



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INTRODUCIR “CRANKING” EN EL MODELO
SEMIMICROSCÓPICO DE CÚMULOS
NUCLEARES Y TRANSICIONES DE FASE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

GIOVANI ERICK MORALES HERNÁNDEZ



DIRECTOR DE TESIS:

DR. PETER OTTO HESS BECHSTEDT

2012



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Morales
Hernández
Giovani Erick
5539258132

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
303103611

2. Datos del tutor

Dr
Peter Otto
Hess
Bechstedt

3. Datos del sinodal 1

Dr
Roelof
Bijker
Bijker

4. Datos del sinodal 2

Dra
Myriam
Mondragón
Ceballos

5. Datos del sinodal 3

Dr
Huitzilin
Yépez
Martínez

6. Datos del sinodal 4

Dr
Enrique
López
Moreno

7. Datos del trabajo escrito

Introducir “cranking” en el modelo semimicroscópico de cúmulos nucleares y transiciones de fase

-

125p

2012

Índice general

1. Objetivo.	5
2. Introducción.	6
3. Descripción del Modelo Fenomenológico Algebraico de Cúmulos (PACM) y del Modelo Semimicroscópico Algebraico de Cúmulos (SACM).	9
4. Estados coherentes y transiciones de fase para el PACM y el SACM.	19
4.1. El Modelo Fenomenológico Algebraico de Cúmulos (PACM). . .	19
4.1.1. Estado coherente para el PACM.	19
4.1.2. Energía potencial para el PACM.	20
4.2. El Modelo Semimicroscópico Algebraico de Cúmulos (SACM). . .	33
4.2.1. Estado coherente para el SACM.	33
4.2.2. Energía potencial para el SACM.	34
5. Ajuste de los parámetros de interacción para el sistema $^{16}\text{O}+\alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$.	46
6. Transiciones de fase en el PACM y en el SACM con “cranking”.	49
6.1. Estudio de las transiciones de fase en PACM con “cranking” para el caso del sistema $^{16}\text{O}+\alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$	49
6.2. Estudio de las transiciones de fase en SACM con “cranking” para el caso del sistema $^{16}\text{O}+\alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$	50
7. Conclusión y futuro.	52
A. Grupos unitarios.	54
B. El modelo de vibrones.	61

C. Presentación general de los estados coherentes.	64
C.1. Estados coherentes estándar. El oscilador armónico unidimensional.	64
C.2. El Modelo Fenomenológico Algebraico de Cúmulos (PACM).	68
C.2.1. Estado coherente para el PACM.	68
C.3. El Modelo Semimicroscópico Algebraico de Cúmulos (SACM).	69
C.3.1. Estado coherente para el SACM.	69
D. El método del “cranking”.	70
E. Transiciones de fase con “cranking”.	74
E.1. Definición de transición de fase.	74
E.2. Transiciones de fase y su relación con Física Nuclear.	74
E.2.1. Transiciones de fase térmicas.	74
E.2.2. Transiciones de fase cuánticas.	75
E.3. Determinación de las transiciones de fase con “cranking” y su orden.	75
E.4. Transiciones de fase para el PACM con “cranking” (caso general).	77
E.4.1. Transición de la Región I a la Región II	80
E.4.2. Transición de la Región III a la Región IV para $B \leq 0$	81
E.5. Transiciones de fase para el SACM con “cranking” (caso general).	82
F. Cálculo explícito de los valores de expectación en PACM.	85
G. Cálculo explícito de los valores de expectación en SACM.	91
H. Cálculo explícito de los valores de expectación de $\langle \hat{L}_x \rangle$ y $\langle \hat{L}^2 \rangle$ para el PACM y el SACM.	102
H.1. Cálculo explícito de los valores de expectación de $\langle \hat{L}_x \rangle$ y $\langle \hat{L}^2 \rangle$ para el PACM.	103
H.2. Cálculo explícito de los valores de expectación de $\langle \hat{L}_x \rangle$ y $\langle \hat{L}^2 \rangle$ para el SACM.	107
I. Cálculo explícito de \hat{L}_x y \hat{L}^2 en términos de α para el PACM y el SACM.	110
J. Cálculos explícitos importantes relacionados al PACM.	113
K. Cálculos explícitos importantes relacionados al SACM.	117

Capítulo 1

Objetivo.

El objetivo principal de esta tesis es estudiar las Transiciones de Fase (entre las simetrías $SU(3)$ y $SO(4)$) con “cranking” para un núcleo ligero formado por 2 cúmulos esféricos. El núcleo ligero será descrito mediante dos modelos algebraicos como lo son: El Modelo Fenomenológico Algebraico de Cúmulos (PACM, por sus siglas en inglés) el cual no toma en cuenta el principio de exclusión de Pauli y el Modelo Semimicroscópico Algebraico de Cúmulos (SACM, por sus siglas en inglés) que si toma en cuenta el principio de exclusión de Pauli. Para ambos modelos se realizará un estudio sobre las Transiciones de Fase y se discutirán los resultados obtenidos.

Capítulo 2

Introducción.

Los Modelos de Cúmulos Algebraicos como el Modelo Fenomenológico Algebraico de Cúmulos (PACM, por sus siglas en inglés) y el Modelo Semimicroscópico Algebraico de Cúmulos (SACM, por sus siglas en inglés) fueron propuestos para la descripción de núcleos ligeros considerando que estos pueden estar conformados por dos cúmulos nucleares separados entre si [1,2]. El Modelo de Vibrones pertenece al grupo del PACM [3,4] mientras que SACM [1,2] pertenece al grupo de modelos semimicroscópicos. Una descripción más detallada de ambos modelos, se dará a conocer en los siguientes capítulos. En términos generales, la mayor diferencia entre ambos modelos es que en el SACM se toma en cuenta el Principio de Exclusión de Pauli, mientras que en el PACM no. En nuestro caso, utilizaremos estos dos modelos algebraicos para poder describir al sistema $^{16}\text{O}+\alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$. Este sistema tiene la peculiaridad de estar conformado por dos cúmulos que son esféricos. En ambos modelos, nos restringimos a ciertas simetrías dinámicas (casos límite), por lo que el Hamiltoniano que representa al sistema, será puesto en términos de ciertos operadores invariantes llamados operadores de Casimir que son obtenidos a partir de ciertas cadenas de grupos. Una desventaja por parte de los modelos algebraicos es que es difícil visualizar las propiedades geométricas de los cúmulos. Para poder analizar estas propiedades, se opta por un mapeo geométrico para ambos modelos algebraicos, utilizando el método de estados coherentes [5].

Los Estados Coherentes no solamente han sido aplicados al IBA (Interacting Boson Approximation, por sus siglas en inglés) o a moléculas [6,7], sino que también a otros modelos algebraicos, los cuales tienen un origen dentro del modelo de capas. En [8] el mapeo geométrico, usando el método de estados coherentes vectorial [9], fue aplicado, mapeando del modelo pseudo-simpléctico [10] al modelo geométrico del núcleo [11]. El mapeo geométrico es de gran uso para el cálculo de espectros nucleares [12,13] y para predecirlos en el caso de núcleos super pesados [14]. En [15], el método de estados coherentes fue usado para obtener el mapeo geométrico del Modelo Semimicroscópico Algebraico de Cúmulos (SACM) [1,2].

El valor esperado del Hamiltoniano algebraico con respecto al estado coherente es mejor conocido como el Potencial Semi-Clásico [16]. A través del comportamiento de este potencial, como una función en un espacio de parámetros (parámetros que controlan la transición de una simetría a otra) las transiciones de fase, así como su orden pueden ser estudiados, investigando los efectos que causa el principio de exclusión de Pauli, para el caso del SACM.

El interés del mapeo geométrico, usando estados coherentes no se ha perdido. Una de las principales razones es que sistemas de muchas partículas en conjunción con las transiciones de fase pueden ser fácilmente tratados.

En años recientes, las transiciones de fase en moléculas atómicas y nucleares fueron investigadas [17,18,19,20], con la ayuda del método de estados coherentes. El tipo de cambio de fase discutidos ahí, importante para el contexto de estudios presentados en esta contribución, está relacionado al límite $SU(3)$ y $SO(4)$ y las transición entre ellos en una molécula, la cual puede consistir de dos átomos o dos núcleos. Nosotros nos limitaremos a 2 cúmulos descritos por los modelos algebraicos como lo son el PACM y el SACM. Aunque hay mucha investigación en transiciones de fase para el PACM, la aplicación actual a núcleos es muy rara. Sólo en [21], en los inicios del Modelo de Vibrones, y en [22] hemos encontrado aplicaciones a sistemas de cúmulos nucleares.

Hay una forma que se puede considerar como una extensión para tratar Hamiltonianos dentro y fuera de simetrías dinámicas. Nos referimos al método del “cranking” [23,24] el cual impone rotaciones al sistema, esto nos permitirá generar bandas de energía rotacionales y nos permitirá un cálculo de momentos de inercia. Cambios en el comportamiento rotacional están relacionados con transiciones de fase cuánticas para estados excitados, de las cuales se hablará de una forma más detallada en el apéndice E. De esta manera, el método del “cranking”, no sólo nos permite estudiar diferentes transiciones de fase sino que también nos da gran información del espectro y de los momentos de inercia. El formalismo del “cranking” ha sido aplicado [31,32] al IBA (Interacting Boson Approximation, por sus siglas en inglés) [25].

El presente trabajo tiene la siguiente estructura:

En el capítulo 3: Se da una explicación general de los modelos de cúmulos algebraicos PACM y SACM. En este capítulo también se propone un Hamiltoniano para un sistema de dos cúmulos esféricos con “cranking”.

En el capítulo 4: Para ambos modelos (PACM y SACM) se introducirán los estados coherentes respectivos para poder hacer el mapeo geométrico de estos modelos algebraicos de cúmulos de tal manera que al tomar el valor esperado del Hamiltoniano para dos cúmulos esféricos con “cranking”, podamos obtener una Superficie de Energía Potencial (PES, por sus siglas en inglés) o potencial

semi-clásico.

En el capítulo 5: Se da el ajuste de parámetros de interacción para el sistema $^{16}\text{O}+\alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$.

En el capítulo 6: Dada la superficie de energía potencial obtenida para el PACM y el SACM en el capítulo 4, se muestra un estudio computacional de las transiciones de fase para ambos modelos y se aplica al sistema de $^{16}\text{O}+\alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$ utilizando el ajuste dado en el capítulo 5. Se presenta una discusión de los resultados obtenidos.

En el capítulo 7: Por último, se darán las conclusiones de todo el trabajo realizado en esta tesis, además se plantean las posibles aplicaciones futuras.

Capítulo 3

Descripción del Modelo Fenomenológico Algebraico de Cúmulos (PACM) y del Modelo Semimicroscópico Algebraico de Cúmulos (SACM).

Hoy en día se cuentan con diferentes modelos para la descripción de moléculas y cúmulos. A principios de los ochenta un modelo fenomenológico algebraico de cúmulos mejor conocido como el Modelo de Vibrones (VM por sus siglas en inglés) fue introducido para la descripción de estados quasi-moleculares y estados de cúmulos [3].

En su forma original, el VM tiene una estructura de grupo $U(4)$ para tomar en cuenta el movimiento relativo de un sistema de 2 cúmulos. Sus aplicaciones se encuentran en el área de sistemas de núcleos ligeros [40-42] y otros sistemas moleculares atómicos. Al ser combinado con un modelo de bosones interactuantes o con un modelo de fermiones interactuantes, se logro una descripción de los grados de libertad internos de los cúmulos, por lo que el enfoque algebraico permitió describir sistemas de cúmulos más complicados, incluyendo ejemplos de núcleos pesados [4].

Por muchos años, varios métodos de teoría de grupos han sido utilizados para el estudio de cúmulos, pero la relación entre el enfoque fenomenológico y microscópico no ha quedado clara. En otras palabras, faltaba el fundamento

microscópico del VM y sus extensiones.

La aplicación del VM a algunas bandas de cúmulos bien establecidas para núcleos ligeros, muestran la necesidad de modificar las suposiciones del espacio modelo [2] y el factor espectroscópico de cúmulo [2,22]. El VM parece ser que funciona en la descripción de cúmulos pero sigue mostrando problemas en la construcción de estados, por ejemplo en el límite de $SO(4)$ con $L = 0$ (definido en el apéndice B), el valor esperado para el operador $\hat{\mathbf{n}}_\pi = (\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi})$ con $m = 0, \pm 1$ es dado por [43]:

$$\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle = \frac{N - 1}{2} \quad (3.1)$$

El problema es que cuando N aumenta, la estructura de los estados cambia, implicando no convergencia de los mismos. La descripción completa del VM se da en el apéndice B de éste trabajo.

Con la modificación del sector de movimiento relativo en la parte de enfoque fenomenológico los sistemas de dos cúmulos doblemente mágicos podían describirse razonablemente bien, sin embargo, el espacio del modelo todavía no era apto para otros sistemas de cúmulos [2]. Para superar estas dificultades se propuso un enfoque semimicroscópico algebraico a los problemas de cúmulos nucleares [2].

En el Modelo de Vibrones y sus extensiones, en conjunto mejor conocidos como el Modelo Fenomenológico Algebraico de Cúmulos (PACM por sus siglas en ingles), la estructura de grupo muestra dos vertientes. No sólo los estados base están caracterizados por las etiquetas de la representación de los grupos sino que también las interacciones se expresan en términos de los operadores del grupo. Este método nos lleva a una simplificación más: para casos especiales se pueden obtener las soluciones analíticas del problema de eigenvalores y para el caso general la matriz de ecuaciones que hay que resolver no tiene una dimensión demasiado grande. Uno de los posibles conjuntos de bases para la descripción del movimiento relativo se obtiene por medio del grupo $SU(3)$. Este enfoque es fácil de aplicar pero sus funciones de onda no están antisimetrizadas.

La conexión entre la descripción fenomenológica y microscópica esta dada por la presencia del grupo $SU(3)$, es decir, mediante la aplicación del oscilador armónico base. A partir de esta conexión, el Modelo Semimicroscópico Algebraico de Cúmulos (SACM por sus siglas en ingles) toma en cuenta el principio de exclusión de Pauli y la interacción cúmulo - cúmulo se expresa en términos de los generadores del grupo.

Para el PACM y el SACM es elegido el modelo de Elliot $SU(3)$ [33] para la descripción de cúmulos individuales. En principio uno también podría utilizar el IBA [25], como se realiza en muchos modelos algebraicos de cúmulos [4]. Es elegida esta posibilidad porque en el SACM (y el PACM) los cúmulos tienen que ser descritos dentro del modelo de capas que se representa apropiadamente

por el mismo modelo de Elliot.

Por todo lo anterior, se considera que el movimiento relativo se describe por medio del modelo de vibrones mientras que los grados internos de libertad (estructura interna) se tratan en términos del modelo de capas del $SU(3)$ y los estados prohibidos de la base acoplada $SU(3)$ se excluyen.

Como se puede ver en el apéndice B donde se hace referencia al VM, para el SACM se puede realizar una misma construcción en términos de operadores (vectoriales de espín 1 y escalares de espín 0) de creación y aniquilación bosónicos. Como los grados internos de libertad se pueden entender en términos del modelo de capas del oscilador armónico, entonces los grados de libertad vendrían siendo oscilaciones en 3 dimensiones las cuales pueden ser descritas en términos de los operadores bosónicos vectoriales $\hat{\pi}_\mu (\mu = 0, \pm 1)$.

Hablando ahora de los operadores bosónicos escalares para el SACM, mejor conocidos como operadores $\hat{\sigma}$, estos tienen la finalidad de establecer un corte para mantener constante el número de bosones totales $\hat{N} = \hat{n}_\pi + \hat{n}_\sigma$.

Hay ciertas condiciones que los operadores bosónicos vectoriales y escalares cumplen:

1. La componente contravariante del operador de aniquilación es relacionada con la componente covariante mediante:

$$\hat{\pi}^m = (-1)^{1-m} \hat{\pi}_{-m} \quad (3.2)$$

Algo parecido ocurriría con $\hat{\pi}_m^\dagger$.

2. Las relaciones de conmutación para los operadores bosónicos (vectoriales y escalares) de creación y aniquilación son:

$$[\hat{\pi}^{m'}, \hat{\pi}_m^\dagger] = \delta_m^{m'} \quad [\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^\dagger] = 1 \quad (3.3)$$

Dada la construcción anterior en términos de operadores bosónicos de creación y aniquilación, uno puede construir con ellos a los generadores del grupo $\hat{U}(3)$ y $\hat{U}(4)$:

- Generadores de $\hat{U}(3)$

$$\hat{\pi}_m^\dagger \hat{\pi}^{m'} \quad (3.4)$$

- Generadores adicionales para $\hat{U}(4)$

$$\hat{\pi}_m^\dagger \hat{\pi}^{m'} \quad \hat{\pi}_m^\dagger \hat{\sigma} \quad \hat{\sigma}^\dagger \hat{\pi}^m \quad \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \quad (3.5)$$

En el lenguaje de teoría de grupos, el SACM (así como el PACM) para dos cúmulos está descrito por la siguiente estructura de grupos:

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{c}
SU_{C_1}(3) \otimes SU_{C_2}(3) \otimes SU_R(3) \supset \\
| \quad (\lambda_1, \mu_1) \quad (\lambda_2, \mu_2) \quad (n_\pi, 0)
\end{array} \\
\supset \begin{array}{c}
SU_C(3) \otimes SU_R(3) \supset \\
(\lambda_C, \mu_C) \quad (n_\pi, 0)
\end{array} \\
\supset \begin{array}{c}
SU(3) \supset SO(3) \supset SO(2) \\
(\lambda, \mu) \quad \kappa L \quad M \quad \rangle
\end{array}
\end{array} \quad (3.6)$$

Aquí (λ_k, μ_k) se refiere a la representación irreducible de SU_{C_k} del k-ésimo cúmulo, (λ, μ) es la representación irreducible de $SU(3)$, (λ_C, μ_C) es la representación irreducible de $SU_C(3)$, mientras que L es el momento angular total, M la proyección del mismo y n_π es el número de cuantas de oscilación relativas. En el caso de κ , esta es utilizada para distinguir ocurrencias múltiples de una L en (λ, μ) . La cadena anterior puede ser utilizada para la clasificación de los estados del SACM y del PACM.

Como podemos observar en la ecuación (3.6), los estados base del SACM (y del PACM) se caracterizan por tener como etiquetas a las representaciones irreducibles (números cuánticos) propias de cada grupo. En términos de representaciones irreducibles, lo que se está realizando es un acoplamiento de representaciones irreducibles (λ_k, μ_k) pertenecientes a $SU_{C_k}(3)$ con la representación irreducible $(n_\pi, 0)$ perteneciente a la parte relativa $SU_R(3)$. Dicho acoplamiento resulta en un conjunto de representaciones irreducibles totales (λ, μ) (tomando en cuenta el principio de exclusión de Pauli para el SACM, pero no así para el PACM). Entonces, dado el acoplamiento de representaciones irreducibles para 2 cúmulos, se obtiene que:

$$(\lambda_1, \mu_1) \otimes (\lambda_2, \mu_2) \otimes (n_\pi, 0) = \sum_{(\lambda, \mu)} m_{\lambda, \mu}^{1,2}(\lambda, \mu) \quad (3.7)$$

Como se dijo anteriormente, el SACM toma en cuenta principio de exclusión de Pauli, pero para esto es necesario imponer una condición mínima que nos garantice un mínimo de cuantas de oscilación relativas, a dicha condición se le llama *Condición de Wildermuth*. De esta manera, para el SACM hay un número mínimo de cuantas n_0 de oscilación relativa mientras que en el PACM el número mínimo de cuantas de oscilación relativa n_0 es cero (ya que no toma en cuenta el principio de exclusión).

Una vez que se han obtenido las representaciones irreducibles totales, estas últimas son comparadas con las representaciones irreducibles del Modelo de Capas $SU(3)$. Finalmente nos quedamos con las representaciones irreducibles

totales que coincidan con las representaciones irreducibles del Modelo de Capas. Las representaciones irreducibles que se obtuvieron son las pertenecientes al Espacio de Hilbert considerado en el SACM.

De manera gráfica, lo que estamos haciendo es una intersección del Espacio del Modelo de Capas con el Espacio Preliminar dado por la ecuación (3.7). El espacio obtenido de la intersección es el espacio del modelo SACM.

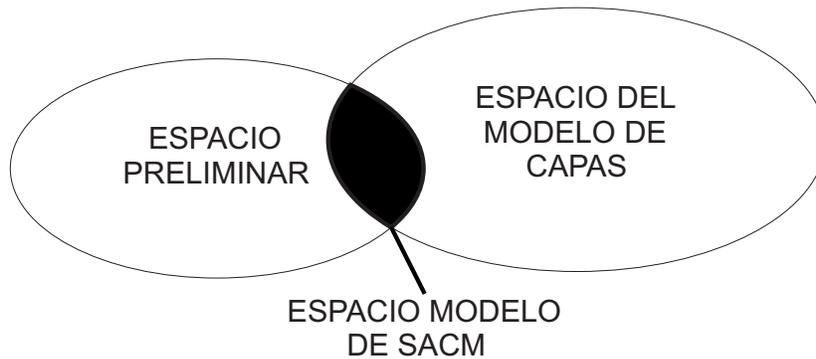


Figura 3.1: Representación gráfica de la intersección entre el espacio preliminar y el espacio del modelo de capas.

Un ejemplo típico de aplicación del SACM es sobre el núcleo ^{20}Ne descrito por el sistema de dos cúmulos ^{16}O y α ($^{16}\text{O} + \alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$) los cuáles se toman como cúmulos esféricos sin estructura. Esto es sólo una definición porque como sabemos, cada uno de estos cúmulos está conformado por nucleones. A continuación se muestran los diagramas de ocupación de capas correspondientes a los núcleos ^{16}O y α para el sistema unido ^{20}Ne .

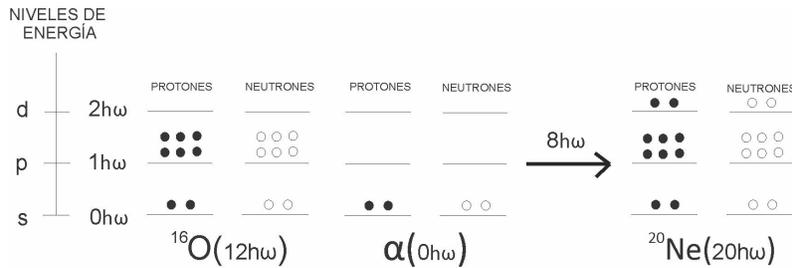


Figura 3.2: Modelo de Capas para cúmulos individuales ($^{16}\text{O}, \alpha$) y para el sistema unido (^{20}Ne).

Del anterior diagrama se puede observar que para el ^{16}O , el número total de cuantas en el modelo de capas es 12 ya que $4 \cdot 0 + 12 \cdot 1 = 12$. Para el caso de la partícula α , el número total de cuantas en el modelo de capas es 0 ya que $4 \cdot 0 = 0$. De ambos casos se obtiene un total de 12 cuantas de oscilación. Si ahora se toma el caso del sistema de cúmulos unido ^{20}Ne , el número de cuantas de oscilación total es 20 ya que $4 \cdot 0 + 12 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 20$. La diferencia entre el número total de cuantas de oscilación relativas de los sistemas individuales ^{16}O y α y el sistema de cúmulos unido ^{20}Ne es 8.

De lo anterior, llegamos a la conclusión que para que exista el sistema ^{20}Ne (con sus 20 cuantas en el modelo de capas), es necesario añadir 8 cuantas como mínimo. Si se añadieran menos de 8 cuantas (digamos 7 cuantas), significaría que para que pudiera existir el sistema ^{20}Ne , se tendría al menos un nucleón en un estado que se encuentra ya en su máxima ocupación, violando así el Principio de Exclusión de Pauli.

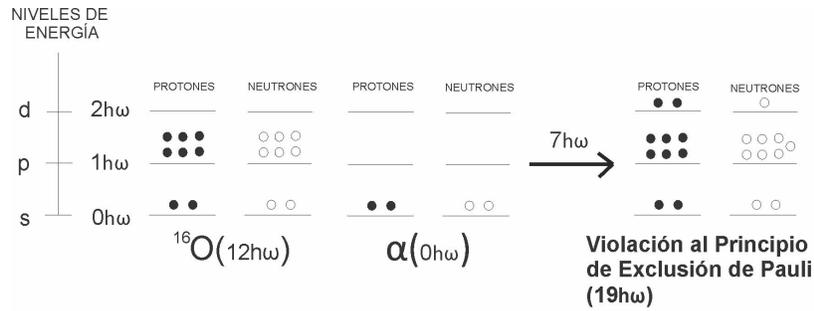


Figura 3.3: Violación del Principio de Exclusión de Pauli.

Por lo tanto, para que exista el sistema ^{20}Ne con sus 20 cuantas de oscilación, es necesario un mínimo $n_0 = 8$ de cuantos de oscilación relativa. Dicha condición se conoce como la *Condición de Wildermuth*.

Como se puede observar en el apéndice B, para el caso del VM, generalmente los operadores de cantidades físicas (como el Hamiltoniano) pueden ser expresados en términos de un acoplamiento hasta cierto orden de los generadores del grupo, por lo que el problema de eigenvalores es resuelto por diagonalización numérica. Sin embargo, es muy importante el caso límite, llamado simetría dinámica.

Para el modelo del SACM (o del PACM), si sólo tomamos en cuenta la parte del movimiento relativo, encontraremos que hay dos casos límites que presentan soluciones analíticas. Dichas simetrías dinámicas son la simetría dinámica de $SU(3)$ y la simetría dinámica de $SO(4)$. La cadena de grupo que corresponde a cada simetría dinámica se muestra a continuación:

■ SIMETRÍA DINÁMICA $SU(3)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 U_R(4) & \supset & SU_R(3) & \supset & SO_R(3) & \supset & SO_R(2) \\
 [N, 0, 0, 0] & & (n_\pi, 0) & & L_R & & M_R
 \end{array} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
 n_\pi &= N, N-1, \dots, 1, 0 \\
 L_R &= n_\pi, n_\pi-2, \dots, 1 \text{ o } 0 \\
 M_R &= L_R, L_R-1, \dots, -L_R
 \end{aligned}$$

■ SIMETRÍA DINÁMICA $SO(4)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 U_R(4) & \supset & SO_R(4) & \supset & SO_R(3) & \supset & SO_R(2) \\
 [N, 0, 0, 0] & & (\omega, 0) & & L_R & & M_R
 \end{array} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
 \omega &= N, N-2, \dots, 1 \text{ o } 0 \\
 L_R &= \omega, \omega-1, \dots, 1, 0 \\
 M_R &= L_R, L_R-1, \dots, -L_R
 \end{aligned}$$

El límite $SU(3)$, corresponde a la vibración del sistema alrededor de una forma de equilibrio esférica (para el PACM), mientras que el límite $SO(4)$ describe la deformación dipolar estática. Se muestra en la Figura 3.4 para los modelos del PACM y del SACM, los límites de $SU(3)$ y $SO(4)$ de forma grafica.

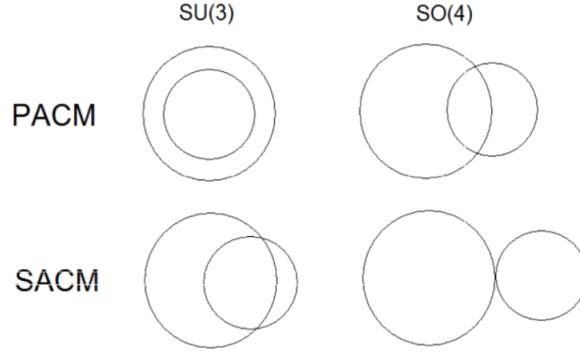


Figura 3.4: Representaciones gráficas de las simetrías $SU(3)$ y $SO(4)$ para los modelos del PACM y del SACM. Como se puede ver, para SACM hay una distancia mínima entre los centros de los cúmulos obtenida a partir del número mínimo de cuantas relativas presentes en este modelo ($r_0 \approx \sqrt{n_0}$) [15].

Un sistema cuántico puede ser representado por un Hamiltoniano. Dicho Hamiltoniano puede ser invariante bajo un algebra $g = \{g_i\}$ si $[H, g_i] = 0$, de este modo, se dice que el sistema tiene una simetría descrita por dicha algebra g . Si en vez de considerar un algebra, se considera una cadena de algebras, se puede introducir el concepto de simetría dinámica. Cuando es tomada en cuenta una simetría dinámica, el Hamiltoniano se puede expresar en términos de operadores invariantes (operadores de Casimir) pertenecientes a la cadena de algebras. Para nuestro caso, utilizaremos un Hamiltoniano que es la suma de Hamiltonianos descritos por la simetrías dinámicas de $SU(3)$ y de $SO(4)$, a cada uno de los Hamiltonianos propios de una simetría dinámica, los multiplicaremos por una función que depende de la variable x . El Hamiltoniano que se usará describe un sistema de 2 cúmulos esféricos, que se aplicará al sistema nuclear $^{16}\text{O} + \alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$. Dicho Hamiltoniano puede expresarse como:

$$\hat{\mathbf{H}} = x\hat{\mathbf{H}}_{SU(3)} + (1-x)\hat{\mathbf{H}}_{SO(4)} \quad (3.10)$$

donde

$$\hat{\mathbf{H}}_{SU(3)} = \hbar\omega\hat{\mathbf{n}}_\pi + (a-b\Delta\hat{\mathbf{n}}_\pi)\hat{\mathbf{C}}_2(\lambda, \mu) + \xi\hat{\mathbf{L}}^2 \quad (3.11)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{SO(4)} = \frac{c}{4}[(\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger) - (\hat{\sigma}^\dagger)^2][(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) - (\hat{\sigma})^2] + \xi\hat{\mathbf{L}}^2 \quad (3.12)$$

Donde $\Delta\hat{\mathbf{n}}_\pi = \hat{\mathbf{n}}_\pi - n_0$, $\hat{\mathbf{n}}_\pi = (\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}) = \sum_m \hat{\pi}_m^\dagger \hat{\pi}^m$ con $m = 0, \pm 1$ y n_0 es el número mínimo de quantas. Recordemos que para el PACM $n_0 = 0$ y para el SACM $n_0 \neq 0$. El resultado de aplicar el segundo operador de Casimir de $SU(3)$ a un estado $|\psi\rangle$ (cualquier estado perteneciente a un multiplete, en especial, un estado de mínimo peso) es:

$$\hat{\mathbf{C}}_2(\lambda, \mu) |\psi\rangle = (\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu) |\psi\rangle \quad (3.13)$$

Para el caso de dos cúmulos esféricos (con $(\lambda_k, \mu_k) = (0, 0)$, $(\lambda_C, \mu_C) = (0, 0)$ y $(\lambda, \mu) = (n_\pi, 0)$), el operador de Casimir de segundo orden para $SU(3)$ esta dado por $\hat{\mathbf{n}}_\pi(\hat{\mathbf{n}}_\pi + 3)$, es decir, $\hat{\mathbf{C}}_2(\lambda, \mu) = \hat{\mathbf{C}}_2(n_\pi, 0) = \hat{\mathbf{n}}_\pi(\hat{\mathbf{n}}_\pi + 3)$.

El operador de momento angular total coincide en este caso con el del movimiento relativo, es decir, $\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{\mathbf{L}}_R^2$ donde R denota movimiento relativo. El operador $\hat{\mathbf{L}}^2$, en términos de los operadores $\hat{\mathbf{L}}_\pm$ y $\hat{\mathbf{L}}_0$, puede ser expresado como:

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{L}}_+\hat{\mathbf{L}}_- + \hat{\mathbf{L}}_-\hat{\mathbf{L}}_+) + \hat{\mathbf{L}}_0^2 \quad (3.14)$$

Las definiciones para $\hat{\mathbf{L}}_+$, $\hat{\mathbf{L}}_-$ y $\hat{\mathbf{L}}_0$ están dadas por:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}}_+ &= -2[\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{+1}^1 \\ \hat{\mathbf{L}}_- &= 2[\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{-1}^1 \\ \hat{\mathbf{L}}_0 &= \sqrt{2}[\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_0^1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

con

$$\begin{aligned} [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_m^{[S]} &= \sum_{m_1 m_2} (1m_1 1m_2 | Sm) \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2} = \\ &= \sum_{m_1 m_2} (1m_1 1m_2 | Sm) \hat{\pi}_{m_1}^\dagger (-1)^{1-m_2} \hat{\pi}^{-m_2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Esto es visto con más detenimiento en el apéndice H.

En $\hat{\mathbf{H}}_{SU(3)}$ se encuentran términos de interacción de tres cuerpos del tipo $\Delta\hat{\mathbf{n}}_\pi\hat{\mathbf{n}}_\pi^2$. Dicho término es de gran importancia para la estabilización del espectro. Para obtener un espectro estable, el parámetro a tiene que ser negativo al

igual que el parámetro b . El término $\hbar\omega$ se fija como $(45A^{-\frac{1}{3}} - 25A^{-\frac{2}{3}})$ [34] y para el sistema $^{16}\text{O} + \alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$ tenemos que $\hbar\omega = 13.2\text{MeV}$. En cuanto al parámetro de control x , este varía entre 0 y 1, lo que indica que $x = 0$ corresponde al límite $SO(4)$ mientras que $x = 1$ corresponde al límite $SU(3)$.

La introducción del “cranking” en los modelos del PACM y del SACM se realiza sumando el término $-\Omega\hat{\mathbf{L}}_x$ siendo Ω la frecuencia rotacional del sistema de dos cúmulos. El Hamiltoniano obtenido es el siguiente:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathbf{H}} - \Omega\hat{\mathbf{L}}_x \quad (3.17)$$

Este Hamiltoniano describe una rotación alrededor del eje x , el cual es perpendicular al eje z que conecta a ambos cúmulos. El operador $\hat{\mathbf{L}}_x$, en términos de los operadores $\hat{\mathbf{L}}_{\pm}$ y $\hat{\mathbf{L}}_0$, puede ser expresado como:

$$\hat{\mathbf{L}}_x = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{L}}_+ + \hat{\mathbf{L}}_-) \quad (3.18)$$

con las mismas definiciones para $\hat{\mathbf{L}}_+$ y $\hat{\mathbf{L}}_-$ vistas en (3.15).

Desarrollando y juntando términos comunes, se encuentra que el Hamiltoniano (3.17) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = & x \{ (\hbar\omega + 3a + 3bn_0)\hat{\mathbf{n}}_{\pi} + [a - b(3 - n_0)]\hat{\mathbf{n}}_{\pi}^2 - b\hat{\mathbf{n}}_{\pi}^3 \} \\ & + \xi\hat{\mathbf{L}}^2 + (1-x)\frac{c}{4} \left\{ (\hat{\pi}^{\dagger} \cdot \hat{\pi}^{\dagger})(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) - (\hat{\pi}^{\dagger} \cdot \hat{\pi}^{\dagger})(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) - (\hat{\sigma}^{\dagger} \cdot \hat{\sigma}^{\dagger})(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) \right\} \\ & + (1-x)\frac{c}{4} \left\{ (\hat{\sigma}^{\dagger} \cdot \hat{\sigma}^{\dagger})(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) \right\} \\ & - \Omega\hat{\mathbf{L}}_x \end{aligned} \quad (3.19)$$

El Hamiltoniano (3.19) y el uso del método de estados coherentes (que será visto con más detenimiento en el apéndice C), serán importantes para la obtención del potencial para nuestro sistema de cúmulos rotantes. El potencial al que nos estamos refiriendo se define como:

$$V(\alpha) = \langle \alpha | \hat{\mathcal{H}} | \alpha \rangle \quad (3.20)$$

donde α representa la medida de la distancia entre cúmulos.

El potencial (3.20), como se verá más adelante en el capítulo 4, lo caracteriza la siguiente forma:

$$V(\alpha) = K\tilde{V}(\alpha) \quad (3.21)$$

donde K es una contante.

A $\tilde{V}(\alpha)$ se le define como *Potencial Efectivo* y será suficiente, como se verá en el Capítulo 6, para poder hacer el análisis correspondiente de las Transiciones de Fase para los modelos del PACM y del SACM con “cranking”.

Capítulo 4

Estados coherentes y transiciones de fase para el PACM y el SACM.

En este capítulo se definirán los Estados Coherentes (estados de prueba) para los modelos del PACM y del SACM. Los Estados Coherentes son de gran ayuda para obtener los valores de expectación (con respecto a dichos Estados Coherentes) del Hamiltoniano (3.19). De esta manera podemos obtener el mapeo geométrico para los modelos del PACM y del SACM . (Los cálculos explícitos realizados para los estados coherentes se pueden ver en los apéndices F, G, H e I).

4.1. El Modelo Fenomenológico Algebraico de Cúmulos (PACM).

A continuación se muestra el estado coherente utilizado y el mapeo geométrico para el PACM.

4.1.1. Estado coherente para el PACM.

Nos concentraremos en la parte de movimiento relativo de este modelo, de esta manera, el estado coherente para el PACM es [5,15]:

$$|\alpha\rangle = \mathcal{N}_N [\hat{\sigma}^\dagger + (\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^N |0\rangle \quad (4.1)$$

El estado coherente conjugado para el PACM es:

$$\langle\alpha| = \mathcal{N}_N \langle 0| [\hat{\sigma} + (\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^N \quad (4.2)$$

donde

$$\mathcal{N}_N = \frac{1}{\sqrt{N!(1 + (\alpha \cdot \alpha))^N}} \quad (4.3)$$

es la constante de normalización.

y

$$(\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger) = \sum_m \alpha_m \hat{\pi}_m^\dagger \quad (\alpha^* \cdot \hat{\pi}) = \sum_m \alpha_m^* \hat{\pi}^m \quad (4.4)$$

Aquí α es la notación corta para los coeficientes complejos α_m ($m = 1, 0, -1$). Es importante decir que el estado coherente (4.1) con coeficientes complejos α_m es la combinación lineal más general de los operadores bosónicos de creación del PACM manteniendo N constante. También es importante decir que α_m con “cranking” es diferente del caso estático dado que en el caso del “cranking”:

$$\alpha_m^* = \alpha_{-m} \quad (4.5)$$

4.1.2. Energía potencial para el PACM.

El principal objetivo de definir el estado coherente (4.1) es tomar el valor esperado del Hamiltoniano (3.19) con respecto a dicho estado coherente, obteniendo así la superficie de energía potencial (por sus siglas en inglés, PES). La PES se define como:

$$V(\alpha) = \langle \alpha | \hat{\mathcal{H}} | \alpha \rangle \quad (4.6)$$

De la ecuación (3.19), observamos que el valor esperado del Hamiltoniano en el PACM está dado por:

$$\begin{aligned} V(\alpha) = \langle \hat{\mathcal{H}} \rangle = \langle \alpha | \hat{\mathcal{H}} | \alpha \rangle = & x \{ (\hbar\omega + 3a) \langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle + [a - 3b] \langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^2 \rangle - b \langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^3 \rangle \} \\ & + \xi \langle \hat{\mathbf{L}}^2 \rangle + (1-x) \frac{c}{4} \{ \langle (\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger) (\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) \rangle - \langle (\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger) (\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) \rangle - \langle (\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger) (\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) \rangle \} \\ & + (1-x) \frac{c}{4} \{ \langle (\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger) (\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) \rangle \} - \Omega \langle \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{x}} \rangle \end{aligned} \quad (4.7)$$

Los valores de expectación respecto al estado coherente (4.1) de los operadores que aparecen en (4.7) son listados en la tabla 4.1.

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle &= N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1+(\alpha^* \cdot \alpha)]} \\
\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^2 \rangle &= N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1+(\alpha^* \cdot \alpha)]} + N(N-1) \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)^2}{[1+(\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \\
\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^3 \rangle &= N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1+(\alpha^* \cdot \alpha)]} + 3N(N-1) \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)^2}{[1+(\alpha^* \cdot \alpha)]^2} + N(N-1)(N-2) \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)^3}{[1+(\alpha^* \cdot \alpha)]^3} \\
\langle (\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger)(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) \rangle &= N(N-1) \frac{(\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*)(\alpha \cdot \tilde{\alpha})}{[1+(\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \\
\langle (\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger)(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) \rangle &= N(N-1) \frac{(\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*)}{[1+(\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \\
\langle (\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) \rangle &= N(N-1) \frac{(\alpha \cdot \tilde{\alpha})}{[1+(\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \\
\langle (\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) \rangle &= N(N-1) - 2N^2 \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1+(\alpha^* \cdot \alpha)]} + 2N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1+(\alpha^* \cdot \alpha)]} \\
&\quad + N(N-1) \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)^2}{[1+(\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \\
\langle \hat{\mathbf{L}}_x \rangle &= N \frac{\{[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{-1}^1 - [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{+1}^1\}}{[1+(\alpha^* \cdot \alpha)]} \\
\langle \hat{\mathbf{L}}^2 \rangle &= 2N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1+(\alpha^* \cdot \alpha)]} - 2\sqrt{3}N(N-1) \frac{[[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \times [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1]_0^0}{[1+(\alpha^* \cdot \alpha)]^2}
\end{aligned}$$

Tabla 4.1: Elementos de matriz relevantes en el modelo del PACM.

De esta manera, el potencial que se obtiene para el PACM en términos de α , a partir de (4.7) y de la tabla 4.1 es:

$$\begin{aligned}
V(\alpha) = \langle \hat{\mathcal{H}} \rangle &= \langle \alpha | \hat{\mathcal{H}} | \alpha \rangle = x(\hbar\omega + 3a) \left[N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} \right] \\
&+ x(a - 3b) \left[N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} + N(N - 1) \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)^2}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \right] \\
&- xb \left[N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} + 3N(N - 1) \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)^2}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \right] \\
&- xb \left[N(N - 1)(N - 2) \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)^3}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^3} \right] \\
&+ \xi \left[2N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} - 2\sqrt{3}N(N - 1) \frac{[[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \times [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1]_0^0}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \right] \\
&+ (1 - x) \frac{c}{4} \left[N(N - 1) \frac{(\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*)(\alpha \cdot \tilde{\alpha})}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \right] - (1 - x) \frac{c}{4} \left[N(N - 1) \frac{(\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \right] \\
&- (1 - x) \frac{c}{4} \left[N(N - 1) \frac{(\alpha \cdot \tilde{\alpha})}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \right] \\
&+ (1 - x) \frac{c}{4} \left[N(N - 1) - 2N^2 \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} + 2N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} \right] \\
&+ (1 - x) \frac{c}{4} \left[N(N - 1) \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)^2}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \right] \\
&- \Omega \left[N \frac{\{[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{-1}^1 - [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{+1}^1\}}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} \right] \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Lo que se hace ahora es tomar un factor común que forma parte de cada uno de los términos por los que está compuesto el potencial en PACM. Dicho factor es $N(N - 1)(N - 2)(-xb)$. Una vez hecho esto, se juntan términos comunes y se nombran ciertos coeficientes A_{ij} para simplificar la expresión del potencial. De esta manera, el potencial (4.8) para el PACM en términos de α se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
V(\alpha) = & N(N-1)(N-2)(-xb) \left[A_{11}(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{1}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} \right. \\
& + [A_{12}([\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{-1}^1 - [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{+1}^1)] \frac{1}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} \\
& + [A_{13}(\alpha^* \cdot \alpha)^2 + A_{14}([\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \times [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1)]_0^0 \\
& + A_{15} \{(\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*)(\alpha \cdot \tilde{\alpha})\} \left. \frac{1}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \right. \\
& - A_{15} \{[(\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*) + (\alpha \cdot \tilde{\alpha})] - (\alpha^* \cdot \alpha)^2 - (1 + (\alpha^* \cdot \alpha))^2\} \frac{1}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \\
& \left. + \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)^3}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^3} \right] \tag{4.9}
\end{aligned}$$

donde los coeficientes A_{ij} están listados en la tabla 4.2.

$ \begin{aligned} A_{11} &= \frac{[x(\hbar\omega + 4a - 4b) + 2\xi - (N-1)(1-x)\frac{\xi}{2}]}{(N-1)(N-2)(-xb)} \\ A_{12} &= -\frac{\Omega}{(N-1)(N-2)(-xb)} \\ A_{13} &= \frac{x(a-6b)}{(N-2)(-xb)} \\ A_{14} &= -\frac{2\sqrt{3}\xi}{(N-2)(-xb)} \\ A_{15} &= \frac{(1-x)\frac{\xi}{4}}{(N-2)(-xb)} \end{aligned} $

Tabla 4.2: Coeficientes A_{ij} para el potencial dado por la ecuación (4.9).

Para obtener una simplificación del potencial de la ecuación (4.9), es necesario tomar en cuenta una cierta parametrización. Esta parametrización considera una base cartesiana de los coeficientes α_m , con $(m = x, y, z)$. Estos se relacionan con las componentes esféricas α_{m_*} ($m_* = 1, 0, -1$) mediante:

$$\begin{aligned}
\alpha_{\pm 1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_x \pm i\alpha_y) \\
\alpha_0 &= \alpha_z
\end{aligned} \tag{4.10}$$

usando:

$$\begin{aligned}
\alpha_x &= \alpha \cos(\phi) \sin(\theta) \\
\alpha_y &= \alpha \sin(\phi) \sin(\theta) \\
\alpha_z &= \alpha \cos(\theta)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}\alpha_{\pm 1} &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \exp^{\pm i\phi} \sin(\theta) \\ \alpha_0 &= \alpha \cos(\theta)\end{aligned}\tag{4.12}$$

Esta nueva parametrización tiene la siguiente propiedad.

$$\alpha_m^* = \alpha_{-m}\tag{4.13}$$

También se usa la definición:

$$\tilde{\alpha}_m = (-1)^{1-m} \alpha_{-m}\tag{4.14}$$

De esta manera, obtenemos que:

$$\begin{aligned}(\alpha^* \cdot \alpha) &= \sum_m \alpha_m^* \alpha_m = \alpha^2 \\ (\alpha \cdot \tilde{\alpha}) &= \sum_m \alpha_m \tilde{\alpha}_m = -\alpha^2 \cos(2\theta) \\ (\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*) &= \sum_m \alpha_m^* \tilde{\alpha}_m^* = \sum_m (\alpha_m \tilde{\alpha}_m)^* = -\alpha^2 \cos(2\theta) \\ \{[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{-1}^1 - [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{+1}^1\} &= \alpha^2 \cos(\phi) \sin(2\theta) \\ [[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \times [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1]_0^0 &= -\frac{\alpha^4 \sin^2(2\theta)}{2\sqrt{3}}\end{aligned}\tag{4.15}$$

Mas detalles de estas expresiones pueden consultarse en los apéndices H e I. De este modo, a partir de (4.9) y de (4.15), se obtiene que el potencial para el PACM en términos de α , θ y ϕ es:

$$\begin{aligned}V(\alpha, \theta, \phi) &= N(N-1)(N-2)(-xb) \left[B_{11} \frac{\alpha^2}{[1+\alpha^2]} + B_{12} \frac{\alpha^4}{[1+\alpha^2]^2} + \frac{\alpha^6}{[1+\alpha^2]^3} \right. \\ &\left. + B_{13} \left\{ 1 + 2 \cos(2\theta) \frac{\alpha^2}{[1+\alpha^2]^2} \right\} \right]\end{aligned}\tag{4.16}$$

donde los coeficientes B_{ij} están listados en la tabla 4.3.

$$\begin{aligned}B_{11} &= \frac{\{x(\hbar\omega + 4a - 4b) + 2\xi - (1-x)\frac{\xi}{2}(N-1) - \Omega \cos(\phi) \sin(2\theta)\}}{(N-1)(N-2)(-xb)} \\ B_{12} &= \frac{\{x(a-6b) + \xi \sin^2(2\theta) + (1-x)\frac{\xi}{4}[\cos^2(2\theta) + 1]\}}{(N-2)(-xb)} \\ B_{13} &= \frac{(1-x)\frac{\xi}{4}}{(N-2)(-xb)}\end{aligned}$$

Tabla 4.3: Coeficientes B_{ij} para el potencial dado por la ecuación (4.16).

Para poder tener un potencial solamente en términos de funciones $\sin(2\theta)$, es necesario tomar en cuenta que para B_{12} se cumple:

$$\xi \sin^2(2\theta) + (1-x) \frac{c}{4} [\cos^2(2\theta) + 1] = (1-x) \frac{c}{2} + \sin^2(2\theta) [\xi - (1-x) \frac{c}{4}] \quad (4.17)$$

La igualdad (4.17) se mostrara en el apéndice J. Con lo anterior, obtenemos que los coeficientes B_{ij} que aparecen en la ecuación (4.16) pueden reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{\{x(\hbar\omega + 4a - 4b) + 2\xi - (1-x) \frac{c}{2} (N-1) - \Omega \cos(\phi) \sin(2\theta)\}}{(N-1)(N-2)(-xb)} \\ B_{12} &= \frac{\{x(a-6b) + (1-x) \frac{c}{2} + \sin^2(2\theta) [\xi - (1-x) \frac{c}{4}]\}}{(N-2)(-xb)} \\ B_{13} &= \frac{(1-x) \frac{c}{4}}{(N-2)(-xb)} \end{aligned}$$

Tabla 4.4: Coeficientes B_{ij} para el potencial dado por la ecuación (4.16), donde se ha reescrito B_{12} de acuerdo a la ecuación (4.17).

Juntando los términos que tienen como factor común a $\frac{(1-x) \frac{c}{4}}{(N-2)(-xb)}$ en (4.16) y utilizando los coeficientes de la tabla 4.4 se obtiene:

$$\begin{aligned} V(\alpha, \theta, \phi) &= N(N-1)(N-2)(-xb) \left[C_{11} \frac{\alpha^2}{[1+\alpha^2]} + C_{12} \frac{\alpha^4}{[1+\alpha^2]^2} + \frac{\alpha^6}{[1+\alpha^2]^3} \right. \\ &\left. + C_{13} \left\{ 1 + [2 - \sin^2(2\theta)] \frac{\alpha^4}{[1+\alpha^2]^2} + 2 \cos(2\theta) \frac{\alpha^2}{[1+\alpha^2]^2} - 2 \frac{\alpha^2}{[1+\alpha^2]} \right\} \right] \quad (4.18) \end{aligned}$$

donde los coeficientes C_{ij} están listados en la tabla 4.5

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{\{x(\hbar\omega + 4a - 4b) + 2\xi - \Omega \cos(\phi) \sin(2\theta)\}}{(N-1)(N-2)(-xb)} \\ C_{12} &= \frac{\{x(a-6b) + \xi \sin^2(2\theta)\}}{(N-2)(-xb)} \\ C_{13} &= \frac{(1-x) \frac{c}{4}}{(N-2)(-xb)} \end{aligned}$$

Tabla 4.5: Coeficientes C_{ij} para el potencial dado por la ecuación (4.18).

Para obtener un potencial más fácil de manipular algebraicamente realizemos el siguiente cambio de variable:

$$\beta^2 = \frac{\alpha^2}{[1 + \alpha^2]} \quad (4.19)$$

donde el rango de β es de 0 a 1, ya que el rango de α es de 0 a ∞ .

De esta manera, el potencial (4.18) en términos de β , θ y ϕ puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V(\beta, \theta, \phi) = & N(N-1)(N-2)(-xb) \left[C_{11}\beta^2 + C_{12}\beta^4 + \beta^6 \right] \\ & + N(N-1)(N-2)(-xb) \left[C_{13}([\cos(2\theta) - 1]\beta^2 + 1)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde se uso la igualdad:

$$\begin{aligned} 1 + [2 - \sin^2(2\theta)] \frac{\alpha^4}{[1 + \alpha^2]^2} + 2 \cos(2\theta) \frac{\alpha^2}{[1 + \alpha^2]^2} - 2 \frac{\alpha^2}{[1 + \alpha^2]} = \\ = ([\cos(2\theta) - 1]\beta^2 + 1)^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

La igualdad (4.21) se muestra en el apéndice J. De la ecuación (4.20), tomando en cuenta que:

$$([\cos(2\theta) - 1]\beta^2 + 1)^2 = [\cos(2\theta) - 1]^2\beta^4 + 2[\cos(2\theta) - 1]\beta^2 + 1$$

podemos redefinir a (4.20) agrupando términos con β del mismo orden. Entonces, el potencial que obtenemos es:

$$V(\beta, \theta, \phi) = N(N-1)(N-2)(-xb) \left[D_{11}\beta^2 + D_{12}\beta^4 + \beta^6 + D_{13} \right] \quad (4.22)$$

donde los nuevos coeficientes D_{ij} para (4.22) se muestran en la tabla 4.6:

$\begin{aligned} D_{11} &= C_{11} + C_{13}2[\cos(2\theta) - 1] = \\ &= \frac{x(\hbar\omega + 4a - 4b) + 2\xi - \Omega \cos(\phi) \sin(2\theta) + (1-x)\frac{\xi}{2}(N-1)[\cos(2\theta) - 1]}{(N-1)(N-2)(-xb)} \\ D_{12} &= C_{12} + C_{13}[\cos(2\theta) - 1]^2 = \frac{x(a-6b) + \xi \sin^2(2\theta) + (1-x)\frac{\xi}{4}[\cos(2\theta) - 1]^2}{(N-2)(-xb)} \\ D_{13} &= C_{13} = \frac{(1-x)\frac{\xi}{4}}{(N-2)(-xb)} \end{aligned}$

Tabla 4.6: Coeficientes D_{ij} para el potencial dado por la ecuación (4.22).

Es conveniente tener un potencial tal que $V(\beta, \theta, \phi) = 0$ en $\beta = 0$, para esto, es necesario restar el término $N(N-1)(N-2)(-xb)D_{13}$ a (4.22). Restando dicho término y usando para D_{12} que:

$$\begin{aligned} & \xi \sin^2(2\theta) + (1-x)\frac{c}{4}[\cos(2\theta) - 1]^2 \\ &= (1-x)\frac{c}{2}[1 - \cos(2\theta)] + \sin^2(2\theta)[\xi - (1-x)\frac{c}{4}] \end{aligned} \quad (4.23)$$

La igualdad (4.23) se mostrara en el apéndice J.

Utilizando este último resultado se obtiene:

$$V(\beta, \theta, \phi) = N(N-1)(N-2)(-xb) \left[E_{11}\beta^2 + E_{12}\beta^4 + \beta^6 \right] \quad (4.24)$$

Donde los coeficientes E_{ij} se muestran en la tabla 4.7:

$E_{11} = \frac{x(\hbar\omega + 4a - 4b) + 2\xi - \Omega \cos(\phi) \sin(2\theta) + (1-x)\frac{c}{2}(N-1)[\cos(2\theta) - 1]}{(N-1)(N-2)(-xb)}$ $E_{12} = \frac{x(a - 6b) - (1-x)\frac{c}{2}[\cos(2\theta) - 1] + \sin^2(2\theta)[\xi - (1-x)\frac{c}{4}]}{(N-2)(-xb)}$

Tabla 4.7: Coeficientes E_{ij} para el potencial dado por la ecuación (4.24).

Para poder hacer que nuestro potencial (4.24) dependa solamente de una sola variable, en este caso la variable β (que es una medida de distancia entre cúmulos), es necesario tomar condiciones sobre ϕ y θ . Lo anterior hara que el potencial (4.24) se vuelva más fácil de manipular algebraicamente. Para poder obtener condiciones sobre ϕ y θ , se minimiza (4.24) con respecto a dichas variables. Las condiciones que obtenemos sobre ϕ y θ son las siguientes:

■

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\alpha, \theta, \phi)}{\partial \phi} &= N\Omega \sin(\phi) \sin(2\theta)\beta^2 = 0 \\ \Rightarrow \sin(\phi) &= 0 \Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow \cos(\phi) = 1 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Dado que $\cos(\phi) = 1$, entonces:

■

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\alpha, \theta, \phi)}{\partial \theta} &= -N((1-x)c(N-1)\sin(2\theta) + 2\Omega \cos(2\theta))\beta^2 \\ &+ N(N-1)([4\xi - (1-x)c]\sin(2\theta)\cos(2\theta) + (1-x)c\sin(2\theta))\beta^4 = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

entonces:

$$\begin{aligned} \Rightarrow & (-2\Omega \cos(2\theta) - (1-x)c(N-1)\sin(2\theta))\beta^2 \\ & + ([4\xi - (1-x)c](N-1)\sin(2\theta)\cos(2\theta) + (1-x)c(N-1)\sin(2\theta))\beta^4 = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Si hacemos un cambio de variable:

$$\begin{aligned} v &= \cos(2\theta) \\ \sqrt{1-v^2} &= \sin(2\theta) \end{aligned} \quad (4.28)$$

tenemos que (4.27) puede ser expresada como:

$$(A_*v + B_*\sqrt{1-v^2})\beta^2 + (C_*v\sqrt{1-v^2} + D_*\sqrt{1-v^2})\beta^4 = 0 \quad (4.29)$$

donde A_*, B_*, C_* y D_* en (4.29) están definidos en la tabla 4.8.

$A_* = -2\Omega$ $B_* = -(1-x)c(N-1)$ $C_* = [4\xi - (1-x)c](N-1)$ $D_* = (1-x)c(N-1)$
--

Tabla 4.8: Coeficientes utilizados en la ecuación (4.29).

Haciendo un poco de algebra como se muestra con detenimiento en el apéndice J, la ecuación (4.29) puede expresarse como:

$$Av^4 + Bv^3 + Cv^2 + Dv + E = 0 \quad (4.30)$$

donde A, B, C, D y E en (4.30) están definidos en la tabla 4.9.

$A = C_*^2 \beta^4$ $B = 2C_*(D_* \beta^4 + B_* \beta^2)$ $C = -[(C_*^2 - D_*^2) \beta^4 - 2B_* D_* \beta^2 - B_*^2 - A_*^2]$ $D = -2C_*(D_* \beta^4 + B_* \beta^2)$ $E = -[D_*^2 \beta^4 + 2B_* D_* \beta^2 + B_*^2]$
--

Tabla 4.9: Coeficientes pertenecientes a la ecuación (4.30). Las definiciones de A_* , B_* , C_* y D_* están dadas en la tabla (4.8).

La solución a la ecuación (4.30) para la variable v está dada por:

$$v = -\frac{B}{4A} + \frac{\pm_s \sqrt{p+2y} \pm_t \sqrt{-(3p+2y \pm_s \frac{2q}{p+2y})}}{2} \quad (4.31)$$

donde los dos \pm_s (uno frente a $\sqrt{p+2y}$ y el otro frente a $\frac{2q}{p+2y}$) deben tener el mismo signo, ya que son dependientes. Para el caso de \pm_t , este es independiente por lo que tenemos la libertad de escoger el signo que queramos. Los coeficientes y , p , q pertenecientes a (4.31), son dados en la tabla 4.10. Los coeficientes y , p , q , como se puede observar, dependen de los coeficientes A , B , C , D y E ya definidos en la tabla 4.9. También en la tabla 4.10 se muestran otras definiciones (R , S , U y V), importantes para poder obtener el coeficiente y .

$$\begin{aligned}
p &= \frac{-3B^2}{8A^2} + \frac{C}{A} \\
q &= \frac{B^3}{8A^3} - \frac{BC}{2A^2} + \frac{D}{A} \\
w &= \frac{-3B^4}{256A^4} + \frac{CB^2}{16A^3} - \frac{BD}{4A^2} + \frac{E}{A} \\
R &= -\frac{p^2}{12} - w \\
S &= -\frac{p^3}{108} + \frac{pw}{3} - \frac{q^2}{8} \\
U &= \sqrt[3]{-\frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} + \frac{R^3}{27}}} \\
V &= \begin{cases} -\frac{R}{3U} & \text{si } U \neq 0 \\ -\sqrt[3]{S} & \text{si } U = 0 \end{cases} \\
y &= -\frac{5}{6}p + U + V
\end{aligned}$$

Tabla 4.10: Coeficientes que aparecen en la ecuación (4.31) y las definiciones de R , S , U y V , importantes para obtener el coeficiente y .

Como podemos ver, la solución (4.31) a la ecuación de cuarto orden (4.30) es algo complicada. Esta solución permite expresar al $\cos(2\theta)$ y al $\sin(2\theta)$ en términos de β y Ω para luego poder estudiar las transiciones de fase en el PACM con “cranking” al observar el comportamiento del potencial $V(\beta, \Omega)$ al variar β para una cierta Ω . Esto será objeto de estudio en un trabajo futuro.

Ahora es necesario simplificar el potencial (4.24) considerando el límite especial de $SU(3)$ para poder obtener información acerca de las Transiciones de Fase. Es importante decir también que para el sistema específico $^{16}\text{O} + \alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$ que se va a estudiar, el mejor lugar para reproducir resultados experimentales, es cerca del límite $SU(3)$. El potencial (4.24) en el límite $SU(3)$, es decir, en $x = 1$ es:

$$V(\beta, \theta, \phi) = N(N-1)(N-2)(-b) \left[G_{11}\beta^2 + G_{12}\beta^4 + \beta^6 \right] \quad (4.32)$$

Donde los coeficientes G_{ij} se muestran en la tabla 4.11.

$$G_{11} = \frac{(\hbar\omega + 4a - 4b) + 2\xi - \Omega \cos(\phi) \sin(2\theta)}{(N-1)(N-2)(-b)}$$

$$G_{12} = \frac{(a-6b) + \xi \sin^2(2\theta)}{(N-2)(-b)}$$

Tabla 4.11: Coeficientes G_{ij} para el potencial $V(\beta, \theta, \phi)$ dado por la ecuación (4.32) en el caso límite $SU(3)$.

Al igual que para el caso de la ecuación (4.24), para hacer que nuestro potencial (4.32) dependa solamente de la variable β , y de esta manera, se vuelva más fácil de manipularlo, se toman nuevamente condiciones sobre ϕ y θ en el límite $SU(3)$, para esto es necesario minimizar (4.32) con respecto a dichas variables. Las condiciones que obtenemos sobre ϕ y θ son las siguientes:

■

$$\frac{\partial V(\alpha, \theta, \phi)}{\partial \phi} = N\Omega \sin(\phi) \sin(2\theta) \beta^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow \cos(\phi) = 1 \quad (4.33)$$

Dado que $\cos(\phi) = 1$, entonces:

■

$$\frac{\partial V(\alpha, \theta, \phi)}{\partial \theta} = -2N\Omega \cos(2\theta) \beta^2$$

$$+ 4\xi N(N-1) \sin(2\theta) \cos(2\theta) \beta^4 = 0$$

$$\Rightarrow \sin(2\theta) = \frac{\Omega}{2\xi(N-1)} \frac{1}{\beta^2} \quad (4.34)$$

Las condiciones anteriores para θ y ϕ nos muestran que se trabajara con cúmulos rotantes en el plano y-z alrededor del eje x ya que el ángulo polar θ es diferente de cero pero el ángulo azimutal ϕ es nulo. En el caso específico de θ , se puede ver que $\sin(2\theta)$ es también dependiente de β dado que el potencial (4.32) está conformado no solamente por un término al cuadrado en β sino que también está conformado por un término de orden cuatro, además de un término de orden seis el cual no contribuye en nada al valor de $\sin(2\theta)$ porque no tiene ningún coeficiente multiplicándolo que dependa de θ como ocurre con los términos de orden dos y cuatro en β . Esto influirá en el estudio de las transiciones de fase en el PACM con “cranking”.

Sustituyendo (4.34) y (4.33) en (4.32) obtenemos:

$$V(\beta) = N(N-1)(N-2)(-b) \left[A\beta^2 - B\beta^4 + \beta^6 + C \right] \quad (4.35)$$

donde A , B y C están listados en la tabla 4.12

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{(\hbar\omega + 4a - 4b) + 2\xi}{(N-1)(N-2)(-b)} \\
 B &= \frac{(a-6b)}{(N-2)(b)} \\
 C &= \frac{-\Omega^2}{4\xi(N-1)^2(N-2)(-b)}
 \end{aligned}$$

Tabla 4.12: Coeficientes A , B y C para el potencial $V(\beta)$ dado por la ecuación (4.35).

Recapitemos lo que se ha hecho anteriormente. En la última parte del capítulo 3, en la ecuación (3.21), se introdujo el potencial efectivo. En el apéndice E se da un análisis general de las transiciones de fase para el PACM con “cranking” considerando un cierto potencial efectivo dado por la ecuación (E.8).

En el caso del PACM con “cranking” para el límite $SU(3)$, el potencial efectivo obtenido de (4.35) es:

$$\tilde{V}(\beta) = A\beta^2 - B\beta^4 + \beta^6 + C \quad (4.36)$$

mientras que la constante es $K = N(N-1)(N-2)(-b)$. El potencial efectivo que se obtuvo, coincide en forma con el obtenido en la ecuación (E.8).

Con el potencial (4.35) se realizara el estudio computacional de las transiciones de fase en PACM con “cranking”. A primera vista, se puede decir que **NO HABRÁ TRANSICIÓN DE FASE PARA EL PACM CON “CRANKING” EN EL LÍMITE $SU(3)$** ya que como se observa en la ecuación (4.35), el término de frecuencia rotacional Ω se encuentra en el coeficiente C , y dado esto, al ir variando dicha frecuencia, lo que se lograra será una subida o una bajada en energía del potencial. Esto se verá con más detenimiento en el capítulo 6 cuando se considere el sistema $^{16}\text{O} + \alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$.

4.2. El Modelo Semimicroscópico Algebraico de Cúmulos (SACM).

Ahora se muestra el estado coherente utilizado y el mapeo geométrico realizado para el SACM.

4.2.1. Estado coherente para el SACM.

Al igual que en el caso del PACM, nos concentraremos en la parte de movimiento relativo entre los cúmulos dentro de este modelo, además de que también se tomará en cuenta un número mínimo de cuantos de oscilación relativo n_0 diferente de cero. De esta manera, el estado coherente que se utilizará para el SACM está dado por [15]:

$$|\alpha\rangle = \frac{N!}{(N+n_0)!} \mathcal{N}_{N,n_0} \frac{d^{n_0}}{d\gamma^{n_0}} [\hat{\sigma}^\dagger + \gamma(\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^{N+n_0} |0\rangle \quad (4.37)$$

El estado coherente conjugado para el SACM es:

$$\langle\alpha| = \frac{N!}{(N+n_0)!} \mathcal{N}_{N,n_0} \frac{d^{n_0}}{d\gamma^{n_0}} \langle 0 | [\hat{\sigma} + \gamma(\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^{N+n_0} \quad (4.38)$$

donde

$$\mathcal{N}_{N,n_0}^{-2} = \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0} \quad (4.39)$$

es la constante de normalización.

En este estado coherente n_0 corresponde al número mínimo de bosones π y el número total de bosones ahora está dado por $N' = N + n_0$. Nuevamente α es la notación corta para los coeficientes complejos $\alpha_m (m = 1, 0, -1)$. La expresión (4.39) para la constante de normalización en SACM es dada de esta manera para simplificar los cálculos. Se debe entender que al final de la operación diferencial, el valor de γ tiene que tomarse como 1. En el caso en que $n_0 = 0$ esta ecuación se reduce al estado coherente considerado para el PACM.

4.2.2. Energía potencial para el SACM.

Ahora tomemos el valor esperado del Hamiltoniano (3.19) con respecto al estado coherente de la ecuación (4.37), obteniendo así la Superficie de Energía Potencial (Potential Energy Surface, PES) para el SACM.

De la ecuación (3.19), observamos que el valor esperado de nuestro Hamiltoniano en el SACM es:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathcal{H}} \rangle &= \langle \alpha | \hat{\mathcal{H}} | \alpha \rangle = x \{ (\hbar\omega + 3a + 3bn_0) \langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle + [a - 3b + bn_0] \langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^2 \rangle - b \langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^3 \rangle \} \\
&+ \xi \langle \hat{\mathbf{L}}^2 \rangle + (1-x) \frac{c}{4} \{ \langle (\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger) (\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) \rangle - \langle (\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger) (\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) \rangle - \langle (\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger) (\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) \rangle \} \\
&+ (1-x) \frac{c}{4} \{ \langle (\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger) (\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) \rangle \} \\
&- \Omega \langle \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{x}} \rangle
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Definiendo:

$$\begin{aligned}
F_{pq}(\alpha^2) &= \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} \sum_{k=\max(n_0-p, n_0-q, 0)}^{N+n_0-\max(p,q)} \binom{N+n_0-\max(p,q)}{k} \times \\
&\times \left[\frac{(k+p)!}{(k+p-n_0)!} \right] \left[\frac{(k+q)!}{(k+q-n_0)!} \right] \alpha^{2k}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Los valores de expectación de los diferentes operadores que aparecen en la ecuación (4.40) con respecto al estado coherente (4.37) se muestran en la tabla 4.13.

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle &= (N + n_0)(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\
\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^2 \rangle &= (N + n_0)(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} + (N + n_0)(N + n_0 - 1)(\alpha^* \cdot \alpha)^2 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\
\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^3 \rangle &= (N + n_0)(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} + 3(N + n_0)(N + n_0 - 1)(\alpha^* \cdot \alpha)^2 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\
&\quad + (N + n_0)(N + n_0 - 1)(N + n_0 - 2)(\alpha^* \cdot \alpha)^3 \frac{F_{33}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\
\langle (\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger)(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) \rangle &= (N + n_0)(N + n_0 - 1)(\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*)(\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\
\langle (\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger)(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) \rangle &= (N + n_0)(N + n_0 - 1)(\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*) \frac{F_{20}^{N-2}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\
\langle (\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) \rangle &= (N + n_0)(N + n_0 - 1)(\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \frac{F_{20}^{N-2}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\
\langle (\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) \rangle &= (N + n_0)(N + n_0 - 1) - 2(N + n_0)^2(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\
&\quad + 2(N + n_0)(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} + (N + n_0)(N + n_0 - 1)(\alpha^* \cdot \alpha)^2 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\
\langle \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{x}} \rangle &= (N + n_0) \{ [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{-1}^1 - [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{+1}^1 \} \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\
\langle \hat{\mathbf{L}}^2 \rangle &= 2(N + n_0)(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\
&\quad - 2\sqrt{3}(N + n_0)(N + n_0 - 1) \left[[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \times [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \right]_0^0 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)}
\end{aligned}$$

Tabla 4.13: Valores de expectación relavantes para el SACM.

De esta manera, el potencial que se obtiene en el SACM en términos de α , a partir de (4.40) y de los resultados de la tabla 4.13 es:

$$\begin{aligned}
V(\alpha) = & x(\hbar\omega + 3a + 3bn_0)(N + n_0)(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\
& + x(a - 3b + bn_0)[(N + n_0)(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)}] \\
& + x(a - 3b + bn_0)[(N + n_0)(N + n_0 - 1)(\alpha^* \cdot \alpha)^2 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)}] \\
& - xb[(N + n_0)(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} + 3(N + n_0)(N + n_0 - 1)(\alpha^* \cdot \alpha)^2 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)}] \\
& + (N + n_0)(N + n_0 - 1)(N + n_0 - 2)(\alpha^* \cdot \alpha)^3 \frac{F_{33}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)}] \\
& + \gamma[2(N + n_0)(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)}] \\
& - \gamma[2\sqrt{3}(N + n_0)(N + n_0 - 1) \left[[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \times [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^0 \right]_0 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)}] \\
& + (1 - x) \frac{c}{4} [(N + n_0)(N + n_0 - 1)(\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*)(\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)}] \\
& - (N + n_0)(N + n_0 - 1)(\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*) \frac{F_{20}^{N-2}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\
& - (N + n_0)(N + n_0 - 1)(\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \frac{F_{20}^{N-2}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\
& + (N + n_0)(N + n_0 - 1) - 2(N + n_0)^2(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\
& + 2(N + n_0)(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} + (N + n_0)(N + n_0 - 1)(\alpha^* \cdot \alpha)^2 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)}] \\
& - \Omega(N + n_0) \{ [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{-1}^1 - [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{+1}^1 \} \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \tag{4.42}
\end{aligned}$$

Al igual que en el PACM, se toma nuevamente un factor común que forma parte de cada uno de los términos por los que está compuesto nuestro potencial para el SACM. Dicho factor común es $(N + n_0)(N + n_0 - 1)(N + n_0 - 2)(-xb)$. Después de lo anterior, se juntan términos que estén multiplicados por una misma relación $\frac{F_{ij}}{F_{km}}$ y se simplifica la expresión del potencial nombrando ciertos coeficientes A_{ij} . De esta manera, el potencial para el SACM en términos de α es:

$$\begin{aligned}
V(\alpha) = & (N + n_0)(N + n_0 - 1)(N + n_0 - 2)(-xb) \left[\left(A_{11}(\alpha^* \cdot \alpha) \right. \right. \\
& + A_{12}([\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{-1}^1 - [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{+1}^1) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\
& + \left(A_{13}(\alpha^* \cdot \alpha)^2 + A_{14} \left[[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \times [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \right]_0^0 \right) \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} + (\alpha^* \cdot \alpha)^3 \frac{F_{33}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\
& + A_{15} \left(\left[(\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*)(\alpha \cdot \tilde{\alpha}) + (\alpha^* \cdot \alpha)^2 \right] \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \right) \\
& \left. - A_{15} \left(\left[(\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*) + (\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \right] \frac{F_{20}^{N-2}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} - 1 \right) \right] \quad (4.43)
\end{aligned}$$

donde los coeficientes A_{ij} se están listados en la tabla 4.14

$A_{11} = \frac{[x(\hbar\omega + 4a - 4b + 4bn_0) + 2\xi - (N + n_0 - 1)(1 - x)\frac{\xi}{2}]}{(N + n_0 - 1)(N + n_0 - 2)(-xb)}$ $A_{12} = -\frac{\Omega}{(N + n_0 - 1)(N + n_0 - 2)(-xb)}$ $A_{13} = \frac{x[a - b(6 - n_0)]}{(N + n_0 - 2)(-xb)}$ $A_{14} = -\frac{2\sqrt{3}\xi}{(N + n_0 - 2)(-xb)}$ $A_{15} = \frac{(1 - x)\frac{\xi}{4}}{(N + n_0 - 2)(-xb)}$
--

Tabla 4.14: Coeficientes A_{ij} para el potencial dado por la ecuación (4.43).

Tomando nuevamente para (4.43) la parametrización (4.12) y las expresiones (4.15), se obtiene que el potencial para el SACM en términos de α, θ y ϕ es:

$$\begin{aligned}
V(\alpha, \theta, \phi) = & (N + n_0)(N + n_0 - 1)(N + n_0 - 2)(-xb) \left[B_{11}\alpha^2 \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \right. \\
& + B_{12}\alpha^4 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} + \alpha^6 \frac{F_{33}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} + B_{13} \left(1 + 2 \cos(2\theta)\alpha^2 \frac{F_{20}^{N-2}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \right) \left. \right] \quad (4.44)
\end{aligned}$$

donde los coeficientes B_{ij} están listados en la tabla 4.15

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \frac{[x(\hbar\omega+4a-4b+4bn_0)+2\xi-(N+n_0-1)(1-x)\frac{\xi}{2}-\Omega\cos(\phi)\sin(2\theta)]}{(N+n_0-1)(N+n_0-2)(-xb)} \\
B_{12} &= \frac{[x(a-b(6-n_0))+\xi\sin^2(2\theta)+(1-x)\frac{\xi}{4}[\cos^2(2\theta)+1]]}{(N+n_0-2)(-xb)} \\
B_{13} &= \frac{(1-x)\frac{\xi}{4}}{(N+n_0-2)(-xb)}
\end{aligned}$$

Tabla 4.15: Coeficientes B_{ij} para el potencial dado por la ecuación (4.44).

Dado lo anterior, nuevamente es conveniente tener un potencial tal que $V(\alpha, \theta, \phi) = 0$ en $\alpha = 0$. Para lograr esto, es necesario investigar el comportamiento de las relaciones $\frac{F_{ij}}{F_{km}}$ para $\alpha \rightarrow 0$. El comportamiento es el siguiente:

- $\frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \approx \frac{n_0}{(N+n_0)\alpha^2}$
- $\frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \approx \frac{n_0(n_0-1)}{(N+n_0)(N+n_0-1)\alpha^4}$
- $\frac{F_{20}^{N-2}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \approx \frac{N(N-1)(n_0+1)(n_0+2)}{2(N+n_0)(N+n_0-1)}$
- $\frac{F_{33}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \approx \frac{n_0(n_0-1)(n_0-2)}{(N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)\alpha^6}$

Además de tomar en cuenta dicho comportamiento, también se necesita restar el término $(N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)(-xb)B_{13}$ al potencial (4.44). De esta manera, el potencial que se obtiene a partir de las consideraciones anteriores sobre (4.44) es el siguiente:

$$\begin{aligned}
V(\alpha, \theta, \phi) &= \\
&= (N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)(-xb) \left[C_{11} \left(\alpha^2 \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} - \frac{n_0}{(N+n_0)} \right) \right. \\
&+ C_{12} \left(\alpha^4 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} - \frac{n_0(n_0-1)}{(N+n_0)(N+n_0-1)} \right) \\
&+ \left(\alpha^6 \frac{F_{33}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} - \frac{n_0(n_0-1)(n_0-2)}{(N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)} \right) \\
&\left. + C_{13} \alpha^2 \frac{F_{20}^{N-2}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \right] \tag{4.45}
\end{aligned}$$

donde los coeficientes C_{ij} están listados en la tabla 4.16

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{x(\hbar\omega + 4a - 4b + 4bn_0) + 2\xi - \Omega \cos(\phi) \sin(2\theta) - (1-x)\frac{c}{2}(N+n_0-1)}{(N+n_0-1)(N+n_0-2)(-xb)} \\
C_{12} &= \frac{x(a-b(6-n_0)) + (1-x)\frac{c}{2} + \sin^2(2\theta)[\xi - (1-x)\frac{c}{4}]}{(N+n_0-2)(-xb)} \\
C_{13} &= \frac{(1-x)\frac{c}{2} \cos(2\theta)}{(N+n_0-2)(-xb)}
\end{aligned}$$

Tabla 4.16: Coeficientes C_{ij} para el potencial dado por la ecuación (4.45).

Para C_{12} también se tomo en cuenta:

$$\xi \sin^2(2\theta) + (1-x)\frac{c}{4}[\cos^2(2\theta) + 1] = (1-x)\frac{c}{2} + \sin^2(2\theta)[\xi - (1-x)\frac{c}{4}] \quad (4.46)$$

La igualdad (4.46) se mostrara en el apéndice K.

Como podemos observar, el potencial (4.45) es nulo en el límite $\alpha \rightarrow 0$, dado el comportamiento que presentan las $\frac{F_{ij}}{F_{km}}$ cuando $\alpha \rightarrow 0$ y dado que se ha restado el término constante $(N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)(-xb)B_{13}$ en el potencial.

Al igual que en el PACM, para poder hacer que nuestro potencial (4.45) dependa solamente de una sola variable, en este caso la variable α (distancia entre cúmulos para el SACM), es necesario tomar condiciones sobre ϕ y θ minimizando la ecuación (4.45) con respecto a dichas variables:

■

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V(\alpha, \theta, \phi)}{\partial \phi} &= \Omega(N+n_0) \sin(\phi) \sin(2\theta) \left(\alpha^2 \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} - \frac{n_0}{(N+n_0)} \right) = 0 \\
&\Rightarrow \sin(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow \cos(\phi) = 1 \quad (4.47)
\end{aligned}$$

Ya que $\cos(\phi) = 1$, entonces:

■

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V(\alpha, \theta, \phi)}{\partial \theta} &= -2\Omega(N+n_0) \cos(2\theta) \left(\alpha^2 \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} - \frac{n_0}{(N+n_0)} \right) \\
&+ [4\xi - (1-x)c](N+n_0)(N+n_0-1) \sin(2\theta) \cos(2\theta) \times \\
&\times \left(\alpha^4 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} - \frac{n_0(n_0-1)}{(N+n_0)(N+n_0-1)} \right) \\
&- (1-x)c(N+n_0)(N+n_0-1) \sin(2\theta) \alpha^2 \frac{F_{20}^{N-2}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} = 0 \quad (4.48)
\end{aligned}$$

de esta manera:

$$\begin{aligned}
& -2\Omega \cos(2\theta) \left(\alpha^2 \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} - \frac{n_0}{(N+n_0)} \right) \\
& + [4\xi - (1-x)c](N+n_0-1) \sin(2\theta) \cos(2\theta) \times \\
& \times \left(\alpha^4 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} - \frac{n_0(n_0-1)}{(N+n_0)(N+n_0-1)} \right) \\
& - (1-x)c(N+n_0-1) \sin(2\theta) \alpha^2 \frac{F_{20}^{N-2}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} = 0 \quad (4.49)
\end{aligned}$$

Si hacemos un cambio de variable:

$$\begin{aligned}
v &= \cos(2\theta) \\
\sqrt{1-v^2} &= \sin(2\theta) \quad (4.50)
\end{aligned}$$

tenemos que (4.49) puede ser expresada como:

$$A_* v + B_* v \sqrt{1-v^2} + C_* \sqrt{1-v^2} = 0 \quad (4.51)$$

donde A_*, B_*, C_* y D_* en (4.51) están definidos como:

$A_* = -2\Omega \left(\alpha^2 \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} - \frac{n_0}{(N+n_0)} \right)$ $B_* = [4\xi - (1-x)c](N+n_0-1) \left(\alpha^4 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} - \frac{n_0(n_0-1)}{(N+n_0)(N+n_0-1)} \right)$ $C_* = -(1-x)c(N+n_0-1) \alpha^2 \frac{F_{20}^{N-2}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)}$

Tabla 4.17: Coeficientes utilizados en la ecuación (4.51).

Haciendo un poco de algebra que se muestra con más detenimiento en el apéndice K, obtenemos que la ecuación (4.51) puede expresarse como:

$$Av^4 + Bv^3 + Cv^2 + Dv + E = 0 \quad (4.52)$$

donde A, B, C, D y E en (4.52) están definidos como:

$A = B_*$ $B = 2B_*C_*$ $C = (C_*^2 + A_*^2 - B_*^2)$ $D = -2B_*C_*$ $E = -C_*^2$

Tabla 4.18: Coeficientes pertenecientes a la ecuación (4.52). Las definiciones de A_* , B_* , C_* y D_* son dadas en la tabla 4.17.

La expresión de la solución para (4.52) es la misma que la dada en PACM ya que nuevamente se trata de una ecuación de cuarto orden, de esta manera (4.31) es igualmente solución de (4.52) con los mismos coeficientes de la tabla 4.10 pero con A , B , C , D y E diferentes (Ver la tabla 4.9 para el PACM y la tabla 4.18 para el SACM).

Al igual que el PACM, la solución a la ecuación de cuarto orden (4.52) es algo complicada, por lo que para estudiar las transiciones de fase en el SACM con “cranking” (al ir variando Ω desde $\Omega = 0$ hasta un cierto $\Omega = \Omega_{lim}$ donde ocurre la transición de fase) nos restringiremos al caso cuando $\alpha \ll 0$ dado que como se ve en el apéndice E (para el caso de transiciones de fase en el SACM), siempre nos encontraremos con un extremo en $\alpha = 0$, por lo tanto, basta considerar dicho caso. Tomando en cuenta las expresiones obtenidas $\frac{F_{ij}}{F_{km}}$ de la ecuación (4.41) y desarrollando hasta segundo orden en α , tenemos que:

$$\begin{aligned}
\alpha^2 \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} &\approx \frac{n_0}{(N+n_0)} + \frac{N(n_0+1)}{(N+n_0)} \alpha^2 \\
\alpha^4 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} &\approx \frac{n_0(n_0-1)}{(N+n_0)(N+n_0-1)} + \frac{2Nn_0(n_0+1)}{(N+n_0)(N+n_0-1)} \alpha^2 \\
\alpha^6 \frac{F_{33}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} &\approx \frac{n_0(n_0-1)(n_0-2)}{(N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)} \\
&+ \frac{3Nn_0(n_0+1)(n_0-1)}{(N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)} \alpha^2
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Los Cálculos Explícitos se muestran en el apéndice K.

De esta manera, el potencial que se obtiene para $\alpha \ll 1$ a partir de la ecuación (4.45) con la condición $\cos(\phi) = 1$ es el siguiente:

$$\begin{aligned}
V(\alpha, \theta) \approx & (N + n_0)(N + n_0 - 1)(N + n_0 - 2)(-xb) \left[D_{11} \left(\frac{N(n_0 + 1)}{(N + n_0)} \alpha^2 \right) \right. \\
& + D_{12} \left(\frac{2Nn_0(n_0 + 1)}{(N + n_0)(N + n_0 - 1)} \alpha^2 \right) \\
& \left. + \left(\frac{3Nn_0(n_0 + 1)(n_0 - 1)}{(N + n_0)(N + n_0 - 1)(N + n_0 - 2)} \alpha^2 \right) \right] \quad (4.54)
\end{aligned}$$

donde los coeficientes D_{ij} están listados en la tabla 4.19

$$\begin{aligned}
D_{11} &= \frac{x(\hbar\omega + 4a - 4b + 4bn_0) + 2\xi - \Omega \sin(2\theta) - (1-x)\frac{\xi}{2}(N+n_0-1)}{(N+n_0-1)(N+n_0-2)(-xb)} \\
D_{12} &= \frac{x(a-b(6-n_0)) + (1-x)\frac{\xi}{2} + \sin^2(2\theta)[\xi - (1-x)\frac{\xi}{4}]}{(N+n_0-2)(-xb)}
\end{aligned}$$

Tabla 4.19: Coeficientes D_{ij} para el potencial dado por la ecuación (4.54).

A (4.54) también se le puede ver como:

$$\begin{aligned}
V(\alpha, \theta) \approx & \\
\approx & (N + n_0)(N + n_0 - 1)(N + n_0 - 2)(-xb) \left[\left(A_c + B_c + C_c - \Omega D_c \right) \alpha^2 \right] \quad (4.55)
\end{aligned}$$

donde los coeficientes A_c , B_c , C_c y D_c de la ecuación (4.55) están listados en la tabla 4.20

$$\begin{aligned}
A_c &= \frac{N(n_0+1) \left[x(\hbar\omega + 4a - 4b + 4bn_0) + 2\xi - (1-x)\frac{\xi}{2}(N+n_0-1) \right]}{(N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)(-xb)} \\
B_c &= \frac{2Nn_0(n_0+1) \left[x(a-b(6-n_0)) + (1-x)\frac{\xi}{2} + \sin^2(2\theta)[\xi - (1-x)\frac{\xi}{4}] \right]}{(N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)(-xb)} \\
C_c &= \frac{3Nn_0(n_0+1)(n_0-1)}{(N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)} \\
D_c &= \frac{N(n_0+1) \sin(2\theta)}{(N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)(-xb)}
\end{aligned}$$

Tabla 4.20: Coeficientes para el potencial dado por la ecuación (4.55).

Si nombramos $\tilde{A}_c = A_c + B_c + C_c$, entonces tenemos que (4.55) puede expresarse como:

$$V(\alpha, \theta) \approx (N + n_0)(N + n_0 - 1)(N + n_0 - 2)(-xb) \left[\left(\tilde{A}_c - \Omega D_c \right) \alpha^2 \right] \quad (4.56)$$

Al igual que en el PACM, nos restringiremos al caso de la simetría dinámica $SU(3)$ con $x = 1$ para el estudio de las transiciones de fase. Es importante decir nuevamente que para el sistema específico $^{16}\text{O} + \alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$ que se va a estudiar, el mejor lugar para reproducir resultados experimentales, es cerca del límite $SU(3)$. Dado lo anterior, el potencial que se obtiene en el límite $SU(3)$, a partir de (4.56), es el siguiente:

$$V(\alpha, \theta) \approx (N + n_0)(N + n_0 - 1)(N + n_0 - 2)(-b) \left[\left(A_{SU(3)} - \Omega D_{SU(3)} \right) \alpha^2 \right] \quad (4.57)$$

donde los coeficientes $A_{SU(3)}$ y $D_{SU(3)}$ están listados en la tabla 4.21

$A_{SU(3)} = \frac{N(n_0+1) [\hbar\omega + 4a - 4b + 4bn_0 + 2\xi]}{(N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)(-b)}$ $+ \frac{2Nn_0(n_0+1) [a - b(6-n_0) + \xi \sin^2(2\theta)]}{(N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)(-b)}$ $+ \frac{3Nn_0(n_0+1)(n_0-1)}{(N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)}$ $D_{SU(3)} = \frac{N(n_0+1) \sin(2\theta)}{(N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)(-b)}$
--

Tabla 4.21: Coeficientes para el potencial dado por la ecuación (4.57).

Para poder obtener condiciones sobre θ en el límite $SU(3)$, es necesario minimizar (4.57) con respecto a dicha variable. De esta manera, la condición que obtenemos sobre θ es la siguiente:

Dado que $\cos(\phi) = 1$,

■

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\alpha, \theta)}{\partial \theta} &= -2N\Omega(n_0 + 1) \cos(2\theta) \alpha^2 \\ &+ 8\xi N n_0 (n_0 + 1) \sin(2\theta) \cos(2\theta) \alpha^2 = 0 \\ \Rightarrow \sin(2\theta) &= \frac{\Omega}{4\xi n_0} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Las condiciones anteriores para θ y ϕ nos muestran que se trabajara con cúmulos rotantes en el plano yz alrededor del eje x ya que el ángulo polar θ es diferente de cero pero el ángulo azimutal ϕ es nulo. En el caso específico de θ , se puede ver que $\sin(2\theta)$ es independiente de α dado que el potencial (4.55) está conformado solamente por un término al cuadrado en α . Esto, como se verá más adelante, influirá en el estudio de las Transiciones de Fase en SACM con “cranking”.

Por lo tanto el Potencial que se obtiene en términos de α y Ω al sustituir (4.58) en (4.57) es el siguiente:

$$V(\alpha) \approx (N + n_0)(N + n_0 - 1)(N + n_0 - 2)(-b) \left[(A - \Omega^2 B) \alpha^2 \right] \quad (4.59)$$

donde los coeficientes A y B están listados en la tabla 4.22.

$$\begin{aligned} A &= \frac{N(n_0+1) [\hbar\omega + 4a - 4b + 4bn_0 + 2\xi]}{(N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)(-b)} \\ &+ \frac{2Nn_0(n_0+1) [(a-b(6-n_0))]}{(N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)(-b)} \\ &+ \frac{3Nn_0(n_0+1)(n_0-1)}{(N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)} \\ B &= \frac{N(n_0+1)}{8\xi n_0(N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)(-b)} \end{aligned}$$

Tabla 4.22: Coeficientes para el potencial dado por la ecuación (4.59).

Con el potencial (4.59) se realizara el estudio computacional de transiciones de fase en el SACM con “cranking”.

Como podemos observar en (4.59), fue necesario reescribir el potencial efectivo supuesto en (E.35) restringiéndose al caso $\alpha \rightarrow 0$ para el límite $SU(3)$, obteniéndose como potencial efectivo:

$$\tilde{V}(\alpha) \approx (A - \Omega^2 B) \alpha^2 \quad (4.60)$$

con la constante $K = (N + n_0)(N + n_0 - 1)(N + n_0 - 2)(-b)$.

Dado nuestro potencial efectivo (4.60), podemos hacer un análisis de transiciones de fase para el SACM con “cranking”, entonces:

1. Si $\left(A - \Omega^2 B \right) > 0$
 - Para $\Omega^2 = 0$ se tiene que $A > 0$, condición que nos indica la existencia de un mínimo para nuestro potencial (4.59) y que corresponde a un mínimo esférico.
2. Si $\left(A - \Omega^2 B \right) = 0$
 - Entonces $\Omega^2 = \Omega_{lim}^2 = \frac{A}{B}$, condición que nos indica el caso límite para que el mínimo del potencial (4.59) se convierte en un máximo, lo que corresponde al caso límite en que el mínimo esférico se convierte en un mínimo deformado.
3. Si $\left(A - \Omega^2 B \right) < 0$
 - Para $\Omega^2 > \Omega_{lim}^2$ se tiene que $A > 0$, condición que nos indica la existencia de un máximo para el potencial (4.59) y que corresponde la existencia de un mínimo deformado.

A primera vista, podemos decir que HABRÁ TRANSICIÓN DE FASE DE SEGUNDO ORDEN PARA EL SACM CON “CRANKING” PARA $\alpha \ll 1$ EN EL LÍMITE $SU(3)$ ya que el análisis realizado en el apéndice E de transiciones de fase para el SACM en, permite ver que hay dos mínimos esféricos que se funden en un sólo mínimo esférico el cual sufre un cambio a un mínimo deformado (a partir de una cierta $\Omega^2 = \Omega_{lim}^2 = \frac{A_c}{B_c}$) lo que corresponde al cambio de un mínimo a un máximo del potencial (4.59) respectivamente. Esto se ve con más detenimiento en el capítulo 6 para el sistema $^{16}\text{O} + \alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$.

Capítulo 5

Ajuste de los parámetros de interacción para el sistema $^{16}\text{O}+\alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$.

Como caso particular de estudio de las transiciones de fase en los modelos del PACM y del SACM con “cranking” se tomará el ejemplo de los dos cúmulos esféricos $^{16}\text{O}+\alpha$ que conforman al núcleo ligero ^{20}Ne . Al tomar un caso especial, es posible realizar un ajuste de parámetros del modelo. En este caso, el ajuste es realizado en el modelo del SACM, aunque este también será utilizado en el modelo del PACM. El ajuste de parámetros nos ayudara a poder reproducir el espectro de energías del sistema con que se está trabajando, teniendo mejores resultados cerca de los límites de las simetrías dinámicas del modelo. Principalmente se pueden obtener mejores resultados cerca del límite $SU(3)$, límite que al final nos restringimos en este trabajo para un análisis de las transiciones de fase. El ajuste de parámetros puede mejorar si nos tomamos $x \neq 1$, pero esto será llevado a cabo en trabajos futuros.

Para poder realizar el ajuste de parámetros en el límite $SU(3)$, es necesario utilizar ciertas energías experimentales dadas en la tabla 5.1.

$E(0_1^+)[\text{MeV}] = 0$
$E(0_2^+)[\text{MeV}] = 8.7$
$E(2_1^+)[\text{MeV}] = 1.634$

Tabla 5.1: Energías experimentales para el caso $^{16}\text{O}+\alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$.

Ajustando estas energías se obtuvo un ajuste muy bueno de los parámetros de interacción del espectro experimental de $^{16}\text{O}+\alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$. Con este ajuste es posible obtener finalmente el espectro en el límite $SU(3)$. Este ajuste puede compararse con el espectro experimental. Esta comparación se muestra en la Figura 5.1 [39]:

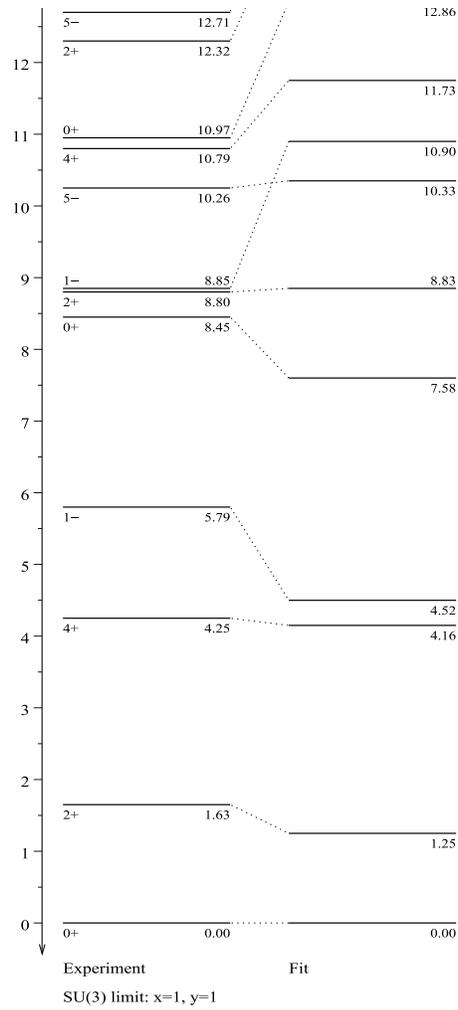


Figura 5.1: Comparación entre el espectro experimental y el espectro obtenido ajustando los parámetros del Hamiltoniano para el sistema $^{16}\text{O}+\alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$ en el límite $SU(3)$ [39].

Finalmente se muestra en la tabla 5.2 la lista de parámetros de interacción ajustados [16].

$\hbar\omega[\text{MeV}] = 13.2$
$a[\text{MeV}] = -0.500$
$b[\text{MeV}] = -0.009$
$\xi[\text{MeV}] = 0.208$

Tabla 5.2: Lista de parámetros de interacción ajustados para el caso del sistema $^{16}\text{O} + \alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$.

Otros valores importantes por conocer del sistema $^{16}\text{O} + \alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$ son las probabilidades de transición cuadrupolar eléctrica $B(E2)$ dadas en la tabla 5.3:

$B_{TEO}(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)[W.u]$	$B_{EXP}(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)[W.u]$
20.314869	20.3
$B_{TEO}(E2; 3_1^- \rightarrow 1_1^-)[W.u]$	$B_{EXP}(E2; 3_1^- \rightarrow 1_1^-)[W.u]$
30.8680478	50.8

Tabla 5.3: Lista de probabilidades de transición cuadrupolar eléctrica $B(E2)$ para el caso del sistema $^{16}\text{O} + \alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$.

Capítulo 6

Transiciones de fase en el PACM y en el SACM con “cranking”.

6.1. Estudio de las transiciones de fase en PACM con “cranking” para el caso del sistema $^{16}\text{O} + \alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$.

Teniendo los mismos parámetros de interacción ya ajustados como en el SACM, se procede ahora a sustituirlos en el potencial (4.35) para poder ver su comportamiento para una frecuencia de rotación dada. De esta manera, el potencial que se obtiene para el PACM a partir de (4.35) en el límite $SU(3)$, usando los coeficientes de la tabla 5.2 es el siguiente:

$$\begin{aligned} V(\beta)[\text{MeV}] &= \\ &= (11.88[\text{MeV}]) \left[(11.7697)\beta^2 - (4.9556)\beta^4 + \beta^6 - \Omega^2(0.1104/[\text{MeV}]^2) \right] \end{aligned} \quad (6.1)$$

El comportamiento del potencial (6.1) para una frecuencia rotacional dada en [MeV] se muestra en la Figura 6.1.

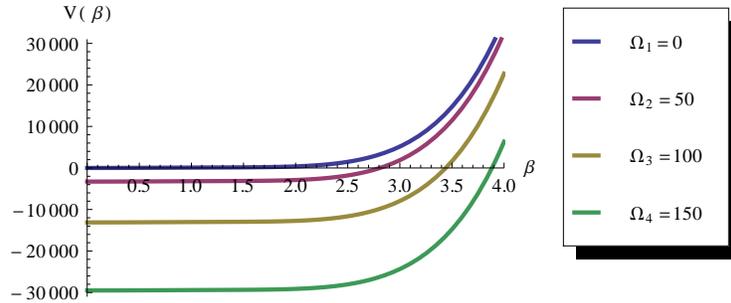


Figura 6.1: Potencial (6.1) para el PACM con “cranking” como función de β para una frecuencia rotacional Ω dada en [MeV].

Como podemos observar en la Figura 6.1, para el potencial de la ecuación (6.1) tenemos un mínimo esférico en $\Omega_1 = 0$. Al ir aumentando la frecuencia rotacional Ω , el potencial (6.1) va bajando en energía pero sin obtener un cambio de un mínimo esférico a un mínimo deformado. De esta manera se concluye que para el modelo del PACM con “cranking” en el caso de $^{16}\text{O} + \alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$ **NO SE OBTIENE UNA TRANSICIÓN DE FASE.**

6.2. Estudio de las transiciones de fase en SACM con “cranking” para el caso del sistema $^{16}\text{O} + \alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$.

Dado el Potencial (4.22), es posible hacer el análisis de transiciones de fase en SACM con “CRANKING” para el sistema $^{16}\text{O} + \alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$.

Para el caso del SACM, el ajuste experimental de parámetros de interacción que se muestra en la tabla 5.2. De esta manera, al igual que se hizo en el PACM, estos parámetros se sustituyen en el potencial (4.59) para poder ver su comportamiento para una frecuencia de rotación dada. El potencial que se obtiene a partir de (4.59) (donde se tomo la condición $\alpha \ll 1$ en el límite $SU(3)$) usando los parámetros de interacción de la tabla 5.2, es el siguiente:

$$V(\alpha) \approx (61.56[\text{MeV}]) \left[\left((8.0491) - \Omega^2(0.1318/[\text{MeV}]^2) \right) \alpha^2 \right] \quad (6.2)$$

El comportamiento del potencial (6.2) como función de α para una frecuencia rotacional Ω dada en [MeV] es:

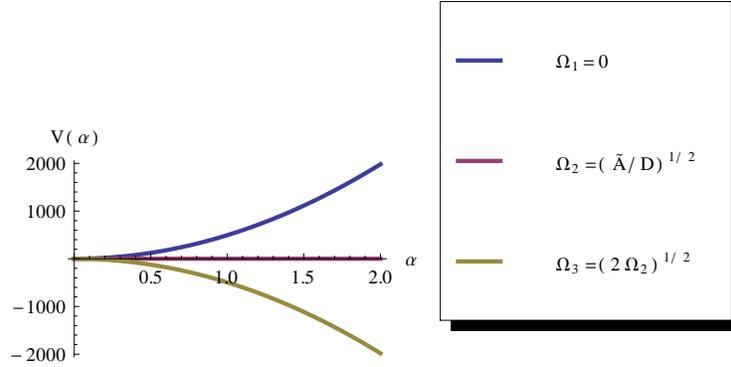


Figura 6.2: Potencial (6.2) para el SACM con “cranking” como función de α para una frecuencia rotacional Ω dada en [MeV].

De la Figura 6.2, puede comprobarse lo dicho anteriormente en el análisis de las transiciones de fase para el SACM con “cranking”. Para $\Omega_1 = 0$ se tiene un mínimo esférico en el potencial (6.2), al ir aumentando la frecuencia rotacional Ω se llega a una frecuencia rotacional límite Ω_{lim} donde se sufre el cambio a un mínimo deformado. De esta manera se concluye que para el modelo del SACM con “cranking” en el caso de $^{16}\text{O} + \alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$ **SE OBTIENE UNA TRANSICIÓN DE FASE DE 2º ORDEN** ya que hay el cambio de un mínimo esférico a un mínimo deformado lo que corresponde a un cambio de un mínimo a un máximo en el potencial (6.2) respectivamente.

Capítulo 7

Conclusión y futuro.

En este trabajo se hizo la introducción de “cranking” a los modelos algebraicos de cúmulos PACM y SACM. Ambos modelos tienen las mismas interacciones pero sus espacios modelo son diferentes dado que PACM no respeta el principio de exclusión de Pauli mientras que SACM sí lo hace.

Con el Hamiltoniano para los modelos del PACM y del SACM, resultante de la introducción del “cranking” y caracterizado por las simetrías dinámicas de $SU(3)$ y $SO(4)$, se realizó el mapeo geométrico con la ayuda del método de estados coherentes obteniendo de esta manera un potencial geométrico con el cual se estudiaron las transiciones de fase en el PACM y SACM con “cranking”. Dada la dificultad del estudio de las transiciones de fase en ambas simetrías dinámicas, se decidió realizar el estudio solamente en el límite de $SU(3)$ para ilustrar en ambos modelos los efectos del “cranking”, además de que en el SACM se decidió tomar el caso $\alpha \ll 1$. Lo anterior nos proveyó de un análisis adecuado para las transiciones de fase para el PACM y el SACM, sin embargo, se reporta el formalismo general.

Finalmente, se ajustaron experimentalmente los parámetros de interacción en el SACM (también usados en el PACM) para el caso $^{16}\text{O} + \alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$, y se obtuvo el espectro de energía para dicho sistema, además se encontró el comportamiento del potencial para ambos modelos para el caso cuando los parámetros son fijos y se tiene una frecuencia rotacional o un ángulo de rotación variable. Con todo lo anterior se realizó el estudio de transiciones de fase deseado. El resultado fue que para el PACM no hay transición de fase, mientras que para el SACM hay una transición de fase de segundo orden en $\Omega = \Omega_{lim}$ donde Ω es la frecuencia rotacional del “cranking”.

En un trabajo de investigación futuro, se esperara resolver de una forma adecuada la ecuación de cuarto orden obtenida a partir de la minimización del potencial en θ para ambos modelos y poder ver el comportamiento del potencial tomando en cuenta la condición sobre θ obtenida. Dado lo anterior, se espera

aplicar el método del “cranking” para otros sistemas de cúmulos que conformen núcleos ligeros realistas, estudiando de igual manera efectos de “*backbending*”.

Apéndice A

Grupos unitarios.

Cuando se habla de una simetría, tanto en mecánica clásica como en mecánica cuántica, es igual que hablar de una invariancia de las leyes físicas por las que está gobernado un sistema físico ante una cierta transformación (traslaciones espaciales, traslaciones temporales, rotaciones, etc) que se aplica al sistema. Por lo anterior, se puede decir que las leyes físicas son las mismas, antes y después de aplicar transformación. Simetrías al final de cuentas implican leyes de conservación (conservación del momento lineal, la energía, momento angular, etc) para el mismo sistema y degeneración de estados. Un teorema importante por mencionar es el Teorema de Noether, dicho teorema establece que si las ecuaciones de Euler-Lagrange (que describen el movimiento de un sistema), son invariantes bajo una transformación de coordenadas $t, q \rightarrow t'(t), q'(q, t)$ (llamada transformación de simetría), entonces existe una integral de movimiento, es decir, una cantidad conservada [26] o ley de conservación [27].

Las herramientas matemáticas para estudiar y describir a las simetrías son mejor conocidas como teoría de grupos. La definición de grupo es la siguiente:

*Un grupo \mathbf{G} puede ser definido como el conjunto de elementos (transformaciones) $\{a, b, c, \dots\}$ para los cuales la operación multiplicación o producto $a * b$ está bien definida, la cual cumple las siguientes propiedades [26]:*

- 1. Si a y b son dos elementos cualesquiera de \mathbf{G} , entonces el producto $a * b$ es también elemento de \mathbf{G} . Por lo anterior, se dice que \mathbf{G} es cerrado bajo la multiplicación de sus elementos.*
- 2. Hay un elemento identidad e en \mathbf{G} tal que $a * e = e * a = a$ para cada elemento a de \mathbf{G} .*
- 3. Para cada elemento a de \mathbf{G} existe un elemento inverso a^{-1} , tal que $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$.*
- 4. La multiplicación de elementos de \mathbf{G} es asociativa $(a * b) * c = a * (b * c)$.*

Definiciones muy importantes relacionadas con grupos son las siguientes [26].

1. Nosotros llamaremos un **grupo abeliano** si se satisface que:

$$a * b = b * a$$

para cada elemento de \mathbf{G} , es decir, si la multiplicación entre los elementos del grupo es conmutativa.

2. Nosotros llamaremos un **grupo continuo** si sus elementos son funciones de una o más variables continuas.
3. Nosotros llamaremos un **grupo continuamente conectado** si se encuentra una variación continua del grupo de parámetros la cual permita ir de un elemento arbitrario de \mathbf{G} a otro elemento del grupo.
4. Nosotros llamaremos un **grupo compacto** si existe un conjunto a_n de elementos del grupo, los cuales converjan a un elemento del grupo, es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

5. Dos conjuntos $\{a, b, c, \dots\}$ y $\{a', b', c', \dots\}$ son llamados **grupos isomorficos** si existe una transformación biyectiva entre los elementos de ambos grupos, es decir,

$$a \leftrightarrow a' \quad b \leftrightarrow b' \quad \text{tal que} \quad a * b \leftrightarrow a' * b'$$

6. Si un grupo \mathbf{G}_1 es isomorfo a otro grupo \mathbf{G}_2 , cuyos elementos son matrices, se dice que \mathbf{G}_2 es la **representación matricial** de \mathbf{G}_1 .

Entre los grupos de transformaciones de mayor interés en física se encuentran los grupos matriciales $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$ y $SO(n)$.

A continuación, se da una breve explicación de cada uno de ellos, tomando en cuenta que lo siguiente sólo se cumplirá en la representación irreducible matricial [28].

- **Grupo $U(n)$.** Es el grupo de matrices unitarias complejas. Al referirnos a una matriz unitaria, nos referimos a la matriz cuya inversa es igual a su transpuesta conjugada $U^{-1}(n) = U^\dagger(n)$.
- **Grupo $SU(n)$.** Es el grupo de matrices especiales unitarias complejas con determinante igual a 1.
- **Grupo $O(n)$.** Es el grupo de matrices ortogonales reales. Al referirnos a una matriz ortogonal, nos referimos a una matriz cuya inversa es igual a su transpuesta $O^{-1}(n) = O^T(n)$.
- **Grupo $SO(n)$.** Es el grupo de matrices especiales unitarias reales, es decir, matrices reales con determinante igual a 1.

Todos estos grupos son ejemplos típicos de **los grupos de L ie**. Los grupos de L ie son grupos continuos que dependen de n parámetros. Los operadores de dicho grupo pueden ser representados de forma general mediante [26]:

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \exp\left(-i \sum_{\mu=0}^n \alpha_\mu \hat{L}_\mu\right) \quad (\text{A.1})$$

Donde α_μ son los parámetros del grupo y \hat{L}_μ son los generadores del grupo.

De esta definición para los grupos de L ie, podemos darnos cuenta que sus elementos son funciones diferenciables de sus parámetros, obteniendo los generadores del grupo si es que se diferencia con respecto a la vecindad del operador identidad $U(\alpha) = 1$, es decir [26]:

$$\left. \frac{\partial \hat{U}(\alpha)}{\partial \alpha_\mu} \right|_{\alpha=0} = -i \hat{L}_\mu \quad (\text{A.2})$$

Dado un cierto grupo de L ie, siempre se puede construir un álgebra cerrada con los generadores del grupo, es decir, siempre es posible construir reglas de conmutación entre los generadores del grupo:

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = C_{ijk} \hat{L}_k \quad (\text{A.3})$$

Donde C_{ijk} son las constantes de estructura las cuales establecen un intercambio entre los elementos del grupo [26].

El rango de un grupo se puede definir como el número más grande de generadores que conmutan entre sí. Otra característica muy importante de los grupos de L ie es que ellos poseen ciertos operadores invariantes que conmutan con los generadores, dichos operadores son mejor conocidos como **operadores de Casimir** \hat{C}_λ . El número de operadores de Casimir λ es justamente el rango del grupo, esto es mejor conocido como **teorema de Racah** [26]. La importancia de los operadores de Casimir es que dado que conmutan con los generadores del grupo, se pueden encontrar eigenfunciones simultáneas entre ambos (operadores de Casimir y generadores del grupo), además de encontrar ciertos eigenvalores que son propios de un cierto multiplete de estados, es decir, de un conjunto de estados degenerados.

Existen varios métodos para construir los operadores de Casimir para un cierto grupo. En el caso de $SU(n)$ los operadores de Casimir tienen que ser polinomios homogéneos en los generadores.

$$\hat{C}_\lambda = \sum_{ij} a_{ij}^\lambda \dots \hat{L}_i \hat{L}_j \dots \quad (\text{A.4})$$

donde a_{ij}^λ son funciones definidas de las constantes de estructura [26].

Dentro de todos los sistemas que podrían presentar simetrías en sus leyes físicas y que son estudiadas mediante teoría de grupos se encuentran los núcleos. Al hablar de un núcleo, se está hablando de un sistema formado (en general) por varias partículas que interactúan fuertemente, dichas partículas son tanto protones como neutrones ambas mejor conocidas como nucleones.

Para poder estudiar el núcleo, es conveniente considerar el oscilador armónico en tres dimensiones (3D). Tomarse al oscilador armónico como campo promedio para el estudio de nuestro sistema, permite construir un formalismo matemático basado en operadores bosónicos de creación y aniquilación (\hat{b}_i^\dagger y \hat{b}^i respectivamente) de quantas de oscilación N lo cual permite hacer transiciones a un nivel N a un nivel superior $N+1$ o a un nivel inferior $N-1$. Dichos operadores cumplen con las siguientes propiedades.

$$[\hat{b}^i, \hat{b}_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad [\hat{b}^i, \hat{b}^j] = [\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_j^\dagger] = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$(\hat{b}_i^\dagger)^\dagger = \hat{b}^i \quad (\hat{b}_i)^\dagger = \hat{b}_i^\dagger \quad (\text{A.6})$$

$$\hat{b}_i^\dagger | \vec{N} \rangle = \sqrt{N_i + 1} | N_1, N_2, \dots, N_{i-1}, N_i + 1, N_{i+1}, \dots \rangle \quad (\text{A.7})$$

$$\hat{b}^i | \vec{N} \rangle = \sqrt{N_i} | N_1, N_2, \dots, N_{i-1}, N_i - 1, N_{i+1}, \dots \rangle \quad (\text{A.8})$$

$$| \vec{N} \rangle = | N_1, N_2, \dots, N_{i-1}, N_i, N_{i+1}, \dots \rangle \quad (\text{A.9})$$

Para ver a que grupo unitario pertenece el álgebra anterior, se toman como generadores de grupo a $\hat{C}_i^j = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}^j$, donde \hat{b}_i^\dagger y \hat{b}^j como se vio antes, son los operadores bosónicos de creación y aniquilación respectivamente. De (A.7) y (A.8) podemos definir.

$$\hat{C}_i^i | \vec{N} \rangle = N_i | \vec{N} \rangle \quad \text{con} \quad \hat{C}_i^i = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}^i \quad (\text{A.10})$$

Si se toma

$$\hat{N} = \sum_k \hat{C}_k^k \quad (\text{A.11})$$

entonces

$$\hat{N} | \vec{N} \rangle = \sum_k \hat{C}_k^k | \vec{N} \rangle = \sum_k N_k | \vec{N} \rangle = N | \vec{N} \rangle \quad (\text{A.12})$$

Las reglas de conmutación que satisfacen los generadores \hat{C}_i^j son:

$$\begin{aligned} [\hat{C}_i^j, \hat{C}_p^q] &= [\hat{b}_i^\dagger \hat{b}^j, \hat{b}_p^\dagger \hat{b}^q] = \hat{b}_i^\dagger [\hat{b}^j, \hat{b}_p^\dagger \hat{b}^q] + [\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_p^\dagger \hat{b}^q] \hat{b}^j = \\ &= \hat{b}_i^\dagger (\hat{b}_q^\dagger [\hat{b}^j, \hat{b}^q] + [\hat{b}^j, \hat{b}_p^\dagger] \hat{b}^q) + (\hat{b}_p^\dagger [\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}^q] + [\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_p^\dagger] \hat{b}^q) \hat{b}^j = \\ &= \hat{b}_i^\dagger [\hat{b}_j, \hat{b}_p^\dagger] \hat{b}^q + \hat{b}_p^\dagger [\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}^q] \hat{b}^j = \\ &= \hat{b}_i^\dagger \delta_{jp} \hat{b}^q - \hat{b}_p^\dagger \delta_{qi} \hat{b}^j = \delta_{jp} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}^q - \delta_{qi} \hat{b}_p^\dagger \hat{b}^j = \delta_{jp} \hat{C}_i^q - \delta_{qi} \hat{C}_p^j \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Por lo tanto los generadores forman un álgebra de Lie. A continuación se construye una matriz de generadores tomando en cuenta la representación de una partícula. Para dicha representación, se cumple que:

$$\hat{b}_i^\dagger | 0 \rangle = | i \rangle \quad \langle i | = \langle 0 | \hat{b}^i \quad (\text{A.14})$$

$$\hat{b}^i | 1 \rangle = | 0 \rangle \quad \langle 0 | = \langle 1 | \hat{b}_i^\dagger \quad (\text{A.15})$$

$$\hat{b}^i | 0 \rangle = 0 \quad 0 = \langle 0 | \hat{b}_i^\dagger \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} \langle i | \hat{C}_p^q | j \rangle &= \langle 0 | \hat{b}^i \hat{b}_p^\dagger \hat{b}^q \hat{b}_j^\dagger | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | (b_p^\dagger b^i + [b^i, b_p^\dagger])(b_j^\dagger b^q + [b^q, b_j^\dagger]) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | b_p^\dagger b^i b_j^\dagger b^q + b_p^\dagger b^i [b^q, b_j^\dagger] + [b^i, b_p^\dagger] b_j^\dagger b^q + [b^i, b_p^\dagger] [b^q, b_j^\dagger] | 0 \rangle = \delta_{ip} \delta_{qj} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Lo que implica que

$$\hat{C}_i^j = \delta_{ip} \delta_{qj} \quad (\text{A.18})$$

Es decir, $\hat{C}_i^j = \delta_{ip} \delta_{qj}$ es una matriz que tiene 1 en la intersección del i -ésimo renglón con la j -ésima columna, mientras que en las demás entradas de la matriz hay solamente ceros. De esta manera, la traza de \hat{C}_i^j es definida como:

$$tr(\hat{C}_i^j) = \delta_{ij} \quad (\text{A.19})$$

Para cumplir con el objetivo de encontrar el grupo al que corresponde la formulación con la que se ha venido trabajando, nos tomamos una transformación finita cuyos generadores sean \hat{C}_i^j :

$$\exp(i \sum_{ij} \alpha_{ij} \hat{C}_i^j) \quad (\text{A.20})$$

De esta manera, el determinante de dicha transformación es:

$$\begin{aligned} det[\exp(i \sum_{ij} \alpha_{ij} \hat{C}_i^j)] &= \exp(i \sum_{ij} \alpha_{ij} tr(\hat{C}_i^j)) = \\ &= \exp(i \sum_{ij} \alpha_{ij} \delta_{ij}) = \exp(i \sum_i \alpha_{ii}) = \exp(i\Phi) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

El grupo que puede cumplir esta propiedad es $U(n)$, es decir, el grupo unitario de n dimensiones. Para dicho grupo hay n^2 generadores y parámetros.

Para poder hacer la transición de $U(n)$ a $SU(n)$, es necesario tomar en cuenta la siguiente definición para los generadores de $SU(n)$ [26]:

$$\hat{\mathbf{C}}_i^j = \hat{C}_i^j - \frac{\delta_{ij}}{n} \sum_k \hat{C}_k^k \quad (\text{A.22})$$

Dicha definición está en términos de los generadores de $U(n)$.

Si se toma la suma de los elementos de la diagonal de la matriz de los generadores, se obtiene:

$$\sum_i \hat{\mathbf{C}}_i^i = \sum_i \hat{C}_i^i - \frac{1}{n} \hat{N} \sum_{i=1}^n 1 = \hat{N} - \frac{1}{n} \hat{N} n = 0$$

con

$$\hat{N} = \sum_m \hat{C}_m^m \quad \sum_{i=1}^n 1 = n \quad (\text{A.23})$$

Estos generadores también forman un álgebra de Lie.

$$[\hat{\mathbf{C}}_i^j, \hat{\mathbf{C}}_p^q] = \delta_{jp} \hat{\mathbf{C}}_i^q - \delta_{iq} \hat{\mathbf{C}}_p^j \quad (\text{A.24})$$

Tomándose nuevamente una transformación finita cuyos generadores sean ahora $\hat{\mathbf{C}}_i^j$, el determinante obtenido en este caso es:

$$\begin{aligned} \det[\exp(i \sum_{ij} \alpha_{ij} \hat{\mathbf{C}}_i^j)] &= \exp(i \sum_{ij} \alpha_{ij} \text{tr}(\hat{\mathbf{C}}_i^j)) = \exp(i \sum_i \alpha_i \text{tr}(\hat{\mathbf{C}}_i^i)) = \\ &= \exp(i \sum_i \alpha_i \cdot 0) = \exp(0) = 1 \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

El grupo que puede cumplir esta propiedad es $SU(n)$ que es el grupo especial unitario en n dimensiones. Dicho grupo tiene $n^2 - 1$ generadores y parámetros.

Una vez definidos los generadores tanto para $U(n)$ como para $SU(n)$, se puede construir con estos mismos los operadores de Casimir para cada grupo. Para poder realizar esto, es necesario dividir a los generadores en operadores de ascenso (\hat{C}_i^j con $i < j$), de descenso (\hat{C}_i^j con $i > j$) y de peso (\hat{C}_i^i con $i = j$). De esta manera, los operadores de Casimir para ambos grupos son:

Grupo $U(n)$

$$\begin{aligned} \hat{C}_{1U(n)} &= \sum_i \hat{C}_i^i = \text{tr} \hat{C} \\ \hat{C}_{2U(n)} &= \sum_{ij} \hat{C}_i^j \hat{C}_j^i = \text{tr} \hat{C}^2 \\ \hat{C}_{3U(n)} &= \sum_{ijk} \hat{C}_i^j \hat{C}_j^k \hat{C}_k^i = \text{tr} \hat{C}^3 \\ &\vdots \\ &\text{r operadores de Casimir} \end{aligned}$$

Grupo $SU(n)$

$$\begin{aligned} \hat{C}_{1SU(n)} &= \sum_i \hat{C}_i^i = 0 \\ \hat{C}_{2SU(n)} &= \sum_{ij} \hat{C}_i^j \hat{C}_j^i = \text{tr} \hat{C}^2 \end{aligned}$$

$$\hat{C}_{3_{SU(n)}} = \sum_{ijk} \hat{C}_i^j \hat{C}_j^k \hat{C}_k^i = \text{tr} \hat{C}^3$$

⋮

r-1 operadores de Casimir.

Lo que indica por el teorema de Racah que el rango de $U(n)$ es r y el rango de $SU(n)$ es $r - 1$.

Apéndice B

El modelo de vibrones.

El Modelo de Vibrones (VM por sus siglas en inglés) es un modelo que es fenomenológico el cual fue introducido, como se dijo antes, para modelar y estudiar el movimiento relativo (vibración) de 2 cúmulos.

En el VM el espectro colectivo de energía es generado por un número finito (N) de bosones, los cuales interactúan uno con otro y los cuales pueden ocupar estados de partícula individual de momento angular $l = 0$ con paridad positiva (σ) y de momento $l = 1$ con paridad negativa (π). Los operadores de cantidades físicas pueden expresarse en términos de operadores bosónicos de creación $\sigma^\dagger, \pi_\mu^\dagger$, $\mu = -1, 0, 1$ y aniquilación σ, π_μ [2]. Dado que el momento angular es un buen número cuántico de este modelo [2], los operadores bosónicos se acoplan a operadores tensoriales en $SO(3)$:

$$B_m^l(l_1, l_2) = [b_{l_1}^\dagger \times b_{l_2}]_m^l = \sum_{m_1, m_2} \langle l_1 m_1 l_2 m_2 | l m \rangle b_{l_1 m_1}^\dagger b_{l_2 m_2} \quad (\text{B.1})$$

donde b^\dagger son σ^\dagger o π_μ^\dagger , mientras que b^{lm} denota un operador tensorial esférico que se relaciona con el operador de aniquilación b_{lm} mediante la relación:

$$b^{lm} = (-1)^{l-m} b_{l-m} \quad (\text{B.2})$$

Si solamente se toman en cuenta interacciones de uno y dos cuerpos, el Hamiltoniano del sistema se puede expresar mediante términos lineales y cuadráticos, es decir, el Hamiltoniano tendría la siguiente forma:

$$H = h_0 + \sum_l h_{1l} B_0^{(0)}(l, l) + \sum_k \sum_{l_1 l_2 l_3 l_4} h_{2l_1 l_2 l_3 l_4}^{(k)} [B^k(l_1, l_2) \cdot B^k(l_3, l_4) + H.c.] \quad (\text{B.3})$$

Donde $H.c$ en (B.3) denota el operador Hermitiano conjugado y \sum' (aquí y en fórmulas posteriores) indica que sólo las combinaciones que conservan paridad son consideradas en el Hamiltoniano. Las h'_i s son parámetros de ajuste y el punto indica producto escalar:

$$a^l \cdot c^l = (-1^l) \sqrt{2l+1} [a^l \times c^l]_0^{(0)} = \sum_{\nu} (-1)^{\nu} a_{\nu}^{(l)} c_{\nu}^{(l)} \quad (\text{B.4})$$

Los operadores de otras cantidades físicas son también obtenidos como una expansión en serie de operadores bosónicos acoplados a un tensor apropiado. El modelo tiene una estructura de grupo $U(4)$ y dos casos límites (llamadas simetrías dinámicas) con soluciones analíticas al problema de valores propios, además de un conjunto completo de vectores propios los cuales pueden ser usados para diagonalizar un Hamiltoniano arbitrario.

La primera simetría dinámica es etiquetada mediante la cadena de grupo:

$$\left| \begin{array}{ccc} U(4) & \supset & U(3) \supset SO(3) \\ N & & n_{\pi} \quad L \\ n_{\pi} = N, N-1, \dots, 0 & & L = n_{\pi}, n_{\pi}-2, \dots, 1, 0 \end{array} \right. > \quad (\text{B.5})$$

Donde L es el momento angular total de el estado del sistema de N bosones, y n_{π} es el número de bosones dipolares (π). Al considerar sólo términos lineales y cuadráticos como en (B.3), el Hamiltoniano obtenido a partir de (B.5) es:

$$\hat{\mathbf{H}} = \epsilon + \beta \hat{\mathbf{L}}^2 + \gamma \hat{\mathbf{n}}_{\pi} + \delta \hat{\mathbf{n}}_{\pi}^2 \quad (\text{B.6})$$

con eiguvalor de energía:

$$E = \epsilon + \beta L(L+1) + \gamma n_{\pi} + \delta n_{\pi}^2 \quad (\text{B.7})$$

donde ϵ , β , γ y δ son combinaciones lineales de las h'_i s de (B.3). El operador $\hat{\mathbf{n}}_{\pi} = (\hat{\pi}^{\dagger} \cdot \hat{\pi}) = \sum_m \hat{\pi}_m^{\dagger} \hat{\pi}_m$ con $m = 0, \pm 1$. El operador de momento angular total coincide en este caso con el del movimiento relativo, es decir, $\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{\mathbf{L}}_R^2$ donde R denota movimiento relativo. El operador $\hat{\mathbf{L}}^2$, en términos de los operadores $\hat{\mathbf{L}}_{\pm}$ y $\hat{\mathbf{L}}_0$, puede ser expresado como:

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{L}}_+ \hat{\mathbf{L}}_- + \hat{\mathbf{L}}_- \hat{\mathbf{L}}_+) + \hat{\mathbf{L}}_0^2 \quad (\text{B.8})$$

Las definiciones para $\hat{\mathbf{L}}_+$, $\hat{\mathbf{L}}_-$ y $\hat{\mathbf{L}}_0$ están dadas por:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}}_+ &= -2[\hat{\pi}^{\dagger} \otimes \hat{\pi}]_{+1}^1 \\ \hat{\mathbf{L}}_- &= 2[\hat{\pi}^{\dagger} \otimes \hat{\pi}]_{-1}^1 \\ \hat{\mathbf{L}}_0 &= \sqrt{2}[\hat{\pi}^{\dagger} \otimes \hat{\pi}]_0^1 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

con

$$\begin{aligned}
[\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_m^{[S]} &= \sum_{m_1 m_2} (1m_1 1m_2 | Sm) \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2} = \\
&\sum_{m_1 m_2} (1m_1 1m_2 | Sm) \hat{\pi}_{m_1}^\dagger (-1)^{1-m_2} \hat{\pi}^{-m_2}
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Esto es visto con más detenimiento en el apéndice H.

Esta simetría dinámica da una descripción en términos de un oscilador anarmónico. Quitando el termino anarmónico en (B.7) y para $\beta = 0$, se llega al límite del oscilador armónico.

La otra simetría dinámica es etiquetada mediante la cadena de grupo:

$$\begin{array}{ccccc}
U(4) & \supset & SO(4) & \supset & SO(3) \\
| & & \omega & & L & & > \\
\omega = N, N-2, \dots, 1, 0 & & & & L = \omega, \omega-1, \dots, 0 & &
\end{array} \tag{B.11}$$

Este límite describe el movimiento de un sistema rígido de 2 cúmulos con una distancia de equilibrio finita. En este caso, el Hamiltoniano obtenido a partir de (B.11) es:

$$\hat{\mathbf{H}} = \epsilon' + \beta \hat{\mathbf{L}}^2 + \alpha \hat{\mathbf{C}}_2(\mathbf{SO}(4)) \tag{B.12}$$

donde el segundo operador de Casimir para $SO(4)$ esta dado por:

$$\hat{\mathbf{C}}_2(\mathbf{SO}(4)) = \hat{N}(\hat{N} + 2) - [(\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger) - (\hat{\sigma}^\dagger)^2][(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) - (\hat{\sigma})^2] \tag{B.13}$$

con:

$$\begin{aligned}
\hat{N} = \hat{n}_\pi + \hat{n}_\sigma &= (\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}) + (\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}) = \sum_m \hat{\pi}_m^\dagger \hat{\pi}^m + \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \\
(\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger) &= (\hat{\sigma}^\dagger)^2 \\
(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) &= (\hat{\sigma})^2 \\
(\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger) &= \sum_m \hat{\pi}_m^\dagger (\hat{\pi}^m)^\dagger \\
(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) &= \sum_m \hat{\pi}_m \hat{\pi}^m
\end{aligned} \tag{B.14}$$

el eigenvalor de energía es:

$$E = \epsilon' + \beta L(L + 1) + \alpha \omega(\omega + 2) \tag{B.15}$$

En el caso general, es decir, sin simetrías dinámicas, el Hamiltoniano tiene que ser diagonalizado numéricamente, usando los estados base (B.5) y (B.11).

Apéndice C

Presentación general de los estados coherentes.

En este apéndice se dará una presentación general de los estados coherentes de tal manera que se verán definiciones y propiedades de dichos estados de prueba que serán de gran utilidad para la obtención de elementos de matriz propios de cada potencial algebraico perteneciente a cada modelo que veremos [9].

C.1. Estados coherentes estándar. El oscilador armónico unidimensional.

Para poder llegar a una definición específica de los estados coherentes que se utilizarán para obtener los elementos de matriz relevantes de cada modelo considerado en este trabajo, es necesario tomar en cuenta al oscilador armónico en 1 dimensión. El Hamiltoniano que describe al oscilador armónico en 1 dimensión, en términos de la coordenada x y el momento p_x , ambos sin dimensiones es:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}_x^2 + \hat{x}^2) = \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \quad (\text{C.1})$$

donde a y a^\dagger se definen como:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{\partial}{\partial x}\right) \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\partial}{\partial x}\right) \quad (\text{C.2})$$

El algebra simple (el algebra unidimensional de Heisenberg-Weyl) de los operadores de creación y aniquilación es:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad [\hat{a}, 1] = 0 \quad [\hat{a}^\dagger, 1] = 0 \quad (\text{C.3})$$

También es importante ver que:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \hat{a}^\dagger}, \hat{a}^\dagger\right] = 1 \quad [\hat{a}, f(\hat{a}^\dagger)] = \frac{\partial f(\hat{a}^\dagger)}{\partial \hat{a}^\dagger} \quad (\text{C.4})$$

Hay 3 tipos de definiciones de estado coherente [9]. Para el oscilador armónico unidimensional ellas son equivalentes [9]. La primera es la “definición geométrica” (I), la segunda (II) es la definición de “función generadora” (usada para la construcción de conjunto completo de estados) y la tercera (III) es la definición “real de estado coherente”.

Consideremos alguna función de onda arbitraria que describe algún sistema. Si se desplaza dicho sistema una distancia c , la nueva función de onda que describe al sistema trasladado es:

$$\psi(x - c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \psi(x) = e^{-c \frac{\partial}{\partial x}} \psi(x) = e^{\frac{c}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})} \psi(x) \quad (\text{C.5})$$

Definiendo a $\frac{c}{\sqrt{2}}$ como una nueva cantidad z y permitiendo que dicha cantidad sea un número complejo arbitrario, se puede tomar una generalización del operador desplazamiento que es definido como:

$$\hat{D}(z) = e^{(z^* \hat{a}^\dagger - z \hat{a})} \quad (\text{C.6})$$

Dejando que (C.6) actúe sobre el vacío del oscilador armónico, se obtiene la primera definición de estado coherente.

■ DEFINICIÓN “GEOMÉTRICA” (I)

$$|z\rangle_I = e^{(z^* \hat{a}^\dagger - z \hat{a})} |0\rangle \quad (\text{C.7})$$

Usando la relación de Baker-Campbell-Hausdorff:

$$e^{(A+B)} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \quad (\text{C.8})$$

Valida si:

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0 \quad (\text{C.9})$$

Obtenemos que:

$$e^{(z^* \hat{a}^\dagger - z \hat{a})} = e^{z^* \hat{a}^\dagger} e^{-z \hat{a}} e^{-\frac{1}{2} z z^*} \quad (\text{C.10})$$

De esta manera:

$$|z\rangle_I = e^{(z^* \hat{a}^\dagger - z \hat{a})} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2} z z^*} e^{z^* \hat{a}^\dagger} e^{-z \hat{a}} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2} z z^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (\text{C.11})$$

Excepto por la función $e^{-\frac{1}{2} z z^*}$, la definición I de estados coherentes (C.11) es equivalente a la siguiente definición (definición II de estados coherentes):

■ DEFINICIÓN “FUNCIÓN GENERADORA” (II)

$$|z\rangle_{II} = e^{z^* \hat{a}^\dagger} |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (\text{C.12})$$

Esta puede ser la definición más simple si nuestro interés se centra en la construcción de estados, ya que genera todos los estados excitados del oscilador en la forma más sencilla.

El producto escalar:

$$\langle z' | z \rangle = e^{z' z^*} \quad (\text{C.13})$$

no es equivalente a funciones delta de Dirac pero si a una función de z y z' , por lo que los estados coherentes (C.12) son sobrecompletos.

El estado coherente (C.12) permite realizar la siguiente definición de operador identidad:

$$\mathbf{1} = \frac{1}{\pi} \int d^2 z e^{-z z^*} |z\rangle \langle z| \quad (\text{C.14})$$

donde la integración es sobre todo el plano o espacio z también llamado espacio de Bargmann.

Los vectores de estado $|\psi\rangle$ pueden ser expresados a través de realizaciones funcionales en el espacio z :

$$\langle z | \psi \rangle = \psi(z) \quad (\text{C.15})$$

lo que permite definir un producto escalar:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2 z e^{-z z^*} \langle \psi_1 | z \rangle \langle z | \psi_2 \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2 z e^{-z z^*} \psi_1^*(z) \psi_2(z) \quad (\text{C.16})$$

las funciones $\psi(z)$ en el espacio z son llamadas Transformadas Bargmann de las representaciones en coordenadas ordinarias $\psi(x)$. En términos de los estados coherentes de tipo II, las funciones de Bargmann toman la siguiente definición:

$$\psi(z) = \langle z | \psi \rangle = \sum_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \langle n | \psi \rangle = \sum_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} c_n \quad (\text{C.17})$$

También los operadores que actúan sobre los vectores de estado pueden ser transformados en su realización funcional en el espacio de Bargmann. Si,

$$|\psi\rangle \implies \psi(z) = \langle z | \psi \rangle = \langle 0 | e^{z \hat{a}} | \psi \rangle \quad (\text{C.18})$$

los operadores \hat{O} se mapean en:

$$\begin{aligned}
\hat{O}|\psi\rangle &\implies \Gamma(\hat{O}(z, \frac{\partial}{\partial z}))\psi(z) = \langle z|\hat{O}|\psi\rangle = \langle 0|e^{z\hat{a}}\hat{O}|\psi\rangle = \\
&= \langle 0|(e^{z\hat{a}}\hat{O}e^{-z\hat{a}})e^{z\hat{a}}|\psi\rangle = \langle 0|(\hat{O} + [z\hat{a}, \hat{O}] + \frac{1}{2}[z\hat{a}, [z\hat{a}, \hat{O}]] + \dots)e^{z\hat{a}}|\psi\rangle \quad (\text{C.19})
\end{aligned}$$

Dado que los operadores pueden ser construidos de los operadores de creación y aniquilación, será suficiente determinar las realizaciones funcionales en el espacio z de \hat{a} y \hat{a}^\dagger . Utilizando (C.19) obtenemos:

$$\blacksquare \hat{O} = \hat{a}$$

$$\hat{a}|\psi\rangle = \langle 0|(\hat{a} + [z\hat{a}, \hat{a}] + \frac{1}{2}[z\hat{a}, [z\hat{a}, \hat{a}]] + \dots)e^{z\hat{a}}|\psi\rangle = \frac{\partial\psi(z)}{\partial z} \quad (\text{C.20})$$

$$\blacksquare \hat{O} = \hat{a}^\dagger$$

$$\hat{a}^\dagger|\psi\rangle = \langle 0|(\hat{a}^\dagger + [z\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + \frac{1}{2}[z\hat{a}, [z\hat{a}, \hat{a}^\dagger]] + \dots)e^{z\hat{a}}|\psi\rangle = z\psi(z) \quad (\text{C.21})$$

Entonces:

$$\hat{a} \implies \Gamma(\hat{a}) = \frac{\partial\psi(z)}{\partial z} \quad \hat{a}^\dagger \implies \Gamma(\hat{a}^\dagger) = z \quad (\text{C.22})$$

Estas son las realizaciones en el espacio de Bargmann para los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger . Dichas realizaciones de \hat{a} y \hat{a}^\dagger satisfacen las propiedades de conmutación (C.3). Notemos también que $\frac{\partial}{\partial z}$ es el adjunto de z con respecto al producto escalar definido con la medida de Bargmann e^{-zz^*} . Tanto el estado coherente de tipo I como el estado coherente del tipo II satisfacen también la propiedad de ser eigenestados del operador de aniquilación \hat{a} . Esto permite realizar la tercera definición de estado coherente.

■ DEFINICIÓN “REAL” (III)

$$\hat{a}|z\rangle = z^*|z\rangle \quad (\text{C.23})$$

La cual se sigue de la definición II de estado coherente.

$$\begin{aligned}
\hat{a}|z\rangle &= \hat{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z^*)^n}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle = \\
&= z^* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z^*)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle = z^*|z\rangle \quad (\text{C.24})
\end{aligned}$$

Aunque (C.24) es equivalente a (C.7) y a (C.12), la equivalencia se rompe para casi todas las generalizaciones de estado coherente. Para nuestro caso, la definición II será la más útil.

C.2. El Modelo Fenomenológico Algebraico de Cúmulos (PACM).

A continuación se considera el estado coherente del PACM así como el cálculo explícito de los valores de expectación para el mismo modelo.

C.2.1. Estado coherente para el PACM.

Tomando solamente en cuenta la parte de movimiento relativo de este modelo, el estado coherente propuesto PACM es:

$$|\alpha\rangle = \mathcal{N}_N [\hat{\sigma}^\dagger + (\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^N |0\rangle \quad (\text{C.25})$$

El estado coherente conjugado para el PACM es:

$$\langle\alpha| = \mathcal{N}_N \langle 0| [\hat{\sigma} + (\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^N \quad (\text{C.26})$$

donde \mathcal{N}_N es la constante de normalización.

Aquí α es la notación corta para los coeficientes complejos α_m ($m = 1, 0, -1$). Es importante decir que el estado coherente de la ecuación (C.25) con los coeficientes complejos α es la combinación lineal mas general de los operadores bosónicos de creación del PACM manteniendo N constante. El α_m es en general complejo y arbitrario. El complejo conjugado es denotado por α_m^* y tiene la siguiente propiedad:

$$\alpha_m^* = \alpha_{-m} \quad (\text{C.27})$$

También existe el coeficiente $\tilde{\alpha}_m$ el cual posee la siguiente propiedad:

$$\tilde{\alpha}_m = (-1)^{1-m} \alpha_{-m} \quad (\text{C.28})$$

El coeficiente $\tilde{\alpha}_m$ es importante cuando se aplica el operador $\hat{\pi}_m = (-1)^{1-m} \hat{\pi}^{-m}$ a el estado coherente.

Para los operadores $\hat{\pi}$ y $\hat{\pi}^\dagger$ la convención de fase $\hat{O}^{lm} = (-1)^{l-m} \hat{O}_{-m}^l$ es usada. Adicionalmente:

$$(\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger) = \sum_m \alpha_m \hat{\pi}_m^\dagger \quad (\alpha^* \cdot \hat{\pi}) = \sum_m \alpha_m^* \hat{\pi}^m \quad (\text{C.29})$$

donde

$$\alpha^* \cdot \alpha = \sum_m \alpha_m^* \alpha_m = \sum_m |\alpha_m|^2 = \alpha^2 \quad (\text{C.30})$$

C.3. El Modelo Semimicroscópico Algebraico de Cúmulos (SACM).

A continuación se presenta el estado coherente utilizado en el SACM, así como los valores de expectación para el mismo modelo.

C.3.1. Estado coherente para el SACM.

Concentrándonos en la parte del movimiento relativo en este modelo y tomando el número mínimo de cuantos de oscilación relativo n_0 diferente de cero, el estado coherente propuesto para el SACM es:

$$|\alpha\rangle = \frac{N!}{(N+n_0)!} \mathcal{N}_{N,n_0} \frac{d^{n_0}}{d\gamma^{n_0}} [\hat{\sigma}^\dagger + \gamma(\alpha^* \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^{N+n_0} |0\rangle \quad (\text{C.31})$$

donde \mathcal{N}_{N,n_0} es la constante de normalización. Aquí n_0 da el número mínimo de bosones π necesarios para el cumplimiento del principio de exclusión de Pauli. El número total de bosones está dado por $N' = N + n_0$. Nuevamente α es la notación corta para los coeficientes complejos $\alpha_m (m = 1, 0, -1)$.

Apéndice D

El método del “cranking”.

El método del “cranking” permite estudiar y describir núcleos ligeros en términos de cúmulos rotantes [29]. A partir de la imposición de rotaciones sobre un sistema se puede estudiar el movimiento nuclear [29], obtener información sobre el espectro y calcular momentos de inercia [30]. Los cambios en el comportamiento rotacional son relacionados con transiciones de fase [30]. Trabajos relacionados con el método del “cranking” están publicados en [31,32]. El punto de inicio de la formulación general para el método del “cranking” es la siguiente.

Se espera que el sistema nuclear deformado sea un tipo de campo auto-consistente formado por un conjunto de nucleones, y que este campo sea oscilante (o rotante) con una pequeña velocidad $\dot{\alpha}_\mu$ (o velocidad angular Ω) [24], donde α_μ se define como un conjunto de variables colectivas importantes para la descripción del movimiento de los nucleones. Esto corresponde al hecho experimental que las energías vibracionales (y rotacionales) son pequeñas comparadas con las energías de partículas individuales. Entonces, el movimiento de los nucleones es considerado más rápido comparado al movimiento rotacional y esto hace considerar un campo deformado auto-consistente vibrando suavemente (o rotando). Nosotros estamos por lo tanto frente a un problema dependiente del tiempo [24].

Sea $H(\alpha_\mu, r_i)$ el Hamiltoniano para el núcleo deformado [24]. La deformación del sistema nuclear esta caracterizado por las coordenadas colectivas α_μ . Las r_i son $3A - N$ coordenadas internas donde N es el número de grados de libertad colectivos. Supongamos que podemos resolver el mismo Hamiltoniano para un conjunto particular fijo de variables colectivas o de deformación $\alpha_\mu = \alpha_\mu^{(0)}$ en el tiempo inicial ($t = 0$), es decir:

$$H^{(0)}(r_i) = H^{(0)}(\alpha_\mu^{(0)}, r_i) \tag{D.1}$$

con la solución

$$\begin{aligned}
H^{(0)}(r_i)\chi_n^{(0)} &= H(\alpha_\mu^{(0)}, r_i)\chi_n^{(0)}(\alpha_\mu^{(0)}, r_i) = \\
&= \epsilon_n^{(0)}(\alpha_\mu^{(0)})\chi_n^{(0)}(\alpha_\mu^{(0)}, r_i)
\end{aligned} \tag{D.2}$$

Las funciones $\chi_n^{(0)}$ dependen de las variables de deformación $\alpha_\mu^{(0)}$ en $(t = 0)$. Dicha ecuación es llamada la ecuación estática. Nosotros estamos interesados en una solución arbitraria del tipo $\chi_n(\alpha_\mu, r_i)$ la cual siempre pueda expandirse para valores generales α_μ alrededor de $\alpha_\mu = \alpha_\mu^{(0)}$ y entonces:

$$\begin{aligned}
\chi(\alpha_\mu, r_i) &= S(\alpha_\mu)\chi(\alpha_\mu^{(0)}, r_i) = \chi(\alpha_\mu^{(0)} + (\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}), r_i) = \\
&= \sum_n \frac{1}{n!} \left[\sum_\mu (\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_\mu^{(0)}} \right) \right]^n \chi(\alpha_\mu^{(0)}, r_i) = \\
&= \sum_n \frac{1}{n!} \left[\sum_\mu \left\{ i(\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}) \right\} \left(-i \frac{\partial}{\partial \alpha_\mu^{(0)}} \right) \right]^n \chi(\alpha_\mu^{(0)}, r_i) = \\
&= \sum_n \frac{\left[i \sum_\mu (\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}) J_\mu^{(0)} \right]^n}{n!} \chi(\alpha_\mu^{(0)}, r_i)
\end{aligned} \tag{D.3}$$

donde

$$J_\mu^{(0)} = -i \frac{\partial}{\partial \alpha_\mu^{(0)}} \tag{D.4}$$

es el operador conjugado en $\alpha_\mu^{(0)}$ que sólo actúa sobre la función de onda $\chi(\alpha_\mu^{(0)}, r_i)$. El operador de evolución $S(\alpha_\mu)$ está dado por:

$$S(\alpha_\mu) = \sum_n \frac{\left[i \sum_\mu (\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}) J_\mu^{(0)} \right]^n}{n!} = \exp \left[i \sum_\mu (\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}) J_\mu^{(0)} \right] \tag{D.5}$$

Dicho operador $S(\alpha_\mu)$ cumple con la propiedad de ser unitario, es decir, $S^{-1} = S^\dagger$ (dado que los generadores $J_\mu^{(0)}$ son hermitianos).

Como caso especial tenemos la rotación de una función de onda a través de 3 ángulos $(\theta_x, \theta_y, \theta_z) = \vec{\theta}$ donde el operador $S(\theta)$, para este caso especial, sería el operador de rotación:

$$R(\theta) = \exp [i\theta \cdot J] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\theta \cdot J)^n}{n!} \tag{D.6}$$

donde J son los tres operadores de momento angular cartesiano.

De

$$\chi(\alpha_\mu, r_i) = S(\alpha_\mu)\chi(\alpha_\mu^{(0)}, r_i) = S(\alpha_\mu)\chi^{(0)}(r_i) \quad (\text{D.7})$$

y de la unitariedad de S , se sigue que

$$\begin{aligned} \langle \chi_n^{(0)} | H^{(0)} | \chi_{n'}^{(0)} \rangle &= \langle S^{-1}\chi_n | H^{(0)} | S^{-1}\chi_{n'} \rangle = \\ &= \langle \chi_n | S H^{(0)} S^{-1} | \chi_{n'} \rangle = \langle \chi_n | H | \chi_{n'} \rangle \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

y entonces

$$\begin{aligned} H(\alpha_\mu, r_i) &= S(\alpha_\mu)H^{(0)}S^{-1}(\alpha_\mu) = \\ &= \exp \left[i \sum_{\mu} (\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}) J_{\mu}^{(0)} \right] H(\alpha_\mu^{(0)}, r_i) \exp \left[-i \sum_{\mu} (\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}) J_{\mu}^{(0)} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Dado que los $\alpha_\mu^{(0)}$ son independientes del tiempo, toda la dependencia temporal se encuentra en las variables colectivas α_μ .

Ahora, lo que se tiene que hacer es determinar la modificación de las soluciones independientes del tiempo $\chi^{(0)}(\alpha_\mu^{(0)}, r_i)$ debido a la dependencia temporal de α_μ , entonces

$$\psi(\alpha_\mu, r_i, t) = \exp \left[i \sum_{\mu} (\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}) J_{\mu}^{(0)} \right] \psi^{(0)}(\alpha_\mu^{(0)}, r_i, t) \quad (\text{D.10})$$

Esta $\psi(\alpha_\mu, r_i, t)$ tiene que satisfacer la ecuación de Schroedinger dependiente del tiempo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\alpha_\mu, r_i, t) = H(\alpha_\mu, r_i) \psi(\alpha_\mu, r_i, t) \quad (\text{D.11})$$

Usando (D.10) y (D.11) obtenemos

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[\exp \left[i \sum_{\mu} (\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}) J_{\mu}^{(0)} \right] \psi^{(0)}(\alpha_\mu^{(0)}, r_i, t) \right] &= \\ = \exp \left[i \sum_{\mu} (\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}) J_{\mu}^{(0)} \right] H^{(0)} \psi^{(0)}(\alpha_\mu^{(0)}, r_i, t) \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Diferenciando, lo que se obtiene es

$$\left(-\hbar \sum_{\mu} \dot{\alpha}_{\mu} J_{\mu}^{(0)} + i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right) \psi^{(0)}(\alpha_{\mu}^{(0)}, r_i, t) = H^{(0)} \psi^{(0)}(\alpha_{\mu}^{(0)}, r_i, t) \quad (\text{D.13})$$

ó

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^{(0)}(\alpha_{\mu}^{(0)}, r_i, t) = \left(H^{(0)} + \hbar \sum_{\mu} \dot{\alpha}_{\mu} J_{\mu}^{(0)}\right) \psi^{(0)}(\alpha_{\mu}^{(0)}, r_i, t) \quad (\text{D.14})$$

donde

$$\hbar \sum_{\mu} \dot{\alpha}_{\mu} J_{\mu}^{(0)} = -i\hbar \sum_{\mu} \dot{\alpha}_{\mu} \frac{\partial}{\partial \alpha_{\mu}^{(0)}} \quad (\text{D.15})$$

El objetivo principal de este trabajo es introducir un “cranking” a los modelos algebraicos PACM y SACM y ver sus implicaciones en las transiciones de fase. El “cranking” es introducido a los modelos del PACM y del SACM anexando al Hamiltoniano que describe al sistema de cúmulos esféricos un término de la forma $-\Omega \hat{\mathbf{L}}_x$, con frecuencia de rotación Ω . En nuestro caso, como vemos en el capítulo 3, la estructura del Hamiltoniano con “cranking” para un sistema de dos cúmulos esféricos dentro de un modelo algebraico es:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathbf{H}} - \Omega \hat{\mathbf{L}}_x \quad (\text{D.16})$$

De esta manera, se tiene que:

$$\hbar \sum_{\mu} \dot{\alpha}_{\mu} \rightarrow -\Omega \quad (\text{D.17})$$

donde α_{μ} es una variable que depende del tiempo mientras que $-\Omega$ no depende del tiempo. Otra característica de $-\Omega$ es que es un parámetro no fijo ya que lo variaremos para poder estudiar los diferentes cambios que puede producir en los modelos algebraicos que veremos incluyendo sus transiciones de fase.

Apéndice E

Transiciones de fase con “cranking”.

E.1. Definición de transición de fase.

Antes de empezar a definir lo que es el concepto de transición de fase, es conveniente primero definir lo que es el concepto de fase utilizado en la Termodinámica y Mecánica Estadística. A una fase se le puede definir como un sistema cuyas propiedades físicas son esencialmente uniformes. De esta manera, la transición de fase se puede definir como la transformación de una fase a otra de un sistema homogéneo, cambiando de esta manera sus propiedades físicas.

Hasta ahora se ha hablado transiciones de fase para sistemas con ciertas propiedades uniformes, dichos sistemas cuentan con la peculiaridad de ser macroscópicos los cuales están conformados por muchas partículas ($N \rightarrow \infty$) pero hoy en día se han empezado a estudiar transiciones de fase para sistemas como son los núcleos atómicos [35,36]. Los modelos algebraicos son especialmente útiles en este tipo de estudios.

E.2. Transiciones de fase y su relación con Física Nuclear.

E.2.1. Transiciones de fase térmicas.

En el estado base, un núcleo usualmente es considerado como una gota de agua microscópica. Transcurrió mucho tiempo para saber si había una transición de fase a la fase gaseosa al aumentar la temperatura. Después de muchas investigaciones teóricas y experimentales, la respuesta parece ser afirmativa [37]. A ésta se le llama transición de fase de la materia nucleónica.

A temperaturas altas los nucleones se disuelven y los quarks y gluones se mueven libremente. Como consecuencia, una transición de fase drástica puede ocurrir de tal forma que el sistema pase de una fase hadrónica a una fase sin confinamiento de quarks y gluones. En estas transiciones por supuesto que el efecto del tamaño finito del núcleo es muy importante, pero aún están gobernadas por la temperatura, así que las llamamos transiciones de fase térmicas. Las transiciones de fase térmicas del núcleo se analizan con mayor detenimiento en [37]. En nuestro caso a continuación trataremos transiciones de fase cuánticas con “cranking” del núcleo.

E.2.2. Transiciones de fase cuánticas.

En los núcleos atómicos se observan también otro tipo de transiciones de fase, las cuales no dependen de la temperatura, es por eso que se les conoce como transiciones de fase cuánticas. Su aparición está muy relacionada a los efectos de tamaño finito, ya que tienen que ver con la forma del núcleo o con el movimiento colectivo del núcleo como un todo. Estos fenómenos son también conocidos transiciones de forma-fase, transiciones de fase en $T=0$, o transiciones de fase del estado base.

Las transiciones de fase en modelos algebraicos de cúmulos están referidas más específicamente a cambios de distancia entre los centros de los cúmulos esféricos. Si consideramos los dos cúmulos esféricos como un sistema unido, los cambios de distancia entre los centros de los cúmulos se pueden interpretar como cambios de forma (deformación) del sistema unido, mejor conocidos como cambios de simetría. En el presente caso se tiene una simetría $SU(3)$ relacionada con la vibración del sistema alrededor de una forma esférica (sólo para el PACM como se muestra en la Figura 3.4) de equilibrio, y una simetría $SO(4)$ relacionada con un dipolo. Por lo anterior se puede decir que las diferentes fases están caracterizadas por diferentes simetrías y una transición de fase involucra un cambio en la simetría.

Refiriéndonos más específicamente a transiciones de fase para modelos algebraicos de cúmulos con “cranking”, podemos decir que ahora se habla de transiciones de fase para estados excitados.

E.3. Determinación de las transiciones de fase con “cranking” y su orden.

A continuación se determinarán las transiciones de fase con “cranking” utilizando el criterio de Ehrenfest siguiendo los pasos recomendados en [38]:

1. Primeramente se determinan los puntos extremos del Potencial Efectivo $\tilde{V}(\alpha)$ (definido en la última parte del capítulo 3) en el espacio de variables

colectivas α_m . Para el caso del “cranking” (como veremos en el capítulo 4), dada una cierta parametrización, habrá primeramente 3 variables relevantes α, θ, ϕ pero luego lo reducimos a una variable la cual es α porque se tomarán condiciones sobre θ y ϕ minimizando con respecto estas variables. Para el caso de la variable α , el vector distancia entre cúmulos puede siempre ser alineado a lo largo del eje intrínseco z que conecta a ambos cúmulos. Los puntos extremos α_i ($i = 1, 2, \dots$) se obtienen a través de la condición:

$$\frac{d\tilde{V}(\alpha)}{d\alpha} = 0 \quad (\text{E.1})$$

Los puntos extremos α_i son funciones de ciertos parámetros de interacción (p_1, p_2, \dots, p_{n_p}), es decir, $\alpha_i = \alpha_i(p_1, p_2, \dots, p_{n_p})$.

2. Después de que los puntos extremos son obtenidos, ahora lo que se hace es ver cuáles de estos extremos cumplen con la condición de ser mínimos del potencial. Dicha condición es:

$$\frac{d^2\tilde{V}(\alpha)}{d\alpha^2} \Big|_{\alpha=\alpha_i} > 0 \quad (\text{E.2})$$

3. Lo que se hace ahora es determinar las regiones entre las que ocurren transiciones de fase en el espacio de parámetros donde al menos dos mínimos están a la misma altura:

$$\tilde{V}(\alpha_{i1}) = \tilde{V}(\alpha_{i2}) \quad (\text{E.3})$$

Lo anterior, nos da una relación:

$$f(p_1, p_2, \dots, p_{n_p}) = 0 \quad (\text{E.4})$$

lo que nos permite expresar un parámetro en términos de los otros.

4. Una vez hecho todo lo anterior, se determina el orden de la transición de fase. La transición de fase será de orden m , cuando la m -ésima derivada del potencial con respecto a sus parámetros sea discontinua en el punto de la transición de fase, mientras que las n derivadas (con $n < m$) sean continuas o iguales en el punto de la transición de fase, es decir:

$$\frac{\partial^n \tilde{V}(\alpha_{i1})}{\partial p_k^n} = \frac{\partial^n \tilde{V}(\alpha_{i2})}{\partial p_k^n} \quad \text{para } n < m \quad \frac{\partial^m \tilde{V}(\alpha_{i1})}{\partial p_k^m} \neq \frac{\partial^m \tilde{V}(\alpha_{i2})}{\partial p_k^m} \quad (\text{E.5})$$

Por lo que, se define:

Una TRANSICIÓN DE FASE DE PRIMER ORDEN es aquella en la que la primera derivada de los dos mínimos del potencial (E.3) (ambos encontrados a la misma altura) con respecto a los parámetros de control es discontinua:

$$\frac{\partial \tilde{V}(\alpha_{i1})}{\partial p_k} \neq \frac{\partial \tilde{V}(\alpha_{i2})}{\partial p_k} \quad (\text{E.6})$$

Una TRANSICIÓN DE SEGUNDO ORDEN es aquella en la que al ocurrir la transición de fase la segunda derivada de los dos mínimos del potencial (E.3) (ambos encontrados a la misma altura) con respecto a los parámetros del sistema es discontinua:

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}(\alpha_{i1})}{\partial p_k^2} \neq \frac{\partial^2 \tilde{V}(\alpha_{i2})}{\partial p_k^2} \quad (\text{E.7})$$

E.4. Transiciones de fase para el PACM con “cranking” (caso general).

Ahora se realizará el estudio de las transiciones de fase en el PACM con “cranking”, tomando como potencial efectivo:

$$\tilde{V}(\beta) = A\beta^2 - B\beta^4 + \beta^6 + C \quad (\text{E.8})$$

donde:

$$\beta^2 = \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \quad (\text{E.9})$$

En el capítulo 4 se puede ver que dicho potencial (E.8) corresponde verdaderamente a la forma de nuestro potencial efectivo en PACM con “cranking” (4.36) bajo ciertas restricciones.

Los puntos extremos de $\tilde{V}(\beta)$, se hallan mediante:

$$\frac{d\tilde{V}(\beta)}{d\beta} = 2A\beta - 4B\beta^3 + 6\beta^5 = 0 \quad (\text{E.10})$$

Las soluciones obtenidas para (E.10) son:

$$\beta_1 = 0 \quad (\text{E.11})$$

$$\beta_2^2 = \frac{1}{3}(B + \sqrt{B^2 - 3A}) \quad (\text{E.12})$$

$$\beta_3^2 = \frac{1}{3}(B - \sqrt{B^2 - 3A}) \quad (\text{E.13})$$

Entonces tenemos como primer punto extremo a β_1 . Para que puedan existir (E.12) y (E.13) (y de esta manera β_2 y β_3 sean nuestro segundo y tercer punto extremo respectivamente), estas soluciones deben de cumplir con la condición de ser reales ($(B^2 - 3A) \geq 0$) y positivas, es decir, se debe de cumplir que:

▪

$$(B^2 - 3A) > 0 \Rightarrow \frac{B^2}{3} \geq A \quad (\text{E.14})$$

▪ Para β_2^2

$$(B + \sqrt{B^2 - 3A}) > 0 \quad (\text{E.15})$$

- Para β_3^2

$$(B - \sqrt{B^2 - 3A}) > 0 \quad (\text{E.16})$$

Como veremos mas adelante, β_2^2 cumplirá con la condición de ser mínimo mientras que β_3^2 cumplirá con la condición de ser máximo. Para que se satisfaga la condición (E.15), y de esta manera, tener como segundo punto extremo a β_2 es necesario que:

1. Si $B > 0 \Rightarrow$ No hay restricción sobre A .
2. Si $B < 0 \Rightarrow A < 0$

Para que se satisfaga la condición (E.16), y de esta manera, tener como tercer punto extremo a β_3 es necesario que:

1. Si $B > 0 \Rightarrow A > 0$
2. Si $B < 0 \Rightarrow (B - \sqrt{B^2 - 3A}) < 0 \Rightarrow \beta_3$ no es un punto extremo.

Ahora veremos cuáles de los 3 puntos extremos β_1, β_2 y β_3 (Si $B > 0$) cumplen con la condición de ser un mínimo de \tilde{V} , por lo que se debe satisfacer la siguiente condición:

$$\frac{d^2 \tilde{V}(\beta)}{d\beta^2} \Big|_{\beta=\beta_i} = (2A - 12B\beta^2 + 30\beta^4) \Big|_{\beta=\beta_i} > 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{E.17})$$

Entonces:

1. Para β_1

$$\frac{d^2 \tilde{V}(\beta)}{d\beta^2} \Big|_{\beta=\beta_1} = 2A \quad (\text{E.18})$$

Entonces β_1 es un mínimo si $A > 0$.

2. Para β_2

$$\frac{d^2 \tilde{V}(\beta)}{d\beta^2} \Big|_{\beta=\beta_2} = \frac{8}{3}(B^2 - 3A)\left(1 + \frac{B}{\sqrt{B^2 - 3A}}\right) \quad (\text{E.19})$$

Entonces:

- a) Si $B > 0 \Rightarrow$ No hay restricción sobre $A \Rightarrow \beta_2$ es un mínimo.
- b) Si $B < 0 \Rightarrow A < 0 \Rightarrow \beta_2$ es un mínimo.

3. Para β_3

$$\frac{d^2 \tilde{V}(\beta)}{d\beta^2} \Big|_{\beta=\beta_3} = \frac{8}{3}(B^2 - 3A)\left(1 - \frac{B}{\sqrt{B^2 - 3A}}\right) \quad (\text{E.20})$$

Entonces:

- a) Si $B > 0 \Rightarrow A > 0 \Rightarrow \beta_3$ es un máximo.

b) Si $B < 0 \Rightarrow \beta_3$ no es un punto extremo y por lo tanto ni un mínimo y ni un máximo.

El siguiente paso es determinar las regiones de transición de fase en el espacio de parámetros, para esto ponemos a los dos mínimos encontrados (β_1 y β_2) a la misma energía:

$$\tilde{V}(\beta_1) = \tilde{V}(\beta_2) \quad (\text{E.21})$$

Notamos que para la solución (E.11), el valor del potencial es:

$$\tilde{V}(\beta_1) = 0 \quad (\text{E.22})$$

Para la solución (E.12), el potencial es dado por:

$$\tilde{V}(\beta_2) = \frac{1}{27}(B + \sqrt{B^2 - 3A})(6A - B^2 - B\sqrt{B^2 - 3A}) \quad (\text{E.23})$$

Poniendo estos dos mínimos del potencial como se indica en (E.21), lo que se obtiene es:

$$\frac{1}{27}(B + \sqrt{B^2 - 3A})(6A - B^2 - B\sqrt{B^2 - 3A}) = 0 \quad (\text{E.24})$$

Para que los dos mínimos puedan coexistir a la vez, necesitamos la condición $B > 0$ (lo que implicaría la condición $A > 0$), lo que implicaría que $(B + \sqrt{B^2 - 3A}) > 0$. Dada esta condición, (E.24) se puede simplificar a:

$$(6A - B^2 - B\sqrt{B^2 - 3A}) = 0 \quad (\text{E.25})$$

Con lo que obtenemos la siguiente relación entre los parámetros A y B:

$$A = \frac{B^2}{4} \quad (\text{E.26})$$

A continuación, en la Figura E.1 se grafican las diferentes regiones entre las que puede haber una cierta transición de fase de un cierto orden en el espacio de parámetros.

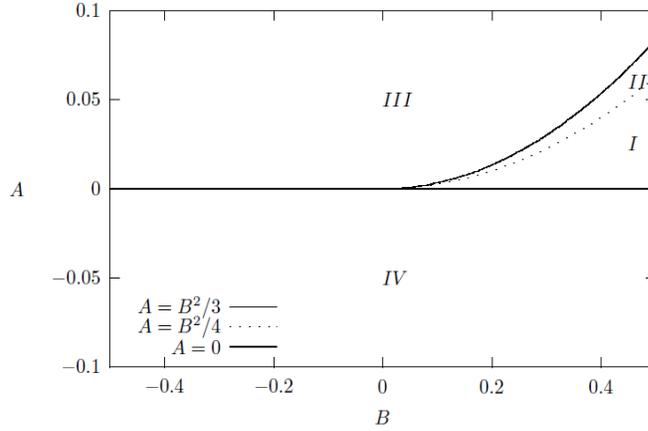


Figura E.1: Regiones en el espacio de parámetros para el PACM [44,45]. El eje horizontal es B , mientras que el eje vertical es A . En la Región I y en la Región II dos mínimos existen, uno esférico y otro deformado. En la Región I el mínimo global es deformado, mientras que en la Región II este mínimo global es esférico. En la Región III sólo un mínimo esférico existe y en la Región IV sólo hay un mínimo deformado.

Es importante decir que la gráfica anterior nos resume todas las propiedades de fase que tiene nuestro sistema con sólo 2 parámetros, no importando cuantos parámetros tenga nuestro potencial efectivo (E.8). A continuación se realizará un análisis del conjunto de mínimos esféricos ($\beta = 0$) y mínimos deformados ($\beta \neq 0$) que se encuentra en cada región.

- Para la Región I (delimitada por $A = \frac{B^2}{4}$ y $A = 0$) con $B > 0$ tenemos que coexisten tanto un mínimo esférico como un mínimo deformado y el mínimo global es deformado.
- Para la Región II (delimitada por $A = \frac{B^2}{3}$ y $A = \frac{B^2}{4}$) tenemos que al igual que en la región I, coexisten tanto un mínimo esférico como un mínimo deformado y el mínimo global es esférico.
- Para la Región III (delimitada por $A = \frac{B^2}{3}$ y $A = 0$) con $B < 0$ tenemos un mínimo esférico.
- Para la Región IV (delimita por $A = 0$), tanto para $B > 0$ y $B < 0$ tenemos un mínimo deformado.

Ahora se determinará el orden de las diferentes transiciones de fase entre las regiones de la Figura E.1.

E.4.1. Transición de la Región I a la Región II

- Para la Región I y la Región II se tiene que $B > 0$

- La condición de transición de la región I a la Región II es $A = \frac{B^2}{4}$, donde el mínimo esférico tiene la misma energía que el mínimo deformado.

Para β_1 tenemos que:

$$\frac{d^n \tilde{V}(\beta_1)}{dA^n} \Big|_{A=\frac{B^2}{4}} = 0 \quad (\text{E.27})$$

para toda $n \geq 0$.

En el caso de β_2 tenemos que:

$$\frac{d\tilde{V}(\beta_2)}{dA} \Big|_{A=\frac{B^2}{4}} = \frac{1}{3} \sqrt{B^2 - 3A} \left(1 + \frac{B}{\sqrt{B^2 - 3A}}\right) \Big|_{A=\frac{B^2}{4}} = \frac{2}{3} B \neq 0 \quad (\text{E.28})$$

Lo anterior implica que:

$$\frac{d\tilde{V}(\beta_1)}{dA} \Big|_{A=\frac{B^2}{4}} \neq \frac{d\tilde{V}(\beta_2)}{dA} \Big|_{A=\frac{B^2}{4}} \quad (\text{E.29})$$

Entonces, podemos concluir que la transición de fase de la Región I a la Región II es de PRIMER ORDEN.

E.4.2. Transición de la Región III a la Región IV para $B \leq 0$

- Para la Región III y la Región IV se toma $B \leq 0$
- La condición de transición de la Región I a la Región II es $A = 0$.

Para β_1 tenemos que:

$$\frac{d^n \tilde{V}(\beta_1)}{dA^n} \Big|_{A=0} = 0 \quad \text{para toda } n \geq 0 \quad (\text{E.30})$$

En el caso de β_2 tenemos que:

$$\frac{d\tilde{V}(\beta_2)}{dA} \Big|_{A=0} = \frac{1}{3} \sqrt{B^2 - 3A} \left(1 - \frac{|B|}{\sqrt{B^2 - 3A}}\right) \Big|_{A=0} = 0 \quad (\text{E.31})$$

$$\frac{d^2 \tilde{V}(\beta_2)}{dA^2} \Big|_{A=0} = -\frac{1}{2\sqrt{B^2 - 3A}} \Big|_{A=0} = -\frac{1}{2|B|} \neq 0 \quad (\text{E.32})$$

De manera que:

$$\frac{d\tilde{V}(\beta_1)}{dA} \Big|_{A=0} = \frac{d\tilde{V}(\beta_2)}{dA} \Big|_{A=0} \quad (\text{E.33})$$

$$\frac{d^2 \tilde{V}(\beta_1)}{dA^2} \Big|_{A=0} \neq \frac{d^2 \tilde{V}(\beta_2)}{dA^2} \Big|_{A=0} \quad (\text{E.34})$$

Por lo tanto, la transición de fase al pasar de la Región III a la Región IV es de SEGUNDO ORDEN.

E.5. Transiciones de fase para el SACM con “cranking” (caso general).

Como es visto en el capítulo 4, el potencial efectivo (definido en la parte final de capítulo 3) obtenido para el SACM es algo complicado debido a la forma de ciertas funciones F_{pq} (descritas en el capítulo 4) que contiene el potencial, de manera que un tratamiento analítico para obtener el estudio de las transiciones de fase será muy difícil. Por lo anterior, necesitamos un conjunto de criterios que nos permitan determinar de una forma diferente y fácil el orden de las transiciones de fase.

Supongamos que nuestro potencial efectivo para el SACM tiene una dependencia lineal con los parámetros de interacción $p_k = A, B, C, \dots, K$ teniendo la siguiente estructura:

$$\tilde{V} = \sum_k p_k \alpha^{m_k} f_k(\alpha) \quad (\text{E.35})$$

con $m_k > 1$ y p_k el k -ésimo parámetro. El término $f_k(\alpha)$ representa la relación entre las funciones F_{pq} (descritas en el capítulo 4), las cuales son mayores que cero para $\alpha \neq 0$.

En el capítulo 4 se puede ver que dicho potencial (E.35) corresponde a la forma de nuestro potencial efectivo en SACM con “cranking” (4.60) bajo ciertas restricciones.

En el punto de transición de fase, se investigará a $\tilde{V}(\bar{\alpha}_i)$, con $\bar{\alpha}_i$ siendo el valor de α en el i -ésimo mínimo. La dependencia lineal explícita de \tilde{V} sobre los parámetros $p_k = A, B, C, \dots, K$ será de gran utilidad en el estudio de las transiciones de fase para el modelo del SACM.

Ahora se determinaran los mínimos $\bar{\alpha}_i$ del potencial $\tilde{V}(\alpha)$ de igual forma a como se obtuvieron para el PACM, de esta manera:

$$\frac{d\tilde{V}(\alpha)}{d\alpha} = 0 \quad (\text{E.36})$$

Se observa, que como primer mínimo tenemos a $\bar{\alpha}_1 = 0$ pues siempre podemos sacar como factor común a α , es decir:

$$\frac{d\tilde{V}(\alpha)}{d\alpha} = \alpha[\dots] = 0 \quad (\text{E.37})$$

De esta manera $\bar{\alpha}_1$ es un mínimo esférico además de que siempre $\tilde{V}(\bar{\alpha}_1)$ junto con todas sus derivadas son siempre cero.

Para el segundo mínimo deformado $\bar{\alpha}_2$, hay dos posibilidades:

- $\bar{\alpha}_2 > 0$

ó

- $\bar{\alpha}_2 = 0$

Ahora es necesario determinar el orden de la transición de fase, para esto, primeramente se deriva con respecto al parámetro p_k :

$$\frac{d\tilde{V}}{dp_k} = \frac{\partial\tilde{V}}{\partial p_k} + \frac{\partial\tilde{V}}{\partial\bar{\alpha}_i} \frac{\partial\bar{\alpha}_i}{\partial p_k} = \frac{\partial\tilde{V}}{\partial p_k} \quad (\text{E.38})$$

dato que $\frac{\partial\tilde{V}(\bar{\alpha}_i)}{\partial\bar{\alpha}_i} = 0$ en el mínimo.

Dado que $\bar{\alpha}_1 = 0$, al ser evaluado en el potencial efectivo (E.35), se obtiene:

$$\tilde{V}(\bar{\alpha}_1, p_k) = \tilde{V}(0, p_k) = 0 \quad (\text{E.39})$$

De esta manera, las derivadas de (E.39) son cero igualmente:

$$\frac{d\tilde{V}(0, p_k)}{dp_k} = 0 \quad (\text{E.40})$$

$$\frac{d^2\tilde{V}(0, p_k)}{dp_k^2} = 0 \quad (\text{E.41})$$

Tomando en cuenta la expresión (E.38), tenemos que para $\bar{\alpha}_2$ se cumple que:

$$\frac{d\tilde{V}(\bar{\alpha}_2, p_k)}{dp_k} = \bar{\alpha}_2^{m_k} f(\bar{\alpha}_2) \quad (\text{E.42})$$

Además para $\bar{\alpha}_2$ la segunda derivada de \tilde{V} con respecto a p_k está dada por:

$$\frac{d^2\tilde{V}(\bar{\alpha}_2, p_k)}{dp_k^2} = \frac{d}{dp_k} \left(\frac{\partial\tilde{V}}{\partial p_k} \right) = \frac{\partial\bar{\alpha}_2^{m_k}}{\partial p_k} f(\bar{\alpha}_2) + \bar{\alpha}_2^{m_k} \frac{\partial f_k(\bar{\alpha}_2)}{\partial\bar{\alpha}_2} \frac{\partial\bar{\alpha}_2}{\partial p_k} \quad (\text{E.43})$$

Con las condiciones anteriores, el estudio del orden de las transiciones de fase es el siguiente:

1. Para $\bar{\alpha}_1 = 0$ y $\bar{\alpha}_2 > 0$.

Dado que $\bar{\alpha}_2^{m_k} \neq 0$ y $f(\bar{\alpha}_2) \neq 0$ entonces (E.42) es diferente de cero. Tomando en cuenta (E.40), se obtiene que:

$$\frac{d\tilde{V}(\bar{\alpha}_1, p_k)}{dp_k} \neq \frac{d\tilde{V}(\bar{\alpha}_2, p_k)}{dp_k} \quad (\text{E.44})$$

2. Para $\bar{\alpha}_1 = 0$ y $\bar{\alpha}_2 = 0$.

Tomando en cuenta a (E.40) y a (E.42), tenemos que:

$$\frac{d\tilde{V}(\bar{\alpha}_1, p_k)}{dp_k} = \frac{d\tilde{V}(\bar{\alpha}_2, p_k)}{dp_k} \quad (\text{E.45})$$

De esta manera, la transición de fase debe de ser de mayor orden que de primer. Dado que $f(\bar{\alpha}_2) \neq 0$ y que en general $\frac{\partial \bar{\alpha}_2^{m_k}}{\partial p_k} \neq 0$, entonces (E.43) deber ser diferente de cero. Tomando en que cuenta (E.41) obtenemos que:

$$\frac{d^2\tilde{V}(\bar{\alpha}_1, p_k)}{dp_k^2} \neq \frac{d^2\tilde{V}(\bar{\alpha}_2, p_k)}{dp_k^2} \quad (\text{E.46})$$

Dado los resultados anteriores, concluimos que:

1. Si $\bar{\alpha}_1 = 0$ y $\bar{\alpha}_2 > 0$, tenemos una Transición de Fase de PRIMER ORDEN.
2. Si $\bar{\alpha}_1 = 0$ y $\bar{\alpha}_2 = 0$, tenemos una Transición de Fase de SEGUNDO ORDEN.

Apéndice F

Cálculo explícito de los valores de expectación en PACM.

Primero se calculará la constante de normalización \mathcal{N}_N del estado coherente para el PACM dado por la ecuación (C.25). Normalizando obtenemos:

$$\begin{aligned}
 1 = \langle \alpha | \alpha \rangle &= \mathcal{N}_N^2 \langle 0 | [\hat{\sigma} + (\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^N [\hat{\sigma}^\dagger + (\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^N | 0 \rangle = \\
 &= \mathcal{N}_N^2 \langle 0 | [\hat{\sigma} + \sum_m \alpha_m^* \hat{\pi}^m]^N [\hat{\sigma}^\dagger + \sum_m \alpha_m \hat{\pi}_m^\dagger]^N | 0 \rangle = \\
 &= \mathcal{N}_N^2 \langle 0 | [\hat{\sigma} + \sum_m \alpha_m^* \hat{\pi}^m]^{N-1} [\hat{\sigma} + \sum_m \alpha_m^* \hat{\pi}^m] [\hat{\sigma}^\dagger + \sum_m \alpha_m \hat{\pi}_m^\dagger]^N | 0 \rangle = \\
 &= \mathcal{N}_N^2 \langle 0 | [\hat{\sigma} + \sum_m \alpha_m^* \hat{\pi}^m]^{N-1} N (1 + \sum_m \alpha_m^* \alpha_m) [\hat{\sigma}^\dagger + \sum_m \alpha_m \hat{\pi}_m^\dagger]^{N-1} | 0 \rangle = \\
 &= \mathcal{N}_N^2 N (1 + \sum_m \alpha_m^* \alpha_m) \langle 0 | [\hat{\sigma} + (\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^{N-1} [\hat{\sigma}^\dagger + (\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^{N-1} | 0 \rangle = \\
 &= \mathcal{N}_N^2 N (N-1) (1 + \sum_m \alpha_m^* \alpha_m)^2 \times \\
 &\times \langle 0 | [\hat{\sigma} + (\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^{N-2} [\hat{\sigma}^\dagger + (\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^{N-2} | 0 \rangle = \\
 &\vdots \\
 &= \mathcal{N}_N^2 N (N-1) (N-2) \cdots 2 \cdot 1 (1 + \sum_m \alpha_m^* \alpha_m)^N \langle 0 | 0 \rangle \\
 &= \mathcal{N}_N^2 N! (1 + \sum_m \alpha_m^* \alpha_m)^N \langle 0 | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{N}_N = \frac{1}{\sqrt{N! [1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^N}} \quad (\text{F.1})$$

De este modo, el estado coherente propuesto para el PACM es:

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{N! [1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^N}} [\hat{\sigma}^\dagger + (\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^N |0\rangle \quad (\text{F.2})$$

Dado el valor esperado del Hamiltoniano para el PACM (4.7), se observa que los elementos de matriz que se tienen que calcular con respecto a (F.2) son:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle & \quad \langle (\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger)(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) \rangle \\ \langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^2 \rangle & \quad \langle (\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger)(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) \rangle \\ \langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^3 \rangle & \quad \langle (\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) \rangle \\ \langle \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{x}} \rangle & \quad \langle (\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) \rangle \\ & \quad \langle \hat{\mathbf{L}}^2 \rangle \end{aligned}$$

Para el operador de número $\hat{\mathbf{n}}_\pi$ tenemos que:

$$\hat{\mathbf{n}}_\pi = (\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}) = \sum_m \hat{\pi}_m^\dagger \hat{\pi}^m \quad (\text{F.3})$$

De manera que:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle & = \langle \alpha | \hat{\mathbf{n}}_\pi | \alpha \rangle = \langle \alpha | (\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}) | \alpha \rangle = \sum_m \langle \alpha | \hat{\pi}_m^\dagger \hat{\pi}^m | \alpha \rangle = \\ & = \sum_m \left\{ \mathcal{N}_N N \alpha_m^* \langle 0 | [\hat{\sigma} + \sum_{m'} \alpha_{m'}^* \hat{\pi}^{m'}]^{N-1} \right\} \times \\ & \times \left\{ \mathcal{N}_N N \alpha_m \langle \hat{\sigma}^\dagger + \sum_{m'} \alpha_{m'} \hat{\pi}_{m'}^\dagger |^{N-1} | 0 \rangle \right\} = \\ & = \mathcal{N}_N^2 N^2 \sum_m \alpha_m^* \alpha_m \langle 0 | [\hat{\sigma} + \sum_{m'} \alpha_{m'}^* \hat{\pi}^{m'}]^{N-1} [\hat{\sigma}^\dagger + \sum_{m'} \alpha_{m'} \hat{\pi}_{m'}^\dagger]^{N-1} | 0 \rangle = \\ & = \mathcal{N}_N^2 N^2 \sum_m \alpha_m^* \alpha_m \mathcal{N}_{N-1}^{-2} = N^2 (\alpha^* \cdot \alpha) \frac{(N-1)! [1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N-1}}{N! [1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^N} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle = N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} \quad (\text{F.4})$$

Para $\hat{\mathbf{n}}_\pi^2$ se tiene:

$$\hat{\mathbf{n}}_\pi^2 = \sum_{m_1 m_2} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}^{m_2} = \sum_{m_1 m_2} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} \hat{\pi}^{m_2} + \hat{\mathbf{n}}_\pi \quad (\text{F.5})$$

donde se uso:

$$[\hat{\pi}^{m_1}, \hat{\pi}_{m_2}^\dagger] = \delta_{m_2}^{m_1} \quad (\text{F.6})$$

De esta manera:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^2 \rangle &= \sum_{m_1 m_2} \langle \alpha | \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} \hat{\pi}^{m_2} | \alpha \rangle + N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} = \\ &= \mathcal{N}_N^2 N^2 (N-1)^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^2 \langle 0 | [\hat{\sigma} + (\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^{N-2} [\hat{\sigma}^\dagger + (\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^{N-2} | 0 \rangle \\ &+ N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} = \\ &= \mathcal{N}_N^2 N^2 (N-1)^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^2 \mathcal{N}_{N-2}^{-2} + N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} = \\ &= \mathcal{N}_N^2 N^2 (N-1)^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^2 \frac{(N-2)! [1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N-2}}{N! [1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^N} + N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^2 \rangle = N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} + N(N-1) \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)^2}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \quad (\text{F.7})$$

Para $\hat{\mathbf{n}}_\pi^3$ se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}_\pi^3 &= \sum_{m_1 m_2 m_3} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}^{m_2} \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}^{m_3} = \\ &= \sum_{m_1 m_2 m_3} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger (\hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} + \delta_{m_2}^{m_1}) (\hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}^{m_2} + \delta_{m_3}^{m_2}) \hat{\pi}^{m_3} = \\ &= \sum_{m_1 m_2 m_3} (\hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}^{m_2} \hat{\pi}^{m_3} + \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} \delta_{m_3}^{m_2} \hat{\pi}^{m_3}) \\ &+ \sum_{m_1 m_2 m_3} (\hat{\pi}_{m_1}^\dagger \delta_{m_2}^{m_1} \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}^{m_2} \hat{\pi}^{m_3} + \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \delta_{m_2}^{m_1} \delta_{m_3}^{m_2} \hat{\pi}^{m_3}) = \\ &= \sum_{m_1 m_2 m_3} (\hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} \hat{\pi}^{m_2} \hat{\pi}^{m_3} + \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \delta_{m_3}^{m_1} \hat{\pi}^{m_2} \hat{\pi}^{m_3}) \\ &+ \sum_{m_1 m_2 m_3} (\hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} \delta_{m_3}^{m_2} \hat{\pi}^{m_3} + \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \delta_{m_2}^{m_1} \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}^{m_2} \hat{\pi}^{m_3} + \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \delta_{m_2}^{m_1} \delta_{m_3}^{m_2} \hat{\pi}^{m_3}) = \\ &= \sum_{m_1 m_2 m_3} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} \hat{\pi}^{m_2} \hat{\pi}^{m_3} + \sum_{m_1 m_2} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}^{m_2} \hat{\pi}^{m_1} \\ &+ \sum_{m_1 m_2} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} \hat{\pi}^{m_2} \\ &+ \sum_{m_1 m_3} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} \hat{\pi}^{m_3} + \hat{\mathbf{n}}_\pi \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{n}}_\pi^{\mathbf{3}} &= \sum_{m_1 m_2 m_3} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} \hat{\pi}^{m_2} \hat{\pi}^{m_3} + \sum_{m_1 m_2} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}^{m_2} \hat{\pi}^{m_1} \\
&+ \sum_{m_1 m_2} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} \hat{\pi}^{m_2} + \sum_{m_1 m_3} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} \hat{\pi}^{m_3} + \hat{\mathbf{n}}_\pi
\end{aligned} \tag{F.8}$$

De esta manera:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^{\mathbf{3}} \rangle &= \langle \alpha | \hat{\mathbf{n}}_\pi^{\mathbf{3}} | \alpha \rangle = \sum_{m_1 m_2 m_3} \langle \alpha | \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} \hat{\pi}^{m_2} \hat{\pi}^{m_3} | \alpha \rangle \\
&+ \sum_{m_1 m_2} \langle \alpha | \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}^{m_2} \hat{\pi}^{m_1} | \alpha \rangle + \sum_{m_1 m_2} \langle \alpha | \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} \hat{\pi}^{m_2} | \alpha \rangle \\
&+ \sum_{m_1 m_3} \langle \alpha | \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} \hat{\pi}^{m_3} | \alpha \rangle + \langle \alpha | \hat{\mathbf{n}}_\pi | \alpha \rangle = \\
&= \mathcal{N}_N^2 N^2 (N-1)^2 (N-2)^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^3 \\
&+ 3N(N-1) \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)^2}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^2} + N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} \\
&= \mathcal{N}_N^2 N^2 (N-1)^2 (N-2)^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^3 \mathcal{N}_{N-3}^{-2} \\
&+ 3N(N-1) \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)^2}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^2} + N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} \\
&= \mathcal{N}_N^2 N^2 (N-1)^2 (N-2)^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^3 \frac{(N-3)! [1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N-3}}{N! [1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^N} \\
&+ 3N(N-1) \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)^2}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^2} + N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^{\mathbf{3}} \rangle &= N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} + 3N(N-1) \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)^2}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \\
&+ N(N-1)(N-2) \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)^3}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^3}
\end{aligned} \tag{F.9}$$

Para $\langle(\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger)(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi})\rangle$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle(\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger)(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi})\rangle &= \mathcal{N}_N^2 \langle 0 | [\hat{\sigma} + (\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^N (\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger) (\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) [\hat{\sigma}^\dagger + (\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^N | 0 \rangle = \\
&= \mathcal{N}_N^2 \langle 0 | [\hat{\sigma} + (\sum_m \alpha_m^* \hat{\pi}^m)]^N \left\{ \sum_{m_1} (\hat{\pi}_{m_1})^\dagger (\hat{\pi}^{m_1})^\dagger \right\} \times \\
&\times \left\{ \sum_{m_2} \hat{\pi}_{m_2} \hat{\pi}^{m_2} \right\} [\hat{\sigma}^\dagger + (\sum_m \alpha_m \hat{\pi}_m^\dagger)]^N | 0 \rangle = \\
&= \langle 0 | [\hat{\sigma} + (\sum_m \alpha_m^* \hat{\pi}^m)]^N \left\{ \sum_{m_1} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger (-1)^{1-m_1} \hat{\pi}_{-m_1}^\dagger \right\} \times \\
&\times \left\{ \sum_{m_2} (-1)^{1-m_2} \hat{\pi}^{-m_2} \hat{\pi}^{m_2} \right\} [\hat{\sigma}^\dagger + (\sum_m \alpha_m \hat{\pi}_m^\dagger)]^N | 0 \rangle = \\
&= \mathcal{N}_N^2 N^2 (N-1)^2 \left\{ \sum_{m_1} \alpha_{m_1}^* \tilde{\alpha}_{m_1}^* \right\} \left\{ \sum_{m_2} \alpha_{m_2} \tilde{\alpha}_{m_2} \right\} \times \\
&\times \langle 0 | [\hat{\sigma} + (\sum_m \alpha_m^* \hat{\pi}^m)]^{N-2} [\hat{\sigma}^\dagger + (\sum_m \alpha_m \hat{\pi}_m^\dagger)]^{N-2} | 0 \rangle = \\
&= \mathcal{N}_N^2 N^2 (N-1)^2 (\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*) (\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \mathcal{N}_{N-2}^{-2} = \\
&= N^2 (N-1)^2 (\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*) (\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \frac{(N-2)! [1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N-2}}{N! [1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^N}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\langle(\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger)(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi})\rangle = N(N-1) \frac{(\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*) (\alpha \cdot \tilde{\alpha})}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \quad (\text{F.10})$$

Para $\langle(\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger)(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma})\rangle$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle(\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger)(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma})\rangle &= \mathcal{N}_N^2 \langle 0 | [\hat{\sigma} + (\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^N (\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger) (\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) [\hat{\sigma}^\dagger + (\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^N | 0 \rangle = \\
&= \mathcal{N}_N^2 N^2 (N-1)^2 (\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*) \langle 0 | [\hat{\sigma} + (\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^{N-2} [\hat{\sigma}^\dagger + (\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^{N-2} | 0 \rangle = \\
&= \mathcal{N}_N^2 N^2 (N-1)^2 (\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*) \mathcal{N}_{N-2}^{-2} = \\
&= N^2 (N-1)^2 (\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*) \frac{(N-2)! [1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N-2}}{N! [1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^N}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\langle(\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger)(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma})\rangle = N(N-1) \frac{(\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \quad (\text{F.11})$$

Para $\langle(\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi})\rangle$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle(\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi})\rangle &= \mathcal{N}_N^2 \langle 0 | [\hat{\sigma} + (\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^N (\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) [\hat{\sigma}^\dagger + (\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^N | 0 \rangle = \\
&= \mathcal{N}_N^2 N^2 (N-1)^2 (\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \langle 0 | [\hat{\sigma} + (\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^{N-2} [\hat{\sigma}^\dagger + (\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^{N-2} | 0 \rangle = \\
&= \mathcal{N}_N^2 N^2 (N-1)^2 (\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \mathcal{N}_{N-2}^{-2} = \\
&= N^2 (N-1)^2 (\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \frac{(N-2)! [1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N-2}}{N! [1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^N}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\langle(\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi})\rangle = N(N-1) \frac{(\alpha \cdot \tilde{\alpha})}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \quad (\text{F.12})$$

Para $\langle(\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma})\rangle$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle(\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma})\rangle &= \langle \alpha | (\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{\sigma}^\dagger (\hat{\sigma} \hat{\sigma}^\dagger - 1) \hat{\sigma} | \alpha \rangle = \\
&= \langle \alpha | \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} - \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{\mathbf{n}}_\sigma^2 - \hat{\mathbf{n}}_\sigma | \alpha \rangle = \langle \alpha | (\hat{\mathbf{N}} - \hat{\mathbf{n}}_\pi)^2 - (\hat{\mathbf{N}} - \hat{\mathbf{n}}_\pi) | \alpha \rangle = \\
&= \langle \alpha | \hat{\mathbf{N}}(\hat{\mathbf{N}} - \mathbf{1}) - (\mathbf{2}\hat{\mathbf{N}} - \mathbf{1})\hat{\mathbf{n}}_\pi + \hat{\mathbf{n}}_\pi^2 | \alpha \rangle = \\
&= \mathbf{N}(\mathbf{N} - \mathbf{1}) - (\mathbf{2}\mathbf{N} - \mathbf{1}) \langle \alpha | \hat{\mathbf{n}}_\pi | \alpha \rangle + \langle \alpha | \hat{\mathbf{n}}_\pi^2 | \alpha \rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\langle(\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma})\rangle &= N(N-1) - 2N^2 \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} + 2N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} \\
&+ N(N-1) \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)^2}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \quad (\text{F.13})
\end{aligned}$$

Apéndice G

Cálculo explícito de los valores de expectación en SACM.

Para facilitar los cálculos de los elementos de matriz en SACM, utilizaremos la siguiente definición:

$$F_{pq}(\alpha^2) = \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} \sum_{k=\max(n_0-p, n_0-q, 0)}^{N+n_0-\max(p,q)} \binom{N+n_0-\max(p,q)}{k} \times \\ \times \left[\frac{(k+p)!}{(k+p-n_0)!} \right] \left[\frac{(k+q)!}{(k+q-n_0)!} \right] (\alpha^* \cdot \alpha)^k \quad (\text{G.1})$$

De la definición (G.1), podemos obtener las expresiones listadas en la tabla G.1

$$\begin{aligned}
F_{00}(\alpha^2) &= \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} \sum_{k=n_0}^{N+n_0} \binom{N+n_0}{k} \left[\frac{k!}{(k-n_0)!} \right]^2 \alpha^{2k} \\
F_{11}(\alpha^2) &= \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} \sum_{k=\max(n_0-1,0)}^{N+n_0-1} \binom{N+n_0-1}{k} \left[\frac{(k+1)!}{(k+1-n_0)!} \right]^2 \alpha^{2k} \\
F_{22}(\alpha^2) &= \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} \sum_{k=\max(n_0-2,0)}^{N+n_0-2} \binom{N+n_0-2}{k} \left[\frac{(k+2)!}{(k+2-n_0)!} \right]^2 \alpha^{2k} \\
F_{33}(\alpha^2) &= \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} \sum_{k=\max(n_0-3,0)}^{N+n_0-3} \binom{N+n_0-3}{k} \left[\frac{(k+3)!}{(k+3-n_0)!} \right]^2 \alpha^{2k} \\
F_{20}^{N-2}(\alpha^2) &= \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} \sum_{k=\max(n_0,0)}^{N+n_0-2} \binom{N+n_0-2}{k} \times \\
&\quad \times \left[\frac{k!}{(k-n_0)!} \right] \left[\frac{(k+2)!}{(k+1-n_0)!} \right] \alpha^{2k}
\end{aligned}$$

Tabla G.1: Abreviaciones utilizadas en SACM.

Otras expresiones importantes en términos de potencias de $(\alpha \cdot \alpha)$ que nos ayudarán en el cálculo de los valores de expectación en SACM son las siguientes:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0} \Big|_{\gamma_1=\gamma_2=1} = \\
&= \sum_{k=n_0}^{N+n_0} \binom{N+n_0}{k} \left[\frac{k!}{(k-n_0)!} \right]^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^k \\
&\frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} \gamma_1 \gamma_2 [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0-1} \Big|_{\gamma_1=\gamma_2=1} = \\
&= \sum_{k=\max(n_0-1,0)}^{N+n_0-1} \binom{N+n_0-1}{k} \left[\frac{(k+1)!}{(k+1-n_0)!} \right]^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^k \\
&\frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} \gamma_2 [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0-1} \Big|_{\gamma_1=\gamma_2=1} = \\
&= \sum_{k=n_0}^{N+n_0-1} \binom{N+n_0-1}{k} \left[\frac{k!}{(k-n_0)!} \right] \left[\frac{(k+1)!}{(k+1-n_0)!} \right] (\alpha^* \cdot \alpha)^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} (\gamma_1 \gamma_2)^2 [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0-2} \Big|_{\gamma_1=\gamma_2=1} = \\
& = \sum_{k=\max(n_0-2,0)}^{N+n_0-2} \binom{N+n_0-2}{k} \left[\frac{(k+2)!}{(k+2-n_0)!} \right]^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^k \\
& \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} (\gamma_2)^2 [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0-2} \Big|_{\gamma_1=\gamma_2=1} = \\
& = \sum_{k=\max(n_0,0)}^{N+n_0-2} \binom{N+n_0-2}{k} \left[\frac{(k+2)!}{(k+2-n_0)!} \right] \left[\frac{k!}{(k-n_0)!} \right] (\alpha^* \cdot \alpha)^k \quad (\text{G.2})
\end{aligned}$$

A continuación se calculará la constante de normalización \mathcal{N}_{N,n_0} del estado coherente para el SACM dado por la ecuación (C.31), entonces:

$$\begin{aligned}
1 = \langle \alpha | \alpha \rangle &= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N+n_0)!} \right]^2 \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} \times \\
& \times \langle 0 | [\hat{\sigma} + \gamma_1 (\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^{N+n_0} [\hat{\sigma}^\dagger + \gamma_2 (\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^{N+n_0} | 0 \rangle = \\
& = \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N+n_0)!} \right]^2 (N+n_0) \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)] \times \\
& \times \langle 0 | [\hat{\sigma} + \gamma_1 (\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^{N+n_0-1} [\hat{\sigma}^\dagger + \gamma_2 (\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^{N+n_0-1} | 0 \rangle = \\
& = \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N+n_0)!} \right]^2 (N+n_0)(N+n_0-1) \times \\
& \times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^2 \times \\
& \times \langle 0 | [\hat{\sigma} + \gamma_1 (\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^{N+n_0-2} [\hat{\sigma}^\dagger + \gamma_2 (\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^{N+n_0-2} | 0 \rangle = \\
& \vdots \\
& = \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N+n_0)!} \right]^2 (N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2) \cdots 2 \cdot 1 \times \\
& \times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0} \langle 0 | 0 \rangle \\
& = \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0} = \\
& = \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} \sum_{k=\max(n_0,0)}^{N+n_0} \binom{N+n_0}{k} \left[\frac{k!}{(k-n_0)!} \right]^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^k
\end{aligned}$$

De esta manera:

$$\mathcal{N}_{N,n_0}^{-2} = \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} \sum_{k=\max(n_0,0)}^{N+n_0} \binom{N+n_0}{k} \left[\frac{k!}{(k-n_0)!} \right]^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^k \quad (\text{G.3})$$

Tomando (G.1) obtenemos:

$$F_{00}(\alpha^2) = \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} \sum_{k=\max(n_0,0)}^{N+n_0} \binom{N+n_0}{k} \left[\frac{k!}{(k-n_0)!} \right]^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^k \quad (\text{G.4})$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{N}_{N,n_0}^{-2} = F_{00}(\alpha^2) \quad (\text{G.5})$$

Para $\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle &= \langle \alpha | \hat{\mathbf{n}}_\pi | \alpha \rangle = \langle \alpha | (\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}) | \alpha \rangle = \\ &= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N+n_0)!} \right]^2 \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} \times \\ &\times \langle 0 | [\hat{\sigma} + \gamma_1(\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^{N+n_0} (\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}) [\hat{\sigma}^\dagger + \gamma_2(\alpha^* \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^{N+n_0} | 0 \rangle = \\ &= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N+n_0)!} \right]^2 (N+n_0)^2 (\alpha^* \cdot \alpha) \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} \gamma_1 \gamma_2 \times \\ &\times \langle 0 | [\hat{\sigma} + \gamma_1(\alpha^* \cdot \pi)]^{N+n_0-1} [\hat{\sigma}^\dagger + \gamma_2(\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^{N+n_0-1} | 0 \rangle = \\ &= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N+n_0)!} \right]^2 (N+n_0)^2 (\alpha^* \cdot \alpha) \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} \gamma_1 \gamma_2 \times \\ &\times (N+n_0-1)! [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0-1} = \\ &= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} (N+n_0) (\alpha^* \cdot \alpha) \times \\ &\times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} \gamma_1 \gamma_2 [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0-1} = \\ &= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} (N+n_0) (\alpha^* \cdot \alpha) \sum_{k=\max(n_0-1,0)}^{N+n_0-1} \binom{N+n_0-1}{k} \times \\ &\times \left[\frac{(k+1)!}{(k+1-n_0)!} \right]^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^k \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle = (N+n_0) (\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \quad (\text{G.6})$$

Donde se utilizo que:

$$F_{11}(\alpha^2) = \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} \sum_{k=\max(n_0-1,0)}^{N+n_0-1} \binom{N+n_0-1}{k} \left[\frac{(k+1)!}{(k+1-n_0)!} \right]^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^k \quad (\text{G.7})$$

Es interesante estudiar el comportamiento de $\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle$ con respecto a la distancia entre cúmulos α . Tomando el caso de ${}^{16}\text{O} + \alpha \rightarrow {}^{20}\text{Ne}$, los valores que tenemos

para dicho sistema son los siguientes:

$$\begin{aligned} N &= 12 \\ n_0 &= 8 \\ N' &= N + n_0 = 20 \end{aligned}$$

el comportamiento de $\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle$ con respecto a la distancia entre cúmulos α se muestra con la siguiente gráfica.

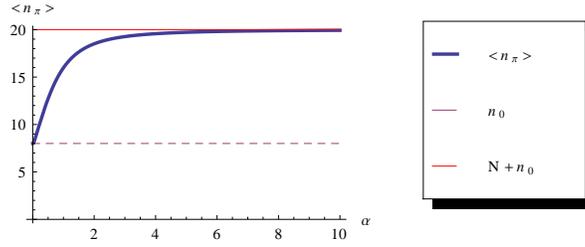


Figura G.1: Comportamiento de $\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle$ con respecto a la distancia entre cúmulos α .

Como podemos observar, la gráfica G.1 nos muestra dos casos límite para $\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle$, dichos casos son:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle &= N + n_0 \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle &= n_0 \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

entonces cuando $\alpha \rightarrow \infty$, $\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle$ tiende al número total de cuantas de oscilación relativa ($N + n_0$) y en el caso $\alpha \rightarrow 0$, $\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle$ es igual al número mínimo de cuantas de oscilación relativa n_0 .

Para el caso de $\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^2 \rangle$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^2 \rangle &= \sum_{m_1 m_2} \langle \alpha | \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} \hat{\pi}^{m_2} | \alpha \rangle + (N + n_0)(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} = \\ &= \mathcal{N}_{N, n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N + n_0)!} \right]^2 (N + n_0)^2 (N + n_0 - 1)^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^2 \times \\ &\times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} (\gamma_1 \gamma_2)^2 \langle 0 | [\hat{\sigma} + \gamma_1(\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^{N+n_0-2} [\hat{\sigma}^\dagger + \gamma_2(\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^{N+n_0-2} | 0 \rangle \\ &+ (N + n_0)(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N+n_0)!} \right]^2 (N+n_0)^2 (N+n_0-1)^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^2 \times \\
&\times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} (\gamma_1 \gamma_2)^2 (N+n_0-2)! [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0-2} \\
&+ (N+n_0) (\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} = \\
&= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} (N+n_0)(N+n_0-1) (\alpha^* \cdot \alpha)^2 \times \\
&\times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} (\gamma_1 \gamma_2)^2 [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0-2} \\
&+ (N+n_0) (\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} = \\
&= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} (N+n_0)(N+n_0-1) (\alpha^* \cdot \alpha)^2 \times \\
&\times \sum_{k=\max(n_0-2,0)}^{N+n_0-2} \binom{N+n_0-2}{k} \left[\frac{(k+2)!}{(k+2-n_0)!} \right]^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^k \\
&+ (N+n_0) (\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^2 \rangle = (N+n_0) (\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} + (N+n_0)(N+n_0-1) (\alpha^* \cdot \alpha)^2 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \quad (\text{G.9})$$

Donde:

$$F_{22}(\alpha^2) = \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} \sum_{k=\max(n_0-2,0)}^{N+n_0-2} \binom{N+n_0-2}{k} \left[\frac{(k+2)!}{(k+2-n_0)!} \right]^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^k \quad (\text{G.10})$$

El comportamineto de $\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^2 \rangle$ con respecto a la distancia entre cúmulos α se muestra con la siguiente gráfica.

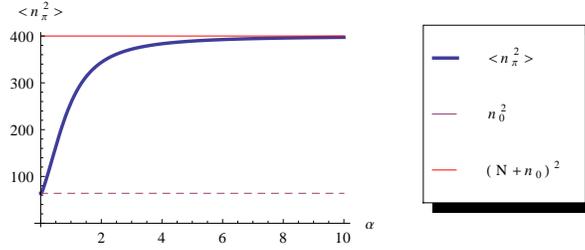


Figura G.2: Comportamiento de $\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^2 \rangle$ con respecto a la distancia entre cúmulos α .

La gráfica G.2 nos muestra dos casos límite para $\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^2 \rangle$, dichos casos son:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^2 \rangle &= (N + n_0)^2 \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^2 \rangle &= (n_0)^2 \end{aligned} \quad (\text{G.11})$$

Para $\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^3 \rangle$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^3 \rangle &= \langle \alpha | \hat{\mathbf{n}}_\pi^3 | \alpha \rangle = \sum_{m_1 m_2 m_3} \langle \alpha | \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} \hat{\pi}^{m_2} \hat{\pi}^{m_3} | \alpha \rangle \\ &+ \sum_{m_1 m_2} \langle \alpha | \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}^{m_2} \hat{\pi}^{m_1} | \alpha \rangle + \sum_{m_1 m_2} \langle \alpha | \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} \hat{\pi}^{m_2} | \alpha \rangle \\ &+ \sum_{m_1 m_3} \langle \alpha | \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}^{m_1} \hat{\pi}^{m_3} | \alpha \rangle + \langle \alpha | \hat{\mathbf{n}}_\pi | \alpha \rangle = \\ &= \mathcal{N}_{N, n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N + n_0)!} \right]^2 (N + n_0)^2 (N + n_0 - 1)^2 (N + n_0 - 2)^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^3 \times \\ &\times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} (\gamma_1 \gamma_2)^3 \langle 0 | [\hat{\sigma} + (\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^{N+n_0-3} [\hat{\sigma}^\dagger + (\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^{N+n_0-3} | 0 \rangle \\ &+ 3(N + n_0)(N + n_0 - 1)(\alpha^* \cdot \alpha)^2 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} + (N + n_0)(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\ &= \mathcal{N}_{N, n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N + n_0)!} \right]^2 (N + n_0)^2 (N + n_0 - 1)^2 (N + n_0 - 2)^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^3 \times \\ &\times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} (\gamma_1 \gamma_2)^3 (N + n_0 - 3)! [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0-3} \\ &+ 3(N + n_0)(N + n_0 - 1)(\alpha^* \cdot \alpha)^2 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} + (N + n_0)(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} (N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)(\alpha^* \cdot \alpha)^3 \times \\
&\times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} (\gamma_1 \gamma_2)^3 [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0-3} \\
&+ 3(N+n_0)(N+n_0-1)(\alpha^* \cdot \alpha)^2 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} + (N+n_0)(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\
&= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} (N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)(\alpha^* \cdot \alpha)^3 \times \\
&\times \sum_{k=\max(n_0-3,0)}^{N+n_0-3} \binom{N+n_0-3}{k} \left[\frac{(k+3)!}{(k+3-n_0)!} \right]^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^k \\
&+ 3(N+n_0)(N+n_0-1)(\alpha^* \cdot \alpha)^2 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} + (N+n_0)(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^3 \rangle &= (N+n_0)(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} + 3(N+n_0)(N+n_0-1)(\alpha^* \cdot \alpha)^2 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\
&+ (N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)(\alpha^* \cdot \alpha)^3 \frac{F_{33}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \quad (\text{G.12})
\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
F_{33}(\alpha^2) &= \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} \sum_{k=\max(n_0-3,0)}^{N+n_0-3} \binom{N+n_0-3}{k} \times \\
&\times \left[\frac{(k+3)!}{(k+3-n_0)!} \right]^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^k \quad (\text{G.13})
\end{aligned}$$

El comportamiento de $\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^3 \rangle$ con respecto a la distancia entre cúmulos α se muestra con la siguiente gráfica.

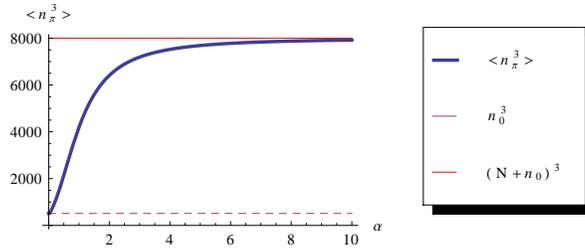


Figura G.3: Comportamiento de $\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi^3 \rangle$ con respecto a la distancia entre cúmulos α .

La gráfica G.3 nos muestra dos casos límite para $\langle \hat{\mathbf{n}}_{\pi}^3 \rangle$, dichos casos son:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \langle \hat{\mathbf{n}}_{\pi}^3 \rangle &= (N + n_0)^3 \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \langle \hat{\mathbf{n}}_{\pi}^3 \rangle &= (n_0)^3 \end{aligned} \quad (\text{G.14})$$

Para $\langle (\hat{\pi}^{\dagger} \cdot \hat{\pi}^{\dagger})(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) \rangle$ se tiene que:

$$\begin{aligned} &\langle (\hat{\pi}^{\dagger} \cdot \hat{\pi}^{\dagger})(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) \rangle = \\ &= \mathcal{N}_N^2 \langle 0 | [\hat{\sigma} + \gamma_1(\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^{N+n_0} (\hat{\pi}^{\dagger} \cdot \hat{\pi}^{\dagger})(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) [\hat{\sigma}^{\dagger} + \gamma_2(\alpha \cdot \hat{\pi}^{\dagger})]^{N+n_0} | 0 \rangle = \\ &= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N+n_0)!} \right]^2 (N+n_0)^2 (N+n_0-1)^2 (\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*)(\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \times \\ &\times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} (\gamma_1 \gamma_2)^2 \langle 0 | [\hat{\sigma} + \gamma_1(\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^{N+n_0-2} [\hat{\sigma}^{\dagger} + \gamma_2(\alpha \cdot \hat{\pi}^{\dagger})]^{N+n_0-2} | 0 \rangle = \\ &= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N+n_0)!} \right]^2 (N+n_0)^2 (N+n_0-1)^2 (\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*)(\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \times \\ &\times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} (\gamma_1 \gamma_2)^2 (N+n_0-2)! [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0-2} = \\ &= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} (N+n_0)(N+n_0-1) (\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*)(\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \times \\ &\times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} (\gamma_1 \gamma_2)^2 [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0-2} = \\ &= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} (N+n_0)(N+n_0-1) (\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*)(\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \times \\ &\times \sum_{k=\max(n_0-2,0)}^{N+n_0-2} \binom{N+n_0-2}{k} \left[\frac{(k+2)!}{(k+2-n_0)!} \right]^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^k \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\langle (\hat{\pi}^{\dagger} \cdot \hat{\pi}^{\dagger})(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) \rangle = (N+n_0)(N+n_0-1) (\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*)(\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \quad (\text{G.15})$$

Para $\langle (\hat{\pi}^{\dagger} \cdot \hat{\pi}^{\dagger})(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) \rangle$ tenemos que:

$$\begin{aligned} &\langle (\hat{\pi}^{\dagger} \cdot \hat{\pi}^{\dagger})(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) \rangle = \\ &= \mathcal{N}_N^2 \langle 0 | [\hat{\sigma} + \gamma_1(\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^{N+n_0} (\hat{\pi}^{\dagger} \cdot \hat{\pi}^{\dagger})(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) [\hat{\sigma}^{\dagger} + \gamma_2(\alpha \cdot \hat{\pi}^{\dagger})]^{N+n_0} | 0 \rangle = \\ &= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N+n_0)!} \right]^2 (N+n_0)^2 (N+n_0-1)^2 (\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*) \times \\ &\times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} \gamma_1^2 \langle 0 | [\hat{\sigma} + \gamma_1(\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^{N+n_0-2} [\hat{\sigma}^{\dagger} + \gamma_2(\alpha \cdot \hat{\pi}^{\dagger})]^{N+n_0-2} | 0 \rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N+n_0)!} \right]^2 (N+n_0)^2 (N+n_0-1)^2 (\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*) \times \\
&\times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} \gamma_1^2 (N+n_0-2)! [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0-2} = \\
&= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} (N+n_0)(N+n_0-1) (\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*) \times \\
&\times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} \gamma_1^2 [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0-2} = \\
&= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} (N+n_0)(N+n_0-1) (\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*) \times \\
&\times \sum_{k=\max(n_0,0)}^{N+n_0-2} \binom{N+n_0-2}{k} \left[\frac{k!}{(k-n_0)!} \right] \left[\frac{(k+2)!}{(k+2-n_0)!} \right] (\alpha^* \cdot \alpha)^k
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\langle (\hat{\pi}^\dagger \cdot \hat{\pi}^\dagger)(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) \rangle = (N+n_0)(N+n_0-1) (\alpha^* \cdot \tilde{\alpha}^*) \frac{F_{20}^{N-2}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \quad (\text{G.16})$$

Donde se utilizo que:

$$\begin{aligned}
F_{20}^{N-2}(\alpha^2) &= \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} \sum_{k=\max(n_0,0)}^{N+n_0-2} \binom{N+n_0-2}{k} \times \\
&\times \left[\frac{(k+2)!}{(k+2-n_0)!} \right] \left[\frac{k!}{(k-n_0)!} \right] (\alpha^* \cdot \alpha)^k \quad (\text{G.17})
\end{aligned}$$

Para $\langle (\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) \rangle$ uno tiene que:

$$\begin{aligned}
&\langle (\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) \rangle = \\
&= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \langle 0 | [\hat{\sigma} + \gamma_1 (\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^{N+n_0} (\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger) (\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) [\hat{\sigma}^\dagger + \gamma_2 (\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^{N+n_0} | 0 \rangle = \\
&= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N+n_0)!} \right]^2 (N+n_0)^2 (N+n_0-1)^2 (\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \times \\
&\times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} \gamma_2^2 \langle 0 | [\hat{\sigma} + (\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^{N+n_0-2} [\hat{\sigma}^\dagger + (\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^{N+n_0-2} | 0 \rangle = \\
&= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N+n_0)!} \right]^2 (N+n_0)^2 (N+n_0-1)^2 (\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \times \\
&\times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} \gamma_2^2 (N+n_0-2)! [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0-2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} (N+n_0)(N+n_0-1)(\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \times \\
&\times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} \gamma_2^2 [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0-2} = \\
&= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} (N+n_0)(N+n_0-1)(\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \times \\
&\times \sum_{k=\max(n_0,0)}^{N+n_0-2} \binom{N+n_0-2}{k} \left[\frac{k!}{(k-n_0)!} \right] \left[\frac{(k+2)!}{(k+2-n_0)!} \right]^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^k
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\langle (\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{\pi} \cdot \hat{\pi}) \rangle = (N+n_0)(N+n_0-1)(\alpha \cdot \tilde{\alpha}) \frac{F_{20}^{N-2}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \quad (\text{G.18})$$

Para $\langle (\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) \rangle$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle (\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) \rangle &= \langle \alpha | (\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{\sigma}^\dagger (\hat{\sigma} \hat{\sigma}^\dagger - 1) \hat{\sigma} | \alpha \rangle = \\
&= \langle \alpha | \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} - \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{\mathbf{n}}_\sigma^2 - \hat{\mathbf{n}}_\sigma | \alpha \rangle = \\
&= \langle \alpha | (\hat{\mathbf{N}} + \mathbf{n}_0 - \hat{\mathbf{n}}_\pi)^2 - (\hat{\mathbf{N}} + \mathbf{n}_0 - \hat{\mathbf{n}}_\pi) | \alpha \rangle = \\
&= \langle \alpha | (\hat{\mathbf{N}} + \mathbf{n}_0)(\hat{\mathbf{N}} + \mathbf{n}_0 - 1) - (2(\hat{\mathbf{N}} + \mathbf{n}_0) - 1)\hat{\mathbf{n}}_\pi + \hat{\mathbf{n}}_\pi^2 | \alpha \rangle = \\
&= (\mathbf{N} + \mathbf{n}_0)(\mathbf{N} + \mathbf{n}_0 - 1) - [2(\mathbf{N} + \mathbf{n}_0) - 1] \langle \alpha | \hat{\mathbf{n}}_\pi | \alpha \rangle + \langle \alpha | \hat{\mathbf{n}}_\pi^2 | \alpha \rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\langle (\hat{\sigma}^\dagger \cdot \hat{\sigma}^\dagger)(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}) \rangle &= (N+n_0)(N+n_0-1) - 2(N+n_0)^2 (\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\
&+ 2(N+n_0)(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} + (N+n_0)(N+n_0-1)(\alpha^* \cdot \alpha)^2 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \quad (\text{G.19})
\end{aligned}$$

Apéndice H

Cálculo explícito de los valores de expectación de $\langle \hat{L}_x \rangle$ y $\langle \hat{L}^2 \rangle$ para el PACM y el SACM.

Recordemos nuevamente que se está usando como convención de fase a $O^{lm} = (-1)^{l-m} O_{-m}^l$. De esta manera, se pueden definir como componentes del operador de momento angular a:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{L}}_+ &= -2[\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{+1}^1 \\ \hat{\mathbf{L}}_- &= 2[\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{-1}^1 \\ \hat{\mathbf{L}}_0 &= \sqrt{2}[\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_0^1\end{aligned}\tag{H.1}$$

con

$$\begin{aligned}[\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_m^{[S]} &= \sum_{m_1 m_2} (1m_1 1m_2 | Sm) \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2} = \\ &= \sum_{m_1 m_2} (1m_1 1m_2 | Sm) \hat{\pi}_{m_1}^\dagger (-1)^{1-m_2} \hat{\pi}^{-m_2}\end{aligned}\tag{H.2}$$

El signo y el factor de enfrente se elige de tal manera que se satisface $\hat{\mathbf{L}}_+ \hat{\pi}_{-1}^\dagger |0\rangle = \sqrt{2} \hat{\pi}_0^\dagger |0\rangle$ y se garantiza $\hat{\mathbf{L}}_+^\dagger = \hat{\mathbf{L}}_-$. Tomando en cuenta (H.1), el operador de la componente del momento angular en x y el operador del cuadrado del momento angular están dados por:

$$\hat{\mathbf{L}}_x = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{L}}_+ + \hat{\mathbf{L}}_-)\tag{H.3}$$

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{L}}_+ \hat{\mathbf{L}}_- + \hat{\mathbf{L}}_- \hat{\mathbf{L}}_+) + \hat{\mathbf{L}}_0^2\tag{H.4}$$

H.1. Cálculo explícito de los valores de expectación de $\langle \hat{L}_x \rangle$ y $\langle \hat{L}^2 \rangle$ para el PACM.

Para poder definir $\langle \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{x}} \rangle$ en términos de α , es conveniente primero obtener $\langle [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_m^{[S]} \rangle$, entonces:

$$\begin{aligned} \langle [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_m^{[S]} \rangle &= \mathcal{N}_N^2 \langle 0 | [\hat{\sigma} + (\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^N [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_m^{[S]} [\hat{\sigma}^\dagger + (\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^N | 0 \rangle = \\ &= \mathcal{N}_N^2 N^2 [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_m^{[S]} \langle 0 | [\hat{\sigma} + (\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^{N-1} [\hat{\sigma}^\dagger + (\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^{N-1} | 0 \rangle = \\ &= \mathcal{N}_N^2 N^2 [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_m^{[S]} \mathcal{N}_{N-1}^{-2} = \\ &= N^2 [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_m^{[S]} \frac{(N-1)! [1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N-1}}{N! [1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^N} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\langle [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_m^{[S]} \rangle = N \frac{[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_m^{[S]}}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} \quad (\text{H.5})$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{x}} \rangle &= \frac{1}{2} \left\{ \langle \hat{\mathbf{L}}_+ \rangle + \langle \hat{\mathbf{L}}_- \rangle \right\} = \frac{1}{2} \left\{ -2 \langle [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{+1}^1 \rangle + 2 \langle [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{-1}^1 \rangle \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -2N \frac{[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{+1}^1}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} + 2N \frac{[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{-1}^1}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} \right\} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\langle \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{x}} \rangle = \frac{N}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} \left\{ [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{-1}^1 - [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{+1}^1 \right\} \quad (\text{H.6})$$

Primeramente definamos $\hat{\mathbf{L}}^2$ en términos de (H.1), entonces:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}}^2 &= \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{L}}_+ \hat{\mathbf{L}}_- + \hat{\mathbf{L}}_- \hat{\mathbf{L}}_+) + \hat{\mathbf{L}}_0^2 = \\ &= 2 \left\{ -[\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{+1}^1 [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{-1}^1 - [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{-1}^1 [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{+1}^1 + [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_0^1 [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_0^1 \right\} = \\ &= 2 \left\{ (-1)^{-1} [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{-1}^1 [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{+1}^1 \right\} + 2 \left\{ (-1)^0 [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_0^1 [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_0^1 \right\} \\ &+ 2 \left\{ (-1)^{+1} [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{+1}^1 [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{-1}^1 \right\} = \\ &= 2 \sum_m (-1)^m [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_m^1 [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{-m}^1 = \\ &= -2\sqrt{3} \sum_m -\frac{(-1)^m}{\sqrt{3}} [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_m^1 [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{-m}^1 = \\ &= -2\sqrt{3} \sum_m \frac{(-1)^{1+m}}{\sqrt{3}} [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_m^1 [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{-m}^1 = \\ &= -2\sqrt{3} \sum_m (1, m; 1, (-m) | 00) [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_m^1 [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{-m}^1 = \\ &= -2\sqrt{3} [[\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]^1 \otimes [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]^1]_0^0. \end{aligned}$$

donde se uso que $(1, m; 1, -m|00) = \frac{(-1)^{1+m}}{\sqrt{3}} = -\frac{(-1)^m}{\sqrt{3}}$. De lo anterior, se observa que es importante desarrollar $[\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_m^1 [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{-m}^1$, entonces:

$$\begin{aligned}
& [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_m^1 [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{-m}^1 = \\
&= \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2|1, m) \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2} \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4|1, -m) \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}_{m_4} = \\
&= \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2|1, m) \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4|1, -m) \{ \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_2} \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}_{m_4} \} = \\
&= \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2|1, m) \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4|1, -m) \times \\
&\times \{ \hat{\pi}_{m_1}^\dagger (-1)^{1-m_2} \hat{\pi}^{-m_2} \hat{\pi}_{m_3}^\dagger (-1)^{1-m_4} \hat{\pi}^{-m_4} \} = \\
&= \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2|1, m) \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4|1, -m) (-1)^{1-m_2} (-1)^{1-m_4} \times \\
&\times \{ \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}^{-m_2} \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}^{-m_4} \} = \\
&= \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2|1, m) \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4|1, -m) (-1)^{1-m_2} (-1)^{1-m_4} \times \\
&\times \{ \hat{\pi}_{m_1}^\dagger (\hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}^{-m_2} + \delta_{m_3}^{-m_2}) \hat{\pi}^{-m_4} \} = \\
&= \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2|1, m) \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4|1, -m) \times \\
&\times \{ \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_3}^\dagger (-1)^{1-m_2} \hat{\pi}^{-m_2} (-1)^{1-m_4} \hat{\pi}^{-m_4} \} \\
&+ \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2|1, m) \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4|1, -m) \times \\
&\times \{ (-1)^{1-m_2} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \delta_{m_3}^{-m_2} (-1)^{1-m_4} \hat{\pi}^{-m_4} \} = \\
&= \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2|1, m) \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4|1, -m) \times \\
&\times \{ \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}_{m_2} \hat{\pi}_{m_4} + (-1)^{1-m_2} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \delta_{m_3}^{-m_2} \hat{\pi}_{m_4} \}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
& [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_m^1 [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{-m}^1 = \\
&= \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2|1, m) \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4|1, -m) \{ \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}_{m_2} \hat{\pi}_{m_4} \} \\
&+ \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2|1, m) \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4|1, -m) \{ (-1)^{1-m_2} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \delta_{m_3}^{-m_2} \hat{\pi}_{m_4} \}
\end{aligned} \tag{H.7}$$

Lo que implica que:

$$\begin{aligned}
& [[\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]^1 \otimes [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]^1]_0^0 = \\
& = \sum_m \frac{(-1)^{1+m}}{\sqrt{3}} \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2 | 1, m) \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4 | 1, -m) \times \\
& \times \{ \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}_{m_2} \hat{\pi}_{m_4} \} \\
& + \sum_m \frac{(-1)^{1+m}}{\sqrt{3}} \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2 | 1, m) \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4 | 1, -m) \times \\
& \times \{ (-1)^{1-m_2} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \delta_{m_3}^{-m_2} \hat{\pi}_{m_4} \} \tag{H.8}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{L}}^2 & = -2\sqrt{3} \sum_m \frac{(-1)^{1+m}}{\sqrt{3}} \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2 | 1, m) \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4 | 1, -m) \times \\
& \times \{ \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}_{m_2} \hat{\pi}_{m_4} \} \\
& - 2\sqrt{3} \sum_m \frac{(-1)^{1+m}}{\sqrt{3}} \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2 | 1, m) \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4 | 1, -m) \times \\
& \times \{ (-1)^{1-m_2} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \delta_{m_3}^{-m_2} \hat{\pi}_{m_4} \} \tag{H.9}
\end{aligned}$$

Renombremos como:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{A}}^2 & = -2\sqrt{3} \sum_m \frac{(-1)^{1+m}}{\sqrt{3}} \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2 | 1, m) \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4 | 1, -m) \times \\
& \times \{ \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}_{m_2} \hat{\pi}_{m_4} \}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{B}}^2 & = -2\sqrt{3} \sum_m \frac{(-1)^{1+m}}{\sqrt{3}} \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2 | 1, m) \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4 | 1, -m) \times \\
& \times \{ (-1)^{1-m_2} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \delta_{m_3}^{-m_2} \hat{\pi}_{m_4} \}
\end{aligned}$$

De esta manera:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{B}}^2 & = -2\sqrt{3} \sum_m \frac{(-1)^{1+m}}{\sqrt{3}} \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2 | 1, m) \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4 | 1, -m) \times \\
& \times \{ (-1)^{1-m_2} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \delta_{m_3}^{-m_2} \hat{\pi}_{m_4} \} = \\
& = 2 \sum_m \sum_{m_1 m_2 m_4} (-1)^{1+m-m_2} (1, m_1; 1, m_2 | 1, m) (1, -m_2; 1, m_4 | 1, -m) \times \\
& \times \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_4} = \\
& = 2 \sum_m \sum_{m_1 m_2 m_4} (-1)^{1+m-m_2+2(1+m_2)} (1, -m_2; 1, m | 1, m_1) \times \\
& \times (1, -m_2; 1, m | 1, -m_4) \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_4} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sum_{m_1 m_4} (-1)^{1-m_1} \delta_{m_1, -m_4} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_4} = 2 \sum_{m_1} (-1)^{1-m_1} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{-m_1} = \\
&= 2 \sum_{m_1} \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}^{m_1}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{B}}^2 = 2\hat{\mathbf{n}}_\pi \quad (\text{H.10})$$

Lo que implica:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{L}}^2 &= -2\sqrt{3} \sum_m \frac{(-1)^{1+m}}{\sqrt{3}} \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2 | 1, m) \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4 | 1, -m) \times \\
&\times \{ \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}_{m_2} \hat{\pi}_{m_4} \} + 2\hat{\mathbf{n}}_\pi \quad (\text{H.11})
\end{aligned}$$

Se sigue entonces que:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathbf{L}}^2 \rangle &= -2\sqrt{3} \sum_m \frac{(-1)^{1+m}}{\sqrt{3}} \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2 | 1, m) \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4 | 1, -m) \times \\
&\times \mathcal{N}_N^2 \langle 0 | [\hat{\sigma} + (\sum_m \alpha_m^* \hat{\pi}^m)]^N \{ \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}_{m_2} \hat{\pi}_{m_4} \} [\hat{\sigma}^\dagger + (\sum_m \alpha_m \hat{\pi}_m^\dagger)]^N | 0 \rangle \\
&+ 2\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle = \\
&= -2\sqrt{3} \mathcal{N}_N^2 N^2 (N-1)^2 \sum_m \frac{(-1)^{1+m}}{\sqrt{3}} \times \\
&\times \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2 | 1, m) \alpha_{m_1}^* \tilde{\alpha}_{m_2} \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4 | 1, -m) \alpha_{m_3}^* \tilde{\alpha}_{m_4} \times \\
&\times \langle 0 | [\hat{\sigma} + (\sum_m \alpha_m^* \hat{\pi}^m)]^{N-2} [\hat{\sigma}^\dagger + (\sum_m \alpha_m \hat{\pi}_m^\dagger)]^{N-2} | 0 \rangle + 2\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle = \\
&= -2\sqrt{3} \mathcal{N}_N^2 N^2 (N-1)^2 [[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \times [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1]_0^0 \mathcal{N}_{N-2}^{-2} + 2\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle = \\
&= -2\sqrt{3} N^2 (N-1)^2 \frac{(N-2)! [1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N-2}}{N! [1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^N} [[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \times [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1]_0^0 \\
&+ 2\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\langle \hat{\mathbf{L}}^2 \rangle = 2N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} - 2\sqrt{3} N (N-1) \frac{[[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \times [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1]_0^0}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \quad (\text{H.12})$$

H.2. Cálculo explícito de los valores de expectación de $\langle \hat{L}_x \rangle$ y $\langle \hat{L}^2 \rangle$ para el SACM.

Para poder definir $\langle \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{x}} \rangle$ en términos de α , es conveniente obtener $\langle [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_m^{[S]} \rangle$, entonces:

$$\begin{aligned}
\langle [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_m^{[S]} \rangle &= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N+n_0)!} \right]^2 \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} \times \\
&\times \langle 0 | [\hat{\sigma} + \gamma_1(\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^{N+n_0} [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_m^{[S]} [\hat{\sigma}^\dagger + \gamma_2(\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^{N+n_0} | 0 \rangle = \\
&= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N+n_0)!} \right]^2 (N+n_0)^2 [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_m^{[S]} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} \gamma_1 \gamma_2 \times \\
&\times \langle 0 | [\hat{\sigma} + \gamma_1(\alpha^* \cdot \hat{\pi})]^{N+n_0-1} [\hat{\sigma}^\dagger + \gamma_2(\alpha \cdot \hat{\pi}^\dagger)]^{N+n_0-1} | 0 \rangle = \\
&= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N+n_0)!} \right]^2 (N+n_0)^2 [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_m^{[S]} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} \gamma_1 \gamma_2 \times \\
&\times (N+n_0-1)! [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0-1} \\
&= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} (N+n_0) [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_m^{[S]} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} \gamma_1 \gamma_2 \times \\
&\times [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0-1} = \\
&= \mathcal{N}_{N,n_0}^2 \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} (N+n_0) [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_m^{[S]} \times \\
&\times \sum_{k=\max(n_0-1,0)}^{N+n_0-1} \binom{N+n_0-1}{k} \left[\frac{(k+1)!}{(k+1-n_0)!} \right]^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^k
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\langle [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_m^{[S]} \rangle = (N+n_0) [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_m^{[S]} \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \quad (\text{H.13})$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{x}} \rangle &= \frac{1}{2} \left\{ \langle \hat{\mathbf{L}}_+ \rangle + \langle \hat{\mathbf{L}}_- \rangle \right\} = \frac{1}{2} \left\{ -2 \langle [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{+1}^1 \rangle + 2 \langle [\hat{\pi}^\dagger \otimes \hat{\pi}]_{-1}^1 \rangle \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \left\{ -2(N+n_0) [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{+1}^1 \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} + 2(N+n_0) [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{-1}^1 \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \right\}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\langle \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{x}} \rangle = (N+n_0) \left\{ [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{-1}^1 - [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{+1}^1 \right\} \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \quad (\text{H.14})$$

Entonces, al igual que en el PACM, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathbf{L}}^2 \rangle &= -2\sqrt{3} \sum_m \frac{(-1)^{1+m}}{\sqrt{3}} \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2 | 1, m) \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4 | 1, -m) \times \\
&\times \mathcal{N}_{N, n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N+n_0)!} \right]^2 \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} \times \\
&\times \langle 0 | [\hat{\sigma} + (\sum_m \alpha_m^* \hat{\pi}^m)]^{N+n_0} \{ \hat{\pi}_{m_1}^\dagger \hat{\pi}_{m_3}^\dagger \hat{\pi}_{m_2} \hat{\pi}_{m_4} \} [\hat{\sigma}^\dagger + (\sum_m \alpha_m \hat{\pi}_m^\dagger)]^{N+n_0} | 0 \rangle \\
&+ 2\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle = \\
&= -2\sqrt{3} \mathcal{N}_{N, n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N+n_0)!} \right]^2 (N+n_0)^2 (N+n_0-1)^2 \sum_m \frac{(-1)^{1+m}}{\sqrt{3}} \times \\
&\times \sum_{m_1 m_2} (1, m_1; 1, m_2 | 1, m) \alpha_{m_1}^* \tilde{\alpha}_{m_2} \sum_{m_3 m_4} (1, m_3; 1, m_4 | 1, -m) \alpha_{m_3}^* \tilde{\alpha}_{m_4} \times \\
&\times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} (\gamma_1 \gamma_2)^2 \times \\
&\times \langle 0 | [\hat{\sigma} + (\sum_m \alpha_m^* \hat{\pi}^m)]^{N+n_0-2} [\hat{\sigma}^\dagger + (\sum_m \alpha_m \hat{\pi}_m^\dagger)]^{N+n_0-2} | 0 \rangle + 2\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle = \\
&= -2\sqrt{3} \mathcal{N}_{N, n_0}^2 \left[\frac{N!}{(N+n_0)!} \right]^2 (N+n_0)^2 (N+n_0-1)^2 \times \\
&\times \left[[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \times [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \right]_0^0 \times \\
&\times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} (\gamma_1 \gamma_2)^2 (N+n_0-2)! [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0-2} + 2\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle = \\
&= -2\sqrt{3} \mathcal{N}_{N, n_0}^2 \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} (N+n_0)(N+n_0-1) \left[[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \times [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \right]_0^0 \times \\
&\times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} (\gamma_1 \gamma_2)^2 [1 + \gamma_1 \gamma_2 (\alpha^* \cdot \alpha)]^{N+n_0-2} + 2\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle = \\
&= -2\sqrt{3} \mathcal{N}_{N, n_0}^2 \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} (N+n_0)(N+n_0-1) \left[[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \times [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \right]_0^0 \times \\
&\times \frac{d^{n_0}}{d\gamma_1^{n_0}} \frac{d^{n_0}}{d\gamma_2^{n_0}} (\gamma_1 \gamma_2)^2 \sum_{k=\max(n_0-2, 0)}^{N+n_0-2} \binom{N+n_0-2}{k} \times \\
&\times \left[\frac{(k+2)!}{(k+2-n_0)!} \right]^2 (\alpha^* \cdot \alpha)^k + 2\langle \hat{\mathbf{n}}_\pi \rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{L}}^2 \rangle &= 2(N + n_0)(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\ &\quad - 2\sqrt{3}(N + n_0)(N + n_0 - 1) \left[[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \times [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \right]_0^0 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \quad (\text{H.15}) \end{aligned}$$

Apéndice I

Cálculo explícito de $\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{L}}^2$ en términos de α para el PACM y el SACM.

Dados los resultados obtenidos en el apéndice H para $\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{L}}^2$ para el PACM y el SACM, a continuación se hará el cálculo explícito de $\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{L}}^2$ en términos de α .

Sabemos que para el PACM:

$$\langle \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{x}} \rangle = \frac{N}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} \{ [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{-1}^1 - [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{+1}^1 \} \quad (\text{I.1})$$

$$\langle \hat{\mathbf{L}}^2 \rangle = 2N \frac{(\alpha^* \cdot \alpha)}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]} - 2\sqrt{3}N(N-1) \frac{[[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \times [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1]_0^0}{[1 + (\alpha^* \cdot \alpha)]^2} \quad (\text{I.2})$$

y que para el SACM:

$$\langle \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{x}} \rangle = (N + n_0) \{ [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{-1}^1 - [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{+1}^1 \} \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \quad (\text{I.3})$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{L}}^2 \rangle &= 2(N + n_0)(\alpha^* \cdot \alpha) \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\ &- 2\sqrt{3}(N + n_0)(N + n_0 - 1) \left[[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \times [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \right]_0^0 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

Utilizando la siguiente parametrización:

- $\alpha_{\pm 1} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \exp^{\pm i\phi} \sin(\theta)$
- $\alpha_0 = \alpha \cos(\theta)$

y tomando en cuenta:

- $\alpha_m^* = \alpha_{-m}$
- $\tilde{\alpha}_m = (-1)^{1-m} \alpha_{-m}$

Obtenemos que:

- $\alpha_{+1}^* = \alpha_{-1}$
- $\alpha_{-1}^* = \alpha_{+1}$
- $\alpha_0^* = \alpha_0$
- $\tilde{\alpha}_{+1} = (-1)^{1-1} \alpha_{-1} = \alpha_{-1}$
- $\tilde{\alpha}_{-1} = (-1)^{1-(-1)} \alpha_{+1} = \alpha_{+1}$
- $\tilde{\alpha}_0 = (-1)^{1-0} \alpha_0 = -\alpha_0$

De esta manera:

$$\begin{aligned}
[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{+1}^1 &= (1, +1; 1, 0|1, +1) \alpha_{+1}^* \tilde{\alpha}_0 + (1, 0; 1, +1|1, +1) \alpha_0^* \tilde{\alpha}_{+1} = \\
&= (1, +1; 1, 0|1, +1) \alpha_{-1} \alpha_0 + (1, 0; 1, +1|1, +1) \alpha_{-1} \alpha_0 = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_{-1} \alpha_0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_{-1} \alpha_0 = -\sqrt{2} \alpha_{-1} \alpha_0 = \\
&= -\sqrt{2} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \exp^{-i\phi} \sin(\theta) \alpha \cos(\theta) = -\alpha^2 \exp^{-i\phi} \sin(\theta) \cos(\theta) \quad (I.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{-1}^1 &= (1, -1; 1, 0|1, -1) \alpha_{-1}^* \tilde{\alpha}_0 + (1, 0; 1, -1|1, -1) \alpha_0^* \tilde{\alpha}_{-1} = \\
&= -(1, -1; 1, 0|1, -1) \alpha_{+1} \alpha_0 + (1, 0; 1, -1|1, -1) \alpha_{+1} \alpha_0 = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_{+1} \alpha_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_{+1} \alpha_0 = \sqrt{2} \alpha_{+1} \alpha_0 = \\
&= \sqrt{2} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \exp^{+i\phi} \sin(\theta) \alpha \cos(\theta) = \alpha^2 \exp^{+i\phi} \sin(\theta) \cos(\theta) \quad (I.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_0^1 &= (1, +1; 1, -1|1, 0) \alpha_{+1}^* \tilde{\alpha}_{-1} + (1, 0; 1, 0|1, 0) \alpha_0^* \tilde{\alpha}_0 \\
&+ (1, -1; 1, +1|1, 0) \alpha_{-1}^* \tilde{\alpha}_{+1} = \\
&= (1, +1; 1, -1|1, 0) \alpha_{+1} \alpha_{-1} - (1, 0; 1, 0|1, 0) \alpha_0^2 + (1, -1; 1, +1|1, 0) \alpha_{+1} \alpha_{-1} = \\
&= (1, +1; 1, -1|1, 0) [\alpha_{+1} \alpha_{-1} - \alpha_{+1} \alpha_{-1}] + (0) \alpha_0^2 = 0 \quad (I.7)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
& \{[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{-1}^1 - [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{+1}^1\} = \\
& = \alpha^2 \exp^{+i\phi} \sin(\theta) \cos(\theta) + \alpha^2 \exp^{-i\phi} \sin(\theta) \cos(\theta) = \\
& = \alpha^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \{\exp^{+i\phi} + \exp^{-i\phi}\} = \\
& = 2\alpha^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\phi) = \alpha^2 \cos(\phi) \sin(2\theta) \tag{I.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [[\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1 \times [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]^1]_0^0 = \sum_m \frac{(-1)^{1-m}}{\sqrt{3}} [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_m^1 [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{-m}^1 = \\
& = \frac{1}{\sqrt{3}} [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{+1}^1 [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{-1}^1 + \frac{1}{\sqrt{3}} [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{-1}^1 [\alpha^* \times \tilde{\alpha}]_{+1}^1 = \\
& = \frac{1}{\sqrt{3}} \{-\alpha^4 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) - \alpha^4 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)\} \\
& - \frac{2}{\sqrt{3}} \alpha^4 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) = -\frac{4}{2\sqrt{3}} \alpha^4 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) = -\frac{\alpha^4 \sin^2(2\theta)}{2\sqrt{3}} \tag{I.9}
\end{aligned}$$

Por lo tanto para el PACM se tiene que:

$$\langle \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{x}} \rangle = N \cos(\phi) \sin(2\theta) \frac{\alpha^2}{[1 + \alpha^2]} \tag{I.10}$$

$$\langle \hat{\mathbf{L}}^2 \rangle = 2N\alpha^2 \frac{\alpha^2}{[1 + \alpha^2]} + N(N - 1) \sin^2(2\theta) \frac{\alpha^4}{[1 + \alpha^2]^2} \tag{I.11}$$

y para el SACM:

$$\langle \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{x}} \rangle = (N + n_0) \cos(\phi) \sin(2\theta) \alpha^2 \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \tag{I.12}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathbf{L}}^2 \rangle & = 2(N + n_0) \alpha^2 \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \\
& + (N + n_0)(N + n_0 - 1) \sin^2(2\theta) \alpha^4 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \tag{I.13}
\end{aligned}$$

Apéndice J

Cálculos explícitos importantes relacionados al PACM.

- Demostración que

$$\xi \sin^2(2\theta) + (1-x)\frac{c}{4}[\cos^2(2\theta) + 1] = (1-x)\frac{c}{2} + \sin^2(2\theta)\left[\xi - (1-x)\frac{c}{4}\right] \quad (\text{J.1})$$

usando:

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \quad (\text{J.2})$$

$$\begin{aligned} \xi \sin^2(2\theta) + (1-x)\frac{c}{4}[\cos^2(2\theta) + 1] &= \xi \sin^2(2\theta) + (1-x)\frac{c}{4}[2 - \sin^2(2\theta)] = \\ &= \xi \sin^2(2\theta) + (1-x)\frac{c}{2} - (1-x)\frac{c}{4}\sin^2(2\theta) = \\ &= (1-x)\frac{c}{2} + \sin^2(2\theta)\left[\xi - (1-x)\frac{c}{4}\right] \end{aligned}$$

- Demostración que

$$\begin{aligned} \xi \sin^2(2\theta) + (1-x)\frac{c}{4}[\cos(2\theta) - 1]^2 &= \\ &= (1-x)\frac{c}{2}[1 - \cos(2\theta)] + \sin^2(2\theta)\left[\xi - (1-x)\frac{c}{4}\right] \end{aligned} \quad (\text{J.3})$$

$$\begin{aligned}
& \xi \sin^2(2\theta) + (1-x) \frac{c}{4} [\cos(2\theta) - 1]^2 = \\
& = \xi \sin^2(2\theta) + (1-x) \frac{c}{4} [\cos^2(2\theta) - 2\cos(2\theta) + 1] = \\
& = \xi \sin^2(2\theta) + (1-x) \frac{c}{4} [\cos^2(2\theta) + 1] - (1-x) \frac{c}{2} \cos(2\theta) = \\
& = (1-x) \frac{c}{2} + \sin^2(2\theta) \left[\xi - (1-x) \frac{c}{4} \right] - (1-x) \frac{c}{2} \cos(2\theta) = \\
& = (1-x) \frac{c}{2} [1 - \cos(2\theta)] + \sin^2(2\theta) \left[\xi - (1-x) \frac{c}{4} \right]
\end{aligned}$$

donde se tomo en cuenta (J.1).

- **Definición de la igualdad mostrada en la ecuación (4.21) en términos de β .**

Usando el cambio de variable visto anteriormente:

$$\beta^2 = \frac{\alpha^2}{[1 + \alpha^2]} \quad (\text{J.4})$$

y usando las siguientes definiciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) &= 1 \\ \sin^2(\theta) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)) \end{aligned} \quad (\text{J.5})$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)) \quad (\text{J.6})$$

obtenemos que:

$$\begin{aligned}
& 1 + [2 - \sin^2(2\theta)] \frac{\alpha^4}{[1 + \alpha^2]^2} + 2 \cos(2\theta) \frac{\alpha^2}{[1 + \alpha^2]^2} - 2 \frac{\alpha^2}{[1 + \alpha^2]} = \\
& = \frac{[1 + \alpha^2]^2 + 2 \cos(2\theta) \alpha^2}{[1 + \alpha^2]^2} + [1 + \cos^2(2\theta)] \beta^4 - 2\beta^2 = \\
& = \frac{1 + \alpha^4}{[1 + \alpha^2]^2} + \frac{2\alpha^2[1 + \cos(2\theta)]}{[1 + \alpha^2]^2} + [1 + \cos^2(2\theta)] \beta^4 - 2\beta^2 = \\
& = \left[\frac{2\alpha^4}{[1 + \alpha^2]^2} - \left(\frac{\alpha^4 - 1}{[1 + \alpha^2]^2} \right) \right] + \frac{4\alpha^2 \cos^2(\theta)}{[1 + \alpha^2]^2} + [1 + \cos^2(2\theta)] \beta^4 - 2\beta^2 = \\
& = [2\beta^4 - 2\beta^2 + 1] + \frac{4\alpha^2 \cos^2(\theta)}{[1 + \alpha^2]^2} + [1 + \cos^2(2\theta)] \beta^4 - 2\beta^2 = \\
& = [3 + \cos^2(2\theta)] \beta^4 - 4\beta^2 + \frac{4\alpha^2 \cos^2(\theta)}{[1 + \alpha^2]^2} + 1 \\
& = [3 + \cos^2(2\theta)] \beta^4 - 4\beta^2 + \frac{4\alpha^2 \cos^2(\theta)}{[1 + \alpha^2]^2} - 2[\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)] + 3 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [3 + \cos^2(2\theta)]\beta^4 - 4\beta^2 + \frac{4\alpha^2 \cos^2(\theta) - 2 \cos^2(\theta)[1 + \alpha^2]^2}{[1 + \alpha^2]^2} \\
&- 2 \sin^2(\theta) + 3 = \\
&= (3 + \cos^2(2\theta))\beta^4 - 4\beta^2 - 2 \cos^2(\theta) \left[\frac{1 + \alpha^4}{[1 + \alpha^2]^2} \right] - 2 \sin^2(\theta) + 3 = \\
&= [3 + \cos^2(2\theta)]\beta^4 - 4\beta^2 - 2 \cos^2(\theta)[2\beta^4 - 2\beta^2 + 1] - 2 \sin^2(\theta) + 3 = \\
&= [3 + \cos^2(2\theta) - 4 \cos^2(\theta)]\beta^4 - 4(1 - \cos^2(\theta))\beta^2 \\
&- 2[\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)] + 3 = \\
&= [3 + \cos^2(2\theta) - 4 \cos^2(\theta)]\beta^4 - 4 \sin^2(\theta)\beta^2 - 2 + 3 = \\
&= [3 + \cos^2(2\theta) - 2(1 + \cos(2\theta))]\beta^4 - 2(1 - \cos(2\theta))\beta^2 + 1 = \\
&= (\cos^2(\theta) - 2 \cos(2\theta) + 1)\beta^4 + 2(\cos(2\theta) - 1)\beta^2 + 1 = \\
&= (\cos(2\theta) - 1)^2\beta^4 + 2(\cos(2\theta) - 1)\beta^2 + 1 = \\
&= [(\cos(2\theta) - 1)\beta^2 + 1]^2 \tag{J.7}
\end{aligned}$$

- **Pasos para mostrar que (4.27) es una ecuación de orden cuatro en v .**

Del capítulo 4, tenemos que (4.27) tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&(-2\Omega \cos(2\theta) - (1-x)c(N-1) \sin(2\theta))\beta^2 \\
&+ ([4\xi - (1-x)c](N-1) \sin(2\theta) \cos(2\theta) \\
&+ (1-x)c(N-1) \sin(2\theta))\beta^4 = 0 \tag{J.8}
\end{aligned}$$

Si hacemos un cambio de variable:

$$\begin{aligned}
v &= \cos(2\theta) \\
\sqrt{1-v^2} &= \sin(2\theta) \tag{J.9}
\end{aligned}$$

y definimos:

$A_* = -2\Omega$ $B_* = -(1-x)c(N-1)$ $C_* = [4\xi - (1-x)c](N-1)$ $D_* = (1-x)c(N-1)$
--

Tabla J.1: Coeficientes pertenecientes a (J.10).

tenemos que (J.8) puede ser expresada como:

$$\begin{aligned}
& (A_*v + B_*\sqrt{1-v^2})\beta^2 + (C_*v\sqrt{1-v^2} + D_*\sqrt{1-v^2})\beta^4 = 0 \quad (\text{J.10}) \\
& \Rightarrow (A_*v + B_*\sqrt{1-v^2})\beta^2 + \sqrt{1-v^2}(C_*v + D_*)\beta^2 = 0 \\
& \Rightarrow A_*v = -\sqrt{1-v^2}[(C_*v + D_*)\beta^2 + B_*]
\end{aligned}$$

elevando al cuadrado de ambos lados:

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow A_*^2v^2 = (1-v^2)[(C_*v + D_*)^2\beta^4 + 2B_*(C_*v + D_*)\beta^2 + B_*^2] \\
& \Rightarrow A_*^2v^2 = (C_*v + D_*)^2\beta^4 + 2B_*(C_*v + D_*)\beta^2 + B_*^2 \\
& \quad - (C_*v + D_*)^2v^2\beta^4 - 2B_*(C_*v + D_*)v^2\beta^2 - B_*^2v^2 \\
& \Rightarrow A_*^2v^2 = C_*^2\beta^4v^2 + 2C_*D_*\beta^4v + D_*^2\beta^4 + 2B_*C_*\beta^2v + 2B_*D_*\beta^2 + B_*^2 \\
& \quad - C_*^2\beta^4v^4 - 2C_*D_*\beta^4v^3 - D_*^2\beta^4v^2 - 2B_*C_*\beta^2v^3 - 2B_*D_*\beta^2v^2 - B_*^2v^2
\end{aligned}$$

agrupando términos tenemos que:

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow C_*^2\beta^4v^4 + 2C_*(D_*\beta^4 + B_*\beta^2)v^3 \\
& \quad - [(C_*^2 - D_*^2)\beta^4 - 2B_*D_*\beta^2 - B_*^2 - A_*^2]v^2 \\
& \quad - 2C_*(D_*\beta^4 + B_*\beta^2)v - [D_*^2\beta^4 + 2B_*D_*\beta^2 + B_*^2] = 0 \quad (\text{J.11})
\end{aligned}$$

Definiendo coeficientes A, B, C, D y E como:

$A = C_*^2\beta^4$ $B = 2C_*(D_*\beta^4 + B_*\beta^2)$ $C = -[(C_*^2 - D_*^2)\beta^4 - 2B_*D_*\beta^2 - B_*^2 - A_*^2]$ $D = -2C_*(D_*\beta^4 + B_*\beta^2)$ $E = -[D_*^2\beta^4 + 2B_*D_*\beta^2 + B_*^2]$

Tabla J.2: Coeficientes pertenecientes a (J.12). Las definiciones de A_* , B_* , C_* y D_* son dadas en la tabla J.1.

la ecuación (J.11), y por lo tanto (J.8), pueden ser expresadas como:

$$Av^4 + Bv^3 + Cv^2 + Dv + E = 0 \quad (\text{J.12})$$

Apéndice K

Cálculos explícitos importantes relacionados al SACM.

■ Demostración que

$$\begin{aligned} & \xi \sin^2(2\theta) + (1-x)\frac{c}{4}[\cos(2\theta) - 1]^2 = \\ & = (1-x)\frac{c}{2}[1 - \cos(2\theta)] + \sin^2(2\theta)\left[\xi - (1-x)\frac{c}{4}\right] \end{aligned} \quad (\text{K.1})$$

$$\begin{aligned} & \xi \sin^2(2\theta) + (1-x)\frac{c}{4}[\cos(2\theta) - 1]^2 = \\ & = \xi \sin^2(2\theta) + (1-x)\frac{c}{4}[\cos^2(2\theta) - 2\cos(2\theta) + 1] = \\ & = \xi \sin^2(2\theta) + (1-x)\frac{c}{4}[\cos^2(2\theta) + 1] - (1-x)\frac{c}{2}\cos(2\theta) = \\ & = (1-x)\frac{c}{2} + \sin^2(2\theta)\left[\xi - (1-x)\frac{c}{4}\right] - (1-x)\frac{c}{2}\cos(2\theta) = \\ & = (1-x)\frac{c}{2}[1 - \cos(2\theta)] + \sin^2(2\theta)\left[\xi - (1-x)\frac{c}{4}\right] \end{aligned}$$

donde se tomo en cuenta (J.1).

- **Pasos para mostrar que (4.49) es una ecuación de orden cuatro en v .**

Del capítulo 4, tenemos que la ecuación (4.49) tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& -2\Omega \cos(2\theta) \left(\alpha^2 \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} - \frac{n_0}{(N+n_0)} \right) \\
& + [4\xi - (1-x)c](N+n_0-1) \sin(2\theta) \cos(2\theta) \times \\
& \times \left(\alpha^4 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} - \frac{n_0(n_0-1)}{(N+n_0)(N+n_0-1)} \right) \\
& - (1-x)c(N+n_0-1) \sin(2\theta) \alpha^2 \frac{F_{20}^{N-2}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} = 0 \quad (\text{K.2})
\end{aligned}$$

Si hacemos un cambio de variable:

$$\begin{aligned}
v &= \cos(2\theta) \\
\sqrt{1-v^2} &= \sin(2\theta) \quad (\text{K.3})
\end{aligned}$$

y definimos:

$A_* = -2\Omega \left(\alpha^2 \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} - \frac{n_0}{(N+n_0)} \right)$
$B_* = [4\xi - (1-x)c](N+n_0-1) \left(\alpha^4 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} - \frac{n_0(n_0-1)}{(N+n_0)(N+n_0-1)} \right)$
$C_* = -(1-x)c(N+n_0-1) \alpha^2 \frac{F_{20}^{N-2}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)}$

Tabla K.1: Coeficientes pertenecientes a (K.4) en términos de los coeficientes de la ecuación (K.2).

tenemos que (K.2) puede ser expresada como:

$$A_* v + B_* v \sqrt{1-v^2} + C_* \sqrt{1-v^2} = 0 \quad (\text{K.4})$$

$$\Rightarrow A_* v + \sqrt{1-v^2}(B_* v + C_*) = 0$$

$$\Rightarrow A_* v = -\sqrt{1-v^2}(B_* v + C_*)$$

elevando al cuadrado de ambos lados:

$$\Rightarrow A_*^2 v^2 = (1-v^2)[B_*^2 v^2 + 2B_* C_* v + C_*^2]$$

$$\Rightarrow A_*^2 v^2 = B_*^2 v^2 + 2B_* C_* v + C_*^2 - B_*^2 v^4 - 2B_* C_* v^3 - C_*^2 v^2$$

agrupando términos tenemos que:

$$B_*v^4 + 2B_*C_*v^3 + (C_*^2 + A_*^2 - B_*^2)v^2 - 2B_*C_*v - C_*^2 = 0 \quad (\text{K.5})$$

Definiendo coeficientes A , B , C , D y E como:

$A = B_*$
$B = 2B_*C_*$
$C = (C_*^2 + A_*^2 - B_*^2)$
$D = -2B_*C_*$
$E = -C_*^2$

Tabla K.2: Coeficientes pertenecientes a (K.6). Las definiciones de A_* , B_* , C_* y D_* son dadas en la tabla K.1.

la ecuación (K.5), y por lo tanto (K.2), pueden ser expresadas como:

$$Av^4 + Bv^3 + Cv^2 + Dv + E = 0 \quad (\text{K.6})$$

■ **Cálculos explícitos en SACM para $\alpha \ll 1$ hasta segundo orden.**

Tomando en cuenta las expresiones de la tabla G.1 y desarrollando hasta segundo orden en α se obtiene:

$$\begin{aligned}
 F_{00}(\alpha^2) &= \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} (A_0\alpha^{2n_0} + B_0\alpha^{2n_0+2}) \\
 F_{11}(\alpha^2) &= \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} (A_1\alpha^{2n_0-2} + B_1\alpha^{2n_0}) \\
 F_{22}(\alpha^2) &= \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} (A_2\alpha^{2n_0-4} + B_2\alpha^{2n_0-2}) \\
 F_{33}(\alpha^2) &= \frac{(N!)^2}{(N+n_0)!} (A_3\alpha^{2n_0-6} + B_3\alpha^{2n_0-4}) \quad (\text{K.7})
 \end{aligned}$$

Los coeficientes de (K.7) estan dados por:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{(N+n_0)!}{n_0!N!} (n_0!)^2 & B_0 &= \frac{(N+n_0)!}{(n_0+1)!(N-1)!} [(n_0+1)!]^2 \\
A_1 &= \frac{(N+n_0-1)!}{(n_0-1)!N!} (n_0!)^2 & B_1 &= \frac{(N+n_0-1)!}{n_0!(N-1)!} [(n_0+1)!]^2 \\
A_2 &= \frac{(N+n_0-2)!}{(n_0-2)!N!} (n_0!)^2 & B_2 &= \frac{(N+n_0-2)!}{(n_0-1)!(N-1)!} [(n_0+1)!]^2 \\
A_3 &= \frac{(N+n_0-3)!}{(n_0-3)!N!} (n_0!)^2 & B_3 &= \frac{(N+n_0-3)!}{(n_0-2)!(N-1)!} [(n_0+1)!]^2
\end{aligned} \tag{K.8}$$

En este caso se puede hacer la reducci3n de A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 y B_3 como:

$$A_k = \frac{(N+n_0-k)!}{(n_0-k)!N!} (n_0!)^2 \quad B_k = \frac{(N+n_0-k)!}{(n_0+1-k)!(N-1)!} [(n_0+1)!]^2 \tag{K.9}$$

De esta manera, para $k=1,2$ y 3 :

$$\begin{aligned}
\frac{F_{kk}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} &\approx \frac{A_k \alpha^{2n_0-2k} + B_k \alpha^{2n_0-(2k-2)}}{A_0 \alpha^{2n_0} + B_0 \alpha^{2n_0+2}} = \\
&= \frac{A_k + B_k \alpha^2}{A_0 + B_0 \alpha^2} \frac{1}{\alpha^{2k}} = \frac{A_k (1 + \frac{B_k}{A_k} \alpha^2)}{A_0 (1 + \frac{B_0}{A_0} \alpha^2)} \frac{1}{\alpha^{2k}} \\
&= \frac{A_k}{\alpha^{2k} A_0} (1 + \frac{B_k}{A_k} \alpha^2) (1 - \frac{B_0}{A_0} \alpha^2) = \\
&= \frac{A_k}{\alpha^{2k} A_0} [1 + (\frac{B_k}{A_k} - \frac{B_0}{A_0}) \alpha^2]
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $k = 1, 2, 3$:

$$\alpha^{2k} \frac{F_{kk}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} \approx \frac{A_k}{A_0} + \frac{A_k}{A_0} (\frac{B_k}{A_k} - \frac{B_0}{A_0}) \alpha^2 \tag{K.10}$$

Por lo tanto, se necesita saber qui6nes son $\frac{A_k}{A_0}, \frac{B_k}{A_k}$ y $\frac{B_0}{A_0}$, entonces:

$$\frac{A_k}{A_0} = \frac{(N+n_0-k)!n_0!}{(n_0-k)!(N+n_0)!} = \frac{(N+n_0-k)!n_0 \cdots (n_0-k)!}{(n_0-k)!(N+n_0) \cdots (N+n_0-k)!}$$

Por lo tanto:

$$\frac{A_k}{A_0} = \frac{(N+n_0-k)!n_0 \cdots (n_0-k)!}{(n_0-k)!(N+n_0) \cdots (N+n_0-k)!} \tag{K.11}$$

Para el caso de $\frac{B_k}{A_k}$ con $k = 1, 2, 3$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{B_k}{A_k} &= \frac{[(n_0+1)!]^2 N! (n_0-k)!}{(n_0!)^2 (N-1)! (n_0+1-k)!} = \\
&= \frac{[(n_0+1) \cdots (n_0-k)]^2 N! (n_0-k)!}{(n_0 \cdots (n_0-k))^2 (N-1)! (n_0+1-k) \cdots (n_0-k)!}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{B_k}{A_k} = \frac{[(n_0 + 1) \cdots (n_0 - k)!]^2 N!(n_0 - k)!}{(n_0 \cdots (n_0 - k)!)^2 (N - 1)!(n_0 + 1 - k) \cdots (n_0 - k)!} \quad (\text{K.12})$$

Para $\frac{B_0}{A_0}$ tenemos:

$$\frac{B_0}{A_0} = \frac{N!(n_0 + 1)!}{(N - 1)!n_0!} = \frac{N(N - 1)!(n_0 + 1)n_0!}{(N - 1)!n_0!} = N(n_0 + 1)$$

Entonces:

$$\frac{B_0}{A_0} = N(n_0 + 1) \quad (\text{K.13})$$

De esta manera:

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{A_0} &= \frac{n_0}{(N + n_0)} \\ \frac{A_2}{A_0} &= \frac{n_0(n_0 - 1)}{(N + n_0)(N + n_0 - 1)} \\ \frac{A_3}{A_0} &= \frac{n_0(n_0 - 1)(n_0 - 2)}{(N + n_0)(N + n_0 - 1)(N + n_0 - 2)} \\ \frac{B_1}{A_1} &= \frac{N(n_0 + 1)^2}{n_0} \\ \frac{B_2}{A_2} &= \frac{N(n_0 + 1)^2}{(n_0 - 1)} \\ \frac{B_3}{A_3} &= \frac{N(n_0 + 1)^2}{(n_0 - 2)} \\ \frac{B_0}{A_0} &= N(n_0 + 1) \end{aligned} \quad (\text{K.14})$$

Con lo anterior, uno obtiene que:

$$\begin{aligned} \alpha^2 \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} &\approx \frac{n_0}{(N + n_0)} + \frac{n_0}{(N + n_0)} \left(\frac{N(n_0 + 1)^2}{n_0} - N(n_0 + 1) \right) \alpha^2 \\ \alpha^4 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} &\approx \frac{n_0(n_0 - 1)}{(N + n_0)(N + n_0 - 1)} \\ &+ \frac{n_0(n_0 - 1)}{(N + n_0)(N + n_0 - 1)} \left(\frac{N(n_0 + 1)^2}{(n_0 - 1)} - N(n_0 + 1) \right) \alpha^2 \\ \alpha^6 \frac{F_{33}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} &\approx \frac{n_0(n_0 - 1)(n_0 - 2)}{(N + n_0)(N + n_0 - 1)(N + n_0 - 2)} \\ &+ \frac{n_0(n_0 - 1)(n_0 - 2)}{(N + n_0)(N + n_0 - 1)(N + n_0 - 2)} \left(\frac{N(n_0 + 1)^2}{(n_0 - 2)} - N(n_0 + 1) \right) \alpha^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\alpha^2 \frac{F_{11}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} &\approx \frac{n_0}{(N+n_0)} + \frac{N(n_0+1)}{(N+n_0)} \alpha^2 \\
\alpha^4 \frac{F_{22}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} &\approx \frac{n_0(n_0-1)}{(N+n_0)(N+n_0-1)} \\
&+ \frac{2Nn_0(n_0+1)}{(N+n_0)(N+n_0-1)} \alpha^2 \\
\alpha^6 \frac{F_{33}(\alpha^2)}{F_{00}(\alpha^2)} &\approx \frac{n_0(n_0-1)(n_0-2)}{(N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)} \\
&+ \frac{3Nn_0(n_0+1)(n_0-1)}{(N+n_0)(N+n_0-1)(N+n_0-2)} \alpha^2
\end{aligned} \tag{K.15}$$

Bibliografía

- [1] CSEH J., *Phys. Lett.* **B,281** (1992), 173.
- [2] CSEH J. AND LÉVAI G., *Ann. Phys. (NY)* **230** (1994), 165.
- [3] F. IACHELLO, *Phys. Rev.* **C 23** (1981), 2778.
- [4] H.J. DALEY AND F. IACHELLO, *Ann. Phys. (N.Y)* **167** (1986), 73.
- [5] A. LEVIATAN AND M.W. KIRSON, *Ann. Phys. (NY)* **188** (1988), 142.
- [6] O.S. ROOSMALEN, *Ph.D. Thesis*, Groningen, 1982.
- [7] O.S. ROOSMALEN AND A.E.L. DIEPERINK, *Ann. Phys. (NY)* **139** (1982), 198.
- [8] O. CASTAÑOS, P.O. HESS, J.P. DRAAYER AND P. ROCHFORD, *Phys. Lett.* **B 277** (1992), 27.
- [9] K.T. HECHT, *The Vector Coherent State Method and its Application to Problems of Higher Symmetry*, (Springer, Heidelberg, 1987).
- [10] O. CASTAÑOS, P.O. HESS, J.P. DRAAYER AND P. ROCHFORD, *Nucl. Phys.* **A 524** (1991), 469.
- [11] J. EISENBERG AND W. GREINER, *Nuclear Theory II: Microscopic Theory of the Nucleus*, (Springer, Heidelberg, 1987).
- [12] D. TROLTENIER, J.A. MARUHN, W. GREINER AND P.O. HESS, *Zeitschr.f.Phys* **A 343** (1992), 25.
- [13] H. VAN GEEL, P.O. HESS, J.A. MARUHN, W. GREINER AND D. TROLTENIER, *Nucl. Phys* **A 577** (1994), 605.
- [14] P.O. HESS AND S. MISICU, *Phys. Rev.* **C 68** (2003), 064303.
- [15] P.O. HESS, G. LÉVAI AND J. CSEH, *Phys. Rev.* **C 54** (1996), 2345.
- [16] H. YÉPEZ-MARTÍNEZ, P.R. FRASER, P.O. HESS, AND G. LÉVAI, “Phenomenological and microscopic cluster models I: The geometric mapping”, *Phys. Rev.* **C** (2011), enviada;
P.R. FRASER, H. YÉPEZ-MARTÍNEZ, P.O. HESS, AND G. LÉVAI, “Phenomenological and microscopic cluster models II: Phase transitions”, *Phys. Rev.* **C** (2011), enviada.
- [17] Y. ZHANG, Z.-F. HOU, H. CHEN, H. WEI AND Y.-X. LIU, *Phys. Rev.* **C 78** (2008), 024314.

- [18] S. DUSEL, J. VIDAL, J.M. ARIAS, J. DUKELSKY AND J.E. GARCÍA-RAMOS, *Phys. Rev. C* **72** (2005), 064332.
- [19] J.M. ARIAS, J. DUKELSKY, J.E. GARCÍA-RAMOS AND J. VIDAL, *Phys. Rev. C* **75** (2007), 014301.
- [20] H. YÉPEZ-MARTÍNEZ, J. CSEH AND P.O. HESS, *Phys. Rev. C* **74** (2006), 024319.
- [21] K.A. ERB AND D.A. BROMLEY, *Phys. Rev. C* **23** (1981), 2781.
- [22] H.J. DALEY, B.R. BARRET, *Nucl. Phys. A* **449** (1986), 256.
- [23] P. RING AND P.SCHUCK, *The Nuclear Many-Body Problem*, (Springer, Heidelberg, 1980).
- [24] J. EISENBERG AND W. GREINER, *Nuclear Theory II: Microscopic Theory of the Nucleus*, (North-Holland, Amsterdam, 1972).
- [25] F. IACHELLO AND A. ARIMA, *The Interacting Boson Model*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [26] W. GREINER AND B. MÜLLER, *Quantum Mechanics (Symmetries)*, (Springer, Heidelberg, 1994).
- [27] F. VINIEGRA HEBERLEIN, *Mecánica, Libro 2*, (Prensa de Ciencias-UNAM, México, 2008).
- [28] D. GRIFFITHS, *Introduction to Elementary Particles*, (Wiley, USA, 1994).
- [29] E. CAURIER AND B. GRAMMATICOS, *J. Phys.* **G9** (1983), L125.
- [30] H YÉPEZ-MARTÍNEZ AND P.O. HESS, *Rev. Mex. Fís.* **54 (S3)**, (2008), 69.
- [31] H. SCHAASER AND D.M. BRINK, *Phys. Lett* **B143** (1984), 269.
- [32] H. SCHAASER AND D.M. BRINK, *Nucl. Phys* **A452** (1986), 1.
- [33] J.P. ELLIOT, *Proc. Roy. Soc.* **A245** (1958), 128, 562.
- [34] BLOMQVIST J. Y MOLINARI A., *Nucl. Phys.* **A106** (1968), 545.
- [35] R.F. CASTEN Y E.A. MCCUTCHAN, *J. Phys.* **G 34** (2007), R285.
- [36] N. ITAGAKI, H. MASUI AND J. CSEH, *J. Phys.* **111** (2008), 012006
- [37] ELLIOT J.B., *et.al.*, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002), 042701.
- [38] E. LÓPEZ MORENO AND O. CASTAÑOS, *Phys. Rev C* **54** (1996), 2374.
- [39] H YÉPEZ-MARTÍNEZ AND P.R. FRASER, *Experimental spectrum and spectrum of adjusted parameters for $^{16}O+\alpha \rightarrow ^{20}Ne$* .
- [40] K. A. ERB AND D. A. BROMLEY, *Phys. Rev. C* **23** (1981), 2781.
- [41] J. CSEH, *Phys. Rev. C* **27** (1983), 2991.
- [42] J. CSEH, *Phys. Rev. C* **31** (1985), 692.

- [43] A. FRANK AND P. V. ISACKER, *Algebraic Methods in Molecular and Nuclear Structure Physics*, (John Wiley and Sons, New York, 1994).
- [44] L. PARRA RODRÍGUEZ, *Mather Thesis*, UNAM, 2011.
- [45] P. R. FRASER, H. YÉPEZ-MARTÍNEZ, P. O. HESS AND L. PARRA-RODRÍGUEZ, *J. Phys. Conf. Proc* (2011), accepted.