UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

PUNTOS ORILLA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTORA EN CIENCIAS

P R E S E N T A

M. en C. ROCÍO LEONEL GÓMEZ

DIRECTORA DE TESIS: DRA. MARÍA ISABEL PUGA ESPINOSA

MÉXICO, D.F. **ABRIL, 2012**

PUNTOS ORILLA

M. en C. Rocío Leonel Gómez

Abril 2012

Para mis grandes amores

Carlos, Carlitos y Estebitan

Agradecimientos

Al presentar este trabajo, quiero manifestar mi gratitud a Carlos Islas Moreno, con quien tengo el honor y el placer de compartir la vida y a quien amo profundamente.

Con mucho cariño y respeto a la Dra. Isabel Puga, por su interés y valiosa orientación.

A quienes me brindaron su valiosa colaboración y orientación con sus comentarios, criticas y sugerencias para mejorar mi trabajo, en particular, al Dr. Sergio Macías y a la Dra. Patricia Pellicer.

A mis papas Genoveva Leonel y Marco García por darme el gusto de disfrutar la vida.

A mis hermanas Alejandra Sarmina, Miriam García e Ivonne Leonel por qué a pesar que casi nunca estamos de acuerdo siempre me escuchan y me apoyan.

A mis tíos Jesús Leonel y Arturo Leonel, quienes me brindan siempre su tiempo cuando lo necesito.

Y a todas aquellas personas que de alguna u otra manera, me motivaron para que concluyera este trabajo de forma satisfactoria.

Gracias.

Rocío Leonel.

Índice general

[1] **Arvum en latín significa orilla.**

Introducción.

En el transcurso de la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios, se han estudiado a los continuos (que son espacios métricos, compactos, conexos y no vacíos) a través de diversas técnicas, una de ellas es estudiar qué propiedades tienen los puntos de un continuo.

En ese sentido, este trabajo de investigación está destinado a estudiar los continuos a partir de puntos orilla, centro, centro fuerte y de corte.

La noción de punto y conjunto orilla, fue introducida por L. Montejano e I. Puga en [13], para mostrar propiedades del hiperespacio con punta de cono de un dendroide.

La noción de centro y centro fuerte fue introducida por P. Minc en [12] también en dendroides, y en ese mismo artículo muestra que todo dendroide tiene al menos un centro.

Estos conceptos han sido estudiados en dendroides por L. Montejano e I.

Puga en [13], V. Neumann e I. Puga en [18] y [19], J. Heath y V. Nall en [4], V. Nall en [16] y P. Minc en [12] y recientemente por V. Nall en λ-*dendroides* en [17].

Dado que los puntos orilla y centro han sido estudiado en dendroides y λ-dendroides, en este trabajo generalizamos todos estos conceptos: puntos y conjuntos orilla, puntos centro y centro fuerte, para cualquier continuo X.

Para iniciar este trabajo, en el capítulo 1, se encuentran las definiciones y algunos resultados ya conocidos dentro de la Teoría de Continuos y sus Hiperespacios necesarios para la elaboración de esta investigación.

Como habíamos mencionado, en [13] y [12] se presentaron las definiciones de orilla y centro en dendroides, así, en el capítulo 2, se presentan a detalle las definiciones de centro, centro fuerte, orilla y corte para cualquier continuo. Además, dado que todo punto que es de corte no es orilla, vemos bajo qué condiciones, en un continuo X, las nociones anteriores podrían ser equivalentes y mostramos con ejemplos cuándo no son equivalentes.

En [12] y [18] se mostró un dendroide con un único centro que no es centro fuerte y con todos sus puntos orilla; en este sentido, en el capítulo 3 mostramos que existe una familia no numerable de dendroides con un único centro que no es centro fuerte y con todos sus puntos orilla.

Al extender la definición de punto orilla para cualquier continuo, surgió la siguiente pregunta: ¿Existirán continuos sin puntos orilla?

De esta manera, en el capítulo 4, contestando a la pregunta anterior mostramos lo siguiente: *Todo continuo X tiene al menos dos puntos orilla*, este resultado nos servirá para describir a los continuos con a los más dos puntos orilla y dar algunas caracterizaciones con puntos orilla para un arco y una curva cerrada simple y, además, se generaliza el siguiente resultado importante dentro de la Teoría de los Continuos: Todo continuo tiene al menos dos puntos que no son de corte.

Para finalizar este capítulo, mostraremos que los puntos de irreducibilidad de un continuo X son puntos orilla de X y el regreso sólo será cierto en los siguientes casos; cuando X es un continuo irreducible y hereditaramente descomponible o cuando X es un continuo únicamente irreducible. Con esto veremos que la unión finita de puntos orilla en un continuo únicamente irreducible X es un conjunto orilla de X.

Posteriormente en el estudio de los puntos centros en dendroides, V. Nall en [16], prueba los siguientes Teoremas:

1. Sean D y D' dendroides no degenerados y $C' \subset D$ el conjunto de centros de D. Si $f : D \to D'$ es una función continua y, para cada elemento

$z \in D'$, $f^{-1}(z)$ tiene a lo más una cantidad numerable de componentes y C' está contenido en algún subcontinuo propio C de D, entonces $f(C)$ contiene todos los centros de D'.

2. Sean D y D' dendroides no degenerados. Si $f : D \to D'$ es una función continua y para cada elemento $z \in D'$, $f^{-1}(z)$ tiene a lo más una cantidad numerable de componentes y $x \in D$ es el único centro de D, entonces $f(x)$ es el único centro de D'.

En relación a estos Teoremas nos hicimos la siguiente pregunta:

¿Será cierto que si $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva del continuo X al continuo Y y $p \in X$ es un punto de corte (centro, orilla) de X, entonces $f(p)$ es un punto de corte (centro, orilla) de Y?

Con respecto a esta pregunta, en el capítulo 5 daremos algunas condiciones a la función f, para que se preserven los puntos de corte, centro y orilla.

Por último, en el capítulo 6 presentamos algunas preguntas abiertas que surgieron en el transcurso de este trabajo doctoral.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, presentamos algunas definiciones y resultados ya conocidos en la Teoría de Continuos y sus Hiperespacios, fundamentales para el desarrollo de este trabajo doctoral. Se probarán todos los resultados que se enuncien o se darán las referencias para encontrar una prueba de dicho resultado.

1.1. Continuos e Hiperespacios

Definición 1.1 *Sea X un espacio topológico, X es un* continuo *si X es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un subconjunto no vacío A de X, es un* subcontinuo *de X si A es cerrado y conexo.*

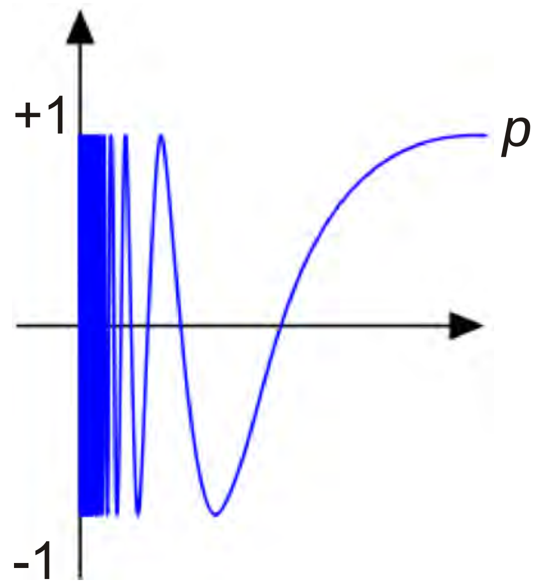


Figura 1.1: Continuo sen$\left(\frac{1}{x}\right)$

En este trabajo, denotaremos al intervalo $[0,1]$ con la letra I. Diremos que X es un *arco*, si es homeomorfo a I.

Denotaremos por S^1 a la circunferencia unitaria con centro en cero, es decir, $S^1 = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Diremos que X es una *curva cerrada simple,* si X es homeomorfo a S^1.

Definición 1.2 *Un continuo X es* unicoherente *si $H \cap K$ es conexo, para cualesquiera subcontinuos H y K de X, tales que $H \cup K = X$. Diremos que un continuo X es* hereditariamente unicoherente *si todos sus subcontinuos son unicoherentes. Equivalentemente, si $H \cap K$ es conexa, para cualesquiera* *dos subcontinuos H y K de X.*

El arco y el *continuo* $\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ que se define como la cerradura en R^2 de la gráfica de la función $\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ definida en el intervalo $(0,1]$ (Figura 1.1) son ejemplos de continuos hereditariamente unicoherentes.

Definición 1.3 *Un continuo X es* descomponible *si X es la unión de dos subcontinuos propios de X. Un continuo X es* indescomponible *si no es descomponible.*

El arco, la curva cerrada simple y el continuo $\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ (Figura 1.1) son ejemplos de continuos descomponibles.

Un ejemplo de un continuo indescomponible es el Continuo de Knaster (Figura 1.2). Ver [8, pág. 204].

El siguiente resultado es una caracterización de los continuos descomponibles.

Lema 1.4 *[10, Lema 1.7.20, pág. 52] Un continuo X es descomponible si y sólo si X contiene un subcontinuo propio con interior no vacío.*

Definición 1.5 *Un continuo X es* arcoconexo *si para cualesquiera dos puntos en X, existe un arco en X que los contiene. Un continuo X es* hereditariamente arcoconexo *si cualequier subcontinuo A de X, es arcoconexo.*

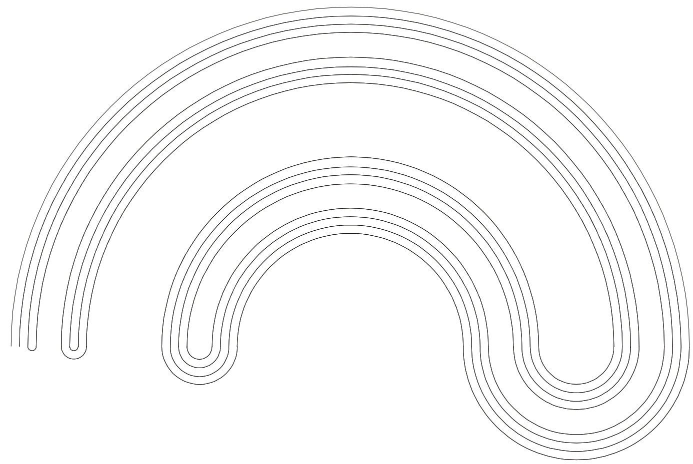


Figura 1.2: Continuo de Knaster

Notación 1.6 *Si X es un continuo arcoconexo, para cualesquiera puntos x y z de X, xz denotará un arco de x a z.*

El arco y la curva cerrada simple, son ejemplos de continuos hereditariamente arcoconexos, mientras que el Círculo de Varsovia (Figura 1.3) es un continuo arcoconexo que no es hereditariamente arcoconexo.

Definición 1.7 *Un continuo X es* localmente conexo en un punto x *si para cada abierto U de X que contiene a x, existe un abierto conexo V de X tal que $x \in V \subset U$. Diremos que X es* localmente conexo *si X es localmente conexo en todos sus puntos.*

Teorema 1.8 *[15, Teorema 8.26, pág. 132] Sean X un continuo localmente conexo y U un subconjunto abierto y conexo de X. Entonces U es arcoconexo.*

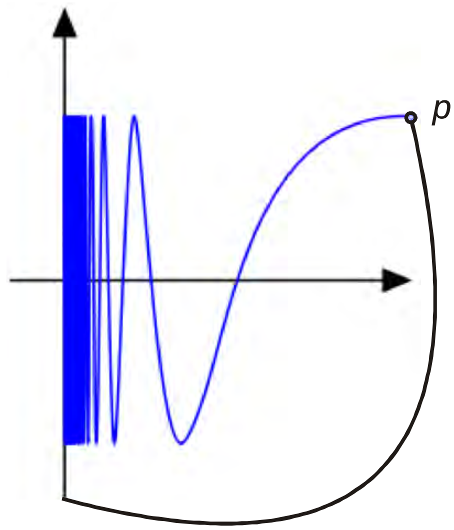


Figura 1.3: Círculo de Varsovia

Definición 1.9 *Sean X un continuo y $x \in X$. Decimos que X es* semilocalmente conexo en x *si cada vecindad U de x, contiene un abierto V de X tal que $x \in V \subset U$ y $X \backslash V$ tiene sólo una cantindad finita de componentes. Diremos que X es* semilocalmente conexo *si X es semilocalmente conexo en cada uno de sus puntos.*

Teorema 1.10 *Si X es un continuo localmente conexo, entonces X es semilocalmente conexo.*

Demostración. Sean $x \in X$ y U un abierto de X que contiene a x. Probaremos que existe un abierto V de X tal que $x \in V \subset U$ y $X \backslash V$ tiene sólo una cantidad finita de componentes.

Por ser X localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo W de X tal que $W \subset U$.

Para cada $y \in X \backslash W$, por ser X localmente conexo, existe un subcontinuo W_y de X tal que $y \in Int(W_y) \subset W_y \subset X \backslash \{x\}$.

Dado que $X \backslash W$ es compacto, existen un número finito de puntos, que denotaremos por $y_1, y_2, ..., y_n$ de $X \backslash W$ tales que $X \backslash W \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} Int\,(W_{y_i})$.

Sea $V = X \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{n} W_{y_i}$. Dado que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} W_{y_i}$ es un cerrado de X se tiene que V es un abierto de X y, como $x \notin W_{y_i}$, resulta que $x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} W_{y_i}$. Considerando que $X \backslash U \subset X \backslash W \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} Int\,(W_{y_i}) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} W_{y_i}$, se tiene que $X \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{n} W_{y_i} \subset U$.

Así, V es un abierto de X tal que $x \in V \subset U$ y $X \backslash V$ tiene un número finito de componentes. ■

Definición 1.11 *Sean X un continuo y $p, q \in X$. Decimos que:*

i) X es aposindético en p respecto a q, *si existe un subcontinuo W de X tal que $p \in Int\,(W) \subset W \subset X \backslash \{q\}$.*

ii) X es aposindético en p *si X es aposindético en p con respecto a cada uno de los puntos de $X \backslash \{p\}$. Diremos que X es* aposindético *si X es aposindetico en cada uno de sus puntos.*

En el abanico armónico el punto p es aposindético respecto a q, pero q no es aposindético respecto a p (Ver Figura 1.4).

Definición 1.12 *Dado un espacio topológico X, se define la* componente *de X como un subconjunto conexo maximal. Dado $p \in X$, la* componente de X *que contiene a p, es $C_p = \cup \{A \subset X : p \in A \text{ y } A \text{ es conexo}\}$.*

El siguiente teorema es conocido como el Teorema de Golpes en la Frontera.

Teorema 1.13 *[15, Teorema 5.4, pág. 73] Sean X un continuo y E un subconjunto propio y no vacío de X. Si K es una componente de E, entonces $\overline{K} \cap Fr(E) \neq \emptyset$.*

Lema 1.14 *[10, Lema 1.7.18, pág. 52] Sean X un continuo y A un subcontinuo de X tal que $X \backslash A$ no es conexo. Si U y V son subconjuntos abiertos y no vacíos de X tales que $X \backslash A = U \cup V$, entonces $A \cup U$ y $A \cup V$ son subcontinuos de X.*

Definición 1.15 *Sea X un continuo. Se define el* hiperespacio de subcontinuos *de X, como $C(X) = \{A \subset X : A \text{ es cerrado, conexo y no vacío}\}$.*

Sea X un continuo con métrica d. Dados $\varepsilon > 0$, $p \in X$ y $A \in C(X)$, se definen la *Bola abierta de radio ε, con centro en p*, como sigue:

$B(\varepsilon, p) = \{q \in X : d(p,q) < \varepsilon\}$.

La *Nube de radio* ε *con centro en* A como sigue:

$N(\varepsilon, A) = \{q \in X : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } d(x,q) < \varepsilon\}$.

Dados A y B elementos en $C(X)$, se define la *distancia de Hausdorff de* A *a* B como sigue:

$H(A,B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}$. Ver [15, Teorema 4.2, pág. 52].

En este trabajo la letra H denotará la métrica de Hausdorff.

Lema 1.16 *Sean* A *y* B *dos elementos de* $C(X)$ *y* $\varepsilon > 0$. *Entonces* $H(A,B) < \varepsilon$ *si y sólo si* $A \subset N(\varepsilon, B)$ *y* $B \subset N(\varepsilon, A)$.

Demostración. Si $H(A,B) < \varepsilon$. Sea $H(A,B) = \alpha$. Entonces $0 \leq \alpha < \varepsilon$ y como $\alpha = \text{ínf}\{\beta > 0 : A \subset N(\beta, B) \text{ y } B \subset N(\beta, A)\}$ se tiene que $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.

Supongamos ahora, que $A \subset N(\varepsilon, B)$ y que $B \subset N(\varepsilon, A)$. Dado que $N(\varepsilon, A) = \bigcup_{0<\alpha<\varepsilon} N(\alpha, A)$, se tiene que $B \subset \bigcup_{0<\alpha<\varepsilon} N(\alpha, A)$.

Por la compacidad de B, obtenemos que $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(\alpha_i, A)$, tomando $\beta_1 = \text{máx}\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$, concluimos que $0 < \beta_1 < \varepsilon$ y $B \subset N(\beta_1, A)$.

De igual manera, existe β_2 tal que $0 < \beta_2 < \varepsilon$ y $A \subset N(\beta_2, B)$.

Por lo tanto, si $\beta = \text{máx}\{\beta_1, \beta_2\}$, concluimos que $H(A,B) \leq \beta < \varepsilon$. ■

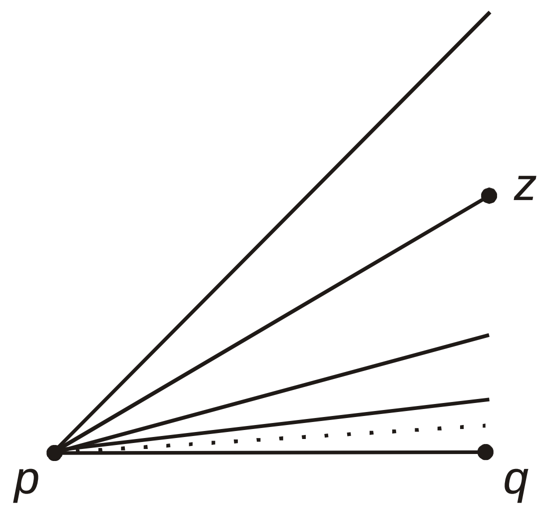


Figura 1.4: Abanico Armónico

1.2. Propiedades de corte y separación

Definición 1.17 *Dado un continuo X, diremos que un punto $p \in X$ es un* punto extremo *de X, si X tiene una base local β en p tal que $|FrU| = 1$ para todo $U \in \beta$.*

Los puntos extremos del intervalo $[0,1]$ son el 0 y el 1, el continuo sen$\left(\frac{1}{x}\right)$ sólo tiene un punto extremo que es el punto p. Ver Figura 1.1.

Definición 1.18 *Dado un continuo X, diremos que un punto $p \in X$, es un* punto de corte *de X si $X \setminus \{p\}$ no es conexo.*

En el abanico armónico, p es un punto de corte. Ver Figura 1.4.

Lema 1.19 *Sean X un continuo localmente conexo y p un punto que no es de corte de X. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe un subcontinuo C de X, tal que $p \notin C$ y $H(X, C) < \varepsilon$.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y U un abierto conexo de X tal que $p \in U$ y diám$(U) < \varepsilon$.

Por el Teorema 1.10, existe un abierto V de X tal que $p \in V$, $V \subset U$ y $X \backslash V$ tiene un número finito de componentes, digamos $C_1, C_2, ..., C_n$.

Sea $c_i \in C_i$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Como $X \backslash \{p\}$ es conexo, ya que p no es un punto de corte, se sigue del Teorema 1.8, que $X \backslash \{p\}$ es arcoconexo.

Sean α_i arcos de c_i a c_{i+1} contenidos en $X \backslash \{p\}$, para $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ y α_n un arco de c_n a c_1 contenido en $X \backslash \{p\}$.

Obsérvese que para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, se tiene que C_i es un cerrado de $X \backslash V$ y $X \backslash V$ es un cerrado de X, entonces cada C_i es un cerrado de X.

Así, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$ es un cerrado de X.

De manera similar, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ es un cerrado de X.

Consideremos $C = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i\right) \cup \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right)$.

Por ser $\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$ y $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ cerrados de X, se tiene que C es un cerrado de X.

Además, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ y α_i son conexos y $C_i \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} \alpha_i) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Por lo que, C es un conexo de X.

Obsérvese, que $p \notin C$ y $H(C, X) < \varepsilon$. ■

Definición 1.20 *Sea X un continuo. Decimos que un punto $p \in X$* separa *a dos puntos a y b en X, si existen subconjuntos ajenos H y K de X tales que $X \setminus \{p\} = H \cup K$, $a \in H$, $b \in K$, $\overline{H} \cap K = \emptyset$ y $\overline{K} \cap H = \emptyset$.*

Obsérvese que si X es un continuo y p es un punto de corte de X, entonces $X \setminus \{p\} = U \cup V$ donde U y V son subconjuntos abiertos y no vacíos de X, tomando $u \in U$ y $v \in V$, se tiene que p separa a los puntos u y v en X, por lo tanto, todo punto de corte separa a dos puntos distintos en X.

Lema 1.21 *[20, (4.1), pág. 50] Sea X un continuo. Si X es semilocalmente conexo en $p \in X$ y p no separa dos puntos x y y en X, entonces existe un subcontinuo A de X tal que x y y son elementos de A y $A \subset X \setminus \{p\}$.*

Definición 1.22 *Sean X un continuo y A, B, R subconjuntos de X. Decimos que el conjunto R* separa *A de B en X si $X \setminus R$ es la unión de dos conjuntos ajenos que contienen a A y B respectivamente. Si un conjunto R separa dos puntos uno de otro en X, diremos que R* separa *a X.*

Definición 1.23 *Sea X un continuo. Si X contiene un continuo que intersecta a dos conjuntos A y B y R es un conjunto que no contiene ni a A ni* *a B, pero intersecta a cada continuo de X que intersecta a A y B, diremos que R* corta A de B en X. *Si R corta dos puntos uno de otro en X, diremos que R* corta *a X.*

Obsérvese que en el continuo de Knaster, (Figura 1.2) cualquier par de puntos lo corta pero no lo separa, así que la separación de un continuo por un par de sus puntos no es lo mismo que cortar al continuo por el mismo par de puntos.

1.3. Continuos irreducibles

Definición 1.24 *Sean X un continuo no degenerado y p un punto de X.* La composante de X que contiene a p, *está definida por:*

$$k(p) = \{x \in X : \text{ hay un subcontinuo propio } A \text{ de } X \text{ tal que } p, x \in A\}.$$

Definición 1.25 *Sean X un continuo y A un subconjunto de X. Diremos que X es* irreducible respecto a A, *si no hay subcontinuos propios de X que contengan a A.*

Definición 1.26 *Diremos que un continuo X es* irreducible *si es irreducible* *con respecto a un subconjunto que contiene exactamente dos puntos. En este caso diremos que X es* irreducible entre esos dos puntos.

El arco, el continuo $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ (Figura 1.1) y el continuo de Knaster (Figura 1.2) son algunos ejemplos de continuos irreducibles.

El continuo $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ es irreducible entre el punto p y cualquier punto que no pertenezca a la composante $k(p)$ y el continuo de Knaster es irreducible entre cualesquiera dos puntos que se encuentren en composantes distintas.

Definición 1.27 *Sea X un continuo. Sean R y S subconjuntos de X. Diremos que un subcontinuo Y de X es* irreducible de R a S *si existen $r \in R$ y $s \in S$ tales que Y es irreducible entre r y s. Dado un continuo X, diremos que p* es un punto de irreducibilidad *de X, si X es irreducible entre p y algún otro punto de X.*

Teorema 1.28 *[15, 4.35, pág. 68] Sean X un continuo y A un subconjunto cerrado de X. Entonces existe un subcontinuo de X, que es irreducible con respecto a A.*

De lo anterior se sigue fácilmente el siguiente corolario.

Corolario 1.29 *Sean X un continuo y $p, q \in X$ con $p \neq q$, entonces existe un subcontinuo Y irreducible entre p y q.*

Teorema 1.30 *Sea X un continuo no degenerado. Entonces X es irreducible si y sólo si existen por lo menos dos composantes diferentes en X.*

Demostración. Supongamos que existen $p, q \in X$ tales que X es irreducible entre p y q. Es claro, que $p \notin k(q)$ y $q \notin k(p)$, por lo tanto $k(q) \neq k(p)$.

Sopngamos ahora, que existen $p, q \in X$ tales que $k(q) \neq k(p)$.

Supongamos sin pérdida de generalidad, que $X \neq k(p)$.

Sea $x \in X \backslash k(p)$. Entonces no existe ningún subcontinuo propio de X que contenga a $\{x, p\}$. En consecuencia, X es irreducible entre x y p. ■

Teorema 1.31 *Sean X un continuo no degenerado y $p \in X$. Entonces la composante $k(p)$ de p en X es densa en X.*

Demostración. Sean $p \in X$ y U un abierto no vacío de X. Probaremos que $k(p) \cap U \neq \emptyset$.

Sea V un abierto no vacío de X tal que $\overline{V} \subset U$. Si $p \in \overline{V}$, entonces $p \in U \cap k(p)$.

Si $p \notin \overline{V}$, por ser $X \backslash \overline{V}$ abierto, se tiene que la cerradura de la componente de $X \backslash \overline{V}$ que contiene a p, digamos C, es un subcontinuo propio de X. Por el Teorema 1.13, se tiene que $\overline{C} \cap \overline{V} \neq \emptyset$. Así, $\overline{C} \subset k(p)$, por lo tanto,

$k(p) \cap \overline{V} \neq \emptyset$ y, como $\overline{V} \subset U$, concluimos que $k(p) \cap U \neq \emptyset$. ■

Lema 1.32 *[10, Corolario 1.7.21, pág. 53] Un continuo X es indescomponible si y sólo si cada subcontinuo propio de X tiene interior vacío.*

Teorema 1.33 *[15, Corolario 11.15.1, pág. 203] Si X es un continuo indescomponible, entonces X es irreducible.*

1.4. Continuos hereditariamente descomponibles

Sean (S, τ) un espacio topológico y $\mathcal{D}$ una colección de subconjuntos no vacíos de S.

Decimos que $\mathcal{D}$ es un partición de S si sus elementos son mutuamente ajenos y $\underset{D \in \mathcal{D}}{\cup} = S$.

La familia $T(\mathcal{D}) = \{U \subset \mathcal{D} : \cup U \in \tau\}$ es una topología para $\mathcal{D}$.

El espacio $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D}))$ es llamado un *espacio de descomposición* de S o simplemente una *descomposición* de S.

Sea (S, τ) un espacio topológico. Decimos que la partición $\mathcal{D}$ de S es *semicontinua superiormente* si siempre que $D \in \mathcal{D}$, $U \in \tau$ y $D \subset U$, existe $V \in \tau$ tal que si $A \in \mathcal{D}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subset U$.

Definición 1.34 *Un conjunto M es* fuertemente conexo *si para cada dos puntos m y n de M existe un continuo N contenido en M tal que $\{m, n\} \subset N$.*

Los siguientes teoremas, se encuentran en [11].

Teorema 1.35 *[11, Lema A, pág. 183] Sea X un continuo irreducible y hereditariamente descomponible. Entonces X contiene dos y únicamente dos subcontinuos propios H y K de X con las siguientes propiedades:*

1. *Si X es irreducible entre p y q, entonces $p \in H$ y $q \in K$,*
2. *$X \backslash H$ y $X \backslash (H \cup K)$ son fuertemente conexos,*
3. *$H \subset B$ para cada $B \in C(X)$ tal que $B \cap H \neq \emptyset$ y $B \cap (X \backslash H) \neq \emptyset$,*
4. *Si N es un subcontinuo propio de X que intersecta a H y $X \backslash H$, entonces cada subcontinuo de X que intersecta a N y K contiene a $\overline{X \backslash N}$ y $\overline{X \backslash N}$ es irreducible de N a K.*

A los subcontinuos H y K descritos en el teorema anterior se les llama $subcontinuos\ finales$ de X.

Teorema 1.36 *[11, Lema B, pág. 184] Sea X un continuo irreducible y hereditariamente descomponible. Sean H y K los subcontinuos finales de X,* *descritos en el Teorema 1.35 y* x *un punto de* $X\setminus(H \cup K)$*. Entonces existe un subcontinuo* T_x *contenido en* $X\setminus(H \cup K)$ *tal que* $x \in T_x$ *y* $X\setminus T_x$ *es la unión de dos subconjuntos abiertos, conexos y ajenos* U *y* V *que contienen a* H *y* K*, respectivamente, con las siguientes propiedades:*

1. $X = \overline{U} \cup \overline{V}$*,*

2. $\overline{U}$ *es irreducible de* H *a* $\overline{V}$ *y* $\overline{V}$ *es irreducible de* K *a* $\overline{U}$*,*

3. *Los subcontinuos finales de* $\overline{U}$ *son* H *y* $T_x \cap \overline{U}$ *y los subcontinuos finales de* $\overline{V}$ *son* K *y* $T_x \cap \overline{V}$ *respectivamente.*

4. *Cada subcontiuo de* X *que intersecta a* H *y a* $T_x \cup V$*, contiene a* $\overline{U}$*.*

A cada uno de los subcontinuos T_x descritos en el teorema anterior se les llama *c-subcontinuos* de X.

Teorema 1.37 *[11, Teorema 2.2, pág. 185] Sea* X *un continuo irreducible entre* p *y* q *y hereditariamente descomponible. Sean* H *y* K *los subcontinuos finales de* X *que contienen a* p *y a* q*, respectivamente, y* $\boldsymbol{D}$ *la coleción que consiste de* H *y* K *y todos los c-subcontinuos de* X*. Entonces* $\boldsymbol{D}$ *es una colección semicontinua superiormente de continuos ajenos dos a dos cuya unión es* X *y* $(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{D}))$ *es un arco de* H *a* K*.*

Capítulo 2

Diferentes tipos de puntos

Como mencionamos anteriormente, los puntos orilla fueron introducidos por L. Montejano en I. Puga en [13], para mostrar propiedades del hiperespacio de continuos de un dendroide. Posteriormente, en [19] V. Neumann e I. Puga, estudian la relación que existe entre los puntos orilla y los puntos que no son de corte de un dendroide. Más adelante. J. Heath y V. Nall en [4] estudian los puntos centros en dendroides y en [16] V. Nall, muestra algunas relaciones entre los centros, centros fuertes y puntos orilla en un dendroide. Cabe mencionar, que los conceptos de orilla, centro y centro fuerte, sólo se habían estudiado en dendroides y recientemente en λ-*dendroides* que son los continuos hereditariamente unicoherentes y hereditariamente descomponibles.

Así, en este capítulo, introducimos los conceptos de puntos orilla, centro, centro fuerte y de corte para cualquier continuo. Vemos cómo se relacionan entre ellos, mostrando algunos ejemplos para ilustrar que estos conceptos no siempre son equivalentes y dando condiciones para que sí lo sean.

2.1. Puntos orilla

Definición 2.1 *Un punto p de un continuo X es un* punto orilla *de X, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subcontinuo C de X tal que $p \notin C$ y $H(C, X) < \varepsilon$.*

En el continuo de la Figura 1.4, los puntos extremos, como el punto z son orilla, de igual manera los puntos en el rayo $(p, q]$ son orilla.

Definición 2.2 *Un subconjunto A de un continuo X es un* conjunto orilla *de X, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subcontinuo C de X tal que $C \cap A = \emptyset$ y $H(C, X) < \varepsilon$.*

Se puede observar de la definición de punto orilla, que si X es un continuo y A es un conjunto orilla de X, entonces cada punto de A es un punto orilla de X.

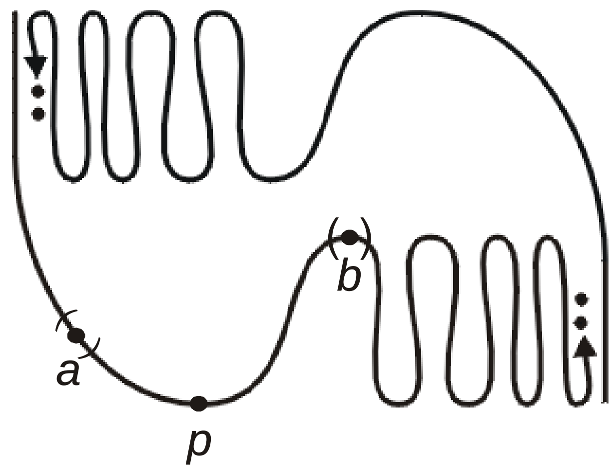


Figura 2.1: Doble Círculo de Varsovia

Todos los puntos del continuo de $Knaster$, Figura 1.2, son orilla y cualquier subcontinuo propio es un conjunto orilla.

2.2. Puntos de corte

Recordemos que un punto p de un continuo X, es un *punto de corte* de X, si $X \setminus \{p\}$ no es conexo.

Observemos que si X es un continuo y p un punto que corte de X, entonces $\{p\}$ separa a X y, también, $\{p\}$ corta a X.

El continuo de $Knaster$, Figura 1.2, no tiene puntos de corte. Ya que si p fuera un punto de corte del Continuo de Knaster, que denotaremos por

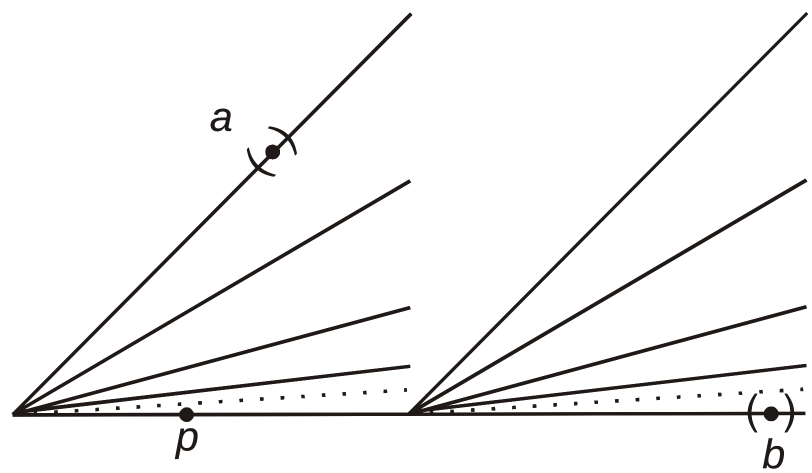


Figura 2.2: El punto p es un centro, no es un punto de corte y no es un punto orilla

C_K, entonces $C_K \setminus \{p\} = U \cup V$ donde U y V son subconjuntos abiertos y no vacíos de C_K.

Sea $q \in C_K \setminus k(p)$. Entonces $q \in U$ o $q \in V$. Por el Lema 1.14, $U \cup \{p\}$ y $V \cup \{p\}$ son subcontinuos propios de C_K donde alguno de ellos contienen al conjunto $\{p, q\}$, contradiciendo que C_K es irreducible entre p y q.

El punto p de la Figura 1.4, es un punto de corte.

2.3. Puntos centro y centro fuerte

Definición 2.3 *Un punto p de un continuo X es* un centro *de X, si existen dos puntos $b, c \in X$ (distintos de p) tales que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe*

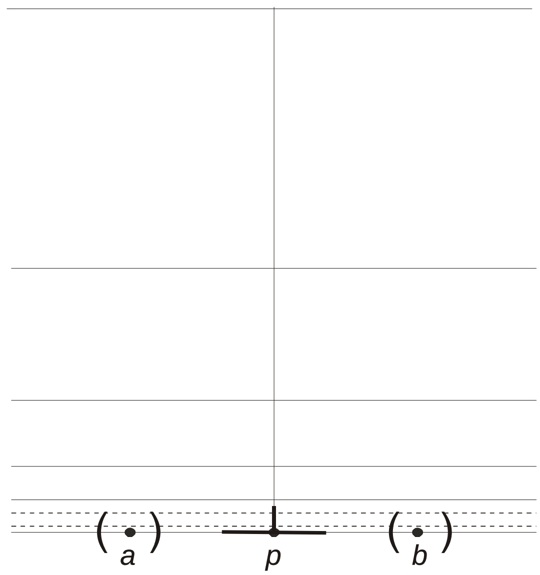


Figura 2.3: El punto p es un centro y no es un centro fuerte

un subcontinuo C de X que contiene a p, con diámetro menor que ε y dos conjuntos abiertos U y V de X que contienen a b y c, respectivamente, tales que cada arco de U a V intersecta a C.

Si X es un continuo y p un centro de X con respecto a los puntos a y b, diremos que p es un ab-centro.

En el continuo Doble círculo de Varsovia (Figura 2.1) el punto p es un ab-centro del continuo.

Definición 2.4 *Un punto p de un continuo X es un* centro fuerte *de X, si existen dos puntos $b, c \in X$ (distintos de p) y dos conjuntos abiertos y no*

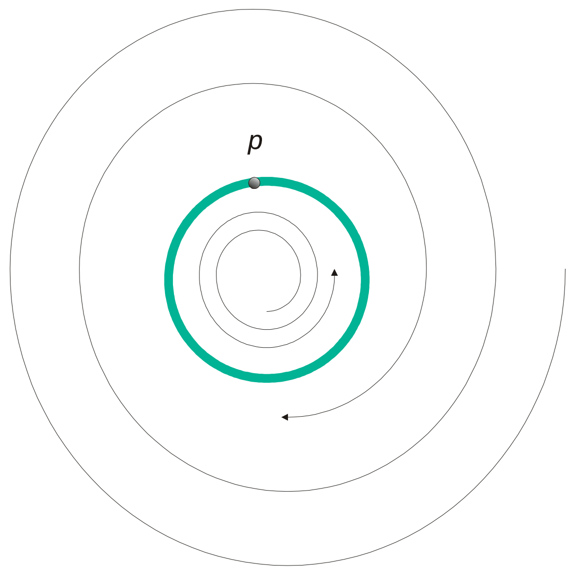


Figura 2.4: El punto p no es un centro ni tampoco es un punto orilla

vacíos U y V de X que contienen a b y c, respectivamente, tales que cada arco de U a V contiene a p.

Se puede observar de la definición de centro fuerte que todo punto que es un centro fuerte de X, es un centro de X.

En el ejemplo de la Figura 2.3, se muestra que un centro no necesariamente es un centro fuerte. El punto p es un ab-centro y no es un centro fuerte.

Introducidos, los conceptos de puntos orilla, centro, centro fuerte y de corte en un continuo, daremos algunos ejemplos que nos muestran que en general las nociones anteriores no siempre son equivalentes.

El ejemplo de la Figura 2.3, el punto p es un centro que no es un centro fuerte, no es un punto de corte y sí es un punto orilla.

Más adelante probaremos que en cualquier continuo todo punto de corte es un centro fuerte y, en consecuencia, un centro y no será un punto orilla, el regreso no necesariamente es cierto.

El punto p de la Figura 2.2, no es un punto de corte, es un centro fuerte y, por consecuencia, un centro y no es un punto orilla.

El punto p de la Figura 2.1, es un centro fuerte que no es un punto de corte y sí es un punto orilla.

El ejemplo de la Figura 2.4, cualquier punto p de la circunferencia no es un punto orilla ni es un centro. Así, tampoco es un centro fuerte.

En la Figura 2.5, se muestran las equivalencias entre los conceptos de un punto orilla, un centro, un centro fuerte y un punto de corte que hasta ahora tenemos.

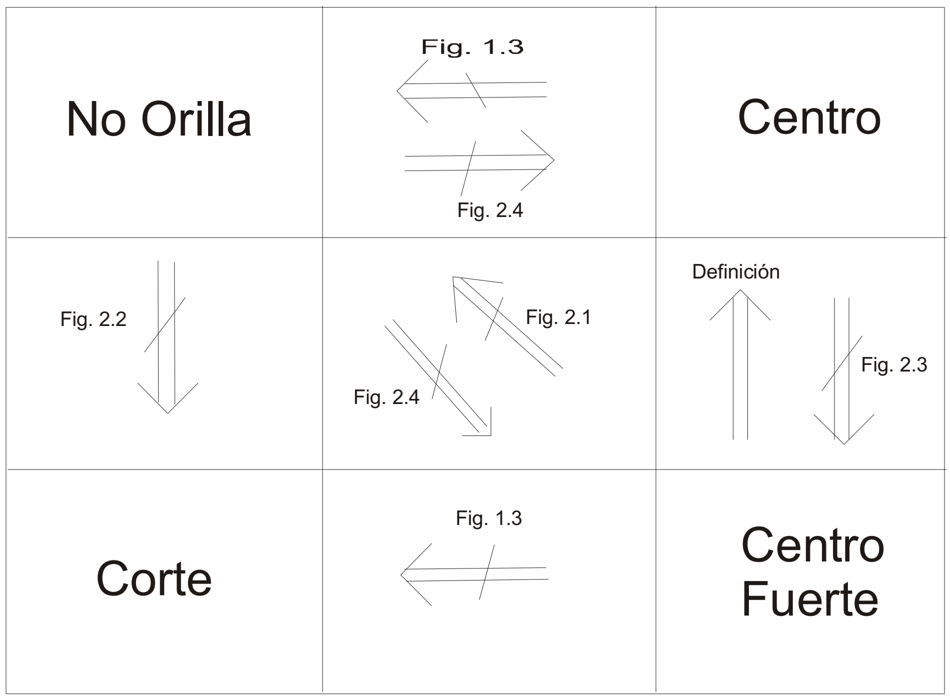


Figura 2.5: Diagrama de Equivalencias 1

2.4. Relacionando puntos

Como observamos en la sección anterior, existen puntos que son centro y no son orilla (ver Figura 2.2) y puntos que son centro y sí son orilla (ver Figura 2.1). Así, en esta sección probaremos que para todo continuo ningún punto orilla es de corte, que todo punto de corte es un centro fuerte y, por lo tanto, un centro.

Posteriormente, daremos condiciones con las cuales las implicaciones del diagrama anterior que no son ciertas se cumplen.

Gracias a esto sabemos cuándo un continuo tiene puntos que son centros.

Proposición 2.5 *Sean X un continuo y p un punto de corte de X. Entonces:*

i) p es un centro fuerte de X y, en consecuencia, un centro de X.

ii) p no es un punto orilla de X.

Demostración. Sea $p \in X$ un punto de corte. Entonces $X \setminus \{p\} = H \cup K$, donde H y K son subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de X.

i) Sean $a \in H$, $b \in K$ y U y V abiertos de X, tales que $a \in U \subseteq H$ y $b \in V \subseteq K$. Si existe un arco α de U a V entonces $p \in \alpha$. De lo contrario $\alpha \subset X \setminus \{p\}$ y, de la conexidad de α, se tendría que $\alpha \subset H$

o $\alpha \subset K$ pero, en cualquiera de los casos, tendríamos que $H \cap K \neq \emptyset$, dado que $\alpha \cap V \neq \emptyset$ y $V \subset K$, contradiciendo que H y K son ajenos. Así, todo arco α de U a V contiene a p y hemos probado que p es un centro fuerte de X y, por lo tanto, un centro de X.

ii) Por el Lema 1.14, $H \cup \{p\}$ y $K \cup \{p\}$ son subcontinuos de X. Sea $\varepsilon_1 = d_H(H \cup \{p\}, K \cup \{p\})$ y tomemos $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{4}$. Si existe $B \in C(X)$ tal que $d_H(X, B) < \varepsilon$, entonces $p \in B$, de lo contrario y del hecho de que B es conexo se tendría que $B \subset H$ o $B \subset K$. De donde, $H(X, B) > \varepsilon$, lo cual es una contradicción. Así, p no es un punto orilla de X.

■

De la proposición anterior, obtenemos como corolario el siguiente Teorema.

Teorema 2.6 *Sea X un continuo. Si X tiene un punto de corte, entonces X tiene al menos un punto que es un centro fuerte de X.*

Demostración. Sea p un punto de corte de X, por la Proposición 2.5, p es un centro fuerte de X. ■

Corolario 2.7 *Sea X un continuo. Si X tiene un punto de corte, entonces X tiene al menos un punto que es un centro de X.*

Demostración. Si p es un punto de corte de X, del Teorema 2.6, p es un centro fuerte de X y, en consecuencia, un centro de X. ■

2.4.1. Continuos localmente conexos

Como pudimos observar en la Figura 2.3, existen puntos que son centros y también orilla, cabe mencionar que este continuo no es localmente conexo.

A continuación, probaremos que en los continuos localmente conexos, cada punto que es un centro no es un punto orilla.

Recordemos que un continuo X es *localmente conexo* si para cada punto x de X y cada abierto U de X que contiene a x, existe un abierto y conexo V de X tal que $x \in V \subset U$.

Teorema 2.8 *Sea X un continuo localmente conexo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *p no es un punto orilla de X;*

ii) *p es un punto de corte de X;*

iii) *p es un centro fuerte de X;*

iv) *p es un centro de X.*

Demostración. Veamos que $i)$ implica $ii)$. Para esto probemos si p no es un punto de corte de X, debe ser un punto orilla de X.

Sean $\varepsilon > 0$ y p un punto que no es de corte de X. Esto implica que $X \setminus \{p\}$ es conexo.

Del Lema 1.19, existe un subcontinuo C de X tal que $p \notin C$ y $H(C, X) < \varepsilon$. Por lo que p es un punto orilla de X, y concluimos que $i)$ implica $ii)$.

De la Proposición 2.5, $ii)$ implica $i)$ y concluimos que $i)$ y $ii)$ son equivalentes.

$ii)$ implica $iii)$, se sigue de la Proposición 2.5.

$iii)$ implica $iv)$ es claro.

Ahora, veamos que $iv)$ implica $iii)$.

Sean $p \in X$ un ab-centro y $\varepsilon > 0$. Entonces existen $C \in C(X)$ y conjuntos abiertos U y V de X tales que $p \in C$, diám$(C) < \varepsilon$, $a \in U$, $b \in V$ y cada arco de U a V intersecta a C. Además, sin pérdida de generalidad, podemos pedir que $C \cap U = \emptyset = C \cap V$.

De la conexidad local de X en los puntos a y b, existen conjuntos abiertos y conexos U' y V' de X tales que $a \in U' \subset U, b \in V' \subset V$.

Afirmamos que cada arco de a a b pasa por p.

Supongamos que existe un arco de a a b, que denotaremos por L, que no pasa por p.

Sean $r = d(L, \{p\})$ y $\varepsilon_1 = \frac{r}{4}$. Si existe $B \in C(X)$ tal que $p \in B$ y diám$(B) < \varepsilon_1$, entonces $B \cap L = \emptyset$ ya que $r = d(L, \{p\})$, contradiciendo que p es un ab-centro.

Probemos ahora que todo arco de U' a V' pasa por p. Sea uv un arco de U' a V'. Por el Teorema 1.8, U' es arcoconexo. Entonces existe un arco de a a u contenido en U', que denotaremos por au. De igual manera, existe un arco de v a b, denotado por vb, contenido en V'.

Consideremos el arco L' que es la unión de los arcos au, uv y vb, por consiguiente L' es un arco de a a b, esto implica que p esta contenido en L'. Si $p \in au$ o $p \in vb$ entonces $p \in C \cap U$ o que $p \in C \cap V$, contradiciendo que $C \cap U = \emptyset$ o $C \cap V = \emptyset$, por lo que $p \in uv$, y hemos probado que $iv)$ implica $iii)$.

Por último, probemos que $iii)$ implica $ii)$. Probando que si p no es un punto de corte, entonces p no es un centro fuerte. Si p no es de corte, entonces $X \setminus \{p\}$ es un abierto y conexo de un localmente conexo, de [15, Teorema 8.26], se sigue que $X \setminus \{p\}$ es arcoconexo. Entonces para cualesquiera dos puntos x y y en $X \setminus \{p\}$ existe un arco de x a y que no pasa por p. Por lo tanto, p no es un centro fuerte de X, así, $iii)$ implica $ii)$ y se termina la prueba del teorema. ■

2.4.2. Continuos arcoconexos

Para un continuo arcoconexo X, aún no se sabe si todo punto que no es un centro de X es un punto orilla de X. En esta sección probaremos que en continuos arcoconexos, cada punto que no es un centro de X es un punto orilla de X. Este resultado nos ayudará, para probar que en continuos arcoconexos sin centros todos sus puntos son orilla.

Antes de continuar probaremos algunos lemas necesarios para probar los teoremas principales de esta sección.

Definición 2.9 *Sean X un continuo arcoconexo y z y y dos puntos en X. Se define $Q_z(y) = \{x \in X : y \in xz \text{ para algún arco } xz\}$.*

El conjunto $Q_z(y)$ claramente es no vacío pues y está en $Q_z(y)$.

Lema 2.10 *Sean X un continuo arcoconexo y $z \in X$. Si $X \setminus \overline{Q_z(y)}$ es vacío para alguna $y \in X \setminus \{z\}$, entonces z es un punto orilla de X.*

Demostración. Sean $z \in X$ y $y \in X \setminus \{z\}$. Supongamos que $X \setminus \overline{Q_z(y)}$ es vacío. Es decir, $\overline{Q_z(y)} = X$. Sea $\varepsilon > 0$. De la compacidad de X, existen subconjuntos abiertos y no vacíos $D_1, D_2, D_3, ..., D_n$ de X tales que $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ y el diám$(D_i) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Observemos que $Q_z(y) \cap D_i$ es no vacío para cada $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, porque $Q_z(y)$ es denso en X.

Sean, para cada $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, $d_i \in Q_z(y) \cap D_i$ y α_i arcos de y a cada d_i. Estos existen porque $Q_z(y)$ es arcoconexo.

Consideremos $D = \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i$, dado que cada arco α_i es cerrado, conexo y para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, tenemos que $y \in \alpha_i$, concluimos que D es cerrado, conexo y no vacío.

Luego, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, se tiene que $\alpha_i \subset Q_z(p)$ y $z \notin Q_z(p)$. Por consiguiente, $z \notin D$.

Veamos ahora, que $H(D, X) < \varepsilon$. Probemos que $X \subset N(\varepsilon, D)$. Sea $x_0 \in X$. Entonces $x_0 \in D_i$ para alguna i. Como $d_i \in D_i$, $d(x_0, d_i) < \varepsilon$. Por consiguiente, para cada $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto D de X, con las siguientes características $D \in C(X)$, $z \notin D$ y $H(D, X) < \varepsilon$, es decir, z es un punto orilla de X. ■

Corolario 2.11 *Sea X un continuo arcoconexo. Si $X \setminus \overline{Q_z(y)}$ es vacío para cualesquiera $z, y \in X$, entonces todos los puntos de X son orilla.*

Lema 2.12 *Si A es un subconjunto propio de un continuo X tal que $X\backslash A$ es arcoconexo, entonces A es un conjunto orilla de X si y sólo si $Int\,(A)$ es vacío.*

Demostración. Supóngase que A es un conjunto orilla de X y que el $Int\,(A)$ es no vacío. Entonces existen una $r > 0$ y $a \in A$ tal que $B\,(r, a) \subset A$. Luego, si $\varepsilon = \frac{r}{4}$, existe $D \in C\,(X)$ tal que $A \cap D = \emptyset$ y $H\,(D, X) < \varepsilon$. Como $a \in A$, existe $e \in D$ tal que $d\,(a, e) < \varepsilon$, lo que implica que $e \in A$, contradiciendo el hecho que $A \cap D = \emptyset$. Por lo tanto, $Int\,(A) = \emptyset$.

Ahora, supongamos que $Int\,(A) = \emptyset$. Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in X\backslash A$, existe porque $A \neq X$.

Por ser X compacto, existen subconjuntos abiertos y no vacíos $U_1, U_2, ..., U_n$ de X, tales que diám$(U_i) < \frac{\varepsilon}{4}$ y $X\backslash A \subset X = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} U_i$. Por otro lado, sea $u_i \in U_i\backslash A$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Estos puntos existen porque $U_i \nsubseteq A$ ya que $Int\,(A) = \emptyset$.

Por ser $X\backslash A$ arcoconexo, existen arcos α_i en $X\backslash A$ de u_i a x para cada $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Sea $D = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} \alpha_i$. Obsérvese que $D \in C\,(X)$ y que $D \cap A = \emptyset$. Además, para cada $y \in X$, se tiene que $y \in U_i$ para alguna $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Así, $d\,(y, u_i) < \varepsilon$ y se cumple que $X \subset N\,(\varepsilon, D)$.

Por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto D de X, con las siguientes características: $D \in C(X)$, $D \cap A = \emptyset$ y $H(D, X) < \varepsilon$, es decir, A es un conjunto orilla de X. ■

Teorema 2.13 *Sea X un continuo arcoconexo. Entonces todo punto que no es un centro de X es un punto orilla de X.*

Demostración. Sea p un punto que no es un centro de X, en consecuencia, p no es centro fuerte de X.

Consideraremos dos casos: el primero cuando $X \setminus \{p\}$ es arcoconexo y el segundo cuando $X \setminus \{p\}$ no es arcoconexo.

Caso 1) $X \setminus \{p\}$ arcoconexo.

Dado que $Int(\{p\}) = \emptyset$ y $X \setminus \{p\}$ es arcoconexo se sigue del Lema 2.12, que p es un punto orilla de X.

Caso 2) $X \setminus \{p\}$ no es arcoconexo.

Para cada $y \in X \setminus \{p\}$, denotemos por A_y a la arcocomponente en $X \setminus \{p\}$ que contiene a y.

Si existe $y \in X \setminus \{p\}$ tal que A_y es un subconjunto denso de X, entonces p es un punto orilla de X.

Supongamos que $X \setminus \overline{A_y} \neq \emptyset$ para toda $y \in X \setminus \{p\}$ y supongamos, también, que existe $y \in X \setminus \{p\}$ tal que $Int(A_y) \neq \emptyset$. Sean U un abierto de X

contenido en A_y y V un abierto de X contenido en $X\backslash\overline{A_y}$, por consiguiente, $V \cap A_y = \emptyset$. Aseguramos, que todo arco de V a U pasa por p.

Sea $\alpha = vu$ un arco de V a U que no contiene a p. Como $u \in A_y$, sea β un arco de u a y contenido en A_y ($p \notin \beta$ ya que A_y es arcoconexo y $A_y \subset X\backslash\{p\}$). Entonces $\alpha \cup \beta$ es un arco de v a y que no contiene a p, esto implica que $v \in A_y$, contradiciendo el hecho de que $V \cap A_y = \emptyset$. Por consiguiente, todo arco de V a U contiene a p. Por lo tanto, p es un centro fuerte de X. Lo que es una contradicción. Entonces para toda $y \in X\backslash\{p\}$, se tiene que $Int\,(A_y) = \emptyset$.

Por lo tanto, para toda $\varepsilon > 0$, existe $z \in X\backslash\{p\}$ tal que $B\,(\varepsilon, y) \cap A_z \neq \emptyset$ para toda $y \in X\backslash\{p\}$.

Sean $\varepsilon > 0$. De la compacidad de X, existen subconjuntos abiertos y no vacíos $U_1, U_2, ..., U_n$ de X, tales que diám$(U_i) < \frac{\varepsilon}{4}$ y $X \subset \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} U_i$.

Para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, sean $u_i \in U_i \cap A_z$ y α_i un arco de u_i a z contenido en $A_z \subset X\backslash\{p\}$. Sea $D = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} \alpha_i$. Observemos que $D \in C\,(X)$ y $p \notin D$. Además, para cada $y \in X$, se tiene que $y \in U_i$ para alguna $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Así, $d\,(y, u_i) < \varepsilon$ y se cumple que $X \subset N\,(\varepsilon, D)$. En consecuencia, para cada $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto D de X, con las siguientes características: $D \in C\,(X)$, $D \cap \{p\} = \emptyset$ y $H\,(D, X) < \varepsilon$, es decir, $\{p\}$ es un conjunto orilla de X.

Por lo tanto, si p no es un centro de X se tiene que p es un punto orilla de X. ■

Observemos que es necesario pedir que X sea arcoconexo de lo contrario el teorema no se cumple. En el continuo de la Figura 4.4, un punto en la barra límite no es un punto orilla, pero tampoco es un centro.

Corolario 2.14 *Si X es un continuo arcoconexo sin centros, entonces todos sus puntos son orilla.*

2.4.3. Continuos hereditariamente arcoconexos

En esta sección mostraremos que en los continuos hereditariamente arcoconexos, todo punto que es un centro fuerte no es un punto orilla.

Proposición 2.15 *Sean X un continuo hereditariamente arcoconexo y p un centro fuerte de X. Entonces p no es un punto orilla de X.*

Demostración. Sea p un centro fuerte de X con respecto a los puntos a y b en X y los abiertos U y V de X que contienen a a y b, respectivamente.

Luego, existen números positivos r_1 y r_2 tales que $B(r_1, a) \subset U$ y $B(r_2, b) \subset V$. Sean $r = \text{mín}\{r_1, r_2\}$ y $\varepsilon = \frac{r}{4}$.

Ahora, si existe un subcontinuo propio B de X tal que $H(B, X) < \varepsilon$, existe $u' \in B$ tal que $d(a, u') < \varepsilon$, así $u' \in U$ y $B \cap U \neq \emptyset$, de manera similar tenemos que $B \cap V \neq \emptyset$.

Sean $u_1 \in B \cap U$ y $u_2 \in B \cap V$. Por ser B arcoconexo, existe un arco α en B de u_1 a u_2 y, dado que p es un centro fuerte respecto a los abiertos U y V se tiene que $p \in B$, así, p no es un punto orilla de X. ■

Así, hemos probado que en los continuos hereditariamente arcoconexos, todo punto que es orilla no es un centro fuerte.

2.4.4. Continuos semilocalmente conexos

Recordemos que un continuo X es *semilocalmente conexo en x* si cada vecindad U de x, contiene un abierto V de X tal que $x \in V \subset U$ y $X \setminus V$ tiene sólo una cantindad finita de componentes.

Teorema 2.16 *Sean X un continuo hereditariamente arcoconexo y $p \in X$ un centro de X. Si p no es un punto de corte de X, entonces X no es semilocalmente conexo en p.*

Demostración. Sea p un *ab*-centro de X que no es un punto de corte y supongamos que X es semilocalmente conexo en p.

Como $X\setminus\{p\}$ es conexo (porque p no es un punto de corte) y $a, b \in X\setminus\{p\}$, entonces p no separa a los puntos a y b en X.

Por el Lema 1.21, sea A un subcontinuo de X, tal que $a, b \in A \subset X\setminus\{p\}$.

Sean $r = d(A, p)$ y $\varepsilon = \frac{r}{4}$. Dado que p es un ab-centro de X, para $\varepsilon = \frac{r}{4}$, existen un subcontinuo C de X de diámetro menor que ε y abiertos U y V de X tales que $p \in C$, $a \in U, b \in V$ y cada arco de U a V intersecta a C.

Sea $\alpha = ab$ un arco de a a b contenido en A, existe dado que A es arcoconexo. Debido a la elección de ε, se tiene que $C \cap A = \emptyset$, lo que implica que $\alpha \cap C = \emptyset$, contradiciendo que p sea un ab-centro de X. ■

Lema 2.17 *Sean X un continuo arcoconexo y $p \in X$ un ab-centro de X. Entonces todo arco de a a b pasa por p.*

Demostración. Sean p un ab-centro y α un arco de a a b que no pasa por p.

Sea $r = d(\alpha, p)$. Para $\varepsilon = \frac{r}{4}$, existen un subcontinuo C en X de diámetro menor que ε y abiertos U y V de X tales que $a \in U, b \in V$ y cada arco de a a b intersecta a C, pero de la elección de ε, se tiene que $\alpha \cap C = \emptyset$, contradiciendo que p sea un ab-centro. ■

Proposición 2.18 *En un continuo hereditariamente arcoconexo X y semi-localmente conexo en un punto p, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *p es un centro de X;*

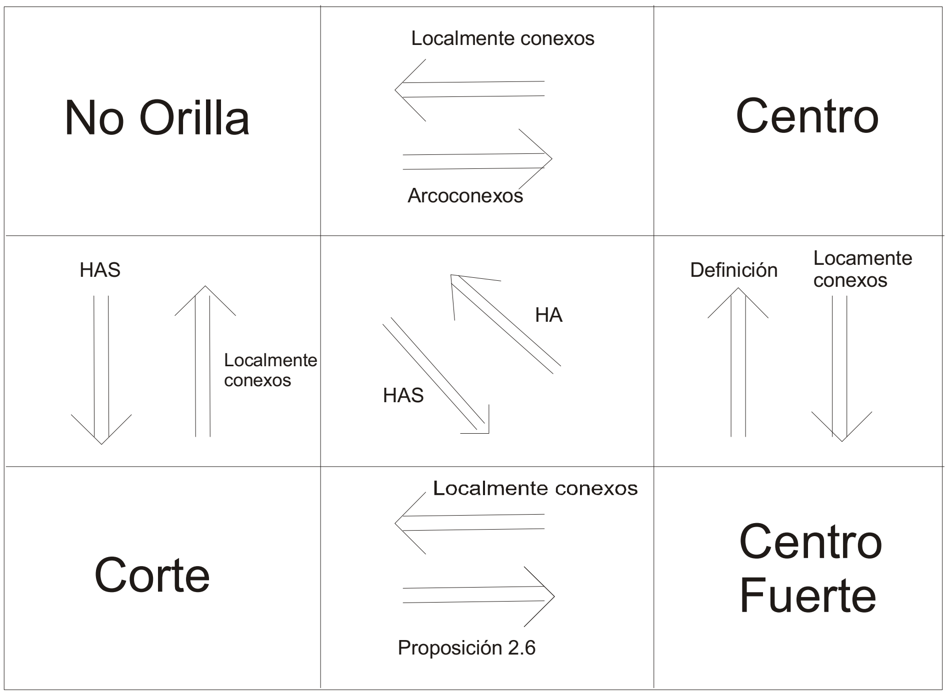
2. *p es un punto de corte de X;*

3. *p es un centro fuerte de X;*

4. *p no es un punto orilla de X.*

Demostración. 1 implica 2 se sigue del Teorema 2.16, 2 implica 3 se sigue de la Proposición 2.5, 3 implica 4 se sigue de la Proposición 2.15. Por último, 4 implica 1 se sigue del Teorema 2.13. ■

En la Figura 2.6, se muestran para que casos son válidas las equivalencias entre un punto orilla, un centro, un centro fuerte y un punto de corte.



HA = Hereditariamente arcoconexo

HAS = Hereditariamente arcoconexo y semilocalmente conexo

Figura 2.6: Diagrama de Equivalencias 2

Capítulo 3

Continuos Arvum[1]

La finalidad de este capítulo surgió al tratar de encontrar un dendroide con un único centro que no es un centro fuerte, distinto de los ejemplos mostrados por P. Minc y L. Montejano e I. Puga en [12] y [18], respectivamente.

Así, en este capítulo presentamos una familia no numerable de dendroides tales que todos sus puntos son orilla. Como consecuencia de esto, tendremos una familia no numerable de dendroides con sólo un centro que no es un centro fuerte.

Incluímos también una caracterización de las dendritas utilizando puntos

[1] **Arvum en latín significa orilla.**

orilla.

3.1. Resultados de dendroides

En esta sección, presentamos algunos resultados ya conocidos de dendroides y los resultados obtenidos de dendroides en este trabajo, que nos ayudarán a mostrar nuestro resultado principal de este capítulo: Mostrar que existe una familia no numerable de dendroides con un único centro que no es un centro fuerte y que todos sus puntos son orilla.

Definición 3.1 *Un* dendroide X *es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente.*

El abanico armónico (Figura 1.4) y el abanico de Cantor (Figura 3.1) son ejemplos de dendroides.

Teorema 3.2 *[12, Teorema 3.6, pág. 197] Si X es un dendroide, entonces X tiene al menos un centro.*

Los siguientes teoremas debidos a J. Heath y V. Nall dan condiciones para saber cuándo un dendroide tiene un único centro.

Teorema 3.3 *[16, Teorema 1, pág. 2168] Sean X un dendroide y $O(X)$ el conjunto de todos los puntos orilla de X. Si $X \backslash O(X)$ es distinto del vacío, entonces $X \backslash O(X) = \{p\}$ y p es el único centro de X o*

$$X \backslash O(X) = \{x \in M : \ x \text{ es un centro fuerte de } X\}.$$

Lema 3.4 *[4, Lema 4, pág. 178] Sean X un dendroide y p un centro de X. Si $Q_p(y)$ tiene interior no vacío para alguna $y \in X \backslash \{p\}$, entonces y es un centro fuerte de X.*

Teorema 3.5 *[4, Teorema 4, pág. 178] Un dendroide sólo tiene un centro, p, si y sólo si para cada $y \neq p$, $Q_p(y)$ tiene interior vacío.*

Teorema 3.6 *[4, Teorema 6, pág. 180] Sean X un dendroide y p un punto de X. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Para cada $y \neq p$ en X, $Q_p(y)$ tiene interior vacío;*

2. *Ninguna arcocomponente de $X \backslash \{p\}$ tiene interior;*

3. *Ningún conjunto que es una unión numerable de arcocomponentes de $X \backslash \{p\}$ tiene interior;*

4. *X tiene un único centro, que es el punto p.*

Teorema 3.7 *[4, Corolario 5, pág. 182] Sean X y Y dendroides y $f : X \to Y$ una función continua. Si $f^{-1}(y)$ sólo tiene una cantidad numerable de arcocomponentes, para cada $y \in Y$, y si p es el único centro de X, entonces $f(p)$ es el único centro de Y.*

Lema 3.8 *Si X es un dendroide, entonces todo punto p, que no es un punto orilla de X, es un centro de X.*

Demostración. Se sigue del Teorema 2.13, ya que todo dendroide es arcoconexo. ■

Lema 3.9 *Sean X un dendroide y p un centro de X. Si p no es un punto de corte de X, entonces X no es semilocalmente conexo en p.*

Demostración. Se sigue del Teorema 2.16, ya que todo dendroide es hereditariamente arcoconexo. ■

Lema 3.10 *Sean X un dendroide semilocalmente conexo X y p un punto de X. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *p no es un punto orilla de X;*

2. *p es un centro de X;*

3. *p es un punto de corte de X;*

4. *p es un centro fuerte de X.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 2.18, ya que todo dendroide es hereditariamente arcoconexo. ■

Definición 3.11 *Un espacio topológico X es contraíble si existe una función continua $h : X \times [0,1] \to X$ tal que para cada $x \in X$, $h(x,0) = x$ y $h(x,1) = y$ para algún $y \in X$.*

El abánico de Cantor es un espacio contraíble (Figura 3.1).

Proposición 3.12 *[2, Proposición 1, pág. 73] Si X es un continuo de dimensión uno y contraíble, entonces X es un dendroide.*

Mostramos el siguiente ejemplo, pues es un dendroide con sólo un centro que no es un centro fuerte y casi todos sus puntos son orilla.

Ejemplo 3.13 *El siguiente ejemplo fue construido por V. Nall en [16], para mostrar que existen dendroides con sólo un centro que no es un centro fuerte ni tampoco orilla.*

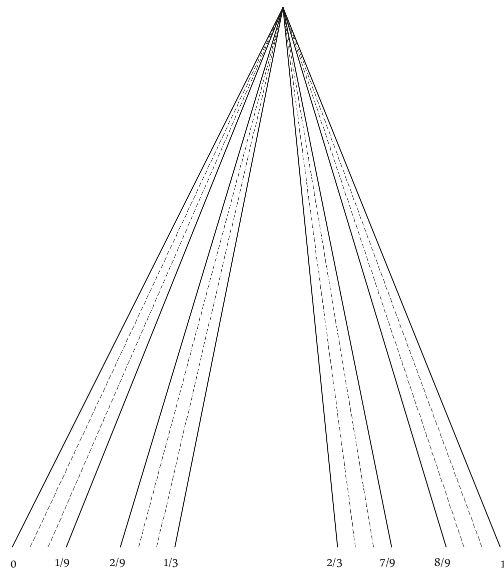


Figura 3.1: Abanico de Cantor

Consideremos el cuadrado unitario $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ y C el conjunto de $Cantor$ contenido en el intervalo $[0,1]$.

Sea F_C el abanico de Cantor contenido en I^2 (F_C es la unión de arcos con puntos extremos en el punto $p = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y $(a,0)$ tal que a es un elemento del conjunto C). Ver Figura 3.1.

Observemos que F_C es un continuo con las siguientes características: F_C es un dendroide, el punto p es un centro fuerte (pues es un punto de corte de F_C) y, en consecuencia, un centro de F_C y cada punto distinto de p en F_C es orilla.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, tomemos los siguientes j intervalos $A_{i,k} = \left[\frac{k}{3^i}, \frac{k+1}{3^i}\right]$ donde $j \in \{1, 2, ..., 2^i\}$, $0 \leq k < 3^i$, $i \in \{1, 2, ...\}$, $A_{i,k} \subset [0, 1]$ y $A_{i,k} \setminus \left\{\frac{k}{3^i}, \frac{k+1}{3^i}\right\} \cap C \neq \emptyset$.

De esta manera, para $i = 1$ e $i = 2$ nuestros intervalos son: $A_{10} = \left[0, \frac{1}{3}\right]$ y $A_{12} = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, $A_{20} = \left[0, \frac{1}{9}\right], A_{22} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], A_{26} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$ y $A_{28} = \left[\frac{8}{9}, 1\right]$, respectivamente.

Es decir, son los intervalos que se obtienen en la construcción del Conjunto de Cantor. Continuamos este proceso para cada $i \in \{3, 4, ...\}$.

Ahora, para cada $i \in \{1, 2, ...\}$, dados los 2^i intervalos que tenemos, elegimos $2C_2^i$ puntos en los intervalos $A_{i,k}$ (donde C_2^i son las combinaciones de dos en dos tomadas de un conjunto con i elementos) para formar C_2^i parejas de puntos (x, y), tales que si (x, y) es una pareja de los puntos que elegimos entonces $\{x, y\} \subset C$ y $\{x, y\} \nsubseteq A_{i,k}$ para ninguna $i \in \{1, 2, ...\}$ y ninguna k.

En particular, para el caso que $i = 2$, dado que nuestros intervalos son: $A_{20} = \left[0, \frac{1}{9}\right], A_{22} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], A_{26} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$ y $A_{28} = \left[\frac{8}{9}, 1\right]$, tendremos parejas de puntos que podrían ser los siguientes: $\left(0, \frac{2}{9}\right), \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{27}, \frac{8}{9}\right), \left(\frac{7}{27}, \frac{19}{27}\right), \left(\frac{8}{27}, \frac{26}{27}\right)$ y $\left(\frac{20}{27}, \frac{25}{27}\right)$.

Para cada pareja $\{x, y\}$ consideramos los arcos $A_{i,x}$ y $A_{i,y}$ contenidos en el abanico F_C que van del punto x al punto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y del punto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ al punto

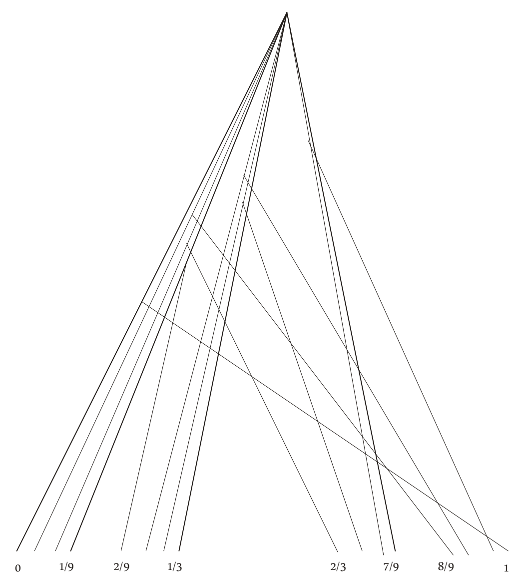


Figura 3.2: Dendroide con sólo un centro que no es un centro fuerte

y, respectivamente.

Observemos que para cualesquiera dos abiertos U y V del abanico de Cantor, existen arcos $A_{i,x}$ y $A_{i,y}$ tales que $A_{i,x} \cap U \neq \emptyset$ y $A_{i,y} \cap V \neq \emptyset$.

Para cada $i \in \{1, 2, ...\}$, identificamos cada punto (a, s) de $A_{i,x}$ con el punto (a', s) de $A_{i,y}$ si $s \geq \frac{1}{i}$ y, para $s < \frac{1}{i}$ los dejamos fijos y todos los demás puntos los identificamos de manera continua. Sea f la función cociente definida. Sea D_N el cociente de esta identificación. Ver Figura 3.2.

Proposición 3.14 *El cociente de esta identificación D_N tiene las siguientes propiedades:*

1. *D_N es un dendroide.*

2. *El punto $f(p) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ es el único centro de D_N.*

3. *D_N no tiene centros fuertes.*

4. *Para cada $y \in D_N \setminus \{f(p)\}$, se tiene que y es un punto orilla de D_N.*

Demostración. 1. Dado que D_N es de dimensión uno y contraíble, se sigue de la Proposición 3.12, que D_N es un dendroide.

2. Veamos primero que $f(p)$ no es un centro fuerte de D_N. Sean $\varepsilon > 0$ y U y V subconjuntos abiertos y no vacíos de D_N. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ y por construcción existe una pareja $\{x_n, y_n\}$ tal que $\{x_n, y_n\} \subset C$, $A_{x_n} \cap U \neq \emptyset$ y $A_{y_n} \cap V \neq \emptyset$. Luego, identificando A_{x_n} con A_{y_n}, sea z_0 el punto correspondiente a la identificación de A_{x_n} con A_{y_n} a la altura $\frac{1}{n}$ y dado que los puntos x_n y y_n, bajo la identificación, se quedan fijos, tenemos que el arco $x_n y_n$ que contiene a z_0 no pasa por $f(p)$. Por lo tanto, $f(p)$ no es un centro fuerte de D_N. Probemos ahora que cada arcocomponente A de $D_N \setminus \{f(p)\}$ tiene interior vacío. Supongamos sin pérdida de generalidad, que existen una arcocomponente A de $D_N \setminus \{f(p)\}$, $a \in A$ y un subconjunto abierto y no vacío U de $D_N \setminus \{f(p)\}$ tales que $a \in U \subset A$. Dado que $D_N \setminus \overline{A} \neq \emptyset$, sea V un abierto no vacío de D_N tal que $V \subset D_N \setminus \overline{A}$. Afirmamos que todo arco de U

a V pasa por $f(p)$. Sea uv un arco de U a V que no pasa por $f(p)$ y, sea au el arco de a a u, observemos que $f(p) \notin au$. Consideremos $\alpha = (au) \cup (uv)$, entonces α es un arco de a a v que no contiene a $f(p)$, esto implica que $\{v\} \subset V \cap A$, contradiciendo el hecho de que $V \subset D_N \backslash \overline{A}$. En consecuencia, todo arco de U a V pasa por $f(p)$, esto implica que $f(p)$ es un centro fuerte de X. Contradiciendo el hecho de que $f(p)$ no es un centro fuerte de D_N. Así, $Int(A) = \emptyset$ para toda arcocomponente A de $D_L \backslash \{f(p)\}$. Por lo tanto, $f(p)$ es el único centro de D_L (Teorema 3.6).

3. Sea $q \in D_N \backslash f(p)$. Si q fuera un centro fuerte de D_N, entonces q sería un centro distinto de $f(p)$, contradiciendo 2. Con esto concluimos que D_N no tiene centros fuertes.

4. Sea $q \in D_N \backslash \{f(p)\}$, de 2 se sigue que q no es un centro de D_N. Así, del Lema 3.8, q es punto orilla de D_N. ■

3.2. Dendroides Arvum

Definición 3.15 *Diremos que un continuo es un continuo* arvum *si todos sus puntos son orilla.*

Proposición 3.16 *Si X es un continuo indescomponible, entonces X es un* *continuo arvum.*

Demostración. Sea $x \in X$. Veamos que x es un punto orilla de X. Sea $y \in X \backslash k(x)$. Por ser X indescomponible, X es irreducible entre cualesquier par de puntos que se encuentran en composantes distintas. Así, X es irreducible entre x y y.

Sea $\varepsilon > 0$. Por ser X compacto, existen subconjuntos abiertos y no vacíos $U_1, U_2, ..., U_n$ de X tales que diám$(U_i) < \frac{\varepsilon}{4}$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.

Dado que la composante $k(y)$ es densa en X y $x \notin k(y)$, para cada abierto U_i de X, existe un subcontinuo propio D_i de X tal que $D_i \subset X \backslash \{x\}$, $D_i \cap U_i \neq \emptyset$ y $y \in D_i$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Sea $A = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$. Por ser A una unión finita de cerrados, A es cerrado y, como cada D_i es conexo y $y \in D_i$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$, se tiene que A es conexo, así A es un subcontinuo propio de X que no contiene a x.

Veamos que $H(A, X) < \varepsilon$. Basta probar que $X \subset N(\varepsilon, A)$. Sea $w \in X$, como $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, sin pérdida de generalidad, sea $w \in U_1$, entonces $d(w, u) < \frac{\varepsilon}{4}$ para algún $u \in U_1$. Luego para U_1 existe $e \in D_1$ tal que $d(u, e) < \frac{\varepsilon}{4}$. Así, $d(w, e) < \varepsilon$, con esto probamos que $X \subset N(\varepsilon, A)$. Entonces x es un punto orilla de X. Por lo tanto, si X es un continuo indescomponible todos sus puntos son orilla. ■

El continuo Knaster, Figura 1.2, es un continuo indescomponible y, en consecuencia, es un continuo arvum. Ver [8, pág. 204].

La siguiente proposición nos dice cuándo un continuo es un continuo arvum.

Proposición 3.17 *Sea X un continuo. Si para cada $\varepsilon > 0$ existen dos subcontinuos ajenos A y B de X tales que $H(A, X) < \varepsilon$ y $H(B, X) < \varepsilon$, entonces todo punto de X es orilla.*

Demostración. Sean $x \in X$, $\varepsilon > 0$ y A y B subcontinuos ajenos de X tales que $H(A, X) < \varepsilon$ y $H(B, X) < \varepsilon$

Si $x \notin A \cup B$, es claro que x es un punto orilla.

Si $x \in A \cup B$, por ser A y B ajenos, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \in A \backslash B$. Así, el subcontinuo que necesitamos cerca del total y que no contenga a x es B. De donde se tiene que x es un punto orilla de X. ■

Proposición 3.18 *Si X es un dendroide arvum, entonces X no tiene centros fuertes.*

Demostración. Por ser X un dendroide, X es hereditariamente arcoconexo y, de la Proposición 2.15, se sigue que X no tiene centros fuertes. ■

Teorema 3.19 *Si X es un dendroide arvum, entonces X sólo tiene un centro.*

Demostración. Sea p un centro de X (existe por el Teorema 3.2). Tomemos $q \in X \setminus \{p\}$. Entonces $Q_p(q)$ tiene interior vacío, de lo contrario, del Lema 3.4, q sería un centro fuerte de X, contradiciendo que un dentroide arvum no tiene centros fuertes (Proposición 3.18).

Así, $Q_p(y)$ tiene interior vacío para toda $y \in X \setminus \{p\}$. Por lo tanto, del Teorema 3.5, X tiene sólo un centro. ■

Observemos que el regreso del Teorema anterior no es necesariamente cierto.

En el abanico de Cantor, Figura 3.1, el vértice es el único centro que no es un punto orilla. En consecuencia, el abanico de Cantor no es un dendroide arvum.

El siguiente ejemplo nos servirá para construir una familia no numerable de dendroides arvum.

Ejemplo 3.20 *Un dendroide arvum.*

Sean C el conjunto de Cantor en el intervalo $[0,1]$, $A = C \times [-1,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ y $\theta = (0,0,0)$. Consideremos los subconjuntos cerrados de C definidos de la siguiente manera:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $C_n = C \cap \left\{\frac{i}{3^n} : i = 0,1,2,...,3^n\right\}$. En particular, $C_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\} \subset [0,1]$ y $C_2 = \left\{0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1\right\}$. Ahora, sean $B_1 = C_1$ y $B_i = C_i \backslash C_{i-1}$ para cada $i \geq 2$. Se puede observar que $B_i \cap B_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$.

El primer paso para la construcción de nuestro dendroide es tomar la unión de tres arcos que denotaremos por A_1, de la siguiente manera: dos arcos que serán semicírculos centrados en $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ en el plano $y = 0$, cuyos puntos extremos están en $B_1 \times \{0\} \times \{0\}$ y un arco D_1 con puntos extremos en θ y $\left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)$ de tal manera que $A_1 \cap A = B_1 \times \{0\} \times \{0\}$.

Ahora, A_2 será la unión de cuatro arcos, los dos primeros arcos serán dos semicírculos en el plano $y = 1$, con centro en el punto $\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ y puntos extremos en $B_2 \times \{1\} \times \{0\}$. Otro semicírculo en el plano $y = 1$, con centro en el punto $\left(\frac{1}{8}, 1, 0\right)$ y con puntos extremos en $B_2 \times \{1\} \times \{0\}$. Finalmente el arco α_2 con puntos extremos en $\left\{(0,0,0), \left(\frac{1}{9}, 1, 0\right)\right\}$, de tal manera que $A_1 \cap A_2 = \{(0,0,0)\}$ y $\overline{A_2 \backslash \alpha_2}$ es homeomorfo a A_1.

Construiremos a A_3, como una copia de $A_1 \cup A_2$ y lo uniremos con $A_1 \cup A_2$ por medio de un arco α_3. Es decir, tendremos que A_3 será la unión de 2^3 arcos, dos de ellos semicírculos contenidos en el plano $y = \frac{1}{3}$, con centro en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0\right)$ y con puntos extremos en $\left\{\frac{1}{27}, \frac{8}{27}, \frac{19}{27}, \frac{26}{27}\right\} \times \left\{\frac{1}{3}\right\} \times \{0\} \subset B_3 \times \left\{\frac{1}{3}\right\} \times \{0\}$. Otros dos de ellos, semicírculos contenidos en el plano $y = \frac{2}{3}$, con centro en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 0\right)$ y, con puntos extremos en $\left\{\frac{2}{27}, \frac{7}{27}, \frac{20}{27}, \frac{25}{27}\right\} \times \left\{\frac{2}{3}\right\} \times \{0\} \subset B_3 \times \left\{\frac{1}{3}\right\} \times \{0\}$. Tres arcos con puntos extremos en los siguientes conjuntos, respectivamente, $\left\{\left(\frac{1}{27}, \frac{1}{3}, 0\right), \left(\frac{2}{27}, \frac{2}{3}, 0\right)\right\}$, $\left\{\left(\frac{1}{27}, \frac{1}{3}, 0\right), \left(\frac{8}{27}, \frac{1}{3}, 0\right)\right\}$, $\left\{\left(\frac{2}{27}, \frac{2}{3}, 0\right), \left(\frac{7}{27}, \frac{2}{3}, 0\right)\right\}$. Finalmente, el arco α_3 con puntos extremos en $\left\{(0,0,0), \left(\frac{1}{27}, \frac{1}{3}, 0\right)\right\}$ de tal manera que $A_3 \cap (A_2 \cup A_1) = \{(0,0,0)\}$, $(A_3 \backslash \alpha_3) \cap (A_2 \cup A_1) = \emptyset$ y $\overline{A_3 \backslash \alpha_3}$ es homeomorfo a $A_2 \cup A_1$.

Continuando con este proceso, obtenemos una sucesión de subcontinuos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de tal manera que A_1 es la unión de tres arcos y para $n > 1$, A_n será la unión de 2^n arcos, tales que $A_i \cap A_j = \{\theta\}$ para $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, ...\}$. Como consecuencia de esto, $A_i \cap (A_j \backslash \alpha_j) = \emptyset$ para $i, j \in \{1, 2, ...\}$ y $\overline{A_n \backslash \alpha_n}$ es homeomorfo a $\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$.

Consideremos $D_L = \overline{A \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)}$. Ver Figura 3.3.

Proposición 3.21 *D_L es un continuo con las siguientes propiedades:*

1. *D_L es un dendroide arvum.*

Figura 3.3: Dendroide Arvum

2. $\theta = (0,0,0)$ *es el único centro de* D_L*.*

3. D_L *no tiene centros fuertes.*

Demostración. 1. Por construcción, D_L es hereditariamente arcoconexo y hereditariamente unicoherente, por lo que, D_L es un dendroide.

Sean $E_n = \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) \cup \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} B_i\right) \times [0,1] \times \{0\}\right)$ y $F_n = \overline{(A_{n+1} \backslash \alpha_{n+1})} \cup (B_{n+1} \times [0,1] \times \{0\})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se puede observar que E_n y F_n son subcontinuos de D_L tales que $E_n \cap F_n = \emptyset$ y $H(E_n, F_n) < \frac{1}{n}$ para cada $n > 2$. Así, para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar dos subcontinuos E_n y F_n de D_L tales que $E_n \cap F_n = \emptyset$ y $H(E_n, F_n) < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Entonces, por el Lema 3.17, cada punto de D_L es un punto orilla de D_L esto implica que D_L es un dendroide arvum.

2. Si para cada arcocomponente A de $D_L \backslash \{\theta\}$, el interior de A es vacío, se sigue del Teorema 3.6, que θ es el único centro de D_L. Entonces, tomemos una arcocomponente A de $D_L \backslash \{\theta\}$ y probemos que $Int(A) = \emptyset$. Se puede observar que para cada $a \in A$, se cumple que $Q_\theta(a) \subset A$.

Supongamos sin pérdida de generalidad, que existe un subconjunto abierto y no vacío U de D_L tal que $U \subset Q_\theta(a)$ para alguna $a \in A$.

Dado que $D_L \backslash \overline{A} \neq \emptyset$, sea V un abierto no vacío de D_L tal que $V \subset D_L \backslash \overline{A}$. Afirmamos que todo arco de U a V pasa por θ. Sea uv un arco de U a V que no pasa por θ. Como $Q_\theta(a)$ es arcoconexo, sea au el arco de a a u, observemos que $\theta \notin au$. Consideremos $\alpha = (au) \cup (uv)$, entonces α es un arco de a a v que no contiene a θ, esto implica que $v \in V \cap Q_\theta(a) \subset V \cap A$, contradiciendo el hecho de que $V \subset D_L \setminus \overline{A}$. En consecuencia, todo arco de U a V pasa por θ, esto implica que θ es un centro fuerte de X y, del Corolario 2.15, θ no es un punto orilla de D_L, contradiciendo el hecho que D_L es un dendroide arvum. Así, $Int(A) = \emptyset$ para toda arcocomponente A de $D_L \setminus \theta$. Por lo tanto, θ es el único centro de D_L.

3. De la Proposición 3.18 y, dado que D_L es un dendroide arvum, se sigue que D_L no tiene centros fuertes. ■

3.3. Familia no numerable de dendroides arvum

Sean Γ una familia no numerable de dendroides no homeomorfos entre ellos ([3]) y D_L el dendroide construido en el Ejemplo 3.20. Consideremos $Z \in \Gamma$ y $z \in Z$. Para cada elemento c del conjunto de Cantor, considere un dendroide Z_c, homeomorfo a Z, y $z_c \in Z_c$ el punto correspondiente a z bajo un homeomorfismo entre Z_c y Z.

Sea $X_c = D_L \cup \left(\bigcup_{c \in C} Z_c \right)$ y considere la siguiente relación de equivalencia

$\sim$ en X_c, dada como sigue: $x \sim y$ si y sólo si $x = y$ o $x = z_c$ y $y = z$.

Sea $D_Z = X/\sim$.

Proposición 3.22 *Para cada $Z \in \Gamma$, el dendroide correspondiente D_Z de Z es un continuo con las siguientes propiedades:*

1. *D_Z es un dendroide arvum.*

2. *θ es el único centro de D_Z.*

3. *D_Z no tiene centros fuertes.*

Demostración. 1. Por construcción D_Z es arcoconexo y hereditariamente unicoherente. Por lo tanto, D_Z es un dendroide

Consideremos $E_n = \left(\left(\overset{n+1}{\underset{i=1}{\cup}} A_i\right) \cup \left(\left(\overset{n+1}{\underset{i=1}{\cup}} B_i\right) \times [0,1] \times \{0\}\right)\right) \cup \left(\underset{c \in B_n}{\cup} Z_c\right)$ y $F_n = \left(((A_{n+1} \backslash \alpha_{n+1}) \cup (B_{n+1} \times [0,1] \times \{0\})) \cup \left(\underset{c \in B_{n+1}}{\cup} Z_c\right)\right)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Entonces E_n y F_n son subcontinuos de D_Z tales que $E_n \cap F_n = \emptyset$ y $H(E_n, F_n) < \frac{1}{n}$ para cada $n > 2$. Así, para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontar subcontinuos E_n y F_n de D_Z tales que $E_n \cap F_n = \emptyset$ y $H(E_n, F_n) < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Entonces por el Lema 3.17, cada punto de D_Z es un punto orilla. Esto implica que D_Z es dendroide arvum.

2. De igual manera que en el Ejemplo D_L, se prueba que para cada arco-componente A de $D_Z \setminus \{\theta\}$ el $Int\,(A) = \emptyset$ y, se sigue del Teorema 3.6, que θ es el único centro de D_Z.

3. De la Proposición 3.18 y, dado que D_Z es un dendroide arvum diferente del vacío se sigue que D_Z no tiene centros fuertes. ■

3.4. Dendritas

Definición 3.23 *Un* continuo de Peano *es un continuo localmente conexo.*

Definición 3.24 *Una* dendrita *es un continuo de Peano sin curvas cerradas simples.*

Definición 3.25 *Sea X una dendrita. Un punto p es un* punto final *de X si para cada abierto U de X que contenga a p, existe un abierto V de X tal que $p \in V \subset U$ y $\overline{V} \cap \overline{X \setminus V}$ consta de un sólo punto.*

Teorema 3.26 *[15, Teorema 10.7, pág. 168] Un continuo no degenerado X es una dendrita si y sólo si cada punto de X es un punto de corte o es un punto final de X.*

Proposición 3.27 *Sea X una dendrita. Entonces p es un punto final de X si y sólo si p es un punto orilla de X.*

Demostración. Sea p un punto final de X, como p no es de corte (Teorema 3.26) y X es localmente conexo, se sigue, de la Proposición 2.5, que p es un punto orilla de X.

Luego, si p es un punto orilla, de la Proposición 2.5, p no es de corte y, del Teorema 3.26, obtenemos que p es un punto final de X. $\blacksquare$

Teorema 3.28 *Un continuo X es una dendrita si y sólo X es un dendroide semilocalmente conexo.*

Demostración. Si X es una dendrita, X es un dendroide localmente conexo y, del Teorema 1.10, se tiene que X es semilocalmente conexo. Por lo tanto, X es un dendroide semilocalmente conexo.

Sean X un dendroide semilocalmente conexo y p un punto que no es de corte. Se sigue del Lema 3.10, que p es un punto orilla de X y, de la Proposición 3.27, p es un punto final de X. Por lo tanto, todo punto p de un dendroide semilocalmente conexo es un punto de corte de X o es un punto final de X. Así, del Teorema 3.26, concluimos que X es una dendrita. $\blacksquare$

Capítulo 4

Puntos y conjuntos Orilla

En el trayecto de esta investigación notamos que todos los ejemplos que encontramos tenían al menos un punto orilla, por lo qué surgió la siguiente pregunta: ¿Existirán continuos sin puntos orilla?

Contestando a la pregunta anterior, en este capítulo mostramos lo siguiente: *Todo continuo X tiene al menos dos puntos orilla.* Dado que los puntos orilla no son de corte, este resultado generaliza el Teorema clásico que asegura que *Todo continuo tiene al menos dos puntos que no son de corte.*

Describiremos a los continuos con exactamente dos puntos orilla y daremos caracterizaciones para un arco y una curva cerrada simple utilizando el concepto de puntos orilla.

Para finalizar este capítulo mostraremos que los puntos de irreducibilidad de un continuo X son puntos orilla de X y el regreso sólo será cierto en los siguientes casos: cuando X es un continuo irreducible y hereditariamente descomponible o cuando X es un continuo únicamente irreducible. Con esto veremos que la unión finita de puntos orilla en un continuo únicamente irreducible X es un conjunto orilla de X.

4.1. Puntos orilla

El siguiente Teorema es un caso particular del Teorema 5 de [1].

Teorema 4.1 *Sean X un continuo y x un punto de X. Entonces existe un punto $p \in X \setminus \{x\}$ tal que la unión de todos los subcontinuos de X contenidos en $X \setminus \{p\}$ y que contienen a x es denso en X.*

Demostración. Para la demostración de este teorema consideraremos dos casos, el primero, cuando x es un punto de irreducibilidad y el segundo cuando x no es un punto de irreducibilidad.

Caso 1. Sea x un punto de irreducibilidad de X.

Sea X irreducible respecto a los puntos x y y. Denotemos por D_x a la unión de todos los subcontinuos de X contenidos en $X\setminus\{y\}$ y que contienen a x y $k(x)$ la composante de x en X. Dado que $k(x)$ es densa en X (Teorema 1.31), basta mostrar que $k(x)$ está contenida en D_x para probar que D_x es densa en X. Sea $w \in k(x)$. Entonces existe un subcontinuo propio C de X que contiene a x y a w y no contiene a y, así $w \in D_x$. Tomando $y = p$, tenemos que la unión de todos los subcontinuos de X contenidos en $X\setminus\{p\}$ y que contienen a x es denso en X.

Caso 2. x no es un punto de irreducibilidad de X.

Sea $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos contenidos en $X\setminus\{x\}$, de tal manera que si D es un subconjunto abierto, no vacío de $X\setminus\{x\}$, existe un entero i tal que $D_i \subset D$, es decir, $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base de X intersectada con $X\setminus\{x\}$.

Si existen algún subcontinuo propio de X y un abierto de ese subcontinuo que contenga a $\{x\} \cup D_1$, llamémosle A_1 a ese subcontinuo, si no existe tal subcontinuo, sea $A_1 = \{x\}$.

Ahora, si existe algún subcontinuo propio de X que contiene a un abierto de tal manera que $A_1 \cup D_2$ se quede contenido en ese abierto, sea A_2 tal subcontinuo, si no existe, sea $A_2 = A_1$. Continuemos con este proceso para obtener los subcontinuos $A_{3,}A_4, ...$ de X. Tomemos ahora, una subsucesión, que denotaremos por $B_1, B_2, B_3, B_4, ...$ de $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ que cumplen lo siguiente:

- $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \cdots$,
- Si $B_i = \{x\}$ para toda $i \in \{1, 2, ...\}$, entonces $X \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \neq \emptyset$,
- Si $B_i \neq B_j$ para toda $i \neq j$, como $Int\,(B_n) \subset B_n \subset Int\,(B_{n+1}) \subset B_{n+1}$, entonces $X \backslash B_{n+1} \subset X \backslash Int\,(B_{n+1}) \subset X \backslash B_n \subset X \backslash Int\,(B_n)$, dado que tenemos una sucesión decreciente de cerrados su intersección es no vacía, así $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \backslash Int\,(B_{n+1})) \neq \emptyset$ y $\bigcap\limits_{n=2}^{\infty} (X \backslash Int\,(B_n)) \neq \emptyset$ y como $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \backslash Int\,(B_{n+1})) \neq \emptyset \subset X \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \backslash Int\,(B_n)) \neq \emptyset$ por lo que $X \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \neq \emptyset$.

Como $X \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \neq \emptyset$, sea q un punto de $X \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$.

Si $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ es densa en X, y considerando que q no está contenido en ningún B_i, se tiene que $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ está contenido en la unión de todos los subcontinuos de X contenidos en $X \backslash \{q\}$ y que contienen a z y hemos terminado la prueba del teorema.

Ahora, supongamos que $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = B$ no es densa en X, entonces existe V un subconjunto abierto y no vacío de X tal que $B \cap V = \emptyset$, es decir

$B \subset X \backslash V$. Por ser V abierto, se tiene que existe $J \subset \mathbb{N}$ tal que si $i \in J$, entonces $B \cap D_i = \emptyset$.

Para cada $i \in J$, sea E_i la componente de $X \backslash D_i$ que contiene a B y $F_i = \overline{X \backslash E_i}$.

Como $X \backslash D_i$ es cerrado en X y E_i es cerrado en $X \backslash D_i$, entonces E_i es un cerrado en X y además conexo, por lo que E_i es un subcontinuo de X.

Veamos que $F_i \cup B \in C(X)$ para cada $i \in J$.

Sea $i \in J$ y supongamos que $F_i \cup B = H \cup K$ con H y K abiertos, ajenos y no vacíos de X.

Por ser B conexo, sin pérdida de generalidad, supongamos que $B \subset H$. Entonces $H \subset E_i$, ya que si $H \nsubseteq E_i$, $H \cap (X \backslash E_i) \neq \emptyset$, esto implica que $H \cap F_i \neq \emptyset$ y, en consecuencia, $H \cap K \neq \emptyset$, contradiciendo que H y K sean ajenos. Así, $H \subset E_i$. Por lo tanto, B está contenido en un abierto (H) de un continuo propio de X (E_i). Por consiguiente, $E_i \subset B$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, $F_i \cup B$ es un subconjunto conexo de X. Luego, por ser E_i y F_i cerrados en X, se tiene que $E_i \cap F_i$ es cerrado en X. Así, E_i y $F_i \cup B$ son subcontinuos de X.

Por otro lado, $E_i \cap F_i = E_i \cap \overline{X \backslash E_i} = E_i \cap \overline{X \cap E_i^c} = Fr\,(E_i)$, y como la frontera de E_i tiene interior vacío, concluimos que $Int(E_i \cap F_i) = \emptyset$.

Dado que $E_i \cap F_i$ es un subconjunto cerrado de X con interior vacío, el $Teorema\ de\ Baire$, nos asegura que $C = \underset{i \in I}{\cup} (E_i \cap F_i)$ tiene interior vacío. Entonces existe $w \in X \backslash B$ y $w \notin C$. Ahora, si $w \in E_i$, sea $G_i = F_i \cup B$.

Veamos que $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} G_i$ es un subconjunto denso de X. Sea U un abierto de X, existe un D_i abierto de X, tal que $D_i \subset U$. Si $i \in J$, entonces $D_i \subset F_i$ y si $i \notin J$, entonces $D_i \subset B$, en ambos casos se tiene que $G \cap U \neq \emptyset$. Así, $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} G_i$ es un densa en X. Si $w \notin E_i$, sea $G_i = E_i$ y en este caso también $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} G_i$ es un subconjunto denso de X ya que si U es un abierto de X, existe $i \in J$ tal que $D_i \subset U$ y $D_i \subset B$, entonces $G \cap U \neq \emptyset$. Así, $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} G_i$ es un densa en X. Tomando $p = w$, tenemos que la unión de todos los subcontinuos de X contenidos en $X \backslash \{p\}$ y que contienen a x es denso en X. ■

Con el Teorema anterior probaremos el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.2 *Todo continuo X tiene al menos dos puntos orilla.*

Demostración. Sea z cualquier punto de X, por el Teorema 4.1, existe $q \in X \backslash \{z\}$ tal que la unión de todos los subcontinuos de X contenidos en $X \backslash \{q\}$ y que intersectan a $\{z\}$ es densa en X.

Probaremos que q es un punto orilla de X. Sea $\varepsilon > 0$. Por ser X compacto, existen subconjuntos abiertos y no vacíos $U_1, U_2, ..., U_n$ de X tales que diám$(U_i) < \frac{\varepsilon}{4}$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$.

Dado que la unión de todos los subcontinuos de X contenidos en $X \setminus \{q\}$ y que intersectan a $\{z\}$ es denso en X. Para cada abierto U_i existe un subcontinuo D_i de X tal que $D_i \subset X \setminus \{q\}$, $D_i \cap U_i \neq \emptyset$ y $z \in D_i$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Sea $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$. Por ser A una unión finita de cerrados A es cerrado. Como cada D_i es conexo y $z \in D_i$, para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$, se tiene que A es conexo. Así, A es un subcontinuo de X.

Veamos que $H(A, X) < \varepsilon$. Por el Lema 1.16, basta probar que $X \subset N(\varepsilon, A)$. Sea $x \in X$. Como $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ existe un punto $u_i \in U_i$ tal que $d(x, u_i) < \frac{\varepsilon}{4}$. Asimismo, existe $d_i \in D_i$ tal que $d(u_i, d_i) < \frac{\varepsilon}{4}$. Por lo tanto, $d(x, d_i) < \varepsilon$ y hemos probado que q es un punto orilla de X.

Ahora para $q \in X$, aplicando de nuevo el Teorema 4.1, existe $q_1 \in X \setminus \{q\}$ tal que la unión de todos los subcontinuos de X contenidos en $X \setminus \{q_1\}$ y que intersectan a $\{q\}$ es denso en X.

De igual manera, se prueba que q_1 es un punto orilla de X y con esto se termina la prueba del teorema. ■

4.2. Continuos irreducibles

En esta sección veremos que en un continuo irreducible X cada punto de irreducibilidad de X es un punto orilla de X y daremos condiciones para saber cuándo cada punto orilla en un continuo irreducible X es un punto de irreducibilidad de X.

Teorema 4.3 *Sea X un continuo irreducible con respecto a los puntos z y y de X. Entonces z y y son puntos orilla de X.*

Demostración. Supongamos que X es irreducible respecto a los puntos z y y de X. Veamos que z es un punto orilla de X. Sea $\varepsilon > 0$. Por ser X compacto, existen subconjuntos abiertos y no vacíos $U_1, U_2, ..., U_n$ de X tales que $\text{diám}(U_i) < \frac{\varepsilon}{4}$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$. Dado que la composante $k(y)$ es densa en X (Teorema 1.31) y, $z \notin k(y)$ para cada abierto U_i de X, existe un subcontinuo propio D_i de X tal que $D_i \subset X \setminus \{z\}$, $D_i \cap U_i \neq \emptyset$ y $y \in D_i$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Sea $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$. Por ser A una unión finita de cerrados A es cerrado. Como cada D_i es conexo y $y \in D_i$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$, se tiene que A es conexo. Así, A es un subcontinuo propio de X que no contiene a x.

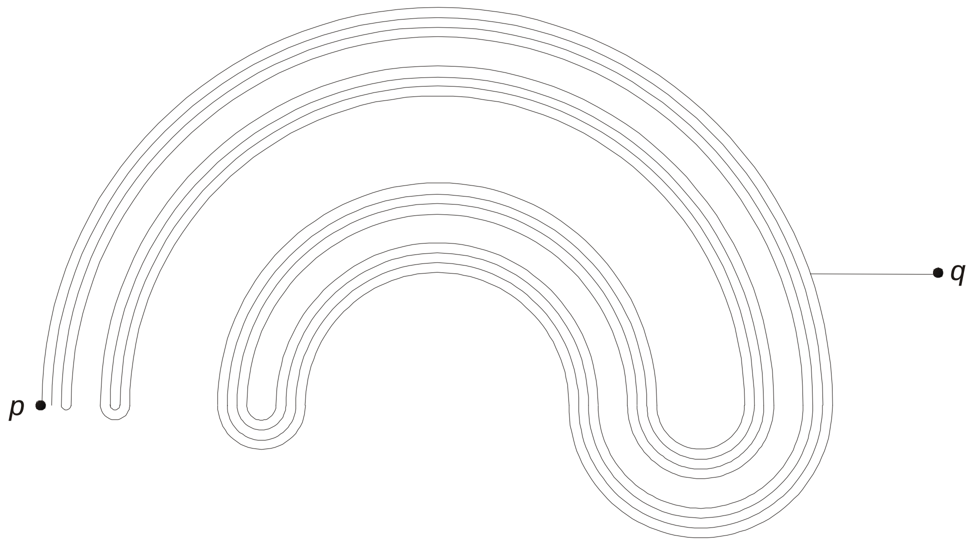


Figura 4.1: El punto p es un punto orilla y no es un punto de irreducibilidad

Veamos que $H(A, X) < \varepsilon$. Basta probar que $X \subset N(\varepsilon, A)$. Sea $w \in X$, como $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $w \in U_1$. Entonces $d(w, u) < \frac{\varepsilon}{4}$ para algún $u \in U_1$, luego para U_1 existe $e \in D_i$ tal que $d(u, e) < \frac{\varepsilon}{4}$. Así, $d(w, e) < \varepsilon$. Con esto probamos que $X \subset N(\varepsilon, A)$. Entonces z es un punto orilla de X. De igual manera se prueba que y es un punto orilla de X. ■

El regreso del Teorema 4.3, no siempre es cierto, en el ejemplo de la Figura 4.1, el punto p es un punto orilla del continuo y no es un punto de irreducibilidad.

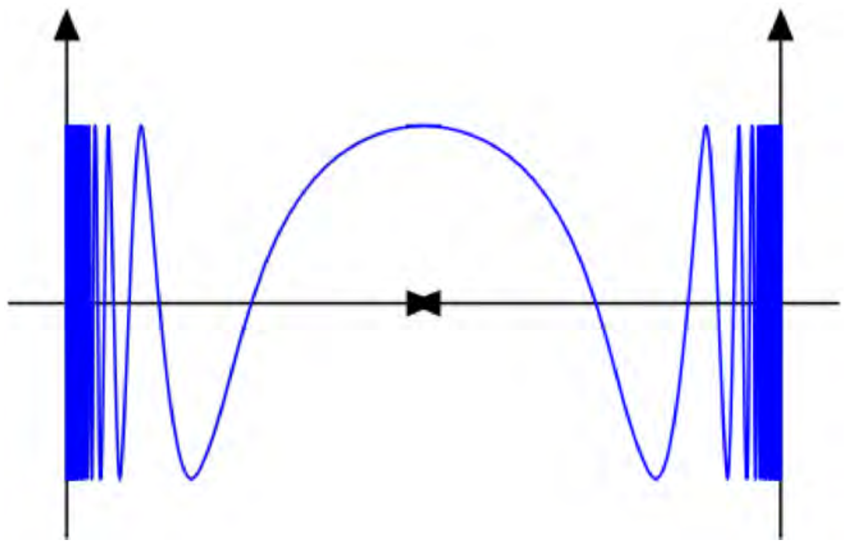


Figura 4.2: Continuo Tipo A

A continuación daremos condiciones para saber cuándo, en un continuo irreducible, todo punto orilla es un punto de irreducibilidad.

Teorema 4.4 *Sean X un continuo y p un punto orilla de X. Si X es irreducible entre los puntos h y k de X y existe una descomposición semicontinua superiormente $\boldsymbol{D}$ de X la cual induce una función monótona $G : X \to [0,1]$, $\boldsymbol{D} = \{G^{-1}(t) : t \in [0,1]\}$ que cumple lo siguiente:*

1. *$h \in H = G^{-1}(0), k \in K = G^{-1}(1)$ y X es irreducible entre los conjuntos H y K.*

2. *Para cada $x \in X$, $G^{-1}(G(x)) = T_x$, $Int(T_x) = \emptyset$* y *$T_x \in C(X)$.*

3. *Para $x, y \in X$, se tiene que $T_x = T_y$, o $T_x \cap T_y = \emptyset$.*

4. *Para todo $x \in X$, $X \backslash T_x$ no es un conjunto conexo de X.*

Entonces p es un punto de irreducibilidad de X.

Demostración. Sean X un continuo irreducible entre los puntos h y k de X y p un punto orilla de X, distinto de h y de k.

Sea $\boldsymbol{D}$ una descomposición semicontinua superiormente y $G : X \to [0,1]$ una función monótona, $\boldsymbol{D} = \{G^{-1}(t) : t \in [0,1]\}$ que cumple lo siguiente:

1. $h \in H' = G^{-1}(0), k \in K = G^{-1}(1)$ y X es irreducible entre los conjuntos H' y K.

2. Para cada $x \in X$, $G^{-1}(G(x)) = T_x$, $Int(T_x) = \emptyset$ y $T_x \in C(X)$.

3. Para $x, y \in X$, se tiene que $T_x = T_y$, o $T_x \cap T_y = \emptyset$.

4. Para todo $x \in X$, $X \backslash T_x$ no es un conjunto conexo de X.

Si $p \in H'$, de la hipótesis 1, p sería un punto de irreducibilidad, ya que X es irreducible entre un punto de H' y un punto de K. De igual manera si $p \in K$.

Supongamos que $p \notin H'$ y $p \notin K$. Esto implica que $H' \cap T_p = \emptyset = K \cap T_p$ (hipótesis 3).

Sean r_1 la distancia de Hausdorff de $H^{'}$ a T_p y r_2 la distancia de Hausdorff de T_p a K. Sean $r =$mín$\left\{\text{diám}\left(H^{'}\right), \text{diám}\left(T_p\right), \text{diám}\left(K\right), r_1 \text{ y } r_2\right\}$ y $\varepsilon = \frac{r}{4}$.

Como p es un punto orilla de X, existe un subcontinuo propio D de X tal que $p \notin D$ y $H\left(D, X\right) < \varepsilon$.

Notemos que $D \cap T_p \neq \emptyset$, ya que de lo contrario si $D \subset X \backslash T_p$ y, dado que $X \backslash T_p = U \cup V$ que es la unión de dos abiertos, ajenos, no vacíos (hipótesis 4) y, de la conexidad de D, se tiene que $D \subset U$ o $D \subset V$. En cualquiera de los dos casos, por la elección de ε, tendríamos que $H\left(D, X\right) > \varepsilon$, lo que es una contradicción.

También, de la elección de nuestra ε, existen dos puntos x_1 y x_2 de D tales que $d\left(x_1, h\right) < \varepsilon$ y $d\left(x_2, k\right) < \varepsilon$. Así, para los subcontinuos propios T_{x_1} y T_{x_2} de X, se tiene que $T_{x_1} \cap D \neq \emptyset \neq T_{x_2} \cap D$.

Por ser G monótona, $G^{-1}\left(\left[0, G\left(x_1\right)\right]\right) \in C\left(X\right)$ y $G^{-1}\left(\left[G\left(x_2\right), 1\right]\right) \in C\left(X\right)$.

Como $\varepsilon = \frac{r}{4}$, $G^{-1}\left(\left[0, G\left(x_1\right)\right]\right) \cap T_p = \emptyset = G^{-1}\left(\left[G\left(x_2\right), 1\right]\right) \cap T_p$.

Así, $G^{-1}\left(\left[0, G\left(x_1\right)\right]\right) \cup D \cup G^{-1}\left(\left[G\left(x_2\right), 1\right]\right)$ es un subcontinuo propio de X $\left(p \notin G^{-1}\left(\left[0, G\left(x_1\right)\right]\right) \cup D \cup G^{-1}\left(\left[G\left(x_2\right), 1\right]\right)\right)$ que contiene al conjunto $\{h, k\}$, contradiciendo el hecho de que h y k son puntos de irreducibilidad de X.

Por lo tanto, $p \in H^{'} \cup K$. Lo que implica, que p es un punto de irreducibilidad de X (hipótesis 1) y se termina la prueba del teorema. ■

Definición 4.5 *Un continuo X es* tipo A *si es irreducible entre dos puntos h y k, admite una descomposición semicontinua superiormente $\boldsymbol{D}$ y existe una función monótona $G : X \to [0,1]$, $\boldsymbol{D} = \{G^{-1}(t) : t \in [0,1]\}$ que cumple lo siguiente:*

1. $h \in H = G^{-1}(0), k \in K = G^{-1}(1)$ *y X es irreducible entre los conjuntos H y K.*

2. *Para cada $x \in X$, $G^{-1}(G(x)) = T_x$, $Int(T_x) = \emptyset$ y $T_x \in C(X)$.*

3. *Para $x, y \in X$, se tiene que $T_x = T_y$, o $T_x \cap T_y = \emptyset$.*

4. *Para todo $x \in X$, $X \backslash T_x$ no es un conjunto conexo de X.*

El ejemplo de la Figura 4.2, es un continuo tipo A.

Corolario 4.6 *Sean X un continuo tipo A y p un punto orilla de X. Entonces p es un punto de irreducibilidad.*

Demostración. Por ser X tipo A, existe $\boldsymbol{D}$ una descomposición semicontinua superiormente y $G : X \to [0,1]$ una función monótona, $\boldsymbol{D} = \{G^{-1}(t) : t \in [0,1]\}$ que cumple lo siguiente:

1. $h \in H = G^{-1}(0), k \in K = G^{-1}(1)$ y X es irreducible entre los conjuntos H y K.

2. Para cada $x \in X$, $G^{-1}(G(x)) = T_x$, $Int(T_x) = \emptyset$ y $T_x \in C(X)$.

3. Para $x, y \in X$, se tiene que $T_x = T_y$, o $T_x \cap T_y = \emptyset$.

4. Para todo $x \in X$, $X \backslash T_x$ no es un conjunto conexo de X.

Así, del Teorema 4.4, p es un punto de irreducibilidad de X. ■

Corolario 4.7 *Sean X un continuo irreducible y hereditariamante descomponible y p un punto orilla de X. Entonces p es un punto de irreducibilidad de X.*

Demostración. Sean X irreducible entre los puntos h y k y hereditariamente descomponible y H y K los subcontinuos finales de X que contienen a h y a k, respectivamente, y $\boldsymbol{D}$ la coleción que consiste de H y K y todos los c-subcontinuos de X (Teorema 1.35). Se sigue del Teorema 1.37, que $\boldsymbol{D}$ es una colección semicontinua superiormente de continuos ajenos dos a dos cuya unión es X y $(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{D}))$ es un arco de H a K, es decir, X admite una descomposición semicontinua superiormente y existe $G : X \rightarrow [0,1]$, $\boldsymbol{D} = \{G^{-1}(t) : t \in [0,1]\}$ que cumple lo siguiente:

1. $h \in H = G^{-1}(0), k \in K = G^{-1}(1)$ y X es irreducible entre los conjuntos H y K.

2. Para cada $x \in X$, $G^{-1}(G(x)) = T_x$, $Int(T_x) = \emptyset$ y $T_x \in C(X)$.

3. Para $x, y \in X$, se tiene que $T_x = T_y$, o $T_x \cap T_y = \emptyset$.

4. Para todo $x \in X$, $X \backslash T_x$ no es un conjunto conexo de X.

Así, del Teorema 4.4, p es un punto de irreducibilidad de X. ■

4.2.1. Continuos finitamente irreducibles

En esta sección daremos condiciones para saber cuáles puntos son orilla en un continuo finitamente irreducible.

Definición 4.8 *Diremos que un continuo X es* finitamente irreducible*, si existe un subconjunto finito $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ de X tal que si A es un subcontinuo de X y $Y \subset A$, entonces $A = X$. Diremos que X es* irreducible respecto al subconjunto Y.

El ejemplo de la Figura 4.3, que es conocido como un Triodo, es un continuo finitamente irreducible. En este caso es irreducible respecto al conjunto de puntos extremos del triodo $\{p, q, z\}$.

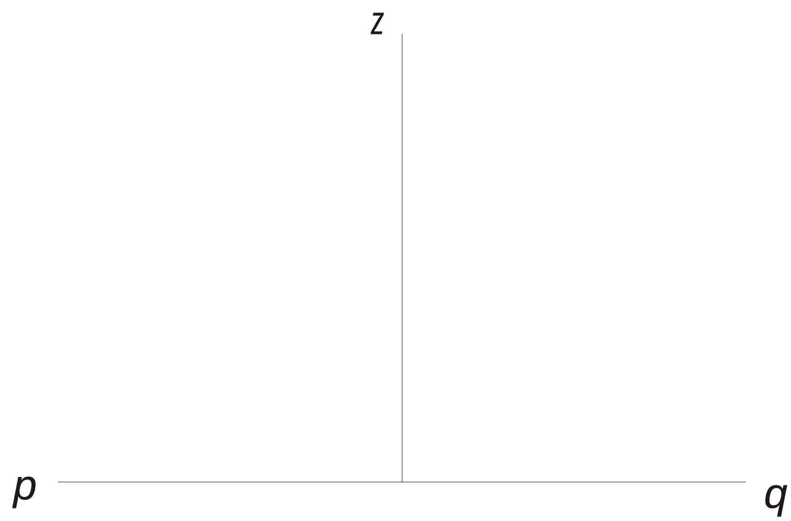


Figura 4.3: Triodo

Lema 4.9 *Sea X un continuo finitamente irreducible respecto al conjunto $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Entonces:*

$$Q(y_i) = \{x \in X : \textit{existe } A \in C(X) \textit{ tal que } \{y_i, x\} \subset A \textit{ y } A \cap Y = \{y_i\}\}$$

es un subconjunto denso de X para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Demostración. Observemos que $Q(y_i) \neq \emptyset$, pues $y_i \in Q(y_i)$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Sin pérdida de generalidad, veamos que $Q(y_1)$ es un subconjunto denso de X.

Sea U un abierto no vacío de X. Probemos que $U \cap Q(y_1) \neq \emptyset$. Si $U \cap Y = \emptyset$, entonces sean $U_2, U_3, ..., U_n$, $V, V_2, ..., V_n$ abiertos no vacíos de X tales que

$y_i \in \overline{V_i} \subset U_i$, $U_i \cap U = \emptyset$ para cada $i \in \{2, 3, ..., n\}$ y $\overline{V} \subset U$.

Por ser $\overline{V} \cup \left(\bigcup\limits_{i=2}^{n} \overline{V_i} \right)$ cerrado, se tiene que $U' = X \setminus \left(\overline{V} \cup \left(\bigcup\limits_{i=2}^{n} \overline{V_i} \right) \right)$ es un abierto de X tal que $y_1 \in U'$, $U' \cap Y = \{y_1\}$ y $U \cap U' \neq \emptyset$.

Sea C la componente de U' que contiene a y_1. Entonces $\overline{C}$ es un subcontinuo propio de X tal que $y_1 \in \overline{C}$ y $\overline{C} \cap Y = \{y_1\}$. Por consiguiente, $\overline{C} \subset Q(y_1)$.

Por el Teorema 1.13, $\overline{C} \cap \left(\overline{V} \cup \left(\bigcup\limits_{i=2}^{n} \overline{V_i} \right) \right) \neq \emptyset$. Así, $\overline{C} \cap \overline{V} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $Q(y_1) \cap \overline{V} \neq \emptyset$ y, como $\overline{V} \subset U$, concluimos que $U \cap Q(y_1) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $Q(y_1)$ es un subconjunto denso de X.

Si $U \cap Y \neq \emptyset$, entonces sea W un subconjunto abierto de U tal que $W \cap Y = \emptyset$ y repetimos de nuevo el proceso anterior para W. Concluyendo que $Q(y_1)$ es un subconjunto denso de X.

De igual manera se prueba que $Q(y_i)$ es un subconjunto denso de X para cada $i \in \{2, 3, ..., n\}$. ■

Proposición 4.10 *Sea X un continuo finitamente irreducible respecto al conjunto $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Entonces y_i es un punto orilla de X para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$.*

Demostración. Sea X un continuo finitamente irreducible respecto al conjunto $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Veamos que y_1 es un punto orilla de X.

Sea $\varepsilon > 0$. De la compacidad de X, existen subconjuntos abiertos y no vacíos $U_1, U_2, ..., U_m$ de X tales que $X \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ y diám$(U_i) < \frac{\varepsilon}{4}$ para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Por ser $Q(y_2)$ un subconjunto denso de X y $y_1 \notin Q(y_2)$, para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$, existen $u_i \in U_i \cap Q(y_2)$ y $A_i \in C(X)$ tales que $\{u_i, y_2\} \subset A_i$ y $Y \cap A_i = \{y_2\}$ para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$.

Sea $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. Por ser cada A_i un subconjunto cerrado de X, se tiene que A es un cerrado de X. Además, cada A_i es un subconjunto conexo de X y $y_2 \in \bigcap_{i=1}^{m} A_i$. Por lo tanto, A es un subcontinuo de X que no contiene a y_1 y, por construcción, $H(A, X) < \varepsilon$. Por lo tanto, y_1 es un punto orilla de X.

De igual manera, se prueba que y_i es un punto orilla de X para cada $i \in \{2, 3, ..., m\}$. ■

4.3. Caracterizaciones con puntos orilla

En esta sección, utilizando los teoremas de las secciones anteriores, presentaremos algunas caracterizaciones de continuos a partir de sus puntos orilla.

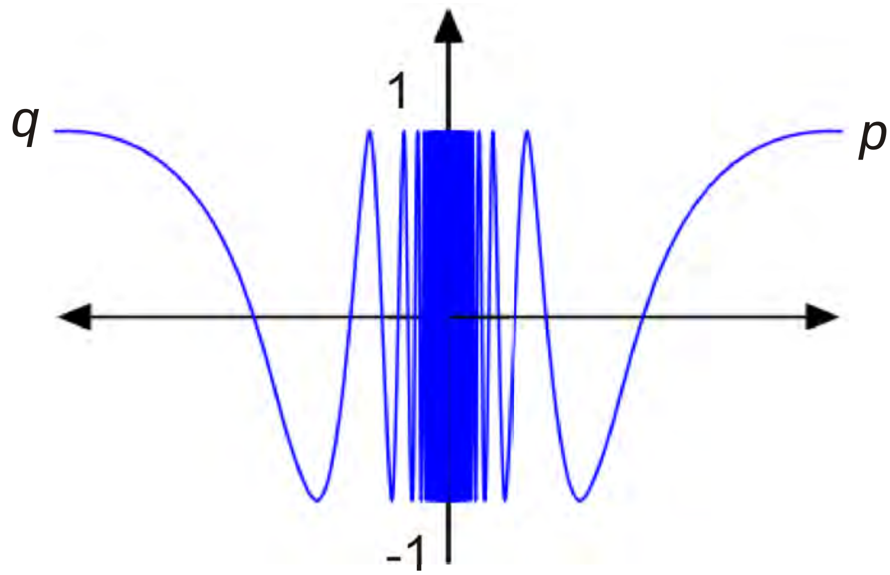


Figura 4.4: Continuo únicamente irreducible entre los puntos p y q

4.3.1. Continuos con sólo dos puntos orilla

Dado que todo continuo tiene al menos dos puntos orilla (Teorema 4.2) en esta sección daremos una caracterización de los continuos con a lo más dos puntos orilla.

Definición 4.11 *Un continuo X es* únicamente irreducible *si sólo tiene dos puntos de irreduciblidad.*

El arco es un continuo únicamente irreducible, el continuo de la Figura 4.4, es otro ejemplo de un continuo únicamente irreducible.

Lema 4.12 *Sea X un continuo únicamente irreducible entre los puntos z y y. Si B es un subcontinuo indescomponible de X, entonces $\{z, y\} \cap B = \emptyset$.*

Demostración. Sean B un subcontinuo indescomponible de X y z y y los únicos puntos de irreducibilidad de X. Aseguramos que $z \notin B$ y $y \notin B$.

Supongamos que $z \in B$. Sea $w \in B$ tal que w está en la composante $k(z)$ en B. Como w no es un punto de irreducibilidad de X, existe un subcontinuo propio W de X tal que $\{w, y\} \subset W$. Por otro lado, como $w \in k(z)$, existe $A \in C(B)$ tal que $\{w, z\} \subset A$. Observemos que por ser W y A subconjuntos cerrados de X, se tiene que $W \cup A$ es un subconjunto cerrado de X y, dado que W y A son conexos con intersección no vacía, pues $w \in W \cap A$, entonces $W \cup A$ es un subcontinuo de X que contiene a $\{y, z\}$. Además, $B \neq (A \cup W)$, de lo contrario B sería un subcontinuo descomponible de X, esto implicaría que $A \cup W$, es un subcontinuo propio de X que contienen a los puntos z y y, contradiciendo el hecho de que X es irreducible entre los puntos z y y.

Por lo tanto, $z \notin B$. De igual manera, se prueba que $y \notin B$. ■

Teorema 4.13 *Sean X un continuo únicamente irreducible y p un punto orilla de X. Entonces p es un punto de irreducibilidad de X.*

Demostración. Sea p un punto orilla de X. Si X es hereditariamente descomponible, se sigue del Corolario 4.7, que p es un punto de irreducibilidad de X.

Supongamos que X no es hereditariamente descomponible.

Sean z y y los únicos puntos de irreducibilidad de X. Recordemos que X es descomponible, de lo contrario tendría más de dos puntos de irreducibilidad. Supongamos que p no es un punto de irreducibilidad de X.

Como p no es un punto de irreducibilidad, existen dos subcontinuos propios Z y Y de X, tales que $\{z, p\} \subset Z$, $\{y, p\} \subset Y$, esto implica que $X = Z \cup Y$.

Dado que los puntos de irreducibilidad de X no pueden estar en un subcontinuo indescomponible de X (Lema 4.12) y $z \in Z$ y $y \in Y$, se tiene que Z y Y son subcontinuos descomponibles de X.

Recordemos que $X = Z \cup Y$, $z \in Z$, $y \in Y$ y $p \in Z \cap Y$. Entonces existen subcontinuos propios A_1 y B_1 de Z y A_2 y B_2 de Y tales que $A_1 \cup B_1 = Z$, $A_2 \cup B_2 = Y$, $z \in A_1$ y $y \in B_2$.

Observemos que $p \notin A_1$. De lo contrario, $A_1 \cup Y$ es un subcontinuo propio de X que contiene a p, a y y a z. Contradiciendo el hecho de que X es únicamente irreducible entre z y y. De igual manera, $p \notin B_2$.

Sean $r_1 = \text{mín}\{d(z, B_1), d(z, Y)\}$ y $r_2 = \text{mín}\{d(y, Z), d(y, A_2)\}$. Por otro lado, como $X \backslash (B_1 \cup Y)$ es un subconjunto abierto de X, para $r = \frac{\text{mín}\{r_1, r_2\}}{4}$, existe $0 < \varepsilon < r$ tal que $B(\varepsilon, z) \subset X \backslash (B_1 \cup Y) \subset A_1$.

Luego, por ser p un punto orilla de X, se tiene que para $0 < \varepsilon < r$ existe C subcontinuo de X tal que $p \notin C$ y $H(C, X) < \varepsilon$. Considerando que $H(C, X) < \varepsilon$, se tiene que $C \cap B(\varepsilon, z) \neq \emptyset$.

Sea $E = A_1 \cup C \cup B_2$. Entonces se tiene que $p \notin E$ y $\{z, y\} \subset E$. Así, E es un subcontinuo propio de X que contiene a z y a y. Contradiciendo el hecho de que X es únicamente irreducible entre z y y. Por lo tanto, p es un punto de irreducibilidad de X. ■

La siguiente proposición nos da una caracterización de los continuos únicamente irreducibles.

Proposición 4.14 *Sea X un continuo no degenerado. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

i) X es únicamente irreducible;

ii) X contiene sólo dos puntos orilla.

Demostración. Veamos que i) implica ii). Sean p y q los únicos puntos de irreducibilidad de X, se sigue del Teorema 4.13, que p y q son los únicos puntos orilla de X.

Probemos ahora que ii) implica i). Primero veamos que X es irreducible. Supongamos que X no es irreducible. Sean p y q los únicos puntos orilla de X. Como X no es irreducible, existe un subcontinuo A de B tal que $\{p, q\} \subset A$ y $A \neq X$. Sea $w \in X \backslash A$ tal que la unión de todos los subcontinuos propios de X contenidos en $X \backslash \{w\}$ y que interesectan a X es densa en X ([1, Teorema 5, pág. 500]). Esto implica que w es un punto orilla de X distinto de p y q. Contradiciendo el hecho de que los únicos puntos orilla de X son p y q. Por lo tanto, X es un continuo irreducible.

Si X no es únicamente irreducible, por ser irreducible, X tiene más de dos puntos de irreducibilidad. Por consiguiente, del Teorema 4.3, X tendría más de dos puntos orilla, lo cual no puede ser. Por lo tanto, X es únicamente irreducible. Así, hemos probado que los continuos con sólo dos puntos orilla son los continuos con sólo dos puntos de irreducibilidad. ■

4.3.2. Caracterizaciones del arco

A lo largo de la historia de la teoría de los continuos se han dado diversas caracterizaciones del arco.

Algunas caracterizaciones conocidas de un arco son las siguientes:

Teorema 4.15 *[1, Teorema 6, pág. 501] Una condición necesaria y sufi-*

ciente para que un continuo irreducible X del punto a al punto b sea un arco es que para cada par de puntos p y q de X, exista un continuo en $X \setminus \{p\}$ que contenga a q e intersecte al conjunto $\{a, b\}$.

Teorema 4.16 *[1, Teorem 7, pág. 501] Un continuo X es un arco entre dos puntos a y b de X, siempre que cada par de puntos de $X \setminus \{a, b\}$ cortan al punto a del punto b en X y cortan a un subconjunto abierto de X del conjunto $\{a, b\}$ en X.*

Teorema 4.17 *[15, Teorema 6.17, pág. 96] Un continuo X es un arco si y sólo si X sólo tiene dos puntos que no son de corte.*

En esta sección demostraremos las siguientes dos caracterizaciones de un arco: un continuo X es un arco si y sólo si cada subcontinuo de X tiene sólo dos puntos orilla y X es un arco si y sólo si X es semiaposindético y con sólo dos puntos orilla.

Teorema 4.18 *Sea X un continuo no degenerado. Entonces X es un arco si y sólo si para todo subcontinuo B de X, se tiene que B tiene sólo dos puntos orilla.*

Demostración. Es claro que si X es un arco, todo subcontinuo B de X

es un arco. En consecuencia, B es únicamente irreducible y, de la Proposición 4.14, B tiene sólo dos puntos orilla.

Sea X un continuo tal que todo subcontinuo B de X sólo tiene dos puntos orilla.

Supongamos ahora, que X tiene sólo dos puntos orilla p y q. Entonces X es irreducible. Ya que si X no es irreducible, existe un subcontinuo propio A de X tal que $\{p,q\} \subset A$. Entonces existe un punto $z \in X \setminus A$ tal que la unión de todos los subcontinuos propios de X que intersectan a A y están contenidos en $X \setminus \{z\}$ es una unión densa en X [1, Teorema 5, pág. 500]. Esto implica, que z es un punto orilla de X distinto de p y de q. Contradiciendo el hecho de que X tenga sólo dos puntos orilla. Por lo tanto, X es irreducible.

Luego, si existe $x \in X \setminus \{p,q\}$ tal que x es un punto de irreducibilidad de X. Del Teorema 4.3, se tiene que x es un punto orilla de X distinto de p y de q. Lo que es una contradicción. Por consiguiente, los únicos puntos de irreducibilidad de X son p y q. Esto implica que X es únicamente irreducible y, como consecuencia de esto, tenemos que X es descomponible.

Dado que todo subcontinuo de X tiene sólo dos puntos orilla, resulta que X es hereditariamente irreducible y hereditariamente descomponible.

Sean a y b los puntos de irreducibilidad de X, A y B los subcontinuos finales de X que contienen a a y a b, respectivamente, y $\boldsymbol{D}$ la colección que consiste de A y B y todos los c-subcontinuos de X (Teorema 1.35). Luego, del Teorema 1.36, se sigue que $\boldsymbol{D}$ es una colección semicontinua superiormente de continuos ajenos dos a dos cuya unión es X y $(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{D}))$ es un arco de A a B, es decir, X admite una descomposición semicontinua superiormente y $G : X \to [0,1]$ y $\boldsymbol{D} = \{G^{-1}(t) : t \in [0,1]\}$, que cumple lo siguiente:

1. $a \in G^{-1}(0), b \in G^{-1}(1)$.
2. X es irreducible entre los conjuntos $G^{-1}(0)$ y $G^{-1}(1)$.
3. Para todo $x \in X, G^{-1}(G(x)) = T_x$, $Int(T_x) = \emptyset$ y $T_x \in C(X)$.
4. Para $x, y \in X, x \neq y$, se tiene que $T_x \cap T_y = \emptyset$.
5. Para todo $x \in X \setminus \{a, b\}$, se tiene que $X \setminus T_x = U \cup V$, $a \in U, b \in V$ y U y V subconjuntos abiertos y ajenos de X.

De 2, se tiene que $G^{-1}(0) = \{a\}$ y $G^{-1}(1) = \{b\}$, de lo contrario a y b no serían los únicos puntos de irreducibilidad de X (hipótesis 2).

Sean x y y puntos de X. Supongamos que $T_x = T_y$. Sea $D = G^{-1}([G(x), 1])$. Por ser G una función monótona, se tiene que D es un subconjunto conexo de X que contiene al conjunto $\{x, y, b\}$ y, dado que D es cerrado, se tiene que D es un subcontinuo de X.

Por hipótesis, D sólo tienen dos puntos orilla. Así que, del Teorema 4.14, se tiene que D es únicamente irreducible.

Como D es descomponible y únicamente irreducible, se tiene que b es un punto de irreducibilidad de D, y el otro punto de irreducibilidad de D se encuentra en T_x. Sin pérdida de generalidad, sean x y b los puntos de irreducibilidad de D. Entonces existe $A \in C(D)$ tal que $\{y, b\} \subset A$ y $x \notin A$.

Supongamos ahora que $T_x \neq T_y$. De igual manera, $B = G^{-1}([G(y), 1])$ es un subcontinuo propio de X y, sin pérdida de generalidad, $x \notin G^{-1}([G(y), 1])$. Así, $B \in C(D)$, $y \in B$ y $x \notin B$.

Por lo tanto, para cada par de puntos x y y de X, existe un subcontinuo de X contenido en $X \setminus \{x\}$ que contiene a y y que intersecta al conjunto $\{a, b\}$. En consecuencia, del Teorema 4.15, se tiene que X es un arco. ■

Definición 4.19 *Un continuo X es* semiaposindético *si para cualesquier par de puntos x y y de X, existe un subcontinuo propio W de X tal que $\{x, y\} \cap Int(W) \neq \emptyset$ y $\{x, y\} \setminus W \neq \emptyset$.*

Lema 4.20 *[10, Teorema 3.1.50, pág. 162] Sea X un continuo semiaposindético e irreducible. Entonces X es un homeomorfo a $[0, 1]$.*

Teorema 4.21 *Sea X un continuo no degenerado. Entonces X es un arco* *si y sólo si X es semiaposindetico y con sólo dos puntos orilla.*

Demostración. Es claro que si X es un arco, X es semiaposindético y con sólo dos puntos orilla.

Luego, si X tiene sólo dos puntos orilla, por la Proposición 4.14, X es únicamente irreducible. Entonces, X es semiaposindetico e irreducible. Por lo tanto, del Lema 4.20, se tiene que X es un arco. ■

4.3.3. Caracterizaciones de la curva cerrada simple

En esta sección daremos algunas caracterizaciones de la curva cerrada simple.

Antes de continuar mencionaremos algunas caracterizaciones conocidas de una curva cerrada simple.

Teorema 4.22 *[9, Teorema 2, pág. 180] Un continuo X es una curva cerrada simple si ningún subcontinuo no degenerado de X lo separa.*

Teorema 4.23 *[1, Teorema 9, pág. 504] Un continuo X es una curva cerrada simple si cada par de puntos cortan a X en dos subconjuntos abiertos de X.*

Teorema 4.24 *[1, Teorema 10, pág. 504] Un continuo X es una curva cerrada simple si ningún punto de X lo corta y X no es separado por ninguno de sus subcontinuos.*

Teorema 4.25 *[1, Teorema 11, pág. 505] Un continuo X es una curva cerrada simple si no es cortado por ninguno de sus puntos pero sí por cualesquiera dos.*

Definición 4.26 *Un continuo X es* 2-equivalente*, si sólo contiene dos tipos de subcontinuos topológicamente distintos.*

El continuo $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, (Figura 1.1), es un ejemplo de un continuo 2-equivalente.

Teorema 4.27 *[6, Corolario 2.9, pág. 27] Un continuo X es una curva cerrada simple si y sólo si X es un continuo 2-equivalente, no unicoherente y contiene arcos.*

En esta sección demostraremos la siguiente caracterización de una curva cerrada simple: Un continuo X es una curva cerrada simple si y sólo si para cada par de puntos p y q de X, existen exactamente dos únicos subcontinuos propios A y B de X tales que p y q son los únicos puntos orilla de A y B y $\{p,q\} = A \cap B$ y si C es un subcontinuo propio de X distinto de A y de B que contiene a los puntos p y q, p y q no son puntos orilla de C.

Es necesario pedir que existan exactamente dos subcontinuos propios A y B de X tales que p y q son los únicos puntos orilla de A y B ya que de lo contrario no sería cierta nuestra caracterización. Un ejemplo de esto, es el disco unitario, notemos que para cualesquiera dos puntos a y b podemos encontrar más de dos subcontinuos propios que contengan a los puntos a y b como únicos puntos orilla y, claramente, el disco no es una curva cerrada simple.

Por último, en esta sección probaremos que si X es un continuo y todo punto de X es orilla y para todo subcontinuo propio B de X, B tiene sólo dos puntos orilla, entonces X es una curva cerrada simple o X es indescomponible.

Teorema 4.28 *Un continuo X es una curva cerrada simple si y sólo si para cada par de puntos p y q de X, existen exactamente dos subcontinuos propios A y B de X tales que p y q son los únicos puntos orilla de A y B y $\{p, q\} = A \cap B$ y si C es un subcontinuo propio de X distinto de A y de B que contiene a los puntos p y q, p o q no son puntos orillas de C.*

Demostración. Si X es una curva cerrada simple, es claro que, para cada par de puntos p y q de X, existen exactamente dos únicos subcontinuos propios A y B de X tales que p y q son los únicos puntos orilla de A y B y

$\{p, q\} = A \cap B$ y si C es un subcontinuo propio de X distinto de A y de B que contiene a los puntos p y q, $\{p, q\}$ no es un conjunto orilla de C.

Supongamos ahora que, para cada par de puntos p y q de X, existen exactamente dos únicos subcontinuos propios A y B de X tales que p y q son los únicos puntos orilla de A y B y $\{p, q\} = A \cap B$ y si C es un subcontinuo propio de X distinto de A y de B que contiene a los puntos p y q y, p o q no son puntos orilla de X y probemos que X no tiene puntos de corte.

Supongamos que $x \in X$ es un punto de corte de X. Entonces $X \setminus \{x\} = U \cup V$, donde U y V son subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de X.

Sean u y v puntos de X tales que $u \in U$ y $v \in V$. Por hipótesis, deben existir dos subcontinuos propios H y K de X que tengan como sus únicos puntos orilla a u y v, pero en este caso $\{u, v, x\} \subset H \cap K$. Contradiciendo que H y K sólo se intersectan en los puntos orilla. Así, X no tiene puntos de corte.

Sean p y q dos puntos distintos de X y A y B los únicos dos subcontinuos propios de X que tienen como únicos puntos orilla a p y q y, además, $\{p, q\} = A \cap B$. Supongamos que $A \cup B \neq X$. Sean $x \in X \setminus (A \cup B)$ y E un subcontinuo propio de X tal que sus únicos puntos orilla son x y p. Aseguramos que $E \cap A = \{p\}$. Supongamos que existe $z \neq p$ tal que $z \in E \cap A$. Probemos que

p y q son puntos orilla de $E \cup A$. Sea $\varepsilon > 0$. Como p y q son los únicos puntos orilla de A, se sigue de la Proposición 4.14, que A es irreducible entre los puntos p y q. Entonces existe un subcontinuo propio D de A tal que $q \notin D$, $p \in D$ y $H(D, A) < \varepsilon$. Entonces $D \cup E$ es un subcontinuo propio de $E \cup A$ que no contiene a q y $H(D \cup E, E \cup A) < \varepsilon$.

De igual manera, existe un subcontinuo propio F de A tal que $p \notin F$, $q \in F$ y $H(F, A) < \varepsilon$.

Como z está en la composante de q respecto a A, existe un subcontinuo propio C_z de A tal que $\{q, z\} \subset C_Z$ y $p \notin C_Z$. Entonces $C_z \cup F$ es un subcontinuo propio de A que no contiene a p y $H(C_Z \cup F, A) < \varepsilon$.

También, por ser p un punto orilla de E, existe un subcontinuo propio N de E tal que $\{z, x\} \subset N$, $p \notin N$ y $H(N, E) < \varepsilon$. Tomando $M = F \cup C_Z \cup N$, se tiene que M es un subcontinuo de $E \cup A$ tal que $p \notin M$ y $H(M, E \cup A) < \varepsilon$. Entonces, $E \cup A$ es un subcontinuo propio de X distinto de A y B que tiene como puntos orilla a p y q, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $E \cap A = \{p\}$, es decir, $E \cup A$ es un subcontinuo únicamente irreducible entre q y x y, por lo tanto, los únicos puntos orilla de $E \cup A$ son q y x.

De igual manera, se tiene que $E \cap B = \{p\}$ y $E \cup B$ es un subcontinuo únicamente irreducible entre q y x que tiene como únicos puntos orilla a q

y x. Pero $(E \cup A) \cap (E \cup B) = E \cup \{q\}$ lo que es una contradicción. Por lo tanto, $A \cup B = X$.

Entonces $X \setminus \{p, q\} = (A \setminus \{p, q\}) \cup (B \setminus \{p, q\})$ que es la unión de dos abiertos ajenos no vacíos, lo que implica que el par de puntos p y q cortan a X. Entonces, ningún punto de X lo corta, pero sí por cualesquiera dos, por el Teorema 4.25, X es una curva cerrada simple. ■

El siguiente teorema nos dice que si X es continuo con todos sus puntos orilla y todo subcontinuo propio de X sólo tiene dos puntos orilla, entonces X es una curva cerrada simple o X es indescomponible.

Teorema 4.29 *Si X es un continuo no degenerado tal que todo punto de X es orilla y para todo subcontinuo propio B de X, B sólo tiene dos puntos orilla, entonces X es un curva cerrada simple o X es indescomponible.*

Demostración. Sea B un subcontinuo propio de X. Por hipótesis, B es un continuo tal que todos sus subcontinuos tienen sólo dos puntos orilla. Entonces, del Teorema 4.18, B es un arco. Además, X no es un arco ya que todos sus puntos son orilla. Así, si $B \in C(X)$, entonces B es homeomorfo a un arco o B es X, por lo que X es un continuo 2-equivalente. Supongamos que X es unicoherente.

Si X es descomponible, entonces $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos propios de X y $A \cap B \neq \emptyset$. Por hipótesis, A y B son arcos, esto implica que X es arcoconexo. Supongamos que $A \cap B$ es conexa. Sea $x \in A \cap B$. Como x es un punto orilla de X, x no es un punto de corte de X (Proposición 2.5), entonces $X \setminus \{x\}$ es conexo. Así, del Teorema 1.8, se sigue que $X \setminus \{x\}$ es arcoconexo.

Sean $a \in A \setminus \{x\}$ y $b \in B \setminus \{x\}$. Entonces existe un arco ab de a a b contenido en $X \setminus \{x\}$. Sea $y \in ab$. De igual manera, existe α un arco de a a b que no contiene a y y contiene a x. Esto implica que $ab \cup \alpha$ es un subcontinuo de X y contiene una curva cerrada simple S. Además $S \neq X$, pues estamos suponiendo que X es unicoherente. Así, S es un subcontinuo propio de X y tiene más de dos puntos orilla. Lo cual, no puede ser. Por lo tanto, $A \cap B$ no es un subconjunto conexo de X. Lo que implica, que X no es unicoherente.

Tenemos entonces que X es un continuo 2-equivalente, no unicoherente y contiene arcos. Así, que del Teorema 4.27, X es una curva cerrada simple.

Por lo tanto, X es indescomponible o una curva cerrada simple. ■

Observemos que el continuo Knaster es un ejemplo de un continuo indescomponible que cumple que todo subcontinuo propio sólo tiene dos puntos orilla.

Corolario 4.30 *Si X es un continuo descomponible, entonces X es una curva cerrada simple si y sólo si todo punto de X es orilla y para todo subcontinuo propio B de X se tiene que B tiene sólo dos puntos orilla.*

4.4. Conjuntos Orilla

L. Montejano e I. Puga, en [18], probaron que en un dendroide suave X la unión finita de puntos orilla es un conjunto orilla de X. Posteriormente, A. Illanes, en [5], mostró que en un dendroide X la unión finita de continuos orilla ajenos dos a dos es conjunto orilla.

Así, en esta sección mostraremos que en un continuo únicamente irreducible, la unión de puntos orilla es un conjunto orilla.

Teorema 4.31 *Sea X un continuo únicamente irreducible. Entonces la unión de puntos de irreducibilidad de X es un conjunto orilla de X.*

Demostración. Sean p y q los únicos puntos de irreducibilidad de X. Mostraremos que $\{p, q\}$ es un conjunto orilla de X.

Observemos que X es un continuo descomponible, de lo contrario, X tendría más de dos puntos de irreducibilidad. Contradiciendo el hecho de que X es únicamente irreducible.

Sean P y Q dos subcontinuos propios de X, tales que $p \in P$, $q \in Q$ y $X = P \cup Q$.

De [9, Teorema 7. pág. 194], se sigue que $\overline{X \backslash P}$ es un continuo irreducible entre q y cada punto de la frontera de P y, en este caso, $\overline{X \backslash P} = Q$. De igual manera, se tiene que $\overline{X \backslash Q} = P$ es un continuo irreducible entre p y cada punto de la frontera de Q. Sea $x \in Fr\,(P) \cap Fr\,(Q)$ (existe pues $Fr\,(P) \cap Fr\,(Q) \neq \emptyset$). Como x es un punto de irreducibilidad de P y de Q, se sigue del Teorema 4.3, que p es un punto orilla de P y de Q.

Sea $\varepsilon > 0$. Como p es un punto orilla de P para $\frac{\varepsilon}{4}$, existe un subcontinuo propio A de P tal que $p \notin A$, $x \in A$ y $H\,(A, P) < \frac{\varepsilon}{4}$. De igual manera, como q es un punto orilla de Q, existe un subcontinuo propio B de Q tal que $q \notin Q$, $x \in Q$ y $H\,(Q, B) < \frac{\varepsilon}{4}$. Sea $C = A \cup B$. Entonces C es un subcontinuo propio de X tal que $\{p, q\} \cap C = \emptyset$ y $H\,(C, X) < \varepsilon$. Por lo tanto, $\{p, q\}$ es un conjunto orilla de X. ■

Corolario 4.32 *Sea X un continuo únicamente irreducible. Entonces la unión de puntos orilla de X es un conjunto orilla de X.*

Demostración. Sean a y b los únicos puntos de irreducibilidad de X. Por la Proposición 4.14, se tiene que a y b son lo únicos puntos orilla de X. Así, del Teorema 4.31, se tiene que $\{a, b\}$ es un conjunto orilla de X. ■

Capítulo 5

Funciones preservadoras

En el mismo sentido que generalizamos los puntos orilla, centro y centro fuerte para cualquier continuo X, estudiamos los puntos de corte, orilla, centro y centro fuerte a través de funciones continuas y suprayectivas, como el Teorema 3.7 en [16].

Considerando las siguientes preguntas:

¿Será cierto que si $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva del continuo X al continuo Y y $p \in X$ es un punto de corte de X, entonces $f(p)$ es un punto de corte de Y?

Con respecto a esta pregunta, en este capítulo daremos algunas condiciones a la función f, para que se preserven los puntos de corte.

También podemos hacernos la misma pregunta, considerando los puntos centro, centro fuerte y orilla.

Lo relacionado a puntos de corte y centro aparece en la sección 5.1 y para puntos y conjuntos orilla en la sección 5.2.

5.1. Preservando puntos de corte y centro

Definición 5.1 *Una función continua y suprayectiva* $f : X \to Y$ *de un continuo* X *a un continuo* Y *es* monótona *si para cada* $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ *es un subconjunto conexo de* X.

Definición 5.2 *Una función continua y suprayectiva* $f : X \to Y$ *de un continuo* X *a un continuo* Y *es* abierta *si para cada subconjunto abierto* U *de* X, $f(U)$ *es un subconjunto abierto de* Y.

Para puntos de corte y centro, probamos lo siguiente:

Proposición 5.3 *Sean* X *y* Y *continuos,* $f : X \to Y$ *una función continua, suprayectiva, abierta y monótona y* p *un punto de corte de* X*. Entonces* $f(p)$ *es un punto de corte de* Y.

Demostración. Sea p un punto de corte de X. Así, $X \setminus \{p\} = H \cup K$, donde H y K son subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de X.

Sean $f(p) = q$ y $f^{-1}(q) = D$. Como f es continua y monótona, es claro que D es un subcontinuo de X.

Dado que la función es abierta y H y K son abiertos y no vacíos, $f(H)$ y $f(K)$ son subconjuntos abiertos y no vacíos de Y.

Sean $H' = f(H) \backslash f(D)$ y $K' = f(K) \backslash f(D)$. Por ser f una función abierta, $f(H) \nsubseteq f(D)$. Lo que implica que H' es no vacío. De igual manera, K' es no vacío.

Dado que $f(H)$ es un abierto de Y, se tiene que H' es un abierto de Y. Del mismo modo, K' es un abierto de Y. Veamos ahora que H' y K' son ajenos. Sean $z \in H'$ y $h_1 \in H \backslash D$ tales que $f(h_1) = z$. Luego, $f^{-1}(z)$ es conexo y $f^{-1}(z) \cap H \neq \emptyset$ y dado que $f^{-1}(z) \cap D = \emptyset$, $f^{-1}(z) \subset H$, de donde $z \notin K'$ y $H' \cap K'$ son ajenos.

Afirmamos que $Y \backslash \{q\} = H' \cup K'$. Es claro que $H' \cup K' \subset Y \backslash \{q\}$. Sea $z \in Y \backslash \{q\}$. Entonces existe $x \in X \backslash D$ tal que $f(x) = z$, así $x \in H \backslash D$ o $x \in K \backslash D$ lo que implica que $z \in H'$ o $z \in K'$.

Por lo tanto, q es un punto de corte de Y. $\blacksquare$

Los siguientes ejemplos ilustran que es necesario pedir que la función f sea abierta y monótona, para que los puntos de corte se preserven bajo funciones abiertas y monótonas.

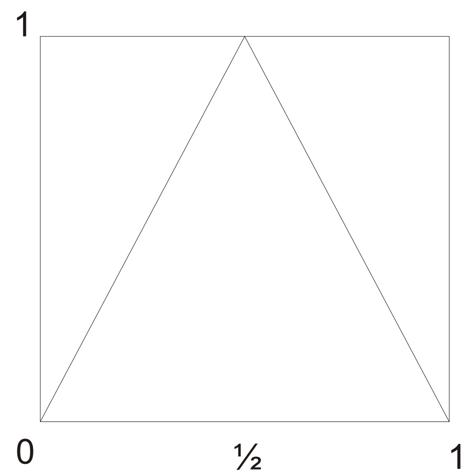


Figura 5.1: Función abierta y no es monótona

Ejemplo 5.4 *El ejemplo de la Figura 5.1, muestra una función abierta que no es monótona, el punto* $\frac{1}{2}$ *es un punto de corte del intervalo y su imagen, que es el 1, no es un punto de corte del intervalo.*

Ejemplo 5.5 *El ejemplo de la Figura 5.2, muestra una función que es monótona y no abierta, donde el punto* $\frac{1}{2}$ *es un punto de corte del intervalo y su imagen, que es el 1, no es un punto de corte del intervalo.*

Lema 5.6 *Sean* X *y* Y *continuos. Si* X *es localmente conexo,* $f : X \to Y$ *una función continua, suprayectiva, abierta y monótona y* p *un centro de* X*, entonces* $f(p)$ *es un centro de* Y*.*

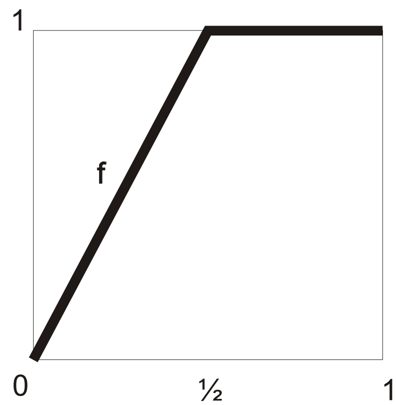


Figura 5.2: Función monótona y no abierta

Demostración. Por ser X localmente conexo y f una función continua y suprayectiva se tiene que Y es localmente conexo.

Luego, como p es un centro de X y X es localmente conexo, se sigue del Teorema 2.8, que p es un punto de corte de X.

Así, de la Proposición 5.3, $f(p)$ es un punto de corte de Y y, aplicando de nuevo el Teorema 2.8, concluimos que $f(p)$ es un centro de Y. ■

Corolario 5.7 *Sean X y Y continuos. Si X es localmente conexo, $f : X \to Y$ una función continua, suprayectiva, abierta y monótona y p un centro fuerte de X, entonces $f(p)$ es un centro fuerte de Y.*

Demostración. Se sigue del Lema 5.6 y del Teorema 2.8, ya que todo punto que es un centro fuerte de X es un centro de X. ■

Teorema 5.8 *Sea X un continuo hereditariamente arcoconexo y semilocalmente conexo en un punto p. Si $f : X \to Y$ es una función continua, suprayectiva, abierta y monótona y p es un centro de X, entonces $f(p)$* no es un punto orilla de Y.

Demostración. Sea p un centro de X. Entonces de la Proposición 2.18, p es un punto de corte. Así, de la Proposición 5.3, $f(p)$ es un punto de corte de Y y, en consecuencia, $f(p)$ no es un punto orilla de Y (Proposición 2.5). ■

5.2. Preservando puntos y conjuntos orilla

Considerando puntos y conjuntos orilla, obtuvimos los siguientes resultados:

Sean X y Y continuos no degenerados, $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva y p un punto orilla de X. Si $f^{-1}(f(p))$ es un conjunto orilla de X, entonces $f(p)$ es un punto orilla de Y. Sean $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva y p un punto orilla de X. Si $f^{-1}(f(p)) = \{p\}$, entonces $f(p)$ es un punto orilla de Y. Sean X un continuo localmente conexo, z un centro fuerte de X, $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva y

p un punto orilla de X. Si $f^{-1}(f(p)) \subset Q_z(p)$, entonces $f(p)$ es un punto orilla de Y.

Proposición 5.9 *Sean X y Y continuos no degenerados, $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva y p un punto orilla de X. Si $f^{-1}(f(p))$ es un conjunto orilla de X, entonces $f(p)$ es un punto orilla de Y.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Dado que f es uniformemente continua (recordemos que las funciones continuas en compactos son uniformemente continuas) para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $d(x,y) < \delta$, entonces $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Como $f^{-1}(f(p))$ es un conjunto orilla, existe un subcontinuo A de X, tal que $A \cap f^{-1}(f(p)) = \emptyset$ y $H(A,X) < \frac{\delta}{10}$.

De la continuidad de f y dado que A es un continuo, $f(A)$ es un continuo de Y. Por tanto, como $A \cap f^{-1}(f(p)) = \emptyset$ se tiene que $f(p) \notin f(A)$.

Veamos ahora que $H(f(A), Y) < \varepsilon$. Como $f(A) \subset Y$ basta mostrar que $Y \subset N(\varepsilon, f(A))$ (Lema 1.16). Sean $z \in Y$ y $x_z \in X$ tales que $f(x_z) = z$ (la función f es suprayectiva). Entonces existe $a_z \in A$ tal que $d(x_z, a_z) < \frac{\delta}{10}$. Luego, de la continuidad uniforme, $d(f(a_z), f(x_z)) = d(f(a_z), z) < \varepsilon$ y, dado que $a_z \in A$, concluimos que $Y \subset N(\varepsilon, f(A))$. De lo anterior tenemos que, $f(A) \in C(Y)$, $f(p) \notin f(A)$ y $H(f(A), Y) < \varepsilon$. Así, $f(p)$ es un punto orilla de Y. ■

Corolario 5.10 *Sean X y Y continuos, $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva y p un punto orilla de X. Si $f^{-1}(f(p)) = \{p\}$, entonces $f(p)$ es un punto orilla de Y.*

Proposición 5.11 *Sean X una dendrita no degenerada, Y un subcontinuo no degenerado, $f : X \to Y$ una función continua, suprayectiva, abierta y monótona y p un punto orilla de X. Entonces $f^{-1}(f(p))$ es un conjunto orilla de X.*

Demostración. Consideremos $E = \{x \in X : x$ es un punto extremo de $X\}$ y $D = f^{-1}(f(p))$. Probaremos que $D \subset E$.

Supongamos que existe $d \in D$ tal que d no es un punto extremo de X. Del Teorema 3.26, se sigue que d es un punto de corte de X.

Entonces $D \setminus \{d\} = H \cup K$ donde H y K son subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de X.

Por ser d un punto de corte de X, se sigue de la Proposición 5.3, que $f(d)$ es un punto de corte de Y.

Entonces $Y \setminus \{f(d)\} = H' \cup K'$, donde H' y K' son subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de Y y, se sigue de la demostración del Teorema 5.3, que $H' = f(H) \setminus f(D)$ y $K' = f(K) \setminus f(D)$.

Sea U un abierto de X tal que $p \in U \subset H$. Entonces $f(U) \subset f(H)$, en consecuencia, $f(U) \cap f(K) \subset f(H) \cap f(K) = \{f(p)\}$. Pero todo subconjunto abierto V de X tal que $f(d) \in V$, debe cumplir que $(V \setminus \{f(d)\}) \cap H' \neq \emptyset$ y $(V \setminus \{f(d)\}) \cap K' \neq \emptyset$. Por consiguiente, $f(U)$ no es un abierto de $f(p)$. Contradiciendo el hecho de que f es una función abierta.

Por lo tanto, D no tiene puntos de corte. Luego, como D es un continuo, por ser f una función continua y monótona, se tiene que D es un subcontinuo de X, contenido en el conjunto de puntos extremos de X. Así, D no tiene puntos de corte, por lo que, $D = \{p\}$. Como p es un punto orilla de X, concluimos que D es un conjunto orilla de X. ■

Antes de continuar necesitamos el siguiente lema, por lo que no escribimos su demostración y sólo lo enunciamos.

Lema 5.12 *[15, 6.27, pág. 99] Sean X un continuo y $E \subset X$ el conjunto de puntos extremos de X. Entonces para cualquier $B \subset E$ se tiene que $X \setminus B$ es conexo.*

Proposición 5.13 *Sean X un continuo no degenerado y localmente conexo, $f : X \to Y$ una función continua, suprayectiva y abierta y p un punto de*

X. Si $f^{-1}(f(p))$ está contenido en el conjunto de puntos extremos de X, se tiene que $f^{-1}(f(p))$ es un conjunto orilla de X.

Demostración. Sea E el conjunto de puntos extremos de X. Consideremos un punto p de X tal que $f^{-1}(f(p)) \subset E$. Sean $f^{-1}(f(p)) = D$ y $\varepsilon > 0$. Luego, del Lema 5.12, $X \backslash D$ es conexo. En consecuencia, $X \backslash D$ es arcoconexo (Teorema 1.8). De la compacidad de X, sean $U_1, U_2, ..., U_n$ abiertos de X tales que diám$(U_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$. Sean $w \in X \backslash D$ y $u_i \in U_i$ tales que $u_i \notin D$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, éstos existen porque la función f es abierta y, en consecuencia, D tiene interior vacío.

Como $X \backslash D$ es arcoconexo, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, sea α_i un arco de u_i a w en $X \backslash D$.

Sea $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$. Claramente, A es un subcontinuo de X y $A \cap D = \emptyset$.

Veamos ahora que $H(A, X) < \varepsilon$. Sólo necesitamos probar que $X \subset N(\varepsilon, A)$ (Lema 1.16). Sea $x \in X$. Entonces existen $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $y_i \in U_i$ tales que $d(x, y_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, para este abierto U_i, existe $u_i \in (U_i \cap A) \backslash D$ tal que $d(y_i, u_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, $d(x, u_i) < \varepsilon$ y $u_i \in A$. Con esto concluimos que $X \subset N(\varepsilon, A)$ y $H(X, A) < \varepsilon$. Por lo tanto, D es un conjunto orilla de X. ■

Teorema 5.14 *Sean X un continuo no degenerado y localmente conexo, $f : X \to Y$ una función continua, suprayectiva y abierta y p un punto de X. Si*

$f^{-1}(f(p))$ está contenido en el conjunto de puntos extremos de X, se tiene que $f(p)$ es un conjunto orilla de Y.

Demostración. Sean E el conjunto de puntos extremos de X y p un punto de X tales que $f^{-1}(f(p)) \subset E$. Luego, de la Proposición 5.13, tenemos que $f^{-1}(f(p))$ es un conjunto orilla de X y, en consecuencia, p es un punto orilla de X. Así, de la Proposición 5.9, concluimos que $f(p)$ es un punto orilla de Y. ■

Proposición 5.15 *Sean X un continuo localmente conexo, z un centro fuerte de X y p un punto orilla de X. Entonces $X \backslash Q_z(p)$ es arcoconexo e $Int(Q_z(p))$ es vacío.*

Demostración. Probemos que $X \backslash Q_z(p)$ es arcoconexo. Sean $y_1, y_2 \in X \backslash Q_z(p)$. Entonces $p \notin y_1z$ para ningún arco y_1z y $p \notin y_2z$ para ningún arco y_2z. Afirmamos que $\alpha = y_1z \cup y_2z$, está contenido en $X \backslash Q_z(p)$.

Sea $y_3 \in \alpha$. Entonces $y_3 \in y_1z$ o $y_3 \in zy_2$ pero, en cualquiera de los dos casos $p \notin y_3z$. Por lo que, α está contenido en $X \backslash Q_z(p)$ y, entonces, $X \backslash Q_z(p)$ es arcoconexo.

Veamos ahora que $Int(Q_z(p))$ es vacío. Supongamos que $Int(Q_z(p))$ es no vacío. Sea W un abierto en X tal que $W \subset Q_z(p)$. Como X es un continuo localmente conexo y z es un centro fuerte de X, se tiene que z es un punto de corte de X (Teorema 2.8). En consecuencia, $X \setminus \{z\}$ no es un conjunto conexo de X. Sea U un abierto de X tal que $U \subset X \setminus \{z\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $U \cap W = \emptyset$. Afirmamos, que todo arco de U a W contiene a p. Sea uw un arco de u a w, con $u \in U$ y $v \in V$. Entonces $z \in uw$ y, como $w \in Q_z(p)$, se tiene que $p \in uw$. Así, p es un centro fuerte de X. Por consiguiente, del Teorema 2.8, p no es un punto orilla de X. Contradiciendo el hecho de que p es un punto orilla de X. Por lo tanto, $Int(Q_z(p))$ es vacío.

■

Proposición 5.16 *Sean X un continuo localmente conexo, $z \in X$ un centro fuerte de X y $p \in X$ un punto orilla de X. Entonces $Q_z(p)$ es un conjunto orilla de X.*

Demostración. De la Proposición 5.15, se tiene que $X \setminus Q_z(p)$ es arco-conexo y que $Int(Q_z(p))$ es vacío. Entonces, del Lema 2.12, concluimos que $Q_z(p)$ es conjunto orilla de X. ■

Corolario 5.17 *Sean X un continuo localmente conexo, $f : X \to Y$ una función continua, abierta y monótona, $z \in X$ un centro fuerte de X y $p \in X$ un punto orilla de X. Si $f^{-1}(f(p)) \subset Q_z(p)$, entonces $f(p)$ es un punto* *orilla de Y.*

Demostración. Por la Proposición 5.16, $Q_z(p)$ es un conjunto orilla de X. Por hipótesis, $f^{-1}(f(p)) \subset Q_z(p)$, por lo que, $f^{-1}(f(p))$ es un conjunto orilla. Por tanto, de la Proposición 5.9, $f(p)$ es un punto orilla de Y. $\blacksquare$

Capítulo 6

Preguntas

En esta sección, escribiremos algunos de los resultados que probamos en el desarrollo de esta investigación y escribiremos algunas preguntas que aún no se han contestado.

En el capítulo 2, probamos que si X es un continuo arcoconexo todo punto que no es un centro de X es un punto orilla de X (Teorema 2.13). Aún, queda la pregunta abierta para continuos aposindéticos.

Pregunta 1. ¿Si X es un continuo aposindético y p un punto que no es un centro de X, entonces p es un punto orilla de X?

Pregunta 2. ¿Si X es un continuo aposindético sin puntos de corte, entonces todos sus puntos son orilla?

También demostramos:

Si X es un continuo con puntos de corte, entonces X admite centros (Teorema 2.6).

Con respecto a esto tenemos la siguiente pregunta:

Pregunta 3. ¿Cuáles continuos X sin puntos de corte, admiten centros?

También probamos que todo continuo tiene al menos dos puntos orilla (Teorema 4.2) y, para los continuos únicamente irreducibles la unión finita de sus puntos orilla es un conjunto orilla (Teorema 4.31).

Lo anterior será cierto para cualquier continuo X, es decir:

Pregunta 4. ¿Si p_i es un punto orilla de un continuo X para cada $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, entonces $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ es un conjunto orilla de X?

Si consideramos Z-conjuntos (Sea X un continuo y $A \subset X$. Entonces A es un Z-conjunto de X si para toda $\varepsilon > 0$ existe una función continua $h_\varepsilon : X \to X \backslash A$ tal que $d(h_\varepsilon(x), x) < \varepsilon$). Tenemos las siguientes preguntas:

Pregunta 5. ¿Cuándo un punto orilla p de un continuo X será un Z-conjunto de X?

Pregunta 6. ¿Cuándo un conjunto orilla A de un continuo X será un Z-conjunto de X?

Bibliografía

[1] R. H. Bing, Some characterizations of arcs and simple closed curves, Amer. J. Math. 70 (1948), 497–506.

[2] J. J. Charatonik, Problems and remarks on contractibility of curves, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra IV, Proc. Fourth Prague Topological Symposium, (1976); Part B Contributed papers Society of Czechoslovak Mathematicians and Physicists Prague, (1977), 72-76.

[3] J. J. Charatonik, L. T. Januszkiewicz, T. Maćkowiak, An uncountable collection of nonplanable smooth dendroids. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 25 (1977), no. 2, 147–149.

[4] J. Heath, V. C. Nall, Centers of a dendroid, Fund. Math. 189 (2006), 173-183.

[5] A. Illanes, Finite unions of shore sets, Rendiconti Del Circolo Matematico Di Palermo 50 (2001), 483-498.

[6] C. Islas, Continuos 2-equivalentes, Tesis de Doctorado, UNAM, (2008).

[7] J. Kransinkiewicz, P. Minc, Approximations of continua from within, Bull. Aca. Pol. Sci. 25 (1977), 283-289.

[8] K. Kuratowski. Topology Vol. 1, Acad. Press, New York, N. Y., (1968).

[9] K. Kuratowski. Topology Vol. 2, Acad. Press, New York, N. Y., (1968).

[10] S. Macías, Topics on Continua, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[11] H. C. Miller, On unicoherent continua, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950) 179-194.

[12] P. Minc, Bottlenecks in dendroids, Topology Appl. 129 (2004), 187-209.

[13] L. Montejano, I. Puga, Shore points in dendroids and canonical pointed hyperspaces, Topology Appl. 46 (1992), 41-54.

[14] R. L. Moore, Concerning simple continuous curves, Trans. Amer. Math. Soc. 21 (1920), 333-347.

[15] S. B. Nadler Jr., Continuum Theory, An introduction, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158, Marcel Deker, Inc., New York, 1992.

[16] V. C. Nall, Centers and shore points of a dendroid, Topology Appl. 154 (2007), 2167-2172.

[17] V. C. Nall, Centers and shore points in λ-dendroids, Topology Proc. 31 (2007), No. 1, 227-242.

[18] Neumann-Lara, I. Puga-Espinosa, Shore points and dendroids, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), 939-942.

[19] V. Neumann-Lara, I. Puga-Espinosa, Shore points and noncut points in dendroids, Topology Appl., 92 (1999), 183-190.

[20] G. T. Whyburn. Analytic Topology, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 28 (1942).