

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES



ESTABILIDAD HIDRODINÁMICA EN UNA CAVIDAD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

PRESENTA:

ORTIZ PÉREZ ALEJANDRO SEBASTIÁN

DIRECTOR DE TESIS:

DR. DÁVALOS OROZCO LUIS ANTONIO

MÉXICO, D. F.

ABRIL, 2012



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Estabilidad hidrodinámica en una cavidad

por

Ortiz Pérez Alejandro Sebastián

Tesis presentada para obtener el grado de

Doctor en Ciencia e Ingeniería de Materiales

en el

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

México, D. F.. ABRIL, 2012

Estabilidad hidrodinámica en una cavidad

TESIS DOCTORAL

DOCTORADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

Alumno Alejandro Sebastián

Ortiz Pérez

Comité Tutorial

Dr. Luis Antonio

Dávalos Orozco

Dr. Gerardo Ruiz Chavarría

Dr. Luis Felipe Del Castillo Dávila

DEDICATORIA

Mediante él he sido reconciliado con mi Padre.

Jesucristo

RECONOCIMIENTOS

A mis padres: Isabel Ortiz Pérez y Martha P'erez Aguilar. Agradezco al Dr. Luis Antonio Dávalos Orozco y a mi comité tutorial integrado por el Dr. Luis Felipe Del Castillo y el Dr. Gerardo Ruiz Chavarría por dirigir y estar pendientes en cada avance del proyecto. Al Posgrado en Ciencia e Ingeniería de Materiales y todas las personas que ahí trabajan: Isabel, Esther, Lilia y en su momento también a Griselda. A la Familia Pablo Trinidad, que me dieron un hogar a mi llegada a la ciudad, en especial a la Sra. Reyna Trinidad, al Sr. Maximino Pablo, Isabel Pablo y a la Sra. Carmen Nicolás. Alicia López Roldán, Heather Hahn, Noelle Lee, familia Mikes-Ortega y a todos los amigos de la Fuente comunidad Coyoacán. Amigos comprometidos con los proyectos Corazón Valiente y Apoyo a Tareas: Paulina Alba, Guadalupe Pérez Ayala, Berenice Cortés, Ismael Garduño, Jesús Florín, Hania Jiménez y Teresa Parra. Amigos del instituto de Investigaciones en Materiales, que me acompañaron en este viaje: Ávalos Tatiana, Arellano Alejandro, Oscar Zarco, Arturo Rodríguez, Garduño Ismael, Carlos Hernández, Magali Ugalde, Ernesto Mancilla, Cristina Romero, Zahel Mata, Eva Juárez, Ulises Miranda, Ulises Morales Muñoz, Ana Laura Pérez Martínez, López Valverde Sigifredo, Jose luis Benítez Benítez, Ildebrando Pérez Reyes, Rodrigo Vélez Cordero, Vanessa Martínez Cornejo, Patricia Hernández Nápoles, Rosario Gutiérrez Rosas, Patricia Gutiérrez Rosas, Javier García, Bárbara Betancourt, Diego Sámano, David Martínez, Katia Castañeda, César Fernández, Bety de la Mora, Aduljay Remolina, Angel Rosario y Olga Ayala. A mis amigos del Instituto Tecnológico de Tapachula: García Córdova Angel, Guillén García José David, Vidal López Beatriz Guadalupe y Miguel Antonio Muñoz Orellana. Al Instituto para la Planeación del Desarrollo, A. C., (IPD) y en especial al Dr. Roberto Guadarrama Sistos y a la Sra. Gloria Ponce por todo el apoyo que he recibido en el IPD. A mi gran amigo Esteban Ortiz y a su familia.

CURRICULUM VITAE

Agosto 11, 1983	Nacido en Unión Juárez, Chiapas, México
2001-2005	Licenciatura, Instituto Tecnológico de Tapachula
2005-2007	Maestría, Posgrado en Ciencia e Ingeniería de Materiales, Universidad Autónoma de México.
2007-PRESENTE	Estudiante de Doctorado, Posgrado en Ciencia e Ingeniería de Materiales, Universidad Nacional Autónoma de México.
AGO-2011-PRESENTE	Desarrollo Tecnológico Instituto para la Planeación del Desarrollo A. C., IPD

PUBLICACIONES

A. S. Ortiz-Pérez and L. A. Dávalos-Orozco. Convection in a horizontal fluid layer under an inclined temperature gradient. *Phys. Fluids*, 23:084107–1–084107–11, 2011.

CAMPO DE ESTUDIO

ÁREA PRINCIPAL: Estabilidad hidrodinámica

RESUMEN

Estabilidad hidrodinámica en una cavidad

por

Ortiz Pérez Alejandro Sebastián

Se estudia la estabilidad hidrodinámica de una capa poco profunda de un fluido newtoniano, cuyas paredes son muy buenas conductoras de calor. La capa de fluido es calentada por abajo y desde un extremo lateral. Al resolver el sistema de ecuaciones que rigen el comportamiento de la estabilidad del sistema se notó que la perturbación puede ocurrir en varios modos que pueden estar tanto alineadas al flujo básico (longitudinales) o perpendiculares al flujo básico (transversales) así como estar comprendida entre los modos longitudinal y transversal (modo oblicuo). El modo oblicuo es más inestable en algunos casos que los otros modos. Existe competencia entre los modos longitudinales, transversales y el modo oblicuo; éste último nadie había pensado que puede jugar un papel importante en la estabilidad del sistema y una mejora un método numérico de Galérkin permitió encontrarlo. Al parecer la competencia de estos modos está determinada por un parámetro que caracteriza cada fluido en particular: el número de Prandtl Pr . Se demuestra que la búsqueda de la inestabilidad, queda restringida al primer cuadrante de la proyección del vector de onda de la perturbación. Existen modos que no son los primeros inestables para números de Prandtl pequeños, sin embargo, ya aparecen como inestabilidades para números de Prandtl grandes. Las configuraciones de flujo caracterizan a cada modo en particular, algunos de los cuales poseen propiedades de simetría. La inestabilidad es influida por la presencia o no, de una región estable en la parte central de la capa, originado por la configuración del perfil básico de temperatura. El perfil básico de temperatura explica la aparición de modos que no se habían considerado anteriormente y que son de suma importancia.

Índice general

1. Aspectos preliminares	13
1.1. Introducción	16
2. Marco teórico	20
2.1. Definición de estabilidad	23
2.2. Modos normales	26
3. Formulación	30
3.1. Estado básico inicial	30
3.2. Estado perturbado	33
4. Análisis numérico	37
4.1. Método numérico	37
4.2. Funciones propias	38
4.3. Análisis de simetría	40
5. Resultados numéricos	46
6. Discusión	68
6.1. Relación con simulaciones numéricas y experimentos	75
7. Conclusiones	78

Índice de figuras

1-1. Circulación planetaria según el modelo de Hadley	14
1-2. Técnica de cristalización de Bridgman	15
2-1. Diagrama de estabilidad en el plano P_1 - P_2	26
2-2. Flujo básico	27
2-3. Fluctuacion de la perturbación alrededor del modo normal	29
3-1. Bosquejo del problema	31
3-2. Bosquejo del problema	35
3-3. Campo de velocidad básico	35
3-4. Perfil de temperatura	36
5-1. Gráficas de R_{VC} , α_C y σ_C contra R_H para $Pr = 0 \cdot 026$	48
5-2. Gráficas de R_{VC} , α_C y σ_C contra R_H para $Pr = 0 \cdot 1$	50
5-3. Gráficas de R_{VC} , α_C y σ_C contra R_H para $Pr=0.2$	52
5-4. Curvas de R_{VC} vs R_H únicamente para Ts y $Lo1$	53
5-5. Gráficas de R_{VC} vs R_H para $Pr=0.45$ y 0.4886	54
5-6. Gráficas of R_{VC} , α_C , σ_C y ϕ_C vs R_H para $Pr=0.5$	61
5-7. Gráficas of R_{VC} , α_C , σ_C y ϕ_C vs R_H para $Pr = 1$	62
5-8. Gráficas of R_{VC} , α_C , σ_C y ϕ_C vs R_H para $Pr = 2$	63
5-9. Gráficas de R_{VC} , α_C y σ_C vs R_H para $Pr = 10$	64
5-10. Campo de velocidades, líneas de corriente e isotermas para $Pr = 10$	65
5-11. Gráficas de R_{VC} , α_C y σ_C vs R_H para $Pr = 100$	66
5-12. Gráficas de R_{VC} , α_C y σ_C vs R_H para $Pr = 500$	67

6-1. Regiones estables y configuraciones de flujo para $Pr=1$	70
6-2. Regiones estables y configuraciones de flujo para $Pr=1$ (cont.)	71
6-3. Líneas de corriente e isothermas para el modo Ls2 en $Pr=2$	72
6-4. Líneas de corriente para Ls1 y $Pr=500$	73

Índice de cuadros

1-1. Nomenclatura	19
5-1. Modos transversales estacionarios para $R_{VC} = 0$ cuando $Pr = 0 \cdot 026, 0 \cdot 1, 0 \cdot 2$.	53
5-2. Modos longitudinales estacionarios para $R_{VC} = 0$ cuando $Pr = 0 \cdot 026, 0 \cdot 1, 0 \cdot 2$	53

Capítulo 1

Aspectos preliminares

Una importante motivación para el estudio de la convección inducida por un gradiente de temperatura inclinado se debe a su relevancia en una gran variedad de situaciones que incluyen flujos geofísicos (Hart [1]) y en aplicaciones industriales relacionados con el crecimiento de cristales a partir de metales en estado líquido, véase figura 1-2. Entre los flujos geofísicos pueden mencionarse los movimientos de fluido que ocurren en el mar, en la atmósfera (figura 1-1) y en el manto terrestre. Aunque existen muchos estudios que incluyen solamente la convección horizontal (componente horizontal del gradiente de temperatura), generalmente los gradientes de temperatura no serán solamente horizontales o verticales, sino combinación de ambas, por lo tanto es conveniente plantear un caso más general que tienda a aproximarse a la situación real. La configuración de capas delgadas de fluido tiene especial interés. En el caso de los océanos, se usa la aproximación de que se enfrían y calientan a través de capas superficiales delgadas (Hughes y Griffiths [2]) que están muy cercanas a tener la configuración de capas horizontales (es decir, tienen la misma altitud geopotencial).

La geometría más simple, empleada por las tecnologías de crecimiento de cristales (Lappa [3]), tiene la configuración horizontal de la configuración del método de Bridgman (Lappa [4]) donde el flujo convectivo se induce por la componente horizontal del gradiente de temperatura. En un diseño industrial, el crisol que contiene el metal en estado líquido, es retirado horizontalmente desde el horno de fundición, lo anterior resulta en una diferencia de temperatura horizontal. No podemos descartar el hecho de la presencia de una componente vertical de temperatura.

En la solidificación de semiconductores, cuando la convección en la fase líquida es oscilatoria,

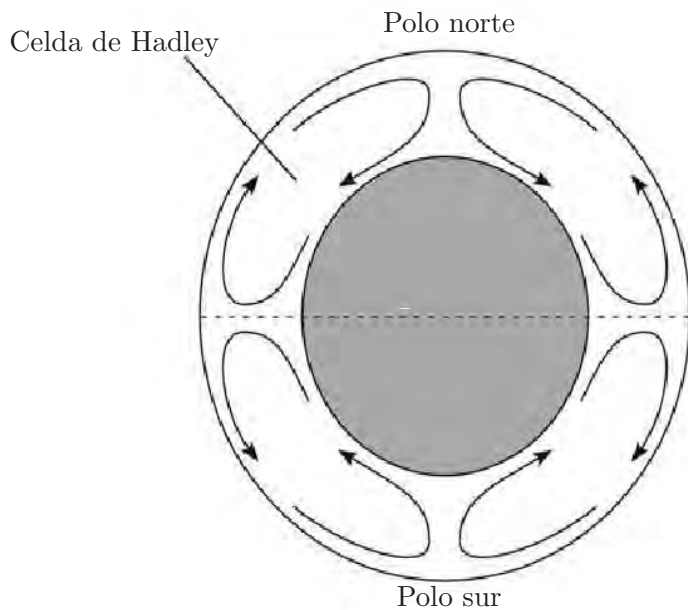


Figura 1-1 – El modelo de la celda de Haydley se usa para explicar la circulación en atmósferas planetarias

las oscilaciones asociadas en el flujo de calor desde la fase líquida hasta el cristal producen oscilaciones en la tasa local de crecimiento, con períodos alternados de crecimiento y de fundición (si, parte se vuelve nuevamente al estado líquido) del cristal en situaciones severas. Los elementos o dopantes que dan al cristal la forma deseada, generalmente son rechazados durante la cristalización, de manera que hay una larga concentración de dopantes en la fase líquida que es adyacente a la interfase del cristal que está en crecimiento. Cuando la tasa local de crecimiento del cristal disminuye, los dopantes se alejan de la interfase, lo que conduce a una concentración local menor en el cristal (las oscilaciones espaciales de la concentración de dopantes son lo que constituyen las estriaciones). Estos efectos son altamente no deseados y afectan seriamente el desempeño de estos materiales. Por lo tanto, se tiene que las oscilaciones de temperatura durante el crecimiento de cristales son la fuente de impurezas en la distribución inhomogénea de solutos en el cristal sólido producido, como lo señalan Jakeman y Hurle [5] y Lappa [4]

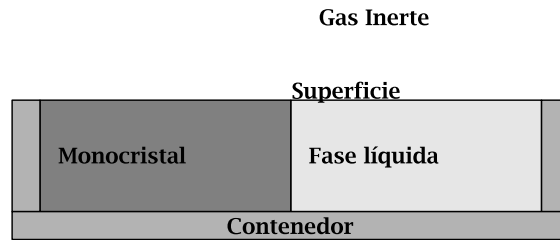


Figura 1-2 – Bosquejo de la técnica de cristalización de Bridgman en su configuración horizontal

Se estudia la estabilidad de una capa horizontal de fluido muy extensa a lo largo de las coordenadas horizontales. La capa es calentada por abajo y está en presencia de un gradiente de temperatura horizontal. El fluido está limitado verticalmente por paredes horizontales rígidas muy buenas conductoras de calor. Al principio se tiene un estado básico dinámico, debido a que un flujo principal es inducido inmediatamente después que el gradiente de temperatura horizontal es impuesto: el fluido asciende en la pared vertical caliente y desciende en la pared vertical fría, manteniendo así una gran celda de movimiento del fluido. Las paredes verticales se encuentran idealmente en menos infinito y más infinito. Esto es, muy alejadas de la sección del flujo que se estudia. A esta circulación del fluido se le conoce como circulación de Hadley. Se buscará hasta qué límite de gradientes de temperatura se mantendrá ese estado estable. En la estabilidad de los sistemas físicos sujetos a pequeñas perturbaciones, se tiene especial interés en determinar el umbral conocido como estabilidad neutral o marginal, que determinarán los límites que definen la región estable del estado básico y la región donde se espera que el estado inicial cambie a una nueva configuración. La nueva configuración consistirá en un estado de convección natural impulsado por fuerzas de flotación, que puede ya sea ser promovida por una diferencia de temperatura vertical o por un gradiente de temperatura horizontal, cada una de las cuales es capaz de iniciar la convección por sí sola. Este estudio puede reducirse, por un

lado, al caso de convección natural inducida por el calentamiento lateral, o por otro, al caso de convección natural cuando la capa de fluido es simplemente calentada por abajo. Es decir, se analiza el caso general de convección que incluye la interacción de ambos procesos convectivos.

Trabajos anteriores mostraron que la perturbación puede estar alineada al flujo básico (modo longitudinal) o perpendiculares al flujo básico (modo transversal). Pero hasta el momento nadie se había dado a la tarea de buscar modos comprendidos entre los modos longitudinal y transversal (modo oblicuo). Hart [1], trata solo el caso particular con calentamiento lateral. Después sus resultados fueron corregidos por Kuo et al.[6]. Weber [7] incluyó el calentamiento por abajo, pero su análisis estaba limitado a ciertos números de Prandtl. Nield [8] reformuló el problema evitando las limitaciones de Weber [7], de manera que se pudo hacer el análisis con números de Prandtl mayores. Sin embargo, el análisis de Nield [8] no incluye todo el rango de gradientes de temperatura de interés. Además, algunos de sus resultados numéricos no son correctos. Kaloni y Qiao [9] mostraron que para números de Prandtl mayores o iguales a 10, los modos longitudinales no son siempre estabilizados debido al gradiente horizontal de temperatura. Esto mostró una de las debilidades del método numérico de Nield [8]. Kaloni y Qiao [9] usaron un método de energía [10], que indica una condición suficiente pero no necesaria de estabilidad. Por ello, se decide hacer un análisis numérico más completo y preciso de la estabilidad lineal para cualquier orientación de propagación de la perturbación.

1.1. Introducción

Durante muchos años se ha investigado el problema de convección natural, presente en muchos fenómenos donde existen diferencias de temperatura sujetas a la acción de la fuerza de gravedad. Los gradientes de temperaturas son los responsables de la circulación del aire en la atmósfera y de la generación de las grandes corrientes oceánicas, lo cual es determinante para el clima resultante en la tierra. Desde el punto de vista de algunas las aplicaciones, es necesario evitar estos movimientos convectivos debido a las diferencias de temperatura. Este es el caso para los procesos de crecimiento de cristales y solidificación de metales líquidos(Szekely [11]), ya que estos movimientos pueden producir inhomogeneidades y estrías en el material sólido producido. En la convección natural en una capa infinita de fluido calentada por abajo y entre

paredes rígidas conductoras, el número de Rayleigh crítico (el cual representa la relación de las fuerzas de flotación respecto de las fuerzas viscosas) tiene un valor de 1708 (ver Chandrasekhar [12]). Si el gradiente de temperatura es vertical y adverso, ésta es la magnitud mínima necesaria para desestabilizar la capa de fluido estratificada inestablemente. En particular en esta situación, el flujo inicial es siempre estacionario. Otros fenómenos convectivos ocurren debido a la presencia de un gradiente de temperatura horizontal. En ese caso, se tiene una capa de fluido que es muy extensa a lo largo de sus coordenadas horizontales y es perpendicular a la fuerza de gravedad. La capa de fluido es calentada en uno de sus extremos laterales, originando con ello un gradiente horizontal de temperatura. De inmediato se genera un flujo cerrado después de haber impuesto el gradiente de temperatura horizontal. Esto se debe a que el fluido asciende en la pared vertical caliente y desciende en la pared vertical fría. De este flujo se origina una gran celda. Existe evidencia experimental de que los movimientos convectivos causados por gradientes horizontales de temperatura producen oscilaciones y que son la fuente de la distribución en forma de bandas de solutos en cristales, Hurle et al. [13]. Además, Hurle et al. [13] y Hart [1] estudiaron la estabilidad de este flujo (la circulación de Hadley) cuando la relación entre profundidad de la capa y su extensión horizontal es muy pequeña. Hart [1] obtuvo resultados para el número crítico del Rayleigh horizontal R_{HC} para un amplio rango de números de Prandtl Pr (razón entre la viscosidad cinemática y la difusividad térmica). Gill [14] investigó el caso particular para fluidos que tienen número de Prandtl muy pequeño (i.e. metales líquidos, por ejemplo para el mercurio $Pr=0.026$), mostrando que las oscilaciones existen, no como el primer modo, sino como el estado que se obtiene si se sobrepasan ligeramente los valores críticos de la curva de estabilidad marginal. Hart [15] mostró que en un rango para fluidos con número de Prandtl pequeño y paredes horizontales rígidas aislantes, la convección aparece primero como oscilatoria. Walton [16] estudia la estabilidad de un flujo debido a la influencia de un gradiente de temperatura horizontal originado por un parche caliente. Kuo et al. [6] hicieron importantes correcciones a los trabajos previos, especialmente al de Hart [1]. Análisis no lineales para rangos particulares del número de Prandtl, fueron hechos por Kuo y Korpela [17] para paredes aislantes y Wang y Korpela [18] para paredes muy buenas conductoras de calor. Laure [19] estudió el problema para fluidos con número de Prandtl pequeño para paredes rígidas horizontales aislantes, incluyendo el caso de una superficie libre para la

pared superior. Laure y Roux [20] presentan una síntesis de resultados obtenidos del análisis de la estabilidad lineal de la circulación de Hadley. Muestran los casos de ambas superficies horizontales rígidas y la superficie inferior rígida con la superficie superior libre. Para el caso de paredes rígidas incluyen los casos: paredes aislantes y conductoras. Sus resultados verifican los anteriores. Delgado-Buscalioni y Crespo del Arco [21] estudiaron analíticamente y numéricamente la convección en cavidades inclinadas debida a la diferencia de temperatura aplicada entre las paredes laterales. Stiller y Schöf [22] presentan resultados de la advección horizontal de calor en la inestabilidad térmica para una clase general de flujos que comprenden componentes de flujo forzadas e inducidas por temperatura así como un transporte neto de calor. Braunsfurth et al. [23], Juel et al. [24] y Hof et al. [25] realizaron experimentos y cálculos numéricos relacionados con galio líquido pero con relaciones de aspecto finitas. Otros experimentos fueron hechos con agua salina por Wang y Huang [26]. Hughes y Griffiths [2] revisaron este problema, incluyendo entre otras cosas, aplicaciones a oceanografía. Henry y BenHadid [27] estudiaron la estabilidad de cavidades con calentamiento lateral al variar la relación de aspecto y el número de Prandtl.

El efecto debido a un gradiente de temperatura inclinado fue primeramente investigado por Weber [28] quien supuso superficie libre y pequeños gradientes de temperatura horizontal. Más tarde Sweet et al. [29] investigaron la estabilidad para superficie libre extendiendo los resultados para gradientes de temperatura horizontal mayores. Ellos supusieron valores promedios de los perfiles de velocidad y de temperatura en lugar de los valores originales que dependen de la coordenada vertical (z). Han encontrado que la convección oscilatoria es posible, incrementando la relación de los gradientes de temperatura aplicados. Bhattacharyya y Nador [30], supusieron pequeño el gradiente de temperatura horizontal en su desarrollo asintótico, extendieron el problema para el caso de paredes rígidas conductoras. Weber [7] mejoró sus cálculos para superficie libre usando un método de Galérkin. También incluyó el caso de paredes rígidas conductoras. Encontró que el primer modo en aparecer en la inestabilidad, longitudinal o transversal respecto del flujo básico, depende del número de Prandtl. También muestra la presencia de un modo oscilatorio al incrementarse el gradiente de temperatura horizontal. Nield [8] fue el primero en mostrar desde una perspectiva más general este fenómeno para cuatro valores del número de Prandtl. Usando un método de Galérkin investigó todos los modos posibles de inestabilidad.

Cuadro 1-1 – Nomenclatura usada

Nomenclatura	
k, l	Proyecciones del vector de onda en direcciones x e y
D	Operador diferencial d/dz
u, w	Perturbaciones de velocidad en direcciones x y z
U	Perfil básico de velocidad en dirección x
d	Espesor de la capa de fluido
T	Variación básica de temperatura vertical
g	Aceleración de la gravedad
Pr	Número de Prandtl, ν/κ
ΔT	Diferencia de temperaturas vertical
R_V	Número de Rayleigh vertical, $g\alpha_T d^4 \Delta T / \nu \kappa$
R_H	Número de Rayleigh horizontal, $g\alpha_T d^3 \beta_H / \nu \kappa$
<i>Símbolos griegos</i>	
α_T	Coefficiente de expansión térmica
α	Magnitud del vector de onda
ϕ_C	Ángulo crítico
θ	Perturbación de temperatura
ν	Viscosidad cinemática
β_H	Gradiente de temperatura horizontal
σ	Frecuencia de oscilación
κ	Difusividad térmica

Sin embargo su análisis numérico presenta dificultades que lo limitan en sus cálculos numéricos y sólo considerar resultados hasta un número de Rayleigh horizontal igual a $R_H = 6000$. Kaloni y Qiao [9], mediante el método de energía, mostraron que las curvas de criticalidad de Nield [8] para números Prandtl mayores o iguales a $Pr = 10$ deben decrecer al incrementarse el número de Rayleigh horizontal hasta un valor en que el número de Rayleigh crítico vertical es $R_{VC} = 0$. De esta manera se ve la necesidad de estudiar el problema hasta números de Rayleigh horizontal lo suficientemente grandes tal que la convección puede iniciarse solamente por el calentamiento lateral y localizar el primer modo inestable en cualquier orientación de la perturbación.

Capítulo 2

Marco teórico

Las ecuaciones de conservación de masa 2-1, momento 2-2 y energía 2-3 para un fluido newtoniano, Currie [31], junto a las ecuaciones de estado 2-4 y de la energía interna 2-5, son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0 \quad (2-1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} + \rho f_j \quad (2-2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} \right) = -p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (2-3)$$

$$p = p(\rho, T) \quad (2-4)$$

$$e = e(\rho, T) \quad (2-5)$$

respectivamente. Suponemos que es válida la aproximación de Boussinesq 2-9 como ecuación de estado. Con estas consideraciones, la ecuación de continuidad se reduce a la ecuación para un fluido incompresible 2-6. Con esta condición en la ecuación de continuidad 2-1, la ecuación de momento 2-2 se simplifica a la ecuación 2-7. En la ecuación de balance de energía 2-3, los términos del incremento de la energía interna debido a la compresión $-p\partial u_k/\partial x_k$ y el término disipativo (los dos últimos términos en el miembro derecho), pueden ignorarse debido a la condición de fluido incompresible y también porque los pequeños gradientes de velocidad en el último término de la ecuación 2-3 hacen que tenga un orden de magnitud muy pequeño respecto

de los demás términos. Resumimos las expresiones como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2-6)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} + \rho f_j \quad (2-7)$$

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_k^2} \quad (2-8)$$

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha_T \Delta T] \quad \Delta T = T - T_0 \quad (2-9)$$

$$e = C_V T \quad (2-10)$$

Estas ecuaciones todavía son no lineales. Aquí es de interés conocer la estabilidad un estado básico ante perturbaciones y calcular su variación en el tiempo. Dentro de ese marco de la estabilidad hidrodinámica lineal se requiere conocer si esas perturbaciones crecen o decrecen en el tiempo.

Supongamos que se tiene una solución particular básica de las ecuaciones 2-6- 2-8, que satisface la conservación de masa, momento y energía. Es decir, que conocemos las tres componentes de velocidad, la presión y el campo de temperaturas como funciones de las coordenadas espaciales. Esta solución básica puede escribirse como:

$$\vec{U}(\vec{x}) \quad \bar{P}(\vec{x}) \quad \bar{T}(\vec{x}) \quad (2-11)$$

Esta solución no necesariamente permanece estable en todo el rango de parámetros del problema. Más específicamente, si el problema es de valores iniciales, es de interés saber la solución si se aproximará o no la solución a los valores del estado básico inicial 2-11 cuando $t \rightarrow \infty$. Esto no es una tarea fácil si las ecuaciones son no lineales. Por ello, como un paso previo al estudio de la no linealidad, se investiga el efecto de perturbaciones pequeñas, de manera que el producto de dos o más perturbaciones se ignora en las ecuaciones para obtener las ecuaciones linealizadas de las perturbaciones. Esta es la parte de estabilidad hidrodinámica llamada teoría lineal. Ella está restringida para lo que suceda en períodos de tiempo pequeños. De hecho, si una pertur-

bación muy pequeña crece, a un tiempo dado su amplitud será tal que los términos cuadráticos ya no pueden ignorarse. La teoría lineal de estabilidad hidrodinámica se usa ampliamente para explorar un diagrama de estabilidad de un proceso dado, pero estos resultados no son fiables si se pretende describir perturbaciones no lineales. Mientras un proceso puede ser linealmente estable en el sentido de que perturbaciones infinitesimales son amortiguadas, puede suceder que perturbaciones finitas sean amplificadas. Debido a que los procesos que son inestables ante perturbaciones infinitesimales, lo serán ante perturbaciones de amplitud finita, la teoría lineal da una primera aproximación a los valores críticos de los parámetros del problema. De aquí la necesidad de una buena aproximación numérica para poder comparar con el experimento.

Para proceder a una teoría lineal de estabilidad hidrodinámica, es necesario perturbar las ecuaciones de conservación y linealizarlas respecto ellas. Así, se agrega al estado básico pequeñas perturbaciones:

$$u_i(x_j, t) = U_i(x_j) + \epsilon u'_i(x_j, t) \quad (2-12)$$

$$p(x_j, t) = \bar{P}(x_j) + \epsilon p'(x_j, t) \quad (2-13)$$

$$T(x_j, t) = \bar{T}(x_j) + \epsilon \theta'(x_j, t) \quad (2-14)$$

Las perturbaciones se indican con un apóstrofo ' y son funciones del espacio y del tiempo. Aquí ϵ es un parámetro pequeño que mide el orden de magnitud de las perturbaciones. Las ecuaciones 2-12- 2-14 se sustituyen en el sistema de ecuaciones del problema. Se agrupan los términos a orden cero en ϵ y se recuperan las ecuaciones sin perturbar que satisfacen $\vec{U}(\vec{x})$, $\bar{P}(\vec{x})$ y $\bar{T}(\vec{x})$. Los términos de orden ϵ^2 se desprecian por suponer perturbaciones son pequeñas.

A primer orden en ϵ se tiene.

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2-15)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u'_j}{\partial t} + U_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_i^2} + \rho f_j \quad (2-16)$$

$$\rho C_V \left(\frac{\partial \theta'}{\partial t} + u'_k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} + U'_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \right) = k \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_k^2} \quad (2-17)$$

2.1. Definición de estabilidad

Se dice que un sistema es "estable" si amortigua las perturbaciones que se le aplican. En general, un sistema puede amortiguar algunos tipos de perturbaciones o ser inestables respecto de algún otro tipo. Tal definición requiere respaldo matemático. Un sistema se caracteriza por un conjunto de variables independientes tales como la temperatura, componentes de velocidad, composición N_γ , presión,..., i. e. $\{X\} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Todas estas variables obedecen algunas ecuaciones de evolución, las cuales son las leyes físicas macroscópicas de conservación que forman un sistema de ecuaciones diferenciales que es prácticamente intratable. Usualmente, se desea reemplazar el conjunto original $T, p, N_\gamma, V_i, \dots$ por un conjunto finito que incluye muchos más elementos, y que se obtiene al reemplazar las variables continuas por sus valores en puntos de una malla que se obtiene al dividir el espacio en pequeños intervalos, o reemplazando las variables continuas por una expansión trunca de esas variables en series de funciones, siendo entonces los elementos de la serie, los coeficientes de la expansión. Así el símbolo $\{X\}$ es muy general y, por supuesto es más fácil seleccionar las variables X_i tales que obedezcan un conjunto finito de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dX_i}{dt} = F_i(X_1, X_2, \dots, X_M) \quad i = 1, \dots, M \quad (2-18)$$

En cualquier tiempo dado, el estado del sistema puede representarse por un punto en el "espacio fase", un espacio euclidiano M-dimensional, cuyas coordenadas son X_1, X_2, \dots, X_M . Ya que el estado del sistema varía con el tiempo, el punto representativo describe una trayectoria en el espacio fase. Asumimos que la función F_i tiene sus primeras derivadas parciales continuas con respecto a X_i . Entonces, de esto se sigue que si t_0 es cualquier tiempo y $\{X_{i0}\}$ cualquier punto en el espacio fase, la ecuación 2-18 posee una solución única.

$$X_i = \varphi(t, \{X_{i0}\}) \quad i = 1, \dots, M \quad (2-19)$$

que satisface la condición:

$$X_{i0} = \varphi(t_0, \{X_{i0}\}) \quad (2-20)$$

Aquí se asume que φ es continuamente diferenciable con respecto a t para $t > 0$. Por lo tanto se estudia un sistema determinístico, en el sentido de que su evolución en el tiempo está determinada completamente por las condiciones iniciales. Suponemos que la evolución "local" del sistema 2-19 es válida en la vecindad de $\{X_{i0}\}$. Consideremos en t_0 otro estado del sistema caracterizado por las variables de estado que difieren del conjunto $\{X_{i0}\}$ por $\{\delta_{i0}\} = \{\delta_{10}, \delta_{20}, \dots, \delta_{M0}\}$. Físicamente el sistema se perturba a un tiempo dado t_0 . La cantidad

$$|\delta(t)| = \varphi(t; T_0; \{X_{i0} + \delta_{i0}\}) - \varphi(t; T_0; \{X_{i0}\}) \quad (2-21)$$

representa el valor alcanzado por la perturbación inicial $\{\delta_{i0}\}$ al tiempo t . $|\delta(t)|$ es, en el espacio fase, la distancia $(\sum_i \delta_i^2)^{1/2}$ entre el estado perturbado y las trayectoria sin perturbar φ , y con valor inicial $|\delta_0| = (\sum_i \delta_{i0}^2)^{1/2}$. La evolución $\varphi(t; T_0; \{X_{i0}\})$ se dice ser estable, si para todo $\epsilon > 0$, corresponde un $k(\epsilon) > 0$ tal que

$$|\delta(t)| = \varphi(t; t_0; \{X_{i0} + \delta_{i0}\}) - \varphi(t; t_0; \{X_{i0}\}) < \epsilon \quad (2-22)$$

para $t > t_0$ dado que $|\delta_0| = (\sum_i \delta_{i0}^2)^{1/2} < k(\epsilon)$. Esto simplemente significa que una trayectoria $\varphi(t)$ es estable en un punto $X_{i0} = \varphi(t_0; \{X_{i0}\})$ si cualquier otra trayectoria que pasa lo suficientemente cerca a $\varphi(t_0, \{X_{i0}\})$ en $t = t_0$ permanece cerca a $\varphi(t)$ a medida que $t \rightarrow \infty$ ("permanece cerca" significa que $|\delta_0| < \epsilon$ y por tanto que la perturbación inicial no puede ser muy grande, es decir, $|\delta_{i0}| < k(\epsilon)$). De otro modo, la trayectoria $\varphi(t)$ se llama inestable.

Una trayectoria en el espacio fase puede ser un simple punto, que corresponde a un estado estacionario. En ese caso, se recupera la definición usual de estabilidad de un estado estacionario.

La ecuación 2-18 posee la solución única 2-19. Cada punto en el espacio fase reside en una sola trayectoria. Entonces, cualquier trayectoria que pasa a través de un punto por el que ha

pasado previamente y por el que debe pasar una y otra vez se llama periódica. De manera que si $\varphi(t_0, \{X_{i0}\}) = \varphi(t_0 + \tau, \{X_{i0}\})$, entonces $\varphi(t_0, \{X_{i0}\}) = \varphi(t_0 + n\tau, \{X_{i0}\})$, $n = 1, 2, 3, \dots$ y $\varphi(t_0, \{X_{i0}\})$ es periódica.

Un caso particularmente interesante es el de estabilidad asintótica que se define por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t; \{X_{i0} + \delta_{i0}\}, t_0) - \varphi(t; \{X_{i0}\}, t_0)| = 0 \quad (2-23)$$

lo que significa que las trayectorias coinciden para t grande. En particular, una estabilidad asintótica a un estado estacionario, implica que el sistema perturbado eventualmente regresa a su estado estacionario original. En el marco de referencia de la teoría de estabilidad lineal, las perturbaciones tienen una dependencia temporal en la forma de $e^{\sigma t}$. El proceso de diferenciación respecto del tiempo es equivalente a multiplicar por σ . Esta nueva ecuación, siendo aún lineal, admite la solución trivial, $V_i' = p' = 0$. Dado algún flujo básico, \bar{U}_i y valores de parámetros tales como ρ, μ , soluciones particulares pueden existir para valores particulares de σ . Así que, las ecuaciones 2-15-2-17, definen un problema de valores propios para σ , que en forma general compleja es:

$$\sigma = \sigma_R + i\sigma_i \quad (2-24)$$

Por lo tanto, la dependencia temporal de una perturbación inicial será:

$$e^{\sigma_R t} e^{i\sigma_i t} \quad (2-25)$$

El signo de σ_R , nos dirá si la perturbación será amplificada o no en el tiempo.

$$\sigma_R > 0 : \textit{Inestable} \quad (2-26)$$

$$\sigma_R < 0 : \textit{Estable} \quad (2-27)$$

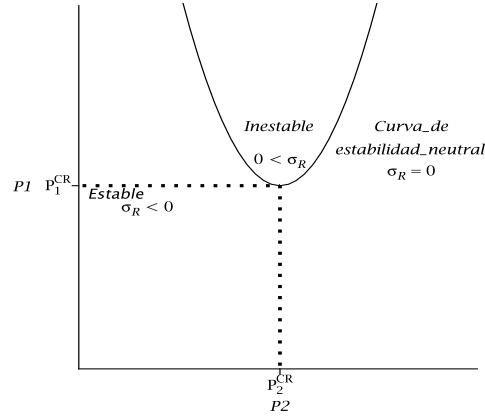


Figura 2-1 – Diagrama de estabilidad en el plano P_1 - P_2

Si $\sigma_R < 0$, hay estabilidad asintótica. Las inestabilidades ($\sigma_R > 0$) pueden surgir de oscilaciones de amplitud creciente si $\sigma_I \neq 0$. En ese caso decimos que hay "sobre-estabilidad". Si $\sigma_I = 0$, no hay oscilaciones y el "principio de intercambio de estabildades es válido" (Ver Chandrasekhar [12]).

La estabilidad neutral, para $\sigma_R = 0$, corresponde a un estado marginal en el espacio de parámetros. Es esencial hallar el lugar geométrico de los estados marginales en el espacio de parámetros, es decir, la relación implícita entre los parámetros tales que $\sigma_R = 0$. Por ejemplo, si se describe al sistema por dos parámetros P_1 y P_2 , tenemos la situación de la figura 2-1

Si $P_1 < P_1^{CR}$, el sistema será necesariamente estable cualesquiera que sea el valor de P_2 . Si $P_1 > P_1^{CR}$, el sistema será estable o inestable dependiendo del valor de P_2 . Por consiguiente, P_1^{CR} se llamará el valor crítico de P_1 y su valor numérico es de suma importancia.

2.2. Modos normales

Restringimos el estudio al caso de un flujo unidimensional.

Supongamos que el sistema está restringido en la dirección z ($-1/2 < z < 1/2$), pero no está limitado en la dirección x $-\infty < x < +\infty$ y sólomente hay un flujo básico en la dirección x

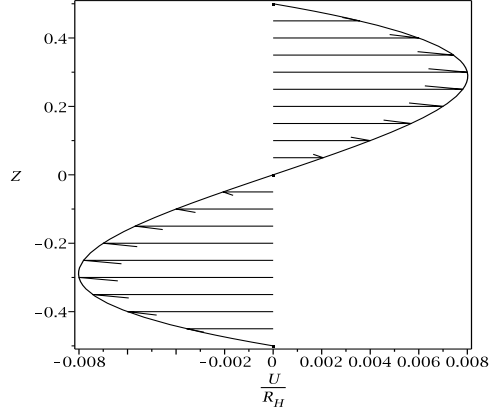


Figura 2-2 – Campo de velocidad básico

y un perfil básico de temperatura. Este perfil de velocidad será sólomente una función de z y su expresión analítica depende de la forma en que se genera el flujo. Supongamos que los perfiles son los siguientes

$$U(z) = R_H(z/24 - z^3/6) \quad (2-28)$$

$$V(z) = 0 \quad (2-29)$$

$$T(x, z) = R_H^2(7z/5760 - z^3/144 + z^5/120) - R_V z - R_H x \quad (2-30)$$

Las ecuaciones 2-12-2-12, muestran el estado perturbado del sistema y de ellas se derivan ecuaciones lineales 2-15-2-17 que dependen del tiempo. La perturbación se analiza en modos normales de la forma $T' = \hat{T}(z, t)e^{i(kx+ly)}$. Se han derivado ecuaciones de evolución para estos modos. Estas ecuaciones tiene las soluciones $\hat{T}^{(0)}$ y $\vec{U}^{(0)}$ para un tiempo dado. Entonces, podemos escribir:

$$\delta\hat{T}(x_i, t) = \hat{T}(x_i, t) - \hat{T}^{(0)}(x_i, t) \quad (2-31)$$

$$\delta\vec{U}(x_i, t) = \vec{U}'(x_i, t) - \vec{U}^{(0)}(x_i, t) \quad (2-32)$$

$$(2-33)$$

de manera que, aunque $\hat{T}^{(0)}$ y $\vec{U}^{(0)}$, son ya perturbaciones particulares sobre el estado básico, se asume que la perturbación obedece las mismas leyes de evolución para movimientos macroscópicos, satisfaciendo así un "exceso" en la ecuación de balance ("exceso", debido a las perturbaciones). Por lo tanto, consideramos $\hat{T}(x_i, t)$ y $\vec{U}'(x_i, t)$, como cantidades fluctuantes alrededor de los modos normales $\hat{T}^{(0)}(x_i, t)$ y $\vec{U}^{(0)}(x_i, t)$, como puede verse de manera general en las figuras 2-3.

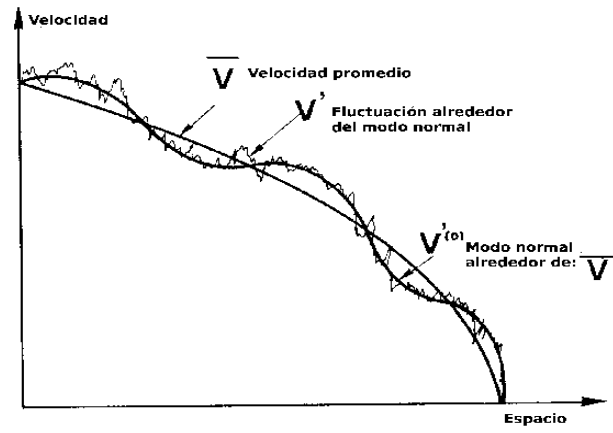
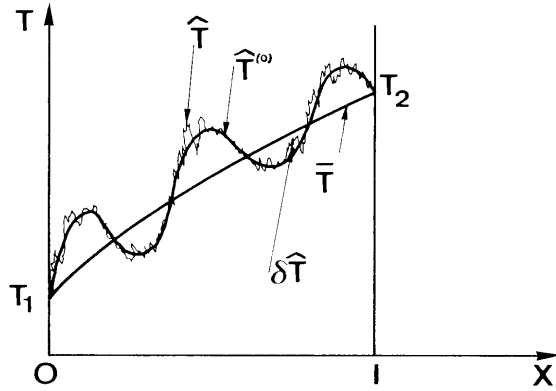


Figura 2-3 – Fluctuación de la perturbación alrededor del modo normal $\hat{T}^{(0)}$ y fluctuación alrededor de una solución que depende del tiempo, obtenido de figuras II.4 y III.5 de Legros [32]

Capítulo 3

Formulación

3.1. Estado básico inicial

El sistema que se estudia es una capa delgada de fluido bajo la influencia de un gradiente de temperatura inclinado, como se muestra en la figura 3-1. Se supone que las paredes laterales, entre las que existe una diferencia de temperaturas, están muy alejadas y que la región de interés es la parte central, donde el flujo básico puede considerarse como un flujo paralelo.

El modelo de Hadley (usado aquí) es considerado en los trabajos de Cormack et al. [33], [34] e Imberger [35]. Sus resultados demuestran que el modelo de Hadley da una solución razonable en el centro de la cavidad teniendo en cuenta $AR_H^2 \ll 3$, donde A es la relación de aspecto de $A = \text{espesor}/\text{longitud}$ de la capa, respectivamente. Hart [1] consideró paredes horizontales rígidas: conductoras y aislantes.

La extensión horizontal de la capa de fluido es muy grande en relación con el espesor d , véase figura 3-2, la normal a la capa de fluido es paralela a la fuerza gravitacional. El fluido está limitado verticalmente por paredes rígidas conductoras, la pared inferior está a una mayor temperatura que la pared superior; esto origina un gradiente vertical de temperatura que, combinado con el gradiente horizontal debido al calentamiento en una de las paredes laterales origina un gradiente de temperatura inclinado 2-30. El fluido asciende en la pared lateral caliente y cae en la pared lateral fría, esto genera un flujo básico $U(z)$ (figura 3-3) en la dirección x , que solo depende de la coordenada vertical z . La coordenada y es perpendicular a las direcciones del flujo básico x y a la coordenada vertical z . En base a lo anterior, se tienen las siguientes

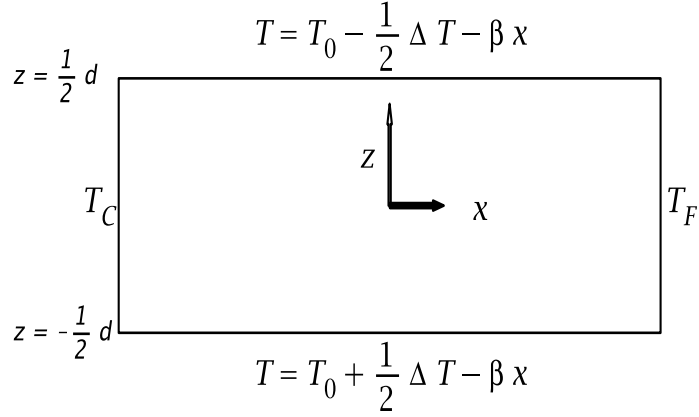


Figura 3-1 – Capa de fluido sujeta a calentamiento lateral y calentamiento por abajo

condiciones de frontera para la temperatura y la velocidad del estado básico:

$$T = T_0 - \beta_H x \pm \Delta T/2 \quad z = -(\pm d/2) \quad (3-1)$$

$$\vec{U} = 0 \quad z = -(\pm d/2) \quad (3-2)$$

y las condiciones de flujo cerrado para las componentes horizontales de la velocidad

$$\int_{-1/2}^{1/2} U(z) dz = \langle U \rangle = 0 \quad (3-3)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} V(z) dz = \langle V \rangle = 0 \quad (3-4)$$

Aquí β_H es el gradiente de temperatura horizontal, que puede ser positivo o negativo. T_0 es la temperatura inicial en el centro de la capa, esto es, en $z = 0$ y $x = 0$.

De la componente \hat{k} de la ecuación de momento 2-7, tenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho_0 g \alpha_T (T - T_0) \quad (3-5)$$

$$(3-6)$$

que se adimensionaliza como sigue.

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{z}} = \hat{T} \quad (3-7)$$

donde se adimensionalizó a z con d , a la presión con $\rho_0 \kappa \nu / d^2$ y a $\bar{T} = T - T_0$ con $\frac{\Delta T}{R_V}$. Aquí, se define al número de Rayleigh vertical como $R_V = g \alpha_T d^3 \Delta T / \kappa \nu$. Además, se hizo uso de $\bar{T} = \frac{\Delta T}{R_V} \hat{T}$

La expresión para el estado básico estacionario de la ecuación de momento 2-7, es

$$\nu \nabla^2 \vec{U} + \delta \rho \vec{f} = \frac{1}{\rho_0} \nabla P \quad (3-8)$$

$$\vec{f} = g \hat{k}, \delta \rho = \alpha_T \bar{T} \quad (3-9)$$

Aplicando el rotacional a la expresión anterior, y considerando sus componentes \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} , se tiene lo siguiente:

$$\nu \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} = g \alpha_T \frac{\partial T}{\partial x} = -g \alpha_T \beta_H \quad (3-10)$$

$$\nu \frac{\partial^3 V}{\partial z^3} = 0 \quad (3-11)$$

$$\nu \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} = 0 \quad (3-12)$$

Los términos en la ecuación 3-10 se adimensionalizan con d para distancias y κ/d para velocidad y se usa $U = \kappa \hat{U} / d$. Esto es

$$\frac{\partial^3 \hat{U}}{\partial \hat{z}^3} = -R_H \quad (3-13)$$

con $R_H = R_V \beta_H d / \Delta T$.

La ecuación de energía 2-8 se reduce para el estado básico (usando 3-10) a:

$$\frac{\partial^5 \hat{T}}{\partial z^5} = R_H^2 \quad (3-14)$$

Las condiciones de frontera quedan adimensionalizadas entonces en la forma siguiente:

$$T = -(\pm R_V/2) - R_H x \quad z = -(\pm 1/2) \quad (3-15)$$

$$\vec{U} = 0 \quad z = \pm 1/2 \quad (3-16)$$

Al aplicar las condición de frontera 3-16 y la condición 3-4 a la ecuación 3-13 y la condición 3-15 a la expresión 3-14 se obtienen los perfil básicos de velocidad y temperatura:

$$U(z) = R_H(z/24 - z^3/6) \quad (3-17)$$

$$V(z) = 0 \quad (3-18)$$

$$T(x, z) = R_H^2(7z/5760 - z^3/144 + z^5/120) - R_V z - R_H x \quad (3-19)$$

3.2. Estado perturbado

Las ecuaciones que rigen el comportamiento de la perturbación correspondientes a nuestro del problema son:

$$Pr^{-1} \frac{D\vec{u}'}{Dt} = -\nabla p' + T' \mathbf{k} + \nabla^2 \vec{u}' \quad (3-20)$$

$$\frac{DT'}{Dt} = \nabla^2 T' \quad (3-21)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}' = 0 \quad (3-22)$$

donde se ha hecho uso de la aproximación de Boussinesq y se define a D/Dt como el operador de Lagrange. Aquí, $\vec{u}' = (u', v', w')$ es el vector velocidad, \hat{k} es el vector unitario vertical, p' es la presión y T' es la temperatura. La paredes son rígidas y buenas conductoras de calor.

El flujo básico 3-17 modifica el perfil de temperatura como en la ecuación 3-19, produciendo dos regiones inestables cerca de las paredes superior e inferior y una región estable en la parte intermedia. Estas regiones inestables lo son aún más al introducir un gradiente adverso de temperatura vertical. Esto muestra que sólomente para un gradiente de temperatura horizontal lo suficientemente grande, es posible desestabilizar el flujo. Sin embargo, debido a la región estabilizadora del perfil de temperatura, no es posible desestabilizar el sistema para valores pequeños de R_H y el resultado es que primero R_H estabiliza, para algunas magnitudes del número de Prandtl Pr en la presencia de R_V y después también desestabiliza debido a la contribución de la inestabilidad por flujo de corte. En otra región, para Pr menores que un valor crítico, R_H desestabiliza aún para valores pequeños. Essto se demostrará más adelante en este trabajo. Cuando $R_V > 0$, las dos regiones inestables en el perfil de temperatura pueden producir un modo impar como el primero en desestabilizarse. La característica de este modo impar es que produce dos celdas de convección, una sobre otra. Para estudiar la estabilidad del flujo se usa el método de modos normales en la forma $G(z)exp[i(kx + ly - \sigma t)]$, donde $G(z)$ representa la amplitud de la perturbación de cada una de las variables y k y l son las componentes del número de onda de la perturbación en las direcciones x e y, respectivamente. La parte real de σ es la frecuencia de oscilación de la perturbación y su parte imaginaria es la rapidez de crecimiento. De este modo, el sistema de ecuaciones que describe a las perturbaciones es:

$$[Pr(D^2 - \alpha^2) - i(kU - \sigma)](D^2 - \alpha^2)w + ikwD^2U - Pr\alpha^2\theta = 0 \quad (3-23)$$

$$[(D^2 - \alpha^2) - i(kU - \sigma)]\theta + R_Hu - wDT = 0 \quad (3-24)$$

$$[Pr(D^2 - \alpha^2) - i(kU - \sigma)](-\alpha^2u + ikDw) + l^2wDU = 0 \quad (3-25)$$

siendo u y w las amplitudes de las componentes x y z de la velocidad, respectivamente, y θ es la amplitud de la temperatura. El cuadrado de la magnitud del vector de número de onda se define como $\alpha^2 = k^2 + l^2$. De manera que es posible escribir $k = \alpha \cos \phi$ y $l = \alpha \sin \phi$, donde ϕ es el ángulo de propagación de la perturbación respecto a la dirección x (la misma dirección del flujo básico). Las condiciones de frontera son $w = Dw = u = \theta = 0$ at $z = \pm 1/2$. Las ecuaciones

Circulación de Hadley +
Convección de Rayleigh

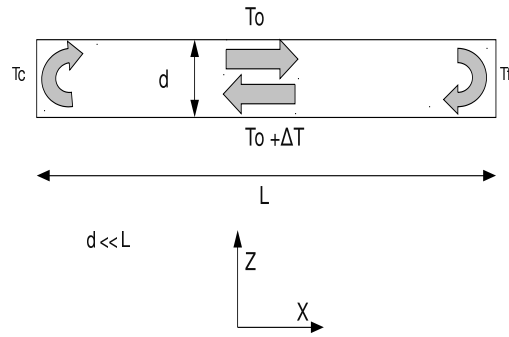


Figura 3-2 – Bosquejo del problema

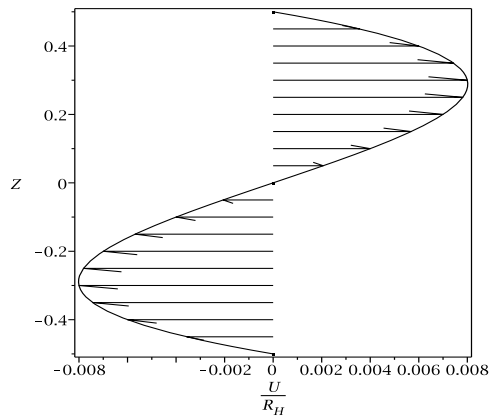


Figura 3-3 – Campo de velocidad básico, el fluido caliente se dirige hacia la pared fría en la parte superior y retorna en la parte inferior como fluido a menor temperatura

3-25 y 3-23 se obtienen al aplicar el rotacional una y dos veces a las ecuaciones perturbadas de movimiento, respectivamente. Por lo anterior, la ecuación 3-25 es una componente de la ecuación de la vorticidad.

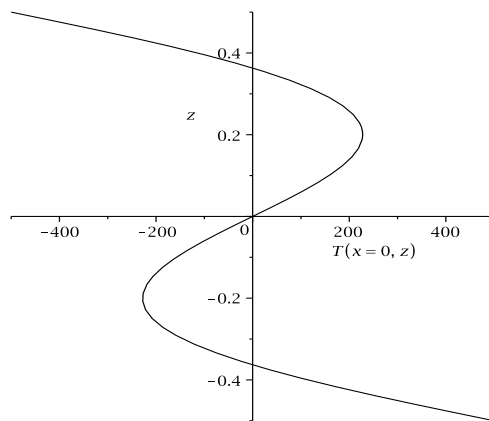


Figura 3-4 – Perfil de temperatura para $R_H = 5000$ y $R_V = 12646$, obsérvese que el perfil de temperatura no es lineal y la apreciable contribución de la diferencia de temperatura entre las dos paredes horizontales, representada por R_V . Se observa que la temperatura en $z = 1/2$ es menor que la temperatura en $z = -1/2$

Capítulo 4

Análisis numérico

4.1. Método numérico

El sistema de ecuaciones anterior puede escribirse en forma matricial como:

$$\mathbf{A}\vec{u}(z) = \vec{F}(z)$$

El cual se define en un dominio D . Para cada función $v(x)$ del dominio $\phi(\mathbf{A})$ del operador \mathbf{A} , denotamos el residuo como:

$$r_v(z) = \mathbf{A}\vec{v}(z) - \vec{F}(z)$$

Es claro que $r_v(z) = 0$ para la solución exacta

$$u(z) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \phi_j(z)$$

Sin embargo para una solución aproximada

$$v(z) = \sum_{j=1}^N v_j \phi_j(z)$$

el residuo no es idénticamente nulo, y según el criterio de Galérkin [36], el residuo tiene que ser ortogonal a cada función básica $\phi_i(z)$

$$\langle r_v(z), \phi_i(z) \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

donde

$$\langle f, g \rangle = \int_D f(z)g(z)dz$$

Es el producto interno en el espacio de funciones \mathbf{H} . Así, la solución aproximada en el método de Galérkin satisface exactamente la proyección de la ecuación 4.1 en el subespacio \mathbf{H}_N generado por las N funciones básicas $\{\phi_1(z), \phi_2(z), \dots, \phi_N(z)\}$.

Sustituyendo la expresión para el término residual en el criterio de Galérkin, obtenemos el sistema lineal

$$\mathbf{A}\vec{v} = \vec{F}$$

donde

$$F_i = \langle F_i(z), \phi_i(z) \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

y

$$M_{ij} = \langle \mathbf{A}\phi_i(z), \phi_j(z) \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Debido a que $\vec{F} = 0$, el problema se reduce a hallar los valores propios del determinante de la matriz \mathbf{M} .

4.2. Funciones propias

El problema de valores en la frontera formado por el sistema de ecuaciones (3-23-3-25) y las condiciones de frontera se resuelve con el método numérico de Galérkin [37, 38]. La precisión en la solución depende de las funciones de prueba elegidas, que satisfacen las condiciones de frontera. En este análisis, las funciones de prueba seleccionadas, se caracterizan por tener simultáneamente parte par e impar. Esto se hizo, siguiendo los cálculos de Hart [15] que incluyen solamente el gradiente horizontal de temperatura. Hart [15] encontró que es posible capturar con precisión diferentes modos de inestabilidad cuando se incluyen las funciones de prueba pares

e impares. Nótese que esto no fue llevado a cabo por Nield [8], quien detiene su análisis hasta un valor relativamente pequeño de R_H debido a problemas de convergencia en los cálculos. Nield [8] señaló que para algún valor de Pr y un rango de R_H aparece un modo oblicuo pero no era el primero en aparecer en la inestabilidad. Debido al método numérico usado en este análisis, ha sido posible mostrar, entre otras cosas, que un modo oblicuo oscilatorio puede ser el primer inestable en un rango de R_H y en un rango de Pr . Nótese que numéricamente, solamente es posible separar los modos par e impar en el caso de perturbaciones longitudinales y obtener, de la condición de solubilidad, un determinante en la forma de un producto de dos términos, uno para cada modo. De modo que, los cálculos para los demás ángulos de propagación de la perturbación son más complicados.

Las amplitudes de las funciones de la perturbación en las ecuaciones (3-23-3-25) son desarrolladas en la forma siguiente:

$$w = w_e + w_o = \sum_{n=1}^N [a_{2(n-1)} z^{2(n-1)} (z^2 - 1/4)^2 + b_{2n-1} z^{2n-1} (z^2 - 1/4)^2] \quad (4-1)$$

$$\theta = \theta_e + \theta_o = \sum_{n=1}^N [c_{2n-1} \cos(2n-1)\pi z + d_{2n} \sin 2n\pi z] \quad (4-2)$$

$$u = u_e + u_o = \sum_{n=1}^N [f_{2n-1} \cos(2n-1)\pi z + g_{2n} \sin 2n\pi z] \quad (4-3)$$

donde los subíndices e y o indican funciones par e impar, respectivamente.

Las ecuaciones (4-1-4-3) se sustituyen en el sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales (3-23-3-25). Entonces, los residuales se hacen ortogonales a las funciones básicas de prueba [37, 38]. Esto conduce a un sistema lineal de ecuaciones algebraicas cuya solución es distinta de la solución trivial si el determinante de la matriz del sistema M es cero, es decir, $\det(M) = 0$. Esta matriz es de orden $3(2N) \times 3(2N)$ y sus elementos son

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} M_{3i-2,3j-2} & M_{3i-2,3j-1} & M_{3i-2,3j} \\ M_{3i-1,3j-2} & M_{3i-1,3j-1} & M_{3i-1,3j} \\ M_{3i,3j-2} & M_{3i,3j-1} & M_{3i,3j} \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} \langle L_1 W_j, W_i \rangle & -\alpha^2 \langle T_j, W_i \rangle & 0 \\ \langle DTW_j, T_i \rangle & \langle L_2 T_j, T_i \rangle & -R_H \langle U_j, T_i \rangle \\ \langle L_4 W_j, U_i \rangle & 0 & \langle L_3 U_j, U_i \rangle \end{bmatrix} \tag{4-4}
\end{aligned}$$

De la ecuación $\det(M) = 0$ es posible obtener los valores propios de R_V y σ en términos de α , ϕ , R_H y Pr . Para hallar los valores propios, se ha hecho uso del método de Newton-Raphson [39] implementado usando el paquete algebraico de Maple.

4.3. Análisis de simetría

Cómo se mostrará más adelante, se investigará la inestabilidad del modo oblicuo. Los cálculos para este modo requieren que se verifique alrededor de los 360° grados de la dirección de propagación de la perturbación. Una gran cantidad de trabajo numérico se puede evitar observando las propiedades de simetría físicas del problema y de las ecuaciones(3-23-3-25). Primero hágase uso de las definiciones $k = \alpha \cos \phi$, $l = \alpha \sin \phi$ y $\alpha^2 = k^2 + l^2$. Ahora, las ecuaciones (3-23-3-25) se someterán a dos rotaciones. La primera es $\phi \rightarrow -\phi$ (con respecto a la dirección x del flujo básico) la cuál únicamente cambia $l \rightarrow -l$, pero l sólo aparece elevado al cuadrado en las ecuaciones. Esto significa que las ecuaciones son las mismas, y por tanto los resultados para la estabilidad serán los mismos. El segundo es una rotación $\phi \rightarrow \phi + \pi$ que produce los cambios $l \rightarrow -l$ and $k \rightarrow -k$. En este caso, se proponen los cambios $U_S \rightarrow -U_S$, $u \rightarrow -u$ y $R_H \rightarrow -R_H$ con los que es posible recuperar el sistema original de ecuaciones. La razón es que una rotación de 180 grados es equivalente a cambiar la dirección del eje x. Por consiguiente, es un cambio en las direcciones del flujo básico, del gradiente de temperatura horizontal y de la perturbación de la velocidad en la dirección x, lo que resulta en las mismas ecuaciones (3-23-3-25). Se concluye entonces que, para la inestabilidad oblicua, sólo es necesario investigar el primer cuadrante del plano del número de onda. Aún con esta simplificación, los cálculos de estabilidad requieren

una gran cantidad de cálculos numéricos.

El sistema puede escribirse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} L_1 & -\alpha^2 & 0 \\ DT_S & L_2 & -R_H \\ L_4 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \theta \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde los operadores se definen según lo siguiente:

$$\begin{aligned} L_1 &= (D^2 - \alpha^2)^2 + iPr^{-1} \{ \sigma (D^2 - \alpha^2) + k [D^2 U_S - U_S (D^2 - \alpha^2)] \} \\ L_2 &= - (D^2 - \alpha^2)^2 + i(kU_S - \sigma) \\ L_3 &= - (D^2 - \alpha^2)^2 + iPr^{-1} (kU_S - \sigma) \\ L_4 &= \alpha^{-2} \{ Pr^{-1} l^2 D U_S - ikL_3 D \} \end{aligned}$$

Haciendo una comparación con el esquema de Nield [8] en el cual:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{n=1}^N A_n W_n \\ \theta &= \sum_{n=1}^N B_n T_n \\ u &= \sum_{n=1}^N C_n U_n \end{aligned}$$

Así, si N=1 para las nuevas funciones de prueba entonces:

$$\begin{aligned} w &= a_0(z^2 - 1/4) + b_1 z(z^2 - 1/4) \\ \theta &= c_1 \cos \pi z + d_2 \sin 2\pi z \\ u &= f_1 \cos \pi z + g_2 \sin 2\pi z \end{aligned}$$

Lo que da los primeros dos términos de la expansión de Nield [8] para w , θ y u (idéntico para

w), resumiendo lo anterior quedaría como:

$$W_1 = (z^2 - 1/4) \quad A_1 = a_0 \quad (4-5)$$

$$W_2 = z(z^2 - 1/4) \quad A_2 = b_1 \quad (4-6)$$

$$T_1 = \cos\pi z \quad B_1 = c_1 \quad (4-7)$$

$$T_2 = \sin 2\pi z \quad B_2 = d_2 \quad (4-8)$$

$$U_1 = \cos\pi z \quad C_1 = f_1 \quad (4-9)$$

$$U_2 = \sin 2\pi z \quad C_2 = g_2 \quad (4-10)$$

Esto lleva a concluir que el orden de aproximación 2 que Nield [8] presenta es en realidad un primer orden, de manera que el orden mayor que tuvo en sus cálculos es 2 y no 4. En el sistema homogéneo de ecuaciones los coeficientes de cada función básica no necesitan ser determinados, y la condición a resolver es:

$$\det(M) = 0 \quad (4-11)$$

donde M es una matriz de orden $3(2N) \times 3(2N)$, y los elementos están dados por 4.2. Usando las expresiones anteriores para W_1, W_2, U_1, U_2 , la primera aproximación del problema quedaría expresada como: La ecuación 4-11 da los valores propios R_V y σ en función de α, R_H, Pr, ϕ . Para hallar los valores propios se emplea el método de Newton-Raphson para sistemas de ecuaciones no lineales. Para la orientación longitudinal ($k = 0, l = a$) tenemos modo par e impar por separado. A la vez, cada modo puede ser estacionario u oscilatorio. Para las demás orientaciones (modos oblicuo y transversal) existe un efecto de acoplamiento entre los modos par e impar. Las siguientes expresiones fueron obtenidas a orden uno en la aproximación. Modo longitudinal estacionario par:

$$R_V = \frac{1}{20160} \frac{(\alpha^4 + 24\alpha^2 + 504)(\alpha^2 + \pi^2)\pi^{10}}{C_1^2 \alpha^2} + \frac{1}{720\pi^2 C_1} \left(\frac{A_1}{\pi^2} + \frac{60B_1}{(\pi^2 + \alpha^2)Pr} \right) R_H^2.$$

Modo longitudinal oscilatorio par:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} \langle L_1 W_1, W_1 \rangle & -\alpha^2 \langle T_1, W_1 \rangle & 0 & \langle L_1 W_2, W_1 \rangle & -\alpha^2 \langle T_2, W_1 \rangle & 0 \\ \langle DTW_1, T_1 \rangle & \langle L_2 T_1, T_1 \rangle & -R_H \langle U_1, T_1 \rangle & \langle DTW_1, T_1 \rangle & \langle L_2 T_1, T_1 \rangle & -R_H \langle U_1, T_1 \rangle \\ \langle L_4 W_1, U_1 \rangle & 0 & \langle L_3 U_1, U_1 \rangle & \langle L_4 W_2, U_1 \rangle & 0 & \langle L_3 U_2, U_1 \rangle \\ \langle L_1 W_1, W_2 \rangle & -\alpha^2 \langle T_1, W_2 \rangle & 0 & \langle L_1 W_2, W_2 \rangle & -\alpha^2 \langle T_2, W_2 \rangle & 0 \\ \langle DTW_1, T_2 \rangle & \langle L_2 T_1, T_2 \rangle & -R_H \langle U_1, T_2 \rangle & \langle DTW_1, T_2 \rangle & \langle L_2 T_1, T_2 \rangle & -R_H \langle U_1, T_2 \rangle \\ \langle L_4 W_1, U_2 \rangle & 0 & \langle L_3 U_1, U_2 \rangle & \langle L_4 W_2, U_2 \rangle & 0 & \langle L_3 U_2, U_2 \rangle \end{vmatrix}$$

$$\sigma^2 = \frac{1680Pr\alpha^2 B_1 C_1 R_H^2}{\pi^{12} [(\alpha^4 + 24\alpha^2 + 504)Pr + (\alpha^2 + \pi^2)(\alpha^2 + 12)]} - (\alpha^2 + \pi^2)^2 Pr^2 \quad (4-12)$$

$$R_V = \frac{1}{20160} \frac{[\alpha^4 + 24\alpha^2 + 504 + (\alpha^2 + \pi^2)(\alpha^2 + 12)] (\alpha^2 + \pi^2)(1 + Pr)\pi^{10}}{C_1^2 \alpha^2} \quad (4-13)$$

$$+ \frac{1}{720\pi^2 C_1} \left\{ \frac{A_1}{\pi^2} - \frac{60B_1(\alpha^2 + 12)}{[(\alpha^4 + 24\alpha^2 + 504)Pr + (\alpha^2 + \pi^2)(\alpha^2 + 12)]} \right\} R_H^2. \quad (4-14)$$

Modo longitudinal estacionario impar:

$$R_V = \frac{1}{3465} \frac{(\alpha^4 + 88\alpha^2 + 3960)(\alpha^2 + 4\pi^2)\pi^{10}}{C_2^2 \alpha^2} \quad (4-15)$$

$$+ \frac{1}{720\pi^2 C_2} \left\{ \frac{A_2}{\pi^2} + \frac{60B_2}{(\alpha^2 + 4\pi^2)Pr} \right\} R_H^2. \quad (4-16)$$

Modo longitudinal oscilatorio impar:

$$\sigma^2 = \frac{1155Pr\alpha^2 B_2 C_2 R_H^2}{4\pi^{12} [(\alpha^4 + 88\alpha^2 + 3960)Pr + (\alpha^2 + 4\pi^2)(\alpha^2 + 44)]} - (\alpha^2 + 4\pi^2)^2 Pr^2 \quad (4-17)$$

$$R_V = \frac{1}{3465} \frac{[\alpha^4 + 88\alpha^2 + 3960 + (\alpha^2 + 4\pi^2)(\alpha^2 + 44)] (\alpha^2 + 4\pi^2)(1 + Pr)\pi^{10}}{C_2^2 \alpha^2} \quad (4-18)$$

$$+ \frac{1}{720\pi^2 C_2} \left\{ \frac{A_2}{\pi^2} - \frac{60B_2(\alpha^2 + 44)}{[(\alpha^4 + 88\alpha^2 + 3960)Pr + (\alpha^2 + 4\pi^2)(\alpha^2 + 44)]} \right\} R_H^2. \quad (4-19)$$

donde:

$$A_1 = \pi^6 + 348\pi^4 - 64800\pi^2 + 604800$$

$$B_1 = \pi^4 - 228\pi^2 + 2160$$

$$C_1 = 12 - \pi^2$$

$$A_2 = \pi^6 + 75\pi^4 - 9450\pi^2 + 85050$$

$$B_2 = \pi^4 - 105\pi^2 + 945$$

$$C_2 = 15 - \pi^2$$

Aquí σ es la frecuencia de oscilación.

Capítulo 5

Resultados numéricos

Los resultados de estabilidad (algunos resultados ya publicados por el autor [40]), se presentan en orden creciente del número de Prandtl Pr . La búsqueda del primer modo inestable sólomente en el rango entre 0 y 90 grados de la dirección de propagación de la perturbación ya fue justificada en un apartado anterior. El método numérico se mejoró usando una subrutina (Método de Newton-Raphson multidimensional) de Fortran que fue implementada en Maple. Con ello fue posible calcular con gran precisión los valores propios. Aquí se verificaron algunos resultados hasta el quinto orden de aproximación en la aproximación de Galérkin. El error de convergencia en el peor de los casos es de 7.6 por ciento. Éste fue el caso del modo transversal oscilatorio de un fluido con número de Prandtl $Pr = 1$ cuando $R_H = 20281 \cdot 2$, $\alpha_C = 8 \cdot 2$, $R_V = 0$ y $\sigma_C = 1019 \cdot 5966$ en su quinta aproximación, que difiere del orden cuarto en menos del 7.6 por ciento. Cada gráfica o conjunto de gráficas se caracteriza por un número de Prandtl Pr , que caracteriza a cada fluido en particular. Se destaca la competencia entre modos longitudinal y transversal. Estos pueden ser estacionarios u oscilatorios. Para ciertos valores del número de Prandtl Pr aparece un modo oblicuo oscilatorio que puede ser el más inestable, esto es, puede ser el primero en aparecer. Los cálculos convergen más rápido para las perturbaciones longitudinales que las transversales. Los cálculos se han realizado con una expansión de $N = 10$ términos para tener una convergencia muy aceptable para perturbaciones transversales y mucho mejor para para perturbaciones longitudinales. Para el caso longitudinal es posible separar modos par e impar (esto es, usar separadamente funciones par e impar, respectivamente), estacionario y oscilatorio, lo que facilita el problema al reducir el orden del determinante a la mitad, respecto

del determinante obtenido al tomar en cuenta modos par e impar simultáneamente.

Los resultados para $Pr = 0.026$ corresponden a metales líquidos como el mercurio a 20°C (Kays[41]) y galio a 20°C (Gill[14]). La figura 5-1 muestra los valores críticos de R_V , es decir R_{VC} contra R_H para $Pr=0.026$. Notar que se presentan los distintos modos de inestabilidad, algunos de los cuales no son importantes por el momento, pero lo serán para valores mayores del número de Prandtl Pr . En la figura 5-1, la inestabilidad es dominada por un modo transversal estacionario Ts que tiene el valor $R_{VC} = 1708$ cuando $R_H = 0$ y cruza el eje horizontal en $R_H=218.25$ ($R_{VC} = 0$) con un número de onda $\alpha_C = 2.7$. El modo longitudinal oscilatorio par $Lo1$ cruza el eje horizontal en $R_H = 1712.3$ con $\alpha_C = 2.0$ y $\sigma_C = 5.94$. También fue posible capturar un modo longitudinal oscilatorio impar $Lo2$, el cual es muy estable respecto de los demás modos y parece nunca desestabilizarse con el incremento de R_H .

Las curvas para los modos longitudinales par $Lo1$ e impar $Lo2$ son de particular interés porque de alguna manera se estabilizan en una región de R_H , pero después se desestabilizan para valores mayores de R_H . Este comportamiento traerá consecuencias importantes para Pr mayores. La curva para el modo $Lo1$ también tiende a $R_{VC} = 1708$ cuando R_H se aproxima a cero. Nótese que los modos $Lo1$ y $Lo2$ inician en una magnitud de $R_H \neq 0$. Esto debe ser así, porque es muy bien conocido que cuando $R_H = 0$ el inicio de la inestabilidad es estacionaria [12]. De manera que hay un valor crítico de R_H después del cual estos modos aparecen. Se presentan las líneas de corriente en la curva de criticalidad para tres conjuntos de valores $(R_H, R_C, \alpha_C, \sigma_C)$. Los tres conjuntos corresponden al modo transversal estacionario en los valores $(10, 1703.03, 3.1, 0)$, $(100, 1266.54, 3.0, 0)$ y $(218.24, 0, 2.7, 0)$, respectivamente. Es evidente que las celdas convectivas no muestran simetría con respecto a $z=0$ (que se localiza a la mitad del eje z) como se explicó anteriormente.

La siguiente figura para $Pr = 0.1$, es de particular importancia debido a que permite comparar con los resultados de la figura 5 de Nield [8]. Nótese que el rango de estudio de R_H se ha incrementado. Los resultados que se presentan ($Pr=0.1$), corresponden al hierro líquido a 1600°C (datos tomados de las referencias [42] y [43]). Nuevamente, el modo más inestable es Ts que toca el eje horizontal en $R_H = 1288.89$, $\alpha_C = 2.6$. El modo longitudinal oscilatorio

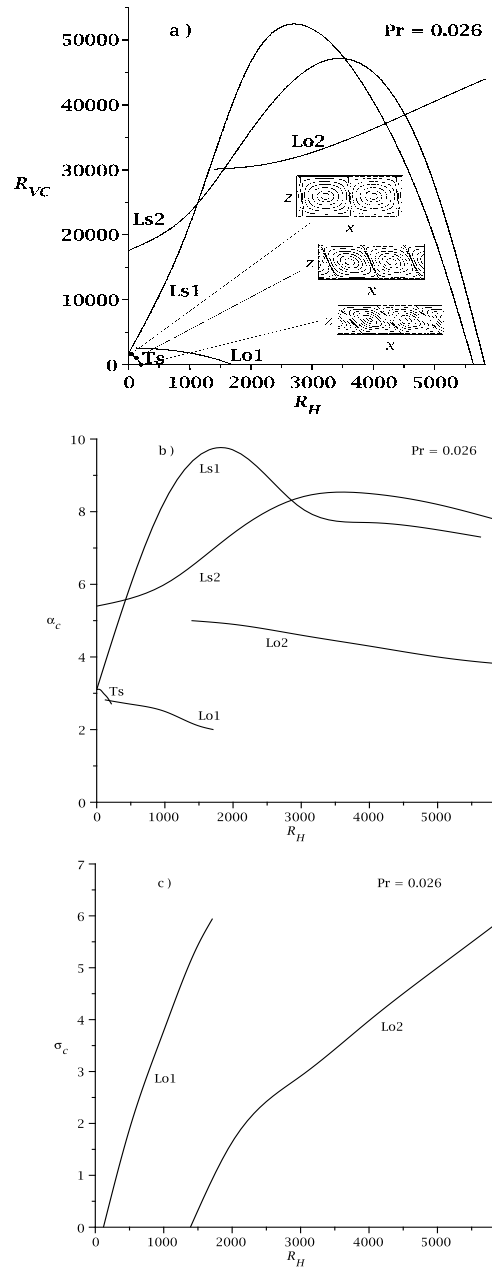


Figura 5-1 – Gráficas de R_{VC} , α_c y σ_c contra R_H para $Pr = 0.026$. En la figura 5-1 a) el área bajo las curvas es la región estable respecto a la inestabilidad crítica correspondiente. Aquí el primer modo inestable es el modo transversal estacionario Ts y solamente bajo esta curva el flujo es estable. Los otros modos son: Modos longitudinal oscilatorio par $Lo1$ e impar $Lo2$ y longitudinales estacionarios par $Ls1$ e impar $Ls2$. En las figuras 5-1 b) y 5-1 c) se muestran el número de onda crítico y la frecuencia crítica. Las líneas de corriente que se presentan corresponden a los puntos dados en el orden siguiente de (R_H, R_{VC}, α_c) : $(10, 1703.03, 3.1)$, $(100, 1266.54, 3.0)$ y $(218.24, 0.0, 2.7)$

par $Lo1$ cruza el eje horizontal en $R_H = 2046 \cdot 72$ con $\alpha_C = 2 \cdot 0$ y $\sigma_C = 12 \cdot 6$. Se observa que estos valores críticos son mayores que los de la figura 5 de Nield [8]. Las curvas de Ts y $Lo1$, decrecen monótonicamente con R_H y el número de onda de $Lo1$ es menor que el número de onda de Ts y ambas también decrecen con R_H . Al comparar con la figura 5-1, se observa que el incremento de R_{HC} de Ts con el Pr es mayor al incremento del R_{HC} del modo $Lo1$. Esto traerá consecuencias importantes al incrementar el número de Prandtl hasta $Pr = 0 \cdot 2$, como se observa en la figura 5-3.

La figura 5-3 presenta resultados para $Pr=0.2$ que corresponde aproximadamente a una mezcla [44] de plomo(44.5%) y Bismuto(55.5%) fundidos a $644^\circ C$. Debido a cambios de la curva de Ts con el número de Prandtl Pr , algunos resultados importantes aparecen en esta figura. Primero Ts se estabiliza tomando magnitudes de $R_{VC} > 1708$ en gran parte del rango de R_H y después cae a $R_{VC} = 0$ en $R_H=5089.81$. Segundo, un punto de codimensión dos aparece en aproximadamente $R_{VC} = 2652$ y $R_H = 1010$, donde movimientos convectivos estacionarios Ts y oscilatorios $Lo1$ compiten por ser el primer inestable. Este resultado es nuevo y no se ha reportado en la literatura. El flujo es solamente estable bajo estas curvas. La curva de $Lo1$ llega a tener $R_{VC} = 0$ en $R_H=2771.40$. Es evidente que los modos longitudinales $Ls1$ y $Ls2$ han modificado su área bajo la curva. Se presentan tres flujos representativos (las líneas de corriente) para tres series de valores $(R_H, R_C, \alpha_C, \sigma_C)$. El flujo para $(800, 2351.21, 2.9, 0)$ corresponde al modo Ts y por lo tanto no tiene simetría. El modo longitudinal es oscilatorio y su simetría para el conjunto de valores $(2000, 1404.83, 2.2, 16.46)$ es evidente. Las líneas de corriente para $(2671.40, 0, 2, 20.90)$ también muestran simetría. Los números de onda de $Lo1$ son más pequeños que los de Ts . Como se ve en la figura 5-3 a) las celdas de convección transversales son periódicas en la dirección x y las longitudinales lo son en la dirección y . Los números de onda de las celdas convectivas son distintas en cada caso, pero no se tomaron en cuenta al decidir el tamaño de cada figura de las líneas de corriente. La razón principal es que la escala relativa de los números de onda hizo posible ver la separación de las líneas de corriente en algunas de las celdas convectivas. Aquí y en todas las figuras, es interesante notar que, para pequeñas magnitudes de R_H , las curvas de $Lo1$ desaparecen antes de llegar a $R_H = 0$. La razón

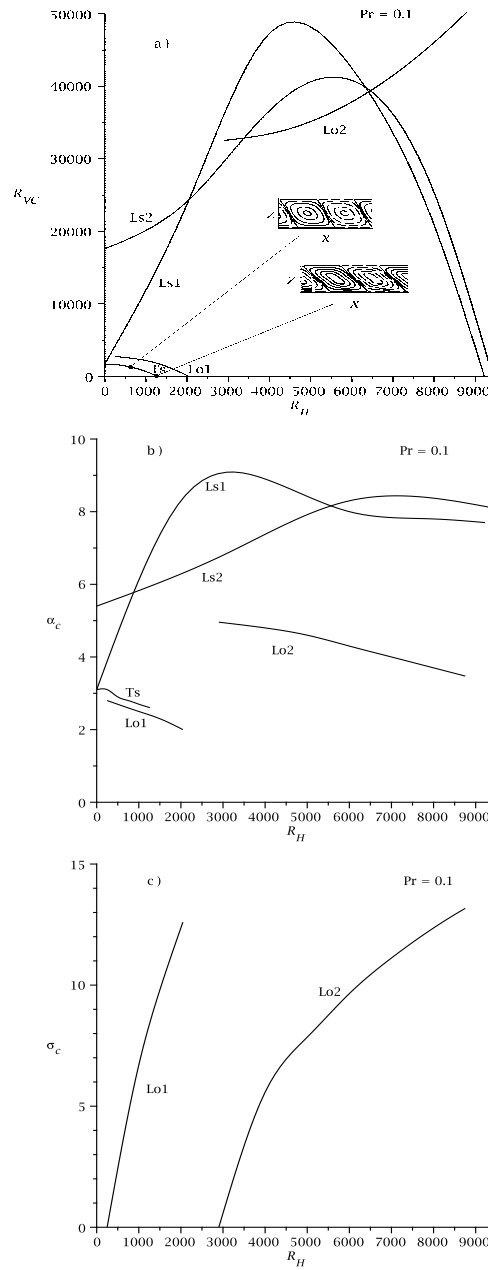


Figura 5-2 – Gráficas de R_{VC} , α_c y σ_c contra R_H para $Pr = 0.1$. En la figura 5-2 a) el área bajo las curvas es la región estable respecto a la inestabilidad crítica correspondiente. Aquí el primer modo inestable es el modo transversal estacionario Ts y, solamente bajo esta curva el flujo es estable. Los otros modos más estables son: Modos longitudinal oscilatorio par $Lo1$ e impar $Lo2$ y longitudinales estacionarios par $Ls1$ e impar $Ls2$. En las figuras 5-2 b) y 5-2 c) se muestran el número de onda crítico y la frecuencia crítica de la perturbación. Las líneas de corriente que se presentan corresponden a los puntos dados en el orden siguiente de (R_H, R_{VC}, α_c) : $(600, 1341.22, 2.9)$ y $(1278.89, 0.0, 2.6)$

es que para pequeñas magnitudes de R_H , no es posible hallar la raíces que corresponden a la frecuencia de oscilación. Esto concuerda con los resultados que incluyen solamente el gradiente vertical de temperatura, donde se ha mostrado que la convección estacionaria es la primera en aparecer [12]. También es claro que las curvas de $Lo1$ no tocan las curvas de $Ls1$ en las figuras 5-1 a) y 5-2 a).

El punto de codimensión dos aparece cuando las curvas de Ts y $Lo1$ se tocan por primera vez en $R_{VC} = 0$ y $R_{HC} = 2249,05$ con $Pr=0.1364$ tal y como se muestra en la figura 5-4 y confirmado por Kuo et al. [6], [17] (para el caso $R_{VC} = 0$). Este valor crítico de Pr , es el valor después del cual el modo Ts cambia, de tal manera que permite que otro modo de inestabilidad aparezca como el modo más inestable para valores mayores de Pr , que en este caso es, el modo $Lo1$. Es importante señalar que, en presencia de R_V , es posible tener este punto de codimensión dos en un rango de Pr , que comienza desde $Pr = 0 \cdot 1364$, en contraste con el caso en que solo se tiene R_H . Obsérvese en la figura 5-4 que muy cerca a $Pr = 0 \cdot 13$, la curva de Ts comienza a tener un efecto estabilizador de R_H en un importante rango. Este efecto estabilizador sobre Ts es la causa de la aparición del punto de codimensión dos, porque retarda la caída de la curva en un valor crítico mayor R_{HC} , el cual crece más rápido que el valor crítico de la curva $Lo1$ con respecto a Pr . Nótese también que, la magnitud de R_H del punto de codimensión dos decrece con Pr , como puede verse en las figuras 5-4 y 5-3. Por ejemplo, para $Pr = 0 \cdot 14$: $R_H = 1620$ y $R_{VC} = 1503$ y para $Pr = 0 \cdot 20$: $R_H = 1010$ y $R_{VC} = 2652$. La razón es el aumento constante de la elevación de la curva de Ts con respecto al Pr .

Es importante señalar que el método numérico usado aquí hizo posible tener muy buena convergencia al incrementar el orden de aproximación tanto como fue necesario. Los resultados fueron comparados con el caso límite en que sólo hay gradiente de temperatura horizontal que fue investigado numéricamente por Kuo et al. [6] (2.97% en R_{HC} cuando $Pr=0.1$), Laure y Roux [20] (un error en el número de Grashof, $Gr = R_{HC}/Pr$ menor al 1% cuando Pr se aproxima a cero) y Kaddeche et al. [45] (cuando el campo magnético es cero, 4.5% en R_{HC} cuando $Pr=0.1$). Los resultados concuerdan muy bien.

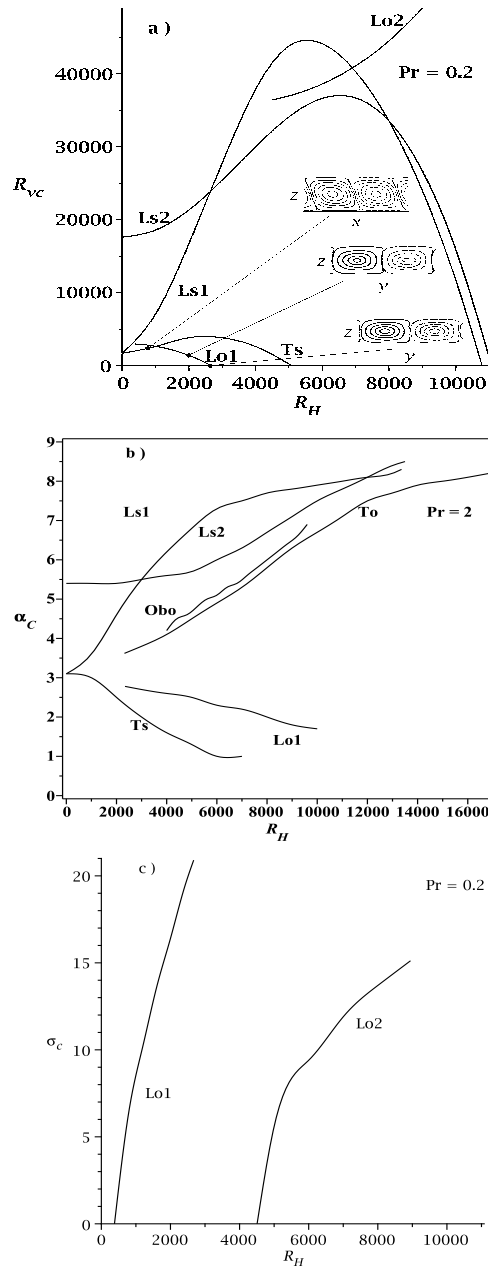


Figura 5-3 – Gráficas de R_{VC} , α_C y σ_C contra R_H para $Pr=0.2$. En la figura 5-3 a) el área bajo las curvas es la región estable respecto a la inestabilidad crítica correspondiente. Los primeros modos inestables son el modo transversal estacionario Ts y el modo lonitudinal oscilatorio par $Lo1$, y solamente bajo esta curva el flujo es estable. un punto de codimensión dos aparece en aproximadamente $R_H = 1010$ y $R_{VC} = 2652$, valor mayor que $R_{VC}=1708$. Otros modos más estables aparecen y son: Modos longitudinal oscilatorio par $Lo1$ e impar $Lo2$ y longitudinales estacionarios par $Ls1$ e impar $Ls2$. En las figuras 5-3 b) y 5-3 c) se muestran el número de onda crítico y la frecuencia crítica de la perturbación. Las líneas de corriente que se presenten corresponden a los puntos dados en el orden siguiente de $(R_H, R_{VC}, \alpha_C, \sigma_C)$: $Ts(800, 2351.21, 2.9, 0.0)$, $Lo1(2000, 3987.34, 2.2, 16.46)$ y $Lo1(2671.40, 0.0, 2.0, 20.90)$

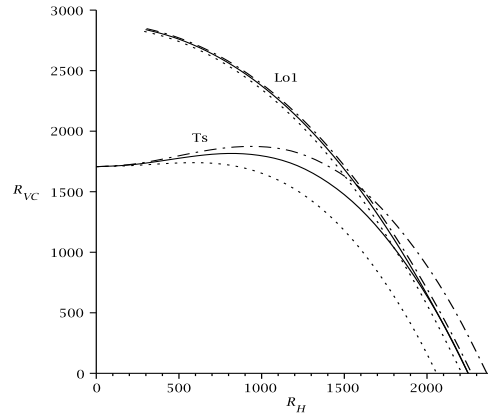


Figura 5-4 – Curvas de R_{VC} vs R_H únicamente para Ts y $Lo1$. Las curvas son para tres valores de Pr : $Pr = 0.13$ (línea punteada), $Pr = 0.1364$ (línea sólida) y $Pr = 0.14$ (línea con guión y punto). Osérvese que $Pr = 0.1364$, es el número de Prandtl crítico en el que aparece el primer punto de codimensión dos cuando $R_{VC} = 0$ y $R_{HC} = 2249$. Para valores mayores de Pr , el punto de codimensión dos aparece para $R_{VC} > 0$. Por lo tanto, el modo $Lo1$ puede ser el primer inestable, solamente para $Pr > 0.1364$ y arriba de un valor crítico de R_H . Por ejemplo, para $Pr = 0.14$, ese punto se localiza en $R_H = 1620$ y $R_{VC} = 1503$.

Cuadro 5-1 – Comparación del punto de cruce de los modos transversales estacionarios con el eje horizontal $R_{VC} = 0$ para $Pr = 0.026, 0.1, 0.2$

Pr	R_H	α_c
0.026	218.245	2.7
0.100	1278.896	2.6
0.200	5089.812	2.4

Cuadro 5-2 – Comparación del punto de cruce de los modos longitudinal oscilatorio par con el eje horizontal $R_{VC} = 0$ para $Pr = 0.026, 0.1, 0.2$

Pr	R_H	α_c	σ_c
0.026	1712.3	2.0	5.9455
0.100	2046.72	2.0	12.6072
0.200	2671.4	2.0	20.9019

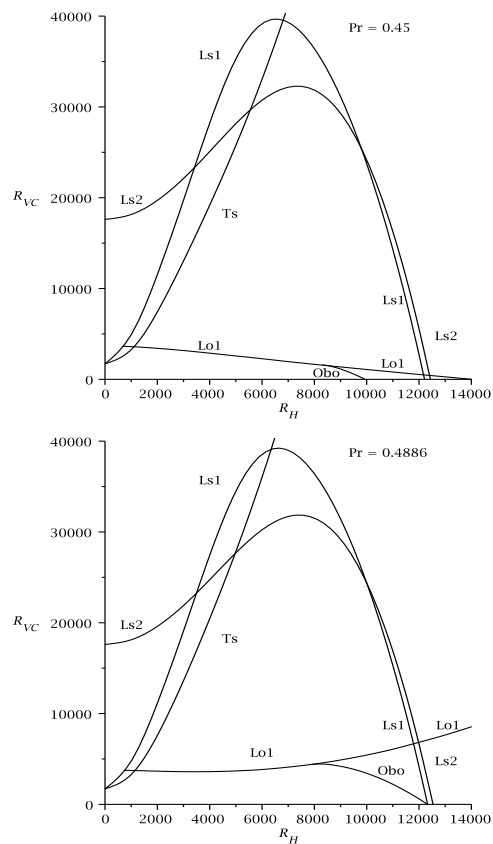


Figura 5-5 – Gráficas de R_{VC} vs R_H para $Pr=0.45$ a) y 0.4886 b). La figura a) muestra resultados previos al punto de codimensión dos de la figura b). Claramente se ve que el modo oblicuo ya está presente. En la figura b) ($Pr = 0.4886$), aparece un nuevo punto de codimensión dos aparece entre los modos *Obo* y *Ls1* para $R_{VC} = 0$ y $R_H = 12330$. Obsérvese, sin embargo que, la curva de *Lo1*, ha cambiado ya su pendiente, esto será particularmente importante para Pr mayores debido a que la curva de *Obo* seguirá también este comportamiento

La figura 5-5 muestra los resultados para $Pr = 0.45$ (Fig. 5-5 a)) y $Pr = 0.4886$ (Fig. 5-5 b)). En la figura 5-5 a) se presenta como resultado nuevo e importante el modo oblicuo oscilatorio *Obo*. Esto muestra que la curva de *Obo* comienza a aparecer en algún lugar dentro del rango de $0.2 < Pr < 0.45$. Para $Pr=0.45$ los modos más inestables son el modo transversal estacionario *Ts*, después el modo longitudinal oscilatorio par y, finalmente el modo oblicuo oscilatorio. El primer punto de codimensión dos para la figura 5-5 a) aparece entre *Ts* y *Lo1* y ocurre en $R_H = 1105$ con los datos $(3589, 2.9, 0, 0)$ y $(3589, 2.7, 10.43, 90)$ en el orden R_{VC} , α y σ_C , respectivamente. El modo *Obo* comienza a ser el más inestable en $\phi_C = 86^\circ$ cuando $R_H = 8300$ y $(1582.34, 1.4, 60.38, 86)$ y cruza el eje $R_{VC} = 0$ en $R_H = 9935$ y $(0, 1.6, 83.67)$ cuando $\phi_C = 72^\circ$. Los resultados de la figura 5-5 b) son muy interesantes porque aparece un nuevo punto de codimensión dos cuando las curvas de *Obo* y *Ls1* se intersectan cuando $R_H = 12329,5$ para $(0, 1.7, 115.32)$ a un ángulo de $\phi_C = 65^\circ$ y $(0, 8.2, 0, 90)$, respectivamente. Aquí, de nuevo *Obo* comienza a ser el más inestable a $\phi_C = 86^\circ$ cuando $R_H = 7800$ y $(4378.81, 1.5, 60.99, 86)$. Obsérvese que la pendiente de la curva de *Lo1* ya ha cambiado. Esto es importante para otros fenómenos que aparecen cuando Pr es mayor, ya que la pendiente de *Obo* también cambia siguiendo el mismo cambio de *Lo1*.

El modo oblicuo se calcula mediante la búsqueda del menor de los valores críticos de todas las curvas de criticalidad estacionarias y oscilatorias a diferentes orientaciones del vector de onda de la perturbación. Los cálculos muestran que la curva de criticalidad del modo *Obo* se separa primeramente de la curva del modo *Lo1* en un valor cercano pero menor que $Pr = 0.45$ (ver Fig 5-5). Esta curva aparece también para $Pr = 0.5$ (5-6 a)) y para $Pr = 1$ (5-7). Tómese por ejemplo, el caso de $Pr = 1$. La separación de la curva *Obo* de *Lo1* se entiende mejor a través de comportamiento de las curvas marginales. La curva comienza a separarse a partir de un valor de R_H comprendido entre 6700 y 6750 y la curva marginal comienza a mostrar dos mínimos, uno de los cuales es el mínimo absoluto y corresponde a *Lo1*. Un incremento mayor de R_H reduce la diferencia entre los dos mínimos, hasta que en $R_H = 6785$, ambos mínimos alcanzan la misma magnitud de R_V . En este punto, dos celdas de convección de dos números de onda diferentes (con pequeñas diferencias entre una y otra) y dos diferentes frecuencias de oscilación compiten por ser el primer inestable. Finalmente, otro incremento en R_H hace que

el modo *Obo* sea el primer inestable.

La figura 5-6 puede caracterizar el comportamiento de un fluido correspondiente a una mezcla [41] de aire y H_2 de 20% a 50%. Un incremento mayor en el número de Prandtl conduce a la elevación de la curva de *Lo1* seguida por un cambio en la pendiente de la curva de *Obo*. Este comportamiento hace que el nuevo punto de codimensión dos entre *Obo* y *Ls1* tenga un $R_{VC} \neq 0$ pero, a la vez produce un decremento en el valor correspondiente de R_H del punto de cruce. En particular, para $Pr=0.5$ ese punto está en $R_H = 12244$ con los valores (1464.59,1.7,115.13) a $\phi_C = 65^\circ$ para *Obo* y (1464.59,8.2,0) para *Ls1*. Sin embargo, con estos cambios, ahora el modo longitudinal estacionario par *Ls1* es el más inestable en un rango de R_H (ver figura 5-6 a)). *Ls1* cruza el eje $R_V = 0$ en $R_H = 12359$ con los valores (0,8.2,0). El modo *Obo* comienza a ser el más inestable cuando $R_H = 7730$ con valores (5066.46, 1.5, 60.57) a $\phi_C = 89^\circ$. El primer punto de codimensión dos ocurre entre *Ts* y *Lo1* en $R_H = 1147$ con valores (3764.7, 2.9, 0) y (3764, 2.7, 10.83), respectivamente. En la figura 5-6 b) se observa claramente que el número de onda para *Lo1* es siempre menor que para *Ts* y *Obo*. La frecuencia crítica de la oscilación de *Lo1* presentada en la figura 5-6 c) incrementa con respecto al caso de $Pr=0.2$ y la frecuencia de *Obo* es aún mayor. Puede verse en 5-6 d), el salto en el ángulo crítico de la perturbación debido a la competencia entre pares de modos. El primer salto es entre *Ts* y *Lo1*, seguido por *Lo1* y *Obo* y finalmente, entre *Obo* y *Ls1*.

La figura 5-7 presenta resultados para $Pr = 1$, que corresponde aproximadamente a la mezcla binaria de gases: aire y vapor de agua (80-90% vapor de agua) a $17^\circ C$ y vapor de agua sobrecalentado [41] a $200^\circ C$, ambos a presión atmosférica. Esta figura es posible compararla con los resultados de Nield [8]. Es importante resaltar que se ha ampliado el rango de R_H usado en los cálculos. Los resultados de la figura 5-7 a), muestran que incrementando R_H desde cero, el primer modo más inestables es *Ts* hasta $R_H = 1563$. A partir de este último valor lo es el modo *Lo1*, hasta que al llegar a $R_H = 6785$ es superado por el modo oblicuo *Obo*. En $R_H = 8957$ el modo oblicuo es superado por el modo *Ls2* y finalmente en $R_H = 11020$ el modo longitudinal estacionario par llega a ser el primer modo inestable. Para este valor del úmero de Prandtl aparecen dos puntos de codimensión dos: el primero, encontrado ya por Nield [8], ocurre en $R_H = 1563$ con (5659, 2.7, 0,0) para *Ts* y (5659,2.8,12.87,90) para *Lo1*. El otro aparece en $R_H = 8957$ con (27714, 2.4, 124.52) a $\phi = 60^\circ$ para *Obo* y (27714, 7.4, 0, 90) para *Ls2*. Nótese

que éste es un punto de codimensión dos nuevo, que se debe a la sorprendente presencia del modo $LS2$ como el primer inestable en un rango de R_H . La intersección entre $LS1$ y $LS2$ se localiza en $R_H = 11020$ y $(19221, 8.1, 0)$ para $LS1$ y $(19221, 8.1, 0)$ para $LS2$ (es correcto, ambos tienen el mismo número de onda). El modo $LS1$ es el primero que cruza el eje $R_{VC} = 0$ en $R_H = 12998$ con los parámetros $(0,8.3,0)$. Solamente bajo estas curvas de estabilidad el flujo básico permanece estable. El modo oblicuo aparece aproximadamente entre $R_H = 6700$ y $R_H = 6750$

Como puede verse, para $Pr = 1$, la magnitud de R_{VC} para todas las curvas de criticalidad son muy grandes en comparación con 1708, lo que muestra el gran efecto estabilizador de R_H . Por lo tanto, este fuerte efecto de R_H es la razón por la que el modo muy estable $LS2$ ha sido alcanzado por el modo Obo y ser el primer modo inestable en un rango de R_H . Como referencia, también se muestra el modo transversal oscilatorio To . En la figura 5-7 b) es interesante notar que los números de onda crítico de $Lo1$ son mayores que los de TS , pero menores que los del modo Obo . También las frecuencias críticas de Obo son mayores que las de $Lo1$ (ver 5-7 c)).

La figura 5-7 d) representa el ángulo crítico de propagación de la perturbación ϕ_C . Nótese en la figura que la inestabilidad del modo oblicuo oscilatorio ocurre aproximadamente a $\phi_C = 75^\circ$ para $R_H = 6785$ y termina alrededor de $\phi_C = 60^\circ$ para $R_H = 8957$, donde el modo $LS2$ es ya el más inestable. Las líneas punteadas indican los ángulos de existencia del modo oblicuo, pero ya no es el primer inestable. Es importante mencionar que el modo oblicuo oscilatorio comienza a aparecer alrededor de $R_H = 6710$, que es mayor que la máxima magnitud investigada por Nield [8] en su figura 4. Así que, el haber ampliado el rango de R_H ha sido de gran importancia en la presente investigación porque, también ha sido posible mostrar que el modo longitudinal estacionario impar puede ser también el modo más inestable, seguido por el modo longitudinal estacionario par.

La figura 5-8a muestra los valores de R_{VC} , contra R_H para $Pr = 2$. Esto corresponde aproximadamente a amoníaco líquido saturado [41] a -30°C y presión atmosférica. Los modos que no son importantes para números de Prandtl pequeños, aquí son los modos dominantes para casi todo el rango de R_H . En la figura 5-8 la inestabilidad es dominada por los modos longitudinales estacionarios ($LS1$ y $LS2$) y el modo oblicuo oscilatorio Obo . Nótese también que el modo transversal oscilatorio está muy cerca a estos modos en una rango de R_H . El modo

$Ls1$ tiene el valor de $R_{VC} = 1708$ cuando $R_H = 0$ y desde aquí es el primer inestable hasta $R_H = 2884$ cuando el modo longitudinal oscilatorio par $Lo1$ comienza a ser el primer inestable. Un punto de codimensión dos aparece cuando los parámetros, en el orden $(R_H, R_V, \alpha, \sigma)$ son $(2884, 11519.92, 5.4, 0)$ y $(2884, 11519.92, 2.7, 24.82)$ para $Ls1$ y para $Lo1$, respectivamente. El modo longitudinal oscilatorio par aún juega un papel importante en la inestabilidad para $Pr = 2$. El modo $Lo1$ es muy estable para números de Prandtl mayores, como se observa en el aumento continuo de la pendiente conforme el número de Prandtl aumenta. El modo oblicuo Obo comienza a ser el más inestable a partir de $(5525, 21700.59, 4.8, 124.11)$ a 41° cuando el modo $Lo1$ se caracteriza por tener los valores $(5525, 21700.59, 2.5, 61.91)$. Otro punto de codimensión dos aparece cuando los modos Obo y $Ls2$ se cruzan en los puntos, $(7374, 26591.92, 5.7, 261.49)$ a 23° y $(7374, 26591.92, 6.4, 0)$, para Obo y $Ls2$, respectivamente. A partir de este punto, el modo $Ls2$ es el primer inestable hasta que el punto en que es interceptado por el modo $Ls1$, con los valores $(11632.5, 16053.48, 8.1, 0)$ para $Ls1$ y $(11632.5, 16053.48, 8.0, 0)$ para $Ls2$. Finalmente, el modo $Ls1$ es el primero en tocar el eje horizontal $R_{VC} = 0$ cuando $R_H = 13360 \cdot 36$, seguido por el modo $Ls2$ en $R_H = 13499$. los números de onda en estos puntos son: $\alpha_C = 8 \cdot 3$ y $\alpha_C = 8 \cdot 5$ para $Ls1$ y $Ls2$, respectivamente.

La figura 5-9 a) presenta los valores críticos R_{VC} contra R_H para $Pr = 10$, que corresponde aproximadamente al agua líquida saturada [41] a 10°C y presión atmosférica. Los modos que no son importantes para números de Prandtl pequeños, de nuevo aquí su importancia es evidente para casi todo el rango de R_H . En la figura 5-9 a) la inestabilidad es dominada por los modos longitudinales estacionarios ($Ls1$ y $Ls2$) y el transversal oscilatorio To . Ahora el modo transversal oscilatorio To es el primer inestable en una rango de R_H . El modo $Ls1$ es el primer inestable desde $R_H = 0$ hasta $R_H = 4538 \cdot 5$. En este último punto los valores críticos son $(4538.5, 17641.42, 5.22, 0)$. A su vez, a partir de este punto el modo transversal oscilatorio comienza a ser el más inestable, teniendo los valores $(4538.5, 17641.42, 4.51, 144.76)$. Se observa que tiene el mismo valor para R_H y R_{VC} pero números de onda y frecuencia distintos, formando con ello un primer punto de codimensión dos. El modo To deja de ser el primer inestable cuando $(6548, 23890.02, 5.75, 279.79)$. Para este valor de R_H , el modo $Ls2$ ya ha alcanzado al modo To , por lo que se tiene un segundo punto de codimensión dos con $(6548, 23890.02, 5.84, 0)$. Finalmente, el modo $Ls2$ deja de ser el primer inestable cuando es interceptado por el modo

$Ls1$ en $(12039.8, 14026.42, 7.95, 0)$ para $Ls2$ y $(12039.8, 14026.42, 7.98, 0)$ para $Ls1$. A partir de $R_H = 12039 \cdot 8$ y hasta $R_H = 13641 \cdot 77$, el modo $Ls1$ es el primer inestable. A pesar de que ya había sido el primer inestable en un determinado rango de R_H , aquí vuelve a tomar el papel importante de la estabilidad del sistema. En $R_H = 13641 \cdot 77$ cruza el eje horizontal ($R_{VC} = 0$). En este punto, el modo $Ls1$ está caracterizado por los valores $(13641.77, 0.0, 8.3, 0)$. A la caída de la curva de $Ls1$ en $R_{VC} = 0$, le siguen la de $Ls2$ y la de To . Obsérvese que, en este punto 5-9 b), los números de onda para $Ls1$ y $Ls2$, son casi similares. En la figura 5-9, se presenta la frecuencia crítica σ_C de la oscilación. En la figura 5-10 se han dibujado los campos de velocidad, sus respectivas líneas de corriente e isothermas para $(6000, 22366.89, 5.4, 240.31)$ de To , en el cual es el primer modo inestable.

La figura 5-11 a) presenta el caso para $Pr = 100$, correspondiente aproximadamente a fluido hidráulico (MIL-H-5606) [41] (aceite de base petróleo) a 75°C y presión atmosférica. Es notable que los modos longitudinales estacionarios, han ampliado enormemente la posibilidad de ser los primeros inestables para casi todo el rango de R_H . Ahora el modo transversal oscilatorio To es el primer inestable en un rango más pequeño de R_H , esto es, desde $R_H = 5434$ hasta $R_H = 5849$. Puede verse claramente que ambos puntos de codimensión dos están muy cerca uno del otro, a diferencia de los casos previos (por ejemplo $Pr = 1$ y $Pr = 10$). El primer punto de codimensión dos ocurre entre los modos $Ls1$ y To en $(5434, 21212.30, 5.18, 214.36)$ para To y en $(5434, 21212.30, 5.32, 0.0)$ para $Ls1$. El segundo punto de codimensión dos ocurre entre los modos To y $Ls2$ en $(5849, 22651.01, 5.47, 244.10)$ para To y en $(5849, 22651.01, 5.64, 0.0)$ para $Ls2$. El punto de cruce entre los modos $Ls1$ y $Ls2$ a lo largo de las curvas de criticalidad ocurre en $(12113.9, 13677.10, 7.95, 0)$ y $(12113.9, 13677.10, 7.91, 0)$ para $Ls1$ y $Ls2$, respectivamente. A partir del segundo punto de codimensión dos hasta el punto de cruce entre $Ls1$ y $Ls2$, el modo $Ls2$ es el primer inestable hasta que, finalmente es superado por el modo $Ls1$ quien es el primero en cruzar el eje horizontal en $R_{HC} = 13704$ con $\alpha_C = 8 \cdot 3$. Se han dibujado en la figura 5-11 a), las configuraciones de flujo que corresponden a estos modos, en la región en que son importantes para la inestabilidad. La figura 5-11 b), muestra los números de onda críticos y en la figura 5-11 c), se presenta la frecuencia crítica σ_C de la oscilación.

La figura 5-12 a) presenta el caso para $Pr = 500$, correspondiente aproximadamente a fluido hidráulico (MIL-H-5606) [41] (aceite de base petróleo) a 0°C y presión atmosférica. La situación

es casi similar al caso de $Pr = 100$, pero aún tenemos algunas diferencias importantes. Con la notable posibilidad de los modos longitudinales estacionarios de ser los más inestables casi para todo el rango de R_H pues ahora el modo transversal oscilatorio To se presenta como el primer inestable en una rango más pequeño de R_H , esto es, desde $R_H = 5564$ hasta $R_H = 5793$. De ello se distingue claramente que ambos puntos de codimensión dos se han movido lo suficiente para estar más cerca uno del otro. Nuevamente, el primer punto de codimensión dos ocurre entre los modos $Ls1$ y To en $(5564, 21754.60, 5.29, 224.99)$ para To y en $(5564, 21754.60, 5.38, 0.0)$ para $Ls1$. El segundo punto de codimensión dos ocurre entre los modos To y $Ls2$ en $(5793, 22548.20, 5.44, 241.09)$ para To y en $(5793, 22548.20, 5.62, 0.0)$ para $Ls2$. Los modos $Ls1$ y $Ls2$ se cruzan en $(12120, 13648.73, 7.94, 0)$ y $(12120, 13648.73, 7.91, 0)$ para $Ls1$ y $Ls2$, respectivamente. Desde el segundo punto de codimensión dos hasta el punto de cruce entre $Ls1$ y $Ls2$, el modo $Ls2$ es el primer inestable. En este punto el modo $Ls1$ comienza a ser el primer inestable y el primero en cruzar el eje horizontal en $R_{HC} = 13709 \cdot 8$ con $\alpha_C = 8 \cdot 3$. También se han dibujado en la figura 5-11 a) las configuraciones de flujo que corresponden a estos modos, en las regiones en que aparecen como los primeros inestables. Las figuras 5-12 b) y 5-12 c), muestran los números de onda críticos y la frecuencia crítica σ_C de la oscilación. También se observa una disminución en la altura que corresponde al área de estabilidad marginal (comparar las figuras 5-7 ó 5-8 con 5-9 y 5-11). Finalmente es importante decir que los resultados para $Pr = 1000$, al parecer no cambián demasiado respecto de $Pr = 500$, razón por la cual se omite la presentación de este caso.

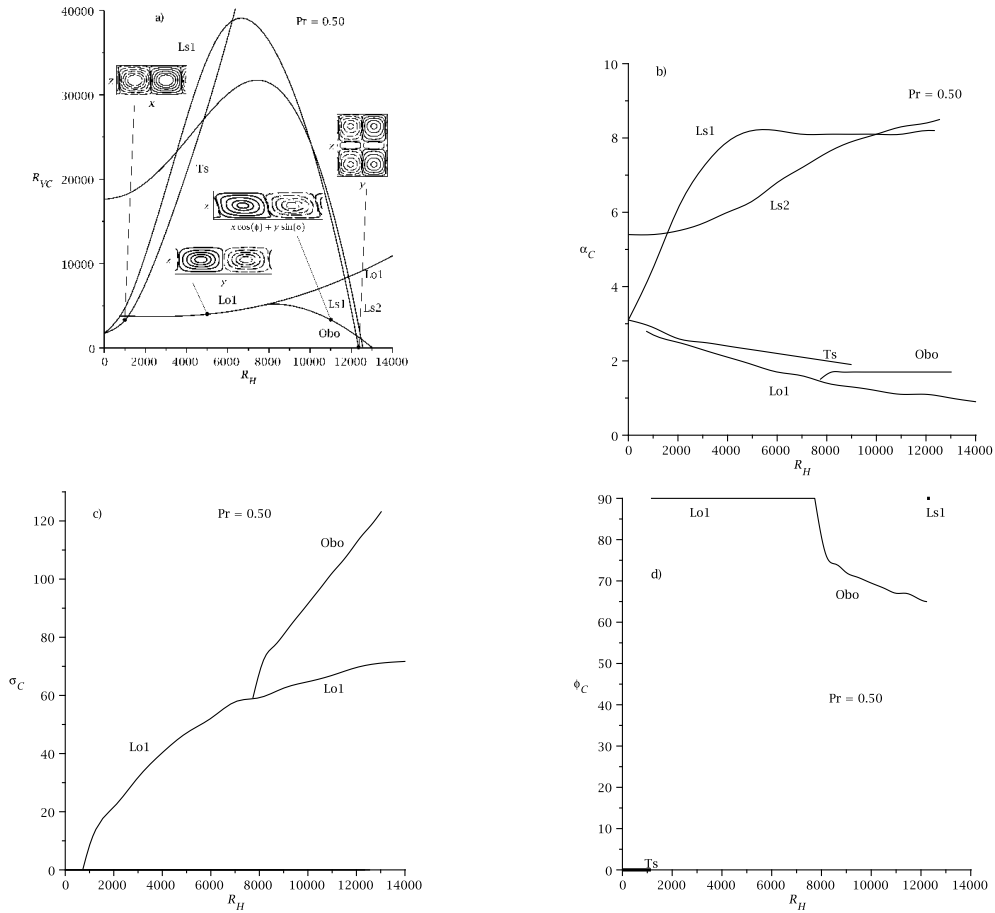


Figura 5-6 – Gráficas of R_{VC} , α_C , σ_C y ϕ_C vs R_H para $Pr=0.5$. Al incrementar R_H desde cero el primer modo inestable es Ts hasta llegar a $R_H=1147$, valor a partir del cual el modo $Lo1$ comienza a ser el primer inestable. Cuando $R_H=7730$, aparece el nuevo modo oblicuo oscilatorio Obo como primer inestable y lo sigue siendo hasta $R_H=12244$, punto donde interseca al modo $Ls1$ que continúa como primer inestable y el primero en intersectar el eje de R_H en $R_H = 12358$. Aparecen dos puntos de codimensión dos: uno de ellos en $R_H = 1147$ entre los modos Ts y $Lo1$, el otro en $R_H = 12244$ entre los modos Obo y $Ls1$. En las figuras b), c) y d) se presentan el número de onda, frecuencia y ángulo críticos de la perturbación. Se han dibujado las configuraciones de flujo que corresponden a los siguientes datos dados en el orden $(R_H, R_{VC}, \alpha_C, \sigma_C)$: Ts (1000, 3279.64, 2.9, 0.0), $Lo1$ (5000, 3987.34, 1.9, 47.16), Obo (11000, 3327.59, 1.7, 102.12) a 67° y $Ls1$ (12358.81, 0.0, 8.2, 0.0)

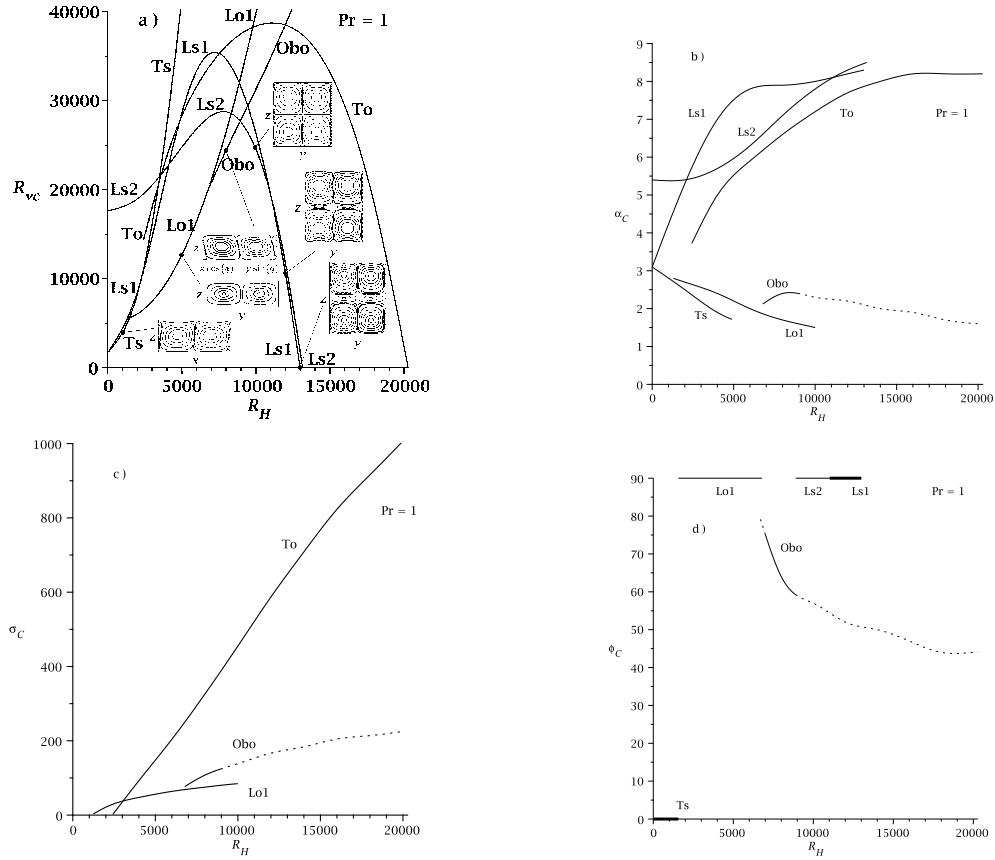


Figura 5-7 – Gráficas of R_{VC} , α_C , σ_C y ϕ_C vs R_H para $Pr = 1$. Desde $R_H = 0$ hasta $R_H = 1563$, el primer modo inestable es Ts . A partir de este último valor y hasta $R_H = 6785$, lo es el modo $Lo1$. En $R_H = 6785$, aparece el modo Obo y es el primer inestable hasta que su curva interseca la curva del modo $Ls2$ en $R_H = 8957$. El modo $Ls2$ es el primer inestable hasta $R_H = 11020$, donde el modo $Ls1$ aparece como inestabilidad y es el primero en cruzar en eje horizontal en $R_H = 12998$. En $R_H = 1563$ aparece un punto de codimensión dos entre los modos Ts y $Lo1$. Otro punto de codimensión dos aparece en $R_H = 8957$ entre los modos Obo y $Ls2$. Los valores críticos de número de onda, frecuencia y ángulo de propagación de la perturbación se muestran en las figuras b), c) y d). Las líneas de corriente presentadas corresponden a los valores siguientes en el orden $(R_H, R_{VC}, \alpha_C, \sigma_C)$: $Ts(1000, 3319.29, 2.9, 0.0)$, $Lo1(5000, 12646.39, 2.2, 56.68)$, $Obo(8000, 24448.55, 2.4, 107.54)$ a 64° , $Ls2(10000, 24583.05, 7.8, 0.0)$, $Ls1(12000, 10575.26, 8.2, 0.0)$ y $Ls1(12998.04, 0.0, 8.3, 0.0)$

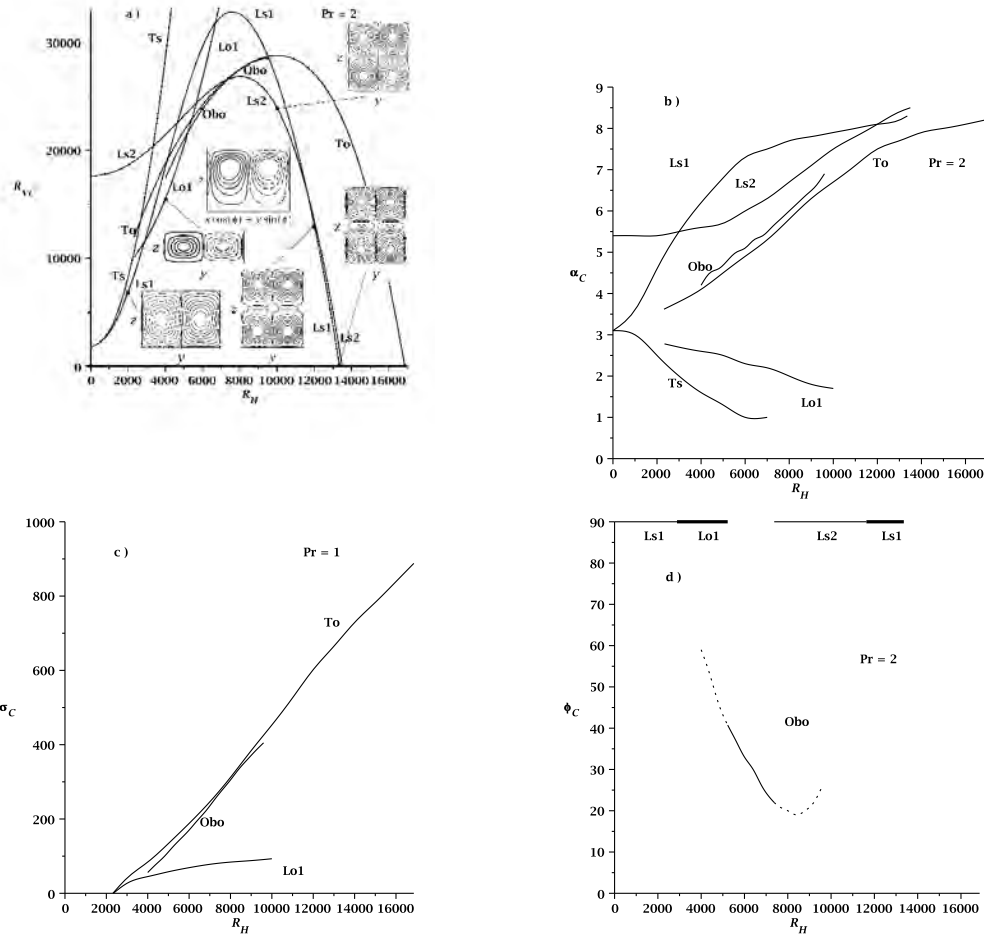


Figura 5-8 – Gráficas of R_{VC} , α_C , σ_C y ϕ_C vs R_H para $Pr = 2$. En la figura a), los primeros modos inestables son, $Ls1$ desde $R_H = 0$ hasta $R_H = 2884$, donde $Lo1$ comienza a ser el primer modo inestable. Aquí se localiza un primer punto de codimensión dos. El modo $Lo1$ continúa siendo el primer inestable hasta que el modo Obo toma valores críticos menores en $R_H = 5225$. El modo $Ls2$ interseca al modo Obo en $R_H = 7374$, formando aquí un segundo punto de codimensión dos. $Ls1$ comienza a ser el primer modo inestable en $R_H = 11632 \cdot 5$, punto de cruce entre $Ls2$ y $Ls1$. Finalmente $Ls1$ cruza el eje horizontal, $R_{VC} = 0$, en $R_H = 13360 \cdot 36$. Las b), c) y d) presentan los números de onda, frecuencia y ángulo críticos de la perturbación. Las líneas de corriente presentadas corresponden a los valores siguientes en el orden $(R_H, R_{VC}, \alpha_C, \sigma_C)$: $Ls1(2000, 6866.00, 4.6, 0.0)$, $Lo1(4000, 15496.85, 2.6, 45.27)$, $Obo(6000, 23826.13, 5.1, 170.74)$ a 33° , $Ls2(10000, 23935.48, 7.5, 0.0)$, $Ls1(12000, 13070.79, 8.1, 0.0)$ y $Ls1(13360.36, 0.0, 8.3, 0.0)$

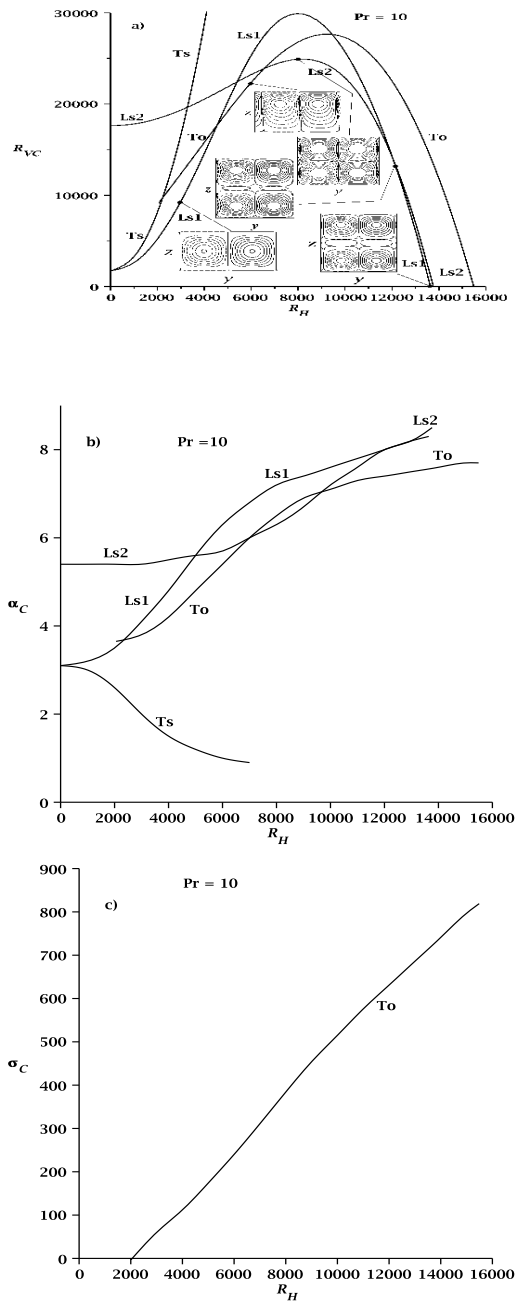


Figura 5-9 – Gráficas de R_{VC} , α_C , y σ_C vs R_H para $Pr = 10$. En la figura a), $Ls1$ es el primer modo inestable desde $R_H = 0$ hasta $R_H = 4538 \cdot 5$, punto en que To comienza a ser el primer modo inestable. Aquí se localiza un primer punto de codimensión dos. El modo To continúa siendo el primer inestable hasta que en $R_H = 12039 \cdot 8$, el modo $Ls2$ toma valores críticos menores formando aquí un segundo punto de codimensión dos. El modo $Ls2$ intersecta al modo $Ls1$ en $R_H = 12039 \cdot 8$. Finalmente $Ls1$ cruza el eje horizontal, $R_{VC} = 0$, en $R_H = 13641 \cdot 77$. Las b) y c) presentan los números de onda y frecuencia de la perturbación. Las líneas de corriente presentadas ocurren en los valores siguientes en el orden $(R_H, R_{VC}, \alpha_C, \sigma_C)$: $Ls1$ (3000, 9311.87, 4.1, 0.0), To (6000, 22366.89, 5.4, 240.31), $Ls2$ (8000, 24388.35, 6.2, 0.0), $Ls1$ (12100, 13445.38, 8.0, 0.0) y $Ls1$ (13641.77, 0.0, 8.3, 0.0)

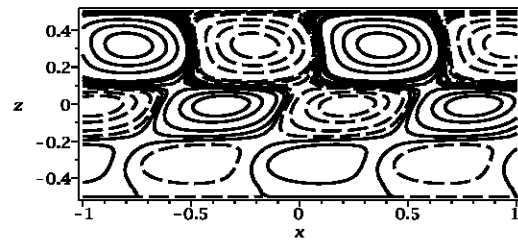
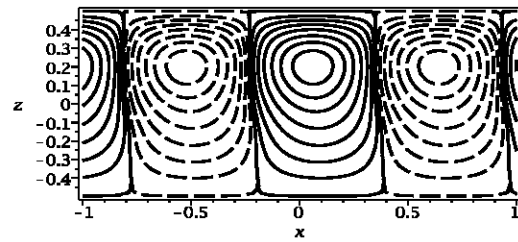
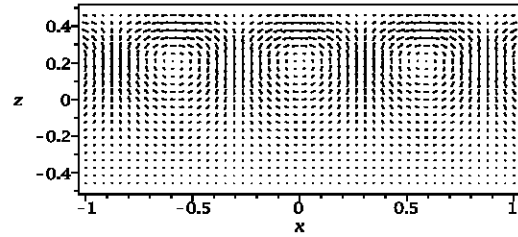


Figura 5-10 – Campo de velocidades, líneas de corriente e isotermas para $Pr = 10$ cuando $R_H = 6000$, $R_{VC} = 22366 \cdot 89$, $\alpha_C = 5 \cdot 4$, $\sigma_C = 240 \cdot 31$

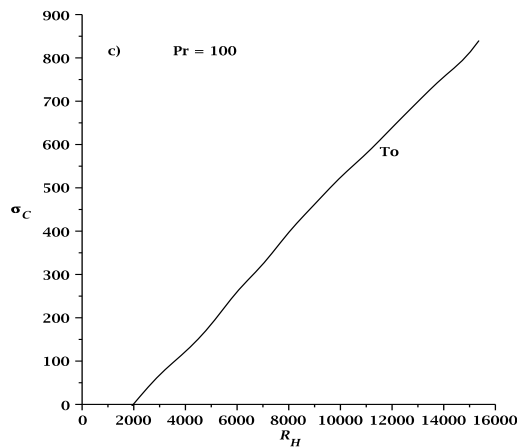
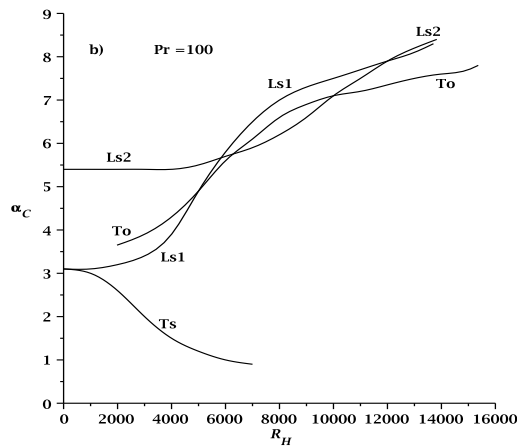
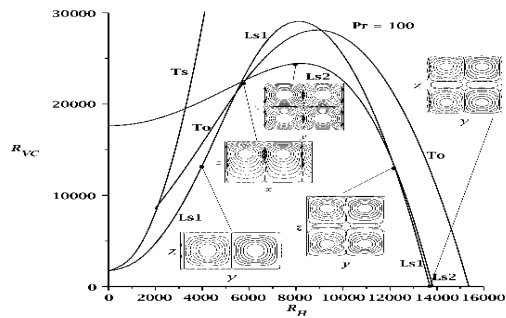


Figura 5-11 – Gráficas of R_{VC} , α_C , y σ_C vs R_H para $Pr = 100$. En la figura a), L_{S1} es el primer modo inestable desde $R_H = 0$ hasta $R_H = 5434$, punto en que To comienza a ser el primer modo inestable. Aquí se localiza un primer punto de codimensión dos. El modo To continúa siendo el primer inestable hasta que en $R_H = 5849$, el modo L_{S2} toma valores críticos menores formando aquí un segundo punto de codimensión dos. El modo L_{S2} interseca al modo L_{S1} en $R_H = 12113 \cdot 9$. Finalmente L_{S1} cruza el eje horizontal, $R_{VC} = 0$, en $R_H = 13704 \cdot 27$. Las b) y c) presentan los números de onda y frecuencia de la perturbación. Las líneas de corriente se presentan para valores en el siguientes orden $(R_H, R_{VC}, \alpha_C, \sigma_C)$: $L_{S1}(4000, 13269.41, 3.9, 0.0)$, $To(5700, 22230.38, 5.4, 235.31)$, $L_{S2}(8000, 24388.35, 6.2, 0.0)$, $L_{S1}(12150, 13825.63, 8.0, 0.0)$ y $L_{S1}(13704.27, 0.0, 8.3, 0.0)$

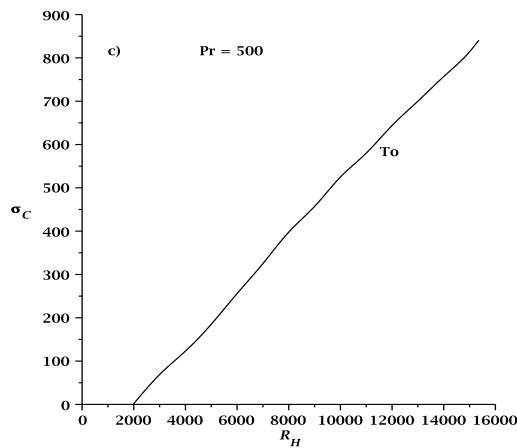
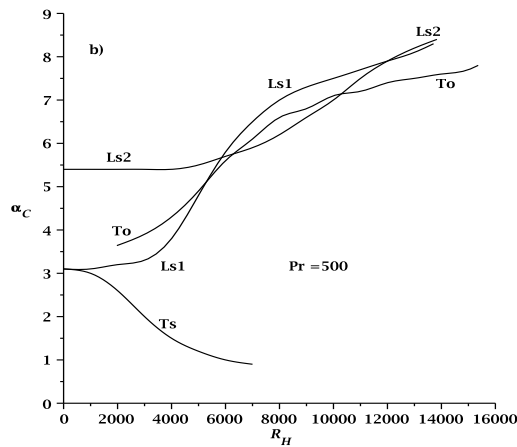
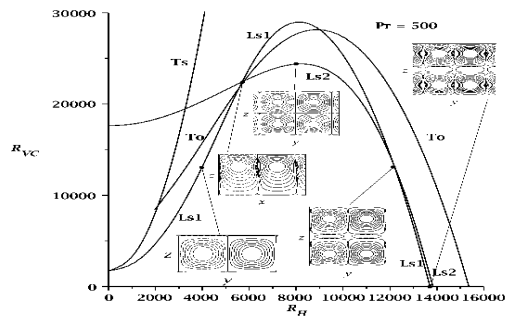


Figura 5-12 – Gráficas of R_{VC} , α_C , y σ_C vs R_H para $Pr = 500$. En la figura a), $Ls1$ es el primer modo inestable desde $R_H = 0$ hasta $R_H = 5564$, punto en que To comienza a ser el primer modo inestable. Aquí se localiza un primer punto de codimensión dos. El modo To continúa siendo el primer inestable hasta que, en $R_H = 5793$, el modo $Ls2$ toma valores críticos menores formando aquí un segundo punto de codimensión dos. El modo $Ls2$ intersecta al modo $Ls1$ en $R_H = 12120$. Finalmente $Ls1$ cruza el eje horizontal, $R_{VC} = 0$, en $R_H = 13709.79$. Las figuras b) y c) presentan los números de onda y frecuencia de la perturbación. Las líneas de corriente presentadas ocurren en los valores siguientes en el orden $(R_H, R_{VC}, \alpha_C, \sigma_C)$: $Ls1$ (4000, 1313.30, 3.8, 0.0), To (5700, 22230.38, 5.4, 235.31), $Ls2$ (8000, 24373.64, 6.2, 0.0), $Ls1$ (12150, 13303.25, 8.0, 0.0) y $Ls1$ (13709.79, 0.0, 8.3, 0.0)

Capítulo 6

Discusión

Se han presentado una gran variedad de resultados. Ahora, se dará una explicación sobre estabilidad para dar soporte a los resultados obtenidos. Una característica importante del flujo inducido por un gradiente de temperatura inclinado es el perfil básico de temperatura dado en la ecuación 3-19. Esta ecuación es de quinto orden en z , en contraste con el problema de convección natural en paredes paralelas inclinadas, donde el perfil de temperatura es lineal. Así que, se espera que los resultados sean diferentes aún cuando los perfiles de velocidad sean similares. En la ecuación 3-19, la parte que depende de z , tiene 5 raíces. Cruza el eje de z en $z = 0$, el cual puede mostrarse siempre es un punto de inflexión. Existen otras cuatro raíces, dos de las cuales están fuera del rango de z que se considera para el flujo y las otras dos, que se calculan de $z^2 = (5R_H^2 - 2(R_H^2 + 4320R_V)^{1/2})/12R_H$, existen si $5R_H^2 - 2(R_H^2 + 4320R_V)^{1/2} \geq 0$, es decir, cuando $R_H^2 \geq 5760R_V/7$. Nótese que cuando la igualdad se satisface, $z = 0$ llega a ser una raíz de multiplicidad tres y las otras dos raíces permanecen fuera del rango de z . La derivada de la temperatura tiene dos raíces en el rango de interés de z , calculado de $z^2 = (15R_H^2 - 2(30R_H^2 + 21600R_V)^{1/2})/60R_H$ y existen si $15R_H^2 - 2(R_H^2 + 21600R_V)^{1/2} \geq 0$, que corresponde a $R_H^2 \geq 5760R_V/7$, que es la misma condición para la temperatura. La segunda derivada de la temperatura es $d^2T/dz^2 = R_H^2 z(z^2 - 1/4)/6$, lo cual muestra que $z = 0$, es el punto de inflexión en el rango de z . Nótese que si la condición $R_H^2 \geq 5760R_V/7$ se satisface, un máximo aparece en $0 < z < 1/2$ y un mínimo en $-1/2 < z < 0$. Si las condiciones no se satisfacen, únicamente un punto de inflexión está presente y la temperatura decrece monóticamente con respecto a z . Esto es sumamente importante ya que sólo se formará una

celda de convección dentro de las paredes.

Cuando las condiciones se satisfacen, el perfil de temperatura muestra dos regiones inestables dentro de las paredes debido a la aparición del máximo y del mínimo. Las regiones inestables se forman según lo siguiente: La primera entre la diferencia de temperatura entre la pared superior y el punto del máximo y la segunda entre la pared inferior y el punto del mínimo. Esto tiene como consecuencia importante la formación de una región muy estable en la parte intermedia entre el punto del máximo (arriba) y el punto del mínimo. Esto contribuye a estabilizar el flujo cuando R_H se incrementa, como se ve claramente en las curvas de criticalidad de los resultados previos, cuando el número de Prandtl es lo suficientemente grande (esto es, a partir de $Pr = 0 \cdot 2$). Esta región estable es la responsable de la necesidad de incrementar R_H a una magnitud mucho más grande de la requerida por la condición $R_H^2 \geq 5760R_V/7$ para poder excitar otros modos de inestabilidad. Nótese que, en valor absoluto, la localización del máximo y del mínimo en z aumenta cuando R_H crece (figs. 6-1 y 6-2) provocando un aumento en el espesor de la capa estable. Esto sucede de modo que con las dos regiones inestables es posible promover la aparición del modo impar (ver las líneas de corriente para las dos celdas del modo longitudinal estacionario impar Ls2 en la figura 5-7 a)) y de un modo armónico de la solución par (ver las líneas de corriente para las tres celdas del modo longitudinal estacionario par Ls1 en la figura 5-7 a)).

Nótese que a lo largo de las verticales $y = 0, \pm 0.4$ en la figura 6-3 (figura ubicada en la parte superior), esto es $y = 0$, la velocidad vertical tiene un máximo y/o mínimo. Esto se debe a que en esa región se esperan verticalmente grandes diferencias de temperatura de la capa de fluido. También a lo largo de las líneas verticales $z = \pm 0.2$, la velocidad vertical de la perturbación es cero, debido a que todas las partículas de fluido tienen la misma temperatura y ni una es más densa que la otra como para desplazarse verticalmente. En este punto la componente horizontal de la perturbación de la velocidad es un máximo en valor absoluto.

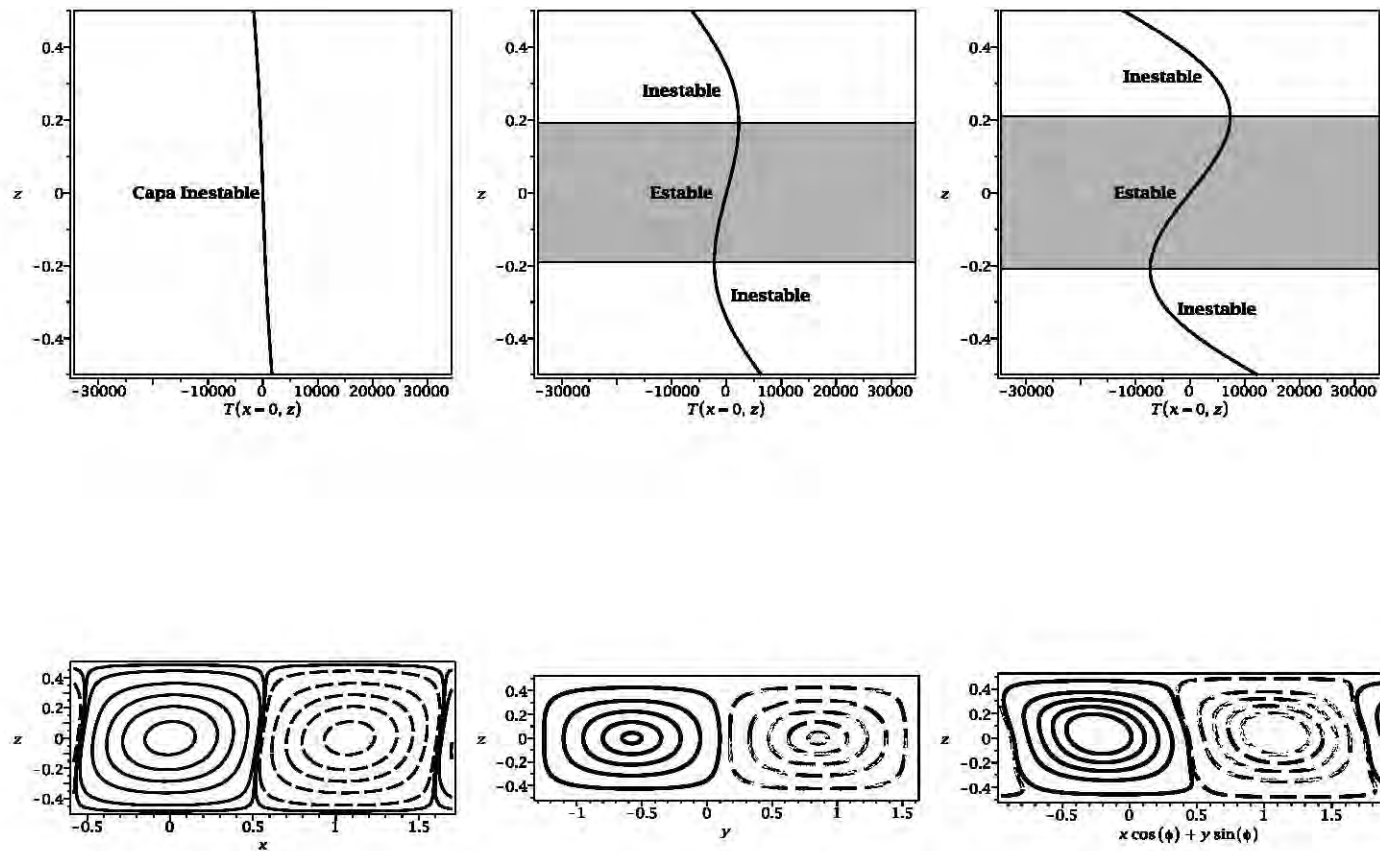


Figura 6-1 – Regiones estables y configuraciones de flujo debidas al perfil básico de temperaturas. Esto corresponde para $Pr = 1$ para modos T_s , $Lo1$ y Obo , estos modos ya representados en la figura 5-7

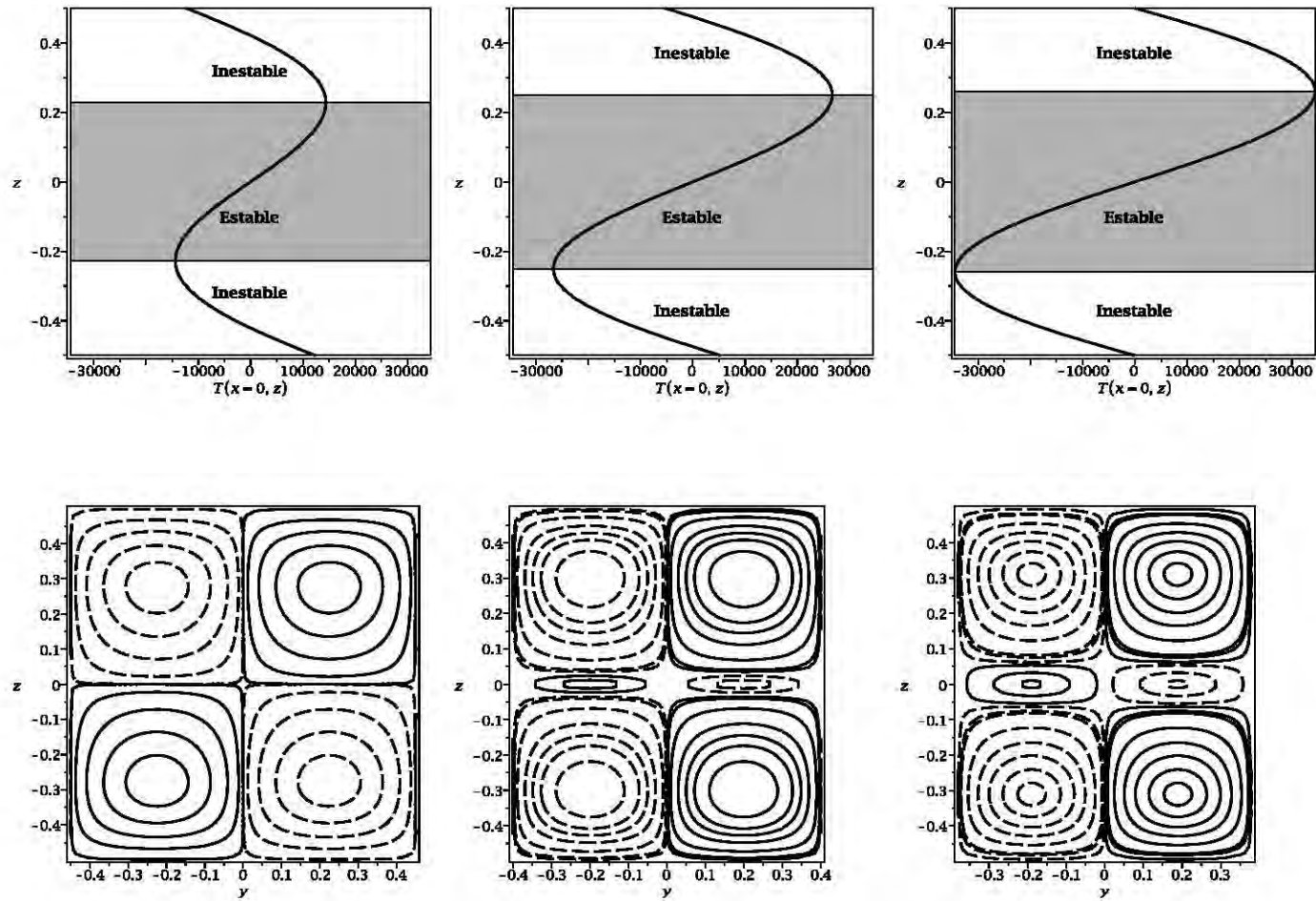


Figura 6-2 – Regiones estables y configuraciones de flujo debidas al perfil básico de temperaturas. Esto corresponde para $Pr = 1$, los modos corresponden a $Ls2$ y $Ls1$ tomados de la figura 5-7

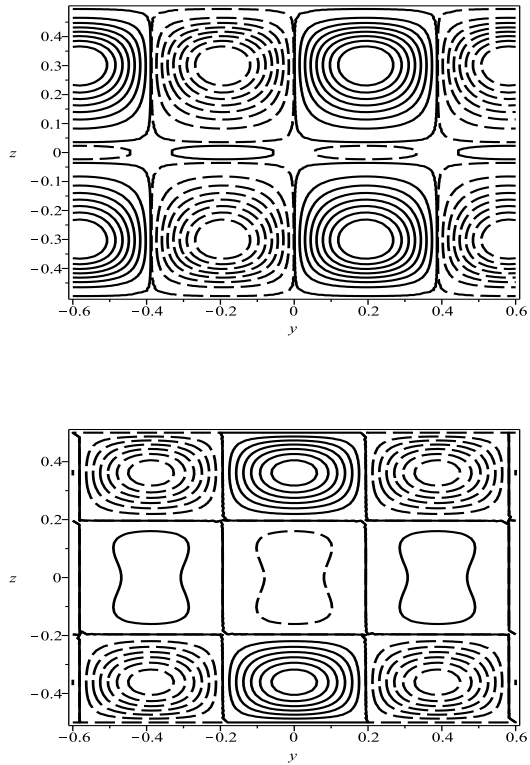


Figura 6-3 – Líneas de corriente e isotermas para el modo Ls2 cuando $Pr=2$, $R_H = 12000$, $R_{VC} = 13070 \cdot 7910$, $\alpha_C = 8.1$

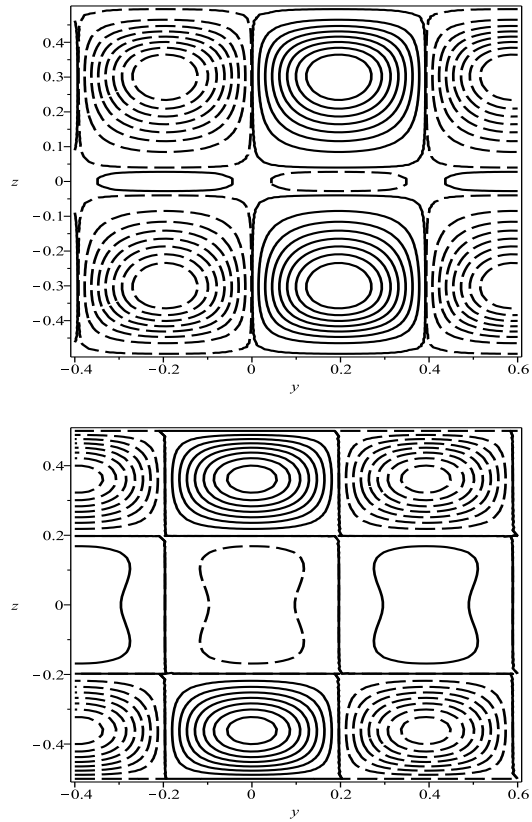


Figura 6-4 – Líneas de corriente para el modo Ls1 cuando $Pr=500$, $R_H = 12150$, $R_{VC}= 13303.2526$, $\alpha_C = 8.0$

Entre las propiedades de las funciones propias [46], la propiedad de simetría es muy importante. La simetría se refleja en la paridad de las funciones. Una función arbitraria $f(z)$ puede descomponerse en la suma de dos funciones de paridad definida, par o impar respecto del origen. Los términos $(z^2 - 1/4)^2 z^{2(i-1)}$, con i entero (ver la ecuación 4-1) y los cosenos de grado impar $\{\cos \pi z, \cos 3\pi z \dots\}$ son funciones simétricas respecto al origen (ecuaciones 4-2 y 4-3). Los términos $(z^2 - 1/4)^2 z^{2i-1}$, con i entero y los senos de grado par $\{\sin 2\pi z, \sin 4\pi z \dots\}$ son funciones antisimétricas respecto del origen.

Es claro que las ecuaciones 2-28 y 2-30 del flujo básico y del perfil de temperatura son funciones impares de z . En las ecuaciones 3-23-3-25 de la perturbación aparece el perfil básico de velocidad (impar), su primera derivada (par), su segunda derivada (impar) y la primera derivada (par) del perfil básico de temperatura. Con estas características de simetría, es posible probar que las ecuaciones con perturbaciones longitudinales ($k = 0, l = \alpha$) son simétricas o antisimétricas si w, u y θ son simétricas o antisimétricas, respectivamente. Solamente en este caso los coeficientes de las ecuaciones diferenciales tienen paridad par. Razón por la que no es necesario combinar las soluciones par e impar [1] para perturbaciones longitudinales. Para calcular el modo longitudinal par, solamente son necesarias las funciones pares de las ecuaciones 4-1-4-3. Es importante mencionar que para todas las demás orientaciones los modos par e impar están acoplados y deberán usarse las expresiones completas de 4-1-4-3.

Las simetrías con respecto a $z = 0$ de estos modos pueden verse claramente a través de las líneas de corriente de las celdas de convección de los modos longitudinales. Por ejemplo, para $Pr = 1$, en la figura 5-7, el modo Ls2 muestra antisimetría (paridad impar). Los modos Lo1 y Ls1 son simétricos (ambos tienen paridad par). Para los modos oblicuo y transversal, no hay simetría, lo cual puede verse desde las ecuaciones completas 3-23-3-25 y de las líneas de corriente que corresponden a las celdas mostradas por ejemplo en las figuras 5-1 a), 5-1 a) 5-2 a), 5-3 a), 5-6 a) y 5-7 a).

6.1. Relación con simulaciones numéricas y experimentos

En las curvas de estabilidad mostradas en los incisos a) de las figuras 5-1, 5-2, 5-3, 5-6, 5-7, 5-8, 5-9, 5-11 y 5-12, se ha puesto especial atención. El área bajo la curvas es la región en la cual la configuración básica (descrita por las expresiones 3-17, 3-18 y 3-19) es la que permanece y las curvas representan el umbral entre este estado y el siguiente que adoptará el sistema. Una vez que las diferencias de temperatura excedan ciertos valores críticos (que se reflejan en el R_{HC} y R_{VC}), el sistema estará atravesando estas curvas de estabilidad neutral y por lo tanto la configuración básica cambiará a una nueva configuración. La siguiente posible configuración es lo que se busca en este estudio. Las regiones más allá por arriba de las curvas de estabilidad neutral queda fuera del propósito de este trabajo.

A pesar que en este análisis no se hayan considerado relaciones de aspecto, los resultados muestran coherencia con las simulaciones numéricas de Drummond y Korpela [47] que incluyen resultados con relaciones de aspecto, de los cuales mencionaremos los siguientes: en la Figura 15 de Drummond y Korpela [47], cuando $Pr = 0 \cdot 025$ (caso para el mercurio con $R_{VC} = 0$, Ortiz y Dávalos [40]) y relación de aspecto $A = d/L = 1/15$ con un número de Grashof $Gr = 15000$, la nueva configuración ya está presente (rollos convectivos transversales, i.e. rollos convectivos perpendiculares al flujo básico). Comparando y usando la relación $R_H = PrGr$, obtenemos un valor de $R_{HC} = 375$, el cual es mayor que el valor crítico hallado aquí (Ortiz y Dávalos [40]): $R_{HC} = 218$. Lo anterior indica que ya no estamos en la región donde el flujo básico es estable. También a partir de la figura 15 para $Pr = 0 \cdot 1$ con el mismo valor de A y Gr el estado básico ya no prevalece, debido a que el valor crítico de $R_{HC} = 1278$, Ortiz y Dávalos [40], ya ha sido excedido. En la misma figura pero para $Pr = 0 \cdot 5$, se tiene el valor de $R_H = 7500$ el cual es menor que el valor calculado por Ortiz y Dávalos [40], el cual es $R_{HC} = 12558$. Por lo tanto la configuración será la de un flujo paralelo en la región central (flujo básico).

La figura 11, muestra resultados con la relación de aspecto $A = 1/8$ y con $Gr = 10000$. Para $Pr = 0 \cdot 1$ el flujo básico prevalece ya que el valor de $R_H = 1000$, es menor que el valor crítico calculado $R_{HC} = 1278$, Ortiz y Dávalos [40]. Para $Pr = 0 \cdot 5$, $R_H = 5000$ es menor que el valor calculado $R_{HC} = 12358$ (Ortiz y Dávalos [40]) y el estado inicial es la configuración que se observa. Para $Pr = 1$, $R_H = 10000$ y es menor que el valor crítico calculado $R_{HC} = 12998$ (Ortiz y Dávalos [40]) y la configuración inicial es la que prevalece.

Es importante resaltar que no se tiene conocimiento acerca de experimentos que incluyan ambos tipos de calentamiento: lateral (convección horizontal) y por abajo (convección de Rayleigh). Es bien conocido que el problema de convección por calentamiento por abajo se caracteriza por desestabilizarse alrededor de $R_{VC} = 1708$. En el caso de la convección de Rayleigh, el número de Rayleigh crítico decrece asintóticamente al extender la capa de fluido al valor convencional de 1708. Mientras que a medida que la longitud de la capa se acorta, el número crítico de Rayleigh presenta un incremento muy pronunciado, véase Koschmieder [48]

Hurle et al. [13] hallaron oscilaciones en sus experimentos para galio líquido en pequeñas cavidades abiertas ($d=1.3\text{cm}$, $2\text{cm} < L < 6\text{cm}$ y $W=1.3\text{cm}$), sus resultados muestran un decremento del número de Grashof crítico, Gr_C (aquí se le relaciona a $R_{HC} = Gr_C Pr$) al disminuir la relación de aspecto $A = d/L$ desde 0.5 a 0.25 y tiende asintóticamente a un límite para $A \rightarrow 0 \cdot 2$. En sus experimentos, la suposición que que la superficie es libre no es trivial; ya que la formación de óxidos en la superficie [49] debido a su exposición al aire, ésta se convierte a una superficie rígida en lugar de ser una superficie libre.

En el experimento de Braunsfurth [23], las condiciones para paredes horizontales no son perfectamente conductoras ni perfectamente aislantes. Es muy difícil tener las condiciones de frontera apropiadas y las propiedades del material (galio) son poco conocidas.

Roux et al. [49] abordan el caso cuando $Pr \rightarrow 0$ para una relación de aspecto de $d/L = 0 \cdot 25$; donde concluyen que en este límite, las condiciones de frontera térmicas no juegan un papel importante en hidrodinámica de las inestabilidades y las curvas de estabilidad neutral para las condiciones de fronteras rígidas conductoras y adiabáticas convergen a un mismo valor $Gr_C = 7942$. Por lo anterior se deduce que para números de Prandtl pequeño las curvas de estabilidad neutral para fronteras conductoras rígidas y fronteras rígidas aislantes están muy cercanas.

Hung y Andereck [50], mostraron en su experimento ($d=0.9\text{cm}$, $L=16.1\text{cm}$, $W=16\text{cm}$) que el inicio de la inestabilidad en la forma de rollos oscilatorios longitudinales se retrasa por arriba de los valores críticos que los cálculos bidimensionales predicen (Por ejemplo los realizados por [40]). Este retraso puede ser causado por la presencia de rollos transversales estacionarios. El experimento de Hung y Andereck [50], muestra que las primeras oscilaciones aparecen cuando $Gr = 11000$ ($Pr = 0 \cdot 027$) lo que da un $R_H = 297$, el cual es mayor al valor crítico para el

primer modo inestable (Ts) cuya magnitud calculada es $R_{HC} = 218$, lo anterior indica que el sistema ya no se encuentra en la región donde se mantiene el flujo básico y la configuración básica inicial ya ha cambiado a una nueva configuración.

Capítulo 7

Conclusiones

Se han presentado nuevos resultados del problema de convección natural inducida por un gradiente de temperatura inclinado. Los importantes resultados obtenidos se deben a una mejora en el método numérico de Galerkin. También concuerdan muy bien con los de la literatura relacionados con el problema de convección natural inducido por un gradiente de temperatura horizontal. Los resultados fueron verificados a orden quinto, es decir 10 términos (5 modos pares y 5 impares) de la expansión de las variables usadas. El rango de valores de R_H fue ampliado en comparación del rango usado por Nield [8] y Weber [7], entre otros autores.

El modo transversal estacionario es el modo dominante en el rango $0.026 \leq Pr \leq 0.1364$. Un punto de codimensión dos aparece en $Pr=0.1364$ cuando los modos transversal estacionario y longitudinal oscilatorio par se cruzan en $R_H = 2249$ y $R_{VC} = 0$, punto donde se cruzan por primera vez para $R_V \geq 0$. La presencia de un gradiente de temperatura vertical, representado por R_V , promueve la aparición de este punto de codimensión dos para fluidos con números de Prandtl $Pr > 0.1364$. Este punto de codimensión dos comienza a aparecer debido al incremento de la pendiente de la curva de Ts con Pr , lo que permite al modo $Lo1$ ser en algún punto, el primer inestable. El mismo comportamiento de estas curvas se tiene hasta que se alcanza un determinado valor crítico de Pr y después del cual sus pendientes cambian de manera que ya no cruzan el eje horizontal $R_V = 0$ en el rango de R_H que se investiga. Este valor crítico de Pr para Ts es diferente del valor para $Lo1$. Para Ts éste es cercano a $Pr = 0.4$ (estas son correcciones que se hacen al trabajo de Kuo et al. [6, 17]) y para $Lo1$ es aproximadamente $Pr = 0.46$. Estos dos valores del número de Prandtl son muy importantes debido a que arriba de ellos el

rápido crecimiento de Ts y $Lo1$ con R_H es determinante para que otros modos aparezcan como los primeros inestables. Sin embargo, antes de que el cambio en el pendiente de $Lo1$ ocurra, se tiene un número de Prandtl, después del cual, el nuevo modo oblicuo oscilatorio Obo comienza a aparecer. Con un incremento en el número de Prandtl este modo es capaz de intersectar la curva de $Ls1$ produciendo así un nuevo punto de codimensión dos. Los puntos de codimensión dos (entre Ts y $Lo1$) siguen apareciendo todavía para un número de Prandtl comprendido entre 0.5 y 2. En $Pr = 1$ y $Pr = 2$, otro punto de codimensión dos aparece entre el modo oblicuo oscilatorio Obo y el modo $Ls2$, el cual, aparece como el primer inestable en un rango de R_H . El modo $Ls2$ es ignorado en el caso de convección sólo por gradiente de temperatura vertical ($R_H = 0$) debido a que es muy estable respecto del modo $Ls1$. Sin embargo, debido al fuerte efecto estabilizador de R_H sobre los diferentes modos de inestabilidad, ahora este modo es capaz de ser el primero en desestabilizar la capa de fluido en un rango de R_H .

Para $Pr \geq 10$, los modos longitudinales y el modo transversal oscilatorio son los modos más importantes. Aunque la estabilidad mayormente está determinada por los modos longitudinales. El modo transversal oscilatorio es el primer inestable sólo en un pequeño rango de R_H .

Se han graficado las líneas de corriente de celdas convectivas para magnitudes representativas de R_H y R_{VC} . Con ello es posible entender físicamente los cambios cualitativos y cuantitativos de las celdas bajo la influencia de los distintos parámetros involucrados en el sistema de ecuaciones. El efecto importante del perfil básico de temperatura sobre la estructura de las celdas de convección es evidente cuando existen diferencias de temperatura lo suficientemente grandes entre los valores máximo y mínimo con respecto a los valores en las paredes cuando están presentes grandes magnitudes de R_H . Con esto es posible excitar modos de convección que no se han visto antes, tales son los casos del modo $Ls2$ (dos celdas) y un armónico del modo impar $Ls1$ (tres celdas). Estos vienen a completar una variedad de nuevos resultados, que se tienen para la convección inducida por un gradiente de temperatura inclinado. Los resultados en esta región no hubiesen sido posibles sin la mejora en el método numérico de Galérkin, la nueva región explorada muestra una gran variedad de resultados nuevos, que se muestran al hacer el análisis lineal. En caso que se requiera hacer un análisis no lineal, éste sería alrededor en un solo punto de las curvas de estabilidad marginal. Aquí se presentan los resultados más importantes en un rango mucho más amplio del número de Prandtl. Ahora ya se cuenta con la guía para análisis

más detallados. También está la posibilidad tratar el caso para paredes aislantes y el caso de flujo de calor constante. En particular, los resultados que aquí se muestran, confirman los valores para la convección de Rayleigh y la convección impulsada solamente por calentamiento lateral. También algunas comparaciones con simulaciones numéricas y experimentos verifican la validez de los resultados. En el caso de los metales líquidos, si se quieren evitar las oscilaciones, y con ello los efectos indeseables en la estructura de material sólido producido, resulta conveniente mantener la diferencia de temperatura vertical y el gradiente de temperatura horizontal tal que los parámetros de R_V y R_H , permanezcan en la zona estable (región bajo las curvas de estabilidad neutral) antes de comenzar con el proceso de solidificación del material.

Bibliografía

- [1] J. E. Hart. Stability of thin non-rotating Hadley circulations. *J. Atmos. Sci.*, 29:687–697, 1972.
- [2] G. O. Hughes and R. W. Griffiths. Horizontal convection. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 40:185–208, 2008.
- [3] M. Lappa. Secondary and oscillatory gravitational instabilities in canonical three-dimensional models of crystal growth from the melt. ii: lateral heating and the Hadley circulation. *C. R. Mecanique*, 335:261–268, 2007.
- [4] M. Lappa. *Thermal convection*. Jhon Wiley & Sons, U. K., first edition, 2010.
- [5] E. Jakeman and D. T. J Hurle. Thermal oscillations and their effect on solidification processes. *Rev. Phys. Tech.*, 3(1):3–30, 1972.
- [6] H. P Kuo, S. A. Korpela, A. Chait, and Marcus P. Stability of natural convection in a shallow cavity. In *Proceedings of the 8th International Heat Transfer Conference*, volume 4, pages 1539–1544, 1986.
- [7] J. E. Weber. On the stability of thermally driven shear flow heated from below. *J. Fluid Mech.*, 87(1):65–84, 1978.
- [8] D. A. Nield. Convection induced by an inclined temperature gradient in a shallow horizontal layer. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 15:157–162, 1994.
- [9] P. N. Kaloni and N. Qiao. On the nonlinear stability of thermally driven shear flow heated from below. *Phys. Fluids*, 8(2):639–641, 1996.

- [10] D. N. Riahi. *Flow instability*. Wit Press, Boston, U. S. A., 2000.
- [11] J. Szekely. *Fluid Flow Phenomena in Metals*. Academic Press, Inc., Massachusetts, U. S. A., first edition, 1988.
- [12] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover Publications, Inc., New York, USA, 1981.
- [13] D. T. J. Hurle, E. Jakeman, and Johnson C. P. Convective temperature oscillations in molten gallium. *J. Fluid Mech.*, 64(3):565–576, 1974.
- [14] A. E. Gill. A theory of thermal oscillations in liquid metals. *J. Fluid Mech.*, 64:577–588, 1974.
- [15] J. E. Hart. A note of stability of low-Prandtl-number Hadley circulations. *J. Fluid Mech.*, 132:271–281, 1983.
- [16] I. C. Walton. The effect of a shear flow on convection near a two-dimensional hot-patch. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 38(4):561–574, 1985.
- [17] H. P. Kuo and S. A. Korpela. Stability and finite amplitude natural convection in a shallow cavity with insulated top and bottom and heated from a side. *Phys. Fluids*, 31(1):33–42, 1988.
- [18] T.-M. Wang and S. A. Korpela. Convection rolls in a shallow cavity heated from the side. *Phys. Fluids A*, 1(6):947–953, 1989.
- [19] P. Laure. Study of convective motions in a rectangular cavity with horizontal gradient of temperature. *J. Theoret. Appl. Mech.*, 6(3):351–382, 1987.
- [20] P. Laure and B. Roux. Linear and non-linear analysis of the Hadley circulation. *J. Cryst. Growth*, 97:226–234, 1989.
- [21] R. Delgado-Buscalioni and E. Crespo del Arco. Stability of thermally driven shear in long inclined cavities with end-to-end temperature difference. *Int. Heat Mass Transfer*, 42:2811–2822, 1999.

- [22] O. Stiller and W. Schöf. Thermal instability of flows with a horizontal temperature gradient. *Phys. Rev. Lett.*, 79(9):1674–1677, 1997.
- [23] M. G. Braunsfurth, A. C. Skeldon, A. Juel, T. Mullin, and D. S. Riley. Free convection in liquid gallium. *J. Fluid Mech.*, 342:295–314, 1997.
- [24] A. Juel, J. Mullin, H. Ben Hadid, and Henry D. Three-dimensional free convection in molten gallium. *J. Fluid Mech.*, 436:267–281, 2001.
- [25] B. Hof, A. Juel, L. Zhao, D Henry, H. Ben Hadid, and T. Mullin. On the onset of oscillatory convection in molten gallium. *J. Fluid Mech.*, 515:391–413, 2004.
- [26] W. Wang and R. X. Huang. An experimental study on thermal circulation driven by horizontal differential heating. *J. Fluid Mech.*, 540:49–73, 2005.
- [27] D. Henry and H. BenHadid. Multiple flow transitions in a box from the side in low-Prandtl-number fluids. *Phys. Rev. E*, 76:016314–1–06314–9, 2007.
- [28] J. E. Weber. On thermal convection between non-uniformly heated planes. *Int. Heat Mass Transfer*, 16:961–970, 1973.
- [29] D. Sweet, E. Jakeman, and D. T. J. Hurle. Free convection in the presence of both vertical and horizontal temperature gradients. *Phys. Fluids*, 20(9):1412–1415, 1977.
- [30] S. P. Bhattacharyya and S. Nador. Stability of thermal convection between non-uniformly heated plates. *Appl. Sci. Res.*, 32:555–570, 1976.
- [31] I. G. Currie. *Fundamental mechanics of fluids*. M. Dekker, New York, U. S. A., third edition, 2003.
- [32] J. K. Platten and J. C. Legros. *Convection in Liquids*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1984.
- [33] D. E. Cormack, L. G Leal, and J. Imberger. Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. part 1. asymptotic theory. *J. Fluid Mech.*, 65(2):209–229, 1974.

- [34] D. E. Cormack, L. G. Leal, and J. H. Seinfeld. Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls: Part 2. *J. Fluid Mech.*, 65:231–246, 1974.
- [35] J. Imberger. Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls: III. experimental results. *J. Fluid Mech.*, 65(2):247–260, 1974.
- [36] Y. N. Skiba. *Métodos y Esquemas Numéricos. Un Análisis Computacional*. Universidad Nacional Autónoma de México, México, D. F., 2005.
- [37] B. A. Finlayson. The Galerkin method applied to convective instability problems. *J. Fluid Mech.*, 17(1):201–208, 1968.
- [38] B. A. Finlayson. *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, New York, USA, 1972.
- [39] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, USA, third edition, 2007.
- [40] A. S. Ortiz-Pérez and L. A. Dávalos-Orozco. Convection in a horizontal fluid layer under an inclined temperature gradient. *Phys. Fluids*, 23:084107–1–084107–11, 2011.
- [41] Kays W. M. *Convective heat and mass transfer*, chapter Appendix A. Property values, pages 387–399. McGraw-Hill, USA, 1980.
- [42] Lida Takamichi and I. L. Roderick. *The Physical Properties of Liquid Metals*. Clarendon Press, Oxford, 1988.
- [43] P. A. Davidson. *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, chapter Appendix 3. Physical Properties of liquid Metals, page 417. Cambridge University Press, New York, USA, 2001.
- [44] Incropera F. P. and D. P. DeWitt. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, chapter Appendix A. Table A.7. John Wiley and Sons, Inc., New York, USA, 1990.
- [45] S. Kadeche, D. Henry, and Ben Hadid H. Magnetic stabilization of the buoyant convection between infinite horizontal walls with a horizontal temperature gradient. *J. Fluid Mech.*, 480:185–216, 2003.

- [46] J. P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Lectures Notes in Engineering. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1989.
- [47] J. E. Drummond and S. A. Korpela. Natural convection in a shallow cavity. *J. Fluid Mech.*, 182:543–546, 1987.
- [48] E. L. Koschmieder. *Bénard Cells and Taylor Vortices*. Cambridge University Press, New York, U. S. A., first edition, 1993.
- [49] B. Roux, H. BenHadid, and P. Laure. Numerical simulation of oscillatory convection in semiconductor melts. *J. Cryst. Growth*, 97:201–216, 1989.
- [50] M. C. Hung and C. D. Andereck. Transitions in convection driven by a horizontal temperature gradient. *Phys. Letters A*, 132(5):253–258, 1988.
- [51] W. O. Criminale, T. L. Jackson, and R. D. Joslin. *Theory and computation in hydrodynamic stability*. Cambridge monographs on mechanics. Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 2003.

Convection in a horizontal fluid layer under an inclined temperature gradient

A. S. Ortiz-Pérez and L. A. Dávalos-Orozco

Instituto de Investigaciones en Materiales, Departamento de Polímeros, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, Circuito Exterior S/N, Delegación Coyoacán, 04510 México D. F., México

(Received 26 August 2010; accepted 25 July 2011; published online 19 August 2011)

In this paper, we investigate the flow instability of a horizontal fluid layer under an inclined temperature gradient. The fluid layer is supposed to be of infinite extension, and the differentially heated lateral walls are very far away from the central region which is the subject of research. The layer is also inside two rigid, horizontal and parallel walls which are perpendicular to gravity and subjected to a vertical adverse temperature gradient. Calculations are done for Prandtl numbers Pr in the range from 0.026 to 1, which include materials from liquid metals to gases. By improving the Galerkin numerical method, new results and important extensions and corrections to the work of Nield [Int. J. Heat Fluid Flow **15**, 157 (1994)] are obtained. It is found that inside the range $0.2 < Pr < 0.45$, a new oblique oscillatory mode starts to appear and that it can be the first unstable one in a particular range of the horizontal Rayleigh number R_H for all Prandtl numbers until $Pr = 1$. To the left, this mode separates from an oscillatory longitudinal even mode already found by Nield [Int. J. Heat Fluid Flow **15**, 157 (1994)]. A new codimension two point is found when the Prandtl number is increased to $Pr = 0.4886$, where the curves of the oblique oscillatory mode and the even stationary longitudinal mode touch each other for the first time. Another new codimension two point starts to appear in the range $0.5 < Pr < 1.0$ which corresponds to the crossing between the curves of the oblique oscillatory mode and the odd stationary longitudinal mode. As a consequence, another interesting result is that, to the right of this point, the odd stationary longitudinal mode is the first unstable one in a range of R_H . The qualitative form of the curves of criticality changes notably between $Pr = 0.026$ and $Pr = 1.0$. Therefore, here we present a detailed description of this change by means of calculations for different Prandtl numbers inside that range.

© 2011 American Institute of Physics. [doi:10.1063/1.3626009]

I. INTRODUCTION

The problem of natural convection has been investigated since many years ago due to its presence in many natural phenomena where temperature differences exist under gravity. However, from the point of view of applications, sometimes it is important to avoid any motion due to temperature differences. Examples are processes of crystal growth and molten metals where any motion previous to solidification can produce important inhomogeneities and striations in the resulting material. In the atmosphere and oceans, temperature gradients are the source of motion of big masses of fluid. In this case, the understanding of the response of gases and liquids to their influence is of fundamental interest to investigate the climate of the earth. The convection in a horizontal infinite fluid layer heated from below has been reviewed by Chandrasekhar.¹ In the case of parallel and rigid walls, it is shown that the critical Rayleigh number (representing the ratio of buoyancy and viscous forces) has a value of 1708. If the temperature gradient is vertical and adverse, this is the minimum magnitude necessary to destabilize an unstably stratified fluid layer. In this particular situation, the starting flow is always stationary. Other convective phenomena are due to a horizontal temperature gradient. The system is supposed to be a horizontal fluid layer of very large extension and perpendicular to gravity which has two vertical differentially heated walls. A closed basic flow is produced immediately after setting the horizontal temperature gradient because the fluid starts to move

upwards at the hot vertical wall and downwards at the cold vertical wall. The result is a very large cell flow. It has been shown experimentally that this motion is unstable and that it produces oscillations which are the source of a banded distribution of solute in crystals.² Besides, Hurle *et al.*² and Hart³ investigated the instability of this flow with a very small aspect ratio, the so called Hadley circulation. Hart³ obtained results of the critical horizontal Rayleigh number R_{HC} for a range of Prandtl numbers Pr (the ratio of the thermal and viscous diffusivities). Gill⁴ investigated the particular case of liquid metals that have a very small Prandtl number ($Pr = 0.026$ for mercury). Hart⁵ shows that, when the horizontal walls are insulated, in a range of small Prandtl numbers, the convection is first oscillatory. Walton⁶ studies the stability of a flow under a horizontal temperature gradient due to a hot-patch. Kuo *et al.*⁷ present important corrections to previous work using a pseudospectral method with Chebyshev polynomials. In other papers, Kuo and Korpela⁸ and Wang and Korpela⁹ investigated the non linear problem for particular ranges of the Prandtl number, including good and bad conducting walls. Laure¹⁰ and Laure and Roux¹¹ made numerical calculations which confirm and correct previous results in the literature. More recently, Braunsfurth *et al.*,¹² Juel *et al.*,¹³ and Hof *et al.*¹⁴ made numerical analysis and experiments related to liquid gallium but in a finite domain. Other experiments were done by Wang and Huang¹⁵ with salt water. Hughes and Griffiths¹⁶ reviewed this problem including, among others, applications to oceanography.

The effect of an inclined temperature gradient was first investigated by Weber¹⁷ assuming that the horizontal walls are stress-free and that the horizontal temperature gradient is small. Later, Sweet *et al.*¹⁸ investigated the instability for free shear walls extending the results to larger values of the horizontal temperature gradient. They assume mean values of the basic velocity and temperature profiles, instead of the original z -dependent ones. It is found the possibility of oscillatory convection increasing the ratio of the applied temperature gradients. This problem is extended, with the same assumption but for small horizontal temperature gradient, to the case of rigid horizontal walls by Bhattacharyya and Nadoor.¹⁹ Later, Weber²⁰ improved his calculations for stress-free walls using a Galerkin method. He also made calculations for rigid horizontal walls. He found that the Prandtl number is important to determine which mode is the first to appear in the instability, the longitudinal or the transversal one with respect to the basic flow. Besides, he shows that an increase of the horizontal temperature gradient promotes the appearance of oscillatory flow. Nield²¹ was the first to try to give a more complete view of this phenomena for four different values of the Prandtl number. His goal was to investigate all the possible modes of instability by means of a Galerkin method. Due to numerical problems, his results were limited to a horizontal Rayleigh number of 6000. Later, Kaloni and Qiao²² made calculations by means of the energy method. They showed that the curves of criticality of Nield²¹ should drop to zero critical vertical Rayleigh number R_{VC} with the increase of R_H . Therefore, for some Prandtl numbers, the linear results of Nield²¹ have to be corrected and extended to larger magnitudes of R_H .

In this paper, we present complete calculations of the linear problem of natural convection under an inclined temperature gradient. To reach this goal, the numerical method used by Nield is improved to get a better convergence and the magnitude²¹ of R_H is extended up to a value where the curve of R_{VC} drops to zero and the flow is unstable only by means of a horizontal temperature gradient. Here, the magnitude of the Prandtl number will be restricted between the range of 0.026 and 1. The selection of this range is because there the qualitative properties of the curves of criticality have an important change that allows, in a certain range of R_H , for the appearance of the new oblique oscillatory mode of instability as the first unstable one, a result not presented before in the open literature. Moreover, it is shown that this qualitative change also leads to the appearance of an odd longitudinal stationary mode and a harmonic of the even longitudinal stationary mode as the first unstable in other different ranges of R_H . The paper is organized as follows. In Sec. II, a description of the physical system is given along with the equations of motion and energy with their linearized expressions for use in the numerical analysis. In Sec. III, a description of the numerical method is presented with a discussion on how this improves the one used by Nield.²¹ Section IV gives the results in the form of plots of the critical vertical Rayleigh number R_{VC} , wavenumber α_C , frequency of oscillation σ_C , and angle of propagation of the perturbation ϕ_C against R_H . The plots of the streamlines are included to understand the physical behavior of the flow. Section V presents the discussion, and Sec. VI is the conclusions.

II. EQUATIONS OF MOTION

The system under investigation is a flat fluid layer subjected to an inclined temperature gradient. It is supposed that the lateral differentially heated vertical walls are very far away and that the region of interest is a large central part where the basic flow can be considered as parallel. The parallel flat walls that contain the fluid are very large in comparison to the thickness of the layer and are supposed to be perpendicular to gravity. The walls are very good conductors, and the lower wall is hotter than the upper one. This produces a vertical temperature gradient which combined with the horizontal one, results in an inclined temperature gradient. The fluid moves upwards in the hot lateral wall and goes downwards in the cold one. This generates a basic flow $U(z)$ in the x -direction which depends on the vertical variable z . Perpendicular to the basic flow and to the z -direction is the y -direction. The equations are

$$Pr^{-1} \frac{D\bar{u}'}{Dt} = -\nabla p' + T' \mathbf{k} + \nabla^2 \bar{u}', \quad (1)$$

$$\frac{DT'}{Dt} = \nabla^2 T', \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \bar{u}' = 0, \quad (3)$$

where D/Dt is the Lagrange operator and use has been made of the Boussinesq approximation. Here, $\bar{u}' = (u', v', w')$ is the velocity vector, \mathbf{k} is a vertical unit vector, p' is the pressure, and T' is the temperature. The variables have been made non dimensional using for distances the thickness of the layer d , for time d^2/κ (where κ is the thermal diffusivity), for velocity κ/d , for pressure $\rho_0 \kappa \nu / d^2$ (where ρ_0 is a reference density) and for temperature $\Delta T / R_V$, where ΔT is the vertical temperature difference and the vertical Rayleigh number is defined as $R_V = g \alpha_T d^3 \Delta T / \nu \kappa$. The horizontal Rayleigh number is defined as $R_H = R_V d \beta_H / \Delta T = g \alpha_T d^4 \beta_H / \nu \kappa$, where β_H is the magnitude of the horizontal temperature gradient. The walls are rigid and good conductors, then the velocity and temperature satisfy the boundary conditions at the walls located at $z = \pm 1/2$

$$\bar{u}' = 0, \quad (4)$$

$$T' = \mp R_V / 2 - R_H x. \quad (5)$$

In the inner region, very far from the lateral walls, the flow is assumed parallel, and the variables of the steady state solution only depend on z . Thus, the basic flow and temperature profiles satisfy the equations

$$D^3 U(z) = -R_H, \quad (6)$$

$$D^3 V(z) = 0, \quad (7)$$

$$D^2 T(x, z) = -R_H U(z), \quad (8)$$

where $D = d/dz$ and $T(x, z) = F(z) - R_H x$. Therefore, the goal is to calculate $F(z)$ by means of Eq. (8). Note that at $z = \pm 1/2$, $F(z) = \mp R_V / 2$. The flow is closed and the velocity components $U(z)$ and $V(z)$ must satisfy a condition of zero mass flux, that is, the integral of $U(z)$ and $V(z)$ in the range of the thickness of the fluid layer must be zero. The solutions are

$$U(z) = R_H(z/24 - z^3/6), \tag{9}$$

$$V(z) = 0, \tag{10}$$

$$T(x, z) = R_H^2(7z/5760 - z^3/144 + z^5/120) - R_V z - R_H x. \tag{11}$$

The basic flow Eq. (9) modifies the temperature profile as in Eq. (11), producing two unstable regions near the upper and lower walls and a stable region in the middle section (see Fig. 1 of Lappa²³). These unstable regions are made more unstable by an adverse vertical temperature gradient. This shows that for a large enough horizontal temperature gradient alone, it is possible to destabilize the flow. However, due to the stabilizing region of the temperature profile, it is not possible to destabilize the system for small R_H and the result is that R_H first stabilizes, for some magnitudes of the Prandtl number, in the presence of R_V and later destabilizes also due to the contributions of the shear flow instability. In another region, for Pr smaller than a critical magnitude calculated in this paper, R_H destabilizes even for small magnitudes, as will be seen presently. When $R_V > 0$, the two unstable regions in the temperature profile also bring about the possibility of having an odd mode as the first to appear in the instability, as will be shown below. The characteristic of this odd mode is that it produces two convection cells, one over the other. The stability of the flow is investigated using normal modes of the form $G(z)\exp[i(kx + ly - \sigma t)]$, where $G(z)$ represents the amplitude of any of the perturbations of the variables and k and l are the x and y -components of the perturbation wavenumber. The real part of σ is the frequency of oscillation of the perturbation and its imaginary part is the growth rate. In this way, the system of equations of the perturbations is

$$[Pr(D^2 - \alpha^2) - i(kU - \sigma)](D^2 - \alpha^2)w + ikwD^2U - Pr\alpha^2\theta = 0, \tag{12}$$

$$[(D^2 - \alpha^2) - i(kU - \sigma)]\theta + R_H u - wDT = 0, \tag{13}$$

$$[Pr(D^2 - \alpha^2) - i(kU - \sigma)](-\alpha^2 u + ikDw) + l^2 wDU = 0, \tag{14}$$

where u and w are the amplitudes of the x and z -components of the velocity, respectively, and θ is the amplitude of the temperature. The square of the magnitude of the wavenumber vector is defined as $\alpha^2 = k^2 + l^2$. Therefore, it is possible to write $k = \alpha \cos\phi$ and $l = \alpha \sin\phi$, where ϕ is the angle of propagation of the perturbation with respect to the x -direction (the same of the basic flow). The boundary conditions are $w = Dw = u = \theta = 0$ at $z = \pm 1/2$.

The Eqs. (14) and (12) are obtained applying once and twice, respectively, the rotational operator to the perturbed equation of motion. Therefore, Eq. (14) corresponds to the vorticity equation. This system of equations will be analyzed numerically as explained in Sec III.

III. NUMERICAL ANALYSIS

The boundary value problem formed by the system of Eqs. (12)–(14) and the boundary conditions will be solved

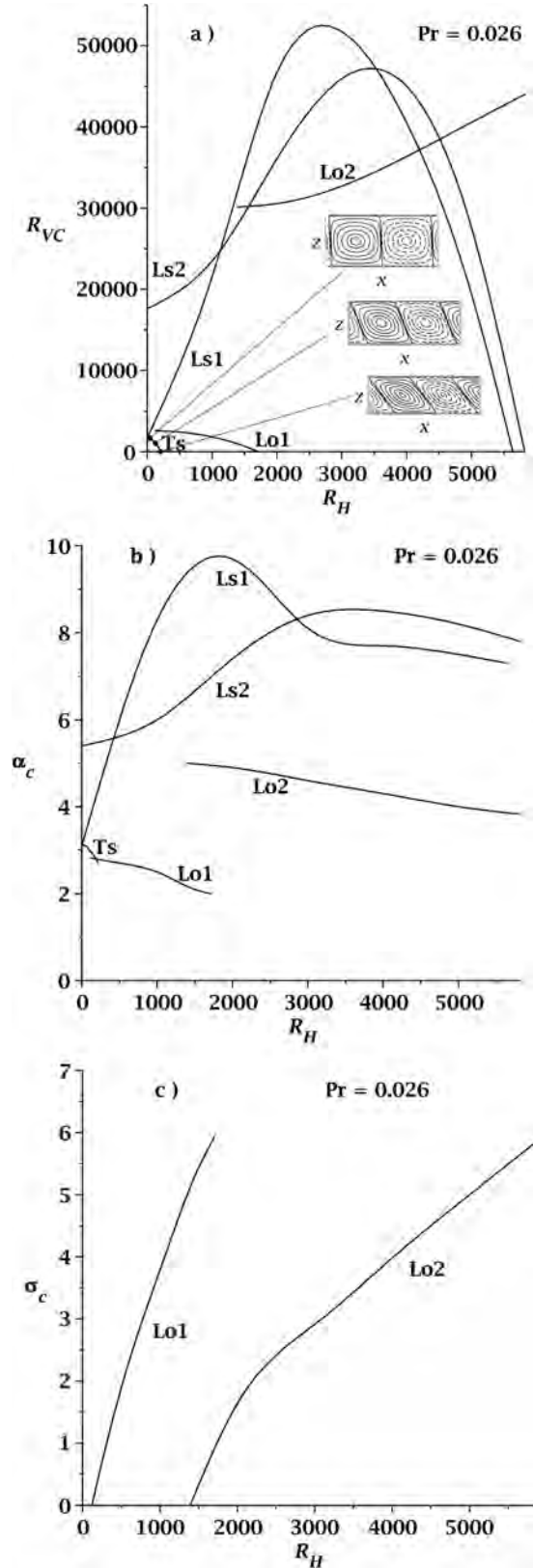


FIG. 1. Graphs of R_{VC} vs R_H for fixed $Pr = 0.026$. In (a), the areas below the curves are stable with respect to the corresponding critical instability. Here, the first unstable mode is T_S , the transversal stationary mode, and only below this curve the flow remains stable. The other modes L_{O1} , L_{O2} , L_{S1} , and L_{S2} are the longitudinal oscillatory even and odd modes and the longitudinal stationary even and odd modes, respectively. In (b) and (c), the critical wavenumber and frequency, respectively, are presented. Streamlines data are in the order (R_H, R_{VC}, α_c) : T_S (10, 1703.03, 3.1), T_S (100, 1266.54, 3), and T_S (218.24, 0, 2.7).

by means of a Galerkin numerical method.^{24,25} The accuracy of the solutions depend on the selected trial functions, which should satisfy the boundary conditions. Here, the selected functions will be characterized by having, at the same time, an even and an odd mode. This was done following the calculations of Hart⁵ for horizontal temperature gradient alone, who found that it is possible to capture accurately different modes of instability when including even and odd trial functions. Notice that this was not done by Nield²¹ who stops his analysis at a relatively small R_H due to problems of convergence in the calculations. Nield²¹ pointed out that for some Prandtl number and for a range of R_H an oblique mode appears but that it was not the first one to appear in the instability. However, due to the Galerkin method used here, it has been possible to show, among other things, that an oscillatory oblique mode can be the first unstable one in a range of R_H and in a range of Pr . Note that numerically, it is only possible to separate the even and odd modes in the case of longitudinal perturbations and to obtain, from a solvability condition, a determinant in the form of a product of two terms, each one for each mode. Therefore, the calculations for all the other angles of propagation of the perturbation are more complicated.

The perturbation functions appearing in Eqs. (12)–(14) are expanded in the following form:

$$w = w_e + w_o = \sum_{n=1}^N [a_{2(n-1)} z^{2(n-1)} (z^2 - 1/4)^2 + b_{2n-1} z^{2n-1} (z^2 - 1/4)^2], \quad (15)$$

$$\theta = \theta_e + \theta_o = \sum_{n=1}^N [c_{2n-1} \cos(2n - 1)\pi z + d_{2n} \sin 2n\pi z], \quad (16)$$

$$u = u_e + u_o = \sum_{n=1}^N [f_{2n-1} \cos(2n - 1)\pi z + g_{2n} \sin 2n\pi z], \quad (17)$$

where the subindexes e and o mean even and odd functions, respectively. These expansions are used in their full expression when the perturbations are transversal and oblique. However, if the perturbations are longitudinal, it is possible to use only the even part for even perturbations and the odd part for odd perturbations. Note that the following notation will be used below: $W_n = z^n(z^2 - 1/4)^2$, $T_{2n-1} = \cos(2n-1)\pi z$, $T_{2n} = \sin 2n\pi z$, $U_{2n-1} = \cos(2n-1)\pi z$, and $U_{2n} = \sin 2n\pi z$.

Equations (15)–(17) are substituted into the homogeneous system of differential Eqs. (12)–(14). Then, the residuals are made orthogonal to the basic trial functions.^{24,25} All this leads to a system of linear algebraic equations whose solu-

tion is only different from the trivial one if the determinant of the matrix of the system M is zero, that is, $\det(M) = 0$. This matrix is of order $3(2N) \times 3(2N)$ and its elements are

$$\begin{aligned} M_{3i-2,3j-2} &= \langle L_1 W_j, W_i \rangle, & M_{3i-2,3j-1} &= -\alpha^2 \langle T_j, W_i \rangle, \\ M_{3i-2,3j} &= 0, & M_{3i-1,3j-2} &= \langle DTW_j, T_i \rangle, \\ M_{3i-1,3j-1} &= \langle L_2 T_j, T_i \rangle, & M_{3i-1,3j} &= -R_H \langle U_j, T_i \rangle, \\ M_{3i,3j-2} &= \langle L_4 W_j, U_i \rangle, & M_{3i,3j-1} &= 0, & M_{3i,3j} &= \langle L_3 U_j, U_i \rangle. \end{aligned}$$

From the equation $\det(M) = 0$, it is possible to obtain the proper values of R_V and σ in terms of α , ϕ , R_H , and Pr . To find them, use has been made of a Newton-Raphson method²⁶ implemented in the Maple algebra package.

As shown below, the instability of the oblique mode of instability will be investigated. The calculation of this mode requires to check around the 360° of the direction of propagation of the perturbation. A lot of work can be saved by reviewing the symmetry properties of Eqs. (12)–(14). First use is made of the definitions $k = \alpha \cos \phi$, $l = \alpha \sin \phi$, and $\alpha^2 = k^2 + l^2$. Now, Eqs. (12)–(14) will be subjected to two rotations. The first one is $\phi \rightarrow -\phi$ (with respect to the basic flow x-direction) which only changes $l \rightarrow -l$, but l only appears squared in all the equations. This means that the equations remain the same and so will be the stability results. The second one is a rotation $\phi \rightarrow \phi + \pi$ which produces the changes $l \rightarrow -l$ and $k \rightarrow -k$. Proposing in this case, the changes $U_S \rightarrow -U_S$, $u \rightarrow -u$, and $R_H \rightarrow -R_H$, it is possible to recover the original system of equations. The reason is that a 180° rotation is equivalent to changing the direction of the x-axis. Therefore, a change of the directions of the basic flow, the horizontal temperature gradient, and the velocity perturbation in the x-direction gives the same Eqs. (12)–(14). In conclusion, for the oblique instability, it is only needed to investigate the first quadrant of the wavenumber plane. Even with this simplification, the stability calculations are very time consuming.

Some useful analytical results for the marginal R_V are given by the following equations obtained from the smallest order Galerkin approximation. They correspond to the longitudinal instability case ($k=0, l=\alpha$) in which the even and odd modes separate easily and simultaneously obtain the two algorithms corresponding to the solutions of those two instability modes. They are valid for relatively small magnitudes of R_H . They are first, for the stationary longitudinal even mode

$$R_V = \frac{1}{20160} \frac{(\alpha^4 + 24\alpha^2 + 504)(\alpha^2 + \pi^2)\pi^{10}}{C_1^2 \alpha^2} + \frac{1}{720\pi^2 C_1} \left(\frac{A_1}{\pi^2} + \frac{60B_1}{(\pi^2 + \alpha^2)Pr} \right) R_H^2, \quad (18)$$

and second, for the oscillatory longitudinal even mode

$$\sigma^2 = \frac{1680Pr\alpha^2 B_1 C_1 R_H^2}{\pi^{12} [(\alpha^4 + 24\alpha^2 + 504)Pr + (\alpha^2 + \pi^2)(\alpha^2 + 12)]} - (\alpha^2 + \pi^2)^2 Pr^2, \quad (19)$$

$$R_V = \frac{1}{20160} \frac{[\alpha^4 + 24\alpha^2 + 504 + (\alpha^2 + \pi^2)(\alpha^2 + 12)](\alpha^2 + \pi^2)(1 + Pr)\pi^{10}}{C_1^2 \alpha^2} + \frac{1}{720\pi^2 C_1} \left\{ \frac{A_1}{\pi^2} - \frac{60B_1(\alpha^2 + 12)}{[(\alpha^4 + 24\alpha^2 + 504)Pr + (\alpha^2 + \pi^2)(\alpha^2 + 12)]} \right\} R_H^2 \quad (20)$$

and use was made of $A_1 = \pi^6 + 348\pi^4 - 64800\pi^2 + 604800$, $B_1 = \pi^4 - 228\pi^2 + 2160$, and $C_1 = 12 - \pi^2$. Here, σ is the frequency of oscillation. The corresponding odd modes are omitted because they are very stable for small R_H and are not relevant in what follows.

It is important to point out that the numerical method used here made it possible to have very good convergence increasing the order of approximation as needed. The results were compared with the limiting case of horizontal temperature gradient alone which was investigated numerically by Kuo *et al.*,^{7,8} Laure,¹⁰ Laure and Roux,¹¹ and Kaddeche *et al.*²⁷ (when the magnetic field is zero). The agreement was very good.

IV. NUMERICAL RESULTS

The stability results will be presented in order of increasing the Prandtl number. The first results are for $Pr = 0.026$, which correspond to liquid metals like Mercury at 20 °C (Ref. 28) and Gallium at 30 °C.⁴ Figure 1(a) shows the critical values of R_V , that is R_{VC} , against R_H for $Pr = 0.026$. Different modes of instability are presented for the sake of completeness. Modes that are not important here because they are more stable than the critical one, will be important for larger values of Pr . In Fig. 1, the instability is dominated by a transversal stationary mode T_S which attains the value of $R_{VC} = 1708$ when $R_H = 0$. For this Pr , the curve drops to $R_{VC} = 0$ with a relatively small $R_{HC} = 218.25$ and a wavenumber $\alpha_C = 2.7$. The longitudinal oscillatory even mode LO_1 drops at $R_{HC} = 1712.30$, $\alpha_C = 2.0$, and $\sigma_C = 5.94$. It was possible to capture a longitudinal oscillatory odd mode LO_2 , but R_{VC} increases with R_H and it seems that it never destabilizes. The curves for the stationary longitudinal even LS_1 and odd LS_2 modes are of particular interest because they stabilize in an important way in some region of R_H , but later destabilize dramatically for large values of R_H . This behavior will have important consequences for larger Pr . The curve of LS_1 also tends to $R_{VC} = 1708$ when R_H goes to zero. Notice that the modes LO_1 and LO_2 start for a magnitude of R_H different from zero, as it should be because it is well known that when $R_H = 0$, the instability begins as stationary.¹ Therefore, there is a critical value of R_H after which the curves of these modes start. The streamlines of the flow at criticality of two representative sets of (R_H, R_{VC}, α_C) are also shown in the figure. They are the streamlines of a stationary transversal mode and correspond to the values $(10, 1703.03, 3.1)$, $(100, 1266.54, 3)$ and $(218.24, 0, 2.7)$, respectively. It is clear that the convection cells show no symmetry with respect to $z = 0$ (located at the middle of the z -axis), as explained above.

Figure 2 presents results for $Pr = 0.2$ which corresponds approximately to a mixture²⁹ of molten Lead (44.5%) and Bismuth (55.5%) at 644 °C. Due to the changes of the curve T_S with respect to the Prandtl number, some important results appear in this figure. First, the T_S curve starts to grow and the system stabilizes taking magnitudes of R_{VC} larger than 1708 in almost all its range of R_H and then drops to $R_{VC} = 0$ at $R_H = 5089.81$. Second, a codimension two point appears at approximately $R_{VC} = 2652$ and $R_H = 1010$, where stationary (T_S) and oscillatory (LO_1) convective motions compete

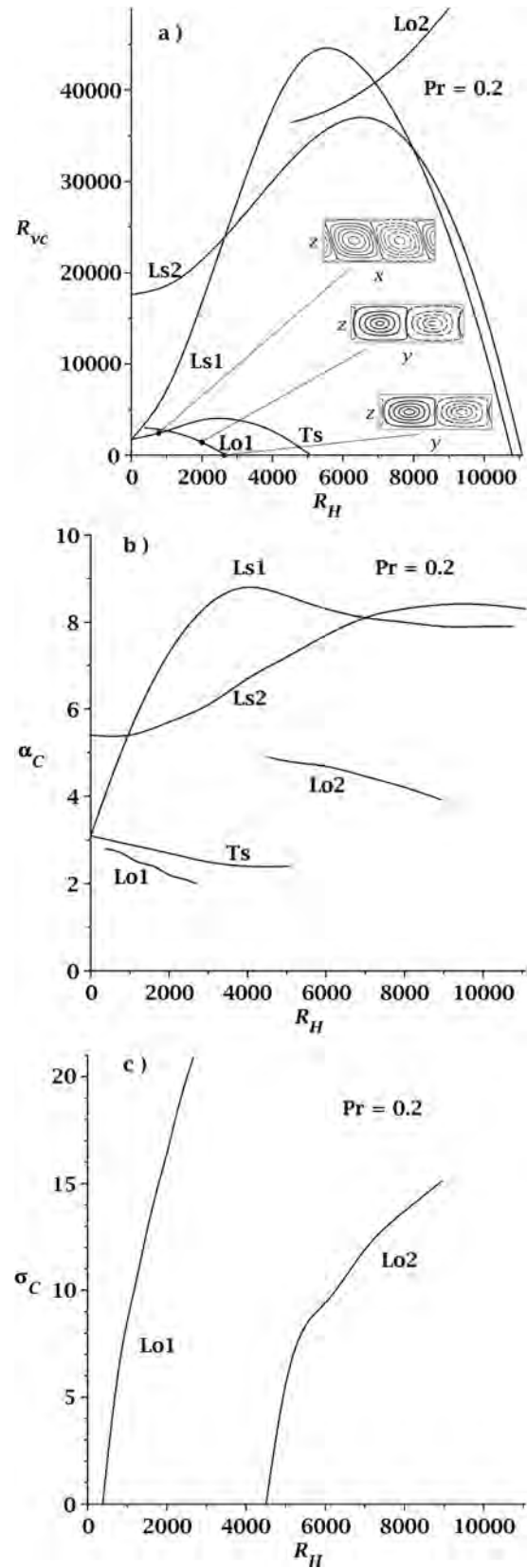


FIG. 2. Graphs of R_{VC} vs R_H for fixed $Pr = 0.2$. In (a), the areas below the curves are stable with respect to the corresponding critical instability. Here, the first unstable mode is T_S and then the mode LO_1 . A codimension two point appears at around $R_H = 1010$ and $R_V = 2652$, larger than 1708. The other modes LO_1 , LO_2 , LS_1 , and LS_2 appear again as more stable. In (b) and (c), the critical wavenumber and frequency, respectively, are presented. Streamlines data are in the order $(R_H, R_{VC}, \alpha_C, \sigma_C)$: T_S (800, 2351.21, 2.9, 0), LO_1 (2000, 1404.83, 2.2, 16.46), and LO_1 (2671.40, 0, 2, 20.90).

for instability. These results are new and have not been reported before in the open literature. Then, only below these two curves, the flow remains stable. The curve of L_{O1} falls to $R_{VC} = 0$ at $R_H = 2671.40$. It is clear that modes L_{S1} and L_{S2} have broadened their stable area. The wavenumber of L_{O1} remains smaller than that of T_S . Here, the streamlines for three representative flows are given for three sets of four values (R_H , R_{VC} , α_C , σ_C). The flow for (800, 2351.21, 2.9, 0) corresponds to T_S and, therefore, has no symmetry. The oscillatory mode is longitudinal and its symmetry for the values set (2000, 1404.83, 2.2, 16.46) is apparent. The curve L_{O1} for (2671.40, 0, 2, 20.90) is symmetric and has a smaller wavenumber. As seen in Fig. 2(a), the transversal convection cells are periodic in the x -direction, and the longitudinal cells are periodic in the y -direction. Notice that the wavenumbers of the convection cells of each case are different, but this was not taken into account when deciding the size of each figure of the streamlines. The main reason is that the relative scaling of the wavenumber made it impossible to see the separation of the streamlines in some cases of convection cells. Here, and in all the figures, it is interesting to note that, for small magnitudes of R_H , the curves L_{O1} disappear before $R_H = 0$. The reason is that for small magnitudes of R_H it is not possible to find roots of the frequency of oscillation in agreement with the results of vertical temperature gradient alone, where it has been shown that stationary convection is the first to appear.¹ It is also clear that the curves of L_{O1} do not reach those of L_{S1} in Figs. 1(a) and 2(a).

The codimension two point begins to appear when the curves of T_S and L_{O1} touch each other for the first time at $R_{VC} = 0$ and $R_{HC} = 2249.05$ when $Pr = 0.1364$, as shown in Fig. 3 and confirmed by Kuo *et al.*^{7,8} (case $R_V = 0$). This critical magnitude of Pr is just that after which the pure T_S mode

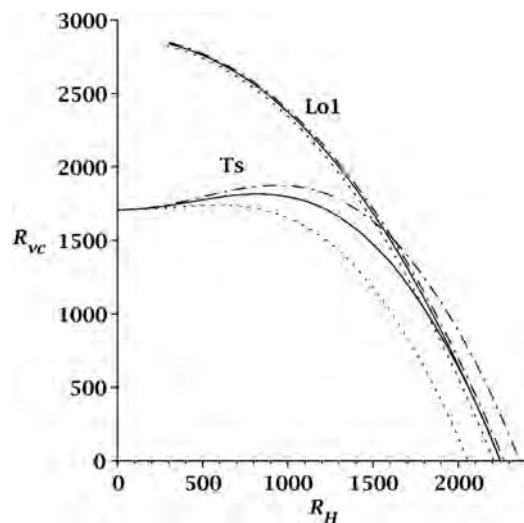


FIG. 3. Graphs of R_{VC} vs R_H for T_S and L_{O1} alone. The graphics are for three values: $Pr = 0.13$ (dotted line), $Pr = 0.1364$ (solid line), and $Pr = 0.14$ (dashed dotted line). Notice that $Pr = 0.1364$ is the critical Prandtl number at which the first codimension two point appears when $R_V = 0$ and $R_{HC} = 2249$. For larger values of Pr , the codimension two points appear for $R_V > 0$. Thus, mode L_{O1} can be the first unstable one, only for $Pr > 0.1364$ and above a critical R_H , to the right of the codimension two point. For example, for $Pr = 0.14$ (dashed dotted line) that point is located at $R_H = 1620$ and $R_{VC} = 1503$.

changes in such a way that it allows for another instability mode to appear as the first unstable one for larger Pr , that is, the mode L_{O1} . It is very interesting to point out that, in the presence of R_V , it is possible to have this codimension two point in a range of Pr , starting from $Pr = 0.1364$, in contrast with the case of R_H alone. Moreover, notice in Fig. 3 that very near to $Pr = 0.13$, the curve of T_S starts to create a stabilizing bump which shows the above mentioned stabilizing effect of R_H in an important range. This stabilizing effect on T_S is the cause of the appearance of the codimension two point, because it delays the drop of the curve into a larger critical R_{HC} , which increases faster than that of the curve L_{O1} with respect to Pr . Notice that the magnitude of R_H of the codimension two point decreases with Pr , as seen in Figs. 3 and 2. For example, for $Pr = 0.14$, $R_H = 1620$, and $R_{VC} = 1503$ and for $Pr = 0.2$, $R_H = 1010$, and $R_V = 2652$. The reason is the constant increase with Pr of the bump of the curve of T_S .

The results shown in Fig. 4 correspond to $Pr = 0.45$ (Fig. 4(a)) and 0.4886 (Fig. 4(b)). In Fig. 4(a), it is shown the important result of the presence of the new oblique oscillatory mode Ob_O . It seems that the curve of Ob_O starts to appear somewhere inside the range $0.2 < Pr < 0.45$. Therefore, the first unstable modes for $Pr = 0.45$ are a stationary transversal mode, an even oscillatory longitudinal mode and an oblique oscillatory mode. The first codimension two point in this figure, between T_S and L_{O1} , occurs at $R_H = 1105$ with the following data ordered as R_V , α , and σ (3589, 2.9, 0) and (3589, 2.7, 10.43), respectively. The mode Ob_O starts to be the first unstable one at $\phi = 86^\circ$ when $R_H = 8300$ and (1582.34, 1.4, 60.38) and it crosses the $R_V = 0$ axis at $R_H = 9935$ and (0, 1.6, 83.67) when $\phi = 72^\circ$. The results of Fig. 4(b) for $Pr = 0.4886$ are interesting because a new codimension two point appears when the curves of Ob_O and L_{S1} touch each other when $R_H = 12329.5$ for (0, 1.7, 115.32) at an angle of 65° and for (0, 8.2, 0), respectively. Here, again Ob_O starts to be the first unstable one at $\phi = 86^\circ$ but when $R_H = 7800$ and (4378.81, 1.5, 60.99). Notice that the slope of L_{O1} already changed in this figure. This is important for other phenomena which appear for larger Pr because the slope of Ob_O will also change following that of L_{O1} .

The way an oblique mode is calculated is by searching around any stationary or oscillatory curve of criticality if there are more unstable modes at different angles of the wavenumber of the perturbation. Calculations show that the Ob_O curve of criticality is first found separating from the curve L_{O1} near but below $Pr = 0.45$ (see Fig. 4). This curve also appears for $Pr = 0.5$ (Fig. 5(a)) and for $Pr = 1$ (Fig. 6(a)). For example, in the case of $Pr = 1$, the separation of the curve of Ob_O from that of L_{O1} is better understood by means of the behavior of the marginal curves. The curve starts to separate from a value of R_H between 6700 and 6750 and the marginal curve begins to show two minima one of which is the absolute one corresponding to L_{O1} . A further increase of R_H decreases the difference between the two minima until $R_H = 6785$, where both minima reach the same magnitude of R_V . At this point, two convection cells of two different wavenumbers (with small difference between each other) and two different frequencies compete to be the first

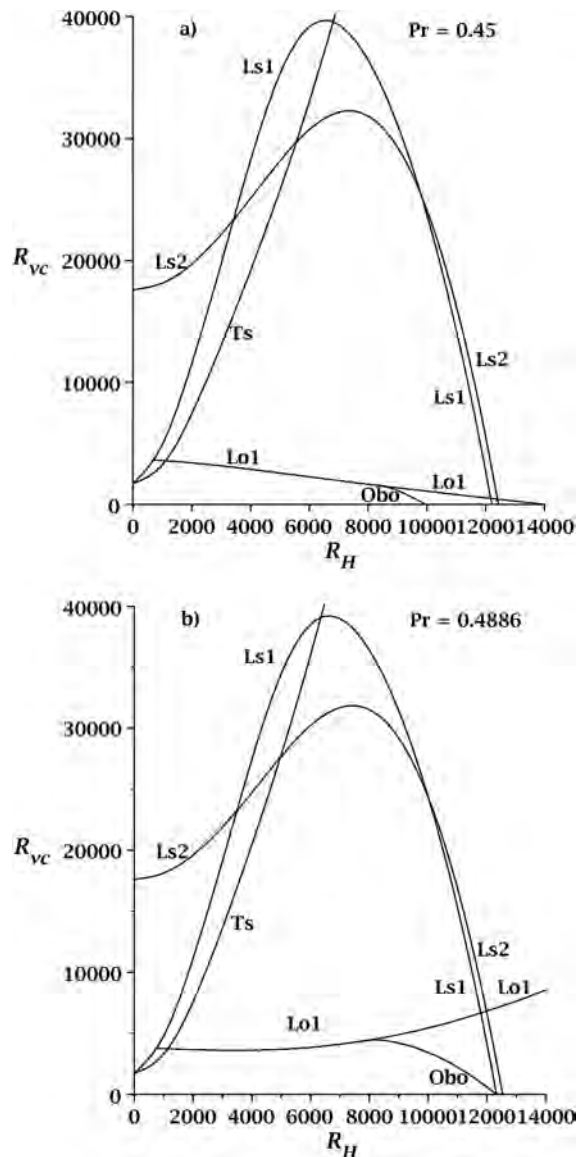


FIG. 4. Graphs of R_{VC} vs R_H for (a) $Pr=0.45$ and (b) $Pr=0.4886$. (a) Results previous to the codimension two point. It is of interest to note that the oblique mode is already present. (b) For Prandtl number 0.4886, a new codimension two point between Ob_0 and L_{S1} appears for $R_{VC}=0$ and $R_H=12330$. Besides, notice that the curve of L_{O1} already changed its slope, fact that will be important for larger Pr because the curve of Ob_0 will also follow this behaviour.

unstable one. Finally, another increase of R_H makes the mode Ob_0 to be the first unstable one.

Figure 5 shows results for $Pr=0.5$, which may correspond to a mixture of air and H_2 from 20% to 50%.²⁸ The further increase of the Prandtl number leads to a rise of the curve of L_{O1} which produces a change in that of Ob_0 . This behaviour makes the new codimension two point between Ob_0 and L_{S1} to have a R_V different from zero. At the same time, this produces a decrease of the corresponding R_H of the crossing point. In particular for $Pr=0.5$, that point is located at $R_H=12244$ for $(1464.59, 1.7, 115.13)$ at $\phi=65^\circ$ (Ob_0 mode) and for $(1464.59, 8.2, 0)$ (L_{S1} mode), respectively. With this changes, the even stationary longitudinal mode L_{S1} becomes the first unstable one in a range of R_H , as seen in Fig. 5(a). This curve hits the $R_V=0$ axis at $R_H=12359$ for

$(0, 8.2, 0)$. The Ob_0 mode starts to appear as the first unstable one when $R_H=7730$ for $(5066.46, 1.5, 60.57)$ at $\phi=89^\circ$. The first codimension two point between T_S and L_{O1} occurs at $R_H=1147$ with $(3764.7, 2.9, 0)$ and $(3764.7, 2.7, 10.83)$, respectively. The results for the critical wavenumber are shown in Fig. 6(b). It is clear that the wavenumber of L_{O1} remains below that of T_S and Ob_0 . The critical frequency of oscillation of L_{O1} shown in Fig. 5(c) increases with respect to the case of $Pr=0.2$ and that of Ob_0 is even more larger. As can be seen in Fig. 5(d), the critical angle of propagation of the perturbation shows discontinuous jumps due to the competition between pairs of modes. The first one is that between T_S and L_{O1} , then between L_{O1} and Ob_0 (small), and finally between Ob_0 and L_{S1} .

Figure 6 shows the results for $Pr=1$ corresponding approximately to gases and vapor at 200°C (Ref. 28) and one atmosphere. With this figure, it is possible to compare with the results of Nield.²¹ It is important to note the increase of the range of R_H used in the calculations. The results of Fig. 6(a) show that increasing R_H starting from zero, the first unstable mode is T_S , then at $R_H=1563$, the mode is L_{O1} , next from $R_H=6785$ appears the new oscillatory oblique mode Ob_0 , which is followed from $R_H=8957$ by the odd longitudinal stationary mode L_{S2} , and finally from $R_H=11020$, the first unstable one is the even longitudinal stationary mode L_{S1} . The different curves intersect to each other at important points whose data will be ordered as R_V , α , and σ . Two codimension two points appear for this Prandtl number. The first one was already found by Nield²¹ and from our numerical results it occurs at $R_H=1563$ and $(5659, 2.7, 0)$ for T_S and $(5659, 2.8, 12.87)$ for L_{O1} . The other appears at $R_H=8957$ and $(27714, 2.4, 124.52)$ for Ob_0 when $\phi=60^\circ$ and $(27714, 7.4, 0)$ for L_{S2} . Notice that this is a new codimension two point due to the surprising presence of the odd mode L_{S2} as the first unstable one in a range of R_H . Other points are of importance. The intersection between L_{S1} and L_{S2} is located at $R_H=11020$ and $(19221, 8.1, 0)$ for L_{S1} and $(19221, 8.1, 0)$ for L_{S2} (that is correct, they have the same wavenumber in this case). The mode L_{S1} finishes when touching the horizontal axis at $R_H=12998$ and $(0, 8.3, 0)$. These are curves of criticality and only below them the flow remains stable. As pointed out above, the mode Ob_0 starts to appear between $R_H=6700$ and 6750 .

As can be seen, for $Pr=1$, the magnitudes of R_{VC} for all the critical curves are very large in comparison with 1708, which shows the great stabilizing effect of R_H . Therefore, this strong effect of R_H is the reason why the very highly stable odd mode L_{S2} has been reached by mode Ob_0 to become the first unstable one in a range of R_H . Also shown, for reference, is the stability curve of the transversal oscillatory mode T_O . In Fig. 6(b), it is interesting to observe that the critical wavenumbers of mode L_{O1} are now larger than those of T_S , but smaller than those of mode Ob_0 . The critical frequencies of Ob_0 are also larger than those of L_{O1} , as seen in Fig. 6(c).

Figure 6(d) presents the critical angle of propagation of the perturbation ϕ_C . Note in the figure that this angle only starts as the first unstable one at around $\phi_C=75^\circ$ for $R_H=6785$ and finishes at around $\phi_C=60^\circ$ for $R_H=8957$, after which the mode L_{S2} is the first unstable one. The two

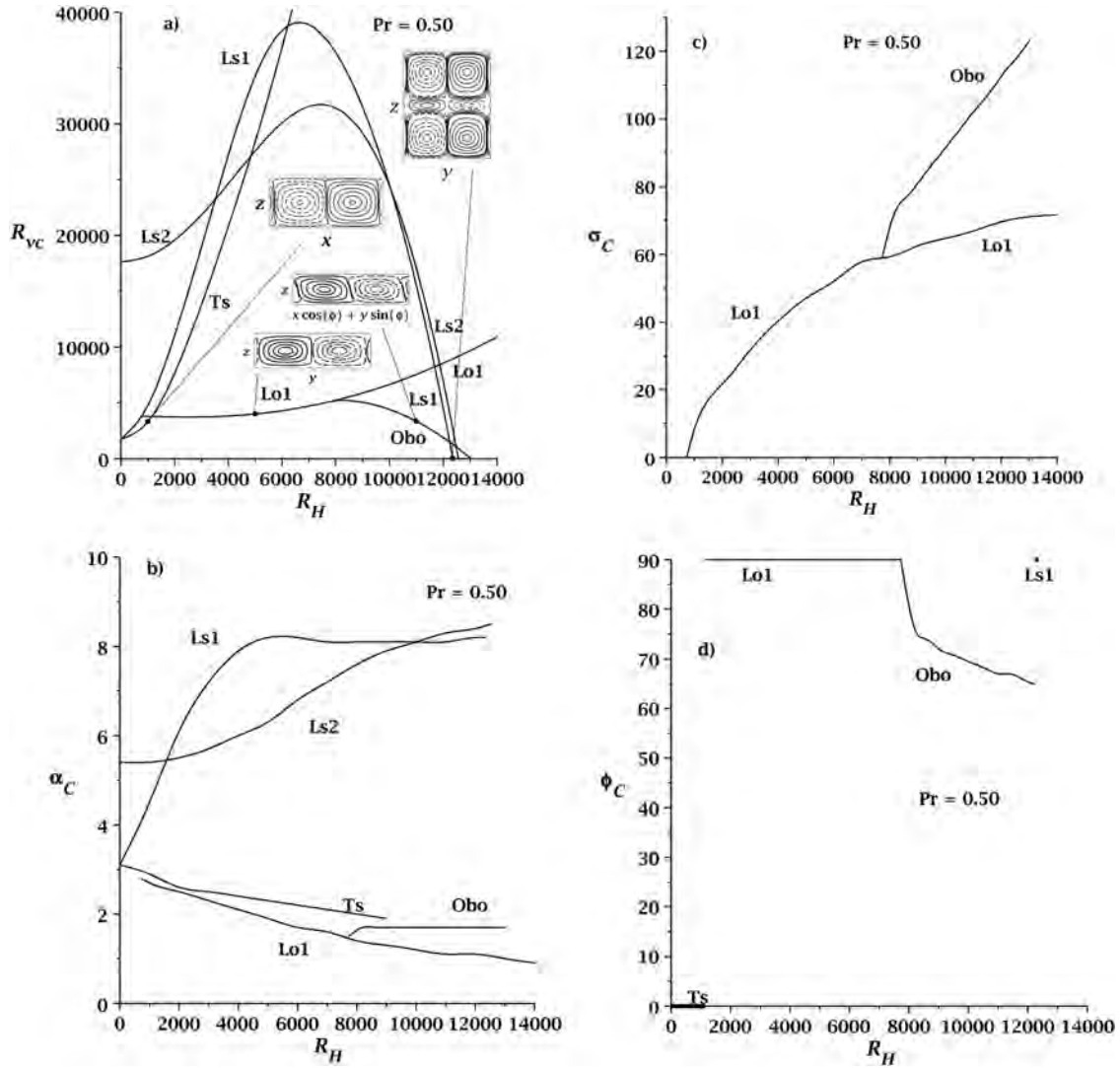


FIG. 5. Graphs of R_{VC} vs R_H for fixed $Pr = 0.5$. Here, increasing R_H from zero, the first unstable mode is Ts , then from $R_H = 1147$, the mode L_{O1} , next from $R_H = 7730$, a new oscillatory oblique mode Ob_O which is followed from $R_H = 12244$ by the even stationary mode L_{S1} . Note that, at the end, L_{S1} drops at $R_{HC} = 12358$. Two codimension two points appear from the competition between stationary and oscillatory modes and are located at around $R_H = 1147$ and $R_H = 12244$, respectively. In (b), (c), and (d), the critical wavenumber, frequency of oscillation, and angle of propagation of the perturbation, respectively, are presented. Streamlines data are in the order $(R_H, R_{VC}, \alpha_C, \sigma_C)$: Ts (1000, 3279.64, 2.9, 0), L_{O1} (5000, 3987.34, 1.9, 47.16), Ob_O (11000, 3327.59, 1.7, 102.12) at 67° and L_{S1} (12358.81, 0, 8.2, 0).

dashed lines indicate the angles of existence of the oblique mode but where it is no longer the first unstable one. It is of interest to point out that the oblique mode starts from a R_H larger than the largest magnitude investigated by Nield²¹ in his Fig. 4. Thus, broadening the range of R_H has been of great importance in the present research because it also has been possible to show that the odd longitudinal stationary mode can be the first unstable one, followed by the even longitudinal stationary mode.

V. DISCUSSION

A variety of results have been presented in the above sections. Here, a discussion is given of the stability. An important characteristic of the flow under an inclined temperature gradient is the basic temperature profile given in Eq. (11). This equation is of 5th degree in z , in contrast to that of natural convection inside inclined parallel walls where the

temperature profile is linear. Therefore, different results are expected even though the velocity profiles are similar.

The z -dependent part of the temperature profile Eq. (11) has five roots. It crosses through $z = 0$, which can be shown to be always an inflexion point. There are other four roots, two of them are outside the flow range of z , and the other two, calculated from $z^2 = (5R_H - 2\sqrt{R_H^2 + 4320R_V})/12R_H$, exist if $5R_H - 2\sqrt{R_H^2 + 4320R_V} \geq 0$, that is, when $R_H^2 \geq 5760R_V/7$. Note that, when the equality is satisfied, $z = 0$ becomes a root of multiplicity three and the other roots remain outside the range of z . The z -derivative of the temperature has two roots in the range of z , calculated from $z^2 = (15R_H - 2\sqrt{30R_H^2 + 21600R_V})/60R_H$, and exist if $15R_H - 2\sqrt{30R_H^2 + 21600R_V} \geq 0$, which corresponds to $R_H^2 \geq 5760R_V/7$, the same condition as that for the temperature. The second derivative of the temperature is $d^2T/dz^2 = R_H^2 z(z^2 - 1/4)/6$, which shows that $z = 0$ is the

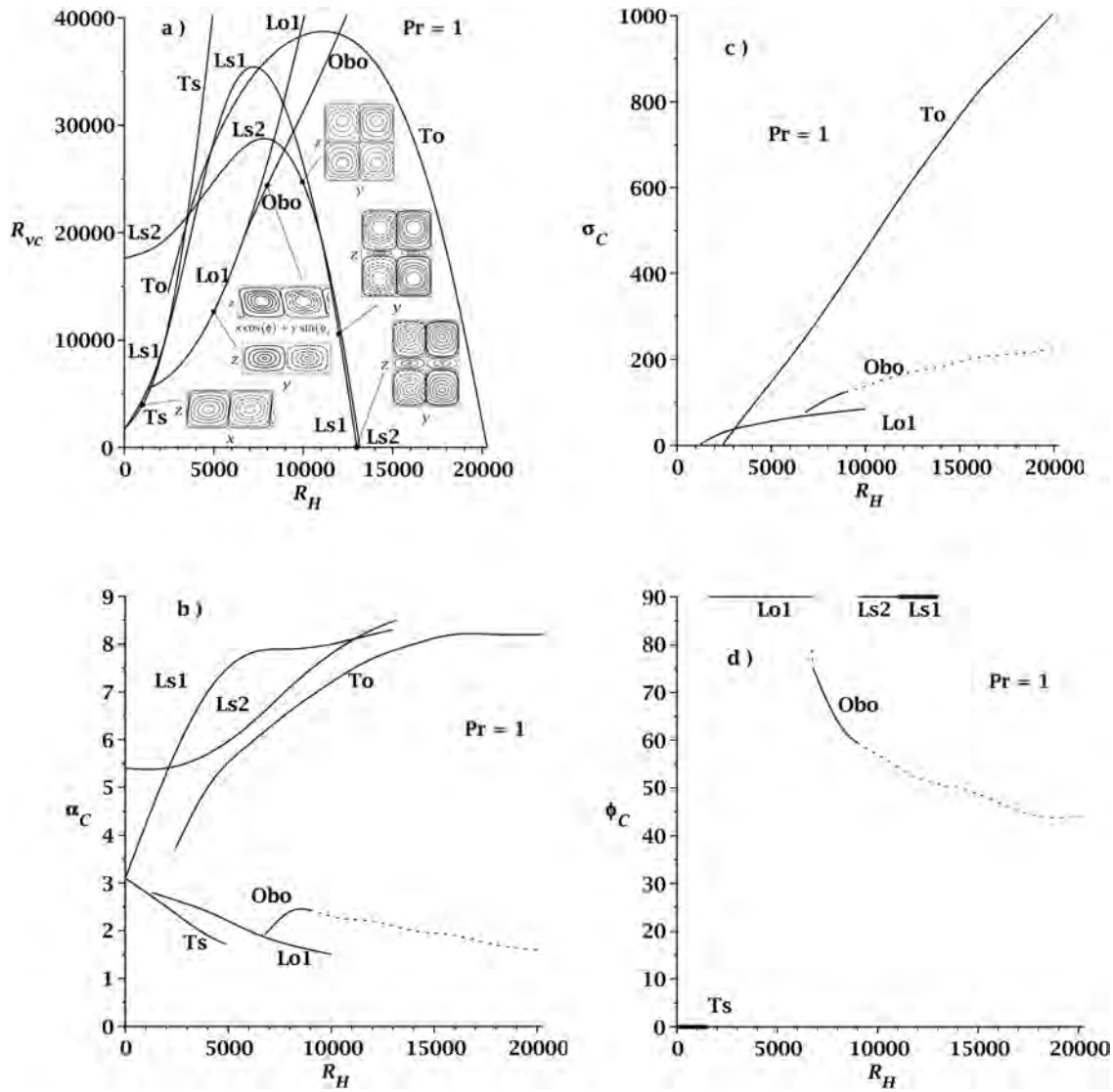


FIG. 6. Graphs of R_{VC} vs R_H and $Pr = 1$. The first unstable mode is T_S , then from $R_H = 1563$, the mode L_{O1} , next from $R_H = 6785$, a new oscillatory oblique mode Ob_O , followed from $R_H = 8957$ by the odd stationary mode L_{S2} and finally from $R_H = 11020$ is the even stationary mode L_{S1} . Note that L_{S1} drops at $R_{HC} = 12998$. Two codimension two points appear from the competition between stationary and oscillatory modes and are located at around $R_H = 1563$ and $R_H = 8957$, respectively. In (b), (c), and (d), critical wavenumber, frequency of oscillation, and angle of propagation of the perturbation, respectively, are presented. Streamlines data are in the order $(R_H, R_{VC}, \alpha_C, \sigma_C)$: T_S (1000, 3319.29, 2.9, 0), L_{O1} (5000, 12646.39, 2.2, 56.68), Ob_O (8000, 24448.55, 2.4, 107.54) at 64° , L_{S2} (10000, 24583.05, 7.8, 0), L_{S1} (12000, 10575.26, 8.2, 0), and L_{S1} (12998.04, 0, 8.3, 0).

inflexion point in the range of z . Notice that if the condition $R_H^2 \geq 5760R_V/7$ is satisfied, a maximum appears in $0 < z < 1/2$ and a minimum exists in $0 > z > -1/2$. If these conditions are not satisfied, only an inflexion point is present and the temperature decreases monotonically with z . This is important, because only one convection cell is able to form inside the walls.

When the conditions are satisfied, the temperature profile shows two unstable regions inside the two walls due to the appearance of the maximum and minimum. The unstable regions are formed as follows. The first one is formed with the temperature difference between the point of the maximum and the upper wall and the second one with the temperature difference between the lower wall and the point of the minimum. This has an important consequence. That is, the formation of a very stable region in the middle section, between the point of the maximum (above) and the point of the minimum

(below). This contributes to stabilize the flow when R_H increases, as seen in the curves of criticality of the results presented above when the Prandtl number is large enough (lets say, starting from $Pr = 0.2$). This stable region is responsible of the need to increase R_H to a magnitude far more larger than that required by the condition $R_H^2 \geq 5760R_V/7$ in order to excite other modes of instability. Note that, in absolute value, the z -location of the maximum and minimum is reduced when R_H increases (see above, the location of the roots of the temperature derivative). Consequently, the stable region thickness decreases with R_H in such a way that, with the two unstable regions, it is possible to excite the odd mode (see the two cells streamlines of the odd longitudinal stationary mode L_{S2} in Fig. 6(a)) and to excite a harmonic mode of the even solution (see the three cells streamlines of the longitudinal stationary even mode L_{S1} in Fig. 5(a) ($R_V = 0$) and in Fig. 6(a) (for both $R_V = 0$ and $R_V > 0$)).

Among the properties of the eigenfunctions³⁰ that of symmetry is very important. The symmetry is reflected in the parity of the functions. An arbitrary function $f(z)$ can be decomposed into the sum of two functions of definite parity, even and odd with respect the origin.

The terms $(z^2 - 1/4)^2 z^{2(i-1)}$, with i an integer (see Eq. (15)), and the cosines of odd degree $\{\cos(\pi z), \cos(3\pi z), \dots\}$ are even functions symmetric about the origin (Eqs. (16) and (17)). The terms $(z^2 - 1/4)^2 z^{2i-1}$, with i an integer, and the sines of even degree $\{\sin(2\pi z), \sin(4\pi z), \dots\}$ are odd functions antisymmetric about the origin.

As can be seen, Eqs. (9) and (11) of the basic flow and temperature fields are odd functions of z . In Eqs. (12)–(14) of the perturbation appear the basic velocity (odd), its first derivative (even), its second derivative (odd), and the first derivative (even) of the basic temperature. With these symmetry characteristics, it is possible to prove that the equations for longitudinal disturbances ($k=0, l=\alpha$) are symmetric or antisymmetric if w, u , and θ are symmetric or antisymmetric, respectively. The reason is that, only in this case, the coefficients of the differential equations have even parity. Therefore, for the longitudinal disturbances, it is not necessary to combine even and odd solutions.³ In order to calculate, the even longitudinal mode only the even functions and for the odd longitudinal mode only the odd functions of Eqs. (15)–(17) are required, respectively. Note that for all other orientations the even and odd modes remain coupled and the complete expressions in Eqs. (15)–(17) must be used.

The symmetries with respect to $z=0$ of these modes can be observed clearly by means of the convection cells streamlines of the longitudinal modes. For instance, when $Pr=1$ in Fig. 6(a), the mode L_{S2} shows antisymmetry (odd parity). Besides, the modes L_{O1} and L_{S1} are symmetric (both have even parity). For the transverse and oblique modes, there is no symmetry, as can be seen from the complete Eqs. (12)–(14) and from the corresponding streamlines of the cells shown in Figs. 1(a), 2(a), 5(a), and 6(a).

As discussed before, the curves of criticality present codimension-two points at different magnitudes of R_H . In the figures, other curves above the first unstable ones present codimension-two points (see Figs. 1(a) and 2(a)); however, they are not important from the point of view of the linear theory. Only those occurring between critical curves are of interest and were discussed above. Note that all the curves above the critical in the figures are drawn as reference in order to understand their behavior before they become the first unstable when Pr increases.

VI. CONCLUSIONS

In this paper, new results of the problem of natural convection under an inclined temperature gradient have been presented. All the results calculated with the improved Galerkin method have been checked with those in the literature related with a horizontal temperature gradient. Besides, the results were also checked using a 5th order in the approximation of the Galerkin method. That is, ten terms (5 even and 5 odd) of the expansion of the variables were used. The broadening of the range of R_H in comparison with that used by Nield²¹ lead to the interesting results presented here for

the first time. The dominant mode for Prandtl numbers in the range $0.026 \leq Pr \leq 0.1364$ is the transversal stationary. A codimension two point, due to the competition between stationary and oscillatory modes, appears at $Pr=0.1364$ for $R_{VC}=0$, where the curves of T_S and L_{O1} touch each other for the first time. The presence of a vertical temperature gradient, represented by R_V , promotes the appearance of this codimension two point for all the Prandtl numbers in the range $0.1364 < Pr \leq 1$. This codimension two point starts to appear due to the increase with Pr of the stabilizing bump in the curve of T_S which eventually allows the mode L_{O1} to be the first unstable one. The same behavior of this two curves follows until a critical value of Pr is reached after which their slopes change and it is found that they do not drop to $R_V=0$ in the range of R_H investigated. This critical value of Pr for T_S is different from that of L_{O1} . For T_S , it is nearly $Pr=0.4$ (here corrections are given to the work of Kuo *et al.*^{7,8}) and for L_{O1} , it is approximately $Pr=0.46$. These two Prandtl numbers are very important because for magnitudes above them, the rapid growth of T_S and L_{O1} with R_H is determinant for the appearance of other modes as the first unstable ones in the instability. However, before the change of slope of L_{O1} occurs, there is a Prandtl number after which the new oblique oscillatory mode starts to appear. With a further increase of Pr , this mode is able to intersect the curve of L_{S1} producing another new codimension two point. This codimension two point still appears until a Prandtl number between 0.5 and 1 where another new codimension two point appears at the cross point between the oblique oscillatory mode and the odd mode L_{S2} which now appears as the first unstable one in a range of R_H . This mode L_{S2} is ignored in the case of vertical temperature gradient alone ($R_H=0$) due to its very high stability. However, due to the strong stabilizing effect of R_H on the different modes of the instability, this mode is now able to be the first one to destabilize in a range of R_H .

The streamlines of the convection cells for representative magnitudes of R_H and R_{VC} have been included in the figures. With them, it is possible to understand physically the qualitative and quantitative changes of the cells under the influence of the different parameters involved in the system of equations. The important effect of the basic temperature profile on the structure of the convection cell is clear when the maximum and minimum have a large enough temperature difference with respect to the walls at large R_H . With this, it was shown that it is possible to excite convection modes not seen before like the odd L_{S2} mode (two cells) and the harmonic of the even L_{S1} mode (three cells). These results are new in the presence of an inclined temperature gradient.

Detailed calculations for the Prandtl numbers larger than $Pr=1$ are in progress and are not presented here. Our hope is to find new critical modes. However, it is also of interest to follow the oblique oscillatory mode and to find out the maximum Prandtl number where it can appear as the first unstable one. This requires far more careful calculations.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to thank Joaquín Morales, Cain González, Raúl Reyes, Ma. Teresa Vázquez, and Oralia

Jiménez for technical support. A. S. Ortiz-Pérez would like to thank the support of CONACyT through its scholarship program with number 208242/202097.

- ¹S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Dover, New York, 1981).
- ²D. T. J. Hurle, E. Jakeman, and C. P. Johnson, "Convective temperature oscillations in molten gallium," *J. Fluid Mech.* **64**, 565 (1974).
- ³J. E. Hart, "Stability of thin non-rotating Hadley circulations," *J. Atmos. Sci.* **29**, 687 (1972).
- ⁴A. E. Gill, "A theory of thermal oscillations in liquid metals," *J. Fluid Mech.* **64**, 577 (1974).
- ⁵J. E. Hart, "A note of stability of low-Prandtl-number Hadley circulations," *J. Fluid Mech.* **132**, 271 (1983).
- ⁶I. C. Walton, "The effect of a shear flow on convection near a two-dimensional hot-patch," *Q. J. Mech. Appl. Math.* **38**, 561 (1985).
- ⁷H. P. Kuo, S. A. Korpela, A. Chait, and P. Marcus, "Stability of natural convection in a shallow cavity," in *Proceedings of the 8th International Heat Transfer Conference* **4**, 1539, edited by C. L. Tien (Hemisphere Pub. Corp., Washington, DC, 1986), Vol. 4, p. 1539, Report Nos. IRN13660664 and ISBN0891165592.
- ⁸H. P. Kuo and S. A. Korpela, "Stability and finite amplitude natural convection in a shallow cavity with insulated top and bottom and heated from a side," *Phys. Fluids* **31**, 33 (1988).
- ⁹T.-M. Wang and S. A. Korpela, "Convection rolls in a shallow cavity heated from the side," *Phys. Fluids A* **1**, 947 (1989).
- ¹⁰P. Laure, "Study of convective motions in a rectangular cavity with horizontal gradient of temperature," *J. Theor. Appl. Mech.* **6**, 351 (1987).
- ¹¹P. Laure and B. Roux, "Linear and non-linear analysis of the hadley circulation," *J. Cryst. Growth* **97**, 226 (1989).
- ¹²M. G. Braunsfurth, A. C. Skeldon, A. Juel, T. Mullin, and D. S. Riley, "Free convection in liquid gallium," *J. Fluid Mech.* **342**, 295 (1997).
- ¹³A. Juel, J. Mullin, H. Ben Hadid, and D. Henry, "Three-dimensional free convection in molten gallium," *J. Fluid Mech.* **436**, 267 (2001).
- ¹⁴B. Hof, A. Juel, L. Zhao, D. Henry, H. Ben Hadid, and T. Mullin, "On the onset of oscillatory convection in molten gallium," *J. Fluid Mech.* **515**, 391 (2004).
- ¹⁵W. Wang and R. X. Huang, "An experimental study on thermal circulation driven by horizontal differential heating," *J. Fluid Mech.* **540**, 49 (2005).
- ¹⁶G. O. Hughes and R. W. Griffiths, "Horizontal convection," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **40**, 185 (2008).
- ¹⁷J. E. Weber, "On thermal convection between non-uniformly heated planes," *Int. J. Heat Mass Transfer* **16**, 961 (1973).
- ¹⁸D. Sweet, E. Jakeman, and D. T. J. Hurle, "Free convection in the presence of both vertical and horizontal temperature gradients," *Phys. Fluids* **20**, 1412 (1977).
- ¹⁹S. P. Bhattacharyya and S. Nador, "Stability of thermal convection between non-uniformly heated plates," *Appl. Sci. Res.* **32**, 555 (1976).
- ²⁰J. E. Weber, "On the stability of thermally driven shear flow heated from below," *J. Fluid Mech.* **87**, 65 (1978).
- ²¹D. A. Nield, "Convection induced by an inclined temperature gradient in a shallow horizontal layer," *Int. J. Heat Fluid Flow* **15**, 157 (1994).
- ²²P. N. Kaloni and N. Qiao, "On the nonlinear stability of thermally driven shear flow heated from below," *Phys. Fluids*, **8**, 639 (1996).
- ²³M. Lappa, "Secondary and oscillatory gravitational instabilities in canonical three-dimensional models of crystal growth from the melt. ii: lateral heating and the Hadley circulation," *C. R. Mec.* **335**, 261 (2007).
- ²⁴B. A. Finlayson, "The Galerkin method applied to convective instability problems," *J. Fluid Mech.* **17**, 201 (1968).
- ²⁵B. A. Finlayson, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Mathematics in Science and Engineering Vol. 87 (Academic, New York, 1972).
- ²⁶W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*, 3rd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
- ²⁷S. Kaddeche, D. Henry, and H. Ben Hadid, "Magnetic stabilization of the buoyant convection between infinite horizontal walls with a horizontal temperature gradient," *J. Fluid Mech.* **480**, 185 (2003).
- ²⁸W. M. Kays, *Convective Heat and Mass Transfer* (McGraw-Hill, New York, 1980), Appendix A, pp. 387–400.
- ²⁹F. P. Incropera and D. P. DeWitt, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 3rd ed. (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1990), Appendix A, page A24.
- ³⁰J. P. Boyd, *Chebyshev & Fourier Spectral Methods*, Lectures Notes in Engineering Vol. 49 (Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1989).