



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**CÁLCULO DEL LÍMITE DE RETENCIÓN
MEDIANTE EL USO DE LA TEORÍA DE VALORES
EXTREMOS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

P R E S E N T A:

JONATAN RASCÓN TEJERO



**DIRECTOR DE TESIS:
ACTUARIO JORGE OTILIO AVENDAÑO
ESTRADA**

2013

1. Datos del alumno

Rascón

Tejero

Jonatan

56 50 26 91

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Actuaría

406049029

2. Datos del tutor

Actuario

Avendaño

Estrada

Jorge Otilio

3. Datos del sinodal 1

Actuario

López

Escorcía

José Luis

4. Datos del sinodal 2

Doctor

Baltazar

Larios

Fernando

5. Datos del sinodal 3

Actuaría

Canseco

Rodríguez

Nahiely

6. Datos del sinodal 4

Actuario

Peralta

Cuéllar

Agustín

7. Datos del trabajo escrito

Cálculo del límite de retención mediante el uso de la teoría de valores extremos

105

2013

Índice general

1. Introducción	3
Introducción	3
2. Los seguros de daños y el reaseguro	7
2.1. Seguros de daños	7
2.2. Reaseguro	10
2.3. Límite de retención	23
3. Teoría de valores extremos	30
3.1. Dominios de atracción	35
3.1.1. Dominio de atracción Frechet Φ	35
3.1.2. Dominio de atracción Weibull Ψ	38
3.1.3. Dominio de atracción Gumbel Λ	44
3.2. Equivalencia de colas	51
3.3. Variación Regular de Segundo Orden	54
3.4. Estimación del índice y cuantiles de valor extremo	56
3.4.1. Estimador de Hill	56
3.4.2. Estimador negativo de Hill	60
3.4.3. Estimador de momentos	60
3.4.4. Estimador de Pickand	61
3.4.5. Estimador de máxima verosimilitud	62
3.4.6. Estimador de momentos ponderados por probabilidad	63
3.4.7. Estimación del cuantil extremo	66
4. Aplicación	68
4.1. Proyección de siniestros	71
4.1.1. Proyección de siniestros con distribución Weibull	72
4.1.2. Proyección de siniestros con distribución Pareto II	75
4.1.3. Proyección de siniestros con distribución Log logística	79
4.1.4. Uso de otros estimadores	81
4.2. Estimación del límite de retención	83

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	2
5. Conclusión	90
A.	92
A.1. Funciones de variación regular	92
A.2. Teorema de Karamata	93
A.3. Inversa Generalizada	97
A.4. Proceso Poisson	99
A.5. Código para estimación del parámetro γ	100

Capítulo 1

Introducción

Las compañías de seguros se dedican a asumir riesgos, por lo que es natural que los portafolios incurran en pérdidas grandes o pequeñas que se pueden medir en intervalos determinados de tiempo, por ejemplo un año, al final del cual se tendrá un monto acumulado de pérdida. El monto acumulado de pérdida anual futuro se estima generalmente en la frecuencia y la severidad de las reclamaciones individuales promedio, sin embargo, debido a la naturaleza misma del problema se incurren en grandes desviaciones. Esto puede provocar que no se puedan prever a tiempo la ocurrencia de *grandes eventos* repentinos que puedan causar estrés en los flujos y el capital de la compañía.

Para evitar pérdidas inesperadas es común que una compañía de seguros decida transferir parte de su riesgo a una tercera parte: una compañía reaseguradora. Uno de los principales objetivos del reaseguro es limitar el impacto de las pérdidas no esperadas, siendo entonces una herramienta útil para la administración de los recursos de una compañía aseguradora. El transferir riesgos también implica transferir recursos, por lo que se tiene una continua negociación en la cesión de riesgos y recursos, de tal manera que del modo en que se midan y estimen las posibles pérdidas (principalmente las grandes) puede depender no solo la eficiencia de la compañía, sino también la solvencia de la misma.

Por lo anterior, se busca una manera de modelar los eventos *grandes*, es decir, tratar de estimar la pérdida no esperada y medir que tan grave puede ser, en otras palabras tratar de responder a la pregunta: si las cosas van mal, ¿qué tan mal pueden ir?

Para esto hay que empezar por definir que es un *evento grande*, y que

evento son los que se quiere analizar. Por ejemplo, un evento grande puede definirse como aquel evento que está en el 10% de las reclamaciones más grandes, o los eventos que son mayores al 5% de la suma de todos los siniestros, otro modo podría ser asumir una distribución y tomar los siniestros que te tengan menos de 0.001 de probabilidad de ocurrencia, incluso también las podría definirse como reclamaciones que superan cierto porcentaje de la prima, o algún monto específico. Es posible tomar distintas definiciones pero, en el fondo, se tiene que los eventos extremos son aquellos eventos inusuales o raros que por su naturaleza causan estrés en los flujos y capital de la compañía. Estos eventos, generalmente se etiquetarían como outliers e ignorados del modelo, lo que significa que, en el ajuste del modelo, no se toman en cuenta. Si se buscara estimar eventos esperados tendría un efecto de relativa menor importancia el quitar estos valores extremos, sin embargo, lo que se pretende en este trabajo es analizar el impacto que pueda ocasionar la ocurrencia de dichos eventos y una herramienta para abordar este trabajo es la teoría de valores extremos.

La teoría de los valores extremos ha tenido un gran auge en los últimos años en diversas áreas como es la ingeniería, meteorología, finanzas, seguros, entre otras ya que, por ejemplo, terremotos, huracanes, colapsos en el mercado, resistencia de materiales bajo ciertas condiciones, entre otros, son fenómenos que no siguen reglas específicas y que la teoría de valores extremos ayuda a modelar distribuciones aceptables para estos eventos, y estudiar así el comportamiento en las colas de las distribuciones que describen los objetos de estudio. Esta teoría provee un fundamento teórico para describir el comportamiento de los extremos que se encuentra descrito por las colas de las distribuciones independientemente de la regla que éstas sigan.

Recapitulando, la teoría de valores extremos tiene como objetivo estimar la cola de una función distribución de una variable aleatoria que describa el fenómeno. Los principales problemas que hay que abordar son que, precisamente al tratarse de valores extremos, existen pocos datos, y con frecuencia, los valores que se buscan están más allá del valor más grande en la muestra, además que las técnicas para estimar distribuciones generalmente no permiten estimar bien la parte de la cola. La teoría de valores extremos es útil para extrapolar los datos de la muestra para encontrar escenarios adversos probables que podrían ocurrir una vez cada cien años como un terremoto muy fuerte o un huracán, sin embargo, aunque su frecuencia es baja, su ocurrencia implica grandes pérdidas para las compañías.

De la ley de los grandes números: Con X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias

idénticamente distribuidas, si $\mu = E(X_i)$, entonces

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{c.s.} \mu$$

al estandarizar se llega a que $(\bar{X} - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$. Muchos modelos, se basan en esta convergencia para estimar pérdidas, pero ahora en vez de tomar \bar{X} se quiere ver el resultado de tomar el máximo M , puesto que el objetivo es analizar los valores más grandes. Ejemplificando esto, supóngase que interesa modelar el nivel de un río, aproximarse mediante la media no sería muy útil ya que ésta también se ve afectada por los niveles bajos del río y las variaciones que pueda tener alrededor de la media no tendrán las repercusiones que pueda tener el evento extremo que representa el nivel a que sube el río una vez en 50 años, entonces lo interesante es buscar como modelar ese nivel extremo, o la probabilidad que sobrepase cierto límite establecido. Por lo que es posible abordar el asunto del siguiente modo: sea x la variable aleatoria que representa el nivel del río y suponiendo que de un año a otro los sucesos son independientes, entonces:

$$P\left(\frac{M - b_n}{a_n} \leq x\right) = F^n(a_n x + b_n) \rightarrow G(x)$$

donde $F^n(x)$ es la función de distribución del n -ésimo estadístico de orden.

Se analizará en el Capítulo 3, es decir, como es G , las características que deben cumplir las constantes normalizantes a_n y b_n para que se cumpla el límite así como las condiciones para la función de distribución de los siniestros $F(x)$. Retomando el ejemplo del nivel del río, la función de distribución evidentemente tiene una cola más pesada que la distribución que describe la altura de los habitantes de una población, que en general, se modela con una distribución normal, si se analiza la cola de esta distribución, es decir, la distribución de la población de mayor estatura, será distinta a la que resulte de analizar la cola de la distribución de la cola del río, es decir, la distribución de los registros del nivel más alto.

En el mundo real, no siempre se puede ajustar una distribución a una población o muchas veces la regla que los describe es muy complicada para operar, sin embargo, se mostrará que, aunque solamente se tengan datos empíricos, se puede encontrar una aproximación para encontrar los extremos y que se pueden encontrar equivalencias para operar con funciones menos sofisticadas que se comporten de igual modo en la cola y como se puede medir el comportamiento de la misma. El fundamento teórico de estos temas que

se han mencionado, se verán a lo largo del Capítulo 2.

Finalmente en el capítulo 3 se aplicará la teoría a una cartera de incendio y se verán resultados aplicados y como se puede utilizar en el reaseguro, más específicamente en el cálculo del límite de retención.

En el capítulo 1 se describe el marco sobre el cual se utilizará la teoría de valores extremos, en este se describen a grandes rasgos los seguros de daños y los distintas formas de reaseguro que se han creado para proteger a las compañías aseguradoras de grandes desviaciones que van desde una simple *regla de dedo*, un cociente, hasta simulaciones, entre otras. Muchas veces se ve este límite como un requisito a cumplir, sin embargo, debería representar el equilibrio entre el riesgo que se asume y los recursos que se ceden junto con el riesgo. Por ejemplo, supóngase que un alcalde decide construir un dique para proteger la ciudad para el caso del río que se había planteado: si lo construye demasiado bajo el dique no servirá de nada, por otro lado si decide construirlo de más de cien metros de altura, en efecto, resultaría inverosímil pensar que el río pueda sobrepasar el dique, sin embargo, se habrán desperdiciado una infinidad de recursos que pudieron haber sido utilizados más eficientemente en otras áreas de la ciudad.

De este modo, la teoría de valores extremos es una herramienta útil para encontrar eventos graves *plausibles* que ayuden encontrar el equilibrio entre el riesgo asumido y la utilización eficiente de recursos. Para una compañía aseguradora, reservar el monto equivalente al total de las sumas aseguradas o ceder todo el riesgo, evidentemente proporciona mayor certeza de tener disponibilidad de recursos para afrontar cualquier eventualidad, tal como el dique de cien metros evitaría cualquier inundación en la ciudad, sin embargo, se podrían usar los recursos de manera más óptima sin necesidad de caer en el extremo opuesto de asumir riesgos excesivos.

Por lo anterior, la teoría de valores extremos es una herramienta más que proporciona una cota para la siniestralidad, y que aporta más luz en el comportamiento de acontecimientos adversos, para un mejor uso de los recursos.

Capítulo 2

Los seguros de daños y el reaseguro

2.1. Seguros de daños

Según el Diccionario de Seguros Mapfre "*el seguro es una operación en virtud de la cual, una parte (el asegurado) se hace acreedor, mediante el pago de una remuneración (la prima), de una prestación que habrá de satisfacerle la otra parte (el asegurador) en caso de que se produzca un siniestro*".

El contrato de seguro puede tener por objeto toda clase de riesgos mientras exista un interés asegurable, siempre y cuando no esté fuera de la legislación vigente.

La función principal del seguro es combatir la incertidumbre de una pérdida económica probable mediante la transferencia del riesgo. Su operación se lleva a cabo al cubrir las consecuencias financieras de eventos fortuitos no deseados por el asegurado. Esto se realiza mediante la distribución del monto de las pérdidas entre los asegurados, que de otro modo tendría que ser enfrentado por un solo individuo en su totalidad.

Los seguros de daños son todos aquellos que tienen como fin principal reparar la pérdida sufrida en el patrimonio del asegurado a causa de un siniestro. Estos seguros se pueden dividir en dos grandes grupos:

- **seguros de pérdidas materiales:** destinados a resarcir al asegurado de las pérdidas materiales directamente sufridas en un bien integrante de su patrimonio.

- **seguros de responsabilidad civil:** que garantizan al asegurado contra la responsabilidad civil en que pueda incurrir ante daños provocados a terceros por actos de los que sea responsable.

Los seguros de daños se pueden clasificar en los siguientes ramos según los artículos 7 y 8 de la Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas de Seguros:

1. **Responsabilidad civil y riesgos profesionales:** El seguro de responsabilidad civil otorga protección al asegurado si un tercero le exigiere indemnización por daños y perjuicios a consecuencia de un acontecimiento que, produciéndose durante la vigencia del seguro, ocasione la muerte, lesión o menoscabo de la salud de la persona (daños personales) o el deterioro o destrucción de sus bienes (daños materiales).

El seguro comprende la protección sobre la responsabilidad civil legal, producto de la propiedad o arrendamiento de terreno, edificios o locales y de las actividades normales inherentes al giro del asegurado.

Existen compañías de seguros, que además ofrecen este tipo de protección a ciertos mercados específicos, como el de la construcción, medicina, para los arrendatarios de inmuebles, para quienes se dedican a organizar eventos, para quienes realizan filmaciones, etc. A este tipo de pólizas se les llama *seguro de responsabilidad civil profesional*.

2. **Marítimo y transporte:** La compañía de seguros se compromete al pago de determinadas indemnizaciones a consecuencia de los daños sobrevenidos durante el transporte de mercancías y se divide en marítimo, aéreo y ferroviario:
 - a) *Seguro Marítimo:* Garantiza los riesgos de navegación que puedan afectar, tanto al buque transportador como a la carga transportada, y puede ser seguro de buque, carga o flete.
 - b) *Seguro de Aviación:* Tiene por objeto el pago de una indemnización derivada de accidentes sufridos por aeronaves.
 - c) *Seguro Ferroviario:* Tiene por objeto el pago de una indemnización derivada de accidentes sufridos por ferrocarril.

3. **Incendio:** Es aquel que garantiza al Asegurado el pago de una indemnización en caso de incendio de los bienes especificados en la póliza o la reparación o reposición de las piezas averiadas, y puede contemplar coberturas adicionales como pueden ser:
Responsabilidad civil, pérdida de rentas, pérdida de beneficios, gastos y daños.
4. **Agrícola y de animales:** Tiene por objeto la cobertura de los riesgos que puedan afectar a las explotaciones agrícolas, ganaderas o forestales y sus principales modalidades son: Seguro de Ganado, Seguro de Incendio de Cosechas y Seguro de Granizo.
5. **Automóviles:** Este seguro protege el automóvil del asegurado contra riesgos como: choque, robo, lesiones a ocupantes y daños a terceros en su persona y en sus bienes en caso de accidentes vehiculares.
6. **Crédito:** Tiene por objeto garantizar a una persona el pago de los créditos que tenga a su favor cuando se produzca la insolvencia de sus clientes deudores por créditos comerciales.
7. **Crédito a la vivienda:** La finalidad de este seguro es proteger a las instituciones financieras contra el incumplimiento de pago de préstamos hipotecarios, transfiriendo el riesgo a una compañía aseguradora. Este tipo de seguro ayuda a incrementar el mercado hipotecario ya que permite enganches bajos y por tanto que más personas puedan acceder a él disminuyendo el riesgo de la entidad financiera que hace el préstamo.
8. **Garantía financiera:** Cubre el incumplimiento del pago de las obligaciones de instrumentos financieros, títulos de crédito y documentos objeto de oferta pública o de intermediación financiera. De este modo es posible el apoyo a proyectos públicos, infraestructura y obtener capital a menor costo.
9. **Diversos:**
 - a) *Seguro de Robo:* La compañía de seguros se compromete a pagar los daños sufridos por la desaparición, destrucción o deterioro de los objetos a causa de robo, asalto o tentativas.
 - b) *Seguro de Cinematografía:* Tiene por objeto cubrir los daños durante una producción cinematográfica.

- c) *Seguro de Cristales*: Éste garantiza al asegurado el pago de una indemnización o reposición en caso de rotura accidental de las lunas o cristales descritos en la póliza.
- d) *Seguro de Ingeniería*: Consiste en un grupo de modalidades de cobertura que amparan determinados riesgos derivados del funcionamiento, montaje o prueba de maquinaria o inherentes a la construcción de edificios. Sus principales modalidades incluyen :
- *Seguro de Construcción*: Garantiza los daños que puedan sufrir los bienes integrantes de una obra ejecutada.
 - *Seguro de Maquinaria*: Garantiza los daños que puedan sufrir maquinaria, equipos o plantas industriales.
 - *Seguro de Montaje*: Se asemeja al de construcción pero en el momento de su instalación o montaje.
 - *Seguro Electrónico*: Se garantizan los equipos de procesamiento de datos descritos en el contrato.
 - *Seguro de Calderas*: Asegura a las calderas en caso de explosión, entre otros.
10. **Terremoto y otros riesgos catastróficos**: Es aquel que garantiza al Asegurado el pago de una indemnización en caso de ocurrir pérdidas por un siniestro como huracán terremoto u otro especificado en el contrato.
11. **Especiales**: Son aquellos que sean autorizados especialmente por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público de acuerdo a lo establecido en la Ley.

2.2. Reaseguro

La Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas de Seguros en el artículo 10 define el Reaseguro como "*el contrato en virtud del cual una empresa de seguros toma a su cargo total o parcialmente un riesgo ya cubierto por otra o el remanente de daños que exceda de la cantidad asegurada por el asegurador directo*". Es decir es un contrato por el que una entidad de seguros (reasegurada) cede a otra entidad aseguradora (reaseguradora) parte de los riesgos que componen su cartera, siendo entonces la función del reaseguro la de obtener y conservar el adecuado equilibrio técnico-financiero.

Existen varios motivos por los cuales una compañía de seguros decide contratar un contrato de reaseguro tales como: estabilidad financiera y solvencia,

incrementar su capacidad de suscripción, disminuir el riesgo por una probable pérdida muy grande, reducir la volatilidad del portafolio, entre otros.

La entidad reasegurada debe pagar una cantidad a la entidad reaseguradora llamada prima por sus servicios, y ésta, a cambio le abonará en caso de producirse la circunstancia que cubría el seguro la cantidad que en concepto de indemnización tuviera que entregar al asegurado original.

Es importante mencionar que no existe ningún vínculo entre el asegurado y la reaseguradora, en caso de siniestro, la cobertura del mismo, tanto por parte de la aseguradora, como de la reaseguradora está bajo contratos diferentes, por tanto, si la reaseguradora cae en insolvencia, la cedente asumirá todo el pago del siniestro.

Existen principios en el reaseguro para que no existan reclamaciones excesivas o incumplimientos. El primero de estos principios es el de *uberrima fides* o principio de *buena fe*. Bajo este principio la compañía de seguros está obligada a dar toda la información relevante a la reaseguradora respecto a los siniestros, ya que aunque ambas enfrentarán los mismos riesgos la compañía reaseguradora no tiene acceso a toda la información, por lo que es deber de la compañía de seguros proporcionarla, con el fin de que la reaseguradora pueda analizar los riesgos presentados.

Otro principio del reaseguro es *follow the fortune* lo cual quiere decir que la reaseguradora seguirá la suerte de la aseguradora. Si la aseguradora tiene muchas pérdidas también la reaseguradora las tendrá, si el portafolio es muy bueno y sólo hay ganancias, esto beneficiará también a la compañía de reaseguro, la cual está obligada a cumplir los contratos que tenga con la cedente por mas mala que sea la situación, salvo las excepciones que se hayan establecido previamente en los contratos.

El contrato de reaseguro se puede clasificar:

1. **Por la forma de contratación:** Ver *Introduction to Reinsurance*[23], p. 21.22, *Reinsurance Matters*[36] Cap 2.

a) *Facultativo*: Bajo este tipo de contrato el reaseguro de cada riesgo es tratado de manera individual y la reaseguradora puede aceptar y decidir la amplitud con la que asume o rechaza el riesgo, según le sea conveniente. En este tipo de contrato tanto la cedente como la reaseguradora tienen absoluta libertad de aceptar o no los contratos, ambos pueden aplicar su criterio para cada riesgo de manera

individual.

El reaseguro facultativo se utiliza principalmente cuando los contratos automáticos están cubiertos, cuando el riesgo no está considerado dentro de los contratos automáticos, para no sobrecargar los contratos de reaseguro con riesgos principalmente graves, así como cuando una aseguradora no dispone de contratos en un ramo en el cual emite pólizas raramente.

- b) *Automático o no facultativo*: Es un contrato para carteras enteras. Esta forma de reaseguro consiste en un acuerdo establecido por escrito entre la aseguradora y la reaseguradora, en virtud del cual la compañía aseguradora se compromete a ceder y la reaseguradora a aceptar los riesgos cedidos dentro de los límites establecidos, por lo tanto la reaseguradora no puede denegar la cobertura para riesgos individuales, así como la aseguradora tampoco puede decidir no ceder tales riesgos a la reaseguradora. Por regla general este tipo de reaseguro tiene un periodo de vigencia anual.

2. **Por la forma de cobertura**: Ver *Introduction to Reinsurance*[23], p. 21-30, *Reinsurance Matters*[36] Cap 3,4., *El Reaseguro Proporcional y No Proporcional*[7].

- a) *Proporcional*: En este tipo de contratos primas y siniestros se reparten entre la aseguradora y la reaseguradora en una relación fija establecida previamente en un contrato, cumpliéndose el principio de proporcionalidad, además que el riesgo es cedido en las condiciones originales, tanto en las obligaciones como en los derechos. Entre las modalidades incluidas en este tipo de contrato es posible encontrar:

- 1) *Cuota-Parte*: Dentro de esta modalidad la proporción es un porcentaje fijo e invariable, que se aplica en general a toda la cartera de riesgos suscritos en un ramo o ramos particulares definidos en el contrato. La excepción la constituyen los riesgos que superan el límite en importe de la cuota. Por regla general, la cedente conserva la retención porcentual uniforme de cada riesgo y por consiguiente cede siempre la misma proporción a la reaseguradora. Esta modalidad es sencilla de manejar y ahorra costos, aunque tiene como principal desventaja que los valores a riesgo de cargo de la cedente quedan heterogéneos, solo reducidos a valores menores cubriendo posiblemente

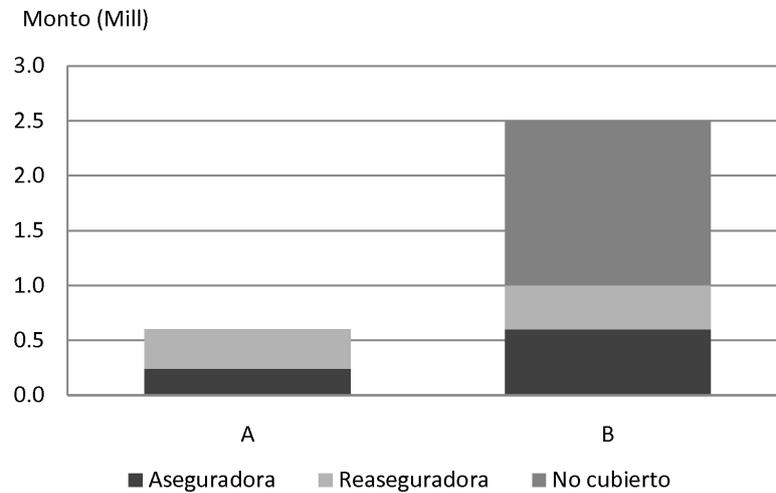


Figura 2.1: Distribución de siniestros

riesgos que no eran necesarios, reduciendo las ganancias de la aseguradora. Sin embargo, se pueden encontrar aplicaciones para este tipo de contratos ya que puede ser útil a compañías jóvenes o a las que se inician en un nuevo ramo de seguro pues al carecer de experiencia pueden tener dificultades para determinar la prima correcta, y así la reaseguradora asume el riesgo de un posible cálculo erróneo de las primas. También puede ser útil este tipo de contratos cuando se quieren mantener dentro de ciertos límites los riesgos de fluctuaciones inesperadas y riesgo en los cambios.

Ejemplo: CP (40|60) con límite de cobertura de \$1,000,000

Riesgo	Suma Asegurada	Cedente	Reaseguradora
A	\$600,000	\$240,000	\$360,000
B	\$2,500,000	\$1,900,000	\$600,000

Riesgo	Siniestro	Cedente	Reaseguradora
A	\$300,000	\$120,000	\$180,000
B	\$2,000,000	\$1,520,000	\$480,000

Riesgo	Prima	Cedente	Reaseguradora
A	\$14,000	\$5,600	\$8,400
B	\$58,000	\$23,200	\$34,800

Del ejemplo anterior se puede notar que para el riesgo B la suma asegurada no se distribuye como en el riesgo A: 40 % la compañía de seguros y 60 % la compañía de reaseguro. Esto es porque el contrato cubre únicamente hasta \$1,000,000 suponiendo que la compañía se hace cargo de lo no cubierto por el contrato de reaseguro. Sin embargo, todo lo que está dentro del límite del contrato se distribuye proporcionalmente. Para la parte que no cubre el contrato, se suelen adquirir otro tipo de contratos que se verán a continuación.

- 2) *Excedentes: (Surplus Reinsurance)* A diferencia del contrato cuota-parte, en el reaseguro de excedentes la reaseguradora participa de distinto modo en cada riesgo. La responsabilidad en la retención de la cedente está determinada con un importe fijo; los riesgos dentro de este importe los retiene en su totalidad la aseguradora por cuenta propia, y es a partir de este monto que los riesgos que superan esta retención se ceden a la reaseguradora.

Los porcentajes para la retención y la cesión son variables y dependen de la magnitud de cada riesgo, de la capacidad del contrato y de una tabla de plenos,¹ ya que la cobertura siempre es un múltiplo del pleno (línea). De la repartición de la retención y la cesión resulta un coeficiente por riesgo reasegurado, el cual determina la repartición entre la aseguradora y la reaseguradora de la responsabilidad, de las primas y de todos los siniestros.

Este tipo de contrato ayuda a que la cartera de la aseguradora sea más homogénea y a darle un mejor equilibrio limitando las exposiciones excesivas, puesto que el nivel de retención depende de la clase de riesgo y de la siniestralidad esperada. Una ventaja de lo anterior es que se puede tener más retención de primas.

Para este tipo de contrato es posible tener contratos subsecuentes, es decir, cuando el contrato ordinario llamado primer excedente sobrepasa su capacidad se puede tener otros contratos: segundo excedente, tercer excedente y así sucesivamente.

¹En la tabla de plenos se determina cual es el máximo de riesgo que asumirá la compañía cedente de acuerdo a la peligrosidad de cada riesgo

La prima y el siniestro son repartidos de manera proporcional.

Ejemplo: Límite de retención \$1,000,000. Serán utilizados además dos contratos de excedentes, el primero de 15 líneas y el segundo de 5 líneas en base a la siguiente tabla de plenos:

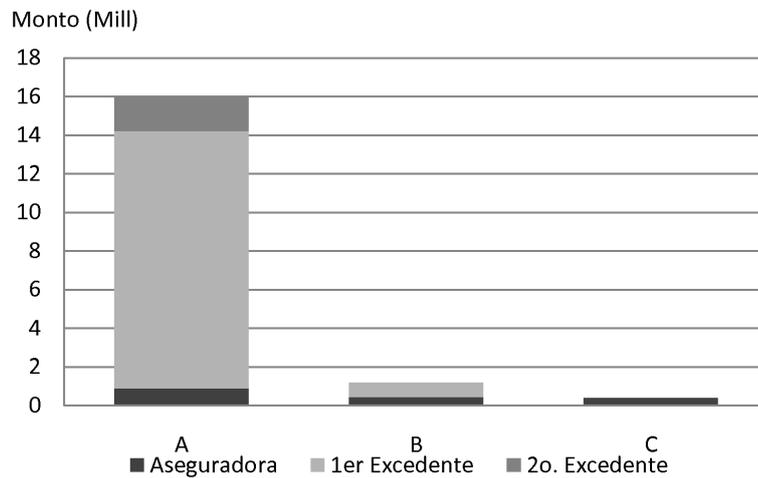
Tabla de plenos

Tipo	Retención
I	\$1,000,000
II	\$900,000
III	\$750,000
IV	\$500,000

Riesgo	Tipo	Suma asegurada
A	I	\$18,000,000
B	II	\$2,500,000
C	I	\$900,000

Riesgo	Siniestro	Cedente	1er Excedente	2o. Excedente
A	\$16,000,000	\$888,888.89	\$13,333,333.33	\$1,777,777.78
B	\$1,200,000	\$432,000	\$768,000	-
C	\$400,000	\$400,000	-	-

Riesgo	Prima	Cedente	1er Excedente	2o. Excedente
A	\$900,000	\$50,000	\$750,000	\$100,000
B	\$40,000	\$14,400	\$25,600	-
C	\$18,000	\$18,000	-	-



La compañía cedente asume la totalidad los riesgos cuya suma asegurada no supera el límite de retención tal como en la pó-

Figura 2.2: Distribución del siniestro

liza C del ejemplo anterior. Es importante recordar que no siempre el límite de retención es el mismo, en el ejemplo la póliza B, tiene un límite distinto (\$ 900,000) de acuerdo a la tabla de plenos. A partir de dicha cantidad entran los otros contratos distribuyendo en la misma proporción la suma asegurada, las primas y los siniestros.

Existe también un tipo de contratos como el *Open Cover*, donde el límite de responsabilidad no se establece a partir de el límite de retención, no se tienen limitaciones precisas y se maneja como un reaseguro facultativo. Por sus características puede provocar grandes desviaciones en la cartera por lo que es poco utilizado.

Otro tipo de contrato proporcional es el llamado *pool* en el cual participan dos o mas compañías reaseguradoras, las cuales para ampliar su límite de retención forman un contrato donde dicho límite es la suma de los límites de cada compañía. El contrato puede funcionar por medio de contrato cuota parte o por excedentes y para los siniestros y primas las compañías participan de acuerdo al contrato y en la proporción que su límite de retención sea parte del límite total.

Con el fin minimizar la desviación en la siniestralidad es común encontrar que exista combinación en los contratos, el más común es la aplicación de un seguro cuota parte y después uno de excedentes.

Ejemplo: Contrato CP (40|60) con un límite de \$1,000,000 y un contrato de excedentes de 8 líneas (\$1,000,000 cada línea). Para el contrato de excedentes se supondrá que no existe límite para la cantidad que puede retener la aseguradora.

Riesgo	Suma asegurada
A	\$800,000
B	\$6,000,000

Riesgo	Siniestro	Cedente	Cuota parte	Excedente
A	\$500,000	\$200,000	\$300,000	-
B	\$3,000,000	\$200,000	\$300,000	\$2,500,000

Riesgo	Prima	Cedente	Cuota parte	Excedente
A	\$12,000	\$4,800	\$7,200	-
B	\$80,000	\$5,333.33	\$8,000	\$66,666.67

b) *No proporcional*: A diferencia del reaseguro proporcional, que se basa en la responsabilidad original y en la cesión proporcional, en el reaseguro no proporcional figuran la suma de los siniestros y la cobertura (limitada en el importe) en primer término. Por ello también se tiene el *reaseguro de exceso de pérdida*. Algunas características de este tipo de contrato son:

- Uno o varios ramos de los que se aseguran siniestros.
- Un importe limitado denominado prioridad, hasta el cual la aseguradora asume los riesgos por cuenta propia.
- Una cobertura denominada *capa*, hasta cuyo importe la reaseguradora paga partes de siniestros por encima de la prioridad.
- Vigencia anual.

Con esta modalidad de reaseguro la aseguradora puede recortar probables puntas de siniestros a niveles de retención más aceptables, siendo la repartición de los siniestros y las responsabilidades distintos, así que la ocurrencia de siniestros e importe de los mismos son aleatorios con distinta medida de probabilidad.

Este tipo de contrato es utilizado principalmente por las aseguradoras que quieren retener la mayor parte de prima bruta sin tener que renunciar por ello a la protección de reaseguro en caso de grandes siniestros, sin embargo, se tiene mayor riesgo que con el reaseguro proporcional, puesto que en el caso de siniestros menores a la prioridad el reaseguro no aporta nada. De este modo, con el reaseguro no proporcional se aumenta considerablemente el peligro de que la aseguradora tenga que pagar efectivamente con fondos propios el monto del siniestro, dependiendo del importe de la retención elegida, de aquí la importancia de encontrar el nivel de retención óptimo que ofrezca el menor riesgo.

En el seguro no proporcional el monto de la prima que la compañía de seguros deberá pagar por el reaseguro es una cuota del ingreso de primas de la aseguradora. En cada contrato queda especificado si esta cuota o porcentaje se aplica a las primas cobradas o a las primas pactadas en las pólizas sin tomar en cuenta las primas que son devueltas o las pólizas canceladas. El monto de la prima depende también de el deducible, la cobertura y la composición del portafolio, por lo que lo que la compañía aseguradora tendrá que pagar por cada periodo de cobertura dependerá de las condiciones especiales de cada contrato. La reaseguradora decide al final del periodo la prima, aplicando la cuota a las primas obtenidas totales por la aseguradora. Sin embargo, al principio del periodo se debe pagar un depósito mínimo de la prima que se establece desde el principio, haciendo al final del periodo los ajustes pertinentes.

Para calcular la prima de riesgo existen varios métodos, por ejemplo, se puede utilizar la proyección de eventos pasados, en el caso de que los datos no se consideren representativos se puede distribuir calculando la exposición al riesgo de cada parte por medio de curvas basadas en la distribución de las reclamaciones, para el caso de eventos raros se pueden utilizar también otro tipo de modelos matemáticos. Finalmente al hacer los recargos de gastos de administración, de seguridad y otros se obtiene la prima final.

Los seguros no proporcionales permiten también reinstalaciones, esto es: cuando un siniestro o conjunto de ellos son cubiertos debido a su ocurrencia, éstos pueden ser cubiertos total o parcialmente mediante un pago adicional llamado prima de reinstalación, en algunos casos esta se incluye en la prima original. El número, la cobertura y el costo de las reinstalaciones dependen de cada contrato.

- 1) *Exceso de pérdida* El reaseguro por exceso de pérdida tiene una estructura muy diferente a la de las modalidades proporcionales. En el reaseguro proporcional la cesión está determinada por la obligación original, es decir, es determinada a partir de la suma asegurada, sin embargo, en el reaseguro de exceso de pérdida la cesión se determina a partir de los siniestros.

Es condición para el pago de un siniestro en base a una cobertura de seguro que se haya producido un daño al bien asegurado. Sin embargo, los siniestros pueden ser diversos dependiendo del ramo y del riesgo asegurado, siendo diferente la cuantía del daño y su composición. La compañía tiene que enfrentar siniestros, por ejemplo, cuando un incendio destruye por completo un edificio grande o cuando un huracán provoca una serie de muchos daños pequeños y menores, sin embargo, son de naturaleza muy distinta.

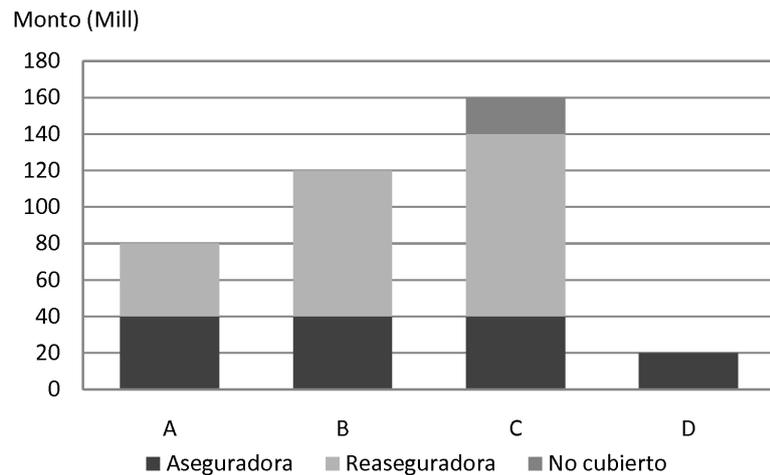
De este modo la cobertura de exceso de pérdida tiene que estructurarse diferente en función de las diversas clases de siniestros y ramos, y se puede dividir del siguiente modo:

- *WXL/R*: Este tipo de reaseguro de exceso de pérdida se utiliza cuando la aseguradora busca una limitación de siniestro por riesgo, considerando los siniestros separadamente por riesgo. Se habla entonces de cobertura de exceso de pérdida por riesgo (en inglés *working excess of loss cover per risk*), abreviado *WXL/R* o *Working Cover* dado que empieza a operar tras un siniestro por un solo riesgo y consecuentemente está expuesta por riesgo, si un evento siniestral afecta varios riesgos esto resultará en varios siniestros para el exceso de pérdida. Esta modalidad se utiliza comunmente en el reaseguro contra incendio.

Se busca principalmente en este tipo de contratos incrementar el volumen de primas y al mismo evitar que las aportaciones a los siniestros de los riesgos individuales excedan de cierto límite.

Ejemplo: Contrato con una prioridad a cargo de la cedente de \$40,000,000 en exceso de \$100,000,000

Figura 2.3: Distribución de siniestros



Debido a que el riesgo D no supera el límite establecido la compañía aseguradora se hace cargo de todo el siniestro. Para los casos A y B la reaseguradora paga respectivamente \$40,000,000 y \$80,000,000 respectivamente que es el monto que supera la prioridad. El caso C el siniestro sobrepasa la capacidad del contrato, y lo no cubierto puede estar ya sea a cargo de la aseguradora o bajo otro contrato de reaseguro.

- *Catastrófico*: En inglés *catastrophe excess of loss cover - CatXL*. Principalmente se utiliza en los seguros de daños para proteger la retención neta de la compañía. Este tipo de reaseguro solamente puede ser afectado cuando la suma de todas las pérdidas individuales a consecuencia de un mismo evento o causa producen una pérdida superior al monto establecido como prioridad, es decir, se ofrece protección contra siniestros por cúmulos y la pérdida se fija por evento siendo configurados de tal modo que no puedan ser afectados por riesgo.

Ejemplo: CatXL \$60,000,000 en exceso de \$40,000,000.

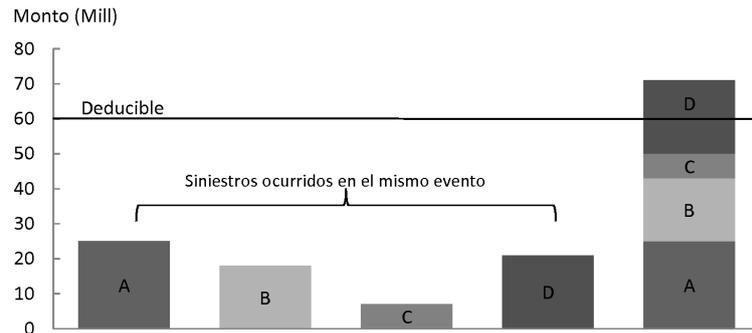


Figura 2.4: Distribución de siniestros

Es importante tener en cuenta que la suma de los siniestros que contribuyen a la suma total deben haber sucedido por el mismo evento, una vez que la suma de estos eventos supere la cantidad pactada en el contrato la reaseguradora asumirá su responsabilidad.

- *LCR (Largest Claims Reinsurance)*: Este tipo de contratos es poco común, y consiste en que la compañía reaseguradora asumirá las k reclamaciones más grandes ocurridas durante la vigencia del contrato. Es interesante notar que en este tipo de reaseguro la retención también es aleatorio, pues la retención no depende de ningún monto ya establecido, sino del monto de los siniestros de mayor magnitud.
- *ECOMOR (Excédent du coût moyen relatif)*: Esta forma de ceder riesgos es parecida al reaseguro working cover,

sin embargo, como en el LCR el límite a retener es aleatorio. Se establece que el monto de la k -ésima reclamación más grande definirá el la retención, esto significa que la reaseguradora asumirá los montos que excedan dicha reclamación, haciendo necesario para su cálculo el estudio de estadísticos de orden, en especial de los valores más grandes.

- 2) Exceso de siniestralidad o *Stop Loss*: Este tipo de reaseguro podría decirse que es poco frecuente. Es un reaseguro muy específico y se utiliza para determinados ramos, por ejemplo, el de granizo o cosechas. La reaseguradora se compromete a asumir una determinada parte de la siniestralidad total aunque supere una prioridad, o un importe fijo o absoluto, expresado normalmente en un porcentaje de la prima anual, siendo irrelevante si la retención es superada por un cúmulo de siniestros menores y medianos o por grandes acontecimientos de riesgos individuales. La reaseguradora asume su parte cuando la pérdida agregada por unidad de tiempo, es decir, el periodo del contrato, excede el monto fijado.

El contrato de exceso de siniestralidad no tiene por objeto liberar a la aseguradora de ningún riesgo empresarial, por tanto la obligación de la reaseguradora comienza cuando la aseguradora ha sufrido un daño técnico, es decir, que la suma de siniestros más costos exceda el monto de las primas y por tanto no es una garantía de ganancia para la aseguradora, es decir, pretende proteger los resultados finales de la empresa.

Este tipo de reaseguro ofrece la protección más amplia y puede ser una solución práctica cuando la aseguradora necesite protección contra una verdadera amenaza su existencia por causa de circunstancias adversas en un mismo año de ocurrencia. A diferencia de los otros contratos en este no se hace la compañía reaseguradora cargo de ningún siniestro, el pago se da cuando la siniestralidad excede un porcentaje establecido de primas, y a partir de ese punto se pagan todos los siniestros hasta el límite pactado.

La reaseguradora, para este tipo de cartera, generalmente

exige requerimientos muy elevados especialmente que la cartera que se va a reasegurar esté equilibrada. Esto se puede conseguir utilizando los otros tipos de reaseguro, por ello generalmente el Stop Loss se utiliza para la responsabilidad que queda a la aseguradora después de haber contratado adecuadamente los otros tipos de reaseguro.

El poco uso de esta modalidad puede deberse a que las compañías reaseguradoras prefieren ser reservadas para tomar este tipo de contratos puesto que existe una elevada transferencia de riesgos a la reaseguradora y que existe una enorme necesidad de información de las reaseguradoras.

Ejemplo: Se tiene un contrato stop loss 40 % xs 95 %. El total de primas obtenidas de \$100,000,000 y el total de siniestros es de \$102,000,000. Entonces la cedente se hará cargo de \$95,000,000 en siniestros y la compañía reaseguradora de \$7,000,000. En este ejemplo el límite superior de cobertura sería de \$135,000,000.

Regularmente en las carteras se utilizan varias formas de cobertura, primero se utilizan las formas proporcionales: cuota parte y excedentes, después las no proporcionales: de exceso de pérdida y stop loss. Es importante señalar que los seguros no proporcionales se aplican sobre el monto retenido y no sobre el siniestro en sí.

Ejemplo: Sea un portafolio de reaseguro con las siguientes coberturas y riesgos asegurados, donde todos los siniestros son causados por un mismo evento:

(Cantidades x 1,000)

- CP (80|20) con un límite de \$5,000
- Línea: \$5,000
Primer excedente: 3 líneas
Segundo excedente: 2 líneas
- WC \$1,600 xs \$2,000
- CatXL \$24,000 xs \$14,400

- Stop loss 10 % xs 100 %

- Primas retenidas: \$14,000

Riesgo	Suma Asegurada	Retención	Cuota parte	1er Excedente	2o. Excedente	Facultativo
A	800	640	160	-	-	-
B	1,500	1,200	300	-	-	-
C	7,500	4,000	1,000	2,500	-	-
D	10,000	4,000	1,000	5,000	-	-
E	25,000	4,000	1,000	15,000	5,000	-
F	40,000	4,000	1,000	15,000	10,000	10,000
G	80,000	4,000	1,000	15,000	10,000	50,000
I	100,000	4,000	1,000	15,000	10,000	70,000
J	400,000	4,000	1,000	15,000	10,000	370,000

Total de sumas aseguradas: \$754,800.

Riesgo	Siniestro	Prioridad	Working cover	1er Excedente	2o. Excedente	Facultativo
A	600	320	-	-	-	-
B	1,200	960	-	-	-	-
C	6,000	2,000	1,200	2,000	-	-
D	2,000	800	-	1,000	-	-
E	18,000	2,000	880	10,800	3,600	-
F	40,000	2,000	1,600	15,000	10,000	10,400
G	55,000	2,000	750	10,312.5	6875	34,375
H	90,000	2,000	1,600	15,000	10,000	60,400
I	100,000	400	-	1,500	1,000	7,000
J	249,000	2,000	490	9,337.5	6,225	230,325

Monto total retenido de los siniestros: \$14,480.

Al aplicar el reaseguro catastrófico quedan a cargo de la aseguradora \$14,400, finalmente para stop loss se van \$400 y la aseguradora retiene \$14,000.

2.3. Límite de retención

En la sección anterior se habló de la *retención* de manera intuitiva, el seguro proporcional se tomó como una porción del contrato original donde tanto suma asegurada, siniestros y primas se distribuían del mismo modo. Para los contratos no proporcionales se establecía un monto máximo del cual la aseguradora se hacía cargo, nombrado a esta responsabilidad a cargo de la cedente, el cual puede ser nombrado de diversas formas: *deducible*, *prioridad*, *línea retenida*, dependiendo del tipo de reaseguro. Se dará ahora una definición precisa y las causas que hay que tomar en cuenta para la determinación

de esos límites. (ver *Reinsurance Matters*[36] C.2, *Setting Optimal Reinsurance Retentions*[34], *Setting Retentions Theoretical Considerations*[18]), *Optimal Reinsurance*[8].

La *retención*, resumiendo algunas definiciones que da Swiss Re en algunos de sus artículos ([18],[34]) es la parte del riesgo o negocio que la compañía asumirá por cuenta propia. La compañía decidirá el tipo y la extensión de los riesgos que asumirá, es decir, la retención representa la máxima pérdida potencial que la compañía está preparada y desea pagar ya sea en un riesgo individual, en un grupo de riesgos, en la acumulación de pérdidas o en la carga total de reclamaciones de un portafolio en un periodo determinado.

Existen muchos aspectos que se toman en cuenta al momento de fijar la retención, tanto internos, es decir, que son inherentes a la compañía como externos referentes al medio donde opera. Algunos factores son:

- **Seguridad financiera:** La compañía de seguros busca tener solvencia y liquidez, es decir, desea tener la capacidad de poder hacer frente al pago de los siniestros en su totalidad al momento de que ocurran. Otro motivo es obtener estabilidad en las ganancias, ya que al reducir las fluctuaciones el control sobre los ingresos es mayor, sin embargo, el aspecto negativo es que al reducir las pérdidas las ganancias también se verán afectadas; por supuesto se busca siempre maximizar las ganancias y acotar lo más posible las pérdidas. Debido a esto la composición de cada portafolio influirá en la decisión de que tanto se debe retener, entre más riesgoso sea el portafolio se cederá más riesgo.
- **Protección contra imprevistos:** Existen situaciones no planeadas que son potenciales causa de pérdida, por ejemplo: la ocurrencia de mayor número de catástrofes naturales esperadas o con una intensidad mayor a la contemplada lo que incrementa los gastos previstos. Puede suceder que también existan cambios legales, tecnológicos u otros no previstos en los contratos que incrementen el volumen de pérdidas. El reaseguro permite también homogeneizar el portafolio y de esta manera reducir las desviaciones y la probabilidad de que las primas sean insuficientes para hacer frente a las responsabilidades, no solo porque estén más allá de lo previsto si no por una posible mala valuación del riesgo, aunque por supuesto, se espera que esta situación no se presente.

- **Intereses financieros:** Entre los diversos motivos para ceder o no cierta parte de los riesgos asumidos por una compañía de seguros pueden encontrarse el que tanto le ayuda esta operación mejorar sus resultados y tener un mejor balance en los mismos; que tanto le permite reducir sus costos: por ejemplo, la cantidad de impuestos a pagar o los gastos de administración que adquiere al asumir los riesgos. Es posible además, que al tener una mayor capacidad de suscripción se pueda adquirir capital con menos costo que con otros métodos y por tanto tener mayor crecimiento y ganancias.
- **Mercado:** Este es otro factor muy importante para determinar la retención por ejemplo: que tanto se incrementa la prima al asegurado y si permite seguir siendo competitiva a la aseguradora. Depende también del mercado de reaseguro y de como como este afecte el precio de los contratos: si es mas barato tener contratos proporcionales o no proporcionales, los servicios que ofrezca y los requerimientos de reciprocidad que establezca la reaseguradora para proporcionar sus servicios, la capacidad en el tamaño y tipo de riesgos que está dispuesta a afrontar la compañía de reaseguro, la existencia o no y el costo de intermediarios y otras prácticas propias del mercado.
- **Factores económicos:** La situación económica del lugar o de los lugares donde la compañía opera influye también ya que de acuerdo a esta se tendrán las tasas de interés, la inflación y otros aspectos que influyen en el modo y el monto de las inversiones que se llevarán a cabo, el tipo de suscripciones que se tendrán y el alcance de las mismas.
- **Regulación:** Es posible que la regulación establezca la cantidad máxima o mínima a retener. Por ejemplo, en México en la Circular Única de Seguros los límites máximos de retención permitidos.
- **Diversos:** A parte de los ya mencionados puede haber otros factores para elegir la retención como la fortaleza financiera, esto quiere decir: el monto esperado de los siniestros y a sus desviaciones en sí no representan mucho para decidir el límite de retención. Ya que, por ejemplo, una empresa grande pudiera afrontar el pago de \$10,000,000 con relativa facilidad, sin embargo, para una compañía pequeña pudiera representar incluso la ruina. Una manera de medir este factor es comparando el

capital con el volumen de primas, peor depende de cada empresa que cantidad de capital puede y esta dispuesta a poner en juego.

Se pueden encontrar otros factores que determinan el límite de retención, como puede ser: la aversión que cada empresa tiene al riesgo es un factor que puede influir en la determinación de la retención. Esto tiende a ser un tanto subjetivo, y por lo tanto podría decirse casi imposible de cuantificar, y depende el criterio de cada empresa. Existen incluso otros factores que no tienen nada que ver con un estudio actuarial o factores económicos como puede ser la tradición de la empresa, las relaciones personales, aspectos morales o algunos otros.

Estos otros factores no siempre giran en torno a un monto de dinero, y esto puede ser, por ejemplo, porque no a todas las compañías les afecta del mismo modo una pérdida: lo que para una empresa grande el afrontar el pago de un siniestro de \$10,000,000 puede ser de relativa menor importancia, para una empresa pequeña podría representar incluso la ruina. Entonces otra manera de establecer el límite, sería el volumen de primas, capital, etc.

Existen hasta ahora diversos métodos para calcular el límite de retención, los cuales pueden estar basados en la experiencia de la compañía, en modelos matemáticos, en la intuición u otros aspectos relevantes a la compañía de seguros. Se presentarán a continuación ejemplos de dos formas diferentes que se utilizan para abordar el problema: la primera es conocida como *rule of thumb*, literalmente *regla de dedo*, que consiste principalmente en porcentajes de primas, reservas, capital, u algún otro indicador establecido por la compañía generalmente de manera empírica. Es común que las condiciones se establezcan más para los riesgos de exceso de siniestralidad y por lo general suponen homogeneidad en la cartera. Por ejemplo:

- Si la compañía desea que un riesgo o cúmulo de riesgos no le afecte más del 5% de sus reservas más capital puede establecer que la retención no exceda ese monto.
- Es posible también que la compañía esté dispuesta a asumir hasta un 10% extra de la prima neta retenida, entonces se establece así el límite.
- No siempre el límite de retención se encuentra explícito en las reglas, muchas veces pueden existir otro tipo de relaciones: por ejemplo, que

el monto de las primas netas retenidas sean aproximadamente la mitad del monto de capital más reservas.

- Que las primas de reaseguro facultativo no excedan al 5% de el volumen total de primas.
- Otro criterio puede ser el de establecer un mínimo de lo retenido, por ejemplo, que el monto de las primas netas retenidas represente al menos el 20% del volumen total de primas.
- Puede ser también que se establezca que la retención sea de cuatro a seis veces mayor que el activo líquido de la compañía.
- A veces estas reglas pueden ser establecidas por gente ajena a la compañía. Por ejemplo, en México la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas establece en la Regla 24 en el caso de las sociedades mutualistas de seguros que cada riesgo asegurado el límite no puede ser superior al 5% de su patrimonio. En el caso de las compañías de seguros, por cada riesgo asegurado, se toma el 5% de los activos computables al capital mínimo de garantía mas los activos computables al capital mínimo de garantía en exceso a los límites de inversión, sin embargo, en este caso el límite puede ser excedido siempre y cuando se tenga una opinión de un actuario independiente certificado.

Existen además muchas otras reglas de este tipo, y no existe un método definido para crearlas. Generalmente se utilizan varias reglas a la vez que se complementan y evidentemente hay veces que no se pueden conjuntar algunas reglas. Esta es una primera aproximación para encontrar la mejor retención para la compañía, sin embargo, puede llegar a ser un tanto burda y no representar el verdadero riesgo subyacente al fenómeno, y por tanto ser solamente delimitador del escenario, cuyas fronteras están basadas meramente en la intuición.

A través del tiempo se han presentado diversos resultados de modelos matemáticos que tratan de encontrar el mejor límite de retención. Ya desde 1940 de Finetti había abordado el problema para el reaseguro cuota parte, asumiendo que se tenían n riesgos independientes encontrar la retención que

minimizara la varianza del riesgo retenido manteniendo la ganancia esperada en una cantidad determinada. en 1969 Borch abordó el contrato stop loss, y encontró que era la forma de reaseguro óptima bajo los supuestos de que la prima de reaseguro era fija y tomando como fin minimizar la varianza de la retención. Sin embargo, en 1977 Beard y otros mostraron que bajo ciertos supuestos el contrato cuota parte es la manera más barata de minimizar el riesgo.

Ya para 1979 Gerber abordó el problema tomando los riesgos de modo individual, para la prima el principio de valor esperado y buscaba minimizar la probabilidad de ruina maximizando el coeficiente de ajuste R , y mostró que en este caso la mejor forma de reaseguro era la de exceso de pérdida.

Más recientemente en el año 2004 Leslaw Gajek y Dariusz Zagrodny consideraron que una aseguradora desea retener tanto riesgo como sea posible estableciendo un límite de prima a pagar por el reaseguro, dicha prima se rige bajo el principio de desviación estándar y el monto a ceder esta acotado inferior y superiormente. Se propone una función de pérdida $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ y el objetivo es minimizar $E[v(S - S_\rho - E(S - S_\rho))]$ donde S representa el monto agregado de reclamaciones y S_ρ representa el monto agregado de reclamaciones pagadas por la reaseguradora.

En general casi todos los trabajos consistían principalmente en disminuir la varianza de lo retenido, minimizar la probabilidad de ruina, emplear funciones de utilidad o pérdida y variando supuestos como los principios de la prima del reaseguro, tomando el monto agregado de reclamaciones o individual, entre otros.

A finales de 1980 surge un concepto denominado *Value at Risk* (VaR) como una manera de medir el riesgo, principalmente en el área de finanzas. Se definirá el VaR del siguiente modo: dado que se toma un nivel de confianza $1 - \alpha$ el VaR está dado por el número más pequeño s tal que la probabilidad de que la variable aleatoria no negativa S no exceda α . Entonces $\text{VaR}(\alpha) = \inf\{s : P(S > s) \leq \alpha\}$. A pesar de que el VaR no es muy complicado de usar tiene la desventaja de que no provee información de la severidad del daño que pueda ocurrir más allá del límite establecido. Para medir el riesgo que excede el límite se utiliza una herramienta llamada *Conditional Tail Expectation* (CTE), cuya definición es: $\text{CTE}(\alpha) = E[S | S \geq v]$ donde $v = \text{VaR}(\alpha)$.

En 2007 y 2008 Jun Cai y Ken Seng Tan, desarrollaron escritos donde buscan bajo estas medidas de riesgo encontrar el límite más adecuado prin-

cialmente para los contratos cuota parte y stop loss.

Como se ha podido ver, al tratar de encontrar el mejor límite de retención es muy importante tener clara la manera de medir riesgo: minimizando la varianza, minimizando la pérdida esperada, maximizando la utilidad esperada, utilizar medidas como VaR y CTE, entre otras. A lo largo de este trabajo se presentarán propuestas para tratar con este problema.

Capítulo 3

Teoría de valores extremos

Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Se quiere encontrar el comportamiento límite en el extremo. Una manera de tratar de resolver el problema es encontrando la posible distribución del máximo: $\max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. El estudio análisis sobre el mínimo se omite, pues $\min(X_1, X_2, \dots, X_n) = -\max(-X_1, -X_2, \dots, -X_n)$. Ver *Extreme Value Theory*[19].

Sea F una función de distribución continua y estrictamente creciente. Sea $x^* := \sup\{x : F(x) < 1\}$ y $X_{max} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, el cual también puede ser infinito.

$P(\lim_{n \rightarrow \infty} \{X_{max}\}_n = x^*) = 1$ y $\{X_{max}\}_{n \geq 1}$ es una sucesión no decreciente, es decir, X_{max} converge de manera casi segura a x^* .

Supóngase ahora que existe una sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ de números positivos y una sucesión $\{b_n\}_{n \geq 1}$ de números reales tal que para todos los valores reales x en los cuales los límites son continuos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_{max} - b_n}{a_n} \leq x\right) = G(x) \quad (3.1)$$

que es equivalente a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x) \quad (3.2)$$

donde G es una función no degenerada.

Se quieren encontrar todas las distribuciones G que son el límite de la ecuación 3.1, las cuales serán llamadas *Distribuciones de valores extremos*.

Las distribuciones F que satisfacen la ecuación 3.1 serán llamadas *dominio de atracción de G* .

Ahora, se tiene para cada punto continuo x para el cual $0 < G(x) < 1$ que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log [F(a_n x + b_n)] = \log [G(x)]$$

por otro lado se puede ver que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log [F(a_n x + b_n)]}{1 - F(a_n x + b_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n x + b_n) = 1$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - F(a_n x + b_n)) = -\log [G(x)]$$

y de aquí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(1 - F(a_n x + b_n))} = \frac{1}{-\log [G(x)]}. \quad (3.3)$$

Lema 3.0.1. *Supóngase que $\{F_n\}$ es una sucesión de funciones no decrecientes y que G es una función no decreciente. Además, si se supone para cada x en el intervalo (a, b) que es un punto continuo de G $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = G(x)$. Entonces para cada x en el intervalo $(G(a), G(b))$ que es un punto continuo de G^{\leftarrow} se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{\leftarrow}(y) = G^{\leftarrow}(y)$.*

Donde $F^{\leftarrow}(y) = \inf\{x : F(x) \geq y\}$ es la función inversa continua por la izquierda de F .

Demostración. Sea x un punto continuo de G^{\leftarrow} , $\epsilon > 0$. Se tiene que demostrar que

$$F_n^{\leftarrow}(x) - \epsilon \leq G^{\leftarrow}(x) \leq F_n^{\leftarrow}(x) + \epsilon.$$

Sea $0 < \epsilon_1 < \epsilon$ tal que $G^{\leftarrow}(x) - \epsilon_1$ es un punto continuo de G . Esto es posible puesto que la continuidad de puntos de G forman un conjunto denso. Puesto que G^{\leftarrow} es continuo en x , G^{\leftarrow} es un punto de incremento para G , de aquí $G(G^{\leftarrow}(x) - \epsilon_1) < x$. Sea ahora $\delta < x - G(G^{\leftarrow}(x) - \epsilon_1)$. Puesto que $G^{\leftarrow}(x) - \epsilon_1$ es un punto continuo de G , existe n_0 tal que $F_n(G^{\leftarrow}(x) - \epsilon_1) <$

$G(G^{\leftarrow}(x) - \epsilon_1) + \delta < x$ para $n \geq n_0$. De la definición de F_n^{\leftarrow} implica que $G^{\leftarrow}(x) - \epsilon_1 \leq F_n^{\leftarrow}$. La otra desigualdad es análoga. \square

Aplicando el lema anterior

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{\leftarrow}(1 - \frac{1}{ny}) - b_n}{a_n} = G^{\leftarrow}(e^{-1/x}) := g(y). \quad (3.4)$$

Sea $U(y) = F^{\leftarrow}(1 - \frac{1}{y}) = x$ teniendo de este modo $F(x) = 1 - \frac{1}{y}$.

Por otro lado, de la ecuación 3.4 siendo y un punto continuo de $g(y)$ para $t \geq 1$

$$\frac{U([t]y) - b_{[t]}}{a_{[t]}} \leq \frac{U(ty) - b_{[t]}}{a_{[t]}} \leq \frac{U([t]y(1 + 1/[t])) - b_{[t]}}{a_{[t]}}.$$

donde $[t]$ representa el valor entero de t .

Para cualquier punto continuo $x' > x$ con $g(y') > g(y)$ el lado derecho es cada vez más pequeño que $g(y')$ llegando a que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(ty) - b_{[t]}}{a_{[t]}} = g(y).$$

Supóngase que 1 es un punto continuo de g y sea $a(t) : a_{[t]}$, al tomar $g(y) - g(1)$ se tiene para los puntos continuos de $y > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(ty) - U(t)}{a(t)} := H(y)$$

tomando $z > 0$ se puede escribir:

$$\frac{U(tyz) - U(t)}{a(t)} = \frac{U(tyz) - U(tz)}{a(tz)} \frac{a(tz)}{a(t)} + \frac{U(tz) - U(t)}{a(t)}. \quad (3.5)$$

Ahora se busca la existencia de los límites de $H(y)$ y de $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(tz)}{a(t)} := h(z)$. Supóngase que no existen, entonces hay $A_1 \neq A_2$ o $B_1 \neq B_2$, siendo B_i puntos límite de $H(y)$ y A_i puntos límite de $h(z)$, de esta manera

$$H(yz) = H(y)A_i + B_i$$

restando para $i = 1, 2$

$$H(y)(A_1 - A_2) = B_2 - B_1$$

para $y > 0$. Puesto que G no es una función degenerada, se tiene que H no puede ser constante por lo que $A_1 = A_2$ y $B_1 = B_2$.

Ahora que se sabe que el límite anterior existe es posible continuar con el análisis de $h(y)$ y para $y, z > 0$ se cumple que:

$$\frac{a(tyz)}{a(t)} = \frac{a(tyz)}{a(tz)} \frac{a(tz)}{a(t)}$$

que satisface la ecuación funcional de Cauchy $h(yz) = h(y)h(z)$ que para $y, z > 0$ es de la forma $h(y) = y^\gamma$ para γ real. (Ver *Statistics of Extremes*)[5].

Entonces tomando $h(y) = y^\gamma$ es posible reescribir la ecuación 3.5

$$H(yz) = H(z)y^\gamma + H(y).$$

Para el caso $\gamma = 0$ se puede encontrar una constante c tal que $H(y) = c \log(y)$. Para el caso $\gamma \neq 0$ y para $y, z > 1$ por simetría se tiene que

$$H(yz) = H(z)y^\gamma + H(y) = H(y)z^\gamma + H(z)$$

de aquí, para alguna constante d , $H(y) = d(y^\gamma - 1)$ reescribiendo $c := \gamma d$. El caso $c = 0$ queda excluido pues las funciones son no degeneradas y el caso $c \neq 0$ puede ser incorporado a la función $a(t)$ llegando a que $H(y)$ es de la forma

$$c \frac{y^\gamma - 1}{\gamma}$$

siendo $\gamma \neq 0$; para el caso $\gamma = 0$ se llega a que $H(y) = \log(y)$.

Retomando la ecuación 3.4 con $a_n = a(t)$ y $b_n = U(t)$ la función distribución $G(x)$ que satisface la ecuación 3.1 es :

$$G(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}), & 1 + \gamma x > 0 \\ \exp(-e^{-x}), & \gamma = 0 \end{cases}$$

$G(x)$ es conocida como la función de valor extremo generalizada, sin embargo, haciendo un cambio en los parámetros, se hace una división en tres familias de funciones:

- *Fréchet*: $\gamma > 0$, tomando $G((x - 1)/\gamma)$ y $\alpha = 1/\gamma > 0$

$$G_1(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

- *Gumbel*: $\gamma = 0$

$$G_2(x) = \exp(-e^{-x}), \quad -\infty < x < \infty$$

- *Weibull*: $\gamma < 0$, para $G(-(1+x)/\gamma)$ y $\alpha = -1/\gamma > 0$

$$G_3(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha), & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Evidentemente los tres tipos de funciones están relacionadas, y mediante transformaciones es posible llegar de una a otra. Supóngase $X > 0$ donde $X \sim G_1(x)$, se tendrá entonces que:

$$\begin{aligned} \log(X^\alpha) &\sim G_2(x), \\ -1/X &\sim G_3(x). \end{aligned}$$

Ahora se encontrarán los momentos de una variable aleatoria que se distribuye Gumbel (*Ver Extreme Value Distributions Theory and Applications*)[33].

$$g_2 = e^{-x} \exp(-e^{-x}), \quad \text{para } -\infty < x < \infty$$

$$E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} e^{tx} \exp(-e^{-x}) dx$$

al realizar un cambio de variable de e^{-x} por z se tiene:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} z^{1-t} e^{-z} \frac{dz}{z} \\ &= \Gamma(1-t) \int_0^{\infty} \frac{z^{-t} e^{-z}}{\Gamma(1-t)} dz. \end{aligned}$$

Para encontrar el primer momento se utilizará la siguiente relación:

$$k(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma + \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n-1}\right) + \dots$$

donde γ es la constante de Euler. Al evaluar en cero $\Gamma'(1-t)$ se tiene que $E[X] = -\gamma$. Para el segundo momento:

$$\begin{aligned} \Gamma''(x) &= k'(x)\Gamma(x) + k(x)\Gamma'(x) \\ &= \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \dots + \frac{1}{(x+n-1)^2} + \dots\right) \Gamma(x) + k(x)\Gamma'(x) \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2$$

de aquí $Var(x) = \frac{\pi^2}{6}$. En el caso de las variables que tienen distribución Fréchet o Weibull se tiene que: si $X \sim G_1(x)$:

$$E[X] = \Gamma(1 - \gamma)$$

$$E[X^2] = \Gamma(1 - 2\gamma)$$

Si $X \sim G_3(x)$:

$$E[X] = \Gamma(1 + \gamma)$$

$$E[X^2] = \Gamma(1 + 2\gamma)$$

en ambos casos la existencia de los momentos depende de los parámetros.

3.1. Dominios de atracción

Una función F pertenece al dominio de atracción G (se denota $F \in D(G)$) si existen constantes normalizantes $a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$ tal que $F^n(a_n + b_n) \rightarrow G(x)$, se quieren encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que $F \in D(G)$ siendo G alguna de las tres distribuciones de valores extremos. (Ver *Extreme Value Theory an Introduction*[19], *Extreme Values, Regular Variation and Point Process*[31]).

3.1.1. Dominio de atracción Fréchet Φ

Proposición 3.1.1. $F \in D(\Phi)$ si y sólo si $1 - F \in RV_{-\alpha}$, en este caso se tendrán como constantes normalizantes $a_n = U(n)$ y $b_n = 0$.

Así que de este modo solo distribuciones donde x^* sea infinito pueden pertenecer a $D(\phi_\alpha(x))$

Demostración. Primero se demostrará que si $1 - F \in RV_{-\alpha}$ entonces $F \in D(\Phi_\alpha(x))$ con $a_n = U(n)$ y $b_n = 0$.

Dado que $1 - F \in RV_{-\alpha}$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - F(a_n x)) / (1 - F(a_n)) \rightarrow x^{-\alpha}$.

Por otra parte, de la definición de que $U(n)$ es la función inversa de $1/(1 - F)$ se tiene que

$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - F(a_n) \rightarrow 1/n$ de donde $n(1 - F(a_n x)) \rightarrow x^\alpha$ por la ecuación 3.3 $x^{-\alpha} \rightarrow -\log[G(x)]$ con lo cual $F \in D(\Phi(a_n(x)))$.

Ahora supóngase que $F \in D(\Phi(a_n(x)))$, por la ecuación 3.3 se tiene que

$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - F(a_n x + b_n)) \rightarrow x^\alpha$ lo que es equivalente a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U(ny) - b_n}{a_n} \rightarrow y^\gamma$$

tomando en cuenta esto y al cambiar or funciones continuas a_n y b_n por $a(t)$ y $b(t)$

$$\frac{U(ty) - U(t)}{a(t)} = \frac{U(ty) - b(t)}{a(t)} - \frac{U(t) - b(t)}{a(t)} = y^\gamma - 1 \quad (3.6)$$

véase que $a(x) \in RV_\gamma$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(tx)}{a(t)} = \frac{\frac{U(tx) - U(t)}{a(t)}}{-\left(\frac{U(tx) - U(t)}{a(tx)}\right)} = \frac{(x^\gamma - 1)}{-(1/x^\gamma - 1)} = x^\gamma$$

del mismo modo se tiene que $U(ty) - U(t) \in RV_\gamma$ para $y > 0$ y como función de t . Esto implica tomando en cuenta el teorema de Karamata que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{(U(sx) - U(s))ds}{t(U(tx) - U(t))} = \frac{1}{\gamma + 1} \quad (3.7)$$

integrando la ecuación 3.6 sobre y y observando que se tiene la convergencia de funciones monótonas a un límite continuo y puesto que la convergencia es uniforme:

$$\begin{aligned} \int_1^z \frac{U(tx) - U(t)}{a(t)} &\rightarrow \int_1^z x^\gamma - 1 \\ \frac{1}{a(t)} \int_1^z U(tx) - \frac{(z-1)U(t)}{a(t)} &\rightarrow \frac{z^{\gamma+1}}{\gamma+1} - z - \frac{1}{\gamma+1} + 1 \end{aligned}$$

analizando el lado izquierdo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{ta(t)} \int_t^{tz} U(x)dx - \frac{(z-1)U(t)}{a(t)} \\ &= \frac{1}{ta(t)} \left(\int_1^{tz} U(x)dx - \int_1^t U(x)dx \right) - \frac{(z-1)U(t)}{a(t)} \\ &= \frac{z}{ta(t)} \int_1^t U(zx)dx - \frac{1}{ta(t)} \int_1^t U(x)dx \\ &\quad - \left[\frac{z}{ta(t)} \int_1^t U(x)dx - \frac{z}{ta(t)} \int_1^t U(x)dx \right] - \frac{(z-1)U(t)}{a(t)} \end{aligned}$$

$$= \frac{z}{ta(t)} \left[\int_1^t U(zx)dx - \int_1^t U(x)dx \right] + \frac{z-1}{ta(t)} \left[\int_1^t U(x)dx - tU(t) \right]$$

de las ecuaciones 3.6 y 3.7 se tiene para el primer sumando

$$\frac{\int_1^t U(x)dx - \int_1^t U(x)dx}{ta(t)} \rightarrow \frac{x^\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

de donde

$$\frac{z-1}{ta(t)} \left[\int_1^t U(x)dx - tU(t) \right] \rightarrow \frac{z^{\gamma+1}}{\gamma+1} - \frac{z^{\gamma+1} - z}{\gamma+1} - (z-1) - \frac{1}{\gamma+1} = -\frac{\gamma(z-1)}{\gamma+1}$$

con lo que:

$$U(t) - \frac{1}{t} \int_1^t U(x)dx \rightarrow \frac{\gamma a(t)}{\gamma+1}. \quad (3.8)$$

Si se toma $V(t) = \int_1^t$ y $V'(t) = U(t)$ se obtiene la ecuación diferencial con la forma $V'(t) - \frac{1}{t}V(t) = \gamma a(t)/(\gamma+1)$ cuya solución es $V(t) = t\gamma \int \frac{a(t)}{t(1+\gamma)}$.

Si se toma la ecuación 3.8 y se divide entre t y e integra respecto de t se obtiene $V(t)$

$$\int_1^z \frac{1}{t} U(t)dt - \int_1^z \frac{1}{t^2} \int_1^t U(x)dxdt = \int_1^z \frac{\gamma a(t)}{t(\gamma+1)} dt$$

intercambiando el orden de integración en el segundo término:

$$\begin{aligned} & \int_1^z \frac{1}{t} U(t)dt - \int_1^z \left(\int_x^z \frac{1}{t^2} dt \right) U(x)dx \\ &= \int_1^z \frac{1}{t} U(t)dt - \left(\int_1^z \frac{1}{x} U(x)dx - \frac{1}{z} \int_1^z U(x)dx \right) \end{aligned}$$

de la ecuación 3.8

$$= \int_1^z \frac{1}{t} U(t)dt - \int_1^z \frac{1}{x} U(x)dx + \frac{\gamma a(z)}{1+\gamma} - U(z)$$

finalmente:

$$U(z) = \frac{\gamma a(z)}{1+\gamma} + \int_1^z \frac{\gamma a(x)dx}{x(1+\gamma)}$$

por el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{U(z)(\gamma + 1)}{\gamma a(z)} = 1 + \lim_{z \rightarrow \infty} \int_1^z \frac{a(x)dx}{xa(z)} = 1 + \int_0^1 x^{\gamma-1} = 1 + \frac{1}{\gamma}$$

Esto lleva a que $U(z) \rightarrow a(z)$ y de acuerdo al Apéndice A.2 y la definición de $U(z)$ se tiene que $1/(1 - F(z)) \in RV_{1/\gamma}$ por lo que $1 - F \in RV_{-1/\gamma}$ \square

Proposición 3.1.2. *Supóngase que F es absolutamente continua con densidad positiva F' en alguna vecindad de ∞ , entonces*

i Si para algún $\gamma > 0$ se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x F'(x)}{1 - F(x)} = \frac{1}{\gamma}$$

entonces $F \in D(\Phi_{1/\gamma})$, y se puede elegir a_n tal que $a_n F'(a_n) \sim 1/(\gamma n)$.

ii Si F' es no decreciente y $F \in D(\Phi_{1/\gamma})$ entonces se satisface el límite de i.

iii El límite en i. se satisface sí y sólo si $1 - F$ tiene la siguiente representación:

$$1 - F(x) = c(x) \exp \left[- \int_1^x \frac{\gamma(t)}{t} dt \right]$$

para $x \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = c \in (0, \infty)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \gamma(x) = 1/\gamma \in (0, \infty)$

Demostración. Ver demostración en el Apéndice A.2. \square

3.1.2. Dominio de atracción Weibull Ψ

Proposición 3.1.3. *$F \in D(\Psi)$ sí y sólo si $x^* < \infty$ y $1 - F(x^* - 1/x) \in RV_{-\alpha}$, en este caso se tendrán como constantes normalizantes $a_n = x^* - U(n)$ y $b_n = x^*$, entonces:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F^n(x^* - (x^* - U(n))) \rightarrow G(x) \in D(\Psi)_{1/\gamma}(x) \quad x < 0$$

Distribución	$1 - F(x)$
Pareto	$x^{-1/\gamma}$ $x > 1; \alpha > 0$
Pareto Generalizada	$(1 + \frac{\gamma x}{\sigma})^{-1/\gamma}$ $x; \gamma, \sigma > 0$
Burr (Tipo XII)	$(\frac{\rho}{\rho+x^\tau})^\lambda$ $x; \rho, \tau, \lambda > 0$
Burr (Tipo III)	$1 - (\frac{\rho}{\rho+x^\tau})^\lambda$ $x; \rho, \tau, \lambda > 0$
F	$\int_x^\infty \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \binom{m}{n}^{m/2} w^{m/2-1} (1 + \frac{m}{n}w)^{(m+n)/2} dw$ $x; m, n > 0$
T	$\int_x^\infty \frac{2\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \frac{w^2}{n})^{-(n+1)/2}$ $x; n > 0$
Gama Inversa	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\lambda/w)w^{-\alpha-1}dw$ $x; \lambda, \gamma > 0$
Log Gamma	$\int_x^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} w^{\lambda-1} (\log w)^{\alpha-1} dw$ $x > 1; \lambda, \gamma > 0$
Frechet	$1 - \exp(-x^{-\alpha})$ $x, \alpha > 0$
Cauchy	$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-\mu}{\gamma}\right)$ $x; \mu \in \mathbb{R}, \gamma > 0$

Cuadro 3.1: Funciones pertenecientes al dominio de atracción Frechet Φ

Demostración. Supóngase que $1 - F(x^* - 1/x) \in RV_{-\alpha}$ y que $x^* < \infty$ y sea

$$F_{\#}(x) = \begin{cases} F(x^* - 1/x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

entonces: $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{\#}^n(a_n x) \rightarrow \exp(-x^{-1/\gamma})$ de donde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - F\left(x^* - \frac{1}{a_n x}\right) \rightarrow \exp(-x^{-1/\gamma})$$

con $x > 0$ y al tomar $y = -1/x$ se llega a que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} 1 - F(x^* + y/a_n) \rightarrow \exp(-(-y)^{1/\gamma}) \quad y < 0. \quad (3.9)$$

Por otro lado, se tiene que $a_n = (1/(1 - F_{\sharp}^n))^{\leftarrow}$ que es equivalente a $(1/(1 - F(x^* - 1/x)))^{\leftarrow}$. Obteniendo la función inversa se tiene que $a_n \rightarrow 1/(x^* - U(n))$ y de la ecuación 3.9 para $x < 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) \rightarrow G(x) \in \Psi_{1/\gamma}(x)$ donde $a_n = x^* - U(n)$ y $b_n = x^*$.

Para demostrar la implicación en el otro sentido supóngase que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) \rightarrow G(x) \in \Psi_{1/\gamma}(x)$$

entonces análogamente a la sección anterior, al invertir la igualdad y tomar funciones continuas para a_n y b_n se obtiene:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(yt) - b(t)}{a(t)} \rightarrow -(-x^{-\gamma}) \quad x < 0.$$

Sea $y = -x$, entonces

$$\frac{U(ty) - U(t)}{a(t)} = \frac{U(ty) - b(t)}{a(t)} - \frac{U(t) - b(t)}{a(t)} = 1 - y^{-\gamma} \quad (3.10)$$

lo cual implica que como función de t $a(t), U(ty) - U(t) \in RV_{-\gamma}$ ya que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(tx)}{a(t)} = \frac{\frac{U(tx) - U(t)}{a(t)}}{-\left(\frac{U(tx) - U(t)}{a(tx)}\right)} = \frac{(1 - 1/x^\gamma)}{-(1 - x^\gamma)} = 1/x^\gamma = x^{-\gamma}.$$

De la construcción de $U(n)$ se definirá $U(\infty) := x^*$ y se probará que $U(\infty) < \infty$.

Puesto que $U(ty) - U(t) \in RV_{-\gamma}$ se tiene para $Z > 1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{U(Z^{k+1}) - U(Z^k)}{U(Z^k) - U(Z^{k-1})} \rightarrow Z^{-\gamma}$$

tomando $0 < \varepsilon < Z^\gamma - 1$ y para algún $k \geq n_0(\varepsilon)$ se cumplirá que

$$U(Z^{k+1}) - U(Z^k) \leq U(Z^k) - U(Z^{k-1})Z^{-\gamma}(1 + \varepsilon)$$

reescribiendo:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [U(Z^{N+1}) - U(Z^{n_0})]$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=n_0}^N U(Z^{n_0}) - U(Z^{n_0-1}) \prod_{k=n_0}^n \frac{U(Z^{k+1}) - U(Z^k)}{U(Z^k) - U(Z^{k-1})} \right]$$

$$\leq U(Z^{n_0}) - U(Z^{n_0-1}) \sum_{n=n_0}^{\infty} ((1 + \varepsilon)z^{-\gamma})^{n-n_0-1} < 1/((1 + \varepsilon)Z^{-\gamma}) < \infty$$

dividiendo entre y^2 , integrando la ecuación 3.10 en el intervalo $(1, \infty)$ y aplicando el teorema de convergencia dominada se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \frac{U(ty) - U(t)}{a(t)y^2} dy &\rightarrow \int_1^{\infty} y^{-2} - y^{-\gamma-2} dy \\ &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \frac{(x^* - U(ty)) - (x^* - U(t))}{a(t)y^2} dy \rightarrow \int_1^{\infty} y^{-2} - y^{-\gamma-2} dy \end{aligned}$$

lo que lleva a que

$$\begin{aligned} \frac{x^* - U(t)}{a(t)} - \int_1^{\infty} \frac{(x^* - U(ty))}{a(t)y^2} dy &= \frac{\gamma}{1 + \gamma} \\ x^* - U(t) - t \int_1^{\infty} \frac{1}{y^2} (x^* - U(y)) dy &= \frac{\gamma a(t)}{1 + \gamma} \end{aligned} \quad (3.11)$$

ahora al dividir entre t e integrar respecto de t

$$\int_z^{\infty} \frac{1}{t} (x^* - U(t)) dt - \int_z^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{1}{y^2} (x^* - U(y)) dy dt = \int_z^{\infty} \frac{\gamma a(t)}{t(1 + \gamma)}$$

intercambiando el orden de integración del segundo término

$$\begin{aligned} \int_z^{\infty} \frac{1}{t} (x^* - U(t)) dt - \left[\int_z^{\infty} \frac{1}{y} (x^* - U(y)) dy - z \int_z^{\infty} \frac{1}{y^2} (x^* - U(y)) dy \right] \\ = \int_z^{\infty} \frac{\gamma a(t)}{t(1 + \gamma)} \end{aligned}$$

de la ecuación 3.11

$$= \int_z^{\infty} \frac{1}{t} (x^* - U(t)) dt - \int_z^{\infty} \frac{1}{y} (x^* - U(y)) dy + \frac{\gamma a(t)}{1 + \gamma} - (x^* - U(t))$$

llegando a que

$$(x^* - U(z)) = \frac{\gamma a(z)}{1 + \gamma} + \int_z^\infty \frac{\gamma a(z)}{t(1 + \gamma)}$$

de donde

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(x^* - U(z))}{\frac{\gamma a(z)}{(1 + \gamma)}} = 1 + \int_1^\infty \frac{\frac{\gamma a(yz)}{\gamma + 1}}{\frac{y \gamma a(z)}{(1 + \gamma)}} dy \rightarrow 1 + \frac{1}{\gamma}$$

Lo cual lleva a que $\lim_{z \rightarrow \infty} (x^* - U(z)) \rightarrow a(z)$ por lo que $(x^* - U(z)) \in RV_{-\gamma}$ (ver Apéndice A.2).

Si definimos $V(t)$ como $(x^* - U(t)^{-1})$, entonces $V(t) \in RV_\gamma$.

Al despejar $U(t)$ se tiene que $U(t) = x^* - 1/V(t)$.

Sacando el inverso de ambos lados se obtiene:

$$1/(1 - F(y)) \rightarrow V^\leftarrow(1/(x^* - y))$$

ahora si se toma $x = 1/(x^* - y)$ entonces $1/(1 - F(x^* - x^{-1})) \in RV_\gamma$ con lo que utilizando el Apéndice A.3 se llega a que $1 - F(x^* - 1/x) \in RV_{-\gamma}$. \square

Proposición 3.1.4. *Supóngase que F tiene $x^* < \infty$ y es absolutamente continua en una vecindad izquierda de x^* con densidad positiva F' , entonces:*

- i Si para algún $\gamma > 0$ se tiene que $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^* - x)F'(x)/(1 - F(x)) = 1/\gamma$ entonces $F \in D(\Psi_{1/\gamma})$.*
- ii Si F' es no decreciente y $F \in D(\Psi_{1/\gamma})$ entonces se satisface el límite de i.*
- iii El límite en i. se satisface sí y sólo si $1 - F$ tiene la siguiente representación para $x < x^*$:*

$$1 - F(x) = c(x) \exp \left[- \int_{1/x^*}^x \frac{\gamma(t)}{x^* - t} dt \right]$$

para $x^* < \infty$, $\lim_{x \uparrow x^*} c(x) = c \in (0, \infty)$, $\lim_{x \uparrow x^*} = 1/\gamma \in (0, \infty)$.

Demostración. Para la primera parte hay que recordar que $F \in D(\Psi_{1/\gamma})$ sí y sólo si $F_{\#}(x) = F(x^* - 1/x) \in D(\Phi_{1/\gamma})$, ahora

$$1/\gamma = \lim_{x \rightarrow \infty} xF'_{\#}(x)/(1 - F_{\#}(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} xF'(x^* - 1/x)/(x^2(1 - F(x^* - 1/x)))$$

entonces $1/\gamma = \lim_{s \rightarrow x^0} (x^* - s)F'(s)/(1 - F(s))$.

Para iii se tiene que si $F \in D(\Psi_{1/\gamma})$ entonces $1 - F(x^* - 1/x) \in RV_{-1/\gamma}$, así que

$$1 - F(x^* - \frac{1}{x}) = c(x) \exp \left[- \int_1^x \frac{\rho(t)}{t} dt \right]$$

tomando $y = x^* - 1/x$ se tiene para $y \ll x^*$ que

$$1 - F(y) = c(1/(x^* - y)) \exp \left[- \int_1^{1/(x^* - y)} \frac{\rho(t)}{t} dt \right]$$

ahora si $s = x^* - 1/t$

$$\begin{aligned} 1 - F(y) &= c(1/(x^* - y)) \exp \left[- \int_{1/x^*}^y \frac{\rho(1/(x^* - s))}{x^* - s} ds \right] \\ &= c(y) \exp \left[- \int_{1/x^*}^y \frac{\rho(s)}{x^* - s} ds \right] \end{aligned}$$

□

Distribución	$1 - F(x^* - 1/x)$
Uniforme	$\frac{1}{x}$ $x > 1$
Beta	$\int_{1-1/x}^1 \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} u^{p-1} (1-u)^{q-1} du$ $x > 1, p, q > 0$
Burr Volteada	$\left(\frac{\beta}{\beta + x^\tau} \right)^\lambda$ $x; \lambda, \beta, \tau > 0$
Weibul de Valor Extremo	$1 - \exp(-x^{-\alpha})$ $x; \alpha > 0$

Cuadro 3.2: Funciones pertenecientes al dominio de atracción Weibull Ψ

De forma más general se puede decir que pertenecen a este dominio de atracción las distribuciones con $x^* < \infty$ y tenga un comportamiento que obedezca a la ley de potencias. Si se toma $1 - F(x^* - x)$ con $x^* - K^{-1/\alpha} \leq x \leq x^*$ y $K, \alpha > 0$ por la proposición 3.1.3 $F \in \Psi$ por lo que las funciones de la forma $F(x) = 1 - K(x^* - x)^\alpha \in \Psi$.

3.1.3. Dominio de atracción Gumbel Λ

Proposición 3.1.5. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

$$i. \quad F \in D(\Lambda) \quad (3.12)$$

$$ii. \quad \lim_{t \rightarrow x^*} \frac{1 - F(t + xf(t))}{1 - F(t)} = \exp(-e^{-x}) \quad (3.13)$$

$$iii. \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(tx) - U(t)}{a(t)} = \log x \quad (3.14)$$

Demostración. Primero se demostrará que *i* implica *iii*. Si $F \in D(\Lambda)$, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) &= \exp(-e^{-x}) \\ n \log F(a_n x + b_n) &\rightarrow -e^{-x} \\ \frac{1}{n(1 - F(a_n x + b_n))} &\rightarrow e^x \end{aligned}$$

sacando inversa de ambos lados y cambiando a funciones continuas

$$\begin{aligned} \frac{F^{\leftarrow}(1 - \frac{1}{ty}) - b(t)}{a(t)} &\rightarrow \log y \\ \frac{U(ty) - b(t)}{a(t)} &\rightarrow \log y \end{aligned}$$

de donde, reescribiendo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(ty) - b(t)}{a(t)} - \frac{U(t) - b(t)}{a(t)} = \log y - \log 1.$$

Se demostrará que *ii* implica *iii*. Tomando la inversa en *ii*:

$$\lim_{t \uparrow x^*} \frac{F^{\leftarrow}(1 - \frac{1-F(t)}{y}) - t}{F(t)} = \log y$$

tomando $t = U(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(yU^{\leftarrow}(U(t))) - U(t)}{f(U(t))} = \log y$$

como se buscaba, donde $b(t) = U(t)$ y $a(t) = f(U(t))$.

Análogamente se demostrará que *iii* implica *ii*. En *ii* sea $t = 1/(1 - F) = U^{\leftarrow}(t)$, se puede reescribir

$$\frac{U(yU^{\leftarrow}(t)) - U(U^{\leftarrow}(t))}{a(U^{\leftarrow}(t))} \rightarrow \log y$$

que de acuerdo al Apéndice A.3 es similar a escribir

$$\frac{U(yU^{\leftarrow}(t)) - t}{a(U^{\leftarrow}(t))} \rightarrow \log y$$

sacando inversa de ambos lados según las propiedades en el Apéndice A.3 se obtiene el resultado deseado.

Finalmente para terminar la demostración hay que ver que *ii* implica *i*. Dado que $1/(1 - F(U(t))) = t$ y sustituyendo en *ii*

$$\frac{1}{n(1 - F(a_n x + b_n))} \rightarrow e^x$$

$$n \log F(a_n x + b_n) \rightarrow -e^{-x}$$

de donde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = \exp(-e^{-x})$$

por lo cual *i*, *ii*, *iii* son equivalentes. \square

Proposición 3.1.6. *Sea F una función absolutamente continua en una vecindad izquierda de x^* con densidad F' .*

i. Si

$$\lim_{t \uparrow x^*} F'(x) \int_x^{x^*} \frac{1 - F(t)}{(1 - F(x))^2} dt = 1$$

entonces $F \in D(\Lambda)$, y en este caso es posible tomar:

$$f(t) = \int_x^{x^*} \frac{1 - F(s)}{1 - F(x)} ds$$

$$b_n = \left(\frac{1}{1 - F}\right)^{\leftarrow}(n), \quad a_n = f(b_n)$$

*ii. Si F' es no decreciente y $F \in F(\Lambda)$ entonces el límite *i.* se satisface.*

*iii. El límite en *i.* se satisface sí y sólo si para $z_0 < x < x^*$*

$$1 - F(x) = c(x) \exp \left[- \int_{z_0}^x \frac{g(t)}{f(t)} dt \right]$$

donde $\lim_{t \uparrow x^*} g(x) = 1$, f es absolutamente continua con densidad $f'(x) \rightarrow 0$ cuando $x \uparrow x^*$ y $\lim_{t \uparrow x^*} c(t) = c \in (0, \infty)$

iv. El límite en i. o f son equivalentes a $tF'(U(t)) \in RV_0$

Demostración. Con la elección de f se tiene

$$f'(x) = \frac{-(1 - F(x))^2 + \int_x^{x^*} (1 - F(s)) ds F'(x)}{(1 - F(x))^2} \rightarrow -1 + 1 = 0$$

Ahora si se toma $R = -\log(1 - F)$ entonces $R' = F'/(1 - F) = g/f$ donde

$$g(x) = F'(x) \int_x^{x_0} \frac{1 - F(t)}{(1 - F(x))^2} dt$$

y entonces

$$\int_1^x R'(s) ds = R(x) - R(1) = \int_1^x \frac{g(s)}{f(s)} ds$$

de donde

$$1 - F(x) = e^{-R(1)} e^{-\int_1^x (g(s)/f(s)) ds}.$$

Ahora resta ver que $F \in D(\Lambda)$ sí y sólo si se cumple la ecuación anterior. Primero, supóngase que $1 - F$ se puede escribir según la función anterior, entonces para $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow x^*} \frac{1 - F(t + xf(t))}{1 - F(t)} &= \lim_{t \rightarrow x^*} \exp\left[-\int_t^{t+xf(t)} \frac{g(s)}{f(s)} ds\right] \\ &= \lim_{t \rightarrow x^*} \exp\left[-\int_0^x g(t + sf(t)) \frac{f(t)}{f(t+sf(t))} ds\right] \end{aligned}$$

ahora es necesario ver que el integrando es igual a 1, para esto hay que separar el análisis en dos casos:

i. Primero, en caso que $x^* = \infty$, se tiene que cuando $t \rightarrow \infty$

$$f(t)/t \sim \frac{1}{t} \int_{z_0}^t f'(u) du$$

puesto que el integrando converge a cero y utilizando el promedio de Cèsaro se llega al resultado deseado, además que

$$t + xf(t) = (1 + xf(t)/t) \sim t. \tag{3.15}$$

ii. Para el caso en el que $x^* < \infty$, $1 - F(x^*) = 0$ y por hipótesis tomando $g(u) = 1$ se reescribe

$$\int_x^{x^*} \frac{1}{f(u)} du = \infty$$

para $x \in (z_0, x^*)$

$$\sup_{x \leq u \leq x^*} 1/f(u) = \infty$$

$$\inf_{x \leq u \leq x^*} f(u) = 0$$

por continuidad, existe una sucesión $u_n \uparrow x^*$ y $f(u_n) = 0$ que $f(x^* = 0)$, por esto

$$\lim_{t \uparrow x^*} \frac{f(t)}{x^* - t} = \lim_{t \uparrow x^*} - \int_t^{x^*} \frac{f'(u)}{x^* - t} du$$

haciendo un cambio de variable $y = x^* - u$ y $s = x^* - t$

$$\lim_{s \downarrow 0} \frac{1}{s} \int_0^s f'(x^* - y) dy$$

lo que es claramente cero puesto que $f'(x^* - y) dy \rightarrow 0$. Finalmente $t + xf(t) \rightarrow x^*$ cuando $t \rightarrow x^*$. Satisfaciendo estas condiciones se puede ver que

$$\lim_{t \uparrow x^*} \frac{f(t + xf(t))}{f(t)} = 1$$

localmente en $x \in \mathbb{R}$. Sea $x(t)$ una función tal que $\lim_{t \rightarrow x^*} x(t) = x \in \mathbb{R}$, entonces

$$|f(t + x(t)f(t)) - f(t)| \leq \left| \int_t^{t+x(t)f(t)} f'(u) du \right|$$

de la ecuación 3.15 se tiene que $t + x(t)f(t) \rightarrow x^*$ y se sigue de $f'(u) \rightarrow 0$ cuando $u \rightarrow x^*$ que dado $\epsilon > 0$ para $t \geq t_0(\epsilon)$

$$\left| \int_t^{t+x(t)f(t)} f'(u) du \right| \leq \epsilon |x(t)f(t)|$$

entonces para $t \geq t_0(\epsilon)$

$$\left| \frac{f(t + x(t)f(t))}{f(t)} - 1 \right| \leq \epsilon |x(t)|$$

y puesto que es posible elegir $\epsilon > 0$ arbitrariamente y $|x(t)|$ es acotado se llega a que $f(t + xf(t))/f(t) \rightarrow 1$. Esto finalmente lleva a que

$$\lim_{t \rightarrow x^*} \frac{1 - F(t + xf(t))}{1 - F(t)} = e^{-x}$$

es decir, $F \in D(\Lambda)$. Supóngase que $F \in D(\Lambda)$, entonces se tiene que

$$\frac{U(tx) - U_1(t)}{a(t)} = \frac{U(tx) - U(t)}{a(t)} + \frac{U(t) - U_1(t)}{a(t)} \rightarrow \log x - 1$$

invirtiendo, para $y \in \mathbb{R}$

$$\frac{U^{\leftarrow}(a(t)y + U_1(t))}{t} \rightarrow \exp(y + 1)$$

tomando $y = 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U^{\leftarrow}U_1(t)}{t} = e$$

tomando en cuenta que U_1 es continua y estrictamente creciente

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{U^{\leftarrow}(s)}{U_1^{\leftarrow}(s)} = e$$

sea $G = F_2$ tal que $1 - G = 1/U_2^{\leftarrow}$ y $R = -\log(1 - G)$ se quiere ver que $G'/(1 - G) \rightarrow 0$.

$$\frac{1}{R'} = \frac{1 - G}{G'} = \frac{1/U_2^{\leftarrow}}{(U_2^{\leftarrow})'/(U_2^{\leftarrow})^2} = \frac{(U_2^{\leftarrow})}{(U_2^{\leftarrow})'} = U_2^{\leftarrow}U_2'(U_2^{\leftarrow})$$

así que

$$(1/R')' = U_2^{\leftarrow} \frac{U_2''(U_2^{\leftarrow})}{U_2'(U_2^{\leftarrow})} + \frac{(U_2'(U_2^{\leftarrow}))}{U_2'(U_2^{\leftarrow})}$$

entonces

$$\lim_{t \rightarrow x^*} (1/R'(x))' = \lim_{t \rightarrow \infty} (yU_2''(y)/U_2'(y)) + 1 = -1 + 1 = 0 \quad (3.16)$$

ahora, puesto que $(U(tx) - U(t))/a(t) \rightarrow \log x$ y por convergencia dominada:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^\infty \frac{U(tx) - U(t)}{x^2 a(t)} dx &= \int_1^\infty \frac{\log x}{x^2} dx = 1 \\ \int_1^\infty \left(\int_1^x 1/udu \right) x^{-2} dx &= \int_1^\infty \left(\int_u^\infty x^{-2} dx \right) 1/udu \\ &= \int_1^\infty 1/u 1/udu = \int_1^\infty u^{-2} du = 1 \end{aligned}$$

del lado izquierdo utilizando el teorema de Fubini se tiene que

$$\frac{tK(t)}{a(t)} \frac{t \int_t^\infty U(u)u^2 du - U(t)}{a(t)} = \frac{t \int_t^\infty 1/uU(du)}{a(t)}$$

ahora, véase que $a(t) \sim t(K(t))$. Puesto que $a(t) \in RV_0$ entonces $K(t) \sim a(t)/t \in RV_{-1}$, por otro lado:

$$\int_1^x K(u)du = \int_1^x \int_t^\infty U(du)/udt = \int_1^\infty \left(\int_1^{u \wedge x} dt \right) 1/uU(du)$$

$$\int_1^x (u-1)/uU(du) + \int_x^\infty (x-1)/uU(du)$$

$$U(x) - U(1) - (K(1) - K(x)) + (x-1)K(x)$$

de donde

$$U(x) - U(1) = \int_1^x K(u)du - xK(x) + K(1)$$

análogamente si $H \in RV_{-1}$ entonces

$$\frac{U(tx) - U(t)}{tK(t)} = \int_1^x \frac{K(ut)du}{K(t)} - \frac{xK(tx)}{K(t)} + 1$$

$$\rightarrow \int_1^x \frac{1}{u} du \frac{x}{x} + 1 = \log x.$$

Ahora, si U cumple lo anterior existe una función estrictamente creciente tal que $U_1(t) > U(t)$ y $(U_1(t) - U(t))/a(t) \rightarrow 1$, de hecho existe $U_2(t) > U(t)$ dos veces diferenciable que cuando $x \rightarrow \infty$

$$-\frac{1}{xU_2''(t)} \in RV_1, \quad -xU_2(x) \sim U_2'(x)$$

por monotonía y de la definición de K , tomando $U_1(t) = t \int_t^\infty U(u)u^{-2}du$ se tiene que $(U_1'(t) - U(t))/a(t) \rightarrow 1$ y

$$U_1'(t) = -1/tU(t) + \int_t^\infty u^{-2}U(u)du = K(t)$$

ahora sea $U_0 = U$ y

$$U_2(t) = t \int_t^\infty U_1(u)u^{-2}U(u)du$$

entonces son equivalente en la cola ya que $(U_2(t) - U_1(t))/a(t) \rightarrow c_0$ de igual modo $U_1 \sim U$, $U_2 \sim U$. Ahora tómesese:

$$U_2'(t) = -1/tU_1(t) + \int_t^\infty U_1(u)u^2du$$

$$= [-U_1(t) + t \int_t^\infty U_1(u)u^{-2}du]/t = [U_2(t) - U_1(t)]/t$$

de donde

$$U_2''(t) = [t[U_2'(t) - U_1'(t)] - (U_2(t) - U_1(t))]/t^2$$

$$[t[U_2'(t) - U_1'(t)] - tU_2'(t)]/t^2 = -U_1'(t)/t = -K(t)/t$$

por lo que se tiene que $-1/(xU_2'(t)) = 1/K(x) \in RV_1$, ya que $K \in RV_{-1}$. Ahora, como $U_2'(t) = [U_2(t) - U_1(t)]/t$ se tiene $U_2' \in RV_{-1}$ y $U_2'(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Esto es:

$$U_2'(t) = \int_t^\infty -U_2''(s)ds = \int_t^\infty K(s)/s ds$$

puesto que $U_2''(t) = -K(t)/t$

$$\frac{U_2'(t)}{-tU_2''(t)} = \int_t^\infty \frac{K(s)}{sK(t)} ds$$

y puesto que $K \in RV_{-1}$ y utilizando el teorema de Karamata se puede decir finalmente que si $F \in D(\Lambda)$ entonces:

$$1 - F(x) = c(x)(1 - G(x)) = c(x) \exp \left[- \int_{z_0}^x (1/f(u)du) \right]$$

□

Distribución	$1 - F(x)$
Benktander II	$x^{-(1-\beta) \exp(\frac{-\alpha}{\beta} x^\beta)}$ $x; \alpha, \beta > 0$
Benktander I	$(1 + 2(\frac{\beta}{\alpha} \ln x) \exp[-(\beta(\ln x)^2 + (\alpha + 1) \ln x)])$ $x > 1; \alpha, \beta > 0$
Gamma	$\frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} \int_x^\infty u^{m-1} \exp(-\lambda u) du$ $x; \lambda, m > 0$
Logística	$\frac{1}{1 + \exp(x)}$ $x > 0$
Lognormal	$\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\mu} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(\log u - \mu)^2) du$ $x; \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$
Normal	$\int_x^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-(x - \mu)^2/2\sigma^2)$ $x; \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

Cuadro 3.3: Funciones pertenecientes al dominio de atracción Weibull Ψ

De forma un poco más general se puede decir que las funciones que pertenecen a alguno de los siguientes grupos pertenece al dominio de atracción Gumbel Λ utilizando el teorema de representación:

- Funciones con comportamiento exponencial y que cumplan que

$$x^* < \infty : F = 1 - K \exp(-\alpha/(x^* - x))$$

con $x < x^*$ y $\alpha, K > 0$.

- Tipo Weibull: $F = 1 - Kx^\alpha \exp(-cx^\tau)$ con $x; K, c, t > 0$ y $\tau \in \mathbb{R}$. En particular al tomar $\alpha = 0$ y $\tau = 1$ se obtienen las funciones del tipo exponencial.

3.2. Equivalencia de colas

Se dirá que dos distribuciones son equivalentes en la cola si tienen el mismo punto final x^* y para algún $C > 0$ se cumple que

$$\lim_{x \uparrow x^*} \frac{1 - F(x)}{1 - G(x)} = C$$

Proposición 3.2.1. Sean F, G funciones de distribución y H_1, H_2 distribuciones de valor extremo. Supóngase que $F \in D(H_1)$, es decir, $F^n(a_n x + b_n) \rightarrow H_1(x)$ para constantes normalizantes $a_n > 0, b_n \geq 1$. Entontes $G \in H_2$ sí y sólo si para algún $a > 0, b \in \mathbb{R}$

$$H_2(x) = H_1(ax + b)$$

F y G son de colas equivalentes con punto final x^* y si

- i. $H_1 = \Phi_{1/\gamma}$ entonces $b = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - F(x))/(1 - G(x)) = a^{1/\gamma}$
- ii. $H_1 = \Psi_{1/\gamma}$ entonces $b = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - F(x))/(1 - G(x)) = a^{-1/\gamma}$
- iii. $H_1 = \Lambda$ entonces $a = 1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - F(x))/(1 - G(x)) = e^{1/\gamma}$

Este resultado ayuda a calcular constantes normalizantes haciendo un intercambio para encontrar colas equivalentes con función de distribución más fácil de trabajar.

Demostración. Supóngase que F y $G \in \mathbb{R}$ y tienen colas equivalentes, entonces se tiene que $n(1 - F(a_n + b_n)) \rightarrow -\log H_1(x)$ para x tal que $H_1(x) > 0$. Para tales $x, a_n x + b_n \rightarrow x^*$ y puesto que son equivalentes de cola

$$n(1 - G(a_n x + b_n)) \sim n/C(1 - F(a_n x + b_n)) \rightarrow -1/C \log H_1(x)$$

es decir,

$$G^n(a_n x + b_n) \rightarrow H_1^{1/C}(x)$$

de donde $F \in D(H_1)$, análogamente para G .

Ahora se analizará la implicación contraria, para esto se supondrá que $F \in D(H_1)$ y $G \in D(H_2)$, con el objetivo de observar que son equivalentes en la cola. De la ecuación 3.3 para $y > 0$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U_F(ty) - b(t)}{a(t)} &= \left(\frac{1}{-\log H_1} \right)^{\leftarrow} (y) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U_G(ty) - b(t)}{a(t)} &= \left(\frac{1}{-\log H_2} \right)^{\leftarrow} (y)\end{aligned}$$

El primer caso es $\gamma > 0$. Supóngase que $H_1 = \Phi_{1/\gamma}(x)$, entonces de la Sección 3.1.1 $a(t) \in RV_\gamma$ y $b = 0$. Por hipótesis se tiene que $H_2 = \Phi_{1/\gamma}(ax + b)$ y como $G \in D(H_2)$ para $y > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U_G(ty)}{a(t)} = \left(\frac{1}{-\log H_2} \right)^{\leftarrow} (y) = \frac{y^\gamma - b}{a}$$

por otro lado puesto que $a(t) \in RV_\gamma$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U_G(ty)}{a(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U_G(ty)}{a(ty)} \cdot \frac{a(ty)}{a(t)} = \frac{(1-b)y^\gamma}{a}$$

de estos dos resultados $(y^\gamma - b)/a = (1-b)y^\gamma/a$ lo cual se reduce a $b = by^\gamma$ de donde igualmente en este caso $b = 0$. De aquí el hecho que $F \in D(H_1)$ y $G \in D(H_2)$ lleva a que

$$\begin{aligned}\frac{U_F(ty)}{a(t)} &\rightarrow y^\gamma \\ \frac{U_G(ty)}{a(t)} &\rightarrow \frac{y^\gamma}{a}\end{aligned}$$

es decir, $U_F(t) \sim aU_G(t)$, de la definición de U , invirtiendo ambos lados:

$$\frac{1}{1 - F(t)} \sim \frac{a^{-1/\gamma}}{1 - G(t)}$$

llegando al resultado deseado $\lim_{t \rightarrow \infty} (1 - F(t))/(1 - G(t)) = a^{1/\gamma}$.

Ahora para el segundo caso $\gamma < 0$ supóngase que $H_1 = \Psi_{1/\gamma}$ por la Sección 3.1.2 se tiene que $a(t) \in -\gamma$ y para $y > 0$ $(U_F(ty) - b(t))/a(t) \rightarrow -(y^{-\gamma})$, además que $a(t) \sim x^* - U_F(t)$, de aquí se puede ver

$$\frac{b(t) - x^*}{a(t)} = \frac{b(t) - U_F(t)}{a(t)} + \frac{U_F - x^*}{a(t)} \rightarrow 1 - 1 = 0 \quad (3.17)$$

De la hipótesis se tiene que $H_2 = \Psi_{1/\gamma}(ax + b)$, entonces

$$\frac{U_G(ty) - b(t)}{a(t)} \rightarrow \frac{-(y^{-\gamma} - b)}{a}$$

usando la ecuación 3.17

$$\frac{x^* - U_G(ty)}{a(t)} \rightarrow \frac{y^{-\gamma} + b}{a}$$

por otro lado

$$\frac{x^* - U_G(ty)}{a(t)} = \frac{x^* - U_G(ty)}{a(ty)} \cdot \frac{a(ty)}{a(t)} \rightarrow \left(\frac{1+b}{a}\right) y^{-\gamma} = \left(\frac{y^{-\gamma} + b}{a}\right)$$

entonces $b = 0$. Por lo tanto $x^* - U_G(t) \sim a(t)/a$ y $x^* - U_F(t) \sim a(t)$, combinando los resultados

$$\frac{x^* - U_F(t)}{x^* - U_G(t)} \rightarrow a$$

es decir,

$$\frac{1}{x^* - U_G(t)} \sim a \left(\frac{1}{x^* - U_F(t)} \right)$$

invirtiendo

$$\left(\frac{1}{x^* - U_G(t)} \right)^{\leftarrow} \sim a^{-1/\gamma} \left(\frac{1}{x^* - U_F(t)} \right)^{\leftarrow} (t)$$

esto es

$$\frac{1}{1 - G(x^* - 1/t)} \sim a^{-1/\gamma} \frac{1}{1 - F(x^* - 1/t)}$$

lo que conduce al resultado deseado:

$$\frac{1 - F(x^* - 1/t)}{1 - G(x^* - 1/t)} \rightarrow a^{-1/\gamma}.$$

Finalmente, para el último caso $\gamma = 0$. Supóngase que $H_1 = \Lambda(x)$, entonces derivado de la hipótesis se tiene que

$$\frac{U_G(ty) - b(t)}{a(t)} \rightarrow \frac{\log y - b}{a} \tag{3.18}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{U_G(ty) - b(t)}{a(t)} &= \frac{U_G(ty) - b(ty)}{a(ty)} \cdot \frac{a(ty)}{a(t)} + \frac{b(ty) - b(t)}{a(t)} \\ &\rightarrow \frac{\log 1 - b}{a} + \log y = -\frac{b}{a} + \log y \end{aligned}$$

entonces se tiene que $(\log y - b)/a = -b/a + \log y$ lo cual significa que $a \log y = \log y$ de donde $a = 1$. Tomando en cuenta que $(U_F(t) - b(t))/a(t) \rightarrow 0$ sustituyendo en la ecuación 3.18

$$\frac{U_G(ty) - U_F}{a(t)} \rightarrow \log y - b$$

invirtiendo

$$\frac{U_G^{\leftarrow}(xa(t) + U_F(t))}{t} \rightarrow e^{x+b}$$

para $x \in \mathbb{R}$. Tomando $s = V_F(t)$

$$\frac{V_G^{\leftarrow}(s)}{V_F^{\leftarrow}(s)} \rightarrow e^b$$

es decir,

$$\lim_{x \rightarrow x^*} \frac{1 - F(s)}{1 - G(s)} = e^b$$

□

3.3. Variación Regular de Segundo Orden

Sea una función U que cumpla $\lim_{t \rightarrow \infty} (U(xt) - b(t))/a(t) = (x^\gamma - 1)/\gamma$ para $x > 0$. Se asume que existe una función positiva $A \rightarrow 0$ tal que

$$\left[\frac{U(xt) - U(x)}{a(t)} - \frac{x^\gamma - 1}{\gamma} \right] A(t)^{-1}$$

exista no trivialmente en $(0, \infty)$.

Reescribiendo $a_1 = a(t)A(t) = o(a(t), t) \rightarrow \infty$ se define para $x > 0$

$$H(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(xt) - U(t) - a(t)(x^\gamma - 1)/\gamma}{a_1(t)}$$

Un límite no trivial se refiere a que el límite de la función H no sea un múltiplo de $(x^\gamma - 1)\gamma$, en particular que $H \neq 0$.

Para $\gamma \in \mathbb{R}$ con funciones a, a_1 de acuerdo a lo anterior tal que H exista y no sea un múltiplo de $(x^\gamma - 1)/\gamma$, existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tal que para algún parámetro $\rho \leq 0$ para $x > 0$

$$H(x) = c_1 \int_1^x s^{\gamma-1} \int_1^s u^{\rho-1} du ds + c_2 \int_1^x s^{\rho+\gamma-1} ds \quad (3.19)$$

de hecho se tiene que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(tx)^{-\gamma} a(tx) - t^{-\gamma} a(t)}{t^{-\gamma} a_1(t)} = c_1 \frac{x^\rho - 1}{\rho} \quad (3.20)$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_1(tx)}{a_1(t)} = x^{\gamma+\rho} \quad (3.21)$$

Demostración. para $x, y > 0$

$$\begin{aligned} & x^\gamma \left[\frac{U(tyx) - U(t) - a(t)((xy)^\gamma - 1)/\gamma}{a_1(t)} - \frac{U(tx) - U(t) - a(t)(x^\gamma - 1)/\gamma}{a_1(t)} \right] \\ &= \frac{U(tyx) - U(tx) - a(tx)(y^\gamma - 1)/\gamma}{a_1(tx)} \cdot \frac{(tx)^{-\gamma} a_1(tx)}{t^{-\gamma} a_1(t)} \\ &+ \frac{y^\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{(tx)^{-\gamma} a(tx) - t^{-\gamma} a(t)}{t^{-\gamma} a_1(t)} \end{aligned}$$

con $t \rightarrow \infty$ se obtiene $x^{-\gamma}[H(xy) - H(x)]$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[H(y)(1 + o(1)) \frac{(tx)^{-\gamma} a_1(tx)}{t^{-\gamma} a_1(t)} + \frac{y^\gamma - 1}{\gamma} \frac{(tx)^{-\gamma} a(tx) - t^{-\gamma} a(t)}{t^{-\gamma} a_1(t)} \right]$$

por suposición existe $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tal que $(H(y_1), (y_1^\gamma - 1)/\gamma)$ y $(H(y_2), (y_2^\gamma - 1)/\gamma)$ son linealmente independientes, es decir tomando $\lambda = (y_1^\gamma - 1)/(y_2^\gamma - 1)$ se puede obtener $H(y_1) - \lambda H(y_2) \neq 0$, de esto, tomando con argumento $y = y_1$ y restando λ veces el argumento $y = y_2$ se puede reescribir del siguiente modo:

$$\begin{aligned} & x^{-\gamma} \left[(H(xy_1) - H(x)) - \frac{y_1^\gamma - 1}{y_2^\gamma - 1} (H(xy_2) - H(x)) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[(H(y_1) - \lambda H(y_2))(1 + o(1)) \frac{(tx)^{-\gamma} a_1(tx)}{t^{-\gamma} a_1(t)} \right]. \end{aligned}$$

De aquí se concluye que $\lim_{t \rightarrow \infty} (tx)^{-\gamma} a_1(tx)/(t^{-\gamma} a_1(t))$ existe para $x > 0$. La existencia de este límite junto con la ecuación anterior implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ((tx)^{-\gamma} a(tx) - t^{-\gamma} a(t))/(t^{-\gamma} a_1(t))$$

también existe para $x > 0$. Entonces se tiene que la ecuación 3.21 es cierta para $\rho \in \mathbb{R}$. Por los argumentos de variación regular se puede asumir que $c_1 \neq 0$, de lo que se debe tener $\rho \leq 0$. De esto se obtiene

$$H(xy) = H(y)x^{\rho+\gamma} + H(x) + c_1 x^\gamma \frac{y^\gamma - 1}{\gamma} \frac{x^\gamma - 1}{\rho}. \quad (3.22)$$

Una solución particular de la ecuación anterior es:

$$H_1(x) = c_1 \int_1^x s^{\gamma-1} \int_1^s u^{\rho-1} du ds$$

entonces $G(x) = H(x) - H_1(x)$ satisface la ecuación homogénea $G(xy) = G(y) + G(x)y^{\rho+\gamma}$ para $x, y > 0$. Ahora si $\rho + \gamma = 0$ resulta ser la ecuación de Cauchy con solución $c_1 \log x$; cuando $\rho + \gamma \neq 0$ por simetría se tiene que $G(xy) = G(y) + G(x)y^{\rho+\gamma}$ de donde para algún $c_2 \in \mathbb{R}$, $G(x)(1 - y^{\rho+\gamma}) = G(y)(1 - x^{\rho+\gamma})$, es decir, $G(x) = c_2(x^{\rho+\gamma} - 1)/(\rho + \gamma)$, de lo que lleva a la solución general a la ecuación 3.19

□

De lo anterior se tiene que A describe la tasa de convergencia para $\lim_{t \rightarrow \infty} (U(tx) - b(t))/a(t)$ y que H puede ser escrita como:

$$H(x) = \begin{cases} c_1(\log x)^2/2 + c_2 \log x & \rho = \gamma = 0 \\ \frac{c_1}{\gamma} x^\gamma \log x + \frac{c_2 - c_1}{\gamma} \frac{x^\gamma - 1}{\gamma} & \rho = 0, \gamma \neq 0 \\ \left(\frac{c_1}{\rho} + c_2 \right) \frac{x^{\rho+\gamma} - 1}{\rho+\gamma} - \frac{c_1}{\rho} \frac{x^\gamma - 1}{\gamma} & \rho < 0, \rho + \gamma \neq 0 \\ \left(\frac{c_1}{\rho} + c_2 \right) \log x - \frac{c_1}{\rho} \frac{x^\gamma - 1}{\gamma} & \rho < 0, \rho + \gamma = 0 \end{cases}$$

3.4. Estimación del índice y cuantiles de valor extremo

. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población con función de distribución F , se define la función de distribución empírica \hat{F} como:

$$\hat{F}_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i \leq n} I_{\{x_i \leq x\}}$$

donde la función indicadora $I_{\{X_i \leq x\}} = 1$ si $X_i \leq x$ y 0 en otro caso. Si se ordenan los valores de menor a mayor y se denotan por $X_{1,n}, \leq \dots, \leq X_{n,n}$ se tendrá que $\hat{F}_n(X_{i,n}) = i/n$.

Tomando la definición de inversa continua por la izquierda se tiene que la función \hat{F}_n^{\leftarrow} será una función definida en $(0, 1)$ tal que para $y \in (0, 1)$ $\hat{F}_n^{\leftarrow}(y)$, x es el menor valor a la izquierda tal que $F(x) \geq y$. Tomando los estadísticos de orden se tiene que $\hat{F}_n^{\leftarrow}(x) = X_{i,n}$ si $x \in (\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$.

3.4.1. Estimador de Hill

Este estimador aborda el caso $\gamma > 0$. Para este caso se tiene que para $x > 1$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-1/\gamma}.$$

De la definición de probabilidad condicional se puede ver el resultado anterior como $P(x < tx | x > t)$ cuando $x > 1$ y $t \rightarrow \infty$. Tomando la función de exceso $Y_j = X_i/t$ sobre el nivel t tomando en cuenta que $t < X_i$ y siendo i el índice del j -ésimo excedente $j = 1, \dots, N_t$, se puede construir la función:

$$L(Y_1, \dots, Y_{N_t}) = \prod_{i=1}^{N_t} -\frac{1}{\gamma} y^{-1/\gamma-1}$$

de donde

$$\log L(Y_1, \dots, Y_{N_t}) = -N_t \log \gamma + \left[- \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \right] \left(\sum_{i=1}^{N_t} \log Y_i \right)$$

$$\frac{d \log L}{d\gamma} = -\frac{N_t}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^{N_t} \log Y_i$$

lo que lleva a:

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} \log Y_i$$

ahora, tomando $k = N_t$ y dado lo anterior es posible elegir t como el estadístico de orden $X_{n-k,n}$ lo que lleva al estimador definido por Hill(1975).

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log X_{n-i+1,n} - \log X_{n-k,n}$$

A continuación se probará la consistencia del estimador, pero primero es necesario analizar dos resultados:

Lema 3.4.1. Sean Y_1, \dots, Y_n variables aleatorias i.i.d con distribución $1 - 1/y$ con $y \geq 1$ y sean $Y_{1,n}, \dots, Y_{n,n}$ los estadísticos de orden. Se quiere ver que tomando $k = k(n)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} k/n = 0$, si $n \rightarrow \infty$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_{n-k,n} = \infty \tag{3.23}$$

Demostración. Supóngase que $Y_{n-k,k}$ es finito, entonces para $r = 1, 2, \dots$ es posible tomar para algún r tal que $Y_{n-k,n} < r$ infinitas veces; de la ley fuerte de los grandes números:

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{Y_i > Y_{n-k,k}} > \frac{1}{n} I_{Y_i > r} > \frac{1}{2r}$$

infinitas veces, lo cual lleva a una contradicción, por tanto $Y_{n-k,n} \rightarrow \infty$ bajo los supuestos establecidos. \square

El segundo resultado es referente a la distribución exponencial estándar.

Lema 3.4.2. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias i.i.d de una distribución exponencial estándar, y $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$ los estadísticos de orden. Se tiene que la distribución conjunta $f(x_{1,n}, \dots, x_{n,n}) = n! \exp(-\sum_{i=1}^n x_{i,n})$. Se quiere ver que las variables $Z_i := (n-i+1)(X_{i,n} - X_{i-1,n})$ tienen distribución exponencial estándar y son independientes entre sí.

Demostración. Se tiene que

$$f(Z_1, \dots, Z_n) = f(X_{1,n}, \dots, X_{n,n}) \left| \frac{\partial(x_{1,n}, \dots, x_{n,n})}{\partial(Z_1, \dots, Z_n)} \right|$$

donde $|\cdot|$ es el determinante del jacobiano. Ahora:

$$\frac{\partial(Z_1, \dots, Z_n)}{\partial(x_{1,n}, \dots, x_{n,n})} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -(n-1) & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(n-2) & n-1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$\left| \frac{\partial(Z_1, \dots, Z_n)}{\partial(x_{1,n}, \dots, x_{n,n})} \right| = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 = n!$$

dado que

$$\left| \frac{\partial(x_{1,n}, \dots, x_{n,n})}{\partial(Z_1, \dots, Z_n)} \right| = \left| \frac{\partial(Z_1, \dots, Z_n)}{\partial(x_{1,n}, \dots, x_{n,n})} \right|^{-1}$$

La función de distribución $f(z_1, \dots, z_n) = n!/n! \exp(-\sum_{i=1}^n z_i)$ esto es $\prod_{i=1}^n \exp(-z_i)$ con lo que se llega a que son variables aleatorias i.i.d. con distribución exponencial estándar. \square

Para ver que el estimador es consistente hay que ver que $\hat{\gamma} \xrightarrow{P} \gamma$:

Demostración. Recordando la definición de U como la función inversa por la izquierda de $1/(1-F)$ $U(Y_i) \xrightarrow{D} X_i$, entonces basta probar que

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log U(Y_{n-i+1,n}) - \log U(Y_{n-k,n}) \xrightarrow{P} \gamma$$

Utilizando el hecho que $\lim_{t \rightarrow \infty} U(tx)/U(t) = x^\gamma$ y del teorema de representación:

$$\frac{U(tx)}{U(t)} = \frac{c(tx)}{c(t)} \exp \int_1^x \frac{\rho(ts)}{s} ds$$

si se toma $t > t_0$ tal que $\rho - \epsilon < \rho(ts) < \rho + \epsilon$ entonces

$$\log(1 + \epsilon) + (\gamma + \epsilon) \log x < \log U(tx) - \log U(t) < \log(1 + \epsilon) + (\gamma + \epsilon) \log x$$

utilizando el primer resultado y tomando $t = Y_{n-k,n}$ y $x = Y_{n-i+1,n}/Y_{n-k,n}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \log(1 + \epsilon) + (\gamma + \epsilon) \log \left(\frac{Y_{n-i+1,n}}{Y_{n-k,n}} \right) &< \log U(Y_{n-i+1,n}) - \log U(Y_{n-k,n}) < \\ &< \log(1 + \epsilon) + (\gamma + \epsilon) \log \left(\frac{Y_{n-i+1,n}}{Y_{n-k,n}} \right) \end{aligned}$$

para $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, entonces

$$\begin{aligned} \log(1 + \epsilon) + (\gamma + \epsilon) \log \left(\frac{Y_{n-i+1,n}}{Y_{n-k,n}} \right) &< \hat{\gamma} < \\ &< \log(1 + \epsilon) + (\gamma + \epsilon) \log \left(\frac{Y_{n-i+1,n}}{Y_{n-k,n}} \right) \end{aligned}$$

Para finalizar la demostración se probará que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log \left(\frac{Y_{n-i+1,n}}{Y_{n-k,n}} \right) \xrightarrow{P} 1$$

Primero, $P(Y < y) = 1 - 1/y$ si se toma $X = \log Y$ entonces $P(X \leq x) = P(\log Y \leq x) = P(Y \leq e^x)$, de donde $\log Y$ se distribuye exponencial. Por otro lado se tiene que

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log \left(\frac{Y_{n-i+1,n}}{Y_{n-k,n}} \right) = \sum_{i=1}^k i (\log Y_{n-i+1,n} - \log Y_{n-i,n})$$

Del segundo resultado: $i(\log Y_{n-i+1,n} - \log Y_{n-i,n}) = Z_i$ tiene una distribución exponencial estándar. Entonces es posible reescribir:

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log \left(\frac{Y_{n-i+1,n}}{Y_{n-k,n}} \right) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Z_i$$

Puesto que $k \rightarrow \infty$ y de la ley de los grandes números se llega al resultado deseado. \square

Otra propiedad del estimador es que si F cumple las condiciones de segundo orden y además $k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, k/n \rightarrow \infty$ entonces asintóticamente $\sqrt{k}(\hat{\gamma} - \gamma) \sim N(0, \gamma^2)$

3.4.2. Estimador negativo de Hill

Como se vio en la Sección 3.1.2, $Y = 1/(x^* - X) \in \Phi$ y tomando en cuenta que $x^* < \infty$ se puede abordar el caso $\gamma < 0$ aplicando el estimador de Hill a Y , sin embargo, como se analizará en la Sección 3.4.2 cuando $\gamma < -1/2$ se puede aproximar mediante $X_{n,n}$.

Bajo las condiciones $k = k(n) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, k/n \rightarrow 0$ se puede demostrar que el estimador cumple del mismo modo con ser consistente, tiene la propiedad de ser invariante ante escala y traslación, se cumple que $\sqrt{k}(\hat{\gamma}_{NH} - \gamma)$ tiene una distribución asintótica normal con varianza γ^2 y media

$$\begin{cases} \frac{\lambda\gamma}{\rho(1+\gamma)(1-\rho)} & \rho < 0 \\ \lambda & \rho = 0 \end{cases}$$

tomando en cuenta que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$, donde ρ y la función A provienen de la condición de segundo orden.

3.4.3. Estimador de momentos

El estimador de Hill no provee información si $\gamma \leq 0$ puesto que converge a cero en este rango. se define para $j = 1, 2$

$$M_n^j = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\log X_{n-i+1,n} - \log X_{n-k,n})^j$$

y véase que

$$\frac{(M_n^1)^2}{M_n^2} \xrightarrow{P} \frac{1 - 2\gamma -}{2(1 - \gamma -)}$$

donde $\gamma - = \min(0, \gamma)$, utilizando esto se llega al estimador:

$$\hat{\gamma}_M = M_n^1 + 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(M_n^1)^2}{M_n^2} \right)^{-1}$$

Se puede mostrar que cuando $n \rightarrow \infty, k = k(n) \rightarrow \infty, k/n \rightarrow 0$ este estimador es consistente y $\sqrt{k}(\hat{\gamma}_P - \gamma)$ tiene una distribución asintótica normal con media cero y varianza

$$\begin{cases} 1 + \gamma^2 & \gamma \geq 0 \\ (1 - \gamma)^2(1 - 2\gamma) \left[4 - 8\frac{1-2\gamma}{1-3\gamma} + \frac{(5-11\gamma)(1-2\gamma)}{(1-3\gamma)(1-4\gamma)} \right] & \gamma < 0 \end{cases}$$

3.4.4. Estimador de Pickand

Pickand (1975) propuso el siguiente estimador, que se basa en la función de cuantiles, y puede ser utilizado para estimar $\gamma \in \mathbb{R}$. De lo visto en el Capítulo 3 $F \in D(F)$ sí y sólo si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(tx) - b(t)}{a(t)} = \frac{x^\gamma - 1}{\gamma}$$

esto es equivalente, para el caso $\gamma \neq 0$, a:

$$\frac{U(tx) - b(t)}{U(ty) - b(t)} \rightarrow \frac{x^\gamma - 1}{y^\gamma - 1}$$

y en el caso $\gamma = 0$

$$\frac{U(tx) - b(t)}{U(ty) - b(t)} \rightarrow \frac{\log x}{\log y}$$

de manera particular

$$\frac{U(2x) - b(t)}{U(t) - b(\frac{t}{2})} \rightarrow \frac{2^\gamma - 1}{1 - 2^{-\gamma}} = 2^\gamma$$

a partir de esta relación, utilizando los cuantiles empíricos se llega al estimador de Pickand:

$$\hat{\gamma}_P = \frac{1}{\log 2} \log \frac{X_{n-k+1,n} - X_{n-2k+1,n}}{X_{n-2k+1,n} - X_{n-4k+1,n}}$$

Se puede mostrar que cuando $n \rightarrow \infty$, $k = k(n) \rightarrow \infty$, $k/n \rightarrow 0$ este estimador es consistente y $\sqrt{k}(\hat{\gamma}_P - \gamma)$ tiene una distribución asintótica normal con media cero y varianza $\gamma^2(2^{2\gamma+1} + 1)[2(2^\gamma - 1) \log 2]^{-2}$ cumpliendo la condición de segundo orden, sin embargo, a pesar de que es un estimador simple, tiene la desventaja de tener una varianza asintótica muy grande y una gran volatilidad como función de k por lo que se prefiere utilizar otros estimadores.

Hasta ahora se han visto estimadoras derivadas a partir de la función de cuantiles, sin embargo, otro modo de aproximarse es mediante la función de probabilidad de excesos o mediante el método de bloques de máximos, el cual consiste en agrupar los datos en conjuntos de igual longitud, tomar el máximo de cada conjunto y sobre esta muestra realizar una inferencia. A continuación se mostrarán estimadores bajo estos conceptos.

3.4.5. Estimador de máxima verosimilitud

Retomado la distribución generalizada de valor extremo se tiene que para $1 + \gamma((x - \mu)/\sigma) > 0$:

$$1 - F(x) \rightarrow \frac{1}{n} \left[1 + \gamma \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\gamma}$$

tomando x grande y $y > 0$ se tiene

$$1 - F(x + y) \rightarrow \frac{1}{n} \left[1 + \gamma \left(\frac{x - \mu + y}{\sigma} \right) \right]^{-1/\gamma}.$$

De la definición de probabilidad condicional se obtiene que

$$P(X > x + y | X > x) \rightarrow \frac{\frac{1}{n} \left[\frac{1 + \gamma(x + y - \mu)}{\sigma} \right]^{-1/\gamma}}{\frac{1}{n} \left[\frac{1 + \gamma(x - \mu)}{\sigma} \right]^{-1/\gamma}}$$

multiplicando por σ

$$= \left[\frac{\sigma + \gamma x + \gamma \mu + \gamma y}{\sigma + \gamma x + \gamma \mu} \right]^{-1/\gamma}$$

reacomodando

$$= \left[1 + \frac{\gamma y}{\sigma + \gamma(x - \mu)} \right]^{-1/\gamma}$$

si $\beta = \sigma + \gamma(x - \mu)$, entonces:

$$\left[1 + \gamma \frac{y}{\beta} \right]^{-1/\gamma}$$

que es equivalente a la representación de la función de distribución Pareto Generalizada (PG), puesto que

$$PG(x) = \begin{cases} \exp\left(-(1 + \gamma x/\beta)^{-1/\gamma}\right), & 1 + \gamma x/\beta > 0 \\ \exp\left(-e^{-x/\beta}\right), & \gamma = 0. \end{cases}$$

Esto sugiere que es posible obtener un estimador $\hat{\gamma}_{MV}$ de la distribución PG, de la cual se obtiene

$$L(Y_1, \dots, Y_k) = \prod_{i=1}^k -\frac{1}{\gamma} (1 + \gamma Y_i/\beta)^{-1/\gamma - 1}$$

utilizando el logaritmo:

$$\log L(Y_1, \dots, Y_k) = -k \log \gamma + k \log \frac{\gamma}{\beta} + \left[- \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \right] \left(\sum_{i=1}^k \log \left(1 + \frac{\gamma}{\beta} Y_i \right) \right)$$

$$\begin{cases} \frac{d \log L}{d \gamma} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\gamma^2} \log \left(1 + \frac{\gamma}{\beta} Y_i \right) - \left(\frac{1}{\gamma} + 1 \right) \frac{Y_i / \beta}{1 + \gamma Y_i / \beta} \\ \frac{d \log L}{d \beta} = \beta k - \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{\gamma} + 1 \right) \frac{-\gamma Y_i / \beta^2}{1 + \gamma Y_i / \beta} \end{cases}$$

obteniendo

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_{MV} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log \left(1 + \frac{\hat{\gamma}_{MV}}{\hat{\beta}_{MV}} Y_i \right) \\ \hat{\beta}_{MV} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\hat{\gamma}_{MV}} + 1 \right) \sum_{i=1}^k \frac{Y_i}{1 + \hat{\gamma}_{MV} Y_i / \hat{\beta}_{MV}} \end{cases}$$

las ecuaciones se pueden resolver numéricamente. Cabe mencionar que este método funciona cuando $\gamma > -1/2$ por lo que es un buen complemento para el estimador negativo de Hill, en este caso

$$\sqrt{k} \left(\hat{\gamma}_{MV} - \gamma, \hat{\beta}_{MV} / \beta - 1 \right) \xrightarrow{D} N(0, M)$$

donde

$$M = (1 + \gamma) \begin{pmatrix} 1 + \gamma & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

cumpléndose de igual modo la consistencia y la normalidad asintótica, además de que este estimador es invariante ante escala y traslación.

Es posible obtener los parámetros utilizando la función general de valores extremos también para $\gamma < -1/2$, en este caso la función resulta ser:

$$\log L_{\beta, \gamma, \mu} = -k \log \beta - \left(\frac{1}{\gamma} + 1 \right) \sum_{i=1}^k \log \left(1 + \gamma \frac{Y_i - \mu}{\beta} \right) - \sum_{i=1}^k \left(1 + \gamma \frac{Y_i - \mu}{\beta} \right)^{-1/\gamma}$$

en el caso que $\gamma = 0$ se tiene $L_{\beta, 0, \mu}$. Si se estima $\hat{\beta}, \hat{\mu}, \hat{\gamma}$ de este modo solo se pueden obtener mediante métodos numéricos.

3.4.6. Estimador de momentos ponderados por probabilidad

La idea básica de este estimador es igualar los momentos basados en la distribución general de valores extremos y los momentos empíricos, al considerarse que en los valores extremos los estimadores son poco confiables se

ponderan por probabilidad. Se define para una variable aleatoria con función de distribución F :

$$M_{p,r,s} = E [X^p (F(X))^r (1 - F(X))^s] \quad (3.24)$$

en este caso conviene trabajar con la función de distribución inversa por tanto se reescribe

$$M_{p,r,s} = \int_0^1 \left[\mu - \frac{\sigma}{\gamma} (1 - (-\log y))^{-\gamma} \right] y^r (1 - y)^s dy \quad (3.25)$$

A fin de encontrar los estimadores se trabajará con la función $M_{1,r,0}$ donde $r \in 0, 1, 2, \dots$. Puesto que para $\gamma \geq 1$ $M_{1,0,0}$ resulta ser infinito solo se tratará el caso $\gamma < 1$.

$$M_{1,r,0} = \int_0^1 \mu y^r - \frac{\sigma}{\gamma} y^\gamma + \frac{\sigma}{\gamma} (-\log y)^\gamma y^r dy$$

es fácil ver que

$$\int_0^1 \mu y^r - \frac{\sigma}{\gamma} y^\gamma = \frac{\mu - \frac{\sigma}{\gamma}}{r + 1}$$

ahora, para el tercer sumando se hará el cambio de variable $y = e^{-z}$:

$$\int_0^\infty z^{-\gamma} e^{-z(1+r)} dz$$

con un nuevo cambio de variable $x = z(1 + r)$ se obtiene

$$\frac{1}{1+r} \int_0^\infty x^{-\gamma} e^{-x} dx$$

entonces finalmente

$$M_{1,r,0} = \frac{1}{1+r} \left[\mu - \frac{\sigma}{\gamma} (1 - \Gamma(1 - \gamma)(1 + r)^\gamma) \right]$$

de aquí se observa que

$$M_{1,0,0} = \mu - \frac{\sigma}{\gamma} (1 - \Gamma(1 - \gamma)) \quad (3.26)$$

$$2M_{1,1,0} - M_{1,0,0} = \frac{\sigma}{\gamma} \Gamma(1 - \gamma)(2^\gamma - 1) \quad (3.27)$$

$$3M_{1,2,0} - M_{1,0,0} = \frac{\sigma}{\gamma} \Gamma(1 - \gamma)(3^\gamma - 1) \quad (3.28)$$

Se divide la ecuación 2.27 entre la ecuación 2.28 de donde se obtiene numéricamente $\hat{\gamma}_{MP}$, una vez obteniéndolo se estiman los otros dos parámetros del siguiente modo:

$$\hat{\sigma}_{MP} = \frac{(2\hat{M}_{1,1,0} - \hat{M}_{1,0,0})\hat{\gamma}_{MP}}{\Gamma(1-\gamma)(2^\gamma - 1)}$$

$$\hat{\mu}_{MP} = \hat{M}_{1,0,0} + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\gamma}}(1 - \Gamma(1 - \hat{\gamma}))$$

$\hat{M}_{1,r,0}$ se puede obtener de varias formas, por ejemplo, tomando de la definición de la ecuación 3.24 se obtiene

$$\hat{M}_{1,r,0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i,n} G^r(X_{i,j})$$

donde G es la distribución general de valores extremos, ahora dado que $(G(X_{1,n}), \dots, G(X_{n,n})) \xrightarrow{D} (U_{1,1}, \dots, U_{n,n})$ donde $U_{i,n}$ es el i -ésimo estadístico de orden de una sucesión de variables i.i.d reescribimos

$$\hat{M}_{1,r,0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i,n} U_{i,n}^r$$

para obtener otros posibles estimadores se reemplaza $U_{i,n}^r$ por otro estadístico, por ejemplo:

$$E(U_{i,n}^r) = \frac{(n-i)(n-i-1)\dots(n-i-r+1)}{(n-1)(n-2)\dots(n-r)}$$

Este estimador es consistente, además que $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ para $\gamma < 1/2$, cumpliendo las condiciones de segundo orden y cumple además que $k = k(n) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ y $k/n \rightarrow 0$ tiene una distribución asintótica normal con media cero y varianza GVG^T donde $\theta = (\sigma, \gamma, \mu)$, $\hat{\theta} = (\hat{\sigma}, \hat{\gamma}, \hat{\mu})$, G denota una matriz de 3×3 cuyos elementos son $g_{i,j} = \partial f_i / \partial M_{1,j,0}$ para $i, j \in 1, 2, 3$ y V está dado por:

$$v_{r,r} = \left[\frac{\sigma}{\gamma} (r+1)^\gamma \right]^2 (\Gamma(1-2\gamma)K(r/(r+1)) - \Gamma^2(1-\gamma))$$

$$v_{r,r+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\gamma} \right)^2 \{ (r+2)^{2\gamma} \Gamma(1-2\gamma) K(r/(r+2)) \\ + (r+1)^\gamma [(r+1)^\gamma - 2(r+2)^\gamma] \Gamma^2(1-\gamma) \}$$

$$v_{r+s} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\gamma} \right)^2 \{ (r+s+1)^{2\gamma} \Gamma(1-2\gamma) K(r/(r+s+1)) \\ - (r+s)^\gamma \Gamma(1-2\gamma) K((r+1)/(r+s)) \\ + 2(r+1)^\gamma [(r+s)^\gamma - (r+s+1)^\gamma] \Gamma^2(1-\gamma) \}$$

y $K(x) = H_1(-\gamma, -2\gamma; 1 - \gamma; -x)$, donde H_1 es la función hipergeométrica.

De modo similar a como se hizo en el estimador de máxima verosimilitud, se puede trabajar con la función Pareto Generalizada, es decir tomando $\mu = 0$. Para estimar γ y σ de la ecuación 3.24 se considera $M_{1,0,s}$, que para $\gamma < 1$ es:

$$M_{1,0,s} = \frac{\sigma}{(s+1)(s+1-\gamma)}$$

siendo el estimador

$$\check{M}_{1,0,s} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{i}{k+1}\right)^s X_{i,k}$$

resolviendo para $s = 0$ y $s = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{MPGP} &= 2 - \frac{\hat{M}_{1,0,0}}{\hat{M}_{1,0,0} - \hat{M}_{1,0,1}} \\ \hat{\sigma}_{MPGP} &= \frac{2\hat{M}_{1,0,0}\hat{M}_{1,0,1}}{\hat{M}_{1,0,0} - 2\hat{M}_{1,0,1}} \end{aligned}$$

3.4.7. Estimación del cuantil extremo

Considérese un modelo donde se tienen disponibles n variables i.i.d., y se quiere encontrar el punto x_{n,p_0} tal que $P[\max(X_1, \dots, X_n) \leq x_{n,p_0}] = 1 - p_0$, esto es, $F^n(x_{n,p_0}) = 1 - p_0$. De aquí y de la definición de $U(x) = (1/(1-F))^\leftarrow$

$$x_p = U\left(\frac{1}{p}\right)$$

donde $p := 1 - (1 - p_0)^{1/n}$. Tomando en cuenta que $X_{n-i+1,n} = \hat{U}(n/i)$ y los argumentos vistos para estimar γ en la Sección 3.4.4 para $p < 1/n$ es posible escribir

$$x_p = U\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{U(1/p) - U(n/m)}{U(n/m) - U(n/(2m))} [U(n/m) - U(n/(2m))] + U(n/m)$$

utilizando la parte empírica

$$\hat{x}_{p,n} = \frac{(m/(p_n n))^\gamma - 1}{1 - 2^{-\gamma}} [X_{n-i+1,n} - X_{n-2i+1,n}] + X_{n-i+1,n}$$

se ha encontrado un estimador para los cuantiles, ahora de la definición $x^* = \sup\{x : F(x) < 1\}$, para las distribuciones tales que $\gamma < 0$, es decir, distribuciones con x^* finito se tendrá que:

$$\hat{x}^* = \frac{X_{n-i+1,n} - X_{n-2i+1,n}}{2^{-\hat{\gamma}} - 1} + X_{n-i+1,n}.$$

Otro modo de encontrar los cuantiles es tomando del Capítulo 3 y con las condiciones usuales $k = k(n)$, $k/n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ que

$$U(tx) \approx b(t) + a(t) \frac{x^\gamma - 1}{\gamma}$$

se define

$$\hat{x}^q = \hat{b} \left(\frac{n}{k} \right) + \hat{a} \left(\frac{n}{k} \right) \frac{(k/(np))^{\hat{\gamma}} - 1}{\hat{\gamma}}$$

al estimar x^* se busca el valor tal que esté a la derecha de todos los datos, por lo que al tomar $p \rightarrow \infty$ se tiene:

$$\hat{x}^* = \hat{b} \left(\frac{n}{k} \right) - \frac{\hat{a}(n/k)}{\hat{\gamma}}$$

Este resultado es congruente con el que se obtiene al abordar el la estimación tomando el inverso de la función de distribución Pareto Generalizada.

$$\hat{F}(x) = \frac{k}{n} \left(1 + \frac{\hat{\gamma}(x-t)}{\hat{\sigma}} \right)^{-1/\hat{\gamma}}$$

entonces

$$\hat{U} \left(\frac{1}{p} \right) = t + \sigma \frac{(k/(np))^{\hat{\gamma}} - 1}{\hat{\gamma}}$$

donde t es el límite elegido, y $\hat{\gamma}, \hat{\sigma}$ son los estimadores según los métodos vistos. De igual modo, al tomar $p \rightarrow \infty$ para calcular x^* :

$$x_{pv}^* = t - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\gamma}}.$$

Capítulo 4

Aplicación

En este capítulo se trabajará con una cartera de incendio con un total de 1,131 pólizas, donde la suma asegurada se distribuye del siguiente modo:

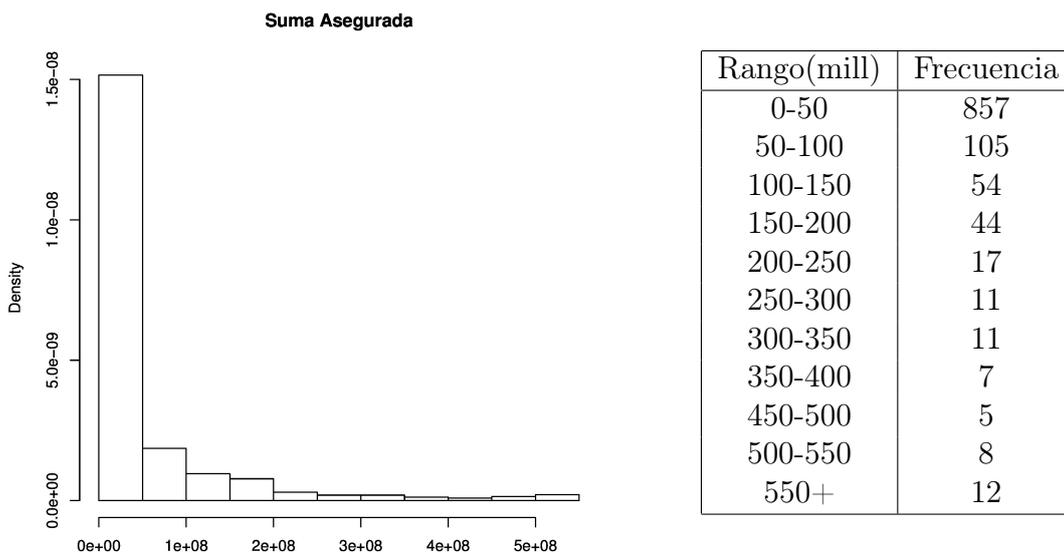


Figura 4.1: Distribución de suma asegurada

Claramente se puede ver que se tiene una cartera muy heterogénea. Como se mencionó en el Capítulo 2 el ideal es que se tengan riesgos similares y equivalentes para conformar una cartera homogénea que tenga relativamente pocas desviaciones, aunque esto no le exente de la posible ocurrencia de desviaciones inesperadas. En las carteras heterogéneas como la que se presenta en este caso se tienen compromisos gigantescos con un número relativamente bajo de objetos de seguro, por ejemplo, se puede ver que el grueso tiene una suma asegurada menor a 50 millones de pesos, sin embargo, se tienen 20 contratos mayores a 500 millones de pesos, más aún existen 5 contratos que

superan los 1,000 millones. Este tipo de compromisos resultan en un cúmulo de sumas aseguradas que no podrían ser soportada por una sola compañía de seguros por lo que es necesario el reaseguro, este tipo de cúmulos resulta difícil de modelar por la poca información que se tiene.

La interrogante se centra en la cantidad de riesgo a ceder, la respuesta a esto es muy variada y depende de factores como el apetito al riesgo, las políticas de la compañía, la legislación, etc. Desde la óptica de este trabajo se considera que utilizando la teoría de valores extremos se puede estimar el comportamiento del monto acumulado de siniestros, con esto y con otros factores sobre los cuales se supondrá que se tiene mayor control tales como las primas cobradas, los pagos al reaseguro, los gastos, el capital disponible, entre otros, se puede calcular el límite de retención, que será el que tomando todos los elementos mencionados tanto de ingreso como de pérdida y gastos proporcionen un mejor margen de solvencia para enfrentar la posible ocurrencia de siniestros.

Se asumirá que los siniestros son independientes entre sí, y se tomará un periodo de un año para analizar los que hayan ocurrido dentro de la cartera mostrada anteriormente. La distribución de los mismos se muestra en la Figura 4.

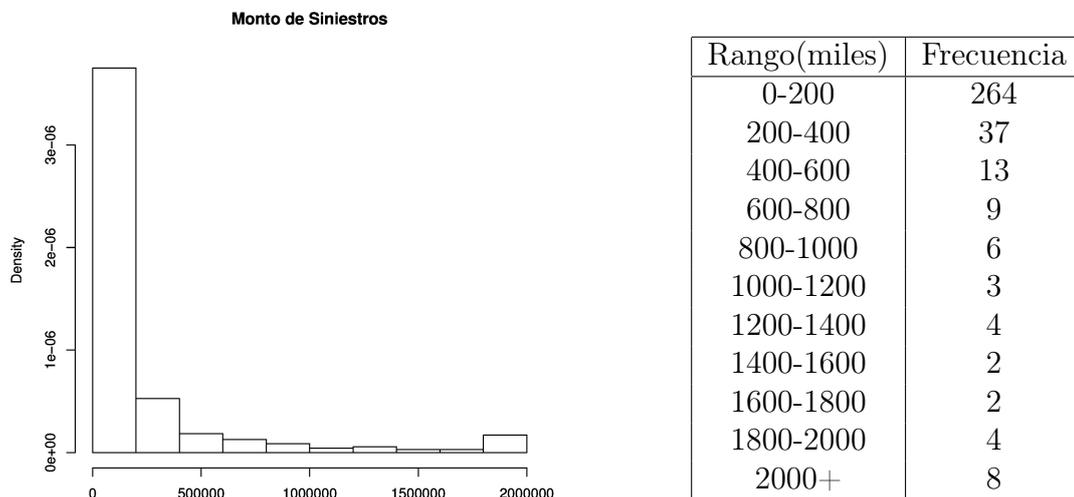


Figura 4.2: Distribución del monto de siniestros

La distribución de monto de siniestros tiene una distribución similar a la que presenta la suma asegurada, se podría pensar que es lógico puesto que

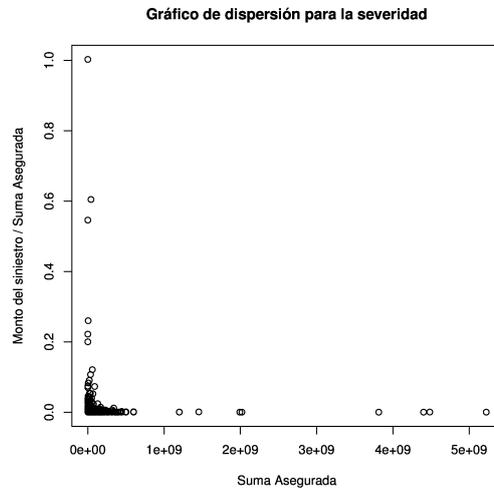


Figura 4.3: Relación entre monto y suma asegurada

es proporcional a la suma asegurada, sin embargo, esto no es del todo cierto, se puede ver en la Figura 4.3 que la severidad, (monto del siniestro/ suma asegurada) es mayor para las obligaciones pequeñas y tiende a ser menor para los montos grandes.

Los valores que a una compañía de seguros debiese preocuparse y los cuales hay anticipar son aquellos que se encontrarían en la parte superior derecha de la gráfica, ya que la ocurrencia de un siniestro en esta sección podría poner en problemas a una empresa aseguradora. De igual modo, la acumulación de puntos en el lado izquierdo, aunque son de monto pequeño la suma de todos ellos podría significar en su momento grandes pérdidas.

A partir de los datos de la cartera actual, se supondrá que para el siguiente año la cartera se comportará de modo similar y se modelará el monto de los siniestros a ocurrir, tomando en cuenta los siniestros *grandes* que puedan afectar la cartera; esto se hará mediante el uso de la teoría de valores extremos, aunque se harán diversas aproximaciones al resultado con diversos métodos para evaluar su eficacia y mostrar la utilidad que tiene en el ahorro de tiempo y recursos.

A grandes rasgos, el proceso a seguir será el siguiente: tener una proyección y posibles ocurrencias de siniestros. Evaluar los programas de reaseguro que se tengan determinando de este modo el límite de retención. Posterior-

mente se evaluarán los resultados anteriores en el resultado técnico tomando en cuenta ingresos y egresos a modo de evaluar que el límite de retención sea el adecuado para poder enfrentar sin excesivo riesgo las obligaciones. A lo largo de las siguientes páginas se irán desarrollando y aclarando cada uno de los pasos.

Una manera de modelar los riesgos puede ser ajustando una función de distribución a partir de la cual se realizarán simulaciones para obtener posibles ocurrencias de siniestros en la cartera actual, sin embargo, esta manera no sería la más adecuada en este caso, ya que la cartera es muy heterogénea y se perdería información de nuestra cartera, así como de los riesgos que asumimos por lo que no se estaría enfrentando del mejor modo, por ejemplo, un siniestro de \$ 500,000 no se podría decir si corresponde a un siniestro pequeño de una póliza son suma asegurada grande (parte inferior derecha de la Figura 4.3) o a un siniestro grande respecto de la póliza (parte superior izquierda de la Figura 4.3), incluso se podría estar cometiendo el error de simular siniestros más grande que la suma asegurada para dicha póliza. Una manera de resolver lo anterior es tomando la severidad de los siniestros, esto es: dividir monto del siniestro entre suma asegurada y a partir de esto simular y obtener la proyección de los siniestros. En caso de una cartera homogénea se podrían simular directamente los siniestros.

4.1. Proyección de siniestros

Para la proyección de siniestros se supondrá la fecha de valuación en diciembre de 2012, que se tiene disponible el monto de los siniestros y su suma asegurada del año 2012; se quieren encontrar los siniestros de la cartera para 2013, la cual será similar a la cartera 2012, por lo que la información de las sumas aseguradas y las primas de cada póliza se supondrán conocidas. Considerando que la cartera ha permanecido constante se puede considerar que las variables son idénticamente distribuidas, y dado que los siniestros no tienen relación uno con el otro, se consideran independientes, por lo que se cumplen los supuestos.

El primer paso consiste en obtener el número de siniestros en cada ensayo, se harán mil ensayos, con base en esto, se obtendrá un vector de mil entradas, donde cada una contendrá un número proveniente de una distribución poisson $poi(\lambda)$, λ en este caso valdrá 352, que es el valor esperado de siniestros. Este valor se puede estimar analizando el número de eventos ocurridos cada

año.

A continuación, se obtiene la severidad de todos los siniestros de 2012, a esta severidad se le tratará de ajustar alguna función de distribución. Una vez obtenidos los parámetros de dicha distribución, se obtendrá una matriz de severidades con mil columnas correspondientes a mil ensayos a realizar y el número de renglones en cada columna corresponderán a cada entrada del vector de número de siniestros del paso anterior.

Posteriormente, se tomará una matriz con una muestra aleatoria de sumas aseguradas, igualmente de mil columnas. El número de sumas aseguradas para cada columna corresponderá a cada entrada del vector de número de siniestros. Esta matriz se multiplicará entrada por entrada a la matriz de severidades, de esta manera los siniestros proyectados representan de mejor modo los riesgos asumidos ya que no existirán siniestros mas grandes que la suma asegurada. Entonces la suma total de siniestros para cada ensayo será:

$$\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

Donde $N(t)$ corresponde a un número proveniente de una distribución *poisson*(352) y X_i corresponde a la severidad i multiplicada por la muestra de la suma asegurada correspondiente.

A continuación se mostrará lo anterior con dos funciones de distribución distintas: Weibull, Pareto II y Log logística, la distribución Weibull pertenece al dominio de atracción Gumbel Λ y las otras dos al dominio de atracción Frechet Φ , esto para mostrar los distintos comportamientos asintóticos.

4.1.1. Proyección de siniestros con distribución Weibull

La función de distribución Weibull se define como sigue:

$$F(x) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x}{b} \right)^a \right] \quad (4.1)$$

Con $x, a, b > 0$, b es el parámetro de escala y a el parámetro de forma. Se puede ver que esta distribución se ajusta bastante bien. Para probar la bondad de ajuste se utilizará la prueba Kolmogorov Smirnov (KS), que en este caso arrojó un p-value de 0.06258 con lo que no se rechaza la hipótesis de que

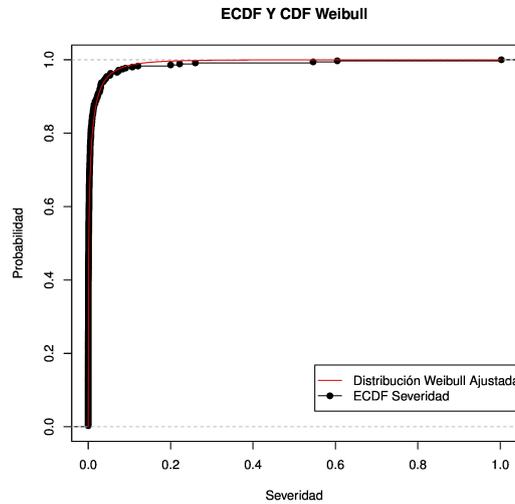


Figura 4.4: Distribución de la severidad de siniestros

se distribuye Weibull con parámetros $a = 0,416549594$ y $b = 0,003211875$.

De acuerdo a la Sección 3.1.3 la distribución Weibull, corresponde al dominio de atracción Gumbel Λ , de donde la distribución generalizada de valor extremo tiene el parámetro $\gamma = 0$. De acuerdo a la proposición 3.1.6 las constantes normalizantes son:

$$b_n = \left(\frac{1}{1 - F} \right)^{\leftarrow} (n), \quad a_n = f(b_n)$$

De donde:

$$a_n = \frac{b^a}{a} (b^a \ln n)^{1/a-1}$$

$$b_n = (b^a \ln n)^{1/a}$$

Al sustituir los parámetros se tiene que $a_n = 0,09184242$ y $b_n = 0,2243245$. Por otro lado, se tomaron los máximos de cada uno de los mil ensayos y se le ajustó la función Gumbel mediante máxima verosimilitud, los parámetros resultantes fueron $c_{nMLE} = 0,09309542$ y $d_{nMLE} = 0,23322885$. Se comparó la muestra de máximos de los mil ensayos con cada una de las distribuciones, y en ninguno de los dos casos no se rechazó bajo una prueba KS con un nivel de significancia $\alpha = 0,01$ (se utilizará este nivel de confianza en adelante)

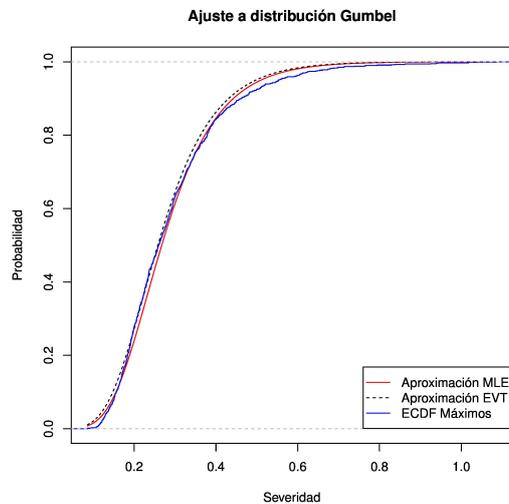


Figura 4.5: Distribución de máximos

que la muestra se distribuyera Gumbel, en el primer caso con un p-value de 0.01208 y en el segundo un p-value de 0.1917 esto se puede ver en la Figura 4.5.

En caso de tener una cartera homogénea y la distribución de siniestros, se podría tener la distribución del máximo de siniestros teniendo la posibilidad de escoger, por ejemplo, un cuantil para determinar el límite de un contrato working cover. En este caso, se tomará la muestra de sumas aseguradas para obtener las severidades y los siniestros.

Al trabajar con la severidad, como en este caso, es importante mencionar que existen distribuciones cuyo dominio excede el valor de 1, al contrario de otras funciones como la Beta. En este caso se limitará ese valor a 1, ya que, aunque el siniestro haya sido mayor a la suma asegurada, la aseguradora solamente asumirá su responsabilidad representada sobre esta última.

En la Figura 4.6 se puede observar que eventualmente ocurre algún evento grande, este tipo de eventos son los que se tratan de prevenir, ya que son los que pueden afectar de forma más directa la solvencia de la compañía. Como ya se había mencionado, al analizar este comportamiento se puede empezar a analizar un posible escenario para reaseguro. Del mismo modo, en la Figura 4.7 se puede observar que el comportamiento de la suma del monto

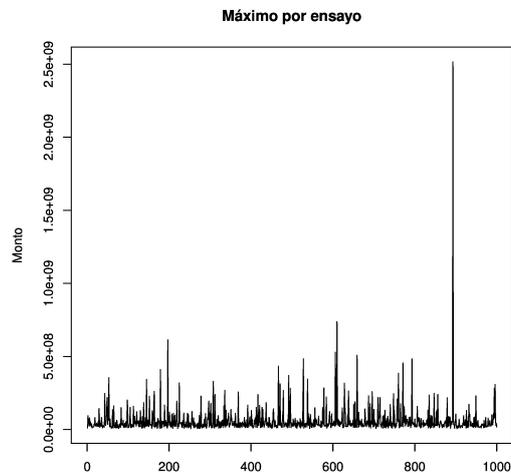


Figura 4.6: Máximo monto de siniestros provenientes de una distribución Weibull

de siniestros es un tanto similar al comportamiento del monto del siniestro máximo, esto deja ver nuevamente la relevancia de modelar los siniestros más grandes, ya que son los que sobresalen de las pérdidas esperadas y más que ser eventos aislados, mueven el comportamiento de toda la cartera.

4.1.2. Proyección de siniestros con distribución Pareto II

La distribución Pareto II se define como:

$$F(x) = 1 - \left[1 + \frac{x}{b}\right]^{-q} \quad (4.2)$$

Con $x, b, q > 0$, b es el parámetro de escala y q es el parámetro de forma. En este caso, la prueba KS arrojó un p-value de 0.038977154 y los parámetros ajustados mediante máxima verosimilitud fueron: $b = 0,000262258$ y $q = 0,520231235019137$. La distribución empírica y la que se ha ajustado se pueden ver en la Figura 4.1.2.

La distribución Pareto II pertenece al dominio de atracción Fréchet Φ y usando la proposición 3.1.1 se tiene que las constantes normalizantes son:

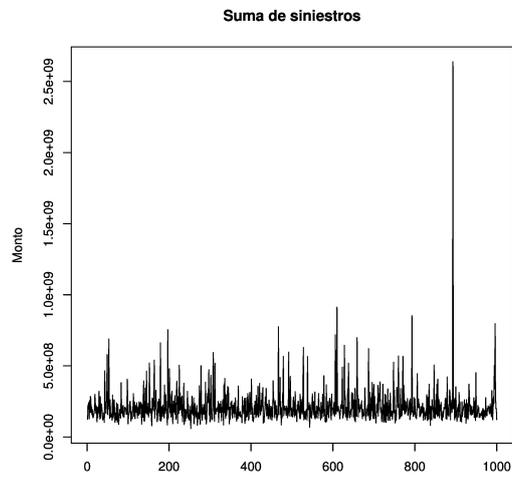


Figura 4.7: Suma de siniestros provenientes de una distribución Weibull

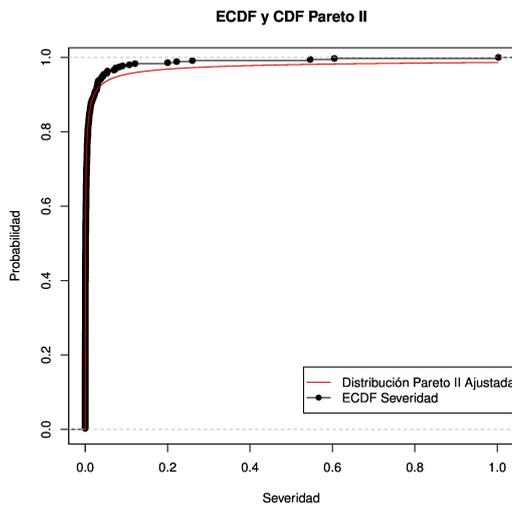


Figura 4.8: Distribución de la severidad de siniestros

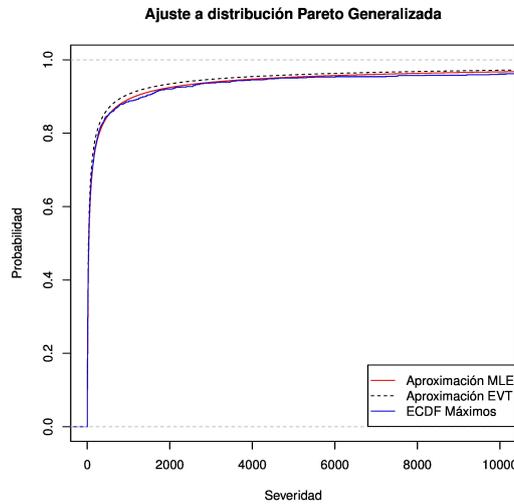


Figura 4.9: Distribución de máximos

$$a_n = \left(\frac{1}{1 - F} \right)^{\leftarrow} (n), \quad b_n = 0$$

Entonces en este caso:

$$a_n = b [n^{1/q} - 1]$$

También se tiene que $\gamma = 1/q$ con lo que la función Frechet Ψ queda caracterizada con los parámetros $a_n = 20,59413$ y $\gamma = 1,922222$. Del mismo modo, se tomó la muestra de máximos y se le ajustó una distribución Pareto Generalizada, que corresponde a la función de Valor Extremo Generalizada con parámetro $\mu = 0$, es decir, $b_n = 0$. Los parámetros obtenidos fueron: $a_{nMLEPG} = 26,30340$ y $\gamma_{MLEPG} = 1,93456$. Los valores del p-value para la prueba KS fue: 0.01884 para la función con los parámetros teóricos y 0.3477 para la función cuyos parámetros se estimaron mediante máxima verosimilitud. En ambos casos no se rechaza la hipótesis nula que en efecto la distribución de máximos se distribuye Frechet. La comparación de las distribuciones se puede ver en la Figura 4.9.

Las distribuciones mencionadas ajustaron bien, sin embargo, es importante mencionar que como se estudió en la proposición 3.1.1 la constante normalizante b_n puede ser cero y la distribución va a converger, sin embargo, puede no ser cero. Para analizar esto se ajustó una distribución de valor

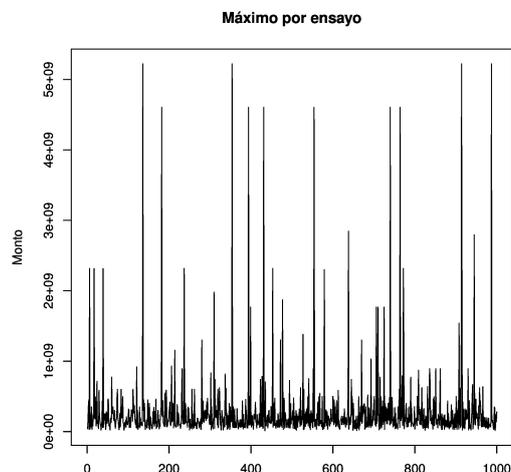


Figura 4.10: Máximo monto de siniestros provenientes de una distribución Pareto II

extremo generalizada a la muestra de máximos. Los parámetros obtenidos fueron: $a_n = 17,782679$, $b_n = 33,631100$ y $\gamma = 1,891713$. La prueba KS arrojó un valor de 0.9519, en efecto tiene un mejor ajuste al tener un parámetro más, sin embargo, con menos cálculos las aproximaciones anteriores son bastante buenas.

El rango en el que se encuentra la severidad en la Figura 4.9 excede de 1, esto se debe a que la cola es muy pesada y eventualmente se tienen valores muy grandes, sin embargo, estos valores que exceden del 1.4% del número de siniestros, son topados a 1 como ya se había mencionado. El resto de los valores se encuentra dentro de los valores esperados.

Al comparar el monto y la suma de siniestros provenientes de la distribución Pareto II en las Figuras 4.10 y 4.11, con las provenientes de una distribución Weibull en las Figuras 4.6 y 4.7, se puede ver que existen más siniestros grandes en la Pareto II, ya que tiene una cola mucho más pesada. Se analizarán ambos comportamientos y su interpretación más adelante.

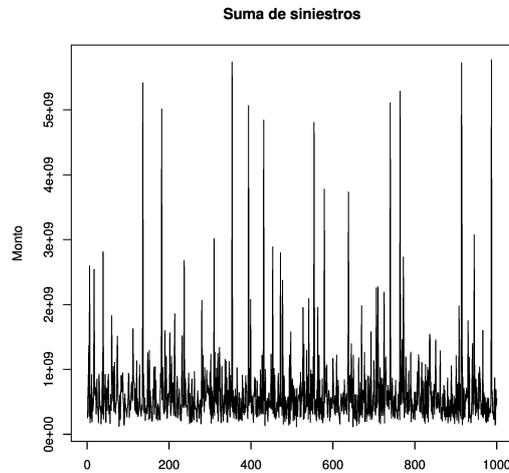


Figura 4.11: Suma de siniestros provenientes de una distribución Pareto II

4.1.3. Proyección de siniestros con distribución Log logística

La distribución Log logística se define:

$$1 - \frac{1}{1 + cx^{-1/s}} \quad (4.3)$$

Con $x; c, s > 0$ c es el parámetro de forma y s es el parámetro de escala. El ajuste a la severidad arrojó para la prueba KS un p-value de 0.6926, teniendo un mejor ajuste que la distribución Pareto II, los parámetros obtenidos mediante máxima verosimilitud fueron: $s = 1,41081454$, y $c = 144,0489237$.

De acuerdo a los resultados anteriores, se ajustará una distribución de valor extremo generalizada mediante máxima verosimilitud a la muestra de mil máximos. Los parámetros resultantes son: $a_n = 4,577086$, $b_n = 3,386254$ y $\gamma = 1,340335$. Este ajuste arrojó un p-value en la prueba KS de 0.3962. La gráfica se encuentra en la Figura 4.13.

Las gráficas de montos máximos y suma de siniestros se pueden ver en las Figuras 4.14 y 4.15. Claramente presenta menor cantidad de siniestros grandes respecto de los obtenidos de la distribución Pareto II. Esto se debe a que las distribuciones ajustadas a la severidad tienen un ajuste distinto: La distribución Log logística ajusta mejor a la cola, mientras que la Pareto II ajusta por debajo como se muestra en las Figuras 4.1.3 , 4.1.2 respectiva-

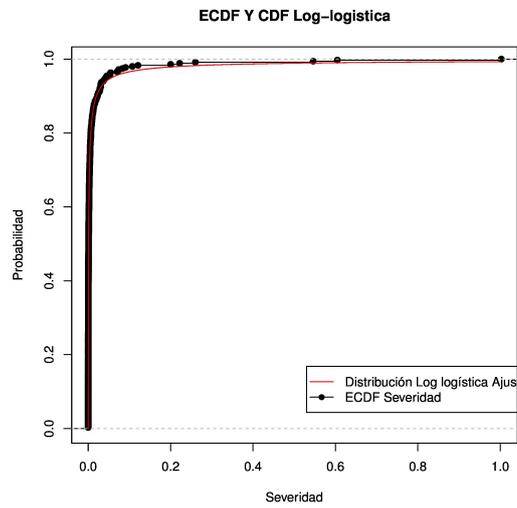


Figura 4.12: Distribución de la severidad de siniestros

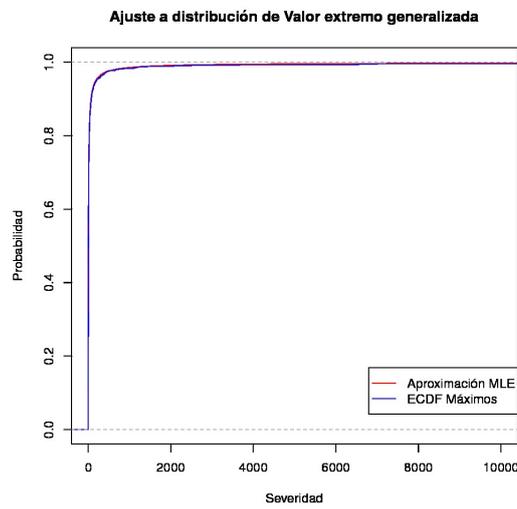


Figura 4.13: Distribución de máximos

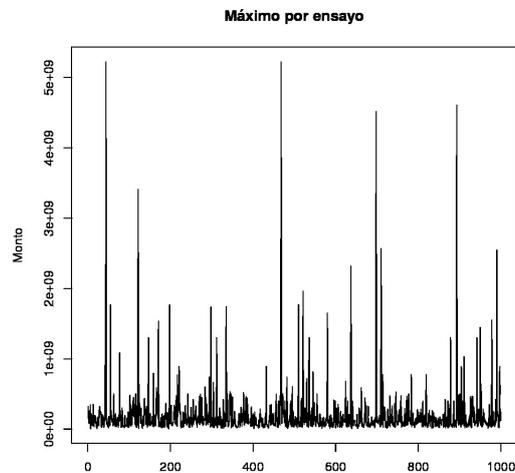


Figura 4.14: Máximo monto de siniestros provenientes de una distribución Log logística

mente, lo que permite mayor severidad en la simulación. Se verá más adelante la implicación de la elección correcta de la distribución.

4.1.4. Uso de otros estimadores

Como vimos en la Sección 3.4 existen formas también otros métodos de estimación basados en muestras de máximos, excedentes sobre umbral, en cuantiles de las distribuciones extremas, entre otras que no hace supuestos sobre una distribución inicial, sino que a partir de la muestra se pueden encontrar los parámetros de la distribución de valor extremo y poder analizar de igual modo los siniestros grandes, aunque no se tenga una distribución explícita para la distribución de siniestros.

Se esbozará a continuación la idea básica de los principales métodos:

- *Máximo por bloques*: Sea Y el máximo de una muestra X_1, \dots, X_n . Teniendo una muestra Y_1, \dots, Y_m , se pueden estimar sobre esta muestra de máximos los parámetros de la distribución de valores extremos; este puede ser principalmente estimado mediante máxima verosimilitud o mediante momentos de probabilidad ponderados.

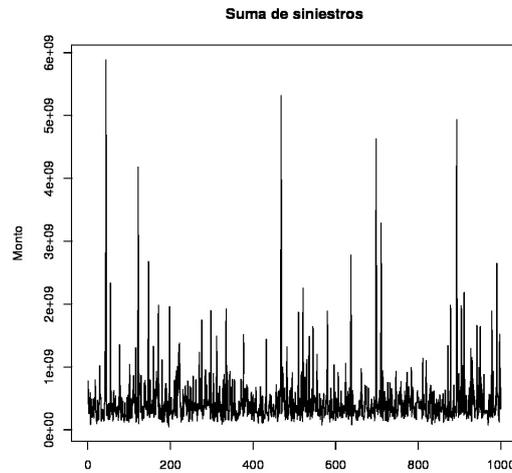


Figura 4.15: Suma de siniestros provenientes de una distribución Log logística

- *Aproximación por cuantiles*: este método se basa principalmente en encontrar una relación entre la distribución inversa teórica y los cuantiles provenientes de la muestra. En este tipo de estimadores se encuentran, por ejemplo, el estimador de Pickand y el estimador de momentos, además se puede llegar al estimador de Hill mediante esta aproximación.
- *Peak over threshold (POT)*: Este método se basa en que la función de cuantiles puede ser interpretada como la función condicional de supervivencia de excesos. Tomando $Y = X - t$ sobre el umbral t . Esto es:

$$\begin{aligned}
 1 - F(yb(t)) &:= P(Y > yb(t) \mid Y > 0) \\
 &= P\left(\frac{X - t}{b(t)} \mid X > t\right) = \frac{1 - F(t + yb(t))}{1 - F(t)}
 \end{aligned}$$

de aquí

$$1 - F_t(y) \sim \left(1 + \frac{\gamma y}{b(t)}\right)^{-1/\gamma}$$

que corresponde a la distribución Pareto Generalizada. Como ejemplos de estimadores bajo este método se puede encontrar: máxima verosimilitud, momentos ponderados de probabilidad y el estimador de Hill.

- *Aproximación por media de excesos*: Basado en la función de media de excesos de los datos bajo una transformación logarítmica. Si $1 - F \in RV_{-1/\gamma}$ con $\gamma > 0$ cuando $x \rightarrow \infty$

$$E(\log X - \log x \mid X > x) = \int_1^\infty \frac{1 - F(xy)}{1 - F(x)} \frac{dy}{y}$$

El estimador de Hill se puede encontrar mediante la siguiente aproximación:

$$= \int_x^\infty \frac{1 - F(u)}{1 - F(x)} \frac{du}{u} \rightarrow \gamma$$

Ya se ha utilizado para la proyección de siniestros la máxima verosimilitud, sin embargo, también se analizará el uso de otras herramientas. Primero se analizará el caso de la severidad bajo la distribución Pareto II.

En la Figura 4.16 es posible analizar el comportamiento de los estimadores, como ya se había mencionado, el estimador de momentos ponderados de probabilidad no estima de manera adecuada para valores de $\gamma > 1$, aunque es un muy buen estimador para valores de γ adecuados. En este caso, el estimador de Hill y el de momentos, además del estimador de Pickand en la Figura 4.17 proveen mejores resultados.

Los estimadores de parámetros son de gran utilidad, sin embargo, deben usarse con cuidado para no obtener resultados que no sean correctos, verificando que rangos abarcan y complementando con otras herramientas como q-q plots, transformación de datos (por ejemplo logarítmica) y el análisis de las distribuciones subyacentes.

4.2. Estimación del límite de retención

Como ya vimos, el límite de retención depende de muchas variables. Desde esta aproximación se desea asegurar que la compañía aseguradora sea capaz de enfrentar todos los riesgos aunque sean riesgos más grandes de lo esperado. El reaseguro es una herramienta que puede ayudar a afrontar de mejor

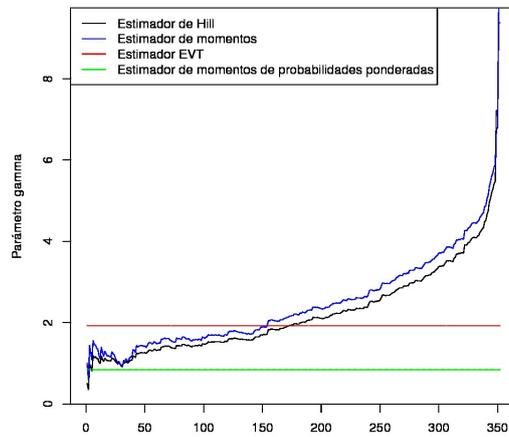


Figura 4.16: Estimator de Hill, Estimator de momentos de probabilidad ponderada y Estimator de Momentos

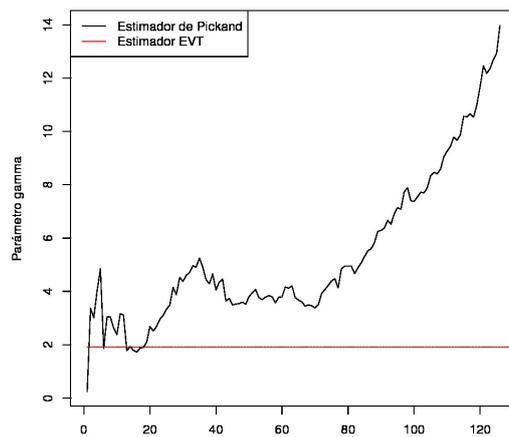


Figura 4.17: Estimator de Pickand

modo los riesgos; este a su vez tiene un costo y la idea es tratar de asumir el riesgo de una forma segura minimizando los costos. Se analizará ahora como afectan a la cartera diversos programas de reaseguro.

Es importante ver primero algunos conceptos:

- *Prima Emitida (PE)*: Primas correspondientes a contratos perfeccionados o prorrogados en el ejercicio, cuyos recibos se hayan emitido durante el ejercicio.
- *Gastos de Adquisición (GAdq)*: Los derivados directa o indirectamente de la actividad comercial de la entidad aseguradora; es decir, retribución de personal productor (comisiones, incentivos, bonos, subvenciones, etc.) publicidad y otros semejantes.
- *Gastos de Administración (GAdm)*: Los derivados del desarrollo de la actividad empresarial, tales como alquileres de locales de oficina, compra de material y mobiliario, consumo de energía eléctrica, obras e instalaciones, teléfono, correo y otras comunicaciones, viajes y locomoción en general, amortización de maquinaria y equipo, etc. y los derivados de la retribución económica de los servicios prestados por los empleados de la empresa incluidos en su nómina.
- *Resultado Técnico*: el resultado de $PE \cdot (1 - \%G_{adq} - \%G_{adm}) \cdot (1 - \%PC) - \text{Siniestros} \cdot (1 - \%PC) + \text{MRRNP} - \text{CRNP}$, donde $\%PC$ es el porcentaje de cesión en contrato de reaseguro proporcional, Siniestros es el monto total de siniestros, MRRNP representa el monto recuperado de siniestros bajo contratos no proporcionales, y CRNP el costo del reaseguro no proporcional.

La distribución del resultado técnico bajo siniestros Weibull Pareto II y Log logítica se puede ver en la Figura 4.18. En efecto, existe una mayor probabilidad de un escenario adverso bajo el supuesto Pareto que para las otras dos distribuciones. Considérense los resultados del Cuadro 3.1. Estos resultados provienen de la simulación de la severidad después de multiplicar por la muestra de sumas aseguradas en cada uno de los mil ensayos.

El total de suma asegurada de la cartera proyectada es de 75,000 millones, por la cual se cobra una prima de 436 millones. Los siniestros utilizados para la proyección suman un total de 116.5 millones. Como se ve en el Cuadro 3.1 se prevén siniestros más grandes. El promedio de la suma de siniestros

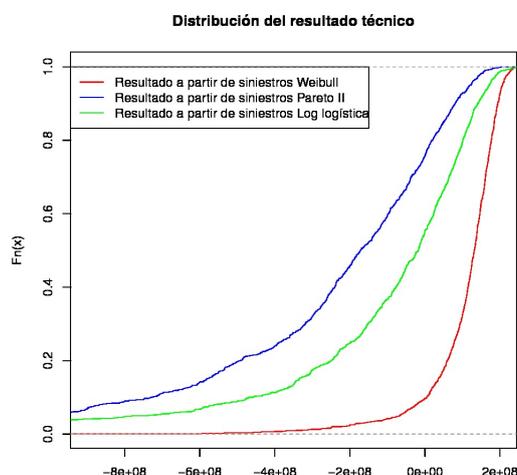


Figura 4.18: Resultado técnico

es superior al actual, sin embargo, dada la ocurrencia de eventos muy grandes en algunos escenarios, el promedio se ve afectado. Dados los escenarios mostrados se intentará encontrar el límite de retención que ayude a enfrentar de la manera más adecuada las responsabilidades asumidas, tomando como supuesto que las primas y gastos se mantienen constantes. Respecto del costo del reaseguro para el caso proporcional, se restarán las primas proporcionales correspondientes y para el reaseguro no proporcional se tiene la simulación de los siniestros, por lo que se tomará un costo de 0.2% de la parte cedida.

El reaseguro proporcional es una herramienta que ayuda a reducir la volatilidad de la cartera, es decir, hace que la pendiente en la gráfica de la distribución del resultado técnico sea mayor (más vertical); mientras que el reaseguro no proporcional disminuye el tamaño de las colas y se quiere que bajo los supuestos, se tengan suficientes escenarios aceptables para la compañía, es decir, se busca que el resultado técnico sea mayor que cero. Es importante tener en cuenta que el reaseguro aunque es una buena herramienta para reducir el riesgo también tiene un costo por lo que se reducirá la probabilidad de grandes pérdidas así como la de ganancias grandes (en caso que haya pocos siniestros por ejemplo).

Considérense ahora 3 escenarios:

Distribución	Weibull	Pareto II	Log logística
Siniestro Máximo	2,516,282,457	5,223,958,172	5,223,958,172
Máxima suma de siniestros	2,640,099,658	5,772,057,823.03	5,886,922,738
Mínima suma de siniestros	59,313,512	116,845,080	49,737,921
Promedio de Suma	212,981,751	634,368,944	458,276,569
Promedio de máximos	60,194,649.	286,670,175	203,959,869
Resultado técnico mayor	76,462,002	18,930,434	268,537,593
Resultado técnico menor	-2,503,633,859	-5,636,282,307	-5,568,647,223
Resultado técnico promedio	-77,205,545	-498,591,335	-140,001,054

Cuadro 4.1: Resultados

El primer escenario (Figura 4.19) tiene solamente un contrato working cover. Para el caso Weibull se tiene un contrato con una línea de 27,000,000 con un costo de 84.5 Millones, esto representa una retención del 80.16 %. Para el caso Pareto II y para el caso Log logística se tiene un working cover con una línea de 100,000,000 con un costo de reaseguro de 1 Millón que representa respectivamente una retención del 63.56 % y 69.07 % respectivamente. En este caso se puede ver que las colas se hacen más pequeñas significativamente, conservando el lado derecho de la probabilidad. Se eligió este límite después de varias pruebas, ya que al aumentarlo o disminuirlo empieza a afectar la parte derecha de las distribuciones representando menores resultados técnicos positivos.

Para el segundo escenario (Figura 4.20) se tomó el mismo contrato working cover para los tres modelos y se agregó un contrato cuota parte por el 50 %, esto representa una retención de 43.85 % para el caso Weibull, 37.75 %, para el caso Pareto II y 39.71 % para la distribución Log logística.

Finalmente el tercer escenario (Figura 4.21), corresponde a un contrato cuota parte con una retención del 60 % en todos los casos, se puede observar que no aporta tanto a disminuir las colas del lado izquierdo y el lado derecho también se ve afectado.

Se ha mostrado como se puede modelar a partir de una cartera inicial posibles escenarios de siniestralidad asumiendo una función de distribución, en este caso para la severidad, aunque para una cartera más homogénea se puede modelar directamente sobre los siniestros. También vimos que es posible modelar las máximas pérdidas sin tener una distribución explícita. Como se ha mostrado a través de la teoría y los ejemplos, las funciones que pertenecen al dominio Gumbel son de cola más ligera, mientras que las funciones que per-

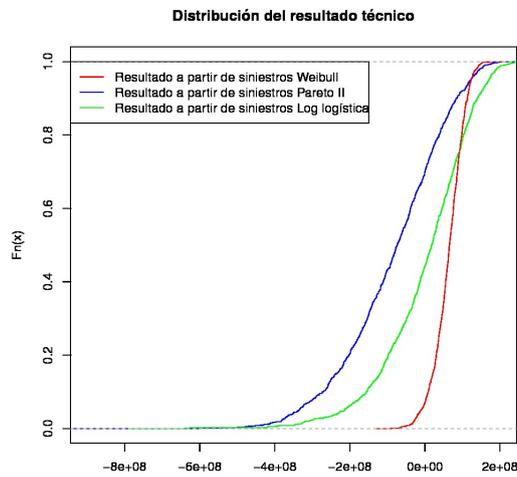


Figura 4.19: Resultado técnico Contrato Working Cover

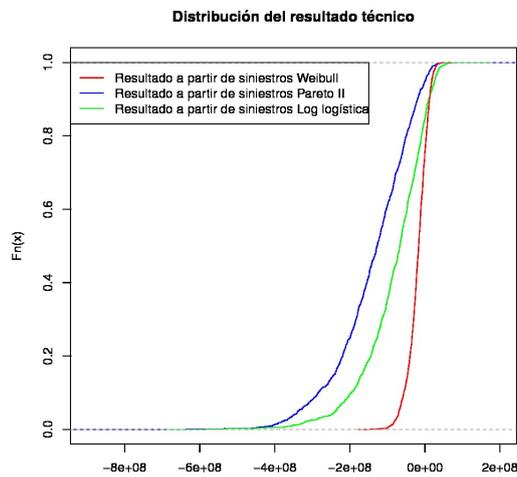


Figura 4.20: Resultado técnico Contrato Working Cover y Cuota Parte

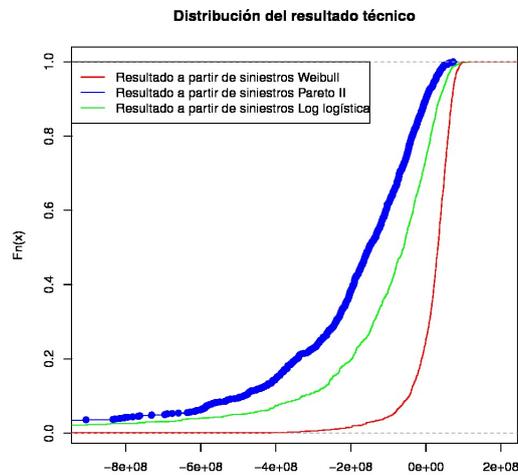


Figura 4.21: Resultado técnico Contrato Cuota Parte

tenecen al dominio de atracción Fréchet son de cola más pesada. Si elegimos funciones de cola ligera, técnicamente se estarán modelando los siniestros esperados, mientras que al elegir funciones de cola más pesada, es posible modelar los siniestros grandes que son el principal objetivo de este trabajo. Hay que tener cuidado al elegir la distribución, ya que aunque se quiere un escenario conservador, se desea que este sea plausible. Por ejemplo, en este caso el caso Pareto II es demasiado extremo, como ya vimos fue porque esta función ajusta en la cola por debajo la severidad. Se tomará entonces en este caso el caso Weibull como el modelo esperado y el caso Log logístico como el caso de estrés de la cartera. Tomando como máxima retención la obtenida para el caso Log logístico del primer escenario, esto es 39%.

Capítulo 5

Conclusión

La teoría de valores extremos es una buena herramienta para poder medir las posibles pérdidas. Directamente no es una medida para establecer cotas de pérdida, sin embargo, resulta ser una herramienta muy poderosa para medir las posibles pérdidas extremas. En el caso de reaseguro, por ejemplo, puede ayudar a determinar si el contrato que una aseguradora adquiere es realmente útil para protegerla contra una eventual ocurrencia de siniestros grandes o si está cubriendo en una medida mayor a la necesaria su cartera y por tanto desperdiciando recursos.

Es cierto que muchas veces la información disponible es limitada, pero gracias a la capacidad de las computadoras es posible solventar esa falta de información mediante simulación, sin embargo, la simulación no siempre es la solución más óptima debido a que ocupa recursos y tiempo, además que con la sucesión de cálculos se puede generar un error computacional, además, en ocasiones tampoco es posible ajustar una distribución. Es en este tipo de casos donde se vuelve relevante la teoría de valores extremos, ya que puede dar información de como se comportan las colas de las distribuciones sin necesidad de simular, incluso cuando no existe una distribución explícita (lo cual no permitiría una simulación).

La teoría de valores extremos no da la convergencia sin necesidad de hacer cálculos excesivos, y por lo tanto una pauta a seguir. Se probó teóricamente la consistencia de el estimador de Hill y al comparar con el desempeño de los otros estimadores empíricamente, de donde se puede hacer uso de ellos para ajustar una distribución de valores extremos para poder tener disponibles los escenarios *plausibles* donde se puedan registrar pérdidas extremas.

La teoría de valores extremos también es útil para modelar los siniestros

sobre determinado umbral, dando medidas de riesgo sobre el mismo, mediante la función de media de excesos y probabilidad de excesos, esto puede ser de utilidad para tener contratos de reaseguro más adecuados y poder medir mejor la relación precio - riesgo cedido, haciendo de este modo los costos más eficientes. Además se puede verificar si la prima cobrada para cada póliza es adecuada al riesgo que se están asumiendo.

En este trabajo se hicieron simulaciones para efectos ilustrativos, sin embargo, la teoría de valores extremos es una herramienta que permite obtener los resultados más adversos a partir de la muestra inicial, minimizando la necesidad de muchos cálculos.

De este modo, la teoría de valores extremos es una herramienta útil para encontrar eventos graves *plausibles* que ayuden encontrar el equilibrio entre el riesgo asumido y la utilización eficiente de recursos. En el reaseguro, por ejemplo, reservar el monto total de la suma asegurada o ceder todo el riesgo evidentemente asegura la disponibilidad de los recursos ante cualquier eventualidad, tal como el dique de cien metros evitaría cualquier inundación en la ciudad, sin embargo, se podrían usar los recursos de manera más óptima sin necesidad de asumir riesgos excesivos.

Los siniestros grandes son los que más daño pueden causar a una compañía de seguros, sin embargo, al considerarse éstos como outliers se sacan de la muestra. Esto es por que dichos valores sesgan la información del resto de la población, sin embargo, el hecho de que son poco probables no implica que no ocurrirán nuevamente. Por dicha razón, en vez de ser omitidos, debiesen ser estudiados para prevenir pérdidas grandes, este estudio es factible gracias a la teoría de valores extremos, la cual permite conocer el comportamiento de éstos a pesar de que exista poca información. Más aún, provee información acerca del riesgo cedido y asumido, lo cual permite a una compañía de seguros medir que tan adecuado es su plan de reaseguro.

La teoría de valores extremos ayuda a prevenir grandes pérdidas que puedan afectar de manera significativa a una compañía y medir riesgos, dicha teoría no depende de simulaciones, gran cantidad de datos atípicos o grandes cálculos, es por eso, que es una herramienta de gran utilidad que puede ayudar en el sector asegurador a medir riesgos a un bajo costo.

Apéndice A

A.1. Funciones de variación regular

Definición A.1.1. Una función medible $U : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ es de variación regular en ∞ con índice γ denotado $U \in RV_\gamma$ si para $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\gamma$$

Sea γ el exponente de variación, si $\gamma = 0$ decimos que U es de variación lenta y se denota por $L(x)$. Si $U \in RV_\rho$ entonces $U(x)/x^\rho \in RV_0$, de donde se puede representar U como $x^\rho L(x)$ (Ver *Heavy-Tail Phenomena Probabilistic and Statistical Modeling*[32]).

Proposición A.1.2. *i. Si $U \in RV_\gamma$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \log U(x)/\log x = \gamma$ así que para $-\infty \leq \gamma \leq \infty$*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = \begin{cases} 0 & \gamma < 0 \\ \infty & \gamma > 0 \end{cases}$$

ii. Supóngase que $U \in RV_\gamma$. Tomando $\epsilon > 0$ se tiene que $\exists t_0$ tal que para $x \geq 1$ y $t \geq t_0$

$$(1 - \epsilon)x^{\gamma - \epsilon} < \frac{U(tx)}{U(t)} < (1 + \epsilon)x^{\gamma + \epsilon}$$

iii. Si $U \in RV_\gamma$ y $\{a_n\}, \{a'_n\}$ satisfacen $0 < a_n \rightarrow \infty, 0 < a'_n \rightarrow \infty$ y $a_n \sim ca'_n$ con $c \in (0, \infty)$, entonces $U(a_n) \sim c^\gamma U(a'_n)$. Análogamente las sucesiones pueden ser reemplazadas por funciones.

iv. Si $U_1 \in RV_{\gamma_1}$ y $U_2 \in RV_{\gamma_2}$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} U_2(x) = \infty$ entonces $U_1 \circ U_2 \in RV_{\gamma_1 \gamma_2}$

v. Supóngase que U es no decreciente, $U(\infty) = \infty$ y $U \in RV_\gamma$, $0 \leq \gamma \leq \infty$. Entonces $U^{\leftarrow} \in RV_{1/\gamma}$

vi. Supóngase que $U_1, U_2 \in RV_\gamma$ donde $\gamma \in (0, \infty)$, entonces para $0 \leq c \leq \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$ se tiene que $U_1 \sim U_2$ sí y sólo si $U_1^{\leftarrow} \sim c^{-1/\gamma} U_2^{\leftarrow}$

vii. Si $U \in RV_\gamma$ con $\gamma \neq 0$ entonces existe una función U^* que es absolutamente continua, estrictamente monótona y $U(x) \sim U(x)^*$ cuando $x \rightarrow \infty$

A.2. Teorema de Karamata

Teorema A.2.1. a) Supóngase que $\gamma \geq -1$ y $U \in RV_\gamma$. Entonces $\int_0^x U(t)dt \in RV_{\gamma+1}$ y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xU(x)}{\int_0^x U(t)dt} = \gamma + 1$$

si $\gamma < -1$ (o si $\gamma = -1$ y $\int_x^\infty U(s)ds < \infty$), entonces $U \in RV_\gamma$ implica que $\int_x^\infty U(t)dt$ es finita, $\int_x^\infty U(t)dt \in RV_{\gamma+1}$ y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xU(x)}{\int_x^\infty U(t)dt} = -\gamma - 1$$

b) Si U satisface

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xU(x)}{\int_0^x U(t)dt} = \lambda \in (0, \infty)$$

entonces $U \in RV_{\lambda-1}$. Si $\int_x^\infty U(t)dt$ es finito y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xU(x)}{\int_x^\infty U(t)dt} = \lambda \in (0, \infty)$$

Demostración. Primero hay que ver que si $\gamma > -1$ entonces $\int_0^\infty = \infty$. Puesto que $U \in RV_\gamma$ entonces

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{U(2s)}{U(s)} = 2^\gamma > 2^{-1}$$

por lo tanto existe s_0 tal que $s > s_0$ necesita $U(2s) > U(s)/2$. Para $2^n > s_0$ se tiene

$$\int_{2^{n+1}}^{2^{n+2}} U(s)ds = 2 \int_{2^n}^{2^{n+1}} U(2s)ds > \int_{2^n}^{2^{n+1}} U(s)ds$$

y estableciendo $n_0 = \inf n : 2^n > s_0$ se tiene

$$\int_{s_0}^{\infty} U(s)ds \geq \sum_{n:2^n > s_0} \int_{2^{n+1}}^{2^{n+2}} U(s)ds > \sum_{n \geq n_0} \int_{2^{n_0+1}}^{2^{n_0+2}} U(s)ds = \infty$$

entonces para $\gamma > 1, x > 0$ y cualquier $N < \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$

$$\int_0^t U(sx)ds \sim \int_N^t U(sx)ds$$

puesto que $U(sx) \in RV_\gamma$ para x fijo dado ϵ , existe N tal que para $s > N$ $(1 - \epsilon)x^\gamma U(s) \leq U(sx) \leq (1 + \epsilon)x^\gamma U(s)$, de aquí

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{tx} U(s)ds}{\int_0^t U(s)ds} &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{x \int_0^t U(sx)ds}{\int_0^t U(s)ds} \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{x \int_N^t U(sx)ds}{\int_N^t U(s)ds} \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x^{\gamma+1} (1 + \epsilon) \frac{\int_N^t U(s)ds}{\int_N^t U(s)ds} \\ &= (1 + \epsilon)x^{\gamma+1} \end{aligned}$$

análogamente para el \liminf , entonces $\int_0^x U(s)ds \in RV_{\gamma+1}$ cuando $\gamma > -1$.

En el caso $\gamma = -1$ puede suceder que $\int_0^\infty U(s)ds < \infty$, en cuyo caso $\int_0^x U(s)ds \in RV_{-1+1} = RV_0$ ó que $\int_0^\infty U(s)ds = \infty$ aplicando el procedimiento anterior. por tanto $\int_0^x U(s)ds \in RV_{\gamma+1}$. Sea:

$$b(x) = \frac{xU(x)}{\int_0^x U(t)dt} \tag{A.1}$$

integrando $b(x)/x$ se llega a:

$$\int_0^x U(s)ds = x \exp \left[\int_1^x \frac{b(t)}{t} dt \right]$$

de donde

$$U(x) = (c/x)b(x) \exp \left[\int_1^x \frac{b(t)}{t} dt \right] \tag{A.2}$$

hay que observar que

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{b(x)} = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x U(t)}{xU(x)} dt = \liminf_{x \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{U(sx)}{U(x)} ds$$

haciendo el cambio de variable $s = t/x$ y utilizando el teorema de Fatou:

$$\geq \int_0^1 \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{U(sx)}{U(x)} ds = \int_0^1 s^\gamma ds = \frac{1}{\gamma + 1}$$

análogamente $\limsup_{x \rightarrow \infty} b(x) \leq \gamma + 1$. $b(x)$ es de variación lenta ya que $xU(x) \in RV_{\gamma+1}$ y $\int_0^x U(s)ds \in RV_{\gamma+1}$, entonces se tiene que $b(xt) - b(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. Utilizando esto y el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^s \frac{b(xt) - b(x)}{t} dt = 0$$

reescribiendo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^s \frac{b(xt)dt}{t} - b(x) \log s = 0$$

por otro lado

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^s \frac{b(tx)}{t} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{xs} \frac{b(t)}{t} dt$$

utilizando la ecuación A.2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(\frac{\int_0^{xs} U(t)dt}{\int_0^x U(t)dt} \right)$$

y utilizando la propiedad de variación regular:

$$(\gamma + 1) \log s = b(x) \log s$$

de donde finalmente $b(x) \rightarrow \gamma + 1$. Para el inciso b se supondrá que $b(x) \rightarrow \lambda$. De la ecuación A.2

$$U(x) = c/xb(x) \exp \left[\int_1^x \frac{b(t)}{t} dt \right] = cb(x) \exp \left[\int_1^x \frac{b(t) - 1}{t} dt \right]$$

puesto que $b(t) - 1 \rightarrow \lambda - 1$, entonces $U \in RV_{\lambda-1}$ □

Corolario A.2.2. *i. La función L es de variación lenta sí y sólo si L se puede representar del siguiente modo:*

$$L(x) = c(x) \exp \left[\int_1^x \frac{\epsilon(t)}{t} dt \right] \tag{A.3}$$

donde $c : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$, $\epsilon : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$, para $x > 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = c \in (0, \infty)$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = 0$

ii. Una función $U : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$, es de variación regular con índice γ sí y sólo si tiene la representación

$$U(x) = c(x) \exp \left[\int_1^x \frac{\gamma(t)}{t} dt \right] \tag{A.4}$$

donde $\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = c \in (0, \infty)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \gamma$. (Esto es escribiendo de *i.* $U(x) = x^\gamma L(x)$ y utilizando la representación de L)

Demostración. Supóngase primero que L tiene representación la ecuación A.3, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c(tx)}{c(t)} \exp \left[\int_t^{tx} \frac{\epsilon(s)}{s} ds \right]$$

dado que $\epsilon(t) \rightarrow 0$ existe $t \geq t_0$ tal que $-\epsilon < \epsilon(t) < \epsilon$ tal que

$$-\epsilon \log x = -\epsilon \int_t^{tx} \frac{1}{t} dt \leq \int_t^{tx} \frac{\epsilon(s)}{s} ds \leq \epsilon \int_t^{tx} \frac{1}{s} ds = \epsilon \log x$$

entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{tx} \epsilon(s)/s ds = 0$ por lo que $\lim_{t \rightarrow \infty} L(tx)/L(x) = 1$. Para la implicación contraria supóngase que $L \in RV_0$ y nuevamente sea

$$b(x) = xL(x) / \int_0^x L(s) ds$$

por el teorema de Karamata $b(x) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow \infty$. Tómesese $\epsilon(x) = b(x) - 1$ entonces $\epsilon(x) \rightarrow 0$, de la definición de $b(x)$

$$\begin{aligned} \int_1^x \epsilon(d)/t dt &= \int_1^x \left[L(t) / \int_0^t L(s) ds \right] dt - \log x \\ &= \int_1^x \frac{d}{dt} \left[\log \int_0^t L(s) ds \right] - \log x \\ &= \log \left[x^{-1} \int_0^x L(s) ds / \int_0^1 L(s) ds \right] \end{aligned}$$

tomando ambos lados \exp y $c(s) = b(x) / \int_0^1 L(s) ds$ se llega al resultado deseado. □

A continuación se describirá la condición de von Mises.

Proposición A.2.3. *i. Supóngase que $U : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ es absolutamente continua con densidad u tal que*

$$U(x) = \int_0^x u(t) dt$$

si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xu(x)}{U(x)} = \gamma$$

entonces $U \in RV_\gamma$.

ii. Si $U \in RV_\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$ y u es una función monótona, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xu(x)}{U(x)} = \gamma$$

y si $\gamma \neq 0$, entonces $|u|(x) \in RV_{\gamma-1}$

Demostración. i. Sea $b(x) = xu(x)/U(x)$. como anteriormente se encuentra que $U(x) = U(1) \exp \left[\int_1^x b(t)/tdt \right]$ así que U satisface el teorema de representación con una función $U \in RV_\gamma$.

ii. Supóngase que u es no decreciente. Sea $0 < a < b$ y véase que

$$\frac{U(xb) - U(xa)}{U(x)} = \int_{xa}^{xb} \frac{u(t)}{U(x)} dy$$

por se monótona se tiene que

$$\frac{u(xb)x(b-a)}{U(x)} \geq \frac{U(xb) - U(xa)}{U(x)} \geq \frac{u(xa)x(b-a)}{U(x)}$$

de aquí y del hecho de que $U \in RV_\gamma$ se concluye que

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xu(xa)}{U(x)} \leq \frac{b^\gamma - a^\gamma}{b - a}$$

para cualquier $b > a > 0$. Entonces sea $b \downarrow a$, lo cual es equivalente a tomar la derivada, entonces la ecuación anterior se convierte en

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xu(xa)}{U(x)} \leq \gamma a^{\gamma-1}$$

para cualquier $a > 0$. De modo similar tomando ahora $a \uparrow b$

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{xu(xb)}{U(x)} \geq \gamma b^{\gamma-1}$$

para cualquier $b > 0$. Entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} xu(x)/U(x) = \gamma$ resulta tomando $a = 1$ en el límite superior y $b = 1$ en el límite inferior. Análogamente en el caso no creciente. \square

A.3. Inversa Generalizada

Para una función creciente $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ con $F(-\infty) = \lim_{x \downarrow -\infty} F(x)$ y $F(\infty) = \lim_{x \uparrow \infty} F(x)$ se defina la inversa generalizada o inversa por la izquierda F^{\leftarrow} como (*A Note on Generalized Inverses*[15]):

$$F^{\leftarrow}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\}, \quad y \in \mathbb{R}$$

tomando $\inf \emptyset = \infty$.

Proposición A.3.1. *Sea $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una función creciente tomando $F(\infty)$ y $F(-\infty)$ como se definieron arriba.*

- I. $F^{\leftarrow}(y) = -\infty \iff F(x) \geq y \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Análogamente, $F^{\leftarrow}(y) = \infty \iff F(x) < y \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- II. F^{\leftarrow} es creciente. Si $F^{\leftarrow}(y) \in (-\infty, \infty)$, entonces F^{\leftarrow} es continua por la izquierda en y .
- III. $F^{\leftarrow}(F(x)) \leq x$. SI F es estrictamente creciente, entonces $F^{\leftarrow}(F(x)) = x$.
- IV. Sea F continua por la derecha. Entonces $F^{\leftarrow}(y) \leq \infty$ implica $F(F^{\leftarrow}(y)) \geq y$. Si $y \in \text{ran}(F \cup \inf\{\inf \text{ran } F, \sup \text{ran } F\})$ implica que $F(F^{\leftarrow}(y)) = y$. Si $y < \inf \text{ran } F$ entonces $F(F^{\leftarrow}(y)) > y$ y si $y > \sup \text{ran } F$ entonces $F(F^{\leftarrow}(y)) < y$.
- V. Si $F(x) \geq y$ entonces $x \geq F^{\leftarrow}(y)$. Si F es continua por la derecha y $x \geq F^{\leftarrow}(y)$ entonces $F(x) \geq y$. Si $F(x) < y$ entonces $x \leq F^{\leftarrow}(y)$.

Demostración. I. Se sigue de la definición.

- II. F^{\leftarrow} es creciente puesto que $\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y_2\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y_1\} \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} : y_1 < y_2$. Ahora sea $F^{\leftarrow}(y) \in (-\infty, \infty)$ y por conveniencia, sea $y_0 = y$. Ahora, para mostrar la continuidad en y_0 , sea $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : y_n \uparrow y_0$. Entonces $x_n := F^{\leftarrow}(y_n) \leq x_0 := F^{\leftarrow}(y_0)$, entonces $x_n \nearrow x \leq x_0$ para $n \rightarrow \infty$ para alguna $x \in \mathbb{R}$. Por definición de F^{\leftarrow} , $F(x_n - \epsilon) < y_n \leq F(x_n + \epsilon) \forall \epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Si $x < x_0$, entonces $\epsilon = (x_0 - x)/2$ implica $y_n \leq F(x_n + \epsilon) \leq F(x_0 - \epsilon) < y_0$, entonces $y_0 = \lim_{n \uparrow} y_n \leq F(x_0 - \epsilon) < y_0$, lo cual es una contradicción.

Para mostrar que F^{\leftarrow} admite un límite por la derecha a y , sea $y_n \downarrow y \in \mathbb{R} : F^{\leftarrow}(y) > -\infty$ y nótese que $(F^{\leftarrow}(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y acotado por abajo por $F^{\leftarrow}(y)$.

- III. Para la primera parte se sigue de la definición de F^{\leftarrow} . Para la segunda parte, siendo F estrictamente creciente entonces no existe $z < x$ tal que $F(z) \geq F(x)$ por lo que $F^{\leftarrow}(F(x)) \geq x$.
- IV. Para la primera parte, $F^{\leftarrow}(y) < \infty$ implica que $A = \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\} \neq \emptyset$, de aquí se tiene que existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ con $x_n \downarrow \inf A = F^{\leftarrow}(y)$ para $n \rightarrow \infty$. Por continuidad por la derecha de F , $F(F^{\leftarrow}(y)) \searrow F(x_n) \geq y$, así que $F(F^{\leftarrow}(y)) \geq y$. Para la segunda parte tómesese $y \in \text{ran } F$ y sea $A = \{x \in \mathbb{R} : F(x) = y\} \neq \emptyset$. Se tiene que $\inf A = F^{\leftarrow}(y)$ de donde $F(F^{\leftarrow}(y)) \searrow F(x_n) = y$, entonces $F(F^{\leftarrow}(y)) = y$. Ahora sea $y = \inf \text{ran } F$ y sin pérdida de generalidad sea y no pertenece a $\text{ran } F$

(de otro modo se aplica la otra parte). Esto implica que $F^{\leftarrow}(y) = -\infty$ ya que F es creciente, se tiene que $F(F^{\leftarrow}(y)) = F(-\infty) = \inf\{F(x) : x \in R\} = \inf \text{ran } F = y$. Análogamente para $y = \sup \text{ran } F$.

- v. La primera parte se sigue de la definición. Para la segunda parte hay que ver que $F^{\leftarrow}(y) \leq x$ implica que $y \leq F(F^{\leftarrow}(y)) \leq F(x)$, donde $y \leq F(F^{\leftarrow}(y))$ de IV. ya que F es continua por la derecha. Para la última parte tómesese $x \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) < y$ y $z \in \mathbb{R}$ tal que $F(z) \geq y$. Puesto que F es creciente, $z \geq x$, lo cual implica que $F^{\leftarrow}(y) \geq x$. □

A.4. Proceso Poisson

Se considera el número de reclamaciones como el proceso $\{N(t), t \geq 0\}$, el cual es considerado como un sistema de conteo por lo cual satisface para cualquier $t, h \geq 0$ que: comienza en cero, es decir $N(0) = 0$, $N(t) \in \mathbb{N}$, y que $N(t) \leq N(t + h)$. Este proceso de conteo es una función monótona, no decreciente y continua por la derecha. Se asumirá que a un mismo tiempo a lo más puede ocurrir un solo salto. El proceso de renovación es una herramienta muy útil para modelar el número de las reclamaciones.

Ahora, se definirá el proceso de renovación. Sea T_1, T_2, \dots una sucesión de variables aleatorias no negativas, independientes e idénticamente distribuidas las cuales representan el tiempo ocurrido entre dos reclamaciones y se les denominará tiempo de interarribo. La sucesión $\{W_n, n \in \mathbb{N}\}$, donde $W_0 = 0$ y $W_n = T_1 + \dots + T_n$ para $n \geq 1$ indica el tiempo de las renovaciones, siendo W_n el tiempo de espera para la ocurrencia del n -ésimo evento.

El proceso de conteo del proceso de renovación $\{N(t), t \geq 0\}$ se define como $N(t) = \max\{n \geq 0 : W_n \leq t\}$, para cada $t \geq 0$. Los dos procesos $\{N(t)\}$, y $\{W_n\}$ son equivalentes, pues $N(t) = n$ sí y sólo si $W_n < t < W_{n+1}$.

Cuando los tiempos de interarribo tienen distribución exponencial, el proceso $N(t)$ tiene distribución poisson(λt), por lo que es conocido como el proceso poisson.

El monto agregado de las reclamaciones, para cada tiempo $t \geq 0$ está dado por:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i I_{[0,t]}(T_i) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

Donde X_i representa el monto de cada reclamación, suponiendo que el monto de una reclamación es independiente de otra y que en cada portafolio los siniestros tienen comportamientos similares se asumirá que son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. $N(t)$ representa la magnitud de el número de las reclamaciones, modelada por el proceso de renovación. También se asumirá $\{N(t)\}$ y $\{X_n\}$ son independientes.

A.5. Código para estimación del parámetro γ

```
# estimador de HILL
mto_ord = sort(mto,decreasing=FALSE)
mto_ord = sort(maxmont,decreasing=FALSE)
hill_est = NULL
for (k in 1:length(mto_ord))
{
k
hill_est [k]=0
for (i in 1:k)
{
hill_est[k] = log(mto_ord[length(mto_ord)-i+1]) -
log(mto_ord[length(mto_ord)-k])+hill_est[k] }
hill_est[k] = hill_est[k]/k
}
# Fin estimador de Hill

hill_est[length(hill_est)]=hill_est[length(hill_est)-1]
plot(hill_est, type="l", xlab=, ylab="Parámetro gamma")

# momentos
m1=NULL
for (k in 1:length(mto_ord))
{
k
m1[k] = 0
for (i in 1:k)
{
m1[k]=log(mto_ord[length(mto_ord)-i+1]) -
log(mto_ord[length(mto_ord)- k])+m1[k]
}
}
```

```

m1[k]=m1[k]/k
}
m2=NULL
for (k in 1:length(mto_ord))
{
k
m2[k]=0
for (i in 1:k)
{ m2[k]=(log(mto_ord[length(mto_ord)-i+1]) -
log(mto_ord[length(mto_ord)-k])) ^ 2+m2[k]
}
m2[k]=m2[k]/k
}
est_mom = m1+1-1/2((m1 ^ 2/m2) ^ -1)

lines(est_mom, col="blue",type="l",add=TRUE)
# fin momentos

# Pickand
pik_est=NULL
for(k in 1:length(mto_ord)/2-50) {
pik_est[k]=1/log(2) (mto_ord[length(mto_ord)-k+1] -
mto_ord[length(mto_ord)-2 k+1])/(mto_ord[length(mto_ord)-2 k+1] -
mto_ord[length(mto_ord)-4 k+1]) }
plot(pik_est, type="l",xlab=,ylab="Parámetro gamma")
# Fin Pickand

# prob_ponderadas
m_1_0 =NULL
m_1_1 =NULL
m_1_2 =NULL
m_1_0 =0
for (i in 1:length(mto_ord))
{
m_1_0=(i/(length(mto_ord)+1)) ^ 0 mto_ord[i] + m_1_0
}
m_1_0=m_1_0/length(mto_ord)
m_1_1=0
for (i in 1:length(mto_ord)) {
m_1_1=(i/(length(mto_ord)+1)) ^ 1 mto_ord[i] +m_1_1
}

```

```

m_1_1=m_1_1/length(mto_ord)
m_1_2=0
for (i in 1:length(mto_ord)) {
m_1_2=(i/(length(mto_ord)+1))^ 2 mto_ord[i] +m_1_2
}
m_1_2=m_1_2/length(mto_ord)
con=(3m_1_2-m_1_0)/(2m_1_1 - m_1_0)
rc < - uniroot(function(x) (3 ^ x-1)/(2 ^ x-1) - con,
lower=-2, upper=10, tol = 1e-9)
gmom=NULL
for (gm in 1:length(mto_ord))
{
gmom[gm]=rc
}
lines (as.matrix(gmom),add=TRUE,col="brown")
# fin prob_pond

vec=NULL
for (z in 1:length(mto_ord))
{
vec[z]=k8[3]
}

lines (as.matrix(gmom),add=TRUE,col="brown")

```

Bibliografía

- [1] Barry C. Arnold, N. Balakrishnan y H.N. Nagaraja. *A First Course in Order Statistics*. Society for Industrial y Applied Mathematics, 2008.
- [2] Soren Asmussen y Peter W. Glynn. *Stochastic Simulation Algorithms and Analysis*. Springer, 2007.
- [3] Patrizia Baur y Antoniette Breutel ODonoghue. *Understanding Reinsurance How Reinsurers Create Value and Manage Risk*. Swiss Re. 2004.
- [4] J. Beirlant, G. Dierckx y A. Guillou. “Estimation of the Extreme Value Index and Generalized Quantile Plots”. En: *Bernoulli* 11.6 (2005), págs. 949-970.
- [5] Jan Beirlant, Yuri Goegebeur y Jozef Teugels. *Statistics of Extremes Theory and Applications*. Wiley, 2004.
- [6] N.H Bingham, C.M Goldie y J.L Teugels. *Regular Variation*. Cambridge University Press, 1987.
- [7] Christoph Bugmann. *El Reaseguro Proporcional y No Proporcional*. Swiss Re. 1997.
- [8] Maria de Lourdes Centeno y Onofre Simoes. “Optimal Reinsurance”. En: *Rev. R. Acad. Cien. Serie A* 103.2 (2009), págs. 387-404.
- [9] Pavel Cizek, Wolfgang Hardle y Rafal Weron. *Statistical Tools for Finance and Insurance*. Springer, 2005.
- [10] Stuart Coles. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer, 2001.
- [11] Stefano Corradin. *Economic Risk Capital and Reinsurance: an Extreme Value Theory’s Application to Fire Claims of an Insurance Company*. 2002.
- [12] H.A. David y H.N. Nagara. *Order Statistics*. Third. Wiley, 2003.

- [13] Arnold L.M. Dekkers y Laurens de Haan. “On the Estimation of the Extreme Value Index and Large Quantile Estimation”. En: *The Annals of Statistics* 17.4 (1989), págs. 1975-1832.
- [14] P. Embrechets, C. Kluppelberg y T. Mikosch. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, 1997.
- [15] Paul Embrechets y Marius Hofert. *A Note on Generalized Inverses*. 2011.
- [16] Paul Embrechets, Sidney I. Resnick y Gennady Samorodnitsky. “Extreme Value Theory as a Risk Management Tool”. En: *North American Actuarial Journal* 3.2 (1999), págs. 30-41.
- [17] Eduardo Esteva. *Guía Básica de Reaseguro*. 1993.
- [18] Jurg Friedlos, Hans Schmitter y Erwin Straub. *Setting Retentions Theoretical Consideration*. Swiss Re. 1997.
- [19] Laurens de Haan y Ana Ferreira. *Extreme Value Theory an Introduction*. Springer, 2006.
- [20] Laurens de Haan y Sidney I. Resnick. “Second Order Regular Variation and Rates of Convergence In Extreme Value Theory”. En: *The Annals of Probability* 24.1 (1996), págs. 97-124.
- [21] Laurens de Haan y Ulrich Stadtmuller. “Generalized Regular Variation of Second Order”. En: *J. Astral Math Soc* 61.A (1996), págs. 381-395.
- [22] Jan Henning Vollmer. *A Survey of Hills Estimator*. A Thesis Submitted to the Graduate Faculty of The University of Georgia in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Master of Science. 2003.
- [23] *Introduction to Reinsurance*. Swiss Re. 1999.
- [24] Peter Liebwein. *Some Thoughts on Risk Modeling in Insurance Companies*. Swiss Re. 2005.
- [25] David M. Mason. “Laws of Large Numbers for Sums of Extreme Values”. En: *The Annals of Probability* 10.3 (1982), págs. 754-764.
- [26] Ana Mata. “Parameter Uncertainty for Extreme Value Distributions”. En: *General Insurance Convention* (2000), págs. 151-173.
- [27] G. Matthys y J. Beirlant. “Estimating the Extreme Value Index and High Quantiles with Exponential Regression Models”. En: *Statistica Sinica* 13.1 (2003), págs. 859-880.
- [28] Thomas Mikosch. *Non-Life Insurance Mathematics An Introduction with Stochastic Processes*. Springer, 2006.

- [29] Jonatan Rascon Tejero. *Apuntes escolares*. 2007.
- [30] R.D. Reiss y M. Thomas. *Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*. Third. Birkhauser, 2007.
- [31] Sidney I. Resnick. *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*. Springer, 2008.
- [32] Sidney I. Resnik. *Heavy-Tail Phenomena Probabilistic and Statistical Modeling*. Springer, 2007.
- [33] Kotz Samuel y Saralees Nadarajah. *Extreme Value Distributions Theory and Applications*. Imperial College Press, 2000.
- [34] Hans Schmitter. *Setting Optimal Reinsurance Retentions*. Swiss Re. 2003.
- [35] Hans Schmitter y Peter Butikofer. *Estimating Property Excess of Loss Risk Premiums by Means of the Pareto Model*. Swiss Re. 1998.
- [36] Heinz Stettler, Fritz Eugster y et al. *Reinsurance Matters A manual of the Non-life Branches*. Swiss Re, 2005.
- [37] Rolski Tomasz y col. *Stochastic Procecess for Insurance and Finance*. Wiley, 1999.