UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

IDEALES, σ-IDEALES Y FORCING

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
OSVALDO ALFONSO TÉLLEZ NIETO

DIRECTOR DE LA TESIS:
DR. MICHAEL HRUSAK, CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. FERNANDO HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS, UMSNH.
DR. ÁNGEL TAMARIZ MASCARÚA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM.

MÉXICO, D. F. ABRIL 2013.

Índice general

Introducción

El estudio de los invariantes cardinales del continuo se remonta al conocido Teorema de Cantor, que establece que la cardinalidad de los números naturales es estrictamente menor que la cardinalidad de los números reales. La cardinalidad de estos últimos, es la misma que la del conjunto potencia de los números naturales.

A partir de esta distinción se establecieron numerosos resultados sobre algunas propiedades de los conjuntos de la misma cardinalidad de los naturales, las cuales no pueden extenderse a conjuntos de cardinalidad de los reales.

Usaremos indistintamente el símbolo ω tanto para el conjunto de números naturales como para indicar su cardinalidad. De esta manera, a un conjunto de cardinalidad ω le llamaremos *numerable* y a la cardinalidad de los números reales, o la cardinalidad del continuo, la denotaremos, como es costumbre, por la letra $\mathfrak{c}$.

Un invariante cardinal del continuo se define generalmente de manera combinatoria como el tamaño de algún subconjunto de la recta real (o de potencia de ω o de ω^ω inclusive como subconjunto de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$), el cual típicamente es de cardinalidad estrictamente mayor que ω y menor o igual que la cardinalidad del continuo.

El propósito principal de este trabajo es presentar un estudio sistemático del *número de intersección de familias de ideales altos*. En [25] S. Pewlik probó que dada una familia de menos de $\mathfrak{h}$ ideales no magros, su intersección es un ideal no magro, sin embargo, existe una familia de tamaño $\mathfrak{d}$ de ideales magros tal que su intersección es vacía. El mismo autor probó en [24] que la intersección de menos de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros es un filtro no magro. En [31], M. Talagrand probó que la intersección de una cantidad numerable de filtros no medibles es un filtro no medible y T. Bartoszynski y S. Shelah probaron en [4] que es consistente con **ZFC** que la intersección de una familia de menos de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros tiene medida cero.

El número de intersección es un invariante cardinal definido de manera análoga. Dada una clase Γ de ideales altos, se define el número de intersección de Γ como la mínima cardinalidad de una subfamilia $\Omega \subseteq \Gamma$ de tal manera que su intersección no es un ideal alto. A este número lo denotamos como $\mathfrak{h}_\Gamma$. Se muestra que para cualquier clase de ideales altos, cerrada bajo isomorfismos, se cumplen las desigualdades $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{h}_\Gamma \leq \mathfrak{c}$ y se exhiben clases de ideales que alcanzan los valores extremos.

Además de comparar los números de intersección de las distintas clases de ideales altos, se comparan con algunos invariantes clásicos, tales como $\mathfrak{b}, \mathfrak{s}$ y $\mathrm{non}(\mathcal{M})$.

En el capítulo 1 se introducen las clases de ideales que se habrán de estudiar y se definen los invariantes clásicos con los que se compararán. En particular, se define el número de distributividad $\mathfrak{h}$ y se justifica por qué se adoptó esta letra para el número de intersección.

En el capítulo 2 se define el número de intersección y se muestra una equivalencia en su definición. Se presentan las desigualdades posibles (en **ZFC** [1]) entre los números de intersección de las distintas clases de ideales y se comparan con los invariantes cardinales mencionados. En este capítulo también se muestra que el invariante $\mathfrak{b}$ se puede caracterizar como el número de intersección de varias clases de ideales altos.

En el capítulo 3 se presentan pruebas de consistencia de desigualdades estrictas de algunas de las desigualdades vistas en el capítulo 2. Para estas pruebas de consistencia se utiliza el método de *forcing* (iterado).

Finalmente, el capítulo 4 es independiente de los capítulos precedentes. En éste se presentan algunos resultados relativos a la cardinalidad mínima de familias casi ajenas maximales dentro de los ideales.

Los primeros dos capítulos son desarrollados dentro de la teoría de conjuntos usual, **ZFC**. La principal referencia de los invariantes cardinales del continuo es [5]. Sin embargo, en los capítulos 3 y 4 la herramienta principal es el método de forcing iterado. Las principales referencias para éste son [20] y [3].

La notación es estándar y sigue [20] y [3]. En particular, se utilizan las letras λ, κ, μ para denotar cardinales. Con α, β, γ se denotan números ordinales. Si A es un conjunto y κ es un cardinal, $[A]^\kappa$ denota al conjunto $\{X \subseteq A : |X| = \kappa\}$ y $[A]^{<\kappa} = \{X \subseteq A : |X| < \kappa\}$. Si A y B son conjuntos, A^B denota al conjunto $\{f : f \text{ es función}, f : B \to A\}$, mientras que con $A^{<\omega}$ se denota al conjunto de funciones finitas de ω en A.

[1]Con **ZFC** se denota la axiomática usual de Zermelo-Fraenkel con Axioma de elección para la teoría de conjuntos.

Los resultados de los tres primeros capítulos han sido publicados en la revista *Archive for mathematical logic* [14].

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer de manera especial al Dr. Michael Hrušák por haber aceptado dirigir este proyecto. Su apoyo y su confianza en mi trabajo, así como su dirección en el desarrollo de las ideas, han sido un pilar fundamental, no sólo en el desarrollo de esta tesis, sino también en mi formación como matemático. Muchas gracias Dr. Hrušák.

A los Doctores Fernando Hernández, Salvador García, Francisco Marmolejo y David Meza. Su disponibilidad y paciencia para revisar este texto y para discutir las ideas del mismo, han enriquecido notablemente el trabajo realizado.

A mis padres, Crispín y Socorro. Su apoyo incondicional en todos los aspectos de la vida es invaluable. A mis hermanas, por todo.

A mi esposa Ana Gabriela. Por su paciencia, su comprensión, su compañía y sus ánimos para continuar con este y otros proyectos.

A los profesores Rafael Rojas, Carlos Torres, José Alfredo Amor (qepd), Yolanda Torres, Gabriela Campero, Ángel Tamariz, Arturo Nieva, no sólo por ser una motivación, sino también por que siempre han apoyado mi desarrollo profesional.

A mis compañeros y amigos por las horas de estudio y de diversión.

A la Universidad Nacional Autónoma de México.

A todos ellos, muchas gracias.

Capítulo 1

Ideales sobre ω e invariantes cardinales

El número de intersección es un invariante cardinal definido sobre clases de ideales altos. El propósito de este capítulo es definir las clases de ideales para las cuales se calcula su número de intersección, así como los invariantes cardinales del continuo con los que se comparan.

La sección está dividida en tres subsecciones. En la primera, se definen las clases de ideales que se estudiarán a lo largo de este trabajo. En la segunda subsección se definen los invariantes del continuo que se utilizarán así como algunas maneras equivalentes de definirlos. En particular se dará la motivación original del invariante cardinal $\mathfrak{h}$ el cual fue definido de manera combinatoria, pero por el Teorema de Balcar, Pelant y Simon es la altura mínima de un árbol base en ω^*. También se define el número de acotamiento $\mathfrak{b}$ y se presenta una versión de [5] en términos de particiones en intervalos de ω.

En la tercera subsección se presentan algunas nociones elementales de *forcing*, con la finalidad de que la notación sea homogénea y clara a lo largo de todo el trabajo, sin embargo, se asumirá que el lector está familiarizado con esta técnica, la principal herramienta en los capítulos 3 y 4.

1.1. Ideales sobre ω

Definición 1.1 *Sea X un conjunto. Un* ideal *sobre X es una familia $\mathscr{I}$ de subconjuntos de X que cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\emptyset \in \mathscr{I}$.

2. *Si $A \in \mathscr{I}$ y $B \subseteq A$ entonces $B \in \mathscr{I}$.*

3. *Si $A, B \in \mathscr{I}$ entonces $A \cup B \in \mathscr{I}$.*

A lo largo de este trabajo sólo se considerarán ideales propios, es decir aquellos que satisfacen $X \notin \mathscr{I}$, así como ideales que contengan a los elementos unitarios, esto es $\{x\} \in \mathscr{I}$ para todo $x \in X$. Con fin se denota al ideal que consiste de todos los subconjuntos finitos de ω.

Dado un ideal $\mathscr{I}$ sobre ω, el conjunto $\mathscr{I}^* = \{X \subseteq \omega : \omega \setminus X \in \mathscr{I}\}$ es llamado el *filtro dual* de $\mathscr{I}$, mientras que el conjunto $\mathscr{I}^+ = \{X \subseteq \omega : X \notin \mathscr{I}\}$ es *la familia de conjuntos $\mathscr{I}$-positivos.*

Un ideal sobre ω es un *ideal maximal* si para todo subconjunto X de ω se cumple que $X \in \mathscr{I}$ o bien $\omega \setminus X \in \mathscr{I}$. A los filtros duales de ideales maximales se les conoce como *ultrafiltros* (nótese que, en este caso, $\mathscr{I}^* = \mathscr{I}^+$).

Un ideal $\mathscr{I}$ sobre ω es *alto* si se cumple que para cada $X \in [\omega]^\omega$ existe $I \in \mathscr{I}$ tal que $X \cap I$ es infinito, equivalentemente, si existe $Y \in [X]^\omega$ tal que

$Y \in \mathscr{I}$.

A continuación se definen las clases de ideales que se estudiarán.

1.1.1. Ideales borelianos y analíticos

Considérese el conjunto de Cantor 2^ω equipado con la topología producto. Como cada elemento de $\mathcal{P}(\omega)$ puede ser identificado con su función característica, las propiedades topológicas de 2^ω pueden ser heredadas a $\mathcal{P}(\omega)$. Si $\mathscr{I}$ es un ideal sobre ω, como $\mathscr{I} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, es razonable preguntarse acerca de sus propiedades topológicas, por ejemplo, sobre cuál es su complejidad analítica.

Es conocido que la mínima complejidad analítica de un ideal es F_σ (ésta es la complejidad del ideal fin) y que no existen ideales G_δ. En este trabajo el interés se centra en la complejidad analítica de los ideales sobre ω, en particular, en ideales cuya complejidad analítica es F_σ, ideales borelianos y analíticos.[1]

1.1.2. Ideales basados en familias *MAD*

Dados dos subconjuntos A, B de ω se dice que A está *casi contenido* en B si $A \setminus B$ es finito, lo cual se denota $A \subseteq^* B$. $A =^* B$ significa $A \subseteq^* B$ y $B \subseteq^* A$. Obsérvese que estas relaciones, en conjuntos finitos, son triviales, pues todo conjunto finito A cumple $A =^* \emptyset$ y $A \subseteq^* B$ para todo $B \subseteq \omega$.

Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos infinitos de ω es *casi ajena*, si dados dos conjuntos distintos $A, B \in \mathcal{A}$ se cumple que $A \cap B =^* \emptyset$. Se dice que la

[1] Un conjunto es *analítico* si es la imagen continua de un espacio polaco y es *boreliano* si es un elemento de la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos.

familia es *casi ajena maximal* (MAD por sus siglas en inglés) si se cumple que la familia es maximal respecto a la relación inclusión, es decir, para cada conjunto $X \in [\omega]^\omega$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap X$ es infinito.

Dada una familia $\mathcal{A}$ infinita casi ajena, se puede definir el ideal basado en $\mathcal{A}$ como $\mathscr{I}_\mathcal{A} = \{X \subseteq \omega : \exists \mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}(X \subseteq^* \bigcup \mathcal{B})\}$.

Por la definición de $\mathscr{I}_\mathcal{A}$, se cumple que cualquier conjunto finito pertenece al ideal (pues los conjuntos finitos están casi contenidos en cualquier conjunto). También se cumple que $\omega \notin \mathscr{I}_\mathcal{A}$, como a continuación se muestra. Supóngase que $\omega \in \mathscr{I}_\mathcal{A}$, entonces existe una subfamilia finita $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\omega \subseteq^* \bigcup \mathcal{B}$. Sea $X \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, entonces $|X \cap B| < \omega$ para todo $B \in \mathcal{B}$, por ser miembros de una familia casi ajena, pero $X = X \cap \omega \subseteq^* X \cap (\bigcup \mathcal{B}) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}}(X \cap B)$, lo cual significa que X está casi contenido en una unión finita de conjuntos finitos, contradiciendo que los elementos de $\mathcal{A}$ son infinitos.

Sea $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia casi ajena maximal y $X \in [\omega]^\omega$. Si $X \notin \mathscr{I}_\mathcal{A}$ entonces $X \notin \mathcal{A}$. Como la familia $\mathcal{A}$ es maximal, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap X$ es infinito. Además se cumple que $A \cap X \in \mathscr{I}_\mathcal{A}$. Lo anterior muestra que los ideales basados en familias casi ajenas maximales, son altos.

1.1.3. Ideales basados en submedidas

Existen algunas clases de ideales que pueden ser vistos como ideales basados en submedidas, como los ideales sumables, los P-ideales o los ideales fragmentados. Una *submedida* sobre ω es una función $\varphi : \mathcal{P}(\omega) \to [0, \infty]$ que cumple las siguientes propiedades:

- $\varphi(\emptyset) = 0$,

- si $A \subseteq B$, entonces $\varphi(A) \leq \varphi(B)$,
- $\varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$.

Con el fin de evitar que funciones triviales sean submedidas y para que los ideales basados en submedidas contengan a los conjuntos finitos, se pide adicionalmente:

- $\varphi(F) < \infty$ para todo $F \in [\omega]^{<\omega}$ y $\varphi(\omega) = \infty$.

Si φ es una submedida sobre ω que satisface la propiedad:

$$\varphi(A) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A \cap n)$$

entonces se dice que la submedida φ es *inferiormente semicontinua.*

Dada una submedida φ inferiormente semicontinua sobre ω, se definen los ideales:

$$\begin{aligned} Fin(\varphi) &= \{A \subseteq \omega : \varphi(A) < \infty\} \quad \text{y} \\ Exh(\varphi) &= \{A \subseteq \omega : \lim_{n\to\infty} \varphi(A \setminus n) = 0\}. \end{aligned}$$

Es inmediato, a partir de sus definiciones, que $Fin(\varphi)$ es un ideal F_σ y que $Exh(\varphi)$ es un ideal $F_{\sigma\delta}$. Más aún, el siguientee Teorema de Mazur establece el recíproco para ideales F_σ.

Teorema 1.2 (Mazur [22]) *Sea $\mathscr{I}$ un ideal sobre ω. Entonces $\mathscr{I}$ es de complejidad analítica F_σ si y sólo si existe una submedida φ inferiormente semicontinua tal que $\mathscr{I} = Fin(\varphi)$.* ■

A continuación se definen las clases de ideales que pueden ser vistos como ideales basados en submedidas.

Un ideal $\mathscr{I}$ sobre ω es *sumable* si existe una función $f : \omega \to (0, \infty)$ que cumple $\sum_{n\in\omega} f(n) = \infty$ tal que $\mathscr{I} = \{A \subseteq \omega : \sum_{n\in A} f(n) < \infty\}$. El ideal $\mathscr{I}$ es alto si y sólo si $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$. Los ideales sumables tienen asociada una submedida inferiormente semicontinua, dada por $\varphi_f(A) = \sum_{n\in A} f(n)$. Por lo tanto, $\mathscr{I} = Fin(\varphi_f)$, lo cual muestra que los ideales sumables son de complejidad analítica F_σ.

Un ideal $\mathscr{I}$ es un *P-ideal* si para cualquier sucesión $\langle I_n : n \in \omega\rangle \subseteq \mathscr{I}$ existe $I \in \mathscr{I}$ tal que $I_n \subseteq^* I$ para todo $n \in \omega$. Los P-ideales analíticos admiten una caracterización en términos de submedidas. El siguiente Teorema de S. Solecki da esta caracterización.

Teorema 1.3 (Solecki [29]) *Sea $\mathscr{I}$ un ideal sobre ω. Entonces $\mathscr{I}$ es un P-ideal analítico si y sólo si existe una submedida φ inferiormente semicontinua tal que $\mathscr{I} = Exh(\varphi)$.* ∎

Un ideal $\mathscr{I}$ es *fragmentado* (ver [16]) si existe una partición $\langle I_n : n \in \omega\rangle$ de ω en conjuntos finitos y submedidas $\varphi_n : \mathcal{P}(I_n) \to [0, \infty)$ tales que la submedida φ sobre ω dada por $\varphi(A) = \sup\{\varphi_n(A \cap I_n) : n \in \omega\}$ define al ideal $\mathscr{I}$ como $\mathscr{I} = Fin(\varphi)$.

1.1.4. Ideales ω-*hitting*

Un ideal $\mathscr{I}$ es ω-*hitting* si para cualquier sucesión $\langle A_n : n \in \omega\rangle \subseteq [\omega]^\omega$ existe $I \in \mathscr{I}$ tal que $I \cap A_n$ es infinito para cada $n \in \omega$. Obsérvese que esta definición es equivalente a la siguiente propiedad: para cada sucesión $\langle A_n : n \in \omega\rangle \subseteq [\omega]^\omega$ existe $I \in \mathscr{I}$ tal que $I \cap A_n \neq \emptyset$, pues dada una sucesión $\langle A_n : n \in \omega\rangle \subseteq [\omega]^\omega$ se puede considerar particiones $\langle A_n^m : m \in \omega\rangle$ de cada

A_n en conjuntos infinitos. Si $I \in \mathscr{I}$ es tal que $I \cap A_n^m \neq \emptyset$ para todo $n, m \in \omega$, entonces $I \cap A_n$ es infinito para todo $n \in \omega$.

Como ejemplos de ideales ω-hitting se tienen a los P-ideales altos y a los ideales maximales.

Sea $\mathscr{I}$ un P-ideal alto y $\langle A_n : n \in \omega \rangle \subseteq [\omega]^\omega$. Para cada $n \in \omega$, sea $I_n \in \mathscr{I}$ tal que $|I_n \cap A_n| = \omega$. Para la sucesión $\langle I_n : n \in \omega \rangle$, sea $I \in \mathscr{I}$ tal que $I_n \subseteq^* I$ para todo $n \in \omega$. Entonces $I \cap A_n$ es infinito para todo $n \in \omega$ y por lo tanto, $\mathscr{I}$ es ω-hitting.

Ahora se verificará que los ideales maximales son ideales ω-hitting. Sea $\mathscr{I}$ un ideal maximal y $\langle A_n : n \in \omega \rangle \subseteq [\omega]^\omega$. Se definen dos conjuntos, $A = \{a_n : n \in \omega\}$ y $B = \{b_n : n \in \omega\}$ por recursión, de la siguiente manera. Sean $a_0, b_0 \in A_0$ con $a_0 \neq b_0$. Si a_i y b_j han sido definidos para todo $i, j \leq n$, de tal manera que $\{a_i : i \leq n\} \cap \{b_j : j \leq n\} = \emptyset$, entonces sean $a_{n+1}, b_{n+1} \in A_{n+1}$ tales que $a_{n+1}, b_{n+1} \notin \{a_i : i \leq n\} \cup \{b_j : j \leq n\}$ y $a_{n+1} \neq b_{n+1}$. Esto se puede hacer porque A_{n+1} es infinito. Sean $A = \{a_n : n \in \omega\}$ y $B = \{b_n : n \in \omega\}$. Entonces $A \cap B = \emptyset$, $A \cap A_n \neq \emptyset$ y $B \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \omega$. Como $\mathscr{I}$ es maximal, $A \in \mathscr{I}$ o $B \in \mathscr{I}$. En cualquiera de los dos casos, se tiene que $\mathscr{I}$ es un ideal ω-hitting.

1.1.5. Ideales eventualmente diferentes

A continuación se define la clase de los ideales *eventualmente diferentes*. Si se considera una partición infinita de los números naturales, el ideal eventualmente diferente basado en dicha partición será aquel generado por los selectores de la partición y los elementos de la partición. Lo anterior se puede expresar de la siguiente manera. Sea $f \in \omega^\omega$ que satisface la propiedad

$$\limsup_{n\to\infty} |f^{-1}(n)| = \infty.$$

Obsérvese que si una función cumple la propiedad anterior, entonces su rango es infinito.

Se define el ideal $\mathcal{ED}_f = \{A \subseteq \omega : \exists m \in \omega(\forall l \geq m(|f^{-1}(l) \cap A| \leq m))\}$. De la definición, se sigue que el ideal $\mathcal{ED}_f$ es de complejidad F_σ.

Los ideales $\mathcal{ED}_f$ son ideales altos. Sea $X \in [\omega]^\omega$. Si existe un conjunto infinito $A \subseteq \omega$ tal que para todo $n \in A$, $X \cap f^{-1}(n) \neq \emptyset$ entonces sea $x_n \in X \cap f^{-1}(n)$ para cada $n \in A$. El conjunto $\{x_n : n \in A\}$ es un subconjunto infinito de X que pertenece al ideal $\mathcal{ED}_f$. En otro caso, el conjunto $\{n \in \omega : X \cap f^{-1}(n) \neq \emptyset\}$ es finito, entonces existe $m \in \omega$ tal que para todo $k \geq m$, $f^{-1}(k) \cap X = \emptyset$, con lo cual se muestra que $X \in \mathcal{ED}_f$.

Se definen las clases de ideales ED y ED_{fin} como sigue:

Definición 1.4

$$ED = \{\mathcal{ED}_f : \limsup_{n\to\infty} |f^{-1}(n)| = \infty\},$$

$$ED_{fin} = \{\mathcal{ED}_f : \limsup_{n\to\infty} |f^{-1}(n)| = \infty \ \textit{y } f \ \textit{es finito-a-uno}\}.$$

Las clases de ideales ED y ED_{fin} son consideradas como herramientas técnicas, pues su número de intersección admite una caracterización combinatoria relativamente sencilla, además permite relacionar las clases de ideales cuya definición está dada en términos de su complejidad analítica y clases cuya definición es combinatoria. Esto permite compararlos con invariantes cardinales bien conocidos tales como $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{b}$, $\mathrm{non}(\mathcal{N})$, etcétera, los cuales serán definidos a continuación.

1.2. Invariantes cardinales del continuo

El primer resultado sobre invariantes cardinales del continuo es ele Teorema de Cantor que establece que la cardinalidad de los números reales $\mathfrak{c} = 2^\omega$ es estrictamente mayor que la cardinalidad de los números naturales ω.

Algunas propiedades de los conjuntos numerables no se pueden extender a conjuntos de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Por ejemplo, si se considera la medida de Lebesgue en la recta real, la unión de una cantidad numerable de conjuntos de medida 0, tiene medida 0, sin embargo, esta propiedad no es cierta para todos los conjuntos de cardinalidad $\mathfrak{c}$. ¿Cuál es la mínima cardinalidad para que una familia de conjuntos no tenga esta propiedad?

Otro ejemplo se tiene cuando se considera a los conjuntos magros de la recta real, es decir, aquellos que son obtenidos por la unión de una familia numerable de conjuntos densos en ninguna parte. La unión de una familia numerable de conjuntos magros es un conjunto magro y por el Teorema de Categoria de Baire, no puede cubrir a la recta real. ¿Cuál es la mínima cardinalidad de una familia de conjuntos magros cuya unión es la recta real?

La Hipótesis del Continuo es la afirmación que cualquier conjunto infinito de números reales tiene cardinalidad ω o $\mathfrak{c}$. Asumiendo la Hipótesis del Continuo, la respuesta a las preguntas anteriores es obviamente $\mathfrak{c}$. Sin embargo, la Hipótesis del Continuo es independiente de los axiomas de **ZFC**. La respuesta a esas preguntas tampoco pueden ser dadas dentro de **ZFC**, pero en algunos casos sí se pueden comparar estas cardinalidades dentro de esta axiomática. En otros casos, es posible construir modelos donde se cumplen desigualdades estrictas.

El número de intersección es un invariante definido sobre familias de ideales sobre ω. En el siguiente capítulo se definirán estos números para varias clases naturales de ideales, se compararán entre ellos y con algunos invariantes conocidos.

1.2.1. Invariantes asociados a un ideal

Sea $\mathscr{I}$ un σ-ideal[2] sobre un conjunto X (típicamente, un espacio polaco). Se definen los siguientes invariantes cardinales asociados a $\mathscr{I}$:

- $\mathrm{add}(\mathscr{I}) = \mathrm{mín}\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathscr{I} \wedge \bigcup \mathcal{A} \notin \mathscr{I}\}$.
- $\mathrm{cov}(\mathscr{I}) = \mathrm{mín}\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathscr{I} \wedge \bigcup \mathcal{A} = X\}$
- $\mathrm{non}(\mathscr{I}) = \mathrm{mín}\{|Y| : Y \subseteq X \wedge Y \notin \mathscr{I})\}$
- $\mathrm{cof}(\mathscr{I}) = \mathrm{mín}\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathscr{I} \wedge \forall I \in \mathscr{I} \exists A \in \mathcal{A}(I \subseteq A)\}$

Las relaciones que hay entre estos invariantes se resumen en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& & \mathrm{cov}(\mathscr{I}) \arrow[dr] & & \\
\aleph_0 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathscr{I}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathrm{cof}(\mathscr{I}) \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
& & \mathrm{non}(\mathscr{I}) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

[2]Es decir, si $I_n \in \mathscr{I}$ para cada $n \in \omega$, entonces $\bigcup_{n\in\omega} I_n \in \mathscr{I}$. Obsérvese que esta noción es para conjuntos X de cardinalidad mayor que ω pues en el caso de los conjuntos numerables, un σ-ideal que contenga a los conjuntos unitarios es todo el conjunto potencia de X.

En este trabajo se considerarán invariantes cardinales asociados a dos σ-ideales sobre el conjunto de los números reales (en cualquiera de sus versiones equivalentes): el ideal de los conjuntos de *medida cero*, denotado por $\mathcal{N}$ y el ideal de los *conjuntos magros*, denotado por $\mathcal{M}$. En particular, se compara el número de intersección de la clase de los ideales ED con $\mathrm{non}(\mathcal{N})$, la mínima cardinalidad de un conjunto de reales no-nulo, así como con $\mathrm{add}(\mathcal{M})$, la mínima cardinalidad de una familia de conjuntos magros cuya unión no es un conjunto magro.

1.2.2. Números de acotamiento y de dominación

Los siguientes invariantes cardinales que se utilizarán están definidos en términos de funciones de ω en ω y el orden $\leq^*$. Dadas $f, g \in \omega^\omega$ se define $f \leq^* g$ si y sólo si existe $m \in \omega$ tal que para toda $n \geq m$, $f(n) \leq g(n)$.

Definición 1.5 *Una familia $\mathcal{D} \subseteq \omega^\omega$ es llamada* dominante *si para cada $f \in \omega^\omega$ existe $g \in \mathcal{D}$ tal que $f \leq^* g$. El* número de dominación $\mathfrak{d}$ *es la menor cardinalidad de una familia dominante, es decir,*

$$\mathfrak{d} = \text{mín}\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D} \subseteq \omega^\omega \wedge \mathcal{D} \textit{ es dominante}\}.$$

Definición 1.6 *Una familia $\mathcal{B}$ es llamada* no acotada *si no existe $g \in \omega^\omega$ tal que $f \leq^* g$ para toda $f \in \mathcal{B}$.* El número de acotamiento $\mathfrak{b}$ *es el menor cardinal de una familia de funciones no acotada, es decir,*

$$\mathfrak{b} = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq \omega^\omega \wedge \mathcal{B} \textit{ es no acotada }\}.$$

Es inmediato que toda familia dominante es una familia no acotada, por lo tanto, $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$. Más aún, $\mathfrak{b} \leq \mathrm{cof}(\mathfrak{d})$. El siguiente teorema es bien conocido.

Teorema 1.7 $\aleph_0 < \mathrm{cof}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b} \leq \mathrm{cof}(\mathfrak{d}) \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$.

Prueba. Primero se probará que $\mathrm{cof}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$ para lo cual bastará verificar que $\mathfrak{b} \leq \mathrm{cof}(\mathfrak{b})$. Sea $\mathcal{B}$ una familia de funciones no acotada de cardinalidad $\mathfrak{b}$. Considérese una descomposición de $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha<\mathrm{cof}(\mathfrak{b})} \mathcal{B}_\alpha$ de tal manera que $|\mathcal{B}_\alpha| < \mathfrak{b}$, para toda $\alpha < \mathrm{cof}(\mathfrak{b})$. De esta manera, cada $\mathcal{B}_\alpha$ es acotado por alguna función f_α. Entonces la familia $\{f_\alpha : \alpha < \mathrm{cof}(\mathfrak{b})\}$ es una familia de funciones no acotada. Sea $g \in \omega^\omega$, dado que $\mathcal{B}$ es no acotada, existe $f \in \mathcal{B}$ tal que $f \not\leq^* g$. Entonces existe $\alpha < \mathrm{cof}(\mathfrak{b})$, tal que $f \in \mathcal{B}_\alpha$. Dado que $f \leq^* f_\alpha$, se tiene que $f_\alpha \not\leq^* g$.

Para verificar la desigualdad $\mathfrak{b} \leq \mathrm{cof}(\mathfrak{d})$, se procede de una manera análoga. Sea $\mathcal{D} = \{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{d}\}$ una familia dominante y considérese una descomposición de $\mathcal{D} = \bigcup_{\alpha<\mathrm{cof}(\mathfrak{d})} \mathcal{D}_\alpha$, tal que para cada $\alpha < \mathrm{cof}(\mathfrak{d})$, $|\mathcal{D}_\alpha| < \mathfrak{d}$. Entonces $\mathcal{D}_\alpha$ no es dominante y por lo tanto existe una función g_α tal que $g_\alpha \not\leq^* f$ para toda $f \in \mathcal{D}_\alpha$. A continuación se verificará que la familia $\{g_\alpha : \alpha < \mathrm{cof}(\mathfrak{d})\}$ es no acotada. Dada $f \in \omega^\omega$ existe $g \in \mathcal{D}$ tal que $f \leq^* g$. Entonces existe $\alpha < \mathrm{cof}(\mathfrak{d})$ tal que $g \in \mathcal{D}_\alpha$ y por lo tanto $g_\alpha \not\leq^* g$ y en consecuencia $g_\alpha \not\leq^* f$.

Finalmente, para la primera desigualdad, basta verificar que toda familia numerable de funciones, es acotada. Dada $\{f_n : n \in \omega\} \subseteq \omega^\omega$ sea $g \in \omega^\omega$ definida por $g(n) = \max\{f_m(n) : m \leq n\}$. Entonces $f_n \leq^* g$ para toda $n \in \omega$.
■

Una útil caracterización de $\mathfrak{b}$ está dada en términos de particiones de ω en intervalos finitos.

Definición 1.8 *Una* partición en intervalos *es una partición de* ω *en una cantidad infinita de intervalos finitos* $\{I_n = [i_n, i_{n+1}) : n \in \omega\}$ *con* $i_n < i_{n+1}$.

Una partición en intervalos $\mathcal{I} = \{I_n : n \in \omega\}$ domina *a otra partición en intervalos* $\mathcal{J} = \{J_n : n \in \omega\}$ *si existe* $m \in \omega$ *tal que para todo* $n \geq m$ *existe* $k \in \omega$ *tal que* $J_k \subseteq I_n$*.*

Obsérvese que si $x \in I_n$, entonces $x \geq n$. El siguiente resultado que caracteriza a $\mathfrak{b}$ en términos de particiones en intervalos es de [30].

Teorema 1.9 (Solomon [30]) $\mathfrak{b}$ *es la mínima cardinalidad de una familia* $\mathcal{F}$ *de particiones en intervalos para la cual no existe una partición en intervalos que domina a todos los elementos de* $\mathcal{F}$*.*

Prueba. Sea $\mathcal{F}$ una familia de particiones en intervalos de tal manera que no existe una partición que domina a todos los elementos de $\mathcal{F}$, de cardinalidad mínima. Para cada $\mathcal{I} \in \mathcal{F}$ se define $f_{\mathcal{I}} \in \omega^\omega$ de la siguiente manera, $f_{\mathcal{I}}(x) = i_{n+2} - 1$ donde $x \in I_n = [i_n, i_{n+1})$.

Se afirma que $\{f_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \in \mathcal{F}\}$ es una familia no acotada de funciones.

Sea $g \in \omega^\omega$ y defínase $\mathcal{J}_g = \{J_n = [j_n, j_{n+1}) : n \in \omega\}$ con $j_0 = 0$, $j_1 = 1$ y para $n > 0$, $j_{n+1} = \min\{m \in \omega : m > j_n \wedge \forall x < j_n(g(x) < m)\}$. Sea $\mathcal{I} \in \mathcal{F}$ una partición en intervalos que no es dominada por $\mathcal{J}_g$. Se verificará que $f_{\mathcal{I}} \not\leq^* g$.

Sea $m \in \omega$. Dado que $\mathcal{I}$ no es dominada por $\mathcal{J}_g$, existe $n \geq m+1$ tal que para todo $r \in \omega$, $I_r \setminus J_n \neq \emptyset$.

Sea $k \in \omega$ tal que $I_k \cap J_n \neq \emptyset$. Ahora se procede por casos.

Caso 1 $i_k < j_n < i_{k+1} \leq j_{n+1}$.

En tal caso $j_{n+1} < i_{k+2}$ pues $I_{k+1} \not\subseteq J_n$ y existe $x \in I_k$ tal que $x < j_n$. Además dicha x puede ser tomada en el intervalo J_{n-1}. Entonces, por la observación previa, $x \geq n - 1 \geq m$ y también se cumple $g(x) < j_{n+1} \leq i_{k+2} - 1 = f_{\mathcal{I}}(x)$.

Caso 2 $j_n \leq i_k < j_{n+1} < i_{k+1}$.

En tal caso se tiene entonces que $i_{k-1} < j_n$. Por lo tanto existe $x \in I_{k-1}$ tal que $x < j_n$. Nuevamente, tal x puede ser tomada en J_{n-1} con lo que se tiene $x \geq n-1 \geq m$. Además se cumple $g(x) < j_{n+1} \leq i_{k+1} - 1 = f_{\mathcal{I}}(x)$.

Esto prueba que $\mathfrak{b} \leq |\mathcal{F}|$.

Considérese ahora una familia de funciones $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$ no acotada y para cada $\alpha < \mathfrak{b}$ sea $\mathcal{I}_\alpha$ la partición en intervalos definida por f_α como en la primera parte de la demostración, es decir, $i_0 = 0$, $i_1 = 1$ y para $n > 0$, $i_{n+1} = \text{mín}\{m \in \omega : m > i_n \wedge \forall x < i_n(f_\alpha(x) < m)\}$. Se verifica que la familia $\{\mathcal{I}_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$ es una familia de particiones no acotada.

Supóngase que $\mathcal{J} = \{J_n = [j_n, j_{n+1}) : n \in \omega\}$ es una partición en intervalos que domina a $\mathcal{I}_\alpha$, para toda $\alpha < \mathfrak{b}$. Sea $g \in \omega^\omega$ definida mediante $g(x) = j_{n+2}$ donde $x \in J_n$. Dada $\alpha < \mathfrak{b}$, sean $\mathcal{I}_\alpha = \{I_n = [i_n, i_{n+1}) : n \in \omega\}$ y $m \in \omega$ tales que para todo $n \geq m$ existe $r \in \omega$ tal que $I_r \subseteq J_n$. Dada $x \geq j_{m+1}$, existe $n \geq m+1$ tal que $x \in J_n$. Sea $k \in \omega$ tal que $x \in I_k$.

Nuevamente hay dos casos.

Caso 3 $i_k < j_n$.

En este caso, $i_{k+1} < j_{n+1} - 1$. Más aún, $I_{k+1} \subseteq J_n$ y por tanto $i_{k+2} \leq j_{n+1}$. Como $x < i_{k+1}$ se tiene $f_\alpha(x) < i_{k+2} \leq j_{n+1} < j_{n+2} = g(x)$.

Caso 4 $j_n \leq i_k$.

En tal caso $i_{k+2} \leq j_{n+2}$ pues J_{n+1} debe contener un intevalo de $\mathcal{I}_\alpha$. De esta manera, $f_\alpha(x) < i_{k+2} \leq j_{n+2} = g(x)$.

En cualquiera de los dos casos, para todo $x \geq j_{m+1}$, $f_\alpha(x) < g(x)$, lo cual contradice el hecho que $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$ es familia no acotada de funciones.

Lo anterior prueba que la mínima cardinalidad de una familia de particiones en intervalos no dominada es menor o igual que $\mathfrak{b}$, con lo que se tiene completa la prueba del Teorema. $\blacksquare$

1.2.3. Número de división (*splitting number*)

El siguiente invariante cardinal que se definirá es el número de división, el cual está definido en términos combinatorios.

Definición 1.10 *Un conjunto* $A \in [\omega]^\omega$ divide *a un conjunto* $B \in [\omega]^\omega$ *si tanto* $A \cap B$ *como* $B \setminus A$ *son infinitos. Una familia* $\mathcal{S} \subseteq [\omega]^\omega$ *es una* familia divisora *si para todo* $X \in [\omega]^\omega$ *existe* $A \in \mathcal{S}$ *tal que* A *divide a* X*. El* número de división $\mathfrak{s}$ *está definido de la siguiente manera:*

$$\mathfrak{s} = \text{mín}\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \subseteq [\omega]^\omega \wedge \mathcal{S} \textit{ es familia divisora}\}$$

Para el número de división se cumplen las siguientes desigualdades, las cuales se pueden consultar en [5].

Proposición 1.11 $\aleph_0 < \mathfrak{s} \leq \mathfrak{d}$. $\blacksquare$

1.2.4. Número de distributividad

El siguiente invariante cardinal es el número de distributividad $\mathfrak{h}$. Este invariante es sumamente importante para el desarrollo de este trabajo, pues el número de intersección, que se definirá en el siguiente capítulo, de la familia de ideales altos es $\mathfrak{h}$.

Definición 1.12 *Una familia $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ es* abierta *si es cerrada bajo casi-subconjuntos, es decir, si $A \in \mathcal{A}$ y $B \subseteq^* A$ entonces $B \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ es* densa *si para cada $X \in [\omega]^\omega$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \subseteq^* X$. El* número de distributividad $\mathfrak{h}$ *se define de la siguiente manera:*

$$\mathfrak{h} = \text{mín}\{|\mathcal{H}| : \forall \mathcal{A} \in \mathcal{H}(\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega) \wedge \mathcal{A} \text{ es densa y abierta} \wedge \bigcap \mathcal{H} = \emptyset\}$$

es decir, es la mínima cardinalidad de un conjunto de familias densas y abiertas cuya intersección es vacía.

La siguiente proposición establece una cota superior para $\mathfrak{h}$.

Proposición 1.13 (Blass [5]) $\mathfrak{h} \leq \text{mín}\{\mathfrak{s}, \mathfrak{b}\}$.

Prueba. Se verán las dos desigualdades. Sea $\mathcal{S} = \{S_\alpha : \alpha < \mathfrak{s}\}$ una familia divisora de cardinalidad $\mathfrak{s}$. Para cada $\alpha < \mathfrak{s}$ sea $\mathcal{A}_\alpha = \{A \in [\omega]^\omega : A \subseteq^* S_\alpha \vee A \cap S_\alpha =^* \emptyset\}$.

Entonces $\mathcal{A}_\alpha$ es una familia densa y abierta. Sea $B \subseteq^* A \in \mathcal{A}_\alpha$. Si $A \subseteq^* S_\alpha$, entonces $B \subseteq^* S_\alpha$ y por tanto $B \in \mathcal{A}_\alpha$. Si $A \cap S_\alpha =^* \emptyset$ entonces como $B \cap S_\alpha \subseteq^* A \cap S_\alpha$ se tiene $B \in \mathcal{A}_\alpha$, con lo cual se prueba que $\mathcal{A}_\alpha$ es abierta. Por otro lado, si $X \in [\omega]^\omega$ se tienen dos casos. Si $X \cap S_\alpha$ es infinito, entonces $X \cap S_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$ y $X \cap S_\alpha \subseteq^* X$. Si no es así, entonces $X \cap S_\alpha =^* \emptyset$ y por lo tanto, $X \in \mathcal{A}_\alpha$ lo que prueba que $\mathcal{A}_\alpha$ es densa.

Se afirma que $\bigcap\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha < \mathfrak{s}\}$ es vacío. Sea $X \in [\omega]^\omega$, como $\mathcal{S}$ es familia divisora, existe $\alpha < \mathfrak{s}$ tal que S_α divide a X, es decir, $X \cap S_\alpha$ y $X \setminus S_\alpha$ son infinitos. Por lo tanto $X \notin \mathcal{A}_\alpha$ y así $X \notin \bigcap\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha < \mathfrak{s}\}$. Con esto se prueba que $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{s}$.

Para verificar la otra desigualdad, sea $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\} \subseteq \omega^\omega$ una familia no acotada de funciones. Sin pérdida de generalidad, supóngase que esta familia consiste de funciones estrictamente crecientes.

Para cada $\alpha < \mathfrak{b}$, sea $\varphi_\alpha : [\omega]^2 \to \{0,1\}$ definida de la siguiente manera:

$$\varphi_\alpha(\{x,y\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < y \text{ y } f_\alpha(x) < y \\ 1 & \text{si } x < y \text{ y } y \leq f_\alpha(x). \end{cases}$$

Sea $\mathcal{A}_\alpha = \{A \in [\omega]^\omega : A \text{ es casi } \varphi_\alpha - \text{homogéneo}\}$. [3]

Es inmediato que $\mathcal{A}_\alpha$ es una familia abierta de conjuntos infinitos, es decir, si $A \in \mathcal{A}_\alpha$ y $B \subseteq^* A$, entonces $B \in \mathcal{A}_\alpha$. La familia $\mathcal{A}_\alpha$ es densa por el Teorema de Ramsey para conjuntos infinitos.[4]

Obsérvese que si X es conjunto φ_α-homogéneo y $\varphi''_\alpha[X]^2 = \{1\}$, entonces X es finito: sea x_0 el primer elemento de X, entonces $f_\alpha(x_0)$ es una cota superior de X, es decir, para toda $y \in X \setminus \{x_0\}$, $y \leq f_\alpha(x_0)$ pues $\varphi_\alpha(\{x_0, y\}) = 1$.

A continuación se mostrará que $\bigcap\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\} = \emptyset$. Para cada $A \in [\omega]^\omega$, sea $A = \{a_i : i \in \omega\}$ su enumeración en orden creciente y defínase $g_A : \omega \to \omega$ la función que a cada número natural x le asocia el segundo elemento de A que esté por encima de x, es decir, $g_A(x) = a_{n+2}$ si $x \in [a_n, a_{n+1})$ y $g_A(x) = a_1$ si $x \in [0, a_0)$, en caso de que $a_0 > 0$.

Si $\alpha < \mathfrak{b}$ es tal que f_α no es dominado por g_A, entonces $A \notin \mathcal{A}_\alpha$. En caso contrario, sea $k \in \omega$ tal que $A \setminus k$ es homogéneo. Como este conjunto es

[3]Recuérdese que dada una coloración $\varphi : [\omega]^2 \to \{0,1\}$, un conjunto $A \in [\omega]^\omega$ es *casi φ-homogéneo* si existe $n \in \omega$ tal que $A \setminus n$ es φ-homogéneo, es decir la imagen de $[A \setminus n]^2$ bajo φ, tiene cardinalidad 1.

[4]El Teorema de Ramsey para conjuntos infinitos afirma que si X es un conjunto infinito, $n, k \in \omega$, $n, k \geq 2$ y $\varphi : [X]^n \to k$, entonces existe $Y \in [X]^\omega$ tal que Y es φ-homogéneo.

infinito, entonces $\varphi''_\alpha[A \setminus k]^2 = \{0\}$. Sea $x \geq k$ tal que $g_A(x) < f_\alpha(x)$ y $n \in \omega$ tal que $x \in [a_n, a_{n+1})$. Entonces $a_{n+2} = g_A(x) < f_\alpha(x) < f_\alpha(a_{n+1})$ (la última desigualdad se cumple porque f_α es estrictamente creciente). Sin embargo, como $\varphi_\alpha(\{a_{n+1}, a_{n+2}\}) = 0$ se debe cumplir $f_\alpha(a_{n+1}) < a_{n+2}$, lo cual, con las últimas desigualdades, es una contradicción. ■

Originalmente, el número de distributividad fue estudiado por B. Balcar, J. Pelant y P. Simon en [2], donde muestran que $\mathfrak{h}$ es la altura mínima de un árbol base en $\mathcal{P}(\omega)/fin$. Para mostrar este hecho, primero se presentan algunos lemas.

Lema 1.14 *Sean $\kappa < \mathfrak{h}$ y $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una colección de familias densas y abiertas. Entonces $\bigcap\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es densa y abierta.*

Prueba. Es inmediato que la familia $\bigcap\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es abierta.

Para verificar la densidad, sea $X \in [\omega]^\omega$, para cada $\alpha < \kappa$ defínase el conjunto $\mathcal{D}_\alpha = \{A \in \mathcal{A}_\alpha : A \subseteq X\}$. Se tienen entonces menos de $\mathfrak{h}$ familias densas y abiertas de subconjuntos de X, por lo tanto existe un miembro común. Sea $Y \in \bigcap_{\alpha<\kappa} \mathcal{D}_\alpha$. Entonces $Y \in \mathcal{A}_\alpha$ para todo $\alpha < \kappa$ y $Y \subseteq X$. ■

Lema 1.15 *Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena maximal. Entonces $\mathcal{A}\downarrow = \{X \in [\omega]^\omega : \exists A \in \mathcal{A}(X \subseteq^* A\}$ es una familia abierta y densa. Toda familia abierta y densa tiene una subfamilia de esta forma.*

Prueba. Sea $A \in \mathcal{A}\downarrow$, si $B \subseteq^* A$, es inmediato que $B \in \mathcal{A}\downarrow$, lo cual prueba que la familia es abierta. Sea $X \in [\omega]^\omega$. Si $X \notin \mathcal{A}$ entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap X$ es infinito. Sea $Y = A \cap X$. Entonces $Y \in \mathcal{A}\downarrow$ y $Y \subseteq^* X$, lo cual prueba que la familia es densa.

Considérese ahora una familia densa y abierta $\mathcal{D}$ y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ una familia casi ajena, maximal respecto a las subfamilias de $\mathcal{D}$, la cual existe por el Lema de Kuratowski-Zorn. Se afirma que $\mathcal{A}$ es maximal sobre cualquier conjunto de familias ajenas. Sea $X \in [\omega]^\omega$, como $\mathcal{D}$ es denso, existe $Y \in \mathcal{D}$ tal que $Y \subseteq^* X$. Como $\mathcal{A}$ es maximal respecto a las subfamilias de $\mathcal{D}$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap Y$ es infinito. Entonces $A \cap X$ también lo es. De esta manera, $\mathcal{A}$ es familia casi ajena maximal y claramente $\mathcal{A}\downarrow \subseteq \mathcal{D}$. ■

Lema 1.16 *Si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal y $X \in [\omega]^\omega$, entonces X intersecta infinitamente a al menos dos elementos distintos de $\mathcal{A}$ si y sólo si $X \notin \mathcal{A}\downarrow$.*

Prueba. Sean $A, B \in \mathcal{A}$, $A \neq B$, tales que $|A \cap X| = |B \cap X| = \omega$, entonces $(X \cap B) \setminus A$ es un conjunto infinito y $(X \cap B) \setminus A \subseteq X \setminus A$, lo cual muestra que $X \not\subseteq^* A$. De la misma manera se prueba que $X \not\subseteq^* B$. Si $C \in \mathcal{A} \setminus \{A, B\}$, se aplica el mismo argumento, $(X \cap A) \setminus C$ es infinito y $(X \cap A) \setminus C \subseteq X \setminus C$, lo cual muestra que $X \not\subseteq^* C$. Con esto se tiene que $X \notin \mathcal{A}\downarrow$.

Por otro lado, si $X \notin \mathcal{A}\downarrow$, en particular, se tiene que $X \notin \mathcal{A}$ y por lo tanto existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap X$ es infinito. Pero también se cumple que $X \setminus A$ es infinito, y por lo tanto existe $B \in \mathcal{A} \setminus \{A\}$ tal que $(X \setminus A) \cap B$ es infinito. ■

Definición 1.17 *Un* árbol base *es una familia $\mathcal{T} \subseteq [\omega]^\omega$ que cumple las siguientes propiedades:*

1. *$\mathcal{T}$ es un árbol ordenado con $\supseteq^*$, con raíz ω.*[5]

[5]Un *árbol* es un conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{T}, \leq)$ tal que para toda $x \in \mathcal{T}$ el

2. *Cada nivel de $\mathcal{T}$ (excepto la raíz) es una familia casi ajena maximal.*

3. *Para cada $X \in [\omega]^\omega$ existe $A \in \mathcal{T}$ tal que $A \subseteq^* X$.*

Teorema 1.18 (Balcar, Pelant, Simon [2]) $\mathfrak{h}$ *es la altura mínima de un árbol base.*

Prueba. Sea $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha < \mathfrak{h}\}$ una colección de familias densas abiertas con intersección vacía. Se construye un árbol base $\mathcal{T}$ por recursión sobre $\alpha < \mathfrak{h}$. Para el nivel 0, sea $\mathcal{T}_0 = \{\omega\}$.

Sea $\gamma < \mathfrak{h}$ un ordinal límite y supóngase definido $\mathcal{T}_\alpha$ para $\alpha < \gamma$ como una familia casi ajena maximal. Por el Lema 1.15 la familia $\mathcal{T}_\alpha \downarrow$ es densa y abierta para cada $\alpha < \gamma$. Como $\gamma < \mathfrak{h}$, la intersección $\bigcap_{\alpha<\gamma} \mathcal{T}_\alpha \downarrow$ es densa y abierta (Lema 1.14). Nuevamente por el Lema 1.15 existe una familia casi ajena maximal $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \downarrow \subseteq \bigcap_{\alpha<\gamma} \mathcal{T}_\alpha \downarrow$. Sea $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{A}$.

El caso sucesor se divide en dos subcasos. Supóngase que se ha definido el nivel $\mathcal{T}_{\alpha+2n}$ como una familia casi ajena maximal. Entonces $\mathcal{T}_{\alpha+2n} \downarrow$ es una familia abierta y densa y por lo tanto $\mathcal{T}_{\alpha+2n} \downarrow \cap \mathcal{A}_{\alpha+2n} \cap \mathcal{A}_{\alpha+2n+1}$ es familia abierta y densa (Lema 1.14). Por el Lema 1.15 existe una familia casi ajena maximal $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \downarrow \subseteq \mathcal{T}_{\alpha+2n} \downarrow \cap \mathcal{A}_{\alpha+2n} \cap \mathcal{A}_{\alpha+2n+1}$. Sea $\mathcal{T}_{\alpha+2n+1} = \mathcal{A}$.

Supóngase ahora que se ha definido el nivel $\mathcal{T}_{\alpha+2n+1}$. Se dice que un conjunto $X \in [\omega]^\omega$ es *activo* en el nivel $\alpha + 2n + 1$ si existen $\mathfrak{c}$ elementos de $\mathcal{T}_{\alpha+2n+1}$ que intersectan infinitamente a X.

---

conjunto $x_< = \{y \in X : y \le x \wedge y \neq x\}$ es un buen orden.

Si existe un elemento $x \in \mathcal{T}$ tal que para todo $y \in \mathcal{T}$, $x \le y$ o $y \le x$, entonces a x se le llama *raíz*. Dado un ordinal α, se define el nivel α-ésimo como $\mathcal{T}_\alpha = \{x \in X : \text{tipo de orden } (x_<) = \alpha\}$.

Para cada conjunto activo $X \in [\omega]^\omega$, selecciónese $Y_X \in \mathcal{T}_{\alpha+2n+1}$ de tal manera que $X \cap Y_X$ sea infinito, de manera inyectiva. Considérese una partición de Y_X en dos conjuntos infinitos Y_X^0, Y_X^1. El nivel $\mathcal{T}_{\alpha+2n+2}$ queda determinado por los conjuntos de la forma Y_X^0, Y_X^1 con X activo en el nivel anterior y todos los conjuntos del nivel $\mathcal{T}_{\alpha+2n}$ que no fueron seleccionados. Es claro entonces que el árbol así construido cumple las propiedades 1 y 2.

Para mostrar que cumple la propiedad 3 se tiene que verificar que cada $X \in [\omega]^\omega$ es activo en algún nivel $\alpha + 2n + 1$.

Para lograr esto, se construye un subárbol binario $\mathcal{T}'$ de $\mathcal{T}$ de altura ω. Se define la raíz de $\mathcal{T}'$ como $\{\omega\}$. Supóngase que se ha construido el nivel n-ésimo $\mathcal{T}'_n$ de $\mathcal{T}'$ el cual consiste de 2^n elementos (todos en el mismo nivel, digamos α_n, de $\mathcal{T}$), de tal manera que todos los elementos de ese nivel intersectan infinitamente a X. Sea $Z \in \mathcal{T}'_n$, dado que $X \cap Z$ es infinito, existe $\alpha < \mathfrak{h}$ tal que $Z \cap X \notin \mathcal{A}_\alpha$. α pude ser de la forma $\alpha = \gamma + 2n$ o bien, $\gamma + 2n + 1$ para γ límite (en caso de que α sea límite, se tiene $n = 0$). En cualquiera de los dos casos, se cumple que $Z \cap X \notin \mathcal{T}_{\gamma+2n+1} \downarrow$.

Obsérvese que para cualquier conjunto infinito Y se cumple la propiedad que si $Y \notin \mathcal{T}_\alpha \downarrow$ para algún nivel α, entonces $Y \notin \mathcal{T}_\beta \downarrow$ para todo $\beta > \alpha$. Por esta observación, $Z \cap X \notin \mathcal{T}_\delta \downarrow$ para todo $\delta > \gamma + 2n + 1$.

Por el Lema 1.16, se tiene que $Z \cap X$ intersecta infinitamente a al menos dos conjuntos del algún nivel δ, para δ suficientemente grande. Se puede elegir un α_{n+1} lo suficientemente grande para que cada $Z \in \mathcal{T}'_n$, $Z \cap X$ intersecte infinitamente a al menos dos conjuntos distintos A_Z, B_Z del nivel $\mathcal{T}_{\alpha_{n+1}}$. El nivel $\mathcal{T}'_{n+1}$ queda determinado por $\{A_Z, B_Z : Z \in \mathcal{T}'_n\}$. Obsérvese que $A_Z, B_Z \subseteq^* Z$ pues, en caso contrario, deberían ser casi ajenos con Z.

Una vez que se ha construido el árbol $\mathcal{T}'$ de altura ω, se tiene que $\gamma = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$ es un ordinal menor que $\mathfrak{h}$, pues $\mathfrak{h}$ es un cardinal regular, por lo tanto, existe un nivel de la forma $\gamma + 2n + 1$ en $\mathcal{T}$.

Dada una rama infinita del subárbol $\mathcal{T}'$, se puede formar una sucesión numerable casi decreciente de casi subconjuntos de X intersectando a cada elemento de la rama con X, sea $X = A_0 \supseteq^* A_1 \ldots$ dicha sucesión. Sea X' tal que $X' \subseteq^* A_i$ para toda $i \in \omega$ (X' se puede construir por recursión sobre los naturales, eligiendo $x_0 \in A_0$ y $x_{n+1} \in \bigcap_{j \leq n+1} A_j$, con x_{n+1} distinto de todos los anteriores). Entonces existe $Y \in \mathcal{T}_{\gamma+2n+1}$ tal que $X' \cap Y$ es infinito, pues $\mathcal{T}_{\gamma+2n+1}$ es una familia casi ajena maximal. Finalmente, obsérvese que distintas ramas generan distintos conjuntos en $\mathcal{T}_{\gamma+2n+1}$ y por lo tanto X es activo en el nivel $\gamma + 2n + 1$.

A continuación se verifica que si $\kappa < \mathfrak{h}$ y $\mathcal{T}$ es un árbol de altura κ que cumple las propiedades 1 y 2, entonces no cumple la propiedad 3.

Sea $\mathcal{T}_\alpha$ el nivel α-ésimo del árbol. Dado que cada nivel es una familia casi ajena maximal, entonces $\mathcal{T}_\alpha \downarrow$ es una familia densa y abierta. Como $\kappa < \mathfrak{h}$, existe $X \in [\omega]^\omega$ tal que $X \in \mathcal{T}_\alpha \downarrow$ para cada $\alpha < \kappa$.

Si no existe $A \in \mathcal{T}$ tal que $A \subseteq^* X$ entonces X muestra que $\mathcal{T}$ no cumple la propiedad 3.

Si existe $A \in \mathcal{T}$ tal que $A \subseteq^* X$ entonces $A \in \mathcal{T}_\alpha$ para algún $\alpha < \kappa$ y como $X \in \mathcal{T}_\alpha \downarrow$, entonces existe $B \in \mathcal{T}_\alpha$ tal que $X \subseteq^* B$. Pero como $\mathcal{T}_\alpha$ es familia casi ajena maximal y $A \subseteq^* X \subseteq^* B$ entonces $A =^* B =^* X$.

Considérese una partición de X en dos conjuntos infinitos ajenos X_1 y X_2. Entonces X_1 muestra que $\mathcal{T}$ no cumple 3. Supóngase que existe A_0 tal que $A_0 \subseteq^* X_0$, en tal caso $A_0 \subseteq X_0 \subsetneq X =^* A$ y por lo tanto $A_0 \in \mathcal{T}_\beta$ para algún $\beta > \alpha$. Sea $B_0 \in \mathcal{T}_\beta$ tal que $X \subseteq^* B_0$. Entonces $A_0, B_0 \in \mathcal{T}_\beta$, $A_0 \subseteq^* B_0$, pero $B_0 \not\subseteq^* A_0$ pues $X_1 \subseteq B_0 \setminus A_0$, lo cual contradice que $\mathcal{T}_\beta$ es familia casi ajena maximal. ■

1.3. Forcing

La técnica de *forcing* fue introducida por Paul Cohen en [7] para probar la consistencia de la negación de la Hipótesis del Continuo con los axiomas de **ZFC**. A partir de entonces esta técnica ha sido ampliamente estudiada y utilizada para pruebas de consistencia en problemas de teoría de conjuntos, análisis, topología y álgebra, por mencionar algunas.

En esta subsección se establecen algunas nociones elementales de forcing con la finalidad de aclarar la notación que se utiliza. No se presentan pruebas de las proposiciones, pero se refiere al lector a [20], como la principal referencia de la teoría básica de forcing.

1.3.1. Órdenes parciales y extensiones genéricas

Sea $(\mathbb{P}, \leq)$ un orden parcial. A los elementos de $\mathbb{P}$ se les llaman *condiciones* y se dice que una condición q es *más fuerte* que p (o que posee más información) si $q \leq p$. Siempre se considerarán órdenes parciales con elemento máximo $1_{\mathbb{P}}$. Dadas dos condiciones $p, q \in \mathbb{P}$ se dice que p y q son *compatibles* si existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$. En otro caso, se dice que p y q son *incompatibles*, lo cual se denota $p \perp q$.

Un subconjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}$ es una *anticadena* si para todo $p, q \in \mathcal{A}$, $p \perp q$. Un orden parcial $\mathbb{P}$ cumple la *condición de la cadena contable* (c.c.c) si toda anticadena $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}$ es de cardinalidad a lo más numerable.

Un subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ es *denso* si para todo $p \in \mathbb{P}$ existe $q \in D$ tal que $q \leq p$.

Un subconjunto $G \subseteq \mathbb{P}$ es un *filtro* si se cumple que

1. Si $p \in G$ y $p \leq q$ entonces $q \in G$.

2. Si $p, q \in G$ entonces existe $r \in G$ tal que $r \leq p, q$.

Considérese un modelo M de **ZFC** y $\mathbb{P} \in M$ un order parcial. Un filtro G es llamado $\mathbb{P}$-*genérico sobre* M si para cada subconjunto denso D tal que $D \in M$ se cumple que $D \cap G \neq \emptyset$.

Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial. Se dice que $\mathbb{P}$ es *separativo* si para todo $p, q \in \mathbb{P}$, si $p \neq q$, entonces existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \perp q$ o $r \leq q$ y $r \perp p$. Los órdenes parciales separativos cumplen además la siguiente propiedad: si $p \in \mathbb{P}$ entonces existen $q, r \leq p$ tales que $q \perp r$. Si $\mathbb{P}$ es un orden parcial separativo, se puede mostrar que *en* M no existen filtros $\mathbb{P}$-genéricos sobre M.

Dado un modelo M y un orden parcial $\mathbb{P} \in M$ separativo, mediante la técnica de *forcing* se construye otro modelo, denotado $M[G]$ el cual cumple $M \subseteq M[G]$ y el conjunto de ordinales es el mismo en los dos modelos, además $G \in M[G]$. El modelo $M[G]$ satisface los axiomas de **ZFC** que satisface M además de cumplir propiedades combinatorias establecidas por el orden parcial $\mathbb{P}$.

Los elementos de $M[G]$ no los conoce M, sin embargo se puede hablar de ellos mediante $\mathbb{P}$-*nombres*, los cuales son definidos de manera recursiva y son interpretados por el filtro genérico. Los $\mathbb{P}$- nombres para los elementos de

$M[G]$ se definen de la siguiente manera: $\dot{x}$ es un $\mathbb{P}$-nombre si $\dot{x}$ es un conjunto de pares ordenados tal que para todo $(\tau, p) \in \dot{x}$, $p \in \mathbb{P}$ y τ es un $\mathbb{P}$-nombre.

Dado $\dot{x}$ un $\mathbb{P}$-nombre, *la interpretación* de $\dot{x}$ se denota por $\dot{x}_G$, el cual es un objeto en $V[G]$ y se define de manera recursiva: $\dot{x}_G = \{\tau_G : (\tau, p) \in \dot{x} \wedge p \in G\}$.

Dada una fórmula $\phi(x_0, \ldots, x_n)$ con x_i variables libres y una condición $p \in \mathbb{P}$, se define la relación *p fuerza* ϕ de la siguiente manera: $p \Vdash$ "$\phi(\tau_1 \ldots \tau_n)$" si y sólo si para todo G filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in G$, se tiene que $V[G] \models \phi((\tau_1)_G, \ldots, (\tau_n)_G)$ donde τ_i son $\mathbb{P}$-nombres y $(\tau_i)_G$ son las interpretaciones de los nombres por el filtro G.

Aun cuando esta relación es "externa" al modelo M, es posible definirla de tal manera que dentro de M se puede decidir cuándo $p \Vdash$ "ϕ".

La siguiente afirmación, establece algunos hechos elementales.

Afirmación 1.19 *1. $M[G] \models \phi$ si y sólo si $p \Vdash$ "ϕ" para alguna $p \in G$.*

2. Si $p \Vdash$ "ϕ" y $q \leq p$ entonces $q \Vdash$ "ϕ".

3. $p \Vdash$ "$p \in \dot{G}$". ■

La primera afirmación dice cómo probar que una fórmula es verdadera en la extensión genérica, basta con mostrar que la fórmula es forzada por alguna condición que pertenezca a G o equivalentemente (de hecho, la manera más usual de hacerlo) mostrando que el conjunto $\{p \in \mathbb{P} : p \Vdash \phi\}$ es denso en $\mathbb{P}$.

La segunda afirmación es un principio de coherencia: si un enunciado ha sido forzado por alguna condición, entonces todas las condiciones más fuertes siguen forzando el mismo enunciado.

1.3.2. Iteraciones

Considérese un orden parcial $\mathbb{P}$ y $\dot{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{P}$-nombre para un orden parcial (es decir, $\dot{\mathbb{Q}}$ representa a un conjunto, posiblemente un ordinal, un orden parcial sobre el conjunto y a un elemento máximo del orden). Se define *la iteración de dos pasos* $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} = \{\langle p, \tau\rangle : p \in \mathbb{P} \wedge \tau \in dom(\dot{\mathbb{Q}}) \wedge p \Vdash \text{“}\tau \in \dot{\mathbb{Q}}\text{”}\}$ con el siguiente orden:

$$\langle p, \tau\rangle \leq_{\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}}} \langle q, \sigma\rangle$$

si y sólo si

$$p \leq_{\mathbb{P}} q \text{ y } p \Vdash \text{“}\tau \leq_{\dot{\mathbb{Q}}} \sigma\text{”}.$$

Si K es un filtro $\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}}$-genérico sobre M, entonces K se puede descomponer en dos filtros G y H, donde G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M y H es $\dot{\mathbb{Q}}_G$-genérico sobre $M[G]$, además $M[K] = M[G][H]$.

Sea δ un ordinal en M. Para la construcción de la iteración de forcing de longitud δ, sea $\mathscr{I}$ un ideal sobre δ que contiene a todos los subconjuntos finitos de δ. Una *iteración de forcing de longitud* δ *con soporte* en $\mathscr{I}$ es un objeto en M de la forma

$$\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha, \alpha < \delta\rangle$$

que cumple las siguiente propiedades.

1. Cada $\mathbb{P}_\alpha$ es un orden parcial (esto significa que tiene asociado un orden $\leq_{\mathbb{P}_\alpha}$ y un elemento máximo $1_{\mathbb{P}_\alpha}$). Los elementos de $\mathbb{P}_\alpha$ son sucesiones de longitud α. Si $p \in \mathbb{P}_\alpha$ y $\beta < \alpha$ entonces $p \restriction \beta \in \mathbb{P}_\beta$.

2. Cada $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ es un $\mathbb{P}_\alpha$ nombre para un orden parcial. Si $\langle \rho_\xi : \xi < \alpha\rangle \in \mathbb{P}_\alpha$, entonces cada $\rho_\xi \in dom(\dot{\mathbb{Q}}_\alpha)$. El elemento máximo $1_{\mathbb{P}_\alpha}$ de $\mathbb{P}_\alpha$ es la sucesión $\langle \rho_\xi : \xi < \alpha\rangle$ tal que $\rho_\xi = 1_{\dot{\mathbb{Q}}_\rho}$ para todo $\rho < \alpha$.

3. Se define el *soporte* de una condición $\langle \rho_\xi : \xi < \alpha \rangle$ como $supp(\langle \rho_\xi : \xi < \alpha \rangle) = \{\xi < \alpha : \rho_\xi \neq 1_{\dot{\mathbb{Q}}_\rho}\}$.

Las propiedades que se deben cumplir sobre la recursión son enumeradas a continuación.

4. Paso base. $\mathbb{P}_0 = \{0\}$.

5. Paso sucesor. Si $p = \langle \rho_\xi : \xi \leq \alpha \rangle$ entonces $p \in \mathbb{P}_{\alpha+1}$ si y sólo si $p \upharpoonright \xi \in \mathbb{P}_\xi$, $\rho_\xi \in dom(\dot{\mathbb{Q}}_\xi)$ y $p \upharpoonright \xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi}$ "$\rho_\xi \in \mathbb{Q}$".

6. Para γ un ordinal límite. Si $p = \langle \rho_\xi : \xi < \gamma \rangle$, entonces $p \in \mathbb{P}_\gamma$ si y sólo si para todo $\xi < \gamma$, $p \upharpoonright \xi \in \mathbb{P}_\xi$ y $supp(p) \in \mathscr{I}$. Si $p, p' \in \mathbb{P}_\gamma$, entonces $p \leq p'$ si y sólo si para todo $\xi < \gamma$, $p \upharpoonright \xi \leq p' \upharpoonright \xi$.

Si el ideal $\mathscr{I}$ consiste de los conjuntos finitos (numerables) de α se dice que la iteración es con *soporte finito* (*numerable*).

Capítulo 2

Número de interesección de familias de ideales altos

En el capítulo anterior se definió $\mathfrak{h}$ como la mínima cardinalidad de una colección de familias densas y abiertas cuya intersección es vacía.

La siguiente proposición muestra que $\mathfrak{h}$ es menor o igual que la mínima cardinalidad de una familia de ideales altos sobre ω, cuya intersección es el ideal fin.

Proposición 2.1 $\mathfrak{h} \leq \text{mín}\{|\Gamma| : \forall \mathscr{I} \in \Gamma(\mathscr{I} \text{ \textit{es ideal alto}}) \wedge \bigcap \Gamma = fin\}$.

Prueba. Sea $\kappa = \text{mín}\{|\Gamma| : \forall \mathscr{I} \in \Gamma(\mathscr{I} \text{ es ideal alto}) \wedge \bigcap \Gamma = fin\}$. Si $\mathscr{I}$ es un ideal alto, entonces $\mathscr{I} \setminus fin$ es una familia de subconjuntos infinitos de ω, abierta y densa. Sea $\{\mathscr{I}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ familia de ideales altos cuya intersección es fin. Por la observación anterior $\{\mathscr{I}_\alpha \setminus fin : \alpha < \kappa\}$ es una colección de familias abiertas densas con intersección vacía. Por lo tanto se cumple la desigualdad $\mathfrak{h} \leq \kappa$. ■

En particular, en la proposición anterior, la intersección de los ideales es un ideal (fin) que no es alto. Dada una clase Γ de ideales altos sobre ω, se define el número de intersección de la clase Γ de manera análoga, como la mínima cardinalidad de una subfamilia de Γ cuya intersección es un ideal no alto.

Definición 2.2 *Dada una clase Γ de ideales altos sobre ω se define el* número de intersección *de Γ como*

$$\mathfrak{h}_\Gamma = \text{mín}\{|\Omega| : \Omega \subseteq \Gamma \wedge (\bigcap \Omega \textit{ no es alto})\}.$$

Dado un ideal $\mathscr{I}$ sobre ω y $X \in \mathscr{I}^+$, la restricción de $\mathscr{I}$ a X es definida como $\mathscr{I} \upharpoonright X = \{I \cap X : I \in \mathscr{I}\}$. Una clase Γ de ideales es *cerrada bajo restricciones* si dados $\mathscr{I} \in \Gamma$, $X \in \mathscr{I}^+$ y f una biyección entre X y ω, el conjunto $\mathscr{I} \upharpoonright_f X = \{f[I \cap X] : I \in \mathscr{I}\}$ es un ideal sobre ω de la clase Γ. Todas las clases de ideales que se utilizan en este trabajo, son cerradas bajo restricciones. Se debe observar que si Γ es cerrada bajo restricciones entonces es cerrada bajo permutaciones (isomorfismos).

Proposición 2.3 *Sea Γ una clase cerrada bajo restricciones y $\Omega \subseteq \Gamma$. Si $\bigcap \Omega$ no es alto, entonces existe Ω' de la misma cardinalidad de Ω, tal que $\bigcap \Omega' = fin$*

Prueba. Dado que $\bigcap \Omega$ no es alto, existe $Y \in [\omega]^\omega$ tal que para todo $X \in \bigcap \Omega$, $X \cap Y$ es finito. Sea f una biyección entre Y y ω. Defínase $\Omega' = \{\mathscr{I} \upharpoonright_f Y : \mathscr{I} \in \Omega\}$. Ahora se mostrará que $\bigcap \Omega' = fin$, para lo cual, basta verificar que $\bigcap \{\mathscr{I} \upharpoonright Y : \mathscr{I} \in \Omega\} = [Y]^{<\omega}$. Supóngase que existe $X \in [Y]^\omega$ tal que $X \in \bigcap \{\mathscr{I} \upharpoonright Y : \mathscr{I} \in \Omega\}$, entonces, para cada $\mathscr{I} \in \Omega$ existe $I \in \mathscr{I}$ tal que

$X = I \cap Y$. Entonces $X \in \mathscr{I}$ para todo $\mathscr{I} \in \Omega$ y por lo tanto $X \in \bigcap \Omega$. Dado que $X \cap Y$ es infinito, se tiene una contradicción con la suposición inicial. ■

Como consecuencia de la proposición anterior, el número de intersección de una clase Γ de ideales altos se puede definir como la mínima cardinalidad de una subclase de Γ cuya intersección sea el ideal de los conjuntos finitos de ω, es decir,

$$\mathfrak{h}_\Gamma = \text{mín}\{|\Omega| : \Omega \subseteq \Gamma \wedge \bigcap \Omega = fin\}.$$

El Lema siguiente resultará de mucha utilidad para comparar los números de intersección de las familias de ideales.

Lema 2.4 *Sean Γ y Δ dos clases de ideales altos. Si para cada $\mathscr{I} \in \Gamma$ existe $\mathscr{J} \in \Delta$ tal que $\mathscr{J} \subseteq \mathscr{I}$, entonces $\mathfrak{h}_\Delta \leq \mathfrak{h}_\Gamma$. En particular, si $\Gamma \subseteq \Delta$ entonces $\mathfrak{h}_\Delta \leq \mathfrak{h}_\Gamma$.*

Prueba. Sea $\{\mathscr{I}_\alpha : \alpha < \mathfrak{h}_\Gamma\} \subseteq \Gamma$ una familia de ideales tal que $\bigcap\{\mathscr{I}_\alpha : \alpha < \mathfrak{h}_\Gamma\} = fin$. Para cada $\alpha < \mathfrak{h}_\Gamma$ sea $\mathscr{J}_\alpha \subseteq \mathscr{I}_\alpha$ tal que $\mathscr{J}_\alpha \in \Delta$. Entonces $\{\mathscr{J}_\alpha : \alpha < \mathfrak{h}_\Gamma\} \subseteq \Delta$ y $\bigcap\{\mathscr{J}_\alpha : \alpha < \mathfrak{h}_\Gamma\} = fin$. Por lo tanto $\mathfrak{h}_\Delta \leq \mathfrak{h}_\Gamma$. ■

A continuación se muestra que existen clases de ideales que pueden tomar los valores extremos posibles: $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{c}$.

Proposición 2.5 $\mathfrak{h}_{maximal} = \mathfrak{c}$.

Prueba. Se verificará que la intersección de menos que $\mathfrak{c}$ ideales maximales es un ideal alto. Sean $\kappa < \mathfrak{c}$, $\{\mathscr{I}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de ideales maximales y $A \in [\omega]^\omega$. Se mostrará que existe $X \in [A]^\omega$ tal que $X \in \bigcap\{\mathscr{I}_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

Sea $\{A_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ una familia casi ajena de subconjuntos infinitos de A. Dada $\alpha < \kappa$ fija, se afirma que $|\{A_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} \setminus \mathscr{I}_\alpha| \leq 1$. Supóngase que existe $\xi < \mathfrak{c}$ tal que $A_\xi \notin \mathscr{I}_\alpha$ y sea $\zeta \neq \xi$. Como $\mathscr{I}_\alpha$ es maximal y $A_\xi \notin \mathscr{I}_\alpha$, entonces $\omega \setminus A_\xi \in \mathscr{I}_\alpha$. Por otro lado, como la familia es casi ajena, $A_\xi \cap A_\zeta =^* \emptyset$ entonces $A_\zeta \subseteq^* \omega \setminus A_\xi$. Por lo tanto $A_\zeta \in \mathscr{I}_\alpha$.

Por el principio de casillas, se concluye que existe $\xi_0 < \mathfrak{c}$ tal que $A_{\xi_0} \in \mathscr{I}_\alpha$ para todo $\alpha < \kappa$. Tomando $X = A_{\xi_0}$ se concluye la demostración. ■

Por otro lado, la clase de los ideales MAD, así como la clase de los ideales magros tienen el número de intersección más pequeño posible: $\mathfrak{h}$.

Proposición 2.6 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{MAD} = \mathfrak{h}_{magro}$.

Prueba. Es suficiente probar $\mathfrak{h}_{magro} \leq \mathfrak{h}_{MAD} \leq \mathfrak{h}$. A. Mathias probó en [21] que los ideales basados en familias MAD son magros (es decir, MAD $\subseteq$ magros) y por el Lema 2.4 se tiene la primera desigualdad.

Para verificar la segunda desigualdad, basta observar que toda familia densa y abierta $\mathcal{D}$, contiene una familia casi ajena maximal $\mathcal{A}$, tal que $\mathcal{A}\downarrow = \{X \in [\omega]^\omega : \exists A \in \mathcal{A}(X \subseteq^* A)\} \subseteq \mathcal{D}$ (proposición 6.18 de [5], Lema 1.15 en este trabajo).

Dado que cada ideal alto $\mathscr{I}$ es una familia densa abierta, sea $\mathcal{A}_\mathscr{I}$ una familia casi ajena maximal tal que $\mathcal{A}_\mathscr{I}\downarrow \subseteq \mathscr{I}$. Sea $\mathscr{J}$ el ideal generado por $\mathcal{A}_\mathscr{I}\downarrow$. Entonces se cumple $\mathscr{J} \subseteq \mathscr{I}$. Por el Lema 2.4 se tiene la desigualdad. ■

En cualquier espacio topológico se cumplen las contenciones $F_\sigma \subseteq \cdots \subseteq$ *Borel* $\subseteq$ *analítico*, en particular, los ideales sobre ω de dichas clases las cumplen. Por el Lema 2.4 se cumplen las siguientes desigualdades.

Proposición 2.7 $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{h}_{analítico} \leq \mathfrak{h}_{Borel} \leq \cdots \leq \mathfrak{h}_{F_\sigma}$. ■

El siguiente Teorema relaciona los números de intersección de algunas clases de ideales que ya se han definido.

Teorema 2.8 $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{h}_{\omega-hitting} \leq \mathfrak{h}_{Borel-\omega-hitting} \leq \mathfrak{h}_{P\text{-}ideal\text{-}analítico} \leq \mathfrak{h}_{sumable}$.

Prueba. Para probar estas desigualdades se utilizará el Lema 2.4, para lo cual se probará que la clase de los ideales sumables está contenida en la clase de los P-ideales analíticos y que éstos a su vez están contenidos en la clase de los ideales Borel-ω-hitting.

Sea $\mathscr{I}$ un ideal sumable y $f : \omega \to (0, \infty)$ tal que $\mathscr{I} = \{A \subseteq \omega : \sum_{n\in A} f(n) < \infty\}$. Considérese la submedida semicontinua inferior asociada a f, $\varphi : \mathcal{P}(\omega) \to [0, \infty]$ dada por $\varphi(A) = \sum_{n\in A} f(n)$. Entonces se cumple la igualdad $Exh(\varphi) = Fin(\varphi) = \mathscr{I}$ y, por el Teorema de Solecki (Teorema 1.3), $\mathscr{I}$ es un ideal P-analítico.

Sea $\mathscr{I}$ un ideal P-analítico. Por el Teorema de Solecki, $\mathscr{I}$ es de complejidad $F_{\sigma\delta}$. Ya se ha verificado que los ideales P-analíticos son ω-hitting (ver pág. 7), con lo que se concluye la segunda contención.

Las primeras dos desigualdades son inmediatas. ■

Recordemos que los ideales que pertenecen a las clases ED_{fin} y ED son de complejidad analítica F_σ, además, como se cumple la relación $ED_{fin} \subseteq ED$, se tiene la siguiente

Proposición 2.9 $\mathfrak{h}_{F_\sigma} \leq \mathfrak{h}_{ED} \leq \mathfrak{h}_{ED_{fin}}$. ■

Como se había mencionado anteriormente, los números de intersección de las clases ED_{fin} y ED admiten una carateterización combinatoria sencilla, misma que a continuación se enuncia:

$$\mathfrak{h}_{ED} = \text{mín}\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \omega^\omega, \forall A \in [\omega]^\omega \exists f \in \mathcal{F}(\forall k \exists^\infty n(|f^{-1}(n) \cap A| > k))\} \text{ y}$$

$$\mathfrak{h}_{ED_{fin}} = \text{mín}\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \omega^\omega, \forall A \in [\omega]^\omega \exists f \in \mathcal{F} \text{ finito a uno } (\forall k \exists^\infty n(|f^{-1}(n) \cap A| > k))\}.$$

El siguiente Teorema muestra que $\mathfrak{h}_{ED_{fin}}$ es igual a $\mathfrak{b}$.

Teorema 2.10 $\mathfrak{h}_{ED_{fin}} = \mathfrak{b}$

Prueba. Primero se verá que $\mathfrak{h}_{ED_{fin}} \leq \mathfrak{b}$. Sea $\kappa < \mathfrak{h}_{ED_{fin}}$ y $\langle P_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ una familia de particiones en intervalos de ω, donde $P_\alpha = \{I_n^\alpha : n \in \omega\}$. Se verificará que existe una partición en intervalos que domina a P_α para toda $\alpha < \kappa$. Para cada $\alpha < \kappa$, sea $f_\alpha : \omega \to \omega$ definida mediante $f_\alpha(x) = n$, donde $x \in I_n^\alpha$. De la definición de f_α se tiene que $f_\alpha^{-1}(n) = I_n^\alpha$. La familia $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de funciones finito a uno de cardinalidad menor que $\mathfrak{h}_{ED_{fin}}$, por lo tanto existe $A \in [\omega]^\omega$ tal que para cada $\alpha < \kappa$ existen k_α y m_α tales que $|f_\alpha^{-1}(n) \cap A| \leq k_\alpha$ para todo $n > m_\alpha$. Sea $e_A : \omega \to \omega$ la función enumeración de A, es decir, $e_A(n)$ es el n-ésimo elemento del conjunto A. Para cada $n \geq 1$ sea $s_k = \sum_{i=0}^k i$ y con esto se define la siguiente partición en intervalos:

$$\begin{aligned} J_0 &= [0, e_A(0)); \\ J_{n+1} &= [e_A(s_n), e_A(s_{n+1})). \end{aligned}$$

Es decir, los intervalos están definidos de tal manera que para todo $n \in \omega$, $|J_n \cap A| = n$ (en el caso que $0 \in A$, entonces el intervalo J_0 es vacío, por lo tanto no se considera en la partición que se define a continuación). Se afirma que $P = \{J_n : n \in \omega\}$ domina a P_α para cada $\alpha < \kappa$. Sea $\alpha < \kappa$ y considérese los correspondientes k_α, m_α tales que para todo $n > m_\alpha$, $|I_n^\alpha \cap A| \leq k_\alpha$. Sea $N \in \omega$ que cumpla $N > \text{máx}\{3k_\alpha, m_\alpha\}$ y que exista $k \geq m_\alpha$ tal que $s_{N-1} \in I_k^\alpha$. Esta última condición garantiza que para $m \geq N$, si I_r^α intersecta a J_m, entonces $r \geq m_\alpha$.

Se afirma que para cada $m \geq N$ existe $r \in \omega$ tal que $I_r^\alpha \subseteq J_m$. Sea $r_0 = \text{mín}\{n \in \omega : I_n^\alpha \cap J_m \neq \emptyset\}$. Por la observación previa, $r_0 \geq m_\alpha$. Si $I_{r_0}^\alpha \subseteq J_m$ se concluye la prueba. En otro caso, $I_{r_0+1}^\alpha \subseteq J_m$. Si no fuera el caso, entonces $J_m \subseteq I_{r_0}^\alpha \cup I_{r_0+1}^\alpha$ y por lo tanto $|A \cap J_m| \leq |A \cap (I_{r_0}^\alpha \cup I_{r_0+1}^\alpha)|$. Pero $|A \cap J_m| = m \geq N > 3k_\alpha$ mientras que $|A \cap (I_{r_0}^\alpha \cup I_{r_0+1}^\alpha)| = |(A \cap I_{r_0}^\alpha) \cup (A \cap I_{r_0+1}^\alpha)| \leq 2k_\alpha$ con lo que se tiene una contradicción.

Por otro lado, $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{h}_{ED_{fin}}$ como a continuación se muestra. Sea $\kappa < \mathfrak{b}$ y $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de funciones finito a uno. Para cada $\alpha < \kappa$ considérese la siguiente partición en intervalos de ω: sea $k_0 = \text{mín}\{m \in \omega : m > 0 \wedge f_\alpha^{-1}(0) \subseteq [0, m)\}$ (éste existe, porque f_α es finito a uno) y sea

$$I_0^\alpha = [0, k_0).$$

Supóngase definido I_n^α y sea $k_{n+1} = \text{mín}\{m \in \omega : m > k_n \wedge \forall x \in I_n^\alpha (\forall y \in f_\alpha^{-1}[f_\alpha(x)](y < m))\}$. Sea

$$I_{n+1}^\alpha = [k_n, k_{n+1}).$$

Sea $P_\alpha = \{I_n^\alpha : n \in \omega\}$. Obsérvese que por la definición de P_α, para cualquier $m \in \omega$, $f_\alpha^{-1}(m)$ está contenido en a lo más dos intervalos consecutivos. Sea $P = \{J_n : n \in \omega\}$ una partición dominante de la familia $\langle P_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ lo cual significa que para cada $\alpha < \kappa$ existe $N_\alpha \in \omega$ tal que para cada $n \geq N_\alpha$ existe $r \in \omega$ tal que $I_r^\alpha \subseteq J_n$. Sea A un selector infinito de P. Entonces A

cumple que para toda $\alpha < \kappa$ existen $k_\alpha, m_\alpha \in \omega$ tales que para toda $n \geq m_\alpha$, $|f_\alpha^{-1}(n) \cap A| \leq k_\alpha$.

Para $\alpha < \kappa$, considérese N_α y $r \in \omega$ tales que $I_r^\alpha \subseteq J_{N_\alpha}$. Sea $m_\alpha =$ máx$\{f_\alpha(x) : x \in I_r^\alpha\}$. Entonces para cada $n \geq m_\alpha$, $|f_\alpha^{-1}(n) \cap A| < 3$ pues $f_\alpha^{-1}(n)$ está contenido en a lo más dos intervalos de P_α. ■

Un ideal $\mathscr{I}$ sobre ω es un *Q-ideal*, si para cada partición $\langle F_n : n \in \omega \rangle$ de ω en conjuntos finitos, existe un conjunto X, $\mathscr{I}$-positivo tal que $|X \cap F_n| \leq 1$ para todo $n \in \omega$. El siguiente Teorema es de H. Hrušák, D. Meza y H. Minami ([15]).

Teorema 2.11 (Hrušák, Meza, Minami [15]) *Sea $\mathscr{I}$ un ideal boreliano. Los siguientes son equivalentes:*

1. *$\mathscr{I}$ no es Q-ideal*
2. *$\mathscr{I}$ es ω-hitting.* ■

Proposición 2.12

1. $\mathfrak{h}_{ED_{fin}} \leq \mathfrak{h}_{Borel-\omega-hitting}$
2. $\mathfrak{h}_{sumable} \leq \mathfrak{b}$.
3. $\mathfrak{h}_{Borel-\omega-hitting} \leq \mathfrak{h}_{fragmentado}$.
4. $\mathfrak{h}_{fragmentado} \leq \mathfrak{h}_{ED_{fin}}$.

Prueba.

Para probar 1 se utilizará el Teorema 2.11, para mostrar que cada ideal Borel-ω-hitting contiene un ideal de la clase ED_{fin}. Sea $\mathscr{I}$ un ideal Borel-ω-hitting. Por el Teorema 2.11, $\mathscr{I}$ no es Q-ideal, es decir, existe una partición $\langle F_n : n \in \omega \rangle$ de ω en conjuntos finitos, de tal manera que cualquier selector de la partición es elemento de $\mathscr{I}$. La función $f : \omega \to \omega$ definida por $f(x) = n$ donde $x \in F_n$, es una función finito a uno y el ideal de la clase ED_{fin} basado en f, cumple $\mathcal{ED}_f \subseteq \mathscr{I}$ pues cada elemento de $\mathcal{ED}_f$ es una unión finita de selectores de $\langle F_n : n \in \omega \rangle$. El Lema 2.4 concluye el resultado.

Para (2) se utilizará la caracterización de $\mathfrak{b}$ tomada de [11].

$$\mathfrak{b} = \text{mín}\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \subseteq c_0 \wedge \forall X \in [\omega]^\omega \exists s \in \mathcal{S}(s \restriction X \notin \ell_1)\},$$

donde c_0 y ℓ_1 denotan los espacios de Banach estándar. Sea $\kappa < \mathfrak{h}_{sumable}$ y $\mathcal{S} = \{s_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq c_0$. Sin perder generalidad se puede suponer que $\sum_{n\in\omega} s_\alpha(n) = \infty$. Para cada α considérese el ideal sumable $\mathscr{I}_\alpha = \{A \subseteq \omega : \sum_{n\in A} s_\alpha(n) < \infty\}$. Como $\kappa < \mathfrak{h}_{sumable}$ existe $A \in [\omega]^\omega$ tal que $A \in \bigcap_{\alpha<\kappa} \mathscr{I}_\alpha$, lo cual significa que $\sum_{n\in A} s_\alpha(n) < \infty$ para todo $\alpha < \kappa$, es decir $s_\alpha \restriction A \in \ell_1$. Por lo tanto $\kappa < \mathfrak{b}$.

Para 3, basta verificar que todo ideal fragmentado es un ideal Borel-ω-hitting. Sea $\mathscr{I}$ un ideal fragmentado, $\langle I_n : n \in \omega \rangle$ una partición de ω en conjuntos finitos, y $\langle \varphi_n : n \in \omega \rangle$ submedidas que verifican que $\mathscr{I}$ es fragmentado. Por definición $\mathscr{I}$ es de complejidad analítica F_σ.

Supóngase que $\mathscr{I}$ no es un ideal ω-hitting. Entonces por el Teorema 2.11, $\mathscr{I}$ es un Q-ideal, lo cual significa que existe un conjunto X $\mathscr{I}$-positivo tal que $|X \cap I_n| \leq 1$ para todo $n \in \omega$. Como X es $\mathscr{I}$-positivo, entonces $\sup\{\varphi_n(X \cap I_n) : n \in \omega\} = \sup\{\varphi_n(x_n) : X \cap I_n \neq \emptyset\} = \infty$. Por lo tanto existe un subconjunto infinito $Y \subseteq X$ tal que el n-ésimo elemento de Y tiene submedida al menos n. Por lo tanto $\mathscr{I}$ no es un ideal alto, lo cual es una contradicción.

Para la prueba de 4 basta observar que cada ideal de la clase ED_{fin} es un ideal fragmentado, definiendo $I_n = f^{-1}(n)$ y $\varphi_n(A) = |A|$ para $A \in \mathcal{P}(I_n)$. ■

Teorema 2.13 $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}_{ED_{fin}} = \mathfrak{h}_{Borel-\omega-hitting} = \mathfrak{h}_{analytic-P-ideal} = \mathfrak{h}_{sumable} = \mathfrak{h}_{fragmentado}$.

Prueba. Basta verificar $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}_{ED_{fin}} \leq \mathfrak{h}_{Borel-\omega-hitting} \leq \mathfrak{h}_{analytic-P-ideal} \leq \mathfrak{h}_{sumable} \leq \mathfrak{b}$.

El Teorema 2.10 es la primera igualdad, 1 de la proposición 2.12 es la primera desigualdad, las siguientes dos desigualdades son el Teorema 2.8 y la última desigualdad es 2 de proposición 2.12. Por otro lado, 3 y 4 de la proposición 2.12 muestran que $\mathfrak{h}_{Borel-\omega-hitting} \leq \mathfrak{h}_{fragmentado} \leq \mathfrak{h}_{ED_{fin}}$. ■

No es conocido si el número de intersección de la familia de ideales ED es igual a alguno de los invariantes cardinales clásicos, como en el caso de $\mathfrak{h}_{ED_{fin}}$, sin embargo se puede acotar estrechamente por ambos lados. El siguiente Teorema dará cuenta de ello. Para acotarlo por arriba y para facilitar los cálculos, se introduce el siguiente invariante cardinal.

$$\nu = \text{mín}\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \omega^\omega \wedge \forall A \in [\omega]^\omega \exists f \in \mathcal{F}(\forall n \in \omega(|A \cap f^{-1}(n)| = \aleph_0))\}.$$

Naturalmente, se tiene la desigualdad $\mathfrak{h}_{ED} \leq \nu$.

El siguiente Teorema acota a $\mathfrak{h}_{ED}$ inferior y superiormente.

Teorema 2.14 $\text{mín}\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\} \leq \mathfrak{h}_{ED} \leq \text{mín}\{\mathfrak{b}, \text{non}(\mathcal{N})\}$.

Prueba. Para probar la primera desigualdad se utilizará la caracterización de $\text{mín}\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\}$ que está dada en [5] (Teorema 3.5) la cual es la siguiente.

$$\text{mín}\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\} = \text{mín}\{|\mathcal{X}| : \forall \varphi \in \mathcal{X}(\varphi : [\omega]^2 \to 2) \wedge \forall A \in [\omega]^\omega \exists \varphi \in \mathcal{X} \\ \forall n \in \omega(\varphi''[A \setminus n]^2 = 2)\}.$$

Sea $\kappa < \text{mín}\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\}$ y $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \omega^\omega$. Para cada $\alpha < \kappa$ sea $\varphi_\alpha : [\omega]^2 \to 2$ como sigue: $\varphi_\alpha(\{m, n\}) = 0$ si y sólo si $f_\alpha(n) = f_\alpha(m)$. Como $\kappa < \text{mín}\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\}$, existe $A \in [\omega]^\omega$ tal que para cada $\alpha < \kappa$ existe $n_\alpha \in \omega$ tal que $|\varphi''_\alpha[A \setminus n_\alpha]^2| = 1$. Ahora se procede por casos.

Si $\varphi''_\alpha[A \setminus n_\alpha]^2 = \{0\}$, sea $a \in A \setminus n_\alpha$ y $m_\alpha > \text{máx}(\{f_\alpha(k) : k \leq n_\alpha + 1\} \cup \{f_\alpha(a)\})$, entonces $f_\alpha^{-1}(n) \cap A = \emptyset$ para todo $n > m_\alpha$. Si $\varphi''_\alpha[A \setminus n_\alpha]^2 = \{1\}$ y $m_\alpha = \text{máx}\{f_\alpha(k) : k \leq n_\alpha + 1\}$, entonces $|f_\alpha^{-1}(n) \cap A| \leq 1$ para todo $n > m_\alpha$. De lo anterior se concluye que $\kappa < \mathfrak{h}_{ED}$ y por lo tanto $\mathfrak{h}_{ED} \geq \text{mín}\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\}$.

Para la segunda desigualdad bastará probar que se cumple la relación $\nu \leq \text{non}(\mathcal{N})$.

Sea μ_0 la medida sobre ω dada por $\mu_0(n) = \frac{1}{2^{n+1}}$ y sea μ la medida producto sobre ω^ω. Sea $N_A = \{f \in \omega^\omega : \exists n \in \omega(|A \cap f^{-1}(n)| < \aleph_0)\}$. Supóngase que $\mu(N_A) = 0$. Sea $\kappa < \nu$ y $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ una familia de funciones de cardinalidad κ. Dado que $\kappa < \nu$, existe $A \in \omega^\omega$ tal que para toda $f \in \mathcal{F}$ existe $n \in \omega$ tal que $|f^{-1}(n) \cap A| < \aleph_0$. Entonces $\mathcal{F} \subseteq N_A$, y por lo tanto $\mathcal{F}$ es un conjunto nulo, con lo cual se tiene $\kappa < \text{non}(\mathcal{N})$ lo que prueba la desigualdad.

Para verificar que $\mu(N_A) = 0$, obsérvese que

$$N_A = \bigcup_{n \in \omega, F \in [A]^{<\omega}} N_A(n, F),$$

donde $N_A(n, F) = \{f \in \omega^\omega : f^{-1}(n) \cap A = F\}$.

Sea $n \in \omega$ y $F = \{a_0, \ldots, a_r\} \in [A]^{<\omega}$ (en orden ascendente). A continuación se mostrará que $\mu(N_A(n, F)) = 0$ y como la unión numerable de conjuntos de medida 0, tiene medida 0, entonces $\mu(N_A) = 0$.

$$\begin{aligned}
\mu(N_A(n,F)) &= \lim_{m\to\infty} (\mu_0(\omega \setminus \{n\}))^{a_0}(\mu_0(\{n\}))(\mu_0(\omega \setminus \{n\}))^{a_1-a_0-1}(\mu_0(\{n\})) \\
&\quad \ldots (\mu_0(\omega \setminus \{n\}))^{a_r-a_{r-1}-1}(\mu_0(\{n\}))(\mu_0(\omega \setminus \{n\}))^{m} \\
&= \lim_{m\to\infty} (\mu_0(\omega \setminus \{n\}))^{a_r-r-1}(\mu_0(\{n\}))^{r-1}(\mu_0(\omega \setminus \{n\}))^{m} \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)^{a_r-r-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^{r-1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)^{m} = 0.
\end{aligned}$$

■

Capítulo 3

Resultados de consistencia

En este capítulo se muestra que es consistente con **ZFC** que algunas de las desiguladades del capítulo anterior sean estrictas. Para exhibir el modelo donde se cumplen dichas desigualdades, se utilizará la técnica de *forcing iterado* con soporte numerable o finito.

Los resultados de consistencia que se han obtenido son los siguientes:

1. $\mathfrak{h} < \mathfrak{h}_{analítico}$.

2. $\mathfrak{h}_{F_\sigma} = \mathfrak{h}_{ED} < \mathfrak{h}_{\omega-hitting}$.

3. $\mathfrak{h}_{ED} = \mathfrak{h}_{\omega-hitting} < \mathfrak{b}$.

4. $\mathfrak{h}_{ED} < \mathrm{add}(\mathcal{M})$.

En cada una de las pruebas se presentan las nociones de forcing utilizadas, así como las propiedades del mismo que permiten realizar dicha prueba. Generalmente, se utilizará como modelo base un modelo de **CH**. En otro caso, el modelo será construido previamente.

3.1. Consistencia de $\mathfrak{h} < \mathfrak{h}_{analítico}$

Para realizar esta prueba se utilizan las siguientes nociones de *forcing*:

- **Forcing de Laver** $\mathbb{L}$. $T \in \mathbb{L}$ si y sólo si

    1. $T \subseteq \omega^{<\omega}$.
    2. T es un árbol (si $t \in T$ y $n < |t|$ entonces $t \restriction n \in T$).
    3. Existe $s_T \in T$ (llamado *stem* de T) tal que para todo $t \in T$, $s_T \subseteq t$ o bien, $t \subseteq s_T$.
    4. Para todo $t \in T$ tal que $s_T \subseteq t$, el conjunto $succ_T(t) = \{n \in \omega : t^\frown n \in T\}$ es infinito.

    El forcing de Laver está ordenado por la inclusión, es decir, si $T, T' \in \mathbb{L}$ entonces, $T' \leq T$ si y sólo si $T' \subseteq T$.

    El forcing de Laver agrega un real de la siguiente manera: si G es un filtro $\mathbb{L}$-genérico sobre V, entonces $f_G = \bigcup\{s_T : T \in G\}$. Obsérvese que $V[G] = V[f_G]$.

Observación 1 *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre ω. Si la condición 4 se cambia por:*

4'. Para todo $t \in T$ tal que $s_T \subseteq t$, el conjunto $succ_T(t) = \{n \in \omega : t^\frown n \in T\} \in \mathcal{F}$.

Se tiene el forcing de Laver asociado al filtro *$\mathcal{F}$, el cual se denota por $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$.*

- **Forcing de Mathias** $\mathbb{M}$. $p \in \mathbb{M}$ si y sólo si

  1. $p = \langle a, A \rangle$ donde $a \in [\omega]^{<\omega}$ y $A \in [\omega]^{\omega}$.
  2. $\max(a) < \min(A)$.

  Con el siguiente orden: $\langle a, A \rangle \leq \langle a', A' \rangle$ si y sólo si $a' \subseteq a$, $A \subseteq A'$ y $a \setminus a' \subseteq A'$.

  El forcing de Mathias agrega un real de la siguiente manera: si G es un filtro $\mathbb{M}$-genérico sobre V, sea $X_G = \bigcup\{a : \exists A \in [\omega]^{\omega} : \langle a, A \rangle \in G\}$. Se define (en $V[G]$), $f_G(n)$ como el n-ésimo elemento de X_G. Nuevamente se tiene $V[G] = V[X_G] = V[f_G]$.

  Observación 2 *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre ω. Si a las condiciones $\langle a, A \rangle$ se agrega la propiedad $A \in \mathcal{U}$, entonces se obtiene el* **Forcing de Mathias asociado a** $\mathcal{U}$*, denotado por* $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$.

Si $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son dos nociones de forcing, con $\mathbb{P}\mathbb{Q}$ se denota la iteración de dos pasos $\mathbb{P} * \mathbb{Q}$ y con $\mathbb{P}_{\omega_2}$ la iteración de $\mathbb{P}$ con soporte numerable de longitud ω_2.

Recuérdese que un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre ω es *selectivo* si para cualquier partición $\langle I_n : n \in \omega \rangle$ de ω, existe $n \in \omega$ tal que $I_n \in \mathcal{U}$ o existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $|U \cap I_n| \leq 1$ para todo $n \in \omega$. La existencia de ultrafiltros selectivos es independiente de **ZFC**, por ejemplo bajo **CH** se prueba que éstos existen, sin embargo, se han construido modelos donde no existen ultrafiltros selectivos, por ejemplo, S. Shelah en [28] presenta un modelo donde no existen *P-puntos*, en particular, no existen ultrafiltros selectivos.

Los siguientes resultados relacionados al forcing de Mathias son bien conocidos.

Lema 3.1 *Considérese $\mathcal{P}(\omega)/fin$ ordenado por $\subseteq^*$. Sea G un filtro $\mathcal{P}(\omega)/fin$-genérico sobre V. Entonces G es un ultrafiltro selectivo.*

Prueba. Primero se observa que dado que es $\mathcal{P}(\omega)/fin$ es σ-cerrado, no agrega reales nuevos, por lo tanto basta verificar que el ultrafiltro es selectivo para particiones de ω en V. Sea $\langle A_n : n \in \omega\rangle$ una partición de ω en conjuntos infinitos. Se afirma que el conjunto $\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{P}(\omega)/fin : B \Vdash$ "$\forall n \in \omega\,(|B \cap A_n| \leq 1) \vee \exists n \in \omega(B \subseteq A_n)$"$\}$ es denso (naturalmente se tiene $B \Vdash$ "$B \in G$"). Sea $A \in [\omega]^\omega$; si existe $n \in \omega$ tal que $A \cap A_n$ es infinito, sea $B = A \cap A_n$. En otro caso, $A \cap A_n$ es finito para toda $n \in \omega$. Sea $B \in [A]^\omega$ tal que $|B \cap A_n| \leq 1$ para todo $n \in \omega$. En cualquiera de los dos casos, $B \in \mathcal{B}$ y $B \subseteq A$, por lo tanto, $\mathcal{B}$ es denso, lo cual concluye la demostración. ∎

Lema 3.2 *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre ω, G un filtro $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$-genérico sobre V y $X_G = \bigcup\{a : \exists A \in [\omega]^\omega(\langle a, A\rangle \in G)\}$. Entonces $V[G] \models X_G \subseteq^* U$ para todo $U \in \mathcal{U}$.*

Prueba. Sea $U \in \mathcal{U}$. Entonces el conjunto $\{\langle a, A\rangle \in \mathbb{M}_{\mathcal{U}} : \langle a, A\rangle \Vdash$ "$X_G \subseteq^* U$"$\}$ es denso. Dada una condición $\langle a, A\rangle \in \mathbb{M}_{\mathcal{U}}$, considérese la pareja $\langle a, A \cap U\rangle$. Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, entonces $A \cap U \in \mathcal{U}$ por lo cual $\langle a, A \cap U\rangle \in \mathbb{M}$. Es inmediato que $\langle a, A \cap U\rangle \leq \langle a, A\rangle$ y $\langle a, A \cap U\rangle \Vdash$ "$X_G \subseteq^* U$". ∎

El Lema anterior muestra que $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$ agrega una pseudo-interesección al ultrafiltro $\mathcal{U}$.

Lema 3.3 (folklore) *$\mathbb{M} \simeq \mathcal{P}(\omega)/fin * \mathbb{M}_{\dot{\mathcal{U}}}$ donde $\dot{\mathcal{U}}$ es el ultrafiltro agregado por $\mathcal{P}(\omega)/fin$.*

Prueba. Considérese la función $\iota : \mathbb{M} \to \mathcal{P}(\omega)/fin * \mathbb{M}_{\dot{\mathcal{U}}}$ dada por $\iota(\langle a, A\rangle) = \langle A, (a, A)\rangle$. De la observación que para todo $A \in [\omega]^\omega$, $A \Vdash_{\mathcal{P}(\omega)/fin}$ "$A \in \dot{\mathcal{U}}$" se sigue que ι es un encaje denso. ■

De los Lemas anteriores se concluye que el forcing de Mathias se obtiene agregando un ultrafiltro selectivo y una pseudo-intersección del mismo. Además, si G es $\mathbb{M}$-genérico sobre V, entonces $V[G] = V[\mathcal{U}][X]$ donde $\mathcal{U}$ es el ultrafiltro selectivo agregado por $\mathcal{P}(\omega)$ y X es la pseudo-intersección de $\mathcal{U}$ agregada por $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$.

El siguiente Teorema de A.R.D. Mathias [21], será necesario para probar el resultado de consistencia.

Teorema 3.4 (Mathias [21]) *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre ω. Entonces $\mathcal{U}$ es selectivo si y sólo si $\mathcal{U} \cap \mathscr{I} \neq \emptyset$ para todo ideal analítico $\mathscr{I}$.* ■

Teorema 3.5 *Es consistente con* **ZFC** *que $\mathfrak{h} = \omega_1$ y $\mathfrak{h}_{analítico} = \omega_2$.*

Prueba. A. Dow probó en [8] que si $V \models$ **CH** y G es un filtro $\mathbb{LM}_{\omega_2}$-genérico sobre V, entonces $V[G] \models \mathfrak{h} = \omega_1$.

Se probará que $V[G] \models \mathfrak{h}_{analítico} = \omega_2$, para lo cual se mostrará que dada una familia $\langle \mathscr{I}_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle \in V[G]$ su intersección no es el conjunto fin.

Primero se afirma que existe $\beta < \omega_2$ tal que $\mathscr{I}_\alpha \in V[G_\beta]$ para todo $\alpha < \omega_1$. Sea $\alpha < \omega_1$. Dado que $\mathscr{I}_\alpha$ es analítico, es imagen continua de un espacio polaco. Como las funciones continuas están determinadas por los valores en un subespacio denso numerable, existe $\beta_\alpha < \omega_2$ tal que $\mathscr{I}_\alpha \in V[G_{\beta_\alpha}]$. Sea $\beta = \sup\{\beta_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, entonces $\mathscr{I}_\alpha \in V[G_\beta]$ y $\beta < \omega_2$.

Por la observación anterior, se tiene que $V[G_{\beta+1}] \simeq V[G_\beta][f][\mathcal{U}][X]$ donde f es el real de Laver, $\mathcal{U}$ es el ultrafiltro selectivo agregado por $\mathcal{P}(\omega)/fin$ y X

es la pseudointersección de $\mathcal{U}$ agregada por $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$. Por el Teorema de Mathias (Teorema 3.4), para cada $\alpha < \omega_1$, $\mathcal{U} \cap \mathscr{I}_\alpha \neq \emptyset$. Sea $I_\alpha \in \mathcal{U} \cap \mathscr{I}_\alpha$. Como X es pseudo-intersección de $\mathcal{U}$, $X \subseteq^* I_\alpha$ por lo cual $X \in \mathscr{I}_\alpha$, para toda $\alpha < \omega_1$, por lo tanto $X \in \bigcap\{\mathscr{I}_\alpha : \alpha < \omega_1\} \neq fin$. ■

3.2. Consistencia de $\mathfrak{h}_{F_\sigma} = \mathfrak{h}_{ED} < \mathfrak{h}_{\omega-hitting}$

Para esta prueba se utilizará la iteración de longitud ω_2 del forcing de Laver. La prueba está dividida en dos partes. En la primera se muestra que en la extensión de Laver, $\mathfrak{h}_{\omega-hitting} = \omega_2$, mientras que en la segunda parte se muestra que $\mathfrak{h}_{ED} = \omega_1$.

Considérese el caso particular de forzar una vez con el forcing de Laver. Sea V un modelo de CH y G un filtro $\mathbb{L}$-genérico sobre V, entonces en $V[G]$, $\mathfrak{h}_{ED} = \omega_2$

No fue posible establecer un teorema de preservación de $\mathfrak{h}_{ED}$ a lo largo de iteraciones. Sin embargo, el Teorema de preservación para iteraciones con soporte finito o numerable de M. Goldstern ([10]) fue utilizado por J. Pawlikowski en [23] para probar que non($\mathcal{N}$) se preserva a lo largo de la iteración de longitud ω_2 del forcing de Laver. En la segunda parte de esta sección se muestra este hecho y por el Teorema 2.14 se obtiene el resultado deseado.

Para establecer la primera parte del Teorema es necesario el siguiente

Lema 3.6 *Sea $\mathscr{I} \in V$ un ideal ω-hitting. Si G es un filtro $\mathbb{L}$-genérico y $A = ran(f_G)$, entonces $V[G] \models A \in \mathscr{I}$.*

Prueba. Basta probar que el conjunto $\{S \in \mathbb{L} : S \Vdash \text{“}A \in \mathscr{I}\text{”}\}$ es denso en $\mathbb{L}$. Sea $T \in \mathbb{L}$ una condición de Laver. Considérese la familia numerable de subconjuntos infinitos de ω, $\{succ_T(t) : t \in T \wedge s_T \subseteq t\}$. Como $\mathscr{I}$ es ω-hitting, existe $I \in \mathscr{I}$ tal que $I \cap succ_T(t)$ es infinito para cada $t \in T$ tal que $s_T \subseteq t$. Se define $T' \leq T$ por recursión como sigue:

- $s_{T'} = s_T$, $succ_{T'}(s_T) = succ_T(s_T) \cap I$,
- supóngase definido T' hasta el nivel $|s_T| + n$ para $n \geq 1$ y sea $t \in T'$ con $|t| = |s_T| + n$. Sea $succ_{T'}(t) = succ_T(t) \cap I$.

Entonces $T' \in \mathbb{L}$, $T' \leq T$ y para todo $t \in T'$ tal que $s_{T'} \subseteq t$, se tiene que $succ_{T'}(t) \subseteq I$. Por lo tanto, si $n > |s_{T'}|$, $T' \Vdash$ "$f_G(n) \in I$" por lo cual $T' \Vdash$ "$ran(f_G) \subseteq^* I$" y por lo tanto $T' \Vdash$ "$ran(f_G) \in \mathscr{I}$". ■

Teorema 3.7 *Es consistente con* **ZFC** *que* $\mathfrak{h}_{ED} = \omega_1$ *y* $\mathfrak{h}_{\omega-hitting} = \omega_2$.

Prueba. Sea $V \models$ **CH** y G un filtro $\mathbb{L}_{\omega_2}$-genérico sobre V. Se verifica que $V[G] \models \mathfrak{h}_{\omega-hitting} > \omega_1$. Sea $\langle \mathscr{I}_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle \in V[G]$ una familia de ideales $\omega - hitting$.

Afirmación 3.8 *Existe* $\gamma < \omega_2$ *tal que* $V[G_\gamma] \models \mathscr{I}_\alpha \cap V[G_\gamma]$ *es* ω*-hitting, para todo* $\alpha < \omega_1$.

Sea $\alpha_0 < \omega_2$. En $V[G_{\alpha_0}]$, enumérese todas las sucesiones de subconjuntos de ω, $\langle \langle A_n^\xi : n \in \omega \rangle : \xi < \omega_1 \rangle$ (por **CH** se sabe que sólo hay ω_1). Para cada $\xi < \omega_1$, sea $I_\alpha^\xi \in \mathscr{I}_\alpha$ tal que $I_\alpha^\xi \cap A_n^\xi \neq \emptyset$ (en $V[G]$) para todo $n \in \omega$. El conjunto $\{I_\alpha^\xi : \xi, \alpha < \omega_1\}$ tiene cardinalidad ω_1 y por lo tanto existe $\alpha_1 < \omega_2$ tal que $I_\alpha^\xi \in V[G_{\alpha_1}]$ para todo $\xi < \omega_1$. Iterando este proceso ω_1 veces, se encuentra α_{ω_1}. Se afirma que $\gamma = \alpha_{\omega_1}$ funciona. Sea $\langle A_n : n \in \omega \rangle \in V[G_\gamma]$, entonces existe $\zeta < \omega_1$ tal que $\langle A_n : n \in \omega \rangle \in V[G_{\alpha_\zeta}]$. En $V[G_{\alpha_{\zeta+1}}]$ para cada $\alpha < \omega_1$, existe $I_\alpha \in \mathscr{I}_\alpha$ tal que para todo $n \in \omega$, $I_\alpha \cap A_n \neq \emptyset$. Dado que $V[G_{\alpha_{\zeta+1}}] \subseteq V[G_\gamma]$, se tiene que $V[G_\gamma] \models \mathscr{I}_\alpha$ es ω-hitting para todo $\alpha < \omega_1$.

Considérese dicho $\gamma < \omega_2$. Por el Lema 3.6, en $V[G_{\gamma+1}] \models A \in \mathscr{I}$ para cada ideal $\omega - hitting$, donde A es la imagen del $\gamma + 1$-ésimo real de Laver, en particular, $V[G_{\gamma+1}] \models A \in \mathscr{I}_\alpha$ para cada $\alpha < \omega_1$, de lo cual se tiene $A \in \bigcap\{\mathscr{I}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ con lo que se concluye que $\mathfrak{h}_{\omega-hitting} > \omega_1$.

Para probar que $V[G] \models \mathfrak{h}_{ED} = \omega_1$ se mostrará que $V[G] \models \mathrm{non}(\mathcal{N}) = \omega_1$. En el resto de la subsección se prueba este hecho. ■

Se mostrará que el forcing de Laver preserva medida exterior y que la iteración de longitud ω_2 también. Para probar esto último, se utilizan los teoremas de preservación de forcing de Goldstern (ver [10]). La notación y los resultados generales son de [10].

El siguiente hecho es bien conocido. Un conjunto $\mathbf{C} \subseteq \omega^\omega$ es cerrado si y sólo si existe un árbol $T \subseteq \omega^{<\omega}$ tal que $\mathbf{C} = \{f \in \omega^\omega : \forall n \in \omega(f \restriction n \in T)\}$.

A continuación se presentan los elementos necesarios para enunciar el Teorema de preservación de forcing para iteraciones con soporte numerable. Sea $\langle \sqsubseteq_n : n \in \omega\rangle$ una sucesión creciente de relaciones binarias en ω^ω, es decir, si $f \sqsubseteq_n g$, entonces $f \sqsubseteq_{n+1} g$ para todo $n \in \omega$. Las relaciones deber ser dadas por una definición aritmética, las relaciones que se utilizan, lo cumplen. Sea $\sqsubseteq = \bigcup_{n\in\omega} \sqsubseteq_n$.

La relación $\sqsubseteq$ debe ser tal, que para todo conjunto $a \subseteq \omega^\omega$ numerable, exista g tal que para todo $f \in a \cap \mathbf{C}$, $f \sqsubseteq g$ y que para cada $g \in \omega^\omega$ el conjunto $\{f \in \omega^\omega : f \sqsubseteq g\}$ sea cerrado.

Definición 3.9 *Sea θ un cardinal sufientemente grande y $N \preceq H(\theta)$ (un submodelo elemental). Diremos que $g \in \omega^\omega$ $(\sqsubseteq, \mathbf{C})$-cubre a N si para todo*

$f \in N \cap \omega^\omega$, $f \sqsubseteq g$.

Definición 3.10 *Sea $\mathbb{Q}$ una noción de forcing, $\dot{f}$ un $\mathbb{Q}$-nombre para una función en $\mathbf{C}$, f^* una función en ω^ω y $\langle p_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión decreciente de condiciones en $\mathbb{Q}$. Diremos que $\langle p_n : n \in \omega \rangle$* interpreta *$\dot{f}$ como f^* si para todo $n \in \omega$, $p_n \Vdash$ "$\dot{f} \restriction n = f^* \restriction n$".*

Definición 3.11 *Una noción de forcing $\mathbb{Q}$* preserva $(\sqsubseteq, \mathbf{C})$ *si para cada $N \preceq H(\theta)$ submodelo elemental numerable que contiene $\mathbb{Q}$ y $\sqsubseteq$, g es una función que $(\sqsubseteq, \mathbf{C})$-cubre a N y $\langle p_n : n \in \omega \rangle \in N$ es una sucesión que interpreta a $\langle \dot{f}_0, \ldots, \dot{f}_k \rangle \in N$ como $\langle f_0^*, \ldots, f_k^* \rangle$, entonces existe una condicion N-genérica $q \leq p_n$ tal que*

1. *$q \Vdash_{\mathbb{Q}}$ "g cubre $N[\dot{G}]$",*
2. *para toda $n \in \omega$ y toda $i \leq k$, $q \Vdash_{\mathbb{Q}}$ "$f_i^* \sqsubseteq_i g \to \dot{f}_i \sqsubseteq_n g$".*

Ahora se presenta (sin demostración) el Teorema de preservación para iteraciones con soporte numerable de Goldstern.

Teorema 3.12 (Goldstern [10]) *Sea $\mathbb{P} = \langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ una iteración de forcing con soporte numerable. Si para cada $\alpha < \delta$, $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} \dot{\mathbb{Q}}$ preserva $\sqsubseteq$", entonces $\mathbb{P}$ preserva $\sqsubseteq$.* ■

A continuación se probará que el forcing de Laver "preserva medida exterior".

Sea Ω la colección numerable de conjuntos cerrado-abiertos de 2^ω y considérese la topología discreta en Ω. μ denota la medida de Lebesgue en los conjuntos medibles de 2^ω y μ^* la medida exterior de los subconjuntos de 2^ω.

Sea $\mathbf{C}^{random} = \{f \in \Omega^\omega : \forall n \in \omega(\mu(f(n)) \leq 2^{-n})\}$. Entonces $\mathbf{C}^{random}$ es un conjunto cerrado en la topología producto de Ω^ω.

Para cada $f \in \mathbf{C}^{random}$ se define el conjunto

$$A_f = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{k\geq n} f(k).$$

Dado $f \in \mathbf{C}^{random}$, el conjunto $A_f \subseteq 2^\omega$ es un conjunto de medida cero, pues para n fija, $\mu\left(\bigcup_{k\geq n} f(k)\right) \leq 2^{-n} + 2^{-n-1} + \cdots = 2^{-n+1}$ y si H es un conjunto de medida cero, entonces existe $f \in \mathbf{C}^{random}$ tal que $H \subseteq A_f$.

Definición 3.13 *Sean $f \in \mathbf{C}^{random}$, $g \in 2^\omega$ y $n \in \omega$. Se define $f \sqsubseteq_n^{random} g$ si y sólo si para toda $k \geq n$, $g \notin f(k)$.*

La relación $\sqsubseteq^{random}$ es cerrada. De la definición de $\sqsubseteq^{random}$ se verifica que $f \sqsubseteq^{random} g$ si y sólo si $g \notin A_f$. De esta última observación se deriva la siguiente

Proposición 3.14 *Para un modelo numerable N, $(g \sqsubseteq^{random}, \mathbf{C}^{random})$-cubre N si y sólo si g es random sobre N.*

Prueba. Sea g un real de random sobre N y $f \in \mathbf{C}^{random} \cap N$. Como g es random, entonces no pertenece al conjunto nulo A_f. Por la observación anterior, $f \sqsubseteq^{random} g$.

Sea g un real que $(\sqsubseteq^{random}, \mathbf{C}^{random})$-cubre N es decir, para cada $f \in \mathbf{C}^{random} \cap N$, $f \sqsubseteq^{random} g$. Sea H un conjunto de medida cero en N y $f \in \mathbf{C}^{random}$ tal que $H \subseteq A_f$. Como $f \sqsubseteq^{random} g$, entonces $g \notin A_f$, particularmente $g \notin H$, lo cual prueba que g es random sobre N. $\blacksquare$

Proposición 3.15 *Si* $\mathbb{Q}$ *preserva* $\sqsubseteq^{random}$ *entonces para cada conjunto de reales* A*, si* $\mu^*(A) > 0$*, entonces* $\Vdash_{\mathbb{Q}}$ "$\mu^*(A) > 0$".

Prueba. Sea A tal que $\mu^*(A) > 0$ y supóngase que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \Vdash_{\mathbb{Q}}$ "$\mu(A) = 0$". Entonces existe un $\mathbb{Q}$-nombre $\dot{f}$ para una función tal que $q \Vdash_{\mathbb{Q}}$ "$\dot{f} \in \mathbf{C}^{random} \wedge A \subseteq A_{\dot{f}}$" Sea $N \preceq H(\theta)$ un modelo numerable tal que $\mathbb{Q}, \dot{f}, p \in N$ y sea g que cubre a N, es decir, un real de random sobre N.

Entonces $q \Vdash$ "$g \in A_{\dot{f}}$" (pues g cubre a N) pero existe $p \leq q$ tal que $p \Vdash$ "g cubre $N[\dot{G}]$", entonces $p \Vdash$ "$g \notin A_{\dot{f}}$", lo cual es una contradicción. ■

El siguiente Teorema muestra que el forcing de Laver preserva medida exterior.

Teorema 3.16 (Pawlikowski [23]) $\mathbb{L}$ *preserva* $\sqsubseteq^{random}$.

Prueba. Sea $N \preceq H(\theta)$ un modelo numerable tal que $\mathbb{L}, \sqsubseteq^{random} \in N$, g que cubre a N y $\langle T_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión en N que interpreta a $\dot{f}_0$ como f_0^*. Se mostrará que existe una condición $T \leq T_n$ N-genérica tal que $T \Vdash$ "g es random sobre $N[\dot{G}]$" y que para todo $n \in \omega, T \Vdash$ "$f_0^* \sqsubseteq_n^{random} g \rightarrow \dot{f}_0 \sqsubseteq_n^{random} g$".

Sea $\dot{\mathbf{C}}^{random}$ el conjunto de $\mathbb{L}$-nombres para los elementos de $\mathbf{C}^{random}$. Se mostrará que para cualquier $S \in N \cap T$, si g es random sobre N, entonces existe $T \leq S$ N-genérico tal que para todo $\dot{f} \in \dot{\mathbf{C}}^{random} \cap N \forall^\infty n, T \Vdash$ "$g \notin \dot{f}(n)$", lo cual muestra en particular que g es random sobre $N[\dot{G}]$.

Sea $\mathcal{D}$ la colección de los subconjuntos densos abiertos de $\mathbb{L}$.

Defínase Y de la siguiente manera: para cualquier $h \in 2^\omega$, $h \in Y$ si y sólo si existe $T \leq S$ que cumpla para todo $D \in \mathcal{D} \cap N$ existe $R \in cl(D) \cap N$

$T \leq R$, y para toda$\dot{f} \in \dot{\mathbf{C}}^{random} \cap N$, $\forall^\infty n$, $T \Vdash$ "$z \notin \dot{f}(n)$". De la primera condición se sigue que T es N-genérico.

Dada $k \in \omega$ sea Y_k definida de la siguiente manera, $h \in Y_k$ si y sólo si existe $T^k \leq S$ tal que para todo $D \in \mathcal{D} \cap N$ existe $R \in cl(D) \cap N$ $T^k \leq R$, para toda$\dot{f} \in \dot{\mathbf{C}}^{random} \cap N$, $\forall^\infty n$, $T^k \Vdash$ "$z \notin \dot{f}(n)$" y para toda $n \geq k$, $T^k \Vdash$ "$z \notin \dot{f}_0(k)$". De esta manera se tiene que $Y = \bigcup_{n\in\omega} Y_k$.

Se afirma que $\mu(Y) = 1$ para lo cual se mostrará que $\mu^*(Y) \geq 1 - \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$.

Sea $\varepsilon > 0$ y considérese una enumeración $\{D_n : n \in \omega\}$ de los conjuntos densos de $\mathbb{L}$ en N. Se define por recursión una sucesión de condiciones de $\mathbb{L}$ como sigue. $T_0 = S$, $T_n \in N$, $T_{n+1} \leq T_n$, $T_n \in cl(D_n)$. Entonces $\{T_n : n \in \omega\}$ es una sucesión de fusión, por lo tanto $T = \bigcap_{n\in\omega} T_n \in \mathbb{L}$.

Obsérvese que T ha sido construida adecuadamente para que se cumpla la primera condición de los elementos de Y, por lo tanto, dado un real $h \in 2^\omega$, h no pertenece a Y si existe $\dot{f} \in \dot{\mathbf{C}}^{random} \cap N$ para el cual existan una cantidad infinita de naturales que cumplan $T \Vdash$ "$h \in \dot{f}(n)$". Con lo anterior se tiene la siguiente contención:

$$2^\omega \setminus Y \subseteq \{h \in 2^\omega : \exists \dot{f} \in \dot{\mathbf{C}}^{random} \cap N \wedge \exists^\infty n \in \omega (T \Vdash \text{“}h \in \dot{f}(n)\text{”})\}$$

Consideremos una enumeración $\{\dot{f}_j : j \in \omega\}$ de $\dot{\mathbb{C}}^{random} \cap N$ y sea $n_0 \in \omega$ tal que $\sum_{n>n_0} 2^{-n-2} < \varepsilon$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\{g \in 2^\omega : \exists \dot{f} \in \dot{\mathbf{C}}^{random} \cap N \wedge \exists^\infty n \in \omega (T \Vdash \text{“}g \in \dot{f}(n)\text{”})\} &\subseteq \\
\{g \in 2^\omega : \exists j \exists n > j + n_0 (T \Vdash'' g \in \dot{f}_j(n))\} &= \\
\bigcup_{j\in\omega} \bigcup_{n>j+n_0} \{g \in 2^\omega : T \Vdash \text{“}z \in \dot{f}_j(n)\}.
\end{aligned}$$

Como $\mathbb{L}$ preserva medida exterior, $\mu^*(\{g \in 2^\omega : T \Vdash \text{“}z \in \dot{f}_j(n)\}) \leq 2^{-n}$ y por lo tanto, $\mu^*(2^\omega \setminus Y) \leq \sum_{j\in\omega}\sum_{n>j+n_0} 2^{-n} \leq \varepsilon$, por lo que se concluye que $\mu^*(Y) = 1$.

De la misma manera se prueba que $\mu^*(Y_k) \leq 1 - 2^k$.

Ahora sólo falta verificar que $g \in Y$, para lo cual tenemos que mostrar que existe una sucesión de conjuntos borelianos $\langle B_n : n \in \omega\rangle \in N$ tal que cada elemento pertenece a N y de tal manera que para cada $k \in \omega$, $Y_k \triangle B_k \subseteq \bigcup(\mathcal{N} \cap N)$. ■

Corolario 3.17 *Si G es $\mathbb{L}_{\omega_2}$-genérico sobre V un modelo de CH, entonces* $V[G] \models (\mathfrak{h}_{ED}) = \omega_1$

Prueba. El Teorema anterior muestra que $\mathbb{L}$ preserva $\sqsubseteq^{random}$ y por el Teorema de preservación para iteraciones con soporte numerable, $\mathbb{L}_{\omega_2}$ también lo preserva. En particular, en $V[G]$, $V \cap 2^\omega$ es un conjunto de medida no cero de cardinalidad ω_1. Así, en $V[G]$, $\mathrm{non}(\mathcal{N}) = \omega_1$. Por el Teorema 2.14 se tiene el resultado. ■

3.3. Consistencia de $\mathfrak{h}_{ED} = \mathfrak{h}_{\omega-hitting} = \omega_1$ y $\mathfrak{b} = \omega_2$

Para esta prueba de consistencia se utilizará el *random forcing* $\mathbb{B}(\omega_1)$. Sea μ la medida producto estándar sobre 2^{ω_1} y considérese el conjunto $\mathcal{N}_{\omega_1} = \{X \subseteq 2^{\omega_1} : \mu(X) = 0\}$. Se define una relación de equivalencia sobre la familia de los conjuntos borelianos **Borel**(2^{ω_1}) de 2^{ω_1} como sigue: si $A, B \in$ **Borel**(2^{ω_1}), $A \simeq B$ si y sólo si $A \triangle B \in \mathcal{N}_{\omega_1}$ (donde $\triangle$ denota la diferencia simétrica de conjuntos). Con $[A]_{\mathcal{N}}$ se denota la clase de equivalencia con respecto a esta relación de un conjunto boreliano A. Sea $\mathbb{B}(\omega_1) = \{[A]_{\mathcal{N}} : A \in \mathbf{Borel}(2^{\omega_1})\}$. El orden parcial sobre $\mathbb{B}(\omega_1)$ está definido de la siguiente manera: $[A]_{\mathcal{N}} \leq [B]_{\mathcal{N}}$ si y sólo si $A \setminus B \in \mathcal{N}_{\omega_1}$. El random forcing $\mathbb{B}(\omega_1)$ agrega ω_1 reales. Sea G un filtro $\mathbb{B}(\omega_1)$-genérico sobre V, la función genérica $f_G : \omega_1 \to 2$ está definida mediante $f_G(\alpha) = 1$ si y sólo si $[\{x \in 2^\omega : x(\alpha) = 1\}]_{\mathcal{N}} \in G$. Se definen los ω_1 reales $r_\alpha : \omega \to \omega$ como $r_\alpha(n) = f_G(\alpha \cdot \omega + n)$ para cada $\alpha < \omega_1$.

$V[G]$ se puede ver como $V[r_\alpha : \alpha < \omega_1]$ donde r_α son los ω_1 reales de random agregados por G.

Una de las propiedades básicas del random forcing $\mathbb{B}(\omega_1)$ es que preserva $\mathfrak{b}$. Además en la extensión genérica se cumple $\mathrm{non}(\mathcal{N}) = \omega_1$. Los dos lemas siguientes son bien conocidos y muestran estos hechos.

Lema 3.18 *Si $\{g_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq V \cap \omega^\omega$ es una familia de funciones no acotada y G es un filtro $\mathbb{B}(\omega_1)$-genérico, entonces en $V[G]$, $\{g_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es no acotada.*

Prueba. Para probar este lema bastará mostrar que si $\dot{f}$ es un $\mathbb{B}(\omega_1)$-nombre para un elemento de ω^ω entonces existe $g \in V \cap \omega^\omega$ tal que $\Vdash_{\mathbb{B}(\omega_1)}$ "$\dot{f} \leq^* g$". Dado $\dot{f}$, defínase $g(n) = \min\{k \in \omega : \mu([\![\dot{f}(n) < k]\!]) > 1 - \frac{1}{2^n}\}$. Entonces g cumple la propiedad requerida pues $\bigcup_{m\in\omega} \bigcap_{n \geq m} [\![f(n) \leq g(n)]\!]$ tiene medida 1. ■

Lema 3.19 *Si G es un filtro $\mathbb{B}(\omega_1)$-genérico, entonces $V[G] \models \mathrm{non}(\mathcal{N}) = \omega_1$.*

Prueba. Sean $\langle r_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ los ω_1 reales de random. Entonces se afirma que $\{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es un conjunto de Sierpiński, es decir, un conjunto no numerable tal su intersección con cada conjunto de medida cero es numerable. Este conjunto muestra que $\mathrm{non}(\mathcal{N}) = \omega_1$.

Sea $H \in V[G]$ un conjunto de medida cero y $\dot{H}$ un $\mathbb{B}(\omega_1)$-nombre para H. Sea $I = supp(\dot{H})$. Entonces I es numerable y $\{\xi < \omega_1 : r_\xi \in H\} \subseteq \{\xi < \omega_1 : supp(r_\xi) \cap I \neq \emptyset\}$ el cual es un conjunto numerable. ■

Teorema 3.20 *Es consistente con* **ZFC** *que* $\mathfrak{h}_{ED} = \mathfrak{h}_{\omega-hitting} = \omega_1$ *y* $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}_{ED_{fin}} = \omega_2$.

Prueba. Sea $V \models \omega_1 = \mathrm{non}(\mathcal{N}) < \mathfrak{b} = \omega_2$ (por ejemplo, el modelo obtenido en el Teorema 3.7). Sea G un filtro $\mathbb{B}(\omega_1)$ genérico sobre V. Entonces por los dos Lemas anteriores se tiene $V[G] \models \mathrm{non}(\mathcal{N}) = \omega_1 < \mathfrak{b} = \omega_2$. Resta probar que $\mathfrak{h}_{\omega-hitting} = \omega_1$ para lo cual se exhibirá una familia de cardinalidad ω_1 de ideales $\omega - hitting$ cuya intersección sea el ideal fin.

Sean $\{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ los reales agregados por G y para cada $\beta < \omega_1$ se define $J_\beta = r_\beta^{-1}(1)$. Para cada $\alpha < \omega_1$ sea $\mathscr{I}_\alpha = \langle J_\beta : \beta > \alpha \rangle$. A continuación se mostrará que cada $\mathscr{I}_\alpha$ es un ideal $\omega-hitting$ y que $\bigcap\{\mathscr{I}_\alpha : \alpha < \omega_1\} = fin$.

Sea $\langle A_n : n \in \omega \rangle \in V[r_\gamma : \gamma < \alpha]$ y $\beta > \alpha$. Como $J_\beta \in \mathscr{I}_\alpha$, basta ver que $J_\beta \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \omega$. Observemos que $\mu(\{f \in 2^{\omega_1} : \forall k \in A_n : f(\beta \cdot \omega + k) = 0\}) = 0$, con lo cual se tiene que $\mu[\![J_\beta \cap A_n = \emptyset]\!] = 0$.

Se verificará ahora que $\bigcap\{\mathscr{I}_\alpha : \alpha < \omega_1\} = fin$. Supongamos que $V[G] \models A \in [\omega]^\omega$, entonces existe $\alpha < \omega_1$ tal que $A \in V[G_\alpha]$. Para $\beta > \alpha$, $\mu(\{f \in 2^{\omega_1} : \forall k \in A(f(\beta \cdot \omega + k) = 1)\}) = 0$, lo cual implica que $A \not\subseteq J_\beta$ para todo $\beta > \alpha$ y por tanto $\bigcap\{\mathscr{I}_\alpha : \alpha < \omega_1\} = fin$. ■

Recordemos que un invariante cardinal $\mathfrak{j}$ es *manso* (ver [32]) si se puede definir como el mínimo tamaño de un conjunto $A \subseteq X$, donde X es un espacio polaco y se cumplen propiedades $\phi(A)$ y para todo $x \in X$ existe $y \in A$ que cumplen $\theta(x, y)$, donde ϕ es una fórmula que cuantifica sobre números naturales y elementos de A, mientras que θ es una fórmula proyectiva que no hace mención del conjunto A.

Como ejemplos de cardinales mansos tenemos los siguientes. Sea $\mathfrak{a}$ la mínima cardinalidad de una familia MAD. Entonces, para mostrar las fórmulas que garantizan que $\mathfrak{a}$ es manso, consideremos $X = \mathcal{P}(\omega)$, $\phi(A)$ la fórmula que garantiza que los elementos de A son casi ajenos y $\theta(x, y)$ la fórmula que garantiza que $x \cap y$ es infinito.

Para mostrar que $\mathfrak{b}$ es manso, sea $X = \omega^\omega$ y $\theta(x, y)$ la fórmula que afirma $x \not\leq^* y$ (en este caso no es necesaria la fórmula ϕ).

El Teorema 6.1.11. de [32] establece caminos óptimos para separar cardinales mansos de algunos cardinales (bajo una suposición adecuada de existencia de grandes cardinales). Particularmente, si $\mathfrak{j}$ es un invariante cardinal manso y existe alguna extensión por forcing en la que se prueba $\mathfrak{j} < \mathfrak{b}$, entonces, entonces $V[G] \models \mathfrak{j} < \mathfrak{b}$ si G es $\mathbb{L}_{\omega_2}$ genérico sobre V.

El Teorema 3.20 muestra que es posible separar a $\mathfrak{h}_{\omega-hitting}$ de $\mathfrak{b}$ utilizando la iteración de longitud ω_2 del forcing de Laver y después forzando con ω_1 reales de random. Sin embargo, el Teorema 3.7 muestra que en la extensión de Laver no es cierta dicha desigualdad. Por lo tanto $\mathfrak{h}_{\omega-hitting}$ no es un invariante cardinal manso.

3.4. Consistencia de $\mathfrak{h}_{ED} < \mathrm{add}(\mathcal{M})$

Para esta prueba de consistencia se utilizará el *forcing de Laver* asociado al filtro de Fréchet $\mathbb{L}_{Fr}$ (el filtro de Fréchet Fr es el filtro que consiste de los subconjuntos co-finitos de ω).

Definición 3.21 *Se dice que una familia de funciones* $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ *es* ω-hitting *si para cada sucesión* $\langle A_n : n \in \omega \rangle \subseteq [\omega]^\omega$*, existe* $f \in \mathcal{F}$ *tal que* $f^{-1}(m) \cap A_n$ *es infinito (equivalentemente, no vacío) para cada* $n, m \in \omega$.

Lema 3.22 *Sea* $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ *una familia de funciones* ω*-hitting. Si* $\mathcal{F} = \bigcup\{\mathcal{F}_n : n \in \omega\}$ *con* $\mathcal{F}_n \cap \mathcal{F}_m = \emptyset$ *cada que* $n \neq m$*, entonces existe* $k \in \omega$ *tal que* $\mathcal{F}_k$ *es* ω*-hitting.*

Prueba. Supóngase que para cada $k \in \omega$, $\mathcal{F}_k$ no es una familia ω-hitting. Entonces se afirma que $\bigcup\{\mathcal{F}_k : k \in \omega\}$ no es ω-hitting.

Para cada $k \in \omega$ sea $\langle A_n^k : n \in \omega \rangle \subseteq [\omega]^\omega$ una sucesión tal que para todo $f \in \mathcal{F}_k$, existen m_k, n_k tales que $f^{-1}(m_k) \cap A_{n_k}^k = \emptyset$. La sucesión $\langle A_n^m : n, m \in \omega \rangle$ muestra que $\bigcup\{F_k : k \in \omega\}$ no es ω-hitting pues, dado $f \in \bigcup\{\mathcal{F}_k : k \in \omega\}$, $f \in \mathcal{F}_k$ para algún $k \in \omega$ y por lo tanto $f^{-1}(m_k) \cap A_{n_k}^k = \emptyset$. $\blacksquare$

La preservación de familias de funciones ω-hitting en iteraciones de forcing en general, no es cierta. Sin embargo, se puede introducir la noción de *preservación fuerte de familias de funciones* ω*-hitting*, la cual sí es preservada a lo largo de iteraciones.

Definición 3.23 *Una noción de forcing* $\mathbb{P}$ preserva fuertemente familias ω-hitting de funciones *si dado un* $\mathbb{P}$*-nombre* $\dot{A}$ *para un subconjunto infinito de* ω*, existe* $\langle A_n : n \in \omega \rangle \subseteq [\omega]^\omega$ *tal que para cualquier* $f \in \omega^\omega$*, si* $f^{-1}(m) \cap A_n$

es infinito para todo $n, m \in \omega$*, entonces* $\Vdash_{\mathbb{P}}$ *"*$f^{-1}(m) \cap \dot{A}$ *es infinito para todo* $m \in \omega$*".*

Lema 3.24 $\mathbb{L}_{Fr}$ *preserva fuertemente familias* ω*-hitting de funciones.*

Prueba. Supóngase que el enunciado no es cierto. Entonces existe $\dot{A}$ un $\mathbb{L}_{Fr}$ nombre para un subconjunto infinito de ω tal que para cada $\langle A_n : n \in \omega \rangle \subseteq [\omega]^\omega$ existe $f \in \omega^\omega$ tal que $f^{-1}(m) \cap A_n$ es infinito para todo $n, m \in \omega$ pero existen $T_f \in \mathbb{L}_{Fr}$ y $n_f, m_f \in \omega$ tales que

$$T_f \Vdash \text{“}f^{-1}(m_f) \cap \dot{A} \subseteq n_f\text{”}. \tag{3.1}$$

Sea

$$\mathcal{F} = \{f \in \omega^\omega : \forall \langle A_n : n \in \omega \rangle \forall n, m \in \omega (|f^{-1}(m) \cap A_n| = \aleph_0)$$

$$\wedge \exists T_f \in \mathbb{L}_{Fr} \exists m_f, n_f \in \omega (T_f \Vdash \text{“}f^{-1}(m_f) \cap \dot{A} \subseteq n_f)\text{”}\}.$$

Entonces, por definición, $\mathcal{F}$ es una familia de funciones ω-hitting.

Ahora se procede con el análisis del *rango* para el forcing de Laver $\mathbb{L}_{Fr}$. Dada $s \in \omega^{<\omega}$, se dice que s *favorece* "$k \in \dot{A}$" si no existe una condición $T \in \mathbb{L}_{Fr}$ con $s_T = s$ tal que $T \Vdash$ "$k \notin \dot{A}$". Equivalentemente, si para toda condición $T \in \mathbb{L}_{Fr}$ tal que $s_T = s$ existe $T' \leq T$ tal que $T' \Vdash$ "$k \in \dot{A}$". El rango de s se define por recursión como sigue:

- $rk(s) = 0 \leftrightarrow \begin{cases} \exists K \in [\omega]^\omega (\forall k \in K (s \text{ favorece } k \in \dot{A})) \text{ o bien,} \\ \exists X \in [\omega]^\omega,\ \exists f \colon X \to \omega \text{ finito a uno} \\ \forall l \in X (s^\frown l \text{ favorece } f(l) \in \dot{A}) \end{cases}$
- $rk(s) \leq \alpha$ si y sólo si existe $X \in [\omega]^\omega$ tal que $rk(s^\frown l) < \alpha$ para todo $l \in X$.

- $rk(s) = \infty$ en otro caso.

Se afirma que $rk(s) < \infty$ para todo $s \in \omega^{<\omega}$. En caso contrario, sea $s \in \omega^{<\omega}$ tal que $rk(s) = \infty$, entonces el conjunto $K = \{k \colon s \text{ favorece } k \in \dot{A}\}$ es finito. Por recursión, se construye $T \in \mathbb{L}_{Fr}$, con $s_T = s$ de tal manera que para cada $t \supseteq s$ cumpla:

- $rk(t) = \infty$,
- $\{k \in \omega : t \text{ favorece } k \in \dot{A}\} \subseteq K$.

Supóngase definido t de tal manera que cumple las condiciones dadas. Para definir los sucesores de t se observa que $\{l \in \omega : rk(t^\frown l) < \infty\}$ es finito y por lo tanto el conjunto $X_0 = \omega \setminus \{l \in \omega : rk(t^\frown l) < \infty\} = \{l \in \omega : rk(t^\frown l) = \infty\} \in Fr$. Considérese el conjunto $X_1 = \{l \in X_0 : \exists k \in \omega \setminus K(t^\frown l \text{ favorece } k \in \dot{A})\}$. Si X_1 fuera infinito, se podría definir $f : X_1 \to \omega$ finito a uno tal que para cada $l \in X_1$, $s^\frown l$ favorece $f(l) \in \dot{A}$ con lo que se tendría $rk(t) = 0$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto X_1 es finito y entonces $X_0 \setminus X_1 \in Fr$. Sea $succ_T(t) = X_0 \setminus X_1$. Es inmediato que T así construido cumple las propiedades requeridas.

Sea $T^{'}$ una condición y $k \notin K$ tal que $T^{'} \Vdash$ "$k \in \dot{A}$". Entonces $s_{T'}$ en particular favorece $k \notin K$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $rk(s) < \infty$ para toda $s \in \omega^{<\omega}$.

Para cada $f \in \mathcal{F}$, sea T_f de tal manera que $rk(s_{T_f}) = 0$. Como $\mathcal{F}$ es ω-hitting, existen $s \in \omega^{<\omega}$ y $n, m \in \omega$ tales que $\mathcal{F}_{s,n,m} = \{f \in \mathcal{F} : s_{T_f} = s, n_f = n, m_f = m\}$ es ω-hitting.

Se tienen dos casos para $rk(s)$.

Caso 1. Existe $K \in [\omega]^\omega$ tal que para todo $k \in K$, s favorece $k \in \dot{A}$. Sea $f \in \mathcal{F}_{s,n,m}$ tal que $f^{-1}(m) \cap K$ es infinito. Entonces existe $k \in f^{-1}(m) \cap K$ tal que $k > n$. Por lo tanto, existe $T' \leq T_f$ tal que $T' \Vdash$ "$k \in \dot{A}$" lo que contradice 3.1.

Caso 2. Existe $X \in [\omega]^\omega$ y $f : X \to \omega$ finito a uno, tal que para todo $l \in X$, $s^\frown l$ favorece $f(l) \in \dot{A}$.

Sea $g \in \mathcal{F}_{s,n,m}$ tal que $g^{-1}(m) \cap \mathrm{ran}(f)$ es infinito. Dado que $X \subseteq^* \mathrm{succ}_{T_g}(s)$, existe $k \in g^{-1}(m) \cap ran(f)$ con $k > n$ tal que $f^{-1}(k) \cap \mathrm{succ}_{T_g}(s) \neq \emptyset$. Sea $l \in f^{-1}(k) \cap \mathrm{succ}_{T_g}(s)$. Entonces $s^\frown l$ favorece $k \in \dot{A}$. Por lo tanto existe $T \leqslant T_g$ con $s_T \supseteq s^\frown l$ tal que $T \Vdash$ "$k \in \dot{A}$", nuevamente una contradicción.

■

Lema 3.25 *Iteración con soporte finito de nociones de forcing que preservan fuertemente familias ω-hitting para funciones, preserva fuertemente familias ω-hitting para funciones.*

Prueba. Sea $\mathbb{P}_\kappa = \langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha, \alpha < \kappa \rangle$ una iteración con soporte finito de nociones de forcing en la cual cada noción preserva fuertemente familias ω-hitting de funciones. Se procede por inducción sobre κ para la prueba del enunciado.

Si $\kappa = 0$ no hay nada que demostrar.

Sea $\kappa = \beta + 1$. Entonces $\mathbb{P}_\kappa = \mathbb{P}_\beta * \dot{\mathbb{Q}}_\beta$ y $\Vdash_{\mathbb{P}_\beta}$ "$\dot{\mathbb{Q}}_\beta$ preserva fuertemente familias ω-hitting de funciones".

Sea $\dot{A}$ un $\mathbb{P}_\kappa$-nombre para un elemento de $[\omega]^\omega$ y G un filtro $\mathbb{P}_\kappa$-genérico.

En $V[G \restriction_\beta]$ sea $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión de subconjuntos infinitos de ω tal que para todo $f \in \omega \cap V[G \restriction_\beta]$ si $f^{-1}(n) \cap A_m$ es infinito para todo $m, n \in \omega$, entonces $\Vdash_{\dot{\mathbb{Q}}_\beta}$ "$f^{-1}(n) \cap \dot{A}$ es infinito para toda $n \in \omega$".

Para cada $n \in \omega$ sea $\dot{A}_n$ un $\mathbb{P}_\beta$-nombre para A_n y $\langle A_n^m : m \in \omega \rangle \subseteq [\omega]^\omega$ tal que para todo $f \in \omega^\omega$, si $f^{-1}(k) \cap A_n^m$ es infinito para todo $k, m \in \omega$, entonces $\Vdash_{\mathbb{P}_\beta} f^{-1}(k) \cap A_n$ es infinito para todo $k \in \omega$". Entonces la sucesión $\langle A_n^m : m, n \in \omega \rangle$ muestra que $\mathbb{P}_\kappa$ preserva fuertemente familias ω-hitting de funciones.

Sea κ un ordinal límite. Se considerarán los dos casos para la cofinalidad de κ. Supongamos que $\mathrm{cof}(\kappa) > \omega$ sea $\dot{A}$ un $\mathbb{P}_\kappa$-nombre para un elemento de $[\omega]^\omega$. Sea G un filtro $\mathbb{P}_\kappa$-genérico sobre V. Entonces existe $\gamma < \kappa$ tal que $A \in V[G \restriction_\gamma]$ y por lo tanto existe $\dot{A}$ un $\mathbb{P}_\gamma$-nombre para A. Por la hipótesis de inducción se tiene que existe $\langle A_n : n \in \omega \rangle \subseteq [\omega]^\omega$ que muestra que $\mathbb{P}_\gamma$ preserva fuertemente familias ω-hitting de funciones. Esta sucesión muestra que $\mathbb{P}_\kappa$ también preserva fuertemente familias de funciones ω-hitting.

Ahora se analizará el caso $\mathrm{cof}(\kappa) = \omega$. Si éste es el caso, entonces $\mathbb{P}_\kappa$ puede ser visto como $\mathbb{P}_\omega = \langle \mathbb{P}_n, \dot{\mathbb{Q}}_n, n \in \omega \rangle$.

Sea $\dot{A}$ un $\mathbb{P}_\omega$- nombre para un conjunto infinito de ω. Para cada una de las extensiones intermedias $V[G_k]$ sea $\langle p_n^k : n \in \omega \rangle$ una sucesión decreciente de condiciones y $\langle A_n^k : n \in \omega \rangle$ una familia de subconjuntos infinitos de ω tales que

$$p_n^k \Vdash_{[k,\omega)} \text{“ los primeros } n \text{ elementos de } A_n^k \text{ y } \dot{A} \text{ coinciden”}$$

(es decir, los A_n^k son aproximaciones de $\dot{A}$). Dado que cada $\mathbb{P}_n$ preserva fuertemente familias ω-hitting de funciones, entonces para cada A_n^k existe una sucesión $\langle A_{n,m}^k : m \in \omega \rangle \subseteq [\omega]^\omega$ tal que para cualquier $f \in \omega^\omega$, si para todo $m, i \in \omega$, $f^{-1}(i) \cap A_{n,m}^k$ es infinito, entonces $\Vdash_{\mathbb{P}_k}$ "$f^{-1}(i) \cap A_n^k$ es infinito para toda $i \in \omega$".

La sucesión $\langle A^k_{n,m} : m,n,k \in \omega\rangle$ muestra que $\mathbb{P}_\omega$ preserva fuertemente familias ω-hitting de funciones. Sea $f \in \omega^\omega$ tal que $f^{-1}(i) \cap A^k_{n,m}$ es infinito para todo $i,n,m,k \in \omega$, se afirma que $\Vdash_{\mathbb{P}_\omega}$ "$f^{-1}(i) \cap \dot{A}$ es infinito para toda $i \in \omega$". Supóngase que esto no es cierto, entonces existe $q \in \mathbb{P}_\omega$, $i,m \in \omega$ tales que $q \Vdash$ "$f^{-1}(i) \cap \dot{A} \subseteq m$". Sea $k \in \omega$ tal que $q \in \mathbb{P}_k$.

Sea G_k un filtro $\mathbb{P}_k$ genérico sobre V tal que $q \in G_k$. Como $f^{-1}(i) \cap A^k_n$ es infinito, sea $l > m$ tal que $l \in f^{-1}(i) \cap A^k_n$. Para n suficientemente grande se tiene $p^k_n \Vdash_{\mathbb{P}_{[k,\omega)}}$ "$l \in \dot{A}$". Pero como $q \in G_k$, es una contradicción con la suposición inicial acerca de q. ■

Teorema 3.26 *Es consistente con ZFC que* $\mathfrak{h}_{ED} = \omega_1$ *y* $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \omega_2$.

Prueba. Sea $V \models CH$. Sea $\nu = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ es familia ω-hitting de funciones$\}$. Entonces $\mathfrak{h}_{ED} \leq \nu$. Sea G un filtro $(\mathbb{L}_{Fr})_{\omega_2}$ genérico sobre V. Por los dos Lemas anteriores, ν es preservado a lo largo de la iteración y por lo tanto $V[G] \models \mathfrak{h}_{ED} = \nu = \omega_1$ con lo que se concluye la primera parte de la demostración.

Para la segunda parte, recuérdese que $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathrm{cov}(\mathcal{M}), \mathfrak{b}\}$. Dado que $\mathbb{L}_{Fr}$ agrega un real de Cohen y un real no acotado en $V[G]$ estos dos invariantes son iguales a ω_2. ■

Capítulo 4

Familias casi ajenas maximales.

En este capítulo se estudiará el invariante cardinal $\mathfrak{a}$, la mínima cardinalidad de una familia casi ajena maximal de un conjunto numerable, así como su generalización a elementos de un ideal.

4.1. Número mínimo de familias casi ajenas maximales

Recuérdese que una familia $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ es una familia *casi ajena* si para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$, si $A \neq B$, entonces $A \cap B$ es finito y se dice que la familia es *casi ajena maximal* si $\mathcal{A}$ es maximal respecto a la contención, es decir, para todo $B \in [\omega]^\omega$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap B$ es infinito.

Dada una familia $\mathcal{A}$ casi ajena, de cardinalidad $\mathfrak{c}$, por el Lema de Kuratowski-Zorn, se puede afirmar la existencia de una familia $\mathcal{B}$ casi ajena maximal, que extiende a $\mathcal{A}$. El invariante cardinal $\mathfrak{a}$ se define como la mínima cardinalidad de una familia casi ajena maximal infinita.

Si $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \omega\}$ es una familia casi ajena de cardinalidad ω, entonces se puede construir un conjunto infintio B casi ajeno con todos los elementos de $\mathcal{A}$. Sea $x_0 \in A_0$ y $x_{n+1} \in A_{n+1} \setminus \bigcup_{i \leq n} A_i$. Si $B = \{x_n : n \in \omega\}$, entonces se tiene que $A \cap B$ es finito para todo $A \in \mathcal{A}$, es decir, B es casi ajeno con todos los elementos de $\mathcal{A}$ y por lo tanto ésta última no es maximal. El argumento anterior muestra que $\mathfrak{a} > \omega$. Sin embargo, se puede establecer una mejor cota inferior para $\mathfrak{a}$. El siguiente Teorema muestra que $\mathfrak{b}$ acota inferiormente a $\mathfrak{a}$.

Teorema 4.1 (Solomon [30]) *$\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$.*

Prueba. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena maximal de cardinalidad mínima y $\{C_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{A}$ una subfamilia numerable. Sea $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{C_k : k \in \omega\}$. Entonces $\mathcal{A}'$ tiene cardinalidad $\mathfrak{a}$. A partir de $\mathcal{A}'$ se construirá una colección de funciones no acotada.

Sin perder generalidad, se puede suponer que $C_n \cap C_m = \emptyset$, haciendo cambios finitos, por ejemplo, definiendo $C'_0 = C_0$ y $C'_{n+1} = C_{n+1} \setminus \bigcup_{m \leq n} C_n$. La familia $\{C'_n : n \in \omega\}$ cumple la propiedad requerida.

Para cada $k \in \omega$ considérese la función biyectiva $\phi_k : C_k \to \omega$ que cumple para todo $i, j \in C_k$ si $i < j$, entonces $\phi_k(i) < \phi_k(j)$.

Dado que para cada $A \in \mathcal{A}'$ se cumple que $A \cap C_k$ es finito, existe $r_k \in C_k$ tal que $A \cap C_k \subseteq r_k$ (es decir, todo elemento de la intersección es estrictamente menor a r_k). Para cada $A \in \mathcal{A}'$, defínase $f_A(k) = \phi_k(r_k)$.

Entonces la familia $\{f_A : A \in \mathcal{A}'\}$ es una familia de funciones no acotada. Supongamos lo contrario y sea $g \in \omega^\omega$ tal que para toda $A \in \mathcal{A}'$, $f_A \leq^* g$. Consideremos el conjunto infinito $B = \{\phi_k^{-1}(g(k)) : k \in \omega\}$. Entonces, para cada $k \in \omega$, $C_k \cap B = \{\phi_k^{-1}(g(k))\}$. Por otro lado si $A \in \mathcal{A}'$ y $x \in A \cap B$, entonces $x = \phi_n^{-1}(g(n))$ para una única $n \in \omega$ (puesto que los elementos de $\{C_k : k \in \omega\}$ son ajenos), por lo tanto $x \in A \cap C_n$ y en consecuencia $x < r_n$. Por la definición de ϕ_n se tiene que $g(n) = \phi_n(x) < \phi_n(r_n) = f_A(n)$, pero esto sólo sucede a lo más una cantidad finita de veces pues $f_A \leq^* g$, por lo cual $A \cap B$ es finito.

Lo anterior muestra que para cualquier $A \in \mathcal{A}$, $|B \cap A| < \omega$, contradiciendo la maximalidad de $\mathcal{A}$. ■

El invariante cardinal $\mathfrak{a}$ ha sido extensamente estudiado. En [26], S. Shelah mostró que es consistente $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$. El mismo autor probó en [27] que es consistente $\mathfrak{d} < \mathfrak{a}$. Por otro lado, en el modelo de Cohen se cumple $\mathfrak{a} < \mathfrak{d}$ por lo cual $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{d}$ son incomparables.

S. Fuchino, S. Geschke y L. Soukup en [9] consideraron la siguiente cuestión: dada una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos casi ajenos, ¿cómo son las familias casi ajenas maximales que extienden a $\mathcal{F}$ y cuál es su cardinalidad mínima? Para poder analizar esta y otras cuestiones sobre familias casi ajenas maximales, introducen la siguiente generalización de $\mathfrak{a}$.

Definición 4.2 ([9]) *Sea $\mathcal{X}$ una familia de subconjuntos infinitos de un conjunto S tal que $S = \bigcup \mathcal{X}$. Diremos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{X}$ es una familia* casi ajena maximal en $\mathcal{X}$ *si es casi ajena y no existe $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{X}$ una familia casi ajena que contenga propiamente a $\mathcal{F}$. (Si $\mathcal{X} = [S]^\omega$ decimos que es* casi ajena maximal*).*

Sea $\mathfrak{a}(\mathcal{X}) = \text{mín}\{|\mathcal{F}| : |\mathcal{F}| \geq \omega \wedge \mathcal{F}$ es casi ajena maximal en $\mathcal{X}\}$.

De acuerdo a la definición anterior, se tiene que $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}([\omega]^\omega)$.

Se utilizará la misma notación para ideales, es decir, si $\mathscr{I}$ es un ideal sobre ω, $\mathfrak{a}(\mathscr{I})$ denotará la mínima cardinalidad de una familia casi ajena maximal contenida en $\mathscr{I} \setminus fin$. Si $\mathscr{I}$ es un ideal alto, el Lema 1.15 garantiza que una familia casi ajena maximal sobre los subconjuntos de $\mathscr{I}$, es maximal sobre todos los conjuntos de ω.

La siguiente proposición es inmediata de la definición y de la observación anterior.

Proposición 4.3 *Sea $\mathscr{I}$ un ideal alto sobre ω. Entonces $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}(\mathscr{I})$.* ■

4.2. Destructibilidad de familias casi ajenas maximales

M. Hrušák y J. Zapletal en [17] consideraron la destructibilidad de ideales sobre ω en extensiones por forcing. Una noción de forcing destruye a un ideal dado, si en la extensión genérica el ideal no es alto.

En esta sección, se va a considerar el caso particular de la destructibilidad de familias casi ajenas maximales (del ideal basado en dicha familia), pero enunciamos las definiciones y los teoremas para el caso de ideales altos sobre ω.

Definición 4.4 ([17], [12]) *Dado un ideal $\mathscr{I}$ sobre ω y una noción de forcing $\mathbb{P}$, se dice que $\mathbb{P}$* destruye *a $\mathscr{I}$ si existe un $\mathbb{P}$-nombre $\dot{X}$ para un subconjunto infinito de ω tal que*

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}I \cap \dot{X} \text{ es finito para todo } I \in \mathscr{I}\text{”}$$

Hrušák y Zapletal dieron una caracterización de la destructibilidad de ideales para los forcing del tipo P_I, los cuales definiremos a continuación.

Para enunciar esta caracterización, necesitamos introducir algunas nociones adicionales.

Sea X un espacio polaco, I un σ-ideal sobre X. Se define la noción de forcing P_I como los subconjuntos borelianos de X, I-positivos, ordenados por la inclusión. P_I es un orden parcial no separativo cuyo cociente separativo es la σ-álgebra $Borel(X)/I$.

Las nociones de forcing del tipo P_I han sido extensamente estudiadas por J. Zapletal en [32] y ha dado una caracterización de cuándo estas nociones son propias: P_I es propio si y sólo si para todo submodelo elemental numerable M de $H(\theta)$ (para θ suficientemente grande) y toda condición $B \in M \cap P_I$, el conjunto $\{x \in B : x \text{ es genérico}\}$ no pertenece al ideal I.

Otra propiedad importante de las nociones de forcing del tipo P_I es la *Continuous Reading of Names* (CRN).

Definición 4.5 (Zapletal [32]) *Si P_I es una noción de forcing propio, entonces P_I tiene la CNR si para cada función Borel $f : B \to 2^\omega$, con dominio un conjunto I-positivo B, existe un conjunto I positivo $C \subseteq B$ tal que $f \restriction C$ es continua.*

Definición 4.6 *Dado un σ-ideal I sobre el conjunto ω^ω,* la traza del ideal *I, $tr(I)$ es un ideal en $\omega^{<\omega}$ definido por $a \in tr(I)$ si y sólo si $\{f \in \omega^\omega : |\{n \in \omega : f \restriction n \in a\}| = \omega\} \in I$.*

Una noción de forcing de la forma P_I donde I es un σ-ideal sobre ω^ω es *continuamente homogéneo* si para todo conjunto Borel I-positivo B, existe una función $F : \omega^\omega \to B$ tal que $F^{-1}(A) \in I$ para todo $A \in I \restriction B$.

Muchas de las nociones de forcing comúnmente utilizadas (e.g. Cohen, random, Miller, Sacks, etcétera) se pueden presentar como nociones de forcing de la forma P_I, con la CNR y continuamente homogéneos (ver [12]).

Para enunciar la caracterización de cuándo un forcing del tipo P_I destruye a un ideal, es necesario definir el *orden de Katetov* entre ideales sobre ω, el cual fue introducido por M. Katetov en [18], como una generalización del orden de Rudin-Keisler.

Definición 4.7 *Sean $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$ ideales sobre ω. Se dice que $\mathscr{I}$ está por debajo de $\mathscr{J}$ en el orden de Katětov, $\mathscr{I} \leq_K \mathscr{J}$ si existe una función $f : \omega \to \omega$ tal que $f^{-1}[I] \in \mathscr{J}$, para todo $I \in \mathscr{I}$.*

A continuación se enuncia el Teorema sobre destructibilidad de ideales.

Teorema 4.8 (Hrušák, Zapletal [17]) *Sea P_I una noción de forcing propio con* CRN, *continuamente homogéneo e $\mathscr{J}$ un ideal sobre ω. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *P_I destruye $\mathscr{J}$*

2. *$\mathscr{J} \leq_K tr(I)$.* ∎

Observación 3 *Una consecuencia inmediata del Teorema anterior es que si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal tal que $\mathcal{A} \subseteq tr(I)$, entonces P_I destruye a $\mathcal{A}$, pues la función identidad es un testigo de $\mathcal{A} \leq_K tr(I)$.*

En la siguiente sección, se introduce el invariante $\mathrm{cov}^*(\mathscr{I})$, el cual permitirá relacionar $\mathfrak{a}(\mathscr{I})$ con la destructibilidad de ideales.

4.3. Familias casi ajenas acotadas por ideales

Los invariantes cardinales asociados a un ideal definidos en la sección 1.2.1, no proporcionan información acerca de un ideal $\mathscr{I}$, si éste es un ideal sobre ω, excepto, posiblemente, $cof(\mathscr{I})$, pues los restantes son iguales o menores que ω. En [11], F. Hernández y M. Hrušák introducen los invariantes análogos para ideales sobre conjuntos numerables.

Definición 4.9 (Hernández, Hrušák [11]) *Dado un ideal alto sobre ω se define el invariante*

$$\operatorname{cov}^*(\mathscr{I}) = \text{mín}\{|\mathcal{H}| : \mathcal{H} \subseteq \mathscr{I} \wedge \forall A \in [\omega]^\omega \exists I \in \mathcal{H}(|A \cap I| = \omega)\}.$$

Es decir, $\operatorname{cov}^*(\mathscr{I})$ es la mínima cardinalidad de un subconjunto de $\mathscr{I}$, que testifica que $\mathscr{I}$ es alto.

La siguiente proposición relaciona este invariante y el orden de Katetov.

Proposición 4.10 (Hrušák [12]) *Sean $\mathscr{I}$ y $\mathscr{J}$ dos ideales sobre ω. Si $\mathscr{I} \leq_K \mathscr{J}$ entonces $\operatorname{cov}^*(\mathscr{J}) \leq \operatorname{cov}^*(\mathscr{I})$.* ■

El siguiente Teorema muestra una condición suficiente para que una familia sea P_I-indestructible.

Teorema 4.11 *Sea I un ideal sobre ω^ω y $\mathcal{A}$ una familia casi ajena maximal tal que $|\mathcal{A}| < \operatorname{cov}^*(tr(I))$. Entonces $\mathcal{A}$ es P_I indestructible*

Prueba. Por el Teorema 4.8 basta mostrar que $\mathscr{I}(\mathcal{A}) \not\leq_K tr(I)$. En otro caso, si $\mathscr{I}(\mathcal{A}) \leq_K tr(I)$, por la proposición 4.10 se tendría que $\operatorname{cov}^*(tr(I)) \leq \operatorname{cov}^*(\mathscr{I}(\mathcal{A}))$. Sin embargo $\operatorname{cov}^*(\mathscr{I}(\mathcal{A})) = |\mathcal{A}|$, contradiciendo la hipótesis del Teorema. ■

El último Teorema sugiere el siguiente invariante asociado a P_I: la mínima cardinalidad de una familia casi ajena maximal P_I-destructible.

Definición 4.12 *Sea P_I un forcing. Sea $\mathfrak{a}(P_I) = \text{mín}\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A}$ es familia casi ajena maximal y $\mathcal{A}$ es P_I-destructible $\}$*

Para un ideal I sobre el conjunto ω^ω, se pueden establecer las siguientes relaciones entre los invariantes asociados a I.

Teorema 4.13 *Sea I un ideal sobre ω^ω. Entonces:*

$$\text{máx}\{\mathfrak{a}, \text{cov}^*(tr(I))\} \leq \mathfrak{a}(P_I) \leq \mathfrak{a}(tr(I)).$$

Prueba. La desigualdad $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}(P_I)$ es obvia. La desigualdad $\text{cov}^*(tr(I)) \leq \mathfrak{a}(P_I)$ es por el Teorema 4.11. La desigualdad $\mathfrak{a}(P_I) \leq \mathfrak{a}(tr(I))$ es por la observación 3. ■

4.4. Ejemplos

Considérese el ejemplo del ideal $nwd(\mathbb{Q})$ de los subconjuntos nunca densos de números racionales. En [19] Keremeridis probó la igualdad

$$\text{cov}^*(nwd(\mathbb{Q})) = \text{cov}(\mathcal{M}).$$

Este resultado fue reformulado y probado por Balcar, Hernández y Hrušák en [1].

Los siguientes dos Teoremas son de [9].

Teorema 4.14 (Fuchino, Geschke, Soukup [9])

$$\text{máx}\{\text{cov}(\mathcal{M}), \mathfrak{a}\} \leq \mathfrak{a}(nwd(\mathbb{Q})).$$

■

Equivalentemente, por el resultado de Keremeredis, $\text{máx}\{\text{cov}^*(nwd(\mathbb{Q})), \mathfrak{a}\} \leq \mathfrak{a}(nwd(\mathbb{Q}))$.

En [9] también se considera el caso de los conjuntos nulos. Sea σ la medida producto sobre los conjuntos borelianos de 2^ω. Sea $T = 2^{<\omega}$. Cada $f \in 2^\omega$ define una familia en T mediante $B(f) = \{f \restriction n : n \in \omega\}$. Dada $X \subseteq T$ sea $\lceil X \rceil = \{f \in 2^\omega : |B(f) \cap X| = \omega\}$ y definamos $\mu(X) = \sigma(\lceil X \rceil)$.

Sea $\mathcal{N}_T = \{X \in [T]^\omega : \sigma(X) = 0\}$.

Teorema 4.15 (Fuchino, Geschke, Soukup [9]) $\text{máx}\{\text{cov}(\mathcal{N}), \mathfrak{a}\} \leq \mathfrak{a}(\mathcal{N}_T)$.
■

El siguiente Teorema generaliza los dos teoremas anteriores.

Teorema 4.16 *Para cada ideal alto $\mathscr{I}$, se cumple*

$$\text{máx}\{\text{cov}^*(\mathscr{I}), \mathfrak{a}\} \leq \mathfrak{a}(\mathscr{I})$$

Prueba. La desigualdad $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}(\mathscr{I})$ es la proposición 4.3. Por otro lado, si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{I}$, entonces $\mathcal{A}$ es un testigo para $\text{cov}^*(\mathscr{I})$ pues como $\mathcal{A}$ es familia maximal con respecto a $[\omega]^\omega$, para cada $A \in [\omega]^\omega$, existe $I \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap I$ es infinito. Por lo tanto $\text{cov}^*(\mathscr{I}) \leq \mathfrak{a}(\mathscr{I})$.
■

En la siguiente sección se muestra que una pregunta natural es si es consistente que desigualdad sea estricta, pues para una amplia variedad de nociones de forcing, se cumple la igualdad en la extensión genérica.

4.5. Extensiones genéricas

En los ejemplos que se han analizado hasta ahora, se cumple la igualdad $\max\{\mathrm{cov}^*(\mathscr{I}), \mathfrak{a}\} = \mathfrak{a}(\mathscr{I})$. Una pregunta natural es si existe una noción de forcing tal que en la extensión genérica se cumpla la desigualdad estricta, es decir, $\max\{\mathrm{cov}^*(\mathscr{I}), \mathfrak{a}\} < \mathfrak{a}(\mathscr{I})$. Es muy probable que sí, sin embargo dicha noción deberá ser muy compleja. En esta sección se muestra que para una amplia variedad de nociones de forcing definibles, se cumple la igualdad.

Primero se enuncia un teorema de Zapletal, en el que se muestra que dada una familia MAD, indestructible en la iteración de $\mathbb{P}$ de longitud ω_1, entonces también es indestructible en la iteración de longitud ω_2.

Definición 4.17 *Un σ-ideal I sobre un espacio polaco X es Π^1_1 sobre Σ^1_1 si para cada conjunto analítico $A \subseteq 2^\omega \times X$, el conjunto $\{y \in 2^\omega : A_y \in I\}$ es co-analítico, donde $A_y = \{x \in X : (y, x) \in A\}$.*

Teorema 4.18 (Zapletal, No publicado) *Sea P_I una noción de forcing tal que*

- **ZFC** $\vdash$ *P_I es propio,*
- *I es Σ^1_1 en Π^1_1,*
- *todo conjunto analítico I-positivo, contiene un subconjunto boreliano I-positivo.*

Si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal tal que $\mathcal{A}$ es $(P_I)_{\omega_1}$-indestructible, entonces $\mathcal{A}$ es $(P_I)_{\omega_2}$-indestructible. ■

Lema 4.19 *Sea $\mathbb{P}$ una noción de forcing propio de cardinalidad ω_1 que no agrega funciones dominantes, tal que para todo $p \in \mathbb{P}$ y τ un $\mathbb{P}$-nombre si $p \Vdash$ "$\tau \in [\omega]^\omega$", entonces existen $q \leq p$ e $I \in \mathscr{I} \cap V$ tal que $q \Vdash$ "$|\tau \cap I| = \omega$", entonces existe una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{I}$ casi ajena maximal $\mathbb{P}$-indestructible.*

Prueba. Como $\mathbb{P}_{\omega_1}$ es propio, se puede construir una sucesión $\{(p_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ donde $p_\alpha \in \mathbb{P}_{\omega_1}$ y τ_α es un $\mathbb{P}_{\omega_1}$-nombre, que cumpla la siguiente propiedad. Si τ es un $\mathbb{P}_{\omega_1}$-nombre y $p \in \mathbb{P}_{\omega_1}$ son tales que $p \Vdash$ "$\tau \in [\omega]^\omega$", entonces existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $p_\alpha \leq p$ y $p_\alpha \Vdash$ "$\tau = \tau_\alpha$".

Ahora se procede con la construcción de $\mathcal{A}$ por recursión sobre los ordinales menores que ω_1. Sea $\{A_n : n \in \omega\}$ una partición de ω tal que $A_n \in \mathcal{I}$ para todo $n \in \omega$. Supóngase que se ha definido la familia para todo $\beta < \alpha$. Si $p_\alpha \nVdash$ "$\forall \beta \leq \alpha |\tau_\alpha \cap A_\beta| < \omega$" entonces sea $A_\alpha \in \mathscr{I}$ un conjunto casi ajeno de A_β, para todo $\beta < \alpha$.

Si $p_\alpha \Vdash$ "$\forall \beta \leq \alpha |\tau_\alpha \cap A_\beta| < \omega$", dado que $p_\alpha \Vdash$ "$\tau_\alpha \in [\omega]^\omega$", existen $q_\alpha \leq p_\alpha$, $I \in \mathscr{I} \cap V$ tales que $q_\alpha \Vdash$ "$|\tau_\alpha \cap I| = \omega$" y naturalmente se tiene que $q_\alpha \Vdash$ "$\forall \beta < \alpha(|A_\beta \cap \tau_\alpha \cap I| < \omega$". Sea $\{B_n : n \in \omega\}$ una enumeración de $\{A_\beta : \beta < \alpha\}$ haciendo modificaciones pertinentes para que sea una familia de conjuntos ajenos por pares (exactamente como se hizo en el Teorema 4.1).

Sea $\dot{f}$ un $\mathbb{P}_{\omega_1}$-nombre para la siguiente función. Sean $n_0 = \text{mín}\{n \in \omega : q_\alpha \Vdash \text{"}B_n \cap \tau_\alpha \cap I \neq \emptyset\text{"}\}$ y $m_0 = \text{máx}(B_{n_0} \cap \tau_\alpha \cap I)$ y sea $f(i) = m_0 + 1$ para todo i tal que $0 \leq i \leq n_0$.

Sea $n_{k+1} = \text{mín}\{n \in \omega : n > n_k \wedge q_\alpha \Vdash \text{"}B_n \cap \tau_\alpha \cap I \neq \emptyset\text{"}\}$ y $m_{k+1} = \text{máx}(B_{n_k} \cap \tau_\alpha \cap I)$. Defínase $f(i) = \text{máx}\{m_k, m_{k+1}\} + 1$ para todo i tal que $n_k < 1 \leq n_{k+1}$.

Como $\dot{f}$ no es una función dominante, entonces existe existe $g \in \omega^\omega \cap V$

que cumple que para todo $n \in \omega$ existe $m > n$ tal que $f(m) < g(m)$. Sea g una función creciente que cumpla esta propiedad.

Sea

$$\hat{A}_\alpha = \bigcup_{m \in \omega} (B_m \cap g(m)).$$

Defínase $A_\alpha = \hat{A}_\alpha \cap I$ y

$$\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

La familia así construida es una familia casi ajena que por construcción, $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{I}$. A continuación se verificará que es maximal.

Supóngase que no es así, es decir que existe τ un $\mathbb{P}_{\omega_1}$-nombre y $p \in \mathbb{P}_{\omega_1}$ tales que $p \Vdash$ "$\forall \alpha < \omega_1(|\tau \cap A_\alpha| < \omega)$". Sea $\beta < \omega_1$ tal que $p_\beta \leq p$ y $p_\beta \Vdash$ "$\tau = \tau_\beta$". Sin embargo, obsérvese que $p_\beta \Vdash$ "$\tau_\beta \cap A_\beta$ es infinito" y por lo tanto se tiene una contradicción. ■

Teorema 4.20 *Sea P_I una noción de forcing tal que*

- **ZFC** $\vdash P_I$ *es propio,*
- *I es Σ^1_1 en Π^1_1,*
- *todo conjunto analítico I-positivo, contiene un subconjunto boreliano I-positivo.*

Si G es un filtro $(P_I)_{\omega_2}$-genérico sobre V, entonces

$$V[G] \models \max\{\mathrm{cov}^*(\mathscr{I}), \mathfrak{a}\} = \mathfrak{a}(\mathscr{I}).$$

Prueba. Se considerarán dos casos, el primero cuando P_I agrega un real dominante. En tal caso $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ y por lo tanto se cumple la igualdad.

En el caso de que P_I no agregue reales dominantes, supóngase que $V[G] \models \mathrm{cov}^*(\mathscr{I}) = \omega_1$. Entonces se mostrará que $\mathfrak{a}(\mathscr{I}) = \omega_1$.

Sea $\mathcal{H} = \{\dot{I}_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ una colección de P_I-nombres y $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \Vdash$ "$\mathcal{H} \subseteq \mathscr{I} \wedge \forall A \in [\omega]^\omega \exists \alpha < \omega_1(|A \cap I_\alpha| = \omega)$". Para cada $\alpha < \omega_1$ existe $\beta_\alpha < \omega_2$ tal que $I_\alpha \in V[G_{\beta_\alpha}]$, por lo tanto si $\beta = sup\{\beta_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, entonces $\beta < \omega_2$ y $\mathcal{H} \subseteq V[G_\beta]$. Es decir, la familia $\mathcal{H}$ aparece en un paso intermedio de la iteración, por lo tanto podemos suponer sin perder generalidad que $\mathcal{H} = \mathscr{I} \cap V$ tomando como modelo base $V[G_\beta]$.

Por el Lema 4.19, existe una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{I}$, $(P_I)_{\omega_1}$-indestructible. Por el Teorema 4.18, esta familia es $(P_I)_{\omega_2}$-indestructible, y por lo tanto $V[G] \models \mathfrak{a}(\mathscr{I}) = \omega_1$. ■

Bibliografía

[1] B. Balcar, F. Hernández, M. Hrušák. Combinatorics of dense subsets or the rationals. *Fundamenta Mathematicae*, 183(1):59-80, 2004.

[2] B. Balcar, J. Pelant, and P. Simon, The space of ultrafilters on **N** covered by nowhere dense sets. *Fund. Math.*, 110(1):11-24,1980.

[3] T. Bartoszynski and H. Judah. *Set theory: On the structure of the Real Line.* A. K. Peters, Wellesley, MA, 1995.

[4] T. Bartoszyński, and S. Shelah. Intersection of $< 2^{\aleph_0}$ ultrafilters may have measure zero. *Archive for Mathematical Logic*, 31(4):221-226, 1992.

[5] A. Blass. Combinatorial cardinal characteristics of the continuum. In Matthew Foreman and Akihiro Kanamori, editors, Handbook of Set Theory. Springer-Verlag, Berlin.

[6] J. Baumgartner. Sacks forcing and the total failure of Martin's axiom. *Topology and its Applications*, 19 (1985) 211-225.

[7] P. Cohen. Set theory and the Continuum Hypotesis. *Addison-Wesley 1966*.

[8] A. Dow. Tree π-bases for $\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$ in various models. *Topology and its Applications*, 33: 3-19, 1989.

[9] S. Fuchino, S. Geschke, L. Soukup. How to drive our families mad. *Archive for mathematical logic* 2011.

[10] M. Goldstern. Tools for your forcing constructions. In Haim Judah, editor, *Set theory of the reals*, Israel Mathematical conference Proceedings, pags 305-360 Bar Ilan University, 1992.

[11] F. Hernández-Hernández and M. Hrušák. Cardinal invariants of analytic P-ideals. *Canadian Journal of Mathematics*, 59(3): 575-595, 2007.

[12] M. Hrušák. Combinatorics of filters and ideals. In *Set theory and its applications (Boise, ID, 1995-2010)*, volume 533 of *Contemp. Math.*, Amer. Math. Soc. (2011), 29-69.

[13] M. Hrušák. Life in the Sacks Model. *Acta Universitatis Carolinae.* Mathematica et Physica, vol. 42 (2001), issue 2, pp. 43-58

[14] M. Hrušák, C. A. Martínez Ranero, U. A. Ramos García, O. A. Téllez Nieto. Intersection numbers of families of ideals. *Archive for mathematical logic.* DOI 10.1007/s00153-012-0321-8.

[15] M. Hrušák, D. Meza-Alcántara, and H. Minami. Pair-splitting, pair-reaping and cardinal invariants of F_σ ideals. *Jornal of Symbolic Logic*, 75(2): 661-677, 2010.

[16] M. Hrušák, D. Rojas, J. Zapletal. Cofinalities of Borel ideals. Preprint.

[17] M. Hrušák, J. Zapletal. Forcing with quotients. Archive for Mathematical Logic vol. 47, no. 7-8, pp. 719-739, 2008.

[18] M. Katětov. Products of filters. *Commentationes Mathematicae universitatis Carolinae*, 9(1):173-189, 1968.

[19] K. Keremedis. On the covering and the additivity number of the real line. *Procedings of the American Mathematical Society.* Vol 123, No 5. 1995.

[20] K. Kunen. *Set Theory. An introduction to Independence Proofs.* North Holland, Amsterdam, 1980.

[21] A. R. D. Mathias. Happy families. *Ann. Math. Logic,* 12(1): 59-111, 1977.

[22] K. Mazur. F_σ-ideals and $\omega_1\omega_1^*$-gaps in the Boolean algebras $\mathcal{P}(\omega)/I$. *Fundamenta Mathematicae*, 138(2):103-111, 1991.

[23] J. Pawlikowski. Laver's forcing and outer measure. In *Proceeding of BEST Conference 1991-1994, 1995.*

[24] S. Plewik. Intersection and unions of ultrafilters without the Baire property. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics*, 35(11-12):805-808, 1987.

[25] S. Plewik. Ideals of second category. *Fundamenta Mathematicae*, 138(1):23-26, 1991.

[26] S. Shelah. On cardinal invariants of the continuum. In *Axiomatic Seth Theory* vol. 31 of Contemp. Math. pp 183-207, Providence, R.I. 1984.

[27] S. Shelah. Two cardinals invariants of continuum ($\mathfrak{d} < \mathfrak{a}$) and FS linearly ordered iterated forcing. *Acta Math.* 192, no 2 pp 187-223.

[28] S. Shelah. Proper forcing, Vol 940 of *Lectures Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, 1982.

[29] S. Solecki. Filters and sequences. *Fundamenta Mathematicae*, 163:215-228, 2000.

[30] R.C. Solomon. Families of sets and functions. *Czechoslovak Math. J.* 27:556-559, 1977.

[31] M. Talagrand. Compacts de functions mesurables et filtres non mesurables. *Studia Mathematica*, 67(1):13-43, 1980.

[32] J. Zapletal. Forcing idealized, Vol 134 of Cambridge Tracts on Mathematics. Cambridge University Press. Cambridge 2008.