



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ARAGÓN**

**PROBLEMARIO DE ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS
ISOSTÁTICAS E HIPERESTÁTICAS PARA VIGAS,
MARCOS Y ARMADURAS EN R^2 .**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO CIVIL

PRESENTA:

ORTIZ SOTO DAVID

DIRECTOR: ING. PASCUAL GARCÍA CUEVAS

MÉXICO D.F.

FEBRERO 2012



FES Aragón

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo es producto de un gran esfuerzo y va dedicado a las personas que son y han sido parte importante en mi formación profesional y vida personal:

A MIS PADRES CLARA Y ANTONIO:

Por toda una vida de esfuerzo y sacrificios, brindándome su apoyo incondicional en todo momento. Por haberme guiado por el camino recto de la vida inculcándome los valores que ahora poseo y logrado hacer de mi lo que soy y muy en particular por haber convertido aquel sueño en lo que hoy día es realidad. Con amor, respeto y admiración.

A ANTONIO Y CARLOS:

Por ser unos maravillosos hermanos los cuales quiero y admiro, pues en ellos he encontrado verdadera comunicación y apoyo al compartir nuestros sentimientos, logros, tropiezos y proyectos.

A LA FAMILIA SOTO RAMÍREZ:

Por todo el apoyo moral y el cariño que me han dado, en especial a mi abuela Paulina por ser como una segunda madre; a mis tíos(as) Isabel, Guadalupe, Jazmín, Rafael, Crescencio, José Luis, Gregorio, "Paco", Blanca, Erika, Elizabeth; a mis primas(os) Elizabeth, Christian, Said, Sebastián, Ana, Brenda, Samanta, Fernando, Briseida, Paulina, Ailin y Jesús Gael; a mi tía Lucy y mi abuelo Rafael que aunque ya no están aquí, sé que desde el cielo están orgullosos de mí.

A LA FAMILIA ORTIZ MARÍN:

Por todas las experiencias compartidas y porque son parte esencial en mi desenvolvimiento; a mis tíos(as) Francisco, Isaías, Ramona, Emiliana, Lucía, Cecilia, Florentina, Bertha, Boris, Alejandro; a mis primos(as) Boris, Erick, Diana, Katya Itzel, Alejandro, Ernesto, César, Alán; a mi abuelo Antonio de quien tengo gratos recuerdos. En especial a mi abuela Juana y a mi tío Celso por todo lo que me han hecho por mí.

A MIS SOBRINOS:

Diego y Antonio que tanto amo y en quienes tengo plena confianza de que algún día se convertirán en profesionistas de calidad.

AGRADECIMIENTO ESPECIAL A MI DIRECTOR DE TESIS:

Por su valioso tiempo que me dedicó, su experiencia y los grandes aportes para realizar este proyecto.

A MARCOS ELVIRA MOLINA:

Por ofrecerme apoyo realizando aportes fundamentales en esta tesis y por darme una excelente formación académica en el área de estructuras. Por exhortándome a estudiar un posgrado.

A LA UNAM, MÁXIMA CASA DE ESTUDIOS:

Gracias, es un orgullo pertenecer a esta Institución.

A MIS AMIGOS(AS):

Jhonatán y Bryan Santillán, Armando y Noemí Lazcano, Nicolás, Marcos Iván y Miriam Casasola, Ramón, Jorge, Luis Antonio y Gilberto Galicia, Pascual, Karla, Guadalupe, Josmar, Daniel, Armando, Manuel, Aldair Martínez, Gabriela Noya, Luis Alfonso, Noemí, Rubén, Grisel, Ivonne Choreño, Antonio Chilpa, Guillermo, Acenet, Alfredo Pacheco, Omar Ibáñez, Jazmín Sánchez, Enrique Bautista, San Juan, Isaac Vidal, Alejandro González, Lucero, Ángel, a todos los "Oxidados", Erney, Genaro, Arturo, Julio, Daniel Hernández, Daniel Bolaños, Izael, Omar Berruecos, Omar Morales, Rosa María, Tonatiuh, Hugo, Miguel Ángel, Milton García, Adela, Fidel y en general a todos mis amigos de la Sec. Manuel Gutiérrez Nájera, Preparatoria Anexa a la Normal de Zumpango, los de la licenciatura en la FES ARAGÓN y los del propedéutico y posgrado del IPN, que aunque no son mencionados saben que los estimo.

A LAS INSTITUCIONES EN LAS QUE SE GESTIONO MI FORMACIÓN
ACADÉMICA:

Primaria Miguel Hidalgo y Costilla, Secundaria Manuel Gutiérrez Nájera, Preparatoria Anexa a la Normal de Zumpango, FES ARAGÓN UNAM, SEPI ESIA ZACATENCO
IPN.

A LOS LECTORES DE ESTA TESIS:

Gracias por invertir su tiempo en estudiar este escrito, esperando les sea de su utilidad y agrado.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL.....	3
1.1. ASPECTOS DEL COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL.....	3
1.1.1. ANÁLISIS DE RESISTENCIA	3
1.1.2. ANÁLISIS DE RIGIDEZ.....	3
1.1.3. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD	3
1.1.4. COMPORTAMIENTO EN SERVICIO	4
1.2. EL MODELO IDEALIZADO	4
1.2.1. ESTRUCTURAS ARMADAS	4
1.2.2. RELACIÓN ENTRE LA ESTRUCTURA Y EL MODELO	5
1.2.3. SOLICITACIÓN DE LA ESTRUCTURA Y EL MODELO	10
1.2.4. TIPOS DE ANÁLISIS	11
1.2.5. SUPOSICIONES PARA EL ANÁLISIS	11
1.2.6. DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE.....	12
1.2.7. ESTABILIDAD, DETERMINACIÓN E INDETERMINACIÓN	16
1.3. REACCIONES EN LOS APOYOS.....	17
1.3.1. ECUACIONES DE LA ESTÁTICA	17
1.3.2. ESTABILIDAD Y DETERMINACIÓN ESTÁTICAS DE LAS ESTRUCTURAS RESPECTO A LAS REACCIONES DE LOS APOYOS	17
1.3.3. CÁLCULOS DE LAS REACCIONES EN ESTRUCTURAS SIMPLES	19
1.3.4. CÁLCULO DE LAS REACCIONES EN ESTRUCTURAS COMPUESTAS	20
1.4. ACCIONES INTERNAS EN ARMADURAS DETERMINADAS ESTÁTICAMENTE	21
1.4.1. DEFINICIÓN DE UNA ARMADURA	21
1.4.2. DISPOSICIÓN DE LOS MIEMBROS DE UNA ARMADURA.....	21
1.4.3. ESTABILIDAD Y DETERMINACIÓN ESTÁTICAS DE ARMADURAS	22
1.4.4. CÁLCULO DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE LOS ELEMENTOS	23
1.5. ACCIONES INTERNAS EN VIGAS Y SISTEMAS ESTRUCTURALES DETERMINADOS ESTÁTICAMENTE.....	24
1.5.1. CONCEPTOS PRELIMINARES	24
1.5.2. ESTABILIDAD Y DEFORMACIÓN ESTÁTICAS DE VIGAS Y DE ESTRUCTURAS.....	27
1.5.3. ECUACIONES PARA LA FUERZA AXIAL, LA FUERZA CORTANTE Y EL MOMENTO FLECTOR	27

1.5.4.	RELACIONES ENTRE LA CARGA TRANSVERSAL, LA FUERZA CORTANTE Y EL MOMENTO FLECTOR EN LAS VIGAS	28
1.5.5.	DIAGRAMAS DE LA FUERZA NORMAL, FUERZA CORTANTE Y DEL MOMENTO FLECTOR.....	31
1.6.	DEFORMACIONES	33
1.6.1.	INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE DEFORMACIONES	33
1.6.2.	TEORÍA DE LA VIGA ELÁSTICA.....	34
1.6.3.	CÁLCULO DE DEFORMACIONES POR EL MÉTODO DE LA DOBLE INTEGRACIÓN.....	39
1.6.4.	MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA	40
1.6.5.	MÉTODO DEL PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL.....	46
1.6.6.	TEOREMA DEL CASTIGLIANO	55
1.7.	ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS POR EL MÉTODO DE FUERZAS	60
1.7.1.	DEFINICIÓN DEL MÉTODO DE FUERZAS	60
1.7.2.	ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS	60
1.7.3.	PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS.....	62
1.7.4.	CONSIDERACIONES GENERALES PARA EL MÉTODO DE FLEXIBILIDADES.....	63
1.8.	MÉTODO DE LA RIGIDEZ MEDIANTE EL ANÁLISIS MATRICIAL.....	65
1.8.1.	DEFINICIÓN DEL MÉTODO DE RIGIDEZ.....	65
1.8.2.	INDETERMINACIÓN CINEMÁTICA	66
1.8.3.	ANÁLISIS DE ARMADURAS CON EL ANÁLISIS MATRICIAL DE LA RIGIDEZ.....	66
1.8.4.	ANÁLISIS DE VIGAS Y MARCOS PLANOS CON EL USO DEL MÉTODO DE LA RIGIDEZ	75
CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS		85
2.1.	ANÁLISIS DE VIGAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS.....	85
2.2.	ANÁLISIS DE MARCOS ESTÁTICAMENTE DETERMINADOS.....	201
2.3.	ANÁLISIS DE ARMADURAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS	252
CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE FLEXIBILIDADES.....		276
3.1.	MÉTODO DE FLEXIBILIDADES APLICADO A VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS	276
3.2.	MÉTODO DE FLEXIBILIDADES APLICADO A MARCOS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS.....	387

3.3 MÉTODO DE FLEXIBILIDADES APLICADO A ARMADURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS.....	554
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ.....	591
4.1. DEDUCCIÓN DE LAS FÓRMULAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO PARA LOS CASOS MÁS USUALES.....	591
4.2. PROGRAMAS DE COMPUTADOR DEL MÉTODO DE LA RIGIDEZ MATRICIAL CODIFICADO PARA MATLAB.....	642
4.2.1. CODIFICACIÓN EN MATLAB PARA EL MÉTODO DE LA RIGIDEZ MATRICIAL APLICADO A ARMADURAS.....	642
4.2.2. CODIFICACIÓN EN MATLAB PARA EL MÉTODO DE LA RIGIDEZ MATRICIAL APLICADO A MARCOS.....	645
4.2.3. CODIFICACIÓN EN MATLAB PARA EL MÉTODO DE LA RIGIDEZ MATRICIAL APLICADO A VIGAS CON CARGA AXIAL.....	647
4.2.4. CODIFICACIÓN EN MATLAB PARA EL MÉTODO DE LA RIGIDEZ MATRICIAL APLICADO A VIGAS SIN CARGA AXIAL.....	650
4.2.5. CODIFICACIÓN EN MATLAB PARA EL MÉTODO DE LA RIGIDEZ MATRICIAL APLICADO A MARCOS CON APOYOS INCLINADOS.....	651
4.2.6. CODIFICACIÓN EN MATLAB PARA EL MÉTODO DE LA RIGIDEZ MATRICIAL APLICADO A ARMADURAS CON SOPORTES INCLINADOS.....	654
4.3. ANÁLISIS DE VIGAS CON EL USO DEL MÉTODO DE LA RIGIDEZ.....	657
4.4. ANÁLISIS DE MARCOS PLANOS CON EL USO DEL MÉTODO DE LA RIGIDEZ.....	707
4.5. ANÁLISIS DE ARMADURAS EN R^2 CON EL USO DEL MÉTODO DE LA RIGIDEZ.....	864
CONCLUSIONES.....	964
BIBLIOGRAFÍA.....	965

INTRODUCCIÓN

Esta tesis tiene como propósito fundamental ayudar a profesores y alumnos en la enseñanza y aprendizaje del análisis estructural, proporcionándoles herramientas útiles para entender de forma clara la teoría y aplicación de tal rama de la ingeniería civil, básicamente, a través de la solución detallada de una gran variedad de ejercicios propuestos sobre vigas, marcos y armaduras.

Se entiende por análisis de una estructura al proceso sistemático que concluye con el conocimiento de las características de su comportamiento bajo un cierto estado de cargas; se incluye, habitualmente, bajo la denominación genérica de estudio del comportamiento tanto el estudio del análisis de los estados tensional y deformacional alcanzados por los elementos y componentes físicos de la estructura como la obtención de conclusiones sobre la influencia recíproca con el medio ambiente o sobre sus condiciones de seguridad. Es entonces el objetivo del análisis de una estructura la predicción de su comportamiento bajo las diferentes acciones para las que se postule o establezca que debe tener capacidad de respuesta.

El análisis estructural es una disciplina cuyo dominio es indispensable para los profesionistas que se dedican al diseño de algunas de las obras tan maravillosas que existen en el mundo, es decir, naves industriales, rascacielos, edificios, puentes, presas, plantas industriales, plataformas marítimas, etc.

Como requisito, se supone que los lectores han tomado cursos sobre mecánica de materiales, estática, estructuras isostáticas, diversas ramas de las matemáticas como álgebra, álgebra matricial, cálculo diferencial e integral e inclusive ecuaciones diferenciales y de preferencia programación con matlab.

Justificación:

Aunque en el ámbito laboral las estructuras se analizan haciendo el uso de múltiples software, tales como SAP, STAD, ANSYS, es importante que el ingeniero civil las sepa analizar resolviéndolas a mano, pues de ese modo entenderá cómo están trabajando los programas y tendrá un mejor criterio de los resultados.

Objetivo:

Resolver una gran variedad de ejercicios sobre estructuras isostáticas e hiperestáticas, todas planas, ya sean vigas, marcos o armaduras, efectuando el análisis estructural a través de las teorías más usuales actualmente, para fomentar en los lectores la habilidad de resolver problemas de esa índole y así comprender de forma clara tales teorías.

INTRODUCCIÓN

Alcance:

En este redactado los temas (selectos por su importancia) se explicarán de forma breve y clara, pero aún más importante, se solucionarán una gran variedad de ejercicios sobre estructuras planas isostáticas e hiperestáticas para vigas, marcos y armaduras con la finalidad de desarrollar en los lectores la habilidad de resolver problemas de análisis estructural.

Utilidad:

El problemario que se ofrece contiene ejercicios tipo que son comunes encontrarlos en las tareas o exámenes de la asignatura de análisis estructural, o bien, en un examen, sea de admisión o de curso propedéutico para la maestría en el área de estructuras.

A continuación se hace una breve descripción del contenido del trabajo:

Este trabajo se divide en cuatro capítulos. En el primer Capítulo se explican conceptos básicos tales como la definición y clasificación de una estructura, los tipos de conexiones y apoyos, descripción de los elementos mecánicos, entre otros. Así mismo, se describen las teorías más usuales en el análisis estructural, por ejemplo, el cálculo de las reacciones con el uso las ecuaciones de la estática, la determinación de la variación de las acciones internas de un elemento estructural mediante ecuaciones algebraicas, el método de los nodos en armaduras, los métodos de la viga conjugada, del trabajo virtual, de la doble integración y el teorema del Castigliano (estos últimos cuatro para calcular desplazamientos), los métodos de flexibilidades y de la rigidez matricial para analizar estructuras estáticamente indeterminadas, etc.

En los siguientes tres capítulos básicamente se resuelven ejercicios propuestos sobre vigas, marcos y armaduras aplicando los métodos descritos en el capítulo I; tales métodos son selectos al ser considerados como los más usuales en la actualidad debido a su efectividad. Cabe señalar que las soluciones de tales ejercicios han sido efectuadas de manera minuciosa, es decir, paso a paso, para no causar confusiones ni generar dudas al lector. El capítulo II está abocado a estructuras isostáticas y los capítulos III y IV a estructuras hiperestáticas, con la diferencia de que en el III el análisis se hace a través del método de flexibilidades, mientras que en el cuatro se aplica el método de la rigidez matricial. Este último capítulo incluye también la deducción de las fórmulas de empotramiento perfecto para los casos más comunes y un programa de computadora codificado en matlab para dicho método aplicado a vigas, marcos y armaduras.

Ortiz Soto David

CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

1.1. ASPECTOS DEL COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL

1.1.1. ANÁLISIS DE RESISTENCIA

La resistencia de un miembro estructural se determina a partir del análisis del estado de esfuerzo en el modelo. Este análisis incluye la evaluación de esfuerzos normales, cortantes y normales inducidos por flexión producidos por cualquier acción que la estructura deba resistir. El estado de esfuerzo debe satisfacer las condiciones impuestas por las fuerzas y los desplazamientos individual o conjuntamente en los límites, también las condiciones de equilibrio, la compatibilidad de la deformación y las relaciones esfuerzo-deformación que involucran las propiedades mecánicas de los materiales.

1.1.2. ANÁLISIS DE RIGIDEZ

La rigidez de una estructura o de un miembro estructural es la propiedad que define la relación entre la carga aplicada y las deformaciones resultantes. Es función de la geometría, o sea de las dimensiones físicas del elemento considerado y de las propiedades mecánicas del material(es) que constituye al miembro; el diseñador debe tomar en consideración y controlar la deflexión (deformación) de una estructura mediante la determinación de la rigidez de sus componentes o de la estructura completa a través del análisis de la rigidez del modelo.

1.1.3. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

La estabilidad de un componente estructural hace referencia al fenómeno en el que un miembro se pandea por la aplicación de una fuerza axial de compresión. Este modelo de falla o de colapso se debe esencialmente a la esbeltez del miembro estructural, pero también es función de las propiedades mecánicas del material (es).

En el análisis de estabilidad el diseñador debe incluir las inestabilidades locales, que se presentan en una porción aislada del miembro y lo dejan inversible

y la inestabilidad torsional, es decir, la torsión excesiva de una porción de una estructura o del sistema total.

1.1.4. COMPORTAMIENTO EN SERVICIO

El funcionamiento adecuado en servicio del sistema estructural depende de la utilización juiciosa que el diseñador haga de las técnicas de formulación del modelo y de análisis junto con la calidad de mano de obra del constructor (es) y de los materiales a emplear. A pesar de lo completos y exactos que puedan ser la formulación del modelo y su análisis, siempre es necesario observar y revisar con buen criterio de ingeniería los resultados obtenidos durante el diseño analítico para lograr el funcionamiento satisfactorio de la estructura real.

1.2. EL MODELO IDEALIZADO

1.2.1. ESTRUCTURAS ARMADAS

Se denominan estructuras armadas a los sistemas estructurales compuestos elementos cuya longitud es grande en comparación con las dimensiones de su sección transversal. Los elementos lineales son aquellos miembros de una estructura que transfieren las cargas en una sola dirección, es decir en la dirección de su longitud. Un elemento lineal puede ser recto o curvo.

Básicamente existen dos tipos de estructuras armadas:

- Armaduras
- Estructuras rígidas

Una armadura es un sistema estructural diseñado en tal forma que sus elementos quedan sometidos a fuerzas axiales al ser perturbado. Usualmente los elementos se disponen de triangularmente. Los nudos o articulaciones de una armadura se diseñan en tal forma que no poseen capacidad para transmitir momentos, por tanto, se permite que los elementos que constituyen el nudo giren independientemente.

Una estructura rígida es un sistema estructural que cuyos nudos se han diseñado para desarrollar continuidad total entre los miembros que se intersecan. Al someter una estructura rígida a la acción de una perturbación sus miembros experimentan deformaciones axiales, cortantes, de torsión y de flexión.

Se le llama estructura plana cuando los elementos de una estructura y las cargas que la solicitan son coplanares. Si los miembros de la estructura no son coplanares es una estructura espacial. Una estructura es rígida cuyos miembros son coplanares mientras que las cargas que la solicitan son normales a dicho plano se denomina estructura reticular.

Se considera que una viga, es decir, un miembro lineal con dos o más puntos de apoyo, es una estructura rígida especial. Un sistema estructural plano que consiste de uno más elementos curvos soportados en sus extremos se denomina arco. Las vigas y los arcos son usados comúnmente en puentes.

Los sistemas estructurales híbridos que se desarrollan ocasionalmente son una combinación de armaduras y de estructuras rígidas.

1.2.2. RELACIÓN ENTRE LA ESTRUCTURA Y EL MODELO

Para analizar el comportamiento de un sistema estructural bajo la acción de una perturbación, se define un modelo idealizado de la estructura que debe satisfacer las limitaciones de los métodos del análisis. Realmente se analiza el modelo del sistema estructura real y no la estructura real.

Al definir el modelo de un sistema estructural, es necesario recurrir al buen criterio de ingeniería; el modelo debe representar a la estructura tan precisamente como sea conveniente para la finalidad deseada. Para posibilitar el análisis es necesario formular algunas suposiciones: deben idealizarse las propiedades del material utilizado para construir la estructura, esto facilita su representación matemática, igualmente deben formularse suposiciones que simplifiquen el análisis.

Diagrama lineal

Cuando se define un modelo para un sistema estructural su configuración se describe mediante un diagrama lineal. Los elementos de la estructura se representan mediante líneas y la ubicación de la conexión entre dos o más elementos se representa mediante un punto. La orientación de la línea que representa a un miembro de la estructura define la dirección en que éste transfiere las cargas. Esta línea no necesariamente define el eje central del elemento estructural; más bien define un eje de trabajo que permite describir la ubicación del miembro en el sistema. La longitud de la línea define la longitud del miembro.

Tipos de nudos

Una vez establecida la configuración del modelo matemático, debe modelarse el comportamiento característico del modelo estructural en el que regularmente se conectan dos o más miembros y del sistema de fijación de la estructura al soporte.

Las conexiones se utilizan para lograr ciertas características estructurales dentro del sistema: al insertar una articulación en el tramo de un miembro se logra que el momento flector se anule en dicho punto, o puede utilizarse en algún punto de la estructura un conector que no puede transmitir fuerza cortante entre los extremos unidos (un conector cortante). Es trascendental reconocer y representar de forma correcta estos conectores espaciales. En la Figura 1 se representan las conexiones más usuales, es decir, rígidas, semirígidas, articuladas y cortantes.

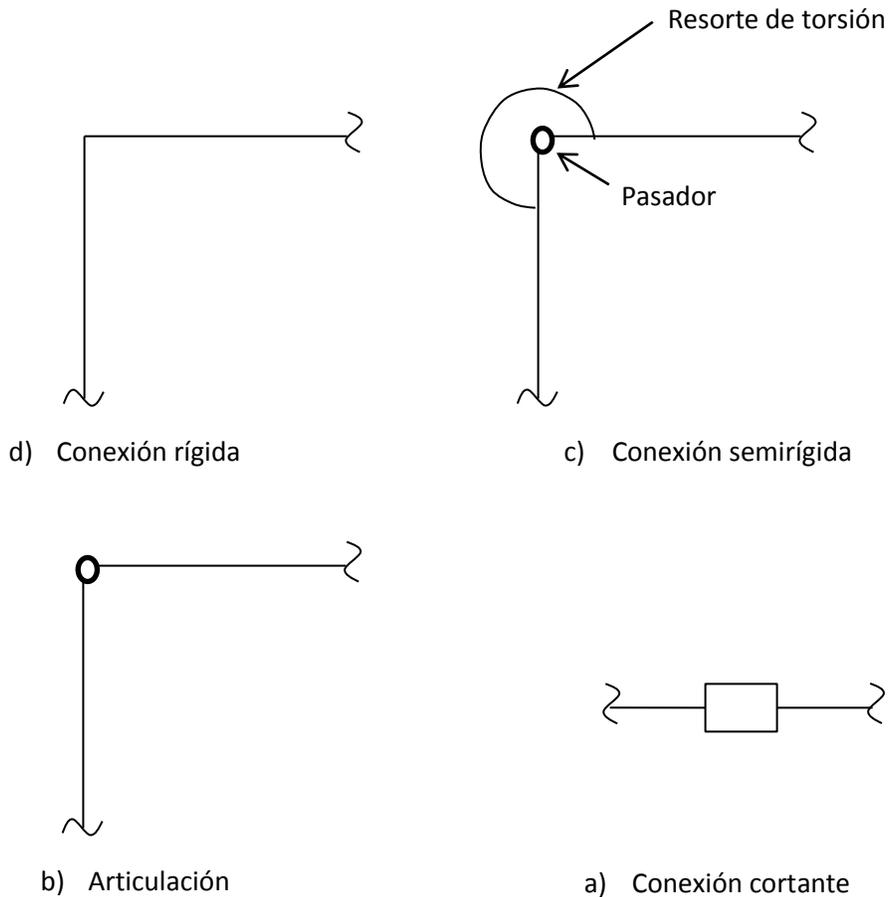


Figura 1. Representación de las conexiones estructurales

Tipos de apoyos

La naturaleza y cantidad de acciones restrictivas que los apoyos desarrollan y actúan sobre la estructura dependen de la forma como se conecta la estructura a su cimentación y al diseño de ésta. Los tipos de apoyos más comunes para el propósito de formular el modelo matemático se reducen a uno o a una combinación de los siguientes: un rodillo o apoyo simple, una articulación, un resorte de torsión, un resorte de compresión y un apoyo fijo.

El rodillo o apoyo simple, Figura 2(a), restringe, en el punto de conexión, la traslación de la estructura en la dirección perpendicular a la superficie que soporta el rodillo. La restricción del rodillo sobre la estructura se describe como una fuerza reactiva que actúa sobre el modelo, cuya línea de acción es perpendicular a la superficie de apoyo y cuya magnitud es desconocida. Por conveniencia, esta reacción puede expresarse en términos de dos componentes dependientes.

El apoyo articulado o pasador, Figura 2(b), restringe completamente la traslación de la estructura en el punto de conexión, solamente permite su rotación. La restricción puede describirse como una fuerza reactiva cuya magnitud y dirección se desconocen, o como un par de fuerzas reactivas ortogonales cuyas magnitudes se desconocen. En cualquier caso se introducen dos incógnitas en el análisis.

El apoyo fijo o empotramiento representado en la figura 2(c) restringe la traslación y la rotación de la estructura en el punto de conexión. El efecto de este apoyo se describe en términos de un momento reactivo y un par de fuerzas reactivas ortogonales. Como la orientación de las acciones reactivas puede seleccionarse arbitrariamente, sus magnitudes son las únicas incógnitas que se introducen en el análisis.

El resorte helicoidal o de compresión ilustrado en la figura 2(d) restringe parcialmente la traslación de la estructura en la dirección del eje del resorte. La estructura en el punto de apoyo puede girar y trasladarse libremente en la dirección perpendicular al eje del resorte. La influencia de este tipo de apoyo se describe en términos de una fuerza reactiva, cuya dirección es la del eje del resorte y su sentido es contrario al desplazamiento del resorte, la magnitud de esta fuerza es proporcional a la constante de rigidez del resorte, k , y a la deformación experimentada por este elemento. Este apoyo introduce sólo una incógnita en el análisis.

El resorte espiral o de torsión que se muestra en la figura 2(e), restringe parcialmente la rotación de la estructura en el sitio de conexión. La estructura puede trasladarse libremente en el punto de apoyo. La restricción que este tipo de

apoyo ofrece a la estructura se describe en términos de un momento cuya magnitud es proporcional a la constante de rigidez del resorte, k , y a la deformación angular experimentada por el resorte, mientras que su dirección es opuesta a esta deformación.

La acción de la barra o biela de apoyo que se visualiza en la figura 2(f) es semejante a la del rodillo, ya que los pasadores de sus extremos hacen que este tipo de apoyo produzca solamente una fuerza reactiva, cuya línea de acción pasa por los centros de los pasadores. Se conoce la línea de acción de la fuerza reactiva, solamente debe determinarse su magnitud.

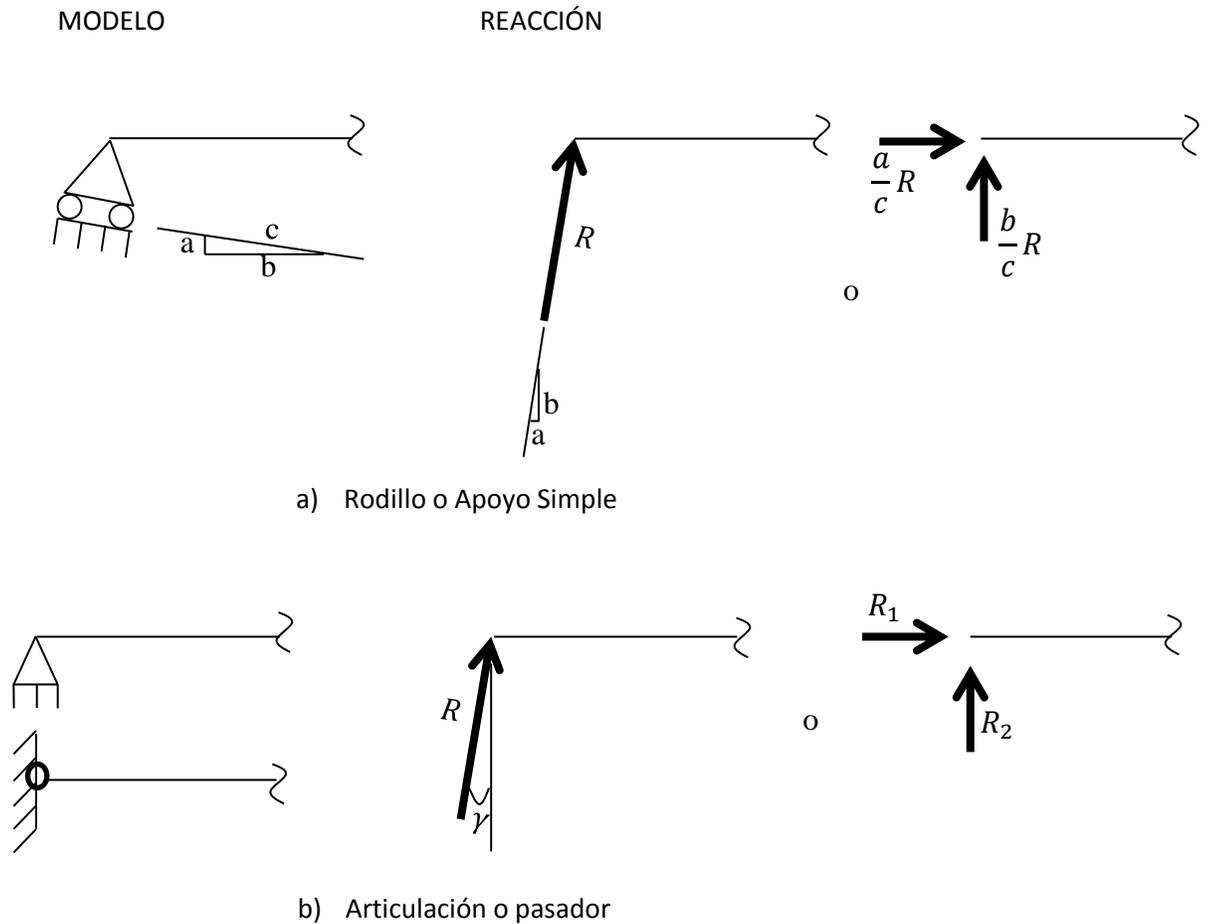
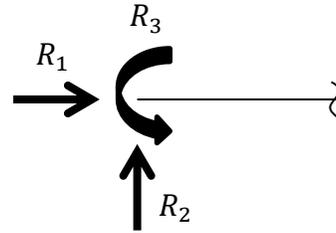


Figura 2. Tipos de Apoyos o Soportes

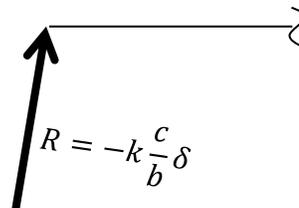
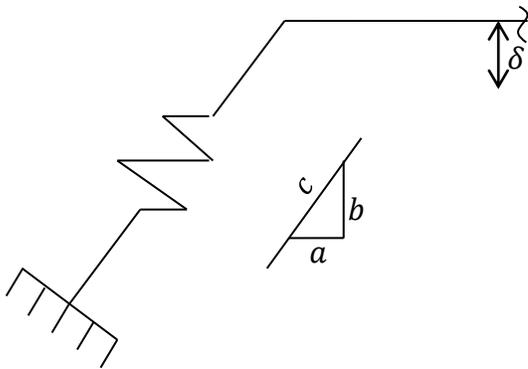
CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

MODELO

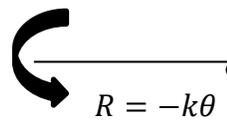
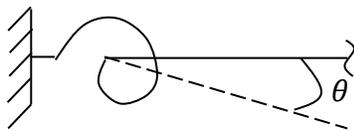
REACCIÓN



c) Fijo o empotramiento

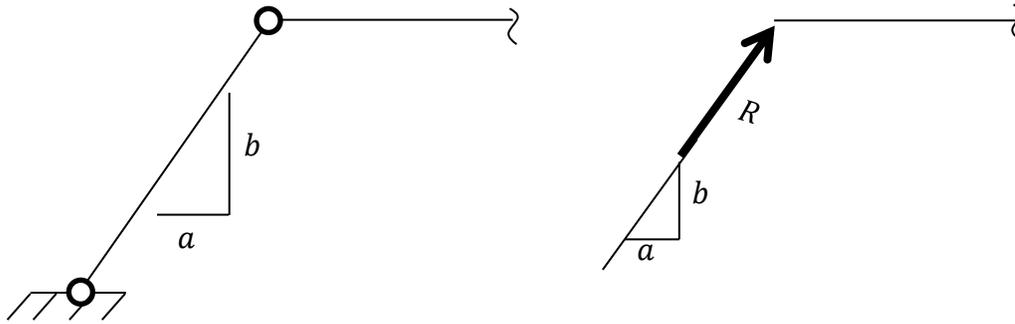


d) Resorte helicoidal o de compresión



d) Resorte espiral o de torsión

Figura 2. Continuación



f) Barra o biela

Figura 2. Continuación

1.2.3. SOLICITACIÓN DE LA ESTRUCTURA Y DEL MODELO

Todas las estructuras independientemente de la razón de su existencia están sometidas a la acción de una de una perturbación o de una carga de un tipo o de otro. Por tanto, para facilitar el análisis del comportamiento de una estructura es necesario definir además del modelo de la estructura otro para las cargas que actúan sobre ella.

Las cargas se clasifican en dos categorías demasiado amplias: cargas muertas y cargas vivas. Las cargas muertas son estáticas, en esta categoría se incluyen las fuerzas gravitacionales que actúan permanentemente sobre la estructura, es decir el peso propio de la estructura, así como el peso de cualquier equipo fijo que deba soportar. Las cargas vivas son fuerzas dinámicas que pueden ser o no ser gravitacionales. Las cargas vivas son móviles; por tanto dependen del tiempo.

Las estructuras además de ser solicitadas por cargas, pueden ser sometidas a la acción de perturbaciones tales como una variación en la temperatura-que trata de cambiar su geometría, una consolidación o una expansión del suelo- que produce un desplazamiento de los apoyos de la estructura, o un terremoto que induce movimiento en la totalidad de la estructura.

Al describir una fuerza que ha sido idealizada deben especificarse su magnitud, línea de acción, dirección y punto de aplicación. Las cargas o

perturbaciones generalmente se representan como fuerzas concentradas o distribuidas.

1.2.4. TIPOS DE ANÁLISIS

El análisis del comportamiento de un modelo idealizado de un sistema estructural se divide en dos tipos: análisis de las acciones y análisis de los desplazamientos. El análisis de las acciones se relaciona con la evaluación de las reacciones en los apoyos y la determinación de la variación de las fuerzas internas y de los esfuerzos en la estructura.

El análisis de los desplazamientos se relaciona con la determinación de la deformación de los elementos de la estructura, así como del desplazamiento del sistema. En el análisis de una estructura frecuentemente se combinan estos dos tipos.

Existen técnicas para realizar diferentes aspectos de los análisis de las acciones y de los desplazamientos. Tales técnicas se fundamentan en las ecuaciones siguientes:

- Ecuaciones de equilibrio que se obtienen de la condición de equilibrio para cualquier sistema de fuerzas estáticas.
- Ecuaciones de compatibilidad que expresan que el desplazamiento de un punto particular de una estructura debe ser compatible con las deformaciones desarrolladas por la estructura en dicho punto.
- Ecuaciones de esfuerzo-deformación que definen la relación entre el esfuerzo y la deformación para el material que constituye la estructura.

1.2.5. SUPOSICIONES PARA EL ANÁLISIS

Los métodos del análisis lineal se fundamentan en las suposiciones básicas siguientes: los materiales utilizados para construir el sistema estructural poseen una relación esfuerzo deformación lineal, es decir, obedecen a la Ley de Hooke; el nivel de esfuerzo a que se somete un material nunca excede el valor de su límite de elasticidad. Esto implica que para la estructura existe una relación lineal carga-deformación. Además se supone que el cambio que experimenta la geometría de la estructura al actuar sobre ella cualquier carga o perturbación es despreciable comparado con la geometría inicial.

CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Las suposiciones anteriores implican que las ecuaciones de equilibrio pueden definirse con base en la geometría no deformada de la estructura y que puede utilizarse el método de superposición para definir la respuesta de la estructura a sus solicitaciones.

El método de superposición usa el principio de superposición de la teoría de la elasticidad lineal. El método de superposición consiste en descomponer el problema inicial de cálculo de las estructuras en problemas o casos más simples, que sumados o "superpuestos" son equivalentes al problema original. Los resultados de la estructura real u original pueden ser calculados sumando los resultados de las estructuras en la que fue descompuesta.

El concepto de superposición se ilustra en la figura 3.

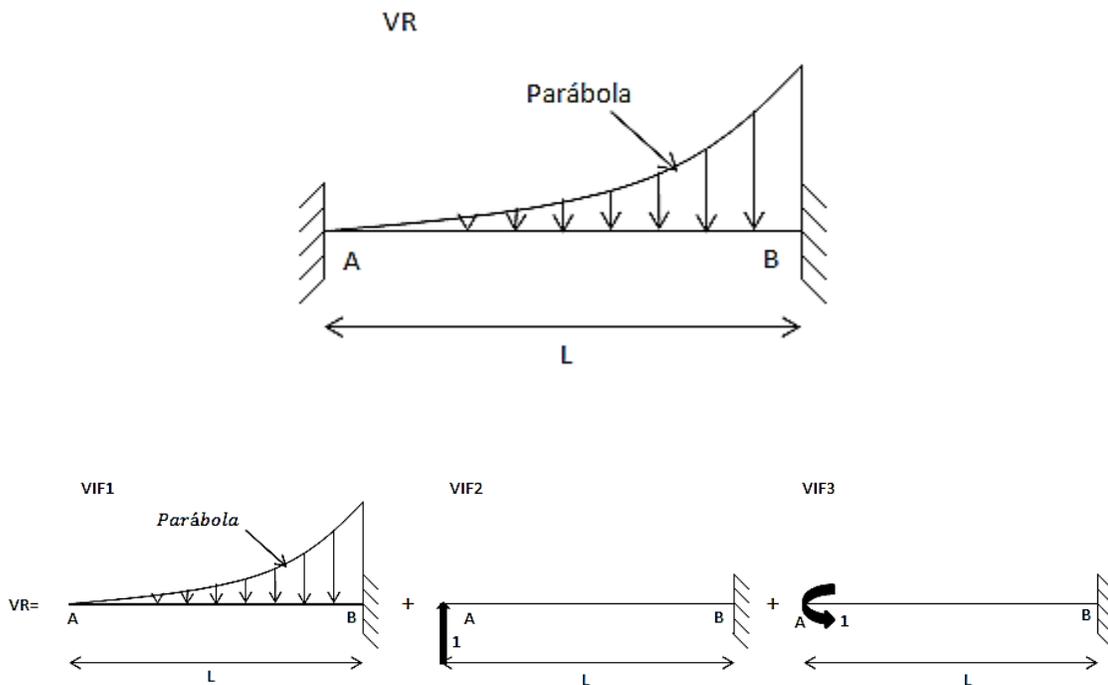


Figura 3. Concepto de superposición

1.2.6. DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

El diagrama de cuerpo libre es un croquis que representa una porción aislada del sistema estructural. Al definir el diagrama de cuerpo libre para una porción del sistema además de las solicitaciones externas debe representarse la influencia de la parte del sistema que se ha retirado.

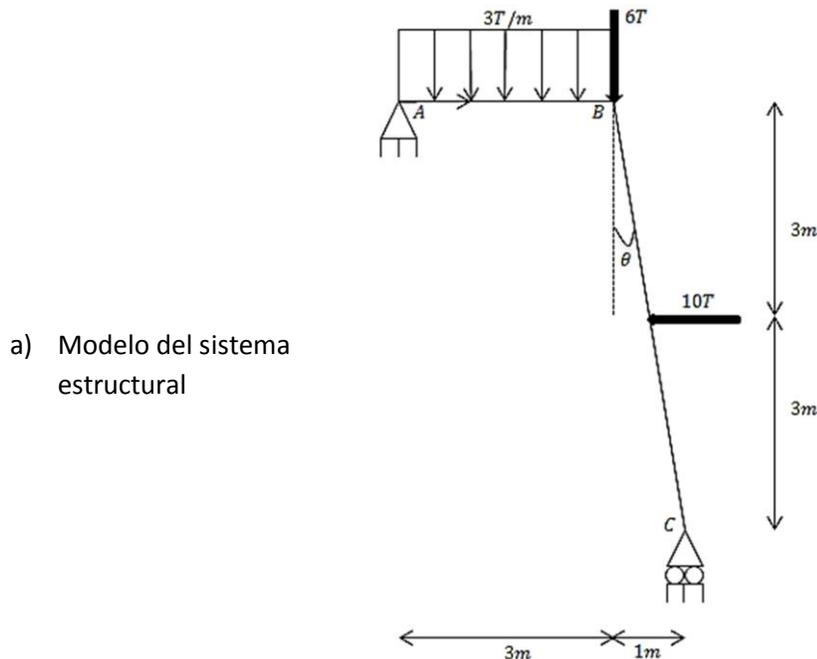
CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Al aislar de sus apoyos a una estructura, se evidencian las acciones restrictivas de los apoyos, éstas se denominan reacciones y se representan en el diagrama de cuerpo libre actuando sobre la estructura.

Al aislar un segmento de una estructura, la influencia de las partes adyacentes sobre el segmento aislado se evidencia mediante las acciones internas equivalentes, que actúan sobre las superficies producidas por la separación del sistema. Al aislar un segmento de una estructura mediante cortes transversales imaginarios, las acciones internas que se evidencian sobre las dos superficies correspondientes a un corte deben ser iguales en magnitud pero de sentido opuesto. Siempre debe recordarse que no solamente el diagrama de cuerpo libre de la estructura debe estar en equilibrio, si no que el diagrama de cuerpo libre de cualquier segmento de la estructura también debe satisfacer dicha condición.

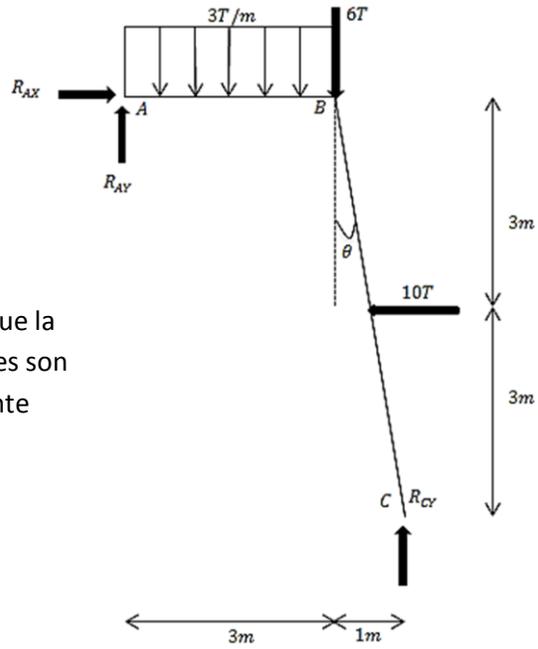
Al definir el diagrama de cuerpo libre para una estructura o un segmento de ella se conocen el punto de aplicación y la línea de acción de las reacciones (o fuerzas de sustentación) y de las acciones internas equivalentes; puede desconocerse la magnitud y dirección de estas acciones. Por tanto para completar el diagrama de cuerpo libre debe suponerse la dirección de dichas fuerzas. Si la dirección propuesta inicialmente para una incógnita es incorrecta el análisis lo revelará.

Todo lo anterior puede visualizarse en la figura 4 que a continuación se muestra:

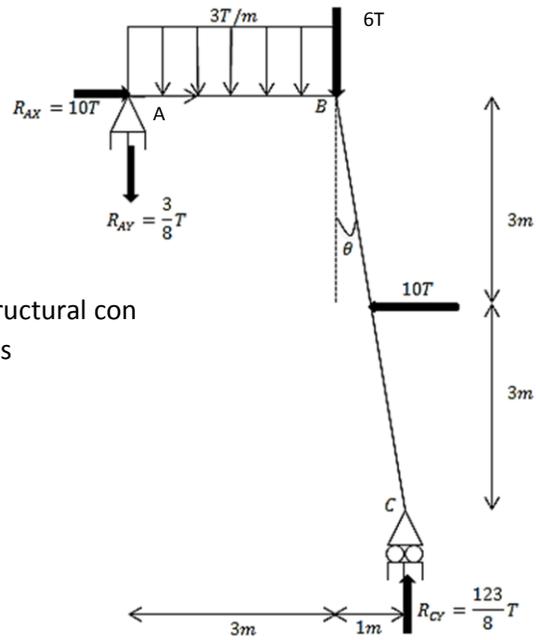


CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

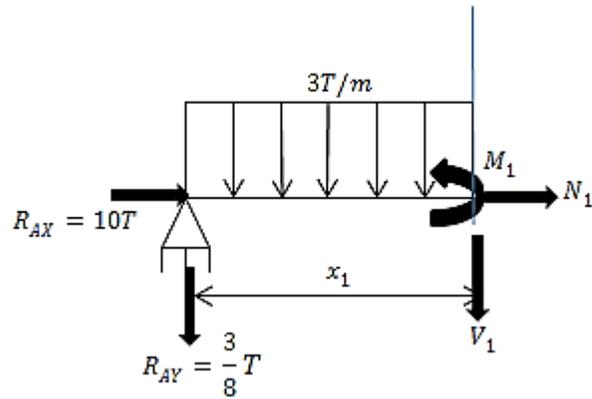
- b) Estructura aislada en la que la dirección de las reacciones son propuestas arbitrariamente



- c) Modelo del sistema estructural con las reacciones calculadas



- d) Corte a una distancia arbitraria del miembro AB aislado para determinar las ecuaciones algebraicas de las acciones internas en el intervalo de distancia de $0 \leq x \leq 3m$



- e) Corte a una distancia arbitraria del miembro CB aislado para determinar las ecuaciones algebraicas de las acciones internas en el intervalo de distancia de $(\sqrt{37}/2)m \leq x \leq \sqrt{37}m$

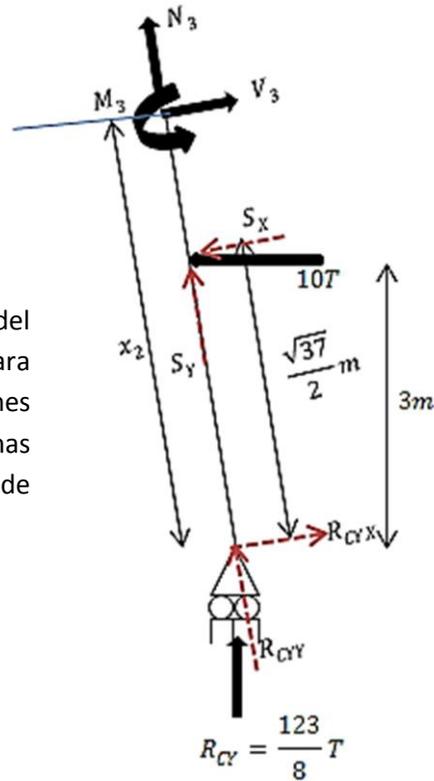


Figura 4. Diagrama de Cuerpo libre

1.2.7. ESTABILIDAD, DETERMINACIÓN E INDETERMINACIÓN

Estabilidad

Para establecer el estado de equilibrio estático que permita a una estructura sustentar un sistema de cargas, ésta debe poseer suficientes restricciones de apoyo y continuidad en sus elementos. Si la estructura es incapaz de lograr la condición de equilibrio estático se dice que es inestable.

Determinación estática

Se dice que una estructura es determinada externamente desde el punto de vista estático, si puede establecer el equilibrio bajo la acción de un sistema de cargas y si el número de componentes independientes de las reacciones de los apoyos es igual al número de ecuaciones independientes disponibles. Las reacciones desconocidas pueden calcularse mediante las ecuaciones disponibles.

Una estructura es inestable geoméricamente cuando su geometría debe cambiar en forma observable antes de estar en capacidad de sustentar las fuerzas que la solicitan. Por tanto, la estabilidad de una estructura no depende solamente de la naturaleza de los apoyos, sino también de su geometría.

Una estructura es indeterminada externamente desde el punto de vista estático si las componentes independientes de las reacciones de sustentación que actúan sobre ella exceden al número de ecuaciones disponibles (ecuaciones de la estática junto con las condiciones constructivas) para el análisis.

Por otra parte, se tiene una estructura indeterminada internamente desde el punto de vista estático si las acciones internas, inducidas en los miembros de la estructura por las fuerzas aplicadas, no pueden calcularse con base en consideraciones del equilibrio estático.

Grado de indeterminación

El exceso de componentes independientes de las acciones reactivas o internas sobre el número de ecuaciones disponibles de la estática y de las condiciones constructivas se denomina grado de indeterminación estática.

1.3. REACCIONES EN LOS APOYOS

1.3.1. ECUACIONES DE LA ESTÁTICA

Cuando se somete un cuerpo rígido a en reposo a la acción de un sistema de fuerzas y momentos, las acciones deben estar en equilibrio estático si el cuerpo ha de permanecer en reposo; si no es así el cuerpo se pondrá en movimiento. La mayor parte de las estructuras están restringidas en tal forma que no pueden desplazarse libremente en el espacio; por tanto la acción restrictiva de los apoyos de la estructura produce el equilibrio de cualquier sistema de cargas que actúe sobre ella. Las condiciones que aseguran el equilibrio de un sistema de acciones coplanares son:

- 1.- La suma algebraica de todas las componentes de fuerza en cualquier dirección debe ser nula.
- 2.- La suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas respecto a un punto i perteneciente al plano determinadas por ellas debe ser nula.

El requisito de anularse la suma de fuerzas en cualquier dirección se satisface si la sumas algebraicas de las componentes de fuerza en dos direcciones perpendiculares, es decir, independientes, se anulan. Luego, las condiciones que definen el estado de equilibrio estático se expresan mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum FX = 0$$

$$\sum FY = 0$$

$$\sum M_i = 0$$

Estas tres ecuaciones de la estática deben ser satisfechas por cualquier sistema coplanar de acciones que actúe sobre un cuerpo libre.

1.3.2. ESTABILIDAD Y DETERMINACIÓN ESTÁTICAS DE LAS ESTRUCTURAS RESPECTO A LAS REACCIONES DE LOS APOYOS

Para que una estructura plana soporte un sistema generalizado de carga, no autoequilibrado, sus apoyos deben ser suficientes para establecer el equilibrio con

el sistema aplicado. Si la estructura está en equilibrio bajo la acción de un sistema generalizado de carga, las ecuaciones que describen su equilibrio deben expresarse en términos de las fuerzas conocidas y de las componentes reactivas desconocidas de los apoyos. En algunos casos estas ecuaciones pueden resolverse para evaluar las reacciones desconocidas; en otros casos se requiere información adicional. Las ecuaciones de equilibrio deben satisfacerse independientemente de ser o no suficientes para calcularlas reacciones de los apoyos.

Estabilidad

Si la estructura corresponde a un cuerpo rígido monolítico y actúa sobre ellas una carga generalizada, sus apoyos deben suministrar por lo menos tres componentes reactivas independientes para satisfacer las ecuaciones de equilibrio. Si las componentes reactivas de los apoyos son inferiores a tres se dice que la estructura es inestable externamente desde el punto de vista estático.

Se dice que las estructuras en estado de equilibrio externo inestable para condiciones especiales son aquellas estructuras inestables estáticamente para una condición generalizada de carga pero en capacidad de soportar algunos sistemas especiales.

La condición impuesta a los soportes de una estructura de suministrar por lo menos tres componentes reactivas, es apenas una condición necesaria para el equilibrio en una situación generalizada de carga; no es una condición suficiente. Una estructura plana puede ser inestable aunque sus apoyos proporcionen tres o más componentes reactivas.

Determinación

Si las tres componentes reactivas producidas por los apoyos de una estructura plana estable pueden calcularse mediante las tres ecuaciones del equilibrio estático, se dice que la estructura es determinada externamente desde el punto de vista estático. Si el modelo de una estructura plana estable consiste en dos o más cuerpos rígidos interconectados en tal forma que se eliminan ciertas acciones internas específicas, pueden definirse ecuaciones de equilibrio adicionales que describen la influencia del conector. Los apoyos deben suministrar una componente reactiva adicional por cada acción interna eliminada por el conector. Por tanto, una estructura plana que posee r componentes reactivas y c componentes de las acciones internas eliminadas por los conectores, es estable si

$$r - c = 3$$

La estructura se describe como determinada externamente desde el punto de vista estático, es decir, las reacciones pueden evaluarse considerando únicamente el equilibrio estático.

Si

$$r - c > 3$$

las componentes de las reacciones de los apoyos que deben evaluarse exceden a las ecuaciones de equilibrio disponibles; por tanto, se clasifica a la estructura como indeterminada externamente desde el punto de vista estático. En este caso se requiere información adicional para calcular todas las reacciones de los apoyos.

Cuando

$$r - c < 3$$

La estructura es inestable externamente.

1.3.3. CÁLCULO DE LAS REACCIONES EN ESTRUCTURAS SIMPLES

En el diagrama de cuerpo libre de una estructura se representan no solamente la carga impuesta (se conoce las magnitudes, direcciones, líneas de acción y los puntos de aplicación de cargas), sino también las reacciones de los apoyos (cuyos puntos de aplicación y líneas de acción se especifican). Usualmente se desconocen y deben calcularse las magnitudes y direcciones de las reacciones de los apoyos inducidas por una sollicitación específica. Si solamente se desconocen tres componentes reactivas independientes, es decir, si la estructura es determinada externamente, las reacciones se calculan imponiendo las tres condiciones del equilibrio estático al sistema de fuerzas.

Para calcular las reacciones de los apoyos de una estructura determinada estáticamente, defina en primer término el diagrama de cuerpo libre e identifique en él las componentes desconocidas de las reacciones así como las cargas aplicadas. Es conveniente para los cálculos definir un sistema de coordenadas x-y y describir las fuerzas restrictivas en términos de sus componentes según las direcciones x-y. Debe tenerse el cuidado de no introducir componentes de las reacciones que no correspondan a las restricciones impuestas por los apoyos. Una vez que se completa el diagrama de cuerpo libre, la aplicación de las ecuaciones de la estática se vuelve obvia.

Los cálculos deben simplificarse tanto como sea posible; no deben escribirse ecuaciones sin estudiar el diagrama de cuerpo libre y haber adoptado alguna estrategia. Generalmente, pueden calcularse una de las componentes de las reacciones aplicando la ecuación $\sum M$ con respecto a algún punto que elimine las contribuciones a la ecuación de las otras dos componentes desconocidas de las reacciones, este punto debe ser la intersección de las líneas de acción de las dos componentes involucradas. Tan pronto como una de las reacciones se ha determinado, las restantes se calculan mediante las ecuaciones $\sum FX$ y $\sum FY$.

Cabe mencionar que al ser desconocidas las direcciones de las reacciones, éstas se deben proponer arbitrariamente; si al efectuar los cálculos alguna reacción resulta con signo negativo, esto indicará que el sentido en el que fue propuesta la reacción es incorrecto y debe ser invertido.

Por otra parte, la convención de signos que se usará en casi todos los ejercicios al aplicar las ecuaciones de la estática, ya sea para calcular las reacciones, analizar el nodo de una armadura o para deducir las ecuaciones de las acciones internas de cierto tramo en algún miembro es la siguiente (no necesariamente debe ser esta, pues si tomamos la convención opuesta, debemos llegar a los mismos resultados):

$$\begin{aligned} \uparrow + \sum FY &= 0 \text{ (Una fuerza con dirección hacia arriba es positiva)} \\ \rightarrow + \sum FX &= 0 \text{ (Una fuerza con dirección hacia la derecha es positiva)} \\ \curvearrowright + \sum Mi &= 0 \text{ (Un momento con sentido horario es positivo)} \end{aligned}$$

1.3.4. CÁLCULO DE LAS REACCIONES EN ESTRUCTURAS COMPUESTAS

Un sistema estructural estable cuya determinación estática se debe a la existencia de características constructivas especiales- una articulación u otro tipo de conector que no transmita alguna de las acciones internas entre elementos- se denomina estructura compuesta. Aunque este tipo de estructura sea determinada estáticamente, el cálculo de las reacciones de los apoyos es más difícil y requiere de más reflexión que el cálculo de las estructuras simples. Recuérdese que el número de ecuaciones de la estática y las condiciones constructivas disponibles debe ser igual al número de incógnitas de las componentes independientes de las reacciones.

Al calcular las reacciones de los apoyos de una estructura compuesta, es conveniente satisfacer en primer término las condiciones constructivas. Por cada una condición constructiva que se presente en la estructura, habrá una ecuación más de equilibrio para poder calcular las reacciones.

1.4. ACCIONES INTERNAS EN ARMADURAS DETERMINADAS ESTÁTICAMENTE

1.4.1. DEFINICIÓN DE UNA ARMADURA

Una armadura o cercha es una estructura compuesta de elementos discretos, diseñada en tal forma que al transmitir las cargas sus elementos quedan sometidos primordialmente a la acción de fuerzas axiales de tensión o de compresión. La longitud de un elemento es varias veces mayor que las dimensiones de su sección transversal y por tanto puede transmitir la sustentación de una carga en una sola dirección, es decir, en la dirección del eje longitudinal del miembro.

En el desarrollo del modelo matemático de una armadura, se supone que el peso de los elementos es despreciable, que estos se interconectan en sus extremos mediante pasadores sin fricción, y que las cargas y reacciones se aplican en los nudos únicamente. Además, se supone que el eje geométrico (que pasa por los centroides de todas las secciones trasversales del elemento) es recto y coincide con la línea definida por los centros de los pasadores de los extremos de la barra. Se considera despreciable la flexión de los elementos. Al aislar cualquier elemento de la armadura, éste estará sometido a la acción de fuerzas axiales (una en cada extremo) que representan la acción que le ejercen los nudos a los que ésta conectado. Al no haber fuerzas aplicadas directamente sobre la barra, las condiciones de equilibrio exigen que estas dos fuerzas posean igual magnitud y dirección opuesta.

1.4.2. DISPOSICIÓN DE LOS MIEMBROS DE UNA ARMADURA

El triángulo es la forma geométrica más sencilla y estable que puede construirse utilizando barras interconectadas mediante pasadores, que sea estable significa que no experimenta cambios en su geometría básica al someterlo a carga.

Una armadura se desarrolla conectando en primer término tres miembros que constituyen un triángulo básico, a continuación se establecen otros nudos, uno cada vez, extendiendo miembros a partir de dos nudos convenientes de la estructura construida y conectándolos entre sí. La estructura desarrollada en esta forma se denomina armadura simple.

Si se conectan dos o más armaduras simples para construir una estructura estable, ésta se denomina armadura compuesta.

Es posible desarrollar una estructura estable, determinada estáticamente que no puede clasificarse como armadura simple o compuesta. Este tipo de estructura se denomina armadura compleja.

1.4.3. ESTABILIDAD Y DETERMINACIÓN ESTÁTICAS DE ARMADURAS

Para que una estructura esté en capacidad de soportar un sistema de acciones externas, debe satisfacerse dos condiciones: la estructura debe ser estable y el sistema de fuerzas externas debe ser equilibrado mediante el número suficiente de restricciones externas, es decir, apoyos. Al actuar un sistema de carga específico sobre una estructura, las fuerzas externas, las fuerzas internas y las reacciones de los apoyos deben estar en equilibrio. Esto implica que cualquier porción de la estructura que se aísla debe estar en equilibrio. Por tanto, si se aíslan los nudos de una armadura plana, el equilibrio de cada uno de ellos se establece si el sistema de fuerzas concurrentes en cada nudo satisface las condiciones estáticas $\sum FX = 0$ y $\sum FY = 0$. En consecuencia cada nudo suministra dos ecuaciones de equilibrio que pueden utilizarse en la determinación de las reacciones y las fuerzas que actúan sobre las barras.

Si la estructura es determinada estáticamente, el número de ecuaciones disponibles debe ser igual al número de componentes independientes de las reacciones r , más el número de miembros de la estructura, o sea, el número de fuerzas que actúan sobre las barras m , es decir,

$$m + r = 2j$$

en donde j es igual número de nudos. Si

$$m + r > 2j$$

existe un mayor número de miembros o de componentes independientes de las reacciones que el requerido para que la armadura pueda soportar la carga. Esto indica que la estructura puede ser indeterminada estáticamente. Por otra parte, si

$$m + r < 2j$$

no existe una cantidad suficiente de miembros o componentes independientes de las reacciones para soportar la carga. En este caso la estructura es inestable estáticamente.

Es posible que una estructura satisfaga el criterio de estabilidad estática y sea inestable a causa de la geometría. Este tipo de inestabilidad se denomina inestabilidad geométrica.

1.4.4. CÁLCULO DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE LOS ELEMENTOS

El criterio que rige el análisis de una armadura estable y determinada estáticamente es el equilibrio de las cargas aplicadas de las fuerzas que actúan sobre las barras y de las reacciones de los apoyos, así como de cualquier porción de la estructura que se aísla como cuerpo libre.

El equilibrio de las fuerzas concurrentes en un nudo se establece si se satisfacen las condiciones $\sum FX = 0$ y $\sum FY = 0$. Las reacciones y las fuerzas que actúan sobre las barras se calculan mediante el sistema de ecuaciones que se obtienen de aplicar las ecuaciones anteriores a cada uno de los nudos de la estructura.

Antes de utilizar las dos ecuaciones de equilibrio en un nudo, debe asignarse una dirección a cada fuerza desconocida que actúa en él. Por tanto, se define el carácter de los esfuerzos que transmiten dicha fuerza; el carácter supuesto, es decir, tensión o compresión, debe ser el mismo en los dos nudos que definen el miembro.

En armaduras simples las reacciones de los apoyos se calculan considerando la estructura completa separada de sus apoyos. Una vez que se conocen las reacciones las fuerzas internas se calculan mediante la satisfacción de las ecuaciones $\sum FX = 0$ y $\sum FY = 0$ en cada nudo; los nudos se consideran uno por uno en un orden tal que el análisis de uno de ellos no involucre más de dos fuerzas desconocidas.

En el diagrama de cuerpo libre de cada nudo se representa la acción de cada fuerza sobre el nodo. La dirección de las fuerzas axiales en cada miembro se suponen arbitrariamente y si los cálculos arrojan un signo negativo, significará que el sentido propuesto fue incorrecto y entonces debe ser invertido.

Una vez obtenida la dirección correcta de las fuerzas axiales, se consideran positivas las de tensión y negativas las de compresión.

1.5. ACCIONES INTERNAS EN VIGAS Y SISTEMAS ESTRUCTURALES DETERMINADOS ESTÁTICAMENTE

1.5.1. CONCEPTOS PRELIMINARES

Los elementos lineales de una estructura rígida o las vigas transmiten la sustentación de las cargas aplicadas mediante el desarrollo de esfuerzos internos que en cualquier sección transversal se describen en términos de:

1. Una fuerza que actúa normal a la sección
2. Una fuerza que actúa sobre el plano de la sección
3. Un momento de torsión que actúa en la dirección de un eje normal a la sección, y
4. Un momento flector que actúa en la dirección de un eje del plano de la sección.

Es conveniente definir estas acciones internas en términos de sus componentes ortogonales según los ejes principales de la sección. El estado de esfuerzos internos, es decir, las acciones internas varían en general con la posición en el elemento. Como la estructura debe diseñarse para resistir cualquier perturbación, es importante no solamente conocer el valor máximo de cada acción interna y el sitio de ocurrencia, sino también como varían con la posición en el elemento, es decir, a través del sistema estructural, con el propósito de estudiar los estados de esfuerzo que se inducen. Como la magnitud y dirección de las acciones internas cambian, el estado de esfuerzo representado por ellas también lo hace. Una combinación de acciones internas produce el valor máximo de un esfuerzo específico y la sección donde esto ocurre no corresponde necesariamente al sitio en donde una acción interna adquiere su valor máximo.

Las acciones internas en una sección transversal específica de un elemento se calculan estudiando el equilibrio de uno de los segmentos de la estructura que se producen al cortarla a través de dicha sección. Si se conocen todas las fuerzas y momentos que actúan sobre el segmento aislado exceptuando las fuerzas y momentos internos que lo hacen en la sección, estas acciones internas se calculan mediante la imposición de las condiciones de equilibrio al cuerpo libre y por tanto, deben equilibrar la resultante de otras fuerzas y momentos. Las fuerzas

y momentos internos que actúan sobre una de las superficies producidas por el corte también representan la resultante del sistema de fuerzas que actúan sobre la otra porción de la estructura obtenida por el corte. Recuérdese que las fuerzas y momentos internos que actúan sobre las superficies producidas por un corte deben poseer magnitud igual y dirección opuesta.

Cuando se somete un elemento estructural a la acción de una perturbación, los esfuerzos que se desarrollan en el elemento ocasionan su deformación; esta deformación puede describirse en términos de:

- 1.- una deformación axial,
- 2.- una deformación cortante,
- 3.- una deformación por torsión, y
- 4.- una deformación por flexión

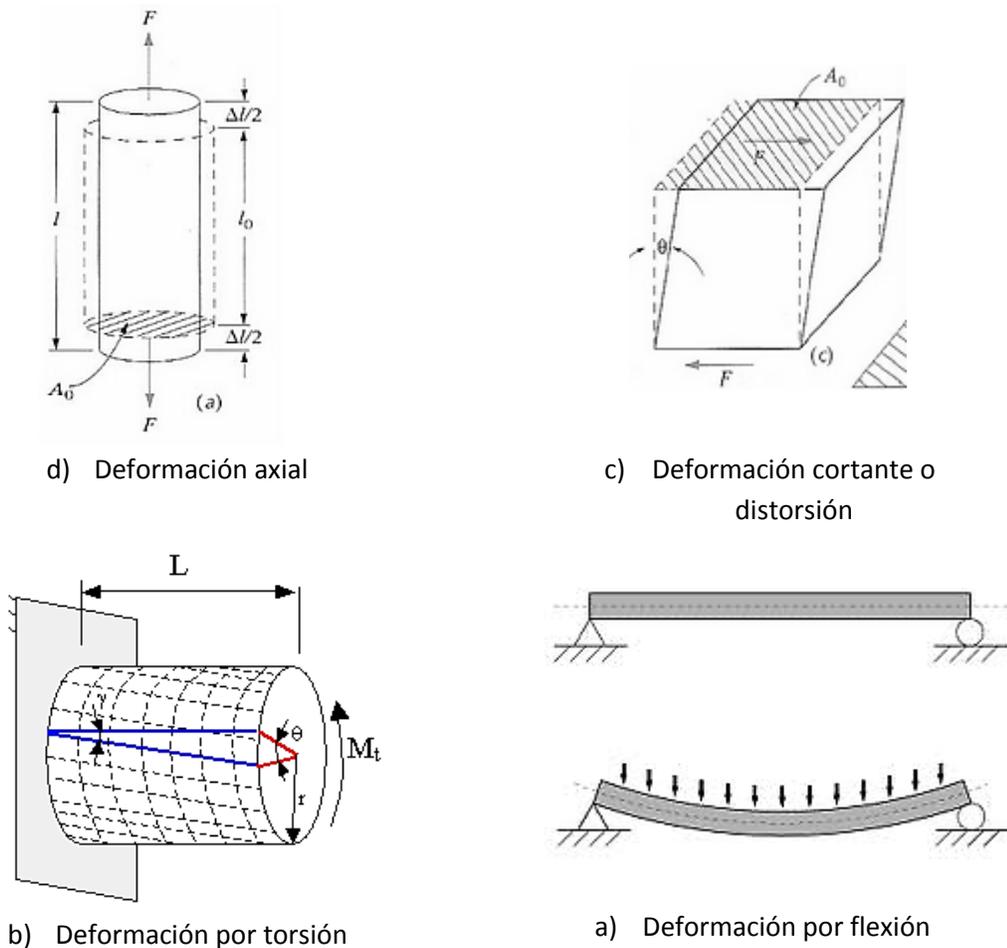


Figura 5. Tipos de deformación que puede experimentar un elemento estructural lineal.

En la figura 5 se ilustran estos tipos de deformación.

Un elemento lineal que transfiere la sustentación de la carga aplicada por flexión fundamentalmente se denomina viga. Cuando la transferencia de la sustentación de la carga se realiza mediante una combinación de deformación axial y deformación por flexión el elemento se denomina viga columna. En general estos dos tipos de elementos se designan como vigas.

Convención de signo

Debe describirse algebraicamente o gráficamente la variación que las acciones internas de una viga experimentan con la posición. Para estudiar las acciones internas es conveniente disponer de una convención de signo que permita identificar su dirección y sentido. En la figura 6 se define la convención de signo que se utilizará y comúnmente se denomina convención de signos para las vigas. El elemento de la viga se estudia en posición horizontal. La fuerza axial N , es positiva cuando se aleja de la superficie de la sección; la fuerza cortante V , que actúa sobre el plano de la sección, es positiva si su dirección en la superficie izquierda del corte es hacia abajo; y el momento flector M , es positivo cuando su sentido en la sección izquierda del corte es antihorario. Un momento flector positivo produce tensión en las fibras interiores del elemento.

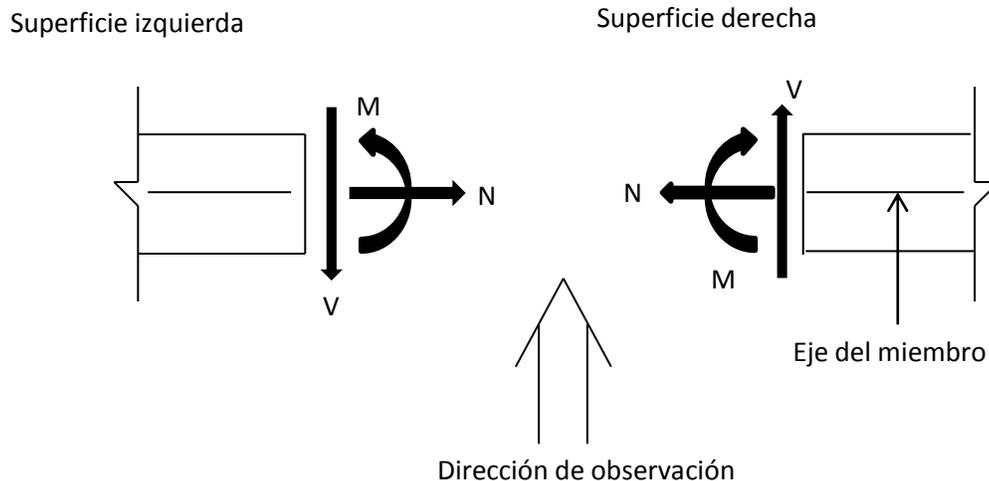


Figura 6.-Convención de signos para las acciones internas en las vigas

1.5.2. ESTABILIDAD Y DETERMINACIÓN ESTÁTICAS DE VIGAS Y DE ESTRUCTURAS

Si en una estructura existen j nudos y c condiciones impuestas por la construcción, entonces se cuenta con $3j + c$ ecuaciones para el cálculo de las acciones desconocidas.

Si se conocen las acciones (fuerza axial, fuerza cortante y momento flector) en alguna sección de una viga, que se aisló de una estructura, a partir de las consideraciones de equilibrio pueden determinarse las acciones sobre cualquier otra sección del elemento; por tanto, existen tres componentes independientes de las acciones internas que deben calcularse para cada tramo de una viga o de una estructura plana. Además, deben calcularse las componentes independientes de las reacciones de los apoyos de la estructura. Si una estructura está compuesta por m miembros y existen r componentes independientes de las reacciones de los apoyos, en este caso hay $3m + r$ acciones desconocidas que deben calcularse durante el análisis.

Cuando

$$3m + r < 3j + c$$

es suficiente afirmar que la estructura es inestable estáticamente.

Si una viga o estructura es determinada estáticamente, entonces

$$3m + r = 3j + c$$

cuando

$$3m + r > 3j + c$$

La estructura puede ser indeterminada estáticamente. Las condiciones definidas en las últimas dos ecuaciones son necesarias pero no suficientes para definir la determinación de una estructura. Debe tomarse en consideración la disposición de los miembros y de los conectores especiales o condiciones constructivas.

1.5.3. ECUACIONES PARA LA FUERZA AXIAL, LA FUERZA CORTANTE Y EL MOMENTO FLECTOR

Algebraicamente puede definirse la variación que las acciones internas de un elemento estructural experimentan con la posición. Para hacerlo basta con cortar el elemento de una sección intermedia arbitraria y aplicar las ecuaciones del

equilibrio estático al cuerpo libre del segmento de la estructura ubicado a la izquierda o a la derecha de del corte. Como el sitio del corte es arbitrario, su posición se define en términos de una distancia variable medida a partir de un origen conveniente. Es necesario definir un sistema de ejes de referencia para el cuerpo libre. Al construir el diagrama de cuerpo libre es conveniente representar como positivas las acciones internas desconocidas.

Una expresión algebraica debe describir la variación de una acción interna sobre un segmento de una estructura; por tanto, la carga sobre el segmento debe ser constante o continua. En consecuencia, para describir la variación de una acción interna en un sistema estructural deben definirse ecuaciones independientes entre los puntos de cambio o discontinuidad en la carga y entre los puntos de cambio de la geometría de la estructura. Los límites de cada expresión algebraica deben ser compatibles con el cuerpo libre que se utilizó para obtenerla.

Para calcular las acciones internas en una sección específica de un miembro debe conocerse la totalidad de fuerzas y momentos que actúan sobre el cuerpo libre correspondiente.

Antes de tratar de evaluar las acciones internas de la estructura, es necesario calcular las reacciones en los apoyos. Una vez conocidas todas las fuerzas externas que actúan sobre la estructura, puede determinarse la variación de las acciones internas. En el diagrama de cuerpo libre para un segmento de la estructura se representan las acciones internas en su sentido positivo, se selecciona el sistema de ejes x-y y la sección del corte se localiza mediante la distancia variable x. La selección del punto a partir del cual se mide x se realiza pretendiendo simplificar los cálculos. Los límites correspondientes a la variable x deben definirse claramente para cada expresión.

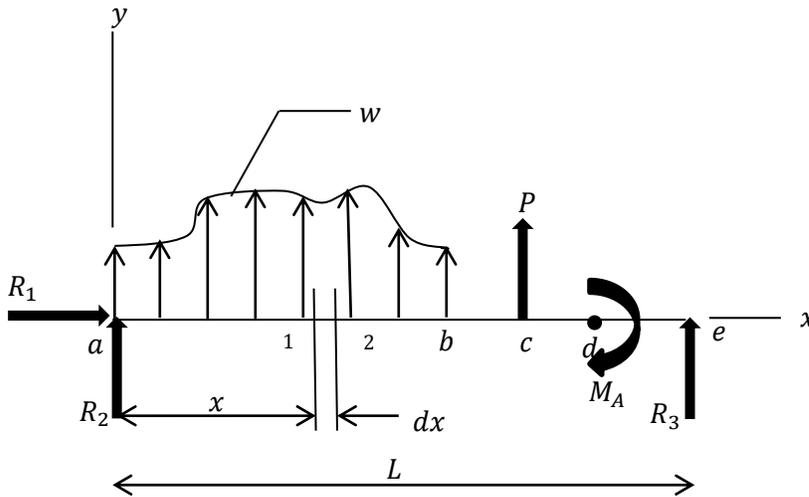
1.5.4. RELACIONES ENTRE LA CARGA TRANSVERSAL, LA FUERZA CORTANTE Y EL MOMENTO FLECTOR EN LAS VIGAS

Durante el desarrollo de la descripción gráfica de la variación de la fuerza cortante y del momento flector se encuentra que existen ciertas relaciones útiles entre las cargas transversales externas que actúan sobre un tramo de una viga y las fuerzas cortantes internas y los momentos flectores que se desarrollan. Para el análisis de lo anterior es conveniente considerar el diagrama de cuerpo libre de la figura 7(a) que corresponde a una viga y se denomina diagrama de carga. Para la viga se define un sistema de coordenadas ortogonal y dextrógiro. El eje x define al eje de la viga y su origen está en el extremo izquierdo de ella; por tanto x se mide de izquierda a derecha. La viga se somete a la acción de un sistema general de

CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

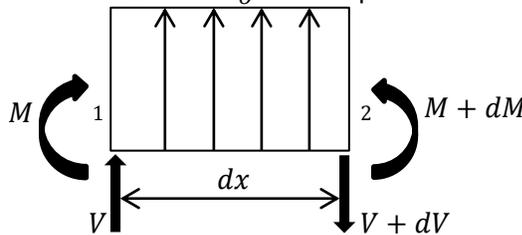
carga constituido por una fuerza distribuida, un momento y varias fuerzas concentradas. En la Figura 7 se representan todas las acciones externas en los sentidos que se han supuesto positivos, es decir:

- Las fuerzas aplicadas son positivas si actúan hacia arriba (en la dirección “y” positiva).
- Los momentos aplicados son positivos cuando actúan en sentido horario.
- Las fuerzas cortantes que actúan hacia arriba sobre la superficie a la derecha de un corte y hacia abajo sobre la superficie a la izquierda de un corte son positivas.
- Los momentos flectores que actúan en sentido horario sobre la superficie a la derecha de un corte y en sentido antihorario sobre la superficie a la izquierda de un corte (que producen tensión en la parte inferior de la viga) son positivos.



a) Diagrama de carga

Superficie a la derecha del corte w_0 Superficie a la izquierda del corte



Observación: Todas las acciones se presentan en sus direcciones positivas

b) Diagrama de cuerpo libre de un segmento diferencial de la viga

Figura 7.-Relación entre la carga, la fuerza cortante y el momento flector

Cortando la viga en dos sitios- el primer corte se hace a una distancia x del extremo izquierdo (punto 1) y el segundo corte se hace por un punto ubicado a una distancia diferencial del primero (punto 2)- se aísla un segmento diferencial de ella. En la figura 7(b) se representa el diagrama de cuerpo libre del segmento diferencial que se aisló de la viga, se ha supuesto que sobre él actúa una carga cuya distribución es generalizada. Las acciones internas- la fuerza cortante y el momento flector- en la sección 1 se representan como V y M ; en la sección 2 la fuerza cortante y el momento flector se definen como $S + dS$ y $M + dM$, respectivamente; y la carga transversal externa se define en términos de la función distribución de carga w_o . Los términos dS y dM representan el cambio entre los puntos 1 y 2 que experimentan las acciones internas correspondientes. En la figura 7(b) se representan en la dirección positiva todas las fuerzas y momentos que actúan sobre el segmento 1-2.

Aplicando las condiciones de equilibrio al diagrama de cuerpo libre del segmento 1-2 se obtiene:

$$\uparrow + \sum F_Y = 0$$

$$V + w_o dx - (V + dV) = 0$$

que se reduce a

$$dV = w_o dx$$

o

$$V_i - V_j = \int_i^j w_o dx$$

esta relación establece matemáticamente que el cambio que la fuerza cortante experimenta entre dos secciones transversales de una viga es igual a la magnitud de la carga transversal aplicada a la viga entre dichas secciones, es decir, el área bajo el diagrama de carga entre los puntos. La última ecuación puede escribirse como:

$$\frac{dV}{dx} = w_o$$

esta relación establece matemáticamente que el cambio de la fuerza cortante respecto a la posición en cualquier punto, es decir, la pendiente del diagrama de la fuerza cortante en cualquier punto, es igual al valor que tiene la intensidad de la carga transversal en dicho punto.

Considerando

$$\curvearrowright + \sum M_2 = 0$$

$$M - (M + dM) + w_0 dx \left(\frac{dx}{2} \right) + V dx = 0$$

se obtiene

$$dM = \frac{w_0(dx)^2}{2} + V dx$$

Como la magnitud dx es muy pequeña, $(dx)^2$ es varias veces menor que dx y por tanto puede despreciarse. Luego la ecuación anterior se reduce a

$$dM = V dx$$

o

$$M_i - M_j = \int_i^j V dx$$

esta expresión establece matemáticamente que el cambio que experimenta el momento flector entre dos secciones transversales de una viga es igual al área bajo el diagrama de la fuerza cortante entre dichos puntos. Esta última ecuación puede expresarse como

$$\frac{dM}{dx} = V$$

esta relación establece matemáticamente que el cambio del momento flector con la posición en un punto, es decir, la pendiente del diagrama del momento flector en un punto, es igual a la magnitud de la fuerza cortante en dicho punto.

1.5.5. DIAGRAMAS DE LA FUERZA NORMAL, FUERZA CORTANTE Y DEL MOMENTO FLECTOR

Los diagramas de la fuerza normal, la fuerza cortante y del momento flector corresponden a representaciones gráficas de las variaciones de estas acciones internas sobre la longitud de la viga. Estos diagramas pueden construirse representando las expresiones algebraicas que describen la variación de la fuerza normal, la fuerza cortante y del momento flector en la viga.

Antes de desarrollar los diagramas para la fuerza cortante y el momento flector se debe definir el diagrama de carga para la viga. Este diagrama indica la localización, la dirección y la magnitud de todas las fuerzas y momentos externos que actúan sobre el elemento; es simplemente el diagrama de cuerpo libre de la viga. Por conveniencia, la viga se representa en posición horizontal, referida a un sistema de ejes ortogonales (x-y), el eje x define el eje de la viga, el eje y positivo está dirigido hacia arriba y el sistema de coordenadas coincide con el extremo izquierdo de la viga.

Una vez que se ha definido el diagrama de carga puede trazarse el diagrama de la fuerza cortante. Se define un sistema de ejes semejante al sistema x-y definido para el diagrama de carga. Sobre el eje horizontal se identifica la posición de la sección transversal mientras que, sobre el eje vertical, positivo hacia arriba, se representa la fuerza cortante que actúa en la sección considerada. El origen del sistema de ejes para el diagrama de la fuerza cortante coincide con el extremo izquierdo de la viga y el diagrama se construye estudiando de izquierda a derecha el equilibrio interno de la viga. El valor que adquiere la fuerza cortante que actúa sobre las diversas secciones transversales se puede calcular a partir de la expresión algebraica que describe la variación de la fuerza cortante en el tramo de la viga a que pertenece la sección considerada. La forma de la curva entre dos puntos se determina a partir de la expresión algebraica que describe la variación de la fuerza cortante. Al construir el diagrama de la fuerza cortante se localizan los puntos en donde la fuerza se anula y en donde el diagrama experimenta cambios, en este último caso también se especifica la magnitud de la fuerza cortante correspondiente.

Una vez hecho al diagrama de fuerza cortante, puede construirse el diagrama del momento flector. Se define un segundo sistema de ejes horizontal-vertical cuyo origen coincide con el extremo izquierdo de la viga. Sobre el eje horizontal se identifica la posición de la sección transversal mientras que, sobre el eje vertical, positivo hacia arriba, se representa el momento flector que actúa sobre la sección considerada. El diagrama del momento flector también se construye analizando de izquierda a derecha el equilibrio interno de la viga. El momento que actúa en el extremo izquierdo de la viga define el valor inicial del momento flector. El valor del momento flector en cualquier sección transversal se puede calcular mediante la expresión algebraica que describe la variación del momento flector en el tramo de la viga que contiene al punto. La forma de la curva entre dos puntos se determina a partir de la expresión algebraica que describe la variación del momento. Al construir el diagrama del momento flector deben identificarse los puntos de cambio de la curva, los puntos en donde el momento es nulo y los puntos en donde el

momento es máximo; también debe calcularse la magnitud del momento flector en estos puntos.

Convención de signo

En la construcción de los diagramas de: carga, fuerza cortante y momento flector se utiliza la convención de signo siguiente, que se define en términos de una viga horizontal:

Las cargas transversales son positivas si actúan hacia arriba.

Una fuerza cortante que actúa hacia abajo sobre la superficie a la izquierda de un corte y hacia arriba sobre la superficie a la derecha de un corte es positiva.

Un momento flector que actúa en sentido antihorario sobre la superficie a la izquierda de un corte y en sentido horario sobre la superficie a la derecha de un corte es positivo.

1.6. DEFORMACIONES

1.6.1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE DEFORMACIONES

El cálculo de las deformaciones que sufre un elemento estructural o una estructura completa bajo la acción de cargas u otro tipo de acciones es de gran importancia debido a dos principales razones. Una es que existen límites permisibles a las deformaciones tanto por motivos de seguridad como estéticos. La segunda razón se debe a que en las estructuras hiperestáticas existen más incógnitas que ecuaciones de equilibrio, y que por lo tanto no pueden resolverse utilizando únicamente dichas ecuaciones. Se requiere obtener ecuaciones adicionales hasta lograr establecer un sistema en el que el número de incógnitas sea igual al número de ecuaciones; tales ecuaciones adicionales se plantean analizando las condiciones de deformación de los miembros de la estructura o de toda la estructura.

Los métodos que se abarcarán permiten calcular las deformaciones en elementos isostáticos y esto es suficiente para la resolución de estructuras hiperestáticas. Las deformaciones a las que se harán referencia son de dos tipos: rotaciones o giros, y deflexiones o flechas. Las rotaciones también pueden ser llamadas deformaciones angulares y las deflexiones pueden ser llamadas

deformaciones lineales. Las rotaciones se representan con la letra θ y los flechamientos con la letra Y .

1.6.2. TEORÍA DE LA VIGA ELÁSTICA

Esta teoría establece las relaciones existentes entre las deformaciones de una viga de un material homogéneo y elástico y los momentos flexionantes producidos en la viga por un sistema cualquiera de cargas. Considérese una viga libremente apoyada, con un sistema de cargas (véase la figura 8(a)), y tórnense dos secciones A-A y B-B separadas a una distancia infinitesimal dx . La teoría antes citada supone que al deformarse una viga sus secciones transversales continúan siendo planas, hipótesis conocida como de Euler-Bernoulli. Por lo tanto en la figura 8(b), en la que se ilustra la viga deformada, se indica que las secciones A-A y B-B ya no son paralelas, pero siguen siendo planas, por lo que están representadas por líneas rectas.

En la figura 8(c) se muestra en forma amplificada el tramo de viga comprendido entre las secciones A-A y B-B. El ángulo que forman las tangentes en ambas secciones, o rotación entre las dos secciones, de acuerdo con la notación antes planteada es θ_{AB} que se representa por $d\theta$ ya que las secciones están separadas por una distancia diferencial. Este ángulo es igual al formado por las rectas que pasan por las secciones A-A y B-B al intersectarse en el punto O. Analicemos ahora el triángulo EBD formado al trazar por el punto E una paralela a A-A, figuras 8(c) y 8(d). El lado DB representa el alargamiento que sufre la fibra inferior de la viga por efecto de la deformación. Su magnitud es igual a la deformación unitaria por la longitud original entre las dos secciones transversales, o sea que

$$DB = \epsilon dx$$

La deformación unitaria, a su vez, es igual el esfuerzo, f , dividido entre el módulo de elasticidad del material, E , de acuerdo con la ley de Hooke. Por lo tanto,

$$DB = \frac{f dx}{E} \quad (1')$$

El esfuerzo f se puede calcular con la fórmula de flexión o fórmula de la escuadría como

$$f = \frac{Mc}{I} \quad (2')$$

donde M es el momento flexionante en la sección, c es la distancia del eje neutro a la fibra más alejada e I es el momento de inercia. Sustituyendo la ecuación (2) en la (1) se obtiene:

$$DB = \frac{Mc}{EI} dx \quad (3')$$

Observando el triángulo EBD y tomando en cuenta que las deformaciones son pequeñas,

$$d\theta = \frac{DB}{EB} \quad (4')$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la (4) y observando en la figura 8(d) que $EB=c$,

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx \quad (5')$$

Ahora bien, como la distancia entre las secciones A-A y B-B es diferencial de x (dx), observando la figura 8(c) puede plantearse la ecuación

$$d\theta = \frac{dx}{\rho} \quad (6')$$

donde ρ es el radio de curvatura. Sustituyendo la ecuación (6) en (5):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (7')$$

Recuérdese ahora que el radio de la curvatura es el recíproco de la curvatura, la cual se define como la razón de la variación de la dirección de una curva entre dos puntos de la misma. Si la dirección de la viga elástica en la sección A-A es θ_A y en la sección es θ_B , figura 8(c), el cambio de dirección es $\theta_{AB} = d\theta$ y la razón de la variación es igual a este cambio angular entre la longitud del arco FE, que se representa como ds . Por lo tanto, si la curvatura se representa con la letra K , su valor será:

$$K = \frac{d\theta}{dS} \quad (8')$$

Ahora bien, la tangente del ángulo θ en cualquier punto es la pendiente de la curva:

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} \quad (9')$$

Derivando ambos miembros de la ecuación (9')

$$\frac{d(\tan\theta)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (10')$$

Puesto que

$$\frac{d(\tan\theta)}{dx} = \sec^2\theta \frac{d\theta}{dx} \text{ y}$$

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (1 + \tan^2\theta) \frac{d\theta}{dx} \quad (11')$$

Y por la ecuación (9):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) \frac{d\theta}{dx} \quad (12')$$

Despejando $\frac{d\theta}{dx}$:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} \quad (13')$$

Si los arcos son muy pequeños, su longitud se puede calcular por el teorema de Pitágoras como:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

De donde se deduce que:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right) = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{1/2} \quad (14')$$

Dividiendo la ecuación 13' entre la 14', y tomando en cuenta la definición de curvatura en la ecuación 8', así como la de radio de curvatura, que es el recíproco de la curvatura:

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (15')$$

Si las deformaciones son pequeñas como se está suponiendo, el término dy/dx , que representa la pendiente de la curva, es pequeño en comparación con la unidad, y su cuadrado es todavía más pequeño. Por lo tanto el denominador de la ecuación (15') puede aproximarse a la unidad. Haciendo esta simplificación y sustituyendo este valor de $\frac{1}{\rho}$ en la ecuación 7' se obtiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (16')$$

Las ecuaciones (5') y (16') permiten obtener por integración la rotación, θ , y la deflexión y , en cualquier punto de una viga, o sea, para un valor determinado de x . En efecto, integrando la ecuación (5') o una vez la ecuación (16'), se obtiene:

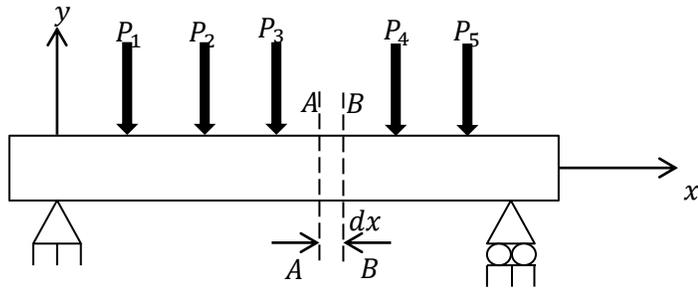
$$\theta = \int \frac{M}{EI} dx \quad (17')$$

e integrando dos veces la ecuación (16'):

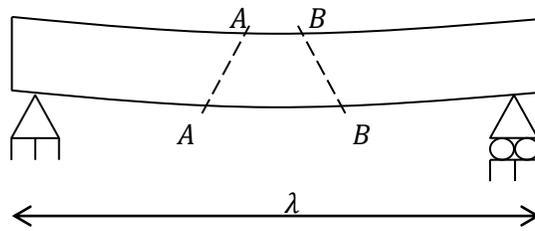
$$y = \int \int \frac{M}{EI} dx \quad (18')$$

Estas dos ecuaciones permiten obtener las deformaciones de una viga elástica en función del momento M , que generalmente es una función de x , aunque en algún caso puede ser constante. El módulo de elasticidad E es también constante en la mayoría de los casos a lo largo de la viga. El momento de inercia I es constante si la viga es de igual sección a todo lo largo; si no lo fuera, debe expresarse también como función de x . Debe recordarse que estas ecuaciones sólo son válidas para deformaciones pequeñas producidas por exclusivamente por flexión, y para vigas de material de comportamiento lineal y elástico, de acuerdo a las hipótesis hechas durante su deducción. La viga deformada que cumple estas condiciones suele llamarse curva elástica.

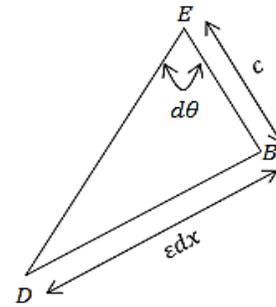
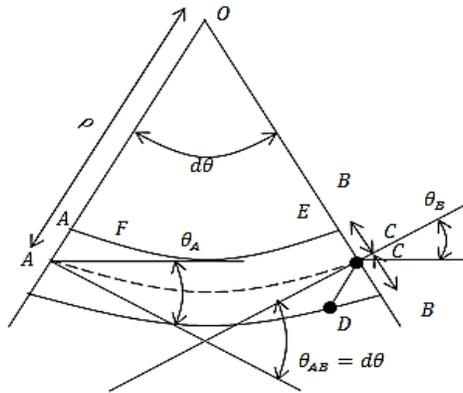
CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL



b) Viga libremente apoyada con un sistema de cargas



a) Viga deformada



d) Triángulo EBD

c) Amplificación del tramo de viga comprendido entre las secciones A-A y B-B

Figura 8.- Deformaciones entre dos secciones de una viga

1.6.3.- CÁLCULO DE DEFORMACIONES POR EL MÉTODO DE LA DOBLE INTEGRACIÓN

Las rotaciones, θ , y las deflexiones, y , de una viga pueden calcularse integrando las ecuaciones (17') y (18') obtenidas anteriormente. La primera integración proporciona las rotaciones y la segunda, las deflexiones. Al llevar a cabo estas integraciones aparecen constantes de integración que deben determinarse a partir de las llamadas condiciones de frontera, que vienen siendo valores de las deformaciones que dependen de las condiciones de apoyo de la viga, y de condiciones de continuidad de la viga. Por ejemplo, en un empotramiento la rotación de la viga y su deflexión deben ser nulas; en un apoyo libre puede haber rotación pero no deflexión; en una viga simétrica en carga y geometría la rotación al centro del claro debe ser nula. Las condiciones de continuidad se establecen considerando que la curva elástica debe ser continua, a menos que haya circunstancias especiales que permitan una discontinuidad en deflexión o rotación; por ejemplo, una articulación intermedia permite una discontinuidad en rotación.

Si en el tramo de una viga existe un conector especial (una articulación o un conector cortante), la curva de deflexión tendrá en dicho punto una discontinuidad o presentará un cambio en su carácter, es decir, la curva de deflexión para la parte ubicada a la izquierda del conector será diferente de la ecuación que describe la curva a su derecha. En consecuencia, es necesario dividir la viga a través del conector y definir la ecuación (16') para cada uno de los segmentos adyacentes. De nuevo se evalúan las constantes de integración forzando las condiciones de compatibilidad en los extremos de los segmentos.

Si el módulo de elasticidad E , y el momento de inercia I , cambian en forma discreta en el tramo de la viga, ésta debe subdividirse en los puntos de cambio.

Convención de signos

En la figura 9 se ilustra la convención de signos, congruente con la convención para momento flexionante y con la deducción de las ecuaciones (17') y (18') de la sección anterior. Los momentos que se muestran en la figura 9 (a) son positivos y hacen que la viga se deforme con una concavidad hacia arriba. Los ejes de coordenadas indicados en la figura 9 (b) son positivos y coinciden con los de la figura 9 (a). En el tramo de viga A-B de la figura 9 (b) crecen los valores de y y de x , o sea tanto dy como dx son positivos. Por lo tanto, las deflexiones y serán positivas hacia arriba y las rotaciones θ serán positivas cuando el giro sea antihorario (contrario a las manecillas del reloj) según se muestra en la figura.

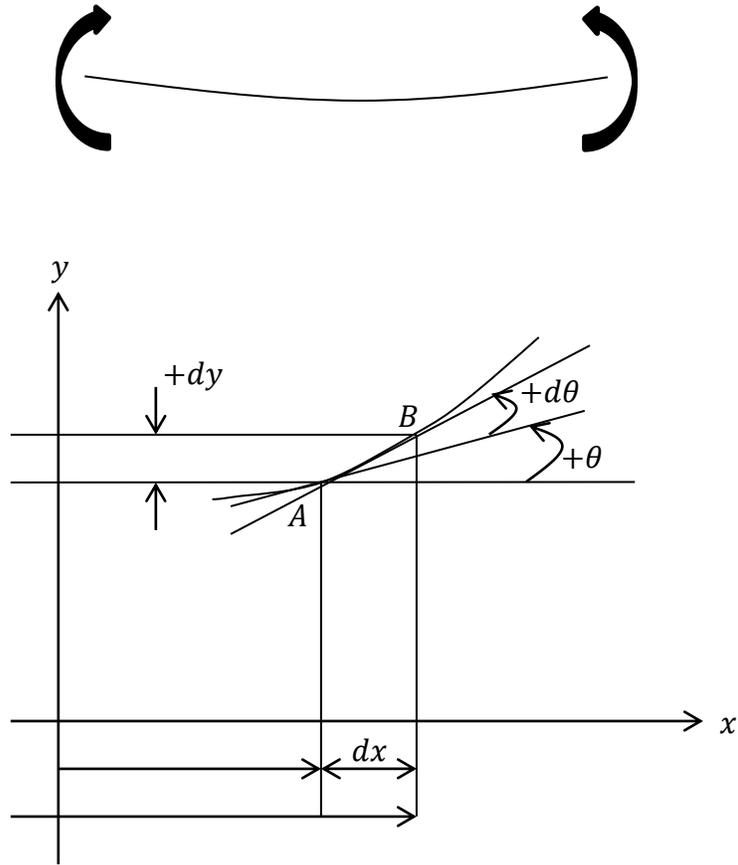


Figura 9.- Convención de signos

1.6.4. MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA

Presentación del método

El método de la viga conjugada tiene la ventaja de permitir el cálculo de las deformaciones en cualquier punto. Esta ventaja resulta importante en la resolución de estructuras hiperestáticas, en las cuales hay que calcular deformaciones en varias secciones.

Considérese una viga libremente apoyada sujeta a una carga cualquiera como la mostrada en la figura 10 (a). Recuérdense de las secciones anteriores que existen las siguientes relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flexionante en una viga de este tipo:

$$w = \frac{dV}{dx}$$

$$V = \frac{dM}{dx}$$

En las mismas secciones se demostró que con estas ecuaciones pueden calcularse, por integración, y determinando las constantes de integración, las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes de esta viga, que se llamará la viga real:

$$V = \int w dx$$

$$M = \int V dx = \int \int w dx^2$$

En la figura 10(b) se muestra de manera esquemática el diagrama de momentos flexionantes así obtenido. También se ha demostrado en alguna otra sección que la rotación θ y la deflexión y de esta viga pueden calcularse con las ecuaciones que a continuación se presentan:

$$\theta = \int \frac{M}{EI} dx$$

$$y = \int \int \frac{M}{EI} dx$$

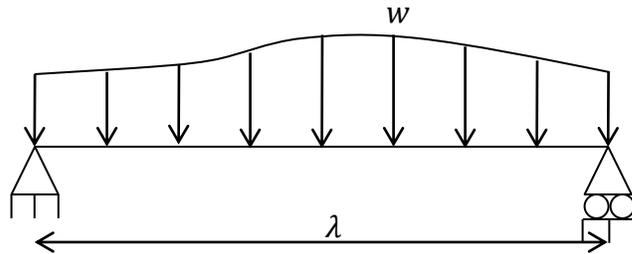
Supóngase ahora que a otra viga, de igual claro, se le aplica como carga el diagrama de momento flexionante dividido entre la rigidez EI , como se indica en la figura 10(c). Más adelante, al plantear la convención de signos, se explica por qué se coloca la carga actuando hacia arriba. A esta otra viga se le llamará viga conjugada y a la carga M/EI se le llamará carga elástica. De acuerdo con las ecuaciones de V y M antes citadas, y considerando que la carga w es igual a M/EI , la fuerza cortante y el momento flexionante en la viga conjugada serán:

$$V_{conj} = \int \frac{M}{EI} dx$$

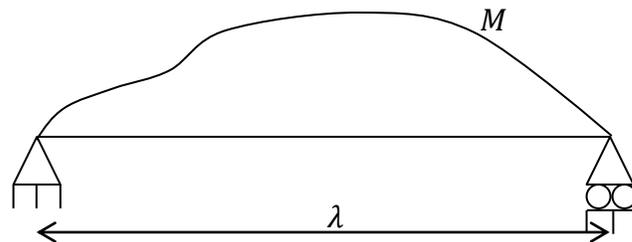
$$M_{conj} = \int \int \frac{M}{EI} dx^2$$

CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

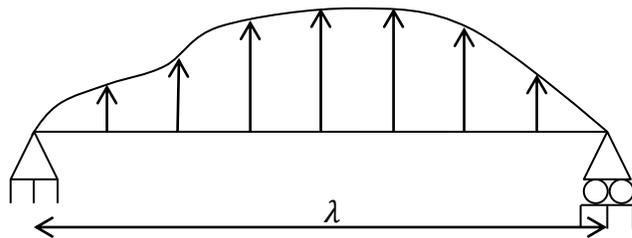
Si se comparan ahora estas ecuaciones con las de giro y flecha antes citadas se puede ver que la rotación θ en la viga real es igual a la fuerza cortante V_{conj} en la viga conjugada y que la deflexión y en la viga real es igual al momento flexionante M_{conj} en la viga conjugada.



a) Viga real



b) Diagrama de momentos de la viga real



c) Viga conjugada con la carga elástica

Figura 10.- Viga real simplemente apoyada y viga conjugada

Estas dos equivalencias se conocen como teoremas de la viga conjugada. De acuerdo con estos teoremas, para calcular la rotación y la deflexión en cualquier sección de una viga, se carga la viga conjugada con el diagrama de M/EI y se calculan la fuerza cortante y el momento flexionante en esa sección. Los valores obtenidos serán las deformaciones de la viga real. Ya que en general se trazan diagramas completos de fuerza cortante y momento flexionante, se pueden

obtener las rotaciones y las deflexiones en cualquier sección de la viga real, lo que constituye la principal ventaja de este método.

En la demostración anterior se ha utilizado una viga libremente apoyada. En este caso, la viga real y la viga conjugada son iguales. Sin embargo, ésta es la excepción ya que en general las condiciones de apoyo de la viga real y de la viga conjugada son diferentes.

Condiciones de apoyo de la viga conjugada

El principio general para modificar las condiciones de apoyo consiste en tener en cuenta que si en la viga real hay rotaciones en un apoyo, en la viga conjugada debe haber fuerza cortante; si hay deflexiones en la viga real, debe haber momento flexionante en la viga conjugada; si por el contrario no hay estas deformaciones en la viga real, en la viga conjugada no debe haber fuerza cortante o momento flexionante, según el caso. De acuerdo con este principio, se muestran en la figura 11 las vigas conjugadas que corresponden a varios tipos de vigas reales. A continuación se muestra cómo se ha aplicado el principio general enunciado para los apoyos de estas vigas.

Extremos libremente apoyados. Como permiten giros y no permiten deflexiones, en la viga conjugada deben ser también libremente apoyados, ya que en estos hay fuerza cortante y no hay momento flexionante. Es el caso de los dos apoyos de la viga real (a), del extremo izquierdo de la viga real (d) y de los extremos derechos de las vigas reales (f) y (g). En todos estos casos, los apoyos correspondientes de las vigas conjugadas son también libremente apoyados.

Extremos libres. En las vigas reales hay giros y deflexiones. Por lo tanto, en los apoyos de la viga conjugada debe haber fuerza cortante y momento flexionante. El empotramiento es el único apoyo que cumple éstas condiciones. Es el caso del extremo derecho de la viga real (b) y del extremo derecho de la viga real (d) que en sus respectivas vigas conjugadas se han transformado en empotramientos.

Apoyos libremente apoyados interiores. Es el caso del apoyo derecho de la viga real (d). En este apoyo hay rotación pero no deflexión. En la viga conjugada debe haber fuerza cortante, pero no debe haber momento flexionante. Una articulación interior cumple este requisito, como se ve en la viga conjugada correspondiente.

Empotramientos. En las vigas reales no hay ni rotaciones ni deflexiones, por lo que en las conjugadas no debe haber ni fuerza cortante ni momento flexionante. El extremo libre, o sea, en el aire, es el único que cumple este requisito. En algunos casos, como en las vigas reales (c) y (g), esto conduce a vigas conjugadas

inestables. Sin embargo, bajo una carga que sea igual al diagrama de M/EI la viga si está en equilibrio.

Resumiendo lo analizado en estos cuatro casos, puede plantearse la siguiente tabla:

VIGA REAL	VIGA CONJUGADA
Apoyo libre exterior	Apoyo libre exterior
Extremo libre	Empotramiento
Apoyo libre interior	Articulación interior
Empotramiento	Extremo libre
Articulación interior	Apoyo libre interior

Revisando la figura 10 puede observarse que algunas vigas reales incluidas son hiperestáticas. El método de la viga conjugada también sirve para calcular las deformaciones en estas vigas, pero es necesario determinar previamente el diagrama de M/EI de la viga real, para lo cual se requieren los métodos de análisis de estructuras indeterminadas que se estudiarán en capítulos posteriores.

Convención de signos

De acuerdo con la convención de signos que se ha venido utilizando, un diagrama de momento flexionante positivo debe producir una carga elástica M/EI también positiva, o sea, hacia arriba. Por eso en la figura 10 (c) se muestra la carga hacia arriba. Una carga de este signo produce en la viga conjugada momentos flexionantes negativos que indican que las deflexiones son negativas, o sea, hacia abajo (véase la figura 9), como sucede en la viga real. El diagrama de fuerza cortante de la viga conjugada de la figura 10 (c) es negativo en la parte izquierda de la viga y positivo en la parte derecha. Esto indica que en la parte izquierda los giros son en el sentido horario y en la parte derecha son en sentido anti-horario (véase nuevamente la figura 9), también como en la viga real.

Por otra parte, una carga elástica hacia abajo produce fuerzas cortantes y momentos flexionantes negativos a lo largo de la viga conjugada, lo cual indica que los giros son en sentido horario y las deflexiones son hacia abajo, como efectivamente sucede en la viga real.

CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

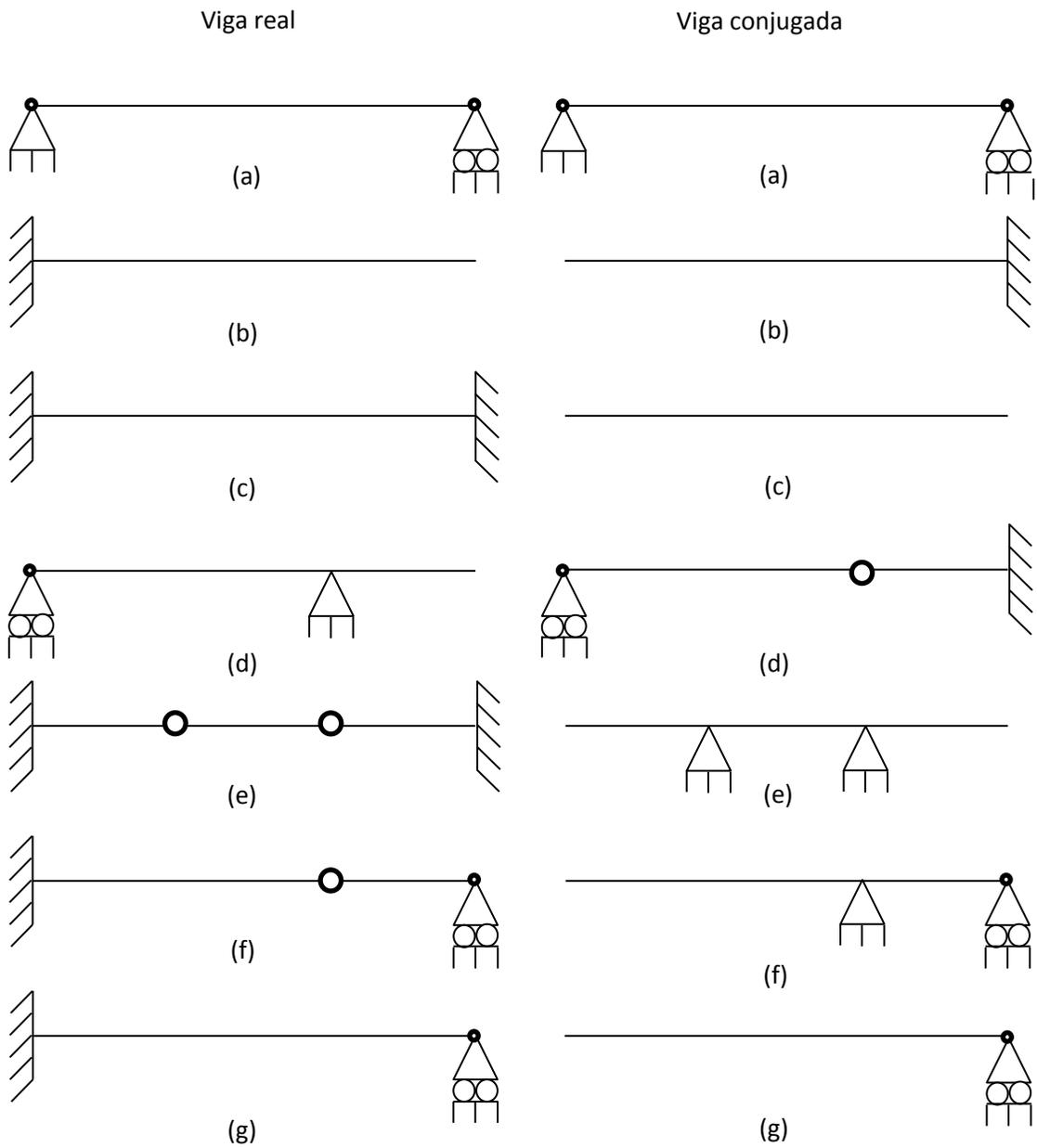


Figura 11.- Vigas conjugadas de diversos tipos de Vigas reales

1.6.5. MÉTODO DEL PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

Este es el método más general y más usado en la práctica. Se puede aplicar a cualquier tipo de estructuras, permite calcular deflexiones y rotaciones sin aumentar mucho la labor numérica, y también se pueden obtener con su aplicación las deformaciones causadas por efectos de cambios de temperatura o defectos de construcción. Se llama del trabajo virtual porque se fundamenta, como se verá a continuación, en la aplicación a la estructura de una carga virtual, o sea, inexistente en la realidad, y en el cálculo del trabajo desarrollado por esta carga virtual.

Supóngase un cuerpo de forma cualquiera, como el mostrado con línea llena en la figura 12 (a), al que se le aplican gradualmente cargas concentradas, P , en varios puntos A , B , C , de tal manera que lo deforman hasta adquirir la silueta mostrada con línea punteada en la misma figura. Estas fuerzas externas producen fuerzas internas en el cuerpo, que se denominarán fuerzas S , que se muestran en la figura actuando sobre un elemento de longitud l , el cual se deforma por la acción de estas fuerzas. Supóngase también que se desea calcular la deflexión en otro punto cualquiera, D , del cuerpo mostrado.

Se calcularán primero el trabajo externo de las fuerzas P y el trabajo interno de las fuerzas S en el cuerpo de la figura 12 (a). El Trabajo externo es:

$$U_{ea} = \frac{1}{2}P_A\Delta_A + \frac{1}{2}P_B\Delta_B + \frac{1}{2}P_C\Delta_C \quad (1)$$

y el trabajo interno es:

$$U_{ia} = \frac{1}{2} \sum S(dl) \quad (2)$$

Igualando los trabajos externo e interno:

$$\frac{1}{2}P_A\Delta_A + \frac{1}{2}P_B\Delta_B + \frac{1}{2}P_C\Delta_C = \frac{1}{2} \sum S(dl) \quad (3)$$

Supóngase ahora que al mismo cuerpo se le aplica, también gradualmente, una carga virtual en el punto en el que se desea calcular la deflexión, en este caso, en el punto D . Esta carga puede tener cualquier valor, pero por conveniencia se hace unitaria. Su dirección debe ser la misma que la dirección en que se desea conocer la deflexión del punto. Así, si se desea conocer la componente vertical de la deflexión en D , señalada como Δ_{DV} en la figura 12(a), la carga virtual unitaria se aplica en dirección virtual, como se muestra en la figura 12 (b). La carga virtual produce fuerzas virtuales en el interior del cuerpo que se han denominado fuerzas

μ en la figura mencionada. De la misma manera que se hizo para el caso de la figura 12 (a), se pueden igualar el trabajo externo de la carga virtual unitaria y el trabajo interno de las fuerzas μ . Se obtiene:

$$\frac{1}{2}(1)(\Delta_{1V}) = \frac{1}{2} \sum \mu(dl_1) \quad (4)$$

Sumando los trabajos externos correspondientes a las figuras 12 (a) y (b), e igualando la suma a la de los trabajos internos, o sea, sumando los primeros miembros de las ecuaciones (3) y (4), e igualando la suma a la de los segundos miembros, se obtiene:

$$\frac{1}{2}(P_A\Delta_A + P_B\Delta_B + P_C\Delta_C) + \frac{1}{2}(1)(\Delta_{1V}) = \frac{1}{2} \sum S(dl) + \frac{1}{2} \sum \mu(dl_1) \quad (5)$$

Ahora, aplíquese primero la carga virtual unitaria, como en la figura 12 (b), y manteniendo constante esta carga, aplíquese gradualmente las cargas P de la figura 12 (a). Calculando los trabajos externos e internos para estas dos etapas e igualándolos se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(1)(\Delta_{1V}) + \frac{1}{2}(P_A\Delta_A + P_B\Delta_B + P_C\Delta_C) + (1)(\Delta_{DV}) \\ & = \frac{1}{2} \sum \mu(dl_1) + \frac{1}{2} \sum S(dl) + \sum \mu(dl) \end{aligned} \quad (6)$$

Obsérvese que el término $(1)(\Delta_{DV})$ que aparece al final del primer miembro de esta ecuación expresa el trabajo realizado por la carga virtual unitaria mientras se aplican las cargas P. Restando el primer miembro y el segundo miembro de la ecuación (5) de los correspondientes miembros de la ecuación (6), se obtiene la siguiente ecuación fundamental del trabajo virtual:

$$(1)(\Delta_{DV}) = \sum \mu(dl) \quad (7)$$

Esta ecuación permite calcular la deflexión buscada Δ_{DV} como la suma de los productos de las fuerzas μ , producidas por la carga virtual unitaria, y las deformaciones axiales dl producidas por las fuerzas externas P. En los capítulos 2 y 3 se mostrará como calcular estas fuerzas y deformaciones para distintos tipos de estructuras. Antes debe observarse que la carga virtual puede colocarse en cualquier punto y en cualquier dirección del cuerpo, lo que permite calcular la deflexión también en cualquier punto y dirección. También debe notarse que la carga virtual puede tener cualquier unidad (kg, kN, lb, etc.), pues como la unidad que se escoge aparece en ambos miembros de la ecuación (7), se elimina. En los ejercicios que se resuelven en los siguientes capítulos se ha optado por no darle

alguna unidad de medición a la fuerza virtual. La carga virtual puede sustituirse por un momento virtual, y entonces se obtendrán las rotaciones en cualquier punto del cuerpo en que se coloque el momento. La ecuación correspondiente es de la siguiente forma:

$$(1)(\theta_D) = \sum \mu(dl) \quad (8)$$

donde θ representa la rotación en un punto cualquiera D.

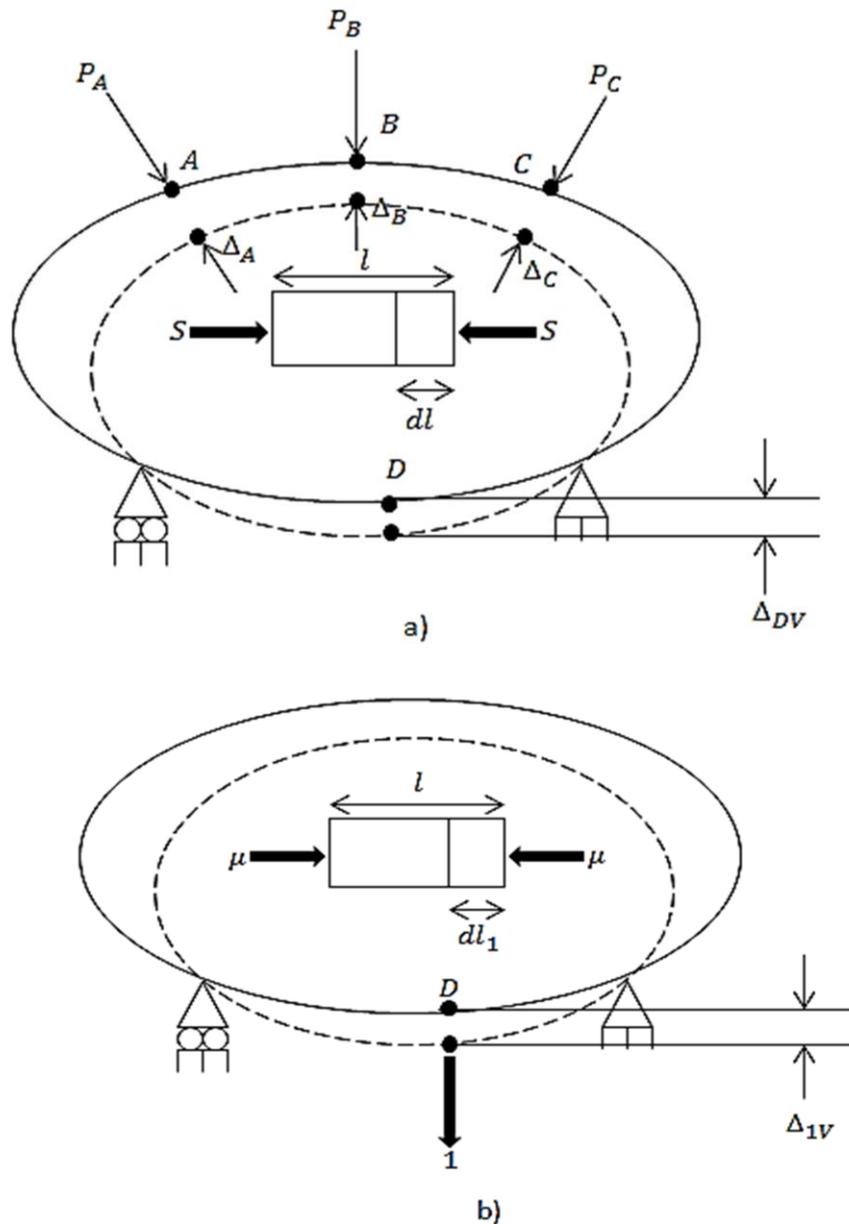


Figura 12.- Principio del trabajo virtual en un cuerpo cualquiera

Deflexiones en armaduras por el método del trabajo virtual

En este apartado se muestra cómo pueden calcularse las deflexiones en armaduras producidas por cargas aplicadas.

Supóngase que en la armadura de la figura 13 (a), sujeta a cargas cualesquiera P_1 , P_2 y P_3 , se desea calcular la deflexión vertical en el nudo L_1 y la deflexión o desplazamiento horizontal del nudo U_1 . Para el primer caso, siguiendo el procedimiento general planteado en la sección anterior, se aplica una carga virtual unitaria vertical en el nudo L_1 , como se indica en la figura 13 (b), y se utiliza la ecuación (7) de este tema para calcular la deflexión buscada. Con relación a esta ecuación, Δ_{DV} será la deflexión en L_1 ya que en este punto se colocó la carga virtual; μ serán los esfuerzos producidos por la carga unitaria en los miembros de la armadura, equivalentes a los de la figura 12 (b); dl serán las deformaciones axiales en cada miembro de la armadura, ya que dichos miembros son equivalentes a los elementos de longitud l de la figura 12; y la sumatoria \sum se lleva a través de todos los miembros de la armadura. Los esfuerzos μ se pueden calcular resolviendo la armadura de la figura 13 (b) por el método de los nodos u otro, sin que sea necesario asignarle una unidad específica a la carga virtual, como kilogramos o toneladas. Y las deformaciones dl en cada miembro se pueden calcular con la ecuación

$$\Delta = \frac{P_0 l}{AE} \quad (9)$$

Observando que el término Δ de dicha ecuación equivale al término dl de la figura 12 (es la deformación axial de un elemento); que la carga P_0 equivale a las fuerzas S producidas por las cargas en cada miembro de la armadura, las cuales pueden calcularse, por lo tanto, resolviendo la armadura de la figura 13 (a); que el término A viene siendo el área de sección transversal de cada miembro de la armadura; y el término E , el módulo de elasticidad correspondiente. Haciendo las equivalencias mencionadas, la ecuación general (7) de este tema se transforma en la siguiente ecuación para calcular las deflexiones en armaduras producidas por cargas:

$$\Delta = \sum \frac{\mu S l}{AE} \quad (10)$$

donde, resumiendo lo explicado anteriormente:

Δ , deflexión en el punto de aplicación de la carga virtual unitaria, en la dirección de la carga;

μ , fuerzas producidas por la carga virtual unitaria en los miembros de la armadura (figura 13 (b)); algunos autores le llaman n ;

S , fuerzas producidas por las cargas reales de los miembros de la armadura (figura 13 (a)); algunos autores le llaman N ;

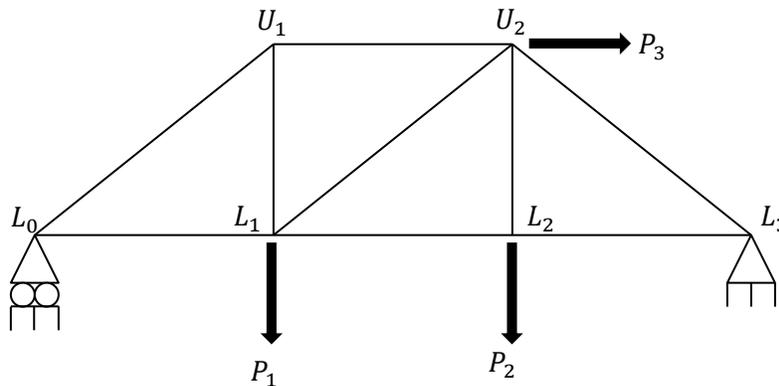
l , longitud de cada miembro;

A , área de la sección transversal de cada miembro; y

E , módulo de elasticidad de cada miembro, que suele ser constante.

La sumatoria se hace para todos miembros de la armadura.

La deflexión horizontal en el nudo U_1 se determina de manera semejante. En este caso, las fuerzas μ serán las producidas en los miembros de la armadura por la carga mostrada en la figura 13 (c). Las fuerzas S siguen siendo las producidas por las cargas reales de la figura 13 (a). En ambos casos, el sentido de la carga virtual puede ser cualquiera. Si la sumatoria resulta positiva, el sentido escogido fue correcto y la deflexión tendrá también ese sentido. En caso contrario, la deflexión tendrá el sentido opuesto al asignado a la carga virtual. Si en un nudo dado se determinan la deflexión vertical y la horizontal, la resultante de ambas será la deflexión total en magnitud y dirección.



a)

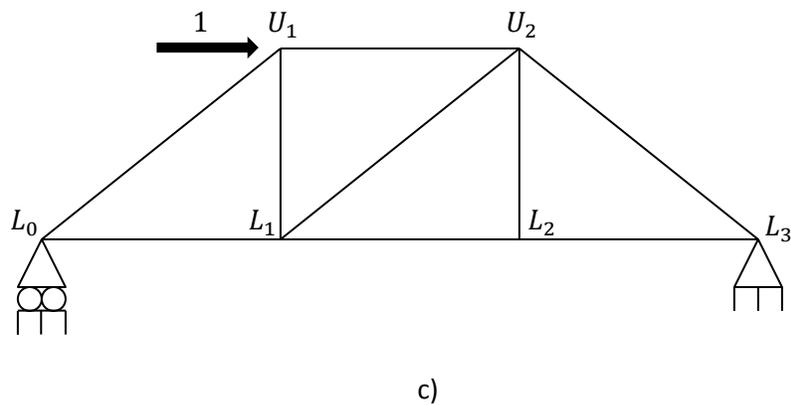
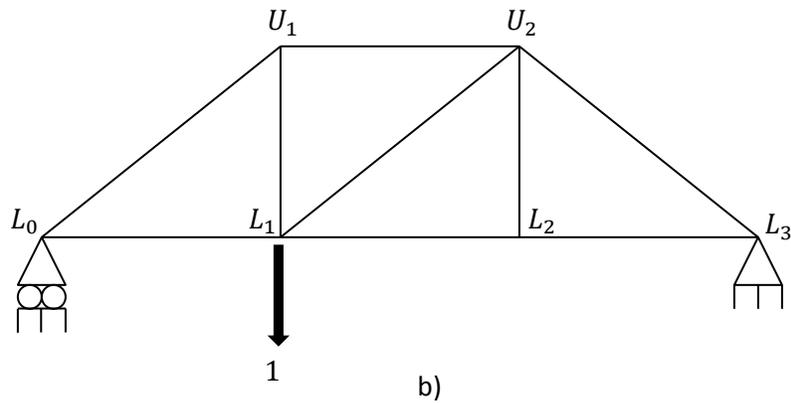


Figura 13.- Deflexiones en armaduras producidas por cargas

Deflexiones y rotaciones en vigas por el método del trabajo virtual

Supóngase que se tiene una viga libremente apoyada, figura 14 (a), con un sistema de cargas cualquiera P_1 , P_2 y P_3 y se desea calcular la deflexión vertical en C. De acuerdo con el principio general expuesto en el subtema __, se debe colocar una carga unitaria en el punto del cual se desea conocer la deflexión, como se muestra en la figura 14 (b), y aplicar la ecuación general (7) del tema ya citado. Respecto a esta ecuación, μ serán los esfuerzos producidos en las fibras de la viga por la carga unitaria, figura 14 (b), y dl serán las deformaciones axiales producidas en las fibras por el sistema de cargas externas, figura 14 (a). A continuación se verá como calcular estos valores.

Respecto a las deformaciones dl , se pueden calcular como el producto de la deformación unitaria ε por la longitud inicial del elemento dx , figura 14 (a), de tal manera que

$$dl = \varepsilon(dx) \quad (11)$$

Las deformaciones ε son iguales al esfuerzo entre el módulo de elasticidad, por lo que $\varepsilon = f/E$. El esfuerzo en un elemento diferencial dA como el mostrado en la figura 14(a) se puede calcular con la ecuación de flexión:

$$f = \frac{M}{I}y \quad (12)$$

donde M son los momentos flexionantes producidos por las cargas reales P .

Sustituyendo este valor del esfuerzo en el valor de ε , y el del ε en la ecuación (11), se obtiene:

$$dl = \frac{My}{EI}dx \quad (13)$$

Las fuerzas internas μ de la figura 14 (b) son iguales a los esfuerzos producidos por la carga virtual unitaria multiplicados por el área diferencial dA . Los esfuerzos se pueden calcular con la ecuación de flexión (12), por lo que

$$\mu = \frac{my}{I}dA \quad (14)$$

donde m son los momentos producidos por la carga virtual unitaria.

Sustituyendo los valores de dl y de μ proporcionados por las ecuaciones (13) y (14), respectivamente, en la ecuación general (7):

$$1\Delta = \sum \left(\frac{my}{I}dA \right) \left(\frac{My}{EI}dx \right) \quad (15)$$

Al deducir la ecuación (7) se mencionó que la sumatoria indicaba que se debían considerar todos los elementos del cuerpo de la figura 11. En el caso de la viga de la figura 14, la sumatoria se debe sustituir por una integral que abarque toda la longitud de la viga y otra que abarque toda el área de la sección transversal. Haciendo esta situación se obtiene:

$$1\Delta = \int_0^l \frac{Mm(dx)}{EI^2} \int_A y^2 dA \quad (16)$$

Finalmente, eliminando las unidades de la carga virtual en ambos miembros de la ecuación (16) y observando que $\int_A y^2 dA$ es el momento de inercia de la sección transversal de la viga, se obtiene la ecuación utilizada para fines prácticos:

$$\Delta = \int_0^l \frac{Mm(dx)}{EI} \quad (17)$$

Recuérdese que en esta ecuación el término M representa la ecuación del momento flexionante producido por las cargas reales P , mientras que el término m , la ecuación del momento flexionante producido por la carga virtual unitaria colocada en el punto en que se desea conocer la deflexión Δ , en la dirección de la deflexión buscada.

En la solución de los ejercicios se observa que la ecuación (17) es expresada como

$$Y = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm(dx)}{EI} \quad (18)$$

esto se debe a que generalmente las estructuras tienen más de un tramo a analizar, pues presentan diversas discontinuidades de carga y cada tramo tendrá su propia ecuación de momento. Si esto sucede, entonces, la ecuación (18) se aplica para cada tramo y el desplazamiento total se obtiene de hacer la suma. En ésta última ecuación, Y es la deflexión, L_1 es el límite inicial del tramo analizado de la estructura, mientras L_2 es el límite final del tramo analizado.

El mismo razonamiento seguido para obtener la ecuación (17) puede aplicarse para calcular la rotación o giro en un punto de una viga. Por ejemplo, si se desea conocer la rotación en el extremo A de la viga de la figura 15 (a), se aplica un momento virtual unitario en ese extremo, como se muestra en la figura 15 (b), y los esfuerzos μ producidos por este momento se sustituyen en la ecuación (8). La ecuación equivalente a la (17) queda en la forma:

$$\theta = \int_0^l \frac{Mm(dx)}{EI} \quad (19)$$

En este caso, m representa la ecuación del diagrama de momento flexionante producido por el momento virtual unitario aplicado a la viga en el punto donde se desea conocer la rotación.

De igual forma, la ecuación (19) es reemplazada por la siguiente ecuación en la solución de los ejercicios:

CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

$$\theta = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm(dx)}{EI} \quad (20)$$

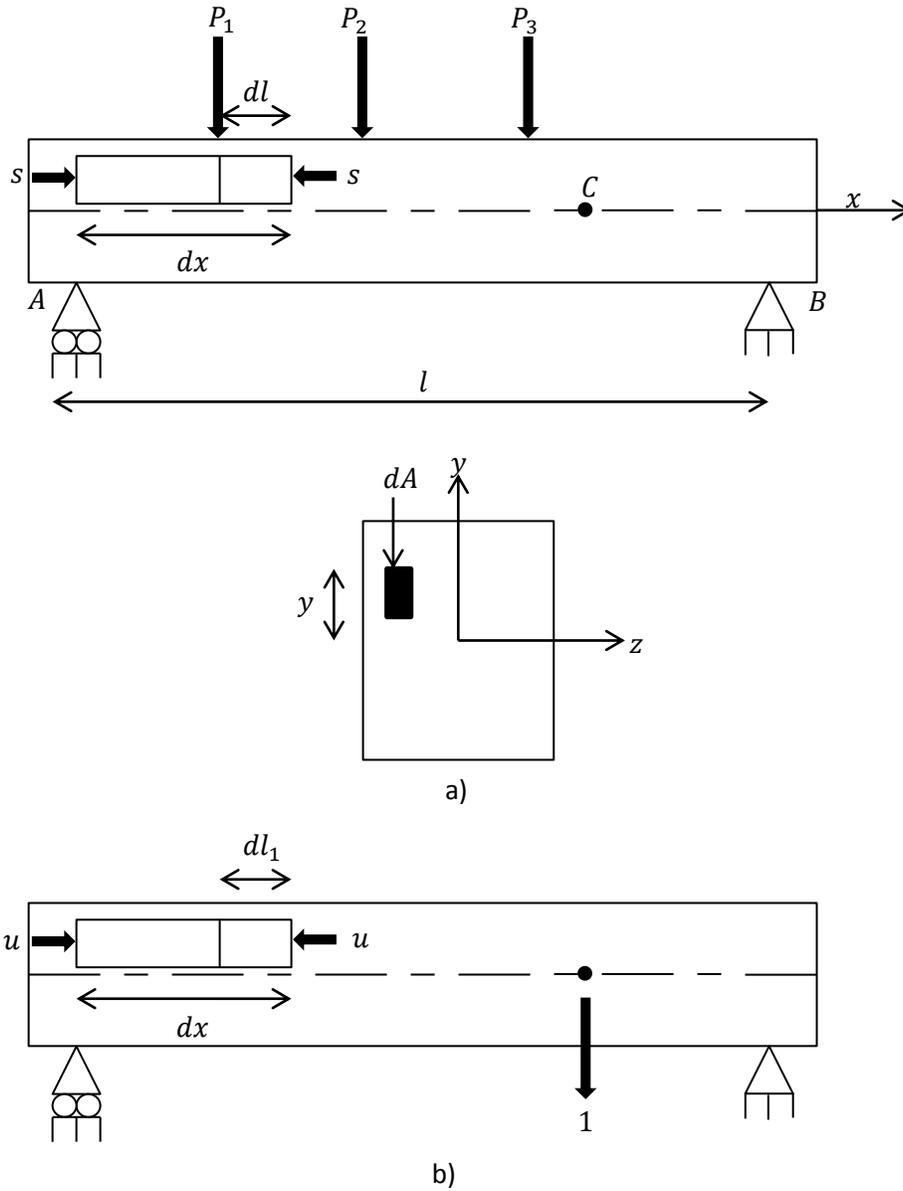


Figura 14.- Deflexiones en vigas producidas por cargas

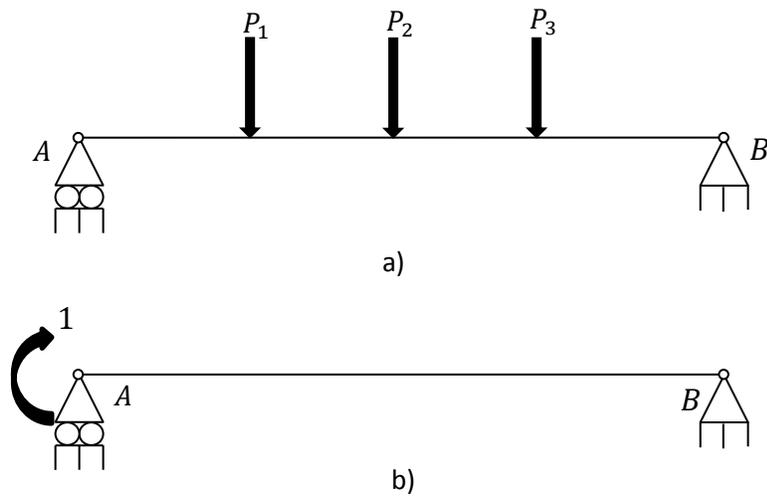


Figura 15.- Rotación en una viga

Deflexiones y rotaciones en marcos por el método del trabajo virtual

El método del trabajo virtual presenta claras al calcular deformaciones en marcos. El procedimiento es igual al utilizado para el cálculo de deformaciones en vigas, pero la integración planteada en las ecuaciones (18) y (20) se lleva a cabo a través de todos los miembros que componen el marco. Desde luego que dentro de cada miembro resulta necesario hacer la integración en distintos tramos, si las funciones de M o de m no son continuas a lo largo del miembro. El desplazamiento total o giro total se obtiene de hacer la suma.

1.6.6. TEOREMA DEL CASTIGLIANO

En 1879, Alberto Castigliano, un ingeniero de origen italiano, publicó un libro en el que delineó un método para determinar la deflexión o la pendiente en un punto de una estructura (sean vigas, marcos o armaduras). Este método llamado Segundo Teorema de Castigliano o método del trabajo mínimo es aplicable sólo a estructuras con temperatura constante, con soportes sin asentamientos y hechas de material con respuesta elástica lineal. Si va a determinarse el desplazamiento en un punto, el teorema establece que éste es igual a la primera derivada parcial de la energía de deformación en la estructura con respecto a una fuerza que actúa en el punto y en la dirección del desplazamiento. De manera similar, la pendiente en un punto de una estructura es igual a la primera derivada parcial de la energía

de deformación en la estructura con respecto a un momento concentrado que actúa en el punto y en la dirección de la rotación.

Para obtener el segundo teorema de Castigliano considere un cuerpo (estructura) de cualquier forma arbitraria sometido a una serie de n Fuerzas P_1, P_2, \dots, P_n . Como el trabajo externo hecho por esas cargas es igual a la energía de deformación interna almacenada en el cuerpo, podemos escribir

$$U_i = U_e$$

Sin embargo, el trabajo externo es una función de las cargas externas ($U_e = \sum \int P dx$). Esto es

$$U_i = U_e = f(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

Ahora, si cualquiera de las fuerzas, por ejemplo P_i , se incrementa en una cantidad diferencial dP_i , el trabajo interno también se incrementará, de manera que la nueva energía de deformación resulta ser

$$U_i + dU_i = U_i + \frac{\partial U_i}{\partial P_i} dP_i \quad (A)$$

Sin embargo, este valor no debe depender de la secuencia con que se apliquen las n fuerzas al cuerpo. Por ejemplo, si aplicamos primero dP_i al cuerpo, ocasiona que éste se desplace en una cantidad diferencial $d\Delta_i$ en la dirección dP_i . De acuerdo con la ecuación $U_e = \frac{1}{2} P \Delta$, el incremento de energía de deformación sería $\frac{1}{2} dP_i \Delta_i$. Sin embargo, esta es una diferencial de segundo orden y puede despreciarse. La aplicación adicional de las cargas P_1, P_2, \dots, P_n que desplazará el cuerpo $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, dará la energía de deformación

$$U_i + dU_i = U_i + dP_i \Delta_i \quad (B)$$

Aquí, U_i es la energía de deformación interna en el cuerpo, causada por dP_i . En resumen, la ecuación (A) representa la energía de deformación en el cuerpo determinada aplicando primero las cargas P_1, P_2, \dots, P_n , luego dP_i y la ecuación (B) representa la energía de deformación determinada aplicando primero dP_i y luego las cargas P_1, P_2, \dots, P_n . Como esas dos ecuaciones deben ser iguales, se requiere que

$$\Delta_i = \frac{\partial U_i}{\partial P_i} \quad (C)$$

lo que demuestra el teorema; esto es, el desplazamiento Δ_i en la dirección de P_i es igual a la primera derivada parcial de la energía de deformación con respecto a P_i .

Obsérvese que la ecuación (C) es un enunciado respecto a la compatibilidad de la estructura. La deducción anterior requiere que sólo fuerzas conservativas sean consideradas en el análisis. Estas fuerzas efectúan trabajo que es independiente de la trayectoria y, por tanto, no generan pérdida de energía. Como las fuerzas que generan respuestas elástico-lineales son conservativas, el teorema queda restringido a materiales con comportamiento elástico lineal, lo que contrasta con el método de la fuerza virtual visto anteriormente, que se aplica a materiales con comportamiento tanto elástico como inelástico.

Teorema de Castigliano para armaduras

La energía de deformación para un miembro de una armadura ésta dada por la ecuación $U_i = N^2L/2AE$. Sustituyendo esta ecuación en la ecuación (C) y omitiendo el subíndice i, tenemos

$$\Delta = \sum N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) \frac{L}{AE} \quad (D)$$

donde

Δ = desplazamiento externo del nudo de la armadura

P = fuerza externa aplicada al nudo de la armadura en la dirección de la Δ buscada

N = fuerza interna en un miembro causada por la fuerza P y cargas sobre la armadura

L = longitud de un miembro

A = área de la sección transversal de un miembro

E = módulo de elasticidad de un miembro

Esta ecuación es similar a la usada en el método del trabajo virtual $\Delta = \sum \frac{\mu Nl}{AE}$, excepto que se reemplaza por $\frac{\partial N}{\partial P}$. Nótese que para determinar esta derivada parcial es necesario tratar a P como una variable (no como una cantidad numérica específica) y además, cada fuerza de barra N debe expresarse como función de P . Por esto, el cálculo de $\frac{\partial N}{\partial P}$ requiere en general algo más de trabajo que el requerido

para calcular cada fuerza μ directamente. Ambos términos son por supuesto iguales, ya que μ o $\frac{\partial N}{\partial P}$ es simplemente la razón de cambio de la fuerza interna de barra con respecto a la carga P o bien el cambio en la fuerza de barra por carga unitaria.

A continuación se presenta el algoritmo para determinar el desplazamiento de cualquier nudo sobre una armadura usando el teorema de Castigliano.

1.- Coloque una fuerza P sobre la armadura en el nudo donde debe determinarse el desplazamiento. Se supone que esta fuerza tiene una magnitud variable y debe estar dirigida a lo largo de la línea de acción del desplazamiento.

2.- Determine la fuerza N en cada miembro causada por las cargas reales (numéricas) y por la fuerza variable P. Suponga que las fuerzas de tensión son positivas y las de compresión, negativas. Calcule también la derivada parcial respectiva $\frac{\partial N}{\partial P}$ para cada miembro. Después de que N y $\frac{\partial N}{\partial P}$ hayan sido determinadas, asigne a P su valor numérico si ésta ha sido reemplazada por una fuerza real sobre la armadura. De otra manera, haga P igual a cero.

3.- Aplique la ecuación (D) para determinar el desplazamiento buscado Δ . Es importante conservar los signos algebraicos de los valores correspondientes de N y $\frac{\partial N}{\partial P}$ al sustituir esos términos en la ecuación. Si la suma resultante $\sum N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) \frac{L}{AE}$ es positiva, Δ tiene el mismo sentido que el propuesto para P. Si la suma resulta negativa, Δ tiene sentido opuesto al de P.

Teorema de Castigliano para vigas y marcos

La energía de deformación interna para una viga o marco está dada por la ecuación $U_i = \int M^2 dx / 2EI$. Si sustituimos esta ecuación en la ecuación (C) y omitimos el subíndice i, tenemos

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P} \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI}$$

En lugar de elevar al cuadrado la expresión para el momento M, integrar y luego derivar parcialmente, es en general más fácil diferenciar antes que integrar. Si E e I son constantes, tenemos

$$\Delta = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} \quad (E)$$

donde

Δ = desplazamiento externo del punto provocado por las cargas reales que actúan sobre la viga o marco; en los problemarios puede aparecer como δ .

P = fuerza externa aplicada a la viga o marco en la dirección de la Δ buscada

M = momento interno en la viga o marco, expresado en función de x y provocado por la fuerza P y las cargas reales sobre la viga

E = módulo de elasticidad del material de la viga

I = momento de inercia del área de la sección transversal calculada respecto al eje neutro

Si la pendiente va a determinarse en un punto, debe calcularse la derivada parcial del momento interno M con respecto a un momento concentrado externo M' que actúa en el punto, esto es,

$$\theta = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial M'} \right) \frac{dx}{EI} \quad (F)$$

Las ecuaciones anteriores son similares a las usadas en el método del trabajo virtual, excepto que $\frac{\partial M}{\partial P}$ y $\frac{\partial M}{\partial M'}$ reemplazan a los respectivos m .

En el capítulo 2 puede observarse que se prefiere usar los límites de L_1 a L_2 para las ecuaciones (E) y (F) por el mismo motivo expuesto en el método del trabajo virtual.

A continuación se presenta el algoritmo para determinar la deflexión o la pendiente (rotación, giro) en algún punto de una viga o marco mediante el teorema de Castigliano.

1.- Coloque una fuerza P sobre la viga o marco en el punto y en la dirección del desplazamiento buscado. Si la pendiente va a determinarse, coloque un momento concentrado M' en el punto. Se supone que P y M' tienen magnitudes variables.

2.- Establezca coordenadas x apropiadas que sean válidas dentro de regiones de la viga o marco donde no haya discontinuidades de fuerza, carga distribuida o momento concentrado. Calcule el momento interno M como función de P o M' y de cada coordenada x . Calcule también la derivada parcial $\frac{\partial M}{\partial P}$ o $\frac{\partial M}{\partial M'}$ para coordenada

x. Después de que M y $\frac{\partial M}{\partial P}$ o $\frac{\partial M}{\partial M'}$ han sido determinadas, asigne a P o a M' su valor numérico si ha reemplazado a una fuerza real o a un momento concentrado. De otra manera haga P o M' igual a cero.

3.- Aplique la ecuación (E) o (F) para determinar el desplazamiento Δ o pendiente θ buscado. Es importante retener los signos algebraicos de los valores correspondientes de M y $\frac{\partial M}{\partial P}$ o $\frac{\partial M}{\partial M'}$. Si la suma resultante de todas las integrales definidas es positiva, Δ o θ actúan con el mismo sentido que P o M' .

1.7. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS POR EL MÉTODO DE FUERZAS

1.7.1. DEFINICIÓN DEL MÉTODO DE FUERZAS

En este apartado se mostrará cómo aplicar el método de las fuerzas o de las flexibilidades al análisis de armaduras, vigas y marcos estáticamente indeterminados (hiperestáticos). Este método de análisis se fundamenta en la continuidad de la deformación de la estructura y permite calcular las reacciones redundantes, considerando las acciones internas y las reacciones de los apoyos como incógnitas fundamentales.

El método de las fuerzas fue originalmente desarrollado por James C. Maxwell en 1864 y luego refinado por Otto Mohr y Heinrich Müller-Breslau. Este método fue uno de los primeros disponibles para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas y como su nombre lo sugiere consiste en escribir ecuaciones que satisfagan la compatibilidad y los requisitos de fuerza-desplazamiento en la estructura y contienen como incógnitas a las fuerzas redundantes. Los coeficientes de esas incógnitas se llaman coeficientes de flexibilidad. Como la compatibilidad es la base de éste método, también suelen llamarle método de la compatibilidad o método de los desplazamientos consistentes. Una vez determinadas las fuerzas redundantes, las fuerzas reactivas restantes sobre la estructura se determinan satisfaciendo los requisitos de equilibrio en la estructura.

1.7.2. ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

Recuérdese de lo expuesto en alguna sección anterior que una estructura de cualquier tipo se clasifica como estáticamente indeterminada cuando el número de reacciones o fuerzas internas desconocidas es mayor que el número de

ecuaciones de equilibrio disponibles para su análisis. En esta sección veremos las ventajas de usar estructuras indeterminadas. La mayoría de las estructuras diseñadas actualmente son estáticamente indeterminadas. Esta indeterminación puede surgir como resultado de soportes o miembros adicionales o bien por la forma general de la estructura.

Aunque el análisis de una estructura estáticamente indeterminada es más complicado que el de una estáticamente determinada, hay diversas razones para optar por el uso de este tipo de estructura. Probablemente el más importante es que para una carga dada, el esfuerzo y la deflexión máximos de una estructura estáticamente indeterminada son generalmente más pequeños que la correspondiente estructura estáticamente determinada.

Otra importante razón para seleccionar una estructura hiperestática es por la tendencia que tiene a redistribuir su carga hacia sus soportes redundantes en casos en que ocurre un diseño defectuoso o una sobrecarga. En esos casos, la estructura mantiene su estabilidad y el colapso se evita. Esto es particularmente de relevancia cuando la estructura soporta cargas laterales repentinas, como cargas por efectos del viento o de sismos.

Aunque las estructuras estáticamente indeterminadas pueden soportar una carga con miembros más pequeños y con mayor estabilidad que la asociada a sus contrapartes estáticamente determinadas, hay casos en que esas ventajas pueden convertirse en desventajas. El ahorro en costo de material debe compararse con el costo adicional necesario para fabricar la estructura ya que suele ser más caro construir los soportes y nudos de una estructura estáticamente indeterminada en comparación con una estáticamente determinada. Además, como las estructuras estáticamente indeterminadas tienen soportes redundantes, se debe ser muy cuidadoso en prevenir desplazamientos diferenciales de los soportes ya que este efecto introduciría esfuerzos interiores en la estructura.

En general, cualquier deformación, como la causada por desplazamientos relativos de los soportes o por cambios en la longitud de los miembros debidos a la temperatura o a errores de fabricación, introducirá esfuerzos adicionales en la estructura, que deben considerarse al diseñar estructuras estáticamente indeterminadas.

1.7.3. PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El siguiente algoritmo presenta de manera general la forma para determinar las reacciones o cargas internas de estructuras estáticamente indeterminadas usando el método de las fuerzas o de flexibilidades.

1.- Aplicación del principio de Superposición: Determine el número de grados n de indeterminación. Luego especifique las n fuerzas o momentos redundantes desconocidos que deben quitarse de la estructura para hacerla estáticamente determinada y estable. Por medio del principio de superposición, dibuje la estructura estáticamente indeterminada y muestre que es igual a la suma de una secuencia de estructuras correspondientes estáticamente determinadas. La estructura primaria soporta las mismas cargas externas que la estructura estáticamente indeterminada y cada una de las otras estructuras sumadas a la estructura primaria muestra la estructura cargada con una fuerza o momento redundante separada. De preferencia, esboce la curva elástica de cada estructura, pero necesariamente indique simbólicamente el desplazamiento o rotación en el punto de cada fuerza o momento redundante.

2.- Formulación de las ecuaciones de compatibilidad: Escriba una ecuación de compatibilidad para el desplazamiento o rotación de cada punto en que haya una fuerza o momento redundante. Esas ecuaciones deben expresarse en términos de las redundantes desconocidas y sus correspondientes coeficientes de flexibilidad deben obtenerse cargas unitarias o momentos concentrados unitarios que sean colineales con las fuerzas o momentos redundantes.

Determine todos los coeficientes de flexibilidad con alguno de los métodos expuestos en el tema 1.6. Sustituya esas relaciones carga-desplazamiento en las ecuaciones de compatibilidad y despeje las redundantes desconocidas. Una vez resuelto el sistema de ecuaciones, si el valor numérico de una redundante desconocida resulta positivo, ésta actúa en la misma dirección que su correspondiente fuerza unitaria o momento concentrado unitario propuesto. De la misma manera, un valor numérico negativo, indica que la redundante actúa en sentido opuesto a su correspondiente fuerza unitaria o momento concentrado unitario.

3.- Formulación de las ecuaciones de equilibrio: Dibuje un diagrama de cuerpo libre de la estructura. Como las fuerzas y/o momentos redundantes ya han sido calculados, las reacciones restantes desconocidas pueden determinarse a partir de las ecuaciones de equilibrio.

Una vez conocidas todas las reacciones en los soportes, pueden determinarse las ecuaciones de cortante, momento y normal en cada tramo de la

estructura, para luego dibujar tales diagramas, además puede determinarse algún desplazamiento en cualquier punto de la estructura usando cualquiera de los métodos ya descritos para estructuras estáticamente determinadas.

1.7.4. CONSIDERACIONES GENERALES PARA EL MÉTODO DE FLEXIBILIDADES

Al calcular los coeficientes de flexibilidad, f_{ij} , para la estructura se notará que ellos dependen solamente del material y de las propiedades geométricas de los miembros y no de la carga en la estructura primaria. Por tanto, esos valores, una vez determinados, pueden utilizarse para calcular las reacciones para cualquier carga.

Para una estructura con n reacciones redundantes R_n , podemos escribir n ecuaciones de compatibilidad, esto es,

$$d_1 + f_{11}R_1 + f_{12}R_2 + \dots + f_{1n}R_n = 0$$

$$d_2 + f_{21}R_1 + f_{22}R_2 + \dots + f_{2n}R_n = 0$$

$$d_n + f_{n1}R_1 + f_{n2}R_2 + \dots + f_{nn}R_n = 0$$

Aquí los desplazamientos, $d_1, d_2 \dots d_n$, se deben a las cargas reales sobre la estructura primaria y a los asentamientos de los soportes o a los cambios dimensionales debidos a diferencias de temperatura o errores de fabricación de los miembros. Para simplificar los cálculos de estructuras con un gran número de redundantes, las ecuaciones anteriores pueden escribirse en forma matricial, esto es,

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

o simplemente,

$$fR = -d$$

y despejando

$$R = (f)^{-1} * (-d)$$

donde

R = Vector columna de las reacciones redundantes (son las incógnitas del sistema de ecuaciones armado)

f = Matriz de flexibilidades

$(f)^{-1}$ = Matriz inversa de la matriz de flexibilidades

d = Vector columna de los desplazamientos de la estructura primaria

En particular, note que $f_{ij} = f_{ji}$, por ejemplo $f_{12} = f_{21}$, etc., teorema sobre los desplazamientos recíprocos enunciado por Maxwell. Por tanto, la matriz de flexibilidades será simétrica, lo que es de gran ventaja al resolver conjuntos grandes de ecuaciones simultáneas, como sucede con estructuras altamente indeterminadas.

La resolución de estructuras hiperestáticas con el método de flexibilidades queda notoriamente ilustrada en el capítulo 3.

Vigas con asentamientos en los apoyos

En vigas isostáticas, los asentamientos de los apoyos no producen acciones internas en la viga. Por esta razón, en estructuras de claros grandes, como puentes, en las que se pueden presentar asentamientos diferentes en los apoyos, suelen usarse vigas isostáticas libremente apoyadas. Por el contrario, en vigas continuas hiperestáticas, los asentamientos de los apoyos, cuando son diferentes entre sí, producen momentos flexionantes y fuerzas cortantes de importancia que deben considerarse en el análisis y diseño de la estructura. El método de las fuerzas resulta conveniente para calcular las acciones producidas por asentamientos de los apoyos, tal y como puede observarse en los ejercicios propuestos de este tipo en el problemario.

Apoyos elásticos

En algunas ocasiones uno o varios apoyos pueden considerarse elásticos, es decir, el apoyo experimenta una deformación que es función de la magnitud de la fuerza que dicho soporte desarrolla cuando se carga la estructura. La condición de apoyo elástico puede modelarse como un resorte elástico: se utiliza el resorte helicoidal o de compresión-tensión para modelar soportes elásticos que se trasladan y se emplea el resorte espiral o de torsión para modelar soportes

elásticos que giran. La rigidez o resistencia a la deformación k de los resortes se define como la fuerza por unidad de deformación; por tanto, la reacción de un resorte se define como:

$$R = -K\delta'$$

en donde δ' es la deformación del resorte elástico, K es la constante elástica del resorte y R es la fuerza reactiva correspondiente cuya dirección coincide con la línea de acción del resorte. El signo negativo obedece a que la dirección de la reacción R es opuesta a la dirección de la deformación del resorte δ' .

Si se selecciona como acción redundante la reacción de un soporte elástico, la matriz de flexibilidades adquiere la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} f_{11} + \frac{1}{K_1} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} + \frac{1}{K_2} & \cdots & f_{2n} \\ & & \vdots & \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} + \frac{1}{K_n} \end{pmatrix}$$

El término K_i se define como la constante de resorte elástico asociada con la acción redundante i .

1.8. MÉTODO DE LA RIGIDEZ MEDIANTE EL ANÁLISIS MATRICIAL

1.8.1. DEFINICIÓN DEL MÉTODO DE RIGIDEZ

En el subtema 1.7 se estudió el método de flexibilidad utilizado para analizar estructuras indeterminadas estáticamente, en el cual las reacciones y las acciones internas constituyen las incógnitas de la formulación del problema. En este subtema se discutirá otra aproximación al problema en la que se considera a los desplazamientos como las incógnitas de la formulación.

El método de pendiente-deflexión propuesto por Bendixen y Maney para el análisis de estructuras indeterminadas es el predecesor del método más generalizado de análisis que se utiliza actualmente. El advenimiento del computador digital para realizar operaciones matemáticas, eliminó la solución de ecuaciones simultáneas como una restricción para el análisis estructural. Esto ha permitido la utilización de un método muy general para el análisis de estructuras discretas, las incógnitas de su formulación son los desplazamientos de los nodos. Este método de análisis se denomina método de la rigidez.

1.8.2. INDETERMINACIÓN CINEMÁTICA

Si se pretende analizar una estructura utilizando el método de rigidez, es necesario definir el grado de indeterminación cinemática del sistema estructural. Este a su vez define el número existente de componentes no restringidas del desplazamiento de los nodos de la estructura, las que deben calcularse durante el análisis.

En una estructura plana, la traslación de un nudo no restringido se describe en términos de dos componentes ortogonales. Además un nudo rígido puede girar. El grado de indeterminación cinemática de un sistema es igual al número total de componentes independientes del desplazamiento de los nudos no restringidos de la estructura. Antes de definir el grado de indeterminación cinemática de una estructura plana, es importante decidir si se tomará o no en consideración la deformación axial de los miembros del sistema estructural. Se dice que una estructura es determinada cinemáticamente cuando se restringe completamente el desplazamiento de sus nudos.

1.8.3. ANÁLISIS DE ARMADURAS CON EL ANÁLISIS MATRICIAL DE LA RIGIDEZ

Fundamentos del método de la rigidez

El método de la rigidez mediante el análisis matricial que aplicaremos para analizar vigas, marcos y armaduras en el capítulo 4 es un método de análisis de desplazamientos. Cabe mencionar que el método de los desplazamientos o método de la rigidez puede usarse para analizar estructuras tanto determinadas como indeterminadas, además de que proporciona los desplazamientos y las fuerzas directamente. Es también de mayor facilidad formular las matrices necesarias para las operaciones hechas por la computadora si se usa el método de la rigidez; una vez hecho esto, los cálculos en la computadora pueden efectuarse eficientemente.

La aplicación del método de la rigidez requiere subdividir la estructura en una serie de elementos finitos e identificar sus puntos extremos como nudos. Para el análisis de armaduras, los elementos finitos se representan por cada uno de los miembros que forman la armadura y los nudos representan los nudos. Se determinan las propiedades de fuerza-desplazamiento de cada elemento y luego se relacionan entre sí mediante las ecuaciones de equilibrio planteadas en los nudos. Esas relaciones, para todos los miembros de la estructura, se agrupan en

lo que se conoce como matriz K de rigidez de la estructura. Una vez establecida ésta, los desplazamientos desconocidos de los nodos pueden determinarse para cualquier carga dada en la estructura. Cuando se conocen esos desplazamientos, las fuerzas externas e internas en la estructura pueden calcularse mediante las relaciones fuerza-desplazamiento para cada miembro.

lo que se conoce como matriz K de rigidez de la estructura. Una vez establecida ésta, los desplazamientos desconocidos de los nodos pueden determinarse para cualquier carga dada en la estructura. Cuando se conocen esos desplazamientos, las fuerzas externas e internas en la estructura pueden calcularse mediante las relaciones fuerza-desplazamiento para cada miembro.

Previo al desarrollo de un procedimiento formal para la aplicación del método de rigidez, es necesario dejar en claro algunas definiciones y conceptos preliminares.

Identificación de miembros y nodos

Uno de los primeros pasos al aplicar el método de la rigidez es identificar los elementos o miembros de la estructura y sus nodos. Especificaremos cada miembro por un número encerrado en un cuadrado y usaremos un número encerrado en un círculo para identificar los nodos. Los extremos “cercano” y “alejado” de un miembro también deben ser identificados; esto lo haremos usando una flecha a lo largo del miembro, con la cabeza o punta de la flecha dirigida hacia el extremo alejado. Ejemplos de miembro, nodo e identificación de la “dirección” para una armadura se muestran en la figura 16 (a). Estas asignaciones se pueden hacer arbitrariamente.

Coordenadas de miembro y globales

Como las cargas y los desplazamientos son cantidades vectoriales, es necesario establecer un sistema coordenado para especificar su sentido correcto de dirección. Usaremos dos sistemas de coordenadas distintos. Uno será el sistema coordenado global o de la estructura, usando ejes x, y, que especificará el sentido de cada una de las componentes externas de fuerza y desplazamientos en los nodos, figura 16 (a). El otro será el sistema coordenado local o de miembro y se usará en cada miembro para especificar el sentido de sus desplazamientos y cargas internas. Este sistema se identificará usando ejes x' , y' con el origen en el nodo “cercano” y el eje x' señalando hacia el extremo “alejado”. Lo anterior puede ejemplificarse en la figura 16 (b) en la que se ha aislado el miembro 4 de la armadura de la figura 16 (a).

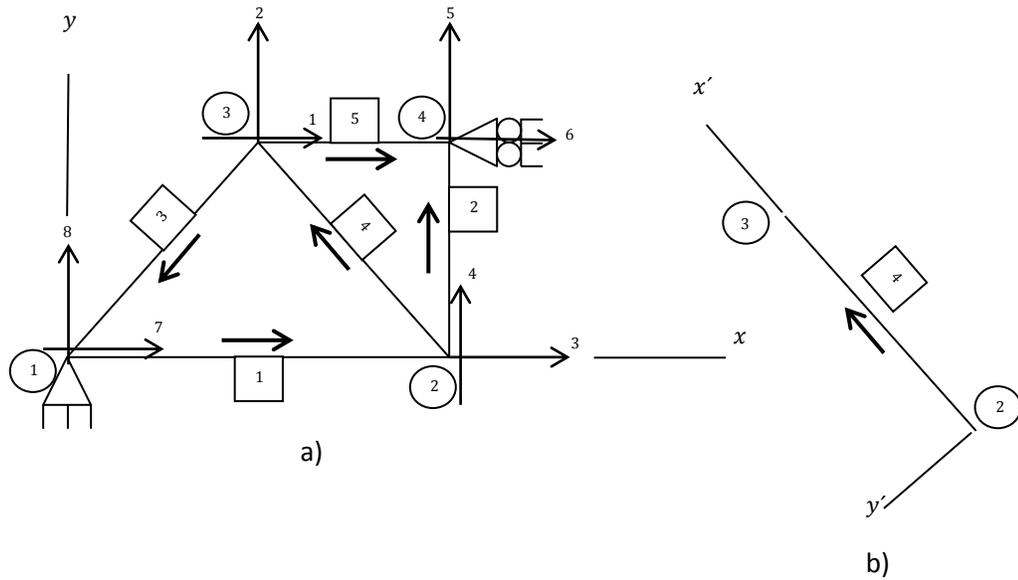


Figura 16.- Codificación para una armadura

Grados de libertad

Los grados de libertad no restringidos de una estructura representan las incógnitas principales en el método de la rigidez y por tanto, deben ser identificados. Como regla general, hay dos grados de libertad o dos posibles desplazamientos para cada nudo (o nodo) de una armadura. En las aplicaciones, cada grado de libertad debe especificarse en la estructura usando un número de código, mostrado en el nudo o nodo y referido a su coordenada global positiva por medio de una flecha. Por ejemplo, la armadura en la figura 16 (a) tiene ocho grados de libertad, que han sido identificados por los números de código 1 al 8. De esos posibles ocho desplazamientos, del 1 al 5 representan grados de libertad no restringidos o desconocidos y del 6 al 8 representan grados de libertad restringidos. Debido a las restricciones, los desplazamientos aquí son cero. En aplicaciones posteriores, los números de código más bajos se usarán siempre para identificar los desplazamientos desconocidos (grados de libertad no restringidos) y los números de código más altos se usarán para identificar los desplazamientos conocidos (grados de libertad restringidos). La razón para escoger este método de identificación tiene que ver con la conveniencia de subdividir después la matriz de rigidez de la estructura, de tal manera que los desplazamientos desconocidos puedan encontrarse de la manera más directa posible.

Una vez etiquetada la armadura y especificados los números de código como se indicó anteriormente, puede determinarse la matriz K de rigidez de la estructura. Para ello, debemos primero establecer una matriz de rigidez de miembro k' para cada miembro de la armadura. Esta matriz se usa para establecer las relaciones carga-desplazamiento del miembro en términos de coordenadas locales. Como no todos los miembros de la armadura tienen la misma dirección, debemos desarrollar un medio para transformar esas cantidades de cada sistema coordenado local x', y' del miembro a un sistema coordenado global x, y de la estructura. Esto puede hacerse usando matrices de transformación de fuerzas y desplazamientos. Una vez establecidas, los elementos de la matriz de rigidez del miembro pueden transformarse de coordenadas locales a globales y luego usarlas para generar la matriz de rigidez de la estructura. Hay dos formas de hacer esta transformación. Podemos construir primero una matriz k_c de rigidez de elemento compuesto que representa las relaciones carga-deflexión para todos los miembros de la armadura en términos de coordenadas locales. Luego podemos desarrollar una matriz de transformación de la estructura específicamente para la armadura en consideración y transformar k_c de sus coordenadas locales a coordenadas globales. Esto dará K directamente. Desafortunadamente este método no funciona tan bien con una computadora debido a la singularidad de K para cada armadura. En vez de esto, usaremos un método alternativo, llamado procedimiento directo de la rigidez; esto es, cada matriz de rigidez de miembro se transformará separadamente de coordenadas locales a coordenadas globales. Cuando las matrices de rigidez globales para todos los miembros de la armadura hayan sido determinados, la matriz de rigidez de la estructura K se formulará ensamblando entre sí las matrices de rigidez de los miembros. Como ya se había mencionado, usando K , podemos determinar primero los desplazamientos nodales y luego las reacciones y las fuerzas en los miembros.

Cosenos directores y matriz de rigidez global de un miembro

Analizando la figura 17, para el sistema de coordenadas globales consideramos la x positiva hacia la derecha y la y positiva hacia arriba. Los ángulos más pequeños entre los ejes x, y globales positivos y el eje local x' positivo se designarán como θ_x y θ_y . Los cosenos de esos ángulos se usarán en el análisis matricial que sigue. Estos se identificarán con $\lambda_x = \cos\theta_x, \lambda_y = \cos\theta_y$. Los valores numéricos para los cosenos directores anteriores pueden generarse fácilmente una vez que se hayan especificado las coordenadas de los extremos cercano N y alejado F del miembro. Por ejemplo, considere el miembro NF de la figura 17 y suponga que pertenece a

una cierta armadura; aquí las coordenadas de N y F se miden desde el origen del sistema coordenado global. Tenemos:

$$\lambda_x = \cos\theta_x = \frac{x_F - x_N}{L} = \frac{x_F - x_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2}} \quad (a)$$

$$\lambda_y = \cos\theta_y = \frac{y_F - y_N}{L} = \frac{y_F - y_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2}} \quad (b)$$

Los signos algebraicos en esas ecuaciones generalizadas tomarán en cuenta automáticamente a los miembros que estén orientados en otros cuadrantes del plano x-y.

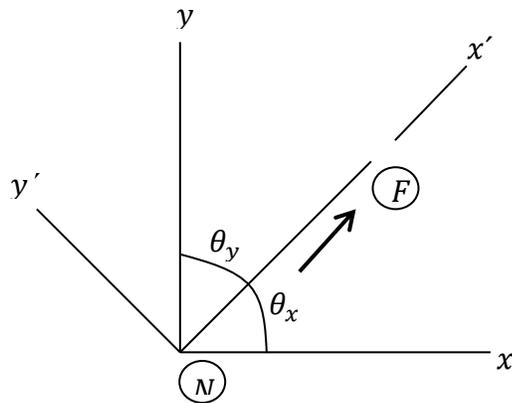


Figura 17.- Cosenos directores

Dado que en este trabajo el mayor peso recae sobre la solución de estructuras a través de una serie de ejercicios, la derivación de la ecuación para la matriz de rigidez global de un miembro no se efectúa, por lo que se recomienda al lector se remita a otras fuentes para obtener la deducción de dicha matriz.

La matriz de rigidez global de un miembro de armadura es la siguiente:

$$k = \frac{AE}{L} * \begin{pmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y & -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y \\ \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 & -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^2 \\ -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y & \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y \\ -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^2 & \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ F_x \\ F_y \end{pmatrix} \quad (c)$$

La localización de cada elemento en esta matriz simétrica de 4x4 está relacionada con cada grado de libertad global asociado con el extremo cercano N, seguido del extremo alejado F. Esto se indica por la notación de números codificados a lo largo de renglones y columnas, esto es, N_x, N_y, F_x, F_y . Aquí k representa las relaciones fuerza-desplazamiento para el miembro cuando las componentes de fuerza y desplazamiento en los extremos del miembro están dadas en las direcciones globales o direcciones x, y. Cada uno de los términos de la matriz es por lo tanto un coeficiente de influencia de rigidez k_{ij} que denota la componente de fuerza en x o en y en i necesaria para generar en j una componente de desplazamiento unitario en x o en y. En consecuencia, cada columna identificada de la matriz representa las cuatro componentes de fuerza desarrolladas en los extremos del miembro cuando el extremo identificado sufre un desplazamiento unitario relacionado con su columna en la matriz. Por ejemplo, un desplazamiento unitario $D_{N_x} = 1$ generará las cuatro componentes de fuerza sobre el miembro mostradas en la primera columna de la matriz.

Matriz de rigidez de la estructura

Una vez que todas las matrices de rigidez de miembro se han expresado en coordenadas globales, resulta necesario ensamblarlas en el orden apropiado para poder encontrar la matriz K de rigidez de la estructura para la armadura entera. Este proceso de combinar las matrices de miembro depende de una cuidadosa identificación de los elementos de cada matriz. Como se vio anteriormente, esto se hace designando los renglones y columnas de la matriz con los cuatro números de código N_x, N_y, F_x, F_y usados para identificar los dos grados de libertad globales que pueden presentarse en cada extremo del miembro (observe la ecuación (c)). La matriz de rigidez de la estructura tendrá entonces un orden que será igual al número de código más alto asignado a la estructura, ya que este representa el número de grados de libertad total para la estructura. Cuando se ensamblan las matrices k, cada elemento de k se colocará en su misma designación de renglón y columna en la matriz K de rigidez de la estructura. En particular, cuando dos o más miembros están conectados al mismo nodo o nudo, entonces algunos de los elementos de cada una de las matrices k se asignarán a la misma posición en la matriz K. Cuando esto ocurre, los elementos asignados a la posición común deben sumarse entre sí algebraicamente. La razón para esto resulta clara si se observa que cada elemento de la matriz k representa la resistencia del miembro a una fuerza aplicada en su extremo. De esta manera, al sumar esas resistencias en la dirección x o y al tiempo que se forma la matriz K es un simbolismo de la

determinación de la resistencia total de cada nodo a un desplazamiento unitario en la dirección x o y.

Este método de ensamblar las matrices de miembro para formar la matriz de rigidez de la estructura quedará esclarecido en el problemario del capítulo 4. Este proceso es muy tedioso si se hace a mano, por lo que se recomienda programarlo a computadora; más adelante se ofrece la programación para matlab de éste método.

Aplicación del método de la rigidez al análisis de armaduras

Una vez que se ha formado la matriz de rigidez de la estructura, podemos usarla para determinar los desplazamientos de los nodos, las reacciones externas y las fuerzas internas en los miembros. Como siempre hemos asignado los números de código menores para identificar los grados de libertad no restringidos, esto nos permitirá subdividir $F = KD$ de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} F_k \\ F_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_u \\ D_k \end{pmatrix} \quad (d)$$

Aquí

F_k, D_k = Cargas (fuerzas) y desplazamientos conocidos; las cargas existen aquí sobre la armadura como parte del problema y los desplazamientos se especifican generalmente como iguales a cero debido a las restricciones en los soportes tales como pasadores o rodillos

F_u, D_u = Cargas (fuerzas) y desplazamientos desconocidos; las cargas representan aquí las reacciones desconocidas en los soportes, y los desplazamientos son en nudos donde el movimiento no está restringido en una dirección en particular

K = Matriz de rigidez de la estructura, que se subdivide en forma compatible con las subdivisiones de Q y D

Desarrollando la ecuación (d) se obtiene

$$F_k = K_{11}D_u + K_{12}D_k \quad (e)$$

$$F_u = K_{21}D_u + K_{22}D_k \quad (f)$$

Con frecuencia $D_k = 0$ ya que los soportes no se desplazan. Si esto ocurre, la ecuación (e) se convierte en

$$F_k = K_{11}D_u$$

Como los elementos en la matriz subdividida K_{11} representa la resistencia total en el nudo de una armadura a un desplazamiento unitario en la dirección x o y, la ecuación anterior simboliza entonces el conjunto de todas las ecuaciones de equilibrio de fuerzas aplicadas a los nudos donde las cargas externas son cero o tienen un valor conocido (F_k). Si despejamos D_u , podemos obtener una solución directa para todos los desplazamientos desconocidos de nudo con la siguiente ecuación:

$$D_u = (K_{11})^{-1}F_k \quad (g)$$

Una vez calculado D_u , podemos sustituir este resultado en la ecuación (f) con $D_k = 0$, obtenemos

$$F_u = K_{21}D_u \quad (h)$$

ecuación con la cual podemos obtener las reacciones desconocidas en los soportes.

Las fuerzas en los miembros pueden determinarse mediante la siguiente ecuación:

$$q_F = \frac{AE}{L} \begin{pmatrix} -\lambda_x & -\lambda_y & \lambda_x & \lambda_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{pmatrix} \quad (i)$$

Donde

q_F es aquella fuerza que ejerce tensión en el miembro, por lo que si el resultado calculado con esta ecuación es negativo, se concluye que el miembro estará en compresión.

λ_x, λ_y son los cosenos directores ya explicados

D hace referencia a los desplazamientos; el subíndice N indica que el desplazamiento ocurre en el extremo o nudo cercano y el subíndice F que ocurre en el nudo o extremo alejado; los subíndices x , y simbolizan la dirección en la que ocurre tal desplazamiento nodal.

Algoritmo para aplicar el método matricial de rigidez en armaduras

El siguiente método proporciona un medio para determinar los desplazamientos y reacciones desconocidas en una armadura usando el método matricial de la rigidez. Este procedimiento es aplicable a armaduras de cualquier tipo, sea simple, compuesta o compleja. Cabe mencionar que se puede usar para resolver armaduras estáticamente determinadas o estáticamente indeterminadas (hiperestáticas).

1.- Realice una codificación o notación estableciendo un sistema de coordenadas globales x, y . El origen suele situarse en uno de los nodos de manera que las coordenadas de todos los demás nodos resulten positivas. Identifique cada nudo y miembro numéricamente y simbolice en forma arbitraria los extremos cercano y alejado de cada miembro simbólicamente por medio de una flecha cuya punta señale hacia el extremo alejado. Además, especifique los dos números de código en cada nudo, usando los menores números para identificar los grados de libertad no restringidos, seguidos de los números mayores para identificar los grados de libertad restringidos. Del problema, obtenga por inspección el vector de fuerzas (cargas) y el vector de desplazamientos; a su vez, de éstos, obtenga F_k y D_k , respectivamente.

2.- Formule la matriz de rigidez de la estructura; para ello calcule los cosenos directores λ_x, λ_y y la matriz de rigidez global de cada miembro con la ecuación (c). Después, ensamble esas matrices para formar la matriz de rigidez para la armadura entera. Como verificación parcial de los cálculos, las matrices de rigidez de miembro y de la estructura deben ser simétricas.

3.- Calcule los desplazamientos y cargas subdividiendo la matriz de rigidez de la estructura como se indica en la ecuación (d) para luego extraer dos subsistemas, ya sean los simplificados o los no simplificados de dicho planteamiento. El primer subsistema consiste en obtener los desplazamientos desconocidos de nudo D_u usando la ecuación (g) y el segundo subsistema en calcular las reacciones Q_u aplicando la ecuación (h), teniendo en cuenta que (g) y (h) sólo son aplicables a estructuras en la que los apoyos no sufren asentamientos, tal y como generalmente ocurre; en caso de que los apoyos presenten asentamientos, ocupe las ecuaciones (e) y (f). Cada fuerza de miembro o barra q_F puede ser conocida mediante la ecuación (i).

1.8.4. ANÁLISIS DE VIGAS Y MARCOS PLANOS CON EL USO DEL MÉTODO DE LA RIGIDEZ

Observaciones preliminares

Antes de mostrar la aplicación del método de rigidez a vigas y marcos, veremos algunos conceptos y definiciones preliminares relacionadas con dichas estructuras.

Identificación de miembros y nodos

Para aplicar el método de la rigidez a vigas y marcos, debemos primero determinar cómo subdividir la estructura en sus componentes de elementos finitos. En general, los nodos de cada elemento se localizan en un soporte, en una esquina o en un nudo, en los que se aplica una fuerza externa o donde va a determinarse el desplazamiento lineal o rotacional en un punto (nodo). Por ejemplo, considere el marco en la figura 18 (a). Mediante el mismo esquema empleado para las armaduras, los cuatro nodos se especifican con un número dentro de un círculo y los tres elementos (miembros) se identifican mediante un número en un cuadrado. Obsérvese también que los extremos “cercano” y “alejado” de cada miembro se identifican mediante las flechas marcadas a lo largo de cada miembro; la punta de la flecha sigue tendiendo hacia el extremo “alejado”.

Coordenadas de miembros y globales

El sistema coordenado global o de la estructura se identificará con el uso de ejes x , y , z que tienen generalmente su origen en un nodo y están posicionados de manera que todos los nodos en otros puntos de la estructura tengan coordenadas positivas, figura 18 (a). Las coordenadas locales o de miembro x' , y' , z' tienen su origen en el extremo “cercano” de cada miembro y el eje x' positivo está dirigido hacia el extremo “alejado”. La figura 18 (b) muestra esas coordenadas para el miembro 3. En ambos casos, se ha utilizado un sistema coordenado regido por la regla de la mano derecha, de modo que, si los dedos de la mano derecha se curvan del eje x (x') hacia el eje y (y'), el pulgar señalará en la dirección positiva del eje z (z'), que señala hacia afuera de la página.

Grados de libertad

Una vez identificados los miembros y nodos y que se ha establecido el sistema global de coordenadas, pueden determinarse los grados de libertad de la estructura.

-Marcos: Al derivar los métodos clásicos del análisis, se desprecia la deformación en los miembros del marco causada por fuerza axial y cortante y se considera sólo el efecto de flexión. Esto es justificable ya que las fuerzas axiales o cortantes, en general, no contribuyen en forma considerable a la deflexión de los miembros del marco. Sin embargo, en el siguiente análisis, es posible proporcionar resultados con mayor exactitud para el marco incorporando los desplazamientos por flexión y fuerza axial por el método de la rigidez. En consecuencia, cada nodo de un

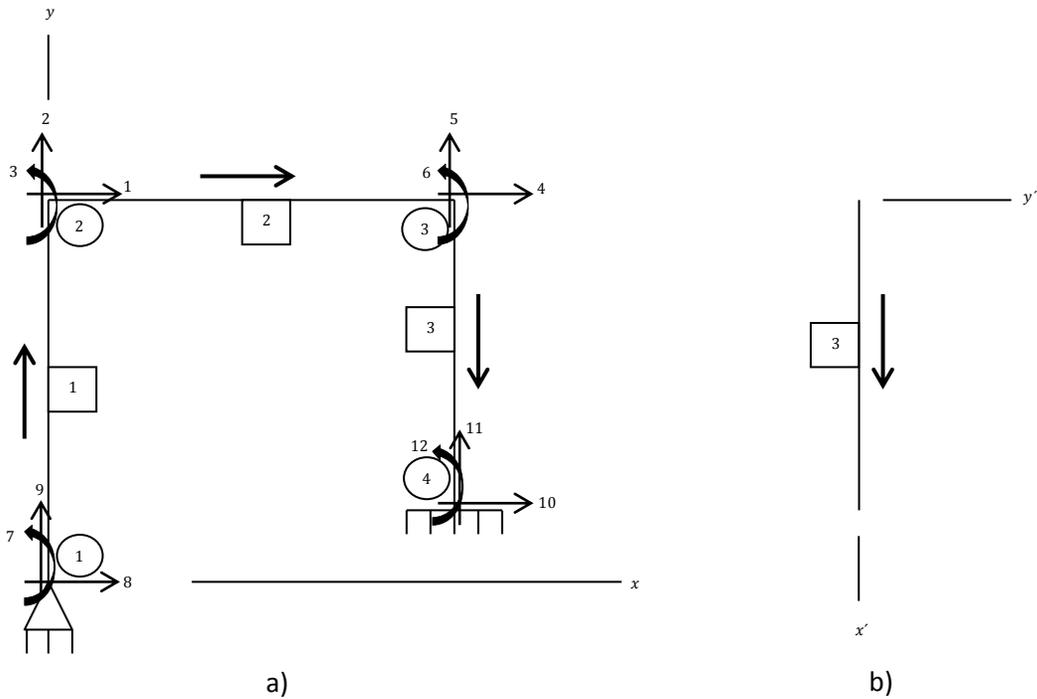


Figura 18.- Codificación de un marco

miembro del marco tendrá tres grados de libertad, cada uno de los cuales se identifica por un número de código. Como en el caso de las armaduras, los números de código más pequeños se usan para identificar los desplazamientos desconocidos (grados de libertad no restringidos) y los números mayores se usan para identificar los desplazamientos conocidos (grados de libertad restringidos). Un ejemplo de la etiquetación con números de código para un marco se muestra

también en la figura 18 (a). Aquí, el marco tiene 12 grados de libertad, para los cuales los números de código del 1 al 8 representan desplazamientos desconocidos y del 9 al 12 representan desplazamientos conocidos, que en este caso son iguales a cero.

-Vigas: Si despreciamos los efectos de la fuerza axial y la fuerza cortante y consideramos sólo deflexiones de vigas causadas por flexión, como en el análisis clásico, el tamaño de la matriz de rigidez de la estructura será algo pequeño. Además, si la viga no tiene volados de patín, o si los soportes no tienen un desplazamiento transversal por asentamientos, entonces cada nodo, si está localizado en un soporte, tiene un solo grado de libertad, representado como un desplazamiento angular.

En este trabajo hacemos las siguientes consideraciones:

- ✓ Si la viga está sometida a carga axial, cada nodo de la viga tendrá tres grados de libertad (vertical, horizontal y angular), tal y como en sucede en los marcos.
- ✓ Si en la viga no se presenta carga axial y a lo largo de ella hay empotres y/o apoyos móviles, las reacciones en x de tales soportes valen cero; así que suponemos que todos los nodos de la viga no presentan desplazamiento lateral y ocurren sólo dos grados de libertad (vertical y angular).

Carga intermedia de un miembro

Si un elemento de un marco o viga soporta una carga lateral entre sus nodos, será conveniente para un análisis matricial que los efectos de esta carga se conviertan a una carga equivalente en los nodos. Esto se debe a que el método de la rigidez, igual que todos los métodos de desplazamientos se basa en plantear ecuaciones de equilibrio en los nodos y, por lo tanto, si se hace esta conversión de cargas, las ecuaciones de equilibrio pueden escribirse en forma sencilla.

A modo de ejemplificar un caso de carga lateral, consideremos el elemento de viga o marco sometido a una carga triangular constante como se muestra en la figura 19 (a). Por el principio de superposición, esta carga puede representarse por (1) el elemento cargado con los momentos de empotramiento y las fuerzas cortantes en los nodos del elemento, figura 19 (b), y (2) el elemento, que se supone está empotrado y sometido a la carga real y a sus reacciones en los empotramientos, figura 19 (c). El análisis matricial se efectúa solo para la carga mostrada en la figura 19 (b), ya que las cargas en el caso de los extremos

empotrados pueden determinarse directamente. En otras palabras, una vez terminado el análisis matricial de la carga en la figura 19 (b), las cargas internas y desplazamientos reales en puntos a lo largo del elemento pueden obtenerse por superposición de los efectos causados por las fuerzas nodales, figura 19 (b), y por la carga triangular y por las reacciones en los empotramientos, figura 19 (c). Las reacciones en los empotramientos para otros casos de carga se deducen más adelante. La aplicación de este procedimiento se ilustra numéricamente en el problemario del capítulo 4.

El desarrollo del método de la rigidez para vigas y marcos es igual que el procedimiento utilizado en armaduras. Primero debemos establecer las matrices de rigidez de los miembros y luego las matrices de transformación para desplazamientos y cargas. Combinando estas matrices, podemos formar la matriz de rigidez de la estructura a partir de la cual podemos determinar las cargas internas y los desplazamientos desconocidos.

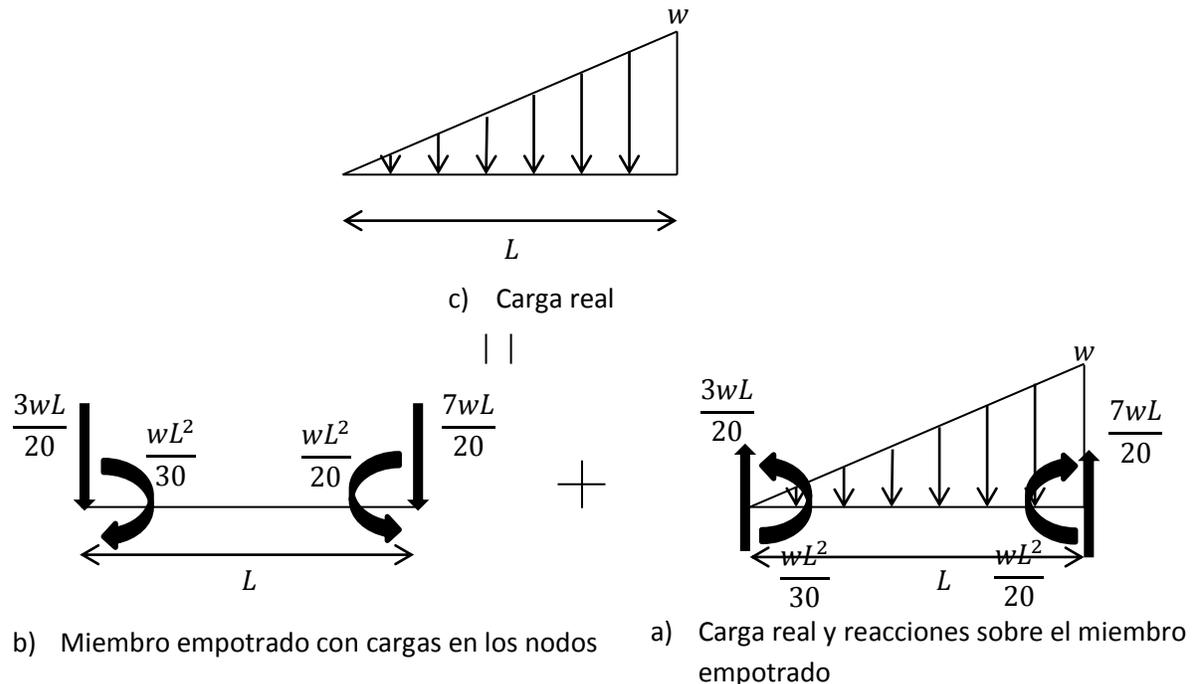


Figura 19

Convención de signos

Para el estudio de la relación entre las acciones y los desplazamientos de un elemento estructural típico de un sistema plano se adopta la convención de signo siguiente:

- Los momentos que actúan en sentido antihorario en los extremos de un elemento estructural son positivos.

- Las rotaciones antihorarias de los extremos de un elemento estructural son positivas
- Las componentes de las fuerzas que actúan en los extremos de un elemento estructural en la dirección positiva de los ejes globales x, y, son positivas.
- Las componentes de translación de los extremos de un elemento en la dirección positiva de los ejes globales x, y, son positivas.

Cualquier carga aplicada directamente en un nodo se describe en términos de las componentes x, y de una fuerza y un momento. Para definir una carga aplicada directamente en un nudo se utiliza la convención de signo siguiente:

- Los momentos con sentido horario y
- Las componentes de fuerzas que actúen en la dirección positiva de los ejes de coordenadas globales, son positivos.

Matriz de rigidez global de un miembro de un marco

Dejando de lado la deducción, la matriz de rigidez global de un miembro de un marco es la siguiente:

$$k = \begin{matrix} & \begin{matrix} N_x & N_y & N_z & F_x & F_y & F_z \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y \\ \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x \\ -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{2EI}{L} \\ -\left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y \\ -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x \\ -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} & \begin{matrix} N_x \\ N_y \\ N_z \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{matrix} \end{matrix} \quad (j)$$

Observe que esta matriz de 6x6 es simétrica. Además, la posición de cada elemento está asociada con la codificación en el extremo cercano, N_x, N_y, N_z seguida de la del extremo alejado F_x, F_y, F_z , que se muestran en la parte superior de las columnas y a lo largo de los renglones. Cada columna de la matriz k representa las cargas en coordenadas globales sobre los nodos del miembro, necesarias para resistir un desplazamiento unitario en la dirección definida por el número codificado de la columna. Por ejemplo, la primera columna de k

representa las cargas en coordenadas globales en los extremos cercano y alejado causados por un desplazamiento unitario en el extremo cercano en la dirección x , esto es, N_x . Los cosenos directores se siguen calculando con las ecuaciones (a) y (b).

Matriz de rigidez global de un elemento de viga

Si en la viga se presenta carga axial, debe ocuparse la siguiente matriz de rigidez global para cada uno de sus elementos:

$$k = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{matrix} N_x \\ N_y \\ N_z \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{matrix} \quad (k)$$

La matriz de rigidez global para un elemento de viga puede reducirse de la siguiente forma, en caso de que no se presente carga axial en ella y se desprecie la deformación axial:

$$k = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{matrix} N_y \\ N_z \\ F_y \\ F_z \end{matrix} \quad (l)$$

Se ha establecido previamente que si los soportes no sufren desplazamientos transversales, es decir, asentamientos, o si la viga no tiene un volado patín, entonces en general, cada uno de los nodos de la viga tendrá un solo grado de libertad, esto es un desplazamiento angular. Siendo este caso, la matriz de rigidez de una viga puede determinarse cancelando los renglones y columnas de la matriz de la ecuación (k) asociadas a los desplazamientos a lo largo de N_x, N_y, F_x, F_y ya que los soportes no tienen ningún grado de libertad en esas direcciones. Además,

AE/L no es pertinente, ya que no se consideran desplazamientos ni las cargas axiales. En consecuencia, la matriz de rigidez de una viga queda representada por cuatro elementos, que son:

$$k = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{matrix} N_z \\ F_z \end{matrix} \quad (m)$$

Aplicación del método de la rigidez al análisis de vigas y marcos

Una vez desarrollado k , podemos formular un procedimiento para aplicar el método de la rigidez a problemas de vigas y marcos.

Matriz de rigidez de la estructura

Una vez que se han encontrado todas las matrices de rigidez de los miembros, debemos ensamblarlas en la matriz de rigidez de la estructura K . Este procedimiento depende primero en conocer la posición de cada elemento en la matriz de rigidez de miembro. A este respecto, recuerde que los renglones y columnas de cada matriz k se identifican por los tres números de código en el extremo cercano del miembro (N_x, N_y, N_z) seguidos por los del extremo alejado (F_x, F_y, F_z). Por lo tanto, al ensamblar las matrices, cada elemento debe colocarse en la misma posición de la matriz K . De esta manera, K tendrá un orden que será igual al número de código mayor asignado a la estructura ya que representa el número total de grados de libertad en la estructura. Cuando varios miembros se conectan a un nodo, ellos tendrán la misma posición en la matriz K y por lo tanto esos coeficientes de influencia de rigidez de miembro deben sumarse algebraicamente entre sí para determinar el coeficiente de influencia de rigidez nodal para la estructura. Esto es necesario ya que cada coeficiente representa la resistencia nodal de la estructura en una dirección particular (x , y o z) cuando ocurre un desplazamiento unitario (x , y o z) en el mismo u otro nodo.

Algoritmo para aplicar el análisis matricial de la rigidez en vigas o marcos

El siguiente método proporciona un medio para determinar los desplazamientos, las reacciones en los soportes y las cargas internas para los miembros o elementos finitos de una viga o marco estáticamente determinado o indeterminado.

1.- Codificación o Notación. Divida la estructura en elementos finitos e identifique arbitrariamente cada elemento y sus nodos. Use un número escrito dentro de un círculo para un nodo y un número encerrado en un cuadrado para un miembro. Por lo general, un elemento se extiende entre puntos de soporte, puntos de cargas concentradas, esquinas o nudos, o puntos donde las cargas internas o desplazamientos deben determinarse. Especifique los extremos cercano y alejado de cada elemento con una flecha trazada a lo largo del elemento y con la punta dirigida hacia el extremo alejado.

Establezca el sistema de coordenadas globales x, y, z , con el origen en el punto nodal de cada uno de los elementos y los ejes localizados de manera que todos los nudos tengan coordenadas positivas. En cada punto nodal de un marco o viga, especifique numéricamente las tres componentes codificadas x, y, z . Si se considera una viga continua sin volados de patín o desplazamientos transversales de sus soportes, y si los nodos están en los soportes, use un número de código solo para identificar el desplazamiento angular en cada soporte. En todos los casos anteriores use los números más bajos para identificar los grados de libertad no restringidos y los números mayores para identificar los grados de libertad restringidos. De acuerdo con el problema, deduzca por inspección el vector de cargas (fuerzas) y el vector de desplazamientos. De ellos, establezca las cargas externas conocidas F_k y los desplazamientos conocidos D_k , respectivamente.

Matriz de rigidez de la estructura. Aplique la ecuación (j), (k), (l), (m), según sea el caso, para determinar la matriz de rigidez de cada elemento expresada en coordenadas globales. En particular, los cosenos directores λ_x, λ_y se determinan a partir de las coordenadas x, y , de los extremos del elemento, con las ecuaciones (a) y (b).

Una vez determinada cada matriz de rigidez de miembro e identificados los renglones y columnas con los números de código apropiados como se explicó antes, ensamble las matrices para determinar la matriz de rigidez de la estructura K . Como comprobación, las matrices de miembro y de la estructura deben ser simétricas.

Desplazamientos y cargas. Subdivida la matriz de rigidez según la ecuación (d). Pueden extraerse dos subsistemas, los cuales se visualizan en las ecuaciones (e)

y (f); del primer subsistema se determinan los desplazamientos desconocidos D_u mediante un despeje y una vez determinados éstos, se sustituyen en la ecuación (f), o sea, en el segundo subsistema para poder calcular así las reacciones en los soportes Q_u . Recuérdese que en caso de que los soportes no presenten asentamientos, pueden utilizarse los subsistemas simplificados de las ecuaciones (g) y (h). En este trabajo se ha optado por determinar las variaciones de los elementos mecánicos (cortante, normal y momento) mediante el planteamiento de ecuaciones algebraicas, tal y como se explicó anteriormente.

Coordenadas nodales

En ocasiones una armadura o marco puede estar soportada(o) mediante un rodillo situado en un plano inclinado, y cuando esto ocurre la restricción de cero deflexión en el soporte (nodo) no puede definirse directamente empleando un solo sistema global de coordenadas horizontales y verticales.

Por ejemplo, considere el marco de la figura 20. La condición de desplazamiento cero en el nodo 3 está definida sólo a lo largo del eje y'' , y debido a que el rodillo puede desplazarse a lo largo del eje x'' , este nodo tendrá componentes de desplazamiento a lo largo de ambos ejes de coordenadas globales x, y . Por esta razón no es posible incluir la condición de desplazamiento cero en este nodo al escribir la ecuación de rigidez global del marco usando los ejes x, y , sin hacer algunas modificaciones en el procedimiento del análisis matricial.

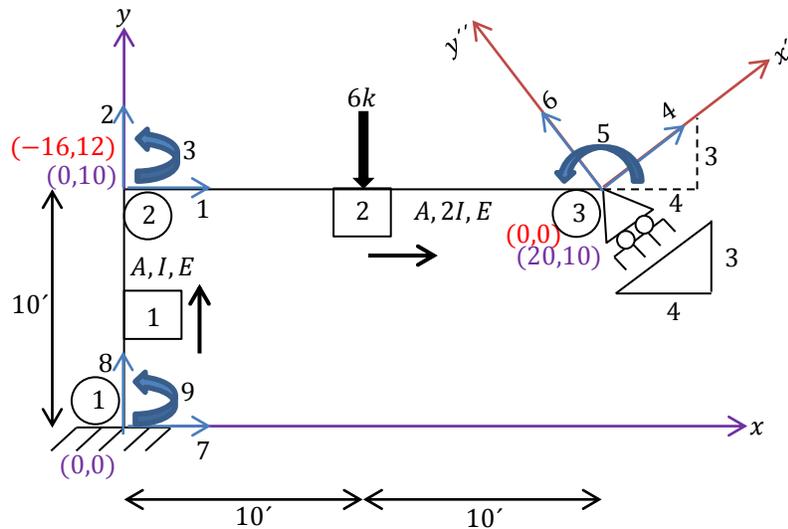


Figura 20.- Estructura con un soporte inclinado

Para resolver este problema, de modo que pueda incorporarse fácilmente en un análisis de computadora, se empleará un conjunto de coordenadas nodales x'' , y'' que se localizan en el soporte inclinado. Estos ejes están orientados de modo que las reacciones y los desplazamientos se encuentran en los soportes a lo largo de cada uno de los ejes de coordenadas, figura 20. Con el fin de determinar la ecuación de rigidez global de la armadura y del marco, se vuelve necesario desarrollar las matrices de transformación de la fuerza y desplazamiento para cada uno de los elementos o miembros conectados en este soporte, para que los resultados puedan sumarse en el mismo sistema de coordenadas global x , y .

Así, la matriz de rigidez para cada elemento de la armadura que esté conectado a un soporte de rodillos inclinado es:

$$k = \frac{AE}{L} * \begin{pmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x \lambda_y & -\lambda_x \lambda_{x''} & -\lambda_x \lambda_{y''} \\ \lambda_x \lambda_y & \lambda_y^2 & -\lambda_y \lambda_{x''} & -\lambda_y \lambda_{y''} \\ -\lambda_x \lambda_{x''} & -\lambda_y \lambda_{x''} & \lambda_{x''}^2 & \lambda_{x''} \lambda_{y''} \\ -\lambda_x \lambda_{y''} & -\lambda_y \lambda_{y''} & \lambda_{x''} \lambda_{y''} & \lambda_{y''}^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} N_x \\ N_y \\ F_x \\ F_y \end{matrix} \quad (n)$$

Y la matriz de rigidez para cada miembro del marco que esté conectado a un soporte de rodillos inclinado es:

$$k = \begin{pmatrix} \left(\frac{AE}{L} \lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_y^2\right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) \lambda_x \lambda_y & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_y & -\left(\frac{AE}{L} \lambda_x \lambda_{x''} + \frac{12EI}{L^3} \lambda_y \lambda_{y''}\right) & -\frac{AE}{L} \lambda_x \lambda_{y''} + \frac{12EI}{L^3} \lambda_y \lambda_{x''} & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_y \\ \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) \lambda_x \lambda_y & \left(\frac{AE}{L} \lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_x^2\right) & \frac{6EI}{L^2} \lambda_x & -\frac{AE}{L} \lambda_{x''} \lambda_y + \frac{12EI}{L^3} \lambda_{y''} \lambda_x & -\left(\frac{AE}{L} \lambda_y \lambda_{y''} + \frac{12EI}{L^3} \lambda_x \lambda_{x''}\right) & \frac{6EI}{L^2} \lambda_x \\ -\frac{6EI}{L^2} \lambda_y & \frac{6EI}{L^2} \lambda_x & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \lambda_{y''} & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_{x''} & \frac{2EI}{L} \\ -\left(\frac{AE}{L} \lambda_x \lambda_{x''} + \frac{12EI}{L^3} \lambda_y \lambda_{y''}\right) & -\frac{AE}{L} \lambda_{x''} \lambda_y + \frac{12EI}{L^3} \lambda_{y''} \lambda_x & \frac{6EI}{L^2} \lambda_{y''} & \left(\frac{AE}{L} \lambda_{x''}^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_{y''}^2\right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) \lambda_{x''} \lambda_{y''} & \frac{6EI}{L^2} \lambda_{y''} \\ -\frac{AE}{L} \lambda_x \lambda_{y''} + \frac{12EI}{L^3} \lambda_y \lambda_{x''} & -\left(\frac{AE}{L} \lambda_y \lambda_{y''} + \frac{12EI}{L^3} \lambda_x \lambda_{x''}\right) & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_{x''} & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) \lambda_{x''} \lambda_{y''} & \left(\frac{AE}{L} \lambda_{y''}^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_{x''}^2\right) & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_{x''} \\ -\frac{6EI}{L^2} \lambda_y & \frac{6EI}{L^2} \lambda_x & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \lambda_{y''} & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_{x''} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{matrix} N_x \\ N_y \\ N_z \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{matrix} \quad (\tilde{n})$$

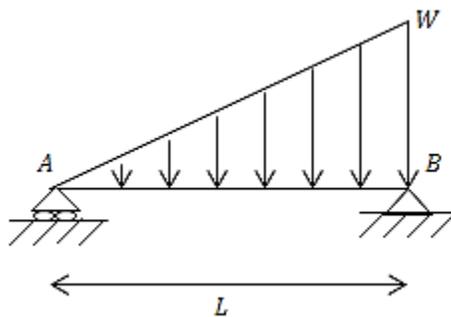
El proceso para ensamblar las matrices y formar la matriz de rigidez de la estructura sigue el procedimiento acostumbrado.

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

2.1. ANÁLISIS DE VIGAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS

1.- Para las siguientes vigas, calcular las reacciones en los soportes y dibujar el diagrama de momento, cortante, giro y flecha. Determine el valor del momento máximo y la flecha máxima.

1-A.-



SOLUCIÓN:

Reacciones

$$\sum MA = 0$$

$$\sum FX = 0$$

$$R_{BX} = 0$$

$$\left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{2}{3}L\right) - (L)(R_{BY}) = 0$$

$$\frac{wL^2}{3} = R_{BY} = \frac{wL}{3} \uparrow$$

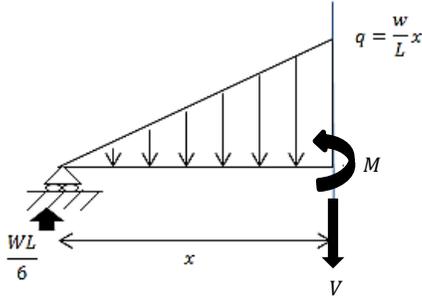
$$\sum F_Y = 0$$

$$R_{AY} - \frac{wL}{2} + \frac{wL}{3} = 0$$

$$R_{AY} = \frac{wL}{6} \uparrow$$

Realizando un corte en el único tramo

$$0 \leq x \leq L$$



Por triángulos semejantes:

$$\left. \begin{matrix} w - L \\ q - x \end{matrix} \right\} q = \frac{w}{L}x$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M = \frac{wL}{6}x - \frac{(x) \left(\frac{w}{L}x\right) \left(\frac{x}{3}\right)}{2}$$

$$M = \frac{wL}{6}x - \frac{w}{6L}x^3 \quad \text{----- ecuación de momento de la viga real}$$

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{wL}{6} - \frac{w}{6L}(3x^2) = \frac{wL}{6} - \frac{w}{2L}x^2$$

$$V = \frac{wL}{6} - \frac{w}{2L}x^2 \quad \text{----- ecuación de cortante de la viga real}$$

El momento máximo está posicionado cuando $V=0$

$$0 = \frac{wL}{6} - \frac{w}{2L}x^2 \rightarrow x^2 = \frac{-\frac{wL}{6}}{-\frac{w}{2L}} = \frac{2wL^2}{6w} = \frac{L^2}{3} \therefore x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

Sustituimos x en la ecuación del momento

$$M_{max} = \frac{wL}{6} \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) - \frac{w}{6L} \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{wL^2}{6\sqrt{3}} - \frac{wL^2}{6(\sqrt{3})^3} = \frac{\sqrt{3}}{27}wL^2 = \frac{wL^2}{9\sqrt{3}}$$

Aplicando la ecuación diferencial de la elástica

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

Igualando:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wL}{6}x - \frac{w}{6L}x^3$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int \left(\frac{wL}{6}x - \frac{w}{6L}x^3 \right) dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{wL}{12}x^2 - \frac{w}{24L}x^4 + C_1$$

Si

$$\frac{dy}{dx} = \theta$$

Entonces:

$$EI\theta = \frac{wL}{12}x^2 - \frac{w}{24L}x^4 + C_1 \longrightarrow Ec. \textcircled{1}$$

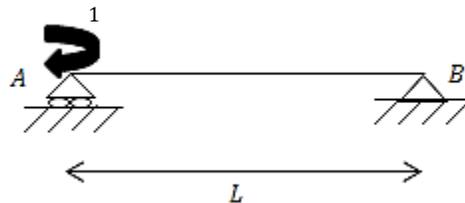
Integrando nuevamente:

$$EI \int dy = \int \left(\frac{wL}{12}x^2 - \frac{w}{24L}x^4 + C_1 \right) dx$$

$$EIy = \frac{wL}{36}x^3 - \frac{w}{120L}x^5 + C_1x + C_2 \longrightarrow Ec. \textcircled{2}$$

Cálculo de las constantes de integración, según los grados de libertad de la viga:

Cuando $X=0, Y=0, \Theta = \zeta?$, por lo que aplicamos el trabajo virtual para calcular la rotación cuando $X=0$



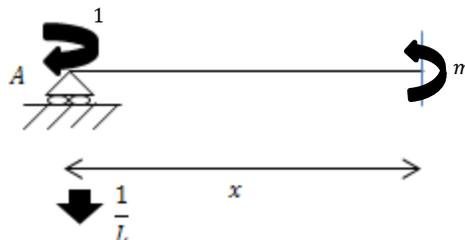
Reacciones

$$\begin{aligned} \sum m_A &= 0 \\ 1 - LR_{BY} &= 0 \\ R_{BY} &= \frac{1}{L} \uparrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_Y &= 0 \\ -R_{AY} + \frac{1}{L} &= 0 \\ R_{AY} &= \frac{1}{L} \downarrow \end{aligned}$$

Realizando un corte en el único tramo

$0 \leq x \leq L$



$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m = 1 - \frac{1}{L}x$$

Ec. De momento de la viga ficticia

Fórmula de trabajo virtual para la rotacion de cualquier punto:

$$\theta x = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

$$\theta x = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{wL}{6}x - \frac{w}{6L}x^3 \right) \left(1 - \frac{1}{L}x \right) dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{wL}{6}x - \frac{w}{6L}x^3 - \frac{w}{6}x^2 + \frac{w}{6L^2}x^4 \right) dx$$

$$\theta x = \frac{1}{EI} \left[\frac{wL}{12}x^2 - \frac{w}{24L}x^4 - \frac{w}{18}x^3 + \frac{w}{30L^2}x^5 \right]_0^L = \frac{1}{EI} \left(\frac{wL^3}{12} - \frac{wL^3}{24} - \frac{wL^3}{18} + \frac{wL^3}{30} \right)$$

$$\theta x = \frac{7wL^3}{360EI}$$

El signo positivo indica que el sentido propuesto en el momento virtual es correcto:

$$\theta x = \frac{7wL^3}{360EI} \curvearrowright$$

Entonces:

Cuando

$$X=0, Y=0, \Theta = -\frac{7wL^3}{360EI} \} \text{ condiciones de frontera}$$

Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$EI\theta = \frac{wL}{12}x^2 - \frac{w}{24L}x^4 + C_1 \text{ --- --- --- --- --- } Ec. \text{ ①}$$

$$EIy = \frac{wL}{36}x^3 - \frac{w}{120L}x^5 + C_1x + C_2 \text{ --- --- --- --- --- } Ec. \text{ ②}$$

Sustituimos $X=0, \Theta = -\frac{7wL^3}{360EI}$ en Ec. ①

$$EI \left(-\frac{7wL^3}{360EI} \right) = \frac{wL}{12} (0)^2 - \frac{w}{24L} (0)^4 + C_1$$

$$C_1 = -\frac{7wL^3}{360}$$

Sustituimos $X=0$, $Y=0$, $C_1 = -\frac{7wL^3}{360}$ en Ec. (2)

$$0 = \frac{wL}{36}(0)^3 - \frac{w}{120L}(0)^5 - \frac{wL^3}{360}(0) + C_2 \quad \therefore C_2 = 0$$

Sustituimos C_1 y C_2 en Ec. (1) y (2)

$$EI\theta = \frac{wL}{12}x^2 - \frac{w}{24L}x^4 - \frac{7wL^3}{360} \longrightarrow \text{Ec. general del giro}$$

$$EIy = \frac{wL}{36}x^3 - \frac{w}{120L}x^5 - \frac{7wL^3}{360}x \longrightarrow \text{Ec. general de la flecha}$$

Cálculo de la flecha máxima y su posición.

Para conocer la posición de la flecha máxima hacemos en cada tramo $\Theta=0$

$$0 = \frac{wL}{12}x^2 - \frac{w}{24L}x^4 - \frac{7wL^3}{360}$$

Resolvemos la ecuación de cuarto grado:

Realizamos un cambio de variable:

$$z = x^2$$

$$-\frac{w}{24L}z^2 + \frac{wL}{12}z - \frac{7wL^3}{360} = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado mediante fórmula general

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Despreciando de momento W y L :

$$a = -\frac{1}{24}, b = \frac{1}{12}, c = -\frac{7}{360}$$

Se dejan los resultados en función de L^2

$$z = \frac{-\left(\frac{1}{12}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{24}\right)\left(-\frac{7}{360}\right)}}{2\left(-\frac{1}{24}\right)}$$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{30}}{15}$$

$$z_1 = \left(1 + \frac{2\sqrt{30}}{15}\right) L^2 = 1.730296743 L^2$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$z_2 = \left(1 - \frac{2\sqrt{30}}{15}\right) L^2 \cong 0.2697032566 L^2$$

Aplicando el cambio de variable hecho inicialmente:

$$z = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{z}$$

$$x_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{2\sqrt{30}}{15}\right) L^2} \cong 0.5193296223 L$$

$$x_2 = -\sqrt{\left(1 - \frac{2\sqrt{30}}{15}\right) L^2} \cong -0.5193296223 L$$

$$x_3 = \sqrt{\left(1 + \frac{2\sqrt{30}}{15}\right) L^2} \cong 1.315407443 L$$

$$x_4 = -\sqrt{\left(1 + \frac{2\sqrt{30}}{15}\right) L^2} \cong -1.315407443 L$$

La solución debe estar dentro del intervalo de la viga que es $[0, L]$

$$\therefore X_{max} = 0.5193296223 L \rightarrow \text{posición de la flecha}$$

Sustituyendo el valor de X_{max} en la ecuación de la flecha

$$EIy_{max} = \frac{wL}{36} (0.5193296223L)^3 - \frac{w}{120L} (0.5193296223L)^5 - \frac{7wL^3}{360} (0.5193296223L)$$

$$y_{max} = -\frac{0.006522184231wL^4}{EI} \text{ (Flecha máxima)}$$

$$= \frac{0.006522184231wL^4}{EI} \downarrow$$

Cálculo de Θ_B

Sustituimos $X=L$ en la ecuación de giro:

$$EI\theta_B = \frac{wL}{12} (L)^2 - \frac{w}{24L} (L)^4 - \frac{7wL^3}{360}$$

$$\theta_B = \frac{wL^3}{45EI} = \frac{wL^3}{45EI} \curvearrowright$$

DIAGRAMA DE CORTANTE:

x(L)	V(WL)
0	0.166666667
0.1	0.161666667
0.2	0.146666667
0.3	0.121666667
0.4	0.086666667
0.5	0.041666667
0.6	-0.013333333
0.7	-0.078333333
0.8	-0.153333333
0.9	-0.238333333
1	-0.333333333

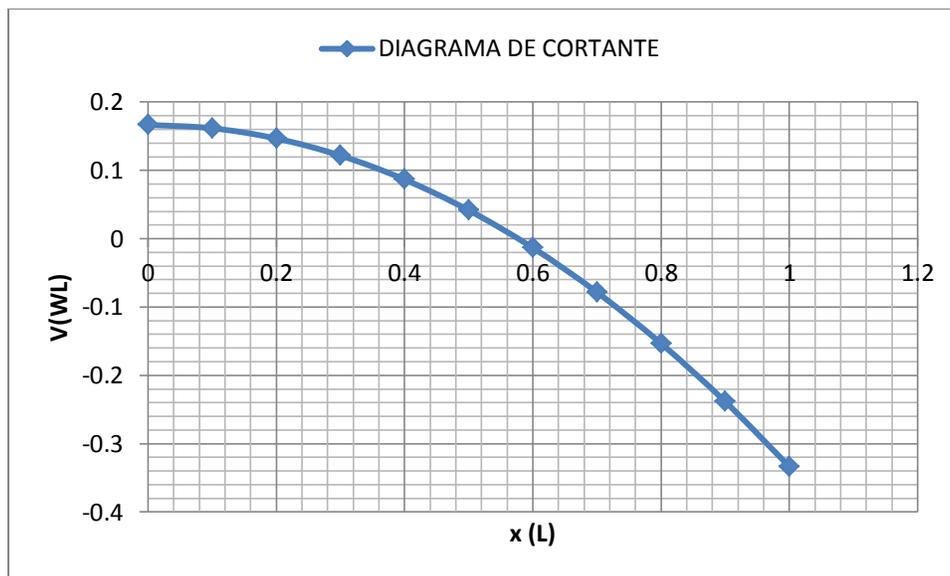


DIAGRAMA DE MOMENTO:

x(L)	M(W*L ²)
0	0
0.1	0.0165
0.2	0.032
0.3	0.0455
0.4	0.056
0.5	0.0625
0.6	0.064
0.7	0.0595
0.8	0.048
0.9	0.0285
1	0

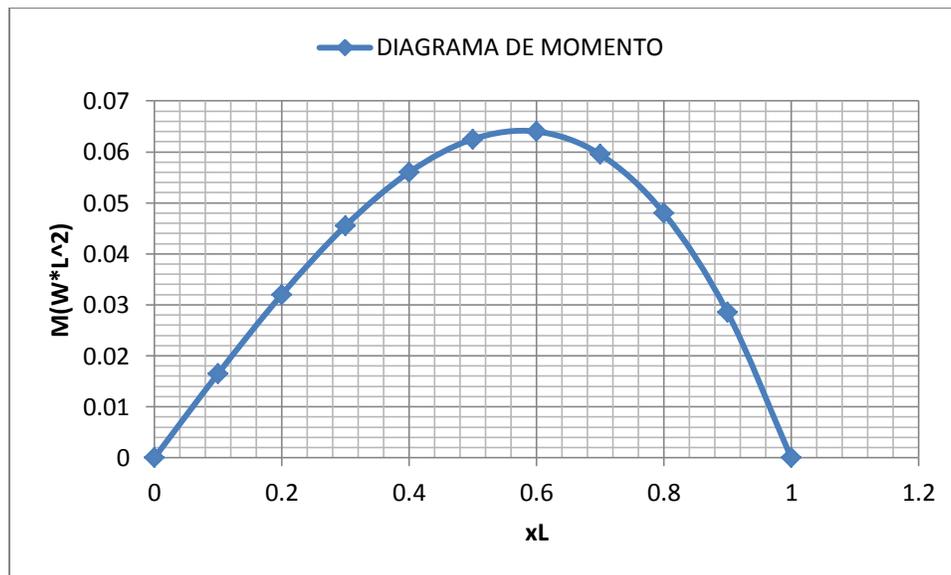


DIAGRAMA DE ROTACIÓN:

x(L)	$\theta((W*L^3)/EI)$
0	-0.019444444
0.1	-0.018615278
0.2	-0.016177778
0.3	-0.012281944
0.4	-0.007177778
0.5	-0.001215278
0.6	0.005155556
0.7	0.011384722
0.8	0.016822222
0.9	0.020718056
1	0.022222222

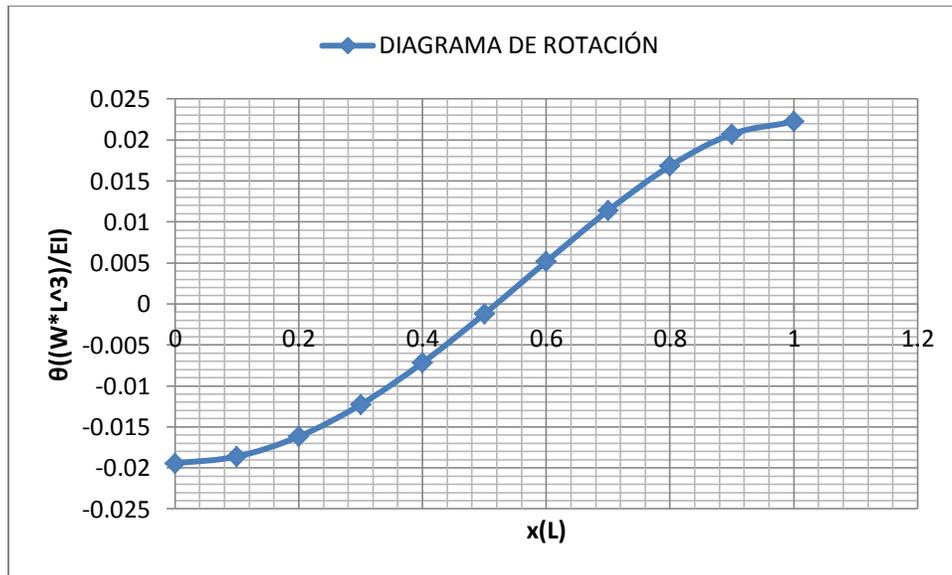
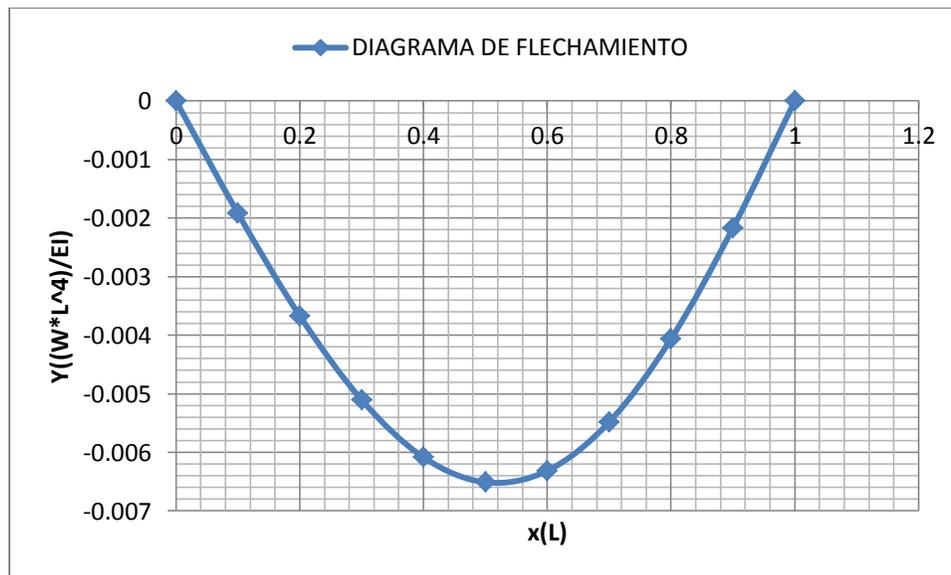
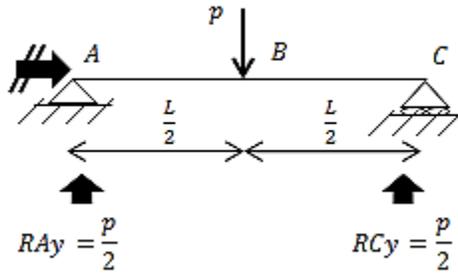


DIAGRAMA DE FLECHAMIENTO:

x(L)	Y((W*L ⁴)/EI)
0	0
0.1	-0.00191675
0.2	-0.003669333
0.3	-0.005103583
0.4	-0.006085333
0.5	-0.006510417
0.6	-0.006314667
0.7	-0.005483917
0.8	-0.004064
0.9	-0.00217075
1	0



1-B.-



SOLUCIÓN:

$$\sum MA = 0$$

$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} = 0$$

$$(P) \left(\frac{L}{2}\right) - R_{CY}(L) = 0$$

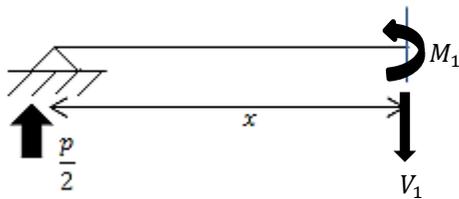
$$R_{CY} = \frac{-\frac{PL}{2}}{-L} = \frac{-PL}{-2L} = \frac{P}{2} \uparrow$$

$$\sum FY = 0 \rightarrow R_{AY} - P + R_{CY} = 0 \rightarrow R_{AY} = P - \frac{P}{2} = \frac{P}{2} \uparrow$$

Obtención de las ecuaciones de momento y cortante de la estructura real:

Realizando un corte en el tramo ①

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$



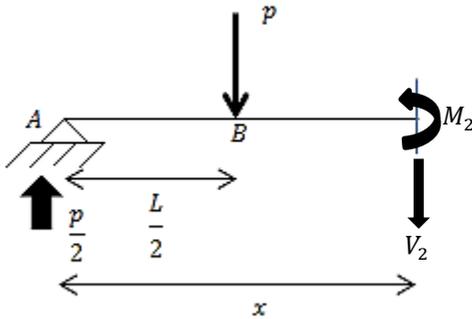
$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = \frac{P}{2}x$$

$$V_1 = \frac{dM}{dx} = \frac{P}{2}$$

Realizando un corte en el tramo ②

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$



$$\sum MP = 0$$

$$M_2 = \frac{P}{2}x - P\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

$$M_2 = \frac{P}{2}x - Px + \frac{PL}{2}$$

$$M_2 = -\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2}$$

$$V_2 = \frac{dM}{dx} = -\frac{P}{2}$$

Aplicamos la ecuación diferencial de la elástica:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{2}x$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int \left(\frac{P}{2}x\right) dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{4} + C_1$$

$$\text{Si } \frac{dy}{dx} = \theta$$

$$EI\theta_1 = \frac{Px^2}{4} + C_1 \text{ ----- } \rightarrow Ec. \text{ ①}$$

$$EI \int dy = \int \left(\frac{Px^2}{4} + C_1\right) dx$$

$$EIy_1 = \frac{Px^3}{12} + C_1x + C_2 \text{ ----- } \rightarrow Ec. \text{ ②}$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2}$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int \left(-\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2} \right) dx$$

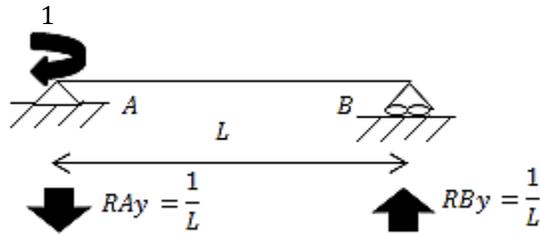
$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{4}x^2 + \frac{PL}{2}x + C_3$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta$$

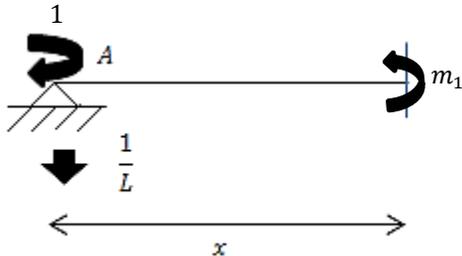
$$EI\theta_2 = -\frac{P}{4}x^2 + \frac{PL}{2}x + C_3 \text{ -----} \rightarrow Ec. \textcircled{3}$$

$$EIy_2 = -\frac{P}{12}x^3 + \frac{PL}{4}x^2 + C_3x + C_4 \text{ -----} \rightarrow Ec. \textcircled{4}$$

Trabajo virtual
VIGA FICTICIA ROTACIÓN



Corte ①
 $0 \leq x \leq L$



$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m_1 = 1 - \frac{1}{L}x$$

Fórmula trabajo virtual para rotación cualquier punto

$$\theta_x = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

$$\theta_x = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(\frac{P}{2}x\right) \left(1 - \frac{1}{L}x\right) dx + \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left(-\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{L}x\right) dx$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(\frac{P}{2}x\right) \left(1 - \frac{1}{L}x\right) dx \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(\frac{P}{2}x - \frac{P}{2L}x^2\right) dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{P}{4}x^2 - \frac{P}{6L}x^3\right]_0^{L/2} = \frac{1}{EI} \left[\frac{PL^2}{16} - \frac{PL^2}{48}\right] \\ &= \frac{PL^2}{24EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left(-\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{L}x\right) dx = \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left(-\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2} + \frac{P}{2L}x^2 - \frac{P}{2}x\right) dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[-\frac{P}{2}x^2 + \frac{PL}{2}x + \frac{P}{6L}x^3\right]_{L/2}^L \\ &= \frac{1}{EI} \left[-\frac{P}{2}\left(L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right) + \frac{PL}{2}\left(L - \frac{L}{2}\right) + \frac{P}{6L}\left(L^3 - \left(\frac{L}{2}\right)^3\right)\right] \\ &= \frac{1}{EI} \left[-\frac{P}{2}\left(\frac{3}{4}L^2\right) + \frac{PL}{2}\left(\frac{L}{2}\right) + \frac{P}{6L}\left(\frac{7}{8}L^3\right)\right] = \frac{PL^2}{EI} \left(-\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{7}{48}\right) = \frac{PL^2}{48EI} \end{aligned}$$

$$\theta_x = \frac{PL^2}{24EI} + \frac{PL^2}{48EI} = + \frac{PL^2}{16EI} \quad \therefore \theta_x = \frac{PL^2}{16EI} \curvearrowright$$

Condiciones de frontera

$$X = 0, Y = 0, \theta_A = -\frac{PL^2}{16EI}$$

Además, por continuidad:

$$\text{en } x = \frac{L}{2}, \theta_1 = \theta_2, y_1 = y_2$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones :

$$EI \left(-\frac{PL^2}{16EI} \right) = \frac{P(0)^2}{4} + C_1 \quad \therefore C_1 = -\frac{PL^2}{16}$$

$$EI(0) = \frac{P(0)^3}{12} - \frac{PL^2}{16}(0) + C_2 \quad \therefore C_2 = 0$$

$$\frac{Px^2}{4} + C_1 = -\frac{P}{4}x^2 + \frac{PL}{2}x + C_3, \quad \text{en } x = \frac{L}{2}$$

$$\frac{P\left(\frac{L}{2}\right)^2}{4} - \frac{PL^2}{16} = -\frac{P}{4}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{PL}{2}\left(\frac{L}{2}\right) + C_3$$

$$\frac{PL^2}{16} - \frac{PL^2}{16} = -\frac{PL^2}{16} + \frac{PL^2}{4} + C_3 \quad \therefore C_3 = -\frac{3PL^2}{16}$$

$$\frac{Px^3}{12} + C_1x + C_2 = -\frac{P}{12}x^3 + \frac{PL}{4}x^2 + C_3x + C_4, \quad \text{en } x = \frac{L}{2}$$

$$\frac{P}{12}\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{PL^2}{16}\left(\frac{L}{2}\right) + 0 = -\frac{P}{12}\left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{PL}{4}\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{3PL^2}{16}\left(\frac{L}{2}\right) + C_4$$

$$\frac{PL^3}{96} - \frac{PL^3}{32} = -\frac{PL^3}{96} + \frac{PL^3}{16} - \frac{3PL^3}{32} + C_4 \quad \therefore C_4 = \frac{PL^3}{48}$$

Susustituyendo las constantes

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$EI\theta_1 = \frac{Px^2}{4} - \frac{PL^2}{16}$$

$$EIy_1 = \frac{Px^3}{12} - \frac{PL^2}{16}x$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$EI\theta_2 = -\frac{P}{4}x^2 + \frac{PL}{2}x - \frac{3PL^2}{16}$$

$$EIy_2 = -\frac{P}{12}x^3 + \frac{PL}{4}x^2 - \frac{3PL^2}{16}x + \frac{PL^3}{48}$$

Cálculo de la flecha máxima y su posición para cada tramo

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$0 = \frac{Px^2}{4} - \frac{PL^2}{16}$$

$$x^2 = \frac{\frac{PL^2}{16}}{\frac{P}{4}} = \frac{4PL^2}{16P} = \frac{L^2}{4}$$

$$x = \pm \sqrt{L^2/4} \quad \therefore x_{max} = \frac{L}{2}$$

$$EIy_{max} = \frac{P}{12} \left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{PL^2}{16} \left(\frac{L}{2}\right) = \frac{PL^3}{96} - \frac{PL^3}{32}$$

$$y_{max} = \frac{-PL^3}{48EI} = \frac{PL^3}{48EI} \downarrow \text{(hacia abajo)}$$

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$0 = -\frac{P}{4}x^2 - \frac{PL}{2}x - \frac{3PL^2}{16}$$

$$x = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{16}\right)}}{2\left(-\frac{1}{4}\right)}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}L$$

$$x_2 = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}L \quad \therefore x_{max} = \frac{1}{2}L$$

$$EIy_{max} = -\frac{P}{12} \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{Pl}{4} \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{3PL^2}{16} \left(\frac{L}{2}\right) + \frac{PL^3}{48}$$

$$EIy_{max} = -\frac{PL^3}{96} + \frac{PL^3}{16} - \frac{3PL^3}{32} + \frac{PL^3}{48}$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$y_{max} = -\frac{PL^3}{48EI} = \frac{PL^3}{48EI} \downarrow (\text{hacia abajo}).$$

Observese que por la simetría de viga, en ambos tramos deben coincidir la flecha máxima y su posición.

DIAGRAMA DE CORTANTE:

x(L)	V(P)
0	0.5
0.1	0.5
0.2	0.5
0.3	0.5
0.4	0.5
0.5	0.5
0.5	-0.5
0.6	-0.5
0.7	-0.5
0.8	-0.5
0.9	-0.5
1	-0.5

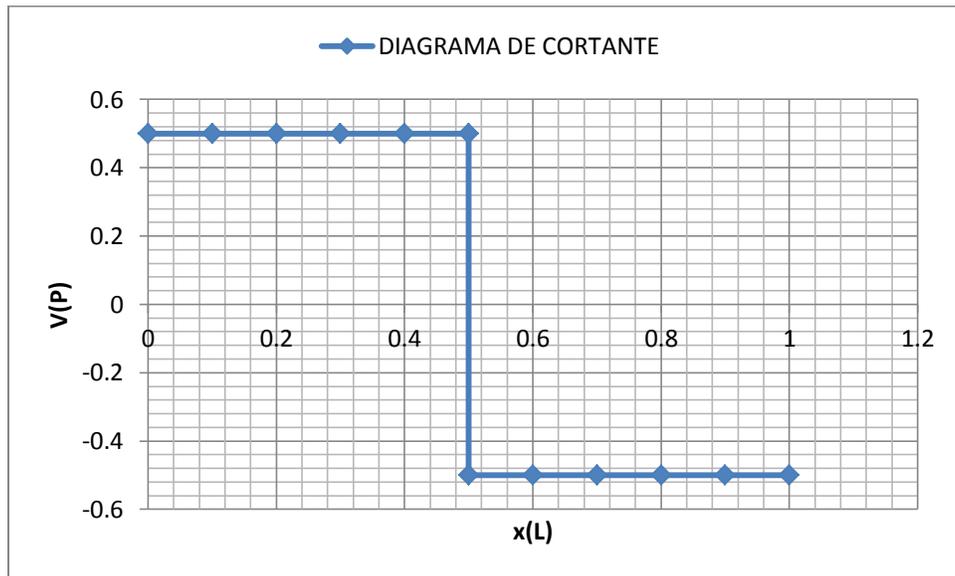


DIAGRAMA DE MOMENTO:

x(L)	M(PL)
0	0
0.1	0.05
0.2	0.1
0.3	0.15
0.4	0.2
0.5	0.25
0.5	0.25
0.6	0.2
0.7	0.15
0.8	0.1
0.9	0.05
1	0

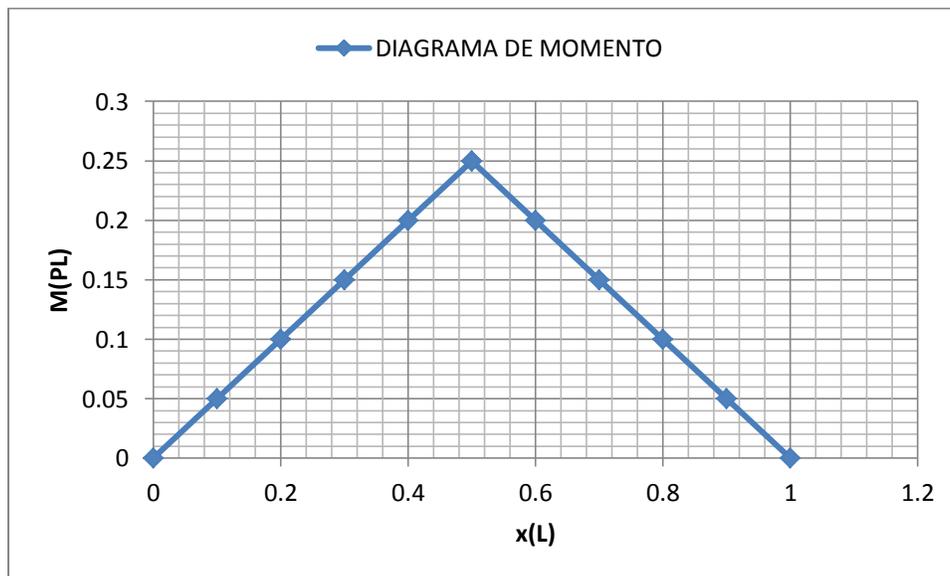


DIAGRAMA DE GIRO O ROTACIÓN:

x(L)	$\theta((P*L^2)/EI)$
0	-0.0625
0.1	-0.06
0.2	-0.0525
0.3	-0.04
0.4	-0.0225
0.5	0
0.5	0
0.6	0.0225
0.7	0.04
0.8	0.0525
0.9	0.06
1	0.0625

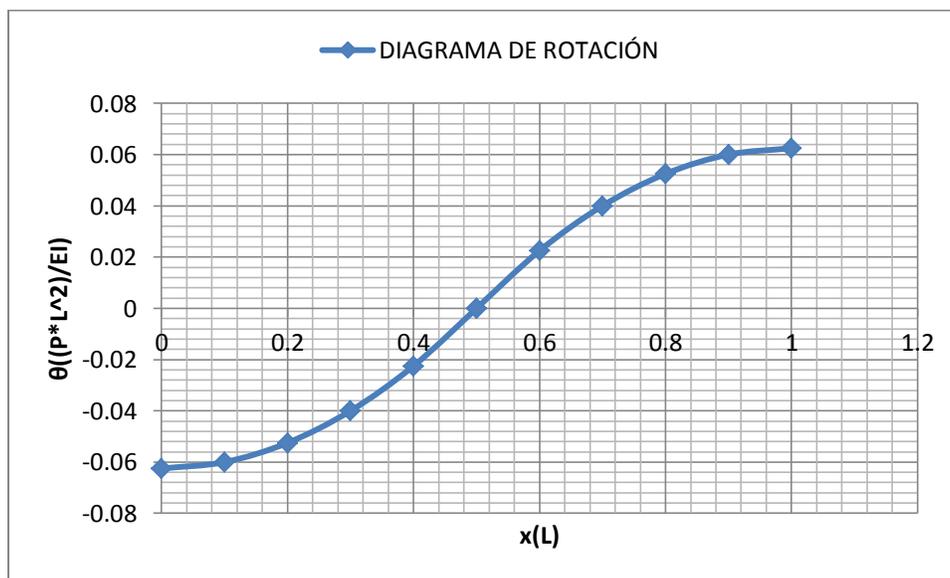
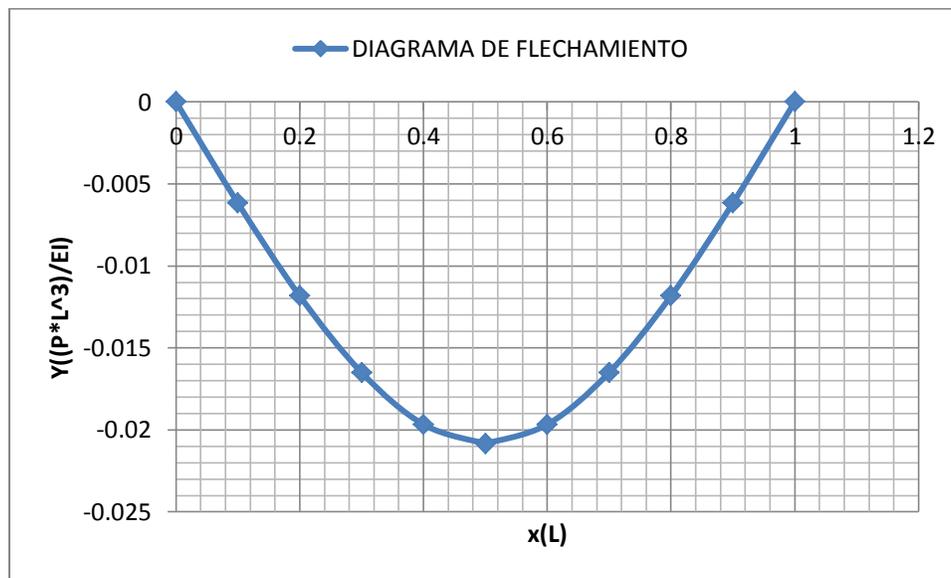
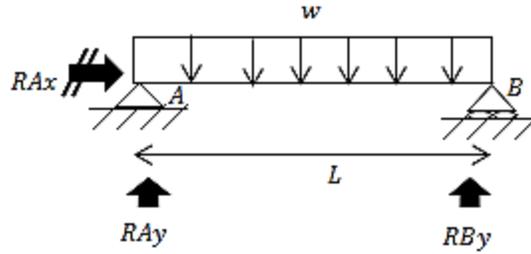


DIAGRAMA DE FLECHAMIENTO:

x(L)	Y((P*L^3)/EI)
0	0
0.1	-0.00616667
0.2	-0.01183333
0.3	-0.0165
0.4	-0.01966667
0.5	-0.02083333
0.5	-0.02083333
0.6	-0.01966667
0.7	-0.0165
0.8	-0.01183333
0.9	-0.00616667
1	0



1-C.-



SOLUCIÓN:

Reacciones

$$\sum MA = 0$$

$$(wL) \left(\frac{L}{2}\right) - R_{BY}L = 0$$

$$R_{BY} = \frac{-\frac{wL^2}{2}}{-\frac{L}{1}} = \frac{wL}{2} \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

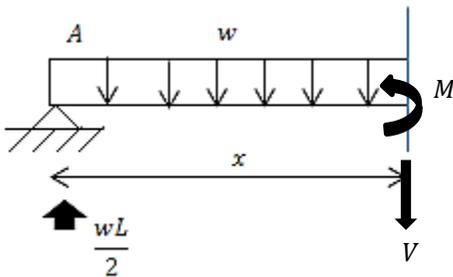
$$R_{AY} - wL + \frac{wL}{2} = 0$$

$$R_{AY} = \frac{wL}{2} \uparrow$$

$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} = 0$$

Realizando un corte en el único tramo



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M = \frac{wL}{2}x - (wx) \left(\frac{x}{2}\right)$$

$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \therefore \text{Ecuación de momento de la viga}$$

$$V = \frac{dM}{dx} \quad V = \frac{wL}{2} - wx \Rightarrow \text{Ec. cortante de la viga}$$

Posición del momento máximo cuando $V=0$

$$0 = \frac{wL}{2} - wx$$

$$x = \frac{-\frac{wL}{2}}{-\frac{w}{1}} = \frac{L}{2}$$

Sustituimos x en la ecuación de momento

$$M_{max} = \frac{wL}{2} \left(\frac{L}{2}\right) - \frac{w}{2} \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{wL^2}{4} - \frac{wL^2}{8} = \frac{wL^2}{8} \Rightarrow \text{Momento máximo}$$

Ecuación diferencial de la elástica

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int \left(\frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \right) dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{wL}{4}x^2 - \frac{w}{6}x^3 + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta$$

$$EI\theta = \frac{wL}{4}x^2 - \frac{w}{6}x^3 + C_1 \text{ --- } \rightarrow Ec. \text{ ①}$$

$$EI \int dy = \int \left(\frac{wL}{4}x^2 - \frac{w}{6}x^3 + C_1 \right) dx$$

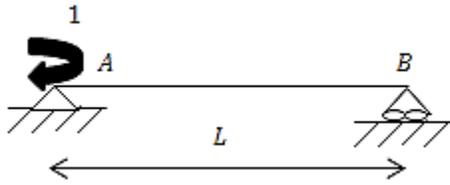
$$EIy = \frac{wL}{12}x^3 - \frac{w}{24}x^4 + C_1x + C_2 \text{ --- } \rightarrow Ec. \text{ ②}$$

Constantes de integración

Cuando $x=0, y=0, \theta = \zeta?$

Aplicación del trabajo virtual

Viga ficticia para rotación:



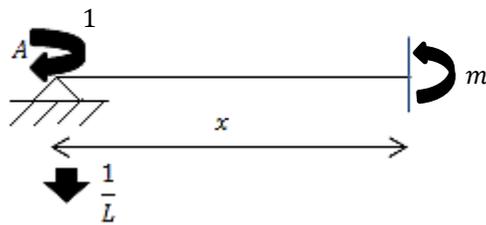
Reacciones:

$$\sum MA = 0 \qquad \sum FY = 0$$

$$R_{BY} = \frac{1}{L} \uparrow \qquad R_{AY} = \frac{1}{L} \downarrow$$

Realizando un corte

$$0 \leq x \leq L$$



$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m = 1 - \frac{1}{L}x \Rightarrow \text{Ec. de momento de la viga ficticia}$$

Fórmula de trabajo virtual para rotación

$$\theta_x = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

$$\theta_x = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \right) \left(1 - \frac{1}{L}x \right) dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2 - \frac{w}{2}x^2 + \frac{w}{2L}x^3 \right) dx$$

$$\theta_x = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{wL}{2}x - wx^2 + \frac{w}{2L}x^3 \right) dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{wL}{4}x^2 - \frac{w}{3}x^3 + \frac{w}{8L}x^4 \right]_0^L$$

$$\theta_x = \frac{1}{EI} \left(\frac{wL^3}{4} - \frac{wL^3}{3} + \frac{wL^3}{8} \right)$$

$$\theta_x = \frac{wL^3}{24EI} \quad \therefore \theta_x = \frac{wL^3}{24EI} \curvearrowright$$

Entonces:

$$\text{cuando: } \left. \begin{matrix} X = 0, Y = 0, \theta = -\frac{wL^3}{24EI} \end{matrix} \right\} \text{condiciones de frontera}$$

Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$EI\theta = \frac{wL}{4}x^2 - \frac{w}{6}x^3 + C_1 \text{ --- } \rightarrow \text{Ec. 1}$$

$$EIy = \frac{wL}{12}x^3 - \frac{w}{24}x^4 + C_1x + C_2 \text{ --- } \rightarrow \text{Ec. 2}$$

Susituimos $x = 0, \theta = -\frac{wL^3}{24EI}$ en Ec. ①

$$EI\left(-\frac{wL^3}{24EI}\right) = \frac{wL}{4}(0)^2 - \frac{w}{6}(0)^3 + C_1 \quad \therefore C_1 = \frac{-wL^3}{24}$$

Susituimos $x = 0, y = 0, C_1 = \frac{-wL^3}{24}$ en Ec. ②

$$0 = \frac{wL}{12}(0)^3 - \frac{w}{24}(0)^4 + \frac{-wL^3}{24}(0) + C_2 \quad \therefore C_2 = 0$$

Sustituimos C_1 y C_2 en ecuaciones ① y ②

$$EI\theta = \frac{wL}{4}x^2 - \frac{w}{6}x^3 - \frac{wL^3}{24} \text{ --- } \rightarrow \text{Ec. general de giro}$$

$$EIy = \frac{wL}{12}x^3 - \frac{w}{24}x^4 - \frac{wL^3}{24}x \text{ --- } \rightarrow \text{Ec. general de la flecha}$$

Cálculo de θ_B

Sustituimos $x=L$ en la ecuación del giro

$$EI\theta_B = \frac{wL}{4}(L)^2 - \frac{w}{6}(L)^3 - \frac{wL^3}{24}$$

$$\theta_B = \frac{wL^3}{24EI} = \frac{wL^3}{24EI} \curvearrowright$$

Posición de la flecha máxima:

Hacemos $\theta=0$ y despreciamos de momento w y L

$$0 = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{24}$$

resolvemos por división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{24} \\ \frac{1}{2} & & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \hline & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & 0 \end{array}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}\right) = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2}L$$

$$-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{12} = 0$$

$$x = \frac{-\frac{1}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{12}\right)}}{2\left(-\frac{1}{6}\right)}$$

$$x_2 = \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{-\frac{1}{3}} \Rightarrow x_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)L$$

$$x_3 = \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{1}{3}} - \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{-\frac{1}{3}} \Rightarrow x_3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)L$$

$$\therefore x_{max} = \frac{L}{2}$$

Flecha máxima

$$EIy_{max} = \left(\frac{wL}{12}\right)\left(\frac{1}{2}L\right)^3 - \left(\frac{w}{24}\right)\left(\frac{L}{2}\right)^4 - \left(\frac{wL^3}{24}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = wL^4\left(\frac{1}{96} - \frac{1}{384} - \frac{1}{48}\right)$$

$$y_{max} = \left(-\frac{5}{384}\right)\left(\frac{WL^4}{EI}\right) = \left(\frac{5}{384}\right)\left(\frac{WL^4}{EI}\right) \downarrow \text{(hacia abajo)}$$

DIAGRAMA DE CORTANTE:

$x(L)$	$V(WL)$
0	0.5
0.1	0.4
0.2	0.3
0.3	0.2
0.4	0.1
0.5	0
0.6	-0.1
0.7	-0.2
0.8	-0.3
0.9	-0.4
1	-0.5

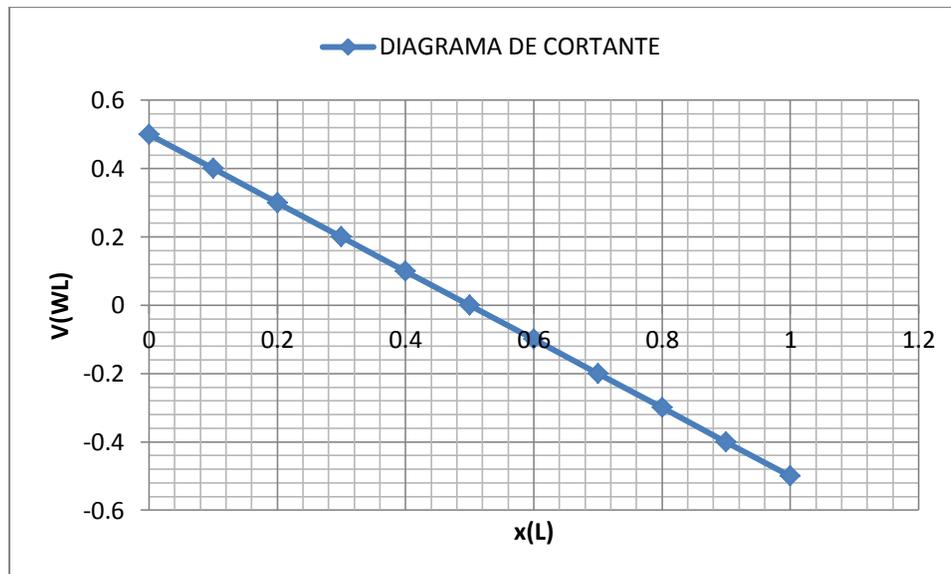


DIAGRAMA DE MOMENTO:

x(L)	M(W*L ²)
0	0
0.1	0.045
0.2	0.08
0.3	0.105
0.4	0.12
0.5	0.125
0.6	0.12
0.7	0.105
0.8	0.08
0.9	0.045
1	0

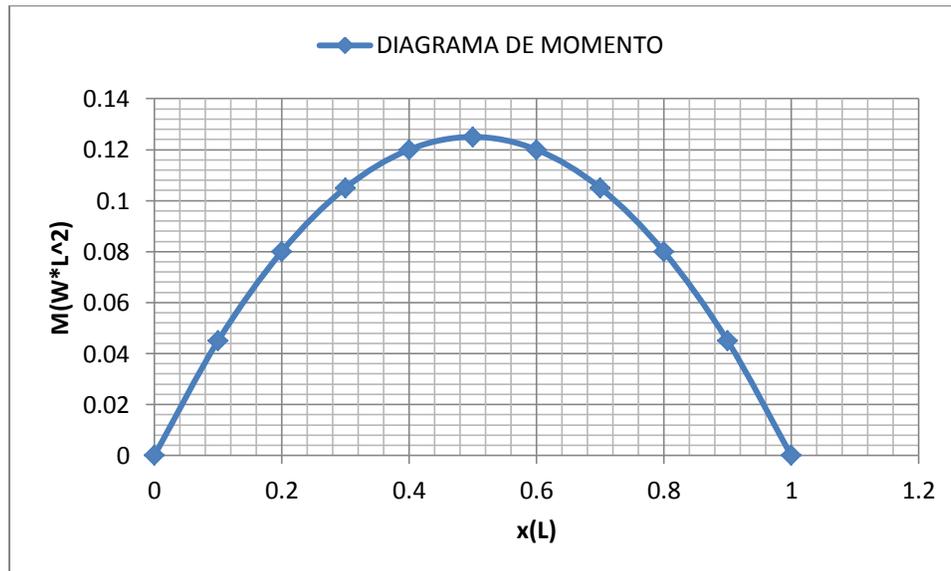


DIAGRAMA DE GIRO:

x(L)	$\theta((W*L^3)/EI)$
0	-0.041666667
0.1	-0.039333333
0.2	-0.033
0.3	-0.023666667
0.4	-0.012333333
0.5	0
0.6	0.012333333
0.7	0.023666667
0.8	0.033
0.9	0.039333333
1	0.041666667

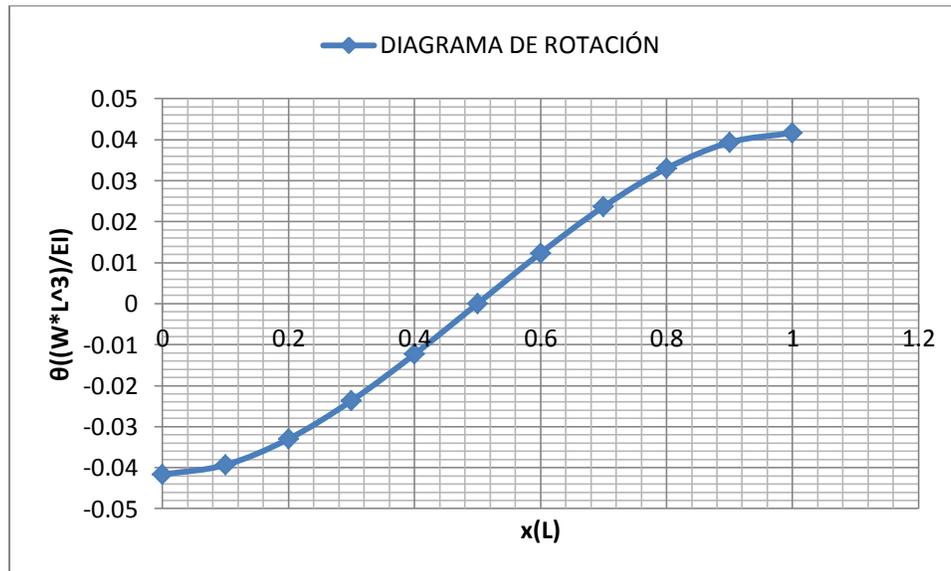
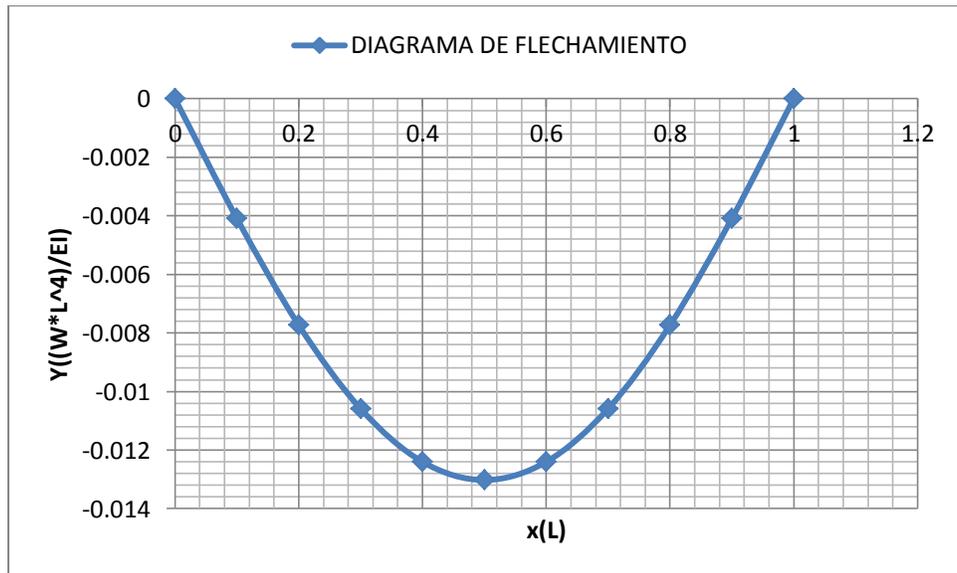
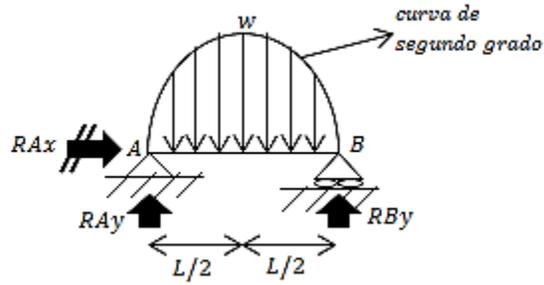


DIAGRAMA DE FLECHA:

x(L)	Y((W*L^4)/EI)
0	0
0.1	-0.0040875
0.2	-0.007733333
0.3	-0.0105875
0.4	-0.0124
0.5	-0.013020833
0.6	-0.0124
0.7	-0.0105875
0.8	-0.007733333
0.9	-0.0040875
1	0



1-D.-



SOLUCIÓN:

La ecuación de la curva parabólica tiene la siguiente forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Conociendo 3 puntos de la curva, los cuales son:

$$x = 0, y = 0$$

$$x = \frac{L}{2}, y = w$$

$$x = L, y = 0$$

Construimos el sistema de ecuaciones:

$$a(0)^2 + b(0) + c = 0$$

$$a\left(\frac{L}{2}\right)^2 + b\left(\frac{L}{2}\right) + c = w$$

$$a(L)^2 + b(L) + c = 0$$

Resolviendo:

$$0a + 0b + c = 0 \text{ --- } \textcircled{1}$$

$$\frac{L^2}{4}a + \frac{L}{2}b + c = w \text{ --- } \textcircled{2}$$

$$L^2a + Lb + c = 0 \text{ --- } \textcircled{3}$$

Resolviendo el sistema por Método de Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{4} & \frac{L}{2} & 1 & | & \frac{L^2}{4} & \frac{L}{2} \\ L^2 & L & 1 & | & L^2 & L \end{vmatrix} = \left(0 + 0 + \frac{L^3}{4}\right) - \left(0 + 0 + \frac{L^3}{2}\right) = -\frac{L^3}{4}$$

$$\Delta a = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ w & \frac{L}{2} & 1 & | & w & \frac{L}{2} \\ 0 & L & 1 & | & 0 & L \end{vmatrix} = (0 + 0 + wL) - (0 + 0 + 0) = wL$$

$$\Delta b = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{4} & w & 1 & | & \frac{L^2}{4} & w \\ L^2 & 0 & 1 & | & L^2 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 0 + 0) - (0 + 0 + L^2w) = -L^2w$$

$$\Delta c = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{4} & \frac{L}{2} & w & | & \frac{L^2}{4} & \frac{L}{2} \\ L^2 & L & 0 & | & L^2 & L \end{vmatrix} = (0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = 0$$

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta} = \frac{wL}{-\frac{L^3}{4}} = -4 \frac{w}{L^2}$$

$$b = \frac{\Delta b}{\Delta} = \frac{-L^2w}{-\frac{L^3}{4}} = 4 \frac{w}{L}$$

$$c = \frac{\Delta c}{\Delta} = \frac{0}{-\frac{L^3}{4}} = 0$$

$$\therefore y = -4 \frac{w}{L^2} x^2 + 4 \frac{w}{L} x$$

Aplicamos la siguiente ecuación para calcular el brazo de la palanca:

$$\bar{x} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} \tilde{x} dA}{\int_{L_1}^{L_2} dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} xy dy}{\int_{L_1}^{L_2} y dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x \left(-4 \frac{w}{L^2} x^2 + 4 \frac{w}{L} x\right) dx}{\int_0^L \left(-4 \frac{w}{L^2} x^2 + 4 \frac{w}{L} x\right) dx}$$

Resolviendo el numerador

$$\int_0^L x \left(-4 \frac{w}{L^2} x^2 + 4 \frac{w}{L} x \right) dx = -4 \frac{w}{L^2} \int_0^L x^3 dx + 4 \frac{w}{L} \int_0^L x^2 dx$$

$$= -4 \frac{w}{L^2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^L + 4 \frac{w}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{-4w}{4L^2} [L^4 - 0^4] + \frac{4w}{3L} [L^3 - 0^3] = -wL^2 + \frac{4}{3}wL^2 = \frac{wL^2}{3}$$

Resolviendo el denominador

$$\int_0^L \left(-4 \frac{w}{L^2} x^2 + 4 \frac{w}{L} x \right) dx = -4 \frac{w}{L^2} \int_0^L x^2 dx + 4 \frac{w}{L} \int_0^L x dx$$

$$= -4 \frac{w}{L^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L + 4 \frac{w}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L = -\frac{4w}{3L^2} [L^3 - 0^3] + \frac{4w}{2L} [L^2 - 0^2] = -\frac{4}{3}wL + 2wL = \frac{2}{3}wL$$

Entonces:

$$\bar{x} = \frac{\frac{wL^2}{3}}{\frac{2wL}{3}} = \frac{3wL^2}{6wL} = \frac{1}{2}L$$

El área bajo la curva será igual a la carga de la curva:

$$Ac = \int_{L_1}^{L_2} dA \qquad Ac = \int_{L_1}^{L_2} y dx$$

Obsérvese que dicha área siempre será el denominador de la fórmula para calcular el brazo de palanca:

$$\therefore Ac = \int_0^L \left(-4 \frac{w}{L^2} x^2 + 4 \frac{w}{L} x \right) dx = \frac{2}{3}wL$$

Se procede a calcular las reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$\left(\frac{2}{3}wL \right) \left(\frac{1}{2}L \right) - R_{BY}(L) = 0$$

$$R_{BY} = \frac{\frac{wL^2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{wL^2}{3L} = \frac{1}{3}wL \uparrow$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$\sum Fy = 0$$

$$R_{AY} - A_c + R_{BY} = 0$$

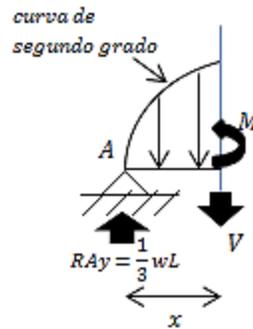
$$R_{BY} = A_c - R_{AY} = \frac{2}{3}wL - \frac{1}{3}wL = \frac{1}{3}wL \uparrow$$

$$\sum Fx = 0$$

$$R_{AX} = 0$$

Realizando un corte en el tramo ①

$0 \leq x \leq L$



$$\bar{x} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} \tilde{x} y dA}{\int_{L_1}^{L_2} y dA}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^x x \left(-4 \frac{w}{L^2} x^2 + 4 \frac{w}{L} x \right) dx}{\int_0^x \left(-4 \frac{w}{L^2} x^2 + 4 \frac{w}{L} x \right) dx} = \frac{-4 \frac{w}{L^2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^x + 4 \frac{w}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^x}{-4 \frac{w}{L^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^x + 4 \frac{w}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^x}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{-4w}{4L^2} [x^4 - 0^4] + \frac{4w}{4L} [x^3 - 0^3]}{\frac{-4w}{3L^2} [x^3 - 0^3] + \frac{4w}{2L} [x^2 - 0^2]} = \frac{-\frac{w}{L^2} x^4 + \frac{4w}{3L} x^3}{-\frac{4w}{3L^2} x^3 + \frac{2w}{L} x^2} \text{ a la derecha de A}$$

$$A_c = -\frac{4w}{3L^2} x^3 + \frac{2w}{L} x^2$$

$$\sum m_{corte} = 0$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$M = \left(\frac{1}{3}wL\right)(x) - \left(-\frac{4w}{3L^2}x^3 + \frac{2w}{L}x^2\right)\left(x - \frac{-\frac{w}{L^2}x^4 + \frac{4w}{3L}x^3}{-\frac{4w}{3L^2}x^3 + \frac{2w}{L}x^2}\right)$$

$$M = \frac{wL}{3}x - \left(-\frac{4w}{3L^2}x^4 + \frac{2w}{L}x^3 + \frac{w}{L^2}x^4 - \frac{4w}{3L}x^3\right)$$

$$M = \frac{w}{3L^2}x^4 - \frac{2w}{3L}x^3 + \frac{wL}{3}x$$

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{4w}{3L^2}x^3 - \frac{2w}{L}x^2 + \frac{wL}{3}$$

El momento máximo se ubica cuando $V=0$

$$0 = \frac{4w}{3L^2}x^3 - \frac{2w}{L}x^2 + \frac{wL}{3}$$

Resolviendo la ecuación despreciando momentáneamente “w” y “L” y dejando al final los resultados en función de L.

Aplicamos el método de tanteos y debido a que el momento máximo debe estar posicionado en un intervalo de los reales $[0, L]$, evaluamos de 0 a 1 y en donde haya un cambio de signo tenemos una solución; iteramos “n” veces hasta que nuestra solución sea lo más exacta posible.

Evaluamos el polinomio que es la ecuación=

$$f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}$$

x	F(x)
0	0.3333
0.1	0.3147
0.2	0.2640
0.3	0.1893
0.4	0.0987
0.5	0.0000
0.6	-0.0987
0.7	-0.1893
0.8	-0.2640
0.9	-0.3147
1	-0.3333

∴ La posición del momento máximo es

$$x_{max} = 0.5L = \frac{1}{2}L$$

Sustituimos $x_{max} = \frac{1}{2}L$ en la ecuación de M para obtener el momento máximo

$$M_{max} = \frac{wL^4}{48L^2} - \frac{2wL^3}{24L}x^3 + \frac{wL^2}{6} = \frac{5}{48}wL^2$$

Ecuación diferencial de la elástica

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{3L^2}x^4 - \frac{2w}{3L}x^3 + \frac{wL}{3}x$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int \left(\frac{w}{3L^2}x^4 - \frac{2w}{3L}x^3 + \frac{wL}{3}x \right) dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{w}{15L^2}x^5 - \frac{2w}{12L}x^4 + \frac{wL}{6}x^2 + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta$$

$$EI\theta = \frac{w}{15L^2}x^5 - \frac{2w}{12L}x^4 + \frac{wL}{6}x^2 + C_1 \text{ --- } \textcircled{1}$$

$$EI \int dx = \int \left(\frac{w}{15L^2}x^5 - \frac{2w}{12L}x^4 + \frac{wL}{6}x^2 + C_1 \right) dx$$

$$EIy = \frac{w}{90L^2}x^6 - \frac{w}{30L}x^5 + \frac{wL}{18}x^3 + C_1x + C_2 \text{ --- } \textcircled{2}$$

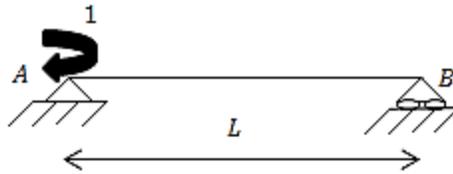
Calculamos las constantes de integración, según los grados de libertad de la viga:

Cuando $x = 0, y = 0$, pero $\theta = i$?

Calculo de la rotación cuando $x=0$

Aplicación del trabajo virtual

Viga ficticia para la rotación:



Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$1 - LR_{BY} = 0$$

$$R_{BY} = \frac{1}{L} \uparrow$$

$$\sum Fy = 0$$

$$-R_{AY} + R_{BY} = 0$$

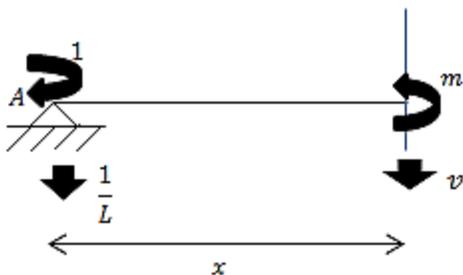
$$R_{AY} = \frac{1}{L} \downarrow$$

$$\sum Fx = 0$$

$$R_{Ax} = 0$$

Realizando un corte:

$$0 \leq x \leq L$$



$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m = 1 - \frac{1}{L}x$$

Fórmula de trabajo virtual para la rotación en cualquier punto:

$$\theta x = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$\theta x = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{w}{3L^2} x^4 - \frac{2w}{3L} x^3 + \frac{wL}{3} x \right) \left(1 - \frac{1}{L} x \right) dx$$

$$\theta x = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{w}{3L^2} x^4 - \frac{2w}{3L} x^3 + \frac{wL}{3} x - \frac{w}{3L^3} x^5 + \frac{2w}{3L^2} x^4 - \frac{w}{3} x^2 \right) dx$$

$$\theta x = \frac{1}{EI} \left[-\frac{w}{18L^3} x^6 + \frac{w}{5L^2} x^5 - \frac{w}{6L} x^4 - \frac{w}{9} x^3 + \frac{wL}{6} x^2 \right]_0^L$$

$$\theta x = \frac{1}{EI} \left[-\frac{w}{18L^3} (L)^6 + \frac{w}{5L^2} (L)^5 - \frac{w}{6L} (L)^4 - \frac{w}{9} (L)^3 + \frac{wL}{6} (L)^2 \right]$$

$$\theta x = \frac{wL^3}{30EI} \quad \therefore \theta_A = \frac{wL^3}{30EI}$$

Condiciones de frontera

$$x = 0, y = 0, \theta_A = -\frac{wL^3}{30EI}$$

Sustituimos los valores anteriores en las ecuaciones 1 y 2 y resolvemos el sistema de ecuaciones

$$EI \left(-\frac{wL^3}{30EI} \right) = \frac{w}{15L^2} (0)^5 - \frac{2w}{12L} (0)^4 + \frac{wL}{6} (0)^2 + C_1 \quad \therefore C_1 = -\frac{wL^3}{30}$$

$$EI(0) = \frac{w}{90L^2} (0)^6 - \frac{w}{30L} (0)^5 + \frac{wL}{18} (0)^3 - \frac{wL^3}{30} (0) + C_2 \quad \therefore C_2 = 0$$

Sustituimos los valores de ambas constantes en las ecuaciones ① y ②

$$EI\theta = \frac{w}{15L^2} x^5 - \frac{w}{6L} x^4 + \frac{wL}{6} x^2 - \frac{wL^3}{30} \Rightarrow \text{ecuación general del giro}$$

$$EIy = \frac{w}{90L^2} x^6 - \frac{w}{30L} x^5 + \frac{wL}{18} x^3 - \frac{wL^3}{30} x \Rightarrow \text{ecuación general de la flecha}$$

Cálculo del giro en B

Sustituimos x=L en la ecuación general del giro

$$EI\theta_B = \frac{w}{15L^2} (L)^5 - \frac{2w}{12L} (L)^4 + \frac{wL}{6} (L)^2 - \frac{wL^3}{30}$$

$$\theta_B = \frac{wL^3}{30EI} = \frac{wL^3}{30EI} \curvearrowright$$

La flecha máxima está posicionada cuando $\Theta=0$

$$0 = \frac{w}{15L^2}x^5 - \frac{2w}{12L}x^4 + \frac{wL}{6}x^2 - \frac{wL^3}{30}$$

Resolvemos por tanteos

Evaluamos el polinomio

$$f(x) = \frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{30}$$

x	F(x)
0	-0.0333
0.1	-0.0317
0.2	-0.0269
0.3	-0.0195
0.4	-0.0103
0.5	0.0000
0.6	0.0103
0.7	0.0195
0.8	0.0269
0.9	0.0317
1	0.0333

La posición de la flecha máxima:

$$x_{max} = 0.5L$$

Sustituimos el valor anterior en la ecuación general de la flecha

$$EIy_{max} = \frac{w}{90L^2} \left(\frac{L}{2}\right)^6 - \frac{w}{30L} \left(\frac{L}{2}\right)^5 + \frac{wL}{18} \left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{wL^3}{30} \left(\frac{L}{2}\right)$$

$$EIy_{max} = \frac{wL^4}{5760} - \frac{wL^4}{960} + \frac{wL^4}{144} - \frac{wL^4}{60}$$

$$y_{max} = -\frac{61wL^4}{5760EI} \Rightarrow \text{Flecha máxima}$$

DIAGRAMA DE CORTANTE:

x(L)	V(WL)
0	0.333333333
0.1	0.314666667
0.2	0.264
0.3	0.189333333
0.4	0.098666667
0.5	0
0.6	-0.098666667
0.7	-0.189333333
0.8	-0.264
0.9	-0.314666667
1	-0.333333333

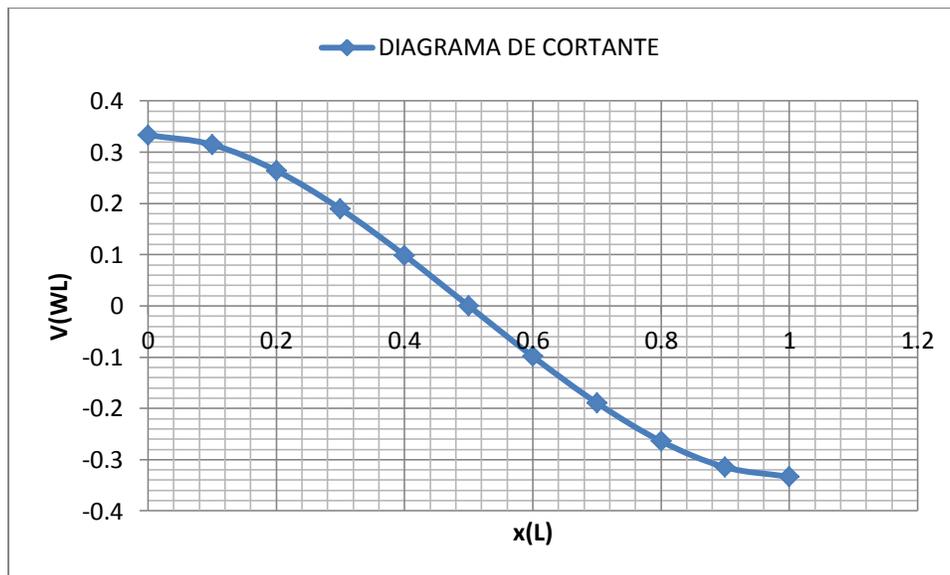


DIAGRAMA DE MOMENTO:

x(L)	M(W*L ²)
0	0
0.1	0.0327
0.2	0.061866667
0.3	0.0847
0.4	0.0992
0.5	0.104166667
0.6	0.0992
0.7	0.0847
0.8	0.061866667
0.9	0.0327
1	0

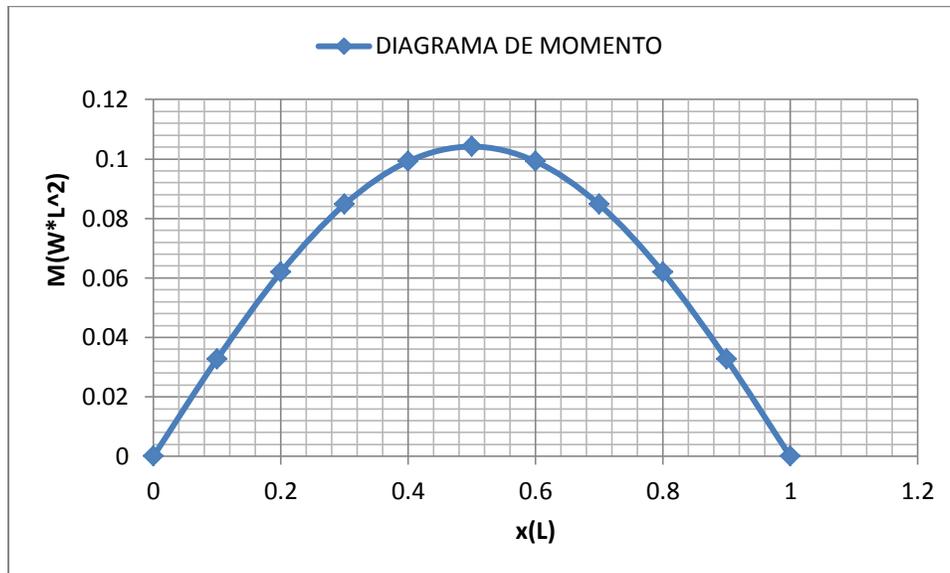
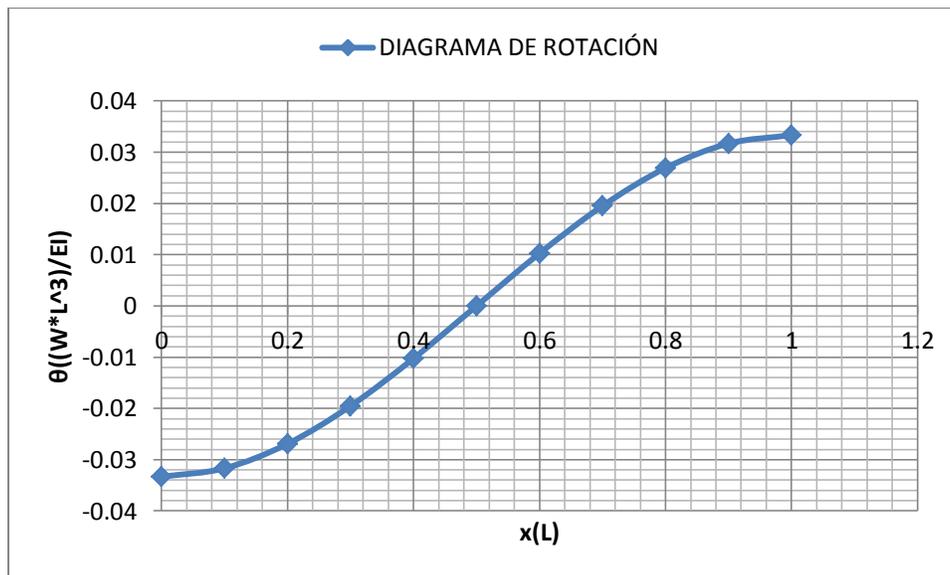


DIAGRAMA DE GIRO:

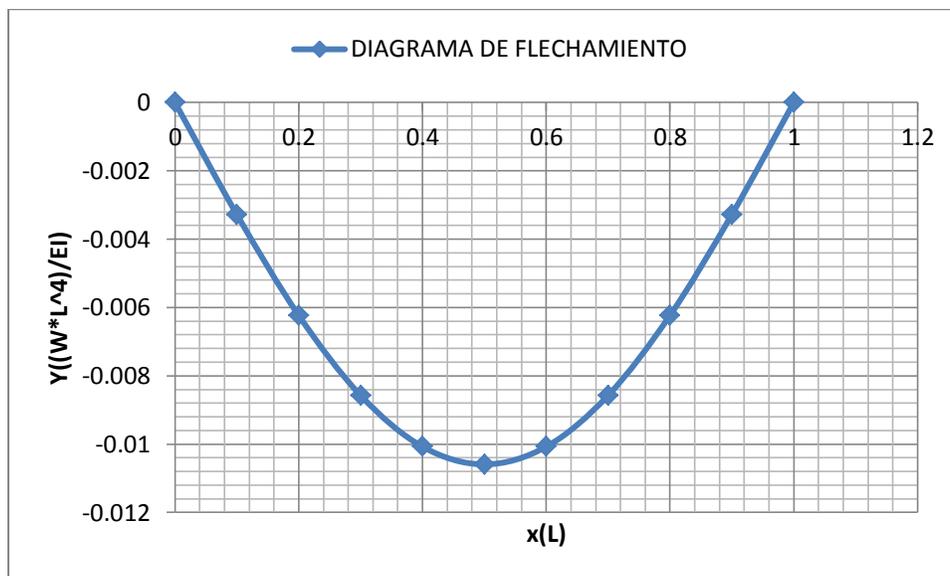
x(L)	$\theta((W*L^3)/EI)$
0	-0.033333333
0.1	-0.031682667
0.2	-0.026912
0.3	-0.019521333
0.4	-0.010250667
0.5	0
0.6	0.010250667
0.7	0.019521333
0.8	0.026912
0.9	0.031682667
1	0.033333333



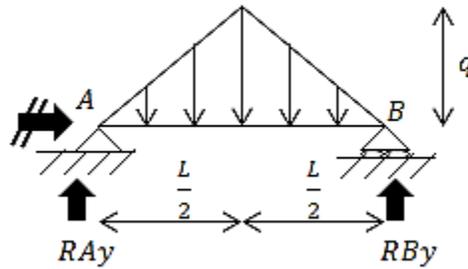
CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

DIAGRAMA DE FLECHAMIENTO:

x(L)	Y((W*L^4)/EI)
0	0
0.1	-0.0032781
0.2	-0.006232178
0.3	-0.0085729
0.4	-0.0100736
0.5	-0.010590278
0.6	-0.0100736
0.7	-0.0085729
0.8	-0.006232178
0.9	-0.0032781
1	0



1-E.-



SOLUCIÓN:

Reacciones

$$\sum MA = 0$$

$$\left(\frac{L}{2}\right)(q)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{2}\right) + \left(\frac{L}{2}\right)(q)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{L}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)\right) - R_{By}(L) = 0$$

$$\frac{qL^2}{12} + \frac{qL^2}{6} - R_{By}(L) = 0$$

$$R_{By} = \frac{\frac{qL^2}{4}}{\frac{L}{1}} = \frac{qL^2}{4L} = \frac{qL}{4} \uparrow$$

$$\sum Fy = 0$$

$$R_{Ay} - \frac{qL}{2} + \frac{qL}{4} = 0$$

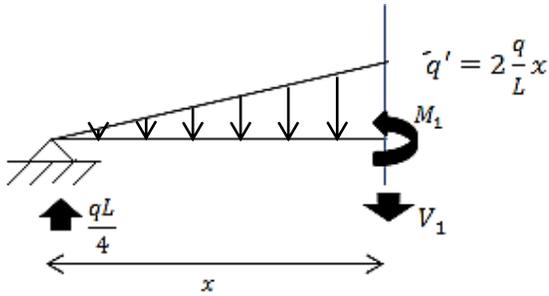
$$R_{Ay} = \frac{qL}{4} \uparrow$$

$$\sum Fx = 0$$

$$R_{Ax} = 0$$

Realizando un corte en el tramo ①

$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$, tomando como origen A



Por triángulos semejantes:

$$q \rightarrow \frac{L}{2}$$

$$q' \rightarrow x$$

$$\frac{q}{\frac{L}{2}} = \frac{q'}{x} \Rightarrow q' = \frac{2q}{L}x$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = \frac{qL}{4}x - \left[\frac{\left(2\frac{q}{L}x\right)(x)}{2} \right] \left(\frac{x}{3}\right)$$

$$M_1 = \frac{qL}{4}x - \frac{q}{3L}x^3$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx} = \frac{qL}{4} - \frac{q}{L}x^2$$

Posición del momento máximo:

$$0 = \frac{qL}{4} - \frac{q}{L}x^2$$

$$x^2 = \frac{\frac{qL}{4}}{\frac{q}{L}} = \frac{qL^2}{4q} = \frac{L^2}{4}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{L^2}{4}} \quad \therefore x_{max} = \frac{L}{2}$$

Momento máximo

$$M_{max} = \frac{qL}{4} \left(\frac{L}{2}\right) - \frac{q}{3L} \left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{qL^2}{8} - \frac{qL^2}{24}$$

$$M_{max} = \frac{qL^2}{12}$$

Ecuación diferencial de la elástica:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qL}{4}x - \frac{q}{3L}x^3$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int \left(\frac{qL}{4}x - \frac{q}{3L}x^3 \right) dx$$

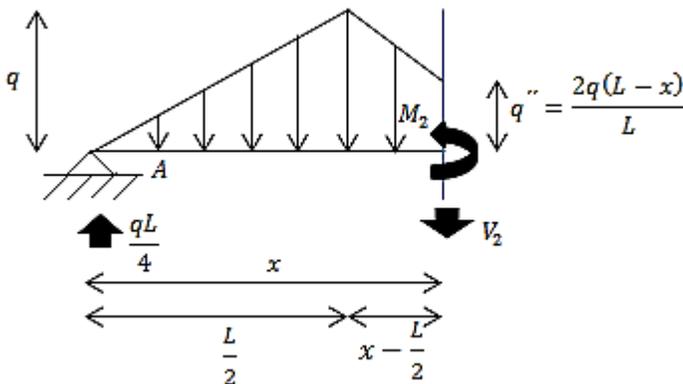
$$EI\theta_1 = \frac{qL}{8}x^2 - \frac{q}{12L}x^4 + C_1 \text{ ----} \textcircled{1}$$

$$EI \int dy = \int \left(\frac{qL}{8}x^2 - \frac{q}{12L}x^4 + C_1 \right) dx$$

$$EIy_1 = \frac{qL}{24}x^3 - \frac{q}{60L}x^5 + C_1x + C_2 \text{ ----} \textcircled{2}$$

Realizando un corte en el tramo $\textcircled{2}$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$



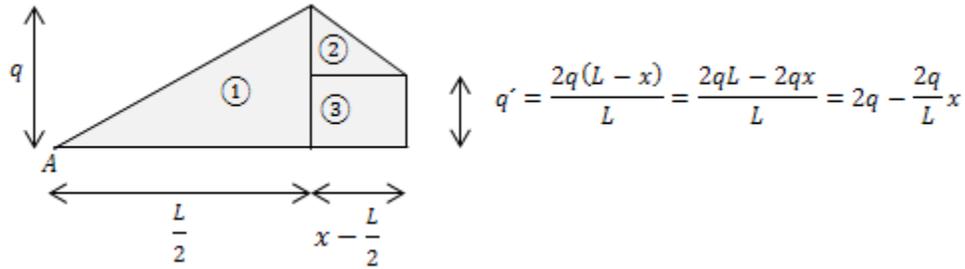
$$q \rightarrow \frac{L}{2}$$

$$q'' \rightarrow L - x$$

$$\frac{q}{\frac{L}{2}} = \frac{q''}{L - x}$$

$$q'' = \frac{q(L - x)}{\frac{L}{2}} = \frac{2q(L - x)}{L}$$

Valor de la carga y punto de aplicación para el área sombreada

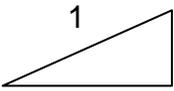
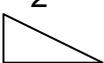
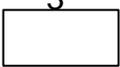


$$A_1 = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)(q)}{2} = \frac{\frac{qL}{2}}{2} = \frac{qL}{4}$$

$$A_2 = \frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)\left(q - \left(2q - \frac{2q}{L}x\right)\right)}{2} = \frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)\left(-q + \frac{2q}{L}x\right)}{2} = \frac{-qx + \frac{2q}{L}x^2 + \frac{qL}{2} - qx}{2}$$

$$= \frac{q}{L}x^2 - qx + \frac{qL}{4}$$

$$A_3 = \left(x - \frac{L}{2}\right)\left(2q - \frac{2q}{L}x\right) = 2qx - \frac{2q}{L}x^2 - qL + qx = -\frac{2q}{L}x^2 - qL + 3qx$$

Componente	A	\bar{x}	$\bar{x}A$
	$\frac{qL}{4}$	$\frac{L}{3}$	$\frac{qL^2}{12}$
	$\frac{q}{L}x^2 - qx + \frac{qL}{4}$	$\frac{x}{3} + \frac{L}{3}$	$\frac{q}{3L}x^3 - \frac{qL}{4}x + \frac{qL^2}{12}$
	$-\frac{2q}{L}x^2 + 3qx - qL$	$\frac{x}{2} + \frac{L}{4}$	$-\frac{q}{L}x^3 + qx^2 + \frac{qL}{4}x - \frac{qL^2}{4}$
Σ	$-\frac{q}{L}x^2 + 2qx - \frac{qL}{2}$		$-\frac{2q}{3L}x^3 + qx^2 - \frac{qL^2}{12}$

$$\bar{x}_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L}{3}$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$\bar{x}_2 = \frac{L}{2} + \frac{1}{3}\left(x - \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2} + \frac{x}{3} - \frac{L}{6} = \frac{x}{3} + \frac{L}{3}$$

$$\bar{x}_3 = \frac{L}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2} + \frac{x}{2} - \frac{L}{4} = \frac{x}{2} + \frac{L}{4}$$

$$\bar{x}_1 A_1 = \left(\frac{L}{3}\right)\left(\frac{qL}{4}\right) = \frac{qL^2}{12}$$

$$\bar{x}_2 A_2 = \left(\frac{x}{3} + \frac{L}{3}\right)\left(\frac{q}{L}x^2 - qx + \frac{qL}{4}\right) = \frac{q}{3L}x^3 - \frac{qx^2}{3} + \frac{qL}{12}x + \frac{q}{3}x^2 - \frac{qL}{3}x + \frac{qL^2}{12}$$

$$\bar{x}_3 A_3 = \left(\frac{x}{2} + \frac{L}{4}\right)\left(-\frac{2q}{L}x^2 + 3qx - qL\right) = -\frac{q}{L}x^3 + \frac{3q}{2}x^2 - \frac{qLx}{2} - \frac{q}{2}x^2 - \frac{3qL}{4}x - \frac{qL^2}{4}$$

La carga concentrada equivalente es:

$$A_T = -\frac{q}{L}x^2 + 2qx - \frac{qL}{2}$$

Brazo de palanca

$$\bar{x}_T = \frac{\sum \bar{x} A}{\sum A} = \frac{-\frac{2q}{3L}x^3 + qx^2 - \frac{qL^2}{12}}{-\frac{q}{L}x^2 + 2qx - \frac{qL}{2}} \text{ a la derecha de A}$$

$$\sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$M_2 = \frac{qL}{4}(x) - \left(-\frac{q}{L}x^2 + 2qx - \frac{qL}{2}\right)\left(x - \frac{-\frac{2q}{3L}x^3 + qx^2 - \frac{qL^2}{12}}{-\frac{q}{L}x^2 + 2qx - \frac{qL}{2}}\right)$$

$$M_2 = \frac{qL}{4}(x) + \frac{q}{L}x^3 - 2qx^2 + \frac{qL}{2}x - \frac{2q}{3L}x^3 + qx^2 - \frac{qL^2}{12}$$

$$M_2 = \frac{q}{3L}x^3 - qx^2 + \frac{3qL}{4}x - \frac{qL^2}{12}$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx} = \frac{q}{L}x^2 - 2qx + \frac{3qL}{4}$$

Posición del momento máximo

$$0 = \frac{2q}{3L}x^2 - 2qx + \frac{3qL}{4}$$

Resolviendo la ecuación

$$x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)\left(\frac{3}{4}\right)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2}L$$

$$x_2 = \frac{1}{2}L$$

∴ El momento máximo se ubica en $x_{max} = \frac{1}{2}L$

$$M_{max} = \frac{q}{3L}\left(\frac{1}{2}L\right)^3 - q\left(\frac{1}{2}L\right)^2 + \frac{3qL}{4}\left(\frac{1}{2}L\right) - \frac{qL^2}{12}$$

$$M_{max} = \frac{qL^2}{12}$$

Ecuación diferencial de la elástica

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{3L}(x)^3 - q(x)^2 + \frac{3qL}{4}(x) - \frac{qL^2}{12}$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int \left(\frac{q}{3L}(x)^3 - q(x)^2 + \frac{3qL}{4}(x) - \frac{qL^2}{12} \right) dx$$

$$EI\theta_2 = \frac{q}{12L}x^4 - \frac{qx^3}{3} + \frac{3qL}{8}x^2 - \frac{qL^2}{12}x + C_3 \text{ ---- } \textcircled{3}$$

$$EI \int dy = \int \left(\frac{q}{12L}x^4 - \frac{qx^3}{3} + \frac{3qL}{8}x^2 - \frac{qL^2}{12}x + C_3 \right) dx$$

$$EIy_2 = \frac{q}{60L}x^5 - \frac{q}{12}x^4 + \frac{qL}{8}x^3 - \frac{qL^2}{24}x^2 + C_3x + C_4 \text{ ---- } \textcircled{4}$$

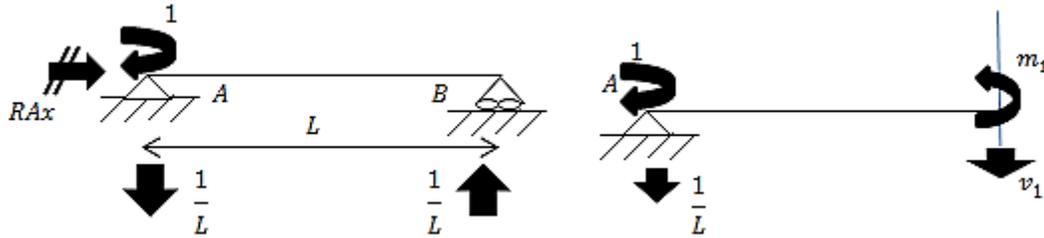
Condiciones de frontera

$X=0, y=0, \Theta = \delta?$

Trabajo virtual

Viga ficticia para obtener la rotación

$0 \leq x \leq L$



$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m_1 = 1 - \frac{1}{L}x$$

$$\theta_x = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{qL}{4}x - \frac{q}{3L}x^3 \right) \left(1 - \frac{1}{L}x \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \left(\frac{q}{3L}x^3 - qx^2 + \frac{3qL}{4}x - \frac{qL^2}{12} \right) \left(1 - \frac{1}{L}x \right) dx \end{aligned}$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{qL}{4}x - \frac{q}{3L}x^3 \right) \left(1 - \frac{1}{L}x \right) dx = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(\frac{qL}{4}x - \frac{q}{3L}x^3 - \frac{q}{4}x^2 + \frac{q}{3L^2}x^4 \right) dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{EI} \left[\frac{qL}{8}x^2 - \frac{q}{12L}x^4 - \frac{q}{12}x^3 + \frac{q}{15L^2}x^5 \right]_0^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{qL}{8} \left(\frac{L}{2} \right)^2 - \frac{q}{12L} \left(\frac{L}{2} \right)^4 - \frac{q}{12} \left(\frac{L}{2} \right)^3 + \frac{q}{15L^2} \left(\frac{L}{2} \right)^5 \right] = \frac{17qL^3}{960EI} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \left(\frac{q}{3L}x^3 - qx^2 + \frac{3qL}{4}x - \frac{qL^2}{12} \right) \left(1 - \frac{1}{L}x \right) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \left(\frac{q}{3L} x^3 - qx^2 + \frac{3qL}{4} x - \frac{qL^2}{12} - \frac{q}{3L^2} x^4 + \frac{q}{L} x^3 - \frac{3q}{4} x^2 + \frac{qL}{12} x \right) dx \\
 &= \frac{1}{EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \left(-\frac{q}{3L^2} x^4 + \frac{4q}{3L} x^3 - \frac{7q}{4} x^2 + \frac{5qL}{6} x - \frac{qL^2}{12} \right) dx \\
 &= \frac{1}{EI} \left[-\frac{q}{15L^2} x^5 + \frac{q}{3L} x^4 - \frac{7q}{12} x^3 + \frac{5qL}{12} x^2 - \frac{qL^2}{12} x \right]_{\frac{L}{2}}^L \\
 &= \frac{1}{EI} \left[-\frac{q}{15L^2} \left(L^5 - \left(\frac{L}{2} \right)^5 \right) + \frac{q}{3L} \left(L^4 - \left(\frac{L}{2} \right)^4 \right) - \frac{7q}{12} \left(L^3 - \left(\frac{L}{2} \right)^3 \right) + \frac{5qL}{12} \left(L^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{qL^2}{12} \left(L - \left(\frac{L}{2} \right) \right) \right] \\
 &= \frac{1}{EI} \left[-\frac{31qL^3}{480} + \frac{5qL^3}{16} - \frac{49qL^3}{96} + \frac{5qL^3}{16} - \frac{qL^3}{24} \right] = \frac{qL^3}{120EI} \\
 &\theta_x = \frac{17qL^3}{960EI} + \frac{qL^3}{120EI} = \frac{5qL^3}{192EI} \quad \therefore \theta_x = \frac{5qL^3}{192EI} \quad \curvearrowright
 \end{aligned}$$

Obtención de las constantes

Condiciones de frontera

$$x = 0, y = 0, \theta_A = \frac{-5qL^3}{192EI}$$

$$EI \left(\frac{-5qL^3}{192EI} \right) = \frac{qL}{8} (0)^2 - \frac{q}{12L} (0)^4 + C_1 \quad \therefore C_1 = \frac{-5qL^3}{192}$$

$$EI(0) = \frac{qL}{24} (0)^3 - \frac{q}{60L} (0)^5 - \frac{5qL^3}{192} (0) + C_2 \quad \therefore C_2 = 0$$

Condiciones de continuidad

$$\text{en } x = \frac{L}{2}, \theta_1 = \theta_2, y_1 = y_2$$

$$\frac{qL}{8} (x)^2 - \frac{q}{12L} (x)^4 - \frac{5qL^3}{192} = \frac{q}{12L} x^4 - \frac{qx^3}{3} + \frac{3qL}{8} x^2 - \frac{qL^2}{12} x + C_3, \text{ en } x = \frac{L}{2}$$

$$C_3 = -\frac{q}{6L} x^4 + \frac{qx^3}{3} - \frac{qL}{4} x^2 + \frac{qL^2}{12} x - \frac{5qL^3}{192}, \text{ en } x = \frac{L}{2}$$

$$C_3 = -\frac{q}{6L} \left(\frac{L}{2}\right)^4 + \frac{q}{3} \left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{qL}{4} \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{qL^2}{12} \left(\frac{L}{2}\right) - \frac{5qL^3}{192}$$

$$C_3 = qL^3 \left(-\frac{1}{96} + \frac{1}{24} - \frac{1}{16} + \frac{1}{24} - \frac{5}{192}\right)$$

$$C_3 = -\frac{qL^3}{64}$$

$$\begin{aligned} & \frac{qL}{24} (x)^3 - \frac{q}{60L} (x)^5 - \frac{5qL^3}{192} (x) \\ = & \frac{q}{60L} (x)^5 - \frac{q}{12} (x)^4 + \frac{qL}{8} (x)^3 - \frac{qL^2}{24} x^2 - \frac{qL^3}{64} x + C_4, \text{ en } x = \frac{L}{2} \end{aligned}$$

$$C_4 = -\frac{q}{30L} (x)^5 + \frac{q}{12} (x)^4 - \frac{qL}{12} (x)^3 + \frac{qL^2}{24} x^2 - \frac{qL^3}{96} x, \text{ en } x = \frac{L}{2}$$

$$C_4 = -\frac{q}{30L} \left(\frac{L}{2}\right)^5 + \frac{q}{12} \left(\frac{L}{2}\right)^4 - \frac{qL}{12} \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{qL^2}{24} \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{qL^3}{96} \left(\frac{L}{2}\right)$$

$$C_4 = qL^4 \left(-\frac{1}{960} + \frac{1}{192} - \frac{1}{96} + \frac{1}{96} - \frac{1}{192}\right)$$

$$C_4 = -\frac{qL^4}{960}$$

Ecuaciones de giro y flecha por tramo:

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$EI\theta_1 = \frac{qL}{8} x^2 - \frac{q}{12L} x^4 - \frac{5qL^3}{192}$$

$$EIy_1 = \frac{qL}{24} x^3 - \frac{q}{60L} x^5 - \frac{5qL^3}{192} x$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$EI\theta_2 = \frac{q}{12L} x^4 - \frac{qx^3}{3} + \frac{3qL}{8} x^2 - \frac{qL^2}{12} x - \frac{qL^3}{64}$$

$$EIy_2 = \frac{q}{60L} x^5 - \frac{q}{12} x^4 + \frac{qL}{8} x^3 - \frac{qL^2}{24} x^2 - \frac{qL^3}{64} x - \frac{qL^4}{960}$$

Cálculo de las flechas máximas y sus posiciones para cada tramo:

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$0 = \frac{qL}{8}x^2 - \frac{9}{12L}x^4 - \frac{59L^3}{192}$$

$$-\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{192} = 0$$

$$x^4 = z^2, x^2 = z$$

$$-\frac{1}{12}z^2 + \frac{1}{8}z - \frac{5}{192} = 0$$

$$z = \frac{-\left(\frac{1}{8}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{12}\right)\left(-\frac{5}{192}\right)}}{2\left(-\frac{1}{12}\right)}$$

$$z = \frac{-\frac{1}{8} \pm \frac{1}{12}}{-\frac{1}{6}}$$

$$z_1 = \frac{1}{4}L^2$$

$$z_2 = \frac{5}{4}L^2$$

como $x = \pm \sqrt{z}$

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{4}L^2} = \frac{1}{2}L$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{1}{4}L^2} = -\frac{1}{2}L$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{5}{4}L^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}L$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{5}{4}L^2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}L$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$\therefore x_{max} = \frac{1}{2} L$ es la posición de la flecha máxima

$$EI y_{max} = \frac{qL}{24} \left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{q}{60L} \left(\frac{L}{2}\right)^5 - \frac{5qL^3}{192} \left(\frac{L}{2}\right)$$

$$y_{max} = -\frac{qL^4}{120EI} = \frac{qL^4}{120EI} \downarrow \text{(hacia abajo)}$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$0 = \frac{q}{12L} x^4 - \frac{qx^3}{3} + \frac{3qL}{8} x^2 - \frac{qL^2}{12} x - \frac{qL^3}{64}$$

Evaluamos el polinomio de 0 a 1, ya que la solución debe estar en el intervalo [0,1]

$$f(x) = \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{8} x^2 - \frac{1}{12} x - \frac{1}{64}$$

x	f(x)
0	-0.015625
0.1	-0.02053
0.2	-0.019825
0.3	-0.0152
0.4	-0.00815833
0.5	0
0.6	0.08175
0.7	0.0154
0.8	0.0211
0.9	0.0248
1	0.026

$$\therefore x_{max} = \frac{1}{2} L$$

$$EI y_{max} = \frac{q}{60L} \left(\frac{L}{2}\right)^5 - \frac{q}{12} \left(\frac{L}{2}\right)^4 + \frac{qL}{8} \left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{qL^2}{24} \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{qL^3}{64} \left(\frac{L}{2}\right) - \frac{qL^4}{960}$$

$$y_{max} = -\frac{qL^4}{120EI} = y_{max} = \frac{qL^4}{120EI} \downarrow \text{ ok } \checkmark$$

DIAGRAMA DE CORTANTE:

x (L)	V (QL)
0	0.25
0.1	0.24
0.2	0.21
0.3	0.16
0.4	0.09
0.5	0
0.5	0
0.6	-0.09
0.7	-0.16
0.8	-0.21
0.9	-0.24
1	-0.25

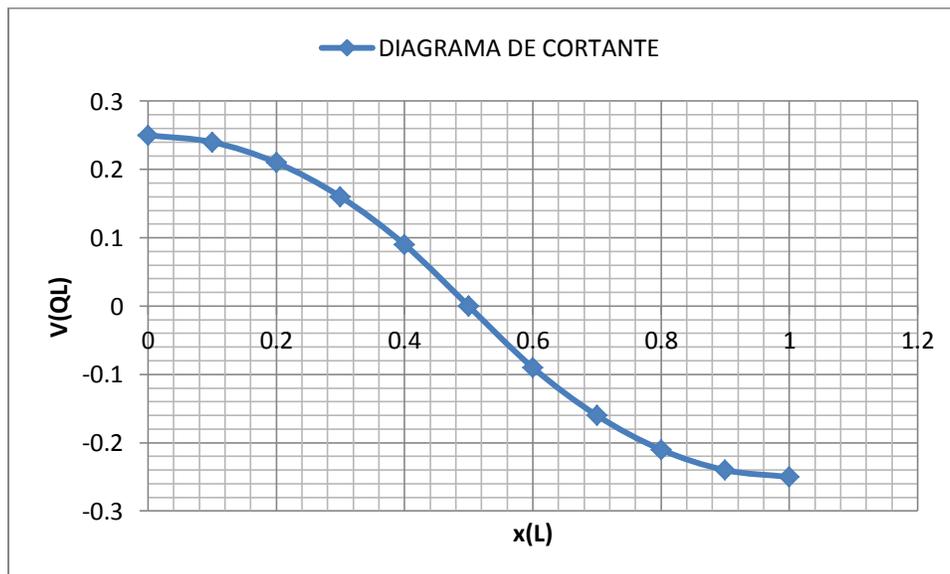


DIAGRAMA DE MOMENTO:

x (L)	M (Q*L ²)
0	0
0.1	0.024666667
0.2	0.047333333
0.3	0.066
0.4	0.078666667
0.5	0.083333333
0.5	0.083333333
0.6	0.078666667
0.7	0.066
0.8	0.047333333
0.9	0.024666667
1	0

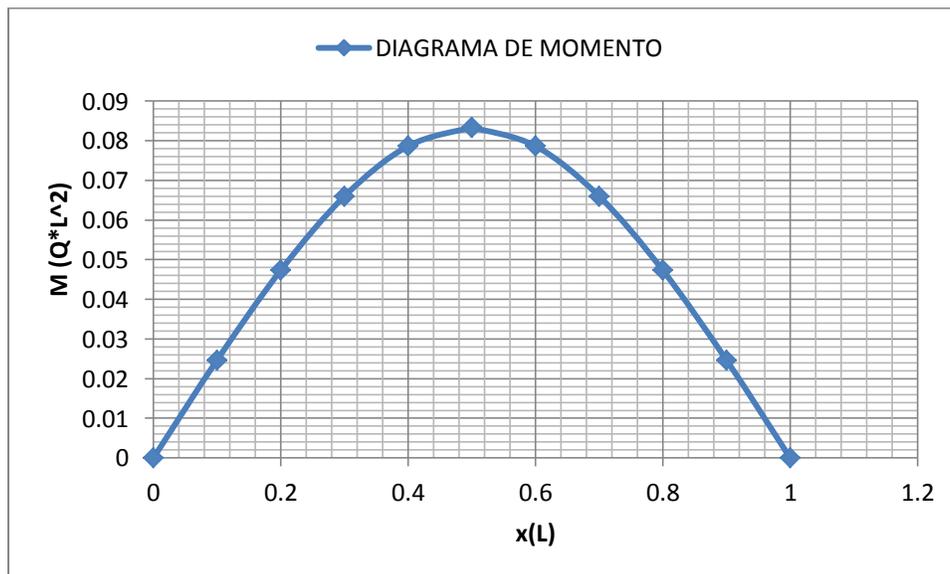


DIAGRAMA DE GIRO:

x (L)	$\theta ((Q \cdot L^3)/EI)$
0	-0.026041667
0.1	-0.0248
0.2	-0.021175
0.3	-0.015466667
0.4	-0.008175
0.5	0
0.5	0
0.6	0.008175
0.7	0.015466667
0.9	0.0248
1	0.026041667

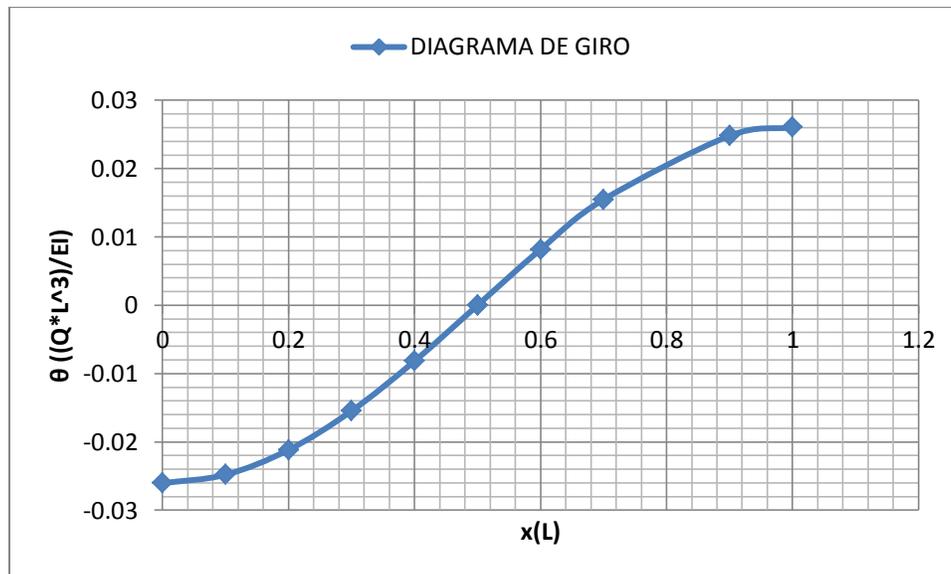
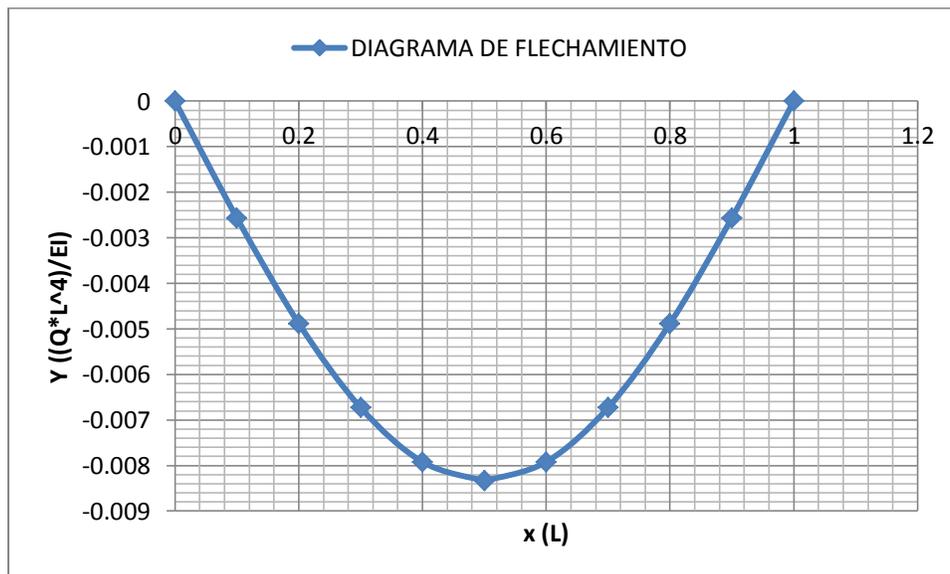
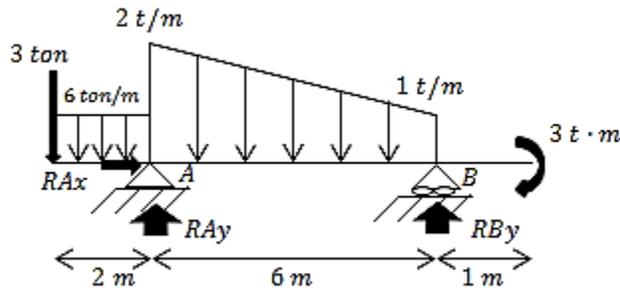


DIAGRAMA DE FLECHAMIENTO:

x (L)	Y ((Q*L ⁴)/EI)
0	0
0.1	-0.002562667
0.2	-0.004880333
0.3	-0.006728
0.4	-0.007920667
0.5	-0.008333333
0.5	-0.008333333
0.6	-0.007920667
0.7	-0.006728
0.8	-0.004880333
0.9	-0.002562667
1	0

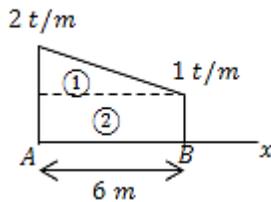


1-F.-



SOLUCIÓN:

Para la carga trapezoidal:



Componente	A, t	\bar{x}, m	$\bar{x}A, t \cdot m$
①=rectángulo	6	3	18
②= triángulo	3	2	6
	$\sum A$ = 9		$\sum \bar{x} A$ = 24

La carga concentrada equivalente es:

$$W = 9t \downarrow$$

y su línea de acción esta localizada a una distancia:

$$\bar{x} = \frac{8}{3}m \text{ a la derecha de A}$$

Cálculo de las reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$-(3)(2) - (6)(2) \left[\left(\frac{1}{2} \right) (2) \right] + 9 \left(\frac{8}{3} \right) - 6R_{By} + 3 = 0$$

$$R_{By} = \frac{-9}{-6} ton = 1.5 ton \uparrow$$

$$\sum MB = 0$$

$$3 - 9 \left(\frac{10}{3} \right) + 6R_{Ay} - 6(2)(1 + 6) - 3(8) = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{135}{6} ton = 22.5 ton \uparrow$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$\sum Fy = 0$$

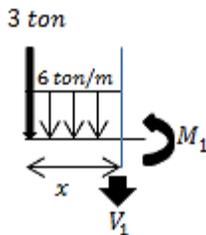
$$-3 - (6 * 2) + 1.5 - 9 + 22.5 = 0 \quad ok \checkmark$$

$$\sum Fx = 0$$

$$R_{Ax} = 0$$

Obtenemos las ecuaciones de momento de cada tramo; efectuamos un corte en cada uno de ellos

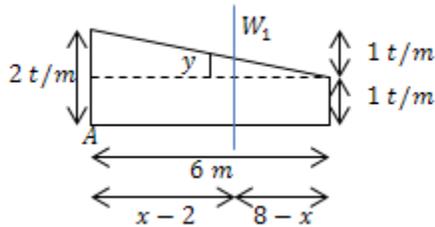
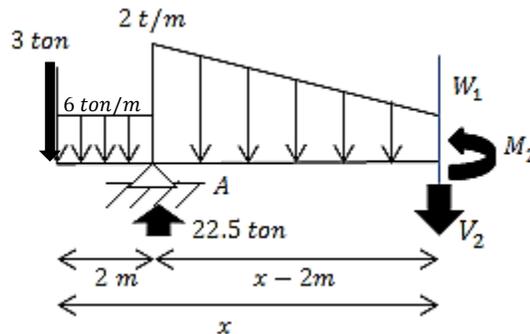
$$0 \leq x \leq 2m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -6(x) \left(\frac{x}{2}\right) - 3x = -3x^2 - 3x$$

$$2m \leq x \leq 8m$$



$$1 \text{ t/m} \rightarrow 6m$$

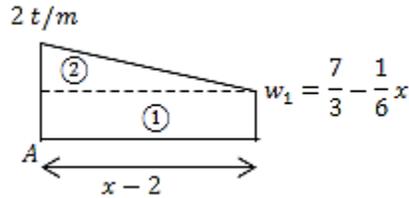
$$y \rightarrow 8m - x$$

$$\frac{1}{6} = \frac{y}{8-x}$$

$$y = \frac{(1)(8-x)}{6} = \frac{4}{3} - \frac{1}{6}x$$

$$W_1 = 1 + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{6}x\right) = \frac{7}{3} - \frac{1}{6}x$$

Para la carga trapezoidal



$$A_1 = (x-2) \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{6}x \right) = \frac{7}{3}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{14}{3} + \frac{1}{3}x = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{14}{3}$$

$$A_2 = \frac{(x-2) \left(2 - \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{6}x \right) \right)}{2} = \frac{(x-2) \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{6}x \right)}{2} = \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x}{2}$$

$$A_2 = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{x-2}{2} = \frac{1}{2}x - 1$$

$$\bar{x}_2 = \frac{x-2}{3} = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$\bar{x}_1 A_1 = \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{14}{3} \right) \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{14}{3}$$

$$\bar{x}_1 A_1 = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + \frac{14}{3}$$

$$\bar{x}_2 A_2 = \left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \right) = \frac{x^3}{36} - \frac{x^2}{9} + \frac{x}{9} - \frac{x^2}{18} + \frac{2x}{9} - \frac{2}{9}$$

$$\bar{x}_2 A_2 = \frac{1}{36}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

Componente	A	\bar{x}	$\bar{x}A$
①= rectángulo	$-\frac{1}{6}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{14}{3}$	$\frac{1}{2}x - 1$	$-\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + \frac{14}{3}$
②= triángulo	$\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$	$\frac{1}{36}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$
Σ	$-\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{13}{3}$		$-\frac{x^3}{18} + \frac{4x^2}{3} - \frac{14x}{3} + \frac{40}{9}$

La carga concentrada equivalente es:

$$A_T = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{13}{3}$$

Brazo de palanca

$$\bar{x}_T = \frac{\Sigma \bar{x}A}{\Sigma A} = \frac{-\frac{x^3}{18} + \frac{4x^2}{3} - \frac{14x}{3} + \frac{40}{9}}{-\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{13}{3}} \text{ a la derecha de A}$$

$$\Sigma M_{corte} = 0$$

$$M_2 = -3x - 6(2) \left(\frac{1}{2}(2) + x - 2 \right) + 22.5(x - 2) - \left(-\frac{x^2}{12} + \frac{7}{3}x - \frac{13}{3} \right) \left[x - 2 - \left(\frac{-\frac{x^3}{18} + \frac{4x^2}{3} - \frac{14x}{3} + \frac{40}{9}}{-\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{13}{3}} \right) \right]$$

$$M_2 = -3x - 12(x - 1) + 22.5(x - 2) - \left(-\frac{x^2}{12} + \frac{7}{3}x - \frac{13}{3} \right) (x - 2) + \left(-\frac{x^3}{18} + \frac{4x^2}{3} - \frac{14x}{3} + \frac{40}{9} \right)$$

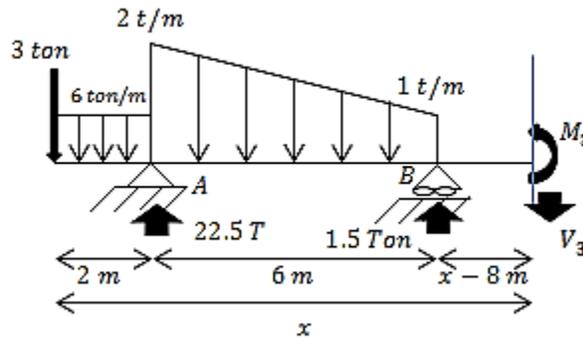
CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$M_2 = -3x - 12x + 12 + 22.5x - 45 - \left(-\frac{x^3}{12} + \frac{7}{3}x^2 - \frac{13}{3}x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{26}{3} \right) + \left(\frac{-x^3}{18} + \frac{4x^2}{3} - \frac{14x}{3} + \frac{40}{9} \right)$$

$$M_2 = x^3 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{18} \right) + x^2 \left(-\frac{7}{3} - \frac{1}{6} + \frac{4}{3} \right) + x \left(\frac{13}{3} + \frac{14}{3} - \frac{14}{3} + 22.5 - 12 - 3 \right) + \left(12 - 45 - \frac{26}{3} + \frac{40}{9} \right)$$

$$M_2 = \frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9}$$

$$8m \leq x \leq 9m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = -3x - 6(2) \left(\frac{1}{2}(2) + 6 + x - 8 \right) + 22.5(6 + x - 8) - 9 \left(6 - \frac{8}{3} + x - 8 \right) + 1.5(x - 8)$$

$$M_3 = -3x + 12 - 12x - 45 + 22.5x + 42 - 9x + 1.5x - 12 = -3$$

Tramo 1 $\Rightarrow 0 \leq x \leq 2m$

$$M_1 = -3x^2 - 3x$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx} = -6x - 3$$

$$0 = -3 - 6x_{max}$$

$$3 = -6x_{max}$$

$$x_{max} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Debido a que la solución no tiene sentido numérico (no está dentro del intervalo numérico de la barra) la posición del momento máximo estará en el límite superior del intervalo de distancia analizado

$$\therefore x_{max} = 2m$$

$$M_{max} = -3(2) - 3(2)^2 = -18t \cdot m$$

Tramo 2 $\Rightarrow 2m \leq x \leq 8m$

$$M_2 = \frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9}$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx} = \frac{1}{12}x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{71}{6}$$

$$\frac{1}{12}x_{max}^2 - \frac{7}{3}x_{max} + \frac{71}{6} = 0$$

$$x_{max} = \frac{-\left(-\frac{7}{3}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{7}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{71}{6}\right)}}{2\left(\frac{1}{12}\right)}$$

$$x_{max} = \frac{\frac{7}{3} \pm 1.224745}{\frac{1}{6}}$$

$$x_{max1} = 3(\sqrt{6}) + 14 \approx 21.34847 \text{ m} \rightarrow \text{no está dentro del intervalo analizado}$$

$$x_{max1} = 14 - 3(\sqrt{6}) \approx 6.65153 \quad \text{ok } \checkmark$$

$$M_{max} = \left(\frac{1}{36}\right)(14 - 3(\sqrt{6}))^3 - \left(\frac{7}{6}\right)(14 - 3(\sqrt{6}))^2 + \left(\frac{71}{6}\right)(14 - 3(\sqrt{6})) - \frac{335}{9}$$

$$M_{max} = (9\sqrt{6} - 24)t \cdot m = -1.9546 \text{ t} \cdot m$$

Tramo 3

$$8m \leq X \leq 9m$$

$$M_3 = -3$$

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx} = 0$$

El momento es constante a lo largo de este tramo, y vale $-3t \cdot m$

Aplicamos la ecuación diferencial de la elástica para cada tramo de las ecuaciones de momento:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$$0 \leq x \leq 2m$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -3x^2 - 3x$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int (-3x^2 - 3x) dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta$$

$$EI\theta_1 = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C_1 \text{ -----} \textcircled{1}$$

$$EI \int dy = \int \left(-x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C_1 \right) dx$$

$$EIy_1 = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + C_1x + C_2 \text{ -----} \textcircled{2}$$

$$2m \leq x \leq 8m$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9}$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int \left(\frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9} \right) dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{1}{144}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{335}{9}x + C_3$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta$$

$$EI\theta_2 = \frac{1}{144}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{335}{9}x + C_3 \text{ -----} \textcircled{3}$$

$$EI \int dy = \int \left(\frac{1}{144}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{335}{9}x + C_3 \right) dx$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$EIy_2 = \frac{1}{720}x^5 - \frac{7}{72}x^4 + \frac{71}{36}x^3 - \frac{335}{18}x^2 + C_3x + C_4 \text{ --- } \textcircled{4}$$

$$8m \leq x \leq 9m$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -3$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int -3dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -3x + C_5$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta$$

$$EI\theta_3 = -3x + C_5 \text{ --- } \textcircled{5}$$

$$EI \int dy = \int (-3x + C_5)dx$$

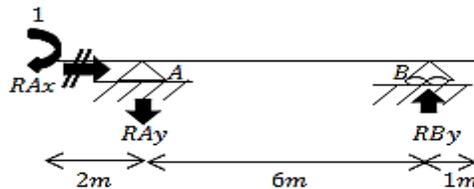
$$EIy_3 = -\frac{3}{2}x^2 + C_5x + C_6 \text{ --- } \textcircled{6}$$

Cuando $x = 0, y = \theta = i$?

La rotación y la flecha no las conocemos a una distancia de cero, porque ese nodo tiene 3 grados de libertad, es decir no tiene ningún apoyo por lo cual puede rotar, girar y moverse vertical y horizontalmente.

Aplicamos el trabajo virtual para conocer el valor de la rotación y la flecha a una distancia de cero:

Viga ficticia para obtener la rotación:

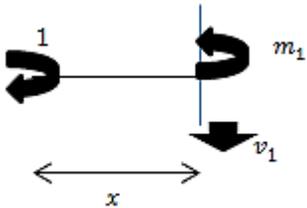


CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$\begin{aligned} \sum MA = 0 & & \sum Fy = 0 & & \sum Fx = 0 \\ 1 - 6R_{By} = 0 & & -R_{Ay} + \frac{1}{6} = 0 & & R_{Ax} = 0 \\ R_{By} = \frac{1}{6} \uparrow & & R_{Ay} = \frac{1}{6} \downarrow & & \end{aligned}$$

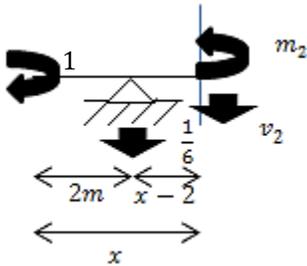
Realizamos un corte en cada tramo:

$$0 \leq x \leq 2m$$



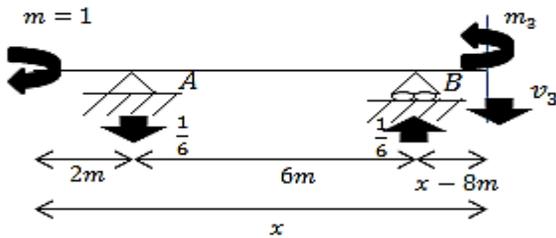
$$\begin{aligned} \sum mcorte = 0 \\ m_1 = 1 \end{aligned}$$

$$2m \leq x \leq 8m$$



$$\begin{aligned} \sum mcorte = 0 \\ m_2 = 1 - \frac{1}{6}(x - 2) = 1 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{3} \\ m_2 = -\frac{1}{6}x + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$8m \leq x \leq 9m$$



$$\begin{aligned} \sum mcorte = 0 \\ m_3 = 1 - \frac{1}{6}(6 + x - 8) + \frac{1}{6}(x - 8) \\ m_3 = 1 + \frac{1}{6}(-6 - x + 8 + x - 8) \\ m_3 = 1 + \frac{1}{6}(-6) = 0 \end{aligned}$$

Aplicamos la fórmula de trabajo virtual para la rotación en cualquier punto:

$$\theta_x = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

$$\begin{aligned} \theta_x = \frac{1}{EI} \int_0^2 (-3x^2 - 3x)(1) + \frac{1}{EI} \int_2^8 \left(\frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9} \right) \left(-\frac{1}{6}x + \frac{4}{3} \right) dx \\ + \frac{1}{EI} \int_8^9 (-3)(0) dx \end{aligned}$$

Resolviendo integrales por separado

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_0^2 (-3x^2 - 3x)(1) = \frac{1}{EI} \int_0^2 (-3x^2 - 3x) dx = \frac{1}{EI} \left[-x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^2 \\ = \frac{1}{EI} \left[-(2^3 - 0^3) - \frac{3}{2}(2^2 - 0^2) \right] = -\frac{14}{EI} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9} \right) \left(-\frac{1}{6}x + \frac{4}{3} \right) =$$

$$-\frac{1}{126}x^4 + \frac{7}{36}x^3 - \frac{71}{36}x^2 + \frac{335}{54}x$$

$$+ \frac{1}{27}x^3 - \frac{14}{9}x^2 + \frac{142}{9}x - \frac{1340}{27}$$

$$-\frac{1}{126}x^4 + \frac{25}{108}x^3 - \frac{127}{36}x^2 + \frac{1187}{54}x - \frac{1340}{27}$$

$$\frac{1}{EI} \int_2^8 \left(\frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9} \right) \left(-\frac{1}{6}x + \frac{4}{3} \right) dx =$$

$$\frac{1}{EI} \int_2^8 \left(-\frac{1}{126}x^4 + \frac{25}{108}x^3 - \frac{127}{36}x^2 + \frac{1187}{54}x - \frac{1340}{27} \right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{1080}x^5 + \frac{25}{432}x^4 - \frac{127}{108}x^3 + \frac{1187}{108}x^2 - \frac{1340}{27}x \right]_2^8$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{1080}(8^5 - 2^5) + \frac{25}{432}(8^4 - 2^4) - \frac{127}{108}(8^3 - 2^3) + \frac{1187}{108}(8^2 - 2^2) \right. \\ \left. - \frac{1340}{27}(8 - 2) \right] \end{aligned}$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

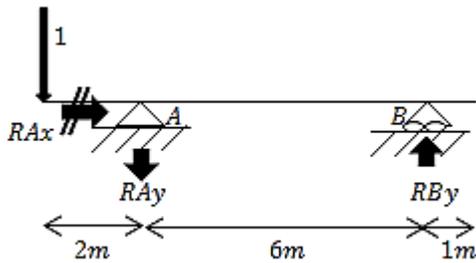
$$= \frac{1}{EI} \left(-\frac{1364}{45} + \frac{2125}{9} - \frac{1778}{3} + \frac{5935}{9} - \frac{2680}{9} \right) = -\frac{126}{5EI}$$

$$\frac{1}{EI} \int_8^9 (-3)(0) dx = 0$$

$$\theta_x = -\frac{14}{EI} - \frac{126}{5EI} + 0$$

$$\theta_x = -\frac{196}{5EI} \quad \therefore \theta_x = \frac{196}{5EI} \curvearrowright$$

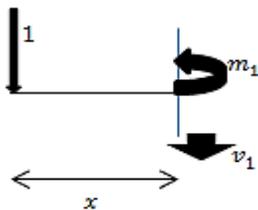
Viga ficticia para obtener la deflexión



$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 & & \sum F_y = 0 & & \sum F_x = 0 \\ -1(2) + 6R_{By} = 0 & & -HR_{Ay} - R_{By} = 0 & & R_{Ax} = 0 \\ R_{By} = \frac{2}{6} \downarrow & & R_{Ay} = 1 + \frac{2}{6} = \frac{4}{3} \uparrow & & \end{aligned}$$

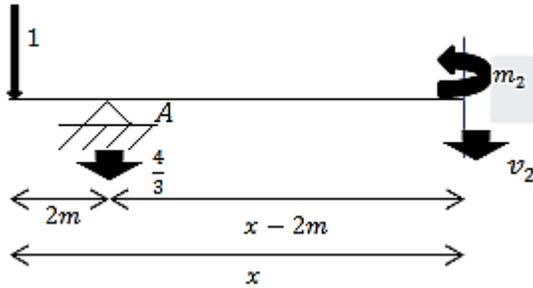
Realizando un corte cada tramo:

$$0 \leq x \leq 2m$$



$$\begin{aligned} \sum m_{corte} = 0 \\ m_1 = -1(x) = -x \end{aligned}$$

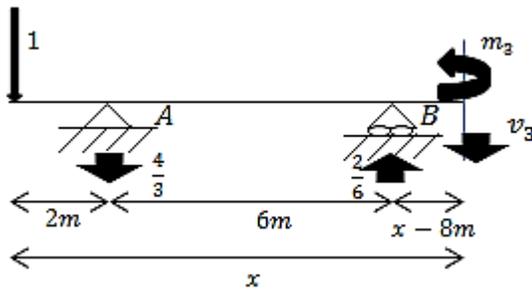
$$2m \leq x \leq 8m$$



$$\sum m_{\text{corte}} = 0$$

$$m_2 = -1(x) + \frac{4}{3}(x - 2) = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$$

$$8m \leq x \leq 9m$$



$$\sum m_{\text{corte}} = 0$$

$$m_3 = -1(x) + \frac{4}{3}(6 + x - 8) - \frac{2}{6}(x - 8)$$

$$m_3 = -x - \frac{8}{3} + \frac{4}{3}x - \frac{2}{6}x + \frac{8}{3}$$

$$m_3 = 0$$

Aplicamos la fórmula de trabajo virtual para la deflexión en cualquier punto:

$$Y_x = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

$$Y_x = \frac{1}{EI} \int_0^2 (-3x^2 - 3x)(-x) dx + \frac{1}{EI} \int_2^8 \left(\frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9} \right) \left(\frac{1}{3}x - \frac{8}{3} \right) dx + \frac{1}{EI} \int_8^9 (-3)(0) dx$$

Resolviendo integrales por separado:

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_0^2 (-3x^2 - 3x)(-x) dx &= \frac{1}{EI} \int_0^2 (3x^3 + 3x^2) dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{3}{4} x^4 + x^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{3}{4} \right) (2^4 - 0^4) + (2^3 - 0^3) \right] = \frac{20}{EI} \\ &= \frac{1}{108} x^4 - \frac{7}{18} x^3 + \frac{71}{18} x^2 - \frac{335}{27} x - \frac{2}{27} x^3 + \frac{28}{9} x^2 - \frac{284}{9} x + \frac{2680}{27} \\ &= \frac{1}{108} x^4 - \frac{25}{54} x^3 + \frac{127}{18} x^2 - \frac{1187}{27} x + \frac{2680}{27} \\ &= \frac{1}{EI} \int_2^8 \left(\frac{1}{36} x^3 - \frac{7}{6} x^2 + \frac{71}{6} x - \frac{335}{9} \right) \left(\frac{1}{3} x - \frac{8}{3} \right) dx \\ &= \frac{1}{EI} \int_2^8 \left(\frac{1}{108} x^4 - \frac{25}{54} x^3 + \frac{127}{18} x^2 - \frac{1187}{27} x + \frac{2680}{27} \right) dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{540} x^5 - \frac{25}{216} x^4 + \frac{127}{54} x^3 - \frac{1187}{54} x^2 + \frac{2680}{27} x \right]_2^8 \\ &= \left[\frac{1}{540} (8^5 - 2^5) - \frac{25}{216} (8^4 - 2^4) + \frac{127}{54} (8^3 - 2^3) - \frac{1187}{54} (8^2 - 2^2) + \frac{2680}{27} (8 - 2) \right] \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{2728}{45} - \frac{4250}{9} + \frac{3556}{3} - \frac{11870}{9} + \frac{5360}{9} \right] = \frac{252}{5EI} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{EI} \int_8^9 (-3)(0) dx = 0$$

$$Y_x = \frac{20}{EI} + \frac{252}{5EI} + 0 = \frac{352}{5EI}$$

$$\therefore Y_x = \frac{352}{5EI} \downarrow (\text{hacia abajo})$$

Las condiciones de frontera son:

$$x = 0, y = -\frac{352}{5EI}, \theta = \frac{196}{5EI}$$

Condiciones de continuidad $\begin{matrix} \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \\ \swarrow \end{matrix}$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_2 & \text{en } x = 2m \\ y_1 &= y_2 & \text{en } x = 2m \\ \theta_2 &= \theta_3 & \text{en } x = 8m \\ y_2 &= y_3 & \text{en } x = 8m \end{aligned}$$

Con esto podemos resolver el sistema de ecuaciones de 6x6

Sustituimos $x = 0, \theta = \frac{196}{5EI}$ en ①

$$EI \frac{196}{5EI} = -(0)^3 - \frac{3}{2}(0)^2 + C_1 \quad C_1 = \frac{196}{5}$$

Sustituimos $x = 0, y = -\frac{352}{5EI}, C_1 = \frac{196}{5}$ en ②

$$EI \left(-\frac{352}{5EI} \right) = -\frac{1}{4}(0)^4 - \frac{1}{2}(0)^3 + \frac{196}{5}(0) + C_2 \quad C_2 = \frac{-352}{5}$$

Aplicando la 1ª condición de continuidad:

$$-x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C_1 = \frac{1}{144}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{335}{9}x + C_3, \text{ en } x = 2$$

$$-(2)^3 - \frac{3}{2}(2)^2 + \frac{196}{5} = \frac{1}{144}(2)^4 - \frac{7}{18}(2)^3 + \frac{71}{12}(2)^2 - \frac{335}{9}(2) + C_3$$

$$C_3 = -(2^4) \left(\frac{1}{144} \right) + (2^3) \left(-1 + \frac{7}{18} \right) + (2^2) \left(-\frac{3}{2} - \frac{71}{12} \right) + (2) \left(\frac{335}{9} \right) + \frac{196}{5}$$

$$C_3 = \frac{3554}{45}$$

Aplicamos la segunda condición de la continuidad

$$-\frac{1}{4}(x)^4 - \frac{1}{2}(x)^3 + C_1(x) + C_2 = \frac{1}{720}x^5 - \frac{7}{72}x^4 + \frac{71}{36}x^3 - \frac{335}{18}x^2 + C_3x + C_4, \text{ en } x = 2m$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}(2^4) - \frac{1}{2}(2^3) + \left(\frac{196}{5} \right) (2) - \frac{352}{5} \\ = \left(\frac{1}{720} \right) (2)^5 - \left(\frac{7}{72} \right) (2)^4 + \left(\frac{71}{36} \right) (2)^3 - \left(\frac{335}{18} \right) (2)^2 + \left(\frac{3554}{45} \right) (2) + 4 \end{aligned}$$

$$C_4 = -\frac{880}{9}$$

Aplicando la tercera condición de la continuidad

$$\frac{1}{144}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{335}{9}x + C_3 = -3x + C_5, \text{ en } x = 8m$$

$$\left(\frac{1}{144}\right)(8)^4 - \left(\frac{7}{18}\right)(8)^3 + \left(\frac{71}{12}\right)(8)^2 - \left(\frac{335}{9}\right)(8) + \frac{3554}{45} = -3(8) + C_5$$

$$C_5 = \frac{66}{5}$$

Aplicando la cuarta condición de continuidad

$$\frac{1}{720}x^5 - \frac{7}{72}x^4 + \frac{71}{36}x^3 - \frac{335}{18}x^2 + C_3x + C_4 = -\frac{3}{2}x^2 + C_5x + C_6, \text{ en } x = 8m$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{720}\right)(8)^5 - \left(\frac{7}{72}\right)(8)^4 + \left(\frac{71}{36}\right)(8)^3 - \left(\frac{335}{18}\right)(8)^2 + \left(\frac{3554}{45}\right)(8) - \frac{880}{9} \\ = \left(-\frac{3}{2}\right)(8)^2 + \frac{66}{5}(8) + C_6 \end{aligned}$$

$$C_6 = -\frac{48}{5}$$

Sustituyendo las 6 constantes en las ecuaciones respectivas obtenemos:

$$0 \leq x \leq 2m$$

$$EI\theta_1 = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{196}{5}$$

$$EIy_1 = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{196}{5}x - \frac{352}{5}$$

$$2m \leq x \leq 8m$$

$$EI\theta_2 = -\frac{1}{144}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{335}{9}x + \frac{3554}{45}$$

$$EIy_2 = \frac{1}{720}x^5 - \frac{7}{72}x^4 + \frac{71}{36}x^3 - \frac{335}{18}x^2 + \frac{3554}{45}x - \frac{880}{9}$$

$$8m \leq x \leq 9m$$

$$EI\theta_3 = -3x + \frac{66}{5}$$

$$EIy_3 = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{66}{5}x - \frac{48}{5}$$

Calculo de las flechas máximas y sus posiciones para cada tramo:

$$0 \leq x \leq 2m$$

$$0 = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{196}{5}$$

Usando división sintética

	-1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{196}{5}$
2.9635	↓	-2.9635	-13.2276	-39.2
	-1	-4.4635	-13.2276	0

$$(x - 2.9635)(-x^2 - 4.4635x - 13.2276) = 0$$

$$x_1 \approx 2.9635$$

$$-x^2 - 4.4635x - 13.2276 = 0$$

Por fórmula general

$$x = \frac{-(-4.4635) \pm \sqrt{(-4.4635)^2 - 4(-1)(-13.2276)}}{2(-1)}$$

$$x_1 = \frac{4.4635 - \sqrt{-32.9882}}{-2} = -2.23175 - 2.87174i$$

$$x_2 = \frac{4.4635 + \sqrt{-32.9882}}{-2} = -2.23175 + 2.87174i$$

Obsérvese que de las tres soluciones anteriores ninguna pertenece al intervalo real del tramo de viga [0,2], por lo tanto la flecha máxima está ubicada en el extremo donde no existe ningún tipo de apoyo.

$$\therefore x_{1\max} = 0m$$

$$EIy_{\max} = -\frac{1}{4}(0)^4 - \frac{1}{2}(0)^2 + \frac{196}{5}(0) - \frac{352}{5}$$

$$y_{\max} = -\frac{352}{5EI} = \frac{-70.4}{EI} = \frac{70.4}{EI} \downarrow (\text{hacia abajo})$$

$$2m \leq x \leq 8m$$

$$0 = \frac{1}{144}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{335}{9}x + \frac{3554}{45}$$

Usando división sintética

	$\frac{1}{144}$	$-\frac{7}{18}$	$\frac{71}{12}$	$-\frac{335}{9}$	$\frac{3554}{45}$
4.26119		0.02959	-1.53103	18.68801	-78.97778
	$\frac{1}{144}$	-0.35930	4.38563	-18.53421	≈ 0

$$(x - 4.26119) \left(\frac{1}{144}x^3 - 0.35930x^2 + 4.38563x - 18.53421 \right) = 0$$

$$x_1 \approx 4.26119$$

	$\frac{1}{144}$	-0.35930	4.38563	-18.53421
36.4053		0.25281	-3.876633	18.53
	$\frac{1}{144}$	-0.106485	0.50900	≈ 0

$$(x - 36.4053) \left(\frac{1}{144}x^2 - 0.106485x + 0.50900 \right) = 0$$

$$x_2 \approx 36.4053$$

$$\frac{1}{144}x^2 - 0.106485x + 0.50900 = 0$$

$$x_3 \approx 7.66660 + 3.8122i$$

$$x_4 \approx 7.66660 - 3.8122i$$

Notamos que de las cuatros soluciones anteriores, la única que está dentro del intervalo real de la viga [2,8] es x_1

$$\therefore x_{2max} = 4.26119 \text{ m}$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$EIy_{2max} = \left(\frac{1}{720}\right)(4.26119)^5 - \left(\frac{7}{72}\right)(4.26119)^4 + \left(\frac{71}{36}\right)(4.26119)^3 - \left(\frac{335}{18}\right)(4.26119)^2 + \left(\frac{3554}{45}\right)(4.26119) - \left(\frac{880}{9}\right)$$

$$y_{2max} \approx \frac{23.32049531}{EI} \approx \frac{23.32049531}{EI} \uparrow \text{(hacia arriba)}$$

$$8m \leq x \leq 9m$$

$$0 = -3x + \frac{66}{5}$$

$$x = \frac{\frac{66}{5}}{3} = 4.4m$$

Como $x=4.4m$ está fuera del intervalo real del tramo 3 de viga $[8,9]$, se concluye que:

$$x_{3max} = 9m$$

$$EIy_{max3} = \left(-\frac{3}{2}\right)(9)^2 + \left(\frac{66}{5}\right)(9) - \frac{48}{5}$$

$$y_{max3} = -\frac{123}{10EI} = -\frac{12.3}{EI} = \frac{12.3}{EI} \downarrow \text{(hacia abajo)}$$

DIAGRAMA DE CORTANTE:

x(m)	V(Ton)
0	-3
0.5	-6
1	-9
1.5	-12
2	-15
2	7.5
3	5.58333333
4	3.83333333
5	2.25
6	0.83333333
7	-0.41666667
8	-1.5
8	0
9	0

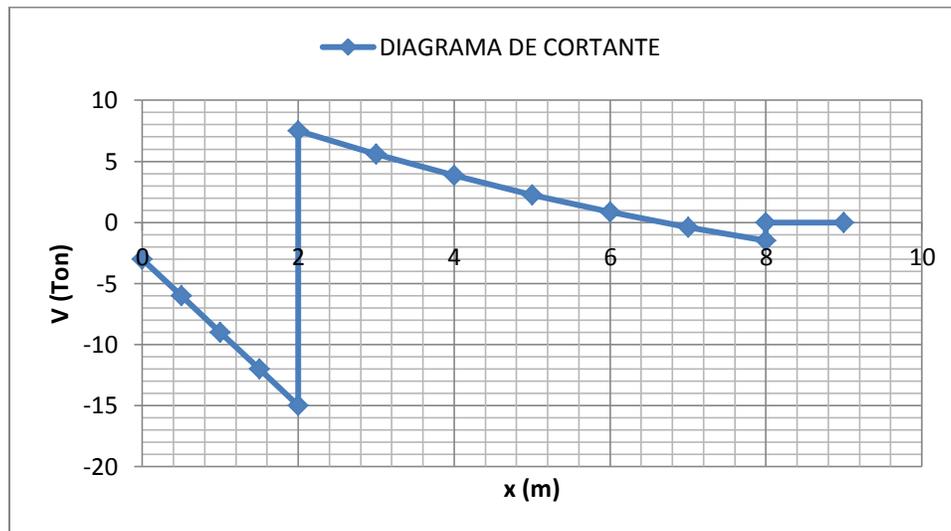


DIAGRAMA DE MOMENTO:

x(m)	M (Ton*m)
0	0
0.5	-2.25
1	-6
1.5	-11.25
2	-18
2	-18
3	-11.4722222
4	-6.77777778
5	-3.75
6	-2.22222222
7	-2.02777778
8	-3
8	-3
9	-3

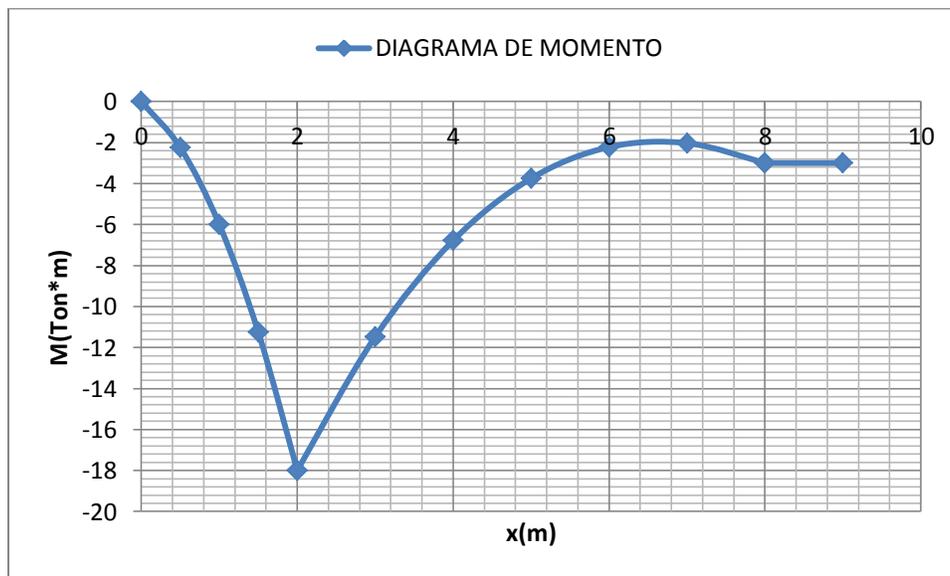


DIAGRAMA DE GIRO O ROTACIÓN:

x(m)	θ (1/EI)
0	39.2
0.5	38.7
1	36.7
1.5	32.45
2	25.2
2	25.2
3	10.6236111
4	1.64444444
5	-3.4875
6	-6.35555556
7	-8.37638889
8	-10.8
8	-10.8
9	-13.8

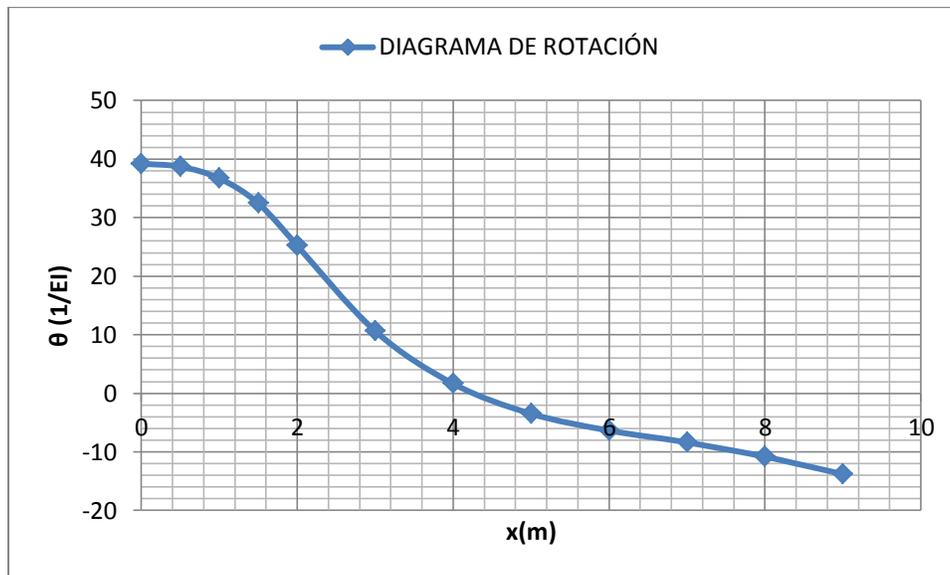
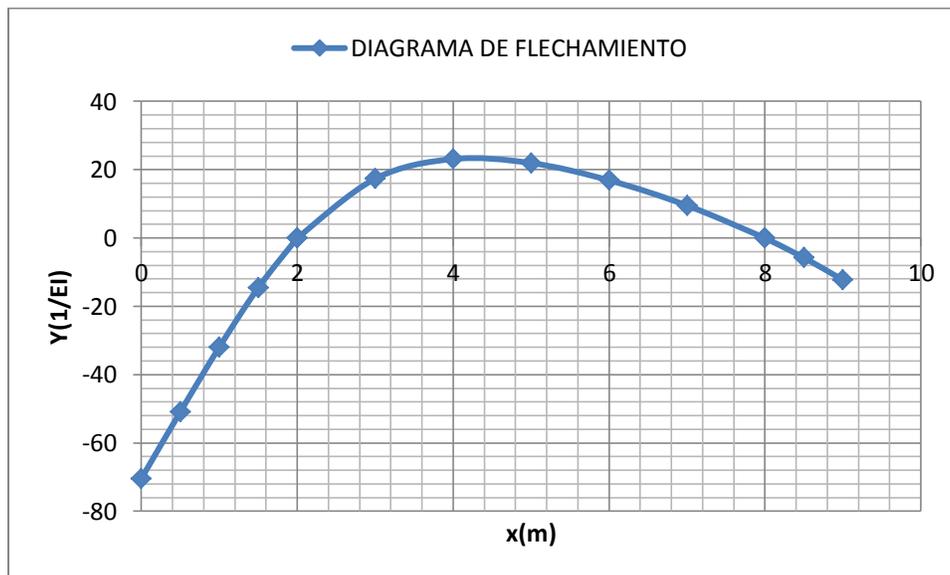
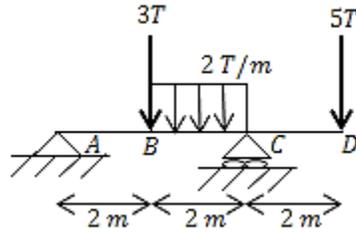


DIAGRAMA DE FLECHAMIENTO:

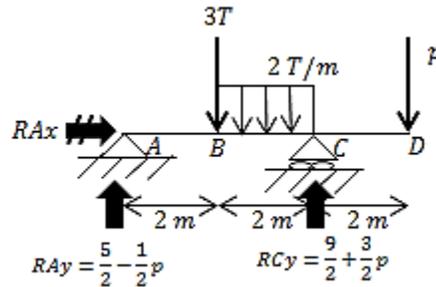
x(m)	Y(1/EI)
0	-70.4
0.5	-50.878125
1	-31.95
1.5	-14.553125
2	0
2	0
3	17.3680556
4	23.1111111
5	21.9375
6	16.8888889
7	9.50694444
8	0
8	0
8.5	-5.775
9	-12.3



2.- Use el teorema del Castigliano en la siguiente viga para calcular el δv_d (desplazamiento vertical en d)



Aplicación de la carga P en el punto y dirección donde se desea conocer la deflexión:



Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$3(2) + (2)(2) \left(2 + \frac{1}{2}(2) \right) - R_{Cy}(4) + p(6) = 0$$

$$6 + 12 - 4R_{Cy} + 6p = 0$$

$$R_{Cy} = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}p \uparrow$$

$$\sum Fx = 0$$

$$R_{Ax} = 0$$

$$\sum Fy = 0$$

$$R_{Ay} - 3 - (2)(2) + \frac{9}{2} + \frac{3}{2}p - p = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}p \uparrow$$

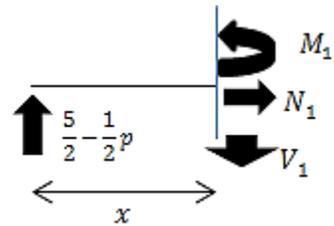
Ecuaciones de momento por tramo de la estructura con carga p :

$$0 \leq x \leq 2m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}px$$

$$\frac{dM_1}{dp} = -\frac{1}{2}x$$

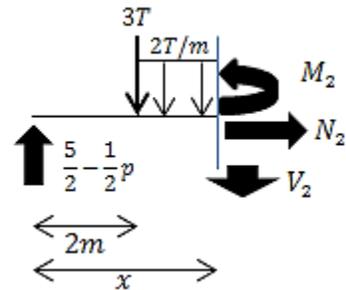


$$2m \leq x \leq 4m$$

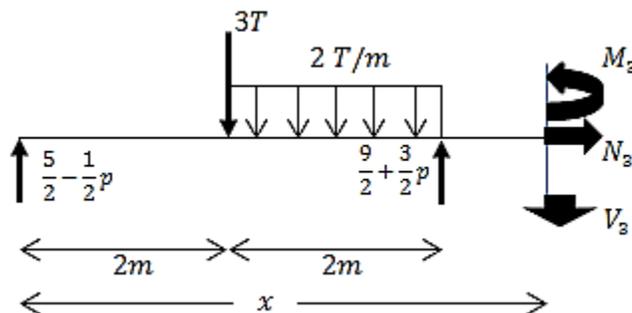
$$M_2 = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}p\right)(x) - 3(x-2) - 2(x-2)\frac{(x-2)}{2}$$

$$M_2 = -(x-2)^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}px + 6$$

$$\frac{dM_2}{dp} = -\frac{1}{2}x$$



$$4m \leq x \leq 6m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}px - 3(x-2) - 4(x-3) + \left(\frac{9}{2} + \frac{3}{2}p\right)(x-4)$$

$$M_3 = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}px - 3x + 6 - 4x + 12 + \frac{9}{2}x - 18 + \frac{3}{2}px - 6p$$

$$M_3 = px - 6p$$

$$\frac{dM_3}{dp} = x - 6$$

Sustituyendo $p=5$ en las ecuaciones de momento

$$M_1 = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}(5)x = 0$$

$$M_2 = -(x-2)^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(5)x + 6$$

$$M_2 = -x^2 + x + 2$$

$$M_3 = 5x - 6(5) = 5x - 30$$

Aplicando la ecuación para conocer el desplazamiento en cualquier punto:

$$\Delta = \delta = \frac{\partial ui}{\partial pi} = \int_{L_1}^{L_2} M \frac{\partial M}{\partial p} \frac{dx}{EI}$$

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{EI} \int_0^2 (0) \left(-\frac{1}{2}x\right) dx \\ &+ \frac{1}{EI} \int_2^4 (-x^2 + x + 2) \left(-\frac{1}{2}x\right) dx + \frac{1}{EI} \int_4^6 (5x - 30)(x - 6) dx \end{aligned}$$

Resolviendo integrales por separado

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_2^4 (-x^2 + x + 2) \left(-\frac{1}{2}x\right) dx &= \frac{1}{EI} \int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x\right) dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_2^4 \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{8}(4^4 - 2^4) - \frac{1}{6}(4^3 - 2^3) - \frac{1}{2}(4^2 - 2^2)\right] = \frac{1}{EI} \left(\frac{44}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_4^6 (5x - 30)(x - 6) dx &= \frac{1}{EI} \int_4^6 (5x^2 - 60x + 180) dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{5}{3}x^3 - 30x^2 + 180x\right]_4^6 \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{5}{3}(6^3 - 4^3) - 30(6^2 - 4^2) + 180(6 - 4)\right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{40}{3}\right] \end{aligned}$$

Deformación total en el punto:

$$\delta = \frac{1}{EI} \left[0 + \frac{44}{3} + \frac{40}{3} \right] = \frac{28}{EI}$$

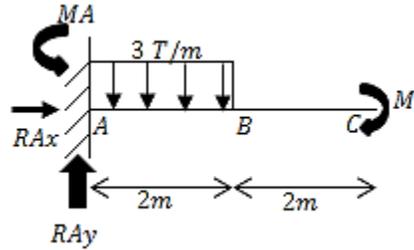
El signo positivo indica que el sentido propuesto de la carga p es correcto, por lo que:

$$\therefore \delta v_D = \frac{28}{EI} \text{ (hacia abajo)}$$

Reacciones viga original:

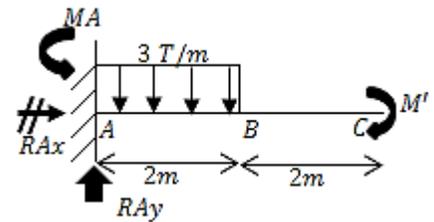
$$R_{Ay} = 0, R_{Cy} = 12T \uparrow$$

3.- Calcular Θ_c (giro o rotación en el punto C) del siguiente voladizo mediante el Teorema del Castigliano para:



Aplicación del momento M' en el punto y dirección donde se desea conocer la deflexión.

(Obsérvese que es el mismo y ya no hay que hacer ninguna sustitución en las ecuaciones de momento ni para las reacciones de la estructura real.



Reacciones:

$$\sum F_x = 0 \quad \therefore R_{Ax} = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$(3)(2)\left(\frac{1}{2}(2)\right) + M' - M_A = 0$$

$$M_A = 6 + M' \curvearrowright$$

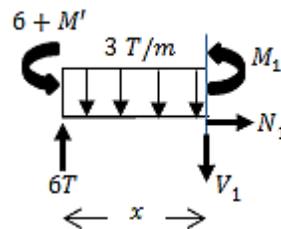
$$\sum F_y = 0$$

$$R_{Ay} - (3)(2) = 0$$

$$R_{Ay} = 6T \uparrow$$

Ecuaciones de momento por tramo

$$0 \leq x \leq 2m$$



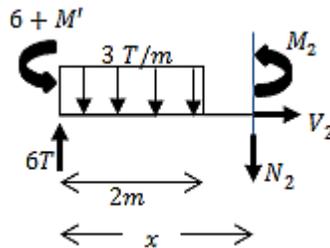
$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -(6 + M') + 6(x) - 3(x) \left(\frac{x}{2}\right)$$

$$M_1 = -6 - M' + 6x - \frac{3}{2}x^2$$

$$\frac{dM_1}{dM'} = -1$$

$$2m \leq x \leq 4m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = -(6 + M') + 6(x) - 3(2)(x - 1)$$

$$M_2 = M'$$

$$\frac{dM_2}{dM'} = 1$$

Ecuación para conocer el giro en cualquier punto:

$$\theta = \frac{\partial u_i}{\partial M_i} = \int_{L_1}^{L_2} M \frac{\partial M}{\partial M'} \frac{dx}{EI}$$

$$\theta = \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(-6 - M' + 6x - \frac{3}{2}x^2\right) (-1) dx + \frac{1}{EI} \int_2^4 (M') (1) dx$$

Resolviendo integrales por separado:

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(-6 - M' + 6x - \frac{3}{2}x^2\right) (-1) dx &= \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(6 + M' - 6x + \frac{3}{2}x^2\right) dx \\ &= \left[(6 + M')(x) - 3x^2 + \frac{1}{2}x^3 \right]_0^2 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{EI} \left[(6 + M')(2) - 3(2)^2 + \frac{1}{2}(2)^3 \right] = \frac{1}{EI} (2M' + 4)$$

$$\frac{1}{EI} \int_2^4 (M')(1)dx = \frac{1}{EI} \int_2^4 (M')dx = \frac{1}{EI} [M'(x)]_2^4 = \frac{1}{EI} [M'(4 - 2)] = \frac{1}{EI} (2M')$$

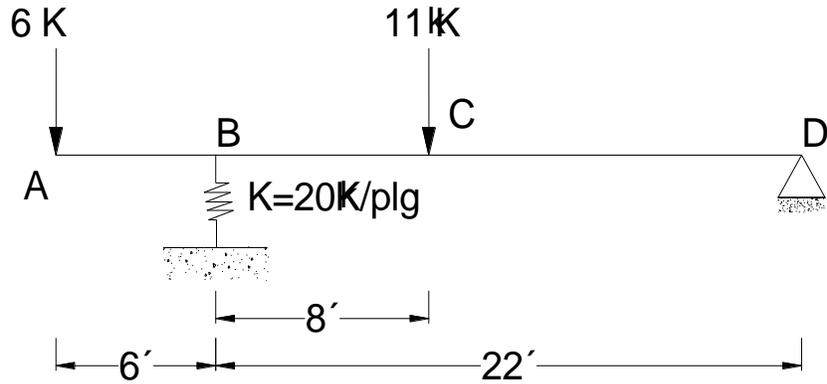
Giro total en el punto

$$\theta = \frac{1}{EI} (2M' + 4 + 2M') = \frac{4M' + 4}{EI}$$

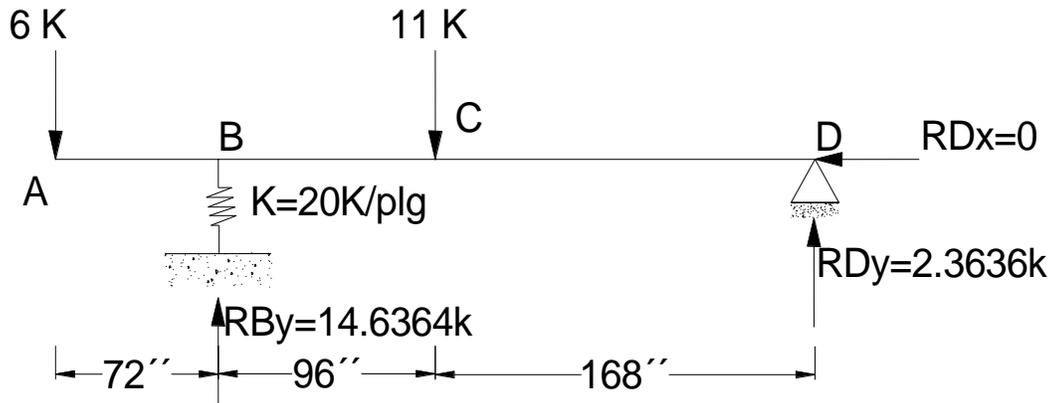
$$\therefore \theta_c = 4 \left[\frac{M' + 1}{EI} \right] \text{ (sentido horario)}$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

4.- Calcule la deflexión vertical del extremo libre A. Considere $E = \frac{30k}{pulg^2}$ e $I = 3pulg^4$. El resorte del apoyo B tiene una rigidez igual a $\frac{20k}{pulg}$.



Transformando las distancias en pulgadas, la viga real quedaría:



$$\sum MD = 0$$

$$6(336) - R_{BY}(264) + 11(168) = 0$$

$$R_{BY} = \frac{6(336) + 11(168)}{264}$$

$$R_{BY} = 14.6364k$$

$$\sum FY = 0$$

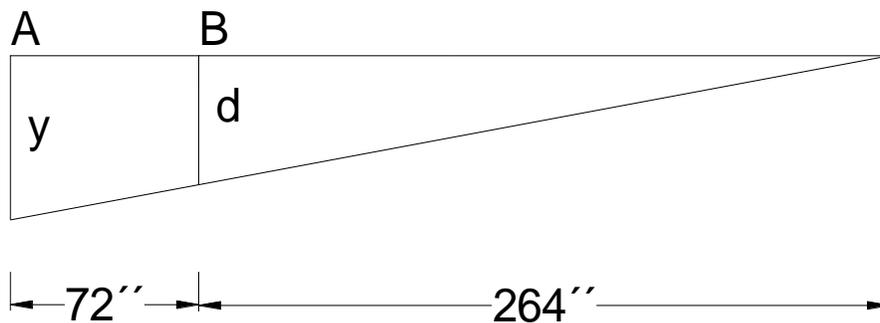
$$-6 + 14.6364 - 11 + R_{DY} = 2.3636k$$

$$\sum FX = 0$$

$$R_{DX} = 0$$

El desplazamiento vertical en A de la estructura real puede ser calculado sumando el desplazamiento vertical en A causado sólo por el resorte más el desplazamiento vertical en A causado por las fuerzas externas sin considerar el resorte.

- Cálculo del desplazamiento vertical en A causado sólo por el resorte:



La rigidez o resistencia a la deformación k de los resortes se define como la fuerza por unidad de deformación; por tanto, la reacción de un resorte se define como:

$$R = -K\delta'$$

En donde δ' es la deformación del resorte elástico, K es la constante elástica del resorte y R es la fuerza reactiva correspondiente cuya dirección coincide con la línea de acción del resorte. El signo negativo obedece a que la dirección de la reacción R es opuesta a la dirección de la deformación del resorte δ' .

$$R = -K\delta'$$

$$\delta' = -\frac{R}{K} = -\frac{14.6364k}{20k/pulg} = -0.73182in$$

Recuérdese que un signo negativo en los desplazamientos indica una dirección hacia abajo, por lo que

$$\delta' = 0.73182in$$

Del último diagrama se observa que:

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

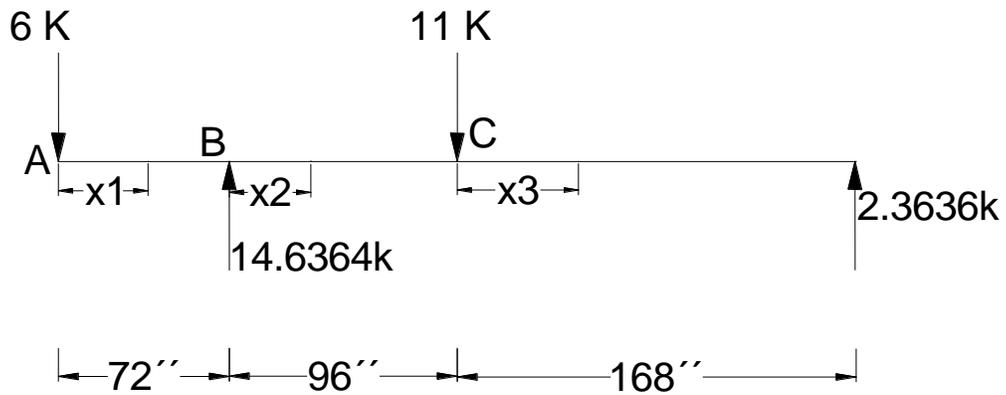
$$\frac{y}{336} = \frac{-0.73182}{264}$$

$$y = \frac{-0.73182(336)}{264} = -0.931407in$$

$$\therefore y = 0.931407in$$

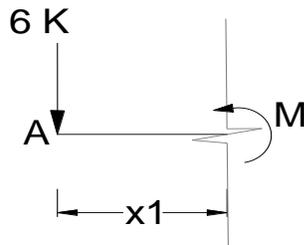
- Cálculo del desplazamiento vertical en A causado sólo por las fuerzas externas, o sea, sin considerar lo del resorte.

Viga real (Estructura M)



Ecuaciones de Momento

$$0 \leq x_1 \leq 72in$$



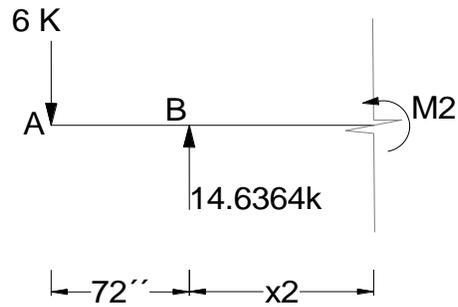
$$\sum M_{corte} = 0$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$-M1 - 6x_1 = 0$$

$$M1 = -6x_1$$

$$0 \leq x_2 \leq 96in$$

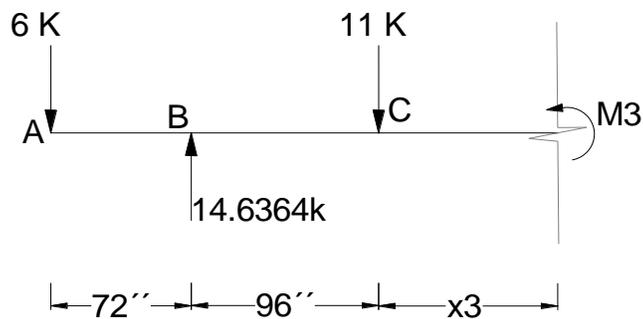


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-6(72 + x_2) - M2 + 14.6364x_2 = 0$$

$$M2 = 8.6364x_2 - 432$$

$$0 \leq x_3 \leq 168in$$

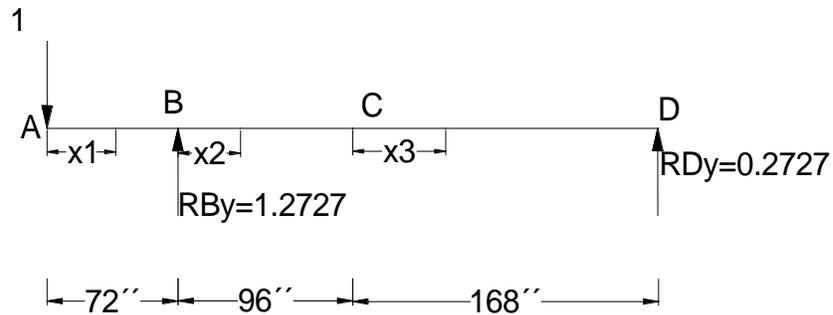


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-6(72 + 96 + x_3) - M3 + 14.6364(96 + x_3) - 11x_3 = 0$$

$$M3 = 397.094 - 2.3636x_3$$

Viga virtual (Estructura m)



Análisis de la viga virtual

Reacciones:

$$\sum MD = 0$$

$$1(336) - R_{BY}(264) = 0$$

$$R_{BY} = 1.2727$$

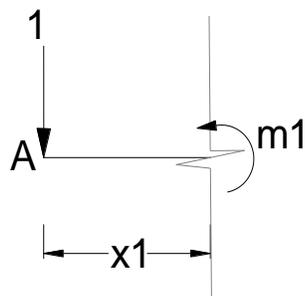
$$\sum FY = 0$$

$$-1 + 1.2727 - R_{DY} = 0$$

$$R_{DY} = 0.2727$$

Ecuaciones de momento

$$0 \leq x_1 \leq 72in$$



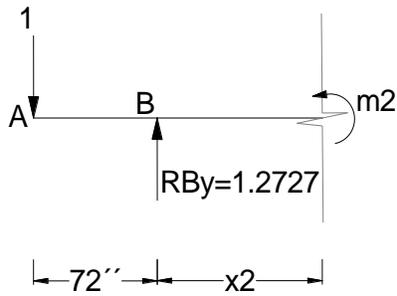
CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$\sum mcorte = 0$$

$$m1 - 1x_1 = 0$$

$$m1 = -x_1$$

$$0 \leq x_2 \leq 96in$$

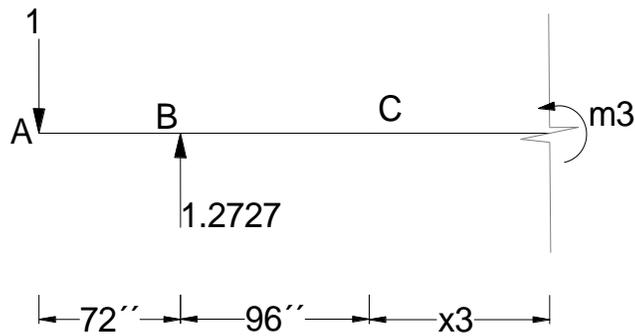


$$\sum mcorte = 0$$

$$-1(72 + x_2) - m2 + 1.2727x_2 = 0$$

$$m2 = 0.2727x_2 - 72$$

$$0 \leq x_3 \leq 168in$$



$$\sum mcorte = 0$$

$$-1(72 + 96 + x_3) - m3 + 1.2727(96 + x_3) - 11x_3 = 0$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$m_3 = 0.2727x_3 - 45.8208$$

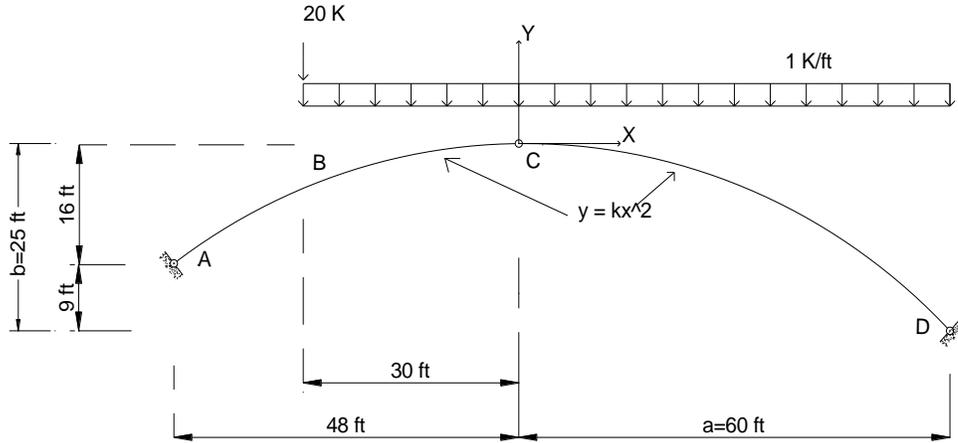
$$\begin{aligned} \delta_{V_{Asinresorte}} &= \left(\frac{1}{(30000)(3000)} \right) \left[\int_0^{72} (-6x_1)(-x_1) dx_1 \right. \\ &\quad + \int_0^{96} (8.6364x_2 - 432)(0.2727x_2 - 72) dx_2 \\ &\quad \left. + \int_0^{168} (397.094 - 2.3636x_3)(0.2727x_3 - 45.8208) dx_3 \right] \\ &= \left(\frac{1}{90000000} \right) (746496 + 272343 - 1019021.08759) = 0.000002in \end{aligned}$$

El desplazamiento vertical total en A de la estructura real es:

$$\delta_{VA} = -0.931407in + 0.000002in = -0.931405in$$

$$\therefore \delta_{VA} = 0.931405in \downarrow$$

5.- Obtenga las expresiones algebraicas que describen la variación de la fuerza axial, de la fuerza cortante y del momento flector que la carga prescrita induce en el arco de tres articulaciones que se representa en la figura. Determine además la deflexión a lo largo del arco. Considere $EI = \text{constante}$.



Solución:

Observemos que es un arco triarticulado y nos conviene adoptar los ejes referenciales en la clave o sea en el punto C

También vemos que el arco es una parábola por la función mostrada y que es de directriz parabólica la cual podemos definir por su flecha (b) y la distancia (a)

Demostremos que la ecuación que describe el arco es una parábola cuyo vértice está en el origen; o sea, que el origen está en el punto C.

La ecuación de la parábola es:

$$(x - h)^2 = 2p(y - k) \text{ --- 1}$$

donde:

p = distancia entre el foco y la recta directriz

h, k = coordenadas del vértice de la parábola

Como el vértice está en el origen, entonces:

$$V = (h, k) = (0, 0)$$

Sustituyendo $h = 0, k = 0$ en 1

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$(x - 0)^2 = 2p(y - 0)$$

$$x^2 = 2py$$

$$y = \frac{1}{2p}x^2$$

Podemos hacer $\frac{1}{2p} = k$ debido a que se trata de una constante

$$y = kx^2 \text{ --- 2}$$

El valor de k puede obtenerse despejándola de 2

$$k = \frac{y}{x^2} \text{ --- 3}$$

Conociendo algún punto cualquiera de la parábola:

$$P = (x, y) = (a, b)$$

Sustituimos $x = a, y = b$ en 3

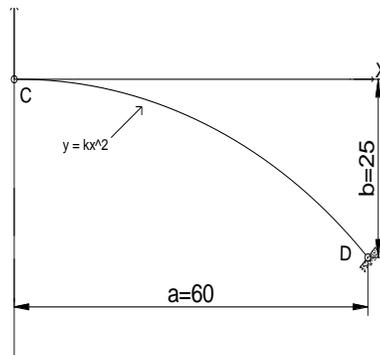
$$k = \frac{b}{a^2} \text{ --- 4}$$

Sustituyendo 4 en 2

$$y = \frac{b}{a^2}x^2 \text{ --- 5}$$

Obsérvese que para nuestro caso particular:

$$P = (a, b) = (60, -25)$$



Sustituyendo $a = 60, b = -25$, en 5

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$y = \frac{(-25)}{(60)^2} x^2 = -\frac{1}{144}$$

Por lo tanto:

$$y = -\frac{1}{144} x^2, \quad \text{que es la ecuación que describe el arco}$$

Comprobemos que es la ecuación correcta tabulando los puntos conocidos en A, C y D

x	Y
-48	-16
0	0
60	-25

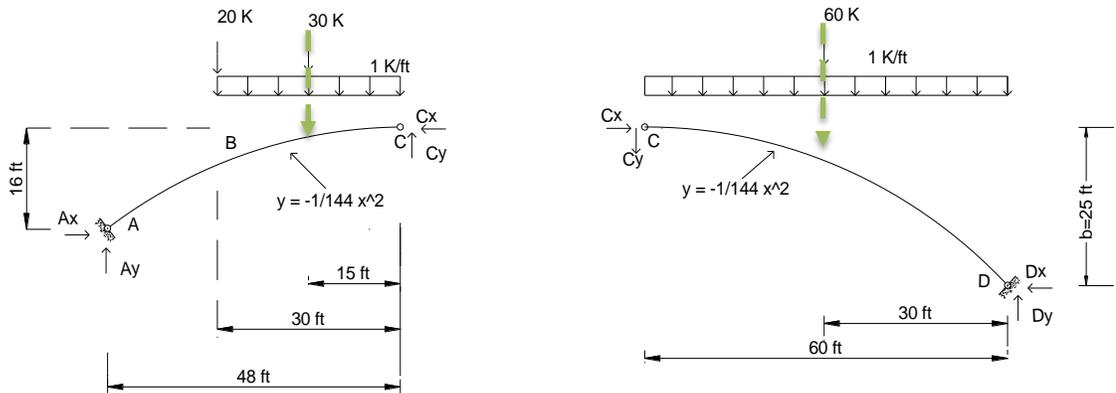
Por lo tanto se acepta que esta es la ecuación

A continuación, calculamos las reacciones en los apoyos.

Como el arco consta de 4 incógnitas y hay 3 ecuaciones de equilibrio y una condición constructiva, la estructura es isostática como todos los arcos triarticulados.

Para el análisis del arco, se tomarán todas las distancias como positivas debido a que no existen distancias negativas físicamente.

Las reacciones en los apoyos se pueden hallar aislando los segmentos AC y CD cuyos diagramas se muestran a continuación:



Para calcular las reacciones en las articulaciones, tomamos momentos respecto de A en el segmento AC y respecto de D en el segmento CD según los diagramas anteriores;

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

 $\sum M_A = 0$

$$20(48 - 30) + 30(48 - 15) - Cx(16) - Cy(48) = 0$$

$$-Cx(16) - Cy(48) = -1350$$

$$Cx + 3Cy = 84.375 \dots (1)$$

 $\sum M_D = 0$

$$Cy(60) - Cx(25) + 60(30) = 0$$

$$Cy(60) - Cx(25) = -1800$$

$$12Cy - 5Cx = -360 \dots (2)$$

Despejando Cx de (1)

$$Cx = 84.375 - 3Cy \dots (3)$$

Despejando Cx de (2)

$$Cx = \frac{360 + 12Cy}{5} = 72 + 2.4Cy \dots (4)$$

Igualando (3) y (4)

$$84.375 - 3Cy = 72 + 2.4Cy$$

$$Cy(3 + 2.4) = -72 + 84.375$$

$$Cy = 2.2917 \text{ K}$$

De (4)

$$Cx = 72 + 2.4(2.2917) = 77.5 \text{ K}$$

por lo tanto los sentidos de las fuerzas propuestas están correctos y serían:

para el segmento AC:

$$Cy = 2.2917 \text{ K} \quad \uparrow$$

$$Cx = 77.5 \text{ K} \quad \leftarrow$$

para el segmento CD:

$$Cy = 2.2917 \text{ K} \quad \downarrow$$

$$Cx = 77.5 \text{ K} \quad \rightarrow$$

Las reacciones en los apoyos se obtienen de:

Para el elemento AC:

$$\sum F_x = 0$$

$$Ax - Cx = 0 \quad \therefore$$

$$Ax = Cx = 77.5 K \rightarrow$$

$$\sum F_y = 0$$

$$Ay - 30 + Cy - 20 = 0 \quad \therefore$$

$$Ay = 30 - Cy = 50 - 2.2917 = 47.7083 K \uparrow$$

Para el elemento CD:

$$\sum F_x = 0$$

$$-Dx + Cx = 0 \quad \therefore$$

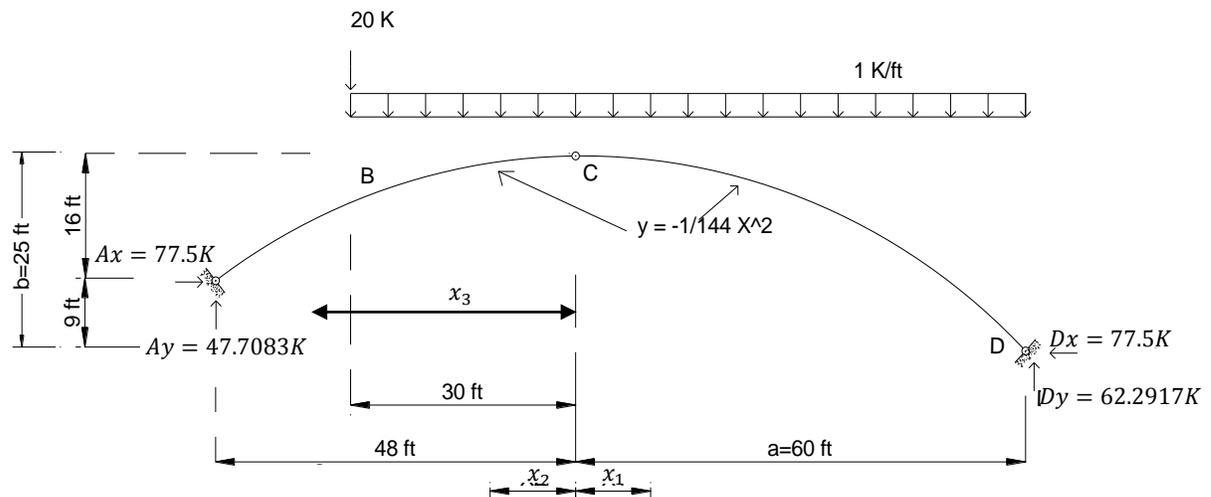
$$Dx = Cx = 77.5 K \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-Cy - 60 + Dy = 0 \quad \therefore$$

$$Dy = Cy + 60 = 2.2917 + 60 = 62.2917 K \uparrow$$

Diagramas de cargas del arco



CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

Demostramos el equilibrio de la estructura mediante fuerzas externas:

$$\sum F_x = 0 \text{ en todo el conjunto}$$

$$Ax - Dx = 77.5 - 77.5 = 0 \quad OK$$

$$\sum F_y = 0 \text{ en todo el conjunto}$$

$$Ay - 20 - 90 + Dy = 47.7083 - 110 + 62.2917 = 0 \quad OK$$

$$\curvearrowright \sum MA = 0 \text{ en todo el conjunto}$$

$$20(18) + 90(45 + 18) - 62.2917(108) + 77.5(9) \approx 0 \quad OK$$

$$\curvearrowright \sum Mc = 0 \text{ en parte izquierda}$$

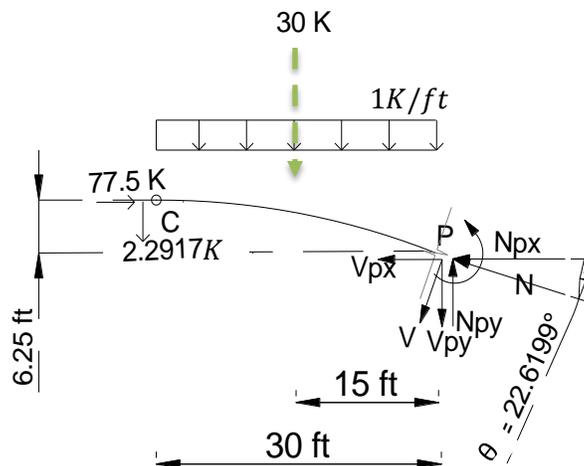
$$-77.5(16) + 47.7083(48) - 20(30) - 30(15) \approx 0 \quad OK$$

Se puede calcular el valor de la fuerza cortante, normal y momento en un punto específico del arco.

Ejemplo:

$$x = 30 \text{ ft}$$

$$y = -\frac{1}{144}(30)^2 = -6.25 \text{ ft}$$



Obsérvese que la fuerza normal es tangente al punto **P** de corte y la fuerza cortante es perpendicular a la fuerza normal.

La pendiente del segmento cortado en el punto **P** es:

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(-\frac{1}{144}x^2\right)}{dx} \Bigg|_{x=30ft}$$

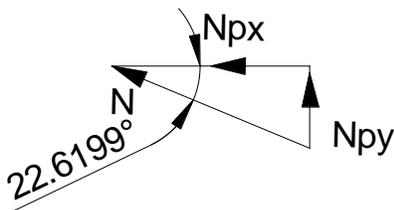
$$\tan\theta = \frac{-x}{72} \Bigg|_{x=30ft} = -\frac{5}{12}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{12}\right) = -22.6199^\circ$$

El signo negativo del ángulo indica que éste se mide hacia abajo, tal y como de muestra en los diagramas, pero en los cálculos debe omitirse tal signo.

A continuación se muestra las componentes rectangulares del normal y cortante.

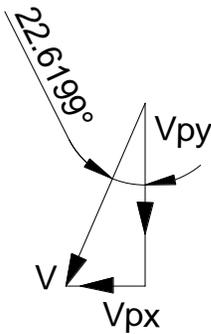
Componentes rectangulares de la normal en P



$$\text{sen}(22.6199) = \left(\frac{N_{py}}{N}\right); \quad N_{py} = N(\text{sen}22.6199)$$

$$\text{cos}(22.6199) = \left(\frac{N_{px}}{N}\right); \quad N_{px} = N(\text{cos}22.6199)$$

Componentes rectangulares del cortante en P



$$\text{sen}(22.6199) = \left(\frac{V_{px}}{V}\right); \quad V_{px} = V(\text{sen}22.6199)$$

$$\text{cos}(22.6199) = \left(\frac{V_{py}}{V}\right); \quad V_{py} = V(\text{cos}22.6199)$$

Para el diagrama de cuerpo libre donde se hace un corte en el punto P.

Aplicación de las ecuaciones de equilibrio.

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$77.5 - V_{px} - N_{px} = 0$$

$$V_{px} + N_{px} = 77.5 \text{ K}$$

$$V(\text{sen}22.6199) + N(\text{cos}22.6199) = 77.5 \text{ K} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-2.2917 - 30 - V_{py} + N_{py} = 0$$

$$N_{py} - V_{py} = 32.2917 \text{ K}$$

$$N(\text{sen}22.6199) - V(\text{cos}22.6199) = 32.2917 \text{ K} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$+\curvearrowright \sum M_p = 0$$

$$77.5(6.25) - 2.2917(30) - 30(15) - M_p = 0$$

$$M_p = 34.376 \text{ K} * \text{ft} \quad \curvearrowright$$

Despejando V de (1)

$$V = \frac{77.5 - N(\text{cos}22.6199)}{\text{sen}22.6199} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Despejando Vp de (2)

$$V = \frac{N(\text{sen}22.6199) - 32.2917}{\text{cos}22.6199} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Igualando (3) y (4)

$$\frac{77.5 - N(\text{cos}22.6199)}{\text{sen}22.6199} = \frac{N(\text{sen}22.6199) - 32.2917}{\text{cos}22.6199}$$

$$\frac{77.5\text{cos}(22.6199)}{\text{sen}22.6199} - \frac{N(\text{cos}^2 22.6199)}{\text{sen}22.6199} = N(\text{sen}22.6199) - 32.2917$$

$$186 - 2.21538N = 0.384616N - 32.2917$$

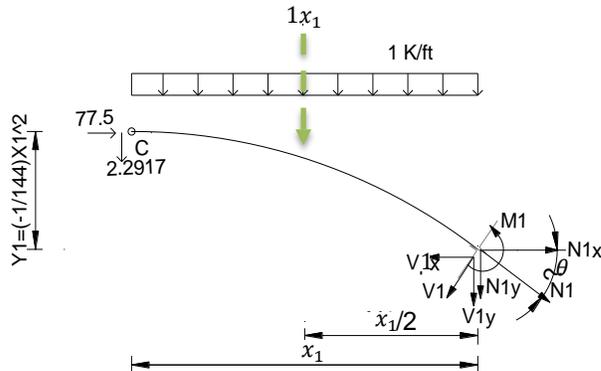
$$N = \frac{-(32.2917 + 186)}{-(2.21538 + 0.384616)} = 83.9585 \text{ K} \quad \text{por lo tanto el sentido propuesto es correcto.}$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$V = \frac{77.5 - N(\cos 22.6199)}{\text{sen} 22.6199} = \frac{77.5 - 83.9585(\cos 22.6199)}{\text{sen} 22.6199} \approx 0$$

Se procede a obtener las expresiones algebraicas que describen la variación de la fuerza axial, de la fuerza cortante y del momento flexionante.

$$0 \leq x_1 \leq 60 \text{ ft}$$



$$+ \curvearrowright \sum M_{CORTE} = 0$$

$$M1 = -2.2917(x_1) + 77.5 \left(\frac{1}{144} x_1^2 \right) - x_1 \left(\frac{x_1}{2} \right)$$

$$M1 = 0.038194x_1^2 - 2.2017x_1$$

Para cuando:

en $x_1 = 30 \text{ ft}$, $M1 = -34.376 \text{ K}\cdot\text{ft}$

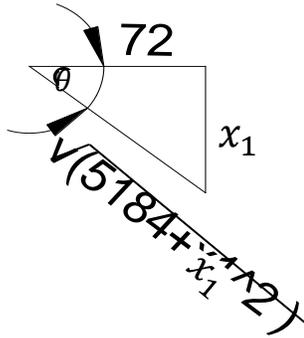
en $x_1 = 0 \text{ ft}$, el $M1 = 0$ porque en la articulación el momento es cero por definición

Calculamos la normal si $y = -1/144 x^2$

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{144} x^2 = -\frac{x_1}{72} = \frac{C.O}{C.A}$$

$$\cos \theta = \frac{72}{\sqrt{5184 + x_1^2}}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{x_1}{\sqrt{5184 + x_1^2}}$$



$$\sum F_x = 0 \quad + \rightarrow$$

$$77.5 + N1x - V1x = 0$$

$$N1(\cos\theta) - V1(\text{sen}\theta) = -77.5 \text{ K}$$

$$N1\left(\frac{72}{\sqrt{5184 + x_1^2}}\right) - V1\left(\frac{x_1}{\sqrt{5184 + x_1^2}}\right) = -77.5 \text{ K} \quad . . . \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad + \uparrow$$

$$-2.2917 - x_1 - V1y - N1y = 0$$

$$V1y + N1y = -2.2917 - x_1$$

$$V1(\cos\theta) + N1(\text{sen}\theta) = -2.2917 - X1$$

$$V1\left(\frac{72}{\sqrt{5184 + x_1^2}}\right) + N1\left(\frac{x_1}{\sqrt{5184 + x_1^2}}\right) = -2.2917 - x_1 \quad . . . \quad (2)$$

Despejando N1 de (1)

$$N1 = \frac{V1\left(\frac{x_1}{\sqrt{5184 + x_1^2}}\right) - 77.5}{\left(\frac{72}{\sqrt{5184 + x_1^2}}\right)}$$

$$N1 = -1.07639 * \sqrt{x_1^2 + 5184} + \frac{1}{72}x_1V1. \quad . . . \quad (3)$$

Despejando N1 de (2)

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$N1 = \frac{-2.2917 - x_1 - V1 \left(\frac{72}{\sqrt{5184 + x_1^2}} \right)}{\left(\frac{x_1}{\sqrt{5184 + x_1^2}} \right)}$$

$$N1 = -\frac{2.2917(\sqrt{5184 + x_1^2})}{x_1} - \sqrt{5184 + x_1^2} - \frac{72}{x_1} V1 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Igualando (3) y (4)

$$-1.07639\sqrt{5184 + x_1^2} + \frac{1}{72}x_1V1 = -\frac{2.2917(\sqrt{5184 + x_1^2})}{x_1} - \sqrt{5184 + x_1^2} - \frac{72}{x_1}V1$$

$$V1 \left(\frac{1}{72}x_1 + \frac{72}{x_1} \right) = (\sqrt{5184 + x_1^2}) \left(-\frac{2.2917}{x_1} - 1 + 1.07639 \right)$$

$$\frac{x_1}{72} + \frac{72}{x_1} = \frac{x_1^2 + 5184}{72 x_1}$$

$$V1 = \left(\frac{x_1^2 + 5184}{72 x_1} \right) = (\sqrt{5184 + x_1^2}) \left(-\frac{2.2917}{x_1} + 0.07639 \right)$$

$$V1 = \frac{(5184 + x_1^2)^{\frac{1}{2}}(72x_1) \left(-\frac{2.2917}{x_1} + 0.07639 \right)}{5184 + x_1^2}$$

$$V1 = \frac{(5184 + x_1^2)^{\frac{1}{2}}(72x_1) \left(-\frac{2.2917}{x_1} + 0.07639 \right)}{(5184 + x_1^2)^{\frac{2}{2}}}$$

$$V1 = \frac{5.50008x_1 - 165.002}{\sqrt{5184 + x_1^2}}$$

$$N1 = -1.07639\sqrt{5184 + x_1^2} + \frac{1}{72}x_1 \left(\frac{5.50008x_1 - 165.002}{\sqrt{5184 + x_1^2}} \right)$$

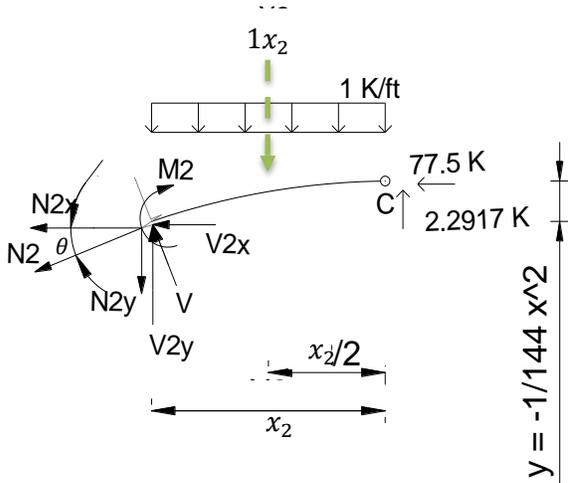
$$N1 = -1.07639\sqrt{5184 + x_1^2} + \frac{0.07639x_1^2 - 2.2917x_1}{\sqrt{5184 + x_1^2}}$$

Evaluamos para cuando

X1= 30 ft, V1=0; X1= 0 ft, V1=-2.29169ft

X1= 30ft, N1=-83.9584; X1= 0ft, N1=-77.5001

$$0 \leq x_2 \leq 30ft$$



$$\curvearrowright + \sum M_{CORTE} = 0$$

$$M2 + x_2 \left(\frac{x_2}{2} \right) - 2.2917(x_2) - 77.5 \left(\frac{1}{144} x_2^2 \right) = 0$$

$$M2 = 0.038194x_2^2 + 2.2917x_2$$

Evaluando M2 en los extremos

$$x_2 = 0ft; \quad M2 = 0$$

$$x_2 = 30ft; \quad M2 = 103.126 K * ft$$

$$\sum F_x = 0 \quad + \rightarrow$$

$$-N2x - V2x - 77.5 = 0$$

$$-N2x - V2x = 77.5$$

$$-N2\cos\theta - V2\sen\theta = 77.5$$

$$-N2 \left(\frac{72}{\sqrt{5184 + x_2^2}} \right) - V2 \left(\frac{x_2}{\sqrt{5184 + x_2^2}} \right) = 77.5 \quad \dots \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad + \uparrow$$

$$-N2y + V2y - x_2 + 2.2917 = 0$$

$$-N2\sen\theta + V2\cos\theta - x_2 + 2.2917 = 0$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$-N2 \left(\frac{x_2}{\sqrt{5184 + x_2^2}} \right) + V2 \left(\frac{72}{\sqrt{5184 + x_2^2}} \right) - x_2 + 2.2917 = 0$$

$$-N2 \left(\frac{x_2}{\sqrt{5184 + x_2^2}} \right) + V2 \left(\frac{72}{\sqrt{5184 + x_2^2}} \right) = x_2 - 2.2917 \quad \dots \quad (2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1) y (2)

$$N2 = \frac{-\left(\sqrt{5184 + x_2^2}\right)(x_2^2 - 2.2917 + 5580)}{5184 + x_2^2}$$

Evaluando N2 en los extremos

$$x_2 = 0ft; \quad N2 = -77.5 K$$

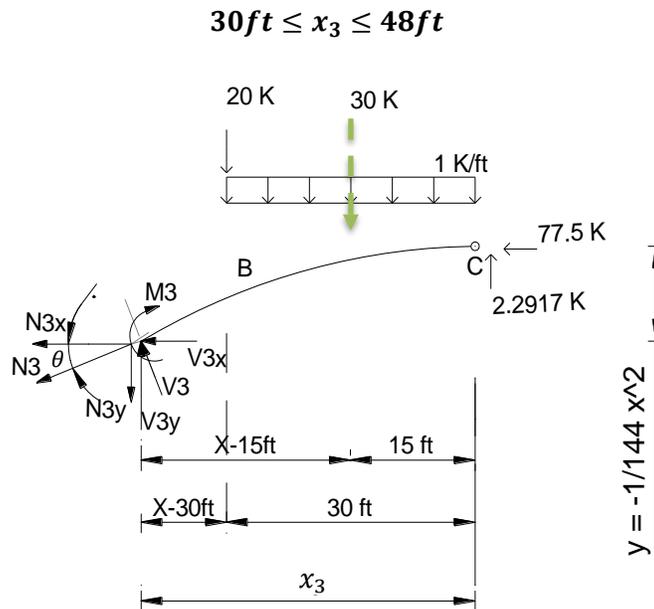
$$x_2 = 30ft; \quad N2 = -82.1955 K$$

$$V2 = \frac{-5.5(x_2 + 30.0004)(\sqrt{5184 + x_2^2})}{5184 + x_2^2}$$

Evaluando V2 en los extremos

$$x_2 = 0ft; \quad V2 = -2.2917 K$$

$$x_2 = 30ft; \quad V2 = -4.2308 K$$



$$+\curvearrowright \sum M_{CORTE} = 0$$

$$M3 + 20(x_3 - 30) + 30(x_3 - 15) - 2.2917(x_3) - 77.5 \left(\frac{1}{144} x_3^2 \right) = 0$$

$$M3 = -20x_3 + 600 - 30x_3 + 450 + 2.2917x_3 + 0.538194x_3^2$$

$$M3 = 0.538194x_3^2 - 47.7083 x_3 + 1050$$

Evaluando M3 en los extremos del tramo

$$x_3 = 30 \text{ ft}; \quad M3 = 103.126 \text{ k * ft}$$

$$x_3 = 48 \text{ ft}; \quad M3 = 0$$

$$\sum Fx = 0 \quad + \rightarrow$$

$$-N3x - V3x - 77.5 = 0$$

$$-N3\cos\theta - V3\sin\theta = 77.5$$

$$-N3 \left(\frac{72}{\sqrt{5184 + x_3^2}} \right) - V3 \left(\frac{x_3}{\sqrt{5184 + x_3^2}} \right) = 77.5 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\sum Fy = 0 \quad + \uparrow$$

$$V3y - N3y - 20 - 30 + 2.2917 = 0$$

$$V3y - N3y = 47.7083$$

$$V3\cos\theta - N3\sin\theta = 47.7083$$

$$V3 \left(\frac{72}{\sqrt{5184 + x_3^2}} \right) - N3 \left(\frac{x_3}{\sqrt{5184 + x_3^2}} \right) = 47.7083 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior para encontrar las incógnitas

$$N3 = \frac{-47.7083(x_3 + 116.961)}{\sqrt{5184 + x_3^2}}$$

Evaluando la normal en extremos del tramo

$$x_3 = 30 \text{ ft}; \quad N3 = -89.8878 \text{ K}$$

$$x_3 = 48 \text{ ft}; \quad N3 = -90.9474 \text{ K}$$

$$V3 = \frac{4293747 - 96875x_3}{1250(\sqrt{5184 + x_3^2})}$$

$$x_3 = 30ft; \quad V_3 = 14.2307 K$$

$$x_3 = 48ft; \quad V_3 = -3.29356 K$$

Observemos que en el punto B la fuerza cortante y la fuerza normal no es la misma para las ecuaciones a la derecha y a la izquierda respectivamente ya que se presenta una discontinuidad en ambas fuerzas provocada por la carga puntual que existe exactamente en dicho punto.

Para calcular el giro en cada tramo aplicamos a la ecuación de la elástica:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

Para el tramo de $0 \leq x_1 \leq 60 ft$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_1$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = 0.038194x_1^2 - 2.2917x_1$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int (0.038194x_1^2 - 2.2917x_1) dx_1$$

$$EI\theta_1 = EI \frac{dy}{dx} = 0.012731x_1^3 - 1.14585x_1^2 + C_1 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Otra vez integramos para encontrar la flecha del tramo

$$EI \int dy = \int (0.012731x_1^3 - 1.14585x_1^2 + C_1) dx_1$$

$$EIy_1 = 0.003183x_1^4 - 0.38195x_1^3 + C_1x_1 + C_2 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Para el tramo $0 \leq x_2 \leq 30 ft$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = 0.038194x_2^2 + 2.2917x_2$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int (0.038194x_2^2 + 2.2917x_2) dx_2$$

$$EI\theta_2 = EI \frac{dy}{dx} = 0.012731x_2^3 + 1.14585x_2^2 + C_3 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$EI \int dy = \int (0.012731x_2^3 + 1.14585x_2^2 + C_3) dx$$

$$EIy_2 = 0.003183x_2^4 + 0.38195x_2^3 + C_3x_2 + C_4 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Para el tramo $30ft \leq x_3 \leq 48 ft$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = 0.538194x_3^2 - 47.7083x_3 + 1050$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int (0.538194x_3^2 - 47.7083x_3 + 1050) dx$$

$$EI\theta_3 = EI \frac{dy}{dx} = 0.179398x_3^3 - 23.8542x_3^2 + 1050x_3 + C_5 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$EI \int dy = \int (0.179398x_3^3 - 23.8542x_3^2 + 1050x_3 + C_5) dx$$

$$EIy_3 = 0.04485x_3^4 - 7.95138x_3^3 + 525x_3^2 + C_5x_3 + C_6 \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Estableciendo condiciones de frontera y de continuidad:

- De Frontera

1) $y = 0$ en A ; o sea que $y_3 = 0$ en $x_3 = 48 ft$

2) $y = 0$ en D ; o sea que $y_1 = 0$ en $x_1 = 60 ft$

- De Continuidad

3) $\frac{dy}{dx}$ del segmento $C - B = \frac{dy}{dx}$ del segmento $B - A$ en el punto B ;

o sea que $\theta_2 = \theta_3$ en $x_2 = x_3 = 30ft$

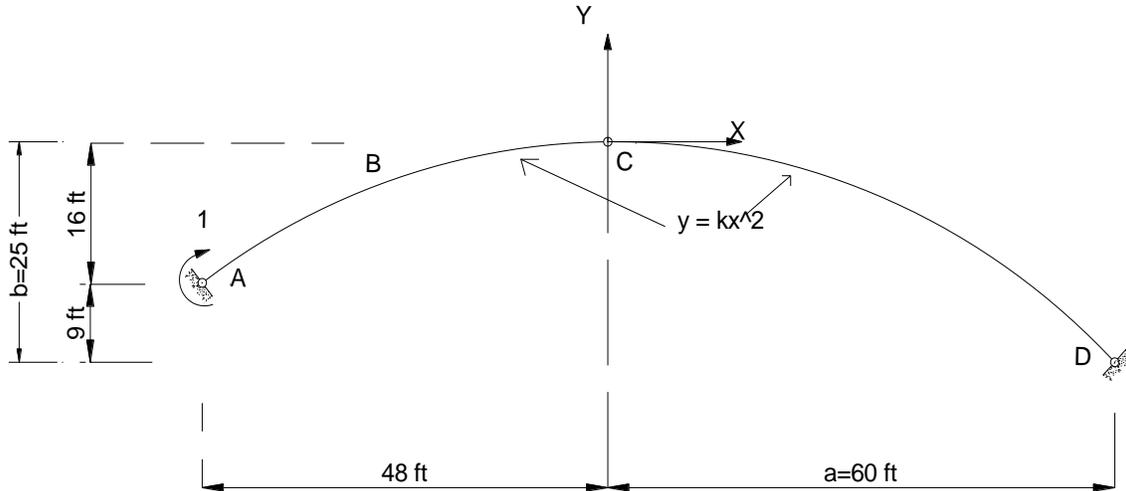
4) y del segmento $C - B = y$ del segmento $B - A$ en el punto B ;

o sea que $y_2 = y_3$ en $x_2 = x_3 = 30ft$

5) y del segmento $C - D = y$ del segmento $C - B$ en el punto C ;

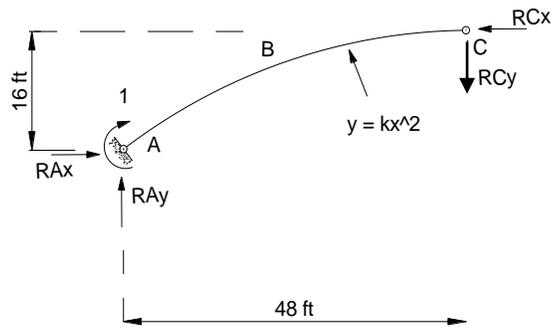
o sea que $y_1 = y_2$ en $X1 = X2 = 0ft$

Entonces vemos que solo tenemos 5 condiciones de frontera y hay 6 constantes de integración por lo tanto agregamos una sexta condición determinando el giro en A de la estructura aplicando trabajo virtual.



Separando la estructura

Tramo A-C

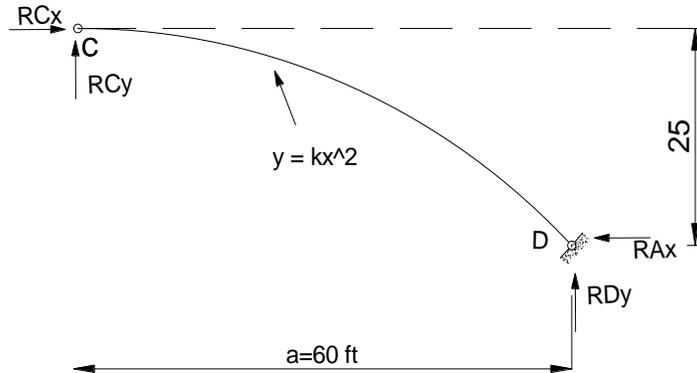


$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$$

$$-1 + RCx(16) - RCy(48) = 0$$

$$RCx(16) - RCy(48) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Tramo C-D



$$\sum M_D = 0$$

$$RCx(25) + RCy(60) = 0 \quad (2)$$

Resolviendo el sistema

$$RCx = 0.02778$$

$$RCy = -0.01157$$

El resultado negativo de RCy indica que sus sentidos propuestos son invertidos

Del elemento A-C

$$\sum Fx = 0$$

$$RAx = 0.02778 \text{ K } \rightarrow$$

$$\sum Fy = 0$$

$$RAy = 0.01157 \text{ K } \downarrow$$

Del elemento C-D

$$\sum Fx = 0$$

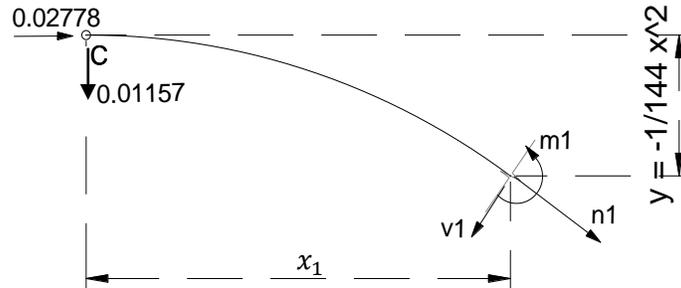
$$RAx = 0.02778 \text{ K } \leftarrow$$

$$\sum Fy = 0$$

$$RAy = 0.01157 \text{ K } \uparrow$$

Ecuaciones de momento de la estructura **m**

Tramo $0 \leq x_1 \leq 60ft$

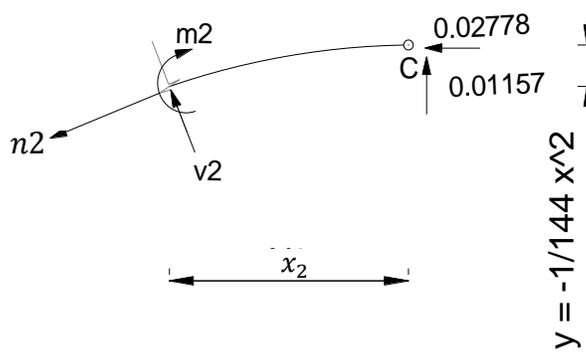


$$\curvearrowright \sum m_{corte} = 0$$

$$m1 = -0.01157x_1 + 0.02778\left(\frac{1}{144}x_1^2\right)$$

$$m1 = 0.000193x_1^2 - 0.01157x_1$$

Tramo $0 \leq x_2 \leq 30ft$

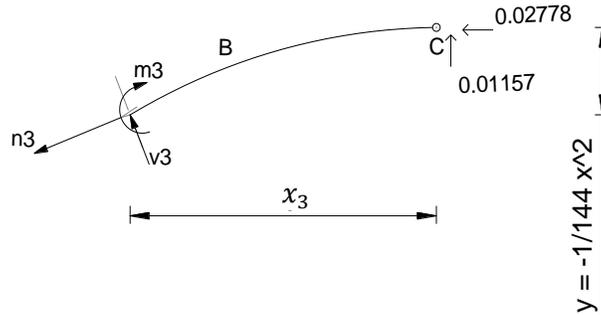


$$\curvearrowright \sum m_{corte} = 0$$

$$m2 = 0.01157x_2 + 0.02778\left(\frac{1}{144}x_2^2\right)$$

$$m2 = 0.000193x_3^2 + 0.01157x_3$$

Tramo $30\text{ft} \leq x_3 \leq 48\text{ft}$



$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m_3 = 0.000193x_3^2 + 0.01157x_3$$

Aplicamos la ecuación para conocer el giro en algún punto

$$\theta_i = \int \frac{Mm}{EI} dx$$

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^{60} (0.038194x_1^2 - 2.2917x_1)(0.000193x_1^2 - 0.01157x_1) dx_1 \right. \\ &\quad + \int_0^{30} (0.038194x_2^2 + 2.2917x_2)(0.000193x_2^2 + 0.01157x_2) dx_2 \\ &\quad \left. + \int_{30}^{48} (0.538194x_3^2 - 47.7083x_3 + 1050)(0.000193x_3^2 + 0.01157x_3) dx_3 \right] \\ &= \frac{1}{EI} [190.668 + 453.511 + 230.715] = 874.894/EI \end{aligned}$$

El signo positivo en el resultado indica que el sentido propuesto es correcto y por lo tanto el giro en A va en dirección horaria. Recuérdese que un giro de sentido horario es negativo.

Por lo tanto la sexta condición es:

$$\theta_3 = -\frac{874.894}{EI} \text{ en } x_3 = 48 \text{ ft}$$

Aplicando la condición 6:

$$\text{Sustituimos } \theta_3 = -\frac{874.894}{EI}, x_3 = 48 \text{ en la ec. (5)}$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$EI\left(-\frac{874.894}{EI}\right) = 0.179398(48)^3 - 23.8542(48)^2 + 1050(48) + C_5 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\therefore C_5 = -16154.8008$$

Aplicando la condición 1:

$$y_3 = 0 \text{ en } x_3 = 48 \text{ en la ecuacion (6)}$$

$$EI(0) = 0.04485(48)^4 - 7.95138(48)^3 + 525(48)^2 + (-16154.8008)(48) + C_6 \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\therefore C_6 = 207106.99776$$

Aplicando la condición 3:

$$\theta_2 = \theta_3 \text{ en } x_2 = x_3 = 30ft$$

$$\begin{aligned} 0.01273(30)^3 + 1.14585(30)^2 + C_3 \\ = 0.179398(30)^3 - 23.8542(30)^2 + 1050(30) - 16154.8008 \end{aligned}$$

$$\therefore C_3 = -2654.8098$$

Aplicando la condición 4:

$$y_2 = y_3 \text{ en } x_2 = x_3 = 30ft$$

$$\begin{aligned} 0.003183(30)^4 + 0.38195(30)^3 - 2654.8098(30) + C_4 \\ = 0.04485(30)^4 - 7.95138(30)^3 + 525(30)^2 - 16154.8008(30) \\ + 207106.99776 \end{aligned}$$

$$\therefore C_4 = 83357.62776$$

Aplicando la condición 5

$$y_1 = y_2 \text{ en } x_1 = x_2 = 0ft$$

$$0.003183(0)^4 - 0.38195(0)^3 + C_1(0) + C_2 = 0.003183(0)^4 - 0.38195(0)^3 + C_3(0) + C_4$$

$$\therefore C_2 = C_4 = 83357.62776$$

Aplicando la condición 2

$$y_1 = 0 \text{ en } x_1 = 60 ft$$

$$EI(0) = 0.003183(60)^4 - 0.38195(60)^3 + C_1(60) + 83357.62776. \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\therefore C_1 = \frac{1031238 - 25(83357.62776)}{1500} = -701.801796$$

Por lo que las ecuaciones generales de giro y flecha quedan de la siguiente manera

Tramo $0 \leq x_1 \leq 60ft$

$$\theta_1 = \frac{1}{EI}(0.01273x_1^3 - 1.14585x_1^2 - 701.801796)$$

$$y_1 = \frac{1}{EI}(0.003183x_1^4 - 0.38195x_1^3 - 701.801796x_1 + 83357.62776)$$

Tramo $0 \leq x_2 \leq 30ft$

$$\theta_2 = \frac{1}{EI}(0.01273x_2^3 - 1.14585x_2^2 - 2654.8098)$$

$$y_2 = \frac{1}{EI}(0.003183x_2^4 - 0.38195x_2^3 - 2654.8098x_2 + 83357.62776)$$

Tramo $30ft \leq x_3 \leq 48ft$

$$\theta_3 = \frac{1}{EI}(0.179398x_3^3 - 23.8542x_3^2 + 1050x_3 - 16154.8008)$$

$$y_3 = \frac{1}{EI}(0.04485x_3^4 - 7.95138x_3^3 + 525x_3^2 - 16154.8008x_3 + 207106.99776)$$

A continuación se muestran ciertos resultados

X1 (ft)	$\frac{\theta_1}{EI}$	$\frac{y_1}{EI}$
0	-701.802	83357.62776
60	-2077.1818	0

X2 (ft)	$\frac{\theta_2}{EI}$	$\frac{y_2}{EI}$
0	-2654.8098	83357.62776
30	-1279.8348	16604.21376

X3 (ft)	$\frac{\theta_3}{EI}$	$\frac{y_3}{EI}$
30	-1279.8348	16604.2137
48	-874.894	0

La rotación de la articulación en el punto C es igual al valor absoluto de la diferencia de las pendientes de la curva de la deflexión inmediatamente después y antes de ella.

Cálculo del valor de la pendiente de la curva de deflexión inmediatamente a la izquierda de la articulación.

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\text{segmento } C-B} \text{ en } C &= \theta|_C^{C-B} = \frac{1}{EI} (0.012731(0)^3 - 1.14585(0)^2 - 2654.8098) \\ &= \frac{1}{EI} (-2654.8098) \end{aligned}$$

Cálculo del valor de la pendiente de la curva de deflexión inmediatamente a la derecha de la articulación.

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\text{segmento } C-D} \text{ en } C &= \theta|_C^{C-D} = \frac{1}{EI} (0.01273(0)^3 - 1.14585(0)^2 - 701.801796) \\ &= \frac{1}{EI} (-701.801796) \end{aligned}$$

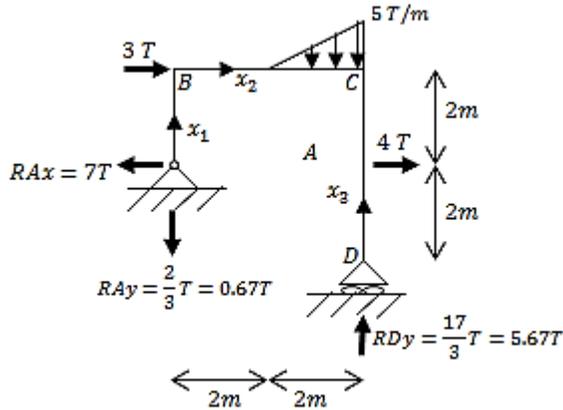
Por lo tanto la articulación de la rotación es:

$$\begin{aligned} \varphi_c &= \left| \theta|_C^{C-B} - \theta|_C^{C-D} \right| \\ \varphi_c &= \left| -\frac{2654.8098}{EI} - \frac{-701.801796}{EI} \right| = \frac{1953.01}{EI} \end{aligned}$$

2.2. ANÁLISIS DE MARCOS ESTÁTICAMENTE DETERMINADOS

1.- Determinar las reacciones, diagrama de cortante, momento y normal del siguiente marco utilizando el método de secciones.

Calcular Sv_B y Θ_B utilizando el método del trabajo virtual



Nota: x_1 , x_2 , x_3 indican las direcciones en las que se efectuarán los cortes para establecer las ecuaciones que describen la variación de los elementos mecánicos.

Verificación del grado de indeterminación

$$\text{Miembros } (m) = 3$$

$$\text{Nudos } (n) = 4$$

$$\text{Reacciones } (r) = 3$$

$$E. \text{ condición } (c) = 0$$

$$r + 3m = 3 + (3)(3) = 12$$

$$3n + c = 3(4) + 0 = 12$$

como:

$$r + 3m = 3n + c$$

el marco es isostático

$$\sum MA = 0$$

$$3(2) + \left(\frac{5(2)}{2}\right)\left(2 + \frac{2}{3}(2)\right) - 4R_{Dy} = 0$$

$$6 + 5\left(\frac{10}{3}\right) - 4R_{Dy} = 0$$

$$R_{Dy} = \frac{68/3}{4} = \frac{17}{3}T = 5.67T \uparrow$$

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & \sum F_y &= 0 \\ 3T + 4T - R_{Ax} &= 0 & -R_{Ay} - 5 + \frac{17}{3} &= 0 \\ R_{Ax} &= 7T \leftarrow & R_{Ay} &= \frac{2}{3}T = 0.67T \downarrow \end{aligned}$$

Ecuaciones de momento, cortante y normal por tramo de la estructura real:

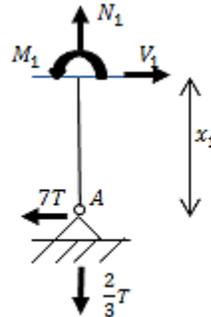
Miembro AB

$$0 \leq x_1 \leq 2m$$

$$M_1 = 7x_1$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = 7$$

$$\sum F_Y = 0 \rightarrow N_1 = \frac{2}{3}$$



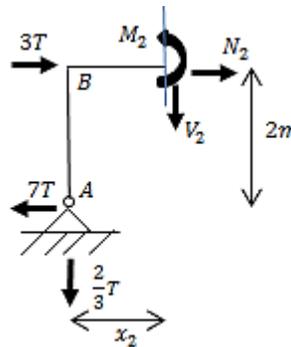
Miembro BC

$$0 \leq x_2 \leq 2m$$

$$M_2 = (7)(2) - \frac{2}{3}x_2 = -\frac{2}{3}x_2 + 14$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_2} = -\frac{2}{3}$$

$$\sum F_X = 0 \rightarrow N_2 = 4$$



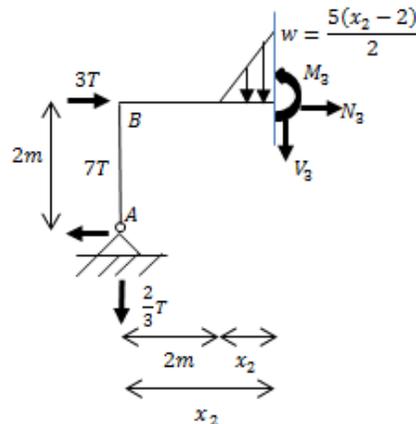
$$2m \leq x_2 \leq 4m$$

$$5 \rightarrow 2$$

$$w \rightarrow x_2 - 2$$

$$w = \frac{5(x_2 - 2)}{2}$$

$$\sum M_{corte} = 0$$



$$7(2) - \frac{2}{3}x_2 - \frac{\left(\frac{5(x_2 - 2)}{2}\right)(x_2 - 2)}{2} \left(\frac{1}{3}(x_2 - 2)\right)$$

$$M_3 = 14 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{12}(x_2 - 2)^3$$

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx_2} = -\frac{2}{3} - \frac{5}{4}(x_2 - 2)^2$$

$$\sum FX \rightarrow N_3 = 4$$

Miembro DC

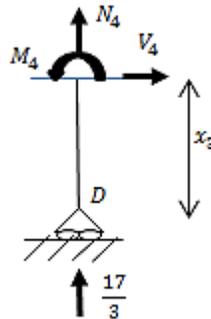
$$0 \leq x_3 \leq 2m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_4 = 0$$

$$V_4 = 0$$

$$\sum FY = 0 \rightarrow N = -\frac{17}{3}$$



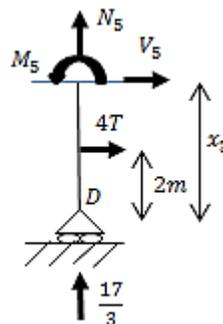
$$2m \leq x_3 \leq 4m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

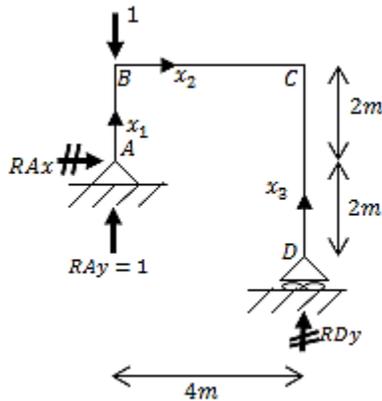
$$M_5 = -4(x_3 - 2) = -4x_3 + 8$$

$$V_5 = \frac{dM_5}{dx_3} = -4$$

$$N_5 = -\frac{17}{3}$$



Calculamos la deformación vertical en el punto B
Método del trabajo virtual



Reacciones:

$$\begin{aligned} \sum MA &= 0 \\ -R_{Dy}(4) &= 0 \\ R_{Dy} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Fy &= 0 \\ R_{Ay} - 1 &= 0 \\ R_{Ay} &= 1 \uparrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Fx &= 0 \\ R_{Ax} &= 0 \end{aligned}$$

Ecuaciones de momento ficticio para flecha:

Miembro AB

$$\begin{aligned} 0 \leq x_1 &\leq 2m \\ m_1 &= 0 \end{aligned}$$

Miembro BC

$$\begin{aligned} 0 \leq x_2 &\leq 4m \\ m_2 &= -(1)(x_2) + (1)(x_2) = 0 \end{aligned}$$

Miembro DC

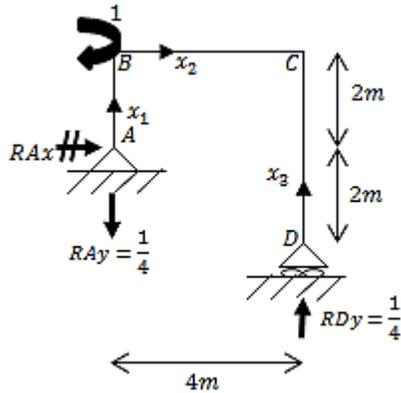
$$\begin{aligned} 0 \leq x_3 &\leq 4m \\ m_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Yx &= \frac{1}{EI} \int_0^2 (7x_1)(0) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(-\frac{2}{3}x_2 + 4\right)(0) dx_2 \\ &\quad + \frac{1}{EI} \int_2^4 \left[14 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{12}(x_2 - 2)^3\right](0) dx_2 \\ &\quad + \frac{1}{EI} \int_0^2 (0)(0) dx_3 + \frac{1}{EI} \int_2^4 (-4x_3 + 8)(0) dx_3 \end{aligned}$$

$$Yx = 0 \quad \therefore \quad \delta_{VB} = 0$$

Calculamos el giro en el punto B

Reacciones:



$$\sum MA = 0$$

$$1 - (R_{Dy})(4) = 0$$

$$R_{Dy} = \frac{1}{4} \uparrow$$

$$\sum Fy = 0$$

$$-R_{Ay} + \frac{1}{4} = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{1}{4} \downarrow$$

$$\sum Fx = 0$$

$$R_{Ax} = 0$$

Ecuaciones de momento ficticio para el giro

Miembro AB

$$0 \leq x_1 \leq 2m$$

$$m_1 = 0$$

Miembro BC

$$0 \leq x_2 \leq 4m$$

$$m_2 = 1 - \frac{1}{4}x_2$$

Miembro DC

$$0 \leq x_3 \leq 4m$$

$$m_3 = 0$$

$$\theta_x = \int \frac{Mm}{EI} dx$$

$$\begin{aligned}
 \theta_x &= \frac{1}{EI} \int_0^2 (7x_1)(0) dx_1 \\
 &+ \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(-\frac{2}{3}x_2 + 14\right) \left(1 - \frac{1}{4}x_2\right) dx_2 \\
 &+ \frac{1}{EI} \int_2^4 \left[14 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{12}(x_2 - 2)^3\right] \left(1 - \frac{1}{4}x_2\right) dx_2 \\
 &+ \frac{1}{EI} \int_0^2 (0)(0) dx_3 + \frac{1}{EI} \int_2^4 (-4x_3 + 8)(0) dx_3 \\
 \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(-\frac{2}{3}x_2 + 14\right) \left(1 - \frac{1}{4}x_2\right) dx_2 &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6}x_2^2 - \frac{25}{6}x_2 + 14\right) dx_2 \\
 &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{18}x_2^3 - \frac{25}{12}x_2^2 + 14x_2\right]_0^2 \\
 &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{18}(2^3) - \frac{25}{12}(2^2) + 14(2)\right] = \frac{181}{9EI} \\
 \frac{1}{EI} \int_2^4 \left[14 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{12}(x_2 - 2)^3\right] \left(1 - \frac{1}{4}x_2\right) dx_2 \\
 &= \frac{1}{EI} \int_2^4 \left(\frac{5}{48}x_2^4 - \frac{25}{24}x_2^3 + \frac{47}{12}x_2^2 - 10x_2 + \frac{52}{3}\right) dx_2 \\
 &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{48}x_2^5 - \frac{25}{96}x_2^4 + \frac{47}{36}x_2^3 - 5x_2^2 + \frac{52}{3}x_2\right]_2^4 \\
 \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{48}(4^5 - 2^5) - \frac{25}{96}(4^4 - 2^4) + \frac{47}{36}(4^3 - 2^3) - 5(4^2 - 2^2) + \frac{52}{3}(4 - 2)\right] \\
 &= \frac{107}{18EI} \\
 \theta_x &= \frac{1}{EI} \left[0 + \frac{181}{9} + \frac{107}{18} + 0 + 0\right] = \frac{469}{18EI}
 \end{aligned}$$

El signo positivo indica que el sentido propuesto para el momento virtual unitario fue el correcto, por lo que el giro debe ser del mismo sentido (horario)

$$\theta_B = \frac{469}{18EI} \curvearrowright$$

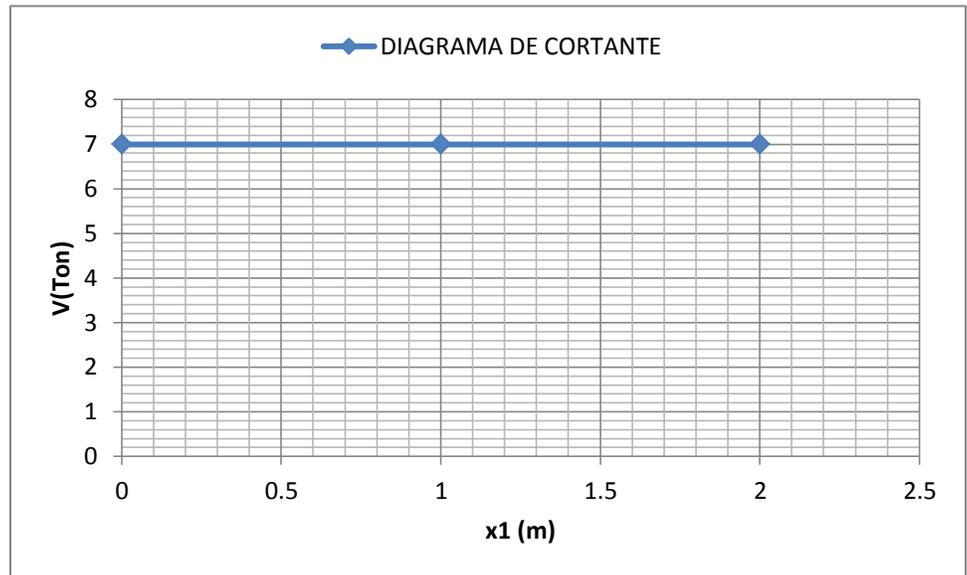
Recuérdese que un giro de sentido horario debe ser considerado como negativo.

$$\therefore \theta_B = -\frac{469}{18EI}$$

DIAGRAMA DE CORTANTE:

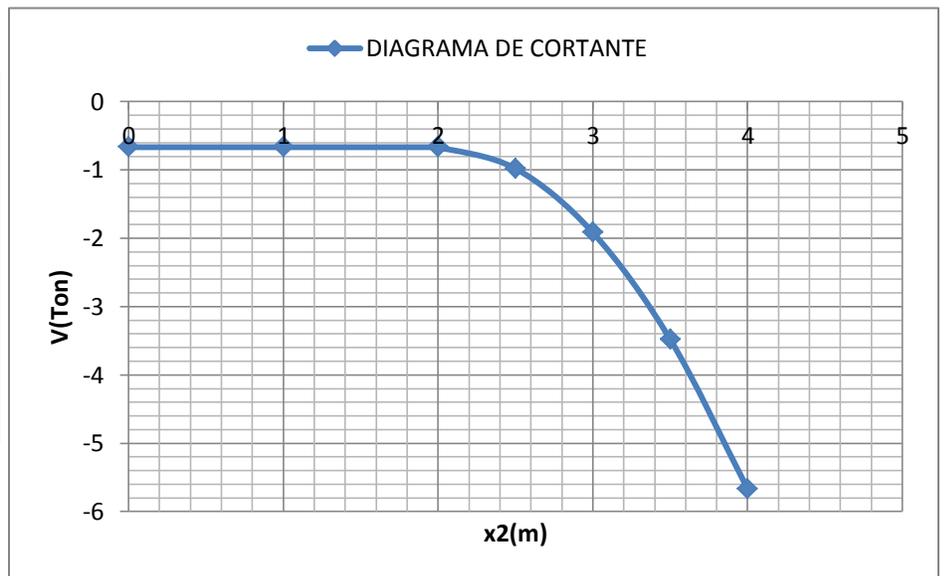
MIEMBRO AB (ROTADO):

x1(m)	V(Ton)
0	7
1	7
2	7



MIEMBRO BC:

x2(m)	V(ton)
0	-0.6666
1	-0.6666
2	-0.6666
2	-0.66666667
2.5	-0.97916667
3	-1.91666667
3.5	-3.47916667
4	-5.66666667



MIEMBRO DC (ROTADO):

x3(m)	V(Ton)
0	0
1	0
2	0
2	-4
3	-4
4	-4

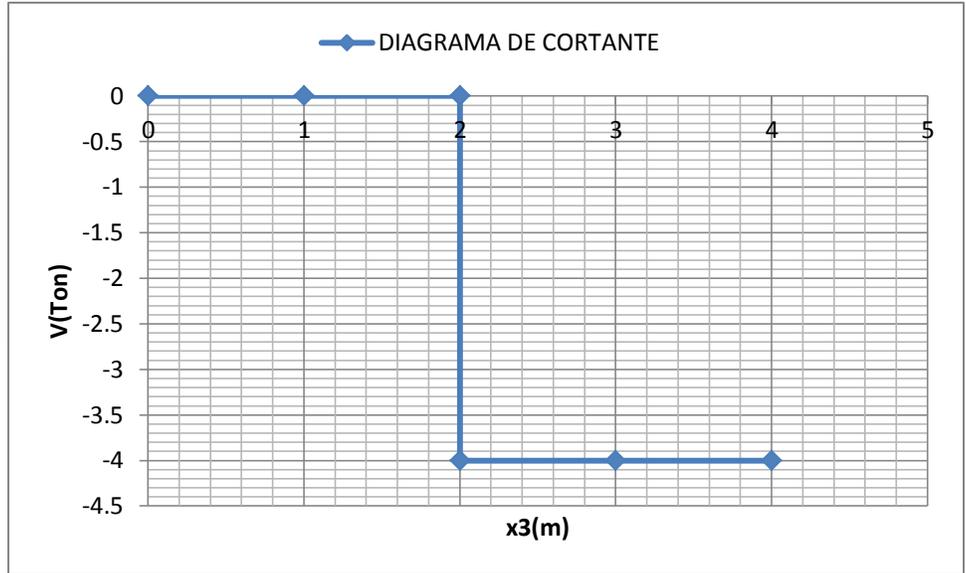
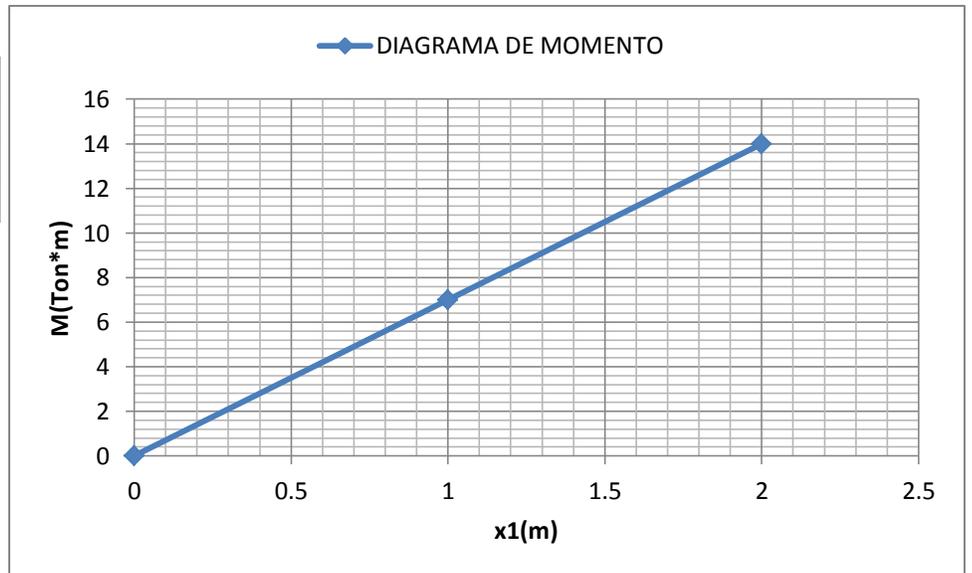


DIAGRAMA DE MOMENTO:

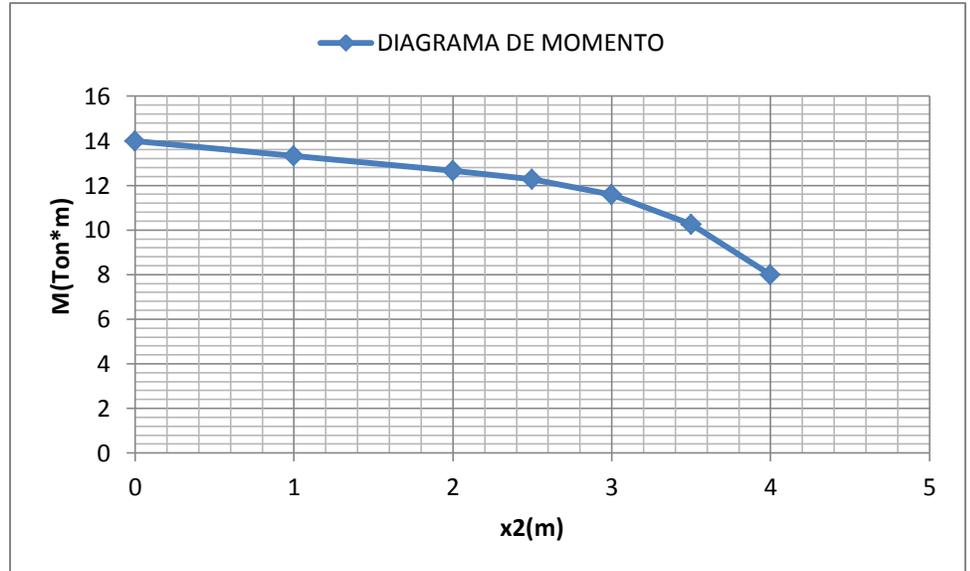
MIEMBRO AB (ROTADO):

x1(m)	M(Ton*m)
0	0
1	7
2	14



MIEMBRO BC:

x2(m)	M(Ton*m)
0	14
1	13.33333333
2	12.66666667
2	12.66666667
2.5	12.28125
3	11.58333333
3.5	10.26041667
4	8



MIEMBRO DC (ROTADO):

x3(m)	M(Ton*m)
0	0
1	0
2	0
2	0
3	-4
4	-8

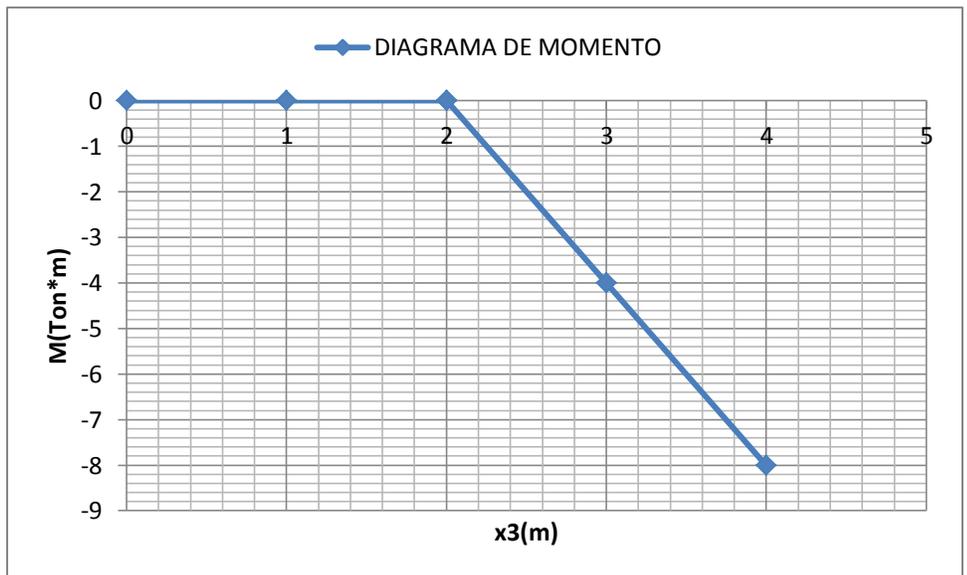
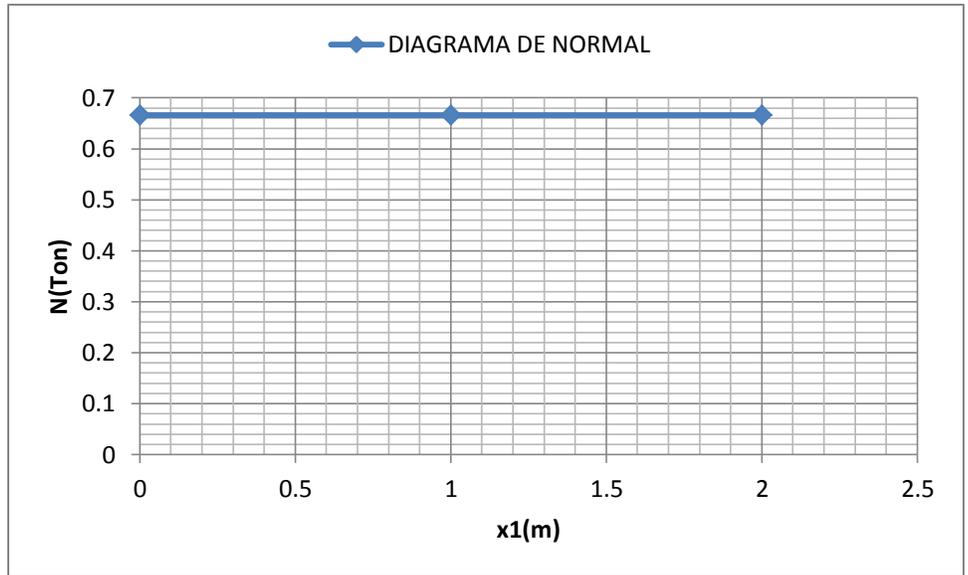


DIAGRAMA DE NORMAL:

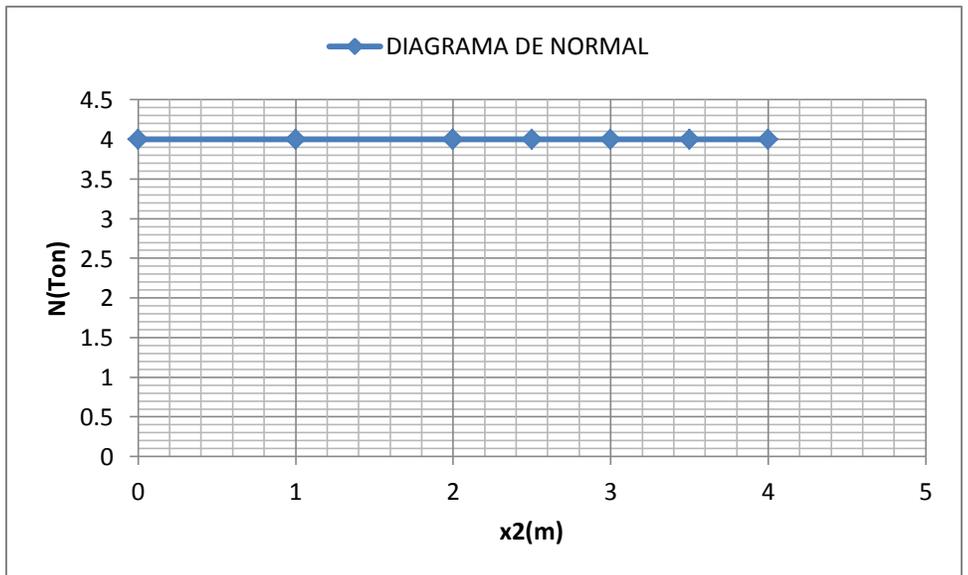
MIEMBRO AB (ROTADO):

x1(m)	N(Ton)
0	0.6666
1	0.6666
2	0.6666



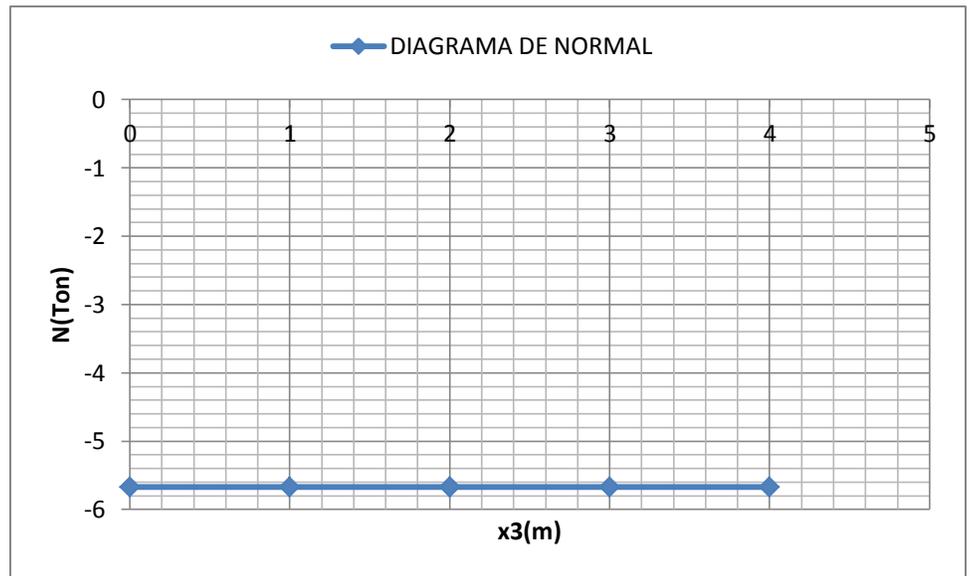
MIEMBRO BC:

x2(m)	N(Ton)
0	4
1	4
2	4
2	4
2.5	4
3	4
3.5	4
4	4



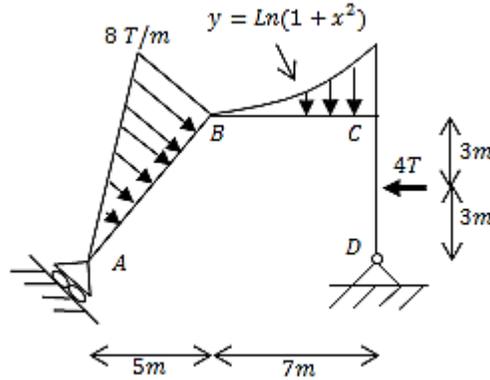
MIEMBRO DC (ROTADO):

x3(m)	N(Ton)
0	-5.6667
1	-5.6667
2	-5.6667
2	-5.6667
3	-5.6667
4	-5.6667



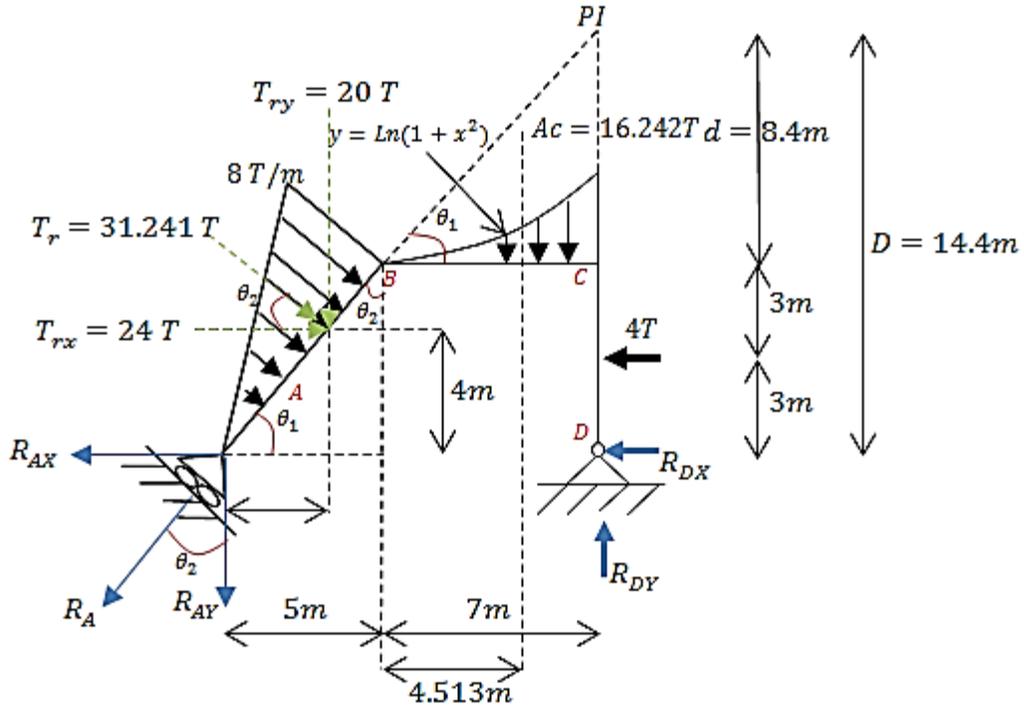
CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

2.- Calcular las reacciones en los soportes y determinar las ecuaciones de momento, cortante y normal de los miembros. Obsérvese que el miembro AB y su respectivo apoyo están inclinados; además el miembro BC soporta una presión que describe una curva logarítmica tal y como se muestra en la figura.



Cálculo de las reacciones

Prolongamos las columnas hasta su punto de intersección (PI)



$$\frac{D}{12} = \frac{6}{5} \Rightarrow D = \frac{6(12)}{5} = 14.4m$$

$$d = 14.4 - 6 = 8.4m$$

Longitud de la barra inclinada $\Rightarrow L = \sqrt{5^2 + 6^2} = 7.8102m$

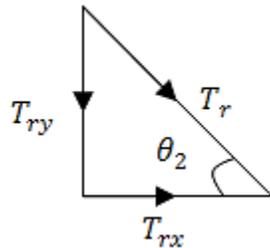
Cálculo de las cargas concentradas equivalentes y sus puntos de aplicación para las presiones.

-Para presión triangular

$$Tr = A = \frac{(7.8102m)(8T/m)}{2} = 31.241T$$

$$\bar{x} = \frac{2}{3}(7.8102m) = 5.2068m \text{ a la derecha de } A$$

Componentes rectangulares de la carga concentrada equivalente



$$Try = Tr(\sin \theta_2) = 31.241T \left(\frac{5}{\sqrt{61}} \right) = 20T$$

$$Trx = Tr(\cos \theta_2) = 31.241T \left(\frac{6}{\sqrt{61}} \right) = 24T$$

-Para presión generada por la curva logarítmica

$$Ac = \int_0^7 \ln(1 + x^2) dx$$

Resolvemos primero de manera indefinida:

$$\int \ln(1 + x^2) dx = x \ln(x^2 + 1) - \int \left(\frac{2x(x)}{1 + x^2} \right) dx = x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2}{1 + x^2} dx$$

$$u = \ln(1 + x^2) \quad dv = dx$$

$$du = \frac{2x}{1 + x^2} \quad v = x$$

$$2 \int \frac{x^2}{1 + x^2} dx = 2 \int x^2(1 + x^2)^{-1} dx$$

$$\int x^2(1 + x^2)^{-1} dx \text{ es una integral de tipo:}$$

$$\int (x^m)(a + bx + cx^2)^n dx = \frac{x^{m-1}(a + bx + cx^2)^{n+1}}{c(2n + m + 1)} - \frac{b(n + m)}{c(2n + m + 1)}$$

$$* \int x^{m-1}(a + bx + cx^2)^n dx$$

$$- \frac{a(m - 1)}{c(2n + m + 1)} * \int x^{m-2}(a + bx + cx^2)^n dx$$

En este caso:

$$m = 2, a = 1, b = 0, c = 1, n = -1$$

Sustituyendo:

$$\int (x^2)(1 + x^2)^{-1} dx = \frac{x^{2-1}(1 + x^2)^{-1+1}}{1(2(-1) + 2 + 1)} - \frac{(0)(-1 + 2)}{1(2(-1) + 2 + 1)} * \int x^{2-1}(1 + x^2)^{-1} dx$$

$$- \frac{1(2 - 1)}{1(2(-1) + 2 + 1)} * \int x^{2-2}(1 + x^2)^{-1} dx = x - \int \frac{dx}{1^2 + x^2} = x - \arctan(x)$$

$$\int \ln(1 + x^2) dx = x \ln(1 + x^2) + 2(\arctan(x) - x)$$

La carga concentrada equivalente de la presión logarítmica es:

$$Ac = \int_0^7 \ln(1 + x^2) dx = [x \ln(1 + x^2) + 2(\arctan(x) - x)]_0^7 \approx 16.242T$$

El punto de aplicación es:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^7 x(\ln(1 + x^2)) dx}{\int_0^7 (\ln(1 + x^2)) dx}$$

El denominador ya fue resuelto

Resolvemos el numerador:

$$\int_0^7 x(\ln(1 + x^2)) dx$$

De forma indefinida.

$$\int x(\ln(1 + x^2)) dx$$

Es una integral de tipo:

$$\int \ln u du$$

donde:

$$u = 1 + x^2, \quad du = 2x dx$$

$$\int x(\ln(1 + x^2)) dx = \frac{1}{2} \int 2x \ln(1 + x^2) dx = \frac{1}{2} \int \ln u du$$

$$u' = \ln(u) \quad dv = du$$

$$du' = \frac{1}{u} du \quad v = u$$

$$\frac{1}{2} \int \ln u du = \frac{1}{2} \left[u \ln(u) - \int u \left(\frac{1}{u} du \right) \right] = \frac{1}{2} [u \ln(u) - u]$$

$$\int x(\ln(1 + x^2)) dx = \frac{1}{2} [(1 + x^2) \ln(1 + x^2) - (1 + x^2)]$$

$$= \frac{1}{2} (1 + x^2) [\ln(1 + x^2) - 1]$$

$$\int_0^7 x(\ln(1 + x^2)) dx = \left[\frac{1}{2} (1 + x^2) [\ln(1 + x^2) - 1] \right]_0^7 = 73.3006$$

$$\bar{x} = \frac{73.3006}{16.242} = 4.513m \text{ a la derecha de } B$$

Tomamos momentos alrededor del punto PI y como las reacciones RA y RDy pasan por este punto , no producen momento.

Al no producir momento RA con respecto a PI, los momentos de RAx y RAy con respecto a tal punto se anulan entre si; por ello no se consideraran en la siguiente ecuación:

$$\sum M_{PI} = 0$$

$$RDx(14.4) + 4(11.4) - 16.242(7 - 4.513) - 20(12 - 3.3333) - 24(14.4 - 4) = 0$$

$$RDx = \frac{417.7279}{14.4} = 29.0089T$$

El signo positivo indica que el sentido propuesto es correcto

$$\therefore RDx = 29.0089T \leftarrow$$

De:

$$\sum F_x = 0$$

$$-RAx + TRx - 4 - RDx = 0$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

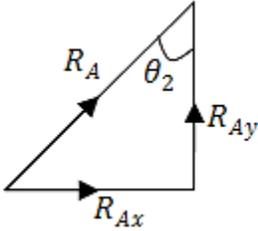
$$-R_{Ax} + 24 - 4 - 29.0089 = 0$$

$$R_{Ax} = -9.0089T$$

El signo negativo indica que el sentido propuesta es incorrecto, por lo que:

$$R_{Ax} = 9.0089T \rightarrow$$

Del siguiente esquema (en el cual se manejan fuerzas concurrentes apropiadas a partir de conocer la dirección de R_{Ax} correcta):



$$\tan \theta_2 = \frac{co}{ca} = \frac{R_{Ax}}{R_{Ay}}$$

Relacionando las distancias:

$$\tan \theta_2 = \frac{co}{ca} = \frac{5}{6}$$

Igualando:

$$\frac{R_{Ax}}{R_{Ay}} = \frac{5}{6}$$

Despejando

$$R_{Ay} = \frac{6}{5} R_{Ax} = \frac{6}{5} (9.0089T) = 10.8107T \uparrow$$

Las resultante R_A es:

$$R_A = \sqrt{(9.0089)^2 + (10.8107)^2} = 14.0724 T \nearrow$$

De:

$$\sum F_y = 0$$

$$10.8107 - 20 - 16.242 + R_{Dy} = 0$$

$$R_{Dy} = 25.4313 T$$

El signo indica que:

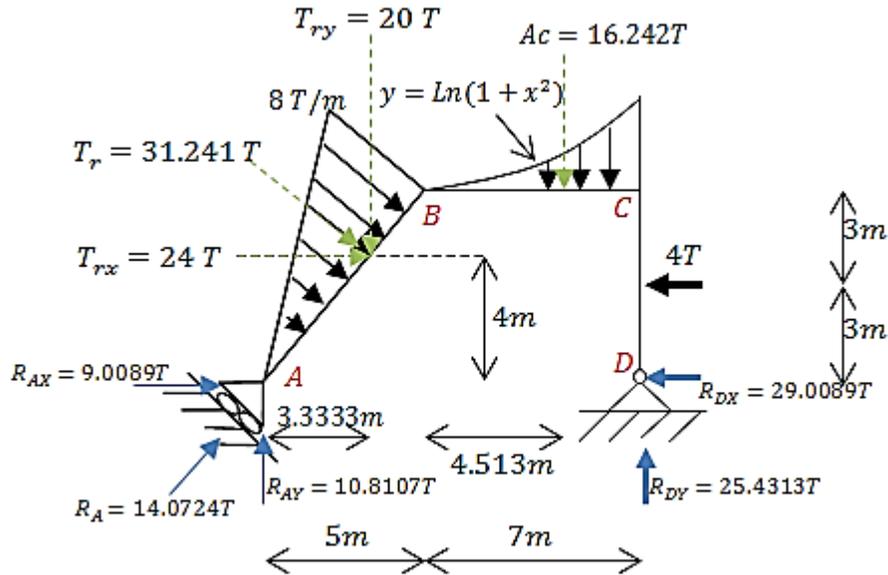
$$R_{Dy} = 25.4313 T \uparrow$$

Como comprobación:

$$\sum MA = 0$$

$$24(4) + 20(3.3333) + 16.242(9.513) - 4(3) - 25.4313(12) \approx 0 \quad \text{ok } \checkmark$$

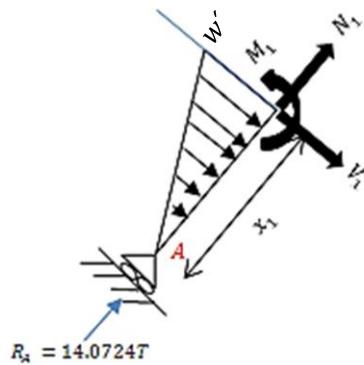
El siguiente diagrama muestra las reacciones en el marco:



Ecuaciones de momento, cortante y normal

Miembro AB

$$0 \leq x_1 \leq \sqrt{61}m$$



$$\frac{8}{\sqrt{61}} = \frac{w'}{x_1}$$

$$w' = 1.0243 x_1$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = - \left[\frac{(x_1)(1.0243x_1)}{2} \right] \left(\frac{1}{3}x_1 \right) = -0.170716 x_1^3$$

$$x_1 = \sqrt{61}, \quad M_1 = -81.3333$$

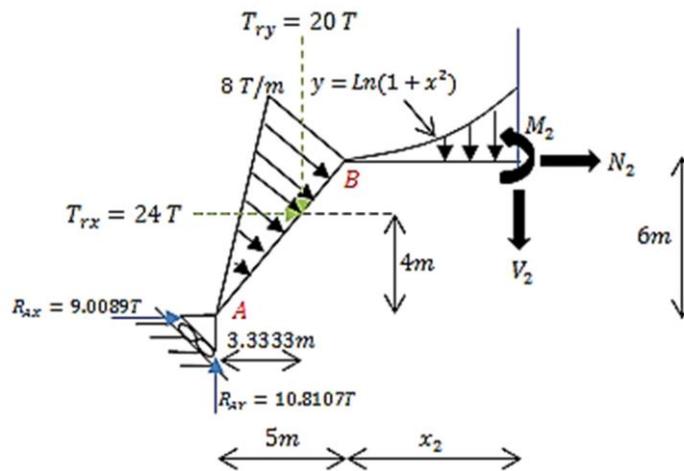
$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = -0.512148x_1^2$$

$$\sum Fy = 0$$

$$N_1 = -14.0724$$

Miembro BC

$$0 \leq x_2 \leq 7m$$



Para la presión de la curva logarítmica del corte:

Carga concentrada equivalente:

$$Ac' = \int_0^{x_2} Ln(1+x^2) dx = x_2 \cdot Ln(x_2^2 + 1) + 2[\tan^{-1}(x_2) - x_2]$$

Punto de aplicación:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{x_2} x(Ln(1+x^2)) dx}{\int_0^{x_2} Ln(1+x^2) dx} = \frac{\frac{(x_2^2 + 1) \cdot Ln(x_2^2 + 1)}{2} - \frac{x_2^2}{2}}{x_2 \cdot Ln(x_2^2 + 1) + 2[\tan^{-1}(x_2) - x_2]} \text{ a la derecha de B}$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = 10.8107(5 + x_2) - 9.0089(6) - 24(2) - 20(1.6667 + x_2) - [x_2 \cdot \ln(x_2^2 + 1) + 2[\tan^{-1}(x_2) - x_2]] \left[x_2 - \frac{\frac{(x_2^2 + 1) \cdot \ln(x_2^2 + 1)}{2} - \frac{x_2^2}{2}}{x_2 \cdot \ln(x_2^2 + 1) + 2[\tan^{-1}(x_2) - x_2]} \right]$$

$$M_2 = \frac{-x_2^2 \cdot \ln(x_2^2 + 1)}{2} + \frac{\ln(x_2^2 + 1)}{2} - 2x \cdot \tan^{-1}(x_2) + \frac{3}{2}x_2^2 - 9.1893x_2 - 81.3339$$

$$x_2 = 0, M_2 = -81.3339; \quad x_2 = 7, M_2 = -186.052$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_2} = -x_2^2 \cdot \ln(x_2^2 + 1) - 2 \tan^{-1}(x_2) + 2x_2 - 9.1893$$

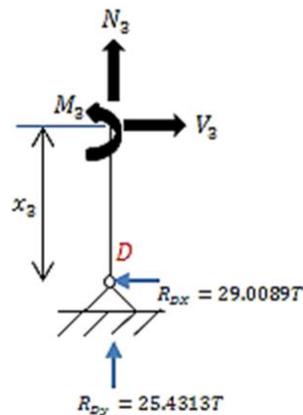
$$\sum FX = 0$$

$$9.0089 + 24 + N_2 = 0$$

$$N_2 = -33.0089$$

Miembro DC

$$0 \leq x_3 \leq 3m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = 29.0089x_3$$

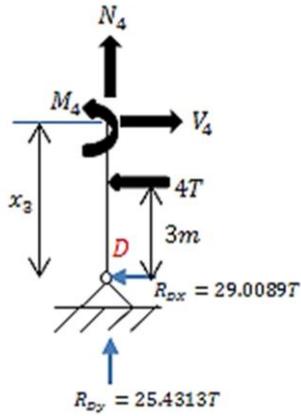
$$x_3 = 3, M_3 = 87.0267$$

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx_3} = 29.0089$$

$$\sum Fy = 0$$

$$N_3 = -25.4313$$

$$3m \leq x_3 \leq 6m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_4 = 29.0089x_3 + 4(x_3 - 3) = 33.0089x_3 - 12$$

$$x_3 = 0, M_4 = 87.0267$$

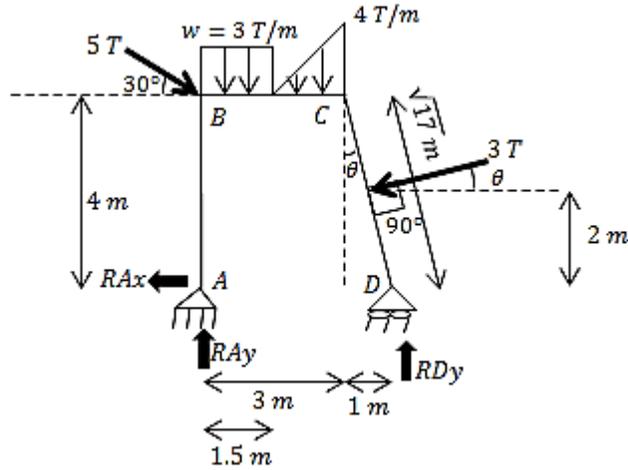
$$x_3 = 6, M_4 = 186.053$$

$$V_4 = \frac{dM_4}{dx_3} = 33.0089$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N_4 = -25.4313$$

3.- Calcular el desplazamiento vertical en C con el método del trabajo virtual del marco que se muestra en la siguiente figura:

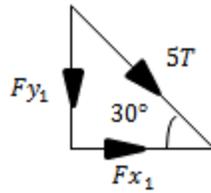


$$\text{sen } \theta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

Componentes rectangulares:

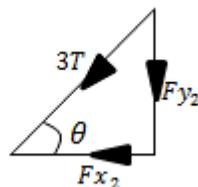
-Para $F_1=5T$



$$F_{x_1} = 5T(\text{cos } 30^\circ) = \frac{5\sqrt{3}}{2}T$$

$$F_{y_1} = 5T(\text{sen } 30^\circ) = 2.5T$$

-Para $F_2=3T$



$$Fx_2 = 3T(\cos \theta) = 3\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)T = \frac{12}{\sqrt{17}}T$$

$$Fy_2 = 3T(\text{sen } \theta) = 3\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)T = \frac{3}{\sqrt{17}}T$$

Reacciones:

$$\sum Fx = 0$$

$$RAx + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{12}{\sqrt{17}}\right) = 0$$

$$\therefore RAx = -1.41969952 \approx 1.4197T \quad \leftarrow$$

$$\sum MA = 0$$

$$\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)(4) + (3)(1.5)\left(\frac{1.5}{2}\right) + \left(\frac{(1.5)(4)}{2}\right)\left(1.5 + \frac{2}{3}(1.5)\right) + \left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right)(3.5) - \left(\frac{12}{\sqrt{17}}\right)(2) - RDy(4) = 0$$

$$\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)(4) + 4.5(0.75) + (3)(2.5) + \left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right)(3.5) - \left(\frac{12}{\sqrt{17}}\right)(2) - RDy(4) = 0$$

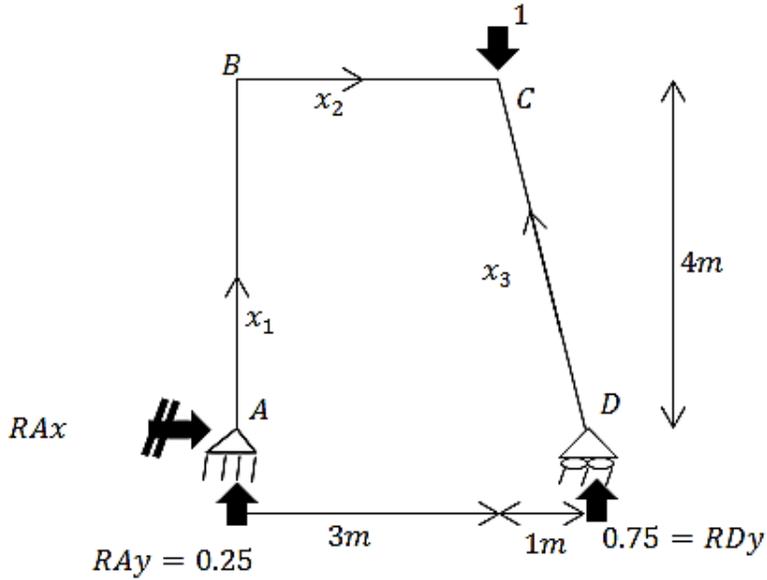
$$RDy = \frac{24.92127714}{4} = 6.23031928T \approx 6.23T \quad \uparrow$$

$$\sum Fy = 0$$

$$RAy - 2.5 - 4.5 - 3 - \left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right) + 6.23031928 = 0$$

$$RAy = 4.49728760T \approx 4.4973T \quad \uparrow$$

Aplicando la carga virtual unitaria en el punto C



$$\begin{aligned} \sum MA &= 0 \\ 1(3) - RDy(4) &= 0 \\ RDy &= \frac{3}{4} = 0.75 \uparrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Fy &= 0 \\ RAy - 1 + 0.75 &= 0 \\ RAy &= 0.25 \uparrow \end{aligned}$$

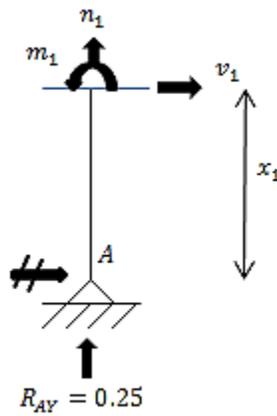
$$\begin{aligned} \sum Fx &= 0 \\ RAx &= 0 \end{aligned}$$

Ecuaciones de momento virtual

Miembro AB

$$0 \leq x_1 \leq 4m$$

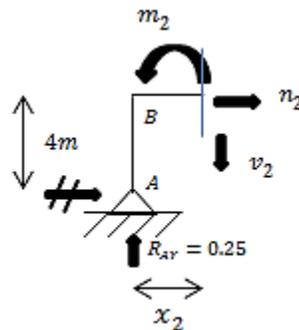
$$m_1 = 0$$



Miembro BC

$$0 \leq x_2 \leq 3m$$

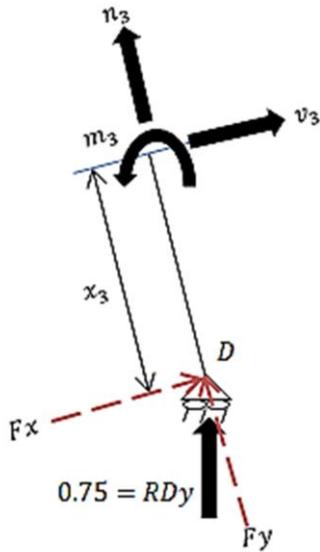
$$m_2 = 0.25 x_2$$



Miembro DC

$$0 \leq x_3 \leq \sqrt{17}m$$

$$m_3 = -\left(\frac{3\sqrt{17}}{68}\right)x_3$$



$$F_x = (0.75)(\text{sen } \theta) = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \left(\frac{3\sqrt{17}}{68}\right)$$

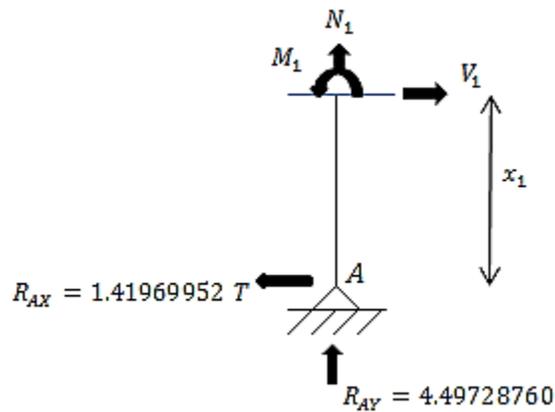
$$F_y = (0.75)(\text{cos } \theta) = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = \left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right)$$

Ecuaciones de momento de la estructura real:

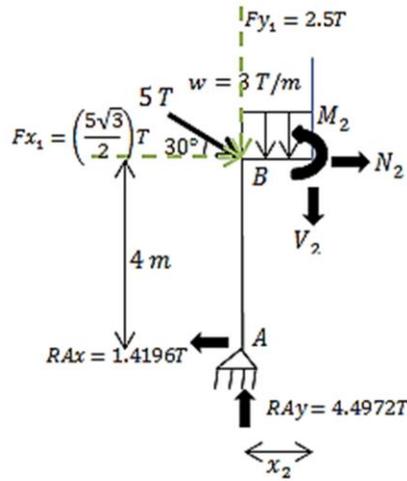
Miembro AB

$$0 \leq x_1 \leq 4m$$

$$M_1 = 1.41969952 x_1$$



Miembro BC
 $0 \leq x_2 \leq 1.5m$



$$M_2 = 4.49728760(x_2) + 1.41969952(4) - 2.5(x_2) - 3(x_2) \left(\frac{x_2}{2}\right)$$

$$M_2 = -\frac{3}{2}x_2^2 + 1.99728760x_2 + 5.67879808$$

$1.5m \leq x_2 \leq 3m$

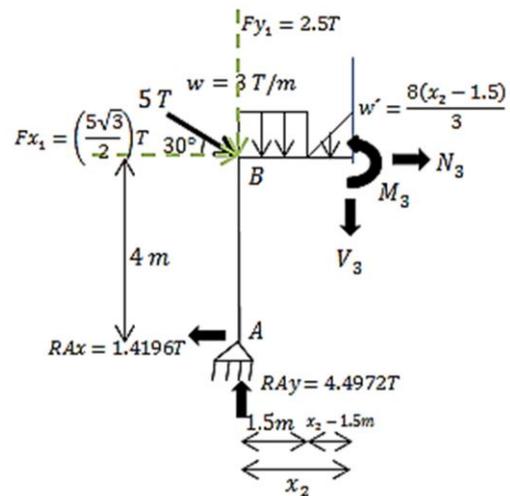
Cálculo de w'

$$4 \frac{T}{m} \rightarrow 1.5m$$

$$w' \rightarrow x_2 - 1.5m$$

$$\frac{4}{1.5} = \frac{w'}{x_2 - 1.5}$$

$$w' = \frac{8(x_2 - 1.5)}{3}$$



$$M_3 = 4.49728760(x_2) + 1.41969952(4) - 2.5(x_2) - 3(1.5) \left(x_2 - \frac{1.5}{2}\right)$$

$$- \left[\frac{(x_2 - 1.5) \left[\frac{8(x_2 - 1.5)}{3} \right]}{2} \right] \left[\frac{1}{3}(x_2 - 1.5) \right]$$

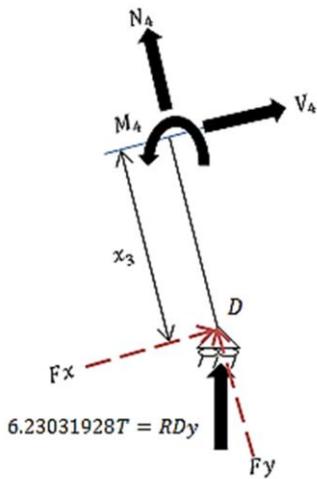
CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$M_3 = 4.49728760x_2 + 5.67879808 - 2.5x_2 - 4.5x_2 + \frac{27}{8} - \left(\frac{4}{9}\right)(x_2 - 15)^3$$

$$M_3 = -\left(\frac{4}{9}\right)(x_2 - 15)^3 - 2.50271240x_2 + 9.05379808$$

Miembro DC

$$0 \leq x_3 \leq \frac{\sqrt{17}}{2} m$$



$$F_x = (6.23031928T)(\text{sen } \theta) = (6.23031928T) \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$$

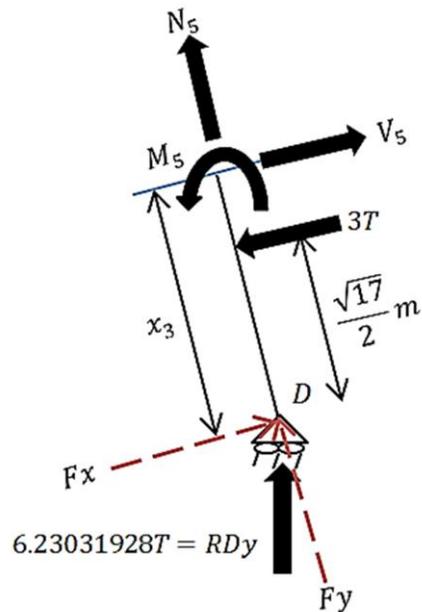
$$F_y = (6.23031928T)(\text{cos } \theta) = (6.23031928T) \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$$

$$\therefore F_x = 1.51107438 T$$

$$F_y = 6.04429752 T$$

$$M_4 = -1.51107438 x_3$$

$$\frac{\sqrt{17}}{2} m \leq x_3 \leq \sqrt{17} m$$



$$M_5 = -1.51107438 x_3 + 3 \left(x_3 - \frac{\sqrt{17}}{2} \right)$$

$$M_5 = 1.48892562 x_3 - \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Ecuacion para calcular la deflexión en cualquier punto:

$$Y_x = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

Parte debida al Miembro AB

$$\frac{1}{EI} \int_0^4 (1.41969952 x_1)(0) dx_1 = 0$$

Parte debida al Miembro BC

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{3}{2} x_2^2 + 1.99728760 x_2 + 5.67879808 \right) (0.25 x_2) dx_2 \\ & + \frac{1}{EI} \int_{\frac{3}{2}}^3 \left[-\left(\frac{4}{9}\right) (x_2 - 15)^3 - 2.50271240 x_2 + 9.05379808 \right] (0.25 x_2) dx_2 \end{aligned}$$

Integrando por separado:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{3}{2} x_2^2 + 1.99728760 x_2 + 5.67879808 \right) (0.25 x_2) dx_2 \\ & = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{3}{8} x_2^3 + \frac{4993219}{10000000} x_2^2 + \frac{4436561}{3125000} x_2 \right) dx_2 \\ & = \frac{1}{EI} \left[-\frac{3}{32} x_2^4 + \frac{4993219}{30000000} x_2^3 + \frac{4436561}{6250000} x_2^2 \right]_0^{\frac{3}{2}} \\ & = \frac{1}{EI} \left[-\frac{3}{32} \left[\frac{3}{2} \right]^4 + \frac{4993219}{30000000} \left[\frac{3}{2} \right]^3 + \frac{4436561}{6250000} \left[\frac{3}{2} \right]^2 \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{673715889}{400000000} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{EI} \int_{\frac{3}{2}}^3 \left[-\left(\frac{4}{9}\right) (x - 15)^3 - 2.50271240 x_2 + 9.05379808 \right] (0.25 x_2) dx_2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{EI} \int_{\frac{3}{2}}^3 \left[-\frac{x_2^4}{9} + \frac{x_2^3}{2} - \frac{13756781x_2^2}{10000000} + \frac{32980619}{12500000} x_2 \right] dx_2 \\
 &= \frac{1}{EI} \left[-\frac{x_2^5}{45} + \frac{x_2^4}{8} - \frac{13756781}{30000000} x_2^3 + \frac{32980619}{25000000} x_2^2 \right]_{\frac{3}{2}}^3 \\
 &= \frac{1}{EI} \left[\left(-\frac{1}{45} \right) \left(3^5 - \left(\frac{3}{2} \right)^5 \right) + \left(\frac{1}{8} \right) \left(3^4 - \left(\frac{3}{2} \right)^4 \right) - \left(\frac{13756781}{30000000} \right) \left(3^3 - \left(\frac{3}{2} \right)^3 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{32980619}{25000000} \right) \left(3^2 - \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{EI} \left[\frac{932895837}{400000000} \right] = 2.33224/EI
 \end{aligned}$$

Parte debida al Miembro DC

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\sqrt{17}}{2}} (-1.51107438 x_3) \left(-\frac{3\sqrt{17}}{68} x_3 \right) dx_3 \\
 &\quad + \frac{1}{EI} \int_{\frac{\sqrt{17}}{2}}^{\sqrt{17}} \left(1.48892562 x_3 - \frac{3\sqrt{17}}{2} \right) \left(-\frac{3\sqrt{17}}{68} x_3 \right) dx_3
 \end{aligned}$$

Integrando por separado:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\sqrt{17}}{2}} (-1.51107438 x_3) \left(-\frac{3\sqrt{17}}{68} x_3 \right) dx_3 &= \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\sqrt{17}}{2}} \left[\frac{226661157\sqrt{17}}{3400000000} x_3^2 \right] dx_3 \\
 &= \frac{1}{EI} \left[\frac{75553719\sqrt{17}}{3400000000} x_3^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{17}}{2}} = \frac{1}{EI} \left[\frac{75553719\sqrt{17}}{3400000000} \left(\frac{\sqrt{17}}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{EI} [0.8027582644]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{EI} \int_{\frac{\sqrt{17}}{2}}^{\sqrt{17}} \left(1.48892562 x_3 - \frac{3\sqrt{17}}{2} \right) \left(-\frac{3\sqrt{17}}{68} x_3 \right) dx_3 \\
 = \frac{1}{EI} \int_{\frac{\sqrt{17}}{2}}^{\sqrt{17}} \left(\frac{9}{8} x_3 - \frac{13137579\sqrt{17}}{200000000} x_3^2 \right) dx_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{EI} \left[\frac{9}{16} x_3^2 - \frac{4379193\sqrt{17}}{200000000} x_3^3 \right]_{\frac{\sqrt{17}}{2}}^{\sqrt{17}} \\
 &= \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{9}{16} \right) \left((\sqrt{17})^2 - \left(\frac{\sqrt{17}}{2} \right)^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{4379193\sqrt{17}}{200000000} \right) \left((\sqrt{17})^3 - \left(\frac{\sqrt{17}}{2} \right)^3 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{EI} [1.634932851]
 \end{aligned}$$

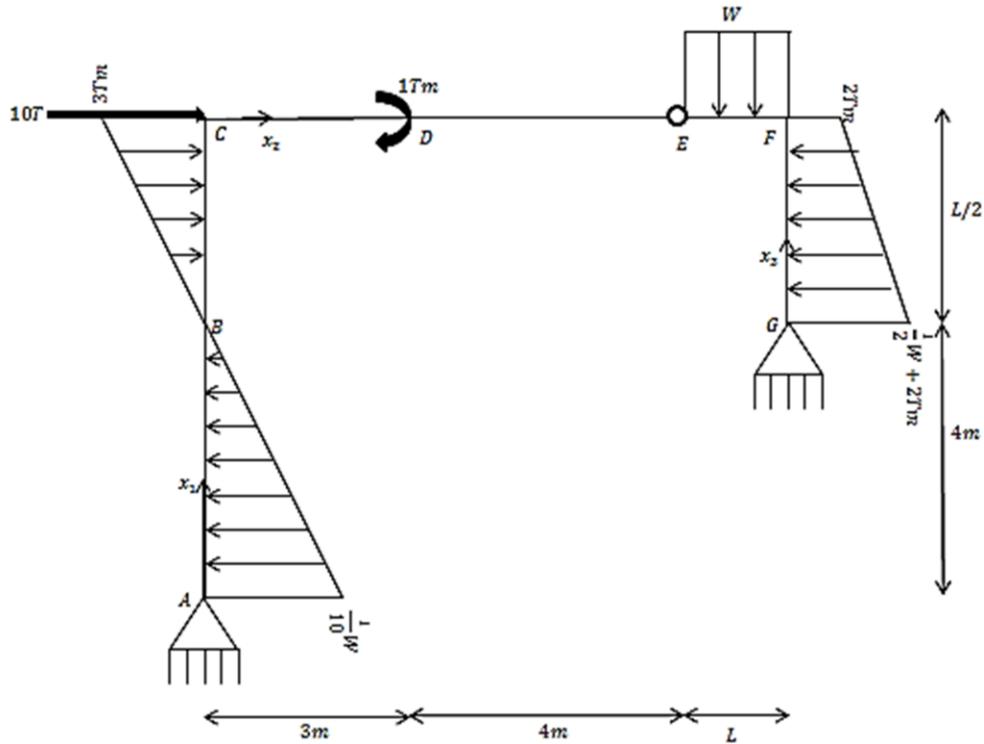
Deformación total en el punto

$$Y_x = \left[0 + \frac{673715889}{400000000} + \frac{932895837}{400000000} + 0.8027582644 + 1.634932851 \right]$$

$$Y_x = \frac{1}{EI} [6.45422043]$$

$$\therefore Y_c = \frac{1}{EI} [6.45422043] \downarrow (\text{hacia abajo})$$

4.- Calcular las reacciones del siguiente marco isostático. Determine las ecuaciones de momento, cortante y normal para cada miembro.



SOLUCIÓN:

Cálculo de las reacciones:

$$\sum ME_{izquierda} = 0$$

$$-R_{AX} \left(4 + \frac{L}{2}\right) + \left[\frac{(4) \left(\frac{1}{10} W\right)}{2}\right] \left(\frac{L}{2} + \frac{2}{3}(4)\right) + R_{AY}(7) - \left[\frac{\left(\frac{L}{2}\right)(3)}{2}\right] \left(\frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)\right) + 1 = 0$$

$$-R_{AX} \left(4 + \frac{L}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} W\right) \left(\frac{L}{2} + \frac{8}{3}\right) + 7R_{AY} - \left(\frac{3}{4} L\right) \left(\frac{1}{6} L\right) + 1 = 0$$

$$-R_{AX} \left(4 + \frac{L}{2}\right) + \frac{1}{10} WL + \frac{8}{15} W + 7R_{AY} - \frac{1}{8} L^2 + 1 = 0$$

$$7R_{AY} - \left(4 + \frac{L}{2}\right) R_{AX} = \frac{1}{8} L^2 - \frac{1}{10} WL - \frac{8}{15} W - 1 \text{ -----ec. 1}$$

$$\sum MEderecha = 0$$

$$(W)(L) \left(\frac{L}{2}\right) + \left(L + \frac{1}{8}WL\right) \left(\frac{\frac{L^2}{4} + \frac{1}{24}WL^2}{L + \frac{1}{8}WL}\right) - R_{GX} \left(\frac{L}{2}\right) - R_{GY}(L) = 0$$

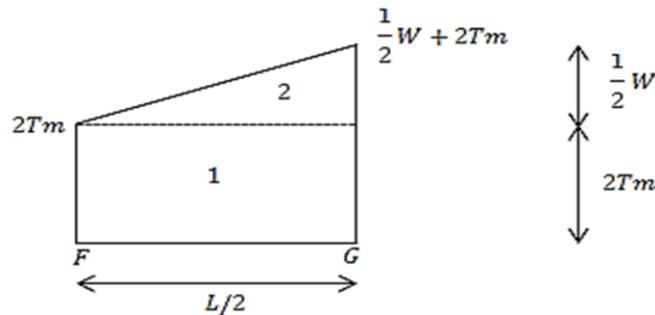
$$\frac{1}{2}WL^2 + \frac{L^2}{4} + \frac{1}{24}WL^2 - R_{GX} \left(\frac{L}{2}\right) - R_{GY}(L) = 0$$

$$-L \left(\frac{1}{2}R_{GX} + R_{GY}\right) = L \left(-\frac{13}{24}WL - \frac{L}{4}\right)$$

$$\frac{1}{2}R_{GX} + R_{GY} = \frac{13}{24}WL + \frac{L}{4} \text{-----ec. 2}$$

Para la presión trapezoidal se usó el siguiente análisis:

Presión trapezoidal rotada:



$$A_1 = \left(\frac{L}{2}\right)(2) = L$$

$$A_2 = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{2}W\right)}{2} = \frac{1}{8}WL$$

$$\bar{x}_1 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L}{4}$$

$$\bar{x}_2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L}{3}$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$\bar{x}_1 A_1 = \left(\frac{L}{4}\right)(L) = \frac{1}{4}L^2$$

$$\bar{x}_2 A_2 = \left(\frac{L}{3}\right)\left(\frac{1}{8}WL\right) = \frac{1}{24}WL^2$$

Componente	A	\bar{x}	$\bar{x}A$
①= rectángulo	L	$\frac{L}{4}$	$\frac{1}{4}L^2$
②= triángulo	$\frac{1}{8}WL$	$\frac{L}{3}$	$\frac{1}{24}WL^2$
Σ	$L + \frac{1}{8}WL$		$\frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{24}WL^2$

La carga concentrada equivalente es:

$$A_T = L + \frac{1}{8}WL$$

Brazo de palanca:

$$\bar{x}_T = \frac{\Sigma \bar{x}A}{\Sigma A} = \frac{\frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{24}WL^2}{L + \frac{1}{8}WL} \text{ a la derecha de F}$$

$$\Sigma FX = 0$$

$$-\left[\frac{(4)\left(\frac{1}{10}W\right)}{2}\right] + \left[\frac{\left(\frac{L}{2}\right)(3)}{2}\right] + 10 - \left(L + \frac{1}{8}WL\right) + R_{GX} + R_{AX} = 0$$

$$-\frac{1}{5}W + \frac{3}{4}L + 10 - L - \frac{1}{8}WL + R_{GX} + R_{AX} = 0$$

$$R_{GX} + R_{AX} = \frac{1}{8}WL + \frac{1}{5}W - 10 + \frac{1}{4}L \text{ -----ec. 3}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$R_{AY} - WL + R_{GY} = 0$$

$$R_{AY} + R_{GY} = WL \text{-----ec.4}$$

Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones, el cual fue enumerado:

$$7R_{AY} - \left(4 + \frac{L}{2}\right)R_{AX} = \frac{1}{8}L^2 - \frac{1}{10}WL - \frac{8}{15}W - 1 \text{-----ec. 1}$$

$$\frac{1}{2}R_{GX} + R_{GY} = \frac{13}{24}WL + \frac{L}{4} \text{-----ec. 2}$$

$$R_{GX} + R_{AX} = \frac{1}{8}WL + \frac{1}{5}W - 10 + \frac{1}{4}L \text{-----ec. 3}$$

$$R_{AY} + R_{GY} = WL \text{-----ec. 4}$$

Usando el método de sustitución e igualación:

Despejamos R_{GX} de ec.2 y ec.3 respectivamente:

$$R_{GX} = \frac{13}{12}WL + \frac{L}{2} - 2R_{GY} \text{-----ec. 5}$$

$$R_{GX} = \frac{1}{8}WL + \frac{1}{5}W - 10 + \frac{1}{4}L - R_{AX} \text{-----ec. 6}$$

Igualando ec.5 con ec. 6:

$$\frac{13}{12}WL + \frac{L}{2} - 2R_{GY} = \frac{1}{8}WL + \frac{1}{5}W - 10 + \frac{1}{4}L - R_{AX} \text{-----ec. 7}$$

Despejamos R_{GY} de ec. 7:

$$R_{GY} = \frac{23}{48}WL - \frac{1}{10}W + 5 + \frac{1}{8}L + \frac{1}{2}R_{AX} \text{-----ec. 8}$$

Sustituimos ec.8 en ec. 4:

$$R_{AY} + \frac{23}{48}WL - \frac{1}{10}W + 5 + \frac{1}{8}L + \frac{1}{2}R_{AX} = WL \text{-----ec. 9}$$

Despejamos R_{AY} de ec. 1:

$$R_{AY} = \frac{1}{56}L^2 - \frac{1}{70}WL - \frac{8}{105}W - \frac{1}{7} + \left(\frac{4}{7} + \frac{L}{14}\right)R_{AX} \text{-----ec. 10}$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

Sustituimos ec. 10 en ec. 9:

$$\frac{1}{56}L^2 - \frac{1}{70}WL - \frac{8}{105}W - \frac{1}{7} + \left(\frac{4}{7} + \frac{L}{14}\right)R_{AX} + \frac{23}{48}WL - \frac{1}{10}W + 5 + \frac{1}{8}L + \frac{1}{2}R_{AX} - WL = 0$$

$$R_{AX} \left(\frac{15}{14} + \frac{L}{14}\right) = -\frac{1}{56}L^2 + \frac{899}{1680}WL + \frac{37}{210}W - \frac{34}{7} - \frac{1}{8}L$$

$$R_{AX} = \frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} \rightarrow \text{ec. 11}$$

Sustituimos ec.11 en ec. 10:

$$R_{AY} = \frac{1}{56}L^2 - \frac{1}{70}WL - \frac{8}{105}W - \frac{1}{7} + \left(\frac{4}{7} + \frac{L}{14}\right) \left(\frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)}\right)$$

$$R_{AY} = \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \uparrow \text{ec. 12}$$

Despejamos R_{GY} de 4:

$$R_{GY} = WL - R_{AY} \text{-----ec.13}$$

Sustituyendo ec. 12 en ec. 13:

$$R_{GY} = WL - \left(\frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48}\right)$$

$$R_{GY} = -\frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{23LW}{48} + \frac{175W + 288}{48} \uparrow \text{ec. 14}$$

Despejamos R_{GX} de ec. 2:

$$R_{GX} = \frac{13}{12}WL + \frac{1}{2}L - 2R_{GY} \text{-----ec. 15}$$

Sustituyendo ec. 14 en ec. 15:

$$R_{GX} = \frac{13}{12}WL + \frac{1}{2}L - 2\left(-\frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{23LW}{48} + \frac{175W + 288}{48}\right)$$

$$R_{GX} = \frac{13189W + 11760}{120(L + 15)} + L\left(\frac{W}{8} + \frac{1}{2}\right) - \frac{175W + 288}{24} \rightarrow \text{ec. 16}$$

Comprobación de los resultados:

Para todo el marco:

$$\sum MA = 0$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

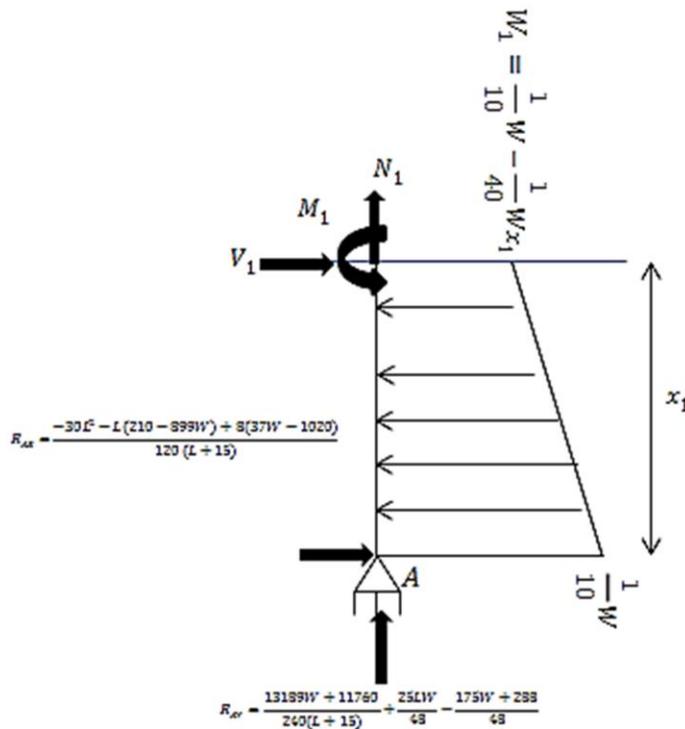
$$\begin{aligned}
 & - \left[\frac{4\left(\frac{1}{10}W\right)}{2} \right] \left(\frac{1}{3}(4) \right) + \left[\frac{\left(\frac{L}{2}\right)(3)}{2} \right] \left(4 + \frac{2}{3}\left(\frac{L}{2}\right) \right) + 10 \left(\frac{L}{2} + 4 \right) + 1 + (W)(L) \left(7 + \frac{L}{2} \right) - \\
 & \left(L + \frac{1}{8}WL \right) \left[\left(\frac{L}{2} - \frac{\frac{L^2}{4} + \frac{1}{24}WL^2}{L + \frac{1}{8}WL} \right) + 4 \right] + \left(\frac{13189W + 11760}{120(L+15)} + L \left(\frac{W}{8} + \frac{1}{2} \right) - \frac{175W + 288}{24} \right) (4) - \\
 & \left(-\frac{13189W + 11760}{240(L+15)} + \frac{23LW}{48} + \frac{175W + 288}{48} \right) (7 + L) = -\frac{4}{15}W + 3L + \frac{1}{4}L^2 + 5L + 40 + 1 + \\
 & 7WL + \frac{1}{2}WL^2 - \frac{L^2}{2} - \frac{1}{16}WL^2 + \frac{L^2}{4} + \frac{1}{24}WL^2 - 4L - \frac{1}{2}WL - \frac{23}{48}WL^2 - \frac{13}{2}WL - 4L + \\
 & \frac{4}{15}W - 41 = 0 \quad OK
 \end{aligned}$$

∴ Los valores de las reacciones son correctos

Ecuaciones de momento, cortante y normal de la estructura:

MIEMBRO AC:

$$0 \leq x_1 \leq 4m$$

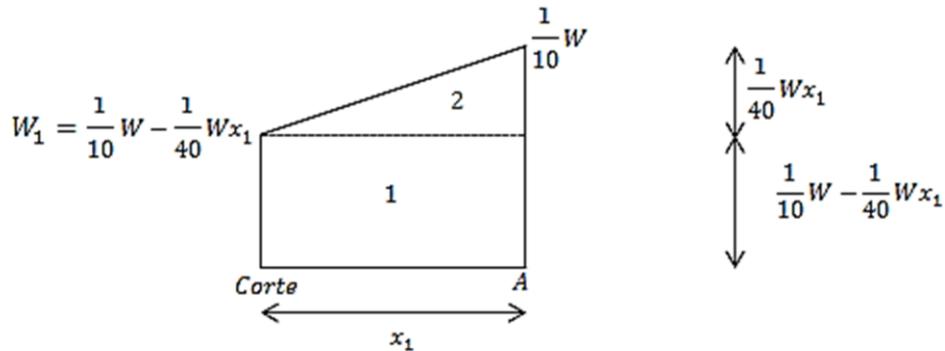


$$\frac{\frac{1}{10}W}{4} = \frac{W_1}{4 - x_1}$$

$$W_1 = \frac{\frac{1}{10}W(4-x_1)}{4} = \frac{1}{40}(4W - Wx_1) = \frac{1}{10}W - \frac{1}{40}Wx_1$$

Análisis de la presión trapezoidal del corte:

Presión trapezoidal rotada:



$$A_1 = (x_1) \left(\frac{1}{10}W - \frac{1}{40}Wx_1 \right) = \frac{1}{10}Wx_1 - \frac{1}{40}Wx_1^2$$

$$A_2 = \frac{(x_1) \left(\frac{1}{40}Wx_1 \right)}{2} = \frac{1}{80}Wx_1^2$$

$$\sum A = \frac{1}{10}Wx_1 - \frac{1}{80}Wx_1^2$$

$$\bar{x}_1 A_1 = \left(\frac{1}{2}x_1 \right) \left(\frac{1}{10}Wx_1 - \frac{1}{40}Wx_1^2 \right) = \frac{1}{20}Wx_1^2 - \frac{1}{80}Wx_1^3$$

$$\bar{x}_2 A_2 = \left(\frac{2}{3}x_1 \right) \left(\frac{1}{80}Wx_1^2 \right) = \frac{1}{120}Wx_1^3$$

$$\sum \bar{x}A = \frac{1}{20}Wx_1^2 - \frac{1}{240}Wx_1^3$$

La carga concentrada equivalente es:

$$A_T = \frac{1}{10} W x_1 - \frac{1}{80} W x_1^2$$

Brazo de palanca:

$$\bar{x}_T = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{\frac{1}{20} W x_1^2 - \frac{1}{240} W x_1^3}{\frac{1}{10} W x_1 - \frac{1}{80} W x_1^2} \text{ a la derecha del corte}$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = - \left(\frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} \right) (x_1) \\ + \left(\frac{1}{10} W x_1 - \frac{1}{80} W x_1^2 \right) \left(\frac{\frac{1}{20} W x_1^2 - \frac{1}{240} W x_1^3}{\frac{1}{10} W x_1 - \frac{1}{80} W x_1^2} \right)$$

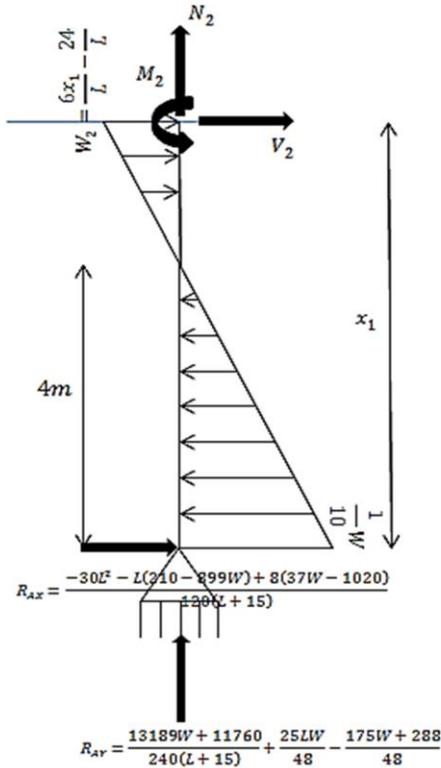
$$M_1 = - \frac{1}{240} W x_1^3 + \frac{1}{20} W x_1^2 + \left(\frac{30L^2 + L(210 - 899W) - 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} \right) (x_1)$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = - \frac{1}{80} W x_1^2 + \frac{1}{10} W x_1 + \left(\frac{30L^2 + L(210 - 899W) - 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} \right)$$

$$\sum FY = 0$$

$$N_1 = - \left(\frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \right)$$

$$4m \leq x_1 \leq 4m + \frac{L}{2}$$



$$\frac{3}{\frac{L}{2}} = \frac{W_2}{x_1 - 4}$$

$$W_2 = \frac{3(x_1 - 4)}{\frac{L}{2}} = \frac{3x_1}{\frac{L}{2}} - \frac{12}{\frac{L}{2}} = \frac{6x_1}{L} - \frac{24}{L}$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = - \left(\frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} \right) (x_1) + \left(\frac{(4) \left(\frac{1}{10} W \right)}{2} \right) \left(x_1 - \frac{4}{3} \right) - \left(\frac{(x_1 - 4) \left(\frac{6x_1}{L} - \frac{24}{L} \right)}{2} \right) \left(\frac{1}{3} (x_1 - 4) \right)$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$M_2 = -\frac{1}{L}x_1^3 + \frac{12}{L}x_1^2 + \left(\frac{30L^3 + 35L^2(6 - 25W) + 32L(2W + 75) - 86400}{120L(L + 15)} \right) (x_1) - \frac{4(LW - 240)}{15L}$$

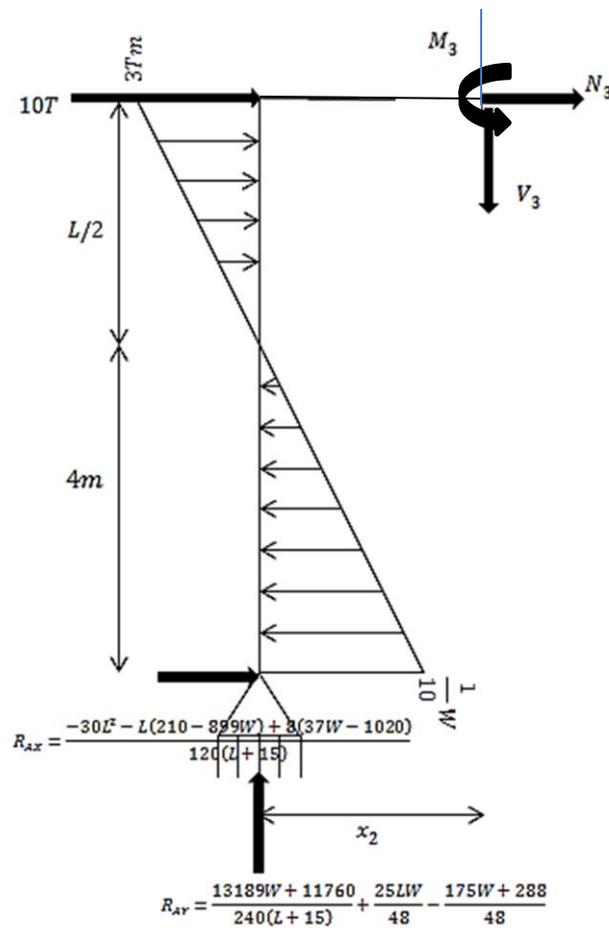
$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_1} = -\frac{3}{L}x_1^2 + \frac{24}{L}x_1 + \frac{30L^3 + 35L^2(6 - 25W) + 32L(2W + 75) - 86400}{120L(L + 15)}$$

$$\sum FY = 0$$

$$N_2 = -\left(\frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \right)$$

MIEMBRO CF

$$0 \leq x_2 \leq 3m$$



CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = - \left(\frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} \right) \left(4 + \frac{L}{2} \right) + \left(\frac{(4) \left(\frac{1}{10} W \right)}{2} \right) \left(\frac{L}{2} + \frac{2}{3}(4) \right) - \left(\frac{\left(\frac{L}{2} \right) (3)}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \left(\frac{L}{2} \right) \right) + \left(\frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \right) (x_2)$$

$$M_3 = \left(\frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \right) (x_2) - \frac{875L^2W + 40L(175W - 246) + 64(7W - 1020)}{240(L + 15)}$$

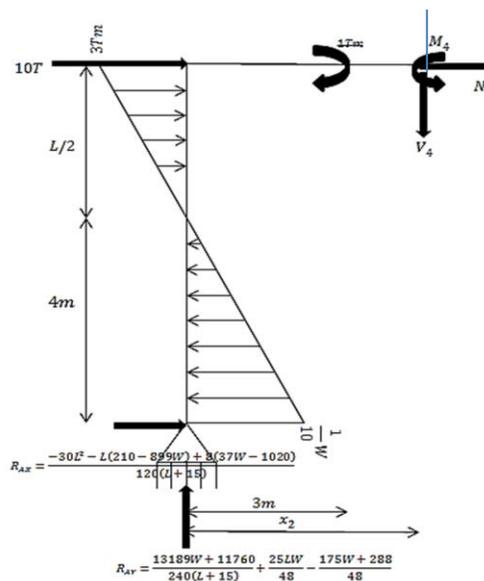
$$V_3 = \frac{dM_3}{dx_2} = \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48}$$

$$\sum FX = 0$$

$$N_3 = - \left(\frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} - \frac{(4) \left(\frac{1}{10} W \right)}{2} + \frac{\left(\frac{L}{2} \right) (3)}{2} + 10 \right)$$

$$N_3 = \frac{13189W + 11760}{120(L + 15)} - \frac{L}{2} - \frac{175W + 288}{24}$$

$$3m \leq x_2 \leq 7m$$



CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

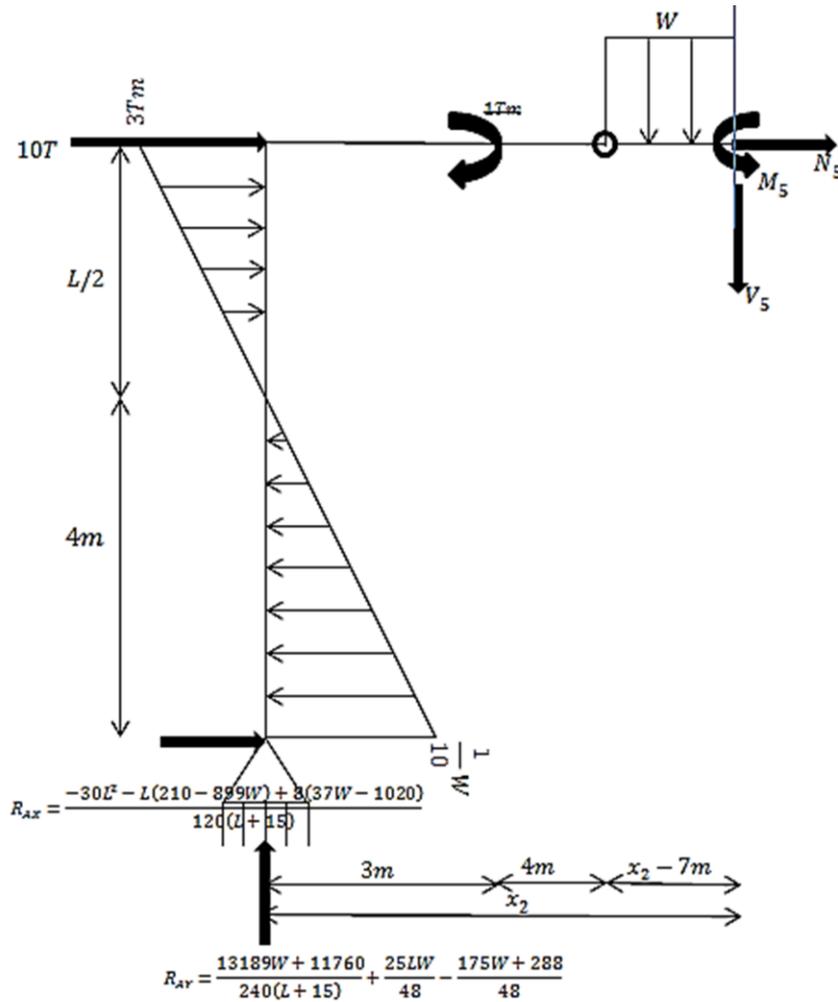
$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_4 = \left(\frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25WL}{48} - \frac{175W + 288}{48} \right) (x_2) - \frac{7(13189W + 11760)}{240(L + 15)} - \frac{175LW}{48} + \frac{7(175W + 288)}{48}$$

$$V_4 = \frac{dM_4}{dx_2} = \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48}$$

$$N_4 = \frac{13189W + 11760}{120(L + 15)} - \frac{L}{2} - \frac{175W + 288}{24}$$

$$7m \leq x_2 \leq 7m + L$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_5 = - \left(\frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} \right) \left(4 + \frac{L}{2} \right) + \left(\frac{(4) \left(\frac{1}{10} W \right)}{2} \right) \left(\frac{L}{2} + \frac{2}{3} (4) \right) \\ - \left(\frac{\left(\frac{L}{2} \right) (3)}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \left(\frac{L}{2} \right) \right) + \left(\frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \right) (x_2) + 1 \\ - W(x_2 - 7) \left(\frac{x_2 - 7}{2} \right)$$

$$M_5 = -\frac{W}{2} x_2^2 + \left(\frac{125L^2W + 40L(67W - 36) + 16(1579W - 615)}{240(L + 15)} \right) (x_2) \\ - \frac{7(125L^2W + 80L(23W - 18) + 8(1583W - 1230))}{240(L + 15)}$$

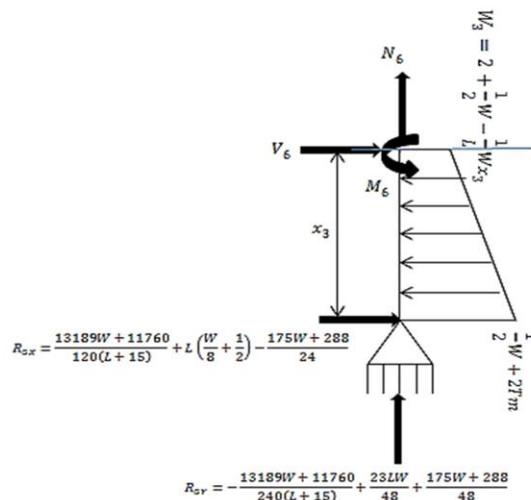
$$V_5 = \frac{dM_5}{dx_2} = \left(\frac{125L^2W + 40L(67W - 36) + 16(1579W - 615)}{240(L + 15)} \right) - Wx_2$$

$$\sum FX = 0$$

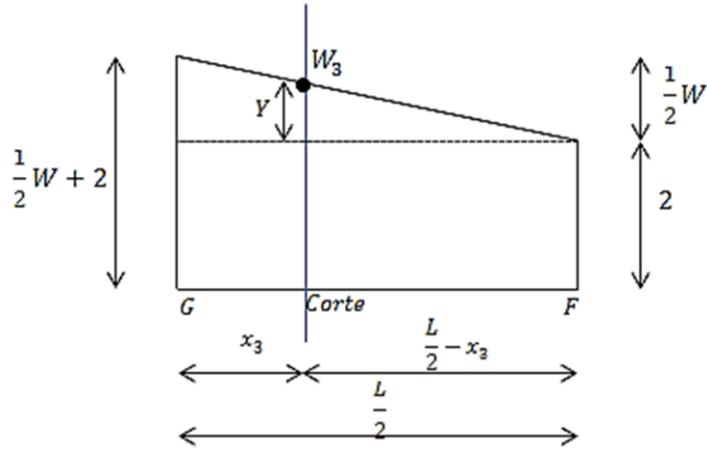
$$N_5 = \frac{13189W + 11760}{120(L + 15)} - \frac{L}{2} - \frac{175W + 288}{24}$$

MIEMBRO GF:

$$0 \leq x_3 \leq \frac{L}{2}$$



CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS



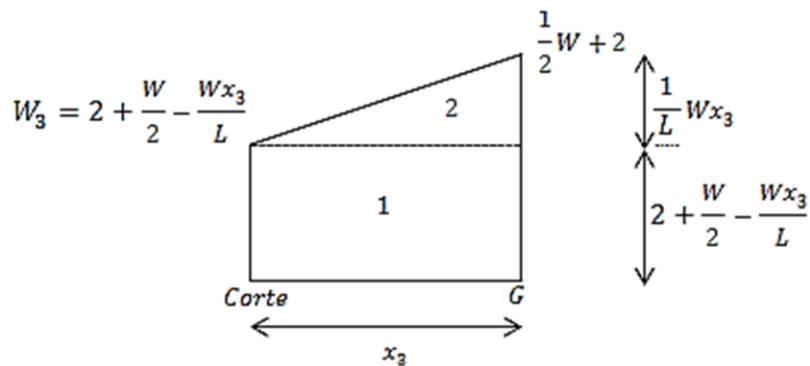
$$\frac{\frac{1}{2}W}{\frac{L}{2}} = \frac{Y}{\frac{L}{2} - x_3}$$

$$Y = \frac{\left(\frac{1}{2}W\right)\left(\frac{L}{2} - x_3\right)}{\frac{L}{2}} = \frac{W}{2} - \frac{Wx_3}{L}$$

$$W_3 = 2 + Y = 2 + \left(\frac{W}{2} - \frac{Wx_3}{L}\right)$$

Análisis de la presión trapezoidal del corte:

Presión trapezoidal rotada:



$$A_1 = (x_3) \left(2 + \left(\frac{W}{2} - \frac{Wx_3}{L} \right) \right) = 2x_3 + \frac{W}{2}x_3 - \frac{W}{L}x_3^2$$

$$A_2 = \frac{(x_3) \left(\frac{Wx_3}{L} \right)}{2} = \frac{W}{2L}x_3^2$$

$$\sum A = 2x_3 + \frac{W}{2}x_3 - \frac{W}{2L}x_3^2$$

$$\bar{x}_1 A_1 = \left(\frac{1}{2}x_3 \right) \left(2x_3 + \frac{W}{2}x_3 - \frac{W}{L}x_3^2 \right) = x_3^2 + \frac{W}{4}x_3^2 - \frac{W}{2L}x_3^3$$

$$\bar{x}_2 A_2 = \left(\frac{2}{3}x_3 \right) \left(\frac{W}{2L}x_3^2 \right) = \frac{W}{3L}x_3^3$$

$$\sum \bar{x}A = x_3^2 + \frac{W}{4}x_3^2 - \frac{W}{6L}x_3^3$$

La carga concentrada equivalente es:

$$A_T = 2x_3 + \frac{W}{2}x_3 - \frac{W}{2L}x_3^2$$

Brazo de palanca:

$$\bar{x}_T = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{x_3^2 + \frac{W}{4}x_3^2 - \frac{W}{6L}x_3^3}{2x_3 + \frac{W}{2}x_3 - \frac{W}{2L}x_3^2} \text{ a la derecha del corte}$$

$$\sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$M_6 = - \left(\frac{13189W + 11760}{120(L + 15)} + L \left(\frac{W}{8} + \frac{1}{2} \right) - \frac{175W + 288}{24} \right) (x_3) \\ + \left(2x_3 + \frac{W}{2}x_3 - \frac{W}{2L}x_3^2 \right) \left(\frac{x_3^2 + \frac{W}{4}x_3^2 - \frac{W}{6L}x_3^3}{2x_3 + \frac{W}{2}x_3 - \frac{W}{2L}x_3^2} \right)$$

$$M_6 = - \frac{W}{6L}x_3^3 + \left(\frac{W}{4} + 1 \right) x_3^2 \\ - \left(\frac{15L^2(W + 4) - 10L(65W + 54) + 16(4W - 615)}{120(L + 15)} \right) (x_3)$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

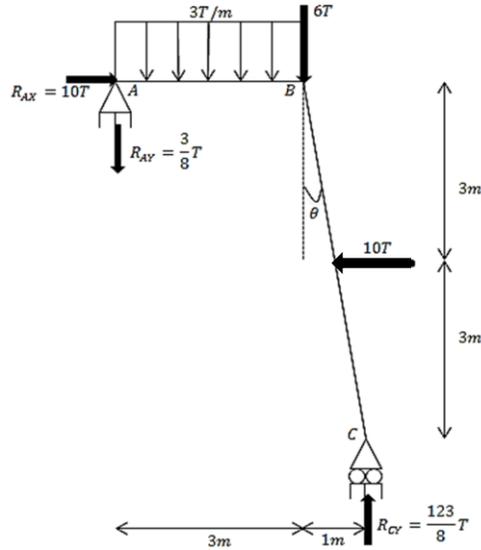
$$V_6 = \frac{dM_6}{dx_3} = -\frac{W}{2L}x_3^2 + \frac{(W+4)}{2}x_3$$
$$-\frac{15L^2(W+4) - 10L(65W+54) + 16(4W-615)}{120(L+15)}$$

$$\sum FY = 0$$

$$N_6 = -\left(-\frac{13189W + 11760}{240(L+15)} + \frac{23LW}{48} + \frac{175W + 288}{48}\right)$$

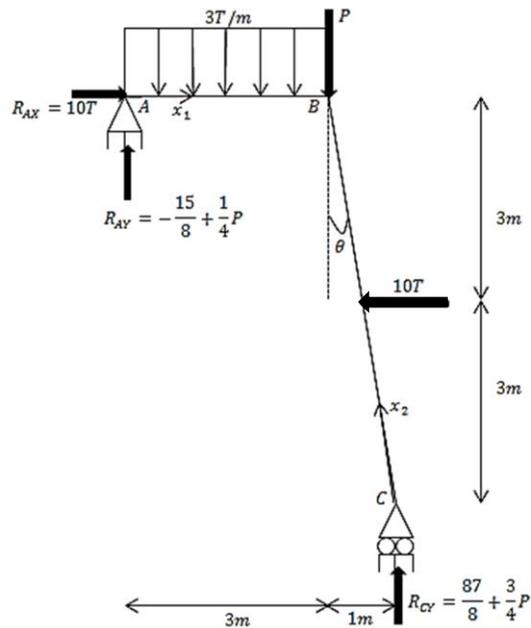
CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

5.-Calcular las reacciones del siguiente marco isostático. Use el teorema del Castigliano para determinar el desplazamiento vertical en B. Considere EI como constante.



SOLUCIÓN:

Aplicación de la carga P en el punto y dirección en donde se desea conocer el desplazamiento:



CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$- \text{Longitud de la barra inclinada}(L) = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}m$$

$$\sin \theta = 1/\sqrt{37}$$

$$\cos \theta = 6/\sqrt{37}$$

Reacciones del marco en el que se ha colocado la carga P:

$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} - 10T = 0$$

$$R_{AX} = 10T \rightarrow$$

$$\sum MA = 0$$

$$3(3) \left(\frac{1}{2}(3) \right) + P(3) + 10(3) - R_{CY}(4) = 0$$

$$R_{CY} = \frac{87}{8} + \frac{3}{4}P \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} - 3(3) - P + \frac{87}{8} + \frac{3}{4}P = 0$$

$$R_{AY} = -\frac{15}{8} + \frac{1}{4}P \uparrow$$

En este caso, podemos hallar las reacciones del marco real sustituyendo P=6 en las reacciones anteriores:

$$R_{AX} = 10T \rightarrow$$

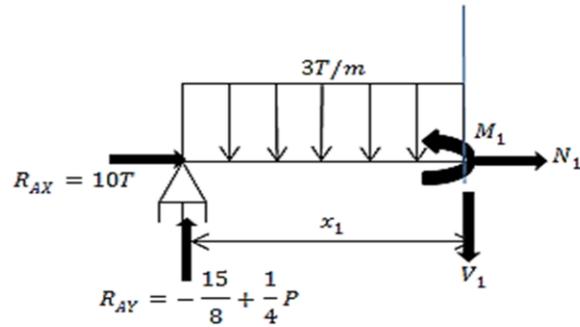
$$R_{CY} = \frac{87}{8} + \frac{3}{4}(6) = \frac{123}{8}T \uparrow$$

$$R_{AY} = -\frac{15}{8} + \frac{1}{4}(6) = -\frac{3}{8}T = \frac{3}{8}T \downarrow$$

Ecuaciones de momento por tramo:

Miembro AB

$$0 \leq x_1 \leq 3m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = \left(-\frac{15}{8} + \frac{1}{4}P\right)(x_1) - 3(x_1)\left(\frac{x_1}{2}\right) = -\frac{3}{2}x_1^2 - \frac{15}{8}x_1 + \frac{1}{4}Px_1$$

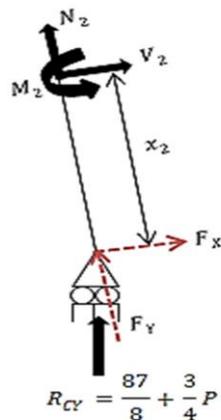
$$\frac{dM_1}{dP} = \frac{1}{4}x_1$$

Sustituyendo P=6 en M₁:

$$M_1 = -\frac{3}{2}x_1^2 - \frac{3}{8}x_1$$

Miembro CB

$$0 \leq x_2 \leq \frac{\sqrt{37}}{2}m$$



CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

Componentes rectangulares de $R_{CY} = \frac{87}{8} + \frac{3}{4}P$:

$$F_X = \left(\frac{87}{8} + \frac{3}{4}P\right) (\sin \theta) = \left(\frac{87}{8} + \frac{3}{4}P\right) \left(\frac{1}{\sqrt{37}}\right) = \frac{87\sqrt{37}}{296} + \frac{3\sqrt{37}}{148}P$$

$$F_Y = \left(\frac{87}{8} + \frac{3}{4}P\right) (\cos \theta) = \left(\frac{87}{8} + \frac{3}{4}P\right) \left(\frac{6}{\sqrt{37}}\right) = \frac{261\sqrt{37}}{148} + \frac{9\sqrt{37}}{74}P$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

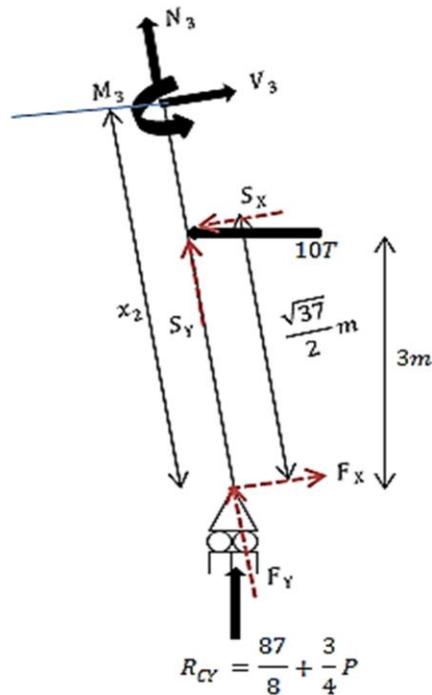
$$M_2 = -\left(\frac{87\sqrt{37}}{296} + \frac{3\sqrt{37}}{148}P\right) (x_2) = -\frac{87\sqrt{37}}{296}x_2 - \frac{3\sqrt{37}}{148}Px_2$$

$$\frac{dM_2}{dP} = -\frac{3\sqrt{37}}{148}x_2$$

Sustituyendo $P=6$ en M_2 :

$$M_2 = -\frac{123\sqrt{37}}{296}x_2$$

$$\frac{\sqrt{37}}{2}m \leq x_2 \leq \sqrt{37}m$$



Componentes rectangulares de la fuerza de 10T

$$S_Y = (10T)(\sin \theta) = (10T) \left(\frac{1}{\sqrt{37}} \right) = \frac{10}{\sqrt{37}} T$$

$$S_X = (10T)(\cos \theta) = (10T) \left(\frac{6}{\sqrt{37}} \right) = \frac{60}{\sqrt{37}} T$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = - \left(\frac{87\sqrt{37}}{296} + \frac{3\sqrt{37}}{148} P \right) (x_2) + \left(\frac{60}{\sqrt{37}} \right) \left(x_2 - \frac{\sqrt{37}}{2} \right)$$

$$M_3 = \frac{393\sqrt{37}}{296} x_2 - \frac{3\sqrt{37}}{148} P x_2 - 30$$

$$\frac{dM_3}{dP} = - \frac{3\sqrt{37}}{148} x_2$$

Sustituyendo P=6 en M₃:

$$M_3 = \frac{357\sqrt{37}}{296} x_2 - 30$$

Aplicamos la siguiente ecuación para conocer el desplazamiento en cualquier punto:

$$\Delta = \delta = \int_{L_1}^{L_2} M \frac{dM}{dP} \frac{dx}{EI}$$

$$\delta_{VB} = \frac{1}{EI} \int_0^3 \left(-\frac{3}{2} x_1^2 - \frac{3}{8} x_1 \right) \left(\frac{1}{4} x_1 \right) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\sqrt{37}}{2}} \left(-\frac{123\sqrt{37}}{296} x_2 \right) \left(-\frac{3\sqrt{37}}{148} x_2 \right) dx_2$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_{\frac{\sqrt{37}}{2}}^{\sqrt{37}} \left(\frac{357\sqrt{37}}{296} x_2 - 30 \right) \left(-\frac{3\sqrt{37}}{148} x_2 \right) dx_2$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^3 \left(-\frac{3}{2} x_1^2 - \frac{3}{8} x_1 \right) \left(\frac{1}{4} x_1 \right) dx_1 = \frac{1}{EI} \int_0^3 \left(-\frac{3}{8} x_1^3 - \frac{3}{32} x_1^2 \right) dx_1 =$$

$$\frac{1}{EI} \left[-\frac{3}{32} x_1^4 - \frac{1}{32} x_1^3 \right]_0^3 = \frac{1}{EI} \left[-\frac{3}{32} (3^4) - \frac{1}{32} (3^3) \right] = -\frac{135}{16EI}$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$\frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\sqrt{37}}{2}} \left(-\frac{123\sqrt{37}}{296} x_2 \right) \left(-\frac{3\sqrt{37}}{148} x_2 \right) dx_2 = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\sqrt{37}}{2}} \left(\frac{369}{1184} x_2^2 \right) dx_2 =$$

$$\frac{1}{EI} \left[\frac{123}{1184} x_2^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{37}}{2}} = \frac{1}{EI} \left[\frac{123}{1184} \left(\frac{\sqrt{37}}{2} \right)^3 \right] = \frac{123\sqrt{37}}{256EI}$$

$$\frac{1}{EI} \int_{\frac{\sqrt{37}}{2}}^{\sqrt{37}} \left(\frac{357\sqrt{37}}{296} x_2 - 30 \right) \left(-\frac{3\sqrt{37}}{148} x_2 \right) dx_2 = \frac{1}{EI} \int_{\frac{\sqrt{37}}{2}}^{\sqrt{37}} \left(\frac{45\sqrt{37}}{74} x_2 - \frac{1071}{1184} x_2^2 \right) dx_2$$

$$= \frac{1}{EI} \left[\frac{45\sqrt{37}}{148} x_2^2 - \frac{357}{1184} x_2^3 \right]_{\frac{\sqrt{37}}{2}}^{\sqrt{37}}$$

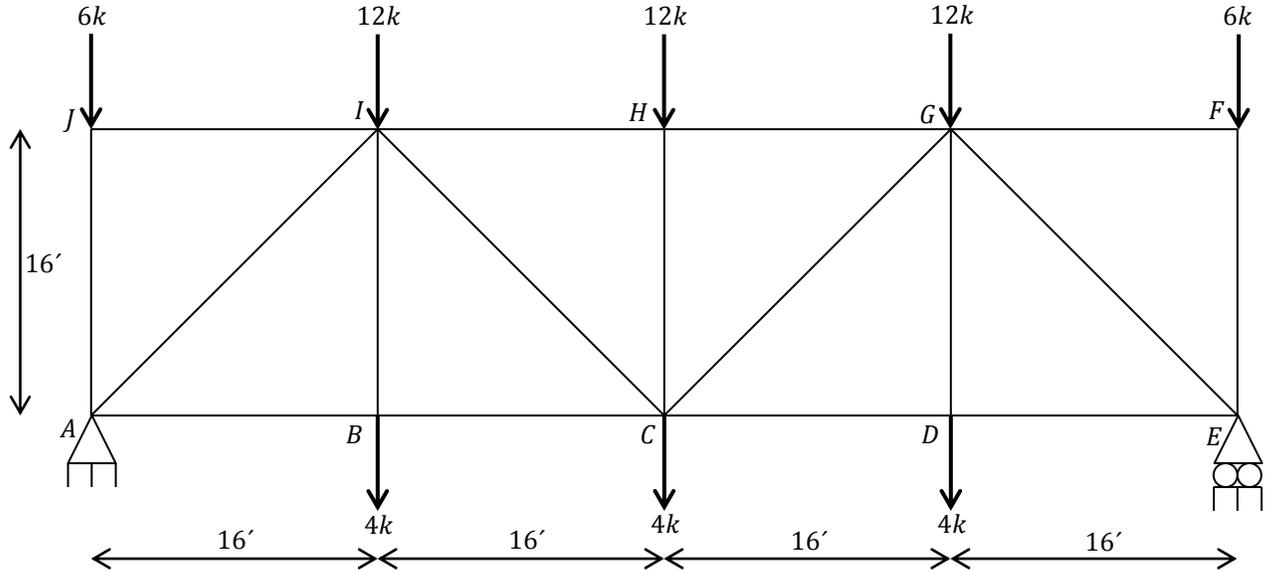
$$= \frac{1}{EI} \left[\frac{45\sqrt{37}}{148} \left((\sqrt{37})^2 - \left(\frac{\sqrt{37}}{2} \right)^2 \right) - \frac{357}{1184} \left((\sqrt{37})^3 - \left(\frac{\sqrt{37}}{2} \right)^3 \right) \right] = -\frac{339\sqrt{37}}{256EI}$$

$$\delta_{VB} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{135}{16} + \frac{123\sqrt{37}}{256} - \frac{339\sqrt{37}}{256} \right] \cong -\frac{13.56983088}{EI}$$

El signo indica que el sentido propuesto en la carga P fue incorrecto y entonces la deflexión va hacia arriba.

2.3. ANÁLISIS DE ARMADURAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS

1.- Calcular las reacciones en los soportes y las fuerzas en las barras de la siguiente armadura.



Verificación del grado de indeterminación:

$$m = 17, r = 3, j = 10$$

$$m + r = 17 + 3 = 20$$

$$2j = 2(10) = 20$$

Como $m + r = 2j$, la armadura es estáticamente determinada.

Cálculo de las reacciones:

$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} = 0$$

$$\sum MA = 0$$

$$12(16) + 4(16) + 12(32) + 4(32) + 12(48) + 4(48) + 6(64) - R_{EY}(64) = 0$$

$$R_{EY} = -\frac{1920}{-64} = 30k \uparrow$$

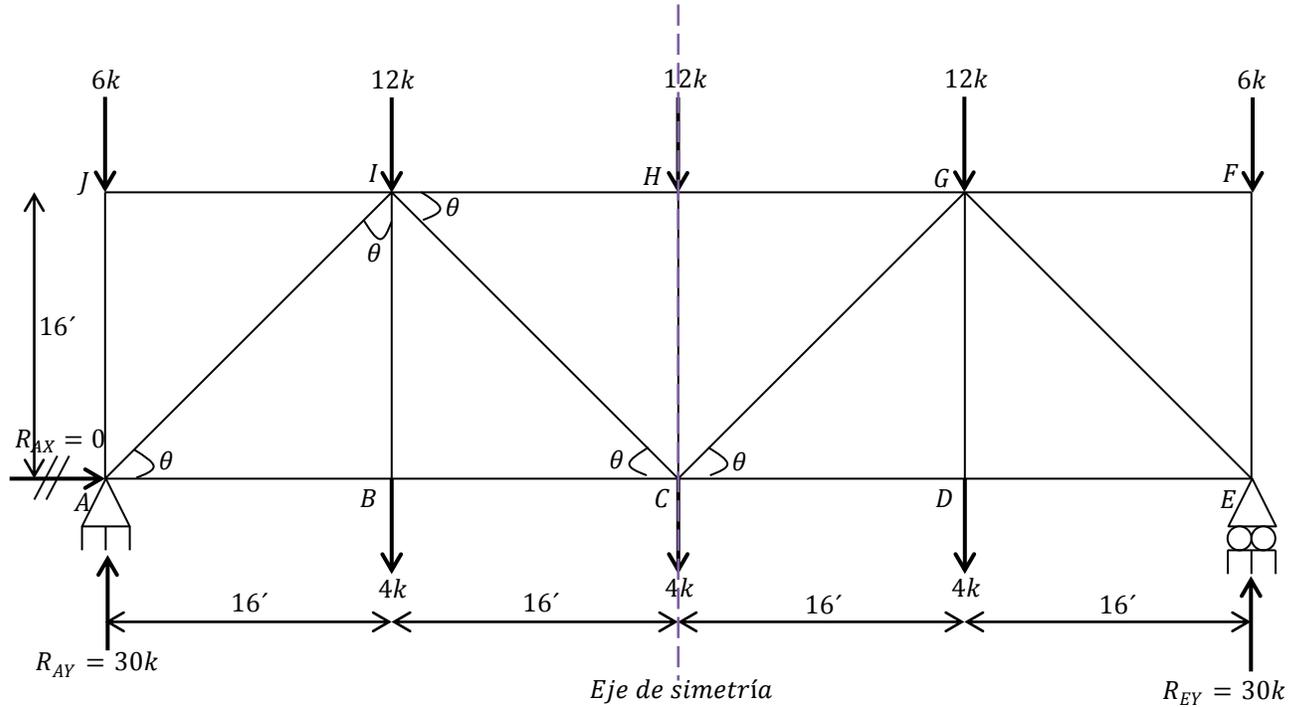
$$\sum FY = 0$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

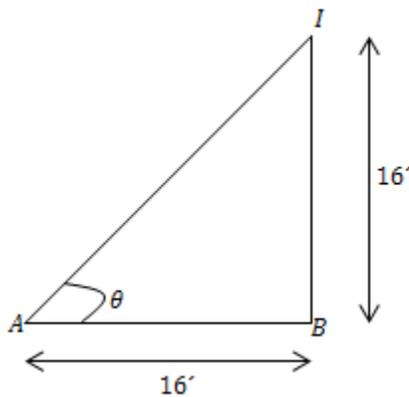
$$-6 - 12 - 4 - 12 - 4 - 12 - 4 - 6 + 30 + R_{AY} = 0$$

$$R_{AY} = 30k \uparrow$$

A continuación se presenta un diagrama en el que se muestran los valores de las reacciones en los soportes para poder efectuar el análisis por nodos. Obsérvese que la estructura es simétrica.



Tomando cualquier triángulo de la armadura, debido a que todos son iguales:



$$\overline{AI} = \sqrt{16^2 + 16^2} = 16\sqrt{2}m$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$\sin \theta = \frac{\overline{BI}}{\overline{AI}} = \frac{16}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

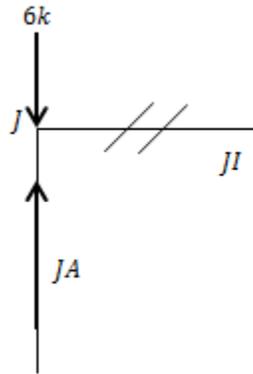
$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AI}} = \frac{16}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Cálculo de las fuerzas en las barras de la armadura mediante el método de los nodos.

En cada nodo, se proponen las direcciones de las fuerzas en las barras desconocidas de manera arbitraria. Si el resultado obtenido es positivo, el sentido propuesto es correcto; en caso de ser negativo, sólo se debe invertir el sentido propuesto.

Una fuerza de barra que jala el nodo se considera de tensión mientras que una que va hacia el nodo es considerada como de compresión.

NODO J:



$$\sum F_X = 0$$

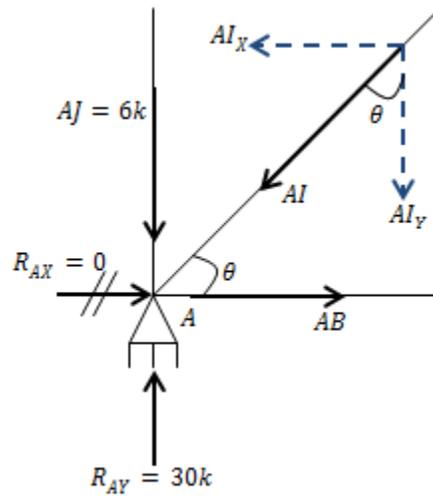
$$JI = 0$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$-6 + JA = 0$$

$$JA = 6k \text{ (Compresión)}$$

NODO A:



$$\sum F_Y = 0$$

$$30 - 6 - AI_y = 0 \rightarrow 30 - 6 - AI(\cos \theta) = 0$$

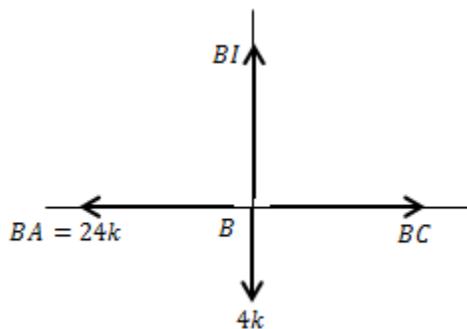
$$24 - AI \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0 \rightarrow AI = -\frac{24}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 33.9411k \text{ (Compresión)}$$

$$\sum F_X = 0$$

$$AB - AI_x = 0 \rightarrow AB - AI(\sin \theta) = 0$$

$$AB = (33.9411) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 24k \text{ (Tensión)}$$

Nodo B:



CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$\sum FX = 0$$

$$-BA + BC = 0 \rightarrow BC = BA$$

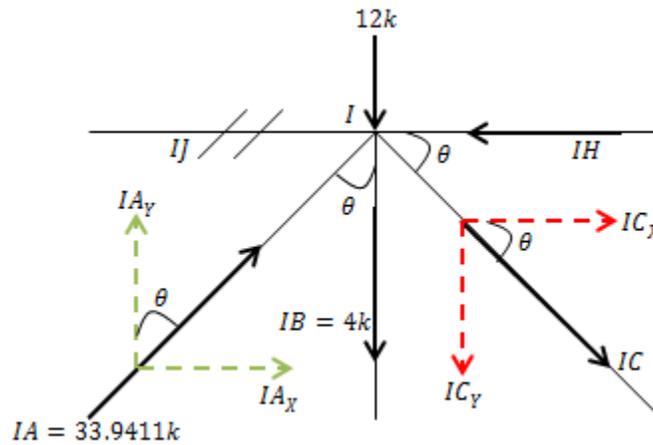
$$BC = 24k \text{ (Tensión)}$$

$$\sum FY = 0$$

$$BI - 4 = 0$$

$$BI = 4k \text{ (Tensión)}$$

Nodo I:



$$\sum FY = 0$$

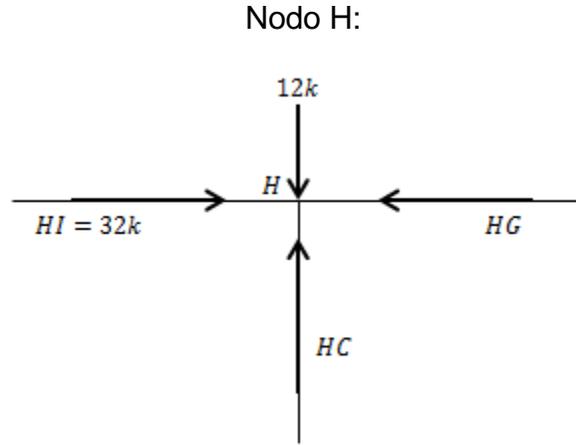
$$-12 - 4 + AI_Y - IC_Y = 0 \rightarrow IC(\sin \theta) = -16 + IA(\cos \theta)$$

$$IC \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -16 + (33.9411) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \rightarrow IC = \frac{8}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 11.3137k \text{ (Tensión)}$$

$$\sum FX = 0$$

$$IA_X + IC_X - IH = 0 \rightarrow IA(\sin \theta) + IC(\cos \theta) - IH = 0$$

$$IH = (33.9411) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + (11.3137) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 32k \text{ (Compresión)}$$



$$\sum FX = 0$$

$$HI - HG = 0 \rightarrow HI = HG$$

$$HG = 32k \text{ (Compresión)}$$

$$\sum FY = 0$$

$$HC - 12 = 0$$

$$HC = 12k \text{ (Compresión)}$$

Por la simetría de la armadura, no es necesario analizar más nodos para obtener las fuerzas en las barras restantes.

$$FG = JI = 0$$

$$EF = JA = 6k \text{ (Compresión)}$$

$$EG = AI = 33.9411k \text{ (Compresión)}$$

$$ED = AB = 24k \text{ (Tensión)}$$

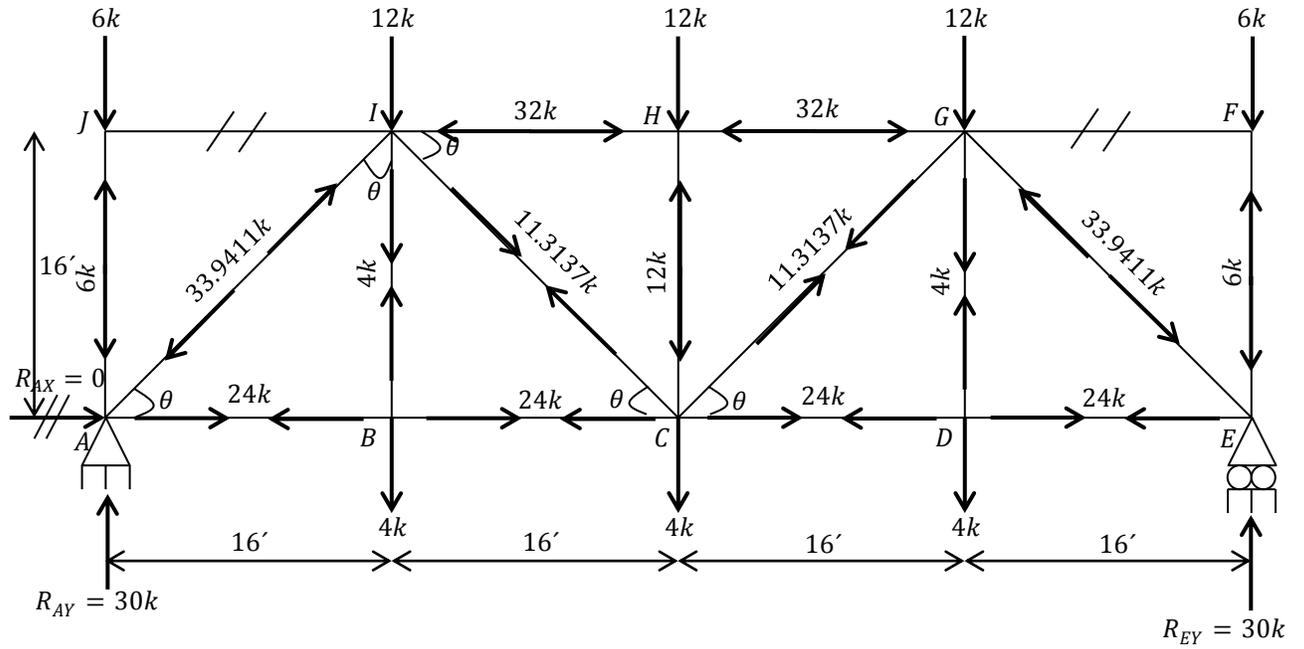
$$CD = BC = 24k \text{ (Tensión)}$$

$$DG = BI = 4k \text{ (Tensión)}$$

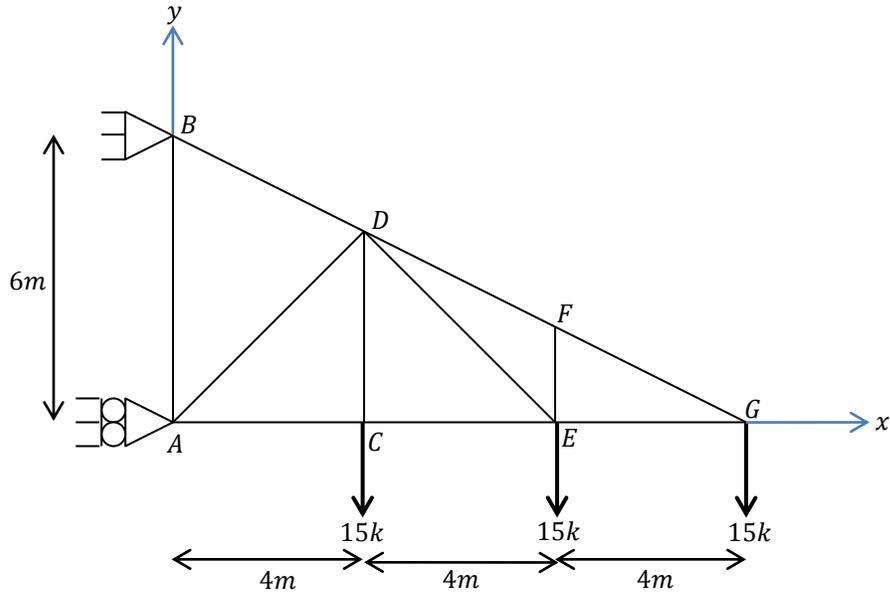
$$CG = IC = 11.3137k \text{ (Tensión)}$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

Finalmente se muestra el diagrama de la armadura en el que se visualizan los valores de las reacciones en los soportes y las fuerzas en las barras:



2.- Calcular las reacciones en los apoyos y las fuerzas en las barras por el método de los nodos de la siguiente armadura.



Verificación del grado de indeterminación:

$$m = 11, r = 3, j = 7$$

$$m + r = 11 + 3 = 14$$

$$2j = 2(7) = 14$$

Como $m + r = 2j$, la armadura es estáticamente determinada.

Cálculo de las reacciones:

$$\sum F_Y = 0$$

$$-15 - 15 - 15 + R_{BY} = 0$$

$$R_{BY} = 45k \uparrow$$

$$\sum M_A = 0$$

$$15(4) + 15(8) + 15(12) - R_{BX}(6) = 0$$

$$R_{BX} = -\frac{360}{-6} = 60k \leftarrow$$

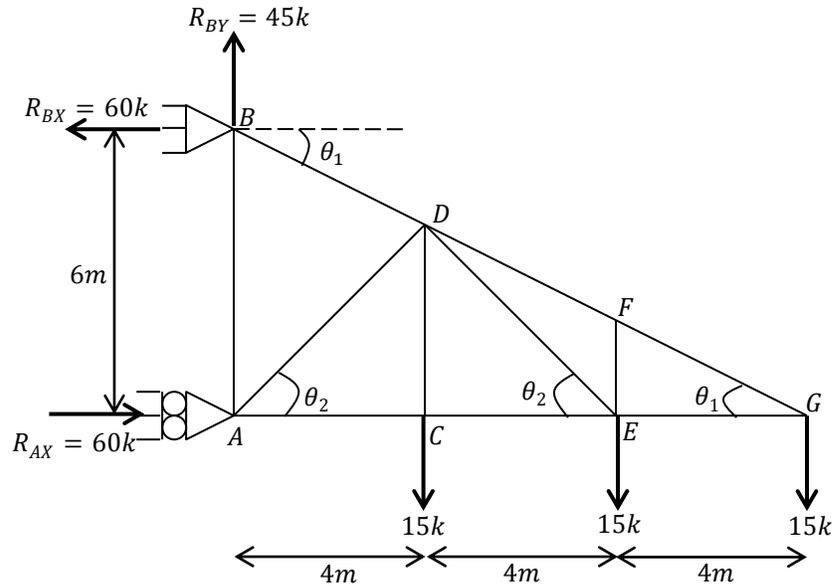
CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} - 60 = 0$$

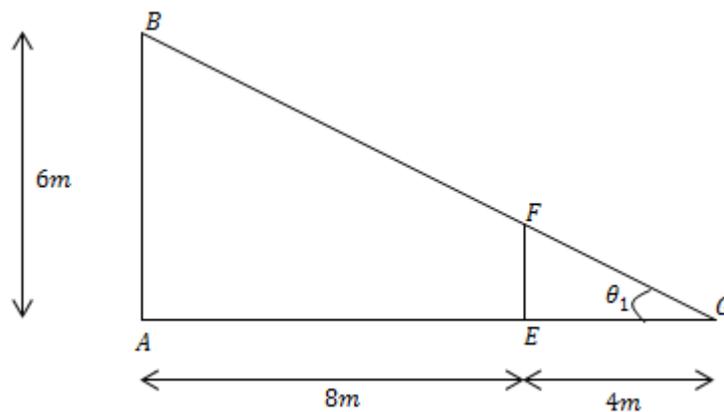
$$R_{AX} = 60k \rightarrow$$

A continuación se presenta un diagrama en el que se muestran los valores de las reacciones en los soportes para poder efectuar el análisis por nodos.



Cálculo de las fuerzas en las barras de la armadura mediante el método de los nodos.

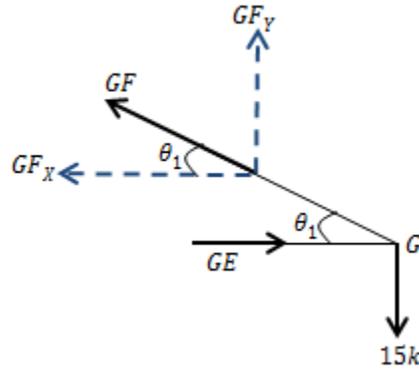
NODO G:



CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{EG}} \rightarrow \frac{6}{12} = \frac{\overline{FE}}{4} \rightarrow \overline{FE} = \frac{6(4)}{12} = 2m$$

$$\tan \theta_1 = \frac{\overline{FE}}{\overline{EG}} = \frac{2}{4} \rightarrow \theta_1 = \tan^{-1} \frac{2}{4} = 26.5651^\circ$$



$$\sum F_Y = 0$$

$$GF_Y - 15 = 0 \rightarrow GF(\sin \theta_1) - 15 = 0$$

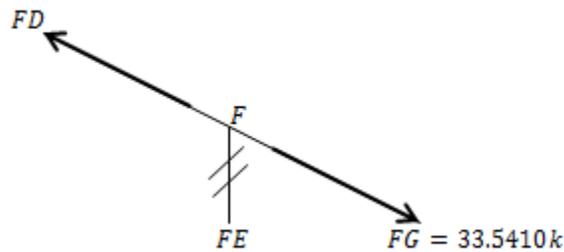
$$GF(\sin 26.5651^\circ) = 15 \rightarrow GF = \frac{15}{\sin 26.5651^\circ} = 33.5410k \text{ (Tensión)}$$

$$\sum F_X = 0$$

$$GE - GF_X = 0 \rightarrow GE - GF(\cos \theta_1) = 0$$

$$GE = (33.5410)(\cos 26.5651^\circ) = 30k \text{ (Compresión)}$$

NODO F:



$$\sum F_{X'} = 0$$

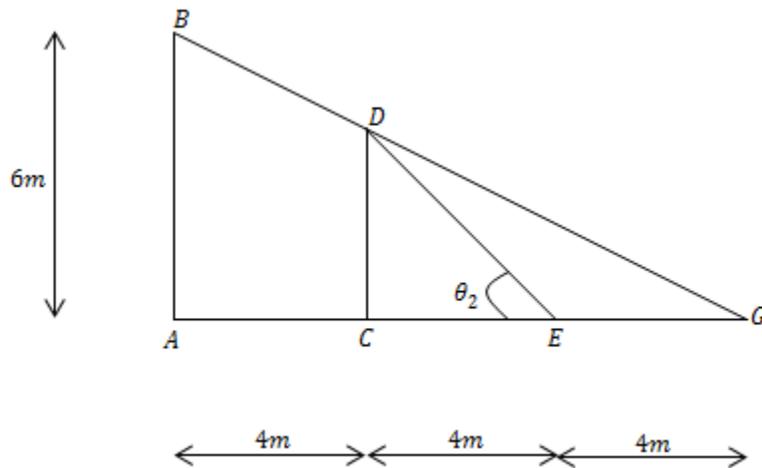
CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$-FD + 33.5410 = 0 \rightarrow FD = 33.5410k \text{ (Tensión)}$$

$$\sum F_Y = 0$$

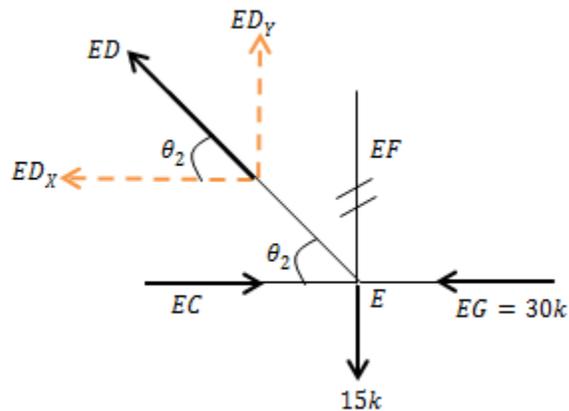
$$FE = 0$$

NODO E:



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CG}} \rightarrow \frac{6}{12} = \frac{\overline{DC}}{8} \rightarrow \overline{DC} = \frac{6(8)}{12} = 4m$$

$$\tan \theta_2 = \frac{\overline{FE}}{\overline{EG}} = \frac{4}{4} \rightarrow \theta_2 = \tan^{-1} \frac{4}{4} = 45^\circ$$



$$\sum F_Y = 0$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$-15 + 0 + ED_Y = 0 \rightarrow ED(\cos \theta_2) = 15$$

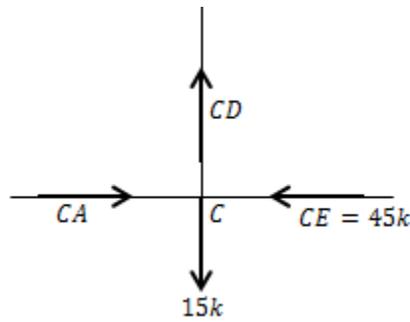
$$ED(\cos 45^\circ) = 15 \rightarrow ED = \frac{15}{\cos 45^\circ} = 21.2132k \text{ (Tensión)}$$

$$\sum FX = 0$$

$$-ED_x + EC - EG = 0 \rightarrow EC = ED(\sin \theta_2) + EG$$

$$EC = (21.2132)(\sin 45^\circ) + 30 = 45k \text{ (Compresión)}$$

NODO C:



$$\sum FY = 0$$

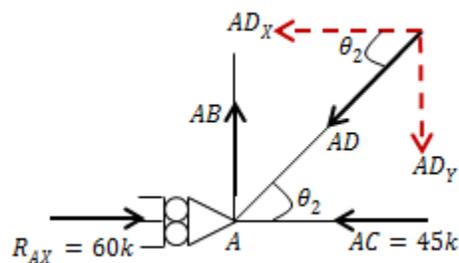
$$CD - 15 = 0 \rightarrow CD = 15k \text{ (Tensión)}$$

$$\sum FX = 0$$

$$FE = 0$$

$$CA - CE = 0 \rightarrow CA = CE = 45k \text{ (Compresión)}$$

NODO A:



CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$\sum FX = 0$$

$$60 - 45 - AD_x = 0 \rightarrow AD(\cos \theta_2) = 15$$

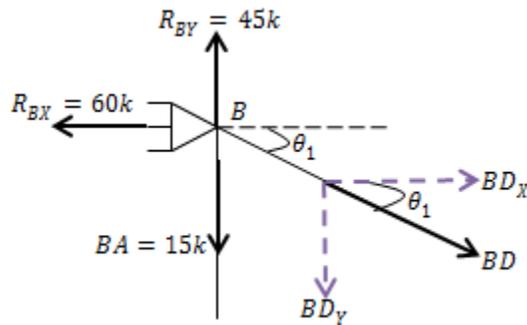
$$AD(\cos 45^\circ) = 15 \rightarrow AD = \frac{15}{\cos 45^\circ} = 21.2132k \text{ (Compresión)}$$

$$\sum FY = 0$$

$$AB - AD_y = 0 \rightarrow AB = AD(\sin \theta_2)$$

$$AB = 21.2132(\sin 45^\circ) = 15k \text{ (Tensión)}$$

NODO B:



$$\sum FX = 0$$

$$-60 + BD_x = 0 \rightarrow BD(\cos \theta_1) = 60$$

$$BD = \frac{60}{\cos 26.5651^\circ} = 67.0821k \text{ (Compresión)}$$

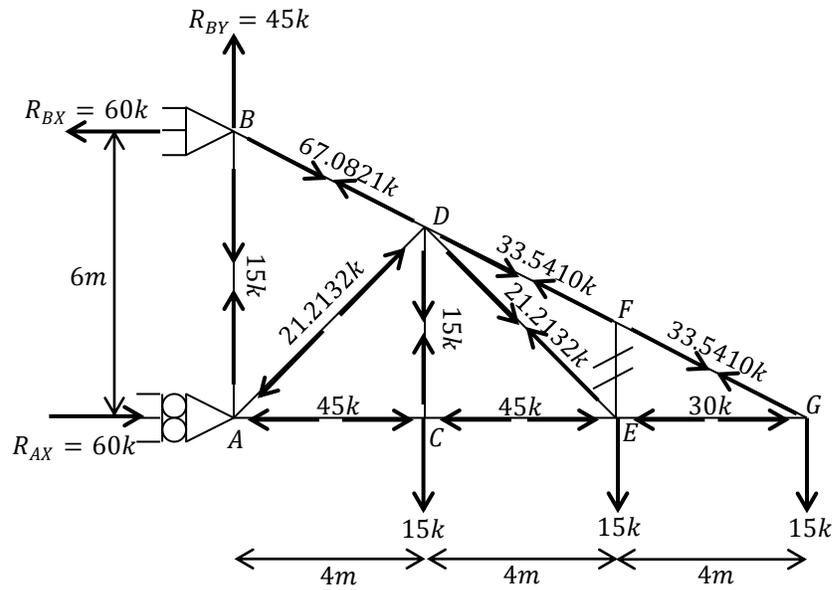
$$\sum FY = 0$$

$$45 - 15 - BD_y = 0 \rightarrow 45 - 15 - BD(\sin \theta_1) = 0$$

$$45 - 15 - 67.0821(\sin 26.5651^\circ) = 0 \quad ok$$

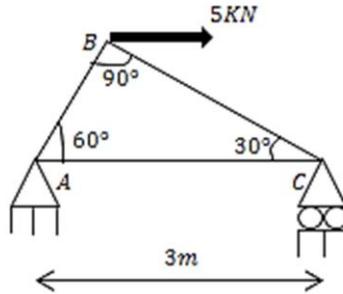
CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

Finalmente se muestra el diagrama de la armadura en el que se visualizan los valores de las reacciones en los soportes y las fuerzas en las barras:



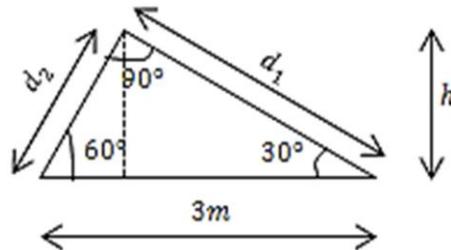
CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

3.- Calcular las reacciones en los apoyos y las fuerzas en las barras de la armadura isostática que se muestra en la figura. Use el método del trabajo virtual para encontrar el desplazamiento horizontal en B. Considere $AE = \text{constante}$.



SOLUCIÓN:

Calculamos las siguientes distancias por trigonometría:



$$\cos 30^\circ = \frac{d_1}{3m} \rightarrow d_1 = (3m)(\cos 30^\circ) = 2.598m$$

$$h = d_1(\sin 30^\circ) = 1.299m$$

$$d_2 = \sqrt{3^2 - 2.598^2} = 1.50013m$$

Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$5KN(1.299m) - R_{CY}(3m) = 0$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

$$R_{CY} = \frac{6.495KN*m}{3m} = 2.165KN \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} = 2.165KN \downarrow$$

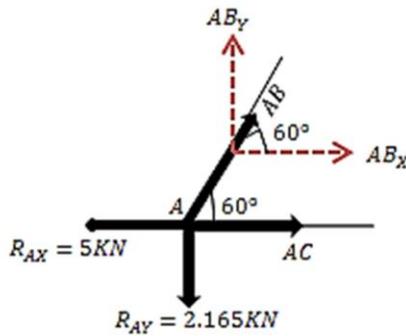
$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} = 5KN \leftarrow$$

Estructura N:

Cálculo de las fuerzas en las barras de la estructura real mediante el método de los nodos:

Nodo A:



$$\sum FY = 0$$

$$-R_{AY} + AB_Y = 0$$

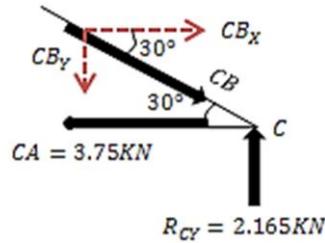
$$AB = \frac{2.165KN}{\sin 60^\circ} = 2.5KN \text{ (TENSIÓN)}$$

$$\sum FX = 0$$

$$-5KN + AB_X + AC = 0$$

$$AC = 5KN - (2.5KN)(\cos 60^\circ) = 3.75KN \text{ (TENSIÓN)}$$

Nodo C:



$$\sum F_Y = 0$$

$$2.165 \text{ kN} - C_{B_Y} = 0$$

$$C_B = \frac{2.165 \text{ kN}}{\sin 30^\circ} = 4.33 \text{ kN (COMPRESIÓN)}$$

Como comprobación:

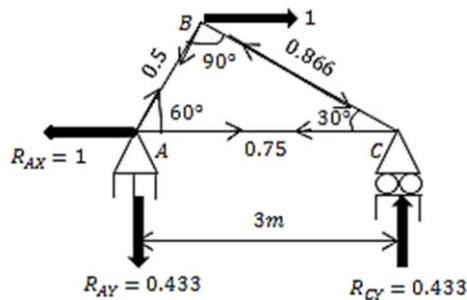
$$\sum F_X = 0$$

$$-3.75 \text{ kN} + C_{B_X} = 0$$

$$-3.75 \text{ kN} + (4.33 \text{ kN})(\cos 30^\circ) = 0 \quad \text{OK}$$

Estructura n:

Aplicamos una fuerza virtual unitaria en el punto y dirección donde se desea conocer el desplazamiento:



En este caso no fue necesario realizar un análisis detallado de la estructura; obsérvese que para obtener las reacciones y las fuerzas en las barras basta con

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

dividir los resultados de la estructura N entre 5 ya que la única diferencia radica en que en la estructura n la fuerza horizontal aplicada en B es de 1 y no de 5KN.

Para calcular el desplazamiento en cualquier punto aplicamos la siguiente ecuación:

$$\Delta = \frac{\sum NnL}{AE}$$

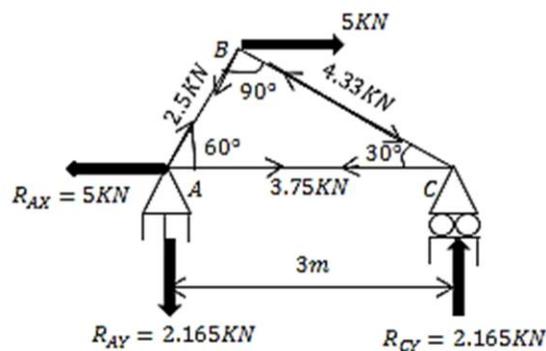
Elaboramos una tabla auxiliar como la que sigue:

Barra	L(m)	N(KN)	n	NnL
AB	1.50013	2.5	0.5	1.87516
AC	3	3.75	0.75	8.4375
CB	2.598	-4.33	-0.866	9.74193
			Σ	20.0546

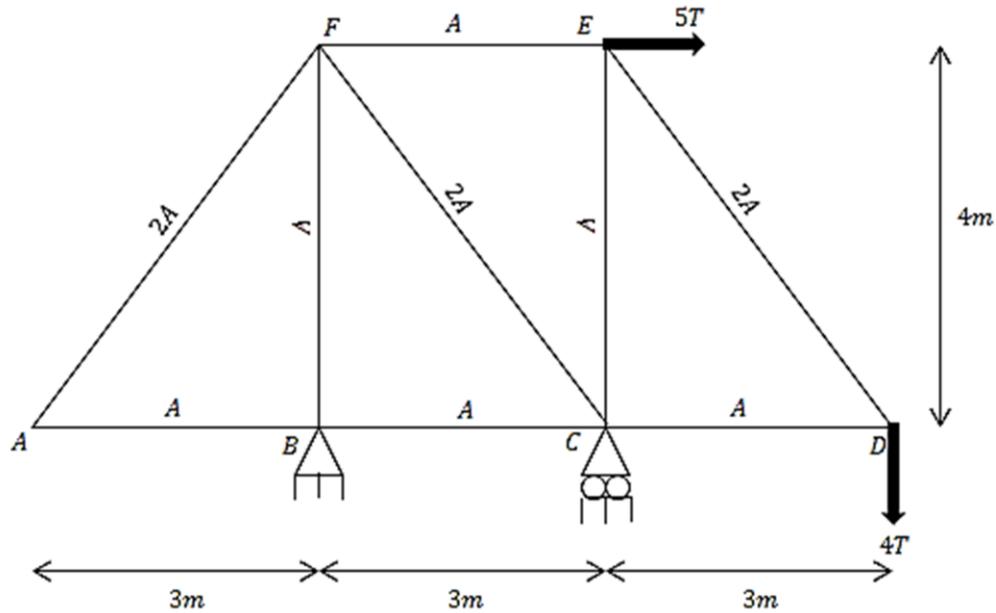
Nota: Las fuerzas axiales a tensión se consideran positivas y las de compresión se consideran negativas.

$$\Delta_{HB} = \frac{20.0546}{AE} \text{ en m, hacia la derecha } (\rightarrow)$$

Diagrama que muestra las reacciones y las fuerzas en las barras de la estructura original o real:



4.-Use el Teorema del Castigliano para encontrar el desplazamiento horizontal en el punto E de la armadura que se muestra en la figura:



Datos:

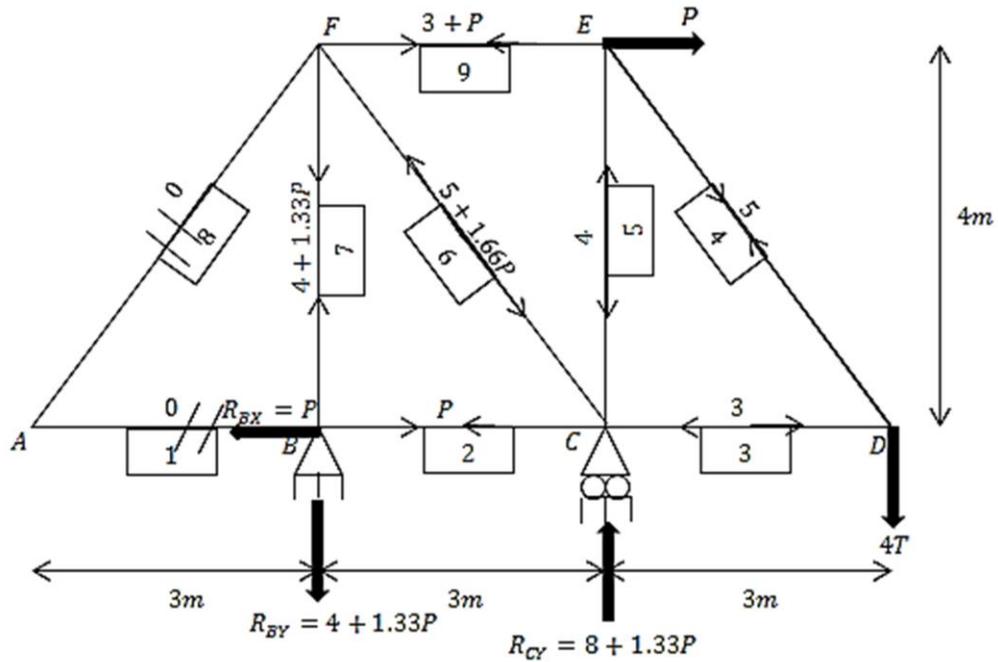
$$* E = 2.1 * 10^6 \frac{T}{m^2}$$

* Considere para A una Sección transversal cuadrada de 10cm por lado

SOLUCIÓN:

Aplicamos una carga P en el punto y dirección en el que se desea conocer el desplazamiento tal y como se muestra en la figura. Obsérvese que la carga P reemplaza a la de 5T por encontrarse ubicadas en el mismo lugar. De la siguiente armadura se obtienen las reacciones y las fuerzas en las barras:

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS



Las reacciones se obtuvieron de:

$$\sum MB = 0$$

$$4(6) + P(4) - R_{CY}(3) = 0$$

$$R_{CY} = \frac{24+4P}{3} = 8 + \frac{4}{3}P \quad \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$-4 - R_{BY} + 8 + 1.33P = 0$$

$$R_{BY} = 4 + 1.33P \quad \downarrow$$

$$\sum FX = 0$$

$$R_{BX} = P \quad \leftarrow$$

Además:

$$AE = [(0.1m)(0.1m)] \left(2.1 * 10^6 \frac{T}{m^2} \right) = 21000T$$

CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

Tabla auxiliar para calcular el δ_{HE}

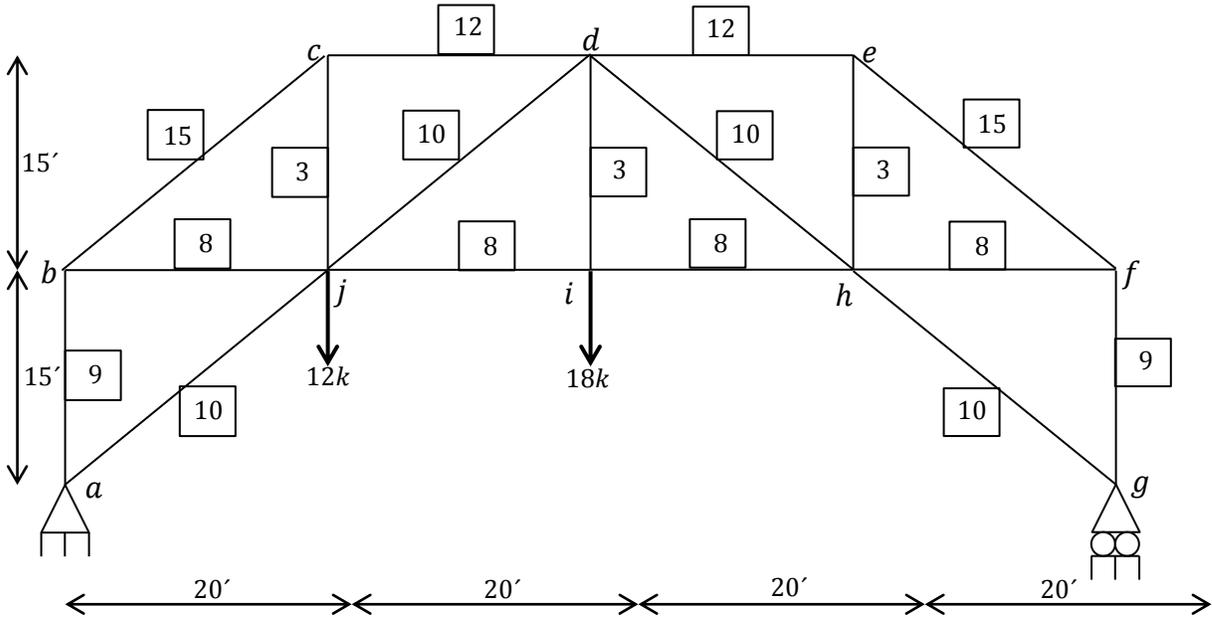
No. Barra	N	L	$\frac{\partial N}{\partial P}$	N, sust. P=5	$N \frac{\partial N}{\partial P} \frac{L}{AE}$
1	0	3	0	0	0
2	P	3	1	5	$7.14 \cdot 10^{-4}$
3	-3	3	0	-3	0
4	5	5	0	5	0
5	-4	4	0	-4	0
6	$-5-1.66P$	5	-1.66	-13.3	$2.63 \cdot 10^{-3}$
7	$4+1.33P$	4	1.33	10.65	$2.643 \cdot 10^{-3}$
8	0	5	0	0	0
9	$3+P$	3	1	8	$1.14 \cdot 10^{-3}$
				Σ	$7.182 \cdot 10^{-3}$

$$\delta_{HE} = \sum N \frac{\partial N}{\partial P} \frac{L}{AE} = 7.182 * 10^{-3} \text{ en m, hacia la derecha}(\rightarrow)$$

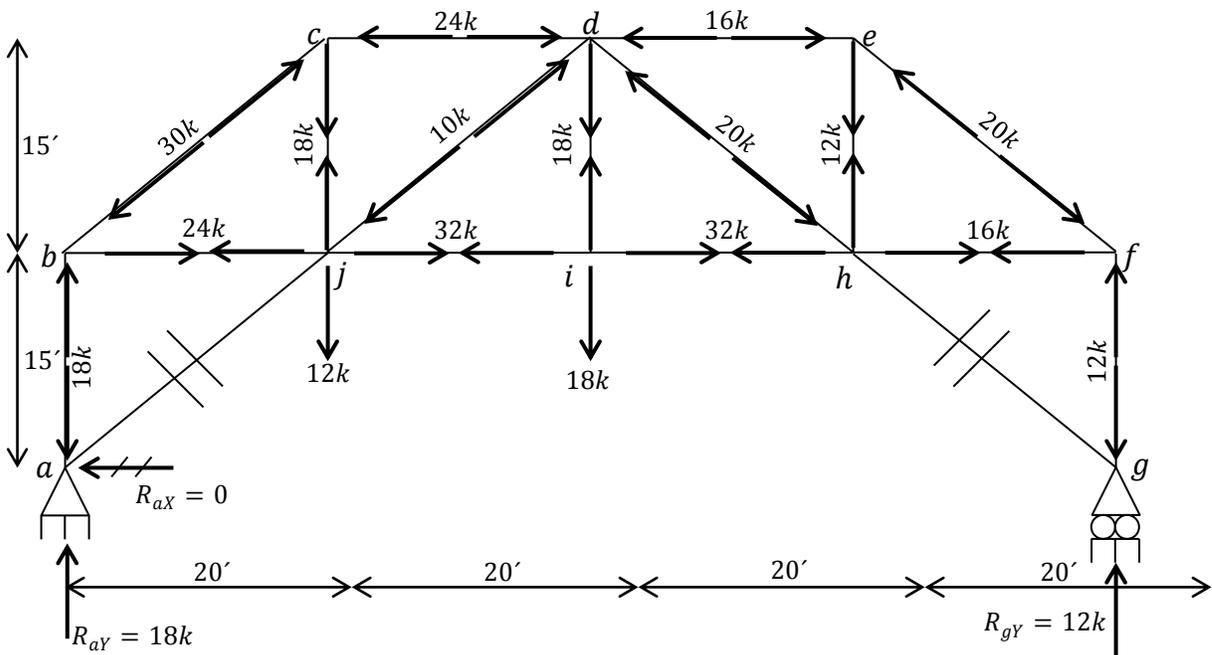
CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

5.- Calcule el desplazamiento que experimenta el nudo i de la armadura que se muestra en la siguiente figura, al actuar sobre ella el sistema de cargas indicado.

El área de la sección transversal de cada elemento es constante y su valor se indica en el cuadrado adyacente; se expresa en pulgadas cuadradas. El módulo de elasticidad del material de los miembros de la estructura es $30000k/pulg^2$.

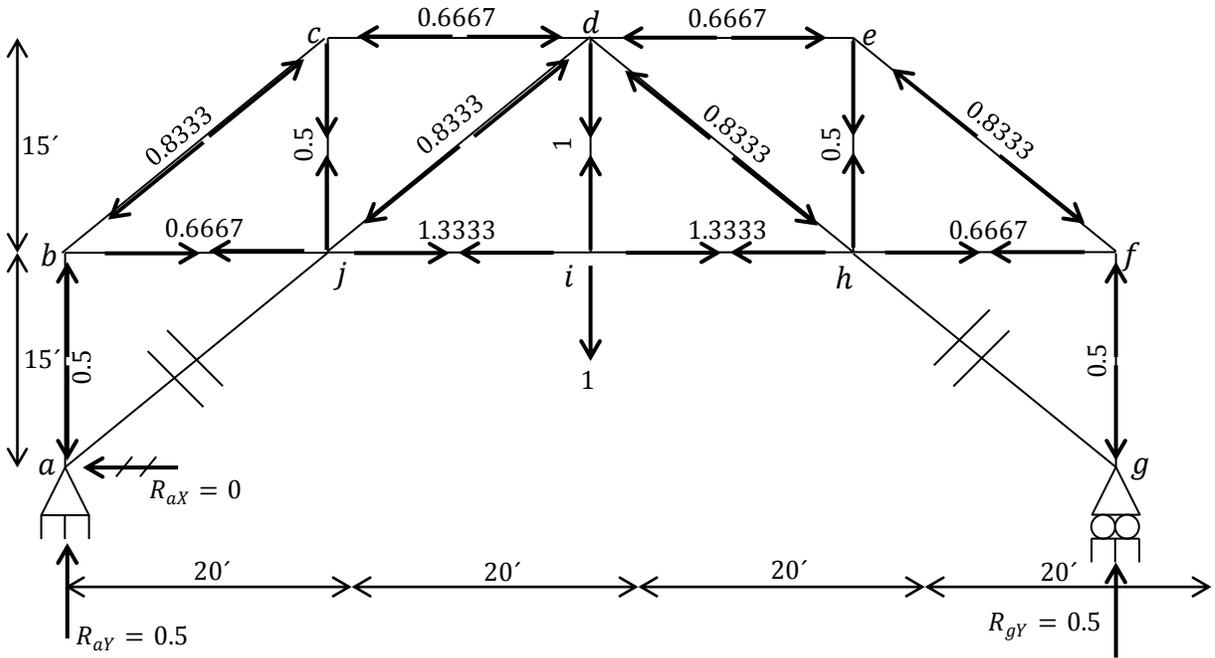


Calculamos las reacciones y las fuerzas en las barras con el método de los nodos.

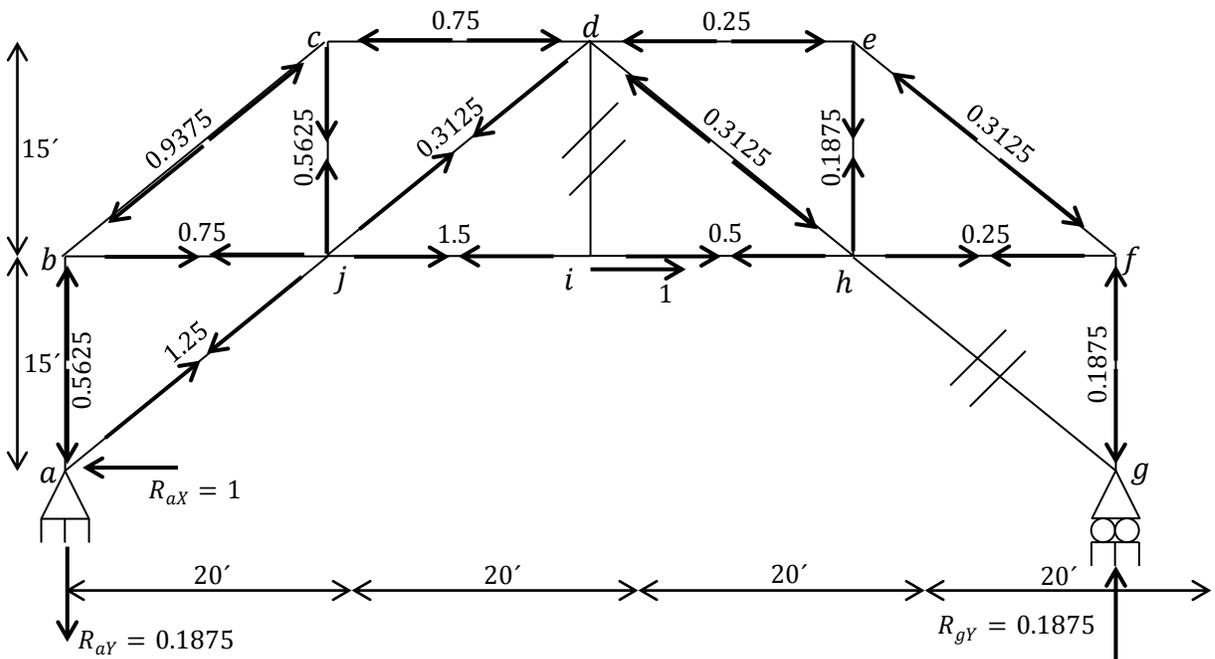


CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

Fuerzas que se producen en las barras al aplicar una carga virtual vertical unitaria aplicada en el nudo i:



Fuerzas que se producen en las barras al aplicar una carga virtual horizontal unitaria aplicada en el nudo i:



CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

Como se desconoce la dirección del desplazamiento del nudo i, no es posible aplicar una carga virtual unitaria en su dirección y calcularlo directamente. Sin embargo, el desplazamiento del nudo i se determina si, por ejemplo, se conocen sus componentes horizontal y vertical.

En la siguiente tabla se consignan todos los datos requeridos para el cálculo de las componentes horizontal y vertical del desplazamiento del nudo i.

Barra	N (k)	L (pulg)	A(pulg^2)	E(k/pulg^2)	vertical		horizontal	
					nv	$\frac{NnvL}{AE}$	nh	$\frac{NnhL}{AE}$
a-b	-18	180	9	30000	-0.5000	0.0060	-0.5625	0.0068
b-c	-30	300	15	30000	-0.8333	0.0167	-0.9375	0.0188
c-d	-24	240	12	30000	-0.6667	0.0107	-0.7500	0.0120
d-e	-16	240	12	30000	-0.6667	0.0071	-0.2500	0.0027
e-f	-20	300	15	30000	-0.8333	0.0111	-0.3125	0.0042
f-g	-12	180	9	30000	-0.5000	0.0040	-0.1875	0.0015
a-j	0	300	10	30000	0.0000	0.0000	1.2500	0.0000
g-h	0	300	10	30000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
b-j	24	240	8	30000	0.6667	0.0160	0.7500	0.0180
j-i	32	240	8	30000	1.3333	0.0427	1.5000	0.0480
i-h	32	240	8	30000	1.3333	0.0427	0.5000	0.0160
h-f	16	240	8	30000	0.6667	0.0107	0.2500	0.0040
j-c	18	180	3	30000	0.5000	0.0180	0.5625	0.0203
j-d	-10	300	10	30000	-0.8333	0.0083	0.3125	-0.0031
i-d	18	180	3	30000	1.0000	0.0360	0.0000	0.0000
h-d	-20	300	10	30000	-0.8333	0.0167	-0.3125	0.0063
h-e	12	180	3	30000	0.5000	0.0120	0.1875	0.0045
					$\Sigma =$	0.2586		0.1597

La componente vertical del desplazamiento del nudo i es:

$$d_{vi} = \sum \frac{NnvL}{AE} = 0.2586 \text{ pulg, hacia abajo}$$

Como el resultado obtenido es positivo, el desplazamiento vertical tiene la misma dirección que la propuesta para la carga virtual vertical unitaria.

La componente horizontal del desplazamiento del nudo i es:

$$d_{Hi} = \sum \frac{NnhL}{AE} = 0.1597 \text{ pulg, la derecha}$$

Como el resultado obtenido es positivo, el desplazamiento horizontal es de la misma dirección que la propuesta para la carga virtual horizontal unitaria.

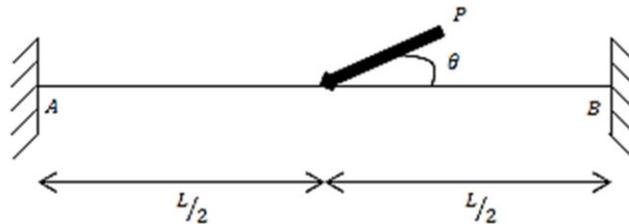
La deflexión del nudo i es:

$$d_i = \sqrt{(d_{vi})^2 + (d_{Hi})^2} = \sqrt{(0.2586)^2 + (0.1597)^2} = 0.304 \text{ pulg} \searrow$$

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE FLEXIBILIDADES

3.1. MÉTODO DE FLEXIBILIDADES APLICADO A VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

1.-Calcular las reacciones de la siguiente viga biempotrada con el método de flexibilidades. Deducir las ecuaciones de momento, cortante, giro y flecha a lo largo de la estructura. Calcular la posición y el valor de la flecha máxima. Considere $EI=$ Constante.



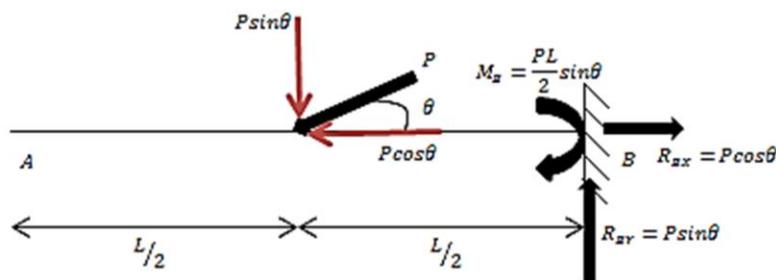
SOLUCIÓN:

Como se tienen 6 incógnitas de reacción, tres ecuaciones de equilibrio y ninguna ecuación de condición, la viga tiene un grado de indeterminación de tres.

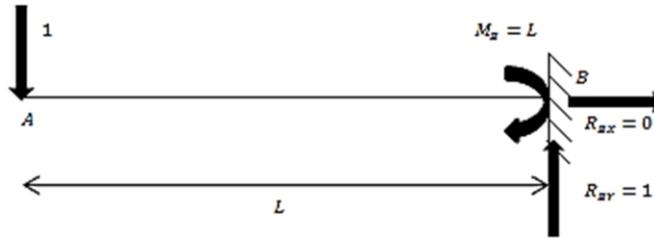
Usando el método de superposición, la viga real es igual a la suma de las siguientes vigas:

$$V_R = V_{IF1} + V_{IF2} + V_{IF3} + V_{IF4}$$

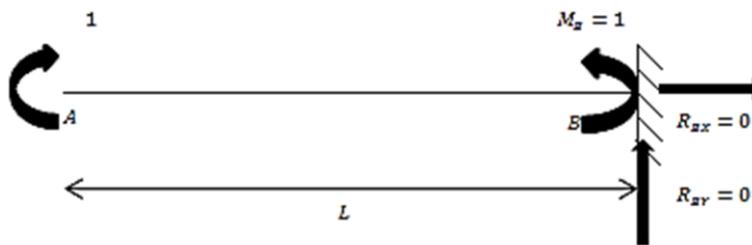
Viga isostática fundamental (VIF1):



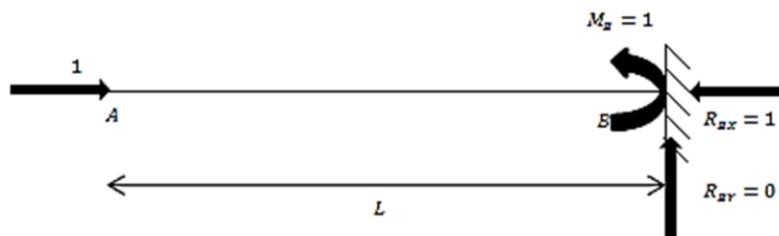
Viga Isostática Ficticia 2(VIF2)



Viga Isostática Ficticia 3(VIF3)



Viga Isostática Ficticia 4(VIF4)



Ecuaciones de momento y normal de las VIF

Haciendo cortes de izquierda a derecha y dado que se optó por dejar el empotrado derecho en las VIF, no es necesario calcular las reacciones de cada VIF.

VIF1 (Estructura M y N)

$$0 \leq x \leq L/2$$

$$M_1 = 0$$

$$N_1 = 0$$

$$L/2 \leq x \leq L$$

$$M_2 = -P \sin \theta \left(x - \frac{L}{2} \right) = -P \sin \theta (x) + \frac{PL}{2} \sin \theta$$

$$N_2 = P \cos \theta \text{ (tensión)}$$

VIF2 (Estructura m_1)

$$0 \leq x \leq L$$

$$M_1 = -1(x) = -x$$

VIF3 (Estructura m_2)

$$0 \leq x \leq L$$

$$M_1 = 1$$

VIF4 (Estructura n_3)

$$0 \leq x \leq L$$

$$N_1 = -1 \text{ (compresión)}$$

Calculamos los siguientes giros y desplazamientos con el método del trabajo virtual:

Sean:

-De VIF1:

$$d_1 = \delta_{VA} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} M m_1 dx$$

$$d_2 = \theta_A = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} M m_2 dx$$

$$d_3 = \Delta_{HA} = \frac{N n_3 L}{AE}$$

-De VIF2:

$$f_{11} = \delta_{VA} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_1 m_1 dx$$

$$f_{21} = \theta_A = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_1 m_2 dx$$

-De VIF3:

$$f_{12} = \delta_{VA} = f_{21}$$

$$f_{22} = \theta_A = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_2 m_2 dx$$

-De VIF4:

$$f_{33} = \Delta_{HA} = \frac{n_3 n_3 L}{AE}$$

Donde:

$\delta_v =$ Desplazamiento vertical

$\theta =$ Giro o rotación

$\Delta_H =$ Desplazamiento horizontal

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{L/2} (0)(-x) dx + \int_{L/2}^L \left(-P \sin \theta (x) + \frac{PL}{2} \sin \theta \right) (-x) dx \right]$$

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[0 + \frac{P \sin \theta}{3} x^3 - \frac{PL}{4} \sin \theta (x^2) \right]_{L/2}^L$$

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[\frac{P \sin \theta}{3} \left(L^3 - \left(\frac{L}{2} \right)^3 \right) - \frac{PL}{4} \sin \theta \left(L^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right) \right]$$

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[\frac{7PL^3}{24} \sin \theta - \frac{3PL^3}{16} \sin \theta \right] = \frac{5PL^3}{48EI} \sin \theta$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{L/2} (0)(1)dx + \int_{L/2}^L \left(-P \sin \theta (x) + \frac{PL}{2} \sin \theta \right) (1) dx \right]$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \left[0 - \frac{P \sin \theta}{2} x^2 + \frac{PL}{2} \sin \theta (x) \right]_{L/2}^L$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \left[-\frac{P \sin \theta}{2} \left(L^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right) + \frac{PL}{2} \sin \theta \left(L - \frac{L}{2} \right) \right]$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \left[-\frac{3PL^2}{8} \sin \theta + \frac{PL^2}{4} \sin \theta \right] = -\frac{PL^2}{8EI} \sin \theta$$

$$d_3 = \frac{(0)(-1)(L/2)}{AE} + \frac{(P \cos \theta)(-1)(L/2)}{AE} = -\frac{PL \cos \theta}{2AE}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^L (-x)(-x)dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{L^3}{3EI}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^L (-x)(1)dx = \frac{1}{EI} \left[-\frac{x^2}{2} \right]_0^L = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{12} = \frac{1}{EI} \int_0^L (1)(-x)dx = \frac{1}{EI} \left[-\frac{x^2}{2} \right]_0^L = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^L (1)(1)dx = \frac{1}{EI} [x]_0^L = \frac{L}{EI}$$

$$f_{33} = \frac{(-1)(-1)(L)}{AE} = \frac{L}{AE}$$

El sistema de ecuaciones de flexibilidades queda formado como sigue:

$$d_1 + f_{11}R_{AY} + f_{12}M_A = 0$$

$$d_2 + f_{21}R_{AY} + f_{22}M_A = 0$$

$$d_3 + f_{33}R_{AX} = 0$$

Sustituyendo:

$$\frac{5PL^3}{48EI} \sin \theta + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} + -\frac{L^2}{2EI} M_A = 0$$

$$-\frac{PL^2}{8EI} \sin \theta + -\frac{L^2}{2EI} R_{AY} + \frac{L}{EI} M_A = 0$$

$$-\frac{PL \cos \theta}{2AE} + \frac{L}{AE} R_{AX} = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} R_{AY} \\ M_A \\ R_{AX} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{P \sin \theta}{2} \\ \frac{PL \sin \theta}{8} \\ \frac{P \cos \theta}{2} \end{pmatrix}$$

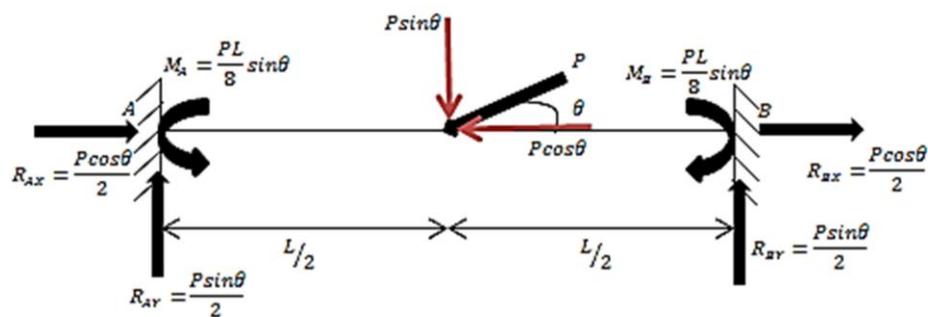
Los signos indican que:

$$R_{AY} = \frac{P \sin \theta}{2} \uparrow$$

$$M_A = \frac{PL \sin \theta}{8} \curvearrowright$$

$$R_{AX} = \frac{P \cos \theta}{2} \rightarrow$$

Cálculo de las reacciones faltantes de la Viga original o real:



$$\sum FX = 0$$

$$\frac{P \cos \theta}{2} - P \cos \theta + R_{BX} = 0$$

$$R_{BX} = \frac{P \cos \theta}{2} \rightarrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$\frac{P \sin \theta}{2} - P \sin \theta + R_{BY} = 0$$

$$R_{BY} = \frac{P \sin \theta}{2} \uparrow$$

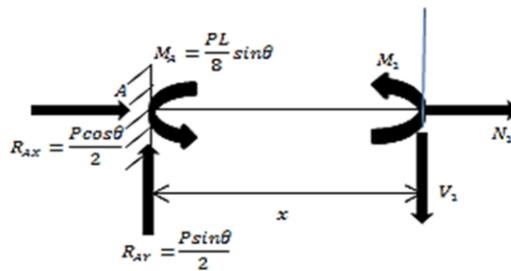
$$\sum MA = 0$$

$$-\frac{PL \sin \theta}{8} + P \sin \theta \left(\frac{L}{2}\right) - \left(\frac{P \sin \theta}{2}\right)(L) + M_B = 0$$

$$M_B = \frac{PL \sin \theta}{8} \curvearrowright$$

Ecuaciones momento, cortante y normal de la estructura real:

$$0 \leq x \leq L/2$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

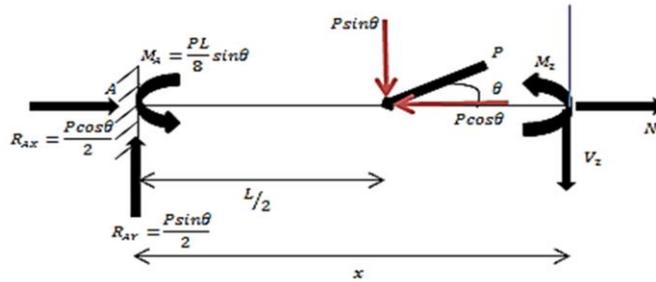
$$M_1 = -\frac{PL \sin \theta}{8} + \frac{P \sin \theta}{2} x$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx} = \frac{P \sin \theta}{2}$$

$$\sum FX = 0$$

$$N_1 = -\frac{P \cos \theta}{2}$$

$$L/2 \leq x \leq L$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = -\frac{PL \sin \theta}{8} + \frac{P \sin \theta}{2} x - P \sin \theta \left(x - \frac{L}{2} \right)$$

$$M_2 = \frac{3PL \sin \theta}{8} - \frac{P \sin \theta}{2} x$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx} = -\frac{P \sin \theta}{2}$$

$$\sum FX = 0$$

$$\frac{P \cos \theta}{2} - P \cos \theta + N_2 = 0$$

$$N_2 = \frac{P \cos \theta}{2}$$

Cálculo de la Deflexión y rotación a lo largo de la viga:

Aplicamos la ecuación diferencial de la elástica:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M$$

$$0 \leq x \leq L/2$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{PL\sin\theta}{8} + \frac{P\sin\theta}{2}x$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int \left(-\frac{PL\sin\theta}{8} + \frac{P\sin\theta}{2}x \right) dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{PL\sin\theta}{8}x + \frac{P\sin\theta}{4}x^2 + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta$$

$$EI\theta_1 = -\frac{PL\sin\theta}{8}x + \frac{P\sin\theta}{4}x^2 + C_1 \text{-----ec.1}$$

$$EI \int dy = \int \left(-\frac{PL\sin\theta}{8}x + \frac{P\sin\theta}{4}x^2 + C_1 \right) dx$$

$$EIY_1 = -\frac{PL\sin\theta}{16}x^2 + \frac{P\sin\theta}{12}x^3 + C_1x + C_2 \text{-----ec.2}$$

$$L/2 \leq x \leq L$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3PL\sin\theta}{8} - \frac{P\sin\theta}{2}x$$

$$EI\theta_2 = \frac{3PL\sin\theta}{8}x - \frac{P\sin\theta}{4}x^2 + C_3 \text{-----ec.3}$$

$$EIY_2 = \frac{3PL\sin\theta}{16}x^2 - \frac{P\sin\theta}{12}x^3 + C_3x + C_4 \text{-----ec.4}$$

Cálculo de las constantes de integración:

Debido a la simetría de la estructura, en $x = \frac{L}{2}, \theta = 0, Y = Y_{max}$; por otra parte, en $x = 0, Y = 0$.

En este caso, las condiciones de frontera anteriores, más las 2 de continuidad bastan para conocer las constantes de integración, de otro modo, hubiera sido necesario aplicar el método del trabajo virtual para conocer algún giro o flecha en cualquier punto de la viga real.

$$\text{En } x = \frac{L}{2}, \theta = 0$$

Sustituyendo en ec.1 y ec.3:

$$0 = -\frac{PL\sin\theta}{8} \left(\frac{L}{2}\right) + \frac{P\sin\theta}{4} \left(\frac{L}{2}\right)^2 + C_1$$

$$C_1 = 0$$

$$0 = \frac{3PL\sin\theta}{8} \left(\frac{L}{2}\right) - \frac{P\sin\theta}{4} \left(\frac{L}{2}\right)^2 + C_3$$

$$C_3 = -\frac{1}{8} PL^2 \sin\theta$$

En $x = 0, Y = 0$

Sustituyendo en ec. 2:

$$0 = -\frac{PL\sin\theta}{16} (0)^2 + \frac{P\sin\theta}{12} (0)^3 + (0)(0) + C_2$$

$$C_2 = 0$$

Además, por continuidad:

$$Y_1 = Y_2 \text{ en } x = \frac{L}{2}$$

Igualemos ec.2 con ec.4 en $x = \frac{L}{2}$:

$$-\frac{PL\sin\theta}{16} \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{P\sin\theta}{12} \left(\frac{L}{2}\right)^3 + (0) \left(\frac{L}{2}\right) + 0 = \frac{3PL\sin\theta}{16} \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{P\sin\theta}{12} \left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{1}{8} PL^2 \sin\theta \left(\frac{L}{2}\right) + C_4$$

$$C_4 = \frac{1}{48} PL^3 \sin\theta$$

Las ecuaciones generales definitivas de giro y flecha por tramo de la viga son:

$$0 \leq x \leq L/2$$

$$EI\theta_1 = -\frac{PL\sin\theta}{8} x + \frac{P\sin\theta}{4} x^2$$

$$EII_1 = -\frac{PL\sin\theta}{16} x^2 + \frac{P\sin\theta}{12} x^3$$

$$L/2 \leq x \leq L$$

$$EI\theta_2 = \frac{3PL\sin\theta}{8}x - \frac{P\sin\theta}{4}x^2 - \frac{1}{8}PL^2\sin\theta$$

$$EIY_2 = \frac{3PL\sin\theta}{16}x^2 - \frac{P\sin\theta}{12}x^3 - \frac{1}{8}PL^2\sin\theta(x) + \frac{1}{48}PL^3\sin\theta$$

Como ya habíamos mencionado, Y_{max} se ubica en $x_{max} = \frac{L}{2}$

Sustituyendo $x_{max} = \frac{L}{2}$ en las ecuaciones de flecha, se obtiene el valor de la flecha máxima por tramo, en este caso debe ser igual en ambos tramos.

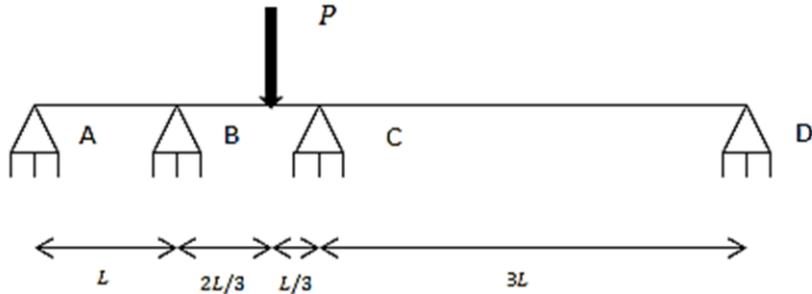
$$EIY_{max_1} = -\frac{PL\sin\theta}{16}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{P\sin\theta}{12}\left(\frac{L}{2}\right)^3$$

$$Y_{max_1} = -\frac{PL\sin\theta}{192EI} \text{ (hacia abajo)}$$

$$EIY_{max_2} = \frac{3PL\sin\theta}{16}\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{P\sin\theta}{12}\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{1}{8}PL^2\sin\theta\left(\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{48}PL^3\sin\theta$$

$$Y_{max_2} = -\frac{PL\sin\theta}{192EI} \text{ (hacia abajo)}$$

2.-Calcular las reacciones de la siguiente viga hiperestática de tres claros con el método de flexibilidades. Deducir las ecuaciones de momento, cortante, giro y flecha a lo largo de la estructura. Calcular la posición y el valor de la flecha máxima por tramo. Considere $EI=$ Constante.



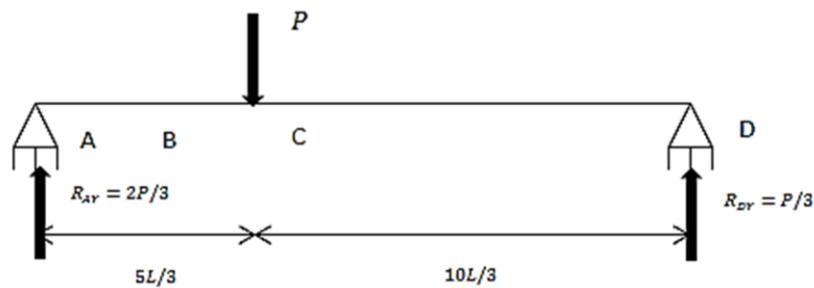
SOLUCIÓN:

Usando el método de superposición, la viga real es igual a la suma de las siguientes vigas:

$$V_R = V_{IF1} + V_{IF2} + V_{IF3}$$

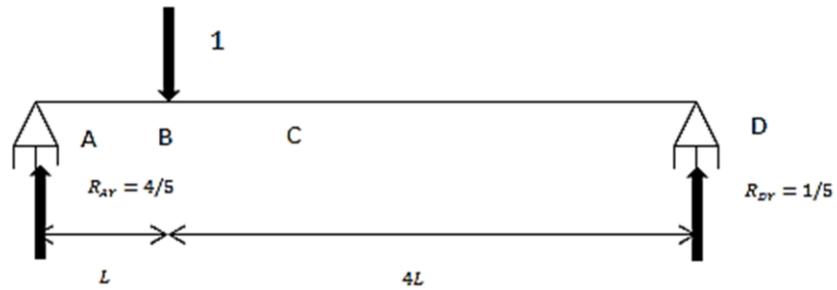
Viga isostática fundamental:

VIF1

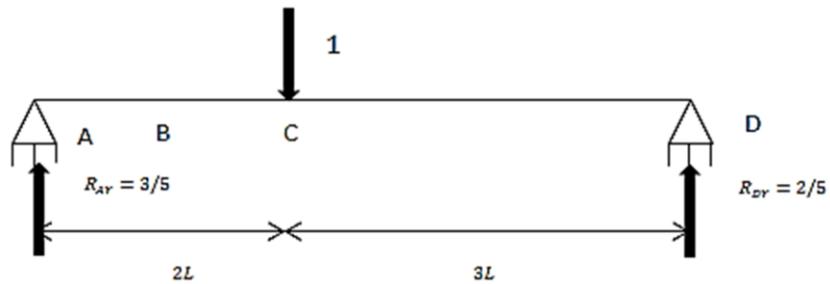


En VIF2 se coloca una carga unitaria vertical en B, debido a que se quitó un apoyo fijo que estaba ubicado en el mismo punto y en consecuencia, la reacción removida es de dirección vertical. Lo mismo se hace para VIF3, pero en C.

VIF2



VIF3



Para VIF1:

Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$P \left(\frac{5}{3}L \right) - R_{DY}(5L) = 0$$

$$R_{DY} = \frac{5PL}{5L} = \frac{1}{3}P \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} - P + \frac{1}{3}P = 0$$

$$R_{AY} = \frac{2}{3}P \uparrow$$

Para VIF2:

Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$1(L) - R_{DY}(5L) = 0$$

$$R_{DY} = \frac{1}{5} \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} - 1 + \frac{1}{5} = 0$$

$$R_{AY} = \frac{4}{5} \uparrow$$

Para VIF3:

Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$1(2L) - R_{DY}(5L) = 0$$

$$R_{DY} = \frac{2}{5} \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} - 1 + \frac{2}{5} = 0$$

$$R_{AY} = \frac{3}{5} \uparrow$$

Sean:

$$d_1 = \delta_{VB} \text{ de VIF1}$$

$$d_2 = \delta_{VC} \text{ de VIF1}$$

$$f_{11} = \delta_{VB} \text{ de VIF2}$$

$$f_{21} = \delta_{VC} \text{ de VIF2}$$

$$f_{12} = \delta_{VB} \text{ de VIF3}$$

$$f_{22} = \delta_{VC} \text{ de VIF3}$$

Donde:

$$\delta_V = \text{Desplazamiento Vertical}$$

Cálculo de los desplazamientos con el método de la viga conjugada:

VIF 1:

Obtenemos su diagrama de M/EI

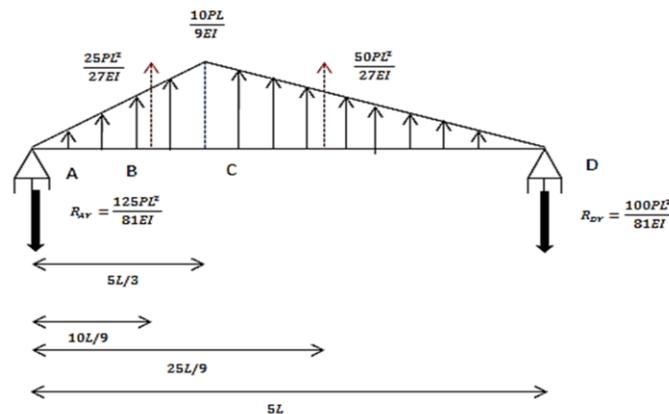
$$0 \leq x \leq \frac{5}{3}L$$

$$M_1 = \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3}Px \right)$$

$$\frac{5}{3}L \leq x \leq 5L$$

$$M_2 = \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3}Px - P \left(x - \frac{5}{3}L \right) \right) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{3}Px + \frac{5}{3}PL \right)$$

VIGA CONJUGADA:



Nota: En el diagrama se han colocado las cargas concentradas equivalentes en sus puntos de aplicación de las presiones triangulares.

Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$-\left(\frac{25PL^2}{27EI}\right)\left(\frac{10}{9}L\right) - \left(\frac{50PL^2}{27EI}\right)\left(\frac{25}{9}L\right) + R_{DY}(5L) = 0$$

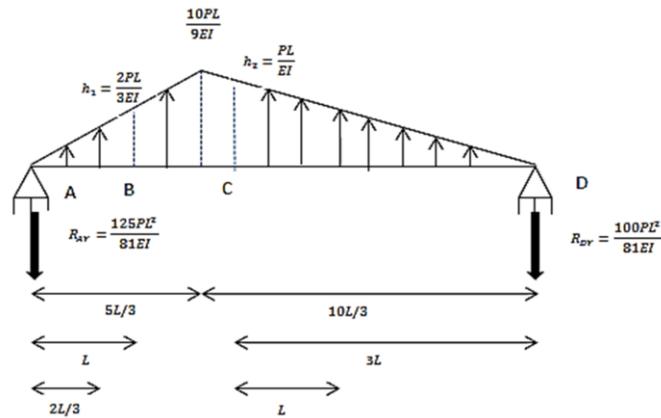
$$R_{DY} = \frac{100PL^2}{81EI} \downarrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$-R_{AY} + \frac{25PL^2}{27EI} + \frac{50PL^2}{27EI} - \frac{100PL^2}{81EI} = 0$$

$$R_{AY} = \frac{125PL^2}{81EI} \downarrow$$

Para conocer d_1 y d_2 , nos posicionamos en los puntos B y C de la viga conjugada y tomamos momentos con respecto a ellos, respectivamente.



Si $x = L, M_1 = h_1 = ?$

$$h_1 = \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} P(L) \right) = \frac{2PL}{3EI}$$

$$Si \ x = 2L, M_2 = h_2 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{3} P(2L) + \frac{5}{3} PL \right) = \frac{PL}{EI}$$

Si la suma de momentos se hace hacia la izquierda, quiere decir que estamos efectuando un corte de izquierda a derecha; usando la convención de signos mas usual, el momento a calcular se propone negativo. Lo contrario ocurre si la suma de momentos se hace hacia la derecha.

$$\sum MBizq = 0$$

$$\left(\frac{(L) \left(\frac{2PL}{3EI} \right)}{2} \right) \left(\frac{1}{3}L \right) - \left(\frac{125PL^2}{81EI} \right) (L) - M_B = 0$$

$$d_1 = M_B = -\frac{116PL^3}{81EI}$$

$$\sum MCder = 0$$

$$-\left(\frac{(3L) \left(\frac{PL}{EI} \right)}{2} \right) (L) + \left(\frac{100PL^2}{81EI} \right) (3L) + M_C = 0$$

$$d_2 = M_C = -\frac{119PL^3}{54EI}$$

Nota: El signo negativo indica que la deflexión es hacia abajo, pero es indistinto al formular el sistema de ecuaciones.

VIF 2:

Obtenemos su diagrama de M/EI

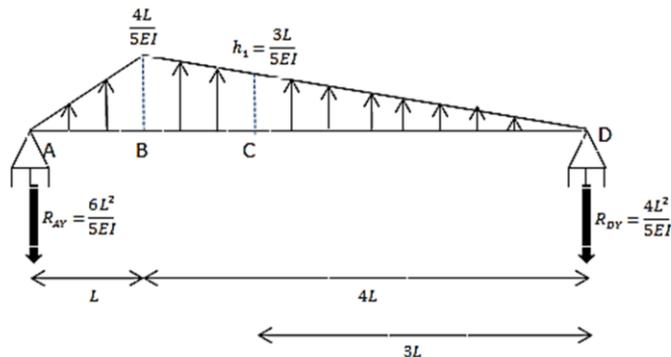
$$0 \leq x \leq L$$

$$M_1 = \frac{1}{EI} \left(\frac{4}{5}x \right)$$

$$L \leq x \leq 4L$$

$$M_2 = \frac{1}{EI} \left(\frac{4}{5}x - 1(x - L) \right) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{5}x + L \right)$$

VIGA CONJUGADA:



Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$-\left(\frac{2L^2}{5EI}\right)\left(\frac{2}{3}L\right) - \left(\frac{8L^2}{5EI}\right)\left(\frac{7}{3}L\right) + R_{DY}(5L) = 0$$

$$R_{DY} = \frac{4L^2}{5EI} \quad \downarrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$-R_{AY} + \frac{2L^2}{5EI} + \frac{8L^2}{5EI} - \frac{4L^2}{5EI} = 0$$

$$R_{AY} = \frac{6L^2}{5EI} \quad \downarrow$$

$$\text{Si } x = \frac{7}{3}L, M_2 = h_1 = ?$$

$$h_1 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{5}(2L) + L \right) = \frac{3L}{5EI}$$

$$\sum MBizq = 0$$

$$\left(\frac{2L^2}{5EI}\right)\left(\frac{1}{3}L\right) - \left(\frac{6L^2}{5EI}\right)(L) - M_B = 0$$

$$f_{11} = M_B = -\frac{16L^3}{15EI}$$

$$\sum MCder = 0$$

$$-\left(\frac{(3L)\left(\frac{3L}{5EI}\right)}{2}\right)\left(\frac{1}{3}(3L)\right) + \left(\frac{4L^2}{5EI}\right)(3L) + M_C = 0$$

$$f_{21} = M_C = -\frac{3L^3}{2EI}$$

VIF 3:

Obtenemos el diagrama de M/EI

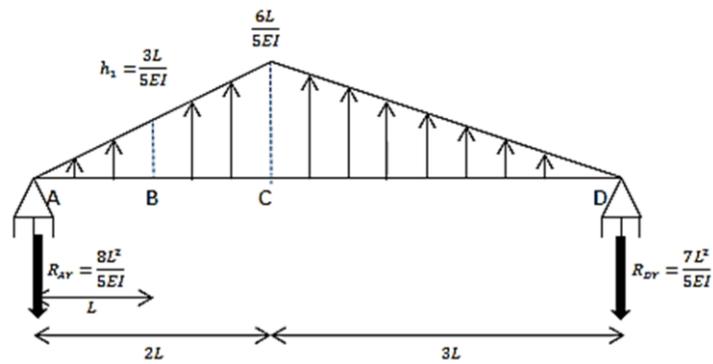
$$0 \leq x \leq 2L$$

$$M_1 = \frac{1}{EI} \left(\frac{3}{5} x \right)$$

$$2L \leq x \leq 5L$$

$$M_2 = \frac{1}{EI} \left(\frac{3}{5} x - 1(x - 2L) \right) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{2}{5} x + 2L \right)$$

VIGA CONJUGADA:



Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$-\left(\frac{(2L) \left(\frac{6L}{5EI} \right)}{2} \right) \left(\frac{2}{3} (2L) \right) - \left(\frac{(3L) \left(\frac{6L}{5EI} \right)}{2} \right) \left(2L + \frac{1}{3} (3L) \right) + R_{DY} (5L) = 0$$

$$R_{DY} = \frac{7L^2}{5EI} \quad \downarrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$-R_{AY} + \left(\frac{(2L) \left(\frac{6L}{5EI} \right)}{2} \right) + \left(\frac{(3L) \left(\frac{6L}{5EI} \right)}{2} \right) - \frac{7L^2}{5EI} = 0$$

$$R_{AY} = \frac{8L^2}{5EI} \quad \downarrow$$

$$\text{Si } x = L, M_1 = h_1 = ?$$

$$h_1 = \frac{1}{EI} \left(\frac{3}{5} (L) \right) = \frac{3L}{5EI}$$

$$\sum MBizq = 0$$

$$\left(\frac{(L) \left(\frac{3L}{5EI} \right)}{2} \right) \left(\frac{1}{3} (L) \right) - \left(\frac{8L^2}{5EI} \right) (L) - M_B = 0$$

$$f_{12} = M_B = -\frac{3L^3}{2EI}$$

$$\sum MCder = 0$$

$$-\left(\frac{(3L) \left(\frac{6L}{5EI} \right)}{2} \right) \left(\frac{1}{3} (3L) \right) + \left(\frac{7L^2}{5EI} \right) (3L) + M_C = 0$$

$$f_{22} = M_C = -\frac{12L^3}{5EI}$$

Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica y cálculo de las fuerzas correctivas:

$$d_1 + f_{11}R_{BY} + f_{12}R_{CY} = 0$$

$$d_2 + f_{21}R_{BY} + f_{22}R_{CY} = 0$$

Sustituyendo:

$$-\frac{116PL^3}{81EI} - \frac{16L^3}{15EI}R_{BY} - \frac{3L^3}{2EI}R_{CY} = 0$$

$$-\frac{119PL^3}{54EI} - \frac{3L^3}{2EI}R_{BY} - \frac{12L^3}{5EI}R_{CY} = 0$$

Despejando y simplificando:

$$\frac{16}{15}R_{BY} + \frac{3}{2}R_{CY} = -\frac{116P}{81}$$

$$\frac{3}{2}R_{BY} + \frac{12}{5}R_{CY} = -\frac{119P}{54}$$

Resolviendo por el método de Cramer:

$$R_{BY} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{116P}{81} & \frac{3}{2} \\ -\frac{119P}{54} & \frac{12}{5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{16}{15} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{12}{5} \end{vmatrix}} = \frac{\left[\left(-\frac{116P}{81}\right) \left(\frac{12}{5}\right) \right] - \left[\left(\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{119P}{54}\right) \right]}{\left[\left(\frac{16}{15}\right) \left(\frac{12}{5}\right) \right] - \left[\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \right]} = \frac{-\frac{71}{540}P}{\frac{31}{100}} = -\frac{355}{837}P$$

$$R_{CY} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{16}{15} & -\frac{116P}{81} \\ \frac{3}{2} & -\frac{119P}{54} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{16}{15} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{12}{5} \end{vmatrix}} = \frac{\left[\left(\frac{16}{15}\right) \left(-\frac{119P}{54}\right) \right] - \left[\left(-\frac{116P}{81}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \right]}{\left[\left(\frac{16}{15}\right) \left(\frac{12}{5}\right) \right] - \left[\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \right]} = \frac{-\frac{82}{405}P}{\frac{31}{100}} = -\frac{1640}{2511}P$$

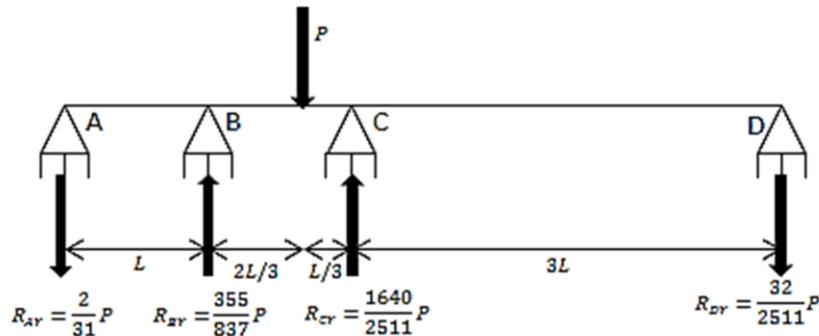
De las raíces obtenidas al resolver el sistema de ecuaciones, podemos notar que los valores obtenidos de las reacciones son negativos; esto se debe a que el sentido propuesto de las fuerzas unitarias en B y C respectivamente, es incorrecto, por lo que las reacciones son hacia arriba (de sentido opuesto al de la carga virtual unitaria propuesta).

∴

$$R_{BY} = \frac{355}{837}P \uparrow$$

$$R_{CY} = \frac{1640}{2511}P \uparrow$$

Cálculo de las reacciones restantes:



Para la estructura real u original:

$$\sum MA = 0$$

$$\left(-\frac{355}{837}P\right)(L) + (P)\left(L + \frac{2}{3}L\right) - \left(\frac{1640}{2511}P\right)(2L) - R_{DY}(5L) = 0$$

$$R_{DY} = \frac{\frac{160}{2511}P}{-5L} = -\frac{32}{2511}P$$

$$R_{DY} = \frac{32}{2511}P \downarrow$$

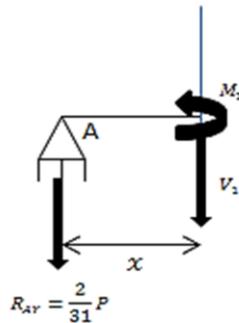
$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} + \frac{355}{837}P - P + \frac{1640}{2511}P - \frac{32}{2511}P = 0$$

$$R_{AY} = -\frac{2}{31}P \quad \therefore \quad R_{AY} = \frac{2}{31}P \downarrow$$

Una vez obtenidas todas las reacciones, deducimos las ecuaciones de momento y cortante por tramo:

$$0 \leq x \leq L$$

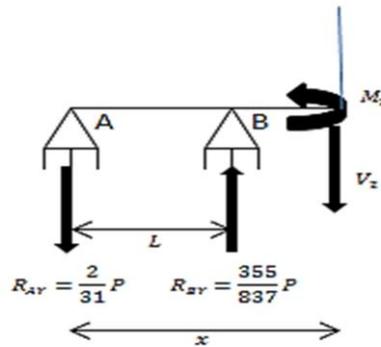


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -\frac{2}{31}Px$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx} = -\frac{2}{31}P$$

$$L \leq x \leq \frac{5}{3}L$$

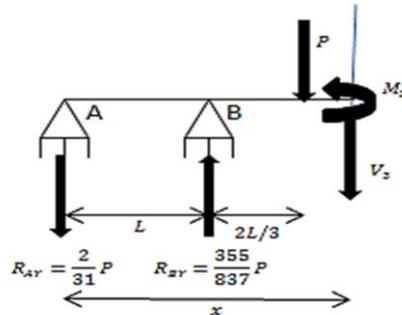


$$\sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$M_2 = -\frac{2}{31}Px + \frac{355}{837}P(x - L) = \frac{301}{837}Px - \frac{355}{837}PL$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx} = \frac{301}{837}P$$

$$\frac{5}{3}L \leq x \leq 2L$$

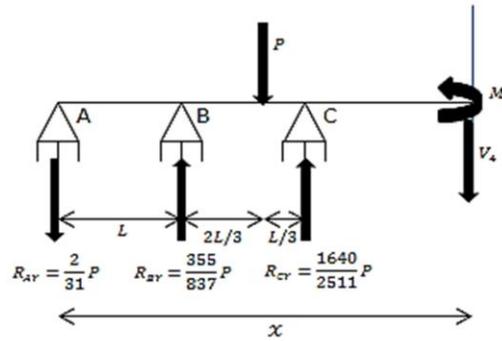


$$\sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$M_3 = -\frac{2}{31}Px + \frac{355}{837}P(x - L) - P\left(x - \frac{5}{3}L\right) = -\frac{536}{837}Px + \frac{1040}{837}PL$$

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx} = -\frac{536}{837}P$$

$$2L \leq x \leq 5L$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_4 = -\frac{2}{31}Px + \frac{355}{837}P(x-L) - P\left(x - \frac{5}{3}L\right) + \frac{1640}{2511}P(x-2L)$$

$$M_4 = \frac{32}{2511}Px - \frac{160}{2511}PL$$

$$V_4 = \frac{dM_4}{dx} = -\frac{32}{2511}P$$

Cálculo de la deflexión y Rotación a lo largo de la viga:

Aplicamos la ecuación diferencial de la elástica:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$$0 \leq x \leq L$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{31}Px$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int \left(-\frac{2}{31}Px\right) dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{62}Px^2 + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta$$

$$EI\theta_1 = -\frac{1}{31}Px^2 + C_1 \text{-----ec.1}$$

$$EI \int dy = \int \left(-\frac{1}{31}Px^2 + C_1 \right) dx$$

$$EIY_1 = -\frac{1}{93}Px^3 + C_1x + C_2 \text{-----ec.2}$$

$$L \leq x \leq \frac{5}{3}L$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{301}{837}Px - \frac{355}{837}PL$$

$$EI\theta_2 = \frac{301}{1674}Px^2 - \frac{355}{837}PLx + C_3 \text{-----ec.3}$$

$$EIY_2 = \frac{301}{5022}Px^3 - \frac{355}{1674}PLx^2 + C_3x + C_4 \text{-----ec.4}$$

$$\frac{5}{3}L \leq x \leq 2L$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{536}{837}Px + \frac{1040}{837}PL$$

$$EI\theta_3 = -\frac{268}{837}Px^2 + \frac{1040}{837}PLx + C_5 \text{-----ec.5}$$

$$EIY_3 = -\frac{268}{2511}Px^3 + \frac{520}{837}PLx^2 + C_5x + C_6 \text{-----ec.6}$$

$$2L \leq x \leq 5L$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{32}{2511}Px - \frac{160}{2511}PL$$

$$EI\theta_4 = \frac{16}{2511}Px^2 - \frac{160}{2511}PLx + C_7 \text{-----ec.7}$$

$$EIY_4 = \frac{16}{7533}Px^3 - \frac{80}{2511}PLx^2 + C_7x + C_8 \text{-----ec.8}$$

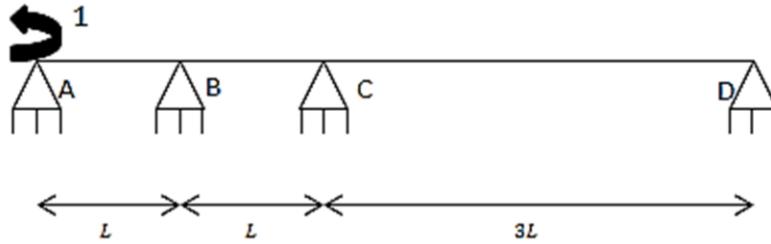
Sabemos que en donde se ubican los apoyos articulados no hay flechamiento, es decir:

$$en x = 0 = L = 2L = 5L; Y = 0$$

Pero desconocemos la rotación a lo largo de la viga, así que es necesario calcular el giro en un punto cualquiera.

Por conveniencia, calculamos $\theta = ?$ en $x = 0$

Viga Ficticia para obtener la rotación (VFR):



Esta viga también es hiperestática y las reacciones deben ser calculadas nuevamente mediante el método de flexibilidades

La viga anterior es igual a la suma de las siguientes vigas:

$$VFR = VIF1' + VIF2' + VIF3'$$

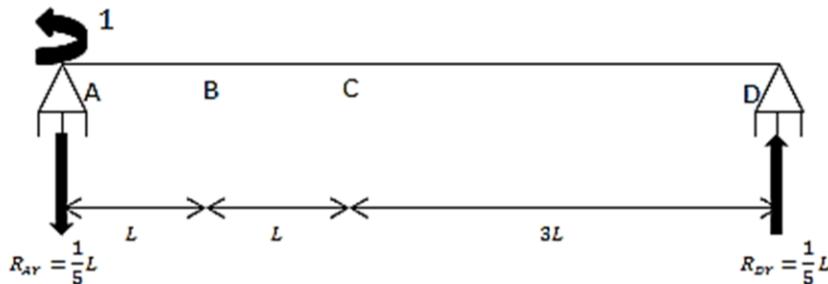
Bastará con hacer el análisis de $VIF1'$, puesto que:

$$VIF2 = VIF2' \text{ y } VIF3 = VIF3'$$

En las que

$VIF2$ y $VIF3$ ya fueron analizadas al resolver VR.

$VIF1'$



Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$1 - R_{DY}(5L) = 0$$

$$R_{DY} = \frac{1}{5L} \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} + \frac{1}{5L} = 0$$

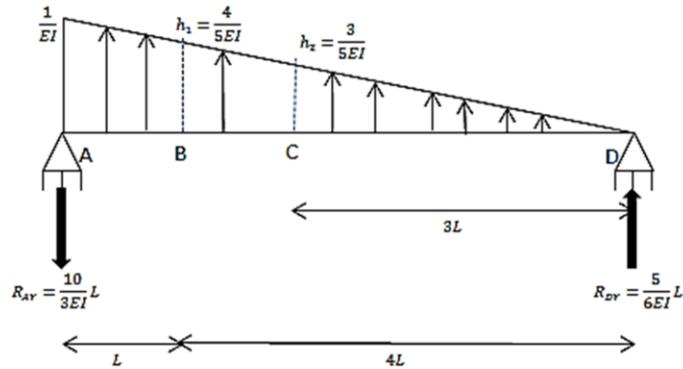
$$R_{AY} = -\frac{1}{5L} \quad \therefore R_{AY} = \frac{1}{5L} \downarrow$$

Obtenemos su diagrama de M/EI

$$0 \leq x \leq 5L$$

$$M_1 = \frac{1}{EI} \left(1 - \frac{1}{5L}x \right)$$

VIGA CONJUGADA:



Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$-\left(\frac{(5L) \left(\frac{1}{EI} \right)}{2} \right) \left(\frac{1}{3} (5L) \right) + R_{DY}(5L) = 0$$

$$R_{DY} = \frac{5L}{6EI} \quad \downarrow$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$-R_{AY} + \left(\frac{(5L) \left(\frac{1}{EI} \right)}{2} \right) - \frac{5L}{6EI} = 0$$

$$R_{AY} = \frac{10L}{3EI} \quad \downarrow$$

$$\text{Si } x = L, M_1 = h_1 = ?$$

$$h_1 = \frac{1}{EI} \left(1 - \frac{1}{5L} (L) \right) = \frac{4}{5EI}$$

$$\text{Si } x = 2L, M_1 = h_2 = ?$$

$$h_2 = \frac{1}{EI} \left(1 - \frac{1}{5L} (2L) \right) = \frac{3}{5EI}$$

$$\sum MB_{der} = 0$$

$$- \left[\frac{(4L) \left(\frac{4}{5EI} \right)}{2} \right] \left(\frac{1}{3} (4L) \right) + \left(\frac{5L}{6EI} \right) (4L) + M_B = 0$$

$$d'_1 = M_B = -\frac{6L^2}{5EI}$$

$$\sum MC_{der} = 0$$

$$- \left[\frac{(3L) \left(\frac{3}{5EI} \right)}{2} \right] \left(\frac{1}{3} (3L) \right) + \left(\frac{5L}{6EI} \right) (3L) + M_C = 0$$

$$d'_2 = M_C = -\frac{8L^2}{5EI}$$

Como:

$$VIF2 = VIF2' \text{ y } VIF3 = VIF3'$$

Entonces:

$$f'_{11} = f_{11} = -\frac{16L^3}{15EI}$$

$$f'_{21} = f_{21} = -\frac{3L^3}{2EI}$$

$$f'_{12} = f_{12} = -\frac{3L^3}{2EI}$$

$$f'_{22} = f_{22} = -\frac{12L^3}{5EI}$$

El sistema de ecuaciones queda formulado como sigue:

$$-\frac{6L^2}{5EI} - \frac{16L^3}{15EI}R_{BY} - \frac{3L^3}{2EI}R_{CY} = 0$$

$$-\frac{8L^2}{5EI} - \frac{3L^3}{2EI}R_{BY} - \frac{12L^3}{5EI}R_{CY} = 0$$

Despejando y simplificando:

$$\frac{16}{15}LR_{BY} + \frac{3L}{2}R_{CY} = -\frac{6}{5}$$

$$\frac{3L}{2}R_{BY} + \frac{12L}{5}R_{CY} = -\frac{8}{5}$$

Resolviendo por el método de Cramer:

$$R_{BY} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{3}{2}L \\ -\frac{8}{5} & \frac{12}{5}L \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{16}{15}L & \frac{3}{2}L \\ \frac{3}{2}L & \frac{12}{5}L \end{vmatrix}} = \frac{\left[(-\frac{6}{5})(\frac{12}{5}L)\right] - \left[\frac{3}{2}L(-\frac{8}{5})\right]}{\left[\frac{16}{15}L(\frac{12}{5}L)\right] - \left[\frac{3}{2}L(\frac{3}{2}L)\right]} = \frac{-\frac{12}{25}L}{\frac{31}{100}L^2} = -\frac{48}{31L}$$

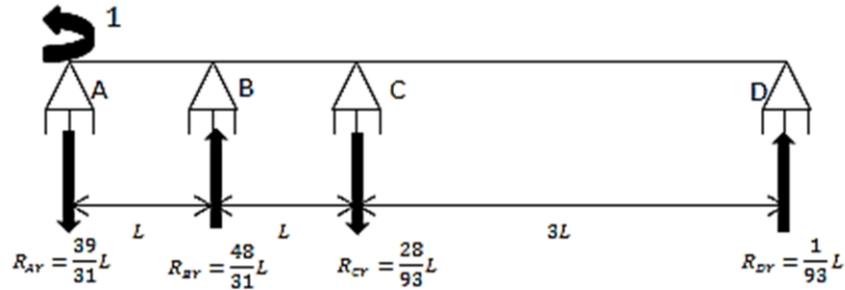
$$R_{CY} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{16}{15}L & -\frac{6}{5} \\ \frac{3}{2}L & -\frac{8}{5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{16}{15}L & \frac{3}{2}L \\ \frac{3}{2}L & \frac{12}{5}L \end{vmatrix}} = \frac{\left[\frac{16}{15}L(-\frac{8}{5})\right] - \left[(-\frac{6}{5})(\frac{3}{2}L)\right]}{\left[\frac{16}{15}L(\frac{12}{5}L)\right] - \left[\frac{3}{2}L(\frac{3}{2}L)\right]} = \frac{\frac{7}{75}L}{\frac{31}{100}L^2} = \frac{28}{93L}$$

Los signos indican que:

$$R_{BY} = \frac{48}{31L} \uparrow$$

$$R_{CY} = \frac{28}{93L} \downarrow$$

Calculo de las demás reacciones de VFR:



$$\sum MA = 0$$

$$1 - \left(\frac{48}{31L}\right)(L) + \left(\frac{28}{93L}\right)(2L) - R_{DY}(5L) = 0$$

$$R_{DY} = \frac{1}{93L} \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$-R_{AY} + \frac{48}{31L} - \frac{28}{93L} + \frac{1}{93L} = 0$$

$$R_{AY} = \frac{39}{31L} \downarrow$$

Ecuaciones de momentos ficticios o ecuaciones de momentos de la VFR:

$$0 \leq x \leq L$$

$$m_1 = 1 - \frac{39}{31L}x$$

$$L \leq x \leq 2L$$

$$m_2 = 1 - \frac{39}{31L}x + \frac{48}{31L}(x - L) = \frac{9}{31L}x - \frac{17}{31}$$

$$2L \leq x \leq 5L$$

$$m_3 = 1 - \frac{39}{31L}x + \frac{48}{31L}(x - L) - \frac{28}{93L}(x - 2L) = -\frac{1}{93L}x + \frac{5}{93}$$

Aplicamos la siguiente ecuación para calcular el giro en A, o sea, a la distancia de $x=0$ de la viga real

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^L \left(-\frac{2}{31}Px \right) \left(1 - \frac{39}{31L}x \right) dx \right. \\ &+ \int_L^{\frac{5}{3}L} \left(\frac{301}{837}Px - \frac{355}{837}PL \right) \left(\frac{9}{31L}x - \frac{17}{31} \right) dx \\ &+ \int_{\frac{5}{3}L}^{2L} \left(-\frac{536}{837}Px + \frac{1040}{837}PL \right) \left(\frac{9}{31L}x - \frac{17}{31} \right) dx \\ &\left. + \int_{2L}^{5L} \left(\frac{32}{2511}Px - \frac{160}{2511}PL \right) \left(-\frac{1}{93L}x + \frac{5}{93} \right) dx \right] \\ &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{5PL^2}{961} - \frac{788PL^2}{233523} - \frac{220PL^2}{233523} - \frac{32PL^2}{25947} \right) = -\frac{1PL^2}{93EI} \end{aligned}$$

El signo indica que el sentido propuesto es incorrecto y debe ser invertido

$$\therefore \theta_A = \frac{1PL^2}{93EI} \curvearrowright$$

El sentido antihorario indica que el signo del giro es positivo, por lo que:

$$\theta_A = \frac{PL^2}{93EI}$$

Determinamos las constantes de integración en el sistema de ecuaciones enumerado con anterioridad:

$$\text{en } x = 0, Y = 0, \theta_A = \frac{PL^2}{93EI}$$

Sustituyendo en ec.1 y ec.2 respectivamente:

$$EI \left(\frac{PL^2}{93EI} \right) = -\frac{1}{31}P(0^2) + C_1$$

$$C_1 = \frac{PL^2}{93}$$

$$EI(0) = -\frac{1}{93}P(0^3) + \frac{PL^2}{93}(0) + C_2$$

$$C_2 = 0$$

Condición de continuidad 1:

$$\theta_1 = \theta_2 \text{ en } x = L$$

$$-\frac{1}{31}PL^2 + \frac{PL^2}{93} = \frac{301}{1674}PL^2 - \frac{355}{837}PL(L) + C_3$$

$$C_3 = \frac{373PL^2}{1674}$$

Condición de continuidad 2:

$$Y_1 = Y_2 \text{ en } x = L$$

$$-\frac{1}{93}PL^3 + \frac{PL^2}{93}L + C_2 = \frac{301}{5022}PL^3 - \frac{355}{1674}PL(L^2) + \frac{373PL^2}{1674}L + C_4$$

$$C_4 = -\frac{355PL^3}{5022}$$

Condición de continuidad 3:

$$\theta_2 = \theta_3 \text{ en } x = \frac{5}{3}L$$

$$\frac{301}{1674}P \left(\frac{5}{3}L \right)^2 - \frac{355}{837}PL \left(\frac{5}{3}L \right) + \frac{373PL^2}{1674} = -\frac{268}{837}P \left(\frac{5}{3}L \right)^2 + \frac{1040}{837}PL \left(\frac{5}{3}L \right) + C_5$$

$$C_5 = -\frac{976PL^2}{837}$$

Condición de continuidad 4:

$$Y_2 = Y_3 \text{ en } x = \frac{5}{3}L$$

Para mayor facilidad podemos ocupar la siguiente condición de frontera en vez de la condición de continuidad anterior:

$$\text{en } x = 2L, Y = 0$$

Sustitimos los valores anteriores en ec. 6

$$EI(0) = -\frac{268}{2511}P(2L)^3 + \frac{520}{837}PL(2L)^2 - \frac{976PL^2}{837}(2L) + C_6$$

$$C_6 = \frac{1760PL^3}{2511}$$

Condición de continuidad 5:

$$\theta_3 = \theta_4 \text{ en } x = 2L$$

$$-\frac{268}{837}P(2L)^2 + \frac{1040}{837}PL(2L) - \frac{976PL^2}{837} = \frac{16}{2511}P(2L)^2 - \frac{160}{2511}PL(2L) + C_7$$

$$C_7 = \frac{352PL^2}{2511}$$

Condición de continuidad 6:

$$Y_3 = Y_4 \text{ en } x = 2L$$

Para mayor facilidad podemos ocupar la siguiente condición de frontera en vez de la condición de continuidad anterior:

$$\text{en } x = 2L, Y = 0$$

$$EI(0) = \frac{16}{7533}P(2L)^3 - \frac{80}{2511}PL(2L)^2 + \frac{352PL^2}{2511}(2L) + C_8$$

$$C_8 = -\frac{1280PL^3}{7533}$$

Ecuaciones definitivas de giro y flecha por tramo de la viga original o real, las cuales se obtienen de sustituir las 8 constantes de integración calculadas en las correspondientes ecuaciones enumeradas:

$$0 \leq x \leq L$$

$$EI\theta_1 = -\frac{1}{31}Px^2 + \frac{PL^2}{93}$$

$$EIY_1 = -\frac{1}{93}Px^3 + \frac{PL^2}{93}x$$

$$L \leq x \leq \frac{5}{3}L$$

$$EI\theta_2 = \frac{301}{1674}Px^2 - \frac{355}{837}PLx + \frac{373PL^2}{1674}$$

$$EIY_2 = \frac{301}{5022}Px^3 - \frac{355}{1674}PLx^2 + \frac{373PL^2}{1674}x - \frac{355PL^3}{5022}$$

$$\frac{5}{3}L \leq x \leq 2L$$

$$EI\theta_3 = -\frac{268}{837}Px^2 + \frac{1040}{837}PLx - \frac{976PL^2}{837}$$

$$EIY_3 = -\frac{268}{2511}Px^3 + \frac{520}{837}PLx^2 - \frac{976PL^2}{837}x + \frac{1760PL^3}{2511}$$

$$2L \leq x \leq 5L$$

$$EI\theta_4 = \frac{16}{2511}Px^2 - \frac{160}{2511}PLx + \frac{352PL^2}{2511}$$

$$EIY_4 = \frac{16}{7533}Px^3 - \frac{80}{2511}PLx^2 + \frac{352PL^2}{2511}x - \frac{1280PL^3}{7533}$$

Cálculo de las Flechas máximas y sus posiciones para cada tramo:

$$0 \leq x \leq L$$

$$0 = -\frac{1}{31}x^2 + \frac{1}{93}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{93}}{\frac{1}{31}}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x_{max_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}L \cong 0.57735L$$

$$EIY_{max_1} = -\frac{1}{93}P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}L\right)^3 + \frac{PL^2}{93}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}L\right)$$

$$Y_{max_1} \cong \frac{0.004138710PL^3}{EI} \text{ (hacia arriba)}$$

$$L \leq x \leq \frac{5}{3}L$$

$$0 = \frac{301}{1674}x^2 - \frac{355}{837}x + \frac{373}{1674}$$

$$x = \frac{-\left(-\frac{355}{837}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{355}{837}\right)^2 - 4\left(\frac{301}{1674}\right)\left(\frac{373}{1674}\right)}}{2\left(\frac{301}{1674}\right)}$$

$$x_1 = 1.56899974L; x_2 = 0.78980424L$$

$$\therefore x_{max_2} = 1.56899974L$$

$$\begin{aligned} EIY_{max_2} &= \frac{301}{5022}P(1.56899974L)^3 - \frac{355}{1674}PL(1.56899974L)^2 \\ &+ \frac{373PL^2}{1674}(1.56899974L) - \frac{355PL^3}{5022} \end{aligned}$$

$$Y_{max_2} \cong -\frac{0.01163900025PL^3}{EI} \text{ (hacia abajo)}$$

$$\frac{5}{3}L \leq x \leq 2L$$

$$0 = -\frac{268}{837}x^2 + \frac{1040}{837}x - \frac{976}{837}$$

$$x = \frac{-\left(\frac{1040}{837}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1040}{837}\right)^2 - 4\left(-\frac{268}{837}\right)\left(-\frac{976}{837}\right)}}{2\left(-\frac{268}{837}\right)}$$

$$x_1 = 1.589631642L; x_2 = 2.290965373L$$

Como ninguna de las dos soluciones anteriores entra dentro del intervalo analizado $\left[\frac{5}{3}L, 2L\right]$, la posición de la flecha máxima está en el extremo donde no hay apoyo.

$$\therefore x_{max_3} = \frac{5}{3}L$$

$$EIY_{max_3} = -\frac{268}{2511}P\left(\frac{5}{3}L\right)^3 + \frac{520}{837}PL\left(\frac{5}{3}L\right)^2 - \frac{976PL^2}{837}\left(\frac{5}{3}L\right) + \frac{1760PL^3}{2511}$$

$$Y_{max_3} \cong -\frac{0.01091494PL^3}{EI} \text{ (hacia abajo)}$$

$$2L \leq x \leq 5L$$

$$0 = \frac{16}{2511}x^2 - \frac{160}{2511}x + \frac{352}{2511}$$

La ecuación anterior es equivalente a:

$$x^2 - 10x + 22 = 0$$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(22)}}{2(1)} = \frac{10 \pm \sqrt{12}}{2}$$

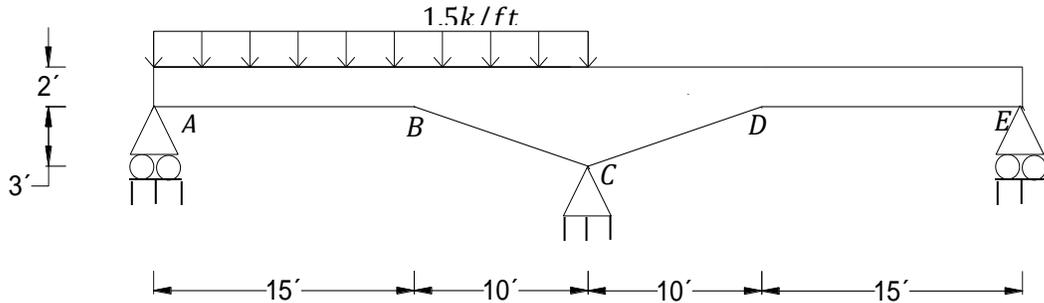
$$x_1 = (5 + \sqrt{3})L; x_2 = (5 - \sqrt{3})L$$

$$\therefore x_{max_4} = (5 - \sqrt{3})L \cong 3.26794919L$$

$$EIY_{max_4} = \frac{16}{7533}P\left((5 - \sqrt{3})L\right)^3 - \frac{80}{2511}PL\left((5 - \sqrt{3})L\right)^2 + \frac{352PL^2}{2511}\left((5 - \sqrt{3})L\right) - \frac{1280PL^3}{7533}$$

$$Y_{max_4} \cong \frac{0.02207312857PL^3}{EI} \text{ (hacia arriba)}$$

3.- Calcular las reacciones de la viga indeterminada de tres apoyos que se ilustra en la figura usando el método de flexibilidades. La sección transversal de la viga es rectangular y tiene 1.5 pies de ancho, su altura varía linealmente a cada lado del apoyo intermedio. $E = 3000k/pulg^2$.



Módulo de elasticidad para toda la viga:

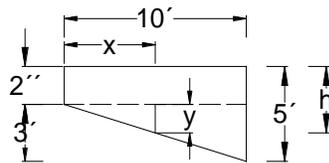
$$E = \left(3000 \frac{k}{pulg^2} \right) \left(\frac{(12pulg)^2}{(ft)^2} \right) = 432000 \frac{k}{ft^2}$$

Para la sección transversal de los tramos A-B y E-D:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(1.5ft)(2ft)^3}{12} = 1ft^4$$

Para la sección transversal de los tramos B-C y C-D:

Deducción de la ecuación con la que la altura varía linealmente.



$$\frac{10'}{3'} = \frac{x}{y}$$

$$y = \frac{3}{10}x$$

$$h = \frac{3}{10}x + 2$$

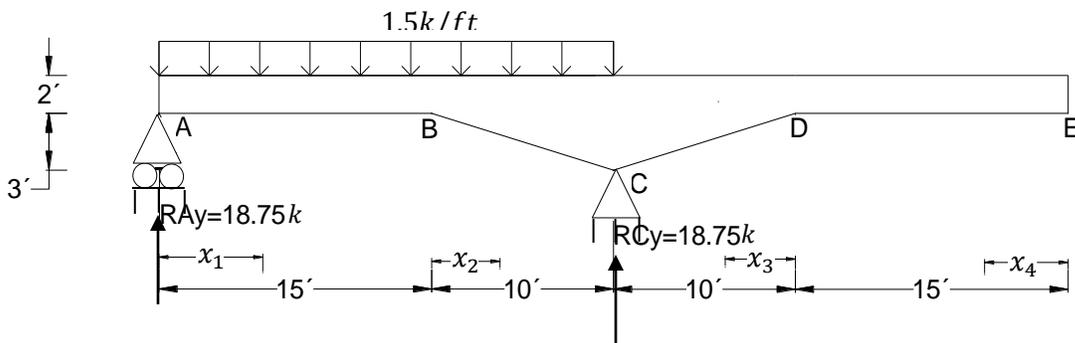
$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(1.5) \left(\frac{3}{10}x + 2\right)^3}{12} = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{10}x + 2\right)^3$$

Cálculo de las reacciones de la estructura real por el método de flexibilidades

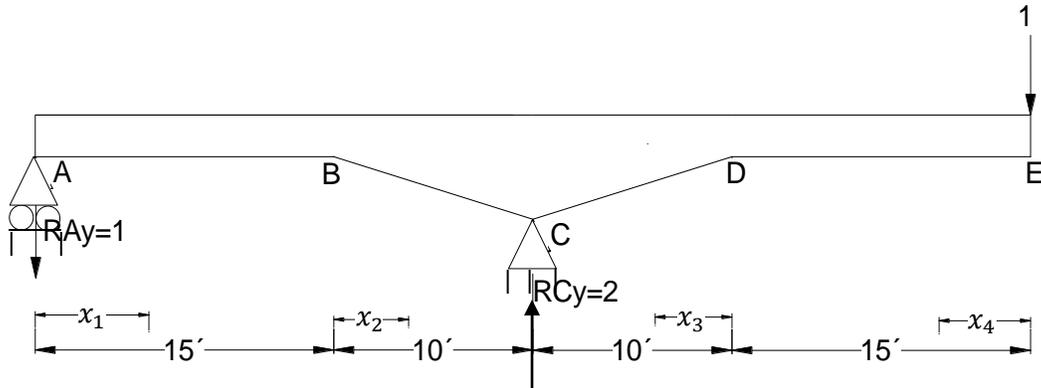
Por método de superposición, la estructura real es igual a la suma de las siguientes vigas:

$$ER = VIF1 + VIF2$$

VIF1 (Estructura M)



VIF2 (Estructura m)



Reacciones de VIF 1

$$\sum MA = 0$$

$$(1.5)(25) \left(\frac{25}{2}\right) - R_{CY}(25) = 0$$

$$R_{CY} = 18.75k \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} - (1.5)(25) + 18.75 = 0$$

$$R_{AY} = 18.75k \uparrow$$

Reacciones de VIF 2

$$\sum MA = 0$$

$$(1)(50) - R_{CY}(25) = 0$$

$$R_{CY} = 2 \uparrow$$

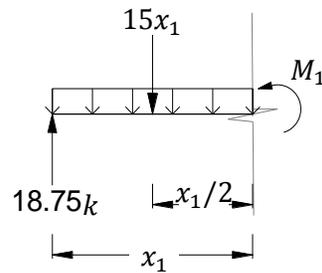
$$\sum FY = 0$$

$$-R_{AY} + 2 - 1 = 0$$

$$R_{AY} = 1 \downarrow$$

Ecuaciones de momento de VIF 1 (Estructura M)

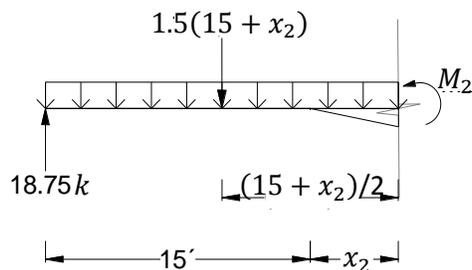
$$0 \leq x_1 \leq 15'$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 18.75x_1 - 1.5(x_1) \left(\frac{x_1}{2} \right) = 18.75x_1 - 0.75x_1^2$$

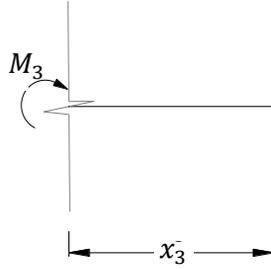
$$0 \leq x_2 \leq 10'$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = 18.75(x_2 + 15) - 1.5(15 + x_2) \left(\frac{15 + x_2}{2} \right) = -0.75x_2^2 - 3.75x_2 + 112.5$$

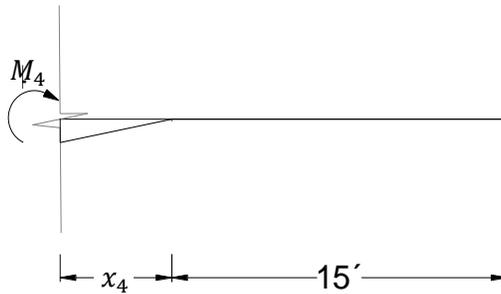
$$0 \leq x_3 \leq 15'$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = 0$$

$$0 \leq x_4 \leq 10'$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_4 = 0$$

Ecuaciones de momento de VIF 2 (Estructura m)

$$0 \leq x_1 \leq 15'$$

$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m_1 = -x_1$$

$$0 \leq x_2 \leq 10'$$

$$\sum mcorte = 0$$

$$m_2 = -1(x_2 + 15) = -15 - x_2$$

$$0 \leq x_3 \leq 15'$$

$$\sum Mcorte = 0$$

$$m_3 + x_3 = 0$$

$$m_3 = -x_3$$

$$0 \leq x_4 \leq 10'$$

$$\sum mcorte = 0$$

$$m_4 + 1(x_4 + 15) = 0$$

$$m_4 = -15 - x_4$$

Sean:

$$d_1 = \delta_{VEM}(\text{Desplazamiento vertical en E de la estructura M})$$

$$f_{11} = \delta_{VEm}(\text{Desplazamiento vertical en E de la estructura m})$$

Entonces:

$$d_1 = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI}$$

$$f_{11} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{mm}{EI}$$

En donde:

$M =$ ecuaciones de momento de la estructura M

$m =$ ecuaciones de momento de la estructura m

$$d_1 = \int_0^{15} \frac{(18.75x_1 - 0.75x_1^2)(-x_1)}{(432000)(1)} dx_1 +$$

$$\int_0^{10} \frac{(-0.75x_2^2 - 3.75x_2 + 112.5)(-15 - x_2)}{(432000) \left[\frac{1}{8} \left(\frac{3}{10}x_2 + 2 \right)^3 \right]} dx_2 +$$

$$\int_0^{15} \frac{(0)(-x_3)}{(432000)(1)} dx_3 +$$

$$\int_0^{10} \frac{(0)(-15 - x_4)}{(432000) \left[\frac{1}{8} \left(\frac{3}{10}x_4 + 2 \right)^3 \right]} dx_4$$

$$= -0.0268555 - 0.010127 = -0.036983$$

$$f_{11} = \int_0^{15} \frac{(-x_1)^2}{(432000)(1)} dx_1 +$$

$$\int_0^{10} \frac{(-15 - x_2)^2}{(432000) \left[\frac{1}{8} \left(\frac{3}{10}x_2 + 2 \right)^3 \right]} dx_2 +$$

$$\int_0^{15} \frac{(-x_3)^2}{(432000)(1)} dx_3 +$$

$$\int_0^{10} \frac{(-15 - x_4)^2}{(432000) \left[\frac{1}{8} \left(\frac{3}{10}x_4 + 2 \right)^3 \right]} dx_4$$

$$= 0.002604 + 0.002107 + 0.02604 + 0.002107 = 0.009423$$

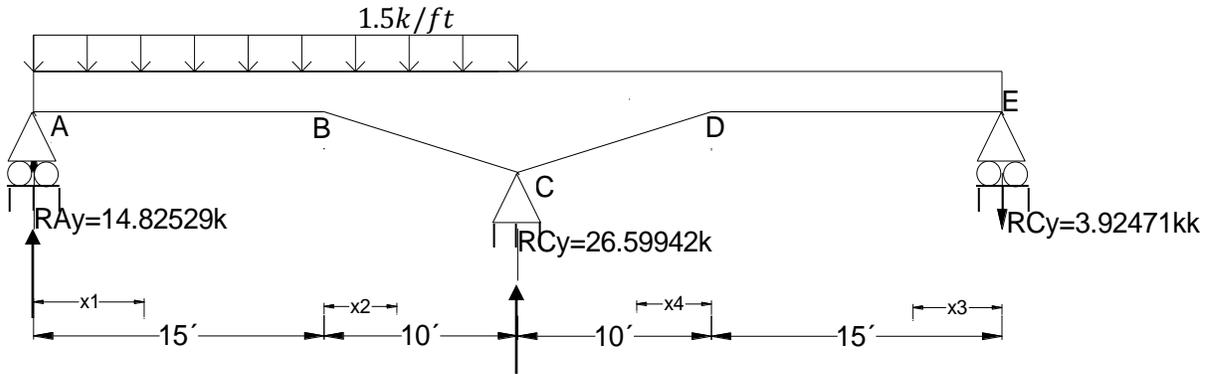
Sistema de ecuaciones de compatibilidad geométrica:

$$d_1 + f_{11}R_{EY} = 0$$

$$-0.036983 + 0.009423R_{EY} = 0$$

$$R_{EY} = \frac{0.036983}{0.009423} = 3.92471k \downarrow$$

Cálculo de las reacciones restantes de la estructura real



$$\sum MA = 0$$

$$(1.5)(25) \left(\frac{25}{2} \right) - R_{CY}(25) + 3.92471(50) = 0$$

$$R_{CY} = 26.59942k \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} - (1.5)(25) + 26.59942 - 3.92471 = 0$$

$$R_{AY} = 14.82529k \uparrow$$

Comprobación:

$$\sum ME = 0$$

$$14.82529(50) - (1.5)(25) \left(\frac{25}{2} + 25 \right) + 26.59942(25) = 0 \quad OK$$

Ecuaciones de momento y cortante de la estructura real:

$$0 \leq x_1 \leq 15'$$

$$\sum Mcorte = 0$$

$$M_1 = 14.82529x_1 - 1.5(x_1) \left(\frac{x_1}{2} \right) = 14.82529x_1 - 0.75x_1^2$$

$$\sum FY = 0$$

$$14.82529 - V_1 - 1.5x_1 = 0$$

$$V_1 = 14.82529 - 1.5x_1$$

$$0 \leq x_2 \leq 10'$$

$$\sum Mcorte = 0$$

$$M_2 = 14.825(x_2 + 15) - 1.5(15 + x_2) \left(\frac{15 + x_2}{2} \right) = -0.75x_2^2 - 7.67471x_2 + 53.625$$

$$\sum FY = 0$$

$$14.82529 - 1.5(15 + x_2) - V_2 = 0$$

$$V_2 = -1.5x_2 - 7.67471$$

$$0 \leq x_3 \leq 15'$$

$$\sum Mcorte = 0$$

$$M_3 + 3.92471x_3 = 0$$

$$M_3 = -3.92471x_3$$

$$\sum FY = 0$$

$$V_3 - 3.92471 = 0$$

$$V_3 = 3.92471$$

$$0 \leq x_4 \leq 10'$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

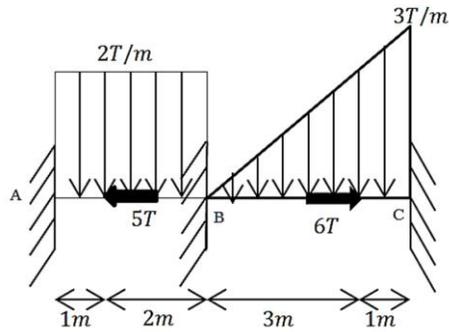
$$M_4 + 3.925(15 + x_4) = 0$$

$$M_4 = -58.875 - 3.92471x_4$$

$$\sum FY = 0$$

$$V_4 = 3.92471$$

4.-Calcular las reacciones de la siguiente viga triplemente empotrada con el método de flexibilidades. Dibuje el diagrama de cortante, normal y momento.



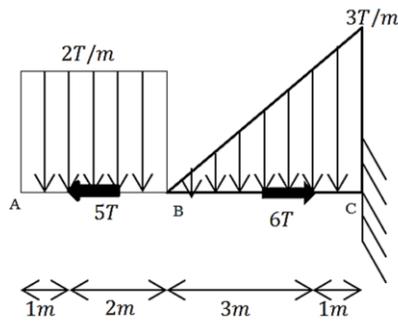
SOLUCIÓN:

Usando el método de superposición:

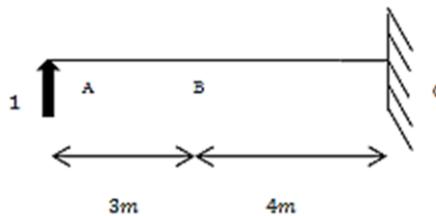
La viga real es igual a la suma de las siguientes vigas:

$$V_R = VIF\ 1 + VIF\ 2 + VIF\ 3 + VIF\ 4 + VIF\ 5 + VIF\ 6 + VIF\ 7$$

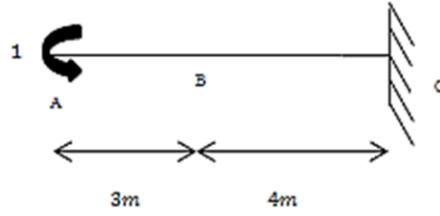
VIF 1



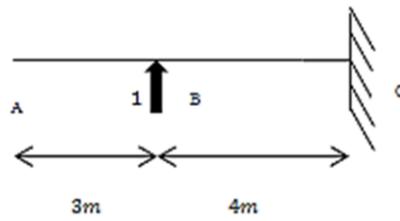
VIF 2



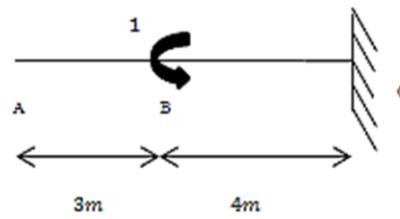
VIF 3



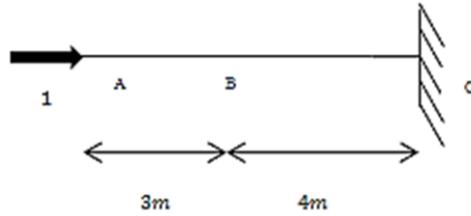
VIF 4



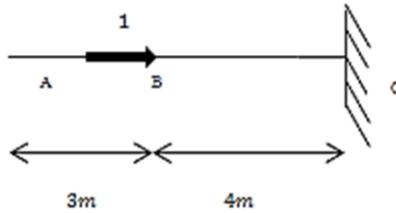
VIF 5



VIF 6



VIF 7

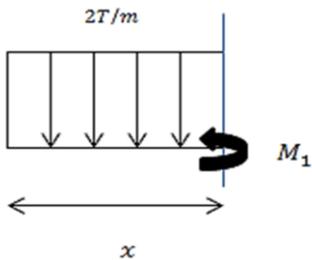


Ecuaciones de momento y normal de las VIF

Haciendo cortes de izquierda a derecha y dado que se optó por dejar el empotre derecho en las VIF, no es necesario calcular las reacciones de cada VIF.

VIF1 (Estructura M y N)

-Ecuaciones de momento (omitimos fuerzas axiales):

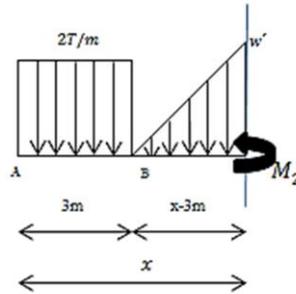


$$0 \leq x \leq 3m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -2(x) \left(\frac{x}{2} \right) = -x^2$$

$$3m \leq x \leq 7m$$



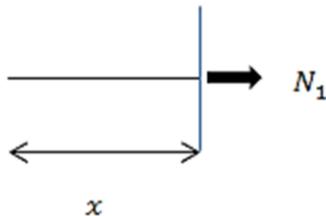
$$\frac{3}{4} = \frac{W'}{x-3} \rightarrow W' = 0.75(x-3)$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = -(3)(2)(x-1.5) - \left[\frac{(x-3)(0.75(x-3))}{2} \right] \left[\frac{1}{3}(x-3) \right]$$

$$M_2 = -0.125x^3 + 1.125x^2 - 9.375x + 12.375$$

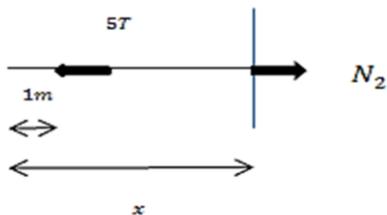
-Ecuaciones de normal (dejamos solo fuerzas axiales)



$$0 \leq x \leq 1m$$

$$\sum FX = 0$$

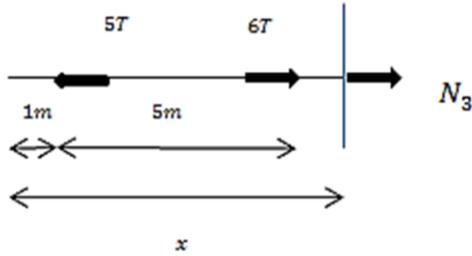
$$N_1 = 0$$



$$1m \leq x \leq 6m$$

$$\sum FX = 0$$

$$N_2 = 5$$

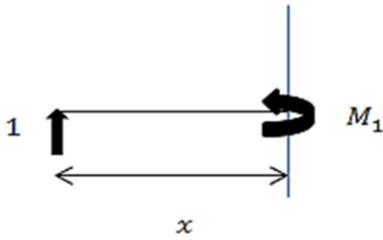


$$6m \leq x \leq 7m$$

$$\sum FX = 0$$

$$N_3 = 5 - 6 = -1$$

VIF2 (Estructura m_1)

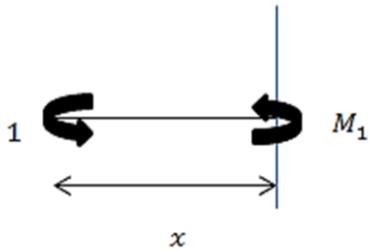


$$0 \leq x \leq 7m$$

$$\sum Mcorte = 0$$

$$M_1 = 1(x) = x$$

VIF3 (Estructura m_2)

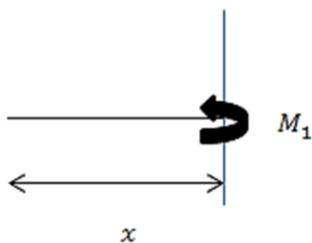


$$0 \leq x \leq 7m$$

$$\sum Mcorte = 0$$

$$M_1 = -1$$

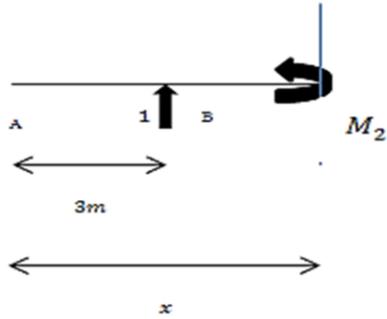
VIF4 (Estructura m_3)



$$0 \leq x \leq 3m$$

$$\sum Mcorte = 0$$

$$M_1 = 0$$

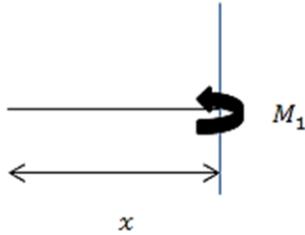


$$3m \leq x \leq 7m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = 1(x - 3) = x - 3$$

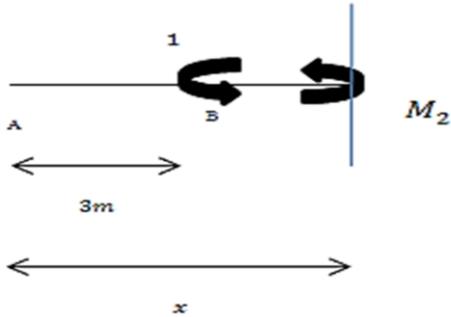
VIF5 (Estructura m₄)



$$0 \leq x \leq 3m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 0$$

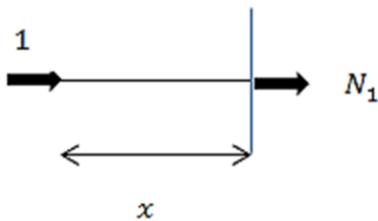


$$3m \leq x \leq 7m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = -1$$

VIF6 (Estructura n₅)

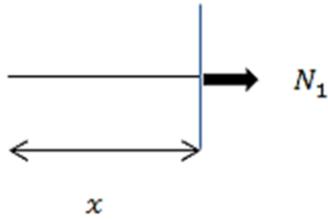


$$0 \leq x \leq 7m$$

$$\sum FX = 0$$

$$N_1 = -1$$

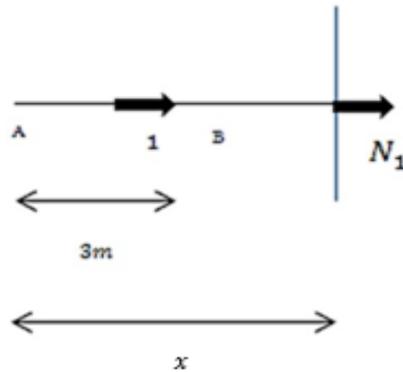
VIF7 (Estructura n₆)



$$0 \leq x \leq 3m$$

$$\sum FX = 0$$

$$N_1 = 0$$



$$3m \leq x \leq 7m$$

$$\sum FX = 0$$

$$N_1 = -1$$

Sean:

-De VIF1:

$$d_1 = \delta_{VA} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} Mm_1 dx$$

$$d_2 = \theta_A = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} Mm_2 dx$$

$$d_3 = \delta_{VB} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} Mm_3 dx$$

$$d_4 = \theta_B = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} Mm_4 dx$$

$$d_5 = \Delta_{HA} = \frac{Nn_5L}{AE}$$

$$d_6 = \Delta_{HB} = \frac{Nn_6L}{AE}$$

-De VIF2:

$$f_{11} = \delta_{VA} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_1 m_1 dx$$

$$f_{21} = \theta_A = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_1 m_2 dx$$

$$f_{31} = \delta_{VB} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_1 m_3 dx$$

$$f_{41} = \theta_B = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_1 m_4 dx$$

-De VIF3:

$$f_{12} = \delta_{VA} = f_{21}$$

$$f_{22} = \theta_A = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_2 m_2 dx$$

$$f_{32} = \delta_{VB} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_2 m_3 dx$$

$$f_{42} = \theta_B = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_2 m_4 dx$$

-De VIF4:

$$f_{13} = \delta_{VA} = f_{31}$$

$$f_{23} = \theta_A = f_{32}$$

$$f_{33} = \delta_{VB} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_3 m_3 dx$$

$$f_{43} = \theta_B = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_3 m_4 dx$$

-De VIF5:

$$f_{14} = \delta_{VA} = f_{41}$$

$$f_{24} = \theta_A = f_{42}$$

$$f_{34} = \delta_{VB} = f_{43}$$

$$f_{44} = \theta_B = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_4 m_4 dx$$

-De VIF6:

$$f_{55} = \Delta_{HA} = \frac{n_5 n_5 L}{AE}$$

$$f_{65} = \Delta_{HB} = \frac{n_5 n_6 L}{AE}$$

-De VIF7:

$$f_{56} = \Delta_{HA} = f_{65}$$

$$f_{66} = \Delta_{HB} = \frac{n_6 n_6 L}{AE}$$

Donde:

$\delta_V =$ Desplazamiento vertical

$\theta =$ Giro o rotación

$\Delta_H =$ Desplazamiento horizontal

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^3 (-x^2)(x) dx + \int_3^7 (-0.125x^3 + 1.125x^2 - 9.375x + 12.375)(x) dx \right]$$

$$= -\frac{521.85}{EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^3 (-x^2)(-1) dx + \int_3^7 (-0.125x^3 + 1.125x^2 - 9.375x + 12.375)(-1) dx \right]$$

$$= \frac{101}{EI}$$

$$d_3 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^3 (-x^2)(0) dx + \int_3^7 (-0.125x^3 + 1.125x^2 - 9.375x + 12.375)(x - 3) dx \right]$$

$$= -\frac{225.6}{EI}$$

$$d_4 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^3 (-x^2)(0)dx + \int_3^7 (-0.125x^3 + 1.125x^2 - 9.375x + 12.375)(-1) dx \right]$$

$$= \frac{92}{EI}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^7 (x)(x)dx = \frac{114.333}{EI}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^7 (x)(-1)dx = -\frac{24.5}{EI}$$

$$f_{31} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^3 (x)(0)dx + \int_3^7 (x)(x-3)dx \right] = \frac{45.3333}{EI}$$

$$f_{41} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^3 (x)(0)dx + \int_3^7 (x)(-1)dx \right] = -\frac{20}{EI}$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{24.5}{EI}$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^7 (-1)(-1)dx = \frac{7}{EI}$$

$$f_{32} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^3 (-1)(0)dx + \int_3^7 (-1)(x-3)dx \right] = -\frac{8}{EI}$$

$$f_{42} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^3 (-1)(0)dx + \int_3^7 (-1)(-1)dx \right] = \frac{4}{EI}$$

$$f_{13} = f_{31} = \frac{45.3333}{EI}$$

$$f_{23} = f_{32} = -\frac{8}{EI}$$

$$f_{33} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^3 (0)(0)dx + \int_3^7 (x-3)(x-3)dx \right] = \frac{64}{3EI}$$

$$f_{43} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^3 (0)(0)dx + \int_3^7 (x-3)(-1)dx \right] = -\frac{8}{EI}$$

$$f_{14} = f_{41} = -\frac{20}{EI}$$

$$f_{24} = f_{42} = \frac{4}{EI}$$

$$f_{34} = f_{43} = -\frac{8}{EI}$$

$$f_{44} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^3 (0)(0)dx + \int_3^7 (-1)(-1)dx \right] = \frac{4}{EI}$$

$$d_5 = \frac{(0)(-1)(1)}{AE} + \frac{(5)(-1)(5)}{AE} + \frac{(-1)(-1)(1)}{AE} = -\frac{24}{AE}$$

$$d_6 = \frac{(0)(0)(1)}{AE} + \frac{(5)(0)(2)}{AE} + \frac{(5)(-1)(3)}{AE} + \frac{(-1)(-1)(1)}{AE} = -\frac{14}{AE}$$

$$f_{55} = \frac{(-1)(-1)(7)}{AE} = \frac{7}{AE}$$

$$f_{65} = \frac{(-1)(0)(3)}{AE} + \frac{(-1)(-1)(4)}{AE} = \frac{4}{AE}$$

$$f_{56} = f_{65} = \frac{4}{AE}$$

$$f_{66} = \frac{(0)(0)(3)}{AE} + \frac{(-1)(-1)(4)}{AE} = \frac{4}{AE}$$

Planteamiento del sistema de ecuaciones de flexibilidades:

$$\frac{-521.85}{EI} + \frac{114.333}{EI} R_{AY} - \frac{24.5}{EI} M_A + \frac{45.333}{EI} R_{BY} - \frac{20}{EI} M_B = 0$$

$$\frac{101}{EI} - \frac{24.5}{EI} R_{AY} + \frac{7}{EI} M_A - \frac{8}{EI} R_{BY} + \frac{4}{EI} M_B = 0$$

$$\frac{-225.6}{EI} + \frac{45.333}{EI} R_{AY} - \frac{8}{EI} M_A + \frac{64}{3EI} R_{BY} - \frac{8}{EI} M_B = 0$$

$$\frac{92}{EI} - \frac{20}{EI} R_{AY} + \frac{4}{EI} M_A - \frac{8}{EI} R_{BY} + \frac{4}{EI} M_B = 0$$

$$\frac{-24}{AE} + \frac{7}{AE} R_{AX} + \frac{4}{AE} R_{BX} = 0$$

$$\frac{-14}{AE} + \frac{4}{AE} R_{AX} + \frac{4}{AE} R_{BX} = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$(R_{AY}, M_A, R_{BY}, M_B, R_{AX}, R_{BX}) = (3.00047T, 1.50071T \cdot m, 4.79955T, 0.100744T \cdot m, 3.33333T, 1.66667T)$$

Los signos indican que:

$$R_{AY} = 3.00047T \quad \uparrow$$

$$M_A = 1.50071T \cdot m \quad \curvearrowright$$

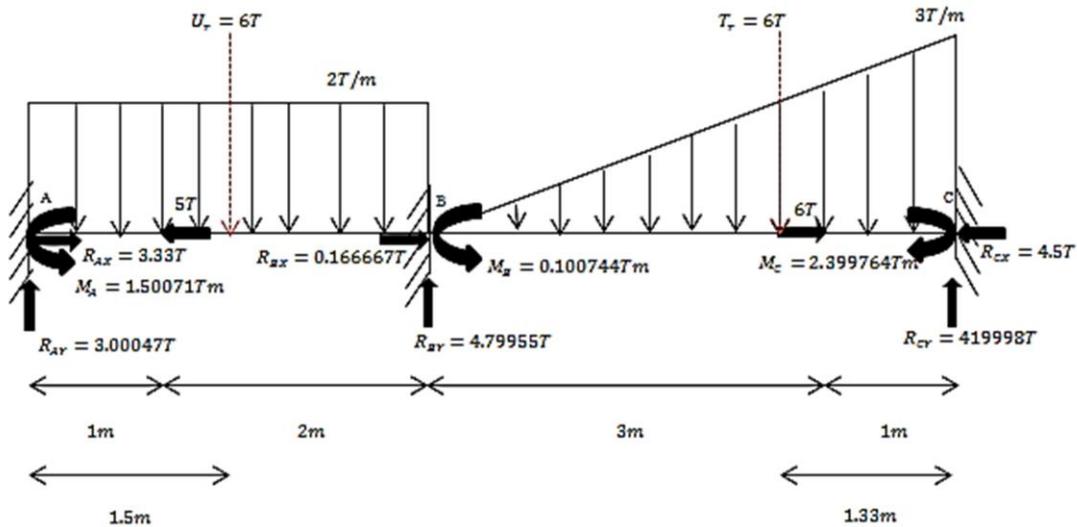
$$R_{BY} = 4.79955T \quad \uparrow$$

$$M_B = 0.100744T \cdot m \quad \curvearrowright$$

$$R_{AX} = 3.33333T \quad \rightarrow$$

$$R_{BX} = 0.166667T \quad \rightarrow$$

Cálculo de las reacciones faltantes en la viga original:



-Para la presión uniformemente repartida:

$$U_R = (2T/m)(3m) = 6T; \bar{x} = 1.5m \text{ a la derecha de A}$$

-Para la presión triangular:

$$T_R = \frac{(3T/m)(4m)}{2} = 6T; \bar{x} = \frac{1}{3}(4m) = 1.3333m \text{ a la izquierda de C}$$

$$\sum FX = 0$$

$$3.33333T - 5T + 0.166667T - R_{CX} = 0$$

$$R_{CX} = 4.5T \leftarrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$3.00047T - 6T + 4.79955T - 6T + R_{CY} = 0$$

$$R_{CY} = 4.19998T \uparrow$$

$$\sum MA = 0$$

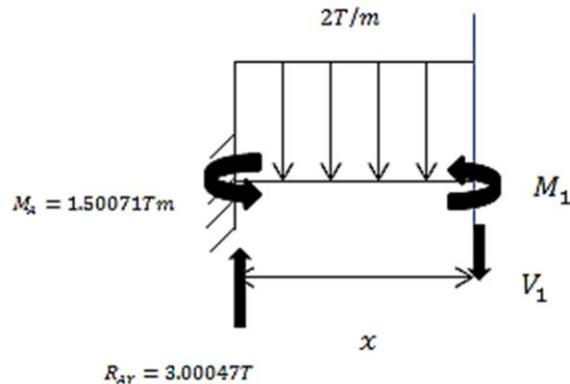
$$-1.50071 + 6(1.5) - 4.79955(3) - 0.100744 + 6(7 - 1.3333) - 4.19998(7) + M_C = 0$$

$$M_C = 2.399764T.m \curvearrowright$$

Para la estructura real u original:

-Ecuaciones de cortante y momento (despreciamos fuerzas axiales):

$$0 \leq x \leq 3m$$



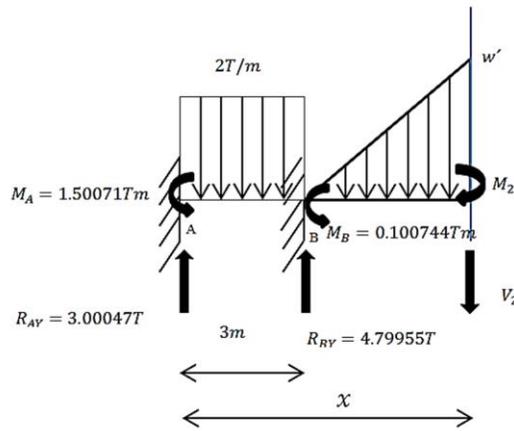
$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 3.00047x - 2(x)\left(\frac{x}{2}\right) - 1.50071 = 3.00047x - x^2 - 1.50071$$

$$x = 3, M_1 = -1.4993$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx} = 3.00047 - 2x$$

$$3m \leq x \leq 7m$$



$$\frac{3}{4} = \frac{W'}{x-3} \rightarrow W' = 0.75(x-3)$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = 3.00047x - 1.50071 - (3)(2)(x-1.5) - 0.100744 + 4.79955(x-3) - \left[\frac{(x-3)(0.75(x-3))}{2} \right] \left[\frac{1}{3}(x-3) \right]$$

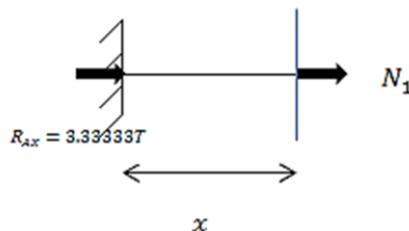
$$M_2 = -0.125x^3 + 1.125x^2 - 1.57498x - 3.6251$$

$$x = 3, M_2 = -1.60004$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx} = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{9}{4}x - 1.57498$$

Ecuaciones de normal (dejamos solo fuerzas axiales):

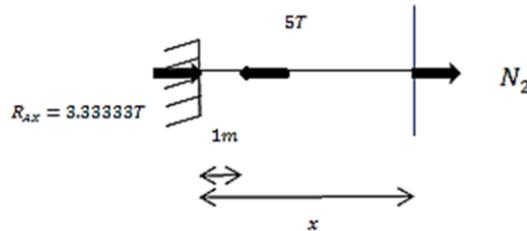
$$0 \leq x \leq 1m$$



$$\sum FX = 0$$

$$N_1 = -3.33333$$

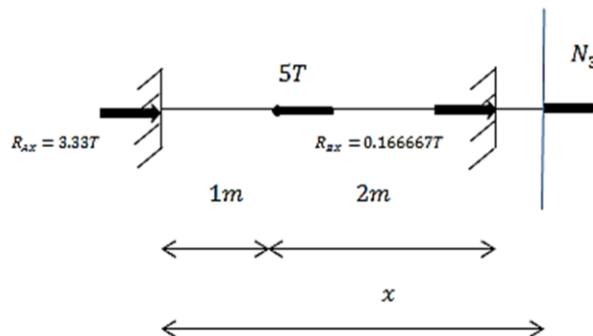
$$1m \leq x \leq 3m$$



$$\sum FX = 0$$

$$N_2 = 1.66667$$

$$3m \leq x \leq 6m$$

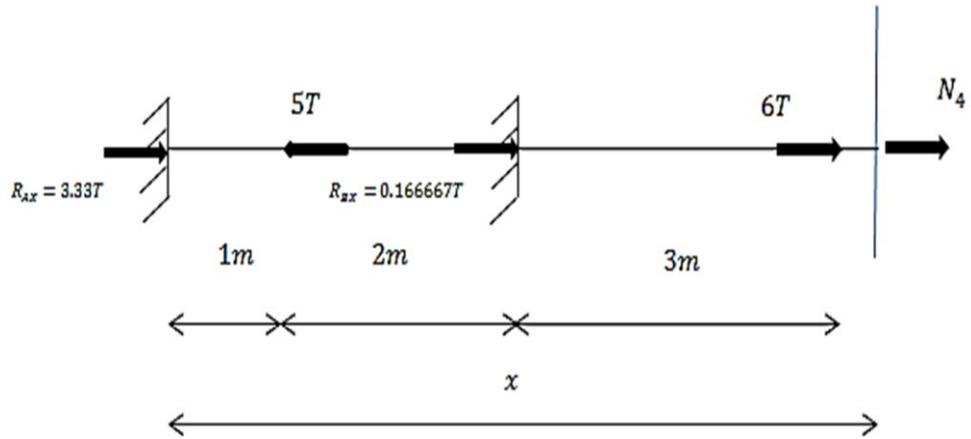


$$\sum FX = 0$$

$$3.33333 - 5 + 0.166667 + N_3 = 0$$

$$N_3 = 1.5$$

$$6m \leq x \leq 7m$$



$$\sum FX = 0$$

$$N_4 = -4.5$$

DIAGRAMA DE CORTANTE:

x(m)	V(Ton)
0	3.00047
0.5	2.00047
1	1.00047
1.5	0.00047
2	-0.99953
2.5	-1.99953
3	-2.99953
3	1.80002
3.5	1.70627
4	1.42502
4.5	0.95627
5	0.30002
5.5	-0.54373
6	-1.57498
6.5	-2.79373
7	-4.19998

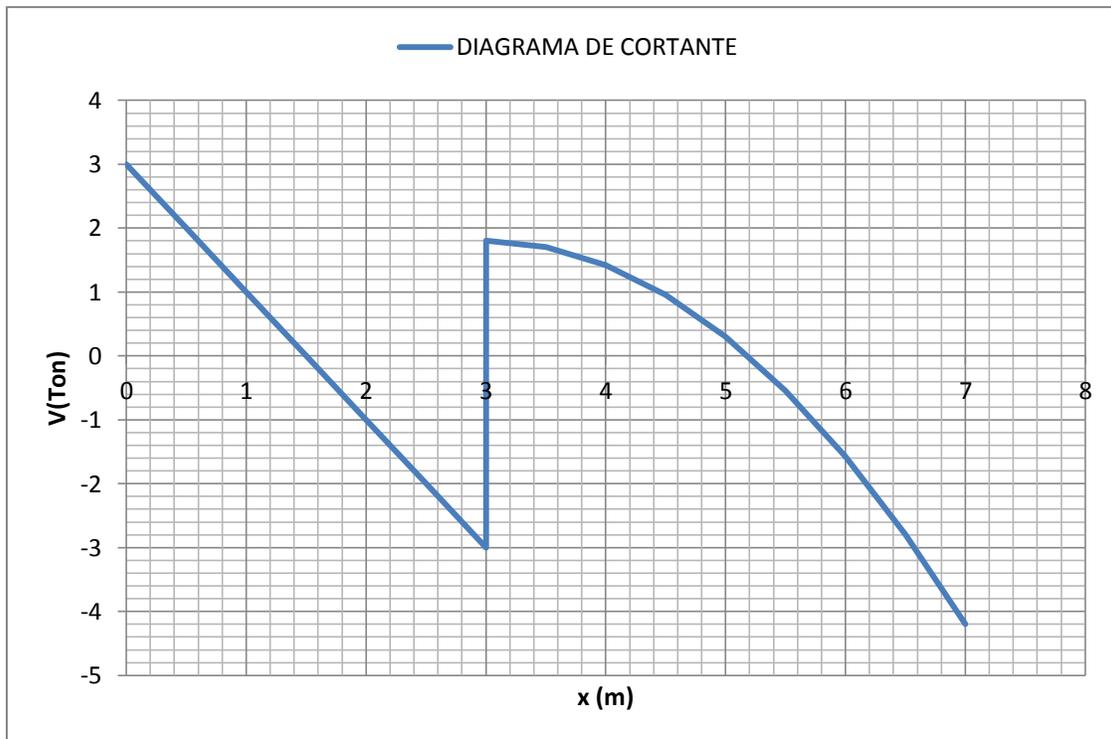


DIAGRAMA DE MOMENTO:

x (m)	M (Ton.m)
0	-1.50071
0.5	-0.250475
1	0.49976
1.5	0.749995
2	0.50023
2.5	-0.249535
3	-1.4993
3	-1.60004
3.5	-0.715655
4	0.07498
4.5	0.678115
5	1
5.5	0.946885
6	0.42502
6.5	-0.659345
7	-2.39996

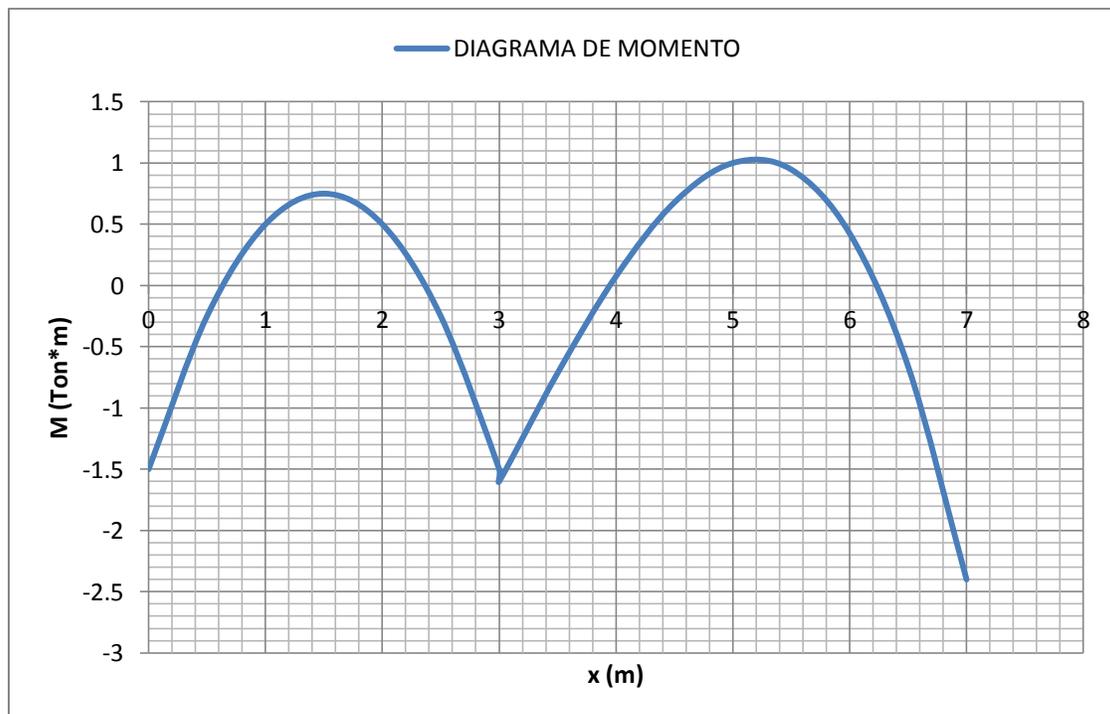
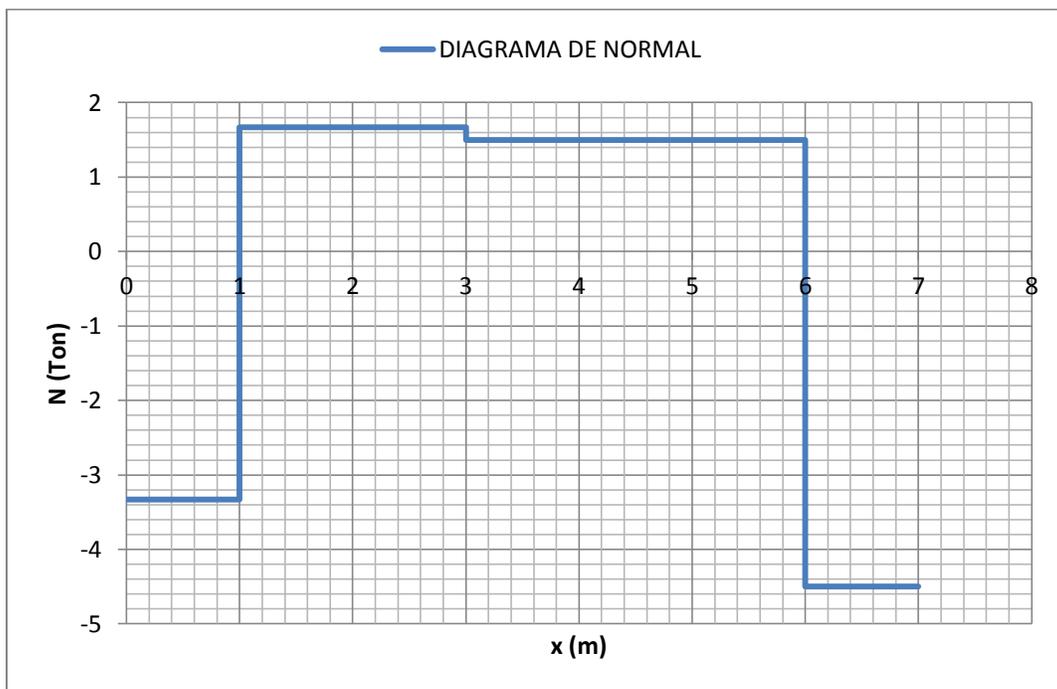
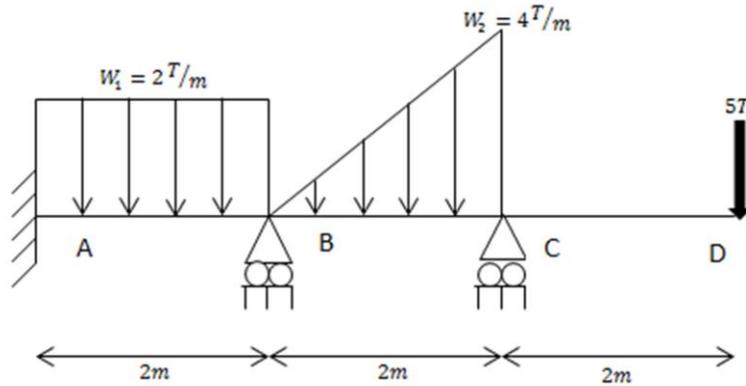


DIAGRAMA DE NORMAL:

x(m)	N(Ton)
0	-3.33333
0.5	-3.33333
1	-3.33333
1	1.66667
1.5	1.66667
2	1.66667
2.5	1.66667
3	1.66667
3	1.5
3.5	1.5
4	1.5
4.5	1.5
5	1.5
5.5	1.5
6	1.5
6	-4.5
6.5	-4.5
7	-4.5



5.- Calcular las reacciones en los soportes de la viga que se muestra con el método de flexibilidades. Dibujar el diagrama de momento, cortante, giro y flecha.



Datos:

-E (Maderas duras)= $2.1 \cdot 10^6 T/m^2$

-Sección transversal cuadrada de 40cm por lado

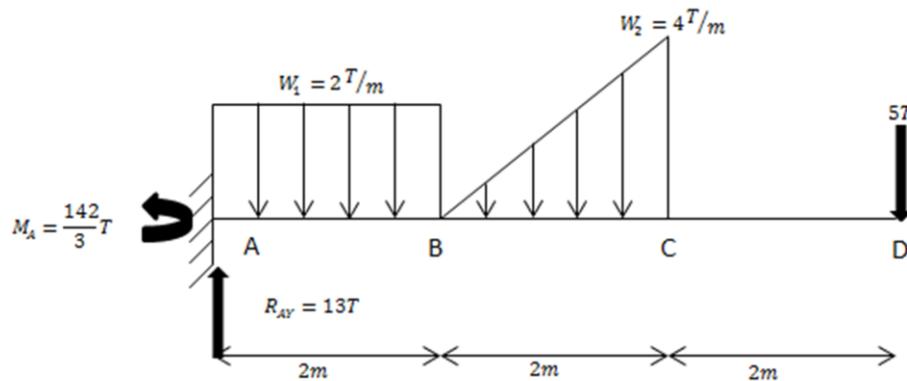
SOLUCIÓN:

El grado de indeterminación es de 2, nótese que $R_{AX} = 0$ porque no hay cargas en la dirección X.

Usando el método de superposición:

$$VR = VIF\ 1 + VIF\ 2 + VIF\ 3$$

VIF 1



Calculo de las reacciones de VIF 1:

$$\sum MA = 0$$

$$-M_A + (2)(2) \left(\frac{1}{2}(2) \right) + \left[\frac{(4)(2)}{2} \right] \left(2 + \frac{2}{3}(2) \right) + 5(6) = 0$$

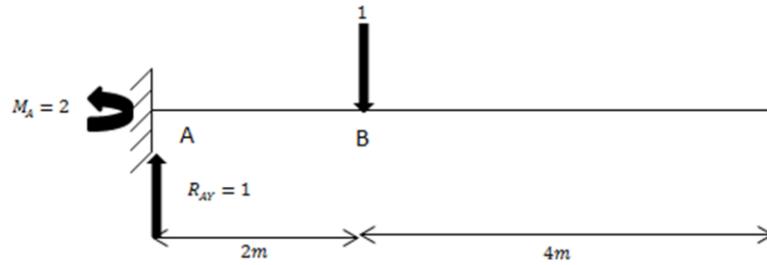
$$M_A = \frac{142}{3} T.m \quad \curvearrowleft$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} - (2)(2) - \frac{(4)(2)}{2} - 5 = 0$$

$$R_{AY} = 13T \quad \uparrow$$

VIF 2



$$\sum MA = 0$$

$$-M_A + 1(2) = 0$$

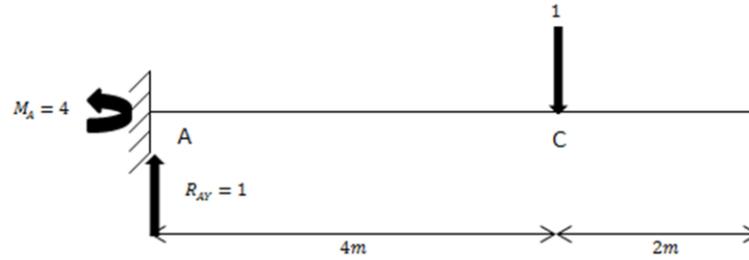
$$M_A = 2 \quad \curvearrowleft$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} - 1 = 0$$

$$R_{AY} = 1 \quad \uparrow$$

VIF 3



Calculo de las reacciones de VIF 3:

$$\sum MA = 0$$

$$-M_A + 1(4) = 0$$

$$M_A = 4 \quad \curvearrowleft$$

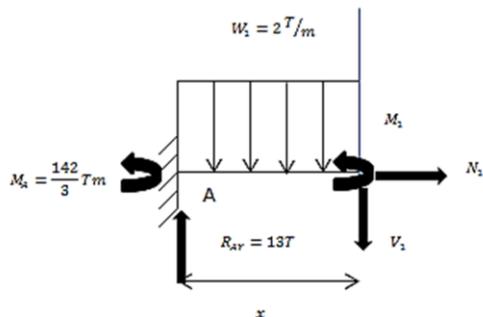
$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} - 1 = 0$$

$$R_{AY} = 1 \quad \uparrow$$

Ecuaciones de momento de las VIF:

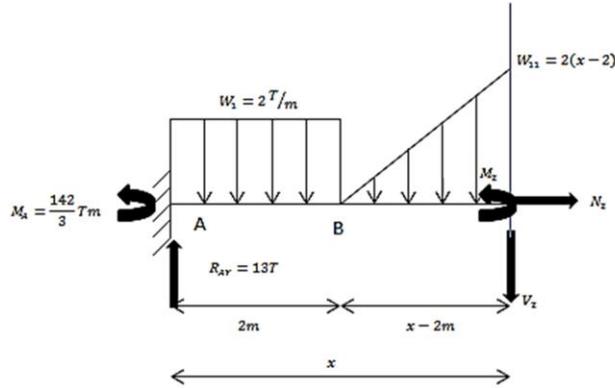
VIF 1(Estructura M)



$$0 \leq x \leq 2m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -\frac{142}{3} + 13x - x^2$$



$$2m \leq x \leq 4m$$

$$\frac{4}{2} = \frac{W_{11}}{x-2}$$

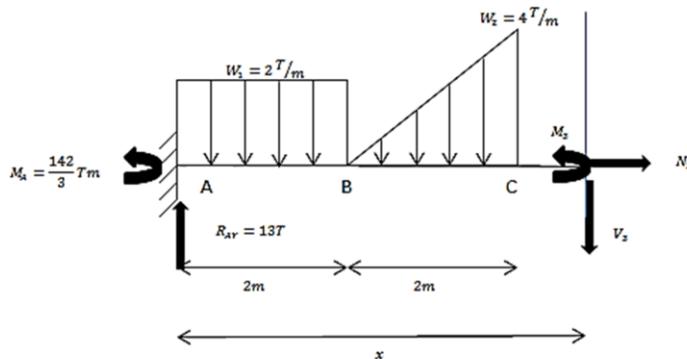
$$W_{11} = 2(x-2)$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = -\frac{142}{3} + 13x - (2)(2)(x-1) - \left[\frac{(x-2)(2(x-2))}{2} \right] \left(\frac{1}{3}(x-2) \right)$$

$$M_2 = -\frac{142}{3} + 13x - 4x + 4 - \frac{1}{3}(x-2)^3$$

$$M_2 = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - \frac{122}{3}$$



$$4m \leq x \leq 6m$$

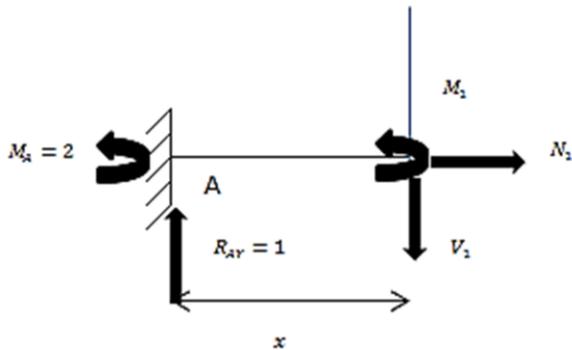
$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = -\frac{142}{3} + 13x - (2)(2)(x-1) - \left[\frac{(4)(2)}{2} \right] \left(x - \left(2 + \frac{2}{3}(2) \right) \right)$$

$$M_3 = -\frac{142}{3} + 13x - 4x + 4 - 4x + \frac{40}{3}$$

$$M_3 = 5x - 30$$

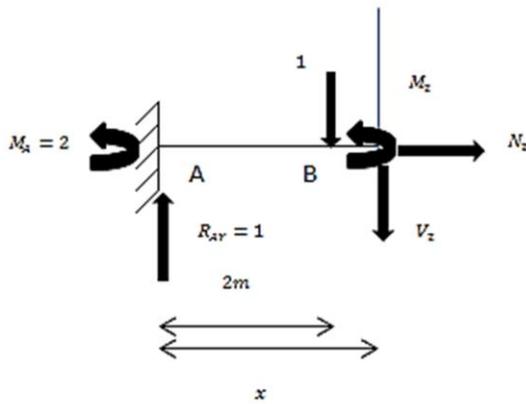
VIF 2 (Estructura m_1)



$$0 \leq x \leq 2m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -2 + x$$



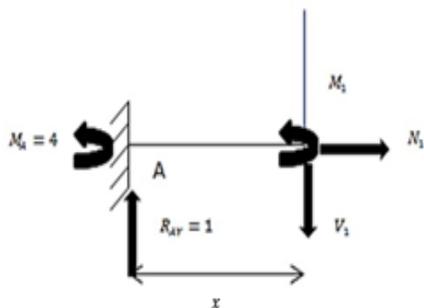
$$2m \leq x \leq 6m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = -2 + x - 1(x - 2)$$

$$M_2 = 0$$

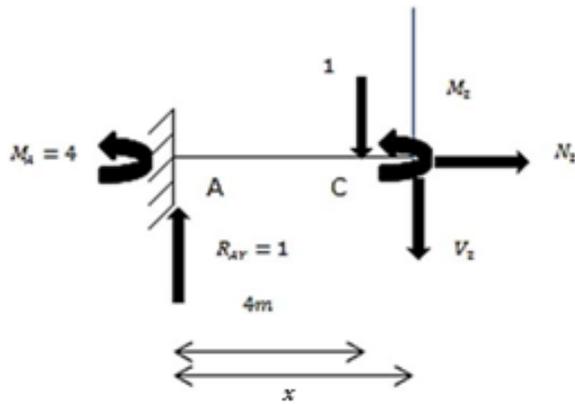
VIF 3 (Estructura m_2)



$$0 \leq x \leq 4m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -4 + x$$



$$4m \leq x \leq 6m$$

$$\sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$M_2 = -4 + x - 1(x - 4)$$

$$M_2 = 0$$

Sean:

$$d_1 = \delta_V \text{ en B de VIF 1}$$

$$d_2 = \delta_V \text{ en C de VIF 1}$$

$$f_{11} = \delta_V \text{ en B de VIF 2}$$

$$f_{21} = \delta_V \text{ en C de VIF 2}$$

$$f_{12} = \delta_V \text{ en B de VIF 3}$$

$$f_{22} = \delta_V \text{ en C de VIF 3}$$

Donde:

$\delta_V = \text{desplazamiento vertical}$

$$d_1 = \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(-\frac{142}{3} + 13x - x^2 \right) (-2 + x) dx + \frac{1}{EI} \int_2^4 \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - \frac{122}{3} \right) (0) dx$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_4^6 (5x - 30)(0) dx$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^2 \left(-\frac{142}{3} + 13x - x^2 \right) (-2 + x) dx = \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(-x^3 + 15x^2 - \frac{220}{3}x + \frac{284}{3} \right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left[-\frac{x^4}{4} + 5x^3 - \frac{110}{3}x^2 + \frac{284}{3}x \right]_0^2 = \frac{1}{EI} \left(\frac{236}{3} \right)$$

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[\frac{236}{3} + 0 + 0 \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{236}{3} \right]$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(-\frac{142}{3} + 13x - x^2 \right) (-4 + x) dx + \frac{1}{EI} \int_2^4 \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - \frac{122}{3} \right) (-4 + x) dx \\ + \frac{1}{EI} \int_4^6 (5x - 30)(0) dx$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^2 \left(-\frac{142}{3} + 13x - x^2 \right) (-4 + x) dx = \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(-x^3 + 17x^2 - \frac{298}{3}x + \frac{568}{3} \right) dx \\ = \frac{1}{EI} \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{17}{3}x^3 - \frac{149}{3}x^2 + \frac{568}{3}x \right]_0^2 = \frac{1}{EI} \left(\frac{664}{3} \right)$$

$$\frac{1}{EI} \int_2^4 \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - \frac{122}{3} \right) (-4 + x) dx = \frac{1}{EI} \int_2^4 \left(-\frac{x^4}{3} + \frac{10}{3}x^3 - 3x^2 - \frac{182}{3}x + \frac{448}{3} \right) dx \\ = \frac{1}{EI} \left[-\frac{x^5}{15} + \frac{5x^4}{6} - x^3 - \frac{91}{3}x^2 + \frac{488}{3}x \right]_2^4 = \frac{1}{EI} \left(\frac{196}{5} \right)$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \left[\frac{664}{3} + \frac{196}{5} + 0 \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{3908}{15} \right]$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^2 (-2 + x)^2 dx + \frac{1}{EI} \int_2^6 (0)^2 dx$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^2 (-2 + x)^2 dx = \frac{1}{EI} \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_0^2 = \frac{1}{EI} \left[\frac{8}{3} \right]$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{8}{3} + 0 \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{8}{3} \right]$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^2 (-2 + x)(-4 + x) dx + \frac{1}{EI} \int_2^4 (0)(-4 + x) dx + \frac{1}{EI} \int_4^6 (0)(0) dx$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^2 (-2 + x)(-4 + x) dx = \frac{1}{EI} \int_0^2 (x^2 - 6x + 8) dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_0^2 = \frac{1}{EI} \left[\frac{20}{3} \right]$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \left[\frac{20}{3} + 0 + 0 \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{20}{3} \right]$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{1}{EI} \left[\frac{20}{3} \right]$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^4 (-4 + x)^2 dx + \frac{1}{EI} \int_4^6 (0)^2 dx$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^4 (-4 + x)^2 dx = \frac{1}{EI} \int_0^4 (x^2 - 8x + 16) dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x \right]_0^4 = \frac{1}{EI} \left[\frac{64}{3} \right]$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \left[\frac{64}{3} + 0 \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{64}{3} \right]$$

Planteamiento matricial del método de flexibilidades:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

Despejando las incógnitas:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} -d_1 \\ -d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix}$$

Sustituyendo y simplificando:

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{20}{3} \\ \frac{20}{3} & \frac{64}{3} \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} -\frac{236}{3} \\ -\frac{3908}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix}$$

$$\text{inversa} \left[\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{20}{3} \\ \frac{20}{3} & \frac{64}{3} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{12}{7} & -\frac{15}{28} \\ -\frac{15}{28} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{8}{3} & \frac{20}{3} & 1 & 0 \\ \frac{20}{3} & \frac{64}{3} & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{20}{3} & \frac{64}{3} & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{matrix} (3/8)R_1 & -(20/3)R_1 + R_2 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{15}{28} & \frac{3}{14} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{12}{7} & -\frac{15}{28} \\ 0 & 1 & -\frac{15}{28} & \frac{3}{14} \end{array} \right)$$

$$\begin{matrix} (3/14)R_2 & -(5/2)R_2 + R_1 \end{matrix}$$

En consecuencia:

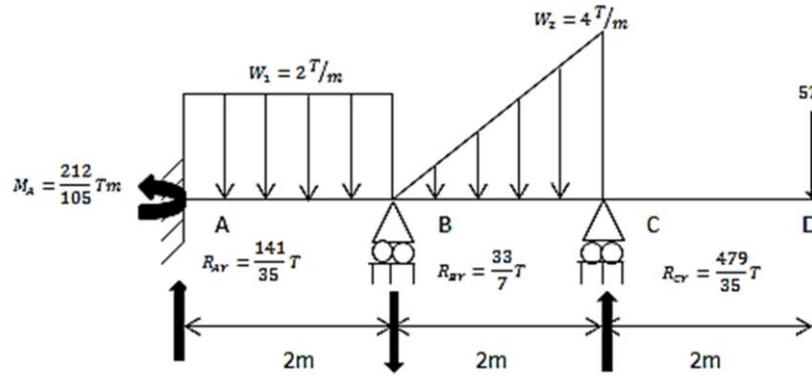
$$\begin{pmatrix} \frac{12}{7} & -\frac{15}{28} \\ -\frac{15}{28} & \frac{3}{14} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -\frac{236}{3} \\ -\frac{3908}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33/7 \\ -479/35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix}$$

Los signos indican que:

$$R_{BY} = 33/7 T = 4.7143T \quad \downarrow$$

$$R_{CY} = 479/35 T = 13.6857T \quad \uparrow$$

Calculo de las reacciones faltantes de la viga original o real:



$$\sum F_Y = 0$$

$$R_{AY} - 4 - 4 - 5 - \frac{33}{7} + \frac{479}{35} = 0$$

$$R_{AY} = \frac{141}{35} T = 4.0286T \quad \uparrow$$

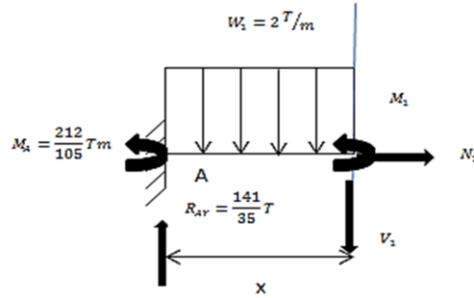
$$\sum M_A = 0$$

$$-M_A + (4)(1) + (4)\left(\frac{10}{3}\right) + 5(6) + \left(\frac{33}{7}\right)(2) - \left(\frac{479}{35}\right)(4) = 0$$

$$M_A = \frac{212}{105} T.m = 2.019 T.m \quad \curvearrowright$$

Ecuaciones de momento y cortante de la estructura real:

$$0 \leq x \leq 2m$$



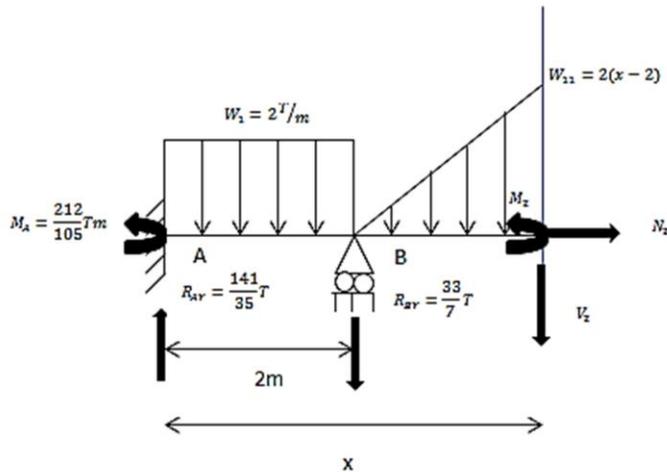
$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -\frac{212}{105} + \frac{141}{35}x - x^2$$

$$x = 2, M_1 = \frac{214}{105}$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx} = -2x + \frac{141}{35}$$

$$2m \leq x \leq 4m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = -\frac{212}{105} + \frac{141}{35}x - \left(\frac{33}{7}\right)(x-2) - 4(x-1) - \left[\frac{(x-2)(2(x-2))}{2}\right] \left(\frac{1}{3}(x-2)\right)$$

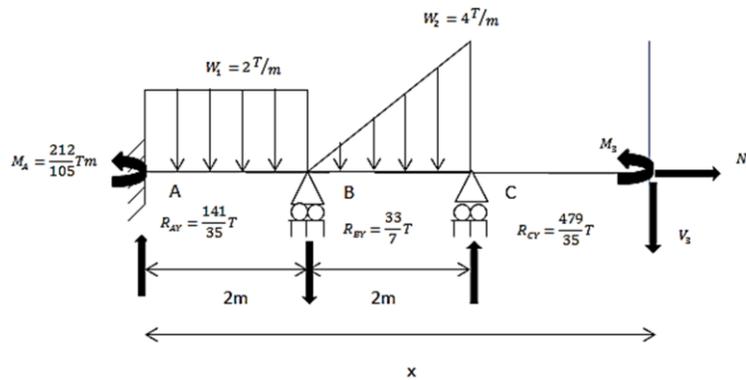
$$M_2 = -\frac{1}{3}(x-2)^3 - \frac{164}{35}x + \frac{1198}{105}$$

$$M_2 = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{304}{35}x + \frac{1478}{105}$$

$$x = 2, M_2 = \frac{214}{105}; x = 4, M_2 = -10$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx} = -x^2 + 4x - \frac{304}{35}$$

$$4m \leq x \leq 6m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = -\frac{212}{105} + \frac{141}{35}x - \left(\frac{33}{7}\right)(x-2) + \left(\frac{479}{35}\right)(x-4) - 4(x-1) - 4\left(x - \frac{10}{3}\right)$$

$$M_3 = 5x - 30$$

$$x = 4, M_3 = -10$$

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx} = 5$$

Calculo de la deflexión y rotación a lo largo de la viga:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$$0 \leq x \leq 2m$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{212}{105} + \frac{141}{35}x - x^2$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int \left(-\frac{212}{105} + \frac{141}{35}x - x^2 \right) dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{141}{70}x^2 - \frac{212}{105}x + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta$$

$$EI\theta_1 = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{141}{70}x^2 - \frac{212}{105}x + C_1 \text{ -----ec. 1}$$

$$EI \int dy = \int \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{141}{70}x^2 - \frac{212}{105}x + C_1 \right) dx$$

$$EIy_1 = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{47}{70}x^3 - \frac{106}{105}x^2 + C_1x + C_2 \text{-----ec. 2}$$

$$2m \leq x \leq 4m$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{304}{35}x + \frac{1478}{105}$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{304}{35}x + \frac{1478}{105} \right) dx$$

$$EI\theta_2 = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{152}{35}x^2 + \frac{1478}{105}x + C_3 \text{ -----ec. 3}$$

$$EI \int dy = \int \left(-\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{152}{35}x^2 + \frac{1478}{105}x + C_3 \right) dx$$

$$EIy_2 = -\frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{152}{105}x^3 + \frac{739}{105}x^2 + C_3x + C_4 \text{-----ec. 4}$$

$$4m \leq x \leq 6m$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = 5x - 30$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int (5x - 30) dx$$

$$EI\theta_3 = \frac{5}{2}x^2 - 30x + C_5 \text{ -----ec. 5}$$

$$EI \int dy = \int \left(\frac{5}{2}x^2 - 30x + C_5 \right) dx$$

$$EIy_3 = \frac{5}{6}x^3 - 15x^2 + C_5x + C_6 \text{-----ec. 6}$$

Determinación de las constantes de integración:

Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales enumerado anteriormente

Debido al empotre (no hay grados de libertad) establecemos las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{en } x = 0, y = 0, \theta = 0$$

Sustituyendo en 1 y 2 respectivamente:

$$EI(0) = -\frac{1}{3} * 0^3 + \frac{141}{70} * 0^2 - \frac{212}{105} * 0 + C_1$$

$$C_1 = 0$$

$$EI(0) = -\frac{1}{12} * 0^4 + \frac{47}{70} * 0^3 - \frac{106}{105} * 0^2 + (0)(0) + C_2$$

$$C_2 = 0$$

Condición de continuidad 1:

$$\theta_1 = \theta_2 \text{ en } x = 2m$$

$$-\frac{1}{3} * 2^3 + \frac{141}{70} * 2^2 - \frac{212}{105} * 2 = -\frac{1}{12} * 2^4 + \frac{2}{3} * 2^3 - \frac{152}{35} * 2^2 + \frac{1478}{105} * 2 + C_3$$

$$\frac{142}{105} = \frac{1552}{105} + C_3 \rightarrow C_3 = -\frac{94}{7}$$

Condición de continuidad 2:

$$y_1 = y_2 \text{ en } x = 2m$$

$$-\frac{1}{12} * 2^4 + \frac{47}{70} * 2^3 - \frac{106}{105} * 2^2 = -\frac{1}{60} * 2^5 + \frac{1}{6} * 2^4 - \frac{152}{105} * 2^3 + \frac{739}{105} * 2^2 - \frac{94}{7}(2) + C_4$$

$$0 = -\frac{806}{105} + C_4 \rightarrow C_4 = \frac{806}{105}$$

Condición de continuidad 3:

$$\theta_2 = \theta_3 \text{ en } x = 4m$$

$$= -\frac{1}{12} * 4^4 + \frac{2}{3} * 4^3 - \frac{152}{35} * 4^2 + \frac{1478}{105} * 4 - \frac{94}{7} = \frac{5}{2} * 4^2 - 30(4) + C_5$$

$$-\frac{554}{105} = -80 + C_5 \rightarrow C_5 = \frac{7846}{105}$$

Condición de continuidad 4:

$$y_2 = y_3 \text{ en } x = 4m$$

$$-\frac{1}{60} * 4^5 + \frac{1}{6} * 4^4 - \frac{152}{105} * 4^3 + \frac{739}{105} * 4^2 - \frac{94}{7}(4) + \frac{856}{105} = \frac{5}{6} * 4^3 - 15 * 4^2 + \frac{7846}{105}(4) + C_6$$

$$0 = \frac{3928}{35} + C_6 \rightarrow C_6 = \frac{-3928}{35}$$

Además:

$$E = 2.1 * 10^6 \frac{T}{m^2}$$

$$I = \frac{l^4}{12} = \frac{0.4^4}{12} = 0.0021333m^4$$

$$EI = \left(2.1 * 10^6 \frac{T}{m^2}\right) (0.0021333m^4) = 4480T - m^2$$

Sustituyendo las constantes de integración en las ecuaciones enumeradas podemos obtener las ecuaciones generales de giro y flecha:

$$0 \leq x \leq 2m$$

$$\theta_1 = \left(\frac{1}{4480}\right) \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{141}{70}x^2 - \frac{212}{105}x\right)$$

$$y_1 = \left(\frac{1}{4480}\right) \left(-\frac{1}{12}x^4 + \frac{47}{70}x^3 - \frac{106}{105}x^2\right)$$

$$2m \leq x \leq 4m$$

$$\theta_2 = \left(\frac{1}{4480}\right) \left(-\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{152}{35}x^2 + \frac{1478}{105}x - \frac{94}{7}\right)$$

$$y_2 = \left(\frac{1}{4480}\right) \left(-\frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{152}{105}x^3 + \frac{739}{105}x^2 - \frac{94}{7}x + \frac{856}{105}\right)$$

$$4m \leq x \leq 6m$$

$$\theta_3 = \left(\frac{1}{4480}\right)\left(\frac{5}{2}x^2 - 30x + \frac{7846}{105}\right)$$

$$y_3 = \left(\frac{1}{4480}\right)\left(\frac{5}{6}x^3 - 15x^2 + \frac{7846}{105}x - \frac{3928}{35}\right)$$

DIAGRAMA DE CORTANTE:

x (m)	V (Ton)
0	4.02857143
0.5	3.02857143
1	2.02857143
1.5	1.02857143
2	0.02857143
2	-4.68571429
2.25	-4.74821429
2.5	-4.93571429
2.75	-5.24821429
3	-5.68571429
3.25	-6.24821429
3.5	-6.93571429
3.75	-7.74821429
4	-8.68571429
4	5
5	5
6	5

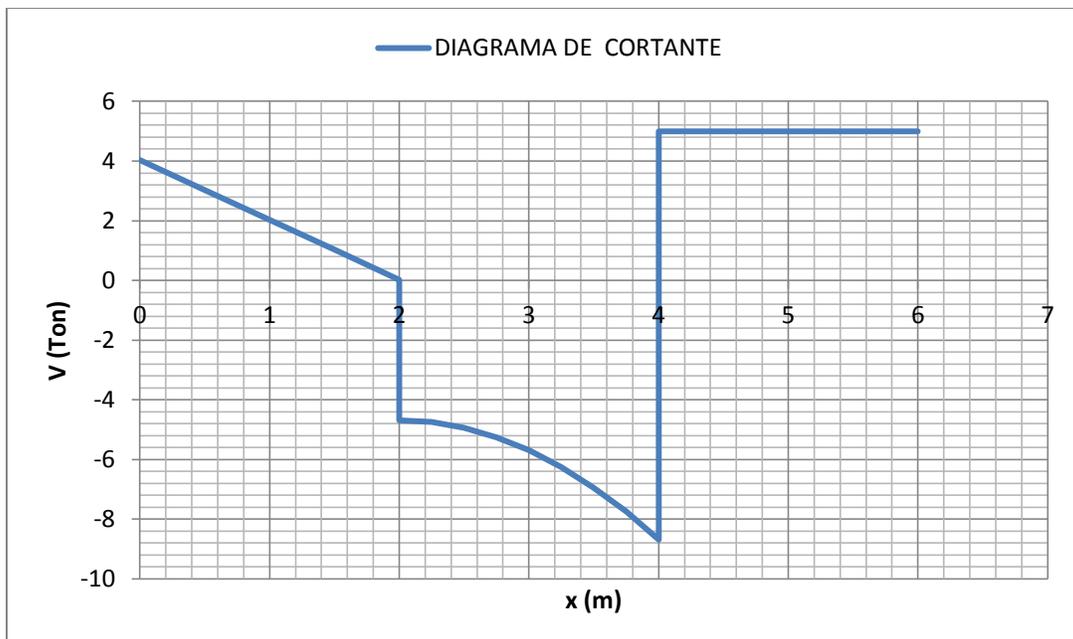


DIAGRAMA DE MOMENTO:

x (m)	M (Ton*m)
0	-2.01904762
0.25	-1.07440476
0.5	-0.2547619
0.75	0.43988095
1	1.00952381
1.25	1.45416667
1.5	1.77380952
1.75	1.96845238
2	2.03809524
2	2.03809524
2.25	0.86145833
2.5	-0.34642857
2.75	-1.61681548
3	-2.98095238
3.25	-4.47008929
3.5	-6.11547619
3.75	-7.9483631
4	-10
4	-10
5	-5
6	0

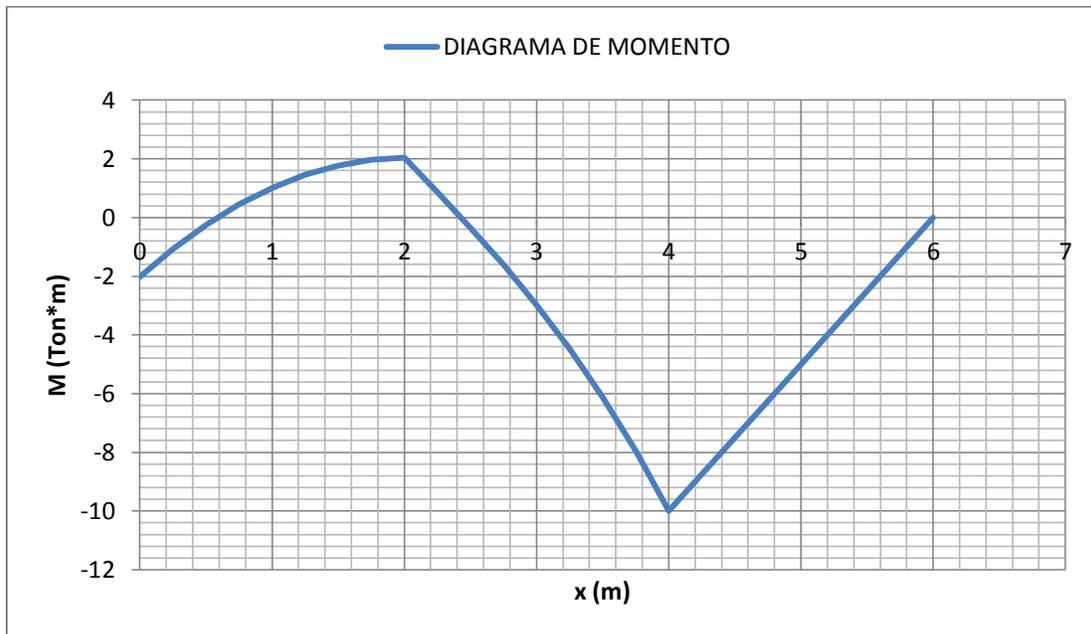


DIAGRAMA DE GIRO:

x (m)	θ (rad)
0	0
0.25	-8.5732E-05
0.5	-0.00012224
0.75	-0.00011649
1	-7.5468E-05
1.25	-6.145E-06
1.5	8.4503E-05
1.75	0.0001895
2	0.00030187
2	0.00030187
2.25	0.00038285
2.5	0.00039743
2.75	0.00034302
3	0.00021524
3.25	7.9989E-06
3.5	-0.00028656
3.75	-0.00067802
4	-0.00117772
4	-0.00117772
4.25	-0.00170088
4.5	-0.00215428
4.75	-0.00253793
5	-0.00285183
5.25	-0.00309597
5.5	-0.00327036
5.75	-0.00337499
6	-0.00340986

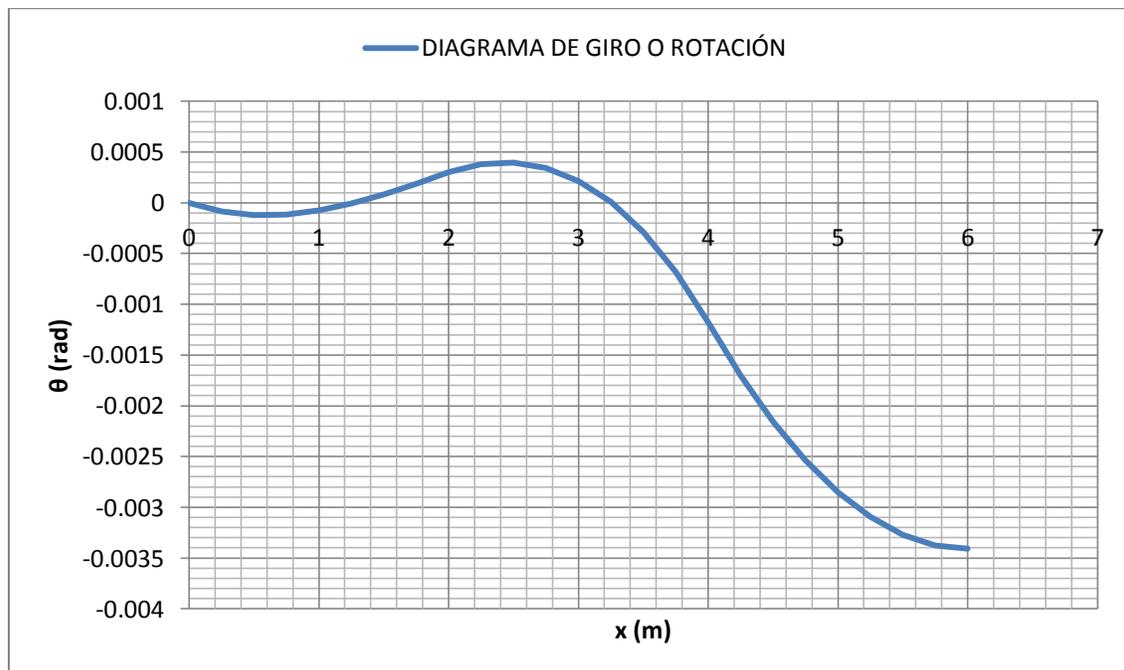
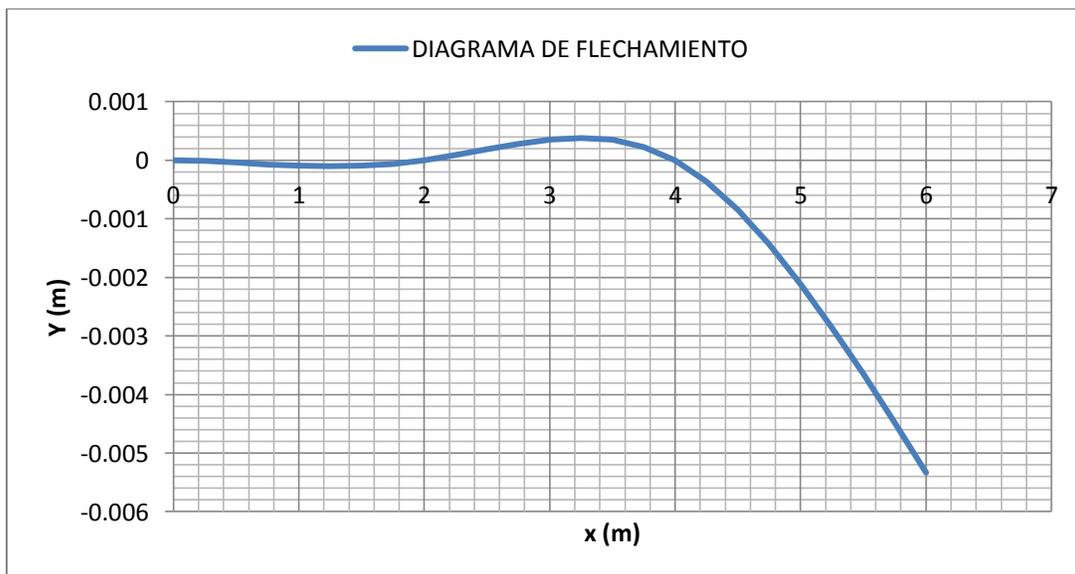
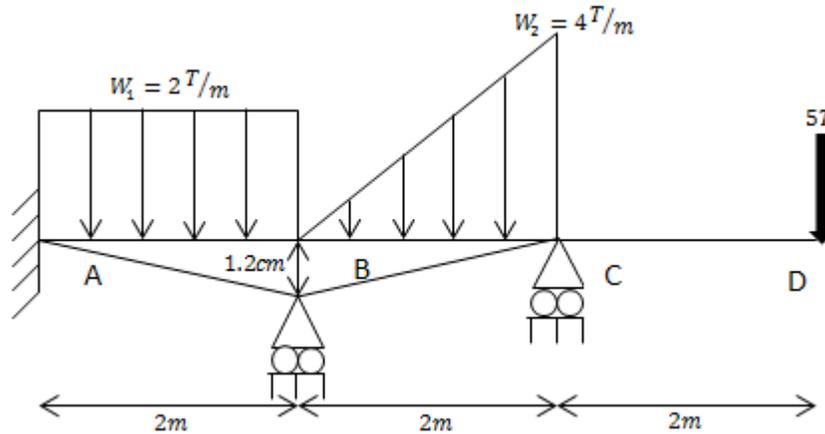


DIAGRAMA DE FLECHAMIENTO:

x (m)	Y (m)
0	0
0.25	-1.18147E-05
0.5	-3.87636E-05
0.75	-6.94119E-05
1	-9.40689E-05
1.25	-0.000104787
1.5	-9.53643E-05
1.75	-6.13403E-05
2	0
2	0
2.25	8.69569E-05
2.5	0.000185896
2.75	0.000279929
3	0.000351297
3.25	0.000380933
3.5	0.000348025
3.75	0.000229583
4	0
4	0
4.25	-0.000361278
4.5	-0.000844627
4.75	-0.001432607
5	-0.002107781
5.25	-0.002852708
5.5	-0.003649952
5.75	-0.004482073
6	-0.005331633



6.- Supóngase que en la viga del ejercicio anterior, el apoyo B tiene un asentamiento de 1.2 cm. Calcular las reacciones usando nuevamente el método de flexibilidades.



Se realizan los mismos pasos que en la viga con apoyos rígidos, pero se toman en cuenta las siguientes consideraciones:

El planteamiento matricial de las ecuaciones de compatibilidad geométrica para este problema es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0.012 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

Aunque el valor de EI sea constante, a diferencia del problema pasado en el que al simplificar el sistema desaparecen los EI , ahora debe incluirse necesariamente en los cálculos, pues el efecto de los asentamientos depende de la rigidez de las vigas; mientras más rígidas, mayores serán los momentos flexionantes debidos a los asentamientos.

Obsérvese que en el planteamiento del sistema de ecuaciones, la deflexión total en el apoyo que sufre asentamiento, es decir, el B, no es nula, sino que es igual al valor del asentamiento correspondiente (0.012m); como las cargas virtuales unitarias se propusieron hacia abajo (remítase al ejercicio anterior), un desplazamiento hacia abajo se considera positivo.

Retomamos los desplazamientos del problema 5 de éste apartado, pero sustituiremos $EI = 4480T - m^2$.

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[\frac{236}{3} \right] = \frac{1}{4480} \left[\frac{236}{3} \right] = 0.01756m$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \left[\frac{3908}{15} \right] = \frac{1}{4480} \left[\frac{3908}{15} \right] = 0.05815m$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{8}{3} + 0 \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{8}{3} \right] = \frac{1}{4480} \left[\frac{8}{3} \right] = 0.00060m$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \left[\frac{20}{3} + 0 + 0 \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{20}{3} \right] = \frac{1}{4480} \left[\frac{20}{3} \right] = 0.00149m$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{1}{EI} \left[\frac{20}{3} \right] = \frac{1}{4480} \left[\frac{20}{3} \right] = 0.00149m$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \left[\frac{64}{3} + 0 \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{64}{3} \right] = \frac{1}{4480} \left[\frac{64}{3} \right] = 0.00476m$$

Remplazando los valores anteriores en el planteamiento matricial obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 0.012 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.01756 \\ 0.05815 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.00060 & 0.00149 \\ 0.00149 & 0.00476 \end{pmatrix}$$

Despejando las incógnitas:

$$\begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00060 & 0.00149 \\ 0.00149 & 0.00476 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0.012 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.01756 \\ 0.05815 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 94.6342 \\ -41.8393 \end{pmatrix}$$

Recuérdese que un signo positivo en los resultados indica que el sentido propuesto de la carga virtual unitaria es correcto, mientras que un signo negativo indica lo contrario.

∴

$$R_{BY} = 94.6342T \downarrow$$

$$R_{CY} = 41.8393T \uparrow$$

Las reacciones restantes se obtienen de:

$$\sum F_Y = 0$$

$$R_{AY} - 4 - 4 - 5 - 94.6342 + 41.8393 = 0$$

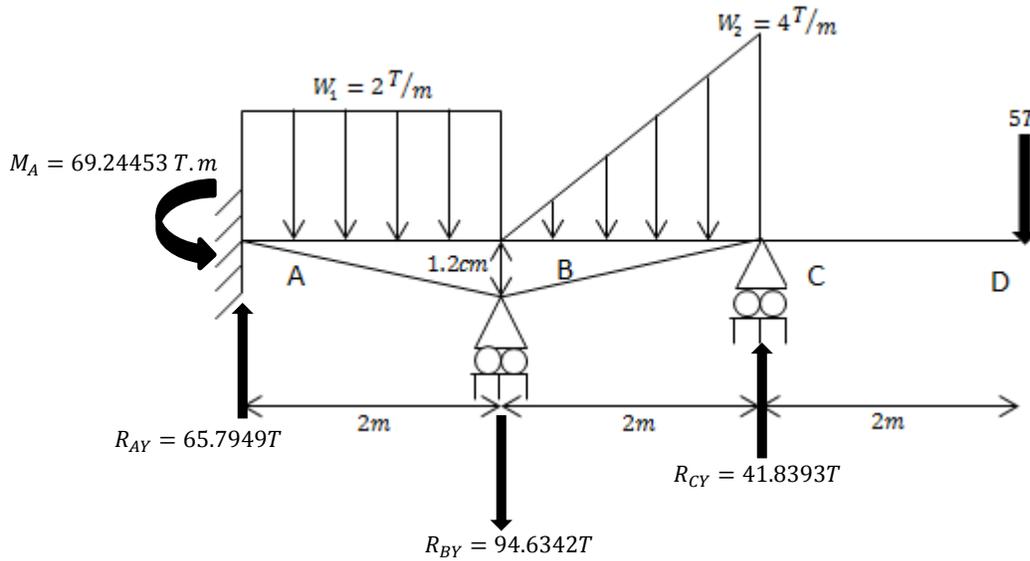
$$R_{AY} = 65.7949T \uparrow$$

$$\sum M_A = 0$$

$$-M_A + (4)(1) + (4) \left(\frac{10}{3} \right) + 5(6) + (94.6342)(2) - (41.8393)(4) = 0$$

$$M_A = 69.24453 \text{ T.m} \curvearrowright$$

Diagrama en el que se visualizan las reacciones de la viga cuyo apoyo B sufre un asentamiento de $1.2\text{cm}=0.012\text{m}$.



Comprobación del equilibrio de la estructura:

$$\sum MD = 0$$

$$-69.24453 + 65.7949(6) - 4(5) - 94.6342(4) - 4\left(2 + \frac{2}{3}\right) + 41.8393(2) = 0 \text{ ok}$$

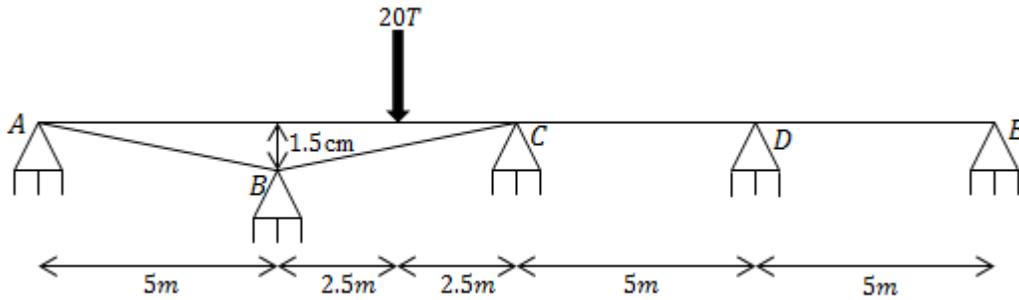
7.- Calcular las reacciones de la viga hiperestática continua que se muestra en la ilustración y cuyo apoyo B sufre un asentamiento de 1.5cm.

Datos:

$$E = 2 * 10^7 T/m^2$$

$$I = 0.00171m^4$$

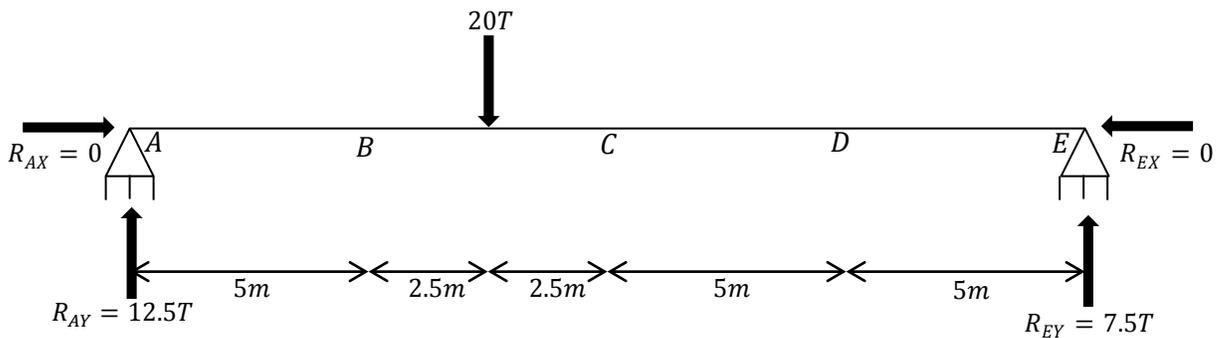
$$EI = 3.42 * 10^4 T - m^2$$



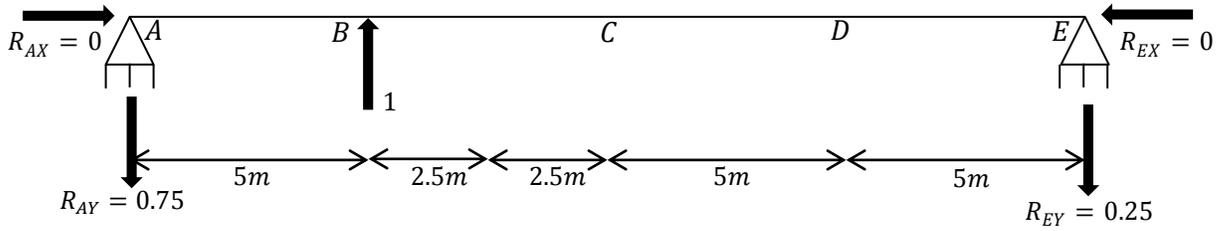
Por método de superposición, la estructura real es igual a la suma de las siguientes estructuras:

$$VR = VIF1 + VIF2 + VIF3 + VIF4$$

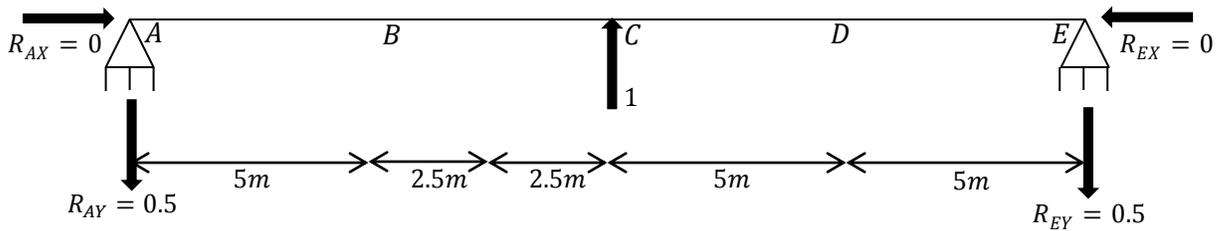
VIF1 (Estructura M):



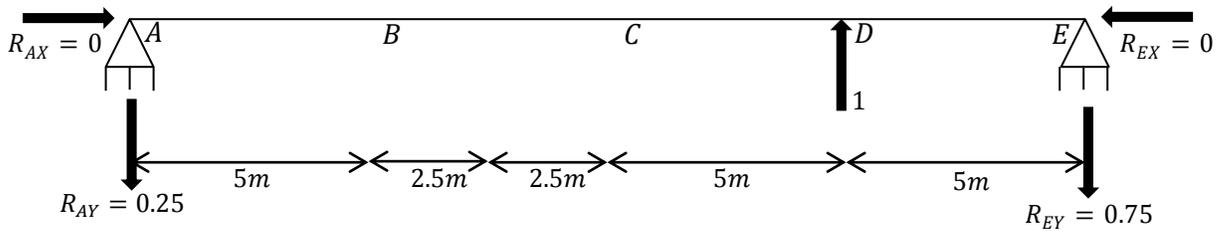
VIF2 (Estructura m_1):



VIF3 (Estructura m_2):



VIF4 (Estructura m_3):



Análisis de VIF1:

Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$20(7.5) - R_{EY}(20) = 0$$

$$R_{EY} = 7.5T \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$R_{AY} - 20 + 7.5 = 0$$

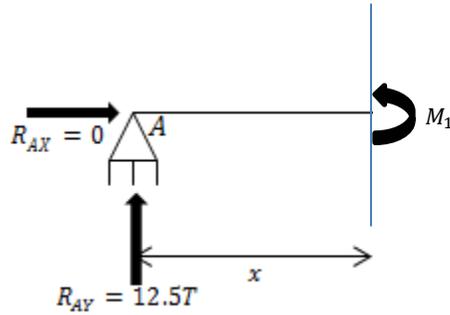
$$R_{AY} = 12.5T \uparrow$$

$$\sum F_X = 0$$

$$R_{AX} = R_{EX} = 0$$

Ecuaciones de Momento:

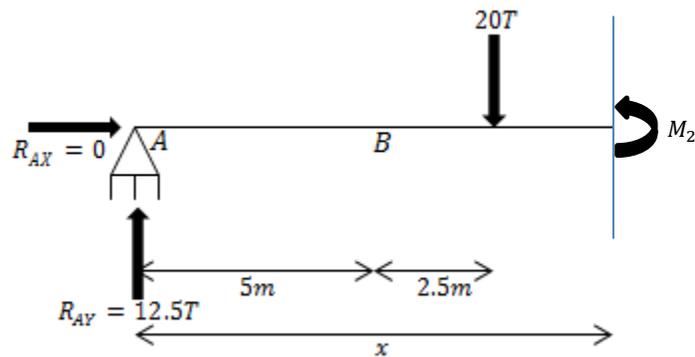
$$0 \leq x \leq 7.5m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 12.5x$$

$$7.5m \leq x \leq 20m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = 12.5x - 20(x - 7.5) = 150 - 7.5x$$

Análisis de VIF2:

Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$-1(5) + R_{EY}(20) = 0$$

$$R_{EY} = 0.25 \downarrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$-R_{AY} + 1 - 0.25 = 0$$

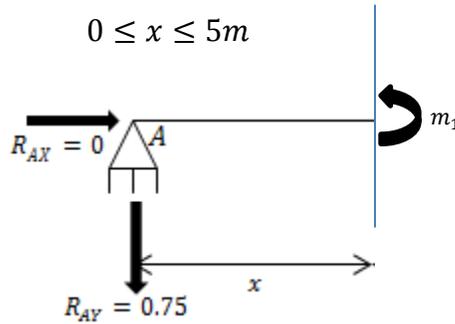
$$R_{AY} = 0.75 \downarrow$$

$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} = R_{EX} = 0$$

Ecuaciones de momento:

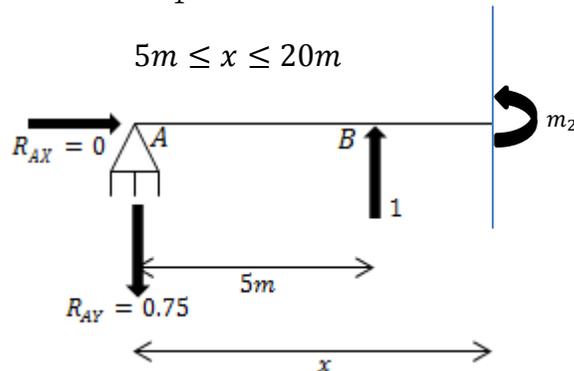
$$0 \leq x \leq 5m$$



$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m_1 = -0.75x$$

$$5m \leq x \leq 20m$$



$$\sum mcorte = 0$$

$$m_2 = -0.75x + 1(x - 5) = 0.25x - 5$$

Análisis de VIF3:

Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$-1(10) + R_{EY}(20) = 0$$

$$R_{EY} = 0.5 \downarrow$$

$$\sum FY = 0$$

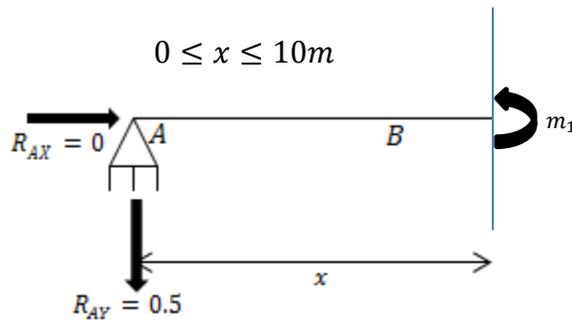
$$-R_{AY} + 1 - 0.5 = 0$$

$$R_{AY} = 0.5 \downarrow$$

$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} = R_{EX} = 0$$

Ecuaciones de momento:

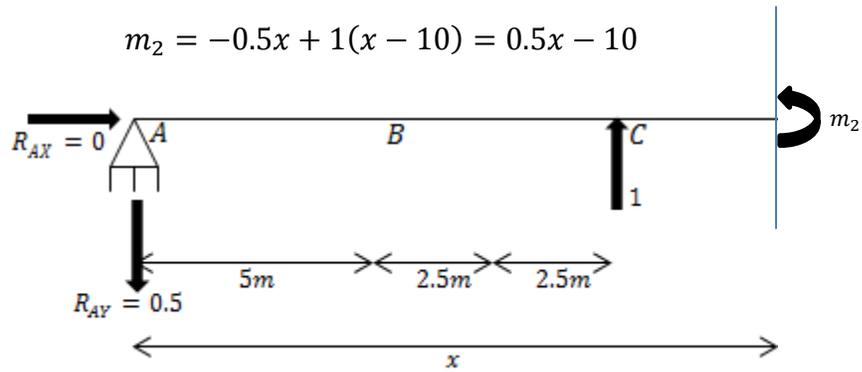


$$\sum mcorte = 0$$

$$m_1 = -0.5x$$

$$10\text{m} \leq x \leq 20\text{m}$$

$$\sum mcorte = 0$$



Análisis de VIF4:

Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$-1(15) + R_{EY}(20) = 0$$

$$R_{EY} = 0.75 \downarrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$-R_{AY} + 1 - 0.75 = 0$$

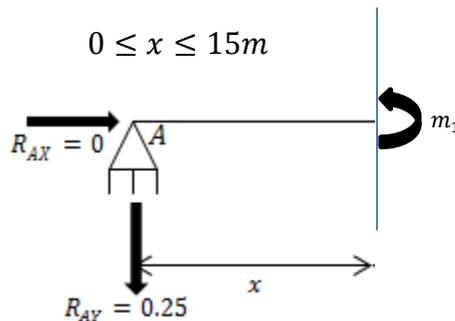
$$R_{AY} = 0.25 \downarrow$$

$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} = R_{EX} = 0$$

Ecuaciones de momento:

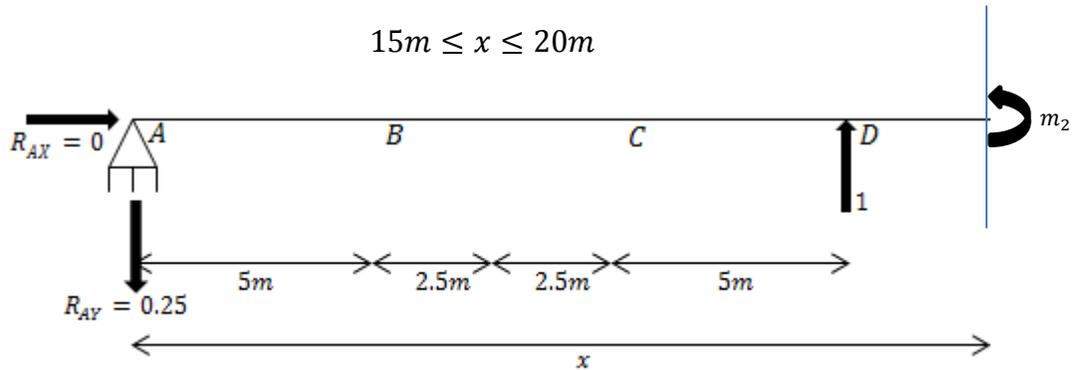
$$0 \leq x \leq 15m$$



$$\sum mcorte = 0$$

$$m_1 = -0.25x$$

$$15m \leq x \leq 20m$$



$$\sum mcorte = 0$$

$$m_2 = -0.25x + 1(x - 15) = 0.75x - 15$$

Sean:

$$d_1 = \delta_{VB} \text{ de VIF1} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} Mm_1 dx$$

$$d_2 = \delta_{VC} \text{ de VIF1} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} Mm_2 dx$$

$$d_3 = \delta_{VD} \text{ de VIF1} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} Mm_3 dx$$

$$f_{11} = \delta_{VB} \text{ de VIF2} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_1 m_1 dx$$

$$f_{21} = \delta_{VC} \text{ de VIF2} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_1 m_2 dx$$

$$f_{31} = \delta_{VD} \text{ de VIF2} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_1 m_3 dx$$

$$f_{12} = \delta_{VB} \text{ de VIF3} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_2 m_1 dx$$

$$f_{22} = \delta_{VC} \text{ de VIF3} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_2 m_2 dx$$

$$f_{32} = \delta_{VD} \text{ de VIF3} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_2 m_3 dx$$

$$f_{13} = \delta_{VB} \text{ de VIF4} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_3 m_1 dx$$

$$f_{23} = \delta_{VC} \text{ de VIF4} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_3 m_2 dx$$

$$f_{33} = \delta_{VD} \text{ de VIF4} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_3 m_3 dx$$

Donde:

$\delta_V = \text{Desplazamiento Vertical}$

$M = \text{Ecuaciones de Momento de la estructura } M$

$m_i = \text{Ecuaciones de momento de las estructuras } m_i$

$$d_1 = \frac{1}{34200} \left[\int_0^5 (12.5x)(-0.75x) dx + \int_5^{7.5} (12.5x)(0.25x - 5) dx + \int_{7.5}^{20} (150 - 7.5x)(0.25x - 5) dx \right] = -0.066627m$$

$$d_2 = \frac{1}{34200} \left[\int_0^{7.5} (12.5x)(-0.5x) dx + \int_{7.5}^{10} (150 - 7.5x)(-0.5x) dx + \int_{10}^{20} (150 - 7.5x)(0.5x - 10) dx \right] = -0.08909m$$

$$d_3 = \frac{1}{34200} \left[\int_0^{7.5} (12.5x)(-0.25x) dx + \int_{7.5}^{15} (150 - 7.5x)(-0.25x) dx + \int_{15}^{20} (150 - 7.5x)(0.75x - 15) dx \right] = -0.058251m$$

$$f_{11} = \frac{1}{34200} \left[\int_0^5 (-0.75x)(-0.75x) dx + \int_{15}^{20} (0.25x - 5)(0.25x - 5) dx \right] = 0.002741m$$

$$f_{21} = \frac{1}{34200} \left[\int_0^5 (-0.75x)(-0.5x)dx + \int_5^{10} (0.25x - 5)(-0.5x)dx \right. \\ \left. + \int_{10}^{20} (0.25x - 5)(0.5x - 10)dx \right] = 0.00335m$$

$$f_{31} = \frac{1}{34200} \left[\int_0^5 (-0.75x)(-0.25x)dx + \int_5^{15} (0.25x - 5)(-0.25x)dx \right. \\ \left. + \int_{15}^{20} (0.25x - 5)(0.75x - 15)dx \right] = 0.002132m$$

$$f_{12} = f_{21} = 0.00335m$$

$$f_{22} = \frac{1}{34200} \left[\int_0^{10} (-0.5x)(-0.5x)dx + \int_{10}^{20} (0.5x - 10)(0.5x - 10)dx \right] = 0.004873m$$

$$f_{32} = \frac{1}{34200} \left[\int_0^{10} (-0.5x)(-0.25x)dx + \int_{10}^{15} (0.5x - 10)(-0.25x)dx \right. \\ \left. + \int_{15}^{20} (0.5x - 10)(0.75x - 15)dx \right] = 0.00335m$$

$$f_{13} = f_{31} = 0.002132m$$

$$f_{23} = f_{32} = 0.00335m$$

$$f_{33} = \frac{1}{34200} \left[\int_0^{15} (-0.25x)(-0.25x)dx + \int_{15}^{20} (0.75x - 15)(0.75x - 15)dx \right] \\ = 0.002741m$$

Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica:

$$d_1 + f_{11}R_{BY} + f_{12}R_{CY} + f_{13}R_{DY} = -0.015$$

$$d_2 + f_{21}R_{BY} + f_{22}R_{CY} + f_{23}R_{DY} = 0$$

$$d_3 + f_{31}R_{BY} + f_{32}R_{CY} + f_{33}R_{DY} = 0$$

Nota: Como las cargas virtuales unitarias se propusieron hacia arriba, un desplazamiento hacia abajo se considera negativo.

Sustituyendo:

$$-0.066627 + 0.002741R_{BY} + 0.00335R_{CY} + 0.002132R_{DY} = -0.015$$

$$-0.08909 + 0.00335R_{BY} + 0.004873R_{CY} + 0.00335R_{DY} = 0$$

$$-0.05825 + 0.002132R_{BY} + 0.00335R_{CY} + 0.002741R_{DY} = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$R_{BY} = -29.0593, R_{CY} = 50.7592, R_{DY} = -18.1824$$

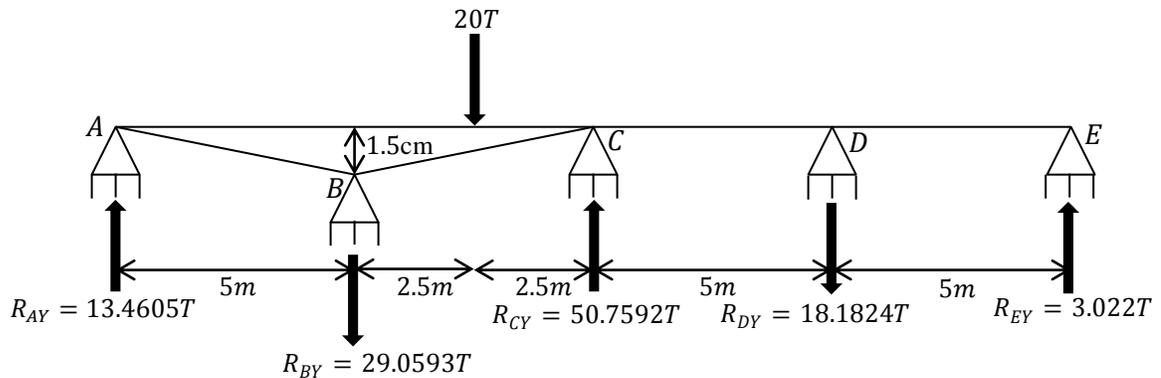
Los signos negativos indican que tales reacciones tienen un sentido opuesto al propuesto de sus respectivas cargas virtuales. Por lo tanto:

$$R_{BY} = 29.0593T \downarrow$$

$$R_{CY} = 50.7592T \uparrow$$

$$R_{DY} = 18.1824T \downarrow$$

Diagrama de la viga real en el que se visualizan las reacciones en los soportes:



Las reacciones restantes se obtuvieron de:

$$\sum FX = 0 \rightarrow \text{obsérvese que no hay fuerzas en la dirección } X$$

$$R_{AX} = R_{BX} = R_{CX} = R_{DX} = R_{EX} = 0$$

$$\sum MA = 0$$

$$29.0593(5) + 20(7.5) - 50.7592(10) + 18.1824(15) - R_{EY}(20) = 0$$

$$R_{EY} = 3.022T \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} - 29.0593 - 20 + 50.7592 - 18.1824 + 3.022 = 0$$

$$R_{AY} = 13.4605T \uparrow$$

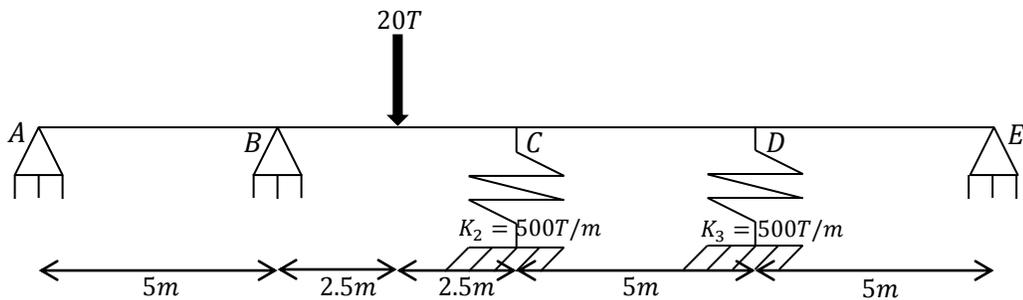
8.- Calcule las reacciones de la viga hiperestática continua del ejercicio anterior suponiendo que ahora el apoyo B no sufre algún asentamiento y que los apoyos C y D se modelan como resortes elásticos de compresión o helicoidales; las constantes de resorte respectivas se especifican en la ilustración.

Datos:

$$E = 2 * 10^7 T/m^2$$

$$I = 0.00171m^4$$

$$EI = 3.42 * 10^4 T - m^2$$



Retomamos los desplazamientos del ejercicio anterior; el planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica queda del siguiente modo:

$$d_1 + f_{11}R_{BY} + f_{12}R_{CY} + f_{13}R_{DY} = 0$$

$$d_2 + f_{21}R_{BY} + \left(f_{22} + \frac{1}{K_2}\right)R_{CY} + f_{23}R_{DY} = 0$$

$$d_3 + f_{31}R_{BY} + f_{32}R_{CY} + \left(f_{33} + \frac{1}{K_3}\right)R_{DY} = 0$$

Sustituyendo:

$$-0.066627 + 0.002741R_{BY} + 0.00335R_{CY} + 0.002132R_{DY} = 0$$

$$-0.08909 + 0.00335R_{BY} + \left(0.004873 + \frac{1}{500}\right)R_{CY} + 0.00335R_{DY} = 0$$

$$-0.05825 + 0.002132R_{BY} + 0.00335R_{CY} + \left(0.002741 + \frac{1}{500}\right)R_{DY} = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$R_{BY} = 20.2549, R_{CY} = 2.35009, R_{DY} = 1.51754$$

Por lo tanto:

$$R_{BY} = 20.2549T$$

$$R_{CY} = 2.35009T$$

$$R_{DY} = 1.51754T$$

Diagrama de la estructura en el que se visualizan los valores de las reacciones en los soportes:

Las reacciones restantes se obtuvieron de los siguientes cálculos:

$$\sum FX = 0 \rightarrow \text{obsérvese que no hay fuerzas en la dirección } X$$

$$R_{AX} = R_{BX} = R_{CX} = R_{DX} = R_{EX} = 0$$

$$\sum MA = 0$$

$$-20.2549(5) + 20(7.5) - 2.35009(10) - 1.51754(15) - R_{EY}(20) = 0$$

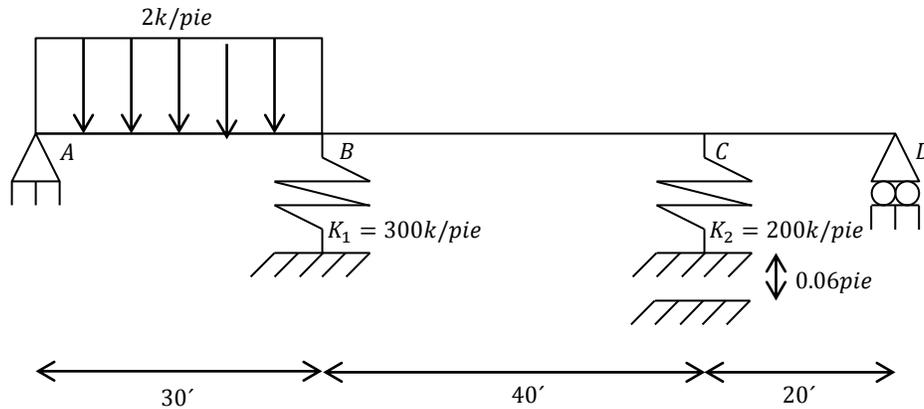
$$R_{EY} = -\frac{2.4615}{-20} = 0.123075T$$

$$\sum FY = 0$$

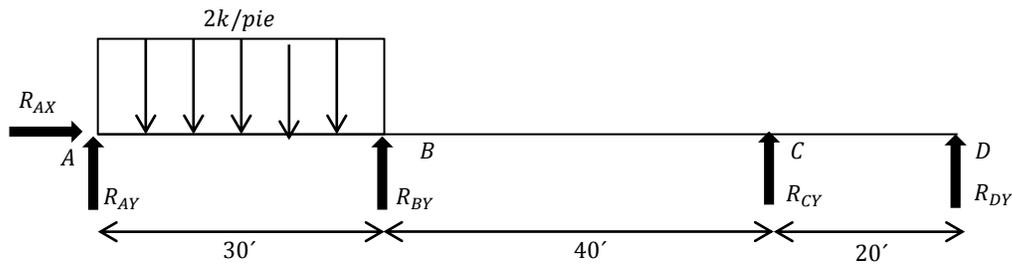
$$-R_{AY} + 20.2549 - 20 + 2.35009 + 1.51754 + 0.123075 = 0$$

$$R_{AY} = 4.25561T$$

9.- Calcule las reacciones en los apoyos de la viga continua de tres tramos representada en la figura siguiente. Sobre el tramo A-B actúa una carga de $2k/pe$ y un error de construcción desplazó al apoyo C $0.06pe$ por debajo de la posición prevista. Los apoyos B y C se modelan como resortes elásticos de compresión o helicoidales; las constantes de resorte respectivas se especifican en la ilustración. E e I son constantes para toda la viga y $EI=276000k-pe^2$.



Identificación de las reacciones en los apoyos:

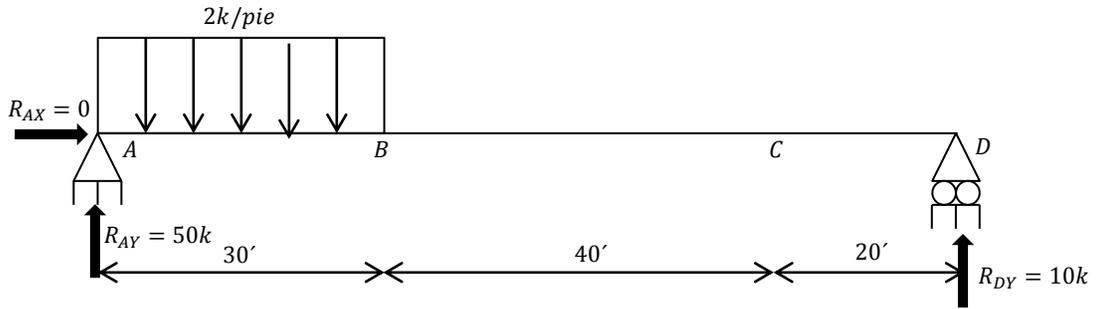


Seleccionamos como redundantes las reacciones de los soportes modelados como resortes helicoidales

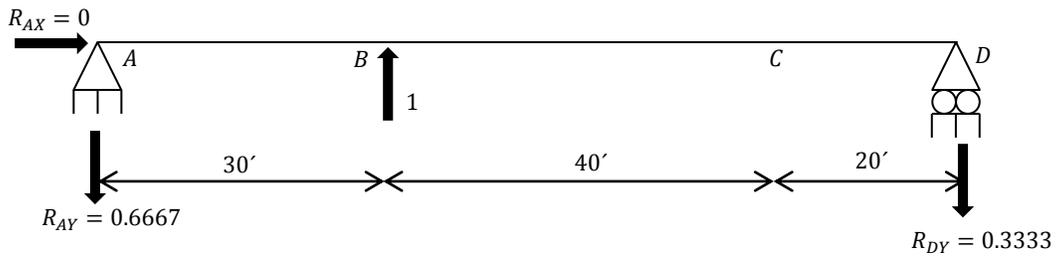
Por método de superposición, la estructura real es igual a la suma de las siguientes vigas:

$$VR = VIF1 + VIF2 + VIF3$$

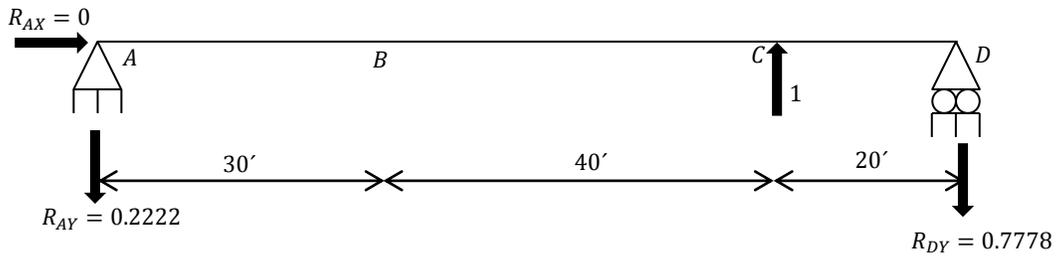
VIF1 (Estructura M):



VIF2 (Estructura m_1):



VIF3 (Estructura m_2):



Análisis de VIF1:

Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$2(30) \left(\frac{1}{2}(30) \right) - R_{DY}(90) = 0$$

$$R_{DY} = 10k \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$R_{AY} - 2(30) + 10 = 0$$

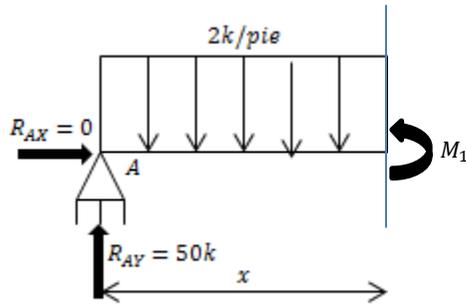
$$R_{AY} = 50k \uparrow$$

$$\sum F_X = 0$$

$$R_{AX} = 0$$

Ecuaciones de Momento:

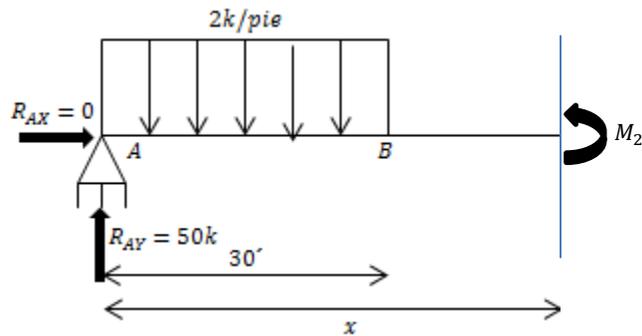
$$0' \leq x \leq 30'$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 50x - 2(x) \left(\frac{x}{2} \right) = 50x - x^2$$

$$30' \leq x \leq 90'$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = 50x - 2(30)\left(x - \frac{1}{2}(30)\right) = 900 - 10x$$

Análisis de VIF2:

Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$-1(30) + R_{DY}(90) = 0$$

$$R_{DY} = 0.3333 \downarrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$-R_{AY} + 1 - 0.3333 = 0$$

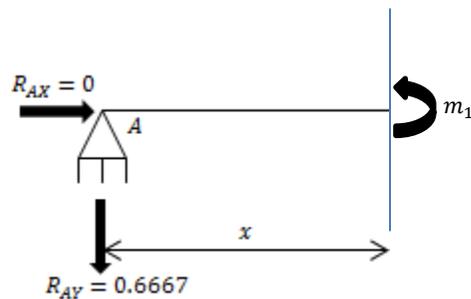
$$R_{AY} = 0.6667 \downarrow$$

$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} = 0$$

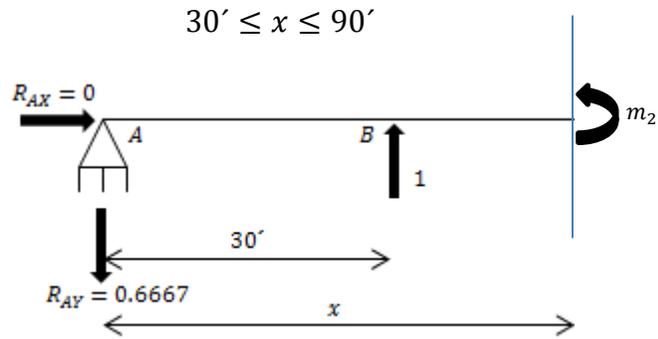
Ecuaciones de momento:

$$0' \leq x \leq 30'$$



$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m_1 = -0.6667x$$



$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m_2 = -0.6667x + 1(x - 30) = 0.3333x - 30$$

Análisis de VIF3:

Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$-1(70) + R_{DY}(90) = 0$$

$$R_{DY} = 0.7778 \downarrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$-R_{AY} + 1 - 0.7778 = 0$$

$$R_{AY} = 0.2222 \downarrow$$

$$\sum FX = 0$$

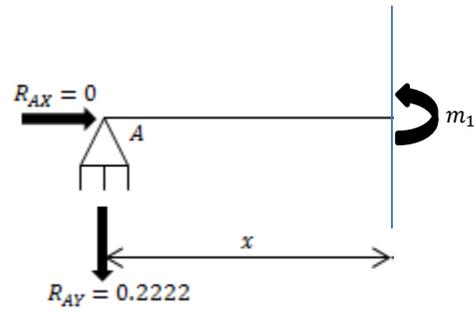
$$R_{AX} = 0$$

Ecuaciones de momento:

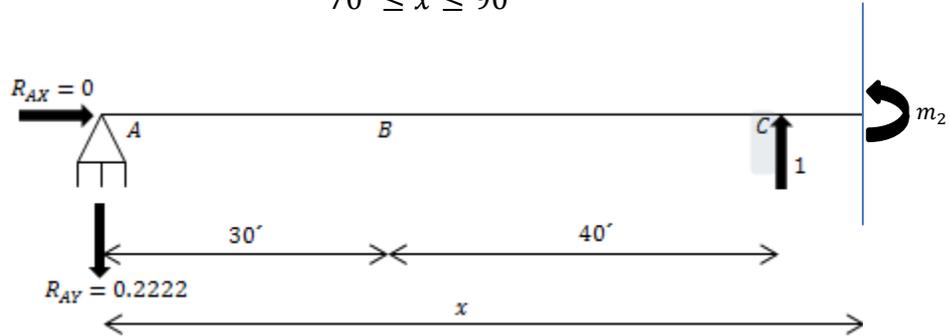
$$0' \leq x \leq 70'$$

$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m_1 = -0.2222x$$



$$70' \leq x \leq 90'$$



$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m_2 = -0.2222x + 1(x - 70) = 0.7778x - 70$$

Sean:

$$d_1 = \delta_{VB} \text{ de VIF1} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} M m_1 dx$$

$$d_2 = \delta_{VC} \text{ de VIF1} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} M m_2 dx$$

$$f_{11} = \delta_{VB} \text{ de VIF2} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_1 m_1 dx$$

$$f_{21} = \delta_{VC} \text{ de VIF2} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_1 m_2 dx$$

$$f_{12} = \delta_{VB} \text{ de VIF3} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_2 m_1 dx$$

$$f_{22} = \delta_{VC} \text{ de VIF3} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_2 m_2 dx$$

Donde:

$\delta_V = \text{Desplazamiento Vertical}$

$M = \text{Ecuaciones de Momento de la estructura } M$

$m_i = \text{Ecuaciones de momento de las estructuras } m_i$

$$d_1 = \frac{1}{276000} \left[\int_0^{30} (50x - x^2)(-0.6667x) dx + \int_{30}^{90} (900 - 10x)(0.3333x - 30) dx \right] \\ = -1.46753 \text{pies}$$

$$d_2 = \frac{1}{276000} \left[\int_0^{30} (50x - x^2)(-0.2222x) dx + \int_{30}^{70} (900 - 10x)(-0.2222x) dx \right. \\ \left. + \int_{70}^{90} (900 - 10x)(0.7778x - 70) dx \right] = -0.875511 \text{pies}$$

$$f_{11} = \frac{1}{276000} \left[\int_0^{30} (-0.6667x)(-0.6667x) dx \right. \\ \left. + \int_{30}^{90} (0.3333x - 30)(0.3333x - 30) dx \right] = 0.043487 \text{pies}$$

$$f_{21} = \frac{1}{276000} \left[\int_0^{30} (-0.6667x)(-0.2222x) dx + \int_{30}^{70} (0.3333x - 30)(-0.2222x) dx \right. \\ \left. + \int_{70}^{90} (0.3333x - 30)(0.7778x - 70) dx \right] = 0.027377 \text{pies}$$

$$f_{12} = f_{21} = 0.027377 \text{pies}$$

$$f_{22} = \frac{1}{276000} \left[\int_0^{70} (-0.2222x)(-0.2222x) dx \right. \\ \left. + \int_{70}^{90} (0.7778x - 70)(0.7778x - 70) dx \right] = 0.026296 \text{pies}$$

Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica:

$$d_1 + \left(f_{11} + \frac{1}{K_1}\right)R_{BY} + f_{12}R_{CY} = 0$$

$$d_2 + f_{21}R_{BY} + \left(f_{22} + \frac{1}{K_2}\right)R_{CY} = -0.06$$

Nota: Como las cargas virtuales unitarias se propusieron hacia arriba, un desplazamiento hacia abajo se considera negativo.

Expresando en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11} + \frac{1}{K_1} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} + \frac{1}{K_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.06 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo:

$$\begin{pmatrix} -1.46753 \\ -0.875511 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.043487 + \frac{1}{300} & 0.027377 \\ 0.027377 & 0.026296 + \frac{1}{200} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.06 \end{pmatrix}$$

Despejando las incógnitas y resolviendo:

$$\begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.043487 + \frac{1}{300} & 0.027377 \\ 0.027377 & 0.026296 + \frac{1}{200} \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -0.06 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1.46753 \\ -0.875511 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} R_{BY} \\ R_{CY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.9728 \\ -2.78584 \end{pmatrix}$$

∴

$$R_{BY} = 32.9728k \uparrow$$

$$R_{CY} = 2.78584k \downarrow$$

Cálculo de las reacciones restantes:

$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} = 0$$

$$\sum MA = 0$$

$$2(30) \left(\frac{1}{2}(30) \right) - 32.9728(30) + 2.78584(70) - R_{DY}(90) = 0$$

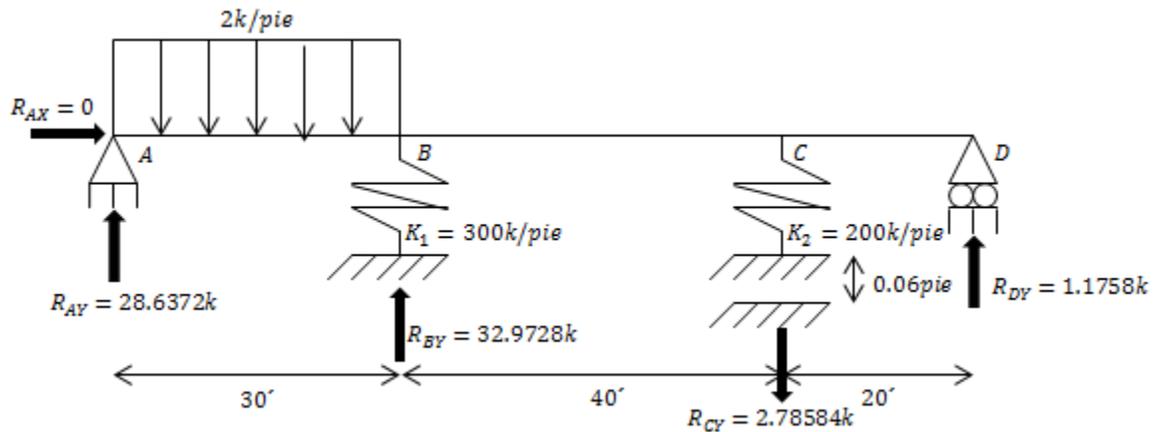
$$R_{DY} = 1.1758k \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

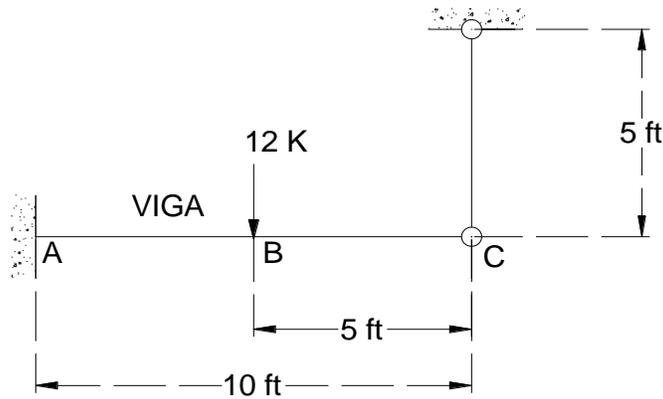
$$R_{AY} - 2(30) + 32.9728 - 2.78584 + 1.1758 = 0$$

$$R_{AY} = 28.6372k \uparrow$$

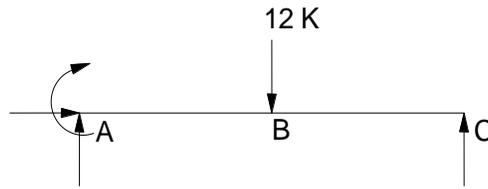
Diagrama en el que se visualizan las reacciones en los soportes de la viga real:



10.- Calcule las reacciones de la viga, considere $E=30K/pulg^2$, $I=500pulg^4$.



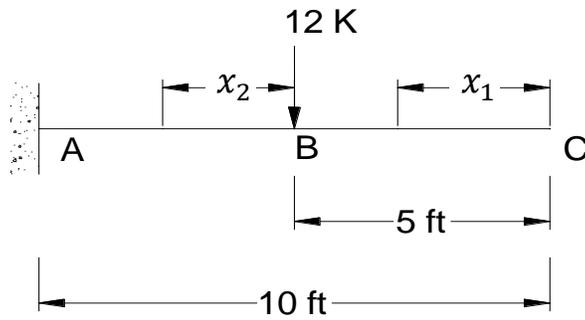
Diagramas de cargas



La estructura real es igual a la suma de las siguientes vigas:

$$ER = Estructura M + Estructura m$$

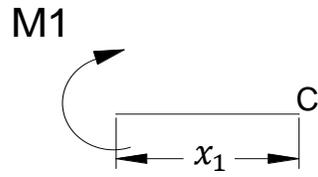
Estructura M



Análisis de la estructura M

Ecuaciones de Momento

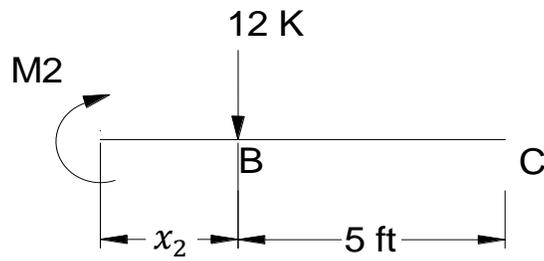
$$0 \leq x_1 \leq 5ft$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M1 = 0$$

$$0 \leq x_2 \leq 5ft$$

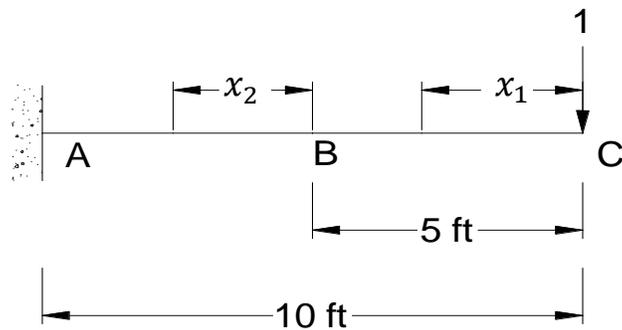


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M2 + 12x_2 = 0$$

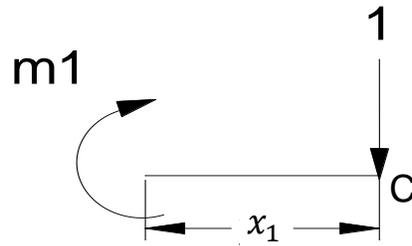
$$M2 = -12x_2$$

Estructura m



Ecuaciones de momento

$$0 \leq x_1 \leq 5ft$$

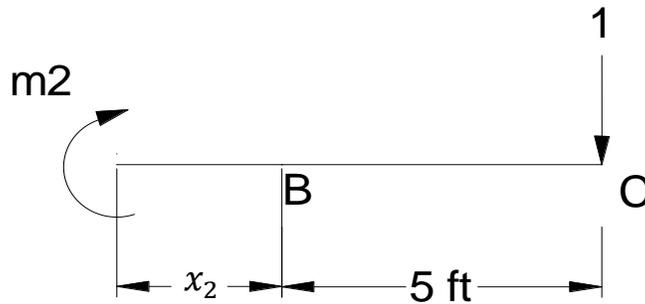


$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m1 + 1(x_1) = 0$$

$$m1 = -x_1$$

$$0 \leq x_2 \leq 5ft$$



$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m2 + 1(5 + x_2) = 0$$

$$m2 = -5 - x_2$$

Sean:

$d_1 = \delta_{VCM} =$ Desplazamiento vertical en C de la estructura M

$f_{11} = \delta_{Vcm} =$ Desplazamiento vertical en C de la estructura m

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^5 (0)(-x_1) dx_1 + \int_0^5 (-12x_2)(-5 - x_2) dx_2 \right] = \frac{1250}{EI}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^5 (-x_1)^2 dx_1 + \int_0^5 (-5 - x_2)^2 dx_2 \right] = \frac{333.333}{EI}$$

Sistema de ecuaciones de compatibilidad geométrica

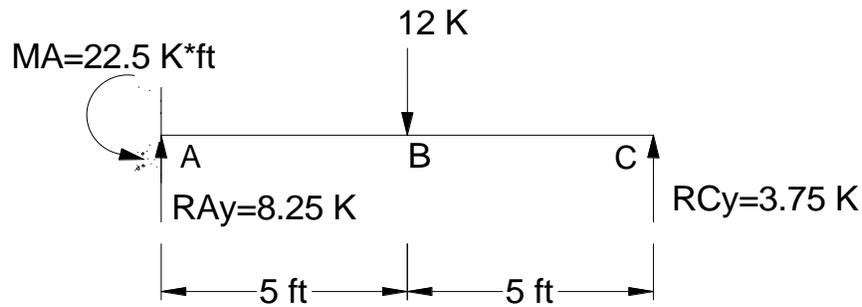
$$d_1 + f_{11} R_{CY} = 0$$

$$\left(\frac{1250}{EI} \right) \left(\frac{333.333}{EI} \right) R_{CY} = 0$$

$$R_{CY} = -\frac{1250}{333.333} = -3.75$$

$$\therefore R_{CY} = 3.75K \uparrow$$

Cálculo de las reacciones restantes de la estructura real



$$\sum F_Y = 0$$

$$R_{AY} - 12 + 3.75 = 0$$

$$R_{AY} = 8.25K \uparrow$$

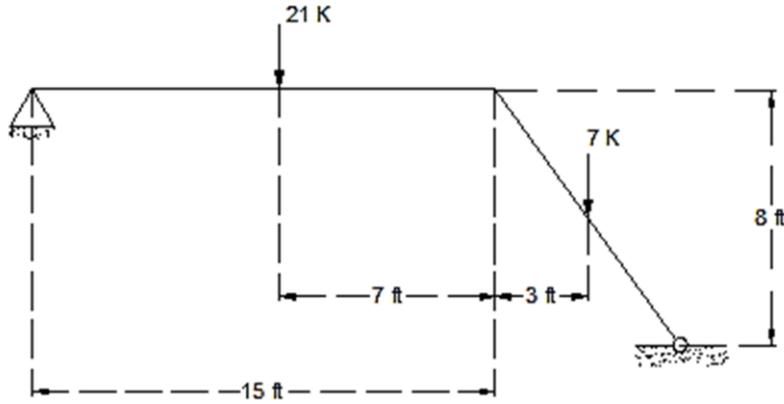
$$\sum M_A = 0$$

$$12(5) - 3.75(10) - M_A = 0$$

$$M_A = 22.5K * ft \curvearrowleft$$

3.2. MÉTODO DE FLEXIBILIDADES APLICADO A MARCOS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS

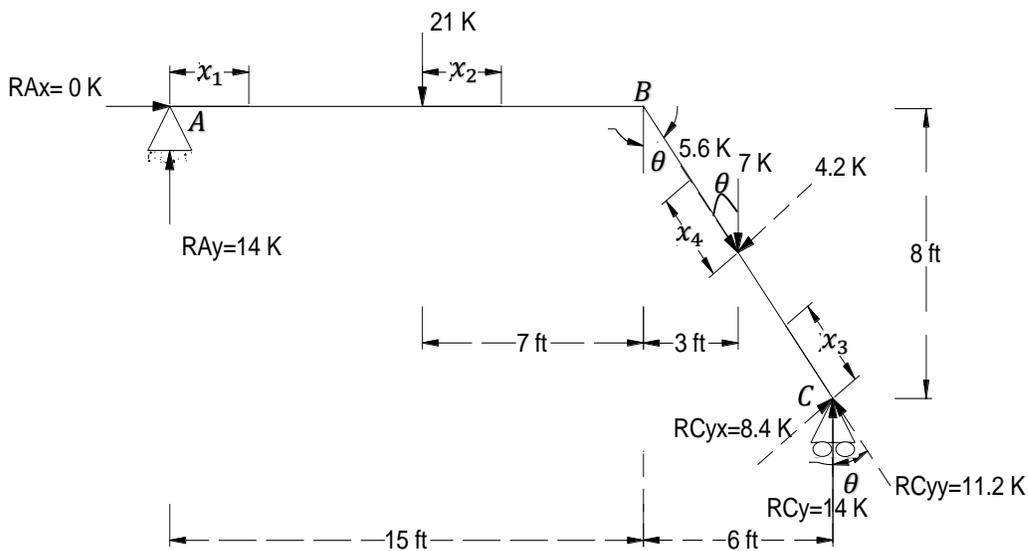
1.- Calcular las reacciones correspondientes a las cargas indicadas. E e I son constantes.



Por método de superposición, la estructura real es igual a la suma de las siguientes estructuras:

$$ER = Estructura M + Estructura m$$

Estructura M



Análisis de la estructura M

$$\sum MA = 0$$

$$-21(8) - 7(18) + R_{CY}(21) = 0$$

$$R_{CY} = 14K \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} - 21 + 14 - 7 = 0$$

$$R_{AY} = 14K \uparrow$$

$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} = 0$$

$$\text{Longitud de la barra inclinada} = L = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10'$$

$$\sin \theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Componentes rectangulares:

$$* \text{ Para } F_1 = 7K$$

$$F_{1Y} = F_1 \cos \theta = 7K \left(\frac{4}{5} \right) = 5.6K$$

$$F_{1X} = F_1 \sin \theta = 7K \left(\frac{3}{5} \right) = 4.2K$$

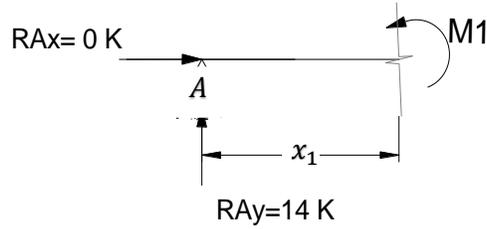
$$* \text{ Para } R_{CY} = 14K$$

$$R_{CYY} = R_{CY} \cos \theta = 14K \left(\frac{4}{5} \right) = 10.2K$$

$$R_{CYY} = R_{CY} \sin \theta = 14K \left(\frac{3}{5} \right) = 8.4K$$

Ecuaciones de Momento

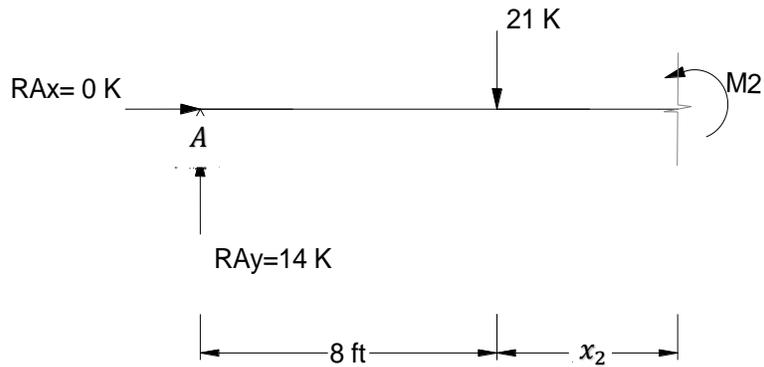
$$0 \leq x_1 \leq 8'$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M1 = 14x_1$$

$$0 \leq x_2 \leq 7'$$



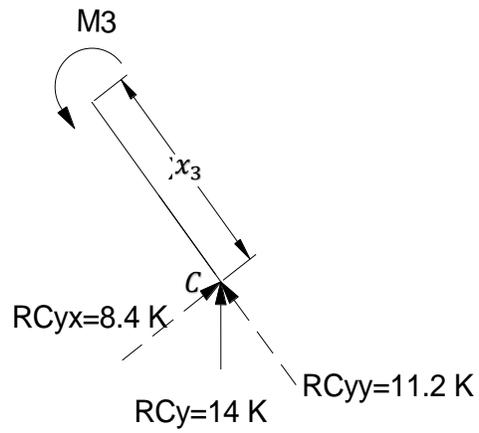
$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M2 + 21x_2 - 14(8 + x_2) = 0$$

$$M2 + 21x_2 - 112 - 14x_2 = 0$$

$$M2 = -7x_2 + 112$$

$$0 \leq x_3 \leq 5'$$

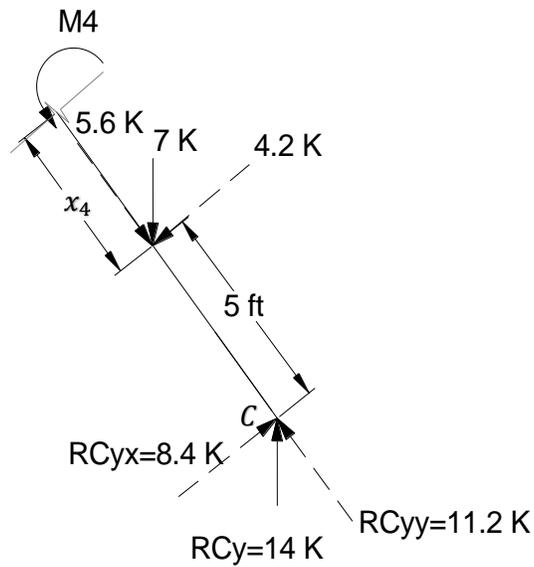


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M3 - 8.4x_3 = 0$$

$$M3 = -8.4x_3$$

$$0 \leq x_4 \leq 5'$$



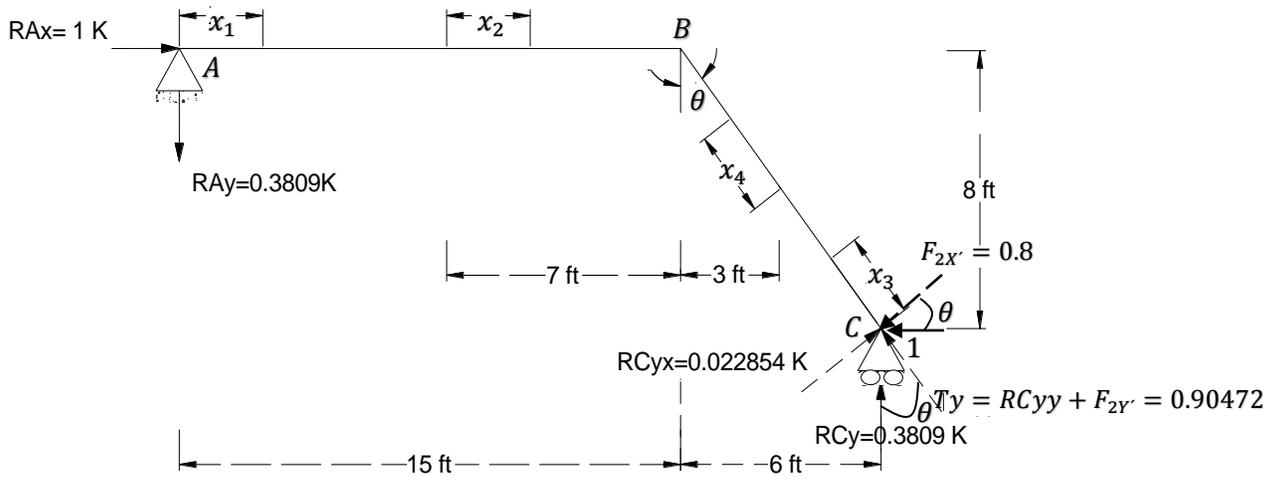
$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_4 + 4.2x_4 - 8.4(x_4 + 5) = 0$$

$$-M_4 + 4.2x_4 - 8.4x_4 - 42 = 0$$

$$M_4 = -4.2x_4 - 42$$

Estructura m



Análisis de la Estructura m

$$\sum MA = 0$$

$$R_{CY}(21) - 1(8) = 0$$

$$R_{CY} = 0.3809 \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$-R_{AY} + 0.3809 = 0$$

$$R_{AY} = 0.3809 \downarrow$$

$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} = 1 \longrightarrow$$

Componentes rectangulares:

$$* \text{ Para } F_2 = 1$$

$$F_{2X'} = F_2 \cos \theta = 1 \left(\frac{4}{5} \right) = 0.8$$

$$F_{2Y'} = F_2 \sin \theta = 1 \left(\frac{3}{5} \right) = 0.6$$

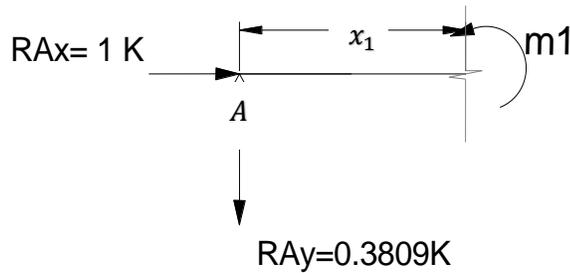
$$* \text{ Para } R_{CY} = 0.3809$$

$$R_{CYY} = R_{CY} \cos \theta = 0.3809 \left(\frac{4}{5} \right) = 0.30472$$

$$R_{CYY} = R_{CY} \sin \theta = 0.3809 \left(\frac{3}{5} \right) = 0.22854$$

Ecuaciones de momento

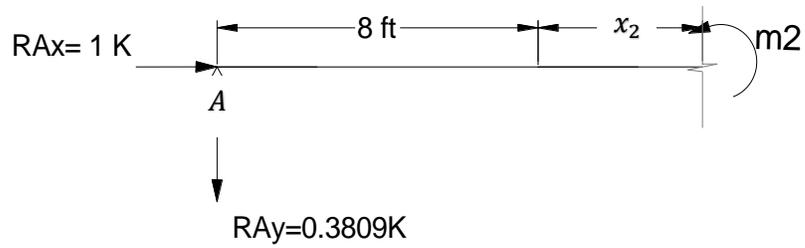
$$0 \leq x_1 \leq 8'$$



$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m1 = -0.3809x_1$$

$$0 \leq x_2 \leq 7'$$



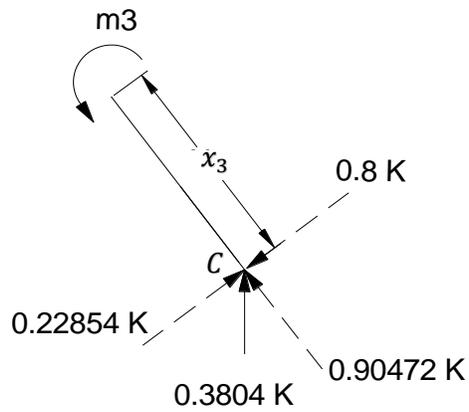
$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m2 + 0.3809(8 + x_2) = 0$$

$$m2 + 3.0472 + 0.3809x_2 = 0$$

$$m2 = -3.0472 - 0.3809x_2 = 0$$

$$0 \leq x_3 \leq 5'$$

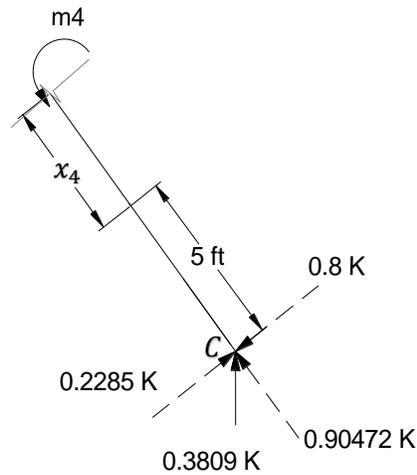


$$\sum m_{corte} = 0$$

$$-m_3 - 0.22854x_3 + 0.8x_3 = 0$$

$$m_3 = 0.5715x_3$$

$$0 \leq x_4 \leq 5'$$



$$\sum m_{corte} = 0$$

$$-m_4 - 0.2285(x_4 + 5) + 0.8(x_4 + 5) = 0$$

$$m_4 = -1.1425 - 0.2285x_4 + 4 + 0.8x_4$$

$$m_4 = 2.8575 + 0.5715x_4$$

Sean:

$d_1 = \delta_{HCM} =$ Desplazamiento horizontal en C de la estructura M

$f_{11} = \delta_{HCm} =$ Desplazamiento horizontal en C de la estructura m

$$d_1 = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

$$f_{11} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{mm}{EI} dx$$

$$d_1 = \int_0^8 \frac{(14x_1)(-0.3809x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^7 \frac{(-7x_2 + 112)(-3.0472 - 0.3809x_2)}{EI} dx_2$$

$$+ \int_0^5 \frac{(-8.4x_3)(0.5715x_3)}{EI} dx_3$$

$$+ \int_0^5 \frac{(-4.2x_4 - 42)(2.8575 + 0.5715x_4)}{EI} dx_4 = -\frac{4867.02}{EI}$$

$$f_{11} = \int_0^8 \frac{(-0.3809x_1)^2}{EI} dx_1 + \int_0^7 \frac{(-3.0472 - 0.3809x_2)^2}{EI} dx_2 + \int_0^5 \frac{(0.5715x_3)^2}{EI} dx_3$$

$$+ \int_0^5 \frac{(2.8575 + 0.5715x_4)^2}{EI} dx_4 = \frac{272.091}{EI}$$

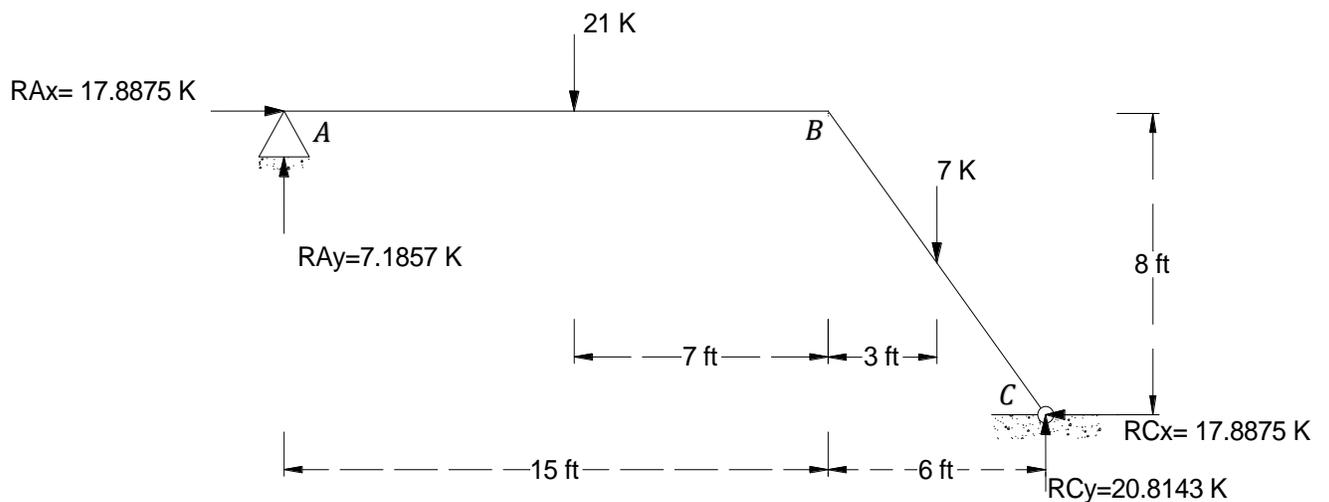
Planteamiento del sistema de ecuaciones de compatibilidad geométrica:

$$d_1 + f_{11}R_{CX} = 0$$

$$-\frac{4867.02}{EI} + \frac{272.091}{EI} R_{CX} = 0$$

$$R_{CX} = \frac{4867.02}{272.091} = 17.8875K \quad \leftarrow$$

Cálculo de las reacciones faltantes para la estructura real:



$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} = 17.8875K$$

$$\sum MA = 0$$

$$-21(8) - 7(18) - 17.8875(8) + R_{CY}(21) = 0$$

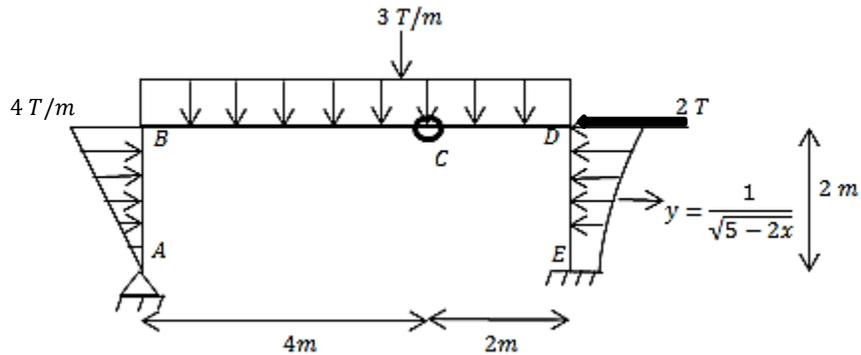
$$R_{CY} = 20.8143K \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} + 20.8143 - 21 - 7 = 0$$

$$R_{AY} = 7.1857K \uparrow$$

2.- Calcular las reacciones en los soportes con el método de flexibilidades del marco mostrado en el que existe una articulación en C y los miembros están sometidos a distintas presiones. Determinar las ecuaciones de momento, cortante y normal.



Cálculo del grado de indeterminación del marco:

Sean:

$$m = \text{número de miembros en el marco} = 3$$

$$r = \text{número de incógnitas de reacción} = 5$$

$$n = \text{nodos} = 3$$

$$c = \text{ecuaciones de condición} = 1$$

Entonces:

$$r + 3m = 5 + 3(3) = 14$$

$$3n + c = 3(4) + 1 = 13$$

Como:

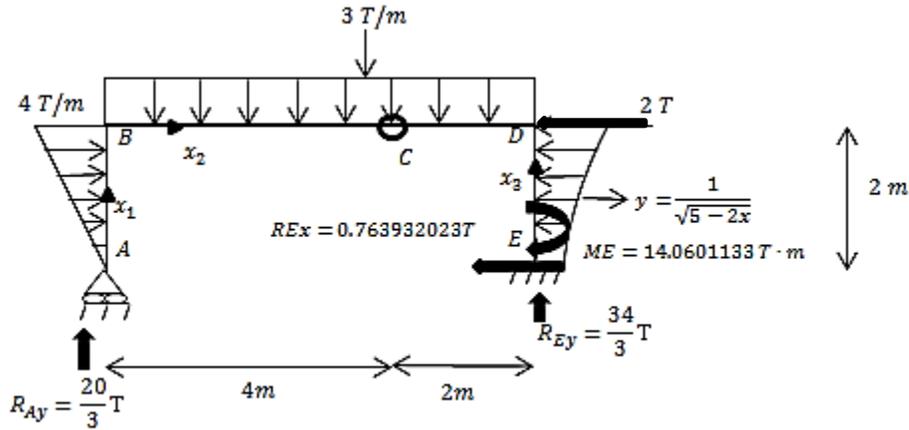
$$r + 3m > 3n + c$$

El marco es estáticamente indeterminado de grado 1

Usando el método de superposición, el marco original es igual a la suma de EIF

① (marco isostático fundamental) más EIF ② (Estructura redundante).

EIF ①



Calculo de la carga concentrada equivalente de la curva

$$Ac = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{5-2x}} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{5-2x}} dx = \int (5-2x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$u = 5 - 2x$$

$$du = -2dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int (5-2x)^{-\frac{1}{2}} (-2dx)$$

Es de la forma:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{(5-2x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = -(5-2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{5-2x}} dx = \left[-(5-2x)^{\frac{1}{2}} \right]_0^2 = \left[-(5-2(2))^{\frac{1}{2}} \right] - \left[-(5-2(0))^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= -1 + 2.23606777 = 1.236067977$$

$$Ac = 1.236067977 T$$

Para el brazo de palanca:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{5-2x}} dx}{\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{5-2x}} dx}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{5-2x}} dx$$

Usando el método de integración por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$u = x \text{ y } dv = \frac{1}{\sqrt{5-2x}} dx$$

du=dx

$$\int dv = v = \int \frac{1}{\sqrt{5-2x}} dx = -(5-2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{5-2x}} dx = (x) \left[-(5-2x)^{\frac{1}{2}} \right] + \int (5-2x)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\int (5-2x)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{2} \int (5-2x)^{\frac{1}{2}} (-2dx) = -\frac{1}{2} \left(\frac{(5-2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right)$$

$$u = 5 - 2x$$

$$du = -2dx$$

$$= -\frac{(5-2x)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{5-2x}} dx = -x(5-2x)^{\frac{1}{2}} - \frac{(5-2x)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$= -x(5-2x)^{\frac{1}{2}} - \frac{(5-2x)(5-2x)^{\frac{1}{2}}}{3}$$

$$= (5-2x)^{\frac{1}{2}} \left(-x - \frac{5-2x}{3} \right)$$

$$-x - \frac{5-2x}{3} = \frac{-3x-5+2x}{3} = \frac{-x-5}{3} = -\frac{1}{3}(x+5)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{5-2x}} dx = -\frac{(\sqrt{5-2x})(x+5)}{3}$$

$$\therefore \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{5-2x}} dx = \left[-\frac{(\sqrt{5-2x})(x+5)}{3} \right]_0^2 = \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{7}{3} \approx 1.393446629$$

El brazo de la palanca de la curva es:

$$\bar{x} = \frac{1.393446629}{1.236067977} = 1.127322004 \text{ a la izquierda de E}$$

Reacciones de EIF ①

$$\sum MC \text{ izq} = 0$$

$$R_{Ay}(4) - \left[\frac{(4)(2)}{2} \right] \left(\frac{1}{3}(2) \right) - (3)(4) \left(\frac{1}{2}(4) \right) = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{80/3}{3} = \frac{20}{3} T \uparrow$$

$$\sum Fx = 0$$

$$\left[\frac{(4)(2)}{2} \right] - 2 - 1.236067977 - R_{Ex} = 0$$

$$R_{Ex} = 0.763932023 T \leftarrow$$

$$\sum Fy = 0$$

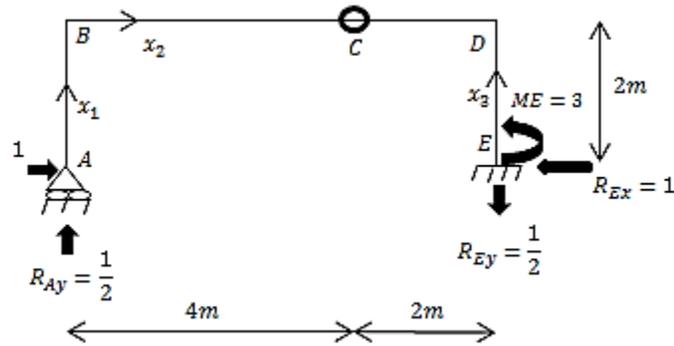
$$\frac{20}{3} - (3)(6) + R_{Ey} = 0 \Rightarrow R_{Ey} = \frac{34}{3} T \uparrow$$

$$\sum MC \text{ der} = 0$$

$$(3)(2)\left(\frac{1}{2}(2)\right) + 1.236067977(2 - 1.127322004) + (0.763932023)(2) - (34/3)(2) + ME = 0$$

$$ME = 14.0601133 T \cdot m \curvearrowright$$

EIF ②



$$\sum MC \text{ izq} = 0$$

$$-(1)(2) + R_{Ay}(4) = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \uparrow$$

$$\sum Fx = 0$$

$$1 - R_{Ex} = 0$$

$$R_{Ex} = 1 \leftarrow$$

$$\sum Fy = 0$$

$$\frac{1}{2} - R_{Ey} = 0$$

$$R_{Ey} = \frac{1}{2} \downarrow$$

$$\sum MC \text{ der} = 0$$

$$\frac{1}{2}(2) + 1(2) - M_E = 0$$

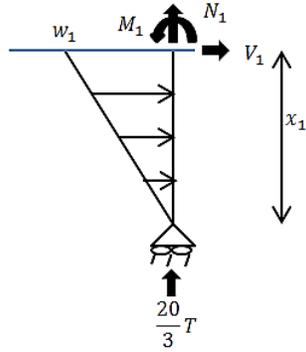
$$M_E = 3 \curvearrowright$$

Ecuaciones de momento de las EIF.

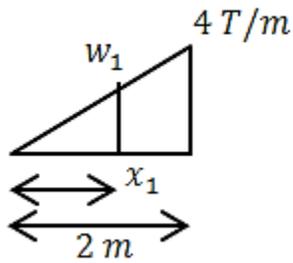
EIF ①

Miembro AB

$$0 \leq x_1 \leq 2m$$



Calculo de w_1 rotando el plano



$$\frac{4}{2} = w_1/x_1$$

$$w_1 = 2x_1$$

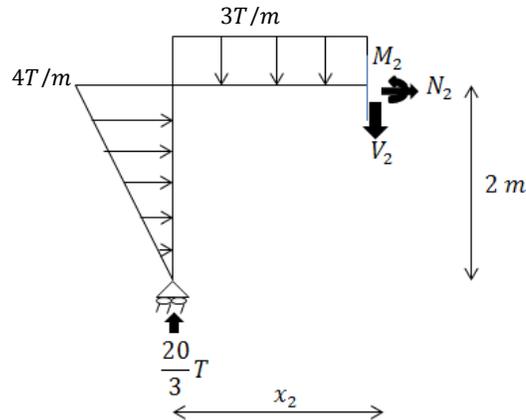
$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = - \left[\frac{(x_1)(2x_1)}{2} \right] \left(\frac{1}{3} x_1 \right) = - \frac{x_1^3}{3}$$

$$x_1 = 2, M_1 = - \frac{8}{3}$$

Miembro BD

$$0 \leq x_2 \leq 6m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = \frac{20}{3}x_2 - \left[\frac{(4)(2)}{2} \right] \left(\frac{1}{3}(2) \right) - (3)(x_2) \left(\frac{1}{2}x_2 \right)$$

$$M_2 = -\frac{8}{3} + \frac{20}{3}x_2 - \frac{3}{2}x_2^2$$

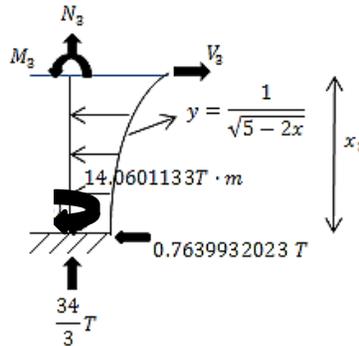
$$x_2 = 0, M_2 = -\frac{8}{3}$$

$x_2 = 4, M_2 = 0 \rightarrow$ el momento en la articulación es cero

$$x_2 = 6, M_2 = -\frac{50}{3} = -16.66$$

Miembro ED

$$0 \leq x_3 \leq 2$$



Para la curva del corte:

$$Ac = \int_0^{x_3} \frac{1}{\sqrt{5-2x}} dx = \left[-(5-2x)^{\frac{1}{2}} \right]_0^{x_3} = \sqrt{5} - \sqrt{5-2x_3}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{x_3} \frac{x}{\sqrt{5-2x}} dx}{\int_0^{x_3} \frac{1}{\sqrt{5-2x}} dx}$$

$$\int_0^{x_3} \frac{x}{\sqrt{5-2x}} dx = \left[-\frac{(\sqrt{5-2x})(x+5)}{3} \right]_0^{x_3} = \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{(\sqrt{5-2x_3})(x_3+5)}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{(\sqrt{5-2x_3})(x_3+5)}{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{5-2x_3}} \text{ a la izquierda de E}$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = 14.06011330 + 0.763932023(x_3) + (\sqrt{5} - \sqrt{5 - 2x_3}) \left(x_3 - \frac{\frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{(\sqrt{5} - 2x_3)(x_3 + 5)}{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{5 - 2x_3}} \right)$$

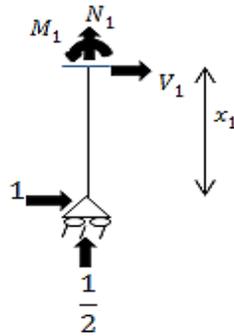
$$M_3 = \frac{1}{3}(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} + 3x_3 + 10.33333333$$

$$x_3 = 2, M_3 = 16.66$$

EIF ②

Miembro AB

$$0 \leq x_1 \leq 2m$$

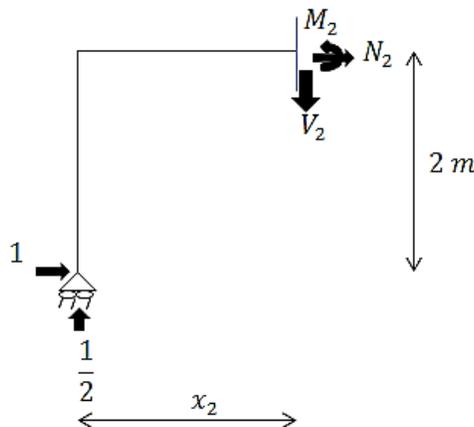


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -x_1$$

Miembro BD

$$0 \leq x_2 \leq 6m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = \frac{1}{2}x_2 - 2$$

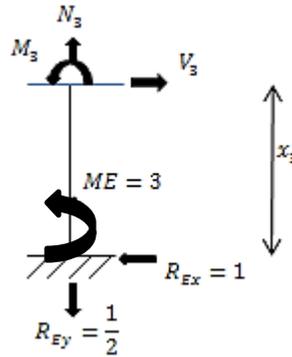
$x_2 = 4, M_2 = 0 \rightarrow$ el momento de la articulación es nulo

Miembro ED

$$0 \leq x_3 \leq 2m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = x_3 - 3$$



Sean:

$d_1 =$ Desplazamiento horizontal en A de EIF ①

$f_{11} =$ Desplazamiento horizontal en A de EIF ②

$$d_1 = \left[\int_0^2 \left(-\frac{x_1^3}{3} \right) (-x_1) dx_1 + \int_0^6 \left(-\frac{8}{3} + \frac{20}{3} x_2 - \frac{3}{2} x_2^2 \right) \left(\frac{1}{2} x_2 - 2 \right) dx_2 + \int_0^2 \left(\frac{1}{3} (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} + 3x_3 + 10.33333333 \right) (x_3 - 3) dx_3 \right] \left(\frac{1}{EI} \right)$$

Resolviendo integrales por separado:

$$\int_0^2 \left(-\frac{x_1^3}{3} \right) (-x_1) dx_1 = \int_0^2 \left(\frac{x_1^4}{3} \right) dx_1 = \left[+\frac{x_1^5}{15} \right]_0^2 = \frac{32}{15}$$

$$\int_0^6 \left(-\frac{8}{3} + \frac{20}{3} x_2 - \frac{3}{2} x_2^2 \right) \left(\frac{1}{2} x_2 - 2 \right) dx_2 = \int_0^6 \left(-\frac{3x_2^3}{4} + \frac{19x_2^2}{3} - \frac{44x_2}{3} + \frac{16}{3} \right) dx_2$$

$$= \left[-\frac{3x_2^4}{16} + \frac{19x_2^3}{9} - \frac{22x_2^2}{3} + \frac{16x_2}{3} \right]_0^6 = -19$$

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{3} (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} + 3x_3 + 10.33333333 \right) (x_3 - 3) dx_3$$

$$= \left(\int_0^2 -(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} dx_3 - \frac{2x_3^2(5 - 2x_3)^{\frac{1}{2}}}{3} + \frac{5x_3(5 - 2x_3)^{\frac{1}{2}}}{3} + 3x_3^2 + 1.33333333x_3 - 31 \right) dx_3$$

$$\int_0^2 -(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} dx_3 = \frac{1}{2} \int_0^2 -(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} (2) dx_3 = \frac{1}{2} \left[\frac{(5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_0^2 = \frac{1}{5} \left[(5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}} \right]_0^2$$

$$= -10.98033989$$

$$\int_0^2 -\frac{2x_3^2(5-2x_3)^{\frac{1}{2}}}{3} dx_3 = -\frac{2}{3} \int_0^2 x_3^2(5-2x_3)^{\frac{1}{2}} dx_3$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$u = x_3^2 \qquad dv = (5-2x_3)^{\frac{1}{2}} dx_3$$

$$du = 2x_3 dx_3 \qquad \int dv = v = \frac{-(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$= -\frac{2}{3} \left[x_3^2 \left(\frac{-(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) - \int \frac{-2x_3(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} dx_3 \right]_0^2$$

$$= -\frac{2}{3} \left[\frac{-x_3^2(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2}{3} \int x_3(5-2x_3)^{\frac{3}{2}} dx_3 \right]_0^2$$

$$\int x_3(5-2x_3)^{\frac{3}{2}} dx_3$$

$$u = x_3 \qquad dv = (5-2x_3)^{\frac{3}{2}} dx_3$$

$$du = dx_3 \qquad \int dv = v = -\frac{1}{5}(5-2x_3)^{\frac{5}{2}}$$

$$\int x_3(5-2x_3)^{\frac{3}{2}} dx_3 = -\frac{1}{5}x_3(5-2x_3)^{\frac{5}{2}} - \int -\frac{1}{5}(5-2x_3)^{\frac{5}{2}} dx_3$$

$$= -\frac{1}{5}x_3(5-2x_3)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{35}(5-2x_3)^{\frac{7}{2}}$$

$$= (5-2x_3)^{\frac{5}{2}} \left(-\frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{35}(5-2x_3) \right)$$

$$= (5-2x_3)^{\frac{5}{2}} \left(-\frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{7} \right)$$

$$= -\frac{(x_3+1)(5-2x_3)^{\frac{5}{2}}}{7}$$

$$\int_0^2 -\frac{2x_3^2(5-2x_3)^{\frac{1}{2}}}{3} dx_3 = -\frac{2}{3} \left[\frac{-x_3^2(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2}{3} \left[\frac{-(x_3+1)(5-2x_3)^{\frac{5}{2}}}{7} \right] \right]_0^2$$

$$= \left[\frac{2x_3^2(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{9} + \frac{4(x_3+1)(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}(5-2x_3)}{63} \right]_0^2$$

$$= \left[(5-2x_3)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{9}x_3^2 + \frac{4}{63}(x_3+1)(5-2x_3) \right) \right]_0^2$$

$$= \left[(5-2x_3)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{9}x_3^2 - \frac{8}{63}x_3^2 + \frac{4}{21}x_3 + \frac{20}{63} \right) \right]_0^2$$

$$= \left[(5-2x_3)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{21}x_3^2 + \frac{4}{21}x_3 + \frac{20}{63} \right) \right]_0^2$$

$$= \left[(5-2x_3)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{6}{63}x_3^2 + \frac{12}{63}x_3 + \frac{20}{63} \right) \right]_0^2$$

$$= \left[\frac{2(3x_3^2 + 6x_3 + 10)(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{63} \right]_0^2 = -2.46995$$

$$\int_0^2 \left[\frac{5x_3(5-2x_3)^{\frac{1}{2}}}{3} \right] dx_3 = \frac{5}{3} \int_0^2 x_3(5-2x_3)^{\frac{1}{2}} dx_3$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$u = x_3 \qquad dv = (5-2x_3)^{\frac{1}{2}} dx_3$$

$$du = dx_3 \qquad \int dv = v = -\frac{(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$= \frac{5}{3} \left[-\frac{x_3(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{3} \int (5-2x_3)^{\frac{3}{2}} dx_3 \right]_0^2$$

$$= \frac{5}{3} \left[-\frac{x_3(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{(5-2x_3)^{\frac{5}{2}}}{5} \right) \right]_0^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[-\frac{5x_3(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{9} - \frac{(5-2x_3)(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{9} \right]_0^2 \\
 &= \left[(5-2x_3)^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{5}{9}x_3 - \frac{1}{9}(5-2x_3) \right) \right]_0^2 \\
 &= \left[(5-2x_3)^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{9}(3x_3+5) \right) \right]_0^2 \\
 &= \left[-\frac{(3x_3+5)(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{9} \right]_0^2 = 4.989077715
 \end{aligned}$$

$$\int_0^2 (3x_3^2 + 1.33333x_3 - 31) dx_3 = [x_3^3 + 0.666665x_3^2 - 31x_3]_0^2 = -51.33334$$

$$\begin{aligned}
 \therefore d_1 &= \frac{1}{EI} \left[\frac{32}{15} - 19 - 10.98033989 - 2.46995 + 4.989077715 - 51.33334 \right] \\
 &= -76.66121884
 \end{aligned}$$

$$f_{11} = \left[\int_0^2 (-x_1)^2 dx_1 + \int_0^6 \left(\frac{1}{2}x_2 - 2 \right)^2 dx_2 + \int_0^2 (x_3 - 3)^2 dx_3 \right] \left(\frac{1}{EI} \right)$$

$$\int_0^2 (-x_1)^2 dx_1 = \left[\frac{x_1^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$\int_0^6 \left(\frac{1}{2}x_2 - 2 \right)^2 dx_2 = \int_0^6 \left(\frac{x_2^2}{4} - 2x_2 + 4 \right) dx_2 = \left[\frac{x_2^3}{12} - x_2^2 + 4x_2 \right]_0^6 = 6$$

$$\int_0^2 (x_3 - 3)^2 dx_3 = \int_0^2 (x_3^2 - 6x_3 + 9) dx_3 = \left[\frac{x_3^3}{3} - 3x_3^2 + 9x_3 \right]_0^2 = \frac{26}{3}$$

$$\therefore f_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{8}{3} + 6 + \frac{26}{3} \right] = \frac{52}{3}$$

Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica

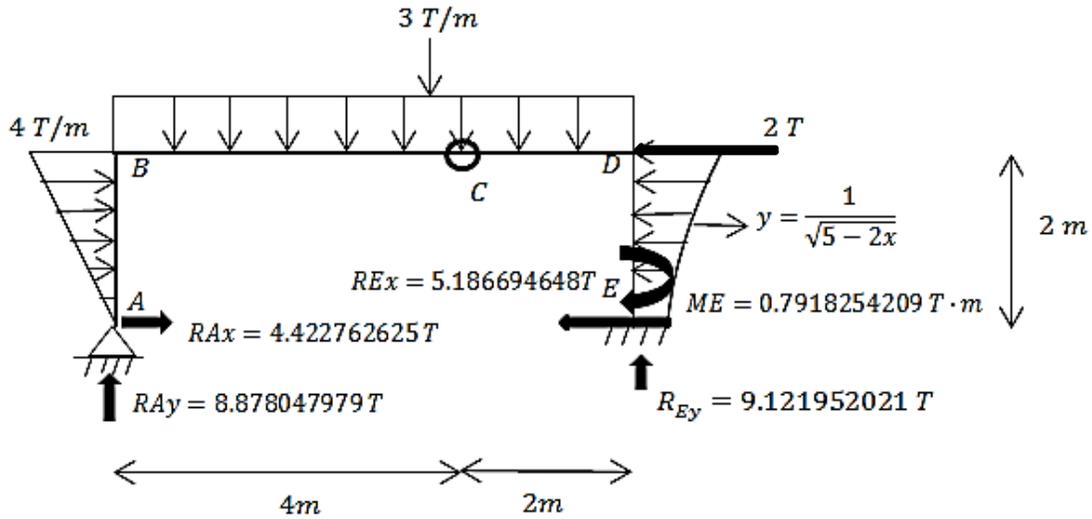
$$d_1 + f_{11}R_{Ax} = 0$$

$$-76.66121884 + \frac{52}{3}R_{Ax} = 0$$

$$R_{Ax} = \frac{76.66121884}{\frac{52}{3}}$$

$$R_{Ax} = 4.422762625 T \rightarrow$$

Calculo de las reacciones restantes del marco original



$$\sum MC_{izq} = 0$$

$$R_{Ay}(4) - 4.422762625(2) - \left[\frac{(4)(2)}{2} \right] \left(\frac{1}{3}(2) \right) - 3(4) \left(\frac{1}{2}(4) \right) = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{35.51219192}{4} = 8.878047979 T \uparrow$$

$$\sum Fx = 0$$

$$\left[\frac{(4)(2)}{2} \right] - 2 - 1.236067977 + 4.422762625 - R_{Ex} = 0$$

$$R_{Ex} = 5.186694648 T \leftarrow$$

$$\sum Fy = 0$$

$$8.878047979 - (3)(6) + R_{Ey} = 0$$

$$R_{Ey} = 9.121952021 T \uparrow$$

$$\sum MC_{der} = 0$$

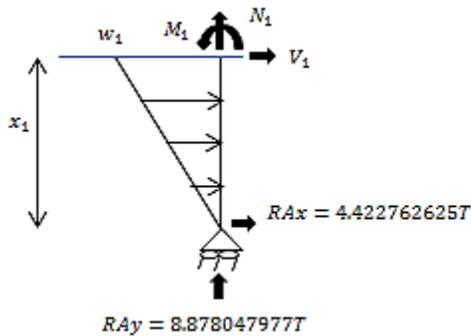
$$(3)(2) \left(\frac{1}{2}(2) \right) + 1.236067977(2 - 1.127322004) + (5.186694648)(2) - 9.121952021(2) + ME = 0$$

$$ME = 0.7918254209 T \cdot m \curvearrowright$$

Ecuaciones de momento, cortante y normal de la estructura real (marco original)

Miembro AB

$$0 \leq x_1 \leq 2m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = - \left[\frac{(x_1)(2x_1)}{2} \right] \left(\frac{1}{3} x_1 \right) - 4.422762625x_1$$

$$M_1 = - \frac{x_1^3}{3} - 4.422762625x_1$$

$$x_1 = 2, M_1 = -11.51219$$

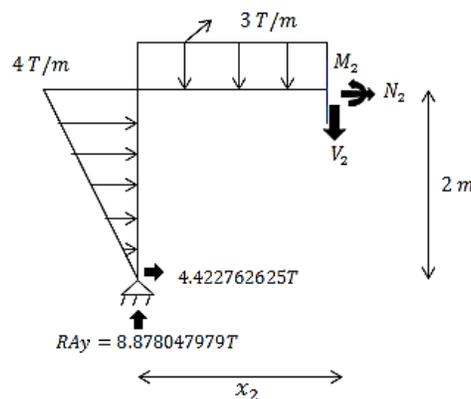
$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = -x_1^2 - 4.422762625$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N_1 = -8.878047979$$

Miembro BD

$$0 \leq x_2 \leq 6m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = 8.878047979(x_2) - 4.422762625(2) - \left[\frac{(4)(2)}{2} \right] \left(\frac{1}{3}(2) \right) - 3(x_2) \left(\frac{1}{2}x_2 \right)$$

$$M_2 = -\frac{3}{2}x_2^2 + 8.878047979x_2 - 11.51219192$$

$$x_2 = 0, M_2 = -11.51219$$

$$x_2 = 4, M_2 = 0 \rightarrow \text{El momento es nulo en la articulación}$$

$$x_2 = 6, M_2 = -12.2439$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_2} = -3x_2 + 8.878047979$$

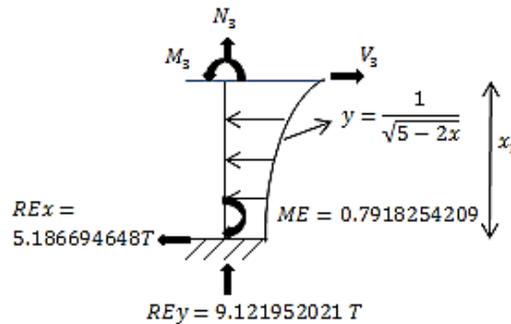
$$\sum FX = 0$$

$$\left[\frac{(4)(2)}{2} \right] + 4.422762625 + N_2 = 0$$

$$N_1 = -8.422762625$$

Miembro ED

$$0 \leq x_3 \leq 2$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = 5.186694648x_3 + 0.7918254209$$

$$+ (\sqrt{5} - \sqrt{5 - 2x_3})(x_3 - \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{(\sqrt{5 - 2x_3})(x_3 + 5)}{3})$$

$$M_3 = \frac{(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} + 7.422762625x_3 - 2.934954541$$

$$x_3 = 2, M_3 = 12.2439$$

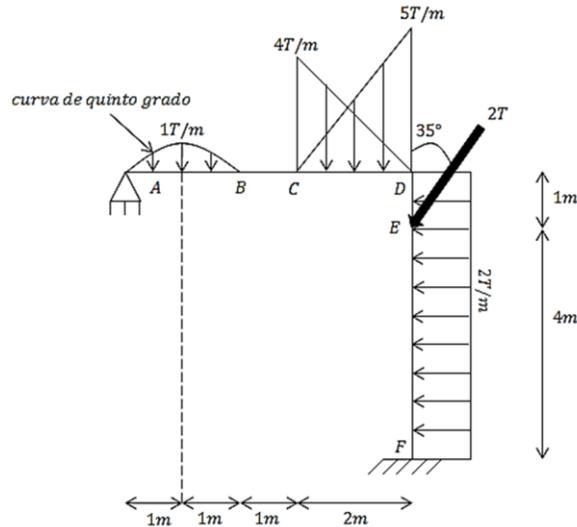
$$V_3 = \frac{dM_3}{dx_3} = 7.422762625 - (5 - 2x_3)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum Fy = 0$$

$$N_3 = -9.121952021$$

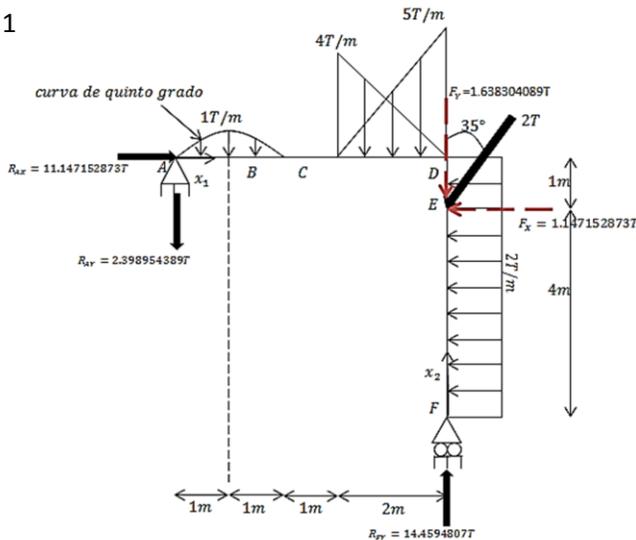
CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE FLEXIBILIDADES

3.-Del siguiente marco, determine las reacciones en los soportes por el método de flexibilidades. Obtenga las ecuaciones de cortante, momento y normal de la estructura; Use el método de trabajo virtual para calcular el Desplazamiento vertical en C.



El marco real es igual a la suma de los marcos EIF1+EIF2+EIF3.

EIF 1



Componentes rectangulares de $F = 2T$

$$F_x = 2T(\text{sen}35^\circ) = 1.147152873 T$$

$$F_y = 2T(\text{cos } 35^\circ) = 1.638304089 T$$

Cálculo de la carga concentrada de la curva de quinto grado y su brazo de palanca.

Siendo conocidos 3 puntos de la curva, la expresión más sencilla que la ajusta y pasa por dichos puntos es:

$$y = ax^5 + bx + c$$

Tomando como origen el punto A:

$$x = 0m, y = 0T$$

$$x = 1m, y = 1T$$

$$x = 2m, y = 0T$$

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE FLEXIBILIDADES

Calculamos las constantes de la ecuación de la curva resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a(0)^5 + b(0) + c &= 0 \\ a(1)^5 + b(1) + c &= 1 \\ a(2)^5 + b(2) + c &= 0 \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} 0a + 0b + c &= 0 \\ a + b + c &= 1 \\ 32a + 2b + c &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando el método de Gauss – Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 32 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 32 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -30 & -31 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{31}{30} & \frac{16}{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{16}{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Intercambiando renglones $-32R_1 + R_2$ $-\frac{1}{30}R_2$ $-\frac{31}{30}R_3 + R_2$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{16}{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{16}{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$-R_2 + R_1$ $-R_3 + R_1$

$$\therefore a = -\frac{1}{15}, b = \frac{16}{15}, c = 0$$

La ecuación de la curva es:

$$y = -\frac{1}{15}x^5 + \frac{16}{15}x$$

El brazo de palanca de la presión que describe la curva mencionada:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^2 x \left(-\frac{1}{15}x^5 + \frac{16}{15}x\right) dx}{\int_0^2 \left(-\frac{1}{15}x^5 + \frac{16}{15}x\right) dx} = \frac{\left[-\frac{1}{105}x^7 + \frac{16}{45}x^3\right]_0^2}{\left[-\frac{1}{90}x^6 + \frac{8}{15}x^2\right]_0^2} = \frac{\frac{512}{315}}{\frac{64}{45}} = \frac{8}{7}m$$

$$\bar{x} = \frac{8}{7}m \text{ a la derecha de A}$$

La carga concentrada es equivalente a:

$$A_c = \frac{64}{45} T$$

Cálculo de las reacciones EIF ①

$$\sum MA = 0$$

$$\left(\frac{64}{45} T\right) \left(\frac{8}{7}m\right) + \left[\frac{(2m)(4T/m)}{2}\right] \left(3m + \frac{1}{3}(2m)\right) + \left[\frac{(2m)(5T/m)}{2}\right] \left(3m + \frac{2}{3}(2m)\right)$$

$$+1.638304089T(5m) + 1.147152873T(1m) + (2T/m)(5m) \left(\frac{1}{2}(5m)\right) - R_{FY}(5m) = 0$$

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE FLEXIBILIDADES

$$R_{FY} = - \left[\frac{512 T \cdot m + \frac{44}{3} T \cdot m + \frac{65}{3} T \cdot m + 8.191520445 T \cdot m + 1.147152873 T \cdot m + 25 T \cdot m}{-5m} \right]$$

$$R_{FY} = \frac{72.29740348 T \cdot m}{5m} = 14.45948070 T \uparrow$$

$$\sum Fy = 0$$

$$R_{AY} - \frac{64}{45} T - \left[\frac{(2m)(4 T/m)}{2} \right] - \left[\frac{(2m)(5 T/m)}{2} \right] - 1.638304089 T + 14.45948070 T = 0$$

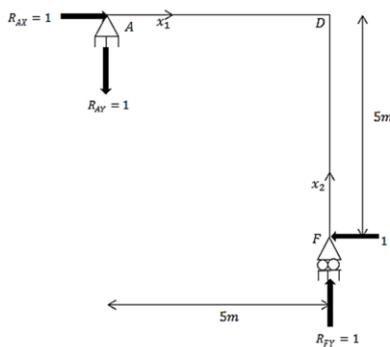
$$R_{AY} = -2.398954389 T = 2.398954389 T \downarrow$$

$$\sum Fx = 0$$

$$R_{AX} = 1.147152873 T + (5m)(2 T/m) = 11.14715287 T \rightarrow$$

Aplicación de las cargas virtuales unitarias de acuerdo a las reacciones removidas:

EIF ②



$$\sum MA = 0$$

$$-R_{FY}(5) + 1(5) = 0$$

$$R_{FY} = 1 \uparrow$$

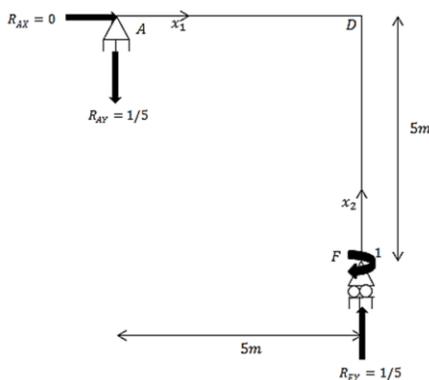
$$\sum Fx = 0$$

$$R_{AX} = 1 \rightarrow$$

$$\sum Fy = 0$$

$$R_{AY} = 1 \downarrow$$

EIF ③



$$\sum MA = 0$$

$$1 - R_{FY}(5) = 0$$

$$R_{FY} = \frac{1}{5} \uparrow$$

$$\sum Fy = 0$$

$$R_{AY} = \frac{1}{5} \downarrow$$

$$\sum Fx = 0$$

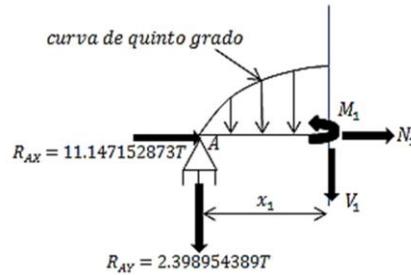
$$R_{AX} = 0$$

Ecuaciones de momentos de las EIF

EIF ①

Miembro AD

$$0 \leq x_1 \leq 2m$$



Carga concentrada equivalente de la curva de quinto grado del corte y su brazo de palanca

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{x_1} x_1 \left(-\frac{1}{15}x_1^5 + \frac{16}{15}x_1\right) dx_1}{\int_0^{x_1} \left(-\frac{1}{15}x_1^5 + \frac{16}{15}x_1\right) dx_1} = \frac{\int_0^{x_1} \left(-\frac{1}{15}x_1^6 + \frac{16}{15}x_1^2\right) dx_1}{\int_0^{x_1} \left(-\frac{1}{15}x_1^5 + \frac{16}{15}x_1\right) dx_1} = \frac{\left[-\frac{1}{105}x_1^7 + \frac{16}{45}x_1^3\right]_0^{x_1}}{\left[-\frac{1}{90}x_1^6 + \frac{8}{15}x_1^2\right]_0^{x_1}}$$

$$\bar{x} = \frac{-\frac{1}{105}x_1^7 + \frac{16}{45}x_1^3}{-\frac{1}{90}x_1^6 + \frac{8}{15}x_1^2} \text{ a la derecha de A}$$

$$Ac = -\frac{1}{90}x_1^6 + \frac{8}{15}x_1^2$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

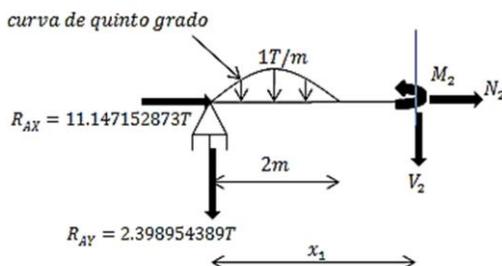
$$M_1 = -2.398954389(x_1) - \left(-\frac{1}{90}x_1^6 + \frac{8}{15}x_1^2\right) \left[x_1 - \frac{-\frac{1}{105}x_1^7 + \frac{16}{45}x_1^3}{-\frac{1}{90}x_1^6 + \frac{8}{15}x_1^2} \right]$$

$$M_1 = -2.398954389(x_1) - \frac{1}{105}x_1^7 + \frac{16}{45}x_1^3 + \frac{1}{90}x_1^7 - \frac{8}{15}x_1^3$$

$$M_1 = \frac{1}{630}x_1^7 - \frac{8}{45}x_1^3 - 2.398954389x_1$$

$$2m \leq x_1 \leq 3m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

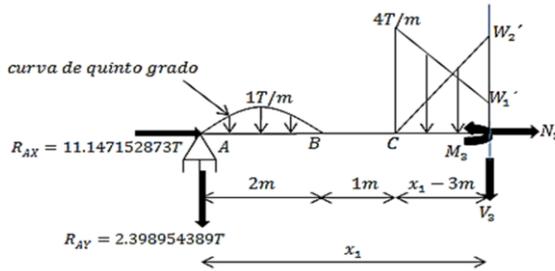


$$M_2 = -2.398954389(x_1) - \left(\frac{64}{45}\right) \left(x_1 - \frac{8}{7}\right)$$

$$M_2 = -3.821176611x_1 + \frac{512}{315}$$

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE FLEXIBILIDADES

$$3m \leq x_1 \leq 5m$$



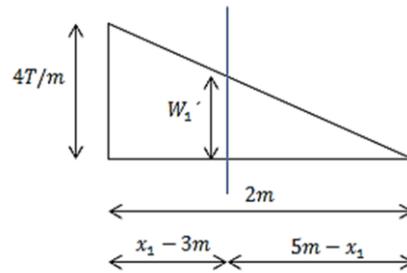
Cálculo de W'_1

$$4T/m \rightarrow 2m$$

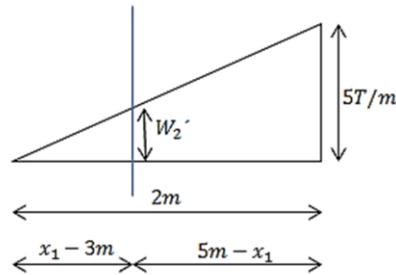
$$W'_1 \rightarrow 5m - x_1$$

$$\frac{4}{2} = \frac{W'_1}{5 - x_1}$$

$$W'_1 = 10 - 2x_1$$



Cálculo de W'_2



$$5T/m \rightarrow 2m$$

$$W'_2 \rightarrow x_1 - 3m$$

$$\frac{5}{2} = \frac{W'_2}{x_1 - 3}$$

$$W'_2 = 2.5x_1 - 7.5$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

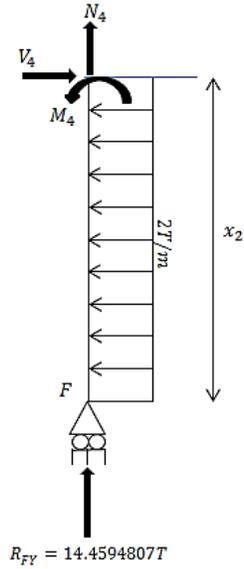
$$M_3 = -2.398954389(x_1) - \left(\frac{64}{45}\right)\left(x_1 - \frac{8}{7}\right) - (x_1 - 3)(10 - 2x_1)\left(\frac{1}{2}(x_1 - 3)\right) - \left[\frac{(x_1 - 3)(4 - (10 - 2x_1))}{2}\right]\left(\frac{2}{3}(x_1 - 3)\right) - \left[\frac{(x_1 - 3)(2.5x_1 - 7.5)}{2}\right]\left(\frac{1}{3}(x_1 - 3)\right)$$

$$M_3 = -2.398954389x_1 - \frac{64}{45}x_1 + \frac{512}{315} + x_1^3 - 11x_1^2 + 39x_1 - 45 - \frac{2}{3}x_1^3 + 6x_1^2 - 18x_1 + 18 - \frac{5}{12}x_1^3 + \frac{15}{4}x_1^2 - \frac{45}{4}x_1 + \frac{45}{4}$$

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE FLEXIBILIDADES

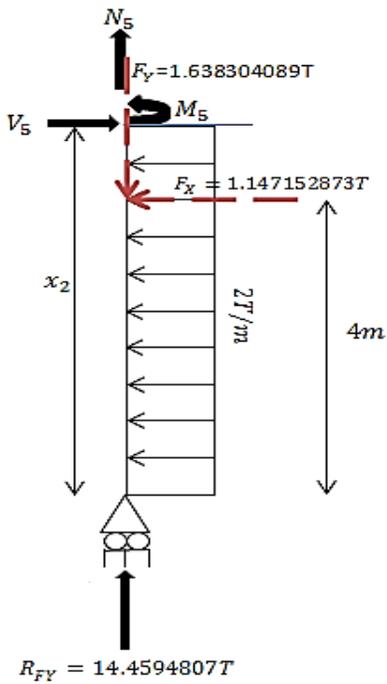
$$M_3 = -\frac{x_1^3}{12} - \frac{5x_1^2}{4} + 5.928823389x_1 - \frac{17797}{1260}$$

Miembro FD



$$0m \leq x_2 \leq 4m$$

$$M_4 = 2x_2 \left(\frac{x_2}{2} \right) = x_2^2$$



$$4m \leq x_2 \leq 5m$$

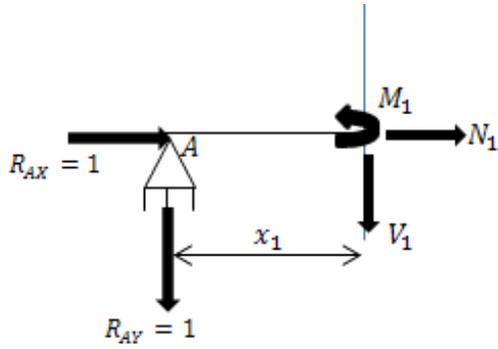
$$M_5 = 2x_2 \left(\frac{x_2}{2} \right) + 1.147152873(x_2 - 4)$$

$$= x_2^2 + 1.147152873x_2 - 4.588611492$$

EIF ②

Miembro AD

$0m \leq x_1 \leq 5m$

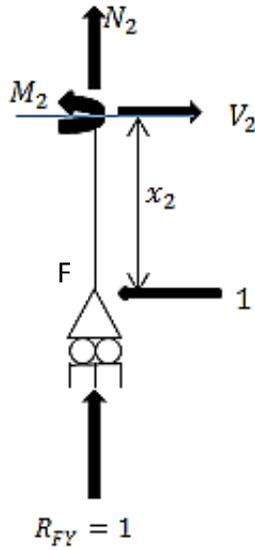


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -(1)(x_1) = -x_1$$

Miembro FD

$0m \leq x_2 \leq 5m$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = (1)(x_2) = x_2$$

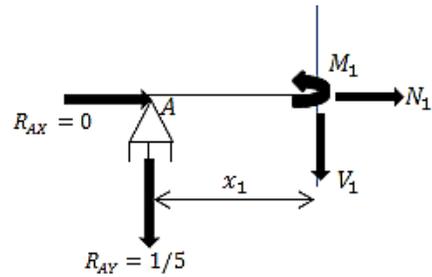
EIF ③

Miembro AD

$0m \leq x_1 \leq 5m$

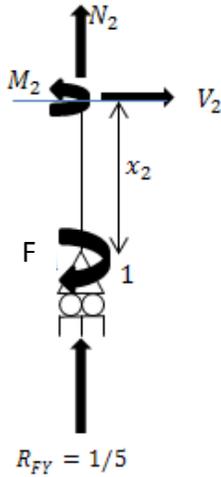
$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -\left(\frac{1}{5}\right)(x_1) = -\frac{1}{5}x_1$$



Miembro FD

$$0m \leq x_2 \leq 5m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = 1$$

Sean:

d_1 y d_2 el desplazamiento horizontal y el giro respectivamente en el punto F de la EIF ①

f_{11} y f_{21} el desplazamiento horizontal y el giro respectivamente en el punto F de la EIF ②

f_{12} y f_{22} el desplazamiento horizontal y el giro respectivamente en el punto F de la EIF ③

Los desplazamientos horizontales en la columna FD se pueden obtener con la siguiente ecuación:

$$\Delta x = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

En donde m es la ecuación de momento ficticio producido al aplicar una carga virtual unitaria horizontal en el punto donde se desea conocer un desplazamiento de dicha dirección.

Las rotaciones se siguen calculando como lo hemos venido haciendo:

$$\theta x = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

Siguiendo la misma logística que la usada en vigas, determinamos los valores de tales giros y desplazamientos horizontales:

$$\begin{aligned} d_1 = & \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(\frac{1}{630} x_1^7 - \frac{8}{45} x_1^3 - 2.398954389 x_1 \right) (-x_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_2^3 \left(-3.821176611 x_1 + \frac{512}{315} \right) (-x_1) dx_1 \\ & + \frac{1}{EI} \int_3^5 \left(-\frac{1}{12} x_1^3 - \frac{5}{4} x_1^2 + 5.928823389 x_1 - \frac{17797}{1260} \right) (-x_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^4 (x_2^2)(x_2) dx_2 \\ & + \frac{1}{EI} \int_4^5 (x_2^2 + 1.147152873 x_2 - 4.588611492)(x_2) dx_2 \end{aligned}$$

Resolviendo las integrales por separado:

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(\frac{1}{630} x_1^7 - \frac{8}{45} x_1^3 - 2.398954389 x_1 \right) (-x_1) dx_1 &= \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(-\frac{1}{630} x_1^8 + \frac{8}{45} x_1^4 + 2.398954388 x_1^2 \right) dx_1 \\ &= \frac{1}{EI} \left[-\frac{x_1^9}{5670} + \frac{8}{225} x_1^5 + 0.799651463 x_1^3 \right]_0^2 = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{5670} (2)^9 + \frac{8}{225} (2)^5 + 0.799651463 (2)^3 \right] \\ &= \frac{1}{EI} (7.444689658) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{EI} \int_2^3 \left(-3.821176611 x_1 + \frac{512}{315} \right) (-x_1) dx_1 \\ &= \frac{1}{EI} \int_2^3 \left(3.82117661 x_1^2 - \frac{512}{315} x_1 \right) dx_1 = \frac{1}{EI} \left[1.273725536 x_1^3 - \frac{256}{315} x_1^2 \right]_2^3 \\ &= \frac{1}{EI} \left[1.273725536 (3^3 - 2^3) - \frac{256}{315} (3^2 - 2^2) \right] = \frac{1}{EI} (20.13729313) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{EI} \int_3^5 \left(-\frac{1}{12} x_1^3 - \frac{5}{4} x_1^2 + 5.928823389 x_1 - \frac{17797}{1260} \right) (-x_1) dx_1 \\ &\frac{1}{EI} \int_3^5 \left(\frac{1}{12} x_1^4 + \frac{5}{4} x_1^3 - 5.928823389 x_1^2 + \frac{17797}{1260} x_1 \right) dx_1 \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{60} x_1^5 + \frac{5}{16} x_1^4 - 1.976274463 x_1^3 + \frac{17797}{2520} x_1^2 \right]_3^5 \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{60} (5^5 - 3^5) + \frac{5}{16} (5^4 - 3^4) - 1.976274463 (5^3 - 3^3) + \frac{17797}{2520} (5^2 - 3^2) \right] = \frac{1}{EI} (137.3552613) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^4 (x_2^2)(x_2) dx_2 = \frac{1}{EI} \int_0^4 (x_2^3) dx_2 = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{4} x_2^4 \right]_0^4 = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{4} \right) (4^4) \right] = \frac{1}{EI} (64)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_4^5 (x_2^2 + 1.147152873 x_2 - 4.588611492)(x_2) dx_2 &= \frac{1}{EI} \int_4^5 (x_2^3 + 1.147152873 x_2^2 - 4.588611492 x_2) dx_2 \\ &= \frac{1}{EI} \left[0.25 x_2^4 + 0.3823842910 x_2^3 - 2.294305746 x_2^2 \right]_4^5 \\ &= \frac{1}{EI} [0.25(5^4 - 4^4) + 0.3823842910(5^3 - 4^3) - 2.294305746(5^2 - 4^2)] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{EI} (94.92669003)$$

$$d_1 = \frac{1}{EI} (323.8639341)$$

$$\begin{aligned} d_2 = & \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(\frac{1}{630} x_1^7 - \frac{8}{45} x_1^3 - 2.398954389 x_1 \right) \left(-\frac{1}{5} x_1 \right) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_2^3 \left(-3.821176611 x_1 + \frac{512}{315} \right) \left(-\frac{1}{5} x_1 \right) dx_1 \\ & + \frac{1}{EI} \int_3^5 \left(-\frac{1}{12} x_1^3 - \frac{5}{4} x_1^2 + 5.928823389 x_1 - \frac{17797}{1260} \right) \left(-\frac{1}{5} x_1 \right) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^4 (x_2^2)(1) dx_2 \\ & + \frac{1}{EI} \int_4^5 (x_2^2 + 1.147152873 x_2 - 4.588611492)(1) dx_2 \end{aligned}$$

Integrando por separado:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(\frac{1}{630} x_1^7 - \frac{8}{45} x_1^3 - 2.398954389 x_1 \right) \left(-\frac{1}{5} x_1 \right) dx_1 \\ = & \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(-\frac{1}{3150} x_1^8 + \frac{8}{225} x_1^4 + 0.4797908778 x_1^2 \right) dx_1 = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{28350} x_1^9 + \frac{8}{1125} x_1^5 + 0.1599302925 x_1^3 \right]_0^2 \\ = & \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{28350} (2)^9 + \frac{8}{1125} (2)^5 + 0.1599302925 (2)^3 \right] = \frac{1}{EI} (1.488937931) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \int_2^3 \left(-3.821176611 x_1 + \frac{512}{315} \right) \left(-\frac{1}{5} x_1 \right) dx_1 = \frac{1}{EI} \int_2^3 \left(0.7642353221 x_1^2 - \frac{512}{1575} x_1 \right) dx_1 \\ = & \frac{1}{EI} \left[0.2547451074 x_1^3 - \frac{256}{1575} x_1^2 \right]_2^3 = \frac{1}{EI} \left[0.2547451074 (3^3 - 2^3) - \frac{256}{1575} (3^2 - 2^2) \right] \\ = & \frac{1}{EI} (4.027458627) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \int_3^5 \left(-\frac{1}{12} x_1^3 - \frac{5}{4} x_1^2 + 5.928823389 x_1 - \frac{17797}{1260} \right) \left(-\frac{1}{5} x_1 \right) dx_1 \\ = & \frac{1}{EI} \int_3^5 \left(\frac{1}{60} x_1^4 + \frac{1}{4} x_1^3 - 1.185764677 x_1^2 + \frac{17797}{6300} x_1 \right) dx_1 \\ = & \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{300} x_1^5 + \frac{1}{16} x_1^4 - 0.3952548926 x_1^3 + \frac{17797}{12600} x_1^2 \right]_3^5 \\ = & \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{300} (5^5 - 3^5) + \frac{1}{16} (5^4 - 3^4) - 0.3952548926 (5^3 - 3^3) + \frac{17797}{12600} (5^2 - 3^2) \right] \\ = & \frac{1}{EI} (27.47105227) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^4 (x_2^2)(1) dx_2 = \frac{1}{EI} \int_0^4 (x_2^2) dx_2 = \frac{1}{EI} \left[\frac{x_2^3}{3} \right]_0^4 = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} (4^3) \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{64}{3} \right]$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \int_4^5 (x_2^2 + 1.147152873x_2 - 4.588611492)(1) dx_2 \\ &= \frac{1}{EI} \int_4^5 (x_2^2 + 1.147152873 x_2 - 4.588611492) dx_2 \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} x_2^3 + 0.5735764364 x_2^2 - 4.588611492 x_2 \right]_4^5 \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} (5^3 - 4^3) + 0.5735764364 (5^2 - 4^2) - 4.588611492 (5 - 4) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{EI} (20.90690976)$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} (75.22769192)$$

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{1}{EI} \int_0^5 (-x_1) (-x_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 (x_2) (x_2) dx_2 \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^5 (x_1^2) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 (x_2^2) dx_2 = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} x_1^3 \right]_0^5 + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} x_2^3 \right]_0^5 = \frac{2}{EI} \left[\frac{1}{3} (5)^3 \right] \end{aligned}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{250}{3} \right)$$

$$\begin{aligned} f_{21} &= \frac{1}{EI} \int_0^5 (-x_1) \left(-\frac{1}{5} x_1 \right) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 (x_2) (1) dx_2 \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^5 \left(\frac{1}{5} x_1^2 \right) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 (x_2) dx_2 = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{15} x_1^3 \right]_0^5 + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} x_2^2 \right]_0^5 \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{15} (5^3) \right] + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (5^2) \right] = \frac{1}{EI} \left(\frac{25}{3} + \frac{25}{2} \right) \end{aligned}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \left(\frac{125}{6} \right)$$

$$f_{12} = \frac{1}{EI} \int_0^5 \left(-\frac{1}{5} x_1 \right) (-x_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 (1)(x_2) dx_2$$

$$f_{12} = \frac{1}{EI} \left(\frac{125}{6} \right)$$

$$\begin{aligned}
 f_{22} &= \frac{1}{EI} \int_0^5 \left(-\frac{1}{5}x_1\right)\left(-\frac{1}{5}x_1\right) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 (1)(1) dx_2 \\
 &= \frac{1}{EI} \int_0^5 \left(\frac{1}{25}x_1^2\right) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 dx_2 = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{75}x_1^3\right]_0^5 + \frac{1}{EI} [x_2]_0^5 \\
 &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{75}(5^3)\right] + \frac{1}{EI} [5] = \frac{1}{EI} \left[\frac{5}{3} + 5\right] \\
 f_{22} &= \frac{1}{EI} \left(\frac{20}{3}\right)
 \end{aligned}$$

Construyendo el sistema de ecuaciones de flexibilidades:

$$\begin{aligned}
 d_1 + f_{11}R_{Fx} + f_{12}M_F &= 0 \\
 d_2 + f_{21}R_{Fx} + f_{22}M_F &= 0
 \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{EI}(323.8639341) + \frac{1}{EI}\left(\frac{250}{3}\right)R_{Fx} + \frac{1}{EI}\left(\frac{125}{6}\right)M_F &= 0 \\
 \frac{1}{EI}(75.22769192) + \frac{1}{EI}\left(\frac{125}{6}\right)R_{Fx} + \frac{1}{EI}\left(\frac{20}{3}\right)M_F &= 0
 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema usando el método de Cramer:

$$\begin{aligned}
 \frac{250}{3}R_{Fx} + \frac{125}{6}M_F &= -323.8639341 \\
 \frac{125}{6}R_{Fx} + \frac{20}{3}M_F &= -75.22769192
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{250}{3} & \frac{125}{6} \\ \frac{125}{6} & \frac{20}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{Fx} \\ M_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -323.8639341 \\ -75.22769192 \end{pmatrix}$$

$$R_{Fx} = \frac{\begin{vmatrix} -323.8639341 & \frac{125}{6} \\ -75.22769192 & \frac{20}{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{250}{3} & \frac{125}{6} \\ \frac{125}{6} & \frac{20}{3} \end{vmatrix}} = \frac{[(-323.8639341)\left(\frac{20}{3}\right)] - \left[\left(\frac{125}{6}\right)(-75.22769192)\right]}{\left[\left(\frac{250}{3}\right)\left(\frac{20}{3}\right)\right] - \left[\left(\frac{125}{6}\right)\left(\frac{125}{6}\right)\right]}$$

$$R_{Fx} = -\frac{591.8493123333333}{121.5277777777778} = -4.8700743415$$

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE FLEXIBILIDADES

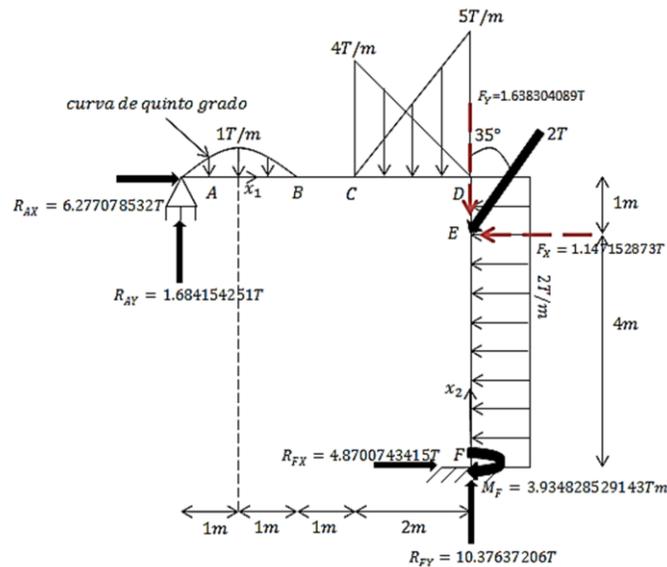
$$M_F = \frac{\begin{vmatrix} \frac{250}{3} & -323.8639341 \\ \frac{125}{6} & -75.22769192 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{250}{3} & \frac{125}{6} \\ \frac{125}{6} & \frac{20}{3} \end{vmatrix}} = \frac{\left[\left(\frac{250}{3}\right)(-75.22769192)\right] - \left[(-323.8639341)\left(\frac{125}{6}\right)\right]}{\left[\left(\frac{250}{3}\right)\left(\frac{20}{3}\right)\right] - \left[\left(\frac{125}{6}\right)\left(\frac{125}{6}\right)\right]}$$

$$M_F = \frac{478.190967083333}{121.527777777778} = 3.934828529143$$

$$\therefore R_{Fx} = 4.8700743415 T \rightarrow$$

$$M_F = 3.934828529143 T \cdot m \curvearrowright$$

Cálculo de las reacciones faltantes:



$$\sum F_x = 0$$

$$R_{Ax} = 1.147152873 + 5(2) - 4.8700743415 = 6.277078532 \rightarrow$$

$$\sum M_A = 0$$

$$\left(\frac{64}{45}\right)\left(\frac{8}{7}\right) + \left[\frac{(2)(4)}{2}\right]\left(3 + \frac{1}{3}(2)\right) + \left[\frac{(2)(5)}{2}\right]\left(3 + \frac{2}{3}(2)\right) + 1.638304089(5) + 1.147152873(1) + 2(5)\left(\frac{1}{2}(5)\right) + 3.934828529143 - 4.8700743415(5) - R_{Fy}(5) = 0$$

$$R_{Fy} = 51.881860030 / 5 = 10.37637206 T \uparrow$$

$$\sum M_F = 0$$

$$6.277078532(5) - \left(\frac{64}{45}\right)\left(5 - \frac{8}{7}\right) - \left(\frac{(2)(4)}{2}\right)\left(\frac{2}{3}(2)\right) - \left(\frac{(2)(5)}{2}\right)\left(\frac{1}{3}(2)\right) - 1.147152873(4) - 2(5)\left(\frac{1}{2}(5)\right) + 3.934828529143 + R_{AY}(5) = 0$$

$$R_{AY} = 8.420771255 / 5 = 1.684154251 T \uparrow$$

Comprobación

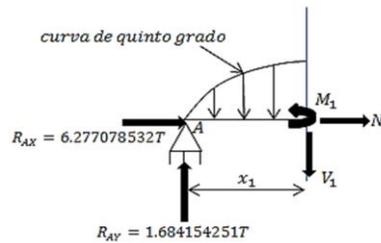
$$\sum F_y = 0$$

$$1.684154251 - \frac{64}{45} - \left(\frac{(2)(4)}{2}\right) - \left(\frac{(2)(5)}{2}\right) - 1.638304089 + 10.37637206 = 0 \quad Ok \checkmark$$

Obtenemos las ecuaciones de momento, cortante y normal para cada tramo del marco real u original.

Miembro AD

$$0m \leq x_1 \leq 2m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 1.684154251(x_1) - \left(-\frac{1}{90}x_1^6 + \frac{8}{15}x_1^2\right) \left[x_1 - \frac{-\frac{1}{105}x_1^7 + \frac{16}{45}x_1^3}{-\frac{1}{90}x_1^6 + \frac{8}{15}x_1^2} \right]$$

$$M_1 = 1.684154251x_1 - \frac{1}{105}x_1^7 + \frac{16}{45}x_1^3 + \frac{1}{90}x_1^7 - \frac{8}{15}x_1^3$$

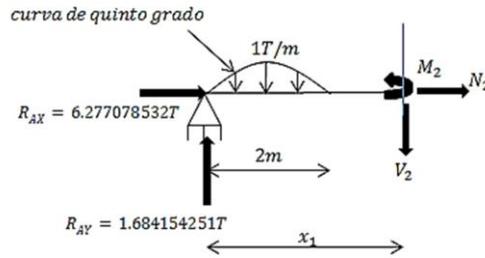
$$M_1 = \frac{1}{630}x_1^7 - \frac{8}{45}x_1^3 + 1.684154251 x_1 \quad x_1 = 2, M_1 = 2.149260883$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = \frac{1}{90}x_1^6 - \frac{8}{15}x_1^2 + 1.684154251$$

$$\sum F_x = 0$$

$$N_1 = -6.277078532 T$$

$$2m \leq x_1 \leq 3m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = 1.684154251(x_1) - \left(\frac{64}{45}\right)\left(x_1 - \frac{8}{7}\right)$$

$$M_2 = 0.261932029x_1 + \frac{512}{315}$$

$$x_1 = 2, M_2 = 2.1492$$

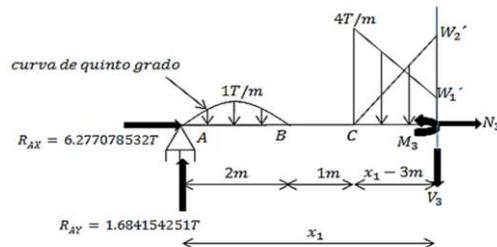
$$x_1 = 3, M_2 = 2.41119$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_1} = 0.261932029 T$$

$$\sum F_x = 0$$

$$N_2 = -6.277078532 T$$

$$3m \leq x_1 \leq 5m$$



$$w_1' = 10 - 2x_1$$

$$w_2' = 2.5x_1 - 7.5$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = 1.684154251(x_1) - \left(\frac{64}{45}\right)\left(x_1 - \frac{8}{7}\right) - (x_1 - 3)(10 - 2x_1)\left(\frac{1}{2}(x_1 - 3)\right) - \left[\frac{(x_1 - 3)(4 - (10 - 2x_1))}{2}\right]\left(\frac{2}{3}(x_1 - 3)\right) - \left[\frac{(x_1 - 3)(2.5x_1 - 7.5)}{2}\right]\left(\frac{1}{3}(x_1 - 3)\right)$$

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE FLEXIBILIDADES

$$M_3 = 1.684154251 x_1 - \frac{64}{45} x_1 + \frac{512}{315} + x_1^3 - 11x_1^2 + 39x_1 - 45 - \frac{2}{3} x_1^3 + 6x_1^2 - 18x_1 + 18 - \frac{5}{12} x_1^3 + \frac{15}{4} x_1^2 - \frac{45}{4} x_1 + \frac{45}{4}$$

$$M_3 = -\frac{x_1^3}{12} - \frac{5}{4} x_1^2 + 10.01193203 x_1 - \frac{17797}{1260}$$

$$x_1 = 3, M_3 = 2.41119$$

$$x_1 = 5, M_3 = -5.7316$$

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx_1} = -\frac{1}{4} x_1^2 - \frac{5}{2} x_1 + 10.01193203$$

$$\sum F_x = 0$$

$$N_3 = -6.277078532 T$$

$$0m \leq x_2 \leq 4m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

Miembro FD

$$M_4 = -4.8700743415(x_2) + 2(x_2) \left(\frac{x_2}{2}\right) + 3.934828529143$$

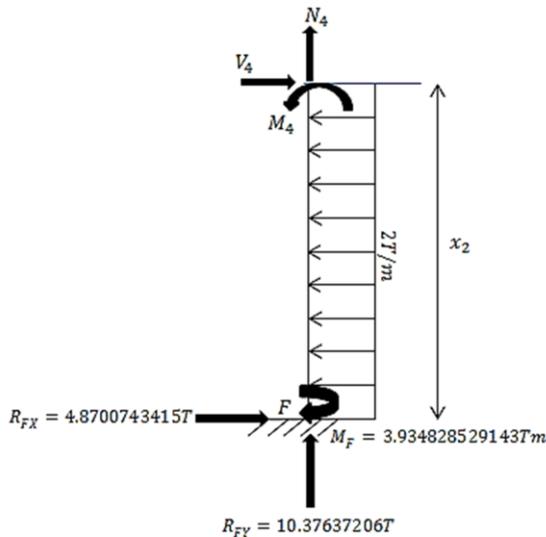
$$M_4 = x_2^2 - 4.8700743415x_2 + 3.934828529143$$

$$x_2 = 4, M_4 = 0.45453$$

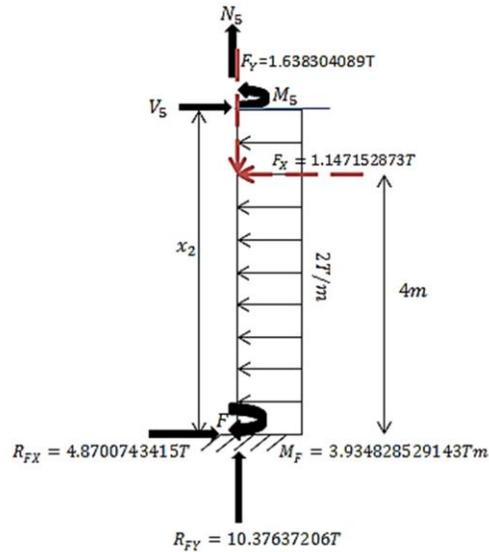
$$V_4 = \frac{dM_4}{dx_2} = 2x_2 - 4.8700743415$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N_4 = -10.37637206 T$$



$$4m \leq x_2 \leq 5m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_5 = -4.8700743415(x_2) + 2(x_2)\left(\frac{x_2}{2}\right) + 1.147152873(x_2 - 4) + 3.934828529143$$

$$M_5 = x_2^2 - 3.722921469x_2 - 0.653782963$$

$$x_2 = 5, M_5 = 5.7316$$

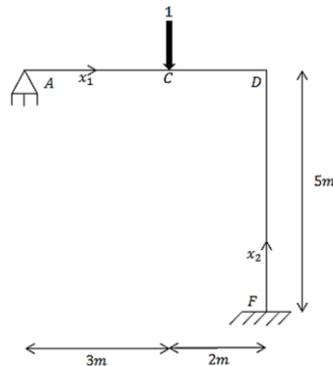
$$V_5 = \frac{dM_5}{dx_2} = 2x_2 - 3.722921469$$

$$\sum F_y = 0$$

$$10.37637206 T - 1.638304089T + N_5 = 0$$

$$N_5 = -8.738067971 T$$

Aplicación de la carga virtual unitaria en el punto y dirección deseada (en este caso se solicita calcular el desplazamiento vertical en C)

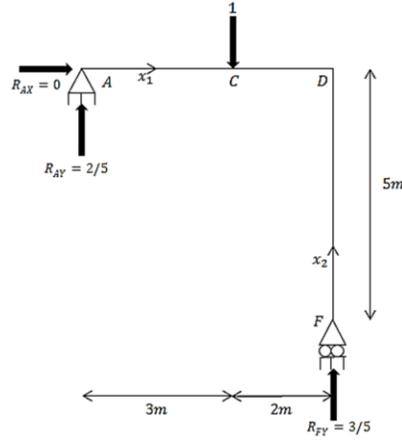


CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE FLEXIBILIDADES

Resolvemos éste nuevo marco hiperestático usando el método de las fuerzas.

El marco isostático fundamental para el marco anterior es:

EIF ①'



Obtenemos las reacciones y las ecuaciones de momento de dicho marco

$$\sum F_x = 0$$

$$R_{Ax} = 0$$

$$\sum MA = 0$$

$$(1)(3) - R_{Fy}(5) = 0$$

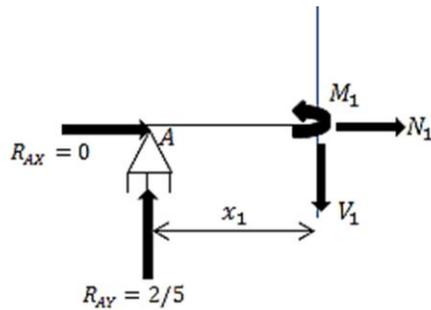
$$R_{Fy} = \frac{3}{5} \uparrow$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{Ay} - 1 + \frac{3}{5} = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{2}{5} \uparrow$$

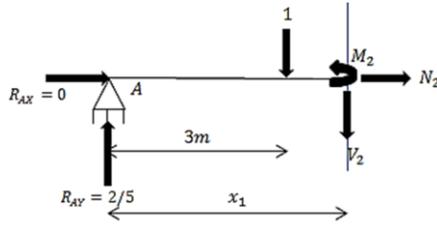
Miembro AD
 $0m \leq x_1 \leq 3m$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = \frac{2}{5}x_1$$

$$3m \leq x_1 \leq 5m$$

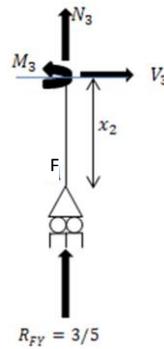


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = \frac{2}{5}(x_1) - 1(x_1 - 3)$$

$$M_2 = -\frac{3}{5}x_1 + 3$$

Miembro FD



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = 0$$

Como EIF ②=EIF ②' y EIF ③ = EIF ③'

Entonces:

$$f_{11} = f'_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{250}{3} \right)$$

$$f_{21} = f'_{21} = \frac{1}{EI} \left(\frac{125}{6} \right)$$

$$f_{12} = f'_{12} = \frac{1}{EI} \left(\frac{125}{6} \right)$$

$$f_{22} = f'_{22} = \frac{1}{EI} \left(\frac{20}{3} \right)$$

Además:

$$d'_1 = \frac{1}{EI} \int_0^3 \left(\frac{2}{5}x_1 \right) (-x_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_3^5 \left(-\frac{3}{5}x_1 + 3 \right) (-x_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 (0)(x_2) dx_2$$

$$d'_1 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{18}{5} - \frac{22}{5} + 0 \right) = \frac{1}{EI} (-8)$$

$$d'_2 = \frac{1}{EI} \int_0^3 \left(\frac{2}{5}x_1\right)\left(-\frac{1}{5}x_1\right)dx_1 + \frac{1}{EI} \int_3^5 \left(-\frac{3}{5}x_1 + 3\right)\left(-\frac{1}{5}x_1\right)dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 (0)(1)dx_2$$

$$d'_2 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{18}{25} - \frac{22}{25} + 0\right) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{8}{5}\right)$$

Construyendo el sistema de ecuaciones de flexibilidades:

$$d'_1 + f'_{11}R_{FX} + f'_{12}M_F = 0$$

$$d'_2 + f'_{21}R_{FX} + f'_{22}M_F = 0$$

Sustituyendo:

$$\frac{1}{EI}(-8) + \frac{1}{EI}\left(\frac{250}{3}\right)R_{FX} + \frac{1}{EI}\left(\frac{125}{6}\right)M_F = 0$$

$$\frac{1}{EI}\left(-\frac{8}{5}\right) + \frac{1}{EI}\left(\frac{125}{6}\right)R_{FX} + \frac{1}{EI}\left(\frac{20}{30}\right)M_F = 0$$

Simplificamos el sistema de ecuaciones y lo resolvemos usando el método de Cramer:

$$500R_{FX} + 125M_F = 48$$

$$625R_{FX} + 200M_F = 48$$

$$\begin{pmatrix} 500 & 125 \\ 625 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{FX} \\ M_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 48 \end{pmatrix}$$

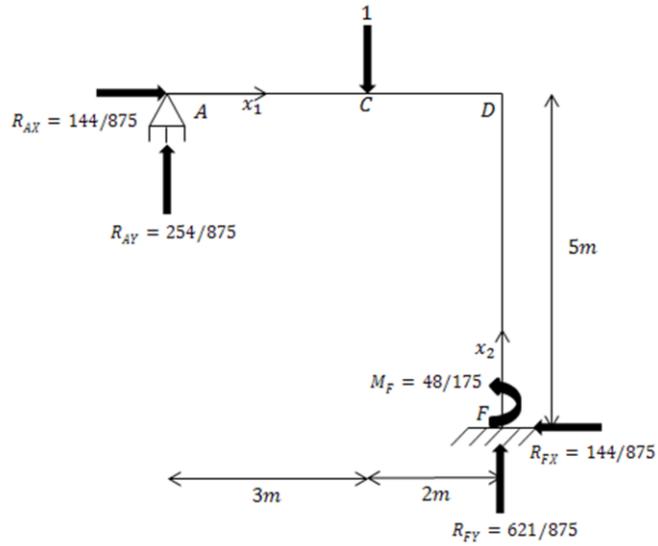
$$R_{FX} = \frac{\begin{vmatrix} 48 & 125 \\ 48 & 200 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 500 & 125 \\ 625 & 200 \end{vmatrix}} = \frac{[(48 \cdot 200) - (125 \cdot 48)]}{[(500 \cdot 200) - (125 \cdot 625)]} = \frac{3600}{21875} = \frac{144}{875} = 0.164571429$$

$$M_F = \frac{\begin{vmatrix} 500 & 48 \\ 625 & 48 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 500 & 125 \\ 625 & 200 \end{vmatrix}} = \frac{[(500 \cdot 48) - (48 \cdot 625)]}{[(500 \cdot 200) - (125 \cdot 625)]} = \frac{-6000}{21875} = -\frac{48}{175} = -0.274285714$$

$$\therefore R_{FX} = 0.164571429 \leftarrow$$

$$M_F = 0.274285714 \curvearrowright$$

Cálculo de las reacciones faltantes:



$$\sum F_x = 0$$

$$R_{Ax} = \frac{144}{875} \rightarrow$$

$$\sum M_A = 0$$

$$(1)(3) - \frac{48}{175} + \frac{144}{875}(5) - R_{Fy}(5) = 0$$

$$R_{Fy} = -\frac{\frac{621}{175}}{-5} = \frac{621}{875} \uparrow$$

$$\sum M_F = 0$$

$$R_{Ay}(5) - (1)(2) - \frac{48}{175} + \frac{144}{875}(5) = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{\frac{254}{175}}{5} = \frac{254}{875} \uparrow$$

Comprobación:

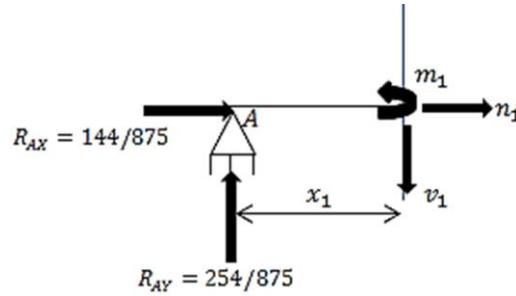
$$\sum F_y = 0$$

$$\frac{254}{875} - 1 + \frac{621}{875} = 0 \quad \text{ok } \checkmark$$

Establecemos las ecuaciones de momento del marco anterior, las cuales serian las ecuaciones de momento ficticio que deben usarse para calcular el desplazamiento requerido del marco original:

Miembro AD

$$0 \leq x_1 \leq 3m$$

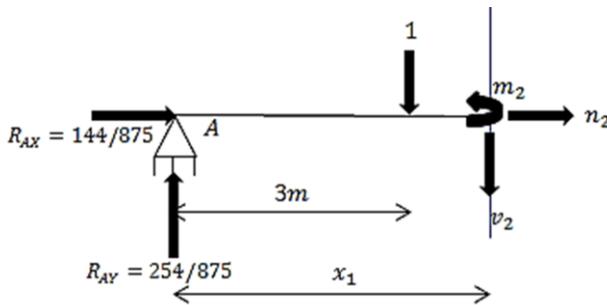


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$m_1 = \left(\frac{254}{875}\right)(x_1) = \frac{254}{875}x_1$$

$$x_1 = 3, m_1 = \frac{762}{875}$$

$$3m \leq x_1 \leq 5m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$m_2 = \left(\frac{254}{875}\right)(x_1) - (1)(x_1 - 3)$$

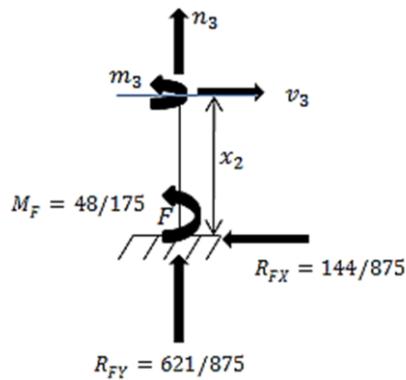
$$m_2 = -\frac{621}{875}x_1 + 3$$

$$x_1 = 3, m_2 = \frac{762}{875}$$

$$x_1 = 5, m_2 = -\frac{46}{175}$$

Miembro FD

$$0 \leq x_1 \leq 3m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$m_3 = -\frac{48}{175} + \frac{144}{875}(x_2) = \frac{144}{875}x_2 - \frac{48}{175}$$

$$x_2 = 5, m_3 = \frac{46}{175}$$

Aplicando la ecuación:

$$Yx = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

$$\delta_{vc} = \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(\frac{1}{630} x_1^7 - \frac{8}{45} x_1^3 + 1.684154251x_1 \right) \left(\frac{254}{875} x_1 \right) dx_1$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_2^3 \left(0.2619320029x_1 + \frac{512}{315} \right) \left(\frac{254}{875} x_1 \right) dx_1$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_3^5 \left(-\frac{1}{12} x_1^3 - \frac{5}{4} x_1^2 + 10.01193203x_1 - \frac{17797}{1260} \right) \left(-\frac{621}{875} x_1 + 3 \right) dx_1$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_0^4 (x_2^2 - 4.87007434415x_2 + 3.934828529143) \left(\frac{144}{875} x_2 - \frac{48}{175} \right) dx_2$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_4^5 (x_2^2 - 3.722921469x_2 - 0.653782963) \left(\frac{144}{875} x_2 - \frac{48}{175} \right) dx_2$$

Integrando por separado

$$\frac{1}{EI} \int_0^2 \left(\frac{1}{630} x_1^7 - \frac{8}{45} x_1^3 + 1.684154251x_1 \right) \left(\frac{254}{875} x_1 \right) dx_1$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(\frac{127}{275625} x_1^8 - \frac{2032}{39375} x_1^4 + 0.4888859197x_1^2 \right) dx_1$$

$$= \frac{1}{EI} [0.000051197 x_1^9 - 0.01032126984x_1^5 + 0.1629619732x_1^3]_0^2 = \frac{1}{EI} (0.9996278997)$$

$$\frac{1}{EI} \int_2^3 \left(0.2619320029x_1 + \frac{512}{315} \right) \left(\frac{254}{875} x_1 \right) dx_1 = \frac{1}{EI} \int_2^3 (0.07603511855x_1^2 + 0.4718294784x_1) dx_1$$

$$\frac{1}{EI} [0.02534503951x_1^3 + 0.2359147392x_1^2]_2^3 = \frac{1}{EI} (1.661129447)$$

$$\frac{1}{EI} \int_3^5 \left(-\frac{1}{12} x_1^3 - \frac{5}{4} x_1^2 + 10.01193203x_1 - \frac{17797}{1260} \right) \left(-\frac{621}{875} x_1 + 3 \right) dx_1$$

$$\frac{1}{EI} \int_3^5 \left(\frac{207}{3500} x_1^4 + \frac{223}{350} x_1^3 - 10.85561118x_1^2 + 40.06022879x_1 - \frac{17797}{420} x_1 \right) dx_1$$

$$\frac{1}{EI} \left[\frac{207}{17500} x_1^5 + \frac{223}{1400} x_1^4 - 3.618537063x_1^3 + 20.03011437x_1^2 - \frac{17797}{420} x_1 \right]_3^5 = \frac{1}{EI} (1.858950141)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \int_0^4 (x_2^2 - 4.87007434415x_2 + 3.934828529143) \left(\frac{144}{875}x_2 - \frac{48}{175} \right) dx_2 \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^4 \left(\frac{144}{875}x_2^3 - 1.075760805x_2^2 + 1.983352171x_2 - 1.079267253 \right) dx_2 \\ & \frac{1}{EI} \left[\frac{36}{875}x_2^4 - 0.3585869352x_2^3 + 0.9916760857x_2^2 - 1.079267253x_2 \right]_0^4 = \frac{1}{EI} (-0.8672440723) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \int_4^5 (x_2^2 - 3.722921469x_2 - 0.653782963) \left(\frac{144}{875}x_2 - \frac{48}{175} \right) dx_2 \\ & \frac{1}{EI} \int_4^5 \left(\frac{144}{875}x_2^3 - 0.8869722188x_2^2 + 0.9135501781x_2 + 0.1793233269 \right) dx_2 \\ & \frac{1}{EI} \left[\frac{36}{875}x_2^4 - 0.2956574062x_2^3 + 0.4567750890x_2^2 + 0.1793233269x_2 \right]_4^5 = \frac{1}{EI} (1.436911630) \end{aligned}$$

Deformación total en el punto:

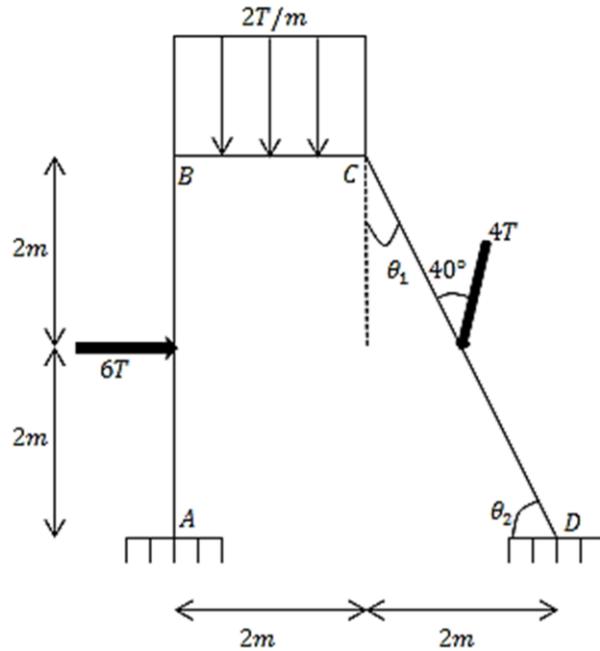
$$\delta_{VC} = \frac{1}{EI} (0.9996278997 + 1.661129447 + 1.858950141 - 0.8672440723 + 1.436911630)$$

$$\delta_{VC} = \frac{1}{EI} (5.089375045)$$

El signo positivo indica que el sentido propuesto de la fuerza virtual unitaria es correcto.

$$\therefore \delta_{VC} = \frac{1}{EI} (5.089375045) \downarrow (\text{hacia abajo})$$

4.-Use el método de flexibilidades para calcular las reacciones en los empotes del siguiente marco. Deduzca las ecuaciones de momento, cortante y normal de la estructura.



SOLUCIÓN:

Por método de superposición, la estructura real es igual a la suma de las siguientes estructuras:

$$ER = EIF1 + EIF2 + EIF3 + EIF4$$

Donde:

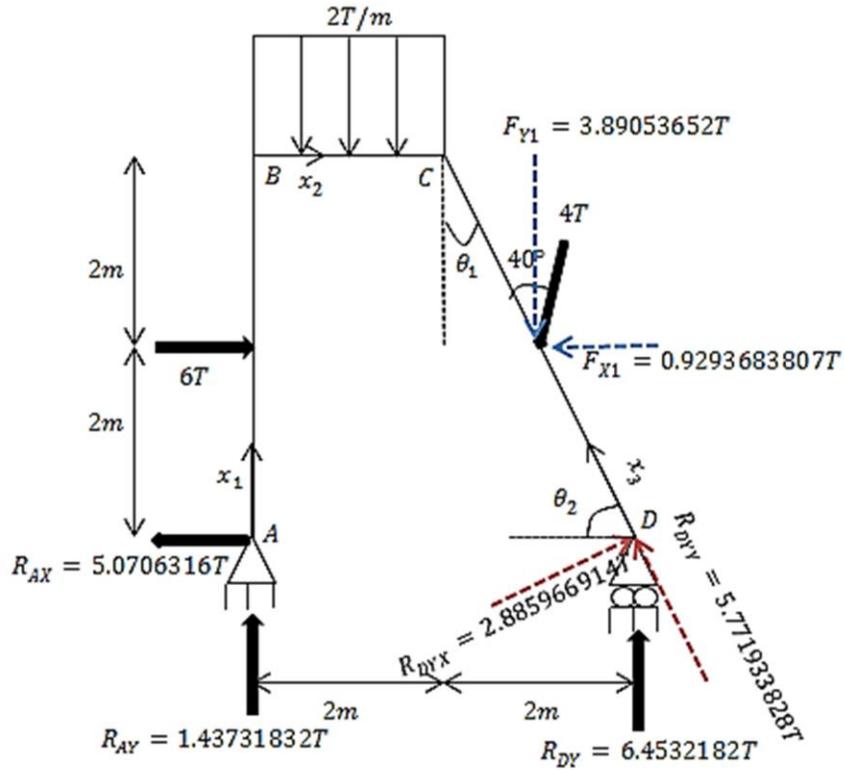
ER es la estructura real, es decir el marco original.

EIF 1 es el marco isostático fundamental.

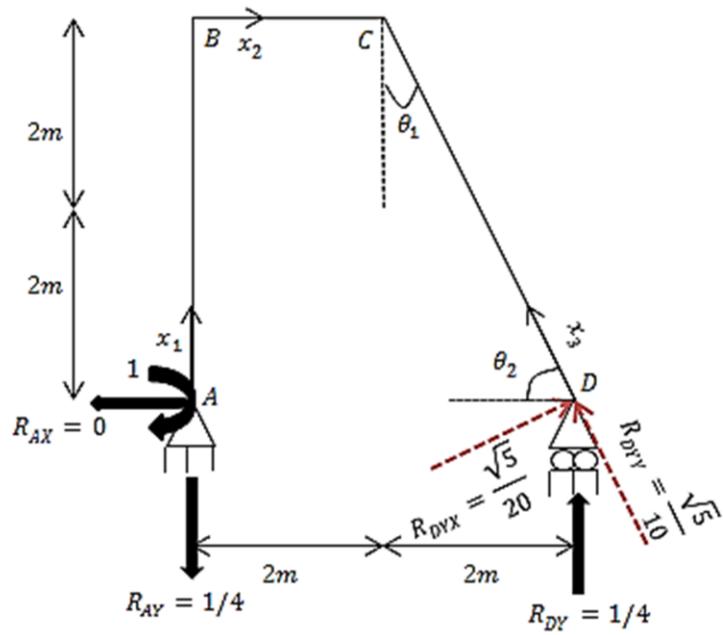
EIF 2, EIF 3, EIF 4 son las estructuras redundantes.

Las últimas cuatro estructuras anteriores pueden considerarse imaginarias.

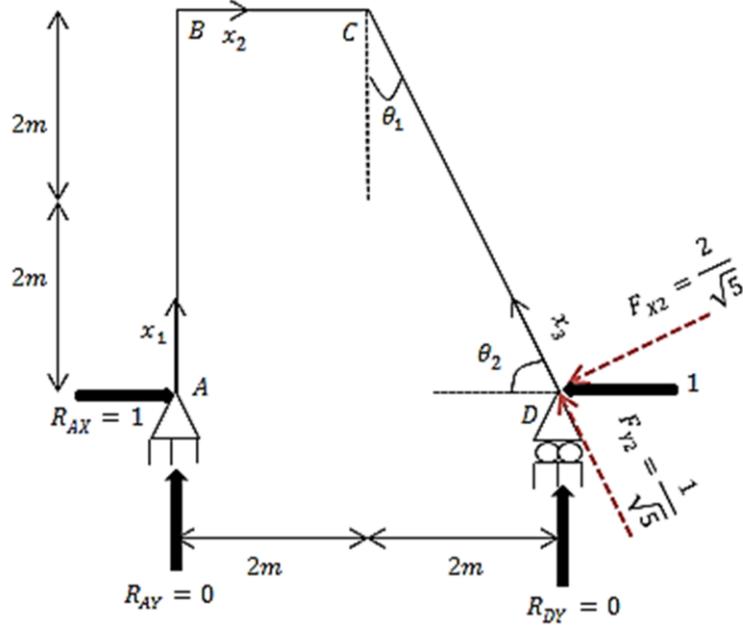
EIF 1:



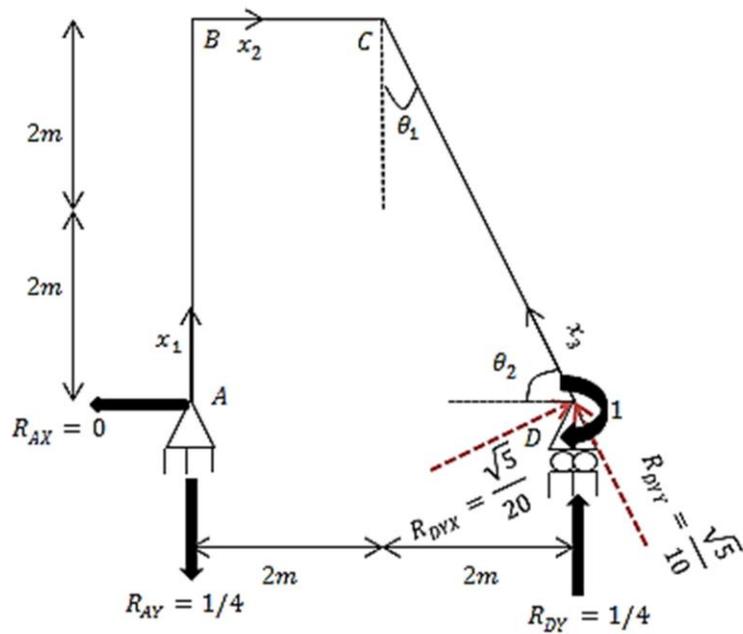
EIF 2:



EIF 3:

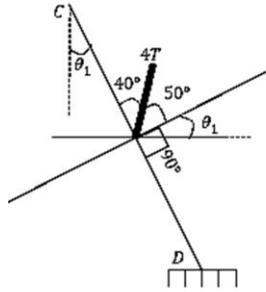


EIF 4:

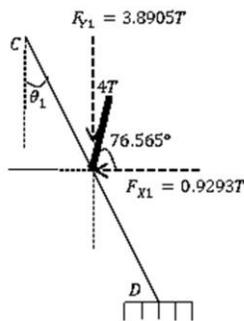


Reacciones de EIF 1:

Componentes rectangulares de $F_1=4T$



$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{4}\right) = 26.565^\circ$$



$$F_{Y1} = 4 T * \sin(76.565^\circ) = 3.89053652T$$

$$F_{X1} = 4 T * \cos(76.565^\circ) = 0.9293683807T$$

$$\sum FX = 0$$

$$6T - 0.9293683807T - R_{AX} = 0$$

$$R_{AX} = 5.0706316T \quad \leftarrow$$

$$\sum MA = 0$$

$$6(2) + (2)(2)\left(\frac{1}{2}(2)\right) + 3.89053652(3) - 0.9293683807(2) - R_{DY}(4) = 0$$

$$R_{DY} = \frac{25.8128728}{4} = 6.4532182T \quad \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} - 4 - 3.89053652 + 6.4532182 = 0$$

$$R_{AY} = 1.43731832T \uparrow$$

Reacciones de EIF2:

$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} = 0$$

$$\sum MA = 0$$

$$1 - R_{DY}(4) = 0$$

$$R_{DY} = \frac{1}{4} \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} = \frac{1}{4} \downarrow$$

Reacciones de EIF3:

$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} = 1 \rightarrow$$

$$\sum MA = 0$$

$$R_{DY} = 0$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} = 0$$

Reacciones de EIF4:

$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} = 0$$

$$\sum MA = 0$$

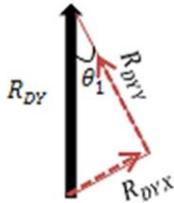
$$1 - R_{DY}(4) = 0$$

$$R_{DY} = \frac{1}{4} \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} = \frac{1}{4} \downarrow$$

Componentes rectangulares de la fuerza R_{DY} :



$$R_{DYX} = R_{DY} * \sin \theta_1$$

$$R_{DYY} = R_{DY} * \cos \theta_1$$

Longitud de la columna inclinada:

$$h = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\sin \theta_1 = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \cos \theta_1 = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Si } R_{DY} = 6.4532182T$$

$$R_{DYX} = 6.4532182T * \frac{1}{\sqrt{5}} = 2.885966914T$$

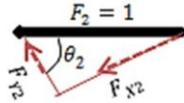
$$R_{DYY} = 6.4532182T * \frac{2}{\sqrt{5}} = 5.771933828T$$

$$\text{Si } R_{DY} = \frac{1}{4}$$

$$R_{DYX} = \frac{1}{4} * \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{20}$$

$$R_{DYY} = \frac{1}{4} * \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

Componentes rectangulares de la fuerza $F_2=1$:



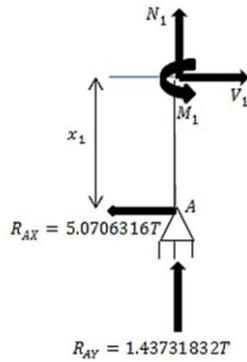
$$F_{X2} = F_2 * \sin \theta_2 = 1 * \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$F_{Y2} = F_2 * \cos \theta_2 = 1 * \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Ecuaciones de momento de las EIF:

EIF1:

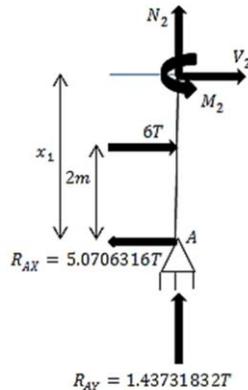
Miembro AB:



$$0 \leq x_1 \leq 2m$$

$$\sum M \text{ corte} = 0$$

$$M_1 = 5.0706316x_1$$



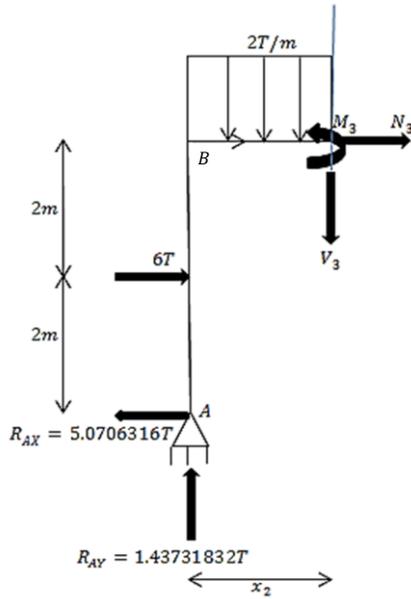
$$2m \leq x_1 \leq 4m$$

$$\sum M \text{ corte} = 0$$

$$M_2 = 5.0706316x_1 - 6(x_1 - 2)$$

$$M_2 = 12 - 0.9293683x_1$$

Miembro BC:



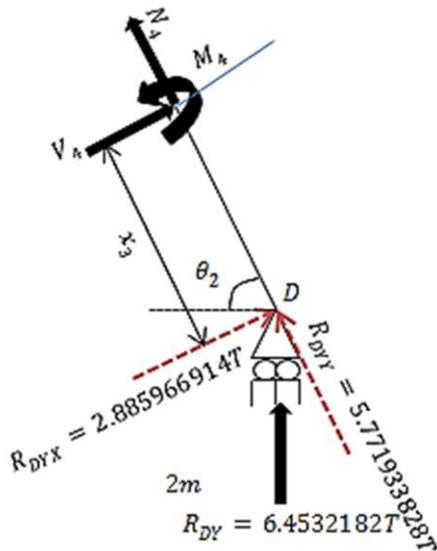
$$0 \leq x_2 \leq 2m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = 1.43731832x_2 + 5.0706316(4) - 6(2) - 2(x_2)\left(\frac{x_2}{2}\right)$$

$$M_3 = -x_2^2 + 1.43731832x_2 + 8.282526$$

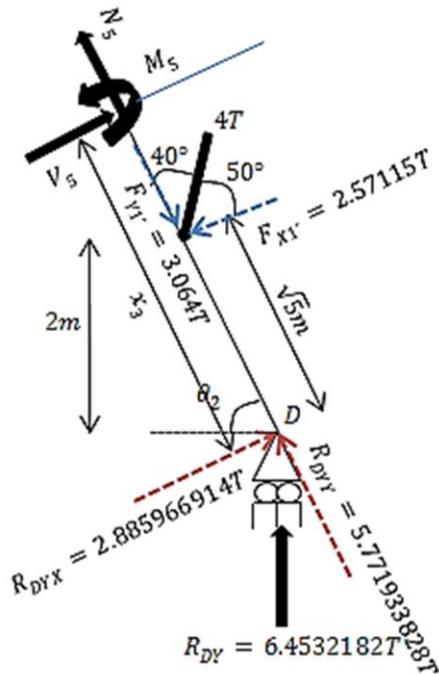
Miembro DC:



$$0 \leq x_3 \leq \sqrt{5}m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_4 = -2.885966914x_3$$



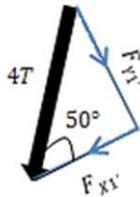
$$\sqrt{5}m \leq x_3 \leq 2\sqrt{5}m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_5 = -2.885966914x_3 + 2.571150439(x_3 - \sqrt{5})$$

$$M_5 = -0.314816475x_3 - 5.749267162$$

Las componentes rectangulares de $F_1=4T$ se obtuvieron de:



$$F_{Y1}' = 4(\sin 50^\circ) = 3.064177772T$$

$$F_{X1}' = 4(\cos 50^\circ) = 2.571150439T$$

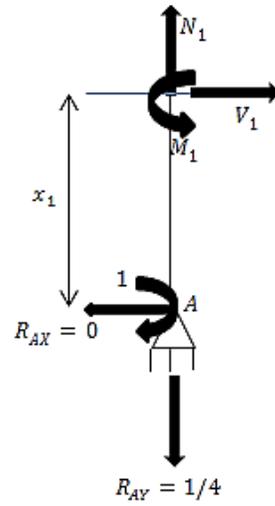
EIF2:

Miembro AB:

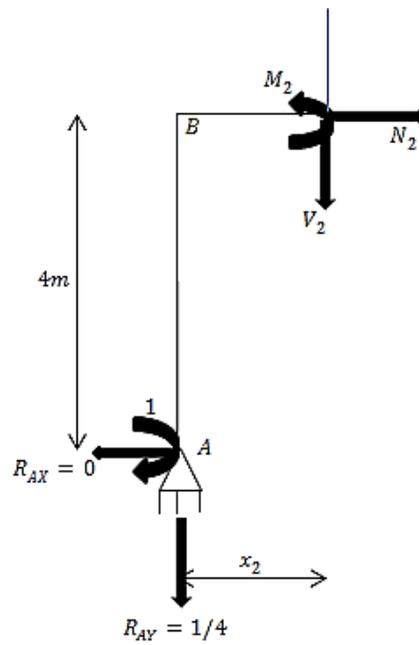
$$0 \leq x_1 \leq 4m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 1$$



Miembro BC:

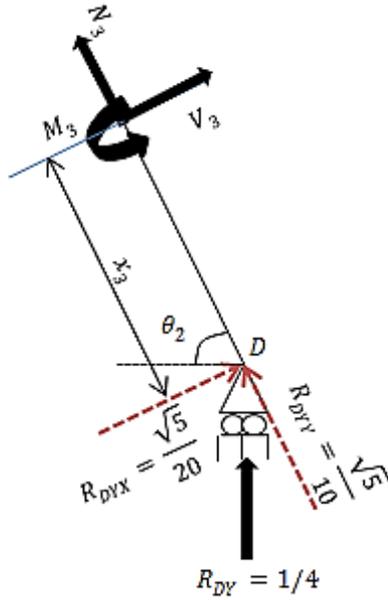


$$0 \leq x_2 \leq 2m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = 1 - \frac{1}{4}x_2$$

Miembro DC:



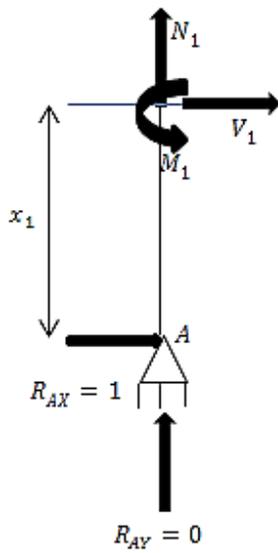
$$0 \leq x_3 \leq 2\sqrt{5}m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = -\frac{\sqrt{5}}{20}x_3$$

EIF3:

Miembro AB:

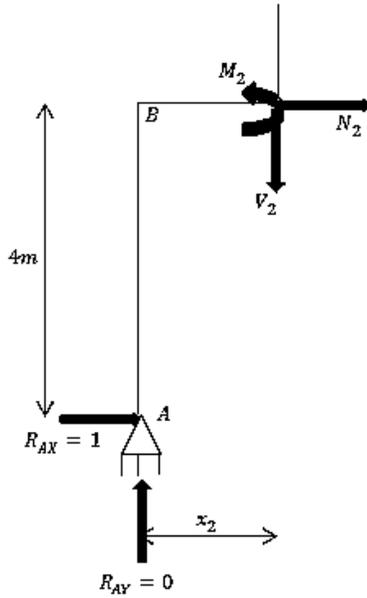


$$0 \leq x_1 \leq 4m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -x_1$$

Miembro BC:

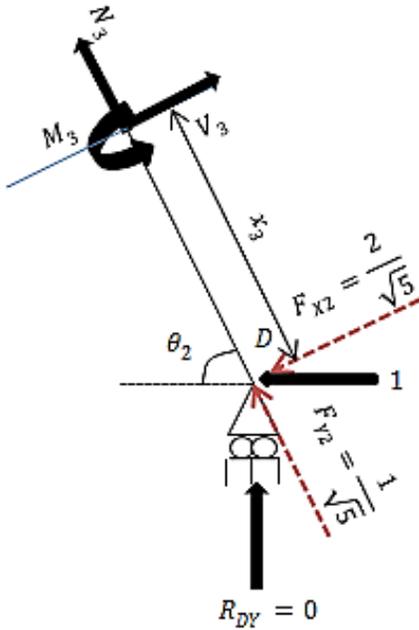


$$0 \leq x_2 \leq 2m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = -4$$

Miembro DC:



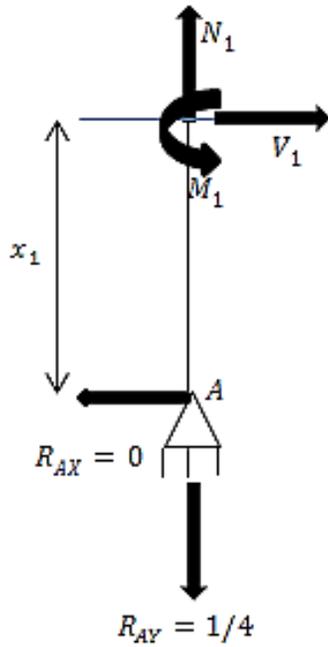
$$0 \leq x_3 \leq 2\sqrt{5}m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = \frac{2}{\sqrt{5}}x_3$$

EIF4:

Miembro AB:

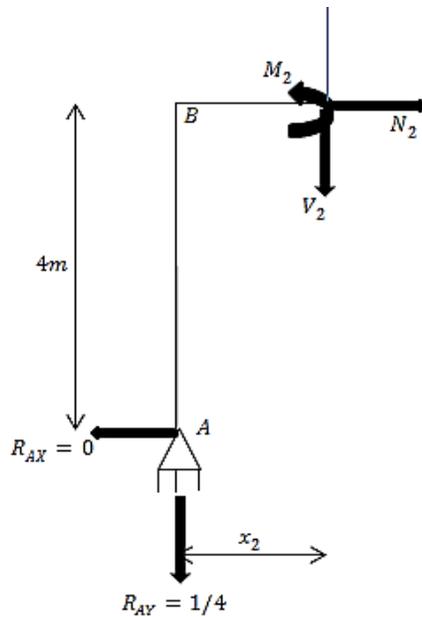


$$0 \leq x_1 \leq 4m$$

$$\sum M \text{ corte} = 0$$

$$M_1 = 0$$

Miembro BC:

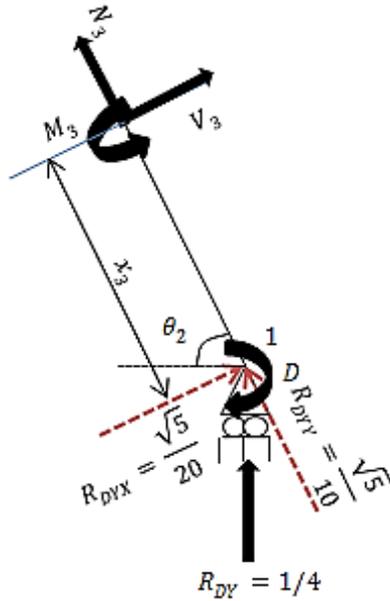


$$0 \leq x_2 \leq 2m$$

$$\sum M \text{ corte} = 0$$

$$M_2 = -\frac{1}{4}x_2$$

Miembro DC:



$$0 \leq x_3 \leq 2\sqrt{5}m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = 1 - \frac{\sqrt{5}}{20}x_3$$

Sean:

$$d_1 = \text{Giro en A de EIF 1}$$

$$d_2 = \text{Desplazamiento Horizontal en D de EIF 1}$$

$$d_3 = \text{Giro en D de EIF 1}$$

$$f_{11} = \text{Giro en A de EIF 2}$$

$$f_{21} = \text{Desplazamiento Horizontal en D de EIF 2}$$

$$f_{31} = \text{Giro en D de EIF 2}$$

$$f_{12} = \text{Giro en A de EIF 3}$$

$$f_{22} = \text{Desplazamiento Horizontal en D de EIF 3}$$

$$f_{32} = \text{Giro en D de EIF 3}$$

$$f_{13} = \text{Giro en A de EIF 4}$$

$$f_{23} = \text{Desplazamiento Horizontal en D de EIF 4}$$

$$f_{33} = \text{Giro en D de EIF 4}$$

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^2 (5.0706316x_1)(1)dx_1 + \int_2^4 (12 - 0.9293683x_1)(1)dx_1 \right. \\ \left. + \int_0^2 (-x_2^2 + 1.43731832x_2 + 8.282526) \left(1 - \frac{1}{4}x_2\right) dx_2 \right. \\ \left. + \int_0^{\sqrt{5}} (-2.885966914x_3) \left(-\frac{\sqrt{5}}{20}x_3\right) dx_3 \right. \\ \left. + \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}} (-0.314816475x_3 - 5.749267162) \left(-\frac{\sqrt{5}}{20}x_3\right) dx_3 \right] = \frac{48.1802}{EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^2 (5.0706316x_1)(-x_1)dx_1 + \int_2^4 (12 - 0.9293683x_1)(-x_1)dx_1 \right. \\ \left. + \int_0^2 (-x_2^2 + 1.43731832x_2 + 8.282526)(-4)dx_2 \right. \\ \left. + \int_0^{\sqrt{5}} (-2.885966914x_3) \left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_3\right) dx_3 \right. \\ \left. + \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}} (-0.314816475x_3 - 5.749267162) \left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_3\right) dx_3 \right] = -\frac{190.798}{EI}$$

$$d_3 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^2 (5.0706316x_1)(0)dx_1 + \int_2^4 (12 - 0.9293683x_1)(0)dx_1 \right. \\ \left. + \int_0^2 (-x_2^2 + 1.43731832x_2 + 8.282526) \left(-\frac{1}{4}x_2\right) dx_2 \right. \\ \left. + \int_0^{\sqrt{5}} (-2.885966914x_3) \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{20}x_3\right) dx_3 \right. \\ \left. + \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}} (-0.314816475x_3 - 5.749267162) \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{20}x_3\right) dx_3 \right] \\ = -\frac{19.5897}{EI}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^4 (1)^2 dx_1 + \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{4}x_2\right)^2 dx_2 + \int_0^{2\sqrt{5}} \left(-\frac{\sqrt{5}}{20}x_3\right)^2 dx_3 \right] = \frac{5.53934}{EI}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^4 (1)(-x_1)dx_1 + \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{4}x_2\right)(-4)dx_2 + \int_0^{2\sqrt{5}} \left(-\frac{\sqrt{5}}{20}x_3\right) \left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_3\right) dx_3 \right] \\ = -\frac{16.9814}{EI}$$

$$f_{31} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^4 (1)(0) dx_1 + \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{4}x_2\right) \left(-\frac{1}{4}x_2\right) dx_2 + \int_0^{2\sqrt{5}} \left(-\frac{\sqrt{5}}{20}x_3\right) \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{20}x_3\right) dx_3 \right] = -\frac{1.07869}{EI}$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{16.9814}{EI}$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^4 (-x_1)^2 dx_1 + \int_0^2 (-4)^2 dx_2 + \int_0^{2\sqrt{5}} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_3\right)^2 dx_3 \right] = \frac{77.1847}{EI}$$

$$f_{32} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^4 (-x_1)(0) dx_1 + \int_0^2 (-4) \left(-\frac{1}{4}x_2\right) dx_2 + \int_0^{2\sqrt{5}} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_3\right) \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{20}x_3\right) dx_3 \right] = \frac{7.96285}{EI}$$

$$f_{13} = f_{31} = -\frac{1.07869}{EI}$$

$$f_{23} = f_{32} = \frac{7.96285}{EI}$$

$$f_{33} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^4 (0)^2 dx_1 + \int_0^2 \left(-\frac{1}{4}x_2\right)^2 dx_2 + \int_0^{2\sqrt{5}} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{20}x_3\right)^2 dx_3 \right] = \frac{2.77541}{EI}$$

Planteamiento del sistema de ecuaciones de compatibilidad geométrica:

$$d_1 + f_{11}M_A + f_{12}R_{DX} + f_{13}M_D = 0$$

$$d_2 + f_{21}M_A + f_{22}R_{DX} + f_{23}M_D = 0$$

$$d_3 + f_{31}M_A + f_{32}R_{DX} + f_{33}M_D = 0$$

Sustituyendo:

$$\frac{48.1802}{EI} + \frac{5.53934}{EI}M_A - \frac{16.9814}{EI}R_{DX} - \frac{1.07869}{EI}M_D = 0$$

$$-\frac{190.798}{EI} - \frac{16.9814}{EI}M_A + \frac{77.1847}{EI}R_{DX} + \frac{7.96285}{EI}M_D = 0$$

$$-\frac{19.5897}{EI} - \frac{1.07869}{EI}M_A + \frac{7.96285}{EI}R_{DX} + \frac{2.77541}{EI}M_D = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales:

$$M_A = -3.92685; R_{DX} = 1.47341; M_D = 1.30478$$

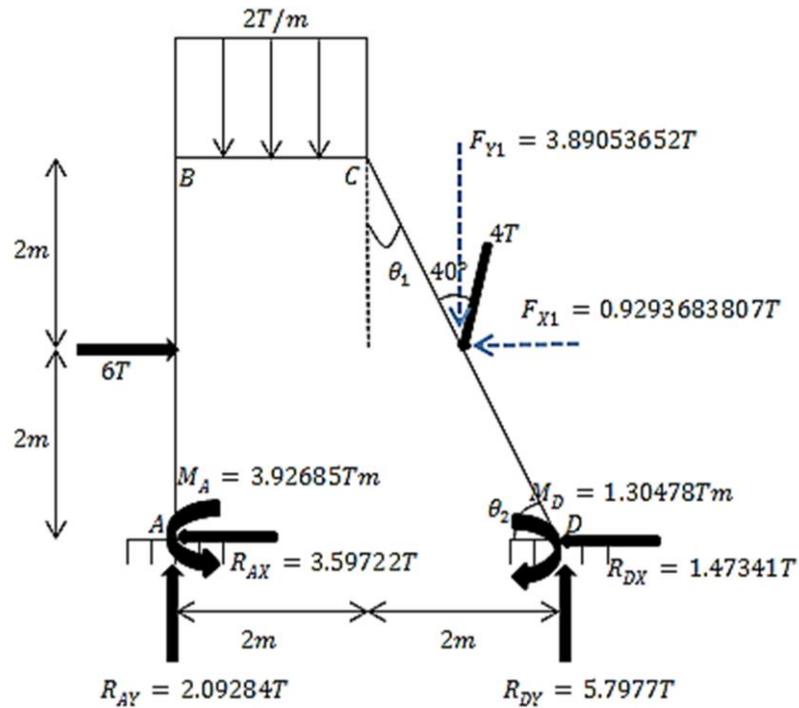
Los signos indican que:

$$M_A = 3.92685T.m \curvearrowright$$

$$R_{DX} = 1.47341T \leftarrow$$

$$M_D = 1.30478T.m \curvearrowleft$$

Cálculo de las reacciones faltantes de la estructura real:



$$\sum FX = 0$$

$$6 - 0.9293683807 - 1.47341 - R_{AX} = 0$$

$$R_{AX} = 3.59722 \leftarrow$$

$$\sum MA = 0$$

$$6(2) + 4(1) + 3.89053652(3) + 1.30478 - 3.92685 - 0.9293683807(2) - R_{DY}(4) = 0$$

$$R_{DY} = 23.1908/4 = 5.7977T \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

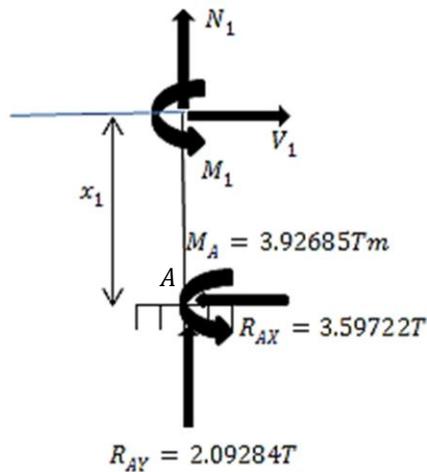
$$R_{AY} - 4 - 3.89053652 + 5.7977 = 0$$

$$R_{AY} = 2.09284T \uparrow$$

Ecuaciones de momento, cortante y normal de la estructura real

Miembro AB:

$$0 \leq x_1 \leq 2m$$



$$\sum M \text{ corte} = 0$$

$$M_1 = 3.59722x_1 - 3.92685$$

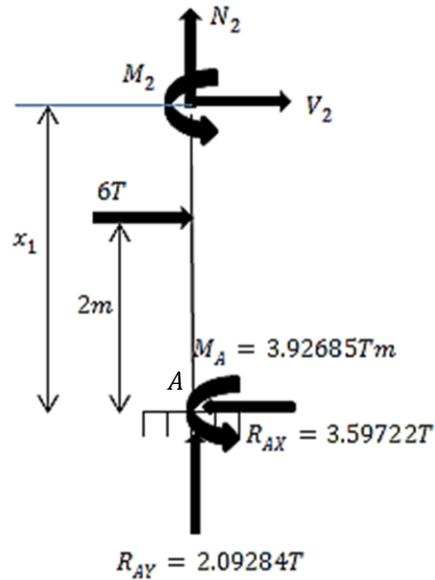
$$x_1 = 2, M_1 = 3.26759$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = 3.59722$$

$$\sum FY = 0$$

$$N_1 = -2.09284$$

$$2m \leq x_1 \leq 4m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = 3.59722x_1 - 3.92685 - 6(x_1 - 2) = -2.40278x_1 + 8.07315$$

$$x_1 = 2, M_2 = 3.26759; x_1 = 4, M_2 = -1.53797$$

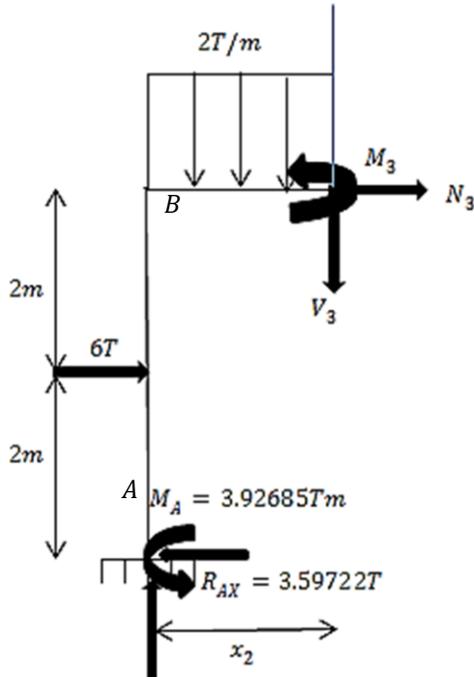
$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_1} = -2.40278$$

$$\sum FY = 0$$

$$N_2 = -2.09284$$

Miembro BC:

$$0 \leq x_2 \leq 2m$$



$$\sum M \text{ corte} = 0$$

$$M_3 = 2.09284x_2 - 3.92685 + 3.59722(4) - 6(2) - (x_2)^2$$

$$M_3 = -x_2^2 + 2.09284x_2 - 1.53797$$

$$x_2 = 0, M_3 = -1.53797; x_2 = 2, M_3 = -1.35229$$

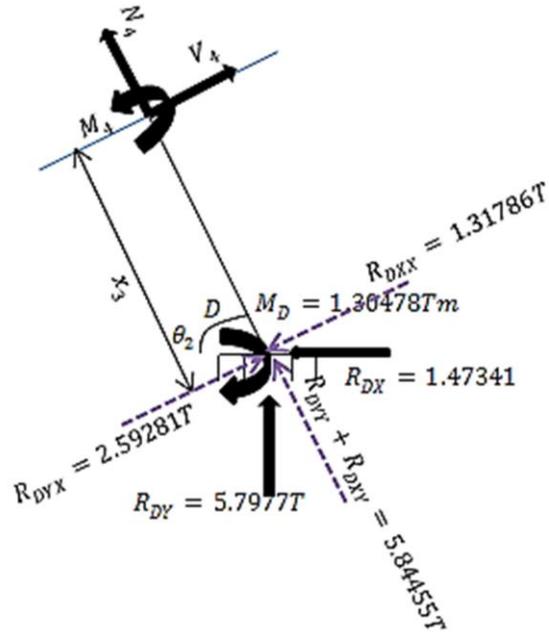
$$V_3 = \frac{dM_3}{dx_2} = -2x_2 + 2.09284$$

$$\sum FX = 0$$

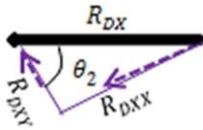
$$N_3 = 3.59722 - 6 = -2.40278$$

Miembro DC:

$$0 \leq x_3 \leq \sqrt{5}m$$



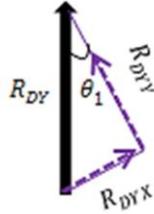
Componentes rectangulares de $R_{DX} = 1.47341T$



$$R_{DXX} = R_{DX} * \sin \theta_2 = 1.47341T * \frac{2}{\sqrt{5}} = 1.31786T$$

$$R_{DXY} = R_{DX} * \cos \theta_2 = 1.47341T * \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.658929T$$

Componentes rectangulares de $R_{DY} = 5.7977T$



$$R_{DYX} = R_{DY} * \sin \theta_1 = 5.7977T * \frac{1}{\sqrt{5}} = 2.59281T$$

$$R_{DYY} = R_{DY} * \cos \theta_1 = 5.7977T * \frac{2}{\sqrt{5}} = 5.18562T$$

$$\sum M \text{ corte} = 0$$

$$M_4 = (-2.59281 + 1.31786)x_3 + 1.30478 = -1.27495x_3 + 1.30478$$

$$x_3 = \sqrt{5}, M_4 = -1.54609$$

$$V_4 = \frac{dM_4}{dx_3} = -1.27495$$

$$\sum FY = 0$$

$$N_4 = -5.84455$$

$$\sqrt{5}m \leq x_3 \leq 2\sqrt{5}m$$

$$\sum M \text{ corte} = 0$$

$$M_5 = (-2.59281 + 1.31786)x_3 + 1.30478 + 2.571150439(x_3 - \sqrt{5})$$

$$M_5 = 1.2962x_3 - 4.44449$$

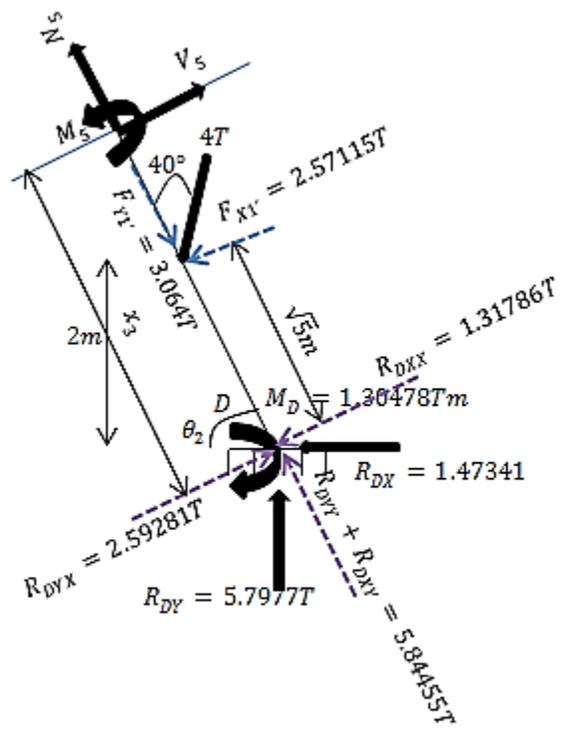
$$x_3 = \sqrt{5}, M_5 = -1.54609; x_3 = 2\sqrt{5}, M_5 = 1.35229$$

$$V_5 = \frac{dM_5}{dx_3} = 1.2962$$

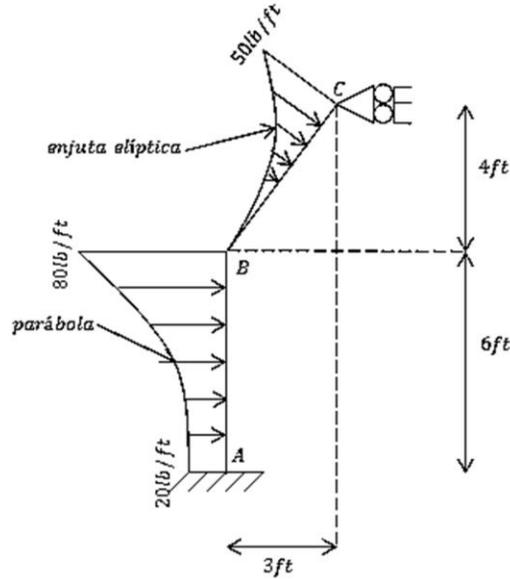
$$\sum FY = 0$$

$$5.84455 - 3.064177772 + N_5 = 0$$

$$N_5 = -2.780372228$$



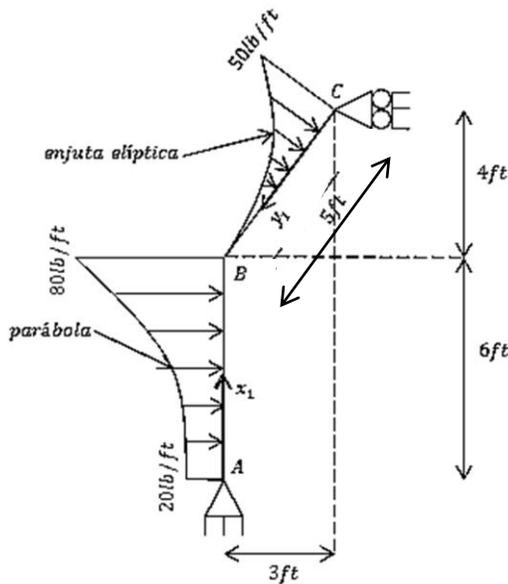
5.-Use el método de flexibilidades para determinar las reacciones en los soportes del marco mostrado. Determine las ecuaciones de momento, cortante y normal.



Por método de superposición, el marco real es igual a la suma de los siguientes marcos:

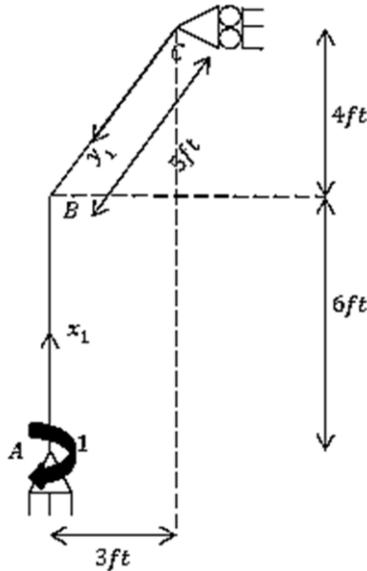
$$ER = EIF1 + EIF2$$

EIF1 (Marco isostático fundamental):

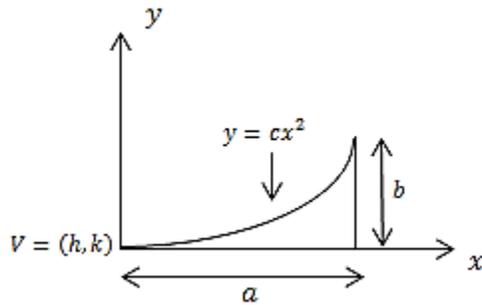


EIF2 (Estructura redundante):

Aplicamos un momento virtual unitario de acuerdo a la reacción removida:



Determinación de la carga concentrada equivalente y la localización del centroide de una enjuta parabólica.



La ecuación parabólica es:

$$(x - h)^2 = 2p(y - k) \text{ --- } \textcircled{1}$$

Donde:

p=Distancia entre el foco y la recta directriz
h, k=coordenadas del vértice de la parábola

Como el vértice está en el origen, entonces:

$$V = (h, k) = (0,0)$$

Sustituyendo en ①

$$\begin{aligned}(x - 0)^2 &= 2p (y - 0) \\ x^2 &= 2py \\ y &= \frac{1}{2p} x^2\end{aligned}$$

como $\frac{1}{2p}$ es una constante (c)

$$\therefore y = cx^2 \text{ --- --> } \textcircled{2}$$

El valor de c puede obtenerse despejándola de ②

$$c = \frac{y}{x^2} \text{ --- --> } \textcircled{3}$$

Sustituyendo x=a, y=b en ③

$$c = \frac{b}{a^2} \text{ --- --> } \textcircled{4}$$

Sustituyendo ④ en ②

$$y = \frac{b}{a^2} x^2 \text{ --- --> ecuación de la curva}$$

El área bajo la curva será igual a la carga concentrada equivalente de la presión parabólica.

$$Ac = \int_{L_1}^{L_2} dA \Rightarrow Ac = \int_{L_1}^{L_2} y dx, \text{ en este caso } y \text{ es la ecuación de la curva}$$

Resolvemos de forma indefinida

$$\int \frac{b}{a^2} x^2 dx = \frac{b}{a^2} \int x^2 dx = \frac{b}{3a^2} x^3$$

Entonces

$$Ac = \int_0^a \frac{b}{a^2} x^2 dx = \frac{b}{a^2} \int_0^a x^2 dx = \frac{b}{a^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{b}{a^2} \left[\frac{a^3 - 0^3}{3} \right] = \frac{1}{3} ab$$

Aplicamos la siguiente ecuación para calcular el brazo de palanca:

$$\bar{x} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} \tilde{x} dA}{\int_{L_1}^{L_2} \tilde{x} dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} xy dx}{\int_{L_1}^{L_2} y dx} = \frac{\int_0^a x \left(\frac{b}{a^2} x^2 \right) dx}{\int_0^a \frac{b}{a^2} x^2 dx}$$

Resolviendo el numerador:

Resolvemos de manera indefinida:

$$\int x \left(\frac{b}{a^2} x^2 \right) dx = \int \frac{b}{a^2} x^3 dx = \frac{b}{a^2} \int x^3 dx = \frac{b}{4a^2} x^4$$

Entonces

$$\int_0^a \frac{b}{a^2} x^3 dx = \frac{b}{a^2} \int_0^a x^3 dx = \frac{b}{a^2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^a = \frac{b}{a^2} \left[\frac{a^4}{4} \right] = \frac{1}{4} a^2 b$$

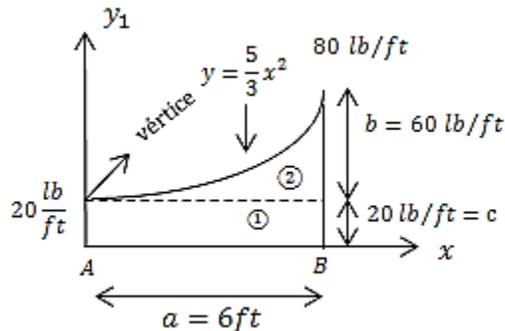
El denominador ya fue resuelto.

Sustituyendo:

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{4} a^2 b}{\frac{1}{3} ab} = \frac{3}{4} a \quad \text{a la derecha del vértice ubicado en el origen}$$

Análisis de la carga del elemento AB

Rotando el plano:



Para la enjuta parabólica (fig. ②)

La carga concentrada equivalente es:

$$Ac = \frac{1}{3} (6ft) \left(60 \frac{lb}{ft} \right) = 120 lb$$

El brazo de palanca es:

$$\bar{x} = \frac{3}{4} (6 ft) = 4.5 ft \quad \text{a la derecha de A}$$

La ecuación de la curva es:

$$y = \frac{60}{6^2} x^2 = \frac{5}{3} x^2$$

$y \rightarrow$ representa la carga
 $x \rightarrow$ representa la distancia

Para la carga uniformemente repartida (fig. ①)

La carga concentrada equivalente es:

$$A = ac = 6ft \left(20 \frac{lb}{ft} \right) = 120 lb$$

El brazo de palanca es:

$$\bar{x} = \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} (6ft) = 3ft \text{ a la derecha de } A$$

La carga concentrada equivalente total es:

$$A_T = A_C + A = 120lb + 120lb = 240lb$$

Su punto de aplicación es:

$$\bar{x}_r = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{(4.5ft)(120 lb) + (3ft)(120 lb)}{240lb} = \frac{900lbft}{240ft} = 3.75ft \text{ a la derecha de } A$$

Determinación de la carga concentrada equivalente y la localización del centroide de una enjuta elíptica:

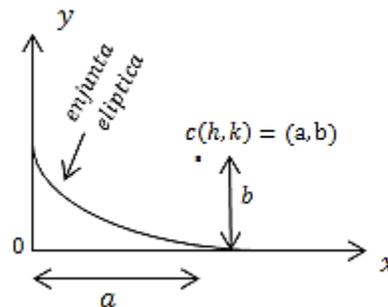
La ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \text{ ----- } \textcircled{1}$$

Donde “a” es el semieje mayor de la elipse, “b” es el semieje menor y “h, k” es el punto central.

Rotando el plano del miembro BC

*NOTA: el semieje mayor está dado por las cargas y el semieje menor por la distancia.



Obsérvese que:

$$(h, k) = (a, b)$$

Sustituyendo en ①

$$\frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{(y - b)^2}{b^2} = 1$$

Simplificando:

$$\frac{x^2 - 2ax + a^2}{a^2} + \frac{y^2 - 2by + b^2}{b^2} = 1$$

$$b^2x^2 - 2ab^2x + a^2b^2 + a^2y^2 - 2a^2by + a^2b^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - 2ab^2x + a^2y^2 - 2a^2by + a^2b^2 = 0$$

Usando fórmula general:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Donde:

$$A = b^2$$

$$B = -2ab^2$$

$$C = a^2y^2 - 2a^2by + a^2b^2$$

$$x = \frac{-(-2ab^2) \pm \sqrt{(-2ab^2)^2 - 4(b^2)(a^2y^2 - 2a^2by + a^2b^2)}}{2(b^2)}$$

Simplificando el discriminante:

$$4a^2b^4 - 4a^2b^2(y^2 - 2by + b^2) = 4a^2b^2(b^2 - y^2 + 2by - b^2) = 4a^2b^2(2by - y^2)$$

$$x = \frac{2ab^2 \pm \sqrt{4a^2b^2(2by - y^2)}}{2b^2} = \frac{2ab^2 \pm \sqrt{(2ab)^2 \cdot \sqrt{y(2b - y)}}}{2b^2}$$

$$x = \frac{2ab^2 \pm 2ab\sqrt{y(2b - y)}}{2b^2} = \frac{2b(ab \pm a\sqrt{y(2b - y)})}{2b(b)} = \frac{a \left(b \pm (y(2b - y))^{\frac{1}{2}} \right)}{b}$$

$$x_1 = \frac{a \left(b + (y(2b - y))^{\frac{1}{2}} \right)}{b}$$

$$x_2 = \frac{a \left(b - (y(2b - y))^{\frac{1}{2}} \right)}{b}$$

Evaluamos las ecuaciones anteriores en el intervalo y [0,5] que es la longitud que abarca la enjuta elíptica en el miembro BD

Además: a= 50, b= 5

Y	X ₁
0	50
1	80
2	90
3	95.826
4	98.99
5	100

y	X ₂
0	50
1	20
2	10
3	4.174
4	1.010
5	0

$$\therefore x = \frac{a \left(b - (y(2b - y))^{\frac{1}{2}} \right)}{b} \Rightarrow \text{ecuación de la curva}$$

Donde “x” representa la carga y “y” la distancia

El área bajo la curva será igual a la carga concentrada de la curva:

$$\begin{aligned} Ac &= \int_{L_1}^{L_2} dA = \int_{L_1}^{L_2} x \, dy \\ Ac &= \int_0^b \frac{a \left(b - (y(2b - y))^{\frac{1}{2}} \right)}{b} \, dy = \frac{a}{b} \int_0^b \left[b - (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} \right] \, dy \\ &= \frac{a}{b} \left\{ \int_0^b b \, dy - \int_0^b (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} \, dy \right\} \end{aligned}$$

Integral ① de forma indefinida:

$$\int b \, dy = by$$

Integral ②

$$\int_0^b (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} dy$$

Es una integral de tipo:

$$\begin{aligned} \int (a + bx + cx^2)^n dx \\ = \frac{b + 2cx}{2c(2n + 1)} (a + bx + cx^2)^n + \frac{n(4ac - b^2)}{2c(2n + 1)} \int (a + bx + cx^2)^{n-1} dx \end{aligned}$$

Resolvemos la integral de forma indefinida en primera instancia:

en este caso:

$$a = 0$$

$$dx = dy$$

$$b = 2b$$

$$c = -1$$

$$x = y$$

$$n = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} & \int (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} dy \\ &= \frac{2b + 2(-1)y}{2(-1) \left(2 \left(\frac{1}{2} \right) + 1 \right)} (0 + 2by + (-1)(y^2))^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{\left(\frac{1}{2} \right) (4(0)(-1) - (2b)^2)}{(2(-1)) \left(2 \left(\frac{1}{2} \right) + 1 \right)} \int (2by - y^2)^{-\frac{1}{2}} dy \\ &= \frac{2(b - y)}{-2(2)} (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{\left(\frac{1}{2} \right) (-4b^2)}{(-2)(2)} \int \frac{1}{\sqrt{2by - y^2}} dy \\ &= \frac{(y - b)(2by - y^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{b^2}{2} \int \frac{1}{\sqrt{2by - y^2}} dy \end{aligned}$$

Llamamos Integral ③ a la última integral:

Es una integral del tipo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{(a + bx + cx^2)}} dx = -\frac{1}{\sqrt{-c}} \operatorname{arc\,tan} \left[\frac{2cx + b}{2(\sqrt{-c})(\sqrt{a + bx + cx^2})} \right]$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{2by - y^2}} dy &= -\frac{1}{\sqrt{-(-1)}} \operatorname{arc\,tan} \left[\frac{2(-1)(y) + 2b}{2(\sqrt{-(-1)})(\sqrt{2by - y^2})} \right] \\ &= -\operatorname{arc\,tan} \left[\frac{2(b - y)}{2(\sqrt{2by - y^2})} \right] = -\operatorname{arc\,tan} \left[\frac{b - y}{(2by - y^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \\ \int (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} dy &= \frac{(y - b)(2by - y^2)^{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{b^2 \operatorname{arc\,tan} \left[\frac{b - y}{(2by - y^2)^{\frac{1}{2}}} \right]}{2} \\ \int (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} dy &= \frac{(y - b)(2by - y^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{b^2 \operatorname{arc\,sin} \left[\frac{y - b}{|b|} \right]}{2} \end{aligned}$$

Demostramos que:

$$\begin{aligned} \frac{b^2 \operatorname{arc\,sin} \left[\frac{y - b}{|b|} \right]}{2} &= -\frac{b^2 \operatorname{arc\,tan} \left[\frac{b - y}{(2by - y^2)^{\frac{1}{2}}} \right]}{2} \\ &= \frac{b^2 \operatorname{arc\,sin} \left[\frac{y - b}{|b|} \right]}{2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow |x| = x \cdot \operatorname{sign}(x)$$

*Donde $\operatorname{sign}(x)$ se simplifica al punto de la circunferencia unidad en el plano complejo que tiene el mismo argumento que x . Es decir el que resulta de dividir un número complejo entre su módulo.

$$\begin{aligned} &= \frac{b^2 \operatorname{arc\,sin} \left[\frac{y - b}{b \operatorname{sign}(b)} \right]}{2} \\ &\rightarrow \frac{1}{\operatorname{sign}(x)} = \operatorname{sign}(x) \end{aligned}$$

$$= \frac{b^2 \operatorname{arc\,sin} \left[\frac{(y-b) \operatorname{sign}(b)}{b} \right]}{2}$$

$$\rightarrow \operatorname{arc\,sin}(\operatorname{sign}(x) \cdot z) = \operatorname{sign}(x) \cdot \operatorname{arcsin}(z)$$

$$= \frac{b^2 \operatorname{sign}(b) \cdot \operatorname{arc\,sin} \left[\frac{y-b}{b} \right]}{2}$$

$$\rightarrow \operatorname{arcsin}(z) = \operatorname{atan} \left[\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \right]^2$$

$$= b^2 \operatorname{sign}(b) \cdot \operatorname{arc\,tan} \left[\frac{y-b}{b \left(\sqrt{-\left[\frac{y-b}{b} \right]^2 + 1} \right)} \right]$$

si $1 < \operatorname{MOD}(n, 4) \leq 3$

$$\rightarrow \sqrt{x^n} = x^{\frac{n}{2}} \cdot \operatorname{sign}(x)$$

$$= b^2 \cdot \operatorname{sign}(b) \cdot \operatorname{arc\,tan} \left[\frac{b(y-b)}{b \cdot \operatorname{sign}(b) \sqrt{y(2b-y)}} \right]$$

$$\rightarrow \frac{1}{\operatorname{sign}(x)} = \operatorname{sign}(x)$$

$$b^2 \cdot \operatorname{sign}(b) \cdot \operatorname{arc\,tan} \left[\frac{b(y-b) \operatorname{sign} b}{b \sqrt{y(2b-y)}} \right]$$

$$\rightarrow \operatorname{arc\,tan}(\operatorname{sign}(x) \cdot z) = \operatorname{sign}(x) \cdot \operatorname{arc\,tan}(z)$$

$$= \frac{b^2 \cdot \operatorname{sign}(b \cdot b) \cdot \operatorname{arc\,tan} \left[\frac{(y-b)}{\sqrt{y(2b-y)}} \right]}{2}$$

$$\rightarrow \operatorname{sign}(z^n) = \operatorname{sign}(z)^n$$

$$= \frac{b^2 \cdot \operatorname{sign}(b)^2 \cdot \operatorname{arc\,tan} \left[\frac{(y-b)}{\sqrt{y(2b-y)}} \right]}{2}$$

Si m es par:

$$\rightarrow \text{sign}(x)^m = 1$$

$$= \frac{b^2 \cdot \text{arc tan} \left[\frac{y-b}{\sqrt{y(2b-y)}} \right]}{2}$$

$$= b^2 \cdot \text{arc tan} \left[-\frac{b-y}{\sqrt{y(2b-y)}} \right]$$

$$\rightarrow \text{arc tan}(-z) = -\text{arc tan}(z)$$

$$= -b^2 \cdot \text{arc tan} \left[\frac{b-y}{(2by-y^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \text{ ok}$$

$$\int \frac{a \left(b - (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} \right)}{b} dy = \frac{aby}{b} - \frac{a(y-b)(2by-y^2)^{\frac{1}{2}}}{2b} - \frac{ab^2 \arcsin \left[\frac{y-b}{|b|} \right]}{2b}$$

$$\int \frac{a \left(b - (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} \right)}{b} dy = -\frac{ab \cdot \arcsin \left[\frac{y-b}{|b|} \right]}{2} - \frac{a(y-b)(2by-y^2)^{\frac{1}{2}}}{2b} + ay$$

$$\therefore \int_0^b \frac{a \left(b - (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} \right)}{b} dy = ab - \frac{\pi a|b|}{4}$$

$$\therefore Ac = ab - \frac{\pi a|b|}{4}$$

Aplicamos la siguiente ecuación para calcular el brazo de palanca:

$$\bar{y} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} \tilde{y} dA}{\int_{L_1}^{L_2} dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} yx dx}{\int_{L_1}^{L_2} x dy} = \frac{\int_0^b yx dx}{\int_0^b x dy}$$

El denominador ya fue resuelto.

Resolvemos el numerador:

$$\int_0^b y \left[\frac{a \left(b - (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} \right)}{b} \right] dy = -\frac{a}{b} \left[\int_0^b y(2by - y^2)^{\frac{1}{2}} dy - \int_0^b by dy \right]$$

Resolvemos la integral ② de forma indefinida

$$\int by \, dy = b \int y \, dy = \frac{b}{2}y^2$$

Integral ①

$$\int_0^b y(2by - y^2)^{\frac{1}{2}} dy$$

Es una integral del tipo:

$$\int (x^m)(a + bx + cx^2)^n \, dx =$$

$$\frac{x^{m-1}(a + bx + cx^2)^{n+1}}{c(2n + m + 1)} - \frac{b(n + m)}{c(2n + m + 1)}$$

$$* \int x^{m-1}(a + bx + cx^2)^n \, dx - \frac{a(m - 1)}{c(2n + m + 1)}$$

$$* \int x^{m-2}(a + bx + cx^2)^n \, dx$$

Resolvemos la integral ① de forma indefinida

En este caso:

$$a = 0, b = 2b, c = -1, x = y, n = \frac{1}{2}, m = 1, dx = dy$$

Sustituyendo:

$$\int y(2by - y^2)^{\frac{1}{2}} dy =$$

$$\frac{y^{1-1}(2by - y^2)^{\frac{3}{2}}}{-1(2(\frac{1}{2}) + 1 + 1)} - \frac{2b(\frac{1}{2} + 1)}{-1(2(\frac{1}{2}) + 1 + 1)} * \int y^{1-1}(2by - y^2)^{\frac{1}{2}} dy - \frac{(0)(1 - 1)}{-1(2(\frac{1}{2}) + 1 + 1)}$$

$$* \int y^{1-2}(2by - y^2)^{\frac{1}{2}} dy$$

$$= -\frac{(2by - y^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + b \int (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} dy + 0$$

Recuérdese que:

$$\int (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{(y - b)(2by - y^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{b^2 \arcsin \left[\frac{y - b}{|b|} \right]}{2}$$

Entonces:

$$\int y(2by - y^2)^{\frac{1}{2}} dy = -\frac{(2by - y^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{b(y - b)(2by - y^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{b^3 \operatorname{arc\,sin} \left[\frac{y - b}{|b|} \right]}{2}$$

Además:

$$\int y \left[\frac{a \left(b - (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} \right)}{b} \right] dy = -\frac{a}{b} \left[-\frac{(2by - y^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{b(y - b)(2by - y^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{b^3 \operatorname{arc\,sin} \left[\frac{y - b}{|b|} \right]}{2} - \frac{b}{2} y^2 \right]$$

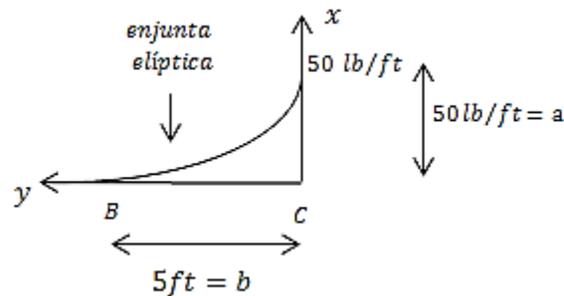
$$= -\frac{ab^2 * \operatorname{arc\,sin} \left[\frac{y - b}{|b|} \right]}{2} + \frac{a(2by - y^2)^{\frac{3}{2}}}{3b} - \frac{a(y - b)(2by - y^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{a}{2} y^2$$

$$\therefore \int_0^b y \left[\frac{a \left(b - (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} \right)}{b} \right] dy = \frac{ab^2(4 - 3\pi)}{12} + \frac{ab^2}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{ab^2(4 - 3\pi)}{12} + \frac{ab^2}{2}}{ab - \frac{\pi ab}{4}} = \frac{b(3\pi - 10)}{3(\pi - 4)} \text{ a la izquierda del origen}$$

Análisis de la carga del elemento CB

Rotando el plano:



Para la enjuta elíptica

La carga concentrada equivalente es:

$$Ac = \left(50 \frac{lb}{ft} \right) (5ft) - \frac{(3.1416) \left(50 \frac{lb}{ft} \right) (5ft)}{4}$$

$$Ac = 53.65045915 \text{ lb} \sim 53.65 \text{ lb}$$

Su punto de aplicación es:

$$\bar{y} = \frac{(5ft)[3(3.1416) - 10]}{3(3.1416 - 4)} = 1.116839694 \text{ ft a la izquierda del origen, es decir, de C}$$

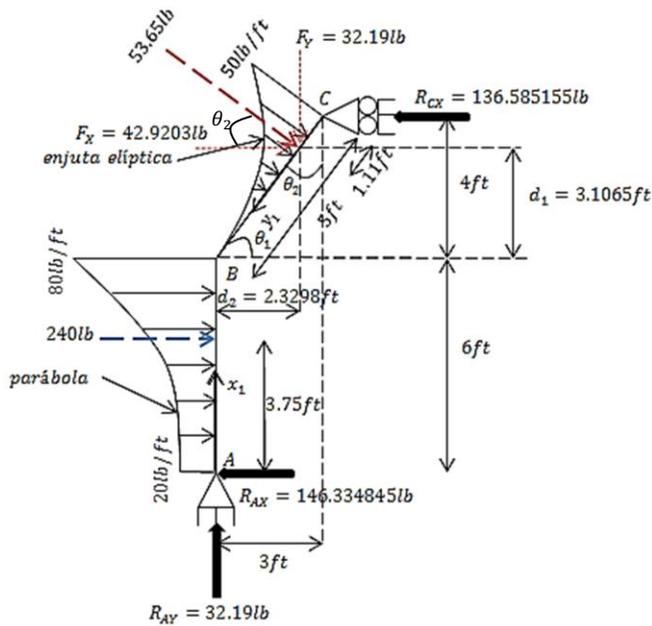
La ecuación de la curva elíptica es:

$$x = \frac{50 \left(5 - ((2 * 5)y - y^2)^{\frac{1}{2}} \right)}{5} = 10(5 - (10y - y^2)^{\frac{1}{2}}) = x$$

donde "x" representa la carga y "y" la distancia

Con esto ya podemos calcular las reacciones para EIF ①

En el siguiente diagrama se observa las fuerzas actuantes en el marco, aquí las presiones ya se concentran de forma puntual en su respectivo punto de aplicación.



Obtención de la distancia d_1

$$4 \rightarrow 5$$

$$d_1 \rightarrow (5 - 1.116839694)$$

$$d_1 = \frac{4}{5} (5 - 1.116839694)$$

$$d_1 = 3.106528245 \text{ ft}$$

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{4}{5} \quad \text{sen } \theta_2 = \frac{3}{5}$$

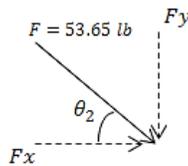
$$\text{cos } \theta_1 = \frac{3}{5} \quad \text{cos } \theta_2 = \frac{4}{5}$$

Obtención de d_2

$$\frac{3}{4} = \frac{d_2}{d_1}$$

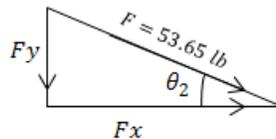
$$d_2 = \frac{3}{4} d_1 \approx 2.329896184 \text{ ft}$$

Descomposición de $F=53.65 \text{ lb}$ en sus componentes rectangulares



$$F_y = 53.65 \text{ lb} (\text{sen } \theta_2) = 53.65045915 \left(\frac{3}{5} \right) = 32.19027549 \text{ lb}$$

$$F_x = 53.65 \text{ lb} (\text{cos } \theta_2) = 53.65045915 \left(\frac{4}{5} \right) = 42.92036732 \text{ lb}$$



$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ R_{AY} - 32.19lb &= 0 \\ R_{AY} &= 32.19 lb \uparrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum MA &= 0 \\ -R_{Cx}(10) + 42.92(9.106528245 + 32.19(2.329896184) + 240(3.75) &= 0 \\ R_{Cx} &= \frac{1365.85155lb}{10} = 136.585155 lb \leftarrow\end{aligned}$$

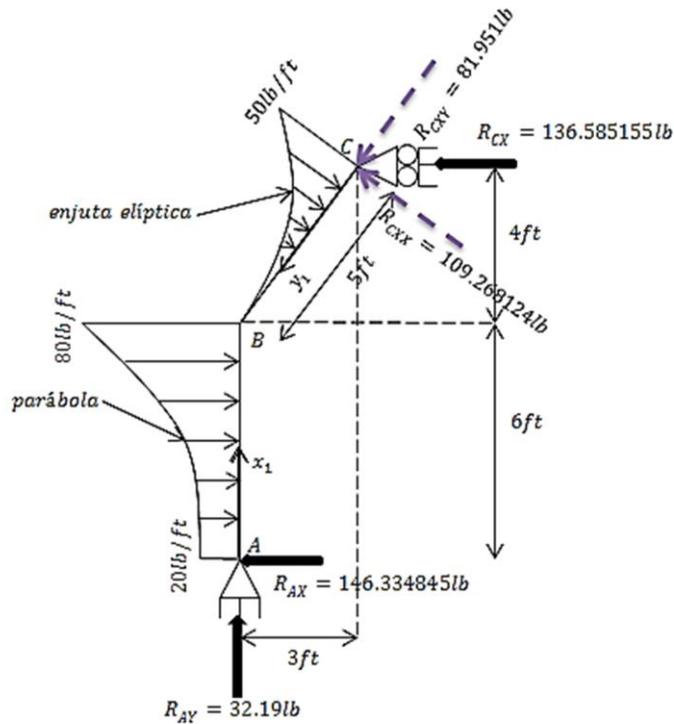
$$\begin{aligned}\sum MC &= 0 \\ -32.19(0.670103816) - 42.92(0.893471755) - 240(6.25) + 32.19(3) + R_{Ax}(10) &= 0 \\ R_{Ax} &= \frac{1463.348450}{10} lb = 146.334845 lb \leftarrow\end{aligned}$$

Comprobación:

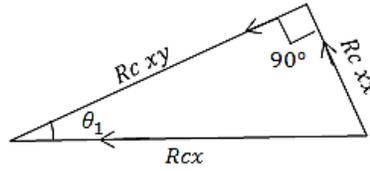
$$\sum F_x = 0$$

$$-146.334845 + 240 + 42.92 - 136.585155 = 0 \text{ ok } \checkmark$$

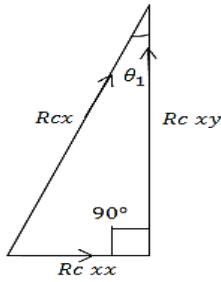
La EIF ① queda de la siguiente manera finalmente:



Descomposición de R_{Cx}



Rotando el plano:

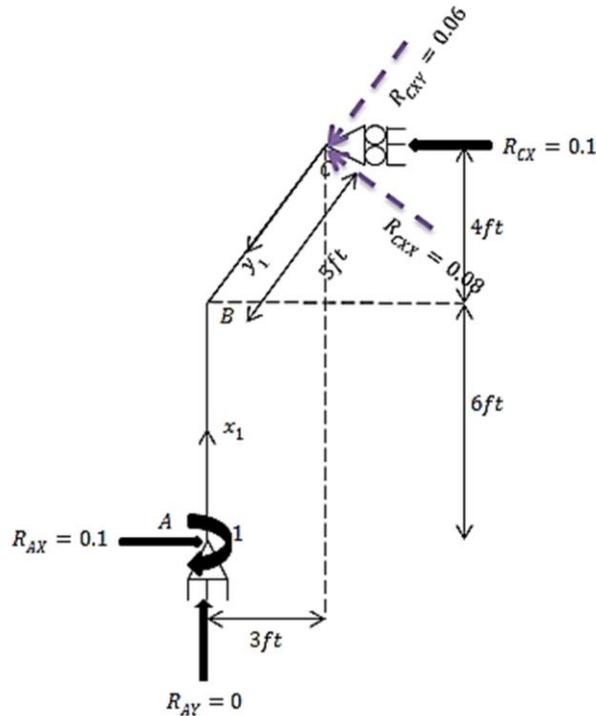


$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta_1 &= \frac{co}{h} = \frac{Rc \ xy}{Rcx} & \therefore Rc \ xy &= Rcx \operatorname{sen} \theta_1 \\ \operatorname{cos} \theta_1 &= \frac{ca}{h} = \frac{Rc \ xx}{Rcx} & \therefore Rc \ xx &= Rcx \operatorname{cos} \theta_1 \end{aligned}$$

$$Rc \ xx = 136.585155 \operatorname{lb} \left(\frac{4}{5} \right) = 109.268124 \operatorname{lb}$$

$$Rc \ xy = 136.585155 \operatorname{lb} \left(\frac{3}{5} \right) = 81.951093 \operatorname{lb}$$

Cálculo de las reacciones EIF ②



$$\sum FY = 0; R_{AY} = 0$$

$$\sum MA = 0; 1 - 10R_{CX} = 0; R_{CX} = 0.1 \leftarrow$$

$$\sum FX = 0; R_{AX} - 0.1 = 0; R_{AX} = 0.1 \rightarrow$$

Descomposición de R_{cx}

$$R_{cxx} = R_{cx} \text{ sen } \theta_1 = 0.1 \left(\frac{4}{5} \right) = 0.08$$

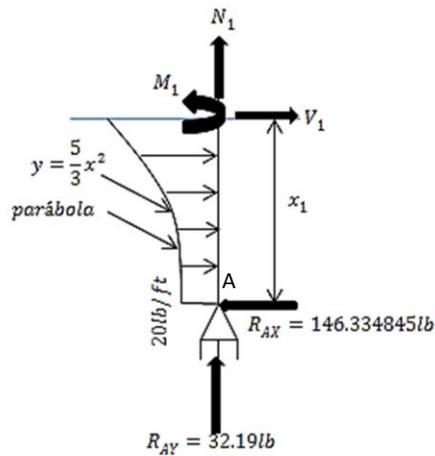
$$R_{cxy} = R_{cx} \text{ cos } \theta_1 = 0.1 \left(\frac{3}{5} \right) = 0.06$$

A continuación, determinaremos las Ecuaciones de momentos de las EIF.

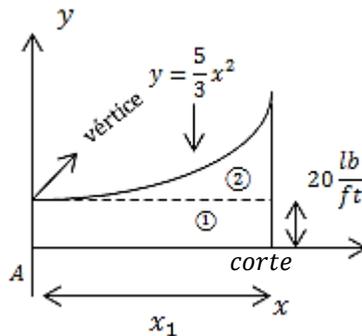
EIF ①

Miembro AB

$$0m \leq x_1 \leq 6 \text{ ft}$$



Analizamos la carga del corte rotando el plano:



Para la enjuta parabólica del corte:

La carga concentrada equivalente es:

$$A_c = \int_0^{x_1} \left(\frac{5}{3}x^2\right) dx_1 = \frac{5}{9}x_1^3$$

Su brazo de palanca es:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{x_1} \left(\frac{5}{3}x^3\right) dx_1}{\int_0^{x_1} \left(\frac{5}{3}x^2\right) dx_1} = \frac{\frac{5}{12}x_1^4}{\frac{5}{9}x_1^3} = \frac{3}{4}x_1 \text{ a la derecha de A}$$

Nota: las integrales ya no se detallan porque ya fueron resueltas para la ecuación general y de forma indefinida.

Para la carga uniformemente repartida (fig.1)

La carga concentrada equivalente es:

$$A = (x_1)(20) = 20x_1$$

Su brazo de palanca es:

$$\bar{x} = \frac{1}{2}x_1 \text{ a la derecha de A}$$

La carga concentrada equivalente total es:

$$A_T = A_c + A = \frac{5}{9}x_1^3 + 20x_1$$

El centroide de tal área es:

$$\bar{x}_r = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{\left(\frac{3}{4}x_1\right)\left(\frac{5}{9}x_1^3\right) + \left(\frac{1}{2}x_1\right)(20x_1)}{\frac{5}{9}x_1^3 + 20x_1} = \frac{\frac{5}{12}x_1^4 + 10x_1^2}{\frac{5}{9}x_1^3 + 20x_1} \text{ a la derecha de A}$$

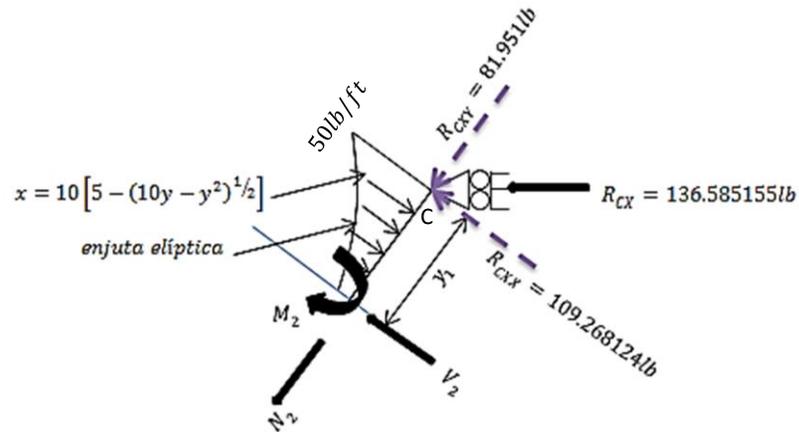
$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 146.334845(x_1) - \left(\frac{5}{9}x_1^3 + 20x_1\right) \left[x_1 - \frac{\frac{5}{12}x_1^4 + 10x_1^2}{\frac{5}{9}x_1^3 + 20x_1} \right]$$

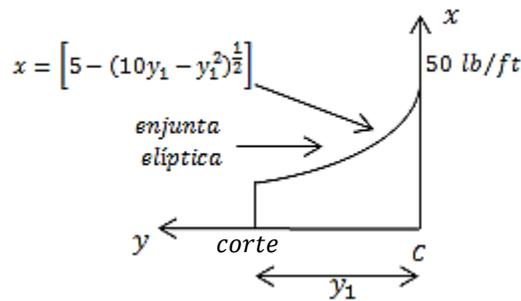
$$M_1 = \frac{5}{12}x_1^4 + 10x_1^2 - \frac{5}{9}x_1^4 - 20x_1^2 + 146.334845x_1$$

$$M_1 = -\frac{5}{36}x_1^4 - 10x_1^2 + 146.334845x_1$$

Miembro CB
 $0m \leq y_1 \leq 5ft$



Analizamos la carga anterior rotando el plano:



Para la enjuta elíptica del corte:
 La carga concentrada equivalente es:

$$Ac = \int_0^{y_1} 10(5 - (10y - y^2)^{\frac{1}{2}}) dy_1$$

$$= -125 \arcsin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] - (5y_1)(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 25(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 50y_1 - \frac{125}{2}\pi$$

El brazo de palanca es:

$$y = \frac{\int_0^{y_1} 10y_1 \left[(5 - (10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}}) \right] dy_1}{\int_0^{y_1} 10 \left[(5 - (10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}}) \right] dy_1}$$

El denominador ya fue resuelto.
 Resolvemos el numerador:

$$\int_0^{y_1} 10y_1 \left[(5 - (10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}}) \right] dy_1$$

$$= \frac{10}{3} (10y_1 - y_1^2)^{\frac{3}{2}} - 25y_1(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 125(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 25y_1^2$$

$$- \frac{625\pi}{2} - 625 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right]$$

Nota: Las integrales tampoco se detallan por la misma razón que en la parábola.

$$\bar{y} = \frac{\frac{10}{3} (10y_1 - y_1^2)^{\frac{3}{2}} - 25y_1(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 125(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 25y_1^2 - \frac{625\pi}{2} - 625 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right]}{-125 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] - (5y_1)(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 25(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 50y_1 - \frac{125}{2}\pi}$$

A la izquierda de C

$$\sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$M_2$$

$$= 109.268124(y_1)$$

$$- \left[-125 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] - (5y_1)(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 25(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 50y_1 - \frac{125}{2}\pi \right] y_1$$

$$- \frac{\frac{10}{3} (10y_1 - y_1^2)^{\frac{3}{2}} - 25y_1(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 125(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 25y_1^2 - \frac{625\pi}{2} - 625 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right]}{-125 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] - (5y_1)(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 25(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 50y_1 - \frac{125}{2}\pi}$$

$$M_2 = 109.268124y_1$$

$$+ 125y_1 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] + 5y_1^2(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} - 25y_1(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$- 50y_1^2 + \frac{125\pi}{2}y_1 + \frac{10}{3} (10y_1 - y_1^2)^{\frac{3}{2}} - 25y_1(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ 125(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 25y_1^2 - \frac{625\pi}{2} - 625 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right]$$

$$M_2 = 125 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] - 625 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] + 5y_1^2(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}}$$

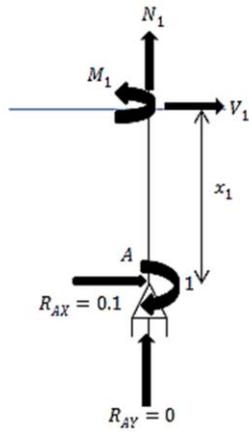
$$+ \frac{10}{3} (10y_1 - y_1^2)^{\frac{3}{2}} - 50y_1(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 125(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} - 25y_1^2$$

$$+ 305.6176698y_1$$

EIF ②

Miembro AB

$0m \leq x_1 \leq 6ft$

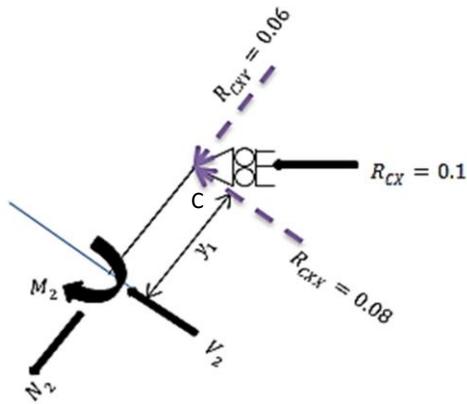


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 1 - 0.1x_1$$

Miembro CB

$0m \leq y_1 \leq 5ft$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = 0.08y_1$$

Sean:

$d_1 = \text{Giro en A de EIF } \textcircled{1}$

$f_{11} = \text{Giro en A de EIF } \textcircled{2}$

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{1}{EI} \int_0^6 \left(-\frac{5}{36} x_1^4 - 10x_1^2 + 146.334845 x_1 \right) (1 - 0.1x_1) dx_1 \\
 &+ \frac{1}{EI} \int_0^5 \left[125 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] - 625 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] + 5y_1^2 (10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} \right. \\
 &+ \frac{10}{3} (10y_1 - y_1^2)^{\frac{3}{2}} - 50y_1 (10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 125(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} - 25y_1^2 \\
 &\left. + 305.6176698y_1 \right] (0.08y_1) dy_1
 \end{aligned}$$

Resolviendo las integrales por separado:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{EI} \int_0^6 \left(-\frac{5}{36} x_1^4 - 10x_1^2 + 146.334845 x_1 \right) (1 - 0.1x_1) dx_1 \\
 &= \frac{1}{EI} \int_0^6 \left(\frac{x_1^5}{72} - \frac{5x_1^4}{36} + x_1^3 - 24.6334845x_1^2 + 146.334845 x_1 \right) dx_1 \\
 &= \frac{1}{EI} \left[\frac{x_1^6}{432} - \frac{x_1^5}{36} + \frac{x_1^4}{4} - 0.82111615x_1^3 + 73.16742249 x_1^2 \right]_0^6 \\
 &= \frac{1076.416325}{EI}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{EI} \int_0^5 \left[125 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] - 625 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] + 5y_1^2 (10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{10}{3} (10y_1 - y_1^2)^{\frac{3}{2}} - 50y_1 (10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 125(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} - 25y_1^2 \right. \\
 &\quad \left. + 305.6176698y_1 \right] (0.08y_1) dy_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{EI} \int_0^5 \left(10y_1^2 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] - 50y_1 \operatorname{arc} \cos \left[\frac{5 - y_1}{5} \right] + \frac{2y_1^3 \sqrt{y_1(10 - y_1)}}{15} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4y_1^2 \sqrt{y_1(10 - y_1)}}{3} + 10y_1 \sqrt{y_1(10 - y_1)} - 2y_1^3 + 24.4441318y_1^2 \right) dy_1
 \end{aligned}$$

$$\int 10y_1^2 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] dy_1 = 10 \int y_1^2 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] dy_1$$

$$\rightarrow \operatorname{arc} \sin(z) = \operatorname{arc} \tan \left(\frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \right)$$

$$= 10 \int y_1^2 \operatorname{arc} \tan \left[\frac{y_1 - 5}{5 \sqrt{-\left(\frac{y_1 - 5}{5}\right)^2 + 1}} \right] dy_1$$

$$= 10 \int y_1^2 \operatorname{arc} \tan \left[\frac{y_1 - 5}{\sqrt{y_1(10 - y_1)}} \right] dy_1$$

→Aplicando la siguiente ecuación:

$$\int y^m \operatorname{arc} \tan(f(y)) dy = \frac{y^{m+1} \operatorname{arc} \tan(f(y))}{m+1} - \frac{\int \frac{y^{m+1} * F'(y)}{F(y)^2 + 1} dy}{m+1}$$

$$= \frac{10y_1^3 \operatorname{arc} \tan \left[\frac{y_1 - 5}{\sqrt{y_1(10 - y_1)}} \right]}{3} - \frac{10}{3} \int \frac{y_1^3 \frac{d}{dy_1} \frac{y_1 - 5}{\sqrt{y_1(10 - y_1)}}}{\left[\frac{y_1 - 5}{\sqrt{y_1(10 - y_1)}} \right]^2 + 1} dy_1$$

→Pero:

$$\frac{d}{dy_1} \frac{y_1 - 5}{\sqrt{y_1(10 - y_1)}} = \frac{\sqrt{y_1(10 - y_1)} \cdot \frac{d}{dy_1} (y_1 - 5) - (y_1 - 5) \cdot \frac{d}{dy_1} \sqrt{y_1(10 - y_1)}}{(\sqrt{y_1(10 - y_1)})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{y_1(10 - y_1)} * 1 + (5 - y_1) \left[\frac{5 - y_1}{\sqrt{y_1(10 - y_1)}} \right]}{y_1(10 - y_1)}$$

$$\frac{d}{dy_1} \sqrt{y_1(10 - y_1)} = \frac{2(5 - y_1)}{2\sqrt{y_1(10 - y_1)}} = \frac{5 - y_1}{\sqrt{y_1(10 - y_1)}}$$

Sustituyendo:

$$= \frac{10y_1^3 \operatorname{arc} \tan \left[\frac{y_1 - 5}{\sqrt{y_1(10 - y_1)}} \right]}{3} - \frac{10}{3} \int y_1^3 \frac{\sqrt{y_1(10 - y_1)} + (5 - y_1) \left[\frac{5 - y_1}{\sqrt{y_1(10 - y_1)}} \right]}{y_1(10 - y_1) \left[\left[\frac{y_1 - 5}{\sqrt{y_1(10 - y_1)}} \right]^2 + 1 \right]} dy_1$$

$$= \frac{10}{3} y_1^3 \operatorname{arc} \tan \left[\frac{y_1 - 5}{\sqrt{y_1(10 - y_1)}} \right] + \frac{10}{3} \int \frac{y_1^2 (\sqrt{y_1(10 - y)})}{y_1 - 10} dy_1$$

→ Usando la ecuación:

$$\int (a + bx)^n * f(x) dx = \frac{\text{subst} \left[\int x^n F \left[\frac{x-a}{b} \right] dx, x, a + bx \right]}{b}$$

$$= \frac{10}{3} y_1^3 \text{arc tan} \left[\frac{y_1 - 5}{\sqrt{y_1(10 - y_1)}} \right]$$

$$+ \frac{10}{3} \text{subst} \left[\int \frac{(y_1 + 10)^2 (\sqrt{-y_1(y_1 + 10)})}{y_1} dy_1, y_1, y_1 - 10 \right]$$

$$= \frac{10}{3} y_1^3 \text{arc tan} \left[\frac{y_1 - 5}{\sqrt{y_1(10 - y_1)}} \right]$$

$$- \frac{3125}{3} \text{arc tan} \left[\frac{y_1 - 5}{\sqrt{y_1(10 - y_1)}} \right] + 10 \left[-\frac{y_1(10 - y_1)^{\frac{3}{2}}}{3} \right.$$

$$\left. + \frac{5(3(y_1 - 10) + 55)(\sqrt{y_1(10 - y_1)})}{2} \right]$$

$$= \left[\frac{10}{3} y_1^3 - \frac{3125}{3} \right] \cdot \text{arc sin} \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] + \frac{5(2y_1^2 + 25y_1 + 375)(\sqrt{y_1(10 - y_1)})}{9}$$

$$= \frac{5 \left(3(2y_1^3 - 625) \cdot \text{arc sin} \left(\frac{y_1 - 5}{5} \right) + (2y_1^2 + 25y_1 + 375)(\sqrt{-y_1(y_1 - 10)}) \right)}{9}$$

$$\therefore \int_0^5 10y_1^2 \text{arc sin} \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] dy_1 = -108.4683959$$

$$\int -50 y_1 \text{arc cos} \left[\frac{5 - y_1}{5} \right] dy_1$$

$$\rightarrow \text{arc cos}(z) = \frac{\pi}{2} - \text{arc sin } z$$

$$= \int 50 y_1 \left[\text{arc sin} \left[\frac{5 - y_1}{5} \right] - \frac{\pi}{2} \right] dy_1$$

$$\text{arc sin}(-z) = -\text{arc sin}(z)$$

$$= \int -50 y_1 \left[\text{arc sin} \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] + \frac{\pi}{2} \right] dy_1$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \operatorname{arc\,sin}(z) = \operatorname{arc\,tan} \left[\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \right] \\ &= \int -50 y_1 \left[\operatorname{arc\,tan} \left[\frac{y_1 - 5}{5 \sqrt{-\left(\frac{y_1 - 5}{5}\right)^2 + 1}} \right] + \frac{\pi}{2} \right] dy_1 \\ &= \int -50 y_1 \operatorname{arc\,tan} \left[\frac{y_1 - 5}{\sqrt{y_1(10y_1 - y_1)}} \right] dy_1 + \int -25\pi y_1 dy_1 \\ &= -50 \int y_1 \operatorname{arc\,tan} \left[\frac{y_1 - 5}{\sqrt{y_1(10 - y_1)}} \right] dy_1 + \int -25\pi y_1 dy_1 \end{aligned}$$

Ya vimos cómo se resuelven las integrales del tipo:

$$\int y^m \operatorname{arc\,tan}(f(y)) dy$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} \int -50 y_1 \operatorname{arc\,cos} \left[\frac{5 - y_1}{5} \right] dy_1 &= \frac{1}{2} \left[25(75 - 2y_1^2) \operatorname{arc\,sin} \left(\frac{y_1 - 5}{5} \right) \right] \\ \therefore \int_0^5 -50 y_1 \operatorname{arc\,cos} \left[\frac{5 - y_1}{5} \right] dy_1 &= \frac{625\pi}{4} - 1250 = -759.1261478 \end{aligned}$$

Las siguientes integrales son del tipo:

$$\int (x^m)(a + bx + cx^2)^n dx$$

$$\begin{aligned} &\int \frac{2y_1^3 \sqrt{y_1(10 - y_1)}}{15} dy_1 \\ &= \frac{4375 \operatorname{arc\,sin} \left(\frac{y_1 - 5}{5} \right)}{12} \\ &\quad + \frac{(24y_1^4 - 30y_1^3 - 350y_1^2 - 4375y_1 - 65625)(\sqrt{y_1(10 - y_1)})}{900} \\ \therefore \int_0^5 \frac{2y_1^3 \sqrt{y_1(10 - y_1)}}{15} dy_1 &= \frac{125(105\pi - 272)}{72} = 100.4639385 \end{aligned}$$

$$\int -\frac{4y_1^2(\sqrt{y_1(10-y_1)})}{3} dy_1$$

$$= \frac{-3125 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1-5}{5} \right]}{6}$$

$$- \frac{(6y_1^3 - 10y_1^2 - 125y_1 - 1875)(\sqrt{y_1(10-y_1)})}{18}$$

$$\therefore \int_0^5 -\frac{4y_1^2(\sqrt{y_1(10-y_1)})}{3} dy_1 = \frac{625(32 - 15\pi)}{36} = -262.5675313$$

$$\int 10y_1(\sqrt{y_1(10-y_1)}) dy_1 = 625 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1-5}{5} \right] - \frac{10(y_1(10-y_1))^{\frac{3}{2}}}{3} + 25(y_1 - 5)(\sqrt{y_1(10-y_1)})$$

$$\therefore \int_0^5 10y_1(\sqrt{y_1(10-y_1)}) dy_1 = \frac{625(3\pi - 4)}{6} = 565.0810375$$

Las siguientes integrales son del tipo:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$\int -2y_1^3 dy_1 = -\frac{y_1^4}{2}$$

$$\therefore \int_0^5 -2y_1^3 dy_1 = -\frac{625}{2}$$

$$\int 24.44941318 y_1^2 dy_1 = 8.14980433 y_1^3$$

$$\therefore \int_0^5 24.44941318 y_1^2 dy_1 = 1018.725549$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \int_0^5 \left[125 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] - 625 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] + 5y_1^2(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \quad + \frac{10}{3}(10y_1 - y_1^2)^{\frac{3}{2}} - 50y_1(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 125(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} - 25y_1^2 \\ & \quad \left. + 305.6176698y_1 \right] (0.08y_1) dy_1 \\ & = \frac{1}{EI} \left(-108.4683959 - 759.1261478 + 100.4639385 - 262.5675313 \right. \\ & \quad \left. + 565.0810375 - \frac{625}{2} + 1018.725549 \right) \\ & = \frac{1}{EI} (241.60845) \end{aligned}$$

$$d_1 = \frac{1}{EI} (1076.416325 + 241.60845) = \frac{1}{EI} (1318.024774)$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^6 (1 - 0.1x_1)^2 dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 (0.08y_1)^2 dy_1$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{78}{25} + \frac{4}{15} \right) = \frac{1}{EI} \left(\frac{254}{75} \right)$$

Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica:

$$d_1 + F_{11}MA = 0$$

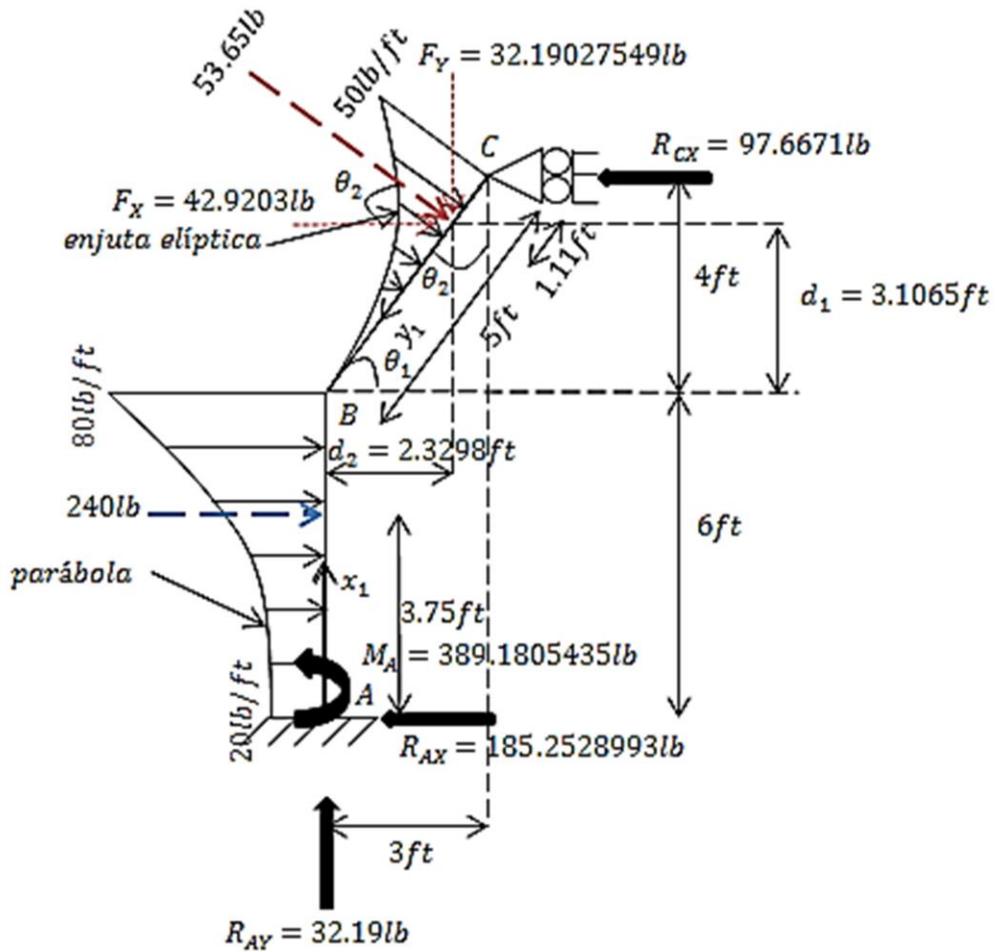
$$1318.024774 + \frac{254}{75}MA = 0$$

$$MA = \frac{-1318.024774}{254/75}$$

$$MA = -389.1805435 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

$$\therefore MA = 389.1805435 \text{ lb} \cdot \text{ft} \curvearrowright$$

Cálculo de las reacciones restantes del marco original:



$$\sum F_y = 0$$

$$R_{AY} - 32.1927549 \text{ lb} = 0 \quad \therefore R_{AY} = 32.19 \text{ lb} \uparrow$$

$$\sum M_A = 0$$

$$-389.1805435 - R_{CX}(10) + 42.92(9.106528245) + 32.19(2.329896184) + 240(3.75) = 0$$

$$R_{CX} = \frac{976.6710069}{10} = 97.6671 \text{ lb} \leftarrow$$

$$\sum M_C = 0$$

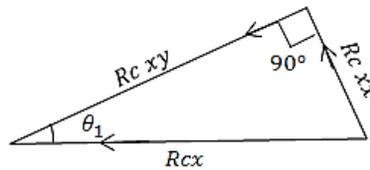
$$-32.19(0.670103816) - 42.92(0.893471755) - 240(6.25) + 32.19(3) - 389.1805435 + R_{AX}(10) = 0$$

$$R_{AX} = \frac{1852.528993}{10} = 185.2528993 \text{ lb} \quad \leftarrow$$

$$\sum F_x = 0$$

$$240 + 42.92 - 185.2528993 - 97.6671 \approx 0 \text{ ok } \checkmark$$

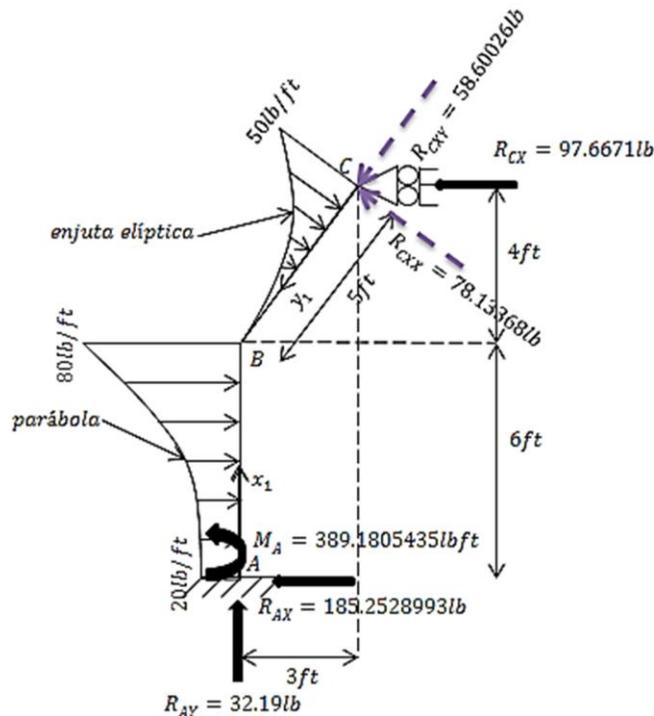
Descomposición de R_{CX} en sus componentes rectangulares.



$$R_{CXX} = (97.6671) \left(\frac{4}{5}\right) \text{ lb} = 78.13368 \text{ lb}$$

$$R_{CXY} = (97.6671) \left(\frac{3}{5}\right) \text{ lb} = 58.60026 \text{ lb}$$

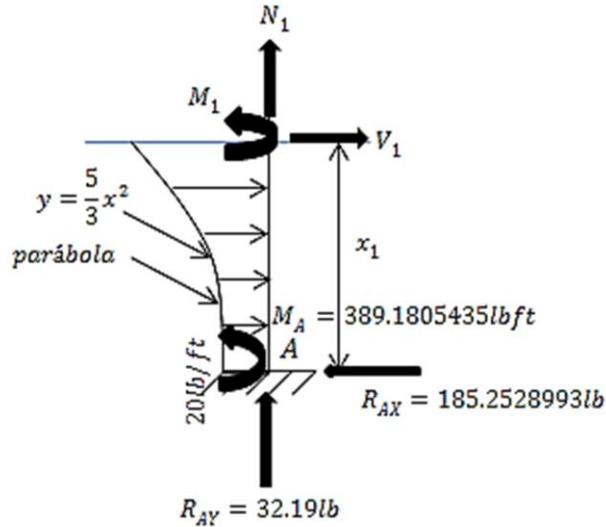
El marco original queda finalmente de la siguiente manera:



Ecuaciones de momento, cortante y normal de la estructura real (marco original).

Miembro AB

$$0 \leq x_1 \leq 6ft$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 185.2528993(x_1) - 389.1805435 - \left(\frac{5}{9}x_1^3 + 20x_1\right) \left[x_1 - \frac{\frac{5}{12}x_1^4 + 10x_1^2}{\frac{5}{9}x_1^3 + 20x_1} \right]$$

$$M_1 = -\frac{5}{36}x_1^4 - 10x_1^2 + 185.2528993x_1 - 389.1805435$$

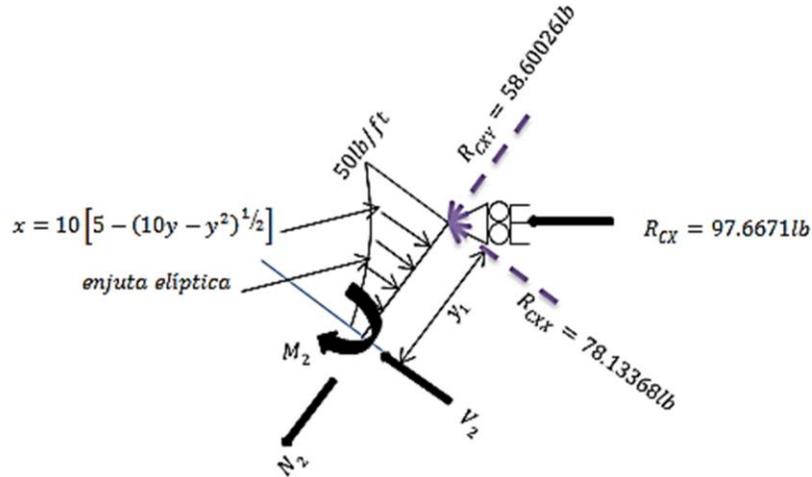
$$x = 6, M_1 = 182.336$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = -\frac{5}{9}x_1^3 - 20x + 185.2528993$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N_1 = -32.19$$

Miembro CB
 $0 \leq y_1 \leq 5ft$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = 78.13368(y_1) - \left[125 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] - 5y_1(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 25(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 50y_1 - \frac{125}{2}\pi \right] \left[y_1 - \frac{\frac{10}{3}(10y_1 - y_1^2)^{\frac{3}{2}} - 25y_1(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 125(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 25y_1^2 - \frac{625\pi}{2} - 625 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right]}{-125 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] - 5y_1(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 25(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 50y_1 - \frac{125}{2}\pi} \right]$$

$$M_2 = 125y_1 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] - 625 \operatorname{arc} \cos \left[\frac{5 - y_1}{5} \right] + \frac{10}{3}(10y_1 - y_1^2)^{\frac{3}{2}} + 5y_1^2(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} - 50y_1(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 125(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} - 25y_1^2 + 274.4832208 y_1$$

$$y = 5, M_2 = 182.335$$

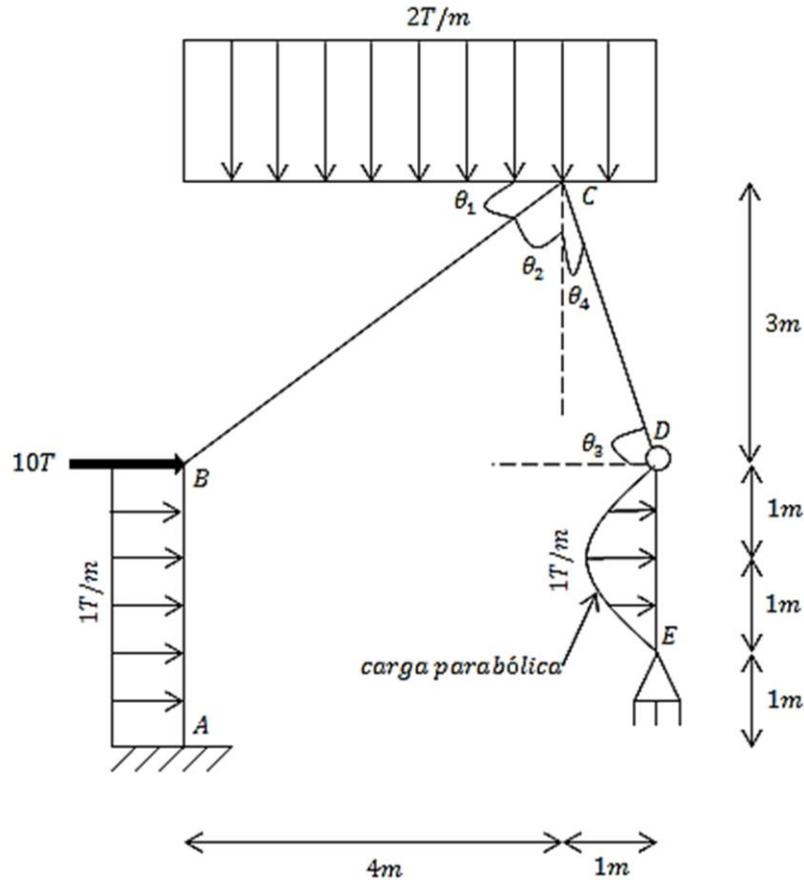
En este caso, como se toma al lado derecho como el origen (punto c) al cortar el elemento:

$$V_2 = -\frac{dM_2}{dy_1} = -125 \operatorname{arc} \sin \left[\frac{y_1 - 5}{5} \right] - 5(y_1 - 5)(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 50y_1 - 274.4832208$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$N_2 = -58.60026$$

6.-Calcular las reacciones en los soportes para el pórtico mostrado usando el método de flexibilidades. Dibuje el diagrama de cortante, momento y normal para cada miembro de la estructura. Considere $EI = \text{constante}$.



Verificación del grado de hiperestaticidad:

$$r + 3m = 5 + 3(4) = 17$$

$$3n + c = 3(5) + 1 = 16$$

$$\text{como } r + 3m > 3n + c$$

con una diferencia de 1, el marco es estáticamente indeterminado de grado 1

De acuerdo a la figura se deduce que:

$$\sin \theta_1 = \frac{3}{5}; \cos \theta_1 = \frac{4}{5}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{3}{5}; \sin \theta_2 = \frac{4}{5}; \tan \theta_2 = \frac{4}{3}$$

$$\sin \theta_3 = \frac{3}{\sqrt{10}}; \cos \theta_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \theta_4 = \frac{3}{\sqrt{10}}; \sin \theta_4 = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

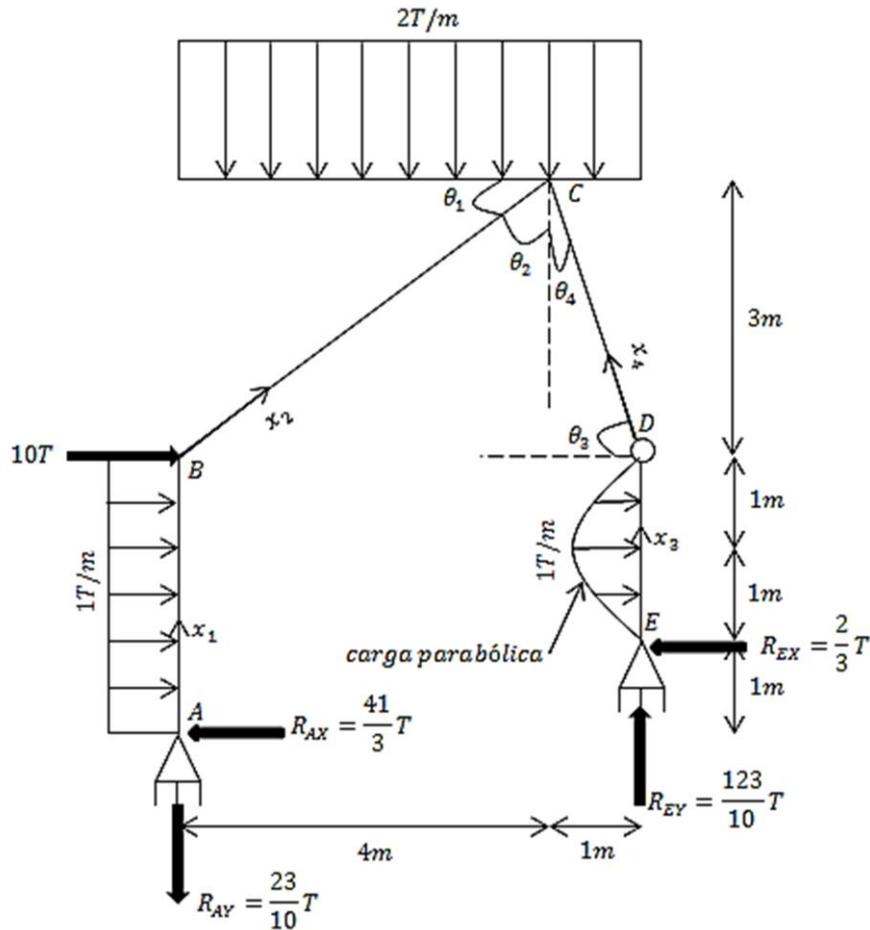
$$\text{Longitud del miembro BC} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5m$$

$$\text{Longitud del miembro CD} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}m$$

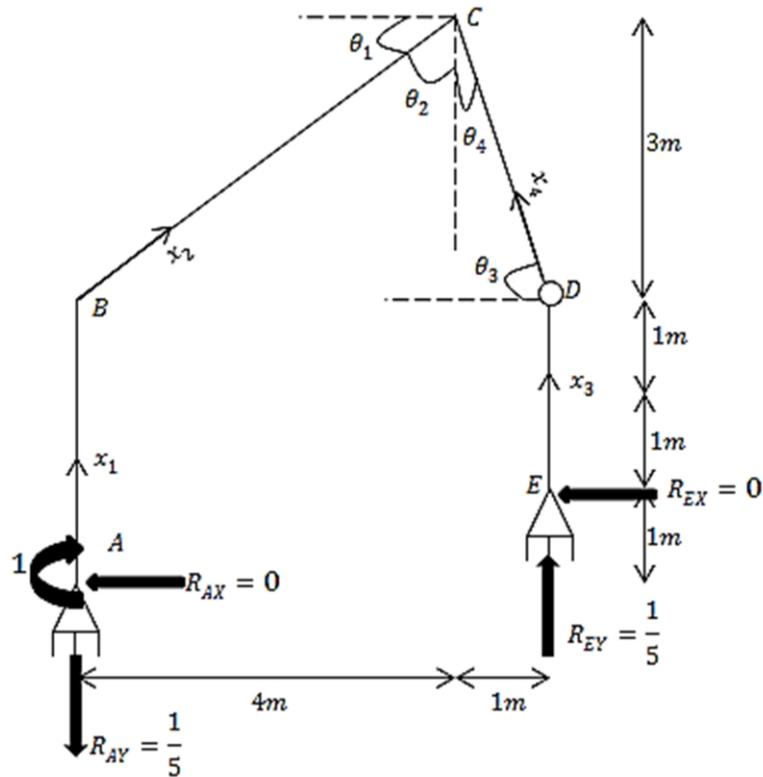
Por método de superposición:

$$ER = EIF 1 + EIF 2$$

EIF 1



EIF 2



Recuérdese que para la carga parabólica (curva de segundo grado):

- La ecuación de la curva es:

$$Y = -4 \frac{W}{L^2} x^2 + 4 \frac{W}{L} x = -4 \left(\frac{1}{2^2} \right) x^2 + 4 \left(\frac{1}{2} \right) x = 2x - x^2$$

-La carga concentrada equivalente es:

$$A_c = \frac{2}{3} WL = \frac{2}{3} * 1 * 2 = \frac{4}{3} T$$

-El brazo de palanca es:

$$\bar{x} = \frac{1}{2} L = \frac{1}{2} (2) = 1m \text{ a la izquierda de E}$$

Para EIF 1

Cálculo de las reacciones:

De $\sum MD = 0$ para el miembro ED:

$$2R_{EX} - \left(\frac{4}{3}\right)(1) = 0$$

$$R_{EX} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}T \quad \leftarrow$$

De $\sum FX = 0$ para todo el marco:

$$(1)(3) + 10 + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} - R_{AX} = 0$$

$$R_{AX} = \frac{41}{3}T \quad \leftarrow$$

De $\sum MDizq = 0$

$$-5R_{AY} + \left(\frac{41}{3}\right)(3) - (1)(3)(1.5) - (2)(4)(3) - (2)(1)(0.5) = 0$$

$$R_{AY} = \frac{\frac{23}{2}}{5} = \frac{23}{10}T \quad \downarrow$$

R_{AY} también se puede obtener de $\sum ME = 0$ para todo el marco:

$$\frac{4}{3}(1) - 2(1)(0.5) - 2(4)(3) + 10(2) + 1(3)(0.5) + \left(\frac{41}{3}\right)(1) - R_{AY}(5) = 0$$

$$R_{AY} = \frac{-11.5}{-5} = 2.3T \quad \downarrow$$

De $\sum FY = 0$ para todo el marco:

$$-\frac{23}{10} - (2)(4) - (2)(1) + R_{EY} = 0$$

$$R_{EY} = \frac{123}{10} T \uparrow$$

Para EIF 2

Cálculo de las reacciones:

De $\sum MD = 0$ para el miembro ED:

$$R_{EX} = 0$$

De $\sum FX = 0$ para todo el marco:

$$R_{AX} = 0$$

De $\sum MDizq = 0$

$$1 - 5R_{AY} = 0$$

$$R_{AY} = \frac{1}{5} \downarrow$$

De $\sum FY = 0$ para todo el marco:

$$-\frac{1}{5} + R_{EY} = 0$$

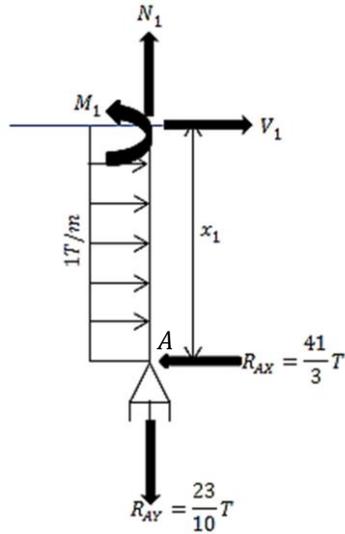
$$R_{EY} = \frac{1}{5} \uparrow$$

Ecuaciones de momento de las EIF

EIF 1

Miembro AB

$$0 \leq x_1 \leq 3m$$

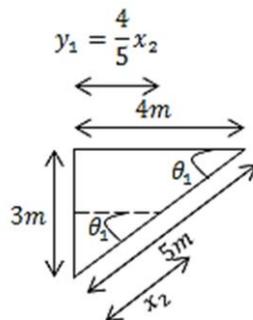


$$\sum M \text{ corte} = 0$$

$$M_1 = \frac{41}{3} x_1 - \frac{x_1^2}{2}$$

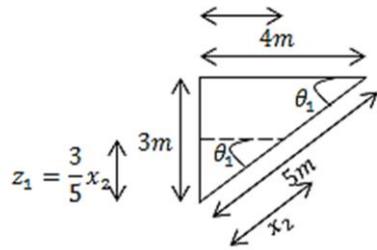
Miembro BC

$$0 \leq x_2 \leq 5m$$



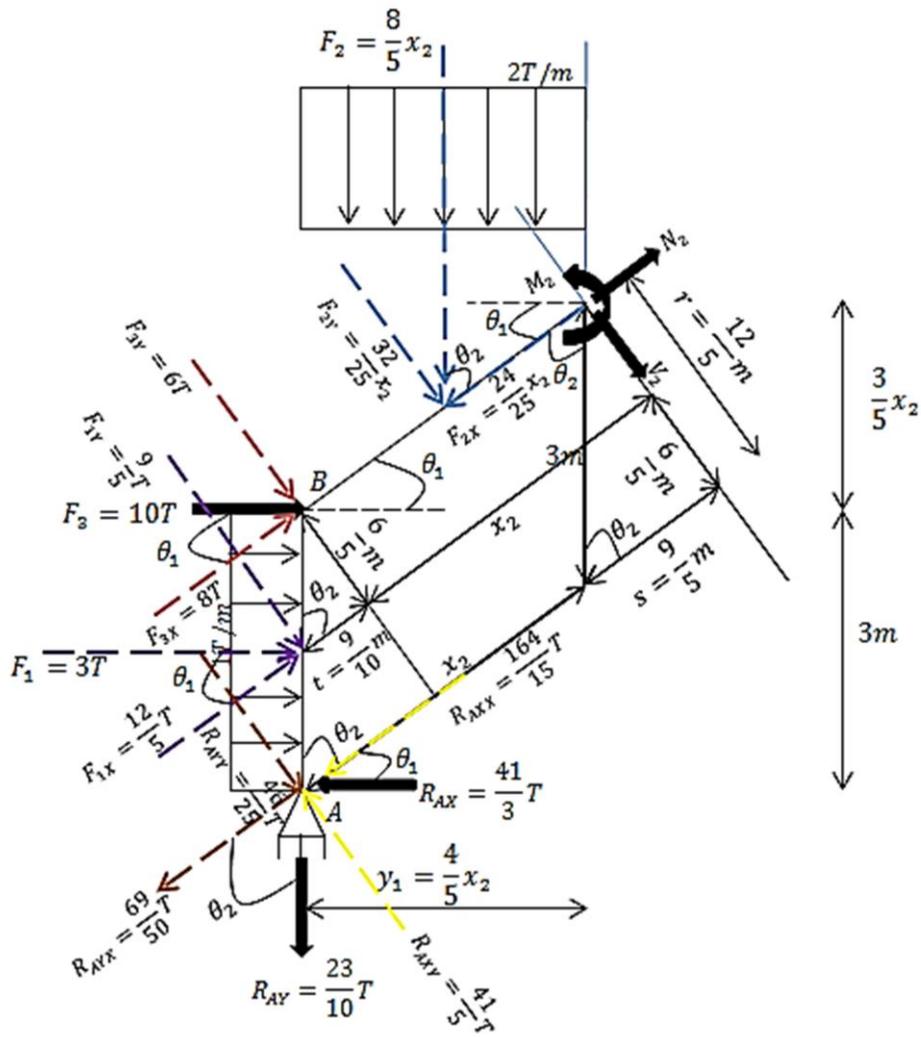
$$\frac{4}{5} = \frac{y_1}{x_2}$$

$$y_1 = \frac{4}{5} x_2$$



$$\frac{4}{3} = \frac{\frac{4}{5}x_2}{z_1}$$

$$z_1 = \frac{3}{5}x_2$$



Las distancias se obtuvieron de:

$$\cos \theta_2 = \frac{s}{3} \rightarrow s = 3 \cos \theta_2 = 3 * \frac{3}{5} = \frac{9}{5} m$$

$$\sin \theta_2 = \frac{r}{3} \rightarrow r = 3 \sin \theta_2 = 3 * \frac{4}{5} = \frac{12}{5} m$$

$$\tan \theta_2 = \frac{6}{t} \rightarrow t = \frac{\frac{6}{5}}{\tan \theta_2} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{10} m$$

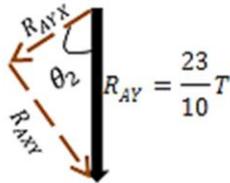
Cargas concentradas equivalentes de las presiones uniformemente repartidas:

$$F_1 = \left(1 \frac{T}{m}\right) (3m) = 3T$$

$$F_2 = \left(\frac{4}{5} x_2\right) (2) = \frac{8}{5} x_2$$

Calculo de las componentes rectangulares de cada una de las fuerzas:

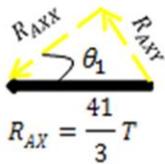
$$-Para R_{AY} = \frac{23}{10} T$$



$$R_{AYY} = R_{AY} * \sin \theta_2 = \left(\frac{23}{10} T\right) \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{46}{25} T$$

$$R_{AYX} = R_{AY} * \cos \theta_2 = \left(\frac{23}{10} T\right) \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{69}{50} T$$

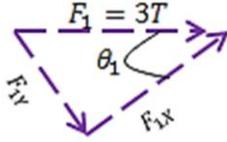
$$-Para R_{AX} = \frac{41}{3} T$$



$$R_{AXY} = R_{AX} * \sin \theta_1 = \left(\frac{41}{3} T\right) \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{41}{5} T$$

$$R_{AXX} = R_{AX} * \cos \theta_1 = \left(\frac{41}{3} T\right) \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{164}{15} T$$

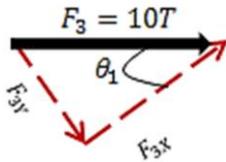
–Para $F_1 = 3T$



$$F_{1Y} = F_1 * \sin \theta_1 = (3T) \left(\frac{3}{5} \right) = \frac{9}{5} T$$

$$F_{1X} = F_1 * \cos \theta_1 = (3T) \left(\frac{4}{5} \right) = \frac{12}{5} T$$

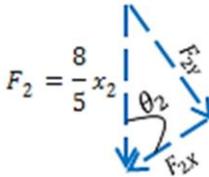
–Para $F_3 = 10T$



$$F_{3Y} = F_3 * \sin \theta_1 = (10T) \left(\frac{3}{5} \right) = 6T$$

$$F_{3X} = F_3 * \cos \theta_1 = (10T) \left(\frac{4}{5} \right) = 8T$$

–Para $F_2 = \frac{8}{5} x_2$



$$F_{2Y} = F_2 * \sin \theta_2 = \left(\frac{8}{5} x_2 \right) \left(\frac{4}{5} \right) = \frac{32}{25} x_2$$

$$F_{2X} = F_2 * \cos \theta_2 = \left(\frac{8}{5} x_2 \right) \left(\frac{3}{5} \right) = \frac{24}{25} x_2$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

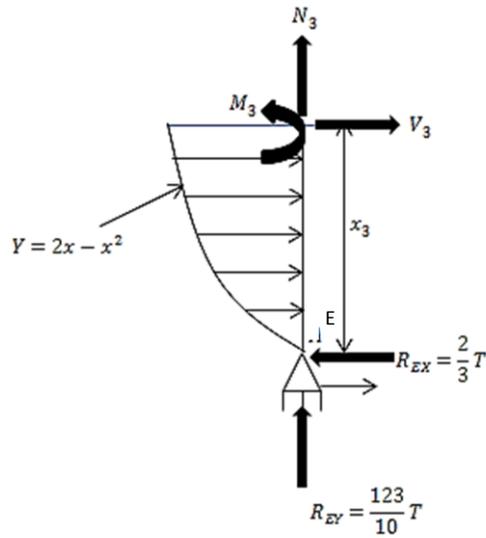
$$M_2 = -F_{2Y} \left(\frac{x_2}{2} \right) - F_{3Y}(x_2) - F_{1Y}(t + x_2) - R_{AYY}(x_2 + s) + R_{AXY}(x_2 + s) - F_{1X} \left(\frac{6}{5} \right) + R_{AYX}(r) + R_{AXX}(r)$$

$$M_2 = -\left(\frac{32}{25}x_2\right)\left(\frac{x_2}{2}\right) - (6)(x_2) - \left(\frac{9}{5}\right)\left(\frac{9}{10} + x_2\right) - \left(\frac{46}{25}\right)\left(x_2 + \frac{9}{5}\right) + \left(\frac{41}{5}\right)\left(x_2 + \frac{9}{5}\right) - \left(\frac{12}{5}\right)\left(\frac{6}{5}\right) + \left(\frac{69}{50}\right)\left(\frac{12}{5}\right) + \left(\frac{164}{15}\right)\left(\frac{12}{5}\right)$$

$$M_2 = -\frac{16}{25}x_2^2 - \frac{36}{25}x_2 + \frac{73}{2}$$

Miembro ED

$$0 \leq x_3 \leq 2m$$



Para la curva de segundo grado del corte:

-La carga concentrada equivalente es:

$$A_c = \int_0^{x_3} (2x - x^2) dx = x_3^2 - \frac{1}{3}x_3^3$$

-El punto de aplicación es:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{x_3} x(2x - x^2) dx}{\int_0^{x_3} (2x - x^2) dx} = \frac{\frac{2}{3}x_3^3 - \frac{1}{4}x_3^4}{x_3^2 - \frac{1}{3}x_3^3}$$

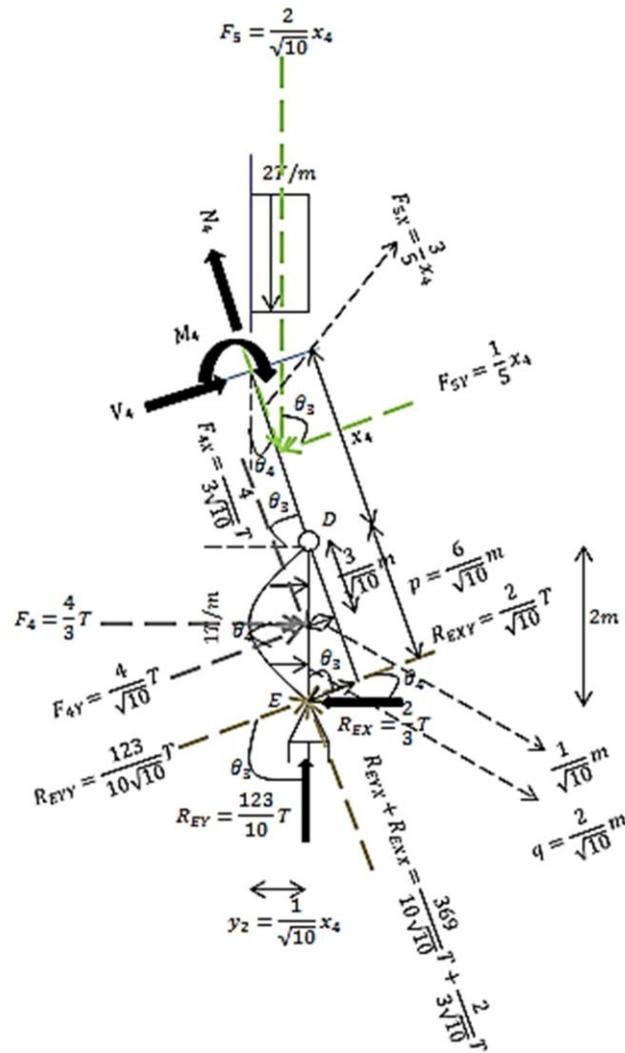
$$\sum M_{corte} = 0$$

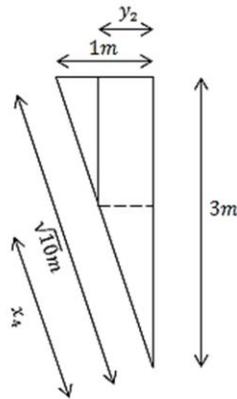
$$M_3 = \frac{2}{3}x_3 - \left(x_3^2 - \frac{1}{3}x_3^3\right) \left(x_3 - \frac{\frac{2}{3}x_3^3 - \frac{1}{4}x_3^4}{x_3^2 - \frac{1}{3}x_3^3}\right)$$

$$M_3 = \frac{1}{12}x_3^4 - \frac{x_3^3}{3} + \frac{2}{3}x_3$$

Miembro DC

$$0 \leq x_4 \leq \sqrt{10}m$$





$$\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{y_2}{x_4}$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} x_4$$

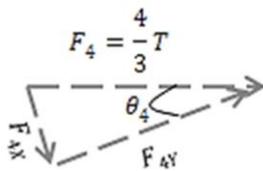
Las distancias se obtuvieron de:

$$\sin \theta_3 = \frac{p}{2} \rightarrow p = 2 \sin \theta_3 = 2 * \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \theta_3 = \frac{q}{2} \rightarrow q = 2 \cos \theta_3 = 2 * \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

Cálculo de las componentes rectangulares de cada una de las fuerzas:

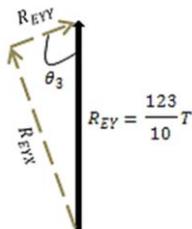
–Para $F_4 = \frac{4}{3}T$



$$F_{4X} = F_4 * \sin \theta_4 = \left(\frac{4}{3}T\right) \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{4}{3\sqrt{10}}T$$

$$F_{4Y} = F_4 * \cos \theta_4 = \left(\frac{4}{3}T\right) \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{4}{\sqrt{10}}T$$

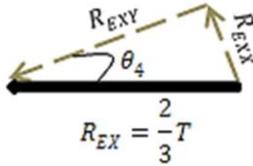
–Para $R_{EY} = \frac{123}{10}T$



$$R_{EYX} = R_{EY} * \sin \theta_3 = \left(\frac{123}{10}T\right) \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{369}{10\sqrt{10}}T$$

$$R_{EYY} = R_{EY} * \cos \theta_3 = \left(\frac{123}{10} T\right) \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{123}{10\sqrt{10}} T$$

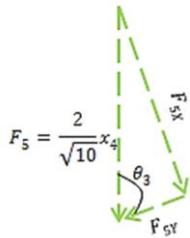
-Para $R_{EX} = \frac{2}{3} T$



$$R_{EXX} = R_{EX} * \sin \theta_4 = \left(\frac{2}{3} T\right) \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{10}} T$$

$$R_{EXY} = R_{EX} * \cos \theta_4 = \left(\frac{2}{3} T\right) \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{2}{\sqrt{10}} T$$

-Para $F_5 = \frac{2}{\sqrt{10}} x_4$



$$F_{5X} = F_5 * \sin \theta_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{10}} x_4\right) \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3}{5} x_4$$

$$F_{5Y} = F_5 * \cos \theta_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{10}} x_4\right) \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{5} x_4$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_4 + F_{5Y} \left(\frac{x_4}{2}\right) - F_{4Y} \left(\frac{3}{\sqrt{10}} + x_4\right) + (R_{EXY} - R_{EYY})(p + x_4) + (R_{EYX} + R_{EXX})(q) - F_{4X} \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 0$$

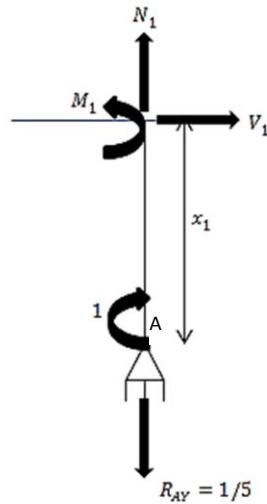
$$M_4 + \left(\frac{1}{5}x_4\right)\left(\frac{x_4}{2}\right) - \left(\frac{4}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{10}} + x_4\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{10}} - \frac{123}{10\sqrt{10}}\right)\left(\frac{6}{\sqrt{10}} + x_4\right) + \left(\frac{369}{10\sqrt{10}} + \frac{2}{3\sqrt{10}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right) - \left(\frac{4}{3\sqrt{10}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 0$$

$$M_4 = \frac{(143\sqrt{10})(x_4)}{100} - \frac{1}{10}x_4^2$$

EIF 2

Miembro AB

$$0 \leq x_1 \leq 3m$$

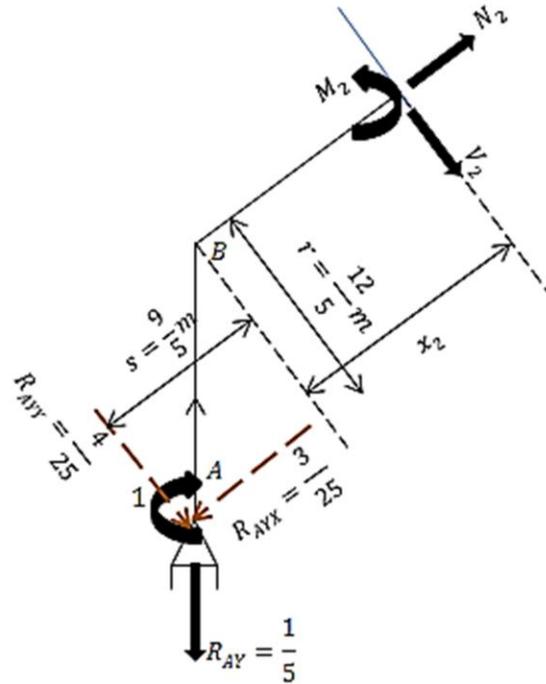


$$\sum M \text{ corte} = 0$$

$$M_1 = 1$$

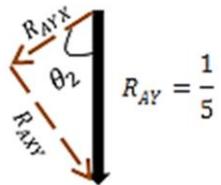
Miembro BC

$$0 \leq x_2 \leq 5m$$



Cálculo de las componentes rectangulares:

-Para $R_{AY} = \frac{1}{5}$



$$R_{AYY} = R_{AY} * \sin \theta_2 = \left(\frac{1}{5}\right) \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{25}$$

$$R_{AYX} = R_{AY} * \cos \theta_2 = \left(\frac{1}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{25}$$

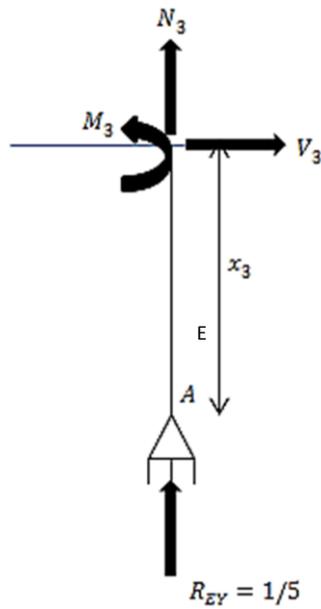
$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = 1 + \left(\frac{3}{25}\right)\left(\frac{12}{5}\right) - \left(\frac{4}{25}\right)\left(x_2 + \frac{9}{5}\right)$$

$$M_2 = 1 - \frac{4}{25}x_2$$

Miembro ED

$$0 \leq x_3 \leq 2m$$

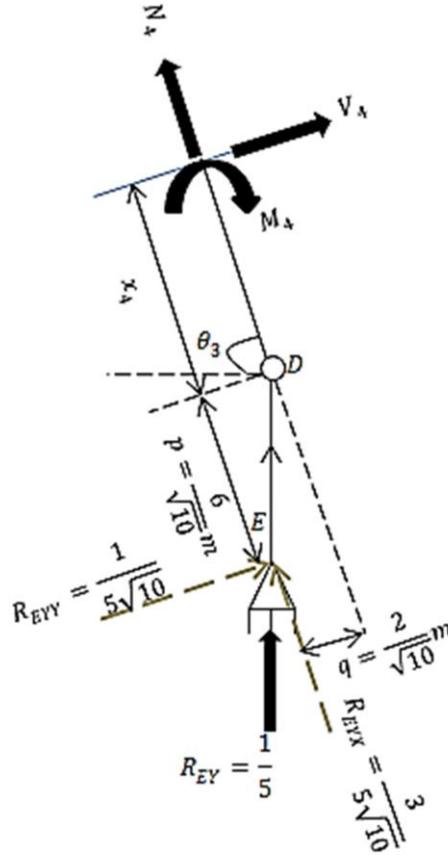


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = 0$$

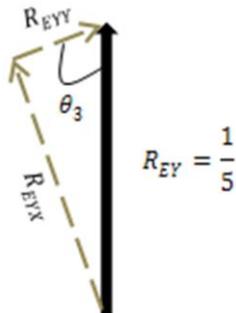
Miembro DC

$$0 \leq x_4 \leq \sqrt{10}m$$



Cálculo de las componentes rectangulares:

—Para $R_{EY} = \frac{1}{5}$



$$R_{EYX} = R_{EY} * \sin \theta_3 = \left(\frac{1}{5}\right) \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3}{5\sqrt{10}}$$

$$R_{EYY} = R_{EY} * \cos \theta_3 = \left(\frac{1}{5}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{5\sqrt{10}}$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_4 + \left(\frac{3}{5\sqrt{10}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right) - \left(\frac{1}{5\sqrt{10}}\right) + \left(\frac{6}{\sqrt{10}} + x_4\right) = 0$$

$$M_4 = \frac{(\sqrt{10})(x_4)}{50}$$

Sean:

$$d_1 = \text{Giro en A de EIF 1}$$

$$f_{11} = \text{Giro en A de EIF 2}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^3 \left(\frac{41}{3}x_1 - \frac{x_1^2}{2} \right) (1) dx_1 + \int_0^5 \left(-\frac{16}{25}x_2^2 - \frac{36}{25}x_2 + \frac{73}{2} \right) \left(1 - \frac{4}{25}x_2 \right) dx_2 \right. \\ &\quad + \int_0^2 \left(\frac{1}{12}x_3^4 - \frac{x_3^3}{3} + \frac{2}{3}x_3 \right) (0) dx_3 \\ &\quad \left. + \int_0^{\sqrt{10}} \left(\frac{(143\sqrt{10})(x_4)}{100} - \frac{1}{10}x_4^2 \right) \left(\frac{(\sqrt{10})(x_4)}{50} \right) dx_4 \right] \\ &= \frac{1}{EI} \left[57 + \frac{2713}{30} + 0 + \frac{271\sqrt{10}}{300} \right] = \frac{150.2899241}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^3 (1)(1) dx_1 + \int_0^5 \left(1 - \frac{4}{25}x_2 \right) \left(1 - \frac{4}{25}x_2 \right) dx_2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^2 (0)(0) dx_3 + \int_0^{\sqrt{10}} \left(\frac{(\sqrt{10})(x_4)}{50} \right) \left(\frac{(\sqrt{10})(x_4)}{50} \right) dx_4 \right] \\ &= \frac{1}{EI} \left[3 + \frac{31}{15} + 0 + \frac{\sqrt{10}}{75} \right] = \frac{5.108830368}{EI} \end{aligned}$$

Planteamiento del sistema de ecuaciones de compatibilidad geométrica:

$$d_1 + f_{11}M_A = 0$$

Sustituyendo:

$$\frac{150.2899241}{EI} + \frac{5.108830368}{EI} M_A = 0$$

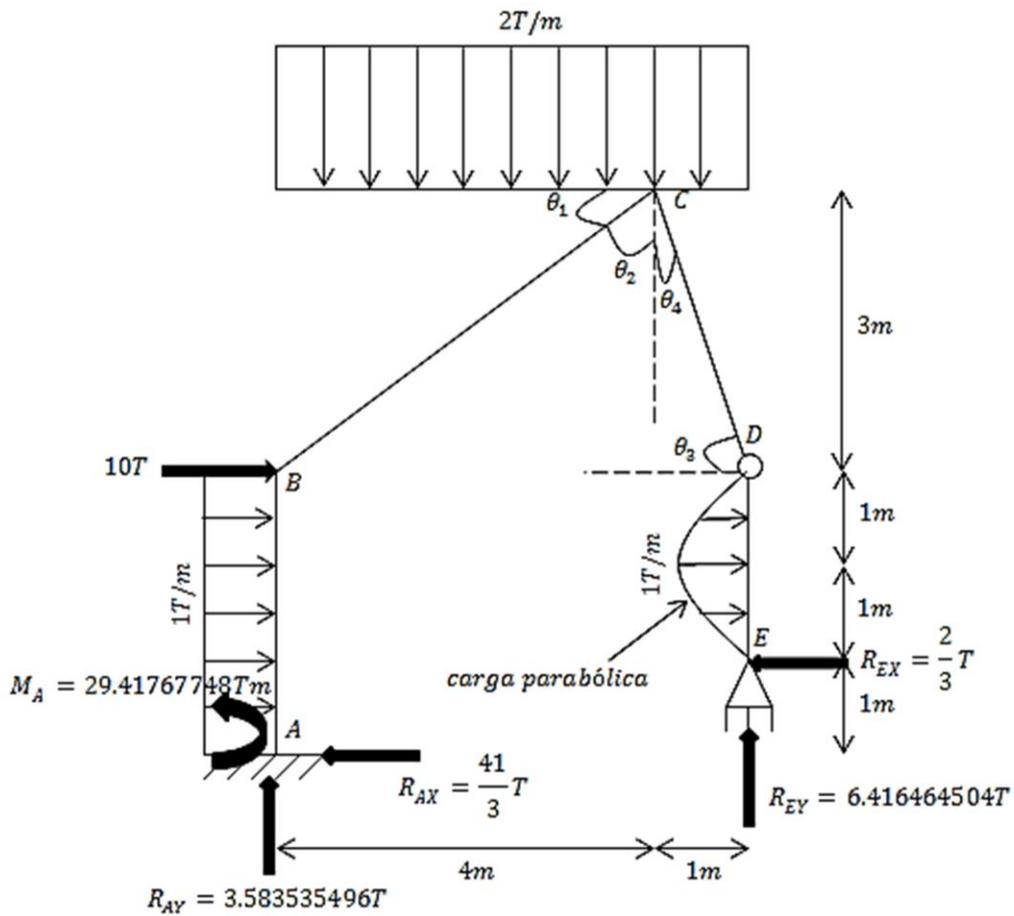
Resolviendo:

$$M_A = -\frac{150.2899241}{5.108830368} = -29.41767748$$

El signo indica que:

$$M_A = 29.41767748 \text{ T.m} \curvearrowright$$

El siguiente diagrama muestra las reacciones en los soportes de la estructura real:



Las reacciones restantes se obtuvieron de:

De $\sum MD = 0$ para el miembro ED:

$$2R_{EX} - \left(\frac{4}{3}\right)(1) = 0$$

$$R_{EX} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}T \leftarrow$$

De $\sum FX = 0$ para todo el marco:

$$(1)(3) + 10 + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} - R_{AX} = 0$$

$$R_{AX} = \frac{41}{3}T \leftarrow$$

De $\sum MDizq = 0$

$$5R_{AY} - 29.41767748 + \left(\frac{41}{3}\right)(3) - (1)(3)(1.5) - (2)(4)(3) - (2)(1)(0.5) = 0$$

$$R_{AY} = 3.583535496T \uparrow$$

De $\sum FY = 0$ para todo el marco:

$$3.583535496 - (2)(4) - (2)(1) + R_{EY} = 0$$

$$R_{EY} = 6.416464504T \uparrow$$

Como comprobación:

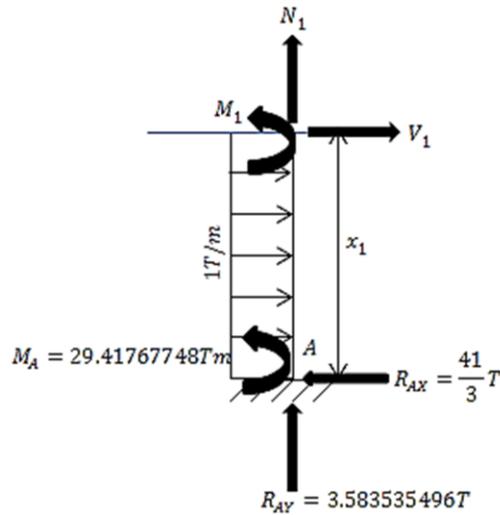
$$\sum MA = 0$$

$$-29.41767748 + 1(3)(1.5) + 10(3) + 2(5)(2.5) + \frac{4}{3}(2) - \frac{2}{3}(1) - 6.416464504 = 0 \quad ok$$

Ecuaciones de momento, cortante y normal de la estructura original o real:

Miembro AB

$$0 \leq x_1 \leq 3m$$



$$\sum M \text{ corte} = 0$$

$$M_1 = \frac{41}{3}x_1 - \frac{x_1^2}{2} - 29.41767748$$

$$x_1 = 3, M_1 = 7.08232$$

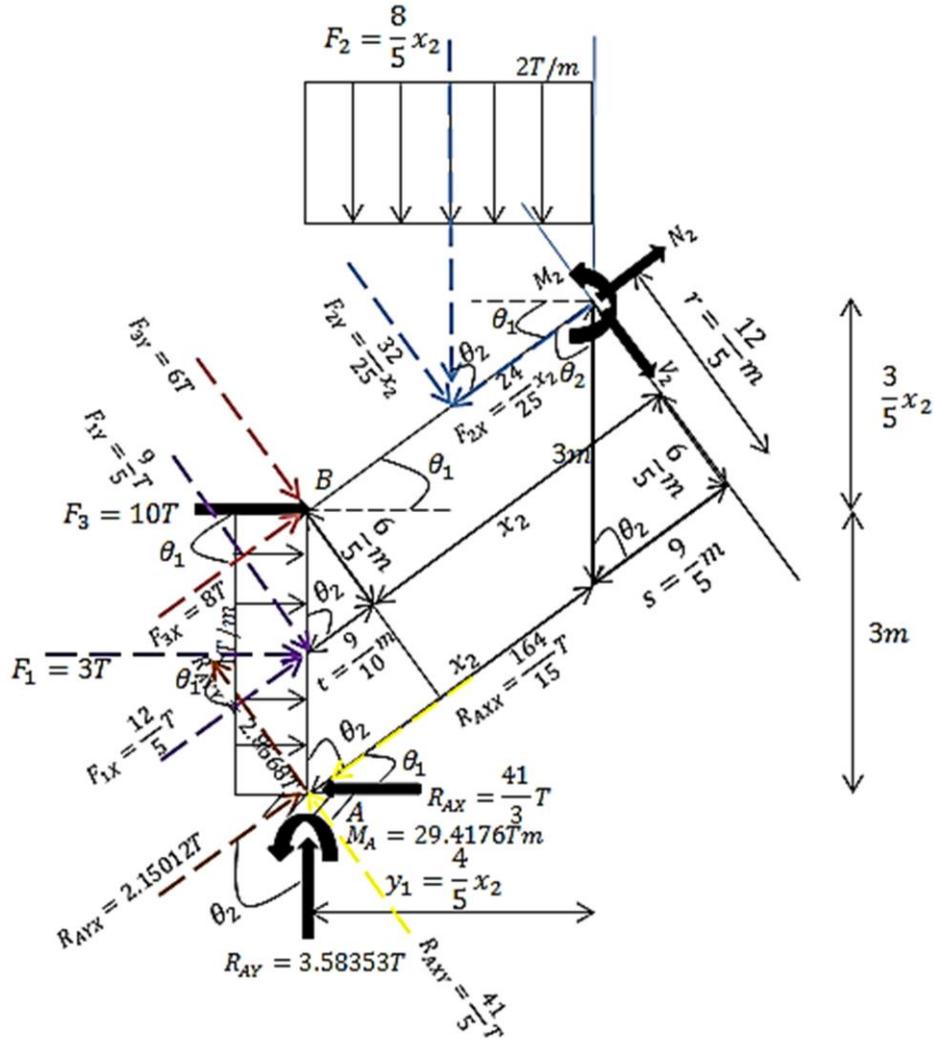
$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = \frac{41}{3} - x_1$$

$$\sum FY = 0$$

$$N_1 = -3.583535496$$

Miembro BC

$$0 \leq x_2 \leq 5m$$



Cálculo de las componentes rectangulares:

–Para $R_{AY} = 3.583535496T$

$$R_{AYY} = R_{AY} * \sin \theta_2 = (3.583535496T) \left(\frac{4}{5}\right) = 2.866828397T$$

$$R_{AYX} = R_{AY} * \cos \theta_2 = (3.583535496T) \left(\frac{3}{5}\right) = 2.150121298T$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = -\left(\frac{32}{25}x_2\right)\left(\frac{x_2}{2}\right) - (6)(x_2) - \left(\frac{9}{5}\right)\left(\frac{9}{10} + x_2\right) + 2.866828397\left(x_2 + \frac{9}{5}\right) \\ + \left(\frac{41}{5}\right)\left(x_2 + \frac{9}{5}\right) - \left(\frac{12}{5}\right)\left(\frac{6}{5}\right) - 2.150121298\left(\frac{12}{5}\right) + \left(\frac{164}{15}\right)\left(\frac{12}{5}\right) - 29.41767748$$

$$M_2 = -0.64x_2^2 + 3.266828397x_2 + 7.082322519$$

$$x_2 = 0, M_2 = 7.08232; x_2 = 5m, M_2 = 7.4164$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_2} = -1.28x_2 + 3.266828397$$

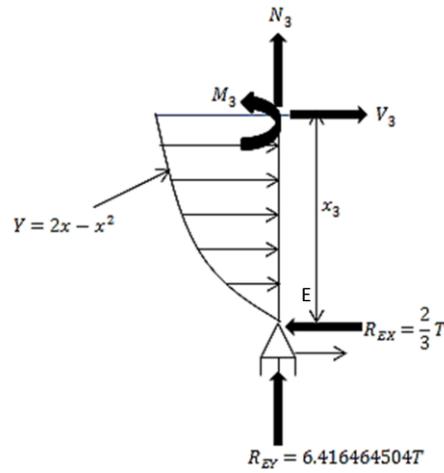
$$\sum FX = 0$$

$$N_2 - \frac{24}{25}x_2 + 8 + \frac{12}{5} + 2.150121298 - \frac{164}{15} = 0$$

$$N_2 = \frac{24}{25}x_2 - 1.616787965$$

Miembro ED

$$0 \leq x_3 \leq 2m$$



$$\sum M \text{ corte} = 0$$

$$M_3 = \frac{2}{3}x_3 - \left(x_3^2 - \frac{1}{3}x_3^3\right) \left(x_3 - \frac{\frac{2}{3}x_3^3 - \frac{1}{4}x_3^4}{x_3^2 - \frac{1}{3}x_3^3}\right)$$

$$M_3 = \frac{1}{12}x_3^4 - \frac{x_3^3}{3} + \frac{2}{3}x_3$$

$x_3 = 2, M_3 = 0$, el momento es cero en la articulación

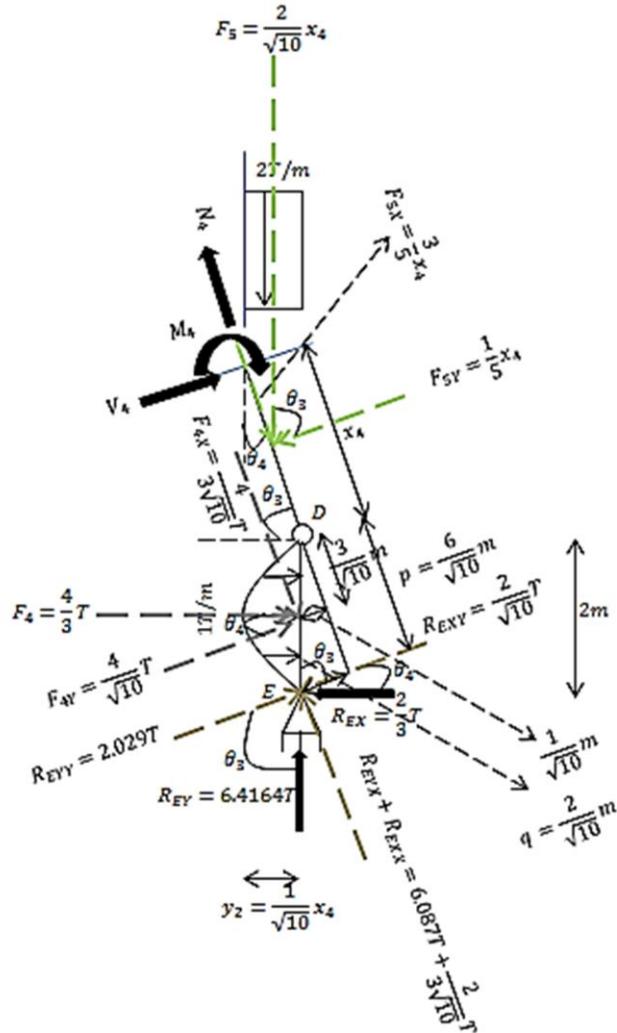
$$V_3 = \frac{dM_3}{dx_3} = \frac{x_3^3}{3} - x_3^2 + \frac{2}{3}$$

$$\sum FY = 0$$

$$N_3 = -6.416464504$$

Miembro DC

$$0 \leq x_4 \leq \sqrt{10}m$$



Cálculo de las componentes rectangulares:

—Para $R_{EY} = 6.416464504T$

$$R_{EYX} = R_{EY} * \sin \theta_3 = (6.416464504T) \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right) = 6.087192707T$$

$$R_{EYY} = R_{EY} * \cos \theta_3 = (6.416464504T) \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right) = 2.029064236T$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_4 + \left(\frac{1}{5}x_4\right)\left(\frac{x_4}{2}\right) - \left(\frac{4}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{10}} + x_4\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{10}} - 2.029064236\right)\left(\frac{6}{\sqrt{10}} + x_4\right) + \left(6.087192707T + \frac{2}{3\sqrt{10}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right) - \left(\frac{4}{3\sqrt{10}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 0$$

$$M_4 = -\frac{1}{10}x_4^2 + 2.661519768x_4$$

$x_4 = 0, M_4 = 0$, el momento es cero en la articulación

$$x_4 = \sqrt{10}, M_4 = 7.4164$$

En este caso:

$$V_4 = -\frac{dM_4}{dx_4} = 0.2x_4 - 2.661519768$$

$$\sum FX = 0$$

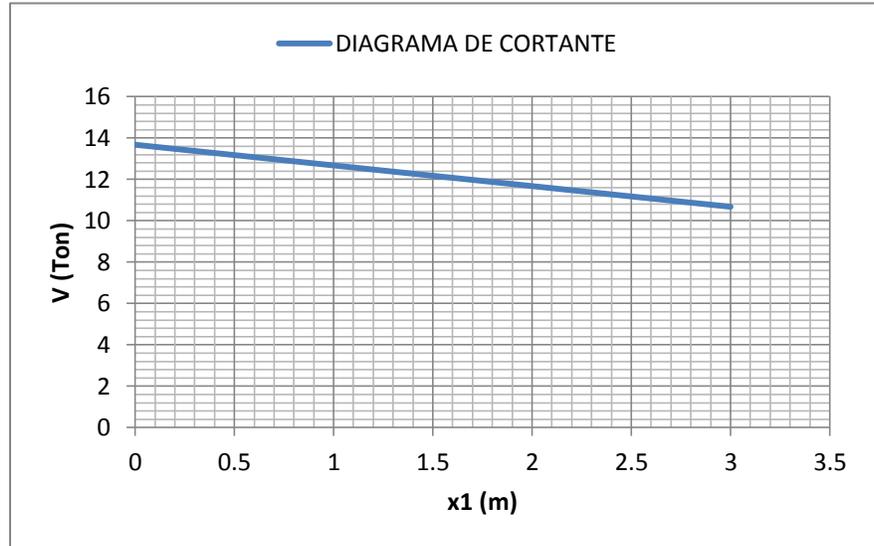
$$N_4 - \frac{3}{5}x_4 - \frac{4}{3\sqrt{10}} + 6.087192707 + \frac{2}{3\sqrt{10}} = 0$$

$$N_3 = \frac{3}{5}x_4 - 5.87637419$$

DIAGRAMA DE CORTANTE

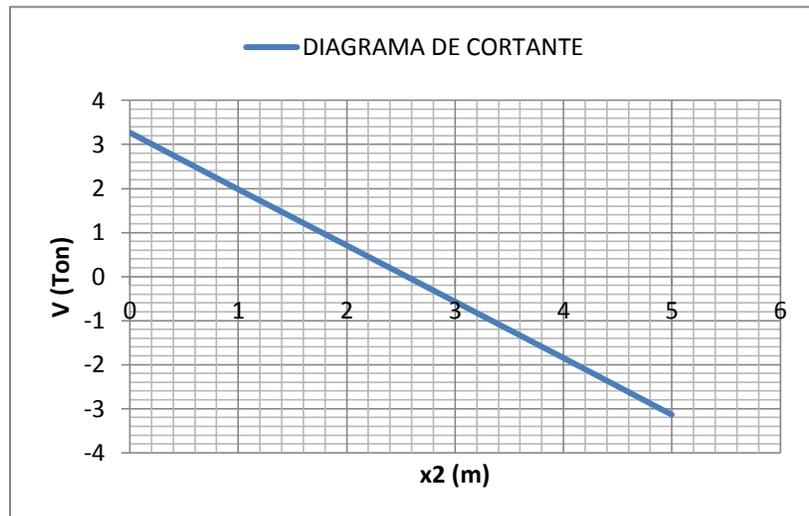
MIEMBRO AB (ROTADO)

x1 (m)	V (Ton)
0	13.6666667
1	12.6666667
2	11.6666667
3	10.6666667



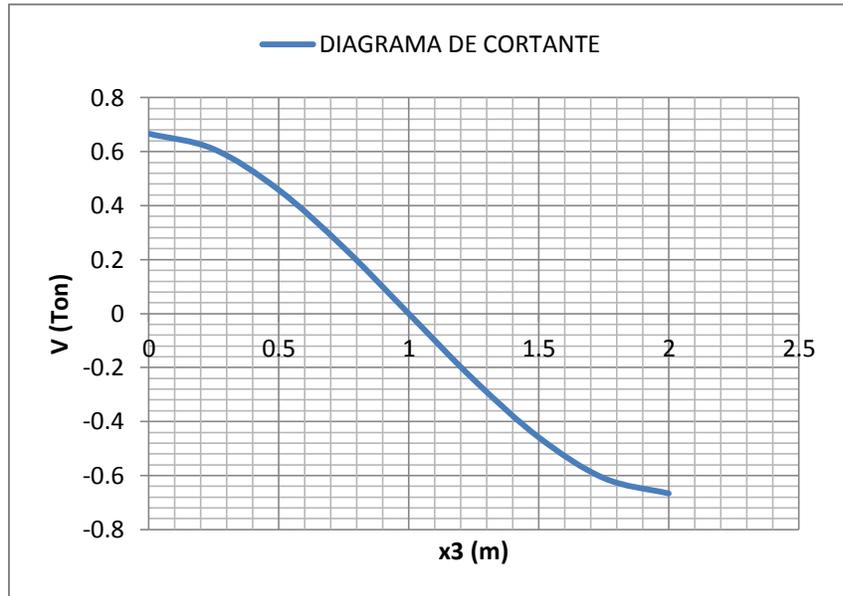
MIEMBRO BC (ROTADO)

x2 (m)	V (Ton)
0	3.2668284
1	1.9868284
2	0.7068284
3	-0.5731716
4	-1.8531716
5	-3.1331716



MIEMBRO ED (ROTADO)

x3 (m)	V (Ton)
0	0.66666667
0.25	0.609375
0.5	0.45833333
0.75	0.24479167
1	0
1.25	-0.24479167
1.5	-0.45833333
1.75	-0.609375
2	-0.66666667



MIEMBRO DC (ROTADO)

x4 (m)	V (Ton)
0	-2.66151977
0.79056942	-2.50340589
1.58113883	-2.345292
2.37170824	-2.18717812
3.16227766	-2.02906424

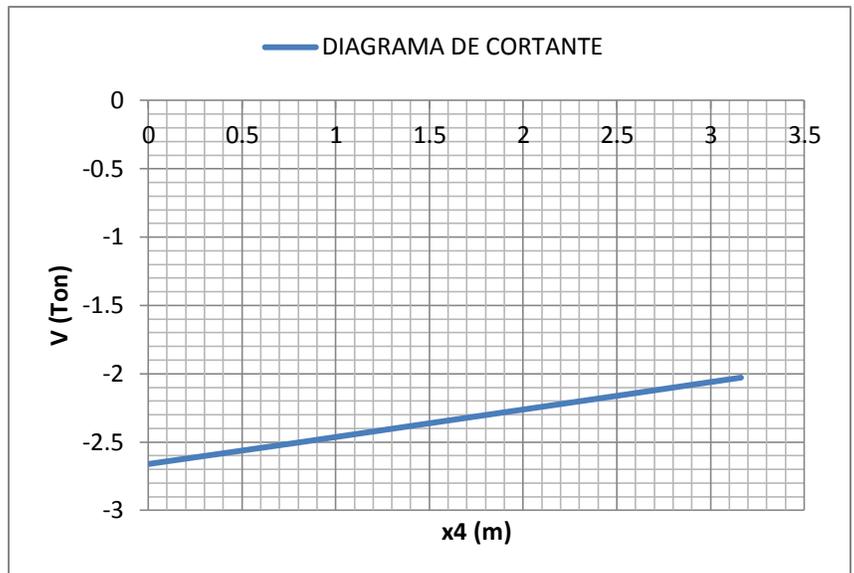
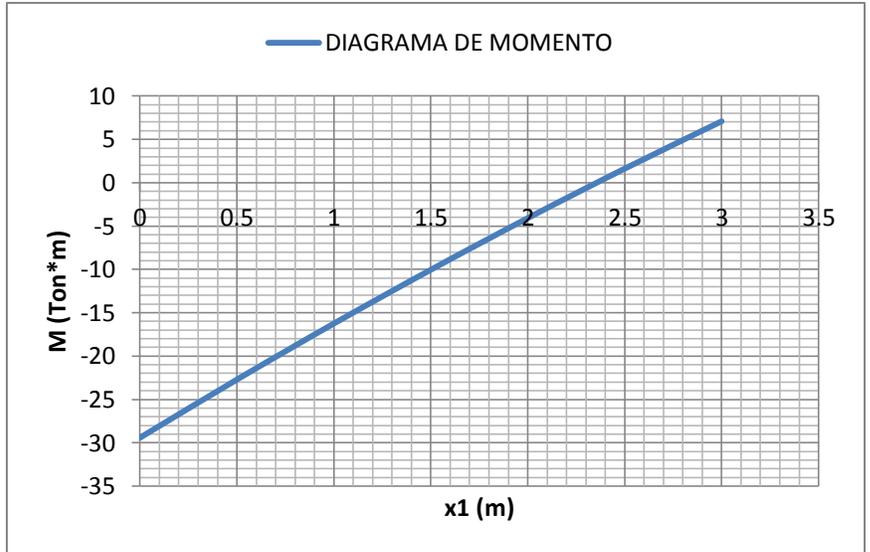


DIAGRAMA DE MOMENTO:

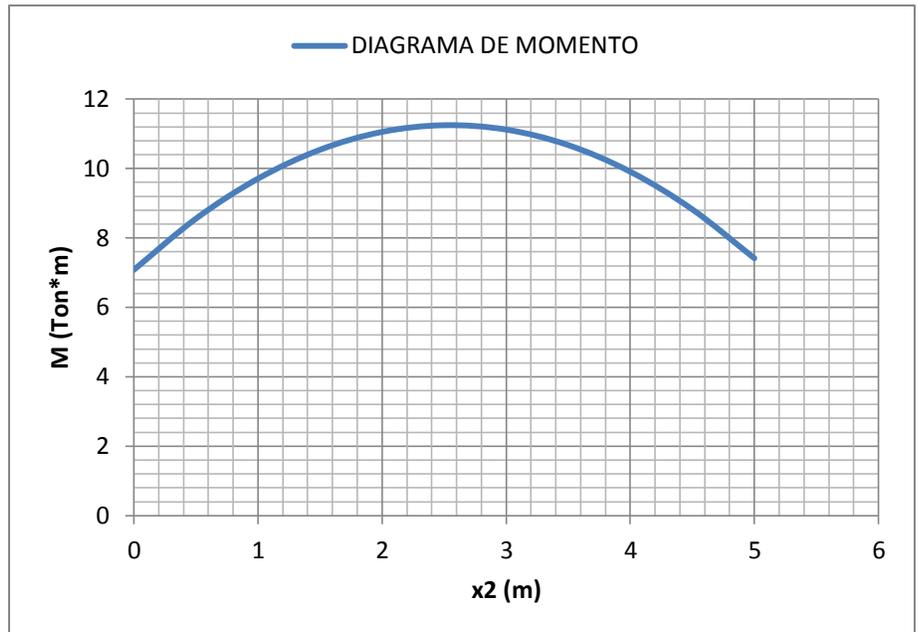
MIEMBRO AB (ROTADO)

x1 (m)	M (Ton*m)
0	-29.4176775
0.5	-22.7093441
1	-16.2510108
1.5	-10.0426775
2	-4.08434415
2.5	1.62398919
3	7.08232252



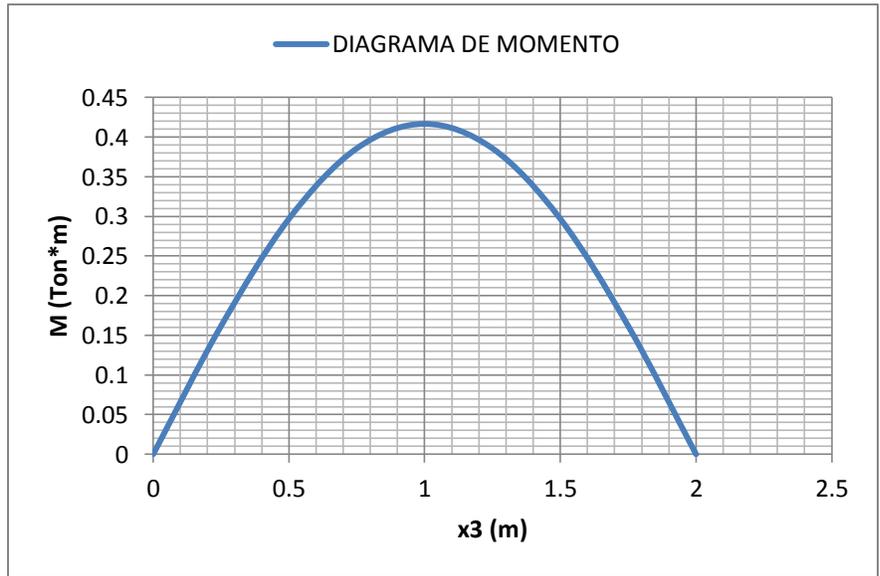
MIEMBRO BC (ROTADO)

x2 (m)	M (Ton*m)
0	7.08232252
0.5	8.55573672
1	9.70915092
1.5	10.5425651
2	11.0559793
2.5	11.2493935
3	11.1228077
3.5	10.6762219
4	9.90963611
4.5	8.82305031
5	7.4164645



MIEMBRO ED (ROTADO)

x3 (m)	M (Ton*m)
0	0
0.25	0.16178385
0.5	0.296875
0.75	0.38574219
1	0.41666667
1.25	0.38574219
1.5	0.296875
1.75	0.16178385
2	0



MIEMBRO DC (ROTADO)

x4 (m)	M (Ton*m)
0	0
0.79056942	2.04161613
1.58113883	3.95823225
2.37170824	5.74984838
3.16227766	7.4164645

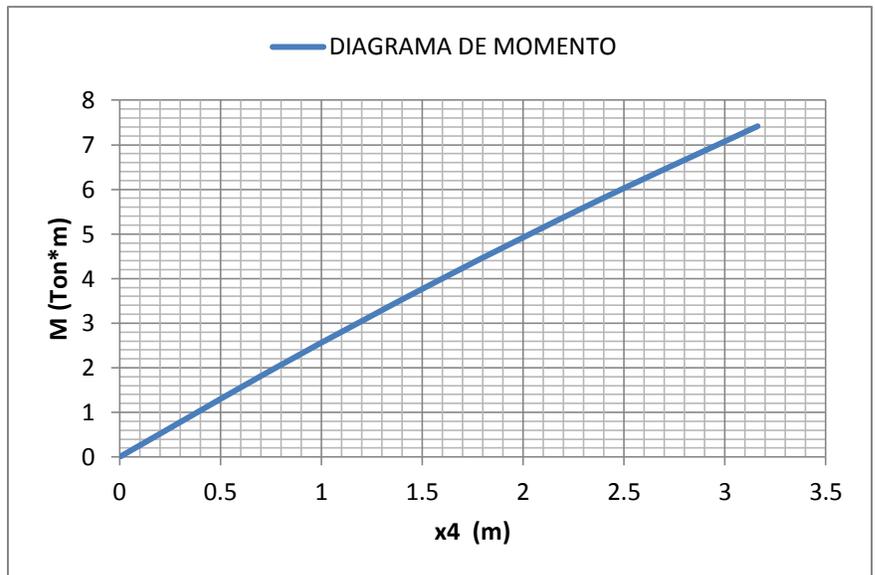
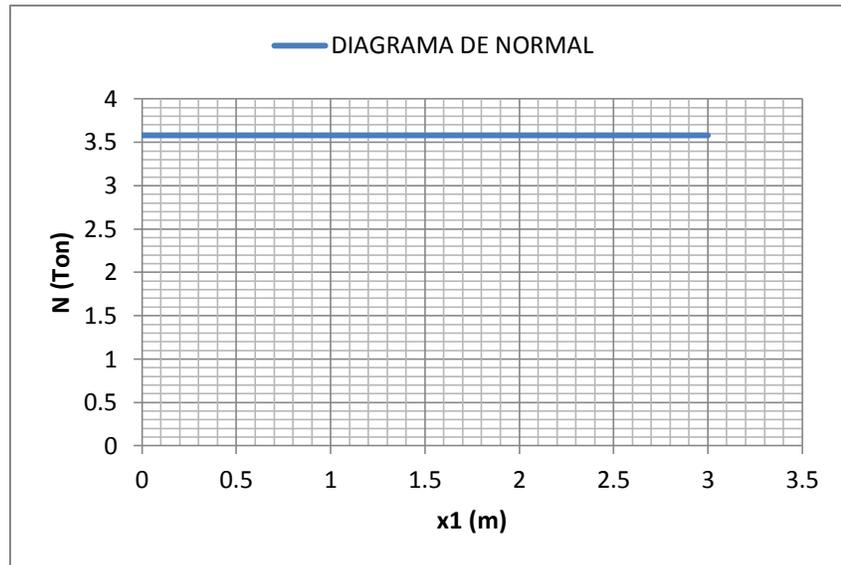


DIAGRAMA DE NORMAL

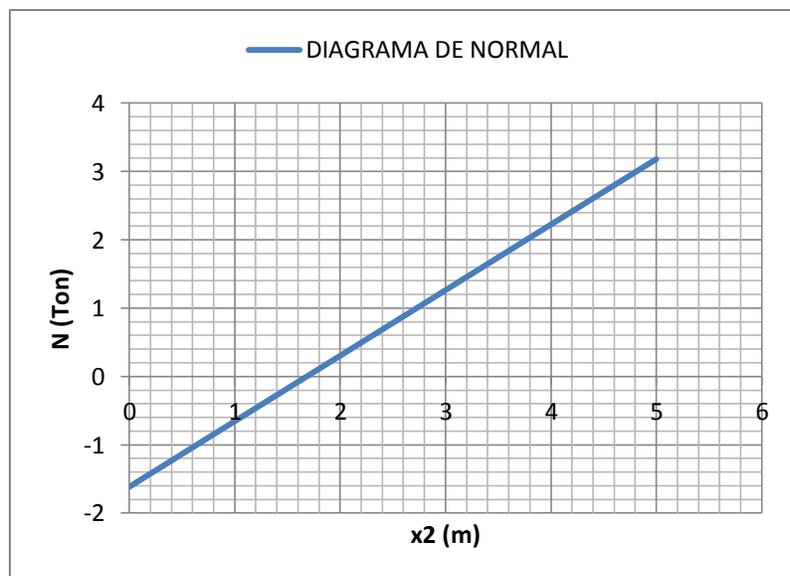
MIEMBRO AB (ROTADO)

x1 (m)	N (Ton)
0	3.5835355
1	3.5835355
2	3.5835355
3	3.5835355



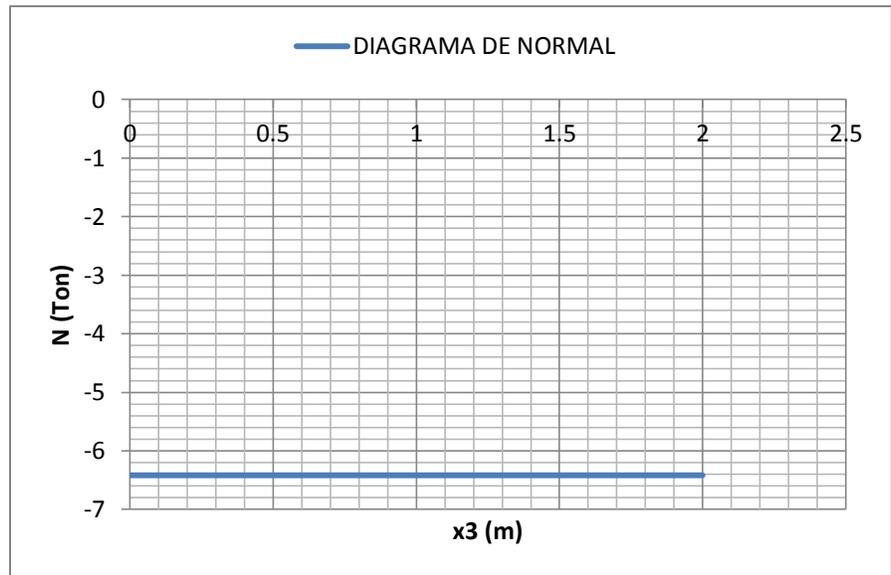
MIEMBRO BC (ROTADO)

x2 (m)	N(Ton)
0	-1.61678797
1	-0.65678797
2	0.30321204
3	1.26321204
4	2.22321204
5	3.18321204



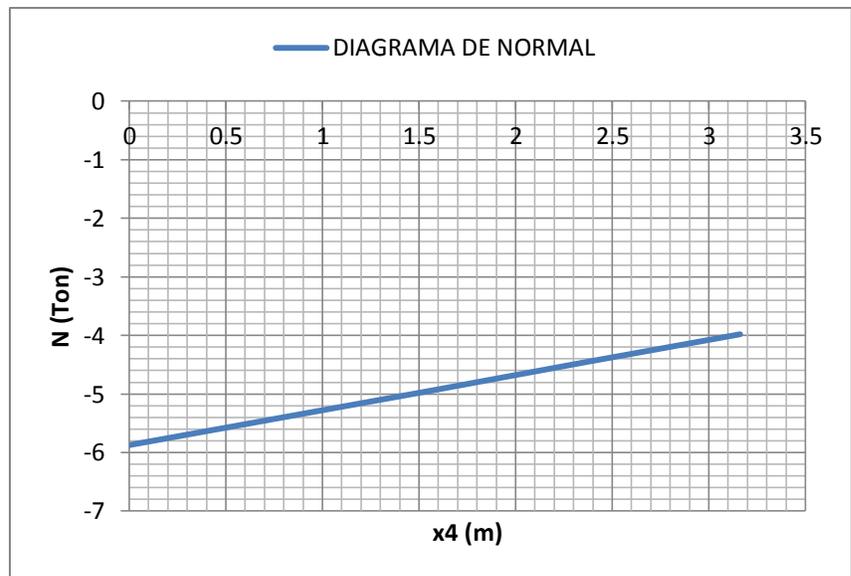
MIEMBRO ED (ROTADO)

x3 (m)	N (Ton)
0	-6.4164645
0.5	-6.4164645
1	-6.4164645
1.5	-6.4164645
2	-6.4164645

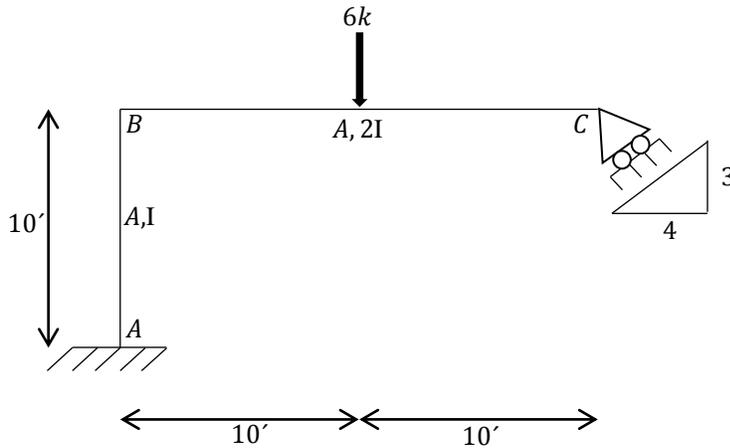


MIEMBRO DC (ROTADO)

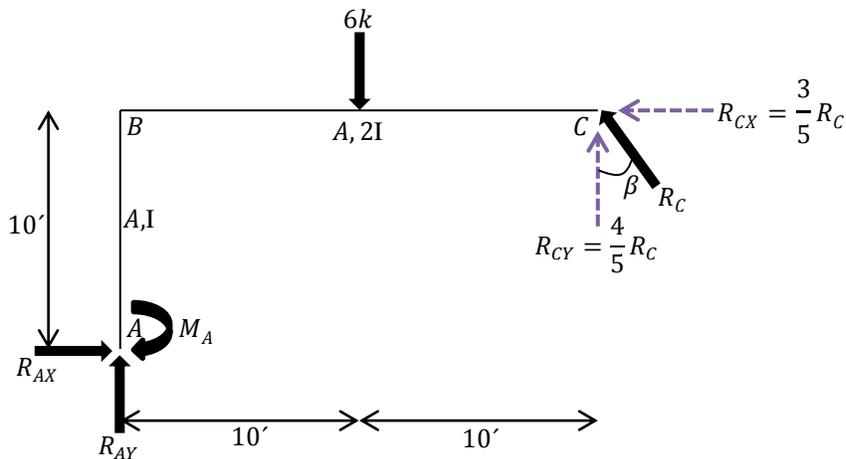
x4 (m)	N (Ton)
0	-5.8763742
0.79056942	-5.40203255
1.58113883	-4.9276909
2.37170824	-4.45334925
3.16227766	-3.9790076



7.-Use el método de flexibilidades para calcular las reacciones en los apoyos y luego determine las ecuaciones algebraicas que describen la variación de los elementos mecánicos de la estructura rígida mostrada en la figura. En la ilustración se indican los valores relativos del área y del momento de inercia de la sección transversal de cada elemento de la estructura. $I = 500\text{pulg}^4$ y $A = 20\text{pulg}^2$. El módulo de elasticidad es igual para los dos elementos.



Identificación de las reacciones en los apoyos:



Ahora, obsérvese la figura de los dos triángulos:

Del triángulo 1:

$$\sin \theta = \frac{3}{5}, \cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{3}{4} \rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{3}{4}$$

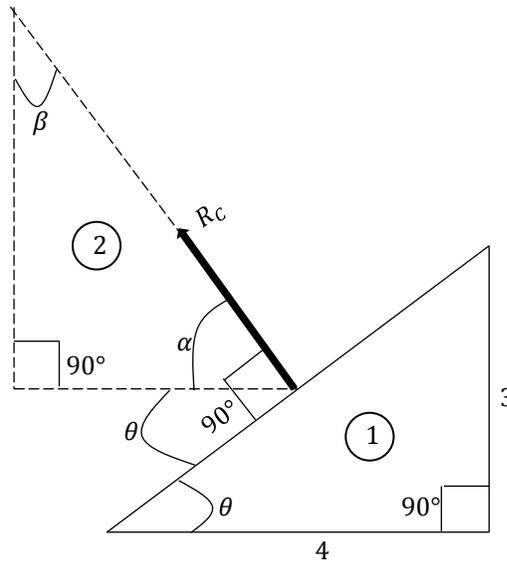
Del triángulo 2:

$$\alpha = 90^\circ - \theta = 90^\circ - \tan^{-1} \frac{3}{4}$$

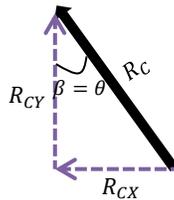
$$90^\circ + \alpha + \beta = 180^\circ \rightarrow \beta = 180^\circ - \alpha - 90^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - \left(90^\circ - \tan^{-1} \frac{3}{4}\right) - 90^\circ$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{3}{4} = \theta = 36.8699^\circ$$



Componentes rectangulares de R_C :



$$\sin \theta = \frac{R_{CX}}{R_C} \rightarrow R_{CX} = R_C (\sin \theta)$$

Como $\sin \theta = \frac{3}{5}$

$$R_{CX} = \frac{3}{5} R_C$$

$$\cos \theta = \frac{R_{CY}}{R_C} \rightarrow R_{CY} = R_C (\cos \theta)$$

$$\text{Como } \cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$R_{CY} = \frac{4}{5} R_C$$

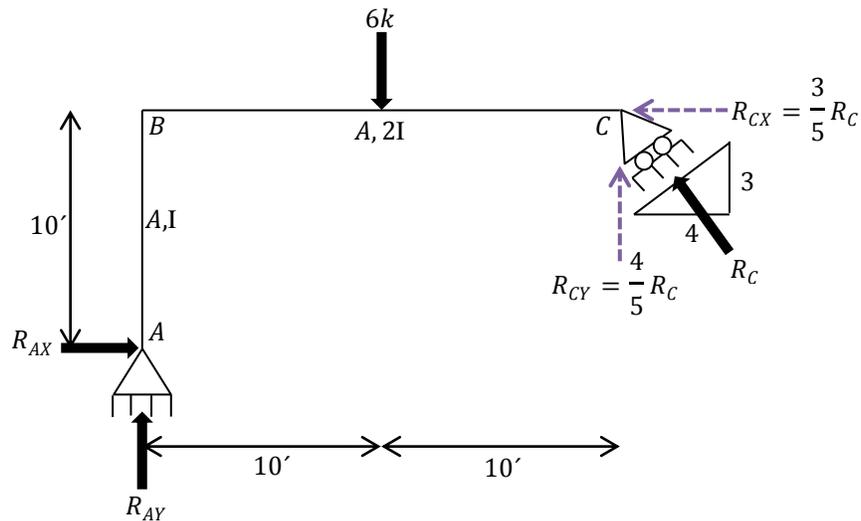
Note que sólo hay cuatro incógnitas de reacción (R_{AX} , R_{AY} , M_A y R_C), por lo que el marco es estáticamente indeterminado de grado uno.

Seleccionamos como acción redundante la del momento en A.

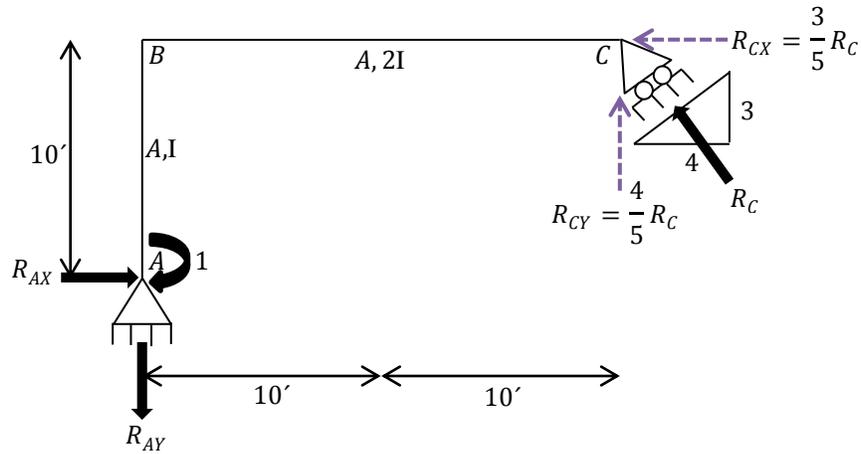
Por método de superposición, la estructura real es igual a la suma de las siguientes estructuras:

$$MR = MIF1 + MIF2$$

MIF1 (Estructura M):



MIF2 (Estructura m_1):



Análisis de MIF1 (Estructura M):

Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$6(10) - R_{CX}(10) - R_{CY}(20) = 0$$

$$6(10) - \frac{3}{5}R_C(10) - \frac{4}{5}R_C(20) = 0$$

$$6(10) - \frac{30}{5}R_C - \frac{80}{5}R_C = 0$$

$$R_C \left(-\frac{30}{5} - \frac{80}{5} \right) = -60$$

$$R_C(-22) = -60$$

$$R_C = \frac{-60}{-22}$$

$$R_C = 2.7273k \swarrow$$

$$R_{CX} = \frac{3}{5}(2.7273k) = 1.6364k \leftarrow$$

$$R_{CY} = \frac{4}{5}(2.7273k) = 2.1818k \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} - 6 + R_{CY} = 0 \rightarrow R_{AY} - 6 + 2.1818 = 0$$

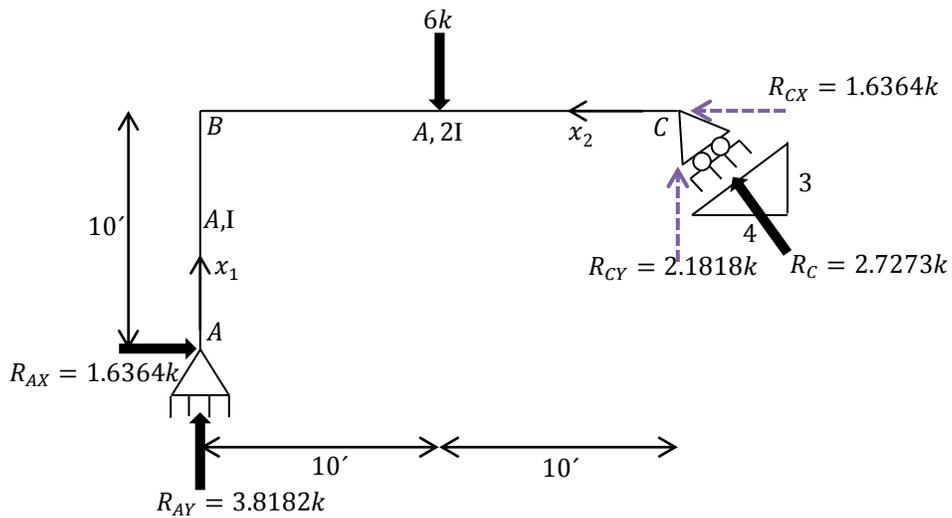
$$R_{AY} = 3.8182k \uparrow$$

$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} - R_{CX} = 0 \rightarrow R_{AX} - 1.6364 = 0$$

$$R_{AX} = 1.6364k \rightarrow$$

Diagrama en el que se visualizan los valores de las reacciones en los apoyos del MIF1:

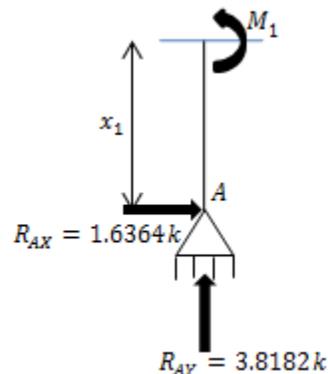


Nota: x_1, x_2 indican las direcciones en las que se harán los cortes para obtener las ecuaciones algebraicas que describen la variación de los elementos mecánicos de cada miembro.

Ecuaciones de Momento:

Miembro A-B

$$0 \leq x_1 \leq 10'$$

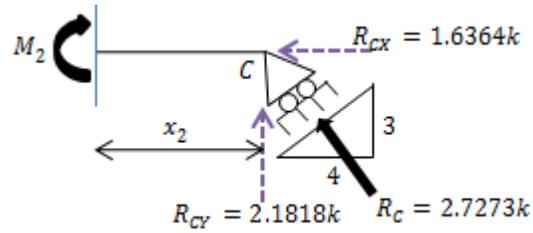


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -1.6364x_1$$

Miembro C-B

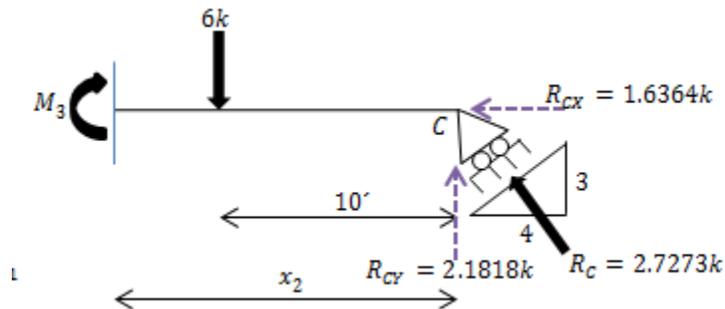
$$0 \leq x_2 \leq 10'$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 - 2.1818x_2 = 0 \rightarrow M_2 = 2.1818x_2$$

$$10' \leq x_2 \leq 20'$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 + 6(x_2 - 10) - 2.1818x_2 = 0 \rightarrow M_3 = 60 - 3.8182x_2$$

Análisis de MIF2 (Estructura m_1):

Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$1 - \frac{3}{5}R_C(10) - \frac{4}{5}R_C(20) = 0$$

$$R_C = 0.045455 \swarrow$$

$$R_{CX} = \frac{3}{5}(0.045455) = 0.027273 \leftarrow$$

$$R_{CY} = \frac{4}{5}(0.045455) = 0.036364 \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$-R_{AY} + R_{CY} = 0 \rightarrow -R_{AY} + 0.036364 = 0$$

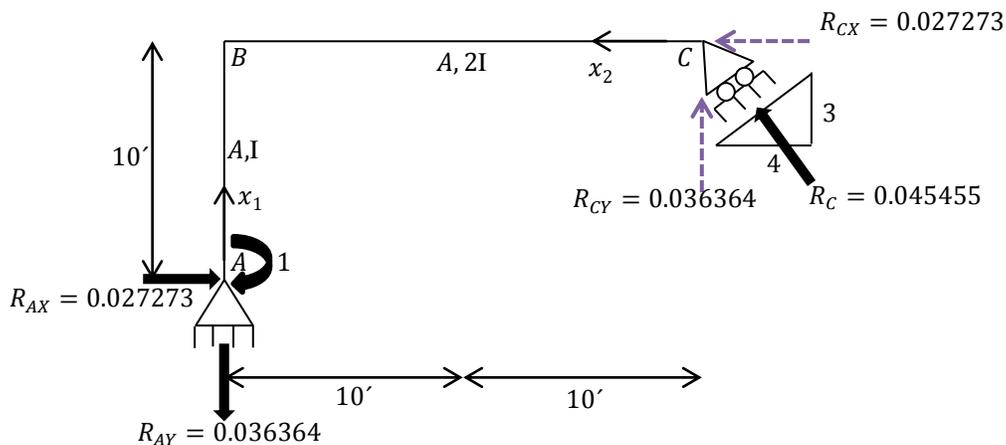
$$R_{AY} = 0.036364 \downarrow$$

$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} - R_{CX} = 0 \rightarrow R_{AX} - 0.027273 = 0$$

$$R_{AX} = 0.027273 \rightarrow$$

Diagrama en el que se visualizan los valores de las reacciones en los apoyos del MIF2:

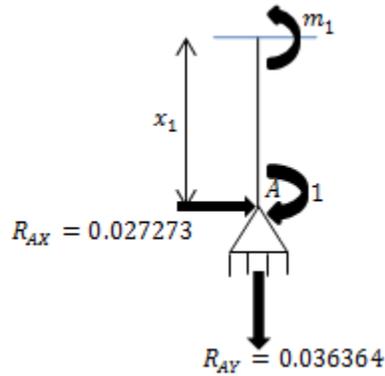


Nota: x_1, x_2 indican las direcciones en las que se harán los cortes para obtener las ecuaciones algebraicas que describen la variación de los elementos mecánicos de cada miembro.

Ecuaciones de Momento:

Miembro A-B

$$0 \leq x_1 \leq 10'$$

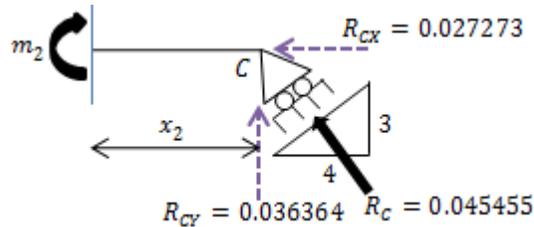


$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m_1 = 1 - 0.027273x_1$$

Miembro C-B

$$0 \leq x_2 \leq 20'$$



$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m_2 - 0.036364x_2 = 0 \rightarrow m_2 = 0.036364x_2$$

Sean:

$$d_1 = \theta_A \text{ de MIF1} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} Mm_1 dx$$

$$d_2 = \theta_A \text{ de MIF2} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_1 m_1 dx$$

Donde:

θ = Giro o rotación

M = Ecuaciones de Momento de la estructura M

m_1 = Ecuaciones de momento de la estructura m_1

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left(\int_0^{10} (-1.6364x_1)(1 - 0.027273x_1) dx_1 \right) + \frac{1}{2EI} \left(\int_0^{10} (2.1818x_2)(0.036364x_2) dx_2 + \int_{10}^{20} (60 - 3.8182x_2)(0.036364x_2) dx_2 \right)$$

$$= \frac{1}{EI} (-66.9435 + 13.2232 + 1.65214) = \frac{1}{EI} (-52.0682)$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \left(\int_0^{10} (1 - 0.027273x_1)(1 - 0.027273x_1) dx_1 \right) + \frac{1}{2EI} \left(\int_0^{20} (0.036364x_2)(0.036364x_2) dx_2 \right)$$

$$= \frac{1}{EI} (7.52064 + 1.76312) = \frac{1}{EI} (9.28376)$$

Planteamiento de la ecuación de compatibilidad geométrica:

$$d_1 + f_{11}M_A = 0$$

Sustituyendo:

$$\frac{1}{EI} (-52.0682) + \frac{1}{EI} (9.28376)M_A = 0$$

Simplificando y despejando la incógnita:

$$M_A = \frac{52.0682}{9.28376} = 5.60852$$

Como el signo es positivo, el sentido propuesto del momento virtual unitario es correcto y M_A va en la misma dirección.

$$\therefore M_A = 5.60852k.pie \curvearrowright$$

Cálculo de las reacciones restantes:

$$\sum MA = 0$$

$$6(10) + 5.60852 - R_{CX}(10) - R_{CY}(20) = 0$$

$$6(10) + 5.60852 - \frac{3}{5}R_C(10) - \frac{4}{5}R_C(20) = 0$$

$$-22R_C = -65.6085$$

$$R_C = \frac{65.6085}{22}$$

$$R_C = 2.98221k \swarrow$$

$$R_{CX} = \frac{3}{5}(2.98221k) = 1.78932k \leftarrow$$

$$R_{CY} = \frac{4}{5}(2.98221k) = 2.38576k \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$R_{AY} - 6 + R_{CY} = 0 \rightarrow R_{AY} - 6 + 2.38576 = 0$$

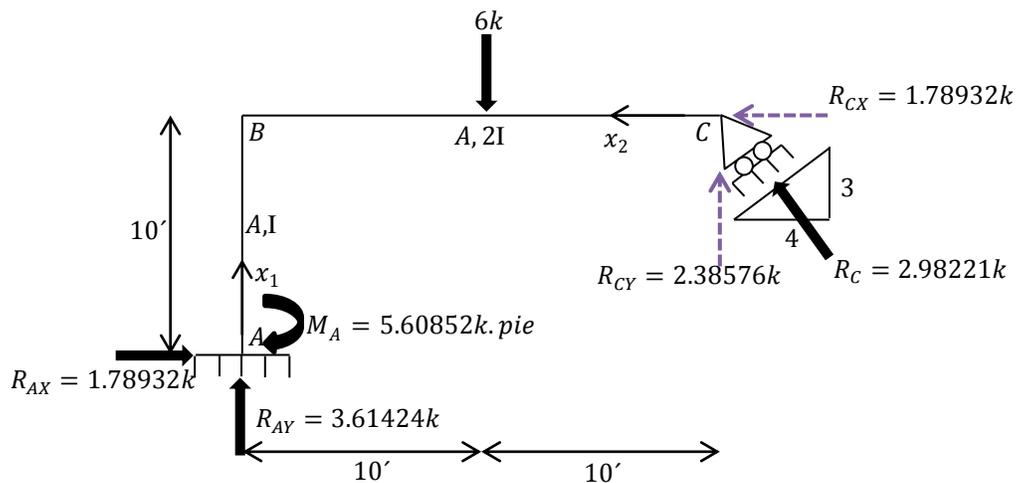
$$R_{AY} = 3.61424k \uparrow$$

$$\sum F_X = 0$$

$$R_{AX} - R_{CX} = 0 \rightarrow R_{AX} - 1.78932 = 0$$

$$R_{AX} = 1.78932k \rightarrow$$

Diagrama en el que se visualizan los valores de las reacciones en los apoyos de la estructura real:

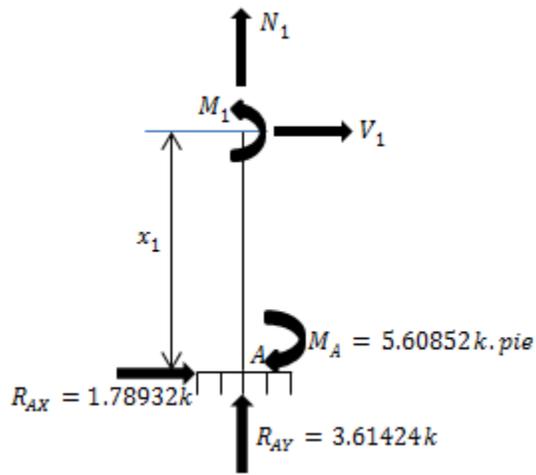


Nota: x_1, x_2 indican las direcciones en las que se harán los cortes para obtener las ecuaciones algebraicas que describen la variación de los elementos mecánicos de cada miembro.

Ecuaciones de momento, cortante y normal de la estructura real:

Miembro A-B

$$0 \leq x_1 \leq 10'$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 5.60852 - 1.78932x_1$$

$$x_1 = 0, M_1 = 5.60852; x_1 = 10, M_1 = -12.2847$$

$$\sum FX = 0$$

$$V_1 + 1.78932 = 0$$

$$V_1 = -1.78932$$

$$o V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = -1.78932$$

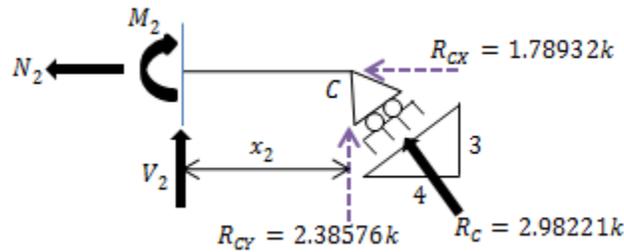
$$\sum FY = 0$$

$$N_1 + 3.61424 = 0$$

$$N_1 = -3.61424$$

Miembro C-B

$$0 \leq x_2 \leq 10'$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 - 2.38576x_2 = 0 \rightarrow M_2 = 2.38576x_2$$

$$x_2 = 0, M_2 = 0; x_2 = 10, M_2 = 23.8576$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$V_2 + 2.38576 = 0$$

$$V_2 = -2.38576$$

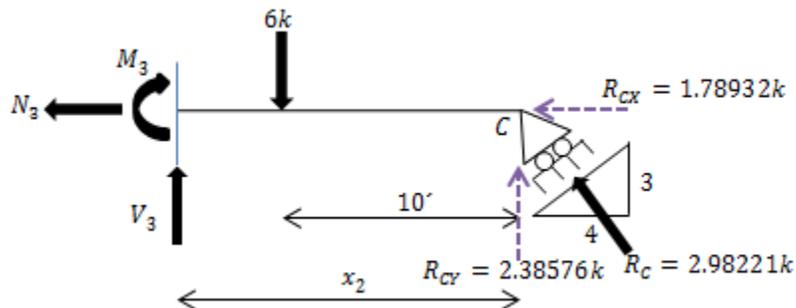
$$o V_2 = -\frac{dM_2}{dx_2} = -2.38576$$

$$\sum F_X = 0$$

$$-N_2 - 1.78932 = 0$$

$$N_2 = -1.78932$$

$$10' \leq x_2 \leq 20'$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 + 6(x_2 - 10) - 2.38576x_2 = 0 \rightarrow M_3 = 60 - 3.61424x_2$$

$$x_2 = 10, M_2 = 23.8576; x_2 = 20, M_2 = -12.2848$$

$$\sum FY = 0$$

$$V_3 + 2.38576 - 6 = 0$$

$$V_3 = 3.61424$$

$$o V_3 = -\frac{dM_3}{dx_2} = 3.61424$$

$$\sum FX = 0$$

$$-N_3 - 1.78932 = 0$$

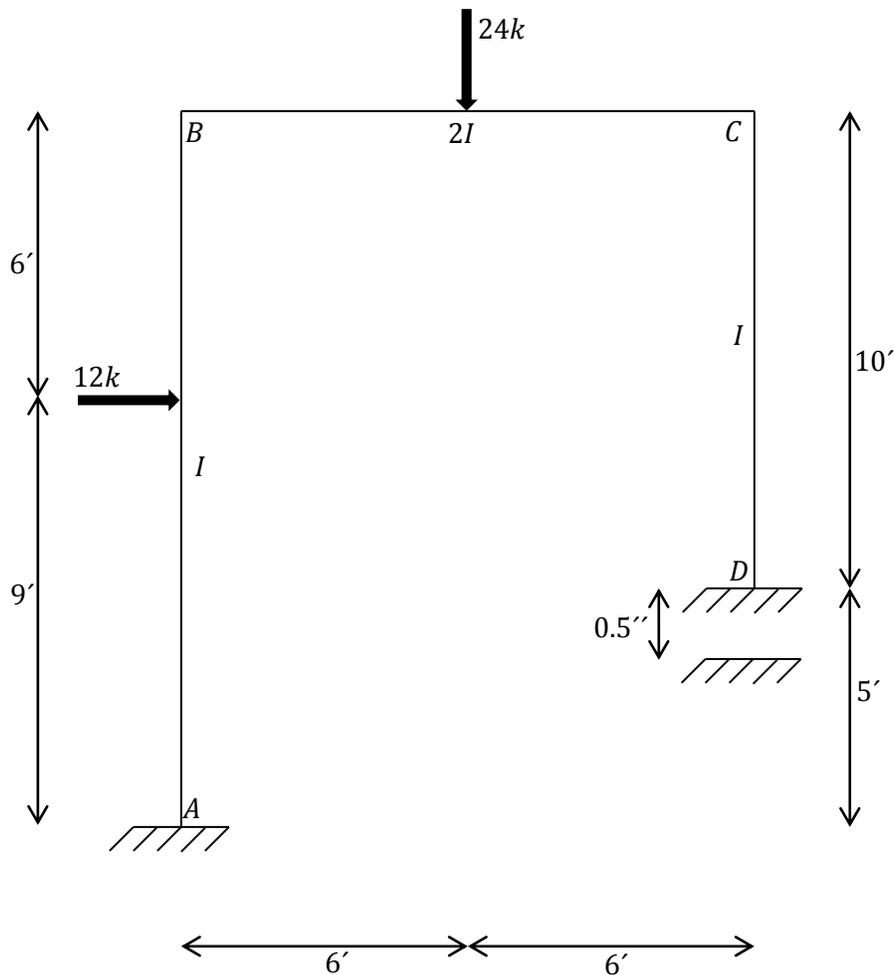
$$N_3 = -1.78932$$

8.-Calcule las reacciones de los apoyos de la estructura plana descrita en la figura correspondientes a la carga y perturbación del apoyo D indicadas; esta última corresponde al asentamiento de 0.50 pulgadas que experimenta el poyo derecho. La estructura esta empotrada en los puntos A y D, el momento de inercia de las vigas es el doble del momento de inercia de las columnas, el módulo de elasticidad es constante y se sugiere que se consideren únicamente las deformaciones por flexión.

Datos:

$$E = 30000k/pulg^2$$

$$I = 200pulg^4$$



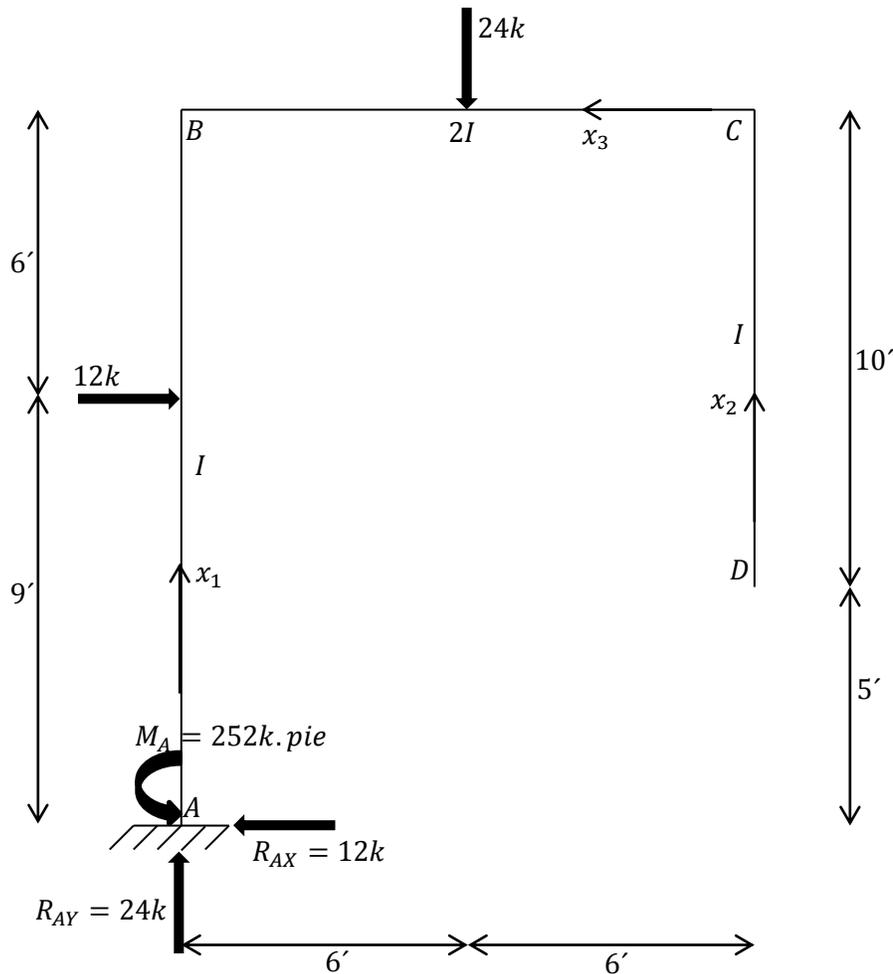
Solución:

La estructura es estáticamente indeterminada en tercer grado; por tanto, tres acciones son redundantes. Por conveniencia se escogen las tres reacciones del apoyo derecho, punto d, como acciones redundantes.

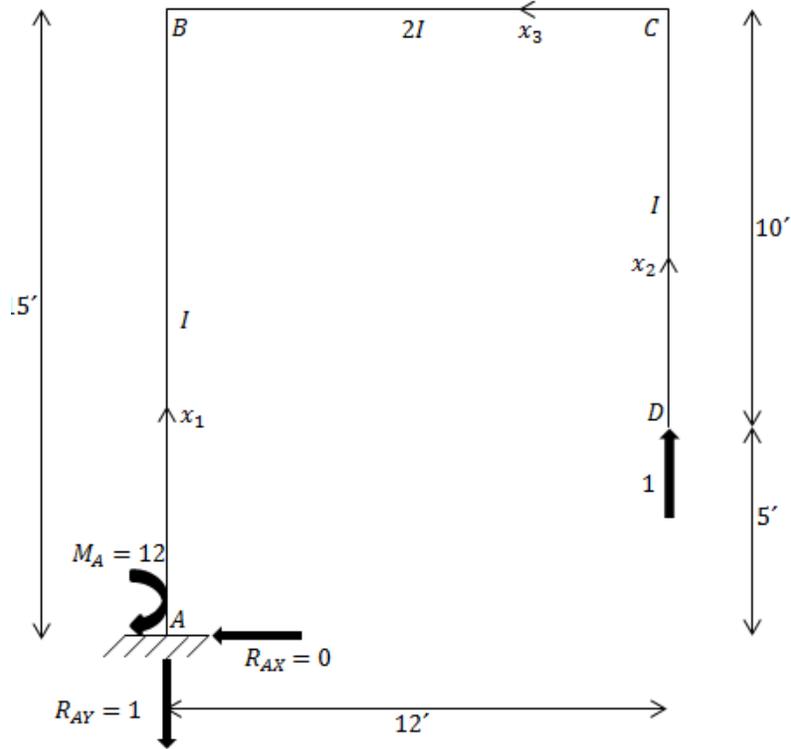
Por método de superposición, la estructura real es igual a la suma de las siguientes estructuras:

$$MR = MIF1 + MIF2 + MIF3 + MIF4$$

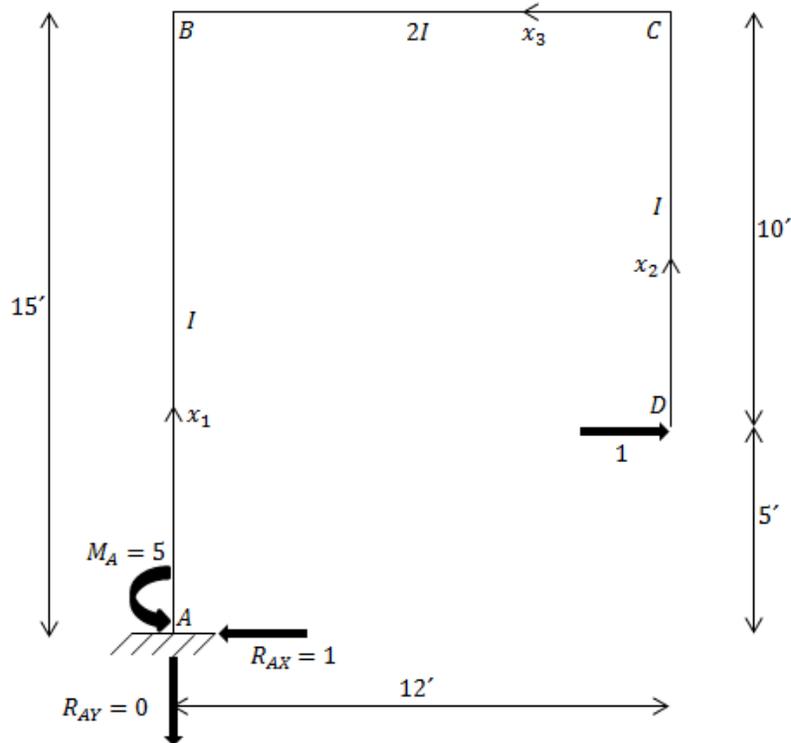
MIF1 (Estructura M):



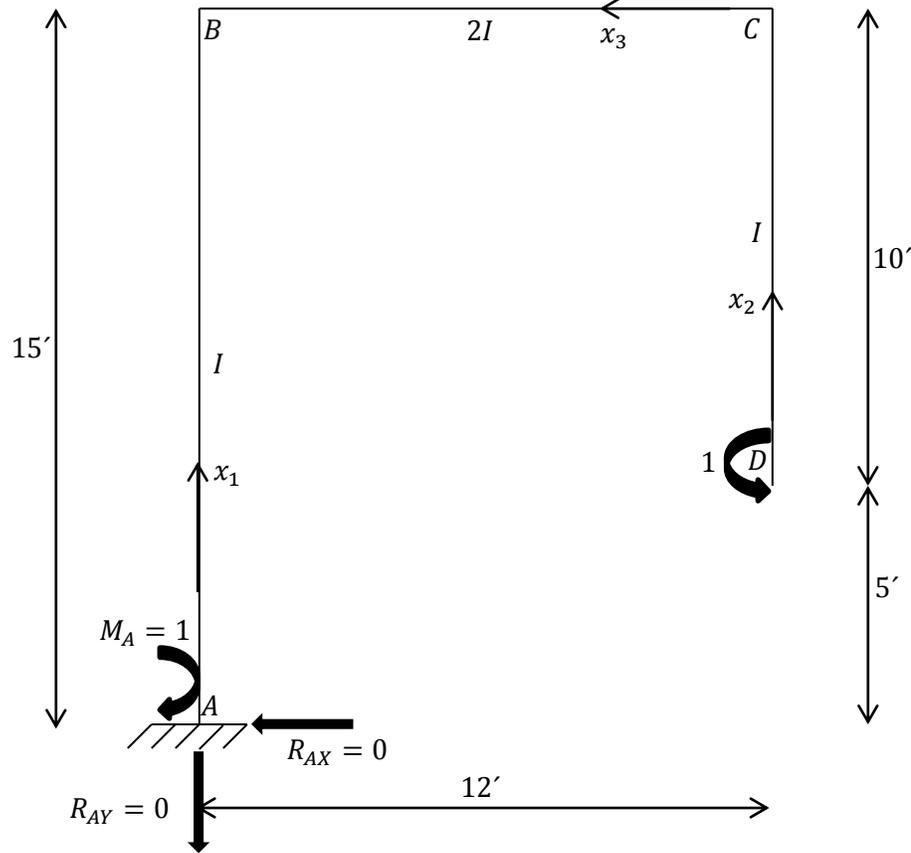
MIF2 (Estructura m_1):



MIF3 (Estructura m_2):



MIF4 (Estructura m_3):



Nota: x_1 , x_2 , x_3 de todas las estructuras anteriores indican las direcciones en las que se harán los cortes.

Análisis de MIF1 (Estructura M)

Reacciones

$$\sum FX = 0$$

$$12 - R_{AX} = 0$$

$$R_{AX} = 12k \leftarrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} - 24 = 0$$

$$R_{AY} = 24k \uparrow$$

$$\sum MA = 0$$

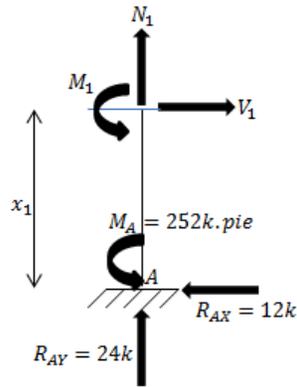
$$24(6) + 12(9) - M_A = 0$$

$$M_A = 252k.pie \curvearrowright$$

Ecuaciones de Momento

Miembro A-B

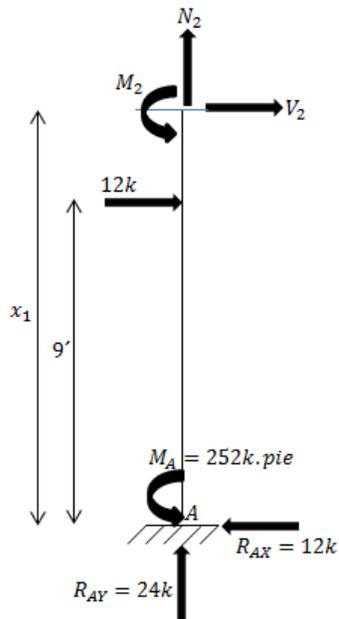
$$0 \leq x_1 \leq 9'$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 12x_1 - 252$$

$$9' \leq x_1 \leq 15'$$

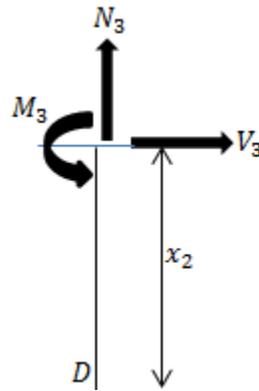


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = 12x_1 - 12(x_1 - 9) - 252 = -144$$

Miembro D-C

$$0 \leq x_2 \leq 10'$$

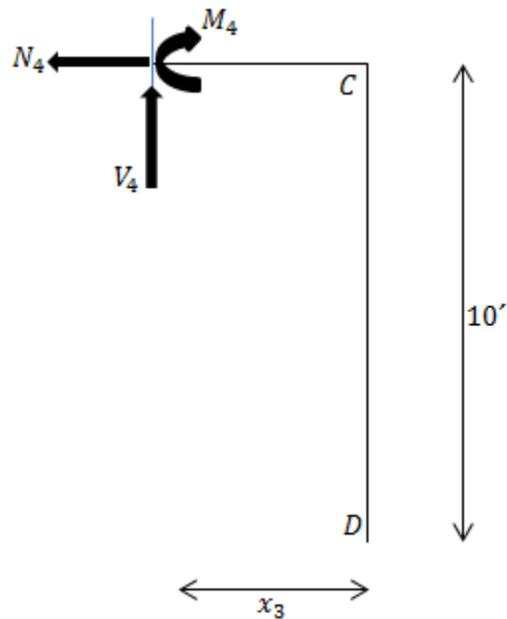


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = 0$$

Miembro C-B

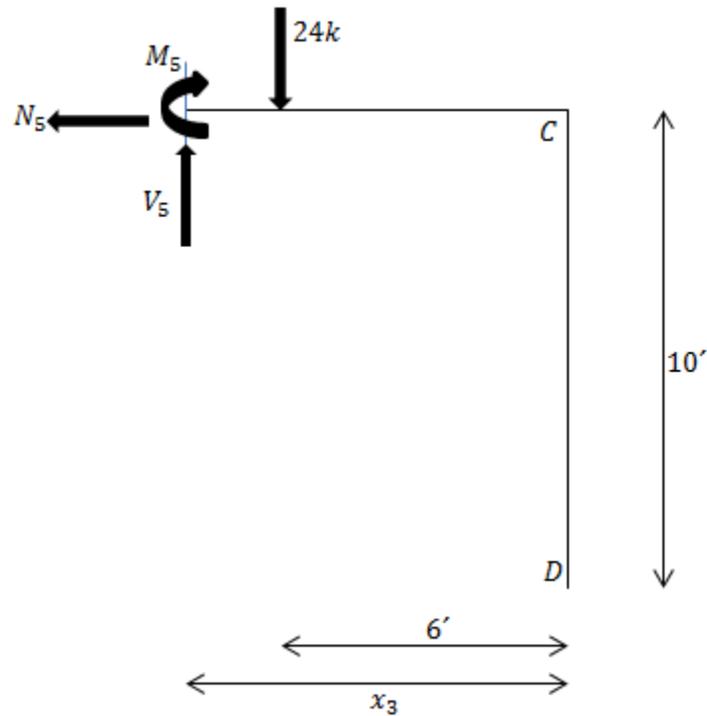
$$0 \leq x_3 \leq 6'$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_4 = 0$$

$$6' \leq x_3 \leq 12'$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_5 + 24(x_3 - 6) = 0$$

$$M_5 = 144 - 24x_3$$

Análisis de MIF2 (Estructura m_1)

Reacciones

$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} = 0$$

$$\sum FY = 0$$

$$-R_{AY} + 1 = 0$$

$$R_{AY} = 1 \downarrow$$

$$\sum MA = 0$$

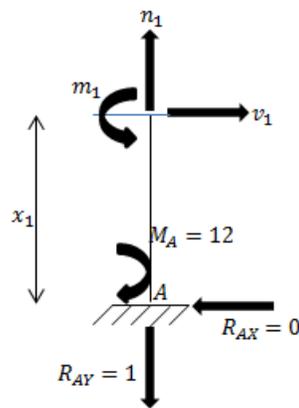
$$M_A - 1(12) = 0$$

$$M_A = 12 \curvearrowright$$

Ecuaciones de momento

Miembro A-B

$$0 \leq x_1 \leq 15'$$

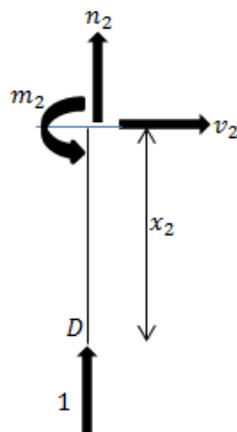


$$\sum mcorte = 0$$

$$m_1 = 12$$

Miembro D-C

$$0 \leq x_2 \leq 10'$$

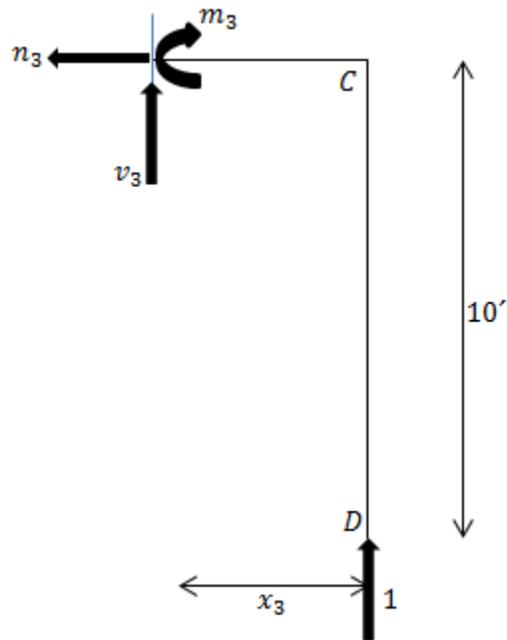


$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m_2 = 0$$

Miembro C-B

$$0 \leq x_3 \leq 12'$$



$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m_3 - 1(x_3) = 0$$

$$m_3 = x_3$$

Análisis de MIF3 (Estructura m_2)

Reacciones

$$\sum FX = 0$$

$$-R_{AX} + 1 = 0$$

$$R_{AX} = 1 \leftarrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} = 0$$

$$\sum MA = 0$$

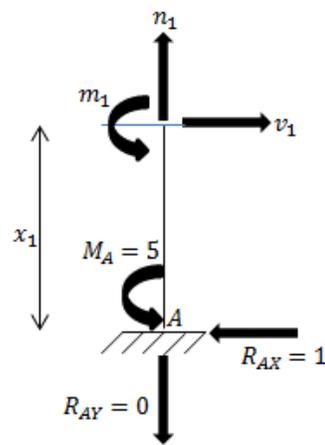
$$-M_A + 1(5) = 0$$

$$M_A = 5 \curvearrowright$$

Ecuaciones de momento

Miembro A-B

$$0 \leq x_1 \leq 15'$$

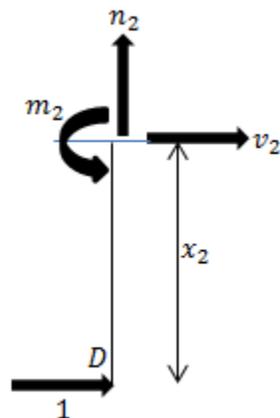


$$\sum mcorte = 0$$

$$m_1 = 1(x_1) - 5 = x_1 - 5$$

Miembro D-C

$$0 \leq x_2 \leq 10'$$

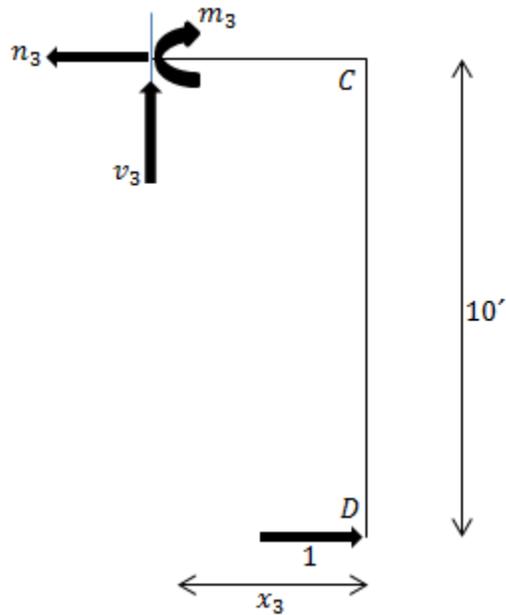


$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m_2 = -1(x_2) = -x_2$$

Miembro C-B

$$0 \leq x_3 \leq 12'$$



$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m_3 - 1(10) = 0$$

$$m_3 = 10$$

Análisis de MIF4 (Estructura m_3)

Reacciones

$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} = 0$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} = 0$$

$$\sum MA = 0$$

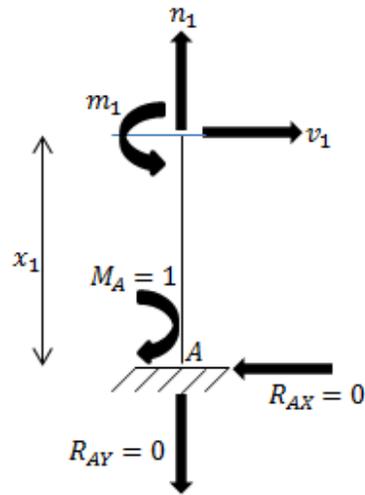
$$M_A - 1 = 0$$

$$M_A = 1 \curvearrowright$$

Ecuaciones de momento

Miembro A-B

$$0 \leq x_1 \leq 15'$$

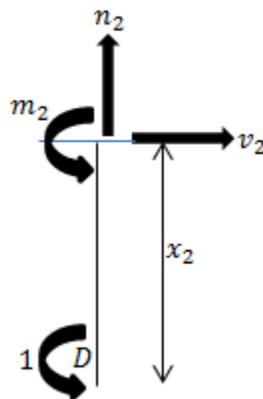


$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m_1 = 1$$

Miembro D-C

$$0 \leq x_2 \leq 10'$$

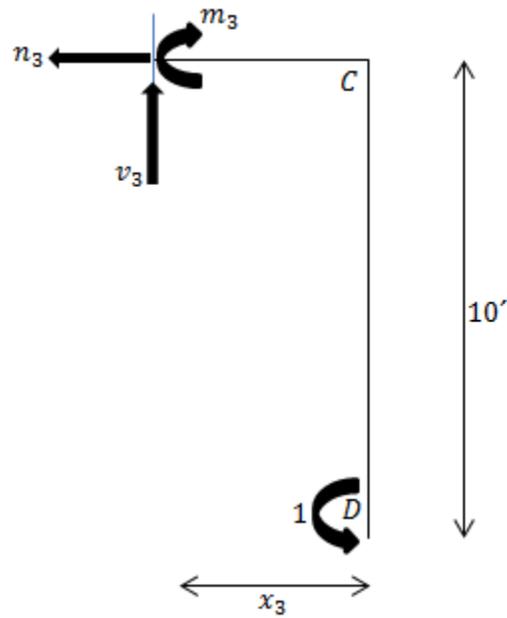


$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m_2 = -1$$

Miembro C-B

$$0 \leq x_3 \leq 12'$$



$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m_3 - 1 = 0$$

$$m_3 = 1$$

Sean:

$$d_1 = \delta_{VD} \text{ de MIF1} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} Mm_1 dx$$

$$d_2 = \delta_{HD} \text{ de MIF1} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} Mm_2 dx$$

$$d_3 = \theta_D \text{ de MIF1} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} Mm_3 dx$$

$$f_{11} = \delta_{VD} \text{ de MIF2} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_1 m_1 dx$$

$$f_{21} = \delta_{HD} \text{ de MIF2} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_1 m_2 dx$$

$$f_{31} = \theta_D \text{ de MIF2} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_1 m_3 dx$$

$$f_{12} = \delta_{VD} \text{ de MIF3} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_2 m_1 dx$$

$$f_{22} = \delta_{HD} \text{ de MIF3} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_2 m_2 dx$$

$$f_{32} = \theta_D \text{ de MIF3} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_2 m_3 dx$$

$$f_{13} = \delta_{VD} \text{ de MIF4} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_3 m_1 dx$$

$$f_{23} = \delta_{HD} \text{ de MIF4} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_3 m_2 dx$$

$$f_{33} = \theta_D \text{ de MIF4} = \frac{1}{EI} \int_{L_1}^{L_2} m_3 m_3 dx$$

Donde:

δ_V =Desplazamiento vertical

δ_H =Desplazamiento horizontal

θ = Giro o rotación

M = Ecuaciones de Momento de la estructura M

m_i = Ecuaciones de momento de la estructura m_i

Además:

-Para las columnas:

$$EI = (30000k/pulg^2)(200pulg^4) = 6000000k \cdot pulg^2 \left(\frac{(1pie)^2}{(12pulg)^2} \right) \\ = 41666.6667k \cdot pie^2$$

-Para la viga:

$$E(2I) = 2(41666.6667k \cdot pie^2) = 83333.3333k \cdot pie^2$$

$$d_1 = \frac{1}{41666.6667} \left(\int_0^9 (12x_1 - 252)(12) dx_1 + \int_9^{15} (-144)(12) dx_1 \right) + \\ \frac{1}{41666.6667} \left(\int_0^{10} (0)(0) dx_2 \right) +$$

$$\frac{1}{83333.3333} \left(\int_0^6 (0)(x_3) dx_3 + \int_6^{12} (144 - 24x_3)(x_3) dx_3 \right) = -0.813888pies$$

$$d_2 = \frac{1}{41666.6667} \left(\int_0^9 (12x_1 - 252)(x_1 - 5) dx_1 + \int_9^{15} (-144)(x_1 - 5) dx_1 \right) + \\ \frac{1}{41666.6667} \left(\int_0^{10} (0)(-x_2) dx_2 \right) +$$

$$\frac{1}{83333.3333} \left(\int_0^6 (0)(10) dx_3 + \int_6^{12} (144 - 24x_3)(10) dx_3 \right) = -0.158112pies$$

$$d_3 = \frac{1}{41666.6667} \left(\int_0^9 (12x_1 - 252)(1) dx_1 + \int_9^{15} (-144)(1) dx_1 \right) + \\ \frac{1}{41666.6667} \left(\int_0^{10} (0)(-1) dx_2 \right) +$$

$$\frac{1}{83333.3333} \left(\int_0^6 (0)(1) dx_3 + \int_6^{12} (144 - 24x_3)(1) dx_3 \right) = -0.068688rad$$

$$f_{11} = \frac{1}{41666.6667} \left(\int_0^{15} (12)(12) dx_1 \right) + \frac{1}{41666.6667} \left(\int_0^{10} (0)(0) dx_2 \right) + \\ \frac{1}{83333.3333} \left(\int_0^{12} (x_3)(x_3) dx_3 \right) = 0.058752pies$$

$$f_{21} = \frac{1}{41666.6667} \left(\int_0^{15} (12)(x_1 - 5) dx_1 \right) + \frac{1}{41666.6667} \left(\int_0^{10} (0)(-x_2) dx_2 \right) +$$

$$\frac{1}{83333.3333} \left(\int_0^{12} (x_3)(10) dx_3 \right) = 0.01944pies$$

$$f_{31} = \frac{1}{41666.6667} \left(\int_0^{15} (12)(1) dx_1 \right) + \frac{1}{41666.6667} \left(\int_0^{10} (0)(-1) dx_2 \right) +$$

$$\frac{1}{83333.3333} \left(\int_0^{12} (x_3)(1) dx_3 \right) = 0.005184rad$$

$$f_{12} = f_{21} = 0.01944pies$$

$$f_{22} = \frac{1}{41666.6667} \left(\int_0^{15} (x_1 - 5)(x_1 - 5) dx_1 \right) + \frac{1}{41666.6667} \left(\int_0^{10} (-x_2)(-x_2) dx_2 \right) +$$

$$\frac{1}{83333.3333} \left(\int_0^{12} (10)(10) dx_3 \right) = 0.0314pies$$

$$f_{32} = \frac{1}{41666.6667} \left(\int_0^{15} (x_1 - 5)(1) dx_1 \right) + \frac{1}{41666.6667} \left(\int_0^{10} (-x_2)(-1) dx_2 \right) +$$

$$\frac{1}{83333.3333} \left(\int_0^{12} (10)(1) dx_3 \right) = 0.00354rad$$

$$f_{13} = f_{31} = 0.005184pies$$

$$f_{23} = f_{32} = 0.00354pies$$

$$f_{33} = \frac{1}{41666.6667} \left(\int_0^{15} (1)(1) dx_1 \right) + \frac{1}{41666.6667} \left(\int_0^{10} (-1)(-1) dx_2 \right) +$$

$$\frac{1}{83333.3333} \left(\int_0^{12} (1)(1) dx_3 \right) = 0.000744rad$$

El asentamiento en el apoyo D es:

$$-0.5pulg \left(\frac{1pie}{12pulg} \right) = -0.041667pies$$

Planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad geométrica:

$$d_1 + f_{11}R_{DY} + f_{12}R_{DX} + f_{13}M_D = -0.041667$$

$$d_2 + f_{21}R_{DY} + f_{22}R_{DX} + f_{23}M_D = 0$$

$$d_3 + f_{31}R_{DY} + f_{32}R_{DX} + f_{33}M_D = 0$$

Sustituyendo:

$$-0.813888 + 0.058752R_{DY} + 0.01944R_{DX} + 0.005184M_D = -0.041667$$

$$-0.158112 + 0.01944R_{DY} + 0.0314R_{DX} + 0.00354M_D = 0$$

$$-0.068688 + 0.005184R_{DY} + 0.00354R_{DX} + 0.000744M_D = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$R_{DY} = 11.2287, R_{DX} = -7.5589, M_D = 50.0495$$

Los signos negativos en los resultados indican que tales reacciones tienen un sentido opuesto al propuesto de sus respectivas cargas virtuales unitarias

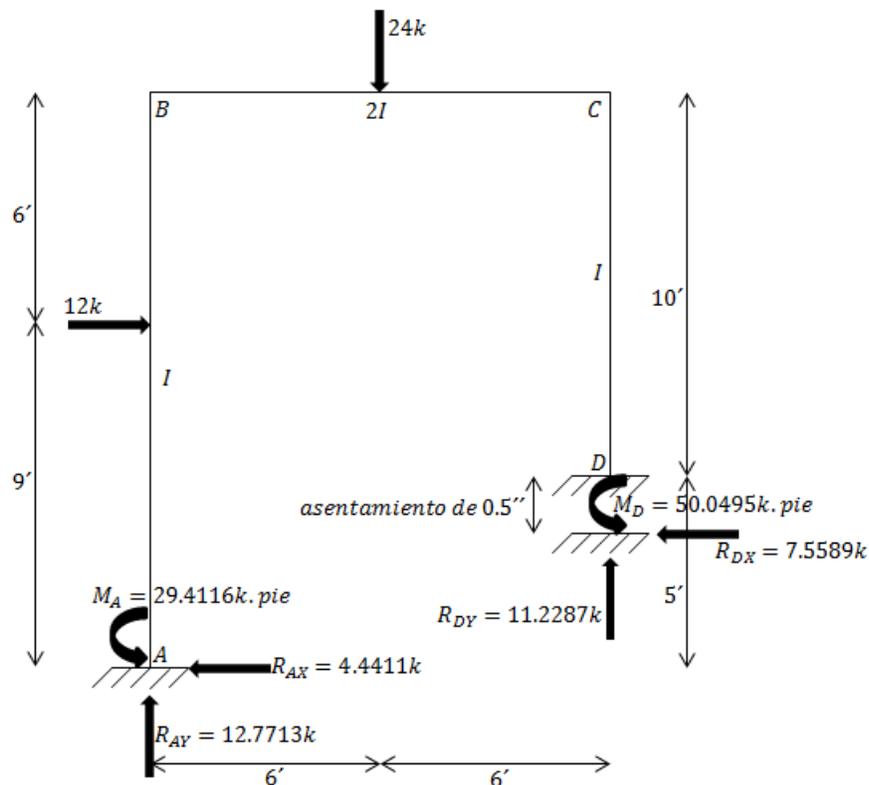
∴

$$R_{DY} = 11.2287k \uparrow$$

$$R_{DX} = 7.5589k \leftarrow$$

$$M_D = 50.0495k \cdot pie \curvearrowright$$

Diagrama de la estructura real en la que se visualizan los valores de las reacciones en los empotes:



Las reacciones restantes se obtuvieron de:

$$\sum FX = 0$$

$$12 - 7.5589 - R_{AX} = 0$$

$$R_{AX} = 4.4411k \leftarrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$-24 + 11.2287 - R_{AY} = 0$$

$$R_{AY} = 12.7713k \uparrow$$

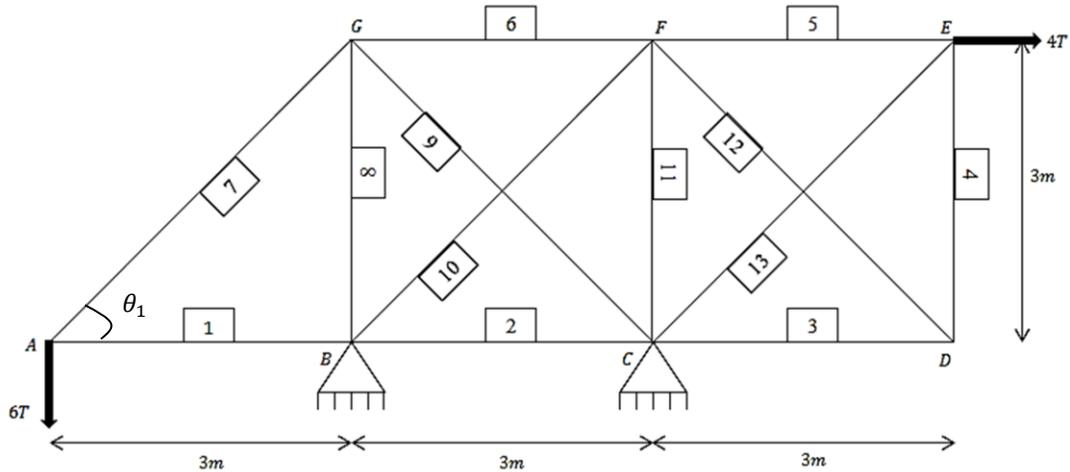
$$\sum MA = 0$$

$$12(9) + 24(6) - 7.5589(5) - 11.2287(12) - 50.0495 - M_A = 0$$

$$M_A = 29.4116k \cdot pie \curvearrowright$$

3.3. MÉTODO DE FLEXIBILIDADES APLICADO A ARMADURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

1.- Encontrar las fuerzas en las barras y las reacciones en los apoyos de la siguiente armadura. Use el método de flexibilidades. $AE = \text{constante}$.



SOLUCIÓN:

Determinación del grado de hiperestaticidad:

Es externamente hiperestática de grado 1 debido a que hay cuatro incógnitas de reacción y solo tres ecuaciones de equilibrio.

El grado de indeterminación total es de tres, ya que:

$$r + b = 4 + 13 = 17$$

$$2j = 2(7) = 14$$

como $r + b > 2j$ la armadura es estáticamente indeterminada

Lo anterior indica que el grado de indeterminación interno es de 2.

Usando el método de superposición:

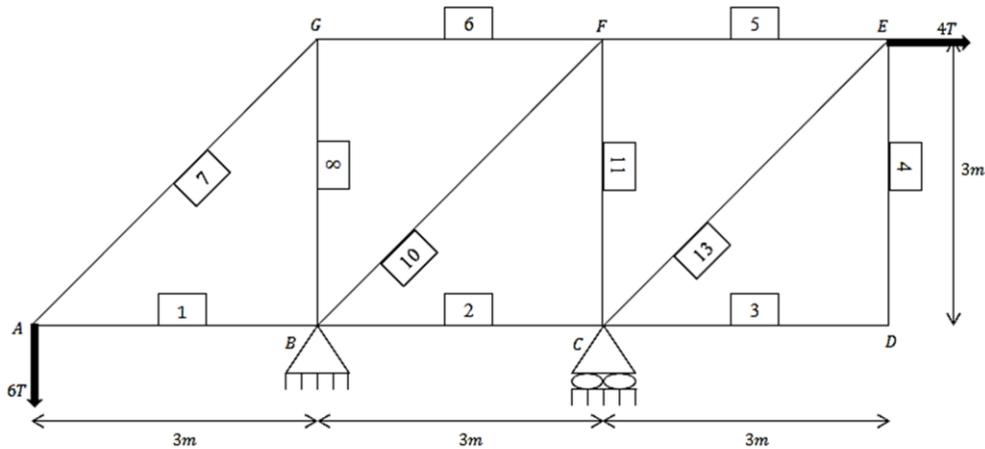
La estructura real es equivalente a la suma de las siguientes 4 estructuras:

$$ER = Estructura N + Estructura n_1 + Estructura n_2 + Estructura n_3$$

En la estructura N se han quitado dos barras (9 y 12) y se ha cambiado en C el apoyo articulado por uno simple. Es necesario entonces, colocar una fuerza unitaria en la dirección x que actúa en C en la Estructura n_1 . En la estructura n_2 se

proponer un valor de 1 para la barra 9 y en la estructura n_3 se propone un valor de 1 para la barra 12. Recuerdése que los sentidos propuestos son arbitrarios.

ESTRUCTURA N



Reacciones:

$$\sum FX = 0$$

$$R_{BX} = 4T \leftarrow$$

$$\sum MB = 0$$

$$-6(3) + 4(3) + R_{CY}(3) = 0$$

$$R_{CY} = 2T \downarrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$-6 + R_{BY} - 2 = 0$$

$$R_{BY} = 8T \uparrow$$

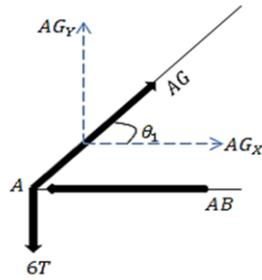
Además:

$$\cos \theta_1 = \sin \theta_1 = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Cálculo de las fuerzas en las barras:

Usando el método de los nodos:

Nodo A:



$$\sum F_Y = 0$$

$$-6T + AG_Y = 0$$

$$AG(\sin \theta_1) = 6T$$

$$AG \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 6T$$

$$AG = 8.48528T \text{ TENSION}$$

$$\sum F_X = 0$$

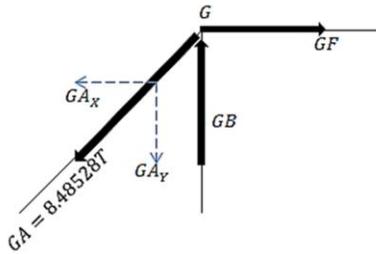
$$AG_X - AB = 0$$

$$AB = AG(\cos \theta_1)$$

$$AB = 8.48528T \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$AB = 6T \text{ COMPRESIÓN}$$

Nodo G:



$$\sum F_Y = 0$$

$$-GA_Y + GB = 0$$

$$GB = GA_Y$$

$$GB = 6T \text{ COMPRESIÓN}$$

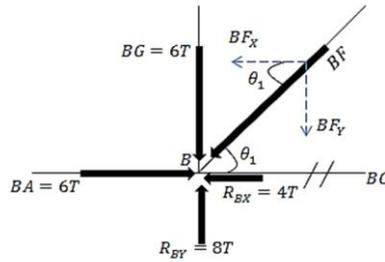
$$\sum F_X = 0$$

$$-GA_X + GF = 0$$

$$GF = GA_X$$

$$GF = 6T \text{ COMPRESIÓN}$$

Nodo B:



$$\sum F_Y = 0$$

$$8T - 6T - BF_Y = 0$$

$$BF_Y = 2T$$

$$BF(\sin \theta_1) = 2T \rightarrow BF \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2T$$

$$BF = 2.82843T \text{ COMPRESIÓN}$$

$$\sum F_X = 0$$

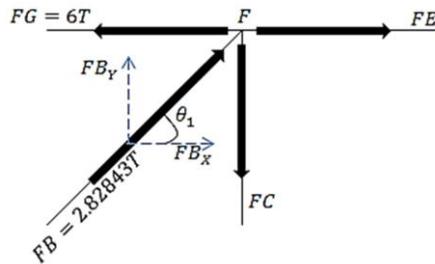
$$6T - 4T - BF_X + BC = 0$$

$$BC = BF_X - 2T$$

$$BC = BF * \cos \theta_1 - 2T$$

$$BC = 2T - 2T = 0$$

Nodo F:



$$\sum F_Y = 0$$

$$FB_Y - FC = 0$$

$$FC = FB_Y = FB * \sin \theta_1$$

$$FC = 2T \text{ TENSIÓN}$$

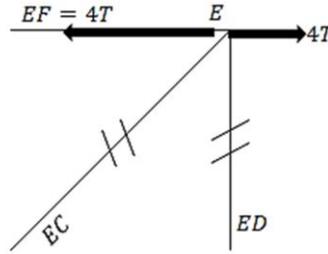
$$\sum F_X = 0$$

$$FB_X - 6T + FE = 0$$

$$FE = 6T - FB_X$$

$$FE = 6T - 2T = 4T \text{ TENSIÓN}$$

Nodo E:



$$\sum F_Y = 0$$

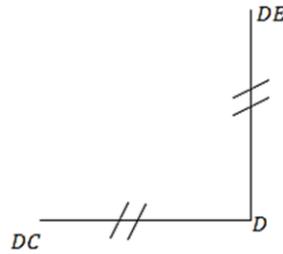
$$EC_Y = 0$$

$$EC = 0$$

$$\sum F_X = 0$$

$$-4T + 4T = 0 \text{ OK}$$

Nodo D:



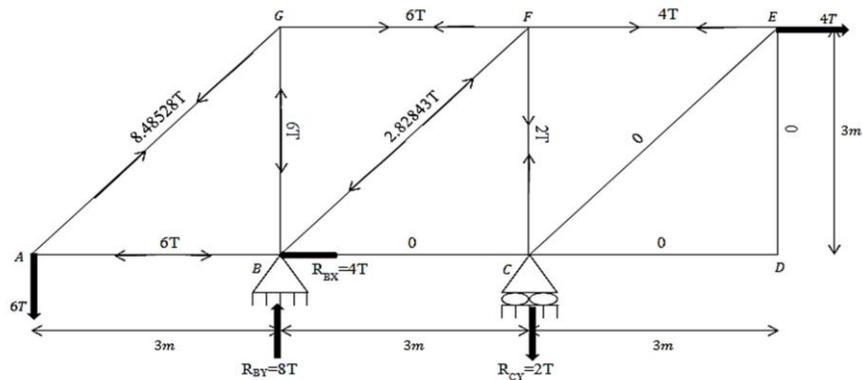
$$\sum F_Y = 0$$

$$DE = 0$$

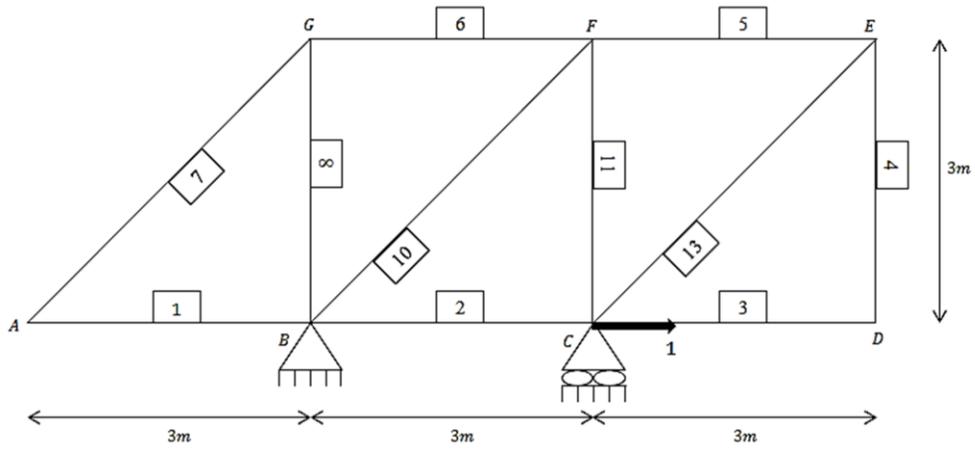
$$\sum F_X = 0$$

$$DC = 0$$

ESTRUCTURA N



Estructura n₁



Reacciones:

$$\sum FX = 0$$

$$R_{BX} = 1 \leftarrow$$

$$\sum MB = 0$$

$$R_{CY} = 0$$

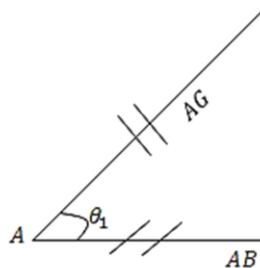
$$\sum FY = 0$$

$$R_{BY} = 0$$

Cálculo de las fuerzas en las barras:

Usando el método de los nodos:

Nodo A:



$$\sum F_Y = 0$$

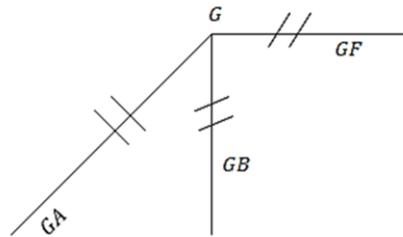
$$\sum F_X = 0$$

$$AG_Y = 0$$

$$AB = 0$$

$$AG = 0$$

Nodo G:



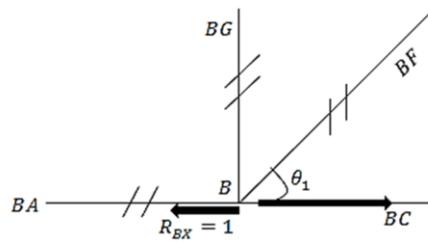
$$\sum F_Y = 0$$

$$\sum F_X = 0$$

$$GB = 0$$

$$GF = 0$$

Nodo B:



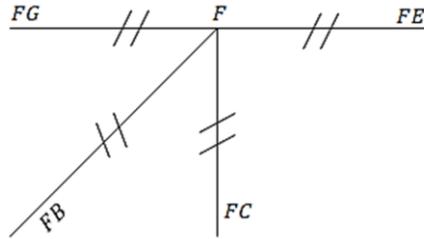
$$\sum F_Y = 0$$

$$\sum F_X = 0$$

$$BF = 0$$

$$BC = 1 \text{ TENSION}$$

Nodo F:



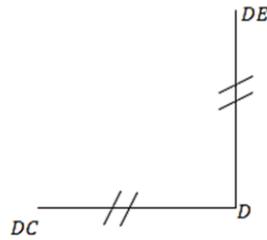
$$\sum FY = 0$$

$$\sum FX = 0$$

$$FC = 0$$

$$FE = 0$$

Nodo D:



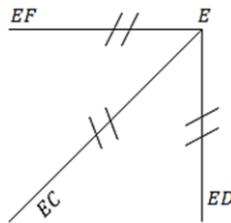
$$\sum FY = 0$$

$$\sum FX = 0$$

$$DE = 0$$

$$DC = 0$$

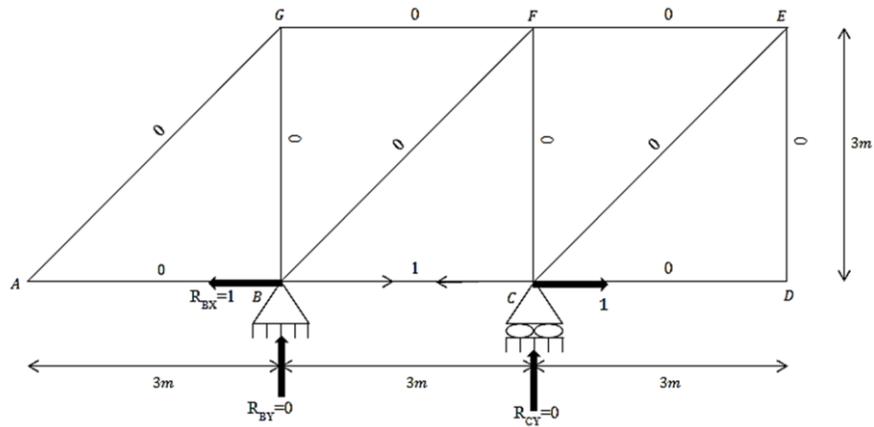
Nodo E:



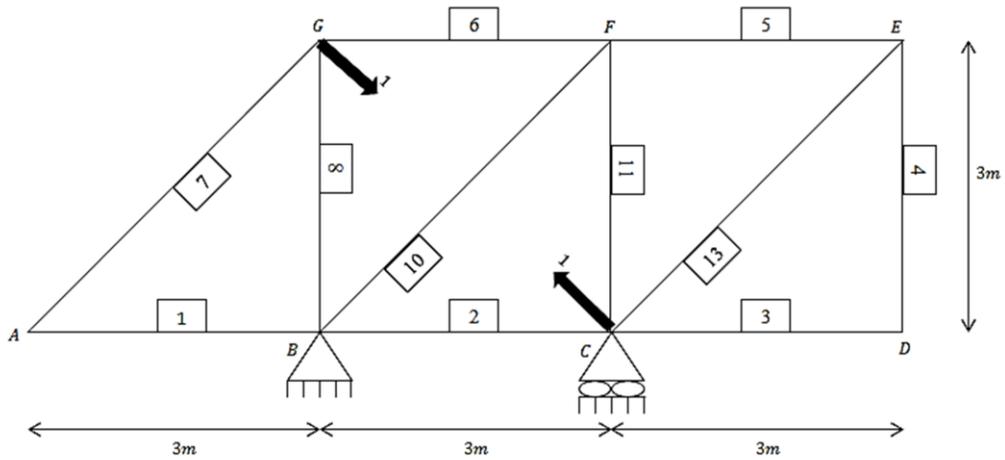
$$\sum FY = 0$$

$$EC = 0$$

ESTRUCTURA n_1



ESTRUCTURA n_2



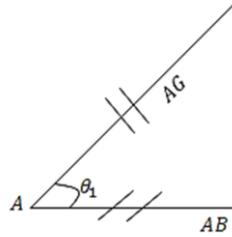
Por inspección:

$$R_{BX} = R_{BY} = R_{CY} = 0$$

Cálculo de las fuerzas en las barras:

Usando el método de los nodos:

Nodo A:



$$\sum F_Y = 0$$

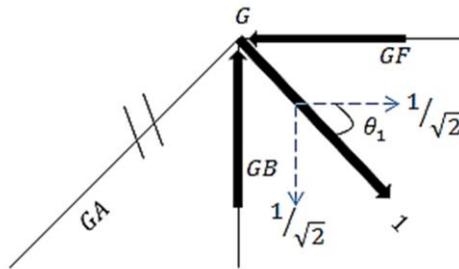
$$\sum F_X = 0$$

$$AG_Y = 0$$

$$AB = 0$$

$$AG = 0$$

Nodo G:



$$\sum F_Y = 0$$

$$\sum F_X = 0$$

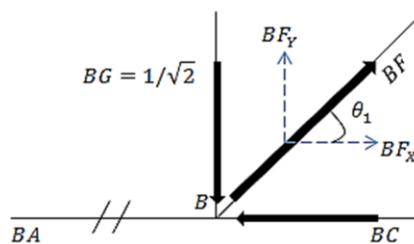
$$GB - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - GF = 0$$

$$GB = 0.707107T \text{ COMPRESIÓN}$$

$$GF = 0.707107T \text{ COMPRESIÓN}$$

Nodo B:



$$\sum F_Y = 0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} + BF_Y = 0$$

$$BF * \sin \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow BF \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$BF = 1 \text{ TENSIÓN}$$

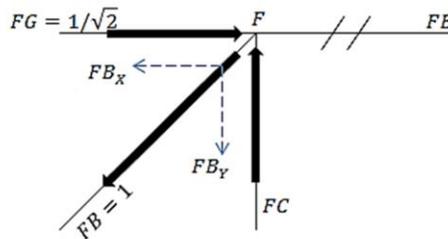
$$\sum F_X = 0$$

$$-BC + BF_X = 0$$

$$BC = BF * \cos \theta_1 = \rightarrow BC = 1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$BC = 0.707107 \text{ COMPRESIÓN}$$

Nodo F:



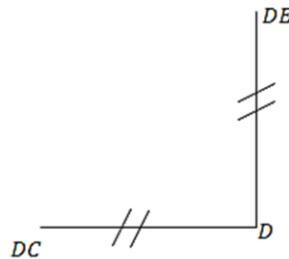
$$\sum F_Y = 0 \rightarrow -F_{BY} + FC = 0$$

$$FC = F_{BY} = 0.707107 \text{ COMPRESIÓN}$$

$$\sum F_X = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - F_{BX} + FE = 0$$

$$FE = 0$$

Nodo D:



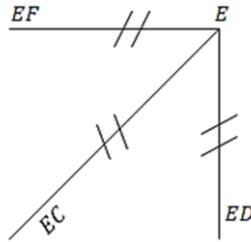
$$\sum F_Y = 0$$

$$DE = 0$$

$$\sum F_X = 0$$

$$DC = 0$$

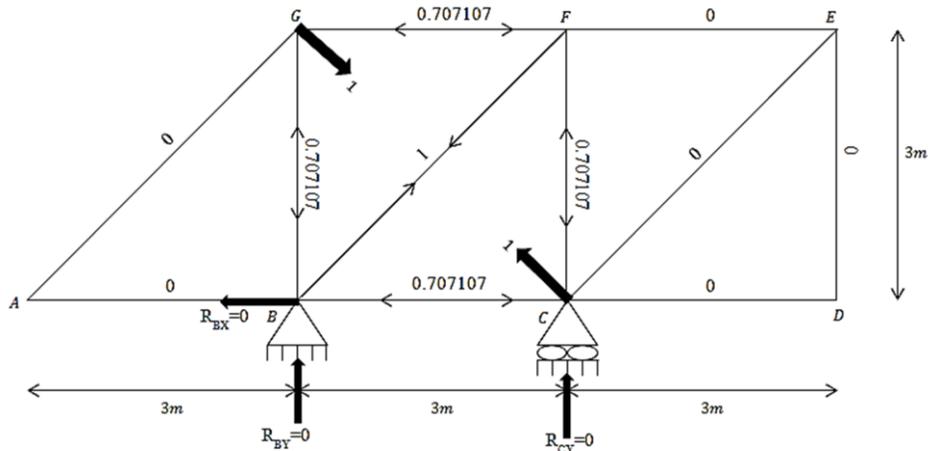
Nodo E:



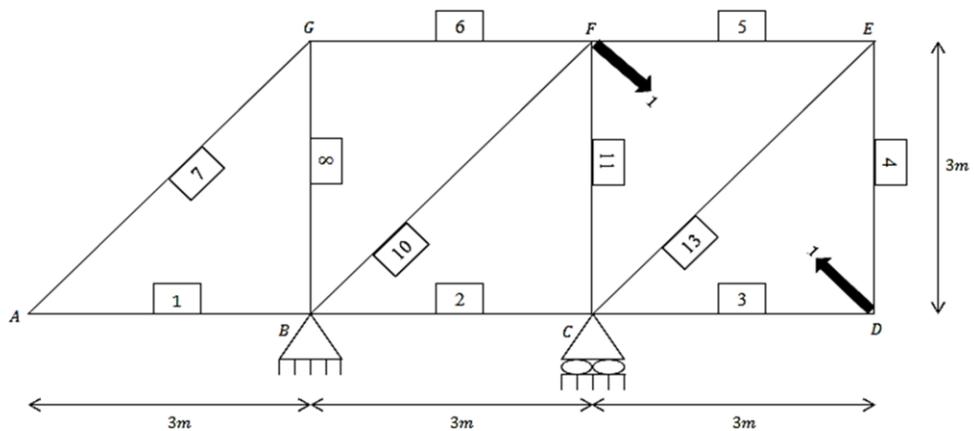
$$\sum F_Y = 0$$

$$EC = 0$$

ESTRUCTURA n₂



ESTRUCTURA n₃



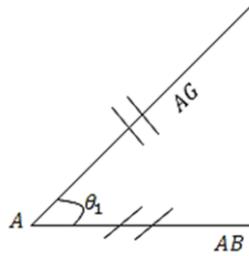
Por inspección:

$$R_{BX} = R_{BY} = R_{CY} = 0$$

Cálculo de las fuerzas en las barras:

Usando el método de los nodos:

Nodo A:



$$\sum F_Y = 0$$

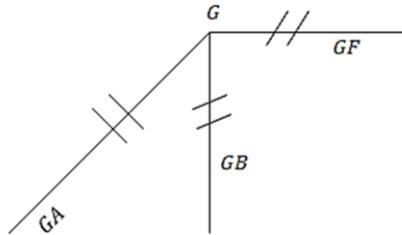
$$\sum F_X = 0$$

$$AG_Y = 0$$

$$AB = 0$$

$$AG = 0$$

Nodo G:



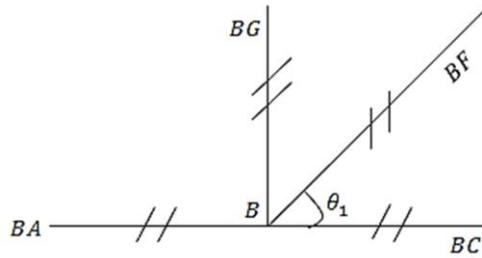
$$\sum F_Y = 0$$

$$\sum F_X = 0$$

$$GB = 0$$

$$GF = 0$$

Nodo B:



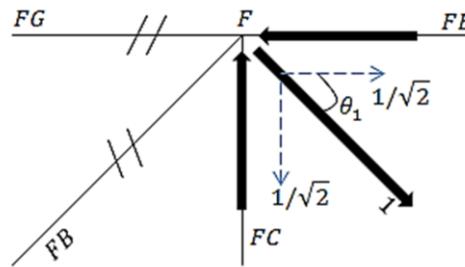
$$\sum F_Y = 0$$

$$\sum F_X = 0$$

$$BF = 0$$

$$BC = 0$$

Nodo F:



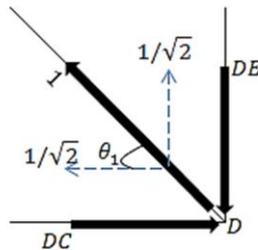
$$\sum F_Y = 0 \rightarrow FC - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sum F_X = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - FE = 0$$

$$FC = 0.707107 \text{ COMPRESIÓN}$$

$$FE = 0.707107 \text{ COMPRESIÓN}$$

Nodo D:



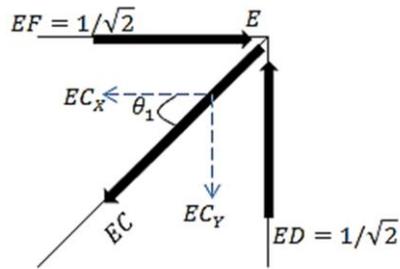
$$\sum F_Y = 0 \rightarrow -DE + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$DE = 0.707107$ COMPRESIÓN

$$\sum F_X = 0 \rightarrow DC - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$DC = 0.707107$ COMPRESIÓN

Nodo E:



$$\sum F_X = 0$$

$$-EC_x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$EC * \cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow EC \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$EC = 1$ TENSION

ESTRUCTURA n₃

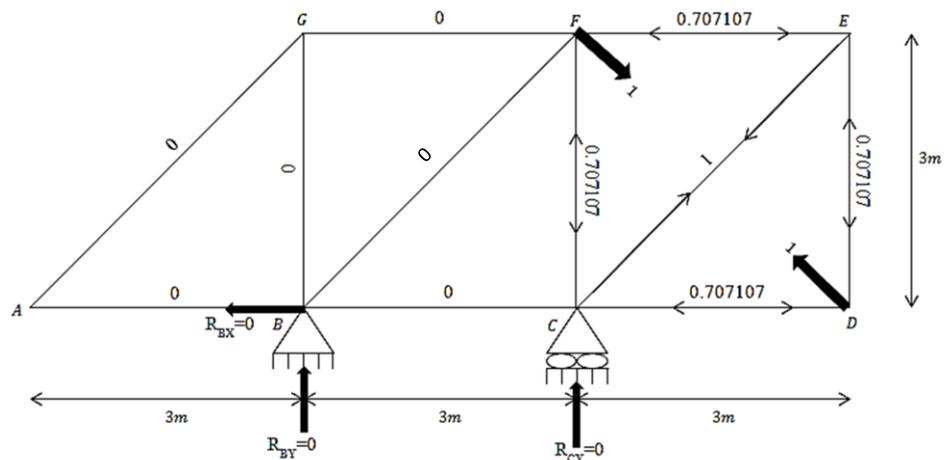


Tabla auxiliar para calcular los desplazamientos:

BARRA		N	n ₁	n ₂	n ₃	Nn ₁ L	Nn ₂ L	Nn ₃ L	n ₁ n ₁ L	n ₁ n ₂ L	n ₁ n ₃ L	n ₂ n ₂ L	n ₂ n ₃ L	n ₃ n ₃ L
NO.	L													
1	3	-6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	0	1	-0.707107	0	0	0	0	-3	-2.121321	0	1.5	0	0
3	3	0	0	0	-0.707107	0	0	0	0	0	0	0	0	1.5
4	3	0	0	0	-0.707107	0	0	0	0	0	0	0	0	1.5
5	3	4	0	0	-0.707107	0	0	8.485284	0	0	0	0	0	1.5
6	3	6	0	-0.707107	0	0	-12.727926	0	0	0	0	1.5	0	0
7	3√2	8.48528	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	3	-6	0	-0.707107	0	0	12.727926	0	0	0	0	1.5	0	0
9	3√2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3√2	0	0
10	3√2	-2.82843	0	1	0	0	-12.0000122	0	0	0	0	3√2	0	0
11	3	2	0	-0.707107	-0.707107	0	4.242642	-4.242642	0	0	0	1.5	1.5	1.5
12	3√2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3√2
13	3√2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3√2
					∑	0	-16.2426542	-12.727926	3	-2.121321	0	14.48528137	1.5	14.48528137

Los desplazamientos son:

$$d_1 = \sum \frac{Nn_1L}{AE} = \frac{0}{AE} = 0$$

$$d_2 = \sum \frac{Nn_2L}{AE} = \frac{-16.2426542}{AE}$$

$$d_3 = \sum \frac{Nn_3L}{AE} = \frac{-12.727926}{AE}$$

$$f_{11} = \sum \frac{n_1n_1L}{AE} = \frac{3}{AE}$$

$$f_{12} = \sum \frac{n_1n_2L}{AE} = \frac{-2.121321}{AE}$$

$$f_{13} = \sum \frac{n_1n_3L}{AE} = \frac{0}{AE} = 0$$

$$f_{21} = f_{12} = \frac{-2.121321}{AE}$$

$$f_{22} = \sum \frac{n_2n_2L}{AE} = \frac{14.48528137}{AE}$$

$$f_{23} = \sum \frac{n_2 n_3 L}{AE} = \frac{1.5}{AE}$$

$$f_{31} = f_{13} = \frac{0}{AE} = 0$$

$$f_{32} = f_{23} = \frac{1.5}{AE}$$

$$f_{33} = \sum \frac{n_3 n_3 L}{AE} = \frac{14.48528137}{AE}$$

Planteamiento matricial del sistema de flexibilidades:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{CX} \\ b_9 \\ b_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}$$

Sustituyendo y despejando:

$$\begin{pmatrix} R_{CX} \\ b_9 \\ b_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2.121321 & 0 \\ -2.121321 & 14.48528137 & 1.5 \\ 0 & 1.5 & 14.48528137 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 16.2426542 \\ 12.727926 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{CX} \\ b_9 \\ b_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.822553 \\ 1.16327 \\ 0.75822 \end{pmatrix}$$

Los signos indican que los sentidos propuestos de las fuerzas unitarias virtuales son correctos, por lo que:

$$R_{CX} = 0.822553T \longrightarrow$$

$$b_9 = 1.16327T \text{ TENSION}$$

$$b_{12} = 0.75822T \text{ TENSION}$$

Cálculo de las reacciones restantes:

$$\sum FX = 0$$

$$-R_{BX} + 4T + 0.822553T = 0$$

$$R_{BX} = 4.822553T \longleftarrow$$

$$\sum MB = 0$$

$$-6(3) + 4(3) + R_{CY}(3) = 0$$

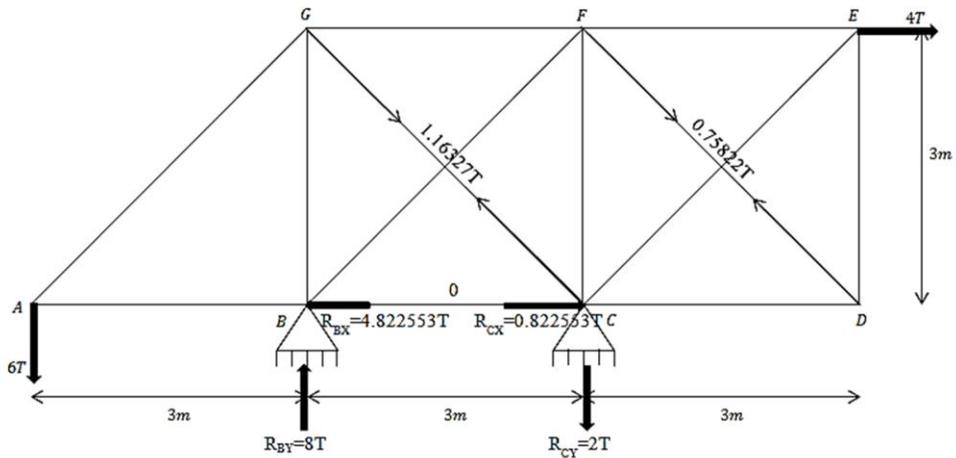
$$R_{CY} = 2T \downarrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$-6T + R_{BY} - 2T = 0$$

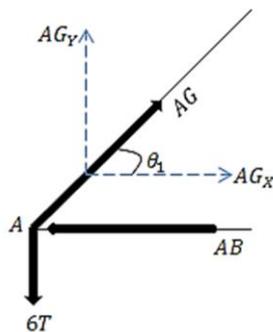
$$R_{BY} = 8T \uparrow$$

Diagrama que muestra las reacciones y las fuerzas en las barras que hasta el momento se conocen:



Cálculo de las fuerzas en las barras restantes por el método de los nodos:

Nodo A:



$$\sum FY = 0$$

$$-6T + AG_Y = 0$$

$$AG(\sin \theta_1) = 6T$$

$$AG \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 6T$$

$$AG = 8.48528T \text{ TENSIÓN}$$

$$\sum FX = 0$$

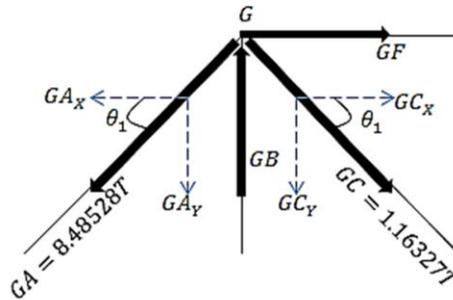
$$AG_X - AB = 0$$

$$AB = AG(\cos \theta_1)$$

$$AB = 8.48528T \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$AB = 6T \text{ COMPRESIÓN}$$

Nodo G:



$$\sum FY = 0$$

$$-GA_Y + GB - GC_Y = 0$$

$$GB = GA_Y + GC_Y$$

$$GB = 8.48528T \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 1.16327T \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$GB = 6.82256T \text{ COMPRESIÓN}$$

$$\sum FX = 0$$

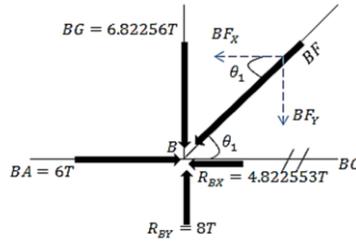
$$-GA_X + GF + GC_X = 0$$

$$GF = GA_X - GC_X$$

$$GF = 8.48528T \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 1.16327T \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$GF = 5.17744T \text{ TENSIÓN}$$

Nodo B:



$$\sum F_Y = 0$$

$$8T - 6.82256T - BF_Y = 0$$

$$BF = \frac{8T - 6.82256T}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$BF = 1.66515T \text{ COMPRESIÓN}$$

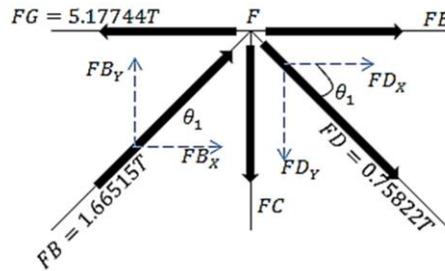
$$\sum F_X = 0$$

$$6T - 4.822553T - BF_X + BC = 0$$

$$6T - 4.822553T - 1.66515T \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + BC = 0$$

$$BC = 0$$

Nodo F:



$$\sum F_Y = 0$$

$$FB_Y - FC - FD_Y = 0$$

$$FC = FB_Y - FD_Y$$

$$FC = 1.66515T \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 0.75822T \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$FC = 0.6413T \text{ TENSIÓN}$$

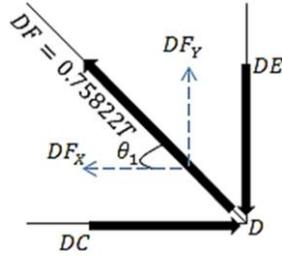
$$\sum F_X = 0$$

$$FB_X + FD_X + FE - 5.17744T = 0$$

$$FE = 5.17744T - 1.66515T \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 0.75822T \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$FE = 3.46385T \text{ TENSIÓN}$$

Nodo D:



$$\sum F_Y = 0$$

$$DF_Y - DE = 0$$

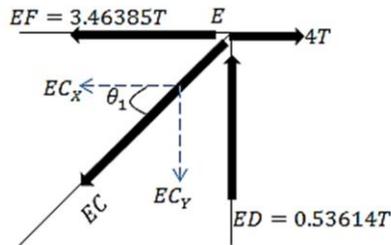
$$DE = 0.75822T \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0.53614T \text{ COMPRESIÓN}$$

$$\sum F_X = 0$$

$$-DF_X + DC = 0$$

$$DC = 0.75822T \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0.53614T \text{ COMPRESIÓN}$$

Nodo E:

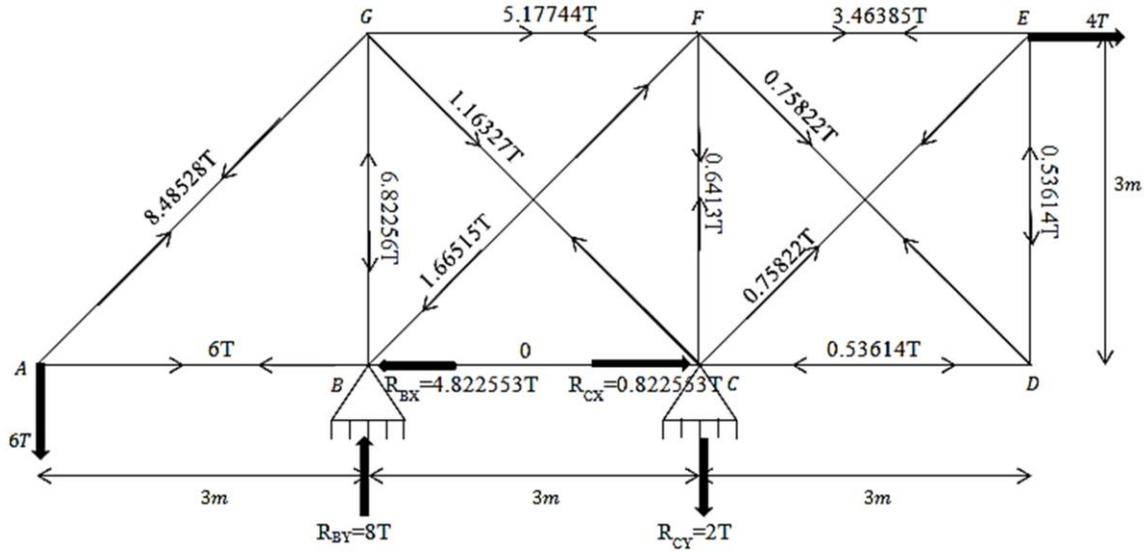


$$\sum F_X = 0$$

$$-3.46385T + 4T - EC_Y = 0$$

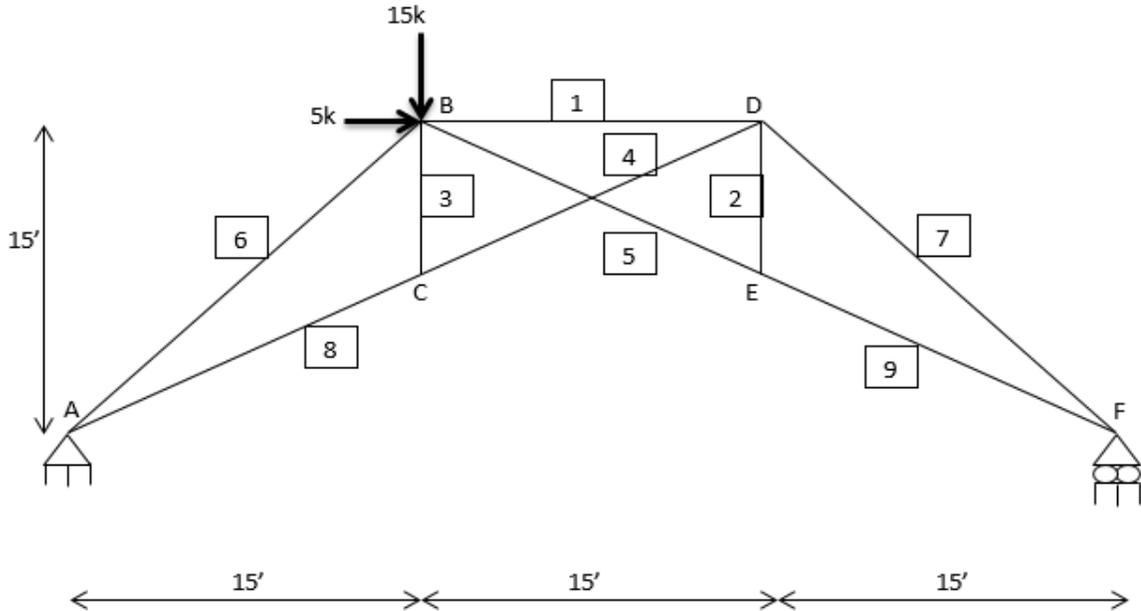
$$EC = \frac{4T - 3.46385T}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0.75822T \text{ TENSIÓN}$$

Diagrama en el que se visualizan las reacciones y todas las fuerzas internas en las barras de la armadura real:



CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE FLEXIBILIDADES

2.-Calcule las reacciones de los apoyos de la armadura al actuar la carga indicada. El área de la sección transversal de cada elemento se especifica en pulgadas cuadradas en la tabla situada debajo de la figura. $E=30000k/pulg^2$. Utilice el método de flexibilidades que considera el sistema.



Datos del problema:

No de barra	longitud (pies)	Área (pies ²)
1	15	0.05556
2	7.5	0.02778
3	7.5	0.02778
4	16.7705	0.08333
5	16.7705	0.08333
6	21.2132	0.06944
7	21.2132	0.06944
8	16.7705	0.08333
9	16.7705	0.08333

$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{15}{15}\right) = 45^\circ$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{7.5}{15}\right) = 26.5650^\circ$$

SOLUCIÓN:

Verificación del grado de indeterminación:

$$b = 9, r = 4, j = 6$$

$$r + b = 13$$

$$2j = 12$$

$$r + b > 2j$$

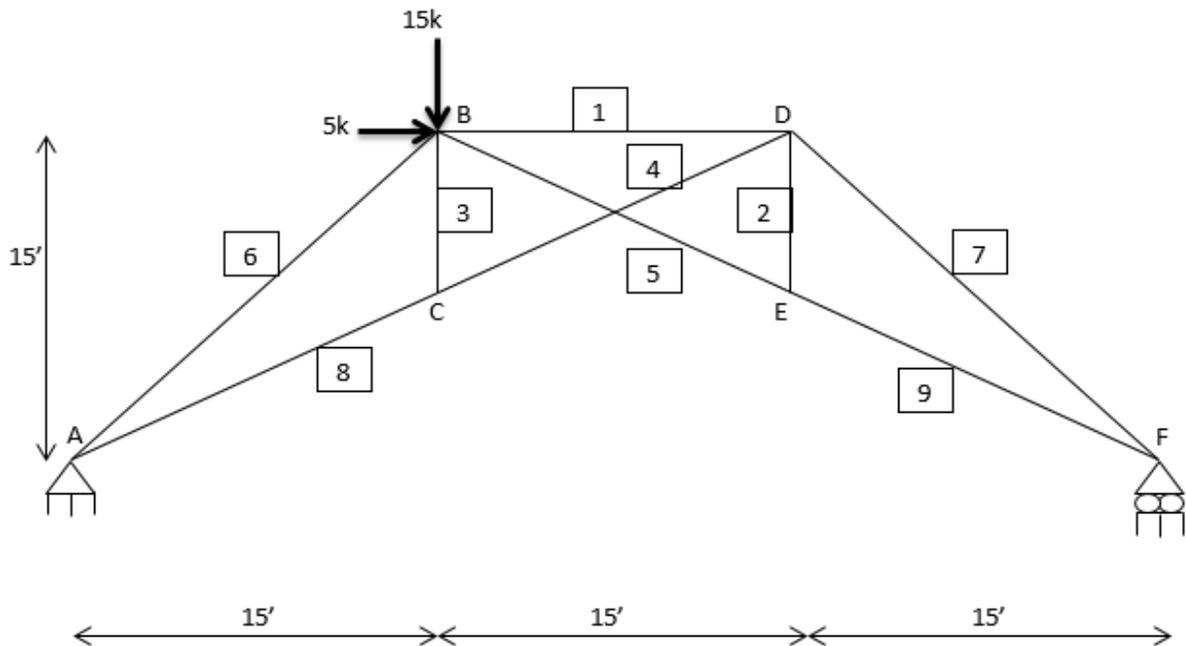
$$13 > 12$$

∴ El grado de indeterminación es 1.

Por método de superposición, la estructura real es igual a la suma de las siguientes estructuras:

$$ER = Estructura N + Estructura n$$

Estructura N



Análisis de la estructura N

Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$R_{FY}(45) - 15(15) - 5(15) = 0$$

$$R_{FY} = 6.6667k \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} - 15k + 6.6667k = 0$$

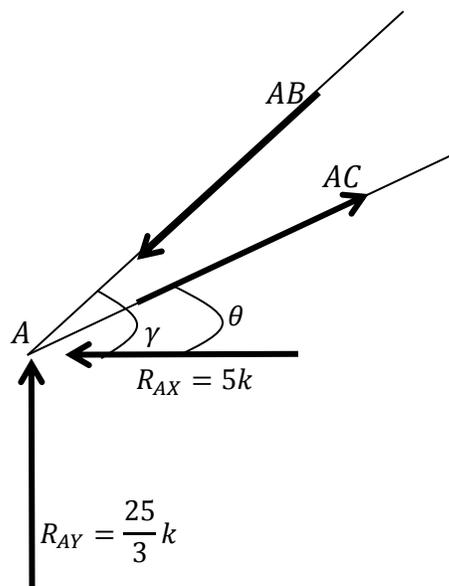
$$R_{AY} = 8.3333k \uparrow$$

$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} = 5k \leftarrow$$

Cálculo de las fuerzas en las barras usando el método de los nodos:

Nodo A:



$$\sum FX = 0$$

$$AC(\cos\theta) - AB(\cos\gamma) = 5k \text{ --- (1)}$$

$$\sum FY = 0$$

$$AC(\sin\theta) - AB(\sin\gamma) = -\frac{25}{3}k \text{ --- (2)}$$

Despejando AC de (1):

$$AC = \frac{5k + AB(\cos\gamma)}{\cos\theta} \text{ --- (3)}$$

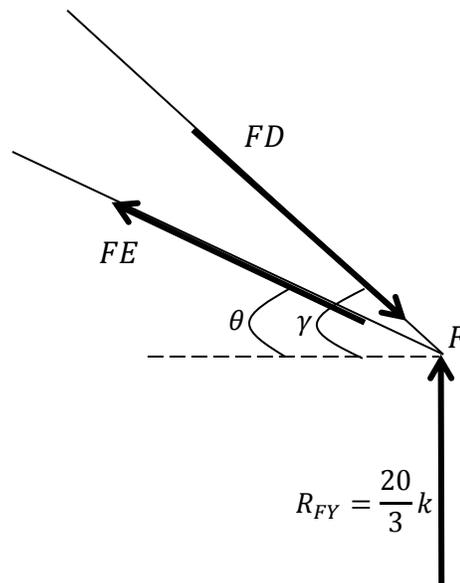
Sustituyendo (3) en (2):

$$5k(\tan\theta) + AB(\cos\gamma)(\tan\theta) - AB(\sin\gamma) = -\frac{25}{3}k$$

$$AB = 30.64129385k \text{ COMPRESIÓN}$$

$$\therefore AC = 29.8142397k \text{ TENSIÓN}$$

Nodo F:



$$\sum FX = 0$$

$$FE(\cos\theta) = FD(\cos\gamma) \text{ --- (1)}$$

$$\sum FY = 0$$

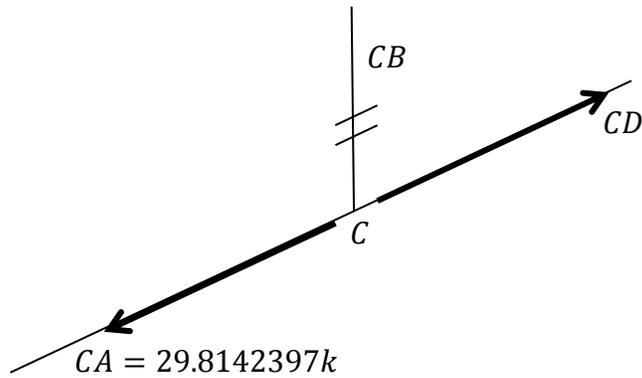
$$FE(\sin\theta) - FD(\sin\gamma) = -\frac{20}{3}k \text{ --- (2)}$$

Resolviendo el sistema:

$$FE = 14.90711985k \text{ TENSIÓN}$$

$$FD = 18.85618033k \text{ COMPRESIÓN}$$

Nodo C:



$$\sum FX' = 0$$

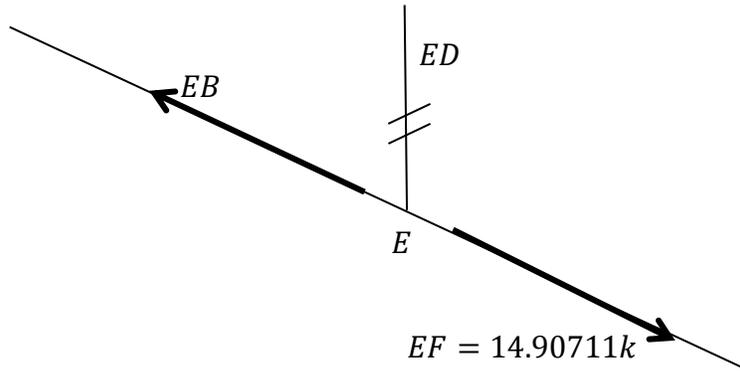
$$-CA + CD = 0$$

$$CD = CA = 29.8142397k \text{ TENSIÓN}$$

$$\sum FY = 0$$

$$CB = 0$$

Nodo E:



$$\sum FX' = 0$$

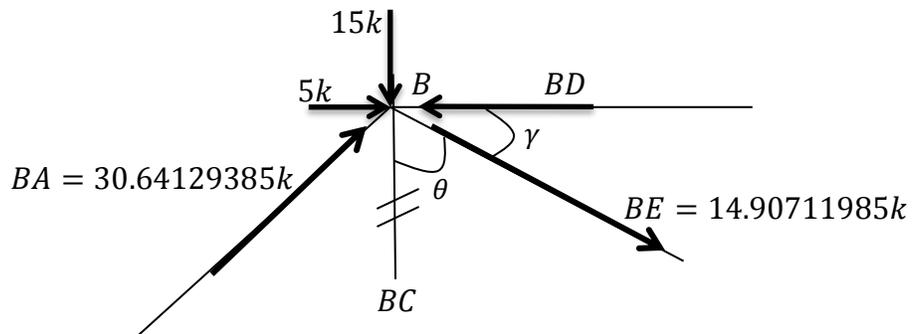
$$EB - EF = 0$$

$$EB = EF = 14.90711985k \quad \text{TENSIÓN}$$

$$\sum FY = 0$$

$$ED = 0$$

Nodo B:

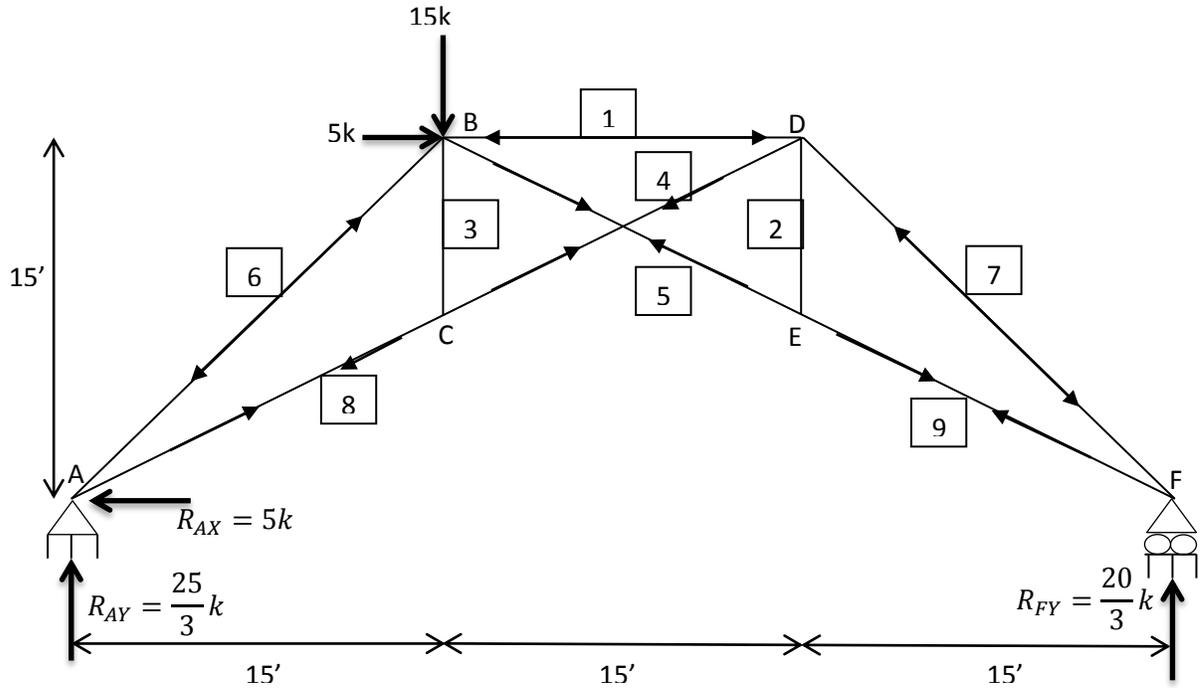


$$\sum FX = 0$$

$$BA(\cos\gamma) + 5k + BE(\cos\theta) - BD = 0$$

$$BD = 40k \quad \text{COMPRESIÓN}$$

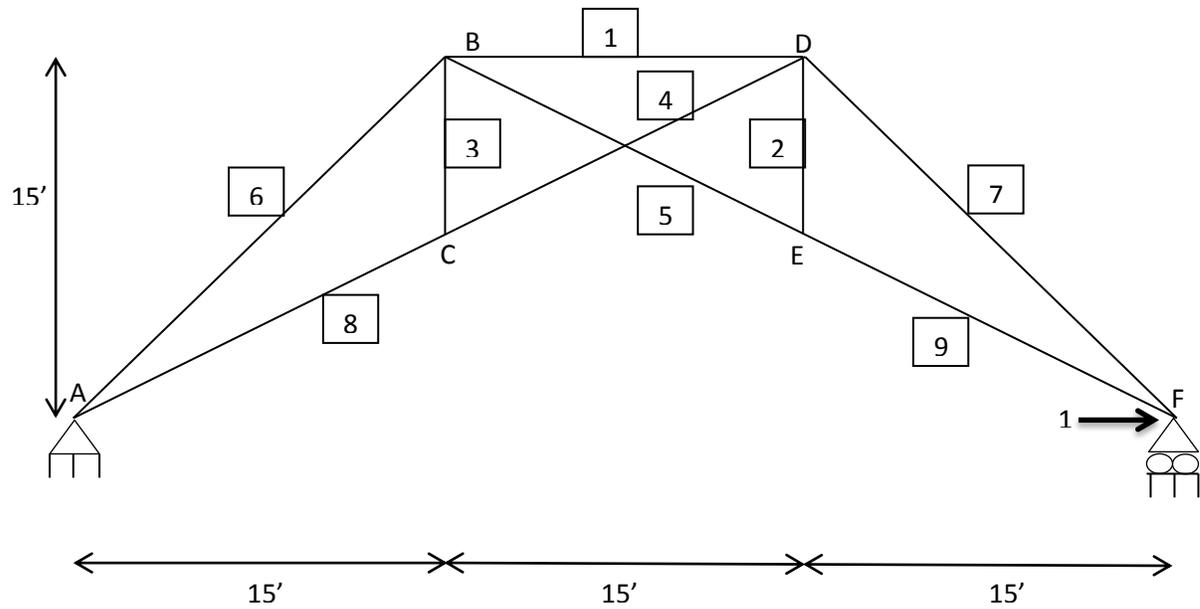
Diagrama en el que se visualizan las reacciones y la dirección en la que actúan las fuerzas en las barras de la estructura N:



En la siguiente tabla se muestran los valores de las fuerzas en las barras:

No de barra	fuerza (k)
1	-40.000
2	0.000
3	0.000
4	29.814
5	14.907
6	-30.641
7	-18.856
8	29.814
9	14.907

Estructura n:



Análisis de la estructura n:

Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$R_{FY}(45) = 0$$

$$R_{FY} = 0$$

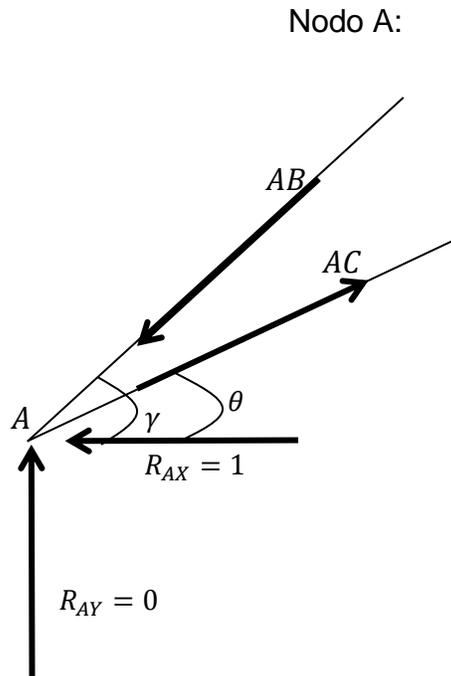
$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} = 0$$

$$\sum FX = 0$$

$$R_{AX} = 1 \leftarrow$$

Cálculo de las fuerzas en las barras usando el método de los nodos:



$$\sum FX = 0$$

$$AC(\cos\theta) - AB(\cos\gamma) = 1 \text{ --- (1)}$$

$$\sum FY = 0$$

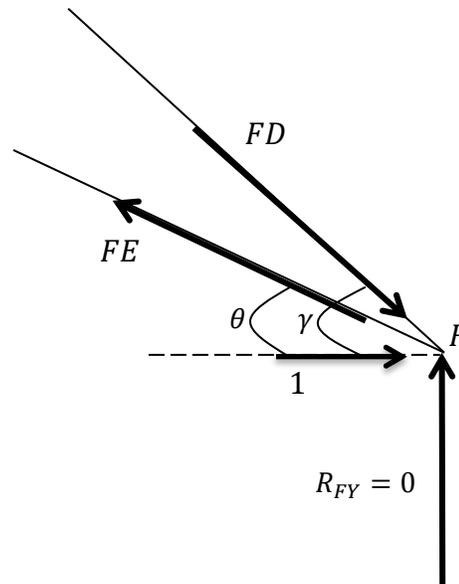
$$AC(\sin\theta) - AB(\sin\gamma) = 0 \text{ --- (2)}$$

Resolviendo el sistema:

$$AB = 1.414213562 \quad \text{COMPRESIÓN}$$

$$AC = 2.236067977 \quad \text{TENSIÓN}$$

Nodo F:

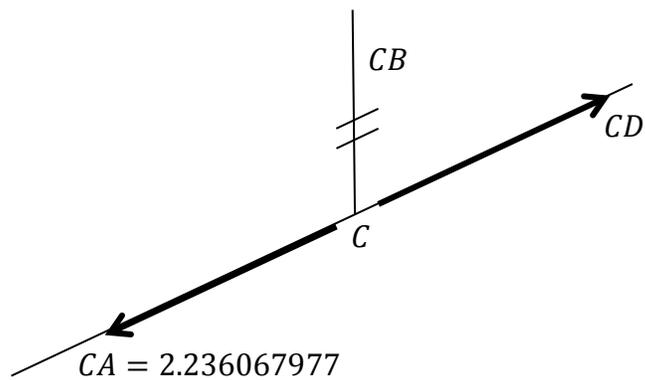


Por simetría con respecto al nodo A:

$$FE = 2.236067977 \quad \text{TENSIÓN}$$

$$FD = 1.414213562 \quad \text{COMPRESIÓN}$$

Nodo C:



$$\sum FX' = 0$$

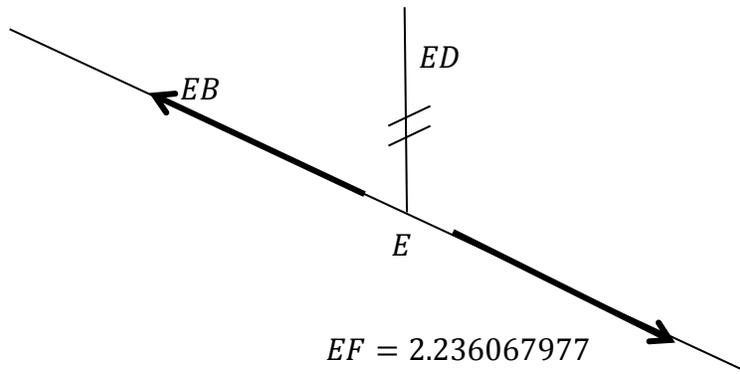
$$-CA + CD = 0$$

$$CD = CA = 2.236067977 \quad \text{TENSIÓN}$$

$$\sum FY = 0$$

$$CB = 0$$

Nodo E:



$$\sum FX' = 0$$

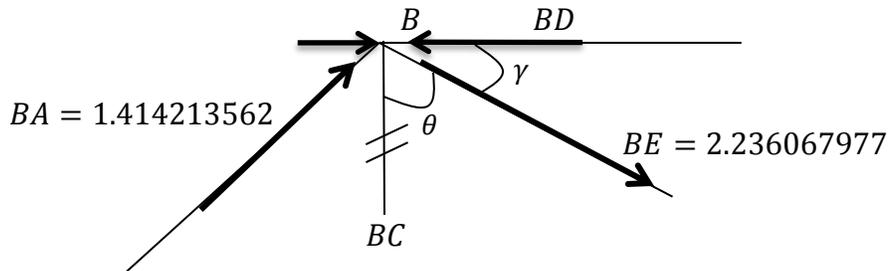
$$EB - EF = 0$$

$$EB = EF = 2.236067977 \quad \text{TENSIÓN}$$

$$\sum FY = 0$$

$$ED = 0$$

Nodo B:

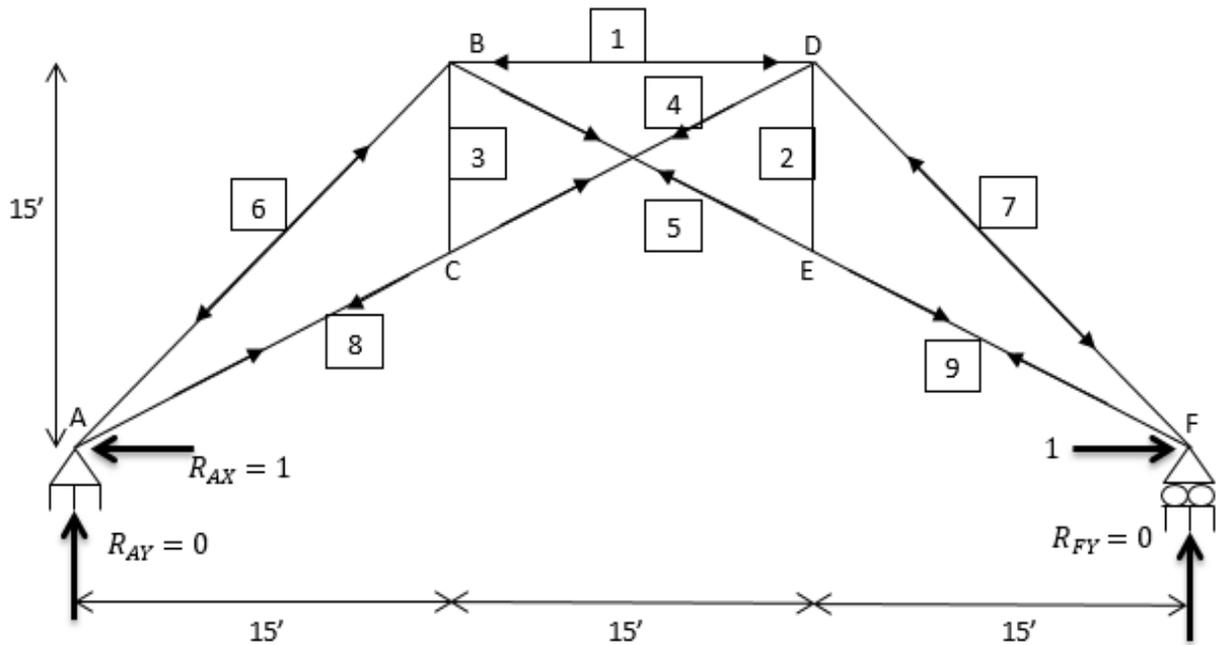


$$\sum FX = 0$$

$$BA(\cos\gamma) + BE(\cos\theta) = BD$$

$$BD = 3 \text{ COMPRESIÓN}$$

Diagrama en el que se visualizan las reacciones y la dirección en la que actúan las fuerzas en las barras de la estructura n:



En la siguiente tabla se muestran los valores de las fuerzas en las barras:

No de barra	fuerza (k)
1	-3.000
2	0.000
3	0.000
4	2.236
5	2.236
6	-1.414
7	-1.414
8	2.236
9	2.236

Tabla auxiliar para el cálculo de los desplazamientos:

No de barra	N(k)	n	L (pies)	A (pies2)	E(k/pies2)	$\frac{NnL}{AE}$	$\frac{nnL}{AE}$
1	-40.0000	-3.0000	15.0000	0.0556	4320000	0.0075	0.0006
2	0.0000	0.0000	7.5000	0.0278	4320000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	7.5000	0.0278	4320000	0.0000	0.0000
4	29.8142	2.2360	16.7705	0.0833	4320000	0.0031	0.0002
5	14.9071	2.2360	16.7705	0.0833	4320000	0.0016	0.0002
6	-30.6413	-1.4140	21.2132	0.0694	4320000	0.0031	0.0001
7	-18.8562	-1.4140	21.2132	0.0694	4320000	0.0019	0.0001
8	29.8142	2.2360	16.7705	0.0833	4320000	0.0031	0.0002
9	14.9071	2.2360	16.7705	0.0833	4320000	0.0016	0.0002

$$\sum = \underline{\underline{\begin{matrix} 0.0218 & 0.0018 \end{matrix}}}$$

Los desplazamientos son:

$$d_1 = \sum \frac{NnL}{AE} = 0.0218$$

$$f_{11} = \sum \frac{nnL}{AE} = 0.0018$$

Planteamiento de la ecuación de compatibilidad geométrica:

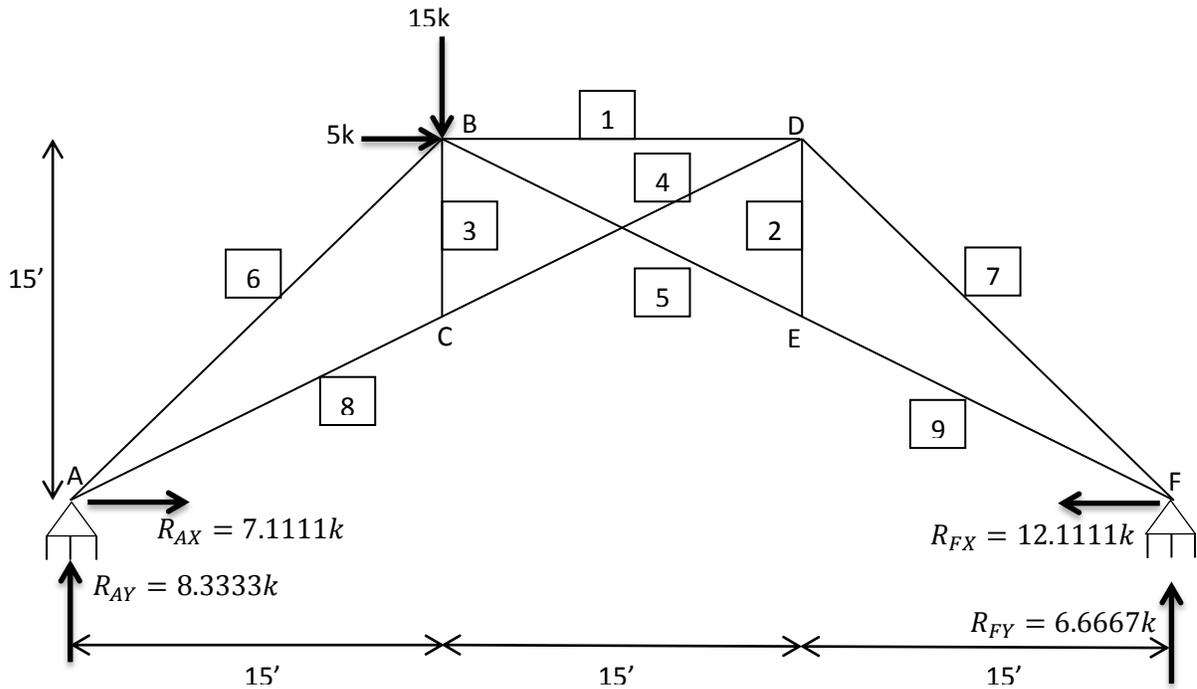
$$0.0218 + R_{FX}(0.0018) = 0$$

$$R_{FX} = \frac{(-0.0218)}{(0.0018)} = -12.1111$$

El signo negativo indica que el sentido propuesto de la carga virtual unitaria es incorrecto.

$$\therefore R_{FX} = 12.1111k \leftarrow$$

Diagrama en el que se visualizan las reacciones de la estructura real:



Las reacciones restantes se obtuvieron de los siguientes cálculos:

Reacciones:

$$\sum MA = 0$$

$$-R_{FY}(45) + 15(15) + 5(15) = 0$$

$$R_{FY} = 6.6667k \uparrow$$

$$\sum FY = 0$$

$$R_{AY} - 15k + 6.6667k = 0$$

$$R_{AY} = 8.3333k \uparrow$$

$$\sum FX = 0$$

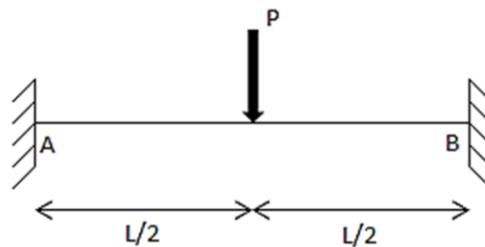
$$5k - 12.1111k + R_{AX} = 0$$

$$R_{AX} = 7.1111k \rightarrow$$

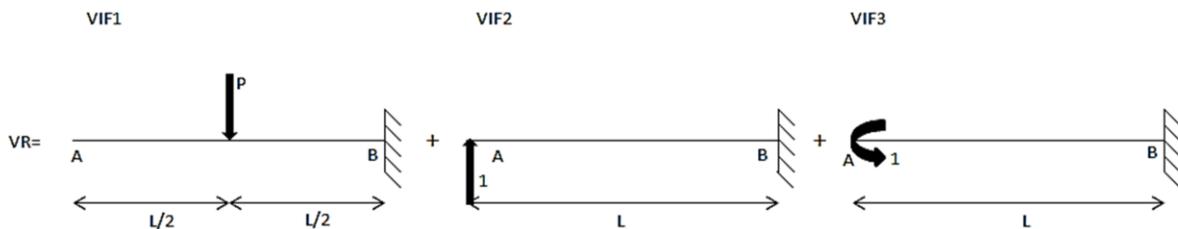
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

4.1. DEDUCCIÓN DE LAS FÓRMULAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO PARA LOS CASOS MÁS USUALES

VIGA 1:



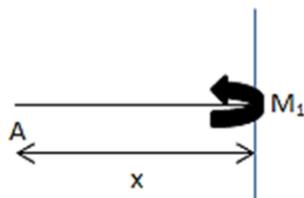
Es igual a la suma de las siguientes vigas:



Ecuaciones de momento de las VIF

VIF 1

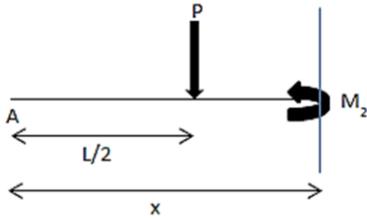
$$0 \leq x \leq L/2$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 0$$

$$L/2 \leq x \leq L$$

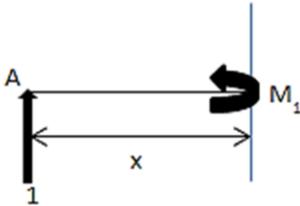


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = -P \left(x - \frac{L}{2} \right) = -Px + \frac{PL}{2}$$

VIF 2

$$0 \leq x \leq L$$

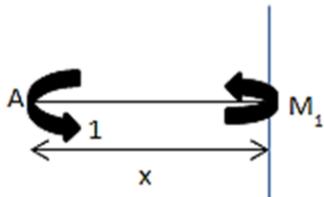


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = (1)(x) = x$$

VIF 3

$$0 \leq x \leq L$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -1$$

Sean:

$$d_1 = \delta_{VA} \text{ de VIF 1}$$

$$d_2 = \theta_A \text{ de VIF 1}$$

$$f_{11} = \delta_{VA} \text{ de VIF 2}$$

$$f_{21} = \theta_A \text{ de VIF 2}$$

$$f_{12} = \delta_{VA} \text{ de VIF 3}$$

$$f_{22} = \theta_A \text{ de VIF 3}$$

Dónde:

$\delta_V =$ Desplazamiento vertical

$\theta =$ Giro o rotación

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{L/2} (0)(x)dx + \int_{L/2}^L \left(-Px + \frac{PL}{2}\right)(x)dx \right] = -\frac{5PL^3}{48EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{L/2} (0)(-1)dx + \int_{L/2}^L \left(-Px + \frac{PL}{2}\right)(-1)dx \right] = \frac{PL^2}{8EI}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(x)dx = \frac{L^3}{3EI}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(-1)dx = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^L (-1)(-1)dx = \frac{L}{EI}$$

Construyendo el sistema de ecuaciones de flexibilidades:

$$-\frac{5PL^3}{48EI} + \frac{L^3}{3EI}R_{AY} - \frac{L^2}{2EI}M_A = 0$$

$$\frac{PL^2}{8EI} - \frac{L^2}{2EI}R_{AY} + \frac{L}{EI}M_A = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$R_{AY} = \frac{P}{2} \uparrow$$

$$M_A = \frac{PL}{8} \curvearrowleft$$

De la viga original:

$$\sum F_Y = 0$$

$$\frac{P}{2} - P + R_{BY} = 0$$

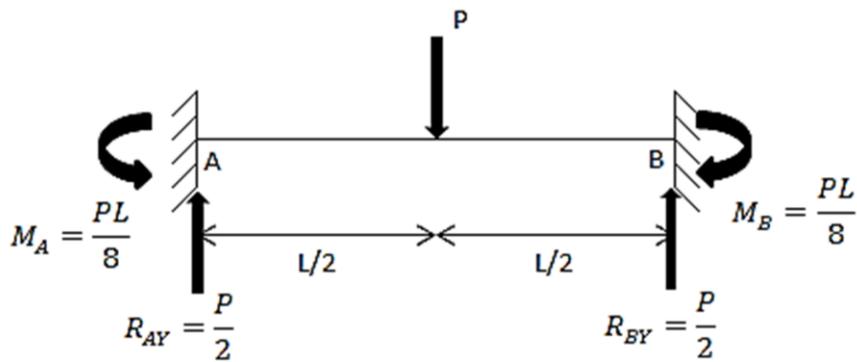
$$R_{BY} = \frac{P}{2} \uparrow$$

$$\sum M_A = 0$$

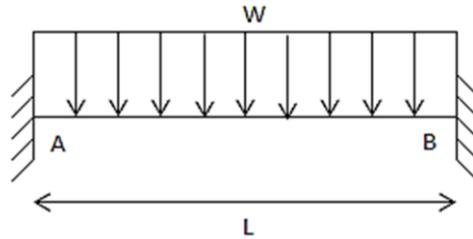
$$-\frac{PL}{8} + P\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{P}{2}(L) + M_B = 0$$

$$M_B = \frac{PL}{8} \curvearrowright$$

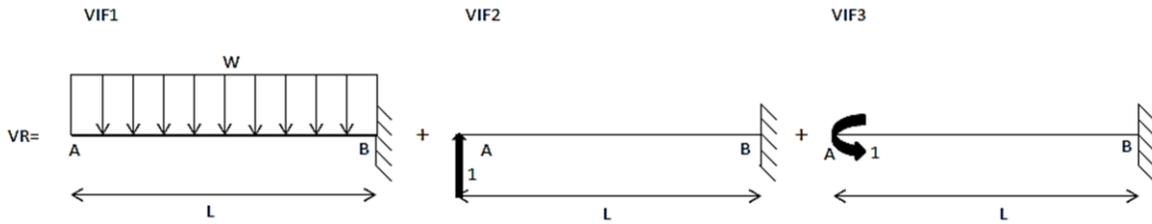
Diagrama que muestra las reacciones de la viga 1:



VIGA 2:



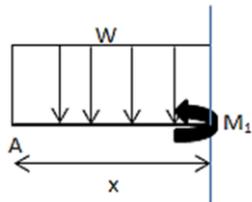
Es igual a la suma de las siguientes vigas:



Ecuaciones de momento de las VIF

VIF 1

$$0 \leq x \leq L$$

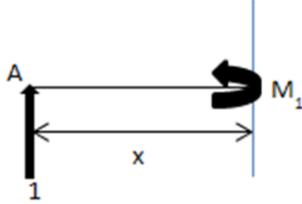


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -W(x) \left(\frac{x}{2} \right) = -\frac{Wx^2}{2}$$

VIF 2

$$0 \leq x \leq L$$

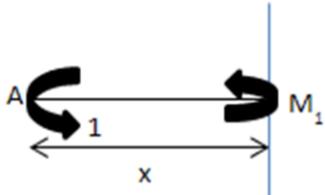


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = (1)(x) = x$$

VIF 3

$$0 \leq x \leq L$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -1$$

Sean:

$$d_1 = \delta_{VA} \text{ de VIF 1}$$

$$d_2 = \theta_A \text{ de VIF 1}$$

$$f_{11} = \delta_{VA} \text{ de VIF 2}$$

$$f_{21} = \theta_A \text{ de VIF 2}$$

$$f_{12} = \delta_{VA} \text{ de VIF 3}$$

$$f_{22} = \theta_A \text{ de VIF 3}$$

Dónde:

$\delta_v =$ Desplazamiento vertical

$\theta =$ Giro o rotación

$$d_1 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-\frac{Wx^2}{2} \right) (x) dx = -\frac{WL^4}{8EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-\frac{Wx^2}{2} \right) (-1) dx = \frac{WL^3}{6EI}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(x) dx = \frac{L^3}{3EI}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(-1) dx = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^L (-1)(-1) dx = \frac{L}{EI}$$

Construyendo el sistema de ecuaciones de flexibilidades:

$$-\frac{WL^4}{8EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} - \frac{L^2}{2EI} M_A = 0$$

$$\frac{WL^3}{6EI} - \frac{L^2}{2EI} R_{AY} + \frac{L}{EI} M_A = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$R_{AY} = \frac{WL}{2} \uparrow$$

$$M_A = \frac{WL^2}{12} \curvearrowright$$

De la viga original:

$$\sum F_Y = 0$$

$$\frac{WL}{2} - WL + R_{BY} = 0$$

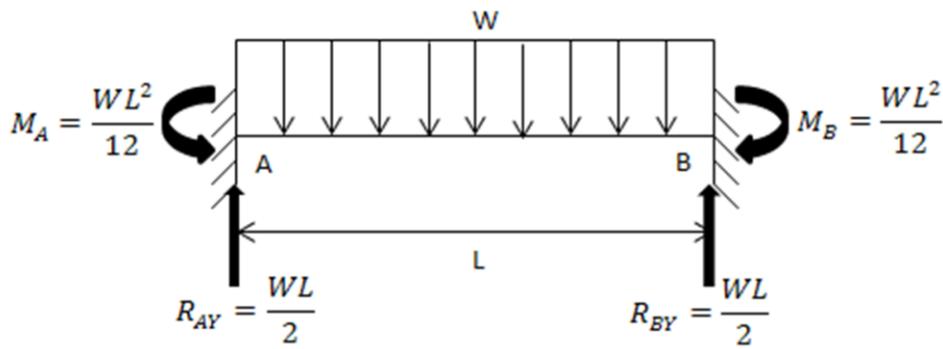
$$R_{BY} = \frac{WL}{2} \uparrow$$

$$\sum MA = 0$$

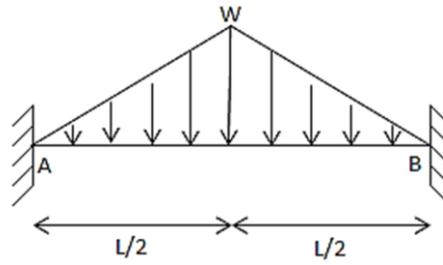
$$-\frac{WL^2}{12} + WL \left(\frac{L}{2}\right) - \frac{WL}{2}(L) + M_B = 0$$

$$M_B = \frac{WL^2}{12} \curvearrowright$$

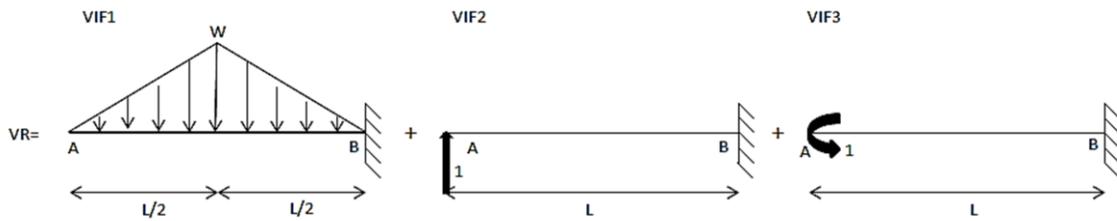
Diagrama que muestra las reacciones de la viga 2:



VIGA 3:



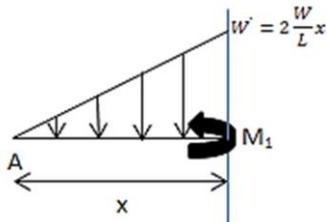
Es igual a la suma de las siguientes vigas:



Ecuaciones de momento de las VIF

VIF 1

$$0 \leq x \leq L/2$$



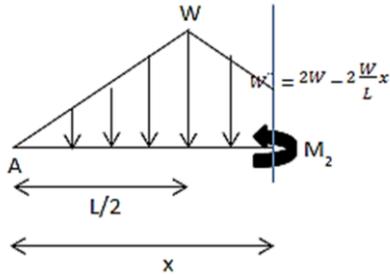
$$\frac{W}{L} = \frac{W'}{x}$$

$$W' = \frac{2W}{L}x$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = - \left[\frac{\left(\frac{2W}{L}x \right) (x)}{2} \right] \left(\frac{x}{3} \right) = - \frac{Wx^3}{3L}$$

$$L/2 \leq x \leq L$$



$$\frac{W}{L} = \frac{W''}{L-x}$$

$$W'' = \frac{W(L-x)}{\frac{L}{2}} = 2W - \frac{2W}{L}x$$

Para la presión del corte:

-La carga concentrada equivalente es:

$$A_T = -\frac{W}{L}x^2 + 2Wx - \frac{WL}{2}$$

-El brazo de palanca es:

$$\bar{x} = \frac{-\frac{2W}{3L}x^3 + Wx^2 - \frac{WL^2}{12}}{-\frac{W}{L}x^2 + 2Wx - \frac{WL}{2}} \text{ a la derecha de A}$$

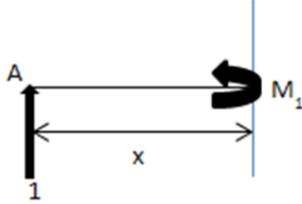
$$\sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$M_2 = -\left(-\frac{W}{L}x^2 + 2Wx - \frac{WL}{2}\right) \left(x - \frac{-\frac{2W}{3L}x^3 + Wx^2 - \frac{WL^2}{12}}{-\frac{W}{L}x^2 + 2Wx - \frac{WL}{2}}\right)$$

$$M_2 = \frac{W}{3L}x^3 - Wx^2 + \frac{WL}{2}x - \frac{WL^2}{12}$$

VIF 2

$$0 \leq x \leq L$$

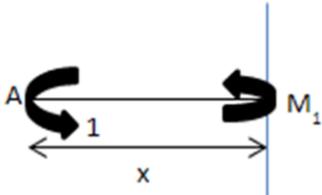


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = (1)(x) = x$$

VIF 3

$$0 \leq x \leq L$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -1$$

Sean:

$$d_1 = \delta_{VA} \text{ de VIF 1}$$

$$d_2 = \theta_A \text{ de VIF 1}$$

$$f_{11} = \delta_{VA} \text{ de VIF 2}$$

$$f_{21} = \theta_A \text{ de VIF 2}$$

$$f_{12} = \delta_{VA} \text{ de VIF 3}$$

$$f_{22} = \theta_A \text{ de VIF 3}$$

Dónde:

$\delta_v =$ Desplazamiento vertical

$\theta =$ Giro o rotación

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{L/2} \left(-\frac{Wx^3}{3L} \right) (x) dx + \int_{L/2}^L \left(\frac{W}{3L} x^3 - Wx^2 + \frac{WL}{2} x - \frac{WL^2}{12} \right) (x) dx \right] = -\frac{11WL^4}{192EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{L/2} \left(-\frac{Wx^3}{3L} \right) (-1) dx + \int_{L/2}^L \left(\frac{W}{3L} x^3 - Wx^2 + \frac{WL}{2} x - \frac{WL^2}{12} \right) (-1) dx \right] = \frac{7WL^3}{96EI}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(x) dx = \frac{L^3}{3EI}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(-1) dx = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^L (-1)(-1) dx = \frac{L}{EI}$$

Construyendo el sistema de ecuaciones de flexibilidades:

$$-\frac{11WL^4}{192EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} - \frac{L^2}{2EI} M_A = 0$$

$$\frac{7WL^3}{96EI} - \frac{L^2}{2EI} R_{AY} + \frac{L}{EI} M_A = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$R_{AY} = \frac{WL}{4} \uparrow$$

$$M_A = \frac{5WL^2}{96} \curvearrowright$$

De la viga original:

$$\sum F_Y = 0$$

$$\frac{WL}{4} - \frac{WL}{2} + R_{BY} = 0$$

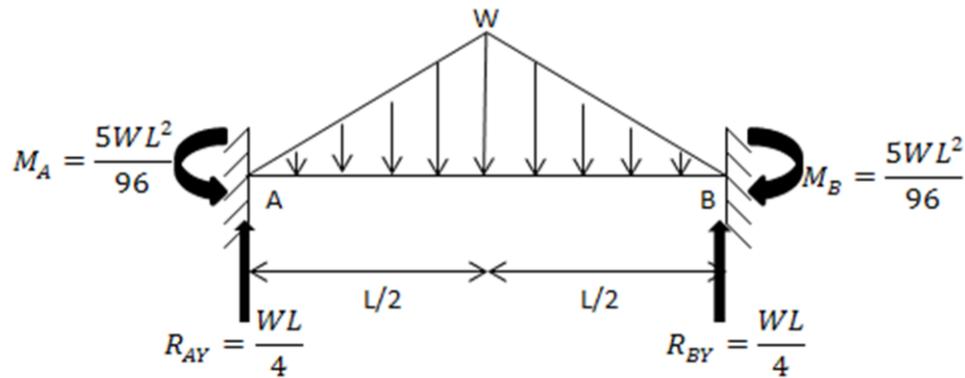
$$R_{BY} = \frac{WL}{4} \uparrow$$

$$\sum MA = 0$$

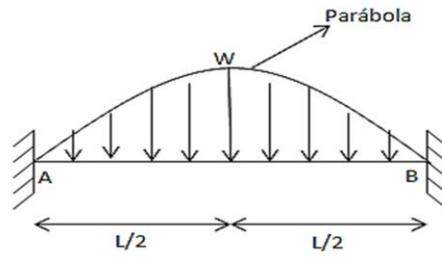
$$-\frac{5WL^2}{96} + \left(\frac{L}{2}\right)(W)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{2}\right) + \left(\frac{L}{2}\right)(W)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{L}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)\right) - \frac{WL}{4}(L) + M_B = 0$$

$$M_B = \frac{5WL^2}{96} \curvearrowright$$

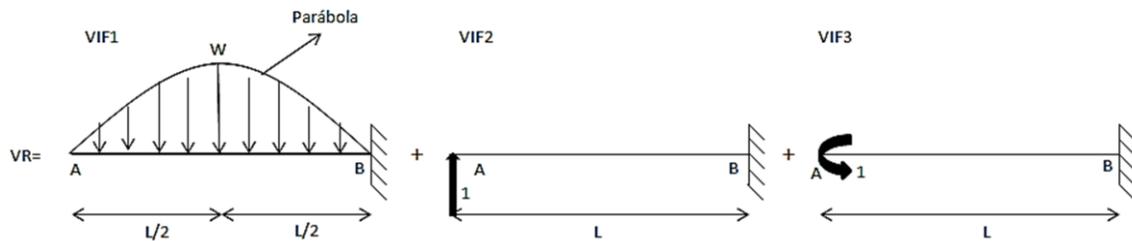
Diagrama que muestra las reacciones de la viga 3:



VIGA 4:



Es igual a la suma de las siguientes vigas:



Para la presión descrita por la curva parabólica:

-La ecuación de la curva es:

$$Y = -4 \frac{W}{L^2} x^2 + 4 \frac{W}{L} x$$

-La carga concentrada equivalente es:

$$A_c = \int_0^L \left(-4 \frac{W}{L^2} x^2 + 4 \frac{W}{L} x \right) dx = \frac{2}{3} WL$$

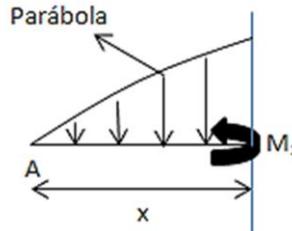
-Brazo de Palanca:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x \left(-4 \frac{W}{L^2} x^2 + 4 \frac{W}{L} x \right) dx}{\int_0^L \left(-4 \frac{W}{L^2} x^2 + 4 \frac{W}{L} x \right) dx} = \frac{\frac{WL^2}{3}}{\frac{2}{3} WL} = \frac{1}{2} L$$

Ecuaciones de momento de las VIF

VIF 1

$$0 \leq x \leq L$$



Para la presión del corte:

-La carga concentrada equivalente es:

$$A_c = \int_0^x \left(-4 \frac{W}{L^2} x^2 + 4 \frac{W}{L} x \right) dx = -\frac{4W}{3L^2} x^3 + \frac{2W}{L} x^2$$

-Brazo de Palanca:

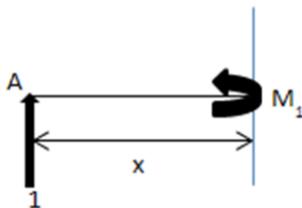
$$\bar{x} = \frac{\int_0^x x \left(-4 \frac{W}{L^2} x^2 + 4 \frac{W}{L} x \right) dx}{\int_0^x \left(-4 \frac{W}{L^2} x^2 + 4 \frac{W}{L} x \right) dx} = \frac{-\frac{W}{L^2} x^4 + \frac{4W}{3L} x^3}{-\frac{4W}{3L^2} x^3 + \frac{2W}{L} x^2} \text{ a la derecha de A}$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = - \left(-\frac{4W}{3L^2} x^3 + \frac{2W}{L} x^2 \right) \left(x - \frac{-\frac{W}{L^2} x^4 + \frac{4W}{3L} x^3}{-\frac{4W}{3L^2} x^3 + \frac{2W}{L} x^2} \right) = \frac{W}{3L^2} x^4 - \frac{2W}{3L} x^3$$

VIF 2

$$0 \leq x \leq L$$

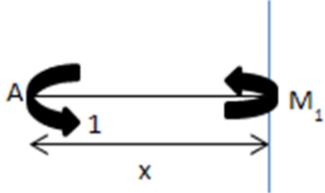


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = (1)(x) = x$$

VIF 3

$$0 \leq x \leq L$$



$$\sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$M_1 = -1$$

Sean:

$$d_1 = \delta_{VA} \text{ de VIF 1}$$

$$d_2 = \theta_A \text{ de VIF 1}$$

$$f_{11} = \delta_{VA} \text{ de VIF 2}$$

$$f_{21} = \theta_A \text{ de VIF 2}$$

$$f_{12} = \delta_{VA} \text{ de VIF 3}$$

$$f_{22} = \theta_A \text{ de VIF 3}$$

Dónde:

$\delta_v =$ Desplazamiento vertical

$\theta =$ Giro o rotación

$$d_1 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{W}{3L^2} x^4 - \frac{2W}{3L} x^3 \right) (x) dx = -\frac{7WL^4}{90EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{W}{3L^2} x^4 - \frac{2W}{3L} x^3 \right) (-1) dx = \frac{WL^3}{10EI}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(x) dx = \frac{L^3}{3EI}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(-1) dx = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^L (-1)(-1)dx = \frac{L}{EI}$$

Construyendo el sistema de ecuaciones de flexibilidades:

$$-\frac{7WL^4}{90EI} + \frac{L^3}{3EI}R_{AY} - \frac{L^2}{2EI}M_A = 0$$

$$\frac{WL^3}{10EI} - \frac{L^2}{2EI}R_{AY} + \frac{L}{EI}M_A = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$R_{AY} = \frac{WL}{3} \uparrow$$

$$M_A = \frac{WL^2}{15} \curvearrowright$$

De la viga original:

$$\sum F_Y = 0$$

$$\frac{WL}{3} - \frac{2}{3}WL + R_{BY} = 0$$

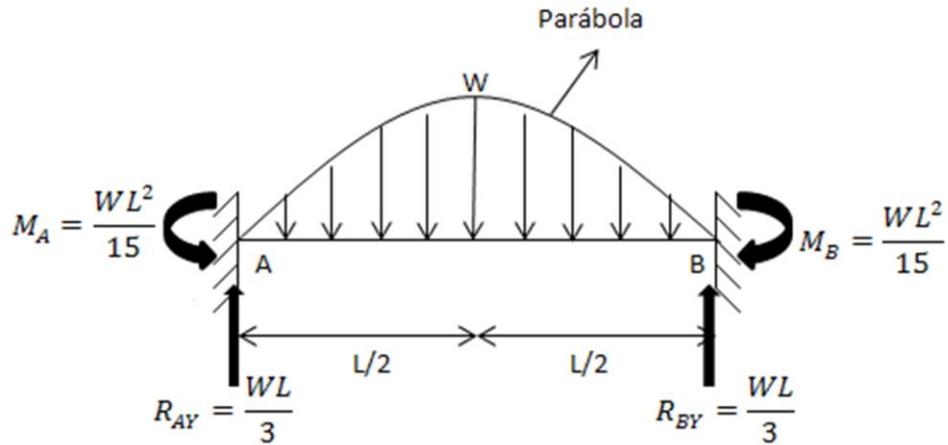
$$R_{BY} = \frac{WL}{3} \uparrow$$

$$\sum M_A = 0$$

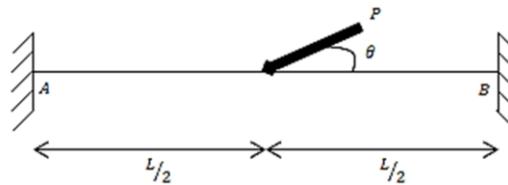
$$-\frac{WL^2}{15} + \frac{2}{3}WL\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{WL}{3}(L) + M_B = 0$$

$$M_B = \frac{WL^2}{15} \curvearrowright$$

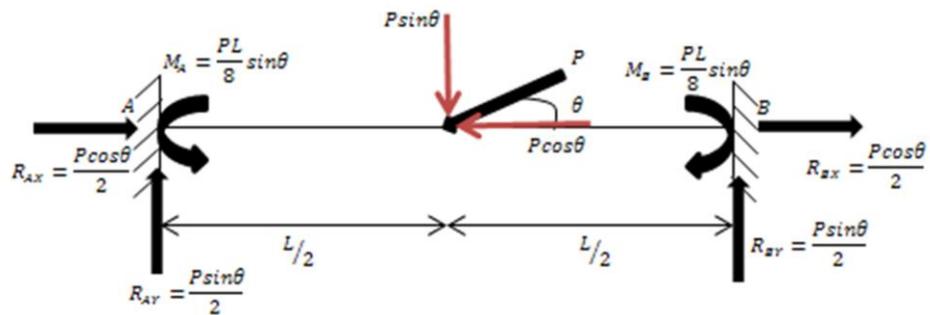
Diagrama que muestra las reacciones de la viga 4:



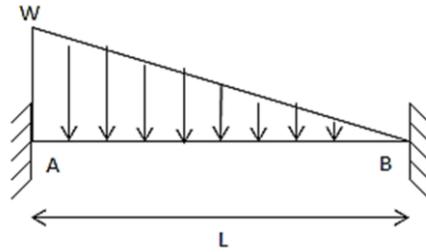
VIGA 5:



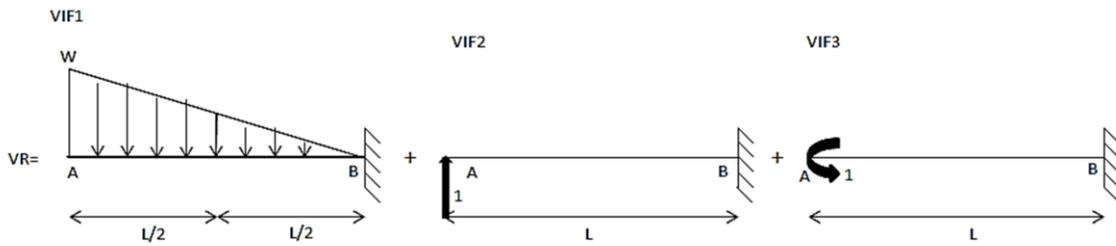
Esta viga ya fue resuelta en el capítulo 2, por lo que:



VIGA 6:



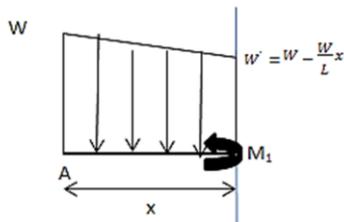
Es igual a la suma de las siguientes vigas:



Ecuaciones de momento de las VIF

VIF 1

$$0 \leq x \leq L$$



$$\frac{W}{L} = \frac{W'}{L-x}$$

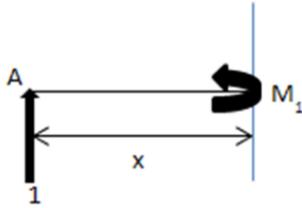
$$W' = \frac{W(L-x)}{L} = W - \frac{W}{L}x$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = - \left(\frac{(x) \left(W - \left(W - \frac{W}{L} x \right) \right)}{2} \right) \left(\frac{2}{3} x \right) - \left(W - \frac{W}{L} x \right) (x) \left(\frac{1}{2} x \right) = \frac{Wx^3}{6L} - \frac{Wx^2}{2}$$

VIF 2

$$0 \leq x \leq L$$

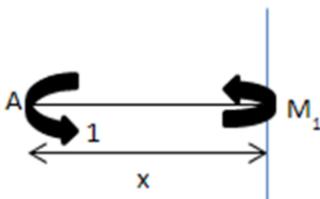


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = (1)(x) = x$$

VIF 3

$$0 \leq x \leq L$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -1$$

Sean:

$$d_1 = \delta_{VA} \text{ de VIF 1}$$

$$d_2 = \theta_A \text{ de VIF 1}$$

$$f_{11} = \delta_{VA} \text{ de VIF 2}$$

$$f_{21} = \theta_A \text{ de VIF 2}$$

$$f_{12} = \delta_{VA} \text{ de VIF 3}$$

$$f_{22} = \theta_A \text{ de VIF 3}$$

Dónde:

$\delta_V =$ Desplazamiento vertical

$\theta =$ Giro o rotación

$$d_1 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{Wx^3}{6L} - \frac{Wx^2}{2} \right) (x) dx = -\frac{11WL^4}{120EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{Wx^3}{6L} - \frac{Wx^2}{2} \right) (-1) dx = \frac{WL^3}{8EI}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(x) dx = \frac{L^3}{3EI}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(-1) dx = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^L (-1)(-1) dx = \frac{L}{EI}$$

Construyendo el sistema de ecuaciones de flexibilidades:

$$-\frac{11WL^4}{120EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} - \frac{L^2}{2EI} M_A = 0$$

$$\frac{WL^3}{8EI} - \frac{L^2}{2EI} R_{AY} + \frac{L}{EI} M_A = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$R_{AY} = \frac{7WL}{20} \uparrow$$

$$M_A = \frac{WL^2}{20} \curvearrowright$$

De la viga original:

$$\sum F_Y = 0$$

$$\frac{7WL}{20} - \frac{WL}{2} + R_{BY} = 0$$

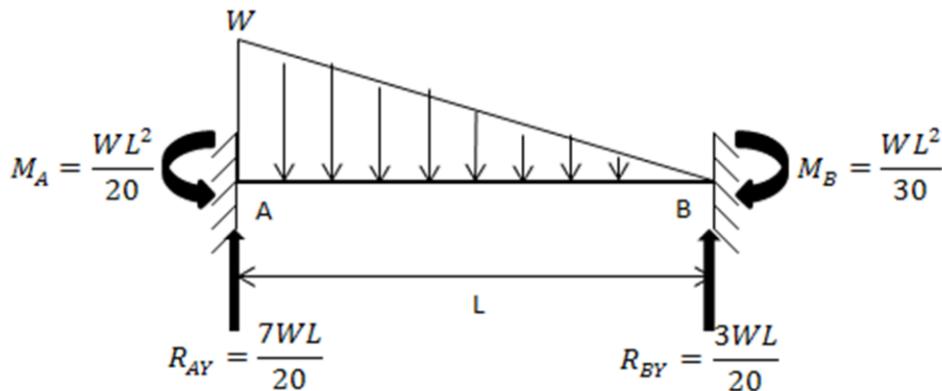
$$R_{BY} = \frac{3WL}{20} \uparrow$$

$$\sum M_A = 0$$

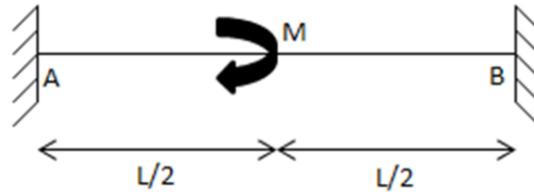
$$-\frac{WL^2}{20} + \frac{WL}{2} \left(\frac{L}{3}\right) - \frac{3WL}{20}(L) + M_B = 0$$

$$M_B = \frac{WL^2}{30} \curvearrowright$$

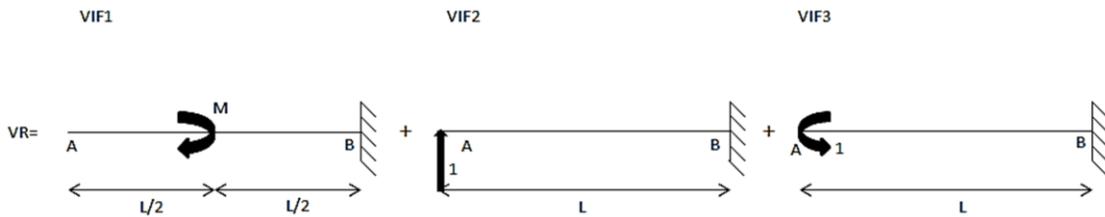
Diagrama que muestra las reacciones de la viga 6:



VIGA 7:



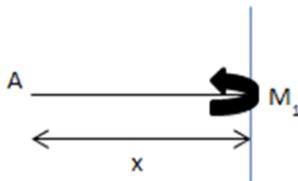
Es igual a la suma de las siguientes vigas:



Ecuaciones de momento de las VIF

VIF 1

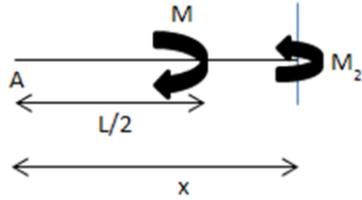
$$0 \leq x \leq L/2$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 0$$

$$L/2 \leq x \leq L$$

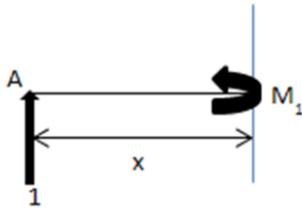


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = M$$

VIF 2

$$0 \leq x \leq L$$

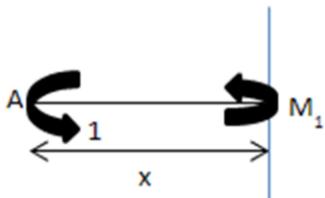


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = (1)(x) = x$$

VIF 3

$$0 \leq x \leq L$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -1$$

Sean:

$$d_1 = \delta_{VA} \text{ de VIF 1}$$

$$d_2 = \theta_A \text{ de VIF 1}$$

$$f_{11} = \delta_{VA} \text{ de VIF 2}$$

$$f_{21} = \theta_A \text{ de VIF 2}$$

$$f_{12} = \delta_{VA} \text{ de VIF 3}$$

$$f_{22} = \theta_A \text{ de VIF 3}$$

Dónde:

$\delta_v = \text{Desplazamiento vertical}$

$\theta = \text{Giro o rotación}$

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{L/2} (0)(x)dx + \int_{L/2}^L (M)(x)dx \right] = \frac{3ML^2}{8EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{L/2} (0)(-1)dx + \int_{L/2}^L (M)(-1)dx \right] = -\frac{ML}{2EI}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(x)dx = \frac{L^3}{3EI}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(-1)dx = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^L (-1)(-1)dx = \frac{L}{EI}$$

Construyendo el sistema de ecuaciones de flexibilidades:

$$\frac{3ML^2}{8EI} + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} - \frac{L^2}{2EI} M_A = 0$$

$$-\frac{ML}{2EI} - \frac{L^2}{2EI} R_{AY} + \frac{L}{EI} M_A = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$R_{AY} = -\frac{3M}{2L} \quad \therefore \quad R_{AY} = \frac{3M}{2L} \downarrow$$

$$M_A = -\frac{M}{4} \quad \therefore \quad M_A = \frac{M}{4} \curvearrowright$$

De la viga original:

$$\sum F_Y = 0$$

$$-\frac{3M}{2L} + R_{BY} = 0$$

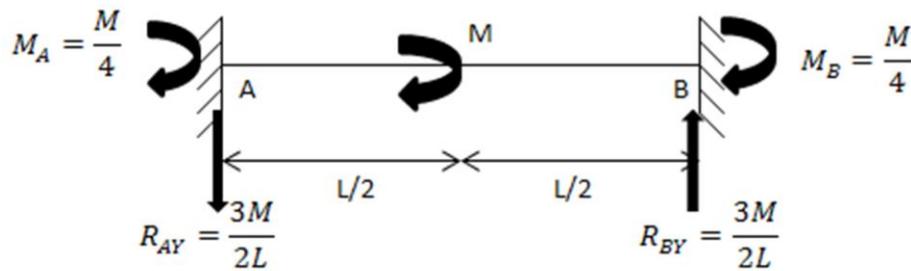
$$R_{BY} = \frac{3M}{2L} \uparrow$$

$$\sum MA = 0$$

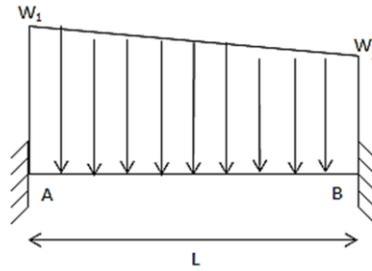
$$\frac{M}{4} + M - \left(\frac{3M}{2L}\right)(L) + M_B = 0$$

$$M_B = \frac{M}{4} \curvearrowright$$

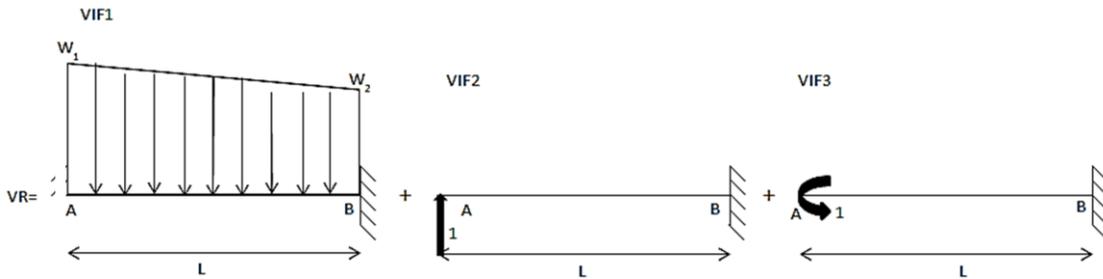
Diagrama que muestra las reacciones de la viga 7:



VIGA 8:



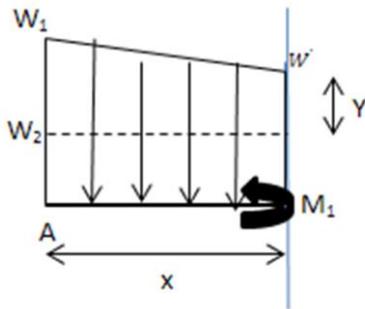
Es igual a la suma de las siguientes vigas:



Ecuaciones de momento de las VIF

VIF 1

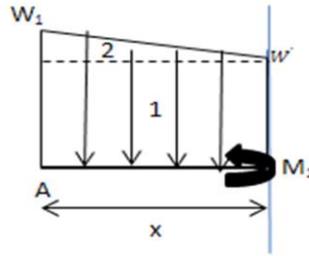
$$0 \leq x \leq L$$



$$\frac{W_1 - W_2}{L} = \frac{Y}{L - x}$$

$$Y = \frac{(W_1 - W_2)(L - x)}{L} = W_1 - W_2 + \frac{W_2}{L}x - \frac{W_1}{L}x$$

$$W' = W_2 + Y = W_2 + W_1 - W_2 + \frac{W_2}{L}x - \frac{W_1}{L}x = W_1 + \frac{W_2}{L}x - \frac{W_1}{L}x$$



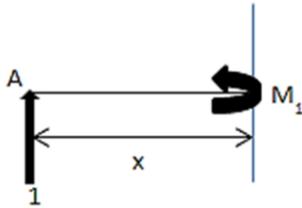
$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -(x) \left(W_1 + \frac{W_2}{L}x - \frac{W_1}{L}x \right) \left(\frac{1}{2}x \right) - \left[\frac{(x) \left(W_1 - \left(W_1 + \frac{W_2}{L}x - \frac{W_1}{L}x \right) \right)}{2} \right] \left(\frac{2}{3}x \right)$$

$$M_1 = \frac{W_1 x^3}{2L} - \frac{W_2 x^3}{2L} - \frac{W_1 x^2}{2} + \frac{W_2 x^3}{3L} - \frac{W_1 x^3}{3L} = \frac{W_1 x^3}{6L} - \frac{W_2 x^3}{6L} - \frac{W_1 x^2}{2}$$

VIF 2

$$0 \leq x \leq L$$

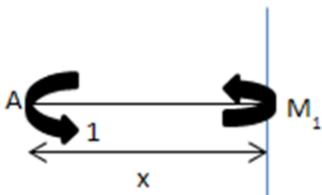


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = (1)(x) = x$$

VIF 3

$$0 \leq x \leq L$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -1$$

Sean:

$$d_1 = \delta_{VA} \text{ de VIF 1}$$

$$d_2 = \theta_A \text{ de VIF 1}$$

$$f_{11} = \delta_{VA} \text{ de VIF 2}$$

$$f_{21} = \theta_A \text{ de VIF 2}$$

$$f_{12} = \delta_{VA} \text{ de VIF 3}$$

$$f_{22} = \theta_A \text{ de VIF 3}$$

Dónde:

$\delta_V =$ Desplazamiento vertical

$\theta =$ Giro o rotación

$$d_1 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{W_1 x^3}{6L} - \frac{W_2 x^3}{6L} - \frac{W_1 x^2}{2} \right) (x) dx = -\frac{11W_1 L^4}{120EI} - \frac{W_2 L^4}{30EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{W_1 x^3}{6L} - \frac{W_2 x^3}{6L} - \frac{W_1 x^2}{2} \right) (-1) dx = \frac{W_1 L^3}{8EI} + \frac{W_2 L^3}{24EI}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(x) dx = \frac{L^3}{3EI}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(-1) dx = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^L (-1)(-1) dx = \frac{L}{EI}$$

Construyendo el sistema de ecuaciones de flexibilidades:

$$-\left(\frac{11W_1 L^4}{120EI} + \frac{W_2 L^4}{30EI} \right) + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} - \frac{L^2}{2EI} M_A = 0$$

$$\left(\frac{W_1L^3}{8EI} + \frac{W_2L^3}{24EI}\right) - \frac{L^2}{2EI}R_{AY} + \frac{L}{EI}M_A = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$R_{AY} = \left(\frac{7W_1L}{20} + \frac{3W_2L}{20}\right) \uparrow$$

$$M_A = \left(\frac{W_1L^2}{20} + \frac{W_2L^2}{30}\right) \curvearrowleft$$

De la viga original:

$$\sum F_Y = 0$$

$$\frac{7W_1L}{20} + \frac{3W_2L}{20} - W_2L - \left[\frac{(L)(W_1 - W_2)}{2}\right] + R_{BY} = 0$$

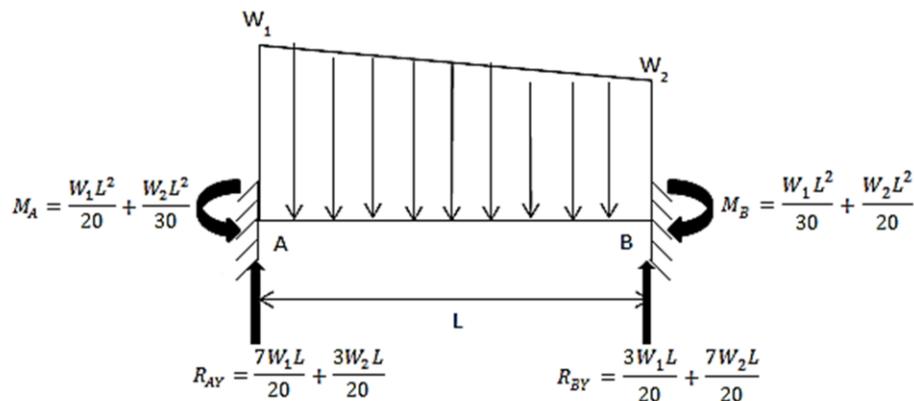
$$R_{BY} = \left(\frac{3W_1L}{20} + \frac{7W_2L}{20}\right) \uparrow$$

$$\sum MA = 0$$

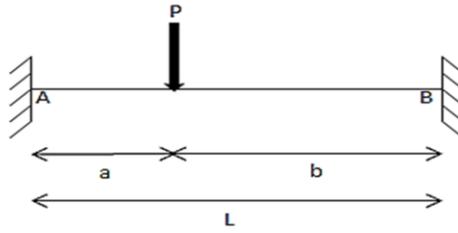
$$-\left(\frac{W_1L^2}{20} + \frac{W_2L^2}{30}\right) + W_2(L)\left(\frac{L}{2}\right) + \left(\frac{(L)(W_1 - W_2)}{2}\right)\left(\frac{L}{3}\right) - \left(\frac{3W_1L}{20} + \frac{7W_2L}{20}\right)(L) + M_B = 0$$

$$M_B = \left(\frac{W_1L^2}{30} + \frac{W_2L^2}{20}\right) \curvearrowright$$

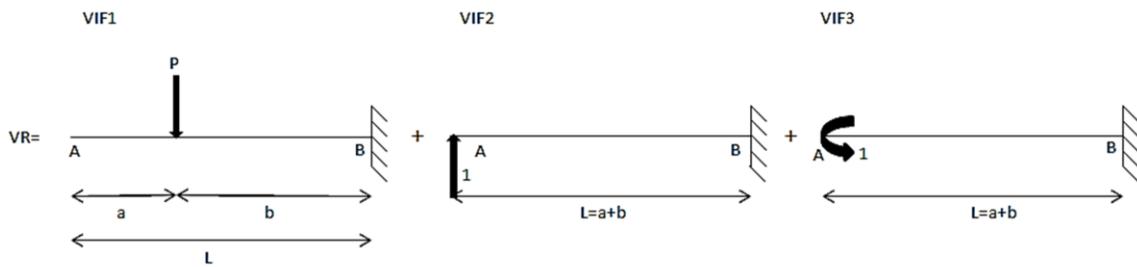
Diagrama que muestra las reacciones de la viga 8:



VIGA 9:



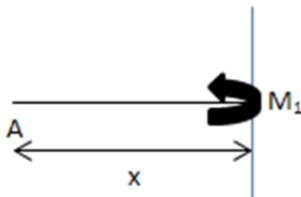
Es igual a la suma de las siguientes vigas:



Ecuaciones de momento de las VIF

VIF 1

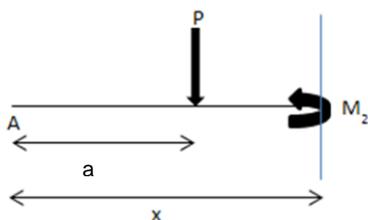
$$0 \leq x \leq a$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 0$$

$$a \leq x \leq a + b$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = -P(x - a) = -Px + Pa$$

VIF 2

$$0 \leq x \leq L$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = (1)(x) = x$$

VIF 3

$$0 \leq x \leq L$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -1$$

Sean:

$$d_1 = \delta_{VA} \text{ de VIF 1}$$

$$d_2 = \theta_A \text{ de VIF 1}$$

$$f_{11} = \delta_{VA} \text{ de VIF 2}$$

$$f_{21} = \theta_A \text{ de VIF 2}$$

$$f_{12} = \delta_{VA} \text{ de VIF 3}$$

$$f_{22} = \theta_A \text{ de VIF 3}$$

Dónde:

$\delta_v = \text{Desplazamiento vertical}$

$\theta = \text{Giro o rotación}$

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a (0)(x)dx + \int_a^{a+b} (-Px + Pa)(x)dx \right] = -\frac{ab^2P}{2EI} - \frac{Pb^3}{3EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a (0)(-1)dx + \int_a^{a+b} (-Px + Pa)(-1)dx \right] = \frac{Pb^2}{2EI}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^{a+b} (x)(x)dx = \frac{(a+b)^3}{3EI}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^{a+b} (x)(-1)dx = -\frac{(a+b)^2}{2EI}$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{(a+b)^2}{2EI}$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^{a+b} (-1)(-1)dx = \frac{a+b}{EI}$$

Construyendo el sistema de ecuaciones de flexibilidades:

$$-\left(\frac{ab^2P}{2EI} + \frac{Pb^3}{3EI}\right) + \frac{(a+b)^3}{3EI}R_{AY} - \frac{(a+b)^2}{2EI}M_A = 0$$

$$\frac{Pb^2}{2EI} - \frac{(a+b)^2}{2EI}R_{AY} + \frac{a+b}{EI}M_A = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$R_{AY} = \frac{(3a+b)b^2P}{(a+b)^3} = \frac{(3a+b)b^2P}{(L)^3} = \frac{Pb^2}{L^3} (3(L-b) + b) = \frac{Pb^2}{L^2} \left(\frac{3L-2b}{L}\right) = \left[\frac{Pb^2}{L^2} \left(3 - 2\frac{b}{L}\right)\right] \uparrow$$

$$M_A = \frac{ab^2P}{a^2+2ab+b^2} = \frac{Pab^2}{(a+b)^2} = \frac{Pab^2}{L^2} \curvearrowright$$

De la viga original:

$$\sum FY = 0$$

$$\frac{(3a+b)b^2P}{(a+b)^3} - P + R_{BY} = 0$$

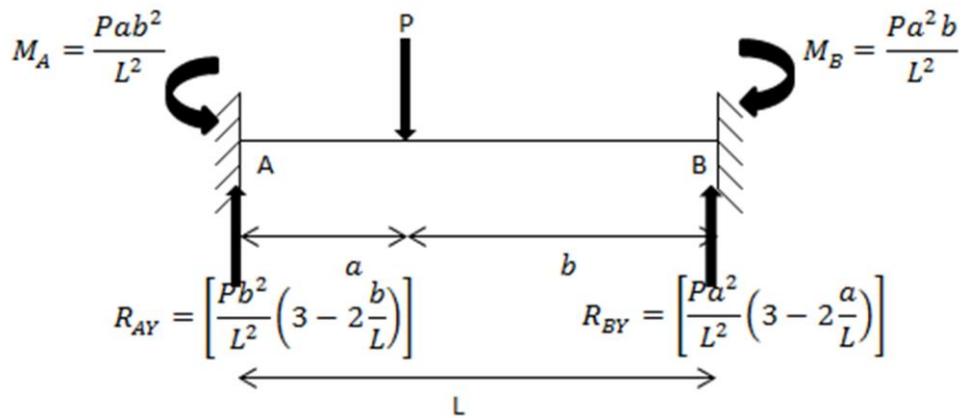
$$R_{BY} = \frac{a^2(a+3b)P}{(a+b)^3} = \frac{Pa^2(a+3b)}{L^3} = \frac{Pa^2}{L^3} (a + 3(L-a)) = \frac{Pa^2}{L^3} (3L - 2a) = \frac{Pa^2}{L^2} \left(\frac{3L-2a}{L}\right) = \left[\frac{Pa^2}{L^2} \left(3 - 2\frac{a}{L}\right)\right] \uparrow$$

$$\sum MA = 0$$

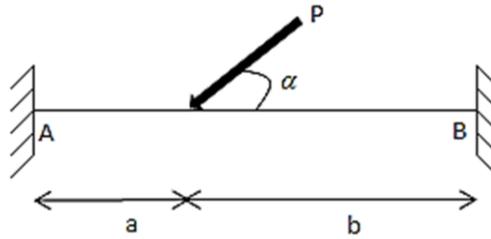
$$-\frac{Pab^2}{(a+b)^2} + Pa - \frac{Pa^2(a+3b)}{(a+b)^3}(a+b) + M_B = 0$$

$$M_B = \frac{Pa^2b}{(a+b)^2} = \frac{Pa^2b}{L^2} \curvearrowright$$

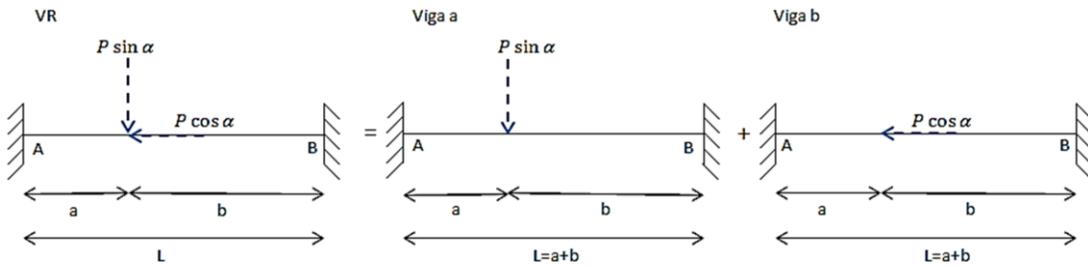
Diagrama que muestra las reacciones de la viga 9:



VIGA 10:



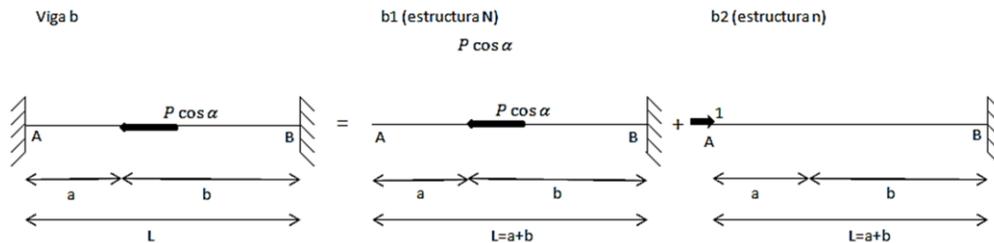
Es igual a la suma de las siguientes vigas:



La viga a es una viga del tipo 9 en la que $P = P \sin \alpha$

$$\begin{aligned}
 M_A &= \frac{(P \sin \alpha) a b^2}{L^2} & M_B &= \frac{(P \sin \alpha) a^2 b}{L^2} \\
 R_{AY} &= \frac{(P \sin \alpha) b^2}{L^2} \left(3 - 2 \frac{a}{L} \right) & R_{BY} &= \frac{(P \sin \alpha) a^2}{L^2} \left(3 - 2 \frac{b}{L} \right)
 \end{aligned}$$

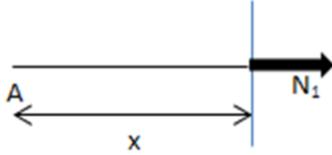
Resolvemos la viga b



Analizamos viga b1

Ecuaciones de normal

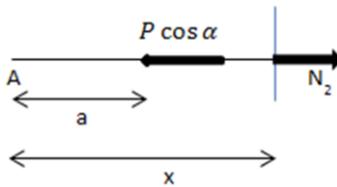
$$0 \leq x \leq a$$



$$\sum FX = 0$$

$$N_1 = 0$$

$$a \leq x \leq a + b$$



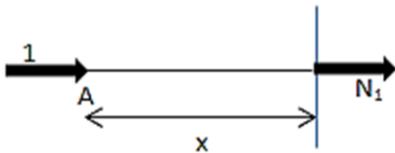
$$\sum FX = 0$$

$$N_2 = P \cos \alpha$$

Analizamos viga b2

Ecuaciones de normal

$$0 \leq x \leq a + b$$



$$\sum FX = 0$$

$$N_1 = -1$$

Sean:

$$d_1 = \delta_{HA} \text{ de viga b1}$$

$$f_{11} = \delta_{HA} \text{ de viga b2}$$

Dónde:

$$\delta_H = \text{Desplazamiento horizontal}$$

$$\Delta_x = \frac{NnL}{AE}$$

$$d_1 = \frac{(0)(-1)(a)}{AE} + \frac{(P \cos \alpha)(-1)(b)}{AE} = -\frac{Pb \cos \alpha}{AE}$$

$$f_{11} = \frac{(-1)(-1)(a+b)}{AE} = \frac{a+b}{AE}$$

Construyendo el sistema de ecuaciones de flexibilidades:

$$-\frac{Pb \cos \alpha}{AE} + \frac{a+b}{AE} R_{AX} = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$R_{AX} = \frac{\frac{Pb \cos \alpha}{AE}}{\frac{a+b}{AE}} = \frac{Pb \cos \alpha}{a+b} = \frac{(P \cos \alpha)(b)}{L} \rightarrow$$

Para la viga b:

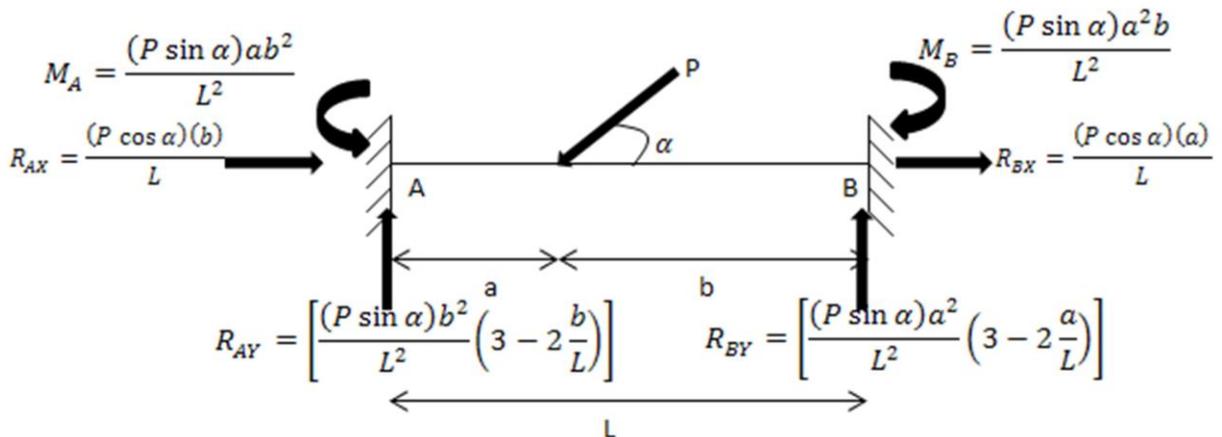
$$\sum FX = 0$$

$$-P \cos \alpha + \frac{(P \cos \alpha)(b)}{L} + R_{BX} = 0$$

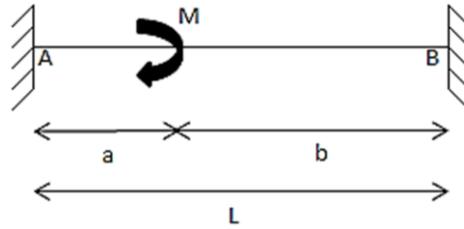
$$R_{BX} = \frac{Pa \cos \alpha}{a+b} = \frac{(P \cos \alpha)(a)}{L} \rightarrow$$

Finalmente:

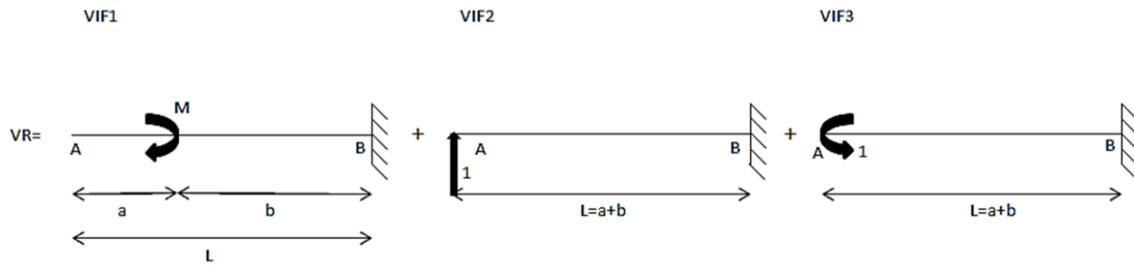
Diagrama que muestra las reacciones de la viga 10:



VIGA 11:



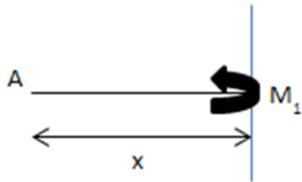
Es igual a la suma de las siguientes vigas:



Ecuaciones de momento de las VIF

VIF 1

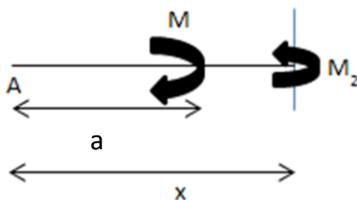
$$0 \leq x \leq a$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 0$$

$$a \leq x \leq a + b$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = M$$

VIF 2

$$0 \leq x \leq L$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = (1)(x) = x$$

VIF 3

$$0 \leq x \leq L$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -1$$

Sean:

$$d_1 = \delta_{VA} \text{ de VIF 1}$$

$$d_2 = \theta_A \text{ de VIF 1}$$

$$f_{11} = \delta_{VA} \text{ de VIF 2}$$

$$f_{21} = \theta_A \text{ de VIF 2}$$

$$f_{12} = \delta_{VA} \text{ de VIF 3}$$

$$f_{22} = \theta_A \text{ de VIF 3}$$

Dónde:

$\delta_v = \text{Desplazamiento vertical}$

$\theta = \text{Giro o rotación}$

$$d_1 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a (0)(x)dx + \int_a^{a+b} (M)(x)dx \right] = \frac{(2a+b)(bM)}{2EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a (0)(-1)dx + \int_a^{a+b} (M)(-1)dx \right] = -\frac{bM}{2EI}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^{a+b} (x)(x)dx = \frac{(a+b)^3}{3EI}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^{a+b} (x)(-1)dx = -\frac{(a+b)^2}{2EI}$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{(a+b)^2}{2EI}$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^{a+b} (-1)(-1)dx = \frac{a+b}{EI}$$

Construyendo el sistema de ecuaciones de flexibilidades:

$$\frac{(2a+b)(bM)}{2EI} + \frac{(a+b)^3}{3EI} R_{AY} - \frac{(a+b)^2}{2EI} M_A = 0$$

$$-\frac{bM}{2EI} - \frac{(a+b)^2}{2EI} R_{AY} + \frac{a+b}{EI} M_A = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$R_{AY} = -\frac{6Mab}{(a+b)^3} = -\frac{6Mab}{L^3} \quad \therefore \quad R_{AY} = \frac{6Mab}{L^3} \quad \downarrow$$

$$M_A = \frac{-(2a-b)(bM)}{a^2+2ab+b^2} = \frac{-(2a-b)(bM)}{(a+b)^2} = \frac{Mb}{L} \left(\frac{b-2a}{L} \right) = \frac{Mb}{L} \left(\frac{b-2(L-b)}{L} \right) = \frac{Mb}{L} \left(\frac{3b}{L} - 2 \right) \quad \curvearrowright$$

De la viga original:

$$\sum F_Y = 0$$

$$R_{BY} = \frac{6Mab}{L^3} \quad \uparrow$$

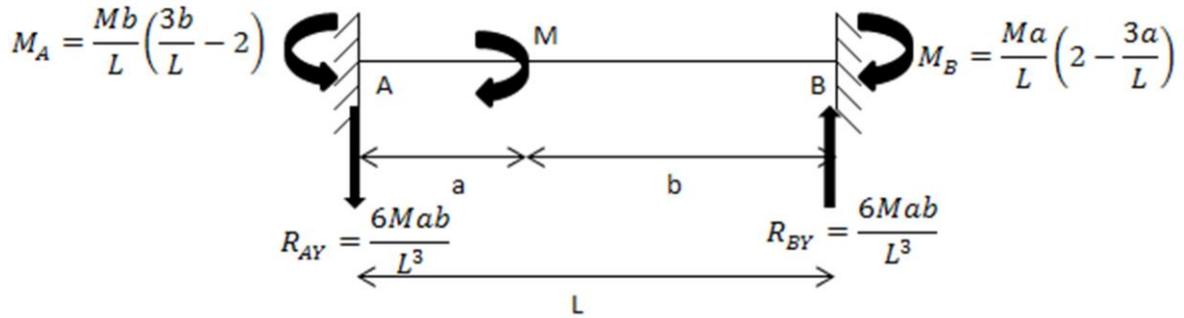
$$\sum M_A = 0$$

$$-\left(\frac{-(2a-b)(bM)}{a^2+2ab+b^2} \right) + M - \frac{6Mab}{(a+b)^3} (a+b) + M_B = 0$$

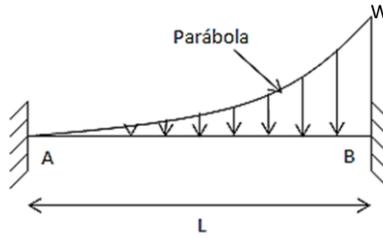
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

$$M_B = \frac{-a(a-2b)M}{(a+b)^2} = \frac{Ma}{L} \left(\frac{-a+2b}{L} \right) = \frac{Ma}{L} \left(\frac{-a+2(L-a)}{L} \right) = \frac{Ma}{L} \left(\frac{2L-3a}{L} \right) = \frac{Ma}{L} \left(2 - \frac{3a}{L} \right) \curvearrowright$$

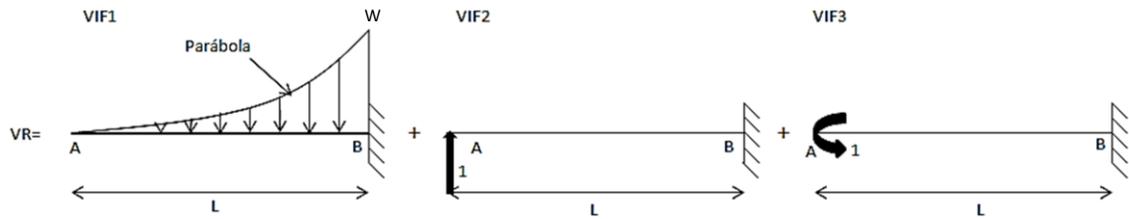
Diagrama que muestra las reacciones de la viga 11:



VIGA 12:



Es igual a la suma de las siguientes vigas:



Para la presión de la enjuta parabólica:

-La ecuación de la curva es:

$$Y = \frac{b}{a^2} x^2 = \frac{W}{L^2} x^2$$

-La carga concentrada equivalente es:

$$A_c = \frac{1}{3} ab = \frac{1}{3} LW$$

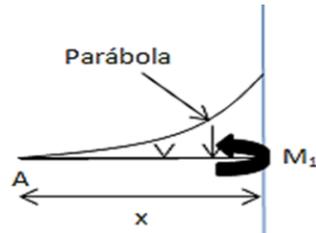
-El brazo de palanca es:

$$\bar{x} = \frac{3}{4} a = \frac{3}{4} L \text{ a la derecha de A}$$

Ecuaciones de momento de las VIF

VIF 1

$$0 \leq x \leq L$$



Para la carga de la corte:

$$A_c = \int_0^x \left(\frac{W}{L^2} x^2 \right) dx = \frac{1}{3} \frac{W}{L^2} x^3$$

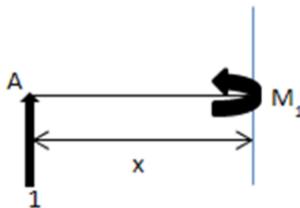
$$\bar{x} = \frac{\int_0^x x \left(\frac{W}{L^2} x^2 \right) dx}{\int_0^x \left(\frac{W}{L^2} x^2 \right) dx} = \frac{\frac{1}{4} \frac{W}{L^2} x^4}{\frac{1}{3} \frac{W}{L^2} x^3} = \frac{3}{4} x \text{ a la derecha de A}$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = - \left(\frac{1}{3} \frac{W}{L^2} x^3 \right) \left(x - \frac{3}{4} x \right) = - \frac{W x^4}{12 L^2}$$

VIF 2

$$0 \leq x \leq L$$

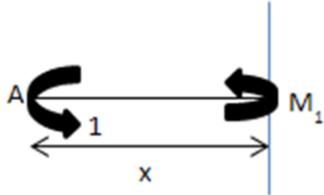


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = (1)(x) = x$$

VIF 3

$$0 \leq x \leq L$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -1$$

Sean:

$$d_1 = \delta_{VA} \text{ de VIF 1}$$

$$d_2 = \theta_A \text{ de VIF 1}$$

$$f_{11} = \delta_{VA} \text{ de VIF 2}$$

$$f_{21} = \theta_A \text{ de VIF 2}$$

$$f_{12} = \delta_{VA} \text{ de VIF 3}$$

$$f_{22} = \theta_A \text{ de VIF 3}$$

Dónde:

$\delta_v =$ Desplazamiento vertical

$\theta =$ Giro o rotación

$$d_1 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-\frac{Wx^4}{12L^2} \right) (x) dx = -\frac{WL^4}{72EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-\frac{Wx^4}{12L^2} \right) (-1) dx = \frac{WL^3}{60EI}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(x) dx = \frac{L^3}{3EI}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(-1) dx = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^L (-1)(-1)dx = \frac{L}{EI}$$

Construyendo el sistema de ecuaciones de flexibilidades:

$$-\frac{WL^4}{72EI} + \frac{L^3}{3EI}R_{AY} - \frac{L^2}{2EI}M_A = 0$$

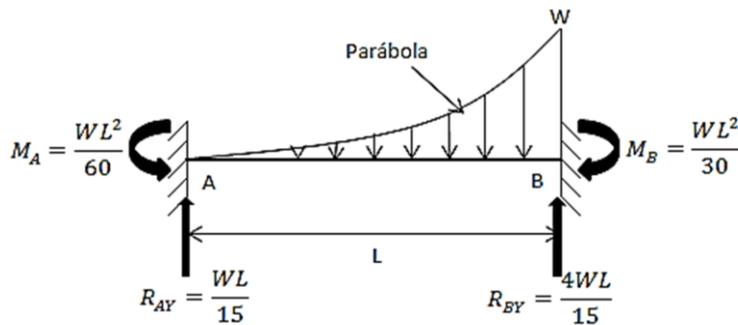
$$\frac{WL^3}{60EI} - \frac{L^2}{2EI}R_{AY} + \frac{L}{EI}M_A = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$R_{AY} = \frac{WL}{15} \uparrow$$

$$M_A = \frac{WL^2}{60} \curvearrowright$$

Diagrama que muestra las reacciones de la viga 12



De la viga original:

$$\sum F_Y = 0$$

$$\frac{WL}{15} - \frac{1}{3}WL + R_{BY} = 0$$

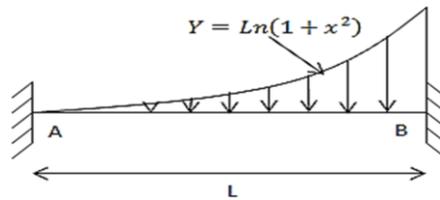
$$R_{BY} = \frac{4WL}{15} \uparrow$$

$$\sum M_A = 0$$

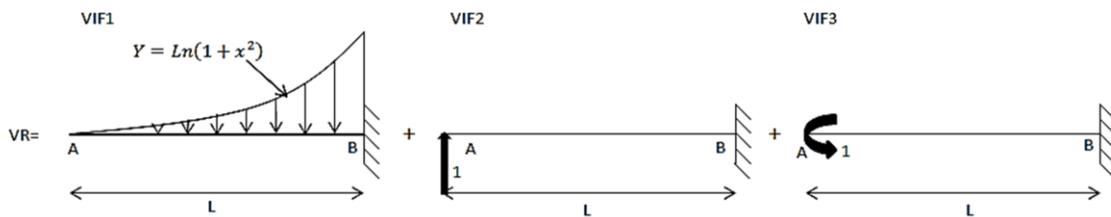
$$-\frac{WL^2}{60} + \frac{1}{3}WL\left(\frac{3}{4}L\right) - \frac{4WL}{15}(L) + M_B = 0$$

$$M_B = \frac{WL^2}{30} \curvearrowright$$

VIGA 13:



Es igual a la suma de las siguientes vigas:



Para la presión de la curva logarítmica:

-La carga concentrada equivalente es:

$$A_c = \int_0^L \text{Ln}(1 + x^2) dx = L * \text{Ln}(L^2 + 1) + 2(\arctan(L) - L)$$

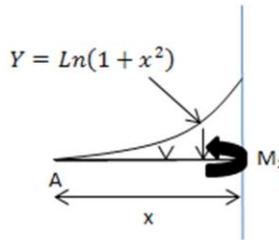
-El brazo de palanca es:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x(\text{Ln}(1 + x^2)) dx}{\int_0^L (\text{Ln}(1 + x^2)) dx} = \frac{\frac{(L^2 + 1) * \text{Ln}(L^2 + 1)}{2} - \frac{L^2}{2}}{L * \text{Ln}(L^2 + 1) + 2(\arctan(L) - L)} \text{ a la derecha de A}$$

Ecuaciones de momento de las VIF

VIF 1

$$0 \leq x \leq L$$



Para la carga de la corte:

$$A_c = \int_0^x (\text{Ln}(1 + x^2)) dx = x * \text{Ln}(x^2 + 1) + 2(\arctan(x) - x)$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^x x(\text{Ln}(1 + x^2)) dx}{\int_0^x \text{Ln}(1 + x^2) dx} = \frac{\frac{(x^2 + 1) * \text{Ln}(x^2 + 1)}{2} - \frac{x^2}{2}}{x * \text{Ln}(x^2 + 1) + 2(\arctan(x) - x)} \text{ a la derecha de A}$$

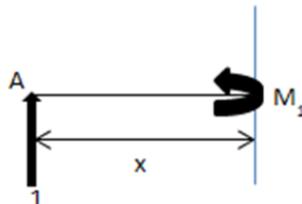
$$\sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$M_1 = -[x * \text{Ln}(x^2 + 1) + 2(\arctan(x) - x)] \left[x - \frac{\frac{(x^2 + 1) * \text{Ln}(x^2 + 1)}{2} - \frac{x^2}{2}}{x * \text{Ln}(x^2 + 1) + 2(\arctan(x) - x)} \right]$$

$$M_1 = -\frac{x^2 * \text{Ln}(x^2 + 1)}{2} + \frac{\text{Ln}(x^2 + 1)}{2} - 2x * \arctan(x) + \frac{3}{2}x^2$$

VIF 2

$$0 \leq x \leq L$$

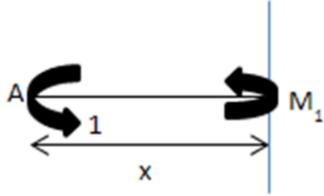


$$\sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$M_1 = (1)(x) = x$$

VIF 3

$$0 \leq x \leq L$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -1$$

Sean:

$$d_1 = \delta_{VA} \text{ de VIF 1}$$

$$d_2 = \theta_A \text{ de VIF 1}$$

$$f_{11} = \delta_{VA} \text{ de VIF 2}$$

$$f_{21} = \theta_A \text{ de VIF 2}$$

$$f_{12} = \delta_{VA} \text{ de VIF 3}$$

$$f_{22} = \theta_A \text{ de VIF 3}$$

Dónde:

$\delta_V =$ Desplazamiento vertical

$\theta =$ Giro o rotación

$$d_1 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-\frac{x^2 * \text{Ln}(x^2+1)}{2} + \frac{\text{Ln}(x^2+1)}{2} - 2x * \arctan(x) + \frac{3}{2}x^2 \right) (x) dx =$$

$$\frac{1}{EI} \left[-\frac{L^4 * \text{Ln}(L^2+1)}{8} + \frac{L^2 * \text{Ln}(L^2+1)}{4} + \frac{\text{Ln}(L^2+1)}{24} - \frac{2L^3 * \arctan(L)}{3} + \frac{7L^4}{16} - \frac{L^2}{24} \right]$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-\frac{x^2 * \text{Ln}(x^2+1)}{2} + \frac{\text{Ln}(x^2+1)}{2} - 2x * \arctan(x) + \frac{3}{2}x^2 \right) (-1) dx =$$

$$\frac{1}{EI} \left[\frac{L^3 * \text{Ln}(L^2+1)}{6} - \frac{L * \text{Ln}(L^2+1)}{2} + L^2 * \arctan(L) - \frac{\arctan(L)}{3} - \frac{11L^3}{18} + \frac{L}{3} \right]$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(x)dx = \frac{L^3}{3EI}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x)(-1)dx = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^L (-1)(-1)dx = \frac{L}{EI}$$

Construyendo el sistema de ecuaciones de flexibilidades:

$$\frac{1}{EI} \left[-\frac{L^4 * \ln(L^2+1)}{8} + \frac{L^2 * \ln(L^2+1)}{4} + \frac{\ln(L^2+1)}{24} - \frac{2L^3 * \arctan(L)}{3} + \frac{7L^4}{16} - \frac{L^2}{24} \right] + \frac{L^3}{3EI} R_{AY} - \frac{L^2}{2EI} M_A = 0$$

$$\frac{1}{EI} \left[\frac{L^3 * \ln(L^2+1)}{6} - \frac{L * \ln(L^2+1)}{2} + L^2 * \arctan(L) - \frac{\arctan(L)}{3} - \frac{11L^3}{18} + \frac{L}{3} \right] - \frac{L^2}{2EI} R_{AY} + \frac{L}{EI} M_A = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$R_{AY} = \frac{6(L^4-1)*\ln(L^2+1)+L(24(L^2+1)\arctan(L)-L(19L^2+18))}{12L^3} \quad \uparrow$$

$$M_A = \frac{6(L^4+6L^2-3)*\ln(L^2+1)+L(96\arctan(L)-13L(L^2+6))}{72L^2} \quad \curvearrowright$$

De la viga original:

$$\sum F_Y = 0$$

$$R_{AY} - A_c + R_{BY} = 0$$

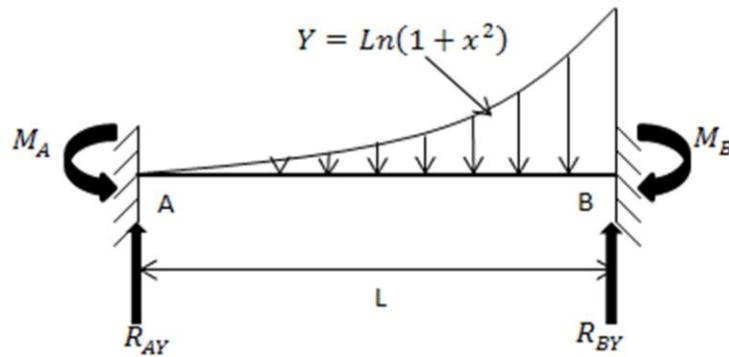
$$R_{BY} = \frac{6(L^4+1)*\ln(L^2+1)-L(24\arctan(L)+L(5L^2-18))}{12L^3} \quad \uparrow$$

$$\sum MA = 0$$

$$-M_A + A_C * \bar{x} - R_{BY} * L + M_B = 0$$

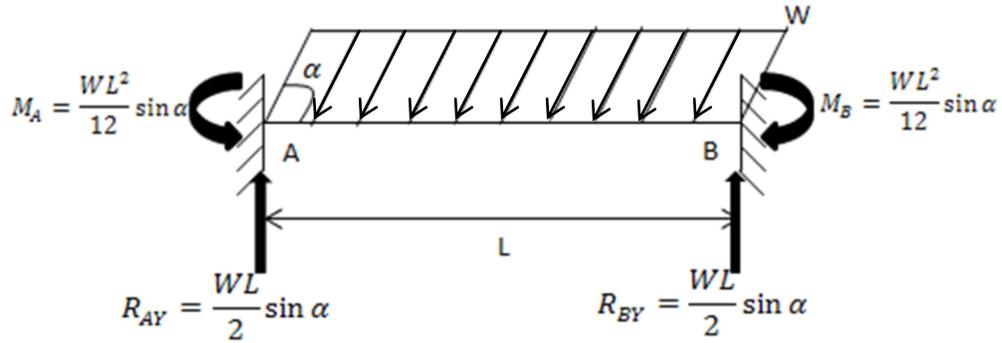
$$M_B = \frac{6(L^4+3)*Ln(L^2+1)-L(48arctan(L)+L(7L^2-30))}{72L^2} \quad \curvearrowright$$

Diagrama que muestra las direcciones de las reacciones de la viga 13:

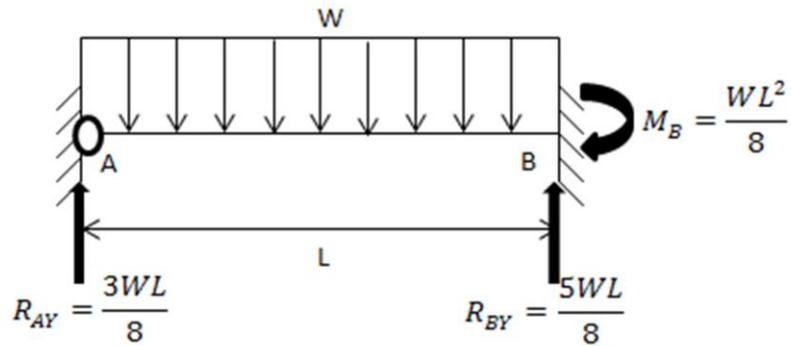


De manera similar se pueden deducir las ecuaciones para las siguientes vigas:

Viga 14:



Viga 15:



4.2. PROGRAMAS DE COMPUTADOR DEL MÉTODO DE LA RIGIDEZ MATRICIAL CODIFICADO PARA MATLAB

En este apartado se presenta la codificación en matlab para el método de la rigidez matricial en armaduras, marcos y vigas.

El programa de las armaduras sirve para calcular las reacciones, los desplazamientos en los nodos y las fuerzas en las barras.

En cambio, los programas de marcos y vigas sólo calculan las reacciones y los desplazamientos en los nodos, pero no los elementos mecánicos.

Cabe mencionar que todos los programas sólo funcionan para estructuras con conexiones rígidas, es decir no hay articulaciones ni conexión cortante, además ninguno de sus apoyos presenta asentamientos ni es modelado como un resorte.

El objetivo de ésta programación es simplificar el trabajo al lector al aplicar el método de la rigidez matricial, debido a que resulta tedioso calcular la matriz de rigidez global para cada elemento y más laborioso es aún ensamblar las matrices anteriores para obtener la matriz de rigidez global de la estructura.

Los programas que a continuación se muestran están basados en los algoritmos descritos en secciones anteriores, por lo que antes y durante su corrida deben seguirse los pasos que se indican en tales apartados.

4.2.1. CODIFICACIÓN EN MATLAB PARA EL MÉTODO DE LA RIGIDEZ MATRICIAL APLICADO A ARMADURAS

```
%PROGRAMA PARA OBTENER REACCIONES DESPLAZAMIENTOS Y FUERZAS INTERNAS%
%EN LAS BARRAS DE UNA ARMADURA POR EL METODO DE RIGIDECES%
clear;
clc;
k=zeros(4);
l=1;
disp('----- DATOS PARA EL ANALISIS -----
')
GL=input('DAME EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD GL = ');
KT=zeros(GL);
E=input('DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD = ');
n=input('DAME EL NUMERO DE BARRAS n = ');
d=input('DAME EL NUMERO DE DESPLAZAMIENTOS DESCONOCIDOS = ');
dceros=zeros(1,GL-d);
fu=input('DAME EL NUMERO DE FUERZAS CONOCIDAS = ');
fb=zeros(1,n);
f=zeros(1,fu);
disp('-----
')
for i=1:n
    fprintf('BARRA %i.\n\n',i)
    Lx=input('DAME EL VALOR DE Lx = ');
    Ly=input('DAME EL VALOR DE Ly = ');
    A=input('DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = ');
```

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

```

L=input('DAME LA LONGITUD DE LA BARRA = ');
disp('NODO N-----')
')
Nx=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nx= ');
Ny=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny= ');
disp('NODO F-----')
')
Fx=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fx= ');
Fy=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy= ');
disp('-----')
')
k(1,1)=(Lx^2)*(A*E)/L;
k(1,2)=(Lx*Ly)*(A*E)/L;
k(1,3)=-((Lx^2)*(A*E))/L;
k(1,4)=-((Lx*Ly)*(A*E))/L;
k(2,1)=(Lx*Ly)*(A*E)/L;
k(2,2)=(Ly^2)*(A*E)/L;
k(2,3)=-((Lx*Ly)*(A*E))/L;
k(2,4)=-((Ly^2)*(A*E))/L;
k(3,1)=-((Lx^2)*(A*E))/L;
k(3,2)=-((Lx*Ly)*(A*E))/L;
k(3,3)=(Lx^2)*(A*E)/L;
k(3,4)=(Lx*Ly)*(A*E)/L;
k(4,1)=-((Lx*Ly)*(A*E))/L;
k(4,2)=-((Ly^2)*(A*E))/L;
k(4,3)=(Lx*Ly)*(A*E)/L;
k(4,4)=(Ly^2)*(A*E)/L;
fprintf('MATRRIZ K%i.',i)
k
disp('-----')
')
K=zeros(GL);
K(Nx,Nx)=k(1,1);
K(Nx,Ny)=k(1,2);
K(Nx,Fx)=k(1,3);
K(Nx,Fy)=k(1,4);
K(Ny,Nx)=k(2,1);
K(Ny,Ny)=k(2,2);
K(Ny,Fx)=k(2,3);
K(Ny,Fy)=k(2,4);
K(Fx,Nx)=k(3,1);
K(Fx,Ny)=k(3,2);
K(Fx,Fx)=k(3,3);
K(Fx,Fy)=k(3,4);
K(Fy,Nx)=k(4,1);
K(Fy,Ny)=k(4,2);
K(Fy,Fx)=k(4,3);
K(Fy,Fy)=k(4,4);
KT=K+KT;
end
disp('----- MATRIZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA -----')
')
KT
disp('-----')
')
disp('----- SUBMATRIZ K11 -----')
')

```

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

```

k11=KT(1:d,1:d)
disp('----- SUBMATRIZ K12 -----
')
k12=KT(1:d,d+1:GL)
disp('----- SUBMATRIZ K21 -----
')
k21=KT(d+1:GL,1:d)
disp('----- SUBMATRIZ K22 -----
')
k22=KT(d+1:GL,d+1:GL)
disp('----- SOLUCIÓN DEL PROBLEMA -----
')
disp('-----
')
disp('----- VECTOR DE FUERZAS CONOCIDAS -----
')
for j=1:fu
    da=input('DAME LAS FUERZAS EXTERNAS APLICADAS EN LOS NODOS = ');
    f(1,j)=da(1);
end
vf=f'
disp('-----
')
disp('----- SOLUCION DEL SUBSISTEMA 1-----
----')
disp('----- DESPLAZAMIENTOS INCOGNITAS -----
')
des=inv(k11)*vf
disp('-----
')
disp('----- SOLUCION DEL SUBSISTEMA 2 -----
----')
disp('----- REACCIONES INCOGNITAS -----
')
R=k21*des
disp('-----
')
disp('----- FUERZAS INTERNAS -----
')
disp('----- EN LAS BARRAS -----
')
for m=1:n
    fprintf('BARRA %i.\n\n',m)
    lx=input('DAME EL VALOR DE Lx = ');
    ly=input('DAME EL VALOR DE Ly = ');
    A=input('DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = ');
    L=input('DAME LA LONGITUD DE LA BARRA = ');
    dp=input('DAME LOS DESPLAZAMIENTOS DE ESTA BARRA COMO VECTOR = ');
    da=((A*E)/L)*[-lx -ly lx ly]*dp;
    fb(1,m)=da(1);
    disp('-----
')
end
disp('----- FUERZAS INTERNAS EN LAS BARRAS -----
')
fba=fb'

```

```

disp('-----')
')
disp('----- TABLA DE RESULTADOS -----')
')
disp('----- LA SIGUIENTE TABLA MUESTRA -----')
')
disp('----- LAS FUERZAS Y DESPLAZAMIENTOS -----')
')
disp('----- APLICADOS A LOS NODOS DE LA ARMADURA -----')
')
fuerzas=[vf;R];
desplazamientos=[des;dceros'];
TABLA=[fuerzas,desplazamientos]
disp('-----')
')

```

4.2.2. CODIFICACIÓN EN MATLAB PARA EL MÉTODO DE LA RIGIDEZ MATRICIAL APLICADO A MARCOS

```

%PROGRAMA PARA CALCULAR LAS REACCIONES DE UN MARCO CON EL MÉTODO DE LA
%RIGIDEZ MATRICIAL
clear;
clc;
k=zeros(6);
disp('----- DATOS PARA EL ANALISIS -----')
')
GL=input('DAME EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD GL =');
KT=zeros(GL);
n=input('DAME EL NUMERO DE MIEMBROS DEL MARCO n =');
disp('-----')
')
for i=1:n
    fprintf('MIEMBRO %i.\n\n',i)
    Lx=input('DAME EL VALOR DE Lx = ');
    Ly=input('DAME EL VALOR DE Ly = ');
    E=input('DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD = ');
    A=input('DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = ');
    I=input('DAME LA INERCIA DE LA SECCIÓN = ');
    L=input('DAME LA LONGITUD DEL MIEMBRO = ');
    disp('NODO N-----')
    ')
        Nx=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nx=');
        Ny=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=');
        Nz=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nz=');
    disp('NODO F-----')
    ')
        Fx=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fx=');
        Fy=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=');
        Fz=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fz=');
    disp('-----')
    ')
        k(1,1)=((A*E)/L)*(Lx^2)+((12*E*I)/L^3)*(Ly^2);
        k(1,2)=(((A*E)/L)-((12*E*I)/L^3))*(Lx*Ly);

```

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

```

k(1,3) = ((-6*E*I)/L^2) * (Ly);
k(1,4) = -(((A*E)/L) * (Lx^2) + ((12*E*I)/L^3) * (Ly^2));
k(1,5) = -(((A*E)/L) - ((12*E*I)/L^3)) * (Lx*Ly);
k(1,6) = ((-6*E*I)/L^2) * (Ly);
k(2,1) = (((A*E)/L) - ((12*E*I)/L^3)) * (Lx*Ly);
k(2,2) = ((A*E)/L) * (Ly^2) + ((12*E*I)/L^3) * (Lx^2);
k(2,3) = ((6*E*I)/L^2) * (Lx);
k(2,4) = -(((A*E)/L) - ((12*E*I)/L^3)) * (Lx*Ly);
k(2,5) = -(((A*E)/L) * (Ly^2) + ((12*E*I)/L^3) * (Lx^2));
k(2,6) = ((6*E*I)/L^2) * (Lx);
k(3,1) = ((-6*E*I)/L^2) * (Ly);
k(3,2) = ((6*E*I)/L^2) * (Lx);
k(3,3) = (4*E*I)/L;
k(3,4) = ((6*E*I)/L^2) * (Ly);
k(3,5) = -((6*E*I)/(L^2)) * (Lx);
k(3,6) = (2*E*I)/L;
k(4,1) = -(((A*E)/L) * (Lx^2) + ((12*E*I)/L^3) * (Ly^2));
k(4,2) = -(((A*E)/L) - ((12*E*I)/L^3)) * (Lx*Ly);
k(4,3) = ((6*E*I)/L^2) * (Ly);
k(4,4) = ((A*E)/L) * (Lx^2) + ((12*E*I)/L^3) * (Ly^2);
k(4,5) = (((A*E)/L) - ((12*E*I)/L^3)) * (Lx*Ly);
k(4,6) = ((6*E*I)/L^2) * (Ly);
k(5,1) = -(((A*E)/L) - ((12*E*I)/L^3)) * (Lx*Ly);
k(5,2) = -(((A*E)/L) * (Ly^2) + ((12*E*I)/L^3) * (Lx^2));
k(5,3) = -((6*E*I)/(L^2)) * (Lx);
k(5,4) = (((A*E)/L) - ((12*E*I)/L^3)) * (Lx*Ly);
k(5,5) = ((A*E)/L) * (Ly^2) + ((12*E*I)/L^3) * (Lx^2);
k(5,6) = ((-6*E*I)/L^2) * (Lx);
k(6,1) = ((-6*E*I)/L^2) * (Ly);
k(6,2) = ((6*E*I)/L^2) * (Lx);
k(6,3) = (2*E*I)/L;
k(6,4) = ((6*E*I)/L^2) * (Ly);
k(6,5) = ((-6*E*I)/L^2) * (Lx);
k(6,6) = (4*E*I)/L;
fprintf('MATRRIZ K%i.', i)
k
disp('-----
')
K=zeros(GL);
K(Nx,Nx)=k(1,1);
K(Nx,Ny)=k(1,2);
K(Nx,Nz)=k(1,3);
K(Nx,Fx)=k(1,4);
K(Nx,Fy)=k(1,5);
K(Nx,Fz)=k(1,6);
K(Ny,Nx)=k(2,1);
K(Ny,Ny)=k(2,2);
K(Ny,Nz)=k(2,3);
K(Ny,Fx)=k(2,4);
K(Ny,Fy)=k(2,5);
K(Ny,Fz)=k(2,6);
K(Nz,Nx)=k(3,1);
K(Nz,Ny)=k(3,2);
K(Nz,Nz)=k(3,3);
K(Nz,Fx)=k(3,4);
K(Nz,Fy)=k(3,5);
K(Nz,Fz)=k(3,6);

```

```

K(Fx,Nx)=k(4,1);
K(Fx,Ny)=k(4,2);
K(Fx,Nz)=k(4,3);
K(Fx,Fx)=k(4,4);
K(Fx,Fy)=k(4,5);
K(Fx,Fz)=k(4,6);
K(Fy,Nx)=k(5,1);
K(Fy,Ny)=k(5,2);
K(Fy,Nz)=k(5,3);
K(Fy,Fx)=k(5,4);
K(Fy,Fy)=k(5,5);
K(Fy,Fz)=k(5,6);
K(Fz,Nx)=k(6,1);
K(Fz,Ny)=k(6,2);
K(Fz,Nz)=k(6,3);
K(Fz,Fx)=k(6,4);
K(Fz,Fy)=k(6,5);
K(Fz,Fz)=k(6,6);
KT=K+KT;
end
disp('----- MATRIZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA -----
')
KT
disp('-----
')
v=input('DAME EL VECTOR DE FUERZAS CONOCIDAS=')
V=length(v);
K=KT(1:V,1:V)
d1=(inv(K))*v
d2=zeros((length(KT))-(length(d1)),1)
' VECTOR TOTAL DE DESPLAZAMIENTOS '
D=[d1;d2]
' VECTOR TOTAL DE FUERZAS '
F=KT*D

```

4.2.3. CODIFICACIÓN EN MATLAB PARA EL MÉTODO DE LA RIGIDEZ MATRICIAL APLICADO A VIGAS CON CARGA AXIAL

```

%PROGRAMA PARA CALCULAR LAS REACCIONES DE UNA VIGA EN LA QUE SE PRESENTAN
%CARGAS AXIALES CON EL MÉTODO DE LA RIGIDEZ MATRICIAL
clear;
clc;
k=zeros(6);
disp('----- DATOS PARA EL ANALISIS -----
')
GL=input('DAME EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD GL =');
KT=zeros(GL);
n=input('DAME EL NUMERO DE ELEMENTOS n =');
disp('-----
')
for i=1:n

```

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

```

fprintf('ELEMENTO %i.\n\n',i)
E=input('DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD = ');
A=input('DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = ');
I=input('DAME LA INERCIA DE LA SECCIÓN = ');
L=input('DAME LA LONGITUD DEL ELEMENTO= ');
disp('NODO N-----')
')
Nx=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nx=');
Ny=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=');
Nz=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nz=');
disp('NODO F-----')
')
Fx=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fx=');
Fy=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=');
Fz=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fz=');
disp('-----')
')
k(1,1)=(A*E)/L;
k(1,2)=0;
k(1,3)=0;
k(1,4)=-(A*E)/L;
k(1,5)=0;
k(1,6)=0;
k(2,1)=0;
k(2,2)=(12*E*I)/(L^3);
k(2,3)=(6*E*I)/(L^2);
k(2,4)=0;
k(2,5)=-(12*E*I)/(L^3);
k(2,6)=(6*E*I)/(L^2);
k(3,1)=0;
k(3,2)=(6*E*I)/(L^2);
k(3,3)=(4*E*I)/L;
k(3,4)=0;
k(3,5)=-(6*E*I)/(L^2);
k(3,6)=(2*E*I)/L;
k(4,1)=-(A*E)/L;
k(4,2)=0;
k(4,3)=0;
k(4,4)=(A*E)/L;
k(4,5)=0;
k(4,6)=0;
k(5,1)=0;
k(5,2)=-(12*E*I)/(L^3);
k(5,3)=-(6*E*I)/(L^2);
k(5,4)=0;
k(5,5)=(12*E*I)/(L^3);
k(5,6)=-(6*E*I)/(L^2);
k(6,1)=0;
k(6,2)=(6*E*I)/(L^2);
k(6,3)=(2*E*I)/L;
k(6,4)=0;
k(6,5)=-(6*E*I)/(L^2);
k(6,6)=(4*E*I)/L;
fprintf('MATRRIZ K%i.',i)
k
disp('-----')
')

```

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

```
K=zeros (GL) ;
K (Nx,Nx)=k (1,1) ;
K (Nx,Ny)=k (1,2) ;
K (Nx,Nz)=k (1,3) ;
K (Nx,Fx)=k (1,4) ;
K (Nx,Fy)=k (1,5) ;
K (Nx,Fz)=k (1,6) ;
K (Ny,Nx)=k (2,1) ;
K (Ny,Ny)=k (2,2) ;
K (Ny,Nz)=k (2,3) ;
K (Ny,Fx)=k (2,4) ;
K (Ny,Fy)=k (2,5) ;
K (Ny,Fz)=k (2,6) ;
K (Nz,Nx)=k (3,1) ;
K (Nz,Ny)=k (3,2) ;
K (Nz,Nz)=k (3,3) ;
K (Nz,Fx)=k (3,4) ;
K (Nz,Fy)=k (3,5) ;
K (Nz,Fz)=k (3,6) ;
K (Fx,Nx)=k (4,1) ;
K (Fx,Ny)=k (4,2) ;
K (Fx,Nz)=k (4,3) ;
K (Fx,Fx)=k (4,4) ;
K (Fx,Fy)=k (4,5) ;
K (Fx,Fz)=k (4,6) ;
K (Fy,Nx)=k (5,1) ;
K (Fy,Ny)=k (5,2) ;
K (Fy,Nz)=k (5,3) ;
K (Fy,Fx)=k (5,4) ;
K (Fy,Fy)=k (5,5) ;
K (Fy,Fz)=k (5,6) ;
K (Fz,Nx)=k (6,1) ;
K (Fz,Ny)=k (6,2) ;
K (Fz,Nz)=k (6,3) ;
K (Fz,Fx)=k (6,4) ;
K (Fz,Fy)=k (6,5) ;
K (Fz,Fz)=k (6,6) ;
KT=K+KT;
end
disp('----- MATRIZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA -----
')
KT
disp('-----
')
v=input('DAME EL VECTOR DE FUERZAS CONOCIDAS=')
V=length(v) ;
K=KT(1:V,1:V)
d1=(inv(K)) *v
d2=zeros((length(KT))-(length(d1)),1)
' VECTOR TOTAL DE DESPLAZAMIENTOS '
D=[d1;d2]
' VECTOR TOTAL DE FUERZAS '
F=KT*D
```

4.2.4. CODIFICACIÓN EN MATLAB PARA EL MÉTODO DE LA RIGIDEZ MATRICIAL APLICADO A VIGAS SIN CARGA AXIAL

```

%PROGRAMA PARA CALCULAR LAS REACCIONES DE UNA VIGA EN LA QUE NO SE
%PRESENTAN CARGAS AXIALES CON EL MÉTODO DE LA RIGIDEZ MATRICIAL
clear;
clc;
k=zeros(4);
disp('----- DATOS PARA EL ANALISIS -----
')
GL=input('DAME EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD GL =');
KT=zeros(GL);
n=input('DAME EL NUMERO DE ELEMENTOS n =');
disp('-----
')
for i=1:n
    fprintf('ELEMENTO %i.\n\n',i)
    E=input('DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD = ');
    I=input('DAME LA INERCIA DE LA SECCIÓN = ');
    L=input('DAME LA LONGITUD DEL ELEMENTO = ');
disp('NODO N-----
')
    Ny=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=');
    Nz=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nz=');
disp('NODO F-----
')
    Fy=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=');
    Fz=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fz=');
disp('-----
')

    k(1,1)=(12*E*I)/(L^3);
    k(1,2)=(6*E*I)/(L^2);
    k(1,3)=-(12*E*I)/(L^3);
    k(1,4)=(6*E*I)/(L^2);
    k(2,1)=(6*E*I)/(L^2);
    k(2,2)=(4*E*I)/L;
    k(2,3)=-(6*E*I)/(L^2);
    k(2,4)=(2*E*I)/L;
    k(3,1)=-(12*E*I)/(L^3);
    k(3,2)=-(6*E*I)/(L^2);
    k(3,3)=(12*E*I)/(L^3);
    k(3,4)=-(6*E*I)/(L^2);
    k(4,1)=(6*E*I)/(L^2);
    k(4,2)=(2*E*I)/L;
    k(4,3)=-(6*E*I)/(L^2);
    k(4,4)=(4*E*I)/L;
fprintf('MATRRIZ K%i.',i)
    k
disp('-----
')
K=zeros(GL);

```

```

K(Ny,Ny)=k(1,1);
K(Ny,Nz)=k(1,2);
K(Ny,Fy)=k(1,3);
K(Ny,Fz)=k(1,4);
K(Nz,Ny)=k(2,1);
K(Nz,Nz)=k(2,2);
K(Nz,Fy)=k(2,3);
K(Nz,Fz)=k(2,4);
K(Fy,Ny)=k(3,1);
K(Fy,Nz)=k(3,2);
K(Fy,Fy)=k(3,3);
K(Fy,Fz)=k(3,4);
K(Fz,Ny)=k(4,1);
K(Fz,Nz)=k(4,2);
K(Fz,Fy)=k(4,3);
K(Fz,Fz)=k(4,4);
KT=K+KT;
end
disp('----- MATRIZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA -----
')
KT
disp('-----
')
v=input('DAME EL VECTOR DE FUERZAS CONOCIDAS=');
V=length(v);
K=KT(1:V,1:V);
d1=(inv(K))*v;
d2=zeros((length(KT))-(length(d1)),1);
' VECTOR TOTAL DE DESPLAZAMIENTOS'
D=[d1;d2];
' VECTOR TOTAL DE FUERZAS'
F=KT*D

```

4.2.5. CODIFICACIÓN EN MATLAB PARA EL MÉTODO DE LA RIGIDEZ MATRICIAL APLICADO A MARCOS CON APOYOS INCLINADOS

```

%PROGRAMA PARA CALCULAR LAS REACCIONES DE UN MARCO CON APOYOS INCLINADOS
CON EL MÉTODO DE LA %RIGIDEZ MATRICIAL
clear;
clc;
k=zeros(6);
disp('----- DATOS PARA EL ANALISIS -----
')
GL=input('DAME EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD GL =');
KT=zeros(GL);
n=input('DAME EL NUMERO DE MIEMBROS DEL MARCO n =');
disp('-----
')
for i=1:n
    fprintf('MIEMBRO %i.\n\n',i)
    Lx1=input('DAME EL VALOR DE Lx1 = ');
    Ly1=input('DAME EL VALOR DE Ly1 = ');
    Lx2=input('DAME EL VALOR DE Lx2 = ');
    Ly2=input('DAME EL VALOR DE Ly2 = ');

```

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

```

E=input('DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD = ');
A=input('DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = ');
I=input('DAME LA INERCIA DE LA SECCIÓN = ');
L=input('DAME LA LONGITUD DEL MIEMBRO = ');
disp('NODO N-----')
')
Nx=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nx=');
Ny=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=');
Nz=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nz=');
disp('NODO F-----')
')
Fx=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fx=');
Fy=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=');
Fz=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fz=');
disp('-----')
')
k(1,1)=(A*E)/L*(Lx1^2)+(12*E*I)/L^3*(Ly1^2);
k(1,2)=((A*E)/L)-((12*E*I)/L^3)*(Lx1*Ly1);
k(1,3)=(-6*E*I)/L^2*(Ly1);
k(1,4)=-((A*E)/L)*(Lx1*Lx2)+(12*E*I)/L^3*(Ly1*Ly2);
k(1,5)=((-A*E)/L)*(Lx1*Ly2)+(12*E*I)/L^3*(Lx2*Ly1);
k(1,6)=(-6*E*I)/L^2*(Ly1);
k(2,1)=((A*E)/L)-((12*E*I)/L^3)*(Lx1*Ly1);
k(2,2)=(A*E)/L*(Ly1^2)+(12*E*I)/L^3*(Lx1^2);
k(2,3)=(6*E*I)/L^2*(Lx1);
k(2,4)=((-A*E)/L)*(Lx2*Ly1)+(12*E*I)/L^3*(Lx1*Ly2);
k(2,5)=-((A*E)/L)*(Ly1*Ly2)+(12*E*I)/L^3*(Lx1*Lx2);
k(2,6)=(6*E*I)/L^2*(Lx1);
k(3,1)=(-6*E*I)/L^2*(Ly1);
k(3,2)=(6*E*I)/L^2*(Lx1);
k(3,3)=4*E*I/L;
k(3,4)=(6*E*I)/L^2*(Ly2);
k(3,5)=-((6*E*I)/(L^2))*(Lx2);
k(3,6)=2*E*I/L;
k(4,1)=-((A*E)/L)*(Lx1*Lx2)+(12*E*I)/L^3*(Ly1*Ly2);
k(4,2)=((-A*E)/L)*(Lx2*Ly1)+(12*E*I)/L^3*(Lx1*Ly2);
k(4,3)=(6*E*I)/L^2*(Ly2);
k(4,4)=(A*E)/L*(Lx2^2)+(12*E*I)/L^3*(Ly2^2);
k(4,5)=((A*E)/L)-((12*E*I)/L^3)*(Lx2*Ly2);
k(4,6)=(6*E*I)/L^2*(Ly2);
k(5,1)=((-A*E)/L)*(Lx1*Ly2)+(12*E*I)/L^3*(Lx2*Ly1);
k(5,2)=-((A*E)/L)*(Ly1*Ly2)+(12*E*I)/L^3*(Lx1*Lx2);
k(5,3)=-((6*E*I)/(L^2))*(Lx2);
k(5,4)=((A*E)/L)-((12*E*I)/L^3)*(Lx2*Ly2);
k(5,5)=(A*E)/L*(Ly2^2)+(12*E*I)/L^3*(Lx2^2);
k(5,6)=(-6*E*I)/L^2*(Lx2);
k(6,1)=(-6*E*I)/L^2*(Ly1);
k(6,2)=(6*E*I)/L^2*(Lx1);
k(6,3)=2*E*I/L;
k(6,4)=(6*E*I)/L^2*(Ly2);
k(6,5)=(-6*E*I)/L^2*(Lx2);
k(6,6)=4*E*I/L;
fprintf('MATRRIZ K%i.',i)
k
disp('-----')
')
K=zeros(GL);

```

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

```
K(Nx,Nx)=k(1,1);
K(Nx,Ny)=k(1,2);
K(Nx,Nz)=k(1,3);
K(Nx,Fx)=k(1,4);
K(Nx,Fy)=k(1,5);
K(Nx,Fz)=k(1,6);
K(Ny,Nx)=k(2,1);
K(Ny,Ny)=k(2,2);
K(Ny,Nz)=k(2,3);
K(Ny,Fx)=k(2,4);
K(Ny,Fy)=k(2,5);
K(Ny,Fz)=k(2,6);
K(Nz,Nx)=k(3,1);
K(Nz,Ny)=k(3,2);
K(Nz,Nz)=k(3,3);
K(Nz,Fx)=k(3,4);
K(Nz,Fy)=k(3,5);
K(Nz,Fz)=k(3,6);
K(Fx,Nx)=k(4,1);
K(Fx,Ny)=k(4,2);
K(Fx,Nz)=k(4,3);
K(Fx,Fx)=k(4,4);
K(Fx,Fy)=k(4,5);
K(Fx,Fz)=k(4,6);
K(Fy,Nx)=k(5,1);
K(Fy,Ny)=k(5,2);
K(Fy,Nz)=k(5,3);
K(Fy,Fx)=k(5,4);
K(Fy,Fy)=k(5,5);
K(Fy,Fz)=k(5,6);
K(Fz,Nx)=k(6,1);
K(Fz,Ny)=k(6,2);
K(Fz,Nz)=k(6,3);
K(Fz,Fx)=k(6,4);
K(Fz,Fy)=k(6,5);
K(Fz,Fz)=k(6,6);
KT=K+KT;
end
disp('----- MATRIZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA -----
')
KT
disp('-----
')
v=input('DAME EL VECTOR DE FUERZAS CONOCIDAS=')
V=length(v);
K=KT(1:V,1:V)
d1=(inv(K))*v
d2=zeros((length(KT))-(length(d1)),1)
' VECTOR TOTAL DE DESPLAZAMIENTOS '
D=[d1;d2]
' VECTOR TOTAL DE FUERZAS '
F=KT*D
```

4.2.6. CODIFICACIÓN EN MATLAB PARA EL MÉTODO DE LA RIGIDEZ MATRICIAL APLICADO A ARMADURAS CON SOPORTES INCLINADOS

```

%PROGRAMA PARA OBTENER REACCIONES Y DESPLAZAMIENTOS%
%DE UNA ARMADURA CON APOYOS INCLINADOS POR EL METODO DE%
%LA RIGIDEZ MATRICIAL%
clear;
clc;
k=zeros(4);
l=1;
disp('----- DATOS PARA EL ANALISIS -----
')
GL=input('DAME EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD GL = ');
KT=zeros(GL);
E=input('DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD = ');
n=input('DAME EL NUMERO DE BARRAS n = ');
d=input('DAME EL NUMERO DE DESPLAZAMIENTOS DESCONOCIDOS = ');
dceros=zeros(1,GL-d);
fu=input('DAME EL NUMERO DE FUERZAS CONOCIDAS = ');
fb=zeros(1,n);
f=zeros(1,fu);
disp('-----
')
for i=1:n
    fprintf('BARRA %i.\n\n',i)
    Lx1=input('DAME EL VALOR DE Lx1 = ');
    Ly1=input('DAME EL VALOR DE Ly1 = ');
    Lx2=input('DAME EL VALOR DE Lx2 = ');
    Ly2=input('DAME EL VALOR DE Ly2 = ');
    A=input('DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = ');
    L=input('DAME LA LONGITUD DE LA BARRA = ');
disp('NODO N-----
')
    Nx=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nx= ');
    Ny=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny= ');
disp('NODO F-----
')
    Fx=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fx= ');
    Fy=input('DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy= ');
disp('-----
')
    k(1,1)=((Lx1^2)*(A*E))/L;
    k(1,2)=((Lx1*Ly1)*(A*E))/L;
    k(1,3)=-((Lx1*Lx2)*(A*E))/L;
    k(1,4)=-((Lx1*Ly2)*(A*E))/L;
    k(2,1)=((Lx1*Ly1)*(A*E))/L;
    k(2,2)=((Ly1^2)*(A*E))/L;
    k(2,3)=-((Lx2*Ly1)*(A*E))/L;
    k(2,4)=-((Ly1*Ly2)*(A*E))/L;
    k(3,1)=-((Lx1*Lx2)*(A*E))/L;
    k(3,2)=-((Lx2*Ly1)*(A*E))/L;
    k(3,3)=((Lx2^2)*(A*E))/L;
    k(3,4)=((Lx2*Ly2)*(A*E))/L;

```

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

```

    k(4,1)=-((Lx1*Ly2)*(A*E))/L;
    k(4,2)=-((Ly1*Ly2)*(A*E))/L;
    k(4,3)=(Lx2*Ly2)*(A*E)/L;
    k(4,4)=(Ly2^2)*(A*E))/L;
fprintf('MATRRIZ K%i.',i)
    k
disp('-----
')
K=zeros(GL);
K(Nx,Nx)=k(1,1);
K(Nx,Ny)=k(1,2);
K(Nx,Fx)=k(1,3);
K(Nx,Fy)=k(1,4);
K(Ny,Nx)=k(2,1);
K(Ny,Ny)=k(2,2);
K(Ny,Fx)=k(2,3);
K(Ny,Fy)=k(2,4);
K(Fx,Nx)=k(3,1);
K(Fx,Ny)=k(3,2);
K(Fx,Fx)=k(3,3);
K(Fx,Fy)=k(3,4);
K(Fy,Nx)=k(4,1);
K(Fy,Ny)=k(4,2);
K(Fy,Fx)=k(4,3);
K(Fy,Fy)=k(4,4);
KT=K+KT;
end
disp('----- MATRIZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA -----
')
KT
disp('-----
')
disp('----- SUBMATRIZ K11 -----')
k11=KT(1:d,1:d)
disp('----- SUBMATRIZ K12 -----')
k12=KT(1:d,d+1:GL)
disp('----- SUBMATRIZ K21 -----')
k21=KT(d+1:GL,1:d)
disp('----- SUBMATRIZ K22 -----')
k22=KT(d+1:GL,d+1:GL)
disp('----- SOLUCIÓN DEL PROBLEMA -----
')
disp('-----
')
disp('----- VECTOR DE FUERZAS CONOCIDAS -----
')
for j=1:fu
    da=input('DAME LAS FUERZAS EXTERNAS APLICADAS EN LOS NODOS = ');
    f(l,j)=da(l);
end
vf=f'
disp('-----
')
disp('----- SOLUCION DEL SUBSISTEMA 1-----
')
disp('----- DESPLAZAMIENTOS INCONGNITAS -----
')

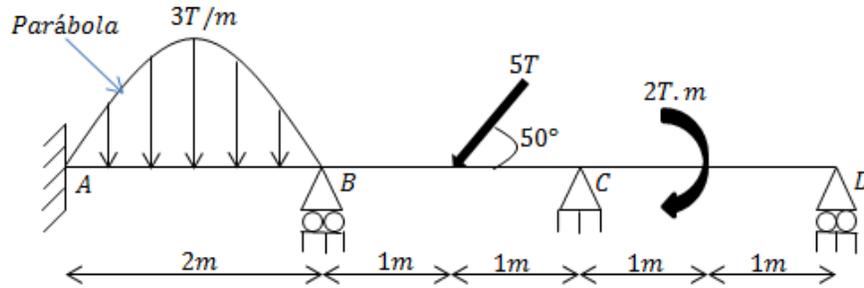
```

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

```
des=inv(k11)*vf
disp('-----')
disp('----- SOLUCION DEL SUBSISTEMA 2-----')
disp('----- REACCIONES INCOGNITAS -----')
R=k21*des
```

4.3. ANÁLISIS DE VIGAS CON EL USO DEL MÉTODO DE LA RIGIDEZ

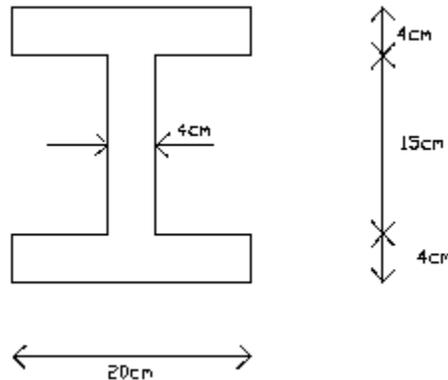
1.- La viga de tres claros que se muestra en la figura si está sometida a carga axial. Use el análisis matricial de la rigidez para calcular las reacciones en los apoyos; determine las ecuaciones de momento, cortante, normal, giro y flecha y detalle los resultados.



Considere:

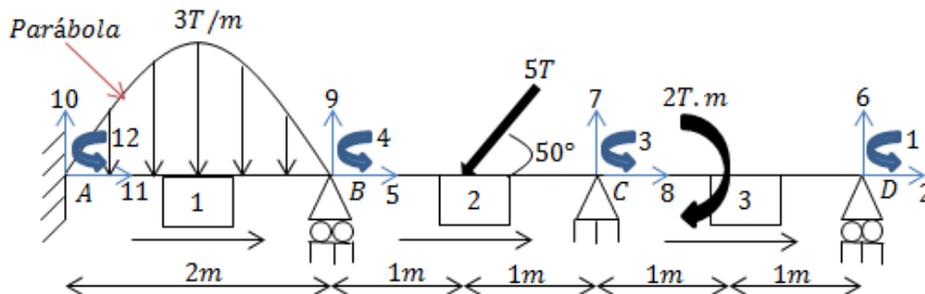
-Módulo de Elasticidad: el del Acero

-Sección transversal tipo I con las siguientes dimensiones:

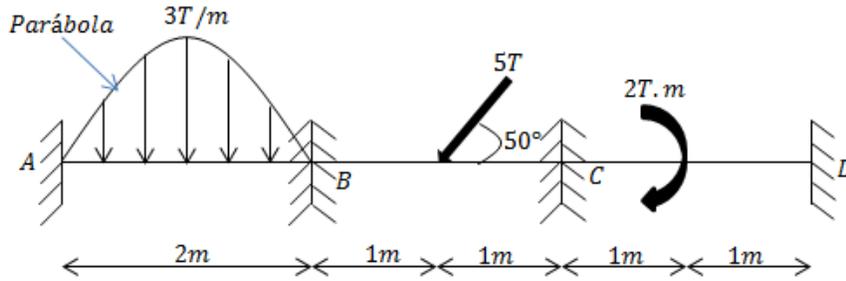


SOLUCIÓN:

Codificación:

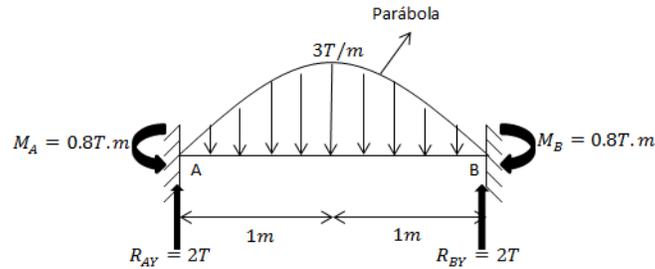


Empotrando doblemente:



Las reacciones de las vigas doblemente empotradas son:

Elemento 1:

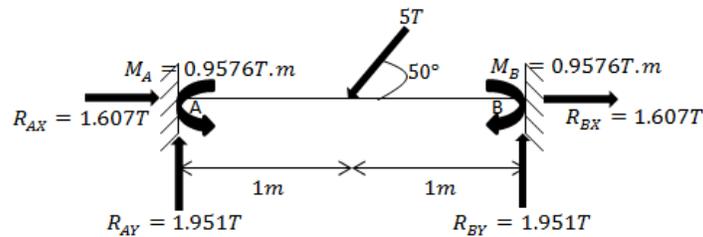


$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{WL}{3} = \frac{(3)(2)}{3} = 2 T \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{WL^2}{15} = \frac{(3)(2^2)}{15} = 0.8 T.m \curvearrowright$$

Respectivamente

Elemento 2:



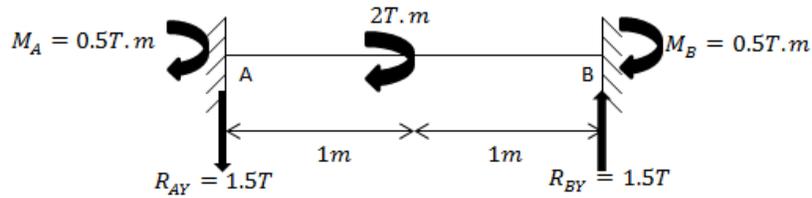
$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{P \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{(5)(\sin(50^\circ))}{2} = 1.9151 T \uparrow$$

$$R_{AX} = R_{BX} = \frac{P \cdot \cos \alpha}{2} = \frac{(5)(\cos(50^\circ))}{2} = 1.6070 T \rightarrow$$

$$M_A = M_B = \frac{P \cdot L \cdot \sin \alpha}{8} = \frac{(5)(2)(\sin(50^\circ))}{8} = 0.9576 T \cdot m \curvearrowright$$

Respectivamente

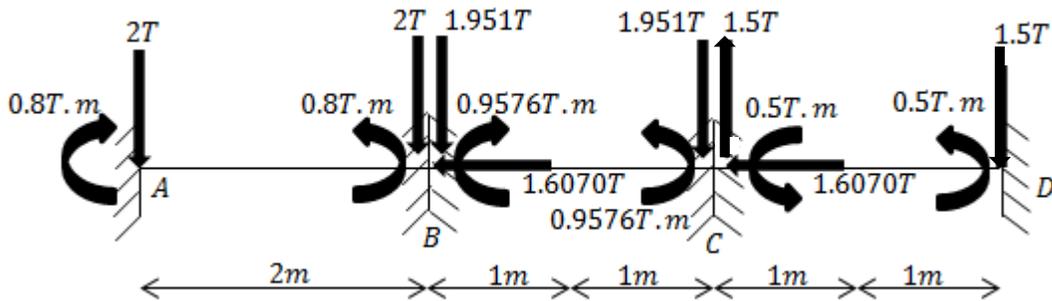
Elemento 3:



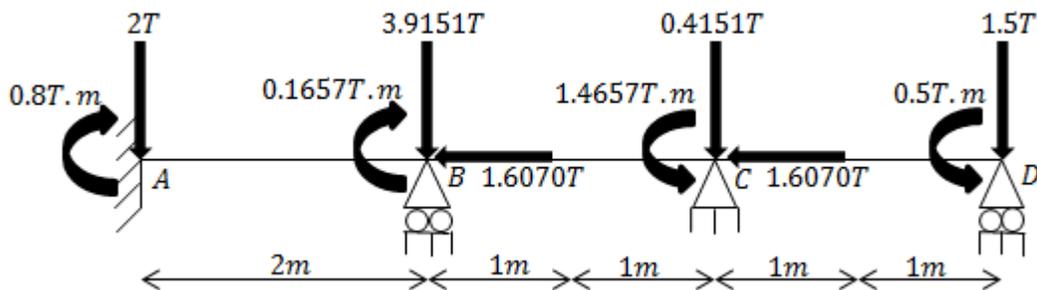
$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{3M}{2L} = \frac{(3)(2)}{(2)(2)} = 1.5 T \downarrow \uparrow \text{ Respectivamente}$$

$$M_A = M_B = \frac{M}{4} = \frac{2}{4} = 0.5 T \cdot m \curvearrowright$$

Las acciones (las de sentido opuesto a las reacciones) son:



Las acciones totales aplicadas en cada nodo son:



CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

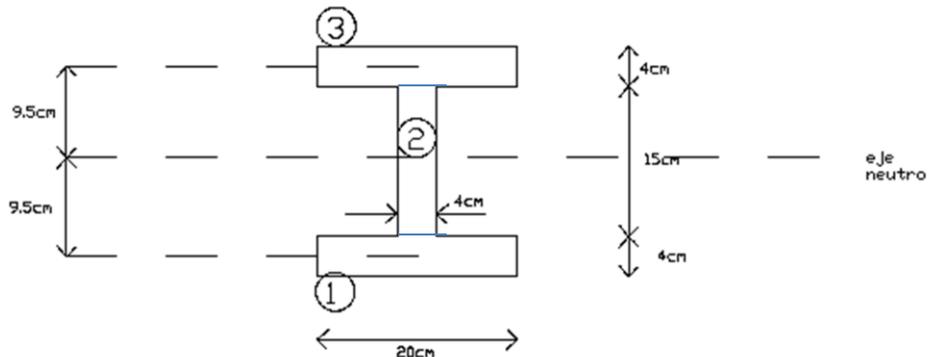
Vector de Fuerzas:

$$F = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1.4657 & 3 \\ -0.1657 & 4 \\ -1.6070 & 5 \\ \hline R_{DY} - 1.5 & 6 \\ R_{CY} - 0.4151 & 7 \\ R_{CX} - 1.6070 & 8 \\ R_{BY} - 3.9151 & 9 \\ R_{AY} - 2 & 10 \\ R_{AX} & 11 \\ M_A - 0.8 & 12 \end{pmatrix}$$

-Vector de Desplazamientos:

$$D = \begin{pmatrix} \theta_1 & 1 \\ D_2 & 2 \\ \theta_3 & 3 \\ \theta_4 & 4 \\ D_5 & 5 \\ \hline 0 & 6 \\ 0 & 7 \\ 0 & 8 \\ 0 & 9 \\ 0 & 10 \\ 0 & 11 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

-Para la sección transversal:



CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

Usamos el Teorema de los ejes paralelos para para calcular el momento de Inercia (I) con respecto al eje neutro:

Bloque	$I_o (cm^4)$	$A (cm^2)$	d (cm)	$A * d^2 (cm^4)$
1	$\left(\frac{1}{12}\right)(20)(4^3)$ = 106.6667	$(20)(4) = 80$	9.5	7220
2	$\left(\frac{1}{12}\right)(4)(15^3)$ = 1125	$(4)(15) = 60$	0	0
3	$\left(\frac{1}{12}\right)(20)(4^3)$ = 106.6667	$(20)(4) = 80$	9.5	7220
$\sum t$	1338.3334	220		14440

$$I = \sum I_o + \sum A * d^2 = 1338.3334 + 14440 = 15778.3334 \text{ cm}^4$$

Entonces:

$$A = 220 \text{ cm}^2 = 0.022 \text{ m}^2$$

$$I = 0.000157783 \text{ m}^4$$

$$E = 2.1 * 10^7 \text{ T/m}^2$$

-Matriz de rigidez global por elemento

Elemento 1:

$$k_1 = 10^5 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 11 & 10 & 12 & 5 & 9 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2.31 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0497 & 0.0497 & 0 & -0.0497 & 0.0497 \\ 0 & 0.0497 & 0.0663 & 0 & -0.0497 & 0.0331 \\ -2.31 & 0 & 0 & 2.31 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0497 & -0.0497 & 0 & 0.0497 & -0.0497 \\ 0 & 0.0497 & 0.0331 & 0 & -0.0497 & 0.0663 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 11 \\ 10 \\ 12 \\ 5 \\ 9 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

Elemento 2:

$$k_2 = 10^5 * \begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 & 8 & 7 & 3 \\ 2.31 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0497 & 0.0497 & 0 & -0.0497 & 0.0497 \\ 0 & 0.0497 & 0.0663 & 0 & -0.0497 & 0.0331 \\ -2.31 & 0 & 0 & 2.31 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0497 & -0.0497 & 0 & 0.0497 & -0.0497 \\ 0 & 0.0497 & 0.0331 & 0 & -0.0497 & 0.0663 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 9 \\ 4 \\ 8 \\ 7 \\ 3 \end{matrix}$$

Elemento 3:

$$k_3 = 10^5 * \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 & 2 & 6 & 1 \\ 2.31 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0497 & 0.0497 & 0 & -0.0497 & 0.0497 \\ 0 & 0.0497 & 0.0663 & 0 & -0.0497 & 0.0331 \\ -2.31 & 0 & 0 & 2.31 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0497 & -0.0497 & 0 & 0.0497 & -0.0497 \\ 0 & 0.0497 & 0.0331 & 0 & -0.0497 & 0.0663 \end{pmatrix} \begin{matrix} 8 \\ 7 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{matrix}$$

MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA

$$K_T = 10^5 * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0.0663 & 0 & 0.0331 & 0 & 0 & -0.0497 & 0.0497 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0331 & 0 & 0.1325 & 0.0331 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0331 & 0.1325 & 0 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0.0331 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.62 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 & -2.31 & 0 \\ -0.0497 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 & 0.0497 & -0.0497 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0497 & 0 & 0 & -0.0497 & 0 & -0.0497 & 0.0497 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.31 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 & 4.62 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0 & 0 & -0.0497 & 0 & 0.0994 & -0.0497 & 0 & -0.0497 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0497 & 0.0497 & 0 & 0.0497 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0331 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0497 & 0.0497 & 0 & 0.0663 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez se subdividió de la siguiente forma:

$$K_T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

De $F = K_T * D$ extraemos los siguientes subsistemas:

Subsistema 1:

$$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1.4657 \\ -0.1657 \\ -1.6070 \end{pmatrix} = (K_{11}) \begin{pmatrix} \theta_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ D_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1.4657 \\ -0.1657 \\ -1.6070 \end{pmatrix} = 10^5 * \begin{pmatrix} 0.0663 & 0 & 0.0331 & 0 & 0 \\ 0 & 2.31 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0331 & 0 & 0.1325 & 0.0331 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0331 & 0.1325 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ D_5 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ D_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000171 \text{ rad} \\ 0 \\ 0.0001167 \text{ rad} \\ -0.0000417 \text{ rad} \\ -0.0000035 \text{ m} \end{pmatrix}$$

Subsistema 2:

$$\begin{pmatrix} R_{DY} - 1.5 \\ R_{CY} - 0.4151 \\ R_{CX} - 1.6070 \\ R_{BY} - 3.9151 \\ R_{AY} - 2 \\ R_{AX} \\ M_A - 0.8 \end{pmatrix} = (K_{21}) \begin{pmatrix} 0.0000171 \\ 0 \\ 0.0001167 \\ -0.0000417 \\ -0.0000035 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{DY} - 1.5 \\ R_{CY} - 0.4151 \\ R_{CX} - 1.6070 \\ R_{BY} - 3.9151 \\ R_{AY} - 2 \\ R_{AX} \\ M_A - 0.8 \end{pmatrix} = 10^5 * \begin{pmatrix} -0.0497 & 0 & -0.0497 & 0 & 0 \\ 0.0497 & 0 & 0 & -0.0497 & 0 \\ 0 & -2.31 & 0 & 0 & -2.31 \\ 0 & 0 & 0.0497 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0497 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.31 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0331 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0000171 \\ 0 \\ 0.0001167 \\ -0.0000417 \\ -0.0000035 \end{pmatrix}$$

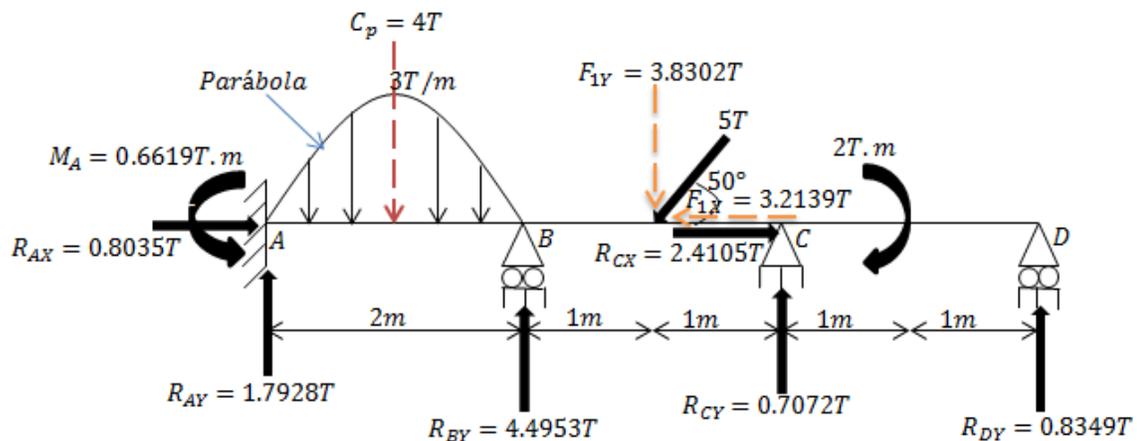
Resolviendo:

$$\begin{pmatrix} R_{DY} - 1.5 \\ R_{CY} - 0.4151 \\ R_{CX} - 1.6070 \\ R_{BY} - 3.9151 \\ R_{AY} - 2 \\ R_{AX} \\ M_A - 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6651 \\ 0.2921 \\ 0.8035 \\ 0.5802 \\ -0.2072 \\ 0.8035 \\ -0.1381 \end{pmatrix}$$

Calculo de las reacciones:

$$\begin{aligned} R_{DY} - 1.5 &= -0.6651 \rightarrow R_{DY} = -0.6651 + 1.5 = 0.8349T \quad \uparrow \\ R_{CY} - 0.4151 &= 0.2921 \rightarrow R_{CY} = 0.2921 + 0.4151 = 0.7072T \quad \uparrow \\ R_{CX} - 1.6070 &= 0.8035 \rightarrow R_{CX} = 0.8035 + 1.6070 = 2.4105T \quad \rightarrow \\ R_{BY} - 3.9151 &= 0.5802 \rightarrow R_{BY} = 0.5802 + 3.9151 = 4.4953T \quad \uparrow \\ R_{AY} - 2 &= -0.2072 \rightarrow R_{AY} = -0.2072 + 2 = 1.7928T \quad \uparrow \\ R_{AX} &= 0.8035 \quad \therefore R_{AX} = 0.8035T \quad \rightarrow \\ M_A - 0.8 &= -0.1381 \rightarrow M_A = -0.1381 + 0.8 = 0.6619 T.m \quad \curvearrowright \end{aligned}$$

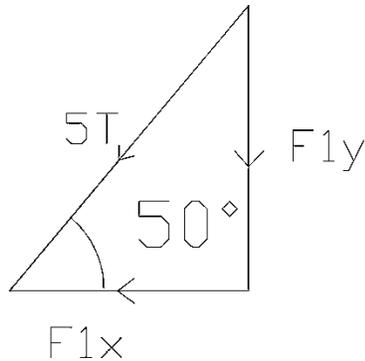
Diagrama de la viga real que muestra las reacciones



Carga concentrada equivalente y punto de aplicación de la carga parabólica

$$C_P = \left(\frac{2}{3}\right)(3T/m)(2m) = 4T \downarrow \text{ a } 1m \text{ a la derecha de } A$$

Componentes rectangulares de $F_1=5T$



$$F_{1Y} = 5 * \sin 50^\circ = 3.8302T$$

$$F_{1X} = 5 * \cos 50^\circ = 3.2139T$$

Demostramos que la estructura está en equilibrio mediante las fuerzas externas:

$$\sum F_Y = 0$$

$$1.7928 - 4 + 4.4953 - 3.8302 + 0.7072 + 0.8349 = 0 \quad OK$$

$$\sum F_X = 0$$

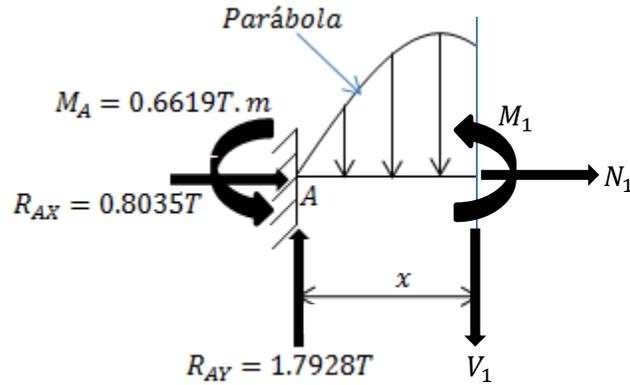
$$0.8035 - 3.2139 + 2.4105 \cong 0 \quad OK$$

$$\sum MA = 0$$

$$-0.6619 + 4(1) - 4.4953(2) + 3.8302(3) - 0.7072(4) + 2 - 0.8349(6) \cong 0 \quad OK$$

Ecuaciones de momento, cortante y normal de la estructura original

$$0 \leq x \leq 2m$$



Para la carga parabólica del corte:

-Carga concentrada equivalente:

$$A_c = -\frac{4W}{3L^2}x^3 + \frac{2W}{L}x^2 = -\frac{4 * 3}{3 * 2^2}x^3 + \frac{2 * 3}{2}x^2 = -x^3 + 3x^2$$

-Punto de aplicación:

$$\bar{x} = \frac{-\frac{W}{L^2}x^4 + \frac{4W}{3L}x^3}{A_c} = \frac{-\frac{3}{2^2}x^4 + \frac{4 * 3}{3 * 2}x^3}{-x^3 + 3x^2} = \frac{-\frac{3}{4}x^4 + 2x^3}{-x^3 + 3x^2} \text{ a la derecha de A}$$

$$\sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$M_1 = -0.6619 + 1.7928x - (-x^3 + 3x^2) \left(x - \frac{-\frac{3}{4}x^4 + 2x^3}{-x^3 + 3x^2} \right)$$

$$M_1 = \frac{x^4}{4} - x^3 + 1.7928x - 0.6619$$

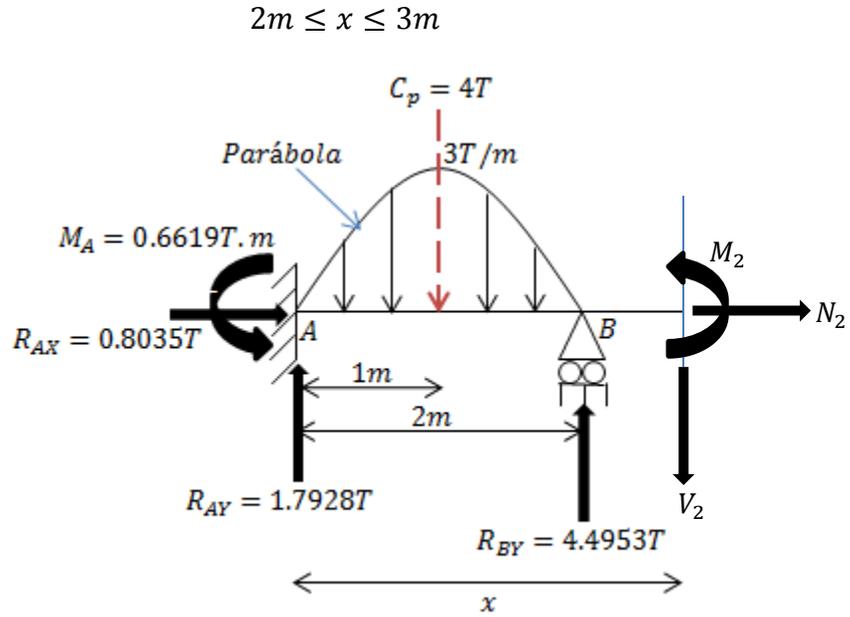
$$x = 2, M_1 = -1.0763$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx} = x^3 - 3x^2 + 1.7928$$

$$\sum FX = 0$$

$$N_1 = -0.8035$$

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ



$$\sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$M_2 = -0.6619 + 1.7928x - 4(x - 1) + 4.4953(x - 2)$$

$$M_2 = 2.2881x - 5.6525$$

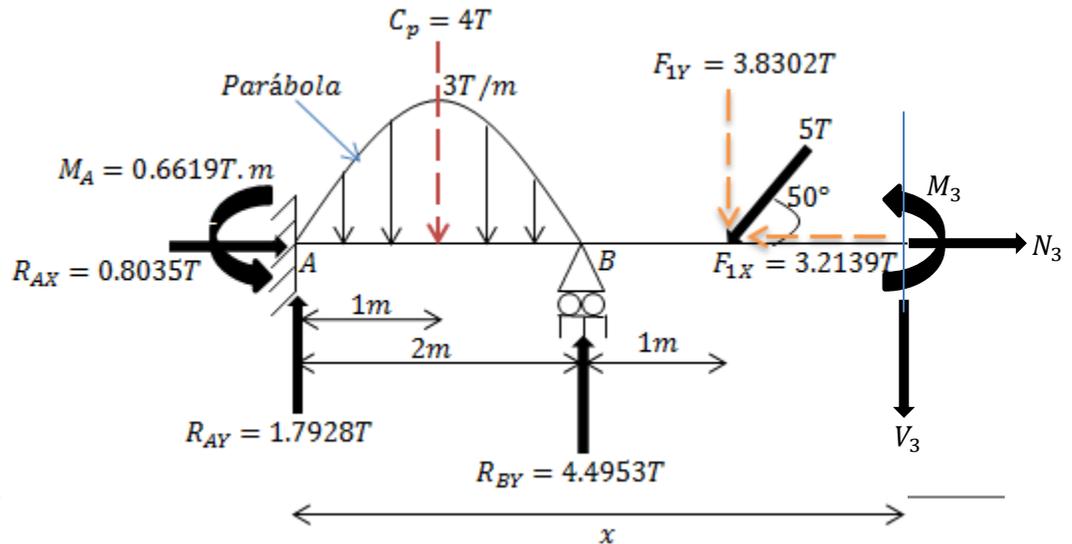
$$x = 2, M_2 = -1.0763; x = 3, M_2 = 1.2118$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx} = 2.2881$$

$$\sum FX = 0$$

$$N_2 = -0.8035$$

$$3m \leq x \leq 4m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = -0.6619 + 1.7928x - 4(x - 1) + 4.4953(x - 2) - 3.8302(x - 3)$$

$$M_3 = 5.8381 - 1.5421x$$

$$x = 3, M_3 = 1.2118; x = 4, M_3 = -0.3303$$

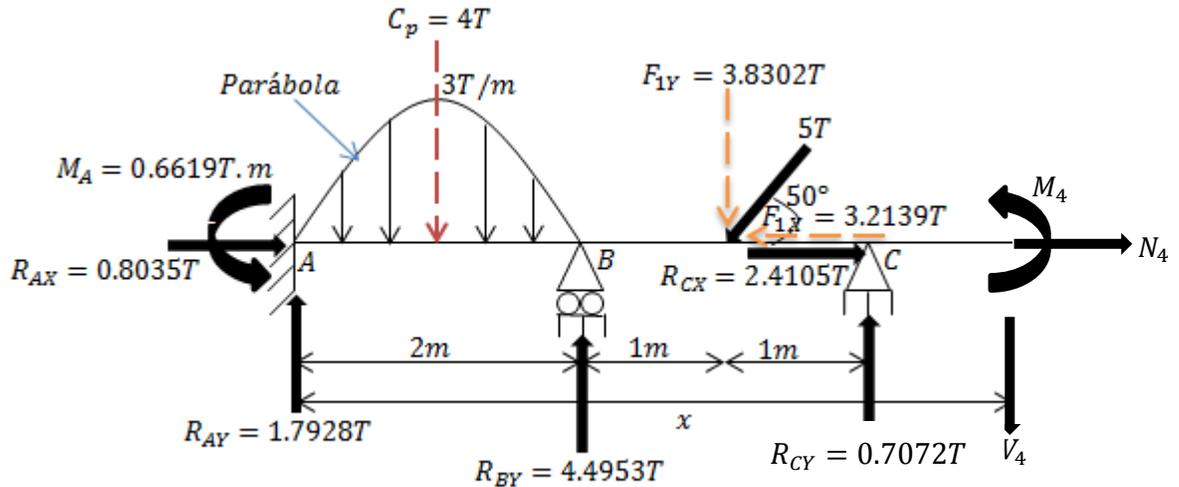
$$V_3 = \frac{dM_3}{dx} = -1.5421$$

$$\sum FX = 0$$

$$0.8035 - 3.2139 + N_3 = 0$$

$$N_3 = 2.4104$$

$$4m \leq x \leq 5m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_4 = -0.6619 + 1.7928x - 4(x - 1) + 4.4953(x - 2) - 3.8302(x - 3) + 0.7072(x - 4)$$

$$M_4 = 3.0093 - 0.8349x$$

$$x = 4, M_4 = -0.3303; x = 5, M_4 = -1.1652$$

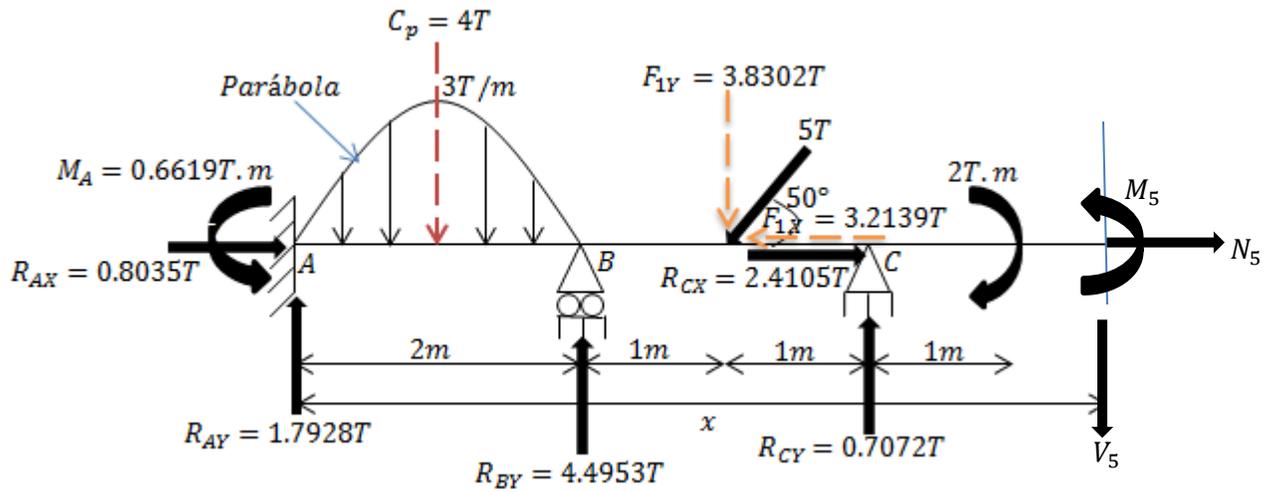
$$V_4 = \frac{dM_4}{dx} = -0.8349$$

$$\sum FX = 0$$

$$0.8035 - 3.2139 + 2.4105 + N_4 = 0$$

$$N_4 \cong 0$$

$$5m \leq x \leq 6m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_5 = -0.6619 + 1.7928x - 4(x - 1) + 4.4953(x - 2) - 3.8302(x - 3) + 0.7072(x - 4) + 2$$

$$M_5 = 5.0093 - 0.8349x$$

$$x = 5, M_5 = 0.8348; x = 6, M_4 = 0$$

$$V_5 = \frac{dM_5}{dx} = -0.8349$$

$$\sum FX = 0$$

$$N_5 \cong 0$$

Calculo de la rotación y deflexión a lo largo de la viga

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$$0 \leq x \leq 2m$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^4}{4} - x^3 + 1.7928x - 0.6619$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + 1.7928x - 0.6619 \right) dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = 0.05x^5 - 0.25x^4 + 0.8964x^2 - 0.6619x + C_1$$

$$EI\theta_1 = 0.05x^5 - 0.25x^4 + 0.8964x^2 - 0.6619x + C_1 \text{----- ec. 1}$$

$$EI \int dy = \int (0.05x^5 - 0.25x^4 + 0.8964x^2 - 0.6619x + C_1) dx$$

$$EIy_1 = 0.008333x^6 - 0.05x^5 + 0.2988x^3 - 0.33095x^2 + C_1x + C_2 \text{-----ec. 2}$$

$$2m \leq x \leq 3m$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = 2.2881x - 5.6525$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int (2.2881x - 5.6525) dx$$

$$EI\theta_2 = 1.14405x^2 - 5.6525x + C_3 \text{-----ec. 3}$$

$$EI \int dy = \int (1.14405x^2 - 5.6525x + C_3) dx$$

$$EIy_2 = 0.38135x^3 - 2.82625x^2 + C_3x + C_4 \text{-----ec. 4}$$

$$3m \leq x \leq 4m$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = 5.8381 - 1.5421x$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int (5.8381 - 1.5421x) dx$$

$$EI\theta_3 = 5.8381x - 0.77105x^2 + C_5 \text{-----ec. 5}$$

$$EI \int dy = \int (5.8381x - 0.77105x^2 + C_5) dx$$

$$EIy_3 = 2.91905x^2 - 0.257017x^3 + C_5x + C_6 \text{-----ec. 6}$$

$$4m \leq x \leq 5m$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = 3.0093 - 0.8349x$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int (3.0093 - 0.8349x) dx$$

$$EI\theta_4 = 3.0093x - 0.41745x^2 + C_7 \text{-----ec. 7}$$

$$EI \int dy = \int (3.0093x - 0.41745x^2 + C_7) dx$$

$$EIy_4 = 1.50465x^2 - 0.13915x^3 + C_7x + C_8 \text{-----ec. 8}$$

$$5m \leq x \leq 6m$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = 5.0093 - 0.8349x$$

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int (5.0093 - 0.8349x) dx$$

$$EI\theta_5 = 5.0093x - 0.41745x^2 + C_9 \text{-----ec. 9}$$

$$EI \int dy = \int (5.0093x - 0.41745x^2 + C_9) dx$$

$$EIy_5 = 2.50465x^2 - 0.13915x^3 + C_9x + C_{10} \text{-----ec. 10}$$

Determinamos las constantes de integración resolviendo el sistema de ecuaciones enumerado anteriormente:

Debido al empotre (no hay grados de libertad), usamos las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{En } x = 0, y = 0, \theta = 0$$

Sustituimos estos valores en las ecuaciones 1 y 2, respectivamente:

$$EI(0) = 0.05 * 0^5 - 0.25 * 0^4 + 0.8964 * 0^2 - 0.6619 * 0 + C_1$$

$$\therefore C_1 = 0$$

$$EI(0) = 0.008333 * 0^6 - 0.05 * 0^5 + 0.2988 * 0^3 - 0.33095 * 0^2 + 0 * 0 + C_2$$

$$\therefore C_2 = 0$$

Condición de continuidad 1

$$\theta_1 = \theta_2 \text{ en } x = 2m$$

$$0.05 * 2^5 - 0.25 * 2^4 + 0.8964 * 2^2 - 0.6619 * 2 = 1.14405 * 2^2 - 5.6525 * 2 + C_3$$

$$\therefore C_3 = 6.5906$$

Condición de continuidad 2

$$Y_1 = Y_2 \text{ en } x = 2m$$

$$\begin{aligned} 0.008333 * 2^6 - 0.05 * 2^5 + 0.2988 * 2^3 - 0.33095 * 2^2 \\ = 0.38135 * 2^3 - 2.82625 * 2^2 + 6.5906 * 2 + C_4 \end{aligned}$$

$$\therefore C_4 = -4.92707$$

Condición de continuidad 3

$$\theta_2 = \theta_3 \text{ en } x = 3m$$

$$1.14405 * 3^2 - 5.6525 * 3 + 6.5906 = 5.8381 * 3 - 0.77105 * 3^2 + C_5$$

$$\therefore C_5 = -10.6453$$

Condición de continuidad 4

$$Y_2 = Y_3 \text{ en } x = 3m$$

$$\begin{aligned} 0.38135 * 3^3 - 2.82625 * 3^2 + 6.5906 * 3 - 4.92707 \\ = 2.91905 * 3^2 - 0.257017 * 3^3 - 10.6453 * 3 + C_6 \end{aligned}$$

$$\therefore C_6 = 12.3088$$

Condición de continuidad 5

$$\theta_3 = \theta_4 \text{ en } x = 4m$$

$$5.8381 * 4 - 0.77105 * 4^2 - 10.6453 = 3.0093 * 4 - 0.41745 * 4^2 + C_7$$

$$\therefore C_7 = -4.9877$$

Condición de continuidad 6

$$Y_3 = Y_4 \text{ en } x = 4m$$

$$\begin{aligned}
 & 2.91905 * 4^2 - 0.257017 * 4^3 - 10.6453 * 4 + 12.3088 \\
 & = 1.50465 * 4^2 - 0.13915 * 4^3 - 4.9877 * 4 + C_8 \\
 & \therefore C_8 = 4.76533
 \end{aligned}$$

Condición de continuidad 7

$$\theta_4 = \theta_5 \text{ en } x = 5m$$

$$\begin{aligned}
 & 3.0093 * 5 - 0.41745 * 5^2 - 4.9877 = 5.0093 * 5 - 0.41745 * 5^2 + C_9 \\
 & \therefore C_9 = -14.9877
 \end{aligned}$$

Condición de continuidad 8

$$Y_4 = Y_5 \text{ en } x = 5m$$

$$\begin{aligned}
 & 1.50465 * 5^2 - 0.13915 * 5^3 - 4.9877 * 5 + 4.76533 \\
 & = 2.50465 * 5^2 - 0.13915 * 5^3 - 14.9877 * 5 + C_{10} \\
 & \therefore C_{10} = 29.7653
 \end{aligned}$$

Ecuaciones generales de giro y flecha por tramo:

Sustituimos las constantes de integración en las ecuaciones correspondientes, además:

$$\begin{aligned}
 EI &= \left(2.1 * 10^7 \frac{T}{m^2}\right) (0.000157783m^4) = 3313.443 T.m^2 \\
 & 0 \leq x \leq 2m
 \end{aligned}$$

$$\theta_1 = \left(\frac{1}{3313.443}\right) (0.05x^5 - 0.25x^4 + 0.8964x^2 - 0.6619x)$$

$$y_1 = \left(\frac{1}{3313.443}\right) (0.008333x^6 - 0.05x^5 + 0.2988x^3 - 0.33095x^2)$$

$$2m \leq x \leq 3m$$

$$\theta_2 = \left(\frac{1}{3313.443}\right) (1.14405x^2 - 5.6525x + 6.5906)$$

$$y_2 = \left(\frac{1}{3313.443}\right) (0.38135x^3 - 2.82625x^2 + 6.5906x - 4.92707)$$

$$3m \leq x \leq 4m$$

$$\theta_3 = \left(\frac{1}{3313.443}\right)(5.8381x - 0.77105x^2 - 10.6453)$$

$$y_3 = \left(\frac{1}{3313.443}\right)(2.91905x^2 - 0.257017x^3 - 10.6453x + 12.3088)$$

$$4m \leq x \leq 5m$$

$$\theta_4 = \left(\frac{1}{3313.443}\right)(3.0093x - 0.41745x^2 - 4.9877)$$

$$y_4 = \left(\frac{1}{3313.443}\right)(1.50465x^2 - 0.13915x^3 - 4.9877x + 4.76533)$$

$$5m \leq x \leq 6m$$

$$\theta_5 = \left(\frac{1}{3313.443}\right)(5.0093x - 0.41745x^2 - 14.9877)$$

$$y_5 = \left(\frac{1}{3313.443}\right)(2.50465x^2 - 0.13915x^3 - 14.9877x + 29.7653)$$

DIAGRAMA DE CORTANTE:

x (m)	V (Ton)
0	1.7928
0.25	1.620925
0.5	1.1678
0.75	0.527175
1	-0.2072
1.25	-0.941575
1.5	-1.5822
1.75	-2.035325
2	-2.2072
2	2.2881
3	2.2881
3	-1.5421
4	-1.5421
4	-0.8349
5	-0.8349
5	-0.8349
6	-0.8349

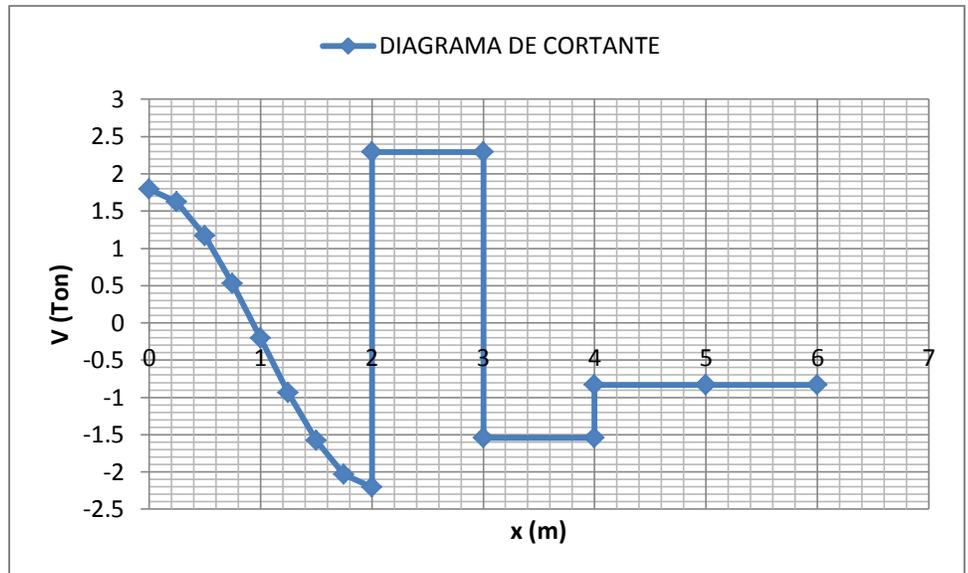


DIAGRAMA DE MOMENTO:

x (m)	M (Ton*m)
0	-0.6619
0.25	-0.228348438
0.5	0.125125
0.75	0.339926563
1	0.3809
1.25	0.236326563
1.5	-0.082075
1.75	-0.539148438
2	-1.0763
2	-1.0763
3	1.2118
3	1.2118
4	-0.3303
4	-0.3303
5	-1.1652
5	0.8348
6	0

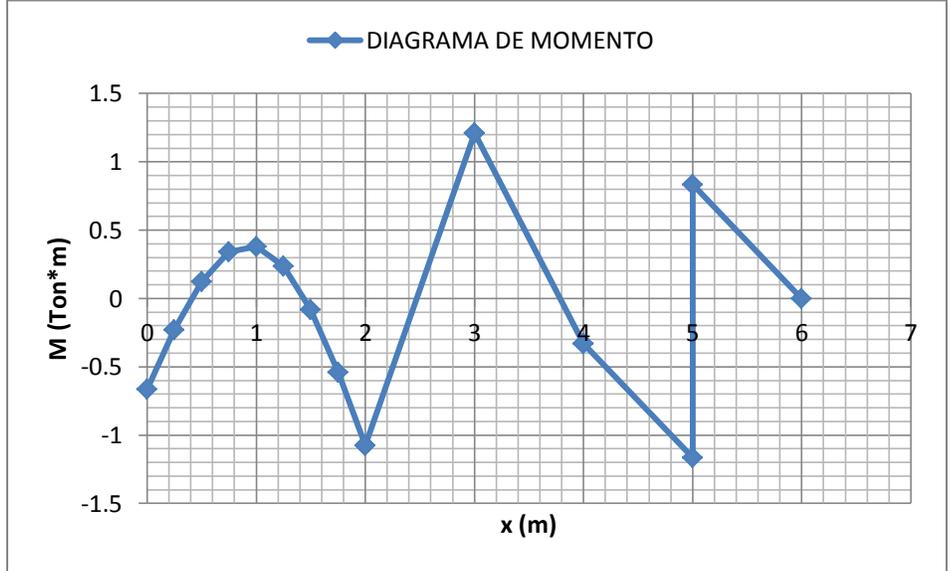


DIAGRAMA DE NORMAL:

x (m)	N (Ton)
0	-0.8035
1	-0.8035
2	-0.8035
2	-0.8035
3	-0.8035
3	2.4104
4	2.4104
4	0
5	0
5	0
6	0

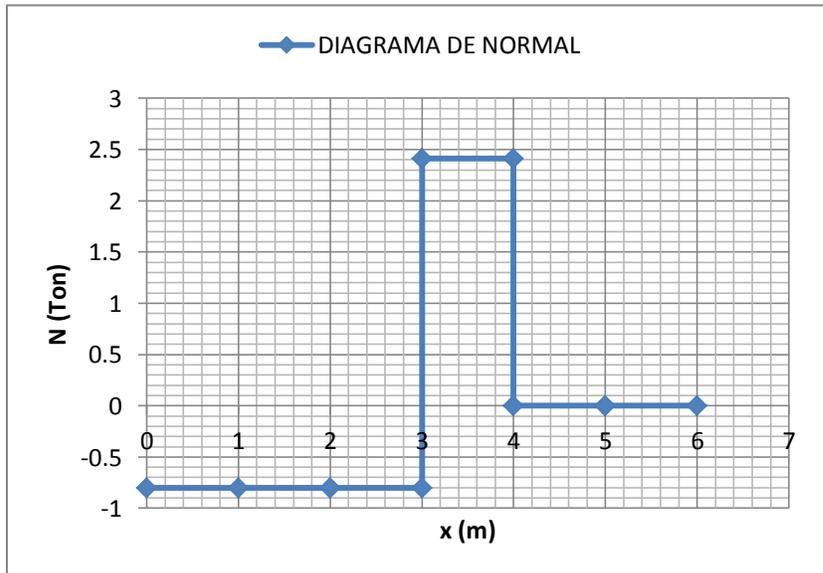


DIAGRAMA DE GIRO O ROTACIÓN:

x (m)	θ (rad)
0	0
0.5	-3.64915E-05
1	1.04121E-05
1.5	4.16825E-05
2	-4.17089E-05
2	-4.17089E-05
2.5	-0.000117804
3	-2.12619E-05
3	-2.12619E-05
3.5	0.000103423
4	0.000111757
4	0.000111757
4.5	3.04178E-05
5	-0.000113915
5	-0.000113915
5.5	-1.94397E-05
6	1.20419E-05

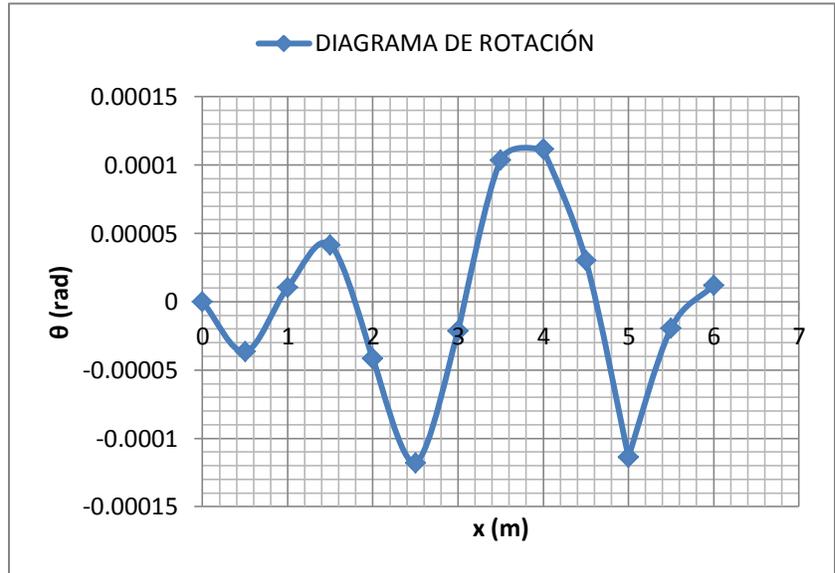
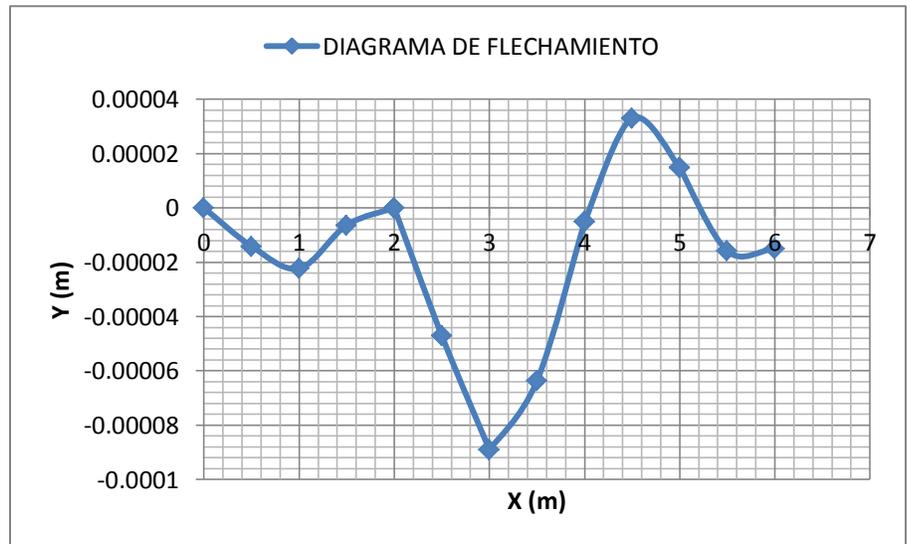


DIAGRAMA DE FLECHAMIENTO:

x (m)	Y (m)
0	0
0.5	-1.41303E-05
1	-2.2278E-05
1.5	-6.32482E-06
2	-2.65585E-08
2	-2.11261E-08
2.5	-4.70926E-05
3	-8.90524E-05
3	-8.90642E-05
3.5	-6.36774E-05
4	-5.03645E-06
4	-5.03102E-06
4.5	3.31374E-05
5	1.48878E-05
5	1.48788E-05
5.5	-1.58351E-05
6	-1.50599E-05



A continuación se muestra la forma de usar el programa 4.2.3 tomando como ejemplo el problema anterior.

Una vez que se corra el programa:

1. Insertamos los siguientes datos de la estructura real:

```
Command Window
----- DATOS PARA EL ANALISIS -----
DAME EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD GL =12
DAME EL NUMERO DE ELEMENTOS n =3
-----
```

- 2.- Digitamos los datos del elemento 1:

```
ELEMENTO 1.

DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD = 2.1*10^7
DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = 0.022
DAME LA INERCIA DE LA SECCIÓN = 0.000157783
DAME LA LONGITUD DEL ELEMENTO = 2
NODO N-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nx=11
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=10
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nz=12
NODO F-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fx=5
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=9
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fz=4
-----
```

En automático aparecerá la matriz de rigidez global del elemento 1:

```
MATRRIZ K1.
k =

1.0e+005 *

 2.3100      0      0    -2.3100      0      0
 0    0.0497    0.0497      0    -0.0497    0.0497
 0    0.0497    0.0663      0    -0.0497    0.0331
-2.3100      0      0     2.3100      0      0
 0   -0.0497   -0.0497      0     0.0497   -0.0497
 0    0.0497    0.0331      0    -0.0497    0.0663
```

3.- Digitamos los datos del elemento 2:

```

ELEMENTO 2.

DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD = 2.1*10^7
DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = 0.022
DAME LA INERCIA DE LA SECCIÓN = 0.000157783
DAME LA LONGITUD DEL ELEMENTO = 2
NODO N-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nx=5
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=9
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nz=4
NODO F-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fx=8
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=7
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fz=3
-----
    
```

En seguida aparecerá la matriz de rigidez global del elemento 2:

```

MATRIZ K2.
k =

1.0e+005 *

  2.3100      0      0    -2.3100      0      0
      0    0.0497    0.0497      0   -0.0497    0.0497
      0    0.0497    0.0663      0   -0.0497    0.0331
 -2.3100      0      0     2.3100      0      0
      0   -0.0497   -0.0497      0    0.0497   -0.0497
      0    0.0497    0.0331      0   -0.0497    0.0663
-----
    
```

4.- Digitamos los datos del elemento 3:

```

ELEMENTO 3.

DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD = 2.1*10^7
DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = 0.022
DAME LA INERCIA DE LA SECCIÓN = 0.000157783
DAME LA LONGITUD DEL ELEMENTO = 2
NODO N-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nx=8
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=7
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nz=3
NODO F-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fx=2
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=6
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fz=1
-----
    
```

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

A continuación aparecerá la matriz de rigidez global del elemento 3:

MATRRIZ K3.

k =

1.0e+005 *

2.3100	0	0	-2.3100	0	0
0	0.0497	0.0497	0	-0.0497	0.0497
0	0.0497	0.0663	0	-0.0497	0.0331
-2.3100	0	0	2.3100	0	0
0	-0.0497	-0.0497	0	0.0497	-0.0497
0	0.0497	0.0331	0	-0.0497	0.0663

Luego de obtener la matriz de rigidez global de cada elemento, el programa ensambla tales matrices y nos arrojará la matriz de rigidez global de toda la estructura:

----- MATRIZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA -----

KT =

1.0e+005 *

Columns 1 through 7

0.0663	0	0.0331	0	0	-0.0497	0.0497
0	2.3100	0	0	0	0	0
0.0331	0	0.1325	0.0331	0	-0.0497	0
0	0	0.0331	0.1325	0	0	-0.0497
0	0	0	0	4.6200	0	0
-0.0497	0	-0.0497	0	0	0.0497	-0.0497
0.0497	0	0	-0.0497	0	-0.0497	0.0994
0	-2.3100	0	0	-2.3100	0	0
0	0	0.0497	0	0	0	-0.0497
0	0	0	0.0497	0	0	0
0	0	0	0	-2.3100	0	0
0	0	0	0.0331	0	0	0

Columns 8 through 12

0	0	0	0	0
-2.3100	0	0	0	0
0	0.0497	0	0	0
0	0	0.0497	0	0.0331
-2.3100	0	0	-2.3100	0
0	0	0	0	0
0	-0.0497	0	0	0
4.6200	0	0	0	0
0	0.0994	-0.0497	0	-0.0497
0	-0.0497	0.0497	0	0.0497
0	0	0	2.3100	0
0	-0.0497	0.0497	0	0.0663

5.-Capturamos el Vector de Fuerzas Conocidas:

DAME EL VECTOR DE FUERZAS CONOCIDAS=[0.5;0;1.4657;-0.1657;-1.6070]

Se imprimirá el vector anterior:

v =

0.5000
0
1.4657
-0.1657
-1.6070

Se imprimirá la submatriz K_{11} :

K =

1.0e+005 *				
0.0663	0	0.0331	0	0
0	2.3100	0	0	0
0.0331	0	0.1325	0.0331	0
0	0	0.0331	0.1325	0
0	0	0	0	4.6200

El programa nos proporciona los valores de los desplazamientos desconocidos:

```
d1 =  
  
1.0e-003 *  
  
0.0171  
0  
0.1167  
-0.0417  
-0.0035
```

Se imprime el vector de desplazamientos conocidos:

```
d2 =  
  
0  
0  
0  
0  
0  
0  
0  
0
```

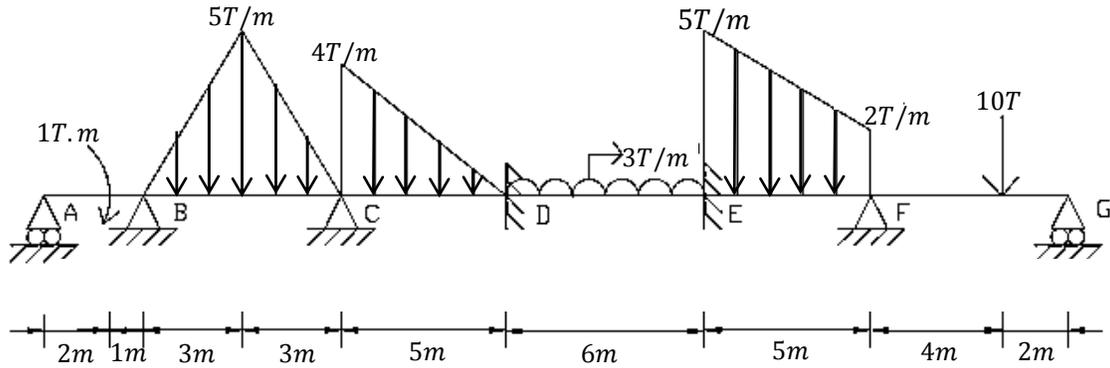
Se imprime el vector total de desplazamientos:

```
ans =  
  
VECTOR TOTAL DE DESPLAZAMIENTOS  
  
D =  
  
1.0e-003 *  
  
0.0171  
0  
0.1167  
-0.0417  
-0.0035  
0  
0  
0  
0  
0  
0  
0  
0
```

Se imprime el vector total de fuerzas, es decir, aquel vector que contiene al vector de fuerzas conocidas y al vector de fuerzas desconocidas:

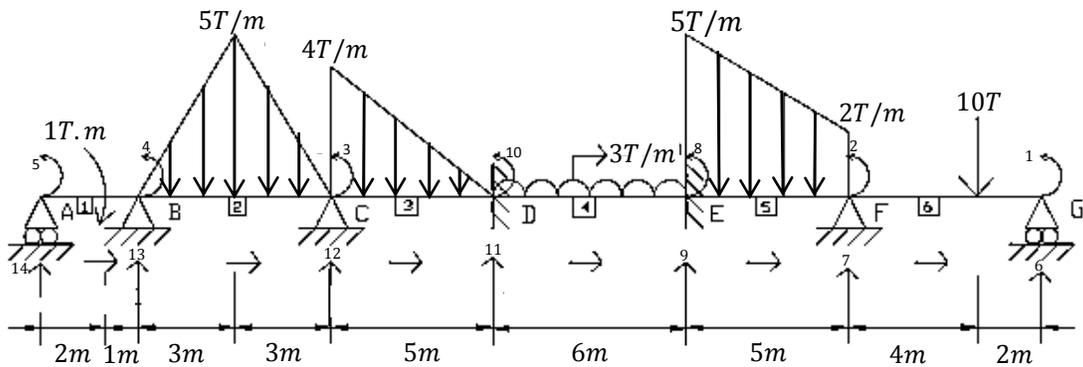
```
ans =  
  
VECTOR TOTAL DE FUERZAS  
  
F =  
  
    0.5000  
         0  
    1.4657  
   -0.1657  
   -1.6070  
   -0.6651  
    0.2921  
    0.8035  
    0.5802  
   -0.2072  
    0.8035  
   -0.1381
```

2.-La siguiente viga de seis claros está sometida a cargas de distintos tipos. Obsérvese que no se presenta carga axial. Calcular las reacciones en los soportes mediante el análisis matricial simplificado de la rigidez para vigas. Demuestre el equilibrio de la estructura con las 3 ecuaciones de la estática usando fuerzas externas. El EI es constante.

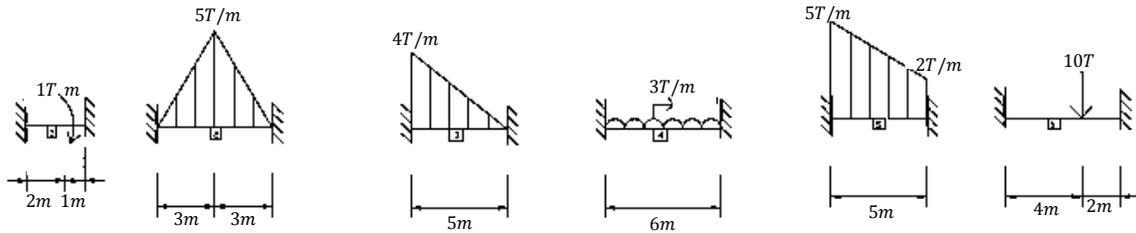


SOLUCIÓN:

Codificación:



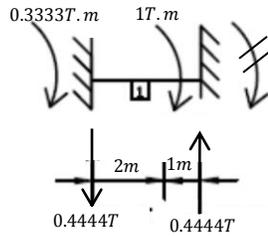
Empotrando doblemente:



Las reacciones de las vigas doblemente empotradas son:

Elemento 1:

$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{6Mab}{L^3} = \frac{(6)(1)(2)(1)}{3^3} = 0.4444 T \quad \downarrow \uparrow$$



Respectivamente

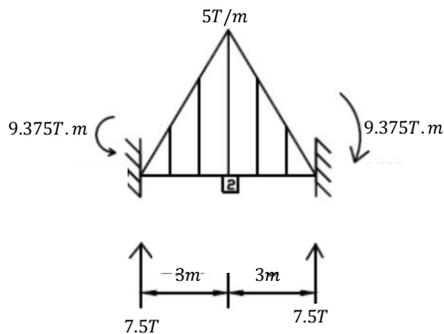
$$M_A = \frac{Mb}{L} \left(\frac{3b}{L} - 2 \right) = \frac{1 \cdot 1}{3} \left(\frac{(3)(1)}{3} - 2 \right) = -\frac{1}{3} T \cdot m$$

Como el resultado es negativo, invertir el sentido con respecto al propuesto en la formula deducida.

$$\therefore M_A = \frac{1}{3} T \cdot m \quad \curvearrowright$$

$$M_B = \frac{Ma}{L} \left(2 - \frac{3a}{L} \right) = \frac{1 \cdot 2}{3} \left(2 - \frac{3 \cdot 2}{3} \right) = 0$$

Elemento 2:

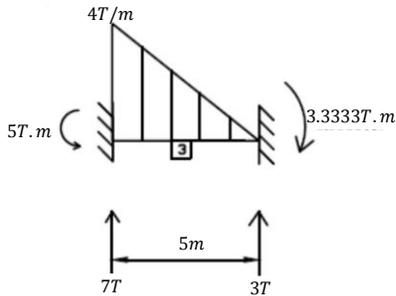


$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{WL}{4} = \frac{(5)(6)}{4} = 7.5 T \quad \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{5WL^2}{96} = \frac{(5)(5)(6^2)}{96} = 9.375 T \cdot m$$

$\curvearrowleft \curvearrowright$ Respectivamente

Elemento 3:



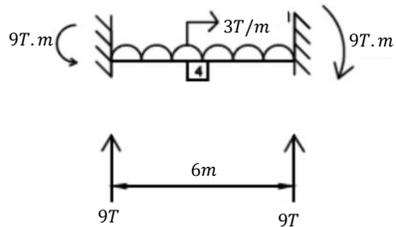
$$R_{AY} = \frac{7WL}{20} = \frac{(7)(4)(5)}{20} = 7 T \uparrow$$

$$R_{BY} = \frac{3WL}{20} = \frac{(3)(4)(5)}{20} = 3 T \uparrow$$

$$M_A = \frac{WL^2}{20} = \frac{4 \cdot 5^2}{20} = 5 T \cdot m \curvearrowleft$$

$$M_B = \frac{WL^2}{30} = \frac{4 \cdot 5^2}{30} = 3.3333 T \cdot m \curvearrowright$$

Elemento 4:

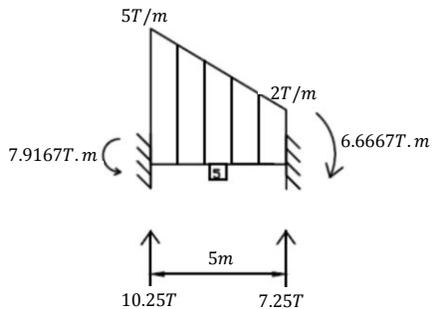


$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{WL}{2} = \frac{(3)(6)}{2} = 9 T \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{WL^2}{12} = \frac{(3)(6^2)}{12} = 9 T \cdot m \curvearrowleft \curvearrowright$$

Respectivamente

Elemento 5:



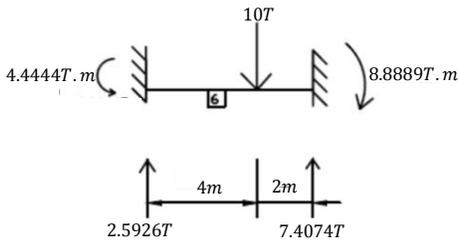
$$R_{AY} = \frac{7W_1L}{20} + \frac{3W_2L}{20} = \frac{(7)(5)(5)}{20} + \frac{(3)(2)(5)}{20} = 10.25 T \uparrow$$

$$R_{BY} = \frac{3W_1L}{20} + \frac{7W_2L}{20} = \frac{(3)(5)(5)}{20} + \frac{(7)(2)(5)}{20} = 7.25 T \uparrow$$

$$M_A = \frac{W_1L^2}{20} + \frac{W_2L^2}{30} = \frac{5 \cdot 5^2}{20} + \frac{2 \cdot 5^2}{30} = 7.9167 T \cdot m \curvearrowleft$$

$$M_B = \frac{W_1L^2}{30} + \frac{W_2L^2}{20} = \frac{5 \cdot 5^2}{30} + \frac{2 \cdot 5^2}{20} = 6.6667 T \cdot m \curvearrowright$$

Elemento 6:



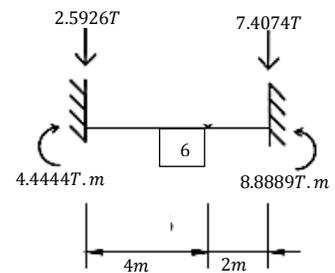
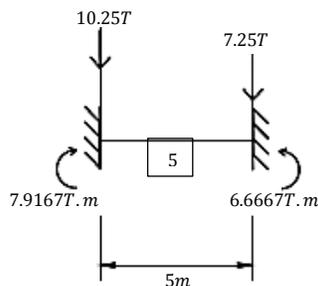
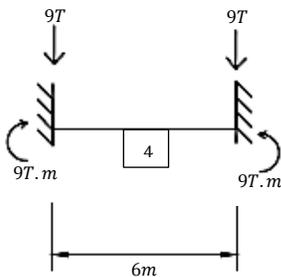
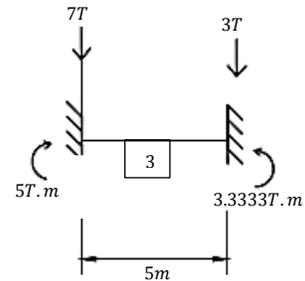
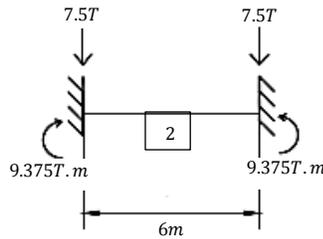
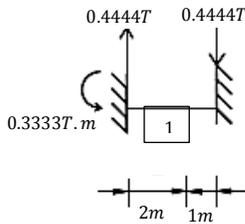
$$R_{AY} = \frac{Pb^2}{L^2} \left(3 - 2 \frac{b}{L} \right) = \frac{10 \cdot 2^2}{6^2} \left(3 - 2 \cdot \frac{2}{6} \right) = 2.5926 T \uparrow$$

$$R_{BY} = \frac{Pa^2}{L^2} \left(3 - 2 \frac{a}{L} \right) = \frac{10 \cdot 4^2}{6^2} \left(3 - 2 \cdot \frac{4}{6} \right) = 7.4074 T \uparrow$$

$$M_A = \frac{Pab^2}{L^2} = \frac{10 \cdot 4 \cdot 2^2}{6^2} = 4.444 T \cdot m \quad \curvearrowleft$$

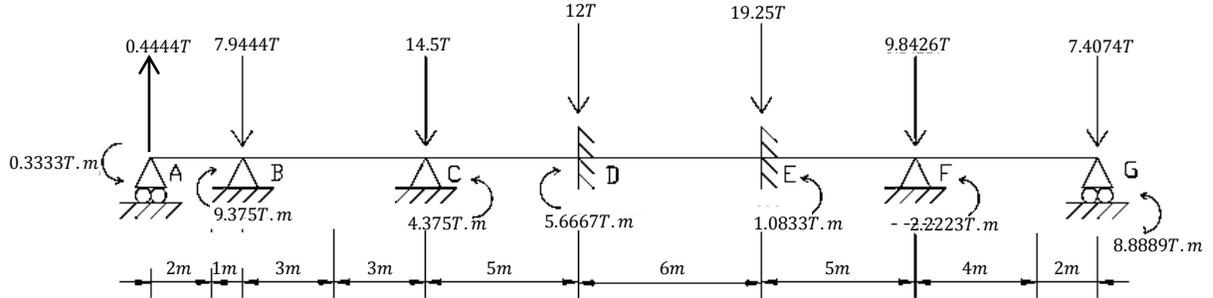
$$M_B = \frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{10 \cdot 4^2 \cdot 2}{6^2} = 8.8889 T \cdot m \quad \curvearrowright$$

Las acciones (las opuestas a las reacciones) son:



CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

Las acciones totales aplicadas en cada nodo son:



-Vector de Fuerzas:

$$F = \begin{pmatrix} 8.8889 & 1 \\ 2.2223 & 2 \\ 4.375 & 3 \\ -9.375 & 4 \\ 0.3333 & 5 \\ \hline R_{GY} - 7.4074 & 6 \\ R_{FY} - 9.8426 & 7 \\ M_E + 1.0833 & 8 \\ R_{EY} - 19.25 & 9 \\ M_D - 5.6667 & 10 \\ R_{DY} - 12 & 11 \\ R_{CY} - 14.5 & 12 \\ R_{BY} - 7.9444 & 13 \\ R_{AY} + 0.4444 & 14 \end{pmatrix}$$

-Vector de Desplazamientos:

$$D = \begin{pmatrix} \theta_1 & 1 \\ \theta_2 & 2 \\ \theta_3 & 3 \\ \theta_4 & 4 \\ \theta_5 & 5 \\ \hline 0 & 6 \\ 0 & 7 \\ 0 & 8 \\ 0 & 9 \\ 0 & 10 \\ 0 & 11 \\ 0 & 12 \\ 0 & 13 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Matriz de rigidez global por elemento:

Elemento 1

$$k_1 = EI * \begin{matrix} & \begin{matrix} 14 & 5 & 13 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.4444 & 0.6667 & -0.4444 & 0.6667 \\ 0.6667 & 1.3333 & -0.6667 & 0.6667 \\ -0.4444 & -0.6667 & 0.4444 & -0.6667 \\ 0.6667 & 0.6667 & -0.6667 & 1.3333 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 14 \\ 5 \\ 13 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Elemento 2

$$k_2 = EI * \begin{matrix} & \begin{matrix} 13 & 4 & 12 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0556 & 0.1667 & -0.0556 & 0.1667 \\ 0.1667 & 0.6667 & -0.1667 & 0.3333 \\ -0.0556 & -0.1667 & 0.0556 & -0.1667 \\ 0.1667 & 0.3333 & -0.1667 & 0.6667 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 13 \\ 4 \\ 12 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

Elemento 3

$$k_3 = EI * \begin{matrix} & \begin{matrix} 12 & 3 & 11 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0960 & 0.2400 & -0.0960 & 0.2400 \\ 0.2400 & 0.8000 & -0.2400 & 0.4000 \\ -0.0960 & -0.2400 & 0.0960 & -0.2400 \\ 0.2400 & 0.4000 & -0.2400 & 0.8000 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 12 \\ 3 \\ 11 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

Elemento 4

$$k_4 = EI * \begin{matrix} & \begin{matrix} 11 & 10 & 9 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0556 & 0.1667 & -0.0556 & 0.1667 \\ 0.1667 & 0.6667 & -0.1667 & 0.3333 \\ -0.0556 & -0.1667 & 0.0556 & -0.1667 \\ 0.1667 & 0.3333 & -0.1667 & 0.6667 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 11 \\ 10 \\ 9 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

Elemento 5

$$k_5 = EI * \begin{matrix} & \begin{matrix} 9 & 8 & 7 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0960 & 0.2400 & -0.0960 & 0.2400 \\ 0.2400 & 0.8000 & -0.2400 & 0.4000 \\ -0.0960 & -0.2400 & 0.0960 & -0.2400 \\ 0.2400 & 0.4000 & -0.2400 & 0.8000 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

Elemento 6

$$k_6 = EI * \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 2 & 6 & 1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0556 & 0.1667 & -0.0556 & 0.1667 \\ 0.1667 & 0.6667 & -0.1667 & 0.3333 \\ -0.0556 & -0.1667 & 0.0556 & -0.1667 \\ 0.1667 & 0.3333 & -0.1667 & 0.6667 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{matrix} \end{matrix}$$

MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA:

$$K_T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.6667 & 0.3333 & 0 & 0 & 0 & -0.1667 & 0.1667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3333 & 1.4667 & 0 & 0 & 0 & -0.1667 & -0.0733 & 0.0400 & 0.2400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4667 & 0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4000 & -0.2400 & 0.0733 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3333 & 2.0000 & 0.6667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1667 & -0.5000 & 0.6667 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6667 & 1.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6667 & 0.6667 \\ \hline -0.1667 & -0.1667 & 0 & 0 & 0 & 0.0556 & -0.0556 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1667 & -0.0733 & 0 & 0 & 0 & -0.0556 & 0.1516 & -0.2400 & -0.0960 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4000 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2400 & 1.4667 & 0.0733 & 0.3333 & 0.1667 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2400 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0960 & 0.0733 & 0.1516 & -0.1667 & -0.0556 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3333 & -0.1667 & 1.4667 & -0.0733 & 0.2400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1667 & -0.0556 & -0.0733 & 0.1516 & -0.0960 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0733 & -0.1667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2400 & -0.0960 & 0.1516 & -0.0556 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1667 & -0.5 & -0.6667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0556 & 0.5000 & -0.4444 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6667 & 0.6667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4444 & 0.4444 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

De $F = K_T * D$ extraemos los siguientes subsistemas:

Subsistema 1:

$$\begin{pmatrix} 8.8889 \\ 2.2223 \\ 4.375 \\ -9.375 \\ 0.3333 \end{pmatrix} = (EI) \begin{pmatrix} 0.6667 & 0.3333 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3333 & 1.4667 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4667 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3333 & 2.0000 & 0.6667 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6667 & 1.3333 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{EI}\right) \begin{pmatrix} 14.1880 \\ -1.7093 \\ 4.4881 \\ -6.6226 \\ 3.5613 \end{pmatrix}$$

Subsistema 2:

$$\begin{pmatrix} R_{GY} - 7.4074 \\ R_{FY} - 9.8426 \\ M_E + 1.0833 \\ R_{EY} - 19.25 \\ M_D - 5.6667 \\ R_{DY} - 12 \\ R_{CY} - 14.5 \\ R_{BY} - 7.9444 \\ R_{AY} + 0.4444 \end{pmatrix} = (EI) \begin{pmatrix} -0.1667 & -0.1667 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1667 & -0.0733 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0733 & -0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1667 & -0.5000 & -0.6667 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6667 & 0.6667 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{EI}\right) \begin{pmatrix} 14.1880 \\ -1.7093 \\ 4.4881 \\ -6.6226 \\ 3.5613 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{pmatrix} R_{GY} - 7.4074 \\ R_{FY} - 9.8426 \\ M_E + 1.0833 \\ R_{EY} - 19.25 \\ M_D - 5.6667 \\ R_{DY} - 12 \\ R_{CY} - 14.5 \\ R_{BY} - 7.9444 \\ R_{AY} + 0.4444 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.0798 \\ 2.4900 \\ -0.6837 \\ -0.4102 \\ 1.7952 \\ -1.0771 \\ 1.4329 \\ 1.6851 \\ -2.0409 \end{pmatrix}$$

Calculo de las reacciones:

$$R_{GY} - 7.4074 = -2.0798 \rightarrow R_{GY} = -2.0798 + 7.4074 = 5.3276 \quad \therefore R_{GY} = 5.3276 T \uparrow$$

$$R_{FY} - 9.8426 = 2.4900 \rightarrow R_{FY} = 2.4900 + 9.8426 = 12.3326 \quad \therefore R_{FY} = 12.3326 T \uparrow$$

$$M_E + 1.0833 = -0.6837 \rightarrow M_E = -0.6837 - 1.0833 = -1.7670 \quad \therefore M_E = 1.7670 T.m \curvearrowright$$

$$R_{EY} - 19.25 = -0.4102 \rightarrow R_{EY} = -0.4102 + 19.25 = 18.8398 \quad \therefore R_{EY} = 18.8398 T \uparrow$$

$$M_D - 5.6667 = 1.7952 \rightarrow M_D = 1.7952 + 5.6667 = 7.4619 \quad \therefore M_D = 7.4619 T.m \curvearrowleft$$

$$R_{DY} - 12 = -1.0771 \rightarrow R_{DY} = -1.0771 + 12 = 10.9229 \quad \therefore R_{DY} = 10.9229 T \uparrow$$

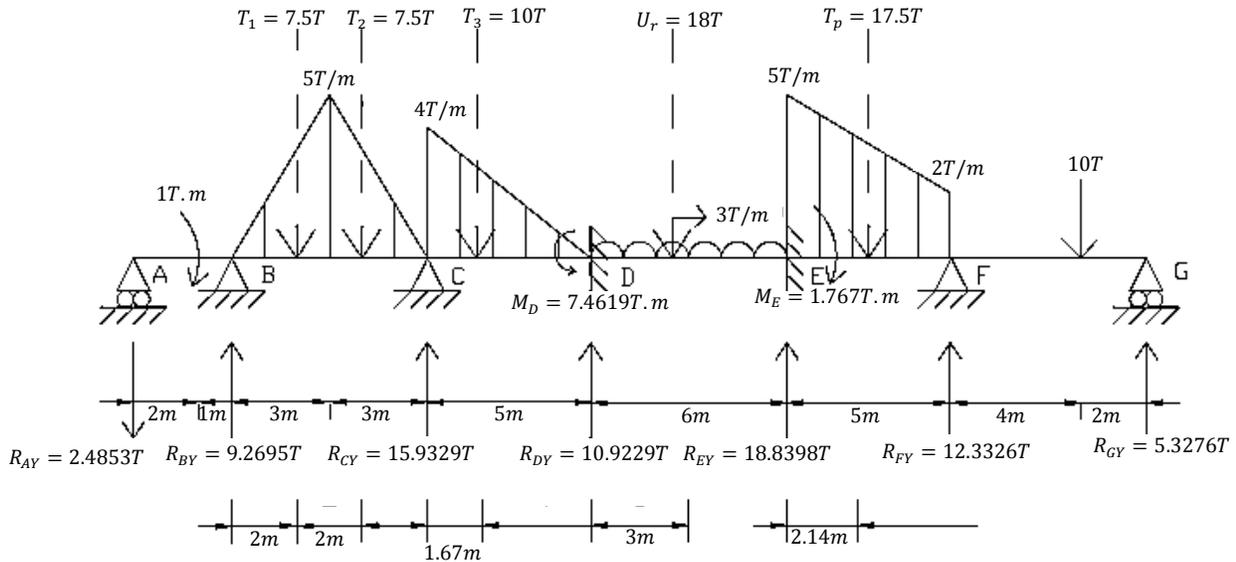
$$R_{CY} - 14.5 = 1.4329 \rightarrow R_{CY} = 1.4329 + 14.5 = 15.9329 \quad \therefore R_{CY} = 15.9329 T \uparrow$$

$$R_{BY} - 7.9444 = 1.6851 \rightarrow R_{BY} = 1.6851 + 7.9444 = 9.6295 \quad \therefore R_{BY} = 9.6295 T \uparrow$$

$$R_{AY} + 0.4444 = -2.0409 \rightarrow R_{AY} = -2.0409 - 0.4444 = -2.4853 \quad \therefore R_{AY} = 2.4853 T \downarrow$$

A continuación se presenta diagrama de la viga real que muestra las reacciones definitivas en los soportes. Nótese que las presiones se han concentrado en sus puntos de aplicación como cargas concentradas equivalentes.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ



Cargas concentradas equivalentes y puntos de aplicación para las presiones:

-Presión triangular 1:

$$T_1 = \frac{(3m)(5T/m)}{2} = 7.5T \downarrow$$

$$\bar{x} = \frac{2}{3}(3m) = 2m \text{ a la derecha de B}$$

-Presión triangular 2:

$$T_2 = \frac{(3m)(5T/m)}{2} = 7.5T \downarrow$$

$$\bar{x} = 3m + \frac{1}{3}(3m) = 4m \text{ a la derecha de B}$$

-Presión triangular 3:

$$T_3 = \frac{(5m)(4T/m)}{2} = 10T \downarrow$$

$$\bar{x} = \frac{1}{3}(5m) = 1.6667m \text{ a la derecha de C}$$

-Presión uniformemente repartida:

$$U_r = (6m)(3T/m) = 18T \downarrow$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(6m) = 3m \text{ a la derecha de } D$$

-Presión trapezoidal:

$$T_p = (2T/m)(5m) + (5T/m - 2T/m)(5m) \left(\frac{1}{2}\right) = 10T + 7.5T = 17.5T \downarrow$$

$$\bar{x} = \frac{(10T) \left(\frac{1}{2}(5m)\right) + (7.5T) \left(\frac{1}{3}(5m)\right)}{17.5T} = 2.1429m \text{ a la derecha de } E$$

Demostremos que la estructura está en equilibrio mediante fuerzas externas:

$$\sum FY = 0$$

$$-2.4853 + 9.6295 - 7.5 - 7.5 + 15.9329 - 10 + 10.9229 - 18 + 18.8398 - 17.5 + 12.3326 - 10 + 5.3276 = 0 \quad OK$$

$$\sum MA = 0$$

$$1 - 9.6295(3) + 7.5(5) + 7.5(7) - 15.9329(9) + 10(10.6667) - 7.4619 - 10.9229(14) + 18(17) - 18.8398(20) + 1.7670 + 17.5(22.1429) - 12.3326(25) + 10(29) - 5.3276(31) \cong 0$$

A continuación se muestra la forma de usar el programa 4.2.4 tomando como ejemplo el problema anterior.

Una vez que se corra el programa:

1. Insertamos los siguientes datos de la estructura real:

```
Command Window
----- DATOS PARA EL ANALISIS -----
DAME EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD GL =14
DAME EL NUMERO DE ELEMENTOS n =6
-----
```

Nota: Como en el problema no nos proporcionan el valor del Módulo de la Elasticidad ni el de la Inercia y sólo nos dicen que son constantes en toda la estructura, para cada elemento le daremos el valor de uno a ambos, lo cual significa que cada matriz global por elemento, la matriz global de toda la estructura y la submatriz K_{11} están multiplicadas por EI , además cuando el programa calcule los valores de los desplazamientos desconocidos y el vector total de desplazamientos, estos estarán afectados por $1/EI$.

- 2.- Digitamos los datos del elemento 1:

```
ELEMENTO 1.

DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD = 1
DAME LA INERCIA DE LA SECCIÓN = 1
DAME LA LONGITUD DEL ELEMENTO = 3
NODO N-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=14
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nz=5
NODO F-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=13
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fz=4
-----
```

En automático aparecerá la matriz de rigidez global del elemento 1:

```
MATRRIZ K1.
k =

    0.4444    0.6667   -0.4444    0.6667
    0.6667    1.3333   -0.6667    0.6667
   -0.4444   -0.6667    0.4444   -0.6667
    0.6667    0.6667   -0.6667    1.3333
-----
```

3.- Digitamos los datos del elemento 2:

ELEMENTO 2.

DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD = 1

DAME LA INERCIA DE LA SECCIÓN = 1

DAME LA LONGITUD DEL ELEMENTO = 6

NODO N-----

DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=13

DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nz=4

NODO F-----

DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=12

DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fz=3

En seguida aparecerá la matriz de rigidez global del elemento 2:

MATRRIZ K2.

k =

0.0556	0.1667	-0.0556	0.1667
0.1667	0.6667	-0.1667	0.3333
-0.0556	-0.1667	0.0556	-0.1667
0.1667	0.3333	-0.1667	0.6667

4.- Digitamos los datos del elemento 3:

ELEMENTO 3.

DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD = 1

DAME LA INERCIA DE LA SECCIÓN = 1

DAME LA LONGITUD DEL ELEMENTO = 5

NODO N-----

DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=12

DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nz=3

NODO F-----

DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=11

DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fz=10

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

A continuación aparecerá la matriz de rigidez global del elemento 3:

```
MATRRIZ K3.
k =

    0.0960    0.2400   -0.0960    0.2400
    0.2400    0.8000   -0.2400    0.4000
   -0.0960   -0.2400    0.0960   -0.2400
    0.2400    0.4000   -0.2400    0.8000
```

5.- Digitamos los datos del elemento 4:

```
ELEMENTO 4.

DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD = 1
DAME LA INERCIA DE LA SECCIÓN = 1
DAME LA LONGITUD DEL ELEMENTO = 6
NODO N-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=11
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nz=10
NODO F-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=9
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fz=8
-----
```

En automático aparecerá la matriz de rigidez global del elemento 4:

```
MATRRIZ K4.
k =

    0.0556    0.1667   -0.0556    0.1667
    0.1667    0.6667   -0.1667    0.3333
   -0.0556   -0.1667    0.0556   -0.1667
    0.1667    0.3333   -0.1667    0.6667
```

6.- Digitamos los datos del elemento 5:

```
ELEMENTO 5.

DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD = 1
DAME LA INERCIA DE LA SECCIÓN = 1
DAME LA LONGITUD DEL ELEMENTO = 5
NODO N-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=9
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nz=8
NODO F-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=7
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fz=2
-----
```

En seguida aparecerá la matriz de rigidez global del elemento 5:

```

MATRRIZ K5.
k =

    0.0960    0.2400   -0.0960    0.2400
    0.2400    0.8000   -0.2400    0.4000
   -0.0960   -0.2400    0.0960   -0.2400
    0.2400    0.4000   -0.2400    0.8000
    
```

7.- Digitamos los datos del elemento 6:

```

ELEMENTO 6.

DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD = 1
DAME LA INERCIA DE LA SECCIÓN = 1
DAME LA LONGITUD DEL ELEMENTO = 6
NODO N-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=7
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nz=2
NODO F-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=6
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fz=1
    
```

A continuación aparecerá la matriz de rigidez global del elemento 6:

```

MATRRIZ K6.
k =

    0.0556    0.1667   -0.0556    0.1667
    0.1667    0.6667   -0.1667    0.3333
   -0.0556   -0.1667    0.0556   -0.1667
    0.1667    0.3333   -0.1667    0.6667
    
```

Luego de obtener la matriz de rigidez global de cada elemento, el programa ensambla tales matrices y nos arrojará la matriz de rigidez global de toda la estructura:

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

```

----- MATRIZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA -----
KT =

Columns 1 through 7

  0.6667    0.3333         0         0         0    -0.1667    0.1667
  0.3333    1.4667         0         0         0    -0.1667   -0.0733
         0         0    1.4667    0.3333         0         0         0
         0         0    0.3333    2.0000    0.6667         0         0
         0         0         0    0.6667    1.3333         0         0
 -0.1667  -0.1667         0         0         0    0.0556   -0.0556
  0.1667  -0.0733         0         0         0   -0.0556    0.1516
         0    0.4000         0         0         0         0   -0.2400
         0    0.2400         0         0         0         0   -0.0960
         0         0    0.4000         0         0         0         0
         0         0   -0.2400         0         0         0         0
         0         0    0.0733   -0.1667         0         0         0
         0         0    0.1667   -0.5000   -0.6667         0         0
         0         0         0    0.6667    0.6667         0         0

Columns 8 through 14

         0         0         0         0         0         0         0
  0.4000    0.2400         0         0         0         0         0
         0         0    0.4000   -0.2400    0.0733    0.1667         0
         0         0         0         0   -0.1667   -0.5000    0.6667
         0         0         0         0         0   -0.6667    0.6667
         0         0         0         0         0         0         0
 -0.2400  -0.0960         0         0         0         0         0
  1.4667    0.0733    0.3333    0.1667         0         0         0
  0.0733    0.1516   -0.1667   -0.0556         0         0         0
  0.3333   -0.1667    1.4667   -0.0733    0.2400         0         0
  0.1667   -0.0556   -0.0733    0.1516   -0.0960         0         0
         0         0    0.2400   -0.0960    0.1516   -0.0556         0
         0         0         0         0   -0.0556    0.5000   -0.4444
         0         0         0         0         0   -0.4444    0.4444

```

8.-Capturamos el Vector de Fuerzas Conocidas:

DAME EL VECTOR DE FUERZAS CONOCIDAS=[8.8889;2.2223;4.375;-9.375;0.3333]

Se imprimirá el vector anterior:

```
v =
  8.8889
  2.2223
  4.3750
 -9.3750
  0.3333
```

Se imprimirá la submatriz K_{11} :

```
K =
  0.6667    0.3333         0         0         0
  0.3333    1.4667         0         0         0
         0         0    1.4667    0.3333         0
         0         0    0.3333    2.0000    0.6667
         0         0         0    0.6667    1.3333
```

El programa nos proporciona los valores de los desplazamientos desconocidos:

```
d1 =
  14.1880
  -1.7093
   4.4881
  -6.6226
   3.5613
```

Se imprime el vector de desplazamientos conocidos:

```
d2 =
  0
  0
  0
  0
  0
  0
  0
  0
  0
  0
```

Se imprime el vector total de desplazamientos:

```
ans =  
  
VECTOR TOTAL DE DESPLAZAMIENTOS  
  
D =  
  
14.1880  
-1.7093  
4.4881  
-6.6226  
3.5613  
0  
0  
0  
0  
0  
0  
0  
0  
0  
0
```

Se imprime el vector total de fuerzas, es decir, aquel vector que contiene al vector de fuerzas conocidas y al vector de fuerzas desconocidas:

```
ans =  
  
VECTOR TOTAL DE FUERZAS  
  
F =  
  
8.8889  
2.2223  
4.3750  
-9.3750  
0.3333  
-2.0798  
2.4900  
-0.6837  
-0.4102  
1.7952  
-1.0771  
1.4329  
1.6851  
-2.0409
```

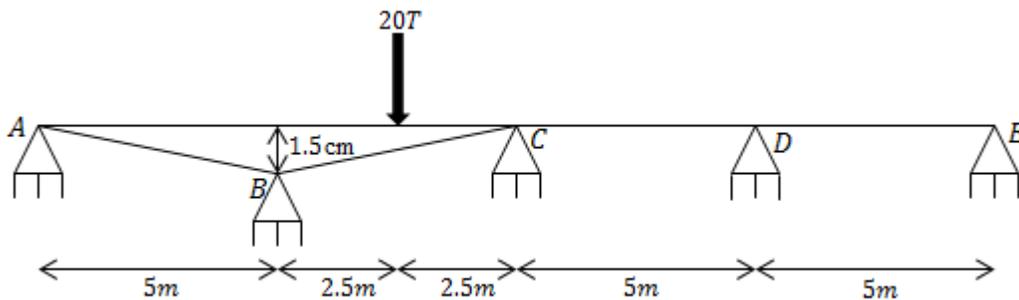
3.- Use el método de la rigidez matricial para calcular las reacciones de la viga hiperestática continua que se muestra en la ilustración y cuyo apoyo B sufre un asentamiento de 1.5cm.

Datos:

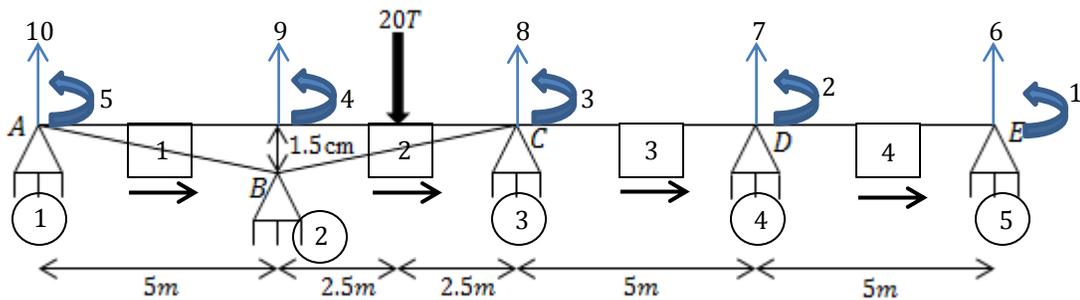
$$E = 2 * 10^7 T/m^2$$

$$I = 0.00171m^4$$

$$EI = 3.42 * 10^4 T - m^2$$

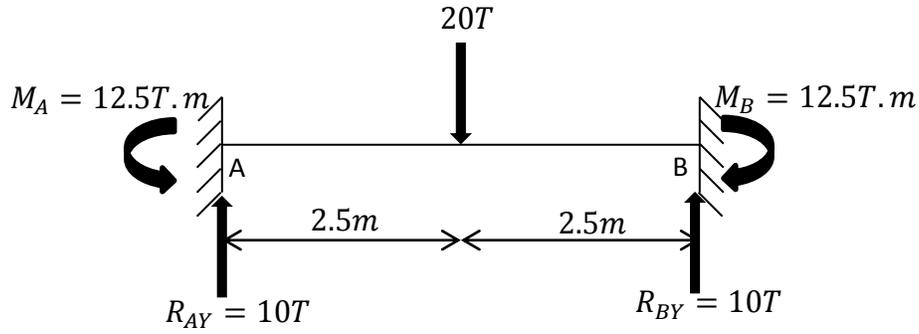


Codificación o Notación:



Luego, deben empotrarse doblemente todos los elementos.

Note que sólo el elemento 2 está cargado y las reacciones de tal viga empotrada doblemente se calculan a continuación:



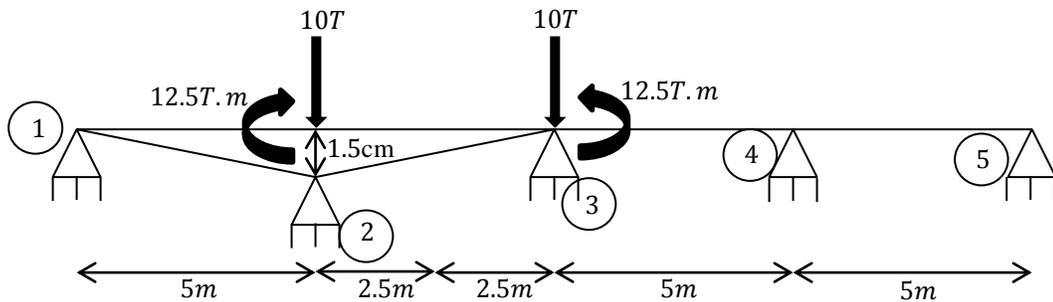
$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{P}{2} = \frac{20T}{2} = 10T \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{PL}{8} = \frac{20T \cdot 5m}{8} = 12.5 T \cdot m \curvearrowright$$

Respectivamente

Estas reacciones se invierten y dan origen a las acciones en los nodos.

Las acciones totales en cada nodo de la estructura son:



Vector de Fuerzas:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 12.5 & 3 \\ -12.5 & 4 \\ 0 & 5 \\ R_{EY} & 6 \\ R_{DY} & 7 \\ R_{CY} - 10 & 8 \\ R_{BY} - 10 & 9 \\ R_{AY} & 10 \end{pmatrix}$$

-Vector de Desplazamientos:

$$D = \begin{pmatrix} \theta_1 & 1 \\ \theta_2 & 2 \\ \theta_3 & 3 \\ \theta_4 & 4 \\ \theta_5 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 7 \\ 0 & 8 \\ -0.015 & 9 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Matriz de Rigidez Global por Elemento:

Elemento 1:

$$k_1 = 3.42 * 10^4 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 10 & 5 & 9 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0960 & 0.2400 & -0.0960 & 0.2400 \\ 0.2400 & 0.8000 & -0.2400 & 0.4000 \\ -0.0960 & -0.2400 & 0.0960 & -0.2400 \\ 0.2400 & 0.4000 & -0.2400 & 0.8000 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 10 \\ 5 \\ 9 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Elemento 2:

$$k_2 = 3.42 * 10^4 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 9 & 4 & 8 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0960 & 0.2400 & -0.0960 & 0.2400 \\ 0.2400 & 0.8000 & -0.2400 & 0.4000 \\ -0.0960 & -0.2400 & 0.0960 & -0.2400 \\ 0.2400 & 0.4000 & -0.2400 & 0.8000 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 9 \\ 4 \\ 8 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

Elemento 3:

$$k_3 = 3.42 * 10^4 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 8 & 3 & 7 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0960 & 0.2400 & -0.0960 & 0.2400 \\ 0.2400 & 0.8000 & -0.2400 & 0.4000 \\ -0.0960 & -0.2400 & 0.0960 & -0.2400 \\ 0.2400 & 0.4000 & -0.2400 & 0.8000 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 8 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

Elemento 4:

$$k_4 = 3.42 * 10^4 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 2 & 6 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0.0960 & 0.2400 & -0.0960 & 0.2400 \end{matrix} & \begin{matrix} 7 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0.2400 & 0.8000 & -0.2400 & 0.4000 \\ -0.0960 & -0.2400 & 0.0960 & -0.2400 \\ 0.2400 & 0.4000 & -0.2400 & 0.8000 \end{matrix} \end{matrix}$$

La matriz global de toda la estructura se puede obtener sumando o ensamblando las matrices anteriores.

$$K_T = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$$

MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA:

$$K_T = 3.42 * 10^4 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0.8000 & 0.4000 & 0 & 0 & 0 & -0.2400 & 0.2400 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4000 & 1.6000 & 0.4000 & 0 & 0 & -0.2400 & 0 & 0.2400 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4000 & 1.6000 & 0.4000 & 0 & 0 & -0.2400 & 0 & 0.2400 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4000 & 1.6000 & 0.4000 & 0 & 0 & 0 & -0.2400 & 0.2400 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4000 & 0.8000 & 0 & 0 & 0 & -0.2400 & 0.2400 \\ -0.2400 & -0.2400 & 0 & 0 & 0 & 0.0960 & -0.0960 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2400 & 0 & -0.2400 & 0 & 0 & -0.0960 & 0.1920 & -0.0960 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2400 & 0 & -0.2400 & 0 & 0 & -0.0960 & 0.1920 & -0.0960 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2400 & 0 & -0.2400 & 0 & 0 & -0.0960 & 0.1920 & -0.0960 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2400 & 0.2400 & 0 & 0 & 0 & -0.0960 & 0.0960 \end{matrix} \end{matrix}$$

La matriz de rigidez se subdividió de la siguiente forma:

$$K_T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

De $F = K_T * D$ extraemos los siguientes subsistemas:

Subsistema 1:

$$F_K = K_{11}D_U + K_{12}D_K$$

$$D_U = K_{11}^{-1}(F_K - K_{12}D_K)$$

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3.42 * 10^4} * \begin{pmatrix} 0.8000 & 0.4000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4000 & 1.6000 & 0.4000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4000 & 1.6000 & 0.4000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4000 & 1.6000 & 0.4000 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4000 & 0.8000 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$* \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12.5 \\ -12.5 \\ 0 \end{pmatrix} - (3.42 * 10^4) * \begin{pmatrix} -0.2400 & 0.2400 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2400 & 0 & 0.2400 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2400 & 0 & 0.2400 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2400 & 0 & 0.2400 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2400 & 0.2400 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.015 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00037rad \\ -0.000741rad \\ 0.002593rad \\ 0.000284rad \\ -0.004642rad \end{pmatrix}$$

Subsistema 2:

$$F_U = K_{21}D_U + K_{22}D_K$$

$$\begin{pmatrix} R_{EY} \\ R_{DY} \\ R_{CY} - 10 \\ R_{BY} - 10 \\ R_{AY} \end{pmatrix} = (3.42 * 10^4) \begin{pmatrix} -0.2400 & -0.2400 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2400 & 0 & -0.2400 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2400 & 0 & -0.2400 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2400 & 0 & -0.2400 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2400 & 0.2400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.00037 \\ -0.000741 \\ 0.002593 \\ 0.000284 \\ -0.004642 \end{pmatrix}$$

$$+ (3.42 * 10^4) \begin{pmatrix} 0.0960 & 0.0960 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0960 & 0.1920 & -0.0960 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0960 & 0.1920 & -0.0960 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0960 & 0.1920 & -0.0960 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0960 & 0.0960 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.015 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{EY} \\ R_{DY} \\ R_{CY} - 10 \\ R_{BY} - 10 \\ R_{AY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.04007 \\ -18.2404 \\ 40.8377 \\ -39.1144 \\ 13.4771 \end{pmatrix}$$

De lo anterior:

$$R_{EY} = 3.04007 \quad \therefore \quad R_{EY} = 3.04007T \uparrow$$

$$R_{DY} = -18.2404 \quad \therefore \quad R_{DY} = 18.2404T \downarrow$$

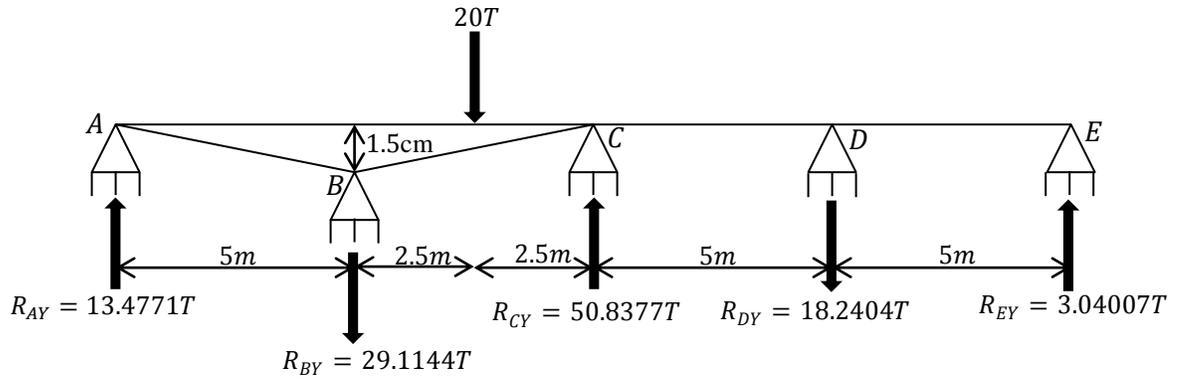
$$R_{CY} - 10 = 40.8377 \rightarrow R_{CY} = 40.8377 + 10 = 50.8377 \quad \therefore \quad R_{CY} = 50.8377T \uparrow$$

$$R_{BY} - 10 = -39.1144 \rightarrow R_{BY} = -39.1144 + 10 = -29.1144 \quad \therefore \quad R_{BY} = 29.1144T \downarrow$$

$$R_{AY} = 13.4771 \quad \therefore \quad R_{AY} = 13.4771T \uparrow$$

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

En el siguiente diagrama pueden ser visualizados los valores de las reacciones en los soportes de la viga continua hiperestática cuyo apoyo B se asienta 1.5cm



4.4. ANÁLISIS DE MARCOS PLANOS CON EL USO DEL MÉTODO DE LA RIGIDEZ

1.- Para el marco de dos miembros que se muestra en la figura, calcular las reacciones en los empotres y deducir las ecuaciones de momento, cortante y normal; dibujar los tres diagramas.

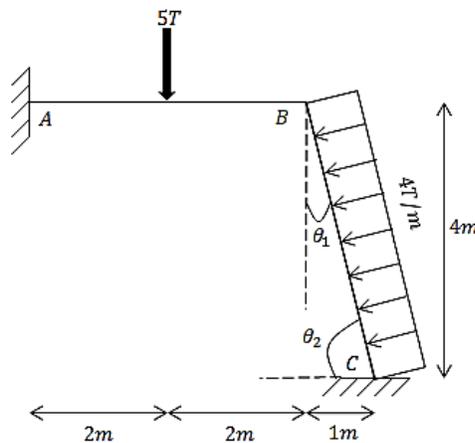
La columna que esta inclinada recibe una carga uniformemente repartida en dirección perpendicular de 4 T/m .

Datos:

-Módulo de Elasticidad: el del Concreto

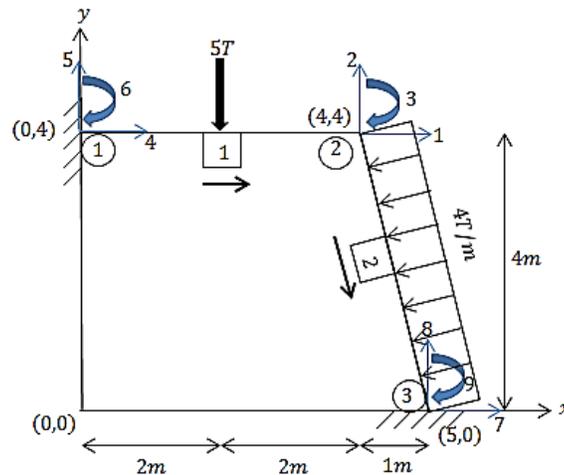
- $f'c=250\text{kg/cm}^2$

-Sección transversal: Rectangular, de base (b)=20cm y altura (h)=30cm

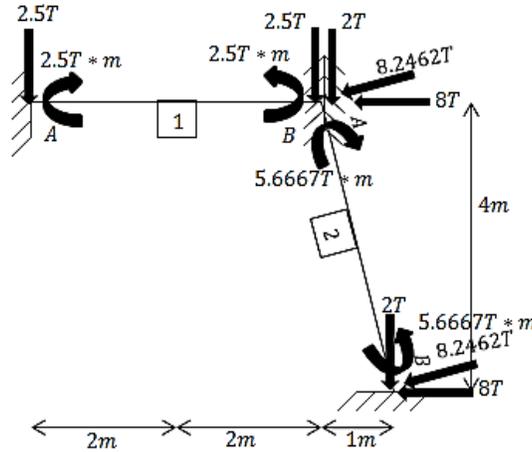


SOLUCIÓN:

.Codificación:

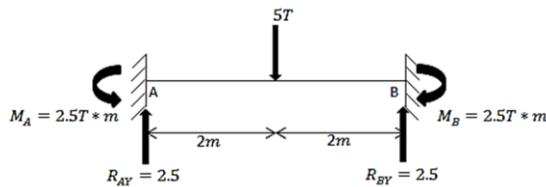


Empotrando doblemente los miembros, las acciones o cargas en lo nodos son:



Las acciones fueron obtenidas a partir de invertir las reacciones que a continuación se calculan en los miembros doblemente empotrados:

Miembro 1:



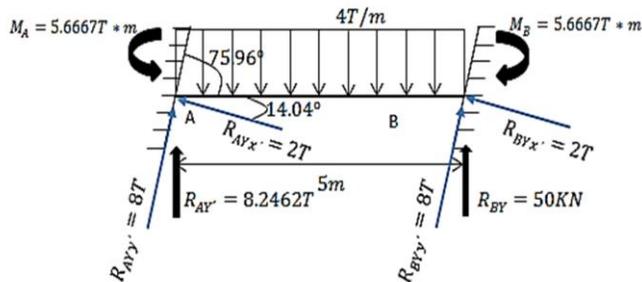
$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{P}{2} = \frac{5}{2} = 2.5 T \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{PL}{8} = \frac{5 \cdot 4}{8} = 2.5 T \cdot m \curvearrowright$$

Respectivamente

Miembro 2 (rotado para mayor facilidad):

La longitud (L) del miembro es:

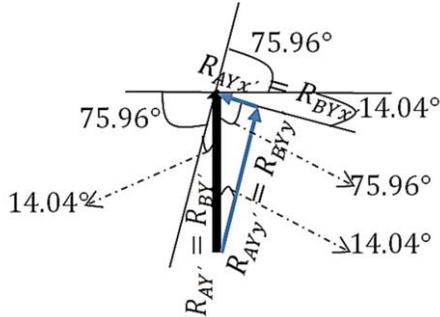


$$L = \sqrt{4^2 + 1^2} = 4.1231m$$

Las fuerzas perpendiculares al miembro que reaccionan en él se obtienen de:

$$R_{AY'} = R_{BY'} = \frac{WL}{2} = \frac{(4)(4.1231)}{2} = 8.2462 T \uparrow$$

Pero nosotros necesitamos las reacciones que van en dirección al empotre y en dirección normal al mismo:



$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{4}{1} = 75.96^\circ$$

Las componentes rectangulares apropiadas son:

$$R_{AYx'} = R_{BYx'} = 8.2462 * \cos(75.96^\circ) = 2T$$

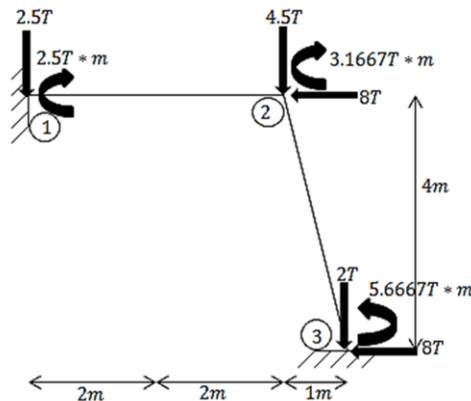
$$R_{AYy'} = R_{BYy'} = 8.2462 * \sin(75.96^\circ) = 8T$$

Los momentos no cambian en comparación a los deducidos en las fuerzas de empotramiento perfecto a pesar del ángulo que forman los empotres con el miembro:

$$M_A = M_B = \frac{WL^2}{12} = \frac{(4)(4.1231^2)}{12} = 5.6667 T \cdot m \quad \curvearrowright \curvearrowleft$$

Respectivamente

Las acciones totales en cada nodo del marco son:



Además:

$$A = (0.2m)(0.3m) = 0.06m^2$$

$$E = 14000\sqrt{250} = 221359.4362 \text{ kg/cm}^2 = 2213594.362 \text{ T/m}^2$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0.2m)(0.3m)^3}{12} = 0.00045m^4$$

-Vector de Fuerzas:

$$F = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -4.5 & 2 \\ -3.1667 & 3 \\ \hline F_4 & 4 \\ F_5 & 5 \\ F_6 & 6 \\ F_7 & 7 \\ F_8 & 8 \\ F_9 & 9 \end{pmatrix}$$

-Vector de Desplazamientos:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 1 \\ D_2 & 2 \\ \theta_3 & 3 \\ \hline 0 & 4 \\ 0 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 7 \\ 0 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Cosenos directores por miembro:

Miembro 1:

$$\text{Longitud}(L) = 4m$$

$$\lambda_x = \frac{4 - 0}{4} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{4 - 4}{4} = 0$$

Miembro 2:

$$Longitud(L) = 4.1231 \text{ m}$$

$$\lambda_x = \frac{5 - 4}{4.1231} = 0.2425$$

$$\lambda_y = \frac{0 - 4}{4.1231} = -0.9701$$

Matriz de rigidez global por miembro:

Miembro 1:

$$k_1 = 10^4 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3.3204 & 0 & 0 & -3.3204 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0187 & 0.0374 & 0 & -0.0187 & 0.0374 \\ 0 & 0.0374 & 0.0996 & 0 & -0.0374 & 0.0498 \\ -3.3204 & 0 & 0 & 3.3204 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0187 & -0.0374 & 0 & 0.0187 & -0.0374 \\ 0 & 0.0374 & 0.0498 & 0 & -0.0374 & 0.0996 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

Miembro 2:

$$k_2 = 10^4 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2055 & -0.7538 & 0.0341 & -0.2055 & 0.7538 & 0.0341 \\ -0.7538 & 3.0325 & 0.0085 & 0.7538 & -3.0325 & 0.0085 \\ 0.0341 & 0.0085 & 0.0966 & -0.0341 & -0.0085 & 0.0483 \\ -0.2055 & 0.7538 & -0.0341 & 0.2055 & -0.7538 & -0.0341 \\ 0.7538 & -3.0325 & -0.0085 & -0.7538 & 3.0325 & -0.0085 \\ 0.0341 & 0.0085 & 0.0483 & -0.0341 & -0.0085 & 0.0966 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{matrix}$$

MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA

$$K_T = 10^4 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3.5259 & -0.7538 & 0.0341 & -3.3204 & 0 & 0 & -0.2055 & 0.7538 & 0.0341 \\ -0.7538 & 5.0512 & -0.0288 & 0 & -0.0187 & -0.0374 & 0.7538 & -3.0325 & 0.0085 \\ 0.0341 & -0.0288 & 0.1962 & 0 & 0.0374 & 0.0498 & -0.0341 & -0.0085 & 0.0483 \\ -3.3204 & 0 & 0 & 3.3204 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0187 & 0.0374 & 0 & 0.0187 & 0.0374 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0374 & 0.0498 & 0 & 0.0374 & 0.0996 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2055 & 0.7538 & -0.0341 & 0 & 0 & 0 & 0.2055 & -0.7538 & -0.3412 \\ 0.7538 & -3.0325 & -0.0085 & 0 & 0 & 0 & 0.7538 & 3.0325 & -0.0085 \\ 0.0341 & 0.0085 & 0.0483 & 0 & 0 & 0 & 0.0341 & -0.0085 & 0.0966 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{matrix}$$

La matriz de rigidez se subdividió de la siguiente forma:

$$K_T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

De $F = K_T * D$ extraemos los siguientes subsistemas:

Subsistema 1:

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -4.5 \\ 3.1667 \end{pmatrix} = (K_{11}) \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Despejando las incógnitas:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = (K_{11})^{-1} * \begin{pmatrix} -8 \\ -4.5 \\ 3.1667 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0003 \text{ m} \\ -0.0020 \text{ m} \\ -0.0016 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

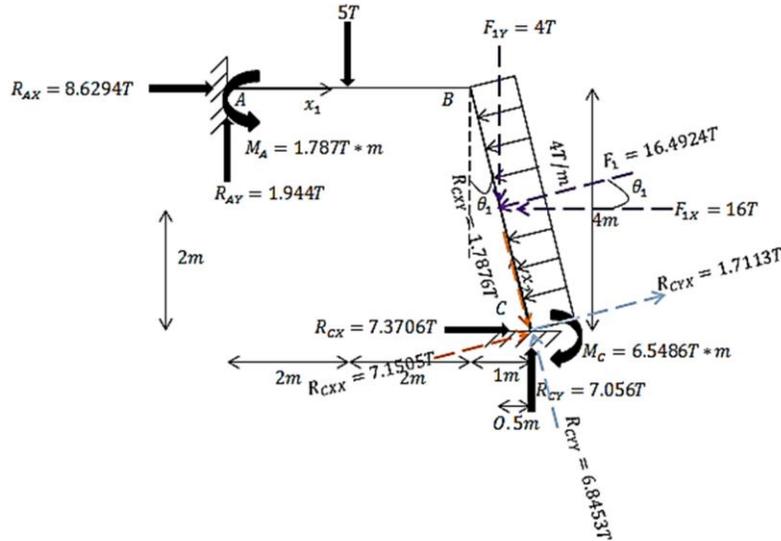
Subsistema 2:

$$\begin{pmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{pmatrix} = (K_{21}) \begin{pmatrix} -0.0003 \\ -0.002 \\ -0.0016 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.6294 \\ -0.5560 \\ -0.7130 \\ -0.6294 \\ 5.0560 \\ -0.8819 \end{pmatrix}$$

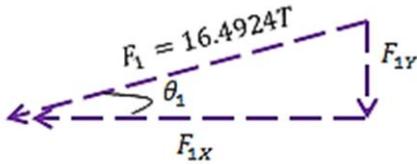
Cálculo de las reacciones:

$$\begin{aligned} F_4 &= R_{AX} = 8.6294T \rightarrow \\ F_5 &= R_{AY} - 2.5 \rightarrow R_{AY} = F_5 + 2.5 = -0.5560 + 2.5 = 1.944T \uparrow \\ F_6 &= M_A - 2.5 \rightarrow M_A = F_6 + 2.5 = -0.7130 + 2.5 = 1.787T.m \curvearrowright \\ F_7 &= R_{CX} - 8 \rightarrow R_{CX} = F_7 + 8 = -0.6294 + 8 = 7.3706T \rightarrow \\ F_8 &= R_{CY} - 2 \rightarrow R_{CY} = F_8 + 2 = 5.0560 + 2 = 7.0560T \uparrow \\ F_9 &= M_C + 5.6667 \rightarrow M_C = F_9 - 5.6667 = -6.5486T.m = 6.5486T.m \curvearrowright \end{aligned}$$

El siguiente diagrama muestra las reacciones en los empotres marco:



Componentes rectangulares de
 $F_1 = 16.4924T$



$$F_{1Y} = F * \sin\theta_1 = 16.4924T \left(\frac{1}{\sqrt{17}} \right) = 4T$$

$$F_{1X} = F * \cos\theta_1 = 16.4924T \left(\frac{4}{\sqrt{17}} \right) = 16T$$

Demostramos el equilibrio de la estructura haciendo uso de fuerzas externas:

$$\sum FX = 0$$

$$8.6294 - 16 + 7.3706 = 0 \quad OK$$

$$\sum FY = 0$$

$$1.944 - 5 - 4 + 7.056 = 0 \quad OK$$

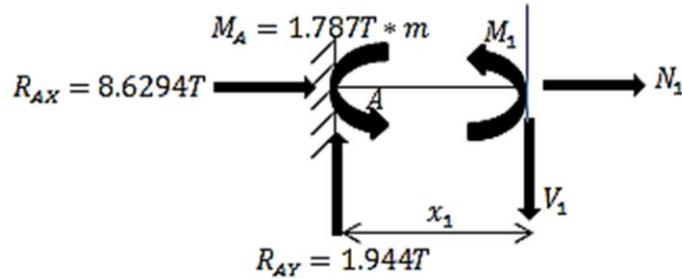
$$\sum MA = 0$$

$$-1.787 + 5(2) - 7.3706(4) - 7.056(5) + 6.5486 + 16(2) + 4(4.5) \cong 0 \quad OK$$

Ecuaciones de momento, cortante y normal del marco original:

Miembro AB

$$0 \leq x_1 \leq 2m$$



$$\sum M \text{ corte} = 0$$

$$M_1 = 1.944x_1 - 1.787$$

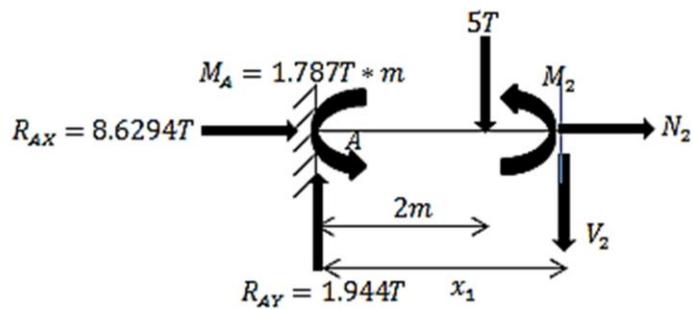
$$x_1 = 2, M_1 = 2.101$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = 1.944$$

$$\sum FX = 0$$

$$N_1 = -8.6294$$

$$2m \leq x_1 \leq 4m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = 1.944x_1 - 5(x_1 - 2) - 1.787 = -3.056x_1 + 8.213$$

$$x_1 = 2, M_2 = 2.101; x_1 = 4, M_2 = -4.011$$

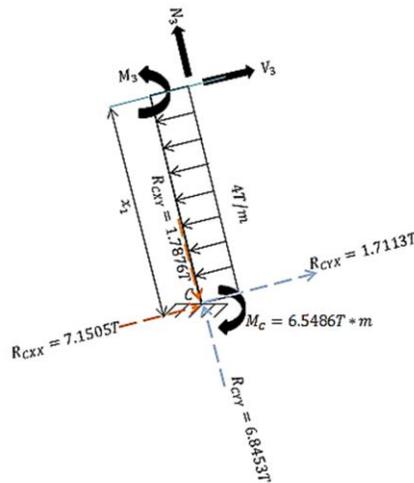
$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_1} = -3.056$$

$$\sum FX = 0$$

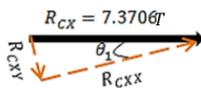
$$N_2 = -8.6294$$

Miembro CB

$$0 \leq x_2 \leq \sqrt{17}m$$



Componentes rectangulares



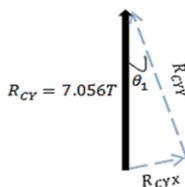
- Para $R_{CX} = 7.3706T$

$$R_{CXX} = R_{CX} * \cos\theta_1 = 7.3706T \left(\frac{4}{\sqrt{17}} \right) = 7.1505T$$

$$R_{CXY} = R_{CX} * \sin\theta_1 = 7.3706T \left(\frac{1}{\sqrt{17}} \right) = 1.7876T$$

- Para $R_{CY} = 7.056T$

$$R_{CYY} = R_{CY} * \cos\theta_1 = 7.056T \left(\frac{4}{\sqrt{17}} \right) = 6.8453T$$



$$R_{CYX} = R_{CY} * \sin\theta_1 = 7.056T \left(\frac{1}{\sqrt{17}} \right) = 1.7113T$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = 6.5486 - (1.7113 + 7.1505)(x_2) + 4x_2 \left(\frac{x_2}{2} \right) = 2x_2^2 - 8.8618x_2 + 6.5486$$

$$x_2 = \sqrt{17}, M_3 = 4.01$$

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx_2} = 4x_2 - 8.8618$$

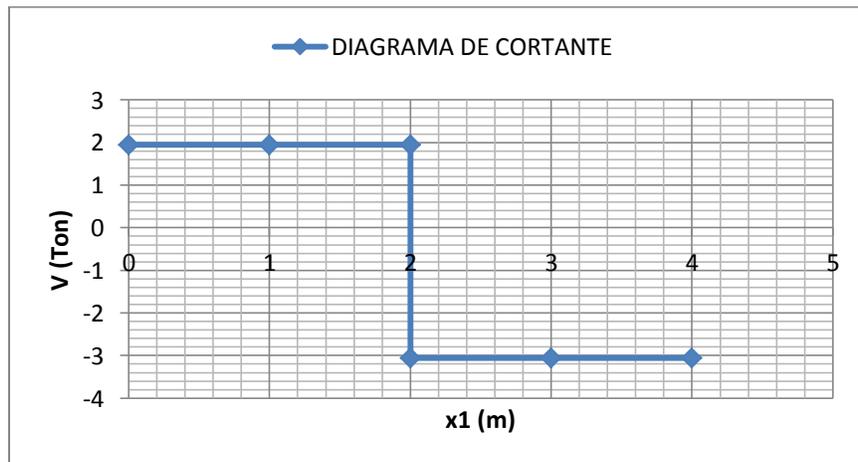
$$\sum FY = 0$$

$$N_3 = 1.7876 - 6.8453 = -5.0577$$

DIAGRAMA DE CORTANTE:

MIEMBRO AB:

x1 (m)	V (Ton)
0	1.944
1	1.944
2	1.944
2	-3.056
3	-3.056
4	-3.056



MIEMBRO CB (ROTADO):

x2 (m)	V (Ton)
0	-8.8618
1.03077641	-4.73869438
2.06155281	-0.61558875
3.09232922	3.50751688
4.12310563	7.6306225

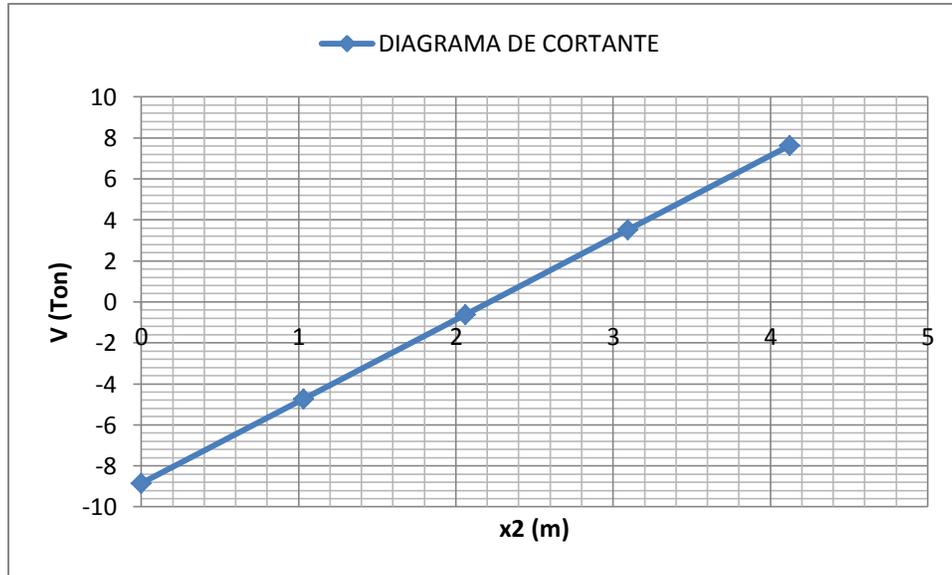
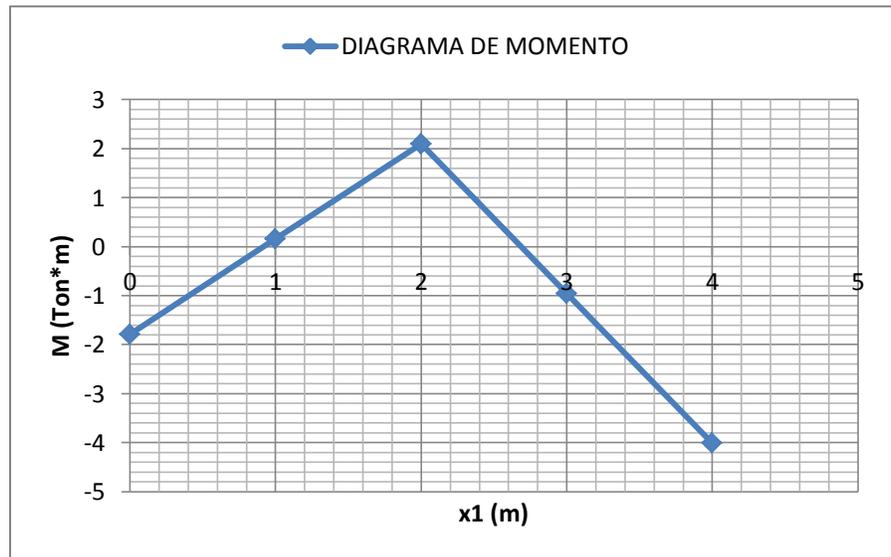


DIAGRAMA DE MOMENTO:

MIEMBRO AB:

x1 (m)	M (Ton*m)
0	-1.787
1	0.157
2	2.101
2	2.101
3	-0.955
4	-4.011



MIEMBRO CB (ROTADO):

x2 (m)	M (Ton*m)
0	6.5486
1.03077641	-0.46093436
2.06155281	-3.22046872
3.09232922	-1.73000308
4.12310563	4.01046257

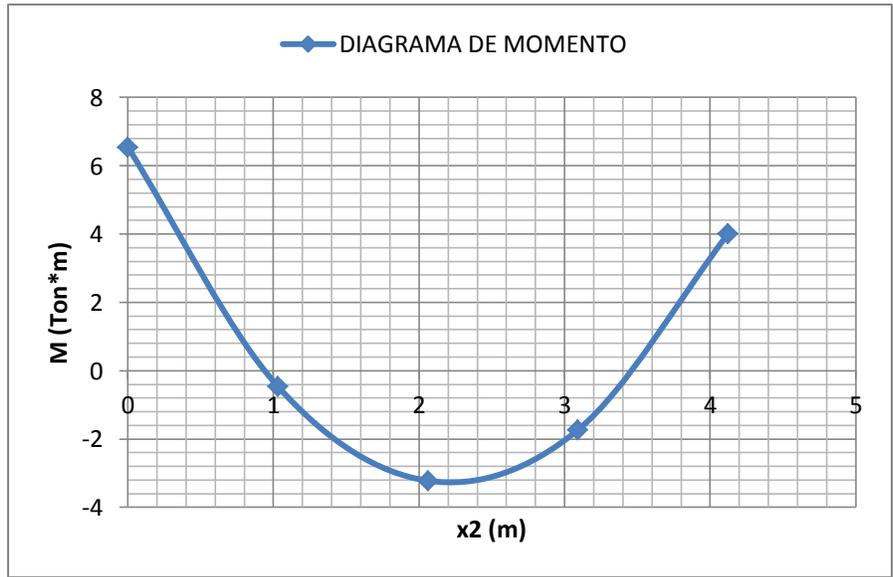
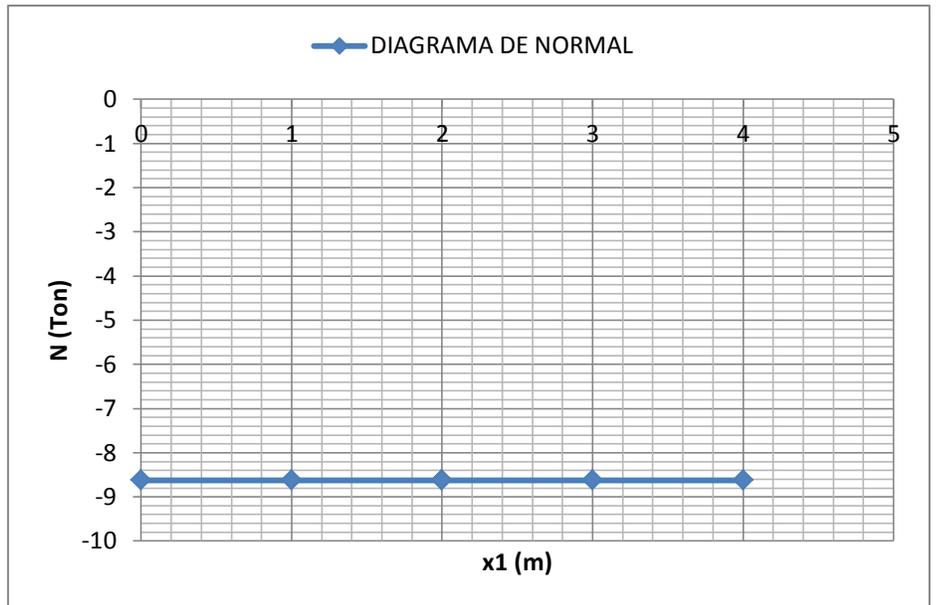


DIAGRAMA DE NORMAL:

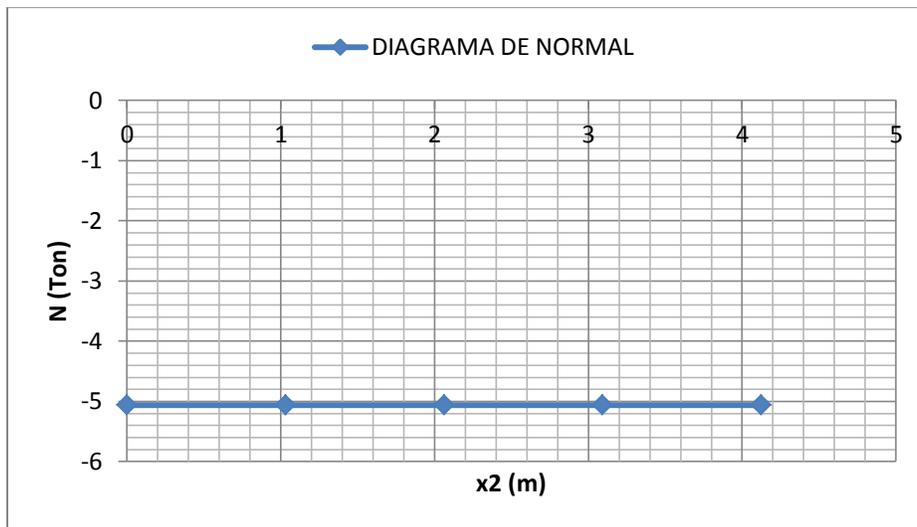
MIEMBRO AB:

x1 (m)	N (Ton)
0	-8.6294
1	-8.6294
2	-8.6294
2	-8.6294
3	-8.6294
4	-8.6294



MIEMBRO CB (ROTADO):

x2 (m)	N (Ton)
0	-5.0577
1.03077641	-5.0577
2.06155281	-5.0577
3.09232922	-5.0577
4.12310563	-5.0577



A continuación se muestra la forma de usar el programa 4.2.2 tomando como ejemplo el problema anterior.

Una vez que se corra el programa:

2. Insertamos los siguientes datos de la estructura real:

```

Command Window
----- DATOS PARA EL ANALISIS -----
DAME EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD GL =9
DAME EL NUMERO DE MIEMBROS DEL MARCO n =2
-----
    
```

2.- Digitamos para cada miembro los cosenos directores, los valores de E, I, A que nos proporcionen en el problema, su longitud y el número designado a los grados de libertad tanto del extremo cercano como alejado en la sección de codificación.

-Para el miembro 1:

```

MIEMBRO 1.

DAME EL VALOR DE Lx = 1
DAME EL VALOR DE Ly = 0
DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD = 2213594.362
DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = 0.06
DAME LA INERCIA DE LA SECCIÓN = 0.00045
DAME LA LONGITUD DEL MIEMBRO = 4
-----
NODO N-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nx=4
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=5
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nz=6
-----
NODO F-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fx=1
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=2
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fz=3
-----
    
```

En automático aparecerá la matriz de rigidez global del miembro 1:

```

MATRRIZ K1.
k =

1.0e+004 *

  3.3204      0      0   -3.3204      0      0
    0    0.0187    0.0374      0   -0.0187    0.0374
    0    0.0374    0.0996      0   -0.0374    0.0498
 -3.3204      0      0    3.3204      0      0
    0   -0.0187   -0.0374      0    0.0187   -0.0374
    0    0.0374    0.0498      0   -0.0374    0.0996
-----
    
```

- Para el miembro 2:

MIEMBRO 2.

DAME EL VALOR DE $L_x = 0.2425$
 DAME EL VALOR DE $L_y = -0.9701$
 DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD = 2213594.362
 DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = 0.06
 DAME LA INERCIA DE LA SECCIÓN = 0.00045
 DAME LA LONGITUD DEL MIEMBRO = 4.1231

NODO N-----

DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD $N_x=1$
 DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD $N_y=2$
 DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD $N_z=3$

NODO F-----

DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD $F_x=7$
 DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD $F_y=8$
 DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD $F_z=9$

En seguida aparecerá la matriz de rigidez global del miembro 2:

MATRRIZ K2.

k =

1.0e+004 *

0.2055	-0.7538	0.0341	-0.2055	0.7538	0.0341
-0.7538	3.0325	0.0085	0.7538	-3.0325	0.0085
0.0341	0.0085	0.0966	-0.0341	-0.0085	0.0483
-0.2055	0.7538	-0.0341	0.2055	-0.7538	-0.0341
0.7538	-3.0325	-0.0085	-0.7538	3.0325	-0.0085
0.0341	0.0085	0.0483	-0.0341	-0.0085	0.0966

Luego de obtener la matriz de rigidez global de cada miembro, el programa ensambla tales matrices y nos arrojará la matriz de rigidez global de toda la estructura:

```

----- MATRIZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA -----
KT =
1.0e+004 *
Columns 1 through 7
3.5259 -0.7538 0.0341 -3.3204 0 0 -0.2055
-0.7538 3.0512 -0.0288 0 -0.0187 -0.0374 0.7538
0.0341 -0.0288 0.1962 0 0.0374 0.0498 -0.0341
-3.3204 0 0 3.3204 0 0 0
0 -0.0187 0.0374 0 0.0187 0.0374 0
0 -0.0374 0.0498 0 0.0374 0.0996 0
-0.2055 0.7538 -0.0341 0 0 0 0.2055
0.7538 -3.0325 -0.0085 0 0 0 -0.7538
0.0341 0.0085 0.0483 0 0 0 -0.0341
Columns 8 through 9
0.7538 0.0341
-3.0325 0.0085
-0.0085 0.0483
0 0
0 0
0 0
-0.7538 -0.0341
3.0325 -0.0085
-0.0085 0.0966
-----

```

3.-Capturamos el Vector de Fuerzas Conocidas:

```
DAME EL VECTOR DE FUERZAS CONOCIDAS=[-8;-4.5;-3.1667]
```

Se imprimirá el vector anterior:

```
v =
-8.0000
-4.5000
-3.1667
```

Se imprimirá la submatriz K_{11} :

```
K =
1.0e+004 *
3.5259 -0.7538 0.0341
-0.7538 3.0512 -0.0288
0.0341 -0.0288 0.1962
```

El programa nos proporciona los valores de los desplazamientos desconocidos:

```
d1 =
-0.0003
-0.0002
-0.0016
```

Se imprime el vector de desplazamientos conocidos:

```
d2 =
0
0
0
0
0
0
0
```

Se imprime el vector total de desplazamientos:

```
VECTOR TOTAL DE DESPLAZAMIENTOS
D =
-0.0003
-0.0002
-0.0016
0
0
0
0
0
0
0
```

Se imprime el vector total de fuerzas, es decir, aquel vector que contiene al vector de fuerzas conocidas y al vector de fuerzas desconocidas:

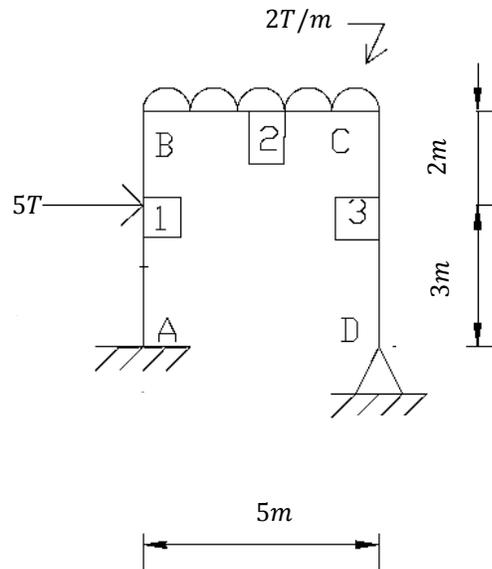
```
ans =  
  
VECTOR TOTAL DE FUERZAS  
  
F =  
  
-8.0000  
-4.5000  
-3.1667  
8.6294  
-0.5560  
-0.7130  
-0.6294  
5.0560  
-0.8819
```

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

2.- Encontrar las reacciones en los apoyos del siguiente marco utilizando el método de la rigidez. Dibujar el diagrama de momento, cortante y normal para toda la estructura.

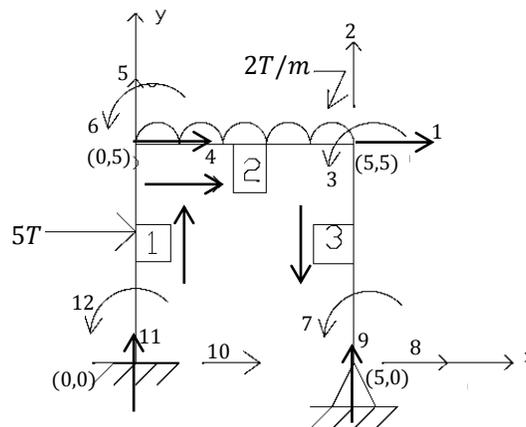
Datos:

- Módulo de Elasticidad $(E)=2.1 \cdot 10^6 \text{ T/m}^2$, que corresponde a las Maderas duras.
- Sección Transversal rectangular de base $(b)= 30\text{cm}$, altura $(h)= 40\text{cm}$

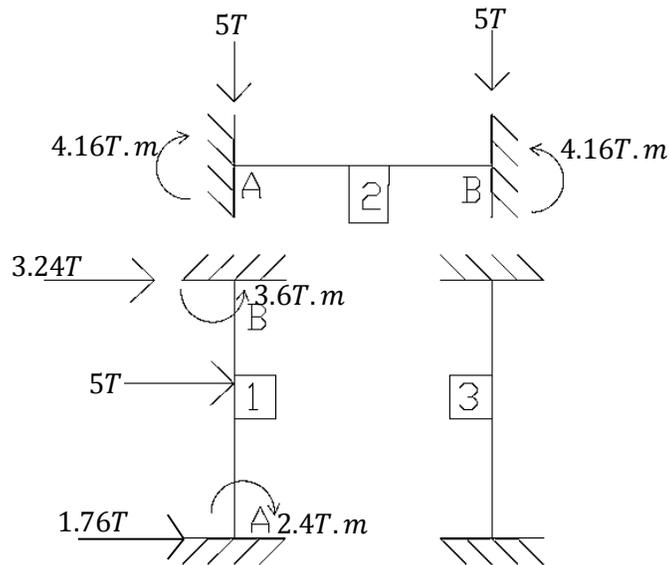


SOLUCIÓN:

Codificación:

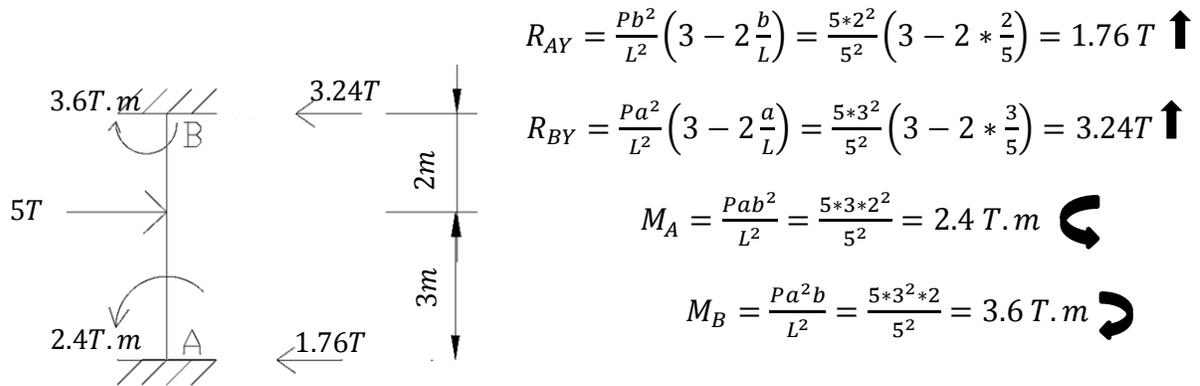


Empotrando doblemente los miembros, las acciones son:

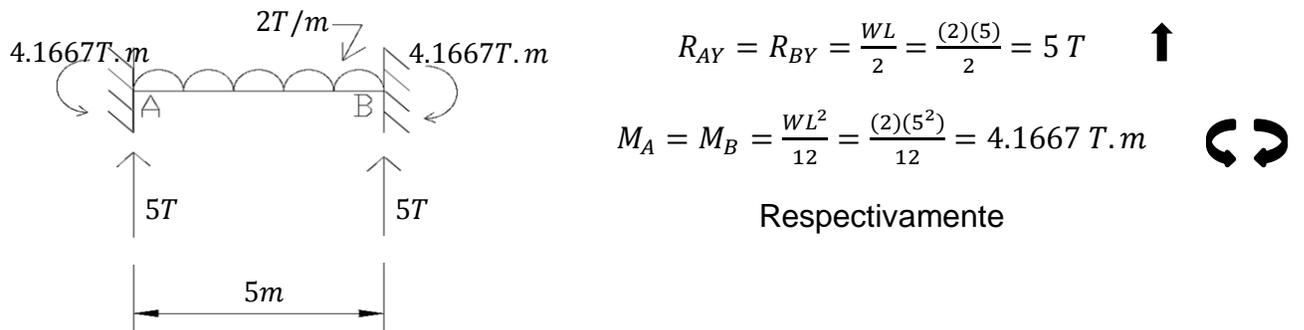


Las acciones fueron obtenidas a partir de invertir las reacciones que a continuación se calculan en los miembros doblemente empotrados:

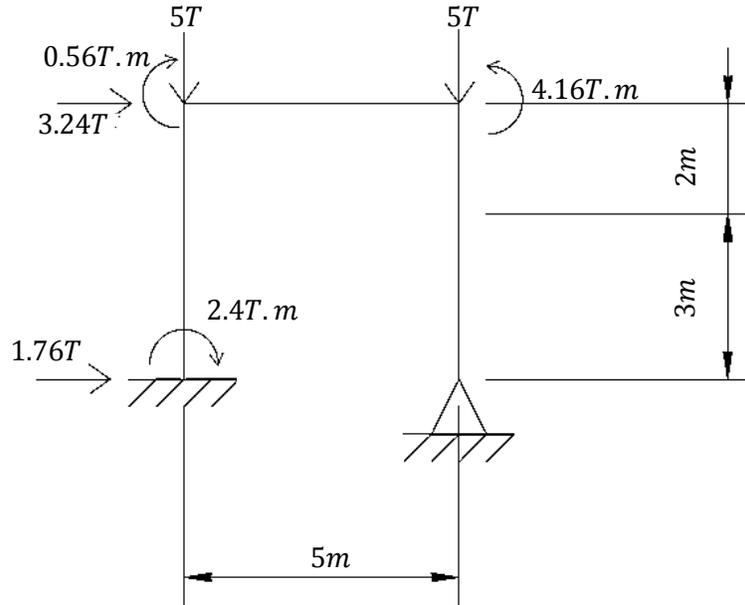
Miembro 1:



Miembro 2:



Las acciones totales en cada nodo del marco son:



Cálculos auxiliares:

-Cosenos directores por miembro:

Miembro 1:

$$Longitud(L) = 5m$$

$$\lambda_x = \frac{0 - 0}{5} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{5 - 0}{5} = 1$$

Miembro 2:

$$Longitud(L) = 5m$$

$$\lambda_x = \frac{5 - 0}{5} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{5 - 5}{5} = 0$$

Miembro 3:

$$\text{Longitud}(L) = 5m$$

$$\lambda_x = \frac{5 - 5}{5} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{5 - 0}{5} = 1$$

$$-\text{Área}(A) = (0.3m)(0.4m) = 0.12m^2$$

$$-\text{Inercia}(I) = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.3m * (0.4m)^3}{12} = 0.0016m^4$$

-Vector de Fuerzas:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \\ 4.16 & 3 \\ 3.24 & 4 \\ -5 & 5 \\ -0.56 & 6 \\ 0 & 7 \\ \hline F_8 & 8 \\ F_9 & 9 \\ F_{10} & 10 \\ F_{11} & 11 \\ F_{12} & 12 \end{pmatrix}$$

-Vector de Desplazamientos:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 1 \\ D_2 & 2 \\ \theta_3 & 3 \\ D_4 & 4 \\ D_5 & 5 \\ \theta_6 & 6 \\ \theta_7 & 7 \\ \hline 0 & 8 \\ 0 & 9 \\ 0 & 10 \\ 0 & 11 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Matriz de rigidez global por miembro

Miembro 1:

$$k_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 10 & 11 & 12 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 322.56 & 0 & -806.4 & -322.56 & 0 & -806.4 \\ 0 & 50400 & 0 & 0 & -50400 & 0 \\ -806.4 & 0 & 2688 & 806.4 & 0 & 1344 \\ -322.56 & 0 & 806.4 & 322.56 & 0 & 806.4 \\ 0 & -50400 & 0 & 0 & 50400 & 0 \\ -806.4 & 0 & 1344 & 806.4 & 0 & 2688 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Miembro 2:

$$k_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 50400 & 0 & 0 & -50400 & 0 & 0 \\ 0 & 322.56 & 806.4 & 0 & -322.56 & 806.4 \\ 0 & 806.4 & 2688 & 0 & -806.4 & 1344 \\ -50400 & 0 & 0 & 50400 & 0 & 0 \\ 0 & -322.56 & -806.4 & 0 & 322.56 & -806.4 \\ 0 & 806.4 & 1344 & 0 & -806.4 & 2688 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

Miembro 3:

$$k_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8 & 9 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 322.56 & 0 & -806.4 & -322.56 & 0 & -806.4 \\ 0 & 50400 & 0 & 0 & -50400 & 0 \\ -806.4 & 0 & 2688 & 806.4 & 0 & 1344 \\ -322.56 & 0 & 806.4 & 322.56 & 0 & 806.4 \\ 0 & -50400 & 0 & 0 & 50400 & 0 \\ -806.4 & 0 & 1344 & 806.4 & 0 & 2688 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA

$$K_T = \begin{pmatrix} 50722.56 & 0 & 806.4 & -50400 & 0 & 0 & 806.4 & -322.56 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 50722.56 & -806.4 & 0 & -322.56 & -806.4 & 0 & 0 & -50400 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 806.4 & -806.4 & 5376 & 0 & 806.4 & 1344 & 1344 & -806.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -50400 & 0 & 0 & 50722.56 & 0 & 806.4 & 0 & 0 & 0 & -322.56 & 0 & 806.4 & 4 \\ 0 & -322.56 & 806.4 & 0 & 50722.56 & 806.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -50400 & 0 & 5 \\ 0 & -806.4 & 1344 & 806.4 & 806.4 & 5376 & 0 & 0 & 0 & -806.4 & 0 & 1344 & 6 \\ \hline 806.4 & 0 & 1344 & 0 & 0 & -0.0497 & 2688 & -806.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ -322.56 & 0 & -806.4 & 0 & 0 & 0 & -806.4 & 322.56 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & -50400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50400 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -322.56 & 0 & -806.4 & 0 & 0 & 0 & 322.56 & 0 & -806.4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -50400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50400 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 806.4 & 0 & 1344 & 0 & 0 & 0 & -806.4 & 0 & 2688 & 12 \end{pmatrix}$$

La matriz de rigidez se subdividió de la siguiente forma:

$$K_T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

De $F = K_T * D$ extraemos los siguientes subsistemas:

Subsistema 1:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4.1667 \\ 3.24 \\ -5 \\ -0.56 \\ 0 \end{pmatrix} = (K_{11}) \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.011459 \text{ m} \\ -0.000123 \text{ m} \\ 0.000452 \text{ rad} \\ 0.011481 \text{ m} \\ -0.000076 \text{ m} \\ -0.001946 \text{ rad} \\ -0.003664 \text{ rad} \end{pmatrix}$$

Subsistema 2:

$$\begin{pmatrix} F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{pmatrix} = (K_{21}) \begin{pmatrix} 0.011459 \\ -0.000123 \\ 0.000452 \\ 0.011481 \\ -0.000076 \\ -0.001946 \\ -0.003664 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.097 \\ 6.1786 \\ -2.1425 \\ 3.8213 \\ 6.7 \end{pmatrix}$$

Calculo de las reacciones:

$$R_{DX} = F_8 = -1.097 = 1.097T \quad \leftarrow$$

$$R_{DY} = F_9 = 6.1786 = 6.1786T \quad \uparrow$$

$$R_{AX} = F_{10} - 1.76 = -2.1425 - 1.76 = -3.9025 = 3.9025T \quad \leftarrow$$

$$R_{AY} = F_{11} = 3.8213 = 3.8213T \quad \uparrow$$

$$M_A = F_{12} + 2.4 = 9.1 = 9.1T.m \quad \curvearrowright$$

Demostramos el equilibrio de la estructura haciendo uso de fuerzas externas:

$$\sum FX = 0$$

$$-1.097 - 3.9025 + 5 \cong 0$$

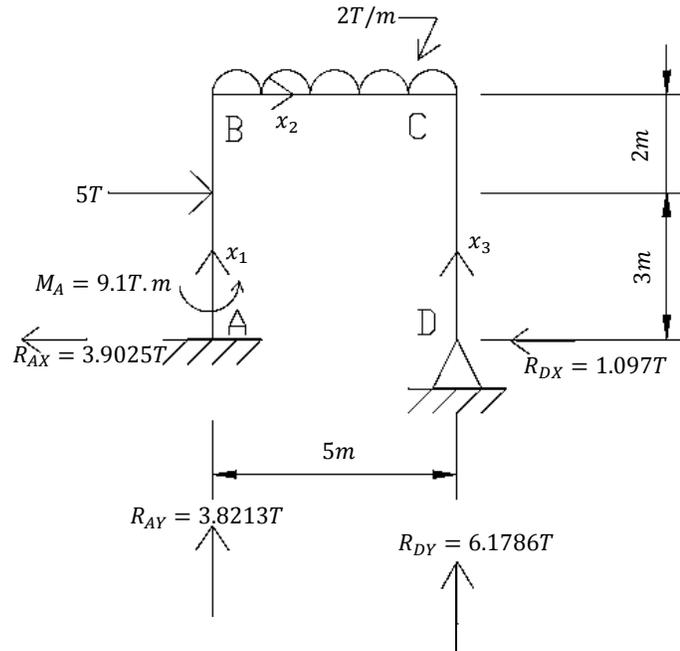
$$\sum FY = 0$$

$$6.1786 + 3.8213 - (5 * 2) \cong 0$$

$$\sum MA = 0$$

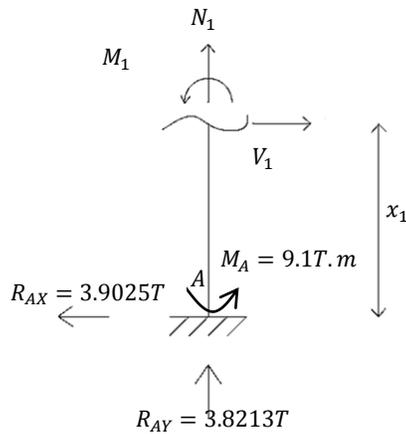
$$-9.1 + 5(3) + 10(2.5) - 6.1786(5) \cong 0$$

El siguiente diagrama muestra las reacciones en los soportes del marco



Ecuaciones de momento, cortante y normal de la estructura original

Miembro AB



$$0 \leq x_1 \leq 3m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 3.9025x_1 - 9.1$$

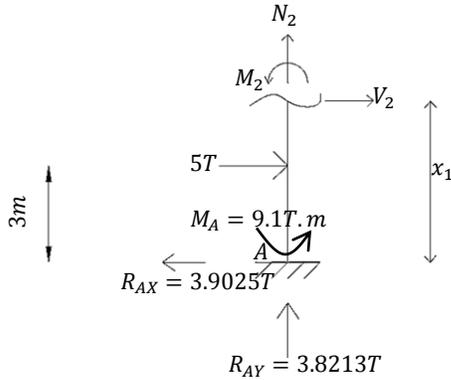
$$x_1 = 3, M_1 = 2.6075$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = 3.9025$$

$$\sum FY = 0$$

$$N_1 = -3.8213$$

$$3m \leq x_1 \leq 5m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = 3.9025x_1 - 9.1 - 5(x_1 - 3) = -1.0975x_1 + 5.9$$

$$x_1 = 3, M_2 = 2.6075; x_1 = 5, M_2 = 0.4125$$

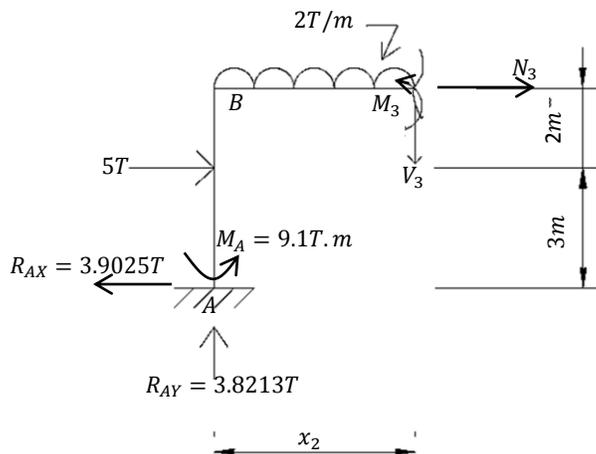
$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_1} = -1.0975$$

$$\sum FY = 0$$

$$N_2 = -3.8213$$

Miembro BC

$$0 \leq x_2 \leq 5m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = 3.9025 \cdot 5 - 9.1 - 5(2) - 2x_2 \left(\frac{x_2}{2}\right) + 3.8213x_2 = -x_2^2 + 3.8213x_2 + 0.4125$$

$$x_2 = 0, M_3 = 0.4125; x_2 = 5, M_3 = -5.481$$

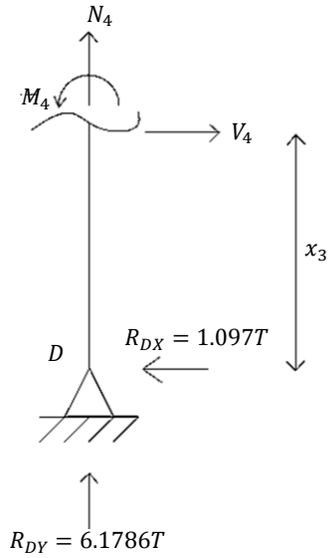
$$V_3 = \frac{dM_3}{dx_2} = -2x_2 + 3.8213$$

$$\sum FX = 0$$

$$-3.9025 + 5 + N_3 = 0 \rightarrow N_3 = -1.0975$$

Miembro DC

$$0 \leq x_3 \leq 5m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_4 = 1.097x_3$$

$$x_3 = 5, M_4 = 5.485$$

$$V_4 = \frac{dM_4}{dx_3} = 1.097$$

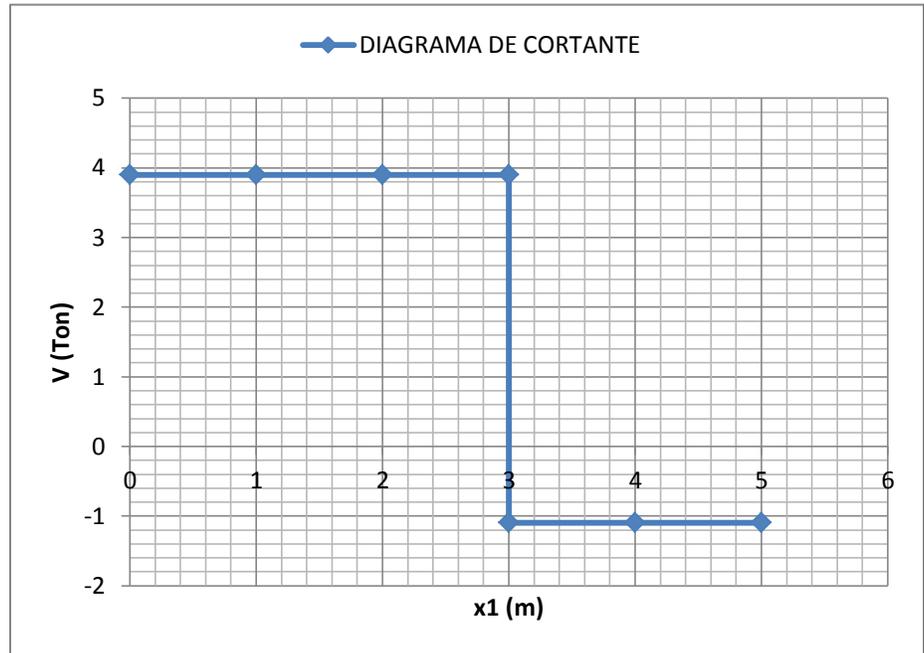
$$\sum FY = 0$$

$$N_4 = -6.1786$$

DIAGRAMA DE CORTANTE:

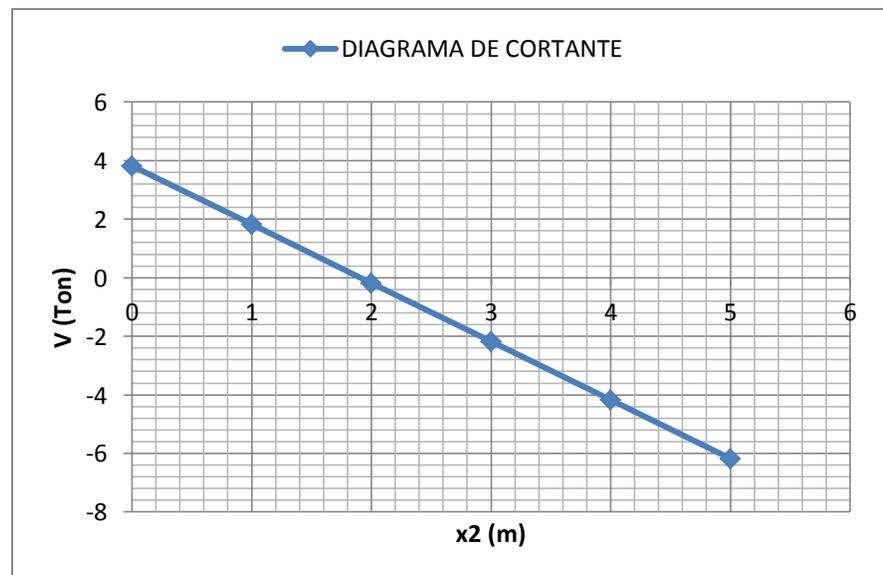
MIEMBRO AB (ROTADO):

x1 (m)	V (Ton)
0	3.9025
1	3.9025
2	3.9025
3	3.9025
3	-1.0975
4	-1.0975
5	-1.0975



MIEMBRO BC:

x2 (m)	V (Ton)
0	3.8213
1	1.8213
2	-0.1787
3	-2.1787
4	-4.1787
5	-6.1787



MIEMBRO DC (ROTADO):

x3 (m)	V (Ton)
0	1.097
1	1.097
2	1.097
3	1.097
4	1.097
5	1.097

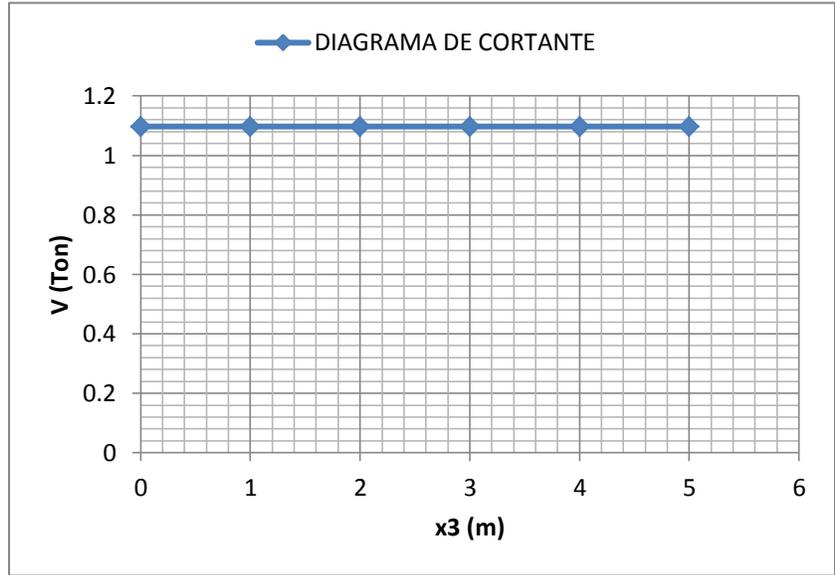
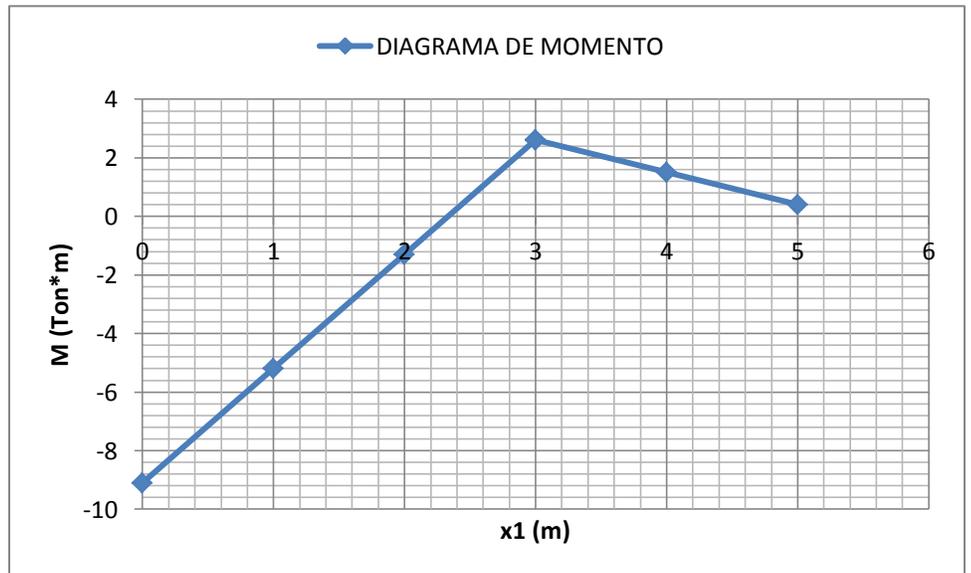


DIAGRAMA DE MOMENTO:

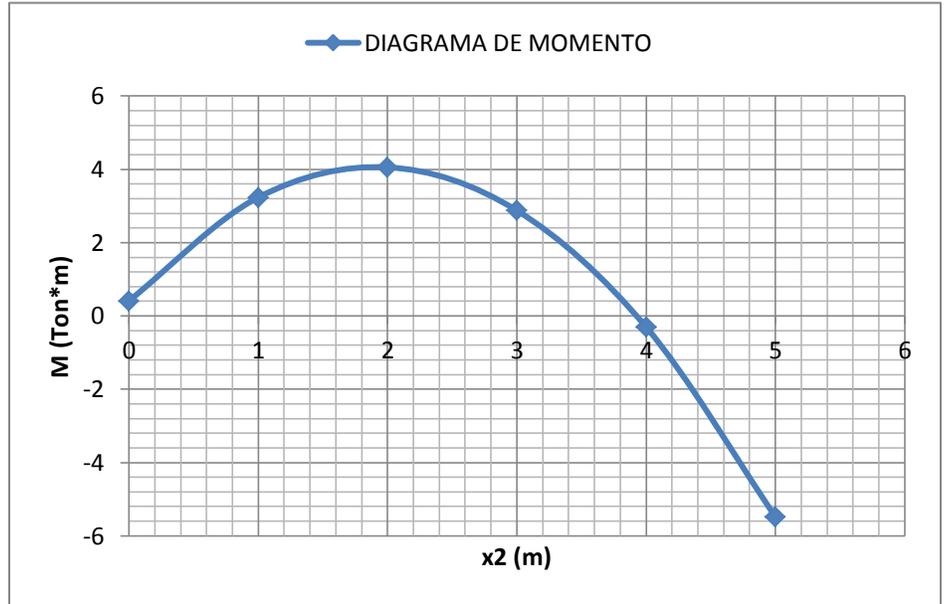
MIEMBRO AB (ROTADO):

x1 (m)	M (Ton*m)
0	-9.1
1	-5.1975
2	-1.295
3	2.6075
3	2.6075
4	1.51
5	0.4125



MIEMBRO BC:

x2 (m)	M (Ton*m)
0	0.4125
1	3.2338
2	4.0551
3	2.8764
4	-0.3023
5	-5.481



MIEMBRO DC (ROTADO):

x3 (m)	M (Ton*m)
0	0
1	1.097
2	2.194
3	3.291
4	4.388
5	5.485

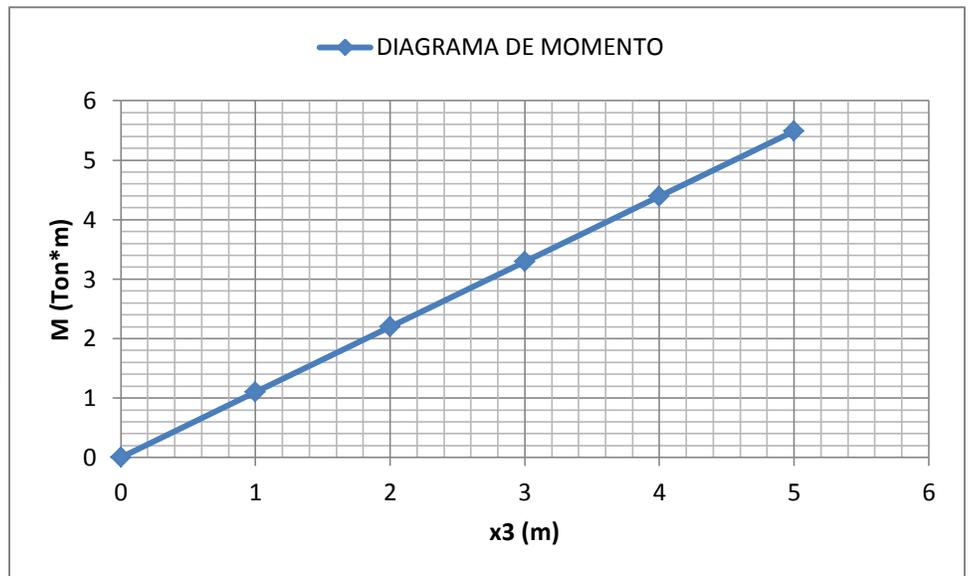
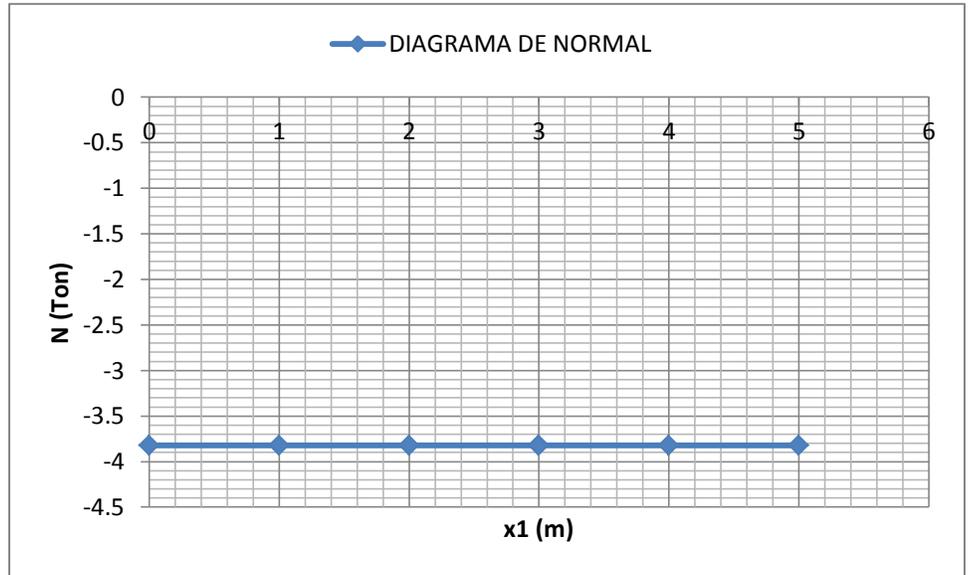


DIAGRAMA DE NORMAL:

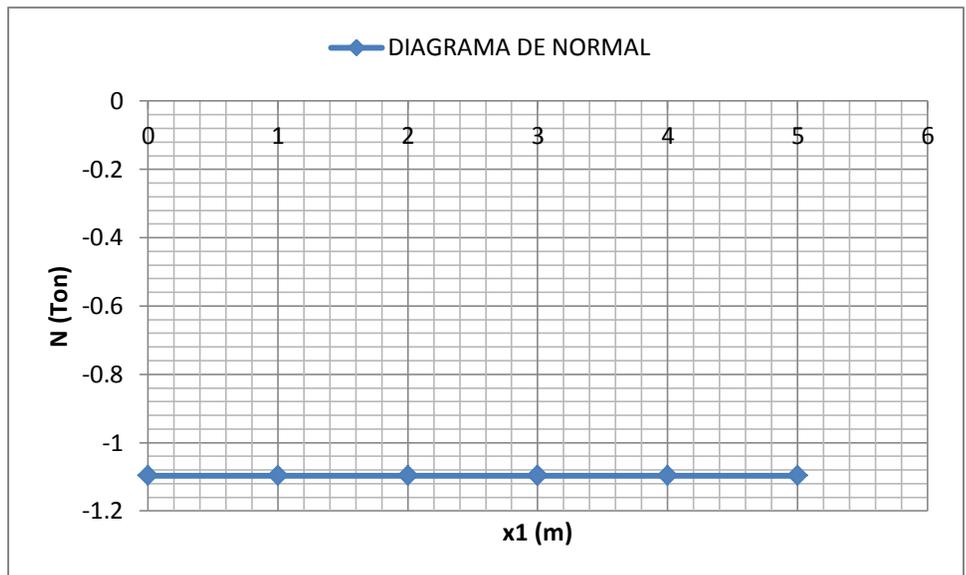
MIEMBRO AB (ROTADO):

x1 (m)	N (Ton)
0	-3.8213
1	-3.8213
2	-3.8213
3	-3.8213
3	-3.8213
4	-3.8213
5	-3.8213



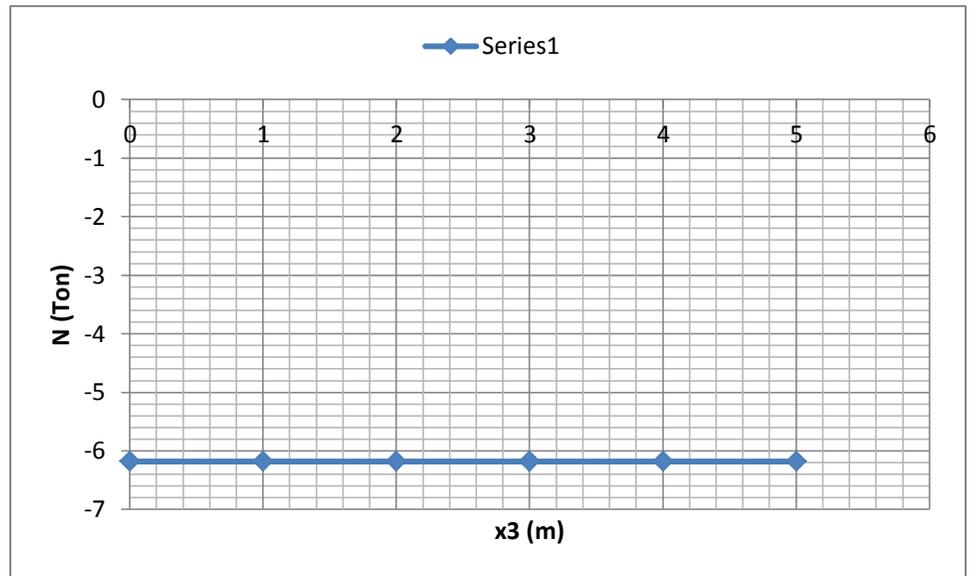
MIEMBRO BC:

x1 (m)	N (Ton)
0	-1.0975
1	-1.0975
2	-1.0975
3	-1.0975
3	-1.0975
4	-1.0975
5	-1.0975

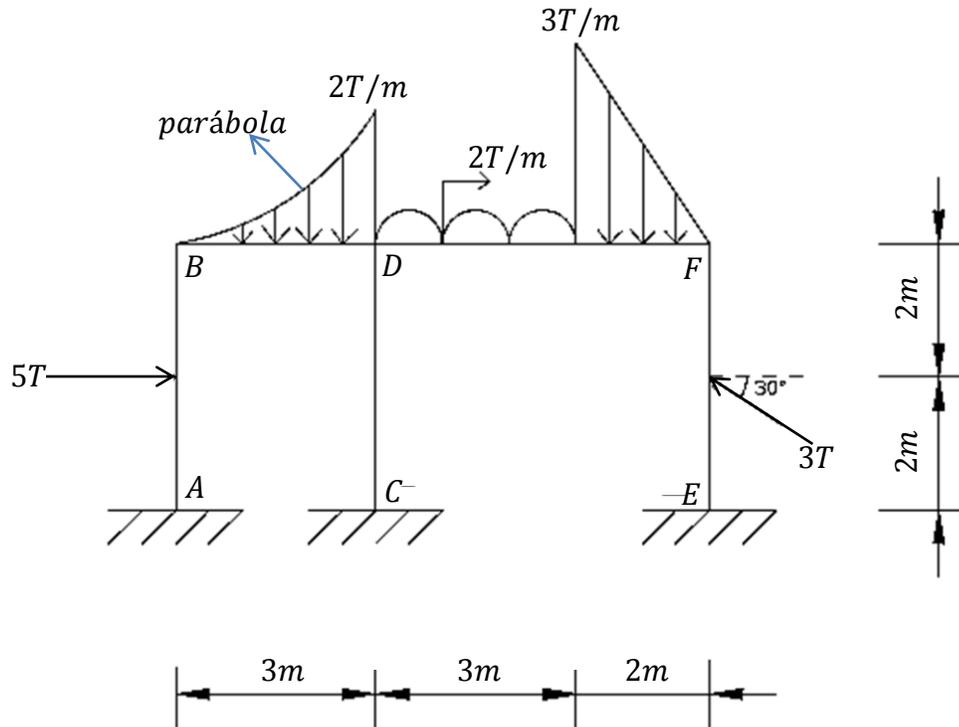


MIEMBRO DC (ROTADO):

x3 (m)	N (Ton)
0	-6.1786
1	-6.1786
2	-6.1786
3	-6.1786
3	-6.1786
4	-6.1786
5	-6.1786



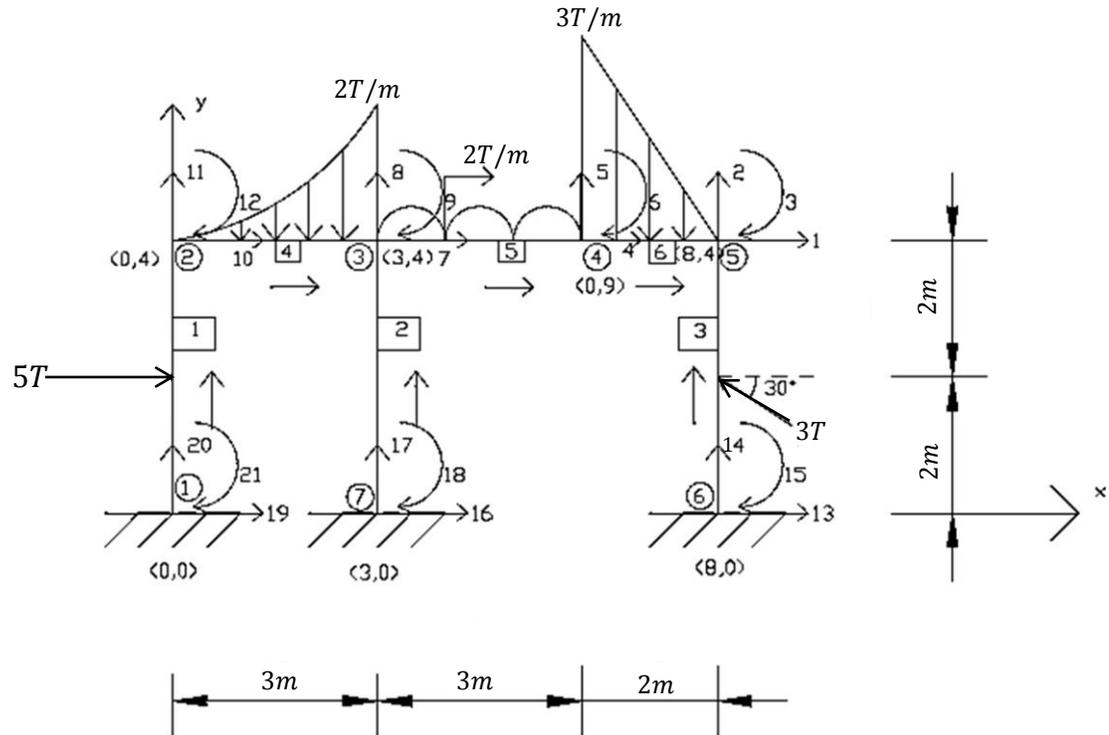
3.- Para el marco de dos crujeías en el cual se presentan desplazamientos laterales, determinar el valor de las reacciones con el método de la rigidez. Deducir las ecuaciones de momento, cortante y normal para cada miembro.



Considere que todos los miembros están hechos de concreto ($f'_c=250 \text{ kg/cm}^2$) y que presentan una sección transversal triangular de base (b)=20cm y altura (h)=25cm.

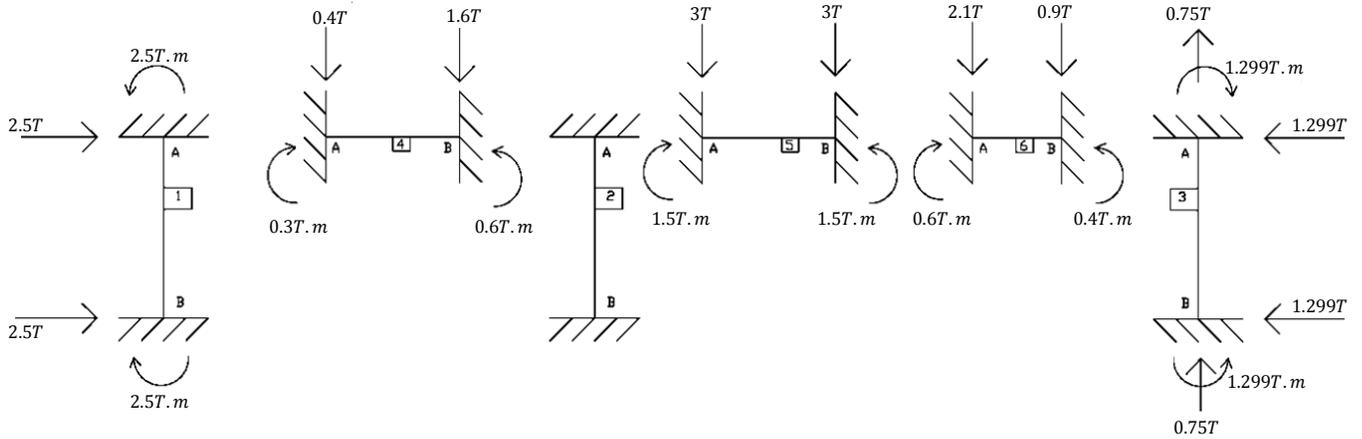
SOLUCIÓN:

-Notación o Codificación:



Nota: Es conveniente dividir momentáneamente el miembro DF en dos miembros para el análisis por rigidez colocando un nodo imaginario justo en el punto en donde la presión cambia de uniformemente repartida a triangular.

Empotrando los miembros doblemente, las acciones que actúan son las siguientes:



Las acciones fueron obtenidas a partir de invertir las reacciones de cada miembro doblemente empotrado que a continuación se calculan. Algunos miembros se han rotado para mayor facilidad.

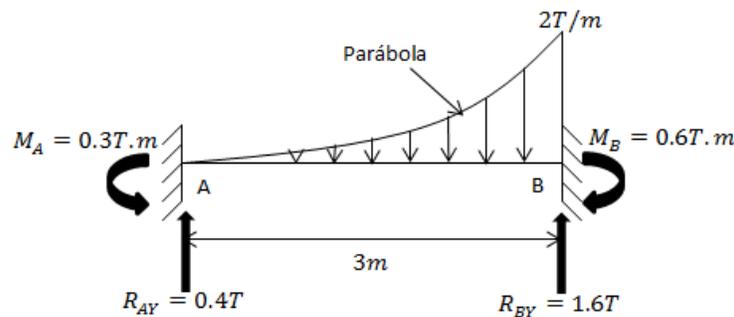
Miembro 4:

$$R_{AY} = \frac{WL}{15} = \frac{(2)(3)}{15} = 0.4 T \uparrow$$

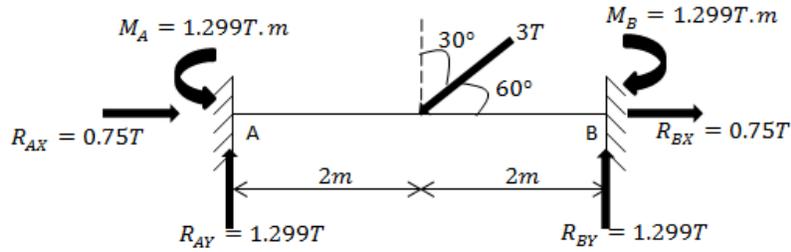
$$R_{BY} = \frac{4WL}{15} = \frac{(4)(2)(3)}{15} = 1.6 T \uparrow$$

$$M_A = \frac{WL^2}{60} = \frac{2 \cdot 3^2}{60} = 0.3 T \cdot m \curvearrowright$$

$$M_B = \frac{WL^2}{30} = \frac{2 \cdot 3^2}{30} = 0.6 T \cdot m \curvearrowleft$$



Miembro 3:



$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{P \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{(3)(\sin(60^\circ))}{2} = 1.299 T \uparrow$$

$$R_{AX} = R_{BX} = \frac{P \cdot \cos \alpha}{2} = \frac{(3)(\cos(60^\circ))}{2} = 0.75 T \rightarrow$$

$$M_A = M_B = \frac{P \cdot L \cdot \sin \alpha}{8} = \frac{(3)(4)(\sin(60^\circ))}{8} = 1.299 T \cdot m$$

 Respectivamente

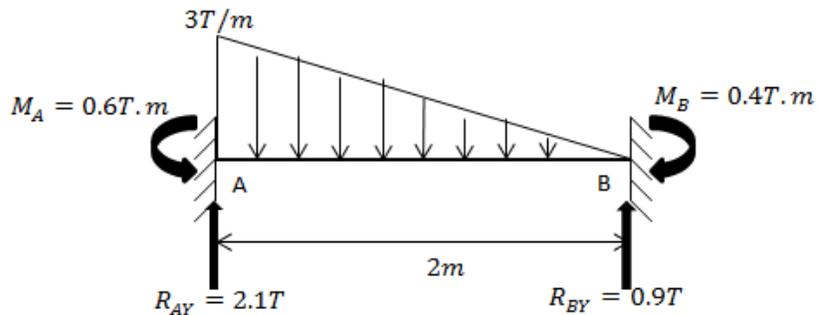
Miembro 6:

$$R_{AY} = \frac{7WL}{20} = \frac{(7)(3)(2)}{20} = 2.1 T \uparrow$$

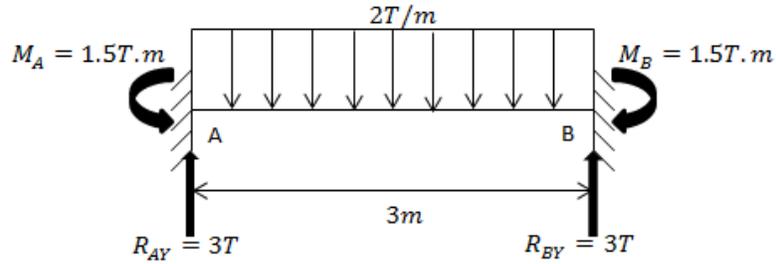
$$R_{BY} = \frac{3WL}{20} = \frac{(3)(3)(2)}{20} = 0.9 T \uparrow$$

$$M_A = \frac{WL^2}{20} = \frac{3 \cdot 2^2}{20} = 0.6 T \cdot m \curvearrowright$$

$$M_B = \frac{WL^2}{30} = \frac{3 \cdot 2^2}{30} = 0.4 T \cdot m \curvearrowleft$$



Miembro 5:

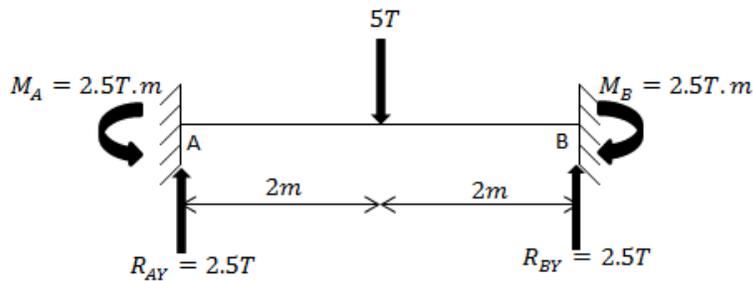


$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{WL}{2} = \frac{(2)(3)}{2} = 3 T \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{WL^2}{12} = \frac{(2)(3^2)}{12} = 1.5 T.m \curvearrowright$$

Respectivamente

Miembro 1:



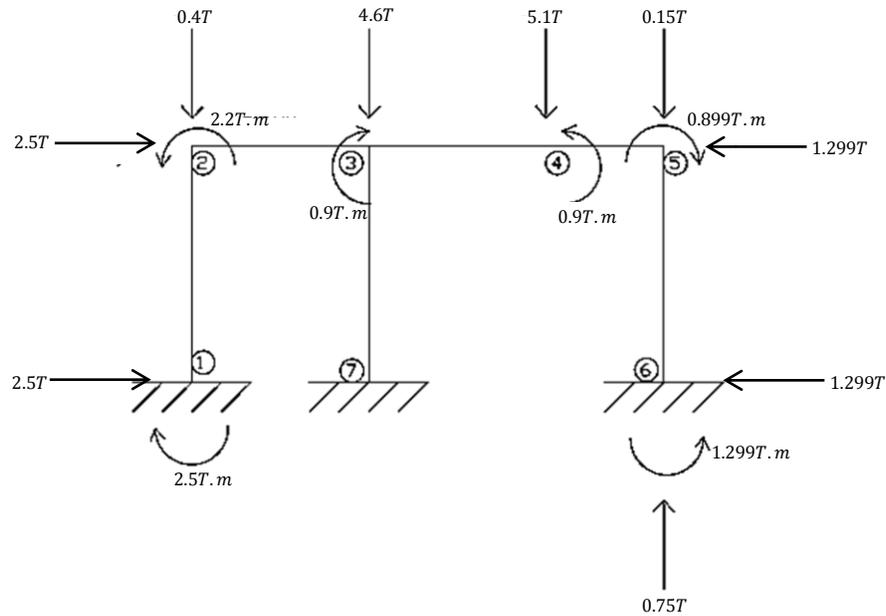
$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{P}{2} = \frac{5}{2} = 2.5 T \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{P*L}{8} = \frac{(5)(4)}{8} = 2.5 T.m \curvearrowright$$

Respectivamente

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

Las acciones totales en cada nodo del marco son:



Para todos los miembros:

$$-\text{Área}(A) = \frac{(0.2m)(0.25m)}{2} = 0.025m^2$$

$$-\text{Módulo de Elasticidad}(E) = 14000\sqrt{250} = 221359.4362 \text{ kg/cm}^2 = 2213594.362 \text{ T/m}^2$$

$$\text{Inercia}(I) = \frac{1}{36}bh^3 = \left(\frac{1}{36}\right)(0.2m)(0.25m)^3 = 0.000086806m^4$$

-Vector de Fuerzas:

$$F = \begin{pmatrix} -1.299 & 1 \\ -0.15 & 2 \\ -0.899 & 3 \\ 0 & 4 \\ -5.1 & 5 \\ 0.9 & 6 \\ 0 & 7 \\ -4.6 & 8 \\ -0.9 & 9 \\ 2.5 & 10 \\ -0.4 & 11 \\ -2.2 & 12 \\ R_{EX} - 1.299 & 13 \\ R_{EY} + 0.75 & 14 \\ M_E + 1.299 & 15 \\ R_{CX} & 16 \\ R_{CY} & 17 \\ M_C & 18 \\ R_{AX} + 2.5 & 19 \\ R_{AY} & 20 \\ M_A - 2.5 & 21 \end{pmatrix}$$

-Vector de Desplazamientos:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 1 \\ D_2 & 2 \\ \theta_3 & 3 \\ D_4 & 4 \\ D_5 & 5 \\ \theta_6 & 6 \\ D_7 & 7 \\ D_8 & 8 \\ \theta_9 & 9 \\ D_{10} & 10 \\ D_{11} & 11 \\ \theta_{12} & 12 \\ \hline 0 & 13 \\ 0 & 14 \\ 0 & 15 \\ 0 & 16 \\ 0 & 17 \\ 0 & 18 \\ 0 & 19 \\ 0 & 20 \\ 0 & 21 \end{pmatrix}$$

Cosenos directores por miembro

Miembro 1:

$$Longitud(L) = 4m$$

$$\lambda_x = \frac{0 - 0}{4} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{4 - 0}{4} = 1$$

Miembro 2:

$$Longitud(L) = 4m$$

$$\lambda_x = \frac{3 - 3}{4} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{4 - 0}{4} = 1$$

Miembro 3:

$$\text{Longitud}(L) = 4m$$

$$\lambda_x = \frac{8 - 8}{4} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{4 - 0}{4} = 1$$

Miembro 4:

$$\text{Longitud}(L) = 3m$$

$$\lambda_x = \frac{3 - 0}{3} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{4 - 4}{3} = 0$$

Miembro 5:

$$\text{Longitud}(L) = 3m$$

$$\lambda_x = \frac{6 - 3}{3} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{4 - 4}{3} = 0$$

Miembro 6:

$$\text{Longitud}(L) = 2m$$

$$\lambda_x = \frac{8 - 6}{2} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{4 - 4}{2} = 0$$

Matriz de rigidez global por miembro:

Miembro 1:

$$k_1 = 10^4 * \begin{pmatrix} 0.0036 & 0 & -0.0072 & -0.0036 & 0 & -0.0072 \\ 0 & 1.3835 & 0 & 0 & -1.3835 & 0 \\ -0.0072 & 0 & 0.0192 & 0.0072 & 0 & 0.0096 \\ -0.0036 & 0 & 0.0072 & 0.0036 & 0 & 0.0072 \\ 0 & -1.3835 & 0 & 0 & 1.3835 & 0 \\ -0.0072 & 0 & 0.0096 & 0.0072 & 0 & 0.0192 \end{pmatrix} \begin{matrix} 19 \\ 20 \\ 21 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Miembro 2:

$$k_2 = 10^4 * \begin{pmatrix} 0.0036 & 0 & -0.0072 & -0.0036 & 0 & -0.0072 \\ 0 & 1.3835 & 0 & 0 & -1.3835 & 0 \\ -0.0072 & 0 & 0.0192 & 0.0072 & 0 & 0.0096 \\ -0.0036 & 0 & 0.0072 & 0.0036 & 0 & 0.0072 \\ 0 & -1.3835 & 0 & 0 & 1.3835 & 0 \\ -0.0072 & 0 & 0.0096 & 0.0072 & 0 & 0.0192 \end{pmatrix} \begin{matrix} 16 \\ 17 \\ 18 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Miembro 3:

$$k_3 = 10^4 * \begin{pmatrix} 0.0036 & 0 & -0.0072 & -0.0036 & 0 & -0.0072 \\ 0 & 1.3835 & 0 & 0 & -1.3835 & 0 \\ -0.0072 & 0 & 0.0192 & 0.0072 & 0 & 0.0096 \\ -0.0036 & 0 & 0.0072 & 0.0036 & 0 & 0.0072 \\ 0 & -1.3835 & 0 & 0 & 1.3835 & 0 \\ -0.0072 & 0 & 0.0096 & 0.0072 & 0 & 0.0192 \end{pmatrix} \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Miembro 4:

$$k_4 = 10^4 * \begin{pmatrix} 1.8447 & 0 & 0 & -1.8447 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0085 & 0.0128 & 0 & -0.0085 & 0.0128 \\ 0 & 0.0128 & 0.0256 & 0 & -0.0128 & 0.0128 \\ -1.8447 & 0 & 0 & 1.8447 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0085 & -0.0128 & 0 & 0.0085 & -0.0128 \\ 0 & 0.0128 & 0.0128 & 0 & -0.0128 & 0.0256 \end{pmatrix} \begin{matrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Miembro 5:

$$k_5 = 10^4 * \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 6 \\ 1.8447 & 0 & 0 & -1.8447 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0085 & 0.0128 & 0 & -0.0085 & 0.0128 \\ 0 & 0.0128 & 0.0256 & 0 & -0.0128 & 0.0128 \\ -1.8447 & 0 & 0 & 1.8447 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0085 & -0.0128 & 0 & 0.0085 & -0.0128 \\ 0 & 0.0128 & 0.0128 & 0 & -0.0128 & 0.0256 \end{pmatrix}$$

Miembro 6:

$$k_6 = 10^4 * \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 1.8447 & 0 & 0 & -1.8447 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0085 & 0.0128 & 0 & -0.0085 & 0.0128 \\ 0 & 0.0128 & 0.0256 & 0 & -0.0128 & 0.0128 \\ -1.8447 & 0 & 0 & 1.8447 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0085 & -0.0128 & 0 & 0.0085 & -0.0128 \\ 0 & 0.0128 & 0.0128 & 0 & -0.0128 & 0.0256 \end{pmatrix}$$

Ensamblando las matrices anteriores:

La matriz de rigidez global de la estructura adquiere la siguiente forma:

$$K_T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

A continuación se proporciona por separado cada una de las subdivisiones de K_T :

Matriz K_{11} :

$$K_{11} = 10^4 * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2.7706 & 0 & 0.0072 & -2.7670 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4123 & -0.0288 & 0 & -0.0288 & -0.0288 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0072 & -0.0288 & 0.0576 & 0 & 0.0288 & 0.0192 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.7670 & 0 & 0 & 4.6117 & 0 & 0 & -1.8447 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0288 & 0.0288 & 0 & 0.0374 & 0.0160 & 0 & -0.0085 & -0.0128 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0288 & 0.0192 & 0 & 0.0160 & 0.0641 & 0 & 0.0128 & 0.0128 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.8417 & 0 & 0 & 3.6929 & 0 & 0.0072 & -1.8447 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0085 & 0.0128 & 0 & 1.4006 & 0 & 0 & -0.0085 & -0.0128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0128 & 0.0128 & 0.0072 & 0 & 0.0705 & 0 & 0.0128 & 0.0128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.8447 & 0 & 0 & 1.8443 & 0 & 0.0072 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0085 & 0.0128 & 0 & 1.3920 & 0.0128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0128 & 0.0128 & 0.0072 & 0.0128 & 0.0448 \end{pmatrix}$$

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

Matriz K_{12} :

$$K_{12} = 10^4 * \begin{pmatrix} -0.0036 & 0 & 0.0072 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.3835 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0072 & 0 & 0.0096 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0036 & 0 & 0.0072 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.3835 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0072 & 0 & 0.0096 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0036 & 0 & 0.0072 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.3835 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0072 & 0.0096 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Matriz K_{21} :

$$K_{21} = 10^4 * \begin{pmatrix} -0.0036 & 0 & -0.0072 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.3835 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0072 & 0 & 0.0096 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0036 & 0 & -0.0072 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.3835 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0072 & 0 & 0.0096 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0036 & 0 & -0.0072 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.3835 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0072 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0072 & 0 & 0 & 0.0096 \end{pmatrix} \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \end{matrix}$$

Matriz K_{22} :

$$K_{22} = 10^4 * \begin{pmatrix} 0.0036 & 0 & -0.0072 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3835 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0072 & 0 & 0.0192 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0036 & 0 & -0.0072 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3835 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0072 & 0 & 0.0192 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0036 & 0 & -0.0072 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3835 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0072 & 0 & 0.0192 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \end{matrix}$$

De $F=K_T \cdot D$ extraemos los siguientes subsistemas:

Subsistema 1:

$$\begin{pmatrix} -1.299 \\ -0.15 \\ -0.899 \\ 0 \\ -5.1 \\ 0.9 \\ 0 \\ -4.6 \\ -0.9 \\ 2.5 \\ -0.4 \\ 2.2 \end{pmatrix} = (K_{11}) * \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \theta_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ \theta_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ \theta_{12} \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \theta_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ \theta_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ \theta_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0076m \\ -0.0002m \\ 0.0083rad \\ 0.0077m \\ -0.0268m \\ 0.0075rad \\ 0.0078m \\ -0.0005m \\ -0.0094rad \\ 0.0079m \\ -0.0000m \\ 0.0062rad \end{pmatrix}$$

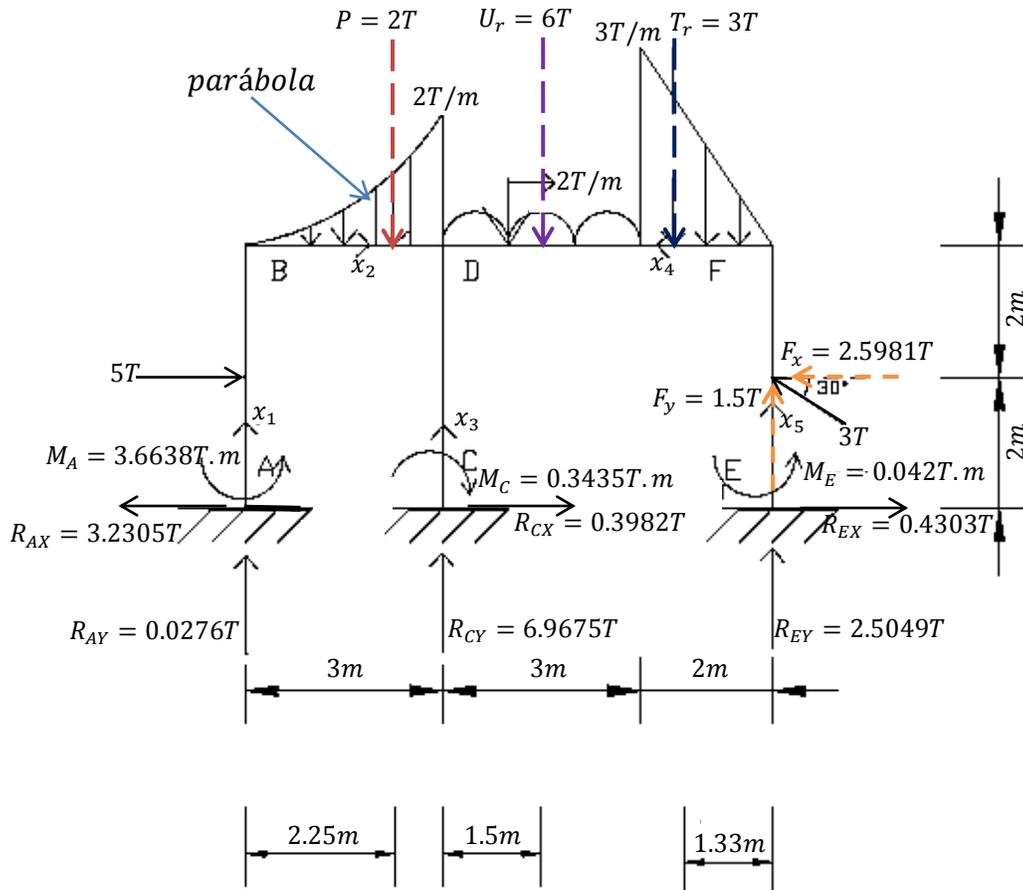
Subsistema 2:

$$\begin{pmatrix} R_{EX} - 1.299 \\ R_{EY} + 0.75 \\ M_E + 1.299 \\ R_{CX} \\ R_{CY} \\ M_C \\ R_{AX} + 2.5 \\ R_{AY} \\ M_A - 2.5 \end{pmatrix} = (K_{21}) \begin{pmatrix} 0.0076 \\ -0.0002 \\ 0.0083 \\ 0.0077 \\ -0.0268 \\ 0.0075 \\ 0.0078 \\ -0.0005 \\ -0.0094 \\ 0.0079 \\ -0 \\ 0.0062 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8687 \\ 3.2549 \\ 1.341 \\ 0.3982 \\ 6.9675 \\ -0.3435 \\ -0.7305 \\ 0.0276 \\ 1.1638 \end{pmatrix}$$

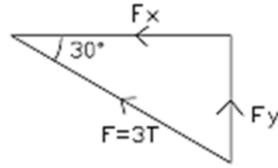
Calculo de las reacciones:

$$\begin{aligned}
 R_{EX} - 1.299 &= -0.8687 \quad \therefore R_{EX} = 0.4303 T \rightarrow \\
 R_{EY} + 0.75 &= 3.2549 \quad \therefore R_{EY} = 2.5049 T \uparrow \\
 M_E + 1.299 &= 1.341 \quad \therefore M_E = 0.042 T.m \curvearrowright \\
 R_{CX} &= 0.3982 \quad \therefore R_{CX} = 0.3982 T \rightarrow \\
 R_{CY} &= 6.9675 \quad \therefore R_{CY} = 6.9675 T \uparrow \\
 M_C &= -0.3435 \quad \therefore M_C = 0.3435 T.m \curvearrowright \\
 R_{AX} + 2.5 &= -0.7305 \quad \therefore R_{AX} = 3.2305 T \leftarrow \\
 R_{AY} &= 0.0276 \quad \therefore R_{AY} = 0.0276 T \uparrow \\
 M_A - 2.5 &= 1.1638 \quad \therefore M_A = 3.6638 T.m \curvearrowright
 \end{aligned}$$

Diagrama del marco original que muestra las reacciones



Componentes rectangulares de $F=3T$



$$F_y = (3T)(\sin 30^\circ) = 1.5 T$$

$$F_x = (3T)(\cos 30^\circ) = 2.5981 T$$

Cargas concentradas equivalentes y puntos de aplicación para las presiones:

Presión Triangular:

$$T_r = \frac{(2m)(3T/m)}{2} = 3T$$

$$\bar{x} = \frac{2}{3}(2m) = 1.3333m \text{ a la izquierda de } F$$

-Presión uniformemente repartida:

$$U_r = (3m)(2T/m) = 6T$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(3m) = 1.5m \text{ a la derecha de } D$$

-Presión de la enjuta parabólica

$$P = \frac{1}{3}WL = \frac{1}{3}(2T/m)(3m) = 2T$$

$$\bar{x} = \frac{3}{4}L = \frac{3}{4}(3m) = 2.25m \text{ a la derecha de } B$$

Demostramos que la estructura está en equilibrio mediante el uso de fuerzas externas:

$$\sum FX = 0$$

$$5 - 3.2305 + 0.3982 + 0.4303 - 2.5981 \cong 0 \quad OK$$

$$\sum FY = 0$$

$$0.0276 - 2 + 6.9675 - 6 - 3 + 1.5 + 2.5049 \cong 0 \quad OK$$

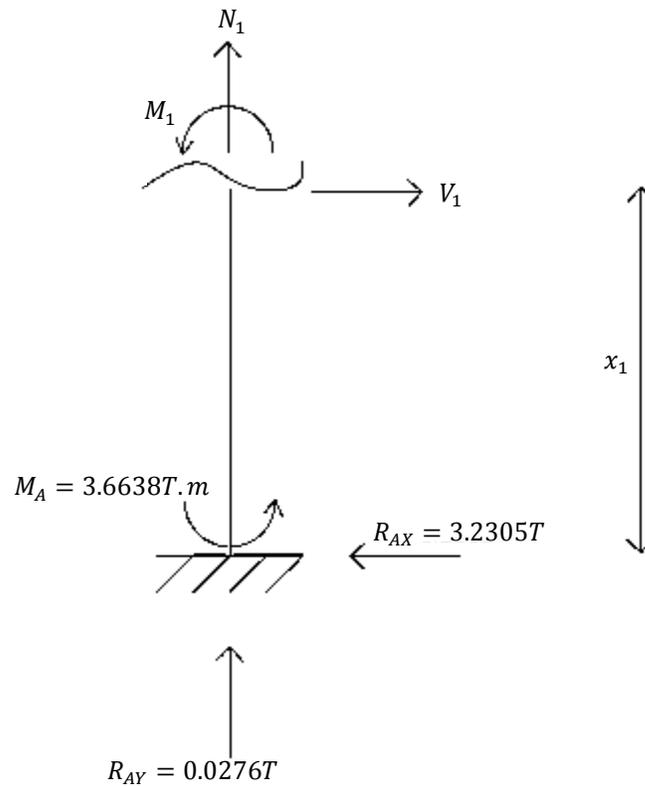
$$\sum MA = 0$$

$$-3.6638 + 5 * 2 + 2 * 2.25 + 0.3435 - 6.9675 * 3 + 6 * 4.5 + 3(8 - 1.3333) - 2.5981 * 2 - 1.5 * 8 - 0.042 - 2.5049 * 8 \cong 0$$

Ecuaciones de momento, cortante y normal del marco original

Miembro AB

$$0 \leq x_1 \leq 2m$$



$$\sum Mcorte = 0$$

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

$$M_1 = 3.2305x_1 - 3.6638$$

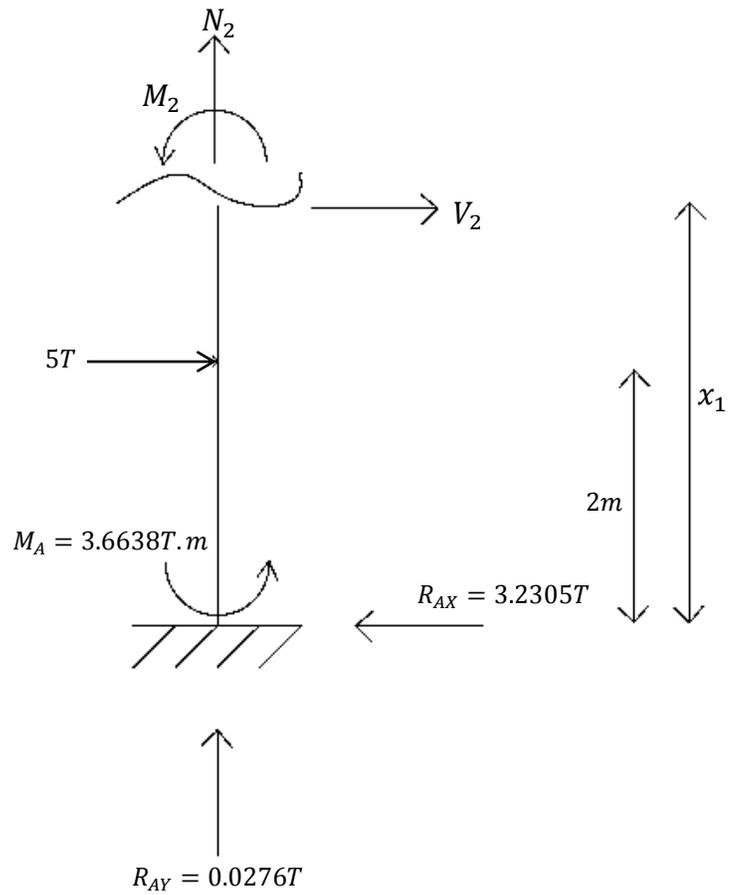
$$x_1 = 2, M_1 = 2.7972$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = 3.2305$$

$$\sum FY = 0$$

$$N_1 = -0.0276$$

$$2m \leq x_1 \leq 4m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = 3.2305x_1 - 3.6638 - 5(x_1 - 2) = -1.7695x_1 + 6.3362$$

$$x_1 = 2, M_2 = 2.7972; x_1 = 4, M_2 = -0.7418$$

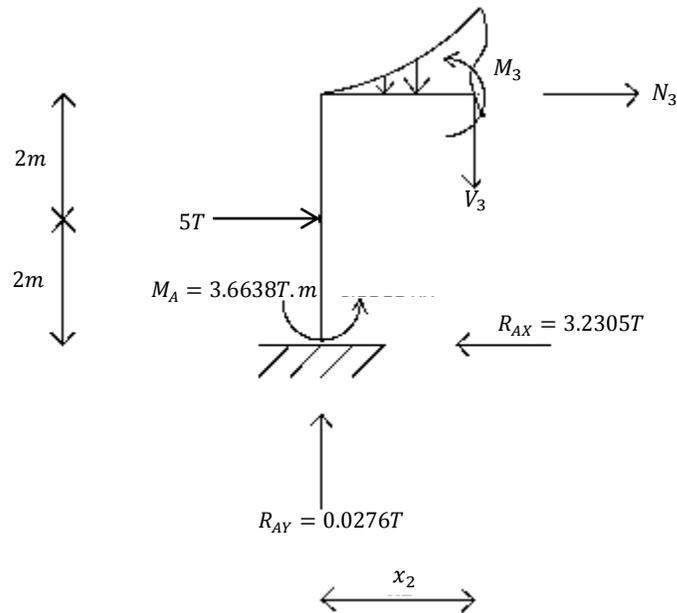
$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_1} = -1.7695$$

$$\sum FY = 0$$

$$N_2 = -0.0276$$

Miembro BD

$$0 \leq x_2 \leq 3m$$



Para la presión parabólica del corte:

-Carga concentrada equivalente:

$$A_c = \frac{1}{3} \frac{W}{L^2} x^3 = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3^2}\right) x^3 = \frac{2}{27} x^3$$

-Punto de aplicación:

$$\bar{x} = \frac{3}{4} x \text{ a la derecha de B}$$

$$\sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$M_3 = 0.0276x_2 + 3.2305(4) - 3.6638 - 5(2) - \left(\frac{2}{27}x_2^3\right)\left(x_2 - \frac{3}{4}x_2\right)$$

$$M_3 = 0.0276x_2 - 0.7418 - \frac{1}{54}x_2^4$$

$$x_2 = 0, M_2 = -0.7418; x_2 = 3, M_3 = -2.159$$

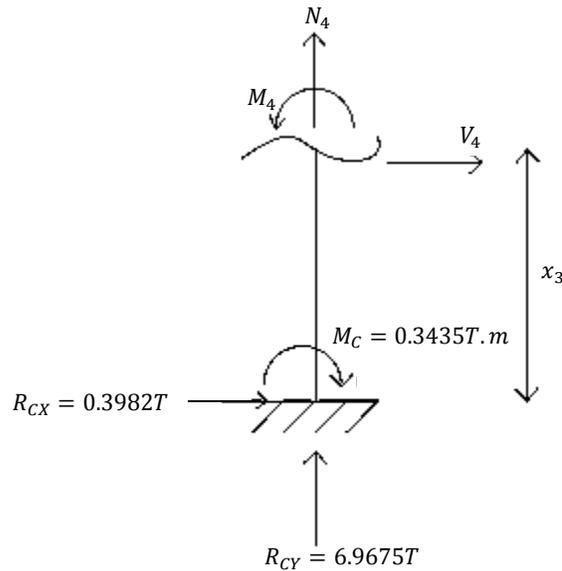
$$V_3 = \frac{dM_3}{dx_2} = 0.0276 - \frac{2}{27}x_2^3$$

$$\sum FX = 0$$

$$N_3 = -5 + 3.2305 = -1.7695$$

Miembro CD

$$0 \leq x_3 \leq 4m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_4 = -0.3982x_3 + 0.3435$$

$$x_3 = 4, M_4 = -1.2493$$

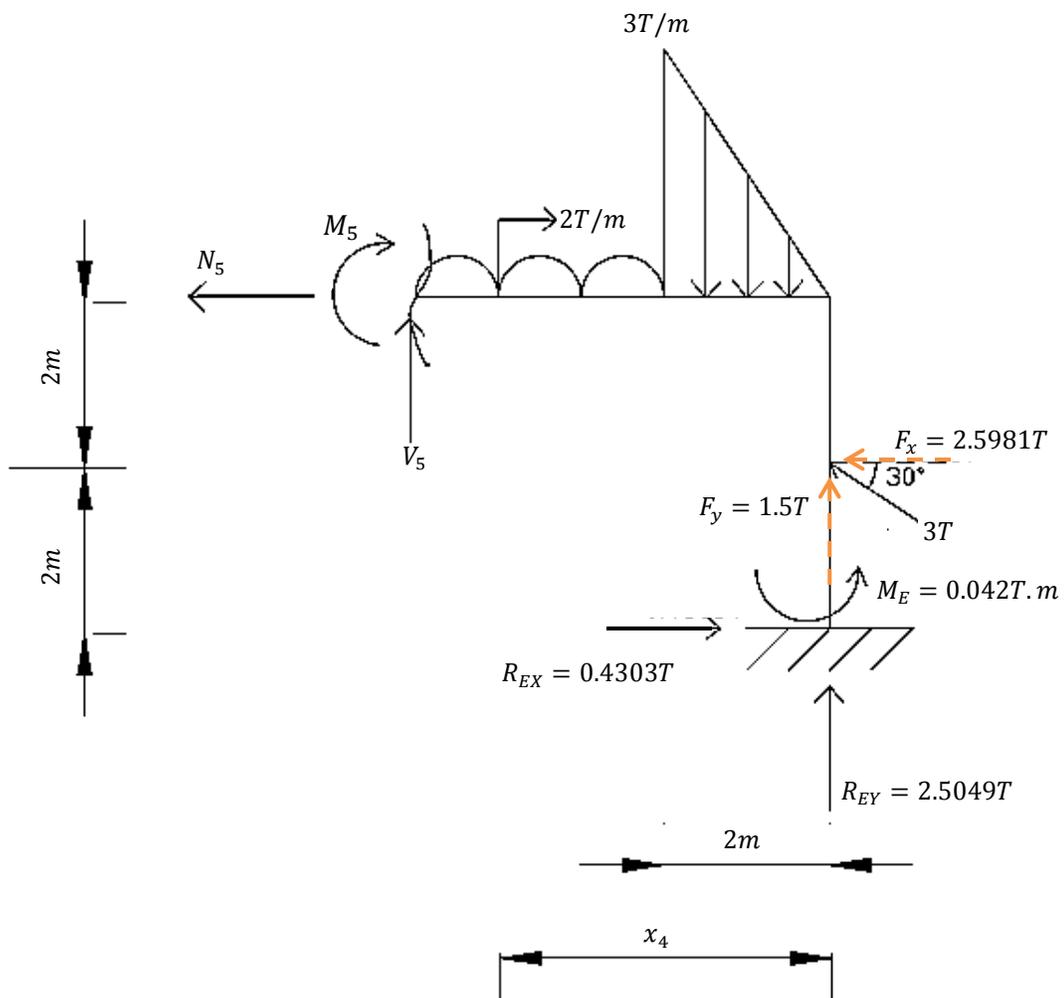
$$V_4 = \frac{dM_4}{dx_3} = -0.3982$$

$$\sum FY = 0$$

$$N_4 = -6.9675$$

Miembro DF

$$2m \leq x_4 \leq 5m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_5 - 2.5049x_4 - 0.4303(4) - 0.042 - 1.5(x_4) + 2.5981(2) + \left(\frac{2 \cdot 3}{2}\right)\left(x_4 - \frac{2}{3}(2)\right) + (x_4 - 2)(2)\left(\frac{1}{2}(x_4 - 2)\right) = 0$$

$$M_5 = -x_4^2 + 5.0049x_4 - 3.433$$

$$x_4 = 5, M_5 = -3.4085; x_4 = 2, M_5 = 2.5768$$

En este caso, debido a que el corte se hizo de derecha a izquierda:

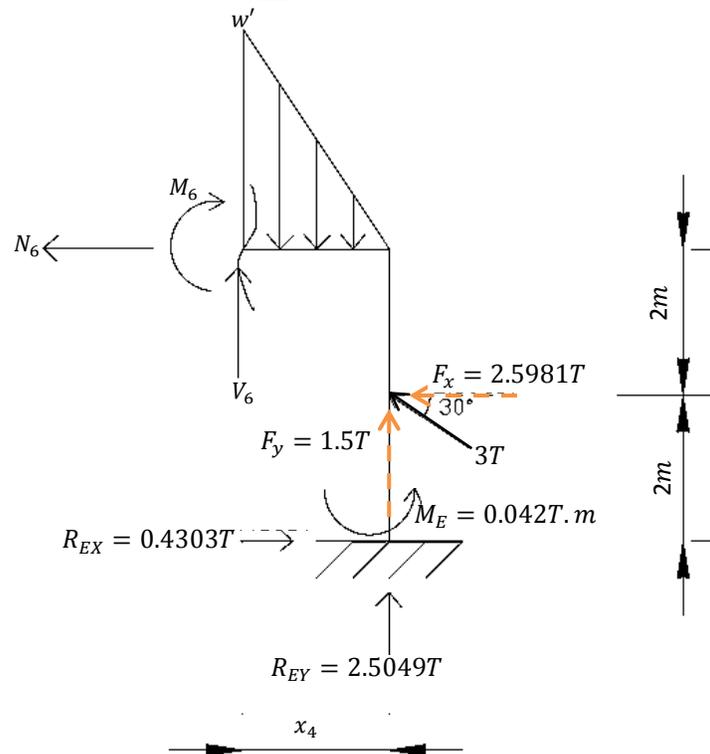
$$V_5 = -\frac{dM_5}{dx_4} = -5.0049 + 2x_4$$

$$\sum FX = 0$$

$$-N_5 - 2.5981 + 0.4303 = 0$$

$$N_5 = -2.1678$$

$$0 \leq x_4 \leq 2m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_6 - 2.5049x_4 - 0.4303(4) - 0.042 - 1.5(x_4) + 2.5981(2) + \left(\frac{(x_4)(1.5x_4)}{2}\right)\left(\frac{1}{3}x_4\right) = 0$$

$$M_6 = -0.25x_4^3 + 4.0049x_4 - 3.433$$

$$x_4 = 2, M_6 = 2.5768; x_4 = 0, M_6 = -3.433$$

En este caso, debido a que el corte se hizo de derecha a izquierda:

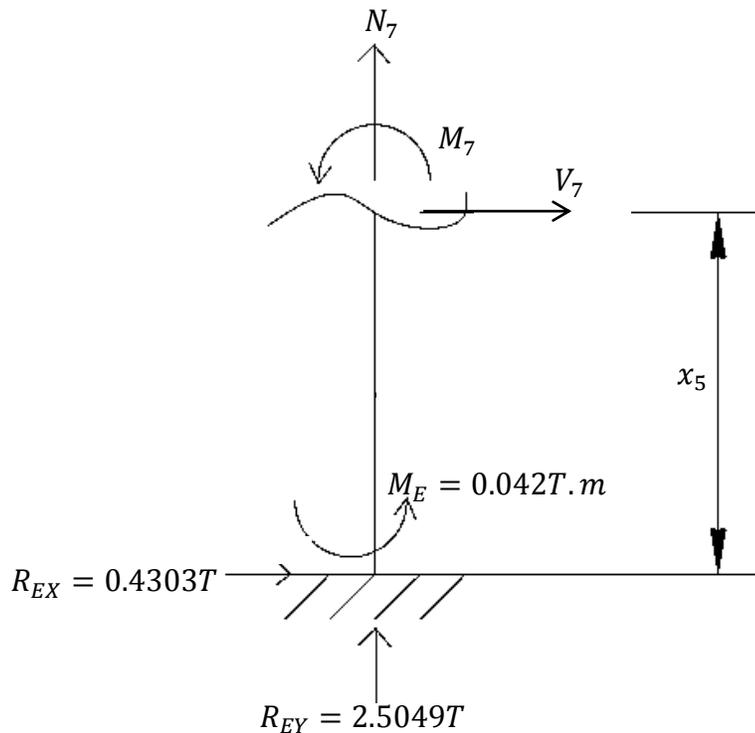
$$V_6 = -\frac{dM_7}{dx_4} = 0.75x_4^2 - 4.0049$$

$$\sum FX = 0$$

$$N_6 = -2.1678$$

Miembro EF

$$0 \leq x_5 \leq 2m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_7 = -0.4303x_5 - 0.042$$

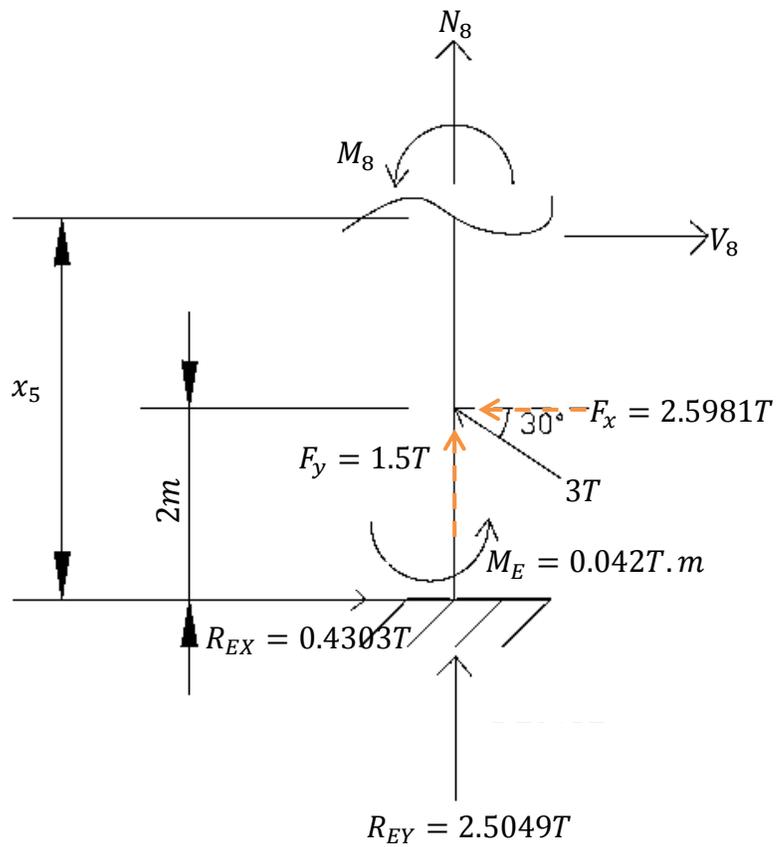
$$x_5 = 2, M_7 = -0.9026$$

$$V_7 = \frac{dM_7}{dx_5} = -0.4303$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$N_7 = -2.5049$$

$$2m \leq x_5 \leq 4m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_8 = -0.4303x_5 - 0.042 + 2.5981(x_5 - 2) = 2.1678x_5 - 5.2382$$

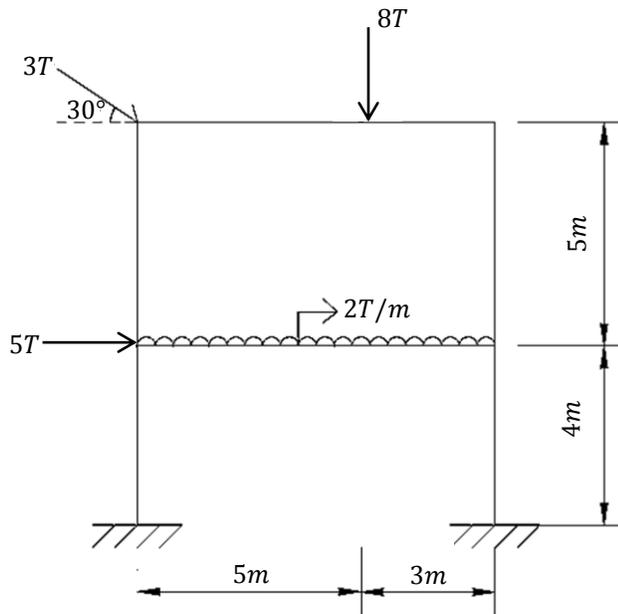
$$x_5 = 2, M_8 = -0.9026; x_5 = 4, M_8 = 3.433$$

$$V_8 = \frac{dM_8}{dx_5} = 2.1678$$

$$\sum FY = 0$$

$$N_8 = -2.5049 - 1.5 = -4.0049$$

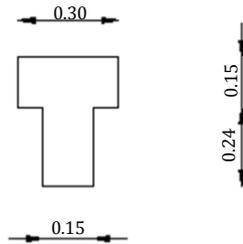
4.- Calcular las reacciones del siguiente marco de dos niveles con el método de la rigidez.



Considere:

-Para vigas:

Módulo de elasticidad el del acero, con la siguiente sección transversal:

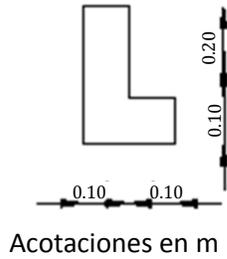


Acotaciones en m

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

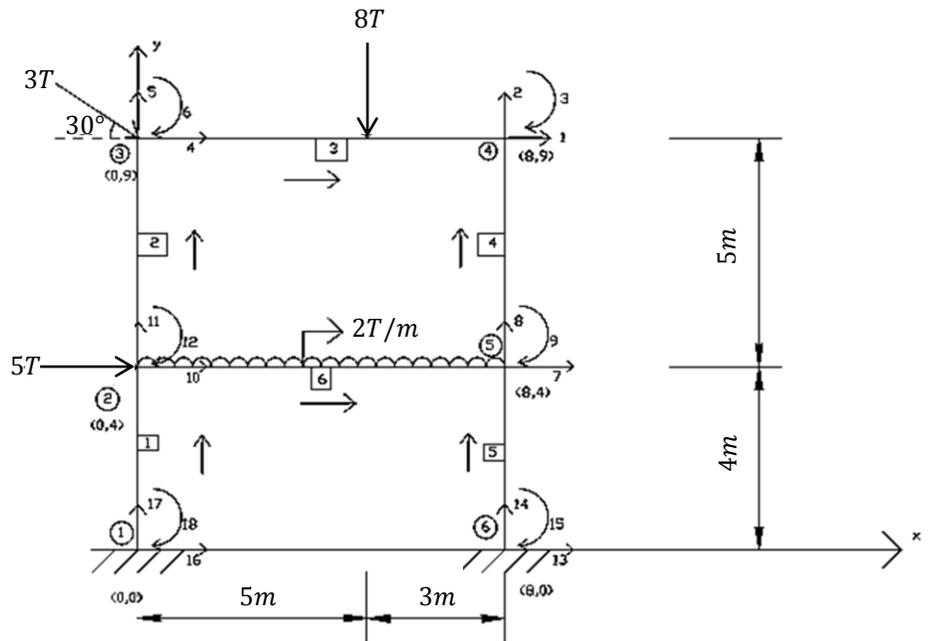
-Para columnas:

Módulo de elasticidad el del acero, con la siguiente sección transversal:

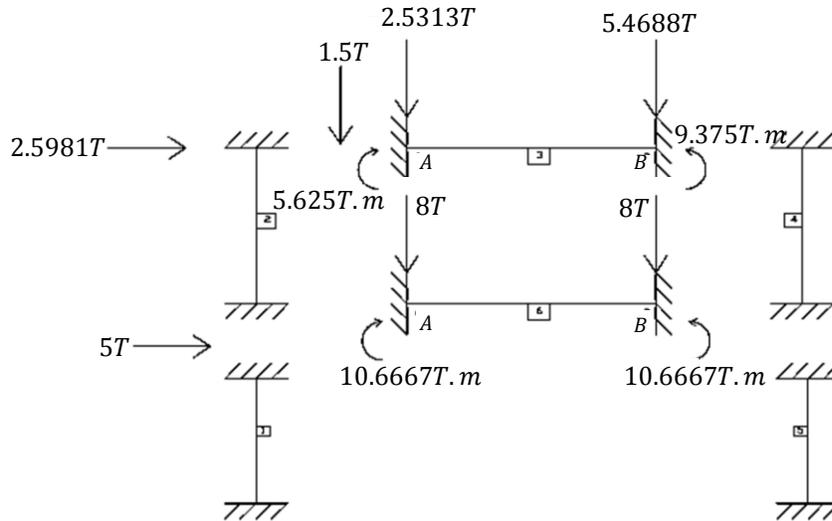


SOLUCIÓN:

Codificación:



Empotrando doblemente los miembros, las acciones que actúan son las siguientes:

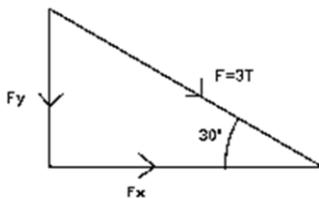


En el nodo 2 actúa la acción de $5T$ debido a que tal fuerza ya está aplicada directamente en dicho nodo.

De acuerdo a nuestro sistema de coordenadas global propuesto, en el nodo 3 actúan las acciones producidas por las siguientes componentes rectangulares de $F=3T$:

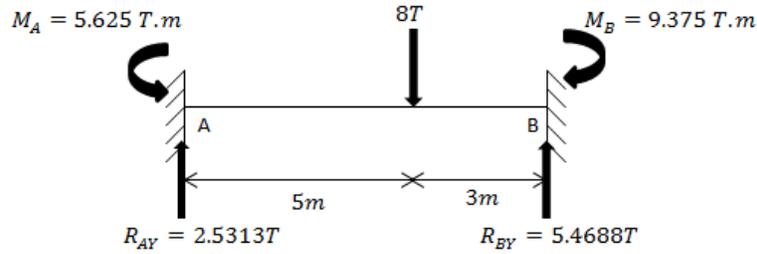
$$F_y = (3T)(\sin 30^\circ) = 1.5T$$

$$F_x = (3T)(\cos 30^\circ) = 2.5981T$$



Las demás acciones fueron obtenidas a partir de invertir las reacciones de cada miembro doblemente empotrado que a continuación se calculan:

Miembro 3:



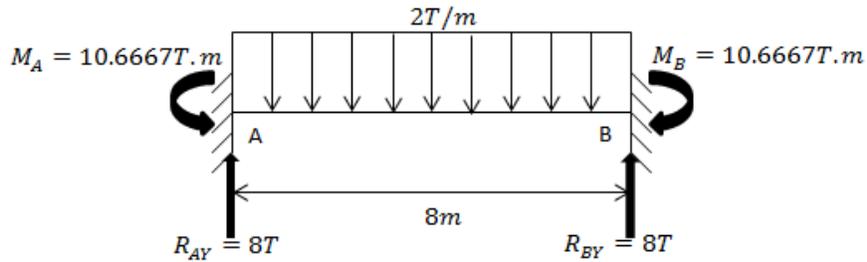
$$R_{AY} = \frac{Pb^2}{L^2} \left(3 - 2 \frac{b}{L} \right) = \frac{8 \cdot 3^2}{8^2} \left(3 - 2 \cdot \frac{3}{8} \right) = 2.5313T \uparrow$$

$$R_{BY} = \frac{Pa^2}{L^2} \left(3 - 2 \frac{a}{L} \right) = \frac{8 \cdot 5^2}{8^2} \left(3 - 2 \cdot \frac{5}{8} \right) = 5.4688T \uparrow$$

$$M_A = \frac{Pab^2}{L^2} = \frac{8 \cdot 5 \cdot 3^2}{8^2} = 5.625 T.m \curvearrowleft$$

$$M_B = \frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{8 \cdot 5^2 \cdot 3}{8^2} = 9.375 T.m \curvearrowright$$

Miembro 6:



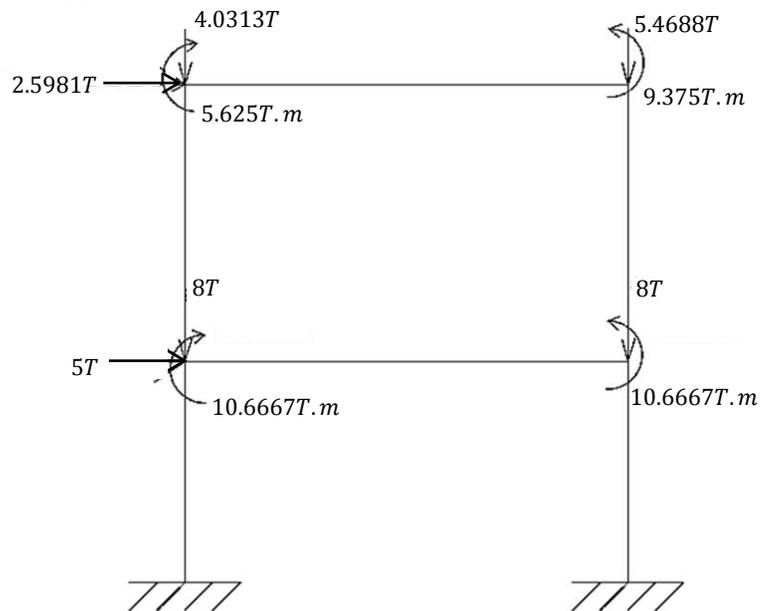
$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{WL}{2} = \frac{(2)(8)}{2} = 8 T \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{WL^2}{12} = \frac{(2)(8^2)}{12} = 10.6667 T.m \curvearrowleft \curvearrowright$$

Respectivamente

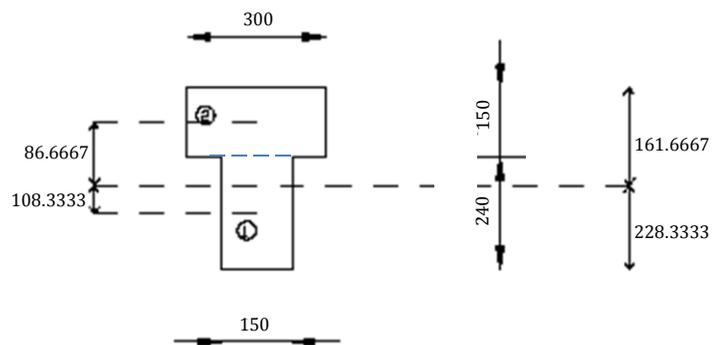
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

Las acciones totales en cada nodo del marco son:



Para la sección transversal de las vigas (miembros 3 y 6)

Determinamos la ubicación del centroide o eje neutro de la sección



Acotaciones en mm

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

$$\bar{x} = \frac{A_1 * \bar{x}_1 + A_2 * \bar{x}_2}{\sum A}$$

$$A_1 = (150mm)(240mm) = 36000mm^2$$

$$A_2 = (300mm)(150mm) = 45000mm^2$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{2}(240mm) = 120mm$$

$$\bar{x}_2 = 240mm + \frac{1}{2}(150mm) = 315mm$$

$$\sum A = 36000m^2 + 45000m^2 = 81000mm^2$$

$$\bar{x} = \frac{(36000mm^2)(120mm) + (45000mm^2)(315mm)}{81000mm^2} = 228.3333m \text{ por encima de la base}$$

Usamos el Teorema de los ejes paralelos para para calcular el momento de Inercia (I) con respecto al eje neutro:

Bloque	$I_o (mm^4)$	$A (mm^2)$	d (mm)	$A * d^2 (mm^4)$
1	$\left(\frac{1}{12}\right)(150)(240^3)$ = 172800000	36000	108.3333	422499740
2	$\left(\frac{1}{12}\right)(300)(150^3)$ = 84375000	45000	86.6667	338000260
$\sum t$	257175000	81000		760500000

$$I = \sum I_o + \sum A * d^2 = 257175000 + 760500000 = 1017675000 mm^4 = 0.001017675m^4$$

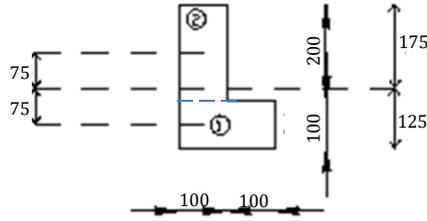
$$A = 81000mm^2 = 0.081m^2$$

$$E = 2.1 * 10^7 T/m^2$$

Para la sección transversal de las columnas (miembros 1, 2, 4 y 5)

Determinamos la ubicación del centroide o eje neutro de la sección.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ



Acotaciones en mm

$$\bar{x} = \frac{A_1 * \bar{x}_1 + A_2 * \bar{x}_2}{\sum A}$$

$$A_1 = (200mm)(100mm) = 20000mm^2$$

$$A_2 = (100mm)(200mm) = 20000mm^2$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{2}(100mm) = 50mm$$

$$\bar{x}_2 = 100mm + \frac{1}{2}(200mm) = 200mm$$

$$\sum A = 40000m^2$$

$$\bar{x} = \frac{(20000mm^2)(50mm) + (20000mm^2)(200mm)}{40000mm^2} = 125m \text{ por encima de la base}$$

Usamos el Teorema de los ejes paralelos para para calcular el momento de Inercia (I) con respecto al eje neutro:

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

Bloque	I_o (mm^4)	A (mm^2)	d (mm)	$A * d^2$ (mm^4)
1	$\left(\frac{1}{12}\right)(200)(100^3)$ = 16666666.67	20000	75	112500000
2	$\left(\frac{1}{12}\right)(100)(200^3)$ = 66666666.67	20000	75	112500000
\sum_t	83333333.34	40000		225000000

$$I = \sum I_o + \sum A * d^2 = 83333333.34 + 225000000 = 308333333.34 mm^4 = 0.000308333 m^4$$

$$A = 40000 mm^2 = 0.04 m^2$$

$$E = 2.1 * 10^7 T/m^2$$

Cosenos directores por miembro

Miembro 1:

$$Longitud(L) = 4m$$

$$\lambda_x = \frac{0 - 0}{4} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{4 - 0}{4} = 1$$

Miembro 2:

$$Longitud(L) = 5m$$

$$\lambda_x = \frac{0 - 0}{5} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{9 - 4}{5} = 1$$

Miembro 3:

$$Longitud(L) = 8m$$

$$\lambda_x = \frac{8 - 0}{8} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{9 - 9}{8} = 0$$

Miembro 4:

$$Longitud(L) = 5m$$

$$\lambda_x = \frac{8 - 8}{5} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{9 - 4}{5} = 1$$

Miembro 5:

$$Longitud(L) = 4m$$

$$\lambda_x = \frac{8 - 8}{4} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{4 - 0}{4} = 1$$

Miembro 6:

$$Longitud(L) = 8m$$

$$\lambda_x = \frac{8 - 0}{8} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{4 - 4}{8} = 0$$

-Vector de Fuerzas:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5.4688 & 2 \\ 9.375 & 3 \\ 2.5981 & 4 \\ -4.0313 & 5 \\ -5.625 & 6 \\ 0 & 7 \\ -8 & 8 \\ 10.6667 & 9 \\ 5 & 10 \\ -8 & 11 \\ -10.6667 & 12 \\ R_{6X} & 13 \\ R_{6Y} & 14 \\ M_6 & 15 \\ R_{1X} & 16 \\ R_{1Y} & 17 \\ M_1 & 18 \end{pmatrix}$$

-Vector de Desplazamientos:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 1 \\ D_2 & 2 \\ \theta_3 & 3 \\ D_4 & 4 \\ D_5 & 5 \\ \theta_6 & 6 \\ D_7 & 7 \\ D_8 & 8 \\ \theta_9 & 9 \\ D_{10} & 10 \\ D_{11} & 11 \\ \theta_{12} & 12 \\ 0 & 13 \\ 0 & 14 \\ 0 & 15 \\ 0 & 16 \\ 0 & 17 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Matriz de rigidez global por miembro:

Miembro 1:

$$k_1 = 10^5 * \begin{pmatrix} 16 & 17 & 18 & 10 & 11 & 12 \\ 0.0121 & 0 & -0.0243 & -0.0121 & 0 & -0.0243 \\ 0 & 2.1 & 0 & 0 & -2.1 & 0 \\ -0.0243 & 0 & 0.0647 & 0.0243 & 0 & 0.0324 \\ -0.0121 & 0 & 0.0243 & 0.0121 & 0 & 0.0243 \\ 0 & -2.1 & 0 & 0 & 2.1 & 0 \\ -0.0243 & 0 & 0.0324 & 0.0243 & 0 & 0.0647 \end{pmatrix} \begin{matrix} 16 \\ 17 \\ 18 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Miembro 2:

$$k_2 = 10^5 * \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 & 4 & 5 & 6 \\ 0.0062 & 0 & -0.0155 & -0.0062 & 0 & -0.0155 \\ 0 & 1.68 & 0 & 0 & -1.68 & 0 \\ -0.0155 & 0 & 0.0518 & 0.0155 & 0 & 0.0259 \\ -0.0062 & 0 & 0.0155 & 0.0062 & 0 & 0.0155 \\ 0 & -1.68 & 0 & 0 & 1.68 & 0 \\ -0.0155 & 0 & 0.0259 & 0.0155 & 0 & 0.0518 \end{pmatrix} \begin{matrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Miembro 3:

$$k_3 = 10^5 * \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 2.1263 & 0 & 0 & -2.1263 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0050 & 0.02 & 0 & -0.005 & 0.02 \\ 0 & 0.02 & 0.1069 & 0 & -0.02 & 0.0534 \\ -2.1263 & 0 & 0 & 2.1263 & 0 & 0 \\ 0 & -0.005 & -0.02 & 0 & 0.005 & -0.02 \\ 0 & 0.02 & 0.0534 & 0 & -0.02 & 0.1069 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Miembro 4:

$$k_4 = 10^5 * \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \\ 0.0062 & 0 & -0.0155 & -0.0062 & 0 & -0.0155 \\ 0 & 1.68 & 0 & 0 & -1.68 & 0 \\ -0.0155 & 0 & 0.0518 & 0.0155 & 0 & 0.0259 \\ -0.0062 & 0 & 0.0155 & 0.0062 & 0 & 0.0155 \\ 0 & -1.68 & 0 & 0 & 1.68 & 0 \\ -0.0155 & 0 & 0.0259 & 0.0155 & 0 & 0.0518 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Miembro 5:

$$k_5 = 10^5 * \begin{pmatrix} 13 & 14 & 15 & 7 & 8 & 9 \\ 0.0121 & 0 & -0.0243 & -0.0121 & 0 & -0.0243 \\ 0 & 2.1 & 0 & 0 & -2.1 & 0 \\ -0.0243 & 0 & 0.0647 & 0.0243 & 0 & 0.0324 \\ -0.0121 & 0 & 0.0243 & 0.0121 & 0 & 0.0243 \\ 0 & -2.1 & 0 & 0 & 2.1 & 0 \\ -0.0243 & 0 & 0.0324 & 0.0243 & 0 & 0.0647 \end{pmatrix} \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Miembro 6:

$$k_6 = 10^5 * \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 & 7 & 8 & 9 \\ 2.1263 & 0 & 0 & -2.1263 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0050 & 0.02 & 0 & -0.005 & 0.02 \\ 0 & 0.02 & 0.1069 & 0 & -0.02 & 0.0534 \\ -2.1263 & 0 & 0 & 2.1263 & 0 & 0 \\ 0 & -0.005 & -0.02 & 0 & 0.005 & -0.02 \\ 0 & 0.02 & 0.0534 & 0 & -0.02 & 0.1069 \end{pmatrix} \begin{matrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

Ensamblando las matrices anteriores:

La matriz de rigidez global de la estructura adquiere la siguiente forma:

$$K_T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

A continuación se proporciona por separado cada una de las subdivisiones de K_T :

Matriz K_{11} :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
K_{11}														
$= 10^5 *$	$\begin{pmatrix}$	2.1325	0	0.0155	-2.1263	0	0	-0.0062	0	0.0155	0	0	0	1
		0	1.6850	-0.02	0	-0.005	-0.02	0	-1.68	0	0	0	0	2
		0.0155	-0.02	0.1587	0	0.02	0.0534	-0.0155	0	0.0259	0	0	0	3
		-2.1263	0	0	2.1325	0	0.0155	0	0	0	-0.0062	0	0.0155	4
		0	-0.005	0.02	0	1.685	0.02	0	0	0	0	-1.68	0	5
		0	-0.02	0.0534	0.0155	0.02	0.1587	0	0	0.0155	0	0.0259	0	6
		-0.0062	0	-0.0155	0	0	0	2.1446	0	0.0087	-2.1263	0	0	7
		0	-1.68	0	0	0	0	0	3.785	-0.02	0	-0.005	-0.02	8
		0.0155	0	0.0259	0	0	0	0.0087	-0.02	0.2234	0	0.02	0.0534	9
		0	0	0	-0.0062	0	-0.0155	-2.1263	0	0	2.1416	0	0.0087	10
		0	0	0	0	-1.68	0	0	-0.005	0.02	0	3.785	0.02	11
		0	0	0	0.0155	0	0.0259	0	-0.02	0.0534	0.0087	0.02	0.2234	12

Matriz K_{12} :

		13	14	15	16	17	18	
$K_{12} = 10^5 *$	$\begin{pmatrix}$	0	0	0	0	0	0	1
		0	0	0	0	0	0	2
		0	0	0	0	0	0	3
		0	0	0	0	0	0	4
		0	0	0	0	0	0	5
		0	0	0	0	0	0	6
		-0.0121	0	0.0243	0	0	0	7
		0	-2.1	0	0	0	0	8
		-0.0243	0	0.0324	0	0	0	9
		0	0	0	-0.0121	0	0.0243	10
		0	0	0	0	-2.1	0	11
		0	0	0	-0.0243	0	0.0324	12

Matriz K_{21} :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$K_{21} = 10^5 *$	$\begin{pmatrix}$	0	0	0	0	0	-0.0121	0	-0.0243	0	0	0	13
		0	0	0	0	0	0	-2.1	0	0	0	0	14
		0	0	0	0	0	0.0243	0	0.0324	0	0	0	15
		0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0121	0	-0.0243	16
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2.1	0	17
		0	0	0	0	0	0	0	0	0.0243	0	0.0324	18

Matriz K_{22} :

$$K_{22} = 10^5 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0121 & 0 & -0.0243 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0243 & 0 & 0.0647 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0121 & 0 & -0.0243 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0243 & 0 & 0.0647 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \end{matrix} \end{matrix}$$

De $F=K_T*D$ extraemos los siguientes subsistemas:

Subsistema 1:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -5.4688 \\ 9.375 \\ 2.5981 \\ -4.0313 \\ -5.625 \\ 0 \\ -8 \\ 10.6667 \\ 5 \\ -8 \\ -10.6667 \end{pmatrix} = (K_{11}) \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \theta_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ \theta_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ \theta_{12} \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \theta_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ \theta_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ \theta_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0082m \\ -0.0001m \\ 0.0005rad \\ 0.0082m \\ -0.0001m \\ -0.0007rad \\ 0.0043m \\ -0.0001m \\ -0.0000rad \\ 0.0043m \\ -0.0000m \\ -0.0011rad \end{pmatrix}$$

Subsistema 2:

$$\begin{pmatrix} R_{6X} \\ R_{6Y} \\ M_6 \\ R_{1X} \\ R_{1Y} \\ M_1 \end{pmatrix} = (K_{21}) \begin{pmatrix} 0.0082 \\ -0.0001 \\ 0.0005 \\ 0.0082 \\ -0.0001 \\ -0.0007 \\ 0.0043 \\ -0.0001 \\ -0.0000 \\ 0.0043 \\ -0.0000 \\ -0.0011 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.1044 \\ 16.2867 \\ 10.2815 \\ -2.4937 \\ 9.2134 \\ 6.8084 \end{pmatrix}$$

∴ Las reacciones son:

$$\begin{aligned} R_{6X} &= 5.1044T \quad \leftarrow \\ R_{6Y} &= 16.2867T \quad \uparrow \\ M_6 &= 10.2815T.m \quad \curvearrowright \\ R_{1X} &= 2.4937T \quad \leftarrow \\ R_{1Y} &= 9.2134T \quad \uparrow \\ M_1 &= 6.8084 T.m \quad \curvearrowright \end{aligned}$$

Demostramos que la estructura está en equilibrio mediante el uso de las fuerzas externas (obsérvese el diagrama del marco donde se muestran tales fuerzas):

$$\sum FY = 0$$

$$9.2134 - 1.5 - 8 - 16 + 16.2867 \cong 0 \quad OK$$

$$\sum FX = 0$$

$$-2.4937 + 5 + 2.5981 - 5.1044 \cong 0 \quad OK$$

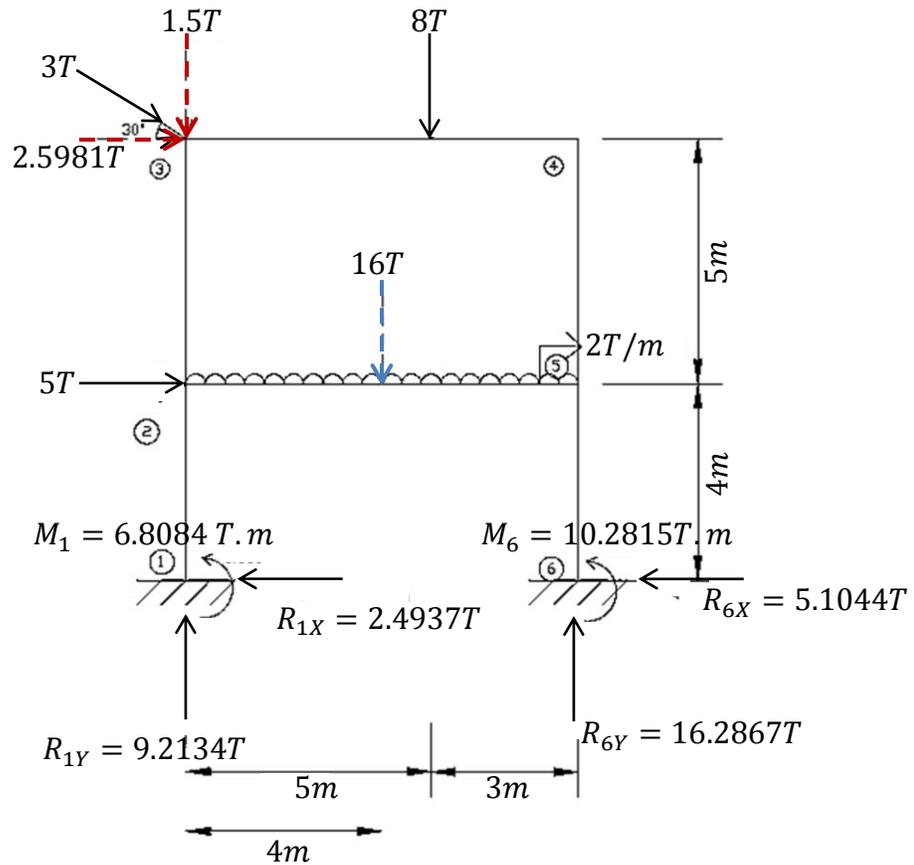
$$\sum M_1 = 0$$

$$-6.8084 + 5(4) * 2.5981(9) + 8(5) + 16(4) - 10.2815 - 16.2867(8) \cong 0 \quad OK$$

$$\sum M_6 = 0$$

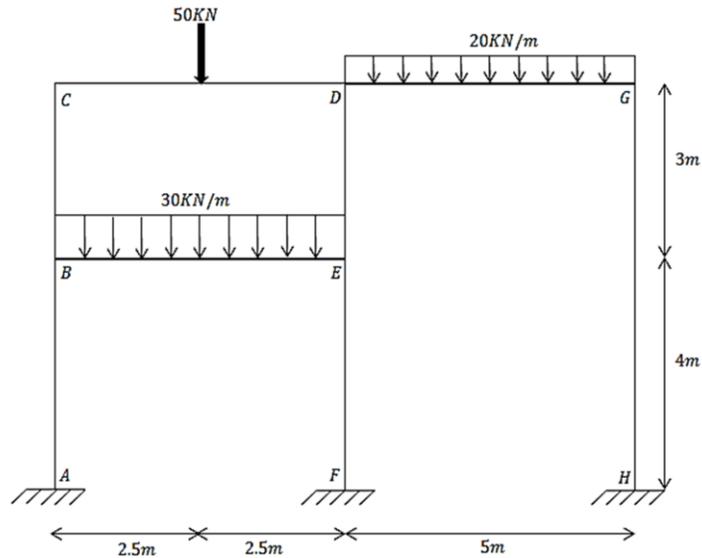
$$9.2134(8) - 6.8084 + 5(4) + 2.5981(9) - 8(3) - 16(4) - 1.5(8) - 10.2815 \cong 0 \text{ OK}$$

Diagrama del marco que muestra las reacciones:



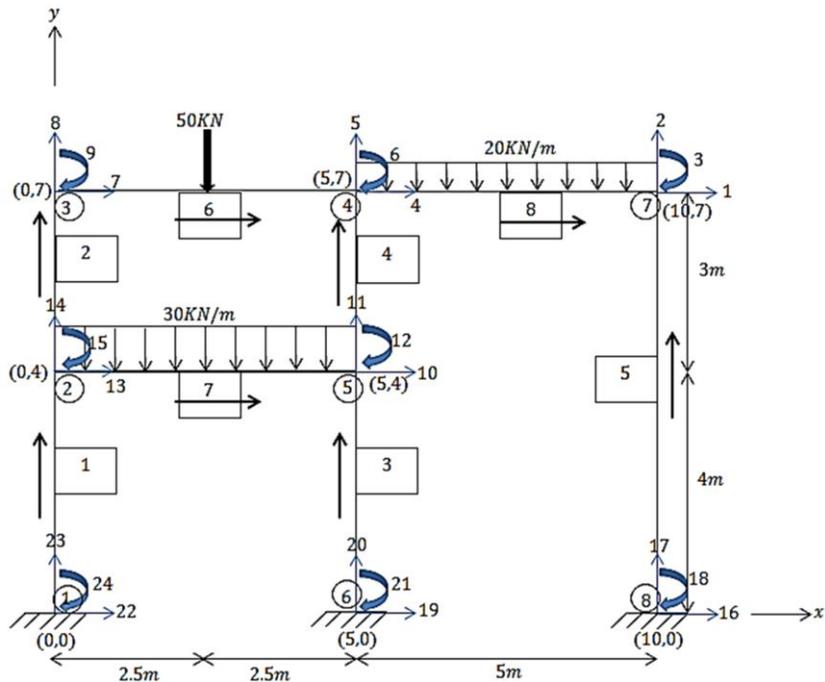
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

5.- En la siguiente figura se presenta un marco con una columna de doble altura. Calcular las reacciones en los tres empotres con el método de la rigidez. Considere para todos los miembros una sección transversal rectangular de base (b)=20cm y altura (h)=50cm y el módulo de elasticidad del concreto que se ha utilizado en los anteriores problemas.



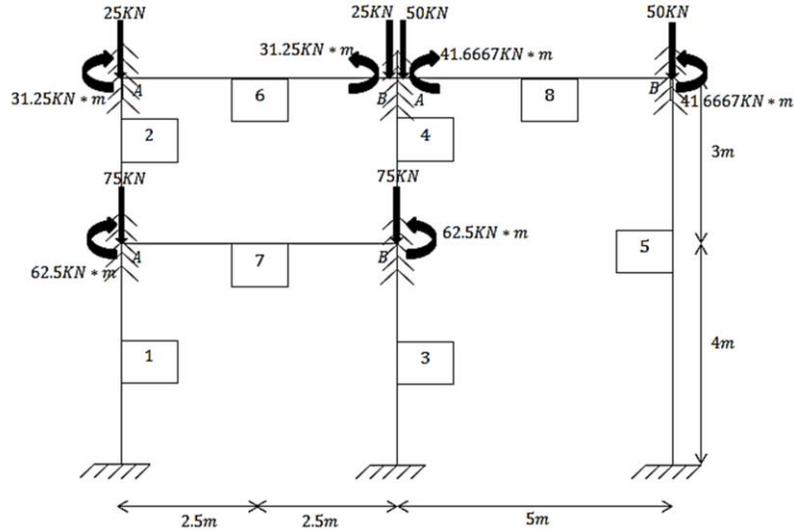
SOLUCIÓN:

Codificación:



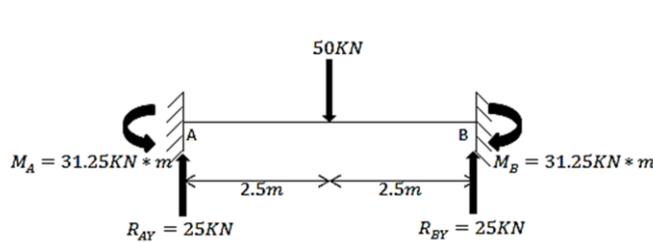
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

Empotrando doblemente los miembros, las acciones o cargas sobre los nodos son las siguientes:



Las acciones fueron obtenidas a partir de invertir las reacciones de cada miembro doblemente empotrado que a continuación se calculan:

Miembro 6:



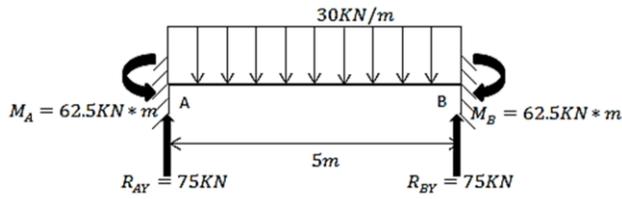
$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{P}{2} = \frac{50\text{KN}}{2} = 25 \text{ KN} \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{PL}{8} = \frac{(50\text{KN})(5\text{m})}{8} = 31.25 \text{ KN.m}$$

↻ ↻ Respectivamente

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

Miembro 7:

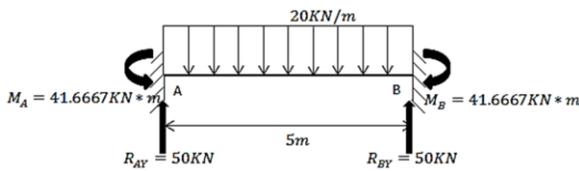


$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{WL}{2} = \frac{(30\text{ kN/m})(5\text{ m})}{2} = 75\text{ kN} \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{WL^2}{12} = \frac{(30\text{ kN/m})(5\text{ m})^2}{12} = 62.5\text{ kN}\cdot\text{m}$$

↻ ↻ Respectivamente

Miembro 8:

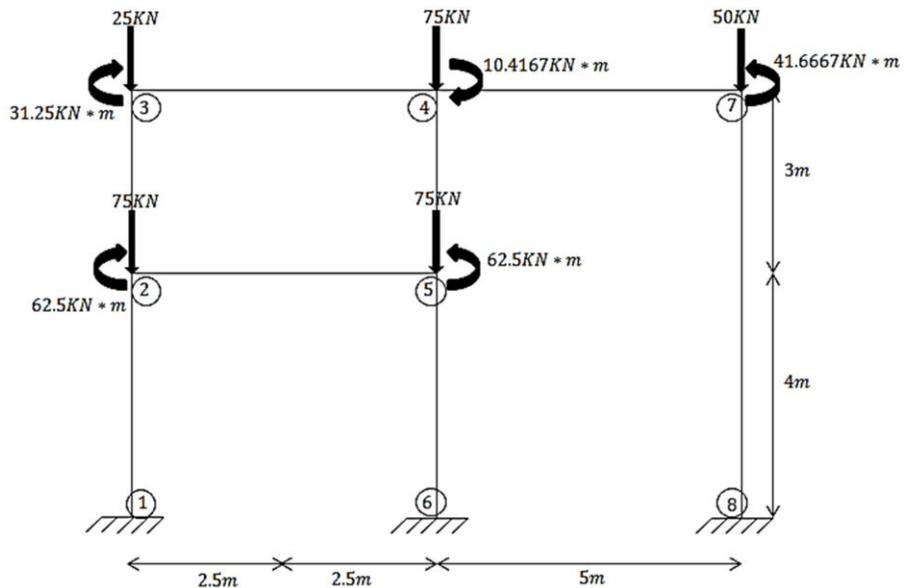


$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{WL}{2} = \frac{(20\text{ kN/m})(5\text{ m})}{2} = 50\text{ kN} \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{WL^2}{12} = \frac{(20\text{ kN/m})(5\text{ m})^2}{12} = 41.6667\text{ kN}\cdot\text{m}$$

↻ ↻ Respectivamente

Las acciones o cargas totales en cada nodo del marco son:



Para todos los miembros:

$$-\text{ÁREA}(A) = (0.2m)(0.5m) = 0.1m^2$$

$$-\text{Módulo de elasticidad}(E) = 2213594.362 \text{ T/m}^2 = 21707947.03 \text{ KN/m}^2$$

$$-\text{INERCIA}(I) = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0.2m)(0.5m)^3}{12} = 0.002083333m^4$$

-Vector de Fuerzas:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -50 & 2 \\ 41.6667 & 3 \\ 0 & 4 \\ -75 & 5 \\ -10.4167 & 6 \\ 0 & 7 \\ -25 & 8 \\ -31.25 & 9 \\ 0 & 10 \\ -75 & 11 \\ 62.5 & 12 \\ 0 & 13 \\ -75 & 14 \\ -62.5 & 15 \\ R_{HX} & 16 \\ R_{HY} & 17 \\ M_H & 18 \\ R_{FX} & 19 \\ R_{FY} & 20 \\ M_F & 21 \\ R_{AX} & 22 \\ R_{AY} & 23 \\ M_A & 24 \end{pmatrix}$$

-Vector de Desplazamientos:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 1 \\ D_2 & 2 \\ \theta_3 & 3 \\ D_4 & 4 \\ D_5 & 5 \\ \theta_6 & 6 \\ D_7 & 7 \\ D_8 & 8 \\ \theta_9 & 9 \\ D_{10} & 10 \\ D_{11} & 11 \\ \theta_{12} & 12 \\ D_{13} & 13 \\ D_{14} & 14 \\ \theta_{15} & 15 \\ 0 & 16 \\ 0 & 17 \\ 0 & 18 \\ 0 & 19 \\ 0 & 20 \\ 0 & 21 \\ 0 & 22 \\ 0 & 23 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$$

Cosenos directores por miembro

Miembro 1:

$$Longitud(L) = 4m$$

$$\lambda_x = \frac{0 - 0}{4} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{4 - 0}{4} = 1$$

Miembro 2:

$$Longitud(L) = 3m$$

$$\lambda_x = \frac{0 - 0}{3} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{7 - 4}{3} = 1$$

Miembro 3:

$$\text{Longitud}(L) = 4m$$

$$\lambda_x = \frac{5 - 5}{4} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{4 - 0}{4} = 1$$

Miembro 4:

$$\text{Longitud}(L) = 3m$$

$$\lambda_x = \frac{5 - 5}{3} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{7 - 4}{3} = 1$$

Miembro 5:

$$\text{Longitud}(L) = 7m$$

$$\lambda_x = \frac{10 - 10}{7} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{7 - 0}{7} = 1$$

Miembro 6:

$$\text{Longitud}(L) = 5m$$

$$\lambda_x = \frac{5 - 0}{5} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{7 - 7}{5} = 0$$

Miembro 7:

$$\text{Longitud}(L) = 5m$$

$$\lambda_x = \frac{5 - 0}{5} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{4 - 4}{5} = 0$$

Miembro 8:

$$Longitud(L) = 5m$$

$$\lambda_x = \frac{10 - 5}{5} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{7 - 7}{5} = 0$$

Matriz de rigidez global por miembro:

Miembro 1:

$$k_1 = 10^5 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 22 & 23 & 24 & 13 & 14 & 15 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0848 & 0 & -0.1696 & -0.0848 & 0 & -0.1696 \\ 0 & 5.4270 & 0 & 0 & -5.427 & 0 \\ -0.1696 & 0 & 0.4522 & 0.1696 & 0 & 0.2261 \\ -0.0848 & 0 & 0.1696 & 0.0848 & 0 & 0.1696 \\ 0 & -5.4270 & 0 & 0 & 5.427 & 0 \\ -0.1696 & 0 & 0.2261 & 0.1696 & 0 & 0.4522 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 22 \\ 23 \\ 24 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{matrix} \end{matrix}$$

Miembro 2:

$$k_2 = 10^5 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 13 & 14 & 15 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.201 & 0 & -0.3015 & -0.2010 & 0 & -0.3015 \\ 0 & 7.236 & 0 & 0 & -7.236 & 0 \\ -0.3015 & 0 & 0.6030 & 0.3015 & 0 & 0.3015 \\ -0.2010 & 0 & 0.3015 & 0.2010 & 0 & 0.3015 \\ 0 & -7.236 & 0 & 0 & 7.236 & 0 \\ -0.3015 & 0 & 0.3015 & 0.3015 & 0 & 0.603 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{matrix}$$

Miembro 3:

$$k_3 = 10^5 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 19 & 20 & 21 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0848 & 0 & -0.1696 & -0.0848 & 0 & -0.1696 \\ 0 & 5.4270 & 0 & 0 & -5.427 & 0 \\ -0.1696 & 0 & 0.4522 & 0.1696 & 0 & 0.2261 \\ -0.0848 & 0 & 0.1696 & 0.0848 & 0 & 0.1696 \\ 0 & -5.4270 & 0 & 0 & 5.427 & 0 \\ -0.1696 & 0 & 0.2261 & 0.1696 & 0 & 0.4522 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 19 \\ 20 \\ 21 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \end{matrix}$$

Miembro 4:

$$k_4 = 10^5 * \begin{pmatrix} 0.201 & 0 & -0.3015 & -0.2010 & 0 & -0.3015 \\ 0 & 7.236 & 0 & 0 & -7.236 & 0 \\ -0.3015 & 0 & 0.6030 & 0.3015 & 0 & 0.3015 \\ -0.2010 & 0 & 0.3015 & 0.2010 & 0 & 0.3015 \\ 0 & -7.236 & 0 & 0 & 7.236 & 0 \\ -0.3015 & 0 & 0.3015 & 0.3015 & 0 & 0.6030 \end{pmatrix} \begin{matrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Miembro 5:

$$k_5 = 10^5 * \begin{pmatrix} 0.0158 & 0 & -0.0554 & -0.0158 & 0 & -0.0554 \\ 0 & 3.1011 & 0 & 0 & -3.1011 & 0 \\ -0.0554 & 0 & 0.2584 & 0.0554 & 0 & 0.1292 \\ -0.0158 & 0 & 0.0554 & 0.0158 & 0 & 0.0554 \\ 0 & -3.1011 & 0 & 0 & 3.1011 & 0 \\ -0.0554 & 0 & 0.1292 & 0.0554 & 0 & 0.2584 \end{pmatrix} \begin{matrix} 16 \\ 17 \\ 18 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Miembro 6:

$$k_6 = 10^5 * \begin{pmatrix} 4.3416 & 0 & 0 & -4.3416 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0434 & 0.1085 & 0 & -0.0434 & 0.1085 \\ 0 & 0.1085 & 0.3618 & 0 & -0.1085 & 0.1809 \\ -4.3416 & 0 & 0 & 4.3416 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0434 & -0.1085 & 0 & 0.0434 & -0.1085 \\ 0 & 0.1085 & 0.1809 & 0 & -0.1085 & 0.3618 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Miembro 7:

$$k_7 = 10^5 * \begin{pmatrix} 4.3416 & 0 & 0 & -4.3416 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0434 & 0.1085 & 0 & -0.0434 & 0.1085 \\ 0 & 0.1085 & 0.3618 & 0 & -0.1085 & 0.1809 \\ -4.3416 & 0 & 0 & 4.3416 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0434 & -0.1085 & 0 & 0.0434 & -0.1085 \\ 0 & 0.1085 & 0.1809 & 0 & -0.1085 & 0.3618 \end{pmatrix} \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Miembro 8:

$$k_8 = 10^5 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4.3416 & 0 & 0 & -4.3416 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0434 & 0.1085 & 0 & -0.0434 & 0.1085 \\ 0 & 0.1085 & 0.3618 & 0 & -0.1085 & 0.1809 \\ -4.3416 & 0 & 0 & 4.3416 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0434 & -0.1085 & 0 & 0.0434 & -0.1085 \\ 0 & 0.1085 & 0.1809 & 0 & -0.1085 & 0.3618 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Ensamblando las matrices anteriores:

La matriz de rigidez global de la estructura adquiere la siguiente forma:

$$K_T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

A continuación se proporciona por separado cada una de las subdivisiones de K_T :

Matriz K_{11} :

$$K_{11} = 10^6 *$$

Columnas desde la 1 hasta la 9

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.4357 & 0 & 0.0055 & -0.4342 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3145 & -0.0109 & 0 & -0.0043 & -0.0109 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0055 & -0.0109 & 0.062 & 0 & 0.0109 & 0.0181 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4342 & 0 & 0 & 0.8884 & 0 & 0.0301 & -0.4342 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0043 & 0.0109 & 0 & 0.7323 & 0 & 0 & -0.0043 & -0.0109 \\ 0 & -0.0109 & 0.0181 & 0.0301 & 0 & 0.1327 & 0 & 0.0109 & 0.0181 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4342 & 0 & 0 & 0.4543 & 0 & 0.0301 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0043 & 0.0109 & 0 & 0.7279 & 0.0109 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0109 & 0.0181 & 0.0301 & 0.0109 & 0.0965 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0201 & 0 & -0.0301 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7236 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0301 & 0 & 0.0301 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0201 & 0 & -0.0301 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7236 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0301 & 0 & 0.0301 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Columnas desde la 10 hasta la 15

	10	11	12	13	14	15	
	0	0	0	0	0	0] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	
	-0.0201	0	0.0301	0	0	0	
	0	-0.7236	0	0	0	0	
	-0.0301	0	0.0301	0	0	0	
	0	0	0	-0.0201	0	0.0301	
	0	0	0	0	-0.7236	0	
	0	0	0	-0.0301	0	0.0301	
	0.4627	0	-0.0132	-0.4342	0	0	
	0	1.2706	-0.0109	0	-0.0043	-0.0109	
	-0.0132	-0.0109	0.1417	0	0.0109	0.0181	
	-0.4342	0	0	0.4627	0	-0.0132	
	0	-0.0043	0.0109	0	1.2706	0.0109	
	0	-0.0109	0.0181	-0.0132	0.0109	0.1417	

Matriz K_{12} :

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
$K_{12} = 10^6 *$	-0.0016	0	0.0055	0	0	0	0	0	0] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
	0	-0.3101	0	0	0	0	0	0	0	
	-0.0055	0	0.0129	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	-0.0085	0	0.017	0	0	0	
	0	0	0	0	-0.5427	0	0	0	0	
	0	0	0	-0.017	0	0.0226	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	-0.0085	0	0.017	
	0	0	0	0	0	0	0	-0.5427	0	
	0	0	0	0	0	0	-0.017	0	0.0226	

Matriz K_{21} :

Columnas desde la 1 hasta la 9

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$K_{21} = 10^6 *$	-0.0016	0	-0.0055	0	0	0	0	0	0
	0	-0.3101	0	0	0	0	0	0	0
	0.0055	0	0.0129	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Columnas desde la 10 hasta 15

	10	11	12	13	14	15	
	0	0	0	0	0	0	} 16 17 18 19 20 21 22 23 24
	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	
	-0.0085	0	-0.0170	0	0	0	
	0	-0.5427	0	0	0	0	
	0.0170	0	0.0226	0	0	0	
	0	0	0	-0.0085	0	-0.0170	
	0	0	0	0	-0.5427	0	
	0	0	0	0.0170	0	0.0226	

Matriz K_{22} :

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
$K_{22} = 10^6 *$	0.0016	0	-0.0055	0	0	0	0	0	0	} 16 17 18 19 20 21 22 23 24
	0	0.3101	0	0	0	0	0	0	0	
	-0.0055	0	0.0258	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0.0085	0	-0.017	0	0	0	
	0	0	0	0	0.5427	0	0	0	0	
	0	0	0	-0.017	0	0.0452	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0.0085	0	-0.017	
	0	0	0	0	0	0	0	0.5427	0	
	0	0	0	0	0	0	-0.017	0	0.0452	

De $F=K_T * D$ extraemos los siguientes subsistemas:

Subsistema 1:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ 41.6667 \\ 0 \\ -75 \\ -10.4167 \\ 0 \\ -25 \\ -31.25 \\ 0 \\ -75 \\ 62.5 \\ 0 \\ -75 \\ -62.5 \end{pmatrix} = (K_{11}) \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \theta_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ \theta_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ \theta_{12} \\ D_{13} \\ D_{14} \\ \theta_{15} \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \theta_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ \theta_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ \theta_{12} \\ D_{13} \\ D_{14} \\ \theta_{15} \end{pmatrix} = 10^{-3} * \begin{pmatrix} -0.0839 \\ -0.1479 \\ 0.8230 \\ -0.0737 \\ -0.4079 \\ -0.3367 \\ -0.0374 \\ -0.2043 \\ -0.2181 \\ -0.3131 \\ -0.2914 \\ 0.5538 \\ -0.3237 \\ -0.1769 \\ -0.4963 \end{pmatrix}$$

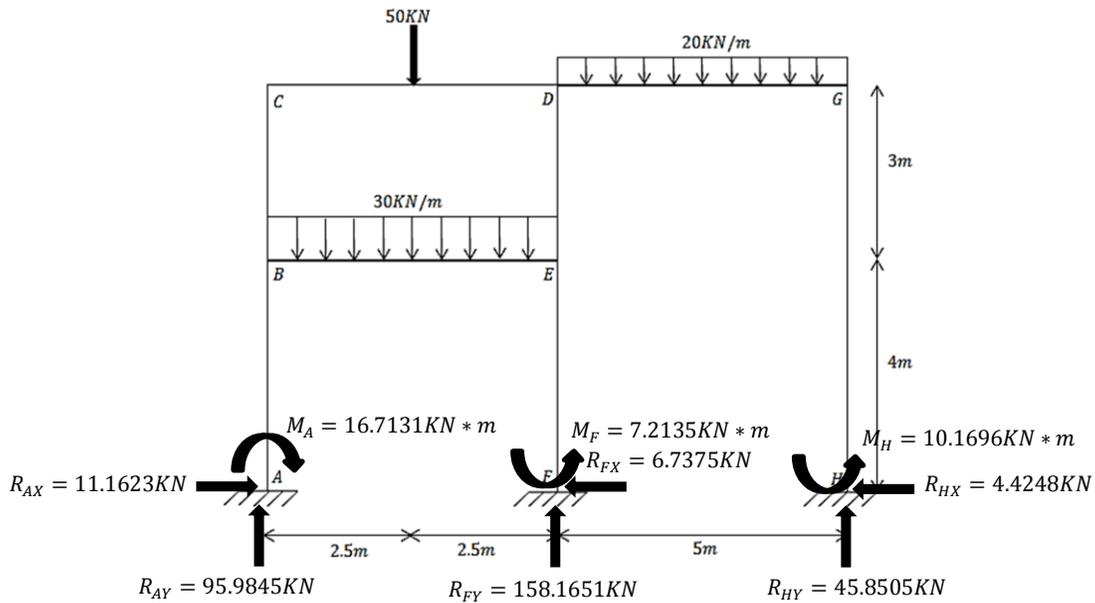
Subsistema 2:

$$\begin{pmatrix} R_{HX} \\ R_{HY} \\ M_H \\ R_{FX} \\ R_{FY} \\ M_F \\ R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_A \end{pmatrix} = (K_{21}) * 10^{-3} * \begin{pmatrix} -0.0839 \\ -0.1479 \\ 0.8230 \\ -0.0737 \\ -0.4079 \\ -0.3367 \\ -0.0374 \\ -0.2043 \\ -0.2181 \\ -0.3131 \\ -0.2914 \\ 0.5538 \\ -0.3237 \\ -0.1769 \\ -0.4963 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.4248 \\ 45.8505 \\ 10.1696 \\ -6.7375 \\ 158.1651 \\ 7.2135 \\ 11.1623 \\ 95.9845 \\ -16.7131 \end{pmatrix}$$

De lo anterior:

$$\begin{aligned} R_{HX} &= 4.4248 \text{ KN } \leftarrow \\ R_{HY} &= 45.8505 \text{ KN } \uparrow \\ M_H &= 10.1696 \text{ KN.m } \curvearrowright \\ R_{FX} &= 6.7375 \text{ KN } \leftarrow \\ R_{FY} &= 158.1651 \text{ KN } \uparrow \\ M_F &= 7.2135 \text{ KN.m } \curvearrowright \\ R_{AX} &= 11.1623 \text{ KN } \rightarrow \\ R_{AY} &= 95.9845 \text{ KN } \uparrow \\ M_A &= 16.7131 \text{ KN.m } \curvearrowright \end{aligned}$$

Diagrama del marco original que muestra las reacciones definitivas:



Demostramos que la estructura está en equilibrio mediante el uso de fuerzas externas:

$$\sum FX = 0$$

$$11.1623 - 6.7375 - 4.4248 = 0 \quad OK$$

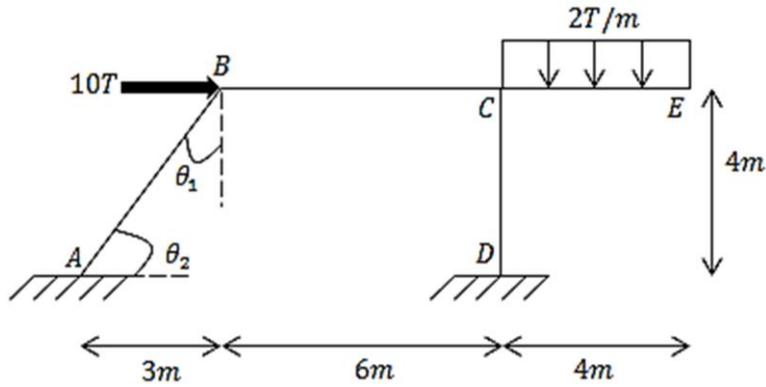
$$\sum FY = 0$$

$$-50 - 150 - 100 + 95.9845 + 158.1651 + 45.8505 \cong 0 \quad OK$$

$$\sum MA = 0$$

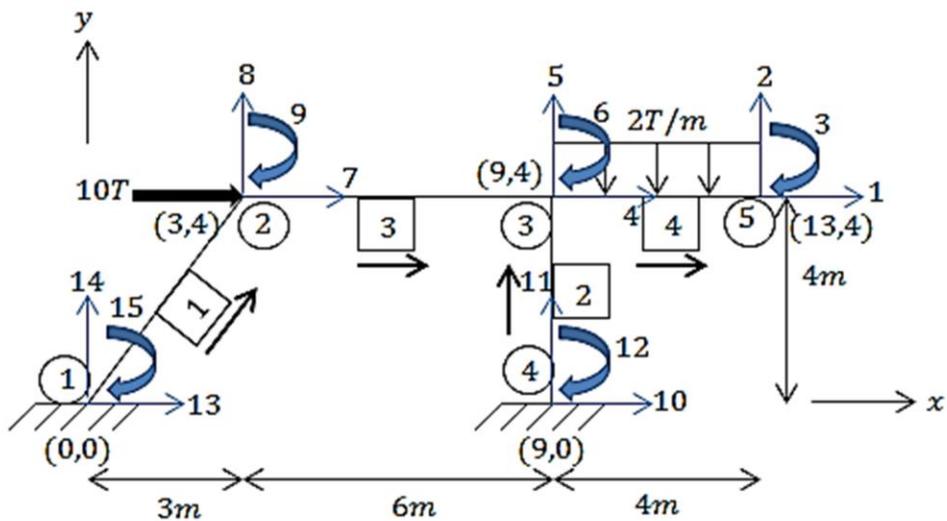
$$16.7131 + 50(2.5) + 150(2.5) - 7.2135 - 158.1651(5) + 100(7.5) - 10.1696 - 45.8505(10) \cong 0 \quad OK$$

6.- Realizar el análisis del siguiente marco con una columna inclinada mediante el método de la rigidez. La sección transversal para todos los miembros es circular, con un radio (r)= 25cm. Use el módulo de elasticidad del concreto cuyo $f'c=250\text{kg/cm}^2$.



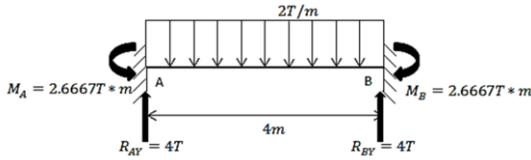
SOLUCIÓN:

Codificación o Notación:



Empotrando doblemente el miembro 4, las reacciones de este son:

Miembro 4:

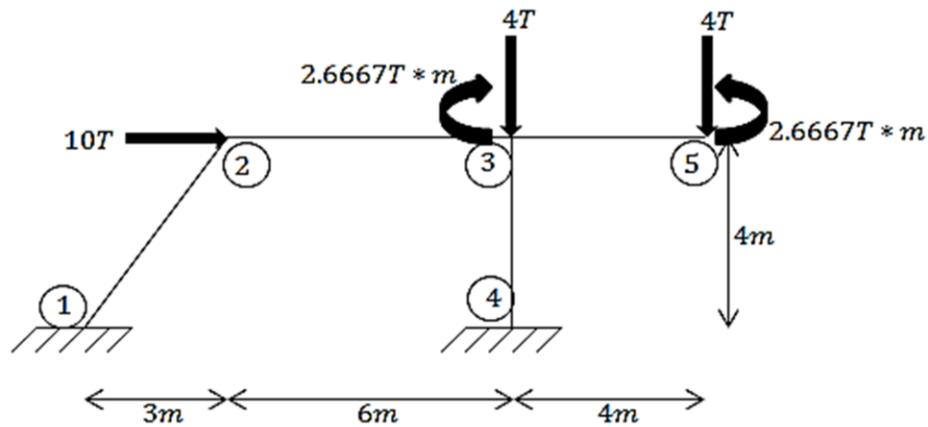


$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{WL}{2} = \frac{(2T/m)(4m)}{2} = 4T \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{WL^2}{12} = \frac{(2T/m)((4m)^2)}{12} = 2.6667T \cdot m \curvearrowright$$

Respectivamente

Las cargas o acciones totales en cada nodo del marco son:



Para todos los miembros:

$$-\text{Área}(A) = \pi r^2 = (3.1416)(0.25m)^2 = 0.19635m^2$$

$$-\text{Módulo de Elasticidad}(E) = 2213594.362 T/m^2$$

$$-\text{Inercia}(I) = \frac{1}{4} \pi r^4 = \left(\frac{1}{4}\right) (3.1416)(0.25m)^4 = 0.003067969m^4$$

-Vector de Fuerzas:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \\ 2.6667 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 5 \\ -2.6667 & 6 \\ 10 & 7 \\ 0 & 8 \\ 0 & 9 \\ \hline R_{DX} & 10 \\ R_{DY} & 11 \\ M_D & 12 \\ R_{AX} & 13 \\ R_{AY} & 14 \\ M_A & 15 \end{pmatrix}$$

-Vector de Desplazamientos:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 1 \\ D_2 & 2 \\ \theta_3 & 3 \\ D_4 & 4 \\ D_5 & 5 \\ \theta_6 & 6 \\ D_7 & 7 \\ D_8 & 8 \\ \theta_9 & 9 \\ \hline 0 & 10 \\ 0 & 11 \\ 0 & 12 \\ 0 & 13 \\ 0 & 14 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Cosenos directores por miembro:

Miembro 1:

$$Longitud(L) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5m$$

$$\lambda_x = \frac{3 - 0}{5} = 0.6$$

$$\lambda_y = \frac{4 - 0}{5} = 0.8$$

Miembro 2:

$$Longitud(L) = 4m$$

$$\lambda_x = \frac{9 - 9}{4} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{4 - 0}{4} = 1$$

Miembro 3:

$$Longitud(L) = 6m$$

$$\lambda_x = \frac{9 - 3}{6} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{4 - 4}{6} = 0$$

Miembro 4:

$$Longitud(L) = 4m$$

$$\lambda_x = \frac{13 - 9}{4} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{4 - 4}{4} = 0$$

Matriz de rigidez global por miembro:

Miembro 1:

$$k_1 = 10^4 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 13 & 14 & 15 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3.1711 & 4.1412 & -0.1304 & -3.1711 & -4.1412 & -0.1304 \\ 4.1412 & 5.5869 & 0.0978 & -4.1412 & -5.5869 & 0.0978 \\ -0.1304 & 0.0978 & 0.5433 & 0.1304 & -0.0978 & 0.2716 \\ -3.1711 & -4.1412 & 0.1304 & 3.1711 & 4.1412 & 0.1304 \\ -4.1412 & -5.5869 & -0.0978 & 4.1412 & 5.5869 & -0.0978 \\ -0.1304 & 0.0978 & 0.2716 & 0.1304 & -0.0978 & 0.5433 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{matrix}$$

Miembro 2:

$$k_2 = 10^5 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 10 & 11 & 12 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0127 & 0 & -0.0255 & -0.0127 & 0 & -0.0255 \\ 0 & 1.0866 & 0 & 0 & -1.0866 & 0 \\ -0.0255 & 0 & 0.0679 & 0.0255 & 0 & 0.0340 \\ -0.0127 & 0 & 0.0255 & 0.0127 & 0 & 0.0255 \\ 0 & -1.0866 & 0 & 0 & 1.0866 & 0 \\ -0.0255 & 0 & 0.0340 & 0.0255 & 0 & 0.0679 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Miembro 3:

$$k_3 = 10^4 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 7.244 & 0 & 0 & -7.244 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0377 & 0.1132 & 0 & -0.0377 & 0.1132 \\ 0 & 0.1132 & 0.4527 & 0 & -0.1132 & 0.2264 \\ -7.244 & 0 & 0 & 7.244 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0377 & -0.1132 & 0 & 0.0377 & -0.1132 \\ -0.1696 & 0.1132 & 0.2264 & 0 & -0.1132 & 0.4527 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Miembro 4:

$$k_4 = 10^5 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.201 & 0 & -0.3015 & -0.2010 & 0 & -0.3015 \\ 0 & 7.236 & 0 & 0 & -7.236 & 0 \\ -0.3015 & 0 & 0.6030 & 0.3015 & 0 & 0.3015 \\ -0.2010 & 0 & 0.3015 & 0.2010 & 0 & 0.3015 \\ 0 & -7.236 & 0 & 0 & 7.236 & 0 \\ -0.3015 & 0 & 0.3015 & 0.3015 & 0 & 0.6030 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

Ensamblando las matrices anteriores:

La matriz de rigidez global de la estructura adquiere la siguiente forma:

$$K_T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

A continuación se proporciona por separado cada una de las subdivisiones de K_T :

Matriz K_{11} :

$$K_{11} = 10^5 * \begin{pmatrix} 1.0866 & 0 & 0 & -1.0866 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0127 & -0.0255 & 0 & -0.0127 & -0.0255 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0255 & 0.0679 & 0 & 0.0255 & 0.034 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0866 & 0 & 0 & 1.8237 & 0 & 0.0255 & -0.7244 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0127 & 0.0255 & 0 & 1.1031 & 0.0141 & 0 & -0.0038 & -0.0113 \\ 0 & -0.0255 & 0.034 & 0.0255 & 0.0141 & 0.1811 & 0 & 0.0113 & 0.0226 \\ 0 & 0 & 0 & -0.7244 & 0 & 0 & 1.0415 & 0.4141 & 0.013 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0038 & 0.0113 & 0.4141 & 0.5625 & 0.0015 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0113 & 0.0226 & 0.013 & 0.0015 & 0.0966 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Matriz K_{12} :

$$K_{12} = 10^5 * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0127 & 0 & 0.0255 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0866 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0255 & 0 & 0.0340 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3171 & -0.4141 & 0.0130 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4141 & -0.5587 & -0.0098 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0130 & 0.0098 & 0.0272 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Matriz K_{21} :

$$K_{21} = 10^5 * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.0127 & 0 & -0.0255 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0866 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0255 & 0 & 0.0340 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3171 & -0.4141 & -0.0130 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4141 & -0.5587 & 0.0098 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0130 & -0.0098 & 0.0272 \end{pmatrix} \begin{matrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{matrix}$$

Matriz K_{22} :

$$K_{22} = 10^5 * \begin{pmatrix} 0.0127 & 0 & -0.0255 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0866 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0255 & 0 & 0.0679 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3171 & 0.4141 & -0.0130 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4141 & 0.5587 & 0.0098 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0130 & 0.0098 & 0.0543 \end{pmatrix} \begin{matrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{matrix}$$

De $F=K_T \cdot D$ extraemos los siguientes subsistemas:

Subsistema 1:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2.6667 \\ 0 \\ -4 \\ -2.6667 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 10^5 * \begin{pmatrix} 1.0866 & 0 & 0 & -1.0866 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0127 & -0.0255 & 0 & -0.0127 & -0.0255 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0255 & 0.0679 & 0 & 0.0255 & 0.034 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0866 & 0 & 0 & 1.8237 & 0 & 0.0255 & -0.7244 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0127 & 0.0255 & 0 & 1.1031 & 0.0141 & 0 & -0.0038 & -0.0113 \\ 0 & -0.0255 & 0.034 & 0.0255 & 0.0141 & 0.1811 & 0 & 0.0113 & 0.0226 \\ 0 & 0 & 0 & -0.7244 & 0 & 0 & 1.0415 & 0.4141 & 0.013 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0038 & 0.0113 & 0.4141 & 0.5625 & 0.0015 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0113 & 0.0226 & 0.013 & 0.0015 & 0.0966 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \theta_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ \theta_9 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \theta_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ \theta_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0056 \\ -0.0185 \\ -0.0054 \\ 0.0056 \\ -0.0001 \\ -0.0022 \\ 0.0057 \\ -0.0041 \\ -0.0002 \end{pmatrix}$$

Subsistema 2:

$$\begin{pmatrix} R_{DX} \\ R_{DY} \\ M_D \\ R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_A \end{pmatrix} = 10^5 * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.0127 & 0 & -0.0255 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0866 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0255 & 0 & 0.0340 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3171 & -0.4141 & -0.0130 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4141 & -0.5587 & 0.0098 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0130 & -0.0098 & 0.0272 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.0056 \\ -0.0185 \\ -0.0054 \\ 0.0056 \\ -0.0001 \\ -0.0022 \\ 0.0057 \\ -0.0041 \\ -0.0002 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{pmatrix} R_{DX} \\ R_{DY} \\ M_D \\ R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.4643 \\ 12.2590 \\ 6.7418 \\ -8.5357 \\ -4.2590 \\ 10.9271 \end{pmatrix}$$

Las reacciones son:

$$R_{DX} = 1.4643 T \quad \leftarrow$$

$$R_{DY} = 12.259 T \quad \uparrow$$

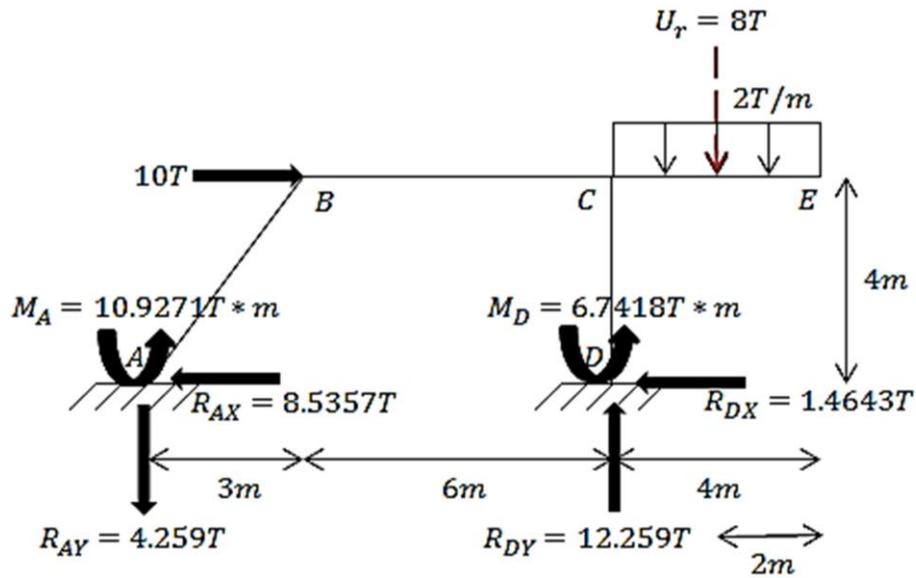
$$M_D = 6.7418 T.m \quad \curvearrowright$$

$$R_{AX} = 8.5357 T \leftarrow$$

$$R_{AY} = 4.259 T \downarrow$$

$$M_A = 10.9271 T \cdot m \curvearrowright$$

Diagrama del marco original que muestra las reacciones:



Demostramos el equilibrio de la estructura haciendo uso de fuerzas externas:

$$\sum F_Y = 0$$

$$-4.259 - 8 + 12.259 = 0 \quad OK$$

$$\sum F_X = 0$$

$$-8.5357 + 10 - 1.4643 = 0 \quad OK$$

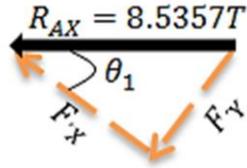
$$\sum M_A = 0$$

$$10(4) - 10.9271 - 6.7418 - 12.259(9) + 8(11) \cong 0 \quad OK$$

Ecuaciones de cortante, momento y normal

Miembro AB

Calculamos primero las siguientes componentes rectangulares:



* De $R_{AX} = 8.5357T$

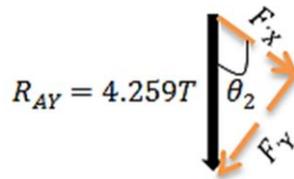
$$F'_y = \left(\frac{3}{5}\right)(8.5357T) = 5.12142 T$$

$$F'_x = \left(\frac{4}{5}\right)(8.5357T) = 6.82856 T$$

* De $R_{AY} = 4.259T$

$$F'_y = \left(\frac{4}{5}\right)(4.259T) = 3.4072 T$$

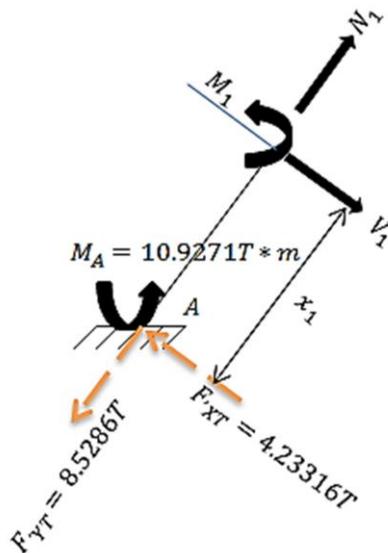
$$F'_x = \left(\frac{3}{5}\right)(4.259T) = 2.5554 T$$



$$F'_{xT} = 6.82856T - 2.5554T = 4.27316T$$

$$F'_{yT} = 5.12142T - 3.4072T = -8.5286T$$

$$0 \leq x_1 \leq 5m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -10.9271 + 4.27316x_1$$

$$x_1 = 5, M_1 = 10.4387$$

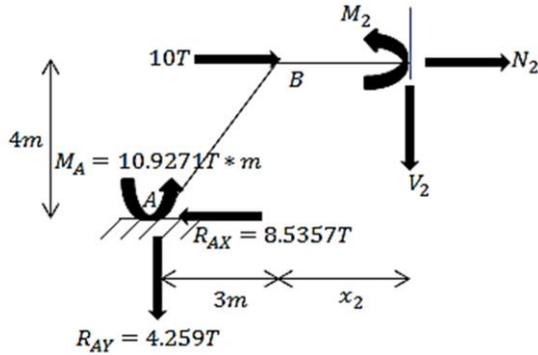
$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = 4.27316$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$N_1 = 8.5286$$

Miembro BC

$$0 \leq x_2 \leq 6m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = -10.9271 - 4.259(3 + x_2) + 8.5357(4)$$

$$M_2 = 10.4387 - 4.259x_2$$

$$x_2 = 0, M_2 = 10.4387;$$

$$x_2 = 6, M_2 = -15.1153;$$

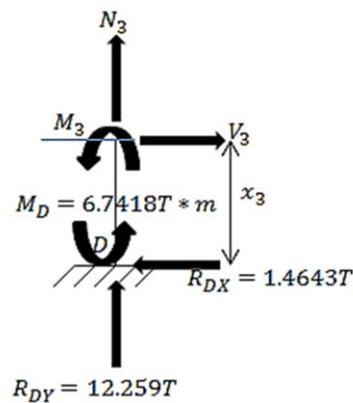
$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_2} = -4.259$$

$$\sum FX = 0$$

$$N_2 = 8.5357 - 10 = -1.4643$$

Miembro DC

$$0 \leq x_3 \leq 4m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = -6.7418 + 1.4643x_3$$

$$x_3 = 0, M_3 = -6.7418;$$

$$x_3 = 4, M_3 = -0.8846;$$

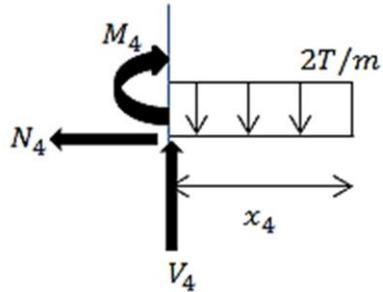
$$V_3 = \frac{dM_3}{dx_3} = 1.4643$$

$$\sum FY = 0$$

$$N_3 = -12.259$$

Miembro EC

$$0 \leq x_4 \leq 4m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_4 + 2x_4 \left(\frac{x_4}{2} \right) = 0 \rightarrow M_4 = -x_4^2$$

$$x_4 = 0, M_4 = 0;$$

$$x_4 = 4, M_4 = -16;$$

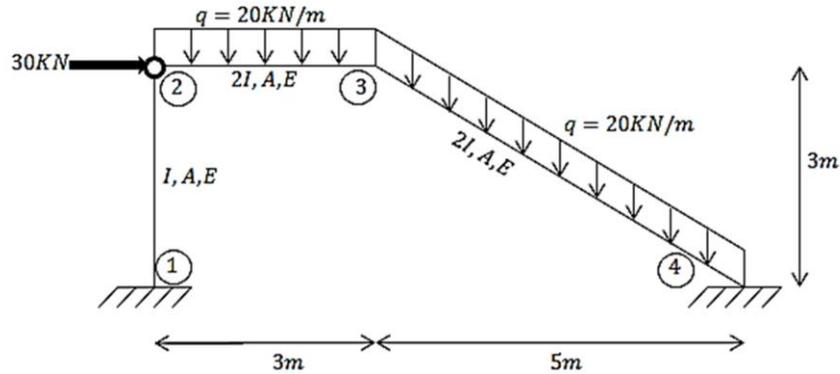
$$V_4 = -\frac{dM_4}{dx_4} = 2x_4$$

$$\sum FX = 0$$

$$N_4 = 0$$

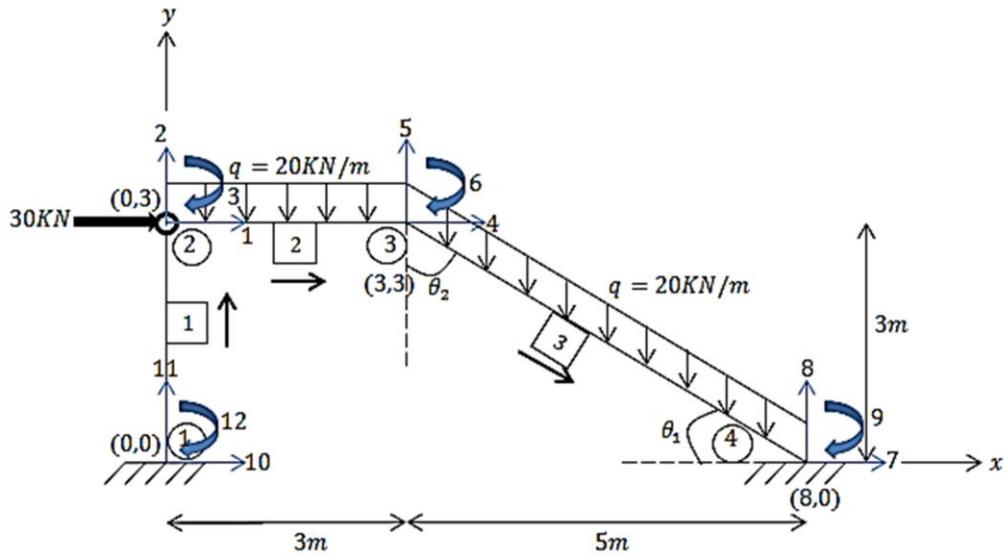
7.- Calcular las reacciones en los empotres del siguiente marco. Observe que existe una articulación en el nodo 2 de la estructura y que la carga uniformemente distribuida de 20 KN/m que soporta va en una sola dirección (tal y como se muestra en la figura), por lo que no es perpendicular a la columna inclinada.

Considere: $E=210\text{Gpa}$; $A=4000\text{mm}^2$; $I=8000 \cdot 10^4\text{mm}^4$



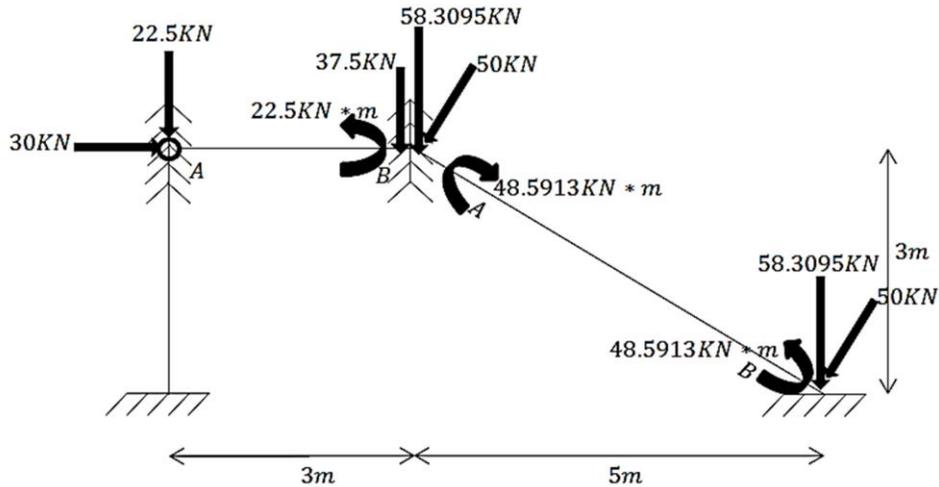
SOLUCIÓN:

-Codificación o Notación:



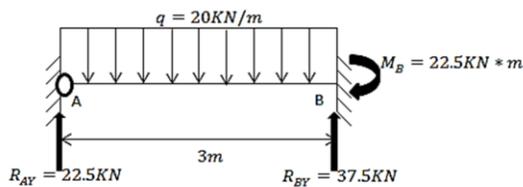
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

Empotrando doblemente los miembros, las acciones o cargas en los nodos son:



Las acciones fueron obtenidas a partir de invertir las reacciones de cada miembro doblemente empotrado:

Miembro 2:



$$R_{AY} = \frac{3WL}{8} = \frac{3 \cdot 20 \cdot 3}{8} = 22.5 \text{ KN} \uparrow$$

$$R_{BY} = \frac{5WL}{8} = \frac{5 \cdot 20 \cdot 3}{8} = 37.5 \text{ KN} \uparrow$$

$$M_B = \frac{WL^2}{8} = \frac{(20)(3^2)}{8} = 22.5 \text{ KN.m} \curvearrowright$$

Miembro 3 (rotado):

Las fuerzas perpendiculares a la barra que reaccionan en ella y los momentos se obtienen de:

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

$$\text{Longitud}(L) = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}m$$

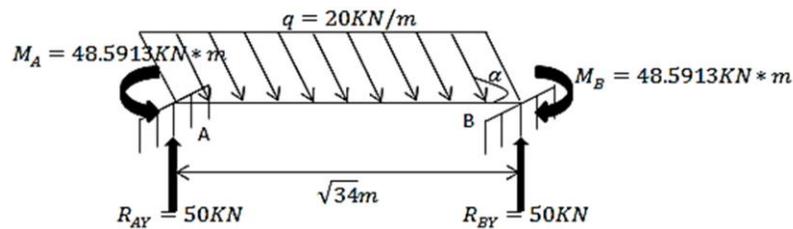
$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 30.96375653^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ + \theta_1 = 120.9637565^\circ$$

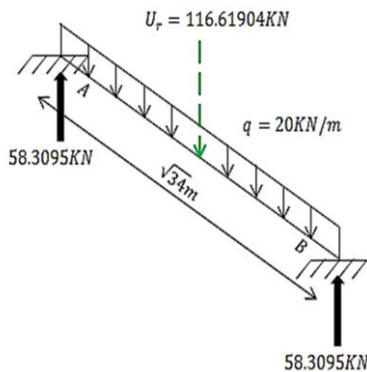
$$R_{AY} = R_{BY} = \left(\frac{WL}{2}\right)(\sin\alpha) = \left(\frac{20 \cdot \sqrt{34}}{2}\right)(\sin 120.9637565^\circ) = 50 \text{ KN} \uparrow$$

$$M_A = M_B = \left(\frac{WL^2}{12}\right)(\sin\alpha) = \frac{20(\sqrt{34})^2}{12}(\sin 120.9637565^\circ) = 48.5913 \text{ KN} \cdot m$$

↻↻ Respectivamente



Las fuerzas que reaccionan en la dirección Y del sistema de coordenadas globales propuesto se obtienen de los siguientes cálculos a partir de la figura en la que se muestra el miembro 3 sin rotar:

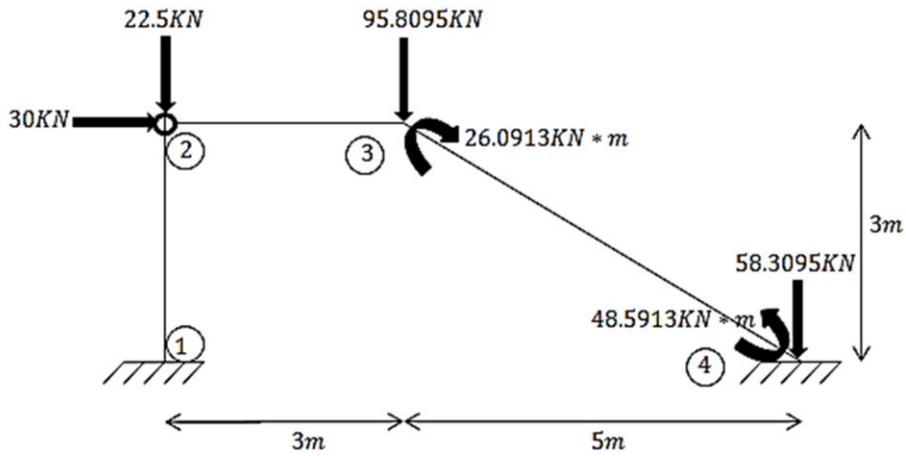


$$U_r = (20 \text{ KN})(\sqrt{34}m) = 116.61904 \text{ KN} \downarrow \text{ a la mitad de la barra}$$

Y en ambos extremos reacciona una fuerza:

$$F = \frac{U_r}{2} = 58.3095 \text{ KN} \uparrow$$

Las acciones totales en cada nodo del marco son:



De acuerdo a los datos que se observan en la figura del problema:

Para todos los miembros:

$$E = 210GPa = 210 * 10^9 N/m^2 = 210000000 KN/m^2$$

$$A = 4000mm^2 = 0.004m^2$$

Para el miembro 1:

$$I = 0.00008m^4$$

Para los miembros 2 y 3:

$$I = 0.00016m^4$$

-Vector de Fuerzas:

$$F = \begin{pmatrix} 30 & 1 \\ -22.5 & 2 \\ 0.00 & 3 \\ 0.00 & 4 \\ -95.8095 & 5 \\ -26.0913 & 6 \\ \hline R_{4X} & 7 \\ R_{4Y} - 58.3095 & 8 \\ M_4 + 48.5913 & 9 \\ R_{1X} & 10 \\ R_{1Y} & 11 \\ M_1 & 12 \end{pmatrix}$$

-Vector de Desplazamientos:

$$V = \begin{pmatrix} D_1 & 1 \\ D_2 & 2 \\ \theta_3 & 3 \\ D_4 & 4 \\ D_5 & 5 \\ \theta_6 & 6 \\ \hline 0 & 7 \\ 0 & 8 \\ 0 & 9 \\ 0 & 10 \\ 0 & 11 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Cosenos directores por miembro:

Miembro 1:

$$Longitud(L) = 3m$$

$$\lambda_x = \frac{0 - 0}{3} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{3 - 0}{3} = 1$$

Miembro 2:

$$Longitud(L) = 3m$$

$$\lambda_x = \frac{3 - 0}{3} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{3 - 3}{3} = 0$$

Miembro 3:

$$Longitud(L) = \sqrt{34}m$$

$$\lambda_x = \frac{8 - 3}{\sqrt{34}} = 0.8575$$

$$\lambda_y = \frac{0 - 3}{\sqrt{34}} = -0.5145$$

Matriz de rigidez global por miembro:

Miembro 1:

$$k_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 10 & 11 & 12 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 7466.67 & 0 & -11200 & -7466.67 & 0 & -11200 \\ 0 & 280000 & 0 & 0 & -280000 & 0 \\ -11200 & 0 & 22400 & 11200 & 0 & 11200 \\ -7466.67 & 0 & 11200 & 7466.67 & 0 & 11200 \\ 0 & -280000 & 0 & 0 & 280000 & 0 \\ -11200 & 0 & 11200 & 11200 & 0 & 22400 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

Miembro 2:

Para un elemento articulado en el extremo i y rígido en el extremo j, las matrices de rigidez en el sistema local son:

$$k_i = \begin{matrix} & \begin{matrix} Nx & Ny & Nz & Fx & Fy & Fz \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{pmatrix} & \begin{matrix} Nx \\ Ny \\ Nz \\ Fx \\ Fy \\ Fz \end{matrix} \end{matrix}$$

Puesto que el sistema local de este miembro coincide con el sistema global propuesto, las matrices de rigidez serán las mismas en ambos sistemas:

$$k_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 280000 & 0 & 0 & -280000 & 0 & 0 \\ 0 & 3733.33 & 0 & 0 & -3733.33 & 11200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -280000 & 0 & 0 & 280000 & 0 & 0 \\ 0 & -3733.33 & 0 & 0 & 3733.33 & -11200 \\ 0 & 11200 & 0 & 0 & -11200 & 33600 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Miembro 3:

$$k_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 106463.95 & -62658.10 & 3050.66 & -106463.95 & 62658.10 & 3050.66 \\ -62658.10 & 39628.64 & 5084.43 & 62658.10 & -39628.64 & 5084.43 \\ 3050.66 & 5084.43 & 23049.41 & -3050.66 & 5084.43 & 11524.71 \\ -106463.95 & 62658.10 & -3050.66 & 106463.95 & -62658.10 & -3050.66 \\ 62658.10 & -39628.64 & -5084.43 & -62658.10 & 39628.64 & -5084.43 \\ 3050.66 & 5084.43 & 11524.71 & -3050.66 & -5084.43 & 23049.41 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{matrix}$$

MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$K_T =$												
287466.67	0	11200	-280000	0	0	0	0	0	-7466.67	0	11200	1
0	283733.33	0	0	-3733.33	11200	0	0	0	0	-280000	0	2
11200	0	22400	0	0	0	0	0	0	-11200	0	11200	3
-280000	0	0	386463.95	-62658.1	3050.66	-106463.95	62658.10	3050.66	0	0	0	4
0	-3733.33	0	-62658.1	43361.97	-6115.57	62658.10	-39628.64	5084.43	0	0	0	5
0	11200	0	3050.66	-6115.57	56649.41	-3050.66	5084.43	11524.71	0	0	0	6
0	0	0	-106463.95	62658.10	-3050.66	106463.95	-62658.10	-3050.66	0	0	0	7
0	0	0	62658.10	-39628.64	-5084.43	-62658.1	39628.64	-5084.43	0	0	0	8
0	0	0	3050.66	5084.43	11524.71	-3050.66	-5084.43	23049.41	0	0	0	9
-7466.67	0	-11200	0	0	0	0	0	0	7466.67	0	-11200	10
0	-280000	0	0	0	0	0	0	0	0	280000	0	11
11200	0	11200	0	0	0	0	0	0	-11200	0	22400	12

La matriz de rigidez se subdividió de la siguiente forma:

$$K_T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

De $F=K_T \cdot D$ extraemos los siguientes subsistemas:

Subsistema 1:

$$\begin{pmatrix} 30 \\ -22.5 \\ 0 \\ 0 \\ -95.8095 \\ -26.093 \end{pmatrix} = (K_{11}) \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \theta_6 \end{pmatrix}$$

Despejando las incógnitas:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \theta_6 \end{pmatrix} = (K_{11})^{-1} * \begin{pmatrix} 30 \\ -22.5 \\ 0 \\ 0 \\ -95.8095 \\ -26.093 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00646m \\ -0.000183m \\ 0.00323rad \\ -0.00661m \\ -0.011968m \\ -0.00136rad \end{pmatrix}$$

Subsistema 2:

$$\begin{pmatrix} R_{4X} \\ R_{4Y} - 58.3095 \\ M_4 + 48.5913 \\ R_{1X} \\ R_{1Y} \\ M_1 \end{pmatrix} = (K_{21}) \begin{pmatrix} -0.00646 \\ -0.000183 \\ 0.00323 \\ -0.00661 \\ -0.011968 \\ -0.00136 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -42.0579 \\ 67.0489 \\ -96.6955 \\ 12.0579 \\ 51.2606 \\ -36.1736 \end{pmatrix}$$

Calculo de las reacciones:

$$R_{4X} = -42.0579 \quad \therefore \quad R_{4X} = 42.0579KN \quad \leftarrow$$

$$R_{4Y} = 58.3095 + 67.0489 \quad \therefore \quad R_{4Y} = 125.3584KN \quad \uparrow$$

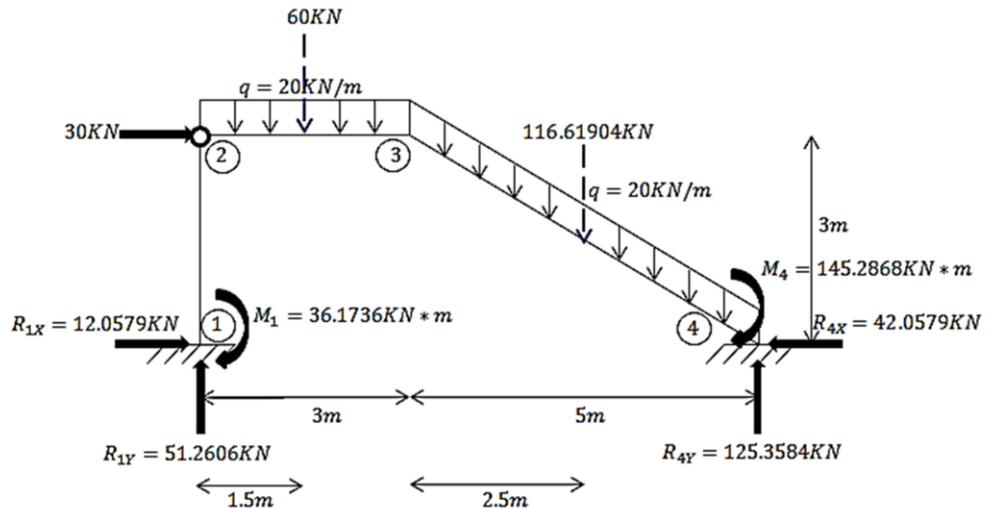
$$M_4 = -48.5913 - 96.6955 \quad \therefore \quad M_4 = 145.2868KN.m \quad \curvearrowright$$

$$R_{1X} = 12.0579 \quad \therefore \quad R_{1X} = 12.0579KN \quad \rightarrow$$

$$R_{1Y} = 51.2606 \quad \therefore \quad R_{1Y} = 51.2606KN \quad \uparrow$$

$$M_1 = -36.1736 \quad \therefore \quad M_1 = 36.1736KN.m \quad \curvearrowright$$

Diagrama del marco original que muestra las reacciones definitivas:



Demostramos el equilibrio de la estructura haciendo uso de fuerzas externas:

Para toda la estructura:

$$\sum FX = 0$$

$$12.0579 + 30 - 42.0579 = 0 \quad OK$$

$$\sum FY = 0$$

$$51.2606 - 60 - 116.619 + 125.3584 = 0 \quad OK$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$36.1736 + 30(3) + 60(1.5) + 116.619(5.5) + 145.2868 - 125.3584(8) \cong 0 \quad OK$$

Para la columna 1-2, debido a la articulación:

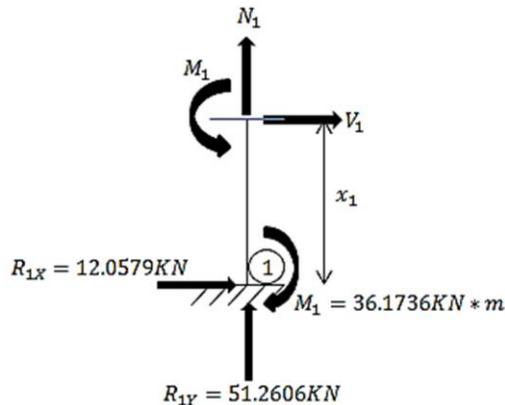
$$\sum M_2 = 0$$

$$36.1736 - 12.0579(3) \cong 0 \quad OK$$

Ecuaciones de momento, cortante y normal del marco original:

Miembro 1-2

$$0 \leq x_1 \leq 3m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = 36.1736 - 12.0579x_1$$

$$x_1 = 0, M_1 = 36.1736; x_1 = 3, M_1 = 0$$

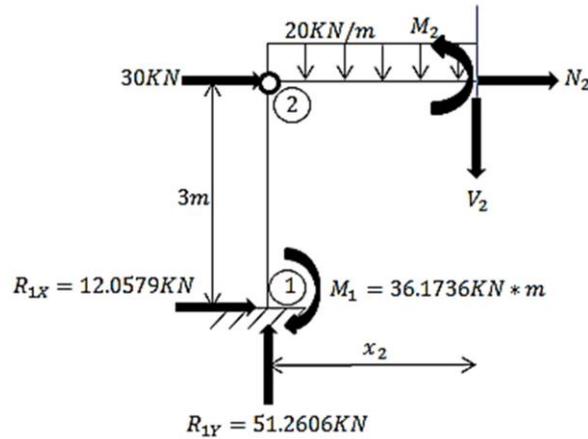
$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = -12.0579$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$N_1 = -51.2606$$

Miembro 2-3

$$0 \leq x_2 \leq 3m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 = 36.1736 - 12.0579(3) - 20(x_2) \left(\frac{x_2}{2}\right) + 51.2606x_2$$

$$M_2 = 51.2606x_2 - 10x_2^2$$

$$x_2 = 0, M_2 = 0; x_2 = 3, M_2 = 63.7818$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_2} = 51.2606 - 20x_2$$

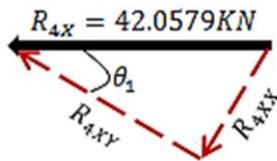
$$\sum FX = 0$$

$$N_2 = -42.0579$$

Miembro 4-3

Obtenemos las componentes rectangulares de R_{4X} y R_{4Y} y hacemos las sumas de fuerzas adecuadas:

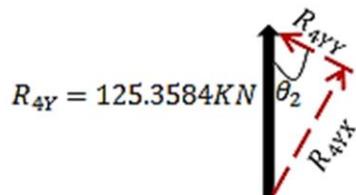
*De $R_{4X}=42.0579KN$



$$R_{4XX} = 42.0579KN(\text{sen}30.96375653^\circ) = 21.6386KN$$

$$R_{4XY} = 42.0579KN(\text{cos}30.96375653^\circ) = 36.0644KN$$

*De $R_{4Y}=125.3584KN$



$$R_{4YY} = 125.3584KN \left(\frac{3}{\sqrt{34}} \right) = 64.4964KN$$

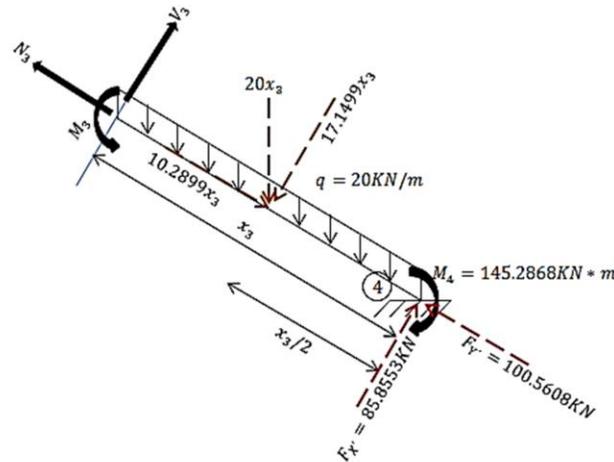
$$R_{4YX} = 125.3584KN \left(\frac{5}{\sqrt{34}} \right) = 107.4939KN$$

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

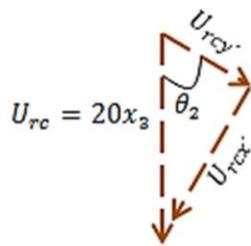
$$F_X' = -21.6386KN + 107.4939KN = 85.8553KN$$

$$F_Y' = 36.0644KN + 107.4939KN = 100.5608KN$$

$$0 \leq x_3 \leq \sqrt{34}m$$



*Además:



$$U'_{rcy} = (20x_3) \left(\frac{3}{\sqrt{34}} \right) = 10.2899x_3$$

$$U'_{rcx} = (20x_3) \left(\frac{5}{\sqrt{34}} \right) = 17.1499x_3$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 = 145.2868 - 85.8553x_3 + 17.1944(x_3) \left(\frac{x_3}{2} \right)$$

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

$$M_3 = 145.2868 - 85.8553x_3 + 8.57495x_3^2$$

$$x_3 = \sqrt{34}, M_3 = -63.783$$

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx_3} = -85.8553 + 17.1499x_3$$

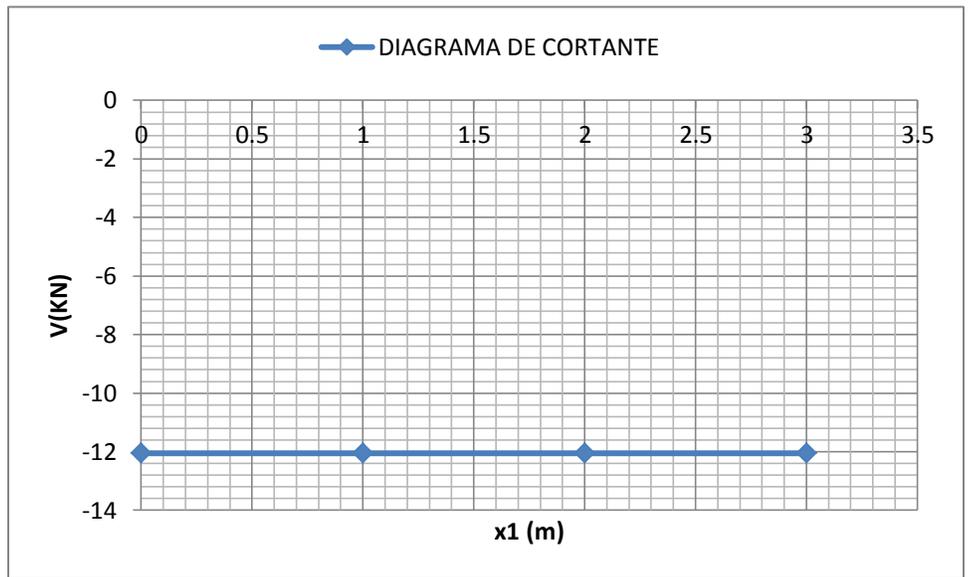
$$\sum FY = 0$$

$$N_3 = 10.2899x_3 - 100.5608$$

DIAGRAMA DE CORTANTE:

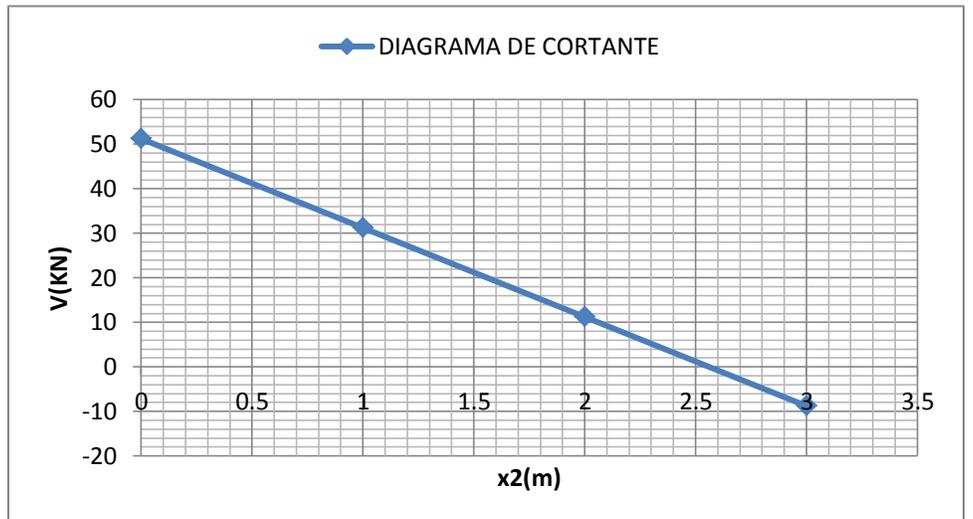
MIEMBRO 1-2 (ROTADO):

x1 (m)	V (KN)
0	-12.0579
1	-12.0579
2	-12.0579
3	-12.0579



MIEMBRO 2-3:

x2 (m)	V(KN)
0	51.2606
1	31.2606
2	11.2606
3	-8.7394



MIEMBRO 4-3 (ROTADO):

x3 (m)	V(KN)
1.16619	-65.8552581
2.33238	-45.8552162
3.49857	-25.8551744
4.66476	-5.85513248
5.83095	14.1449094

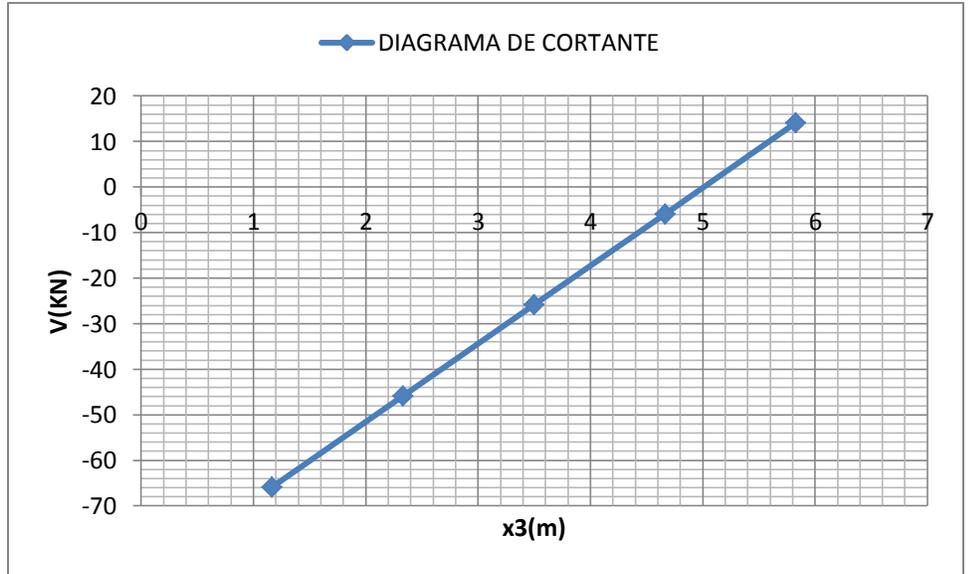
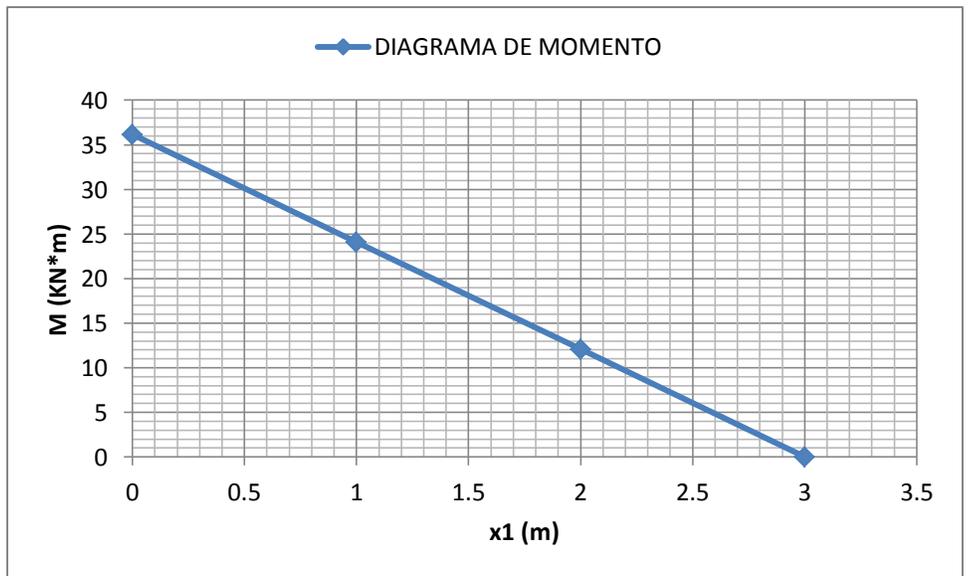


DIAGRAMA DE MOMENTO:

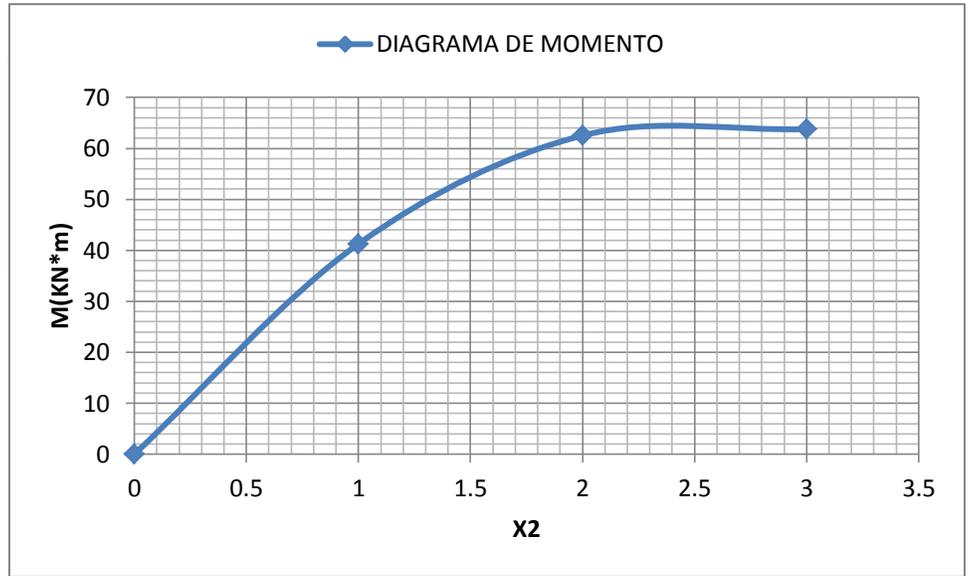
MIEMBRO 1-2 (ROTADO):

x1 (m)	M(KN*m)
0	36.1736
1	24.1157
2	12.0578
3	0



MIEMBRO 2-3:

x2 (m)	M(KN*m)
0	0
1	41.2606
2	62.5212
3	63.7818



MIEMBRO 4-3 (ROTADO):

x3 (m)	M(KN*m)
1.16619	56.8251321
2.33238	-8.31268693
3.49857	-50.1266571
4.66476	-68.6167785
5.83095	-63.783051

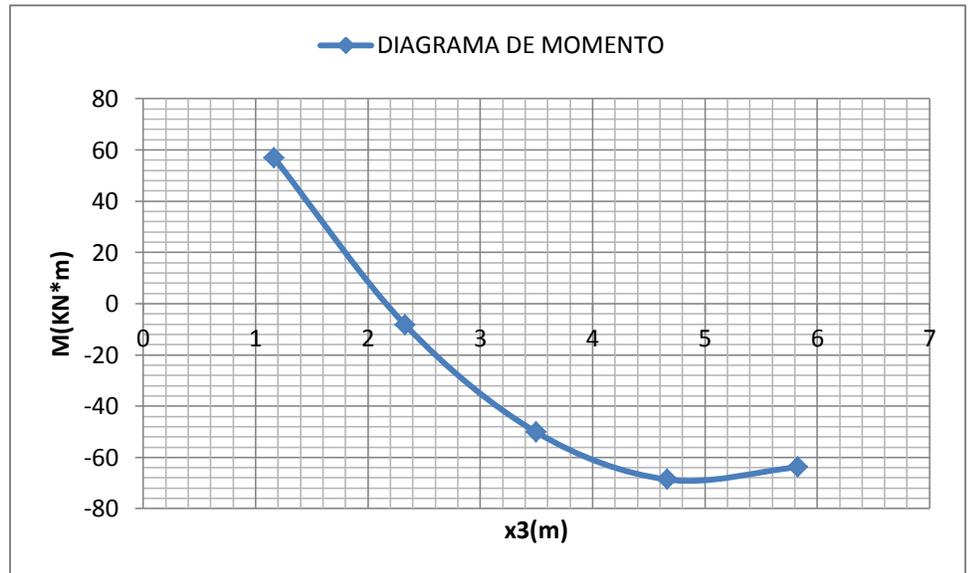
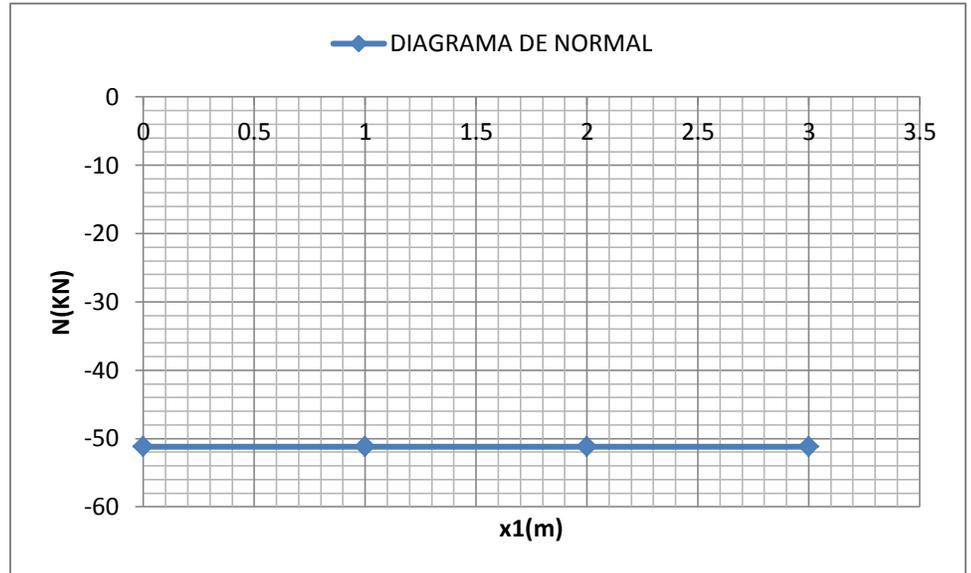


DIAGRAMA DE NORMAL:

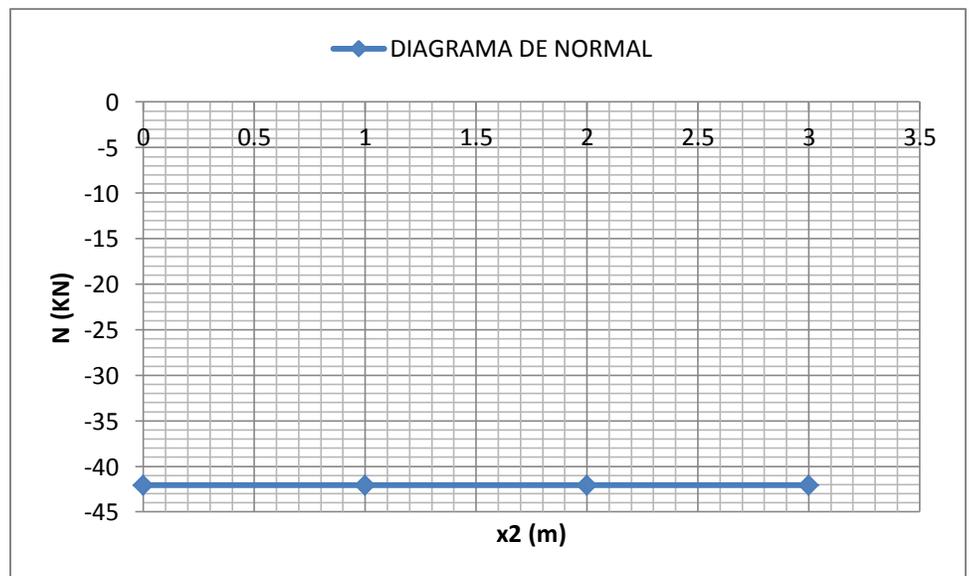
MIEMBRO 1-2 (ROTADO):

x1 (m)	N (KN)
0	-51.2106
1	-51.2106
2	-51.2106
3	-51.2106



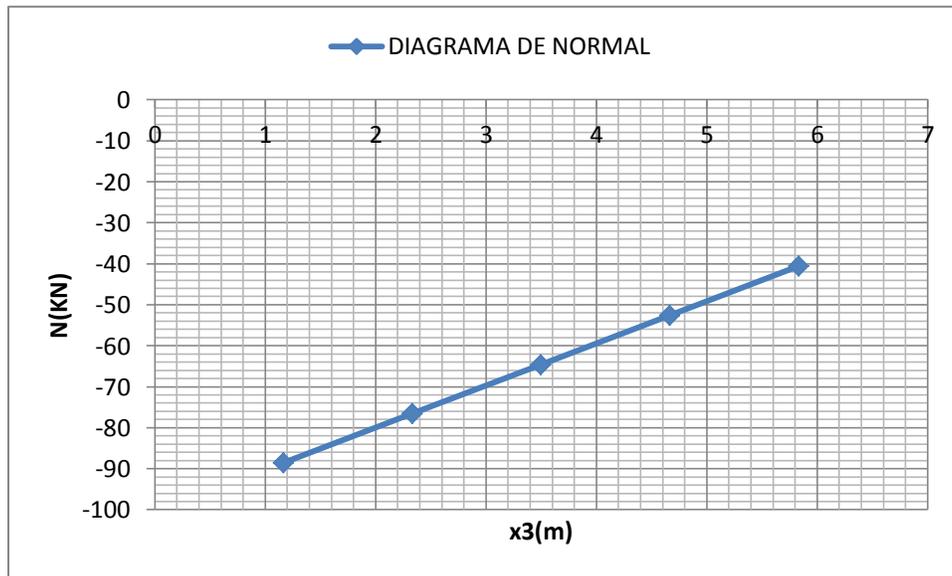
MIEMBRO 2-3:

x2 (m)	N(KN)
0	-42.0579
1	-42.0579
2	-42.0579
3	-42.0579

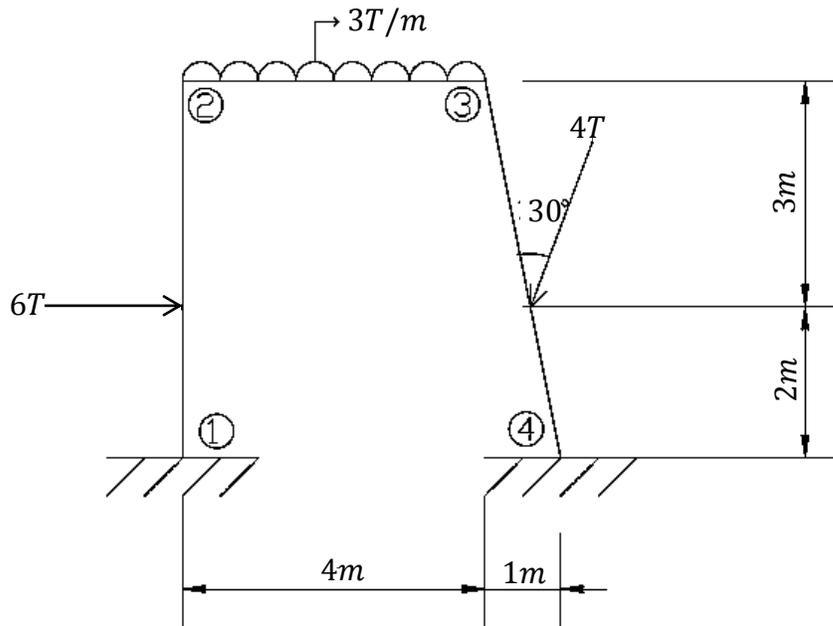


MIEMBRO 4-3 (ROTADO):

x3 (m)	N(KN)
1.16619	-88.5608215
2.33238	-76.560843
3.49857	-64.5608646
4.66476	-52.5608861
5.83095	-40.5609076



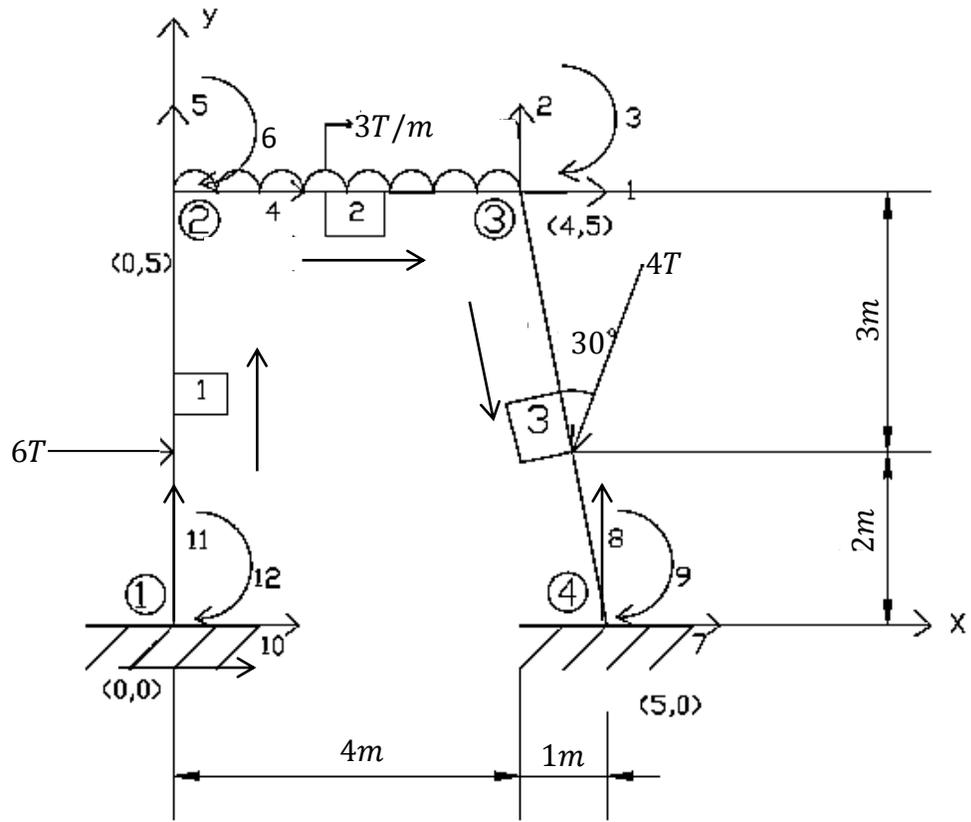
8.- Para el siguiente marco de tres miembros, calcular las reacciones en los soportes con el análisis matricial de la rigidez. La columna inclinada recibe una fuerza de $4T$ aplicada a una distancia distinta a la de la mitad de su longitud y que además forma un ángulo de 30° con respecto a ella, tal y como se puede observar en la siguiente figura:



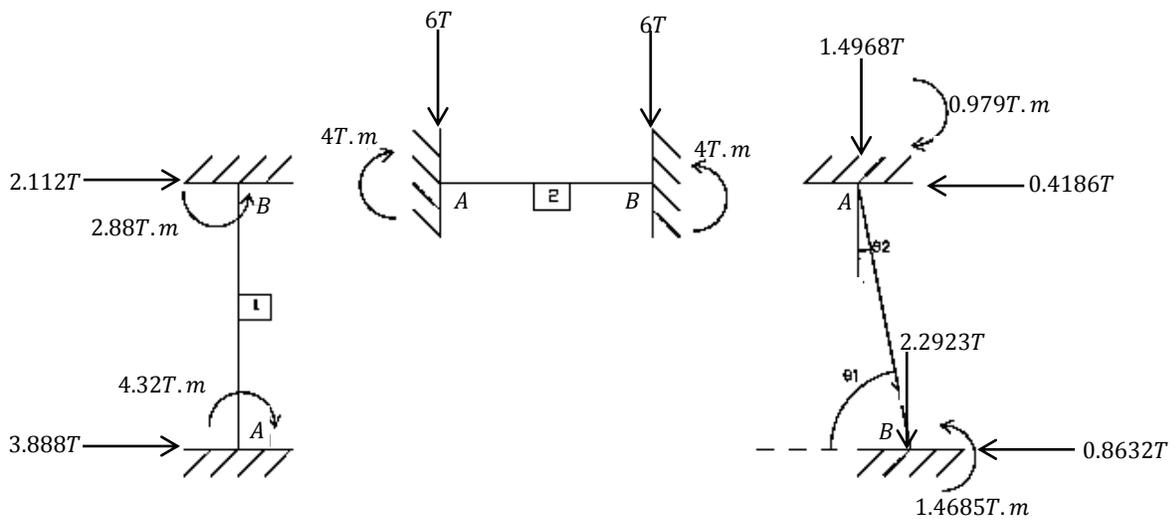
Considere una sección transversal circular de $r=35\text{cm}$ para las columnas y una cuadrada de 30cm por lado para las vigas. Use el módulo de Elasticidad del concreto de los problemas anteriores.

SOLUCIÓN:

-Codificación:



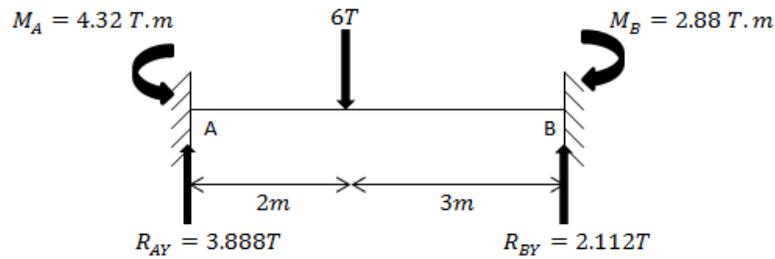
Empotrando los miembros doblemente, las acciones que actúan son las siguientes:



Las acciones fueron obtenidas a partir de invertir las reacciones de cada miembro doblemente empotrado que a continuación se calculan:

Los miembros 1 y 3 se han rotado para mayor facilidad.

Miembro 1:



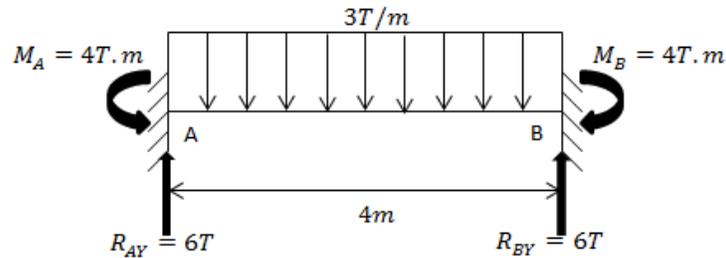
$$R_{AY} = \frac{Pb^2}{L^2} \left(3 - 2 \frac{b}{L} \right) = \frac{6 \cdot 3^2}{5^2} \left(3 - 2 \cdot \frac{3}{5} \right) = 3.888 T \uparrow$$

$$R_{BY} = \frac{Pa^2}{L^2} \left(3 - 2 \frac{a}{L} \right) = \frac{6 \cdot 2^2}{5^2} \left(3 - 2 \cdot \frac{2}{5} \right) = 2.112 T \uparrow$$

$$M_A = \frac{Pab^2}{L^2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 3^2}{5^2} = 4.32 T \cdot m \curvearrowleft$$

$$M_B = \frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{6 \cdot 2^2 \cdot 3}{5^2} = 2.88 T \cdot m \curvearrowright$$

Miembro 2:



$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{WL}{2} = \frac{(3)(4)}{2} = 6 T \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{WL^2}{12} = \frac{(3)(4^2)}{12} = 4 T \cdot m \curvearrowleft \curvearrowright$$

Respectivamente

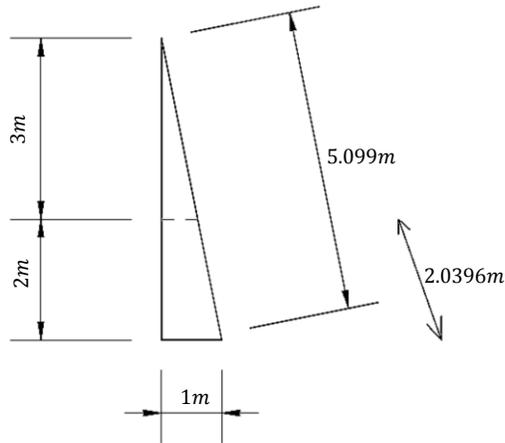
Miembro 3:

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{5}{1} = 78.6901^\circ$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{1}{5} = 11.3099^\circ$$

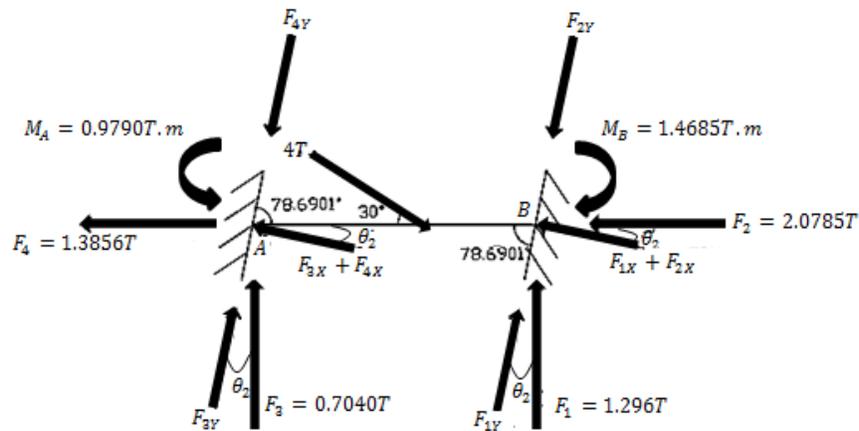
$$Longitud(L) = \sqrt{5^2 + 1^2} = 5.099m$$

Distancia a la que está aplicada la fuerza de 4T:



$$\frac{5}{5.099} = \frac{2}{d} \rightarrow d = \frac{2 * 5.099}{5} = 2.0396m$$

En la siguiente figura se aprecian las fuerzas perpendiculares y axiales a la barra, y los momentos que reaccionan al rotar el miembro 3 en el que los empotes forman un ángulo distinto de 90° con respecto a la barra:



CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

Las fuerzas perpendiculares y axiales a la barra, y los momentos anteriores se obtuvieron de los siguientes cálculos que corresponden a una viga en la que los empotres si forman un ángulo de 90° con respecto a la barra:

$$F_3 = \frac{P \cdot \sin \alpha \cdot b^2}{L^2} \left(3 - 2 \frac{b}{L} \right) = \frac{4 \cdot \sin 30^\circ \cdot 2.0396^2}{5.099^2} \left(3 - 2 \cdot \frac{2.0396}{5.099} \right) = 0.7040 T \quad \uparrow$$

$$F_1 = \frac{P \cdot \sin \alpha \cdot a^2}{L^2} \left(3 - 2 \frac{a}{L} \right) = \frac{4 \cdot \sin 30^\circ \cdot 3.0594^2}{5.099^2} \left(3 - 2 \cdot \frac{3.0594}{5.099} \right) = 1.296 T \quad \uparrow$$

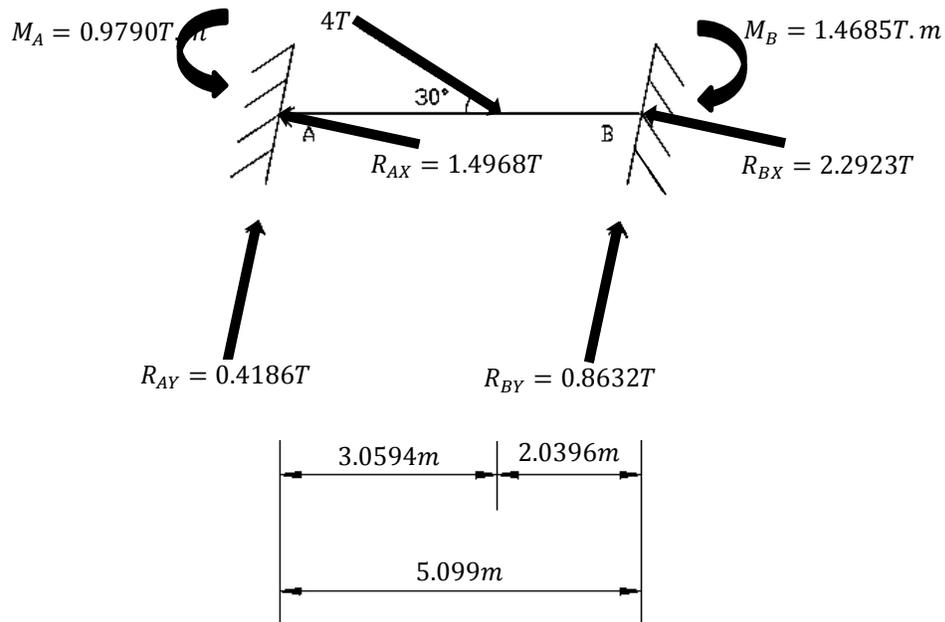
$$F_4 = \frac{P \cdot \cos \alpha \cdot b}{L} = \frac{(4 \cdot \cos 30^\circ)(2.0396)}{5.099} = 1.3856 T \quad \leftarrow$$

$$F_2 = \frac{P \cdot \cos \alpha \cdot a}{L} = \frac{(4 \cdot \cos 30^\circ)(3.0594)}{5.099} = 2.0785 T \quad \leftarrow$$

$$M_A = \frac{P \cdot \sin \alpha \cdot a b^2}{L^2} = \frac{4 \cdot \sin 30^\circ \cdot 3.0594 \cdot 2.0396^2}{5.099^2} = 0.9790 T \cdot m \quad \curvearrowright$$

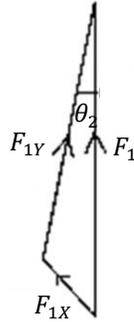
$$M_B = \frac{P \cdot \sin \alpha \cdot a^2 b}{L^2} = \frac{4 \cdot \sin 30^\circ \cdot 3.0594^2 \cdot 2.0396}{5.099^2} = 1.4685 T \cdot m \quad \curvearrowleft$$

Pero nosotros necesitamos las reacciones del miembro cuyos empotres están inclinados. Para obtenerlas descomponemos las fuerzas calculadas anteriormente en sus componentes rectangulares y luego obtenemos las resultantes necesarias. Los momentos no cambian pese a tales inclinaciones.



Componentes rectangulares:

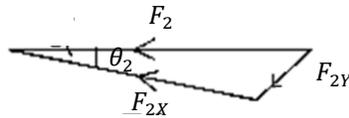
*De $F_1=1.296T$



$$F_{1X} = F_1 * \sin \theta_2 = 1.296T(\text{sen}11.3099^\circ) = 0.2542T$$

$$F_{1Y} = F_1 * \cos \theta_2 = 1.296T(\text{cos}11.3099^\circ) = 1.2708T$$

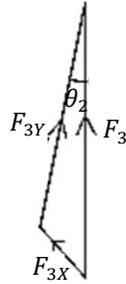
*De $F_2=2.0785T$



$$F_{2X} = F_2 * \cos \theta_2 = 2.0785T(\text{cos}11.3099^\circ) = 2.0381T$$

$$F_{2Y} = F_2 * \sin \theta_2 = 2.0785T(\text{sin}11.3099^\circ) = 0.4076T$$

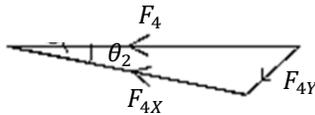
*De $F_3=0.7040T$



$$F_{3X} = F_3 * \sin \theta_2 = 0.7040T(\text{sen}11.3099^\circ) = 0.1381T$$

$$F_{3Y} = F_3 * \cos \theta_2 = 0.7040T(\text{cos}11.3099^\circ) = 0.6903T$$

*De $F_4=1.3856T$



$$F_{4X} = F_4 * \cos \theta_2 = 1.3856T(\text{cos}11.3099^\circ) = 1.3587T$$

$$F_{4Y} = F_4 * \sin \theta_2 = 1.3856T(\text{sin}11.3099^\circ) = 0.2717T$$

Las reacciones definitivas para el miembro 3 cuyos empotres están inclinados son:

$$R_{AY} = F_{3Y} - F_{4Y} = 0.6903T - 0.2717T = 0.4186T \quad \therefore \quad R_{AY} = 0.4186T \quad \uparrow$$

$$R_{AX} = -F_{3X} - F_{4X} = -0.1381T - 1.3587T = -1.4968T \quad \therefore \quad R_{AX} = 1.4968T \quad \leftarrow$$

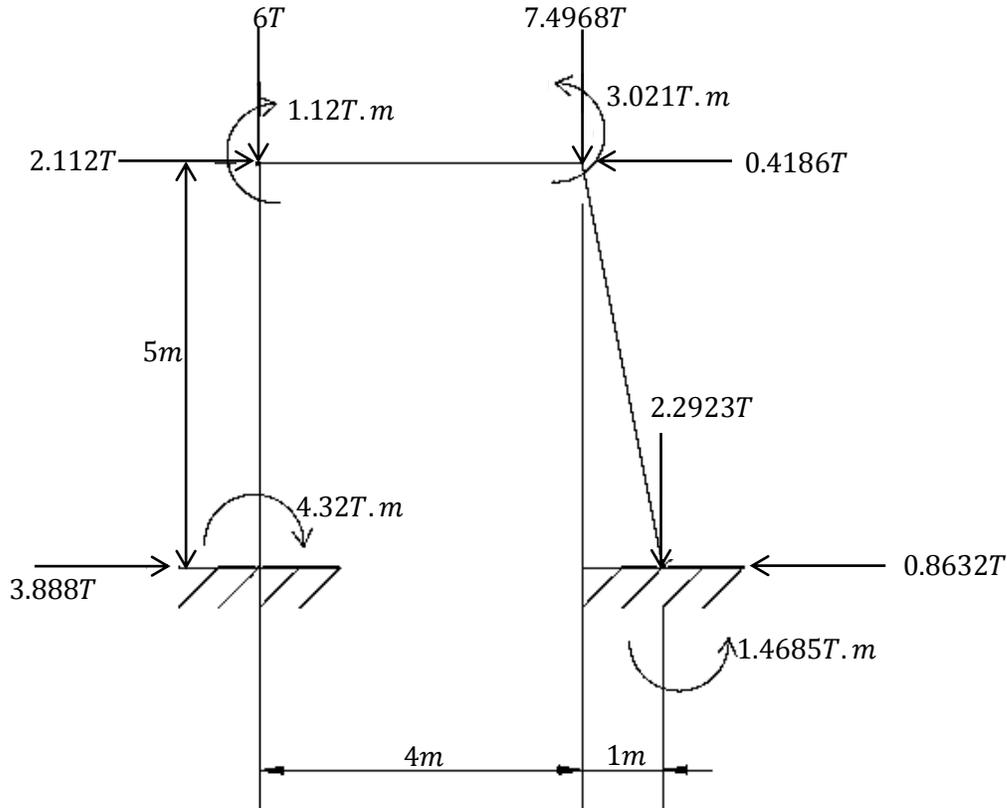
$$M_A = 0.9790T.m \quad \curvearrowleft$$

$$R_{BY} = F_{1Y} - F_{2Y} = 1.2708T - 0.4076T = 0.8632T \quad \therefore \quad R_{AY} = 0.8632T \quad \uparrow$$

$$R_{BX} = -F_{1X} - F_{2X} = -0.2542T - 2.0381T = -2.2923T \quad \therefore \quad R_{AX} = 2.2923T \quad \leftarrow$$

$$M_B = 1.4685T.m \quad \curvearrowright$$

Las acciones totales en cada nodo del marco son:



Cálculos auxiliares:

-Áreas:

*Miembros 1 y 3:

$$A = \pi r^2 = (3.1416)(0.35m)^2 = 0.384846m^2$$

*Miembro 2:

$$A = L^2 = (0.30m)^2 = 0.09m^2$$

-Módulo de elasticidad para los tres miembros:

$$E = 14000\sqrt{250} = 221359.4362 \text{ kg/cm}^2 = 2213594.362 \text{ T/m}^2$$

-Inercias:

*Miembros 1 y 3:

$$I = \frac{1}{4}\pi r^4 = \left(\frac{1}{4}\right)(3.1416)(0.35m)^4 = 0.011785909m^4$$

*Miembro 2:

$$I = \frac{L^4}{12} = \frac{(0.30m)^4}{12} = 0.000675m^4$$

-Cosenos directores por miembro:

Miembro 1:

$$Longitud(L) = 5m$$

$$\lambda_x = \frac{0 - 0}{5} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{5 - 0}{5} = 1$$

Miembro 2:

$$Longitud(L) = 4m$$

$$\lambda_x = \frac{4 - 0}{4} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{5 - 5}{4} = 0$$

Miembro 3:

$$Longitud(L) = 5.099m$$

$$\lambda_x = \frac{5 - 4}{5.099} = 0.196117$$

$$\lambda_y = \frac{0 - 5}{5.099} = -0.980584$$

-Vector de Fuerzas:

$$F = \begin{pmatrix} -0.4186 & 1 \\ -7.4968 & 2 \\ 3.021 & 3 \\ 2.112 & 4 \\ -6 & 5 \\ -1.12 & 6 \\ F_7 & 7 \\ F_8 & 8 \\ F_9 & 9 \\ F_{10} & 10 \\ F_{11} & 11 \\ F_{12} & 12 \end{pmatrix}$$

-Vector de Desplazamientos:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 1 \\ D_2 & 2 \\ \theta_3 & 3 \\ D_4 & 4 \\ D_5 & 5 \\ \theta_6 & 6 \\ 0 & 7 \\ 0 & 8 \\ 0 & 9 \\ 0 & 10 \\ 0 & 11 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Matriz de rigidez global por miembro:

Miembro 1:

$$k_1 = 10^5 * \begin{pmatrix} & 10 & 11 & 12 & 4 & 5 & 6 \\ 0.0250 & 0 & -0.0626 & -0.0250 & 0 & -0.0626 & 10 \\ 0 & 1.7038 & 0 & 0 & -1.7038 & 0 & 11 \\ -0.0626 & 0 & 0.2087 & 0.0626 & 0 & 0.1044 & 12 \\ -0.0250 & 0 & 0.0626 & 0.0250 & 0 & 0.0626 & 4 \\ 0 & -1.7038 & 0 & 0 & 1.7038 & 0 & 5 \\ -0.0626 & 0 & 0.1044 & 0.0626 & 0 & 0.2087 & 6 \end{pmatrix}$$

Miembro 2:

$$k_2 = 10^4 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4.9806 & 0 & 0 & -4.9806 & 0 & 0 \\ 0 & 0.028 & 0.056 & 0 & -0.028 & 0.056 \\ 0 & 0.056 & 0.1494 & 0 & -0.056 & 0.0747 \\ -4.9806 & 0 & 0 & 4.9806 & 0 & 0 \\ 0 & -0.028 & -0.056 & 0 & 0.028 & -0.056 \\ 0 & 0.056 & 0.0747 & 0 & -0.056 & 0.1494 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Miembro 3:

$$k_3 = 10^5 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.087 & -0.3168 & 0.059 & -0.087 & 0.3168 & 0.059 \\ -0.3168 & 1.6074 & 0.0118 & 0.3168 & -1.6074 & 0.0118 \\ 0.059 & 0.0118 & 0.2047 & -0.059 & -0.0118 & 0.1023 \\ -0.087 & 0.3168 & -0.059 & 0.087 & -0.3168 & -0.059 \\ 0.3168 & -1.6074 & -0.0118 & -0.3168 & 1.6074 & -0.0118 \\ 0.059 & 0.0118 & 0.1023 & -0.059 & -0.0118 & 0.2047 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA

$$10^5 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} & \begin{matrix} K_T = \\ \begin{pmatrix} 0.5850 & -0.3168 & 0.059 & -0.4981 & 0 & 0 & -0.087 & 0.3168 & 0.059 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3168 & 1.6162 & 0.0062 & 0 & -0.0028 & -0.0056 & 0.3168 & -1.6074 & 0.0118 & 0 & 0 & 0 \\ 0.059 & 0.0062 & 0.2196 & 0 & 0.0056 & 0.0075 & -0.059 & -0.0118 & 0.1023 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4981 & 0 & 0 & 0.5231 & 0 & 0.0626 & 0 & 0 & 0 & -0.025 & 0 & 0.0626 \\ 0 & -0.0028 & 0.0056 & 0 & 1.7066 & 0.0056 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.7038 & 0 \\ 0 & -0.0056 & 0.0075 & 0.0626 & 0.0056 & 0.2237 & 0 & 0 & 0 & -0.0626 & 0 & 0.1044 \\ -0.087 & 0.3168 & -0.059 & 0 & 0 & 0 & 0.087 & -0.3168 & -0.059 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3168 & -1.6074 & -0.0118 & 0 & 0 & 0 & -0.3168 & 1.6074 & -0.0118 & 0 & 0 & 0 \\ 0.059 & 0.0118 & 0.1023 & 0 & 0 & 0 & -0.059 & -0.0118 & 0.2047 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.025 & 0 & -0.0626 & 0 & 0 & 0 & 0.025 & 0 & -0.0626 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.7038 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.7038 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0626 & 0 & 0.1044 & 0 & 0 & 0 & -0.0626 & 0 & 0.2087 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{matrix}$$

La matriz de rigidez se subdividió de la siguiente forma:

$$K_T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

De $F=K_T \cdot D$ extraemos los siguientes subsistemas:

Subsistema 1:

$$\begin{pmatrix} -0.4186 \\ -7.4968 \\ 3.021 \\ 2.112 \\ -6 \\ -1.12 \end{pmatrix} = (K_{11}) \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \theta_6 \end{pmatrix}$$

Despejando las incógnitas:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \theta_6 \end{pmatrix} = (K_{11})^{-1} * \begin{pmatrix} -0.4186 \\ -7.4968 \\ 3.021 \\ 2.112 \\ -6 \\ -1.12 \end{pmatrix} = 10^{-3} \begin{pmatrix} -0.1971m \\ -0.0862m \\ 0.1945rad \\ -0.1452m \\ -0.0359m \\ -0.0172rad \end{pmatrix}$$

Subsistema 2:

$$\begin{pmatrix} F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{pmatrix} = (K_{21}) * 10^{-3} \begin{pmatrix} -0.1971 \\ -0.0862 \\ 0.1945 \\ -0.1452 \\ -0.0359 \\ -0.0172 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.1647 \\ 7.3834 \\ 0.7249 \\ 0.4713 \\ 6.1134 \\ -1.0885 \end{pmatrix}$$

Calculo de las reacciones:

$$R_{4X} = F_7 + 0.8632 = -2.1647 + 0.8632 = -1.3015 \quad \therefore R_{4X} = 1.3015T \quad \leftarrow$$

$$R_{4Y} = F_8 + 2.2923 = 7.3834 + 2.2923 = 9.6757 \quad \therefore R_{4Y} = 9.6757T \quad \uparrow$$

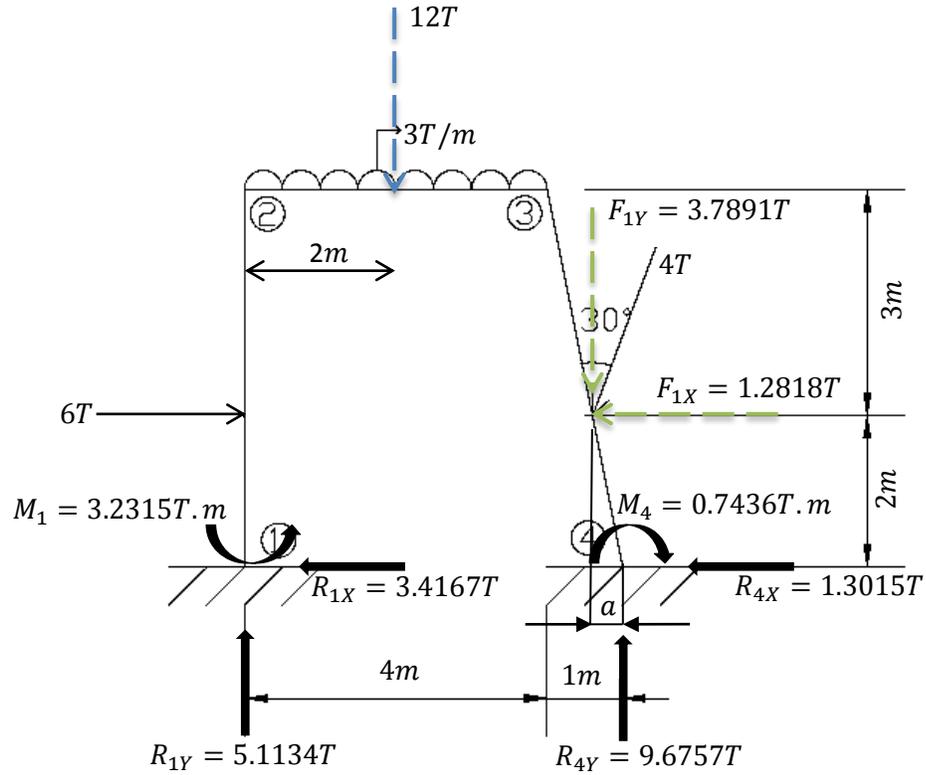
$$M_4 = F_9 - 1.4685 = 0.7249 - 1.4685 = -0.7436 \quad \therefore M_4 = 0.7436T.m \quad \curvearrowright$$

$$R_{1X} = F_{10} - 3.888 = 0.4713 - 3.888 = -3.4167 \quad \therefore R_{1X} = 3.4167T \quad \leftarrow$$

$$R_{1Y} = F_{11} = 6.1134 \quad \therefore R_{1Y} = 6.1134T \quad \uparrow$$

$$M_1 = F_{12} + 4.32 = -1.0885 + 4.32 = 3.2315 \quad \therefore M_1 = 3.2315T.m \quad \curvearrowleft$$

Diagrama del marco original que muestra las reacciones definitivas:



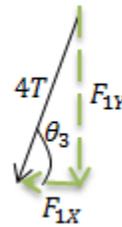
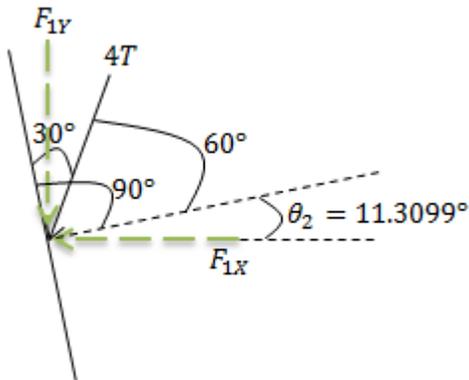
$$\frac{1}{5} = \frac{a}{2} \rightarrow a = 0.4m$$

Componentes rectangulares de $F_1=4T$

$$\theta_3 = 60^\circ + \theta_2 = 60^\circ + 11.3099^\circ = 71.3099^\circ$$

$$F_{1Y} = 4T * \sin 71.3099^\circ = 3.7891T$$

$$F_{1X} = 4T * \cos 71.3099^\circ = 1.2818T$$



Demostramos el equilibrio de la estructura haciendo uso de fuerzas externas:

$$\sum FX = 0$$

$$6 - 3.4167 - 1.2818 - 1.3015 = 0 \quad OK$$

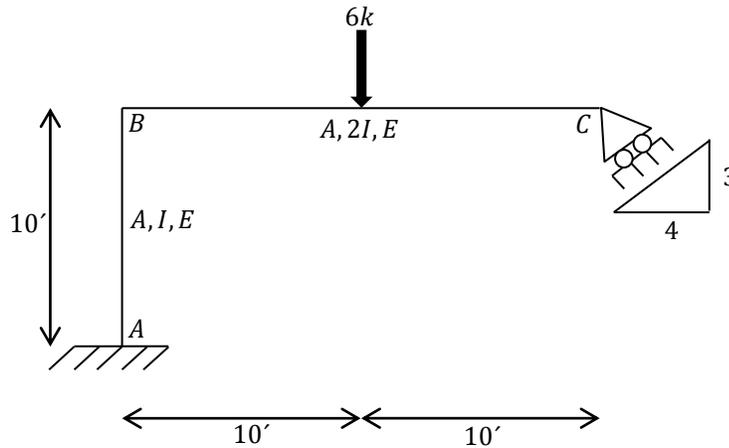
$$\sum FY = 0$$

$$6.1134 - 12 - 3.7891 + 9.6757 = 0 \quad OK$$

$$\sum M_1 = 0$$

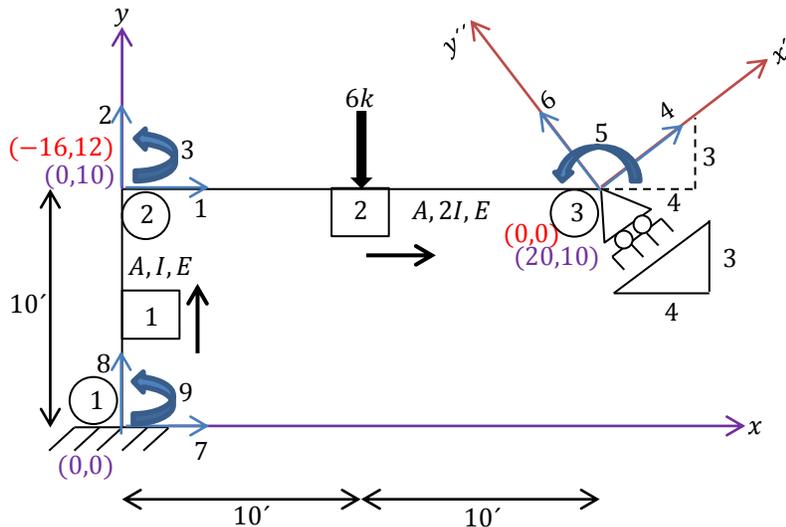
$$-3.2315 + 6(2) + 12(2) + 3.7891(4.6) - 1.2818(2) + 0.7436 - 9.6757(5) \cong 0 \quad OK$$

9.-Use el método del análisis matricial por rigidez para calcular las reacciones en los apoyos de la estructura rígida mostrada en la figura. En la ilustración se indican los valores relativos del área y del momento de inercia de la sección transversal de cada elemento de la estructura. $I = 500\text{pulg}^4$ y $A = 20\text{pulg}^2$. El módulo de elasticidad es igual para los dos elementos.



Solución:

Codificación o notación:



Observaciones:

- La punta de la flecha esta dirigida hacia el extremo alejado (F) por lo que el extremo contrario es el cercano (N).

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

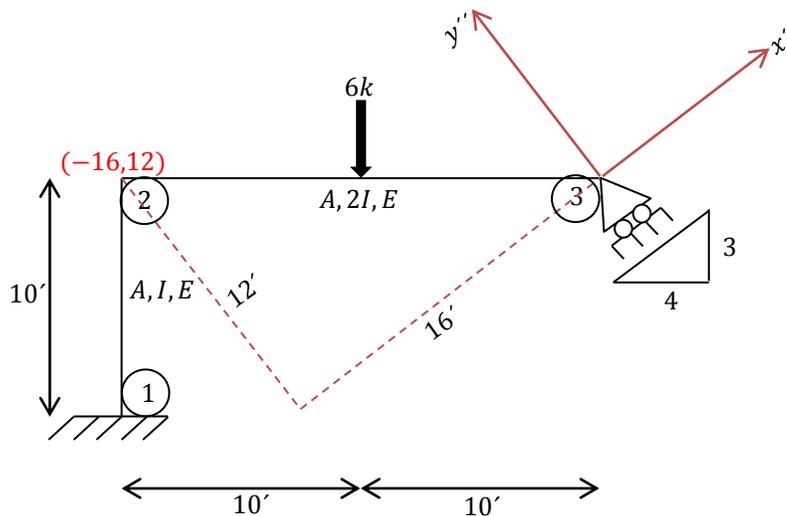
- Se han enumerado los desplazamientos de tal modo que primero estén los no restringidos y después los restringidos; recuerde que una reacción en este tipo de apoyos restringe un desplazamiento en la misma dirección de ella.

-Los ejes de coordenadas están definidos en sus cuadrantes positivos.

Tabla de coordenadas:

Nudo	Ejes x-y		Ejes x''-y''	
	x(pies)	y(pies)	x''(pies)	y''(pies)
1	0	0		
2	0	10	-16	12
3	20	10	0	0

Las coordenadas del nudo 2 en los ejes x''-y'' pueden obtenerse prolongando tales ejes, tal y como se observa en el siguiente esquema:



Remitiéndonos a la figura de la codificación o notación extraemos los siguientes datos:

Miembro	Nudo		A(pie ²)	I(pie ⁴)	L(pie)
	N	F			
1	1	2	0.1389	0.0241	10
2	2	3	0.1389	0.0482	20

Miembro	Numeración de los Grados de Libertad					
	Nx	Ny	Nz	Fx	Fy	Fz
1	7	8	9	1	2	3
2	1	2	3	4	6	5

Conversión de unidades:

$$A = 20 \text{ pulg}^2 \left(\frac{(1 \text{ pie})^2}{(12 \text{ pulg})^2} \right) \cong 0.1389 \text{ pie}^2$$

$$I = 50 \text{ pulg}^4 \left(\frac{(1 \text{ pie})^4}{(12 \text{ pulg})^4} \right) \cong 0.0241 \text{ pie}^4$$

Cosenos directores por miembro:

Miembro 1:

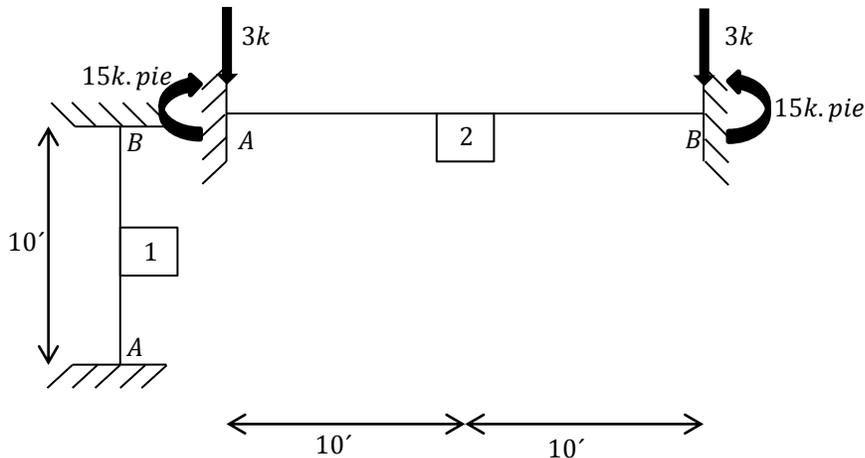
$$\lambda_x = \frac{0 - 0}{10} = 0, \lambda_y = \frac{10 - 0}{10} = 1$$

Miembro 2:

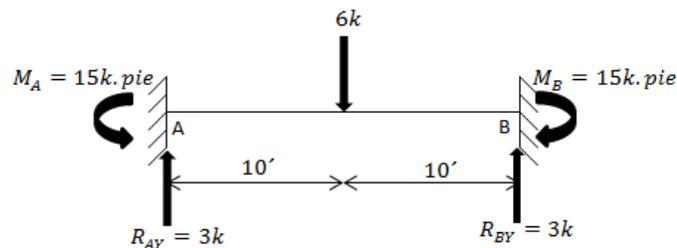
$$\lambda_x = \frac{20 - 0}{20} = 1, \lambda_y = \frac{10 - 10}{20} = 0$$

$$\lambda_x'' = \frac{0 - (-16)}{20} = 0.8, \lambda_y'' = \frac{10 - 12}{20} = -0.6$$

Empotrando doblemente los miembros, las acciones o cargas en los nodos son:



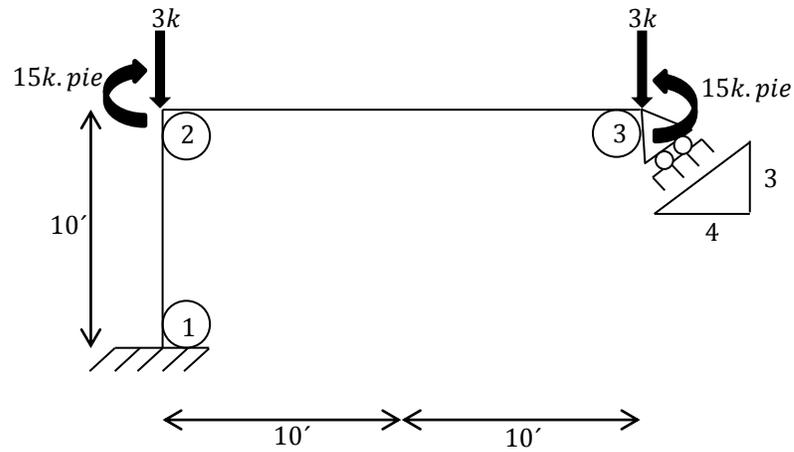
Las acciones fueron obtenidas a partir de invertir las reacciones que a continuación se calculan en los miembros doblemente empotrados:



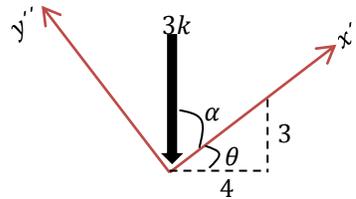
$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{P}{2} = \frac{6k}{2} = 3k \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{PL}{8} = \frac{6 \cdot 20}{8} = 15 \text{ k} \cdot \text{pie} \curvearrowright$$

Las acciones totales en cada nodo del marco son:

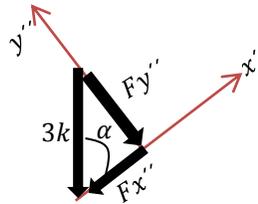


Es necesario descomponer la acción de 3k ubicada en el nodo 3 en sus componentes rectangulares para el sistema $x''-y''$



$$\tan \theta = \frac{3}{4} \rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{3}{4} = 36.87^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ - 36.87^\circ = 53.13^\circ$$

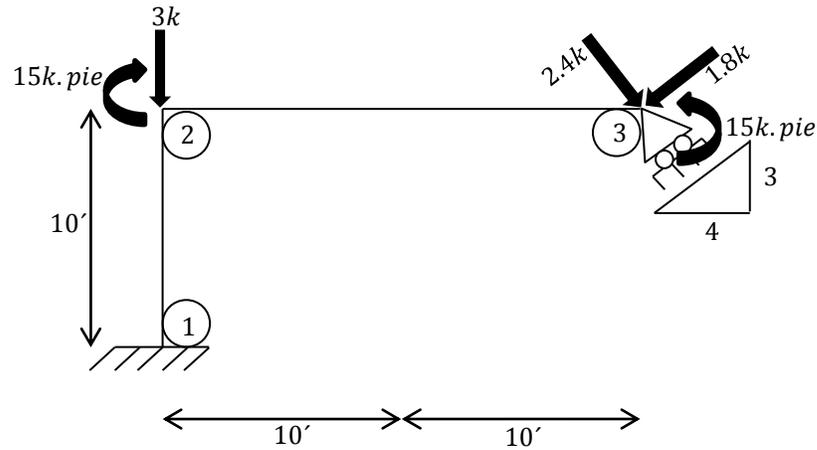


$$\sin \alpha = \frac{F_{y''}}{3k} \rightarrow F_{y''} = (3k)(\sin 53.13^\circ) = 2.40k \searrow$$

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

$$\cos \alpha = \frac{F_{x''}}{3k} \rightarrow F_{x''} = (3k)(\cos 53.13^\circ) = 1.8k \quad \swarrow$$

En consecuencia, las acciones totales en cada nodo del marco a analizarse son:



-Vector de Fuerzas:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ -15 & 3 \\ -1.8 & 4 \\ 15 & 5 \\ \hline R_C - 2.4 & 6 \\ R_{AX} & 7 \\ R_{AY} & 8 \\ M_A & 9 \end{pmatrix}$$

-Vector de Desplazamientos:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 1 \\ D_2 & 2 \\ \theta_3 & 3 \\ D_4 & 4 \\ \theta_5 & 5 \\ \hline 0 & 6 \\ 0 & 7 \\ 0 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Matriz de rigidez global por miembro:

-La matriz de rigidez global para el miembro 1 se determina de la forma habitual, es decir, con la ecuación (j) y sustituyendo obtenemos:

$$k_1 = E * \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0003 & 0 & -0.0014 & -0.0003 & 0 & -0.0014 \\ 0 & 0.0139 & 0 & 0 & -0.0139 & 0 \\ -0.0014 & 0 & 0.0096 & 0.0014 & 0 & 0.0048 \\ -0.0003 & 0 & 0.0014 & 0.0003 & 0 & 0.0014 \\ 0 & -0.0139 & 0 & 0 & 0.0139 & 0 \\ -0.0014 & 0 & 0.0048 & 0.0014 & 0 & 0.0096 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

-Para el miembro 2 se usa la ecuación (ñ) debido a que este miembro tiene números de código en la dirección de los ejes globales y nodales; sustituyendo obtenemos:

$$k_2 = E * \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0069 & 0 & 0 & -0.0056 & 0.0042 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0.0007 & -0.0000 & -0.0001 & 0.0007 \\ 0 & 0.0007 & 0.0096 & -0.0004 & -0.0006 & 0.0048 \\ -0.0056 & -0.0000 & -0.0004 & 0.0045 & -0.0033 & -0.0004 \\ 0.0042 & -0.0001 & -0.0006 & -0.0033 & 0.0025 & -0.0006 \\ 0 & 0.0007 & 0.0048 & -0.0004 & -0.0006 & 0.0096 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{matrix} \end{matrix}$$

Sumando las matrices anteriores, es decir, realizando el ensamble, determinamos la matriz de rigidez global de toda la estructura.

$$K_T = k_1 + k_2$$

MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA:

$$K_T = E * \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0072 & 0 & 0.0014 & -0.0056 & 0 & 0.0042 & -0.0003 & 0 & 0.0014 \\ 0 & 0.0140 & 0.0007 & -0.0000 & 0.0007 & -0.0001 & 0 & -0.0139 & 0 \\ 0.0014 & 0.0007 & 0.0193 & -0.0004 & 0.0048 & -0.0006 & -0.0014 & 0 & 0.0048 \\ -0.0056 & -0.0000 & -0.0004 & 0.0045 & -0.0004 & -0.0033 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0007 & 0.0048 & -0.0004 & 0.0096 & -0.0006 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0042 & -0.0001 & -0.0006 & -0.0033 & -0.0006 & 0.0025 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0003 & 0 & -0.0014 & 0 & 0 & 0 & 0.0003 & 0 & -0.0014 \\ 0 & -0.0139 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0139 & 0 \\ 0.0014 & 0 & 0.0048 & 0 & 0 & 0 & -0.0014 & 0 & 0.0096 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{matrix}$$

La matriz de rigidez se subdividió de la siguiente forma:

$$K_T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

De $F = K_T * D$ extraemos los siguientes subsistemas:

Subsistema 1:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -15 \\ -1.8 \\ 15 \end{pmatrix} = (K_{11}) \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ D_4 \\ \theta_5 \end{pmatrix}$$

Despejando las incógnitas:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ D_4 \\ \theta_5 \end{pmatrix} = (K_{11})^{-1} * \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -15 \\ -1.8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ D_4 \\ \theta_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{E} * \begin{pmatrix} 0.0072 & 0 & 0.0014 & -0.0056 & 0 \\ 0 & 0.0140 & 0.0007 & -0.0000 & 0.0007 \\ 0.0014 & 0.0007 & 0.0193 & -0.0004 & 0.0048 \\ -0.0056 & -0.0000 & -0.0004 & 0.0045 & -0.0004 \\ 0 & 0.0007 & 0.0048 & -0.0004 & 0.0096 \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -15 \\ -1.8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ D_4 \\ \theta_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{E} * 10^3 * \begin{pmatrix} 0.7268 \\ -0.2602 \\ -1.3829 \\ 0.5865 \\ 2.2934 \end{pmatrix}$$

Subsistema 2:

$$\begin{pmatrix} R_C - 2.4 \\ R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_A \end{pmatrix} = (K_{21}) * \frac{1}{E} * 10^3 * \begin{pmatrix} 0.7268 \\ -0.2602 \\ -1.3829 \\ 0.5865 \\ 2.2934 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_C - 2.4 \\ R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_A \end{pmatrix} = E * \begin{pmatrix} 0.0042 & -0.0001 & -0.0006 & -0.0033 & -0.0006 \\ -0.0003 & 0 & -0.0014 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0139 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0014 & 0 & 0.0048 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \frac{1}{E} * 10^3 * \begin{pmatrix} 0.7268 \\ -0.2602 \\ -1.3829 \\ 0.5865 \\ 2.2934 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_C - 2.4 \\ R_{AX} \\ R_{AY} \\ M_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5825 \\ 1.7895 \\ 3.6140 \\ -5.6146 \end{pmatrix}$$

De lo anterior:

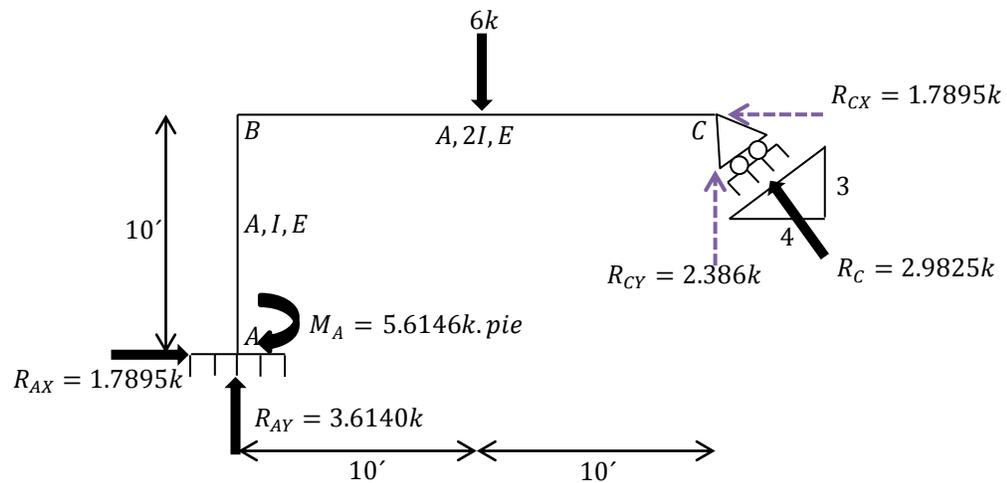
$$R_C - 2.4 = 0.5825 \rightarrow R_C = 0.5825 + 2.4 = 2.9825 \quad \therefore R_C = 2.9825k \nearrow$$

$$R_{AX} = 1.7895 \quad \therefore R_{AX} = 1.7895k \rightarrow$$

$$R_{AY} = 3.6140 \quad \therefore R_{AY} = 3.6140k \uparrow$$

$$M_A = -5.6146 \quad \therefore M_A = 5.6146k \cdot \text{pie} \curvearrowright$$

El siguiente diagrama muestra los valores de las reacciones en los soportes del marco real:



Las componentes rectangulares de R_C en los ejes x-y fueron deducidas del siguiente modo:

Obsérvese la figura de los dos triángulos:

Del triángulo 1:

$$\sin \theta = \frac{3}{5}, \cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{3}{4} \rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{3}{4}$$

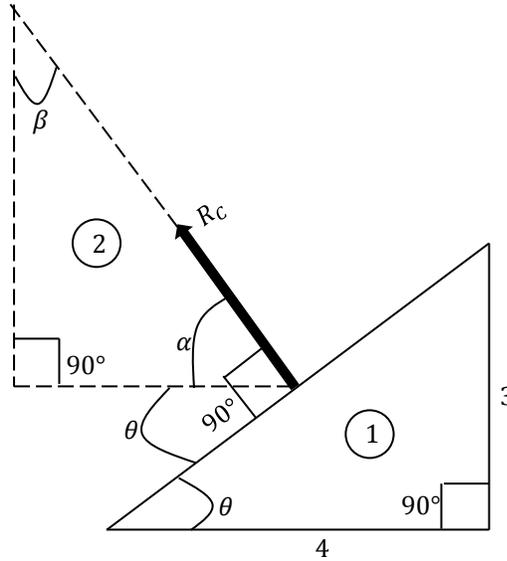
Del triángulo 2:

$$\alpha = 90^\circ - \theta = 90^\circ - \tan^{-1} \frac{3}{4}$$

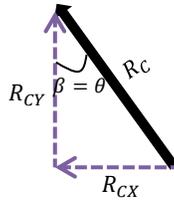
$$90^\circ + \alpha + \beta = 180^\circ \rightarrow \beta = 180^\circ - \alpha - 90^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - \left(90^\circ - \tan^{-1} \frac{3}{4}\right) - 90^\circ$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{3}{4} = \theta = 36.87^\circ$$



Las Componentes rectangulares de R_C son:



$$\sin \theta = \frac{R_{CX}}{R_C} \rightarrow R_{CX} = R_C(\sin \theta)$$

$$\text{Como } \sin \theta = \frac{3}{5}$$

$$R_{CX} = \frac{3}{5} R_C = \frac{3}{5} (2.9825k) = 1.7895k$$

$$\cos \theta = \frac{R_{CY}}{R_C} \rightarrow R_{CY} = R_C(\cos \theta)$$

Como $\cos \theta = \frac{4}{5}$

$$R_{CY} = \frac{4}{5} R_C = \frac{4}{5} (2.9825k) = 2.386k$$

Demostramos el equilibrio de la estructura haciendo uso de fuerzas externas:

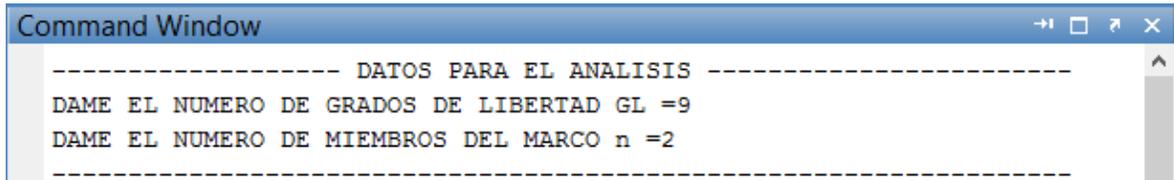
$$\sum MA = 0$$

$$5.6146 + 6(10) - 1.7895(10) - 2.386(20) \cong 0 \quad ok$$

A continuación se muestra la forma de usar el programa 4.2.5 tomando como ejemplo el problema anterior.

Una vez que se corra el programa:

3. Insertamos los siguientes datos de la estructura real:



```

Command Window
----- DATOS PARA EL ANALISIS -----
DAME EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD GL =9
DAME EL NUMERO DE MIEMBROS DEL MARCO n =2
-----
    
```

2.- Digitamos para cada miembro los cosenos directores, el valor de E,A,I que nos proporcionen en el problema, su longitud y el número designado a los grados de libertad tanto del extremo cercano como alejado en la sección de codificación.

Nota: Como en el problema no nos proporcionan el valor del Módulo de la Elasticidad y sólo nos dicen que es constante en toda la estructura, le daremos el valor de uno para cada miembro, lo cual significa que cada matriz global por miembro, la matriz global de toda la estructura y la submatriz K_{11} están multiplicadas por E; además cuando el programa calcule los valores de los desplazamientos desconocidos e imprima el vector total de desplazamientos, estos estarán afectados por 1/E.

-Para el miembro 1:

En este miembro no se localiza el soporte inclinado por lo que hacemos:

$$\lambda_x = Lx1 = Lx2 \text{ y } \lambda_y = Ly1 = Ly2$$

MIEMBRO 1.

```
DAME EL VALOR DE Lx1 = 0
DAME EL VALOR DE Ly1 = 1
DAME EL VALOR DE Lx2 = 0
DAME EL VALOR DE Ly2 = 1
DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD = 1
DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = 0.1389
DAME LA INERCIA DE LA SECCIÓN = 0.0241
DAME LA LONGITUD DEL MIEMBRO = 10
NODO N-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nx=7
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=8
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nz=9
NODO F-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fx=1
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=2
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fz=3
-----
```

En automático aparecerá la matriz de rigidez global del miembro 1:

MATRRIZ K1.

k =

```
0.0003      0 -0.0014 -0.0003      0 -0.0014
      0 0.0139      0      0 -0.0139      0
-0.0014      0 0.0096 0.0014      0 0.0048
-0.0003      0 0.0014 0.0003      0 0.0014
      0 -0.0139      0      0 0.0139      0
-0.0014      0 0.0048 0.0014      0 0.0096
-----
```

-Para el miembro 2:

En este miembro se localiza el soporte inclinado y fue necesario emplear un conjunto de coordenadas nodales x''-y'' por lo que hacemos:

$$\lambda_x = Lx1 \text{ , } \lambda_y = Ly1 \text{ ; } \lambda_{x''} = Lx2 \text{ , } \lambda_{y''} = Ly2$$

MIEMBRO 2.

```
DAME EL VALOR DE Lx1 = 1
DAME EL VALOR DE Ly1 = 0
DAME EL VALOR DE Lx2 = 0.8
DAME EL VALOR DE Ly2 = -0.6
DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD = 1
DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = 0.1389
DAME LA INERCIA DE LA SECCIÓN = 0.0482
DAME LA LONGITUD DEL MIEMBRO = 20
NODO N-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nx=1
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=2
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nz=3
NODO F-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fx=4
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=6
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fz=5
-----
```

En seguida aparecerá la matriz de rigidez global del miembro 2:

MATRRIZ K2.

k =

0.0069	0	0	-0.0056	0.0042	0
0	0.0001	0.0007	-0.0000	-0.0001	0.0007
0	0.0007	0.0096	-0.0004	-0.0006	0.0048
-0.0056	-0.0000	-0.0004	0.0045	-0.0033	-0.0004
0.0042	-0.0001	-0.0006	-0.0033	0.0025	-0.0006
0	0.0007	0.0048	-0.0004	-0.0006	0.0096

Luego de obtener la matriz de rigidez global de cada miembro, el programa ensambla tales matrices y nos arrojará la matriz de rigidez global de toda la estructura:

----- MATRIZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA -----

KT =

Columns 1 through 7

0.0072	0	0.0014	-0.0056	0	0.0042	-0.0003
0	0.0140	0.0007	-0.0000	0.0007	-0.0001	0
0.0014	0.0007	0.0193	-0.0004	0.0048	-0.0006	-0.0014
-0.0056	-0.0000	-0.0004	0.0045	-0.0004	-0.0033	0
0	0.0007	0.0048	-0.0004	0.0096	-0.0006	0
0.0042	-0.0001	-0.0006	-0.0033	-0.0006	0.0025	0
-0.0003	0	-0.0014	0	0	0	0.0003
0	-0.0139	0	0	0	0	0
0.0014	0	0.0048	0	0	0	-0.0014

Columns 8 through 9

0	0.0014
-0.0139	0
0	0.0048
0	0
0	0
0	0
0	-0.0014
0.0139	0
0	0.0096

3.-Capturamos el Vector de Fuerzas Conocidas:

```
DAME EL VECTOR DE FUERZAS CONOCIDAS=[0;-3;-15;-1.8;15]
```

Se imprimirá el vector anterior:

```
v =  
    0  
   -3.0000  
  -15.0000  
   -1.8000  
   15.0000
```

Se imprimirá la submatriz K_{11} :

```
K =  
    0.0072         0    0.0014   -0.0056         0  
         0    0.0140    0.0007   -0.0000    0.0007  
    0.0014    0.0007    0.0193   -0.0004    0.0048  
   -0.0056   -0.0000   -0.0004    0.0045   -0.0004  
         0    0.0007    0.0048   -0.0004    0.0096
```

El programa nos proporciona los valores de los desplazamientos desconocidos:

```
d1 =  
1.0e+003 *  
    0.7268  
   -0.2602  
   -1.3829  
    0.5865  
    2.2934
```

Se imprime el vector de desplazamientos conocidos:

```
d2 =  
    0  
    0  
    0  
    0
```

Se imprime el vector total de desplazamientos:

```
ans =  
  
VECTOR TOTAL DE DESPLAZAMIENTOS  
  
D =  
  
1.0e+003 *  
  
    0.7268  
   -0.2602  
  -1.3829  
    0.5865  
    2.2934  
         0  
         0  
         0  
         0
```

Se imprime el vector total de fuerzas, es decir, aquel vector que contiene al vector de fuerzas conocidas y al vector de fuerzas desconocidas:

```
ans =  
  
VECTOR TOTAL DE FUERZAS  
  
F =  
  
   -0.0000  
   -3.0000  
  -15.0000  
   -1.8000  
   15.0000  
    0.5825  
    1.7895  
    3.6140  
   -5.6146
```

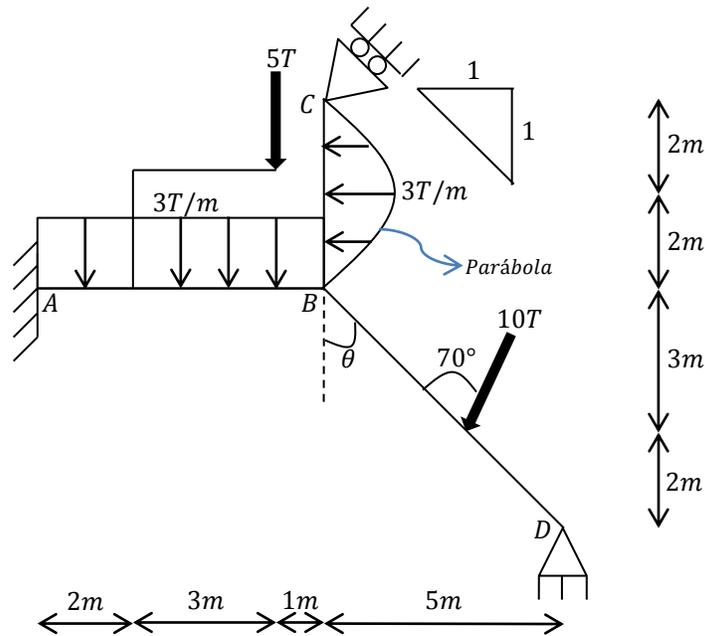
10.- Use el análisis matricial de la rigidez para calcular las reacciones en los soportes del siguiente marco. Note que el apoyo C esta inclinado con una relación 1:1 tal y como se muestra en la figura.

Datos:

$$E = 2.1 * 10^7 T/m^2$$

$$A = 0.12m^2$$

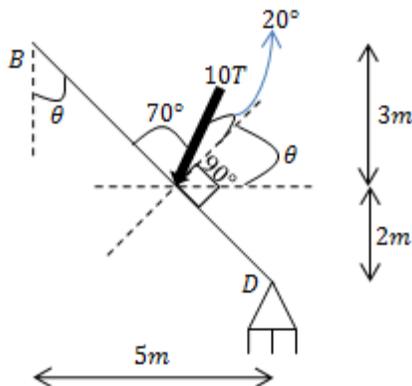
$$I = 0.0016m^4$$



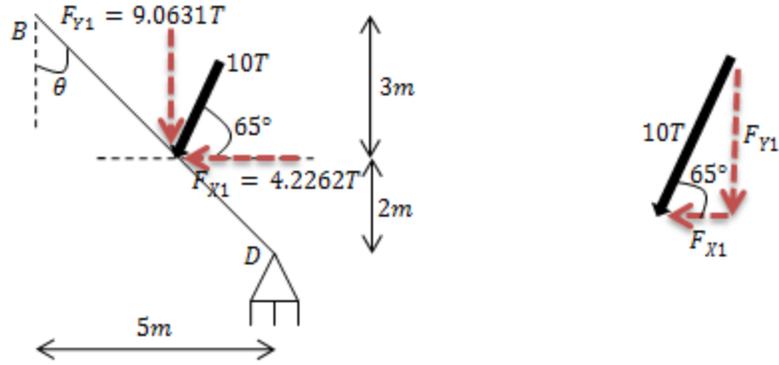
Solución:

La estructura es equivalente a la de la tercera figura de la siguiente página.

Las componentes rectangulares de $F=10T$ se obtuvieron de los siguientes cálculos:

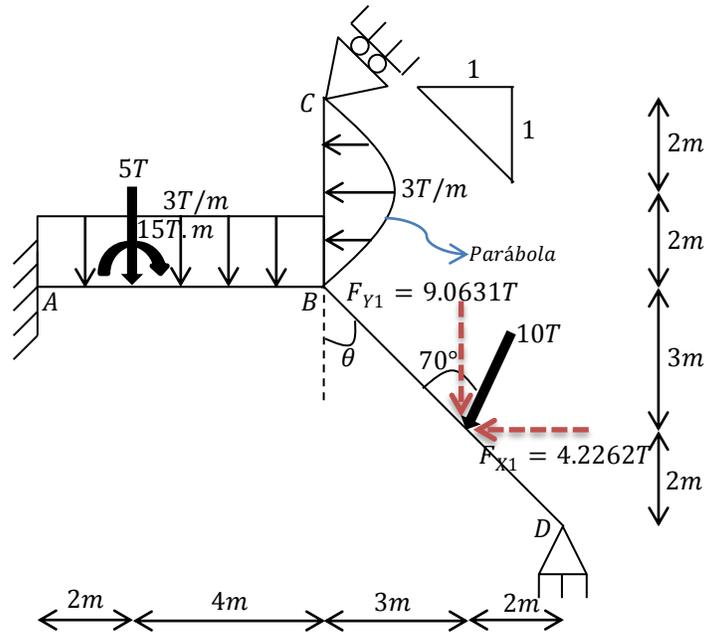


$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{5}{5} \right) = 45^\circ$$



$$F_{Y1} = 10T(\sin 65^\circ) = 9.0631T$$

$$F_{X1} = 10T(\cos 65^\circ) = 4.2262T$$



Codificación o Notación:

- Como el soporte de rodillos en 5 se encuentra sobre un plano inclinado, en este nodo deben usarse coordenadas nodales $x''-y''$.
- Se establece un eje de coordenadas globales $x-y$ para que preferentemente todos los nodos tengan coordenadas positivas en este sistema.
- Los ejes de coordenadas están definidos en sus cuadrantes positivos.
- Los nodos se enumerarán con un número circulado y los miembros con un número cuadrículado.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

- Los desplazamientos se enumerarán a modo de que primero estén los desconocidos, es decir, los no restringidos, y después los conocidos, o sea, los restringidos.
- La punta de la flecha esta dirigida hacia el extremo alejado (F) por lo que el extremo contrario es el cercano (N).
- Conviene subdividir el miembro B-D en dos miembros colocando un nodo imaginario justo ahí donde actúa la fuerza de $10T$, aunque también puede considerarse un solo miembro tal y como se efectuó en el problema 8 de esta sección.

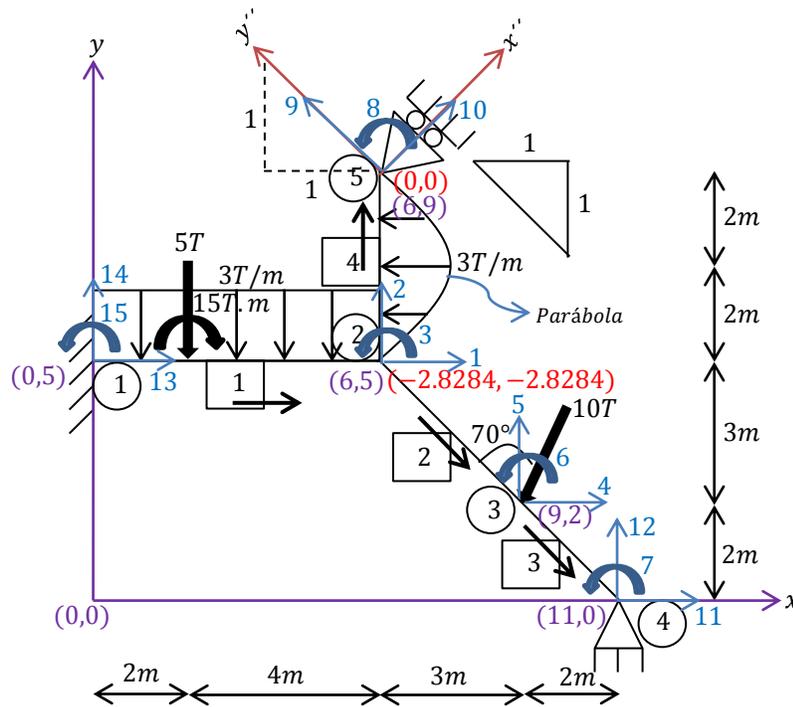
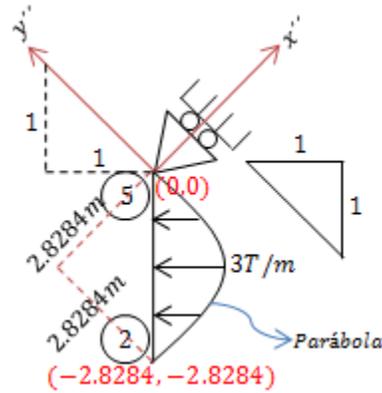


Tabla de Coordenadas:

Nudo	Ejes x-y		Ejes x''-y''	
	x(m)	y(m)	x''(m)	y''(m)
1	0	5		
2	6	5	-2.8284	-2.8284
3	9	2		
4	11	0		
5	6	9	0	0

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

Las coordenadas del nodo 2 en los ejes $x''-y''$ se obtienen del siguiente esquema:



Remitiéndonos a la figura de la codificación o notación extraemos los siguientes datos:

Miembro	Nudo		A(m ²)	I(m ⁴)	L(m)
	N	F			
1	1	2	0.12	0.0016	6
2	2	3	0.12	0.0016	4.2426
3	3	4	0.12	0.0016	2.8284
4	2	5	0.12	0.0016	4

Miembro	Numeración de los Grados de Libertad					
	Nx	Ny	Nz	Fx	Fy	Fz
1	13	14	15	1	2	3
2	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	11	12	7
4	1	2	3	10	9	8

Cosenos directores por miembro:

Miembro 1:

$$\lambda_x = \frac{6-0}{6} = 1, \lambda_y = \frac{5-5}{6} = 0$$

Miembro 2:

$$L = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4.2426m$$

$$\lambda_x = \frac{9-6}{4.2426} = 0.7071, \lambda_y = \frac{2-5}{4.2426} = -0.7071$$

Miembro 3:

$$L = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2.8284m$$

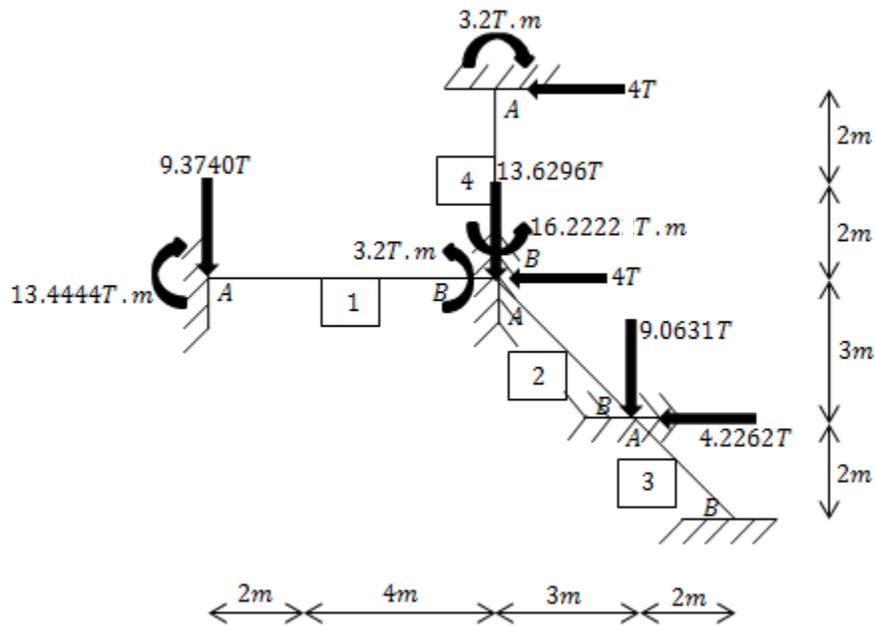
$$\lambda_x = \frac{11 - 9}{2.8284} = 0.7071, \lambda_y = \frac{0 - 2}{2.8284} = -0.7071$$

Miembro 4:

$$\lambda_x = \frac{6 - 6}{4} = 0, \lambda_y = \frac{9 - 5}{4} = 1$$

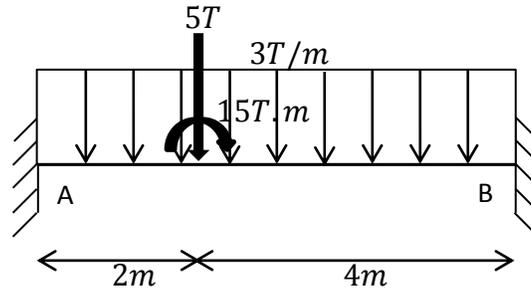
$$\lambda_x'' = \frac{0 - (-2.8284)}{4} = 0.7071, \lambda_y'' = \frac{0 - (-2.8284)}{4} = 0.7071$$

Empotrando doblemente los miembros del marco, las acciones o cargas en los nodos son:



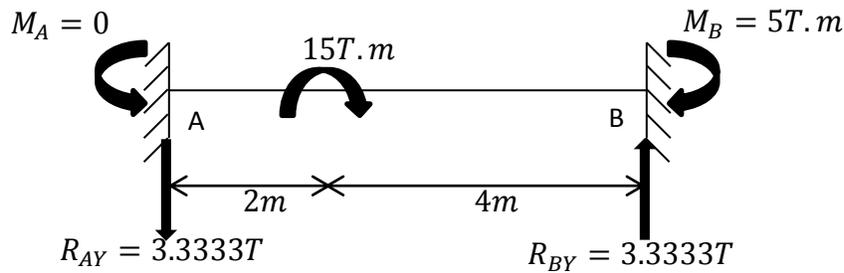
Las acciones fueron obtenidas a partir de invertir las reacciones que a continuación se calculan en los miembros doblemente empotrados.

Miembro 1:



Por Método de superposición, la viga anterior es igual a la suma de las siguientes tres vigas:

Viga 1.1:



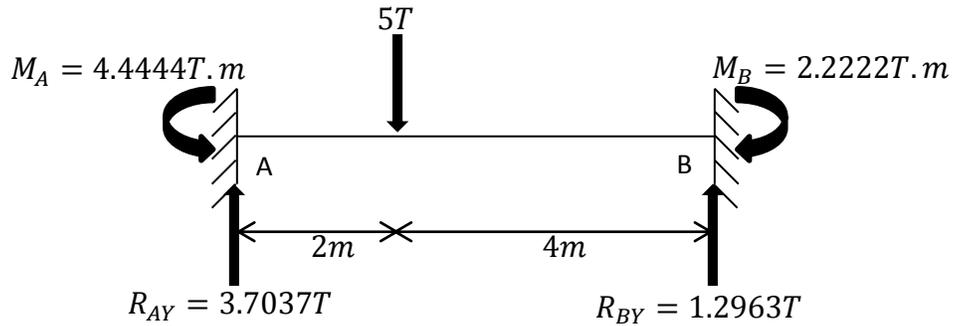
$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{6Mab}{L^3} = \frac{(6)(15)(2)(4)}{6^3} = 3.3333T \quad \Downarrow \Uparrow$$

respectivamente

$$M_A = \frac{Mb}{L} \left(\frac{3b}{L} - 2 \right) = \frac{(15)(4)}{6} \left(\frac{3(4)}{6} - 2 \right) = 0$$

$$M_B = \frac{Ma}{L} \left(2 - \frac{3a}{L} \right) = \frac{(15)(2)}{6} \left(2 - \frac{3(2)}{6} \right) = 5T.m \quad \curvearrowright$$

Viga 1.2:



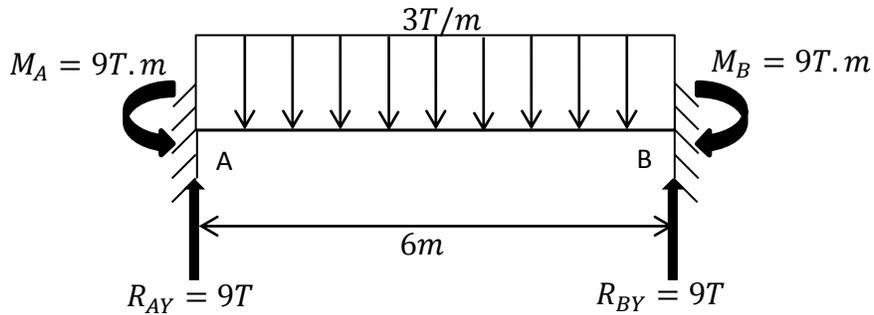
$$R_{AY} = \frac{Pb^2}{L^2} \left(3 - 2 \frac{b}{L} \right) = \frac{5(4^2)}{6^2} \left(3 - 2 \left(\frac{4}{6} \right) \right) = 3.7037T \uparrow$$

$$R_{BY} = \frac{Pa^2}{L^2} \left(3 - 2 \frac{a}{L} \right) = \frac{5(2^2)}{6^2} \left(3 - 2 \left(\frac{2}{6} \right) \right) = 1.2963T \uparrow$$

$$M_A = \frac{Pab^2}{L^2} = \frac{5(2)(4^2)}{6^2} = 4.4444T.m \curvearrowleft$$

$$M_B = \frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{5(2^2)(4)}{6^2} = 2.2222T.m \curvearrowright$$

Viga 1.3:

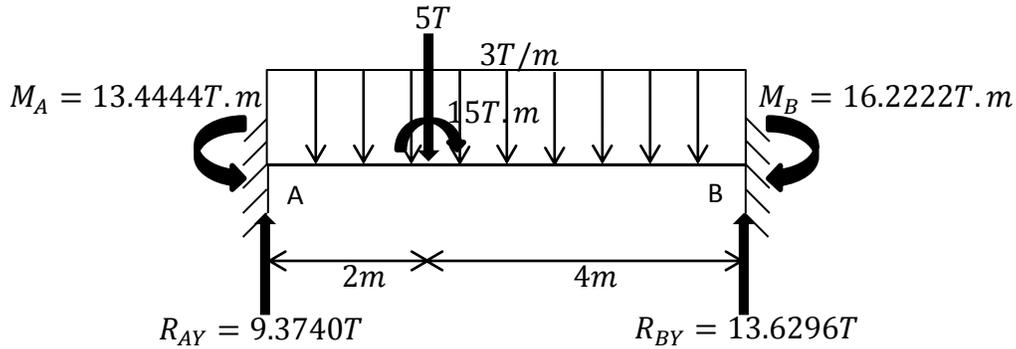


$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{WL}{2} = \frac{(3)(6)}{2} = 9T \uparrow$$

$$M_A = M_B = \frac{WL^2}{12} = \frac{(3)(6^2)}{12} = 9T.m \curvearrowleft \curvearrowright$$

respectivamente

Finalmente, las reacciones del miembro 1 son:



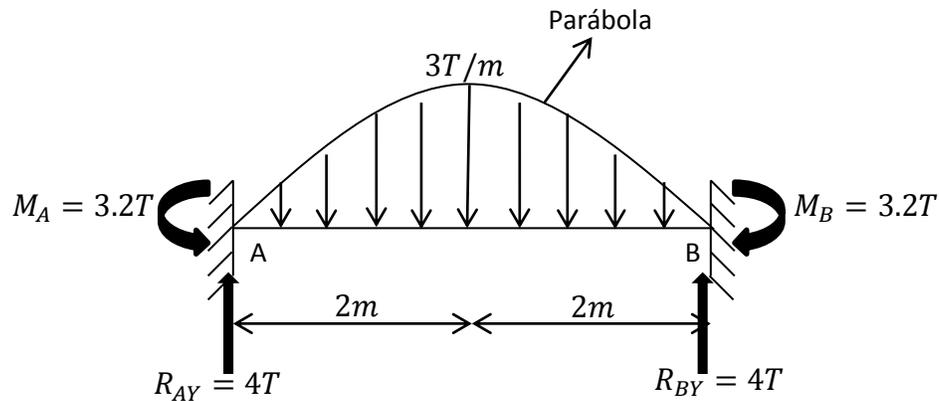
$$R_{AY} = -3.3333 + 3.7037 + 9 = 9.3740T \uparrow$$

$$R_{BY} = 3.3333 + 1.2963 + 9 = 13.6296T \uparrow$$

$$M_A = 0 + 4.4444 + 9 = 13.4444T.m \curvearrowleft$$

$$M_B = 5 + 2.2222 + 9 = 16.2222T.m \curvearrowright$$

Miembro 4 (rotado para mayor facilidad):

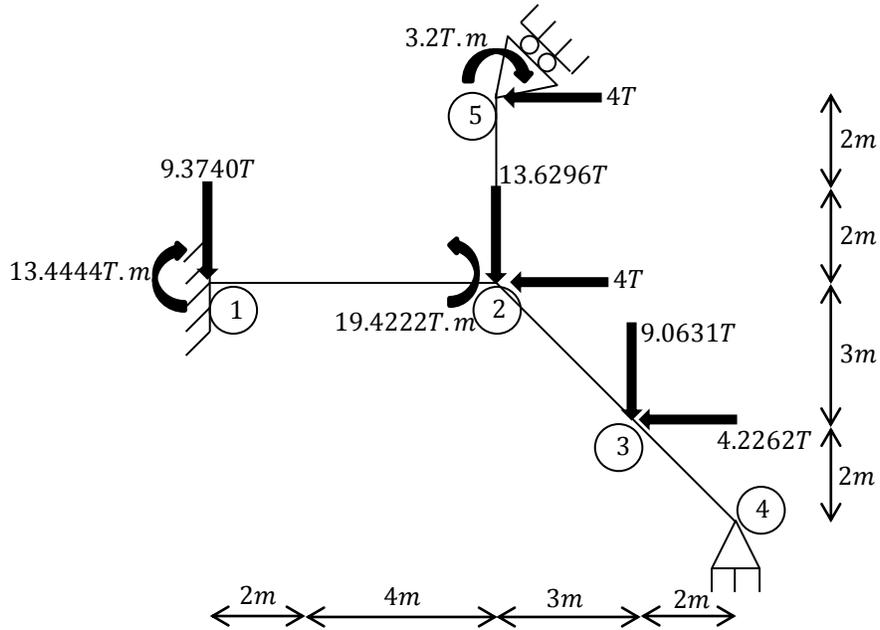


$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{WL}{3} = \frac{(3)(4)}{3} = 4T \uparrow$$

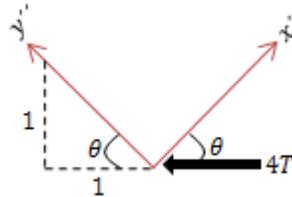
$$M_A = M_B = \frac{WL^2}{15} = \frac{(3)(4^2)}{15} = 3.2T.m \curvearrowleft$$

Respectivamente

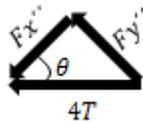
Las acciones totales en cada nodo del marco son:



Es necesario descomponer la acción de $5T$ ubicada en el nodo 5 en sus componentes rectangulares para el sistema $x''-y''$



$$\tan \theta = \frac{1}{1} \rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{1}{1} = 45^\circ$$

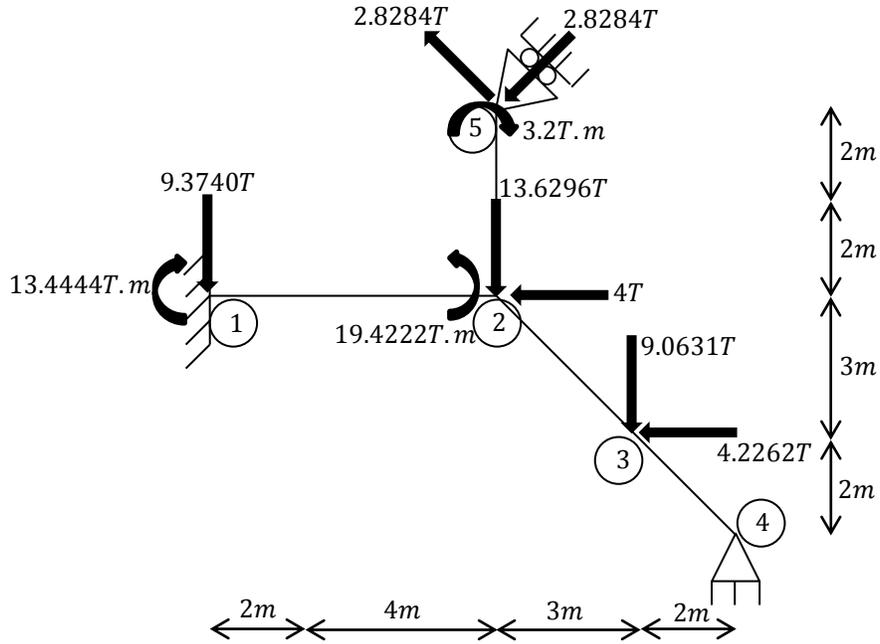


$$\sin \theta = \frac{Fy''}{4T} \rightarrow Fy'' = (4T)(\sin 45^\circ) = 2.8284T$$

$$\cos \theta = \frac{Fx''}{4T} \rightarrow Fx'' = (4T)(\cos 45^\circ) = 2.8284T$$

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

En consecuencia, las acciones totales en cada nodo del marco a analizarse son:



-Vector de Fuerzas:

$$F = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -13.6296 & 2 \\ 19.4222 & 3 \\ -4.2262 & 4 \\ -9.0631 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 7 \\ -3.2 & 8 \\ 2.8284 & 9 \\ \hline R_C - 2.8284 & 10 \\ R_{DX} & 11 \\ R_{DY} & 12 \\ R_{AX} & 13 \\ R_{AY} - 9.3740 & 14 \\ M_A - 13.4444 & 15 \end{pmatrix}$$

-Vector de Desplazamientos:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 1 \\ D_2 & 2 \\ \theta_3 & 3 \\ D_4 & 4 \\ D_5 & 5 \\ \theta_6 & 6 \\ \theta_7 & 7 \\ \theta_8 & 8 \\ D_9 & 9 \\ \hline 0 & 10 \\ 0 & 11 \\ 0 & 12 \\ 0 & 13 \\ 0 & 14 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Matriz de rigidez global por miembro:

Para los miembros 1,2 y 3 se ocupa la ecuación (j) y para el miembro 4 se usa la ecuación (ñ) debido a que éste último tiene números de código en la dirección de los ejes globales y nodales.

Miembro 1:

$$k_1 = 2.1 * 10^7 * \begin{pmatrix} & 13 & 14 & 15 & 1 & 2 & 3 \\ 0.0200 & 0 & 0 & -0.0200 & 0 & 0 & \\ 0 & 0.0001 & 0.0003 & 0 & -0.0001 & 0.0003 & \\ 0 & 0.0003 & 0.0011 & 0 & -0.0003 & 0.0005 & \\ -0.0200 & 0 & 0 & 0.0200 & 0 & 0 & \\ 0 & -0.0001 & -0.0003 & 0 & 0.0001 & -0.0003 & \\ 0 & 0.0003 & 0.0005 & 0 & -0.0003 & 0.0011 & \end{pmatrix} \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Miembro 2:

$$k_2 = 2.1 * 10^7 * \begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.0143 & -0.0140 & 0.0004 & -0.0143 & 0.0140 & 0.0004 & \\ -0.0140 & 0.0143 & 0.0004 & 0.0140 & -0.0143 & 0.0004 & \\ 0.0004 & 0.0004 & 0.0015 & -0.0004 & -0.0004 & 0.0008 & \\ -0.0143 & 0.0140 & -0.0004 & 0.0143 & -0.0140 & -0.0004 & \\ 0.0140 & -0.0143 & -0.0004 & -0.0140 & 0.0143 & -0.0004 & \\ 0.0004 & 0.0004 & 0.0008 & -0.0004 & -0.0004 & 0.0015 & \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Miembro 3:

$$k_3 = 2.1 * 10^7 * \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 11 & 12 & 7 \\ 0.0216 & -0.0208 & 0.0008 & -0.0216 & 0.0208 & 0.0008 \\ -0.0208 & 0.0216 & 0.0008 & 0.0208 & -0.0216 & 0.0008 \\ 0.0008 & 0.0008 & 0.0023 & -0.0008 & -0.0008 & 0.0011 \\ -0.0216 & 0.0208 & -0.0008 & 0.0216 & -0.0208 & -0.0008 \\ 0.0208 & -0.0216 & -0.0008 & -0.0208 & 0.0216 & -0.0008 \\ 0.0008 & 0.0008 & 0.0011 & -0.0008 & -0.0008 & 0.0023 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 11 \\ 12 \\ 7 \end{matrix}$$

Miembro 4:

$$k_4 = 2.1 * 10^7 * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 & 9 & 8 \\ 0.0003 & 0 & -0.0006 & -0.0002 & 0.0002 & -0.0006 \\ 0 & 0.0300 & 0 & -0.0212 & -0.0212 & 0 \\ -0.0006 & 0 & 0.0016 & 0.0004 & -0.0004 & 0.0008 \\ -0.0002 & -0.0212 & 0.0004 & 0.0151 & 0.0148 & 0.0004 \\ 0.0002 & -0.0212 & -0.0004 & 0.0148 & 0.0151 & -0.0004 \\ -0.0006 & 0 & 0.0008 & 0.0004 & -0.0004 & 0.0016 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 10 \\ 9 \\ 8 \end{matrix}$$

Sumando las matrices anteriores, es decir, realizando el ensamble, determinamos la matriz de rigidez global de toda la estructura.

$$K_T = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$$

La matriz de rigidez global de la estructura adquiere la siguiente forma:

$$K_T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

A continuación se proporciona por separado cada una de las subdivisiones de K_T :

Matriz K_{11} :

$$K_{11} = 2.1 * 10^7 * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0.0346 & -0.0140 & -0.0002 & -0.0143 & 0.0140 & 0.0004 & 0 & -0.0006 & 0.0002 \\ -0.0140 & 0.0444 & 0.0001 & 0.0140 & -0.0143 & 0.0004 & 0 & 0 & -0.0212 \\ -0.0002 & 0.0001 & 0.0042 & -0.0004 & -0.0004 & 0.0008 & 0 & 0.0008 & -0.0004 \\ -0.0143 & 0.0140 & -0.0004 & 0.0359 & -0.0348 & 0.0005 & 0.0008 & 0 & 0 \\ 0.0140 & -0.0143 & -0.0004 & -0.0348 & 0.0359 & 0.0005 & 0.0008 & 0 & 0 \\ 0.0004 & 0.0004 & 0.0008 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0038 & 0.0011 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0011 & 0.0023 & 0 & 0 \\ -0.0006 & 0 & 0.0008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0016 & -0.0004 \\ 0.0002 & -0.0212 & -0.0004 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0004 & 0.0151 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Matriz K_{12} :

$$K_{12} = 2.1 * 10^7 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -0.0002 \\ -0.0212 \\ 0.0004 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0004 \\ 0.0148 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.0200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0001 & -0.0003 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0003 & 0.0005 \\ -0.0216 & 0.0208 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0208 & -0.0216 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0008 & -0.0008 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0008 & -0.0008 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Matriz K_{21} :

$$K_{21} = 2.1 * 10^7 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -0.0002 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0200 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -0.0212 & 0.0004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0004 & 0.0148 \\ 0 & 0 & -0.0216 & 0.0208 & -0.0008 & -0.0008 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0208 & -0.0216 & -0.0008 & -0.0008 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0001 & 0.0003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0003 & 0.0005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{matrix}$$

Matriz K_{22} :

$$K_{22} = 2.1 * 10^7 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0.0151 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0216 & -0.0208 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0208 & 0.0216 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0.0003 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0003 & 0.0011 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{matrix}$$

De $F = K_T * D$ extraemos los siguientes subsistemas:

Subsistema 1:

$$F_K = K_{11} D_U \rightarrow D_U = K_{11}^{-1} * F_K$$

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \theta_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \\ D_9 \end{pmatrix} = \frac{1}{2.1 * 10^7} * \begin{pmatrix} 0.0346 & -0.0140 & -0.0002 & -0.0143 & 0.0140 & 0.0004 & 0 & -0.0006 & 0.0002 \\ -0.0140 & 0.0444 & 0.0001 & 0.0140 & -0.0143 & 0.0004 & 0 & 0 & -0.0212 \\ -0.0002 & 0.0001 & 0.0042 & -0.0004 & -0.0004 & 0.0008 & 0 & 0.0008 & -0.0004 \\ -0.0143 & 0.0140 & -0.0004 & 0.0359 & -0.0348 & 0.0005 & 0.0008 & 0 & 0 \\ 0.0140 & -0.0143 & -0.0004 & -0.0348 & 0.0359 & 0.0005 & 0.0008 & 0 & 0 \\ 0.0004 & 0.0004 & 0.0008 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0038 & 0.0011 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0011 & 0.0023 & 0 & 0 \\ -0.0006 & 0 & 0.0008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0016 & -0.0004 \\ 0.0002 & -0.0212 & -0.0004 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0004 & 0.0151 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$* \begin{pmatrix} -4 \\ -13.6296 \\ 19.4222 \\ -4.2262 \\ -9.0631 \\ 0 \\ 0 \\ -3.2 \\ 2.8284 \end{pmatrix} = \frac{1 * 10^4}{2.1 * 10^7} * \begin{pmatrix} -0.1035m \\ -0.2641m \\ 0.2832rad \\ -1.2687m \\ -1.3398m \\ 0.0150rad \\ 0.9707rad \\ -0.4745rad \\ -0.3551m \end{pmatrix}$$

Subsistema 2:

$$F_U = K_{21} D_U$$

$$\begin{pmatrix} R_C - 2.8284 \\ R_{DX} \\ R_{DY} \\ R_{AX} \\ R_{AY} - 9.3740 \\ M_A - 13.4444 \end{pmatrix} = 2.1 * 10^7 * \begin{pmatrix} -0.0002 & -0.0212 & 0.0004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0004 & 0.0148 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0216 & 0.0208 & -0.0008 & -0.0008 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0208 & -0.0216 & -0.0008 & -0.0008 & 0 & 0 \\ -0.0200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0001 & 0.0003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0003 & 0.0005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$* \frac{1 * 10^4}{2.1 * 10^7} * \begin{pmatrix} -0.1035 \\ -0.2641 \\ 0.2832 \\ -1.2687 \\ -1.3398 \\ 0.0150 \\ 0.9707 \\ -0.4745 \\ -0.3551 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.7088 \\ -12.3810 \\ 17.7874 \\ 20.6917 \\ 0.9899 \\ 2.2146 \end{pmatrix}$$

Nota:

Se ha usado el programa 4.2.5 para ahorrarse todas las operaciones matriciales que se efectúan en este método. Esta vez, se ha optado por insertar el valor de 1 para el módulo de elasticidad en cada miembro, de tal modo que las matrices de rigidez global por miembro, la matriz de rigidez global de la estructura y la submatriz K_{11} que arroja el programa estarán afectadas por E, es decir, por $2.1 * 10^7$; además, cuando se imprima el vector de desplazamientos desconocidos, estos estarán afectados por $1/E$, ósea, $1 / 2.1 * 10^7$.

También se puede digitar el valor de $2.1 * 10^7$ y no de 1 para el módulo de elasticidad en el programa.

Cálculo de las reacciones:

$$R_C - 2.8284 = 2.7088 \rightarrow R_C = 2.7088 + 2.8284 = 5.5372 \quad \therefore R_C = 5.5372T \nearrow$$

$$R_{DX} = -12.3810 \quad \therefore R_{DX} = 12.3810T \leftarrow$$

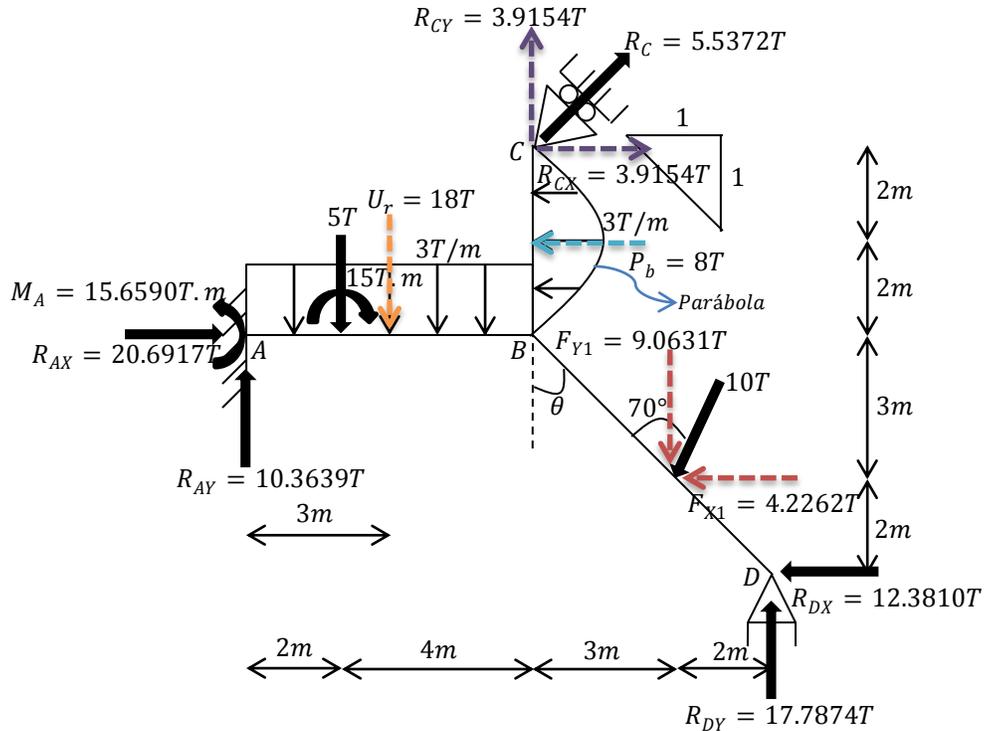
$$R_{DY} = 17.7874 \quad \therefore R_{DY} = 17.7874T \uparrow$$

$$R_{AX} = 20.6917 \quad \therefore \quad R_{AX} = 20.6917T \rightarrow$$

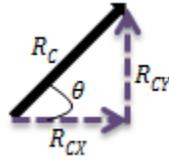
$$R_{AY} - 9.3740 = 0.9899 \rightarrow R_{AY} = 0.9899 + 9.3740 = 10.3639 \quad \therefore \quad R_{AY} = 10.3639T \uparrow$$

$$M_A - 13.4444 = 2.2146 \rightarrow R_{AY} = 2.2146 + 13.4444 = 15.6590 \quad \therefore \quad M_A = 15.6590T.m \curvearrowleft$$

Diagrama del marco real en el que se visualizan los valores de las reacciones en los apoyos:



- Componentes rectangulares de $R_C=5.5372T$



$$R_{CX} = 5.5372T(\cos 45^\circ) = 3.9154T$$

$$R_{CY} = 5.5372T(\sin 45^\circ) = 3.9154T$$

- Cargas concentradas equivalentes y puntos de aplicación

- Para la presión uniformemente repartida:

$$U_r = (3T/m)(6m) = 18T \downarrow \text{ a } 3m \text{ a la derecha de A}$$

- Para la presión parabólica:

$$P_b = \frac{2}{3}WL = \frac{2}{3}(3T/m)(4m) = 8T \leftarrow \quad a \quad \frac{1}{2}L = \frac{1}{2}(4m) = 2m \text{ debajo de } C$$

Demostramos el equilibrio de la estructura haciendo uso de fuerzas externas:

$$\sum FY = 0$$

$$10.3639 - 5 - 18 + 3.9154 - 9.0631 + 17.7874 \cong 0 \quad ok$$

$$\sum FX = 0$$

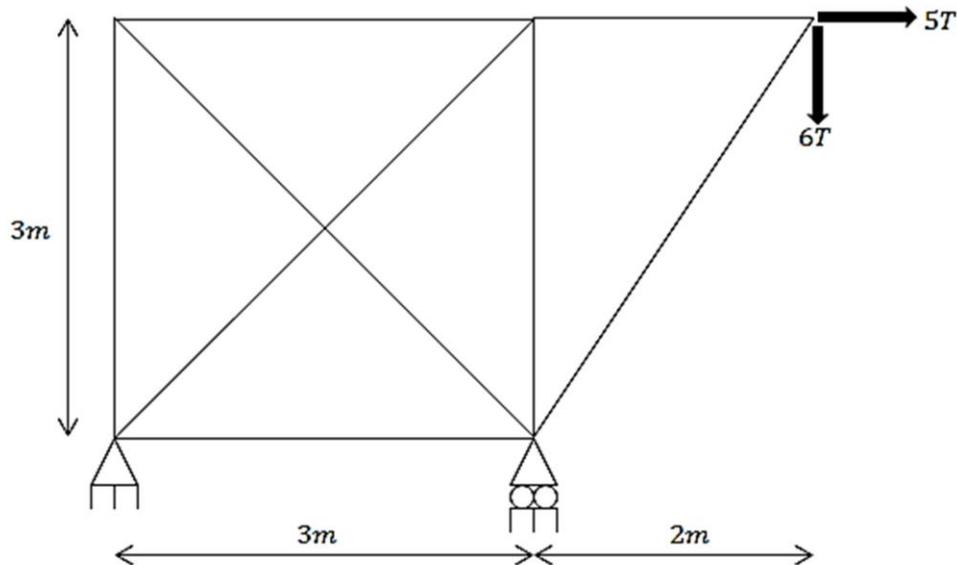
$$20.6917 + 3.9154 - 8 - 4.2262 - 12.3810 \cong 0 \quad ok$$

$$\sum MA = 0$$

$$\begin{aligned} -15.6590 + 5(2) + 18(3) + 15 - 8(2) + 3.9154(4) - 3.9154(6) + 9.0631(9) \\ + 4.2262(3) - 17.7874(11) + 12.3810(5) \cong 0 \quad ok \end{aligned}$$

4.5. ANÁLISIS DE ARMADURAS EN R² CON EL USO DEL MÉTODO DE LA RIGIDEZ

1.- Use el método de la rigidez matricial para calcular las reacciones en los soportes y las fuerzas en las barras de la armadura mostrada.



Considere los siguientes datos:

-Sección transversal:

* Para las barras 1, 2, 3, 4,5: rectangular de b=30cm y h=40cm

*Para las barras 6, 7, 8: cuadrada de 40cm por lado

-Módulo de Elasticidad: El de las maderas duras ($2.1 \cdot 10^6 \text{ T/m}^2$)

SOLUCIÓN:

Cálculos auxiliares:

-Barras 1 a 5:

$$\text{Área} = (0.3\text{m})(0.4\text{m}) = 0.12\text{m}^2$$

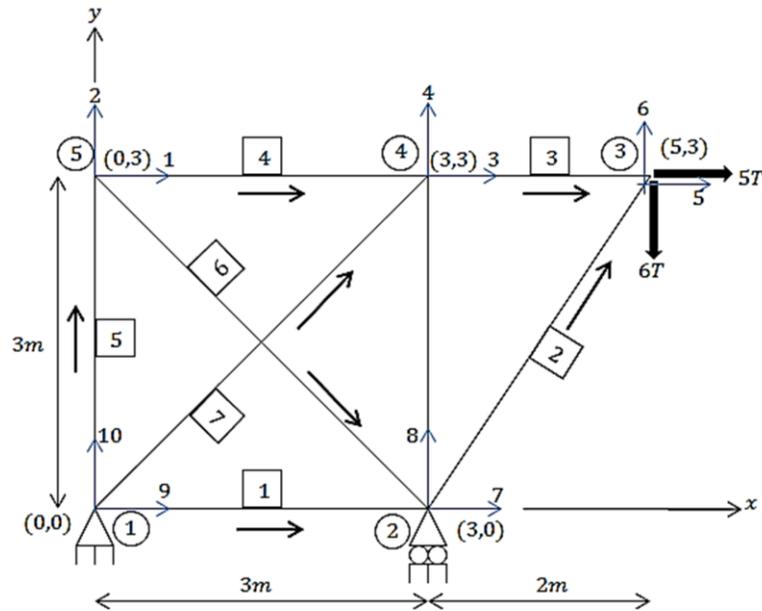
$$AE = (0.12\text{m}^2) \left(2.1 \cdot 10^6 \text{ T/m}^2 \right) = 252000 \text{ T}$$

-Barras 6 a 8:

$$\text{Área} = (0.4m)(0.4m) = 0.16m^2$$

$$AE = (0.16m^2) (2.1 * 10^6 T/m^2) = 336000 T$$

Codificación:



Cosenos directores por barra

Barra 1:

$$-Longitud(L) = 3m$$

$$\lambda_x = \frac{3-0}{3} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{0-0}{3} = 0$$

Barra 2:

$$-Longitud(L) = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}m$$

$$\lambda_x = \frac{5 - 3}{\sqrt{13}} = 0.5547$$

$$\lambda_y = \frac{3 - 0}{\sqrt{13}} = 0.8321$$

Barra 3:

$$-Longitud(L) = 2m$$

$$\lambda_x = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{3 - 3}{2} = 0$$

Barra 4:

$$-Longitud(L) = 3m$$

$$\lambda_x = \frac{3 - 0}{3} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{3 - 3}{3} = 0$$

Barra 5:

$$-Longitud(L) = 3m$$

$$\lambda_x = \frac{0 - 0}{3} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{3 - 0}{3} = 1$$

Barra 6:

$$-Longitud(L) = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}m$$

$$\lambda_x = \frac{3 - 0}{3\sqrt{2}} = 0.7071$$

$$\lambda_y = \frac{0 - 3}{3\sqrt{2}} = -0.7071$$

Barra 7:

$$-Longitud(L) = 3\sqrt{2}m$$

$$\lambda_x = \frac{3 - 0}{3\sqrt{2}} = 0.7071$$

$$\lambda_y = \frac{3 - 0}{3\sqrt{2}} = 0.7071$$

Barra 8:

$$-Longitud(L) = 3m$$

$$\lambda_x = \frac{3 - 3}{3} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{3 - 0}{3} = 1$$

-Matriz de rigidez global por barra:

Barra 1:

$$k_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 9 & 10 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 84000 & 0 & -84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -84000 & 0 & 84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 2:

$$k_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 21505.8375 & 32262.2509 & -21505.8375 & -32262.2509 \\ 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509 & -48393.3764 \\ -21505.8375 & -32262.2509 & 21505.8375 & 32262.2509 \\ -32262.2509 & -48393.3764 & 32262.2509 & 48393.3764 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 3:

$$k_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 126000 & 0 & -126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -126000 & 0 & 126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 4:

$$k_4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 84000 & 0 & -84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -84000 & 0 & 84000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 5:

$$k_5 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 9 & 10 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 84000 & 0 & -84000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -84000 & 0 & 84000 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 6:

$$k_6 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 39597.9798 & -39597.9798 & -39597.9798 & 39597.9798 \\ -39597.9798 & 39597.9798 & 39597.9798 & -39597.9798 \\ -39597.9798 & 39597.9798 & 39597.9798 & -39597.9798 \\ 39597.9798 & -39597.9798 & -39597.9798 & 39597.9798 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

Barra 7:

$$k_7 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 9 & 10 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 39597.9798 & 39597.9798 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 39597.9798 & 39597.9798 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ -39597.9798 & -39597.9798 & 39597.9798 & 39597.9798 \\ -39597.9798 & -39597.9798 & 39597.9798 & 39597.9798 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 8:

$$k_8 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 112000 & 0 & -112000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -112000 & 0 & 112000 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Matriz de rigidez global de la estructura, la cual se obtiene de ensamblar las matrices anteriores:

$$K_T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 123597.9798 & -39597.9798 & -84000 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 \\ -39597.9798 & 123597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & -84000 \\ -84000 & 0 & 249597.9798 & 39597.9798 & -126000 & 0 & 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 0 & 0 & 39597.9798 & 151597.9798 & 0 & 0 & 0 & -112000 & -39597.9798 & -39597.9798 \\ 0 & 0 & -126000 & 0 & 147505.8357 & 32262.2509 & -21505.8375 & -32262.2509 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509 & -48393.3764 & 0 & 0 \\ -39597.9798 & 39597.9798 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 & 145103.8173 & -7335.7289 & -84000 & 0 \\ 39597.9798 & -39597.9798 & 0 & -112000 & -32262.2509 & -48393.3764 & -7335.7289 & 199991.3562 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & -84000 & 0 & 123597.9798 & 39597.9798 \\ 0 & -84000 & -39597.9798 & -39597.9798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39597.9798 & 123597.9798 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

La matriz de rigidez se subdividió de la siguiente forma:

$$K_T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

Vector de desplazamientos:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 1 \\ D_2 & 2 \\ D_3 & 3 \\ D_4 & 4 \\ D_5 & 5 \\ D_6 & 6 \\ D_7 & 7 \\ \hline 0 & 8 \\ 0 & 9 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Vector de Fuerzas:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \\ 5 & 5 \\ -6 & 6 \\ 0 & 7 \\ \hline F_8 & 8 \\ F_9 & 9 \\ F_{10} & 10 \end{pmatrix}$$

De $F = K_T * D$ extraemos los siguientes subsistemas:

Subsistema 1:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = (K_{11}) * \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000135574 \\ 4.4452 * 10^{-5} \\ 0.000180026 \\ -4.7024 * 10^{-5} \\ 0.000251459 \\ -0.000293739 \\ -3.1742 * 10^{-6} \end{pmatrix}$$

Subsistema 2:

$$\begin{pmatrix} F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \end{pmatrix} = (K_{21}) * \begin{pmatrix} 0.000135574 \\ 4.4452 * 10^{-5} \\ 0.000180026 \\ -4.7024 * 10^{-5} \\ 0.000251459 \\ -0.000293739 \\ -3.1742 * 10^{-6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Las reacciones son:

$$F_8 = R_{2Y} = 15T \quad \uparrow$$

$$F_9 = R_{1X} = 5T \quad \leftarrow$$

$$F_{10} = R_{1Y} = 9T \quad \downarrow$$

Cálculo de las fuerzas en las barras:

Barra 1:

$$q_1 = 84000 * (-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0) * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.1742 * 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix} = -0.266633T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

Barra 2:

$$q_2 = 69892.2247 * (-0.5547 \quad -0.8321 \quad 0.5547 \quad 0.8321) * \begin{pmatrix} -3.1742 * 10^{-6} \\ 0 \\ 0.000251459 \\ -0.000293739 \end{pmatrix} \\ = -7.21114T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

Barra 3:

$$q_3 = 126000 * (-1 \ 0 \ 1 \ 0) * \begin{pmatrix} 0.000180026 \\ -4.7024 * 10^{-5} \\ 0.000251459 \\ -0.000293739 \end{pmatrix} = 9.00056T \text{ (TENSIÓN)}$$

Barra 4:

$$q_4 = 84000 * (-1 \ 0 \ 1 \ 0) * \begin{pmatrix} 0.000135574 \\ 4.4452 * 10^{-5} \\ 0.000180026 \\ -4.7024 * 10^{-5} \end{pmatrix} = 3.73397T \text{ (TENSIÓN)}$$

Barra 5:

$$q_5 = 84000 * (0 \ -1 \ 0 \ 1) * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.000135574 \\ 4.4452 * 10^{-5} \end{pmatrix} = 3.73397T \text{ (TENSIÓN)}$$

Barra 6:

$$q_6 = 79195.9595 * (-0.7071 \ 0.7071 \ 0.7071 \ -0.7071) * \begin{pmatrix} 0.000135574 \\ 4.4452 * 10^{-5} \\ -3.1742 * 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix} \\ = -5.28054T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

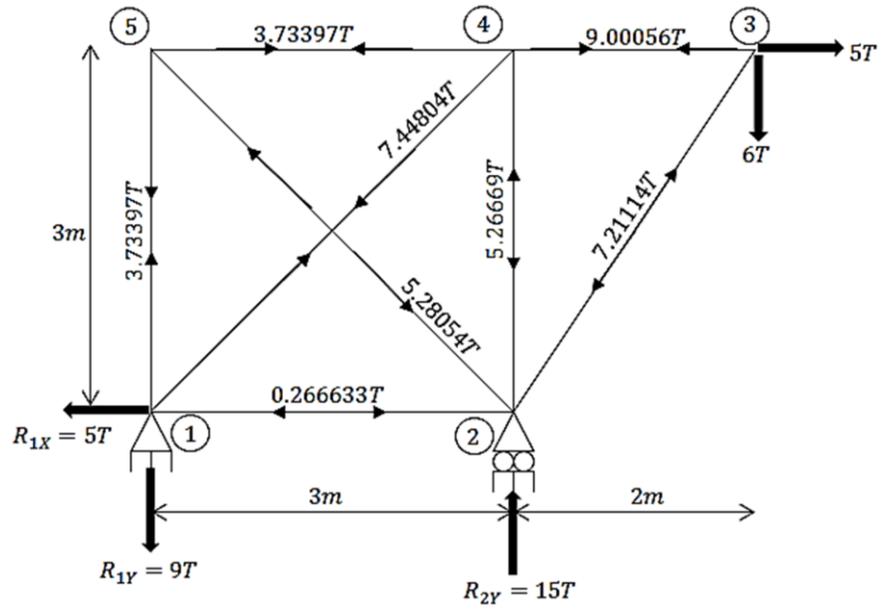
Barra 7:

$$q_7 = 79195.9595 * (-0.7071 \ -0.7071 \ 0.7071 \ 0.7071) * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.000180026 \\ -4.7024 * 10^{-5} \end{pmatrix} \\ = 7.44804T \text{ (TENSIÓN)}$$

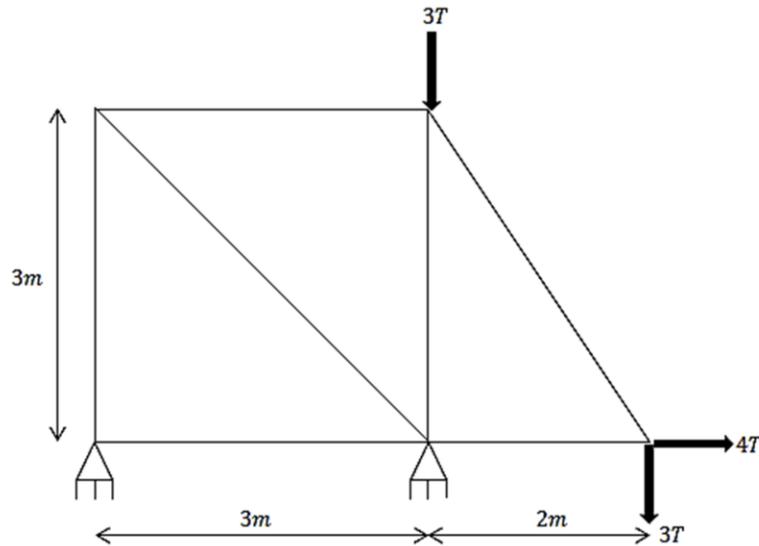
Barra 8:

$$q_8 = 112000 * (0 \ -1 \ 0 \ 1) * \begin{pmatrix} -3.1742 * 10^{-6} \\ 0 \\ 0.000180026 \\ -4.7024 * 10^{-5} \end{pmatrix} = -5.26669T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

Diagrama en el que se visualizan las reacciones en los soportes y las fuerzas en las barras:

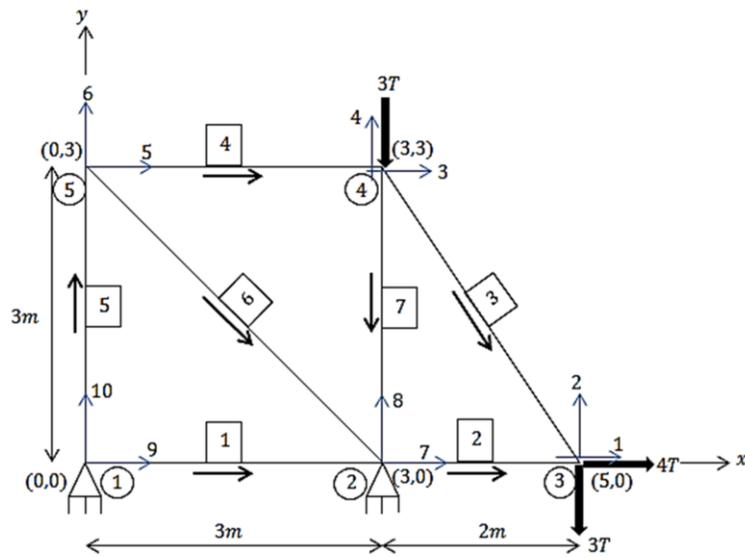


2.- Calcular las reacciones en los apoyos de la armadura y la fuerza en la barra horizontal que va de soporte a soporte mediante el análisis matricial de la rigidez. Considere $AE = \text{constante}$.



-SOLUCIÓN:

Codificación:



Cosenos directores y matriz de rigidez global por barra:

Barra 1:

$$-Longitud(L) = 3m$$

$$\lambda_x = \frac{3 - 0}{3} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{0 - 0}{3} = 0$$

$$9 \quad 10 \quad 7 \quad 8$$

$$k_1 = AE * \begin{pmatrix} 0.3333 & 0 & -0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3333 & 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Barra 2:

$$-Longitud(L) = 2m$$

$$\lambda_x = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{0 - 0}{2} = 0$$

$$7 \quad 8 \quad 1 \quad 2$$

$$k_2 = AE * \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Barra 3:

$$-Longitud(L) = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}m$$

$$\lambda_x = \frac{5 - 3}{\sqrt{13}} = 0.5547$$

$$\lambda_y = \frac{0 - 3}{\sqrt{13}} = -0.8321$$

$$k_3 = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0853 & -0.1280 & -0.0853 & 0.1280 \\ -0.1280 & 0.1920 & 0.1280 & -0.1920 \\ -0.0853 & 0.1280 & 0.0853 & -0.1280 \\ 0.1280 & -0.1920 & -0.1280 & 0.1920 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 4:

$$-Longitud(L) = 3m$$

$$\lambda_x = \frac{3-0}{3} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{3-3}{3} = 0$$

$$k_4 = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.3333 & 0 & -0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3333 & 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 5:

$$-Longitud(L) = 3m$$

$$\lambda_x = \frac{0-0}{3} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{3-0}{3} = 1$$

$$k_5 = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 9 & 10 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & 0 & -0.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3333 & 0 & 0.3333 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 6:

$$-Longitud(L) = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}m = 4.2426m$$

$$\lambda_x = \frac{3-0}{\sqrt{18}} = 0.7071$$

$$\lambda_y = \frac{0 - 3}{\sqrt{18}} = -0.7071$$

$$k_6 = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.1178 & -0.1178 & -0.1178 & 0.1178 \\ -0.1178 & 0.1178 & 0.1178 & -0.1178 \\ -0.1178 & 0.1178 & 0.1178 & -0.1178 \\ 0.1178 & -0.1178 & -0.1178 & 0.1178 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 7:

$$-Longitud(L) = 3m$$

$$\lambda_x = \frac{3 - 3}{3} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{0 - 3}{3} = -1$$

$$k_7 = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & 0 & -0.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3333 & 0 & 0.3333 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

Matriz de rigidez global de la estructura, la cual se obtiene de ensamblar las matrices anteriores:

$$K_T = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.5853 & -0.1280 & -0.0853 & 0.1280 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1280 & 0.1920 & 0.1280 & -0.1920 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0853 & 0.1280 & 0.4187 & -0.1280 & -0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1280 & -0.1920 & -0.1280 & 0.5254 & 0 & 0 & 0 & -0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3333 & 0 & 0.4512 & -0.1178 & -0.1178 & 0.1178 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1178 & 0.4512 & 0.1178 & -0.1178 & 0 & -0.3333 \\ -0.5000 & 0 & 0 & 0 & -0.1178 & 0.1178 & 0.9512 & -0.1178 & -0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3333 & 0.1178 & -0.1178 & -0.1178 & 0.4512 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.33333 & 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0.3333 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

La matriz de rigidez se subdividió de la siguiente forma:

$$K_T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

Vector de desplazamientos:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 1 \\ D_2 & 2 \\ D_3 & 3 \\ D_4 & 4 \\ D_5 & 5 \\ D_6 & 6 \\ \hline 0 & 7 \\ 0 & 8 \\ 0 & 9 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Vector de Fuerzas:

$$F = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \\ 0 & 3 \\ -3 & 4 \\ 0 & 5 \\ 0 & 6 \\ \hline F_7 & 7 \\ F_8 & 8 \\ F_9 & 9 \\ F_{10} & 10 \end{pmatrix}$$

De $F = K_T * D$ extraemos los siguientes subsistemas:

Subsistema 1:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (K_{11}) * \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 4.0002 \\ -50.2670 \\ 28.9690 \\ -18 \\ 22.9693 \\ 5.9996 \end{pmatrix}$$

Subsistema 2:

$$\begin{pmatrix} F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \end{pmatrix} = (K_{21}) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 4.0002 \\ -50.2670 \\ 28.9690 \\ -18 \\ 22.9693 \\ 5.9996 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Las reacciones son:

$$R_{2X} = 4T \quad \leftarrow$$

$$R_{2Y} = 8T \quad \uparrow$$

$$R_{1X} = 0$$

$$R_{1Y} = 2T \quad \downarrow$$

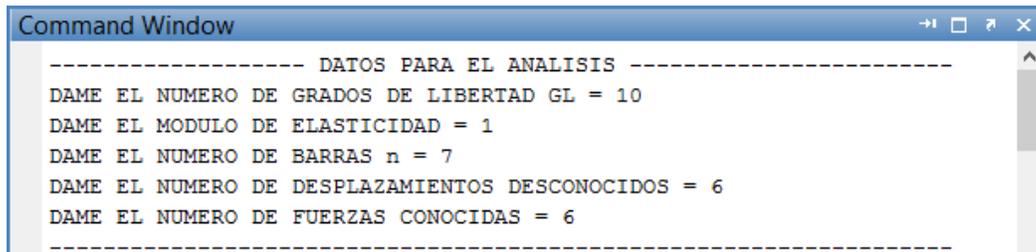
Cálculo de la fuerza en la barra 1:

$$q_1 = \frac{AE}{3} (-1 \quad -0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

A continuación se muestra la forma de usar el programa 4.2.1 tomando como ejemplo el problema anterior.

Una vez que se corra el programa:

1. Insertamos los siguientes datos de la estructura real:



```

Command Window
----- DATOS PARA EL ANALISIS -----
DAME EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD GL = 10
DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD = 1
DAME EL NUMERO DE BARRAS n = 7
DAME EL NUMERO DE DESPLAZAMIENTOS DESCONOCIDOS = 6
DAME EL NUMERO DE FUERZAS CONOCIDAS = 6
    
```

Nota: Como en el problema no nos proporcionan el valor del Módulo de la Elasticidad ni el del Área de cada barra y sólo nos dicen que son constantes en toda la estructura, le daremos el valor de uno a ambos, lo cual significa que cada

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

matriz global por barra, la matriz global de toda la estructura y la submatriz K_{11} están multiplicadas por AE ; además cuando el programa calcule los valores de los desplazamientos desconocidos y el vector total de desplazamientos, estos estarán afectados por $1/AE$. Obsérvese también que ahora el dato del Módulo de Elasticidad se inserta desde el paso 1; esto se debe a que en las armaduras todas las barras suelen ser del mismo material.

2.- Digitamos para cada barra los cosenos directores, el valor de A que nos proporcionen en el problema, su longitud y el número designado a los grados de libertad tanto del extremo cercano como alejado en la sección de codificación.

-Para la barra 1:

BARRA 1.

DAME EL VALOR DE $L_x = 1$

DAME EL VALOR DE $L_y = 0$

DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = 1

DAME LA LONGITUD DE LA BARRA = 3

NODO N-----

DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD $N_x=9$

DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD $N_y=10$

NODO F-----

DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD $F_x=7$

DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD $F_y=8$

En automático aparecerá la matriz de rigidez global de la barra 1:

MATRRIZ K_1 .

$k =$

0.3333	0	-0.3333	0
0	0	0	0
-0.3333	0	0.3333	0
0	0	0	0

- Para la barra 2:

BARRA 2.

```
DAME EL VALOR DE Lx = 1
DAME EL VALOR DE Ly = 0
DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = 1
DAME LA LONGITUD DE LA BARRA = 2
NODO N-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nx=7
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=8
NODO F-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fx=1
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=2
-----
```

En seguida aparecerá la matriz de rigidez global de la barra 2:

MATRIZ K2.

k =

```
    0.5000      0  -0.5000      0
      0         0      0         0
   -0.5000      0   0.5000      0
      0         0      0         0
-----
```

- Para la barra 3:

BARRA 3.

```
DAME EL VALOR DE Lx = 0.5547
DAME EL VALOR DE Ly = -0.8321
DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = 1
DAME LA LONGITUD DE LA BARRA = (13)^(1/2)
NODO N-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nx=3
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=4
NODO F-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fx=1
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=2
-----
```

A continuación aparecerá la matriz de rigidez global de la barra 3:

```
MATRRIZ K3.
k =

    0.0853   -0.1280   -0.0853    0.1280
   -0.1280    0.1920    0.1280   -0.1920
   -0.0853    0.1280    0.0853   -0.1280
    0.1280   -0.1920   -0.1280    0.1920
```

-Para la barra 4:

```
BARRA 4.

DAME EL VALOR DE Lx = 1
DAME EL VALOR DE Ly = 0
DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = 1
DAME LA LONGITUD DE LA BARRA = 3
NODO N-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nx=5
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=6
NODO F-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fx=3
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=4
```

En automático aparecerá la matriz de rigidez global de la barra 4:

```
MATRRIZ K4.
k =

    0.3333     0   -0.3333     0
         0     0     0         0
   -0.3333     0    0.3333     0
         0     0     0         0
```

- Para la barra 5:

```
BARRA 5.

DAME EL VALOR DE Lx = 0
DAME EL VALOR DE Ly = 1
DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = 1
DAME LA LONGITUD DE LA BARRA = 3
NODO N-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nx=9
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=10
NODO F-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fx=5
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=6
```

En seguida aparecerá la matriz de rigidez global de la barra 5:

```
MATRRIZ K5.
k =
      0      0      0      0
      0  0.3333      0 -0.3333
      0      0      0      0
      0 -0.3333      0  0.3333
```

- Para la barra 6:

```
BARRA 6.
DAME EL VALOR DE Lx = 0.7071
DAME EL VALOR DE Ly = -0.7071
DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = 1
DAME LA LONGITUD DE LA BARRA = 4.2426
NODO N-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nx=5
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=6
NODO F-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fx=7
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=8
```

A continuación aparecerá la matriz de rigidez global de la barra 6:

```
MATRRIZ K6.
k =
      0.1178  -0.1178  -0.1178   0.1178
     -0.1178   0.1178   0.1178  -0.1178
     -0.1178   0.1178   0.1178  -0.1178
      0.1178  -0.1178  -0.1178   0.1178
```

-Para la barra 7:

```
BARRA 7.
DAME EL VALOR DE Lx = 0
DAME EL VALOR DE Ly = -1
DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = 1
DAME LA LONGITUD DE LA BARRA = 3
NODO N-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nx=3
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny=4
NODO F-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fx=7
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy=8
```

En automático aparecerá la matriz de rigidez global de la barra 7:

```
MATRRIZ K7.
k =

      0      0      0      0
      0  0.3333      0 -0.3333
      0      0      0      0
      0 -0.3333      0  0.3333
```

Luego de obtener la matriz de rigidez global de cada miembro, el programa ensambla tales matrices y nos arrojará la matriz de rigidez global de toda la estructura:

```
----- MATRIZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA -----
KT =

Columns 1 through 7

      0.5853  -0.1280  -0.0853   0.1280      0      0  -0.5000
     -0.1280   0.1920   0.1280  -0.1920      0      0      0
     -0.0853   0.1280   0.4187  -0.1280  -0.3333      0      0
      0.1280  -0.1920  -0.1280   0.5254      0      0      0
           0      0  -0.3333      0   0.4512  -0.1178  -0.1178
           0      0      0      0      0  -0.1178   0.4512   0.1178
     -0.5000      0      0      0      0  -0.1178   0.1178   0.9512
           0      0      0  -0.3333   0.1178  -0.1178  -0.1178
           0      0      0      0      0      0  -0.3333
           0      0      0      0      0      0  -0.3333      0

Columns 8 through 10

           0      0      0
           0      0      0
           0      0      0
     -0.3333      0      0
      0.1178      0      0
     -0.1178      0  -0.3333
     -0.1178  -0.3333      0
      0.4512      0      0
           0   0.3333      0
           0      0   0.3333
```

Se imprime la submatriz K_{11} :

```

----- SUBMATRIZ K11 -----
k11 =
    0.5853  -0.1280  -0.0853   0.1280   0   0
   -0.1280   0.1920   0.1280  -0.1920   0   0
   -0.0853   0.1280   0.4187  -0.1280  -0.3333   0
    0.1280  -0.1920  -0.1280   0.5254   0   0
         0         0  -0.3333         0   0.4512  -0.1178
         0         0         0         0  -0.1178   0.4512
    
```

Se imprime la submatriz K_{12} :

```

----- SUBMATRIZ K12 -----
k12 =
   -0.5000   0   0   0
         0   0   0   0
         0   0   0   0
         0  -0.3333   0   0
   -0.1178  0.1178   0   0
    0.1178  -0.1178   0  -0.3333
    
```

Se imprime la submatriz K_{21} :

```

----- SUBMATRIZ K21 -----
k21 =
   -0.5000   0   0   0  -0.1178  0.1178
         0   0   0  -0.3333  0.1178  -0.1178
         0   0   0   0   0   0
         0   0   0   0   0  -0.3333
    
```

Se imprime la submatriz K_{22} :

```

----- SUB MATRIZ K22 -----
k22 =
    0.9512  -0.1178  -0.3333   0
   -0.1178   0.4512   0   0
   -0.3333   0   0.3333   0
         0         0         0   0.3333
    
```

3.- Se insertan uno por uno los elementos del Vector de Fuerzas Conocidas:

```
----- SOLUCIÓN DEL PROBLEMA -----  
-----  
----- VECTOR DE FUERZAS CONOCIDAS -----  
-----  
DAME LAS FUERZAS EXTERNAS APLICADAS EN LOS NODOS = 4  
DAME LAS FUERZAS EXTERNAS APLICADAS EN LOS NODOS = -3  
DAME LAS FUERZAS EXTERNAS APLICADAS EN LOS NODOS = 0  
DAME LAS FUERZAS EXTERNAS APLICADAS EN LOS NODOS = -3  
DAME LAS FUERZAS EXTERNAS APLICADAS EN LOS NODOS = 0  
DAME LAS FUERZAS EXTERNAS APLICADAS EN LOS NODOS = 0
```

Se imprimirá el vector anterior:

```
vf =  
  
  4  
 -3  
  0  
 -3  
  0  
  0
```

El programa resuelve el Subsistema 1 y nos proporciona los valores de los desplazamientos desconocidos:

```
-----  
----- SOLUCION DEL SUBSISTEMA 1-----  
----- DESPLAZAMIENTOS INCONGNITAS -----  
  
des =  
  
  4.0002  
 -50.2670  
  28.9690  
 -18.0000  
  22.9693  
   5.9996
```

El programa resuelve el subsistema 2 y nos proporciona los valores de las reacciones en los soportes:

```

-----
----- SOLUCION DEL SUBSISTEMA 2-----
----- REACCIONES INCOGNITAS -----
R =
-4.0000
 7.9999
 0
-1.9999
    
```

Se pueden calcular una por una las fuerzas en las barras y estos valores se reportan en automático a manera de tabla.

4.- Se insertan los valores de los cosenos directores, el área, la longitud y el vector de desplazamientos de cada barra para conocer sus respectivas fuerzas. En este caso sólo se nos pide calcular la fuerza en la barra 1 y éste no aparecerá por el momento ya que en el código hemos pedido que imprima todos los valores hasta el último en forma de tabla.

- Para la barra 1:

```

----- FUERZAS INTERNAS -----
----- EN LAS BARRAS -----
BARRA 1.

DAME EL VALOR DE Lx = 1
DAME EL VALOR DE Ly = 0
DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = 1
DAME LA LONGITUD DE LA BARRA = 3
DAME LOS DESPLAZAMIENTOS DE ESTA BARRA COMO VECTOR = [0;0;0;0]
-----
BARRA 2.
fx DAME EL VALOR DE Lx = |
    
```

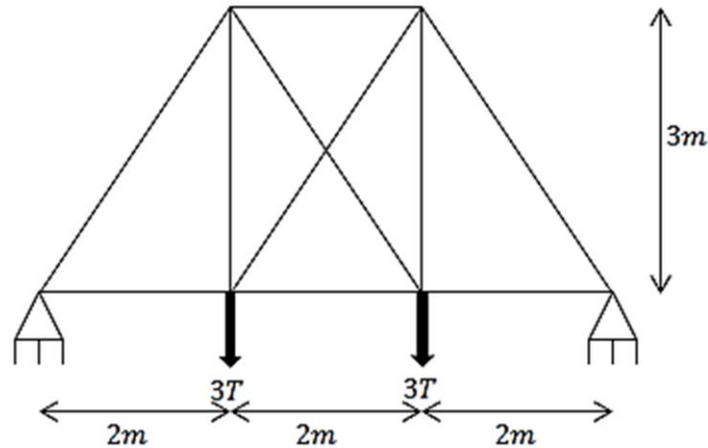
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

3.- Para la armadura mostrada calcular las reacciones en los apoyos y las fuerzas en las barras por el método de la rigidez. Analice los nodos para corroborar satisfactoriamente los resultados.

Datos:

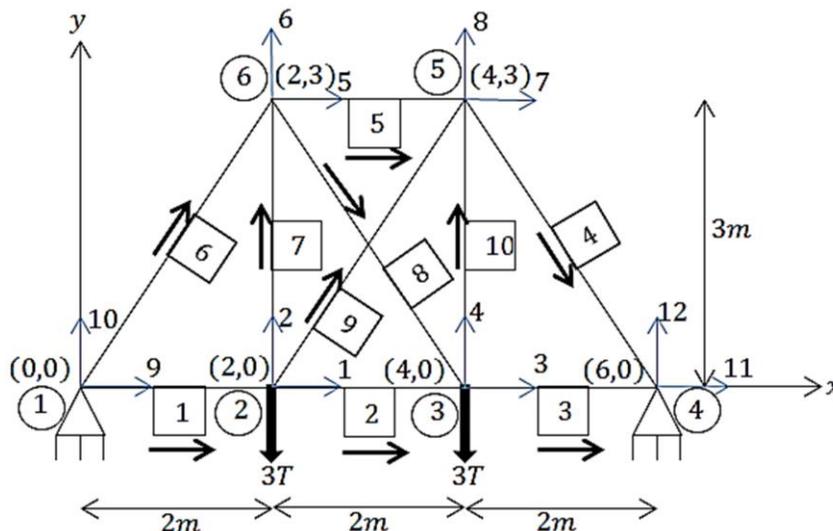
-Sección Transversal para todas las barras: rectangular de base (b)=30cm y altura (h)=40cm.

-Módulo de elasticidad: El de las maderas duras ($2.1 \cdot 10^6 \text{ T/m}^2$).



-SOLUCIÓN:

Codificación:



Cosenos directores y matriz de rigidez global por barra:

Barra 1:

$$-Longitud(L) = 2m$$

$$\lambda_x = \frac{2 - 0}{2} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{0 - 0}{2} = 0$$

$$k_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 9 & 10 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 126000 & 0 & -126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -126000 & 0 & 126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 2:

$$-Longitud(L) = 2m$$

$$\lambda_x = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{0 - 0}{2} = 0$$

$$k_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 126000 & 0 & -126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -126000 & 0 & 126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 3:

$$-Longitud(L) = 2m$$

$$\lambda_x = \frac{6 - 4}{2} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{0 - 0}{2} = 0$$

$$k_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 126000 & 0 & -126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -126000 & 0 & 126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 4:

$$-Longitud(L) = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}m$$

$$\lambda_x = \frac{6 - 4}{\sqrt{13}} = 0.5547$$

$$\lambda_y = \frac{0 - 3}{\sqrt{13}} = -0.8321$$

$$k_4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 21505.8375 & -32262.2509 & -21505.8375 & 32262.2509 \\ -32262.2509 & 48393.3764 & 32262.2509 & -48393.3764 \\ -21505.8375 & 32262.2509 & 21505.8375 & -32262.2509 \\ 32262.2509 & -48393.3764 & -32262.2509 & 48393.3764 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 5:

$$-Longitud(L) = 2m$$

$$\lambda_x = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{3 - 3}{2} = 0$$

$$k_5 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 126000 & 0 & -126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -126000 & 0 & 126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 6:

$$-Longitud(L) = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}m$$

$$\lambda_x = \frac{2 - 0}{\sqrt{13}} = 0.5547$$

$$\lambda_y = \frac{3 - 0}{\sqrt{13}} = 0.8321$$

$$k_6 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 9 & 10 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 21505.8375 & 32262.2509 & -21505.8375 & -32262.2509 \\ 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509 & -48393.3764 \\ -21505.8375 & -32262.2509 & 21505.8375 & 32262.2509 \\ -32262.2509 & -48393.3764 & 32262.2509 & 48393.3764 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 7:

$$-Longitud(L) = 3m$$

$$\lambda_x = \frac{2 - 2}{3} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{3 - 0}{3} = -1$$

$$k_7 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 84000 & 0 & -84000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -84000 & 0 & 84000 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 8:

$$-Longitud(L) = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}m$$

$$\lambda_x = \frac{4 - 2}{\sqrt{13}} = 0.5547$$

$$\lambda_y = \frac{0 - 3}{\sqrt{13}} = -0.8321$$

$$k_8 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 21505.8375 & -32262.2509 & -21505.8375 & 32262.2509 \\ -32262.2509 & 48393.3764 & 32262.2509 & -48393.3764 \\ -21505.8375 & 32262.2509 & 21505.8375 & -32262.2509 \\ 32262.2509 & -48393.3764 & -32262.2509 & 48393.3764 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 9:

$$-Longitud(L) = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}m$$

$$\lambda_x = \frac{4 - 2}{\sqrt{13}} = 0.5547$$

$$\lambda_y = \frac{3 - 0}{\sqrt{13}} = 0.8321$$

$$k_9 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 21505.8375 & 32262.2509 & -21505.8375 & -32262.2509 \\ 32262.2509 & 48393.3764 & -32262.2509 & -48393.3764 \\ -21505.8375 & -32262.2509 & 21505.8375 & 32262.2509 \\ -32262.2509 & -48393.3764 & 32262.2509 & 48393.3764 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Barra 10:

$$-Longitud(L) = 3m$$

$$\lambda_x = \frac{4 - 4}{3} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{3 - 0}{3} = -1$$

$$k_{10} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 84000 & 0 & -84000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -84000 & 0 & 84000 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Ensamblando las matrices anteriores:

La matriz de rigidez global de la estructura adquiere la siguiente forma:

$$K_T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

A continuación se proporciona por separado cada una de las subdivisiones de K_T :

Matriz K_{11} :

$$K_{11} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 273505.8375 & 32262.2509 & -126000 & 0 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 \\ 32262.2509 & 132393.3764 & 0 & 0 & 0 & -84000 & -32262.2509 & -48393.3764 \\ -126000 & 0 & 273505.8375 & -32262.2509 & -21505.8375 & 32262.2509 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -32262.2509 & 132393.3764 & 32262.2509 & -48393.3764 & 0 & -84000 \\ 0 & 0 & -21505.8375 & 32262.2509 & 169011.675 & 0 & -126000 & 0 \\ 0 & -84000 & 32262.2509 & -48393.3764 & 0 & 180786.7258 & 0 & 0 \\ -21505.8375 & -32262.2509 & 0 & 0 & -126000 & 0 & 169011.675 & 0 \\ -32262.2509 & -48393.3764 & 0 & -84000 & 0 & 0 & 0 & 180786.7528 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Matriz K_{12} :

$$K_{12} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -126000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -126000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -21505.8375 & -32262.2509 & 0 & 0 \\ -32262.2509 & -48393.3764 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -21505.8375 & 32262.2509 \\ 0 & 0 & 32262.2509 & -48393.3764 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Matriz K_{21} :

$$K_{21} = \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -126000 & 0 & 0 & 0 & -21505.8375 & -32262.2509 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -32262.2509 & -48393.3764 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -126000 & 0 & 0 & 0 & -21505.8375 & 32262.2509 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32262.2509 & -48393.3764 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Matriz K_{22} :

$$K_{22} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 147505.8375 & 32262.2509 & 0 & 0 \\ 32262.2509 & 48393.3764 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21505.8375 & -32262.2509 \\ 0 & 0 & -32262.2509 & 48393.3764 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Vector de desplazamientos:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 1 \\ D_2 & 2 \\ D_3 & 3 \\ D_4 & 4 \\ D_5 & 5 \\ D_6 & 6 \\ D_7 & 7 \\ D_8 & 8 \\ \hline 0 & 9 \\ 0 & 10 \\ 0 & 11 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Vector de Fuerzas:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ 0 & 3 \\ -3 & 4 \\ 0 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 7 \\ 0 & 8 \\ \hline F_9 & 9 \\ F_{10} & 10 \\ F_{11} & 11 \\ F_{12} & 12 \end{pmatrix}$$

De $F = K_T * D$ extraemos los siguientes subsistemas:

Subsistema 1:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (K_{11}) * \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5112 * 10^{-6} \\ -9.4309 * 10^{-5} \\ -1.5112 * 10^{-6} \\ -9.4309 * 10^{-5} \\ 1.0203 * 10^{-5} \\ -6.8794 * 10^{-5} \\ -1.0203 * 10^{-5} \\ -6.8794 * 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Subsistema 2:

$$\begin{pmatrix} F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{pmatrix} = (K_{21}) * \begin{pmatrix} 1.5112 * 10^{-6} \\ -9.4309 * 10^{-5} \\ -1.5112 * 10^{-6} \\ -9.4309 * 10^{-5} \\ 1.0203 * 10^{-5} \\ -6.8794 * 10^{-5} \\ -1.0203 * 10^{-5} \\ -6.8794 * 10^{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8096 \\ 3 \\ -1.8096 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Las reacciones son:

$$F_9 = R_{1X} = 1.8096 = 1.8096T \rightarrow$$

$$F_{10} = R_{1Y} = 3 = 3T \uparrow$$

$$F_{11} = R_{4X} = -1.8096 = 1.8096T \leftarrow$$

$$F_{12} = R_{4Y} = 3 = 3T \uparrow$$

Cálculo de las fuerzas en las barras:

Barra 1:

$$q_1 = 126000 * (-1 \ 0 \ 1 \ 0) * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5112 * 10^{-6} \\ -9.4309 * 10^{-5} \end{pmatrix} = 0.1904T \text{ (TENSION)}$$

Barra 2:

$$q_2 = 126000 * (-1 \ 0 \ 1 \ 0) * \begin{pmatrix} 1.5112 * 10^{-6} \\ -9.4309 * 10^{-5} \\ -1.5112 * 10^{-6} \\ -9.4309 * 10^{-5} \end{pmatrix} = -0.3808T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

Barra 3:

$$q_3 = 126000 * (-1 \ 0 \ 1 \ 0) * \begin{pmatrix} -1.5112 * 10^{-6} \\ -9.4309 * 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.1904T \text{ (TENSIÓN)}$$

Barra 4:

$$q_4 = 69892.2247 * (-0.5547 \ 0.8321 \ 0.5547 \ -0.8321) * \begin{pmatrix} -1.0203 * 10^{-5} \\ -6.8794 * 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -3.6053T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

Barra 5:

$$q_5 = 126000 * (-1 \ 0 \ 1 \ 0) * \begin{pmatrix} 1.0203 * 10^{-5} \\ -6.8794 * 10^{-5} \\ -1.0203 * 10^{-5} \\ -6.8794 * 10^{-5} \end{pmatrix} = -2.5712T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

Barra 6:

$$q_6 = 69892.2247 * (-0.5547 \ -0.8321 \ 0.5547 \ 0.8321) * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.0203 * 10^{-5} \\ -6.8794 * 10^{-5} \end{pmatrix} = -3.6053T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

Barra 7:

$$q_7 = 84000 * (0 \ -1 \ 0 \ 1) * \begin{pmatrix} 1.5112 * 10^{-6} \\ -9.4309 * 10^{-5} \\ 1.0203 * 10^{-5} \\ -6.8794 * 10^{-5} \end{pmatrix} = 2.1433T \text{ (TENSIÓN)}$$

Barra 8:

$$q_8 = 69892.2247 * \begin{pmatrix} -0.5547 & 0.8321 & 0.5547 & -0.8321 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1.0203 * 10^{-5} \\ -6.8794 * 10^{-5} \\ -1.5112 * 10^{-6} \\ -9.4309 * 10^{-5} \end{pmatrix} =$$

$$1.0297T \text{ (TENSIÓN)}$$

Barra 9:

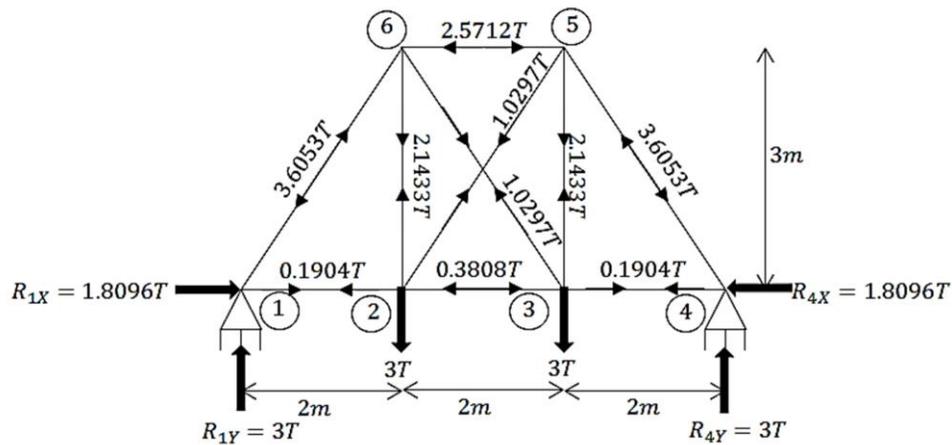
$$q_9 = 69892.2247 * \begin{pmatrix} -0.5547 & -0.8321 & 0.5547 & 0.8321 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1.5112 * 10^{-6} \\ -9.4309 * 10^{-5} \\ -1.0203 * 10^{-5} \\ -6.8794 * 10^{-5} \end{pmatrix} =$$

$$1.0297T \text{ (TENSIÓN)}$$

Barra 10:

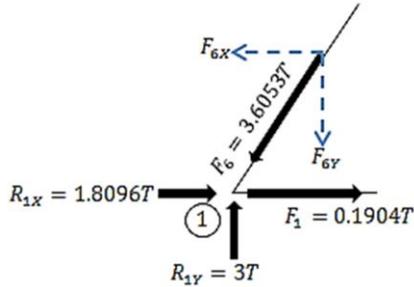
$$q_{10} = 84000 * \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1.5112 * 10^{-6} \\ -9.4309 * 10^{-5} \\ -1.0203 * 10^{-5} \\ -6.8794 * 10^{-5} \end{pmatrix} = 2.1433T \text{ (TENSIÓN)}$$

En el siguiente diagrama se visualizan las reacciones en los soportes y las fuerzas en las barras:



Análisis de los nodos para demostrar su equilibrio:

NODO 1:



$$\sum FX = 0$$

$$1.8096T + 0.1904T - F_{6X} = 0$$

$$F_{6X} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)(3.6053T) = 2T$$

$$0 = 0 \quad OK$$

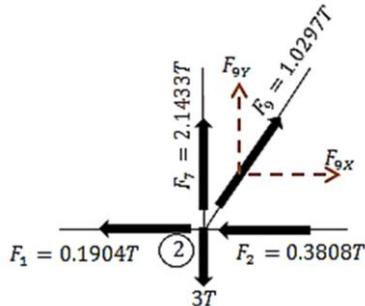
$$\sum FY = 0$$

$$3T - F_{6Y} = 0$$

$$F_{6Y} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)(3.6053T) = 3T$$

$$0 = 0 \quad OK$$

NODO 2:



$$\sum FX = 0$$

$$-0.1904T - 0.3808T + F_{9X} = 0$$

$$F_{9X} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)(1.0297T) = 0.5712T$$

$$0 = 0 \quad OK$$

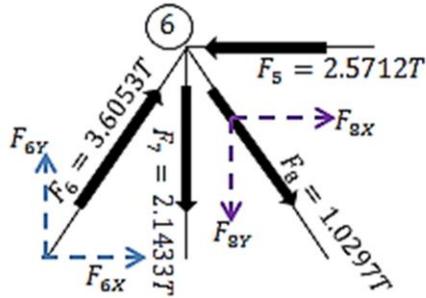
$$\sum FY = 0$$

$$-3T + 2.1433T + F_{9Y} = 0$$

$$F_{9Y} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)(1.0297T) = 0.8568T$$

$$0 = 0 \quad OK$$

NODO 6:



$$\sum FX = 0$$

$$F_{6X} + F_{8X} - 2.5712T = 0$$

$$F_{6X} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)(3.6053T) = 2T$$

$$F_{8X} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)(1.0297T) = 0.5712T$$

$$0 = 0 \quad OK$$

$$\sum FY = 0$$

$$F_{6Y} - F_{8Y} - 2.1433T = 0$$

$$F_{6Y} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)(3.6053T) = 3T$$

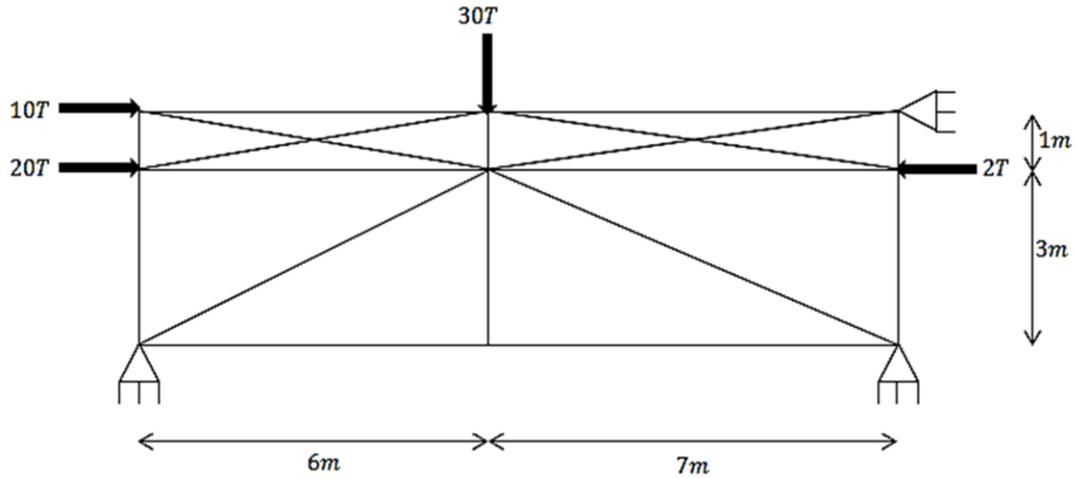
$$F_{8Y} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)(1.0297T) = 0.8568T$$

$$0 = 0 \quad OK$$

Con esto aseguramos que los nodos restantes también están equilibrio, por lo que los cálculos son correctos.

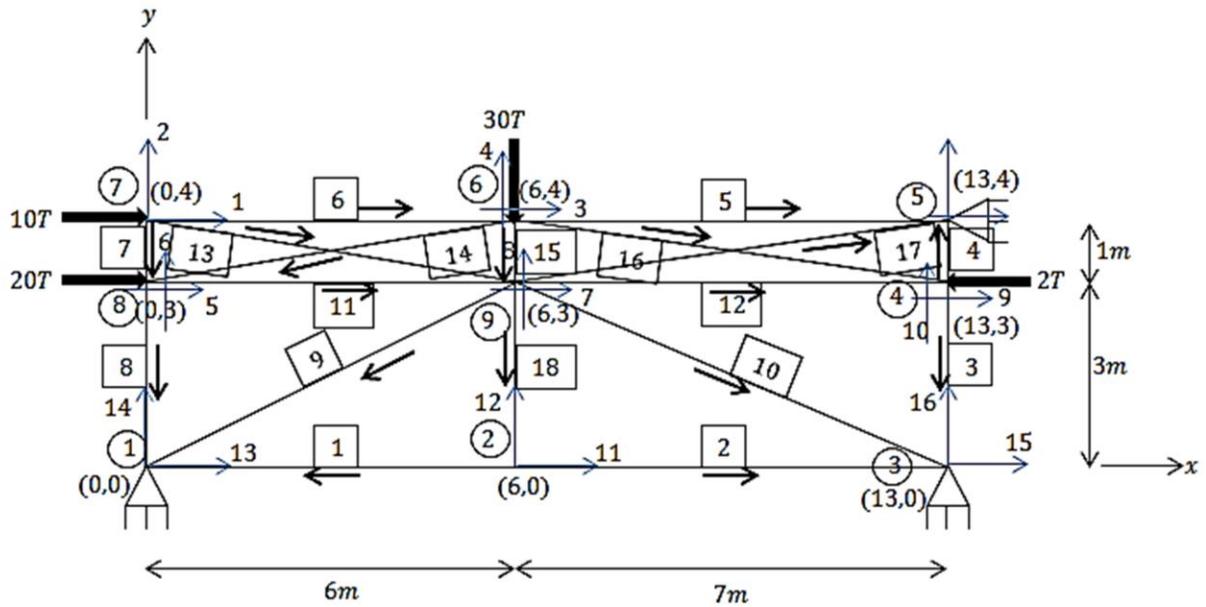
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

4.- Calcular las reacciones en los apoyos y las fuerzas en las barras 2,9 y 17 con el método de la rigidez. Considere $AE=$ constante.



SOLUCIÓN:

-Notación o Codificación:



Cosenos directores y matriz de rigidez global por barra:

Barra 1:

$$-Longitud(L) = 6m$$

$$\lambda_x = \frac{0 - 6}{6} = -1$$

$$\lambda_y = \frac{0 - 0}{6} = 0$$

$$k_1 = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 11 & 12 & 13 & 14 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.1667 & 0 & -0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1667 & 0 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 2:

$$-Longitud(L) = 7m$$

$$\lambda_x = \frac{13 - 6}{7} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{0 - 0}{7} = 0$$

$$k_2 = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 11 & 12 & 15 & 16 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.1429 & 0 & -0.1429 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1429 & 0 & 0.1429 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 15 \\ 16 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 3:

$$-Longitud(L) = 3m$$

$$\lambda_x = \frac{13 - 13}{3} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{0 - 3}{3} = -1$$

$$k_3 = AE * \begin{matrix} & 9 & 10 & 15 & 16 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & 0 & -0.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3333 & 0 & 0.3333 \end{pmatrix} & 9 \\ & 10 \\ & 15 \\ & 16 \end{matrix}$$

Barra 4:

$$-Longitud(L) = 1m$$

$$\lambda x = \frac{13 - 13}{1} = 0$$

$$\lambda y = \frac{4 - 3}{1} = 1$$

$$k_4 = AE * \begin{matrix} & 9 & 10 & 17 & 18 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 9 \\ & 10 \\ & 17 \\ & 18 \end{matrix}$$

Barra 5:

$$-Longitud(L) = 7m$$

$$\lambda x = \frac{13 - 6}{7} = 1$$

$$\lambda y = \frac{4 - 4}{7} = 0$$

$$k_5 = AE * \begin{matrix} & 3 & 4 & 17 & 18 \\ \begin{pmatrix} 0.1429 & 0 & -0.1429 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1429 & 0 & 0.1429 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 3 \\ & 4 \\ & 17 \\ & 18 \end{matrix}$$

Barra 6:

$$-Longitud(L) = 6m$$

$$\lambda x = \frac{6 - 0}{6} = 1$$

$$\lambda y = \frac{4 - 4}{6} = 0$$

$$k_6 = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.1667 & 0 & -0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1667 & 0 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 7:

$$-Longitud(L) = 1m$$

$$\lambda x = \frac{0 - 0}{1} = 0$$

$$\lambda y = \frac{3 - 4}{1} = -1$$

$$k_7 = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 8:

$$-Longitud(L) = 3m$$

$$\lambda x = \frac{0 - 0}{3} = 0$$

$$\lambda y = \frac{0 - 3}{3} = -1$$

$$k_8 = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 13 & 14 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & 0 & -0.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3333 & 0 & 0.3333 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 13 \\ 14 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 9:

$$-Longitud(L) = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}m = 6.7082m$$

$$\lambda x = \frac{0 - 6}{6.7082} = -0.8944$$

$$\lambda y = \frac{0 - 3}{6.7082} = -0.4472$$

$$k_9 = AE * \begin{matrix} & 7 & 8 & 13 & 14 \\ \begin{pmatrix} 0.1193 & 0.0596 & -0.1193 & -0.0596 \\ 0.0596 & 0.0298 & -0.0596 & -0.0298 \\ -0.1193 & -0.0596 & 0.1193 & 0.0596 \\ -0.0596 & -0.0298 & 0.0596 & 0.0298 \end{pmatrix} & 7 \\ & 8 \\ & 13 \\ & 14 \end{matrix}$$

Barra 10:

$$-Longitud(L) = \sqrt{7^2 + 3^2} = 7.6158m$$

$$\lambda x = \frac{13 - 6}{7.6158} = 0.9191$$

$$\lambda y = \frac{0 - 3}{7.6158} = -0.3939$$

$$k_{10} = AE * \begin{matrix} & 7 & 8 & 15 & 16 \\ \begin{pmatrix} 0.1109 & -0.0475 & -0.1109 & 0.0475 \\ -0.0475 & 0.0204 & 0.0475 & -0.0204 \\ -0.1109 & 0.0475 & 0.1109 & -0.0475 \\ 0.0475 & -0.0204 & -0.0475 & 0.0204 \end{pmatrix} & 7 \\ & 8 \\ & 15 \\ & 16 \end{matrix}$$

Barra 11:

$$-Longitud(L) = 6m$$

$$\lambda x = \frac{6 - 0}{6} = 1$$

$$\lambda y = \frac{3 - 3}{6} = 0$$

$$k_{11} = AE * \begin{matrix} & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \begin{pmatrix} 0.1667 & 0 & -0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1667 & 0 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 5 \\ & 6 \\ & 7 \\ & 8 \end{matrix}$$

Barra 12:

$$-Longitud(L) = 7m$$

$$\lambda_x = \frac{13 - 6}{7} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{3 - 3}{7} = 0$$

$$k_{12} = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.1429 & 0 & -0.1429 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1429 & 0 & 0.1429 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 13:

$$-Longitud(L) = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}m = 6.0828m$$

$$\lambda_x = \frac{6 - 0}{\sqrt{37}} = 0.9864$$

$$\lambda_y = \frac{3 - 4}{\sqrt{37}} = -0.1644$$

$$k_{13} = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.1600 & -0.0267 & -0.1600 & 0.0267 \\ -0.0267 & 0.0044 & 0.0267 & -0.0044 \\ -0.1600 & 0.0267 & 0.1600 & -0.0267 \\ 0.0267 & -0.0044 & -0.0267 & 0.0044 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 14:

$$-Longitud(L) = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}m = 6.0828m$$

$$\lambda_x = \frac{0 - 6}{\sqrt{37}} = -0.9864$$

$$\lambda_y = \frac{3 - 4}{\sqrt{37}} = -0.1644$$

$$k_{14} = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.1600 & 0.0267 & -0.1600 & -0.0267 \\ 0.0267 & 0.0044 & -0.0267 & -0.0044 \\ -0.1600 & -0.0267 & 0.1600 & 0.0267 \\ -0.0267 & -0.0044 & 0.0267 & 0.0044 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 15:

$$-Longitud(L) = 1m$$

$$\lambda_x = \frac{6-6}{1} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{3-4}{1} = -1$$

$$k_{15} = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 16:

$$-Longitud(L) = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}m = 7.0711m$$

$$\lambda_x = \frac{13-6}{\sqrt{50}} = 0.9899$$

$$\lambda_y = \frac{3-4}{\sqrt{50}} = -0.1414$$

$$k_{16} = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.1386 & -0.0198 & -0.1386 & 0.0198 \\ -0.0198 & 0.0028 & 0.0198 & -0.0028 \\ -0.1386 & 0.0198 & 0.1386 & -0.0198 \\ 0.0198 & -0.0028 & -0.0198 & 0.0028 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 17:

$$-Longitud(L) = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}m = 7.0711m$$

$$\lambda_x = \frac{13-6}{\sqrt{50}} = 0.9899$$

$$\lambda_y = \frac{4 - 3}{\sqrt{50}} = 0.1414$$

$$k_{17} = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 17 & 18 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.1386 & 0.0198 & -0.1386 & -0.0198 \\ 0.0198 & 0.0028 & -0.0198 & -0.0028 \\ -0.1386 & -0.0198 & 0.1386 & 0.0198 \\ -0.0198 & -0.0028 & 0.0198 & 0.0028 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 17 \\ 18 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 18:

$$-Longitud(L) = 3m$$

$$\lambda_x = \frac{6 - 6}{3} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{0 - 3}{3} = -1$$

$$k_{18} = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & 0 & -0.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3333 & 0 & 0.3333 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \end{matrix}$$

Ensamblando las matrices anteriores:

La matriz de rigidez global de la estructura adquiere la siguiente forma:

$$K_T = \left(\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array} \right)$$

A continuación se proporciona por separado cada una de las subdivisiones de K_T :

Matriz K_{11} :

$$K_{11} = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.3266 & -0.0267 & -0.1667 & 0 & 0 & 0 & -0.16 & 0.0267 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0267 & 1.0044 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.0267 & -0.0044 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1667 & 0 & 0.6081 & 0.0069 & -0.16 & -0.0267 & 0 & 0 & -0.1386 & 0.0198 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0069 & 1.0073 & -0.0267 & -0.0044 & 0 & -1 & 0.0198 & -0.0028 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.16 & -0.0267 & 0.3266 & 0.0267 & -0.1667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -0.0267 & -0.0044 & 0.0267 & 1.3378 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.16 & 0.0267 & 0 & 0 & -0.1667 & 0 & 0.8382 & 0.0052 & -0.1429 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0267 & -0.0044 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0.0052 & 1.3908 & 0 & 0 & 0 & -0.3333 \\ 0 & 0 & -0.1386 & 0.0198 & 0 & 0 & -0.1429 & 0 & 0.2814 & -0.0198 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0198 & -0.0028 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0198 & 1.3362 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3095 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0.3333 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \end{matrix}$$

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

Matriz K_{12} :

$$K_{12} = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1429 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1192 & -0.0596 & -0.1109 & 0.0475 & -0.1386 & -0.0198 \\ -0.0596 & -0.0298 & 0.0475 & -0.0204 & -0.0198 & -0.0028 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3333 & 0 & -1 \\ -0.1667 & 0 & -0.1429 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \end{matrix}$$

Matriz K_{21} :

$$K_{21} = AE * \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1192 & -0.0596 & 0 & 0 & -0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3333 & -0.0596 & -0.0298 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1109 & 0.0475 & 0 & 0 & -0.1429 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0475 & -0.0204 & 0 & -0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1429 & 0 & 0 & 0 & -0.1386 & -0.0198 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0198 & -0.0028 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \end{matrix} \end{matrix}$$

Matriz K_{22} :

$$K_{22} = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2859 & 0.0596 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0596 & 0.3631 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2538 & -0.0475 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0475 & 0.3537 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2814 & 0.0198 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0198 & 1.0028 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \end{matrix} \end{matrix}$$

Vector de Desplazamientos:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \end{matrix}$$

Vector de Fuerzas:

$$F = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \\ -30 & 4 \\ 20 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 7 \\ 0 & 8 \\ -2 & 9 \\ 0 & 10 \\ 0 & 11 \\ 0 & 12 \\ \hline F_{13} & 13 \\ F_{14} & 14 \\ F_{15} & 15 \\ F_{16} & 16 \\ F_{17} & 17 \\ F_{18} & 18 \end{pmatrix}$$

De $F=K_T \cdot D$ extraemos los siguientes subsistemas:

Subsistema 1:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ -30 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (K_{11}) * \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 170.1790 \\ -7.3544 \\ 111.0525 \\ -569.7954 \\ 110.4854 \\ -7.3787 \\ 79.9029 \\ -543.5496 \\ 128.1517 \\ -0.9528 \\ 0 \\ -543.5496 \end{pmatrix}$$

Subsistema 2:

$$\begin{pmatrix} F_{13} \\ F_{14} \\ F_{15} \\ F_{16} \\ F_{17} \\ F_{18} \end{pmatrix} = (K_{21}) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 170.1790 \\ -7.3544 \\ 111.0525 \\ -569.7954 \\ 110.4854 \\ -7.3787 \\ 79.9029 \\ -543.5496 \\ 128.1517 \\ -0.9528 \\ 0 \\ -543.5496 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22.8821 \\ 13.9006 \\ -34.7052 \\ 15.1912 \\ -16.1769 \\ 0.9082 \end{pmatrix}$$

Las reacciones son:

$$F_{13} = R_{1X} = 22.8821T \quad \rightarrow$$

$$F_{14} = R_{1Y} = 13.9006T \quad \uparrow$$

$$F_{15} = R_{3X} = 34.7052T \quad \leftarrow$$

$$F_{16} = R_{3Y} = 15.1912T \quad \uparrow$$

$$F_{17} = R_{5X} = 16.1769T \quad \leftarrow$$

$$F_{18} = R_{5Y} = 0.9082T \quad \uparrow$$

Comprobación de las fuerzas externas:

$$\sum FY = 0$$

$$-30 + 13.9006 + 15.1912 + 0.9082 = 0 \quad OK$$

$$\sum FX = 0$$

$$10 + 20 - 2 + 22.8821 - 34.7052 - 16.1769 = 0 \quad OK$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$20(3) + 10(4) + 30(6) - 2(3) - 15.1912(13) - 16.1769(4) - 0.9082(13) \cong 0 \quad OK$$

Cálculo de las fuerzas en las barras 2,9 y 17:

Barra 2:

$$q_2 = \left(\frac{AE}{7}\right) * (-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ -543.5496 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Barra 9:

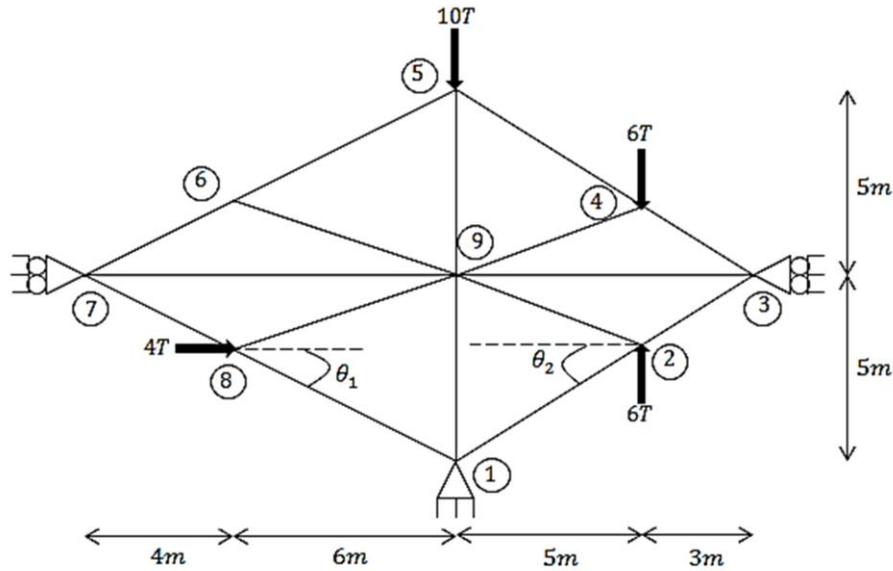
$$q_9 = \left(\frac{AE}{\sqrt{45}}\right) * (0.8944 \quad 0.4472 \quad -0.8944 \quad -0.4472) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 79.9029 \\ -543.5496 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = -25.5821T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

Barra 17:

$$q_{17} = \left(\frac{AE}{\sqrt{50}}\right) * (-0.9899 \quad -0.1414 \quad 0.9899 \quad 0.1414) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 79.9029 \\ -543.5496 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = -0.316496T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

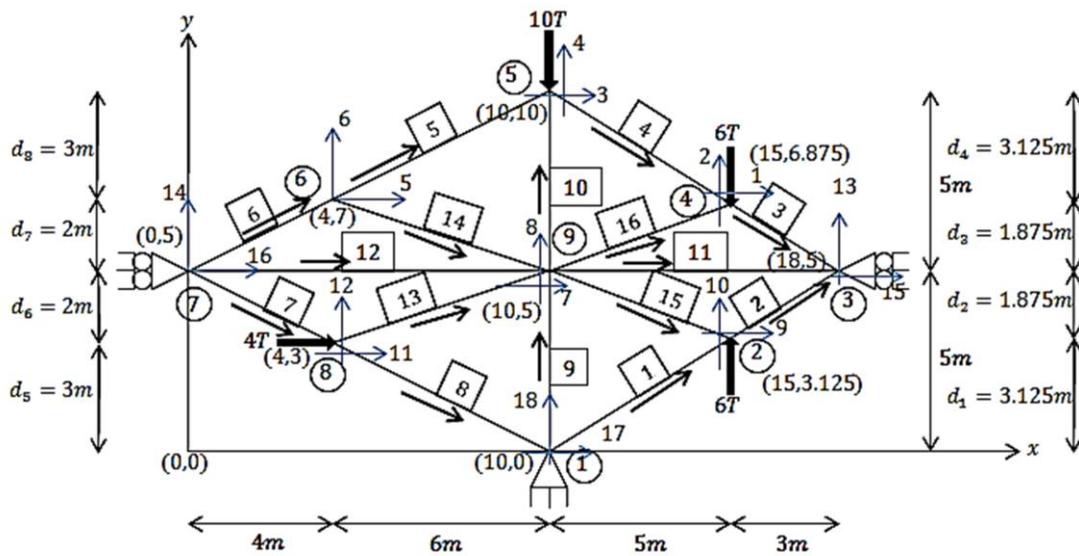
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

5.- Use el análisis matricial de la rigidez para determinar el valor de las reacciones en los soportes. Demuestre el equilibrio del nodo 1 de la armadura. Use E (Acero) = $2.1 \cdot 10^7 \text{ T/m}^2$ y $A = 0.09 \text{ m}^2$.



SOLUCIÓN:

-Codificación:



Las distancias fueron obtenidas a partir de los siguientes cálculos:

$$\frac{8}{5} = \frac{5}{d_1} \rightarrow d_1 = \frac{5 * 5}{8} = 3.125m$$

$$d_2 = 5m - d_1 = 5m - 3.125m = 1.875m$$

$$d_3 = d_2 = 1.875m$$

$$d_4 = d_1 = 3.125m$$

$$\frac{10}{5} = \frac{6}{d_5} \rightarrow d_5 = 3m$$

$$d_6 = 5m - d_5 = 5m - 3m = 2m$$

$$d_7 = d_6 = 2m$$

$$d_8 = d_5 = 3m$$

Cosenos directores por barra:

Barra 1:

$$-Longitud(L) = \sqrt{5^2 + 3.125^2} = 5.896238208m$$

$$\lambda_x = \frac{15 - 10}{5.896238208} = 0.847998304$$

$$\lambda_y = \frac{3.125 - 0}{5.896238208} = 0.52999894$$

Barra 2:

$$-Longitud(L) = \sqrt{3^2 + 1.875^2} = 3.537742925m$$

$$\lambda_x = \frac{18 - 15}{3.537742925} = 0.847998304$$

$$\lambda_y = \frac{5 - 3.125}{3.537742925} = 0.52999894$$

Barra 3:

$$-Longitud(L) = \sqrt{3^2 + 1.875^2} = 3.537742925m$$

$$\lambda_x = \frac{18 - 15}{3.537742925} = 0.847998304$$

$$\lambda y = \frac{5 - 6.875}{3.537742925} = -0.52999894$$

Barra 4:

$$-Longitud(L) = \sqrt{5^2 + 3.125^2} = 5.896238208m$$

$$\lambda x = \frac{15 - 10}{5.896238208} = 0.847998304$$

$$\lambda y = \frac{6.875 - 10}{5.896238208} = -0.52999894$$

Barra 5:

$$-Longitud(L) = \sqrt{6^2 + 3^2} = 6.708203932m$$

$$\lambda x = \frac{10 - 4}{6.708203932} = 0.894427191$$

$$\lambda y = \frac{10 - 7}{6.708203932} = 0.447213596$$

Barra 6:

$$-Longitud(L) = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4.472135955m$$

$$\lambda x = \frac{4 - 0}{4.472135955} = 0.894427191$$

$$\lambda y = \frac{7 - 5}{4.472135955} = 0.447213596$$

Barra 7:

$$-Longitud(L) = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4.472135955m$$

$$\lambda x = \frac{4 - 0}{4.472135955} = 0.894427191$$

$$\lambda y = \frac{3 - 5}{4.472135955} = -0.447213596$$

Barra 8:

$$-Longitud(L) = \sqrt{6^2 + 3^2} = 6.708203932m$$

$$\lambda_x = \frac{10 - 4}{6.708203932} = 0.894427191$$

$$\lambda_y = \frac{0 - 3}{6.708203932} = -0.447213596$$

Barra 9:

$$-Longitud(L) = 5m$$

$$\lambda_x = \frac{10 - 10}{5} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{5 - 0}{5} = 1$$

Barra 10:

$$-Longitud(L) = 5m$$

$$\lambda_x = \frac{10 - 10}{5} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{10 - 5}{5} = 1$$

Barra 11:

$$-Longitud(L) = 8m$$

$$\lambda_x = \frac{18 - 10}{8} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{5 - 5}{8} = 0$$

Barra 12:

$$-Longitud(L) = 10m$$

$$\lambda_x = \frac{10 - 0}{10} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{5 - 5}{10} = 0$$

Barra 13:

$$-Longitud(L) = \sqrt{6^2 + 2^2} = 6.32455532m$$

$$\lambda_x = \frac{10 - 4}{6.32455532} = 0.948683298$$

$$\lambda_y = \frac{5 - 3}{6.32455532} = 0.316227766$$

Barra 14:

$$-Longitud(L) = \sqrt{6^2 + 2^2} = 6.32455532m$$

$$\lambda_x = \frac{10 - 4}{6.32455532} = 0.948683298$$

$$\lambda_y = \frac{5 - 7}{6.32455532} = -0.316227766$$

Barra 15:

$$-Longitud(L) = \sqrt{5^2 + 1.875^2} = 5.340002341m$$

$$\lambda_x = \frac{15 - 10}{5.340002341} = 0.936329178$$

$$\lambda_y = \frac{3.125 - 5}{5.340002341} = -0.351123442$$

Barra 16:

$$-Longitud(L) = \sqrt{5^2 + 1.875^2} = 5.340002341m$$

$$\lambda_x = \frac{15 - 10}{5.340002341} = 0.936329178$$

$$\lambda_y = \frac{6.875 - 5}{5.340002341} = 0.351123442$$

Matriz de rigidez global por barra:

Barra 1:

$$k_1 = 10^5 * \begin{pmatrix} 2.3050 & 1.4406 & -2.3050 & -1.4406 \\ 1.4406 & 0.9004 & -1.4406 & -0.9004 \\ -2.3050 & -1.4406 & 2.3050 & 1.4406 \\ -1.4406 & -0.9004 & 1.4406 & 0.9004 \end{pmatrix} \begin{matrix} 17 \\ 18 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Barra 2:

$$k_2 = 10^5 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 9 & 10 & 15 & 13 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3.8417 & 2.4011 & -3.8417 & -2.4011 \\ 2.4011 & 1.5007 & -2.4011 & -1.5007 \\ -3.8417 & -2.4011 & 3.8417 & 2.4011 \\ -2.4011 & -1.5007 & 2.4011 & 1.5007 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 15 \\ 13 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 3:

$$k_3 = 10^5 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 15 & 13 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3.8417 & -2.4011 & -3.8417 & 2.4011 \\ -2.4011 & 1.5007 & 2.4011 & -1.5007 \\ -3.8417 & 2.4011 & 3.8417 & -2.4011 \\ 2.4011 & -1.5007 & -2.4011 & 1.5007 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 15 \\ 13 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 4:

$$k_4 = 10^5 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2.3050 & -1.4406 & -2.3050 & 1.4406 \\ -1.4406 & 0.9004 & 1.4406 & -0.9004 \\ -2.3050 & 1.4406 & 2.3050 & -1.4406 \\ 1.4406 & -0.9004 & -1.4406 & 0.9004 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 5:

$$k_5 = 10^5 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2.2540 & 1.1270 & -2.2540 & -1.1270 \\ 1.1270 & 0.5635 & -1.1270 & -0.5635 \\ -2.2540 & -1.1270 & 2.2540 & 1.1270 \\ -1.1270 & -0.5635 & 1.1270 & 0.5635 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 6:

$$k_6 = 10^5 * \begin{matrix} & \begin{matrix} 16 & 14 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3.3809 & 1.6905 & -3.3809 & -1.6905 \\ 1.6905 & 0.8452 & -1.6905 & -0.8452 \\ -3.3809 & -1.6905 & 3.3809 & 1.6905 \\ -1.6905 & -0.8452 & 1.6905 & 0.8452 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 16 \\ 14 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 7:

$$k_7 = 10^5 * \begin{pmatrix} 3.3809 & -1.6905 & -3.3809 & 1.6905 \\ -1.6905 & 0.8452 & 1.6905 & -0.8452 \\ -3.3809 & 1.6905 & 3.3809 & -1.6905 \\ 1.6905 & -0.8452 & -1.6905 & 0.8452 \end{pmatrix} \begin{matrix} 16 \\ 14 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Barra 8:

$$k_8 = 10^5 * \begin{pmatrix} 2.2540 & -1.1270 & -2.2540 & 1.1270 \\ -1.1270 & 0.5635 & 1.1270 & -0.5635 \\ -2.2540 & 1.1270 & 2.2540 & -1.1270 \\ 1.1270 & -0.5635 & -1.1270 & 0.5635 \end{pmatrix} \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 17 \\ 18 \end{matrix}$$

Barra 9:

$$k_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 378000 & 0 & -378000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -378000 & 0 & 378000 \end{pmatrix} \begin{matrix} 17 \\ 18 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Barra 10:

$$k_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 378000 & 0 & -378000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -378000 & 0 & 378000 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Barra 11:

$$k_{11} = \begin{pmatrix} 236250 & 0 & -236250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -236250 & 0 & 236250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 15 \\ 13 \end{matrix}$$

Barra 12:

$$k_{12} = \begin{matrix} & 16 & 14 & 7 & 8 \\ \begin{pmatrix} 189000 & 0 & -189000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -189000 & 0 & 189000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 16 \\ 14 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 13:

$$k_{13} = 10^5 * \begin{matrix} & 11 & 12 & 7 & 8 \\ \begin{pmatrix} 2.6895 & 0.8965 & -2.6895 & -0.8965 \\ 0.8965 & 0.2988 & -0.8965 & -0.2988 \\ -2.6895 & -0.8965 & 2.6895 & 0.8965 \\ -0.8965 & -0.2988 & 0.8965 & 0.2988 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 14:

$$k_{14} = 10^5 * \begin{matrix} & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \begin{pmatrix} 2.6895 & -0.8965 & -2.6895 & 0.8965 \\ -0.8965 & 0.2988 & 0.8965 & -0.2988 \\ -2.6895 & 0.8965 & 2.6895 & -0.8965 \\ 0.8965 & -0.2988 & -0.8965 & 0.2988 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 15:

$$k_{15} = 10^5 * \begin{matrix} & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \begin{pmatrix} 3.1030 & -1.1636 & -3.1030 & 1.1636 \\ -1.1636 & 0.4364 & 1.1636 & -0.4364 \\ -3.1030 & 1.1636 & 3.1030 & -1.1636 \\ 1.1636 & -0.4364 & -1.1636 & 0.4364 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 16:

$$k_{16} = 10^5 * \begin{matrix} & 7 & 8 & 1 & 2 \\ \begin{pmatrix} 3.1030 & 1.1636 & -3.1030 & -1.1636 \\ 1.1636 & 0.4364 & -1.1636 & -0.4364 \\ -3.1030 & -1.1636 & 3.1030 & 1.1636 \\ -1.1636 & -0.4364 & 1.1636 & 0.4364 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

Vector de Desplazamientos:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 1 \\ D_2 & 2 \\ D_3 & 3 \\ D_4 & 4 \\ D_5 & 5 \\ D_6 & 6 \\ D_7 & 7 \\ D_8 & 8 \\ D_9 & 9 \\ D_{10} & 10 \\ D_{11} & 11 \\ D_{12} & 12 \\ D_{13} & 13 \\ D_{14} & 14 \\ \hline 0 & 15 \\ 0 & 16 \\ 0 & 17 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Vector de Fuerzas:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 2 \\ 0 & 3 \\ -10 & 4 \\ 0 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 7 \\ 0 & 8 \\ 0 & 9 \\ 6 & 10 \\ 4 & 11 \\ 0 & 12 \\ 0 & 13 \\ 0 & 14 \\ \hline R_{3X} & 15 \\ R_{7X} & 16 \\ R_{1X} & 17 \\ R_{1Y} & 18 \end{pmatrix}$$

Ensamblando las matrices anteriores:

La matriz de rigidez global de la estructura adquiere la siguiente forma:

$$K_T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

A continuación se proporciona por separado cada una de las subdivisiones de K_T :

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

Matriz K_{11} :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	--

$$K_{11} = 10^6 \cdot \begin{pmatrix} 0.9250 & -0.2678 & -0.2305 & 0.1441 & 0 & 0 & -0.3103 & -0.1164 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2401 & 0 & 1 \\ -0.2678 & 0.2837 & 0.1441 & -0.09 & 0 & 0 & -0.1164 & -0.0436 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1501 & 0 & 2 \\ -0.2305 & 0.1441 & 0.4559 & -0.0314 & -0.2254 & -0.1127 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0.1441 & -0.09 & -0.0314 & 0.5244 & -0.1127 & -0.0563 & 0 & -0.378 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -0.2254 & -0.1127 & 0.8324 & 0.1921 & -0.269 & 0.0897 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1690 & 5 \\ 0 & 0 & -0.1127 & -0.0563 & 0.1921 & 0.1708 & 0.0897 & -0.0299 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0845 & 6 \\ -0.3103 & -0.1164 & 0 & 0 & -0.269 & 0.0897 & 1.5837 & 0 & -0.3103 & 0.1164 & -0.269 & -0.0897 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ -0.1164 & -0.0436 & 0 & -0.378 & 0.0897 & -0.0299 & 0 & 0.9030 & 0.1164 & -0.0436 & -0.0897 & -0.0299 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3103 & 0.1164 & 0.9250 & 0.2678 & 0 & 0 & -0.2401 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1164 & -0.0436 & 0.2678 & 0.2837 & 0 & 0 & -0.1501 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.269 & -0.0897 & 0 & 0 & 0.8324 & -0.1921 & 0 & 0.1690 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0897 & -0.0299 & 0 & 0 & -0.1921 & 0.1708 & 0 & -0.0845 & 12 \\ 0.2401 & -0.1501 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2401 & -0.1501 & 0 & 0 & 0.3001 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.169 & -0.0845 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1690 & -0.0845 & 0 & 0.1690 & 14 \end{pmatrix}$$

Matriz K_{12} :

	15	16	17	18	
--	----	----	----	----	--

$$K_{12} = 10^6 \cdot \begin{pmatrix} -0.3842 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.2401 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -0.3381 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -0.1690 & 0 & 0 & 6 \\ -0.2362 & -0.1890 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -0.378 & 8 \\ -0.3842 & 0 & -0.2305 & -0.1441 & 9 \\ -0.2401 & 0 & -0.1441 & -0.09 & 10 \\ 0 & -0.3381 & -0.2254 & 0.1127 & 11 \\ 0 & 0.1690 & 0.1127 & -0.0563 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Matriz K_{21} :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	--

$$K_{21} = 10^6 \cdot \begin{pmatrix} -0.3842 & 0.2401 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2362 & 0 & -0.3842 & -0.2401 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3381 & -0.169 & -0.189 & 0 & 0 & 0 & -0.3381 & 0.1690 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2305 & -0.1441 & -0.2254 & 0.1127 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.378 & -0.1441 & -0.09 & 0.1127 & -0.0563 & 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Matriz K_{22} :

	15	16	17	18	
--	----	----	----	----	--

$$K_{22} = 10^6 \cdot \begin{pmatrix} 1.0046 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0.8652 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0.4559 & 0.0314 & 17 \\ 0 & 0 & 0.0314 & 0.5244 & 18 \end{pmatrix}$$

De $F=K_T \cdot D$ extraemos los siguientes subsistemas:

Subsistema 1:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (K_{11}) * \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \\ D_{13} \\ D_{14} \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \\ D_{13} \\ D_{14} \end{pmatrix} = 10^{-4} * \begin{pmatrix} -0.1791 \\ -0.8676 \\ 0.0855 \\ -0.4763 \\ -0.1404 \\ 0.0286 \\ -0.2257 \\ -0.2276 \\ -0.2173 \\ 0.3107 \\ -0.0896 \\ -0.3683 \\ -0.3089 \\ -0.2206 \end{pmatrix}$$

Subsistema 2:

$$\begin{pmatrix} R_{3X} \\ R_{7Y} \\ R_{1X} \\ R_{1Y} \end{pmatrix} = (K_{21}) * 10^{-4} * \begin{pmatrix} -0.1791 \\ -0.8676 \\ 0.0855 \\ -0.4763 \\ -0.1404 \\ 0.0286 \\ -0.2257 \\ -0.2276 \\ -0.2173 \\ 0.3107 \\ -0.0896 \\ -0.3683 \\ -0.3089 \\ -0.2206 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.7302 \\ 5.3302 \\ -1.6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Las reacciones son:

$$R_{3X} = 7.7302T \leftarrow$$

$$R_{7X} = 5.3302T \rightarrow$$

$$R_{1X} = 1.60T \leftarrow$$

$$R_{1Y} = 10T \uparrow$$

Demostramos el equilibrio de la estructura haciendo uso de fuerzas externas:

$$\sum FY = 0$$

$$10 - 10 = 0 \quad OK$$

$$\sum FX = 0$$

$$4 - 7.7302 + 5.3302 - 1.6 = 0 \quad OK$$

$$\sum M_7 = 0$$

$$-4(2) + 10(10) + 6(15) - 6(15) - 10(10) + 1.60(5) = 0 \quad OK$$

Cálculo de las fuerzas en las barras necesarias para analizar el nodo 1:

Barra 1:

$$q_1 = \left(\frac{(0.09)(2.1 * 10^7)}{5.896238208} \right) (-0.847998304 \quad -0.52999894 \quad 0.847998304 \quad 0.52999894)(10^{-4}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.2173 \\ 0.3107 \end{pmatrix}$$

$$= -0.628244T(\text{COMPRESIÓN})$$

Barra 8:

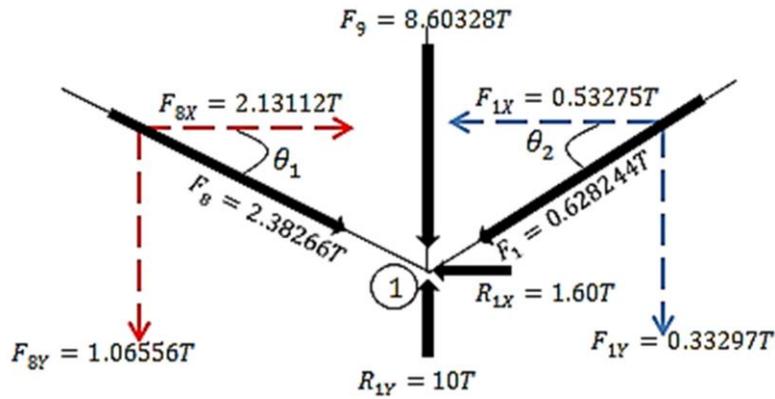
$$q_8 = \left(\frac{(0.09)(2.1 * 10^7)}{6.708203932} \right) (-0.894427191 \quad 0.447213596 \quad 0.894427191 \quad -0.447213596)(10^{-4}) \begin{pmatrix} -0.0896 \\ -0.3683 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -2.38266T(\text{COMPRESIÓN})$$

Barra 9:

$$q_9 = \left(\frac{(0.09)(2.1 * 10^7)}{5} \right) (0 \quad -1 \quad 0 \quad 1)(10^{-4}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.2257 \\ -0.2276 \end{pmatrix} = -8.60328T(\text{COMPRESIÓN})$$

Análisis del nodo 1 para demostrar su equilibrio:



Cálculo de las componentes rectangulares:

$$F_{8X} = (\cos \theta_1)(2.38266T) = \left(\frac{6}{6.708203932}\right)(2.38266T) = 2.13112T$$

$$F_{8Y} = (\sin \theta_1)(2.38266T) = \left(\frac{3}{6.708203932}\right)(2.38266T) = 1.06556T$$

$$F_{1X} = (\cos \theta_2)(0.628244T) = \left(\frac{5}{5.896238208}\right)(0.628244T) = 0.53275T$$

$$F_{1Y} = (\sin \theta_2)(0.628244T) = \left(\frac{3.125}{5.896238208}\right)(0.628244T) = 0.33297T$$

$$\sum FX = 0$$

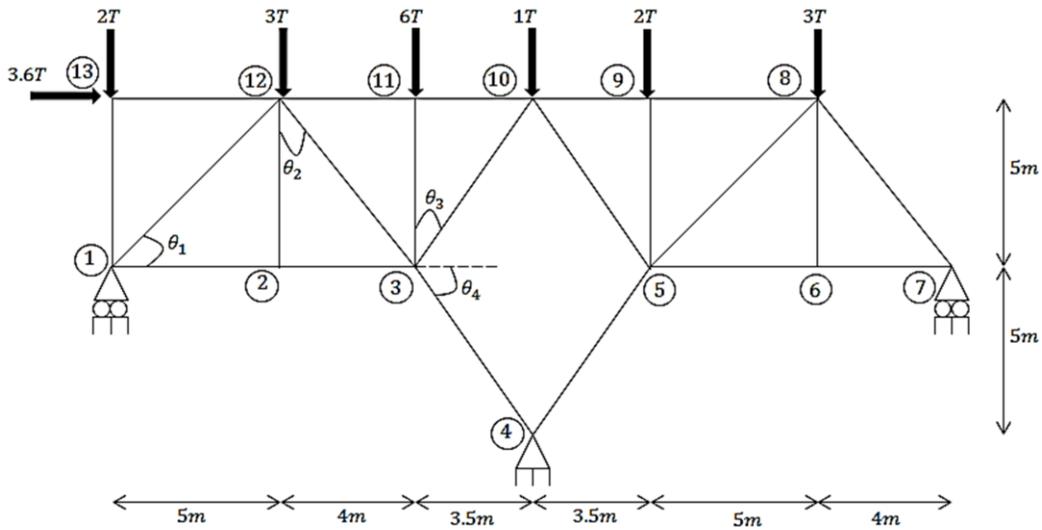
$$2.13112 - 1.6 - 0.53275 \cong 0 \quad OK$$

$$\sum FY = 0$$

$$-1.06556 + 10 - 8.60328 - 0.33297 \approx 0 \quad OK$$

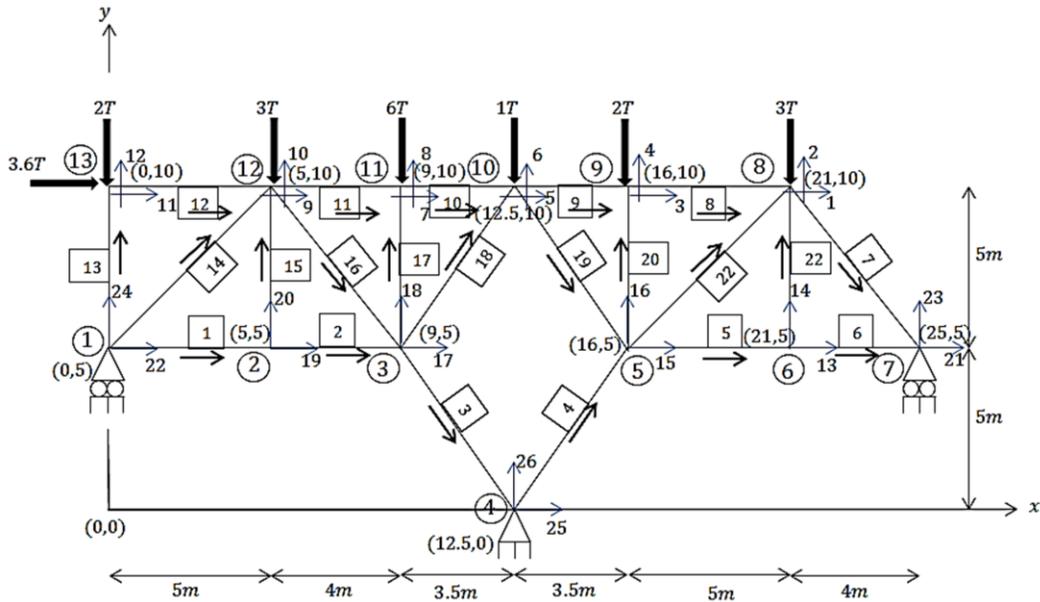
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

6.- Calcular las reacciones en los apoyos y las fuerzas en las barras de la siguiente armadura mediante el análisis matricial de la rigidez. Demuestre el equilibrio en los nodos que sean suficientes para garantizar que los cálculos son correctos. Considere $AE=$ constante.



SOLUCIÓN:

Codificación:



Cosenos directores por barra:

Barra 1:

$$-Longitud(L) = 5m$$

$$\lambda_x = \frac{5 - 0}{5} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{5 - 5}{5} = 0$$

Barra 2:

$$-Longitud(L) = 4m$$

$$\lambda_x = \frac{9 - 5}{4} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{5 - 5}{4} = 0$$

Barra 3:

$$-Longitud(L) = \sqrt{5^2 + 3.5^2} = 6.10328m$$

$$\lambda_x = \frac{12.5 - 9}{6.10328} = 0.57346$$

$$\lambda_y = \frac{0 - 5}{6.10328} = -0.81923$$

Barra 4:

$$-Longitud(L) = 6.10328m$$

$$\lambda_x = \frac{16 - 12.5}{6.10328} = 0.57346$$

$$\lambda_y = \frac{5 - 0}{6.10328} = 0.81923$$

Barra 5:

$$-Longitud(L) = 5m$$

$$\lambda_x = \frac{21 - 16}{5} = 1$$

$$\lambda y = \frac{5 - 5}{5} = 0$$

Barra 6:

$$-Longitud(L) = 4m$$

$$\lambda x = \frac{25 - 21}{4} = 1$$

$$\lambda y = \frac{5 - 5}{4} = 0$$

Barra 7:

$$-Longitud(L) = \sqrt{4^2 + 5^2} = 6.40312m$$

$$\lambda x = \frac{25 - 21}{6.40312} = 0.62470$$

$$\lambda y = \frac{15 - 10}{6.40312} = -0.78087$$

Barra 8:

$$-Longitud(L) = 5m$$

$$\lambda x = \frac{21 - 16}{5} = 1$$

$$\lambda y = \frac{10 - 10}{5} = 0$$

Barra 9:

$$-Longitud(L) = 3.5m$$

$$\lambda x = \frac{16 - 12.5}{3.5} = 1$$

$$\lambda y = \frac{10 - 10}{3.5} = 0$$

Barra 10:

$$-Longitud(L) = 3.5m$$

$$\lambda x = \frac{12.5 - 9}{3.5} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{10 - 10}{3.5} = 0$$

Barra 11:

$$-Longitud(L) = 4m$$

$$\lambda_x = \frac{9 - 5}{4} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{10 - 10}{4} = 0$$

Barra 12:

$$-Longitud(L) = 5m$$

$$\lambda_x = \frac{5 - 0}{5} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{10 - 10}{5} = 0$$

Barra 13:

$$-Longitud(L) = 5m$$

$$\lambda_x = \frac{0 - 0}{5} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{10 - 5}{5} = 1$$

Barra 14:

$$-Longitud(L) = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7.07107m$$

$$\lambda_x = \frac{5 - 0}{7.07107} = 0.70711$$

$$\lambda_y = \frac{10 - 5}{7.07107} = 0.70711$$

Barra 15:

$$-Longitud(L) = 5m$$

$$\lambda_x = \frac{5 - 5}{5} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{10 - 5}{5} = 1$$

Barra 16:

$$-Longitud(L) = 6.40312m$$

$$\lambda_x = \frac{9 - 5}{6.40312} = 0.62470$$

$$\lambda_y = \frac{5 - 10}{6.40312} = -0.78087$$

Barra 17:

$$-Longitud(L) = 5m$$

$$\lambda_x = \frac{9 - 9}{5} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{10 - 5}{5} = 1$$

Barra 18:

$$-Longitud(L) = 6.10328m$$

$$\lambda_x = \frac{12.5 - 9}{6.10328} = 0.57346$$

$$\lambda_y = \frac{10 - 5}{6.10328} = 0.81923$$

Barra 19:

$$-Longitud(L) = 6.10328m$$

$$\lambda_x = \frac{16 - 12.5}{6.10328} = 0.57346$$

$$\lambda_y = \frac{5 - 10}{6.10328} = -0.81923$$

Barra 20:

$$-Longitud(L) = 5m$$

$$\lambda_x = \frac{16 - 16}{5} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{10 - 5}{5} = 1$$

Barra 21:

$$-Longitud(L) = 7.07107m$$

$$\lambda_x = \frac{21 - 16}{7.07107} = 0.70711$$

$$\lambda_y = \frac{10 - 5}{7.07107} = 0.70711$$

Barra 22:

$$-Longitud(L) = 5m$$

$$\lambda_x = \frac{21 - 21}{5} = 0$$

$$\lambda_y = \frac{10 - 5}{5} = 1$$

Vector de Desplazamientos:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 1 \\ D_2 & 2 \\ D_3 & 3 \\ D_4 & 4 \\ D_5 & 5 \\ D_6 & 6 \\ D_7 & 7 \\ D_8 & 8 \\ D_9 & 9 \\ D_{10} & 10 \\ D_{11} & 11 \\ D_{12} & 12 \\ D_{13} & 13 \\ D_{14} & 14 \\ D_{15} & 15 \\ D_{16} & 16 \\ D_{17} & 17 \\ D_{18} & 18 \\ D_{19} & 19 \\ D_{20} & 20 \\ D_{21} & 21 \\ D_{22} & 22 \\ 0 & 23 \\ 0 & 24 \\ 0 & 25 \\ 0 & 26 \end{pmatrix}$$

Vector de Fuerzas:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ 0 & 3 \\ -2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \\ 0 & 7 \\ -6 & 8 \\ 0 & 9 \\ -3 & 10 \\ 3.6 & 11 \\ -2 & 12 \\ 0 & 13 \\ 0 & 14 \\ 0 & 15 \\ 0 & 16 \\ 0 & 17 \\ 0 & 18 \\ 0 & 19 \\ 0 & 20 \\ 0 & 21 \\ 0 & 22 \\ \hline R_{7Y} & 23 \\ R_{1Y} & 24 \\ R_{4X} & 25 \\ R_{4Y} & 26 \end{pmatrix}$$

Matriz de rigidez global por miembro:

Barra 1:

$$k_1 = AE * \begin{pmatrix} 0.2000 & 0 & -0.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2000 & 0 & 0.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 22 \\ 24 \\ 19 \\ 20 \end{matrix}$$

Barra 2:

$$k_2 = AE * \begin{pmatrix} 0.2500 & 0 & -0.2500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2500 & 0 & 0.2500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 19 \\ 20 \\ 17 \\ 18 \end{matrix}$$

Barra 3:

$$k_3 = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 17 & 18 & 25 & 26 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0539 & -0.077 & -0.0539 & 0.077 \\ -0.077 & 0.11 & 0.077 & -0.11 \\ -0.0539 & 0.077 & 0.0539 & -0.077 \\ 0.077 & -0.11 & -0.077 & 0.11 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 17 \\ 18 \\ 25 \\ 26 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 4:

$$k_4 = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 25 & 26 & 15 & 16 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0539 & 0.077 & -0.0539 & -0.077 \\ 0.077 & 0.11 & -0.077 & -0.11 \\ -0.0539 & -0.077 & 0.0539 & 0.077 \\ -0.077 & -0.11 & 0.077 & 0.11 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 25 \\ 26 \\ 15 \\ 16 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 5:

$$k_5 = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 15 & 16 & 13 & 14 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2000 & 0 & -0.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2000 & 0 & 0.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 15 \\ 16 \\ 13 \\ 14 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 6:

$$k_6 = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 13 & 14 & 21 & 23 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2500 & 0 & -0.2500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2500 & 0 & 0.2500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 21 \\ 23 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 7:

$$k_7 = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 21 & 23 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0609 & -0.0762 & -0.0609 & 0.0762 \\ -0.0762 & 0.0952 & 0.0762 & -0.0952 \\ -0.0609 & 0.0762 & 0.0609 & -0.0762 \\ 0.0762 & -0.0952 & -0.0762 & 0.0952 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 21 \\ 23 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 8:

$$k_8 = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2000 & 0 & -0.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2000 & 0 & 0.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 9:

$$k_9 = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2857 & 0 & -0.2857 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2857 & 0 & 0.2857 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 10:

$$k_{10} = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2857 & 0 & -0.2857 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2857 & 0 & 0.2857 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 11:

$$k_{11} = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 9 & 10 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2500 & 0 & -0.2500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2500 & 0 & 0.2500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 12:

$$k_{12} = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 11 & 12 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2000 & 0 & -0.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2000 & 0 & 0.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 13:

$$k_{13} = AE * \begin{matrix} & 22 & 24 & 11 & 12 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2000 & 0 & -0.2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2000 & 0 & 0.2000 \end{pmatrix} & 22 \\ & 24 \\ & 11 \\ & 12 \end{matrix}$$

Barra 14:

$$k_{14} = AE * \begin{matrix} & 22 & 24 & 9 & 10 \\ \begin{pmatrix} 0.0707 & 0.0707 & -0.0707 & -0.0707 \\ 0.0707 & 0.0707 & -0.0707 & -0.0707 \\ -0.0707 & -0.0707 & 0.0707 & 0.0707 \\ -0.0707 & -0.0707 & 0.0707 & 0.0707 \end{pmatrix} & 22 \\ & 24 \\ & 9 \\ & 10 \end{matrix}$$

Barra 15:

$$k_{15} = AE * \begin{matrix} & 19 & 20 & 9 & 10 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2000 & 0 & -0.2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2000 & 0 & 0.2000 \end{pmatrix} & 19 \\ & 20 \\ & 9 \\ & 10 \end{matrix}$$

Barra 16:

$$k_{16} = AE * \begin{matrix} & 9 & 10 & 17 & 18 \\ \begin{pmatrix} 0.0609 & -0.0762 & -0.0609 & 0.0762 \\ -0.0762 & 0.0952 & 0.0762 & -0.0952 \\ -0.0609 & 0.0762 & 0.0609 & -0.0762 \\ 0.0762 & -0.0952 & -0.0762 & 0.0952 \end{pmatrix} & 9 \\ & 10 \\ & 17 \\ & 18 \end{matrix}$$

Barra 17:

$$k_{17} = AE * \begin{matrix} & 17 & 18 & 7 & 8 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2000 & 0 & -0.2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2000 & 0 & 0.2000 \end{pmatrix} & 17 \\ & 18 \\ & 7 \\ & 8 \end{matrix}$$

Barra 18:

$$k_{18} = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 17 & 18 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0539 & 0.077 & -0.0539 & -0.077 \\ 0.077 & 0.11 & -0.077 & -0.11 \\ -0.0539 & -0.077 & 0.0539 & 0.077 \\ -0.077 & -0.11 & 0.077 & 0.11 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 17 \\ 18 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 19:

$$k_{19} = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 15 & 16 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0539 & -0.077 & -0.0539 & 0.077 \\ -0.077 & 0.11 & 0.077 & -0.11 \\ -0.0539 & 0.077 & 0.0539 & -0.077 \\ 0.077 & -0.11 & -0.077 & 0.11 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 15 \\ 16 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 20:

$$k_{20} = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 15 & 16 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2000 & 0 & -0.2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2000 & 0 & 0.2000 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 15 \\ 16 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 21:

$$k_{21} = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 15 & 16 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.0707 & 0.0707 & -0.0707 & -0.0707 \\ 0.0707 & 0.0707 & -0.0707 & -0.0707 \\ -0.0707 & -0.0707 & 0.0707 & 0.0707 \\ -0.0707 & -0.0707 & 0.0707 & 0.0707 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 15 \\ 16 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

Barra 22:

$$k_{22} = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 13 & 14 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2000 & 0 & -0.2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2000 & 0 & 0.2000 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

Ensamblando las matrices anteriores:

La matriz de rigidez global de la estructura adquiere la siguiente forma:

$$K_T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

A continuación se proporciona por separado cada una de las subdivisiones de K_T :

Matriz K_{11} :

$$K_{11} = AE *$$

Columnas desde la 1 hasta la 12

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.3317	-0.0055	-0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0055	0.3659	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.2	0	0.4857	0	-0.2857	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-0.2857	0	0.6792	0	-0.2857	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.2199	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-0.2857	0	0.5357	0	-0.25	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.2	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-0.25	0	0.5817	-0.0055	-0.2	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0055	0.3659	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-0.2	0	0.2	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0707	-0.0707	0	0	-0.0539	0.077	0	0	0	0	0	0	0
-0.0707	-0.0707	0	-0.2	0.077	-0.11	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-0.0539	-0.077	0	0	-0.0609	0.0762	0	0	0
0	0	0	0	-0.077	-0.11	0	-0.2	0.0762	-0.0952	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.2	0	0	0
-0.0609	0.0762	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0707	-0.0707	0	0	0

Columnas desde la 13 hasta la 22

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	.
0	0	-0.0707	-0.0707	0	0	0	0	-0.0609	0	1
0	-0.2	-0.0707	-0.0707	0	0	0	0	0.0762	0	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
0	0	0	-0.2	0	0	0	0	0	0	4
0	0	-0.0539	0.077	-0.0539	-0.077	0	0	0	0	5
0	0	0.077	-0.11	-0.077	-0.11	0	0	0	0	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
0	0	0	0	0	-0.2	0	0	0	0	8
0	0	0	0	-0.0609	0.0762	0	0	0	-0.0707	9
0	0	0	0	0.0762	-0.0952	0	-0.2	0	-0.0707	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
0.45	0	-0.2	0	0	0	0	0	-0.25	0	13
0	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	14
-0.2000	0	0.3785	0.0707	0	0	0	0	0	0	15
0	0	0.0707	0.4906	0	0	0	0	0	0	16
0	0	0	0	0.4187	-0.0762	-0.25	0	0	0	17
0	0	0	0	-0.0762	0.5152	0	-0.2	0	0	18
0	0	0	0	-0.25	0	0.45	0	0	-0.2	19
0	0	0	0	0	0	0	0.2	0	0	20
-0.2500	0	0	0	0	0	0	0	0.3109	0	21
0	0	0	0	0	0	-0.2	0	0	0.2707	22

Matriz K_{12} :

	23	24	25	26	
$K_{12} = AE *$	0.0762	0	0	0	1
	-0.0952	0	0	0	2
	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	5
	0	0	0	0	6
	0	0	0	0	7
	0	0	0	0	8
	0	-0.0707	0	0	9
	0	-0.0707	0	0	10
	0	0	0	0	11
	0	-0.2	0	0	12
	0	0	0	0	13
	0	0	0	0	14
	0	0	-0.0539	-0.077	15
	0	0	-0.077	-0.11	16
	0	0	-0.0539	0.077	17
	0	0	0.077	-0.11	18
	0	0	0	0	19
	0	0	0	0	20
	-0.0762	0	0	0	21
	0	0.0707	0	0	22

Matriz K_{21} :

$$K_{21} = AE *$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 \\ 0.0762 & -0.0952 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0762 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0707 & -0.0707 & 0 & -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0707 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0539 & -0.077 & -0.0539 & 0.077 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.077 & -0.11 & 0.077 & -0.11 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 23 \\ 24 \\ 25 \\ 26 \end{matrix}$$

Matriz K_{22} :

$$K_{22} = AE * \begin{matrix} & \begin{matrix} 23 & 24 & 25 & 26 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 23 \\ 24 \\ 25 \\ 26 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.0952 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1078 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2199 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

De $F=K_T * D$ extraemos los siguientes subsistemas:

Subsistema 1:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ -3 \\ 3.6 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (K_{11}) * \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \\ D_{13} \\ D_{14} \\ D_{15} \\ D_{16} \\ D_{17} \\ D_{18} \\ D_{19} \\ D_{20} \\ D_{21} \\ D_{22} \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \\ D_{13} \\ D_{14} \\ D_{15} \\ D_{16} \\ D_{17} \\ D_{18} \\ D_{19} \\ D_{20} \\ D_{21} \\ D_{22} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{AE}\right) * \begin{pmatrix} 98.6379 \\ -140.6764 \\ 68.9108 \\ -294.2143 \\ 48.1019 \\ -474.4071 \\ 29.3929 \\ -307.8249 \\ 8.0112 \\ -155.6615 \\ 26.0112 \\ -10 \\ 301.1976 \\ -140.6764 \\ 307.7429 \\ -284.2143 \\ -231.8023 \\ -277.8249 \\ -217.2570 \\ -155.6615 \\ 295.9612 \\ -199.0753 \end{pmatrix}$$

Subsistema 2:

$$\begin{pmatrix} R_{7Y} \\ R_{1Y} \\ R_{4X} \\ R_{4Y} \end{pmatrix} = (K_{21}) * \left(\frac{1}{AE}\right) * \begin{pmatrix} 98.6379 \\ -140.6764 \\ 68.9108 \\ -294.2143 \\ 48.1019 \\ -474.4071 \\ 29.3929 \\ -307.8249 \\ 8.0112 \\ -155.6615 \\ 26.0112 \\ -10 \\ 301.1976 \\ -140.6764 \\ 307.7429 \\ -284.2143 \\ -231.8023 \\ -277.8249 \\ -217.2570 \\ -155.6615 \\ 295.9612 \\ -199.0753 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.6363 \\ -1.6363 \\ -3.6 \\ 20.2727 \end{pmatrix}$$

Las reacciones son:

$$R_{7Y} = 1.6363T \quad \downarrow$$

$$R_{1Y} = 1.6363T \quad \downarrow$$

$$R_{4X} = 3.6T \quad \leftarrow$$

$$R_{4Y} = 20.2727T \quad \uparrow$$

Cálculo de las fuerzas en las barras:

Barra 1:

$$q_1 = \left(\frac{AE}{5}\right) * (-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} -199.0753 \\ 0 \\ -217.2570 \\ -155.6615 \end{pmatrix} = -3.63634T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

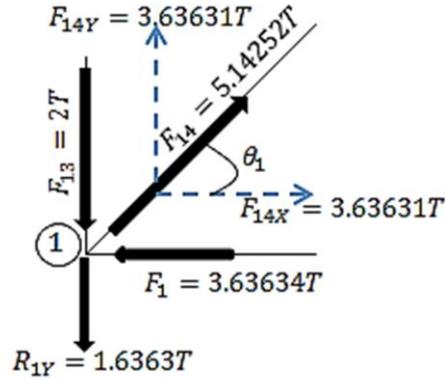
Barra 13:

$$q_{13} = \left(\frac{AE}{5}\right) * (0 \quad -1 \quad 0 \quad 1) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} -199.0753 \\ 0 \\ 26.0112 \\ -10 \end{pmatrix} = -2T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

Barra 14:

$$q_{14} = \left(\frac{AE}{7.07107}\right) * (-0.70711 \quad -0.70711 \quad 0.70711 \quad 0.70711) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} -119.0753 \\ 0 \\ 8.0112 \\ -155.6615 \end{pmatrix} = 5.14252T \text{ (TENSIÓN)}$$

Análisis del nodo 1 para demostrar su equilibrio:



$$F_{14X} = F_{14} * \sin \theta_1 = 5.14252T * \frac{5}{7.07107} = 3.63631T$$

$$F_{14Y} = F_{14} * \cos \theta_1 = 5.14252T * \frac{5}{7.07107} = 3.63631T$$

$$\sum FX = 0$$

$$-3.63634 + 3.63631 \cong 0 \quad OK$$

$$\sum FY = 0$$

$$-1.6363 - 2 + 3.63631 \cong 0 \quad OK$$

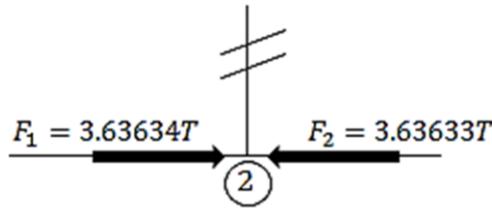
Barra 2:

$$q_2 = \left(\frac{AE}{4}\right) * (-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} -217.257 \\ -155.6615 \\ -231.8023 \\ -277.8249 \end{pmatrix} = -3.63633T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

Barra 15:

$$q_{15} = \left(\frac{AE}{5}\right) * (0 \quad -1 \quad 0 \quad 1) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} -217.257 \\ -155.6615 \\ 8.0112 \\ -155.6615 \end{pmatrix} = 0$$

Análisis del nodo 2 para demostrar su equilibrio:



$$\sum FX = 0$$

$$3.63634 - 3.63633 \cong 0 \quad OK$$

Barra 16:

$$q_{16} = \left(\frac{AE}{6.40312}\right) * (-0.6247 \quad 0.78087 \quad 0.6247 \quad -0.78087) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 8.0112 \\ -155.6615 \\ -231.8023 \\ -277.8249 \end{pmatrix} \\ = -8.49863T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

Barra 17:

$$q_{17} = \left(\frac{AE}{5}\right) * (0 \quad -1 \quad 0 \quad 1) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} -231.8023 \\ -277.8249 \\ 29.3929 \\ -307.8249 \end{pmatrix} = -6T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

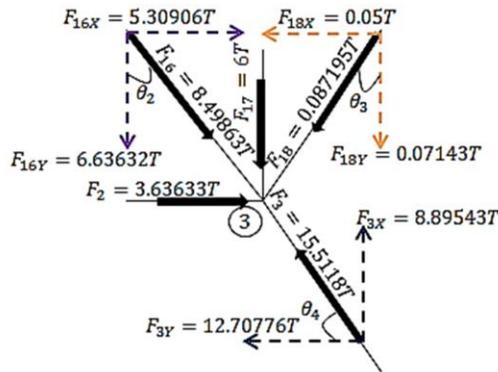
Barra 18:

$$q_{18} = \left(\frac{AE}{6.10328}\right) * (-0.57346 \quad -0.81923 \quad 0.57346 \quad 0.81923) \\ * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} -231.8023 \\ -277.8249 \\ 48.1019 \\ -474.4071 \end{pmatrix} = -0.087195T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

Barra 3:

$$q_3 = \left(\frac{AE}{6.10328}\right) * (-0.57346 \quad 0.81923 \quad 0.57346 \quad -0.81923) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} -231.8023 \\ -277.8249 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = -15.5118T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

Análisis del nodo 3 para demostrar su equilibrio:



$$F_{16X} = F_{16} * \sin \theta_2 = 8.49863T * \frac{4}{6.40312} = 5.30906T$$

$$F_{16Y} = F_{16} * \cos \theta_2 = 8.49863T * \frac{5}{6.40312} = 6.63632T$$

$$F_{18X} = F_{18} * \sin \theta_3 = 0.087195T * \frac{3.5}{6.10328} = 0.05T$$

$$F_{18Y} = F_{18} * \cos \theta_3 = 0.087195T * \frac{5}{6.10328} = 0.07143T$$

$$F_{3X} = F_3 * \cos \theta_4 = 15.5118T * \frac{3.5}{6.10328} = 8.89543T$$

$$F_{3Y} = F_3 * \sin \theta_4 = 15.5118T * \frac{5}{6.10328} = 12.70776T$$

$$\sum FY = 0$$

$$12.70776 - 0.07143 - 6 - 6.63632 \cong 0 \quad OK$$

$$\sum FX = 0$$

$$3.63633 + 5.30906 - 8.89543 - 0.05 \cong 0 \quad OK$$

Barra 4:

$$q_4 = \left(\frac{AE}{6.10328} \right) * (-0.57346 \quad -0.81923 \quad 0.57346 \quad 0.81923) * \left(\frac{1}{AE} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 307.7429 \\ -284.2143 \end{pmatrix}$$

$$= -9.23416T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

Barra 5:

$$q_5 = \left(\frac{AE}{5} \right) * (-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0) * \left(\frac{1}{AE} \right) \begin{pmatrix} 307.7429 \\ -284.2143 \\ 301.1976 \\ -140.6764 \end{pmatrix} = -1.30906T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

Barra 19:

$$q_{19} = \left(\frac{AE}{6.10328} \right) * (-0.57346 \quad 0.81923 \quad 0.57346 \quad -0.81923)$$

$$* \left(\frac{1}{AE} \right) \begin{pmatrix} 48.1019 \\ -474.4071 \\ 307.7429 \\ -284.2143 \end{pmatrix} = -1.13348T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

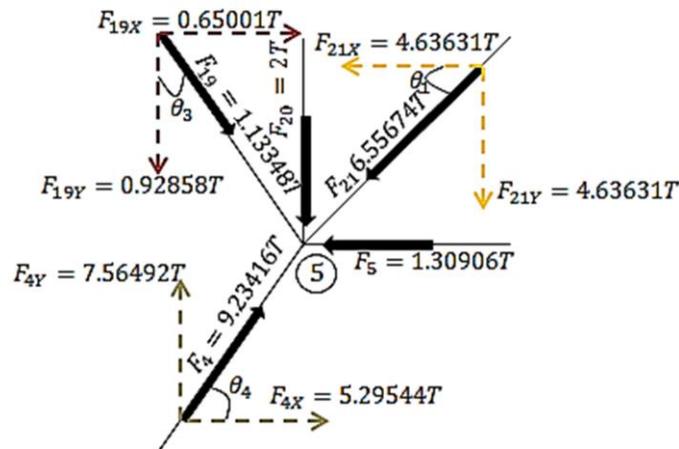
Barra 20:

$$q_{20} = \left(\frac{AE}{5}\right) * (0 \quad -1 \quad 0 \quad 1) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 307.7429 \\ -284.2143 \\ 68.9108 \\ -294.2143 \end{pmatrix} = -2T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

Barra 21:

$$q_{21} = \left(\frac{AE}{7.07107}\right) * (-0.70711 \quad -0.70711 \quad 0.70711 \quad 0.70711) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 307.7429 \\ -284.2143 \\ 98.6379 \\ -140.6764 \end{pmatrix} = -6.55674T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

Análisis del nodo 5 para demostrar su equilibrio:



$$F_{4X} = F_4 * \cos \theta_4 = 9.23416T * \frac{3.5}{6.10328} = 5.29544T$$

$$F_{4Y} = F_4 * \sin \theta_4 = 9.23416T * \frac{5}{6.10328} = 7.56492T$$

$$F_{19X} = F_{19} * \sin \theta_3 = 1.13348T * \frac{3.5}{6.10328} = 0.65001T$$

$$F_{19Y} = F_{19} * \cos \theta_3 = 1.13348T * \frac{5}{6.10328} = 0.92858T$$

$$F_{21X} = F_{21} * \cos \theta_1 = 6.55674T * \frac{5}{7.07107} = 4.63631T$$

$$F_{21Y} = F_{21} * \sin \theta_1 = 6.55674T * \frac{5}{7.07107} = 4.63631T$$

$$\sum FY = 0$$

$$7.56492 - 0.92858 - 2 - 4.63631 \cong 0 \quad OK$$

$$\sum FX = 0$$

$$5.29544 - 1.30906 - 4.63631 + 0.65001 \cong 0 \quad OK$$

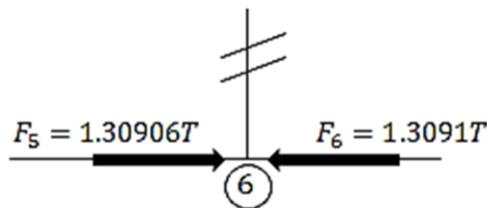
Barra 6:

$$q_6 = \left(\frac{AE}{4}\right) * (-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 301.1976 \\ -140.6764 \\ 295.9612 \\ 0 \end{pmatrix} = -1.3091T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

Barra 22:

$$q_{22} = \left(\frac{AE}{5}\right) * (0 \quad -1 \quad 0 \quad 1) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 301.1976 \\ -140.6764 \\ 98.6379 \\ -140.6764 \end{pmatrix} = 0$$

Análisis del nodo 6 para demostrar su equilibrio:



$$\sum FX = 0$$

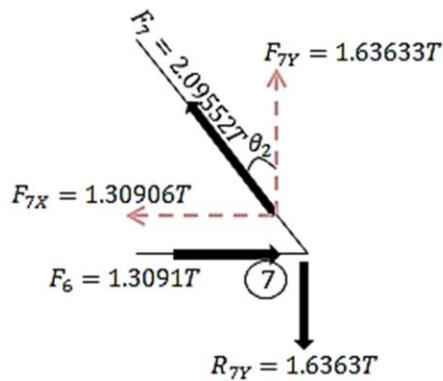
$$1.30906 - 1.3091 \cong 0 \quad OK$$

Barra 7:

$$q_7 = \left(\frac{AE}{6.40312} \right) * (-0.6247 \quad 0.78087 \quad 0.6247 \quad -0.78087) * \left(\frac{1}{AE} \right) \begin{pmatrix} 98.6379 \\ -140.6764 \\ 295.9612 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2.09552T \text{ (TENSIÓN)}$$

Análisis del nodo 7 para demostrar su equilibrio:



$$F_{7X} = F_7 * \sin \theta_2 = 2.09552T * \frac{4}{6.40312} = 1.30906T$$

$$F_{7Y} = F_7 * \cos \theta_2 = 2.09552T * \frac{5}{6.40312} = 1.63633T$$

$$\sum FY = 0$$

$$-1.6363 + 1.63633 \cong 0 \quad OK$$

$$\sum FX = 0$$

$$-1.30906 + 1.3091 \cong 0 \quad OK$$

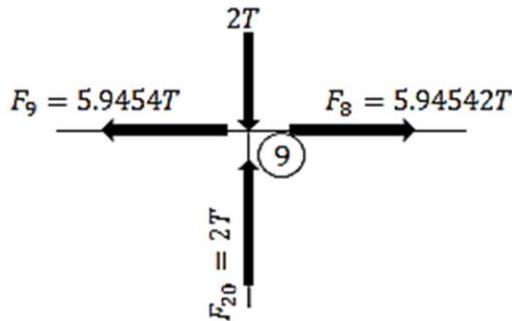
Barra 8:

$$q_8 = \left(\frac{AE}{5}\right) * (-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 68.9108 \\ -294.2143 \\ 98.6379 \\ -140.6764 \end{pmatrix} = 5.94542T \text{ (TENSION)}$$

Barra 9:

$$q_9 = \left(\frac{AE}{3.5}\right) * (-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 48.1019 \\ -474.4071 \\ 68.9108 \\ -294.2143 \end{pmatrix} = 5.9454T \text{ (TENSION)}$$

Análisis del nodo 9 para demostrar su equilibrio:



$$\sum F_Y = 0$$

$$2 - 2 = 0 \quad OK$$

$$\sum F_X = 0$$

$$-5.9454 + 5.94542 \cong 0 \quad OK$$

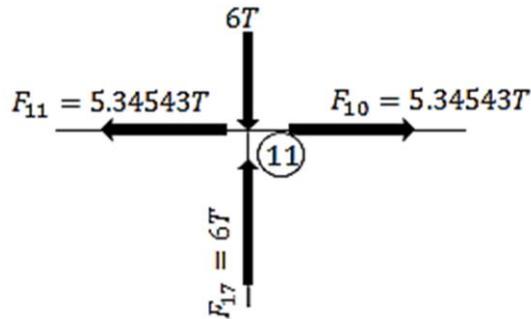
Barra 10:

$$q_{10} = \left(\frac{AE}{3.5}\right) * (-1 \ 0 \ 1 \ 0) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 29.3929 \\ -307.8249 \\ 48.1019 \\ -474.4071 \end{pmatrix} = 5.34543T \text{ (TENSIÓN)}$$

Barra 11:

$$q_{11} = \left(\frac{AE}{4}\right) * (-1 \ 0 \ 1 \ 0) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 8.0112 \\ -155.6615 \\ 29.3929 \\ -307.8249 \end{pmatrix} = 5.34543T \text{ (TENSIÓN)}$$

Análisis del nodo 11 para demostrar su equilibrio:



$$\sum FY = 0$$

$$6 - 6 = 0 \quad OK$$

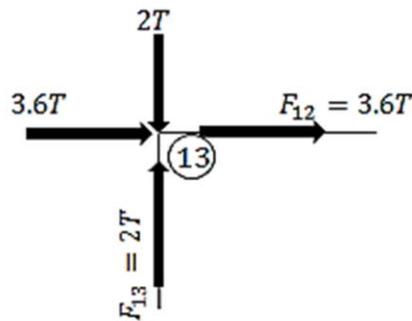
$$\sum FX = 0$$

$$5.34543 - 5.34543 \cong 0 \quad OK$$

Barra 12:

$$q_{12} = \left(\frac{AE}{5}\right) * (-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0) * \left(\frac{1}{AE}\right) \begin{pmatrix} 26.0112 \\ -10 \\ 8.0112 \\ -155.6615 \end{pmatrix} = -3.6T \text{ (COMPRESIÓN)}$$

Análisis del nodo 13 para demostrar su equilibrio:



$$\sum F_Y = 0$$

$$2 - 2 = 0 \quad OK$$

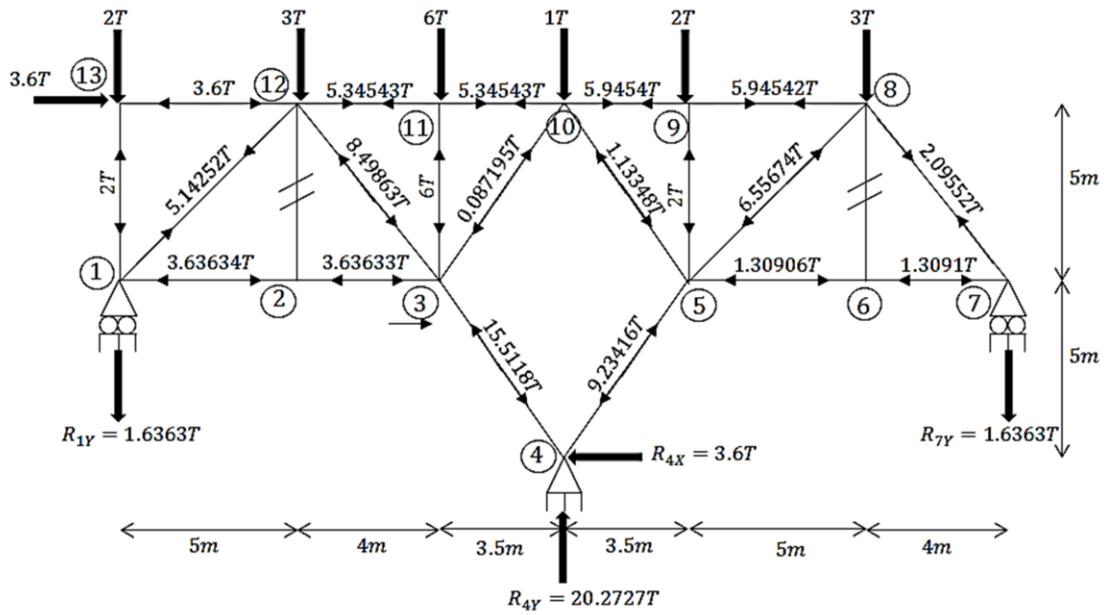
$$\sum F_X = 0$$

$$3.6 - 3.6 = 0 \quad OK$$

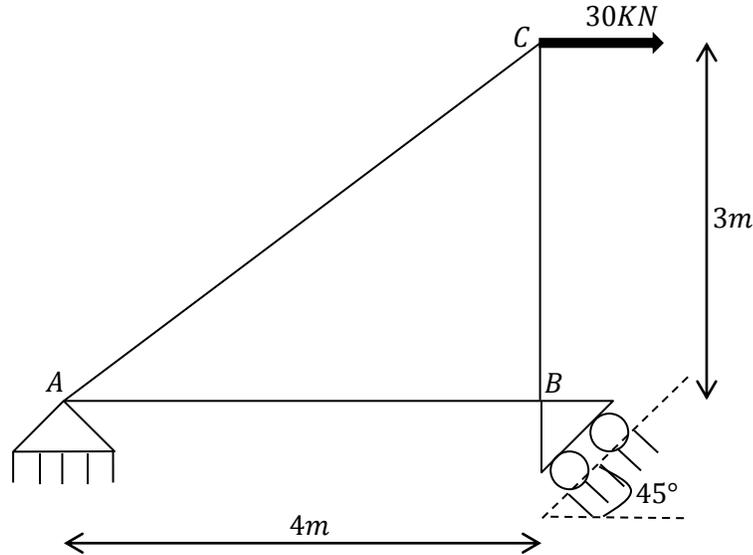
Con lo anterior se demuestra que la estructura está en equilibrio tanto internamente como externamente.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS CON EL MÉTODO DE RIGIDEZ

Diagrama que muestra las reacciones y las fuerzas en las barras de la armadura:

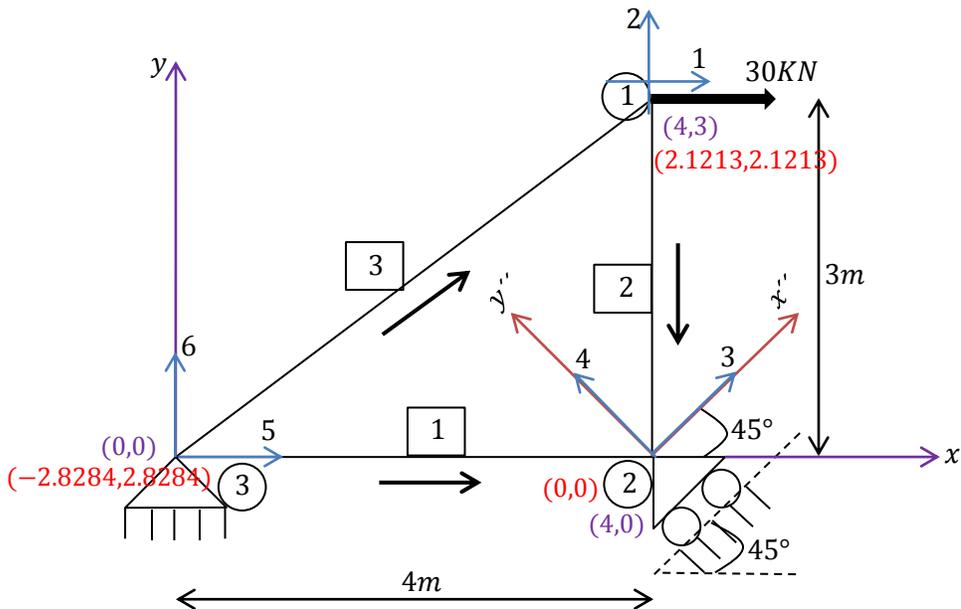


7.- Use el análisis matricial de la rigidez para determinar las reacciones en los soportes para la armadura que se muestra en la figura y cuyo apoyo B está inclinado a 45° respecto a al horizontal. Considere AE como constante.



Solución:

Codificación o notación:



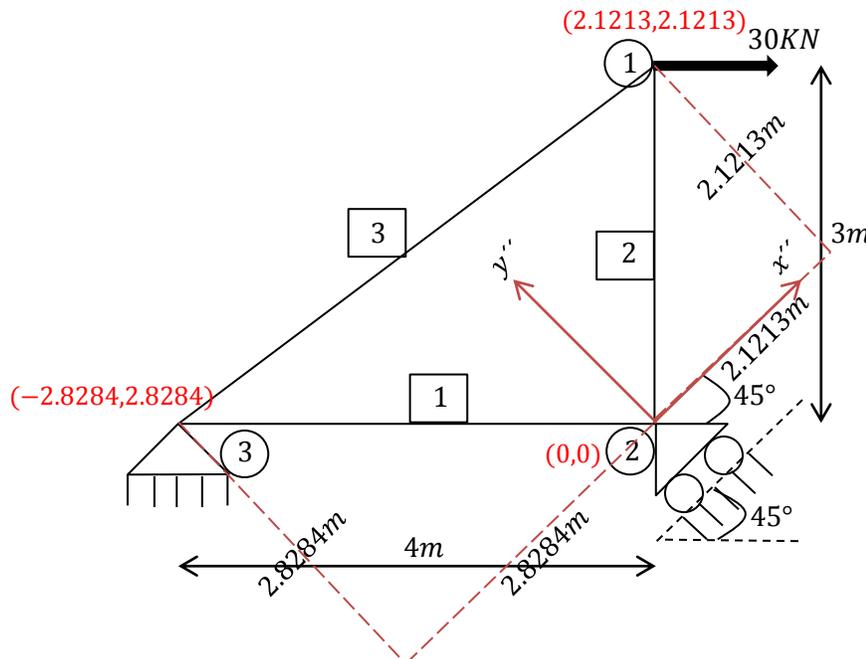
Observaciones:

- Como el soporte en rodillos se encuentra sobre un plano inclinado, en este nodo deben usarse coordenadas nodales x'' , y'' .
- Se enumeraron las juntas y las barras y se establecieron los ejes globales x , y , en el nodo 3.
- Note que los números de código 3 y 4 están a lo largo de los ejes x'' , y'' , a fin de poder usar la condición de que $D_4=0$.
- La punta de la flecha está dirigida hacia el extremo alejado (F) por lo que el extremo contrario es el cercano (N).
- Se han enumerado los desplazamientos de tal modo que primero estén los no restringidos y después los restringidos; recuerde que una reacción en este tipo de apoyos restringe un desplazamiento en la misma dirección de ella.
- Los ejes de coordenadas están definidos en sus cuadrantes positivos.

Tabla de coordenadas

Nudo	Ejes x-y		Ejes x'' - y''	
	x(m)	y(m)	x'' (m)	y'' (m)
1	4	3	2.1213	2.1213
2	4	0	0	0
3	0	0	-2.8284	2.8284

Las coordenadas del nodo 1 del nodo 3 en los ejes x'' - y'' se obtuvieron tal y como se muestra en el siguiente esquema:



Remitiéndonos a la figura de la codificación o notación extraemos los siguientes datos:

Barra	Nudo		Área	M.Elasticidad	L(m)
	N	F			
1	3	2	A	E	4
2	1	2	A	E	3
3	3	1	A	E	5

Barra	Numeración de los Grados de Libertad			
	Nx	Ny	Fx	Fy
1	5	6	3	4
2	1	2	3	4
3	5	6	1	2

Cosenos directores por barra:

Barra 1:

$$\lambda_x = \frac{4 - 0}{4} = 1, \lambda_y = \frac{0 - 0}{4} = 0$$

$$\lambda_x'' = \frac{0 - (-2.8284)}{4} = 0.7071, \lambda_y'' = \frac{0 - 2.8284}{4} = -0.7071$$

Barra 2:

$$\lambda_x = \frac{4 - 4}{3} = 0, \lambda_y = \frac{0 - 3}{3} = -1$$

$$\lambda_x'' = \frac{0 - 2.1213}{3} = -0.7071, \lambda_y'' = \frac{0 - 2.1213}{3} = -0.7071$$

Barra 3:

$$\lambda_x = \frac{4 - 0}{5} = 0.8, \lambda_y = \frac{3 - 0}{5} = 0.6$$

Matriz de rigidez global por barra:

Las matrices de rigidez de las barras 1 y 2 deben desarrollarse mediante la ecuación (n), puesto que estos elementos tienen números de código en la dirección de los ejes globales y nodales. La matriz de rigidez global para la barra 3 se determina de la forma habitual, es decir, con la ecuación (c).

Barra 1:

$$k_1 = AE * \begin{matrix} & 5 & 6 & 3 & 4 \\ \begin{pmatrix} 0.2500 & 0 & -0.1768 & 0.1768 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1768 & 0 & 0.1250 & -0.1250 \\ 0.1768 & 0 & -0.1250 & 0.1250 \end{pmatrix} & 5 \\ & 6 \\ & 3 \\ & 4 \end{matrix}$$

Barra 2:

$$k_2 = AE * \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 & -0.2357 & -0.2357 \\ 0 & -0.2357 & 0.1667 & 0.1667 \\ 0 & -0.2357 & 0.1667 & 0.1667 \end{pmatrix} & 1 \\ & 2 \\ & 3 \\ & 4 \end{matrix}$$

Barra 3:

$$k_3 = AE * \begin{matrix} & 5 & 6 & 1 & 2 \\ \begin{pmatrix} 0.1280 & 0.0960 & -0.1280 & -0.0960 \\ 0.0960 & 0.0720 & -0.0960 & -0.0720 \\ -0.1280 & -0.0960 & 0.1280 & 0.0960 \\ -0.0960 & -0.0720 & 0.0960 & 0.0720 \end{pmatrix} & 5 \\ & 6 \\ & 1 \\ & 2 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez global de toda la estructura se obtiene ensamblando las matrices anteriores:

$$K_T = k_1 + k_2 + k_3$$

MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA:

$$K_T = AE * \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{pmatrix} 0.1280 & 0.0960 & 0 & 0 & -0.1280 & -0.0960 \\ 0.0960 & 0.4053 & -0.2357 & -0.2357 & -0.0960 & -0.0720 \\ 0 & -0.2357 & 0.2917 & 0.0417 & -0.1768 & 0 \\ 0 & -0.2357 & 0.0417 & 0.2917 & 0.1768 & 0 \\ -0.1280 & -0.0960 & -0.1768 & 0.1768 & 0.3780 & 0.0960 \\ -0.0960 & -0.0720 & 0 & 0 & 0.0960 & 0.0720 \end{pmatrix} & 1 \\ & 2 \\ & 3 \\ & 4 \\ & 5 \\ & 6 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez se subdividió de la siguiente forma:

$$K_T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

-Vector de Fuerzas:

$$F = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ R_B \\ R_{AX} \\ R_{AY} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

-Vector de Desplazamientos:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

De $F = K_T * D$ extraemos los siguientes subsistemas:

Subsistema 1:

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (K_{11}) \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

Despejando las incógnitas:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = (K_{11})^{-1} * \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{AE} * \begin{pmatrix} 0.1280 & 0.0960 & 0 \\ 0.0960 & 0.4053 & -0.2357 \\ 0 & -0.2357 & 0.2917 \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{AE} * \begin{pmatrix} 352.5000 \\ -157.5000 \\ -127.2804 \end{pmatrix}$$

Subsistema 2:

$$\begin{pmatrix} R_B \\ R_{AX} \\ R_{AY} \end{pmatrix} = (K_{21}) * \frac{1}{AE} * \begin{pmatrix} 352.5000 \\ -157.5000 \\ -127.2804 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_B \\ R_{AX} \\ R_{AY} \end{pmatrix} = AE * \begin{pmatrix} 0 & -0.2357 & 0.0417 \\ -0.1280 & -0.0960 & -0.1768 \\ -0.0960 & -0.0720 & 0 \end{pmatrix} * \frac{1}{AE} * \begin{pmatrix} 352.5000 \\ -157.5000 \\ -127.2804 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_B \\ R_{AX} \\ R_{AY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31.8195 \\ -7.5000 \\ -22.5000 \end{pmatrix}$$

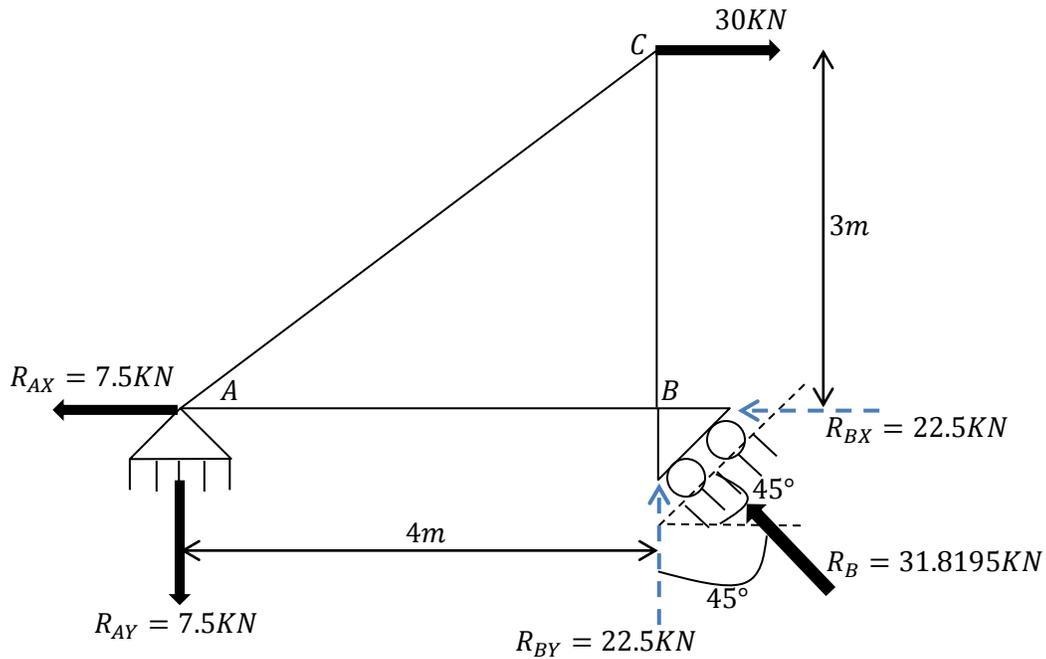
∴

$$R_B = 31.8195 \text{ KN}$$

$$R_{AX} = 7.5 \text{ KN}$$

$$R_{AY} = 22.5 \text{ KN}$$

Diagrama en el que se visualizan los valores de las reacciones en los soportes de la armadura real:



Demostramos el equilibrio de la estructura a través de las fuerzas externas:

$$\begin{aligned} \sum F_Y &= 0 \\ -22.5 + 22.5 &= 0 \quad \text{ok} \\ \sum F_X &= 0 \\ -7.5 - 22.5 + 30 &= 0 \quad \text{ok} \end{aligned}$$

$$\sum MA = 0$$

$$30(3) - 22.5(4) = 0 \quad ok$$

A continuación se muestra la forma de usar el programa 4.2.6 tomando como ejemplo el problema anterior.

Una vez que se corra el programa:

4. Insertamos los siguientes datos de la estructura real:

```

Command Window
----- DATOS PARA EL ANALISIS -----
DAME EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD GL = 6
DAME EL MODULO DE ELASTICIDAD = 1
DAME EL NUMERO DE BARRAS n = 3
DAME EL NUMERO DE DESPLAZAMIENTOS DESCONOCIDOS = 3
DAME EL NUMERO DE FUERZAS CONOCIDAS = 3
-----
    
```

2.- Digitamos para cada miembro los cosenos directores, el valor de E y A que nos proporcionen en el problema, su longitud y el número designado a los grados de libertad tanto del extremo cercano como alejado en la sección de codificación.

Nota: Como en el problema no nos proporcionan el valor del Módulo de la Elasticidad ni el del Área de cada barra y sólo nos dicen que son constantes en toda la estructura, le daremos el valor de uno a ambos, lo cual significa que cada matriz global por barra, la matriz global de toda la estructura y la submatriz K_{11} están multiplicadas por AE; además cuando el programa calcule los valores de los desplazamientos desconocidos y el vector total de desplazamientos, estos estarán afectados por 1/AE. Obsérvese también que ahora el dato del Módulo de Elasticidad se inserta desde el paso 1; esto se debe a que en las armaduras todas las barras suelen ser del mismo material.

-Para la barra 1:

Esta barra tiene números de código en la dirección de los ejes globales x-y y nodales $x''-y''$ por lo que hacemos:

$$\lambda_x = Lx1 \quad , \quad \lambda_y = Ly1 \quad ; \quad \lambda_{x''} = Lx2 \quad , \quad \lambda_{y''} = Ly2$$

```

BARRA 1.

DAME EL VALOR DE Lx1 = 1
DAME EL VALOR DE Ly1 = 0
DAME EL VALOR DE Lx2 = 0.7071
DAME EL VALOR DE Ly2 = -0.7071
DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = 1
DAME LA LONGITUD DE LA BARRA = 4
NODO N-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nx= 5
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny= 6
NODO F-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fx= 3
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy= 4
-----
    
```

En automático aparecerá la matriz de rigidez global de la barra 1:

```

MATRRIZ K1.
k =

    0.2500    0   -0.1768    0.1768
         0    0    0    0
   -0.1768    0    0.1250   -0.1250
    0.1768    0   -0.1250    0.1250
-----
    
```

-Para la barra 2:

Esta barra también tiene números de código en la dirección de los ejes globales x-y y nodales x''-y'' por lo que volvemos a hacer:

$$\lambda_x = Lx1 \quad , \quad \lambda_y = Ly1 \quad ; \quad \lambda_{x''} = Lx2 \quad , \quad \lambda_{y''} = Ly2$$

```

BARRA 2.

DAME EL VALOR DE Lx1 = 0
DAME EL VALOR DE Ly1 = -1
DAME EL VALOR DE Lx2 = -0.7071
DAME EL VALOR DE Ly2 = -0.7071
DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = 1
DAME LA LONGITUD DE LA BARRA = 3
NODO N-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nx= 1
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny= 2
NODO F-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fx= 3
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy= 4
-----
    
```

En seguida aparecerá la matriz de rigidez global de la barra 2:

```

MATRRIZ K2.
k =

      0      0      0      0
      0  0.3333 -0.2357 -0.2357
      0 -0.2357  0.1667  0.1667
      0 -0.2357  0.1667  0.1667
    
```

-Para la barra 3:

Esta barra sólo tiene números de código en la dirección de los ejes globales x-y, por lo que:

$$\lambda_x = Lx1 = Lx2 \text{ y } \lambda_y = Ly1 = Ly2$$

```

BARRA 3.

DAME EL VALOR DE Lx1 = 0.8
DAME EL VALOR DE Ly1 = 0.6
DAME EL VALOR DE Lx2 = 0.8
DAME EL VALOR DE Ly2 = 0.6
DAME EL AREA DE LA SECCIÓN = 1
DAME LA LONGITUD DE LA BARRA = 5
NODO N-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Nx= 5
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Ny= 6
NODO F-----
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fx= 1
DAME EL NUMERO DEL GRADO DE LIBERTAD Fy= 2
    
```

A continuación aparecerá la matriz de rigidez global de la barra 3:

```

MATRRIZ K3.
k =

      0.1280  0.0960 -0.1280 -0.0960
      0.0960  0.0720 -0.0960 -0.0720
     -0.1280 -0.0960  0.1280  0.0960
     -0.0960 -0.0720  0.0960  0.0720
    
```

Luego de obtener la matriz de rigidez global de cada miembro, el programa ensambla tales matrices y nos arrojará la matriz de rigidez global de toda la estructura:

```

----- MATRIZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA -----
KT =
    0.1280    0.0960         0         0    -0.1280    -0.0960
    0.0960    0.4053   -0.2357   -0.2357   -0.0960   -0.0720
         0   -0.2357    0.2917    0.0417   -0.1768         0
         0   -0.2357    0.0417    0.2917    0.1768         0
   -0.1280   -0.0960   -0.1768    0.1768    0.3780    0.0960
   -0.0960   -0.0720         0         0    0.0960    0.0720
    
```

Se imprime la submatriz K_{11} :

```

----- SUBMATRIZ K11 -----
k11 =
    0.1280    0.0960         0
    0.0960    0.4053   -0.2357
         0   -0.2357    0.2917
    
```

Se imprime la submatriz K_{12} :

```

----- SUBMATRIZ K12 -----
k12 =
         0   -0.1280   -0.0960
   -0.2357   -0.0960   -0.0720
    0.0417   -0.1768         0
    
```

Se imprime la submatriz K_{21} :

```

----- SUBMATRIZ K21 -----
k21 =
         0   -0.2357    0.0417
   -0.1280   -0.0960   -0.1768
   -0.0960   -0.0720         0
    
```

Se imprime la submatriz K_{22} :

```

----- SUBMATRIZ K22 -----
k22 =
    0.2917    0.1768    0
    0.1768    0.3780    0.0960
    0    0.0960    0.0720
    
```

3.- Se insertan uno por uno los elementos del Vector de Fuerzas Conocidas:

```

----- SOLUCIÓN DEL PROBLEMA -----
----- VECTOR DE FUERZAS CONOCIDAS -----
DAME LAS FUERZAS EXTERNAS APLICADAS EN LOS NODOS = 30
DAME LAS FUERZAS EXTERNAS APLICADAS EN LOS NODOS = 0
DAME LAS FUERZAS EXTERNAS APLICADAS EN LOS NODOS = 0
    
```

Se imprimirá el vector anterior:

```

vf =
    30
    0
    0
    
```

El programa resuelve el Subsistema 1 y nos proporciona los valores de los desplazamientos desconocidos:

```

----- SOLUCION DEL SUBSISTEMA 1-----
----- DESPLAZAMIENTOS INCONGNITAS -----
des =
    352.5000
   -157.5000
   -127.2804
fx
    
```

El programa resuelve el subsistema 2 y nos proporciona los valores de las reacciones en los soportes:

```
-----  
----- SOLUCION DEL SUBSISTEMA 2-----  
----- REACCIONES INCOGNITAS -----  
  
R =  
  
    31.8195  
    -7.5000  
   -22.5000
```

CONCLUSIONES:

El análisis estructural es la base fundamental para realizar un buen diseño de las estructuras, de ahí lo importante que es su dominio para los ingenieros dedicados a tal actividad.

Ahora que el trabajo ha sido terminado, nos hemos dado cuenta de la relevancia que significa el resolver problemas tan variados para vigas, marcos y armaduras, pues es la única forma de entender por completo las teorías que usan los software de Análisis Estructural, además de es la única forma de volverse hábil para la solución de estos ejercicios que comúnmente se le presentan a toda aquella persona vinculada con la Ingeniería Civil y más en particular, con la Ingeniería Estructural.

Tales resoluciones son minuciosas, debido a que en otras fuentes de información de análisis estructural, podemos darnos cuenta que en los ejemplos de aplicación generalmente se omiten pasos y crean confusiones o generan dudas al lector.

Para comprender el análisis estructural, es necesario tener una buena formación académica en otras asignaturas, por lo que se recomienda al lector remitirse a otras fuentes de Matemáticas, Estática, Mecánica de Materiales, Matlab u otras en caso de ser requeridas.

Al solucionar un ejercicio de estructuras, de preferencia deben usarse la mayor cantidad posible de decimales, pues esto arrojará resultados más exactos.

Es importante mencionar que es indistinta la convención de signos que se tome al aplicar las tres ecuaciones de la estática. De igual modo, si se propuso alguna fuerza reactiva o desplazamiento con un sentido y los resultados arrojan un signo negativo, el sentido correcto se obtiene invirtiendo la dirección propuesta.

Como observación, en esta tesis, para la mayoría de las matrices de rigidez los elementos que contienen están truncados por cuestiones de espacio, pero en realidad las operaciones matriciales se efectúan considerando las cantidades sin truncar.

BIBLIOGRAFÍA:

- 1.- Apuntes de la asignatura de mecánica de materiales II impartida por el catedrático ing. Marcos Elvira Molina.
- 2.- Apuntes de la asignatura de análisis estructural impartida por el catedrático Dr. Ernesto Pineda León.
- 3.- Apuntes de la asignatura de matemáticas impartida por el catedrático Dr. Francisco Antelmo Díaz Guerra.
- 4.- Apuntes de la asignatura de análisis estructural impartida por el catedrático Dr. Esteban Flores Méndez.
- 5.- Marcos Elvira Molina, tesis: “Temas selectos de mecánica de materiales”, Fes Aragón, UNAM, México, D.F., 2011.