



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FUNCIONES ZETA MULTIDIMENSIONALES
DE \mathbb{Z}^d ACCIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

OLIVIA ISAURA LÓPEZ GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. RICARDO GÓMEZ AÍZA

2013





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1.-Datos del alumno

López

González

Olivia Isaura

57842160

Universidad Nacional Autónoma de México,

Facultad de Ciencias

Matemáticas

407076147

2.-Datos del tutor

Dr.

Ricardo

Gómez

Aíza

3.- Datos sinodal 1

Dr.

Hugo

Arizmendi

Peimbert

4.- Datos sinodal 2

Dr.

Gerónimo Francisco

Uribe

Bravo

5.- Datos sinodal 3

Dr.

Juan José

Montellano

Ballesteros

6.- Datos sinodal 4

Dr.

Pablo

Suárez

Serrato

7.-Datos de trabajo escrito

Funciones zeta multidimensionales de \mathbb{Z}^d -acciones

de páginas: 87

2013

Un intelectual es un hombre que dice una cosa simple de manera difícil, un artista es un hombre que dice una cosa difícil de manera sencilla.

Charles Bukowski.

Agradecimientos

Son muchas las personas que han formado parte de mi vida, a las que me encantaría agradecerles su amistad, consejos, apoyo, ánimo y compañía en los momentos más difíciles de mi vida. Sin importar en donde estén quiero darles las gracias por formar parte de mí y por todo lo que me han brindado.

A mis papás que han sido parte fundamental de mi vida, me cuidaron desde pequeña y, gracias a sus consejos aprendí que, basada en el trabajo, esfuerzo, paciencia y mucho empeño, puedo lograr todas y cada una de mis metas. ¡Los quiero mucho!

A mi tío y abuelos por todo su apoyo y cariño.

A todos mis amigos: Yeral y Teo por todos los cursos que compartimos desde el inicio de la carrera. A los actuarios Cindy, Richard, David, Memo, Marianne y a Raúl, por todos las risas y el tiempo juntos. A Giovanni (Nepo) por su ayuda con gráficas y por enseñarme a usar \LaTeX .

A Esther por todo el camino que recorrimos juntas, las materias, las tareas, las bromas, los malos momentos, pero sobretodo ¡por lo que nos falta!

Y a todos los que conocí a lo largo de estos años: Gladys, Pato, Oscar, Richi, Brenda, Pierre, Alvarito y Alonso.

A todos los chicos de los equipos de natación. A las pirañitas: Sergio, Isra, Betty, Angie, los ancianos, Fer, Marcos y Armando y a todos los de la alberca de la UNAM, especialmente a Raulito, por ser un gran entrenador y persona. Mis amigas, Mar y Vio.

Y en especial a Bere, por esta bonita amistad y por todos tus consejos. A Daniel, por estar “en las buenas y en las peores”, así como dices. A mi amigo Conra, a Carmen (sin palabras). Y porque contigo todo es más divertido... Aldito tqm.

A todos ustedes gracias por tantos momentos compartidos.

Por último, me gustaría agradecer a los miembros del jurado por su tiempo y disposición para revisar mi trabajo y a CONACyT, que a través del Proyecto de Ciencia Básica #99888, me brindaron un apoyo invaluable para la realización del presente trabajo.

Quisiera agradecer de manera muy especial a mi asesor, el Dr. Ricardo Gómez Aíza, por su apoyo, dedicación y tiempo que me brindó. Y por todo lo que de él y con él aprendí a lo largo de estos dos años de arduo trabajo.

¡Y a ti!

Prefacio

El propósito de este prefacio es describir brevemente el contenido de la tesis, cuyo objeto de estudio es la función zeta de Artin-Mazur y una de sus generalizaciones multidimensionales.

- La introducción presenta los objetos y resultados necesarios para definir y motivar la función zeta de Artin-Mazur. Muestra su definición e importancia. Al final enuncia, sin dar todos los detalles, la versión multidimensional de Lind [7] y enuncia uno de los problemas centrales en su estudio: *La conjetura de la función zeta multidimensional*.
- El Capítulo 1 constituye la primera base: los espacios shift. El propósito es demostrar que es posible calcular la función zeta de ciertos espacios shift. Primero se exponen estos espacios y los resultados necesarios para llegar a la resolución de las funciones zeta. En todo esto, incluidos los Capítulos 2 y 3, nuestra referencia principal en la exposición es [8].
- El Capítulo 2 se especializa en la clase que se busca, los espacios shift sóficos, en particular los espacios shift de tipo finito. Incluye diversos procedimientos para obtener representantes conjugados por medio de construcciones que resultan en gráficas dirigidas y etiquetadas, que servirán para obtener expresiones de sus funciones zeta.
- El Capítulo 3 presenta y demuestra las fórmulas de la función zeta de los espacios shift de tipo finito y sóficos. El propósito es exhibir las técnicas y demostraciones como referencia de comparación con el caso multidimensional que continúa.
- El Capítulo 4 es el principal, pues presenta la exposición y desarrollo del material que motivó esta tesis: los resultados más importantes del artículo de Douglas Lind [7], el cual presenta una generalización multidimensional de la función zeta de Artin-Mazur.

VI

La tesis también incluye un apéndice, a modo de referencia, que consiste del material de las áreas que requiere el resto del contenido y que dividimos en tres grandes ramas: Topología, Álgebra y Funciones Analíticas. En estas secciones no siempre incluimos todos los desarrollos de los resultados que se presentan por lo establecido en los alcances del trabajo, sin embargo se ha procurado señalar la mayoría de las referencias en la bibliografía.

Índice general

Introducción	1
0.1. Sistemas dinámicos	1
0.2. Puntos periódicos	3
0.3. Función zeta de Artin-Mazur	4
0.4. Funciones zeta de espacios shift	6
0.5. Acción de grupos, sistemas dinámicos y generalizaciones	8
1. Espacios shift	11
1.1. Información	11
1.1.1. Alfabetos, lenguajes y sucesiones bi-infinitas	12
1.2. Espacios shift completos	12
1.2.1. Topología, conjuntos cilindro y la métrica de Cantor	13
1.2.2. El mapeo shift	15
1.3. Espacios shift (subshift)	16
1.3.1. Ejemplos	16
1.3.2. Caracterización de espacios shift y sus lenguajes	17

1.4. Códigos de bloques deslizantes	20
1.4.1. Propiedades y caracterización de códigos de bloques deslizantes	21
1.5. Presentación en bloques y potencias de espacios shift.	23
1.5.1. Bloques como símbolos de un nuevo alfabeto	23
1.5.2. Presentación en bloques de espacios shift	24
1.5.3. Potencias de espacios shift	27
1.6. Particiones de Markov	28
2. Espacios shift de tipo finito y sóficos	31
2.1. Espacios shift de tipo finito	31
2.2. Gráficas y espacios shift de tipo finito	34
2.3. Gráficas etiquetadas y espacios shift sóficos	41
3. Funciones zeta de espacios shift	51
3.1. Función zeta de espacios shift de tipo finito	51
3.2. Función zeta de espacios shift sóficos	53
4. Función zeta multidimensional	57
4.1. Definición y propiedades básicas	57
4.2. Ejemplos de funciones zeta de \mathbb{Z}^2 -acciones	59
4.3. Cálculo de una \mathbb{Z}^d -acción trivial	66
4.4. La fórmula del producto	70
A. Apéndice A	73

A.1. Topología, continuidad, compacidad y espacios métricos	73
A.1.1. Topología	73
A.1.2. Compacidad	75
A.1.3. Continuidad	76
A.1.4. Espacios métricos	77
A.2. Álgebra	79
A.2.1. Grupos	79
A.2.2. Subgrupos y cocientes	80
A.2.3. Acciones	81
A.2.4. La retícula entera \mathbb{Z}^d y subgrupos de índice finito	81
A.3. Funciones analíticas	82
A.3.1. Funciones aritméticas y generadores	82
A.3.2. Producto de Dirichlet	84
A.3.3. Extensión analítica y frontera natural	85
Bibliografía	87

Introducción

Se inicia presentando lo necesario para definir la función zeta de Artin-Mazur: un sistema dinámico y la noción de órbitas periódicas. Definimos conjugación y mostramos que la función zeta es un invariante de conjugación. Se muestra la “Fórmula del producto” y se describe el contenido de lo que se desarrollará en los siguientes capítulos de la tesis. Finaliza con la noción de acción de grupos y enunciando la generalización de Lind a funciones zeta multidimensionales de acciones de \mathbb{Z}^d , así como el resultado y la conjetura principales que se conocen.

0.1. Sistemas dinámicos

Definición 0.1. Un *sistema dinámico* (a tiempo discreto) consiste de un par (X, ϕ) donde X es un espacio métrico completo y separable¹, y ϕ es un automorfismo² de X , es decir, un homeomorfismo³ del espacio topológico con el mismo $\phi: X \rightarrow X$ (es común referirse a X como el “espacio fase” y a ϕ como la “dinámica”).

Lo que nos interesa de un sistema dinámico es el comportamiento de sus órbitas.

¹A estos espacios topológicos se les conoce como espacios “polacos”. Podemos asumir también que X es compacto.

²La hipótesis de invertibilidad la asumimos a lo largo de todo este trabajo, por lo tanto la establecemos en la definición de sistema dinámico.

³Es posible, dependiendo del contexto, debilitar o restringir la hipótesis de continuidad, por ejemplo, requerir que ϕ sea únicamente medible con respecto a la σ -álgebra de Borel, o que sea diferenciable si X es una variedad diferenciable. Sin embargo, en este trabajo únicamente consideraremos transformaciones continuas.

Definición 0.2. Sea (X, ϕ) un sistema dinámico. La *órbita* de un punto $x \in X$ es

$$\gamma_x = \{\phi^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Si γ_x es una órbita finita, entonces decimos que es *periódica* de *periodo* $|\gamma_x|$.

Dos puntos distintos $x, y \in X$ pueden tener la misma órbita $\gamma_x = \gamma_y$. Por ejemplo, si x tiene una órbita periódica de periodo > 1 y $y \in \gamma_x \setminus \{x\}$, entonces $\gamma_x = \gamma_y$.

Definición 0.3. Sean (X, ϕ) y (Y, ψ) dos sistemas dinámicos.

- Un *homomorfismo* de (X, ϕ) en (Y, ψ) es una función continua $f: X \rightarrow Y$ tal que $f \circ \phi = \psi \circ f$, es decir, es una función continua que hace al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array}$$

- Si $f: X \rightarrow Y$ es un homomorfismo inyectivo, entonces decimos que tanto f como X son un *encaje* de X en Y .
- Si $f: X \rightarrow Y$ es un homomorfismo suprayectivo, entonces decimos que tanto f como Y son un *factor* de X en Y .
- Si $f: X \rightarrow Y$ es biyectiva y tanto f como f^{-1} son homomorfismos, entonces f es una *conjugación (topológica)* y diremos que X y Y son (*topológicamente*) *conjugados* y escribiremos $X \cong Y$.

El ser conjugado es una relación de equivalencia. La idea es que si (X, ϕ) y (Y, ψ) son dos sistemas dinámicos conjugados, entonces podemos pensar a Y como una “recodificación invertible” de X , de forma que comparten todas y cada una de las propiedades dinámicas que puedan poseer y que están determinadas por los mapeos ϕ y ψ . En este contexto, las conjugaciones son el medio para considerar “versiones diferentes” de exactamente el mismo objeto. El siguiente problema es entonces natural y fundamental.

Problema 0.1. Determinar cuándo dos sistemas dinámicos son conjugados.

Supongamos que tenemos dos sistemas dinámicos y quisiéramos saber cuándo son topológicamente conjugados. Ahora supongamos que a cada sistema dinámico podemos asignarle un “objeto” que capture cierta propiedad dinámica⁴, el cual puede ser un número real,

⁴Por “propiedad dinámica” nos referiremos a las características del comportamiento de las “órbitas”, i.e. las iteraciones del mapeo evaluadas en puntos del espacio fase.

un conjunto finito u otra estructura matemática, de modo que, a los sistemas dinámicos topológicamente conjugados se les asigna el mismo objeto. A esta clase de asignación se le conoce como *invariante de conjugación*, o simplemente *invariante*, dado el hecho de que no varían cuando se aplica a sistemas dinámicos topológicamente conjugados. Si a dos sistemas se les asigna diferentes objetos, entonces sabremos que no pueden ser topológicamente conjugados. El objeto invariante que vamos a estudiar en este trabajo es la función zeta. Su definición es en términos de puntos periódicos.

0.2. Puntos periódicos

Definición 0.4. Sea (X, ϕ) un sistema dinámico. Un punto $x \in X$ es *periódico* de periodo $p \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ si $\phi^p(x) = x$. Si $x \in X$ es un punto periódico de periodo p y x no es periódico de periodo q para ninguna $q < p$, entonces diremos que x es de periodo *mínimo* q .

Dado un sistema dinámico (X, ϕ) , escribiremos

$$p_\phi(n) := \#\{x \in X \mid x \text{ es un punto periódico de periodo } n\}$$

$$\text{y } q_\phi(n) := \#\{x \in X \mid x \text{ es un punto periódico de periodo mínimo } n\}.$$

Claramente $q_\phi(n) \leq p_\phi(n)$. Podemos decir aún más.

Observación 0.1. La sucesión $p_\phi(n)$ determina a la sucesión $q_\phi(n)$ y viceversa. Por ejemplo, es claro que

$$p_\phi(n) = \sum_{k|n} q_\phi(k). \quad (1)$$

Menos trivial es determinar cómo las cardinalidades de los puntos periódicos determinan a las cardinalidades de los puntos periódicos de periodo mínimo. La correspondencia que resulta se le conoce como “inversión de Möbius” y está dada por

$$q_\phi(n) = \sum_{k|n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) p_\phi(k) \quad (2)$$

donde μ es la *función de Möbius*. El desarrollo de la inversión de Möbius se encuentra en el Apéndice (Teorema A.14).

La siguiente proposición es fundamental.

Proposición 0.1. Sean (X, ϕ) y (Y, ψ) dos sistemas dinámicos y sea $f: X \rightarrow Y$ un homomorfismo. Si $x \in X$ tiene periodo n bajo ϕ , entonces $f(x)$ tiene periodo n bajo ψ y el periodo mínimo de $f(x)$ divide al periodo mínimo de x . Más aún, los encajes preservan el periodo mínimo de un punto periódico. En particular, si X y Y son conjugados, entonces tienen exactamente el mismo número de puntos periódicos de periodo (mínimo) n para toda $n \geq 1$.

Demostración. Por la Definición 0.4 tenemos que $f \circ \phi = \psi \circ f$. Además si $x \in X$ tiene periodo n entonces $\phi^n(x) = x$. Entonces

$$\psi^n(f(x)) = f(\phi^n(x)) = f(x),$$

de esta forma $f(x) \in Y$ es un punto periódico de periodo n .

Por otro lado, si x tiene periodo mínimo m , entonces $\phi^m(x) = x$ y $\phi^r(x) \neq x$ para toda $r < m$ positiva, como $\phi^n(x) = x$, entonces $n = m\alpha$ para algún entero α , es decir, el periodo mínimo de x divide a n . Por lo tanto, si x tiene periodo mínimo m , entonces $f(x)$ tiene periodo n y por el mismo argumento, su periodo mínimo divide a n . Si f es biyectiva entonces $\phi^n(x) = x$ si y sólo si $\psi^n(f(x)) = f(x)$, entonces x y $f(x)$ tienen el mismo periodo mínimo. \square

La proposición anterior nos muestra que para cada entero $n \geq 1$, el número de puntos de periodo n es el mismo para todos los sistemas dinámicos en una clase de conjugación dada; es decir, el número de puntos periódicos de periodo n es un *invariante de conjugación* entre sistemas dinámicos. Así, tenemos una forma para probar que algunos pares de espacios shift no pueden ser conjugados, por ejemplo cuando uno tiene un punto fijo y el otro no.

Ya estamos en posición de definir a la función zeta de Artin-Mazur. Esencialmente, es el objeto que captura las cardinalidades de los puntos periódicos.

0.3. Función zeta de Artin-Mazur

En 1965 Artin y Mazur introdujeron en [1] la función zeta de un sistema dinámico (X, ϕ) . Su definición la damos a continuación.

Definición 0.5. Sea (X, ϕ) un sistema dinámico. La función zeta de Artin-Mazur (o simplemente la función zeta) de $\phi: X \rightarrow X$ es

$$\zeta_\phi(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_\phi(n)}{n} z^n\right). \quad (3)$$

De forma que la función zeta es la función generadora⁵ Exp-Log que codifica el número de puntos periódicos. Asumiremos siempre que la función zeta está *bien definida*, es decir que $p_\phi(n) < \infty$ para toda $n \geq 1$ (lo que corresponde a decir que el conjunto de puntos periódicos, junto con el periodo como función de tamaño, es una clase combinatoria en el sentido de [5]).

La Observación 0.1 sugiere que la función zeta debe admitir una expresión en términos de la sucesión de cardinalidades de puntos periódicos de periodo mínimo. A esta expresión se le conoce como “fórmula del producto”.

Teorema 0.1 (FÓRMULA DEL PRODUCTO). *Sea (X, ϕ) un sistema dinámico. Entonces*

$$\zeta_\phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-z^n} \right)^{q_n/n} \quad (4)$$

es decir,

$$\zeta_\phi(z) = \prod_{\gamma} \frac{1}{1-z^{|\gamma|}} \quad (5)$$

donde el producto es sobre las órbitas finitas γ de ϕ y q_i denota el número de puntos periódicos de periodo i bajo ϕ .

Demostración. La demostración se sigue de la ecuación (1) y de la inversión de Möbius (2). Primero vemos que

$$\begin{aligned} \prod_{\gamma} \frac{1}{1-z^{|\gamma|}} &= \exp \left(\log \left(\prod_{\gamma} \frac{1}{1-z^{|\gamma|}} \right) \right) \\ &= \exp \left(\sum_{\gamma} \log \frac{1}{1-z^{|\gamma|}} \right) \\ &= \exp \left(\sum_{\gamma} \left(z^{|\gamma|} + \frac{z^{2|\gamma|}}{2} + \frac{z^{3|\gamma|}}{3} + \frac{z^{4|\gamma|}}{4} + \dots \right) \right). \end{aligned}$$

Obtenemos entonces la exponencial de una función generadora ordinaria y queremos encontrar su n -ésimo término (ver Definición A.21), donde $n = r|\gamma|$ y $r = 1, 2, 3, \dots$. Es fácil ver que el número de órbitas de tamaño n es q_n/n , i.e.

$$|\{\gamma \text{ órbita de } \phi \mid |\gamma| = n\}| = \frac{q_n}{n}$$

⁵En el Apéndice A, sección §A.3, presentamos la definición y los fundamentos básicos de funciones generadoras.

Entonces

$$\begin{aligned} [z^n] \sum_{\gamma} \left(z^{|\gamma|} + \frac{z^{2|\gamma|}}{2} + \dots \right) &= \sum_{r|n} \left(\sum_{\{\gamma||\gamma|=\frac{n}{r}\}} \frac{1}{r} \right) \\ &= \sum_{r|n} \frac{1}{r} \left(\sum_{\{\gamma||\gamma|=\frac{n}{r}\}} 1 \right) = \sum_{r|n} \frac{1}{r} \frac{r}{n} q_{\frac{n}{r}} = \sum_{r|n} \frac{q_{\frac{n}{r}}}{n}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} &\exp \left(\sum_{\gamma} \left(z^{|\gamma|} + \frac{z^{2|\gamma|}}{2} + \frac{z^{3|\gamma|}}{3} + \frac{z^{4|\gamma|}}{4} + \dots \right) \right) \\ &= \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{r|n} \frac{q_r}{n} z^n \right) \right) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{n} z^n \right) = \zeta_{\phi}(z). \quad \square \end{aligned}$$

Aún cuando tenemos dos fórmulas equivalentes para obtener la función zeta, ambas requieren *a priori* conocer las cardinalidades de los puntos periódicos de periodo (mínimo) n para cada $n \geq 1$.

Problema 0.2. Dado $\phi: X \rightarrow X$, encontrar $\zeta_{\phi}(z)$.

El siguiente corolario es fundamental.

Corolario 0.1. *La función zeta es un invariante de conjugación, i.e. si dos sistemas dinámicos son conjugados, entonces tienen la misma función zeta.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la Proposición 0.1. □

0.4. Funciones zeta de espacios shift

El problema de encontrar la función zeta ha sido abordado desde que la función zeta misma fue introducida. Su complejidad radica en la generalidad, por lo que los desarrollos se han realizado en clases particulares de mapeos $\phi: X \rightarrow X$ de espacios con características especiales que conllevan a una resolución de la función zeta (por ejemplo, el Corolario 0.1 permite abordar este problema al menos en clases de conjugación). Tal es el caso de ciertos espacios métricos compactos X conocidos como “espacios shift”, los cuales están conformados de ciertas sucesiones doblemente infinitas

$$x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X$$

de *símbolos* o *letras* $x_n \in \mathcal{A}$ de un alfabeto \mathcal{A} (un conjunto finito con topología discreta). En todos ellos, el mapeo $\phi: X \rightarrow X$ es precisamente el mapeo invertible conocido como el “shift”, a saber, la función $\phi = \sigma_X: X \rightarrow X$ que actúa en una sucesión por translación a la izquierda entrada a entrada, es decir, $\sigma_X(x)_n = x_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

El conjunto de espacios shift incluye a un subconjunto cuyos elementos son conocidos como los *shift sóficos*, los cuales a su vez incluyen a un subconjunto aún más particular, los *shift de tipo finito*. En 1970 Bowen y Lanford demostraron que la función zeta de un shift de tipo finito es el inverso de un polinomio $p(z)$, conocido como el “polinomio característico al revés”, que se obtiene de la matriz de adyacencia A de cierta gráfica dirigida de orden $M \geq 1$, concretamente $p(z) = z^M q_A(\frac{1}{z})$, donde $q_A(z)$ es el polinomio característico de A . Este resultado y su demostración se encuentran en esta tesis (ver Teorema 3.1 del Capítulo 3).

Más adelante, en 1978, Bowen aborda en [2] la resolución de la función zeta, ahora en el caso más general de los shift sóficos. Bowen desarrolla en su demostración un algoritmo para calcular la función zeta de un shift sófico y la obtiene como el cociente de polinomios característicos al revés de ciertas matrices de adyacencia signadas. En particular demuestra que la función zeta de un espacio shift sófico es una función racional. Este resultado y su demostración se encuentran también en esta tesis (ver Teorema 3.2 del Capítulo 3).

La función zeta constituye un invariante de una gran cantidad de clases de equivalencia de sistemas dinámicos (no sólo de conjugación). Por ejemplo, en la categoría de los espacios shift de tipo finito, la función zeta es invariante entre elementos de una misma clase de equivalencia en cada una de las siguientes relaciones de equivalencia (ver [8]):

1. Conjugación.	5. La tripleta de dimensión.
2. σ -equivalencia fuerte sobre \mathbb{Z}^+ .	6. σ -equivalencia débil sobre \mathbb{Z} .
3. σ -equivalencia débil sobre \mathbb{Z}^+ .	7. El par de dimensión.
4. Conjugación eventual.	8. Forma canónica de Jordan lejos del cero.

(estas relaciones de equivalencia obedecen las implicaciones

$$\boxed{1 \Leftrightarrow 2} \Rightarrow \boxed{3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5} \Rightarrow \boxed{6 \Leftrightarrow 7} \Rightarrow 8$$

y sus definiciones y propiedades, excepto por 1, no serán abordadas en esta tesis).

La importancia de la resolución de funciones zeta de espacios shift (sóficos y de tipo finito) radica en que puede ser útil para encontrar funciones zeta en casos más generales de sistemas dinámicos $\phi: X \rightarrow X$ (e.g. usando el Corolario 0.1). Al final del Capítulo 1, en la Sección §1.6, presentamos un breve bosquejo de la idea fundamental de este procedimiento, conocida como *particiones de Markov*.

0.5. Acción de grupos, sistemas dinámicos y generalizaciones

Dado un sistema dinámico (X, ϕ) , el mapeo $\phi: X \rightarrow X$ induce naturalmente una \mathbb{Z} -acción⁶ $\alpha: \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ del grupo aditivo $(\mathbb{Z}, +)$ sobre X , la cual está definida para toda $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in X$ por $\alpha(n, x) = \phi_X^n(x)$. Considerar acciones de grupos más generales a \mathbb{Z} nos conducirá también a hablar de la función zeta ζ_α de una acción $\alpha: G \times X \rightarrow X$ de un grupo G sobre X . En el caso multidimensional que estudiaremos, $G = (\mathbb{Z}^d, +)$ con $d \geq 2$.

En 1996, Lind generalizó en [7] a la función zeta de Artin-Mazur al terreno multidimensional. El propósito de esta tesis es presentar parte del trabajo de la generalización de Lind junto con sus bases y fundamentos, incluyendo resultados del caso particular de funciones zeta de Artin-Mazur. Como veremos, la función zeta multidimensional de Lind estará ahora asociada a un conjunto de $d \geq 1$ homeomorfismos conmutativos $\phi_i: X \rightarrow X$ con $i = 1, \dots, d$, mismos que inducirán una acción $\alpha: \mathbb{Z}^d \times X \rightarrow X$ del grupo aditivo multidimensional $(\mathbb{Z}^d, +)$ en X , a saber, $\alpha(\mathbf{n}, x) = \phi_1^{n_1} \circ \phi_2^{n_2} \circ \dots \circ \phi_d^{n_d}(x)$ para todo $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ y $x \in X$ (el que los mapeos sean conmutativos quiere decir que $\phi_i \circ \phi_j = \phi_j \circ \phi_i$ para todas $i, j \in \{1, 2, \dots, d\}$). Los puntos periódicos y sus periodos estarán ahora definidos en términos de “retículas” de \mathbb{Z}^d (de la palabra en inglés “lattice”), es decir, en términos de subgrupos $L \leq \mathbb{Z}^d$ de índice finito. Concretamente, si $p_\alpha(L)$ es el número de puntos periódicos de periodo L , entonces la función zeta multidimensional es

$$\zeta_\alpha(z) = \exp \left(\sum_{L \in \mathcal{L}} \frac{p_\alpha(L)}{|L|} z^{|L|} \right)$$

donde \mathcal{L} es el conjunto de retículas de \mathbb{Z}^d .

A diferencia de la función zeta de Artin-Mazur, que corresponde al caso $d = 1$, no se conoce ningún procedimiento general para calcular la función zeta multidimensional $d \geq 2$, incluso para espacios shift de tipo finito bidimensionales. i.e. los sistemas textiles de Nasu [11]. Los únicos ejemplos de funciones zeta de acciones de \mathbb{Z}^d que se conocen con $d \geq 2$ son los que obtuvo Lind en [7] y que presentamos en esta tesis. Todas las funciones zeta que Lind obtiene son funciones analíticas en el origen y cuyas series de McLaurin son *lacunarias*, es decir, su *frontera natural* (i.e. la frontera del máximo dominio de analiticidad) es el círculo alrededor del origen cuyo radio es precisamente el radio de convergencia de la misma serie.

Conjetura 1 (CONJETURA DE LA FUNCIÓN ZETA MULTIDIMENSIONAL [7]). Si $d \geq 2$, entonces la serie de McLaurin de la función zeta de una acción no trivial de \mathbb{Z}^d es lacunaria.

⁶Ver en el Apéndice A, en la sección de grupos §A.2, la definición A.19 de acción de un grupo en un conjunto.

El resultado principal de Lind es la generalización de la fórmula del producto (Teorema 0.1), el cual se enuncia y demuestra en esta tesis, en el Capítulo 4 (Teorema 4.3). Así presentamos en conjunto una monografía con los aspectos más relevantes en el que se exhiben para contraste las técnicas y los desarrollos tradicionales frente al esquema multidimensional en torno al estudio de funciones zeta de sistemas dinámicos.

Capítulo 1

Espacios shift

Comenzaremos por introducir los espacios shift y describir una serie de ejemplos. Después fijaremos nuestra atención en cierto tipo de automorfismos, la función shift que va del espacio en sí mismo. En conjunto, esto forma un “sistema dinámico shift”. Nuestro punto de atención serán estos sistemas, su interacción y sus aplicaciones.

1.1. Información

A menudo la información se representa como una secuencia de “símbolos” que pertenecen a un conjunto finito que suele ser denominado “alfabeto”. Por ejemplo, los libros son una secuencia muy larga de letras, signos de puntuación y símbolos tipográficos. Un número real se describe como una secuencia infinita de símbolos en su expansión decimal. Las computadoras almacenan información en secuencias de 0’s y 1’s. El ácido desoxirribonucleico, abreviado como ADN, son secuencias de 4 “bases”, adenina (A), timina (T), guanina (G) y citosina (C), que codifican la información genética. A cada uno de estos ejemplos le corresponde un conjunto de símbolos específico o alfabeto específico \mathcal{A} , cuyos elementos o símbolos también serán referidos como *letras*. Por ejemplo, el conocido alfabeto romano es $\{a, b, \dots, z\}$, el alfabeto griego es $\{\alpha, \beta, \dots, \zeta\}$, el alfabeto decimal es $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y el alfabeto del ADN es $\{A, T, C, G\}$. Formalicemos un poco estas ideas.

1.1.1. Alfabetos, lenguajes y sucesiones bi-infinitas

Definición 1.1. Un *alfabeto* es un conjunto finito \mathcal{A} . Un *bloque* (o *palabra*) de *longitud* $n \in \mathbb{N}$ (sobre el alfabeto \mathcal{A}), o simplemente un n -bloque, es un elemento del conjunto

$$\mathcal{A}^n = \underbrace{\mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}}_{n \text{ veces}}$$

El bloque *vacío* se refiere a $\mathcal{A}^0 = \emptyset$ y lo denotaremos por ϵ . Definimos también

$$\mathcal{A}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n.$$

Un *lenguaje* es un subconjunto

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}^*.$$

La longitud de una palabra $\omega \in \mathcal{A}^*$, que es el número de símbolos que contiene, será denotada por $|\omega|$, de forma que $|\epsilon| = 0$. Un *subbloque* (o *factor*) de $\omega = \omega_1\omega_2 \dots \omega_n \in \mathcal{A}^n$ es un bloque de la forma $\omega_i\omega_{i+1} \dots \omega_j$, con $1 \leq i \leq j \leq n$. Por convención la palabra vacía ϵ es un subbloque de toda palabra.

Aunque en la práctica las secuencias de símbolos son finitas, es conveniente tratarlas como secuencias infinitas, incluso en ambas direcciones (es decir, secuencias *bi-infinitas*). Nuestro principal objeto de estudio en este capítulo serán las colecciones de secuencias bi-infinitas de símbolos de un alfabeto finito \mathcal{A} . Tales secuencias se denotan por $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ o por

$$x = \dots x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2 \dots$$

donde $x_i \in \mathcal{A}$ para toda $i \in \mathbb{Z}$.

El símbolo x_i es la i -ésima *coordenada* de x y x puede estar dada por sus coordenadas como un tipo de “vector” infinito. Cuando escribimos una secuencia específica, debemos determinar la coordenada 0. Conviene hacerlo con un “punto decimal” para separar las x_i 's con $i \geq 0$, de aquellas con $i < 0$. Por ejemplo:

$$x = \dots 101 \cdot 0010 \dots$$

significa que $x_{-3} = 1$, $x_{-2} = 0$, $x_{-1} = 1$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ y así sucesivamente.

1.2. Espacios shift completos

En esta sección \mathcal{A} es un alfabeto finito¹.

¹El estudio de espacios shift sobre alfabetos infinitos es un área de investigación en desarrollo, sin embargo está fuera de los alcances de este trabajo.

Definición 1.2. El \mathcal{A} -shift completo es el conjunto $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ de todas las secuencias bi-infinitas de símbolos de \mathcal{A} , es decir,

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_i \in \mathcal{A} \text{ para toda } i \in \mathbb{Z}\}.$$

Si $r \geq 1$ es un entero positivo, entonces el r -shift completo (o simplemente r -shift), denotado por X_r , es el shift completo sobre el alfabeto $\{0, 1, 2, \dots, r-1\}$.

En la definición anterior, $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ denota al conjunto de todas las funciones de \mathbb{Z} en \mathcal{A} y dichas funciones son justamente las secuencias bi-infinitas de elementos de \mathcal{A} y cada secuencia $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ será referida como *un punto del espacio shift completo sobre el alfabeto \mathcal{A}* . A los puntos del 2-shift completo se les conoce como *secuencias binarias*. Si \mathcal{A} es de cardinalidad $|\mathcal{A}| = r$, entonces existe una correspondencia biyectiva entre el \mathcal{A} -shift completo y el r -shift completo, dada por una biyección entre \mathcal{A} y $\{0, 1, 2, \dots, r-1\}$.

Si x es un punto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $i \leq j$, entonces denotamos al bloque de coordenadas en x comenzando con la posición i hasta la posición j por $x_{[i,j]} = x_i x_{i+1} \dots x_j$.

1.2.1. Topología, conjuntos cilindro y la métrica de Cantor

Vamos a considerar $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ como un espacio topológico, equipándolo con la topología producto. Para esto, primero consideramos \mathcal{A} como un espacio topológico con la topología discreta y como \mathcal{A} es finito, entonces \mathcal{A} es compacto. El Teorema de Tychonoff (Teorema A.2 en el Apéndice A) implica que el producto numerable $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es compacto. Como es bien sabido, la topología producto tiene como base a los llamados “conjuntos cilindro” (ver definición A.9 en el Apéndice A). Vamos a definirlos en nuestro contexto a continuación y bastará considerar a un subconjunto particular en el que las entradas distintas del total son consecutivas.

Definición 1.3. Sean $w \in \mathcal{A}^*$ y $k \in \mathbb{Z}$. El *conjunto cilindro* que determinan w y k se define por

$$C_k(w) = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid x_{[k, k+|w|-1]} = w\}.$$

Entonces la topología de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es precisamente la colección de todas las uniones arbitrarias de intersecciones finitas de conjuntos cilindro. A continuación veremos que esta topología es metrizable. La idea en la definición de la métrica que induce esta topología es tal que dos puntos estarán “cerca” cuando coincidan las coordenadas de largos bloques centrales.

Proposición 1.1. $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \rho)$ es un espacio métrico, donde $\rho : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \times \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^+$ se define para cualesquiera $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ de la siguiente manera:

$$\rho(x, y) = \frac{1}{2^k} \quad (1.1)$$

donde $k \geq 0$ es el mínimo entero no-negativo tal que $x_{[-k, k]} \neq y_{[-k, k]}$ (si $x = y$, entonces definimos $k = \infty$ de forma que $\rho(x, x) = \frac{1}{2^\infty} = 0$).

Demostración. Claramente ρ cumple las dos primeras propiedades de una métrica (ver definición A.11 en el Apéndice A). Probaremos la tercera y última propiedad de una métrica: la desigualdad del triángulo. Sean $x, y, z \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y supongamos que

$$\rho(x, y) = \frac{1}{2^k} \text{ y } \rho(y, z) = \frac{1}{2^l}$$

donde $k, l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. La desigualdad del triángulo es obvia si $k = 0$ o $l = 0$, de forma que podemos suponer que $k, l \geq 1$. Entonces

$$x_{[-k+1, k-1]} = y_{[-k+1, k-1]} \text{ y } y_{[-l+1, l-1]} = z_{[-l+1, l-1]}.$$

Si $m = \min\{k, l\}$, entonces $x_{[-m+1, m-1]} = z_{[-m+1, m-1]}$, por lo tanto

$$\rho(x, z) \leq \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^l} = \rho(x, y) + \rho(y, z). \quad \square$$

En otras palabras, para determinar la distancia entre dos puntos $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, buscamos el entero $k \geq 1$ más grande para el cual el $(2k + 1)$ -bloque central de x y y coinciden (si tal entero no existe, i.e. si $x_0 \neq y_0$, entonces la distancia entre x y y es 1), entonces la distancia entre x y y será $2^{-(k+1)}$.

Definición 1.4. La métrica ρ de la Proposición 1.1 y definida por la ecuación (1.1) se denomina *métrica de Cantor*².

Si $x \in \mathcal{A}^*$ y $\varepsilon > 0$, escribiremos

$$B_\rho(x, \varepsilon) = \{y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}.$$

Proposición 1.2. La topología que generan los cilindros es la topología que genera la métrica de Cantor.

²Este nombre proviene del hecho de que si $|\mathcal{A}| \geq 2$, entonces $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es homeomorfo al clásico conjunto ternario de Cantor.

Demostración. Sean $w \in \mathcal{A}^*$ y $k \in \mathbb{Z}$. Veremos primero que existen $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B(x, \varepsilon) \subseteq C_k(w)$. Sea $x \in C_k(w)$, $N \geq |k| + |w|$ y $\varepsilon < \frac{1}{2^N}$. Entonces para cualquier punto $y \in B(x, \varepsilon)$ ocurre que $y_{[-N, N]} = x_{[-N, N]}$. Como N es lo suficientemente grande, donde sea que se encuentre k , cabe la palabra w , es decir,

$$w = x_{[k, k+|w|-1]} = y_{[k, k+|w|-1]}.$$

Entonces $y \in C_k(w)$, por lo tanto $B(x, \varepsilon) \subseteq C_k(w)$.

Inversamente, sean $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $\varepsilon > 0$. Veremos que existen $w \in \mathcal{A}^*$ y $k \in \mathbb{Z}$ tales que $C_k(w) \subseteq B(x, \varepsilon)$. Sean $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$ y $w = x_{[-k, k]} \in \mathcal{A}^*$. Si $y \in C_k(w)$, entonces $y_{[-k, k]} = x_{[-k, k]} = w$, por lo tanto $\rho(x, y) \leq \frac{1}{2^k}$, es decir, $y \in B(x, \varepsilon)$, por lo tanto $C_k(w) \subseteq B(x, \varepsilon)$. \square

Proposición 1.3. *Los conjuntos cilindro son abiertos y cerrados.*

Demostración. Los conjuntos cilindro son abiertos por definición (generan la topología). Veamos que también son cerrados. Sean $w \in \mathcal{A}^*$, $k \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un punto de acumulación de $C_k(w)$, de tal forma que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x^{(n)} \in C_k(w)$ tal que $\rho(x, x^{(n)}) < \frac{1}{2^n}$. Si $N > |k| + |w|$, entonces existe $x^{(N)} \in C_k(w)$ tal que $\rho(x, x^{(N)}) < \frac{1}{2^N}$, de forma que $x_{[-N, N]} = x_{[-N, N]}^{(N)}$, es decir, $x \in C_k(w)$, por lo tanto $C_k(w)$ es cerrado. \square

El concepto de convergencia está definido para espacios topológicos, en particular para espacios métricos. La Proposición 1.2 nos permite entender mejor el concepto de convergencia en nuestro contexto. Consideremos una sucesión $x^{(n)} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ en el \mathcal{A} -espacio shift, $n \in \mathbb{N}$ y sea $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Entonces, por definición de la métrica de Cantor, $x^{(n)}$ converge a x exactamente cuando, para todo $k \geq 0$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_{[-k, k]}^{(n)} = x_{[-k, k]} \text{ para todo } n \geq n_k,$$

en cuyo caso escribiremos $x^{(n)} \rightarrow x$. Es decir, una sucesión de puntos en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ converge si para toda $k \geq 0$, el $(2k + 1)$ -bloque central se estabiliza en los miembros de la sucesión a partir cierto momento, o en otras palabras, si el conjunto de $(2k + 1)$ -bloques centrales de los puntos de la sucesión es finito.

1.2.2. El mapeo shift

Definición 1.5. El mapeo shift es la función $\sigma_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ que lleva un punto x al punto $y = \sigma_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}(x)$ cuya i -ésima coordenada es $y_i = x_{i+1}$ para toda $i \in \mathbb{Z}$.

El mapeo shift $\sigma_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}$ va del shift completo $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ en sí mismo y es una función biyectiva que actúa por traslación hacia la izquierda. La operación inversa $\sigma_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}^{-1}$ consiste entonces en mover un lugar a la derecha cada coordenada.

El siguiente resultado es básico:

Proposición 1.4. *El mapeo shift es continuo.*

Demostración. Para cualquier $\omega \in \mathcal{A}^*$ y $k \in \mathbb{Z}$ sucede que $\sigma^{-1}(C_k(\omega)) = C_{k-1}(\omega)$. El resultado se sigue entonces del Teorema A.3, equivalencia 1 \Leftrightarrow 3. \square

Concluimos esta sección con una definición fundamental:

Definición 1.6. Un punto $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es *periódico* (bajo $\sigma_{X_{\mathcal{A}}}$) si $\sigma_{X_{\mathcal{A}}}^n(x) = x$, para alguna $n \geq 1$, en cuyo caso diremos que x tiene *periodo* n . Si x es periódico, el entero positivo más pequeño n para el cual $\sigma_{X_{\mathcal{A}}}^n(x) = x$ es el *periodo mínimo* de x . Si $\sigma_{X_{\mathcal{A}}}(x) = x$, entonces x es un *punto fijo* para $\sigma_{X_{\mathcal{A}}}$ (i.e. los puntos fijos son los puntos de periodo mínimo igual a 1).

1.3. Espacios shift (subshift)

En esta sección, \mathcal{A} continúa representando un alfabeto finito.

Definición 1.7. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}^*$ una colección de bloques sobre el alfabeto \mathcal{A} , a los cuales llamaremos *bloques prohibidos*. El *espacio shift* (o *subshift*) *inducido* por \mathcal{F} es el subconjunto $X_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ de todas las secuencias en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ que no contienen ningún bloque de \mathcal{F} , es decir,

$$X_{\mathcal{F}} = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid \text{no existen } i \leq j \text{ tales que } x_{[i,j]} \in \mathcal{F}\}.$$

En la definición anterior, la colección \mathcal{F} puede ser finita o infinita, en cualquier caso es a lo más numerable.

Definición 1.8. Un *espacio shift* (o *subshift*) es un subconjunto $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tal que $X = X_{\mathcal{F}}$ para alguna colección $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}^*$ de palabras prohibidas sobre \mathcal{A} . Si un espacio shift X está contenido en un espacio shift Y , diremos que X es un *subshift* de Y .

1.3.1. Ejemplos

Ejemplo 1.1. Sea $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $\mathcal{F} = \emptyset$, el espacio shift sin restricciones. De la misma manera, si $X = \emptyset$, también es un espacio shift restringiendo todo el alfabeto, es decir $\mathcal{F} = \mathcal{A}$.

Ejemplo 1.2. Consideremos el alfabeto binario $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Sea $X = X_{\mathcal{F}}$, donde $\mathcal{F} = \{11\}$, es decir X es el conjunto de todas las secuencias binarias que no contienen dos 1's juntos. A este shift se le conoce como *shift áureo*.

Ejemplo 1.3. Consideremos nuevamente el alfabeto binario $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Sea X el conjunto de todas las secuencias binarias tales que entre dos 1's hay un número par de 0's. Es decir, $\mathcal{F} = \{10^{2n+1}1 \mid n \geq 0\}$, donde

$$0^{2n+1} = \underbrace{0000 \dots 0}_{2n+1 \text{ veces}}$$

A este espacio le llamamos *shift par*.

Ejemplo 1.4. Sean $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ y X el conjunto de todos los puntos en el shift completo $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ en los cuales a únicamente puede estar seguida por la letra a o b , b sólo puede estar seguida por c y c puede estar seguida por a y b . En este caso $X = X_{\mathcal{F}}$ donde $\mathcal{F} = \{ac, ba, bb, cc\}$.

Ejemplo 1.5. Sea X el conjunto de puntos en el shift completo $\{a, b, c\}^{\mathbb{Z}}$ donde una palabra de la forma $ab^m c^k a$ puede ocurrir en un punto únicamente si $m = k$. A este espacio se le conoce como el *espacio shift libre de contexto*.

Proposición 1.5. Sean $X_{\mathcal{F}_1}$ y $X_{\mathcal{F}_2}$ dos espacios shift, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{A}^*$. Entonces $X_{\mathcal{F}_1} \cap X_{\mathcal{F}_2} = X_{\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2}$.

Demostración. Sea $x \in X_{\mathcal{F}_1} \cap X_{\mathcal{F}_2}$, si $\text{Bloq}(x) = \{x_{[k, k+n]} \mid k \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$, entonces $\text{Bloq}(x) \cap \mathcal{F}_i = \emptyset$ para $i = 1, 2$, lo que implica que $\text{Bloq}(x) \cap (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \emptyset$, es decir, $x \in X_{\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2}$. De manera análoga, si $x \in X_{\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2}$ entonces $x \in X_{\mathcal{F}_1} \cap X_{\mathcal{F}_2}$. \square

1.3.2. Caracterización de espacios shift y sus lenguajes

Es natural describir un espacio shift especificando las palabras permitidas en lugar de las prohibidas. Esto nos lleva a la noción de lenguaje de un espacio shift.

Definición 1.9. Sea $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un subconjunto (no necesariamente un subshift) de un espacio shift completo. Denotamos al conjunto de todos los bloques de tamaño n que ocurren en los puntos de X como $\mathcal{B}_n(X)$, es decir,

$$\mathcal{B}_n(X) = \{x_{[i, i+n-1]} \mid x \in X \text{ e } i \in \mathbb{Z}\}. \quad (1.2)$$

El *lenguaje* de X es la colección

$$\mathcal{B}(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n(X)$$

y nos referiremos a sus elementos como *bloques permitidos* de X .

Ejemplo 1.6. El lenguaje del 2-shift completo es

$$\{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, \dots\}.$$

Ejemplo 1.7. El lenguaje del shift áureo del Ejemplo 1.2 es

$$\{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 000, 001, 010, 100, 101, 0000, \dots\}.$$

Claramente, si $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es un subshift, entonces

$$\mathcal{B}_n(X) = \{x_{[0, n-1]} \mid x \in X\}$$

(comparar con ecuación (1.2)). De hecho, es claro también que no necesariamente un lenguaje es el lenguaje de un espacio shift. La siguiente proposición caracteriza a los lenguajes de espacios shift y también proporciona una descripción alternativa de un espacio shift.

Proposición 1.6. 1. Sea $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un espacio shift y sea $\mathcal{L} = \mathcal{B}(X)$ su lenguaje. Si $w \in \mathcal{L}$, entonces:

- a) Todo subbloque de w pertenece a \mathcal{L} y
 - b) existen palabras no vacías $u, v \in \mathcal{L}$ tales que $uwv \in \mathcal{L}$.
2. Los lenguajes de los espacios shift se caracterizan por 1. Es decir, si \mathcal{L} es una colección de bloques sobre \mathcal{A} , entonces $\mathcal{L} = \mathcal{B}(X)$ para algún espacio shift X si y sólo si \mathcal{L} satisface la condición 1.
3. El lenguaje de un espacio shift determina al espacio shift. De hecho, para cualquier espacio shift X , ocurre que $X = X_{\mathcal{B}(X)^c}$. Entonces, dos espacios shift son iguales si y sólo si tienen el mismo lenguaje.

Demostración. 1. Si $w \in \mathcal{L} = \mathcal{B}(X)$, w ocurre en algún punto $x \in X$, entonces todo subbloque de w ocurre en x y por consiguiente está en \mathcal{L} . Más aún, existen bloques no vacíos u y v tales que la palabra uwv ocurre en x , entonces $u, v \in \mathcal{L}$.

2. Sea \mathcal{L} la colección de bloques que satisface 1 y denotamos por X al espacio shift $X_{\mathcal{L}^c}$. Probaremos que $\mathcal{L} = \mathcal{B}(X)$. Si $w \in \mathcal{B}(X)$ entonces w está en algún punto de $X_{\mathcal{L}^c}$, es decir, $w \notin \mathcal{L}^c$ o $w \in \mathcal{L}$, entonces $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{L}$. Inversamente, suponemos que $w = x_0x_1 \dots x_m \in \mathcal{L}$, aplicando repetidamente el punto 1b, podemos encontrar símbolos x_j con $j > m$ y x_i con $i < 0$ para formar el bloque $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ y así, por 1a, todo subbloque de x está en \mathcal{L} , por lo que $x \in X_{\mathcal{L}^c}$. Como w ocurre en x , tenemos que $w \in \mathcal{B}(X_{\mathcal{L}^c}) = \mathcal{B}(X)$, por lo tanto $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B}(X)$ y $\mathcal{L} = \mathcal{B}(X)$.

3. Si $x \in X$, como $\mathcal{B}(X)$ contiene todos los bloques que ocurren en cualquier punto de X , ningún bloque de x está en $\mathcal{B}(X)^c$, entonces $x \in X_{\mathcal{B}(X)^c}$, por lo tanto $X \subseteq X_{\mathcal{B}(X)^c}$. Inversamente, como X es un espacio shift, existe una colección \mathcal{F} para la cual $X = X_{\mathcal{F}}$. Si $x \in X_{\mathcal{B}(X)^c}$, entonces cualquier subbloque de x está en $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X_{\mathcal{F}})$ por lo que no puede estar en \mathcal{F} . Entonces $x \in X_{\mathcal{F}}$, probando que $X_{\mathcal{B}(X)^c} \subseteq X = X_{\mathcal{F}}$. Por lo tanto $X = X_{\mathcal{B}(X)^c}$. \square

Si $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es un subshift, entonces podemos definir al mapeo

$$\sigma_X: X \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$$

al restringir $\sigma_{X_{\mathcal{A}}}$ a X , es decir,

$$\sigma_X = \sigma_{X_{\mathcal{A}}} \upharpoonright_X .$$

De hecho, $\sigma_X: X \rightarrow X$, o en otras palabras, X es σ -invariante, es decir, $\sigma_X(x), \sigma_X^{-1}(x) \in X$ para toda $x \in X$, hecho trivial pues se sigue directamente de la definición de espacio shift que los subbloques de x , $\sigma_X(x)$ y $\sigma_X^{-1}(x)$ son exactamente los mismos. La condición para que un punto pertenezca a un espacio shift es entonces en términos de las palabras prohibidas y no en términos de las coordenadas en las que un bloque puede ser prohibido. Esto se sigue de la σ -invarianza. Esta propiedad nos permite encontrar subconjuntos de espacios shift completos que no son espacios shift. Por ejemplo, el subconjunto X de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ que consiste de un único punto

$$X = \{x = \dots 0101 \cdot 0101 \dots = (01)^{\infty}\}$$

no es un subshift ya que $\sigma_X(x) = \dots 1010 \cdot 1010 \dots = (10)^{\infty} \notin X$. De hecho, la σ -invarianza no es una propiedad suficiente para obtener espacios shift, también necesitamos que estos espacios sean *cerrados*, como lo indica la siguiente proposición.

Proposición 1.7. *Un subconjunto $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es un subshift si y sólo si,*

- X es cerrado y
- X es σ -invariante, i.e. $\sigma_X(X) = X$.

Demostración. Supongamos que X es un subshift. Es fácil ver que X es σ -invariante, pues para cualquier $x \in X$ tenemos $\sigma_X(x) \in X$ (por definición, ya que los subbloques de x y de $\sigma_X(x)$ son exactamente los mismos), por lo tanto $\sigma_X(X) = X$. Veamos pues que X es cerrado. Como X es un espacio shift, existe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}^*$ una colección de palabras prohibidas tal que $X = X_{\mathcal{F}}$. Sea $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un punto de acumulación de X y $x^{(n)} \in X$ tal que $x^{(n)} \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$. Demostraremos que $x \in X$. Como X es σ -invariante, basta probar que para toda $k \in \mathbb{N}$, $x_{[-k, k]} \in \mathcal{B}(X)$. Sea $\varepsilon < \frac{1}{2^k}$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$, $\rho(x^{(n)}, x) < \varepsilon$ por lo tanto $x_{[-k, k]}^{(n)} = x_{[-k, k]}$, como $x^{(n)} \in X$ entonces $x_{[-k, k]}^{(n)} \in \mathcal{B}(X)$, por lo tanto $x \in X$.

Inversamente, supongamos que X es cerrado y σ -invariante. Debemos probar que existe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}^*$ tal que $X = X_{\mathcal{F}}$. Sea $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}^*$ el lenguaje de X y tomamos $\mathcal{F} = \mathcal{A}^* \setminus \mathcal{B}(X)$, demostraremos que $X = X_{\mathcal{F}}$. Sea $x \in X_{\mathcal{F}}$, veamos que $x \in X$, como X es cerrado, bastará demostrar que existe una sucesión $x^{(n)} \in X$ tal que $x^{(n)} \rightarrow x$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $x_{[-n,n]} \notin \mathcal{F}$, entonces $x_{[-n,n]} \in \mathcal{B}_{2n+1}(X)$, por lo tanto existe $k \in \mathbb{Z}$ y $y^{(n)} \in X$ tal que $y_{[k,k+2n]}^{(n)} = x_{[-n,n]}$. Ahora, como X es σ -invariante, entonces $x^{(n)} = \sigma_X^{k+n}(y^{(n)}) \in X$, lo que implica $x_{[-n,n]}^{(n)} = x_{[-n,n]}$, por lo tanto $\rho(x^{(n)}, x) < \frac{1}{2^n}$, de aquí que $x^{(n)} \rightarrow x$ y como X es cerrado, $x \in X$, es decir $X_{\mathcal{F}} \subseteq X$.

Sea $x \in X$, ahora veamos que $x \in X_{\mathcal{F}}$. Para cualesquiera $k \in \mathbb{Z}$ y $l \in \mathbb{N}$, tenemos que $x_{[k,k+l]} \in \mathcal{B}(X)$, es decir $x_{[k,k+l]} \notin \mathcal{F}$, entonces por definición de subshift, $x \in X_{\mathcal{F}}$, por lo tanto $X \subseteq X_{\mathcal{F}}$. \square

Observación 1.1. La Proposición 1.7 implica que si X es un subshift, entonces (X, σ_X) es un sistema dinámico cuyo espacio fase X es un espacio métrico compacto (es un subconjunto cerrado de un espacio compacto, por lo tanto la compacidad de X se sigue del Teorema A.9). En general, si X es un espacio topológico y $\phi: X \rightarrow X$ es un homeomorfismo, entonces ϕ , induce una \mathbb{Z} -acción $\alpha: \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ definida para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in X$ por $\alpha(n, x) = \phi_X^n(x)$.

1.4. Códigos de bloques deslizantes

Supongamos que $x = \dots x_{-1} \cdot x_0 x_1 \dots$ es una sucesión de símbolos en un espacio shift X sobre un alfabeto \mathcal{A} . Podemos “transformar” x en una nueva secuencia $y = \dots y_{-1} \cdot y_0 y_1 \dots$ sobre otro alfabeto³ \mathfrak{A} de la siguiente manera, fijemos $m, a \geq 0 \in \mathbb{N}$. Para calcular la i -ésima coordenada y_i de la sucesión transformada, utilizamos una función Φ que depende de una “ventana” de coordenadas de x desde $i - m$ hasta $i + a$. Aquí $\Phi: \mathcal{B}_{m+a+1}(X) \rightarrow \mathfrak{A}$ es una función de los $(m + a + 1)$ -bloques permitidos de X a los símbolos de \mathfrak{A} .

Definición 1.10. Sea X un espacio shift sobre \mathcal{A} y $\Phi: \mathcal{B}_{m+a+1}(X) \rightarrow \mathfrak{A}$, una función de los $(m + a + 1)$ -bloques permitidos en X a los símbolos de un alfabeto \mathfrak{A} . Entonces decimos que la función $\phi: X \rightarrow \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ definida por $y = \phi(x)$ con

$$y_i = \Phi(x_{i-m}x_{i-m+1} \dots x_{i+a}) = \Phi(x_{[i-m, i+a]}) \text{ para toda } i \in \mathbb{Z}$$

es un $(m + a + 1)$ -código de bloques deslizantes con memoria m y anticipación a y diremos que ϕ es inducido por la regla local Φ . En este caso escribiremos $\phi = \Phi_{\infty}^{[-m, a]}$. Si Y es un espacio shift contenido en $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ y $\phi(X) \subseteq Y$, escribimos $\phi: X \rightarrow Y$.

³Si $\mathfrak{A} = \mathcal{A}$, entonces este tipo de “transformación” es conocida como *autómata celular*.

Los códigos de bloques deslizantes más simples son aquellos sin memoria ni anticipación, es decir con $m = a = 0$, i.e. los 1-código de bloques deslizantes. Aquí la i -ésima coordenada de la imagen de x depende únicamente de x_i .

1.4.1. Propiedades y caracterización de códigos de bloques deslizantes

Proposición 1.8. *Sean X y Y espacios shift (no necesariamente sobre el mismo alfabeto). Si $\phi : X \rightarrow Y$ es un código de bloques deslizantes, entonces $\phi \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ \phi$, es decir, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma_X} & X \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ Y & \xrightarrow{\sigma_Y} & Y \end{array}$$

Demostración. Sea $\phi : X \rightarrow Y$ un código de bloques deslizantes inducido por la función $\Phi : \mathcal{B}_{m+a+1}(X) \rightarrow \mathfrak{A}$, de forma que es de memoria $m \geq 0$ y anticipación $a \geq 0$. Para $x \in X$, tenemos que

$$(\sigma_Y \circ \phi)(x)_i = \phi(x)_{i+1} = \Phi(x_{[i+1-m, i+1+a]})$$

mientras que

$$(\phi \circ \sigma_X)(x)_i = \phi(\sigma_X(x))_i = \Phi(\sigma_X(x)_{[i-m, i+a]}) = \Phi(x_{[i-m+1, i+a+1]}).$$

Entonces la i -ésima coordenada de las imágenes de x bajo $\sigma_Y \circ \phi$ y $\phi \circ \sigma_X$ coinciden para cada i , por lo tanto las imágenes son iguales. \square

Lema 1.1. *Sea $\phi : X \rightarrow Y$ un código de bloques deslizantes de memoria y anticipación $m \geq 0$ y $a \geq 0$ respectivamente. Entonces, para toda $M \geq m$ y $A \geq a$, ϕ es un código de bloques deslizantes de memoria y anticipación M y A .*

Demostración. Supongamos que ϕ es inducido por $\Phi : \mathcal{B}_{m+a+1}(X) \rightarrow \mathcal{B}_1(Y)$. Sea

$$\widehat{\Phi} : \mathcal{B}_{M+A+1}(X) \rightarrow \mathcal{B}_1(Y)$$

la función definida para todo $\omega \in \mathcal{B}_{M+A+1}(X)$ por $\widehat{\Phi}(\omega) = \Phi(\omega_{[M-m, M+a+1]})$. Es entonces claro que $\widehat{\Phi}_{\infty}^{[-M, A]} = \Phi_{\infty}^{[-m, a]}$. \square

Proposición 1.9. Sean X y Y espacios shift (no necesariamente sobre el mismo alfabeto). Una función $\phi: X \rightarrow Y$ es un código de bloques deslizantes si y sólo si $\phi \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ \phi$ y existe $N \geq 0$ tal que $\phi(x)_0$ es una función de $x_{[-N,N]}$.

Demostración. Supongamos que $\phi: X \rightarrow Y$ es un código de bloques deslizantes de memoria y anticipación $m \geq 0$ y $a \geq 0$ respectivamente. La primera condición se cumple por la Proposición 1.8. La segunda condición se cumple por el Lema 1.1 ya que nos permite suponer que $m = a = N \geq 0$. Inversamente, suponemos que $\phi: X \rightarrow Y$ es una función tal que $\phi \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ \phi$ y que existe $N \geq 0$ tal que $\phi(x)_0$ es una función de $x_{[-N,N]}$. Definimos $\Phi: \mathcal{B}_{2N+1}(X) \rightarrow \mathcal{B}_1(Y)$ como sigue, si $w \in \mathcal{B}_{2N+1}(X)$, por hipótesis tenemos que cualesquiera $x, y \in X$ tales que $y_{[-N,N]} = x_{[-N,N]} = w$ cumplen con la condición $\phi(x)_0 = \phi(y)_0$. Entonces podemos definir $\Phi(w) = \phi(x)_0$ (por lo anterior, Φ está bien definida) y basta probar que $\phi = \Phi_\infty^{[-N,N]}$. Hay que demostrar que para toda $x \in X$ ocurre que $\phi(x) = \Phi_\infty^{[-N,N]}(x)$, es decir,

$$\phi(x)_i = (\Phi_\infty^{[-N,N]}(x))_i \text{ para toda } i \in \mathbb{Z}.$$

Como ϕ y $\Phi_\infty^{[-N,N]}$ conmutan con σ , basta probarlo cuando $i = 0$. Pero por definición de Φ tenemos que

$$\phi(x)_0 = \Phi(x_{[-N,N]}) = \Phi_\infty^{[-N,N]}(x)_0. \quad \square$$

El siguiente resultado es central en la teoría de códigos de bloques deslizantes.

Teorema 1.1 (CURTIS-LYNDON-HEDLUND). Sean (X, σ_X) y (Y, σ_Y) dos espacios shift y sea $\phi: X \rightarrow Y$ una función (no necesariamente continua). Entonces ϕ es un código de bloques deslizantes si y sólo si ϕ es continua y $\phi \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ \phi$.

Demostración. Primero suponemos que ϕ es un código de bloques. Por definición $\phi \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ \phi$. Falta probar que ϕ es continua. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Si $m, a \geq 0$ son la memoria y la anticipación de ϕ , entonces tomamos

$$\delta < \frac{1}{2^{n+m+a}} \text{ tal que } d(x, y) < \delta \text{ si } x_i = y_i \text{ para todo } i \leq n + m + a.$$

Entonces $\phi(x)_{[-n-a, n+m]} = \phi(y)_{[-n-a, n+m]}$, por lo tanto

$$\rho(\phi(x), \phi(y)) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon, \text{ de forma que } \phi \text{ es continua.}$$

Inversamente, suponemos que ϕ es un homomorfismo, demostraremos que ϕ es un código de bloques, es decir, existe $m, a \geq 0$ y $\phi: \mathcal{B}_{m+a+1}(X) \rightarrow \mathcal{B}(Y)$ tal que $\phi = \Phi_\infty$. Sean \mathcal{A}_X y \mathcal{A}_Y alfabetos sobre X y Y respectivamente, tomamos $b \in \mathcal{A}_Y$ y denotamos al conjunto cilindro como

$$C_0(b) = \{y \in Y | y_0 = b\}$$

entonces $C_0(b) \cap C_0(b') = \emptyset$ si $b \neq b'$ y como $C_0(b) \subseteq Y$ y Y es compacto, entonces $C_0(b)$ es compacto y por la Proposición A.3, su imagen inversa $E_b = \phi^{-1}(C_0(b))$ es un conjunto compacto en X y $E_b \cap E_{b'} = \emptyset$. Ahora, por la Proposición A.4, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in E_b$ y $y \in E_{b'}$, entonces

$$d(x, y) > \delta. \text{ Escogemos } n \text{ tal que } \frac{1}{2^n} < \delta$$

Así, para cualquier par de puntos $x, y \in X$ tales que $x_{[-n, n]} = y_{[-n, n]}$ ocurre que

$$d(x, y) < \frac{1}{2^n} < \delta \text{ por lo tanto } x, y \in E_b \text{ entonces } \phi(x)_0 = b = \phi(y)_0.$$

Es decir, la coordenada 0 de $\phi(x)$ depende únicamente del $(2n + 1)$ -bloque central de x y por la Proposición 1.9, ϕ es un código de bloques. \square

1.5. Presentación en bloques y potencias de espacios shift.

Otra construcción básica en dinámica simbólica, consiste en agrupar un bloque de símbolos consecutivos como un sólo símbolo, es decir, considerar bloques de cierta longitud como símbolos de un nuevo alfabeto. Este proceso se encuentra en la llamada “presentación en bloques” al igual que en las “potencias” de espacios shift y proporcionan diferentes “presentaciones” del mismo espacio ya que resultan en sistemas conjugados al espacio shift del que provienen. Como veremos más adelante, *la presentación en bloques* permite disminuir la memoria de un espacio shift de tipo finito, lo cual será fundamental para describir el cálculo de funciones zeta de este tipo de espacios shift.

1.5.1. Bloques como símbolos de un nuevo alfabeto

Sea X un espacio shift sobre el alfabeto \mathcal{A} y $N \geq 1$ un entero fijo. Sea $\mathcal{A}_X^{[N]} = \mathcal{B}_N(X)$ la colección de todos los N -bloques permitidos en X . Podemos considerar $\mathcal{A}_X^{[N]}$ como un nuevo alfabeto y formar el shift completo $(\mathcal{A}_X^{[N]})^{\mathbb{Z}}$. Más aún, queremos encontrar subshift de $(\mathcal{A}_X^{[N]})^{\mathbb{Z}}$ que sean nuevas “presentaciones” de X .

1.5.2. Presentación en bloques de espacios shift

Primero definimos el mapeo de la N -ésima presentación en bloques de X , como una función $\beta_N : X \rightarrow (\mathcal{A}_X^{[N]})^{\mathbb{Z}}$ definida por

$$(\beta_N(x))_{[i]} = x_{[i, i+N-1]}. \quad (1.3)$$

Entonces β_N reemplaza la i -ésima coordenada de x con el bloque de coordenadas en x de tamaño N comenzando con la posición i . Esto es más claro si imaginamos los símbolos en $\mathcal{A}_X^{[N]}$ escritos verticalmente. Por ejemplo, la imagen de $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ bajo β_4 tiene la forma

$$\beta_4(x) = \dots \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \\ x_{-2} \\ x_{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \\ x_{-1} \\ x_{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \\ x_{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} \dots \in (\mathcal{A}_X^{[4]})^{\mathbb{Z}}.$$

Definición 1.11. Sea X un espacio shift. Entonces la N -ésima presentación en bloques de X , $X^{[N]}$ es la imagen $X^{[N]} = \beta_N(X)$ sobre el shift completo $\mathcal{A}_X^{[N]}$.

Observación 1.2. Notamos que en la ecuación (1.3), dos símbolos consecutivos en $\mathcal{A}_X^{[N]}$ en la imagen de $x \in X$ bajo β_N se traslapan progresivamente como bloques de \mathcal{A}^N . Es decir, que si $u = u_1 u_2 \dots u_N$ y $v = v_1 v_2 \dots v_N$ son N -bloques, decimos que u y v se *traslapan progresivamente* si $u_2 u_3 \dots u_N = v_1 v_2 \dots v_{N-1}$. Si el 2-bloque uv ocurre en un punto de $x \in X^{[N]}$, entonces como bloques de $\mathcal{A}_X^{[N]}$, u y v deben traslaparse progresivamente. Así, conociendo la última letra de cada símbolo de $\beta_N(x)$, podemos reconstruir la imagen completa y el punto original x . En este sentido $X^{[N]}$ es simplemente otra “presentación” del mismo espacio shift X .

Ejemplo 1.8. Sea X el espacio shift áureo del Ejemplo 1.2. Entonces

$$\mathcal{A}_X^{[2]} = \{a = 00, b = 01, c = 10\}$$

y describimos $X^{[2]}$ con el conjunto de bloques prohibidos $\mathcal{F} = \{ac, ba, bb, cc\}$. Cada uno de estos 2-bloques es prohibido ya que no se pueden traslapar progresivamente. Por ejemplo, el segundo símbolo de $a = 00$ no es igual al primero de $c = 10$, entonces ac es una palabra prohibida. Además la palabra 11 también está prohibida ya que lo está en el espacio shift original.

A continuación probaremos que la presentación en bloques es un espacio shift.

Proposición 1.10. *La N -ésima presentación en bloques de un espacio shift es también un espacio shift.*

Demostración. Sea X un espacio shift sobre un alfabeto \mathcal{A} y $N \geq 1$. Entonces existe una colección de palabras prohibidas \mathcal{F} sobre \mathcal{A} tal que $X = X_{\mathcal{F}}$. Construimos una nueva colección $\tilde{\mathcal{F}}$ reemplazando cada bloque $u \in \mathcal{F}$ tal que $|u| < N$ por todos los N -bloques sobre \mathcal{A} que contienen a u . Tenemos que $X = X_{\tilde{\mathcal{F}}}$ y cada palabra en $\tilde{\mathcal{F}}$ tiene tamaño $\geq N$. Para cada $w = a_1 a_2 \dots a_m \in \tilde{\mathcal{F}}$, su correspondiente $(m - N + 1)$ -bloque sobre \mathcal{A}^N es

$$w^{[N]} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{N+1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{m-N+1} \\ a_{m-N+2} \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

Sea \mathcal{F}_1 el conjunto de todas las palabras sobre el alfabeto \mathcal{A}^N de la forma $w^{[N]}$ para toda $w \in \tilde{\mathcal{F}}$. \mathcal{F}_1 es un conjunto de restricciones para $X^{[N]}$, que provienen de las restricciones del shift original. Por lo tanto $X^{[N]} \subseteq X_{\mathcal{F}_1}$. Como los puntos en $X^{[N]}$ se traslapan progresivamente, construimos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 &= \{uv \mid u, v \in \mathcal{A}^N \text{ y } u \text{ y } v \text{ no se traslapan progresivamente}\} \\ &= \{u, v \in \mathcal{B}_N(x) \mid u_2 \dots u_N \neq v_1 \dots v_{N-1}\}. \end{aligned}$$

Entonces $X^{[N]} \subseteq X_{\mathcal{F}_2}$ y como $X^{[N]} \subseteq X_{\mathcal{F}_1}$, por la Proposición 1.5 tenemos que

$$X^{[N]} \subseteq X_{\mathcal{F}_1} \cap X_{\mathcal{F}_2} = X_{\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2}.$$

Inversamente, sea $y \in X_{\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2}$ entonces podemos reconstruir al punto $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tal que $\beta_N(x) = y$ a partir de los símbolos del último renglón de y . Entonces $x = \dots x_{-3}x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2 \dots$, por lo tanto $x \in X = X_{\tilde{\mathcal{F}}}$ ya que y satisface las restricciones de \mathcal{F}_1 que se construyó a partir de $\tilde{\mathcal{F}}$ y como $y = \beta_N(x)$ y se traslapa progresivamente, cumple las restricciones de \mathcal{F}_2 , por lo tanto $y \in X_{\mathcal{F}_1} \cap X_{\mathcal{F}_2}$. Concluimos que $X_{\mathcal{F}_1} \cap X_{\mathcal{F}_2} \subseteq X^{[N]}$, por lo tanto $X^{[N]} = X_{\mathcal{F}_1} \cap X_{\mathcal{F}_2}$ es un espacio shift. \square

La proposición anterior implica que $\beta_N: X \rightarrow X^{[N]}$ es una función entre espacios shift. Podemos concluir aún mas.

Proposición 1.11. $\beta_N: X \rightarrow X^{[N]}$ es una conjugación.

Demostración. Claramente β es continua y conmuta con el shift, i.e. $\beta_N \circ \sigma_X = \sigma_{X^{[N]}} \circ \beta_N$. El Teorema de Curtis-Lyndon-Hedlund (Teorema 1.1) implica que β_N es un código de N -bloques deslizantes con memoria cero y anticipación N . Más aún, es sencillo ver que la función inversa $\beta_N^{-1}: X^{[N]} \rightarrow X$ es también un código de 1-bloques deslizantes. En otras palabras, β_N es una conjugación. \square

Ahora supongamos que tenemos un código de $(m+a+1)$ -bloques deslizantes $\phi: X \rightarrow Y$. Queremos “recodificar” a X y obtener un espacio shift conjugado \tilde{X} y un nuevo código de bloques correspondiente $\tilde{\phi}: \tilde{X} \rightarrow Y$ que sea un código de 1-bloques deslizantes. Este proceso será muy útil dado que es más fácil trabajar con códigos de 1-bloques deslizantes. Sin embargo, hacer la función más simple tiene como resultado hacer más complicado el alfabeto.

Proposición 1.12. Sea $\phi: X \rightarrow Y$ un código de bloques deslizantes de memoria m y anticipación a . Entonces existe una presentación en bloques $\tilde{X} = X^{[N]}$ de X , una conjugación $\psi: X \rightarrow \tilde{X}$ y un código de 1-bloques deslizantes $\tilde{\phi}: \tilde{X} \rightarrow Y$ tal que $\tilde{\phi} \circ \psi = \phi$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi} & \tilde{X} \\ \phi \downarrow & & \swarrow \tilde{\phi} \\ Y & & \end{array}$$

Demostración. Supongamos que ϕ es inducida por una función de bloques permitidos Φ y tiene memoria m y anticipación a . Sea $\mathfrak{A} = \mathcal{B}_{m+a+1}(X)$ y definimos $\psi: X \rightarrow \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ por $\psi(x)_{[i]} = x_{[i-m, i+a]} = \beta_{m+a+1} \circ \sigma_X^{-m}(x)_i$. Entonces $\tilde{X} = \psi(X) = X^{[m+a+1]}$ es un espacio shift y como σ_X^{-1} y β_{m+a+1} son conjugaciones, entonces también lo es ψ . Se sigue de las definiciones que $\tilde{\phi} = \phi \circ \psi^{-1}$ es un código de 1-bloques deslizantes. \square

Ahora estamos en posición de demostrar el siguiente resultado que generaliza la Proposición 1.10.

Teorema 1.2. La imagen de un espacio shift bajo un código de bloques deslizantes es un espacio shift.

Demostración. Sean X y Y espacios shift y $\phi: X \rightarrow Y$ un código de bloques deslizantes. Por la Proposición 1.12 podemos asumir que ϕ es un código de 1-bloques. Sea Φ una función de 1-bloques permitidos que induce a ϕ . Definimos

$$\mathcal{L} = \{\Phi(w) \mid w \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Mostraremos que $\phi(X) = X_{\mathcal{L}^c}$, es decir, la imagen de X es un espacio shift. Si $x \in X$, entonces cada bloque $\phi(x)$ está en \mathcal{L} , entonces $\phi(x) \in X_{\mathcal{L}^c}$. Por lo tanto $\phi(X) \subseteq X_{\mathcal{L}^c}$.

Supongamos ahora que $y \in X_{\mathcal{L}^c}$. Entonces para cada $n \geq 0$, el $(2n+1)$ -bloque central de y es la imagen bajo Φ del $(2n+1)$ -bloque central de algún punto de la sucesión $x^{(n)}$ en X , es decir

$$\Phi \left(x_{[-n,n]}^{(n)} \right) = \phi \left(x^{(n)} \right)_{[-n,n]} = y_{[-n,n]}. \quad (1.4)$$

Usaremos $x^{(n)}$ para encontrar un punto $x \in X$ tal que $\phi(x) = y$. Sea S_0 un conjunto infinito de índices y consideremos la coordenada 0 de los puntos de la sucesión $x_{[0]}^{(n)}$, para $n \geq 1$. Como sólo hay un número finito de símbolos, entonces para alguna letra $a \in \mathcal{A}_X$, podemos encontrar un subconjunto $\{x_{[0]}^{(n)}\}$ tal que $x_0^{(n)} = a$, para $n \in S_0$. Después, todos los 3-bloques centrales $x_{[-1,1]}^{(n)}$ para $n \in S_0$, también pertenecen a un conjunto finito de los 3-bloques posibles en $\mathcal{B}_3(X)$, análogamente existe un subconjunto infinito $S_1 \subseteq S_0$ de modo que $x_{[-1,1]}^{(n)} = w$ para todo $n \in S_1$ y para algún $w \in \mathcal{B}_3(X)$. Continuando este proceso, para cada $k \geq 1$ encontramos un conjunto infinito $S_k \subseteq S_{k-1}$ tal que todos los bloques $x_{[-k,k]}^{(n)}$ son iguales para $n \in S_k$.

Ahora definimos x como la sucesión con $x_{[-k,k]} = x_{[-k,k]}^{(n)}$ para todo $n \in S_k$, todos estos bloques son iguales por como se construyeron, por lo tanto no hay ambigüedad en la definición de x , es decir, como $S_k \subseteq S_{k-1}$, el $(2k-1)$ -bloque central de $x_{[-k,k]}$ es $x_{[-k+1,k-1]}$, entonces x está bien definida.

También observamos que cada subbloque de x ocurre en algún punto $x_{[-k,k]} = x_{[-k,k]}^{(n)} \in \mathcal{B}(X)$, entonces $x \in X$ ya que X es un espacio shift. Finalmente, para cada $k \geq 1$ y $n \in S_k$ con $n \geq k$, usando la ecuación (1.4) tenemos que

$$\Phi \left(x_{[-k,k]} \right) = \Phi \left(x_{[-k,k]}^{(n)} \right) = \phi \left(x^{(n)} \right)_{[-k,k]} = y_{[-k,k]},$$

entonces $\phi(x) = y$, por lo tanto $X_{\mathcal{L}^c} \subseteq \phi(X)$. Concluimos que $\Phi(X) = X_{\mathcal{L}^c}$. \square

1.5.3. Potencias de espacios shift

Podemos hacer una construcción similar a la presentación en bloques pero sin traslaparlos, definiendo la N -ésima potencia de X como una función $\gamma_N : X \rightarrow \left(\mathcal{A}_X^{[N]} \right)^{\mathbb{Z}}$ tal que

$$\left(\gamma_N(x) \right)_{[i]} = x_{[iN, iN+N-1]}.$$

Por ejemplo, la imagen de $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ bajo γ_4 tiene la forma

$$\gamma_4(x) = \dots \begin{bmatrix} x_{-9} \\ x_{-10} \\ x_{-11} \\ x_{-12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{-5} \\ x_{-6} \\ x_{-7} \\ x_{-8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{-1} \\ x_{-2} \\ x_{-3} \\ x_{-4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_7 \\ x_6 \\ x_5 \\ x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{10} \\ x_9 \\ x_8 \end{bmatrix} \dots \in \left(\mathcal{A}_X^{[4]} \right)^{\mathbb{Z}}.$$

Definición 1.12. Sea X un espacio shift. La N -ésima potencia X^N de X es la imagen $X^N = \gamma_N(X)$ de X en el shift completo sobre $\mathcal{A}_X^{[N]}$.

Ejemplo 1.9. Sea X el shift áureo definido en el Ejemplo (1.2) y $N = 2$. Entonces

$$\mathcal{A}_X^{[2]} = \{a = 00, b = 01, c = 10\}.$$

La segunda potencia X^2 se describe mediante el conjunto de palabras prohibidas $\mathcal{F} = \{bc\}$, ya que las palabras que contengan a $bc = 0110$ como subbloque, son las únicas que contienen la palabra prohibida 11 del shift original.

El siguiente resultado equivale a las Proposiciones 1.10 y 1.11 en sus versiones correspondientes para potencias. También es posible demostrar la Proposición 1.12 utilizando potencias en lugar de presentaciones en N -bloques. Las demostraciones no se incluyen por ser análogas y en todo caso, en este trabajo bastará utilizar los resultados para presentaciones en N -bloques.

Proposición 1.13. *La potencia de un espacio shift es también un espacio shift y la función γ_N es una cojugación.*

Demostración. La prueba es análoga a las pruebas de las Proposiciones 1.10 y 1.11. □

1.6. Particiones de Markov

En esta sección presentamos un bosquejo breve de cómo los espacios shift pueden ser utilizados como modelos de sistemas dinámicos más generales.

Sea (X, ϕ) un sistema dinámico. El objetivo es construir un espacio shift $\sigma_{\bar{X}}: \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ que sea una “cubierta” de $\phi: X \rightarrow X$. Iniciamos con una *partición topológica* $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ del espacio X , es decir, una colección disjunta de abiertos tales que la unión de sus cerraduras es X . El alfabeto sobre el cual se construirá el espacio shift será el conjunto $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, n\}$.

El “lenguaje” $\mathcal{L}(\overline{X})$ del espacio shift \overline{X} lo formarán los *bloques permitidos*, es decir los bloques $w = a_{-k} \dots a_k \in \mathcal{A}^{2k+1}$ tales que

$$\bigcap_{j=-k}^k \phi^{-j}(P_{a_j}) \neq \emptyset.$$

Como ya vimos, a un espacio shift lo determina su lenguaje y el conjunto de bloques permitidos satisface las propiedades a) y b) de la Proposición 1.6. De forma que hemos obtenido un espacio shift \overline{X} . Ahora hay que construir el “mapeo factor” $\Phi: \overline{X} \rightarrow X$ que haga conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \overline{X} & \xrightarrow{\sigma_{\overline{X}}} & \overline{X} \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ X & \xrightarrow{\phi} & X \end{array}$$

Para definir a Φ tomemos un elemento $\overline{\mathbf{x}} = (\dots, \overline{x}_{-1}, \overline{x}_0, \overline{x}_1, \dots) \in \overline{X}$. Para cada entero $k \geq 1$ sea

$$D_k(\overline{\mathbf{x}}) = \bigcap_{j=-k}^k \phi^{-j}(P_{\overline{x}_j}).$$

La cerradura topológica $\overline{D_k(\overline{\mathbf{x}})}$ es compacta y $\overline{D_0(\overline{\mathbf{x}})} \supseteq \overline{D_2(\overline{\mathbf{x}})} \supseteq \dots$, de forma que

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{D_k(\overline{\mathbf{x}})} \neq \emptyset$$

(ver Corolario A.1 en el Apéndice). Quisiéramos definir $\Phi(\overline{\mathbf{x}})$ como esta intersección y para que Φ resulte una función en X es necesario entonces que esta intersección contenga un único elemento, condición que se asume y que se conoce como *propiedad de Markov*. Además, esta propiedad garantiza que \overline{X} es un espacio shift de tipo finito, que se define en el siguiente capítulo. A un punto $x \in X$ le asociamos el símbolo de la parte a la que pertenece, es decir, $x \mapsto \pi(x)$ donde $\pi(x) \in \{1, \dots, n\}$ es tal que $x \in P_{\pi(x)}$. Seguidamente construimos la “extensión natural”, es decir, definimos

$$\overline{X} = \{\overline{\mathbf{x}} = \Phi(x) = (\overline{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid \overline{x}_n = \pi(\phi^n(x)), n \in \mathbb{Z}, x \in X\}$$

por lo tanto su función zeta $\zeta_{\sigma_{\overline{X}}}(z)$ puede ser calculada. Al ser $\Phi: \overline{X} \rightarrow X$ un mapeo factor (es decir una función suprayectiva que respeta la dinámica, i.e. que hace al diagrama anterior conmutativo), se obtiene $p_{\phi}(n) \geq p_{\sigma_{\overline{X}}}(n)$ (de hecho Φ es a lo más dos a uno y es uno a uno en puntos transitivos, i.e. puntos en los que cualquier bloque del lenguaje ocurre una infinidad de veces en el pasado y en el futuro). Es posible, a partir de análisis de la acción de ϕ sobre la partición \mathcal{P} , deducir condiciones bajo las cuales se puede obtener ζ_{ϕ} a partir de $\zeta_{\sigma_{\overline{X}}}$, por ejemplo, cuando se da la igualdad del número de puntos periódicos de cada periodo $n \geq 1$, caso que corresponde a la igualdad

$$\zeta_{\phi} = \zeta_{\sigma_{\overline{X}}}.$$

Capítulo 2

Espacios shift de tipo finito y sóficos

En este capítulo estudiaremos una clase especial de espacios shift para los cuales existen fórmulas explícitas que permiten calcular sus funciones zeta. Esta clase se puede reducir módulo conjugación a considerar representantes que admiten una descripción en términos de digráficas dirigidas que a su vez le corresponden matrices que son útiles en los cálculos de puntos periódicos. Esto es importante en la exposición de la tesis porque esta reducción es la que entonces permite extender las fórmulas a la clase conformada por los espacios que estudiamos en este capítulo.

2.1. Espacios shift de tipo finito

Definición 2.1. Un espacio shift es de *tipo finito* si puede ser descrito por un conjunto finito de palabras prohibidas, es decir, es un espacio shift $X = X_{\mathcal{F}}$ donde \mathcal{F} es un conjunto finito de palabras.

Ejemplo 2.1. El shift completo $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es un shift de tipo finito, como no tenemos palabras prohibidas simplemente tomamos $\mathcal{F} = \emptyset$, entonces $X = X_{\mathcal{F}}$.

Ejemplo 2.2. El shift áureo X del Ejemplo 1.2 es un shift de tipo finito, ya que $\mathcal{F} = \{11\}$, así obtenemos $X = X_{\mathcal{F}}$.

Ejemplo 2.3. Sea X el shift definido en el Ejemplo 1.4, X es de tipo finito ya que podemos tomar $\mathcal{F} = \{ac, ba, bb, cc\}$.

De hecho, un shift de tipo finito X tambi3n se puede describir mediante un conjunto infinito de palabras prohibidas. Supongamos que $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es un shift de tipo finito, i.e. $X = X_{\mathcal{F}}$ para alg3n conjunto finito de palabras prohibidas \mathcal{F} . Sea N el tama3o de la palabra m3s larga en \mathcal{F} ; si ahora formamos el conjunto \mathcal{F}_N de todas las palabras de tama3o N que contienen alg3n bloque de \mathcal{F} como subbloque, claramente $X_{\mathcal{F}} = X_{\mathcal{F}_N}$. Por ejemplo, si $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ y $\mathcal{F} = \{11, 000\}$, entonces $\mathcal{F}_3 = \{110, 111, 011, 000\}$. Muchas veces ser3 conveniente llevar a cabo este procedimiento y asumir que todas las palabras prohibidas tienen el mismo tama3o.

Si todas las palabras en \mathcal{F} tienen tama3o N , entonces $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est3 en $X_{\mathcal{F}}$ exactamente cuando $x_{[i, i+N-1]} \notin \mathcal{F}$ para toda $i \in \mathbb{Z}$ o equivalentemente, cuando $x_{[i, i+N-1]} \in \mathcal{B}_N(X_{\mathcal{F}})$. Entonces para detectar cu3ndo una palabra x est3 o no en $X_{\mathcal{F}}$, s3lo necesitamos recorrer las coordenadas de x con una “ventana” de tama3o N y verificar que cada palabra vista a trav3s de esta ventana est3 en la colecci3n de palabras permitidas $\mathcal{B}_N(X)$. Esta observaci3n es 3til si, dado un espacio shift, hay que decidir cu3ndo es o no de tipo finito.

Ejemplo 2.4. El espacio shift par del Ejemplo 1.3 no es de tipo finito. Si lo fuera, existir3 $N \geq 1$ y una colecci3n \mathcal{F} de N -bloques tal que $X = X_{\mathcal{F}}$. Consideremos el punto $x = \dots 000^{2N+1}100\dots$. Todo N -bloque de x est3 en $\mathcal{B}_N(X)$, entonces tendr3amos que $x \in X_{\mathcal{F}} = X$, contradiciendo la definici3n del espacio shift par.

Definici3n 2.2. Un shift de tipo finito tiene *memoria* M si puede ser descrito mediante una colecci3n de palabras prohibidas de tama3o $M + 1$.

Para aclarar esta idea, supongamos que todas las palabras prohibidas tienen tama3o $M + 1$. Sea $u = a_1a_2\dots a_n$ una palabra de tama3o $n > M$. Supongamos que una m3quina lee los s3mbolos de u uno por uno, de izquierda a derecha. Para esta m3quina, detectar si u contiene o no una palabra prohibida, solamente tiene que recordar los M previos s3mbolos le3dos; es decir, s3lo necesita “ M pasos de memoria”.

Observamos que si un shift de tipo finito tiene memoria M , entonces tambi3n tiene memoria $M + k$, para toda $k \geq 0$. Un shift de tipo finito con memoria 0 es un shift completo, es decir $\mathcal{F} = \emptyset$.

Proposici3n 2.1. *Si X es un shift de tipo finito, entonces existe $M \geq 0$ tal que X es de memoria M .*

Demostración. Como X es de tipo finito, entonces $X = X_{\mathcal{F}}$ para alguna colección finita \mathcal{F} . Si $\mathcal{F} = \emptyset$, entonces $M = 0$. Si \mathcal{F} no es vacío, supongamos que x es la palabra más larga de \mathcal{F} , digamos $|x| = M + 1$. Obtenemos $\tilde{\mathcal{F}}$ a partir de \mathcal{F} sustituyendo cada elemento $\omega \in \mathcal{F}$ de longitud a lo más M por todas las posibles concatenaciones $u\omega v$ que resulten de longitud $M + 1$, con $u, v \in \mathcal{A}^*$. Entonces $X_{\mathcal{F}} = X_{\tilde{\mathcal{F}}}$ y todos los elementos de $\tilde{\mathcal{F}}$ son de tamaño $M + 1$, por lo tanto X es de memoria M . \square

Ahora enunciamos las observaciones anteriores formalmente.

Teorema 2.1. *Un espacio shift X es de tipo finito de memoria M si y sólo si para todo $uv, vw \in \mathcal{B}(X)$ y $|v| \geq M$, entonces $uvw \in \mathcal{B}(X)$.*

Demostración. Sea X un shift de tipo finito de memoria M , entonces $X = X_{\mathcal{F}}$ para alguna colección finita \mathcal{F} que contiene $(M + 1)$ -bloques. Sea $uv, vw \in \mathcal{B}(X)$, donde $|v| = n \geq M$. Entonces existen puntos $x, y \in X$ donde $x_{[-k, n]} = uv$ y $y_{[1, l]} = vw$, de modo que $x_{[1, n]} = y_{[1, n]} = v$. Podemos afirmar que el punto $z = x_{(-\infty, 0]}vy_{[n+1, \infty)} \in X$, ya que si alguna palabra w' en \mathcal{F} ocurriera en z , tendría que ocurrir en cualquiera de los dos bloques $x_{(-\infty, 0]}v = x_{(-\infty, n]}$ ó en $vy_{[n+1, \infty)} = y_{[1, \infty)}$, como $|v| = n \geq M$, entonces w' sería subbloque de x o y , contradiciendo el hecho de que $x, y \in X$. Por lo tanto

$$uvw = x_{[-k, 0]}vy_{[n+1, l]} = z_{[-k, l]} \in \mathcal{B}(X).$$

Inversamente, sea X un espacio shift sobre \mathcal{A} con la propiedad de que si $uv, vw \in \mathcal{B}(X)$ y $|v| \geq M$ para algún entero M , entonces $uvw \in \mathcal{B}(X)$. Demostraremos que $X = X_{\mathcal{F}}$, verificando que X es de tipo finito de memoria M . Si $x \in X$, ningún bloque de \mathcal{F} puede ocurrir en x entonces $x \in X_{\mathcal{F}}$ por lo tanto $X \subseteq X_{\mathcal{F}}$.

Ahora sea $x \in X_{\mathcal{F}}$, entonces $x_{[0, M]}$ y $x_{[1, M+1]} \in \mathcal{B}(X)$ por definición de \mathcal{F} y como se traslapan en M símbolos, utilizando $u = x_0$, $v = x_{[1, M]}$ y $w = x_{M+1}$, tenemos que $uvw = x_{[0, M+1]} \in \mathcal{B}(X)$. Ahora $x_{[2, M+2]} \in \mathcal{B}(X)$ y se traslapa en M símbolos con el bloque $x_{[0, M+1]}$, entonces $x_{[0, M+2]} \in \mathcal{B}(X)$. Repitiendo la aplicación de este argumento en cada dirección, podemos concluir que $x_{[-k, l]} \in \mathcal{B}(X)$ para toda $k, l \geq 0$ y por propiedades del lenguaje se sigue que $x \in X$, por lo tanto $X_{\mathcal{F}} \subseteq X$. \square

Teorema 2.2. *Sean X y Y dos espacios shift conjugados. Entonces X es de tipo finito si y sólo si Y es de tipo finito.*

Demostración. Sea Y un espacio shift de tipo finito conjugado a un shift X y sean $\phi : X \rightarrow Y$ un código de bloques tal que $\phi = \Phi_{\infty}$ induce una conjugación de X a Y y $\phi^{-1} = \psi : Y \rightarrow X$, entonces $\psi = \Psi_{\infty}$. Aquí Φ y Ψ son reglas locales. Podemos suponer que la memoria y anticipación de ϕ y ψ son iguales, digamos $l \geq 0$. Sea N la memoria de Y ; de acuerdo al

Teorema 2.1 nuestro objetivo es encontrar un entero $M \geq 1$ tal que si $v \in \mathcal{B}(X)$, $|v| \geq M$ y si $uv, vw \in \mathcal{B}(X)$, entonces $uvw \in \mathcal{B}(X)$.

Como $\psi(\phi(x)) = x$ para todo $x \in X$, entonces la regla local $\Psi \circ \Phi : \mathcal{B}_{4l+1}(X) \rightarrow \mathcal{B}_1(X)$ sólo selecciona el símbolo central de una palabra. Como Y es de tipo finito, por el Teorema 2.1 existe $N \geq 1$ tal que dos bloques en Y que se traslapan en al menos N lugares pueden unirse para formar una palabra en Y .

Sea $M = 4l + N$, para verificar que M cumple las condiciones del Teorema 2.1, sean $uv, vw \in \mathcal{B}(X)$ tal que $|v| \geq N + 4l$. Por extensión del lenguaje, existen $s, t \in \mathcal{B}_{2l}(X)$ tales que $suv, vwt \in \mathcal{B}(X)$; como cada $(4l + 1)$ -bloque en $suvwt$ está en $\mathcal{B}(X)$, entonces $\Psi(\Phi(suvwt)) = uvw$. Ahora $\Phi(suv) = u'\Phi(v)$ y $\Phi(vwt) = \Psi(v)w'$, donde $u', w' \in \mathcal{B}(Y)$ y $|\Phi(v)| = |v| - 2l \geq N + 2l \geq N$, por lo tanto $u'\Phi(v)$ y $\Phi(v)w'$ se pueden pegar para formar $u'\Phi(v)w' \in \mathcal{B}(Y)$. Entonces

$$uvw = \Psi(\Phi(suvwt)) = \Psi(u'\Phi(v)w') \in \mathcal{B}(X)$$

por lo tanto X es de tipo finito. □

2.2. Gráficas y espacios shift de tipo finito

Un método fundamental para construir shift de tipo finito es comenzar con una gráfica dirigida que presenta todos los caminos bi-infinitos, es decir, secuencias de aristas en la gráfica. Principalmente veremos cómo cualquier shift de tipo finito puede ser recodificado y verse como un shift por aristas.

Definición 2.3. Una *gráfica* G es una pareja de conjuntos (V, E) , donde $V = V(G)$ es un conjunto finito cuyos elementos llamamos *vértices* y $E = E(G)$ es también un conjunto finito cuyos elementos llamamos *aristas*, que consideramos como “flechas” que unen a los vértices, de forma que cada arista $e \in E$ puede representarse con una flecha, que comienza en v y termina en u , donde $u, v \in V$ son los vértices que unen dicha arista. Decimos entonces que v es el *vértice inicial* de e denotado $i(e)$ y u es el *vértice terminal* de e y se denota $t(e)$. Si una gráfica tiene más de una arista entre un vértice inicial y un vértice final dados, entonces decimos que la gráfica tiene *aristas múltiples*. Una arista $e \in E$ donde $i(e) = t(e)$ se llama *lazo*. Escribiremos $G = (V, E)$.

Definición 2.4. Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Para un vértice $v \in V$ denotamos por $E_v = E_v(G)$ al conjunto de todas las aristas salientes de v y por $E^v = E^v(G)$ al conjunto de todas las aristas entrantes de v .

Definición 2.5. Llamamos a $v \in V$, *vértice aislado* si ninguna arista comienza en v o termina en v . Una gráfica $G = (V, E)$ es *esencial* si no tiene vértices aislados.

Para efectos de este trabajo, nos enfocaremos sólo en gráficas esenciales.

Definición 2.6. Un *camino* $\mathcal{C} = e_1 e_2 \dots e_m$ en una gráfica $G = (V, E)$ es una secuencia finita de aristas $e_i \in E$ tales que $t(e_i) = i(e_{i+1})$, donde $1 \leq i \leq m - 1$. El *tamaño* o *longitud* de \mathcal{C} es $|\mathcal{C}| = m$, es decir, el número de aristas que lo componen. Decimos que el camino \mathcal{C} *comienza* en el vértice $i(\mathcal{C}) = i(e_1)$ y *termina* en el vértice $t(\mathcal{C}) = t(e_m)$, así \mathcal{C} es un camino de $i(\mathcal{C})$ a $t(\mathcal{C})$.

Un *paseo* es un camino que comienza y termina en el mismo vértice. Para todo vértice $v \in V$ existe un *camino vacío* ϵ de tamaño 0, que comienza y termina en v .

Definición 2.7. Sean G y H dos gráficas. Un *homomorfismo entre las gráficas* G y H consiste en un par de funciones $f : V(G) \rightarrow V(H)$ y $g : E(G) \rightarrow E(H)$ tales que

$$i(g(e)) = f(i(e)) \text{ y } t(g(e)) = f(t(e)).$$

para todas las aristas $e \in E(G)$. En este caso escribimos $(f, g) : G \rightarrow H$.

Un homomorfismo (f, g) es un *encaje entre gráficas* si f y g son inyectivas. Si ambas funciones, f y g son biyectivas entonces (f, g) es un *isomorfismo* y se denota $(f, g) : G \cong H$. Además, decimos que dos gráficas G y H son *isomorfas* si existe un isomorfismo entre ellas y lo denotamos por $G \cong H$.

Esta definición nos dice que cuando dos gráficas son isomorfas podemos obtener una a partir de la otra, renombrando los vértices y aristas.

Las gráficas pueden ser representadas algebraicamente por medio de matrices. Para definir la matriz de adyacencia de una gráfica G , es conveniente identificar a los vértices para conservar un orden entre ellos. La asignación de identificadores comúnmente se representa mediante enteros como $V = \{1, 2, \dots, r\}$ o letras $V = \{i, j, k\}$.

Definición 2.8. Sea $G = (V, E)$ una gráfica con vértices etiquetados, donde $|V| = r$. Para los vértices $u, v \in V$, sea A_{ij} el número de aristas en G con vértice inicial v y vértice terminal u . Entonces la *matriz de adyacencia* de G es una matriz cuadrada A de $r \times r$, de componentes $A = [A_{ij}]$. Se denota por $A = A_G$, dado que se forma a partir de G .

Por ejemplo, la gráfica G de la Figura 2.1 tiene matriz de adyacencia

$$A_G = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

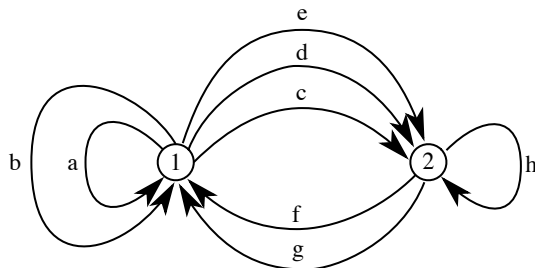


Figura 2.1: La gráfica de un espacio shift por aristas.

El conjunto de vértices es $V = V(G) = \{1, 2\}$ y el conjunto de aristas es $E = E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Por ejemplo, $i(g) = 2$ y $t(g) = 1$.

Definición 2.9. Sea $A = [A_{ij}]$ una matriz de $r \times r$ con elementos enteros no negativos. Entonces la *gráfica de A* es la gráfica $G = G_A$ con el conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, \dots, r\}$ y con A_{ij} aristas distintas con vértice inicial v y vértice terminal u .

Esta correspondencia entre gráficas y sus matrices de adyacencia significa que podemos utilizar cualquiera de las dos, G o A , para analizar una gráfica específica y ambas son muy convenientes.

Cada gráfica G con su correspondiente matriz de adyacencia A da lugar a un shift de tipo finito, como veremos a continuación.

Definición 2.10. Sea $G = (V, E)$ una gráfica y A su matriz de adyacencia. El *shift por aristas* X_G o X_A es el espacio shift sobre el alfabeto $\mathcal{A} = E$ especificado por

$$X_G = X_A = \{e = (e_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in E^{\mathbb{Z}} \mid t(e_i) = i(e_{i+1})\}.$$

Una función shift sobre X_G ó X_A se llama *función shift por aristas* y se denota por σ_G o σ_A .

De acuerdo a esta definición, una secuencia bi-infinita de aristas está en X_G exactamente cuando el vértice terminal de cada arista es el vértice inicial del siguiente; es decir, la secuencia describe un *camino bi-infinito* en G . También notamos que si G es una gráfica esencial, entonces los caminos no vacíos en G , corresponden a palabras no vacías en su shift por aristas X_G .

Proposición 2.2. Si G es una gráfica con matriz de adyacencia A , entonces el shift por aristas asociado $X_G = X_A$ es un shift de tipo finito de memoria 1.

Demostración. Sea $\mathcal{A} = E$ el alfabeto de X_G . Consideramos la colección finita de bloques de tamaño 2 sobre \mathcal{A} .

$$\mathcal{F} = \{fg \mid f, g \in \mathcal{A}, t(f) \neq i(g)\}.$$

De acuerdo a la Definición 2.10 un punto $e \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ está en X_G cuando ninguna palabra de \mathcal{F} ocurre en e . Esto significa que $X_G = X_{\mathcal{F}}$, entonces X_G es de tipo finito y como todas las palabras en \mathcal{F} tienen tamaño 2, $X_{\mathcal{F}}$ es de memoria 1. \square

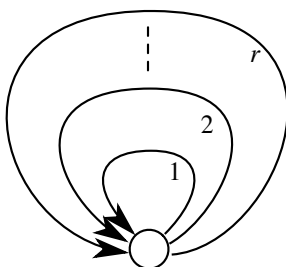


Figura 2.2: Un vértice con r lazos.

Ejemplo 2.5. Sean $r \geq 1$ y A una matriz de 1×1 tal que $A = [r]$. Entonces G_A tiene un sólo vértice y r lazos. Si llamamos a las aristas por $1, 2, \dots, r$, como se muestra en la Figura 2.2. entonces X_G es el r -shift completo.

Ejemplo 2.6. Sea A la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Su gráfica $G = G_A$ se muestra en la Figura 2.3. Si tomamos el alfabeto $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ y nombramos las aristas como se indica, entonces X_G es el shift definido en el Ejemplo 1.4.

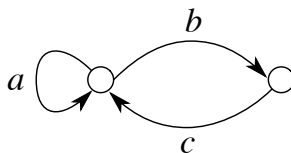


Figura 2.3: El espacio shift del Ejemplo 1.4.

El hecho de asociar una matriz a un espacio shift de tipo finito resulta muy conveniente. Por ejemplo, podemos obtener información acerca de los caminos en G a partir de su matriz de adyacencia A de la siguiente manera. Sea

$$E_v^u = \{e \in E \mid i(e) = v, t(e) = u\}$$

Es decir, E_v^u es la colección de caminos de tamaño 1 de v a u y tienen tamaño A_{ij} , que es la entrada correspondiente a la arista que inicia en el vértice v y termina en u . En particular A_{ii} es el número de lazos en un vértice v' . Entonces el número total de lazos en G es la suma de las entradas diagonales de A , i.e. la *traza de A* y se denota por $\text{tr}(A)$. Extendiendo esta idea, podemos utilizar la potencia de matrices de A para contar caminos más largos y paseos.

Proposición 2.3. *Sea G una gráfica con matriz de adyacencia A y sea $m \geq 0$.*

1. *El número de caminos de tamaño m de i a j es $(A^m)_{ij}$, la (i, j) -ésima entrada de la matriz A^m .*
2. *El número de paseos de tamaño m en G es $\text{tr}(A^m)_{ij}$, la traza de A^m es igual al número de puntos en X_G con periodo m .*

Demostración. Este resultado es rutinario y se deja al lector, refiriéndolo e.g. a [5, 8]. \square

Los shift por aristas tienen características muy especiales, son shift de tipo finito de memoria 1, ya que cuando paseamos por un camino en una gráfica, podemos seguir avanzando dependiendo donde nos encontremos en un instante preciso y no del camino que ya se ha recorrido. Pero no todos los shift de tipo finito son shift por aristas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.7. Sea $X = X_{\mathcal{F}}$ el shift áureo del Ejemplo (1.2). Afirmamos que no existe una gráfica G tal que $X_{\mathcal{F}} = X_G$. Si así fuera, entonces G tendría 2 aristas, llamadas 0 y 1. Las únicas posibilidades son que G tenga un sólo vértice, en cuyo caso serían lazos y X_G sería el 2-shift completo; o que G tenga dos vértices y entonces X_G consta únicamente de los puntos $(01)^\infty$ y $(10)^\infty$. En ningún caso X_G es el shift áureo.

Afortunadamente contamos con el siguiente resultado que es parte fundamental de nuestra exposición.

Teorema 2.3. *Si X es un shift de tipo finito de memoria M , entonces existe una gráfica G tal que $X^{[M+1]} = X_G$.*

Demostración. Primero notamos que si $M = 0$, entonces X es un shift completo y podemos tomar G como una gráfica con un sólo vértice y una arista por cada símbolo que aparece en X . Entonces si $M \geq 1$, definimos al conjunto de vértices de G como $V = \mathcal{B}_M(X)$ es decir, los M -bloques permitidos de X . Definimos al conjunto de aristas E como sigue, sean $v = a_1a_2 \dots a_M$ y $u = b_1b_2 \dots b_M$ dos vértices en G . Si $a_2a_3 \dots a_M = b_1b_2 \dots b_{M-1}$ y

si $a_1 \dots a_M b_M = a_1 b_1 \dots b_M \in \mathcal{B}(X)$ entonces dibujamos una arista en G de v a u y la llamamos $a_1 a_2 \dots a_M b_M = a_1 b_1 b_2 \dots b_M$. De otra forma, no dibujamos ninguna arista de v a u . De esta construcción es claro que una secuencia bi-infinita en G es precisamente una secuencia de $(M + 1)$ -bloques en $\mathcal{B}_{M+1}(X)$ los cuales se traslapan progresivamente, por lo tanto $X_G = X^{[M+1]}$. \square

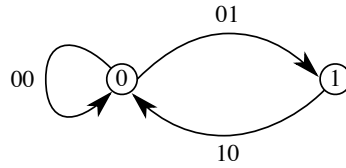


Figura 2.4: El espacio shift áureo del Ejemplo 1.2, al elevarlo a la segunda potencia.

Ejemplo 2.8. El shift áureo X del Ejemplo 1.2 es de memoria 1, pero no es un shift por aristas. Sin embargo, con el procedimiento descrito anteriormente encontramos una gráfica G tal que $X^{[2]} = X_G$, donde G es la gráfica de la Figura 2.4.

Definición 2.11. Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Para $N \geq 2$ la N -ésima presentación por aristas $G^{[N]}$ de una gráfica G , es aquella cuyo conjunto de vértices es igual a la colección de todos los caminos de tamaño $N - 1$ de G y el conjunto de aristas contiene una arista de $e_1 e_2 \dots e_{N-1}$ a $f_1 f_2 \dots f_{N-1}$ cuando

$$e_2 e_3 \dots e_{N-1} = f_1 f_2 \dots f_{N-1}$$

esta arista se llama $e_1 e_2 \dots f_{N-1} = e_1 f_1 f_2 \dots f_{N-1}$.

La relación entre el espacio shift por aristas de la N -ésima presentación por aristas de una gráfica G y la N -ésima presentación en bloques de X_G se presenta en la siguiente proposición.

Proposición 2.4. *Sea G una gráfica. Entonces $(X_G)^{[N]} = X_{G^{[N]}}$*

Demostración. Es inmediato de las definiciones. \square

Observamos que para $N \geq 2$, la matriz de adyacencia de $G^{[N]}$ contiene únicamente 0's y 1's; una matriz de este tipo se llama $\{0, 1\}$ -matriz. Es decir, entre cada dos vértices existe a lo más una arista, o equivalentemente, no hay aristas múltiples. Entonces, un camino en G de longitud n puede describirse como una secuencia de $n + 1$ vértices. Esto nos da una construcción alternativa para espacios shift, pero sólo es válida para $\{0, 1\}$ -matrices.

Definición 2.12. Sea B una $\{0, 1\}$ -matriz de $r \times r$, o equivalentemente, la matriz de adyacencia de una gráfica G tal que entre cualquiera dos vértices existe al menos una arista. El *espacio shift por vértices* $\hat{X}_B = \hat{X}_G$ es el espacio shift con el alfabeto $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, r\}$, definido por

$$\hat{X}_B = \hat{X}_G = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid B_{i, i+1} = 1 \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}\}.$$

La *función shift por vértices* es la función shift sobre $\hat{X}_B = \hat{X}_G$ y se denota por $\hat{\sigma}_B$ o $\hat{\sigma}_G$.

Ejemplo 2.9. Habíamos visto en el Ejemplo 1.2 que el shift áureo no se puede representar como un shift por aristas, pero si podemos describirlo como un shift por vértices \hat{X}_B , bajo la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Y la gráfica G asociada es la de la Figura 2.5.

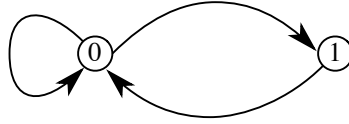


Figura 2.5: El espacio shift áureo del Ejemplo 1.2 admite una representación como un shift por vértices.

Al igual que los shift por aristas, los shift por vértices también son shift de tipo finito de memoria 1. Al shift \hat{X}_B lo definimos con el conjunto de palabras prohibidas de tamaño 2, $\mathcal{F} = \{ij \mid B_{ij} = 0\}$.

Podemos ver cualquier shift por aristas como un shift por vértices. Para hacerlo, comenzamos con un shift por aristas X_A que tiene a A como matriz de adyacencia, sea $G_A = (V, E)$ su gráfica asociada. Entonces hay $\sum_{i,j} A_{ij}$ aristas en E . De la siguiente manera formamos una $\{0, 1\}$ -matriz B que corresponderá al nuevo shift por vértices \hat{X}_B , tomamos las aristas de G_A como vértices etiquetados en la gráfica asociada G_B y para todo $e, f \in E$ definimos

$$B_{ef} = \begin{cases} 1 & \text{si } t(e) = i(f), \\ 0 & \text{si } t(e) \neq i(f). \end{cases}$$

Entonces \hat{X}_B es una versión de X_A , en la cual las aristas de G_A corresponden a los vértices de G_B ; esencialmente $\hat{X}_B = X_A$ y $G_B = G_A^{[2]}$.

Aparentemente las $\{0, 1\}$ -matrices son más fáciles de operar que las matrices con coeficientes enteros, entonces podríamos pensar en trabajar sólo con shift por vértices en vez de shift por aristas. Sin embargo, la matriz de adyacencia de un shift por aristas es más simple

que cuando la expresamos como un shift por vértices que es mucho más grande. Además de que las matrices, bajo operaciones naturales como las potencias, no preservan la propiedad de ser $\{0, 1\}$ -matrices. Por ejemplo, si tomamos la matriz de adyacencia

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces la $\{0, 1\}$ -matriz B del shift por vértices es

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Definición 2.13. Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Si $N \geq 1$, definimos la N -ésima potencia G^N de una gráfica G , con el conjunto de vértices $V(G^N) = V(G)$ y con una arista desde u a v por cada camino en G de tamaño N desde u a v . Claramente $G^1 = G$ y usualmente mientras más grande sea N ; G^N tiene más arcos que G .

Proposición 2.5. Sea G una gráfica con matriz de adyacencia A_G . Entonces la matriz de adyacencia de la N -ésima potencia G^N es la N -ésima potencia de la matriz A_G . Es decir, $A_{G^N} = (A_G)^N$. Más aún $X_{G^N} = (X_G)^N$.

Demostración. Se sigue de las definiciones. □

2.3. Gráficas etiquetadas y espacios shift sóficos

Supongamos que tenemos una gráfica cuyas aristas han sido etiquetadas con símbolos de un alfabeto \mathcal{A} , donde dos o más aristas pueden tener la misma etiqueta. Cada punto del espacio shift por aristas que determina la gráfica representa ahora un punto del espacio shift completo $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ al considerar las etiquetas de cada arista. Al conjunto de todos estos puntos se le llama *espacio shift sófico* y es un espacio shift. Estos espacios shift son importantes porque son precisamente los factores de espacios shift de tipo finito. Ambas clases de shift son utilizados como modelos de almacenamiento de información y transmisión. Formalicemos estas ideas.

Definición 2.14. Una *gráfica etiquetada* \mathcal{G} es una pareja (G, \mathcal{L}) , donde $G = (V, E)$ es una gráfica y $\mathcal{L} : E \rightarrow \mathcal{A}$ es una función que asigna a cada arista $e \in E$ una etiqueta $\mathcal{L}(e)$ de un alfabeto finito \mathcal{A} . Decimos que G es la *gráfica subyacente* de \mathcal{G} .

Los shift sóficos se definen en gráficas etiquetadas, cuyas aristas pueden tener la misma etiqueta. La función \mathcal{L} puede asignar cualquier conjunto de letras de un alfabeto \mathcal{A} a las aristas de G . Por ejemplo, podemos tomar $\mathcal{A} = E$ y $\mathcal{L}(e) = e$ para toda $e \in E$, teniendo una función biyectiva entre las aristas y sus nombres; o también \mathcal{A} puede constar únicamente de una letra a y todas las aristas pueden tener la misma etiqueta, entonces $\mathcal{L}(e) = a$ para toda $e \in E$. Sin embargo, será común trabajar con gráficas con aristas cuyas etiquetas pueden coincidir, es decir, \mathcal{L} no será una función inyectiva.

Así como podemos describir cualquier gráfica G con su matriz de adyacencia A_G ; una gráfica etiquetada $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ también tiene una *matriz de adyacencia simbólica* $A_{\mathcal{G}}$, donde la entrada (i, j) se forma “sumando” las etiquetas de todas las aristas de i a j , o con un símbolo “nulo” representado por el símbolo \emptyset si no existen dichas aristas. Por ejemplo, si \mathcal{G} es la gráfica etiquetada (a) de la Figura 2.6 y \mathcal{H} es la gráfica (b), entonces

$$A_{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ y } A_{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} a & c & b \\ \emptyset & b & a+b \\ a & c & \emptyset \end{bmatrix}$$

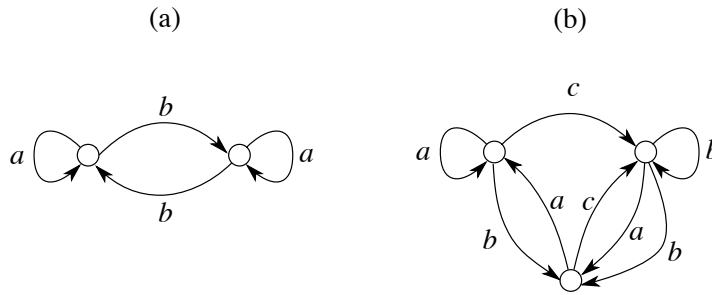


Figura 2.6: **Dos ejemplos de gráficas etiquetadas, mismas que inducen espacios shift sóficos.**

Definición 2.15. Sea $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L}_G)$ y $\mathcal{H} = (H, \mathcal{L}_H)$ gráficas etiquetadas. Un *homomorfismo entre gráficas etiquetadas* de \mathcal{G} a \mathcal{H} es un homomorfismo entre gráficas $(f, g) : G \rightarrow H$ tal que $\mathcal{L}_H(g(e)) = \mathcal{L}_G(e)$ para todas las aristas $e \in E(G)$, en este caso escribimos $(f, g) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$. Si las funciones f y g son biyectivas, entonces (f, g) es un *isomorfismo entre gráficas etiquetadas* y lo denotamos por $(f, g) : \mathcal{G} \cong \mathcal{H}$. Dos gráficas etiquetadas son isomorfas si existe un isomorfismo entre ellas.

Definición 2.16. Si $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ es una gráfica etiquetada, la *etiqueta de un camino* $\mathcal{C} = e_1 e_2 \dots e_n$ en G es

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \mathcal{L}(e_1) \mathcal{L}(e_2) \dots \mathcal{L}(e_n),$$

el cual es un n -bloque sobre el alfabeto \mathcal{A} y lo llamaremos *bloque etiquetado*. Así, podemos utilizar \mathcal{L} para etiquetar caminos y secuencias bi-infinitas en la gráfica subyacente G . Convenimos nuevamente que, para un camino vacío ϵ en G , definimos $\mathcal{L}(\epsilon) = \epsilon$, la palabra vacía sobre \mathcal{A} .

Si $\xi = \dots e_{-1} e_0 e_1 \dots$ es una secuencia bi-infinita en G , entonces ξ es un punto en el espacio shift por aristas X_G , entonces definimos la *etiqueta de la secuencia* ξ como

$$\mathcal{L}_\infty(\xi) = \dots \mathcal{L}(e_{-1}) \mathcal{L}(e_0) \mathcal{L}(e_1) \dots \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}.$$

Al conjunto de etiquetas de todas las secuencias bi-infinitas en G se denota por

$$\begin{aligned} X_{\mathcal{G}} &= \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid x = \mathcal{L}_\infty(\xi) \text{ para algún } \xi \in X_G\} \\ &= \{\mathcal{L}_\infty(\xi) \mid \xi \in X_G\} \\ &= \mathcal{L}_\infty(X_G). \end{aligned}$$

Entonces $X_{\mathcal{G}}$ es un subconjunto del \mathcal{A} -shift completo. Por ejemplo, si \mathcal{G} es la gráfica etiquetada (a) en la Figura 2.6, entonces, $X_{\mathcal{G}}$ es el $\{a, b\}$ -shift completo.

Definición 2.17. Un subconjunto X de un shift completo es un *shift sófico* si $X = X_{\mathcal{G}}$ para alguna gráfica etiquetada $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$. Una *presentación* de un shift sófico X es una gráfica etiquetada $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ para la cual $X_{\mathcal{G}} = X$. La función shift en $X_{\mathcal{G}}$ se denota por $\sigma_{\mathcal{G}}$.

Es importante notar que dado un espacio shift sófico, tendremos diferentes presentaciones. Si X es un shift sófico presentado por $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ y w es un bloque en $\mathcal{B}(X)$, diremos que un camino \mathcal{C} en G es una *presentación* de w si $\mathcal{L}(\mathcal{C}) = w$. Una palabra w puede tener varias presentaciones de caminos diferentes.

Si $x \in X_{\mathcal{G}}$ diremos que un camino bi-infinito $\xi \in X_{\mathcal{G}}$ es una *presentación* de x si $\mathcal{L}_\infty(\xi) = x$. Como con los caminos, un punto dado en $X_{\mathcal{G}}$ también puede tener varias presentaciones.

Teorema 2.4. *Los espacios shift sóficos son espacios shift.*

Demostración. Sea X un espacio shift sobre \mathcal{A} y $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ una presentación de X . Entonces $\mathcal{L} : E \rightarrow E$ dada por $\mathcal{L}(e) = e$ es una regla local que resulta en un código 1-bloque $\mathcal{L}_\infty : X_G \rightarrow X_{\mathcal{G}}$, entonces su imagen $X = \mathcal{L}_\infty(X_G)$ es un espacio shift por el Teorema 1.2. \square

Podemos observar que los espacios shift por aristas son s3ficos, utilizando 3nicamente el conjunto de aristas E como alfabeto y la funci3n identidad $\mathcal{L} : E \rightarrow E$ para etiquetarlos, dada por $\mathcal{L}(e) = e$. Esta observaci3n se extiende en el siguiente teorema para mostrar que los espacios shift de tipo finito son s3ficos.

Teorema 2.5. *Todo espacio shift de tipo finito es s3fico.*

Demostraci3n. Suponemos que X es un shift de tipo finito, entonces existe $M \geq 0$ tal que X es de memoria M . En la prueba del Teorema 2.3 se construy3 una gr3fica G para la cual $X^{[M+1]} = X_G$ y cuyo conjunto de v3rtices son los M -bloques permitidos en X , adem3s existe una arista e de $a_1a_2 \dots a_M$ a $b_1b_2 \dots b_M$ si y s3lo si el bloque $a_2a_3 \dots a_M = b_1b_2 \dots b_{M-1}$ y $a_1 \dots a_Mb_M = a_1b_1 \dots b_M$ est3 en $\mathcal{B}(X)$. En este caso llamamos a e por $a_1a_2 \dots a_Mb_M$ y etiquetamos a e con $\mathcal{L}(e) = a_1$. As3, obtenemos una gr3fica etiquetada $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ que ser3 una presentaci3n de X .

Sea $\beta_{M+1} : X \rightarrow X^{M+1} = X_G$ una presentaci3n de bloques dada por

$$\beta_{M+1}(x)_{[i]} = x_{[i, i+M]}.$$

Como $\mathcal{L}(x_{[i, i+M]}) = x_i$, observamos que $\mathcal{L}_\infty(\beta_{M+1}(x)) = x$ para toda $x \in X$, por lo tanto $X \subseteq X_G$.

Inversamente, todo punto ξ en $X_G = X^{[M+1]}$ tiene la forma $\xi = \beta_{M+1}(x)$ para alguna $x \in X$, entonces $\mathcal{L}_\infty(\xi) = \mathcal{L}_\infty(\beta_{M+1}(x)) = x \in X$. Entonces $X_G = \mathcal{L}_\infty(X_G) \subseteq X$, por lo tanto $X = X_G$. \square

No todos los espacios shift s3ficos son de tipo finito. Por ejemplo, el shift par es s3fico y hab3amos visto que no era de tipo finito. Un shift s3fico que no es de tipo finito se llama *estrictamente s3fico*.

En general, un espacio shift de tipo finito utiliza una memoria de *tama3o* finito, mientras que un s3fico utiliza una *cantidad* finita de memoria.

Proposici3n 2.6. *Un espacio shift s3fico es de tipo finito si y s3lo si tiene una presentaci3n $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ tal que \mathcal{L}_∞ es una conjugaci3n.*

Demostraci3n. Si X es un shift s3fico presentado por (G, \mathcal{L}) y \mathcal{L}_∞ es una conjugaci3n, entonces X es conjugado al shift de tipo finito inducido por G , X_G y por el Teorema 2.2 es en s3, un shift de tipo finito.

Inversamente, si X es un shift de tipo finito, entonces es de memoria M , para alguna M y la gr3fica etiquetada construida en el Teorema 2.5 es una presentaci3n de X donde el

código de 1-bloques \mathcal{L}_∞ es la inversa de la conjugación β_{M+1} y es una manera precisa de decir que x puede reconstruirse a partir de β_{M+1} leyendo las letras del último renglón, por lo tanto X es sófico. \square

Podemos decir que hay muchos más espacios shift que shift sóficos. Existe sólo una cantidad numerable de espacios shift sóficos, mientras que los espacios shift son innumerables. Supongamos que tenemos un espacio shift X específico, digamos, por una colección finita de palabras prohibidas. Nuestro siguiente objetivo es decir cuándo X es o no un espacio sófico.

Teorema 2.6. *Un espacio shift es sófico si y sólo si es un factor de un shift de tipo finito.*

Demostración. Primero suponemos que X es sófico y sea $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ una presentación de X . El mapeo de 1-bloques \mathcal{L} induce un código de bloques deslizante $\mathcal{L}_\infty : X_G \rightarrow X_G$ suprayectivo ya que, por definición de X_G , a todas las aristas de G se les asigna una etiqueta. Así, $X = X_G$ es un factor del shift por aristas X_G , que por la Proposición 2.2 es de tipo finito.

Inversamente suponemos que X es un espacio shift para el cual existe un shift de tipo finito Y y un código factor $\phi : Y \rightarrow X$ de memoria m y anticipación a . Entonces ϕ es inducido por un mapeo de bloques Φ en $\mathcal{B}_{m+n+1}(Y)$, incrementando m podemos asumir que Y es de memoria $m+n$. Definimos $\psi : Y \rightarrow Y^{[m+n+1]}$ por

$$\psi(y)_{[i]} = y_{[i-m, i+n]}$$

ψ es similar a la presentación de bloques β_{m+n+1} , excepto que utilizamos las coordenadas de y comenzando con el índice $i-m$ en vez del índice i . Como Y es de memoria $m+n$, por el Teorema 2.3, existe una gráfica G cuyas aristas se nombraron con los bloques de $\mathcal{B}_{m+n+1}(Y)$, entonces $Y^{[m+n+1]} = X_G$. Definimos una etiqueta \mathcal{L} en G por $\mathcal{L}(e) = \Phi(e)$. Probaremos que $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ es una presentación de X , por lo tanto es sófico. Veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\psi} & X_G \\ \phi \downarrow & \swarrow \mathcal{L}_\infty & \\ X & & \end{array}$$

Si $y \in Y$ entonces $\phi(y)_{[i]} = \Phi(y_{[i-m, i+n]})$, mientras que

$$\mathcal{L}_\infty(\psi(y))_{[i]} = \mathcal{L}(\psi(y)_{[i]}) = \Phi(y_{[i-m, i+n]}).$$

Como ψ es una conjugación, las imágenes de ϕ y de \mathcal{L}_∞ son iguales, entonces $X = \phi(Y) = \mathcal{L}_\infty(X_G)$, por lo tanto \mathcal{G} es una presentación de X . \square

Como consecuencia de este teorema, la colección de shift sóficos es la colección más pequeña de espacios shift que contiene a los shift de tipo finito y que es cerrada bajo factores.

Corolario 2.1. *Un factor de un espacio shift sófico es sófico.*

Demostración. Suponemos que Y es sófico y que $\phi : X \rightarrow Y$ es un código factor, por el Teorema 2.6, existe un código factor $\psi : Z \rightarrow Y$ donde Z es un shift de tipo finito. Como $\phi \circ \psi : Z \rightarrow X$ sigue siendo un código factor, concluimos que X es sófico. \square

Definición 2.18. Sea X un espacio shift y w una palabra en $\mathcal{B}(X)$. El *conjunto seguidor* $F_X(w)$ de w en X es el conjunto de todas las palabras que pueden colocarse a la derecha de w en X , es decir,

$$F_X(w) = \{v \in \mathcal{B}(X) \mid wv \in \mathcal{B}(X)\}.$$

La colección de estos conjuntos en X se denota por

$$\mathcal{C}_X = \{F_X(w) \mid w \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Cada conjunto seguidor es un conjunto infinito de palabras, ya que todas las palabras en $\mathcal{B}(X)$ pueden ser extendidas indefinidamente hacia la derecha. Además, distintas palabras pueden tener el mismo conjunto seguidor.

Ejemplo 2.10. Sea X el 2-shift completo y $w \in \mathcal{B}(X)$. Como toda palabra puede seguir a w , el conjunto seguidor de w es el lenguaje completo de X , entonces

$$F_X(w) = \mathcal{B}(X) = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, \dots\}.$$

Así \mathcal{C}_X contiene únicamente un conjunto $C = \mathcal{B}(X)$.

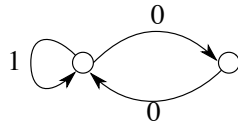


Figura 2.7: El espacio shift par tiene tres distintos conjuntos seguidores.

Ejemplo 2.11. Sea \mathcal{G} la gráfica etiquetada de la Figura 2.7, entonces $X = X_{\mathcal{G}}$ es el shift par. Existen tres conjuntos seguidores distintos

$$C_0 = F_X(0) = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 110, 111, \dots\},$$

$$C_1 = F_X(1) = \{0, 1, 00, 10, 11, 000, 001, 100, 110, 111, \dots\},$$

$$C_2 = F_X(10) = \{0, 00, 01, 000, 010, 011, \dots\}.$$

Para $w \in \mathcal{B}(X)$, es fácil ver que

$$F_X(w) = \begin{cases} C_0 & \text{si } w \text{ no contiene ningún } 1, \\ C_1 & \text{si } w \text{ termina en } 10^{2k} \text{ para alguna } k \geq 0 \text{ y} \\ C_2 & \text{si } w \text{ termina en } 10^{2k+1} \text{ para alguna } k \geq 0. \end{cases}$$

Entonces, existen tres únicos conjuntos seguidores y $\mathcal{C}_X = \{C_0, C_1, C_2\}$.

Ejemplo 2.12. Sea X el shift libre de contexto del Ejemplo 1.5, donde $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ y la palabra $ab^m c^k a$ está permitida sólo cuando $m = k$. Entonces $c^k a$ está en $F_X(ab^m)$ si y sólo si $k = m$. Lo cual significa que, para $m = 1, 2, 3, \dots$, los conjuntos seguidores $F_X(ab^m)$ son diferentes entre ellos mismos, entonces \mathcal{C}_X contiene una infinidad de conjuntos seguidores.

Supongamos que X es un espacio shift sobre \mathcal{A} tal que \mathcal{C}_X es finito. Construiremos una gráfica etiquetada $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ que llamaremos *gráfica de conjuntos seguidores* de X . Los vértices de G serán todos los elementos C en \mathcal{C}_X . Sea $C = F_X(w) \in V$ y $a \in \mathcal{A}$. Si $wa \in \mathcal{B}(X)$, entonces $F_X(wa)$ es un conjunto, digamos $C' \in V$ y dibujamos una arista etiquetada con a de C a C' . Si $wa \notin \mathcal{B}(X)$ entonces no se hace nada. Continuando este proceso para cada $C \in V$ y $a \in \mathcal{A}$ obtenemos la gráfica etiquetada \mathcal{G} .

Por ejemplo, sea X el shift par, donde $\mathcal{C}_X = \{C_0, C_1, C_2\}$ como en el Ejemplo 2.11. Como $C_0 = F_X(0)$ la gráfica de conjuntos seguidores contiene una arista con la etiqueta 0 de C_0 a $F_X(00) = C_0$ y una arista etiquetada con 1 de C_0 a $F_X(01) = C_1$. La gráfica de conjuntos seguidores completa se encuentra en la Figura 2.8.

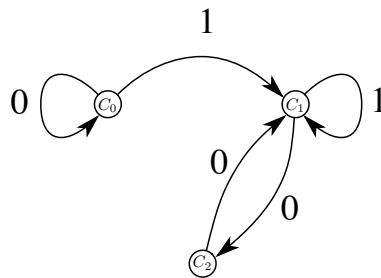


Figura 2.8: La gráfica de conjuntos seguidores del espacio shift par.

Definir la gráfica de conjuntos seguidores tiene un objetivo. Supongamos que $C = F_X(w) = F_X(w')$ para otra palabra w' y nosotros utilizamos w' en vez de w , la gráfica resultante será la misma, notemos que $wa \in \mathcal{B}(X)$ si y sólo si $w'a \in \mathcal{B}(X)$, ya que cada una ocurre si $a \in C$. Más aún, $F_X(wa) = F_X(w'a)$ ya que cada uno se obtiene tomando todas

las palabras en C que comienzan con la letra a y la suprimen. Podemos utilizar la gráfica de conjuntos seguidores para recuperar el shift original.

Proposición 2.7. *Si X es un espacio shift con un número finito de conjuntos seguidores y \mathcal{G} es su gráfica de conjuntos seguidores, entonces \mathcal{G} es una presentación de X . En particular, X debe ser sófico.*

Demostración. Para probar que $X = X_{\mathcal{G}}$, por la Proposición 1.6, inciso 3, basta probar que tienen el mismo lenguaje, es decir $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X_{\mathcal{G}})$.

Suponemos que $u = a_1a_2 \dots a_n \in \mathcal{B}(X_{\mathcal{G}})$. Entonces existe un camino C en la gráfica subyacente G tal que $\mathcal{L}(C) = u$. Digamos que C comienza en el vértice $F_X(w)$. Entonces $wa_1 \in \mathcal{B}(X)$ por como se construye \mathcal{G} , análogamente $wa_1a_2 \in \mathcal{B}(X)$ y siguiendo el mismo proceso, $wa_1a_2 \dots a_n = wu \in \mathcal{B}(X)$, entonces $u \in \mathcal{B}(X)$, por lo tanto $\mathcal{B}(X_{\mathcal{G}}) \subseteq \mathcal{B}(X)$.

Ahora, sea $u \in \mathcal{B}(X)$, aplicando iterativamente la Proposición 1.6, inciso 1b, existe una palabra w tal que $wu \in \mathcal{B}(X)$ y $|w| > |V(G)|$ por definición de \mathcal{G} , existe un camino en G etiquetado con wu ; tal camino se puede escribir $\alpha\beta\gamma\pi$ donde β es un paseo y π está etiquetado con u . Como todo vértice de G tiene al menos una arista saliente, se sigue que π puede extenderse a un camino bi-infinito en G , entonces $u \in \mathcal{B}(X_{\mathcal{G}})$. \square

Lo que caracteriza a los shift sóficos es que tienen un número finito de conjuntos seguidores, como lo indica el siguiente teorema.

Teorema 2.7. *Un espacio shift es sófico si y sólo si tiene un número finito de conjuntos seguidores.*

Demostración. Si X es un espacio shift con un número finito de conjuntos seguidores, la Proposición 2.7 implica que X es sófico.

Inversamente, si X es sófico, probaremos que \mathcal{C}_X es finito. Sean $w \in \mathcal{B}(X)$ y $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ una presentación de X . Describiremos como se obtiene $F_X(w)$ en términos de \mathcal{G} . Consideremos todos los caminos en G que presentan a w y sea T el conjunto de todos los vértices terminales de estos caminos. Entonces $F_X(w)$ es el conjunto de etiquetas de los caminos en G que comienzan en algún vértice de T , por lo que dos palabras con el mismo conjunto T tienen el mismo conjunto seguidor y como sólo hay un número finito de subconjuntos T del conjunto de vértices de G , entonces \mathcal{C}_X es finito. \square

Definición 2.19. Una gráfica etiquetada $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ es *resolvente por la derecha* si para cada vértice $v \in V$, las aristas cuyo vértice inicial es v , tienen etiquetas diferentes. En otras palabras, \mathcal{G} es resolvente por la derecha si para cada v , la restricción de \mathcal{L} a E_v es uno a

uno. Una *presentación resolvente por la derecha* de un shift sófico es una gráfica etiquetada resolvente por la derecha que presenta al shift.

Concluimos esta sección y el capítulo con otro resultado que será fundamental en nuestra exposición.

Teorema 2.8. *Todo shift sófico tiene una presentación resolvente por la derecha.*

Demostración. Es claro de la construcción que la gráfica de conjuntos seguidores es resolvente por la derecha y ya vimos que es una presentación del espacio shift (Proposición 2.7). \square

Capítulo 3

Funciones zeta de espacios shift

En 1970, Bowen y Lanford mostraron en [3] que si ϕ es un shift de tipo finito, entonces $\zeta_\phi(z)$ es el inverso de un polinomio asociado a cierta matriz. Ocho años más tarde, Bowen extiende el resultado a espacios shift sóficos y obtiene funciones racionales. Estas son las fórmulas que permiten dar resolución a la función zeta de Artin-Mazur en el caso de las \mathbb{Z} -acciones que resultan de estos espacios shift.

3.1. Función zeta de espacios shift de tipo finito

Recordemos que si X es un shift de tipo finito, entonces existe un shift por aristas X_A que es conjugado a X . Por lo tanto el siguiente teorema es válido para cualquier shift de tipo finito.

Teorema 3.1. *Sea A una matriz de $r \times r$ con coeficientes naturales, $\mathcal{X}_A(z)$ su polinomio característico y σ_A la función shift asociada. Entonces*

$$\zeta_{\sigma_A}(z) = \frac{1}{z^r \mathcal{X}_A(z^{-1})} = \frac{1}{\det(\text{Id} - zA)}.$$

Es decir, la función zeta de un shift de tipo finito es racional.

Demostración. Denotamos por $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, a las raíces de $\mathcal{X}_A(z)$ listadas con multiplicidad. Además el número de puntos periódicos, de periodo m de una matriz A es igual a la traza

de A^m , como se planteo en la Proposición 2.3, entonces

$$p_n(\sigma_A) = \text{tr} A^n = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \dots + \lambda_r^n.$$

Es decir, la suma de los valores propios. Recordemos que la serie de Taylor de $\log \frac{1}{(1-z)}$ es

$$\log \frac{1}{(1-z)} = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

entonces

$$\begin{aligned} \zeta_{\sigma_A}(z) &= \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(\sigma_A)}{n} z^n \right) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{tr}(A^n)}{n} z^n \right) \\ &= \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n + \dots + \lambda_r^n}{n} z^n \right) \\ &= \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_1 z)^n}{n} + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_r z)^n}{n} \right) \\ &= \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_1 z)^n}{n} \right) \dots \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_r z)^n}{n} \right) \\ &= \exp \left(\log \left(\frac{1}{1 - \lambda_1 z} \right) \right) \dots \exp \left(\log \left(\frac{1}{1 - \lambda_r z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{1 - \lambda_1 z} \times \dots \times \frac{1}{1 - \lambda_r z} = \prod_{n=1}^r \frac{1}{1 - \lambda_i z} \end{aligned}$$

como

$$\mathcal{X}_A(u) = \det(uId - A) = \prod_{i=1}^r (u - \lambda_i) = u^r \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{\lambda_i}{u}\right) = u^r \det \left(Id - \frac{A}{u} \right)$$

ahora si tomamos $u = \frac{1}{z}$, tenemos que

$$\mathcal{X}_A \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{1}{z^r} \prod_{n=1}^r (1 - \lambda_i z) = \frac{1}{z^r} \det (Id - zA)$$

por lo tanto

$$\zeta_{\sigma_A}(z) = \prod_{i=1}^r \frac{1}{1 - \lambda_i z} = \frac{1}{z^r \mathcal{X}_A(z^{-1})} = \frac{1}{\det (Id - zA)}.$$

□

Ejemplo 3.1. Consideremos el espacio shift áureo del Ejemplo 1.2. Consideramos entonces la matriz de adyacencia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que la función zeta del espacio shift áureo X es

$$\zeta_X(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

3.2. Función zeta de espacios shift sóficos

Contar los puntos periódicos de shift sóficos es más difícil que contar los de los espacios shift de tipo finito, ya que el mismo punto periódico puede tener diferentes presentaciones y los caminos subyacentes de dichas presentaciones pueden tener periodos más largos. Como se vio en el shift par, donde el punto fijo 0^∞ es presentado por un punto de periodo 2 en el espacio shift por aristas de la gráfica subyacente.

Primero necesitamos otro tipo de construcción para contar. Sea $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ una gráfica etiquetada resolvente por la derecha, donde $\mathcal{L} : E \rightarrow \mathcal{A}$ y sea r el número de vértices en G , digamos $V = \{1, 2, \dots, r\}$. Sea B la matriz de adyacencia simbólica de \mathcal{G} y A la matriz de adyacencia de la gráfica subyacente G . Podemos obtener A de B , sustituyendo todos los símbolos por un 1.

Para todo j tal que $1 \leq j \leq r = |V|$ construiremos una gráfica etiquetada \mathcal{G}_j con alfabeto $\{\pm a \mid a \in \mathcal{A}\}$. El conjunto de vértices de \mathcal{G}_j será el conjunto V_j de todos los subconjuntos de V que tienen j elementos, i.e. $|V_j| = \binom{r}{j}$.

Como \mathcal{G} es resolvente por la derecha, para todo $v \in V$ existe a lo más una arista etiquetada con a que comienza en v . Si tal arista existe, denotamos a su vértice terminal por $a(v)$, en otro caso $a(v)$ no está definido. Sea $\mathcal{J} = \{v_1, v_2, \dots, v_j\}$ y $\mathcal{J} = \{u_1, u_2, \dots, u_j\} \in V_j$ y $a \in \mathcal{A}$. En \mathcal{G}_j existe una arista etiquetada con a de \mathcal{J} a \mathcal{J} siempre y cuando todos los $a(v_i)$ estén definidos y $(a(v_1), \dots, a(v_j))$ sea una permutación par de \mathcal{J} . Si la permutación es impar, se asigna la etiqueta $-a$. En otro caso, no existe ninguna arista con etiqueta $\pm a$ de \mathcal{J} a \mathcal{J} .

Denotemos por B_j a la matriz de adyacencia simbólica de \mathcal{G}_j . Entonces, cada entrada de B_j es una combinación de símbolos etiquetados de \mathcal{A} . Obtenemos la matriz A_j a partir de B_j colocando todos los símbolos en \mathcal{A} igual a 1 y llamaremos a A_j la j -ésima matriz de subconjuntos de \mathcal{G} . Teniendo esta nueva construcción, podemos calcular $\zeta_{\sigma_{\mathcal{G}}}(z)$.

Lema 3.1. Sea π una permutación de un conjunto finito F y $\mathcal{C} = \{E \subseteq F \mid E \neq \emptyset, \pi(E) = E\}$. Es decir, la colección de subconjuntos de F en los que π actúa como una permutación. Entonces

$$\sum_{E \in \mathcal{C}} (-1)^{|E|+1} \operatorname{sgn}(\pi|_E) = 1.$$

Demostración. Recordemos que F se descompone bajo π en ciclos disjuntos, digamos C_1, C_2, \dots, C_m . Así cada $\pi|_{C_k}$ es una permutación cíclica, entonces

$$\operatorname{sgn}(\pi|_{C_k}) = (-1)^{1+|C_k|}$$

los conjuntos no vacíos $E \subseteq F$ para los cuales $\pi(E) = E$ son exactamente las uniones no vacías de subcolecciones de $\{C_1, \dots, C_m\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{C}} (-1)^{|E|+1} \operatorname{sgn}(\pi|_E) &= \sum_{\emptyset \neq K \subseteq \{1, \dots, m\}} (-1)^{1+|\cup_{k \in K} C_k|} \operatorname{sgn}(\pi|_{\cup_{k \in K} C_k}) \\ &= \sum_{\emptyset \neq K \subseteq \{1, \dots, m\}} (-1)^{1+\sum_{k \in K} |C_k|} \prod_{k \in K} (-1)^{1+|C_k|} \\ &= \sum_{\emptyset \neq K \subseteq \{1, \dots, m\}} (-1)^{|K|+1+2\sum_{k \in K} |C_k|} \\ &= \sum_{\emptyset \neq K \subseteq \{1, \dots, m\}} (-1)^{|K|+1} \\ &= \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (-1)^{j+1} = 1 - (1-1)^m = 1. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2. Sea $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ una gráfica etiquetada resolvente por la derecha, donde $|V| = r$ y sea A_j su j -ésima matriz de subconjuntos signada. Entonces

$$\zeta_{\sigma_{\mathcal{G}}}(z) = \prod_{j=1}^r [\det(\operatorname{Id} - zA_j)]^{(-1)^j}$$

por lo tanto, la función zeta de un espacio shift sófico es una función racional.

Demostración. Debemos mostrar que

$$p_n(\sigma_{\mathcal{G}}) = \sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} \operatorname{tr}(A_j^n). \quad (3.1)$$

Consideremos la parte simbólica equivalente a la suma en (3.1)

$$\sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} \operatorname{tr} (B_j^n). \quad (3.2)$$

Sea $u = a_1 a_2 \dots a_n \in \mathcal{A}^n$. Como \mathcal{G} es resolvente por la derecha, para cada $v \in V$ existe a lo más un camino etiquetado u que comienza en v . Es decir, existe una función $u : E \subseteq V \rightarrow V$ tal que, si dicho camino existe, entonces denotemos por $u(v)$ al vértice terminal. De otra manera, $u(v)$ no está definido. Supongamos que $u^\infty \notin X_{\mathcal{G}}$ es decir, u no es un punto periódico. Entonces no puede haber ningún subconjunto $E \subseteq V$ en el cual u actúa como una permutación, de otra modo habría un punto etiquetado u^∞ en $X_{\mathcal{G}}$. Entonces u no puede aparecer en $\operatorname{tr}(B_j^n)$ para $1 \leq j \leq r$ y así u no aparece en la expresión simbólica. Por lo tanto podemos escribir

$$\sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} \operatorname{tr} (B_j^n) = \sum_{u \in \mathcal{A}^n; u^\infty \in X_{\mathcal{G}}} c_u \cdot u, \quad (3.3)$$

donde los coeficientes $c_u \in \mathbb{Z}$. Mostraremos que $c_u = 1$ para todo $u \in \mathcal{A}^n$ tal que $u^\infty \in X_{\mathcal{G}}$. Supongamos que $u^\infty \in X_{\mathcal{G}}$. Debe existir al menos un subconjunto de V en el cual u actúa como una permutación. Si dos subconjuntos tienen esta propiedad, entonces también la unión de éstos. Podemos deducir que existe un subconjunto más grande $F \subseteq V$ en el cual u actúa como una permutación. Así el coeficiente c_u de u en la ecuación 3.3 es, por definición y por el Lema 3.1

$$c_u = \sum_{\emptyset \neq E \subseteq F; u(E)=E} (-1)^{|E|+1} \operatorname{sgn}(u|_E) = 1.$$

Entonces

$$\sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} \operatorname{tr} (B_j^n) = \sum_{u \in \mathcal{A}^n; u^\infty \in X_{\mathcal{G}}} u.$$

Sustituyendo todos los símbolos en \mathcal{A} por 1 probamos la ecuación (3.1). Para concluir la prueba, por el Teorema 3.1 tenemos que para cualquier matriz A

$$\exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tr} (A^n)}{n} z^n \right) = [\det (Id - zA)]^{-1}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \zeta_{\sigma_{\mathcal{G}}}(z) &= \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} \operatorname{tr} (A_j^n) \right\} z^n \right) \\ &= \prod_{j=1}^r \left[\exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tr} (A_j^n)}{n} z^n \right) \right]^{(-1)^{j+1}} \\ &= \prod_{j=1}^r [\det (Id - zA_j)]^{(-1)^j}. \end{aligned} \quad \square$$

Ejemplo 3.2. Sea $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ una gráfica etiquetada con matriz de adyacencia simbólica

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & \emptyset \end{bmatrix}$$

entonces $X_{\mathcal{G}}$ esencialmente es el espacio shift par del Ejemplo 1.3 que resulta de reemplazar el símbolo 1 por a y el símbolo 0 por b . En esta notación, \mathcal{G}_2 tiene un único vértice y una arista etiquetado con $-b$ del vértice en sí mismo, como b induce una permutación impar en V . Las matrices auxiliares correspondientes son

$$B_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & \emptyset \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = [-b], \quad A_2 = [-1].$$

De acuerdo al Teorema 3.2,

$$\zeta_{\sigma_{\mathcal{G}}}(z) = \frac{\det(\text{Id} - zA_2)}{\det(\text{Id} - zA_1)} = \frac{1 + z}{1 - z - z^2}$$

(comparar con el Ejemplo 3.1).

Capítulo 4

Función zeta multidimensional

Este capítulo contiene el material que motivó la realización de este trabajo y es el estudio de la función zeta multidimensional de Lind, que generaliza la función zeta de Artin-Mazur.

4.1. Definición y propiedades básicas

Sea X un espacio polaco compacto. Sea α una acción de \mathbb{Z}^d en X . Para un vector $n = (n_1, n_2, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ denotamos $\alpha^n(x)$, donde $x \in X$, al elemento de esta acción correspondiente a n . Denotamos por \mathcal{L}_d a la colección de subgrupos de índice finito (o retículas) en \mathbb{Z}^d . El índice $|\mathbb{Z}^d/L|$ de L en \mathbb{Z}^d se denota por $[L]$. Cuando $d = 1$ tenemos $\mathcal{L}_1 = \{n\mathbb{Z} \mid n \geq 1\}$. Entonces generalizamos la definición de la función zeta que se encuentra en la Introducción, dada por la ecuación (3), cuando $d \geq 1$ al reemplazar la suma sobre $n \geq 1$ por la suma sobre $L \in \mathcal{L}_d$. Para $L \in \mathcal{L}_d$, sea $p_L(\alpha)$ el número de puntos fijos en X por α^n para todo $n \in L$, es decir

$$p_L(\alpha) = |\{x \in X \mid \alpha^n(x) = x \text{ para todo } n \in L\}|$$

el cual asumimos que es finito para todo $L \in \mathcal{L}_d$.

Definición 4.1. La *función zeta* de una \mathbb{Z}^d -acción α es

$$\zeta_\alpha(z) = \exp \left(\sum_{L \in \mathcal{L}_d} \frac{p_L(\alpha)}{[L]} z^{[L]} \right).$$

Estableceremos algunas propiedades básicas de la función zeta de una \mathbb{Z}^d -acción y calcularemos esta función explícitamente para algunos ejemplos. En particular veremos que la \mathbb{Z}^2 -acción trivial en un punto tiene una función zeta interesante, a saber,

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} p(n) z^n$$

donde $p(n)$ es el número de particiones de n . Esta fórmula se remonta a Euler y fue el punto de partida para probar la siguiente fórmula asintótica¹

$$p(n) \sim \exp\left(\pi\sqrt{2n/3}\right)$$

desarrollada por Hardy y Ramanujan. Probaremos una fórmula del producto análoga y se proporcionará evidencia para la conjetura que, cuando $d \geq 1$ la función zeta es típicamente meromorfa² en $|z| < \exp(-h(\alpha))$, donde $h(\phi)$ es la entropía topológica y tiene al círculo $|z| = \exp(-h(\alpha))$ como su frontera natural (i.e. es *lacunaria*).

Pero antes veamos un ejemplo simple.

Ejemplo 4.1 (ACCIÓN TRIVIAL EN \mathbb{Z}). Cuando $d = 1$, $|\mathcal{A}| = 1$ y $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, $p_n(X) = 1$ para todo $n \geq 1$, entonces $p_{n\mathbb{Z}}(\alpha) = p_n(\phi)$, donde $\phi = \alpha^1$ es el generador de α . Entonces la función zeta es

$$\zeta_{\alpha}(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\right) = \exp\left(\log \frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{1-z} = \pi_1(z)$$

(como era de esperarse). La serie de Taylor de esta función tiene radio de convergencia 1.

El ejemplo anterior confirma un hecho más general y obvio y es que la función zeta de una \mathbb{Z} -acción generada por ϕ es la función zeta de Artin-Mazur de ϕ .

La función zeta es también un invariante de conjugación para \mathbb{Z}^d -acciones, lo cual se puede verificar, por ejemplo, en un esquema multidimensional de la Proposición 0.1. Veamos algunas propiedades de la función zeta multidimensional.

Lema 4.1. *Sea α una \mathbb{Z}^d -acción y para³ $A \in GL(d, \mathbb{Z})$ se define la \mathbb{Z}^d -acción α^A por $(\alpha^A, \mathbf{n}) = \alpha^{A\mathbf{n}}$, entonces $\zeta_{\alpha}(z) = \zeta_{\alpha^A}(z)$.*

Demostración. Para $L \in \mathcal{L}_d$, sea $AL = \{A\mathbf{n} \mid \mathbf{n} \in L\}$. Entonces $L \leftrightarrow AL$ es una función biyectiva de \mathcal{L}_d en sí mismo y $[AL] = [L]$. Entonces $p_L(\alpha^A) = p_{AL}(\alpha)$, por lo tanto las funciones zeta de α y α^A coinciden. \square

¹Dadas dos funciones $\phi, \psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(n) \sim \psi(n)$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(n)}{\psi(n)} = 1$.

²Es decir, una función analítica en un dominio D , excepto por un conjunto de polos aislados.

³ $GL(d, \mathbb{Z})$ denota al conjunto de $(d \times d)$ -matrices invertibles con entradas en \mathbb{Z} .

En resumen, la función zeta es independiente de la base de \mathbb{Z}^d .

Si $Y \subset X$ es α -invariante⁴, denotamos por $\alpha|_Y$ la restricción de α en Y .

Lema 4.2. *Sea $Y, Z \subset X$ conjuntos compactos y α -invariantes. Entonces*

$$\zeta_{\alpha|_{Y \cup Z}}(z) = \frac{\zeta_{\alpha|_Y}(z) \zeta_{\alpha|_Z}(z)}{\zeta_{\alpha|_{Y \cap Z}}(z)}.$$

En particular, si Y y Z son ajenos, entonces $\zeta_{\alpha|_{Y \cup Z}}(z) = \zeta_{\alpha|_Y}(z) \zeta_{\alpha|_Z}(z)$.

Demostración. Para $L \in \mathcal{L}_d$ tenemos que

$$p_L(\alpha|_{Y \cup Z}) = p_L(\alpha|_Y) + p_L(\alpha|_Z) - p_L(\alpha|_{Y \cap Z}).$$

Por lo tanto el resultado es una consecuencia de la definición de la función zeta. \square

4.2. Ejemplos de funciones zeta de \mathbb{Z}^2 -acciones

Denotaremos por $\pi_d(z)$ a la función zeta de la \mathbb{Z}^d -acción trivial en un punto. Cuando $d = 1$, ya vimos de forma sencilla en el Ejemplo 4.1 que

$$\pi_1(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Veamos ahora ejemplos más elaborados. Comenzaremos con la acción trivial con $d = 2$. Primero, para calcular la función zeta de \mathbb{Z}^2 -acciones, necesitaremos una parametrización para \mathcal{L}_2 , a saber, la forma normal de Hermite para matrices integrales (ver Figura 4.1):

$$\mathcal{L}_2 = \left\{ \left[\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & c \end{array} \right] \mathbb{Z}^2 \mid a \geq 1, c \geq 1, 0 \leq b \leq a - 1 \right\}.$$

Proposición 4.1 (HERMITE PARA \mathbb{Z}^2). *Existe una correspondencia biyectiva entre las retículas de \mathbb{Z}^2 y las formas normales de Hermite \mathcal{L}_2 .*

Demostración. Esta proposición es un caso particular del Teorema de Hermite en \mathbb{Z}^d enunciado en el Apéndice (ver A.11). \square

⁴ $Y \subset X$ es α -invariante si $\alpha^n(Y) \subset Y$ para toda $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$.

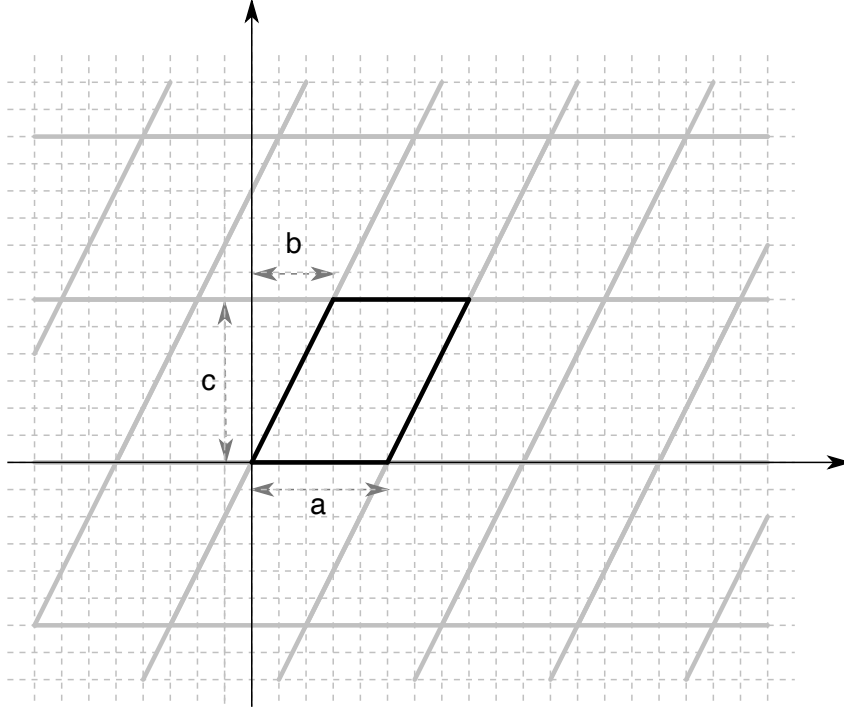


Figura 4.1: El índice del subgrupo que induce una matriz normal de Hermite es el producto de la diagonal.

Ejemplo 4.2 (ACCIÓN TRIVIAL EN \mathbb{Z}^2). Para la \mathbb{Z}^2 -acción trivial α en un punto, $p_L(\alpha) = 1$ para todo $L \in \mathcal{L}_2$, por lo tanto la función zeta de una \mathbb{Z}^2 -acción trivial es

$$\begin{aligned}
 \zeta_\alpha(z) &= \exp\left(\sum_{a=1}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{b=0}^{a-1} \frac{1}{ac} z^{ac}\right) \\
 &= \exp\left(\sum_{a=1}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{(z^a)^c}{c}\right) \\
 &= \exp\left(\sum_{a=1}^{\infty} -\log(1 - z^a)\right) \\
 &= \prod_{a=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^a}.
 \end{aligned}$$

A esta fórmula la llamamos $\pi_2(z)$, es analítica en $|z| < 1$ y tiene al círculo unitario $|z| = 1$ como frontera natural.

Ejemplo 4.3 (\mathbb{Z}^2 -ACCIÓN EN ESPACIOS COMPLETOS). Sea

$$X = \{0, 1, \dots, k - 1\}^{\mathbb{Z}^2}$$

y α la acción shift de \mathbb{Z}^2 en X . Sea $L \in \mathcal{L}_2$. Entonces un punto fijo en X por α^n para $\mathbf{n} \in L$ se determina por sus coordenadas en un dominio fundamental para L y cualquier elección es posible. Entonces $p_L(\alpha) = k^{|L|}$. Como $p_L(\alpha)$ depende únicamente del índice de L la función zeta es

$$\zeta_\alpha(z) = \prod_{a=1}^{\infty} \frac{1}{1 - (kz)^a} = \pi_2(kz).$$

Notamos que $h(\alpha) = \log k$, entonces $\zeta_\alpha(z)$ es analítica en $|z| < \exp(-h(\alpha)) = 1/k$ y tiene como frontera natural al círculo $|z| = \exp(-h(\alpha))$.

Ejemplo 4.4 (LEVANTAMIENTO DE UNA \mathbb{Z} -ACCIÓN⁵). Sea

$$X = \{0, 1, \dots, k - 1\}^{\mathbb{Z}}$$

y σ la \mathbb{Z} -acción shift en X . Definimos la \mathbb{Z}^2 -acción α en X por $\alpha^{(m,n)} = \sigma^n$, entonces α es generada por la función identidad y σ .

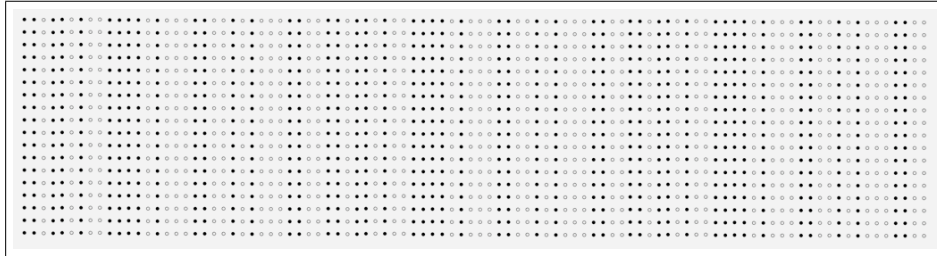


Figura 4.2: Levantamiento de un espacio shift a \mathbb{Z}^2 .

Esta \mathbb{Z}^2 -acción es conjugada a la \mathbb{Z}^2 -acción shift β en

$$Y = \left\{ y \in \{0, 1, \dots, k - 1\}^{\mathbb{Z}^2} \mid y_{i,j} = y_{i+1,j} \text{ para todo } i, j \in \mathbb{Z} \right\}$$

(ver Figura 4.2), en particular $\zeta_\beta(z) = \zeta_\alpha(z)$. Calcularemos ζ_β . Sea

$$L = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mathbb{Z}^2,$$

⁵La generalización de este Ejercicio se encuentra en el Lema 4.4

donde $a \geq 1$, $c \geq 1$ y $0 \leq b \leq a - 1$. Un punto $y \in Y$ fijo por β^n para todo $\mathbf{n} \in L$ está determinado por sus coordenadas $y_{0,0}, y_{0,1}, \dots, y_{0,c-1}$ y las opciones para estos son arbitrarias; así $p_L(\beta) = k^c$, entonces

$$\begin{aligned} \zeta_\alpha(z) = \zeta_\beta(z) &= \exp\left(\sum_{a=1}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{b=0}^{a-1} \frac{k^c}{ac} z^{ac}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{a=1}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{(kz^a)^c}{c}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{a=1}^{\infty} -\log(1 - kz^a)\right) \\ &= \prod_{a=1}^{\infty} \frac{1}{1 - kz^a} \\ &= \frac{1}{(1 - kz)(1 - kz^2)(1 - kz^3)\dots}. \end{aligned}$$

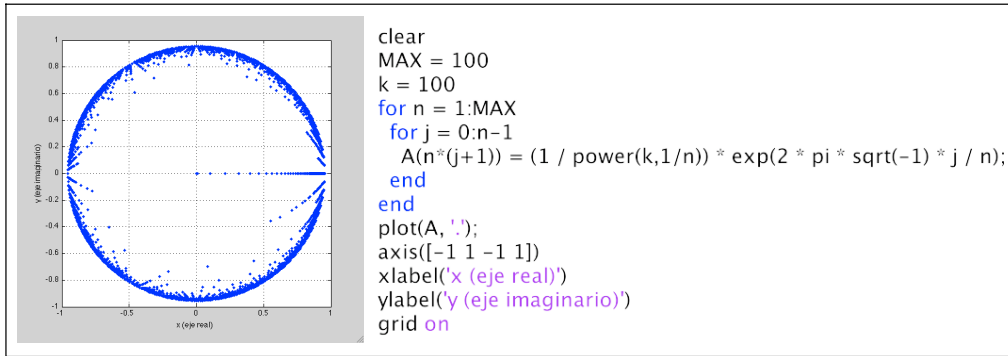


Figura 4.3: Polos de la función zeta de un levantamiento de una \mathbb{Z} -acción.

Observamos que $h(\alpha) = 0$ pero el factor $1 - kz$ en el denominador muestra que $\zeta_\alpha(z)$ tiene un polo simple en $1/k$. Esto muestra que el radio de convergencia de ζ_α debe ser estrictamente más pequeño que $\exp(-h(\alpha))$. De hecho, el producto desarrollado para $\zeta_\alpha(z)$ muestra que tiene polos en

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{k}} e^{2\pi i j/n} \mid 0 \leq j \leq n-1, n \geq 1 \right\},$$

los cuales se ilustran en la Figura 4.3. Entonces $\zeta_\alpha(z)$ tiene una infinidad de polos en el círculo unitario y estos polos se acercan al círculo unitario. Se sigue que $\zeta_\alpha(z)$ es meromorfa en $|z| < \exp(-h(\alpha)) = 1$ y tiene frontera natural $|z| = \exp(-h(\alpha)) = 1$.

Ejemplo 4.5 (LEDRAPPIER). Sea $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ el campo con dos elementos y

$$X = \left\{ x \in \mathbb{F}_2^{\mathbb{Z}^2} \mid x_{i,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j+1} = 0 \text{ para todo } i, j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Entonces $X = X_{\mathcal{F}}$ es un espacio shift de tipo finito *bidimensional*, en donde el conjunto de “bloques” prohibidos es

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right\}$$

Entonces X es un grupo compacto cuya operación es inducida coordenada a coordenada, la cual es invariante bajo la acción natural α del \mathbb{Z}^2 -shift. Sea

$$L = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mathbb{Z}^2,$$

donde $a \geq 1, c \geq 1$ y $0 \leq b \leq a - 1$. Calcularemos $p_L(\alpha)$ utilizando un poco de álgebra lineal sobre \mathbb{F}_2 . Un punto $x \in X$, L -invariante debe tener un periodo horizontal a y queda determinado por algún elemento y del espacio vectorial \mathbb{F}_2^a . Denotamos por I_a a la matriz identidad de $a \times a$ y P_a la matriz de permutaciones de $a \times a$ correspondiente al shift cíclico de vectores básicos elementales de \mathbb{F}_2^a . La condición de periodicidad L de x se traduce en la condición

$$(I_a + P_a)^c y = P_a^{-b} y.$$

Entonces

$$p_L(\alpha) = |\ker((I_a + P_a)^c - P_a^{-b})|. \quad (4.1)$$

Por ejemplo, si $a = 3, b = 1$ y $c = 1$, entonces

$$P_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$(I_a + P_a)^c - P_a^{-b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y así para este kernel L , tenemos $p_L(\alpha) = 4$. La fórmula (4.1) permite calcular tantos términos como queramos de la función $\zeta_\alpha(z)$. Un cálculo en *Mathematica* nos da los primeros términos, que son

$$\begin{aligned} \zeta_\alpha(z) = & 1 + z + 2z^2 + 4z^3 + 6z^4 + 9z^5 + 16z^6 + 24z^7 + 35z^8 + 54z^9 + 78z^{10} \\ & + 110z^{11} + 162z^{12} + 226z^{13} + 317z^{14} + 446z^{15} + 612z^{16} + \dots \end{aligned}$$

De cualquier forma, este cálculo no revela las propiedades analíticas de $\zeta_\alpha(z)$. Para hacerlo, necesitamos emplear otras ideas que muestren que $\zeta_\alpha(z)$ tiene radio de convergencia uno y al círculo unitario como frontera natural. Primero haremos una aproximación del tamaño de $p_L(\alpha)$ en términos de $[L]$.

Lema 4.3. Sea α la \mathbb{Z}^2 -acción shift en

$$X = \left\{ x \in \mathbb{F}_2^{\mathbb{Z}^2} \mid x_{i,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j+1} = 0 \text{ para todo } i, j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Entonces existe una constante C tal que para toda $L \in \mathcal{L}_2$ tenemos que

$$p_L(\alpha) \leq 2^C \sqrt{[L]}. \quad (4.2)$$

Demostración. Sea $L \in \mathcal{L}_2$. Primero mostraremos que existe un vector no cero $v \in L$ tal que $\|v\| \leq \theta \sqrt{[L]}$, donde $\|\cdot\|$ denota la norma Euclidiana en \mathbb{R}^2 y $\theta = \sqrt{4/\pi}$. Sea B_r la bola de radio r en \mathbb{R}^2 alrededor del 0 y sea A una matriz integral tal que $A\mathbb{Z}^2 = L$. Si $B_r \cap L = \{0\}$, entonces $A^{-1}(B_r)$ es una región convexa y simétrica en \mathbb{R}^2 que no contiene vectores distintos de cero en \mathbb{Z}^2 , por el Teorema de Minkowski (ver Teorema A.12 en el Apéndice A), tenemos que

$$\text{area}(A^{-1}(B_r)) < 4.$$

Como $\det A = [L]$ se sigue que

$$\frac{\pi r^2}{[L]} < 4, \text{ ó } r < \theta \sqrt{[L]}.$$

Entonces la bola de radio $\theta \sqrt{[L]}$ debe contener al menos un vector distinto de cero v en L .

Ahora consideremos la banda S de ancho 2 sobre el segmento lineal $[\mathbf{0}, \mathbf{v}]$. Si $x \in X$ es L -periódico, entonces sus coordenadas en S determinan, por periodicidad, aquellas coordenadas en la banda de ancho 2 alrededor de la línea $\mathbb{R}\mathbf{v}$, las que a su vez determinan el resto de las coordenadas por medio de las relaciones que definen tanto la pertenencia al conjunto X como la L -periodicidad. Entonces el número de L -puntos periódicos en X está acotado superiormente por el número de posibles configuraciones en S . Si el número de retículas en S está acotado por una constante $\sqrt{[L]}$, se sigue la estimación (4.2). \square

Podemos continuar con el ejemplo. La parametrización con la forma normal de Hermite muestra que el número de retículas $L \in \mathcal{L}_2$ con $[L] = n$ es igual a $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$. Claramente

$$\sigma(n) \leq 1 + 2 + \cdots + n < n^2,$$

por lo tanto

$$\sum_{\{L \in \mathcal{L}_2 \mid [L]=n\}} p_L(\alpha) \leq n^2 \cdot 2^{C\sqrt{n}}.$$

Entonces la fórmula de Hadamard⁶ implica que la serie $\zeta_\alpha(z)$ tiene radio de convergencia uno.

Falta verificar que $\zeta_\alpha(z)$ satisface la conjetura de la función zeta multidimensional. Primero afirmamos que la estimación (4.2) es justa en el sentido de que no existe una potencia de $[L]$ estrictamente menor que $1/2$ que funcione para toda L . Sea

$$L_n = (2^n - 1)\mathbb{Z} \oplus (2^n - 1)\mathbb{Z},$$

de forma que $[L_n] = (2^n - 1)^2$. La expansión de $(1 + t^n)^{2^n - 1} \pmod{2}$ es $\sum_{j=0}^{2^n - 1} t^j$. Entonces se sigue de la ecuación (4.1) que $p_{L_n}(\alpha)$ es igual al número de elementos en $\mathbb{F}_2^{2^n - 1}$, cuyas coordenadas que suman 0 son la mitad de la cardinalidad de $\mathbb{F}_2^{2^n - 1}$. Es decir,

$$p_{L_n}(\alpha) = \frac{1}{2}2^{2^n - 1} = \frac{1}{2}2^{\sqrt{[L_n]}}, \quad (4.3)$$

lo que verifica nuestra afirmación.

Ahora supongamos que $\zeta_\alpha(z)$ es racional, digamos

$$\zeta_\alpha(z) = \frac{\prod_{i=1}^k (1 - \lambda_i z)}{\prod_{j=1}^l (1 - \mu_j z)}.$$

Se sigue del cálculo que

$$\sum_{\{L \in \mathcal{L}_2 \mid [L]=n\}} p_L(\alpha) = \sum_{j=1}^l \mu_j^n - \sum_{i=1}^k \lambda_i^n. \quad (4.4)$$

Ahora bien, $\zeta_\alpha(z)$ es analítica en $|z| < 1$, por lo que $|\mu_j| \leq 1$ para toda $j = 1, \dots, l$. Más aún, $\zeta_\alpha(z)$ no se desvanece en $|z| < 1$, pues es la exponencial de una serie de potencias convergente en este dominio, así concluimos que $|\lambda_i| \leq 1$ para toda $i = 1, \dots, k$. La ecuación (4.4) implicaría que $p_L(\alpha) \leq k + l$ para toda $L \in \mathcal{L}_2$, lo que contradice la ecuación (4.3). Por lo tanto $\zeta_\alpha(z)$ no es racional.

La Fórmula del Producto (Teorema 4.3) implica que la serie de Taylor de $\zeta_\alpha(z)$ tiene coeficientes enteros (ver el Corolario 4.1). Entonces el Teorema de Carlson (Teorema A.15 en el Apéndice A) implica que $|z| = 1$ es la frontera natural de $\zeta_\alpha(z)$.

⁶La fórmula de Hadamard afirma que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ tiene radio de convergencia $R = 1/r$ donde $r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.

4.3. Cálculo de una \mathbb{Z}^d -acción trivial

Ahora calculamos la función $\pi_d(z)$ para toda $d \geq 2$. Sea α la \mathbb{Z}^d -acción trivial en un punto. Entonces $p_L(\alpha) = 1$ para todo $L \in \mathcal{L}_d$. Tenemos que

$$\pi_d(z) = \zeta_\alpha(z) = \exp\left(\sum_{L \in \mathcal{L}_d} \frac{1}{[L]} z^{[L]}\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_d(n)}{n} z^n\right),$$

donde $e_d(n) = |\{L \in \mathcal{L}_d \mid [L] = n\}|$. Para calcular $e_d(n)$ vamos a utilizar la *forma normal de Hermite* para matrices enteras (la Proposición 4.1 es la versión para $d = 2$). El enunciado formal se encuentra en el Apéndice, Teorema A.11 y proporciona una parametrización conveniente de \mathcal{L}_d , que generaliza el caso de \mathcal{L}_2 descrito anteriormente al establecer la relación de una retícula en \mathcal{L}_d como la imagen de \mathbb{Z}^d bajo una matriz que tiene la forma

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1d} \\ 0 & a_2 & b_{23} & \dots & b_{2d} \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & b_{3d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_d \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

donde $a_i \geq 1$ con $1 \leq i \leq d$ y $0 \leq b_{ij} \leq a_i - 1$ con $i + 1 \leq j \leq d$. El siguiente resultado muestra la forma de obtener $e_d(n)$ de forma inductiva, como se observa en la siguiente tabla:

	$n = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d = 1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18
3	1	7	13	35	31	91	57	155	130	217
4	1	15	40	155	156	600	400	1395	1210	2340
5	1	31	121	651	781	3751	2801	11811	11011	24211
6	1	63	364	2667	3906	22932	19608	97155	99463	246078

Proposición 4.2. Sea $e_d(n)$ el número de retículas en \mathbb{Z}^d con índice n . Entonces

$$e_d(n) = \sum_{k|n} e_{d-1}\left(\frac{n}{k}\right) k^{d-1}. \quad (4.6)$$

Demostración. Supongamos que $L \in \mathcal{L}_d$ es la imagen de \mathbb{Z}^d bajo la matriz (A.1). Entonces $[L] = a_1 a_2 \dots a_{d-1} a_d$, por lo tanto a_1 divide $[L]$. Sea $k = a_1$. Cada uno de los $b_{12}, b_{13}, \dots, b_{1d}$ puede tomar los valores $0, 1, \dots, k-1$ dando k^{d-1} opciones para el renglón superior. Existen $e_{d-1}(n/k)$ opciones para las partes restantes de la matriz. Sumando sobre los divisores k de n obtenemos la fórmula 4.6. \square

Ejemplo 4.6. Por ejemplo, trivialmente tenemos que

$$e_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1. \\ 0 & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Entonces la fórmula (4.6) con $d = 1$ resulta en $e_1(n) = 1$ para toda $n \geq 1$ y con $d = 2$, tenemos

$$e_2(n) = \sum_{k|n} e_1\left(\frac{n}{k}\right)k = \sum_{k|n} k = \sigma(n),$$

que es la suma de todos los divisores de n .

De la fórmula (4.6) se sigue que la sucesión $\{e_d(n) \mid n \geq 1\}$ es el producto de Dirichlet (ver Apéndice, definición A.23) de $\{e_{d-1}(n) \mid n \geq 1\}$ con la sucesión $\{n^{d-1} \mid n \geq 1\}$. Inductivamente se muestra que $\{e_d(n) \mid n \geq 1\}$ es el producto de Dirichlet de las sucesiones $\{n^0\}, \{n^1\}, \dots, \{n^{d-1}\}$. Ahora la función generadora de Dirichlet de $\{n^k\}$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{z-k}} = \zeta(z-k),$$

donde $\zeta(z)$ denota la función zeta de Riemann. Dado que la función generadora de Dirichlet del producto de las sucesiones de Dirichlet es el producto de sus funciones generadoras de Dirichlet, vemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_d(n)}{n^z} = \zeta(z) \zeta(z-1) \dots \zeta(z-d+1).$$

Por lo tanto tenemos una representación explícita de $e_d(n)$. A continuación calcularemos la tasa de crecimiento de $e_d(n)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Proposición 4.3. *Sea $e_d(n)$ el número de retículas en \mathcal{L}_d de orden n . Entonces*

$$e_d(n) \leq n^{d+1}. \quad (4.7)$$

Demostración. Por inducción sobre d , sabemos que $e_1(n) = 1$ para todo $n \geq 1$ cuando $d = 1$, por lo tanto $e_1(n) \leq n^2$. Suponemos (4.7) válido para $d-1$, por la fórmula (4.6) tenemos que

$$e_d(n) = \sum_{k|n} e_{d-1}\left(\frac{n}{k}\right)k^{d-1}$$

además por hipótesis de inducción $e_{d-1}(n/k) \leq (n/k)^d$, por lo tanto

$$e_d(n) = \sum_{k|n} e_{d-1}\left(\frac{n}{k}\right)k^{d-1} \leq \sum_{k|n} \left(\frac{n}{k}\right)^d k^{d-1} \leq n^d \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq n^{d+1}. \quad \square$$

Lema 4.4. Sean β una \mathbb{Z}^{d-1} -acción y α una \mathbb{Z}^d -acción definida como $\alpha^{(n_1, n_2, \dots, n_d)} = \beta^{(n_2, n_3, \dots, n_d)}$. Entonces

$$\zeta_\alpha(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \zeta_\beta(z^k)^{k^{d-2}}.$$

Demostración. Consideramos una matriz de $(d-1) \times (d-1)$ en su forma normal de Hermite

$$B = \begin{bmatrix} a_2 & b_{23} & \dots & b_{2d} \\ 0 & a_3 & \dots & b_{3d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_d \end{bmatrix}$$

Podemos formar todas las matrices A de $d \times d$ en su forma normal de Hermite que contienen a B como menor principal en la parte inferior derecha, agregando a B un renglón superior de la forma $[k \ b_{12} \ b_{13} \ \dots \ b_{1d}]$, donde $k \geq 1$ y $0 \leq b_{1j} \leq k-1$ y haciendo las entradas restantes de la columna izquierda 0, así formamos

$$A = \begin{bmatrix} k & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1d} \\ 0 & a_2 & b_{23} & \dots & b_{2d} \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & b_{3d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_d \end{bmatrix}$$

Como $\alpha^{(1,0,\dots,0)}$ es la identidad, tenemos que $p_{A\mathbb{Z}^d}(\alpha) = p_{B\mathbb{Z}^{d-1}}(\beta)$ para todas las opciones de k y de los b_{1j} . Entonces

$$\begin{aligned} \zeta_\alpha(z) &= \exp\left(\sum_{L \in \mathcal{L}} \frac{p_L(\alpha)}{[L]} z^{[L]}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{M \in \mathcal{L}_{d-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{b_{12}=0 \\ \vdots \\ b_{1d}=0}}^{k-1} \dots \sum_{\substack{b_{12}=0 \\ \vdots \\ b_{1d}=0}}^{k-1} \frac{p_M(\beta)}{k[M]} z^{k[M]}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{M \in \mathcal{L}_{d-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{d-1} p_M(\beta)}{k[M]} z^{k[M]}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(\sum_{M \in \mathcal{L}_{d-1}} \frac{p_M(\beta)}{[M]} (z^k)^{[M]}\right)^{k^{d-2}} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} (\zeta_\beta(z^k))^{k^{d-2}}. \end{aligned}$$

□

Este lema implica, por ejemplo que, si α es la \mathbb{Z}^2 -acción generada por la identidad en X y $\phi : X \rightarrow X$, entonces

$$\zeta_\alpha(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \zeta_\phi(z^k).$$

Esto se utilizó en el Ejemplo 4.2 y el Ejemplo 4.4 para calcular que

$$\pi_2(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \pi_1(z^k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^k}.$$

Teorema 4.1. *Sea $\pi_d(z)$ la función zeta de la \mathbb{Z}^d -acción trivial en un punto. Entonces la serie de Taylor de $\pi_d(z)$ tiene radio de convergencia uno. Más aún, $\pi_d(z)$ tiene la expansión del producto*

$$\pi_d(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-z^n)^{e_{d-1}(n)}}, \quad (4.8)$$

donde el producto converge cuando $|z| < 1$.

Demostración. Por la Proposición 4.3 sabemos que $1 \leq e_d(n) \leq n^{d+1}$. Entonces la serie

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_d(n)}{n} z^n$$

tiene radio de convergencia uno. Más aún, $\lim_{s \rightarrow 1^-} \psi(z) = \infty$. Entonces la serie de Taylor de $\pi_d(z) = e^{\psi(z)}$ tiene radio de convergencia uno.

Ya vimos que (4.8) es válida para $d = 2$. Supongamos inductivamente que es válida cuando $d \geq 3$ se reemplaza por $d - 1$. Podemos entonces aplicar el Lema 4.4 tanto a la \mathbb{Z}^d -acción trivial α como a la \mathbb{Z}^{d-1} -acción trivial β . Entonces, usando el mismo lema y la Proposición 4.2, obtenemos

$$\begin{aligned} \pi_d(z) &= \prod_{k=1}^{\infty} \pi_{d-1}(z^k)^{k^{d-2}} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} (1-z^{kn})^{-e_{d-2}(n)k^{d-2}} \\ &= \prod_{m=1}^{\infty} (1-z^m)^{-\sum_{k|m} e_{d-2}(m/k)k^{d-2}} \\ &= \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1-z^m)^{e_{d-1}(m)}}, \end{aligned}$$

y por la ecuación (4.7) se deduce que las manipulaciones son válidas cuando $|z| < 1$. Esto verifica la fórmula (4.8) para d , completando la prueba. \square

Proposición 4.4. *Para $d \geq 2$ la función $\pi_d(z)$ tiene como frontera natural al círculo unitario.*

Demostración. El Teorema 4.1 muestra que las series de Taylor para $\pi_d(z)$ tienen coeficientes enteros y radio de convergencia uno. También, una consecuencia de la Proposición 4.3 es que $e_d(n) \geq n$ para $d \geq 2$, entonces $e_d(n) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. El mismo argumento como al final del Ejemplo 4.5 muestra que $\pi_d(z)$ no es una función racional para $d \geq 2$ y utilizando de la misma manera el Teorema de Carlson, se prueba que $\pi_d(z)$ tiene al círculo unitario como frontera natural. \square

4.4. La fórmula del producto

Nuestro objetivo en esta sección es generalizar la fórmula del producto (5), vista en la Introducción para transformaciones simples de \mathbb{Z}^d -acciones α . Comenzamos considerando el caso cuando α tiene exactamente una órbita finita.

Proposición 4.5. *Sea γ un conjunto finito y $\alpha : \mathbb{Z} \times \gamma \rightarrow \gamma$ una \mathbb{Z}^d -acción transitiva en γ . Entonces*

$$\zeta_\alpha(z) = \pi_d(z^{|\gamma|}).$$

Demostración. Sea $H = \{n \in \mathbb{Z}^d \mid \alpha^n(x) = x \text{ para toda } x \in \gamma\}$. Para probar que $H \in \mathcal{L}_d$, tomamos $n_1, n_2 \in H$ entonces $\alpha^{n_1}(x) = x$ y $\alpha^{n_2}(x) = x$, de donde $\alpha^{n_1+n_2}(x) = \alpha^{n_1}(\alpha^{n_2}(x)) = \alpha^{n_1}(x) = x$, además $\alpha^{-n_1}(x) = \alpha^{-n_1}(\alpha^{n_1}(x)) = x$, por lo tanto H es un subgrupo.

Como γ es finita y α actúa transitivamente en γ , entonces H es también el subgrupo estabilizador (ver Definición A.19 en el Apéndice) de cada elemento de γ , entonces $|\gamma| = [H]$. Entonces para $L \in \mathcal{L}^d$ tenemos que

$$p_L(\alpha) = \begin{cases} |\gamma| & \text{si } L \subseteq H, \\ 0 & \text{si } L \not\subseteq H. \end{cases}$$

Como $[H]/[L] = 1/|H/L|$, podemos ver que

$$\begin{aligned} \zeta_\alpha(z) &= \exp\left(\sum_{\{L \in \mathcal{L}_d \mid L \subseteq H\}} \frac{[H]}{[L]} z^{[L]}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{\{L \in \mathcal{L}_d \mid L \subseteq H\}} \frac{1}{|H/L|} (z^{[H]})^{|H/L|}\right) \\ &= \pi_d(z^{[H]}) = \pi_d(z^{|\gamma|}). \end{aligned}$$

\square

Para determinar la validez de la fórmula del producto, primero necesitamos encontrar el radio de convergencia de la serie de Taylor de $\zeta_\alpha(z)$. Para hacerlo, introduciremos el siguiente concepto.

Definición 4.2. Sea α una \mathbb{Z}^d -acción. La tasa de crecimiento de los puntos periódicos de α es

$$g(\alpha) = \limsup_{[L] \rightarrow \infty} \frac{1}{[L]} \log p_L(\alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty [L] \geq n} \frac{1}{[L]} \log p_L(\alpha).$$

Teorema 4.2. Sea α una \mathbb{Z}^d -acción y asumimos que $p_L(\alpha)$ es finito para todo $L \in \mathcal{L}_d$. Entonces $\zeta_\alpha(z)$ tiene radio de convergencia $\exp(-g(\alpha))$. En particular, si existe $\theta > 1$ para el cual $p_L(\alpha) \leq \theta^{[L]}$ para todo $L \in \mathcal{L}_d$, entonces $\zeta_\alpha(z)$ es analítica para $|z| < 1/\theta$.

Demostración. Por la Proposición 4.3, el número de retículas $L \in \mathcal{L}_d$ con índice n es polinomial en n . Entonces se sigue de la fórmula de Hadamard que

$$\Psi(z) = \sum_{L \in \mathcal{L}_d} \frac{p_L(\alpha)}{[L]} z^{[L]}$$

tiene radio de convergencia $\rho = \exp(-g(\alpha))$. También, como los coeficientes de Taylor de $\psi(z)$ son no negativos, observamos que $\lim_{z \rightarrow \rho^-} \psi(z) = \infty$. Se sigue ahora que $\zeta_\alpha(z) = \exp(\psi(z))$ tiene radio de convergencia $\rho = \exp(-g(\alpha))$. \square

Teorema 4.3 (FÓRMULA DEL PRODUCTO MULTIDIMENSIONAL). Sea α una \mathbb{Z}^d -acción para la cual $g(\alpha) < \infty$. Entonces

$$\zeta_\alpha(z) = \prod_{\gamma} \pi_d(z^{|\gamma|}), \quad (4.9)$$

donde el producto se toma sobre todas las órbitas finitas γ de α y este producto converge para todo $|z| < \exp(-g(\alpha))$.

Demostración. Enumerando las órbitas finitas de α como $\gamma_1, \gamma_2, \dots$. Por el Lema 4.2 y la Proposición 4.5 se prueba que (4.9) es válida para la restricción de α a $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$ para todo $n \geq 1$. Ya que todo converge absolutamente para $|z| < \exp(-g(\alpha))$, un argumento similar muestra que, dejando $n \rightarrow \infty$ se prueba (4.9) en general. \square

Corolario 4.1. Sea α una \mathbb{Z}^d -acción tal que $\zeta_\alpha(z)$ tiene radio de convergencia positivo. Entonces la serie de Taylor de $\zeta_\alpha(z)$ tiene coeficientes enteros.

Demostración. El Teorema 4.1 implica que la serie de Taylor de $\pi_d(z)$ tiene coeficientes enteros. El corolario se sigue entonces de la Fórmula del Producto Multidimensional. \square

Apéndice A

Preliminares y resultados

A.1. Topología, continuidad, compacidad y espacios métricos

En esta sección presentamos resultados básicos de topología, continuidad, compacidad y espacios métricos.

A.1.1. Topología

Definición A.1. Un *espacio topológico* es una pareja (X, \mathcal{T}) , donde X es un conjunto y \mathcal{T} es una familia de subconjuntos de X con las siguientes tres propiedades:

- Los conjuntos \emptyset y X pertenecen a \mathcal{T} .
- Si $\{A_i, i \in I\} \subset \mathcal{T}$, donde I es un conjunto de índices, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.
- Si $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$.

A \mathcal{T} se le llama la *topología* de X y los elementos de \mathcal{T} se llaman conjuntos *abiertos*.

A partir del concepto de conjunto abierto, se define un conjunto cerrado.

Definición A.2. Dado un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , un subconjunto $C \subset X$ es *cerrado* en X si $X \setminus C$ pertenece a \mathcal{T} , es decir, es un conjunto abierto.

Definición A.3. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $E \subset X$ un subconjunto. Un punto $x \in X$ es un *punto de acumulación* de E si para todo conjunto abierto $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A$, sucede que $(A \cap E) \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Denotaremos por E' a la colección de puntos de acumulación de E .

Definición A.4. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Una *base* de \mathcal{T} es una familia de conjuntos abiertos $\beta \subseteq \mathcal{T}$ tal que todo conjunto abierto es unión de elementos de la base β , es decir, para todo conjunto $A \in \mathcal{T}$, existen $B_i \in \beta$, con $i \in I$ e I un conjunto de índices, tales que

$$A = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Teorema A.1. Sean X un conjunto y β una familia de subconjuntos de X que satisface las siguientes propiedades

- $X = \bigcup_{B \in \beta} B$.
- Si $B_1, B_2 \in \beta$ y $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, entonces existe $B_3 \in \beta$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Entonces existe una única topología \mathcal{T} que tiene como base a β . Diremos que la topología \mathcal{T} está generada por β .

Demostración. Definimos el siguiente conjunto

$$\mathcal{T} = \{O \subset X \mid O \text{ es unión de elementos de } \beta\}.$$

Probaremos que \mathcal{T} es una topología en X .

1. Claramente $\emptyset \in \mathcal{T}$ y por la primera propiedad que satisface β , $X = \bigcup_{B \in \beta} B$.
2. Sea $\{O_i \mid i \in I\}$ una familia de elementos de \mathcal{T} . Como cada O_i es unión de elementos de β , entonces la unión de todos los O_i se expresa como unión de elementos de β .
3. Sean O_1 y $O_2 \in \mathcal{T}$. Entonces

$$O_1 = \bigcup_{i \in I} B_i^1 \quad \text{y} \quad O_2 = \bigcup_{j \in J} B_j^2$$

donde B_i^1 y B_j^2 pertenecen a β . Usando la propiedad distributiva de la unión y la intersección,

$$O_1 \cap O_2 = \bigcup_{i \in I, j \in J} (B_i^1 \cap B_j^2).$$

Para probar que $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$, basta con probar que $B_i^1 \cap B_j^2$ pertenecen a \mathcal{T} . Sea $x \in B_i^1 \cap B_j^2$, sabemos que existe $B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x \subset B_i^1 \cap B_j^2$, de aquí que $x \in B_i^1 \cap B_j^2$ y así

$$B_i^1 \cap B_j^2 = \bigcup_{x \in B_i^1 \cap B_j^2} B_x,$$

que pertenece a \mathcal{T} . □

Definición A.5. Sea X un conjunto y \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 dos topologías en X . Sean β_1 y β_2 bases de las topologías \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 respectivamente. Entonces β_1 y β_2 son *equivalentes* si $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Proposición A.1. *Sea X un conjunto y \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 dos topologías en X . Sean β_1 y β_2 bases de las topologías \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 respectivamente. Entonces β_1 y β_2 son equivalentes si y sólo si, para todo conjunto $A \in \beta_i$, existe $B \in \beta_j$ tal que $B \subseteq A$, con $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$.*

Definición A.6. Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Decimos que una sucesión $x_n \in X$, con $n \in \mathbb{N}$, *converge* a $x \in X$, si para todo $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A$, existe un entero $N \geq 0$ tal que para todo $n > N$ ocurre que $x_n \in A$. En este caso escribiremos $x_n \rightarrow x$.

Definición A.7. Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y sea $A \subseteq X$ de X . Una *cubierta abierta* de A es una colección $\mathcal{C} = \{U_i \in \mathcal{T} \mid i \in I\}$, donde I es un conjunto de índices, tal que

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Una *subcubierta* de \mathcal{C} es un subconjunto $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ que es en sí una cubierta abierta de A .

A.1.2. Compacidad

Definición A.8. Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y sea $A \subseteq X$ de X . Decimos que A es *compacto* si toda cubierta abierta de A admite una subcubierta finita.

Definición A.9. Sea $\{X_n\}_{n \in I}$ una familia de espacios topológicos indexada sobre un conjunto de índices I . Definimos el *producto topológico* $X = \prod_{n \in I} X_n$ como el producto cartesiano con la topología cuya base son los *conjuntos cilindro*, es decir, los subconjuntos de X de la forma $\prod_{n \in I} A_n$, donde $A_n \subset X_n$ y $A_n = X_n$ excepto para un número finito de $n \in I$.

Corolario A.1. Si $\{K_n\}$ es una sucesión de conjuntos compactos no vacíos, tales que $K_n \supset K_{n+1} \supset K_{n+2} \supset \dots$, con $n = 1, 2, 3, \dots$. Entonces

$$\bigcap_1^{\infty} K_n \neq \emptyset.$$

Teorema A.2 (TYCHONOFF). Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos compactos, indexada por un conjunto de índices I . Entonces el producto topológico $\prod_{i \in I} X_i$ es compacto.

A.1.3. Continuidad

Definición A.10. Sean (X, \mathcal{T}) y (Y, \mathcal{S}) dos espacios topológicos. Una función $\phi: X \rightarrow Y$ es *continua* si $\phi^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ para todo $A \in \mathcal{S}$. Si ϕ es continua, biyectiva y su inversa es continua, entonces ϕ es un *homeomorfismo*. Un *mapeo* es una función continua $f: X \rightarrow X$.

Teorema A.3. Sean (X, \mathcal{T}) y (Y, \mathcal{S}) dos espacios topológicos y sea $\phi: X \rightarrow Y$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. ϕ es continua.
2. $\phi^{-1}(A)$ es cerrado en X siempre que $A \subseteq Y$ sea cerrado.
3. Si $\beta \subseteq \mathcal{S}$ es una base de \mathcal{S} , entonces $\phi^{-1}(A)$ es abierto para todo $A \in \beta$.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Sea $A \subset Y$ un conjunto cerrado, como ϕ es continua, entonces $\phi^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus \phi^{-1}(A)$ es abierto por la Definición A.10, por lo que su complemento $\phi^{-1}(A)$ es cerrado.

$2 \Rightarrow 1$. Sea $B \subset Y$ un conjunto abierto, entonces $Y \setminus B$ es cerrado y $\phi^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus \phi^{-1}(B)$ es cerrado, entonces $\phi^{-1}(B)$ es abierto y por la Definición A.10, ϕ es continua.

$1 \Rightarrow 3$. Suponemos que ϕ es continua y sea $A \in \beta$, entonces por la Definición A.10, $\phi^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en X ya que todos los elementos de β son abiertos.

$3 \Rightarrow 1$. Sea $A \subset Y$ un conjunto abierto, debemos probar que $\phi^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en X . Como A es abierto, existe

$$\{B_i\}_{i \in I} \subset \beta \quad \text{tales que} \quad \bigcup_{i \in I} B_i = A,$$

donde I es un conjunto de índices. Entonces

$$\phi^{-1}(A) = \phi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} \phi^{-1}(B_i).$$

Además para toda $i \in I$, $B_i \in \beta$, ocurre que $\phi^{-1}(B_i)$ es abierto, entonces $\phi^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en X y por la Definición A.10, ϕ es continua. \square

A.1.4. Espacios métricos

Definición A.11. Un *espacio métrico* (M, ρ) consiste en un conjunto M y una *métrica* (o *distancia*), es decir, una función $\rho: M \times M \rightarrow [0, \infty)$ tal que para todos los puntos $x, y, z \in M$, se cumplen las siguientes tres propiedades:

1. $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ y
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Definición A.12. Si X es un espacio métrico, $E \subset X$ y E' representa al conjunto de todos los puntos de acumulación de E en X , entonces la *cerradura* de E es el conjunto $\bar{E} = E \cup E'$.

Teorema A.4. *Si X es un espacio métrico y $E \subset X$, entonces*

1. \bar{E} es cerrado,
2. $E = \bar{E}$ si y sólo si E es cerrado,
3. $\bar{E} \subset F$ para todo conjunto cerrado $F \subset X$ tal que $E \subset F$.

Demostración. 1. Sea $p \in X$ tal que $p \notin \bar{E}$, entonces $p \notin E$ ni es punto de acumulación de E , entonces podemos encontrar $B(\varepsilon, p)$ tal que $B(\varepsilon, p) \cap E = \emptyset$, entonces \bar{E}^c es abierto, por lo tanto E es cerrado.

2. Si $E = \bar{E}$, por (1) \bar{E} es cerrado. Inversamente, si E es cerrado, por definición, E contiene a todos sus puntos de acumulación, es decir, $E' \subset E$, por lo tanto $\bar{E} = E$.

3. Si F es cerrado, $F' \subset F$ y como $E \subset F$ entonces $E' \subset F$, por lo tanto $\bar{E} \subset F$. \square

Proposición A.2. *Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $E \subseteq X$ un subconjunto. Entonces E es cerrado si y sólo si $E' \subseteq E$.*

Demostración. Suponemos que E es cerrado, entonces $E = \bar{E} = E \cup E'$, por lo que $E' \subseteq E$. Inversamente, suponemos que $E' \subseteq E$ como $\bar{E} = E \cup E'$, entonces $\bar{E} = E$, por lo tanto E es cerrado. \square

Definición A.13. Sea (M, ρ) un espacio métrico. Sea $x \in M$ y $\varepsilon > 0$. La bola con centro en x y radio ε es el conjunto

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in M \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}.$$

Teorema A.5. *Sea (M, ρ) un espacio métrico. El conjunto de bolas satisface las propiedades del Teorema A.1, por lo tanto constituyen la base de una única topología.*

El teorema anterior nos permite pensar en un espacio métrico como un espacio topológico cuya topología está bien definida.

Teorema A.6. *Sea (M, ρ) un espacio métrico. Sea $E \subseteq M$ y sea $x \in M$. Entonces x es un punto de acumulación de E si y sólo si existe una sucesión $x_n \in E \setminus \{x\}$, con $n \in \mathbb{N}$, tal que $x_n \rightarrow x$.*

Teorema A.7. *Sean (M, ρ) y (N, d) dos espacios métricos. Una función $\phi: M \rightarrow N$ es continua si y sólo si para cualquier sucesión convergente $x_n \rightarrow x$ en M , ocurre que $\phi(x_n) \rightarrow \phi(x)$ en N .*

Teorema A.8 (Teorema 2.34 en [12], pp. 37). *Sea (M, ρ) un espacio métrico. Si $E \subseteq M$ es compacto, entonces E es cerrado.*

Demostración. Suponemos $E \subseteq M$ es compacto, demostraremos que E^c es abierto en M . Sea $p \in E^c$ entonces $p \in M - E$, construimos $\{G_i\}_{i \in I}$ con I un conjunto de índices, de la siguiente manera $G_i = \left(\overline{B(1/i, p)}\right)^c$. Sea

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$$

Entonces $M - \{p\} = B$, por lo que $E \subseteq B$, como E es compacto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^N G_i = \bigcup_{i=1}^N \left(\overline{B(1/i, p)}\right)^c = \left(\bigcap_{i=1}^N \overline{B(1/i, p)}\right)^c = \overline{B(1/N, p)}^c$$

De donde $E \subseteq \overline{B(1/N, p)}^c$ entonces $B(1/N, p) \subseteq E^c$, por lo tanto E^c es abierto en M y E es cerrado en M . \square

El siguiente Teorema A.9 es la versión recíproca del Teorema A.8.

Teorema A.9 (Teorema 2.35 en [12], pp. 37). *Sea (M, ρ) un espacio métrico. Supongamos que M es compacto. Si $E \subseteq M$ es cerrado, entonces E es compacto.*

Teorema A.10. *Sea (M, ρ) un espacio métrico. Si $E \subseteq M$ es compacto, entonces, para toda sucesión $x_n \in E$, existe una subsucesión x_{n_k} convergente (a un punto de E).*

Proposición A.3. *Sean (M, ρ) y (N, d) dos espacios métricos y sea $\phi: M \rightarrow N$ una función continua. Supongamos que M es compacto. Si $E \subseteq N$ es un subconjunto compacto de N , entonces $\phi^{-1}(E)$ es un subconjunto compacto de M .*

Demostración. En efecto, el Teorema A.8 implica que E es cerrado en N , por lo tanto, por el Teorema A.3, $\phi^{-1}(E)$ es cerrado en M . El resultado se sigue entonces del Teorema A.9. \square

Proposición A.4. *Sea (M, ρ) un espacio métrico y sean $E, F \subseteq M$ dos subconjuntos compactos ajenos, es decir, $E \cap F = \emptyset$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $\rho(x, y) \geq \delta$ para cualesquiera $x \in E$ y $y \in F$.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Entonces, para todo entero $n \geq 1$, existen $x_n \in E$ y $y_n \in F$ tales que $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. El Teorema A.10 garantiza la existencia de una subsucesión x_{n_k} de x_n que es convergente a un punto $x \in E$. De nuevo el Teorema A.10, garantiza la existencia de una subsucesión $y_{n_{k_l}}$ de y_{n_k} que es convergente a un punto $y \in F$. Por hipótesis, $\rho(x, y) = 0$, por lo tanto $x = y$, lo que contradice que $E \cap F = \emptyset$. \square

A.2. Álgebra

En esta sección presentamos los conceptos más esenciales relacionados con álgebra, necesarios para la exposición de este trabajo.

A.2.1. Grupos

Definición A.14. Un *grupo* $(G, *)$ es un conjunto G , cerrado bajo una operación binaria $*$, tal que, se satisfacen los siguientes axiomas:

- Para todo $a, b, c \in G$, tenemos que

$$(a * b) * c = a * (b * c). \quad \text{Asociatividad de } *.$$

- Existe un elemento $e \in G$ tal que, para todo $x \in G$,

$$e * x = x * e = x. \quad \text{Elemento identidad } e \text{ de } *.$$

- Para cada $a \in G$, existe un elemento $a' \in G$, tal que

$$a * a' = a' * a = e. \quad \text{Inverso } a' \text{ de } a.$$

Diremos que un grupo $(G, *)$ es *abeliano* si además satisface la propiedad

- $a * b = b * a$ para todo $a, b \in G$, **Conmutatividad.**

Definición A.15. $(G, \mathcal{T}, +)$ es un *grupo topológico* si satisface:

- (G, \mathcal{T}) es un espacio topológico.
- $(G, +)$ es un grupo con la operación $+: G \times G \rightarrow G$.
- $+: G \times G \rightarrow G$ es una función continua.

A.2.2. Subgrupos y cocientes

Definición A.16. Si H es un subconjunto no vacío de un grupo $(G, *)$, decimos que H es un *subgrupo* de G si H también forma un grupo bajo la operación $*$. En este caso escribiremos $H \leq G$. Un subgrupo $H \leq G$ es *normal* si $a * H = H * a$ para toda $a \in G$, donde $a * H = \{a * h \mid h \in H\}$ y similarmente para $H * a$. En este caso escribiremos $H \triangleleft G$.

Observación A.1. Todo subgrupo de un grupo abeliano es normal.

Definición A.17. Sea $(G, *)$ un grupo y $H \triangleleft G$ un subgrupo normal de G . Definimos el *grupo cociente* como

$$G/H = \{a * H \mid a \in G\}$$

donde la operación $\hat{*}$ se define para cualesquiera $a, b \in G$ por

$$(a * H) \hat{*} (b * H) = (a * b) * H.$$

Observación A.2. La operación $\hat{*}$ está bien definida.

Definición A.18. Sea $(G, *)$ un grupo y $H \triangleleft G$ un subgrupo normal. Definimos al *índice de H en G* como

$$[G : H] = |G/H|.$$

Observación A.3. Un subgrupo normal puede tener índice infinito.

A.2.3. Acciones

Definición A.19. Sea X un conjunto y G un grupo. Una *acción* de G en X es una función $\alpha : G \times X \rightarrow X$ tal que:

- $\alpha(e, x) = x$ para todo $x \in X$ y e es el elemento neutro del grupo.
- $\alpha(g_1 g_2, x) = \alpha(g_1, \alpha(g_2, x))$ para todo $x \in X$ y para todo $g_1, g_2 \in G$.

Bajo estas condiciones, decimos que G *actúa en el conjunto* X . Además α es una *acción transitiva* si para todo $x, y \in X$ existe $n \in G$ tal que $\alpha(n, x) = y$. Sea $x \in X$, al conjunto

$$\langle x \rangle = \{a \in G \mid \alpha(a, x) = x\}$$

lo llamamos *subgrupo estabilizador* de x .

A.2.4. La retícula entera \mathbb{Z}^d y subgrupos de índice finito

Nos interesa el grupo (\mathbb{Z}^d, \oplus) , donde

$$\mathbb{Z}^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \mid x_i \in \mathbb{Z}, \quad \forall \quad i = 1, \dots, d\}$$

y para $(x_1, x_2, \dots, x_d), (y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbb{Z}^d, \oplus$ se define

$$(x_1, x_2, \dots, x_d) \oplus (y_1, y_2, \dots, y_d) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_d + y_d).$$

Teorema A.11 (FORMA NORMAL DE HERMITE). *Cada retícula en \mathcal{L}_d tiene una única representación como la imagen de \mathbb{Z}^d bajo una matriz que tiene la forma*

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1d} \\ 0 & a_2 & b_{23} & \dots & b_{2d} \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & b_{3d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_d \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

donde $a_i \geq 1$ con $1 \leq i \leq d$ y $0 \leq b_{ij} \leq a_i - 1$ con $i + 1 \leq j \leq d$. Más aún, el índice de la retícula en \mathbb{Z}^d es el producto de las entradas en la diagonal principal, es decir, es $a_1 \dots a_d$.

Demostración. Ver Teorema 22.1 en [10]. □

Teorema A.12 (MINKOWSKY, [6]). Sea $L \in \mathcal{L}_d$ una retícula de \mathbb{Z}^d de índice $[L]$. Sea S un subconjunto convexo¹ de \mathbb{R}^n simétrico respecto al origen, i.e. si $x \in S$, entonces $-x \in S$. Si el volumen de S es estrictamente mayor que $2^nd[L]$, entonces S debe contener al menos un punto de la retícula L distinto al origen.

A.3. Funciones analíticas

En esta sección presentamos los conceptos más esenciales relacionados con funciones analíticas y que se requieren en el contenido de la tesis.

A.3.1. Funciones aritméticas y generadores

Definición A.20. Una *función aritmética* a_n es una función $a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}).

Ejemplo A.1 (IDENTIDAD). $a_n = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ es una función aritmética.

Ejemplo A.2 (FUNCIÓN DE MÖBIUS).

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ (-1)^k & \text{si } n = p_1 p_2 \dots p_r, \text{ donde } p_i \neq p_j \text{ y} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Existen varias formas de codificar a una función aritmética (ver [5]).

Definición A.21. Sea a_n una función aritmética.

- La *función generadora ordinaria* de a_n es $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.
- La *función generadora exponencial* de a_n es $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.
- La *función generadora Exp-Log* de a_n es $f(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} z^n\right)$.

¹Un subconjunto de \mathbb{R}^n es *convexo* si cualesquiera dos puntos en el convexo, el segmento de recta que los une también pertenece al conjunto convexo.

- La función generadora de Dirichlet de a_n es $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$.

Denotamos por $[z^n] f(z)$ al n -ésimo término de la función generadora ordinaria $f(z)$.

Observación A.4. Tanto la función generadora Exp-Log como la serie de Dirichlet no consideran el valor a_0 que se asume como cero.

Definición A.22. Sea a_n una función aritmética, su *función suma* es

$$S_f(n) = \sum_{d|n} a_d.$$

Ejemplo A.3 (FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN). Si $a_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (ver Ejemplo A.1), entonces la función generadora de Dirichlet es

$$a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Veremos que la función generadora de Dirichlet de la función de Möbius es la función inversa de la función zeta de Riemann. Para esto necesitaremos la conocida fórmula de Euler.

Teorema A.13 (FÓRMULA DE EULER). *La función zeta de Riemann admite la fórmula*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_{p\text{-primo}} \frac{1}{1 - p^{-z}}$$

y es válida para todo $|z| > 1$, donde el producto del lado derecho se extiende sobre todos los primos.

Demostración. Tenemos que

$$\prod_{p\text{-primo}} \frac{1}{1 - p^{-z}} = \frac{1}{1 - 2^{-z}} \cdot \frac{1}{1 - 3^{-z}} \cdot \frac{1}{1 - 5^{-z}} \cdot \frac{1}{1 - 7^{-z}} \cdots \frac{1}{1 - p^{-z}} \cdots$$

La función zeta de Riemann es

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{6^z} \cdots$$

por lo que

$$\frac{1}{2^z} \zeta(z) = \frac{1}{2^z} + \frac{1}{4^z} + \frac{1}{6^z} + \frac{1}{8^z} + \dots$$

entonces

$$\left(1 - \frac{1}{2^z}\right) \zeta(z) = 1 + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \frac{1}{9^z} + \dots$$

Repitiendo el mismo procedimiento con el termino $\left(1 - \frac{1}{3^z}\right)$ resulta

$$\left(1 - \frac{1}{3^z}\right) \left(1 - \frac{1}{2^z}\right) \zeta(z) = 1 + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \frac{1}{11^z} + \frac{1}{13^z} + \frac{1}{17^z} + \dots$$

Observamos que todos los elementos que tienen como factor 2 o 3 (o ambos) fueron removidos. Repitiendo infinitamente tenemos

$$\dots \left(1 - \frac{1}{11^z}\right) \left(1 - \frac{1}{7^z}\right) \left(1 - \frac{1}{5^z}\right) \left(1 - \frac{1}{3^z}\right) \left(1 - \frac{1}{2^z}\right) \zeta(z) = 1$$

así obtenemos que

$$\zeta(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^z}\right) \left(1 - \frac{1}{3^z}\right) \left(1 - \frac{1}{5^z}\right) \left(1 - \frac{1}{7^z}\right) \left(1 - \frac{1}{11^z}\right) \dots}$$

el cual podemos escribir como un producto infinito sobre todos los primos, por lo tanto

$$\zeta(z) = \prod_{p-\text{primo}} \frac{1}{1 - p^{-z}}.$$

□

Ejemplo A.4 (DIRICHLET, MÖBIUS Y RIEMANN). La función generadora de Dirichlet de la función de Möbius es el inverso de la función zeta de Riemann, es decir,

$$M(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right).$$

Esto se verifica directamente al expandir el producto infinito y agrupar los coeficientes de $1/n^z$.

A.3.2. Producto de Dirichlet

Definición A.23. Si a_n y b_n son dos funciones aritméticas, definimos el *producto de Dirichlet* de a_n y b_n por

$$(a * b)_n = \sum_{d|n} a_d b_{\frac{n}{d}}.$$

Además para cada a_n , tal que $a_1 \neq 0$, existe una función b_n tal que $(a * b)_n = 1$ y se denota por a_n^{-1} .

Sean $a(z)$, $b(z)$ y $c(z)$ las funciones generadoras de Dirichlet de las funciones aritméticas a_n , b_n y c_n respectivamente. Entonces

$$a(z) = b(z)c(z) \iff a_n = (b * c)_n \quad \forall n \geq 1.$$

Si tomamos $c_n = 1$ para toda $n \geq 1$, obtenemos

$$a_n = \sum_{d|n} b_d \iff b_n = \sum_{d|n} \mu(d)a_{n/d}.$$

Esto demuestra el siguiente resultado fundamental.

Teorema A.14 (INVERSIÓN DE MÖBIUS). *Cualquier función aritmética a_n puede ser expresada en términos de su función suma de la siguiente manera*

$$a_n = \sum_{d|n} \mu(d) S_f\left(\frac{n}{d}\right).$$

A.3.3. Extensión analítica y frontera natural

Esta última parte del apéndice es para enunciar el Teorema de Carlson. Este resultado es fundamental en todos los desarrollos de Lind [7]. En esta tesis presentamos únicamente su enunciado. Asumimos que el lector conoce el concepto de función analítica y de extensión analítica. Recordamos que la *frontera natural* de una función analítica es la frontera del máximo dominio de analiticidad.

Teorema A.15 (CARLSON, [4]). *Sea $f(z)$ una función analítica y suponga que la serie de Taylor alrededor del origen tiene coeficientes enteros y radio de convergencia uno. Entonces $f(z)$ es racional o bien la frontera natural de $f(z)$ es el círculo $|z| = 1$.*

Bibliografía

- [1] M. Artin and B. Mazur. On periodic points. *Annals Math.* **81** (1965) 82-99.
- [2] R. Bowen. On axiom A diffeomorphisms. *AMS-CBMS Reg. Conf.* **35** Providence, 1978.
- [3] R. Bowen and O.E. Landford. Zeta functions of restrictions of the shift transformation. *Proc. Symp. Pure Math. A.M.S.* **14** (1970) 43-50.
- [4] P. Dienes. *The Taylor Series. An introduction to the theory of functions of a complex variable.* Dover, 1957.
- [5] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics.* Cambridge University Press 2009.
- [6] M. Hazewinkel. *Geometry of Numbers.* Encyclopedia of Mathematics, Springer, 2001.
- [7] D. Lind. A zeta function for \mathbb{Z}^d -actions. *Ergodic Theory of \mathbb{Z}^d -actions.* Lon. Math. Soc. Lecture Note Series (228) (1996) pp 433-450.
- [8] D. Lind and B. Marcus. *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding.* Cambridge University Press 1995.
- [9] A. Manning. Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions. *Bull. London Math. Soc.* **3** (1971), 215-220.
- [10] C. MacDuffie. *The Theory of Matrices.* Chelsea, New York, 1956. *Bull. London Math. Soc.* **3** (1971), 215-220.
- [11] M. Nasu. Textile systems for endomorphisms and automorphisms of the shift. *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* Vol. 114, No. 546 (1995).
- [12] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, 1953.