



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN MATEMÁTICAS Y DE LA
ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

**“ACCIONES DEL GRUPO PSEUDO-ORTOGONAL Y DEL GRUPO CONFORME
EN ESPACIOS PSEUDO-EUCLIDIANOS”**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRÍA EN CIENCIAS

PRESENTA:
VÍCTOR ISIDORO BRAVO REYNA

DIRECTOR:
DR. FEDERICO SANCHEZ BRINGAS
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MÉXICO, D. F. MARZO DE 2013.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	I
1. Geometría del Espacio de Minkowski.	1
1.1. Grupo Pseudo-Ortogonal.	1
1.2. Orientación	5
1.3. La Acción del Grupo de Lorentz en el Espacio de Minkowski.	8
1.4. Grupo de Isometrías del Espacio de Minkowski.	21
2. El Teorema de Liouville y Compactificación Conforme.	25
2.1. Proyección Estereográfica.	25
2.2. Teorema de Liouville.	29
2.3. Compactificación Conforme	36
Índice Alfabético	41
Bibliografía	43

Introducción

El tema central de esta tesis es entender de manera clara y detallada la geometría que rodea al grupo de transformaciones ortogonales y funciones conformes de un espacio pseudo-euclidiano. Para lograr el objetivo anterior dividimos este trabajo en dos partes, la primera donde abordamos la geometría del grupo pseudo-ortogonal y su acción sobre el espacio pseudo-Euclidiano respectivo y la segunda sobre la geometría del grupo conforme de \mathbb{R}_v^n y su compactificación conforme.

En el primer capítulo trabajamos con el ya conocido grupo pseudo-ortogonal $\mathfrak{O}_v(n)$, donde lo abordamos desde un punto geométrico y algebraico al explicar con claridad la relación entre este objeto abstracto, visto como un grupo de Lie, y el álgebra de Lie con que está emparentado; por ello utilizamos de manera recurrente elementos de la Teoría de grupos de Lie para dar características importantes de este grupo de Lie. Aquí nos enfocamos en particular en estudiar la geometría en el plano \mathbb{R}_1^2 y la acción de $\mathfrak{O}_1(2)$ en este espacio, así como en el espacio hiperbólico \mathbb{H}_0^1 , el cono de luz \mathbb{LC}_1^1 y el espacio de de Sitter \mathbf{dS}_1^1 ; esto con la finalidad de estudiar y visualizar a detalle las propiedades geométricas de las hipersuperficies \mathbb{H}_{v-1}^{n-1} , \mathbb{LC}_v^{n-1} y \mathbf{dS}_v^{n-1} , en el caso general del espacio pseudo-Euclidiano \mathbb{R}_v^n y la acción de $\mathfrak{O}_v(n)$ sobre las hipersuperficies mencionadas. Por último, motivados por la afirmación de Kobayashi, en [Ko], e Izumiya, en [Iz], donde dotan al espacio hiperbólico de estructura de variedad homogénea al dar el difeomorfismo ${}^+\mathbb{H}^n \cong \mathbf{SO}_1^{II}(n+1)/\mathbf{SO}(n)$, finalizamos este capítulo con una prueba formal a este hecho y damos el difeomorfismo explícito utilizando un teorema muy recurrido de variedades homogéneas, y como extra hacemos una generalización para los espacios hiperbólicos de cualquier dimensión y con signatura arbitraria. Para los conceptos fundamentales y resultados utilizados en este capítulo nos apegamos principalmente a los textos de [On] y [Wa].

En el segundo capítulo comenzamos haciendo los cálculos con todo detalle de la proyección estereográfica del espacio euclidiano \mathbb{R}^n en el espacio de de Sitter \mathbf{dS}_v^n , esto para motivar la generalización de proyección estereográfica de \mathbb{R}^n a cualquier hipersuperficie cuadrática no singular, apelando en gran medida a nociones de geometría proyectiva que pueden confrontarse en [Wy]. Continuamos postulando el teorema de Liouville de transformaciones conformes en espacios pseudo-euclidianos, por ello introducimos la noción de pseudo-esfera, inversión en pseudo-esfera y reflexión en el espacio \mathbb{R}_v^n , y estudiamos la geometría que hay con respecto a estas transformaciones, además de probar en la segunda sección que todas estas transformaciones son

conformes con respecto a la métrica correspondiente. Vemos también cómo el grupo conforme $\mathbf{Conf}(\mathbb{R}_\nu^n)$ de un espacio pseudo-euclidiano de dimensión n tiene asociado una forma cuadrática de signatura ν y es generado por inversiones en pseudo-esferas. Con esto último ponemos particular atención en las inversiones en pseudo-esferas ya que no están definidas de manera global, es más, el conjunto donde no están bien definidas resulta una hipersuperficie cuadrática. Así para poder ver cómo se comporta una inversión en estos puntos procedemos a realizar lo que llamamos compactificación conforme; este procedimiento consiste en enviar de manera conforme el espacio \mathbb{R}_ν^n en un espacio compacto que llamamos la proyectivización del cono de luz $\mathbb{PLC}_{\nu+1}^{n+1} \subset \mathbb{RP}_{\nu+1}^{n+1}$ a través de la proyección estereográfica y agregamos allí un cono al infinito, que consta de aquellos puntos en $\mathbb{PLC}_{\nu+1}^{n+1}$ que se corresponde con el cono donde una inversión en una pseudo-esfera no está bien definida. Así en la compactificación conforme $\mathbb{PLC}_{\nu+1}^{n+1}$ actúa el grupo $\mathbb{PO}_{\nu+1}(n+2) = \mathfrak{O}_{\nu+1}^{n+2}/\mathbb{Z}_2$ y tiene asociada una forma cuadrática de signatura $\nu+1$ y es generado por reflexiones que están definidas de manera global en $\mathbb{PLC}_{\nu+1}^{n+1}$. Para finalizar hacemos ver que se tiene un difeomorfismo conforme entre $\mathbb{PO}_{\nu+1}(n+2)$ y $\mathbf{Conf}(\mathbb{R}_\nu^n)$, por lo que entender la geometría de una transformación conforme en \mathbb{R}_ν^n es equivalente a entender la geometría de su representante en el grupo $\mathbb{PO}_{\nu+1}(n+2)$. La importancia de dar todos estos hechos geométricos y estudiar con todo detalle el grupo conforme radica en que es el grupo máximo que deja invariante las ecuaciones de Maxwell en el espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^4 .



*“Bendito seja eu por tudo quanto nao sei.
É isso tudo que verdadeiramente sou.
Gozo tudo isso como quem está aqui ao sol.”
Alberto Caeiro*

Capítulo 1

Geometría del Espacio de Minkowski.

“I confess, I do not believe in time.”

Vladimir Nabokov.

El espíritu del primer capítulo es dar una descripción detallada de la geometría en torno al grupo pseudo-ortogonal $\mathcal{O}_\nu(n)$; así, aquí nos dedicamos a dar una presentación básica del grupo pseudo-ortogonal de \mathbb{R}_ν^n y trabajar algunas de sus propiedades desde el punto de vista de la Teoría de Grupos de Lie. Prestamos particular atención a la acción que efectúa $\mathcal{O}_\nu(n)$ sobre \mathbb{R}_ν^n y describimos las órbitas de dicha acción dando ejemplos sencillos en dimensiones 2, 3 y 4. Hacemos hincapié en la acción de $\mathcal{O}_\nu(n)$ sobre el espacio hiperbólico y de Sitter, y se dan sus respectivos grupos de isometrías.

1.1. Grupo Pseudo-Ortogonal.

Definición 1.1. Una variedad *pseudo-Riemanniana* es una variedad diferenciable M provista con un tensor métrico \mathbf{g} (un campo tensorial $(0, 2)$ simétrico y no degenerado $\mathbf{g} \in \mathfrak{X}_2^0(M)$).

Se denotará al tensor \mathbf{g} mediante $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y se escribe

$$\mathbf{g}(u, w) = \langle u, w \rangle \in \mathbb{R}.$$

Para un $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq \nu \leq n$ se define el *tensor métrico de índice ν* a través de

$$\langle u_p, w_p \rangle_\nu = - \sum_{i=1}^{\nu} u_i w_i + \sum_{i=\nu+1}^n u_i w_i, \quad \text{donde } p \in M, u_p, w_p \in T_p M.$$

En adelante, el espacio Euclidiano \mathbb{R}^n provisto con el tensor métrico $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$ y que se denota por \mathbb{R}_ν^n es llamado el espacio *pseudo-euclidiano* si $0 < \nu < n$. En particular si $n \geq 2$, \mathbb{R}_1^n denota al *n-espacio de Minkowski*.

Caracterización de vectores del espacio de Minkowski.

Como la métrica no es definida positiva resulta la caracterización:
Un vector u en \mathbb{R}^n es:

de tipo espacio (espacial) si $\langle u, u \rangle > 0$ o $u = 0$,

nulo o de tipo luz si $\langle u, u \rangle = 0$ y $u \neq 0$,

de tipo tiempo (temporal) si $\langle u, u \rangle < 0$.

Definición 1.2. Para $n \geq 2$ y $0 \leq \nu \leq n$.

- 1.- Se define la *pseudo-esfera* de dimensión n e índice ν , de radio $r > 0$ en \mathbb{R}_ν^{n+1} como la hipersuperficie cuadrática

$$\mathbf{dS}_\nu^n(r) := \{u \in \mathbb{R}_\nu^{n+1} : \langle u, u \rangle = r^2\}.$$

También denominada espacio de *de Sitter*.

- 2.- El espacio *pseudo-espacio hiperbólico* o *sólo espacio hiperbólico* de dimensión n e índice ν , de radio $r > 0$ en $\mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1}$ es la hipersuperficie cuadrática descrita por

$$\mathbf{H}_\nu^n(r) := \{u \in \mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1} : \langle u, u \rangle = -r^2\}.$$

- 3.- El *hiperplano* de dimensión $n - 1$ generado por el elemento $w \in \mathbb{R}_\nu^n$ se define por medio de:

$$\mathbf{HP}_w := \{u \in \mathbb{R}_\nu^n : \langle w, u \rangle = 0\}$$

- 4.- El *cono de luz* de dimensión n e índice ν en \mathbb{R}_ν^{n+1} es la hipersuperficie cuadrática descrita por

$$\mathbf{LC}_\nu^n := \{u \in \mathbb{R}_\nu^{n+1} : \langle u, u \rangle = 0\}.$$

Descripción del Grupo Pseudo-Ortogonal $\mathcal{O}_\nu(n)$.

Definición 1.3. Un *grupo de Lie* G es una variedad diferenciable provista con una estructura de grupo, para la cual la transformación

$$\varphi : G \times G \rightarrow G : (\sigma, \tau) \mapsto \varphi(\sigma, \tau) := \sigma\tau^{-1} \quad \text{para todo } \sigma, \tau \in G,$$

es \mathcal{C}^∞ .

Definición 1.4. Un *álgebra de Lie* \mathfrak{g} sobre \mathbb{R} (o sobre \mathbb{C}) es un espacio vectorial real (o complejo) junto con un operador bilineal

$$[\ , \] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \quad (\text{llamado el } \textit{corchete de Lie})$$

tal que para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ se cumple con:

(a) $[X, Y] = -[Y, X]$ (*anticonmutatividad*)

(b) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$ (*identidad de Jacobi*)

Definición 1.5. Se define el *álgebra de Lie de un grupo de Lie* G como el álgebra de Lie \mathfrak{g} de campos invariantes por la izquierda sobre G^1 , o más sencillamente se tomará el álgebra de Lie de un grupo de Lie G como el espacio tangente en e , T_eG , provisto con el corchete de Lie como producto.

Definición 1.6. Para $0 \leq v \leq n$, la *matriz de signatura* ε es la matriz diagonal $(\delta_{ij}\varepsilon_j)$ cuyos factores en la diagonal están dados por $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_v = -1$ y $\varepsilon_{v+1} = \dots = \varepsilon_n = 1$. Observar que $\varepsilon^\tau = \varepsilon = \varepsilon^{-1}$.

Definición 1.7. Se denota al conjunto de todas las transformaciones lineales en \mathbb{R}^n por $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$. Se define el conjunto de todas las isometrías lineales de \mathbb{R}_v^n como el conjunto $\mathfrak{O}_v(n)$ de todas las matrices $g \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ que preservan el producto escalar $\langle u, w \rangle_v = \varepsilon u \cdot w$ de \mathbb{R}_v^n , donde “ \cdot ” es el producto interior usual en \mathbb{R}^n . $\mathfrak{O}_v(n)$ con la multiplicación de matrices es un grupo, llamado grupo *pseudo-ortogonal* de dimensión n y signatura v .

En particular $\mathfrak{O}_1(n)$ es un grupo de Lie y es llamado *el grupo de Lorentz* el cual es el grupo de todas las isometrías lineales del espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^n .

Lema 1.8. Las siguientes propiedades para $g \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ son equivalentes:

- 1.- $g \in \mathfrak{O}_v(n)$.
- 2.- $g^\tau = \varepsilon g^{-1} \varepsilon$, donde $g \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$.

Demostración: Sea $g \in \mathfrak{O}_v(n)$ entonces :

$$\begin{aligned} \text{Para todo } u, w \in \mathbb{R}_v^n \quad \langle g(u), g(w) \rangle_v &= \langle u, w \rangle_v \\ \Leftrightarrow \varepsilon g(u) \cdot g(w) &= \varepsilon u \cdot w \\ \Leftrightarrow g^\tau \varepsilon g(u) \cdot w &= \varepsilon u \cdot w \\ \Leftrightarrow g^\tau \varepsilon g(u) &= \varepsilon u \\ \Leftrightarrow g^\tau \varepsilon g &= \varepsilon \\ \Leftrightarrow g^\tau &= \varepsilon g^{-1} \varepsilon \end{aligned}$$

■

Uno también puede probar que estas dos descripciones de $\mathfrak{O}_v(n)$ son equivalentes al hecho que g sea una transformación lineal que lleva bases ortonormales de \mathbb{R}_v^n en bases ortonormales o de igual forma que los renglones (respectivamente columnas) de g

¹Un campo vectorial X sobre G es llamado *invariante por la izquierda* si para cada $p \in G$, X es l_p -relativo, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_eG & \xrightarrow{dl_p} & T_pG \\ \uparrow X & & \uparrow X \\ G & \xrightarrow{l_p} & G \end{array}$$

El conjunto de campos vectoriales invariantes por la izquierda sobre un grupo de Lie G será denotado en adelante por la expresión \mathfrak{g} .

formen una base ortonormal con respecto a la métrica de \mathbb{R}_v^n .² Una observación certera que resulta inmediata de la definición previa es la identificación $\mathfrak{O}_v(n) \cong \mathfrak{O}_{n-v}(n)$, consecuencia de tomar la aplicación:

$$l_\sigma : \mathbf{Gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{Gl}(n, \mathbb{R}) : g \mapsto \sigma g \sigma$$

$$\text{donde } \sigma = \begin{pmatrix} 0 & Id_{(v)} \\ Id_{(n-v)} & 0 \end{pmatrix},$$

la cual es un automorfismo (en particular es un isomorfismo).

Definición 1.9. Si G es un grupo de Lie y \mathfrak{g} su respectiva álgebra de Lie, para cada $X \in \mathfrak{g}$, se define el elemento $\exp(X) \in G$ como:

$$\exp(X) := h_X(1),$$

donde $h_X : \mathbb{R} \rightarrow G$ es un homomorfismo de grupos de Lie tal que $\left. \frac{dh_X}{dt} \right|_0 = X(e)$. Con ello se define *la aplicación exponencial* del álgebra de Lie \mathfrak{g} sobre el grupo de Lie G mediante la aplicación descrita por

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G : X \mapsto \exp(X).$$

Para el álgebra de Lie $(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), [A, B] = AB - BA)$ se define la función

$$\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow Gl(n, \mathbb{R})$$

$$A \mapsto e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Con la noción de la aplicación exponencial en el conjunto de matrices nos enfocamos en demostrar que el conjunto de matrices pseudo-antisimétricas es el álgebra de Lie del grupo $\mathfrak{O}_v(n)$. Este resultado es de gran utilidad porque caracterizar al grupo $\mathfrak{O}_v(n)$ es más sencillo si se conoce su álgebra y el álgebra de matrices antisimétricas, como se verá más adelante, tiene una presentación más amigable.

Lema 1.10. Sean G un grupo de Lie y \mathfrak{g} su álgebra de Lie; y sean A cualquier subgrupo abstracto de G y \mathfrak{a} un subespacio de \mathfrak{g} . Sea U vecindad de $0 \in \mathfrak{g}$ difeomorfa bajo la aplicación exponencial a una vecindad V de e . Si se supone que

$$\exp(U \cap \mathfrak{a}) = A \cap V,$$

entonces A con la topología relativa es un subgrupo de Lie de G y \mathfrak{a} la correspondiente álgebra de Lie de A .

□³

²La prueba completa de este hecho se encuentra en [On] pag. 234.

³Una prueba a este teorema puede ser encontrada en [Wa] pág. 104.

Teorema 1.11. *El álgebra de Lie $\mathfrak{o}_v(n)$ de $\mathfrak{O}_v(n)$ es la subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ que consiste de todas las matrices g tales que $g^\tau = -\varepsilon g \varepsilon$. Y g tiene la forma*

$$\begin{pmatrix} a & x \\ x^\tau & b \end{pmatrix},$$

donde $a \in \mathfrak{o}(v) := \{g \in \mathfrak{gl}(v, \mathbb{R}) \mid g^\tau = -g\}$, $b \in \mathfrak{o}(n-v)$ y x es una matriz arbitraria de orden $v \times (n-v)$.

Demostración: Sea U una vecindad de 0 en $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$; se define la vecindad simétrica $\tilde{U} := U \cap U^{-1} \cap U^\tau \cap (-U)$. Vemos que si $g \in \tilde{U} \cap \mathfrak{o}_v(n)$ entonces

$$(e^g)^\tau = e^{g^\tau} = e^{-\varepsilon g \varepsilon} = \varepsilon (e^{-g}) \varepsilon,$$

y por el lema (1.8) $e^g \in V \cap \mathfrak{O}_v(n)$ (donde $V := \exp(\tilde{U})$). Inversamente, sea $g \in \tilde{U}$ y $e^g \in V \cap \mathfrak{O}_v(n)$ entonces

$$\varepsilon (e^g)^{-1} \varepsilon = (\varepsilon e^g \varepsilon)^{-1} = e^{g^\tau},$$

lo cual implica que $e^{-\varepsilon g \varepsilon} = e^{g^\tau}$ y por tanto $-\varepsilon g \varepsilon = g^\tau$; además como $-g$ y $g^\tau \in \tilde{U}$, y además la función \exp es inyectiva sobre \tilde{U} y haciendo uso del lema (1.10) concluimos que $\mathfrak{O}_v(n)$ es un grupo de Lie y además $\mathfrak{o}_v(n)$ es su álgebra de Lie.

Ahora si se elige cualquier elemento $g \in \mathfrak{o}_v(n)$ que expresamos en forma de bloques de la siguiente manera:

$$g = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix},$$

donde $a \in \mathfrak{gl}(v, \mathbb{R})$ y $b \in \mathfrak{gl}(n-v, \mathbb{R})$. Dado que

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} -Id_v & 0 \\ 0 & Id_{n-v} \end{pmatrix},$$

y por la caracterización de las matrices en $\mathfrak{o}_v(n)$ se tiene la ecuación

$$\begin{pmatrix} a^\tau & y^\tau \\ x^\tau & b^\tau \end{pmatrix} = -\varepsilon \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \varepsilon = \begin{pmatrix} -a & x \\ y & -b \end{pmatrix};$$

y se concluye que

$$a^\tau = -a, \quad b^\tau = -b, \quad x = y^\tau.$$

■

1.2. Orientación

Sea $g \in \mathfrak{O}_v(n)$, que expresamos como una matriz de bloques

$$g = \begin{pmatrix} a_T & x \\ y & a_E \end{pmatrix}$$

donde a_T es una matriz cuadrada de $v \times v$ que representa la parte tipo tiempo y a_E es una matriz cuadrada de $(n-v) \times (n-v)$ que representa la parte de tipo espacio. Con ello vemos a

$$a_T : \mathbb{R}_v^v \rightarrow \mathbb{R}_v^v$$

$$a_E : \mathbb{R}^{n-v} \rightarrow \mathbb{R}^{n-v},$$

como transformaciones lineales si se definen por medio de

$$a_T := \pi_{\mathbb{R}^v} \circ g|_{\mathbb{R}^v}$$

$$a_E := \pi_{\mathbb{R}^{n-v}} \circ g|_{\mathbb{R}^{n-v}},$$

donde $\pi_{\mathbb{R}^v}$ y $\pi_{\mathbb{R}^{n-v}}$ son las proyecciones canónicas en \mathbb{R}^v y \mathbb{R}^{n-v} respectivamente; cómo g es invertible, entonces $\pi_{\mathbb{R}^v}$ y $\pi_{\mathbb{R}^{n-v}}$ resultan invertibles si se restringe a los espacios respectivos. Con estas peculiaridades damos una noción de orientación sobre \mathbb{R}^n .

Definición 1.12. Para $0 < v < n$ un elemento $g \in \mathfrak{O}_v(n)$ preserva (invierte) la orientación de tipo tiempo si $\det a_T > 0$ (< 0) y preserva (invierte) la orientación tipo espacio si $\det a_E > 0$ (< 0).⁴

Así con la caracterización anterior y del hecho que el determinante es invariante bajo el cambio de coordenadas, dos matrices $g, h \in \mathfrak{O}_v(n)$ están relacionadas si existe una matriz de cambio de coordenadas $\sigma \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ tal que $h = \sigma g \sigma^{-1}$. Y se tiene la descomposición de $\mathfrak{O}_v(n)$ en los cuatro conjuntos indexados por el signo de los determinantes:

$$\mathfrak{O}_v^{++}(n), \quad \mathfrak{O}_v^{+-}(n), \quad \mathfrak{O}_v^{-+}(n) \quad \text{y} \quad \mathfrak{O}_v^{--}(n),$$

donde los superíndices indican que preserva la orientación tipo tiempo si el primer signo es positivo (+), y la invierte si es negativo (-), mientras que para el segundo signo si es positivo (+) diremos que preserva la orientación de tipo espacio y la invierte si es negativo (-).

Ejemplo 1.13. Analicemos con cuidado el caso $\mathfrak{O}_1(2)$. Si tomamos las matrices $[e_1, e_2]$, $[e_1, -e_2]$, $[-e_1, e_2]$ y $[-e_1, -e_2]$, con $e_1, e_2 \in \mathbb{R}_1^2$, se observa que los renglones en cada matriz son ortonormales con la métrica de \mathbb{R}_1^2 , por lo que las matrices están en $\mathfrak{O}_1(2)$. Con la descomposición en bloques descrita anteriormente se tiene que $[e_1, e_2] \in \mathfrak{O}_1^{++}(2)$ que es la matriz identidad y preserva la orientación de tipo tiempo y tipo espacio. Para $[-e_1, e_2] \in \mathfrak{O}_1^{-+}(2)$, que es una reflexión con respecto al eje x_2 , aquí es claro que la orientación tipo tiempo se invierte y se preserva la orientación de tipo espacio. Mientras que con $[e_1, -e_2] \in \mathfrak{O}_1^{+-}(2)$ es una reflexión con respecto al eje x_1 y se tiene que se invierte la orientación de tipo espacio y se preserva la orientación tipo tiempo. Por último para $[-e_1, -e_2] \in \mathfrak{O}_1^{--}(2)$ que lo podemos ver como la composición de las dos matrices anteriores que vimos invierte ambos tipos de orientación⁵.

Por otro lado, al introducir la función

$$\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{O}_1(2) : \phi \mapsto \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & \sinh(\phi) \\ \sinh(\phi) & \cosh(\phi) \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

que es un homomorfismo de grupos de Lie, Ψ es continua por lo que su imagen $\Psi(\mathbb{R})$ es un subgrupo conexo y cerrado de $\mathfrak{O}_1(2)$. Observamos también que para todo ϕ , $\det \Psi(\phi) = 1$, y $\Psi(\phi)$ preserva la orientación global de \mathbb{R}_1^2 ; además si $\phi \equiv$

⁴cf. en [On].

⁵La matriz $[-e_1, -e_2]$ preserva globalmente la orientación

0, $\Psi(0) = Id_{2 \times 2}$. Por lo tanto $\Psi(\mathbb{R})$ parametriza la componente de la identidad en $\mathfrak{O}_1(2)$, es decir, $\Psi(\mathbb{R}) = \mathfrak{O}_1^{++}(2)$. Es importante mencionar que el conjunto de matrices $\begin{pmatrix} \cosh(\phi) & \sinh(\phi) \\ \sinh(\phi) & \cosh(\phi) \end{pmatrix}$, ahora visto como elementos de \mathbb{R}^4 , con la identificación natural allí, resulta un subconjunto no acotado, por lo que $\mathfrak{O}_1(2)$ no es un grupo compacto⁶.

Proposición 1.14. $\mathfrak{O}_v^{++}(n)$ es conexa para todo $0 \leq v \leq n$.

Demostración: Si $v = 0$ o $v = n$ es sencillamente el caso del grupo $\mathfrak{O}(n)$, para el cual la componente de la identidad se sabe es conexa, por lo cual supondremos que $0 < v < n$, pero además tenemos la identificación $\mathfrak{O}_v(n) \cong \mathfrak{O}_{n-v}(n)$ y reducimos aún más y lo haremos para $0 < v < \frac{n+1}{2}$. Se procederá por inducción sobre n , que para el caso $n=1$ resulta trivial, mientras que si $n=2$ tenemos el caso de $\mathfrak{O}_1(2)$ en donde se utiliza el homomorfismo dado en la ecuación (1.1) para hacer ver que la componente de la identidad es conexa. Supongamos la validez para $n > 2$ y verifiquemos la conexidad de $\mathfrak{O}_v^{++}(n+1)$. Para ello consideremos la función

$$\begin{aligned} \chi : \mathfrak{O}_v(n+1) &\rightarrow \mathbb{F}(\mathbf{dS}_v^n) \\ g &\mapsto (g(e_1), \dots, g(e_n)), \end{aligned}$$

donde $\mathbb{F}(\mathbf{dS}_v^n)$ es simplemente el conjunto de todos los $(n) - \text{marcos}$ ortogonales sobre \mathbf{dS}_v^n . Para cada $g \in \mathfrak{O}_v^{++}(n+1)$ está representado por un n -marco tangente $(g(e_1), \dots, g(e_n))$ sobre el elemento $g(e_{n+1}) \in \mathbf{dS}_v^n$. Así, utilizando fuertemente el hecho que \mathbf{dS}_v^n es conexo, podemos trasladar continuamente cualquier marco en $g(e_{n+1})$ a un marco en e_{n+1} , que equivale en $\mathfrak{O}_v(n+1)$ a que exista una curva de cualquier matriz g a un elemento del tipo

$$\tilde{g} \in \begin{pmatrix} \mathfrak{O}_v^{++}(n) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y dado que la función \det es continua, el signo en los determinantes a lo largo de la curva que une a g y \tilde{g} es el mismo. Y por hipótesis inductiva podemos extender dicha curva para que conecte a g con la identidad. Por tanto $\mathfrak{O}_v^{++}(n+1)$ es conexo. ■

Observación 1.15. También se tienen los homeomorfismos

$$G_i : \mathfrak{O}_v^{++}(n) \rightarrow \begin{cases} \mathfrak{O}_v^{+-}(n), \\ \mathfrak{O}_v^{-+}(n), \\ \mathfrak{O}_v^{--}(n) \end{cases} : \sigma \mapsto g_i \cdot \sigma, \quad (1.2)$$

$$\text{donde } g_i \in \left\{ \begin{pmatrix} Id_{(n-1) \times (n-1)} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & Id_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & Id_{(n-2) \times (n-2)} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aquí nos percatamos que $g_i \notin \mathfrak{O}_v^{++}(n)$ y por ende $g_i \cdot \sigma \notin \mathfrak{O}_v^{++}(n)$ para todo i y para todo $\sigma \in \mathfrak{O}_v^{++}(n)$ debido a que el determinante es multiplicativo; con esto $G_i \cdot \mathfrak{O}_v^{++}(n) \cap$

⁶ Como se verá en la siguiente sección, la acción de $\mathfrak{O}_1(2)$ en \mathbb{R}_1^2 tiene como órbitas, para vectores no nulos, conjuntos no acotados; así al considerar una representación $\xi : \mathfrak{O}_1(2) \rightarrow \mathfrak{O}_v(n)$ para $n > 2$ y $v \geq 1$, las órbitas en \mathbb{R}_v^n , para $x \neq 0$, también resultan conjuntos no acotados.

$\mathfrak{O}_v^{++}(n) = \emptyset$ por lo que estas clases son disjuntas y como cada G_i representa una traslación izquierda de $\mathfrak{O}_v^{++}(n)$ en $\mathfrak{O}_v(n)$ se tiene que $\mathfrak{O}_v^{++}(n)$, $\mathfrak{O}_v^{+-}(n)$, $\mathfrak{O}_v^{-+}(n)$ y $\mathfrak{O}_v^{--}(n)$, son disjuntas y conexas. Además, $\mathfrak{O}_v^{++}(n+1)$ es conocida como *la componente de la identidad* de $\mathfrak{O}_v(n)$. Y se tiene que $\mathfrak{O}_v^{++}(n) \cup \mathfrak{O}_v^{+-}(n)$, $\mathfrak{O}_v^{+-}(n) \cup \mathfrak{O}_v^{-+}(n)$ y $\mathfrak{O}_v^{-+}(n) \cup \mathfrak{O}_v^{--}(n)$ resultan subgrupos de $\mathfrak{O}_v(n)$ ⁷.

1.3. La Acción del Grupo de Lorentz en el Espacio de Minkowski.

Ahora nuestro cometido es dar una descripción detallada de la acción del grupo $\mathfrak{O}_v(n)$ en \mathbb{R}_v^n . Comenzamos con una caracterización en dimensiones bajas, introduciendo primero una expresión de las matrices anti-simétricas que conforman el álgebra de Lie, para después con base en el teorema (1.11) aplicar la transformación exponencial y dar expresiones para los elementos del respectivo grupo pseudo-ortogonal; pondremos particular interés en el espacio-tiempo de Minkowski (\mathbb{R}_1^4).

Demos pauta a ello recordando que en \mathbb{R}^2 para cada $\theta \in \mathbb{R}$ se tiene la representación matricial del grupo $\mathcal{O}(2)$ expresado por

$$g_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},^8$$

En el caso del grupo de Lorentz $\mathfrak{O}_1(2)$, como una consecuencia del teorema (1.11), $\mathfrak{o}_1(2) := \{g \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \mid g^\tau = -\varepsilon g \varepsilon\}$ el conjunto de matrices *pseudo-antisimétricas* resulta su álgebra de Lie y se presenta la siguiente ecuación que se debe satisfacer para toda $g \in \mathfrak{o}_1(2)$

$$g^\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & -d \end{pmatrix},$$

de donde se deben cumplir las condiciones

$$a = -a, \quad d = -d \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0, \quad \text{y} \quad c = b,$$

⁷Aquí una prueba sencilla a este hecho: Sólo debemos recordar que las matrices en el grupo $\mathfrak{O}_v(n)$ resultan diagonalizables por lo que $\begin{pmatrix} a_T & x \\ y & a_E \end{pmatrix}$ es equivalente a una matriz diagonal $\begin{pmatrix} D_T & 0 \\ 0 & D_E \end{pmatrix}$ y el determinante se preserva en los bloques, así al calcular la inversa $\begin{pmatrix} a_T & x \\ y & a_E \end{pmatrix}^{-1}$ ésta es equivalente a una matriz diagonal de la forma $\begin{pmatrix} D_T^{-1} & 0 \\ 0 & D_E^{-1} \end{pmatrix}$ donde el signo del determinante se preserva. Por lo tanto las uniones descritas resultan subgrupos de $\mathfrak{O}_v(n)$.

⁸Una manera de calcular los elementos de $\mathcal{O}(2)$ es exponenciando las matrices $\begin{pmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{pmatrix}$ de su respectiva álgebra de Lie $\mathfrak{o}(2)$ y donde se cumple que $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$ y $\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$. También en [Wa] se especifica que $\mathfrak{o}_1(2)$ es el álgebra de Lie de $\mathcal{O}_1(2)$.

y así g debe ser de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donde } r \in \mathbb{R}.$$

Y exponenciando dicha matriz

$$\begin{aligned} \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + \dots & r + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} + \dots \\ r + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} + \dots & 1 + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(r) & \sinh(r) \\ \sinh(r) & \cosh(r) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con lo cual se tiene la componente de la identidad $\mathfrak{O}_1^{++}(2)$ del grupo $\mathfrak{O}_1(2)$. Para obtener las demas componentes consideramos las traslaciones izquierdas G_i dadas en la ecuación (1,2) y se presentan los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{o}_1(2) & \xrightarrow{dG_i} & \mathfrak{o}_1(2) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ \mathfrak{O}_1(2) & \xrightarrow{G_i} & \mathfrak{O}_1^i(2) \end{array}$$

donde $\mathfrak{O}_1^i(2) \in \{\mathfrak{O}_1^{+-}(2), \mathfrak{O}_1^{-+}(2), \mathfrak{O}_1^{--}(2)\}$. Es decir se tiene que $\exp \circ dG_i(X) = G_i \circ \exp(X)$, para todo $X \in \mathfrak{o}_1(2)$ ⁹

Definición 1.16. Sea M una variedad y G un grupo de Lie.

(a) Una función $\mu : G \times M \rightarrow M$ de clase C^∞ que cumple con:

$$\mu(\sigma\tau, m) = \mu(\sigma, \mu(\tau m)), \quad \text{y} \quad \mu(e, m) = m \quad \text{para todo } \sigma, \tau \in G \text{ y } m \in M,$$

se llama una *acción izquierda* de G sobre M . Para la acción anterior y un elemento $\sigma \in G$,

$$\tilde{\mu}_\sigma : M \rightarrow M$$

$$m \rightarrow \mu(\sigma, m)$$

es un difeomorfismo de M . Además se dice que $m_0 \in M$ es un *punto fijo* de la acción μ , si

$$\tilde{\mu}_\sigma(m_0) = m_0 \quad \text{para cada } \sigma \in G.$$

(b) Sea $\eta : G \times M \rightarrow M$ y $\tilde{\eta}_\sigma(m) = \eta(\sigma, m)$, una acción izquierda. Dicha acción es llamada *efectiva* si $e \in G$ es el único elemento para el cual $\tilde{\eta}_e = id_M$, y es una acción *transitiva*, si para cada m y $n \in M$ siempre existe un $\sigma \in G$ tal que $\tilde{\eta}_\sigma(m) = n$.

⁹cf. en [Wa].

(c) Para cualquier $m \in M$ la G -órbita o simplemente la órbita de m es definida como el conjunto

$$G \cdot m = \{g \cdot m | g \in G\}.$$

(d) Sea $m_0 \in M$ y

$$H_{m_0} = \{\sigma \in G | \widetilde{\eta}_\sigma(m_0) = m_0\},$$

H_{m_0} es un subgrupo de Lie cerrado de G conocido como el *grupo de isotropía en m_0* .

Proposición 1.17. *Sea*

$$\alpha : \mathfrak{O}_1(2) \times \mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^2 : (g_\theta, x) \mapsto g_\theta \cdot x.$$

Entonces α es una acción suave y la órbita para cada $x \in \mathbb{R}_1^2 \setminus \{\bar{0}\}$ está dada por:

1.- Si $0 < \langle x, x \rangle_1 = r^2 \Rightarrow \mathbf{dS}_1^1(r)$

2.- Si $0 > \langle x, x \rangle_1 = r^2 \Rightarrow \mathbb{H}_0^1(r)$

3.- Si $\langle x, x \rangle_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{LC}_1^1$

Demostración: La acción α para la componente $\mathfrak{O}_1^{++}(3)$ se escribe como

$$\alpha(g_\theta, x) = (\cosh(\theta)x_1 + \sinh(\theta)x_2, \sinh(\theta)x_1 + \cosh(\theta)x_2)$$

donde $x = (x_1, x_2)$, y en cada entrada tenemos una función suave. Mientras que

$$\langle g_\theta \cdot x, g_\theta \cdot x \rangle_1 = -(\cosh(\theta)x_1 + \sinh(\theta)x_2)^2 + (\sinh(\theta)x_1 + \cosh(\theta)x_2)^2 = -x_1^2 + x_2^2 = \langle x, x \rangle_1 = q,$$

donde $q \in \mathbb{R}$, es decir $\mathfrak{O}_1(2)$ preserva la norma; así si $0 < \langle x, x \rangle_1 = r^2$ estamos parametrizando una rama de la hipérbola del espacio $\mathbf{dS}_1^1(r)$ y para obtener la otra rama sólo necesitamos la acción de $\mathfrak{O}_1^{+-}(3)$ descrita por $\alpha(h, x) = (\cosh(\theta)x_1 + \sinh(\theta)x_2, -\sinh(\theta)x_1 - \cosh(\theta)x_2)$.

En caso que $-r^2 = \langle x, x \rangle_1 < 0$, haciendo actuar $\mathfrak{O}_1^{++}(3)$ como antes, obtenemos también una rama de la hipérbola que conforma a $\mathbb{H}_0^1(r)$ y para obtener la rama restante hacemos actuar la componente $\mathfrak{O}_1^{--}(3)$ con $\alpha(h, x) = (-\cosh(\theta)x_1 - \sinh(\theta)x_2, \sinh(\theta)x_1 + \cosh(\theta)x_2)$.

Entre tanto, para \mathbf{LC}_1^1 que consta de cuatro componentes conexas es necesario considerar todas las componentes de $\mathfrak{O}_1(2)$, por lo cual las siguientes aplicaciones parametrizan cada una de las ramas de \mathbf{LC}_1^1 :

$$\mathfrak{O}_1^{++}(2) \times \mathbf{LC}_1^1 \rightarrow \mathfrak{O}_1(2) : (g_\theta, (x, x)^\tau) \mapsto g_\theta \cdot (x, x)^\tau$$

$$\mathfrak{O}_1^{+-}(2) \times \mathbf{LC}_1^1 \rightarrow \mathfrak{O}_1(2) : \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_\theta, (x, x)^\tau \right) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_\theta \cdot (x, x)^\tau$$

$$\mathfrak{O}_1^{-+}(2) \times \mathbf{LC}_1^1 \rightarrow \mathfrak{O}_1(2) : \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot g_\theta, (x, x)^\tau \right) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g_\theta \cdot (x, x)^\tau$$

$$\mathfrak{O}_1^{--}(2) \times \mathbf{LC}_1^1 \rightarrow \mathfrak{O}_1(2) : \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot g_\theta, (x, x)^\tau \right) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot g_\theta \cdot (x, x)^\tau$$

■

Ahora analicemos cuidadosamente los casos $\mathfrak{O}_1(3)$ y $\mathfrak{O}_1(4)$. Como primer caso si $g \in \mathfrak{o}_1(3)$, g debe satisfacer la ecuación

$$g^\tau = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{pmatrix}^\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & -r_5 & -r_6 \\ r_7 & -r_8 & -r_9 \end{pmatrix},$$

por ello

$$r_1 = r_5 = r_9 = 0 \quad \text{y} \quad r_2 = r_4, \quad r_3 = r_7, \quad r_6 = -r_8.$$

Así una matriz en $\mathfrak{o}_1(3)$ se debe expresar como

$$\begin{pmatrix} 0 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 0 & r_3 \\ r_2 & -r_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donde } r_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3.$$

Ahora bien por el teorema (1.11) podemos exponenciar las matrices de la forma previa y ver cómo se conforman los elementos de $\mathfrak{O}_1(3)$. Haciendo este cálculo se tiene

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} 0 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 0 & r_3 \\ r_2 & -r_3 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 0 & r_3 \\ r_2 & -r_3 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 0 & r_3 \\ r_2 & -r_3 & 0 \end{pmatrix}^2 + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 0 & r_3 \\ r_2 & -r_3 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_2 r_3 & r_1 r_3 \\ r_2 r_3 & r_1 - r_3 & r_1 r_2 \\ -r_1 r_3 & r_1 r_2 & r_2 - r_3 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & r_1(r_1 + r_2 - r_3) & r_2(r_1 + r_2 - r_3) \\ r_1(r_1 + r_2 - r_3) & 0 & r_3(r_1 + r_2 - r_3) \\ r_2(r_1 + r_2 - r_3) & -r_3(r_1 + r_2 - r_3) & 0 \end{pmatrix} \dots \end{aligned}$$

Sean $\rho = (r_1 + r_2 - r_3)$ y $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 0 & r_3 \\ r_2 & -r_3 & 0 \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned} \exp(\mathcal{A}) &= Id + \mathcal{A} + \frac{1}{2!}\mathcal{A}^2 + \frac{1}{3!}\rho\mathcal{A} + \frac{1}{4!}\rho^2\mathcal{A} + \dots \\ &= Id + \left(\mathcal{A} + \frac{1}{3!}\mathcal{A}^3 + \frac{1}{5!}\rho\mathcal{A}^3 + \frac{1}{7!}\rho^2\mathcal{A}^3 + \dots \right) + \left(\frac{1}{2!}\mathcal{A} + \frac{1}{4!}\rho\mathcal{A} + \frac{1}{6!}\rho^2\mathcal{A} + \dots \right) \\ &= Id + \mathcal{A} \left(1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}\rho + \frac{1}{7!}\rho^2 + \dots \right) + \mathcal{A} \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\rho + \frac{1}{6!}\rho^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

y denotemos por $\rho_1 = \left(1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}\rho + \frac{1}{7!}\rho^2 + \dots \right)$ y a $\rho_2 = \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\rho + \frac{1}{6!}\rho^2 + \dots \right)$ y haciendo las debidas cuentas se sigue

$$\exp(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 1 + (r_1 + r_2)\rho_2 & r_1\rho_1 - r_2r_3\rho_2 & r_2\rho_1 + r_1r_3\rho_2 \\ r_1\rho_1 + r_2r_3\rho_2 & 1 + (r_1 - r_3)\rho_2 & r_3\rho_1 + r_1r_2\rho_2 \\ r_2\rho_1 - r_1r_3\rho_2 & -r_3\rho_1 + r_1r_2\rho_2 & 1 + (r_2 - r_3)\rho_2 \end{pmatrix}$$

la cual nos da una forma más amigable de exhibir los elementos de la componente $\mathfrak{O}_1^{++}(3)$ de $\mathfrak{O}_1(3)$. De igual manera que en el caso de dimensión 2, para obtener las demás componentes utilizamos traslaciones izquierdas G_i y los diagramas conmutativos siguientes

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{o}_1(3) & \xrightarrow{dG_i} & \mathfrak{o}_1(3) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ \mathfrak{O}_1(3) & \xrightarrow{G_i} & \mathfrak{O}_1^i(3) \end{array}$$

donde $\mathfrak{O}_1^i(3) \in \{\mathfrak{O}_1^{+-}(3), \mathfrak{O}_1^{+}(3), \mathfrak{O}_1^{--}(3)\}$.

En lo siguiente veremos cómo están involucrados los grupos $\mathfrak{O}_1(2)$ y $\mathfrak{O}(2)$ como subgrupos de $\mathfrak{O}_1(3)$ y su acción en los espacios respectivos de \mathbb{R}_1^3 por lo cual aquí es importante hacer dos observaciones; la primera se deriva de considerar $r_2 = r_3 = 0$ con lo que $g \in \mathfrak{O}_1(3)$ se presenta como

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & r_1 & 0 \\ r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \exp(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{r_1^2}{2!} + \frac{r_1^4}{4!} + \dots & r_1 + \frac{r_1^3}{3!} + \frac{r_1^5}{5!} + \dots & 0 \\ r_1 + \frac{r_1^3}{3!} + \frac{r_1^5}{5!} + \dots & 1 + \frac{r_1^2}{2!} + \frac{r_1^4}{4!} + \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(r_1) & \sinh(r_1) & 0 \\ \sinh(r_1) & \cosh(r_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mientras tanto sí $r_1 = r_2 = 0$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \\ 0 & -r_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \exp(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{r_3^2}{2!} + \frac{r_3^4}{4!} - \dots & -(r_3 - \frac{r_3^3}{3!} + \frac{r_3^5}{5!} \dots) \\ 0 & r_3 - \frac{r_3^3}{3!} + \frac{r_3^5}{5!} - \dots & 1 - \frac{r_3^2}{2!} + \frac{r_3^4}{4!} - \dots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(r_3) & -\text{sen}(r_3) \\ 0 & \text{sen}(r_3) & \cos(r_3) \end{pmatrix}.$$

También analizando el caso cuando $r_1 = r_3 = 0$ se presenta

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \exp(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{r_2^2}{2!} + \frac{r_2^4}{4!} + \dots & 0 & r_2 + \frac{r_2^3}{3!} + \frac{r_2^5}{5!} + \dots \\ 0 & 1 & 0 \\ r_2 + \frac{r_2^3}{3!} + \frac{r_2^5}{5!} + \dots & 0 & 1 + \frac{r_2^2}{2!} + \frac{r_2^4}{4!} + \dots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(r_2) & 0 & \sinh(r_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(r_2) & 0 & \cosh(r_2) \end{pmatrix}.$$

Definición 1.18. Una *representación* de G en un espacio vectorial real (o complejo) V se define como un homomorfismo ϕ de G en el grupo de transformaciones lineales de V en sí mismo. Equivalentemente, una representación es una acción de grupo $\alpha : G \times V \rightarrow V : (g, v) \mapsto g(v)$ que es lineal para todo $g \in G$.

Ejemplo 1.19. Sea G cualquier subgrupo de $\mathbf{Gl}(n, \mathbb{R})$, y sea $V = \mathbb{R}^n$. Definimos $\Phi : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (g, x) \mapsto \Phi(g, x) = g \cdot x$ el producto matricial. Φ es llamada la representación estándar de G .

Proposición 1.20. Las siguientes inclusiones son homomorfismos de grupos de Lie y también representaciones.

$$\mathfrak{O}_1(2) \hookrightarrow \mathfrak{O}_1(3) : g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

$$\mathfrak{O}(2) \hookrightarrow \mathfrak{O}_1(3) : g \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

$$\mathfrak{O}_1(2) \hookrightarrow \mathfrak{O}_1(3) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Demostración: Para las funciones de las ecuaciones (1.3) y (1.4) es claro que son homomorfismos. Y para la última se tiene para $g_{\theta_1} \cdot g_{\theta_2} \in \mathfrak{O}_1^{++}(2)$ que

$$\begin{aligned} g_{\theta_1} \cdot g_{\theta_2} &= \begin{pmatrix} \cosh(\theta_1) \cosh(\theta_2) + \sinh(\theta_1) \sinh(\theta_2) & \cosh(\theta_1) \sinh(\theta_2) + \sinh(\theta_1) \cosh(\theta_2) \\ \sinh(\theta_1) \cosh(\theta_2) + \cosh(\theta_1) \sinh(\theta_2) & \sinh(\theta_1) \sinh(\theta_2) + \cosh(\theta_1) \cosh(\theta_2) \end{pmatrix} \\ &\mapsto \begin{pmatrix} \cosh(\theta_1) \cosh(\theta_2) + \sinh(\theta_1) \sinh(\theta_2) & 0 & \cosh(\theta_1) \sinh(\theta_2) + \sinh(\theta_1) \cosh(\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\theta_1) \cosh(\theta_2) + \cosh(\theta_1) \sinh(\theta_2) & 0 & \sinh(\theta_1) \sinh(\theta_2) + \cosh(\theta_1) \cosh(\theta_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\theta_1) & 0 & \sinh(\theta_1) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\theta_1) & 0 & \cosh(\theta_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(\theta_2) & 0 & \sinh(\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\theta_2) & 0 & \cosh(\theta_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

De manera análoga para cualesquiera $g_1, g_2 \in \mathfrak{O}_1(2)$, que escribimos como $g_1 = g_i \cdot g_{\theta_1}$ y $g_2 = g_j \cdot g_{\theta_2}$, donde $g_i, g_j \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$. Y haciendo las operaciones respectivas, como el caso previo, se tiene

$$g_1 \cdot g_2 = g_i \cdot g_{\theta_1} \cdot g_j \cdot g_{\theta_2} \mapsto \overline{g_i} \cdot \begin{pmatrix} \cosh(\theta_1) & 0 & \sinh(\theta_1) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\theta_1) & 0 & \cosh(\theta_1) \end{pmatrix} \cdot \overline{g_j} \cdot \begin{pmatrix} \cosh(\theta_2) & 0 & \sinh(\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\theta_2) & 0 & \cosh(\theta_2) \end{pmatrix},$$

en donde $\overline{g_i}, \overline{g_j} \in \left\{ \begin{pmatrix} g_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Así ésta inclusión también es un homomorfismo de grupos de Lie. ■

Observación 1.21. Por el lema 1.8 se tiene que los vectores columna de una matriz $g \in \mathfrak{O}_v(n)$ forman una base ortonormal del espacio \mathbb{R}^n , con lo que podemos pedir que las primeras v columnas sean de carácter causal tipo tiempo y los restantes de tipo espacio; con lo anterior en mente las representaciones previas son las únicas que preservan la estructura geométrica que conlleva la métrica, por ello los homomorfismos de grupo de Lie previos vistos como inclusiones siguen actuando sobre los espacios \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}_1^2 ,

encajados de manera natural en \mathbb{R}_1^3 , como se ha mencionado anteriormente. Por otra parte, sólo introducimos estas representaciones de $\mathfrak{O}_1(2)$ y $\mathfrak{O}(2)$ pues, como se vera más adelante, son suficientes para calcular la órbita de cualquier vector en \mathbb{R}_1^3 .

Ahora describamos geoméricamente lo que está ocurriendo cuando actúan $\mathfrak{O}_1(2)$ y $\mathfrak{O}(2)$, vistos como subgrupos de $\mathfrak{O}_1(3)$, en \mathbb{R}_1^3 :

Al tomar el homomorfismo dado en la ecuación (1.3), los vectores columnas resultan ser linealmente independientes y

$$v_1 = \begin{pmatrix} \cosh(r_1) \\ \sinh(r_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \sinh(r_1) \\ \cosh(r_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

es una base ortonormal de \mathbb{R}_1^3 , v_3 es claro que es un vector fijo de tipo espacio, mientras que v_1 y v_2 parametrizan precisamente a $\mathfrak{O}_1^{++}(2)$, que actúa de la forma natural antes descrita, sobre el plano $z = 0$ que no es más que \mathbb{R}_1^2 ; consideremos el plano dado por

$z = \kappa$, con κ no nulo, aquí los vectores toman las expresiones $\begin{pmatrix} a \\ b \\ \kappa \end{pmatrix}$ y bajo la acción

de $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se transforman en $\begin{pmatrix} a \cosh(r_1) + b \sinh(r_1) \\ a \sinh(r_1) + b \cosh(r_1) \\ \kappa \end{pmatrix}$, con lo que variando $r_1 \in \mathbb{R}$

y κ fijo, estamos parametrizando una rama de una hipérbola, y tomando la acción de los elementos restantes de $\mathfrak{O}_1(2)$ (bajo la inclusión (1.3)) la órbita de estos puntos es descrita por la hipérbola cuyos puntos satisfacen simultáneamente las ecuaciones

$$-x^2 + y^2 + z^2 = -a^2 + b^2 + \kappa^2 \quad (1.6)$$

$$z = \kappa, \quad (1.7)$$

que geoméricamente es la intersección del espacio $d\mathbf{S}_1^2(r)$, con $r^2 = -a^2 + b^2 + \kappa^2$, y el

plano a altura κ con respecto a z . En el caso del elemento $\begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix}$, que es de carácter causal

tipo luz, aquí su órbita es dibujada por $\begin{pmatrix} \kappa \cosh(r_1) \\ \kappa \sinh(r_1) \\ \kappa \end{pmatrix}$, lo cual describe también una hipér-

bola¹⁰. Así por la descripción anterior damos la presentación de las órbitas para cada plano $z = \kappa$, descritas por la figura 1.1, donde la hipérbola punteada describe la órbita de vectores con carácter causal tipo luz, mientras que las curvas por debajo de ella son elementos de tipo espacio y las restantes de tipo tiempo. Y para el homomorfismo dado en la ecuación (1.4) tenemos que

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(r_3) \\ \sin(r_3) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(r_3) \\ \cos(r_3) \end{pmatrix},$$

¹⁰Está curva no es más que la intersección del plano $z = \kappa$ con el cono de luz.

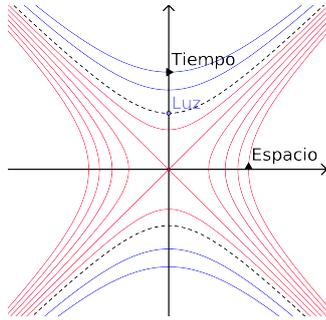


Figura 1.1: Órbitas en planos de la forma $z = k$ bajo la acción de $\mathcal{O}_1(2)$.

es una base ortogonal de \mathbb{R}_1^3 , donde ahora v_1 es un vector fijo de tipo tiempo; pero ya sabemos que $\mathcal{O}(2)$ actúa en \mathbb{R}^2 a través de rotaciones respecto al origen, así con el efecto ya antes descrito en \mathbb{R}_1^2 , pero ahora $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(r_3) & -\text{sen}(r_3) \\ 0 & \text{sen}(r_3) & \cos(r_3) \end{pmatrix}$ actúa sobre \mathbb{R}_1^3 con

rotaciones tales que dejan invariantes a todos los vectores de la forma $y = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pero al calcular el efecto de tales matrices sobre el plano $x = 0$, se tiene que para cada elemento allí su órbita es sólo una circunferencia de carácter causal tipo espacio con centro en el origen y podemos describir las órbitas bajo la acción el grupo $\mathcal{O}(2)$ en este plano con el siguiente dibujo

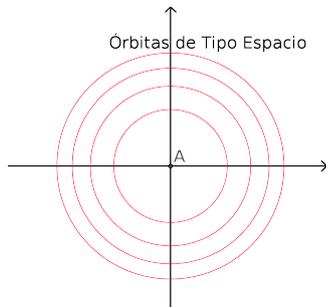


Figura 1.2: Órbitas bajo la acción de $\mathcal{O}(2)$.

Mientras que al trabajar con un plano paralelo a $x = 0$, digamos $x = \kappa$, las órbitas que resultan son idénticas al caso anterior, mas aquí el carácter causal varía con respecto a cada vector, por ello resultan las siguientes órbitas dadas por la figura 1.3, donde la circunferencia punteada es de carácter causal tipo luz y consta de aquellos puntos que satisfacen las ecuaciones

$$y^2 + z^2 = k^2, \tag{1.8}$$

$$x = k; \tag{1.9}$$

mientras que las circunferencias en su interior son de tipo tiempo y aquellas que se

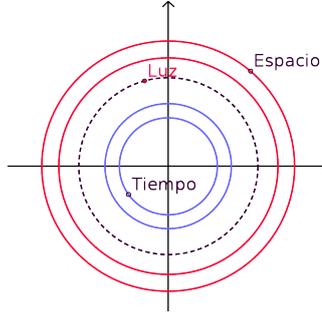


Figura 1.3: Órbitas bajo la acción de $O(2)$.

encuentran en el exterior son de tipo espacio. Por último para el subgrupo

$$\begin{pmatrix} \cosh(r_2) & 0 & \sinh(r_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(r_2) & 0 & \cosh(r_2) \end{pmatrix}$$

se presentan las mismas órbitas que en la primera descripción, ahora en planos de la forma $y = \kappa \in \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta todos estos comentarios y del hecho que $\mathfrak{O}_1(3)$ preserva la métrica llegamos al siguiente resultado:

Proposición 1.22. *Sea $\alpha : \mathfrak{O}_1(3) \times \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ la acción natural de $\mathfrak{O}_1(3)$ en \mathbb{R}_1^3 . Entonces para $x \neq 0$ se presentan las siguientes órbitas:*

- i.- Si $r = \langle x, x \rangle_v > 0 \Rightarrow G \cdot x = \mathbf{dS}_1^2(r)$,
- ii.- Si $0 = \langle x, x \rangle_v \Rightarrow G \cdot x = \mathbf{LC}_1^2$,
- iii.- Si $r = \langle x, x \rangle_v < 0 \Rightarrow G \cdot x = \mathbf{H}_1^2(r)$.

Demostración: Sea $v \in \mathbb{R}_1^3$ y recordemos que $\mathfrak{O}_1(3)$ preserva la norma, así de inmediato se tiene las siguientes contenciones para todo $\alpha \in \mathfrak{O}_1(3)$:

- i.- Si $r = \langle v, v \rangle_1 > 0 \Rightarrow \alpha \cdot v \in \mathbf{dS}_1^2(\sqrt{\langle v, v \rangle})$,
- ii.- Si $0 = \langle v, v \rangle_1 \Rightarrow \alpha \cdot v \in \mathbf{LC}_1^2$,
- iii.- Si $r = \langle v, v \rangle_1 < 0 \Rightarrow \alpha \cdot v \in \mathbf{H}_0^2(\sqrt{-\langle v, v \rangle})$.

Por otra parte para cualquier $w = (w_1, w_2, w_3)^\tau \in \mathbf{dS}_1^2(r)$ consideramos la matriz $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}$ con $g' \in O(2)$ tal que $g' \cdot \begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_1 \end{pmatrix}$. Dicha matriz existe puesto que $(0, k_1)^\tau$ está en la órbita de $(w_2, w_3)^\tau \in \mathbb{R}^2$, donde $k_1 = w_2^2 + w_3^2$. También tomemos la matriz

$$h = \begin{pmatrix} \cosh(r_2) & 0 & \sinh(r_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(r_2) & 0 & \cosh(r_2) \end{pmatrix} \text{ que satisface } h \cdot g \cdot w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \end{pmatrix}^\tau. \text{ Así hemos probado}$$

que cualesquiera dos elementos de $w_1, w_2 \in \mathbf{dS}_1^2(r)$ pueden ser llevados al $(0, 0, 1)^\tau$, y por transitividad x e y están en la misma órbita, es decir, $\mathfrak{O}_1(3)(w) = \mathbf{dS}_1^2$. Para ii.-)

1.3. LA ACCIÓN DEL GRUPO DE LORENTZ EN EL ESPACIO DE MINKOWSKI.

observar que \mathbb{LC}_1^2 tiene dos componentes conexas, así que al ejecutar el proceso previo para cualquier $w \in \mathbb{LC}_1^2$ sólo se obtendrá la componente conexa a la que pertenece. Para verificar que la otra componente conexa es parte de la órbita de w también debemos hacer actuar $g_i \cdot g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}$, con $g' \in \mathcal{O}(2)$, y $g_i \cdot h = \begin{pmatrix} -\cosh(r_2) & 0 & \sinh(r_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(r_2) & 0 & \cosh(r_2) \end{pmatrix}$ donde $r_2 \in \mathbb{R}$. Por último en **iii.-**) procedemos de forma análoga a **ii.-**), puesto que $\mathbb{H}_0^2(r)$ también es no conexo. ■

Proposición 1.23. *Sea $\alpha : \mathfrak{O}_1(3) \times \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ la acción de $\mathfrak{O}_1(3)$ en \mathbb{R}_1^3 , el grupo de isotropía de e_1 y e_3 es $\mathcal{O}(2)$ y $\mathfrak{O}_1(2)$ respectivamente.*

Demostración: Esto se hace evidente tomando los homomorfismos dados en **(1.3)** y **(1.4)**. ■

Prosigamos ahora con el caso $\mathfrak{O}_1(4)$; trabajando análogamente, para cada $g \in \mathfrak{o}_1(4)$, se tiene la condición

$$g^\tau = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ r_5 & r_6 & r_7 & r_8 \\ r_9 & r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} \end{pmatrix}^\tau = \begin{pmatrix} -r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ r_5 & -r_6 & -r_7 & -r_8 \\ r_9 & -r_{10} & -r_{11} & -r_{12} \\ r_{13} & -r_{14} & -r_{15} & -r_{16} \end{pmatrix}$$

por lo cual

$$r_1 = r_6 = r_{11} = r_{16} = 0 \quad \text{y} \quad r_2 = r_5, \quad r_3 = r_9, \quad r_4 = r_{13}, \quad r_7 = -r_{10}, \quad r_8 = -r_{14}, \quad r_{12} = -r_{15},$$

y escribimos a los elementos de $\mathfrak{o}_1(4)$ como

$$\begin{pmatrix} 0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & 0 & r_4 & r_5 \\ r_2 & -r_4 & 0 & r_6 \\ r_3 & -r_5 & -r_6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donde } r_i \in \mathbb{R}.$$

donde observamos que el número de parámetros coincide con la dimensión del grupo $\mathfrak{O}_1(4)$ de igual manera que para $\mathfrak{O}_1(2)$ y $\mathfrak{O}_1(3)$ y sus respectivas álgebras.

Continuando con el análisis del grupo $\mathfrak{O}_1(4)$, en este caso como $\exp(\mathfrak{o}_1(4)) \rightarrow \mathfrak{O}_1(4)$, tomando $r_3 = r_5 = r_6 = 0$ estamos exponenciando matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & r_1 & r_2 & 0 \\ r_1 & 0 & r_4 & 0 \\ r_2 & -r_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que ya sabemos que caen precisamente en $\mathfrak{O}_1(3)$. Mientras que al considerar $r_1 = r_2 = r_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_4 & r_5 \\ 0 & -r_4 & 0 & r_6 \\ 0 & -r_5 & -r_6 & 0 \end{pmatrix}$$

estamos exponenciando elementos que están en el conjunto de matrices antisimétricas, que es el álgebra de Lie del grupo $\mathbb{O}(3)$.

Proposición 1.24. *Los siguientes homomorfismos de $\mathfrak{O}_1(3)$ y $\mathbb{O}(3)$ en $\mathfrak{O}_1(4)$ también son representaciones*

$$\mathfrak{O}_1(3) \hookrightarrow \mathfrak{O}_1(4) : g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

$$\mathbb{O}(3) \hookrightarrow \mathfrak{O}_1(4) : g \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Observación 1.25. La demostración de la proposición (1.24) es análoga a la de la proposición (1.20). Aquí sólo trabajamos con dos representaciones ya que las otras dos se obtienen de manera sencilla componiendo con un cambio de coordenadas dadas por el intercambio de los ejes coordenados.

Proposición 1.26. *El grupo de isotropía bajo la acción de $\mathfrak{O}_1(4)$ en \mathbb{R}_1^4 de los vectores en $H = \{(0, 0, 0, t) \in \mathbb{R}_1^4 | t \in \mathbb{R}\}$ es $\mathfrak{O}_1(3)$ y para puntos en $G = \{(t, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}_1^4 | t \in \mathbb{R}\}$ es $\mathbb{O}(3)$.*

Demostración: Sea $\mathfrak{O}_1(3) \subset \mathfrak{O}_1(4)$ de la manera siguiente

$$\mathfrak{O}_1(3) \hookrightarrow \mathfrak{O}_1(4) : g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

por lo que $\mathfrak{O}_1(3)$ va a estar actuando en \mathbb{R}_1^4 ; la acción que describe es dejar fija la dirección espacial e_4 y actúa en el complemento ortogonal, que es isomorfo a \mathbb{R}_1^3 , de la manera descrita en 1.22¹¹. Mientras tanto para el subgrupo $\mathbb{O}(3) \subset \mathfrak{O}_1(4)$, mediante el encaje

$$\mathbb{O}(3) \hookrightarrow \mathfrak{O}_1(4) : g \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix},$$

el efecto que realizan estas matrices es fijar el eje temporal x_1 y hacer rotaciones en el complemento ortogonal. ■

Proposición 1.27. *Las órbitas bajo la acción de $\mathfrak{O}_1(3)$ en \mathbb{R}_1^4 son difeomorfas a $\mathbb{L}\mathbb{C}_1^2$, \mathbb{H}_1^2 y $\mathbb{d}\mathbb{S}_1^2$, mientras que para la acción de $\mathbb{O}(3)$ las órbitas resultantes son difeomorfas a \mathbb{S}^2 .*

Demostración: Consideremos las inclusiones de estos dos subgrupos de $\mathfrak{O}_1(4)$ como en la demostración previa. $\mathfrak{O}_1(3)$ actúa sobre el plano $x_4 = 0$ que es isomorfo a \mathbb{R}_1^3 como se describió en la proposición (1.22) y de donde resultan las órbitas ya mencionadas. En tanto para la acción de $\mathbb{O}(3)$, damos cuenta que para un vector de tipo espacio su órbita es una esfera cuyo radio depende de la norma del vector, y donde los vectores fijos son todos los vectores sobre el eje temporal. Ahora si consideramos un hiperplano tridimensional paralelo a $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ a altura k , las órbitas que resultan bajo la acción que efectúa $\mathbb{O}(3)$ allí es la siguiente:

¹¹Para los otros dos ejes espaciales restantes $\mathfrak{O}_1(3)$ actúa de igual manera salvo el hecho que debemos considerar el encaje adecuado en $\mathfrak{O}_1(4)$.

1.3. LA ACCIÓN DEL GRUPO DE LORENTZ EN EL ESPACIO DE MINKOWSKI.

Sea $v = (x_1, x_2, x_3, k)$:

- 1.- Si $\langle v, v \rangle = 0$ y $v \neq 0$ la órbita es difeomorfa a \mathbb{S}^2 y es $(\mathbb{R}^3 \times \{k\}) \cap \mathbb{LC}_1^3$.
- 2.- Si $\langle v, v \rangle < 0$, la órbita es difeomorfa a \mathbb{S}^2 y es $(\mathbb{R}^3 \times \{k\}) \cap \mathbb{H}_1^3(\sqrt{-\langle v, v \rangle})$.
- 3.- Por último, si $\langle v, v \rangle > 0$, la órbita es también difeomorfa a \mathbb{S}^2 y es $(\mathbb{R}^3 \times \{k\}) \cap \mathbb{dS}_1^3(\sqrt{\langle v, v \rangle})$.

■

Afirmación: Cabe mencionar que con el mismo espíritu de las proposiciones (1.20) y (1.24) se verifican las inclusiones para $0 < v < n$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{O}_v(n-1) & \longrightarrow & \mathfrak{O}_v(n) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{O}(k-1) & \longrightarrow & \mathfrak{O}(k) \end{array}$$

con $k = n - v$; que son homomorfismos de grupos de Lie.

Dadas las descripciones previas, podemos calcular las órbitas de un vector $u \in \mathbb{R}_v^n$ bajo la acción respectiva de $\mathfrak{O}_v(n)$.

Ejemplo 1.28. El grupo $\mathfrak{O}_1(3)$ actúa transitivamente en \mathbb{H}_0^2 , esto se hace evidente al tomar cualquier elemento $x \in \mathbb{H}_0^2$ cuyas coordenadas son (x_1, x_2, x_3) ; por dicho punto pasa el plano $x = x_1$, que es paralelo al plano yz en donde sabemos que las órbitas bajo la acción de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{O}(2) \end{pmatrix}$, son circunferencias, por lo que existe $g \in \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{O}(2) \end{pmatrix}$ tal que $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1, k, 0)$ donde $k = x_2^2 + x_3^2$; ahora en el plano xy hacemos actuar el subgrupo $\begin{pmatrix} \mathfrak{O}_1(2) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que sabemos lo hace de manera transitiva en cada hipérbola centrada, además como $x \in \mathbb{H}_0^2$, $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1 \Rightarrow x_1 = \pm(1+k)^{\frac{1}{2}}$ y $(x_1, k, 0)$ pertenece a \mathbb{H}_0^1 , encajado de manera natural en el plano xy , así existe $h \in \begin{pmatrix} \mathfrak{O}_1(2) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, tal que $h \circ g(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$. Por lo que cualquier elemento \mathbb{H}_0^2 puede ser llevado a e_1 y con ello la acción es transitiva allí.

Ahora generalizando ésto para cualquier dimensión y signatura damos la siguiente afirmación:

Proposición 1.29. $\mathfrak{O}_{v+1}(n+1)$ actúa transitivamente en $\mathbb{dS}_v^n(k)$, \mathbb{LC}_v^n , y $\mathbb{H}_v^n(k)$.

Demostración: Procederemos por inducción sobre la dimensión. Para el caso base, $\mathfrak{O}_1(2)$ actúa en \mathbb{R}_1^2 , en donde las órbitas son precisamente el cono de luz, el espacio hiperbólico y el espacio de de Sitter allí inmersos. Para el caso n , sea $w = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{H}_v^n$, entonces existe un $a_j = 0$ con $j \leq v$. Para $a_j \neq 0$ elijamos el hiperplano de dimensión $n-1$ a altura a_j , dicho plano es difeomorfo a \mathbb{R}_{v-1}^{n-1} , donde por hipótesis inductiva $\mathfrak{O}_v(n) \subset \mathfrak{O}_{v+1}^{n+1}$ actúa de manera transitiva en \mathbb{H}_{v-1}^{n-1} por lo que

existe $g \in \mathfrak{O}_v(n)$ tal que $\sigma \cdot w \in \{\pm 1, 0, \dots, 0, a_j, 0, \dots, 0\}$ y ahora para el hiperplano 2-dimensional en donde la primera y j -ésima entrada no se anulan, se tiene actuando a $\mathfrak{O}_1(2) \subset \mathfrak{O}_v(n)$ en donde afirmamos que existe $\tau \in \mathfrak{O}_1(2)$ tal que $\tau\sigma \cdot w = [1, 0, \dots, 0]$ y por ello la acción es transitiva en \mathbb{H}_v^n . Para los casos restantes la demostración es totalmente análoga. ■

Proposición 1.30. Para $e_1 = (1, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-1)\text{-veces}}) \in \mathbb{R}_v^n$, con $v > 0$, el grupo de isotropía bajo la acción $\mathfrak{O}_v(n) \times \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}_v^n$ es $\mathfrak{O}_{v-1}(n-1)$; mientras que para $e_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(n-1)\text{-veces}}, 1) \in \mathbb{R}_v^n$ el grupo de isotropía es $\mathfrak{O}_v(n-1)$.

Demostración: Las proposiciones (1.23) y (1.26) nos ayudan a visualizar de manera geométrica este hecho; con el mismo espíritu se toma una matriz

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ b^\tau & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{O}_v(n) \quad \text{donde } a \in \mathbb{R}, A \in \mathbf{GL}(n-1, \mathbb{R}),$$

para que g esté en el grupo de isotropía de e_1 se debe satisfacer

$$g \cdot e_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b^\tau & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix},$$

y se sigue que $a = 1$ y $b = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(n-1)\text{-veces}})$, y además el bloque A está compuesto por $n-1$ vectores ortonormales, es decir, $A \in \mathfrak{O}_{v-1}(n-1)$. Esto nos lleva a la expresión

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0^\tau & \mathfrak{O}_{v-1}(n-1) \end{pmatrix}$$

En tanto, con los mismos argumentos, para una matrix $h \in \mathfrak{O}_v(n)$ que cumple con $h \cdot e_n = e_n$, ésta se debe ver como $h = \begin{pmatrix} \mathfrak{O}_v(n-1) & 0 \\ 0^\tau & 1 \end{pmatrix}$. ■

De la proposición (1.29) y con argumentos análogos a los dados en la proposición (1.22), teniendo en cuenta la dimensión del espacio en cuestión se tiene la siguiente afirmación.

Proposición 1.31. Sea $G : \mathfrak{O}_v(n) \times \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}_v^n$ la acción natural de $\mathfrak{O}_v(n)$ en \mathbb{R}_v^n . Entonces para $x \in \mathbb{R}_v^n \setminus \{0\}$

i.- Si $r = \langle x, x \rangle_v > 0 \Rightarrow G \cdot v = \mathbf{dS}_v^{n-1}(r)$,

ii.- Si $0 = \langle x, x \rangle_v \Rightarrow G \cdot v = \mathbf{LC}_v^{n-1}$,

iii.- Si $r = \langle x, x \rangle_v < 0 \Rightarrow G \cdot v = \mathbf{H}_{v-1}^{n-1}(r)$.

■

Observación 1.32. Es preciso preguntarse también por el grupo de isotropía de un elemento de tipo luz bajo la acción de $\mathfrak{O}_v(n)$. En el caso particular cuando $n = 2$ y $v = 1$

todos los elementos en \mathbb{LC}_1^2 son vectores con entradas $[t, \pm t]$ con $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y haciendo actuar al conjunto de rotaciones pseudo-ortogonal, es decir, matrices de la forma $g_\theta = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix}$ se sigue que $g_\theta \cdot [t, \pm t]^T = [t(\cosh(\theta) \pm \sinh(\theta)), t(\sinh(\theta) \pm \cosh(\theta))]$, con lo que se debe satisfacer las ecuaciones $\cosh(\theta) \pm \sinh(\theta) = 1$ y $\sinh(\theta) \pm \cosh(\theta) = 1$ simultáneamente. Este sistema tiene una única solución cuando $\theta \equiv 0$ y es el caso de la matriz identidad. Por otra parte, de la proposición (1.30), los grupos de isotropía para $v > 1$ resultan no compactos y no conexos; esto es importante recalcar pues al trabajar con los cocientes respectivos (variedades homogéneas) también resultan no compactas, como se verá en la siguiente sección.

Proposición 1.33. *La dimensión de $\mathfrak{O}_v(n)$ y $\mathfrak{o}_v(n)$ es $\frac{n(n-1)}{2}$.*

Demostración: Por el teorema (1.11) los elementos del álgebra de Lie $\mathfrak{o}_v(n)$ satisfacen $g^T = \varepsilon_v g \varepsilon_v$, entonces se tiene para $g = (a_{ij})$ que $a_{ij} = a_{ji}$ para $i \in \{1, \dots, v\}$ y $j \in \{v+1, \dots, n\}$, mientras que $a_{ij} = -a_{ji}$ para $i \in \{1, \dots, v\}$ y $j \in \{1, \dots, v\}$, o $i \in \{v+1, \dots, n\}$ y $j \in \{v+1, \dots, n\}$, de donde observamos que $a_{ii} = 0$ y g es una matriz con ceros en la diagonal y los elementos por encima de la diagonal parametrizan ésta álgebra. Así sólo toca contar el número de entradas por arriba de la diagonal, que está dado por $\frac{n(n-1)}{2}$. ■

1.4. Grupo de Isometrías del Espacio de Minkowski.

Definición 1.34. Sean M y N variedades pseudo-Riemannianas con tensores métricos \mathbf{g}_M y \mathbf{g}_N respectivamente. Una *isometría* de M a N es un difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow N$ que preserva el tensor métrico:

$$\varphi^*(\mathbf{g}_N) = \mathbf{g}_M.$$

Para hacerlo más evidente expresamos una isometría entre variedades diferenciales como aquellas aplicaciones que satisfacen $\langle d\varphi(u), d\varphi(w) \rangle = \langle u, w \rangle$ para todo $u, w \in T_p M$, $p \in M$. Puesto que φ es un difeomorfismo entonces la diferencial $d\varphi$ resulta un isomorfismo lineal, y así $d\varphi_p$ es una isometría lineal.

Observación 1.35. Las matrices del grupo $\mathfrak{O}_v(n)$ satisfacen la definición de isometría, con esto en mente veamos cuáles son todas las isometrías de \mathbb{R}_v^n . Se denotará en lo sucesivo al grupo de isometrías de \mathbb{R}_v^n a través de $\mathbf{I}(\mathbb{R}_v^n)$, en particular si $v = 1$ y $n \geq 2$, $\mathbf{I}(\mathbb{R}_1^n)$ es llamado *el grupo de Poincaré o grupo de Lorentz no-homogéneo*. Para ver cuál es el conjunto de todas estas transformaciones comencemos haciendo ver que el grupo de isometrías lineales de \mathbb{R}_v^n es el subgrupo $\mathfrak{O}_v(n)$. También si $w \in \mathbb{R}_v^n$, la función traslación

$$T_w : \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}_v^n : x \mapsto x + w,$$

es una isometría del espacio de Minkowski ($\langle dT_x(u), dT_x(w) \rangle = \langle u, w \rangle$ para todo $u, w \in \mathbb{R}_v^n$); y el conjunto de todas las traslaciones forman un subgrupo abeliano de $\mathbf{I}(\mathbb{R}_v^n)$ que resulta isomorfo a \mathbb{R}^n . Hasta este punto se sabe con seguridad que cada isometría en

\mathbb{R}_v^n tiene una única expresión como $T_x \circ g$, donde $x \in \mathbb{R}_v^n$ y $g \in \mathfrak{O}_v(n)$ ¹² y como extra se tiene la afirmación siguiente:

Proposición 1.36. $\mathbf{I}(\mathbb{R}_v^n)$ es un grupo de Lie.

Demostración: Puesto que $g \circ T_w = T_{gw} \circ g$ se tiene que el grupo de traslaciones es un subgrupo normal de $\mathbf{I}(\mathbb{R}_v^n)$ por lo cual se tiene la descomposición $\mathbf{I}(\mathbb{R}_v^n) = \mathbb{R}^n \ltimes \mathfrak{O}_v(n)$ en donde cada factor es un grupo de Lie y por ende $\mathbf{I}(\mathbb{R}_v^n)$ lo es. Como extra, en base a la proposición (1.33), se tiene que

$$\dim \mathbf{I}(\mathbb{R}_v^n) = \dim \mathbb{R}^n + \dim \mathfrak{O}_v(n) = \frac{n(n+1)}{2},$$

y se sigue además que $\mathbf{I}(\mathbb{R}_v^n)$ tiene cuatro componentes. ■

Observación 1.37. Restringiendo el conjunto de isometrías $\mathbf{I}(\mathbb{R}_{v+1}^{n+1})$ a las hipersuperficies \mathbb{H}_v^n y \mathbf{dS}_{v+1}^n ; se presentan los siguientes grupos de isometrías

$$\mathbf{I}(\mathbf{dS}_{v+1}^n) = \mathfrak{O}_{v+1}(n+1) \quad \text{y} \quad \mathbf{I}(\mathbb{H}_v^n) = \mathfrak{O}_{v+1}(n+1),$$

Para checar esto, se tiene que cada isometría lineal $h \in \mathfrak{O}_{v+1}(n+1) \subset \mathbf{I}(\mathbb{R}_{v+1}^{n+1})$ cumple con que $h(\mathbf{dS}_{v+1}^n) = \mathbf{dS}_{v+1}^n$ y así $\mathfrak{O}_{v+1}(n+1) \subset \mathbf{I}(\mathbb{R}_{v+1}^{n+1})$. Mientras que la aplicación

$$H : \mathfrak{O}_{v+1}(n+1) \rightarrow \mathbf{I}(\mathbf{dS}_{v+1}^n) : h \mapsto h|_{\mathbf{dS}_{v+1}^n}$$

donde $h|_{\mathbf{dS}_{v+1}^n}$ es sólo la restricción al espacio de de Sitter. Es claro que $H(h_1 \circ h_2) = h_1|_{\mathbf{dS}_{v+1}^n} \circ h_2|_{\mathbf{dS}_{v+1}^n}$ y H es un homomorfismo de grupos de Lie que evidentemente es inyectivo. En tanto que para verificar la suprayectividad de H se sabe que si $\varphi \in \mathbf{I}(\mathbb{R}_{v+1}^{n+1})$ existe una única transformación $h \in \mathfrak{O}_{v+1}(n+1)$ tal que $\varphi(e_{n+1}) = h(e_{n+1})$ y además $d\varphi(e_{n+1}) = dh(e_{n+1}) = h(e_{n+1})$ ¹³. Entonces $h|_{\mathbf{dS}_{v+1}^n} = \varphi$ y se concluye que $\mathbf{I}(\mathbf{dS}_{v+1}^n) = \mathfrak{O}_{v+1}(n+1)$. De igual manera como $\mathfrak{O}_{v+1}(n+1)(\mathbb{H}_v^n) = \mathbb{H}_v^n$ se tiene el siguiente isomorfismo de grupos de Lie

$$H : \mathfrak{O}_{v+1}(n+1) \rightarrow \mathbf{I}(\mathbb{H}_v^n) : h \mapsto h|_{\mathbb{H}_v^n}.$$

La acción de $\mathbf{SO}_1^{Id}(n+1)$ sobre \mathbb{H}^n .

Definición 1.38. Se introduce el subgrupo de $\mathfrak{O}_v(n)$ que preserva o invierte simultáneamente la orientación en \mathbb{R}_v^n , que denotamos por $\mathbf{SO}_v(n)$ y que lleva por nombre *grupo pseudo-especial ortogonal*, mediante el conjunto

$$\mathbf{SO}_v(n) := \{g \in \mathfrak{O}_v(n) \mid \det g = 1\}.$$

Inmediatamente aparece la igualdad

$$\mathbf{SO}_v(n) = \mathfrak{O}_v^{++}(n) \cup \mathfrak{O}_v^{--}(n),$$

y $\mathbf{SO}_v(n)$ es un subgrupo de Lie de $\mathfrak{O}_v(n)$, además es sencillo ver que el álgebra de Lie de $\mathbf{SO}_v(n)$ coincide con el álgebra de Lie de $\mathfrak{O}_v(n)$.

¹²Ver [On], pág. 240.

¹³Ver [On] página 113.

Teorema 1.39. Sea $\chi : G \times M \rightarrow M$ una acción izquierda y transitiva de un grupo de Lie sobre una variedad M . Si $m_0 \in M$ y H es su grupo de isotropía, entonces la función:

$$\zeta : G/H \rightarrow M : \sigma H \mapsto \chi_\sigma(m_0), \quad \text{para cada } \sigma H \in G/H.$$

es un difeomorfismo. \square

Teorema 1.40. Sean M y N variedades diferenciables. Supongamos que $\varphi : N \rightarrow M$ es C^∞ , que $(X, \psi)^{14}$ es una subvariedad de M y que φ se factoriza a través de (X, ψ) , es decir, $\varphi(N) \subset \psi(X)$. Como ψ es inyectiva, existe una única función $\varphi_0 : N \rightarrow X$ tal que $\psi \circ \varphi_0 = \varphi$. Así, si φ_0 es continua, entonces es también C^∞ y φ_0 es continua si ψ es un encaje.

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\varphi} & M \\ & \searrow \varphi_0 & \uparrow \psi \\ & & X \end{array}$$

\square^{15}

De igual manera que en el caso clásico $\mathbf{Gl}(n, \mathbb{R})$ actúa sobre \mathbb{R}_v^n mediante multiplicación por la izquierda a través de

$$\eta : \mathbf{Gl}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}_v^n : (\sigma, w) \mapsto \sigma(w) = \sigma \cdot w,$$

donde η es una acción diferenciable. Para definir una acción continua sobre la hoja positiva del hiperboloide (denotada por ${}^+\mathbb{H}^n$) se considera la componente de la identidad del grupo pseudo-especial ortogonal que se denotará por $\mathbf{SO}_1^{ld}(n+1)$, factoricemos pues la acción η a través de $({}^+\mathbb{H}^n, i)$, donde por supuesto i es la inclusión canónica; para esto último tenemos, por el teorema (1.40), el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{SO}_1^{ld}(n+1) \times {}^+\mathbb{H}^n & \xrightarrow{\eta} & \mathbb{R}_1^{n+1} \\ & \searrow \varphi_0 & \uparrow i \\ & & {}^+\mathbb{H}^n \end{array}$$

y tenemos una acción bien definida sobre ${}^+\mathbb{H}^n$ dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{SO}_1^{ld}(n+1) \times {}^+\mathbb{H}^n &\xrightarrow{\eta} {}^+\mathbb{H}^n \\ (g, w) &\mapsto g \cdot w \end{aligned}$$

Teorema 1.41. Para $n \geq 2$ se cumple

$${}^+\mathbb{H}^n \cong \mathbf{SO}_1^{ld}(n+1)/\mathbf{SO}(n).$$

¹⁴Aquí (X, ψ) es una inversión uno a uno, es decir, $d\psi$ es no singular para cada punto $m \in M$.

¹⁵Las demostraciones a estas últimas dos afirmaciones pueden ser consultadas en [Wa], págs 123 y 26 resp.

Demostración: Aplicando el teorema (1.39) a la acción

$$\eta : \mathbf{SO}_1^{Id}(n+1) \times {}^+\mathbf{H}^n \rightarrow {}^+\mathbf{H}^n : (g, w) \mapsto g \cdot w$$

la prueba se reduce a mostrar que η es una acción transitiva y a calcular el grupo de isotropía de un elemento, en particular de $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

En efecto la acción es transitiva: sea $\rho \in {}^+\mathbf{H}^n$, y $\beta := \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ una base ortonormal del espacio \mathbb{R}^{n+1} que tenga la orientación positiva tanto de tipo tiempo como de tipo espacio, y donde tomamos el primer elemento de esta base precisamente a $v_1 = \rho$. Para la base β tomemos la matriz $\alpha_\rho \in \mathbf{SO}_1^{Id}(n+1)$ tal que $\alpha(e_i) = v_i$ para $i \in \{1, \dots, n+1\}$. Así para cualesquiera dos elementos $\rho, \varrho \in {}^+\mathbf{H}^n$ podemos tomar $\alpha_\rho, \alpha_\varrho \in \mathbf{SO}_1^{Id}(n+1)$ y tenemos $\rho = \alpha_\rho \cdot \alpha_\varrho^{-1}(\varrho)$.

Para calcular el grupo de isotropía de e_1 , damos cuenta que las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0^\tau & \mathbf{SO}(n) \end{pmatrix}$$

cumplen con la propiedad $\sigma(e_1) = e_1$. Ahora sea $\sigma \in \mathbf{SO}_1^{Id}(n+1)$ tal que $\sigma(e_1) = e_1$ entonces las entradas $\sigma_{i1} = 0$ para $1 < i$ y $\sigma_{11} = 1$, pero como σ está en el grupo pseudo-ortogonal entonces $\sum_i \sigma_{1i}^2 = 1$ y entonces $\sigma_{ii} = 0$, con ello

$$\sigma \in \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0^\tau & \mathbf{SO}(n) \end{pmatrix}.$$

Como ya se mencionó $\mathbf{SO}_1^{Id}(n+1)$ es un grupo de Lie y $\mathbf{SO}(n)$ es de manera natural un subgrupo de Lie de $\mathbf{SO}_1^{Id}(n+1)$, así aplicamos el teorema (1.39) y de esta forma construir la función

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{SO}_1^{Id}(n+1)/\mathbf{SO}(n) &\rightarrow {}^+\mathbf{H}^n \\ \sigma(\mathbf{O}(n-1)) &\mapsto \sigma(e_1) \end{aligned}$$

que es un difeomorfismo. ■

Un resultado general motivado por el teorema anterior es

Teorema 1.42. *Para $1 < v < n$ se satisface*

$$\mathbb{H}_v^n \cong \mathfrak{O}_{v+1}(n+1)/\mathfrak{O}_v(n).$$

Demostración: Por la proposición (1.29) $\mathfrak{O}_{v+1}(n+1)$ actúa transitivamente en \mathbb{H}_v^n y para e_1 el grupo de isotropía es $\mathfrak{O}_v(n)$. Así se sigue la afirmación y \mathbb{H}_v^n es una variedad homogénea. ■

Teniendo en mente el difeomorfismo

$$\varphi : \mathbb{R}^v \times \mathbb{S}^{n-v} \rightarrow \mathbf{dS}_v^n : (x, y) \mapsto (x, (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}} y) \quad (1.12)$$

es claro que es una función diferenciable entrada a entrada y su inversa está dada por $(x, y) \mapsto (x, (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}} y)$. Así $\mathbb{H}_v^n \cong \mathbf{dS}_{n-v}^n$, afirmamos que sin importar la signatura el espacio hiperbólico y el espacio de de Sitter son homogéneos.

Capítulo 2

El Teorema de Liouville y Compactificación Conforme.

El capítulo presente es dedicado a una discusión detallada de las aplicaciones conformes en \mathbb{R}_v^n . Comenzamos con una construcción de la proyección estereográfica de \mathbb{R}_v^n sobre el espacio \mathbf{dS}_v^n , pues esto nos servirá para dar un tratamiento más sencillo y geométrico de las funciones conformes, además de ser fundamental para la construcción de la compactificación conforme de \mathbb{R}_v^n . Aquí también enunciamos la versión del teorema de Liouville en espacios pseudo-euclidianos y explicamos a detalle cómo se comportan los elementos del grupo conforme de \mathbb{R}_v^n cuando son extendidos a través de la compactificación conforme.

2.1. Proyección Estereográfica.

En esta primera sección generalizamos la noción de proyección estereográfica de \mathbb{R}^n a cualquier hipersuperficie cuadrática no singular tomando como referencia la ya conocida proyección estereográfica de \mathbb{R}^n en la esfera \mathbf{S}^n . Aquí hacemos los cálculos para el caso en que la superficie es el espacio de de Sitter \mathbf{dS}_v^n (análogamente para \mathbf{H}_v^n) jugando con un poco de geometría proyectiva. Así se introducen primero las definiciones de proyección estereográfica y espacio proyectivo que son la base para esta construcción.

Definición 2.1. Sean $\mathbf{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ la esfera unitaria de dimensión n y $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mediante el encaje

$$i_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} : x \mapsto (x, 0),$$

la aplicación

$$\varphi_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{S}^n : (x, 0) \mapsto \left(\frac{2x}{x \cdot x + 1}, \frac{x \cdot x - 1}{x \cdot x + 1} \right), \quad (2.1)$$

donde “ \cdot ” es el producto interior usual de \mathbb{R}^n (ver figura 2.1), es llamada la *proyección estereográfica* de \mathbb{R}^n sobre \mathbf{S}^n .

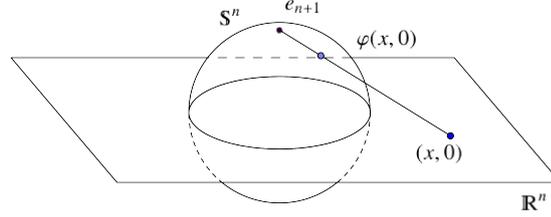


Figura 2.1: Proyección estereográfica.

Definición 2.2. Se define el *espacio proyectivo real* como el cociente $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$, donde \sim es la relación de equivalencia tal que si $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$, $x \sim y \Leftrightarrow x = \lambda y$, para algún $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. En adelante denotaremos al espacio proyectivo real de dimensión n como \mathbb{RP}^n y a la clase de equivalencia determinada por el vector x como $[x]$. Las coordenadas rectangulares (x_1, \dots, x_{n+1}) son llamadas las coordenadas homogéneas del punto $[x] \in \mathbb{RP}^n$, y quedan determinadas salvo un múltiplo escalar no nulo. Además se definen las cartas afines de \mathbb{RP}^n como $U_i := \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{RP}^n | x_i \neq 0\}$ con $i = \{1, \dots, n+1\}$.

Observación 2.3. De manera equivalente \mathbb{RP}^n se construye a través del cociente \mathbb{S}^n / \sim , donde la relación se reduce a pedir que $x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$, y por añadidura se presenta la proyección canónica

$$\pi_n : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n : x \mapsto [x],$$

a saber π_n se puede ver localmente como la identidad.

El camino a seguir en esta construcción es, como primer paso, tomar la inclusión

$$\mu_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} : x \mapsto (1, x), \quad (2.2)$$

y la aplicación de este hiperplano en \mathbb{RP}^n

$$\bar{\pi}_n : \mathbb{R}^n \rightarrow U_1 \subset \mathbb{RP}^n : x \mapsto [1, x], \quad (2.3)$$

que llamaremos una *proyectivización* de \mathbb{R}^n en \mathbb{RP}^n y que además resulta un encaje de \mathbb{R}^n en el espacio proyectivo correspondiente, es más, se tiene el difeomorfismo $\mathbb{R}^n \cong U_1$. Entonces con la función $\bar{\pi}_{n+1}$ podemos tomar la composición

$$\bar{\pi}_{n+1} \circ \varphi_n : \mathbb{R}^n \rightarrow U_1 \subset \mathbb{RP}^{n+1} : x \mapsto \left[1, \frac{2x}{x \cdot x + 1}, \frac{x \cdot x - 1}{x \cdot x + 1} \right], \quad (2.4)$$

con lo que vemos a \mathbb{R}^n como una esfera encajada en el espacio proyectivo, salvo el punto $[1, 0, \dots, 0, 1] \in U_1$. Así \mathbb{R}^n está encajado en \mathbb{RP}^{n+1} de manera adecuada, como $\mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\}$. Mientras tanto como $d\mathbb{S}_v^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ se tiene que $\bar{\pi}_{n+1}|_{d\mathbb{S}_v^n}$ define un encaje

2.1. PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA.

de \mathbf{dS}_v^n en $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$, entonces podemos tomar una transformación de $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$ que envíe esta esfera $\mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\}$ a \mathbf{dS}_v^n encajada en $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$. Con esta breve idea definamos la transformación

$$T_{n+1} : \mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$$

$$T_{n+1}[x_1, \dots, x_{n+2}] = \begin{bmatrix} (-x_2^2 - \dots - x_{v+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2 + (x_1 - x_{n+2})^2, \\ 2x_2(x_1 - x_{n+2}), \dots, 2x_{n+1}(x_1 - x_{n+2}), \\ -x_2^2 - \dots - x_{v+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2 - (x_1 - x_{n+2})^2 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

T_{n+1} cumple que $T_{n+1}[\lambda x] = \lambda^2 T_{n+1}[x] = T_{n+1}[x]$ para toda $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, es decir, T_{n+1} es homogénea y está bien definida en $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$. La transformación T_{n+1} nos ayudará a extender la proyección estereográfica definida en (2.1) hacia el espacio \mathbf{dS}_v^n de la siguiente manera: bajo la composición $T_{n+1}|_{U_1} \circ \bar{\pi}_{n+1} \circ \varphi_n$ y haciendo los cálculos respectivos se presenta la función siguiente

$$\eta_n(x_1, \dots, x_n) = \left[\begin{array}{c} \eta_n := T_{n+1}|_{U_1} \circ \bar{\pi}_{n+1} \circ \varphi_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1} \\ \frac{4(-x_1^2 - \dots - x_v^2 + \dots + x_n^2 + 1)}{(x \cdot x + 1)^2}, \frac{8x_1}{(x \cdot x + 1)^2}, \dots, \\ \frac{8x_n}{(x \cdot x + 1)^2}, \frac{4(-x_1^2 - \dots - x_v^2 + \dots + x_n^2 - 1)}{(x \cdot x + 1)^2} \end{array} \right] \quad (2.6)$$

donde $T_{n+1}|_{U_1}$ es sólo la restricción de T_{n+1} en la carta afín U_1 . Ahora como la imagen de η cae en $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$ y aquí trabajamos con coordenadas homogéneas, entonces se puede multiplicar la ecuación anterior por el factor $\frac{(x \cdot x + 1)^2}{4(-x_1^2 - \dots - x_v^2 + \dots + x_n^2 + 1)}$, y se obtiene

$$\eta_n(x_1, \dots, x_n) = \left[1, \frac{2x_1}{(-x_1^2 - \dots - x_v^2 + \dots + x_n^2 + 1)}, \dots, \frac{2x_n}{(-x_1^2 - \dots - x_v^2 + \dots + x_n^2 + 1)}, \frac{(-x_1^2 - \dots - x_v^2 + \dots + x_n^2 - 1)}{(-x_1^2 - \dots - x_v^2 + \dots + x_n^2 + 1)} \right].$$

Observamos que dicha transformación está bien definida salvo en los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen la ecuación $-x_1^2 - \dots - x_v^2 + \dots + x_n^2 + 1 = 0$, que es el conjunto definido por $\mathbb{H}_{v-1}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Además damos cuenta que los puntos de la imagen contenida en la carta afín U_1 satisfacen la ecuación $-x_2^2 - \dots - x_{v+1}^2 + \dots + x_{n+2}^2 - 1 = 0$ que describe puntualmente al espacio $\mathbf{dS}_v^n \in \mathbb{R}_v^{n+1}$ que está encajado en $U_1 \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$. Por último para definir la proyección de \mathbb{R}^n sobre \mathbf{dS}_v^n recordamos que U_1 es isomorfo a \mathbb{R}^{n+1} por lo que existe una inclusión natural de \mathbf{dS}_v^n en U_1 . Con esto se tiene bien definida la siguiente proyección estereográfica.

Definición 2.4. Sean $\mathbf{dS}_v^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -x_1^2 - \dots - x_v^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ el espacio de de Sitter de dimensión n con signatura v y $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mediante el encaje

$$i_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} : x \mapsto (x, 0).$$

La función

$$\eta_n : \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{H}_{v-1}^{n-1} \rightarrow \mathbf{dS}_v^n.$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{2x_1}{(-x_1^2 - \dots - x_n^2 + 1)}, \dots, \frac{2x_n}{(-x_1^2 - \dots - x_n^2 + 1)}, \frac{(-x_1^2 - \dots - x_n^2 - 1)}{(-x_1^2 - \dots - x_n^2 + 1)} \right)$$

define la proyección estereográfica de \mathbb{R}^n en \mathbf{dS}_v^n .

Ejemplo 2.5. Para el caso de \mathbb{R} y \mathbf{dS}_1^1 se tiene la expresión de la proyección estereográfica

$$\eta : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbf{dS}_1^1 : x \mapsto \left(\frac{2x}{-x^2 + 1}, \frac{-x^2 - 1}{-x^2 + 1} \right),$$

y observamos que en los puntos $\{-1, 1\}$ donde no está definida la función, es debido a que las rectas que pasan por e_2 y $\{-1\}$, y por e_2 y $\{1\}$ son paralelas a las asíntotas de la hipérbola dada por la ecuación $-x^2 + y^2 - 1 = 0$, es decir, \mathbf{dS}_1^1 .

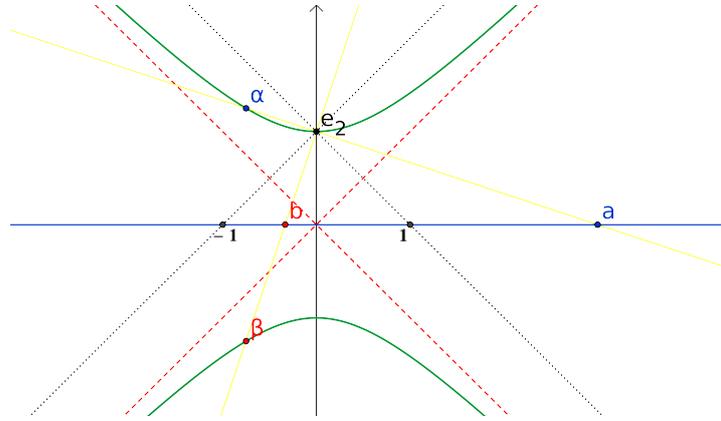


Figura 2.2: La proyección estereográfica de \mathbb{R} en \mathbf{dS}_1^1 , en donde α y β son las imágenes respectivas de a y b .

Observación 2.6. De igual manera se puede definir una proyección estereográfica de \mathbb{R}^n sobre cualquier otra hipersuperficie cuadrática no singular $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$; sólo basta encontrar una transformación proyectiva adecuada que envíe la esfera \mathbf{S}^n encajada en $U_1 \subset \mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1}$ a la inclusión de Q en $\mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1}$, la cual existe pues cualesquiera hipersuperficies cuadráticas no singulares son proyectivamente equivalentes, es decir, existe una aplicación proyectiva $T : \mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1}$ tal que $T(\mathbf{S}^n) = Q$. Para hacer claro este

argumento presentamos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}P^{n+1} & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}P_1^{n+1} \\
 \uparrow i & & \uparrow i \\
 U_1 & & \tilde{Q} \subset U_j \\
 \uparrow \pi_{n+1} & & \uparrow \vartheta \\
 \mathbf{S}^n & & Q \\
 \uparrow \varphi & \nearrow \eta_Q & \\
 \mathbb{R}^n & &
 \end{array}$$

en donde ϑ es un encaje de Q en alguna carta afín $U_j \subset \mathbb{R}P^{n+1}$ del mismo estilo que $\bar{\pi}_{n+1}$ y donde $\eta_Q := \vartheta^{-1} \circ i^{-1} \circ T \circ \bar{\pi}_{n+1} \circ \varphi_n$. η_Q es una función bien definida en \mathbb{R}^n salvo en los puntos que no caen en la carta afín U_j , después de aplicar la composición $T \circ i \circ \bar{\pi}_{n+1} \circ \varphi_n$.

2.2. Teorema de Liouville.

En esta sección comenzamos enunciando la definición de aplicación conforme y el teorema de Liouville para espacios pseudo-euclidianos, cuya demostración puede encontrarse en [An], [Na] y [Sp]. Nuestra intención aquí es desarrollar detalladamente cómo son las transformaciones conformes en \mathbb{R}_v^n y probar que son generadas por inversiones con respecto a pseudo-esferas.

Definición 2.7. Sea (M, g) una variedad pseudo-Riemanniana y $\varphi : M \rightarrow M$ un difeomorfismo. Diremos que φ es una *aplicación conforme* si satisface

$$g(d\varphi_p(u), d\varphi_p(w)) = \lambda^2(p)g(u, w) \quad \text{para todo } u, w \in T_pM, \text{ y } \lambda \in \mathcal{D}(M) \setminus 0.$$

donde $\mathcal{D}(M)$ representa el conjunto de todas la funciones diferenciables de M en \mathbb{R} .

Observación 2.8. Una función conforme φ es sólo un rescalamiento de M . Con la definición previa vemos primero que toda aplicación conforme preserva la causalidad de los vectores, ya que en el espacio tangente $g(d\varphi_p(u), d\varphi_p(u)) = \lambda^2(p)g(u, u)$ y donde $\lambda^2 > 0$ en todo $p \in M$. Por otra parte bajo la composición, el conjunto de transformaciones conformes forma un grupo llamado *el grupo conforme* que se denota por $\mathbf{Conf}(M)$.

Inmediatamente se tienen los siguientes resultados que se derivan de la definición de aplicación conforme e isometría.

Proposición 2.9. Sea (M, g) una variedad pseudo-Riemanniana. Para todo $\tau \in \mathbf{I}(M)$, τ es conforme. ■

Proposición 2.10. La homotecia

$$h_k : \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}_v^n : x \mapsto k \cdot x \quad \text{donde } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

es conforme. ■

Definición 2.11. De manera general se puede definir una esfera de radio $r \in \mathbb{R}$ con centro en $o \in \mathbb{R}_v^n$, como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}_v^n$ que satisfacen

$$\langle x - o, x - o \rangle_v = r.$$

Con esta condición, si el radio es no nulo, definimos una *esfera no degenerada*, y si $r = 0$ será una *esfera degenerada o singular*.

Teorema 2.12. (*Liouville (1850) en espacios con signatura arbitraria*.) Cada difeomorfismo conforme de \mathbb{R}_v^n tiene la forma

$$\gamma : \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}_v^n : x \mapsto k \circ g \circ i(x) + w,$$

donde $k \in \mathbb{R}/\{0\}$, $g \in \mathcal{O}_v(n)$, i es la identidad o una inversión en una pseudo-esfera, y $w \in \mathbb{R}_v^n$.

Inversiones en Pseudo-Esféricas.

Para esferas no degeneradas en \mathbb{R}_v^n y en base a la noción de polaridad se tiene la siguiente definición:

Definición 2.13. La aplicación

$$\phi_{r,o} : \mathbb{R}_v^n \setminus \mathbb{L}\mathbb{C}_v^{n-1}(o) \rightarrow \mathbb{R}_v^n \setminus \mathbb{L}\mathbb{C}_v^{n-1}(o) : x \mapsto o + \frac{r(x - o)}{\langle x - o, x - o \rangle_v} \quad (2.7)$$

donde $r \neq 0$ y $\mathbb{L}\mathbb{C}_v^{n-1}(o) := \{x \in \mathbb{R}_v^n | \langle x - o, x - o \rangle_v = 0\}$, es la inversión en la pseudo-esfera no singular de radio r y centro en o .

Ejemplo 2.14. En el caso de \mathbb{R}_1^2 se presenta el siguiente comportamiento, al considerar una inversión sobre la pseudo-esfera de radio -1 con centro en el origen (ver figura (2.2)):

$$\phi : \mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^2 : (x, y) \mapsto \left(\frac{-x}{-x^2 + y^2}, \frac{-y}{-x^2 + y^2} \right).$$

Aquí la matriz de la diferencial es

$$d\phi = \frac{1}{(-x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} -(x^2 + y^2) & -2xy \\ 2xy & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

la cual es invertible pues $\det(\phi) = -\frac{1}{(-x^2 + y^2)^2}$ que es no nula para puntos fuera del cono

2.2. TEOREMA DE LIOUVILLE.

de luz. Además, si (x, y) , $u = (u_1, u_2)$, $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}_1^2$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \langle d\phi_{(x,y)}(u), d\phi_{(x,y)}(w) \rangle &= \left\langle \frac{1}{(-x^2 + y^2)^4} (-(x^2 + y^2)u_1 - 2xyu_2, 2xyu_1 + (x^2 + y^2)u_2), \right. \\
 &\quad \left. (-(x^2 + y^2)w_1 - 2xyw_2, 2xyw_1 + (x^2 + y^2)w_2) \right\rangle \\
 &= \frac{1}{(-x^2 + y^2)^4} [-(x^2 + y^2)u_1 - 2xyu_2] [-(x^2 + y^2)w_1 - 2xyw_2] \\
 &\quad + [2xyu_1 + (x^2 + y^2)u_2] [2xyw_1 + (x^2 + y^2)w_2] \\
 &= \frac{1}{(-x^2 + y^2)^4} [-(x^2 + y^2)^2 u_1 w_1 - 4x^2 y^2 u_2 w_2 + 4x^2 y^2 u_1 w_1 + \\
 &\quad (x^2 + y^2)^2 u_2 w_2] \\
 &= \frac{1}{(-x^2 + y^2)^4} [(x^2 + y^2)^2 - 4x^2 y^2] (-u_1 w_1 + u_2 w_2) \\
 &= \frac{1}{(-x^2 + y^2)^4} [(-x^2 + y^2)^2 \langle u, w \rangle] \\
 &= \frac{1}{\langle (x, y), (x, y) \rangle^2} \cdot \langle u, w \rangle
 \end{aligned}$$

donde se define $\lambda((x, y)) := \frac{1}{\langle (x, y), (x, y) \rangle} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_1^2)$; entonces la inversión ϕ es una transformación conforme de \mathbb{R}_1^2 .

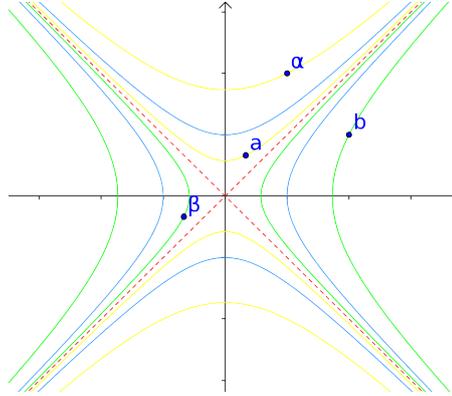


Figura 2.3: La inversión en la pseudo-esfera de radio -1 , en donde α y β son las imágenes respectivas de a y b bajo ϕ .

Proposición 2.15. Sea $n \geq 2$ y $0 < \nu < n$. La inversión $\phi_{r,o}$ en \mathbb{R}_ν^n , con $r \neq 0$, es una aplicación conforme.

Demostración: Podemos expresar a $\phi_{r,o}$ como

$$\phi_{r,o} = r\phi_{-1,0} + o, \quad \text{donde } o \in \mathbb{R}_\nu^n, r \in \mathbb{R}/\{0\},$$

es decir, cualquier inversión es la composición de la inversión en la pseudo-esfera de radio menos uno, una homotecia y una traslación. Por las proposiciones (2.9) y (2.10) las traslaciones y homotecias son conformes, así sólo basta verificar que $\phi_{-1,0}$ también lo es. Para ello al considerar $\phi_{-1,0}$ en términos de sus coordenadas obtenemos que la matriz de la diferencial $d\phi_{-1,0}$ es

$$\frac{2}{\langle x, x \rangle_v^2} \begin{pmatrix} -x_1^2 - \frac{\langle x, x \rangle_v}{2} & -x_1 x_2 & \cdots & -x_1 x_v & -x_1 x_{v+1} & \cdots & -x_1 x_n \\ -x_1 x_2 & -x_2^2 - \frac{\langle x, x \rangle_v}{2} & \cdots & -x_2 x_v & -x_2 x_{v+1} & \cdots & -x_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_1 x_v & -x_2 x_v & \cdots & -x_v - \frac{\langle x, x \rangle_v}{2} & -x_v x_{v+1} & \cdots & x_v x_n \\ x_1 x_{v+1} & x_2 x_{v+1} & \cdots & x_v x_{v+1} & -x_{v+1} - \frac{\langle x, x \rangle_v}{2} & \cdots & x_{v+1} x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 x_n & x_2 x_n & \cdots & x_v x_n & x_{v+1} x_n & \cdots & -x_n - \frac{\langle x, x \rangle_v}{2} \end{pmatrix}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_v^n$ y de igual manera que en el ejemplo (2.14) se obtiene

$$\langle d(\phi_{-1,0})_x(u), d(\phi_{-1,0})_x(w) \rangle_v = \frac{1}{\langle x, x \rangle_v^2} \cdot \langle u, w \rangle_v,$$

por lo cual, en \mathbb{R}_v^n , $\phi_{r,0}$ es una aplicación conforme. ■

Observación 2.16. Estas inversiones no satisfacen la condición de conformalidad en espacios euclidianos con la norma usual; si consideramos

$$d\phi_{1,0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{-x^2 + y^2}, \frac{y}{-x^2 + y^2} \right)$$

acompañada por su diferencial

$$d\phi_{1,0} = \frac{1}{(-x^2 - y^2)^2} \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & 2xy \\ -2xy & -(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

al verificar que se satisfagan las condiciones de conformalidad se presenta la siguiente ecuación

$$\langle d(\phi_{1,0})_x(u), d(\phi_{1,0})_x(w) \rangle = \frac{(x^2 + y^2)^2 + 4xy}{\langle x, x \rangle_1^4} \cdot \langle u, w \rangle + 2xy(x^2 + y^2)(u_1 w_2 + u_2 w_1)$$

lo que nos dice que esta inversión no es conforme en \mathbb{R}^2 .¹

Reflexiones

Toca el turno de analizar una reflexión en \mathbb{R}_v^n para un hiperplano no singular, es decir, un hiperplano generado por un vector no nulo; introducimos la noción de reflexión con respecto al hiperplano de la siguiente manera.

¹De igual manera una inversión con respecto a una esfera euclidiana en un espacio cuya métrica tenga signatura mayor que cero, ésta no resulta conforme allí.

Definición 2.17. Sean $\rho, o \in \mathbb{R}_v^n$, con $\langle \rho, \rho \rangle_v \neq 0$. Una reflexión con respecto al hiperplano dado por la condición $\langle \rho, x - o \rangle_v = 0$, viene dada como la aplicación:

$$\mathcal{R}_{\rho,o} : \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}_v^n : x \mapsto x - \frac{2\langle \rho, x - o \rangle_v}{\langle \rho, \rho \rangle_v} \rho.$$

Ejemplo 2.18. En \mathbb{R}_1^2 se tiene la siguiente reflexión con respecto a una recta que pasa por el origen

$$\mathcal{R}_{(a,b),(0,0)} : \mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^2 : (x, y) \mapsto (x, y) - \frac{2\langle (a, b), (x, y) \rangle_1}{\langle (a, b), (a, b) \rangle_1} (a, b),$$

donde $-a^2 + b^2 \neq 0$. Así $\mathcal{R}_{(a,b),(0,0)}(x, y) = \left(x - \frac{2(-ax+by)a}{-a^2+b^2}, y - \frac{2(-ax+by)b}{-a^2+b^2} \right)$ y calculando la matriz jacobiana de $\mathcal{R}_{(a,b),(0,0)}$ se tiene

$$d\mathcal{R}_{(a,b),(0,0)}|_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2a^2}{-a^2+b^2} & -\frac{2ab}{-a^2+b^2} \\ \frac{2ab}{-a^2+b^2} & 1 - \frac{2b^2}{-a^2+b^2} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

y evaluando para cualesquiera vectores $u, w \in T_{(x,y)}\mathbb{R}_1^2 \cong \mathbb{R}_1^2$ se presenta

$$d\mathcal{R}_{(a,b),(0,0)}|_{(x,y)}(u) = \frac{1}{-a^2 + b^2} \begin{pmatrix} (a^2 + b^2)u_1 - 2abu_2 \\ 2abu_1 - (a^2 + b^2)u_2 \end{pmatrix},$$

$$d\mathcal{R}_{(a,b),(0,0)}|_{(x,y)}(w) = \frac{1}{-a^2 + b^2} \begin{pmatrix} (a^2 + b^2)w_1 - 2abw_2 \\ 2abw_1 - (a^2 + b^2)w_2 \end{pmatrix}.$$

Al verificar la condición de conformalidad se tiene

$$\begin{aligned} \langle d\mathcal{R}_{(a,b),(0,0)}|_{(x,y)}(u), d\mathcal{R}_{(a,b),(0,0)}|_{(x,y)}(w) \rangle_1 &= \\ &= \frac{1}{(-a^2 + b^2)^2} \left\{ -[(a^2 + b^2)u_1 - 2abu_2][(a^2 + b^2)w_1 - 2abw_2] \right. \\ &\quad \left. + [2abu_1 - (a^2 + b^2)u_2][2abw_1 - (a^2 + b^2)w_2] \right\} \\ &= \frac{1}{(-a^2 + b^2)^2} \left[(a^2 + b^2)^2(-u_1w_1 + u_2w_2) - 4a^2b^2(-u_1w_1 + u_2w_2) \right] \\ &= \frac{1}{(-a^2 + b^2)^2} (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) \langle u, w \rangle_1 \\ &= \langle u, w \rangle_1 \end{aligned}$$

Así $d\mathcal{R}_{(a,b),(0,0)}$ es un aplicación conforme, es más, también es una isometría.

Proposición 2.19. Si $\rho, o \in \mathbb{R}_v^n$, con $\langle \rho, \rho \rangle_v \neq 0$, entonces la reflexión $\mathcal{R}_{\rho,o}$ es conforme.

Demostración: En efecto esta transformación es conforme en \mathbb{R}_v^n , más aún, $\langle d\mathcal{R}_{\rho,o}(u), d\mathcal{R}_{\rho,o}(w) \rangle_v = \langle u, w \rangle_v$, es decir, resulta una isometría. Para esta prueba sólo basta verificar el caso de reflexiones en hiperplanos de \mathbb{R}_v^n que contienen al origen. Así en el sistema coordenado de \mathbb{R}_v^n la función $\mathcal{R}_{\rho,0}$ se escribe

$$\mathcal{R}_{\rho,0}(x_1, \dots, x_n) := \left(x_1 - \frac{2\langle \rho, x \rangle_v}{\langle \rho, \rho \rangle_v} \rho_1, \dots, x_n - \frac{2\langle \rho, x \rangle_v}{\langle \rho, \rho \rangle_v} \rho_n \right),$$

y la diferencial es

$$d\mathcal{R}_\rho|_{(x_1, \dots, x_n)} = \left(\rho_{ij} = \begin{cases} 1 + \frac{2\rho_i^2}{\langle \rho, \rho \rangle_\nu} & \text{si } i = j \text{ y } 1 \leq i \leq \nu; \\ 1 - \frac{2\rho_i^2}{\langle \rho, \rho \rangle_\nu} & \text{si } i = j \text{ y } \nu + 1 \leq i \leq n; \\ \frac{2\rho_i \rho_j}{\langle \rho, \rho \rangle_\nu} & \text{si } i \neq j \text{ y } (i \leq \nu \text{ o } j \leq \nu); \\ -\frac{2\rho_i \rho_j}{\langle \rho, \rho \rangle_\nu} & \text{si } i \neq j \text{ y } (i \geq \nu \text{ y } j \geq \nu). \end{cases} \right);$$

y haciendo los cálculos pertinentes se tiene

$$\langle d\mathcal{R}_\rho(u), d\mathcal{R}_\rho(w) \rangle_\nu = \langle u, w \rangle_\nu, \quad (2.9)$$

y damos cuenta que $\mathcal{R}_\rho \in \mathbf{I}(\mathbb{R}_\nu^n)$. ■

Observación 2.20. Esto nos permite pensar que una reflexión en un hiperplano que contiene al origen resulta no otra cosa que un elemento del grupo $\Phi_\nu(n)$, pues \mathcal{R}_ρ también es lineal. Con esto último en mente hacemos la acotación que el conjunto de rotaciones en \mathbb{R}_ν^n con centro en el origen, es generado por reflexiones, es más, en [Ce] se afirma que cada transformación ortogonal en \mathbb{R}_ν^n es el producto de a lo mas n reflexiones en hiperplanos.

Proposición 2.21. Sea $\mathcal{R}_{\omega,0}$ una reflexión con respecto a un hiperplano no singular, entonces $\mathcal{R}_{\omega,0}$ es el límite de una familia de inversiones.

Demostración: Para la reflexión $\mathcal{R}_{\omega,0} = x - \frac{2\langle \omega, x \rangle_\nu}{\langle \omega, \omega \rangle_\nu} \omega$, consideremos el siguiente conjunto de inversiones $\mathcal{A} = \{\phi_{r^2\langle \omega, \omega \rangle_\nu, r\omega} | r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, en donde para cada $\phi_{r^2\langle \omega, \omega \rangle_\nu, r\omega} \in \mathcal{A}$ se tiene

$$\begin{aligned} \phi_{r^2\langle \omega, \omega \rangle_\nu, r\omega} &= r\omega + \frac{r^2\langle \omega, \omega \rangle_\nu}{\langle x - r\omega, x - r\omega \rangle_\nu} (x - r\omega) \\ &= \frac{r\omega\langle x - r\omega, x - r\omega \rangle_\nu + r^2\langle \omega, \omega \rangle_\nu (x - r\omega)}{r^2\langle \omega - \frac{x}{r}, \omega - \frac{x}{r} \rangle_\nu} \\ &= \frac{\langle \omega, \omega \rangle_\nu}{\langle \omega - \frac{x}{r}, \omega - \frac{x}{r} \rangle_\nu} x - \frac{(r\langle \omega, \omega \rangle_\nu \omega - r\langle \omega - \frac{x}{r}, \omega - \frac{x}{r} \rangle_\nu \omega)}{\langle \omega - \frac{x}{r}, \omega - \frac{x}{r} \rangle_\nu} \\ &= \frac{\langle \omega, \omega \rangle_\nu}{\langle \omega - \frac{x}{r}, \omega - \frac{x}{r} \rangle_\nu} x - \frac{(2r\langle \omega, \frac{x}{r} \rangle_\nu - \frac{1}{r}\langle x, x \rangle_\nu)}{\langle \omega - \frac{x}{r}, \omega - \frac{x}{r} \rangle_\nu} \omega, \end{aligned}$$

aplicando límite cuando $r \rightarrow \pm\infty$ se sigue

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\langle \omega, \omega \rangle_\nu}{\langle \omega - \frac{x}{r}, \omega - \frac{x}{r} \rangle_\nu} x - \frac{(2r\langle \omega, \frac{x}{r} \rangle_\nu - \frac{1}{r}\langle x, x \rangle_\nu)}{\langle \omega - \frac{x}{r}, \omega - \frac{x}{r} \rangle_\nu} \omega = x - \frac{2\langle \omega, x \rangle_\nu}{\langle \omega, \omega \rangle_\nu} \omega. \quad \blacksquare$$

Veamos también que tanto las homotecias y las translaciones resultan también ser el límite de alguna familia de inversiones

Proposición 2.22. Una homotecia, $h_k : \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}_v^n : x \mapsto k \cdot x$ con $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y una traslación $\tau_w : \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}_v^n : x \mapsto x + w$ con $w \in \mathbb{R}_v^n$, son límite de una familia de inversiones.

Demostración: Una homotecia es la composición de dos inversiones concéntricas

$$\phi_{r_2,0} \circ \phi_{r_1,0}(x) = \phi_{r_2,0} \left(\frac{r_1 x}{\langle x, x \rangle_v} \right) = \frac{r_1}{r_2} x,$$

para $r_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tales que $\frac{r_1}{r_2} = c$, donde c es el factor de la homotecia. En tanto que una traslación se construye como la composición de dos reflexiones en hiperplanos paralelos dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(w, \frac{3}{4}w)} \circ \mathcal{R}_{(w, \frac{w}{4})}(x) &= \mathcal{R}_{(w, \frac{3}{4}w)} \left(x - \frac{2\langle w, x - \frac{w}{4} \rangle_v}{\langle w, w \rangle_v} w \right) \\ &= x - \frac{2\langle w, x - \frac{w}{4} \rangle_v}{\langle w, w \rangle_v} w - \frac{2\langle w, x - \frac{2\langle w, x - \frac{w}{4} \rangle_v}{\langle w, w \rangle_v} w - \frac{3}{4}w \rangle_v}{\langle w, w \rangle_v} w \\ &= x - \frac{2w}{\langle w, w \rangle_v} \left[\langle w, 2x - w - \frac{2\langle w, x - \frac{w}{4} \rangle_v}{\langle w, w \rangle_v} w \rangle_v \right] \\ &= x - \frac{2w}{\langle w, w \rangle_v} \left[\langle w, 2x - w \rangle_v - \frac{2}{\langle w, w \rangle_v} \langle w, x - \frac{w}{4} \rangle_v \langle w, w \rangle_v \right] \\ &= x - \frac{2w}{\langle w, w \rangle_v} \left[2\langle w, x - \frac{w}{2} \rangle_v - 2\langle w, x - \frac{w}{4} \rangle_v \right] \\ &= x - \frac{2w}{\langle w, w \rangle_v} \left[2\langle w, -\frac{w}{4} \rangle_v \right] \\ &= x + w \end{aligned}$$

e invocando la proposición (2.21) se tiene que las traslaciones son generadas por inversiones. ■

Por otra parte tenemos la siguiente afirmación cuya demostración radica en que las traslaciones y las funciones lineales ortogonales son isometrías.

Proposición 2.23. En \mathbb{R}_v^n la función

$$\varphi : \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}_v^n : x \mapsto a\mu \cdot x + b$$

donde $a \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathfrak{O}_v(n)$ y $b \in \mathbb{R}_v^n$, es un aplicación conforme. ■

Observación 2.24. Aquí damos cuenta, puesto $\mathfrak{O}_v(n) \subset \mathbf{Conf}(\mathbb{R}_v^n)$, que el grupo conforme de \mathbb{R}_v^n es no compacto pues contiene a $\mathfrak{O}_1(2)$, mediante el homomorfismo de grupos de Lie

$$\begin{pmatrix} \cosh(r_2) & \sinh(r_2) \\ \sinh(r_2) & \cosh(r_2) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cosh(r_2) & 0 & \sinh(r_2) \\ 0 & Id_{(n-2)} & 0 \\ \sinh(r_2) & 0 & \cosh(r_2) \end{pmatrix},$$

por lo que visto, a $\mathfrak{O}_1(2)$, como subconjunto de \mathbb{R}^{n^2} no está acotado; así $\mathbf{Conf}(\mathbb{R}_v^n)$ como subconjunto de \mathbb{R}^{n^2} no es compacto.

Aquí generalizamos el ya conocido teorema de Liouville en espacios con métrica de signatura v , donde $0 \leq v \leq n$.

Teorema 2.25. *El conjunto de transformaciones conformes de \mathbb{R}_v^n es generado por inversiones en pseudo-esferas.* ■

Demostración: Por el teorema de Liouville (2.12) toda transformación conforme es composición de una inversión, un homotecia, una función lineal pseudo-ortogonal y una traslación. Mientras que por las proposiciones (2.21) y (2.22) y la observación (2.20) se tiene que las homotecias, traslaciones y funciones lineales pseudo-ortogonales son generadas por inversiones. ■

2.3. Compactificación Conforme

En la sección pasada observamos que los generadores del grupo conforme $\mathbf{Conf}(\mathbb{R}_v^n)$ no estaban definidos en todo \mathbb{R}_v^n (ver ecuación 2.7), entonces nuestro objetivo es extender las inversiones a todo \mathbb{R}_v^n . Con este objetivo en mente, primero definimos la proyección estereográfica sobre una pseudo-esfera haciendo uso de la métrica e introducimos la noción de perspectiva en \mathbf{dS}_v^n . Ya con estas dos definiciones veremos la relación que guarda una inversión y una perspectiva a través de la proyección estereográfica.

Proyección Estereográfica y Perspectiva en Pseudo-Esferas.

Considérese el encaje

$$i : \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}_v^{n+1} : x \mapsto (x, 0)$$

y sea $e_{n+1} \in \mathbb{R}_v^{n+1}$. Con este encaje la métrica de \mathbb{R}_v^{n+1} restringida a \mathbb{R}_v^n es la métrica con signatura v . En base a la construcción de la sección (2.1) y tomando en consideración la métrica de \mathbb{R}_v^n , se presenta la *proyección estereográfica* de \mathbb{R}_v^n a \mathbf{dS}_v^n como

$$\eta_n : (\mathbb{R}_v^n \setminus \mathbb{H}_{v-1}^{n-1}) \times \{0\} \rightarrow \mathbf{dS}_v^n : x \mapsto x + \frac{\langle x, x \rangle_v - 1}{\langle x, x \rangle_v + 1} e_{n+1}. \quad (2.10)$$

Observación 2.26. Con esta presentación, η_n es biyectiva entre el conjunto de puntos de \mathbb{R}_v^n donde $\langle x - e_{n+1}, x - e_{n+1} \rangle_v \neq 0$, y aquellos puntos que no están en la intersección de dicha pseudo-esfera con el hiperplano $x_{n+1} = 1$, que es un cono. Observar que tanto el conjunto $\mathbb{H}_{v-1}^{n-1} \subset \mathbb{R}_v^n$ como el cono inmerso en \mathbf{dS}_v^n donde la proyección estereográfica no está bien definida, son hipersuperficies cuadráticas. η_n así definida, salvo en los elementos ya mencionados, resulta un difeomorfismo.

Proposición 2.27. La proyección estereográfica $\eta_n : (\mathbb{R}_v^n \setminus \mathbb{H}_{v-1}^{n-1}) \times \{0\} \rightarrow \mathbf{dS}_v^n$ es una aplicación conforme.

Demostración: Para probar esto sólo reescribimos la proyección η_n como:

$$\begin{aligned}\eta_n(x) &= \frac{2x}{\langle x - e_{n+1}, x - e_{n+1} \rangle_v} + \frac{(\langle x, x \rangle_v + 1 - 2)}{\langle x - e_{n+1}, x - e_{n+1} \rangle_v} e_{n+1} \\ &= \frac{2(x - e_{n+1})}{\langle x - e_{n+1}, x - e_{n+1} \rangle_v} + \frac{(\langle x, x \rangle_v + 1)}{\langle x - e_{n+1}, x - e_{n+1} \rangle_v} e_{n+1} \\ &= e_{n+1} + \frac{2}{\langle x - e_{n+1}, x - e_{n+1} \rangle_v} (x - e_{n+1})\end{aligned}$$

que no es otra cosa que una inversión de \mathbb{R}_v^{n+1} , por lo que restringiendo esta inversión a los espacios en cuestión, y apelando al teorema (2.15) la función η_n resulta conforme. ■

Ahora introducimos la noción de perspectiva en \mathbf{dS}_v^n ; estas aplicaciones se corresponden con inversiones en pseudo-esferas en espacios pseudo-Euclidianos al tomar en cuenta la proyección estereográfica, es decir, si ϑ_w es una perspectiva entonces tiene asociada una única inversión en \mathbb{R}_v^n dada por $\eta_n^{-1} \circ \vartheta_w \eta_n$.

Definición 2.28. Sea $w \in \mathbb{R}_v^{n+1} \setminus \mathbf{dS}_v^n$. Observando a \mathbf{dS}_v^n desde w a cada punto $x \in \mathbf{dS}_v^n$ le asignamos el elemento $\vartheta(x)$ que es el punto donde la recta, que une w con x , vuelve a intersecar a \mathbf{dS}_v^n . Esta relación define una función a la que llamamos *una perspectiva* de \mathbf{dS}_v^n desde el punto w . Una perspectiva está dada por

$$\vartheta_w : \mathbf{dS}_v^n \rightarrow \mathbf{dS}_v^n : x \mapsto \frac{\langle w, w \rangle_v - 1}{1 - 2\langle w, x \rangle_v + \langle w, w \rangle_v} x + \frac{2(1 - \langle w, x \rangle_v)}{1 - 2\langle w, x \rangle_v + \langle w, w \rangle_v} w, \quad (2.11)$$

y w es llamado *el polo* de la perspectiva ϑ_w .

Proposición 2.29. Una perspectiva de \mathbf{dS}_v^n es una función conforme.

Demostración: Una perspectiva dada por la ecuación (2.11) se puede reducir a la siguiente forma

$$\begin{aligned}\vartheta_w(x) &= \frac{\langle w, w \rangle_v - 1}{1 - 2\langle w, x \rangle_v + \langle w, w \rangle_v} x + \frac{(1 - 2\langle w, x \rangle_v - \langle w, w \rangle_v) + (1 - \langle w, w \rangle_v)}{1 - 2\langle w, x \rangle_v + \langle w, w \rangle_v} w \\ &= w + \frac{\langle w, w \rangle_v - 1}{1 - 2\langle w, x \rangle_v + \langle w, w \rangle_v} x + \frac{(1 - \langle w, w \rangle_v)}{1 - 2\langle w, x \rangle_v + \langle w, w \rangle_v} w \\ &= w + \frac{\langle w, w \rangle_v - 1}{\langle x - w, x - w \rangle_v} (x - w),\end{aligned}$$

que expresa una inversión en una esfera no singular de \mathbb{R}_v^{n+1} , con centro en w y radio $\langle w, w \rangle_v - 1$. Y se tiene que las perspectivas son también conformes pues en esencia son reflexiones con respecto al plano generado por w ; y así queda justificado el nombre de polo de la perspectiva ϑ_w con el que denominamos a w . ■

Proyectivización del Grupo Pseudo-Ortogonal.

Considerando la métrica en $\mathbf{S}^n \subset \mathbb{R}_v^{n+1}$ como la restricción de $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$ sobre \mathbf{S}^n , entonces podemos inducir una métrica en $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$, así $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ tiene asociada una forma cuadrática con signatura v y escribimos $\mathbb{R}\mathbf{P}_v^n$.

Definición 2.30. Sea $\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$; la proyectivización de $\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1}$ en $\mathbb{R}\mathbb{P}_{v+1}^{n+1}$ es la intersección de $\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1}$ con \mathbb{S}^{n+1} después de aplicar la relación \sim dada en la definición (2.2). A la proyectivización del cono $\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1}$ se denota por $\mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1} := \pi(\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1} \cap \mathbb{S}^{n+1})$.

Para cualquier isometría lineal $h \in \mathfrak{O}_{v+1}(n+2) \subset \mathbf{I}(\mathbb{R}_{v+1}^{n+2})$ se satisface, por la proposición (1.29), que $\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1}$ es invariante, además h induce una isometría en $\mathbb{R}\mathbb{P}_{v+1}^{n+1}$ dada por

$$\tilde{h} : \mathbb{R}\mathbb{P}_{v+1}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}_{v+1}^{n+1} : [x] \mapsto [h(x)],$$

es decir $\tilde{h} = \pi \circ h \circ \pi^{-1}$, que deja invariante a $\mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1}$, es más, por la relación \sim se tiene

$$\pi \circ h(x) = \tilde{h}[x] = \tilde{h}[-x] = \pi \circ h \circ (-Id)(x)$$

por lo que h y $h \circ (-Id)$ definen la misma transformación en el espacio proyectivo que deja invariante $\mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1}$.

Definición 2.31. El cociente $\mathfrak{O}_{v+1}(n+2)/\{Id_{(n+2)}, -Id_{(n+2)}\}$ es el conjunto de transformaciones rígidas de $\mathbb{R}\mathbb{P}_{v+1}^{n+1}$ que llamamos el *grupo proyectivo pseudo-ortogonal* que denotaremos en adelante por $\mathbb{P}\mathfrak{O}_{v+1}(n+2)$.

Aquí presentamos algunas propiedades importantes para $\mathbb{P}\mathfrak{O}_{v+1}(n+2)$.

Proposición 2.32. Sea $\chi : \mathbb{P}\mathfrak{O}_{v+1}(n+2) \times \mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1} : (h, [x]) \mapsto (h[x])$ la acción de $\mathbb{P}\mathfrak{O}_{v+1}(n+2)$ sobre $\mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1}$, entonces $\mathbb{P}\mathfrak{O}_{v+1}(n+2)$ actúa transitivamente en $\mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1}$.

Demostración: Invocando el teorema (1.29) se tiene que $\mathfrak{O}_{v+1}(n+2)$ actúa de forma transitiva sobre $\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1}$, y particularmente actúa transitivamente en $\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1} \cap \mathbb{S}^{n+1} \cong \{\mathbb{S}^n \times \mathbb{Z}_2\}$. Sean $[x], [y] \in \mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1}$, tomando la preimagen de estas dos clases debemos considerar dos puntos en $\{\mathbb{S}^n \times \mathbb{Z}_2\}$ y analizar dos casos. El primero que x e y estén en la misma componente y como $\mathfrak{O}_{v+1}(n+2)$ actúa allí transitivamente, es decir, existe $g \in \mathfrak{O}_{v+1}(n+2)$ tal que $g(x) = y$ que reescribimos como $g \circ Id(x) = y$. Si x e y están en diferentes componentes, sólo basta tomar $-Id(x) = -x$ y se tiene que y y $-x$ ya se encuentran en la misma componente, y volviendo a aplicar el argumento previo se sigue que $h \circ -Id(x) = y$ para alguna $h \in \mathfrak{O}_{v+1}(n+2)$. Por lo tanto χ es una acción transitiva. ■

Observación 2.33. Por definición, para toda $g \in \mathbb{P}\mathfrak{O}_{v+1}(n+2)$ resulta una isometría, lo que implica que $g \in \mathbf{Conf}(\mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1})$.

Proposición 2.34. $\mathbb{P}\mathfrak{O}_{v+1}(n+2)$ es un grupo de Lie y $\dim(\mathbb{P}\mathfrak{O}_{v+1}(n+2)) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

Demostración: En efecto, como ya se sabe, $\mathfrak{O}_{v+1}(n+2)$ es un grupo de Lie y $\{Id_{(n+2)}, -Id_{(n+2)}\}$ es claramente un subgrupo normal y cerrado de $\mathfrak{O}_{v+1}(n+2)$, entonces $\mathbb{P}\mathfrak{O}_{v+1}(n+2) = \mathfrak{O}_{v+1}(n+2)/\{Id_{(n+2)}, -Id_{(n+2)}\}$ es un grupo de Lie. Y como extra $\dim(\mathbb{P}\mathfrak{O}_{v+1}(n+2)) = \dim(\mathfrak{O}_{v+1}(n+2)/\{Id_{(n+2)}, -Id_{(n+2)}\}) = \dim(\mathfrak{O}_{v+1}(n+2))$ es decir su dimensión es $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. ■

Compatificación Conforme de \mathbb{R}_v^n .

Sea $\mathbb{HP}_{(e_{n+2}, e_{n+2})}$ el hiperplano generado por el vector canónico e_{n+2} de \mathbb{R}_{v+1}^{n+2} que pasa por el punto e_{n+2} ; la ecuación a este plano es $x_{n+2} = 1$. Observar que $\mathbb{HP}_{(e_{n+2}, e_{n+2})} \cong \mathbb{R}_{v+1}^{n+1}$. Con esto se tiene que $\mathbb{HP}_{(e_{n+2}, e_{n+2})} \cap \mathbb{LC}_{v+1}^{n+1} \cong \mathbb{H}_v^n$.

Observación 2.35. Generalizando el argumento último, para cualquier otro $w \in \mathbb{R}_{v+1}^{n+2}$, de carácter causal tipo tiempo o espacio y $\mathbb{HP}_{(w, u)}$ el hiperplano generado por w que pasa por $u \neq 0$ (al aplicar una isometría adecuada de \mathbb{R}_{v+1}^{n+2}) se tiene que

$$\mathbb{HP}_{(w, u)} \cap \mathbb{LC}_{v+1}^{n+1} \cong \begin{cases} \mathbf{dS}_v^n & \text{si } \langle w, w \rangle_{v+1} < 0; \\ \mathbb{H}_v^n & \text{si } \langle w, w \rangle_{v+1} > 0, \end{cases}$$

de manera respectiva, en donde se tienen las aplicaciones conformes entre \mathbb{R}_v^n y \mathbf{dS}_v^n (o \mathbb{H}_v^n) dados por el difeomorfismo de la ecuación (2.10).

Ahora encajemos \mathbb{R}_v^n sobre \mathbb{PLC}_{v+1}^{n+1} , tomando primero la siguiente proyección estereográfica

$$\varphi_{e_{n+2}} : \mathbb{R}_v^n \setminus \mathbb{H}_{v-1}^{n-1} \rightarrow \mathbf{dS}_v^n \subset \mathbb{HP}_{(e_{n+2}, e_{n+2})} : (0, x, 1) \mapsto \left(\frac{\langle x, x \rangle_v - 1}{\langle x, x \rangle_v + 1}, \frac{2x}{\langle x, x \rangle_v + 1}, 1 \right) \quad (2.12)$$

y después tomando la proyectivización de $\mathbf{dS}_v^n \subset \mathbb{HP}_{(e_{n+2}, e_{n+2})}$ en \mathbb{PLC}_{v+1}^{n+1} .

Proposición 2.36. La función

$$\pi_{n+1} \circ \varphi_{e_{n+2}} : \mathbb{R}_v^n \setminus \mathbb{H}_{v-1}^{n-1} \rightarrow \mathbb{PLC}_{v+1}^{n+1},$$

resulta un encaje conforme. ■

Proposición 2.37. La función $\pi_{n+1} \circ \varphi_{e_{n+2}} : \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{PLC}_{v+1}^{n+1}$ es densa.

Demostración: Dado que la imagen de \mathbb{R}_v^n bajo $\varphi_{e_{n+2}}$ es densa y abierta en \mathbf{dS}_v^n , sólo no está bien definida en el cono dado por la intersección $\mathbf{dS}_v^n \cap \{x_{n+1} = 1\}$, mientras π_{n+1} se comporta localmente como la identidad sobre $\mathbf{dS}_v^n \cap \mathbb{S}^{n+1}$, y por tanto $\pi_{n+1} \circ \varphi_{e_{n+2}}$ es un encaje conforme de \mathbb{R}_v^n cuya imagen es abierta y densa en \mathbb{PLC}_{v+1}^{n+1} . ■

Observación 2.38. Todos los puntos donde no está bien definida $\varphi_{e_{n+2}}$ (una hipersuperficie cuadrática) se ven reflejados en el complemento de $\pi_{n+1} \circ \varphi_{e_{n+2}}(\mathbb{R}_v^n)$ en \mathbb{PLC}_{v+1}^{n+1} . Para visualizar con mayor claridad cómo se agrega dicho cono², tomamos la aplicación

$$\vartheta : \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{PLC}_{v+1}^{n+1} : x \mapsto \left[\frac{1}{2}(\langle x, x \rangle_v + 1), x, \frac{1}{2}(\langle x, x \rangle_v - 1) \right].$$

La transformación ϑ lleva \mathbb{R}_v^n a la intersección $\mathbb{LC}_{v+1}^{n+1} \cap \{x_1 - x_{n+2} = 1\}$ que es una aplicación con la propiedad de conformalidad para después llevar a \mathbb{PLC}_{v+1}^{n+1} con la proyección canónica π , y así también ϑ es una inclusión conforme de \mathbb{R}_v^n cuya imagen

²Aquí un cono es una hipersuperficie cuadrática proyectiva.

es densa y abierta en $\mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1}$. Para la función ϑ el complemento de la imagen $\vartheta(\mathbb{R}_v^n)$ es el cono ya mencionado y es descrito puntualmente por la proyección de la intersección $\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1} \cap \{x_1 = x_{n+2}\}$ que es el cono que cumple con la ecuación $-x_2^2 - \dots - x_{v+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 0$.

También cabe mencionar la compacidad de $\mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1}$, que es obvia. Así queda bien justificada la siguiente definición:

Definición 2.39. $\mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1}$ es llamada *la compactificación conforme* de \mathbb{R}_v^n .

Para finalizar veamos que el grupo de conforme de \mathbb{R}_v^n es exactamente $\mathbb{P}\mathbb{O}_{v+1}(n+2)$. La importancia de esta afirmación es que las transformaciones conformes no están bien definidas en todo \mathbb{R}_v^n , así encajamos \mathbb{R}_v^n en $\mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1}$ y allí vemos como actúa una transformación conforme de manera global.

Definición 2.40. Sea $\mathcal{R}_{y,0}$ una reflexión de \mathbb{R}_{v+1}^{n+2} , donde $y \notin \mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1}$. se define una perspectiva en la compactificación conforme de \mathbb{R}_v^n con respecto a la clase $[y]$ como la aplicación

$$\tilde{\xi}_{[y]} : \mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1} : [x] \mapsto \pi \circ \mathcal{R}_{y,0} \circ \pi^{-1}[x].$$

Ahora analicemos cómo cada inversión de \mathbb{R}_v^n se corresponde con una perspectiva de $\mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1}$ bajo la aplicación ϑ . Primero recordemos que el grupo $\mathbb{O}_{v+1}(n+2)$ es generado por reflexiones, entonces $\mathbb{P}\mathbb{O}_{v+1}(n+2)$ estará generado por una transformación del tipo $\pi \circ \mathcal{R}_{y,0} \circ \pi^{-1}$, es decir una perspectiva de $\mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1}$. Así tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.41. $\mathbb{P}\mathbb{O}_{v+1}(n+2)$ es generado por perspectivas $\tilde{\xi}_{[y]} : \mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1}$, donde $\langle y, y \rangle_{v+1} \neq 0$. ■

Teorema 2.42.

$$\mathbf{Conf}(\mathbb{R}_v^n) \cong \mathbb{P}\mathbb{O}_{v+1}(n+2).$$

Demostración: Bajo la inclusión ϑ la pseudo-esfera $\mathbf{d}\mathbb{S}_v^{n-1}$ de \mathbb{R}_v^n es llevada a la intersección de hiperplano $\langle p, y \rangle_{v+1} = 0$ de $\mathbb{R}\mathbb{P}_{v+1}^{n+1}$ donde p es el polo dado por $p = [0, 0, \dots, -1]$. Como $\mathbf{d}\mathbb{S}_v^{n-1}$ es una esfera no singular, la inversión en esta esfera

$$\varphi : \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}_v^n : x \mapsto \frac{x}{\langle x, x \rangle_v}$$

se corresponde con la perspectiva

$$\tilde{\xi}_{[p]} : \mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{L}\mathbb{C}_{v+1}^{n+1} : [x] \mapsto \left[x - \left(\frac{2\langle p, x \rangle_{v+1}}{\langle p, p \rangle_{v+1}} \right) p \right]$$

de donde $\tilde{\xi}_{[p]} := \vartheta \circ \varphi \circ \vartheta^{-1}$. Asimismo al componer dicha inversión con una traslación y homotecia adecuadas afirmamos que la inversión en cualquier pseudo-esfera $\langle x - a, x - a \rangle_v = k$ de \mathbb{R}_v^n se corresponde con la perspectiva $\tilde{\xi}_{\left[\frac{(a,a)_v - k + 1}{2}, a, \frac{(a,a)_v - k - 1}{2} \right]}$. Entonces por la proposición (2.41), $\mathbb{P}\mathbb{O}_{v+1}(n+2)$ es generado por perspectivas que se corresponde con inversiones en pseudo-esferas de \mathbb{R}_v^n , las que probamos generaban a $\mathbf{Conf}(\mathbb{R}_v^n)$. Por tanto $\mathbf{Conf}(\mathbb{R}_v^n) \cong \mathbb{P}\mathbb{O}_{v+1}(n+2)$, donde el difeomorfismo es

$$\Xi : \mathbf{Conf}(\mathbb{R}_v^n) \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{O}_{v+1}(n+2) : \sigma \mapsto (\vartheta) \circ (\sigma) \circ (\vartheta)^{-1}.$$

■

Índice alfabético

- álgebra de Lie, 2
- acción
 - efectiva, 9
 - izquierda, 9
 - transitiva, 9
- aplicación conforme, 29
- aplicación exponencial, 4
- compactificación conforme, 40
- cono de luz, 2
- espacio
 - de de Sitter, 2
 - de Minkowski, 1
 - hiperbólico, 2
 - proyectivo, 26
- G-órbita, 10
- grupo
 - conforme, 29
 - de isotropía, 10
 - de Lie, 2
 - de Lorentz, 3
 - de Poincaré, 21
 - general lineal, 3
 - proyectivo pseudo-ortogonal, 38
 - pseudo-especial ortogonal, 22
 - pseudo-ortogonal, 3
- inversión, 30
- isometría, 21
- matriz
 - de signatura, 3
 - pseudo-antisimétrica, 5
- orientación, 6
- perspectiva, 37
- proyección estereográfica, 25
- proyectivización, 26
- pseudo-esfera, 2, 30
- reflexión, 33
- representación, 12
- Teorema de Liouville, 29, 30
- variedad
 - pseudo-Riemanniana, 1
- vector
 - tipo espacio, 2
 - tipo luz, 2
 - tipo tiempo, 2

Bibliografía

- [Ad] Adams Jeffrey. Representation Theory of Lie Groups. American Mathematical Society. 2000. Estados Unidos.
- [An] Anglés Pierre Conformal Groups And Geometry of Spin Structures. Birkhäuser. 2008. Estados Unidos.
- [Br] Bröcker Theodor, Tammo tom Dieck, Representation of Compact Lie Groups. Springer. 1985. Estados Unidos.
- [Ce] Cecil Thomas. Lie Sphere Geometry. Segunda edición. Springer. 2008. Estados Unidos.
- [Iz] S. Izumiya, D. Pei, M. C. Romero Fuster and M Takahashi. The Horospherical Geometry of submanifolds in Hiperbolic Space. London Mathematical Society. 255 (2) 71 (2005) 779-800.
- [Ko] T. Kobayashi. 'Asymptotic behaviour of the null variety for a convex domain in a non-positively curved space form', J. Fac. Sci. Tokyo Univ. 36 (1989) 389-478.
- [Le] Levy Harry. Projective and Related Geometries. The Macmillan Company. 1964. Estados Unidos.
- [Na] Nakahara M. Geometry, Topology an Physics. Adam Hilger. 1990. Inglaterra.
- [On] O'Neill Barrett. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Academic Press. 1983. Estados Unidos.
- [Sp] Spivak M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Volumen tres. Segunda edición. Publish or Perish Inc.. 1997. Estados Unidos.
- [Ro] Rosenfeld Boris Geometry of Lie Gruops. Kluwer Academic Publishers. 1997. Paises Bajos.
- [Wa] Warner Frank. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. Springer. 1983. Estados Unidos.
- [Wy] Wylie, Jr. C. R. Introduction to Projective Geometry. Dover Publications Inc. 1970. Estados Unidos.