0.2, 0.35, 0.1, 0)
f2<- c(0.4, 0.5, 0.1, 0.5)
f3<- c(0.1, 0.12, 0.1, 0.04)
f4<- c(0.05, 0, 0.4, 0.25)
f5<- c(0.2, 0, 0.1, 0.16)
f6<- c(0.05, 0, 0, 0.05)
f<- c( sum((lambdai/lambda)*f0),sum((lambdai/lambda)*f1),sum((lambdai/lambda)*f2),
sum((lambdai/lambda)*f3),sum((lambdai/lambda)*f4),sum((lambdai/lambda)*f5),
sum((lambdai/lambda)*f6))
x<- c(0:6)
Ex<- sum(x*f)
ES<- (lambda*Ex)
Ex2<- sum((x^2)*f)
VarS<- (lambda*Ex2)
pnorm(25, mean=ES, sd=sqrt(VarS),lower.tail=TRUE)

#Funcion de distribucion
k<- c(0:40)
FS<- pnorm(k, mean=ES, sd=sqrt(VarS),lower.tail=TRUE)
```

```
plot(FS,xlab="s", ylab=expression(F[S](s)), type="l",
main="Aproximacion Normal de Poisson Compuesta",lwd=4,col="purple")

#Funcion de densidad
fS<- diff(FS)
plot(fS, xlab="s", ylab=expression(f[S](s)), type="l",
main="Aproximacion Normal de Poisson Compuesta",lwd=4,col="purple")


###Ejemplo 33

k<- c(0:1000)
lambda<- 0.7
Ex<- mgamma(order=1, shape=2, scale=150)
Ex2<- mgamma(order=2, shape=2, scale=150)
ES<- (lambda*Ex)
VarS<- (lambda*Ex2)

#Aproximaciones NormalvsLognormal

pnorm(300, mean=ES, sd=sqrt(VarS),lower.tail=TRUE)
FS1<- pnorm(k, mean=ES, sd=sqrt(VarS),lower.tail=TRUE)
fS1<- diff(FS1)

Varlogn<- log(Ex2)-(2*log(Ex))
Elogn<- log(Ex)-(Varlogn/2)
plnorm(300,mean=Elogn, sd=sqrt(Varlogn),lower.tail=TRUE)
FS2<- plnorm(k, mean=Elogn, sd=sqrt(Varlogn),lower.tail=TRUE)
fS2<- diff(FS2)

twoord.plot(fS1,fS2,type=c("l","l"),xlab="s",lcol="blue",rcol="red",
main="Aproximaciones Normal vs Lognormal")
t<- c("Normal", "Lognormal")
legend(550, 0.0023, paste(t), lty=1, col=c("blue", "red"))


###Ejemplo 35

lambda<- 10
Ex<- mchisq( order=1, df=4)
Ex2<- mchisq( order=2, df=4)
Ex3<- mchisq( order=3, df=4)
mu<- (lambda*Ex)
sigma2<- (lambda*Ex2)
tau<- ( Ex3/sqrt(lambda*(Ex2^3)))
alfa<- 4/(tau^2)
```

```
tetha<- (sqrt(sigma2)*tau)/2
k<- mu-((2*sqrt(sigma2))/tau)
s<- 8
pgamma(s, shape=alfa, scale=s/((s-k)/tetha))

#Funcion de distribucion
x<- c(0:100)
Faproxgamma<- pgamma(x,shape=alfa, scale=s/((s-k)/tetha))
plot(Faproxgamma, xlab="s", ylab=expression(F[S](s)), type="l",
main="Aproximacion Gamma Trasladada")

#Funcion de densidad
faproxgamma<- diff(Faproxgamma)
plot(faproxgamma, xlab="s", ylab=expression(f[S](s)), type="l",
main="Aproximacion Gamma Trasladada")

par(mfrow = c(1,2), cex.axis=1.4, cex.main=1.4,cex.lab=1.2, font=3)
plot(faproxgamma, xlab="s", ylab=expression(f[S](s)), type="l",lwd=4,
col="orange")
plot(Faproxgamma, xlab="s", ylab=expression(F[S](s)), type="l",lwd=4,
col="orange")


###Ejemplo 36

q1<- 0.05
q2<- 0.1
q3<- 0.02
x<- c(10,5)
fB5<- c(0,1,1)
fB10<- c(1,0,0)
fB20<- c(0,0,1)
n1<- 1000
n2<- 2000
n3<- 500
n<- c(n1,n2,n3)

#Metodo 1 con lambdai=qi

lambdai1<- c(q1, q2, q3)
lambda1<- sum(n*lambdai1)
f1<- c(sum(n*(lambdai1/lambda1)*fB10),sum(n*(lambdai1/lambda1)*fB5),
sum(n*(lambdai1/lambda1)*fB20))
Ex1<- x*f1
Ex2_1<- (x^2)*f1
ES1<- sum(lambda1*Ex1)
```

```
VarS1<- sum(lambda1*Ex2_1)
pnorm(1900, mean=ES1, sd=sqrt(VarS1),lower.tail=TRUE)

#Metodo 2 con lambdai=-ln(1-qi)

lambdai2<- c(-log(1-q1), -log(1-q2), -log(1-q3))
lambda2<- sum(n*lambdai2)
f2<- c(sum(n*(lambdai2/lambda2)*fB10),sum(n*(lambdai2/lambda2)*fB5),
sum(n*(lambdai2/lambda2)*fB20))
Ex2<- x*f2
Ex2_2<- (x^2)*f2
ES2<- sum(lambda2*Ex2)
VarS2<- sum(lambda2*Ex2_2)
pnorm(1900, mean=ES2, sd=sqrt(VarS2),lower.tail=TRUE)

#Metodo 3 con lambdai=qi/(1-qi)

lambdai3<- c(q1/(1-q1), q2/(1-q2), q3/(1-q3))
lambda3<- sum(n*lambdai3)
f3<- c(sum(n*(lambdai3/lambda3)*fB10),sum(n*(lambdai3/lambda3)*fB5),
sum(n*(lambdai3/lambda3)*fB20))
Ex3<- x*f3
Ex2_3<- (x^2)*f3
ES3<- sum(lambda3*Ex3)
VarS3<- sum(lambda3*Ex2_3)
pnorm(1900, mean=ES3, sd=sqrt(VarS3),lower.tail=TRUE)

#Grafica de las funciones de densidad

k<- c(0:3000)
FS1<- pnorm(k, mean=ES1, sd=sqrt(VarS1),lower.tail=TRUE)
fS1<- diff(FS1)
FS2<- pnorm(k, mean=ES2, sd=sqrt(VarS2),lower.tail=TRUE)
fS2<- diff(FS2)
FS3<- pnorm(k, mean=ES3, sd=sqrt(VarS3),lower.tail=TRUE)
fS3<- diff(FS3)

plot(fS1,xlab="s", ylab=expression(f[S](s)), ylim=c(0,0.004),
type="l",col="green", main="Aproximacion Poisson", lwd=3)
par(new=TRUE)
plot(fS2,xlab="s", ylab=expression(f[S](s)), ylim=c(0,0.004),
type="l",col="blue",lwd=3)
par(new=TRUE)
plot(fS3,xlab="s", ylab=expression(f[S](s)), ylim=c(0,0.004),
type="l",col="red",lwd=3)
t<- c("Metodo 1", "Metodo 2", "Metodo 3")
```

```
legend(10, 0.003, paste(t), lty=1, col=c("green", "blue", "red"))


###Ejemplo 38. Metodo recursivo de Panjer

x<- c(0:80)
fx<- dnbinom(x, size=5, prob=0.4)
Fs<- aggregateDist("recursive",model.freq="poisson", model.sev=fx,
lambda=2)
1-Fs(3)

S<-Fs(knots(Fs))
fS<-diff(S)
plot(Fs, main="Distribucion de Reclamaciones Agregadas",
sub= "Aproximacion Metodo Recursivo (Panjer)", col="green")


###Ejemplo 40. Metodo redondeo

fx<- discretize(ppareto(x, shape=4, scale=50), method="rounding",
from=0, to=36, step=.9)#Funci\U{f3}n de densidad discretizada
v<- c(0:39)
plot(stepfun(v, diffinv(fx)),xlab="x",ylab=expression(F[X](x)),
main="Pareto(4,50)",lwd=3)#Grafica de distribucion discretizada
curve( ppareto(x, shape=4, scale=50),from=0,to=40,col="blue",
add=TRUE, lwd=3)#Grafica de funcion de distribucion real
t<- c("Real", "Discretizacion")
legend(20, 0.4, paste(t), lty=1, col=c("blue", "black"),lwd=3)


###Ejemplo 41.De Pril

r <- 4 # Valor maximo del indice de los montos de reclamaciones
m <- 4 # Valor maximo del indice de probabilidades de reclamacion
X <- 30 # Valor maximo que toma x en fs(x)

#Tabla

n <- array(1:24, dim=c(6,4))
n[1,1]<-20
n[2,1]<-0
n[3,1]<-0
n[4,1]<-0
n[1,2]<-0
n[2,2]<-14
n[3,2]<-0
```

```
n[4,2]<-0
n[1,3]<-0
n[2,3]<-0
n[3,3]<-8
n[4,3]<-0
n[1,4]<-0
n[2,4]<-0
n[3,4]<-0
n[4,4]<-24

q <- array(1:4, dim=c(4))
q[1]<-0.02
q[2]<-0.012
q[3]<-0.05
q[4]<-0.013

#Funcion h(i,k)

h <- function(i,k) {
aux <- 0
for (j in 1:m) {
aux <- aux+n[i,j]*(q[j]/(1-q[j]))^k
}
aux <- i*((-1)^(k-1))*aux
return(aux)
}

#Calculo de la funcion de densidad de S

fs <- array(1:X, dim=c(X))

f <- function(x) {
if (x==0) {
aux <- 1
for (i in 1:r) {
for (j in 1:m) {
aux <- aux*((1-q[j])^n[i,j])
}
}
return(aux)
}
else
{
aux <- 0
for (i in 1:min(x,r)) {
for (k in 1:floor(x/i)) {
```

```
if (x-i*k==0) { aux <- aux + fs0*h(i,k) }
else {aux <- aux + fs[x-i*k]*h(i,k)}
}
}
aux <- aux/x
fs[r] <- aux
return(aux)
}
}

fs0<- f(0)

#Asignacion en el arreglo fs

for (i in 1:X) {
fs[i] <- f(i)
}

fs #Funcion de densidad de S para x=1,...,30
f(0) #Funcion de densidad en S=0

#Calculo de la funcion de distribucion de S

F<- function(n){

aux <- f(0)

if (n==0)
{
}
else
\qquad {
for (i in 1:n)
{
   aux <- aux + fs[i]
}
\qquad }
return(aux)
}

#Asignacion en el arreglo Fs

Fs<- array(1:X+1, dim=c(X+1))

for(i in 0:X)
{
```

```
Fs[i+1]<- F(i)
}

Fs #Funcion de distribucion de S

#Grafica de la f.d.p.

plot(fs,main="Densidad de Reclamaciones Agregadas",sub="Formula de De Pril",
type="h", xlab="x",  ylab=expression(f[S](x)), xlim=c(0,30), ylim=c(0,0.3),
col="red")
par(new=TRUE)
plot(0,fs0,type="h", xlab="x",ylab=expression(f[S](x)), xlim=c(0,30),
ylim=c(0,0.3), col="red")

#Grafica de la funcion de distribucion

plot(Fs, main="Distribucion de Reclamaciones Agregadas",sub="Formula de De Pril",
pch=19, xlab="x",  ylab=expression(F[S](x)), xlim=c(0,30), ylim=c(0,1), col="red")


###Ejemplo 44.FFT

d<- 5
l<- 40
a<- 0.8
u<- (l/a)+d
h<- 0.4
n<- 2^7
fy<- discretize( pexp(x,rate=.3125), method="rounding", from=0, to=n*h, step=h)
fcy<- fft(fy, inverse=FALSE) #Funcion caracteristica de los montos
v<- (1-pexp(d,1/4))
r<-10
b<-0.25
beta<- (v*b)
fcS<- (1-beta*(fcy-1))^(-r)
fS<- Re(fft(fcS,inverse=TRUE))/n

x<- c(0:(n-1))
data<- data.frame(x, fcy, fcS, fS)
plot(diffinv(fS),xlab="s",ylab=expression(F[S](s)),pch=19,
main="Distribucion de perdidas agregadas", col="blue")

###Codigo para implementar los modelos a la base de datos del seguro de autos

base_sev<- read.csv("C:/Users/Andrea/Desktop/tesis swp/datos_severidad.csv")
demp_sev<- read.csv("C:/Users/Andrea/Desktop/tesis swp/Distribucion_emp_sev.csv")
```

```
truehist(base_sev[,1],xlab="x",main="Histograma de severidad",col="blue")

n<- 163
m<- mean(base_sev[,1])
t<- (1/n)*sum(base_sev[,1]^2)
D<- 1.36/sqrt(n)

###SEVERIDAD

##Ajuste Distribucion Gamma

v_ini1<- (m^2)/(t-(m^2))  #alpha
v_ini2<- (t-(m^2))/m  #tetha

fitdistr(base_sev[,1],dgamma,list(shape = v_ini1, scale=v_ini2))

plot(ecdf(base_sev[,1]),verticals=TRUE,do.points=FALSE,col.hor="red",
col.vert="bisque",main="Comparacion de curvas (Gamma)",ylab="")
curve(pgamma(x,shape=9.713027e-01,scale=5.855256e+04),from=0,to=260000,
add=TRUE,col="blue")

k<-c ("Distribucion Empirica","Distribucion Estimada")
legend (50000,0.4,paste(k),lty=1,col=c("red","blue"))


#Prueba de Kolmogorov-Smirnov

ks.test(base_sev[,1],"pgamma",shape=9.713027e-01,scale=5.855256e+04)
#D=0.2746, p-value = 4.233e-11

#Prueba Anderson-Darling

ad.test(base_sev[,1], pgamma,shape=9.713027e-01,scale=5.855256e+04)
#AD=25.0813, p-value=3.681e-06

##Ajuste Distribucion Pareto

v_ini1<- 2*((t-(m^2))/(t-2*(m^2))) #alpha
v_ini2<- (t*m)/(t-2*(m^2)) #tetha

fitdistr(base_sev[,1],dpareto,list(shape = v_ini1, scale=v_ini2))

plot(ecdf(base_sev[,1]),verticals=TRUE,do.points=FALSE,col.hor="red",
col.vert="bisque",main="Comparacion de curvas(Pareto)",ylab="")
curve(ppareto(x,shape=7.148070e+00,scale=2.608954e+05),from=0,to=260000,
add=TRUE,col="blue")
```

```
k<-c ("Distribucion Empirica","Distribucion Estimada")
legend (50000,0.4,paste(k),lty=1,col=c("red","blue"))

#Prueba de Kolmogorov-Smirnov

ks.test(base_sev[,1],"ppareto",shape=7.148070e+00,scale=2.608954e+05)
#D=0.3754, p-value = 2.2e-16

#Prueba Anderson-Darling

ad.test(base_sev[,1], ppareto,shape=7.148070e+00,scale=2.608954e+05)
#AD=21.9377, p-value=3.681e-06

##Ajuste Distribucion Lognormal

v_ini1<- log(m)-((1/2)*(v_ini2^2))
v_ini2<- sqrt(log(t)-2*log(m))

fitdistr(base_sev[,1],dlnorm,list(meanlog = v_ini1, sdlog=v_ini2))

plot(ecdf(base_sev[,1]),verticals=TRUE,do.points=FALSE,col.hor="red",
col.vert="bisque",main="Comparacion de curvas(lognormal)",ylab="")
curve(plnorm(x,meanlog=10.35224162 ,sdlog=0.63810855 ),from=0,to=260000,
add=TRUE,col="blue")

k<-c ("Distribucion Empirica","Distribucion Estimada")
legend (50000,0.4,paste(k),lty=1,col=c("red","blue"))

#Prueba de Kolmogorov-Smirnov

ks.test(base_sev[,1],"plnorm",meanlog=10.35224162,sdlog=0.63810855)
#D=0.2021, p-value = 3.285e-06

#Prueba Anderson-Darling

ad.test(base_sev[,1], plnorm,meanlog=10.35224162,sdlog=0.63810855)
#AD=13.1396, p-value=3.681e-06

###PERDIDAS AGREGADAS

##Convoluciones

x<- demp_sev
fx<- t(x)
pn<- c(0.913773148, 0.078654738, 0.007122002,0.00042992)
```

```
Fs<- aggregateDist("convolution", model.freq=pn, model.sev=fx)
plot(Fs,xlab="s", ylab=expression(F[S](s)),
main="Distribucion de Reclamaciones Agregadas", sub="Convoluciones")
valFS<- Fs(knots(Fs))#Funcion de distribucion
valfS<- diff(valFS)#funcion de densidad

EX<- m
EX2<- t
EN<- 0.094270017
ES<- EX*EN

VarX<- t-(m^2)
VarN<- 0.090663112
VarS<- (EN*VarX)+(VarN*(EX^2))

##Aproximaciones

#Aproximacion Normal

k<- c(0:300000)
FS<- pnorm(k, mean=ES, sd=sqrt(VarS),lower.tail=TRUE)
fS<- diff(FS)
plot(fS,xlab="s", ylab=expression(f[S](s)), main="Aproximacion normal")
plot(FS,xlab="s", ylab=expression(F[S](s)), main="Aproximacion normal")

#Aproximacion Lognormal

k<- c(0:300000)
Varlogn<- log(EX2)-(2*log(EX))
Elogn<- log(EX)-(Varlogn/2)
FS<- plnorm(k, mean=Elogn, sd=sqrt(Varlogn),lower.tail=TRUE)
fS<- diff(FS)
plot(fS,xlab="s", ylab=expression(f[S](s)), main="Aproximacion lognormal")
plot(FS,xlab="s", ylab=expression(F[S](s)), main="Aproximacion lognormal")

##Panjer

x<- demp_sev
fx<- t(x)
FS<- aggregateDist("recursive", model.freq = "poisson",model.sev = fx,
lambda = 0.181095315, p0=0.913773148)
plot(FS,xlab="s", ylab=expression(F[S](s)),
main="Distribucion de Reclamaciones Agregadas",
sub="Aproximacion Metodo Recursivo (Panjer)")
valFS<- FS(knots(FS))#Funcion de distribucion
valfS<- diff(valFS)#funcion de densidad
```

```
##FFT

x<- demp_sev
h<-0.2
n<-2^7
p0M<- 0.91377315
lambda<- 0.181095315
fx<- discretize(t(x), method="rounding",from=0, to=n*h, step=h)
fcx<- fft(fx, inverse=FALSE)#Funcion caracteristica de los montos de reclamacion.
fcS<- p0M+((1-p0M)*(exp(lambda*fcx)-1)/(exp(lambda)-1))
fS<- Re(fft(fcS,inverse=TRUE))/n
plot(diffinv(fS[1,]),xlab="s",ylab=expression(F[S](s)),pch=19,
main="Distribucion de perdidas agregadas", col="blue")

Sin discretizar la severidad

fcx<- fft(t(x), inverse=FALSE) #Funcion caracteristica de los montos de reclamacion.
fcS<- p0M+((1-p0M)*(exp(lambda*fcx)-1)/(exp(lambda)-1))
fS<- Re(fft(fcS,inverse=TRUE))/n
plot(diffinv(fS[1,]),xlab="s",ylab=expression(F[S](s)),pch=19,
main="Distribucion de perdidas agregadas", col="blue")
```

Bibliografía

[1] Stuart A. Klugman, Harry H. Panjer, Gordon E. Willmont (2008), Loss Models, From Data to Decisions, 3rd ed., Wiley.

[2] Abraham Weishaus, Ph.D.,F.S.A., CFA, M.A.A.A. (2009), A.S.M. Study Manual for Exam C/Exam 4, Construction and Evaluation of Actuarial Models, 9th ed., 276 Roosevelt Way: Actuarial Study Materials.

[3] Rob Kaas, Marc Goovaerts, Jan Dhaene, Michel Denuit (2008), Modern Actuarial Risk Theory Using R, 2nd ed., Springer.

[4] Hogg R., McKean J. y Craig A. (2005) Introduction to Mathematical Statistics, 6th ed., Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.

[5] Ross Sheldon (2007), Introduction to Probability Models, 9th ed., San Diego: Academic Press.

[6] Samuel A. Broverman, Ph.D. ASA (2009) ACTEX Study Manual SOA Exam P CAS Exam 1, 2nd ed.

[7] Luis Rincón (2011), Introducción a la teoría del Riesgo, Versión 2011.

[8] Hogg R. y Klugman (1984), Loss Distributions, New York: Wiley.

[9] Alexander M. Mood (1974), Introduction to the Theory of Statistics, 3rd ed., Mc Grawhill.

[10] George Casella, Roger L. Berger, Statistical Inference, 2nd ed., Duxbury.

[11] Joseph Adler (2010), R in a nutshell, 1st ed., O´Reilly.

[12] R Development Core Team (2010), R Language Definition, Versión 2.12.1.

[13] Baker C. (1977) The numerical Treatment of Integral Equations, Oxford: Clarendon Press

[14] Nelson De Pril, The aggregate claims distribution in the individual model with arbitray positive claims, Institute of Actuarial Science, K.V. Leuven, Belgium.