



Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Estudios Superiores Acatlán

**“Implementación del Método de Newton  
para encontrar todas las raíces de  
polinomios complejos”**

Tesis

que para obtener el título de

**Licenciado en  
Matemáticas Aplicadas y Computación**

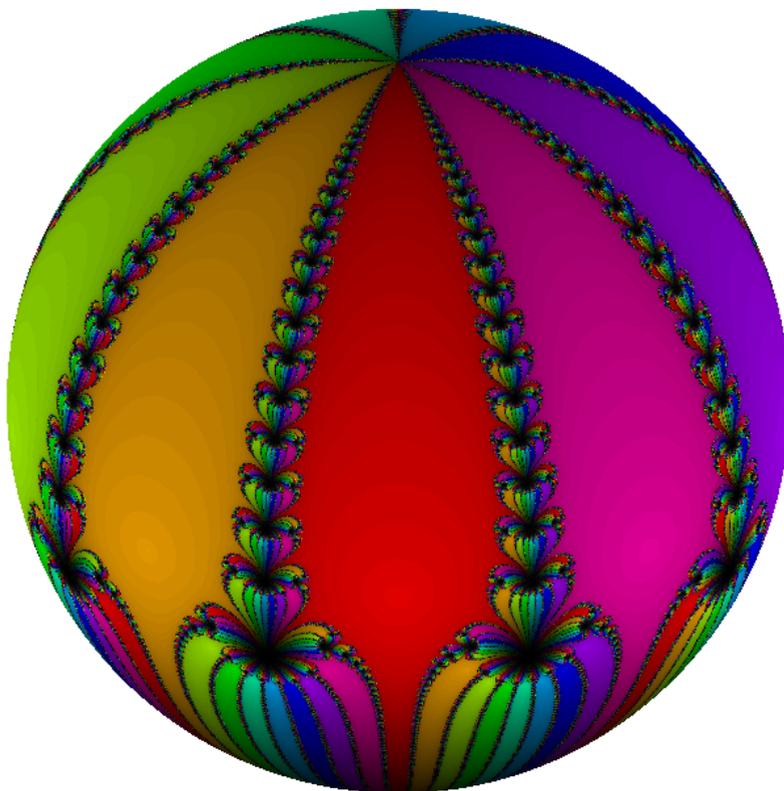
presenta

José de Jesús Hernández Serda

Asesor: Dr. Carlos A. Cabrera Ocañas

Enero de 2013







# Agradecimientos

Además de ser representativo del término de un periodo de estudios, este trabajo tiene una importante y evidente influencia de las experiencias y personas que tuve el gusto de encontrar en una serie de viajes, desde los de tres pesos en el metro hasta los de maleta y autobús.

Quiero agradecer a la gente de la FES Acatlán, que con sus consejos nos indican hacia donde mirar. Particularmente a los profesores Manuel Valadez y Jeannett López, por procurar los espacios y provocar el interés en temáticas y áreas que, de otra forma, podrían ser dejados al margen. Gracias también a los compañeros cómplices de las primeras travesías y también a la gente del Centro de Desarrollo Tecnológico por todo el apoyo.

También he de agradecer a las personas del Instituto de Matemáticas unidad Cuernavaca, académicos, estudiantes y personal, por ser tan buena onda. Especialmente a mi asesor el Doctor Carlos Cabrera, y a los Doctores Gilberto Calvillo y Peter Makienko, por guiarme en mi camino por los márgenes de mi perfil, por los cursos, seminarios, talleres y demás actividades que ayudaron a enriquecer mi perspectiva. Por el gran apoyo, la inspiración y las sugerencias durante la elaboración del presente, infinitas gracias.

Y por último, agradezco a todos los que se toparon con este trabajo, amigos y familiares, que se detuvieron a ver, escuchar y opinar en las discusiones al respecto. Que este sea el inicio de un nuevo viaje, el cual espero sea divertido.

Jesús Hernández  
México D.F., Enero de 2013.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. El Método de Newton</b>	<b>5</b>
1.1. El Método de Newton . . . . .	5
<b>2. Dinámica y geometría</b>	<b>9</b>
2.1. El mapeo de Newton $N_p$ . . . . .	9
2.2. Dinámica de $N_p$ . . . . .	13
2.3. Geometría de $N_p$ . . . . .	16
2.3.1. Cuencas inmediatas . . . . .	21
2.3.2. Accesos a $\infty$ y canales . . . . .	23
<b>3. Construcción Inevitable</b>	<b>31</b>
3.1. Anchura de los canales . . . . .	31
3.2. Dándole a los canales . . . . .	36
3.3. La idea de Schwarz-Christoffel . . . . .	43
3.4. Construcción Inevitable . . . . .	47
<b>4. Estimación de parámetros</b>	<b>53</b>
4.1. M.A.G. . . . .	53
4.2. Optimización . . . . .	57

<b>5. Implementación computacional</b>	<b>65</b>
5.1. Estrategia	65
5.1.1. Normalización	66
5.1.2. Estimación del número de iteraciones	67
5.1.3. Evaluación de polinomios	69
5.1.4. Estimación de multiplicidad	71
5.2. Construcción de $S_d$	72
5.3. Un código C++	73
5.4. Consideraciones	79
5.5. Graficación	81
<b>6. Ejemplos</b>	<b>85</b>
6.1. Polinomios mal portados	85
6.2. Otros métodos	90
6.2.1. Método de Newton para raíces múltiples	90
6.2.2. Método de Schröder	92
6.2.3. Método de König	94
6.2.4. Método de Steffensen	96
<b>Conclusiones</b>	<b>99</b>
<b>A. Módulo conforme</b>	<b>101</b>
A.1. Métrica conforme	101
A.2. Módulo conforme	103
A.3. Otras Desigualdades	106
<b>B. Transformaciones de Schwarz-Christoffel</b>	<b>109</b>
B.1. Polígonos	109
B.2. La fórmula de Schwarz-Christoffel	110
B.3. Polígonos con uno y dos vértices	113
B.4. Triángulos	117
B.5. Rectángulos y funciones elípticas	119

# Introducción

## Encontrando raíces

El Teorema Fundamental del Álgebra nos dice que todo polinomio de grado  $d \geq 1$  con coeficientes complejos tiene exactamente  $d$  raíces complejas, contando multiplicidades. Es por esto que todo polinomio se puede escribir como producto de factores lineales. Este hecho resulta muy útil e importante en el estudio de los polinomios y en sus aplicaciones. Sin embargo, el cálculo de las raíces y la factorización de polinomios son problemas aún vigentes y que involucran aspectos de varias ramas de las matemáticas.

Herramientas de carácter analítico como, por ejemplo, la regla de los signos de Descartes, pueden darnos información sobre las raíces de un polinomio pero no son suficientes para calcularlas. Para polinomios de grado menor o igual a dos, el cálculo de las raíces por métodos analíticos es casi inmediato. Para los cúbicos, e incluso los cuárticos, existen fórmulas generales para hallar sus raíces aunque no son tan simples como las correspondientes cuadráticas. En el caso de grados mayores se vuelve necesario el uso de métodos numéricos para aproximar el valor de las raíces, dichas aproximaciones se obtienen por métodos iterativos con cierta tolerancia al error. La precisión y la eficiencia en el cálculo de tales valores son temas de interés en el área de la computación.

Sea  $p(z) = \sum_{i=0}^d \alpha_i z^i$  un polinomio complejo de grado  $d$ . Dados los coeficientes de  $p$ , el problema de aproximar sus raíces consiste en encontrar  $d$  puntos  $\{\hat{z}_1 \dots \hat{z}_d\}$  tales que aproximen las raíces  $\zeta_i$  de  $p$  con una tolerancia  $\epsilon > 0$ , es decir, que se tenga  $|\zeta_i - \hat{z}_i| < \epsilon$  para  $i = 1 \dots d$ .

De los métodos empleados para resolver el problema de aproximar las raíces varios se basan en realizar aproximaciones lineales de las funciones a tratar, uno de estos es el Método de Newton. Sin entrar en detalles, este método funciona de la siguiente manera: dada una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y un valor inicial  $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ , se obtiene la aproximación lineal de Taylor de  $f$  alrededor de  $\zeta_0$  y se hace  $\zeta_1$  igual al cero de tal aproximación. Repitiendo el procedimiento se obtiene una sucesión  $\{\zeta_n\}$  que puede converger a alguna raíz de  $f$ .

Cuando las funciones a tratar son polinomios, resulta natural la idea de emplear este método para aproximar alguna raíz  $\zeta$  del polinomio  $p$ , y así reducir el polinomio dividiéndolo por el factor aproximado,  $q(z) = p(z)/(z - \zeta)$ . El polinomio obtenido  $q$  es de grado menor que  $p$  y tiene las mismas raíces, excepto  $\zeta$  si ésta es simple. Repitiendo tal procedimiento hasta alcanzar un polinomio de grado uno y resolverlo trivialmente garantizaría la obtención de una aproximación para cada una de las raíces.

No obstante, dado que siempre existe cierto error en la aproximación del factor, el nuevo polinomio a tratar acarrea ese error, es decir, las raíces del nuevo polinomio  $q$  son diferentes a las raíces de  $p$ . El error se ve incrementado en cada repetición de esta *deflación* (división) del polinomio, haciendo de las últimas aproximaciones algo poco confiable, sobre todo para polinomios de grados muy altos.

La naturaleza iterativa del Método de Newton da pie a que se estudien sus propiedades dinámicas: propiedades locales y globales de las orbitas para los valores iniciales del método. Bajo esta visión surge la idea de aplicar resultados de carácter geométrico en el análisis del comportamiento de los valores iniciales. En su artículo [8] Hubbard, Schleicher y Sutherland prueban la existencia del

conjunto global de valores iniciales para polinomios de grado  $d$ . “Para cada grado  $d \geq 2$  existe un conjunto finito  $S_d \subset \mathbb{C}$  tal que para todo polinomio complejo  $p$  de grado  $d$  y toda raíz  $\zeta$  de  $p$ , existe un  $\zeta_0 \in S_d$  que converge a  $\zeta$  bajo el Método de Newton. Más aun  $|S_d| \asymp d \log^2 d$ .”

La construcción del conjunto  $S_d$  se basa en las propiedades de la dinámica del Método de Newton. Los puntos de esta construcción son valores iniciales que aseguran cubrir las órbitas para todas las raíces, encontrándolas a la vez, con lo que se evita recurrir a la deflación y el error que esta provoca. El objetivo de este trabajo es probar la afirmación anterior sobre la existencia de este conjunto describiendo su construcción, así como llevar a cabo una implementación computacional del Método de Newton utilizando este resultado para encontrar todas las raíces de polinomios complejos con la misma precisión.

En los primeros dos capítulos se describen algunas propiedades de la dinámica y la geometría relacionada al Método de Newton para polinomios. En el tercer capítulo se prueba la existencia del conjunto global  $S_d$  por medio de su construcción. Los capítulos cuatro y cinco se refieren a la construcción del conjunto en el ámbito computacional y contienen una sugerencia para su implementación. En el sexto y último capítulo se muestran algunos ejemplos de aspectos diversos discutidos a lo largo del trabajo, como son polinomios para los cuales la dinámica del método presenta conjuntos abiertos de valores iniciales divergentes y una breve comparación del Método de Newton con otros métodos.

Este resultado y su implementación garantizan la aproximación a todas las raíces de un polinomio *genérico*. Sin embargo, quedan todavía varios problemas abiertos en cuanto a la determinación de la multiplicidad de las raíces, problemas que se reflejan en el comportamiento incierto del método alrededor de raíces múltiples o de raíces en *clúster*.



# Capítulo 1

## El Método de Newton

### 1.1. El Método de Newton

Sea  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  una función de la esfera de Riemann\* dos veces diferenciable. Sean  $\zeta$  una de sus raíces y  $\zeta^*$  una aproximación de la anterior tal que  $f'(\zeta^*) \neq 0$  y  $|\zeta - \zeta^*|$  sea suficientemente pequeño. Considere la aproximación de Taylor para  $f$  alrededor de  $\zeta^*$

$$f(z) = f(\zeta^*) + (z - \zeta^*)f'(\zeta^*) + \frac{(z - \zeta^*)^2}{2}f''(\zeta^*) + \dots$$

Dado que  $f(\zeta) = 0$ , esta ecuación con  $z = \zeta$  queda

$$0 = f(\zeta^*) + (\zeta - \zeta^*)f'(\zeta^*) + \frac{(\zeta - \zeta^*)^2}{2}f''(\zeta^*) + \dots$$

---

\*La esfera de Riemann  $\overline{\mathbb{C}}$  es la compactación por un punto del plano complejo  $\mathbb{C}$ , en otras palabras,  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

Asumiendo que  $|\zeta - \zeta^*|$  es suficientemente pequeño, de forma que el término con  $(\zeta - \zeta^*)^2$  tiene valor absoluto aún menor, se puede aproximar

$$0 \approx f(\zeta^*) + (\zeta - \zeta^*)f'(\zeta^*),$$

y resolviendo para  $\zeta$  se tiene

$$\zeta \approx \zeta^* - \frac{f(\zeta^*)}{f'(\zeta^*)},$$

lo cual determina una etapa en el Método de Newton.

**Definición 1** (El Método de Newton). Sea  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  una función continua y dos veces diferenciable. Para un valor inicial  $\zeta_0 \in \overline{\mathbb{C}}$  tal que  $f'(\zeta_0) \neq 0$ , el Método de Newton para resolver la ecuación  $f(z) = 0$  está dado por las iteraciones de la recurrencia

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n - \frac{f(\zeta_n)}{f'(\zeta_n)}$$

con  $n > 0$ .

Note que el uso de la aproximación de Taylor para  $f$  resalta algunas características especiales en la elección del valor inicial  $\zeta_0$ , que pueden garantizar o no la convergencia del método. Se comienza asumiendo que el término  $|\zeta - \zeta_0|^2$  es mucho más pequeño que  $|\zeta - \zeta_0|$ , pero esto puede resultar falso al elegir valores iniciales de forma arbitraria, haciendo que los términos ignorados en la aproximación de Taylor tomen significancia y el método tenga un comportamiento diferente al esperado. Diremos entonces que una aproximación  $\zeta_0$  que cumple con este requisito es una *buena* aproximación. Si se trata de una *mala* aproximación puede que el método no converja a  $\zeta$  o que no converja del todo. Sin embargo, en algunos casos, *malas* aproximaciones pueden llevar a la raíz deseada.

Se puede ver que, ya para polinomios cúbicos, existen conjuntos de puntos iniciales que no llevan a ninguna raíz, sino a ciclos de periodo mayor que uno. Por ejemplo, considere el polinomio  $p(z) = z^3 - 2z + 2$ ; al aplicar el método de

Newton con la aproximación inicial  $\zeta_0 = 0$  resulta

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= 0, \\ \zeta_1 &= 0 - \frac{2}{-2} = 1, \\ \zeta_2 &= 1 - \frac{1}{1} = 0, \\ &\dots\end{aligned}$$

Esta sucesión diverge y además, para puntos suficientemente cerca de 0 (o de 1) se tiene que la sucesión correspondiente oscila entre puntos cercanos a 0 y puntos cercanos a 1. De hecho, existen conjuntos abiertos no vacíos de valores iniciales que, bajo el método, llegan inevitablemente a dicho ciclo y divergen.



## Capítulo 2

# Dinámica y geometría

### 2.1. El mapeo de Newton $N_p$

El enfoque usado para el estudio geométrico de las cuencas producidas por el método es el de la dinámica holomorfa.

**Definición 2** (Mapeo de Newton). *Sea  $p : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  una función dos veces diferenciable. El mapeo de Newton de  $p$  es la función  $N_p : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  definida por*

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}.$$

Se dice que un mapeo  $f$  es racional cuando es de la forma  $f(z) = p(z)/q(z)$ , donde  $p$  y  $q$  son funciones polinómicas. El mapeo de Newton aplicado a polinomios es racional por su definición, y su derivada es

$$N_p'(z) = 1 - \frac{(p'(z))^2 - p(z)p''(z)}{(p'(z))^2} = \frac{p(z)p''(z)}{(p'(z))^2}.$$

Se dice que un mapeo es holomorfo cuando su derivada compleja es continua en todo su dominio o, de forma equivalente, se dice que es analítico cuando para todo punto del dominio existe una vecindad en la cual la expansión en serie de potencias converge. Los términos holomorfo y analítico son equivalentes para los mapeos complejos. Se le llama mapeo conforme cuando es analítico y preserva ángulos, es decir, el ángulo de intersección de dos curvas es invariante bajo el efecto del mapeo en las curvas. Otra forma de caracterizar un mapeo conforme es que su derivada no toma el valor de cero en ningún punto de su dominio. (Más detalles en [11].)

Sean  $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  y  $f : U \rightarrow U$ , se dice que un punto  $z \in U$  es periódico si existe un primer  $k$ , llamado periodo, tal que  $f^{\circ k}(z) = z$ , donde  $f^{\circ k}$  representa la  $k$ -ésima iterada de  $f$ . Al conjunto de puntos  $\{w \in U : w = f^{\circ k}(z), k = 0, 1, 2, \dots\}$  se le llama órbita de  $z$ . Para un punto periódico  $z$  de periodo  $k$ , el conjunto de los puntos  $\{z_1 = f(z), z_2 = f^{\circ 2}(z), \dots, z_k = f^{\circ k}(z) = z\}$  es el ciclo de  $z$ .

Un punto fijo es un punto periódico con  $k = 1$ . Cada punto fijo  $z$  tiene asociado un multiplicador  $\lambda = f'(z)$ . A los puntos  $z$  tales que  $f'(z) = 0$  se les conoce como puntos críticos. Para los puntos periódicos, el multiplicador del ciclo es  $\lambda = (f^{\circ k})'(z_i) = f'(z_1)f'(z_2)\cdots f'(z_k)$ , por lo que los ciclos tienen multiplicador  $\lambda = 0$  si y sólo si alguno de los puntos de la órbita es crítico.

Los puntos periódicos se pueden clasificar como

- *super-atractores*, si  $|\lambda| = 0$ ,
- *atractores*, si  $0 < |\lambda| < 1$ ,
- *repulsores*, si  $|\lambda| > 1$ ,
- *neutrales*, si  $|\lambda| = 1$ .

La clase de los puntos neutrales puede dividirse en más subclases dependiendo de ciertas características intrínsecas del valor  $\lambda$ .

**Proposición 3** (Puntos fijos de  $N_p$ ). *Sea  $p$  un polinomio de grado  $d \geq 2$ . El mapeo de Newton de  $p$  tiene como puntos fijos a las soluciones de  $p(z) = 0$  (i.e. las raíces de  $p$ ) y al punto  $\infty$ . Además, las raíces de  $p$  son puntos (super) atractores y el punto  $\infty$  es repulsor.*

*Demostración.* Sea  $p(z) = \sum_{i=0}^d \alpha_i z^i$  un polinomio de grado  $d \geq 2$ . El mapeo de Newton de  $p$  tiene como puntos fijos a las soluciones de la ecuación  $N_p(z) = z$ , o bien,

$$\frac{p(z)}{p'(z)} = 0.$$

El máximo común divisor de  $p$  y  $p'$  es de grado  $0 \leq k < d$ , entonces el grado del numerador es  $d - k$  y siempre es mayor que el grado del denominador  $d - 1 - k$ , es por esto que  $N_p(\infty) = \infty$ .

Cada raíz  $\zeta$  de  $p$  tiene asociado el multiplicador  $\lambda_\zeta = N'_p(\zeta)$ ; si la raíz es simple, es un punto crítico de  $N_p$  y también es un punto fijo super-atractor, es decir, su multiplicador es igual a cero.

Por otra parte, sea  $\zeta$  una raíz de  $p$  con multiplicidad  $k \geq 2$ , entonces  $p(z) = (z - \zeta)^k q(z)$  donde  $q$  es un polinomio que no contiene el factor  $(z - \zeta)$ . Se tiene

$$N'_p(z) = \frac{p(z)p''(z)}{(p'(z))^2} = \frac{k(k-1)q(z)^2 + 2k(z-\zeta)q(z)q'(z) + (z-\zeta)^2q(z)q''(z)}{(kq(z) + (z-\zeta)q'(z))^2},$$

$$\lambda_\zeta = N'_p(\zeta) = \frac{k(k-1)q(\zeta)^2}{k^2q(\zeta)^2} = \frac{k-1}{k}.$$

De esta forma las raíces de  $p$  son puntos fijos atractores.

Para el punto  $\infty$  se utiliza un cambio de coordenadas para calcular el multiplicador,  $w = \psi(z) = 1/z$ .

$$f(w) = (\psi \circ N_p \circ \psi^{-1})(w) = \frac{wp'(1/w)}{p'(1/w) - wp(1/w)}$$

$$f(w) = \frac{w \left( \sum_{i=1}^d i \alpha_i w^{1-i} \right)}{\left( \sum_{i=1}^d i \alpha_i w^{1-i} \right) - w \left( \sum_{i=0}^d \alpha_i w^{-i} \right)}$$

$$\frac{w^{d-1}}{w^{d-1}} f(w) = \frac{w \left( \sum_{i=1}^d i \alpha_i w^{d-i} \right)}{\left( \sum_{i=1}^d i \alpha_i w^{d-i} \right) - \left( \sum_{i=0}^d \alpha_i w^{d-i} \right)}$$

Para simplificar escribiremos  $\phi(w) = \sum_{i=1}^d i \alpha_i w^{d-i}$  y  $\varphi(w) = \sum_{i=0}^d \alpha_i w^{d-i}$ . El multiplicador quedaría  $\lambda_\infty = f'(0)$ .

$$f(w) = \frac{w\phi(w)}{\phi(w) - \varphi(w)}$$

$$f'(w) = \frac{(w\phi'(w) + \phi(w))(\phi(w) - \varphi(w)) - w\phi(w)(\phi'(w) - \varphi'(w))}{(\phi(w) - \varphi(w))^2}$$

$$f'(0) = \frac{\phi(0)}{\phi(0) - \varphi(0)}$$

$$f'(0) = \frac{d\alpha_d}{d\alpha_d - \alpha_d}$$

$$\lambda_\infty = \frac{d}{d-1}$$

□

Por los valores de los multiplicadores se ve que las raíces del polinomio  $p$  son puntos fijos atractores (super-atractores si son simples) del correspondiente mapeo de Newton  $N_p$ , y que el punto  $\infty$  es un punto fijo repulsor. Por otro lado, se puede ver que los puntos críticos de  $N_p$  son las raíces simples de  $p$  y los puntos de inflexión, i.e.  $z$  tales que  $p''(z) = 0$ , que sean diferentes de las raíces. Conocer los puntos fijos y los puntos críticos es de gran importancia al estudiar dinámica.

## 2.2. Dinámica de $N_p$

Sea  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  un mapeo holomorfo.

**Definición 4** (Conjuntos de Fatou y Julia). *Para cada punto  $z \in \overline{\mathbb{C}}$  se tiene lo siguiente: si existe alguna vecindad  $U$  de  $z$  en la cual la sucesión de iteradas  $\{f^{on}|_U\}$  forme una familia normal\*, se dice que  $z$  pertenece al conjunto de Fatou de  $f$ . En caso de que tal vecindad no exista, el punto  $z$  pertenece al conjunto de Julia de  $f$ .*

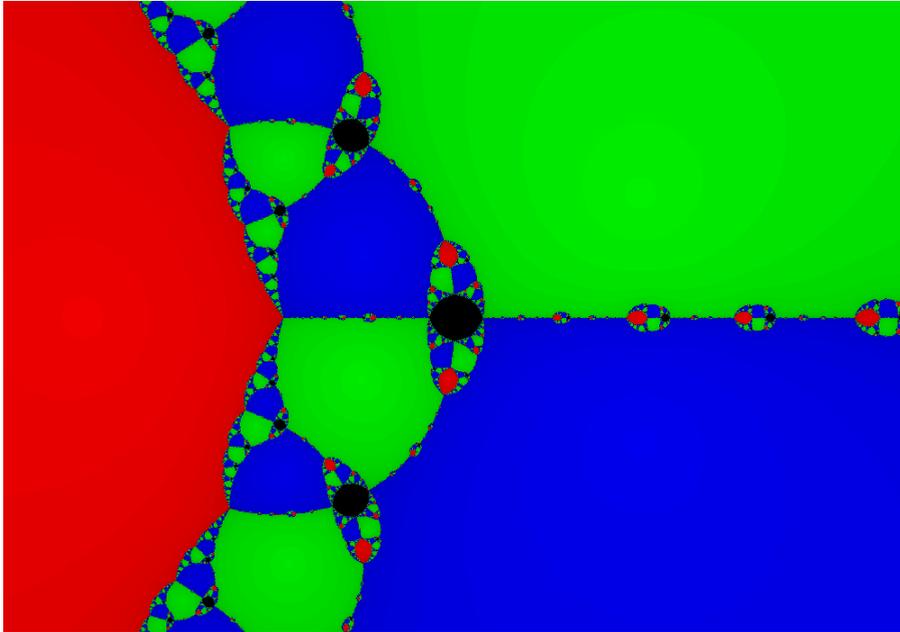
**Definición 5** (Cuencas de atracción). *Sea  $A$  un ciclo atractor de periodo  $k$  del mapeo  $f$ . La cuenca de atracción de  $A$  se define como el conjunto de todos los puntos  $z \in \overline{\mathbb{C}}$  que bajo las iteradas  $f^{ok}(z)$ ,  $f^{o2k}(z)$ , ..., convergen a algún punto en  $A$ .*

Algunas de las propiedades de estos conjuntos son las siguientes: (véase, por ejemplo, [12])

- El conjunto de Julia es invariante, es decir, si  $z$  pertenece al conjunto de Julia entonces  $f(z)$  también.
- Para toda  $n$ , el conjunto de Julia de  $f^{on}$  coincide con el conjunto de Julia de  $f$ .
- Toda órbita que converge a un ciclo atractor pertenece al conjunto de Fatou.

---

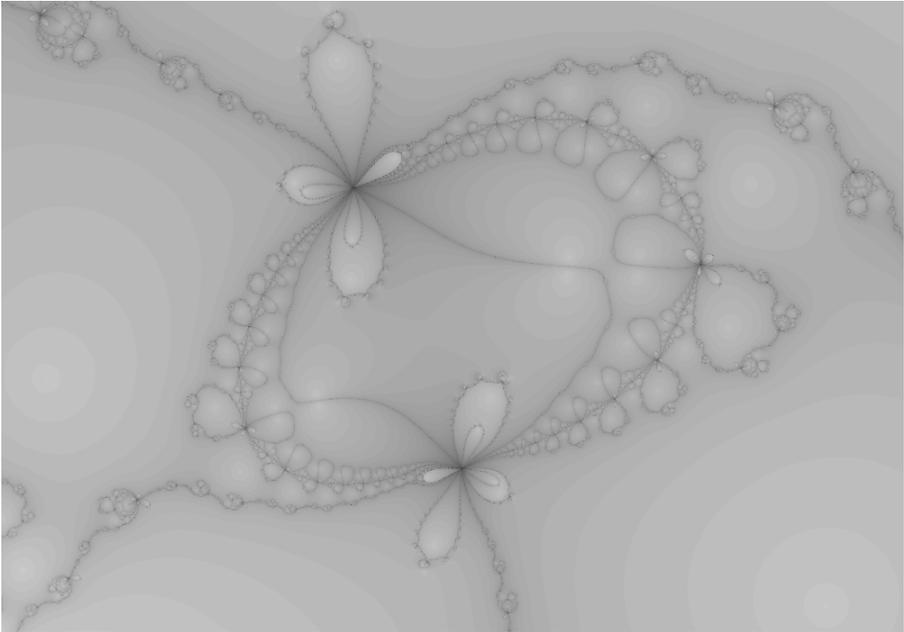
\*Una familia  $\{f : S \rightarrow T\}$  es normal, en el sentido de Montel, si su cerradura es compacta dentro del espacio  $\text{Hol}(S, T)$  conformado por todos los mapeos holomorfos entre las superficies de Riemann  $S$  y  $T$ , con la topología compacto-abierto, véase [12].



**Figura 2.1:** Cuencas de atracción de  $N_p$  con  $p(z) = z^3 - 2z + 2$

- Los puntos periódicos repulsores pertenecen al conjunto de Julia.
- Las cuencas de atracción pertenecen al conjunto de Fatou, más aún, los componentes de las cuencas de atracción coinciden con componentes del conjunto de Fatou.

Se resaltan algunas características generales de la dinámica de  $N_p$ ; las raíces de  $p$  son puntos fijos (super) atractores y cada uno tiene su respectiva cuenca de atracción, la cual consta de varios componentes conexos del conjunto de Fatou. Sin embargo, las raíces no son los únicos atractores que se pueden presentar, también pueden existir cuencas de atracción para ciclos de periodo  $k \geq 2$ . Tales cuencas y el conjunto de Julia de  $N_p$  son claros ejemplos de valores



**Figura 2.2:** Detalle del conjunto de Julia de  $N_p$  con un polinomio de grado 10

iniciales para los cuales el método no funciona, ya sea que el método llegue a un ciclo o se comporte de manera caótica.

Al elegir un punto  $\zeta_0$  como valor inicial para el Método de Newton puede suceder que éste pertenezca al conjunto de Julia de  $N_p$ , de forma que bajo las iteraciones del método  $\zeta_k$  siempre se encuentra dentro del conjunto de Julia, moviéndose de forma errática y provocando divergencia. Por otro lado,  $\zeta_0$  puede encontrarse en el conjunto de Fatou y, por lo tanto, pertenecer a alguna cuenca de atracción. Sin embargo, no es seguro que la cuenca a la cual pertenece  $\zeta_0$  corresponda a una raíz. Véase la figura 2.1, donde se muestra en colores diferentes las cuencas de cada raíz para  $p(z) = z^3 - 2z + 2$ .

Para encontrar todas las raíces de un polinomio sin recurrir a la deflación, la idea es emplear una construcción finita de valores iniciales que contenga al menos un punto en la cuenca de atracción de cada raíz. En adelante se asumirá que el grado de los polinomios a tratar es  $d \geq 2$  y que se encuentran *normalizados*, es decir, que las raíces de dichos polinomios se encuentran dentro del disco unitario abierto  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . A continuación veremos algunas características del mapeo de Newton para polinomios.

### 2.3. Geometría de $N_p$

**Lema 6** (Teorema de Gauss-Lucas). *El cierre convexo de las raíces de un polinomio  $p$  contiene todos los ceros de  $p'$ , así como todos los ceros de las derivadas de órdenes superiores. En particular, contiene todos los puntos críticos de  $N_p$ .*

*Demostración.* Sea  $p(z) = (z - \zeta_1)(z - \zeta_2)\dots(z - \zeta_d)$  un polinomio de grado  $d$  con raíces  $\zeta_i$ . Tomando la derivada logarítmica se tiene:

$$\frac{p'}{p} = \frac{1}{z - \zeta_1} + \frac{1}{z - \zeta_2} + \dots + \frac{1}{z - \zeta_d},$$

$$p' = (z - \zeta_1)(z - \zeta_2)\dots(z - \zeta_d) \left( \frac{1}{z - \zeta_1} + \frac{1}{z - \zeta_2} + \dots + \frac{1}{z - \zeta_d} \right).$$

Ahora bien, cualquier semiplano que contenga todas las raíces de  $p$  también contiene los ceros de su derivada: Para todo semiplano que contenga las raíces de  $p$  se puede conjugar el polinomio con una transformación afín de modo que, sin pérdida de generalidad, basta considerar el caso donde todas las raíces se encuentran en el semiplano  $\operatorname{Re}(z) \leq 0$ .

Sea  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $\operatorname{Re}(w) > 0$  y suponga que  $p'(w) = 0$ , entonces ya que  $\operatorname{Re}(\zeta_i) < 0$  para  $i = 1 \dots d$  se tiene que  $\operatorname{Re}(w - \zeta_i) > 0$  y  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{w - \zeta_i}\right) > 0$ , lo que lleva a una contradicción,  $\operatorname{Re}(p'(w)) > 0$ . Lo anterior indica que si  $p'(w) = 0$  entonces  $\operatorname{Re}(w) \leq 0$ .

Por lo tanto, cualquier semiplano que contenga todas las raíces de  $p$  debe contener también todos los ceros de  $p'$ . Por inducción, el cierre convexo de las raíces de  $p$  contiene a los ceros de  $p'$  y también los ceros de derivadas de órdenes superiores.  $\square$

**Lema 7** (Geometría asintótica de  $N_p$ ). Para  $|z| \geq 1$  se tienen las desigualdades,

$$\left| N_p(z) - \frac{d-1}{d}z \right| < \frac{1}{d},$$

$$|N_p(z)| < |z|.$$

*Demostración.* Sea  $p$  un polinomio con raíces  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_d$ , se puede escribir  $N_p$  como

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} = z - \frac{1}{\sum_{i=1}^d \frac{1}{z - \zeta_i}}.$$

Note que todos los puntos  $(z - \zeta_i)$  se encuentran en un disco  $D$  de radio 1 con centro en  $z$ . Ya que  $0 \notin D$  se puede decir que  $D' = \{w : w^{-1} \in D\}$  es otro disco en  $\mathbb{C}$  que contiene a todos los puntos  $1/(z - \zeta_i)$ . Por tanto

$$\begin{aligned} |z| - 1 &< |w| < |z| + 1, \quad \text{para todo } w \in D, \\ \frac{1}{|z| + 1} &< |w'| < \frac{1}{|z| - 1}, \quad \text{para todo } w' \in D'. \end{aligned}$$

Sumando los  $d$  puntos  $\frac{1}{z-\zeta_i} \in D'$  y aplicando la inversión

$$\frac{d}{|z|+1} < \left| \sum_i \frac{1}{z-\zeta_i} \right| < \frac{d}{|z|-1},$$

$$\frac{|z|-1}{d} < \left| \frac{1}{\sum_i \frac{1}{z-\zeta_i}} \right| < \frac{|z|+1}{d}.$$

De esto y del hecho de que la inversión manda discos en discos, se concluye que  $\left(\sum_i \frac{1}{z-\zeta_i}\right)^{-1}$  se encuentra dentro de un disco de radio  $1/d$  con centro en  $z/d$ . Ahora bien, se sigue que

$$\left| \frac{z}{d} - \frac{1}{\sum_i \frac{1}{z-\zeta_i}} \right| < \frac{1}{d},$$

$$\left| N_p(z) - \frac{d-1}{d}z \right| < \frac{1}{d}.$$

Aplicando la desigualdad triangular inversa al miembro izquierdo de la anterior se obtiene la desigualdad requerida

$$|N_p(z)| < \frac{d-1}{d}|z| + \frac{1}{d} \leq |z|.$$

□

**Teorema 8** (Linearización en  $\infty$ ). *Sea  $U = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > 1\}$ , existe un dominio  $V \subset U$  y un isomorfismo conforme  $g : U \rightarrow V$  tal que la función  $N_p \circ g$  es la identidad en  $U$ . Además, existe un mapeo uno a uno  $\phi : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  tal que*

$$\phi \circ N_p = \frac{d-1}{d}\phi$$

en  $V$ , y  $V$  contiene todas las  $z \in \overline{\mathbb{C}}$  tales que  $|z| > (d+1)/(d-1)$ .

*Demostración.* Sea  $g$  una rama de  $N_p^{-1}$  con  $\infty$  fijo; está definida para alguna vecindad de  $\infty$  y satisface  $|g(z)| > |z|$ . Es posible hacer una continuación analítica por curvas en  $U$  ya que, por el Lema 7, nunca se tiene que  $|g(z)| \leq |z|$ . Además, por el Lema 6, no hay puntos críticos de  $N_p$  en dicha continuación y dado que  $U$  es simplemente conexo, la extensión de  $g$  es única y tiene como inversa a  $N_p$ . Entonces  $g : U \rightarrow g(U) =: V$  es un isomorfismo conforme. A partir del Lema 7 es fácil ver que si  $|z| > (d+1)/(d-1)$  entonces  $|N_p(z)| > 1$  y por tanto  $z \in V$ .

Antes de continuar con la prueba, es necesario mencionar el siguiente teorema.

**Teorema** (Teorema de linearización de Koenig). *Sea  $f$  un mapeo racional con un punto fijo en el origen, si el multiplicador  $\lambda$  del punto fijo satisface que  $|\lambda| \neq 0, 1$ , entonces existe un cambio de coordenadas  $w = \varphi(z)$  holomorfo, con  $\varphi(0) = 0$  tal que  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  es el mapeo lineal  $w \mapsto \lambda w$  en una vecindad del origen. Además  $\varphi$  es único bajo multiplicaciones por constantes no nulas. Véase [12].*

Para el cálculo del multiplicador del punto  $\infty$  en la prueba de la Proposición 3 se hizo que éste correspondiera al origen y se calculó el multiplicador de 0 para  $f(z) = 1/N_p(z^{-1})$ , teniendo  $\lambda = \frac{d}{d-1}$ . Tomando la  $\varphi$  del Teorema de Koenig aplicado a  $f$ , éste es un mapeo tal que  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = \frac{d}{d-1}z$ . Haciendo  $\phi(z) = 1/\varphi(z^{-1})$  no es difícil ver que

$$\phi \circ N_p = \frac{d-1}{d} \phi.$$

□

El resultado anterior muestra que bajo el supuesto de normalización de  $p$ , el mapeo de Newton  $N_p$  tiene un comportamiento asintóticamente lineal en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ , es decir, existe un dominio para una linearización cerca de  $\infty$  por medio de un cambio de coordenadas conforme. Además en este dominio  $N_p$  es un mapeo conforme, debido a que en tal dominio  $N_p'$  no toma el valor de cero. Algo muy

importante de este dominio es que intersecta a todas las cuencas de atracción, es decir, para cada raíz del polinomio  $p$  existen puntos en el dominio que convergen a cualquier raíz de  $p$ .

**Definición 9** (Dominio fundamental). *Un dominio fundamental de la dinámica de un mapeo holomorfo  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  es un subconjunto de  $\overline{\mathbb{C}}$  que contiene un punto de cada órbita de  $f$ .*

Una forma de describir el dominio fundamental de la dinámica es la siguiente: Identificando cada punto con su correspondiente imagen bajo el mapeo de Newton se tiene una relación de equivalencia. El espacio cociente de  $\overline{\mathbb{C}}$  bajo tal relación de equivalencia es un dominio fundamental.

El cambio de coordenadas conforme de la prueba del Teorema 8 cumple que  $\infty$  es un punto fijo de la composición

$$\phi \circ N_p \circ \phi^{-1}(z) = \frac{d-1}{d}z.$$

Para un  $r$  suficientemente grande, un dominio fundamental de  $z \mapsto \frac{d-1}{d}z$  es un anillo de radio exterior  $r$  y radio interior  $\frac{d-1}{d}r^*$ . Bajo el cambio de coordenadas conforme  $\phi^{-1}$  este anillo es conformemente equivalente a un dominio fundamental de  $N_p$  contenido en el dominio  $V$ . Véase la figura 3.1 para un ejemplo. Será en una parte de un dominio fundamental como éste donde se buscarán las condiciones iniciales de la construcción propuesta. Sin pérdida de generalidad, es posible tomar cualquier raíz y estudiar la geometría de su cuenca de atracción dentro de un dominio fundamental de la dinámica de  $N_p$ .

---

\*Los círculos de la frontera de este dominio fundamental se identifican por definición, así que éste toma la forma de un toro. Modificando la definición para permitir que contenga un punto de cada órbita en el interior del dominio fundamental y dos puntos de cada órbita en su frontera podemos verlo, en este caso, como un anillo en el plano. Esta consideración será importante en el capítulo 3, sin embargo, las pruebas mostradas ahí pueden obtenerse de manera similar considerando dominios fundamentales en forma de toros, véase apéndice A.

### 2.3.1. Cuencas inmediatas

Hemos visto que la cuenca de una raíz  $\zeta$  de un polinomio  $p$  es el conjunto de puntos iniciales  $z$  los cuales convergen bajo el Método de Newton a dicha raíz. Estas cuencas son uniones de componentes conexos pertenecientes al conjunto de Fatou de  $N_p$ .

**Definición 10** (Cuenca inmediata). *Sea  $\zeta$  un punto fijo (super) atractor de un mapeo  $f$ . La cuenca inmediata de  $\zeta$  es el componente conexo de la cuenca de atracción que contiene a  $\zeta$ .*

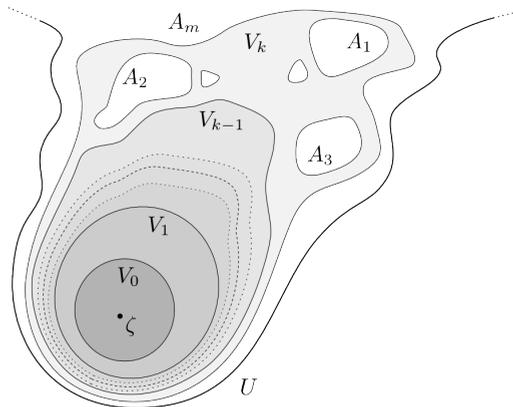
Veamos algunas propiedades de las cuencas inmediatas de las raíces de  $p$ .

**Teorema 11** (Las cuencas inmediatas son simplemente conexas). *Sea  $\zeta$  un punto fijo atractor de un mapeo racional  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  y sea  $U$  la cuenca inmediata asociada a  $\zeta$ . Si  $\partial U$  contiene no más de un punto fijo de  $f$ , entonces  $U$  es simplemente conexa. En particular, la cuenca inmediata de cada raíz  $\zeta$  del mapeo de Newton  $N_p$  es simplemente conexa.*

*Demostración.* Sea  $W_0$  una vecindad simplemente conexa de la raíz  $\zeta$  tal que  $\partial W_0$  sea una curva cerrada simple, ninguna orbita crítica intersekte a  $\partial W_0$  y  $W_0$  sea relativamente compacta a  $f^{-1}(W_0)$ .

Ahora se define  $W_k = U \cap f^{-k}(W_0)$  y sea  $V_k$  el componente conexo de  $W_k$  que contiene a  $\zeta$ . Las fronteras de las componentes  $V_k$  son curvas cerradas simples. Nótese que la unión  $V = \bigcup_k V_k$  es un subconjunto abierto de  $U$ , cuya frontera está contenida en  $\partial U$ , por lo que  $V = U$ . En caso de que todos los  $V_k$  sean simplemente conexos,  $U$  es simplemente conexo.

Por otro lado, suponiendo que  $U$  no fuese simplemente conexo, existe un primer  $k$  tal que  $V_k$  no es simplemente conexo. (Figura 2.3) Sean  $A_1, A_2, \dots, A_m$  los componentes conexos de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus V_k$ , veamos que cada uno contiene un punto fijo de  $f$ , tomemos uno y llamémoslo  $A$ .



**Figura 2.3:** La cuenca de atracción  $U$ .

Como  $V_k \setminus \bar{V}_{k-1}$  es conexo por trayectorias, se puede tomar un arco  $\gamma_0$  en  $\bar{V}_k \setminus V_{k-1}$  que conecte un punto  $z_1 \in \partial A$  con un  $z_0 = f(z_1) \in \partial V_{k-1}$ , tal que evite las orbitas de los puntos críticos en  $U$ . Sea  $\gamma_1$  el componente de  $f^{-1}(\gamma_0)$  que comienza en  $z_1$ , suponga que termina en  $z_2$  y que continúa de esta forma: sea  $\gamma_{j+1}$  el componente de  $f^{-1}(\gamma_j)$  que comienza en  $z_{j+1}$  y termina en  $z_{j+2}$ . Ahora sea  $\gamma$  un arco simple formado por la unión de todos estos arcos  $\gamma_i$ , éste se encuentra contenido completamente en  $A$ . Entonces  $z_1, z_2, \dots$  forman una sucesión en  $A$  y veremos que dicha sucesión converge a un punto fijo de  $f$ .

Existe una  $n$  para la cual  $W_n$  contiene todos los puntos críticos de  $f$  en  $U$ . Entonces  $f : U \setminus \bar{W}_{n+1} \rightarrow U \setminus \bar{W}_n$  es un mapeo cubriente, y también una isometría local en la métrica de Poincaré\* de los dos espacios; en particular, es estrictamente expansiva si se usa la métrica de Poincaré de  $U \setminus \bar{W}_n$  en el dominio y el rango.

\*La métrica de Poincaré en el semiplano superior  $\mathbb{H}$  esta dada por  $ds = |dw|/v$ , donde  $dw$  es la métrica Euclídiana y  $w = u + iv$ . Toda superficie hiperbólica  $S$  tiene una cubierta universal  $\tilde{S} \cong \mathbb{H}$ . La métrica  $dw$  en  $\mathbb{H}$  llevada a  $S$  bajo la proyección  $\mathbb{H} \cong \tilde{S} \rightarrow S$  es llamada la *métrica de Poincaré* de  $S$ . Véase [12].

Los arcos  $\gamma_i$  están en  $U \setminus \overline{W}_n$  cuando  $i + k \geq n$ , y en la métrica de Poincaré de  $U \setminus \overline{W}_n$  los  $\gamma_i$  son cada vez más cortos. Dado que se acumulan en  $\partial U$ , significa que su longitud esférica tiende a cero y por lo tanto se acumulan en un subconjunto conexo de  $\partial U$  que es fijo por puntos y por lo tanto un sólo punto fijo en  $A$ .

Si  $\partial U$  sólo contiene un punto fijo, entonces  $\overline{\mathbb{C}} \setminus V_k$  debe ser conexo para cada  $k$ , y así tanto cada  $V_k$  como  $U$  son simplemente conexos. Dado que el único punto fijo del mapeo de Newton  $N_p$  que no es una raíz es  $\infty$ , todas las cuencas inmediatas de las raíces son simplemente conexas.  $\square$

Las cuencas inmediatas de las raíces son simplemente conexas y, por lo siguiente, son conformemente equivalentes al disco abierto unitario  $\mathbb{D}$ .

**Teorema** (Teorema del mapeo de Riemann). *Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  una región simplemente conexa tal que  $\Omega \neq \mathbb{C}$ . Entonces existe un isomorfismo conforme  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ . Además, dado un  $z_0 \in \Omega$  se puede encontrar un  $f$  tal que  $f(z_0) = 0$  y  $f'(z_0) > 0$ . Bajo estas especificaciones  $f$  es único. Para más sobre este teorema véase [11].*

### 2.3.2. Accesos a $\infty$ y canales

Una observación importante es que toda cuenca inmediata tiene al punto  $\infty$  en su frontera, razón por la que se pueden encontrar arcos simples dentro de la cuenca inmediata que conecten a la raíz y a  $\infty$ .

**Definición 12** (Accesos a  $\infty$ ). *Sean  $\zeta$  una raíz del polinomio  $p$  y  $U_\zeta$  su cuenca inmediata correspondiente. Un acceso a  $\infty$  en  $U_\zeta$  es el conjunto de curvas  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow U_\zeta$ , con  $\gamma(0) = \zeta$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \infty$ , tales que cualquier par de curvas en el acceso son homotópicas. Curvas que no son homotópicas pertenecen a accesos distintos.*

Ahora veremos cómo contar el número de accesos que contiene la cuenca inmediata de cada raíz. Sea  $m_\zeta$  el número de puntos críticos de  $N_p$  en  $U_\zeta$ , contados con multiplicidad. Es un hecho conocido que toda cuenca inmediata contiene al menos un punto crítico\*, por ejemplo, en el caso de las raíces simples, la misma raíz es un punto crítico. La restricción  $N_p : U_\zeta \rightarrow U_\zeta$  es una función propia y es de grado  $d_\zeta$ . Con la fórmula de Riemann-Hurwitz se puede determinar  $d_\zeta$ .

**Teorema** (Fórmula de Riemann-Hurwitz). *Sea  $f : T \rightarrow S$  un mapeo cubriente entre las superficies de Riemann  $T$  y  $S$ . El número de puntos críticos de  $f$ , contados con multiplicidad, es igual a  $\chi(S)d - \chi(T)$ , donde  $\chi$  es la característica de Euler y  $d$  es el grado de  $f$ . Véase [12].*

Para el mapeo de Newton restringido a la cuenca inmediata, la fórmula de Riemann-Hurwitz da  $m_\zeta = d_\zeta - 1$ , de donde se tiene

$$d_\zeta = 1 + m_\zeta.$$

**Teorema 13** (Accesos a  $\infty$ ). *Cada  $U_\zeta$  tiene exactamente  $m_\zeta$  accesos a  $\infty$ .*

*Demostración.* Sea  $\phi : \mathbb{D} \rightarrow U_\zeta$  el isomorfismo conforme dado por el Teorema del mapeo de Riemann, único bajo las condiciones  $\phi(0) = \zeta$  y  $\phi'(0) > 0$ .

Como ya vimos, el grado de  $N_p$  restringido a  $U_\zeta$  es  $1 + m_\zeta$ . Éste también es el grado del mapeo  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  dado por  $f = \phi^{-1} \circ N_p \circ \phi$ . Por el Principio de Reflexión de Schwarz\*\*, se puede extender  $f$  haciendo  $f(z) = f(1/\bar{z})$  para  $|z| > 1$ , y por continuación para  $|z| = 1$ , obteniendo un mapeo holomorfo  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , el cual tiene  $m_\zeta + 2$  puntos fijos en  $\overline{\mathbb{C}}$ , contando multiplicidades; entre éstos están 0 e  $\infty$ , los cuales atraen a  $\mathbb{D}$  y a  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  respectivamente. Hay  $m_\zeta$  puntos fijos  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m_\zeta}$  que deben estar en el círculo unitario  $\mathbb{S}^1$ .

---

\*Para un punto fijo atractor  $\xi = f(\xi)$ , existe un disco de radio maximal  $\mathbb{D}_r$  con centro en  $0 = \varphi(\xi)$ , tal que la inversa de la coordenada de Koenig  $\varphi^{-1}$  puede extenderse analíticamente a  $\varphi^{-1} : \mathbb{D}_r \rightarrow U_\xi$  de forma que  $\varphi^{-1}(\partial\mathbb{D}_r) \subset U_\xi$  necesariamente contiene un punto crítico de  $f$ . Véase [12].

\*\*En este caso se trata de una aplicación del Principio de Reflexión de Schwarz para círculos, para más detalles véase [11].

Ya que tanto  $\mathbb{D}$  como  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  son las cuencas de atracción de 0 e  $\infty$ ,  $f$  no puede tener puntos críticos en  $\mathbb{S}^1$ , y  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  es de grado  $m_\zeta + 1$ . Además, todas las  $f'(\xi_i)$  son positivas y reales. Los puntos  $\zeta_i$  son repulsores, de otra forma, ya sean atractores o neutrales (parabólicos) atraerían puntos en  $\mathbb{D}$ .

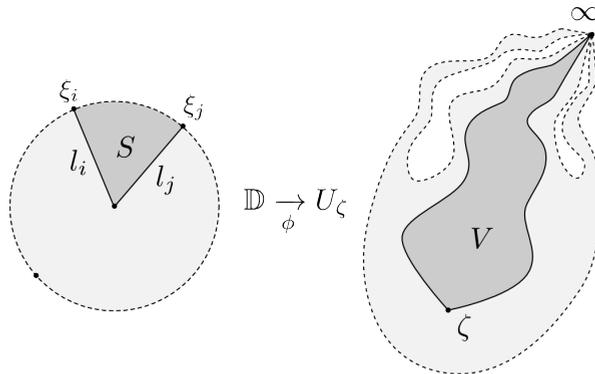
En algunos casos  $\phi$  puede ser extendido continuamente a las cerraduras,  $\phi : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{U_\zeta}$ . Asumiendo que  $\phi$  se puede extender continuamente a la frontera, entonces los  $m_\zeta$  puntos fijos de  $f$  en  $\mathbb{S}^1$  serían mapeados a  $m_\zeta$  puntos fijos de  $N_p$  en  $\partial U_\zeta$ . El único punto fijo de  $N_p$  en  $\partial U_\zeta$  es  $\infty$ , así que los puntos  $\xi_i$  son mapeados en  $\infty$  y decimos que  $U_\zeta$  se extiende hacia  $\infty$  en  $m_\zeta$  direcciones diferentes.

Sin embargo,  $\phi$  no siempre puede extenderse a la frontera  $\partial \mathbb{D}$ , ya que la frontera  $\partial U_\zeta$  puede ser demasiado complicada.

**Teorema** (Teorema de Riesz y Riesz). *Para un conjunto simplemente conexo  $U \subset \overline{\mathbb{C}}$  con complemento infinito y un isomorfismo conforme  $\phi : \mathbb{D} \rightarrow U$  se tiene lo siguiente: Para casi todos los puntos  $e^{i\theta} \in \partial \mathbb{D}$  el radio  $r \mapsto re^{i\theta}$  es llevado por  $\phi$  a una curva dentro de  $U$  con longitud finita en la esfera. En particular, existe el limite radial  $\lim_{r \nearrow 1} \phi(re^{i\theta}) \in \partial U$  para  $\mu$ -casi todo  $\theta$ , donde  $\mu$  es de Lebesgue. Por otra parte, si se fija un punto  $w_0 \in \partial U$  entonces el conjunto de  $\theta$  cuyo limite radial es  $w_0$  tiene medida de Lebesgue cero. Para más detalles véase [12].*

Para el caso en que la frontera  $\partial U_\zeta$  no sea localmente conexa, es decir, que  $\phi$  no se pudiera extender continuamente a la frontera, el argumento anterior se mantiene. Sea  $\gamma \subset \mathbb{D}$  un arco no tangencial que lleva hacia  $\xi_i$  tal que  $f(\gamma) \supset \gamma$ .  $f(\gamma)$  lleva a un punto fijo de  $N_p$  en  $\partial U_\zeta$  ya que el conjunto de acumulación de  $f(\gamma)$  es fijo por puntos, pero  $\infty$  es el único punto fijo que no es una raíz. Esto da los  $m_\zeta$  accesos a  $\infty$ .

Todas las curvas no tangenciales que convergen a un punto fijo en  $\mathbb{S}^1$  son homotópicas entre las curvas no tangenciales dentro de  $\mathbb{D}$ , por eso es que cada punto fijo da pie a un único acceso a  $\infty$  en  $U_\zeta$ . Diferentes puntos fijos de  $f$  en  $\mathbb{S}^1$  llevan a curvas no homotópicas en  $U_\zeta$  y por lo tanto a accesos diferentes.

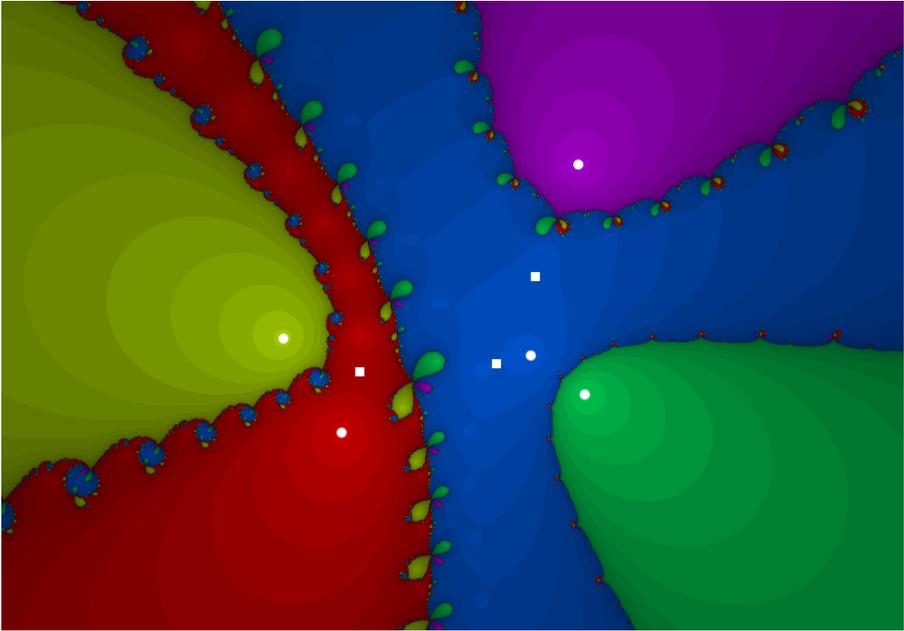


**Figura 2.4:** Diferentes puntos críticos dan lugar a diferentes accesos.  $\phi(S) \neq V$ .

Sean  $l_i, l_j \subset \mathbb{D}$  radios hacia  $\xi_i, \xi_j$  con  $i \neq j$ . Si  $\phi(l_i)$  y  $\phi(l_j)$  son homotópicas en  $U$  de forma que sus extremos finales coincidan en  $\infty$ , entonces una componente acotada por la curva cerrada simple  $\phi(l_i) \cup \phi(l_j)$  debe estar contenida completamente en  $U_\zeta$ , sea dicho componente  $V$ . Ahora,  $\phi^{-1}(V)$  debe ser un sector acotado por los radios  $l_i$  y  $l_j$ , sea ese sector  $S$ .

Tanto  $V$  como  $S$  son dominios de Jordan, es decir, su frontera es una curva cerrada simple. Así, por el Teorema de Caratheodory,  $\phi$  se extiende como homeomorfismo a las cerraduras,  $\phi : \bar{S} \rightarrow \bar{V}$ . Pero  $\phi(\mathbb{S}^1 \cap \bar{S})$  no tiene donde ser mapeado en  $\bar{V}$ . (Figura 2.4) Por lo tanto  $l_i$  y  $l_j$  pertenecen a diferentes clases de homotopía y los accesos asociados son diferentes.

Ahora veremos que todo acceso a  $\infty$  en  $U_\zeta$  proviene de un punto fijo de  $f$  en  $\mathbb{S}^1$ . Suponga que  $\gamma \subset \mathbb{D}$  es un arco simple tal que  $\phi(\gamma)$  pertenece a un acceso a  $\infty$  en  $U_\zeta$ , entonces  $\gamma$  lleva a un sólo punto en  $\mathbb{S}^1$ , de lo contrario, se acumularía en un intervalo conexo  $I \subset \mathbb{S}^1$ . Por el Teorema de Riesz, el conjunto de ángulos  $\vartheta \in I$  para los cuales el límite  $\lim_{r \rightarrow 1} \phi(re^{i\vartheta})$  existe, tiene complemento de medida cero.



**Figura 2.5:** Accesos y puntos críticos para un polinomio de grado 5.

Un radio en el ángulo  $\vartheta$  intersecta a  $\gamma$  en un conjunto que se acumula en  $e^{i\vartheta}$ , entonces el límite anterior siempre es igual a  $\infty$ . Pero el conjunto de puntos que tiene como límite a  $\infty$  debe ser de medida cero.

Sea  $\gamma$  una curva en  $U_\zeta$  que une  $\zeta$  con  $\infty$  a la que se le asocia un  $\vartheta \in \mathbb{S}^1$ ; entonces, para todo  $k \geq 1$ ,  $N_p^{\circ k}(\gamma)$  tiene un  $\vartheta_k$  asociado. Dado que cada punto fijo de  $f$  en  $\mathbb{S}^1$  da pie a un acceso y  $N_p$  es un homeomorfismo local cerca de  $\infty$  todos los  $\vartheta_k$  deben estar contenidos en el mismo componente conexo de  $\mathbb{S}^1$  con los puntos fijos removidos. Este componente es un intervalo  $I$  en el cual  $\{\vartheta_k\}$  debe ser una sucesión monótona que converge bajo  $f$  a un punto fijo  $\vartheta$  en  $\bar{I}$ , es decir, a uno de sus extremos. Pero ya que estos son repulsores, no puede existir dicha sucesión, a menos que sea constante.  $\square$

La cuenca inmediata de cada raíz  $\zeta$  del polinomio  $p$  se extiende en  $m_\zeta$  direcciones hacia el infinito, en otras palabras, fuera del disco unitario hay  $m_\zeta$  canales, los cuales tienen una forma que se repite en cada dominio fundamental de la dinámica. En la figura 2.5\* se muestra un ejemplo de las cuencas de  $N_p$ ; se marcan los puntos críticos en blanco, las raíces de  $p$  con círculos y los puntos de inflexión de  $p$  con cuadrados. En la figura 2.6 se muestran las cuencas sobre la esfera, nótese que todas comparten el punto  $\infty$  en sus fronteras.

**Definición 14** (Canales de  $U_\zeta$ ). *Para la cuenca inmediata  $U_\zeta$  de la raíz  $\zeta$ , los canales son los componentes no acotados de  $U_\zeta \setminus \overline{\mathbb{D}}$ .*

Cada acceso a  $\infty$  de  $U_\zeta$  corresponde a un único canal de  $\zeta$  y está contenido en el dominio de linearización de  $N_p$ . De esta forma, se tiene que todo círculo centrado en el origen y fuera de  $\mathbb{D}$  intersecta a todos los canales y, por tanto, a todas las cuencas inmediatas. Éste es un buen lugar para comenzar la búsqueda de valores iniciales.

---

\* El polinomio usado en las figuras 2.5 y 2.6 es  $p(z) = z^5 - (0,206488 - 0,55314i)z^4 - (0,505138 + 0,608212i)z^3 + (0,653312 + 0,087231i)z^2 - (0,021203 - 0,485632i)z - (0,119047 + 0,120049i)$ .

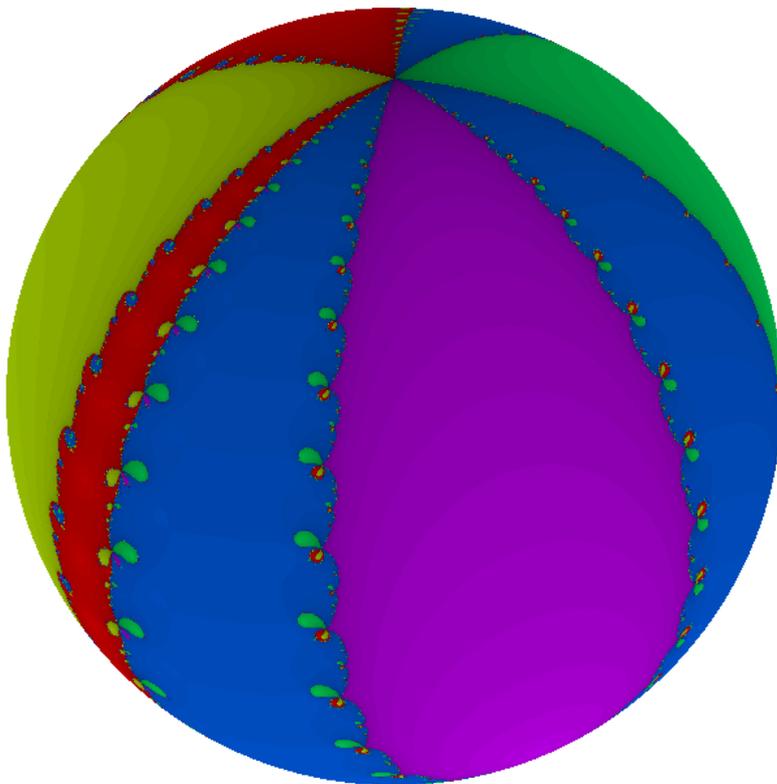


Figura 2.6: Vista de las cuencas sobre  $\overline{\mathbb{C}}$



## Capítulo 3

# Construcción Inevitable

### 3.1. Anchura de los canales

En el dominio de linearización  $V$ , los dominios fundamentales de  $N_p$  tienen forma de anillos y  $N_p$  actúa llevando cada dominio fundamental en el siguiente, manteniendo su forma ya que es conforme dentro de  $V$ . En la figura 3.1 se puede apreciar un ejemplo de la forma de un dominio fundamental. Se medirá la anchura de los canales usando el *módulo conforme* de los cuadriláteros formados por la intersección del canal y un dominio fundamental de la dinámica.

**Definición 15** (Cuadrilátero generalizado). Sean  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un conjunto simplemente conexo y  $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$  cuatro puntos diferentes en  $\partial\Omega$ , dados en orden contrarreloj, a los que llamaremos vértices. La quintupla  $Q = (\Omega, q_1, q_2, q_3, q_4)$  es un cuadrilátero generalizado.

Si  $\partial\Omega$  está dada por la curva cerrada simple  $\gamma_\Omega : [0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , tal que  $\gamma_\Omega(0) = \gamma_\Omega(1) = q_1$  y  $\gamma_\Omega^{-1}(q_i) < \gamma_\Omega^{-1}(q_{i+1})$ , entonces los lados de  $Q$  son los segmentos de curva:

$$\begin{aligned}\overline{q_1q_2} &= \gamma_\Omega([0, \gamma_\Omega^{-1}(q_2)]), \\ \overline{q_2q_3} &= \gamma_\Omega([\gamma_\Omega^{-1}(q_2), \gamma_\Omega^{-1}(q_3)]), \\ \overline{q_3q_4} &= \gamma_\Omega([\gamma_\Omega^{-1}(q_3), \gamma_\Omega^{-1}(q_4)]), \\ \overline{q_4q_1} &= \gamma_\Omega([\gamma_\Omega^{-1}(q_4), 1]).\end{aligned}$$

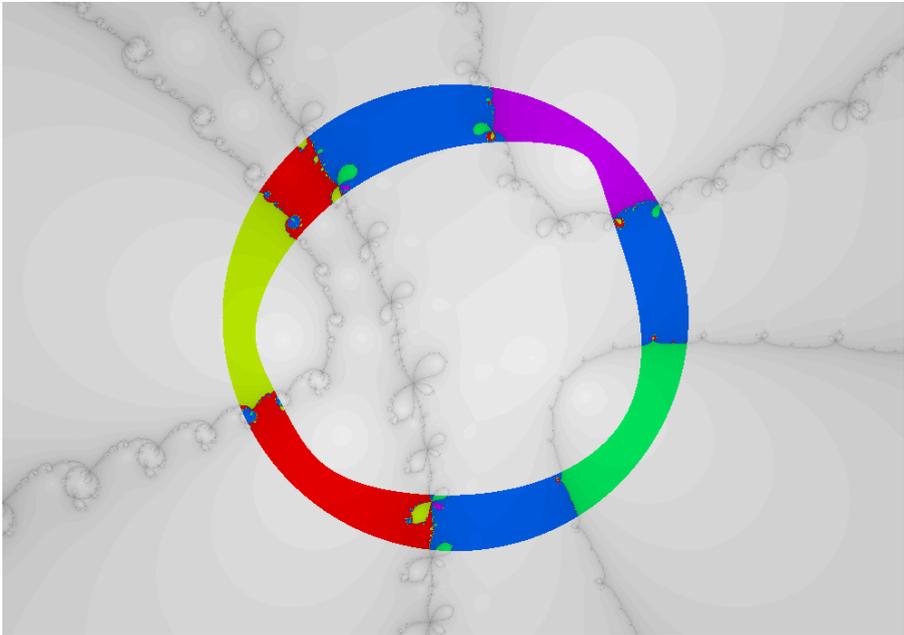
**Definición 16** (Módulo de rectángulos). Sea  $R = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < A, 0 < \operatorname{Im}(z) < B\}$  con  $A, B \in \mathbb{R}^+$  un rectángulo. El módulo de  $R$  es la razón entre la altura y la base,

$$\operatorname{Mod}(R) = \frac{B}{A}.$$

El Teorema de mapeo de Riemann tiene como corolario la existencia de isomorfismos conformes entre cualquier pareja de regiones simplemente conexas. Sin embargo, al considerar el caso de transformaciones de cuadriláteros generalizados en rectángulos  $\psi : \Omega \rightarrow R$ , donde los vértices de uno se ven mapeados en los vértices del otro, se tiene que el módulo del rectángulo resultante es único. (Véanse [1, 6, 12].) A partir de esto se puede extender la definición del módulo a los cuadriláteros generalizados.

**Definición 17** (Módulo de cuadriláteros). Sean  $Q = (\Omega, q_1, q_2, q_3, q_4)$  un cuadrilátero generalizado y  $\psi : \Omega \rightarrow R$  el isomorfismo conforme dado por el Teorema del mapeo de Riemann, único bajo las condiciones  $\psi(q_1) = 0$ ,  $\psi(q_2) = 1$ ,  $\psi(q_3) = 1 + iM$ ,  $\psi(q_4) = iM$ . El número real  $M$  que surge del isomorfismo es el módulo  $\operatorname{Mod}(Q) = M$ .

Nótese que la noción de *base* y *altura* relacionadas con la orientación de los rectángulos también aplica a los cuadriláteros generalizados. Dependiendo de que vértice se tome en primer lugar, el módulo del cuadrilátero varía. El rectángulo  $R$  con vértices  $0$ ,  $1$ ,  $1 + iM$  y  $iM$  tiene módulo  $\operatorname{Mod}(Q) = M$ , mientras que, bajo la



**Figura 3.1:** Ejemplo de un dominio fundamental de  $N_p$

transformación conforme  $\sigma(z) = \frac{i}{M}z + 1$ , el rectángulo  $R' = \sigma(R)$  tiene vértices  $0$ ,  $1$ ,  $1 + \frac{i}{M}$  y  $\frac{i}{M}$  por lo que su módulo es  $Mod(R') = \frac{i}{M}$ . Es por esto que se dice que el módulo del cuadrilátero generalizado  $Q$  es único bajo rotaciones del rectángulo  $R = \psi(Q)$ , las cuales corresponden a rotaciones en el orden de los vértices en la definición de  $Q$ .

Suponiendo que la frontera del dominio fundamental intersecta a cada canal en arcos conexos, la superficie resultante de la intersección es un cuadrilátero, con vértices en las intersecciones de las fronteras. Tomaremos por conveniencia como la base de tales cuadriláteros a los lados sobre la frontera del canal. El módulo de tales cuadriláteros es igual para cualquier dominio fundamental en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$  ya que  $N_p$  restringido a este espacio es un mapeo conforme.

**Teorema 18** (Anchura de los canales). *Si el número de puntos críticos del mapeo de Newton en alguna cuenca inmediata es  $m_\zeta$ , contando multiplicidades, dicha cuenca tiene un canal que intersecta al dominio fundamental en un cuadrilátero con módulo de al menos  $\pi/\log(m_\zeta + 1)$ . En particular, toda cuenca tiene un canal que intersecta al dominio fundamental en un cuadrilátero con modulo de al menos  $\pi/\log(d)$ , donde  $d$  es el grado del polinomio.*

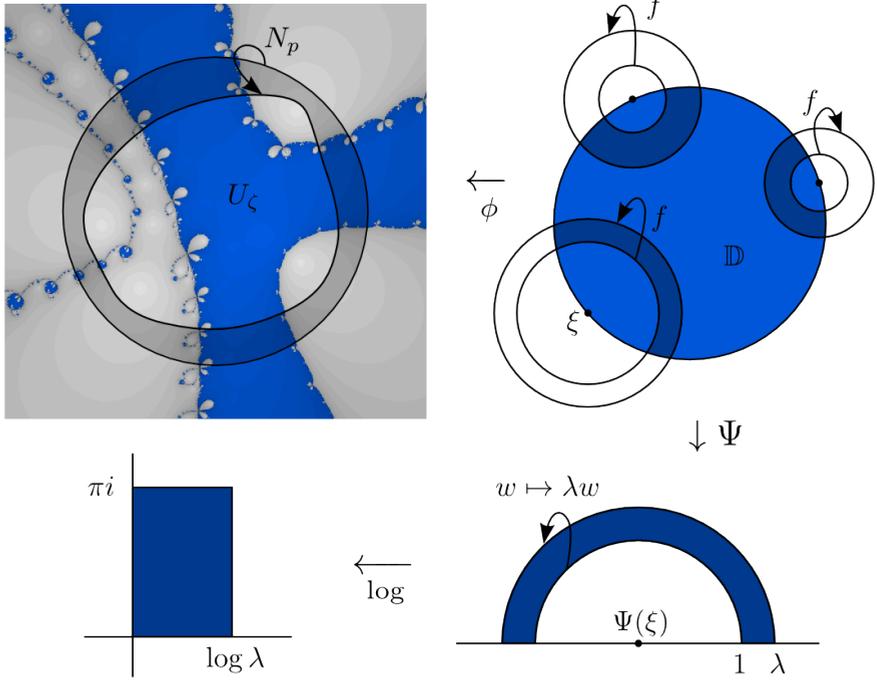
*Demostración.* Sean  $U_\zeta$  la cuenca inmediata de una raíz  $\zeta$  y  $\phi : \mathbb{D} \rightarrow U_\zeta$  el isomorfismo conforme dado por el Teorema del mapeo de Riemann, con  $\phi(0) = \zeta$ . Elijamos un punto fijo  $\xi \in \mathbb{S}^1$  del mapeo  $f = \phi^{-1} \circ N_p \circ \phi$  extendido a  $\overline{\mathbb{C}}$  como el de la prueba del Teorema 13. El punto  $\xi$  es repulsor con multiplicador real positivo  $\lambda_\xi > 1$ . Note que aunque todos los puntos fijos de  $f$  en  $\mathbb{S}^1$  corresponden al punto fijo  $\infty$  de  $N_p$ , sus multiplicadores no tienen relación entre sí; esto se debe a que no puede haber conjugación en vecindades del infinito y así, en general, todos los puntos fijos de  $f$  en  $\mathbb{S}^1$  tienen multiplicadores diferentes.

Considere un cambio de coordenadas conforme  $\Psi$  para linearizar en una vecindad  $W$  de  $\xi$ , tal que  $\Psi(\xi) = 0$  y  $\mathbb{S}^1 \cap W$  se encuentre en el eje real de forma que  $\mathbb{D} \cap W$  quede en el semiplano superior. De esta manera, la dinámica de  $f$  se transforma en la del mapeo lineal  $z \mapsto \lambda_\xi z$  y el canal correspondiente a  $\xi$  queda sobre el semiplano superior, donde los dominios fundamentales son semi-anillos con radios múltiplos de  $\lambda_\xi$ , estos semi-anillos son conformemente equivalentes a la intersección del canal con algún dominio fundamental de  $N_p$  y tienen módulo conocido  $\pi/\log(\lambda_\xi)$ . Véase la figura 3.2. Se requerirá lo siguiente:

**Lema** (Fórmula holomorfa del punto fijo). *Para todo mapeo holomorfo  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  distinto de la identidad se tiene:*

$$\sum_{\xi \in \text{Fix}(f)} \frac{1}{\lambda_\xi - 1} = -1$$

donde la suma es sobre los puntos fijos de  $f$  y  $\lambda_\xi \neq 1$  es el multiplicador. Véase [12].



**Figura 3.2:** Estimación de la anchura de los canales. Se muestra la cuenca inmediata  $U_\zeta$  y el efecto de la linealización alrededor de los puntos  $\phi^{-1}(\infty)$ .

Los puntos  $0$  e  $\infty$  son puntos fijos atractores de  $f$ . Si  $k$  es la multiplicidad de la raíz  $\zeta$  en consideración, entonces  $\lambda_0 = f'(0) = N_p'(\zeta) = (k-1)/k$  con  $k \geq 1$ . Por simetría  $\lambda_\infty = \lambda_0$  y tanto  $0$  como  $\infty$  contribuyen a la suma con  $-k$  cada uno. Los puntos fijos de  $f$  que quedan son  $m_\zeta$  puntos repulsivos en  $\mathbb{S}^1$ , sumando sobre ellos se tiene:

$$\sum_{\xi \in \mathbb{S}^1} \frac{1}{\lambda_\xi - 1} = 2k - 1 \geq 1.$$

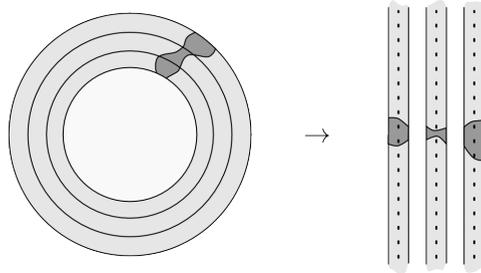
Dado que todos los multiplicadores  $\lambda_\xi > 1$  son reales, debe haber al menos un  $\xi$  que cumpla  $1/(\lambda_\xi - 1) \geq 1/m_\zeta$ , y así  $\lambda_\xi \leq m_\zeta + 1$  por lo que el módulo del canal asociado es al menos  $\pi/\log(m_\zeta + 1)$ .

Recuerde que  $m_\zeta + 1$  es el grado de la restricción de  $N_p$  a la cuenca inmediata  $U_\zeta$ , y que  $m_\zeta + 1$  no puede exceder el grado de  $N_p$ , que es a lo más  $d$ . Ya que  $m_\zeta + 1 \leq d$ , el módulo de cualquier canal debe ser al menos  $\pi/\log(d)$ .  $\square$

## 3.2. Dándole a los canales

En un principio puede parecer claro el procedimiento a seguir para obtener todas las raíces; fuera del disco unitario, el dominio fundamental de  $N_p$  tiene forma de anillo y sabemos que cada cuenca inmediata debe tener un canal con cierta anchura mínima. Si se distribuyen los suficientes puntos dentro de algún dominio fundamental es posible asegurar que los canales no pueden *evitarlos*. Siguiendo la forma del dominio fundamental se pueden colocar los puntos sobre un círculo, repartidos a la misma distancia, la cual dependerá de la anchura mínima.

No obstante, es geoméricamente posible que un canal cuyo módulo sea relativamente grande se vuelva particularmente angosto en algún lugar de cada dominio fundamental. En el peor caso esto sucedería justo en el círculo que contiene los puntos. Surge entonces la idea de colocar los puntos repartidos en varios círculos dentro del mismo dominio fundamental (Véase la figura 3.3). Esto trae dos ventajas: que la cantidad de puntos en cada círculo se vea reducida y, por otra



**Figura 3.3:** Izquierda: Dominio fundamental dividido en  $s = 3$  subanillos. Derecha: Transformación de los subanillos en barras y distribución de puntos.

parte, que es posible llegar a un resultado independiente del grado del polinomio. (En [8] se hace la comparación de esta construcción con la de un sólo círculo, la cual requiere de cálculos para cada grado.)

Si suponemos que fuera de  $\mathbb{D}$  el mapeo de Newton es idéntico a  $z \mapsto z(d-1)/d$ , un dominio fundamental tendría la forma de un anillo recto, es decir, que sus fronteras serían círculos de radios  $R$  y  $R(d-1)/d$ . Este anillo se podría dividir en  $s$  subanillos conformemente equivalentes sobre los que se colocarían los puntos. Sin embargo, la forma de los dominios fundamentales no es precisamente la de un anillo recto. Será necesario encontrar un anillo recto contenido en un dominio fundamental, de manera que las cotas calculadas sigan siendo válidas para los cálculos posteriores.

**Teorema 19** (Dominio Fundamental). *Para un radio  $R > (d+1)/(d-1)$  existe un  $\kappa \in (0, 1)$  tal que el anillo*

$$V_\kappa = \left\{ z \in \mathbb{C} : R \left( \frac{d-1}{d} \right)^\kappa < |z| < R \right\}$$

*esta contenido en un dominio fundamental de la dinámica.*

*Demostración.* Sea  $R > (d + 1)/(d - 1)$  y  $C_R$  un círculo de radio  $R$  centrado en el origen. Por el Teorema 8, la imagen de  $C_R$  es una curva cerrada simple que se encuentra alrededor del disco unitario. La región entre  $C_R$  y su imagen  $N_p(C_R)$  es equivalente a un anillo, el cual es un dominio fundamental de la dinámica. Por el Lema 7, todo punto en la curva  $N_p(C_R)$  tiene una distancia al origen de al menos  $(d - 1)R/d + 1/d$ .

Sea  $\kappa$  tal que

$$\begin{aligned} R \left( \frac{d-1}{d} \right)^\kappa &\geq \frac{(d-1)R}{d} + \frac{1}{d}, \\ \left( 1 - \frac{1}{d} \right)^\kappa &\geq 1 - \frac{1}{d} + \frac{1}{Rd}, \\ \kappa \left| \log \left( 1 - \frac{1}{d} \right) \right| &\leq \left| \log \left( 1 - \frac{1}{d} + \frac{1}{Rd} \right) \right|, \\ \kappa &\leq \frac{\left| \log \left( 1 - \frac{1}{d} + \frac{1}{Rd} \right) \right|}{\left| \log \left( 1 - \frac{1}{d} \right) \right|}, \end{aligned}$$

entonces el anillo  $V_\kappa$  esta contenido dentro del dominio fundamental de la dinámica. Nótese que para  $\kappa$  suficientemente cerca de 0 la desigualdad se cumple, y que, para valores de  $R \rightarrow \infty$ ,  $\kappa$  puede acercarse arbitrariamente a 1.  $\square$

El número  $\kappa$  mide el tamaño de un anillo que cabe dentro de un dominio fundamental relativo al tamaño esperado en la linearización dada por  $z \mapsto z(d - 1)/d$ . Entre mas grande sea  $\kappa$ , el anillo  $V_\kappa$  cubre mejor al dominio fundamental.

Por ejemplo, note que para el valor  $\kappa = 1/2$  se tiene que

$$\sqrt{\frac{d-1}{d}} \geq \frac{d-1}{d} + \frac{1}{Rd},$$

y ya que suponemos que  $d \geq 2$ , con el cambio de variable  $u = (d - 1)/d$  se tiene

$u \in [\frac{1}{2}, 1)$ , y entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{u} &\geq u + \frac{1-u}{R}, \\ R &\geq 1 + \frac{1}{\sqrt{u}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se afirma que el valor  $\kappa = 1/2$  esta permitido para todos los radios

$$R > \sup_{\frac{1}{2} \leq u < 1} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{u}} \right) = 1 + \sqrt{2}.$$

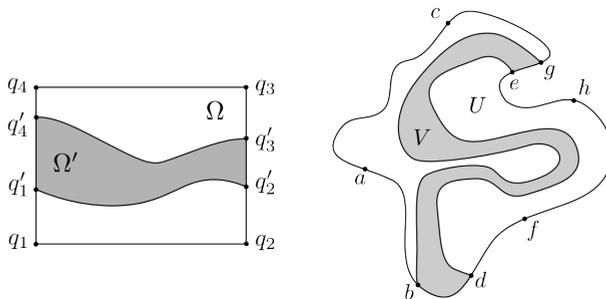
Con unos valores dados de  $R$  y  $\kappa$  se puede encontrar un anillo recto dentro de algún dominio fundamental, el cual se dividirá en  $s$  subanillos. En un anillo  $V_\kappa$  del Teorema anterior, con radios  $R$  y  $R((d-1)/d)^\kappa$ , se colocarán  $s$  subanillos conformemente equivalentes. Esto se logra haciendo que se mantengan las proporciones entre los radios, quedando entonces, para  $v = 1, 2, \dots, s$  los subanillos

$$V_v = \left\{ z \in \mathbb{C} : R \left( \frac{d-1}{d} \right)^{\frac{v\kappa}{s}} < |z| < R \left( \frac{d-1}{d} \right)^{\frac{(v-1)\kappa}{s}} \right\}.$$

Las cerraduras de estos anillos cubren a  $V$  y se pueden mapear conformemente entre sí multiplicando por  $\left( \frac{d-1}{d} \right)^{\frac{v\kappa}{s}}$ . En la curva central de cada anillo  $V_v$ , es decir, el círculo  $C_v$  centrado en el origen y con radio

$$r_v = R \left( \frac{d-1}{d} \right)^{\frac{(v-1/2)\kappa}{s}}$$

se distribuirá una cantidad fija de puntos. Así, en cada subanillo se colocarán  $p$  puntos que difieren en su argumento por  $\frac{2\pi}{p}$ .



**Figura 3.4:** Cuadriláteros esencialmente incrustados. El cuadrilátero  $Q' = (\Omega', q'_1, q'_2, q'_3, q'_4)$  está esencialmente incrustado en el cuadrilátero  $Q = (\Omega, q_1, q_2, q_3, q_4)$ . De manera similar  $T = (V, e, g, b, d)$  lo está en  $S = (U, h, c, a, f)$ .

Ahora bien, esta construcción de subanillos forma otros cuadriláteros, correspondientes a la intersección del canal con los subanillos. Tales cuadriláteros también tienen sus lados base sobre la frontera del canal, por lo que están esencialmente incrustados en el cuadrilátero correspondiente al dominio fundamental.

**Definición 20** (Cuadriláteros esencialmente incrustados). Sean  $Q = (\Omega, q_1, q_2, q_3, q_4)$  y  $Q' = (\Omega', q'_1, q'_2, q'_3, q'_4)$  dos cuadriláteros tales que  $\Omega' \subset \Omega$ . Se dice que  $Q'$  está esencialmente incrustado en  $Q$  cuando los lados altura de  $Q'$  se encuentran dentro de los lados altura de  $Q$ , es decir, se tiene que los segmentos de curva  $\overline{q'_2 q'_3} \subset \overline{q_2, q_3}$  y  $\overline{q'_4 q'_1} \subset \overline{q_4, q_1}$ . (Ejemplos en la figura 3.4.)

En este punto la construcción consta de un anillo recto contenido en un dominio fundamental de la dinámica de  $N_p$ , dividido en  $s$  subanillos, los cuales tienen  $p$  puntos cada uno. La intersección de cada subanillo con algún canal forma un cuadrilátero esencialmente incrustado en el cuadrilátero obtenido de la intersección del canal con el dominio fundamental. Por el Teorema 18 sabemos que cada cuenca tiene un canal que intersecta al dominio fundamental en un cuadrilátero con módulo de al menos  $\pi / \log d$ .

**Lema** (Desigualdad de Grötzsch). *Sea  $Q$  un cuadrilátero. Sean  $Q' \subset Q$  y  $Q'' \subset Q$  dos cuadriláteros ajenos esencialmente incrustados en  $Q$ . Entonces se tiene que*

$$\text{Mod}(Q') + \text{Mod}(Q'') \leq \text{Mod}(Q).$$

Por inducción se tiene que la desigualdad anterior se puede aplicar a cualquier cantidad finita de cuadriláteros esencialmente incrustados. Nótese que los cuadriláteros formados por el canal y los subanillos comparten el lado base con el cuadrilátero del dominio fundamental. Para aplicar la desigualdad de Grötzsch se toman los inversos de los módulos, teniendo entonces que existe un canal en cada cuenca para el que la suma de los inversos de los módulos de los cuadriláteros en los  $s$  subanillos es a lo más  $\pi/\log d$ . Así que al menos uno de los subanillos debe intersectar al canal en un cuadrilátero con módulo de al menos  $s\pi/\log(d)$ .

Sea  $S = \{z \in \mathbb{C} : -1/2 < \text{Re}(z) < 1/2\}$ . Para cada subanillo  $V_v$  de la construcción se tiene una transformación conforme  $f_v : S \rightarrow V_v$  de forma que  $S$  es una cubierta universal de  $V_v$  y el eje imaginario se ve mapeado en  $C_v$ . A continuación construiremos la inversa de dicha función: escalando en un factor de  $1/r_v$  se tiene que  $C_v$  es mapeado al círculo unitario; tomando el logaritmo con todas sus ramas se tiene que el anillo es transformado en la barra

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\kappa}{2s} \log\left(\frac{d}{d-1}\right) < \text{Re}(z) < \frac{\kappa}{2s} \log\left(\frac{d}{d-1}\right) \right\}.$$

Sea  $q = \frac{\kappa}{s} \log\left(\frac{d}{d-1}\right) > \frac{\kappa}{sd}$ . Escalando la barra resultante por el factor  $1/q$  se obtiene el isomorfismo conforme  $f_v$  con inversa  $f_v^{-1} : V_v \rightarrow S$ , dados por

$$\begin{aligned} f_v &= r_v \exp(qz), \\ f_v^{-1} &= \frac{1}{q} \log\left(\frac{z}{r_v}\right). \end{aligned}$$

Bajo  $f_v^{-1}$  los puntos acomodados sobre  $C_v$  se mandan al eje imaginario, separados una distancia  $\tau = \frac{2\pi}{pq}$ , y dado que  $q > \kappa/sd$ ,

$$\tau < \frac{2\pi sd}{\kappa p}.$$

Entonces la distancia  $\tau$  entre los puntos en  $S$  es un parámetro que nos permite tratar todos los subanillos a la vez transformándolos en la barra  $S$ . Se ha de buscar un valor para  $\tau$  que asegure que los cuadriláteros del canal traídos a  $S$  no puedan *evitar* los puntos en la barra, entre estos existe uno con módulo de al menos  $s\pi/\log(d)$ . Escogiendo  $s = \alpha \log(d)$ , el módulo de tal cuadrilátero puede ser escrito como  $\alpha\pi$ , donde  $\alpha$  es independiente de  $d$ . Además, tomando  $p = \beta d \log d$  como la cantidad de puntos a colocar en cada subanillo de la construcción, se tiene

$$\tau < \frac{2\pi sd}{\kappa p} = \frac{2\pi\alpha}{\kappa\beta},$$

que es independiente del grado del polinomio.

La construcción de  $s$  círculos con  $p$  puntos en cada uno dependerá entonces de dos parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , y consta de  $\alpha\beta d \log^2 d$  puntos en total. El parámetro  $\alpha$  determina la cantidad de círculos, y esta relacionado con el módulo mínimo de algún canal restringido a alguno de los subanillos de la construcción. El parámetro  $\beta$  determina la cantidad de puntos por círculo y, junto con  $\alpha$ , marca una cota superior a  $\tau$ , que es la separación de los puntos de la construcción en  $S$ , la cubierta universal de cada  $V_v$ .

Ya que el módulo de los cuadriláteros en los subanillos es igual al de los cuadriláteros llevados a  $S$ ,  $\tau$  debe ser elegido tal que se pueda asegurar que los puntos  $i\tau\mathbb{Z}$  *dan* en tales cuadriláteros. La elección de  $\tau$  corresponde a una asignación de valores para  $\alpha$  y  $\beta$ . Dado un valor de  $\tau$  existen cuadriláteros que *evitan* los puntos  $i\tau\mathbb{Z}$  en  $S$ .

En las siguientes secciones muestro un breve resumen de las herramientas empleadas en la determinación de una cota para el módulo máximo que pueden tener los cuadriláteros que pueden evitar los puntos  $i\tau\mathbb{Z}$  en la barra, así como una versión alternativa en la prueba de la existencia de tal cota.

### 3.3. La idea de Schwarz-Christoffel

El Teorema del mapeo de Riemann dice que existe un isomorfismo conforme entre el disco abierto unitario  $\mathbb{D}$  y cualquier subconjunto simplemente conexo  $U \subset \overline{\mathbb{C}}$  tal que  $U \neq \overline{\mathbb{C}}$ . Por lo general encontrar fórmulas explícitas para tales mapeos resulta complicado. Las transformaciones de Schwarz-Christoffel dan una fórmula explícita para transformaciones a polígonos. Estas transformaciones están dadas como mapeos  $F : \mathbb{H}^+ \rightarrow P$ , donde  $\mathbb{H}^+$  es el semiplano superior y  $P$  es el interior de un polígono  $\Gamma$ . Otras formulas existen para mapeos desde otras superficies, como  $\mathbb{D}$ .

**Lema 21** ( $\mathbb{D} \equiv \mathbb{H}^+$ ). Sean  $\mathbb{D} = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| < 1\}$  el disco abierto unitario y  $\mathbb{H}^+ = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \text{Im}(z) > 0\}$  el semiplano superior. Se tiene que  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{H}^+$  son conformemente equivalentes.

*Demostración.* Sea  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  dado por

$$f(z) = i \frac{1+z}{1-z},$$

con inversa

$$f^{-1}(w) = \frac{w-i}{w+i}.$$

Veamos que  $z \in \mathbb{D}$  si y sólo si  $f(z) \in \mathbb{H}^+$ . Sea  $z = x + iy$ , entonces

$$f(x + iy) = i \frac{1 + (x + iy)}{1 - (x + iy)},$$

$$f(x + iy) = \frac{-2y + i(1 - x^2 - y^2)}{(1 + x)^2 + y^2}.$$

En la última expresión, el denominador es siempre positivo, por lo que para que  $f(x + iy) \in \mathbb{H}^+$  se debe cumplir la desigualdad

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f(x + iy)) &= 1 - x^2 - y^2 > 0, \\ x^2 + y^2 &< 1, \\ |z| &< 1. \end{aligned}$$

lo que significa que  $z \in \mathbb{D}$ . Más aún, si  $f(z) \in \mathbb{R}$  entonces  $x^2 + y^2 = 1$ , lo que significa que  $f$  mapea el círculo de radio 1 en el eje real.  $\square$

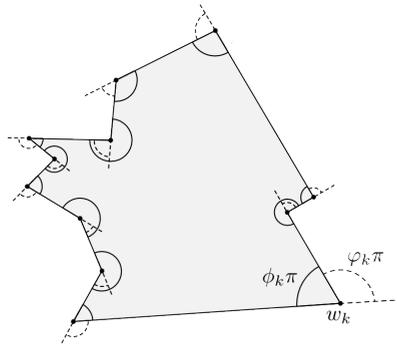
El Lema anterior hace intercambiables a  $\mathbb{D}$  y a  $\mathbb{H}^+$  en el Teorema del mapeo de Riemann.

La idea detrás de las transformaciones de Schwarz-Christoffel y algunas variantes es que tal mapeo conforme  $F$  debe tener una derivada que se pueda expresar como

$$F' = \prod f_k,$$

para ciertas funciones canónicas  $f_k$ . Una gran variedad de mapeos conformes pueden ser tratados desde este punto de vista. De hecho, todos los mapeos cuya forma analítica conocida es de Schwarz-Christoffel, son virtualmente de ese estilo, salvo algún cambio de variables adicional. El motivo para representar la derivada de  $F$  en tal forma es lograr que

$$\arg(F') = \sum \arg(f_k).$$



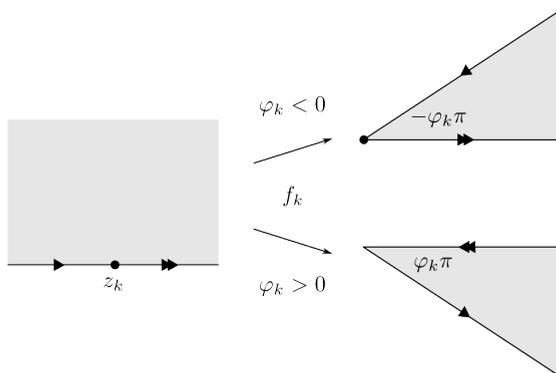
**Figura 3.5:** Polígono

Usualmente, las funciones  $f_k$  se eligen de forma que hagan de  $\arg(f_k)$  una función escalón, de manera que  $\arg(F')$  resulte ser constante a trozos, dando saltos en puntos específicos. Un mapeo como éste hace que el eje real sea llevado a un polígono, en otras palabras, hace que la derivada sobre el eje real sea constante pero diferente para cada lado del polígono, dando saltos en los *pre-vértices*.

**Definición 22** (Polígonos). *Un polígono  $\Gamma$  está representado por sus vértices  $w_1, \dots, w_n$ , dados en orden contrarreloj, y sus ángulos interiores  $\phi_1\pi, \dots, \phi_n\pi$ .*

**Definición 23** (Pre-vértices). *Suponga que el mapeo  $F : \mathbb{H}^+ \rightarrow P$  lleva el semiplano superior en el interior de un polígono dado  $\Gamma$ . El  $k$ -ésimo pre-vértice es el punto  $z_k = F^{-1}(w_k)$ .*

Estos mapeos pueden ser extendidos continuamente a la frontera de  $P$  y, usando el principio de reflexión de Schwarz, se puede ver que el mapeo se puede continuar analíticamente a los intervalos  $(z_k, z_{k+1})$  del eje real. Particularmente, la derivada del mapeo existe en estos segmentos y es constante en ellos. Además,  $\arg(F'(z))$  debe dar un salto en  $z = z_k$ , de forma que la diferencia entre los valores sea  $(1 - \phi_k)\pi = \varphi_k\pi$ . El número real  $\varphi_k\pi$  es el *ángulo de giro* en el  $k$ -ésimo vértice de  $\Gamma$ . Véase la figura 3.5.



**Figura 3.6:** Efecto del término  $f_k$  en  $F$ . En ambos casos  $\arg(F(z))$  da un salto de  $\varphi_k\pi$  en  $z = z_k$ .

Una función  $f_k$  analítica en  $\mathbb{H}^+$  que cumple la condición de que  $\arg(f_k(z))$  sea constante en el eje real, excepto en  $z_k$  donde da un salto de  $\varphi_k\pi$ , es la siguiente:

$$f_k(z) = (z - z_k)^{-\varphi_k}.$$

Cualquier rama de la función que sea consistente con  $\mathbb{H}^+$  servirá; para especificar considere la rama con  $f_k(z) > 0$  si  $z > z_k$  en el eje real. (Figura 3.6.)

El argumento dado sobre el mapeo  $F$  sugiere entonces que

$$F'(z) = C \prod_{k=1}^{n-1} f_k(z)$$

para alguna constante  $C$ . Esta es la idea detrás de la fórmula de Schwarz-Christoffel.

**Teorema** (Teorema fundamental de los mapeos de Schwarz-Christoffel). *Sea  $P$  el interior de un polígono  $\Gamma$  con vértices  $w_1, \dots, w_n$  y ángulos interiores  $\phi_1, \dots, \phi_n$ , dados en orden contrarreloj. Sea  $F$  un mapeo conforme del semiplano superior  $\mathbb{H}^+$  a*

$P$  con  $F(\infty) = w_n$ . Entonces

$$F(z) = A + C \int \prod_{k=1}^{n-1} (\omega - z_k)^{\phi_k - 1} d\omega,$$

para algunas constantes complejas  $A$  y  $C$ , donde  $w_k = f(z_k)$  para  $k = 1, \dots, n-1$ . El límite inferior de integración no se especifica, ya que sólo afecta el valor final de la constante  $A$ . (Para más detalles véase el apéndice o en [6].)

Hay una dificultad para el uso de esta fórmula: sin el conocimiento de los pre-vértices  $z_k$  no se puede usar  $F$ . Por el razonamiento detrás de la fórmula se puede ver que la imagen del eje real extendido es necesariamente algún polígono cuyos ángulos interiores coinciden con los de  $\Gamma$ , sin importar los valores que se tomen para los  $z_k$ . Sin embargo, los valores de  $z_k$  influyen en las longitudes resultantes de los lados del polígono.

Resolver el problema de encontrar los valores correctos de  $z_k$  es el primer paso para poder emplear la fórmula de Schwarz-Christoffel. En la mayoría de los problemas prácticos no existen formas analíticas de obtener los pre-vértices, ya que la dependencia entre las longitudes de los lados del polígono y los pre-vértices resulta no lineal. Métodos de carácter numérico son empleados en resolver este problema, así como en las evaluaciones del mapeo  $F$  y la determinación de su inversa. Por mucho tiempo el potencial de estas transformaciones pasó desapercibido hasta que los métodos computacionales se volvieron fácilmente disponibles en el último cuarto del siglo XX. Para más detalles véanse, por ejemplo, [4] y [6].

### 3.4. Construcción Inevitable

Comenzando con un dominio fundamental en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$  se puede encontrar un anillo recto contenido en tal dominio. Este anillo se dividirá en  $\alpha \log d$  subanillos sobre los que se pondrán  $\beta d \log d$  puntos en cada uno.

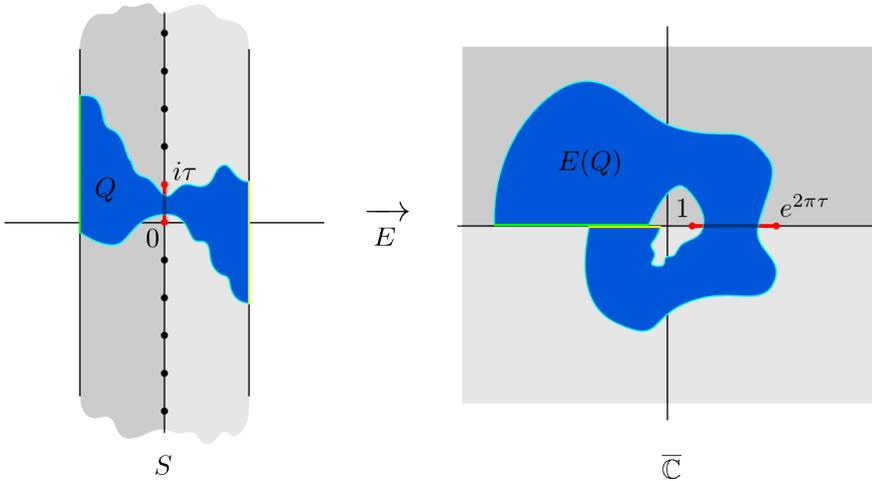
Para cada raíz  $\zeta$  del polinomio  $p$  existe un canal que intersecta alguno de estos subanillos en un cuadrilátero con sus lados base en la frontera del canal, el cual tiene módulo de al menos  $\alpha\pi$ . El número de puntos en el subanillo se escogerá de forma que estos cuadriláteros no puedan evitarlos, es decir, que se garantice que existe al menos un punto dentro de tal cuadrilátero.

Es necesario llevar a cabo una transformación: para cada subanillo  $V_v$  hay una función conforme  $f_v : S \rightarrow V_v$ , donde  $S = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : -1/2 < \operatorname{Re}(z) < 1/2\}$ . Esta transformación trae el parámetro  $\tau$ , el cual mide la separación de los puntos en  $S$  y está relacionado con los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ . Los cuadriláteros en el subanillo son llevados a  $S$  como cuadriláteros que *atravesan* la barra, es decir, tienen sus lados altura sobre la frontera de  $S$ ; un lado sobre la recta  $\operatorname{Re}(z) = -1/2$  y el opuesto sobre  $\operatorname{Re}(z) = 1/2$ .

Para cada valor de  $\tau$  existen cuadriláteros que evitan los puntos  $i\tau\mathbb{Z}$ . Sin embargo, el módulo de los cuadriláteros se puede acotar. Existe un  $M(\tau)$  tal que para cuadriláteros con módulo mayor que  $M(\tau)$  los puntos en la barra son inevitables. Entre más pequeño hagamos a  $\tau$  los puntos se encuentran mas cercanos, haciendo que sólo cuadriláteros muy delgados (de módulo mas pequeño) puedan evitarlos. Dada la cota  $M(\tau)$  es posible determinar que valor de  $\tau$  basta para darle a los cuadriláteros más delgados que se pueden llegar a encontrar; los de módulo  $\alpha\pi$ .

**Teorema 24** (Geometría de la barra punteada). *Sean  $S = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : -1/2 < \operatorname{Re}(z) < 1/2\}$  y  $\tau > 0$ . Existe  $M(\tau) > 0$  tal que, para cualquier cuadrilátero  $Q \subset S$  que atraviese a  $S$  y que evite los puntos  $i\tau\mathbb{Z}$ , se tiene que  $\operatorname{Mod}(Q) < M(\tau)$ , y  $M$  es monótona. (Dado que  $Q$  representa la intersección de un canal con los subanillos, diremos que para el cálculo de  $\operatorname{Mod}(Q)$  los lados altura de  $Q$  están sobre la frontera de  $S$ .)*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, decimos que el cuadrilátero  $Q$  que atraviesa la barra  $S$  evita los puntos  $i\tau\mathbb{Z}$  si su intersección con el eje imaginario



**Figura 3.7:** Efecto de la transformación  $E$  en un cuadrilátero  $Q$

se encuentra dentro del intervalo  $(0, i\tau)$ . Sean  $S^- = \{z \in S : \operatorname{Re}(z) < 0\}$  y  $S^+ = \{z \in S : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ .

Considere la transformación conforme  $E(z) = e^{-2\pi iz}$ . Ésta lleva  $S^-$  en el semiplano superior  $\mathbb{H}^+$  y, de forma similar, lleva a  $S^+$  en el semiplano inferior  $\mathbb{H}^-$ . La transformación  $E$  lleva el eje imaginario a la parte positiva del eje real; particularmente,  $E(0) = 1$  y  $E(i\tau) = e^{2\pi\tau}$ . La frontera de  $S$  es llevada a la parte negativa del eje real y así  $E(Q)$  es un cuadrilátero con todos sus vértices sobre la parte negativa del eje real,  $E(Q)$  rodea al origen e intersecta la parte positiva del eje real dentro del intervalo  $(1, e^{2\pi\tau})$ . Véase la figura 3.7.

Una transformación de Schwarz-Christoffel  $\Psi : \mathbb{H}^+ \rightarrow R^+$ , donde  $R^+$  es un rectángulo y los pre-vértices son  $0$ ,  $1$ ,  $e^{2\pi\tau}$  e  $\infty$  tiene la forma

$$\Psi(z) = A + C \int^z \frac{d\omega}{\omega^{1/2}(\omega - 1)^{1/2}(\omega - e^{2\pi\tau})^{1/2}}.$$

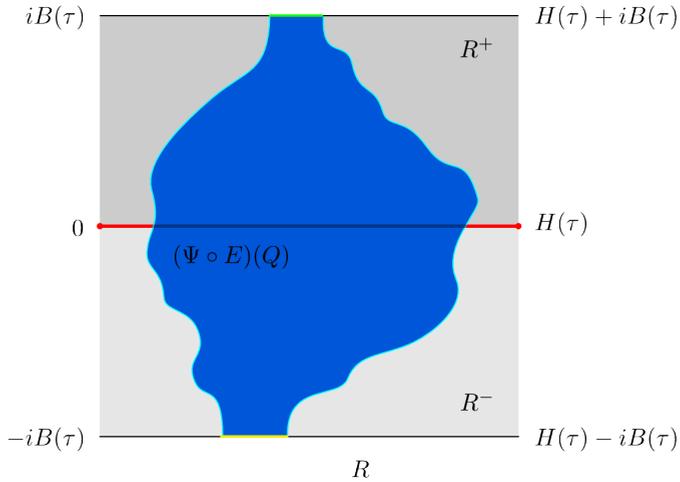
Se requerirá que  $\Psi(1) = 0$  y  $\Psi(e^{2\pi\tau}) \in \mathbb{R}^+$ , entonces se eligen  $A = 0$  y el limite inferior de integración igual a 1, con lo que se tiene  $\Psi(1) = 0$ . Para la otra condición, note que el integrando toma valores imaginarios en el intervalo  $(1, e^{2\pi\tau})$ , ya que el factor  $(w - e^{2\pi\tau})$  es negativo. Haciendo  $C = -i$  se puede invertir el signo de este factor, obteniendo la transformación  $\Psi$  dada por

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= -i \int_1^z \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(\omega-1)(\omega-e^{2\pi\tau})}} \\ &= \int_1^z \frac{d\omega}{i\sqrt{\omega(\omega-1)(\omega-e^{2\pi\tau})}} \\ &= \int_1^z \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(\omega-1)(e^{2\pi\tau}-\omega)}}.\end{aligned}$$

Esta transformación lleva a  $\mathbb{H}^+$  en el rectángulo  $R^+$ , cuyos vértices son  $\Psi(1)$ ,  $\Psi(e^{2\pi\tau})$ ,  $\Psi(\infty)$  y  $\Psi(0)$ . Además,  $\Psi(1) = 0$  y  $\Psi(e^{2\pi\tau}) \in \mathbb{R}^+$ . Por el principio de reflexión de Schwarz esta transformación lleva a  $\mathbb{H}^-$  en el rectángulo  $R^-$ , el cual comparte con  $R^+$  su lado sobre el eje real.

Como se vio en la sección anterior, la elección de los pre-vértices determina las longitudes de los lados del rectángulo  $R^+$ , pudiendo medir su base  $B(\tau)$  sobre el eje imaginario y su altura  $H(\tau)$  sobre el eje real de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}H(\tau) = \Psi(e^{2\pi\tau}) &= \int_1^{e^{2\pi\tau}} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(\omega-1)(e^{2\pi\tau}-\omega)}}, \\ B(\tau) = -i\Psi(0) &= -i \int_1^0 \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(\omega-1)(e^{2\pi\tau}-\omega)}} \\ &= \int_0^1 \frac{id\omega}{i\sqrt{\omega(1-\omega)(e^{2\pi\tau}-\omega)}} \\ &= \int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\omega)(e^{2\pi\tau}-\omega)}}.\end{aligned}$$



**Figura 3.8:** Efecto de la transformación  $(\Psi \circ E)$  a un cuadrilátero  $Q$

La transformación  $(\Psi \circ E)$  lleva entonces a  $S^- \cup (0, i\tau) \cup S^+$  en el rectángulo  $R = R^+ \cup (0, e^{2\pi\tau}) \cup R^-$ . Extendiendo a las fronteras se tiene que  $\partial S$  queda sobre los lados opuestos de  $\bar{R}$  paralelos al eje real. De aquí es que  $(\Psi \circ E)(Q)$  es un cuadrilátero esencialmente incrustado en  $\bar{R}$ , y por la desigualdad de Grötzsch,

$$\text{Mod}(Q) < \frac{H(\tau)}{2B(\tau)}.$$

Nótese que si el valor de  $\tau$  crece, la forma del rectángulo  $R$  se estira, de forma que  $M(\tau) = \frac{H(\tau)}{2B(\tau)}$  también aumenta. Esta elección de  $M(\tau)$  prueba el teorema.  $\square$

Con el resultado anterior se tiene lo siguiente.

**Teorema 25** ( $S_d$  inevitable). *Para cada grado  $d \geq 2$  existe un conjunto finito  $S_d \subset \mathbb{C}$  tal que para todo polinomio complejo  $p$  de grado  $d$  y toda raíz  $\zeta$  de  $p$ , existe un  $\zeta_0 \in S_d$  que converge a  $\zeta$  bajo el Método de Newton. Más aun  $|S_d| \asymp d \log^2 d$ .*

*Demostración.* Sean  $p$  un polinomio normalizado de grado  $d \geq 2$  y  $S_d$  el conjunto de puntos construido anteriormente, con  $\alpha\beta d \log^2 d$  puntos. Por el Teorema 18, cada raíz  $\zeta$  tiene una cuenca inmediata con un canal que intersecta a algún subanillo de la construcción en un cuadrilátero con módulo de al menos  $\alpha\pi$ .

Dados los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , los puntos en la barra  $S$  están separados a distancias iguales  $\tau < \frac{2\pi\alpha}{\kappa\beta}$ . Por el Teorema 24, los cuadriláteros con módulo menor a  $M(\tau)$  pueden evitar los puntos y por la monotonidad de  $M(\tau)$  se tiene

$$M(\tau) < M\left(\frac{2\pi\alpha}{\kappa\beta}\right).$$

Considérese un valor de  $\alpha$  fijo. Para cada  $\beta$  se tiene un  $M\left(\frac{2\pi\alpha}{\kappa\beta}\right)$  tal que los cuadriláteros con módulo menor pueden evitar la construcción. Es posible elegir entonces un valor para  $\beta$  de forma que

$$M\left(\frac{2\pi\alpha}{\kappa\beta}\right) < \alpha\pi,$$

es decir, de manera que para cada raíz  $\zeta$  existe un canal que no puede evitar la construcción de puntos, por lo que  $S_d$  es inevitable.  $\square$

## Capítulo 4

# Estimación de parámetros

### 4.1. M.A.G.

Hasta ahora se cuenta con una construcción del conjunto inevitable  $S_d$  de  $\alpha\beta d \log^2 d$  puntos y es posible construir explícitamente diferentes versiones de este conjunto escogiendo valores apropiados de  $\alpha$  y  $\beta$ . Eligiendo un valor arbitrario para  $\alpha$  es cuestión de seleccionar un valor para  $\beta$  que cumpla con la condición

$$M\left(\frac{2\pi\alpha}{\kappa\beta}\right) < \alpha\pi.$$

Veremos un ejemplo de la construcción de  $S_d$ , pero para ello es necesario evaluar la función  $M(\tau)$ , es decir, evaluar las integrales

$$B(\tau) = \int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\omega)(e^{2\pi\tau} - \omega)}},$$

$$H(\tau) = \int_1^{e^{2\pi\tau}} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(\omega-1)(e^{2\pi\tau} - \omega)}}.$$

**Definición 26** (Media aritmetico-geométrica). Sean  $a$  y  $b$  dos números reales tales que  $0 < b \leq a$ . A partir de estos dos números se definen dos sucesiones  $\{a_i\}$  y  $\{g_i\}$ , haciendo  $a_0 = a$ ,  $g_0 = b$  y para  $i > 0$

$$a_i = \frac{a_{i-1} + g_{i-1}}{2},$$

$$g_i = \sqrt{a_{i-1}g_{i-1}}.$$

Nótese que  $a_i$  es la media aritmética de  $a_{i-1}$  y  $g_{i-1}$ , mientras que  $g_i$  es su media geométrica. Ambas sucesiones convergen al mismo valor, el cual es la media aritmetico-geométrica  $\mu_{AG}(a, b)$  de los números  $a$  y  $b$ .

Esta media aritmetico-geométrica tiene una gran cantidad de propiedades interesantes, y puede definirse de diversas maneras. Para más detalles véase [3].

**Lema 27** (Formulazo). Sean  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , entonces

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{(\omega^2 + a^2)(\omega^2 + b^2)}} = \frac{\pi}{2\mu_{AG}(a, b)}.$$

*Demostración.* Haciendo el cambio de variable  $\omega = t + \sqrt{t^2 + ab}$  se tiene

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{dt}{\sqrt{t^2 + ab}}, \quad 2t = \omega - \frac{ab}{\omega},$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{(\omega^2 + a^2)(\omega^2 + b^2)}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega dt}{\sqrt{\omega^2(1 + \frac{a^2}{\omega^2})(\omega^2 + b^2)}\sqrt{(t^2 + ab)}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(\omega^2 + a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{\omega^2})(t^2 + ab)}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{((\omega - \frac{ab}{\omega})^2 + (a + b)^2)(t^2 + ab)}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{((2t)^2 + (a + b)^2)(t^2 + ab)}} \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + (\frac{a+b}{2})^2)(t^2 + ab)}} \\
&= \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + (\frac{a+b}{2})^2)(t^2 + ab)}}.
\end{aligned}$$

Note que el cambio de variable permite intercambiar  $a$  y  $b$  por las medias aritmética y geométrica,  $\frac{a+b}{2}$  y  $\sqrt{ab}$ , sin cambiar el valor de la integral. Repitiendo este paso las veces necesarias se tiene que

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{(\omega^2 + a^2)(\omega^2 + b^2)}} = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{(\omega^2 + \mu_{AG}(a, b))^2}}.$$

La integral anterior tiene solución conocida de tipo trigonométrico

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 + \mu_{AG}(a, b)^2} &= \frac{1}{\mu_{AG}(a, b)} \arctan\left(\frac{\theta}{\mu_{AG}(a, b)}\right) \Big|_{\theta=0}^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2\mu_{AG}(a, b)},
\end{aligned}$$

lo que prueba la fórmula. □

Para evaluar  $B(\tau)$  y  $H(\tau)$  se ha de cambiar el dominio de integración a los lados opuestos respectivos del rectángulo  $R$ , es decir,

$$B(\tau) = \int_{e^{2\pi\tau}}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(\omega-1)(\omega-e^{2\pi\tau})}},$$

$$H(\tau) = \int_{-\infty}^0 \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(\omega-1)(e^{2\pi\tau}-\omega)}}.$$

En el caso de  $B(\tau)$ , con el cambio de variable  $\omega = \sigma^2 + e^{2\pi\tau}$  se tiene  $d\omega = 2\sigma d\sigma$  y

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \int_{e^{2\pi\tau}}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(\omega-1)(\omega-e^{2\pi\tau})}} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{2\sigma d\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + e^{2\pi\tau})(\sigma^2 + e^{2\pi\tau} - 1)(\sigma^2)}} \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{d\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + e^{2\pi\tau})(\sigma^2 + e^{2\pi\tau} - 1)}} \\ &= \frac{\pi}{\mu_{AG}(\sqrt{e^{2\pi\tau}}, \sqrt{e^{2\pi\tau} - 1})}. \end{aligned}$$

Para  $H(\tau)$ , con el cambio de variable  $\omega = -\sigma^2$  resulta  $d\omega = -2\sigma d\sigma$  y

$$\begin{aligned}
 H(\tau) &= \int_{-\infty}^0 \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(\omega-1)(e^{2\pi\tau}-\omega)}} \\
 &= \int_{-\infty}^0 \frac{-2\sigma d\sigma}{\sqrt{-\sigma^2(-\sigma^2-1)(\sigma^2+e^{2\pi\tau})}} \\
 &= -2 \int_{\infty}^0 \frac{d\sigma}{\sqrt{(\sigma^2+1)(\sigma^2+e^{2\pi\tau})}} \\
 &= \frac{\pi}{\mu_{AG}\left(1, \sqrt{e^{2\pi\tau}}\right)}.
 \end{aligned}$$

Así, es posible evaluar la función  $M(\tau)$  como

$$M(\tau) = \frac{\mu_{AG}\left(\sqrt{e^{2\pi\tau}}, \sqrt{e^{2\pi\tau}-1}\right)}{2\mu_{AG}\left(1, \sqrt{e^{2\pi\tau}}\right)}.$$

## 4.2. Optimización

Por ejemplo, dados los valores  $d = 13$  y  $R = 1 + \sqrt{2} \approx 2,4142$ , el valor de  $\kappa$  se calcula como

$$\kappa = \frac{|\log(1 - \frac{1}{d} + \frac{1}{Rd})|}{|\log(1 - \frac{1}{d})|} \approx 0,576034,$$

y se eligen  $s$  y  $p$  para calcular los valores

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{s}{\log d}, \\
 \beta &= \frac{p}{d \log d}.
 \end{aligned}$$

En el cuadro 4.1 se pueden ver los resultados para varias elecciones de  $s$  y  $p$ , las columnas muestran los casos con  $s = 1, \dots, 5$ . Se incluye el correspondiente valor de  $\alpha\pi$  en cada columna. Los renglones muestran varias elecciones de  $p$  entre 100 y 200. Las celdas que cumplen con la desigualdad  $M(2\pi\alpha/\kappa\beta) < \alpha\pi$  son las que determinan una construcción inevitable. Nótese que para  $s = 1$  círculos bastan  $p \geq 181$  puntos, mientras que para  $s = 5$  son necesarios  $p \geq 125$  puntos por círculo, teniendo al menos 625 puntos.

Ahora lo que se busca es que  $S_d$  tenga una cantidad óptima de puntos, es decir, minimizar la cantidad  $\alpha\beta$ . En la construcción de  $S_d$  los puntos de cada subanillo están separados a una distancia  $\tau$  sobre la barra  $S$ , entre mayor sea esta distancia menos son los puntos en cada subanillo. Tomando las restricciones del Teorema 25 con el valor más grande posible para  $\tau$  surge el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} M(\tau) &= \pi\alpha \\ \tau &= \frac{2\pi\alpha}{\kappa\beta} \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones es posible calcular los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  que corresponden a un  $\tau$  dado y que determinan una construcción inevitable de  $S_d$ .

Para un  $\tau_0$  fijo se tienen  $\alpha = M(\tau_0)/\pi$  y  $\beta = 2\pi\alpha/\kappa\tau_0$ . Se define la función  $\alpha\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\alpha\beta(\tau) = \frac{2M(\tau)^2}{\pi\kappa\tau}.$$

Esta función relaciona los valores de  $\tau$  con el producto  $\alpha\beta$  a minimizar.

Ya que el mínimo de  $\alpha\beta$  no depende de  $\kappa$  se busca un  $\tau^*$  que minimice la función  $\kappa(\alpha\beta(\tau)) = 2M(\tau)^2/(\pi\tau)$ . En la figura 4.1 se muestra la gráfica de tal función y se puede apreciar que ésta es convexa y tiene su mínimo cerca de 0,4. Empleando el método de búsqueda por razón áurea se optimizará la función.

$s$	1	2	3	4	5
$\alpha\pi$	1,22482	2,44963	3,67445	4,89927	6,12408
$p = 100$	1,85926	3,27727	4,69526	6,11326	7,53126
$p = 105$	1,79173	3,14222	4,49269	5,84317	7,19364
$p = 110$	1,73034	3,01945	4,30854	5,59763	6,88671
$p = 115$	1,67428	2,90735	4,14039	5,37344	6,60648
$p = 120$	1,62289	2,8046	3,98626	5,16793	6,34959
$p = 123$	1,59406	2,74696	3,8998	5,05264	6,20549
$p = 124$	1,58476	2,72836	3,87191	5,01546	6,159
$p = 125$	1,57561	2,71007	3,84446	4,97886	6,11326
$p = 126$	1,5666	2,69206	3,81746	4,94285	6,06824
$p = 127$	1,55773	2,67434	3,79087	4,9074	6,02394
$p = 128$	1,54901	2,65689	3,7647	4,87251	5,98032
$p = 129$	1,54041	2,63972	3,73894	4,83816	5,93739
$p = 130$	1,53195	2,62281	3,71357	4,80434	5,89511
$p = 131$	1,52362	2,60615	3,68859	4,77103	5,85347
$p = 132$	1,51542	2,58975	3,66399	4,73823	5,81247
$p = 133$	1,50734	2,5736	3,63976	4,70592	5,77209
$p = 135$	1,49153	2,54201	3,59238	4,64274	5,69311
$p = 140$	1,45399	2,46698	3,47984	4,49269	5,50555
$p = 141$	1,4468	2,45261	3,45829	4,46396	5,46963
$p = 142$	1,43971	2,43845	3,43704	4,43563	5,43422
$p = 143$	1,43272	2,42448	3,41609	4,4077	5,3993
$p = 150$	1,38639	2,33193	3,27727	4,2226	5,16793
$p = 155$	1,35585	2,27094	3,18578	4,10062	5,01546
$p = 160$	1,32722	2,21377	3,10002	3,98626	4,87251
$p = 165$	1,3003	2,16005	3,01945	3,87884	4,73823
$p = 170$	1,27497	2,1095	2,94362	3,77774	4,61185
$p = 175$	1,25106	2,06184	2,87212	3,68241	4,49269
$p = 179$	1,2329	2,02562	2,8178	3,60998	4,40216
$p = 180$	1,22848	2,01682	2,8046	3,59238	4,38015
$p = 181$	1,22411	2,00811	2,79154	3,57497	4,35839
$p = 182$	1,21979	1,99951	2,77863	3,55775	4,33687
$p = 185$	1,20711	1,97424	2,74073	3,50721	4,2737
$p = 190$	1,18685	1,93389	2,68021	3,42653	4,17284
$p = 195$	1,16762	1,89562	2,62281	3,34998	4,07716
$p = 200$	1,14934	1,85926	2,56827	3,27727	3,98626

**Cuadro 4.1:** Valores de  $M(2\pi\alpha/\kappa\beta)$  para el caso  $d = 13$ ,  $R = 2,4142$  y  $\kappa = 0,5760$ .

El método de bisección para encontrar raíces de funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  encierra una raíz en un intervalo, se evalúa la función en algún punto dentro del intervalo para dividirlo y obtener un nuevo y más pequeño intervalo que encierre a la raíz, repitiendo este procedimiento hasta tener un intervalo suficientemente pequeño, bajo un parámetro de tolerancia. Es óptimo elegir el punto medio del intervalo para dividirlo ya que la disminución en la longitud del intervalo que encierra a la raíz es igual si se toma cualquiera de los dos subintervalos en cada iteración. Hay una precisa y sencilla forma de llevar la idea tras este método al problema de minimización.

**Definición 28** (Mínimo encerrado). Sean  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $a < b < c$  tres puntos, se dice que la terna ordenada  $(a, b, c)$  encierra un mínimo de  $f$  si  $f(b) < f(a)$  y  $f(b) < f(c)$ .

Suponga que  $(a, b, c)$  encierra un mínimo de la función  $f$ . La analogía al método de bisección es que se elige un nuevo punto  $x$ , que puede estar en  $(a, b)$  o en  $(b, c)$ . Supongamos que  $x \in (b, c)$ , entonces se evalúa  $f(x)$  y si sucede que  $f(x) > f(b)$  entonces la nueva terna que encierra al mínimo es  $(a, b, x)$ , de lo contrario, si  $f(x) < f(b)$  la terna  $(b, x, c)$  sería la que encierre al mínimo. En ambos casos el punto de en medio en la terna es la abscisa del mínimo alcanzado en  $f$ . El proceso se continúa hasta que la distancia entre los puntos extremos es tolerablemente pequeña.

Sigue entonces determinar una estrategia de selección para el nuevo punto  $x$ ; dados  $(a, b, c)$  suponga que  $b$  está a una fracción  $w \in (0, 1)$  entre  $a$  y  $c$ , es decir,

$$\frac{b-a}{c-a} = w, \quad \frac{c-b}{c-a} = 1-w,$$

y suponga que el nuevo punto  $x$  estará a una fracción extra  $z$  desde  $b$ ,

$$\frac{x-b}{c-a} = z.$$

La proporción del nuevo intervalo puede ser  $w + z$  si se elige  $(a, b, x)$ , o bien,  $1 - w$  si se elige  $(b, x, c)$ . Para optimizar la elección se han de hacer ambas proporciones iguales, digamos  $w + z = 1 - w$ .

$$\frac{x - b}{c - a} = \frac{c - b}{c - a} - \frac{b - a}{c - a}.$$

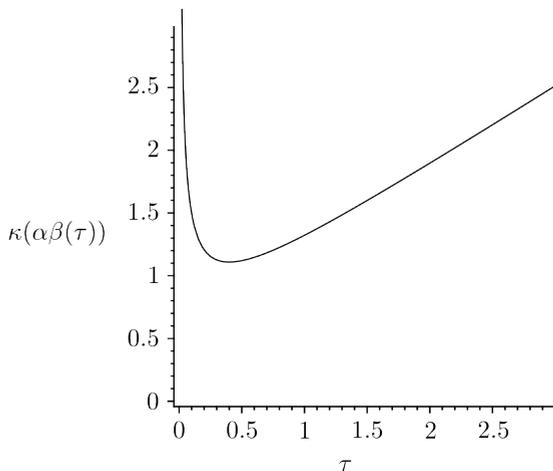
Nótese que el nuevo punto es simétrico respecto a  $b$ , teniendo  $b - a = c - x$ . Esto también significa que el punto  $x$  se encuentra dentro del subintervalo más largo, teniendo  $z > 0$  si y sólo si  $w < 1/2$ .

La selección óptima de la proporción  $z$  da un valor óptimo de la proporción  $w'$  en la siguiente iteración, esta proporción se mantiene en cada iteración, por lo que la proporción de  $x$  en  $(b, c)$  debe ser igual a la proporción de  $b$  en  $(a, c)$  en cada paso, y entonces

$$\begin{aligned}\frac{z}{1 - w} &= w, \\ \frac{1 - 2w}{1 - w} &= w, \\ w^2 - 3w + 1 &= 0, \\ w &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

En otras palabras, la tercia  $(a, b, c)$  que encierra al mínimo tiene proporción óptima si el punto de en medio  $b$  esta a una fracción de 0,38197 de un extremo y a 0,61803 del otro. Esta proporción es llamada razón áurea, conocida desde tiempos antiguos por sus supuestas propiedades estéticas. Este método para minimizar una función, análogo al método de bisección para encontrar raíces, es llamado búsqueda por razón áurea.

En cada iteración del método se prueba un nuevo punto que está en la proporción antes mencionada respecto al subintervalo más largo. Incluso si la tercia inicial no se encuentra en proporción áurea el método convergerá rápidamente



**Figura 4.1:** Gráfica de  $\kappa(\alpha\beta(\tau))$ .

a tal proporción. Esta búsqueda garantiza que en cada iteración el intervalo que encierra el mínimo reduce su longitud en un factor de 0,61803. Esto es comparable, aunque no tan bueno como el 0,5 del método de bisección. Sin embargo, la convergencia es lineal, es decir, la cantidad de cifras significativas encontradas incrementa de forma lineal con cada iteración.

Aplicando la búsqueda por razón áurea a la función  $\kappa(\alpha\beta(\tau))$  usando la terna inicial  $(0,0; 0,61803; 1,0)$  se obtiene el resultado

$$\begin{aligned}\tau^* &= 0,3998811566, \\ \kappa(\alpha\beta(\tau^*)) &= 1,1086114140.\end{aligned}$$

**Teorema 29** ( $|S_d|$  óptimo). *Sea  $S_d$  el conjunto inevitable del Teorema 25, entonces  $|S_d| \approx 1,10861d \log^2 d$  es óptimo, teniendo la menor cantidad posible de puntos.*

*Demostración.* Por el resultado anterior  $\tau^* = 0,39988$  es óptimo. Este valor representa una construcción de  $S_d$  dada de la siguiente manera: Sean  $R > 1$  y  $V_\kappa$  un anillo del Teorema 19 con radios  $R$  y  $R(\frac{d-1}{d})^\kappa$ . Este anillo se dividirá en  $s \approx 0,26562 \log d$  subanillos, dentro de los cuales se repartirán  $p \approx (4,17363/\kappa)d \log d$  puntos sobre el círculo central de cada subanillo, separados en ángulos iguales.

Por el Teorema 19, cuando  $R \rightarrow \infty$  el valor de  $\kappa$  puede acercarse arbitrariamente a 1. En tal caso  $|S_d| \approx 1,10861d \log^2 d$ .  $\square$



## Capítulo 5

# Implementación computacional

### 5.1. Estrategia

La siguiente es una estrategia a seguir para localizar las raíces de un polinomio usando el conjunto  $S_d$ . Dado un polinomio  $p$  de grado  $d \geq 2$  y un  $\epsilon > 0$ , el objetivo es encontrar  $d$  puntos  $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_d$  que aproximen las raíces de  $p$  contando multiplicidad, es decir,  $|\zeta_i - \hat{z}_i| < \epsilon$ .

En primer lugar, se ha de asegurar que las raíces de  $p$  se encuentren dentro del disco unitario; esto se puede lograr de una forma fácil teniendo una cota superior al módulo de las raíces, i.e.  $M > 1 \in \mathbb{R}^+$  tal que para toda raíz  $|\zeta_i| < M$ . Entonces se puede aplicar el método al polinomio  $p(Mz)$  o bien, tomar los puntos en  $S_d$  y multiplicarlos por  $M$ . También será necesario contar con un  $K \in \mathbb{N}$ , que estime de la cantidad de iteraciones necesarias para que el método converja, el cual puede ser arbitrario.

Así, a cada punto de  $S_d$  se le aplicará el Método de Newton a lo más  $K$  iteraciones. Si converge y la raíz aproximada es diferente a las obtenidas previamente, entonces se agrega al conjunto de aproximaciones obtenidas. Si el método no converge en  $K$  iteraciones, el punto se agrega a un conjunto  $S_d^{(1)}$  para su uso posterior. Determinar si una aproximación repetida corresponde a una raíz múltiple equivale al problema de determinar la multiplicidad de una raíz, el cual es un problema aún abierto. Más adelante veremos algunas formas de tratar los casos de multiplicidad  $k \geq 2$ .

Si al aplicar este procedimiento a todos los puntos de  $S_d$  las  $d$  raíces no son localizadas, se repite el proceso con  $S_d^{(1)}$  como conjunto inicial, dejando los puntos no convergentes en un conjunto  $S_d^{(2)}$ , continuando de esta manera hasta encontrar las  $d$  raíces.

### 5.1.1. Normalización

El conjunto  $S_d$  funciona para los polinomios de grado  $d$  cuyas raíces se encuentren dentro del disco unitario  $\mathbb{D}$ , es decir, que estén normalizados. Para normalizar los polinomios usaremos el siguiente teorema:

**Teorema** (Teorema de Rouché). *Para dos funciones analíticas  $f$  y  $g$  en un dominio simplemente conexo  $A$  y una curva cerrada simple  $\gamma \subset A$ , se tiene que si  $|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$  en  $\gamma$ , entonces  $f$  y  $g$  tienen la misma cantidad de ceros en la región acotada por  $\gamma$ , contando multiplicidades.*

La cota propuesta y otras más precisas pueden encontrarse en [13].

**Proposición 30** (Cota superior para  $|\zeta_i|$ ). *Sea  $p$  un polinomio de grado  $d$ ,  $p(z) = \sum_{i=0}^d \alpha_i z^i$ , con raíces  $\zeta_1, \dots, \zeta_d$ . Entonces con  $M = 1 + \max_{0 \leq i < d} \{|\alpha_i|/|\alpha_d|\}$  se tiene que  $|\zeta_i| < M$  para todas las raíces de  $p$ .*

*Demostración.* Ya que  $\mathbb{C}$  es simplemente conexo, tomemos la curva cerrada simple  $\gamma_M = \{z \in \mathbb{C} : |z| = M\}$  donde  $M = 1 + \max_{0 \leq i < d} \{|\alpha_i|/|\alpha_d|\}$ .

Definamos  $f$  y  $g$  de la siguiente forma

$$f(z) = \frac{p(z)}{\alpha_d} = z^d + \frac{\alpha_{d-1}}{\alpha_d} z^{d-1} + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_d} z + \frac{\alpha_0}{\alpha_d},$$

$$g(z) = z^d.$$

Entonces  $g$  tiene dentro de  $\gamma_M$  la raíz 0 con multiplicidad  $d$ . Basta mostrar que para  $z \in \gamma_M$  se cumple que  $|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$ , pero es posible probar incluso que  $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ ,

$$\left| \frac{\alpha_{d-1}}{\alpha_d} z^{d-1} + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_d} z + \frac{\alpha_0}{\alpha_d} \right| < |z|^d.$$

Ya que  $|z| = M = 1 + \max_{0 \leq i < d} \{|\alpha_i|/|\alpha_d|\}$ ,

$$\left| \frac{\alpha_{d-1}}{\alpha_d} z^{d-1} + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_d} z + \frac{\alpha_0}{\alpha_d} \right| \leq \max_{0 \leq i < d} \left\{ \frac{|\alpha_i|}{|\alpha_d|} \right\} (|z|^{d-1} + \dots + |z| + 1),$$

$$\left| \frac{\alpha_{d-1}}{\alpha_d} z^{d-1} + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_d} z + \frac{\alpha_0}{\alpha_d} \right| \leq (M - 1) \frac{|z|^d - 1}{|z| - 1} = |z|^d - 1 < |z|^d.$$

□

Como se mencionó previamente, esta cota superior para el módulo de las raíces de  $p$  permite normalizar el polinomio, obteniendo un  $p^*(z) = p(Mz)$ , el cual tiene todas sus raíces dentro del disco abierto unitario, o bien, expandir el conjunto  $S_d$  en un factor  $M$ .

### 5.1.2. Estimación del número de iteraciones

Aunque la estimación de iteraciones necesarias puede ser arbitraria, una buena aproximación hará más eficiente a la implementación.

Del Lema 7 se tiene

$$|N_p(z)| < \frac{d-1}{d}|z| + \frac{1}{d},$$

y considerando que  $d$  puede ser un numero muy grande se hará igual a cero el termino constante a la derecha de la desigualdad y también se hará ecuación

$$|N_p(z)| = \frac{d-1}{d}|z|.$$

Con esta ecuación un punto en el círculo  $|z_0| = R$  cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} |N_p(z_0)| &= \frac{d-1}{d}R, \\ |N_p^{on}(z_0)| &= \left(\frac{d-1}{d}\right)^n R. \end{aligned}$$

Ahora bien, suponga que  $|N_p^{oK-1}(z_0)| - |N_p^{oK}(z_0)| < \epsilon/d$ , entonces

$$\begin{aligned} \left(\frac{d-1}{d}\right)^{K-1} R - \left(\frac{d-1}{d}\right)^K R &< \frac{\epsilon}{d} \\ \left(\frac{d-1}{d}\right)^{K-1} \frac{R}{d} &< \frac{\epsilon}{d} \\ \left(\frac{d}{d-1}\right)^{K-1} &> \frac{R}{\epsilon} \\ (K-1) \log\left(\frac{d}{d-1}\right) &> \log\left(\frac{R}{\epsilon}\right) \end{aligned}$$

Aproximando  $\log\left(\frac{d}{d-1}\right) \approx 1/d$  se estima el valor

$$K = \lceil d \log\left(\frac{R}{\epsilon}\right) + 1 \rceil.$$

### 5.1.3. Evaluación de polinomios

Para evaluar los polinomios se usará el método (o regla) de Horner. Sea  $p(z) = \sum_{i=0}^d \alpha_i z^i$ , reescribiendo el polinomio en la forma

$$p(z) = (((\alpha_d z + \alpha_{d-1})z + \alpha_{d-2}) \dots) z + \alpha_1) z + \alpha_0$$

resulta una forma iterativa de evaluar el polinomio.

<b>Algoritmo 1:</b> Método de Horner
<p><b>Input:</b> <math>\alpha[0..d]</math>, <math>z</math>  <b>Output:</b> <math>p(z)</math>  <math>E := \alpha[d]</math>;  <b>for</b> <math>i \leftarrow d - 1</math> <b>to</b> <math>0</math> <b>do</b>      <math>E := E * z + \alpha[i]</math> ;  <b>end</b>  <b>return</b> <math>E</math>;</p>

Una adaptación muy útil de este método permite evaluar tanto el polinomio como su derivada a la vez. Esta modificación es básicamente la división sintética del polinomio. El algoritmo 2 muestra la forma de evaluar el polinomio y su derivada usando los coeficientes  $\alpha[0..d]$ . Se puede generalizar para evaluar tanto el polinomio como las primeras  $m$  derivadas, el algoritmo 3 muestra el caso para  $m$  derivadas.

En la generalización del método de Horner se obtiene como resultado un arreglo  $P[0..m]$  donde  $P[0]$  es el valor del polinomio evaluado en  $z$  y el elemento  $P[i]$ , con  $0 < i \leq m$ , es el valor de la  $i$ -ésima derivada evaluada en  $z$ . Más información en [14].

**Algoritmo 2:** Método de Horner extendido

**Input:**  $\alpha[0..d]$ ,  $z$   
**Output:**  $p(z), p'(z)$   
 $E := \alpha[d];$   
 $D := 0;$   
**for**  $i \leftarrow d - 1$  **to**  $0$  **do**  
     $D := D * z + E;$   
     $E := E * z + \alpha[i];$   
**end**  
**return**  $E, D;$

**Algoritmo 3:** Método de Horner generalizado

**Input:**  $\alpha[0..d]$ ,  $z$ ,  $m$   
**Output:**  $P[0..m]$   
 $P[0] := \alpha[d];$   
 $P[1..m] := \{0..,0\};$   
 $K := 1;$   
**for**  $i \leftarrow d - 1$  **to**  $0$  **do**  
     $nd := \min\{m, d - i\};$   
    **for**  $j \leftarrow nd$  **to**  $1$  **do**  
         $P[j] := P[j] * z + P[j - 1];$   
    **end**  
     $P[0] := P[0] * z + \alpha[i];$   
**end**  
**for**  $i \leftarrow 2$  **to**  $m$  **do**  
     $K := K * i;$   
     $P[i] := P[i] * K;$   
**end**  
**return**  $P[0..m];$

### 5.1.4. Estimación de multiplicidad

Cuando un punto  $z$  es iterado y se tiene que  $|N_p^{ok-1}(z) - N_p^{ok}(z)| < \epsilon/d$  se debe determinar si tal punto aproxima una nueva raíz o alguna de las ya encontradas.

En los casos donde hay raíces múltiples o raíces en clúster, es decir, cuando se tienen  $k$  raíces distintas de forma que la distancia entre cada par sea menor que  $\epsilon$ , la multiplicidad puede inferirse de varias maneras, una de ellas es a partir del valor de  $N'p(\hat{z})$ .

Recordemos que para una raíz  $\zeta$  de multiplicidad  $k \geq 2$  se tiene que  $N'p(\zeta) = (k-1)/k$ . Un criterio sencillo para determinar si una aproximación  $\hat{z}_1$  aproxima la misma raíz que una  $\hat{z}_2$  previamente aproximada sería determinar la multiplicidad de  $\hat{z}_1$  calculando  $N'p(\hat{z}_1)$ .

Si  $|\hat{z}_1 - \hat{z}_2| < \epsilon$ , entonces se estima el valor de  $k$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} N'_p(\hat{z}_1) &\approx \frac{k-1}{k}, \\ \frac{p(\hat{z}_1)p''(\hat{z}_1)}{p'(\hat{z}_1)^2} &\approx 1 - \frac{1}{k}, \\ \frac{p'(\hat{z}_1)^2}{p'(\hat{z}_1)^2 - p(\hat{z}_1)p''(\hat{z}_1)} &\approx k. \end{aligned}$$

Sin embargo, si se trata de una raíz múltiple, mientras  $\hat{z}_1 \rightarrow \zeta$  se tiene que  $p'(\hat{z}_1) \rightarrow 0$ , lo cual dificulta el cómputo de  $N'_p(\hat{z}_1) = \frac{p(\hat{z}_1)p''(\hat{z}_1)}{p'(\hat{z}_1)^2}$ . Recordemos que sin conocer las raíces no es posible eliminar los factores comunes de  $p$ ,  $p'$  y  $p''$ .

Otra forma de determinar aproximaciones duplicadas es modificando el Método de Newton para que tome en cuenta las aproximaciones previamente obtenidas. Suponga que se tienen  $m$  raíces aproximadas,  $\hat{z}_1 \dots \hat{z}_m$ . Aplicando el

Método de Newton a la función  $f(z) = \frac{p(z)}{\prod_{j=1}^m (z - \hat{z}_j)}$  se tiene

$$N_f(z) = z - \frac{\frac{p(z)}{\prod_{j=1}^m (z - \hat{z}_j)}}{\frac{1}{\prod_{j=1}^m (z - \hat{z}_j)} \left( p'(z) - p(z) \sum_{i=1}^m \frac{1}{(z - \hat{z}_i)} \right)},$$

$$N_f(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z) - p(z) \sum_{i=1}^m \frac{1}{(z - \hat{z}_i)}}.$$

Esta modificación al Método de Newton se conoce como la deflación de Maehly.

Suponiendo que tras iterar todos los puntos de  $S_d$  no se encontraran todas las raíces, esta modificación podría hacer que el método ignore las raíces simples ya aproximadas y reduzca la multiplicidad de las raíces múltiples aproximadas. Pero, dependiendo del error en las aproximaciones previas, puede suceder que se obtenga un mapeo  $N_f$  con dos puntos fijos muy cercanos, uno atractor correspondiente a una raíz múltiple y un repulsor en el punto  $\hat{z}$ , acercando el comportamiento caótico de los puntos repulsivos a la raíz.

## 5.2. Construcción de $S_d$

Para construir el conjunto  $S_d$  el primer paso es elegir un anillo recto contenido en algún dominio fundamental de  $N_p$ . Para esto se ha de elegir un valor para  $R$  y su respectivo  $\kappa$  como se menciona en el Teorema 19. Por ejemplo, para  $R = 1 + \sqrt{2}$  basta usar  $\kappa = 1/2$ . El algoritmo 4 muestra la construcción de  $S_d$ . Nótese el uso de la operación mayor entero  $\lceil \cdot \rceil$ , ya que la cantidad de puntos en el conjunto  $S_d$  es un número entero este redondeo no afecta las propiedades de  $S_d$ .

Cabe mencionar que puede elegirse algún orden estratégico para iterar los puntos de  $S_d$ . Como esta construcción sirve para todos los polinomios, en un peor caso habría cuencas en las que cae un solo punto, pero se espera que para la mayoría de los polinomios y la mayoría de sus cuencas, éstas contengan varios

**Algoritmo 4:** Construcción de  $S_d$ 

```

Input:  $d, R$ 
Output:  $S_d$ 
 $S_d := \emptyset;$ 
 $\kappa := \frac{|\log(1 - \frac{1}{d} - \frac{1}{Rd})|}{|\log(1 - \frac{1}{d})|};$ 
 $s := \lceil 0,26562 \log d \rceil;$ 
 $p := \lceil (4,17636/\kappa)d \log d \rceil;$ 
for  $v \leftarrow 1$  to  $s$  do
     $r_v := R \left( \frac{d-1}{d} \right)^{\frac{(2v-1)\kappa}{2s}};$ 
    for  $\mu \leftarrow 1$  to  $p$  do
         $S_d := S_d \cup \{r_v e^{\frac{2\pi}{p}\mu i}\};$ 
    end
end
return  $S_d;$ 

```

puntos. Tomar puntos en  $S_d$  que difieran en su argumento por  $\pi/d$  puede ayudar a evitar que se iteren varios puntos consecutivos dentro de la misma cuenca.

### 5.3. Un código C++

En esta sección presento un código en lenguaje C++, implementando la estrategia planteada, empleando como criterio de detección de duplicados la deflación de Maehly.

La entrada es por medio de un archivo, `entrada.in`. La primer línea de entrada es un entero  $d$  que es el grado del polinomio. Las siguientes  $d + 1$  líneas contienen dos números decimales que representan los coeficientes del polinomio  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ . La salida es arrojada en el archivo `salida.out` y consta de  $d$  líneas cada una con una aproximación  $\hat{z}_i$ . El formato de salida es el estándar de la STL:  $(X, Y)$ , donde  $\hat{z}_i = X + iY$ .

```
#include<iostream>
#include<cstdio>
#include<cmath>
#include<complex>
#include<vector>

#define VCD vector<complex<double> >
#define COM complex<double>
#define EPS 1.0e-10
#define PI acos(-1.0)

using namespace std;

typedef struct
{
    COM punto;
    int modo;
}elemento;

vector<elemento> SD;

VCD coef;
int DEG, ITER;

//inician prototipos
VCD newton_Sd(VCD);
COM newton_paso(COM, VCD::iterator, VCD::iterator);
pair<int, COM> newton_iter(COM , VCD::iterator, VCD::iterator);
void construir_Sd();
double norm_factor();
int iteraciones(double);
VCD append(VCD, VCD::iterator, VCD::iterator);
//fin de prototipos

int main()
{
    //interfaz de entrada y salida
    freopen("entrada.in", "r", stdin);
    freopen("salida.out", "w", stdout);
```

```

cin>>DEG;
coef.resize(DEG+1);
double X, Y;
for(int i=0; i<=DEG; i++)
{
    cin>>X>>Y;
    coef[i] = complex<double> (X, Y);
}

//Se construye el conjunto Sd
construir_Sd();

VCD aprox(0,0);
//proceso recursivo de aproximacion
aprox = newton_Sd(aprox);

//salida
for(int i=0; i<aprox.size(); i++) cout<<aprox[i]<<endl;
return 0;
}

VCD newton_Sd(VCD aprox)
{ // aprox contiene las aproximaciones previas
    VCD next;
    /* Los puntos de SD se toman en el orden en que fueron
    * generados.
    */
    for(int e=0; e<SD.size(); e++)
    {
        if(SD[e].modo == -1) // este punto no ha convergido
        {
            COM Z = SD[e].punto;
            // Metodo de Newton
            pair<int, COM> W;
            W = newton_iter(Z, aprox.begin(), aprox.end());

            if(W.first != -1) // Converge
            {
                bool ban = true;

```

```

    for(int i=0; i<next.size(); i++)
    {
        if(abs(next[i] - W.second) < EPS)
        { // previamente aproximada
            ban = false;
            break;
        }
    }
    if(ban) // no repetido
    {
        next.push_back(W.second);
        SD[e].modo = 0; // aproximacion
        if(next.size() + aprox.size() == DEG)
        { // ya fueron encontradas todas las raices
            return append(next, aprox.begin(), aprox.end());
        }
    }
}
else
{ // el valor que no converge se mantiene
    SD[e].punto = W.second;
}
}
//si se acabo de iterar SD
return newton_Sd(append(next, aprox.begin(), aprox.end()));
}

COM newton_paso(COM Z, VCD::iterator a, VCD::iterator b)
{ // metodo de Newton con deflacion de Mahely
    COM E = coef[DEG];
    COM D (0.0, 0.0);
    COM M (0.0, 0.0);
    for(int i=DEG-1; i>=0; i--)
    {
        D = D*Z + E;
        E = E*Z + coef[i];
    }
    for(VCD::iterator j=a; j!=b; j++)
    {

```

```

        M += E/(Z - *j);
    }
    return Z - (E/(D - M));
}

pair<int, COM> newton_iter(COM Z, VCD::iterator a, VCD::iterator b)
{
    COM W1, W0(Z);
    for(int i=0; i<ITER; i++)
    {
        W1 = newton_paso(W0, a, b);
        if(abs(W0 - W1) < EPS) return make_pair(i, W1);
        W0 = W1;
    }
    return make_pair(-1, Z);
}

void construir_Sd()
{
    // M factor de normalizacion
    double M = norm_factor();
    // DD grado en decimal para calculos posteriores
    double DD = 1.0*DEG;
    // RR radio inicial de la construccion
    double RR = 3.5; //radio inicial
    // KK valor de kappa
    double KK = abs(log(1-(1/DD)+(1/(RR*DD))))/abs(log(1-(1/DD)));
    // SS numero de circulos
    double SS = ceil(0.26632*log(DD));
    // PP numero de puntos
    double PP = ceil((4.1627/KK)*DD*log(DD));
    // FF constante de escalamiento entre circulos
    double FF = pow(double((DD-1)/DD), KK/(2.0*SS));

    SD.clear();
    /* Los puntos se generan desde el circulo exterior hacia el
     * interior, comenzando con argumento cero, de forma
     * consecutiva y en sentido contrarreloj.
     */
}

```

```

for(int i=1; i<=SS; i++)
{
    // Ri radio del i-esimo circulo
    double Ri = RR * pow(FF, 2*i-1);
    for(int j=0; j<PP; j++)
    {
        COM basico (cos(((j)*2.0/PP)*PI), sin(((j)*2.0/PP)*PI));
        elemento temp;
        temp.punto = M*Ri*basico;
        temp.modo = -1;
        SD.push_back(temp);
    }
}
ITER = iteraciones(M*RR);
}

double norm_factor() //factor de normalizacion
{
    double M = abs(coef[0]/coef[DEG]);
    for(int i=1; i<DEG; i++)
    {
        if(M < abs(coef[i]/coef[DEG])) M = abs(coef[i]/coef[DEG]);
    }
    M += 1.0;
    return M;
}

int iteraciones(double R) //numero de iteraciones con radio inicial R
{
    return ceil(1 + DEG * log(R/EPS));
}

VCD append(VCD v, VCD::iterator a, VCD::iterator b)
{ // concatenamiento de <vector>
    for(VCD::iterator j=a; j!=b; j++) v.push_back(*j);
    return v;
}

```

## 5.4. Consideraciones

Algo que se observa en la práctica es que la cantidad de puntos dentro de cada cuenca inmediata es relativamente grande.

**Teorema 31** (Cuenca ancha). *Para cualquier polinomio de grado arbitrario se tiene que más de la mitad de sus raíces tienen un canal que intersecta al dominio fundamental en un cuadrilátero con módulo de al menos  $\pi/\log 3$ .*

*Demostración.* Por el Teorema 18 si una cuenca inmediata contiene  $m_\zeta$  puntos críticos, existe un canal que intersecta al dominio fundamental en un cuadrilátero con módulo de al menos  $\pi/\log(m_\zeta + 1)$ . Para que todos los canales de una cuenca inmediata tengan un módulo menor que  $\pi/\log 3$  tal cuenca debe contener al menos tres puntos críticos de  $N_p$ , pero ya que hay sólo  $2d - 2$  puntos críticos, contando multiplicidades, y  $d$  de estos se encuentran en las cuencas de las raíces, menos de la mitad de las cuencas inmediatas pueden tener tres o más puntos críticos.  $\square$

El Teorema anterior nos permite modificar la construcción de  $S_d$ , reduciendo la cantidad de puntos necesarios para aproximar la mitad de las raíces. De esta forma sería posible llevar a cabo una deflación y realizar la aproximación del resto con un polinomio de menor grado. De realizar un proceso como el descrito de manera iterativa, se aproximan la mitad de las raíces, se aplica la deflación y se repite, haciendo que el error de la deflación sea acarreado  $\log_2 d$  veces en lugar de las  $d$  veces resultantes en caso de aplicar deflación cada que se aproxima una raíz. En [10] Kim y Sutherland muestran esta idea de acarreo logarítmico y controlan el error acarreado con una construcción de valores iniciales completamente diferente.

Hay ocasiones en que se tiene de antemano información sobre las raíces, por ejemplo, que se sepa que todas son reales. En ese caso un simple ajuste a la construcción simplifica varias cosas. Sean  $\zeta_{min}$  y  $\zeta_{max}$  las raíces menor y mayor respectivamente. Bajo  $N_p$  el rayo  $\{z \in \mathbb{R} : z < \zeta_{min}\}$  converge a  $\zeta_{min}$  y de la misma forma el rayo  $\{z \in \mathbb{R} : z > \zeta_{max}\}$  converge a  $\zeta_{max}$ . Estos rayos pertenecen a canales de sus respectivas cuencas de atracción. Por el Lema 6 los puntos críticos de  $N_p$  deben estar dentro del intervalo  $[\zeta_{min}, \zeta_{max}]$ , y por simetría las otras  $d - 2$  raíces diferentes de  $\zeta_{min}$  y  $\zeta_{max}$  deben tener dos canales cada una, por lo que sus cuencas contienen dos puntos críticos, lo que agota todos los puntos críticos de  $N_p$ . Nótese que todos estos puntos críticos se encuentran en cuencas inmediatas, por lo que no pueden existir cuencas atractoras además de las de las raíces. Como las cuencas contienen o uno o dos puntos críticos, todas tienen un canal con módulo de al menos  $\pi/\log 3$ .

Ahora construiremos  $S_d$  con un solo círculo. Primero se requiere un  $\tau$  tal que

$$M(\tau) = \frac{\pi}{\log 3}.$$

Resolviendo con el método de bisección resulta  $\tau \approx 2,4183296871$ . Recuerde que la construcción de  $s$  círculos y  $p$  puntos da pie a la ecuación

$$\tau = \frac{2\pi s d}{\kappa p}.$$

Como vamos a usar un círculo, la cantidad de puntos necesarios es  $p = (2\pi d)/(\kappa \tau) \approx (2,5981508397/\kappa)d$ . Además, por simetría, se puede usar sólo la mitad del círculo para polinomios con raíces reales.

## 5.5. Graficación

Las imágenes de las cuencas mostradas en este trabajo fueron generadas con un código propio de C++ con OpenGL, en una resolución original de  $1000 \times 700$  píxeles para la versión plana y  $600 \times 600$  píxeles para las imágenes esféricas, siguiendo un algoritmo de escape.

En la versión plana, la pantalla representa un rectángulo subconjunto de  $\mathbb{C}$ , donde cada píxel representa una sección cuadrada de lado  $\Delta$ , a la que se le asigna un número complejo  $w_{ij}$  correspondiente al centro del cuadrado que representa.

Dadas las raíces de un polinomio  $p(z) = \prod_{i=1}^d (z - \zeta_i)$ , la pantalla se pinta de la siguiente forma: El color de cada píxel esta determinado por el comportamiento de su valor representativo  $w_{ij}$ . Eligiendo una cantidad máxima de iteraciones  $I$ , se itera el valor  $w_{ij}$  bajo el Método de Newton

$$N_p(w) = w - \frac{1}{\sum_{i=1}^d \frac{1}{w - \zeta_i}}.$$

Si el método no converge en  $I$  iteraciones el píxel es negro. Por otra parte, si converge en  $v < I$  iteraciones a la  $u$ -ésima raíz  $\zeta_u$ , el matiz del color se elige dependiendo de la raíz y el tono se elige dependiendo de la cantidad de iteraciones. De esta forma las cuencas pertenecientes a raíces diferentes tienen colores diferentes, los cuales son más oscuros entre más iteraciones toma al punto para converger, tendiendo a negro en la frontera.

El algoritmo 5 muestra el procedimiento de asignación de colores  $\omega_{ij}$  a cada píxel, según su valor representativo  $w_{ij}$ . Para este procedimiento es necesario que la implementación del Método de Newton reporte el número de iteraciones que toma para converger, si es que lo hace. Suponiendo que raíces diferentes se encuentran en píxeles diferentes, basta para la tolerancia del Método de Newton

**Algoritmo 5:** Cálculos para gráfica plana**Input:** raíces  $\{\zeta_1 \dots \zeta_d\}$ , valores  $\{w_{ij}\}$ **Output:** colores  $\{\omega_{ij}\}$ **foreach**  $i$  **do**    **foreach**  $j$  **do**         $z_0 := w_{ij}$ ;         $v := 0$ ;         $u := -1$ ;        **while**  $v < I \wedge u = -1$  **do**             $z_1 := z_0 - \frac{1}{\sum_{i=1}^d \frac{1}{z_0 - \zeta_i}}$ ;            **for**  $t \leftarrow 1$  **to**  $d$  **do**                **if**  $|z_1 - \zeta_t| < \Delta/2$  **then**  $u := t$ ;            **end**             $z_0 := z_1$ ;             $v := v + 1$ ;        **end**        **if**  $u = -1$  **then**             $\omega_{ij} := \text{negro}$ ;        **else**             $\omega_{ij} := \text{ColorHSV}(\frac{2\pi}{d}u, 1, e^{-v/50})$ ;            // el número 50 puede cambiarse para controlar  
            la diferencia entre tonos consecutivos        **end**    **end****end****return**  $\{\omega_{ij}\}$ ;

un  $\epsilon = \Delta/2$ . Un modelo de color adecuado es el HSV, con el matiz  $H \in [0, 2\pi]$ , la saturación  $S \in [0, 1]$  y el tono  $V \in [0, 1]$ .

Para las imágenes de la esfera se usan las siguientes transformaciones: la proyección estereográfica  $St : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}^2$ , las rotaciones de la esfera  $Rot(\mathbb{S}^2)$  y la proyección ortográfica  $H : \mathbb{S}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ . Dado un punto sobre la esfera  $N \in \mathbb{S}^2$ , se genera la imagen de la esfera haciendo que  $N$  quede al centro del dibujo de la siguiente manera: A los píxeles en la pantalla tales que  $|w_{ij}| \leq 1$  se les asigna color, los demás permanecen en blanco. Cada  $w_{ij}$  se lleva al hemisferio superior de  $\mathbb{S}^2$  con  $H^{-1}$ . Luego, se usa una rotación  $\Theta \in Rot(\mathbb{S}^2)$  tal que lleve el polo norte al punto  $N$ . Finalmente, el número complejo  $z_{ij} = (St^{-1} \circ \Theta^{-1} \circ H^{-1})(w_{ij})$  es el que se itera bajo el Método de Newton. El color se determina con los mismos criterios que para la imagen plana.



# Capítulo 6

## Ejemplos

### 6.1. Polinomios mal portados

El problema con el Método de Newton es que no garantiza la convergencia para todos los valores iniciales. El conjunto de Julia del mapeo de Newton es un ejemplo de puntos que divergen bajo el método, pero no olvidemos que éste está conformado por la frontera de las cuencas de atracción y que casi todos sus puntos son repulsores. Por esto y por la imprecisión de los cálculos de punto flotante en la computadora, la probabilidad de tomar al azar uno de estos puntos como valor inicial para el método es cero.

No obstante, hemos visto que no sólo el conjunto de Julia de  $N_p$  provoca divergencia en el método. Existen cuencas de atracción para ciclos de periodo mayor que uno, es más, para cada  $d \geq 2$  existen polinomios de grado  $d$  con la propiedad de que su correspondiente mapeo de Newton tiene  $2d - 2$  atractores periódicos distintos en  $\mathbb{C}$ . (Véase [9].)

Como se vio anteriormente, la dinámica de  $N_p$  esta ligada a sus puntos críticos y por el Teorema 6 esta relación es de carácter geométrico, es decir, sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos números complejos. Sea  $\zeta$  una raíz de  $p$ , entonces el polinomio  $q(z) = p(\alpha z + \beta)$  tiene un factor  $(\alpha z + \beta - \zeta)$ . Así, por cada raíz  $\zeta$  de  $p$ ,  $q$  tiene una raíz  $(\zeta - \beta)/\alpha$  y además

$$\begin{aligned} N_q(z) &= z - \frac{p(\alpha z + \beta)}{\alpha p'(\alpha z + \beta)}, \\ \alpha N_q(z) + \beta &= \alpha z + \beta - \frac{p(\alpha z + \beta)}{p'(\alpha z + \beta)}, \\ \alpha N_q(z) + \beta &= N_p(\alpha z + \beta). \end{aligned}$$

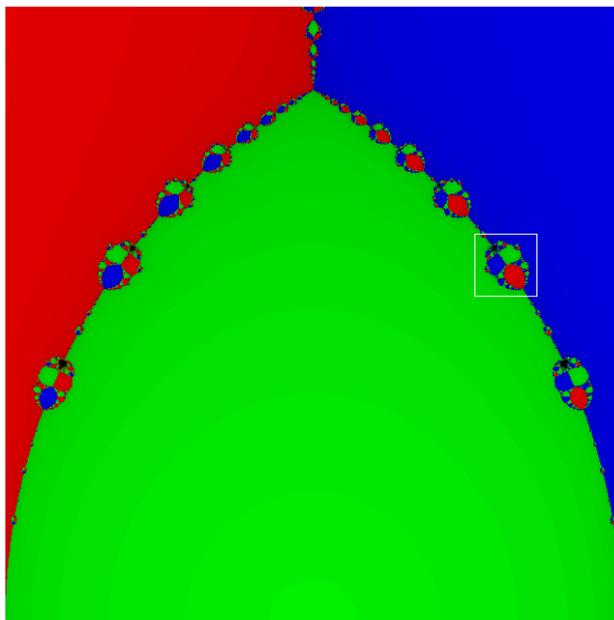
En otras palabras, la dinámica de  $N_q$  permanece cualitativamente igual a la de  $N_p$  cuando las raíces de  $q$  corresponden a las raíces de  $p$  bajo una transformación afín. En este caso se dice que  $N_p$  y  $N_q$  son conjugados afines.

No hay polinomios mal portados de grado  $d = 2$ , más aún, la dinámica de  $N_p$  para estos polinomios es muy simple. Sea  $p$  un polinomio cuadrático, y sean  $\alpha$  y  $\beta$  sus raíces distintas. Considere la transformación de Möbius

$$h(z) = \frac{z - \beta}{z - \alpha}.$$

Nótese que  $h(\infty) = 1$ ,  $h(\alpha) = \infty$  y  $h(\beta) = 0$ , por lo que el mapeo  $h \circ N_p \circ h^{-1}$  es racional de grado 2, con puntos fijos atractores en 0 e  $\infty$  y que además deja fijo a 1, i.e. es el mapeo  $z \mapsto z^2$ . De esta forma resulta evidente que el mapeo de Newton de cualquier polinomio cuadrático de raíces distintas es conjugado afín a  $z \mapsto z^2$ , lo que nos dice que su conjunto de Julia corresponde a una transformación afín del círculo unitario, particularmente un círculo en  $\overline{\mathbb{C}}$  que contiene al punto  $\infty$ , ya que éste es repulsor del mapeo de Newton, por lo que el conjunto de Julia de  $N_p$  es una recta en  $\mathbb{C}$ .

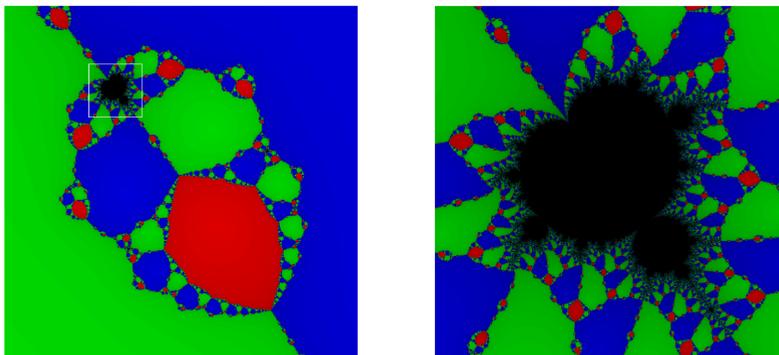
Ahora bien, para encontrar ciclos atractores de periodo mayor que uno se ha de comenzar con polinomios de grado 3. Sea  $p$  un polinomio cúbico con al



**Figura 6.1:** *Cuadrado unitario en el espacio de parámetros  $\rho$ .*

menos dos raíces diferentes, el cierre convexo de las raíces de  $p$  es un triángulo que puede ser degenerado. Existe una transformación afín que lleva tal triángulo al semiplano superior tal que dos raíces de  $p$  queden en los puntos 0 y 1, en particular las dos raíces que corresponden a los vértices del lado más largo del triángulo. Así, basta considerar solamente una familia uniparamétrica de polinomios, la cual consiste de los  $p(z) = z(z - 1)(z - \rho)$ , donde  $Im(\rho) \geq 0$ ,  $|\rho| \leq 1$  y  $|\rho - 1| \leq 1$ .

La dinámica del mapeo de Newton esta guiada por sus puntos críticos, particularmente, sabemos que todos los puntos críticos se encuentran dentro de una cuenca de atracción. Para nuestra familia de polinomios cúbicos, el mapeo de

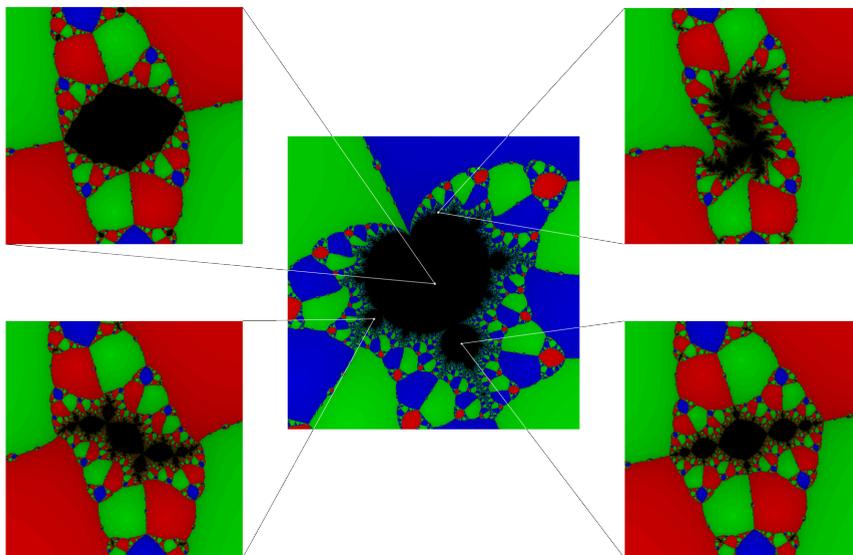


**Figura 6.2:** *Detalles de la figura 6.1.*

Newton tiene cuatro puntos críticos, contando multiplicidades, que son las tres raíces y un cuarto dado por la solución de  $p''(z) = 0$ , explícitamente  $z = (\rho + 1)/3$ .

En un experimento computacional exploraremos el espacio de parámetros para  $\rho$ . La imagen de computadora generada representa el plano complejo, cada píxel representa un punto de una malla, y según el valor de  $\rho$  correspondiente se le asigna un color de la siguiente forma: Dado un límite de iteraciones  $I$ , se aplicará el Método de Newton tomando como valor inicial punto crítico  $\zeta_0 = (\rho + 1)/3$ . Si el método converge a alguna de las raíces se elige un matiz diferente (rojo, verde o azul) y el tono depende del número de iteraciones que toma para converger; a más iteraciones corresponde un color más oscuro. Si el método no converge en el límite de iteraciones se elige el color negro.

En la figura 6.1 se puede ver la imagen resultante en el cuadrado unitario, el cual contiene la figura casi triangular del espacio del parámetro  $\rho$ . Para esta imagen se usó un valor de límite  $I = 500$ , en la figura 6.2 se puede apreciar un acercamiento a algunos detalles de la figura. Los puntos negros representan



**Figura 6.3:** Ejemplos de ciclos atractores de periodo mayor que uno. Se muestra el valor correspondiente de  $\rho$  para cada uno.

valores de  $\rho$  para los cuales el punto crítico  $(\rho + 1)/3$  del mapeo de Newton puede pertenecer a una cuenca de atracción diferente a las de las raíces, es decir, a un agujero de valores iniciales divergentes para el Método de Newton.

En la figura 6.3 se pueden ver algunos ejemplos de las cuencas del mapeo de Newton para polinomios con valores de  $\rho$  encontrados en el experimento. El hecho de que en este experimento se presenten figuras como la del conjunto de Mandelbrot y los conjuntos de Julia cuadráticos se puede explicar por la teoría de mapeos *tipo-polinomiales*. (Véanse [2] y [5].)

## 6.2. Otros métodos

Además del Método de Newton existen otros métodos iterativos para encontrar raíces de funciones. Sin embargo, al abordarlos desde el punto de vista dinámico, sus propiedades geométricas y dinámicas no permiten llevar a cabo una construcción parecida a la de  $S_d$ .

### 6.2.1. Método de Newton para raíces múltiples

Sea  $p$  un polinomio. La función  $g(z) = p(z)/p'(z)$  tiene una raíz simple por cada raíz de  $p$ , incluso las múltiples. Aplicando el Método de Newton a esta función se obtiene un nuevo mapeo  $M_p(z)$  al que llamaremos mapeo de Newton para raíces múltiples.

$$M_p(z) = z - \frac{p(z)p'(z)}{p'(z)^2 - p(z)p''(z)}.$$

Los puntos fijos de este mapeo son las raíces de  $p$  y los puntos  $p'(z) = 0$ . Nótese que para este mapeo el punto  $\infty$  no es un punto fijo. Ahora bien, las raíces de  $p$  son puntos fijos con multiplicador igual a cero.

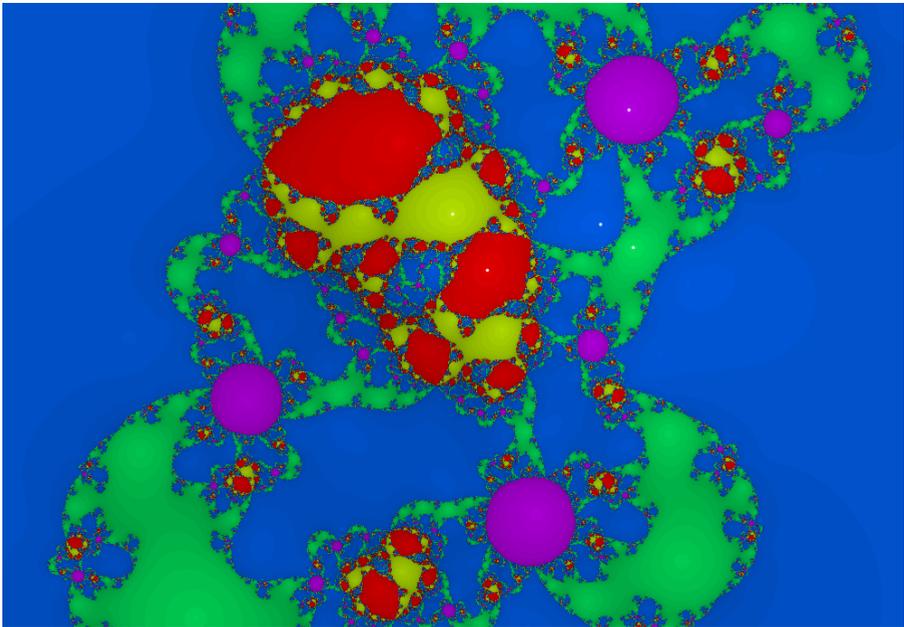
Por otro lado, sea  $w$  tal que  $p'(w) = 0$  y  $p(w) \neq 0$ , se tiene que

$$M_p(z) = z - \frac{p(z)p'(z)}{p'(z)^2 - p(z)p''(z)},$$

$$M_p'(z) = 1 - \frac{(p'(z)^2 - p(z)p''(z))(p(z)p'(z))' - p(z)p'(z)(p'(z)^2 - p(z)p''(z))'}{(p'(z)^2 - p(z)p''(z))^2},$$

$$M_p'(w) = 1 - \frac{(-p(w)p''(w))(p(w)p''(w))}{(p(w)p''(w))^2},$$

$$M_p'(w) = 2.$$



**Figura 6.4:** Método de Newton para raíces múltiples aplicado al ejemplo de la figura 2.5.

Entonces tales puntos fijos siempre son repulsores. En la figura 6.4 puede verse un ejemplo de las cuencas generadas por el Método de Newton para raíces múltiples.

Uno de los problemas del Método de Newton es que converge linealmente en raíces múltiples, este método para raíces múltiples logra una convergencia cuadrática para tales raíces. Sin embargo, la geometría de las cuencas no permite una construcción parecida a la de  $S_d$ .

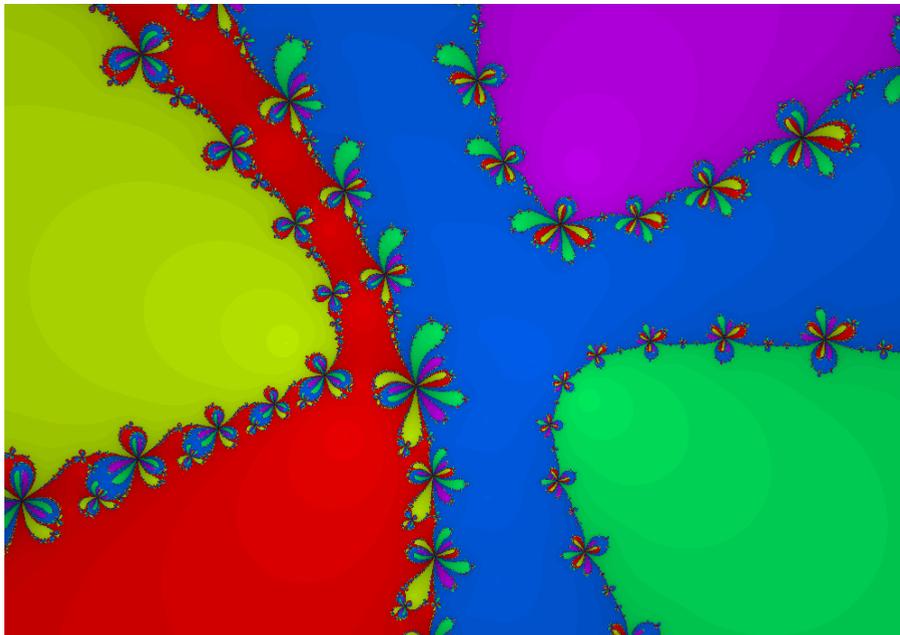
### 6.2.2. Método de Schröder

Tanto Schröder como König produjeron alteraciones del Método de Newton para lograr una convergencia de cualquier orden deseado en las raíces simples. Sean  $p$  un polinomio y  $\zeta_i$  una aproximación a una raíz simple de  $p$ , tal que se encuentre en una vecindad donde  $p'(z) \neq 0$ . Se puede aproximar  $w = p(z)$  por un polinomio  $z = h(w) = a_0 + a_1w + \dots + a_{r-1}w^{r-1}$  de forma que  $w = p(\zeta_i)$  y  $\zeta_i = h(w)$  coincidan hasta sus  $r - 1$  derivadas. Se toma como siguiente aproximación al valor  $\zeta_{i+1} = h(0) = a_0$ . Esto define el Método de Schröder de orden  $r$ .

Para las raíces simples, este método tiene un orden de convergencia  $r$ . Cuando  $r = 2$  la aproximación al polinomio se hace por una tangente en  $\zeta_i$ , por lo que  $S_2$  es el Método de Newton.

Para  $r = 3$  el Método de Schröder esta definido por

$$\begin{aligned} S_3(z) &= z - \frac{p(z)}{p'(z)} - \frac{p''(z)p(z)^2}{2p'(z)^3} \\ &= z - \frac{p(z) \left( 2p'(z)^2 + p(z)p''(z) \right)}{2p'(z)^3}. \end{aligned}$$



**Figura 6.5:**  $S_3$  aplicado al ejemplo de la figura 2.5.

Los puntos fijos del mapeo  $S_3$  son las raíces de  $p$  y también las soluciones de  $2p'(z)^2 + p(z)p''(z) = 0$  que no sean raíces de  $p$ . Las raíces de multiplicidad  $k \geq 2$  tienen multiplicador  $\lambda = (k-1)(2k+1)/(2k^2)$  por lo que la convergencia es lineal para estas raíces. El punto  $\infty$  es un punto fijo repulsor con multiplicador  $\lambda = 2d^2/(2d^2 - 3d + 1)$ , donde  $d$  es el grado del polinomio  $p$ . En la figura 6.5 se muestra un ejemplo de las cuencas de atracción del mapeo  $S_3$ .

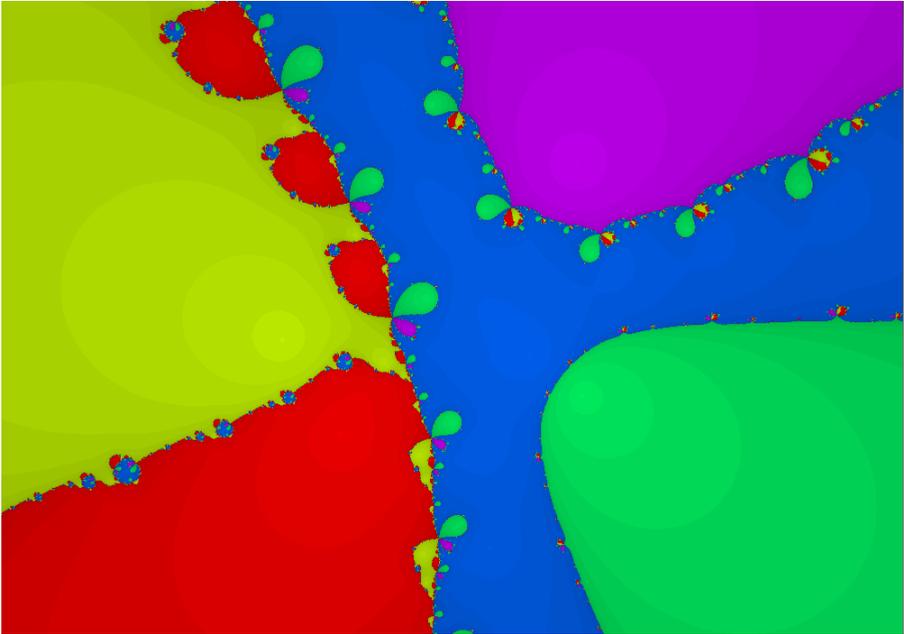
### 6.2.3. Método de König

Si se le aplica el Método de Newton al producto  $p(z)h(z)$ , donde  $h(z)$  es una función finita y no cero en las raíces simples de  $p$ , la convergencia a las raíces simples es al menos de orden cuadrático. En el Método de König de orden  $r$ , la función  $h(z)$  se elige de manera que el método converja con orden  $r$  a las raíces simples de  $p$ .  $K_2$  es el Método de Newton ya conocido.

Este método para  $r = 3$  es conocido también como el Método de Halley. Para una raíz simple  $w$ ,  $K_3$  debe satisfacer  $K_3''(w) = 0$ . Se puede elegir  $h(z) = 1/\sqrt{p'(z)}$ , con lo que queda definido como

$$\begin{aligned} K_3(z) &= z - \frac{\frac{p(z)}{\sqrt{p'(z)}}}{\frac{p'(z)\sqrt{p'(z)} - \left(\frac{p(z)p''(z)}{2\sqrt{p'(z)}}\right)}{p'(z)}} \\ &= z - \frac{2p(z)p'(z)}{2p'(z)^2 - p(z)p''(z)}. \end{aligned}$$

Las raíces de  $p$  son puntos fijos de  $K_3$ . Las raíces con multiplicidad  $k$  tienen multiplicador  $\lambda = (k-1)/(k+1)$  por lo que la convergencia es lineal en raíces múltiples. Otros puntos fijos de  $K_3$  son las soluciones de  $p'(z) = 0$  que no son raíces de  $p$ , pero estos siempre son repulsores. El punto  $\infty$  es un punto fijo repulsor de  $K_r$ , con multiplicador  $\lambda = (d+r-2)/(d-1)$ , donde  $d$  es el grado de  $p$ . La figura 6.6 muestra un ejemplo de las cuencas de atracción de  $K_3$ .



**Figura 6.6:**  $K_3$  aplicado al ejemplo de la figura 2.5.

La existencia de puntos fijos repulsivos además del punto al infinito no permite hacer uso de los teoremas 11 y 13, por lo que puede haber polinomios con raíces sin accesos a  $\infty$ .

#### 6.2.4. Método de Steffensen

A diferencia de los métodos anteriores, el Método de Steffensen no requiere de evaluar derivadas. Este método surge del proceso  $\Delta^2$  de Aiken para acelerar la convergencia de sucesiones (Véase [7]). Las iteraciones del método están dadas por

$$F(z) = z - \frac{p(z)^2}{p(p(z) + z) - p(z)}.$$

En caso de que el denominador sea igual a cero se hace  $F(z) = z$  y la iteración se detiene. Este método converge cuadráticamente en raíces simples y linealmente en raíces múltiples.

Sin embargo, gran parte de los valores iniciales divergen con este método. Véase el ejemplo en la figura 6.7.

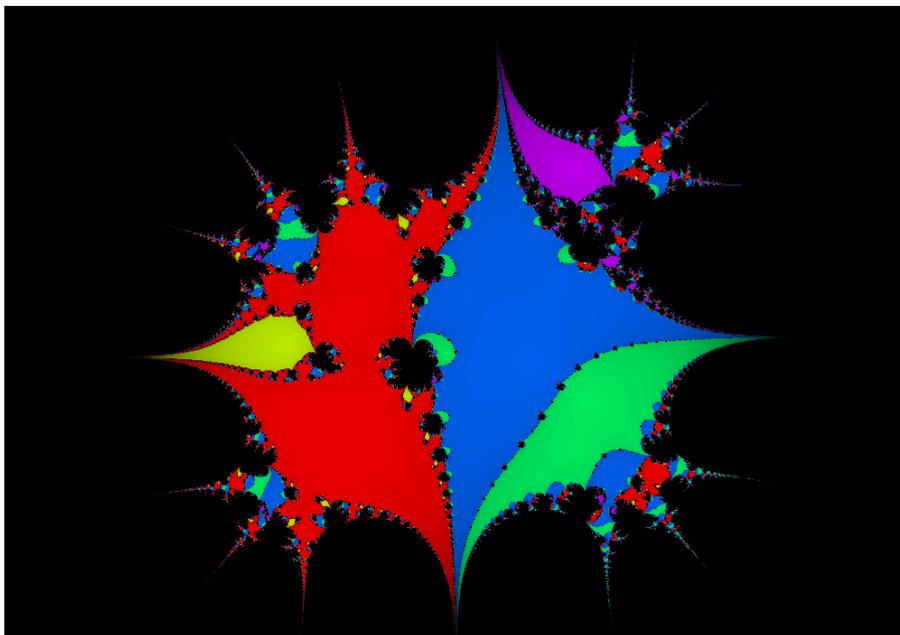


Figura 6.7: El Método de Steffensen aplicado al ejemplo de la figura 2.5.



# Conclusiones

Los teoremas 25 y 29 muestran la construcción del conjunto global  $S_d$ , el cual tiene la propiedad de que para todo polinomio de grado  $d$  hay al menos un punto  $z_0 \in S_d$  contenido en la cuenca inmediata de atracción de cada raíz del polinomio. Además, bajo los supuestos de la construcción, la cantidad de puntos en  $S_d$  es óptima.

El Teorema 31 muestra una modificación al conjunto  $S_d$  siguiendo los principios geométricos de la construcción haciendo uso de simplificaciones que reducen la cantidad de puntos de  $S_d$  pero que a cambio sólo permiten asegurar *darle* a la mitad de las raíces. Este tipo de modificaciones hacen de la construcción de  $S_d$  algo personalizable, que puede adaptarse a las necesidades y restricciones dadas en el ámbito en que la implementación tenga lugar. El problema computacional de aproximar raíces puede aparecer como paso intermedio en la implementación de algoritmos de optimización, simulaciones o métodos numéricos, entre otros.

La implementación y el código mostrados no son para nada definitivos. Varias modificaciones pueden hacerse a los criterios del algoritmo, obteniendo diferentes resultados. La elección de los criterios mostrados en el código se hizo pensando en polinomios *genéricos*, es decir, aquellos cuyas raíces y ceros de las derivadas son todos diferentes.

Recuerde que el problema de aproximar raíces requiere la determinación de un valor de tolerancia  $\epsilon > 0$ , para hacer que todas las aproximaciones obtenidas se encuentren a una distancia menor que  $\epsilon$  de las verdaderas raíces. Se dice que un conjunto de raíces está en *clúster* cuando las distancias a pares entre las raíces del conjunto son menores a  $\epsilon$ . Evidentemente el método puede fallar en la detección de un clúster de raíces, pudiéndolo detectar erróneamente como una raíz múltiple.

El problema de diferenciar los clúster de las raíces múltiples y determinar precisamente su multiplicidad es un problema abierto, para el que no se intenta dar solución en el presente trabajo. La alternativa planteada es que tanto las raíces múltiples como los clúster de raíces son aproximados por clúster de aproximaciones. Sin embargo se presentan dificultades, por ejemplo, como se mencionó previamente, inferir la multiplicidad a partir del valor de  $N'_p$  en la aproximación se dificulta por la imposibilidad de factorizar el polinomio y sus derivadas. Por otra parte, decidir si una aproximación es repetida por medio de la deflación de Mahely provoca errores numéricos y altera el comportamiento de  $N_p$ .

# Apéndice A

## Módulo conforme

En este apéndice se muestran algunos aspectos sobre el módulo conforme que se tratan en este trabajo. Para más información véanse, por ejemplo, [1] y [12].

### A.1. Métrica conforme

Una *métrica de Riemann* en un subconjunto abierto de  $\overline{\mathbb{C}}$  puede describirse con una expresión de la forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\ &= g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2, \end{aligned}$$

donde  $[g_{jk}]$  es una matriz positiva definida que depende de manera suave del punto  $z = x + iy$ . Se dice que tal métrica es *conforme* si  $g_{11} = g_{22}$  y  $g_{12} = 0$ , de forma que la matriz  $[g_{jk}]$  evaluada en algún punto  $z$  es un múltiplo positivo de la matriz identidad. En otras palabras, una métrica conforme puede ser escrita

como  $ds^2 = \rho(x + iy)^2(dx^2 + dy^2)$ , o simplemente como  $ds = \rho(z)|dz|$ , donde  $\rho(z)$  es una función suave y estrictamente positiva. Por definición, tal métrica es invariante bajo transformaciones conformes  $w = f(z)$  si y solo si satisface la identidad  $\rho(w)|dw| = \rho(z)|dz|$ , o bien,

$$\rho(f(z)) = \rho(z)/|f'(z)|.$$

Sea  $\bar{R} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq \Delta x, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq \Delta y\}$  un rectángulo cerrado en el plano complejo y  $R$  su interior. Una métrica conforme en  $R$  tiene la forma

$$ds = \rho(z)|dz|$$

donde  $\rho(z)$  es una función estrictamente positiva, definida y continua en todo  $R$ . En términos de tal métrica, la longitud de una curva suave  $\gamma : (a, b) \rightarrow R$  se define como la integral

$$L_\rho(\gamma) = \int_a^b \rho(\gamma(t))|d\gamma(t)|,$$

y el área de una región  $U \subset R$  se define como

$$\text{área}_\rho(U) = \iint_U \rho(x + iy)^2 dx dy.$$

**Lema** (Lema principal). Si  $\text{área}_\rho(R) < \infty$ , entonces, para casi todo  $y \in (0, \Delta y)$ , la longitud de la línea horizontal a la altura  $y$ , dada por  $\eta_y : t \in (0, \Delta x) \mapsto (t, y)$ , es finita. Además, existe una  $y$  tal que

$$\frac{L_\rho(\eta_y)^2}{(\Delta x)^2} \leq \frac{\text{área}_\rho(R)}{\Delta x \Delta y}.$$

De hecho, el conjunto de las  $y \in (0, \Delta y)$  que se satisfacen esta desigualdad tiene medida de Lebesgue positiva.

*Demostración.* Se usará la desigualdad de Schwarz

$$\left( \int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f(x)^2 dx \right) \left( \int_a^b g(x)^2 dx \right),$$

la cual afirma que en el espacio vectorial de las funciones integrables sobre un intervalo el producto interno de dos vectores es menor que el producto de sus normas. Tomando  $f(x) \equiv 1$  y  $g(x) = \rho(x, y)$  para algún  $y$  fijo se tiene

$$\left( \int_0^{\Delta x} \rho(x, y) dx \right)^2 \leq \Delta x \int_0^{\Delta x} \rho(x, y)^2 dx,$$

o en otras palabras,

$$L_\rho(\eta_y)^2 \leq \Delta x \int_0^{\Delta x} \rho(x, y)^2 dx$$

para cada altura  $y$  constante. Integrando ambos lados sobre el intervalo  $0 < y < \Delta y$  y dividiendo por  $\Delta y$  resulta

$$\frac{1}{\Delta y} \int_0^{\Delta y} L_\rho(\eta_y)^2 dy \leq \frac{\Delta x}{\Delta y} \text{área}_\rho(V).$$

En otras palabras, el promedio sobre las  $y \in (0, \Delta y)$  de los valores de  $L_\rho(\eta_y)^2$  es menor o igual que  $\frac{\Delta x}{\Delta y} \text{área}_\rho(V)$ . Los detalles adicionales de la prueba son sencillos.  $\square$

## A.2. Módulo conforme

Sea  $C$  el cilindro de circunferencia  $\Delta x$  y altura  $\Delta y$ , formado al pegar los lados izquierdo y derecho de  $R$ .

**Definición** (Módulo del cilindro). *El módulo del cilindro  $C = (\mathbb{R}/(\mathbb{Z}\Delta x)) \times (0, \Delta y)$  está definido como la razón entre altura y circunferencia,  $Mod(C) = \Delta y / \Delta x > 0$ .*

**Definición** (Índice). *Sea  $\gamma$  una curva cerrada en  $C$ , el índice de  $\gamma$  es el entero*

$$w = \frac{1}{\Delta x} \oint_{\gamma} dx.$$

**Teorema** (Desigualdad longitud-área para cilindros). *Para cualquier métrica conforme  $\rho(z)|dz|$  de área finita en el cilindro  $C$  existe alguna curva cerrada simple  $\gamma$  de índice +1 cuya longitud satisface*

$$L_{\rho}(\gamma)^2 \leq \frac{\text{área}_{\rho}(C)}{Mod(C)}.$$

*Además, si se usa la métrica euclidiana  $|dz|$ , entonces*

$$L(\gamma)^2 \geq \frac{\text{área}(C)}{Mod(C)}$$

*para toda curva  $\gamma$  de tales características.*

*Demostración.* Al igual que en la prueba del Lema anterior es posible encontrar una línea horizontal  $\eta_y$  tal que

$$L_{\rho}(\eta_y)^2 \leq \frac{\Delta x}{\Delta y} \text{área}_{\rho}(C) = \frac{\text{área}_{\rho}(C)}{Mod(C)}.$$

Por otra parte, en el caso euclidiano, para cualquier curva cerrada  $\gamma$  de índice +1 se tiene

$$L(\gamma) = \oint_{\gamma} |dz| \geq \oint_{\gamma} dx = \Delta x,$$

y así,  $L(\gamma)^2 \geq (\Delta x)^2 = \text{área}(C)/Mod(C)$ .

□

**Definición** (Anillo). *A una superficie de Riemann  $A$  se le llama anillo si es conformemente equivalente a un cilindro  $C$ .*

**Definición** (Anillos esencialmente incrustados). *Se dice que  $A \subset C$  esta esencialmente incrustado si existe alguna curva cerrada  $\gamma \subset A$  que tenga índice 1 en  $C$ .*

**Corolario** (Desigualdad área-módulo). *Sea  $A \subset C$  un anillo esencialmente incrustado en el cilindro  $C$ , y suponga que  $A$  es conformemente equivalente a un cilindro  $C_A$ . Entonces*

$$\frac{\text{Mod}(C_A)}{\text{Mod}(C)} \leq \frac{\text{área}(A)}{\text{área}(C)} \leq 1.$$

*En particular, se tiene que*

$$\text{Mod}(C_A) \leq \text{Mod}(C).$$

*Demostración.* Sea  $\psi : C_A \rightarrow A \subset C$  un isomorfismo conforme. La métrica euclidiana en  $C$ , restringida a  $A$ , se regresa a  $C_A$  como alguna métrica conforme  $\rho(\zeta)|d\zeta|$ , donde  $\rho(\zeta) = |dz/d\zeta|$ . De acuerdo al teorema anterior existe una curva  $\gamma'$  de índice 1 en  $C_A$  tal que su longitud satisface

$$L_\rho(\gamma')^2 \leq \frac{\text{área}_\rho(C_A)}{\text{Mod}(C_A)}.$$

Esta longitud coincide con la longitud euclidiana  $L(\gamma)$  de la curva correspondiente  $\gamma \subset A$ , y  $\text{área}_\rho(C_A)$  es igual al área euclidiana  $\text{área}(A)$ , así que se puede escribir la desigualdad anterior como

$$L(\gamma)^2 \leq \frac{\text{área}(A)}{\text{Mod}(C_A)}.$$

Del teorema anterior también se tiene

$$\frac{\text{área}(C)}{\text{Mod}(C)} \leq L(\gamma)^2.$$

Combinando ambas desigualdades,

$$\frac{\text{área}(C)}{\text{Mod}(C)} \leq \frac{\text{área}(A)}{\text{Mod}(C_A)},$$

que es equivalente a la desigualdad del corolario.  $\square$

**Corolario** (Equivalencia conforme). *Si dos cilindros son conformemente equivalentes, sus módulos son iguales.*

*Demostración.* Sean  $C'$  y  $C$  dos cilindros conformemente equivalentes. La desigualdad área-módulo dice que  $\text{Mod}(C') \leq \text{Mod}(C)$  y también que  $\text{Mod}(C) \leq \text{Mod}(C')$ .  $\square$

### A.3. Otras Desigualdades

**Corolario** (Desigualdad de Grötzsch). *Suponga que  $A' \subset A$  y  $A'' \subset A$  son dos anillos ajenos esencialmente incrustados en el anillo  $A$ . Entonces*

$$\text{Mod}(A') + \text{Mod}(A'') \leq \text{Mod}(A).$$

*Demostración.* Se puede asumir que  $A$  es un cilindro  $C$ . Por la desigualdad área-módulo se tiene

$$\frac{\text{Mod}(A')}{\text{Mod}(C)} \leq \frac{\text{área}(A')}{\text{área}(C)}, \quad \frac{\text{Mod}(A'')}{\text{Mod}(C)} \leq \frac{\text{área}(A'')}{\text{área}(C)},$$

donde todas las áreas son euclidianas. Usando la desigualdad

$$\text{área}(A') + \text{área}(A'') \leq \text{área}(C)$$

queda la desigualdad de Grötzsch.  $\square$

Ahora considere un toro plano  $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Lambda$ , donde  $\Lambda$  es una retícula de dimensión 2, es decir, es un subgrupo aditivo de  $\mathbb{C}$  generado por dos elementos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  tales que  $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}$ . Sea  $A \subset \mathbb{T}$  un anillo incrustado.

El índice de  $A$  en  $\mathbb{T}$  esta dado por el elemento  $w \in \Lambda$  que se construye de la forma siguiente. Bajo el mapeo cubriente  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{T}$  que hace de  $\mathbb{C}$  la cubierta universal de  $\mathbb{T}$ , la curva central de  $A$  se levanta a un segmento de curva que une un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  a un trasladado  $z_0 + w$ , donde  $w$  es el elemento requerido. Diremos entonces que  $A \subset \mathbb{T}$  esta esencialmente incrustado si  $w \neq 0$ .

**Corolario** (Desigualdad de Bers). *Si el anillo  $A$  esta esencialmente incrustado en el toro  $\mathbb{T}$  con índice  $w$ , entonces*

$$Mod(A) \leq \frac{\text{área}(\mathbb{T})}{|w|^2}.$$

En términos generales, si el anillo  $A$  le da muchas vueltas al toro  $\mathbb{T}$  de forma que  $|w|$  crezca, entonces el anillo debe ser muy delgado.

*Demostración.* Sea  $C'$  un cilindro conformemente equivalente a  $A$ . La métrica euclidiana  $|dz|$  en  $A \subset \mathbb{T}$  corresponde a una métrica  $\rho(\zeta)|d\zeta|$  en  $C'$ , con

$$\text{área}_\rho(C') = \text{área}(A).$$

Por la desigualdad longitud-área de cilindros es posible elegir una curva  $\gamma'$  de índice 1 en  $C'$  o una curva correspondiente  $\gamma$  en  $A \subset \mathbb{T}$  con

$$L(\gamma)^2 = L_\rho(\gamma') \leq \frac{\text{área}_\rho(C')}{Mod(C')} = \frac{\text{área}(A)}{Mod(A)} \leq \frac{\text{área}(\mathbb{T})}{Mod(A)}.$$

Ahora, levantando la curva  $\gamma$  a la cubierta universal  $\mathbb{C}$ , esta va a unir dos puntos  $z_0$  y  $z_0 + w$ . Ya que su longitud euclidiana satisface  $L(\gamma) \geq |w|$ , se tiene

$$|w|^2 \leq \frac{\text{área}(\mathbb{T})}{Mod(A)},$$

que es equivalente a la desigualdad requerida.



## Apéndice B

# Transformaciones de Schwarz-Christoffel

### B.1. Polígonos

Un polígono  $\Gamma$  está definido como la colección de sus vértices  $w_1, \dots, w_n$  y sus ángulos interiores  $\phi_1\pi, \dots, \phi_n\pi$ . Con fines de indexación es conveniente definir  $w_{n+1} = w_1$  y  $w_0 = w_n$ . Los vértices, que se encuentran en  $\overline{\mathbb{C}}$ , están dados en orden contrarreloj con respecto al interior del polígono, es decir, cuando se recorre un lado desde  $w_k$  hacia  $w_{k+1}$  el polígono se encuentra localmente a la izquierda.

Los ángulos interiores  $\phi_k\pi$  están definidos como los ángulos recorridos desde el lado saliente hasta el lado entrante de  $w_k$ . Si  $|w_k| < \infty$  entonces  $\phi_k \in (0, 2]$ . Si  $\phi_k = 2$ , los lados incidentes en  $w_k$  son colineales y  $w_k$  es la punta de una ranura. Cuando  $w_k = \infty$  el ángulo interior se mide sobre la esfera  $\overline{\mathbb{C}}$ , en este caso se tiene  $\phi_k \in [-2, 0]$ . Especificar  $\phi_k$  es redundante si  $w_k$  y sus vecinos son finitos, de otra forma  $\phi_k$  es necesario para determinar de manera única al polígono.

Además de las restricciones anteriores a los ángulos  $\phi_k$ , será necesario que el polígono de una vuelta completa de  $2\pi$ , es decir,

$$\sum_{k=1}^n (1 - \phi_k) = 2,$$

o equivalentemente,

$$\sum_{k=1}^n \phi_k = n - 2.$$

Se puede imponer una restricción al polígono para que éste sea simple, es decir, que no se auto-intersecte y cubra alguna parte del plano más de una vez. Esta condición no tiene una expresión elemental en términos de vértices y/o ángulos, por lo que en cierto sentido es una condición artificial.

## B.2. La fórmula de Schwarz-Christoffel

**Teorema** (Fórmula de Schwarz-Christoffel para el semiplano). *Sea  $P$  el interior de un polígono  $\Gamma$  con vértices  $w_1, \dots, w_n$  y ángulos interiores  $\phi_1\pi, \dots, \phi_n\pi$  en orden contrarreloj. Sea  $F$  un mapeo conforme del semiplano superior  $\mathbb{H}^+$  a  $P$  tal que  $F(\infty) = w_n$ , entonces*

$$F(z) = A + C \int \prod_{k=1}^{n-1} (\omega - z_k)^{\phi_k - 1} d\omega,$$

para algunas constantes complejas  $A$  y  $C$ , donde  $w_k = F(z_k)$  para  $k = 1, \dots, n - 1$ .

*Demostración.* Por simplicidad se mostrará únicamente el caso donde los prevértices  $z_k$  son finitos y el producto va sobre los índices desde 1 hasta  $n$ . Por el principio de reflexión de Schwarz, la función  $F$  puede ser extendida analíticamente al semiplano inferior, la imagen continúa sobre el reflejo de  $P$  sobre alguno

de los lados de  $\Gamma$ . Reflejando de nuevo sobre algún lado del nuevo polígono se puede regresar analíticamente al semiplano superior. Lo mismo sucede con cualquier número par de reflexiones de  $P$ , cada una creando una nueva rama de  $F$ . La imagen de cada rama debe ser entonces una copia trasladada y rotada de  $P$ . Ahora, si  $A$  y  $C$  son algunas constantes complejas, entonces

$$\frac{(A + CF(z))''}{(A + CF(z))'} = \frac{F''(z)}{F'(z)}.$$

Por lo tanto, la función  $F''/F'$  se puede definir por continuación como una función analítica univalente en toda la cerradura de  $\mathbb{H}^+$ , excepto en los pre-vértices de  $\Gamma$ , donde la derivada puede no existir. De manera similar, considerando las reflexiones impares, se puede ver que  $F''/F'$  también es analítica en el semiplano inferior.

Anteriormente se vio que en un pre-vértice  $z_k$ ,

$$F'(z) = (z - z_k)^{\phi_k - 1} G(z)$$

donde  $G(z)$  es una función analítica en una vecindad de  $z_k$ . Así,  $F''/F'$  tiene un polo simple en  $z_k$  con residuo  $\phi_k - 1$ , y

$$\frac{F''}{F'} - \sum_{k=1}^n \frac{\phi_k - 1}{z - z_k}$$

es una función entera. Dado que los pre-vértices son finitos,  $F$  es analítica en  $z = \infty$ , y una expansión de Laurent ahí implica que  $F''(z)/F'(z) \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow \infty$ .

Por el Teorema de Liouville\* se tiene entonces que la expresión anterior

---

\*El Teorema de Liouville dice que toda función definida, holomorfa y acotada en todo  $\mathbb{C}$  debe ser constante. Véanse, por ejemplo, [11] o [12].

debe ser constante, particularmente

$$\begin{aligned}\frac{F''}{F'} - \sum_{k=1}^n \frac{\phi_k - 1}{z - z^k} &= 0 \\ \frac{F''}{F'} &= \sum_{k=1}^n \frac{\phi_k - 1}{z - z^k} \\ (\log F')' &= \sum_{k=1}^n \frac{\phi_k - 1}{z - z^k}\end{aligned}$$

Integrando dos veces la expresión anterior se tiene la fórmula de Schwarz-Christoffel para el semiplano.  $\square$

Otra versión de la fórmula es la del mapeo desde el disco unitario  $\mathbb{D}$ .

**Teorema** (Fórmula de Schwarz-Christoffel para el disco). *Sea  $P$  el interior de un polígono  $\Gamma$  con vértices  $w_1, \dots, w_n$  y ángulos interiores  $\phi_1\pi, \dots, \phi_n\pi$  en orden contrarreloj. Sea  $F$  un mapeo conforme del disco unitario  $\mathbb{D}$  a  $P$ , entonces*

$$F(z) = A + C \int \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\omega}{z_k}\right)^{\phi_k - 1} d\omega,$$

para algunas constantes complejas  $A$  y  $C$ , donde  $w_k = F(z_k)$  para  $k = 1, \dots, n - 1$ .

La única diferencia sustancial entre ambas versiones de la fórmula es que el producto recorre hasta  $n$  en el segundo caso. La forma del integrando parece diferente pero es de hecho un múltiplo constante de la forma original. Lo que se busca con este cambio es que los cortes de ramificación del integrando apunten hacia afuera del origen cuando se usa la primer rama del logaritmo para el cálculo.

Los errores en los cortes de ramificación son una dificultad frecuente en los mapeos conformes numéricos, por lo que escribir una fórmula que respete los cortes *estándar* puede resultar de gran ayuda.

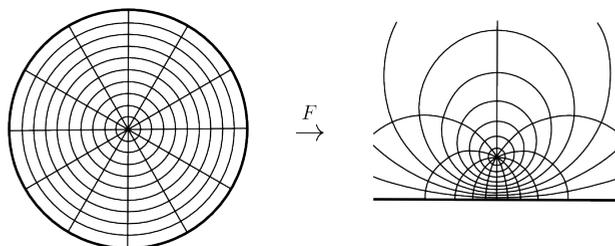


Figura B.1: Mapeo conforme de  $\mathbb{D}$  a  $\mathbb{H}$ .

### B.3. Polígonos con uno y dos vértices

Como se ha señalado con anterioridad, las fórmulas de Schwarz-Christoffel son cuasi explícitas. Se deben determinar los pre-vértices  $z_k$  y las constantes afines  $A$  y  $C$  antes de poder calcular valores puntuales del mapeo. Hay cierta flexibilidad en la selección de tales parámetros. Por el Teorema del mapeo de Riemann (o considerando los automorfismos de Möbius de  $\mathbb{H}$ ) se pueden elegir tres puntos en el eje real extendido y mapearlos a cualesquiera tres vértices de  $\Gamma$ , siempre y cuando se preserve el orden. En otras palabras, hay tres grados de libertad en el mapeo, los que nos permiten elegir tres pre-vértices arbitrariamente. Es por esto que si  $n \leq 3$ , el problema de los parámetros ya está resuelto y las fórmulas se vuelven explícitas.

El único polígono con un vértice es la línea, con el vértice  $w_1 = \infty$  y  $\phi_1 = -1$ . Aplicando la fórmula para el semiplano, se obtiene el mapeo

$$F(z) = A + Cz,$$

que permite escalamientos, rotaciones y traslaciones. El mapeo obtenido por la

formula para  $\mathbb{D}$  es

$$F(z) = A + C \int^z (\omega - z_1)^{-2} d\omega = A + \frac{C}{z - z_1}.$$

Esto confirma que cualquier mapeo del disco a un semiplano es una transformación de Möbius. Quedan entonces dos grados de libertad, una forma de fijarlos es designando la imagen de 0, el llamado *centro conforme*. Véase un ejemplo en la figura B.1.\*

En el caso de  $n = 2$ , por la restricción de los ángulos, se tiene que  $\phi_1 + \phi_2 = 0$ , así que ambos son cero o  $\phi_1 = -\phi_2 \neq 0$ . En el primer caso ambos vértices son  $\infty$  y la región  $P$  es una barra. Para el mapeo desde el semiplano se tiene

$$F(z) = A + C \int^z (\omega - z_1)^{-1} d\omega = A + C \log(z - z_1),$$

el cual esta ilustrado en la figura B.3. La fórmula para el disco da el mapeo

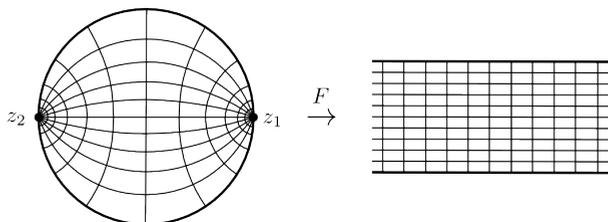
$$\begin{aligned} F(z) &= A + C \int^z (\omega - z_1)^{-1} (\omega - z_2)^{-1} d\omega \\ &= A + C \int^z \left( \frac{1}{\omega - z_1} - \frac{1}{\omega - z_2} \right) d\omega \\ &= A + C \log \left( \frac{z - z_1}{z - z_2} \right), \end{aligned}$$

y su resultado de muestra en la figura B.2.

Por simetría, la mitad superior de la figura B.2 representa un mapeo del medio disco superior a una barra de la mitad de ancho de la original. El mapeo de la mitad inferior es sólo una reflexión sobre el eje real. Si en lugar del eje real se refleja sobre la mitad superior del círculo, se obtiene un mapeo como el de

---

\*Los ejemplos mostrados en este apéndice además de esquemáticos son numéricamente precisos. Fuente: [6].



**Figura B.2:** Mapeo conforme de  $\mathbb{D}$  a una barra, con  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = -1$  ( $n = 2$ ).

la figura B.4, la diferencia entre ésta y la figura B.3 es que en la última ambos extremos de la barra tienen pre-ímagenes finitas.

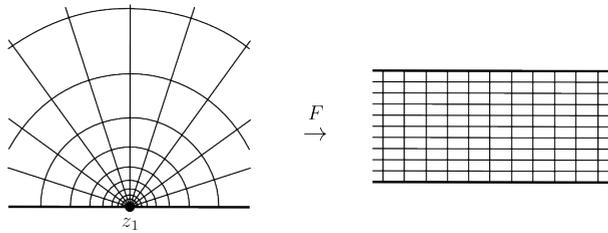
Empleando el principio de reflexión se pueden obtener más mapeos, de forma que tanto el dominio como la imagen del mapeo se pueden segmentar, permitiendo extender la aplicación de los mapeos de Schwarz-Christoffel.

En el caso  $\phi_1 = \phi_2 \neq 0$ , un vértice es  $\infty$  y el otro es finito. Sin pérdida de generalidad supongamos  $w_2 = \infty$ . La región  $P$  es una cuña con vértice en  $w_1$ . El mapeo del semiplano es

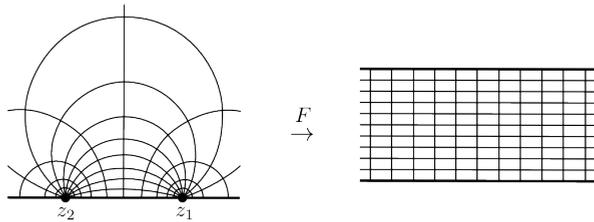
$$F(z) = A + C \int^z (\omega - z_1)^{\phi_1 - 1} d\omega = A + C(z - z_1)^{\phi_1},$$

el cual tiene la forma de uno de los bloques de la construcción del mapeo de Schwarz-Christoffel. (Véase figura 3.6.)

Nótese la diferencia cualitativa en el comportamiento del mapeo para  $\phi_1 < 1$  y  $\phi_1 > 1$ . La diferencia está en  $F'$ , que en  $z_1$  obtiene los valores de  $\infty$  o 0 respectivamente. Al mapear una cuadrícula de  $\mathbb{H}$ , en el primer caso se tiene que las líneas de la cuadrícula se alejan de la esquina, lo que se llama una *saliente*



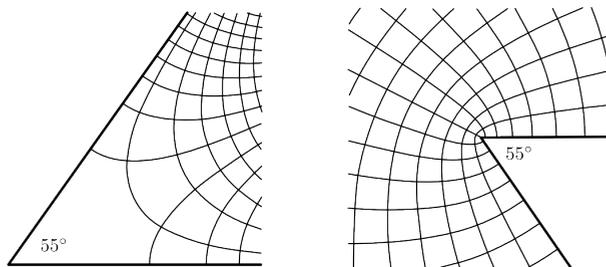
**Figura B.3:** Mapeo conforme de  $\mathbb{H}$  a una barra.



**Figura B.4:** Mapeo conforme de  $\mathbb{H}$  a una barra donde los extremos son imagen de 1 y  $-1$ .

o esquina convexa. Por el contrario, en el caso  $\phi_1 > 1$  se tiene que las líneas de la cuadrícula mapeada se acercan a la esquina, llamada *reentrante*.

Esta distinción en el comportamiento toma importancia en las ecuaciones diferenciales parciales elípticas, especialmente en sus aplicaciones físicas. Por ejemplo, los rayos tienden a caer en objetos puntiagudos y los objetos sólidos tienden a fracturarse a partir de fisuras originadas en esquinas convexas. La concentración de tensión sugerida en el caso reentrante de la figura B.5 explica porque los diseños de ventanas en barcos, submarinos y aviones no suelen hacerse con esquinas en punta.



**Figura B.5:** Mapeos del semiplano a cuñas de ángulos  $55^\circ$  y  $305^\circ$  ( $n = 2$ ). En ambos casos se muestra la imagen de una cuadrícula cartesiana.

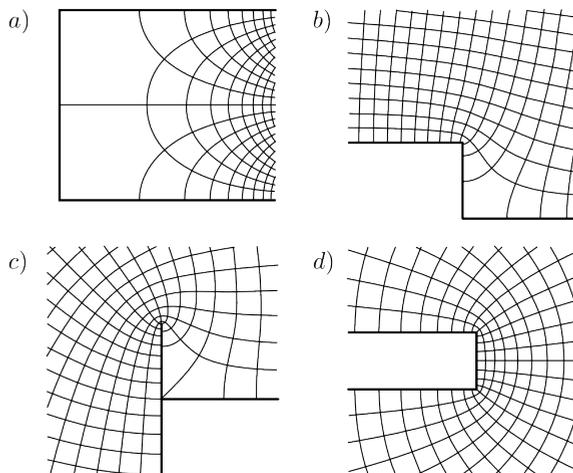
## B.4. Triángulos

Los polígonos de tres vértices son los dominios más generales en los que se pueden elegir arbitrariamente los pre-vértices de los mapeos de Schwarz-Christoffel. En esta sección se usará el término *triángulo* para referirse a polígonos no acotados así como a los convencionales.

Ya que  $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 1$ , a lo más dos vértices pueden ser  $\infty$ . En el caso de tener dos vértices de ese tipo, digamos  $w_1 = w_3 = \infty$ , entonces  $\phi_2 \geq 1$  por lo que el vértice  $w_2$  es reentrante. La región  $P$  es una barra con un doblez en un lado. Cuando  $\phi_2 = 2$  el lado de la barra se dobla sobre si mismo, obteniendo una ranura.

Por otro lado, los triángulos con sólo un vértice en  $\infty$  incluyen algunas regiones de significancia práctica y clásica. En la figura B.6 se muestran algunos ejemplos. La formula del inciso a) resulta elemental, haciendo  $w_3 = \infty$ ,  $z_1 = -1$  y  $z_2 = 1$  se tiene

$$F(z) = A + C \int^z (\omega^2 - 1)^{-1/2} d\omega = A + C \cosh^{-1}(z).$$



**Figura B.6:** Mapeos del semiplano a triángulos con un vértice en  $\infty$ . Las curvas son imagen de cuadrículas cartesianas.

Para el inciso b) el mapeo resultante es

$$\begin{aligned}
 F(z) &= A + C \int^z \left( \frac{\omega + 1}{\omega - 1} \right)^{1/2} d\omega \\
 &= A + C \int^z \frac{\omega + 1}{(\omega^2 - 1)^{1/2}} d\omega \\
 &= A + C [(z^2 - 1)^{1/2} + \cosh^{-1}(z)].
 \end{aligned}$$

De manera similar, los mapeos para c) y d) pueden ser encontrados de

forma explícita como:

$$F(z) = A + C(z - 1)^{1/2}(z + 5),$$

$$F(z) = A + C[z(z^2 - 1)^{1/2} - \cosh^{-1}(z)].$$

El mapeo a cualquier triángulo puede ser escrito de forma compacta usando la función beta incompleta

$$B_z(p, q) = \int_0^z \omega^{p-1}(1 - \omega)^{q-1} d\omega.$$

Eligiendo  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ , el mapeo al triángulo con ángulos interiores  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  puede expresarse como  $F(z) = A + CB_z(\phi_1, \phi_2)$ .

## B.5. Rectángulos y funciones elípticas

Si  $n = 4$  los pre-vértices para el mapeo de Schwarz-Christoffel ya no pueden ser elegidos arbitrariamente. Generalmente no hay forma simple de determinar el cuarto pre-vértice. Sin embargo, en el caso especial cuando  $P$  es el interior de un rectángulo, la simetría del problema permite encontrar una solución explícita.

Se puede trasladar y rotar el rectángulo de manera que sus vértices queden en los puntos  $w_1 = -M + iM'$ ,  $w_2 = -M$ ,  $w_3 = M$  y  $w_4 = M + iM'$ . Por simetría, se pueden elegir los pre-vértices como  $z_1 = -m^{-1/2}$ ,  $z_2 = -1$ ,  $z_3 = 1$  y  $z_4 = m^{-1/2}$ , donde  $m$  es un parámetro que representa el grado de libertad a determinar. Véase figura B.7. La imagen de  $\infty$  será el punto  $iM'$  y la imagen de 0 será 0. La fórmula

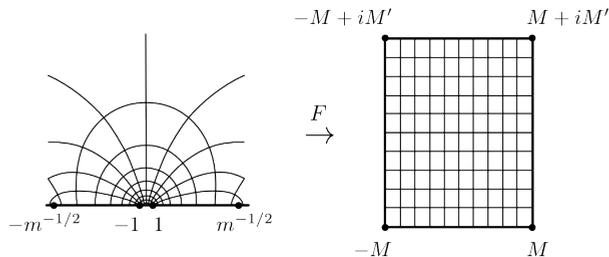


Figura B.7: Mapeo de  $\mathbb{H}^+$  a un rectángulo ( $n = 4$ ).

correspondiente del mapeo queda como una integral elíptica de primera especie:

$$\begin{aligned}
 w = F(z) &= A + C \int^z \prod_{k=1}^4 (\omega - z_k)^{-1/2} d\omega \\
 &= C \int_0^z \frac{d\omega}{\sqrt{(\omega^2 - m^{-1})(\omega^2 - 1)}} \\
 &= C \int_0^{\arcsin(z)} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}.
 \end{aligned}$$

Así  $sn(C^{-1}w|m) = z$ , donde  $sn(u|m)$  es la función seno elíptico de Jacobi con parámetro  $m$ . Si el rectángulo es escalado de manera que  $M = F(1)$  se trata de la integral elíptica completa de primera especie con parámetro  $m$ , y la normalización asegura que  $C = 1$  de manera que el mapeo inverso a  $F$  es  $z = sn(w|m)$ . En este caso el valor de  $M'$  es la integral elíptica completa de primera especie con parámetro  $1 - m$ .

El parámetro elíptico  $m$  esta asociado uno a uno con la geometría del rectángulo, particularmente con la razón entre sus lados, ya que ésta es una invariante bajo rotaciones, escalamientos y traslaciones. De esta forma, el problema

de parámetros del mapeo de Schwarz-Christoffel se resuelve encontrando el valor de  $m$  que haga  $\frac{M'}{2M}$  igual a la razón entre los lados.

Esta transformación está muy relacionada con la noción de los cuadriláteros generalizados. Sea  $Q = (\Omega, q_1, q_2, q_3, q_4)$  un cuadrilátero generalizado. Por el Teorema del mapeo de Riemann existe un mapeo  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}^+$  tal que los puntos  $q_1, q_2, q_3$  y  $q_4$  son mapeados en orden al eje real. Luego, pueden ser llevados a los puntos  $-m^{-1/2}, -1, 1$  y  $m^{-1/2}$  por una única transformación de Möbius con un único valor de  $m$ , y así, un mapeo de Schwarz-Christoffel lleva a  $Q$  en un rectángulo cuya razón entre sus lados es única. Esta razón es el módulo conforme de  $Q$ , véase la definición 17. El módulo depende directamente de la posición de los vértices de  $Q$  sobre  $\partial\Omega$ . Dos cuadriláteros generalizados son conformemente equivalentes si tienen el mismo módulo.

Los métodos numéricos para el cálculo puntual de los mapeos de Schwarz-Christoffel han sido refinados en los últimos cuarenta años y los avances siguen surgiendo. En la actualidad es posible calcular (digamos, a ocho dígitos decimales) mapeos a polígonos de entre veinte y treinta vértices en cuestión de segundos. Regiones con cerca de cien vértices pueden ser tratadas en algunos minutos. La motivación tras los métodos numéricos para el cálculo de los mapeos se encuentra en la resolución del problema de parámetros que se presenta en la elección de los pre-vértices. Para más información respecto a las transformaciones de Schwarz-Christoffel, métodos numéricos y usos, véase [6].



# Bibliografía

- [1] Ahlfors L., *Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory*, AMS Chelsea Publishing, Reprint, 2010.
- [2] Blanchard P., *The Dynamics of Newton's Method*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. 49, 1994.
- [3] Borwein J., Borwein P., *Pi and the AGM: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*, John Wiley & Sons Inc. 1a Edición, 1998.
- [4] Brilleslyper, Dorff, McDougall, Rolf, Stankewitz, Schaubroeck, Stephenson. *Exploring Complex Analysis*, 2011.  
<http://www.jimrolf.com/explorationsInComplexVariables.html>
- [5] Douady A., Hubbard J., *On the dynamics of polynomial-like mappings*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 1985.
- [6] Driscoll T., Trefethen L., *Schwarz-Christoffel Mapping*, Cambridge University Press, 1a Edición, 2002.
- [7] Gilbert W., *Newton's Method and it's generalizations*, Fractals, Volume 09, No. 03, Septiembre 2001

- [8] Hubbard J., Schleicher D., Sutherland S., *How to find all roots of complex polynomials by Newton's Method*, Inventiones mathematicae, Springer-Verlag, 2001.
- [9] Hurley M., *Multiple attractors in Newton's Method*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., 6, 1986.
- [10] Kim M., Sutherland S., *Polynomial root-finding algorithms and branched covers*, SIAM Journal of Computing 23, 1994.
- [11] Marsden J., Hoffman M., *Basic Complex Analysis*, W. H. Freeman, 3a Edición, 1999.
- [12] Milnor J., *Dynamics in One Complex Variable*, Princeton University Press, 2a Edición, 2001.
- [13] Prasolov V., *Polynomials*, Springer, 2a Edición, 2004.
- [14] Press W., Teukolsky S., Vetterling W., Flannery B., *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 3a Edición, 2007.