



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Enredamiento cuántico
bajo transformaciones de Lorentz
en un sistema de partículas masivas
de espín 1

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

ESTEBAN CASTRO RUIZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. EDUARDO NAHMAD ACHAR



2012



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del jurado

1. Datos del alumno

Castro

Ruiz

Esteban

55 54 44 74

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

300501795

2. Datos del tutor

Dr.

Eduardo

Nahmad

Achar

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Shahen

Hacyan

Saleryan

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Pablo

Barberis

Bolstein

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Octavio Héctor

Castaños

Garza

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Ramón

López

Peña

7. Datos del trabajo escrito

Enredamiento cuántico bajo transformaciones de Lorentz en un sistema de partículas masivas de espín 1.

92 p

2012

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a mi familia por su apoyo. A mi mamá, mi papá y mi hermana. También a mi tía Gaby y a mis tíos Luis, Anita, Gus y Queta. Igualmente agradezco a mi abuela Rosi y a toda mi familia de Saltillo, cuya extensión me impide mencionar a cada uno de los miembros.

Agradezco también a mis amigos y amigas: Iván, Diego, Carlos Eduardo, Ángela, Luis, Marco, Gibrán, Eduardo, Carla, Mariano, Fave, Ceci, Anaid, Moisés, Chester, Carlos y cualquier otro amigo o amiga que se me haya pasado nombrar.

Quiero agradecer a mis sinodales Ramón López, Octavio Castaños, Pablo Barberis y Shahen Hacyan por sus preguntas y comentarios interesantes.

Agradezco especialmente a mi director de tesis, Eduardo Nahmad, quien me motivó para estudiar este tema, me ayudó a elegir el área de la física a la que me quiero dedicar y me guió con paciencia y apoyo a lo largo de mi investigación.

Índice general

1. Introducción	1
2. Estados Cuánticos	5
2.1. Experimento de Stern-Gerlach	5
2.2. La mecánica cuántica en el espacio de Hilbert	7
2.3. El operador de densidad	14
2.4. Sistemas Compuestos	18
3. Enredamiento	21
3.1. Sistemas de dos niveles	22
3.2. La paradoja EPR	24
3.3. El teorema de Bell	26
3.4. Teleportación cuántica	29
3.5. Caracterización y cuantificación del enredamiento	30
4. Transformación relativista de los estados	35
4.1. Grupos y sus representaciones	36
4.2. Álgebras de Lie	39
4.3. Los grupos de Lorentz y Poincaré	42
4.4. Álgebra de Poincaré	44
4.5. Representaciones irreducibles de \mathcal{P}_+^\uparrow	47
4.6. Representaciones irreducibles de $SO(3)$	53
5. Sobre la invariancia relativista del enredamiento	59
5.1. Planteamiento del problema	59
5.2. Resultados	66
5.2.1. Partición A vs. B	67
5.2.2. Partición p vs. s	67
5.2.3. Partición 1 vs. 3	71
5.3. Estados invariantes	73
6. Conclusiones	77

A. Lema de Schur

81

B. $\sqrt{\delta}$

87

Capítulo 1

Introducción

La mecánica cuántica nos presenta una imagen del mundo físico totalmente apartada de las ideas clásicas. El mecanismo que rige el comportamiento de los sistemas microscópicos parece llamarnos a abandonar suposiciones antes consideradas naturales, como el determinismo de las leyes de la naturaleza, la realidad intrínseca e independiente del observador de las propiedades de los objetos y la imposibilidad de correlaciones no locales entre sistemas físicos.

El concepto de enredamiento cuántico se encuentra en el centro de la discusión sobre estas nuevas concepciones de la física, surgidas a raíz de los fenómenos que suceden a escalas atómicas. Es una propiedad que aparece en sistemas compuestos por dos o más partes cuando el estado global del sistema, es decir, el estado que comprende a todas las partes, es conocido pero el estado de cada una de las partes por separado no está definido de forma independiente. En un estado enredado el todo es más que la suma de sus partes. Esta característica, única en el modelo cuántico, es responsable de correlaciones que no aparecen en ningún sistema descrito por leyes clásicas y da lugar a las controversias antes mencionadas. También da pie al estudio de las enormes posibilidades que ofrece la mecánica cuántica para la transmisión y procesamiento de información, con la capacidad de realizar ciertas tareas con una eficiencia mucho mayor que cualquier sistema clásico conocido. Dichas posibilidades son la causa del nacimiento de una nueva teoría de la información, una teoría cuántica de la información.

Así, estudiar el enredamiento es fundamental por dos razones:

Uno: Es una de las ideas fundamentales para entender el mundo físico tal como nos lo describe la mecánica cuántica.

Dos: Es un recurso esencial para la transmisión y el procesamiento de información por medios cuánticos.

Todo proceso de información debe estar sustentado en una base física, en un sistema regido por ciertas leyes que permitan almacenar y procesar dicha información. De igual forma, todo estudio del enredamiento, ya sea como carácter fundamental o como

recurso para procesos informáticos, debe estar basado en las leyes físicas que gobiernan a los sistemas enredados, i.e., las leyes de la mecánica cuántica.

Por otro lado, las leyes cuánticas no son las únicas que rigen el comportamiento de los sistemas físicos ni tampoco, en consecuencia, el de los procesos de información. También está la relatividad, cuyos principios dan estructura al conjunto de posibles eventos en el espacio-tiempo, imponiendo así restricciones físicas para el flujo de información entre distintos observadores. Desde un punto de vista más general, todo fenómeno físico es a la vez cuántico y relativista, de modo que es importante analizar los fenómenos relacionados con el enredamiento desde el marco de la teoría de la relatividad.

El tema de este trabajo se encuentra en la interfase entre la relatividad especial y la teoría de la información cuántica. En particular, nos enfocamos en estudiar cómo cambia el enredamiento, que es un fenómeno cuántico, ante transformaciones entre sistemas inerciales, que están regidas por los principios de la relatividad especial. En concreto, consideramos el enredamiento de un sistema de dos partículas masivas de espín 1 antes y después de una transformación de Lorentz. Tomamos el espín y el momento como los grados de libertad del sistema y calculamos el cambio en el enredamiento del mismo con respecto a los diferentes grados de libertad, es decir, con respecto a diferentes particiones del espacio de estados. Consideramos diferentes casos de enredamiento de espín y de momento como estados iniciales y analizamos en qué casos el enredamiento es una cantidad invariante ante transformaciones de Lorentz. Mostramos que el enredamiento no se conserva para cualquier partición. A pesar de esto, el enredamiento asociado con los espacios asociados a diferentes partículas sí es invariante ante transformaciones de Lorentz, de modo que los resultados de experimentos que involucran parejas de partículas enredadas, como el de las desigualdades de Bell, tienen un significado independiente del observador, tal como lo requiere el principio de relatividad.

La estructura del trabajo es la siguiente: El capítulo 2 está dedicado a las nociones básicas de la teoría cuántica con el fin de introducir al lector al estudio de sistemas cuánticos compuestos. Se presenta el formalismo de la teoría en términos de vectores y operadores lineales en espacios de Hilbert. También se demuestran resultados básicos de operadores que se usan posteriormente en el trabajo. Al final del capítulo se definen los conceptos de matriz de densidad y matriz de densidad reducida. Todo esto con el fin de estudiar el enredamiento desde el punto de vista de la teoría de la información cuántica.

El capítulo 3 está enfocado en el enredamiento. Primero se presenta y se discute la definición matemática del concepto para después analizar una de las consecuencias más importantes de este fenómeno: la no localidad de la mecánica cuántica. En este análisis se presentan y se discuten los teoremas de Einstein-Podolsky-Rosen y de Bell, que son los dos parteaguas del estudio moderno de los fundamentos de la mecánica cuántica. Posteriormente se presenta un protocolo de teleportación cuántica como motivación para el estudio del enredamiento y finalmente se discuten los problemas y las ideas relacionadas con la cuantificación de dicha propiedad.

En el capítulo 4 se estudia la transformación relativista de los estados cuánticos. Se introducen las ideas principales de la teoría de los grupos de Lie y se estudia el caso particular del grupo propio y ortócrono de Poincaré \mathcal{P}_+^\uparrow . Se encuentran las representaciones irreducibles de \mathcal{P}_+^\uparrow en términos del “grupo pequeño de Wigner”. En vez de tomar el enfoque de teoría cuántica de campos, se analiza la transformación del estado de una partícula con grados de libertad de espín y momento. Dicho análisis se restringe al caso de partículas con masa, cuyo grupo pequeño es el grupo de rotaciones $SO(3)$. Por esta razón se presentan también las representaciones irreducibles de este último grupo.

Finalmente, en el capítulo 5 se aplica todo lo visto en los capítulos anteriores para discutir el cambio en el enredamiento de un par de partículas masivas con espín 1. Se calcula el cambio en el enredamiento para diferentes parametrizaciones de estados iniciales y distintas particiones del espacio de Hilbert. Se pone especial atención en los estados cuyo cambio en enredamiento es cero. En el apartado final se presentan las conclusiones.

Capítulo 2

Estados Cuánticos

En este capítulo presentaremos los principios fundamentales de la teoría cuántica y ponemos especial énfasis en el formalismo del operador de densidad y en el tratamiento de sistemas compuestos.

Supongamos que tenemos un sistema físico S , el cual queremos describir de la manera más completa posible. La teoría física que se usa para resolver este problema dependerá de las características de S ; pero en todos los casos tendremos como solución un objeto matemático f tal que todas las cantidades físicas relevantes de S puedan ser calculadas a partir de éste.

Por ejemplo, si tenemos un sistema mecánico-clásico, f consiste en todas las posiciones de todas las partículas del sistema como función del tiempo. Si conocemos f y las masas de cada partícula podemos predecir, para cualquier instante de tiempo, el valor de todas las cantidades físicas de S (energía, momento lineal, momento angular, etc.). Como esta función contiene toda la información relevante del sistema, decimos que f representa un estado de S o que *S se encuentra en el estado f .*

Si el sistema es “pequeño” -en un sentido que quedará claro más adelante- su estudio entra en el dominio de la mecánica cuántica. En este caso también existe un objeto matemático que juega el papel de f , pero su relación con el mundo físico es más indirecta y compleja que en el caso anterior.

2.1. Experimento de Stern-Gerlach

Como motivación física para presentar el formalismo matemático de la mecánica cuántica discutiremos de forma breve el experimento de Stern-Gerlach, uno de los experimentos de mayor importancia histórica para el desarrollo de esta teoría. El lector puede encontrar una exposición detallada del tema en [16]. Para nuestros propósitos, lo único importante es saber que cuando un haz de átomos atraviesa un campo magnético inhomogéneo, se divide en conjuntos discretos de haces menos intensos, alineados en la dirección del campo. La intensidad relativa de los haces producidos no es siempre la

misma, depende de las condiciones iniciales del experimento. Este desdoblamiento del haz se debe a que las partículas poseen un momento magnético intrínseco μ , proporcional a un momento angular intrínseco \mathbf{S} , llamado espín. En presencia de un campo magnético \mathbf{B} , los átomos sufren la acción de una fuerza $\mathbf{F} = \nabla (\mu \cdot \mathbf{B})$, responsable de la ramificación del rayo de átomos. Como el haz se parte en conjuntos discretos en vez de en un continuo, se concluye que la orientación del espín atómico está cuantizada. Al número de partes n en las que se divide el haz se le asocia un espín total S , dado por $S = (n - 1)/2$. Se dice entonces que un sistema de espín total S tiene un conjunto de $n = 2S + 1$ proyecciones o estados de espín, denotadas por $\{m_s\}_{s=1}^n$. Si se hace pasar una de las ramas del haz original por otro campo magnético con las mismas características, no se obtienen nuevas ramificaciones. Dicho de otra manera, cuando separamos una de las ramas del rayo original, el nuevo conjunto de átomos queda fijo en una de las proyecciones de espín correspondiente a uno de los valores m_s .

Para describir este fenómeno de manera cuantitativa se pueden formular varias hipótesis. Una posibilidad es suponer que cada una de las n ramas antes mencionadas se relaciona con un cierto número de partículas que tienen una proyección de momento angular definida. De esta forma, la zona en la que se detecta a cada partícula se determina por la interacción entre su momento magnético y el campo. Según este modelo, la intensidad relativa de los haces producidos está dada por el número de átomos en cada estado de espín. Por lo tanto, de acuerdo con esta hipótesis, *el conjunto completo de átomos se encuentra parte en el estado m_1 , parte en el estado m_2 , etc.*

Sin embargo, esta idea no es adecuada para explicar todos los detalles del experimento. Si rotamos la dirección del campo magnético sin alterar la fuente de átomos, el desdoblamiento del haz ocurre otra vez a lo largo de las líneas de B , sin importar el ángulo de rotación. Esto contradice la suposición anterior, en la cual cada átomo tiene un momento magnético bien definido. Por otro lado, podríamos pensar que el fenómeno depende de cierta interacción entre las partículas, sin embargo, al disminuir la intensidad del haz de forma que sólo pase un átomo a la vez por el campo magnético, detectamos cada átomo de manera aleatoria a lo largo de B , pero cuando analizamos el patrón producido por todos los átomos, enviados uno por uno, recuperamos los mismos resultados que con todas las partículas juntas. En vista de estos hechos experimentales la hipótesis anterior parece difícil de sostener.

Por otro lado, la mecánica cuántica ofrece una explicación al experimento de Stern-Gerlach a través del llamado **principio de superposición**. En vez de considerar al conjunto completo de átomos como una mezcla de estados, se postula que *cada partícula se encuentra parte en el estado m_1 , parte en el estado m_2 , etcétera*. Así, un átomo dado tiene cierta probabilidad de desviarse por cada una de las n ramas, dependiendo del peso que tiene cada proyección de espín en la superposición. Entonces, las intensidades relativas de los haces producidos por el campo magnético están dadas por las probabilidades asociadas a cada estado. En el momento en que una partícula interactúa con el campo magnético, su estado cambia de una superposición general al estado de proyección de espín correspondiente a la rama del haz en que se encuentre. De esta forma podemos interpretar al campo magnético como un aparato que mide la

proyección de espín de los átomos, pero debemos notar que el estado del sistema cambia de forma drástica después de la medición. Como en este experimento no podemos despreciar el efecto de la observación, decimos que el sistema bajo estudio es “pequeño”.

Con este contexto podemos presentar ahora el formalismo de la Teoría Cuántica de una forma más cercana a los fenómenos que suceden en el laboratorio.

2.2. La mecánica cuántica en el espacio de Hilbert

Los estados cuánticos se representan por vectores en un espacio de Hilbert \mathcal{H} sobre \mathbb{C} . Así, el objeto matemático que contiene toda la información relevante del sistema es un vector y el principio de superposición se traduce en combinaciones lineales en \mathcal{H} . Por definición, un **espacio de Hilbert** es un espacio vectorial con un producto interno definido, en donde toda sucesión de Cauchy converge dentro del espacio. En el caso de un espacio vectorial sobre \mathbb{C} , el **producto interno** es una función

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C},$$

tal que a cada par de vectores ϕ y ψ en \mathcal{H} le asocia un número $\langle \psi | \phi \rangle \in \mathbb{C}$ con las siguientes propiedades:

- (i) $\langle \phi | \psi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle^*$,
- (ii) $\langle \phi | a\psi + b\chi \rangle = a\langle \phi | \psi \rangle + b\langle \phi | \chi \rangle$ para todo a y $b \in \mathbb{C}$,
- (iii) $\langle \phi | \phi \rangle \geq 0$ y $\langle \phi | \phi \rangle = 0 \Leftrightarrow \phi = 0$.

Dado un espacio de Hilbert \mathcal{H} , definimos su **espacio dual** \mathcal{H}^* como el espacio vectorial de todas las funciones lineales de \mathcal{H} en \mathbb{C} . La estructura de espacio vectorial de \mathcal{H}^* es fácil de comprobar. Por el conocido *Teorema de representación de Riesz*, para cada vector dual $f \in \mathcal{H}^*$ existe un vector ϕ en \mathcal{H} tal que $f(\psi) = \langle \phi | \psi \rangle$, para todo ψ en \mathcal{H} . Ésto nos da la oportunidad de interpretar la expresión $\langle \phi | \psi \rangle$ de dos maneras distintas: La primera es como el producto escalar de los vectores ϕ y ψ y la segunda como la función lineal f actuando sobre ψ . Si denotamos al vector ψ por el **ket** $|\psi\rangle$ y a la función f por el **bra** $\langle \phi|$, entonces podemos referirnos a ambas cosas de manera indistinguible con la notación $\langle \phi | \psi \rangle$.

Una vez definido el objeto matemático que contiene toda la información del sistema, necesitamos una manera de relacionarlo con las cantidades físicas que describen los fenómenos. Es decir, debemos tener una manera de operar sobre $|\psi\rangle$ y obtener información acerca del estado. Esto se hace a partir de **operadores lineales**, i.e., funciones

$$A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

que actúan linealmente para todo $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. De aquí en adelante cada vez que mencionemos operadores nos referiremos a operadores lineales. Denotamos la acción del operador \mathcal{A} sobre $|\psi\rangle$ de dos maneras equivalentes:

$$\mathcal{A}|\psi\rangle \equiv |\mathcal{A}\psi\rangle.$$

De esta forma, el bra asociado al ket $|\mathcal{A}\psi\rangle$ es $\langle\mathcal{A}\psi|$.

Los operadores lineales más importantes en mecánica cuántica son de dos tipos: los operadores autoadjuntos y los operadores unitarios. Para definirlos primero necesitamos el **operador adjunto** de \mathcal{A} :

$$\mathcal{A}^\dagger : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H},$$

definido por

$$\langle\phi|\mathcal{A}\psi\rangle = \langle\mathcal{A}^\dagger\phi|\psi\rangle, \quad (2.1)$$

o en una notación equivalente,

$$\langle\phi|\mathcal{A}|\psi\rangle = \langle\psi|\mathcal{A}^\dagger|\phi\rangle^*.$$

Un operador se llama **autoadjunto** si

$$\langle\phi|\mathcal{A}|\psi\rangle = \langle\psi|\mathcal{A}^\dagger|\phi\rangle^* = \langle\psi|\mathcal{A}|\phi\rangle^* \quad (2.2)$$

para todo ϕ y $\psi \in \mathcal{H}$ y los dominios de \mathcal{A} y \mathcal{A}^\dagger coinciden. Un operador que es igual a su adjunto pero cuyo dominio no necesariamente coincide con el de este último se llama operador **hermítico**. En este trabajo usaremos los términos hermítico y autoadjunto de forma indistinta. En el formalismo de la mecánica cuántica, las cantidades físicas o variables dinámicas son llamadas **observables** y corresponden a operadores autoadjuntos en \mathcal{H} tales que sus vectores propios forman una base ortonormal del espacio. Los valores propios de estos operadores son las variables medidas en el laboratorio. En el caso del experimento de Stern-Gerlach, visto en la sección anterior, la cantidad física medida es la orientación del espín de los átomos a lo largo del campo magnético, de modo que existe un operador autoadjunto asociado a la proyección de espín y sus valores propios son las diferentes orientaciones posibles de dicha observable.

Una de las propiedades más importantes de los operadores autoadjuntos es que su **espectro**, i.e., el conjunto de sus valores propios, es un subconjunto de \mathbb{R} . Para demostrarlo, sea $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operador autoadjunto y sea λ un valor propio de \mathcal{A} con vector propio normalizado $|\psi\rangle$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}|\psi\rangle &= \lambda|\psi\rangle, \\ \langle\psi|\psi\rangle &= 1. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\lambda = \lambda\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\mathcal{A}\psi\rangle = \langle\mathcal{A}^\dagger\psi|\psi\rangle = \langle\lambda\psi|\psi\rangle = \lambda^*,$$

como queríamos probar. Esta propiedad hace consistente el papel de este tipo de operadores como representantes de cantidades físicas.

Además, si ψ y ψ' son vectores propios de \mathcal{A} con valores propios distintos λ y λ' , respectivamente, entonces estos vectores son ortogonales:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \psi | \mathcal{A} \psi' \rangle - \langle \psi | \mathcal{A} \psi' \rangle \\ &= \langle \psi | \mathcal{A} \psi' \rangle - \langle \mathcal{A} \psi | \psi' \rangle \\ &= (\lambda' - \lambda) \langle \psi | \psi' \rangle \\ &\implies \langle \psi | \psi' \rangle = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, al elegir el conjunto de vectores propios normalizados de una observable \mathcal{A} como base de \mathcal{H} , tenemos automáticamente una base ortonormal. La interpretación física de esta propiedad quedará clara un poco más adelante.

Un operador autoadjunto especialmente importante es el **Hamiltoniano** H , que determina la evolución temporal de los estados cuánticos a través de la **ecuación de Schrödinger**:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle. \quad (2.3)$$

Por otro lado, un operador \mathcal{U} se llama **unitario** si preserva productos internos:

$$\langle \mathcal{U}\phi | \mathcal{U}\psi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}, \quad (2.4)$$

o

$$\langle \psi | \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle \implies \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} = \mathbb{1} \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}, \quad (2.5)$$

donde $\mathbb{1}$ representa el operador identidad. Los operadores unitarios representan transformaciones físicas de un sistema, e.g., rotaciones, traslaciones, etc. En los siguientes capítulos veremos la importancia de los operadores unitarios; por ahora nos basta estudiar su espectro, como se hizo con los operadores autoadjuntos.

Sea $\mathcal{U} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operador unitario y sea λ un valor propio de \mathcal{A} con vector propio normalizado $|\psi\rangle$. Como \mathcal{U} preserva productos internos,

$$|\lambda|^2 = \lambda \lambda^* \langle \psi | \psi \rangle = \langle \mathcal{U} \psi | \mathcal{U} \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1.$$

Entonces todos los valores propios de \mathcal{U} son de la forma e^{ia} , con $a \in \mathbb{R}$.

Otro resultado que requeriremos más adelante, cuando estudiemos grupos y álgebras de Lie, es el siguiente: Si H es un operador hermítico, entonces $U = e^{-iH} := \sum_k \frac{1}{k!} (iH)^k$ es un operador unitario. La demostración es sencilla. Como la operación de trasponer y conjugar se distribuye en sumas y productos de operadores, podemos escribir:

$$UU^\dagger = e^{-iH} (e^{-iH})^\dagger = e^{-iH} e^{iH} = e^{(-iH+iH)} = \mathbb{1}, \quad (2.6)$$

como queríamos probar.

Ahora que tenemos una correspondencia entre estados cuánticos y vectores, y entre cantidades físicas y operadores, necesitamos una manera de obtener predicciones experimentales a partir de estos objetos matemáticos. El producto interno nos da la relación entre los estados cuánticos y las probabilidades de medir ciertas observables.

De acuerdo con las leyes de la mecánica cuántica, si tenemos un sistema en el estado $|\psi\rangle$, la probabilidad de encontrarlo en el estado $|\phi\rangle$ al hacer una medición esta dada por

$$P(\phi)_\psi = |\langle\phi|\psi\rangle|^2. \quad (2.7)$$

Por esta razón, a la cantidad $\langle\phi|\psi\rangle$ se le llama **amplitud de probabilidad**.

Dado un sistema en el estado $|\psi\rangle$, la probabilidad de encontrarlo en el mismo estado $|\psi\rangle$ debe ser 1, de modo que los estados cuánticos corresponden a vectores normalizados

$$|\langle\psi|\psi\rangle|^2 = 1. \quad (2.8)$$

Si $|a_n\rangle$ es un vector propio de algún observable \mathcal{A} , con valor propio a_n , entonces la amplitud de probabilidad de medir la cantidad a_n en un estado $|\psi\rangle$ es la componente de $|\psi\rangle$ a lo largo de $|a_n\rangle$. Como los vectores $\{|a_n\rangle\}$ forman una base de \mathcal{H} , los resultados de los experimentos están condicionados a la base escogida para hacer las mediciones. Incluso si $|\psi\rangle$ no es un valor propio de \mathcal{A} , siempre que hagamos un experimento para medir dicha observable obtendremos algún valor propio a_n y encontraremos a $|\psi\rangle$ en el correspondiente estado $|a_n\rangle$. Este es probablemente el hecho más controversial de toda la mecánica cuántica y lo discutiremos a detalle en el capítulo siguiente. Por ahora baste decir que después de una medición en donde se obtiene el resultado a_n , el estado $|\psi\rangle$ se transforma en el estado $|a_n\rangle$. El hecho de que $|\psi\rangle$ no sea estado propio de \mathcal{A} se expresa sólo en la estadística de los resultados de la medición de \mathcal{A} en varios sistemas igualmente preparados en el estado $|\psi\rangle$. Entonces la observable \mathcal{A} no tiene un valor bien definido en este estado y sólo podemos hablar de su valor promedio, o valor esperado, que puede no coincidir con ninguno de los valores a_n . El **valor esperado** de \mathcal{A} en el estado $|\psi\rangle$ se define como

$$\langle\mathcal{A}\rangle_\psi = \langle\psi|\mathcal{A}|\psi\rangle. \quad (2.9)$$

Notemos que el valor esperado de cualquier observable en el estado representado por el vector $|\psi\rangle$ es igual al valor esperado en el estado representado por el vector $e^{i\delta}|\psi\rangle$, donde $\delta \in \mathbb{R}$. De esta forma ambos vectores son físicamente equivalentes y representan al mismo estado. Por esto se dice que en mecánica cuántica los estados están definidos hasta una fase global.

La imposibilidad de predecir con toda precisión el resultado de un experimento es una característica que diferencia a la mecánica cuántica de la mecánica clásica. Cuánticamente, sólo es posible predecir las mediciones experimentales de forma probabilística y, en general, los valores medidos de cualquier observable diferirán del valor esperado. La única excepción a este hecho se da cuando el estado en cuestión es un estado propio

de la observable que se desea medir. La **dispersión** $\Delta\mathcal{A}$ de la observable \mathcal{A} , definida por

$$\Delta\mathcal{A} = \sqrt{\langle(\mathcal{A} - \langle\mathcal{A}\rangle\mathbb{1})^2\rangle}, \quad (2.10)$$

representa una medida de la desviación de los resultados experimentales respecto a su valor esperado. Un estado tiene dispersión cero respecto a una observable \mathcal{A} si y sólo si es estado propio de \mathcal{A} . En caso contrario, se dice que la observable \mathcal{A} no tiene un valor bien definido en el sistema en cuestión, o que el estado bajo estudio no tiene la cantidad física \mathcal{A} bien definida. Si \mathcal{A} y \mathcal{B} son dos observables relevantes en el estudio de un sistema cuántico, entonces puede demostrarse que el producto de sus dispersiones está acotado inferiormente para cualquier estado:

$$\Delta\mathcal{A}\Delta\mathcal{B} \geq \frac{1}{2}|\langle[\mathcal{A}, \mathcal{B}]\rangle|, \quad (2.11)$$

donde $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] := \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$ es el **conmutador** de los operadores \mathcal{A} y \mathcal{B} . A este importante resultado se le conoce como **principio de incertidumbre**. Su demostración puede encontrarse en [31]. En otras palabras, el principio de incertidumbre afirma que existe un límite para la definición simultánea del valor de dos observables en un sistema cuántico. Si \mathcal{A} y \mathcal{B} conmutan, es decir, si $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = 0$, podemos encontrar estados para los cuales ambas observables tengan valores bien definidos. Más aún, si \mathcal{A} y \mathcal{B} conmutan, existe una base del espacio de Hilbert formada por vectores propios comunes a ambos operadores [34]. Este hecho es importante para rotular a los diferentes estados de un sistema de acuerdo con sus valores propios respecto a ciertos operadores. Como veremos en el capítulo 4, dichos rótulos o etiquetas guardan una relación con las propiedades de transformación de los estados ante un grupo de simetría.

Como los vectores propios de cualquier operador \mathcal{A} forman una base ortonormal de \mathcal{H} , podemos escribir cualquier vector como combinación lineal de dicha base, que supondremos consta de N elementos

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_n |a_n\rangle \langle a_n|\psi\rangle \\ &= \sum_n \psi_n |a_n\rangle \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde

$$\psi_n = \langle a_n|\psi\rangle. \quad (2.13)$$

De esta forma, la representación del vector $|\psi\rangle$ respecto a la base $\{|a_n\rangle\}$ es

$$|\psi\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Aquí usamos una flecha en vez de un signo de igual para enfatizar que ésta es sólo una representación, entre muchas posibles, de $|\psi\rangle$. Como la base es el conjunto de vectores propios de \mathcal{A} , decimos que $|\psi\rangle$ se encuentra en la representación dada por \mathcal{A} .

Si \mathcal{A} tiene un espectro continuo, $\{\xi\}$, con $\xi \in \mathbb{R}$, la representación de un estado $|\psi\rangle$ esta dada por una integral sobre el espectro de \mathcal{A} :

$$|\psi\rangle = \int d\xi |\xi\rangle\langle\xi|\psi\rangle. \quad (2.15)$$

En este caso, la condición de normalización se escribe

$$\langle\xi|\xi'\rangle = \delta(\xi - \xi'), \quad (2.16)$$

donde $\delta(\xi - \xi')$ es la función delta de Dirac, definida por la propiedad

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - a) f(x) = f(a)^1. \quad (2.17)$$

Un operador especialmente importante en este trabajo es el operador de cuadrimomento P^μ , el cual tiene un conjunto de vectores propios $\{|p\rangle\}$,

$$P^\mu |p\rangle = p^\mu |p\rangle, \quad (2.18)$$

que forma una base continua del espacio de momentos \mathcal{H}_p . En términos de teoría de grupos, la cual estudiaremos brevemente en el capítulo 3, el operador de cuadrimomento se conoce como el generador de translaciones espaciotemporales. En este trabajo nos concentraremos en el caso de partículas libres, las cuales tienen una invariancia translacional y por tanto un momento conservado. Como una partícula libre puede tener un momento espacial apuntando en cualquier dirección y una energía variando en un rango continuo de valores, el espectro del operador P^μ es un conjunto continuo. Los valores propios posibles de P^μ dependen del tipo de sistema bajo estudio, por ejemplo, los fotones viajan siempre a la velocidad de la luz c , mientras que las partículas masivas pueden tener cualquier velocidad $0 \leq v < c$. De esta forma, el espectro de P^μ se divide en familias de conjuntos continuos. Como veremos más adelante, dichos conjuntos nos servirán para clasificar a las diferentes partículas de acuerdo con sus propiedades de transformación ante el grupo de Poincaré.

También podemos expresar los operadores en términos de una base particular. Si \mathcal{H} es un espacio de Hilbert de dimensión N y $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$ es una base de \mathcal{H} , entonces, por la ecuación 2.12, la acción de un operador cualquiera \mathcal{B} sobre $|\psi\rangle$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{B}|\psi\rangle &= \sum_{i,j} |a_i\rangle\langle a_i|\mathcal{B}|a_j\rangle\langle a_j|\psi\rangle \\ &= \sum_{i,j} |a_i\rangle\mathcal{B}_{ij}\langle a_j|\psi\rangle \end{aligned}$$

¹En un sentido estricto, la delta de Dirac no es una función sino una distribución, esto es, un funcional lineal que asocia escalares a funciones en un cierto espacio. Un tratamiento de la delta de Dirac en términos de distribuciones puede encontrarse en [34].

donde a los números

$$\mathcal{B}_{ij} = \langle a_i | \mathcal{B} | a_j \rangle \quad (2.19)$$

se les llama **elementos de matriz** de \mathcal{B} respecto de la base $\{|a_i\rangle\}$. En esta base, \mathcal{B} tiene la siguiente representación matricial:

$$\mathcal{B} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11} & \mathcal{B}_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathcal{B}_{1N} \\ \mathcal{B}_{21} & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \mathcal{B}_{N1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathcal{B}_{NN} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Dados dos vectores $|\phi\rangle$ y $|\psi\rangle$ podemos formar, además de su producto interior, el producto exterior $|\phi\rangle\langle\psi|$, que es un operador en \mathcal{H} :

$$\begin{aligned} |\phi\rangle\langle\psi| : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ |\chi\rangle &\longmapsto |\phi\rangle\langle\psi|\chi\rangle. \end{aligned}$$

En vista de esto se puede interpretar la ecuación 2.12 en términos de un operador actuando sobre el vector de estado:

$$\left(\sum_n |n\rangle\langle n| \right) |\psi\rangle = |\psi\rangle.$$

Como $|\psi\rangle$ es un vector cualquiera, el conjunto de vectores propios de un operador hermitiano cumple la llamada relación de completitud

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}. \quad (2.21)$$

Un operador de la forma $|\phi\rangle\langle\phi|$ se llama operador de proyección ya que al actuar sobre un estado cualquiera $|\psi\rangle$ nos da la proyección de $|\psi\rangle$ a lo largo del subespacio generado por $|\phi\rangle$. En términos más precisos, un **operador de proyección** es una función $P_s : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ que satisface $P_s^2 = P_s$. De esta forma, P_s le asocia a cualquier $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ su componente en el subespacio s . Por la ecuación 2.7 sabemos que las componentes de un vector a lo largo de otro son las amplitudes de probabilidad, de modo que parece plausible usar proyectores para calcular probabilidades. La manera de hacer esto es calculando el valor esperado de $|\phi\rangle\langle\phi|$ en el estado $|\psi\rangle$ o, de igual forma, el valor esperado de $|\psi\rangle\langle\psi|$ en el estado $|\phi\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle |\psi\rangle\langle\psi| \rangle_\phi &= \langle \phi | \psi \rangle \langle \psi | \phi \rangle \\ &= |\langle \phi | \psi \rangle|^2, \end{aligned}$$

que coincide con la fórmula dada para la probabilidad en la ecuación 2.7. Así se unifican las ecuaciones 2.7 y 2.9 bajo un mismo formalismo: La probabilidad $P(\phi)_\psi$ es igual al valor esperado del operador $|\psi\rangle\langle\psi|$ en el estado $|\phi\rangle$. Incluso es posible extender el formalismo todavía más. Si \mathcal{A} es una observable cualquiera y $\{|\psi_i\rangle\}$ es una base de \mathcal{H} , el valor esperado de \mathcal{A} para el estado $|\psi\rangle$ se obtiene tomando la **traza** del operador $\mathcal{A}|\psi\rangle\langle\psi|$, es decir, sumando sobre todos los elementos diagonales de este operador:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathcal{A}|\psi\rangle\langle\psi|) &= \sum_i \langle\psi_i|\mathcal{A}|\psi\rangle\langle\psi|\psi_i\rangle \\ &= \sum_i \langle\psi|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\mathcal{A}|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\mathcal{A}|\psi\rangle \\ &= \langle\mathcal{A}\rangle_\psi, \end{aligned}$$

donde en el penúltimo paso usamos la relación de completez y en el último paso usamos la definición del valor esperado dada en la ecuación 2.9. Esta fórmula incluye, obviamente, a los operadores de proyección. Así vemos que el operador $|\psi\rangle\langle\psi|$ contiene exactamente la misma información acerca del estado que el vector $|\psi\rangle$. Esta observación es clave para construir la representación de los estados cuánticos en su manera más general.

2.3. El operador de densidad

La noción de estado presentada en la sección anterior no es suficiente para describir todos los fenómenos en mecánica cuántica. Esto se debe a que a menudo debemos analizar sistemas acoplados a un ambiente, sobre el cual no se tiene conocimiento ni control, o a que a veces el sistema bajo estudio es una mezcla estadística que contiene varios estados. Consideremos por ejemplo un conjunto de átomos donde cada uno está en un estado definido, pero por lo menos dos átomos están en un estado diferente. No hay forma de representar este sistema con un único vector en \mathcal{H} (a cada estado diferente de la mezcla le corresponde un vector diferente). Como otro ejemplo, supongamos un sistema con un solo átomo acoplado a un campo magnético en el cual queremos describir el estado del átomo sin estudiar al campo. En este caso tendremos que ignorar una parte del sistema completo y por tanto debemos buscar una descripción estadística de nuestro átomo en donde se tome en cuenta nuestra ignorancia del entorno, i.e. del campo magnético. El lector puede pensar que estas situaciones son casos particulares de poca importancia teórica y que no merecen ser tomados en cuenta para una descripción fundamental de un estado cuántico; pero recordemos que la función de toda teoría física es hacer predicciones de experimentos y desde este punto de vista, todo sistema cuántico está acoplado con un aparato de medición, de modo que en un contexto experimental realista debemos considerar sistemas abiertos y describir nuestros estados de manera estadística.

En el último párrafo de la sección anterior vimos que el operador $|\psi\rangle\langle\psi|$ contiene exactamente la misma información que el vector $|\psi\rangle$. Ahora supongamos que nuestro sistema está constituido por una mezcla de estados $|\psi_i\rangle$ y que cada uno de ellos tiene un peso de probabilidad p_i dentro de la mezcla. En este caso el estado está descrito por el **operador de densidad** ρ :

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (2.22)$$

Nótese que los estados $|\psi_i\rangle$ no son necesariamente una base ortonormal de \mathcal{H} . Como todos los operadores que consideramos son lineales, las predicciones experimentales se calculan para un estado ρ de la misma forma que en la sección anterior:

$$\langle\mathcal{A}\rangle_\rho = Tr(\mathcal{A}\rho). \quad (2.23)$$

Si queremos saber la probabilidad de encontrar a ρ en un estado particular, simplemente usamos el operador de proyección correspondiente en lugar del operador \mathcal{A} .

Para que un operador de densidad ρ sea físicamente aceptable debe satisfacer las siguientes propiedades:

$$\rho = \rho^\dagger, \quad (2.24a)$$

$$Tr(\rho) = 1, \quad (2.24b)$$

$$\langle\psi|\rho|\psi\rangle \geq 0 \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}. \quad (2.24c)$$

Estas propiedades resultan obvias al darnos cuenta que los elementos de la diagonal de cualquier representación matricial de ρ son las probabilidades de encontrar al sistema en los estados base correspondientes a la representación dada. Como todas las probabilidades corresponden a números reales positivos, tenemos que $p_i = p_i^*$. De esta forma se cumple la primera propiedad. Como la suma de todas las probabilidades debe ser uno, se satisface la segunda propiedad. Si representamos a ρ en forma diagonal (esto es posible por definición de ρ), nos queda una matriz donde todos los valores propios son no-negativos. En este caso es fácil ver que para cualquier $|\psi\rangle$ arbitrario, el valor esperado $\langle\psi|\rho|\psi\rangle$ consiste en una suma de términos no-negativos, cumpliéndose así la tercera propiedad.

Un **estado puro** es un estado para el cual existe una base en la cual todas las probabilidades p_i en la ecuación 2.22 son cero excepto una. En caso contrario se tiene un **estado mixto**. Un criterio muy útil para distinguir un estado mixto de uno puro es el siguiente:

Un estado es mixto si $Tr(\rho^2) < 1$ y es puro si $Tr(\rho^2) = 1$. La demostración es sencilla. Si ρ representa un estado puro, entonces es un operador de proyección. Por definición, $\rho^2 = \rho$. Ahora supongamos que ρ es un estado mixto.

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

donde por lo menos dos probabilidades son distintas de cero. En general, $0 \leq p_i \leq 1$ para toda i , por tratarse de probabilidades. En este caso, como tenemos por lo menos dos valores diferentes de cero, podemos escribir una desigualdad estricta: $0 \leq p_i < 1$, para toda i . De esta forma $0 \leq p_i^2 < p_i$ para toda i . Por lo tanto,

$$0 < \sum_i p_i^2 < \sum_i p_i = 1,$$

como queríamos probar.

En la sección anterior vimos que a cada estado cuántico le corresponde un vector $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ (o más precisamente un conjunto de vectores relacionados por un factor de la forma $e^{i\delta}$). Lo opuesto también se cumple: Todo vector $|\psi\rangle$ en \mathcal{H} tiene asociado un estado. En el caso de las matrices de densidad podemos decir algo análogo: Cualquier matriz con las propiedades 2.24 es una matriz de densidad asociada con un estado. Llamamos M al conjunto de todas las matrices de densidad. En particular, si ρ_1 y ρ_2 son elementos de M , entonces el operador $\rho = \lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2$, con $0 \leq \lambda \leq 1$, también cumple las propiedades 2.24 y es un operador de densidad. Una interpretación geométrica de este hecho es que el segmento de recta que une a cualesquiera dos elementos de M es un subconjunto de M . Los conjuntos con esta propiedad se llaman conjuntos **convexos**. En un conjunto convexo, una superposición de la forma 2.22 con la condición $Tr(\rho) = 1$ se llama **combinación convexa**. Se puede probar (véase [6]) que cada elemento de un conjunto convexo, en este caso M , tiene una descomposición en forma de combinación convexa. Sin embargo, esta descomposición sólo es única en el caso de los estados puros. Esta observación tiene relevancia física ya que un estado mixto puede ser visto como una mezcla estadística (combinación convexa) de más de un conjunto de estados puros. Podemos ver esto con el siguiente ejemplo:

Sea $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. Consideremos dos bases ortonormales de este espacio

$$\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$$

y

$$\{|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle\},$$

donde

$$|\chi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle),$$

$$|\chi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle).$$

Es fácil verificar que las matrices de densidad

$$\rho_\psi = \frac{1}{2}|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \frac{1}{2}|\psi_2\rangle\langle\psi_2|$$

y

$$\rho_\chi = \frac{1}{2}|\chi_1\rangle\langle\chi_1| + \frac{1}{2}|\chi_2\rangle\langle\chi_2|$$

son iguales. De esta forma, tenemos un estado mixto que puede ser considerado como una mezcla estadística de los estados $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ y de los estados $|\chi_1\rangle$, y $|\chi_2\rangle$ al mismo tiempo.

Aunque un estado mixto no puede ser identificado con una única mezcla estadística de estados puros, es importante notar la diferencia entre una superposición estadística o clásica y una superposición cuántica. Volviendo al experimento de Stern-Gerlach, una superposición estadística de estados corresponde a la hipótesis en la cual cada átomo tiene un momento magnético bien definido. Vimos que esta hipótesis, aunque razonable, no era adecuada para describir los resultados del experimento cuando había una rotación en el campo magnético. Ahora usemos el formalismo de la matriz de densidad para encontrar las diferencias en las predicciones físicas asociadas a superposiciones clásicas y a superposiciones cuánticas.

Consideremos de nuevo nuestra base $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$ y los estados

$$|\psi\rangle = \alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle$$

y

$$\rho = |\alpha|^2|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\beta|^2|\psi_2\rangle\langle\psi_2|.$$

El primer estado es una superposición cuántica de los estados $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$, mientras que el segundo es una superposición clásica o una mezcla estadística de los mismos estados. La matriz de densidad asociada a $|\psi\rangle$ es

$$\rho_\psi = |\alpha|^2|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \alpha\beta^*|\psi_1\rangle\langle\psi_2| + \alpha^*\beta|\psi_2\rangle\langle\psi_1| + |\beta|^2|\psi_2\rangle\langle\psi_2|.$$

La diferencia entre ρ y ρ_ψ está en los elementos fuera de la diagonal, en las llamadas **coherencias**. Veremos que estos términos son los responsables de las diferencias físicas entre las superposiciones clásicas y cuánticas. Sea \mathcal{A} un operador cualquiera en nuestro espacio de dos dimensiones. En términos de la base $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$, la expresión general para \mathcal{A} es:

$$\mathcal{A} = a_{11}|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + a_{12}|\psi_1\rangle\langle\psi_2| + a_{21}|\psi_2\rangle\langle\psi_1| + a_{22}|\psi_2\rangle\langle\psi_2|.$$

El valor esperado de \mathcal{A} en el estado mixto ρ es

$$\begin{aligned} \langle\mathcal{A}\rangle_\rho &= \text{Tr}(\mathcal{A}\rho) \\ &= a_{11}|\alpha|^2 + a_{22}|\beta|^2, \end{aligned}$$

mientras que para el estado puro ρ_ψ tenemos

$$\begin{aligned} \langle\mathcal{A}\rangle_{\rho_\psi} &= \text{Tr}(\mathcal{A}\rho_\psi) \\ &= a_{11}|\alpha|^2 + a_{22}|\beta|^2 + a_{12}\alpha^*\beta + a_{21}\alpha\beta^*. \end{aligned}$$

Esto prueba que, en general, la física es distinta entre superposiciones clásicas y cuánticas. Nótese que si \mathcal{A} es diagonal en la base $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$, entonces las predicciones experimentales de mezclas estadísticas son iguales a las de superposiciones cuánticas. En

el experimento de Stern-Gerlach, la aparición de términos fuera de la diagonal en \mathcal{A} corresponde, dicho de forma poco precisa, a rotar el campo magnético, de modo que los efectos cuánticos se hagan evidentes.

Para concluir esta sección veamos la evolución temporal del operador de densidad. Tomando el dual de la ecuación de Schrödinger 2.3 llegamos a

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi | = \langle \psi | H,$$

de modo que al derivar respecto al tiempo el operador de densidad $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \left(\frac{d}{dt}|\psi\rangle\right)\langle\psi| + |\psi\rangle\left(\frac{d}{dt}\langle\psi|\right) \\ &= -\frac{i}{\hbar} (H|\psi\rangle\langle\psi| - |\psi\rangle\langle\psi|H) \\ &= -\frac{i}{\hbar} [H, \rho]. \end{aligned}$$

Llegamos a este resultado partiendo de un estado puro, pero por linealidad sabemos que la conclusión es válida para un estado general ρ . De esta forma, la ecuación de evolución para la matriz de densidad es

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho = [H, \rho]. \quad (2.25)$$

2.4. Sistemas Compuestos

Hasta ahora hemos considerado únicamente sistemas de una sola parte. El enredamiento cuántico, tema central de este trabajo, se da en sistemas compuestos. Por esta razón, en esta sección discutimos el formalismo utilizado para la descripción de sistemas conformados por dos o más partes.

Supongamos un sistema cuántico A con un espacio de Hilbert $\mathcal{H}^{(A)}$ y un sistema B con un espacio de Hilbert $\mathcal{H}^{(B)}$. Sean N_A y N_B las dimensiones de $\mathcal{H}^{(A)}$ y $\mathcal{H}^{(B)}$, respectivamente. El sistema compuesto AB que consta de los subsistemas A y B tiene un espacio de Hilbert $\mathcal{H}^{(AB)}$, dado por el **producto tensorial** de los espacios $\mathcal{H}^{(A)}$ y $\mathcal{H}^{(B)}$:

$$\mathcal{H}^{(AB)} = \mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}. \quad (2.26)$$

Una forma de definir este espacio producto es la siguiente²:

Si $\{|\psi_i^{(A)}\rangle\}$ y $\{|\psi_j^{(B)}\rangle\}$ son bases de $\mathcal{H}^{(A)}$ y $\mathcal{H}^{(B)}$, respectivamente, entonces $\mathcal{H}^{(AB)}$ es el espacio generado por vectores de la forma $|\psi_i^{(A)}\rangle \otimes |\psi_j^{(B)}\rangle$, donde i y j están sujetos a las dimensiones de los espacios correspondientes, es decir, $0 \leq i \leq N_A$ y $0 \leq j \leq N_B$. De aquí en adelante la notación $|\Psi\rangle = |\psi^{(A)}\rangle \otimes |\phi^{(B)}\rangle$ se refiere a un vector

²Para una definición formal e independiente de cualquier base de un producto tensorial de espacios vectoriales, consúltese [34].

$|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^{(AB)}$ conformado por $|\psi^{(A)}\rangle \in \mathcal{H}^{(A)}$ y $|\phi^{(B)}\rangle \in \mathcal{H}^{(B)}$. Este producto tensorial de estados también se suele escribir como $|\Psi\rangle = |\psi^{(A)}, \phi^{(B)}\rangle$. Aunque en este análisis sólo consideramos sistemas bipartitas, i.e., de dos componentes, la generalización para sistemas con un número arbitrario de partes es directa.

El producto interno en $\mathcal{H}^{(AB)}$ está definido como

$$\left(\langle\psi^{(A)}|\otimes\langle\psi^{(B)}|\right)\left(|\chi^{(A)}\rangle\otimes|\chi^{(B)}\rangle\right)=\langle\psi^{(A)}|\chi^{(A)}\rangle\langle\psi^{(B)}|\chi^{(B)}\rangle \quad (2.27)$$

y se extiende por linealidad.

Los operadores en $\mathcal{H}^{(AB)}$ son combinaciones lineales de productos tensoriales de la forma:

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}^{(A)}\otimes\mathcal{A}^{(B)}, \quad (2.28)$$

donde

$$\mathcal{A}^{(A)}:\mathcal{H}^{(A)}\longrightarrow\mathcal{H}^{(A)}$$

y

$$\mathcal{A}^{(B)}:\mathcal{H}^{(B)}\longrightarrow\mathcal{H}^{(B)}.$$

Su acción sobre vectores en $\mathcal{H}^{(AB)}$ se define como

$$\mathcal{A}^{(A)}\otimes\mathcal{A}^{(B)}(|\psi^{(A)}\rangle\otimes|\phi^{(B)}\rangle)=(\mathcal{A}^{(A)}|\psi^{(A)}\rangle)\otimes(\mathcal{A}^{(B)}|\phi^{(B)}\rangle). \quad (2.29)$$

Un estado $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^{(AB)}$ se llama **estado separable** o **estado producto** si existen $|\psi^{(A)}\rangle$ y $|\psi^{(B)}\rangle$ tales que

$$|\Psi\rangle=|\psi^{(A)}\rangle\otimes|\psi^{(B)}\rangle \quad (2.30)$$

En caso de no existir dichos vectores se dice que $|\Psi\rangle$ es un **estado enredado**. Si tenemos sistemas descritos por matrices de densidad en vez de por vectores, un estado separable es aquel que se puede escribir como

$$\rho=\sum_i p_i|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|, \quad (2.31)$$

donde cada $|\Psi_i\rangle$ es un estado producto en el sentido de la ecuación 2.30.

A menudo nos encontramos con un sistema compuesto del cual sólo nos interesa una de las partes, pero su descripción adecuada debe incluir también al subsistema no relevante. Supongamos que el sistema que queremos estudiar es A y queremos descartar la información relacionada con el subsistema B . En concreto, nos interesa calcular el valor esperado de operadores de la forma $\mathcal{A}=\mathcal{A}^{(A)}\otimes\mathbb{1}$. El valor esperado de \mathcal{A} en un

estado general ρ está dado por

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{A} \rangle_\rho &= Tr \left((\mathcal{A}^{(A)} \otimes \mathbb{1}) \rho \right) \\
 &= \sum_{ij} \langle \psi_i^{(A)}, \psi_j^{(B)} | (\mathcal{A}^{(A)} \otimes \mathbb{1}) \rho | \psi_i^{(A)}, \psi_j^{(B)} \rangle \\
 &= \sum_i \langle \psi_i^{(A)} | \mathcal{A}^{(A)} \left(\sum_j \langle \psi_j^{(B)} | \rho | \psi_j^{(B)} \rangle \right) | \psi_i^{(A)} \rangle \\
 &= \sum_i \langle \psi_i^{(A)} | \mathcal{A}^{(A)} \rho^{(A)} | \psi_i^{(A)} \rangle.
 \end{aligned}$$

Aquí hemos definido la **traza parcial** del operador ρ como

$$\begin{aligned}
 \rho^{(A)} &= \sum_j \langle \psi_j^{(B)} | \rho | \psi_j^{(B)} \rangle \\
 &= Tr_B (\rho).
 \end{aligned}$$

A la matriz $\rho^{(A)}$ también se le llama **matriz de densidad reducida** en el subespacio \mathcal{H}_A [11]. De esta manera, se estudia al subsistema A descartando al subsistema B a través de la matriz de densidad reducida $\rho^{(A)}$.

Con esto terminamos de presentar el formalismo básico para tratar sistemas compuestos. En el capítulo siguiente veremos la relación entre las propiedades de las matrices de densidad reducidas y el enredamiento cuántico.

Capítulo 3

Enredamiento

En este capítulo estudiaremos el concepto de enredamiento. Analizaremos algunas de sus consecuencias y aplicaciones más importantes, y presentaremos formas de cuantificarlo.

En el capítulo anterior vimos que un estado de un sistema bipartita con espacios de Hilbert $\mathcal{H}^{(A)}$ y $\mathcal{H}^{(B)}$ no siempre se puede escribir en la forma $|\Psi\rangle = |\psi^{(A)}\rangle \otimes |\psi^{(B)}\rangle$. Cuando esta descomposición no es posible tenemos un estado enredado. Si nuestro sistema tiene mas de dos partes, digamos N , un estado enredado es un estado que no puede ser escrito como producto tensorial de vectores en *cada uno* de los espacios que constituyen \mathcal{H} . En este caso, el espacio de Hilbert completo es un producto tensorial de más de dos espacios, que llamaremos **factores**:

$$\mathcal{H} = \underbrace{\mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)} \otimes \dots}_{N \text{ factores}}$$

El producto tensorial de dos o más espacios factores es un espacio de Hilbert. Consideremos un par de productos con K_1 y K_2 factores sujetos a la condición $K_1 + K_2 = N$. De esta forma el espacio de Hilbert completo se representa como un espacio bipartita:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}^{(A,B,\dots)} \otimes \mathcal{H}^{(C,D,\dots)} \\ &= \underbrace{\mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)} \otimes \dots}_{K_1 \text{ factores}} \otimes \underbrace{\mathcal{H}^{(C)} \otimes \mathcal{H}^{(D)} \otimes \dots}_{K_2 \text{ factores}} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{N \text{ factores}} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Llamamos **partición de \mathcal{H}** a una representación del espacio de Hilbert de la forma 3.1. En este trabajo consideramos espacios de Hilbert de más de dos factores, pero el enredamiento siempre se calcula en términos de sistemas bipartitas dados por diferentes particiones de \mathcal{H} .

Antes de ver cómo se cuantifica el enredamiento en sistemas bipartitas, veamos qué nos motiva a estudiar este concepto. Los estados enredados se relacionan con fenómenos que, por un lado, tienen gran importancia para la interpretación del mundo físico tal como lo describe la mecánica cuántica y, por otro lado, son de enorme utilidad para la transmisión y procesamiento de información por medios cuánticos. Los sistemas más sencillos en los cuales existen estados enredados son aquellos descritos por espacios de Hilbert de la forma $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Antes de estudiar dicho espacio, sin embargo, presentaremos de forma breve las definiciones y notación asociadas con el espacio simple \mathbb{C}^2 en el contexto de la información cuántica.

3.1. Sistemas de dos niveles

Todo sistema cuántico con dos grados de libertad discretos está asociado con un espacio de Hilbert de dos dimensiones complejas. Ejemplos de este tipo de sistemas son: partículas con espín $\frac{1}{2}$, fotones con información codificada en su polarización y átomos con dos niveles efectivos de energía, i.e., átomos bajo condiciones en las cuales sólo dos estados de energía se presentan. Es importante notar que todos estos sistemas poseen, además, otros grados de libertad como, por ejemplo, momento. La restricción al espacio de Hilbert de dos dimensiones se da ignorando el resto de los grados de libertad del sistema, es decir, tomando trazas parciales en la forma estudiada en el capítulo anterior. En muchos de los experimentos de información cuántica, dicha restricción no presenta ningún problema y el resto de los grados de libertad ni siquiera aparece en el análisis del estado. Sin embargo, cuando se estudia el efecto de transformaciones de Lorentz sobre estados cuánticos, como es el caso en este trabajo, resulta imposible separar los grados de libertad discretos de los continuos. Las consecuencias de este hecho se estudiarán más adelante; por ahora es suficiente presentar las nociones básicas de los estados de dos niveles.

La notación usual en información cuántica para una base en $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ es $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. A una base denotada de esta forma se le conoce como **base computacional**. Por convención, el estado $|0\rangle$ se define como el estado propio de σ_z con valor propio +1 y el estado $|1\rangle$ se define como el estado propio de σ_z con valor propio -1. Un estado general se escribe, respecto a esta base, como

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

y se le conoce como **q-bit**.

La observable más general que se puede construir en este espacio es una combinación lineal (real) de la identidad $\mathbb{1}$ y los **operadores de Pauli** σ_x , σ_y y σ_z . Estos operadores están definidos por la siguiente relación de conmutación:

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z, \tag{3.2}$$

junto con permutaciones cíclicas de (x, y, z) . A partir de la ecuación 3.2 se pueden calcular los valores propios de estos operadores. Para ver una derivación de esto, el

lector puede consultar textos de mecánica cuántica como [3, 31]. Como los vectores de la base computacional se consideran vectores propios de σ_z , los operadores de Pauli tienen la siguiente representación matricial respecto a esta base:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Nótese que los operadores de Pauli son hermíticos, unitarios y con traza cero. Forman, junto con la identidad, una base en el espacio vectorial de operadores en \mathbb{C}^2 . Si definimos un producto interno en dicho espacio, dado por $\langle A|B \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}(A^\dagger B)$, los operadores de Pauli, junto con la identidad, forman una base ortonormal.

En particular, cualquier matriz de densidad puede ser escrita como combinación lineal de esta base. Como los operadores de Pauli tienen traza cero y cualquier operador de densidad tiene traza uno, el coeficiente de la identidad es necesariamente un medio. De esta forma podemos escribir

$$\rho = \frac{1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\tau}}{2}. \quad (3.4)$$

En esta ecuación hemos definido $\vec{\sigma} := (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. Notemos también que, por la definición de valor esperado, las entradas del vector $\vec{\tau}$ son los valores esperados de los operadores de Pauli:

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \langle \sigma_x \rangle \\ \langle \sigma_y \rangle \\ \langle \sigma_z \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

A $\vec{\tau}$ se le conoce como **vector de Bloch**. El conjunto de todos los vectores de Bloch forma una esfera sólida en \mathbb{R}^3 , llamada **esfera de Bloch**. Para ver esto basta notar que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho^2) &= |\vec{\tau}|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\langle \sigma_x \rangle^2 + \langle \sigma_y \rangle^2 + \langle \sigma_z \rangle^2) \\ &\leq 1 \\ \implies |\vec{\tau}| &\leq 1. \end{aligned}$$

La primer desigualdad se sigue de que ρ es una matriz de densidad. Nótese que la condición $|\vec{\tau}| = 1$ es equivalente a tener un estado puro. Obviamente, un estado puro asociado al vector $\vec{\tau}$ es estado propio del operador $\vec{\sigma} \cdot \vec{\tau}$. Para encontrar dichos estados en la base computacional basta con parametrizar $\vec{\tau} = (\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta))$ y calcular los vectores propios del operador

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\tau} = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

El resultado es:

$$\begin{aligned} |0\rangle_{\vec{r}} &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle & \vec{\sigma} \cdot \vec{r} |0\rangle_{\vec{r}} &= |0\rangle_{\vec{r}} \\ |1\rangle_{\vec{r}} &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle - e^{i\phi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle & \vec{\sigma} \cdot \vec{r} |1\rangle_{\vec{r}} &= -|1\rangle_{\vec{r}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$(3.7)$$

De esta forma podemos visualizar a los estados de dos niveles como puntos en una esfera sólida en cuya superficie se encuentran los estados puros. Esto es consistente con la observación del capítulo anterior, en el cual se mencionó que todas las matrices de densidad forman un conjunto convexo.

3.2. La paradoja EPR

Ahora tenemos los elementos para estudiar el espacio $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Éste es el espacio más sencillo en el cual aparece el enredamiento cuántico y es suficiente para apreciar sus consecuencias más drásticas. En esta sección veremos una de estas consecuencias: la de la no-localidad de la mecánica cuántica.

La idea de no-localidad surge a raíz de un artículo publicado en 1935 por Albert Einstein, Boris Podolski y Nathan Rosen (EPR) [?]. En este trabajo los autores se proponen demostrar que la mecánica cuántica es una teoría incompleta. Aquí estudiaremos el argumento EPR aplicado a sistemas de dos niveles, tal como fue presentado por Bohm en 1951 [8].

Para este propósito, construyamos los estados enredados más prominentes de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$: los estados de Bell. La base computacional presentada en la sección anterior nos permite definir una base de $\mathcal{H} (= \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ de manera natural: simplemente tomamos todos los productos tensoriales de los elementos de la base computacional para obtener el conjunto $\{|0\rangle \otimes |0\rangle, |0\rangle \otimes |1\rangle, |1\rangle \otimes |0\rangle, |1\rangle \otimes |1\rangle\}$. Todos los elementos en esta base son estados separables.

Existe, sin embargo, otra opción de base de \mathcal{H} , formada por estados máximamente enredados. (El término máximamente quedará justificado más adelante, cuando veamos algunas maneras de cuantificar el enredamiento). Definimos los **estados de Bell**, $|\psi^\pm\rangle$ y $|\phi^\pm\rangle$, como

$$|\psi^\pm\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 1\rangle \pm |1, 0\rangle) \quad |\phi^\pm\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 0\rangle \pm |1, 1\rangle). \quad (3.8)$$

Es fácil comprobar que dichos estados son ortogonales entre sí y, por ser cuatro, forman una base de \mathcal{H} .

Ahora, como se mencionó en el capítulo anterior, al medir una observable en un sistema cuántico, éste queda definido en el estado correspondiente al valor propio obtenido en la medición. Dicho en otras palabras, el estado “colapsa” a uno de los estados propios de la observable. En el caso de los estados de Bell, el colapso se da no sólo en

uno de los subsistemas pertenecientes a $\mathcal{H}^{(A)}$ o $\mathcal{H}^{(B)}$, sino en el sistema compuesto, elemento de $\mathcal{H}^{(AB)}$. Por ejemplo, si tenemos un estado $|\phi^+\rangle$ y medimos la observable σ_z en el subsistema A , o mejor dicho, medimos la observable $\sigma_z^A \otimes \mathbb{1}$ en el sistema AB , el estado completo después de la medición será $|0, 0\rangle$, si el resultado de la medición es $+1$, y será $|1, 1\rangle$, si el resultado de la medición es -1 . De esta forma vemos que hay una correlación perfecta entre los resultados de mediciones en el sistema A y en el sistema B : si se mide un valor de $+1$ (-1) para σ_z en A , con toda certeza se tiene un valor de $+1$ (-1) para σ_z en B , y viceversa. Este tipo de correlaciones forma la base del argumento EPR, el cual explicamos a continuación.

Supongamos que dos observadores, Alicia y Beto, comparten un estado enredado $|\psi^-\rangle$, el cual consideraremos formado por un par de partículas con espín $\frac{1}{2}$. Asumimos que el espín de las dos partículas es la única cantidad física relevante en el sistema, de modo que podemos concentrarnos únicamente en el espacio $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Como hipótesis del experimento suponemos también que los sistemas de Alicia y Beto están espacialmente separados y que la acción de uno de los observadores en su sistema no interfiere en el sistema correspondiente al otro observador.

De entrada, por la forma del estado $|\psi^-\rangle$, tanto Alicia como Beto tienen una probabilidad de $\frac{1}{2}$ para medir el valor 1 o -1 de σ_z ; pero una vez que alguien, digamos Alicia, mide y obtiene un resultado, el estado en el subsistema del otro, Beto, queda definido. En todos los casos Beto debe medir el resultado opuesto al de Alicia. Esta anticorrelación no se da sólo para la observable σ_z , ya que el estado $|\psi^-\rangle$ tiene la misma forma en todas las bases formadas por estados separables y, en consecuencia, tenemos la misma situación física para cualquier otra dirección de espín (siempre y cuando ésta sea la misma en los dos subsistemas). En términos de teoría de grupos, se dice que $|\psi^-\rangle$ define un espacio invariante bajo el grupo $SU(2)$ y bajo su correspondiente álgebra $\mathfrak{su}(2)$, generada por las matrices de Pauli. De esta forma podemos generalizar la situación y hablar de mediciones de espín en direcciones arbitrarias.

El punto importante es que Beto, basándose en los resultados de Alicia, puede predecir con probabilidad igual a uno la orientación del espín de su partícula. Bajo este hecho parece razonable pensar que la orientación del espín de la partícula de Beto es una propiedad intrínseca de ésta, independiente de su interacción con algún aparato de medición e independiente también de la acción de Alicia sobre su parte del sistema. En el lenguaje de EPR, se dice que el espín de la partícula de Beto es un “elemento de realidad física” [?]. Pero Alicia puede medir la orientación del espín de su partícula en cualquier dirección sin perturbar, por hipótesis, el otro subsistema. Por lo tanto, la orientación del espín de la partícula de Beto es un elemento de realidad física para *todas* las direcciones.

Por otro lado, como hemos visto en el capítulo anterior, la mecánica cuántica dice que los valores correspondientes a observables que no conmutan no pueden estar bien definidos de manera simultánea. Este hecho llevó a EPR a concluir que la mecánica cuántica debía estar incompleta, ya que, de acuerdo con su concepto de realidad, existen elementos físicamente reales que no son descritos por la teoría.

Es importante notar aquí las dos consideraciones fundamentales que llevaron a

EPR a establecer su conclusión. La primera es su idea de realismo, en la cual las propiedades de los sistemas quedan determinadas en el momento de su preparación y son independientes de la interacción con un observador o aparato de medición. En el capítulo anterior nos encontramos con una discusión similar cuando analizamos el experimento de Stern-Gerlach. En ese caso se argumentó en contra de la idea de un momento magnético definido *a priori* diciendo que la dirección en la que se desvían las partículas es siempre paralela al campo magnético, sin importar rotaciones. Por otro lado, en el caso presente debemos también tomar en cuenta la perfecta anticorrelación entre los resultados de Alicia y Beto. Esto nos lleva a la segunda hipótesis fundamental del argumento EPR: la localidad. Los autores asumen de manera natural que cuando Alicia mide el espín de su partícula o, en general, interactúa con su parte del sistema, el otro subsistema, el de Beto, no se ve alterado. De esta forma, en el trabajo de E.P.R., la hipótesis de localidad se complementa con el postulado de realismo para explicar las correlaciones espacialmente separadas.

A pesar de que la idea de localidad en el mundo físico es totalmente razonable, se podría pensar que contradice el formalismo de la mecánica cuántica, en el cual una medición *local* en el sistema produce un cambio *global* en el vector de estado. En este sentido se dice que la mecánica cuántica es no-local. Es interesante notar que el cambio en el estado se da de manera instantánea en el espacio de Hilbert compuesto o, dicho de otra manera, el estado global se colapsa de forma simultánea a la medición de Alicia. Sin embargo, sabemos de la teoría de la relatividad especial que la noción de simultaneidad no está bien definida para observadores separados espacialmente, de modo que debemos analizar con cuidado esta situación cuando incluimos consideraciones relativistas.

En este punto es importante recordar la discusión del capítulo anterior acerca de la relación entre objetos físicos y modelos matemáticos que describen los fenómenos. El vector de estado, así como el espacio de Hilbert, son objetos matemáticos, herramientas teóricas introducidas con el objetivo de predecir los fenómenos microscópicos. Desde este punto de vista, no es posible considerar al vector de estado como un ente físico ni al colapso en el espacio de Hilbert como un evento en el espacio-tiempo, de modo que la noción de simultaneidad no tiene sentido en este caso. Aún así, es importante preguntarnos cuáles son las implicaciones de incluir la teoría de la relatividad en el análisis de procesos que involucran correlaciones cuánticas, con el fin de entender mejor la relación entre ambas teorías.

Este tipo de consideraciones son la motivación de este trabajo, en el cual nos restringimos, sin embargo, a calcular el cambio de enredamiento bajo transformaciones de Lorentz, sin estudiar la parte de mediciones en distintos marcos de referencia. El lector interesado puede consultar [11, 28].

3.3. El teorema de Bell

Otra posibilidad interesante es considerar la existencia de otras teorías que hagan las mismas predicciones que la mecánica cuántica desde un marco conceptual más afín

a nuestras ideas clásicas, i.e. una teoría local en la cual las cantidades físicas tengan realidad física, a pesar de que se les pueda predecir sólo con cierta probabilidad, tal como sucede en la mecánica estadística. El trabajo de EPR concluye con la propuesta de considerar una teoría que incluya otras variables, después llamadas **variables ocultas** por otros autores [4, 9], que restituyan la localidad y el realismo en la descripción de los fenómenos microscópicos. A este tipo de teorías se les conoce como **teorías de variables ocultas locales**.

Sin embargo, en la década de los años sesenta John Bell [4] demostró la incompatibilidad entre las predicciones de la mecánica cuántica y cualquier teoría de variables ocultas locales. La idea de Bell, en una de sus versiones [14, 22], es la siguiente: Consideremos de nuevo a Alicia y Beto en una situación similar a la de EPR. Ambos observadores están espacialmente separados, comparten un mismo estado enredado $|\psi^-\rangle$ y realizan mediciones localmente. Para hacer estadística sobre sus resultados, Alicia y Beto preparan varias copias de un mismo estado y miden cada copia una sola vez. Suponemos que todas las cantidades físicas involucradas en el experimento están definidas antes de la medición y que la acción de Alicia sobre su sistema no repercute físicamente en el de Beto y viceversa (postulados de realismo y localidad). Al tratar con sistemas de dos niveles, las mediciones realizadas por cada uno de los observadores pueden tomar sólo los valores, +1 y -1. Cada observador mide la orientación del espín de su propia partícula en una de dos direcciones diferentes, todas siempre en el mismo plano. En concreto, Alicia mide las observables $\vec{\sigma} \cdot \hat{a}$ y $\vec{\sigma} \cdot \hat{a}'$; mientras que Beto mide $\vec{\sigma} \cdot \hat{b}$ y $\vec{\sigma} \cdot \hat{b}'$. Por simplicidad de notación hemos omitido los superíndices (A) y (B), así como los productos tensoriales que hacen explícito el carácter compuesto del sistema. Los vectores unitarios \hat{a} , \hat{a}' , \hat{b} y \hat{b}' definen las direcciones de medición del espín. Para nuestros propósitos basta considerar las cuatro direcciones en el plano perpendicular a la dirección de propagación de las partículas, de modo que basta dar los ángulos relativos entre las direcciones para describir el experimento de forma completa. De esta forma, a cada medición a lo largo de una dirección dada \hat{n} , con $\hat{n} = \hat{a}$, \hat{a}' , \hat{b} , \hat{b}' , le corresponde una proyección de espín $\epsilon_{\hat{n}} = \pm 1$. En este enunciado tan sencillo hemos usado implícitamente el postulado de realismo, ya que hemos otorgado un valor, aunque sea aleatorio, a $\epsilon_{\hat{n}}$ para toda \hat{n} , sin importar la dirección que Alicia o Beto elijan para medir.

Dicho esto, consideremos ahora la igualdad

$$(\epsilon_{\hat{a}} - \epsilon_{\hat{a}'}) \epsilon_{\hat{b}} + (\epsilon_{\hat{a}} + \epsilon_{\hat{a}'}) \epsilon_{\hat{b}'} = \pm 2. \quad (3.9)$$

Es fácil ver que esta relación se cumple siempre, puesto que uno de los dos sumandos de la parte izquierda es siempre cero, mientras que el otro vale ± 2 . Esta cantidad corresponde a uno de los muchos resultados en el experimento de Alicia y Beto, quienes pueden tomar el valor promedio de sus mediciones después de cierto número de repeticiones. Como la cantidad en cuestión toma sólo los valores ± 2 , el valor absoluto del promedio, E , debe cumplir

$$E = | \langle (\vec{\sigma} \cdot \hat{a})(\vec{\sigma} \cdot \hat{b}) \rangle - \langle (\vec{\sigma} \cdot \hat{a}')(\vec{\sigma} \cdot \hat{b}) \rangle + \langle (\vec{\sigma} \cdot \hat{a})(\vec{\sigma} \cdot \hat{b}') \rangle + \langle (\vec{\sigma} \cdot \hat{a}')(\vec{\sigma} \cdot \hat{b}') \rangle | \leq 2. \quad (3.10)$$

Cuánticamente la situación es distinta. Para calcular los posibles valores del parámetro de Bell E en este caso, evaluemos el valor esperado general $\langle (\vec{\sigma}^{(A)} \cdot \hat{n})(\vec{\sigma}^{(B)} \cdot \hat{n}') \rangle$ con ayuda del formalismo presentado en la sección anterior. Hemos vuelto a poner los superíndices (A) y (B) para mayor claridad en la derivación. Escogemos nuestro sistema coordinado de tal forma que el eje \hat{n} coincida con el eje \hat{z} y \hat{n}' se encuentre en el plano $y - z$, es decir, $\hat{n} = \hat{z}$ y $\hat{n}' = \sin \theta \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$. Sabemos además que el estado $|\psi^-\rangle$ tiene la misma forma en todas las bases, de modo que lo escribiremos en la base de estados propios de σ_z , sin pérdida de generalidad. Tomando en cuenta estas suposiciones, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma}^{(B)} \cdot \hat{n}') |\psi^-\rangle &= (-i \sin \theta \mathbb{1} \otimes |0\rangle\langle 1| + i \sin \theta \mathbb{1} \otimes |1\rangle\langle 0|) \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} + \\ &\quad + (\cos \theta \mathbb{1} \otimes |0\rangle\langle 0| - \cos \theta \mathbb{1} \otimes |1\rangle\langle 1|) \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (i \sin \theta |00\rangle + i \sin \theta |11\rangle + \cos \theta |10\rangle + \cos \theta |01\rangle) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma}^{(A)} \cdot \hat{n}) |\psi^-\rangle &= (|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1} - |1\rangle\langle 1| \otimes \mathbb{1}) \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \langle (\vec{\sigma}^{(A)} \cdot \hat{n})(\vec{\sigma}^{(B)} \cdot \hat{n}') \rangle &= -\frac{1}{2} (\langle 01| + \langle 10| (i \sin \theta |00\rangle + i \sin \theta |11\rangle + \cos \theta |10\rangle + \cos \theta |01\rangle)) \\ &= -\frac{1}{2} (\cos \theta + \cos \theta) \\ &= -\cos \theta. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Así vemos cómo el parámetro de Bell depende simplemente de los ángulos entre las direcciones de medición:

$$E = | -\cos \theta_{ab} + \cos \theta_{a'b} - \cos \theta_{ab'} - \cos \theta_{a'b'} |, \tag{3.12}$$

donde θ_{ab} denota el ángulo entre \hat{a} y \hat{b} , y el resto de la notación sigue la misma lógica.

Ahora escojamos las direcciones de tal forma que el ángulo entre una dirección de Alicia y una de Beto sea siempre $\frac{\pi}{4}$. Con esta elección, el parámetro de Bell E excede la cota dada por las suposiciones de realismo y localidad:

$$E_{MAX} = 2\sqrt{2},$$

demonstrando así la incompatibilidad entre la mecánica cuántica y las teorías de variables ocultas locales. Es importante notar que en la demostración de este resultado

se ha supuesto implícitamente una eficiencia total de los detectores involucrados en el experimento. Esta suposición, por supuesto, no es realista y ha dado lugar a discusión [15, 24, 27].

En los años ochenta se rompieron experimentalmente las desigualdades de Bell con parejas de fotones enredados [2].

3.4. Teleportación cuántica

Como una motivación adicional para el estudio del enredamiento cuántico, estudiamos en esta sección una aplicación para la transmisión de información imposible de realizar por medios clásicos: la teleportación cuántica [7].

Supongamos ahora que nuestros dos observadores, Alicia y Beto, quieren compartir un q-bit de información $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ sin necesidad de transmitir el sistema físico en el cual se realiza dicho estado. Para este propósito, Alicia y Beto comparten un sistema compuesto en el estado $|\phi^+\rangle$. El sistema total es entonces un elemento de $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(Q)} \otimes \mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}$, donde el q-bit a transmitir, el cual suponemos inicialmente bajo el control de Alicia, es un elemento de $\mathcal{H}^{(Q)}$ y $|\phi^+\rangle \in \mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}$. Suponemos un estado separable respecto a la partición $\mathcal{H}^{(Q)} \otimes (\mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)})$, de modo que el estado global $|\Psi\rangle$ se escribe:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |\psi\rangle \otimes |\phi^+\rangle \\ &= \left(\alpha|0^{(Q)}\rangle + \beta|1^{(Q)}\rangle \right) \otimes \frac{(|0, 0\rangle + |1, 1\rangle)}{\sqrt{2}} \\ &= |\phi^+\rangle \otimes \frac{(\alpha|0^{(B)}\rangle + \beta|1^{(B)}\rangle)}{2} + |\phi^-\rangle \otimes \frac{(\alpha|0^{(B)}\rangle - \beta|1^{(B)}\rangle)}{2} \\ &\quad + |\psi^+\rangle \otimes \frac{(\alpha|1^{(B)}\rangle + \beta|0^{(B)}\rangle)}{2} + |\psi^-\rangle \otimes \frac{(\alpha|1^{(B)}\rangle - \beta|0^{(B)}\rangle)}{2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ahora, si Alicia realiza una medición en el sistema $Q - A$ obtendrá, de acuerdo a la igualdad 3.13, uno de los cuatro estados de Bell con una probabilidad de $\frac{1}{4}$ cada uno. De esta forma, dependiendo del resultado de Alicia, el q-bit de Beto quedará definido en uno de los cuatro estados que son factores los estados de Bell en 3.13. Posteriormente, Alicia comunica a Beto, por un canal clásico, el resultado de su medición, y este último realiza una operación sobre su q-bit, que dependerá de la información clásica recibida de Alicia, para recuperar el estado $|\psi\rangle$. Para encontrar la operación que Beto debe realizar basta notar que:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \sigma_x (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) = i\sigma_y (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) = \sigma_z (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle). \quad (3.14)$$

De esta forma, si Alicia mide $|\phi^+\rangle$, Beto no hace nada a su q-bit; si Alicia mide $|\phi^-\rangle$, Beto aplica la operación σ_z , etcétera.

Es importante notar que el proceso de teleportación necesita, además de estados enredados, de comunicación clásica para la transmisión de información, de modo que

las señales que Alicia puede mandar a Beto están limitadas por la velocidad de la luz, como demanda la relatividad especial.

La teleportación cuántica es sólo una de muchas aplicaciones tecnológicas del enredamiento. Para otras posibles aplicaciones refiérase el lector a [5, 26].

3.5. Caracterización y cuantificación del enredamiento

No es inmediato reconocer de entrada si un estado es enredado o no ya que la posible factorización del mismo en forma de estado producto depende de la base elegida. Para enredamiento bipartita de estados puros, que es el único caso estudiado en este trabajo, este problema se resuelve con el conocido *Teorema de descomposición de Schmidt*, el cual afirma lo siguiente: Si $|\Psi\rangle$ es un vector en el espacio de Hilbert compuesto $\mathcal{H}^{(AB)}$, existe una base ortonormal $\{|\xi_i^{(A)}\rangle \otimes |\xi_j^{(B)}\rangle\}$ de este espacio y un conjunto de coeficientes reales positivos $\{\sqrt{\lambda_i}\}$ tales que

$$|\Psi\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |\xi_i^{(A)}\rangle \otimes |\xi_i^{(B)}\rangle, \quad (3.15)$$

donde la suma va hasta la menor de las dimensiones entre $\mathcal{H}^{(A)}$ y $\mathcal{H}^{(B)}$.

Para probar el teorema de descomposición de Schmidt primero escribimos a $|\Psi\rangle$ en su forma más general:

$$|\Psi\rangle = \sum_i^{N_A} \sum_j^{N_B} \alpha_{ij} |\psi_i^{(A)}\rangle \otimes |\psi_j^{(B)}\rangle,$$

donde el conjunto $\{|\psi_i^{(A)}\rangle \otimes |\psi_j^{(B)}\rangle\}$ es una base cualquiera de $\mathcal{H}^{(AB)}$ y N_A y N_B son las dimensiones de $\mathcal{H}^{(A)}$ y $\mathcal{H}^{(B)}$, respectivamente. Sin pérdida de generalidad suponemos $N_A \leq N_B$. Ahora definimos los estados

$$|\phi_i^{(B)}\rangle := \sum_j^{N_B} \alpha_{ij} |\psi_j^{(B)}\rangle,$$

de modo que

$$|\Psi\rangle = \sum_i^{N_A} |\psi_i^{(A)}\rangle \otimes |\phi_i^{(B)}\rangle. \quad (3.16)$$

En esta nueva base, la matriz de densidad reducida $\rho^{(A)}$ tiene la forma

$$\rho^{(A)} = \text{Tr}_B (|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \sum_i^{N_A} \sum_j^{N_B} |\psi_i^{(A)}\rangle\langle\psi_j^{(A)}| \langle\phi_i^{(B)}|\phi_j^{(B)}\rangle, \quad (3.17)$$

dado que los estados $|\phi_i^{(B)}\rangle$ no son necesariamente ortogonales. Todo lo dicho hasta aquí es válido para una base inicial arbitraria $\{|\psi_i^{(A)}\rangle \otimes |\psi_j^{(B)}\rangle\}$. Ahora, si en vez de la

base general $\{|\psi_i^{(A)}\rangle\}$ de $\mathcal{H}^{(A)}$ tomamos la base $\{|\xi_i^{(A)}\rangle\}$, en la cual $\rho^{(A)}$ es diagonal,

$$\rho^{(A)} = \sum_i^{N_A} \lambda_i |\xi_i^{(A)}\rangle \langle \xi_i^{(A)}|, \quad (3.18)$$

entonces de la ecuación 3.17 se sigue que

$$\langle \phi_i^{(B)} | \phi_j^{(B)} \rangle = \lambda_i \delta_{ij}. \quad (3.19)$$

De esta forma nuestro estado bipartita arbitrario se puede escribir como

$$|\Psi\rangle = \sum_i^{N_A} |\xi_i^{(A)}\rangle \otimes |\phi_i^{(B)}\rangle,$$

o

$$|\Psi\rangle = \sum_i^{N_A} \sqrt{\lambda_i} |\xi_i^{(A)}\rangle \otimes |\xi_i^{(B)}\rangle, \quad (3.20)$$

con $|\xi_i^{(B)}\rangle := |\phi_i^{(B)}\rangle / \sqrt{\lambda_i}$. Los coeficientes λ_i son números reales positivos, ya que $\rho^{(A)}$ es una matriz de densidad. Esto prueba el Teorema de Schmidt.

Para estados puros en sistemas bipartitas, los coeficientes λ_i , llamados **coeficientes de Schmidt**, caracterizan por completo el enredamiento. En efecto, como consecuencia inmediata del teorema de descomposición, un estado es separable si y sólo si todos sus coeficientes de Schmidt, excepto uno, son cero. Dicho de otra manera, enfocándonos ahora en la ecuación 3.18, un estado es separable si y sólo si la matriz de densidad reducida de uno de los subsistemas representa un estado puro. Aquí no es relevante cuál de los dos subsistemas consideremos porque, por la ecuación 3.15, las matrices de densidad reducidas asociadas a los dos subsistemas tienen los mismos valores propios diferentes de cero. En caso de tener espacios factores de diferente dimensión, $N_A < N_B$, la matriz de densidad reducida correspondiente al sistema B es igual a la del sistema A pero con $N_B - N_A$ ceros en la diagonal, como resultado de la diferencia en las dimensiones de los espacios.

Ahora que tenemos una forma de *identificar* la presencia de enredamiento en un estado, debemos encontrar una forma de *cuantificar* el enredamiento del mismo. Como en este trabajo sólo se calcula el enredamiento de estados puros bipartitas, nos limitamos a presentar únicamente medidas de enredamiento asociadas con este tipo de sistemas.

En el capítulo anterior probamos que un estado ρ es puro si y sólo si $Tr(\rho^2) = 1$. En caso de estados mixtos tenemos $Tr(\rho^2) < 1$. De esta forma, un estado puro es enredado si y sólo si

$$Tr(\rho_i^2) < 1,$$

o

$$0 < 1 - Tr(\rho_i^2), \quad (3.21)$$

donde el subíndice i denota de forma indiferente al subsistema A o B . La ecuación 3.21 sugiere interpretar la cantidad $1 - \text{Tr}(\rho_i^2)$, llamada **entropía lineal**, como una medida de qué tan mezclado es el operador de densidad reducido de un sistema y , en consecuencia, como una medida de qué tan enredado está el estado global (puro) $\rho^{(AB)} = |\psi^{(AB)}\rangle\langle\psi^{(AB)}|$. En el capítulo 4 usaremos la entropía lineal como nuestra medida de enredamiento. Desde luego, la propuesta de usar la ecuación 3.21 como una forma de cuantificar dicha propiedad necesita ser justificada más allá del hecho de que un estado es enredado si y sólo si su matriz de densidad reducida representa un estado mixto.

Primero debemos entender qué significa que un estado sea más mixto que otro. Si interpretamos un estado mixto como una mezcla estadística de estados puros

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|,$$

cada uno con una probabilidad p_i de ser detectado dentro de la mezcla, es claro que la incertidumbre acerca de cuál de los estados será medido es mayor entre más homogénea sea la distribución de probabilidad $i \mapsto p_i$. Por esta razón, el estado correspondiente a una distribución $p_i = \frac{1}{N} \forall i$, con N igual a la dimensión del espacio, es conocido como el estado máximamente mezclado ρ_{MAX} . En este caso la matriz de densidad es proporcional a la identidad y tiene la misma forma en todas las bases, de modo que ρ_{MAX} puede ser visto como una mezcla homogénea de cualquier base de \mathcal{H} . Desde un punto de vista físico, un estado puro se encuentra enredado cuando se sabe la forma global del mismo pero no se tiene conocimiento completo de los estados parciales en cada subsistema. Dicha falta de conocimiento se refleja en qué tan mixtas son las matrices de densidad reducidas, de modo que parece razonable cuantificar el enredamiento de un estado en términos de una medida de la pureza de las matrices de densidad reducidas. Esta medida debe valer cero para matrices de densidad reducidas que representen estados puros, es decir, para estados globales separables, y debe ser máxima para matrices de densidad reducidas máximamente mezcladas, las cuales asociaremos con estados máximamente enredados.

La entropía lineal cumple con los dos requisitos anteriores: Si ρ es un estado global separable, entonces $\rho^{(A)}$ es un estado puro y $\rho^{(A)} = (\rho^{(A)})^2$, de modo que $1 - \text{Tr}((\rho^{(A)})^2) = 0$. Por otro lado, la entropía lineal se maximiza cuando $\text{Tr}(\rho^{(A)})^2$ alcanza un valor mínimo, es decir cuando la función

$$f(\vec{\lambda}) = \vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda} = \sum_i^N \lambda_i^2$$

alcanza un mínimo dentro del conjunto descrito por la restricción $\sum_i \lambda_i = 1$. En la ecuación anterior hemos definido el **vector de Schmidt** como $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$. La solución a este problema de minimización es $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N = \frac{1}{N}$, consistente con el requerimiento mencionado en el párrafo anterior.

Los requisitos mencionados no son de ninguna manera los únicos que hay que considerar para construir una medida de enredamiento razonable y fueron mencionados únicamente como una motivación para la definición de la entropía lineal, que es la cantidad utilizada en este trabajo. Un análisis más completo de los criterios para construir medidas de enredamiento se debe dar en términos de las correlaciones cuánticas entre estados enredados, tales como las que llevan a la violación de la desigualdad de Bell, vista en la sección anterior. Dichas correlaciones tampoco son sencillas de definir. La forma usual de hablar de correlaciones cuánticas y medidas de enredamiento en información cuántica es a través de la idea de **operaciones locales y comunicación clásica**, LOCC, por sus siglas en inglés. Dicho conjunto de operaciones consiste en transformaciones de la forma $S^{(A)} \otimes S^{(B)}$ con posible comunicación clásica entre las partes A y B . Una posible definición de correlación cuántica es aquella que no puede ser generada por transformaciones LOCC, es decir, una correlación entre dos sistemas que no puede ser reproducida actuando localmente en cada una de las partes, ni siquiera con la posibilidad de comunicación clásica entre los subsistemas. Entre más enredado esté un estado, más fuertes serán sus correlaciones cuánticas. De esta forma, un criterio importante para una buena medida de enredamiento es que sea no creciente ante transformaciones LOCC, ya que este tipo de transformaciones no permiten, por definición, aumentar las correlaciones cuánticas. Con base en esto, un estado $|\psi\rangle\langle\psi|$ se considera más enredado que otro estado $|\phi\rangle\langle\phi|$ si existe una transformación LOCC Φ tal que $|\psi\rangle\langle\psi| = \Phi(|\phi\rangle\langle\phi|)$. En este sentido, una definición de estado máximamente enredado es aquel que nos permite obtener cualquier otro estado realizando únicamente operaciones locales y comunicación clásica. Notemos que la condición

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \Phi(|\phi\rangle\langle\phi|) \implies |\phi\rangle\langle\phi| \text{ está más enredado que } |\psi\rangle\langle\psi| \quad (3.22)$$

impone únicamente un orden *parcial* en el espacio de estados. En general no es posible encontrar una función que establezca un orden *total* en el espacio de matrices de densidad con respecto al enredamiento. Esto se debe a que el mapeo Φ no se puede construir para un par de estados arbitrarios, de modo que habrá estados cuyo enredamiento no se puede comparar. El único caso en el cual se ha demostrado que dicho orden total existe es el de estados puros en sistemas bipartitas. La medida de enredamiento que establece dicho orden es la llamada **entropía de enredamiento** S_E , definida por

$$S_E(\rho) = S(\rho^{(A)}) = S(\rho^{(B)}) \quad \text{donde} \quad S(\rho) = -Tr(\rho \log \rho) = \sum_i \lambda_i \log \lambda_i. \quad (3.23)$$

La función S es conocida como **entropía de von Neumann**. De esta forma, la entropía de enredamiento no es más que la entropía de von Neumann de cualquiera de las matrices de densidad reducidas.

La caracterización y clasificación de las medidas de enredamiento en términos de las transformaciones LOCC está más allá de los objetivos de este trabajo. El lector interesado puede consultar [6, 25, ?].

Capítulo 4

Transformación relativista de los estados

En este capítulo estudiaremos la transformación relativista de los estados de espín y momento. Con este fin presentaremos las nociones básicas de la teoría de grupos en mecánica cuántica y algunas de las características de los grupos de Lorentz y Poincaré.

El comportamiento de los entes físicos no depende del marco de referencia bajo el cual se les describe. Por esta razón, tanto las leyes que rigen la evolución de estos sistemas como las predicciones experimentales deben mantenerse invariantes ante transformaciones que relacionan distintos marcos de referencia. Esto no significa que el objeto matemático que representa el estado del sistema físico bajo estudio permanece igual; al contrario, debe transformarse de tal manera que podamos ir de un marco de referencia a otro sin alterar la física del objeto en cuestión.

Matemáticamente, las transformaciones entre marcos de referencia se representan a través de funciones (invertibles) en el espacio de estados. Una transformación en dicho espacio que conserva los valores de las cantidades físicas relevantes del sistema se llama **transformación de simetría**. En mecánica cuántica, por ejemplo, un requisito básico para una transformación de simetría es que conserve las probabilidades relacionadas con los resultados experimentales. El conjunto de dichas transformaciones tiene estructura de grupo, con el producto de dos elementos dado por la composición de dos transformaciones. La forma en que estas funciones se representan está dada por el tipo de espacio de estados bajo consideración. El hecho de que una transformación sea o no de simetría depende de las características particulares del sistema bajo estudio, en particular de su Hamiltoniano H , que es el operador que gobierna la evolución temporal. Un grupo está asociado a una simetría si todas las transformaciones asociadas con dicho grupo dejan H invariante. En este caso se tienen cantidades físicas que se conservan en el tiempo.

En este trabajo se estudian las transformaciones de Lorentz sobre estados cuánticos con grados de libertad de espín y momento. Para este propósito, en la siguiente sección

presentaremos de forma breve las nociones básicas de la teoría de representaciones de grupos, seguido de un análisis del grupo de Poincaré y sus representaciones. El tratamiento dado aquí no es riguroso, ya que el énfasis está puesto en la parte conceptual más que en la parte formal.

4.1. Grupos y sus representaciones

Un **grupo** es un conjunto \mathcal{G} junto con una función

$$\diamond : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$$

llamada el producto en \mathcal{G} tal que satisfacen las siguientes propiedades:

(i) Asociatividad:

$$a \diamond (b \diamond c) = (a \diamond b) \diamond c \text{ para todo } a, b, c, \in \mathcal{G}$$

(ii) Neutro:

$$\text{Existe un elemento } e \in \mathcal{G} \text{ tal que } e \diamond a = a \text{ para todo } a \in \mathcal{G}$$

(iii) Inverso:

$$\text{Para todo } a \in \mathcal{G} \text{ existe un elemento } a^{-1} \in \mathcal{G} \text{ tal que } a^{-1} \diamond a = e$$

Un grupo en el cual $a \diamond b = b \diamond a$ para todo $a, b \in \mathcal{G}$ se le llama **abeliano** o **conmutativo**.

Es fácil demostrar que, en cualquier grupo, el neutro y el inverso son únicos y pueden operar tanto por la derecha como por la izquierda. Hay muchas maneras de denotar el producto en un grupo. Para la definición anterior hemos escogido el símbolo \diamond , pero de aquí en adelante denotaremos el producto de cualesquiera dos elementos de \mathcal{G} , a y b , simplemente por ab .

En este trabajo nos enfocamos principalmente en el grupo de Poincaré, el cual es un grupo continuo que depende de diez parámetros. Físicamente, se puede entender una transformación de Poincaré como un cambio a un sistema de referencia que se encuentra rotado, trasladado y se mueve con cierta velocidad constante respecto al sistema original. Las transformaciones asociadas con una velocidad relativa entre marcos de referencia se llaman **boosts**. Para definir una rotación en tres dimensiones necesitamos tres números; para definir un boost, otros tantos. Una traslación en el espacio-tiempo requiere de cuatro parámetros. Por esto el grupo de Poincaré es un grupo continuo de diez parámetros. Es un ejemplo de un grupo de Lie.

Dicho de una forma más general, un **grupo de Lie** es un grupo continuo cuyos puntos pueden ser descritos en términos de ciertos parámetros y en el cual la operación de multiplicación de dos elementos, así como la operación de tomar el inverso de un elemento dado, son funciones diferenciables de dichos parámetros.

Ahora veamos qué condiciones impone la estructura de grupo sobre las funciones antes mencionadas. Supongamos que \mathcal{G} es un grupo de Lie donde cada elemento está descrito por un conjunto de n números $\beta = (\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^n)$. Decimos entonces

que el grupo tiene dimensión n . Denotemos por (β) al elemento de \mathcal{G} asociado con los parámetros β . Hacemos la distinción entre el conjunto de parámetros y el elemento del grupo porque, en general, la parametrización de \mathcal{G} no es única. Es más, en la mayoría de los casos no basta con una sola parametrización para cubrir a todos los elementos del grupo: la asociación entre puntos en \mathcal{G} y parámetros se da sólo *localmente*. Por comodidad, las parametrizaciones se escogen de tal forma que al elemento neutro le corresponda el parámetro $\beta = 0$, i.e. el conjunto de n números en el que cada uno vale cero. El producto de dos elementos del grupo, (β_1) y (β_2) es un elemento del grupo determinado por una función suave de (β_1) y (β_2) :

$$(\beta_1)(\beta_2) = (\beta_3) = (f(\beta_1, \beta_2)). \quad (4.1)$$

Por las condiciones de asociatividad, neutro e inverso, la función f debe cumplir:

- (i) Asociatividad:
 $f(\beta_1, f(\beta_2, \beta_3)) = f(f(\beta_1, \beta_2), \beta_3)$
- (ii) Neutro:
 $f(\beta, 0) = f(0, \beta) = \beta$
- (iii) Inverso:
 $f(\beta, \beta^{-1}) = f(\beta^{-1}, \beta) = 0.$

Es importante notar que los grupos de Lie, tal como los definimos, son totalmente generales y no hacen referencia alguna al espacio de estados físicos bajo consideración. Lo único que hemos mencionado hasta ahora es el espacio abstracto de elementos del grupo, que puede ser mapeado localmente a un subconjunto de \mathbb{R}^n . Normalmente (no siempre) estos grupos están relacionados con transformaciones en el espacio-tiempo, como es el caso del grupo de Poincaré. El espacio-tiempo tampoco es, en general, el espacio de estados físicos. Para entender cómo repercute una transformación asociada a un grupo de Lie en el sistema físico que nos interesa estudiar, es fundamental saber cómo se representa dicha transformación en el espacio de estados, que es, en el caso de la mecánica cuántica, un espacio de Hilbert. Como los espacios de Hilbert son espacios lineales, es de esperarse que las transformaciones dadas por un grupo de simetría estén asociadas con operadores lineales.

Sea $GL(\mathcal{H})$ el conjunto de todas las transformaciones lineales no singulares en \mathcal{H} . Definimos la **representación** D del grupo \mathcal{G} en el espacio de Hilbert \mathcal{H} como una función

$$D : \mathcal{G} \longrightarrow GL(\mathcal{H}),$$

tal que

$$D(ab) = D(a)D(b), \quad (4.2)$$

para cualquier a, b en \mathcal{G} . Notemos que el producto en el lado izquierdo de la ecuación anterior es un producto definido en \mathcal{G} , mientras que el producto del lado derecho de la misma ecuación es un producto de operadores lineales en \mathcal{H} . La definición de

representación en general requiere únicamente que \mathcal{H} sea un espacio vectorial, pero como en este trabajo estudiamos transformaciones de Lorentz sobre estados cuánticos, debemos considerar que \mathcal{H} tiene estructura de un espacio de Hilbert.

Si \mathcal{S} es un subespacio vectorial de \mathcal{H} en el cual se cumple la condición

$$s \in \mathcal{S} \implies D(a)s \in \mathcal{S} \quad \forall a \in \mathcal{G}, \quad (4.3)$$

decimos que \mathcal{S} es un **subespacio invariante** bajo la representación D del grupo \mathcal{G} . Una representación que tiene únicamente al cero y al espacio completo como subespacios invariantes se llama **representación irreducible**. En este caso se dice que los únicos subespacios invariantes de la representación son triviales. Los espacios vectoriales asociados a representaciones irreducibles se conocen como **espacios irreducibles** o **espacios portadores** de cierta representación irreducible D . Una representación se llama **reducible** si existe un subespacio invariante diferente del cero o el espacio total. La representación se llama **completamente reducible** si, además de tener un subespacio invariante no trivial, el correspondiente espacio complementario es también invariante. En este caso, la representación completamente reducible $D : \mathcal{G} \rightarrow GL(\mathcal{H})$ puede descomponerse en forma de suma directa de representaciones irreducibles $D^{(i)}$, asociadas con los subespacios irreducibles $\mathcal{H}^{(i)}$:

$$D(g) = D^{(1)}(g) \oplus D^{(2)}(g) \oplus \dots \oplus D^{(n)}(g) \quad \forall g \in \mathcal{G} \quad (4.4)$$

con

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}^{(n)}, \quad D^{(i)} : \mathcal{G} \rightarrow GL(\mathcal{H}^{(i)}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.5)$$

Las representaciones irreducibles juegan un papel fundamental en la física porque es posible identificar a las diferentes clases de partículas como elementos de espacios portadores de representaciones irreducibles de ciertos grupos de simetría.

Como hemos visto en el capítulo 1, en mecánica cuántica las cantidades observables se calculan a través del producto interno en el espacio de Hilbert. Si \mathcal{G} es un grupo de simetría de un sistema cuántico y $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ son estados del sistema, la probabilidad dada en la ecuación 2.7,

$$|\langle \phi | \psi \rangle|^2,$$

debe permanecer invariante bajo transformaciones de \mathcal{G} . En particular, si D es una representación de \mathcal{G} en \mathcal{H} tal que

$$\langle \phi | D^\dagger(a) D(a) | \psi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle$$

para todo $a \in \mathcal{G}$, la probabilidad se preserva. En este caso la representación D es unitaria. Por esta razón, las representaciones unitarias son de gran importancia en mecánica cuántica. A pesar de esto, las representaciones unitarias no son las únicas que preservan 2.7. De acuerdo con un importante teorema de Wigner: *Cualquier transformación que deje invariante la probabilidad $|\langle \phi | \psi \rangle|^2$ es equivalente a una transformación*

unitaria o antiunitaria. En este trabajo nos enfocaremos únicamente en transformaciones unitarias, las cuales denotaremos por U en vez de D . Para una definición de transformaciones antiunitarias y una prueba del teorema de Wigner, refiérase el lector a [37].

En resumen, nuestro objetivo es estudiar las representaciones irreducibles del grupo de Poincaré en el espacio de Hilbert de partículas masivas con grados de libertad de espín y momento. Antes de proceder a esto, sin embargo, debemos estudiar un poco más a fondo los grupos de Lie, ya que, de entrada, parece difícil caracterizar un grupo continuo descrito por un conjunto de parámetros. El tratamiento que se hace normalmente consiste en considerar únicamente transformaciones muy cercanas a la identidad, esto es, elementos del grupo cuyos parámetros sean muy cercanos a cero. De esta forma es posible comprender gran parte de la estructura del grupo de Lie completo mediante el análisis de una estructura mas sencilla, lineal, que resulta de la restricción a transformaciones infinitesimales.

4.2. Álgebras de Lie

Supongamos que \mathcal{G} es un grupo de Lie de dimensión n y U es una representación de \mathcal{G} formada por transformaciones lineales unitarias en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Como los elementos del grupo pueden ser parametrizados, escribimos $U(\beta)$ para la representación del elemento de \mathcal{G} correspondiente al parámetro β . Las parametrizaciones de los elementos del grupo son funciones analíticas, de modo que en una vecindad suficientemente pequeña de la identidad (dada por $\beta = 0$) podemos desarrollar un elemento de la representación en una serie de Taylor alrededor de la identidad:

$$U(\delta\beta) = I + \left. \frac{\partial U(\beta)}{\partial \beta^k} \right|_{\beta=0} (\delta\beta)^k + \dots \quad (4.6)$$

En la ecuación anterior hemos usado la convención de suma de índices repetidos. Denotamos el parámetro del operador por $\delta\beta$ para enfatizar que consideramos una transformación infinitesimal. A los n operadores

$$X_k = i \left. \frac{\partial U(\beta)}{\partial \beta^k} \right|_{\beta=0} \quad (4.7)$$

se les llama **generadores infinitesimales**. El factor de i se pone para hacer que los generadores sean operadores hermíticos, dado que U es unitario (véase el resultado que culmina con la ecuación 2.6). De esta forma, la expansión en serie de potencias queda como

$$U(\delta\beta) = I - i X \cdot \delta\beta + \dots, \quad (4.8)$$

donde $X \cdot \delta\beta = X_k (\delta\beta)^k$. Aquí obtuvimos los generadores infinitesimales partiendo de una representación dada, sin embargo, es posible definirlos en general a partir de la función de composición del grupo $f(\beta_1, \beta_2)$, usando las propiedades de asociatividad,

neutro e inverso [19]. A diferencia de los elementos del grupo, existe una operación de suma (dada por la ecuación 4.6) definida en el conjunto de generadores infinitesimales. Esta operación da estructura de espacio vectorial a dicho conjunto. Más adelante veremos que estos operadores forman, no sólo un espacio vectorial, sino un álgebra, conocida como álgebra de Lie.

Es posible ver una transformación finita como una sucesión de transformaciones infinitesimales de la siguiente manera. Supongamos que dicha transformación finita está dada por un parámetro β , el cual puede obtenerse a partir de la identidad mediante una variación continua de parámetros. Consideremos ahora N transformaciones sucesivas dadas por un parámetro β/N cada una. En el límite cuando $N \rightarrow \infty$ podemos considerar cada una de estas N transformaciones como infinitesimales y quedarnos tan sólo a primer orden en la ecuación 4.6, con $\delta\beta = \beta/N$. Nuestro elemento del grupo se escribe entonces:

$$U(\beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(I - i \frac{\beta}{N} \cdot X \right)^N = e^{-i\beta \cdot X}. \quad (4.9)$$

A esta forma de parametrizar elementos de \mathcal{G} a partir de generadores infinitesimales se le conoce como **parametrización exponencial**. Como hemos visto en el capítulo 1, la exponencial de un operador A se define a través de su serie de potencias:

$$e^A := \sum_k \frac{1}{k!} A^k.$$

De esta definición se sigue que, en general, $e^{A+B} \neq e^A e^B$. La única excepción se da cuando $[A, B] = 0$. Hemos probado que todo operador de la forma $e^{-i\beta \cdot X}$, donde $\beta \cdot X$ es un generador infinitesimal, es un elemento del grupo. Resulta natural preguntarse entonces si todo elemento de \mathcal{G} puede ser expresado en la forma $e^{-i\beta \cdot X}$ para ciertos parámetros β . Las condiciones bajo las cuales esto es posible están dadas por las propiedades topológicas del grupo. Otro hecho interesante relacionado con esta lo anterior es que, dada un álgebra de Lie, puede haber más de un grupo de Lie asociado con ella. Para una cierta álgebra \mathfrak{g} , existe siempre un “grupo cubierta” \mathcal{G}_0 a partir del cual se pueden obtener todos los demás grupos correspondientes a \mathfrak{g} . Un análisis de estas dos cuestiones puede encontrarse en [20].

Consideremos ahora un producto de la forma

$$U(\beta_1)U^{-1}(\beta_2)U^{-1}(\beta_1)U(\beta_2). \quad (4.10)$$

Sin pérdida de generalidad, elegimos a los parámetros β_1 y β_2 como $\beta_1 = (\beta_1^1, 0, \dots, 0)$ y $\beta_2 = (0, \beta_2^2, \dots, 0)$. La ecuación 4.10 es una medida de cómo conmutan los elementos (β_1) y (β_2) de \mathcal{G} . Es un conmutador definido en el grupo, de modo que el producto debe ser un elemento del mismo, digamos $U(\beta)$. Si el grupo es abeliano, el resultado del conmutador es la identidad. Ahora supongamos que los parámetros β_1 y β_2 son infinitesimales y expandamos la representación en serie de potencias a segundo orden.

Con esta aproximación,

$$U(\beta_k) = I - i\beta_k \cdot X_k - \frac{1}{2}\beta_k^2 X_k^2$$

$$U^{-1}(\beta_k) = I + i\beta_k \cdot X_k - \frac{1}{2}\beta_k^2 X_k^2,$$

para $k = 1, 2$. Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación 4.10 y conservando sólo los términos hasta segundo orden, obtenemos:

$$U(\beta) = I - i\beta_1\beta_2[X_1, X_2].$$

Por la propiedad de grupo, la ecuación anterior debe ser una expansión en serie de Taylor, como la de la ecuación 4.6, para el elemento $U(\beta)$. Sólo de esta forma es posible expresar a $U(\beta)$ con la parametrización exponencial dada por la fórmula 4.9. Esta condición es válida si y sólo si el conmutador de dos generadores infinitesimales es una combinación lineal de generadores. Es decir, para cualquier par de elementos X_a y X_b se debe cumplir:

$$[X_a, X_b] = iC_{ab}^c X_c. \quad (4.11)$$

De esta forma, los generadores infinitesimales son cerrados respecto a la operación de conmutación. El espacio vectorial de generadores, junto con esta nueva operación, forma un álgebra llamada **álgebra de Lie**, \mathfrak{g} , correspondiente al grupo de Lie \mathcal{G} . Los números C_{ab}^c se llaman **constantes de estructura** de \mathfrak{g} y contienen toda la información del álgebra de Lie. El factor de i se introduce para definir constantes de estructura reales. Nótese que dichas constantes no dependen de la representación, puesto que para encontrarlas sólo utilizamos la operación de multiplicación en el grupo. Desde luego, asumimos que dicha representación es fiel, es decir, que hay una correspondencia uno a uno entre elementos del grupo y elementos de $GL(\mathcal{H})$. El valor de las constantes de estructura dependerá, por supuesto, de la base del álgebra que se escoja.

El conmutador definido anteriormente es un caso particular de una función con valores en el álgebra de Lie:

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

$$(X_a, X_b) \longmapsto X_a X_b - X_b X_a.$$

Es fácil ver que este producto cumple con las siguientes propiedades:

(i) Antisimetría:

$$[X_a, X_b] = -[X_b, X_a] \text{ para todo } X_a, X_b \in \mathfrak{g}$$

(ii) Identidad de Jacobi:

$$[X_a, [X_b, X_c]] + [X_b, [X_c, X_a]] + [X_c, [X_a, X_b]] = 0 \text{ para todo } X_a, X_b, X_c \in \mathfrak{g}$$

Formalmente, un álgebra es un espacio vectorial V con un producto bilineal

$$\diamond : V \times V \longrightarrow V.$$

Todo espacio vectorial con un producto que satisface, además de la bilinealidad, las propiedades (i) y (ii) antes mencionadas, se llama álgebra de Lie.

Podemos definir una representación de un álgebra de Lie \mathfrak{g} de forma análoga a la definición de representación de un grupo de Lie. Si \mathcal{H} es un espacio vectorial, entonces una función

$$\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \text{End}(V), \quad (4.12)$$

que satisfice

$$\varphi(X \diamond Y) = [\varphi(X), \varphi(Y)], \quad (4.13)$$

es una representación del álgebra de Lie \mathfrak{g} en el espacio vectorial \mathcal{H} . Aquí hemos usado $\text{End}(V)$ para denotar el conjunto de funciones lineales de V en V (endomorfismos de V).

4.3. Los grupos de Lorentz y Poincaré

En esta sección usaremos la teoría de grupos y álgebras de Lie presentada anteriormente para encontrar la representación de los grupos de Lorentz y Poincaré en el espacio de partículas masivas con grados de libertad de espín y momento. La importancia de estos grupos en la física es una consecuencia del **principio de relatividad**, el cual afirma que *las leyes de la física son las mismas en cualquier sistema de referencia inercial*. Este postulado restringe la forma de las transformaciones permitidas entre sistemas inerciales, los cuales se definen como marcos de referencia en el espacio-tiempo, caracterizados por cuatro coordenadas $\{t, x, y, z\} \equiv \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$, en los cuales se cumple la primera ley de Newton. Aquí, como en el resto de este trabajo, usamos unidades en las cuales $c = \hbar = 1$. El grupo más general de transformaciones entre sistemas inerciales que respetan el principio de relatividad se llama grupo de Poincaré. El subconjunto de transformaciones de Poincaré que no incluye traslaciones entre marcos de referencia se llama grupo de Lorentz.

Se puede demostrar que una transformación es consistente con el principio de relatividad si y sólo si mantiene la invariancia del **elemento de línea** ds , dado por

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2.$$

De esta forma, la condición de invariancia se escribe:

$$(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = ds^2 = (dx'^0)^2 - (dx'^1)^2 - (dx'^2)^2 - (dx'^3)^2. \quad (4.14)$$

Otra forma de escribir el elemento de línea es:

$$ds^2 = dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad (4.15)$$

donde

$$[\eta_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

se conoce como el **tensor métrico** de la relatividad especial, definido en cada punto $x = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ del espacio-tiempo. Así, la invariancia del elemento de línea es equivalente a la invariancia del tensor métrico. Nos atenemos a la convención en la cual los índices griegos varían de cero a tres y los índices latinos varían de uno a tres.

Definimos el inverso del tensor métrico $\eta^{-1} =: [\eta^{\mu\nu}]$ mediante la ecuación

$$\eta^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}. \quad (4.17)$$

Con η y su inverso podemos subir y bajar índices de tensores en la manera usual, por ejemplo:

$$T^{\mu}_{\nu} = \eta_{\rho\nu} T^{\mu\rho} = \eta^{\mu\rho} T_{\rho\nu}.$$

Una consecuencia importante de la invariancia del tensor métrico es la famosa expresión relativista de la energía para partículas con masa, la cual usaremos más adelante. Derivar esta expresión es sencillo. El 4-vector de momento o vector de energía-momento de una partícula de masa m en el marco de referencia en reposo está dado por

$$k^{\mu} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Ahora, si

$$p^{\mu} = \begin{pmatrix} E \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

es el vector de energía-momento obtenido de k^{μ} por una transformación de Lorentz Λ^{μ}_{ν} , es decir, $p^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} k^{\nu}$, entonces la invariancia del tensor métrico implica:

$$\begin{aligned} m^2 &= k^{\mu} k^{\nu} \eta_{\mu\nu} \\ &= k^{\mu} k^{\nu} (\Lambda^{\rho}_{\mu} \eta_{\rho\sigma} \Lambda^{\sigma}_{\nu}) \\ &= p^{\rho} p^{\sigma} \eta_{\rho\sigma} \\ &= E^2 - \mathbf{p}^2 \end{aligned} \quad \text{con} \quad \mathbf{p}^2 = (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2. \quad (4.20)$$

Así llegamos a la expresión relativista para la energía:

$$E = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (4.21)$$

De acuerdo con lo anterior, cualquier transformación que deja invariante al tensor métrico en cada punto es compatible con el principio de relatividad y viceversa [33]. De este modo, el grupo de Lorentz se puede definir como el conjunto de transformaciones Λ que satisfacen la condición

$$\Lambda^{\rho}_{\mu} \Lambda^{\sigma}_{\nu} \eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu}, \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \quad (4.22)$$

Todas estas transformaciones dejan invariante al tensor métrico en un punto fijo en el espacio-tiempo, pero no son todas las que cumplen la condición 4.14; además podemos considerar traslaciones espacio-temporales definidas por un vector $a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3)^T =: (a^0, \vec{a})^T$, las cuales también conservan el tensor métrico, ya que éste es igual en cualquier punto del espacio-tiempo. El grupo de Lorentz, que llamaremos \mathcal{L} , junto con el grupo de traslaciones en cuatro dimensiones, conforma el grupo de Poincaré, el cual denotaremos por \mathcal{P} .

Dentro del grupo de Lorentz (o Poincaré), hay un subgrupo especialmente importante: se trata de todas las transformaciones de Lorentz (o de Poincaré) en las cuales se preserva la orientación del tiempo y del espacio. Matemáticamente, son todas las transformaciones Λ tales que $\Lambda^0_0 \geq 1$ y $Det(\Lambda) = 1$. (De la ecuación 4.22, tomando $\mu = \nu = 0$, se llega a que $\Lambda^0_0 \geq 1$ o $\Lambda^0_0 \leq -1$, mientras que tomando el determinante de la ecuación 4.17 llegamos a $Det(\Lambda) = \pm 1$). Estos subgrupos se denotan \mathcal{L}_+^\uparrow y \mathcal{P}_+^\uparrow , para el caso del grupo de Lorentz y del grupo de Poincaré, respectivamente. Se llaman grupos propios ortócronos. Su importancia estriba en que son el conjunto de todas las transformaciones que se pueden conseguir con una variación continua de parámetros partiendo de la identidad ($Det(\mathbb{1}) = 1$, $(\mathbb{1})^0_0 = 1$). En este trabajo nos restringimos al estudio de \mathcal{P}_+^\uparrow , cuyas representaciones irreducibles determinan la transformación relativista de los estados con grados de libertad de espín y momento.

Una transformación de Poincaré se escribe en general:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu. \quad (4.23)$$

Si (Λ, a) es un elemento cualquiera de \mathcal{P} , se sigue de la ecuación 4.23 que las transformaciones de Poincaré forman un grupo, en el cual el producto está dado por

$$(\Lambda, a) (\Lambda', a') = (\Lambda\Lambda', a + \Lambda a'). \quad (4.24)$$

Así, el elemento neutro es

$$(\mathbb{1}, 0), \quad (4.25)$$

y el inverso del elemento (Λ, a) se escribe

$$(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a), \quad (4.26)$$

donde, $\Lambda_\nu^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu$, cumple con

$$\Lambda^\mu_\alpha \Lambda_\nu^\alpha = \delta_\nu^\mu,$$

como puede verificarse contrayendo la ecuación 4.22 con $\eta^{\nu\alpha}$.

4.4. Álgebra de Poincaré

Ahora procedemos a encontrar los generadores infinitesimales del grupo de Poincaré. El tratamiento presentado aquí está en las mismas líneas que el hecho por Weinberg

en [37]. Consideremos una transformación $(\mathbb{1} + \omega, \epsilon) \in \mathcal{P}$ definida por

$$x'^{\mu} = (\delta_{\nu}^{\mu} + \omega^{\mu}_{\nu}) x^{\nu} + \epsilon^{\mu},$$

en la cual, tanto los parámetros ω^{μ}_{ν} , como los ϵ^{μ} son infinitesimales. La condición 4.22 para $\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu}$ implica, conservando sólo términos a primer orden, la antisimetría de $\omega_{\mu\nu} = \eta_{\rho\mu} \omega^{\rho}_{\nu}$:

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}.$$

De esta forma, $[\omega^{\mu}_{\nu}]$ tiene únicamente seis componentes independientes, lo cual es consistente con la dimensión del grupo de Lorentz. Al considerar las otras cuatro componentes independientes asociadas a las traslaciones obtenemos las 10 dimensiones del grupo de Poincaré.

Sea $U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon)$ una representación unitaria de la transformación (infinitesimal) $(\mathbb{1} + \omega, \epsilon) \in \mathcal{P}$ en un espacio de Hilbert \mathcal{H}^1 . Una expansión a primer orden de $U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon)$ se escribe (con todos los índices abajo en ω y ϵ):

$$U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon) = \mathbb{1} + \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - i\epsilon_{\rho} P^{\rho}, \quad (4.27)$$

donde $J^{\rho\sigma}$ y P^{ρ} son los generadores infinitesimales cuyas relaciones de conmutación queremos calcular. En la ecuación anterior hemos hecho un abuso de notación: $\mathbb{1}$ se refiere, del lado izquierdo de la ecuación, a la identidad en el grupo de Lorentz, mientras que en el lado derecho denota la identidad en $GL(\mathcal{H})$. El factor de $\frac{1}{2}$ se incluye para compensar la antisimetría de $\omega_{\rho\sigma}$, en vista de la cual suponemos que los operadores $J^{\rho\sigma}$ son antisimétricos también.

Consideremos ahora un producto de la forma

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a)U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a) &= U(\Lambda, a)U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon)U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \\ &= U(\Lambda, a)U((\mathbb{1} + \omega)\Lambda^{-1}, \epsilon - (\mathbb{1} + \omega)\Lambda^{-1}a) \\ &= U(\Lambda(\mathbb{1} + \omega)\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a), \end{aligned}$$

donde hemos usado las ecuaciones 4.26 y 4.24. Queremos ver cómo se transforman los generadores infinitesimales ante un operador general $U(\Lambda, a)$. Para esto expandimos a primer orden el factor $U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon)$ del lado izquierdo de la ecuación anterior y hacemos lo mismo para el único término del lado derecho:

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a)U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a) &\simeq \mathbb{1} + \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} U(\Lambda, a) J^{\rho\sigma} U^{-1}(\Lambda, a) - i\epsilon_{\rho} U(\Lambda, a) P^{\rho} U^{-1}(\Lambda, a) \\ &= \mathbb{1} + \frac{i}{2} (\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - i(\Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_{\mu} P^{\mu} \\ &= \mathbb{1} + \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} J^{\mu\nu} - i\epsilon_{\rho} \Lambda_{\mu}^{\rho} P^{\mu} + \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} a^{\nu} P^{\mu} \\ &\quad - \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} a^{\mu} P^{\nu}. \end{aligned}$$

¹No existen representaciones unitarias de dimensión finita del grupo de Poincaré, de modo que si suponemos una representación unitaria de este grupo, debemos tener un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Una prueba de este hecho puede encontrarse en [33, 36].

En el último paso hemos usado la antisimetría de $\omega_{\rho\sigma}$ para obtener el factor común $\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}$. Como ϵ y ω son parámetros infinitesimales arbitrarios, podemos igualar los coeficientes de los de $\omega_{\rho\sigma}$ y de ϵ_ρ para obtener:

$$U(\Lambda, a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu{}^\rho\Lambda_\nu{}^\sigma(J^{\mu\nu} + a^\nu P^\mu - a^\mu P^\nu). \quad (4.28a)$$

$$U(\Lambda, a)P^\rho U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu{}^\rho P^\mu. \quad (4.28b)$$

Un operador que se transforma como P^ρ en 4.28b se llama operador vectorial. De forma equivalente, se dice que P^ρ se transforma como un vector. Si hacemos $a = 0$ en la ecuación 4.28a, obtenemos una transformación similar a la de P^ρ pero para un objeto de dos índices. Por esta razón, se dice que el operador $J^{\rho\sigma}$ se transforma como un tensor bajo transformaciones homogéneas de Poincaré, o transformaciones de Lorentz.

Para encontrar las relaciones de conmutación, escribimos de nuevo las ecuaciones 4.28 pero con Λ y a infinitesimales (cf. 4.27):

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_\nu &= \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu & U(\Lambda, a) &= \mathbb{1} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\epsilon_\mu P^\mu \\ & \implies & & \\ a^\mu &= \epsilon^\mu & U^{-1}(\Lambda, a) &= \mathbb{1} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + i\epsilon_\mu P^\mu, \end{aligned}$$

donde los parámetros infinitesimales ω y ϵ no guardan relación con los ω y ϵ anteriores.

Conservando sólo los términos a primer orden en ω y ϵ , y restando el operador $J^{\rho\sigma}$ en ambos lados de la ecuación 4.28a, escribimos:

$$\begin{aligned} i\left[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu, J^{\rho\sigma}\right] &= \omega_\mu{}^\rho J^{\mu\sigma} + \omega_\nu{}^\sigma J^{\rho\nu} + \epsilon^\sigma P^\rho - \epsilon^\rho P^\sigma \\ &= \omega_{\mu\nu}\eta^{\rho\nu} J^{\mu\sigma} - \omega_{\mu\nu}\eta^{\mu\sigma} J^{\rho\nu} + \epsilon_\mu\eta^{\mu\sigma} P^\rho - \epsilon_\mu\eta^{\mu\rho} P^\sigma \\ &= \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(\eta^{\rho\nu} J^{\mu\sigma} - \eta^{\rho\mu} J^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} J^{\rho\mu}) + \\ &\quad - \epsilon_\mu(\eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho), \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde, en el último paso, hemos vuelto a utilizar la antisimetría de $\omega_{\mu\nu}$. Procediendo de una forma completamente análoga con la ecuación 4.28b, encontramos:

$$i\left[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu, P^\rho\right] = \omega_\mu{}^\rho P^\mu. \quad (4.30)$$

Ahora igualamos los coeficientes de $\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}$ y $-\epsilon_\mu$ de ambos lados de las ecuaciones 4.29 y 4.30 para obtener el álgebra de Poincaré:

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} J^{\rho\mu}, \quad (4.31a)$$

$$i[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho, \quad (4.31b)$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0. \quad (4.31c)$$

Es interesante notar que esta álgebra es una generalización al caso de cuatro dimensiones de los operadores usuales de mecánica cuántica en tres dimensiones. En efecto, si restringimos los índices en los operadores $J^{\mu\nu}$ a los valores 1, 2 y 3, obtenemos los operadores de momento angular en tres dimensiones. En términos de los generadores J^{mn} , el vector tridimensional de momento angular puede escribirse como

$$\mathbf{J} = (J^{23}, J^{31}, J^{12}) \quad (4.32)$$

Por otro lado, las componentes espaciales de P^μ forman el operador vectorial tridimensional de momento lineal

$$\mathbf{P} = (P^1, P^2, P^3). \quad (4.33)$$

La componente cero del operador P^μ , P^0 , es el generador de traslaciones temporales, es decir, el Hamiltoniano

$$P^0 = H. \quad (4.34)$$

Nótese que tanto \mathbf{J} como \mathbf{P} conmutan con P^0 , de modo que son cantidades conservadas. Los operadores $\{J^{0i}\}$ son los generadores infinitesimales de los boosts. Son los únicos elementos del álgebra de Poincaré que no conmutan con H y no se conservan.

4.5. Representaciones irreducibles de \mathcal{P}_+^\uparrow

Ahora usamos las relaciones de conmutación obtenidas en la sección anterior para hallar las representaciones irreducibles del grupo propio ortócrono de Poincaré. Para esto, supondremos dichas representaciones como dadas y encontraremos sus características a partir de las propiedades del álgebra.

Sea U una representación irreducible de \mathcal{P}_+^\uparrow en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . La ecuación 4.31c indica que todos generadores de traslaciones conmutan entre sí, de modo que, como hemos visto en el capítulo 2, podemos escoger una base de \mathcal{H} formada por vectores propios de los operadores P^μ . Por definición, los vectores de esta base cumplen

$$P^\mu |p, \sigma\rangle = p^\mu |p, \sigma\rangle, \quad \text{por lo que, } e^{-iP^\mu a_\mu} |p, \sigma\rangle = e^{-ip^\mu a_\mu} |p, \sigma\rangle, \quad (4.35)$$

donde p es el vector de cuadri-momento con componentes p^μ . Por la ecuación anterior vemos que una traslación cualquiera $U(\mathbb{1}, a) = e^{-iP^\mu a_\mu}$ sólo agrega una fase global a $|p, \sigma\rangle$. Aquí σ denota otros grados de libertad que consideraremos discretos (e.g. espín), y $p = (p^0, \mathbf{p})^T$. Por otro lado, en vista de la ecuación 4.28b, un estado $|p, \sigma\rangle$ continua siendo vector propio de los operadores P^μ después de la acción de un elemento cualquiera del grupo de Lorentz $U(\Lambda) := U(\Lambda, 0)$:

$$\begin{aligned} P^\mu U(\Lambda) |p, \sigma\rangle &= U(\Lambda) (U^{-1}(\Lambda) P^\mu U(\Lambda)) |p, \sigma\rangle \\ &= U(\Lambda) \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu |p, \sigma\rangle \\ &= U(\Lambda) \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu |p, \sigma\rangle \\ &= U(\Lambda) |\Lambda p, \sigma\rangle. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Por lo tanto, el estado que resulta de aplicar una transformación de Lorentz a un estado propio del operador de 4-momento con valor propio p debe ser una combinación lineal de estados propios de P^μ con valores propios Λp :

$$U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma} |\Lambda p, \sigma'\rangle. \quad (4.37)$$

El paso siguiente es encontrar los coeficientes $C_{\sigma'\sigma}$. Por la ecuación 4.37, es claro que un espacio irreducible bajo \mathcal{P}_+^\uparrow debe contener todas las combinaciones lineales del conjunto $\{U(\Lambda) |p, \sigma\rangle \mid \Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow\}$, para algún 4-momento p . Dichas combinaciones lineales dependerán, además de p , del índice discreto σ . De esta forma, podemos considerar el espacio de todos los posibles valores de p como una unión de conjuntos independientes, en los cuales cualquier par de momentos perteneciente a un conjunto dado está relacionado por una transformación $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$. Cada representación irreducible estará asociada con uno y sólo uno de estos conjuntos, los cuales se conocen como **órbitas**. Así, dentro de una órbita podemos ir de un elemento dado a cualquier otro mediante la acción de \mathcal{L}_+^\uparrow . En general, los espacios con esta propiedad se llaman **espacios homogéneos** respecto a un grupo \mathcal{G} y se dice que \mathcal{G} actúa de forma **transitiva** en el espacio. Como cada órbita es un espacio homogéneo, basta con dar un sólo elemento de ésta para especificarla por completo. Llamemos k a este 4-momento y \mathcal{O}_k a la correspondiente órbita.

Para todo $p \in \mathcal{O}_k$ existe $L_p \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ tal que $p = L_p k$. De esta forma, para una órbita dada y un espacio irreducible asociado a ésta, definimos los estados propios del operador de 4-momento mediante la siguiente ecuación:

$$|p, \sigma\rangle := U(L_p) |k, \sigma\rangle. \quad (4.38)$$

Es importante notar que la ecuación anterior es una definición: los vectores $|k, \sigma\rangle$ son aquellos en los cuales la etiqueta correspondiente a los grados de libertad discretos no cambia después del boost L_p . El conjunto $|p, \sigma\rangle$, con $p \in \mathcal{O}_k$ y σ variando en los grados de libertad discretos forma, claramente, una base del espacio irreducible \mathcal{H} . La ecuación 4.38 nos permite reexpresar la acción de una transformación $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ sobre uno de los estados base de manera útil. Usando la propiedad de representación, escribimos:

$$\begin{aligned} U(\Lambda) |p, \sigma\rangle &= U(\Lambda) U(L_p) |k, \sigma\rangle \\ &= U\left(L_{\Lambda p} L_{\Lambda p}^{-1}\right) U(\Lambda L_p) |k, \sigma\rangle \\ &= U(L_{\Lambda p}) U\left(L_{\Lambda p}^{-1} \Lambda L_p\right) |k, \sigma\rangle \\ &= U(L_{\Lambda p}) U(W(\Lambda, p)) |k, \sigma\rangle, \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde

$$W(\Lambda, p) := L_{\Lambda p}^{-1} \Lambda L_p \quad (4.40)$$

es la **rotación de Wigner** correspondiente a la transformación Λ y al momento p . Las rotaciones de Wigner dejan invariante al vector k :

$$W(\Lambda, p) k = L_{\Lambda p}^{-1} \Lambda L_p k = L_{\Lambda p}^{-1} (\Lambda p) = k, \quad (4.41)$$

y forman un subgrupo de \mathcal{L}_+^\uparrow llamado el **grupo pequeño** o el **estabilizador** del vector k . Como \mathcal{L}_+^\uparrow actúa de forma transitiva en \mathcal{O}_k , el grupo pequeño tiene la misma estructura para cualesquiera dos 4-vectores en la misma órbita.

Si nos restringimos, en la ecuación 4.37, a transformaciones en el grupo pequeño ($\Lambda = W(\Lambda, p)$), entonces los coeficientes $C_{\sigma'\sigma}$ forman una representación del estabilizador en el espacio de los grados de libertad discretos:

$$\begin{aligned} U(W(\Lambda, p)) U(W(\Lambda', p')) |k, \sigma\rangle &= \sum_{\sigma'} \left(\sum_{\sigma''} C_{\sigma''\sigma'}(W(\Lambda', p'), k) C_{\sigma'\sigma''}(W(\Lambda, p), k) \right) |k, \sigma\rangle \\ \implies C_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p) W(\Lambda', p'), k) &= \sum_{\sigma''} C_{\sigma''\sigma'}(W(\Lambda', p'), k) C_{\sigma'\sigma''}(W(\Lambda, p), k). \end{aligned}$$

En vista de esto, y como consecuencia de nuestra definición de base 4.38, hacemos el cambio de notación $D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) := C_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p), k)$.

Juntando las ecuaciones 4.37, 4.38 y 4.39, escribimos:

$$U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) |\Lambda p, \sigma'\rangle. \quad (4.42)$$

Ésta es la ecuación que buscábamos.

Con la elección de base de \mathcal{H} dada por la definición 4.38, vemos que la tarea de encontrar representaciones irreducibles de \mathcal{P}_+^\uparrow se reduce a encontrar las representaciones irreducibles de los grupos pequeños asociados a las diferentes órbitas, las cuales se pueden clasificar a partir de cantidades invariantes bajo \mathcal{P}_+^\uparrow . De las relaciones de conmutación 4.31, se sigue que el operador $P^2 := P^\mu P_\mu$ conmuta con todos los generadores del álgebra y, en consecuencia, sus valores propios son constantes a lo largo de una órbita dada. Los operadores con esta propiedad de conmutación se llaman **operadores de Casimir**. Al considerar únicamente transformaciones ortócronas, el signo de la componente temporal de un vector de 4-momento p^0 tampoco cambia dentro de un espacio homogéneo. Estas dos invariantes son suficientes para clasificar todas las órbitas y, por tanto, todos los grupos pequeños.

En la tabla 4.1 se muestran las diferentes combinaciones posibles para el valor de P^2 y el signo de p^0 . Los únicos casos físicamente relevantes corresponden a $P^2 = m^2, p^0 > 0$ y $P^2 = 0, p^0 > 0$. En el primer caso, la órbita corresponde a valores de 4-momento de partículas masivas con grados de libertad de momento y espín. Es el caso que se estudia en este trabajo. Como se verá enseguida, el espín de la partícula en cuestión está asociado a la representación del grupo pequeño. El segundo caso corresponde a partículas sin masa que describen trayectorias nulas en el espacio-tiempo, es decir, fotones [33].

Tabla 4.1: Órbitas y grupos pequeños

P^2	Signo de p^0	Grupo pequeño
m^2	+	$SO(3)$
m^2	-	$SO(3)$
0	+	$ISO(2)$
0	-	$ISO(2)$
$-m^2 < 0$	0	$SO(2,1)$
0	0	$SO(3,1)$

Como hemos visto, basta con dar un 4-vector de momento estándar k^μ para especificar cada órbita: todos los demás elementos de ésta se obtienen con la acción (transitiva) de \mathcal{L}_+^\uparrow . Para el caso que nos interesa ($P^2 = m^2$, $p^0 > 0$), es conveniente elegir el 4-vector estándar dado en la ecuación 4.18

$$k^\mu = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cualquier otro 4-vector $p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3)^T$ dentro de la misma órbita puede ser generado a partir de k^μ mediante una transformación de Lorentz L_p . Para este valor particular de k^μ , la transformación L_p esta dada explícitamente por [35]:

$$L_p = \begin{pmatrix} \frac{E}{m} & \frac{p^1}{m} & \frac{p^2}{m} & \frac{p^3}{m} \\ \frac{p^1}{m} & 1 + \frac{(p^1)^2}{m(m+E)} & \frac{p^1 p^2}{m(m+E)} & \frac{p^1 p^3}{m(m+E)} \\ \frac{p^2}{m} & \frac{p^2 p^1}{m(m+E)} & 1 + \frac{(p^2)^2}{m(m+E)} & \frac{p^2 p^3}{m(m+E)} \\ \frac{p^3}{m} & \frac{p^3 p^1}{m(m+E)} & \frac{p^3 p^2}{m(m+E)} & 1 + \frac{(p^3)^2}{m(m+E)} \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

donde, como es usual, hemos escrito la componente temporal del 4-vector de momento p^μ como la energía, dada en la ecuación 4.21. La matriz anterior es un boost puro, es decir, una transformación de Lorentz generada únicamente por los operadores J^{0i} . Existe otra forma de representar un boost que es muy útil para nuestros propósitos. Consiste en remplazar el parámetro de velocidad relativa $|\vec{v}|$ en términos de un parámetro hiperbólico $\tanh \xi := |\vec{v}|$. De esta forma, la manera usual de representar un boost queda descrita en términos de $\sinh \xi$ y $\cosh \xi$. Por ejemplo, sabemos que un boost con velocidad v a lo largo del eje y se escribe, de la manera usual, como

$$\Lambda_y = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma v & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (4.44)$$

Al introducir el parámetro ξ , dicha transformación se escribe:

$$\Lambda_y = \begin{pmatrix} \cosh \xi & 0 & -\sinh \xi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh \xi & 0 & \cosh \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.45)$$

de modo que

$$\cosh \xi = \gamma \qquad \sinh \xi = \gamma v.$$

También podemos representar el “boost” estándar L_p en términos de los parámetros hiperbólicos [1]:

$$L_p = \begin{pmatrix} \cosh \xi & \hat{p}^1 \sinh \xi & \hat{p}^2 \sinh \xi & \hat{p}^3 \sinh \xi \\ \hat{p}^1 \sinh \xi & 1 + (\hat{p}^1)^2 (\cosh \xi - 1) & \hat{p}^1 \hat{p}^2 (\cosh \xi - 1) & \hat{p}^1 \hat{p}^3 (\cosh \xi - 1) \\ \hat{p}^2 \sinh \xi & \hat{p}^2 \hat{p}^1 (\cosh \xi - 1) & 1 + (\hat{p}^2)^2 (\cosh \xi - 1) & \hat{p}^2 \hat{p}^3 (\cosh \xi - 1) \\ \hat{p}^3 \sinh \xi & \hat{p}^3 \hat{p}^1 (\cosh \xi - 1) & \hat{p}^3 \hat{p}^2 (\cosh \xi - 1) & 1 + (\hat{p}^3)^2 (\cosh \xi - 1) \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

donde $\hat{p}^i := \frac{p^i}{m}$.

Como hemos dicho, podemos ver al 4-vector k^μ como el 4-momento de una partícula en el marco de referencia en reposo de la misma. Esto es posible gracias a la condición $p^2 = m^2$, la cual implica que la velocidad de la partícula es menor a la de la luz y por tanto se puede encontrar un marco de referencia en el cual dicho cuerpo se encuentra en reposo. De esta forma, el grupo pequeño correspondiente a este caso es el conjunto de transformaciones que no alteran el 3-momento de las partículas, es decir, las transformaciones en \mathcal{L}_+^\uparrow que no incluyen velocidades relativas entre los diferentes marcos de referencia. Este subgrupo de \mathcal{L}_+^\uparrow es el grupo de rotaciones $SO(3)$. De este modo, las representaciones irreducibles de \mathcal{P}_+^\uparrow correspondientes a diferentes valores de m y a diferentes representaciones de $SO(3)$ están asociadas con partículas de diferentes masas y diferentes valores de espín.

Aunque en este trabajo no se estudian fotones, por completez mencionamos que el grupo pequeño correspondiente a $P^2 = 0$, $p^0 > 0$ es el llamado grupo Euclideo $ISO(2)$, el cual consiste en rotaciones y traslaciones en el plano. La transformación relativista de los fotones y sus consecuencias para el enredamiento cuántico se estudian en [10, 21, 29].

Antes de analizar las representaciones irreducibles del grupo pequeño $SO(3)$, investiguemos qué pasa cuando se forman superposiciones de elementos de la base $\{|p, \sigma\rangle\}$. De acuerdo con el formalismo de la mecánica cuántica, debemos poder escribir

$$|\psi\rangle = \sum_{\sigma} \int d^3p |p, \sigma\rangle \langle p, \sigma | \psi \rangle. \quad (4.47)$$

Sin embargo, debemos ser cuidadosos ya que el elemento d^3p no es un invariante relativista y no hemos definido aún un producto escalar adecuado en nuestro espacio.

Como consideramos partículas masivas, todos los elementos del espacio de vectores de 4-momento que son físicamente relevantes están sujetos a la condición $p^2 = m^2$, de modo que podemos expresar a un 4-vector de momento p en la forma $p = (E(\mathbf{p}), \mathbf{p})^T$, con $E(\mathbf{p}) = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. De igual manera, podemos etiquetar a nuestros estados cuánticos con los valores del momento espacial \mathbf{p} . Como nuestro espacio es continuo, buscamos que el producto interno tenga la forma

$$\langle \mathbf{p}', \sigma' | \mathbf{p}, \sigma \rangle = A(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (4.48)$$

donde el factor $A(\mathbf{p})$ garantiza la invariancia relativista. Para encontrar este factor partimos de la Delta de Dirac en cuatro dimensiones, que es invariante de Lorentz por construcción:

$$\delta^4(p - p') = \delta(p^0 - p'^0) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (4.49)$$

Ahora buscamos reescribir el término $\delta(p^0 - p'^0)$ de la ecuación anterior de una forma más conveniente. Dada la relación $m'^2 = (p'^0)^2 - \mathbf{p}'^2$, podemos considerar a m'^2 como una función de p'^0 y, usando la conocida fórmula para $\delta(f(x))$, escribir

$$\delta(m^2 - m'^2) = \frac{\delta(p^0 - p'^0)}{\left| \frac{d(m'^2)}{dp'^0} \right|_{p'^0=p^0}} = \frac{\delta(p^0 - p'^0)}{2p^0} = \frac{\delta(p^0 - p'^0)}{2E(\mathbf{p})}, \quad (4.50)$$

de modo que

$$\delta^4(p - p') = \delta(m^2 - m'^2) 2E(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (4.51)$$

Como $\delta^4(p - p')$ y $\delta(m^2 - m'^2)$ son invariantes relativistas, entonces $2E(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ es necesariamente un invariante relativista. De esta forma podemos poner $A(\mathbf{p}) = 2E(\mathbf{p})$ y

$$\langle \mathbf{p}', \sigma' | \mathbf{p}, \sigma \rangle = 2E(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (4.52)$$

La medida de integración invariante relativista $\tilde{d}p$ se encuentra imponiendo la condición

$$1 = \int \tilde{d}p \langle p, \sigma | p', \sigma \rangle = \int d^3p \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \implies \tilde{d}p = \frac{d^3p}{2E(\mathbf{p})}. \quad (4.53)$$

Por lo tanto, un estado general en nuestro espacio se escribe

$$|\psi\rangle = \sum_{\sigma} \int \tilde{d}p |p, \sigma\rangle \langle p, \sigma | \psi \rangle, \quad (4.54)$$

con

$$\tilde{d}p = \frac{d^3p}{2E(\mathbf{p})}. \quad (4.55)$$

4.6. Representaciones irreducibles de $SO(3)$

En esta sección nos dedicamos a clasificar las representaciones irreducibles de dimensión finita del grupo pequeño correspondiente a las partículas masivas, el grupo de rotaciones en tres dimensiones $SO(3)$. Veremos que existe todavía un invariante más, aparte de P^2 y el signo de p^0 , que nos permite clasificar por completo todas las representaciones irreducibles de \mathcal{P}_+^\uparrow . Esto es de esperarse ya que, dado un valor de m y un signo de p^0 , todavía tenemos la posibilidad de escoger una representación irreducible particular del grupo pequeño para definir por completo nuestra representación de \mathcal{P}_+^\uparrow . La presentación que se lleva a cabo aquí es similar a la encontrada en libros estándar de mecánica cuántica como por ejemplo [3, 31].

Por definición, el grupo de rotaciones se define como el conjunto de transformaciones en el espacio de tres dimensiones que dejan invariante el producto interno euclideo:

$$R \in SO(3) \iff \langle Rx, Ry \rangle = \langle x, y \rangle \forall x, y \in \mathbb{R}^3. \quad (4.56)$$

En forma matricial, la condición anterior implica que toda matriz en $SO(3)$ es ortogonal:

$$\langle Rx, Ry \rangle = (\mathbf{R}\mathbf{x})^T \mathbf{R}\mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{y} = \langle x, y \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y} \implies \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbb{1} \quad (4.57)$$

Usamos la condición de ortogonalidad para encontrar los generadores infinitesimales y las relaciones de conmutación de $SO(3)$. Escribimos una rotación infinitesimal en la forma $\mathbf{R} = \mathbb{1} + \epsilon \mathbf{S}$ y usamos la condición de ortogonalidad a primer orden en ϵ :

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbb{1} \implies \mathbf{S}^T + \mathbf{S} = 0,$$

de modo que los generadores infinitesimales son matrices antisimétricas de tres dimensiones y como tales tienen tres componentes independientes. Ahora usamos la ecuación 4.7 para encontrar la representación matricial de los generadores infinitesimales y después las relaciones de conmutación mediante un cálculo directo. De esta forma, el álgebra de $SO(3)$, la cual denotaremos por $\mathfrak{so}(3)$, está dada por tres generadores, J_1 , J_2 , y J_3 , que obedecen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k, \quad (4.58)$$

donde

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es una permutación par de } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es una permutación impar de } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{si cualquier índice se repite} \end{cases}$$

De la ecuación 4.58 se sigue que el operador

$$\mathbf{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \quad (4.59)$$

conmuta con todos los generadores del álgebra. Es el operador de Casimir del grupo $SO(3)$. Hemos visto en el capítulo 1 que dos operadores conmutan si y sólo si existe una base de vectores propios comunes a ambos operadores. Para encontrar las representaciones irreducibles de $SO(3)$ es muy útil construir dicha base, formada por vectores propios de \mathbf{J}^2 y alguno de los generadores del álgebra, digamos J_3 . En otras palabras, estamos buscando una base de vectores $\{|\lambda, m\rangle\}$ con las propiedades

$$\mathbf{J}^2|\lambda, m\rangle = \lambda|\lambda, m\rangle, \quad (4.60)$$

$$J_3|\lambda, m\rangle = m|\lambda, m\rangle. \quad (4.61)$$

Nótese que no hemos aún especificado los espacios de Hilbert que portan las representaciones de $SO(3)$ que estamos buscando. La única restricción que pedimos es que dichas representaciones sean irreducibles. Como veremos más adelante, los valores permitidos para los números λ y m definirán los espacios de Hilbert asociados a las diferentes representaciones irreducibles.

Ahora introducimos los operadores de ascenso y descenso J_{\pm} , definidos por

$$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2. \quad (4.62)$$

Estos operadores no son hermiteanos y uno es el adjunto del otro: $J_{\pm} = (J_{\mp})^{\dagger}$. Es útil redefinir la base del álgebra $\mathfrak{so}(3)$ en términos de J_{\pm} y J_3 . En esta nueva base las relaciones de conmutación son

$$[J_+, J_-] = 2J_3 \quad (4.63)$$

$$[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}. \quad (4.64)$$

En términos de los nuevos generadores,

$$\mathbf{J}^2 = J_{\pm}J_{\mp} \mp J_3 + J_3^2. \quad (4.65)$$

Los operadores de ascenso y descenso reciben su nombre debido al siguiente hecho: Si $|\lambda, m\rangle$ es un vector propio de J_3 con valor propio m , entonces $J_{\pm}|\lambda, m\rangle$ es cero o es vector propio de J_3 con valor propio $m \pm 1$:

$$J_3J_{\pm}|\lambda, m\rangle = (J_{\pm}J_3 \pm J_{\pm})|\lambda, m\rangle = (m \pm 1)J_{\pm}|\lambda, m\rangle. \quad (4.66)$$

Aquí hemos usado la relación de conmutación 4.63 en el primer paso. Como consideramos representaciones de dimensión finita, el conjunto de valores propios de J_3 debe ser finito también. Por lo tanto, debe existir un valor propio, digamos j , mayor que todos los demás. Para este valor propio se debe cumplir

$$J_+|\lambda, j\rangle = 0 \quad (4.67)$$

y

$$J_+|\lambda, j-1\rangle \neq 0. \quad (4.68)$$

En vista de la propiedad 4.66, podemos construir los demás vectores propios de J_3 a partir de $|\lambda, j\rangle$ aplicando el operador J_- . Con un argumento totalmente análogo al caso de J_+ , vemos que debe existir un valor propio j' menor que todos los demás y con un vector propio $|\lambda, j'\rangle$ tal que

$$J_-|\lambda, j'\rangle = 0 \quad (4.69)$$

y

$$J_-|\lambda, j' + 1\rangle \neq 0. \quad (4.70)$$

La hipótesis de irreducibilidad de la representación elimina la posibilidad de tener valores propios degenerados de J_3 . Para ver esto basta notar que la propiedad 4.66 de los operadores de ascenso y descenso nos permite generar un subespacio invariante bajo $\mathfrak{so}(3)$ (y por tanto bajo $SO(3)$) a partir de un vector cualquiera. Si existieran dos vectores propios linealmente independientes correspondientes a un mismo valor propio m , entonces podríamos construir dos espacios invariantes y la representación sería reducible. Por lo tanto debe ser posible caracterizar por completo una representación irreducible a partir de su valor propio máximo j y su valor propio mínimo j' . Veremos en seguida que basta sólo un número para llevar a cabo esta tarea. De las ecuaciones 4.65 y 4.67, tenemos

$$J_-J_+|\lambda, j\rangle = (\lambda - j^2 - j)|\lambda, j\rangle = 0, \quad (4.71)$$

y en consecuencia $\lambda = j(j+1)$. De forma análoga, usando ahora las ecuaciones 4.65 y 4.69 llegamos a

$$J_+J_-|\lambda, j'\rangle = (\lambda - j'^2 + j')|\lambda, j'\rangle = (j(j+1) - j'^2 + j')|\lambda, j'\rangle = 0, \quad (4.72)$$

de modo que $j' = -j$. De esta forma los tres números λ , j y j' están relacionados. Por esta razón eliminamos las etiquetas λ y j' en favor de j , el único parámetro necesario para identificar la representación. En vez de denotar a un vector propio de \mathbf{J}^2 y J_3 por $|\lambda, m\rangle$, escribiremos $|j, m\rangle$. Así, los espacios que portan las representaciones irreducibles de $SO(3)$ son generados por el conjunto $|j, m\rangle$, donde j permanece fijo y $-j \leq m \leq j$. Por 4.66, la diferencia entre cualquier par de valores propios debe ser un número entero. En particular, el número de pasos que separan los dos extremos del conjunto de valores propios de J_3 , i.e., $2j+1$, debe ser un entero igual a la dimensión del espacio de Hilbert. De aquí se sigue que j puede tomar los valores $j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$. Para $j = \frac{1}{2}$ tenemos un espacio de dimensión dos; para $j = 1$, uno de dimensión tres, y así sucesivamente. Al número j se le asocia con el espín total de las partículas bajo consideración. Esto es consistente con el experimento de Stern-Gerlach estudiado en el capítulo 2, en el cual un haz de partículas de espín j se divide $2j+1$ veces al pasar por el campo magnético.

Con esto hemos clasificado todas las representaciones irreducibles de dimensión finita de $\mathfrak{so}(3)$ y podemos construirlas de forma explícita². Sabemos que se debe cumplir:

$$J_{\pm}|j, m\rangle = C_{\pm}(j, m)|j, m \pm 1\rangle. \quad (4.73)$$

²De las representaciones irreducibles de $\mathfrak{so}(3)$, sólo aquellas con j entero generan una representación

Para encontrar el valor de C usamos la ecuación 4.65 y la condición de ortonormalidad de los estados $|j, m\rangle$, garantizada por la hermiticidad de los generadores:

$$|C_{\pm}(j, m)|^2 = \langle j, m | J_{\mp} J_{\pm} | j, m \rangle = j(j+1) - m(m \pm 1) = (j \pm m + 1)(j \mp m). \quad (4.74)$$

La fase de C_{\pm} es arbitraria como consecuencia de la libertad de fase global propia de los estados cuánticos. Por convención se escoge de tal manera que C_{\pm} sea un número real y positivo, es decir,

$$C_{\pm}(j, m) = \sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)}. \quad (4.75)$$

Como es de esperarse, $C_{\pm} = 0$ para $m = \pm j$. De este modo conocemos por completo la acción de los operadores de ascenso y descenso sobre los vectores base:

$$J_{\pm} |j, m\rangle = \sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)} |j, m \pm 1\rangle. \quad (4.76)$$

A partir de la ecuación 4.76 podemos construir la matrices de los generadores de rotaciones de manera explícita para cualquier valor de j . Basta con tener en cuenta la relación entre los operadores J_{\pm} y J_1 y J_2 dada por la ecuación 4.62 y la definición de elemento de matriz dada en la ecuación 2.19, i.e. $\mathcal{B}_{ij} = \langle a_i | \mathcal{B} | a_j \rangle$. Para dos dimensiones, los generadores están dados por las matrices de Pauli, vistas en el capítulo 2:

$$J_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.77)$$

mientras que \mathbf{J}^2 se escribe

$$\mathbf{J}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.78)$$

De la misma forma podemos hallar los generadores infinitesimales para el caso espín 1. Este tipo de partículas tiene asociado un espacio de Hilbert de 3 dimensiones cuya base, formada por vectores propios de J_3 , denotaremos por $\{|1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$. En términos del experimento de Stern-Gerlach, una partícula en el estado $|1\rangle$ es desviada en la dirección del gradiente campo magnético, una en el estado $|0\rangle$ no es desviada en absoluto y una en el estado $|-1\rangle$ es desviada en dirección opuesta al gradiente del campo. La elección del eje 3 es, desde luego, arbitraria. Para $j = 1$, los generadores de rotaciones y \mathbf{J}^2 se

de $SO(3)$ en un sentido estricto. Las demás generan representaciones del “grupo cubierta” de $SO(3)$, $SU(2)$. Como es el caso para todos los “grupos cubierta”, existe un homomorfismo $\varphi : SU(2) \rightarrow SO(3)$. Cada elemento de $SO(3)$ es imagen de dos elementos de $SU(2)$. Por esto se dice que las representaciones de espín semientero del grupo de rotaciones son “doblemente valuadas”.

escriben:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \begin{array}{c} \langle 1| \\ \langle 0| \\ \langle -1| \end{array} \begin{array}{ccc} |1\rangle & |0\rangle & |-1\rangle \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{array} \right), & J_2 &= \begin{array}{c} \langle 1| \\ \langle 0| \\ \langle -1| \end{array} \begin{array}{ccc} |1\rangle & |0\rangle & |-1\rangle \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{array} \right), \\
 J_3 &= \begin{array}{c} \langle 1| \\ \langle 0| \\ \langle -1| \end{array} \begin{array}{ccc} |1\rangle & |0\rangle & |-1\rangle \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right), & \mathbf{J}^2 &= 1(1+1) \begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \end{array} \quad (4.79)
 \end{aligned}$$

La notación de bras y kets a la izquierda y arriba de las matrices es para aclarar el orden de la base en la cual se representan los operadores en forma matricial. Por ejemplo, el elemento de matriz $(J_2)_{10}$ está dado por $\langle 1|J_2|0\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}$.

Tanto en 4.78 como en 4.79 hemos escrito el factor que acompaña a la matriz identidad en la forma $j(j+1)$ para enfatizar que el operador J^2 es siempre un múltiplo del operador identidad en una representación irreducible de $\mathfrak{so}(3)$. El caso general es $\mathbf{J}^2 = j(j+1)\mathbb{1}$. Esto es consistente con el *lema de Schur*, el cual afirma, en una de sus versiones, que una matriz que conmuta con todas las matrices de una representación irreducible es necesariamente un múltiplo de la identidad. Por lo tanto, todos los operadores de Casimir (como \mathbf{J}^2) deben ser proporcionales a $\mathbb{1}$ en una representación irreducible. En el Apéndice A se presenta una prueba del lema de Schur.

A pesar de que \mathbf{J}^2 es un operador de Casimir para $SO(3)$, no lo es para el grupo de Poincaré. Se podría pensar que el análogo relativista de este operador es $J^{\mu\nu}J_{\mu\nu}$, pero de las ecuaciones 4.31 se sigue que $[J^{\mu\nu}J_{\mu\nu}, P^\rho] \neq 0$. Esto es entendible desde el punto de vista físico, ya que el momento angular total, compuesto por el momento angular orbital y el espín, depende del origen respecto al cual se mida. Sin embargo, es posible construir un operador invariante respecto al álgebra de Poincaré a partir de la generalización relativista de los operadores de momento angular. Primero definimos el **vector de Pauli-Lubanski** como

$$W_\mu := -\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}J^{\alpha\beta}P^\gamma, \quad (4.80)$$

donde $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}$ se define de forma totalmente análoga al caso de tres dimensiones. El vector W_μ conmuta con todos los generadores de traslaciones,

$$[W_\mu, P_\nu] = 0,$$

de modo que la parte orbital del momento angular no contribuye en este operador, a diferencia del caso de $J^{\mu\nu}J_{\mu\nu}$. También es ortogonal al vector de cuadri-momento:

$$W^\mu P_\mu = 0. \quad (4.81)$$

El cuadrado del vector de Pauli Lubanski, $W^2 := W^\mu W_\mu$, conmuta con toda el álgebra de Poincaré, como se puede verificar de las relaciones de conmutación 4.31. Es el operador de Casimir que identifica al grupo pequeño en el caso de partículas masivas. Por el lema de Schur, W^2 debe ser proporcional a la identidad en un espacio irreducible. Para el caso de partículas masivas, se puede probar que [33]

$$W^2 = -m^2 s(s+1)\mathbb{1}, \quad (4.82)$$

donde s es el espín total de las partículas en cuestión. De esta forma, la generalización relativista del operador de espín total está dada por

$$S^2 = -\frac{1}{m^2} W^2, \quad (4.83)$$

mientras que las componentes espaciales de W^μ están asociadas con los operadores de espín:

$$S^i = \frac{1}{m} W^i. \quad (4.84)$$

Con esto completamos el conjunto de invariantes que especifican una representación irreducible de \mathcal{P}_+^\uparrow para el caso $m > 0$. En este trabajo nos enfocamos en el caso $s = 1$, cuyo espacio de Hilbert consiste de estados de partículas masivas de espín 1. Dichos estados tienen asociado un campo que satisface las ecuaciones de Proca:

$$(\square + m^2)A^\mu = 0, \quad \partial_\mu A^\mu = 0, \quad (4.85)$$

las cuales pueden obtenerse a partir de las condiciones $P^\mu P_\mu = m^2\mathbb{1}$, $W^2 = -m^2 s(s+1)\mathbb{1}$ y $W^\mu P_\mu = 0$. En este trabajo no se usa el formalismo de campos cuánticos para el análisis del cambio en el enredamiento. Dicho enfoque puede verse en [12]. Un análisis de la relación entre la simetría relativista y las ecuaciones de campo se puede consultar en [33, 36].

Capítulo 5

Sobre la invariancia relativista del enredamiento

En este capítulo se calcula el cambio en el enredamiento de un sistema compuesto por dos partículas masivas de espín 1 bajo transformaciones de Lorentz. Se considera el enredamiento asociado a diferentes particiones del espacio de Hilbert.

5.1. Planteamiento del problema

Podemos ahora aplicar lo visto en los capítulos anteriores al caso de un sistema compuesto por dos partículas con espín total 1. Consideramos un escenario similar al del experimento pensado EPR-Bohm, i.e. un par de partículas con grados de libertad de espín y momento propagándose en direcciones opuestas una con respecto a la otra. El objetivo es calcular el enredamiento del sistema antes y después de una transformación de Lorentz y comparar estas dos cantidades. El espacio de Hilbert completo asociado a este problema es de la forma

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_p^{(A)} \otimes \mathcal{H}_s^{(A)} \otimes \mathcal{H}_p^{(B)} \otimes \mathcal{H}_s^{(B)}. \quad (5.1)$$

Aquí los superíndices (A) y (B) denotan a los subsistemas A y B , respectivamente. Suponemos que el subsistema A está bajo el control de Alicia y el subsistema B bajo el control de Beto. Ambos observadores están espacialmente separados. Por otro lado, los subíndices p y s se refieren, respectivamente, a los grados de libertad de momento y espín. De esta forma tenemos un espacio de Hilbert con cuatro subespacios físicamente distintos, correspondientes a los diferentes grados de libertad de cada una de las dos partículas. El cambio en el enredamiento se calcula con respecto a distintas particiones del espacio de Hilbert completo, compuesto por los cuatro factores de la ecuación 5.1. En concreto, estudiamos las siguientes cuatro particiones:

La partición A vs. B , que consiste en los dos subespacios correspondientes a cada uno de los observadores; la partición p vs. s , en la cual se estudia el enredamiento entre la

parte de momento y la parte de espín del estado; la partición mixta, formada por los espacios $\mathcal{H}_p^{(A)} \otimes \mathcal{H}_s^{(B)}$ por un lado y los espacios $\mathcal{H}_s^{(A)} \otimes \mathcal{H}_p^{(B)}$ por el otro y, finalmente, la partición 1 vs. 3, en la cual se compara un subespacio dado contra los tres restantes. En este último caso calculamos el cambio en el enredamiento sumando las entropías lineales correspondientes a todas las particiones del tipo 1 vs. 3. De esta forma se mide el cambio *total* en el enredamiento correspondiente a este tipo de descomposición del espacio.

Los espacios correspondientes a grados de libertad de momento son continuos, mientras que los asociados al espín son discretos, de modo que el estado más general en este espacio es un paquete de onda de la forma

$$|\psi\rangle = \sum_{\sigma\tau} \int \tilde{d}p \tilde{d}q g_{\sigma\tau}(p, q) |p, \sigma\rangle |q, \tau\rangle, \quad (5.2)$$

donde $\tilde{d}p$ y $\tilde{d}q$ son las medidas de integración invariantes relativistas, definidas en la ecuación 4.55. La condición de normalización para estos estados se escribe:

$$\sum_{\sigma\tau} \int \tilde{d}p \tilde{d}q |g_{\sigma\tau}(p, q)|^2 = 1. \quad (5.3)$$

Como base de \mathcal{H} hemos elegido el conjunto de productos tensoriales $|p, \sigma\rangle \otimes |q, \tau\rangle$, donde los vectores $|p, \sigma\rangle \in \mathcal{H}^{(A)}$ y $|q, \tau\rangle \in \mathcal{H}^{(B)}$ forman, en sus respectivos espacios, una base del tipo 4.38. En el escenario de EPR., las partículas de Alicia y Beto viajan en direcciones opuestas una con respecto a la otra, es decir, sus momentos están correlacionados. Bajo este esquema, consideramos únicamente estados del tipo $|p, \sigma\rangle \otimes |-p, \tau\rangle$ o, de manera equivalente, funciones $g_{\sigma\tau}$ de la forma

$$g_{\sigma\tau}(p, q) = \sqrt{\delta(p+q)} f_{\sigma\tau}(p).$$

La raíz cuadrada se incluye para cumplir la condición de normalización 5.3, suponiendo que las funciones $f_{\sigma\tau}(p)$ son también adecuadas para este propósito [23]. En el Apéndice B se presenta un ejemplo de una familia de funciones $\Psi(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{a})$ cuyo límite cuando $\alpha \rightarrow \infty$ puede ser interpretado como la raíz cuadrada de la delta de Dirac. Además de la condición de correlación en los momentos, asumimos, siguiendo el análisis para partículas de espín $\frac{1}{2}$ hecho por Friis [18], que las funciones $f_{\sigma\tau}(p)$ son una superposición discreta de ondas planas con momentos $p = p_+$ y $p = p_-$, donde $p_+ = -p_-$. Dichos estados de momento definido no son físicamente realistas; sin embargo, podemos considerarlos como una aproximación razonable a paquetes de onda muy localizados en el espacio de momento. Es decir, paquetes de onda con una dispersión Δp tan pequeña que el valor de la función $f_{\sigma\tau}(p)$ en una vecindad alrededor de p_+ puede ser remplazado por $f_{\sigma\tau}(p_+)$. De esta forma consideramos formalmente el espacio continuo de momentos como un espacio discreto, donde los únicos valores posibles de p son p_+ y p_- . Con esta simplificación, el espacio de momentos de una sola partícula puede ser tratado como \mathbb{C}^2 y el de ambas partículas, como $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. A diferencia de los estados $|p, \sigma\rangle$,

cuya normalización está dada por una delta de Dirac, consideraremos que nuestros estados en el espacio “discretizado” de momentos están normalizados a la unidad, tal como en la ecuación 5.3. Por otro lado, el producto interno de dos paquetes localizados alrededor de diferentes valores de p es tomado como cero, ya que el traslape entre las funciones es despreciable en este caso. En resumen, la aproximación de ondas planas nos permite trabajar con un espacio de Hilbert discreto $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p^{(A)} \otimes \mathcal{H}_s^{(A)} \otimes \mathcal{H}_p^{(B)} \otimes \mathcal{H}_s^{(B)}$ de $2 \times 3 \times 2 \times 3 = 36$ dimensiones (consideramos partículas de espín 1)¹. La base de este espacio es el conjunto

$$\{|p_m, \sigma\rangle^{(A)} \otimes |p_n, \tau\rangle^{(B)} \mid m, n \in \{+, -\}; \sigma, \tau \in \{1, 0, -1\}\}, \quad (5.4)$$

el cual satisface las condiciones de ortonormalidad

$$\begin{aligned} (\langle p_m, \sigma | \langle p_n, \tau |) (|p_{m'}, \sigma'\rangle |p_{n'}, \tau'\rangle) &= \langle p_m, \sigma | p_{m'}, \sigma'\rangle \langle p_n, \tau | p_{n'}, \tau'\rangle \\ &= \delta_{mm'} \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{nn'} \delta_{\tau\tau'}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Es importante notar que un estado de momentos del tipo

$$|p\rangle = c_1 |p_+, p_-\rangle + c_2 |p_-, p_+\rangle, \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1, \quad (5.6)$$

sólo tiene sentido si consideramos partículas distinguibles puesto que, para partículas iguales, los estados $|p_+, p_-\rangle$ y $|p_-, p_+\rangle$ son totalmente indistinguibles desde el punto de vista físico. Un ejemplo de partículas distinguibles puede ser, por ejemplo, un par de átomos de distinta especie, ambos con un espín total igual a 1.

Antes de estudiar el cambio en el enredamiento en un estado de dos partículas veamos cómo, para el caso de una partícula, un argumento sencillo nos permite probar que el enredamiento entre momento y espín no se conserva bajo transformaciones de Lorentz. Supongamos un estado inicial separable entre los grados de libertad de espín y momento:

$$|\psi\rangle = |p\rangle \otimes |s\rangle, \quad (5.7)$$

donde, para el caso de una partícula, $|p\rangle \in \mathcal{H}_p$ y $|s\rangle \in \mathcal{H}_s$. Aquí, el espacio de Hilbert total se descompone como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_s. \quad (5.8)$$

A pesar de que el estado inicial es separable, es posible obtener un estado enredado respecto a los momentos y los espines mediante una transformación de Lorentz. Imaginemos un estado inicial de momento dado por

$$|p\rangle = c_1 |p_+\rangle + c_2 |p_-\rangle, \quad (5.9)$$

¹En realidad, por la condición $p_+ = -p_-$, sólo nos interesan las combinaciones lineales de $|p_+, p_-\rangle$ y $|p_-, p_+\rangle$, lo cual nos restringe a un espacio de momentos de dos dimensiones en vez de 4. De esta forma, la dimensión efectiva del espacio global es 18 y no 36

con $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$. Recordemos que hemos simplificado el problema de modo que los únicos valores posibles para el momento inicial son p_+ y p_- . Con este estado de momento, el estado global es de la forma

$$|\psi\rangle = c_1|p_+\rangle \otimes |s\rangle + c_2|p_-\rangle \otimes |s\rangle. \quad (5.10)$$

Ahora, la transformación de Lorentz para el estado de una partícula, dada en la ecuación 4.42 puede ser escrita en términos de una transformación en el espacio de momento y una transformación (dependiente del momento) en el espacio de espín:

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|p, \sigma\rangle &= \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) |\Lambda p, \sigma'\rangle \\ &= |\Lambda p\rangle \otimes \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) |\sigma'\rangle \\ &= U_p(\Lambda) \otimes U_s(\Lambda, p) |p, \sigma\rangle, \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde

$$\begin{aligned} U_p(\Lambda)|p\rangle &= |\Lambda p\rangle, \\ U_s(\Lambda, p)|\sigma\rangle &= \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) |\sigma'\rangle. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Este tipo de descomposición sólo es posible para estados con momento bien definido. Para un paquete de onda general como el de la ecuación 5.2 tendremos una superposición de transformaciones $U_p(\Lambda) \otimes U_s(\Lambda, p)$, con un operador diferente para cada p . Es este hecho el que causa el enredamiento entre espín y momento bajo una transformación de Lorentz. Podemos entenderlo de forma más clara a partir del estado 5.10, en el cual sólo se tienen dos momentos diferentes:

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|\psi\rangle &= U(\Lambda)(c_1|p_+, s\rangle + c_2|p_-, s\rangle) \\ &= c_1 U_p(\Lambda) \otimes U_s(\Lambda, p_+) |p_+, s\rangle + c_2 U_p(\Lambda) \otimes U_s(\Lambda, p_-) |p_-, s\rangle \\ &= c_1 |\Lambda p_+\rangle \otimes U_s(\Lambda, p_+) |s\rangle + c_2 |\Lambda p_-\rangle \otimes U_s(\Lambda, p_-) |s\rangle. \end{aligned} \quad (5.13)$$

En general, $U_s(\Lambda, p_+) |s\rangle \neq U_s(\Lambda, p_-) |s\rangle$ y, por lo tanto, el estado transformado no puede ser escrito en la forma 5.7 (asumiendo, claro está, que $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$). De esta forma probamos que el enredamiento entre espín y momento de una partícula no se conserva bajo transformaciones de Lorentz. Desde luego, no sólo es posible producir enredamiento entre el espín y el momento de una partícula con una transformación de Lorentz, también se puede eliminar el enredamiento existente en un estado inicial. Para esto basta considerar la transformación inversa del estado final del ejemplo anterior. Por el principio de relatividad, ambos estados son igualmente válidos para la descripción del sistema, a pesar de que uno esté enredado y el otro no lo esté. De esta forma vemos que el enredamiento no es, en general, una característica intrínseca de los sistemas, sino que depende del marco de referencia.

El argumento anterior se generaliza inmediatamente para el caso de dos partículas, en el cual una transformación de Lorentz se descompone en el producto tensorial de las transformaciones en el espacio correspondiente a cada partícula:

$$U(\Lambda) = U^{(A)}(\Lambda) \otimes U^{(B)}(\Lambda). \quad (5.14)$$

Así, un vector de la base del espacio total \mathcal{H} , el cual incluye estados de momento bien definido en los subespacios A y B , se transforma como

$$\begin{aligned} U(\Lambda) |p^{(A)}, \sigma^{(A)}, p^{(B)}, \sigma^{(B)}\rangle &= U^{(A)}(\Lambda) |p^{(A)}, \sigma^{(A)}\rangle \otimes U^{(B)}(\Lambda) |p^{(B)}, \sigma^{(B)}\rangle \\ &= U_p^{(A)}(\Lambda) \otimes U_s^{(A)}(\Lambda, p^{(A)}) |p^{(A)}, \sigma^{(A)}\rangle \otimes \\ &\quad \otimes U_p^{(B)}(\Lambda) \otimes U_s^{(B)}(\Lambda, p^{(B)}) |p^{(B)}, \sigma^{(B)}\rangle \\ &= U_p(\Lambda) |p^{(A)}, p^{(B)}\rangle \otimes U_s(\Lambda, p^{(A)}, p^{(B)}) |\sigma^{(A)}, \sigma^{(B)}\rangle. \end{aligned} \quad (5.15)$$

En el último paso hemos definido

$$U_p(\Lambda) := U_p^{(A)}(\Lambda) \otimes U_p^{(B)}(\Lambda) \quad (5.16)$$

y

$$U_s(\Lambda, p^{(A)}, p^{(B)}) := U_s^{(A)}(\Lambda, p^{(A)}) \otimes U_s^{(B)}(\Lambda, p^{(B)}). \quad (5.17)$$

También hemos cambiado el orden de los factores en el producto tensorial del espacio de Hilbert. Esto es completamente válido ya que la física del sistema se calcula a partir del producto interno en \mathcal{H} , el cual está definido de manera independiente en cada factor. Cambiar el orden en los factores nos permite considerar a un estado de la base como un producto de estados de una partícula, o como un producto de un estado de momentos y uno de espines.

Ahora estamos en condiciones de analizar el cambio en el enredamiento para un sistema de dos partículas de espín 1. El análisis hecho aquí sigue de cerca el hecho por Friis en [18] para partículas de espín $\frac{1}{2}$. De esta forma es posible comparar el comportamiento entre ambos tipos de partículas. Al igual que en la ecuación 5.7, asumimos que el estado inicial de dos partículas es separable respecto a la partición $\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_s$, la cual llamaremos partición de momento vs. espín. A pesar de que hemos usado la misma notación que para el caso de una partícula, en este caso tenemos $\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_p^{(A)} \otimes \mathcal{H}_p^{(B)}$ y $\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_s^{(A)} \otimes \mathcal{H}_s^{(B)}$. Dada la correlación entre los momentos de las partículas, el estado inicial de momento más general para nuestro sistema es una combinación lineal arbitraria de los estados $|p_+, p_-\rangle$ y $|p_-, p_+\rangle$. Para calcular el enredamiento del sistema, es conveniente escribir dicho estado en términos de un parámetro α , tal como se hace en [18]:

$$|p\rangle = \cos \alpha |p_+, p_-\rangle + \sin \alpha |p_-, p_+\rangle, \quad (5.18)$$

con $0 \leq \alpha \leq \pi$. Para parametrizar los estados de espín de dos partículas, tomamos combinaciones lineales de la base de estados propios de los operadores S^2 , $S_3^{(A)}$ y $S_3^{(B)}$.

Las parametrizaciones consideradas aquí son:

$$|s_1\rangle = \sin \theta \cos \phi |11\rangle + \sin \theta \sin \phi |00\rangle + \cos \theta |-1-1\rangle, \quad (5.19a)$$

$$|s_2\rangle = \sin \theta \cos \phi |1-1\rangle + \sin \theta \sin \phi |-11\rangle + \cos \theta |00\rangle, \quad (5.19b)$$

$$|s_3\rangle = \sin \chi \sin \theta \cos \phi |10\rangle + \sin \chi \sin \theta \sin \phi |01\rangle + \sin \chi \cos \theta |0-1\rangle + \cos \chi |-10\rangle. \quad (5.19c)$$

Estas tres parametrizaciones cubren, para ciertos valores de los ángulos θ , ϕ y χ , todos los estados propios del operador de espín total $\mathbf{S}^2 = (\mathbf{S}^{(A)} + \mathbf{S}^{(B)})^2$.

Ahora calculemos explícitamente la transformación de Lorentz del estado inicial. El lector puede encontrar una derivación similar en [1]. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que las partículas se propagan a lo largo del eje z , con momentos opuestos. Los estados de momento correspondientes se obtienen a partir de una transformación de la forma $U(L_p)$ como la vista en el capítulo anterior. En vista de la ecuación 4.46, la transformación L_p está dada, en términos de los parámetros hiperbólicos, por

$$L_p = \begin{pmatrix} \cosh \eta & 0 & 0 & \sinh \eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \eta & 0 & 0 & \cosh \eta \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

donde $\tanh \eta := |\vec{v}|$ y v es la velocidad del boost. Esta transformación nos da el 4-momento visto por un observador cuyo marco de referencia se obtiene al transformar el marco de referencia en reposo con la operación inversa L_p^{-1} . De esta forma, el 4-vector de momento correspondiente al marco de referencia en reposo se transforma de la siguiente manera:

$$k = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow L_p k = p = m \begin{pmatrix} \cosh \eta \\ 0 \\ 0 \\ \sinh \eta \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Se puede demostrar que toda transformación de Lorentz puede ser vista como una rotación seguida de un “boost” [33, 36]. Las rotaciones inducen en los estados transformaciones unitarias globales e independientes del momento, de modo que no influyen en el cambio del enredamiento. Por tanto, no perdemos generalidad al considerar un “boost” puro, i.e. sin rotación, como nuestra transformación Λ de la ecuación 4.42. Por otro lado, un “boost” en dirección del eje z , hace que la rotación de Wigner sea igual a la identidad, ya que conmuta con las transformaciones L_p y L_p^{-1} :

$$W(\Lambda, p) = L_p^{-1} \Lambda L_p = L_p^{-1} L_{\Lambda p} = \mathbb{1}. \quad (5.22)$$

De esta forma, escogemos nuestra transformación Λ como un “boost” en una dirección perpendicular al eje z que sin pérdida de generalidad tomamos como el eje x . El estado producido, $U(\Lambda)|p, \sigma\rangle$, corresponderá al estado $|p, \sigma\rangle$ visto desde el marco de referencia de un observador que se mueve con velocidad $-u = \tanh(-\omega)$ con respecto al observador correspondiente al estado $|p, \sigma\rangle$. De este modo, el “boost” a lo largo de x está dado por

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \omega & \sinh \omega & 0 & 0 \\ \sinh \omega & \cosh \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

El 4-vector de momento p se transforma de la siguiente manera:

$$p = m \begin{pmatrix} \cosh \eta \\ 0 \\ 0 \\ \sinh \eta \end{pmatrix} \longrightarrow \Lambda p = m \begin{pmatrix} \cosh \eta \cosh \omega \\ \cosh \eta \sinh \omega \\ 0 \\ \sinh \eta \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

El último elemento de la rotación de Wigner que nos falta por calcular es $L_{\Lambda p}^{-1}$. Para esto calculamos primero $L_{\Lambda p}$ a través de la fórmula 4.46 con la sustitución $p^\mu \rightarrow (\Lambda p)^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$. Una vez hecho esto, la transformación buscada se obtiene invirtiendo la matriz $L_{\Lambda p}$. El resultado es:

$$L_{\Lambda p}^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh \eta \cosh \omega & -\cosh \eta \sinh \omega & 0 & -\sinh \eta \\ -\cosh \eta \sinh \omega & \frac{\cosh \eta \cosh \omega + \cosh^2 \eta \cosh^2 \omega - \sinh^2 \eta}{1 + \cosh \eta \cosh \omega} & 0 & \frac{\cosh \eta \sinh \eta \sinh \omega}{1 + \cosh \eta \cosh \omega} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \eta & \frac{\cosh \eta \sinh \eta \sinh \omega}{1 + \cosh \eta \cosh \omega} & 0 & \frac{\cosh \eta (\cosh \eta + \cosh \omega)}{1 + \cosh \eta \cosh \omega} \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

Finalmente, la rotación de Wigner está dada por la ecuación 4.40:

$$W(\Lambda, p) := L_{\Lambda p}^{-1} \Lambda L_p.$$

Para los valores particulares de p y Λ que hemos propuesto aquí, tenemos

$$W(\Lambda, p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cosh \eta + \cosh \omega}{1 + \cosh \eta \cosh \omega} & 0 & \frac{\sinh \eta \sinh \omega}{1 + \cosh \eta \cosh \omega} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\sinh \eta \sinh \omega}{1 + \cosh \eta \cosh \omega} & 0 & \frac{\cosh \eta + \cosh \omega}{1 + \cosh \eta \cosh \omega} \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Como era de esperarse, la transformación dada por 5.26 tiene componentes temporales $W_i^0(\Lambda, p) = \delta_i^0$, de modo que pertenece al subgrupo $SO(3)$ de \mathcal{L}_+^\uparrow . Más aún, tiene la forma de una rotación pura a lo largo del eje y :

$$\mathbf{R}_y(\Omega) = \begin{pmatrix} \cos \Omega & 0 & \sin \Omega \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Omega & 0 & \cos \Omega \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

En vista de esto, identificamos el **ángulo de Wigner** Ω como

$$\tan \Omega = \frac{\sinh \eta \sinh \omega}{\cosh \eta + \cosh \omega}. \quad (5.28)$$

Al analizar la forma de la expresión para el ángulo de Wigner vemos que para el caso en que el momento es $-p$ la rotación tiene la misma magnitud pero un sentido opuesto, es decir, obtenemos una rotación por un ángulo $-\Omega$ a lo largo del eje y . De esta forma,

$$W(\Lambda, p) W(\Lambda, -p) = \mathbb{1}. \quad (5.29)$$

Con las expresiones obtenidas para $W(\Lambda, p)$ y $W(\Lambda, -p)$ podemos calcular de forma explícita los coeficientes $D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p))$ y $D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, -p))$ de la ecuación 4.42. Corresponden a la representación en un espacio de espín total 1 de una rotación a lo largo del eje y por un ángulo Ω y $-\Omega$, respectivamente. De las ecuaciones 4.79 vemos que el generador de rotaciones a lo largo del eje y es

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que, por la parametrización exponencial dada en la ecuación 4.9, una rotación finita por un ángulo Ω a lo largo del eje y está representada por

$$D(W(\Lambda, p)) = e^{-i\Omega J_2} \quad (5.30)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos \Omega) & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \Omega & \frac{1}{2}(1 - \cos \Omega) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \Omega & \cos \Omega & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \Omega \\ \frac{1}{2}(1 - \cos \Omega) & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \Omega & \frac{1}{2}(1 + \cos \Omega) \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

Hemos llegado a esta ecuación a partir de la expansión en serie de $e^{-i\Omega J_2}$. El cálculo se facilita al notar que [3]

$$(J_2)^3 = J_2 \quad \implies \quad e^{-i\Omega J_2} = \mathbb{1} - (J_2)^2 (1 - \cos \Omega) - iJ_2 \sin \Omega. \quad (5.32)$$

La rotación correspondiente al momento opuesto se obtiene reemplazando Ω por $-\Omega$.

5.2. Resultados

En esta sección analizamos el cambio en el enredamiento con respecto a las diferentes particiones y las distintas parametrizaciones presentadas en la sección anterior. El cálculo es directo. Primero consideramos la matriz de densidad correspondiente al estado inicial

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad |\psi\rangle = |p\rangle \otimes |s\rangle, \quad (5.33)$$

para después evaluar el enredamiento con respecto a las diferentes particiones usando la entropía lineal 3.21. Este enredamiento se compara, para cada partición, con el obtenido a partir del estado transformado

$$\rho_{\Lambda} := U(\Lambda) \rho U^{\dagger}(\Lambda). \quad (5.34)$$

El cambio en el enredamiento ΔE se analiza, para una partición dada, como una función de los parámetros que definen al estado inicial (cf. ecuaciones 5.18 y 5.19).

5.2.1. Partición A vs. B

Primero comenzamos por la partición A vs. B , en la cual el enredamiento se conserva para cualquier estado inicial y, en particular, para cualquiera de nuestras tres parametrizaciones de estados de espín. La razón de esta invarianza es, claramente, la unitariedad de la transformación en cada uno de los subespacios A y B , es decir,

$$\begin{aligned} U(\Lambda) &= U^{(A)}(\Lambda) \otimes U^{(B)}(\Lambda) \\ \implies \rho_{\Lambda} &= U^{(A)}(\Lambda) \rho^{(A)} U^{\dagger(A)}(\Lambda) \otimes U^{(B)}(\Lambda) \rho^{(B)} U^{\dagger(B)}(\Lambda). \end{aligned}$$

La unitariedad de la transformación de los estados reducidos y la consecuente conservación del enredamiento son muy importantes desde el punto de vista físico. Sólo así se garantiza que las mediciones locales del sistema bajo estudio dependan, para cualquier marco de referencia inercial, únicamente de la información proporcionada por los estados parciales $\rho^{(A)}$ y $\rho^{(B)}$. De otra manera existirían correlaciones distintas entre los dos subsistemas para diferentes marcos de referencia, en contradicción con el principio de relatividad. De esta forma, cualquier proceso físico que involucre correlaciones cuánticas, como por ejemplo la teleportación de estados, es independiente del marco de referencia bajo el cual se analice y los resultados experimentales, que consistirán en “bits” clásicos de información, serán los mismos para cualquier observador.

5.2.2. Partición p vs. s

La situación es diferente cuando consideramos la partición p vs. s . Como se mencionó en la sección anterior, la dependencia en el momento de la rotación de Wigner induce diferentes transformaciones en la parte de espín de un estado para diferentes momentos. Como consecuencia de esto, el enredamiento entre la parte de momento y la parte de espín del estado no es invariante en general. Las únicas dos situaciones en las cuales el enredamiento se conserva para cualquier estado de espín se dan cuando el estado inicial de momento no está superpuesto, es decir, cuando el parámetro α de la ecuación 5.18 toma los valores $\frac{n\pi}{2}$ para $n = 0, 1, \dots$ y también, obviamente, cuando el ángulo de Wigner es cero (no hay boost). En cualquier otro caso, el enredamiento cambia al hacer una transformación de Lorentz. Dicho cambio depende fuertemente del ángulo de Wigner, como se puede ver en la figura 5.1, en la cual hemos escogido valores de Ω que difieren considerablemente para resaltar el efecto que tiene este parámetro en

la forma de las gráficas. En el caso límite cuando la velocidad de la partícula y la velocidad del boost tienden ambas a la velocidad de la luz, se tiene $\Omega = \frac{\pi}{2}$.

Es interesante notar que cuando analizamos el cambio en el enredamiento para un par de partículas con espín $\frac{1}{2}$, con la parametrización $\sin \theta \cos \phi |0, 0\rangle + \sin \theta \sin \phi \left(\frac{|0, 0\rangle + |1, 1\rangle}{\sqrt{2}} \right) + \cos \theta |1, 1\rangle$, tal como se hace en [18], las gráfica coincide con el caso analizado aquí para el límite $\Omega = \frac{\pi}{2}$.

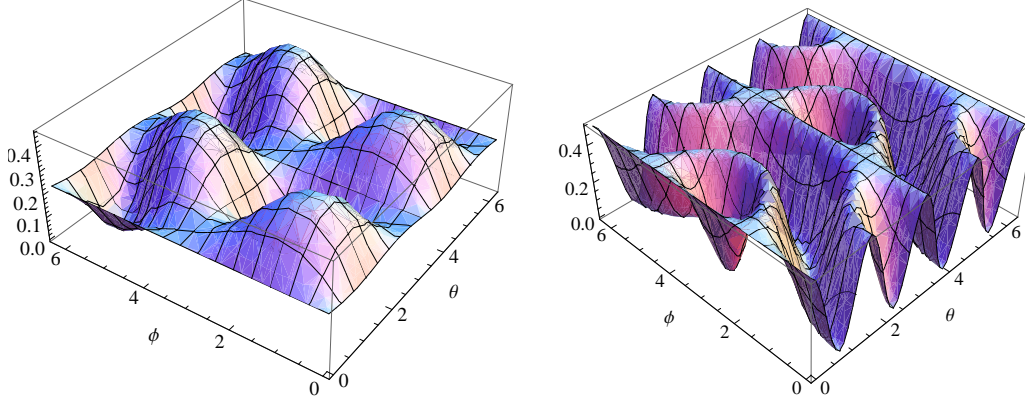


Figura 5.1: $\Delta E(\theta, \phi)$ para la primer parametrización y la partición p. vs. s. Se toma un valor de $\alpha = \frac{\pi}{4}$. **Izquierda:** $\Omega = \frac{\pi}{8}$. **Derecha:** $\Omega = \frac{\pi}{2}$, correspondiente al límite de la velocidad de la luz. En este último caso es interesante notar que se recuperan los resultados del caso de espín $\frac{1}{2}$.

En todos los casos, la dependencia de ΔE en el parámetro α se da a través de un factor de escala, el cual vale cero para estados no superpuestos de momento y es máximo para el estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|p_+, p_- \rangle + |p_-, p_+ \rangle)$. Por esta razón en el resto de nuestro estudio consideramos sólo el caso $\alpha = \frac{\pi}{4}$, sin perder generalidad.

Antes de continuar con nuestra discusión, es importante notar que la causa del cambio en el enredamiento entre espines y momentos es la *superposición* de estados con diferente momento y no el enredamiento del estado inicial $|p\rangle$. Para ver esto supongamos que $|p\rangle$ está dado por

$$|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|p_+\rangle (|p_+\rangle + |p_-\rangle). \quad (5.35)$$

Este estado no concuerda con nuestra hipótesis inicial, en la cual los momentos de ambas partículas están anticorrelacionados; sin embargo, lo usaremos aquí sólo como un ejemplo, aislado del argumento principal. Notemos que dicho estado es separable. De una forma similar al ejemplo de la sección anterior, escribimos el estado inicial y el estado transformado de la siguiente manera:

Estado inicial:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|p_+, p_+\rangle |s\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|p_+, p_-\rangle |s\rangle \quad (5.36)$$

Estado transformado:

$$|\psi_\Lambda\rangle := U(\Lambda)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\Lambda p_+, \Lambda p_+\rangle U_s(p_+, p_+) |s\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\Lambda p_+, \Lambda p_-\rangle U_s(p_+, p_-) |s\rangle, \quad (5.37)$$

donde, por sencillez de notación, hemos omitido la dependencia en Λ de los operadores U_s . Como en general $U_s(p_+, p_+) \neq U_s(p_+, p_-)$, el estado final está enredado respecto a la partición p vs. s , a pesar de haber empezado con un estado de momento separable.

Retomemos ahora nuestro análisis de la partición p vs. s . La figura 5.2 muestra el cambio en el enredamiento para la segunda parametrización, dada por la ecuación 5.19b. Aquí tomamos nuevamente $\Omega = \frac{\pi}{2}$. Es interesante ver que el fondo de las depresiones en esta figura corresponde al estado “tipo Bell” $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1, -1\rangle - |-1, 1\rangle)$. En este estado el enredamiento permanece constante. Un poco más adelante veremos que, en algunos casos, los estados iniciales más enredados conservan su enredamiento después de una transformación de Lorentz. A pesar de que el estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1, -1\rangle - |-1, 1\rangle)$ no está máximamente enredado para un sistema de espín 1, conserva su enredamiento de forma notoria cuando se trata de la partición p vs. s y se toma el límite de la velocidad de la luz.

La invariancia del enredamiento del estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1, -1\rangle - |-1, 1\rangle)$ se da sólo para una partición específica (p vs. s) y para un valor particular del ángulo de Wigner ($\Omega = \frac{\pi}{2}$). En vista de esto, es interesante preguntarnos bajo qué condiciones un estado inicial de espín mantiene el enredamiento bajo una transformación de Lorentz respecto a cualquier partición y para todo Ω . Esta cuestión se analiza en la última sección de este capítulo, en la cual veremos que el enredamiento del estado inicial no juega un papel determinante en este aspecto, ya que pueden encontrarse estados separables para los cuales $\Delta E = 0$ respecto a cualquier partición y para todo Ω .

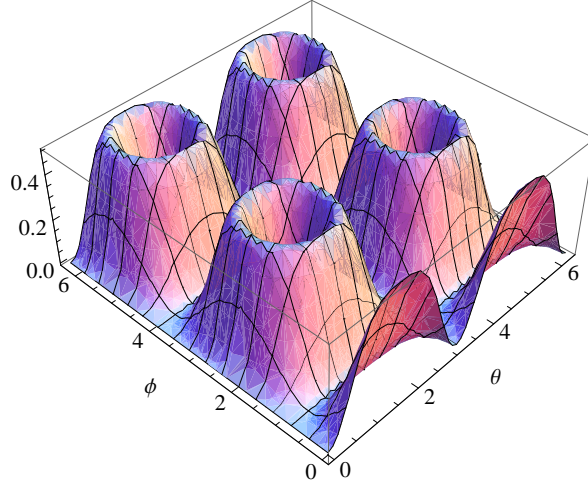


Figura 5.2: $\Delta E(\theta, \phi)$ para la segunda parametrización y la partición p vs. s, con $\Omega = \frac{\pi}{2}$. Los estados en el centro de las depresiones corresponden a estados tipo Bell: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1, -1\rangle - |-1, 1\rangle)$.

Concluimos el estudio del enredamiento entre espines y momentos considerando la figura 5.3, correspondiente a la tercer parametrización 5.19c con $\chi = \frac{2\pi}{3}$. Para un ángulo de Wigner de $\frac{\pi}{4}$, una gran cantidad de estados iniciales de espín genera un cambio máximo en el enredamiento entre momentos y espines del estado final. Es decir, para esta parametrización y este ángulo de Wigner es posible generar enredamiento mediante una transformación de Lorentz para una gran cantidad de estados. Sin embargo, como se puede ver de los mínimos de la gráfica 5.3, existe un estado,

$$|s\rangle = \frac{1}{2}(|1, 0\rangle + |0, 1\rangle - |0, -1\rangle - |-1, 0\rangle), \quad (5.38)$$

para el cual el cambio en el enredamiento es cero ². Más aún, este estado de espín permanece invariante después de hacer una transformación de Lorentz:

$$|s\rangle \longrightarrow \left(U_s^{(A)}(\Omega) \otimes U_s^{(B)}(-\Omega) \right) |s\rangle = |s\rangle. \quad (5.39)$$

Por simplicidad de notación escribimos el ángulo de Wigner Ω como el argumento de las transformaciones U_s , en vez de usar Λ y p , como se hizo en 5.15. En la sección 5.3 estudiaremos con más detalle los estados invariantes ante transformaciones de la forma $U_s^{(A)}(\Omega) \otimes U_s^{(B)}(-\Omega)$.

²Las gráficas tienen información redundante. Al tomar $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$, se obtienen diferentes puntos correspondientes al mismo estado, tomando en cuenta fases globales.

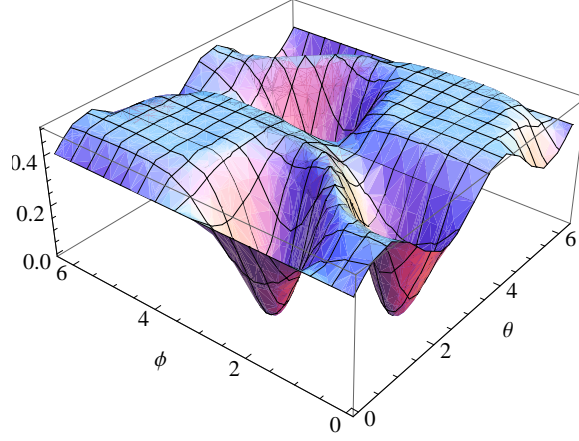


Figura 5.3: $\Delta E(\theta, \phi)$ para la tercer parametrización y la partición p vs. s , con $\Omega = \frac{\pi}{4}$. La gran mayoría de los estados exhiben un cambio máximo en el enredamiento. Los mínimos corresponden al estado invariante $\frac{1}{2}(|1, 0\rangle + |0, 1\rangle - |0, -1\rangle - |-1, 0\rangle)$.

5.2.3. Partición 1 vs. 3

Ahora analizamos la partición 1. vs. 3. En esta partición tampoco se conserva el enredamiento en general, y el cambio asociado a un estado inicial de espín depende fuertemente del ángulo de Wigner. En la figura 5.4 se compara la función ΔE para dos diferentes valores de Ω : $\Omega = \frac{\pi}{8}$ y $\Omega = \frac{\pi}{2}$. Tomamos un estado inicial dado por la primer parametrización 5.19a. Cuando $\Omega = \frac{\pi}{8}$, el estado $|0, 0\rangle$ exhibe un cambio máximo en la entropía lineal, mientras que los estados $|1, 1\rangle$ y $|-1, -1\rangle$ corresponden a máximos locales, i.e., estados que sí incrementan su enredamiento pero no máximamente, como es el caso del estado $|0, 0\rangle$. En la parte superior derecha de la figura 5.4 se muestra la gráfica del cambio en el enredamiento volteada al revés, para mostrar los mínimos. Dichos mínimos corresponden a los estados máximamente enredados $\frac{1}{\sqrt{3}}(|1, 1\rangle \pm |0, 0\rangle + |-1, -1\rangle)$. A pesar de que para esta partición ambos estados conservan el enredamiento para todo Ω , únicamente el estado $\frac{1}{\sqrt{3}}(|1, 1\rangle - |0, 0\rangle + |-1, -1\rangle)$ es invariante ante transformaciones de la forma $U_s^{(A)}(\Omega) \otimes U_s^{(B)}(-\Omega)$. Esto se hace evidente al considerar la partición p vs. s , en la cual $\frac{1}{\sqrt{3}}(|1, 1\rangle - |0, 0\rangle + |-1, -1\rangle)$ permanece como un mínimo para todo Ω , pero $\frac{1}{\sqrt{3}}(|1, 1\rangle + |0, 0\rangle + |-1, -1\rangle)$ sí genera un cambio en el enredamiento para algunos valores del ángulo de Wigner.

Por otro lado, para $\Omega = \frac{\pi}{2}$ (parte de abajo de la figura 5.4), los estados $|1, 1\rangle$ y $|-1, -1\rangle$ corresponden a un máximo cambio en el enredamiento, mientras que el

estado $|0,0\rangle$ se queda ahora en el fondo de la gráfica. De esta forma vemos cómo las velocidades de las partículas y del boost influyen de forma importante en el cambio del enredamiento.

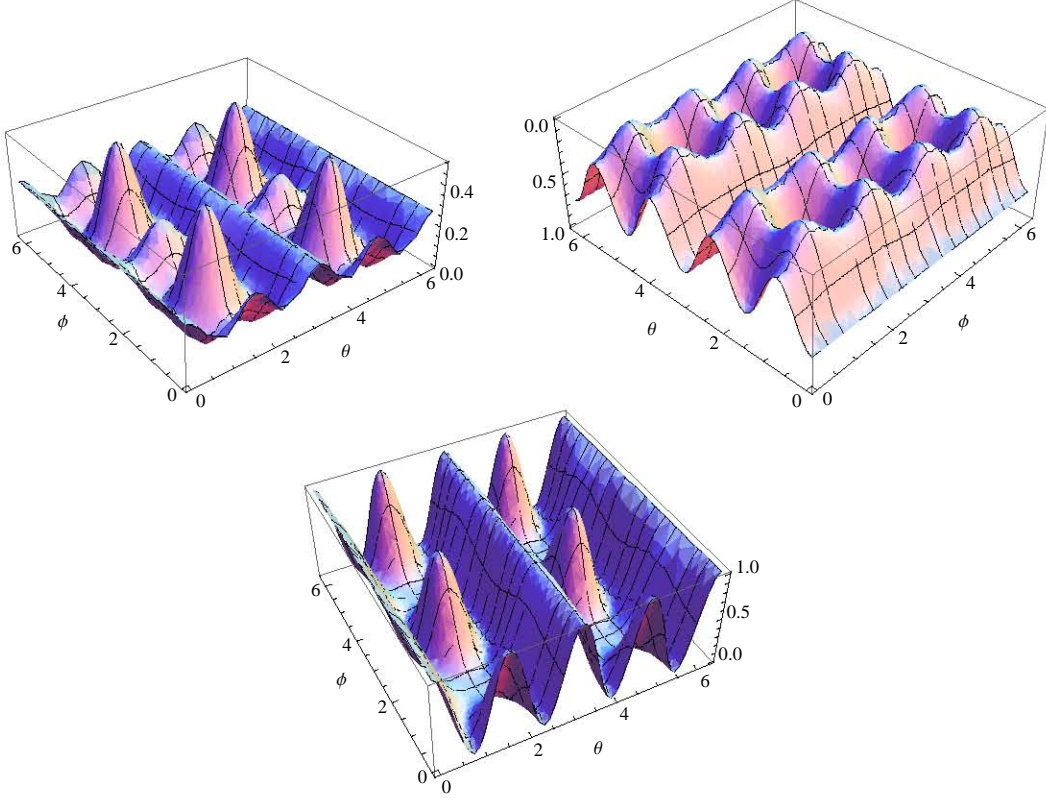


Figura 5.4: $\Delta E(\theta, \phi)$ para la primera parametrización y la partición 1 vs. 3. **Arriba:** $\Omega = \frac{\pi}{8}$. En este caso los máximos corresponden al estado $|0,0\rangle$ (**izquierda**), y los mínimos a los estados $\frac{1}{\sqrt{3}}(|1,1\rangle \pm |0,0\rangle + |-1,-1\rangle)$ (**derecha**). **Abajo:** $\Omega = \frac{\pi}{2}$. Los máximos están asociados con los estados $|1,1\rangle$ y $|-1,-1\rangle$.

Para la segunda parametrización, dada por la ecuación 5.19b, la situación es similar. Como se puede ver en la figura 5.5, los estados $|1,-1\rangle$ y $|-1,1\rangle$ permanecen por debajo del estado $|0,0\rangle$, el cual sabemos que tiene asociado un cambio de enredamiento máximo para $\Omega = \frac{\pi}{8}$. En este caso se muestra el cambio en el enredamiento para $\Omega = \frac{\pi}{4}$, con el propósito de evidenciar la continuidad de la transición de los máximos de la función ΔE con respecto a cambios en el ángulo de Wigner. Como se puede ver en el lado derecho de la figura 5.5, cuando $\Omega = \frac{\pi}{2}$, los estados $|1,-1\rangle$ y $|-1,1\rangle$ se enredan máximamente mientras que, como ya sabemos de la figura 5.4, el estado $|0,0\rangle$ no cambia su enredamiento. En esta parametrización también encontramos un estado invariante en el sentido de la ecuación 5.39. Dicho estado está dado por $\frac{1}{\sqrt{3}}(|1,-1\rangle + |0,0\rangle + |-1,1\rangle)$. Nótese que este estado está máximamente enredado al igual que $\frac{1}{\sqrt{3}}(|1,1\rangle - |0,0\rangle + |-1,-1\rangle)$. Ambos vectores permanecen invariantes

bajo la transformación de Lorentz considerada y, al ser máximamente enredados, son interesantes para propósitos de información cuántica.

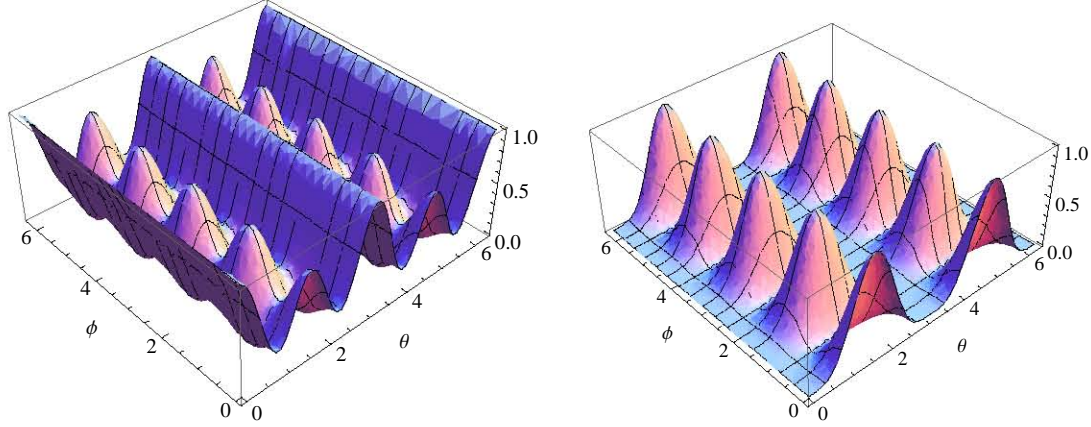


Figura 5.5: $\Delta E(\theta, \phi)$ para la segunda parametrización y partición 1 vs. 3. **Izquierda:** $\Omega = \frac{\pi}{4}$. Los máximos corresponden al estado $|00\rangle$. **Derecha:** $\Omega = \frac{\pi}{2}$. Los máximos están asociados con los estados $|1, -1\rangle$ y $|-1, 1\rangle$. En ambos casos el enredamiento se conserva para el estado invariante $\frac{1}{\sqrt{3}}(|1, -1\rangle + |0, 0\rangle + |-1, 1\rangle)$.

5.3. Estados invariantes

La existencia de estados que no cambian su forma bajo las transformaciones entre marcos de referencia consideradas en este trabajo es consecuencia de que el boost de Lorentz se toma únicamente en una dirección (a lo largo del eje x). Esta elección restringe la rotación de Wigner al plano $x - z$ y en consecuencia el grupo pequeño $SO(3)$ al grupo $SO(2)$, es decir, el grupo de rotaciones en el plano³. Dicha restricción nos permite encontrar una base del espacio de espines ($\mathcal{H} = \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$) cuyos elementos se transforman, ante una operación del tipo $U_s^{(A)}(\Omega) \otimes U_s^{(B)}(-\Omega)$, a lo mucho por una fase global. Para ver esto demostremos primero que el conjunto de transformaciones

$$\{U_s(\Omega) = U_s^{(A)}(\Omega) \otimes U_s^{(B)}(-\Omega) \mid 0 \leq \Omega < 2\pi\} \quad (5.40)$$

forman una representación de $SO(2)$. El producto de dos elementos en este grupo está dado simplemente por la suma de los parámetros que definen dichos elementos:

$$(\Omega_1)(\Omega_2) = (\Omega_1 + \Omega_2). \quad (5.41)$$

³A pesar de que se estudia una situación particular, no se pierde generalidad en términos del cambio en el enredamiento ya que, como se mencionó anteriormente, sólo la componente del boost perpendicular a la dirección del movimiento de la partículas contribuye en la rotación de Wigner.

De esta forma,

$$\begin{aligned}
U_s((\Omega_1)(\Omega_2)) &= U_s(\Omega_1 + \Omega_2) \\
&= U_s^{(A)}(\Omega_1 + \Omega_2) \otimes U_s^{(B)}(-\Omega_1 - \Omega_2) \\
&= U_s^{(A)}(\Omega_1) U_s^{(A)}(\Omega_2) \otimes U_s^{(B)}(-\Omega_1) U_s^{(B)}(-\Omega_2) \\
&= \left(U_s^{(A)}(\Omega_1) \otimes U_s^{(B)}(-\Omega_1) \right) \left(U_s^{(A)}(\Omega_2) \otimes U_s^{(B)}(-\Omega_2) \right) \\
&= U_s(\Omega_1) U_s(\Omega_2),
\end{aligned}$$

como queríamos probar. De esta forma, podemos hacer un cambio de base y reducir la transformación U_s en términos de las representaciones irreducibles de $SO(2)$, las cuales son de la forma $e^{\pm im\Omega}$, con $\Omega = 0, 1, 2, \dots$. Debido a que $SO(2)$ es un grupo conmutativo, por el lema de Schur, todas sus representaciones irreducibles son unidimensionales, de modo que en la nueva base obtendremos una representación diagonal del operador U_s . Los elementos de la diagonal son justamente las fases $e^{\pm im\Omega}$. Para saber cuántas veces aparece cada representación irreducible en la representación (reducible) $U_s(\Omega)$ usamos el teorema de caracteres demostrado en el Apéndice A, en el cual se consideran partículas con un espín arbitrario s . Para el caso $s = 1$ tenemos:

$$U_s(\Omega) \longrightarrow \begin{pmatrix} e^{2i\Omega} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2i\Omega} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\Omega} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\Omega} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\Omega} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\Omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.42)$$

Así, el enredamiento se conserva para cada uno de los elementos de esta nueva base, puesto que las fases globales no son relevantes para las propiedades físicas de los estados. Para una combinación lineal arbitraria de dichos vectores, toda la información relacionada con el cambio en el enredamiento está guardada en las fases relativas $e^{\pm im\Omega}$, con $m = 0, 1$ y 2 , en este caso. Por otro lado, cualquier combinación lineal de vectores correspondientes a un mismo valor de m , i.e., $m = 0, 1$ o 2 , permanecerá invariante bajo transformaciones de Lorentz que induzcan rotaciones de la forma $U_s^{(A)}(\Omega) \otimes U_s^{(B)}(-\Omega)$.

Para un par de partículas con espín arbitrario s , la matriz de transformación toma la forma (c.f. Apéndice A):

$$U_s(\Omega) \longrightarrow \text{diag} \left(\underbrace{e^{2ij\Omega}}_{a_{2j} \text{ veces}}, \underbrace{e^{i(2j-1)\Omega}}_{a_{2j-1} \text{ veces}}, \dots, \underbrace{e^{-2ij\Omega}}_{a_{-2j} \text{ veces}} \right), \quad (5.43)$$

donde las multiplicidades a_m están dadas por

$$a_m = 2j + 1 - |m|. \quad (5.44)$$

De este modo, cada uno de los estados de la base que diagonaliza $U_s(\Omega)$ conserva su enredamiento para cualquier valor de Ω y respecto a cualquier partición, al igual que las superposiciones de estados que se transforman con una misma fase, es decir, que portan una misma representación irreducible de $SO(2)$. Para estados correspondientes a diferentes representaciones, la información acerca del cambio en el enredamiento está contenida por completo en las fases de Wigner relativas $e^{im\Omega}$.

Por último, y con base en el resultado anterior, notemos que la invarianza del enredamiento bajo transformaciones de Lorentz no depende, para el caso de espín 1, del enredamiento inicial de los estados de espín, sino de sus propiedades de transformación. Por ejemplo, el estado

$$\begin{aligned} |s\rangle &= \frac{1}{2} (|1, 1\rangle + |1, -1\rangle + |-1, 1\rangle + |-1, -1\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|1\rangle + |-1\rangle) \otimes (|1\rangle + |-1\rangle) \end{aligned} \quad (5.45)$$

es separable y también es invariante ante las transformaciones U_s .

Capítulo 6

Conclusiones

En un sistema de dos partículas con grados de libertad de espín y momento existen diferentes particiones del espacio de Hilbert que dan lugar a diferentes enredamientos. Dentro de dichas particiones, el enredamiento entre los espacios asociados a diferentes partículas es invariante ante transformaciones de Lorentz. Este hecho es consecuencia de la unitariedad de la transformación en cada uno de los espacios, $U(\Lambda) = U^{(A)}(\Lambda) \otimes U^{(B)}(\Lambda)$. La conservación de este tipo de enredamiento es una condición necesaria para la consistencia de las correlaciones predichas por la mecánica cuántica con las transformaciones entre sistemas de referencia inerciales. Dicho de otra manera, si el enredamiento respecto a la partición $\mathcal{H}^{(A)} \otimes (\mathcal{H})^{(B)}$ cambiara ante una transformación de Lorentz, sería posible hallar dos observadores inerciales distintos que describieran situaciones físicas diferentes, en contradicción con el principio de relatividad. Por ejemplo, supongamos un escenario de teleportación cuántica descrito por dos observadores iniciales y supongamos que el enredamiento respecto a $\mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}$ no se conserva para la transformación de Lorentz que relaciona a ambos participantes, más aún, imaginemos que el estado compartido para fines de transmisión de información está enredado respecto a un sistema de referencia pero es separable respecto del otro. En este caso es claro que el protocolo de teleportación funcionará para un observador y para el otro no, generando una situación absurda. Así vemos que la conservación del enredamiento respecto a la partición A vs. B es esencial para evitar que los fenómenos cuánticos no locales, tal como la teleportación cuántica, violen el principio de relatividad.

El enredamiento también se conserva respecto a la partición mixta dada por $\mathcal{H} = \left(\mathcal{H}_p^{(A)} \otimes \mathcal{H}_s^{(B)}\right) \otimes \left(\mathcal{H}_p^{(B)} \otimes \mathcal{H}_s^{(A)}\right)$. Al igual que para A vs. B , esta partición es una descomposición no local del espacio de Hilbert completo, de forma que la conservación del enredamiento resulta necesaria para la descripción relativista de los fenómenos cuánticos no locales.

Por otro lado, el enredamiento no es invariante cuando se mide con respecto a las particiones p vs. s o 1 vs. 3 . Esto se debe a que la rotación de Wigner en el espacio de espín depende explícitamente del momento y es diferente para cada partícula, de

forma que si tenemos una superposición de estados de momento como estado inicial, el operador de densidad de la parte de espín sufrirá, no sólo una transformación unitaria, sino una superposición de ellas, una para cada estado de momento que conforma el estado inicial. Esto provoca, en general, que la matriz de densidad de espín represente un estado mixto, lo cual implica el cambio en el enredamiento respecto a la partición p vs. s . Por esta misma razón, el enredamiento tampoco se conserva respecto a la partición 1 vs. 3. Para estados iniciales de momento no superpuestos, que en el caso de la parametrización presentada en este trabajo corresponde a estados separables de momento, el cambio en el enredamiento es cero para cualquier estado inicial de espín y cualquier ángulo de Wigner, tanto para la partición p vs. s como para la 1 vs. 3. Esto se debe a que la matriz de densidad reducida de espín sufre en este caso una sola transformación unitaria, manteniendo de esta forma la misma entropía lineal. De esta forma, la dependencia del cambio en el enredamiento respecto al estado de momento inicial es simple: la función ΔE se ve modificada sólo por un factor de escala bajo variaciones del parámetro α , asociado con la superposición inicial de estados de momento. Encontramos que el cambio en el enredamiento es máximo para una superposición homogénea $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Esto se entiende también en términos del operador de densidad de espín el cual estará más mezclado entre más homogénea sea la superposición inicial de momentos. Para la familia de estados iniciales estudiada en este trabajo, la función ΔE es siempre positiva, tanto para la partición p vs. s como para la 1 vs. 3. Esto se debe únicamente a la restricción inicial de tomar un estado separable entre espín y momento. Cambios negativos en el enredamiento pueden ocurrir, desde luego, tomando la transformación inversa.

La dependencia del cambio en el enredamiento respecto al estado inicial de espín y al ángulo de Wigner es más interesante. En general, los estados que presentan un mayor cambio en enredamiento, con respecto a las particiones p vs. s o 1 vs. 3, son estados separables de espín, mientras que esta cantidad se mantiene constante, normalmente, para estados de espín máximamente enredados. Sin embargo existen excepciones a este comportamiento y el cambio de enredamiento para un estado en particular depende fuertemente del ángulo de Wigner asociado a la transformación. Para la partición 1 vs. 3 existen estados separables de espín, como el $|0, 0\rangle$, cuyo cambio en enredamiento es máximo para $\Omega = \frac{\pi}{8}$ pero desaparece por completo para el límite de la velocidad de la luz $\Omega = \frac{\pi}{2}$. El enredamiento inicial de los estados de espín antes de la transformación no es un factor determinante para el cambio en el enredamiento después de la transformación. Podemos encontrar estados de espín separables que conserven su enredamiento para todo Ω y todas las particiones. De la misma forma, podemos encontrar estados iniciales de espín máximamente enredados que no conserven el enredamiento respecto a la partición s vs. p .

Lo que determina el cambio en el enredamiento, respecto a las particiones antes mencionadas y a la situación particular considerada aquí, son las propiedades de transformación del estado inicial de espín con respecto a operaciones de la forma $U^{(A)}(\Omega) \otimes U^{(B)}(-\Omega)$, que son representaciones de $SO(2)$. En particular, los estados invariantes ante esta transformación conservaran el enredamiento para toda partición

y para todo Ω , sin importar el estado inicial de momento. Como el grupo $SO(2)$ actúa de forma reducible en el espacio de espines, podemos encontrar una base ortonormal de estados de espín que cambian ante una transformación de Lorentz tan sólo por una fase global $e^{im\Omega}$. En esta base, la rotación de Wigner en el espacio de espín adquiere una forma sencilla y toda la información acerca del cambio en el enredamiento se encuentra codificada en las fases relativas $e^{i(m-m')\Omega}$. Todas las superposiciones de estados que se transforman bajo la misma representación irreducible de $SO(2)$ son invariantes ante este tipo de transformaciones de Lorentz y conservan su enredamiento. Este resultado es válido para partículas de espín arbitrario j , de modo que se pueden construir, en principio, subespacios invariantes de cualquier dimensión, considerando el tipo adecuado de partículas. Este hecho puede ser útil para procesos de información cuántica en los cuales las consideraciones relativistas sean relevantes.

Apéndice A

Lema de Schur

A continuación presentamos algunos resultados de teoría de grupos útiles para el análisis de representaciones irreducibles. En particular, nos interesa la calcular las veces que aparece una representación irreducible dada en una representación reducible, resultado que se usa en el capítulo 5. El *lema de Schur* afirma lo siguiente: Sea \mathcal{G} un grupo y $D^{(1)}$ y $D^{(2)}$ dos representaciones irreducibles de \mathcal{G} que actúan en los espacios vectoriales V_1 y V_2 , respectivamente:

$$\begin{aligned} D^{(1)} : \mathcal{G} &\longrightarrow GL(V_1), \\ D^{(2)} : \mathcal{G} &\longrightarrow GL(V_2). \end{aligned}$$

Si $S : V_1 \longrightarrow V_2$ es un operador lineal con la propiedad

$$SD^{(1)}(g) = D^{(2)}(g)S, \quad \forall g \in \mathcal{G}, \quad (\text{A.1})$$

entonces S es cero o es un isomorfismo, lo cual implica, en el último caso, la equivalencia de las representaciones $D^{(1)}$ y $D^{(2)}$.

Demostramos ahora el lema de Schur.

Probamos primero que el kernel de S ($\ker S$), i.e., todos los vectores en V_1 que son mapeados bajo S al cero de V_2 , es un subespacio invariante bajo $D^{(1)}$:

Si $v \in \ker S \subseteq V_1$, entonces, $\forall g \in \mathcal{G}$,

$$SD^{(1)}(g)v = D^{(2)}(g)Sv = 0 \quad \implies \quad D^{(1)}(g)v \in \ker S,$$

como queríamos probar. Como la representación $D^{(1)}$ es irreducible, entonces $\ker S = V_1$ o $\ker S = \{0\}$. De darse el último caso, se sigue de un resultado de álgebra lineal que la función S es inyectiva.

Ahora probemos que, si S satisface A.1, entonces su imagen $\text{im } S$, i.e., el conjunto de vectores en V_2 que resulta de aplicar S a todos los vectores de V_1 , es un subespacio invariante bajo $D^{(2)}$:

Si $u \in \text{im } S$, entonces existe $v \in V_1$ tal que $u = Sv$. En consecuencia, para todo $g \in \mathcal{G}$ se cumple

$$D^{(2)}(g)u = D^{(2)}(g)Sv = SD^{(1)}(g)v, \quad \text{por lo que} \quad D^{(2)}(g)u \in \text{im } S,$$

como queríamos probar. Por la irreducibilidad de $D^{(2)}$, $\text{im } S = 0$ (i.e., $\ker S = V_1$) o $\text{im } S = V_2$ (i.e., $\ker S = \{0\}$). En el primer caso tenemos $S = 0$. En el segundo tenemos que S es un mapeo lineal, inyectivo y suprayectivo, es decir, es un isomorfismo de espacios vectoriales. En este último caso el inverso de S (S^{-1}) existe y

$$D^{(2)} = SD^{(1)}S^{-1},$$

probando la equivalencia de las representaciones. Esto demuestra el lema de Schur.

Un corolario muy importante es el siguiente:

Sea $D : \mathcal{G} \rightarrow GL(V)$ una representación irreducible de \mathcal{G} en un espacio vectorial complejo V y sea $C : V \rightarrow V$ un operador en V que conmuta con todos los elementos de la representación D , es decir, $CD(g) = D(g)C$ para todo $g \in \mathcal{G}$. Entonces C es un múltiplo del operador identidad, i.e., $C = \lambda \mathbb{1}$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración:

Usemos el lema de Schur con $V_1 = V_2 = V$ y $D^{(1)} = D^{(2)} = D$. Además de C , el operador $C - \lambda \mathbb{1}$ también conmuta con todos los elementos de la representación, ya que $\mathbb{1}$ conmuta con todo operador en V . Por el lema de Schur, $C - \lambda \mathbb{1}$ es cero o es un isomorfismo. Como el espacio vectorial es complejo, podemos escoger a λ como un valor propio de C . En este caso $C - \lambda \mathbb{1}$ no es invertible, puesto que cualquier vector propio v ($v \neq 0$) correspondiente al valor propio λ está en $\ker(C - \lambda \mathbb{1})$. En consecuencia $C - \lambda \mathbb{1} = 0$, o

$$C = \lambda \mathbb{1}, \tag{A.2}$$

como queríamos probar.

En seguida derivamos la fórmula para las multiplicidades de representaciones irreducibles, es decir, las veces que una representación irreducible aparece dentro de una representación dada, a partir de las llamadas **relaciones de ortogonalidad**. El análisis hecho aquí es para grupos finitos, pero los resultados son válidos también para $SO(2)$, el grupo que nos interesa, haciendo las sustituciones pertinentes para el caso continuo [13]. Utilizamos la convención de suma de índices repetidos.

Sean $D^{(1)} : \mathcal{G} \rightarrow GL(V_1)$ y $D^{(2)} : \mathcal{G} \rightarrow GL(V_2)$ dos representaciones irreducibles del grupo \mathcal{G} en los espacios vectoriales V_1 y V_2 , respectivamente, y sea $A : V_1 \rightarrow V_2$ un operador cualquiera. Definimos el **promedio en el grupo** de A como el operador

$$\bar{A} = \frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} D^{(2)}(g)AD^{(1)}(g^{-1}), \tag{A.3}$$

donde $|\mathcal{G}|$, el **orden del grupo**, es el número de elementos de \mathcal{G} . Para un grupo continuo, $|\mathcal{G}|$ es la medida del espacio de parámetros. Por ejemplo, para $SO(2)$, $|\mathcal{G}| =$

$\int_0^{2\pi} d\omega = 2\pi$. Si h es cualquier elemento de \mathcal{G} , entonces

$$\begin{aligned} D^{(2)}(h)\bar{A}D^{(1)}(h^{-1}) &= \sum_{g \in G} D^{(2)}(hg)AD^{(1)}\left((hg)^{-1}\right) \\ &= \sum_{g' \in \mathcal{G}} D^{(2)}(g')AD^{(1)}(g'^{-1}) \quad (g' = hg) \\ &= \bar{A}. \end{aligned}$$

De esta forma, \bar{A} cumple con la propiedad $D^{(2)}\bar{A} = \bar{A}D^{(1)}$ y podemos usar el lema de Schur. Si las representaciones son no equivalentes, entonces necesariamente $\bar{A} = 0$. De esta forma en notación de índices se cumple la relación

$$\frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in G} D_{i'j'}^{(2)}(g)A_{j'i}D_{ij}^{(1)}(g^{-1}) = 0.$$

Como A es un operador cualquiera,

$$\frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in G} D_{i'j'}^{(2)}(g)D_{ij}^{(1)}(g^{-1}) = 0. \quad (\text{A.4})$$

Por otro lado, si las representaciones son equivalentes, $D^{(2)} = D^{(1)} = D$, $V_1 = V_2 = V$, debemos tener $\bar{A} = \lambda \mathbf{1}$. Para calcular la constante de proporcionalidad tomamos la traza de \bar{A} , obteniendo

$$\lambda = \frac{1}{n} \text{Tr}(\bar{A}).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\bar{A}) &= \frac{1}{|\mathcal{G}|} \text{Tr} \left(\sum_{g \in G} D(g)AD^{-1}(g) \right), \quad \text{por la propiedad de representación} \\ &= \frac{1}{|\mathcal{G}|} \text{Tr} \left(\sum_{g \in G} D^{-1}(g)D(g)A \right), \quad \text{por la propiedad cíclica de la traza} \\ &= \frac{1}{|\mathcal{G}|} \text{Tr}(A) |\mathcal{G}| \\ &= \text{Tr}(A). \end{aligned}$$

Por lo tanto, en este caso,

$$\bar{A}_{ij} = \frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in G} D_{ik}(g)A_{kl}D_{lj}(g^{-1}) = \frac{1}{n} A_{kk} \delta_{ij}.$$

En particular, para $A_{kl} = \delta_{kl}$, se cumple

$$\frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in G} D_{ik}(g)D_{lj}(g^{-1}) = \frac{1}{n} \delta_{lk} \delta_{ij}.$$

Si la representación D es unitaria, $D_{lj}(g^{-1}) = D_{jl}^*(g)$, podemos escribir:

$$\frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} D_{ik}(g) D_{jl}^*(g) = \frac{1}{n} \delta_{lk} \delta_{ij}. \quad (\text{A.5})$$

Si $D^{(a)} : \mathcal{G} \rightarrow GL(V_a)$ y $D^{(b)} : \mathcal{G} \rightarrow GL(V_b)$ son dos representaciones (irreducibles y unitarias) arbitrarias de \mathcal{G} , podemos juntar los resultados A.4 y A.5 bajo la siguiente fórmula:

$$\sum_{g \in \mathcal{G}} \sqrt{\frac{n_a}{|\mathcal{G}|}} D_{ik}^{(a)}(g) \sqrt{\frac{n_b}{|\mathcal{G}|}} \left(D_{jl}^{(b)}(g) \right)^* = \delta_{ab} \delta_{lk} \delta_{ij}, \quad (\text{A.6})$$

donde n_a y n_b son las dimensiones de V_a y V_b , respectivamente. Estos resultados se conocen como las relaciones de ortogonalidad.

Si $g \in \mathcal{G}$ es un elemento cualquiera y $D : \mathcal{G} \rightarrow GL(V)$ es una representación de \mathcal{G} , definimos la **característica** de g respecto a la representación D como

$$\chi(g) = \text{Tr}(D(g)) = \sum_k D_{kk}(g).$$

El conjunto de caracteres $\{\chi(g) | g \in \mathcal{G}\}$ se llama **carácter** de la representación D . Dos representaciones equivalentes, D y $D' = SDS^{-1}$, tienen el mismo carácter, ya que, para todo $g \in \mathcal{G}$,

$$\chi'(g) = \text{Tr}(SD(g)S^{-1}) = \text{Tr}(S^{-1}SD(g)) = \text{Tr}(D(g)) = \chi(g).$$

Si en la ecuación A.6 ponemos $i = k$, $j = l$ y tomamos la suma hasta las respectivas dimensiones n_a y n_b , obtenemos una relación de ortogonalidad para caracteres de representaciones irreducibles (también conocidos como **caracteres simples**):

$$\frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} \chi^{(a)}(g) \left(\chi^{(b)}(g) \right)^* = \delta_{ab}. \quad (\text{A.7})$$

Supongamos ahora que D es una representación completamente reducible de \mathcal{G}

$$D = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus \dots \oplus D^{(n)}. \quad (\text{A.8})$$

Si llamamos a_j a la multiplicidad de la representación irreducible $D^{(j)}$ en la representación D , entonces la característica de $g \in \mathcal{G}$ respecto a D está dada por

$$\chi(g) = \text{Tr}(D(g)) = \sum_j a_j \chi^{(j)}(g),$$

donde la suma va hasta el número de representaciones irreducibles no equivalentes de \mathcal{G} . Usamos ahora la relación de ortogonalidad para los caracteres simples para obtener:

$$a_j = \frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} \chi(g) \left(\chi^{(j)}(g) \right)^*. \quad (\text{A.9})$$

Para el caso de $SO(2)$, las representaciones irreducibles son de la forma $D^{(m)}(\Omega) = e^{im\Omega}$, $m \in \mathbb{Z}$ [13], y el orden del grupo está dado por $|\mathcal{G}| = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$, de modo que la relación de ortogonalidad para los caracteres simples se escribe

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\Omega e^{im\Omega} e^{-in\Omega} = \delta_{mn}.$$

Las representaciones reducibles de este grupo son completamente reducibles, de modo que cualquiera de ellas puede escribirse como suma directa de términos de la forma $e^{im\Omega}$. Nos interesa calcular la multiplicidad de cada término para representaciones de la forma $U^{(A)}(\Omega) \otimes U^{(B)}(-\Omega)$. Consideramos aquí el caso de dos partículas con espín arbitrario $s = j$.

El carácter de una representación de tipo producto tensorial es simplemente el producto de los caracteres de cada uno de los factores:

$$\begin{aligned} \chi(\Omega) &= Tr \left(U^{(A)}(\Omega) \otimes U^{(B)}(-\Omega) \right) \\ &= \sum_{kk'} \left(U^{(A)}(\Omega) \otimes U^{(B)}(-\Omega) \right)_{kk',kk'} \\ &= \sum_{kk'} \left(U^{(A)}(\Omega)_{kk} \right) \left(U^{(B)}(\Omega)_{k'k'} \right) \\ &= \chi^{(A)}(\Omega) \chi^{(B)}(\Omega). \end{aligned}$$

Para una rotación por un ángulo Ω en un sistema simple, digamos A , se puede demostrar [13] que el carácter está dado por

$$\chi^{(A)}\Omega = \sum_{m=-j}^j e^{-im\Omega},$$

de modo que en nuestro caso debemos calcular

$$\begin{aligned} \chi(\Omega) &= \chi^{(A)}(\Omega) \chi^{(B)}(-\Omega) \\ &= \left(\sum_{m=-j}^j e^{-im\Omega} \right) \left(\sum_{m'=-j}^j e^{im'\Omega} \right) \\ &= \sum_{m,m'=-j}^j e^{i(m-m')\Omega} \end{aligned}$$

Para calcular la última expresión ordenamos los sumandos de manera decreciente en

m y creciente en m' :

$$\begin{aligned} \sum_{m,m'=-j}^j e^{i(m-m')\Omega} &= e^{i\Omega(2j)} + e^{i\Omega(2j-1)} + \dots + e^{i\Omega(j)} + \dots + e^{i\Omega} + e^{i\Omega(0)} + \\ &+ e^{i\Omega(2j-1)} + e^{i\Omega(2j-2)} + \dots + e^{i\Omega(j-1)} + \dots + e^{i\Omega(0)} + e^{-i\Omega} + \dots \\ &\dots + e^{i\Omega(j)} + e^{i\Omega(j-1)} + \dots + e^{i\Omega(0)} + \dots + e^{i\Omega(-j+1)} + e^{i\Omega(-j)} + \dots \\ &\dots + e^{i\Omega} + e^{i\Omega(0)} + \dots + e^{i\Omega(-j+1)} + \dots + e^{i\Omega(-2j+2)} + e^{i\Omega(-2j+1)} + \\ &+ e^{i\Omega(0)} + e^{-i\Omega} + \dots + e^{i\Omega(-j)} + \dots + e^{i\Omega(-2j+1)} + e^{-i\Omega(-2j)}. \end{aligned}$$

Identificando los términos que se repiten, obtenemos

$$\chi(\Omega) = \sum_{k=-j}^j (2j+1-2|k|)e^{2ik\Omega},$$

de modo que las multiplicidades, dadas por la ecuación A.9, son

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\Omega \sum_{k=-j}^j (2j+1-2|k|)e^{2ik\Omega} e^{-im\Omega} \\ &= \sum_{k=-j}^j (2j+1-2|k|)\delta_{2k,m} \\ &= 2j+1-|m|, \end{aligned}$$

para $-2j \leq m \leq 2j$. De esta forma hemos demostrado que para un sistema de dos partículas de espín j existe una base en la cual la transformación $U(\Omega) = U^{(A)}(\Omega) \otimes U^{(B)}(\Omega)$ tiene la forma

$$U(\Omega) \longrightarrow \text{diag} \left(\underbrace{e^{2ij\Omega}}_{a_{2j} \text{ veces}}, \underbrace{e^{i(2j-1)\Omega}}_{a_{2j-1} \text{ veces}}, \dots, \underbrace{e^{-2ij\Omega}}_{a_{-2j} \text{ veces}} \right). \quad (\text{A.10})$$

Este tipo de transformaciones son importantes ya que son las inducidas en el espacio de espines por una transformación de Lorentz como la estudiada en este trabajo, para momentos bien definidos. Cada uno de los estados de la base encontrada conserva su enredamiento para cualquier valor de Ω , al igual que las superposiciones de estados que se transforman con una misma fase, es decir, que portan una misma representación irreducible de $SO(2)$. Para estados correspondientes a diferentes representaciones, la información acerca del cambio en el enredamiento está contenida por completo en las fases de Wigner relativas $e^{im\Omega}$.

Apéndice B

$\sqrt{\delta}$

En esta sección presentamos una familia de funciones $\Psi(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{a})$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, cuyo límite cuando $\alpha \rightarrow \infty$ puede ser interpretado como la raíz cuadrada de la delta de Dirac tridimensional. Nos basamos en el artículo de Neil V. Budko y Alexander B. Samokhin [?].

Demostraremos que la familia de funciones

$$\Psi(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{a}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{3}{4}} \alpha^{\frac{5}{4}} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \exp\left(-\frac{\alpha}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2\right), \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}^+,$$

tiene las siguientes propiedades:

(i) Las funciones están normalizadas para todo α :

$$\int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} d\mathbf{x} |\Psi(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{a})|^2 = 1. \quad (\text{B.1})$$

(ii) Ninguna sucesión

$$\Psi(\alpha_n, \mathbf{x}, \mathbf{a}) \quad \text{con} \quad \alpha_n < \alpha_{n+1} \quad \text{y} \quad n = 1, 2, \dots$$

tiene alguna subsucesión convergente.

(iii) Para cualquier función continua $f(\mathbf{x})$ se cumple

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) |\Psi(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{a})|^2 = f(\mathbf{a}),$$

de modo que el cuadrado de $\Psi(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{a})$ satisface, en el límite $\alpha \rightarrow \infty$, las propiedades de la delta de Dirac.

Probamos la primera propiedad mediante un cálculo directo:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} d\mathbf{x} |\Psi(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{a})|^2 &= \frac{2}{3} \pi^{-\frac{3}{2}} \alpha^{\frac{5}{2}} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} d\mathbf{x} |\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 e^{-\alpha|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^2} \\
&= \frac{2}{3} \pi^{-\frac{3}{2}} \alpha^{\frac{5}{2}} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} dr d\theta d\phi r^2 \sin \theta r^2 e^{-\alpha r^2} \\
&= \frac{2}{3} \pi^{-\frac{3}{2}} \alpha^{\frac{5}{2}} \cdot 4\pi \cdot \frac{(4-1)!!}{2(2\alpha)^2} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

donde hemos usado la integral conocida $\int_0^\infty dr r^{2n} e^{-pr^2} = \frac{(2n-1)!!}{2(2p)^n} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$, $p > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Para probar el segundo punto suponemos que existe una subsucesión convergente $\Psi(\alpha_n, \mathbf{x}, \mathbf{a})$, con $\alpha_n < \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Esta sucesión debe ser de Cauchy, es decir, para todo $\epsilon > 0$ debe existir $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m > N \implies \|\Psi(\alpha_n, \mathbf{x}, \mathbf{a}) - \Psi(\alpha_m, \mathbf{x}, \mathbf{a})\|^2 := \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} d\mathbf{x} |\Psi(\alpha_n, \mathbf{x}, \mathbf{a}) - \Psi(\alpha_m, \mathbf{x}, \mathbf{a})|^2 < \epsilon$$

Calculamos ahora $\|\Psi(\alpha_n, \mathbf{x}, \mathbf{a}) - \Psi(\alpha_m, \mathbf{x}, \mathbf{a})\|^2$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} d\mathbf{x} |\Psi(\alpha_n, \mathbf{x}, \mathbf{a}) - \Psi(\alpha_m, \mathbf{x}, \mathbf{a})|^2 &= \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} d\mathbf{x} |\Psi(\alpha_n, \mathbf{x}, \mathbf{a})|^2 + \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} d\mathbf{x} |\Psi(\alpha_m, \mathbf{x}, \mathbf{a})|^2 + \\
&\quad - 2 \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \Psi(\alpha_m, \mathbf{x}, \mathbf{a}) \cdot \Psi(\alpha_n, \mathbf{x}, \mathbf{a}) \\
&= 2 - 2^{\frac{7}{2}} \frac{\alpha_m^{\frac{5}{4}} \alpha_n^{\frac{5}{4}}}{(\alpha_m + \alpha_n)^{\frac{5}{2}}} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} d\mathbf{x} |\Psi(\frac{\alpha_m + \alpha_n}{2}, \mathbf{x}, \mathbf{a})|^2 \\
&= 2 - 2^{\frac{7}{2}} \frac{\alpha_m^{\frac{5}{4}} \alpha_n^{\frac{5}{4}}}{(\alpha_m + \alpha_n)^{\frac{5}{2}}}.
\end{aligned}$$

Debido al término 2, es claro que para ningunos valores de m, n esta cantidad se puede hacer arbitrariamente pequeña, probando así que no existe ninguna subsucesión convergente.

La tercera propiedad se demuestra dividiendo el dominio de integración en dos partes:

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) |\Psi(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{a})|^2 &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus V(\delta)} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) |\Psi(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{a})|^2 + \\
&\quad + \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{x} \in V(\delta)} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) |\Psi(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{a})|^2,
\end{aligned}$$

donde $V(\delta)$ es una esfera de radio δ centrada en el punto \mathbf{a} . Probaremos primero que para una elección adecuada del radio δ , la integral en el dominio que no contiene al punto \mathbf{a} tiende a cero para $\alpha \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus V(\delta)} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) |\Psi(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{a})|^2 &\leq \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} |f(\mathbf{x})| \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus V(\delta)} d\mathbf{x} |\Psi(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{a})|^2 \\ &= \frac{2}{3} \pi^{-\frac{3}{2}} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} |f(\mathbf{x})| \alpha^{\frac{5}{2}} \int_{\delta}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} dr d\theta d\phi r^2 \sin \theta r^2 e^{-\alpha r^2} \\ &= \frac{8\pi}{3} \pi^{-\frac{3}{2}} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} |f(\mathbf{x})| \alpha^{\frac{5}{2}} \int_{\delta}^{\infty} dr r^4 e^{-\alpha r^2}. \end{aligned}$$

Ahora integramos sucesivamente por partes la última expresión para obtener:

$$\int_{\delta}^{\infty} dr r^4 e^{-\alpha r^2} = \frac{3}{4\alpha^2} \int_{\delta}^{\infty} dr e^{-\alpha r^2} + \left(\frac{\delta^3}{2\alpha} + \frac{3\delta}{4\alpha^2} \right) e^{-\alpha \delta^2}.$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus V(\delta)} d\mathbf{x} |\Psi(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{a})|^2 &= \frac{8\pi}{3} \pi^{-\frac{3}{2}} \alpha^{\frac{5}{2}} \int_{\delta}^{\infty} dr r^4 e^{-\alpha r^2} \\ &= \frac{8\pi}{3} \pi^{-\frac{3}{2}} \alpha^{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{4\alpha^2} \int_{\delta}^{\infty} dr e^{-\alpha r^2} + \left(\frac{\delta^3}{2\alpha} + \frac{3\delta}{4\alpha^2} \right) e^{-\alpha \delta^2} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \alpha^{\frac{1}{2}} \int_{\delta}^{\infty} dr e^{-\alpha r^2} + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2} \delta^3 \alpha^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} \delta \alpha^{\frac{1}{2}} \right) e^{-\alpha \delta^2}. \end{aligned}$$

Para $\delta = \alpha^{-\frac{1}{3}}$, la última expresión se convierte en

$$\int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus V(\delta)} d\mathbf{x} |\Psi(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{a})|^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{r\sqrt{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{6}}}^{\infty} d(r\sqrt{\alpha}) e^{(-r\sqrt{\alpha})^2} + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2} \alpha^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} \alpha^{\frac{1}{6}} \right) e^{-\alpha^{\frac{1}{3}}}.$$

El segundo sumando claramente tiende a cero cuando $\alpha \rightarrow \infty$. Para ver que el primero también, observamos que

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{r\sqrt{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{6}}}^{\infty} d(r\sqrt{\alpha}) e^{(-r\sqrt{\alpha})^2} &\leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha^{\frac{1}{6}}}^{\infty} dy e^{-y} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^{\frac{1}{6}}} \rightarrow 0, \quad \text{para } \alpha \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

De esta forma se demuestra que la integral fuera de la región que contiene al punto \mathbf{a} tiende a cero.

Resta ahora evaluar la integral en la vecindad de \mathbf{a} . Por hipótesis, la función f es continua, de modo que podemos utilizar el teorema del valor medio para integrales, el

cual, en el límite $\alpha \rightarrow \infty$ nos permite escribir, para algún $\mathbf{x}_\alpha \in V(\delta)$,

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{x} \in V(\delta)} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) |\Psi(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{a})|^2 &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_\alpha) \int_{\mathbf{x} \in V(\delta)} d\mathbf{x} |\Psi(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{a})|^2 \\
&= f(\mathbf{a}) \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{x} \in V(\delta)} d\mathbf{x} |\Psi(\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{a})|^2 \\
&= f(\mathbf{a}) \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^{-\frac{5}{2}} \int_0^{\alpha^{-\frac{1}{3}}} dr r^4 e^{-\alpha r^2} \\
&= f(\mathbf{a}) \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{r\sqrt{\alpha}=0}^{\alpha^{\frac{1}{6}}} d(r\sqrt{\alpha}) (r\sqrt{\alpha})^4 e^{-(r\sqrt{\alpha})^2} \\
&= f(\mathbf{a}) \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha^{\frac{1}{6}}} dy y^4 e^{-y^2} \\
&= f(\mathbf{a}) \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dy y^4 e^{-y^2} \\
&= f(\mathbf{a}),
\end{aligned}$$

como queríamos probar.

Bibliografía

- [1] Alsing P.M., Milburn G. J. (2002). *Quant. Inf. and Comp.* Vol. 2, No. 6, 487-512.
- [2] Aspect A., et al. (1981). *Phys. Rev. Lett.* 47, 460
- [3] Ballentine L., “Quantum Mechanics: A Modern Development”, World Scientific, 1998.
- [4] Bell J. S., “Speakable and unspeakable in quantum mechanics”, Cambridge, 1987
- [5] Benenti G. et al., “Principles of Quantum Computation and Information: Volume 1: Basic Concepts”, World Scientific, 2004.
- [6] Bengtsson I., Zyczkowski, K., “The Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement”, Cambridge, 2006.
- [7] Bennet C.H., et al. (1993). *Phys. Rev. Lett.* 70, 1895-1899
- [8] Bohm D. J., “Quantum Theory”, Prentice-Hall, 1951.
- [9] Bohm D. J. (1952) *Phys. Rev.* 85, 166-179
- [10] Bradler K. (2011). *J. Opt. Soc. Am. B* 28, 727-736.
- [11] Breuer H. P., Petruccione F., “The Theory of Open Quantum Systems”, Oxford, 2007.
- [12] Caban P. (2007). *Phys. Rev. A* 76, 052102
- [13] Chacón E., “Introducción a la Teoría de los Grupos y sus Aplicaciones en Mecánica Cuántica”, Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México, 2008.
- [14] Clauser J. F., Horne M.A., Shimony A., Holt R. A. (1969). *Phys. Rev. Lett.* 23, 880-884
- [15] Clauser J.F., Horne M.A. (1974). *Phys. Rev. D.* 10, 526-535
- [16] Eisberg R., Resnick R. “Quantum Physics of Atoms, Molecules, solids, Nuclei, and Particles”, Wiley and Sons, 1985.

-
- [17] Einstein A., Podolski B., Rosen N. (1935). *Phys Rev.*, 47, 777.
- [18] Friis N. et al. (2010) *Phys. Rev. A.* 81, 042114
- [19] Gilmore R., “Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications”, Dover, 2005
- [20] Gilmore R., “Lie Groups, Physics, and Geometry: An Introduction for Phycisists, Engineers, and Chemists”, Cambridge, 2008.
- [21] Gingrich R. M., et al. (2003) *Phys. Rev. A* 68, 042102.
- [22] Haroche S. Raimond J. M., “Exploring the Quantum: Atoms, Cavities, and Photons”, Oxford, 2006.
- [23] Hui L., Jiangfeng D. (2003) *Phys. Rev. A* 68, 022108
- [24] Mermin N.D., Garg A. (1987). *Phys. Rev. D* 35, 3831-3835
- [25] Mintert F. et al. (2005). *Phys. Rep.* 415, 207-259
- [26] Nielsen M. A., Chuang I. L., “Quantum Computation and Quantum Information”, Cambridge, 2000.
- [27] Pearle P. (1970). *Phys. Rev. D*, 2, 1418-25
- [28] Peres A., Terno D. (2004). *Rev. Mod. Phys.* 76, 93-123
- [29] Peres A., Terno D. R. (2003) *J. Mod. Op.*, 50, 6-7: 1165-1173
- [30] Plenio M.B., Virmani S. (2006). arXiv:quant-ph/0504163v3
- [31] Sakurai J. J., “Modern Quantum Mechanics”, Addison-Wesley, 1994.
- [32] Samokhin A. B., Budko n. B. (2007) *Journal of Physics A* 40, 6239-6250
- [33] Sexl R.U., Urbantke H. K. “Relativity, Groups, Particles: Special Relativity and Relativistic Symmetry in Field and Particle Physics”, Springer, 2001.
- [34] Szekeres P., “ A course in Modern Mathematical Physics: Groups, Hilbert Space and Differential Geometry”, Cambridge, 2004.
- [35] Terno D. R. (2006). arXiv:quant-ph/0508049v2
- [36] Tung W., “Group Theory in Physics”, World Scientific, 1985.
- [37] Weinberg S., “The Quantum theory of Fields: Volume 1: Foundations”, Cambridge, 1995.