UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Equivalencia de Formas de Volumen en Variedades

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A

NOE FRANCISCO VERDE MARTINEZ

DR. RICARDO BERLANGA ZUBIAGA

MÉXICO, D.F. 2013

Hoja de Datos del Jurado

1.Datos del alumno
Verde
Martinez
Noe Francisco
58573429
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
97279435

2. Datos del tutor
Dr
Ricardo
Berlanga
Zubiaga

3. Datos del sinodal 1
Dr
Guillermo Javier Francisco
Sienra
Loera

4. Datos del sinodal 2
Dra
María de los Ángeles
Sandoval
Romero

5. Datos del sinodal 3
Dr
Juan Manuel
García
Islas

6. Datos del sinodal 4
Mat
Martín Rafael
Pérez
Hernández

7. Datos del trabajo escrito
Equivalencia de Formas de Volumen en Variedades
82 p
2013

Dedicatoria

Para mi familia...

Agradecimientos

Ante todo quiero agradecer la enorme paciencia que mi asesor el Dr. Ricardo Berlanga Zubiaga me ha tenido en todo este tiempo, de quien he aprendido una enorme cantidad de cosas que son totalmente invaluables.

Asimismo, a mi grupo de sinodales compuesto también por el Dr. Ricardo Berlanga Zubiaga, el Dr. Guillermo Javier Francisco Sienra Loera, la Dra. María de los Ángeles Sandoval Romero, el Dr. Juan Manuel García Islas y el Mat. Martín Rafael Pérez Hernández.

A mis padres Jose Juan Verde y Esther Martinez por el apoyo incondicional que nunca me han dejado de dar.

Y también, a mis amigos de la licenciatura con quienes he pasado muy buenos momentos. En especial a el M. en C. Jonatan Mendoza Gutierrez por su apoyo tanto en lo académico como en lo personal.

Índice general

Objetivos

La tesis que se presenta tiene como objetivo desarrollar la teoria y los conceptos necesarios, para desarrollar las herraminentas que se usan en la demostración del *Teorema de Moser*, el cual demuestra la existencia de un difeomorfismo entre formas de volumen.

El trabajo está esencialmente autocontenido, sin embargo el lector deberá tener conocimientos generales de de cálculo avanzado, álgebra lineal y multilineal, así como algunos conceptos de topología general. Las definiciones y conceptos del cálculo y del álgebra serán de gran ayuda, para definir ideas más generales que desarrollen la teoria en variedades.

Introducción

Las variedades son espacios topológicos las cuales se caracterizan por una topológia que depende de los subconjuntos del espacio, es decir, tiene una colección de subconjuntos abiertos con ciertas caracteristicas. Las variedades son espacios topologicos que se parecen mucho a los espacios euclidianos, los ejemplos de variedades son superfies suaves, como la esfera y el toro. Para dar una definión matemática de variedades, será necesario introducir las definiciones de mapeos y difeomorfismos suaves; los difeomorfismos tienen asociada de manera natural una tranformación lineal conocida como la diferencial, la cual define el espacio tangente y el haz tangente. Uno de los mapeos que es de gran importancia en la demostración del *Teorema de Moser* es el *pullback*, el cual es un difeomorfismo.

Una parte del trabajo desarrolla el álgebra necesaria para definir los tensores alternantes en espacios vectoriales y campos tensoriales sobre variedades compactas, el subconjunto de tensores alternantes sobre una variedad, tales objetos son llamados formas diferenciales, que son expreciones que se integran y se derivan con atributos indispensables, se manejan como los tensores alternantes.

Después de introducír la definición de formas difenciales, se abordará el tema de orientación en espacios vectoriales y espacios euclidianos, para luego desarrollar estas ideas en variedades suaves, con lo que se generalizará la orientación e integración en variedades .

En el último capítulo se enunciara y demostrara el *Teorema de Moser*, que demuestra la existencia de un difeomorfismo que transforma dos formas de volumen uno en el otro conservando su masa total.

Capítulo 1

Variedades Suaves

Una variedad topológica es un espacio topológico con tres propiedades especiales que expresan la idea de ser a nivel local como el espacio euclidiano. Estas propiedades son compartidas por los espacios euclidianos y por toda la familia de objetos que se ven a nivel local como espacios euclidianos y como superficies.

Se vera con cierto detalle cómo las coordenadas locales pueden ser utilizadas para identificar partes de una variedad suave localmente con parte del espacio euclideano. Se va a introducir una estructura adicional, llamada atlas maximal suave, que se puede añadir a una variedad topológica que permite definir funciones suaves en variedades y mapeos suaves entre variedades. Aunque los términos "función" y "mapeos" son técnicamente sinónimos, cuando se estudia variedades suves a menudo es conveniente hacer una ligera distinción entre ellas. Luego se definen los difeomorfismos, para estudiar las propiedades entre variedades.

Al final del capítulo, se presentan algunas herramientas muy utiles, llamada funciones bump y particiones de la unidad.

1.1. Variedades Topológicas

Esta sección está dedicada a una breve descripción de la definición y propiedades de las variedades topológicas.

Definición. Sea M un espacio topológico. Se dice que M es una *variedad topológica de dimensión* n o una n*-variedad* si esta tiene las siguientes propiedades:

- M es un espacio de Hausdorff: si para cada par de puntos que $p, q \in M$, hay subconjuntos discontinuos abietos $U, V \in M$ tal que $p \in U$ y $p \in V$.

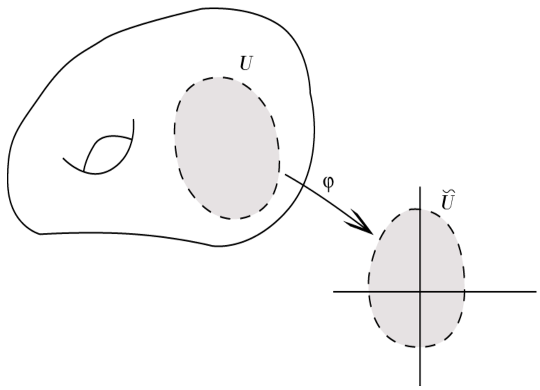

Figura 1.1: Una carta de coordenadas

- M es segundo numerable: Esto es exite una base numerable para la topología de M.
- M es localmente un espacio euclidiano de dimensión n: Para cada punto se tiene una vecindad abierta no vacia que es un homeomorfismo a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

La propiedad del espacio euclidiano local para cada $p \in M$, tiene las siguientes propiedades:

- Un conjunto abierto $U \subset M$ contiene a p.
- Un subconjunto $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$; y un homeomorfismo $\varphi : U \to \widetilde{U}$ (i.e un mapeo continuo biyectivo con inversa continua).

El ejemplo de una varieda topológica es, por supuesto, $\mathbb{R}^n$. Es Hausdorff debido a que es un espacio métrico, y es segundo numerable debido a que el conjunto de todas las bolas con sus centros en los raciolanes y radios racionales es una base numerable.

Definición. Sea M una variedad topológica de dimensión n. Una *carta coordenada* (o simplemente una *carta*) sobre M es un par (U, φ), donde U es subconjunto abierto de M y $\varphi : U \to \widetilde{U}$ es un homeomorfismo de U a un subconjunto abierto $\widetilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ (Figura 1.1). Si además U es una bola abierta en $\mathbb{R}^n$, entonces a U se le llama una *bola coordenada.*

La definición de una variedad topológica implica que cada punto $p \in M$ está contenido en el dominio de alguna carta (U, φ). Si $\varphi(p) = 0$, decimos que la carta esta *centrada* en p.

Definición. Sea una carta (U, φ), llamamos al conjunto U el *dominio de coordenadas,* o *vecindad de cocoordenadas* de cada uno de los puntos. El mapeo φ es llamado *mapeo de coordenadas(local),* y las funciones componentes de φ se llaman *mapeo de coordenadas locales* en U.

Sea $\mathbb{S}^n$ la esfera de dimensión n unitaria, que es el conjunto de vectores de longitud unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}.$$

Este conjunto es Hausdorff y segundo numerable, ya que es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Se afirma que es localmente euclideano, y para cada índice $i = 1, \ldots, n+1$, sea U_i^+ el subconjunto de $\mathbb{S}^n$ donde la coordenada i-ésima es positiva:

$$U_i^+ = \{(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_i > 0\}.$$

Similarmente U_i^- es el conjunto donde $x_i < 0$. Para cada i, se define el mapeo $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to \mathbb{R}^n$ por

$$\varphi_i^\pm(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_{n+1}),$$

donde $\widehat{x}_i$ indica que se omite x_i. Cada φ es un mapeo continuo, siendo la restricción a $\mathbb{S}^n$ de un mapeo lineal sobre $\mathbb{R}^{n+1}$. Es un homeomorfismo sobre su imagen, en la bola $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$, porque tiene una inversa continua dada por

$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(u_1, \ldots, u_n) = \big(u_1, \ldots, u_{i-1}, \pm\sqrt{1-|u|^2}, u_i, \ldots, u_n\big).$$

Puesto que cada punto en $\mathbb{S}^{n+1}$ está en el dominio de una de estas $2n+2$ cartas, $\mathbb{S}^n$ es localmente euclídeano de dimensión n, y es por tanto una variedad topológica de dimensión n.

Definición. Si U y V son subconjuntos abiertos de espacios euclídeanos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente, un mapeo $F : U \to V$ se dice que es *suave*, si cada una de las funciones componentes de F tiene derivadas parciales continuas de todos órdenes. Si además F es biyectiva y tiene un mapeo inverso suave, se llama un *difeomorfismo.*

Definición. Sea M una variedad topológica de dimensión n. Si $(U,\varphi), (V,\psi)$ son dos cartas tales que $U \cap V = \emptyset$, entonces el mapeo compuesto $\psi \circ \varphi^{-1}$: $\varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es una composición de homeomorfismos llamado el *mapeo de transición* de φ a ψ , por lo que es un homeomorfismo en sí mismo (Figura 1.2).

Definición. Sean dos cartas (U,φ) y (V,ψ) se dice que son *compatibles* si $U \cap V \neq \emptyset$ o el mapeo de la transición $\psi \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo. (Dado que $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, la suavidad de este mapeo es interpretado en el sentido de tener derivadas parciales continuas de todos los

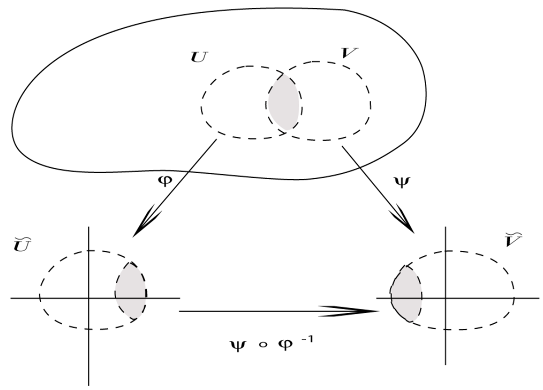

Figura 1.2: Un mapeo de transición

ordenes).

Definición. Se define un *atlas* $\mathcal{A}$ para M como una colección de cartas cuyos dominios cubren a M. Un atlas $\mathcal{A}$ es llamado un *atlas suave*, si cuales quiera dos cartas en $\mathcal{A}$ son compatibles entre sí.

Definición. Sea un atlas suave en M, se dice que es un *maximal*, si no está contenido en cualquier atlas suave. Esto simplemente significa que cada carta compatible con otra carta en $\mathcal{A}$ ya está en $\mathcal{A}$.

Generalmente no es muy conveniente definir una atlas suave maximal suave por la explícita descripción de un atlas suave maximal, ya que este tipo de atlas contiene muchas cartas. Afortunadamente, sólo se tiene que especificar algún atlas suave, como lo muestra el siguiente lema.

Lema 1.1 *Sea M una variedad topológica.*

(a) Cada atlas suave para M está contenido en un único atlas suave maximal.

(b) Dos atlas suaves para M determina el mismo atlas suave maximal si y sólo si su unión es un atlas suave.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un atlas suave para M, y $\overline{\mathcal{A}}$ denota el conjunto de todas las cartas que son compatibles con cada carta en $\mathcal{A}$. Para demostrar que $\overline{\mathcal{A}}$ es un atlas suave, se tiene que mostrar que cualquiera dos cartas de $\overline{\mathcal{A}}$ son compatibles entre sí, lo que se quiere decir es que para cualquier $(U,\varphi),(V,\psi)\in\overline{\mathcal{A}}$, $\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$ es suave.

Sea $x=\varphi(p)\in\varphi(U\cap V)$ arbitraria. Debido a que los dominio de las cartas en $\mathcal{A}$ cubren a M, hay una cierta carta $(W,\theta)\in\mathcal{A}$ tal que $p\in W$. Puesto que cada

carta en $\mathcal{A}$ es compatible con (W, θ), los mapeos $\theta \circ \varphi^{-1}$ y $\varphi \circ \theta^{-1}$ son suaves en donde se definierón. Como $p \in U \cap V \cap W$, se sigue que $\psi \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ \theta^{-1}) \circ (\theta \circ \psi^{-1})$ es suave en una entorno de x. Así $\psi \circ \varphi^{-1}$ es suave en un entorno de cada punto de $\varphi(U \cap V)$. Por lo tanto $\overline{\mathcal{A}}$ es un atlas suave. Para comprobar que es maximal, sólo se tiene que tener en cuenta que cualquier carta compatible en $\overline{\mathcal{A}}$ devera ser compatible con cualquier carta en $\mathcal{A}$, por lo que ya se encuentra en $\overline{\mathcal{A}}$. Esto demuestra la existencia de un atlas suave maximal que contiene $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{B}$ es otro atlas suave maximal que contiene $\mathcal{A}$, cada una de las cartas es compatible con cada carta en $\mathcal{A}$, por lo que $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$. Por ser $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{A}}$.
La parte (b) es consecuensia de (a). ■

Se mostrara con un ejemplo, que la esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}n+1$ es una variedad topológica de dimensión n. Se coloca un atlas suave maximal en $\mathbb{S}^n$ como sigue. Para cada $i = 1, \ldots, n+1$, sea $(U_i^{\pm}, \varphi^{\pm})$ indican la carta coordenada contruida anteriomente. Para cualesquiera índices distintos i y j, la transición $\varphi_j^{\pm} \circ (\varphi_i^{\pm})^{-1}$ se puede calcular. En el caso de $i < j$, se obtiene

$$\varphi_j^{\pm} \circ (\varphi_i^{\pm})^{-1}(u_1, \ldots, u_n) = \left(u_1, \ldots, \widehat{u}_i, \ldots, \pm\sqrt{1 - |u|^2}, \ldots, u_n\right)$$

y una fórmula similar cuando $i > j$. Cuando $i = j$, el cálculo da $\varphi_i^{\pm} \circ (\varphi_i^{\pm}) = Id_{\mathbb{B}^n}$. Así, la colección de cartas $\{(U_i^{\pm}, \varphi_i^{\pm})\}$ es un atlas suave, y por lo tanto define un atlas suave maximal en $\mathbb{S}^n$. A esto se le llama *atlas suave maximal estándar*. Las coordenadas definidas anteriormente son llamadas *cartas coordenadas*, porque surgen de la consideración de la esfera local como la gráfica de la función $u_i = \pm\sqrt{1 - |u|^2}$.

Lema 1.2 *Sea M un conjunto, y supongase que se da una colección $\{U_\alpha\}$ de subconjuntos de M, junto con un mapeo inyectivo $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ para cada α, tal que que las siguientes propiedades se satisfacen.*

(i) Para cada α, $U_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

(ii) Para cada α y β, $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$.

(iii) Siempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \to U_\alpha \cap U_\beta$ es suave.

(iv) Una cantidad numerable de conjuntos U_α cubren M.

(v) Siempre que p, q sean puntos distintos de M, o bien existe alguún U_α que contiene p y q o existen conjuntos disjuntos U_α,U_β con $p \in U_\alpha$ y $q \in U_\beta$.

Entonces M tiene un único atlas suave maximal de tal manera que cada $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ es una carta suave.

Demostración. Se define la topología tomando los conjuntos de la forma $\varphi_\alpha^{-1}(V)$, donde $V \subset \widetilde{U}_\alpha$ es abierto, como una base. Para demostrar que esta es una base para una topología, sea $\varphi^{-1}(V)$ y $\varphi^{-1}(W)$ dos bases. Las propiedades (ii) y (iii) implican que $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ es un subconjunto abierto de $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, y por lo tanto también de $\widetilde{U}_\alpha$. Por lo tanto si p es cualquier punto en $\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi^{-1}(W)$, entonces

$$\varphi_\alpha^{-1}(V \cap \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(W)) = \varphi_\alpha^{-1}(U) \cap \varphi_\beta^{-1}(W),$$

es una base abierta que contiene p. Cada uno de los mapeos φ_α es entonces un homeomorfismo (por definición), por lo que M es localmente un espacio euclídeo de dimensión n. Si $\{U_{\alpha_i}\}$ es una colección numerable de conjuntos de los U_α que cubren a M, cada uno de los conjuntos U_{α_i} tiene una base numerable, y la unión de todos ellos es una base numerable de M, entonces M es segundo numerable, y la propiedad de Hausdorff se sigue a partir de (v). Por último, (iii) garantiza que la colección $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ es una atlas suave. Por lo tanto esta topología y el atlas suave maximal satisfacen las conclusiones del lema. ■

Una vez que se elija una carta (U, φ) de M, el mapeo de coordenadas $\varphi : U \to \widetilde{U}$ y $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ se puede pensar como una identificación entre U y $\widetilde{U}$. Usando esta identificación, se puede pensar en U al mismo tiempo como un subconjunto abierto de M y como un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. En virtud de esta identificación, se puede representar un punto $p \in M$ por sus coordenadas $(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(p)$, y pensar en esta n-tupla como un punto p. Por lo general se expresa esto diciendo $(x_1, \ldots, x_n)$ es la representación de coordenadas (local) para la p ó $p = (x_1, \ldots, x_n)$ en coordenadas locales.

Definición. Una *variedad topológica con frontera* de dimensión es un espacio segundo numerable Hausdorff en el que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a un subconjunto abierto del hemiespacio superior $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$.

Definición. Un subconjunto abierto $U \subset M$ junto con un φ homeomorfismo de U a un subconjunto abierto de $\mathbb{H}^n$ se llama un *carta generalizada* para M.

La frontera de M (el conjunto de todos sus puntos frontera) se denota ∂M, del mismo modo su interior se denota por Int M.

Definición. La frontera de $\mathbb{H}^n$ en $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de puntos donde $x_n = 0$. Si M es un variedad con frontera, un punto que está en la imagen inversa de $\partial\mathbb{H}^n$ en alguna carta generalizada es llamado *punto frontera* de M, y un punto que está en la imagen inversa de Int $\mathbb{H}^n$. se llama *punto interior*.

1.2. Funciones Suaves y Mapeos Suaves

Si M es una variedad suave, una función $f : M \to \mathbb{R}^k$ se dice que es suave sí, para cada carta suave (U, φ) de M, la composición $f \circ \varphi^{-1}$ es suave en el subconjunto abierto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Un caso especial son las funciones de valor real $f : M \to R$; el conjunto de todas las funciones se denota por $C^\infty(M)$. Debido a que las sumas y las multiplicación por un escalar son funciones suaves, por lo que $C^\infty(M)$ es un espacio vectorial.

Lema 1.3 *Supongase que $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ es un atlas suave para M. Si $f : M \to \mathbb{R}^k$ es una función tal que $f \circ \varphi^{-1}$ es suave para cada α, entonces f es suave.*

Demostración. Sólo se tiene que comprobar que $f \circ \varphi^{-1}$ es suave para cualquier carta suave (U, φ) en M. Es suficiente con demostrar que es suave en una vecindad para cada punto $x = \varphi(p) \in \varphi(U)$. Para cualquier $p \in U$, existe un carta (U, φ) en el atlas cuyo dominio contiene a p. Puesto que (U, φ) es compatible con $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, el mapeo de transición $\varphi_\alpha \circ \varphi{-1}$ es suave en su dominio, que incluye x. Por lo tanto $f \circ \varphi^{-1} = (f \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi{-1})$ es suave en e una vecindad x. ■

Definición. Sea una función $f : M \to \mathbb{R}^k$ y una carta (U, φ) de M, la función $\widehat{f} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^k$ definida por $\widehat{f}(x) = f \circ \varphi^{-1}(x)$ se llama la *representación de coordenadas* de f.

Definición. Sean M, N variedades suaves, y sea $F : M \to N$ cualquier mapeo. Se dice que F es un *mapeo suave* si, para cualquier carta suave (U, φ) para M y (V, ψ) para N, el mapeo $\psi \circ F \circ \varphi{-1}$ es suave de $\varphi(U \cap F^{-1}(V))$ a $\psi(V)$.

Definición. Un *difeomorfismo* entre las variedades M y N es un mapeo suave $F : M \to N$ que tiene una inversa suave. Decimos que M y N son difeomorfas sí existe un difeomorfismo entre ellas.

Definición. A $F : M \to N$ se le llama un *difeomorfismo local* si todos los puntos $p \in M$ tienen un entorno U tal que $F(U)$ es abierto en N y $F : U \to F(U)$ es un difeomorfismo. La definición de un difeomorfismo local es, en partícular, un homeomorfismo local y por lo tanto un mapeo abierto.

Definición. Si f es una función de valor real o una función vectorial sobre una variedad M. El *soporte* de f, denotado por supp f, es la cerradura del conjunto de puntos donde f es distinto de cero:

$$\text{supp } f = \{p : f(p) \neq 0\}$$

Si el supp f está contenido en un conjunto U, se dice que f está *soportada* en U. Una función f se dice que tiene *soporte compacto* si el supp f es un conjunto compacto. Una función sobre una variedad compacta tiene soporte compacto.

Lema 1.4 *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

es suave.

Demostración. Se afirma que es suave en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, solo se necesita observar que todas las derivadas existen y son contiuas en el origen. Se comienza por notar que f es continua porque $\lim_{t\to \overleftarrow{0}} e^{-1/t} = 0$. En realidad, aplicando la regla de I'Hôpital's e inducción se observa que para algun número entero $0 \leq k$,

$$\lim_{t\to \overleftarrow{0}} \frac{e^{-1/t}}{t^k} = \lim_{t\to \overleftarrow{0}} \frac{t^{-k}}{e^{1/t}} = 0 \tag{1.1}$$

Se observa que para $t > 0$, la k-esima derivada de f es de la forma

$$f^{(k)}(t) = \frac{p_k(t)}{t^{2t}} e^{-1/t} \tag{1.2}$$

para algun polinomio $p_k(t)$. Esto es verdadero (con $p_o(t) = 1$) para $k = 0$, ahora se supone verdadero para alguna $0 \leq k$, y por la regla del producto

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(t) &= \frac{p_k'(t)}{t^{2t}} e^{-1/t} - \frac{2kp_k(t)}{t^{2t+1}} e^{-1/t} + \frac{p_k(t)}{t^{2t}} \frac{1}{t^2} e^{-1/t} \\ &= \frac{t^2 p_k'(t) - 2kp_k(t) + p_k(t)}{t^{2t+2}} e^{-1/t}, \end{aligned}$$

que es de la forma requerida. Nótese que (1.2) y (1.1) implica que

$$\lim_{t\to \overleftarrow{0}} f^k(t) = 0, \tag{1.3}$$

para un polinomio continuo en cero.

Finalmente, se probara que para $k \leq 0$,

$$f^{(k)}(0) = 0$$

Para $k = 0$ esto es verdadero por definición, se asume que es verdadero para una $k \leq 0$. Es suficiente observar que f tiene por ambos lados derivadas y son iguales en cero. La derivada del lado izquierdo es cero. Usando (1.1), se tiene

$$f^{k+1}(0) = \lim_{t\to \overleftarrow{0}} \frac{\frac{p_k(t)}{t^{2t}} e^{-1/t} - 0}{t} = \lim_{t\to \overleftarrow{0}} \frac{p_k(t)}{t^{2t+1}} e^{-1/t} = 0$$

Por (1.3), esto implica que $f^{(k)}$ es continua, y por lo tanto suave. ∎

Lema 1.5 *Existe una función suave* $h : \mathbb{R} \to I$*, donde* $I = [0, 1]$ *y tal que* $h(t) = 1$ *para* $t \leq 1$*,* $0 < h(t) < 1$ *para* $1 < t < 2$*, y* $h(t) = 0$ *para* $t \geq 2$*.*

Demostración. Sea f la función del lema anterior, y sea

$$h(t) = \frac{f(2-t)}{f(2-t) + f(t-1)}.$$

El denominador es siempre positivo para toda t, porque una de las expreciones $2 - t$ o $t - 1$ es siempre positiva. Dado que siempre $f \geq 0$, se observa que $h(t)$ está entre 0 y 1 , y es cero cuando $t \geq 2$. Cuando $t \leq 1$, $f(t-1) = 0$, así $h(t) = 1$ ■

Una función con las propiedades de h en este lema se llama *función flan.*

Lema 1.6 *Existe una función* $H : \mathbb{R}^n \to I$ *tal que* $H = 1$ *en* $\overline{B_1(0)}$ *y* supp $H = \overline{B_2(0)}$*.*

Demostración. Sea $H(x) = h(|x|)$, donde h es la función del lema pasado. La función H es suave sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, porque esta es una composición de funciones. Dado que es igual a 1 sobre $B_1(0)$, es suave allí tambien. ■

La función H construida en este lema es un ejemplo de una *función bump* una función suave que es igual a 1 en un determinado conjunto cerrado (en este caso $\overline{B}_1(0)$) y su soporte en un conjunto abierto especificado (en este caso algun conjunto abierto que contiene $\overline{B}_2(0)$).

Definición. Una colección de subconjuntos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de un espacio topológico X se dice que es *localmente finito* si cada punto $p \in X$ tiene un vecindad que interseca a lo más un número finito de los conjuntos de U_α.

Definición. Dada una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de un espacio topológico, otro conjunto de abiertos $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ es llamado un *refinamiento* de $\mathcal{U}$ si para cada $V_\beta \in \mathcal{V}$ existe algún $U_\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $V_\beta \subset U_\alpha$.

Definición. Un espacio topológico se dice que es *paracompacto* si para cada cubierta abierta admite un refinameinto finito.

Definición. Se dice que una $\{W_i\}$ cubierta abierta de M es *regular* si esta satisface las siguientes propiedades:

(i) La cubierta $\{W_i\}$ es numerable y localmente finita.

(ii) Para cada i, existe un difeomorfismo $\psi : W_i \to B_3(0) \subset \mathbb{R}^n$

(iii) La colección $\{U_i\}$ cubre a M, donde $U_i = \psi_i^{-1}(B_1(0))$.

Definición. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una cubierta abierta de M. Una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$ es una colección de funciones suaves

$$\{\varphi_\alpha : M \to \mathbb{R}\}_{\alpha\in A}$$

con las siguientes propiedades:

(i) $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$ para toda $\alpha \in A$ y para toda $x \in M$

(ii) $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U_\alpha$;

(iii) El conjunto de soportes $\{ \operatorname{supp} \varphi_\alpha \}_{\alpha\in A}$ es localmente finito; y

(iv) $\sum_{\alpha\in A} \varphi_\alpha(x) = 1$ para toda $x \in M$.

Teorema 1.7 (Existencia de particiones de la unidad) *Sea M una variedad suave y $\mathcal{X} = X_{\alpha\in A}$ cualquier cubierta abierta de M, entonces existe una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{X}$.*

Demostración. Sea W_i un refinamiento regular de $\mathcal{X}$. Para cada i, sea $\psi_i : W_i \to B_3(0)$ el difeomorfismo cuya existencia está garantizada por la definición de una cubierta regular, y sea

$$\begin{aligned} U_i &= \psi_i^{-1}(B_1(0)), \\ V_i &= \psi_i^{-1}(B_2(0)). \end{aligned}$$

Para cada i, se define una función $f_i : M \to \mathbb{R}$ por

$$f_i = \begin{cases} H \circ \psi_i & \text{en } W_i \\ 0 & \text{en } M \setminus \overline{V}_i, \end{cases}$$

donde $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la función bump del Lema 1.6. En el conjunto $W_i \setminus \overline{V}_i$ donde las dos definiciones se traslapan, y ambas definiciones dan la función cero, así f_i está bien definida y es suave, y $\operatorname{supp} f_i \subset W_i$. Se define una nueva función $g_i : M \to \mathbb{R}$ por:

$$g_i(x) = \frac{f_i(x)}{\sum_j f_j(x)}.$$

Debido a la finitud local de la cubierta $\{W_i\}$, la suma en el denominador tiene sólo un número finito de términos no nulos en un entorno de cada punto y por lo tanto define una función suave. Debido a $f_i \equiv 1$ en U_i y cada punto de M está en algun U_i, el denominador es siempre positivo, así g_i es una función suave sobre M. Es inmediato de la definición que $0 \leq g_i \leq 1$ y $\sum_i g_i \equiv 1$. Por último, se necesita reacomodar los indices de las funciones de tal manera que sean indices en el mismo conjunto A de la cubierta abierta. Para cada i, hay un índice $a(i) \in A$ tal que $W_i \subset X_{a(i)}$. Para cada $\alpha \in A$, se define $\varphi_\alpha : M \to R$ por

$$\sum_{i:a(i)=\alpha} g_i.$$

Cada φ_α es suave y satisface $0 \leq \varphi_\alpha \leq 1$ y supp $\varphi_\alpha \subset X_\alpha$. Además, el conjunto de soportes $\{\text{supp } \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es localmente finito, y $\sum_\alpha \varphi_\alpha \equiv \sum_i g_i \equiv 1$, por lo que esta es la partición de la unidad deseada. ■

Corolario 1.8 *Sea M una variedad suave. Para cualquier conjunto cerrado $A \subset M$ y cualquier conjunto abierto U que contiene a A, existe una función suave $\varphi : M \to R$ tal que $\varphi \equiv 1$ en A y supp $\varphi \subset U$.*

Demostración. Sea $U_0 = U$ y $U_1 = M \setminus A$, y sea φ_0, φ_1 una partición de la unidad subordinada a la cubierta abierta U_0, U_1. Debido a que $\varphi_1 \equiv 0$ en A y por lo tanto, $\varphi_0 = \sum_i \varphi_i = 1$ allí, la función φ_0 tiene las propiedades requeridas. ■

Cualquier función con las propiedades descritas en este lema se llama una *función bump* para A con soporte en U.

Definición. Supongamos que M es una variedad. Se dice que una función definida en un subconjunto arbitrario $A \subset M$ es suave en A si admite una extensión suave a un conjunto abierto U que contiene a A.

Lema 1.9 (Lema de Extensión) *Sea M una variedad suave, y supongamos que f es una función suave definida en un subconjunto cerrado $A \subset M$. Para cualquier abierto U que contiene a A, existe una función suave $\widetilde{f} \in C\infty(M)$ que $\widetilde{f}|_A = f|_A$ y supp $\widetilde{f} \subset U$.*

Demostración. El hecho de que f es suve en A significa por definición, que f se extiende a una función suave, en alguna vecindad W de A. Sustituyendo W por $W \cap U$, se puede suponer que $W \subset U$. Sea φ una función bump para A soportada en W, se define

$$\widetilde{f}(p) = \begin{cases} \varphi(p)f(p), & p \in W \\ 0 & p \in M \setminus \text{supp } \varphi. \end{cases}$$

Esta función es una extensión suave de f cuyo soporte está contenido en W y por lo tanto en U. ■

Capítulo 2

El Espacio Tangente

Una de las herramientas clave para el estudio de las variedades suaves es la idea de aproximación linea, donde una función de una variable puede ser aproximada por su tangente, una curva en $\mathbb{R}^n$ por un vector tangente, y un mapeo de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ por su derivada total. Con el fin de dar sentido a la aproximación lineal de variedades, se introducira la noción de espacio tangente a una variedad en un punto. Debido a la abstracción de la definición de una variedad, la mayor parte del capítulo se dedicara a dar las definiciones necesarias. Empezaremos con el estudio del espacio tangente geométrico en $\mathbb{R}^n$, que son objetos concretos en $\mathbb{R}^n$. Devido a la definición de variedades suaves que está construida con el concepto de funciones suaves, se observa que al tomar sus derivadas dan un mapeo natural entre los correspondientes espacios tangentes geométricos vectoriales y mapeos lineales de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ a $\mathbb{R}$ que satisfacen la regla del producto, con esto se definira el espacio tangente sobre una variedad con deivadas de $C^\infty(M)$. La definición abstracta de carta de coordenadas (U, φ) da un isomorfismo natural entre el espacio tangente de vectores en $p \in M$ con el espacio geométrico tangente de vectores en $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$. Así de cualquier carta coordenada se obtiene una base para cada espacio tangente.

2.1. Vectores Tangentes

Se suele pensar en un vector como un punto en el espacio, cuya única propiedad es su ubicación expresada por las coordenadas $(x_1, ..., x_n)$. Por otro lado, al hacer los cálculos correspondientes, a veces se piensa como un objeto que tiene magnitud y dirección.

Definición. Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio euclidiano y a un punto fijo en $\mathbb{R}^n$, el *espacio tangente geométrico* se denota por $\mathbb{R}^n_a$ y, es el conjunto

$$\mathbb{R}^n_a\{(a, v) : v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Un *vector tangente geométrico* en $\mathbb{R}^n_a$ es un elemento de este espacio.

Como una cuestión de notación, se abrevia (a, v) como v_a (o, a veces, $v|_a$). Se piensa en v_a como el vector v con su punto inicial en un determinado a. Este conjunto de $\mathbb{R}^n_a$ es un espacio vectorial real (isomorfo a $\mathbb{R}^n$) con las operaciones naturales.

$$(v + w)_a = v_a + w_a,$$

$$(cv)_a = cv_a.$$

Los vectores $e_i|_a$ con $i = 1, \ldots, n$, es una base para $\mathbb{R}^n_a$. De hecho un espacio vectorial $\mathbb{R}^n_a$ es en sí mismo $\mathbb{R}^n$. La razón para añadir el índice a es para poder distingir los espacios tangentes geométricos $\mathbb{R}^n_x$ y $\mathbb{R}^n_y$ que son conjuntos disjuntos.

Ahora, un elemento del espacio euclidiano proporciona un medio de tomar "derivadas direccionales" de las funciones. Por ejemplo, para un vector tangente geométrico $v_a \in \mathbb{R}^n_a$, define un mapeo $\widetilde{v}_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ como la derivada direccional en la dirección de v hacia a:

$$\widetilde{v}_a f = D_v f(a) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(a + tv). \tag{2.1}$$

Esta operación es lineal y satisface la regla del producto:

$$\widetilde{v}_a(fg) = f(a)\widetilde{v}_a(g) + g(a)\widetilde{v}_a(f)$$

Si $v_a = v_i e_i|_a$ en términos de una base estándar para $\mathbb{R}^n_x$, entonces por la regla de la cadena, $\widetilde{v}_a f$ se puede escribir concretamente como:

$$\widetilde{v}_a f = v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Aquí se esta utilizando la adición, por lo que la expresión del lado derecho se entiende que es una suma sobre $i = 1$ hasta n. Por ejemplo, si $v_a = e_j|_a$, entonces

$$\widetilde{v}_a f = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Definición. Un mapeo lineal $X : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ es llamada derivada en a si se cumple la regla del producto:

$$X(fg) = f(a)Xg + g(a)Xf. \tag{2.2}$$

Definición. Se define a $T_a(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de todas las derivaciones de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ en a.

Es claro que $T_a(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial bajo las operaciones

$$(X+Y)f = Xf + Yf$$
$$(cX)f = c(Xf)$$

Lema 2.1 (Propiedades de las derivadas) *Supongamos que un $a \in \mathbb{R}^n$ y $X \in T_a(\mathbb{R}^n)$.*

(a) Si f es una función constante, entonces $Xf = 0$.

(b) Si $f(a) = g(a) = 0$, entonces $X(fg) = 0$.

Demostración. Es suficiente con probar (a) para la función constante $f_1(x) \equiv 1$, entonces $f(x) \equiv c$ implica que $Xf = X(cf1) = cXf_1 = 0$ por la linealidad. Para f_1, se sigue de la regla del producto:

$$Xf_1 = X(f_1 f_1) = f_1(a)Xf_1 + f_1(a)Xf_1 = 2Xf_1,$$

lo que implica que $Xf_1 = 0$. Del mismo modo, (b) también sigue a partir de la regla producto:

$$X(fg) = f(a)Xg + g(a)Xf = 0.$$

■

Proposición 2.2 *Para cualquier $a \in \mathbb{R}^n$, el mapeo $v_a \mapsto \widetilde{v}_a$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}^n_a$ sobre $T_a(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. El mapeo $v_a \mapsto \widetilde{v}_a$ es lineal. Para ver que es inyectivo, supongamos que $v_a \in \mathbb{R}^n_a$ tiene la propiedad que $\widetilde{v}_a$ es la derivada constante cero. Se escribe $v_a = v_i e_i|_a$ en términos de la base estándar, y tomando a f por la j-ésima función de coordenada $x_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, considerada como una función suave en $\mathbb{R}^n$,

$$0 = \widetilde{v}_a(x_j) = v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j)\Big|_{x=a} = v_j.$$

Dado que esto es cierto para cada j, se deduce que v_a es el vector cero.

Para probar sobreyectividad, sea $X \in T_a(\mathbb{R}^n)$ arbitraria. Teniendo en cuenta lo mencionado en el párrafo anterior, definimos los números reales $v_1, \ldots, v_n$ por

$$v_i = X(x_i).$$

Se va a demostrar que $X = \widetilde{v}_a$, donde $v_a = v_i e_i|_a$.

Para ver esto, sea f una función suave en $\mathbb{R}^n$. Por la fórmula de Taylor de primer orden con residuo, existen funciones suaves $g_1, \ldots, g_n$ definidas en $\mathbb{R}^n$ tal que $g_i(a) = 0$ y

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)(x_i - a_i). \tag{2.3}$$

La aplicación de X a esta fórmula y usando el Lema 2.1, se obtiene

$$\begin{aligned} Xf &= X(f(a)) + X\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a)\right) + X\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(x)(x_i - a_i)\right) \\ &= 0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(X(x_i) - X(a)) + \sum_{i=1}^{n} X(g_i(x)(x_i - a_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i \\ &= \widetilde{v}_a f. \end{aligned}$$

Esto demuestra que $X = \widetilde{v}_a$. ■

Corolario 2.3 *Para cualquier $a \in \mathbb{R}^n$, las n derivadas*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_a, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_a}\right|_n,$$

definidas por

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_a f = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a),$$

forman una base para $T_a(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Esto se sigue inmediatamente de la proposición anterior, una vez que se tenga en cuenta que $\partial/\partial x_i|_a = \widetilde{e}_i|_a$. ■

Definición. Sea M una variedad diferenciable y sea $p \in M$. Un mapeo lineal $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ se llama derivada en p si satisface

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf,$$

para toda f, g en $C^\infty(M)$.

Definición. El conjunto de todas las derivadas de $C^\infty(M)$ en p es el *espacio tangente* a M en p y se denota por T_pM. Un elemento de T_pM es un *vector tangente* a p.

Antes de proseguir, se resolverá una ambigüedad en la definición de T_pM. Mientras que el espacio tangente se define en términos de funciones suaves sobre una variedad en general, las cartas coordenadas son en general definidas sólo en subconjuntos abiertos. Se mostrará que la definición de espacio tangente no depende de la parametrización local, es decir al elegir otra parametrización se obtiene el mismo espacio tangente. Sea $\psi : U \to M$ y supongamos que $\varphi : V \to M$ es otra opción, también con $\varphi(0) = x$. Si reducimos U y V, podemos suponer que $\psi(U) = \varphi(V)$. Entonces la transformación $\phi = \varphi^{-1} \circ \psi : U \to V$ es un difeomorfismo. Escribimos a $\psi = \varphi \circ \phi$ y derivamos, $d\psi_0 = d\varphi_0 \circ d\phi_0$. Esta relación implica que la imagen de $d\psi_0$ está contenida en la imagen de $d\varphi_0$. El recíproco se sigue al intercambiar los papeles de ψ y φ, de modo que $d\psi_0(\mathbb{R}^k) = d\varphi_0(\mathbb{R}^k)$ y $T_x(M)$ estan bien definidos.

El siguiente Lema es el análogo del Lema 2.1 para los colectores.

Lema 2.4 (Propiedades de los vectores tangentes en variedades) *Sea M una variedad suave, $p \in M$ y $X \in T_pM$.*

- *Si f es una función contante, entonces $Xf = 0$.*
- *Si $f(p) = g(p) = 0$, entonces $X(fg) = 0$.*

La demostración es análoga a la del Lema 2.1. En el caso especial de $M = \mathbb{R}^n$, la Proposición 2.2 muestra que $T_a\mathbb{R}^n$ es isomorfo al espacio tangente geométrico $\mathbb{R}^n_a$, y por lo tanto también a $\mathbb{R}^n$.

Definición. Si M y N son variedades suaves y $F : M \to N$ es un mapeo suave para cada $p \in M$, se define un mapeo $F_* : T_pM \to T_{f(p)}M$ llamado el *push forward* asociado con F, dado por

$$(F_*X)(f) = X(f \circ F).$$

Hay que tener encuenta que si $f \in C^\infty(N)$, entonces $(f \circ F) \in C^\infty(M)$, por lo que $X(f \circ F)$ tiene sentido. El operador F_*X es lineal y es una derivada de $F(p)$ debido a que

$$\begin{aligned}
(F_*X)(fg) &= X((fg) \circ F) \\
&= X((f \circ F)(g \circ F)) \\
&= f \circ F(p)X(g \circ F) + g \circ F(p)X(f \circ F) \\
&= f(F(p))(F_*X)(g) + g(F(p))(F_*X)(f).
\end{aligned}$$

Debido a que la notación F_* no se meciona de forma explícita en el punto p, lo que se va hacer es tener cuidado cuando sea necesario para evitar confusiones.

Proposición 2.5 *Si $F : M \to N$ es un difeomorfismo y $p \in M$, entonces $dF : T_pM \to T_{F(p)}N$ es un isomorfismo.*

Demostración. Supóngase que $\phi : U \to M$ parametriza a M en un punto p y que $\psi : V \to N$ parametriza a N en un punto q, donde $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^l$ y, digamos $\phi(0) = x$, $\psi(0) = y$. Si U es suficientemente pequeño, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "F"] & N \\ U \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "h=\psi^{-1}\circ F\circ\phi"'] & V \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

La regla de la cadena dice que al derivar el diagrama anterior, se convierta en cuadro conmutativo de transformaciones lineales:

$$\begin{tikzcd} T_x(M) \arrow[r, "dF"] & T_y(N) \\ \mathbb{R}^k \arrow[u, "d\phi"] \arrow[r, "dh"'] & \mathbb{R}^l \arrow[u, "d\psi"'] \end{tikzcd}$$

Como $d\phi$ es un difeomorfismo, $dF = d\psi \circ dh \circ d\phi^{-1}$ es un isomorfismo. ■

Proposición 2.6 *Sea M una variedad suave, $p \in M$, y $X \in T_pM$. Si f y g son funciones sobre M que coinciden en alguna vecindad de p, entonces $Xf = Xg$.*

Demostración. Sea $h = f - g$, por la linealidad es suficiente para mostrar que $Xh = 0$ siempre que h sea nula en un entorno W de p.

Sea A el subconjunto cerrado $M \setminus W$. Por el Lemma de Extensión 1.9, existe una función suave definida globalmente $u \in C^\infty(M)$ que es igual a la función constante 1 en A y con soporte en $M \setminus p$. Debido a que $u \equiv 1$ donde h es distinto de cero, el producto $h * u$ es idénticamente igual a h. Como $h(p) = u(p) = 0$ el Lema 2.4 implica que $Xh = X(hu) = 0$. ■

Proposición 2.7 *Sea M una variedad diferenciable, sea $U \subset M$ una subvariedad y sea $\imath : U \to M$ el mapeo de la inclusión. Para cualquier $p \in U$, $\imath_* : T_pU \to T_pM$ es un isomorfismo.*

Demostración. Sea B una vecindad de p tal que $\overline{B} \subset U$. Primero supóngase $X \in T_pU$ y $\imath_* X = 0 \in T_pM$. Si $f \in C^*(U)$ es arbitraria, el Lema 1.9 garantiza que $\widetilde{f} C^*(M)$ es una función suave, tal que $\widetilde{f} \equiv f$ sobre $\widetilde{B}$. Entonces por la Proposición 2.6,

$$Xf = X(\widetilde{f}|_p) = X(\widetilde{f} \circ \imath) = (\imath_* X)\widetilde{f} = 0.$$

Dado que esto es válido para toda $f \in C^\infty(U)$, se deduce que $X = 0$, por lo que es $\imath_*$ es inyectiva.

Por otro lado, supongase que $Y \in T_pM$ es arbitraria. Defínase un operador $X : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ fijando $Xf = Y\widetilde{f}$, donde f es cualquier función sobre toda M que coincide con f en $\overline{B}$. Por la Proposición 2.6, Xf es independiente de la elección de f, por lo que X esta bien definido. Entonces, para cualquier $g \in C^\infty(M)$,

$$(\imath_* X)g = X(g \circ \imath) = Y(\widetilde{g \circ \imath}) = Yg,$$

donde la última igualdad se sigue del hecho de que $\widetilde{g \circ \imath}$ coincide con g en B. Por lo tanto, $\imath_*$ es sobreyectiva. ∎

Proposición 2.8 *Para cada espacio vectorial V de dimensión finita, para cada punto $a \in V$ y cualquier mapeo lineal $L : V \to W$, existe un isomorfismo natural $V \mapsto T_aV$ que hace el siguiente diagrama conmute:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\cong"] & T_aV \\ W \arrow[u, "L"] \arrow[r, "\cong"'] & T_{L(a)}W \arrow[u, "L_*"'] \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Demostración. Para cualquier vector $v \in V$, se define una derivada $\widetilde{v}_a$ por

$$\widetilde{v}_a f = \frac{d}{dt} f(a + tv).$$

Tal que es independiente de cualquier elección de la base. Con los argumentos utilizados para el caso de $\mathbb{R}^n$, se muestra que $\widetilde{v}_a$ es una derivada y el mapeo $v \mapsto \widetilde{v}_a$ es un isomorfismo. Ahora supóngase que $L : V \to W$ es una aplicación lineal. Desarrollando las definiciones y utilizando la linealidad de L, se calcula

$$\begin{aligned} (L_* \widetilde{v}_a)f &= \widetilde{v}_a (f \circ L) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(L(a + tv)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(L(a) + tL(v)) \\ &= \widetilde{Lv}_{L(a)} f. \end{aligned}$$

que es (2.4). ■

Si (U,φ) es una carta coordenada suave sobre M. Nótese que φ es, en partícular, un difeomorfismo de U a $\varphi(U)$. Así, combinando los resultados de la Proposición 2.8 y el Lema 2.5, $\varphi_* : T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ es un isomorfismo.
Por el Corolario 2.3, $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ tiene una base formada por las derivadas $\partial/\partial x_i|_{\varphi(p)}, i = 1,\ldots,n$. Por lo tanto, el *push forward* de estos vectores bajo $(\varphi^{-1})_*$ forma una base para T_pM. Se usará la siguiente notación para el *push forward*:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = (\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\varphi p}.$$

Desarrollando las definiciones, se verá como $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ actúa sobre una función suave $f : U \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p f &= \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\varphi p}(f \circ \varphi^{-1}) \\ &= \frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_i}(\widehat{p}), \end{aligned}$$

donde $\widehat{f}$ es la representación de coordenadas de f y $\widehat{p} = (p_1,\ldots,p_n) = \varphi(p)$ es la representación de coordenadas de p. En otras palabras, $\partial/\partial x_i|_p$ es justo la derivada que toma la i-ésima derivada parcial de (la representación en coordenadas de) f en (a la representación de coordenadas de) p. Son llamados *vectores coordenados* en p asociados con el sistema de coordenadas dado. En el caso especial en que $M = \mathbb{R}^n$, los vectores coordenados $\partial/\partial x_i|_a$ corresponden a los vectores de la base estándar de $e_i|_a$ bajo el isomorfismo $T_a\mathbb{R}^n \leftrightarrow \mathbb{R}^n_a$.

Dado que los vectores coordenados forman una base para T_pM, cualquier vector tangente $X \in T_pM$ puede ser escrito únicamente como una combinaci'on lineal

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p.$$

Los números $(X_1,\ldots,X_n)$ son llamados los componentes de X con respecto al sistema coordenado dado.

A continuación se explora cómo el *push forward* se ve en coordenadas. Se empezará por tener en cuenta el caso especial de un mapeo suave $F : U \to V$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ son subconjuntos abiertos del espacio euclidiano. Para cualquier $p \in \mathbb{R}^n$, se va a determinar la matriz de $F_* : T_p\mathbb{R}^n \to T_{F(p)}\mathbb{R}^m$ en términos de las bases de coordenadas estándar. Sea $(x_1,\ldots,x_n)$ para indicar las coordenadas en el dominio y $(y_1,\ldots,y_m)$ para designar a las coordenadas en la imagen, se utilizara la regla de la cadena de para calcular la acción de F_* en un vector de la base típica como sigue:

$$\begin{aligned}\left(F_* \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right) f &= \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (f \circ F) \\ &= \frac{\partial (f \circ F)}{\partial x_i}(p) \\ &= \frac{\partial (f \circ f)}{\partial y_j}(F(p)) \frac{\partial (F_i)}{\partial x_i}(p) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{F(p)}\right) f.\end{aligned}$$

Así

$$F_* \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{F(p)}. \tag{2.5}$$

En otras palabras, la matriz de F_* en términos de las bases de coordenadas estándar es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(p) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

Esta matriz no es otra que el jacobiano de F, que es la representación de la matriz de la derivada total $DF : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Por lo tanto, en este caso especial, $F_* : T_p\mathbb{R}^n \to T_{F(p)}\mathbb{R}^m$ corresponde a la derivada total $DF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bajo la identificación habitual del espacio euclidiano con su espacio tangente.

2.2. El Haz Tangente

Definición. Para cualquier M variedad suave , se define el *haz tangentes* de M denotado por TM, siendo la unión disjunta de los espacios tangentes en todos los puntos de M:

$$TM = \coprod_{p \in M} T_pM.$$

Un elemento de esta unión disjunta es un par (p, X), donde $p \in M$ y $X \in T_pM$.

Definición. Se define la *proyección* $\pi : TM \to M$ como $\pi(p, X) = p$.

Lema 2.9 *Para cualquier M variedad suave de dimensión n, el haz tangente TM tiene una topología natural y una estructura suave que hace a este una variedad suave de dimensión $2n$ tal que $\pi : TM \to M$ es un mapeo suave.*

Demostración. Se empezará por la definición de los mapeos que se convertirán en cartas suaves. Teniendo en cuenta que cualquier carta (U, φ) de M describe las funciones componentes de φ como $\varphi(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p))$, y el conjunto $\widetilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ define un mapeo $\Phi : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2n}$ por

$$\Phi\left(v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p\right) = (x_1(p), \ldots, x_n(p), v_1, \ldots, v_n),$$

la imagen resultante es $\widetilde{U} \times \mathbb{R}^n$, que es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{2n}$. Se trata de una biyección sobre su imagen, ya que su inversa puede escribirse de forma explícita como

$$(x, v) \mapsto v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\varphi^{-1}(x)}.$$

Ahora supongase que se dan dos cartas (U, φ) y (V, ψ) para M, y sean $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ y $(\pi^{-1}(V), \Psi)$ las cartas correspondientes en TM. Los conjuntos $\Phi(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ y $\Psi(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ son abiertos en $\mathbb{R}^{2n}$, y el mapeo $\Psi \circ \Phi^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to \psi(U \cap V)\mathbb{R}^n$ puede escribirse de manera explícita como

$$\Psi \circ \Phi^{-1}(x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n) = \left(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n, \frac{\partial \widetilde{x}_1}{\partial x_j}(x) v_j, \ldots, \frac{\partial \widetilde{x}_n}{\partial x_j}(x) v_j\right),$$

que es suave.

Sea una cubierta numerable U_i de M por dominios coordenados, se obtiene una cubierta numerable de TM por los dominios coordenados $\{\pi^{-1}(U_i)\}$ que satisfacen el Lema 1.2. Para comprobar la condición de Hausdorff, se tiene en cuenta que dos puntos cualesquiera de la imagen de π viven en una carta; mientras que si (p, x) y (q, Y) se encuentran en diferentes conjuntos, entonces existen dominios coordenados disjuntos U_i, U_j para M tal que $p \in Ui$ y $q \in Uj$, por lo que los conjuntos $\pi^{-1}(U_i)$ y $\pi{-}1(U_j)$ son abiertos disjuntos que contienen a (p, X) y (q, Y), respectivamente.

Para comprobar que π es suave, se observa que la representación de coordenadas con respecto a las cartas (U, φ) para M y $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ para TM es $\pi(x, v) = x$. ■

Debido a que la unión de espacios vectoriales forman entre sí el haz tangente, el cual tiene una estructura que da una variedad suave. Este tipo de estructura se produce con frecuencia, como se vera más adelante, por lo que se introducira la siguiente definición.

Definición. Sea M una variedad suave. Un *haz vectorial de rango k sobre* una M variedad suave y junto con una transformación suave sobrayectiva $\pi : E \to M$ satisface:

(i) Para cada $p \in M$, el conjunto $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$ esta dotado con la estructura de espacio vectorial real.

(ii) Para cada $p \in M$, existe un vecindad U de p en M y un difeomorfismo $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

y la restricción de Φ a E_P es un isomorfismo lineal de E_p a $\{p\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ (donde π_1 es la proyección sobre el primer factor).

Un ejemplo partícular de un haz vectorial de rango k en cualquier variedad M es el producto de variedes $E = M \times \mathbb{R}^k$ con $\pi = \pi_1 : M \times \mathbb{R}^k \to M$. Este haz es trivial (con el mapeo identidad), pero hay haces que no son triviales, como se vera más adelante.

Definición. Sea E un haz vectorial suave sobre una variedad M suave, con una proyección $\pi : E \to M$. Una *sección* de E es una sección del mapeo π, es decir, un mapeo continuo $\sigma : M \to E$ tal que $\pi \circ \sigma = Id_M$.

Definición. Si $U \subset M$ es un abierto, una sección del haz restringido $E|_U$ se llamado una *sección local* de E. Una sección suave es una sección (local o global), que es suave como un mapeo entre variedades. La *sección cero* es el mapeo $\zeta : M \to E$ definido por

$$\zeta(p) = 0 \in E_p \text{ para cada } p \in M.$$

Al igual que para las funciones, el soporte de una sección σ se define como la cerradura del conjunto $\{p \in M : \sigma(t) \neq 0\}$. Una sección se dice que tiene soporte compacto si su soporte es un conjunto compacto.

Definición. Si $U \subset M$ es un conjunto abierto, un *marco local* para E sobre U es una k-tupla ordenada $(\sigma_1, \ldots, \sigma k)$, donde cada σ_i es una sección suave de E sobre U, y que tal que $(\sigma_1(p), \ldots, \sigma_k(p))$ es una base para E_p para cada $p \in U$. Es un *marco global* si $U = M$.

Definición. Sea M una variedad suave. Un *campo de vectores* sobre M es una sección de TM. Más concretamente, un campo vectorial es un mapeo continuo $Y : M \to TM$, por lo general se escribe como $p \mapsto Y_p$, con la propiedad de que para cada $p \in M$, Y_p es un elemento de T_pM. (Se escribe el valor de Y en p como Y_p como lugar de $Y(p)$ para evitar conflictos Y con la notación de $Y(f)$ por la acción de un vector en una función).

Si (x_i) son cualesquiera coordenadas locales en un conjunto abierto $U \subset M$, el valor de Y en cualquier punto $p \in U$ puede escribirse

$$Y_p = Y_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p.$$

Y para algunos valores $Y_1(p), \ldots, Y_n(p)$. Esto define n funciones $Y_i : U \to \mathbb{R}$, que son llamadas las funciones componentes de Y con respecto a la carta dada.

Lema 2.10 *Sea M una variedad suave, y sea $Y : M \to TM$ cualquier mapeo (no necesariamente continuo) de manera que $Y_p \in T_pM$ para cada $p \in M$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(a) Y es suave.

(b) Las funciones componentes de Y en cualquier carta suave son suaves.

(c) Si f es cualquier función de valor real en un conjunto abierto $U \subset M$, la función $f : U \to \mathbb{R}$ definida por $Yf(p) = Y_pf$ es suave.

Demostración. Dadas las coordenadas (x_i) en un conjunto abierto $U \subset M$, sean (x_i, v_i) que denotan las coordenadas estándar de $\pi^{-1}(U) \subset TM$ construido en el Lema 2.9. Por definición de las coordenadas estándar, la representación de coordenadas de $Y : M \to TM$ en U es

$$\widehat{Y} = (x_1, \ldots, x_n, Y_1(x), \ldots, Y_n(x)),$$

donde Y_i es la función componente i-ésima de Y en la coordenada x_i. De ello se deduce inmediatamente que (a) es equivalente a (b).

Ahora supongamos que Y es un mapeo para que (b) se cumpla. Si f es una función definida en un conjunto abierto $U \subset M$, y (x_i) son cualequiera coordenadas en un conjunto abierto $W \subset U$, la representación de coordenadas de Yf en W es

$$\begin{aligned} \widehat{Y}f(x) &= \left(Y_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x\right)f \\ &= Y_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x). \end{aligned}$$

Puesto que las funciones Y_i son suaves en W por hipótesis, se deduce que Yf es suave. Así, (b) implica (c).
A la inversa, supongamos que (c) se cumple. Si (x_i) son coordenadas locales en cualquier $U \subset M$, se puede pensar en cada coordenada x_i como una función suave sobre U, y luego $Y_i = Yx_i$ es suave en U por (c), por lo que se tiene (b). ■

Lema 2.11 *Sea M una variedad suave. Si $p \in M$ y $X \in T_pM$, existe un campo vectorial suave en M tal que $\widetilde{X}p = X$.*

Demostración. Sea (x_i) coordenadas en una vecindad U de p, y sea $X_i\partial/\partial x_i|p$ la expresión de coordenadas de X. Si φ es una función *bump* con soporte en U y con $\varphi(p) = 1$, el campo de vectores X definido por

$$\widetilde{X} = \begin{cases} \varphi(q)X_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q & q \in U, \\ 0 & q \neq U. \end{cases}$$

Se ve que un campo vectorial suave cuyo valor en p es igual a X. ■

Se usará la notación $\mathcal{T}(M)$ para denotar el conjunto de todos los campos vectoriales suave en M (muchos autores usan $\mathfrak{X}(M)$). Es un espacio vectorial real bajo la suma y multiplicación por escalar. Además, los campos de vectores se puede multiplicar por funciones suaves: Si $f \in C^\infty(M)$ y $Y \in T(M)$, se obtiene un nuevo campo vectorial fY dado por

$$(fY)_p = f(P)Y_p.$$

Si M es una variedad diferenciable, utilizaremos el termino *marco local para* M para referirnos a un *marco local de* TM en algún subconjunto abierto $U \subset M$. De manera similar, un *marco global* para M es un *marco global para* TM.

Definición. Decimos que M es *paralelizable* si admite un marco global suave.

2.3. El Haz Cotangente

Definición. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Se define un *covector* en V por un mapeo lineal:

$$\omega : V \to \mathbb{R}.$$

El espacio de todos los covectores en V es en sí mismo un espacio vectorial real bajo la operación de suma y multiplicación por un escalar.

Definición. Se denota por V^* al espacio de todos los covectores y es llamado el *espacio dual* de V.

Proposición 2.12 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si $(E_1, \ldots, E_n)$ es una base para V, entonces los covectores $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, definidos por:*

$$\varepsilon_i(E_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & si\ i \neq j, \end{cases}$$

forman una base para V^* llamada la base dual de (E_i). Por lo tanto la dimensión de V^* es igual a la dimensión de V.

Demostración. Sea cualquier $\varepsilon \in V^*$ y $\beta = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Se demostrará que

$$\varepsilon = \sum_{i_1}^{n} \varepsilon(E_i)\varepsilon_i,$$

entonces β es para V^*. Sea

$$\varepsilon' = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(E_i)\varepsilon_i.$$

Para $1 \leq j \leq n$, se tiene que

$$\begin{aligned} \varepsilon'(E_j) &= \Big(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon(E_i)\varepsilon_i\Big)\varepsilon_i(E_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon(E_i)\delta_{ij} = \varepsilon(E_j). \end{aligned}$$

Por lo tanto como $\varepsilon'(E_j) = \varepsilon(E_j)$, entonces $\varepsilon' = \varepsilon$. ■

Por ejemplo, si $e_1, \ldots, e_n$ es la base canónica para $\mathbb{R}^n$, entonces se denota la base dual por $(e^1, ..., e^n)$ (hay que considerar los índices superiores), y se llamará la *base dual estándar.* Estos covectores estándar son las funciones lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ dadas por:

$$e^j = e^j(v_1, \ldots, v_n) = v_j.$$

En otras palabras, e_j es sólo la función lineal que selecciona el $j-$ésimo componente de un vector.

En general, si $E_1, \ldots, E_n$ es una base para V y $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ es su base dual, entonces la Propoposición 2.12 muestra que podemos expresar un covector arbitrario $\omega \in V^*$ en términos de la base dual como:

$$\omega = \omega_i \varepsilon_i,$$

donde las componentes ω_i son determinadas por:

$$\omega_i = \omega(E_i).$$

Entonces la acción de ω sobre un vector $X = X_i E_i$ es

$$\omega(X) = \omega_i X_i. \tag{2.6}$$

Definición. Supongamos que V y W son espacios vectoriales y $A : V \to W$ es una transformación lineal. Se define la transformación lineal $A^* : W^* \to V^*$ dada por:

$$(A^*\omega)(X) = \omega(AX), \text{ para } \omega \in W^*, X \in V,$$

llamada la *transformación dual* o *transpuesta* de A.

Proposición 2.13 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Hay un isomorfismo canónico entre V y V^{**}.*

Demostración. Dado un vector $X \in V$, se define una función lineal $\widetilde{X}$ en V^* por:

$$\widetilde{X}(\omega) = \omega(X), \text{ para } \omega \in V^*.$$

Se puede comprobar que $X(\omega)$ depende linealmente de ω, de modo que $X \in V^{**}$ y el mapeo $X \to \widetilde{X}$ es lineal de V a V^{**}. Para demostrar que es un isomorfismo, es suficiente verificar que es inyectiva. Supongamos que $X \in V$ no es cero. Extienda X a una base (es decir, $X = E_1, ..., E_n$) para V y sea $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ base dual de V^*, entonces

$$\widetilde{X}(\varepsilon_1) = \varepsilon_1(X) = \varepsilon_1(E_1) = 1 \neq 0,$$

por lo que $\widetilde{X} \neq 0$. ■

Definición. Sea M una variedad suave. Para cada $p \in M$, se define el *espacio cotangente* en p, denotado por T_p^*M, siendo el espacio dual de T_pM:

$$T_p^*M = (T_pM)^*.$$

Los elementos de T_p^*M se llaman *covectores tangentes* en p, o simplemente covectores en p.

Si $x_1, \ldots, x_n$ son las coordenadas locales en un subconjunto abierto $U \subset M$, entonces para cada $p \in U$, la base de coordenadas $(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p)$ da lugar a una base dual (ε_{ip}). Por lo tanto, cualquier covector $\xi \in T_p^*M$ puede ser escrito únicamente como $\xi = \xi_i \varepsilon_{ip}$ donde

$$\xi_i = \xi\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\Big).$$

Ahora se supone que $(\widetilde{x}_j)$ es otro conjunto de coordenadas cuyo dominio se intersecta con U, y sea $(\widetilde{\varepsilon}_{jp})$ la base dual de T_p^*M a $(\partial/\partial\widetilde{x}_j|_p)$. Se puede calcular las componentes del mismo covector ξ con respecto al nuevo sistema de coordenadas. En primer lugar se observa que los cálculos muestran que los campos de vectores coordenados se transforman como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = \frac{\partial \widetilde{x}_j}{\partial x_i}(p)\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_j}\Big|_p. \tag{2.7}$$

Escribiendo a ξ en ambos sistemas como:

$$\xi = \xi_i \varepsilon_{ip} = \widetilde{\xi}_i \widetilde{\varepsilon}_{ip},$$

y usando (2.7) para calcular los componentes ξ_i en términos de $\widetilde{\xi}_j$, se obtiene:

$$\xi_i = \xi\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\Big) = \xi\Big(\frac{\partial \widetilde{x}_j}{\partial x_i}(p)\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_j}\Big|_p\Big) = \frac{\partial \widetilde{x}_j}{\partial x_i}(p)\widetilde{\xi}_j, \tag{2.8}$$

con la propiedad que las $n-$tuplas $(X_1, \ldots, X_n)$ y $(X_1, ..., X_n)$ asignadas a dos diferentes sistemas de coordenadas (x_i) y $(\widetilde{x}_j)$ se relacionan por la transformación:

$$\widetilde{X}_j = \frac{\partial \widetilde{x}_j}{\partial x_i}(p)X_i.$$

Del mismo modo, un covector tangente se puede pensar como una $n-$tupla $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ que se transforma, en virtud de (2.8), como sigue:

$$\xi_i = \frac{\partial \widetilde{x}_j}{\partial x_i}(p)\widetilde{\xi}_i. \tag{2.9}$$

Definición. La unión disjunta

$$T^*M = \coprod_{p\in M} T_p^*M,$$

es llamada el *haz cotangente* de M. Una sección de T^*M se llama un *campo de covectores* sobre M.

Se escribirá el valor de un campo de covectores σ en un punto $p \in M$ como (σ_p) en lugar de $\sigma(p)$, para evitar conflictos con la notación de la acción de un covector en un vector.

Si (ε_{ip}) es la base de coordenadas dual para T_pM en cada punto en algún conjunto abierto $U \subset M$, entonces σ puede ser expresado localmente como $\sigma_p = \sigma_i(p)\varepsilon_{ip}$ para algunas funciones $\sigma_1, \ldots, \sigma_n : U \to \mathbb{R}$, llamadas las *funciones componentes* de σ.

Definición. Un campo de covectores se dice que es suave si el mapeo de M a T^*M es *suave.*

Los campos de covectores suaves son llamados $1-$*formas (diferencial)* (la razón para esta última terminología se pondrá de manifiesto en el siguiente capítulo cuando se definen las $k-$formas diferenciales para $k > 1$).

Sea M una variedad diferenciable y sea $\sigma : M \to T_p^*M$ un mapeo (no se supone que es continuo) de tal manera que $\sigma \in T_p^*M$ para cada $p \in M$. Si X es un campo de vectores suave definido en cualquier subconjunto abierto $U \subset M$, entonces se define la función $\langle\sigma, X\rangle : U \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle\sigma, X\rangle(p) = \langle\sigma_p, X_p\rangle = \sigma_p(X_p).$$

Definición. Una ordena $n-$tupla de campos de covectores suaves $(\sigma_1, \sigma, \sigma_n)$ definida sobre algún conjunto abierto $U \subset M$ es llamada *comarco local* en U si (σ_p) constituye una base para T_p^*M en cada punto $p \in U$. Si $U = M$, se llama *comarco global.*

Dado un marco local $(E_1, \ldots, E_n)$ de TM en un conjunto abierto U, entonces hay un único comarco suave local determinada por $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ que satisface la relación $\varepsilon_i(E_j) = \delta_{ij}$. Este comarco es llamado el *comarco dual* al marco dado.

Nótese que cada coordenada del campo de covectores ε_i (cuyo valor en p es el $i-$ésimo elemento de la base dual ε_{ip}) es suave, porque cada una de las funciones de sus componentes es idénticamente 1 o idénticamente 0. Por lo tanto $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ es una marco local en el dominio de coordenadas, que es llamado una *comarco de coordenadas.*

Se denota el conjunto de todos los campos de covectores suaves en M como $\mathcal{T}^*(M)$. Dados $\sigma, \tau \in \mathcal{T}^*(M)$ campos de covectores, cualquier combinación lineal $a\sigma + b\tau$ con coeficientes reales es de nuevo un campo de covectores suaves, por lo que $\mathcal{T}^*(M)$ es un espacio vectorial. Por otra parte, al igual que los campos vectoriales, los campos de covectores pueden ser multiplicados por funciones suaves: si $f \in C^\infty(M)$ y $\sigma \in \mathcal{T}^*(M)$, se define un campo de covectores $f\sigma$ por:

$$(f\sigma)_p = f(p)\sigma_p. \tag{2.10}$$

Se observa que $(f\sigma)_p$ es suave.

2.4. La Diferencial de una Función

En el cálculo elemental, el gradiente de una función suave f en $\mathbb{R}^n$ se define como el campo vectorial cuyas componentes son las derivadas parciales de f. En esta sección se generaliza la idea de derivada.

Definición. Sea f una función suave sobre una variedad M (toda discusión se aplica a las funciones definidas en un subconjunto abierto $U \subset M$ simplemente mediante la sustitución de M por U en todas partes). Se define un campo de covectores df, llamada la diferencial de f, por:

$$df_p(X_p) = X_p f \text{ para } X_p \in T_pM.$$

Lema 2.14 *La diferencial de una función suave es un campo de covectores suaves.*

Demostración. En primer lugar se va a verificar que en cada punto $p \in M$, $df_p(X_p)$ depende linealmente de X_p, de modo que df_p es sin duda un covector p.

Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ y $X_p, Y_p \in T_pM$,

$$\begin{aligned} &df_p(aX_p + bY_p) \\ &(aX_p + bY_p)f = a(X_pf) + b(Y_pf) = a df_p(X_p) + b df_p(Y_p). \end{aligned}$$

A continuación se mostrara que df es suave. Sean (x_i) coordenadas locales en un subconjunto abierto $U \subset M$, y sean (ε_i) las correspondientes coordenadas de comarco en U. Se escribira df en coordenadas como $df_p = A_i(p)\varepsilon_{ip}$ para algunas funciones $A_i : U \to \mathbb{R}$, la definición de de df, implica

$$A_i(p) = df_p\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\Big) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p f = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Puesto que esta última expresión depende suavemente de p, se deduce que la componente de las funciones A_i de df son suaves, por lo que df es suave. ■

Una de las consecuencias de la prueba anterior es una fórmula para la reprensentación en coordenadas de df:

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\varepsilon_{ip}. \tag{2.11}$$

Así, las componentes de df en cualquier sistema de coordenadas son derivadas parciales de f con respecto a esas coordenadas.

Si aplicamos (2.11) para el caso especial en el que f es una de las funciones coordenadas $dx_j : U \to \mathbb{R}$, se observa que

$$dx_{ip} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(p)\varepsilon_{ip} = \delta_{ij}\varepsilon_{ip} = \varepsilon_{ip}.$$

En otras palabras, las coordenadas de los campos de covectores ε_j no es otro que dx_j. Por lo tanto, la fórmula (2.11) para df_p puede reescribirse como

$$df_p = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(p)dx_{ip},$$

o como una ecuación entre los campos de covectores en lugar de covectores:

$$df = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}dx_i. \tag{2.12}$$

En partícular, cuando la dimensión es 1 se reduce a

$$df = \frac{df}{dx}dx.$$

Por ejemplo, si $f(x,y) = x^2y\cos(x)$ sobre $\mathbb{R}^2$, entonces df está dada por la expresión

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial(x^2y\cos(x))}{\partial x}dx + \frac{\partial(x^2y\cos(x))}{\partial y}dy \\ &= (2xy\cos(x) - x^2y\mathrm{sen}(x))dx + x^2\cos(x)dy. \end{aligned}$$

Como hemos visto, una transformación suave proporciona una aplicación lineal sobre los vectores tangentes como el *push-forward*. Dualizando esto conduce a una aplicación lineal sobre covectores que va en la dirección opuesta.

Definición. Sea $F : M \to N$ una tranformación suave. El mapeo

$$F_* : T_pM \to T_{F(p)}N,$$

produce un mapeo dual

$$(F_*^*) : T^*_{F(p)}N \to T^*_p M.$$

llamado el *pullback*.

Para evitar la proliferación de estrellas, se escribe el mapeo *pullback* asociado con F como

$$F^* : T^*_{F(p)}N \to T^*_p M.$$

Concretando las definiciones, F^* se caracteriza por

$$(F^*\xi)(X) = \xi(F_*X), \text{ para } \xi \in T^*_{F(p)}N, X \in TpM.$$

Dado un mapeo suave $G : M \to N$ y un campo de covectores suave σ en N, se define un campo de covectores $G^*\sigma$ sobre M por

$$(G^*\sigma)_p = G^*(\sigma_(G(p))). \tag{2.13}$$

Lema 2.15 *Sea $G : M \to N$ un mapeo suave y supongase que $f \in C^\infty(N)$ y $\sigma \in \mathcal{T}(N)$. Entonces*

$$G^*df = d(f \circ G); \tag{2.14}$$

$$G^*(f\sigma) = (f \circ G)G^*\sigma. \tag{2.15}$$

Demostración. Para demostrar (2.14), sea $X_p \in T_pM$ arbitraria y se calcula

$$\begin{aligned}
(G^*df)_p(X_p) &= (G^*df_{G(p)})(X_p) \\
&= df_{G(p)}(G_*X_p) \\
&= (G_*X_p)f \\
&= X_p(f \circ G) \\
&= d(f \circ G)_p(X_p).
\end{aligned}$$

De forma similar, para (2.15) se calcula

$$\begin{aligned}
(G^*(f\sigma))_p &= G^*((f\sigma)_{G(p)}) \\
&= G^*()f(G(p)\sigma_{G(p)}) \\
&= f(G(p))G^*(\sigma_{G(p)}) \\
&= f(G(p))(G^*\sigma)_p \\
&= ((f \circ G)G^*\sigma)_p
\end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. ∎

Proposición 2.16 *Supongase que $G : M \to N$ es suave y sea σ un campo de covectores suave en N. Entonces $G^*\sigma$ es un campo de covectores suaves en M.*

Demostración. Sea $p \in M$ arbitraria y elijanse coordenadas locales (x_i) para M cerca de p y (y_j) para N cerca de $G(p)$. Se escribe a σ en coordenadas como $\sigma = \sigma_j dy_j$ para funciones suaves σ_j definidas cerca de $G(p)$ y usando el Lema 2.15 dos veces, se calcula

$$\begin{aligned} G^*\sigma &= G^*(\sigma) \\ &= (\sigma \circ G)G^*dy_j \\ &= (\sigma \circ G)d(y_j \circ G). \end{aligned}$$

Debido a que esta expresión es suave, se deduce que $G^*\sigma$ es suave. ■

En el curso de la prueba anterior, se deriva la siguiente fórmula para el pullback de un campo de covectores con respecto a las coordenadas y_j:

$$G^*\sigma = G^*(\sigma_j dy_j) = (\sigma_j \circ G)d(y_i j \circ G) = (\sigma_j \circ G)dG_j, \tag{2.16}$$

donde G_j es la j-ésima función componente de G en estas coordenadas. Esta fórmula hace que el cálculo de el pullback en las coordenadas se haga más facil, tal como lo muestra el siguiente ejemplo.

Sea $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un mapeo dada por

$$(u, v) = G(x, y, z) = (x^2 y, y\text{sen}(z)),$$

y sea $\sigma \in T^*(\mathbb{R}^2)$ el campo de covectores

$$\sigma = udv + vdu.$$

De acuerdo con (2.16), el pullback $G^*\sigma$ está dado por

$$\begin{aligned} G * \sigma &= (u \circ G)d(v \circ G) + (v \circ G)d(u \circ G) \\ &= x^2 y(\text{sen}(z)dy + y\text{cos}(z)dz) + y\text{sen}(z)(2xydx + x^2 dy) \\ &= 2xy\text{sen}(z)dx + 2x^2\text{sen}(z)dy + x^2 y\text{sen}(z)dy + x^2 y^2\text{cos}(z)dz. \end{aligned}$$

En otras palabras, para calcular $G^*\sigma$, todo lo que se tiene que hacer es sustituir las funciones componentes de G por las funciones de coordenadas de N en todas partes donde aparezca σ.

Capítulo 3

Algebra Exterior

El cálculo dice cómo aproximar los objetos suaves por objetos lineales, y las definiciones abstractas de la teoría de variedades dan una manera de interpretar aproximaciones lineales en coordenadas invarientes. En este capítulo se dará un mayor énfasis a esta idea, mediante la generalización de los objetos lineales. Esto conduce a los conceptos de tensores y campos tensoriales en variedades.

Después se describen las representaciones de las coordenadas de campos tensoriales, para introducir una clase especial de los tensores, cuyos valores son iterados por las permutaciones de sus argumentos, llamados los tensores alternantes. El álgebra de los tensores alternantes da una construcción algebraica que es una operación entre tensores que se conoce como producto exterior.

3.1. Algebra de Tensores

Definición. Supongamos $V_1, \ldots, V_k$ y W son espacios vectoriales. Una aplicación $F : V_1 \times \ldots \times V_k \to W$ se dice que es *multilineal* si es lineal como una función de cada variable por separado:

$$F(v_1, \ldots, av_i + a'v_i', \ldots, v_k) = aF(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + a'F(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_k).$$

Aquí hay algunos ejemplos:

- El producto punto en $\mathbb{R}^n$ es una función con valores escalares bilineal de dos vectores.
- El producto cruz en $\mathbb{R}^3$ es una función vectorial bilineal de dos vectores que se utiliza para encontrar un tercer vector ortogonal a dos más propuestos.
- El determinante es una función multilineal de valor real de n vectores en $\mathbb{R}^n$, utilizado para detectar independencia lineal.

Definición. Un *k-tensor* en V es una función multilineal de valor real de k elementos de V:

$$T : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k} \to \mathbb{R}.$$

El número k se llama rango de T. Un $0-$tensor es, por convención, sólo un número real.

Definición. El conjunto de todos los $k-$tensores en V se denota por $\mathcal{J}^K(V)$; es un espacio vectorial bajo las operaciones habituales de adición y la multiplicación por un escalar:

$$(aT)(X_1, \ldots, X_k) = a(T(X_1, \ldots, X_k)),$$

$$(T + T')(X_1, \ldots, X_k) = T(X_1, \ldots, X_k) + T'(X_1, \ldots, X_k).$$

Cada aplicación lineal $\omega : V \to \mathbb{R}$ es multilineal, por lo que un $1-$tensor es sólo un covector. Por lo tanto $\mathcal{J}^K(V)$ es, naturalmente identificado con V^*.

Un $2-$tensor de V es una función bilineal de valor real de dos vectores, que es también llamado una *forma bilineal*. Un ejemplo es el producto punto en $\mathbb{R}^n$. Más en general, cualquier producto interno en V es un $2-$tensor.

El determinante, considerado como una función de n vectores, es un $n-$tensor en $\mathbb{R}^n$.

Definición. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y sea $S \in \mathcal{J}^K(V), T \in \mathcal{J}^l(V)$. Se define un $k + l-$tensor

$$S \otimes T : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k+l} \to \mathbb{R}$$

dado por

$$S \otimes T = S(X_1, \ldots, X_k)T(X_{k+1}, \ldots, X_{k+l}),$$

el $(k + l)-$tensor es llamado el *producto tensorial* de S y T.

Debido a la definición anterior, se puede escribir el producto tensorial de tres o más tensores. Si $T_1, \ldots, T_l$ son tensores de rango $k_1, \ldots, k_l$, respectivamente, su producto tensorial $T_1 \otimes \cdots \otimes T_l$ es un tensor de rango $k = k_1 + \cdots + k_l$, cuya acción sobre los k vectores se indroducen en los primeros k_1 vectores en T_1, los k_2 vectores siguientes en T_2 y así sucesivamente, y multiplicando los resultados juntos. Por ejemplo, si R y S son $2-$tensores y T es un $3-$tensor, entonces

$$R \otimes S \otimes T(X_1, \ldots, X_7) = R(X_1, X_2)S(X_3, X_4)T(X_5, X_6, X_7).$$

Proposición 3.1 *Sea V un espacio vectorial real de dimensión n, (E_i) alguna base para V y sea (ε_i) la base dual. El conjunto de todos los $k-$tensores de la forma $\varepsilon_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon_{i_k}$ para $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$ es una base para $\mathcal{J}^k(V)$, tal que tiene dimensión n^k.*

Demostración. Sea el conjunto $\mathcal{B} = \{\varepsilon_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{i_k} : 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n\}$. Se tiene que demostrar que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente y genera a $\mathcal{J}^k(V)$. Supóngase que $T \in \mathcal{J}^k(V)$ es arbitraria. Para cualquier $k-$tupla $(i_1, \ldots, i_k)$ de enteros tal que $1 \leq i_j \leq n$, se define un número $T_{i_1 \ldots i_k}$ por

$$T_{i_1 \ldots i_k} = T(E_{i_1}, \ldots, E_{i_k}). \tag{3.1}$$

Se demostrará que

$$T = T_{i_1 \ldots i_k} \varepsilon_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{i_k},$$

de donde se sigue que $\mathcal{B}$ genera a V. Por tanto,

$$\begin{aligned} T_{i_1 \ldots i_k} \varepsilon_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{i_k}(E_{j_1}, \ldots, E_{j_k}) &= T_{i_1 \ldots i_k} \varepsilon_{i_1}(E_{j_1}) \cdots \varepsilon_{i_k}(E_{j_k}) \\ &= T_{i_1 \ldots i_k} \delta_{i_1 j_1} \cdots \delta_{i_k j_k} \\ &= T_{j_1 \ldots j_k} \\ &= T(E_{j_1}, \ldots, E_{j_k}). \end{aligned}$$

Por multilinealidad, un tensor se determina al evaluar en vectores de la base, así que esto demuestra que $\mathcal{B}$ genera a V.

Para demostrar que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente, se supone que alguna combinación lineal es igual a cero:

$$T_{i_1 \ldots i_k} \varepsilon_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{i_k} = 0,$$

evaluando en cualquier secuencia $(E_{J_1}, \ldots, E_{J_K})$ de vectores de la base. Por el mismo cálculo anterior, cada coeficiente de $T_{J_1 \ldots j_k}$ es cero. Así, la única combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}$ que suma a cero es el trivial. ■

Es útil ver de forma explícita lo que ésta proposición significa para los tensores

- $k = 0 : \mathcal{J}^0(V)$ es justo $\mathbb{R}$, así la dimención de $\mathcal{J}^0(V) = 1 = n^0$.
- $k = 1 : \mathcal{J}^1(V) = V^*$ tiene dimensión $n = n^1$.
- $k = 2 : \mathcal{J}^2(V) = V^*$ es el espacio de las formas bilineales sobre V. Cualquier forma bilineal se puede escribir de manera única como $T = T_{ij} \varepsilon_i \otimes \varepsilon_j$, donde (T_{ij}) es una matriz arbitraria de $n \times n$. Por lo tanto, dim $\mathcal{J}^2(V) = n^2$.

Definición. Se define el *haz* de $k-$tensores sobre M por

$$\mathcal{J}^k M = \coprod_{M \in p} \mathcal{J}^k(T_p M),$$

y es llamado el *haz tensorial* sobre M. Se puede observar que hay relaciones naturales

$$\mathcal{J}^0 M = M \times \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{J}^1 M = \mathcal{J}^* M.$$

Definición. Una sección de un haz tensorial se llamado un *campo tensorial* sobre M. Un *campo tensorial suave* si es una sección que es suave en el sentido usual de las secciones suaves de haz de vectorial. Se denota el espacio vectorial de secciones suaves de este haz por

$$\mathcal{T}^k(M) = \{\text{secciones suaves de } \mathcal{J}^k M\}.$$

En cualesquiera coordenadas locales (x_i), las secciones de este haz se pueden escribir como

$$\sigma = \sum_{1 \leq i_1 \ldots i_k \leq n} \sigma_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \otimes \ldots \otimes dx_{i_k}$$

La función $\sigma_{i_1 \ldots i_k}$ se llama *función componente* de σ en estas coordenadas.

Si M es una variedad diferenciable y $\sigma : M \to \mathcal{J}^k M$ un mapa (no se supone que es continuo) de tal manera que $\sigma_p \in \mathcal{J}^k(T_p M)$ para cada $p \in M$. Si $X_1, \ldots, X_k$ es un campo vectorial definido en cualquier subconjunto abierto $U \subset M$, la función $\sigma(X_1, \ldots, X_k) : U \to \mathbb{R}$ se define por

$$\sigma(X_1, \ldots, X_k)(p) = \sigma_p(X_1|_p, \ldots, X_k|_p)$$

Ademas esta función es suave.

Los $1-$tensor suaves son sólo campos covectoriales. Recordando que un $0-$tensor es sólo un número real, un $0-$tensor es lo mismo que una función real.

Definición. Si $F : M \to N$ es una transformación suave y σ es un $k-$tensor en N, se define un $k-$tensor $F^*\sigma$ sobre M llamado el *pullback* de σ por

$$(F^*\sigma)_p(X_1, \ldots, X_k) = \sigma_{F(p)}(F_* X_1, \ldots, F_* X_k).$$

Proposición 3.2 *Supóngase que $F : M \to N$ y $G : N \to P$ son transformaciones suaves, $\sigma \in \mathcal{J}^k(N), \tau \in \mathcal{J}^l(N)$, y $f \in C^\infty(N)$. Entonces,*

(a) F^* es lineal sobre $\mathbb{R}$.

(b) $F^*(f\sigma) = (f \circ F)F^*\sigma$.

(c) $F^*(\sigma \otimes \tau) = F^*\sigma \otimes F^*\tau$.

(d) $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.

Demostración. Sean $\sigma, \sigma' \in \sigma \in \mathcal{J}^k(\mathbb{R}^n)$ y $F : M \to \mathbb{R}^n$ una transformación suave y se observa que $\sigma + \sigma' \in \mathcal{J}^k(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}(F * (\sigma + \sigma'))_p(X_1, \ldots, X_k) &= (\sigma + \sigma')_{F(p)}(F_*X_1, \ldots, F_*X_k) \\ &= \sigma_{F(p)}(F_*X_1, \ldots, F_*X_k) + \sigma'_{F(p)}(F_*X_1, \ldots, F_*X_k) \\ &= F^*\sigma(F_*X_1, \ldots, F_*X_k) + F^*\sigma'(F_*X_1, \ldots, F_*X_k).\end{aligned}$$

Para demostrar (b), sean $\sigma \in \mathcal{J}^k(N)$ y $f \in C^\infty(N)$ y se eval'ua en un punto p

$$\begin{aligned}(F * (f\sigma))_p(X_1, \ldots, X_k) &= (f\sigma)_{F(p)}(F_*X_1, \ldots, F_*X_k) \\ &= f(F(p))\sigma_{F(p)}(F_*X_1, \ldots, F_*X_k) \\ &= f(F(p))F^*\sigma_{F(p)}(F_*X_1, \ldots, F_*X_k).\end{aligned}$$

Para demostrar (c) se toman $k + l$ vectores $X_1, \ldots, X_{k+l} \in V$. Entonces, por definición del operador F^* tenemos

$$\begin{aligned}F^*(\sigma \otimes \tau)_p(X_1, \ldots, X_{k+l}) &= (\sigma \otimes \tau)_{F(p)}(F_*X_1, \ldots, F_*X_{k+l}) \\ &= \sigma_{F(p)}(F_*X_1, \ldots, F_*X_k)\tau_{F(p)}(F_*X_{k+1}, \ldots, F_*X_{k+l}) \\ &= \sigma_{F(p)}(F_*X_1, \ldots, F_*X_k)\tau_{F(p)}(F_*X_{k+1}, \ldots, F_*X_{k+l}) \\ &= F^*(\sigma) \otimes F^*(\tau)(X_1, \ldots, X_{k+l}).\end{aligned}$$

Ahora se tomarán F y G como se definieron anteriormente, $\sigma \in \mathcal{J}^k(N)$ y k vectores $X_1, \ldots, X_k \in V$.

$$\begin{aligned}(G \circ F)^*\sigma(X_1, \ldots, X_k) &= \sigma_{(G\circ F)(p)}((G \circ F)_*X_1, \ldots, (G \circ F)_*X_k) \\ &= \sigma_{(G\circ F(p))}(G_* \circ (F_*X_1), \ldots, G_* \circ (F_*X_k)) \\ &= G^*\sigma_{F(p)}(F_*X_1, \ldots, F_*X_k) \\ &= G^*(F^*\sigma_p(X_1, \ldots, X_k)) \\ &= (G^* \circ F^*)\sigma_p(X_1, \ldots, X_k))\end{aligned}$$

■

Corolario 3.3 *Sea $F : M \to N$ suave y que $\sigma \in \mathcal{J}^k(N)$. Si $p \in M$ y y_j son las coordenadas de N en un abierto no vacío de $F(p)$, entonces $F * \sigma$ tiene la siguiente expresión cerca de p:*

$$F^*(\sigma_{j_1,\ldots,j_k} dy_{j_1}, \ldots, dy_{j_k}) = (\sigma_{j_1,\ldots,j_k} \circ F)d(y_{j_1} \circ F) \otimes \cdots \otimes d(y_{j_k} \circ F).$$

Entonces $F^*\sigma$ es suave.

El corolario es una consecuencia de la proposición anterior, ademas de que muestra cómo se calcula $F^*\sigma$.

3.2. Algebra de Tensores Alternantes

Definición. Un $k-$tensor T sobre un espacio vectorial V de dimensión finita se dice que es *alternante* si tiene la siguiente propiedad:

$$T(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_k) = -T(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_k).$$

Teorema 3.4 *Supongamos que Ω es un $k-$tensor en un espacio vectorial V con la propiedad que $\Omega(X_1, \ldots, X_k) = 0$ siempre que $X_1, \ldots, X_k$ son linealmente dependientes. Entonces Ω es alternante.*

Demostración La hipótesis implica, en particular, que Ω es cero siempre que dos de sus argumentos sean iguales. Esto a su vez implica

$$\begin{aligned}
0 &= \Omega(X_1, \ldots, X_i + X_j, \ldots, X_i + X_j, \ldots, X_k) \\
&= \Omega(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_i, \ldots, X_k) + \Omega(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_k) \\
&\quad + \Omega(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_k) + \Omega(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_j, \ldots, X_k) \\
&= \Omega(X_1, \ldots, X_i + X_j, \ldots, X_i + X_j, \ldots, X_k) + \Omega(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_k).
\end{aligned}$$

Por lo tanto Ω es alternante. ■

Definición. Para cualquier espacio vectorial real V de dimensión finita, sea $\Lambda^k(V)$ el subespacio de $\mathcal{J}^k(V)$ que consiste de los tensores alternantes.[1]

Recordar que para cualquier permutación $\sigma \in S_k$, el signo de σ denotado por sgn σ, es igual a 1 si σ es par (es decir, que se puede escribír como una composición de un número par de transposiciones) y -1 si σ es impar.

Definición. Dado un $k-$tensor T y una permutación $\sigma \in S_k$, definimos un nuevo $k-$tensor, T^σ, por

$$T^\sigma(X_1, \ldots, X_k) = T(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)}).$$

Definición. Para cualquier vector $X_1, \ldots, X_k$ y cualquier permutación $\sigma \in S_k$, se define

$$T(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)}) = (\text{sgn } T(X_1, \ldots, X_k)).$$

Cada $0-$tensor (que en esencia, es un número real) es alternante, ya que no hay argumentos para intercambiar. Del mismo modo, todos los $1-$tensor son alternantes. Un $2-$tensor es alternante en una forma bilineal antisimétrica en V. Se observa que cualquier $2-$tensor T se puede expresar como la suma de un tensor alternante y de uno simétrico porque

[1] Algunos autores utilizan la notación $\Lambda^k(V^*)$ en lugar de $\Lambda^k(V)$ para este espacio.

$$T(X,Y) = \frac{1}{2}(T(X,Y) - T(Y,X)) + \frac{1}{2}(T(X,Y) + T(Y,X)).$$

Definición. Se define una proyección Alt : $\mathcal{J}^K(V) \to \Lambda^k(V)$ llamada la *proyección alternante*, como sigue

$$\text{Alt } T = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S}(\text{sgn } \sigma)T^{\sigma}.$$

De manera explícita, esto quiere decir

$$\text{Alt } T(X_1, \ldots, X_k) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S}(\text{sgn } \sigma)T(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)}).$$

Si T es cualquier $1-$tensor, entonces Alt $T = T$. Si T es un $2-$tensor, entonces

$$\text{Alt } T(X,Y) = \frac{1}{2}(T(X,Y) - T(Y,X)).$$

Lema 3.5 (Propiedades de la Proyección Alternante)

(a) Para algún tensor T, Alt T es alternante.

(b) T es alternante sí y sólo sí Alt $T = T$.

Demostración. Séa $T \in \mathcal{J}^k(V)$. Si $\sigma \in S_K$ es alguna permutación, entonces

$$\begin{aligned}
(\text{Alt } T)(X_{\tau(1)}, \ldots, X_{\tau(k)}) &= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k} T^{\sigma}(X_{\tau(1)}, \ldots, X_{\tau(k)}) \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k} T^{\sigma\tau}(X_1, \ldots, X_k) \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\eta \in S_k} T^{\eta}(X_1, \ldots, X_k) \\
&= (\text{Alt } T)(X_1, \ldots, X_k),
\end{aligned}$$

donde se ha sustituido $\eta = \sigma\tau$ en la segunda línea a la última y se utilizó el hecho de que η recorre sobre todo S_k como lo hace σ. Esto demuestra que Alt T es alternante.

Si T es alternante, entonces $T^{\sigma} = T$ para cada $\sigma \in S_k$, de donde se deduce que Alt $T = T$. Por otro lado, si $T = \text{Alt}T$, entonces T es alternante porque la parte (a) muestra que es Alt T. ■

Sea k un entero positivo. Una $k-$tupla ordenada $I = (i_1, \ldots, i_k)$ de enteros positivos se denomina un multi-índices de longitud k. Si I y J son multi-índices tales que J se obtiene a partir I por una permutación $\sigma \in S_k$ en el siguiente sentido

$$j_1 = i_{\sigma(1)}, \ldots, j_k = i_{\sigma(k)},$$

y se denota $J = \sigma I$. Esto es útil para extender de la notación de la delta de Kronecker de la siguiente manera: si I y J son multi-índices de longitud k, se define

$$\delta_{IJ} = \begin{cases} \text{sgn } \sigma, & \text{si } I \text{ y } J \text{ no tienen índices repetidos} \\ & \text{y } J = \sigma I \text{ para alguna } \sigma \in S_k, \\ 0, & \text{si } I \text{ o } J \text{ tienen índices repetidos} \\ & \text{o } J = \sigma I \text{ no es una permutación de } I. \end{cases} \tag{3.2}$$

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y supongamos que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ es una base para V^*. Se define un conjunto de tensores alternantes sobre V, tal que generaliza la función determinante en $\mathbb{R}^n$. Para cada índice de multi-índices $I = (i_1, \ldots, i_k)$ de longitud k tal que $1 \leq i_1, \ldots, \leq i_k \leq n$, define un $k-$tensor ε_I por

$$\begin{aligned} \varepsilon_I(X_1, \ldots, X_k) &= \det \begin{pmatrix} \varepsilon_{i_1}(X_1) & \ldots & \varepsilon_{i_k}(X_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_{i_1}(X_1) & \ldots & \varepsilon_{i_k}(X_k) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} X_{1,i_1} & \ldots & X_{k,i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{1,i_1} & \ldots & X_{k,i_k} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Lema 3.6 *Sean (Ei) una base para V, (ε_i) la base dual de V^* y (ε_I) con su definición.*

(a) Si I tiene un índice repetido, entonces $(\varepsilon_I) = 0$.

(b) Si $J = \sigma I$ para alguna $\sigma \in S_k$, entonces $\varepsilon_I = (sgn)\ \varepsilon_J$.

(c) El resultado de evaluar ε_I en una sucesión de vectores de la base es

$$\varepsilon_I(E_{j_i} \ldots E_{j_k}) = \delta_{IJ}.$$

Demostración. Si I tiene un índices repetidos, entonces para cualquier conjunto $X_1, \ldots, X_k$, el determinante en (3.3) tiene dos renglones idénticos y por lo tanto es igual a cero, lo que demuestra (a). Por otro lado, si J se obtiene de I por intercambio dos índices, los determinantes correspondientes tienen signos opuestos, lo que implica (b).

Para demostrar (c), se consideran varios casos. En primer lugar, si I tiene un índice repetido, entonces $\varepsilon_I = 0$ por la parte (a). Si J tiene un índice repetido, entonces $\varepsilon_I(E_{j_i} \dots E_{j_k}) = 0$ por ser alternante. Si ninguno de los multi-índices tiene algún índice repetido, pero J no es una permutación de I, entonces el factor determinante en la definición de $\varepsilon_I(E_{j_i} \dots E_{j_k})$ tiene al menos una fila de ceros, por lo que es igual a cero. Si $J = I$, entonces $\varepsilon_I(E_{j_i} \dots E_{j_k})$ es el determinante de la matriz de identidad, que es 1. Finalmente, si $J = \sigma_I$, entonces

$$\varepsilon_I(E_{j_i} \dots E_{j_k}) = (\text{sgn } \sigma)\varepsilon_J(E_{j_i} \dots E_{j_k}) = \text{sgn } \sigma, \text{ por } (b). \quad \blacksquare$$

Un multi-índice $I = (i_1, \dots, i_k)$ se dice que es creciente si $i_1 < \cdots < i_k$. Será útil denotar una suma sólo sobre multi-índices crecientes, por ejemplo,

$$\sum_I{}' T_I \varepsilon_I = \sum_{\{I: 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}} T_I \varepsilon_I.$$

Lema 3.7 *Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Si (ε_i) es una base para V^*, entonces la colección de $k-$covectores*

$$\{\varepsilon_I : I \textit{ es creciente } \},$$

es una base para $\Lambda^k(V)$. Por lo tanto,

$$\textit{dim } \Lambda^k(V) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Demostración. Sea (E_i) una base para V y ε_i su base dual, y sea además $\mathcal{E} = \{\varepsilon_I : I \text{ es creciente } \}$. Se tiene que demostrar que el conjunto $\mathcal{E}$ genera a $\Lambda^k(V)$ y es linealmente independiente.

Para mostrar que $\mathcal{E}$ genera a $\Lambda^k(V)$, sea $T \in \Lambda^k(V)$ arbitraria. Para cada multi-índice $I = (i_1, \dots, i_k)$, se define un número real T_I dado por

$$T_I = T(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}).$$

El hecho de que T es alternante implica que $T_I = 0$ si I contiene un multi-índice repetido, y $T_J = (\text{sgn } \sigma)I$ si $J = \sigma I$ para $\sigma \in S_k$. Para cualquier multi-índice J, el Lema 3.6 da como resultado que T sea alternante, lo que implica que $T_I = 0$ si contiene un multi-índice repetido, y $T_J = (\text{sgn } \sigma)T_I$ si $J = \sigma I$ para $\sigma \in S_k$. Para cualquier multi-índice J, el Lema 3.6 da

$$\sum_I{}' T_I \varepsilon_I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = \sum_I{}' T_I \delta_{IJ} = T_j = (E_{j_1}, \dots, E_{j_k}).$$

Entonces $\sum_I{}' T_I \varepsilon_I = T$, así $\mathcal{E}$ genera a $\Lambda^k(V)$.

Ahora hay que demostrar que $\mathcal{E}$ es linealmente independiente. Supongamos que

$$\sum_I T_I \varepsilon_I = 0,$$

para algunos coeficiente T_I. Sea J algún multi-índice creciente. Aplicando en ambas partes $(E_{J_1}, ..., E_{J_K})$ y utilizando el Lema 3.6,

$$0 = \sum_I T_I \varepsilon_I (E_{J_1}, ..., E_{J_K}) = T_J.$$

Así, cada coeficiente de T_J es cero. ■

En partícular, para un espacio vectorial V de dimensión n, este lema implica que $\Lambda^n(V)$ es de dimensión 1, y es generado por $\varepsilon_{1...n}$. Puesto que no hay multi-índices crecientes de longitud mayor que n, el espacio $\Lambda^k(V)$ es el espacio trivial para $k > n$.

Definición. Si $\omega \in \Lambda^k(V)$ y $\eta \in \Lambda^k(V)$, se define el *producto cuña* o el *producto exterior* de ω y η como el $(k+l)-$tensor alternante

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{ Alt } (\omega \otimes \eta). \tag{3.4}$$

Lema 3.8 *Para cualesquiera dos multi-índices* $I = (i_1, \ldots, i_k)$ *y* $j = (j_1, \ldots, j_l)$

$$\varepsilon_I \wedge \varepsilon_J = \varepsilon_{IJ}, \tag{3.5}$$

donde IJ *es el multi-índice* $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l)$ *obtenidos mediante la concatenación de* I *y* J.

Demostración. Por multilinealidad, es suficiente demostrar que

$$\varepsilon_I \wedge \varepsilon_J (E_{p_1}, \ldots, E_{p_{k+l}}) = \varepsilon_{IJ} (E_{p_1}, \ldots, E_{p_{k+l}}), \tag{3.6}$$

para cualquier sucesión $(E_{p_1}, \ldots, E_{p_{k+l}})$ de vectores de la base.

Caso I: $P = (p_1, \ldots, p_{k+l})$ tiene un índice repetido. En este caso, ambas partes de (3.6) son iguales a cero por ser tensores alternantes.

Caso II: P contiene un índice que no pertenece a I ni J. En este caso, el lado derecho es cero por el Lema 3.6(c). Del mismo modo, cada término en la expresión del lado derecho, ya sea ε_I o ε_J evaluado sobre una sucesión de vectores de la base que no es una permutación de I o J, respectivamente, por lo que el lado izquierdo es también cero.

Caso III: $P = IJ$ y P no tiene índices repetidos. En este caso, el lado derecho de (3.6) es igual a 1 por el Lema3.6(c), por lo que se necesita demostrar que el lado izquierdo es también igual a 1. Por definición,

$$\varepsilon_I \wedge \varepsilon_J(E_{p_1}, \ldots, E_{p_{k+l}})$$

$$= \frac{(k+l)!}{k!l!}\text{Alt }(\varepsilon_I \otimes \varepsilon_j)(E_{p_1}, \ldots, E_{p_{k+l}})$$

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn }\sigma)\varepsilon_I(E_{p_{\sigma(1)}}, \ldots, E_{p_{\sigma(k)}})\varepsilon_J(E_{p_{\sigma(1)}}, \ldots, E_{p_{\sigma(k+l)}}).$$

Por el Lema 3.6, de nuevo, los únicos términos en la suma anterior que dan valores distinto de cero son aquellos en los que σ permuta los primeros índices k y los últimos índices l de P por separado. En otras palabras, σ debe ser de la forma $\sigma = \tau\eta$, donde $\tau \in S_k$ actúa permutando $1, \ldots, K$ y $\eta \in S_l$ actúa permutando $k+1, \ldots, l$. Por lo tanto, sgn $(\tau\eta) =$ (sgn τ)(sgn η), se tiene

$$\varepsilon_I \wedge \varepsilon_J(E_{p_1}, \ldots, E_{p_{k+l}})$$

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{\substack{\tau \in S_k \\ \eta \in S_l}} (\text{sgn }\tau)(\text{sgn }\eta)\varepsilon_I(E_{p_{\tau(1)}}, \ldots, E_{p_{\tau(k)}})\varepsilon_J(E_{p_{\eta(1)}}, \ldots, E_{p_{\eta(k+l)}})$$

$$= \Big(\frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} (\text{sgn }\tau)\varepsilon_I(E_{p_{\tau(1)}}, \ldots, E_{p_{\tau(k)}})\Big) \times$$

$$\Big(\frac{1}{l!} \sum_{\eta \in S_l} (\text{sgn }\eta)\varepsilon_J(E_{p_{\eta(k+1)}}, \ldots, E_{p_{\eta(k+l)}})\Big)$$

$$= \big(\text{Alt }\varepsilon_I\big)(E_{p_1}, \ldots, E_{p_k})\big(\text{Alt }\varepsilon_J\big)(E_{p_{k+1}}, \ldots, E_{p_{k+l}})$$

$$= \varepsilon_I(E_{p_1}, \ldots, E_{p_k})\varepsilon_J(E_{p_{k+1}}, \ldots, E_{p_{k+l}})$$

$$= 1$$

Caso IV: P es una permutación de IJ. En este caso, aplicando una permutación a P nos lleva de nuevo al Caso III. Dado que el efecto de la permutación es multiplicar ambos lados de (3.6) por el mismo signo, el resultado es también válido en este caso. ■

Proposición. **(Propiedades del Producto Cuña)**

(a) Bilinealidad:

$$(a\omega + a'\omega') \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega' \wedge \eta).$$

$$\eta(a\omega + a'\omega') = a(\eta \wedge \omega) + a'(\eta \wedge \omega').$$

(b) Asociatividad:

$$\omega \wedge (\eta \wedge \xi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi.$$

(c) Anticonmutatividad: para $\omega \in \Lambda^k(V)$ y $\eta \in \Lambda^l(V)$,

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega.$$

(d) Si $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ es una base para V^* e $I = (i_1, \ldots, i_k)$ es algún multi-índice,

$$\varepsilon_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{i_k} = \varepsilon_I. \tag{3.7}$$

(e) Para cualesquiera covectores $\omega_1, \ldots, \omega_k$ y vectores $X_1, \ldots, X_k$,

$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k(X_1, \ldots, X_k) = \det(\omega_i(X_j)). \tag{3.8}$$

Demostracion. La bilinealidad se sigue de la definición, ya que el producto tensorial es bilineal y el operador Alt es lineal. Para probar la asociatividad, por el Lema 3.8 se tiene

$$(\varepsilon_I \wedge \varepsilon_J)\varepsilon_K = \varepsilon_{IJ} \wedge \varepsilon_K = \varepsilon_{IJK} = \varepsilon_I \wedge \varepsilon_{JK} = \varepsilon_I \wedge (\varepsilon_J \wedge \varepsilon_K).$$

El caso general se sigue de la bilinealidad. De manera similar, usando el Lema 3.8, nuevamente se obtiene

$$\varepsilon_I \wedge \varepsilon_J = \varepsilon_{IJ} = (\text{sgn } \tau)\varepsilon_J \wedge \varepsilon_I,$$

donde τ es la permutación de IJ a JI. Se puede comprobar que sgn $\tau = (-1)^{kl}$, porque τ se puede descomponer como una composición de kl transposiciones (cada índice de I debe ser movido más allá de uno de los índices de J). Anticonmutatividad entonces se sigue de bilinealidad.

La parte (d) es una consecuencia inmediata del Lema 3.8 e inducción. Para demostrar la parte (e), se observa que el caso especial en el que cada ω_j es uno de la base de covectores ε_{i_j} sólo se reduce a (3.7). Es suficiente con observar que ambos lados de (3.8) son multilineales en $(\omega_1, ..., \omega_k)$.

Debido a la parte (d) de este lema, por lo general se utilizan las notaciones ε_I y $\varepsilon_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{i_k}$ indistintamente. ■

3.3. Formas Diferenciales

Sea M una variedad suave de dimensión n. El subconjunto de $\mathcal{J}^k M$ que consta de tensores alternantes y que se denota por $\Lambda^k M$, es:

$$\Lambda^k M = \coprod_{M \in p} \Lambda^k(T_p M).$$

Definición. Una sección suave de $\Lambda^k(M)$ se llama una $k-$*forma diferencial* o simplemente una $k-$*forma*. Es un campo tensorial suave cuyo valor en cada punto es un tensor alternante. Se denota el espacio vectorial de las secciones de $\Lambda^k M$ como $\mathcal{A}^k(M)$.

En cualquier carta coordenada, una ω $k-$forma se puede escribir localmente como

$$\omega = \sum_I \omega_I dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = \sum_I \omega_I dx_I,$$

donde los coeficientes ω_I son funciones suaves definidas sobre una vecindad abierta no vacía, y se usa dx_I como una abreviatura de $dx_{i1} \wedge \ldots \wedge dx_{ik}$ (no confundir con la diferencial de una función x_I). En términos de formas diferenciales, el resultado del Lema 3.6(c) se traduce a

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\right) = \delta_{IJ}.$$

El producto cuña de una $k-$forma con una $l-$forma es una $(k+l)-$forma. Un $0-$forma es sólo una función real e interpretamos el producto exterior de $f \wedge \eta$ una $0-$forma f, con η una $k-$forma en sentido del producto $f\eta$.

Una $1-$forma es justamente un campo suave de covectores. Sobre $\mathbb{R}^3$, algunos ejemplos de $2-$formas están dadas por

$$\omega = (\mathrm{sen}(xy))dy \wedge dx;$$

$$\eta = dx \wedge dy + dx \wedge dz + dy \wedge dz.$$

Definición. Sea $F : M \to N$ es un tranformación suave y ω una forma diferencial en N, el pullback $F^*\omega$, que es una forma diferencial en M, se define como un campo tensorial suave:

$$F^*\omega\big(X_1, \ldots, X_k\big) = \omega\big(F_*X_1, \ldots, F_*X_k\big).$$

Si $F : M \to N$ es una transformación suave y ω es una forma diferencial en N, el *pullback* $F^*\omega$ es una forma diferencal en M. Si $F(x) = y$, entonces F induce una transformación derivada $dF_x : T_x(M) \to T_y(N)$. Como $\omega(y)$ es un $p-$tensor alternante en $T_y(N)$, podemos hacer una inducción sobre $T_x(M)$. Sea

$$f^*\omega(x) = \omega(f(x))(df_x)^*.$$

Más explícito en el espacio euclidiano, sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación diferenciable. Entonces, F induce una transformación F^* tal que lleva $k-$formas en $\mathbb{R}^m$ sobre $k-$formas en $\mathbb{R}^n$. Ahora, sea ω una $k-$forma en $\mathbb{R}^m$. Por definición, $F^*\omega$ es una $k-$forma en $\mathbb{R}^n$ dada por

$$(F^*\omega)(p)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(F(p))(df_p(v_1), \ldots, df_p(v_k)),$$

donde $p \in \mathbb{R}^n, v_1, \ldots, v_k \in T_p\mathbb{R}^n$ y $df_p : T_p\mathbb{R}^n \to T_p\mathbb{R}^m$ es la diferencial de F en p. Se establece la convención de que si G es una $0-$forma, entonces

$$F^*g = g \circ F.$$

Lema 3.9 *Supóngase que $F : M \to N$ es suave.*

a) $F^*(\omega \wedge \eta) = (F^*\omega) \wedge (F^*\eta)$.

b) En alguna carta coordenada,

$$F^*\left(\sum_I \omega_I dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}\right) = \sum (\omega_I \circ F) d(y_{i_1} \circ F) \wedge \ldots \wedge d(y_{i_k} \circ F).$$

Demostración. a) Sea $F(x) = y$, $\omega = \sum_I a_I dy_I$ y $\varphi = \sum_I b_I dy_I$, entonces

$$\begin{aligned} F^*(\omega \wedge \varphi) &= F^*\left(\sum_{IJ} a_I b_J dy_I \wedge dy_J\right) \\ &= \sum_{IJ} a_I(F) b_J(F) dF_I \wedge dF_J \\ &= \sum_I a_I(F) dF_I \wedge \sum_J b_J(F) dF_J \\ &= F^*\omega \wedge F^*\varphi. \end{aligned}$$

b) Sea $\omega = \sum_I a_I dy_I$ una $k-$forma en N, entonces

$$\begin{aligned} F^*\omega &= F^*\left(\sum_{IJ} a_I dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}\right) \\ &= \sum_I F^*(a_I)(F^* dy_{i_1}) \wedge \ldots \wedge (F^* dy_{i_k}), \end{aligned}$$

ya que

$$F^* dy_i = dy_i(dF) = d(y_i \circ F).$$

Por tanto, se obtiene

$$F^*\omega = \sum(\omega_I \circ F)d(y_{i_1} \circ F) \wedge \ldots \wedge d(y_{i_k} \circ F). \quad \blacksquare$$

Sea $\omega = dx \wedge dy$ una $2-$forma sobre $\mathbb{R}^2$. Tomando la transformación de coordenadas polares $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\mathrm{sen}(\theta)$ como una expresión de la transformación identidad con respecto a las coordenadas diferentes en el dominio y rango, se tiene

$$\begin{aligned}
\omega &= dx \wedge dy \\
&= d(r\cos(\theta)) \wedge d(r\mathrm{sen}(\theta)) \\
&= (\cos(\theta)dr - r\mathrm{sen}(\theta)d\theta) \wedge (\mathrm{sen}(\theta)dr + r\cos(\theta)d\theta) \\
&= r\cos^2(\theta)dr \wedge d\theta - r\mathrm{sen}^2(\theta)d\theta \wedge dr.
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado el hecho de que el $dr \wedge dr = d\theta \wedge \theta = 0$. Debido a $dr \wedge d\theta = -d\theta \wedge dr$, esto se simplifica

$$dr \wedge dy = rdr \wedge d\theta.$$

La similitud entre esta fórmula y la fórmula para cambiar una integral doble de coordenadas cartesianas a polar es sorprendente.

Lema 3.10 *Sea $F : M \to N$ una transformación suave entre variedades de dimensión n. Si (x_i) y (y_j) son las coordenadas sobre conjuntos abiertos $U \subset M$ y $V \subset N$, respectivamente, y u es una función suave sobre V, entonces se cumple lo siguiente en $U \cup F^{-1}(V)$:*

$$F^*(udy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n) = (u \circ F) \det\left(\frac{\partial F^j}{\partial x_i}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n. \tag{3.9}$$

Demostración. Debido a que $\Lambda^n M$ es generado por $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ en cada punto, es suficiente mostrar que ambos lados de (3.9) dan el mismo resultado cuando son evaluadas $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n$. Del Lema 3.9

$$F^*(udy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n) = (u \circ F)dF_1 \wedge \ldots \wedge dF_n.$$

La Proposición 3.2(e) muestra que

$$dF_1 \wedge \ldots \wedge dF_n \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \ldots \frac{\partial}{\partial x_i},\right) = \det\left(dF_j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right) = \det\left(\frac{\partial F^j}{\partial x_i}\right).$$

Por lo tanto, el lado izquierdo de (3.9) da $(u \circ F)\det(\partial/\partial x_i)$ cuando se aplica a $(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)$. Por otra parte, el lado derecho da el mismo resultado, porque $dx_1 \wedge, \ldots, \wedge dx_n(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n) = 1$. $\blacksquare$

3.4. Derivada Exterior

En esta sección, se define un operador diferencial natural llamadao la derivada exterior de una forma. Es una generalización de la diferencial de una función.

Dada ω, una condición necesaria para la existencia de una función f tal que $\omega = df$ es

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = 0$$

Definición. Se define una 2−forma $d\omega$ por

$$d\omega = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j.$$

Esta fórmula tiene una generalización significativa a las formas diferenciales de todos los grados. Para cualquier variedad, se va a mostrar que es un operador diferencial $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$ que satisface $d(d\omega) = 0$ para toda ω. Por lo tanto, se sigue que una condición necesaria para una $k-$forma ω que es igual a $d\eta$ para alguna $(k-1)-$forma η, es $d\omega = 0$.

Definición. Sea ω una $k-$forma en una variedad. La *derivada exterior* $d\omega$ esta definida por

$$d\Big(\sum_I \omega_I dx_i \Big) = \sum_I d\omega_I \wedge dx_I. \tag{3.10}$$

donde $d\omega_I$ es sólo la diferencial de la función ω_I. Un poco más detallado, esto es

$$d \left(\sum_I \omega dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \right) = \sum_I \sum_i \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} dx_{i \wedge} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Obsérvese que cuando ω es una 1−forma, esto se convierte en

$$d(\omega_j dx_j) = dx_i \wedge dx_j = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j,$$

con el hecho de que $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, por lo que es consistente con la definición anterior.

Teorema 3.11 (La derivada exterior) *En cualquier variedad diferenciable M, existe una única tranformación lineal $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$ para cada $k \geq 0$ que satisface las siguientes condiciones:*

i) Si f es una función suave (una 0−forma), entonces df es el diferencial de f, definida como siempre

$$df(X) = Xf.$$

ii) Si $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ y $\eta \in \mathcal{A}^l(M)$, entonces

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

iii) $d^2 = 0$. Más precisamente, para cualquier ω $k-$forma, $d(d\omega) = 0$

En cualesquiera coordenadas locales, d viene dada por el Lema 3.10.

Demostración. En primer lugar se demostrará la unicidad. Supóngase que $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$ es un operador lineal que satisface (i), (ii) y (iii). Se va a demostrar que también satisface (3.10) en cualquier carta coordenada local, lo que implica que es la única determinada.

Se comenzará mostrando que d es local, en el sentido siguiente: Si ω y $\widetilde{\omega}$ son $k-$formas sobre M que coinciden en un subconjunto abierto $U \subset M$, entonces $d\omega = d\widetilde{\omega}$ sobre U. Escribiendo a $\eta = \widetilde{\omega} - \omega$, es suficiente mostrar que $d\eta = 0$ en U si η se anula sobre U. Sea $p \in U$ arbitrario, y sea $\varphi \in C^\infty(M)$ una función tal que es igual a 1 en un entorno de p y con soporte en U. Entonces, $\varphi\eta$ es idénticamente cero sobre M, por lo que

$$0 = d(\varphi\eta)_p = d\varphi_p \wedge \eta_p + \varphi d\eta_p = d\eta_p,$$

porque $\varphi \equiv 1$ en un abierto no vacío de p. Como p es un punto arbitrario de U, esto demuestra que $d\eta = 0$ en U.

Supóngase que (x_i) son coordenadas en un subconjunto abierto $U \subset M$. Sea $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ expresada como $\omega = \sum_I \omega_I dx_I$ en coordenadas en U. Se va mostrar que (3.10) en cada punto $p \in U$. Por el Lema de Extensión 1.9, se puede extender las funciones de coordenadas x_i a funciones suaves $\widetilde{x}_i$ sobre toda la variedad M tal que concuerda con x_i en alguna vecindad de p. Del mismo modo, se extienden las funciones componentes ω_I a las funciones $\widetilde{\omega}_I$ sobre M. La $k-$forma $\widetilde{\omega} = \sum_I \widetilde{\omega}_I d\widetilde{x}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\widetilde{x}_{i_1}$ se define globalmente en M y coincide cerca de p. Usando la linealidad de d junto con (i) y (ii), se calcula

$$\begin{aligned} d\widetilde{\omega} &= d\left(\sum_I \widetilde{\omega}_I d\widetilde{x}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\widetilde{x}_{i_k}\right) \\ &= \sum_I d\widetilde{\omega}_I \wedge d\widetilde{x}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\widetilde{x}_{i_k} + (-1)^0 \sum_I \widetilde{\omega}_I d(d\widetilde{x}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\widetilde{x}_{i_k}), \end{aligned}$$

porque $\widetilde{\omega}_I$ es una $0-$forma. Ahora, utilizando (ii) una vez más, el último término se expande en una suma de términos, cada uno de ellos contiene un factor de la forma $d(dx_{ip})$, que es cero por (iii). Por lo tanto, ya que d es local

$$d\omega_p = d\widetilde{\omega}_p = \sum_I d\widetilde{\omega}_I|_p \wedge d\widetilde{x}_{i_1p} \wedge \ldots \wedge d\widetilde{x}_{i_kp} = \sum_I d\omega_I|_p \wedge dx_{i_1p} \wedge \ldots \wedge dx_{i_kp}.$$

Puesto que p es arbitraria, (3.10) se cumple sobre todo U. Esto demuestra que $d\omega$ esta determinada de manera única.

Ahora se demostrará que dicho operador existe, se empezará por asumir que M esta cubierta por una sola carta coordenada y se define a d por (3.10). Este operador es lineal y satisface (i). Tenemos que comprobar que satisface (ii) y (iii). Antes de hacerlo, tenemos que saber que d satisface

$$d(f(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})) = df \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}),$$

para cualquier multi-índice. Si I repite índices, entonces ambos lados son iguales a cero. Si no, sea σ la permutación de I a un multi-índice creciente J. Entonces

$$\begin{aligned} d(f(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})) &= (\text{sgn } \sigma) d(f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) \\ &= (\text{sgn } \sigma) df \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\ &= df \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Para probar (ii), es suficiente con considerar términos de la forma $\omega = f dx_I = f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ y $\eta = g dx_J$. Se calcula

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(f dx_I) \wedge (g dx_J) \\ &= d(f g dx_I \wedge dx_J) \\ &= (g df + f dg) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (df \wedge dx_J) \wedge (g dx_J) + (-1)^k (f dx_I) \wedge (dg \wedge dx_J) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta, \end{aligned}$$

donde $(-1)^k$ viene de $dg \wedge dx_I = (-1)^k dx_I \wedge dg$.

Se va a probar (iii) primero para el caso especial de una $0-$forma, es decir, una función real suave. En este caso,

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial dx_j} dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para el caso general, se utiliza el caso $k = 0$ junto con (ii) para calcular

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d\left(\sum_I d\omega_I \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}\right) \\ &= \sum_I d(d\omega_I) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\ &\quad + \sum_I \sum_{j=1}^{k} (-1)^j d\omega_I \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge d(dx_{i_j}) \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Por último, se considera el caso de una variedad M arbitraria. En cualesquiera coordenadas de dominio $U \subset M$, se tiene un único operador lineal d_U que se define como se mostró anteriormente y que satisface las propiedades (i), (ii) y (iii). En cualquier conjunto $U \cup U'$, en la intersección de dos cartas, las restricciones de $d_U\omega$ y $d_{U'}\omega$ a $U \cup U'$ concuerdan por la unicidad, por lo tanto, la definen $d\omega$ por (3.10) en cada carta coordenada. Así se tiene un operador que satisface (i) a (iii). ■

Cualquier $1-$forma en $\mathbb{R}^3$ puede ser escrita como

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz,$$

para algunas funciones suaves P, Q y R. Usando (3.10) y el hecho de que el producto cuña de cualquier $1-$forma con sí mismo es cero, se calcula

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right) \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right) \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} +\right) dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Lema 3.12 *Si $G : M \to N$ es una transformación suave, entonces la transformación pullback $G^* : \mathcal{A}^k(N) \to \mathcal{A}^k(M)$ conmuta con d: para toda $\omega \in \mathcal{A}^k(N)$,*

$$G^*(d\omega) = d(G^*\omega). \tag{3.11}$$

Demostración. Sea $\omega \in \mathcal{A}^k(N)$ arbitraria. Debido a que d es local, si (3.11) se cumple en una vecidad de cada punto, entonces se cumple sobre todo M. En una vecindad, ω se puede escribir como una suma de términos $f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$, así que por linealidad es suficiente comprobar (3.11) para una forma de este tipo. Para alguna forma, el lado izquierdo de (3.11) es

$$\begin{aligned} G^* d(f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) &= G^*(df \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) \\ &= d(f \circ G) \wedge d(x_{i_1} \circ G) \wedge \ldots \wedge d(x_{i_k} \circ G), \end{aligned}$$

mientras que el lado derecho

$$\begin{aligned} dG^*(f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) &= d((f \circ G) d(x_{i_1} \circ G) \wedge \ldots \wedge d(x_{i_k} \circ G)) \\ &= d(f \circ G) \wedge d(x_{i_1} \circ G) \wedge \ldots \wedge d(x_{i_k} \circ G). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Se dice que una forma diferencial $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ es *cerrada* si $d\omega = 0$, y *exacta* si existe una $(k-1)-$forma η sobre M, tal que $\omega = \eta$. El hecho que $d^2 = 0$ implica que toda forma exacta es cerrada. El recíproco no es cierto.

Capítulo 4

Integración en Variedades

Hemos introducido las formas diferenciales en el capítulo anterior, y que serán los objetos que se pueden integrar en variedades en una manera independiente de las coordenadas. En este capítulo, se dará la definición de la integral de una $n-$forma diferencial sobre una variedad suave de dimensión n.

En la primera parte de este capítulo se desarrolla la teoría de orientacion, que es una forma sistemática de control de las transformaciones para coordenadas con determinante positivo, eliminando así el problema de signo. Se inicia con con las orientaciones de los espacios vectoriales y se muestra cómo esta teoría se puede llevar a variedades.

Posteriormente se trata la teoría de integración. En primer lugar, se define la medida cero para un conjunto y en seguida se enuncia el criterio de integrabilidad de Lebesgue, para así definir la integral de una forma diferencial sobre un dominio en el espacio euclidiano. A continuación se muestra cómo utilizar la invarianza de los difeomorfismo y las particiones de la unidad para extender esta definición de la integral de una $k-$forma con soporte compacto sobre una variedad orientada de dimensión k. La principal característica de 'esta definición es que permanece invariante bajo difeomorfismos que preservan la orientación.

4.1. Orientación de Espacios Vectoriales

La palabra "orientación" tiene algunos significados familiares de nuestra experiencia, que puede ser interpretado como reglas para señalar ciertas bases de $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, se entiende por una "orientación" de una línea en el sentido de una elección de la dirección preferida a lo largo de la línea, por lo que podría declarar una base orientada para $\mathbb{R}^1$ que apunta a la derecha (es decir, en la dirección positiva). Una base de vectores para $\mathbb{R}^2$ es aquella para los cuales la rotación del primer vector al segundo se encuentra en el sentido antihorario.

Aunque *"derecha"* e *"izquierda"* no son términos matemáticos, se puede traducir las condiciones para la elección orientada de las bases de $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. En términos matemáticos rigurosos, se puede comprobar que en los tres casos, las bases preferidas son aquellas cuya matriz de transición a partir de la base estándar tiene determinante positivo.

En un espacio vectorial abstracto para el cual no hay una base canónica, no hay ninguna manera de determinar qué bases están "orientadas correctamente." Por ejemplo, si V es el espacio de polinomios de grado a lo sumo dos, ¿quién puede decir cuál de las bases ordenadas $(1, x, x^2)$ o $(x^2, x, 1)$ es " derecha"? Todo lo que podemos decir, en general, es el significado de que dos bases tengan la misma orientación.

Definición. Sea V un espacio vectorial de dimención finita. Una *base ordenada* para V es una base establecida con un orden específico; es decir, una base ordenada para V es una secuencia finita de elementos de V linialamente independientes que generan a V.

Definición. Sea V un espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. Decimos que dos bases ordenadas $(E_1, \ldots, E_n)$ y $(\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n)$ son *consistentemente orientadas* si la matriz de transición (B_{ij}), definida por

$$E_i = B_{ij}\widetilde{E}_j, \tag{4.1}$$

tiene determinante positivo.

Observese que $(E_1, \ldots, E_n)$ y $(\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n)$ estan relacionadas por la matriz B_{ij}, y la relacíon es de equivalencia simpre que $E_i = B_{ij}\widetilde{E}_j$, es decir siempre que exista (B_{ij}).

Definición. Sea V un espacio vectorial de dimención n, se define una *orientación* para V como una clase de equivalencia de bases ordenadas. Si $E_1, \ldots, E_k$ es una base ordenada de V, se denota la orientación que esta determinada por $[E_1, \ldots, E_n]$.

Definición. Un espacio vectorial con una elección de la orientación se llama un *espacio vectorial orientado.*

Definición. Sea V que está orientado, cualquier base ordenada $E_1, \ldots, E_k$ que se encuentra en la orientación dada, se dice que es *orientada positivamente.* Una base que no está en la orientación se dice que está orientada negativamente.

Para el caso especial de un espacio vectorial V de dimensión 0, se define una orientación de V simplemente por una elección de uno de los números $+1$ ó -1.

Hay una importante relación entre las orientaciones y los tensores alternantes, expresados en el siguiente lema.

Lema 4.1 *Sea V un espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$, y supongamos que Ω es un elemento distinto de cero de $\Lambda^n(V)$. El conjunto de bases ordenadas $(E_1, \ldots, E_n)$ tal que $\Omega(E_1, \ldots, E_n) > 0$ es una orientación para V.*

Demostración. Sea $\mathcal{O}_\Omega$ el que denota el conjunto de bases ordenadas sobre el que Ω toma valores positivos. Se tiene que demostrar que $\mathcal{O}_\Omega$ es exactamente una clase de equivalencia. Elíjase una de las bases $(E_1, \ldots, E_n)$ tal que $\Omega(E_1, \ldots, E_n) > 0$ (dicha base siempre puede ser encontrada partiendo de una base arbitraria y reemplazando a E_1 por $-E_1$ si es necesario). Sea $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ la base dual. Puesto que $\varepsilon_1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon_n$ es una base para $\Lambda^n(V)$, se escribe a Ω de la forma $\Omega = f(x)\varepsilon_1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon_n$ donde f es una funcion de valor real, entonces $\Omega(E_1, \ldots, E_n) = f(x)\varepsilon_1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon_n(E_1, \ldots, E_n)$, de tal manera que existe un cierto número c (necesariamente positivo) tal que $\Omega = c\varepsilon_1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon_n$.

Ahora, si $(\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n)$ es otra base, con matriz de transición (A_{ij}) definida por

$$\widetilde{E}_j = A_{ij} E_i,$$

se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\Omega(\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n) &= c\varepsilon_1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon_n(\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n) \\
&= c \det(\varepsilon_i(\widetilde{E}_j)) \\
&= c \det(A_{ij}.)
\end{aligned}$$

Se sigue que $(\widetilde{E}_j)$ es consistente con la orientación (E_i) sí y sólo sí

$$\Omega(\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n) > 0,$$

por lo tanto $\mathcal{O}_\Omega = [E_1, \ldots, E_n]$. ■

Si V es un espacio vectorial orientado y ω es un $n-$covector que determina la orientación de V como se describe en el Lema 4.1, se dice que ω, un $n-$covector, es una *orientación* (o de orientación positiva). Por ejemplo, el $n-$covector $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ es una orientación positiva para la orientación estándar sobre $\mathbb{R}^n$.

4.2. Orientación de Variedades

Definición. Sea M una variedad diferenciable. Se define una *orientación puntual* en M por una elección de orientación de cada espacio tangente.

Por sí mismo, esto no es un concepto útil, porque las orientaciones de los lugares puede no tener relación entre sí. Por ejemplo, una orientación punto a punto en $\mathbb{R}^n$ podría cambiar aleatoriamente punto a punto entre la orientación normal y su opuesta. A fin de que las orientaciones que tienen alguna relación con el atlas suave máximal suave, necesitamos una condición adicional para asegurarse de que las orientaciones de de espacios tangentes cercanos sean coherentes entre sí.

Recordemos que un marco local de M es una $n-$tupla de campos vectoriales suaves $(E1, ..., E_n)$ en un conjunto abierto $U \subset M$ tal que $(E_i|_p)$ constituye una base para T_pM en cada $p \in U$.

Definición. Una marco local (E_i), se dice que es *orientado positivo* si $(E_1|_p, \ldots, E_n|_p)$ es una base orientada positiva para T_pM en cada punto $p \in U$. Una marco *orientada negativamente* se define de forma análoga.

Definición. Una orientación puntual es *continua* si cada punto está en el dominio de un marco local orientado. Una *orientación* para M es una es una orientación puntual continua.

Definición. Una *variedad orientada* es una variedad suave junto con una elección de la orientación. Se dice que M es orientable si existe una orientación para ella y no orientable en caso contrario.

Si M es de dimensión 0, esta definición sólo significa que una orientación de M es una elección de ± 1 a cada uno de sus puntos.

Las siguientes dos proposiciones dan formas de especificar la orientación sobre variedades que son algo más práctico de usar que la definición anterior.

Definición. Una carta coordenada (U, φ) suave se dice que es *orientada positivamente* si el marco coordenado $(\partial/\partial x_i)$ es una orientación positiva, y *orientada negativamente* si la marco coodenada esta orientada negativamente.

Definición. Una colección de cartas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ se dice que está *orientada consistentemente* si para cada α, β la transformación de transición $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ tiene jacobiano positivo para todo p sobre $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Proposición 4.2 *Sea M una variedad suave de dimensión n y supóngase que tiene un recubrimiento abierto de M por cartas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ orientadas consistentemente. Entonces hay una única orientación para M con la propiedad de que cada carta φ_α es orientada. Inversamente, si M es orientada, la colección de todas las cartas orientadas es una cubierta consistentemente orientada de M.*

Demostración . Para cualquier $p \in M$, la condición de "consistentemente" significa que la matriz de transición entre las bases de coordenadas determinadas por cualesquiera dos de las cartas en la cubierta dada, tiene determinante positivo. Así, las bases de coordenadas para todas las cartas propuestas determinan la misma orientación en T_pM. Esto define una orientación punto a punto sobre M. Cada punto de M está en el dominio de al menos una de las cartas, y el marco coordenado correspondiente es orientado por definición, por lo que esta orientación punto a punto es continua.

Sea $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ una cubierta para M, se elige una orientacion(positiva) para M , así cada carta coordenada determina una orientación para cada T_pM, esta es una orientación punto a punto continua por ser M orientable, así para cualesquiera dos cartas φ_α φ_β las bases inducidas van a tener la misma orientación y están consistentemente orientadas, la matriz de transición tiene determinante positivo y como la matriz de transición es la matriz asociada a $d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})$, por lo tanto la colección de cartas coordenadas es consistentemente orientada. ■

Definición. Cualquier $n-$forma no nula sobre una variedad M de dimensión n se llama una *forma de orientación.*

Si M es una variedad orientada y Ω es una forma de orientación dada, se dice que Ω es *(positiva) orientada.* Se puede comprobar que si Ω y $\tilde{\Omega}$ son dos formas orientadas positivamente en la misma variedad M orientada, entonces $\Omega = f\tilde{\Omega}$ para alguna f función suave estrictamente positiva.

Proposición 4.3 *Sea M una variedad diferenciable de dimensión $n \geq 1$. Una $\Omega \in \Lambda(M)$ $n-$forma no nula, determina una única orientación de M para las cuales Ω es orientada positivamente o negativamente en cada punto. Inversamente, si a M se le da una orientación, entonces hay una $n-$forma no nula de M que es positivamente orientada en cada punto.*

Demostración. Sea una $n-$forma no nula sobre M. Entonces Ω define una orientación punto a punto por el Lema 4.1, por lo que se tiene que comprobar es que es continua. Sea (x_i) cualesquiera coordenadas locales en un dominio conexo $U \subset M$. Escribimos $\Omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ en U, el hecho de que Ω es no nula significa que f no se a nula y por lo tanto

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = f \neq 0,$$

en todos los puntos de U. Dado que U es conexo, se sigue que esta expresión es siempre positiva o bien siempre negativa en U, por lo tanto la carta coordenada es simpre orientada positiva o bien orientada negativamente. Si es negativamente, podemos reemplazar x_1 por $-x_1$ para obtener una nueva carta coordenada de tal modo que el marco coordenado es orientado positivamente. Así, la orientación puntual dedeterminada por Ω es continua. Inversamente, supongamos que M es orientada. Sea $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ el conjunto de todas las cartas orientadas para M. En cada dominio coordenado U_α, la $n-$forma $\Omega_\alpha = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ es orientada positivamente. Sea $\{\psi_\alpha\}$ una partición de la unidad subordinada a la cubierta $\{U_\alpha\}$, y se define

$$\Omega = \sum_\alpha \psi_\alpha \Omega_\alpha.$$

Como ambas funciones son continuas, entonces Ω es continua. Para completar la prueba, se tiene que demostrar que Ω nunca se anula. Sea $p \in M$ arbitraria y $(E_1, \ldots, E_n)$ una base orientada para T_pM. Para cada α tal que $p \in U_\alpha$, tenemos $\Omega_\alpha|_p(E_1 \ldots E_n) > 0$. Puesto que $\psi_\alpha(p) = 0$ para todas las demás α's, hay al menos una α para la cual $\psi_\alpha(p) > 0$, y en este caso se tiene

$$\Omega_p(E_1 \ldots E_n) = \sum_\alpha \psi_\alpha(p) \Omega_\alpha|_p(E_1 \ldots E_n) > 0.$$

Así $\Omega_p \neq 0$. ■

Si M es una variedad de dimensión 0, la Proposición sigue siendo válida si interpretamos una forma orientada como una función no nula Ω que asigna a la orientación $+1$ a los puntos donde $\Omega > 0$ y -1 a los puntos donde $\Omega < 0$.

Proposición 4.4 *Todas la variedades paralelizable son orientables.*

Demostración. Supongamos que M es paralelizable y que $(E_1, \ldots, E_n)$ un marco global para M. Defínase una orientación puntual al decir que $(E_1|_p, \ldots, E_n|_p)$ es una orientación positiva en cada $p \in M$. Esta orientación puntual es continua porque cada punto de M está en el dominio del marco orientado (global) (E_i). ■

Sean M y N variedades orientadas positivamente y sea $F : M \to N$ un difeomorfismo local. Decimos que F conserva la orientación si para cada $p \in M$, F_* lleva bases orientadas positivamente (o negativas) de T_pM a bases de orientadas positivamente (o negativas) de $T_{F(p)}N$ e invierte la orientación si se lleva bases orientadas positivamente (o negativas) de T_pM a bases orientadas negativamente (o positivas) de $T_{F(p)}N$. Observar que un mapeo suave $F : M \to N$ preserva orientación si y sólo si su matriz jacobiana con respecto a cualesquiera cartas coordenadas orientadas para M y N tiene determinante positivo, e invierten la orientación si y sólo si tiene determinante negativo.

4.3. Integración de Formas Diferenciales sobre el Espacio Euclidiano

Definición. Si $a = (a_1, \dots, a_n)$ y $b = (b_1, \dots, b_n)$ son dos n-adas tales que

$$a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n$$

denotamos con $S(a, b)$ al sólido rectangular formado por los puntos $(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ qie satisfacen $a_i < x_i < b_i$, $i = 1, \dots, n$. El producto

$$\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

es el volumen de $S = S(a, b)$, que denotamos con $Vol(S)$ (si $b_1 - a_1 = \cdots b_n - a_n$ es un cubo).

Definición. Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice que tiene *medida cero* si para cualquier $\delta > 0$ existe una cubierta numerable para A por cubos abiertos C_i tal que $\sum_i \mathrm{Vol}(C_i) < \delta$.

Proposición 4.5 (Criterio de Integrabilidad de Lebesgue) *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si el conjunto*

$$S = \{x \in A : f \textit{no es continua en } x\},$$

tiene medida cero, entonces f es integrable.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado. Por definición de los conjuntos de medida cero, S puede ser cubierto por una colección numerable de cubos abiertos $\{C_i\}$ con un volumen total menor que ϵ.
Para cada punto $q \in A \setminus S$, ya que f es continua en q, hay un cubo D_q centrado en q tal que $|f(x) - f(q)| < \epsilon$ para todo $x \in \cap D_q \cap A$. Esto implica que $\sup_{D_q} f - \inf_{D_q} f \leq 2\epsilon$.
La colección de todos los cubos abiertos de la forma Int C_i o Int D_q. es una cubierta abierta de A. Por compacidad, un número finito de ellos cubren A. Se reetiquetan estos cubos como: $\{C_1, \dots, C_k, D_1, \dots, D_l\}$. Remplazando a cada C_i o D_j por su intersección con A, se puede suponer que cada C_i y D_j son rectángulos contenidos en A.
Dado que hay sólo un número finito de rectángulos $\{Ci, Dj\}$, existe una partición P con la propiedad que cada C_i o D_j es igual a una unión de subrectángulos de P. (Sólo se tiene que utilizar la unión de todos los extremos de los intervalos de los rectangulos de los rectángulos C_i y D_j para definir la partición). Se puede dividir los subrectángulos de P en dos conjuntos disjuntos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, de modo que

cada subrectángulo en $\mathcal{C}$ se encuentra en C_i para algún i, y cada subrectángulo contenido en $\mathcal{D}$ está en Dj para algun j. Entonces

$$\begin{aligned}
&U(f,P) - L(f,P) \\
&= \sum_i (\sup\, f)_{R_i} \mathrm{Vol}(R_i) - \sum_i (\inf f)_{R_i} \mathrm{Vol}(R_i) \\
&= \sum_{R_i \in \mathcal{C}} (\sup_{R_i} - \inf_{R_i}) \mathrm{Vol}(R_i) + \sum_{R_i \in \mathcal{D}} (\sup_{R_i} - \inf_{R_i}) \mathrm{Vol}(R_i) \\
&\leq (\sup_A - \inf_A) \sum_{R_i \in \mathcal{C}} \mathrm{Vol}(R_i) + 2\epsilon \sum_{R_i \in \mathcal{D}} \mathrm{Vol}(R_i) \\
&\leq (\sup_A - \inf_A)\epsilon + 2\epsilon \mathrm{Vol}(A).
\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\overline{\int_A} f dV - \underline{\int_A} f dV \leq (\sup_A - \inf_A)\epsilon + 2\epsilon \mathrm{Vol}(A).$$

que se puede hacer tan pequeño como se desee tomando ϵ suficientemente pequeño. Esto implica que las integrales superior e inferior de f deben ser iguales, por lo que f es integrable. ■

Definición. Supongamos que $D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función acotada. Sea A cualquier rectángulo que contiene a D y se define a $f_D : A \to \mathbb{R}$ por

$$f_D(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ 0 & x \in A \setminus D. \end{cases} \tag{4.2}$$

Definición. Se dice que f es *integrable sobre* D, si la integral

$$\int_A f_D dV, \tag{4.3}$$

existe. La integral (4.3) se denota por $\int_D f dV$ y se llama la *integral de f sobre D*.

Definición. Un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se llama *dominio de la integración* si D esta acotado y ∂D tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 4.6 . *Si $D \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio de integración, entonces cada función continua y acotada en D es integrable sobre D.*

Demostración. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función acotada y continua y sea A un rectángulo que contiene a D. Para demostrar la proposición, se tiene que mostrar que la función $f_D : A \to \mathbb{R}$ definida por (4.2) es continua excepto en un conjunto de medida cero.

Si $x \in \text{Int } D$, entonces $f_D = f$ en una vecindad de x, por lo que f_D es continua en x. Del mismo modo, si $x \in A \setminus D$, entonces $f_D \equiv 0$ en una vecindad de x, por lo que una vez más f es continua en x. Así, el conjunto de puntos donde f_D es discontinua está contenido en ∂D y por lo tanto tiene medida cero. ■

El siguiente teorema se puede enunciar de distintas formas, algunas más fuertes que otras. La versión que se da aquí será suficiente para nuestras aplicaciones.

Teorema 4.7 (Cambio de variable) *Supóngase que $f : U \to V$ es un difeomorfismo de conjuntos abiertos en R^k y que g es una funcion integrable en V. Entonces*

$$\int_V g dx_1 \cdots dx_k = \int_U (g \circ f)|\det df| dy_1 \cdots dy_k.$$

Demostración. [Spivak. Michael. Cáculo en variedades, p.62]

Se considerarán las formas diferenciales en los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto de integración, y sea ω una n-forma sobre D. Cualquier forma puede ser escrita como

$$\omega = f dx_1 \wedge ... \wedge dx_n. \tag{4.4}$$

Definición. Sea una función $f \in C^\infty(D)$. Se define la integral de ω sobre D como

$$\int_D \omega = \int_D f dV.$$

Esto puede escribirse más apropiadamente como

$$\int f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int f dx_1 \ldots dx_n.$$

Lema 4.8 *Supóngase $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$, donde U es un conjunto abierto y K es un compacto. Entonces existe un dominio compacto de integración D tal que $K \subset D \subset U$.*

Demostración. Para cada $p \in K$, existe una bola abierta que contiene a p cuya cerradura está contenida en U. Por compacidad hay una cantidad finita de bolas abiertas $U_1, \ldots, U_m$ que cubren a K. Dado que la frontera de una bola abierta es una subvariedad de dimensión $n-1$, tiene medida cero y asi cada bola tiene un dominio de integración. El conjunto $D = \overline{U}_1 \cup \ldots \cup \overline{U}_m$ es el dominio de integración requerido. ■

Definición. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y ω una n-forma con soporte compacto sobre U, se define

$$\int_U \omega = \int_D \omega,$$

donde D es un dominio de integración tal que el supp $\omega \subset D \subset U$.

De manera similar, si V es un subconjunto abierto en el hemiespacio H^n y ω es una n-forma con soporte compacto en V, se define

$$\int_V \omega = \int_{D \cap H^n} \omega.$$

Proposición 4.9 *Sean D y E dominios de integración en $\mathbb{R}^n$, y sea ω una n-forma en E. Si $G : D \to E$ es un mapeo suave cuya restricción a Int D es un difeomorfismo que conserva la orientación o invierte la orientación sobre el Int E, entonces*

$$\int_E \omega = \begin{cases} \int_D G^*\omega & \text{si } G \text{ preserva la orientación,} \\ -\int_D G^*\omega & \text{si } G \text{ invierte la orientación.} \end{cases}$$

Demostración. Sean $(y_1, \ldots, y_n)$ las coordenadas de E y $(x_1, \ldots, x_n)$ para referirse a las de D. Supóngase primero que G preserva la orientación. Escribiremos $\omega = f dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$, por el teoreme de Cambio de Variable y por el resultado del Lema 3.10 para *pullbacks* de n-formas, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_E \omega &= \int_E f dV \\ &= \int_D (f \circ G) \left| \det \left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j} \right) \right| dV \\ &= \int_D (f \circ G) \det \left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j} \right) dV \\ &= \int_D (f \circ G) \det \left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= \int_D G^*\omega. \end{aligned}$$

Si G invierte la orientación, el cálculo es el mismo, excepto que mantiene un signo negativo que se presenta cuando los signos de valor absoluto se eliminan. ■

Corolario 4.10 *Supongamos U, V son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, $G : U \to V$ es un difeomorfismo que preserva la orientación, y ω es una n-forma con soporte compacto en V. Entonces*

$$\int_V \omega = \int_U G^*\omega.$$

Demostracion. Sea $E \subset V$ un dominio de integración que contiene a supp ω. Dado que las tranformaciones suaves mandan conjuntos de medida cero a conjuntos de medida cero, $D = G^{-1}(E) \subset U$ es un dominio de integración que contiene a supp $G^*\omega$. Por lo tanto, el resutado se sigue de la propoción anterior. ■

4.4. Integración sobre Variedades

Utilizando los resultados previos, tiene sentido hacer la integral de una forma diferencial sobre una variedad orientada.

Definición. Sea M una variedad de dimensión n, a una $n-$forma en $\Lambda^n(M)$ no nula se le llama *forma de volumen* si determina una orientación positiva para M.

Definición. Sea M una variedad suave, orientada de dimensión n y ω una $n-$forma sobre M. Supóngase que ω tiene soporte compacto en el dominio de una única (U, φ) carta coordenada orientada. Se define la *integral* de ω sobre M por

$$\int_M \omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*\omega.$$

Puesto que $(\varphi^{-1})^*\omega$ es n-forma que tiene soporte compacto en el subconjunto abierto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, su integral esta definida.

Proposición 4.11 *Sea ω una n-forma, $\int_M \omega$ no depende de la carta coordenada orientada cuyo dominio contiene supp ω.*

Demostración. Supóngase que $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ es otra carta orientada tal que el supp $\omega \subset \tilde{U}$. Dado que $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo que preserva la orintación de $\varphi(U \cap \tilde{U})$ a $\tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$, el Corolario 4.10 implica que

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{\varphi}(\tilde{U})} (\tilde{\varphi}^{-1})^* \omega &= \int_{\tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})} (\tilde{\varphi}^{-1})^* \\
&= \int_{\varphi(U \cap \tilde{U})} (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})^* (\tilde{\varphi}^{-1})^* \omega \\
&= \int_{\varphi(U \cap \tilde{U})} (\varphi^{-1})^* (\tilde{\varphi})^* (\tilde{\varphi}^{-1})^* \omega \\
&= \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las dos definiciones de $\int_M \omega$ concuerdan. ■

Si M es una variedad suave, orientada con frontera y ω es una $n-$forma sobre M con soporte compacto en el dominio de una carta, la definición de $\int_M \omega$, la afirmación y demostración de la Proposición 4.11 pasan sin cambios, siempre que todas las cartas de coordenadas se interpreten como cartas generalizadas, y calculando las integrales sobre subconjuntos abiertos de H^n en la forma en que se ha descrito anteriormente.

Para integrar sobre la variedad completa simplemente se aplica la misma definición junto con una partición de la unidad.

Definición.. Supongamos que M es una variedad suave, orientada de dimensión n y ω una $n-$forma con soporte compacto sobre M. Sea $\{(U_i, \varphi_i)\}$ una cubierta finita para el supp ω dado por cartas orientadas, y sea ψ_i una partición de la unidad subordinada a la cubierta. Se define la *integral* de ω sobre M como

$$\int_M \omega = \sum_i \int_M \psi_i \omega. \tag{4.5}$$

Dado que para cada i, el soporte compacto de $\psi_i \omega_i$ n-forma está en Ui, cada uno de los términos en esta suma está bien definido de acuerdo con la discusión anterior. Para demostrar que la integral está bien definida, sólo se tiene que examinar la dependencia en las cartas y la partición de la unidad.

Lema 4.12 *La definición de $\int_M \omega$ dada anteriormente no depende de la elección de las cartas orientadas o de la partición de la unidad.*

Demostración. Supongamos que $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ es otra colección finita de cartas cuyos dominios cubren a supp ω, y $\tilde{\psi}$ es una partición de la unidad subordinada a la cubierta. Para cada i, se calcula

$$\begin{aligned}\int_M \psi_i\omega &= \int_M \left(\sum_j \tilde{\psi}_j\right)\psi_i\omega \\ &= \sum_j \int_M \tilde{\psi}_j\psi_i\omega.\end{aligned}$$

Sumando sobre i, obtenemos

$$\sum_i \int_M \psi_i\omega = \sum_{i,j}\int_M \tilde{\psi}_j\psi_i\omega.$$

Se observa que cada término de ésta última suma es la integral de una forma con soporte compacto en una sola carta (U_i, por ejemplo), por la Proposición 4.11, cada término esta bien definido independientemente del mapeo que se haya elegido. El mismo argumento, comenzando con $\int_M \tilde{\psi}_j\omega$, muestra que

$$\sum_j \int_M \tilde{\psi}_j\omega = \sum_{i,j}\int_M \tilde{\psi}_j\psi_i\omega.$$

Así, ambas definiciones toman el mismo valor para $\int_M \omega$. ■

Como es habitual, se tiene una definición especial en el caso de dimensión 0. La integrante de una $0-$forma con soporte compacto (es decir, una función) f sobre una variedad de dimensión 0 orientada, se define como la suma

$$\int_M f = \sum_{p\in M} \pm f(p),$$

donde se toma el signo positivo en los puntos donde la orientación es positiva y el signo negativo en los puntos en los que es negativa. La suposición de que f tiene soporte compacto supone que sólo hay un número finito de términos diferentes de cero en esta suma.

Proposición 4.13 (Propiedades de integrales de formas.) *Supongase que M y N son variedades suaves, orientadas de dimensión n con o sin frontera, y ω, η son $n-$formas con soporte compacto sobre M.*

a) Linealidad: Si $a, b \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\int_M a\omega + b\eta = a\int_M \omega + b\int_M \eta.$$

b) Inversión: Si $\overline{M}$ denota a M con la orientación opuesta, entonces

$$\int_{\overline{M}} \omega = -\int_M \omega.$$

c) Positividad: Si ω es una forma de volumen sobre M, entonces $\int_M \omega > 0$.

d) Difeomorfismos: Si $F : N \to M$ es un difeomorfismo que preserva la orientación, entonces $\int_M \omega = \int_N F^*\omega$.

Demostración.
a) Sea (U, φ) una coleción finita de cartas cuyos dominios cubren a supp ω, y ψ una partición de la unidad subordinada a la cubierta. Para cada i, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_M a\omega + b\eta &= \sum_i \int_M \psi_i(a\omega + b\eta) \\
&= \sum_i \int_M a\psi_i\omega + b\psi_i\eta \\
&= a\sum_i \int_M \psi_i\omega + b\sum_i \int_M \psi_i\eta \\
&= a\int_M \omega + b\int_M \eta.
\end{aligned}$$

b) Supongamos que ω tiene soporte compacto en una única carta de coordenada. Así supongamos que (U, φ) es una carta coordenada orientada positivamente en M. Ahora supongase que $\tilde{\varphi}$ es otra carta coordenada orientada negativamente en $\overline{M}$, donde $\overline{M}$ es M con orientación opuesta, por Proposición 4.11 $\int_M \omega$ no depende de la carta coordenada. Dado que el difeomorfismo $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ invierte la orientación por la Proposición 4.9

$$\int_{\tilde{\varphi}(\tilde{U})} (\tilde{\varphi}^{-1})^*\omega = -\int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*\omega,$$

se sigue que

$$\int_{\overline{M}} \omega = -\int_M \omega.$$

$$\begin{aligned}
\int_M \omega &= \int_M f dV \\
&= \sum_i \int_M \psi_i f dV \\
&= \sum_i \int_{\overline{M}} \psi_i (f \circ G) |\det(dG)| d\overline{V} \\
&= -\sum_i \int_M \psi_i (f \circ G) \det(dG) dx \\
&= -\int_{\overline{M}} G^* \omega
\end{aligned}$$

c) Sea ω una forma de volumen sobre M. Esto significa que para cualquier carta orientada (U, φ), $(\varphi^*)^{-1}\omega$ es una función positiva $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Así, cada término en la suma (4.5) es positiva definición de $\int_M \omega$ es positivo, y al menos un término es estrictamente positivo. Por lo tanto $\int_M \omega > 0$.

d) Es suficiente suponer que ω tiene soporte compacto en una única carta de coordenadas, porque cualquier $n-$forma en M puede ser escrita como una suma finita de tales formas por medio de una partición de la unidad. Así, supongamos que (U, φ) es un carta coordenada orientada en M, cuyo dominio contiene el soporte de ω. Se puede comprobar que $(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$ es una carta coordenada orientada y sobre N cuyo dominio contiene el soporte de $F^*\omega$, y el resultado es inmediatamente del Corolario 4.10. ■

Proposición 4.14 *Sea M una variedad compacta, suave y orientada de dimensión n con o sin frontera, y que ω es una $n-$forma sobre M. Supongamos que $E_1, \ldots, E_k$ son dominios compactos de integración en M; $D_1, \ldots, D_k$ son dominios compactos de la integración en $\mathbb{R}^n$, y para $F_i : D_i \to M$, $i = 1, \ldots, k$, son mapeos suaves que satisfacen*

(i) $F_i(D_i) = E_i$, y $F_i|_{Int\ D_i}$ es un difeomorfismos que preserva la orientación de Int D_i sobre Int E_i.

(ii) $M = E_1 \cup \ldots \cup E_k$.

(iii) Para cada $i \neq j$, si E_i y E_j se intersectan sólo en su frontera.

Entonces

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{D_i} F_i^* \omega.$$

Demostración. Al igual que en la prueba anterior, es suficiente suponer que ω tiene soporte compacto en el dominio de una sola carta orientada (U, φ). De hecho, comenzando con una cubierta de cartas para M suficientemente buena, se puede suponer que ∂M tiene medida cero y que φ se extiende a un difeomorfismo de $\overline{U}$ a un dominio de integración compacto $K \subset \mathbb{H}^n$.

Para cada i, sea

$$A_i = \overline{U} \cap E_i \subset M.$$

Entonces A_i es un subconjunto compacto de M cuya frontera tiene medida cero, ya que $\partial A_i \subset \partial U \cap F_i(\partial D_i)$. Se definen subconjuntos compactos $B_i, C_i \subset \mathbb{R}^n$ por

$$\begin{aligned} B_i &= F_i^{-1}(A_i), \\ C_i &= \varphi(A_i). \end{aligned}$$

Como los mapeos suaves mandan conjuntos de medida cero a conjuntos de medida cero, los conjuntos B_i y C_i son los dominios de la integracióón, y $\varphi \circ F_i$ mapea B_i a C_i y se retringe a un difeomorfismo de Int B_i a Int Ci. Por lo tanto, la Proposición 4.9 implica que

$$\int_{C_i} (\varphi^{-1})^* \omega = \int_{B_i} F_i^* \omega.$$

Sumando sobre i y teniendo en cuenta que los interiores de los distintos conjuntos A_i son disjuntos, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_M \omega &= \int_k (\varphi^{-1})^* \omega \\ &= \sum_i \int_{C_i} (\varphi^{-1})^* \omega \\ &= \sum_i \int_{B_i} F_i^* \omega \\ &= \sum_i \int_{D_i} F_i^* \omega. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Se va a calcular la integral de una $2-$forma sobre $\mathbb{S}^2$, orientada por medio del campo de vectores que apunta hacia afuera $N = x\partial/\partial x + y\partial/\partial y + z\partial/\partial z$. Sea ω la siguiente $2-$forma:

$$\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$$

Si D es rectángulo $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ y $F : D \to \mathbb{S}^2$ es el mapeo coordenado

$$F(\varphi, \theta) = (\text{sen}\varphi\cos\theta, \text{sen}\varphi\cos\theta, \cos\varphi),$$

entonces el único mapeo $F : D \to \mathbb{S}^2$ satisface las hipótesis de la Proposición 4.13, siempre y cuando se conserve la orientación. Asumiendo esto, observamos que

$$\begin{aligned} F^*dx &= \cos\varphi\cos\theta d\varphi - \mathrm{sen}\varphi\mathrm{sen}\theta d\theta, \\ F^*dy &= \cos\varphi\mathrm{sen}\theta d\varphi + \mathrm{sen}\varphi\cos\theta d\theta, \\ F^*dz &= \mathrm{sen}\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} \omega &= \int_D F^*\omega \\ &= \int_D -\mathrm{sen}^3\varphi\cos^2\theta d\theta \wedge d\varphi + \mathrm{sen}^3\varphi\mathrm{sen}^2\theta d\varphi \wedge d\theta \\ &\quad +\cos^2\varphi\mathrm{sen}\varphi\cos^2\theta d\varphi \wedge d\theta - \cos^2\varphi\mathrm{sen}\varphi\mathrm{sen}^2\theta d\theta \wedge d\varphi \\ &= \int_D \mathrm{sen}\varphi d\varphi \wedge d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{sen}\varphi d\varphi d\theta \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

Para comprobar que F conserva la orientación, es necesario observar que $(F_*\partial/\partial\varphi, F_*\partial/\partial\theta)$ es una base orientada para $\mathbb{S}^2$ en cada punto, lo que significa que por definición $(N, F_*\partial/\partial\varphi, F_*\partial/\partial\theta)$ es una base orientada para $\mathbb{R}^3$. Calculando en un punto arbitrario $(x, y, z) = F(\varphi, \theta)$, se tiene que

$$\begin{aligned} N &= \mathrm{sen}\varphi\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{sen}\varphi\mathrm{sen}\theta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}; \\ F_*\frac{\partial}{\partial\varphi} &= \cos\varphi\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\mathrm{sen}\theta\frac{\partial}{\partial y} - \mathrm{sen}\varphi\frac{\partial}{\partial z}; \\ F_*\frac{\partial}{\partial\theta} &= -\mathrm{sen}\varphi\mathrm{sen}\theta\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{sen}\varphi\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz de transición es

$$\begin{pmatrix} \mathrm{sen}\varphi\cos\theta & \mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\theta & \cos\varphi \\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\theta\mathrm{sen}\theta & -\mathrm{sen}\varphi \\ -\mathrm{sen}\varphi\mathrm{sen}\theta & \mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\theta & 0 \end{pmatrix},$$

que tiene determinante $\mathrm{sen}\varphi > 0$.

Capítulo 5

Equivalencias de Formas de Volumen

5.1. Teorema de Moser

Vamos a considerar variedades orientadas M de dimensión n, cerradas, conexas y compactas. Por una forma de volumen nos referimos a una forma diferencial de grado n, positiva. En coordenadas locales $x_1, \ldots, x_n$ tal forma de volumen toma la forma

$$\tau = g(x)dx \text{ donde } dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

y $g(x) > 0$

Cualesquiera dos formas de volumen estan relacionadas por

$$\sigma = f\tau \tag{5.1}$$

donde f es una función escalar positiva sobre M. Siempre supondremos que M es una variedad C^∞ y en conscuencia se supondremos f, g son funciones C^∞

El problema a estudiar es la equivalencia de tales formas de volumen sobre una variedad M bajo difeomorfimos C^∞. Si ϕ es un difeomorfismo sobre M que preserva orientación y una forma de volumen τ es transformada en otra forma de volumen $\phi^*\tau$ tal que

$$\int_{\phi(S)} \phi^*\tau = \int_S \tau \text{ para toda } S \subset M.$$

Cualesquiera dos formas de volumen τ y σ, tal que $\tau \sim \sigma$ para un difeomorfismo ϕ que preserva la orientación, las llamaremos equivalentes. Si $\tau \sim \sigma$ entonces su volumen total

$$\int_M \tau = \int_M \sigma,$$

es invariante bajo difeomorfismos.

Teorema 5.1 (Teorma de Moser) *Sean τ, σ dos formas de volumen con la misma masa total sobre una variedad, entonces existe un difeomorfismo $\phi : M \to M$ homotópico a la identidad tal que*

$$\sigma \sim \lambda\tau,$$

donde λ es la constante

$$\lambda = \frac{\int_M \sigma}{\int_M \tau.}$$

La afirmación anterior puede plantearse de modo algo mas general: Sean dos variedades M, N con formas de volumen τ y σ respectivamente. Si

$$\int_M \tau = \int_N \sigma$$

entonces existe un difeomorfismo ϕ de M sobre N tal que $\phi^*\tau = \sigma$.

La prueba que sigue proveé la construción de un difeomorfismo que preserva orientación.

Esto se hará mediante la reducción del teorema localemte donde f es diferente de 1 soló en coordenadas locales. La construción de un difeomorfismo en estos casos pude estar dado por una integral.

Para reducir el problema observamos que es suficiente probar el teorema para formas de volumen τ, $\sigma = f\tau$ con $f : M \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\mid f - 1 \mid < \epsilon \tag{5.2}$$

donde ϵ es cualquier número positivo predeterminado. Concretamente, si definimos

$$\sigma_t = f^t\tau \text{ para } 0 \leq t \leq 1$$

entonces se seguirá que

$$\sigma_{t''} \sim c\sigma_{t'}$$

siempre que $\mid t'' - t' \mid < \delta$ para δ positiva "suficientemente" pequeña. A saber $\delta = \log(1+\epsilon)/\max|\log f|$ hára el truco.

Por lo tanto en un número finito de pasos se obtiene $\sigma = \sigma_1 \sim c\sigma_0 = c\tau$ donde c es alguna contante positiva. Supondremos que esta constante está normalizada a uno, de ahora en adelante.

$$\int_M \sigma = \int_M \tau = 1$$

Por la continuación de un argumento similar se reducirá el teorema a un problema local. Para este propósito sea la variedad M cubierta por parches coordenados $U_0, U_1, \cdots, U_m$ difeomorfos al cubo unitario en $\mathbb{R}^n$.

Lema 5.2 *Si $g : M \to \mathbb{R}$ es una función continua sobre M la cual satisface*

$$\int_M g\tau = 0,$$

entonces existe una descomposición de g como

$$g = \sum_{j=0}^{m} g_j, \tag{5.3}$$

donde g_j tiene soporte en U_j y además se cumple que

$$\int g_j \tau = 0 \tag{5.4}$$

Más aun, $\mid g_j \mid \leq c\ sup\ \mid g \mid$ donde c solamente depende de M y de la cubierta. Si $g \in C^r$ entonces $g_j \in C^r$.

Este lema permite reducir la prueba del Teorema de Moser a una función f que es diferente de 1 solo en un U_j. Concretamente, aplicando el Lema 5.2 a $g = f - 1$, interpolamos 1 y f.por

$$f(t;p) = 1 + \sum_j t_j g_j \quad p \in M,$$

donde $t = (t_0, t_1, \cdots, t_m)$ y $0 \leq t_j \leq 1$. Para $t = (0, \cdots, 0)$ se tiene $f(t,p) = 1$ y para $t = (1, \cdots, 1)$ la función $f(t,p)$ coincide con la función f. Para todo valor de t el volumen total es fijo y igual a uno. Finalmente, elegimos en (5.2) $\epsilon < (m+1)^{-1} c^{-1}$ de modo que

$$f > 1 - (m+1)c\epsilon > 0$$

Podemos conectar los dos esquinas $t = (0, \cdots, 0)$ y $t = (1, \cdots, 1)$ de el cubo $0 \leq t_j \leq 1$ a lo largo de las $(m+1)$ aristas. Si t', t'' representan los vértices de dicha arista se ve que

$$f(t'', p) - f(t', p)$$

tiene soporte en un parche, digamos en U_j. Por lo tanto si

$$\sigma_t = f(t,p)\tau$$

se nota que

$$\sigma_{t''} = h\sigma_{t'}$$

donde

$$h = \frac{f(t'', p)}{f(t', p)}$$

es diferente de 1 solo en U_j. Si la equivalencia de tales elementos de volumenes se muestra entonces se sigue que $\sigma_{t''} \sim \sigma_{t'}$ y sucesivamente $\sigma \sim \tau$. Por lo tanto es suficinte demostrar la equivalencia de τ y $f\tau$ en caso que $f - 1$ tiene soporte en un solo parche coordenado.

Este caso puede ser expresado en coordenadas como sigue:

Lema 5.3 *Sean*

$$\tau = g(x)dx, \qquad \sigma = h(x)dx,$$

dos formas de volumen en el cubo $I^n \subset \mathbb{R}^n$, donde g, h son funciones positivas tales que $g - h$ tiene soporte dentro de I^n si

$$\int_{I^n} gdx = \int_{I^n} hdx$$

entonces allí existe una transformanción de coordenadas

$$y = u(x)$$

que mapea el cubo unitario uno a uno en si mismo y tal que

$$g(u(x))det\ u_x = h(x) \tag{5.5}$$

o

$$g(y)dy = h(x)dx$$

y tal que $u(x) = x$ cerca de la frontera de I^n.

Para la prueba del Lema 5.2 nosotros haremos uso de una partición de la unidad $\phi_j \geq 0$, donde cada función ϕ_j tiene soporte en U_j. Claremente $g\phi_j$ también tiene soporte en un parche U_j pero la condicion (5.4) requiere especial atención. Como M es conexa, las U_j pueden siempre ser ordenadas de tal manera que para cada $k = 1, \ldots, m$ el parche U_k intersecta $\bigcup_{j<k} U_j$. Escogamos un entero $\rho(k) < k$ tal que

$$U_k \cap U_{\rho(k)} \tag{5.6}$$

es no vacío. Definamos la matriz $\alpha = (\alpha_{jk})$ por

$$\alpha_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ -1 & \text{si } j = \rho(k) \\ 0 & \text{de otro modo para } 0 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq m. \end{cases}$$

Cada una de las m columnas contiene exactamente un par $+1, -1$ así que

$$\sum_{j=0}^{m} \alpha_{jk} = 0. \tag{5.7}$$

Para construir las funciónes g_j se necesitan funciones $\eta_k (k = 1, \ldots, m)$ con soporte en el conjunto abierto descrito por (5.6) y tal que

$$\int \eta_k \tau = 1.$$

Tales funciones pueden ser siempre encontradas. Entonces las funciones g_j del lema 1 pueden ser representada en la forma

$$g_j = g\phi_j - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \alpha_{jk} \eta_k.$$

Verificaremos que la función satisface todos los requerimeientos si las $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ son elegidas apropiadamente. Por (5.7) las g_j suman a g. Más aun, para una derminada j tenemos $\alpha_{jk} \neq 0$ sólo si $k = j$ ó $\rho(k) = j$ y para esos índices k el soporte de η_k esta contenido en

$$U_k \cap U_{\rho(k)} \subset U_j$$

con lo que se observa que tambien g_j tiene soporte en U_j. Finalmente, para satisfacer (5.4) determinaremos las $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ de las $m+1$ ecuaciones resultantes

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \alpha_{jk} = \int_M g\phi_j \tau.$$

Debido a (5.7) y

$$\int_M g\tau = \sum_{j=0}^{m} \int_M g\phi_j \tau = 0,$$

la primera ecuación ($j = 0$) es redundante. Las otras m ecuaciones son unívocamente solubles debido que el rango de α es m. La mención adicional del lema es inmediata a partir de esta construcción y la prueba de el lema se ha completado.
■

Finalmente se probará el Lema 5.3 y resolveremos la ecuación diferencial (5.5). Para evitar el carácter lineal de la ecuación representaremos a u de la forma $w^{-1}\circ v$ con

$$z = v(x), \qquad z = w(x),$$

donde v, w satisfacen

$$\det\, v_x = ch(x); \qquad \det\, w_y = cg(y) \tag{5.8}$$

Esto implica que $u = w^{-1} \circ v$ satisface (5.5). Para que $u(x) = x$ cerca de ∂I^n dispondremos las cosas para que $v(x) = w(x)$ cerca de la frontera de I^n. Daremos la construcción de h y encontraremos a $v(x)$ en la forma especial de

$$z_i = v_i(x_1, \ldots, x_i) \qquad i = 1, \ldots, n$$

de tal modo que las caras del cubo son preservadas, esto quiere decir que:

$$v_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, \epsilon) = \epsilon \qquad \text{para} \;\; \epsilon = 0, 1.$$

Sin pérdida de generaliad supondremos que $c = 1$ de manera que vemos de (5.8) que el requerimento para v_i es

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = h$$

para este propócito el factorizamos $h = h(x_1, \ldots, x_n)$ como

$$ch(x) = \prod_{i=1}^{n} h_i(x_1, \ldots x_i)$$

tal que

$$\int_0^1 h_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, t)dt = 1$$

Esto es posible de manera única como se puede observar por inducción con respecto a n. De aquí

$$h_n = \frac{h(x)}{\int_0^1 h(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)dt}$$

Ahora es suficiente encontrar una transformación v para uno de los factores arriba considerados, digamos h_p. Esto requiere la solucion de

$$\det\, v_x = h_p(x_1, \ldots, x_p)$$

dada explicitamente por

$$v_i = x_i \qquad \text{para } i \neq p; \qquad v_p = \int_0^{x_p} h_p(x_1, \ldots, x_{p-1}, t)dt$$

$\blacksquare$

Este mapeo transforma $\overline{I^n}$ sobre si mismo, cosa que se verifica mediante la siguiente constucción: si $g - h$ tiene soporte en $D \subset I^n$ entonces las soluciones correspondientes v, w concuerdan fuera de todo cubo que contenga a D. Por lo tanto $u = w^{-1} \circ v$ tiene todas las propiedades deseadas. A propósito, si h es C^r entonces v tambien, pero no necesariamente es C^{r+1}. Esto prueba el lema 2 y por lo tanto. el teorema de Moser.

Conclusiones

Para la demostración del *Teorema de Moser*, se requiere de todas la herramientas que se exponen en el trabajo, unas de las definiciones más importantes son las formas de volumen y el pullback, que es un difeomorfismo, que esta presente en todo el trabajo, para lo cual las demas definiciones y conceptos son de gran utilidad para desarrollar las herramientas que ayudan a la demostración del *Teorema de Moser*.

Las formas de volumen son $n-$formas sobre una variedad orientada, y si estas dos formas de volumen son equivalentes, entoces existe un difeomorfismo que transforma una en la otra, Moser demuestra la existencia de un difeomorfismo, con lo cual se da una forma de encontrar el difeomorfismo buscado, con las herramientas que se exponen a lo largo del trabajo.

El objetivo de ésta tesis se cumple desde el punto de vista de la exploración y revisión de conceptos para el estudio del *Teorema de Moser* así como para su demostración.

Como trabajo futuro se presenta el caso de encontrar el difeomorfismo sobre variedades no compactas. Cabe señalar que existen grandes avances en estos temas.

Bibliografía

[1] Friedberg Stephen H., Insel Arnold J. y Spence Lawrence E. *Algebra Lineal.* 1a. ed. México, Publicaciones Cultural, S.A., 1982.

[2] Guillemin Victor, Pollack Alan.(Palmas V. Óscar A). *Topología Diferencial.* 1a. ed. México: Sociedad Matemática Mexicana, 2003. 294 p. ISBM 970-32-0754-5.

[3] Hinrichsen Diederich, Fernádez Muñiz José L., Fraguela Collar Adreś y Álvarez Prieto Ángel. *Topología General.* 1a. ed. México: Sociedad Matemática Mexicana, 2003. 668 p. ISBM 970-32-106403.

[4] Jürgen Moser.*On the Volume Elements on a Manifold.* Trans.Amer. Math. Soc., 120, 1965.

[5] Lee, John M. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature.* New York: Springer-Verlag, 1977. 224 p. ISBM 0-387-98322-8.

[6] Lee, John M. *Introduction to Smooth Manifolds.* New York: Springer-Verlag, 2000. 628 p. 978-0387-95448-6.

[7] Marsden Jerrold E., Tromba Anthony J. *Cálculo Vectorial.* 4a. ed. Edo de México: Prentice Hall, 1998. 624 p. ISBM 968 444 276 9.

[8] Spivak. Michael. *Cáculo en Variedades.* Barcelona: Reverté, S.A., 1988. 134 p. ISBM 84-281-5142-7.