Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

TEOREMA DE NOETHER PARA LA ENERGÍA EN RELATIVADAD GENERAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

FÍSICO

PRESENTA

VÍCTOR HUGO FLORES SOTO

DIRECTOR DE TESIS

DR. EDUARDO NAHMAD ACHAR

MÉXICO DF. 2013

1. Datos del alumno.
Flores
Soto
Víctor Hugo
56 17 96 96
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
406067007

2. Datos del tutor.
Dr.
Eduardo
Nahmad
Achar

3.- Datos del sinodal 1
Dr.
Shahen
Hacyan
Saleryan

4.- Datos del sinodal 2
Dr.
Erick Leonardo
Patiño
Jaidar

5.- Datos del sinodal 3
Dr.
Juan Manuel
García
Islas

6.- Datos del sinodal 4
Dr. José David
Vergara
Oliver

7. Datos del trabajo escrito
Teorema de Noether para la energía en relatividad general
120 p.
2013

"One of the many unsolved problems connected with the general theory of relativity is whether the theory belongs to physics or rather to mathematics. One of my colleagues at this Summer School said that those who work in the theory of relativity do so because of its mathematical beauty rather than because they want to make predictions which could be checked against experiment. I think there is some truth in this statement, and probably I am no exception to it."

A Trautman

A la memoria del Dr. Ize y a el Dr. Nahmad

Quienes modularon mis pasos sobre la física

Resumen

El objetivo de esta tesis es formular el teorema de Noether en el contexto de espacios curvos en un sistema general que incluye campos de materia además del campo gravitacional. Se deducen las ecuaciones de Einstein a partir de un principio variacional y se obtienen diversas cantidades pseudotensoriales de energía-momento cuya divegencia es nula. Se define el operador de Noether y se demuestra que es equivalente a los tensores y pseudotensores de energía-momento conocidos. Con este operador se enuncia el teorema de Noether correspondiente a la invariancia de norma de una teoría relativista. Se aplica este teorema al caso de un fluído perfecto y se concluye enunciado el teorema de Noether para la energía en un sistema invariante ante un flujo de tipo temporal.

Agradecimientos

Hago un agradecimiento honorífico a la Universidad Nacional Autónoma de México por darme la oportunidad de estudiar la magnífica Licenciatura en Física. Por la diversidad de materias y maestros que me ofreció para mi formación. Gracias por nunca haberme cerrado una sola puerta y ofrecerme todas las facilidades necesarias para concluír mi carrera. En ella, además de una fuente inagotable de conocimientos también encontré muchos amigos que me ayudaron a completar mis conocimientos.

Quiero agradecer a mi madre Cecilia Soto, por su apoyo incondicional en cada una de mis metas y dejar que fuera yo mismo el que labrara mi propio destino. Por su paciencia en enseñarme lo que no se aprende en ninguna escuela ni en ningún libro y por sufragar todos y cada uno de mis sueños, aquellos que me han llevado a lograr este presente.

Quiero agradecer al Dr. Nahmad, por su valiosísima orientación en este trabajo y en la vida, porque a lo largo de él más que en un tutor y un guía se ha convertido en un entrañable amigo. Porque cada una de nuestras reuniones iban acompañadas de una dosis motivacional para continuar, muchas gracias Eduardo.

Afectuosísimamente agradezco a mi amigo Hugo García por el gran apoyo que me ha brindado desde los primeros semestres en la Universiad, por las largas discusiones de física que nos han ayudado a crecer profesionalmente a ambos y por su invaluable apoyo moral.

También quiero agradecer ampliamente a todos mis familiares y amigos que me motivaron de una u otra manera para realizar mi carrera y concretar con ánimo este trabajo. Porque cada vez que hablaba con cada uno de ellos al final me sentía inspirado a continuar convencido de que lo que elegí es lo correcto.

Agradezco el apoyo financiero por parte de DGAPA-UNAM (proyecto IN102811), y por parte del SNI.

Índice general

Capítulo 0

Introducción

A través del tiempo el hombre en su afán de comprender la naturaleza que nos rodea se ha valido de herramientas tan importantes y útiles como son las simetrías y las cantidades conservadas. Con ellas ha clasificado e intentado dar orden a lo que en un principio parece caos. Así, por ejemplo, los antiguos egipcios ya poseían un calendario en el cual reflejaban la periodicidad de los días al rededor del sol, un año. Los antiguos griegos ya concebían una idea de lo que podría ser la conservación de la masa-energía al pensar que todo lo que nos rodea esta compuesto por cuatro elementos: agua, tierra, aire y fuego, y que sólo existen tranformaciones entre estos elementos para constituir una sustancia específica.

0.1. Cantidades Conservadas

Con el desarollo de la física contemporanea los conceptos de simetría y cantidad conservada no solo se ven fuertemente vinculados a los sistemas físicos sino que también pasan a contribuir en la obtención de la solución de cualquier problema. El primer ejemplo revolucionario de ello son las leyes enunciadas por Johannes Kepler a partir de las observaciones hechas por Tycho Brahe [1]:

1. Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse.

2. El radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

3. Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica.

La segunda ley ahora sabemos que se debe a la conservación del momento angular, pero en su redacción original ya se hace evidente la constancia de una cantidad dinámica.

El principio de relatividad Galileano [2] "*La leyes que describen el comportamiento de la naturaleza toman la misma forma para dos sistemas de observación que se mueven, uno respecto del otro, con velocidad constante*" aunado a la primera Ley de Newton "*Existen sistemas de referencia en los cuales toda particula puntual aislada se mueve en línea recta con rapidéz constante*", nos dicen que las leyes de las física son las mismas en todos los sistemas de referencia "inerciales", es decir invariancia de la descripción de un sistema físico para observadores inerciales.

La misma tercera Ley de Newton es una ley de conservación, a cada acción le pertence una reacción. Una manera moderna de escribir este principio es: *Para dos partículas aisladas del resto de la materia que intereaccionan entre sí, es posible encontrar dos constantes m_1 y m_2, tales que puede construirse un vector constante,*

$$m_1\vec{v}_1(t) + m_2\vec{v}_2(t) = \vec{P}$$

Este es el principio de *conservación del momento.* En este principio, al igual que en la primera Ley de Newton, se hace énfasis en un sistema aislado. Estamos pensando que no hay interacción exterior de ningún tipo, es decir, nos aseguramos también de la conservación de la energía a priori. El principio de conservación de la energía en mecánica clásica siempre lo suponemos válido para todo aquel sistema aislado cuyo campo de fuerzas no depende del tiempo sino solo de la posición. En la teoría de la Relatividad Especial, el principio de conservación de la energía y del momento ya no pudieron ser más válidos por separado y hubo la necesidad de generalizarlos a una cantidad que incluyera a ambos; el cuatro-momento. Dicha conservación ha demostrado ser de rotunda importancia en problemas de dispersión y en decaimientos de partículas.

Así como la energía o el momento pudieran resultar conservados en un sistema físico general, también podrían resultar conservadas otras cantidades: el momento angular o en general el momento asociado a una coordenada generalizada, una corriente elétrica, el vector de Laplace-Runge-Lenz, el vector de Poynting, la entropía, el flujo magnético, el modulo cuadrado del momento total, etc, etc. Con cantidades conservadas nos referimos a que no cambian en el tiempo, es decir si $\{\phi_i\}_{i=1,..,k}$ son k cantidades conservadas en un sistema cuyo Hamiltoniano es H, entonces

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \{\phi_i, H\}_{(q,p)} + \frac{\partial\phi_i}{\partial t} = 0$$

si además estas cantidades no dependen explícitamente del tiempo entonces

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \{\phi_i, H\}_{(q,p)} = 0$$

y diremos en este caso que son integrales de movimiento.

En mecánica clásica, si un sistema es descrito por n grados de libertad, sus ecuaciones de movimiento correspondientes, dadas por la segunda Ley de Newton, son n ecuaciones diferenciales de segundo orden que en general estarán acopladas. La utilidad de las constantes de movimiento, como ya se mencionó antes, radica en que nos ayudan a resolver dichas ecuaciones. De hecho, se establece que por cada integral de movimiento que el sistema posea, una de sus ecuaciones diferenciales se reduce en un orden [3]. Incluso existe un resultado muy poderoso al respecto; el teorema de Liouville, el cual establece que "*Un sistema con n grados de libertad es integrable si posee n integrales de movimiento en involución*", en donde debemos entender por sistema integrable aquel sistema hamiltoniano cuyas ecuaciones de movimiento puden ser resueltas para cualquier conjunto de condiciones iniciales mediante cuadraturas. Esto justifica de manera contundente el por qué buscar un número suficiente de cantidades conservadas en un sistema físico.

0.2. Las Simetrías

A lo largo de la construcción análitica de la mecánica clásica no quedó especificada una manera clara de como buscar integrales de movimiento en un sistema o incluso de sólo sopesar la idea de que un sistema mecánico anidara una cantidad conservada. La respuesta la dio la matemática Emmy Noether en 1918 [4]. Este problema se resolvió no solo para sistemas mecánicos sino también para todos aquellos sistemas físicos que pudieran ser descritos mediante un principio variacional, ya que la manera de cómo buscar cantidades conservadas vino desde el cálculo de variaciones y la teoría de grupos. De manera coloquial, el teorema que Noether estableció en forma expresa que *cualquier simetría diferenciable, proveniente de un sistema físico, tiene su correspondiente ley de conservación.*

En la física, además de la mecánica analítica, existen muchos otro sistemas a los que se les puede aplicar un principio variacional [5]: la óptica geométrica, el campo gravitacional, los sistemas cuánticos, los campos de Dirac, etc. Así, la aplicabilidad del Teorema de Noether va más allá de la mecánica analítica. Si el sistema es descrito por un funcional J y éste es invariante ante un grupo uno-paramétrico, entonces existe una cantidad conservada. El grupo uno-paremétrico es lo que llamamos una simetría del sistema. Pero el trabajo original de Noether, es mucho más general, no sólo se enfoca a la invariancia de J ante grupos uno parámetricos, también lo hace para grupos finitos e infinitos, lo que hace al resultado muy sofisticado y da la posibilidad de aplicarlo a campos donde los grados de libertad son infinitos. Requerir invariancia de coordenadas de un campo, es requerir invariancia ante un grupo G_∞, caso que bien cubre el teorema de Noether.

El teorema de Liouville aunado al teorema de Noether soportan firmemente la idea del humano de servirse de simetrías para tratar de comprender las leyes que dictan la dinámica de la naturaleza. Es por ello que teorías completas de la física estan totalmente cimentadas sobre simetrías y teorías de grupos.

La teoría de la Relatividad General, de una manera abstracta, se formula sobre una variedad Lorentziana 4-dimensional y cuyas ecuaciones de campo son derivables de un principio variacional. Una de las bases que soportan esta teoría es el principio de equivalencia. Este principio establece una invariancia de la acción S, que describe al sistema, ante cualquier arrastre de Lie. Dicho de otra forma, un sistema en Relatividad General cumple con ser invariante ante el grupo $G_{\infty 4}$ [6].

En un sistema que incluye un campo gravitacional los coeficientes de la métrica adquieren un carácter dinámico y se comportan de la misma manera en que lo hacen las variables que describen al campo de materia, es decir, la métrica da arribo a unas ecuaciones de campo (las ecuaciones de Einstein). Visto de otra manera, un sistema masivo provoca un campo gravitacional y la geometría del espacio curvo estará dictada por el campo de materia. De igual manera, el campo gravitacional en forma de geometría del espacio dicta la dinámica del campo de materia. Aunque la energía total en este tipo de sistemas se conserva si no hay fuentes externas o pérdida de materia, ya no es posible asociar por separado una energía al campo de materia y otra energía complementaria al campo gravitacional de una manera satisfactoria, como se hace en un sistema mecánico por ejemplo, donde hay una energía cinética y una energía potencial. Entonces, si no hay una definición precisa de densidad de energía-momento en este tipo de sistemas, según el teorema de Noether ¿qué cantidad conservada asociamos a la invariancia de norma de un sistema en el marco de la Relatividad General?

En esta tesis, como un primer objetivo, nos proponemos hacer una definición satisfactoria de energía-momento asociada a un campo de materia y la asociada al campo gravitacional. Veremos que al hacer esto caemos en cantidades de caracter pseudotensorial (las cuales se pueden hacer nulas en cualquier punto de la variedad) haciendo evidente que el concepto de densidad de energía-momento en Relatividad General es dependiente del observador.

Motivados por la derivabilidad desde un principio variacional de las ecuaciones de campo y la invariancia de norma que cumple la teoría de la Relatividad General, como un segundo objetivo nos proponemos formular el teorema de Noether asociado a dicha simetría. En particular demostraremos que la energía se conserva y además es un extremo si y sólo si se cumplen las ecuaciones de campo de Einstein, cuando el sistema relativista posee un subgrupo uno paramétrico definido por las líneas integrales de un campo vectorial ξ de tipo temporal.

Aunque esta formulación del teorema de Noether incluye el manejo de cantidades pseudotensoriales, nos permite resolver problemas de la misma manera en que lo hace en mecánica clásica. Esto se verá hacia el final de este trabajo.

En el Capítulo 1 daremos un esquema formal del cálculo de variaciones y algunos elementos de analísis matemático para poder demostrar rigurosamente el teorema de Noether en un sistema invariante ante un grupo uno-paramétrico. En el Capítulo dos iniciaremos definiendo las variaciones que podemos aplicar a un sistema en un espacio curvo e introduciendo el Lagrangiano para un sistema que incluye materia mas campo gravitacional, y con ello deduciremos las ecuaciones de Einstein. Posteriormente exhibiremos varios pseudotensores asociados al campo gravitacional cuya divergencia se anula como una consecuencia de la invariancia de norma. En el Capítulo 3 a través de variaciones con frontera libre hechas a un sistema general definiremos el operador de Noether y demostraremos que es equivalente al tensor de energía-momento de Landau y Lifshitz y además que define de una manera satisfactoria a la energía de un sistema. Usando este operador demostraremos el equivalente del Teorema de Noether en Relatividad General. En el Capítulo 4 iniciaremos con la aplicación de los resultados previos a un sistema que consiste de un fluído perfecto. Finalmente terminaremos enunciado que cuando un sistema es invariante ante un vector de Killing de tipo temporal, la energía es un extremo si y solo si se cumplen las ecuaciones de campo de Einstein.

Capítulo 1

Base matemática

En este capítulo se abordarán temas acerca del cálculo de variaciones. Se hace necesario primero definir los espacios de trabajo, posteriormente se da una introducción a operadores y funcionales, se definen las derivadas funcionales y después de probar algunas de sus propiedades se aplican a algunos funcionales particulares. Un resultado importante son las ecuaciones de Euler-Lagrange y se culmina con el teorema de Noether. Para ampliar este tema puede consultarse [7] donde se estudia al calculo de variaciones de una manera moderna y [8] donde se definen correctamente de manera compacta distintos tipos de espacios (vectoriales, tensoriales, duales etc).

1.1. **Espacios** (Lineales, Vectoriales y de Funciones)

1.1.1. **Definición** (Espacio lineal sobre $\mathbb{R}$)

Un **espacio lineal** X es un conjunto de elementos $f, g, h, ...$, sobre el cual se define una adición y una multiplicación por un escalar real tal que:

$$f + g = g + f, \;\; (f + g) + h = f + (g + h).$$

Existe un elemento 0 tal que: $f + 0 = f$.
Existe un elemento $-f$ tal que: $f + (-f) = 0$, para todo f en X.
Además $1 * f = f, \;\; \alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f, \;\; (\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f, \;\; \alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$, donde $1, \alpha, \beta$ son escalares reales.

1.1.2. Definición (Espacio normado)

Un espacio lineal X es **normado** si para todo f en X existe un número real único, no negativo $\|f\|$, con las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} \|f\| &= 0 \Leftrightarrow f = 0 \\ \|\alpha f\| &= |\alpha|\,\|f\| \\ \|f+g\| &\leq \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$

Se define la **distancia** entre f y g como $\|f-g\|$

1.1.3. Definición (Sucesión de Cauchy)

Una sucesión f_n en un espacio normado X es **de Cauchy** si dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$ si $n, m \geq N(\varepsilon)$.

1.1.4. Definición (Espacio de Banach)

Un espacio normado es **completo** si toda suceción de Cauchy converge a un elemento del espacio. En ese caso se dice que el espacio es un espacio **de Banach**.

1.1.5. Definición (producto escalar sobre $\mathbb{R}$)

Un **producto escalar real** sobre un espacio lineal X es una operación bilineal

$$(f,g) : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\begin{aligned} (f,g) &= (g,f) \\ (f,f) \geq 0, \text{ y } (f,f) &= 0 \iff f = 0 \\ (\alpha f, g) &= \alpha(f,g) \\ (f+g,h) &= (f,g) + (g,h) \end{aligned}$$

En este caso podemos asociar como **norma** de un elemento f la cantidad $\|f\| = (f,f)^{1/2}$

1.1.6. Definición (Espacio de Hilbert)

Si un espacio con producto escalar (f,g) y norma asociada $\|f\| = (f,f)^{1/2}$ es completo se le llama **de Hilbert** (si no, es **pre-Hilbert**).

1.1.7. Definición (Espacio vectorial, base y dimensión)

La definición 1.1.1 cumple también con las propiedades de **espacio vectorial** por lo que se hace necesario definir algunos elementos útiles.

Sea X un espacio lineal (espacio vectorial) y sean $u_1, ..., u_n$ n elementos de X:
1) Se dice que $u_1, ..., u_n$ son **linealmente independientes** si

$$\sum_{i=1}^{n} a^i \, u_i = 0$$

(donde $a^i \in \mathbb{R}$) implica que $a^i = 0 \;\; \forall \; i$.
2) Si esto no es así, los elementos son llamados **linealmente dependientes**.
3) La mínima cota superior de n tomada sobre todos los posibles conjuntos de n vectores linealmente independientes es llamada la **dimensión** del espacio X. Si el espacio X tiene dimensión n, denotamos esto como:

$$dim(X) = n$$

Observemos que la dimensión de un espacio puede ser infinita.
4) Sea $dim(X) = n$. Un conjunto ordenado de n elementos de X linealmente independientes es llamado una **base** de X.
5) Sea $\{e_i\}, \; i = 1, 2, ..., n$ una base de X y tomemos $u \in X$, entonces el conjunto $\{u, e_i\}$ es linealmente dependiente y de aquí existen escalares u^i tales que

$$u - \sum_{i=1}^{n} u^i \, e_i = 0$$

es decir:

$$u = \sum_{i=1}^{n} u^i \, e_i$$

así cada elemento de X puede ser escrito como una combinación lineal de una base $\{e_i\}$, y los escalares u^i son llamados las **componentes de** u con respecto a la base $\{e_i\}$.
6) Sea $\{e_i\}$ una base de X, diremos que se trata de una **base ortonormal** de X si

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

donde $\delta^i_j = 1$ si $i = j$ y 0 en cualquier otro caso.

1.1.8. Definición (Espacio dual)

Sea X un espacio lineal. Definimos al **espacio dual** X^* como el conjunto de funciones lineales de X en el campo (los reales). Si $\lambda, \mu \in X^*$, i.e. $\lambda, \mu : X \longrightarrow \mathbb{R}$, tenemos entonces

$$\forall x \in X,\ (\lambda + \mu)(x) = \lambda(x) + \mu(x)$$

$$\forall a \in \mathbb{R},\ (a\lambda)(x) = a\lambda(x)$$

Cuando X es de dimensión finita, X^* es un espacio lineal de la misma dimensión.

1.2. Funcionales, Operadores y Continuidad

1.2.1. Definición (Funcional)

Sea X un espacio lineal. Se le da el nombre de **funcional** J a una función que va de X^*, el espacio dual de X, al campo (los reales), es decir

$$J : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

Dado que X^* es también un espacio lineal, sin lugar a confusión diremos que $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

1.2.2. Definición (Continuidad)

Sea J una función de X a Y, dos espacios normados. J es **continua** en $f \in X$ si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|J(g) - J(f)\|_Y \leq \varepsilon$$

si

$$\|g - f\|_X \leq \delta$$

1.2.3. Ejemplo

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, denotamos por $C^1[a,b]$ al espacio de funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cuya primera derivada existe y es continua. Sea $F(x, y(x), y'(x)) \in C^1$ sobre $[a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, entonces la función

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x$$

del espacio $X = C^1[a,b]$, con norma $||y||_X = |y|_1 \equiv \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, a $\mathbb{R}$, donde $y' = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}$, cumple con la definición de funcional y es continua en cualquier elemento y_0 de X. De hecho, para cada x,

$$\begin{aligned}
&F(x, y(x), y'(x)) - F(x, y_0(x), y_0'(x)) = \\
&= \frac{\partial F(x,\theta,\phi)}{\partial y}(y(x) - y_0(x)) + \frac{d}{d\,x}\left(\frac{\partial F(x,\theta,\phi)}{\partial y}\right)(y'(x) - y_0'(x))
\end{aligned}$$

por el teorema del valor intermedio (el dominio de diferenciabilidad de F es convexo), donde θ está entre $y_0(x)$ y $y(x)$, ϕ entre $y_0'(x)$ y $y'(x)$.

Si tomamos una primera derivada de y_0 en $C^1[a,b]$, consistente de todas las funciones $y(x)$ con $|y-y_0|_1 \leq \delta$, dando una banda de ancho δ alrededor de $y_0(x)$ y de $y_0'(x)$, entonces (x,θ,ϕ) estarán acotadas ($[a,b]$ es compacto) y por lo tanto

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial F}{\partial y'}\right| \leq M \quad \text{para } (x,\theta,\phi) \text{ en esa banda.}$$

Tendremos entonces:

$$|J(y) - J(y_0| \leq M|a-b||y-y_0|_1$$

si $|y-y_0|_1 \leq \delta$; el funcional es Lipschitz continuo. Nótese que $J(y)$ no es continuo en y_0 si sólo se da a $C^1[a,b]$, con la norma $|\ |_0$.

1.2.4. **Definición** (Operadores lineales)

Un **operador lineal** (funcional lineal si el rango es $\mathbb{R}$) entre un espacio X y un espacio Y es una función $J(f)$ con las propiedades:

$$J(\alpha f) = \alpha J(f),\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall f \in X$$

$$J(f+g) = J(f) + J(g),\ \forall f,g \in X.$$

1.3. Derivadas de un Funcional

1.3.1. **Definición** (Derivada de Gâteaux de un funcional)

Sea J un funcional definido sobre un espacio normado X. Diremos que J tiene una **derivada de Gâteaux** en f_0 en la dirección $h \in X$ si:
1) $J(f_0+th)$ está definido para $|t|$ pequeño.
2) Existe el límite

$$\lim_{t\to 0} \frac{J(f_0+th) - J(f_0)}{t} = \frac{d}{dt}(J(f_0+th))|_{t=0}.$$

En este caso se denota a este límite como $D_h J(f_0)$

1.3.2. **Ejemplo**

Sea $F(x,y(x),y'(x))$ una función continua, con derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$ también continuas en $[a,b]\times\mathbb{R}^2$. Sea

$$J(y) = \int_a^b F(x,y(x),y'(x))\,\mathrm{d}x$$

definido sobre un subconjunto de funciones $y \in C^1[a,b]$ (la funciones estan sujetas a las condiciones de continuidad de F y a que la integral converja).
Entonces

$$D_h J(y) = \int_a^b \left(\left(\frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x), y'(x)) \right) h(x) + \left(\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x), y'(x) \right) h'(x)) \right) \mathrm{d}x$$

ya que en este caso no hay problemas de convergencia de las integrales y debido a que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (F(x, y + th, y' + th'))|_{t=0} = \left(\frac{\partial}{\partial y} F(x, y, y') \right) h + \left(\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y') \right) h'$$

De la misma manera que en el cálculo de varias variables se definen derivadas direccionales (en particular parciales) y diferenciales, en el cálculo de variaciones, existe una diferencial.

1.3.3. **Definición** (Derivada de Fréchet de un funcional)

El funcional $J(y)$ tiene una **derivada de Fréchet** en y_0, si existe un funcional lineal continuo, $DJ(y_0)$, tal que

$$J(y_0 + h) = J(y_0) + DJ(y_0)h + o(\|h\|)$$

para todo h en el espacio normado X.

1.3.4. **Ejemplo**

Sea $F(x, y_1, y_1', y_2, y_2')$ continua en $[a,b] \times \mathbb{R}^4$ con derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial y_1}$, $\frac{\partial F}{\partial y_{y1}'}$ $\frac{\partial F}{\partial y_2}$, $\frac{\partial F}{\partial y_2'}$ continuas en el mismo dominio, entonces

$$J(y_1, y_2) = \int_a^b F(x, y_1(x), y_1'(x), y_2(x), y_2'(x))\, \mathrm{d}x$$

tiene como derivada de Fréchet, sobre $C^1[a,b] \times C^1[a,b]$, con la norma $\|(y_1, y_2)\| = |y_1|_1 + |y_2|_1$:

$$DJ(y_1, y_2)(h_1, h_2) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y_1} h_1 + \frac{\partial F}{\partial y_1'} h_1' + \frac{\partial F}{\partial y_2} h_2 + \frac{\partial F}{\partial y_2'} h_2' \right) \mathrm{d}x$$

donde los argumentos en $\frac{\partial F}{\partial y_1}$, $\frac{\partial F}{\partial y_1'}$ $\frac{\partial F}{\partial y_2}$, $\frac{\partial F}{\partial y_2'}$ son $(x, y_1(x), y_1'(x), y_2(x), y_2'(x))$.

1.3.5. **Ejemplo**

Sea $F(x, y, z, u, v)$ con $u = \frac{\partial z}{\partial x}$, $v = \frac{\partial z}{\partial y}$ continua, con $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$ continuas sobre $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^3$ donde Ω es un dominio acotado del plano. Entonces, para una función $f(x,y)$ en $C^1(\bar{\Omega})$, con norma

$$\|f\| = \max_{\bar{\Omega}} |f(x,y)| + \max_{\bar{\Omega}} |\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)| + \max_{\bar{\Omega}} |\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)|$$

el funcional

$$J(f) = \iint_\Omega F\left(x, y, f(x,y), \frac{\partial}{\partial x} f(x,y), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

tiene como derivada de Fréchet:

$$DJ(f)h = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F}{\partial z} h + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

donde los argumentos de $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$ son $(x, y, f(x,y), \frac{\partial}{\partial x} f(x,y), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y))$

1.4. Propiedades de las Derivadas de Gâteaux y de Fréchet

1.4.1. Proposición (Unicidad de la derivada de Fréchet)

Si existe un funcional lineal continuo, ϕ, tal que la aproximación lineal siguiente es válida:

$$(J_0 + h) = J(y_0) + \phi\, h + o(\|h\|)$$

entonces $\phi = DJ(y_0)$ es único.

Demostración. Si hay dos funcionales $\phi_1,\ \phi_2$ que realizan la aproximación, entonces:

$$\phi_1 h - \phi_2 h = o_2(\|h\|) - o_1(\|h\|) = o(\|h\|).$$

Por lo tanto

$$|(\phi_1 - \phi_2)(h/\|h\|)| = o(\|h\|)/\|h\| = O(\|h\|).$$

de lo cual se tiene que $\|\phi_1 - \phi_2\| = 0$ (continuidad de los operadores con $\|\phi\| \equiv sup_{\|f\|=1}\|\phi(f)\|$) y en consecuencia $\phi_1 = \phi_2$. $\mathcal{Q.E.D.}$

1.4.2. Proposición

Si un funcional J es Fréchet diferenciable en y_0, en un espacio normado X, entonces J tiene una derivada de Gâteaux en y_0 en toda dirección h de X, con

$$D_h J(y_0) = DJ(y_0)h$$

Demostración.

$$J(y_0 + th) - J(y_0) = DJ(y_0)th + o(||th||)$$

$\mathcal{Q.E.D.}$

1.4.3. Proposición

Si un funcional J tiene una derivada de Gâteaux en y para y en una vecindad de y_0, en toda dirección h del espacio normado X, y si $D_h J(y_0)$ es un funcional lineal continuo en h y $D_h J(y)$ es continuo en y_0, es decir

$$\|D_h J(y) - D_h J(y_0)\| \leq O(\|y - y_0\|)\,\|h\|$$

entonces J tiene una derivada de Fréchet $DJ(y_0)$, con $DJ(y_0)h = D_h J(y_0)$ $\forall h \in X$.

Demostración. Para $\|y - y_0\| \leq \delta$, la vecindad de y_0, podemos escribir $y = y_0 + t_0 h$, con $0 \leq t_0 \leq \delta$, $\|h\| = 1$. Consideremos la función de una variable $f(t) = J(y_0 + t\,h)$. Por hipótesis $f(t)$ tiene derivada

$$f'(t) = D_h J(y_0 + th)$$

para t entre $-\delta$ y δ. Además

$$|f'(t_1) - f'(t_2)| \leq O(|t_1 - t_2|\,\|h\|)/\,\|h\| = O(|t_1 - t_2|)$$

es decir $f'(t)$ es continua para $|t| \leq \delta$. Por el teorema del valor medio (en una variable), existe c, $0 < c < t_0$, tal que: $f(t_0) = f(0) + f'(c)\,t_0$ es decir:

$$J(y) = J(y_0) + t_0 D_h J(y_0 + ch) = J(y_0) + t_0 D_h J(y_0) + t_0(D_h J(y_0 + ch) - D_h J(y_0))$$

Usando la linealidad en h de $D_h J(y_0)$, tenemos

$$J(y) = J(y_0) + D_{(y-y_0)} J(y_0) + O(c)\,t_0$$

donde $O(c)$ no depende de la direción h, y con la propiedad que $O(c)t_0$ tiende a 0 si t_0 tiende a 0. $\mathcal{Q.E.D.}$

1.5. Extremo de un Funcional

En física hablamos frecuentemente de extremos de funciones (o funcionales) como por ejemplo en el principio de Fermat o en el principio de Hamilton, por lo que se hace necesario tener un análogo al punto crítico de una función en funcionales y/o operadores, además de una definición adecuada de lo que significa un extremo de un funcional.

1.5.1. Definición

El funcional $J(y)$ tiene un máximo (mínimo) local en y_0 si $J(y) - J(y_0) \leq 0$ (≥ 0) para todo y vecino a y_0, para el cual $J(y)$ esté definido.

1.5.2. **Teorema** (Extremo de un Funcional)

Si $J(y)$ tiene un extremo local en y_0, entonces $D_h J(y_0) = 0$ en todas las direcciones h donde la derivada de Gâteaux esté definida. En particular, si J tiene una derivada de Fréchet en y_0 entonces $DJ(y_0) \equiv 0$.

Demostración. Sea h una dirección admisible, entonces la función

$$f(t) = J(y_0 + th)$$

está definida para t pequeño y tiene un extremo en $t = 0$, y del cálculo elemental sabemos que $f'(0) = 0$. $\mathcal{Q.E.D.}$

1.6. Lemas Fundamentales

Sea

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

un funcional definido sobre $C^1[a,b]$ con F, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$ continuas. Si suponemos que tiene un extremo en $y_0(x)$ condicionado por $y(a) = A$ $y(b) = B$, entonces $I(h) = J(y_0 + h)$ tiene un extremo en 0, para las funciones h en $C^1[a,b]$, con norma $|h|_1$ y $h(a) = h(b) = 0$. Tenemos entonces:

$$DI(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y} F(x, y_0, y_0')\, h + \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y_0, y_0')\, h' \right) \mathrm{d}x = 0$$

para todo h.

Debido a que en física la mayoría de los funcionales que se presentan son de esta forma, nos gustaría poder transformar ésta condición integral a una ecuación diferencial. Esto se hace precisamente con las ecuaciones de Euler-Lagrange, pero para poderlas obtener necesitamos algunos lemas de gran utilidad, que nos facilitarán su demostración.

1.6.1. **Lema** (Lagrange)

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$, tal que:

$$\int_a^b f(x)\, h(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

para todo h en $C_0[a,b] = \{h(x) \text{ continua en } [a,b] \;\; | \; h(a) = h(b) = 0\}$. Entonces $f(x) \equiv 0$

Demostración. Si $f(x_0) \neq 0$ en algún punto x_0 entre a y b, entonces, por continuidad, $f(x)$ será del mismo signo que $f(x_0)$ en una vecindad $[x_1, x_2]$ alrededor de x_0, contenida en $[a, b]$. Por hipótesis el resultado es valido para toda $h(x)$, en particular sea $h(x)$ definida como:

$$h(x) = \begin{cases} (x - x_1)(x_2 - x) & \text{si} \quad x \in [x_1, x_2] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [x_1, x_2] \end{cases}$$

h está en $C_0[a, b]$, y es positiva en $[x_1, x_2]$, por lo que:

$$\int_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} f(x)h(x)\,\mathrm{d}x$$

tiene el mismo signo de $f(x_0)$, por lo tanto tenemos una contradicción. $f(x)$ debe de ser 0 en el interior de $[a, b]$ y, por continuidad, en a y b. $\mathcal{Q.E.D.}$

1.6.2. Lema

El lema 1.6.1 es válido si sólo se pide que

$$\int_a^b f(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$\forall\, h \in C_0^\infty[a, b] = \{h(x) \in C^\infty[a, b]$ con todas las derivadas 0 en a y en $b\}$. En particular el resultado es valido para $h \in C_0^n[a, b]$ donde

$C_0^n[a, b] = \{h(x)$ con derivadas continuas en $[a, b] \mid h^{(j)}(a) = h^{(j)}(b) = 0,\ j = 0, ..., n\}$.

Demostración. Basta modificar la prueba del lema 1.6.1 tomando

$$h(x) = \begin{cases} exp(-1/(x - x_1)^2(x - x_2)^2) & \text{si} \quad x \in [x_1, x_2] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [x_1, x_2] \end{cases}$$

con lo cual $\forall\ h \in C_0^\infty[a, b]$ y cumple la primera hipótesis. Para el segundo caso puede tomarse

$$h(x) = \begin{cases} ((x - x_1)(x_2 - x))^{n+1} & \text{si} \quad x \in [x_1, x_2] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [x_1, x_2] \end{cases}$$

de lo cual puede verse que $h \in C_0^n[a, b]$. $\mathcal{Q.E.D.}$

Es importante notar que $h \in C^0$ no necesariamente esta en C^∞ por lo que este lema necesita menos condiciones que el lema 1.6.3.

1.6.3. Lema

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)h'(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

para todo h en $C^1[a, b] \bigcap C_0[a, b]$. Entonces $f(x) = \mathit{constante}$.

Demostración. Observemos que si integramos por partes y por el lema 1.6.2 tendríamos que $f'(x) = 0$, pero $f(x)$ no es necesariamente diferenciable. Sea

$$c = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

el promedio de $f(x)$ y

$$h(x) = \int_a^x (f(\xi) - c)\,\mathrm{d}\xi,$$

de lo cual $h(a) = h(b) = 0$. Por el teorema fundamental del cálculo $h'(x) = f(x) - c$. Por lo tanto h pertenece a la clase del lema. Entonces

$$0 = \int_a^b f(x)h'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)(f(x) - c)\,\mathrm{d}x$$

pero

$$\int_a^b c(f(x) - c)\,\mathrm{d}x = c\,h(b) = 0.$$

Así que

$$0 = \int_a^b [\, f(x)(f(x) - c) - c(f(x) - c)\,]\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - c)^2\,\mathrm{d}x$$

Por lo tanto $f(x) = c$. $\mathcal{Q.E.D.}$

1.6.4. Lema (Du Bois-Reymond)

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas tales que:

$$\int_a^b (f(x)h(x) + g(x)h'(x))\,\mathrm{d}x = 0 \tag{1.1}$$

para todo h en $C^1[a, b]$, con $h(a) = h(b) = 0$. Entonces $g(x)$ es C^1 en $[a, b]$ con derivada $g'(x) = f(x)$

Demostración. Observemos que si nos olvidamos de la diferenciabilidad de g e integramos por partes, usando las condiciones de frontera en h, el resutado será una consecuencia del lema 1.6.2, pero esto no es necesario. Sea

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Entonces $F'(x) = f(x)$, lo cual se puede usar en la primera parte de la ecuación 1.1

$$\int_a^x f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^x F'(x)h(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^x F(x)h'(x)\,\mathrm{d}x + F(x)h(x)|_a^b$$

de lo cual la ecuación 1.1 se escribe como:

$$\int_a^b ((g(x) - F(x))h'(x))\,\mathrm{d}x = 0$$

para todo $h(x) \in C^1[a,b] \bigcap C_0[a,b]$. Así por el lema 1.6.3

$$g(x) - F(x) = constante.$$

de lo cual como $F(x)$ es C^1, también lo es $g(x)$, con $g'(x) = F'(x) = f(x)$ $\mathcal{Q.E.D.}$

1.6.5. Nota

Los dos lemas anteriores 1.6.3 y 1.6.4 se pueden extender **(Teorema de Meyers-Serrin)** a derivadas de orden superior, es decir:
1) Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)h^{(n)}\mathrm{d}x = 0$$

para todo h en $C_0^\infty[a,b]$. Entonces $f(x)$ es un polinomio de un grado a lo más $n-1$.
2) Sean $f(x)$ y $g(x)$ continuas en $[a,b]$ tales que:

$$\int_a^b (f(x)h(x) + g(x)h^{(n)}(x))\,\mathrm{d}x = 0$$

para todo h en $C_0^\infty[a,b]$. Entonces $g(x) \in C^n$ con

$$g^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}f(x)$$

Obsérvese que si uno pasa por alto la diferenciabilidad de f en el primer caso y g en el segundo, podemos integrar por partes, usar las condiciones de frontera de h y obtener el resultado.

1.6.6. Lema

Sean $f(x), g(x), k(x)$ funciones continuas en $[a, b]$ tales que:

$$\int_a^b (f(x)h(x) + g(x)h'(x) + k(x)h''(x))\, \mathrm{d}x = 0$$

para todo h en $C_0^\infty[a, b]$. Entonces $k(x)$ es C^1 y $g(x) - k'(x)$ es C^1 con derivada $f(x)$.

Demostración. Sean

$$F(x) = \int_a^x \int_a^{x_1} f(x_2)\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_1$$

$$G(x) = \int_a^x g(x_1)\mathrm{d}x_1$$

$F(x)$ es C^2, con $F''(x) = f(x)$; $G(x)$ es C^1, con $G'(x) = g(x)$. Integrando por partes tenemos:

$$\int_a^b (F(x) - G(x) + k(x))h''(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

para todo h en $C_0^\infty[a, b]$. Por lo tanto $F(x) - G(x) + k(x)$ es un polinomio a lo más de grado 1. Como $F(x) - G(x)$ es C^1, también los es $k(x)$, y $g(x) - k'(x)$ tiene como derivada a $f(x)$. $\mathcal{Q.E.D.}$

Para tener una idea de como se extiende a más dimensiones, podemos extender los resultados anteriores a más variables.

1.6.7. Lema (Haar)

Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^2$, para el cual el teorema de la divergencia es válido.

1) Sea $f(x, y)$ una función continua en $\bar{\Omega}$, tal que:

$$\iint_\Omega f(x, y)h(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0$$

para todo h en $C_0^\infty(\bar{\Omega})$. Entonces $f(x, y) \equiv 0$

2) Sean $f(x, y)$ continua, $g_1(x, y),\ g_2(x, y) \in C^1$ en $\bar{\Omega}$, tales que:

$$\iint_\Omega \left(f(x, y)h(x, y) + g_1(x, y)\frac{\partial h}{\partial x} + g_2(x, y)\frac{\partial h}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0$$

para todo h en $C_0^\infty(\bar{\Omega})$. Entonces

$$f = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y}$$

3) Si f, g_1, g_2 satisfacen las mismas propiedades que en (2) excepto que g_1 y g_2 son solamente continuas, entonces para todo $\Omega' \subset \Omega$:

$$\iint_{\Omega'} f\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega'} g_1\, \mathrm{d}y - g_2\, \mathrm{d}x$$

Demostración. 1) Si suponemos que existe (x_0, y_0) en el interior de $\bar{\Omega}$ tal que tenemos que $f(x_0, y_0) \neq 0$, por continuidad $f(x, y)$ será del mismo signo que $f(x_0, y_0)$ en una vecindad $\bar{\Omega}' \subset \Omega$. Sea $(x_1, x_2) \times (y_1, y_2) \subset \bar{\Omega}'$ también vecindad de (x_0, y_0), definimos

$$h_1(x) = \begin{cases} exp(-1/(x-x_1)^2(x-x_2)^2) & \text{si} \quad x \in (x_1, x_2) \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (x_1, x_2) \end{cases}$$

$$h_2(y) = \begin{cases} exp(-1/(y-y_1)^2(y-y_2)^2) & \text{si} \quad y \in (y_1, y_2) \\ 0 & \text{si} \quad y \notin (y_1, y_2) \end{cases}$$

y sea $h(x, y) = h_1(x)\, h_2(y)$ con lo cual $h(x, y) \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ positiva en $(x_1, x_2) \times (y_1, y_2)$. Por lo tanto:

$$\iint_\Omega f(x,y)h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

tiene el signo de $f(x_0, y_0)$, por lo tanto tenemos una contradicción. $f(x, y)$ debe ser 0 en el interior de Ω y por continuidad también lo es en su frontera.

2) Usando el hecho que g_1 y g_2 son C^1 tenemos:

$$g_1\frac{\partial h}{\partial x} + g_2\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(g_1\, h) + \frac{\partial}{\partial y}(g_2\, h) - \frac{\partial g_1}{\partial x}h - \frac{\partial g_2}{\partial y}h$$

de lo cual tenemos que

$$\begin{aligned} &\iint_\Omega \left(fh + g_1\frac{\partial h}{\partial x} + g_2\frac{\partial h}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_\Omega \left[\left(f - \frac{\partial g_1}{\partial x} - \frac{\partial g_2}{\partial y}\right)h + \frac{\partial}{\partial x}(g_1\, h) + \frac{\partial}{\partial y}(g_2\, h)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_\Omega \left(f - \frac{\partial g_1}{\partial x} - \frac{\partial g_2}{\partial y}\right)h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} h\,(g_1, g_2)\cdot n\,\mathrm{d}s = 0 \end{aligned}$$

usando el hecho que $h(x, y) = 0$ en $\partial\Omega$ y (1) se sigue el resultado.

3) Aquí es suficiente con probar el resultado cuando Ω' es un ractángulo $[a, b]\times[c, d]$, ya que un dominio general puede ser cubierto por rectángulos de esa forma.
Sea

$$\begin{aligned} A(x,y) &= \int_c^y \int_a^x f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \\ B(x,y) &= \int_c^y g_1(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta \\ C(x,y) &= \int_a^x g_2(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Tomemos $h(x,y) = v(x)\,w(y)$ con v en $C_0^\infty[a,b]$, w en $C_0^\infty[c,d]$. Tenemos entonces

$$\int_c^d \int_a^b \left(fh + g_1 \frac{\partial h}{\partial x} + g_2 \frac{\partial h}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_a^b \left(\frac{\partial A}{\partial x \partial y} vw + \frac{\partial B}{\partial y} v'w + \frac{\partial C}{\partial x} vw' \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_c^d \left(\int_a^b \left[-\frac{\partial A}{\partial x} v - Bv' + \frac{\partial C}{\partial x} v \right] \mathrm{d}x \right) w'(y)\,\mathrm{d}y = 0$$

usando el hecho que $w(c) = w(d) = 0$ e integrando por partes en y. Por el lema 1.6.3 tenemos que

$$\int_a^b \left[\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x} \right) v - Bv' \right] \mathrm{d}x = constante.$$

Integrando por partes y evaluando la constante en $y = c$, $y = d$:

$$\int_a^b ((A - B - C)|_{y=d} - (A - B - C)|_{y=c}) v'(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

para todo v en $C_0^\infty[a,b]$. Por el lema 1.6.3:

$$(A - B - C)|_{y=d} - (A - B - C)|_{y=c} = constante$$

en x. Evaluando esta expresión en $x = a$ y $x = b$:

$$A(b,d) - B(b,d) - C(b,d) + C(b,c) = -B(a,d).$$

Expresando cada uno de esos términos como integral, tenemos el resultado. $\mathcal{Q.E.D.}$

1.6.8. Nota

Este lema nos será muy útil en adelante, en particular el inciso (2) cuyo resultado se extiende fácilmente a más variables. Observemos que en la prueba de (2) en realidad no se necesitá usar más que continuidad en primeras derivadas de h, por lo cual si queremos que el resultado sea válido para $h(x,y) \in C_0^k(\bar{\Omega})$ con $k \geq 0$, solo basta modificar la prueba de (1) usando funciones h_1 y h_2 de la forma

$$h_1(x) = \begin{cases} ((x - x_1)(x - x_2))^{k+1} & \text{si} \quad x \in [x_1, x_2] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [x_1, x_2] \end{cases}$$

$$h_2(y) = \begin{cases} ((y - y_1)(y - y_2))^{k+1} & \text{si} \quad y \in [y_1, y_2] \\ 0 & \text{si} \quad y \notin [y_1, y_2] \end{cases}$$

De esta forma, para un funcional como $J(y) = \int_a^b F\mathrm{d}x$ el "espacio natural" a usar será aquel que incluye continuidad de las derivadas exactamente del mismo orden que aquel de las derivadas de la variable dependiente y que aparecen en F, es decir si $F = F(x, y, y', ..., y^{(k)})$, de no indicarse lo contrario, el espacio donde se trabajará será C^k para la función F (un hecho que nunca se suele mencionar en física). En el caso del lema de Haar vemos que, para que los resultados (1) y (2) sean válidos, es "suficiente" con suponer que f es continua y h, g_1, g_2 son C^1 aunque no "necesario". Esto nos lleva a desear trabajar en un espacio "cómodo" (suficiente) para funcionales con varias variables independientes, es decir, para poder usar el teorema de la divergencia necesitamos que F sea C^{2k} con respecto a todos sus argumentos y donde k es el orden de la derivada máxima en las variables dependientes que aparece en F. Así, cuando se trate de un funcional con más de un parámetro, de no especificar el espacio en el que se trabaja se asumirá que $F \in C^{2k}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$ donde $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con $n+1$ la dimensión de los parámetros independientes y q el numero de variables dependientes junto con sus derivadas.

Obsérvese también que para los ejemplos y las demostraciones de los lemas anteriores no se usó ninguna condición de continuidad acerca de los argumentos que aparecen en F. Así, de no indicarse lo contrario, si F depende de derivadas de hasta orden k de y, asumiremos que y es $C^k[a,b]$, es decir, el espacio funcional "natural" para un funcional $J(y_1, ..., y_n)$ es $C^k[a,b]$ cuando se tiene dependencia en un sólo parámetro. Esta hipótesis se extiende de igual manera a funcionales que dependen de varias variables independientes aunque, nuevamente, el espacio "cómodo" (suficiente) para este tipo de problemas se sigue de la necesidad de que F sea C^{2k} para el uso del teorema de la divergencia y en consecuencia J será un funcional definido sobre el espacio de funciones C^{2k}. De hecho, de no indicarse un espacio diferente, asumiremos que éste es nuestro espacio de trabajo. Este uso de espacios quedará más claro en las secciones restantes del presente capítulo.

1.7. Ecuación de Euler-Lagrange

Sea

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, \mathrm{d}x$$

un funcional donde $F(x, y(x), y'(x))$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$ son continuas en $[a,b] \times \mathbb{R}^2$, $y \in C^1$, con norma $|\ \ |_1$ y que satisface las condiciones $y(a) = A,\ y(b) = B$.

Suponemos que y_0 es un extremo local de $J(y)$, entonces podemos escribir $y(x) = y_0(x) + h(x)$, con $h(a) = h(b) = 0$, para un vecindad de y_0 y estudiar el funcional

$$I(h) = \int_a^b F(x, y_0(x) + h(x), y_0'(x) + h'(x))\, \mathrm{d}x$$

sobre $C^1[a,b] \bigcap C_0[a,b]$ con norma $|\ \ |_1$.

Así tenemos que 0 es un extremo local de $I(h)$ y por lo tanto su derivada de Fréchet debe de anularse en este punto, (por el ejemplo 1.3.2, y el teorema 1.5.2), es decir:

$$DI(0)h = \int_a^b \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} F(x, y_0, y_0') \right) h + \left(\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y_0, y_0') \right) h' \right] \mathrm{d}x = 0$$

para todo h en $C^1[a,b] \bigcap C_0[a,b]$

1.7.1. **Teorema** (Ecuación de Euler-Lagrange)

Sea y_0 un *punto crítico* del funcional

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x$$

es decir:

1) $\frac{\partial}{\partial y} F(x, y_0 + th, y_0' + th')$, $\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y_0 + th, y_0' + th')$ son continuas en (a, b) para todo t pequeño y h en $C_0^\infty[a, b]$, con $|h|_1 = 1$, y

2)

$$D_h(J(y))|_{y_0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\, h + \frac{\partial F}{\partial y'}\, h' \right) \mathrm{d}x = 0$$

para toda h en $C_0^\infty[a, b]$.

Entonces:

$$\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y_0, y_0') \quad \text{es} \quad C^1 \quad \text{en} \quad (a, b) \quad \text{y}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y_0, y_0') \right) = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y_0, y_0').$$

Demostración. Por el lema 1.6.4 tomando como $f(x) = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y_0(x), y_0'(x))$, $g(x) = \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y_0(x), y_0'(x))$ tenemos que $\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y_0, y_0')$ es C^1 y su derivada es $\frac{\partial}{\partial y} F(x, y_0, y_0')$, notando que no hay problemas en los límites de integración. $\mathcal{Q.E.D.}$

1.7.2. **Nota**

En mecánica clásica la función F se conoce como Lagrangiano y se suele denotar por la letra L cuando sólo depende de una variable independiente, cuando se trata de varias invariables dependientes se denomina densidad Lagrangiana, la cual se denota por $\mathfrak{L}$.

Por simplicidad de notación es conveniente definir la ecuación de Euler-Lagrange en forma de operador aplicado a F. Definimos el operador $\mathfrak{EL}_y$ con parámetro x actuando sobre F como

$$\mathfrak{EL}_y(F)(x) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial}{\partial y'} F \right) - \frac{\partial}{\partial y} F$$

y desde luego cuando el funcional J tiene un extremo, la función y_0 que lo extremiza cumple con $\mathfrak{EL}_{y_0}(F)(x) = 0$. Cuando se trate de un Lagrangiano que depende de derivadas de orden mayor a uno la definición de este operador se extiende de manera tal que $\mathfrak{EL}_y(F)(x) = 0$ siga siendo la ecuacíon que cumpla que $DJ(y)h = 0$.

1.8. Integral Primera

Sea $J(y)$ un funcional en el que F no depende de x, es decir

$$J(y) = \int_a^b F(y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x.$$

Si no nos preocupamos por la diferenciabilidad de F y la de sus argumentos la ecuación de Euler-Lagrange puede escribirse como:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial}{\partial y'}F(y, y')\right) = \frac{\partial}{\partial y}F(y, y').$$

Pero

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(y, y')\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y}F(y, y')\right) y' + \left(\frac{\partial}{\partial y'}F(y, y')\right) y''$$

y si hubiera dependencia explícita de F en x solo se sumaría $\frac{\partial F}{\partial x}$.
Por lo tanto, multiplicando la ecuacion de Euler por y':

$$\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)' = y'\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)' + y''\frac{\partial F}{\partial y'} = y'\frac{\partial F}{\partial y} + y''\frac{\partial F}{\partial y'} = F'$$

de lo cual se puede ver que $F' - (y'\frac{\partial F}{\partial y'})' = 0$, es decir, $F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \textit{constante}$. Si se considera dependencia de F en x este resultado solo se modifica como

$$\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)' = \frac{\partial F}{\partial x}$$

Para que este argumento funcione se ha tenido que suponer que y, F son C^2; esto no necesariamente sucede con las funciones que se usan en física, nos gustaría relajar tales condiciones. En efecto, se puede si y_0 es un extremo local de un funcional, es decir cuando se cumple la ecuación de Euler-Lagrange. El siguiente teorema lo muestra:

1.8.1. **Teorema** (Segunda ecuación de Euler)

Sea y_0 un extremo del funcional

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x$$

con $y(a) = A, y(b) = B$, $F \in C^1$ en $[a, b] \times \mathbb{R}^2$. Entonces

$$F(x, y_0(x), y_0'(x)) - y_0'(x)\frac{\partial}{\partial y'}F(x, y_0(x), y_0'(x))$$

es C^1, con derivada $\frac{\partial}{\partial x}F(x, y_0(x), y_0'(x))$.
En particular si F no depende explícitamente de x, entonces $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ y

$$F - y_0'\frac{\partial F}{\partial y'} = \textit{constante}$$

Demostración. Sea ε tan pequeño que bajo la transformación:

$$x = \xi + \varepsilon\eta$$
$$y = \eta$$

la curva $y = y_0(x)$ se puede parametrizar por ξ y dar la curva $\eta = \eta_0(\xi)$ para ξ entre $\alpha = a - \varepsilon A$ y $\beta = b - \varepsilon B$.
Así mismo cualquier curva $y = y(x)$ vecina de $y_0(x)$ dará una curva $\eta = \eta(\xi)$ e inviersamente, con

$$\eta(\xi) = y(\xi + \varepsilon\eta(\xi)),\ \eta'(\xi) = y'(\xi + \varepsilon\eta(\xi))(1 + \varepsilon\eta'(\xi)),$$

es decir $y'(x) = \eta'/(1 + \varepsilon\eta')$.
Ahora, bajo el cambio de variables $x = \xi + \varepsilon\,\eta(\xi)$, tenemos

$$\begin{aligned} J(y) &= \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\alpha^\beta F\left(\xi + \varepsilon\,\eta(\xi), \eta(\xi), \frac{\eta'(\xi)}{(1 + \varepsilon\eta'(\xi))}\right)(1 + \varepsilon\,\eta'(\xi))\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_\alpha^\beta \tilde{F}(\xi, \eta, \eta')\,\mathrm{d}\xi = \tilde{J}(\eta), \end{aligned}$$

de lo cual, si $J(y)$ tiene un extremo local en y_0 para la clase de y en $C^1[a, b]$ con $y(a) = A,\ y(b) = B$, entonces $\tilde{J}(\eta)$ tendrá un extremo local en η_0 para la clase de η en $C^1[\alpha, \beta]$ con $\eta(\alpha) = A, \eta(\beta) = B$. Por lo tanto $\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\eta'}$, tiene como derivada con respecto a ξ a $\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\eta}$ (teorema 1.7.1). Pero también tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{F}}{\partial\eta} &= \left[\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}F\left(\xi + \varepsilon\,\eta_0(\xi), \eta_0(\xi), \frac{\eta_0'}{(1 + \varepsilon\eta_0'(\xi))}\right) + \frac{\partial F}{\partial y}\right](1 + \varepsilon\,\eta_0'(\xi)) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\eta'}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}(1 + \varepsilon\,\eta_0')^{-1} + \varepsilon F\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\eta'}\right)(1 + \varepsilon\,\eta_0'(\xi)). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}F(x, y_0, y_0') &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}(1 - \varepsilon\,\eta_0'(1 + \varepsilon\,\eta_0')^{-1}) + \varepsilon F\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} - \varepsilon\,y_0'\frac{\partial F}{\partial y'} + \varepsilon F\right). \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial F}{\partial y'}$ tiene como derivada a $\frac{\partial F}{\partial y}$, podemos obtener el resultado

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x, y_0, y_0') = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F - y_0'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

Q.E.D.

1.9. Varias Funciones

Suponemos ahora que el funcional depende de varias funciones $y_1, ..., y_n$ con y_i en $C^1[a,b]$, $y_i(a) = A_i, y_i(b) = B_i$,

$$J(y_1, ..., y_n) = \int_a^b F(x, y_1(x), ..., y_n(x), y_1'(x), ..., y_n'(x))\,\mathrm{d}x$$

con F en $C^1([a,b] \times \mathbb{R}^{2n})$. Veremos que el problema no es tan complicado.

Obtenemos su derivada de Gâteaux (o de Fréchet) del funcional (ver ejemplo 1.3.4, el cual sólo se extiende de 2 variables a n)

$$D_{(h_1,...,h_n)}J(y_1, ..., y_n) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\, h_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'}\, h_i'\right) \mathrm{d}x$$

donde h_i pertenece a $C^1[a,b] \bigcap C_0[a,b]$, ó a $C_0^\infty[a,b]$ si no hay problemas de continuidad en a y b, y hay una suma implícita en los índices repetidos (notación de Einstein), notación que por comodidad se usará en adelante; si algún caso precisa de no sumarse, se dirá explícitamente.

Si $(y_1, ..., y_n)$ es un punto crítico de $J(y_1, ..., y_n)$ entonces podemos tomar variaciones $(h_1, ..., h_n)$ de la forma $(0, ..., 0, h_j, 0, ..., 0)$. En este caso la derivada de Gâteaux se reduce a:

$$D_{(0,...,0,h_j,0,...,0)}J(y_1, ..., y_n) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\, h_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'}\, h_i'\right) \mathrm{d}x = 0$$

para todo h_j en $C_0^\infty[a,b]$, donde solamente sobrevive el término $i = j$. Así, por la nota 1.6.5 se puede deducir el siguiente

1.9.1. Teorema

1) En un punto crítico de $J(y_1, ..., y_n)$, $\frac{\partial F}{\partial y_i'}$ es C^1 y satisface las ecuaciónes de Euler:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial}{\partial y_i'} F(x, y_1(x), ..., y_n(x), y_1'(x), ..., y_n'(x))\right) = \frac{\partial}{\partial y_i} F(x, ..., y_n'(x)),$$

para $i = 1, ..., n$.

2) En un extremo local, si F no depende explícitamente de x, entonces:

$$F(y_1(x), ..., y_n'(x)) - y_i' \frac{\partial}{\partial y_i'} F(y_1(x), ..., y_n(x)) = c$$

para alguna constante c.

1.10. Varias Variables

Ahora suponemos que el funcional depende de varias variables independientes, por ejemplo

$$J(\phi) = \iint_\Omega F\left(x, y, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio acotado para el cual el teorema de la divergencia es válido. En este caso se pide que ϕ esté en $C^1(\bar{\Omega})$ con norma $|\ \ |_1$, ϕ está dada sobre $\partial\Omega$ y F es C^1. En tales condiciones, como vimos en el ejemplo 1.3.5, $J(\phi)$ tiene una diferencial de Fréchet:

$$DJ(\phi)h = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F}{\partial \phi} h + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial h}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

donde $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ y los argumentos de $\frac{\partial F}{\partial \phi}$, $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$ son $(x, y, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y})$, para toda h en $C_0^\infty(\bar{\Omega})$.

Escrito de manera compacta usando la notación usual en relatividad $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_{,1} = \partial_1 \phi$, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi_{,2} = \partial_2 \phi$,

$$DJ(\phi)h = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F}{\partial \phi} h + \frac{\partial F}{\partial \phi_{,i}} h_{,i}\right) \mathrm{d}X$$

con $i = 1, 2$ y $\mathrm{d}X$ en este caso representa $\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ y en general el elemento de volumen de la región de integración (es la $n - forma$ con n la dimensión del espacio de las variables independientes). En algunos casos se usará de manera indistinta $(x, y, z, ...) = (x^1, x^2, x^3, ...)$, y la variable x^0 estará reservada para denotar el tiempo t, en cuyo caso la dimensión de las variables independientes será n+1.

1.10.1. Definición

Sea $\mathfrak{L}$ una función C^1 en $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{kn}$, sus argumentos incluyen las variables independientes y varibles dependientes, es decir

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}\left(x^1, ..., x^n, \psi^1, ..., \psi^k, \frac{\partial \psi^1}{\partial x^1}, \frac{\partial \psi^1}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial \psi^k}{\partial x^{n-1}}, \frac{\partial \psi^k}{\partial x^n}\right)$$

donde las variables dependientes son $\psi^i = \psi^i(X)$, C^2 en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Se introduce el concepto de derivada parcial con respecto a las variables independientes cuando las funciones dependientes han sido supuestas a haber sido sustituidas como funciones de las variables independientes, es decir, se define el operador $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}x^i}$ actuando sobre $\mathfrak{L}$ como

$$\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{L}}{\mathfrak{D}x^i} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi^j} \frac{\partial \psi^j}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \frac{\partial \psi^j}{\partial x^l}} \frac{\partial^2 \psi^j}{\partial x^i \partial x^l}.$$

Claramente este operador es un caso particular de la formula ordinaria del cálculo elemental para la diferenciación implícita de una función y puede ser extendido a derivadas de orden superior. En los siguientes capítulos siguiendo la notación estandar en Relatividad, este operador, cuando no haya confusión, también se denotará por ∂_i ó $,_i$. Cuando se quiera diferenciar de una derivada parcial explícita del Lagrangiano o de alguna otra función en cuyos argumentos aparezcan variables dependientes además de las independientes, esta se escribirá completa.

Regresando al funcional anterior, en un punto crítico la diferencial de Fréchet vale 0 y, sea usando las consideraciones del lema de Haar 1.6.7, o sea suponiendo que ϕ es C^2 así como F, tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_{,i}} h_{,i} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}x^i}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi_{,i}} h\right) - h \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}x^i}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi_{,i}}\right)$$

con lo cual entonces la diferencial de Fréchet se convierte en

$$DJ(\phi)h = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}x^i}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi_{,i}}\right)\right) h + \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}x^i}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi_{,i}} h\right)\right] \mathrm{d}X = 0$$

y usando el teorema de la divergencia tenemos

$$\iint_\Omega \left[\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}x^i}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi_{,i}}\right)\right] h\,\mathrm{d}X + \int_{\partial\Omega} h\left(\frac{\partial F}{\partial \phi_{,1}}, \frac{\partial F}{\partial \phi_{,2}}\right) \cdot n\,\mathrm{d}s = 0$$

Ahora, como $h = 0$ en $\partial\Omega$, podemos concluir, a partir del lema 1.6.7:

1.10.2. Teorema

Sea $J(\phi)$ un funcional de la forma

$$J(\phi) = \iint_\Omega F\left(X, \phi(X), \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right) \mathrm{d}X$$

y suponemos que tiene un punto crítico ϕ, con ϕ y F en C^2, ϕ dado en $\partial\Omega$. Entonces la ecuación de Euler es:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}x^i}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi_{,i}}\right) = 0 \text{ en } \Omega.$$

1.11. Derivadas de Orden más Alto

En algunos problemas, el funcional depende de derivadas de orden más alto, por ejemplo:

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), y''(x))dx$$

Como se mencionó anteriormente, el espacio de trabajo en este caso es un subconjunto de $C^2[a,b]$ y la norma asociada a este espacio es

$$|f|_2 = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Supondremos que $y(a) = A$, $y(b) = B$, $y'(a) = \alpha$, $y'(b) = \beta$ son dadas. Si F es C^1 en $[a,b]\times\mathbb{R}^3$, y_0 es el candidato a extremo o a punto crítico, todo y se escribe como

$$y(x) = y_0(x) + h(x)$$

con $h(x)$ en $C^2[a,b]\cap C_0^1[a,b]$. Por lo tanto

$$J(y_0+h) - J(y_0) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\, h + \frac{\partial F}{\partial y'}\, h' + \frac{\partial F}{\partial y''}\, h''\right) dx + o(|h|_2)$$

En un punto crítico se tiene

$$DJ(y_0)h = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\, h + \frac{\partial F}{\partial y'}\, h' + \frac{\partial F}{\partial y''}\, h''\right) dx = 0$$

y esto es para todo h en $C^2[a,b]\cap C_0^1[a,b]$. Si hay problemas de integrabilidad en los extremos se tiene que reducir el dominio de h a un subconjunto de $C_0^\infty[a,b]$.

Por el lema 1.6.6 tendremos el siguiente:

1.11.1. Teorema

En un punto crítico $\frac{\partial F}{\partial y''}$ es C^1, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) - \frac{\partial F}{\partial y'}$ es C^1 y:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) - \frac{\partial F}{\partial y'}\right] = -\frac{\partial F}{\partial y}$$

es la ecuación de Euler-Lagrange para un funcional que depende de segundas derivadas. En particular, si el punto crítico es C^4 y F es C^3, la ecuación de Euler-Lagrange se escribe como:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)'' - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)' + \frac{\partial F}{\partial y} \equiv \mathfrak{EL}_y(F)(x) = 0 \tag{1.2}$$

1.11.2. Nota

Para el caso particular del teorema anterior en que F es C^3 y y_0 es C^4 podemos ver que

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dx} &= y'''\frac{\partial F}{\partial y''} + y''\frac{\partial F}{\partial y'} + y'\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x} \\
\frac{d}{dx}\left(y''\frac{\partial F}{\partial y''}\right) &= y''\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)' + y'''\frac{\partial F}{\partial y''} \\
\frac{d}{dx}y'\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)' &= y''\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)' + y'\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)'' \\
\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) &= y''\frac{\partial F}{\partial y'} + y'\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)'
\end{aligned}$$

de esto se ve que

$$\frac{d}{dx}\left(y''\frac{\partial F}{\partial y''} - y'\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)' + y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = y'''\frac{\partial F}{\partial y''} + y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\left(\frac{\partial F}{\partial y''} - \frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

y así para este caso tenemos que, con la ayuda de **??** la segunda ecuación de Euler es

$$\frac{d}{dx}\left[y''\frac{\partial F}{\partial y''} - y'\left(\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)' + \frac{\partial F}{\partial y'}\right) - F\right] = -\frac{\partial F}{\partial x} \tag{1.3}$$

Las condiciones bastante restrictivas de continuidad pueden ser relajadas a solo C^2 haciendo una prueba formal un tanto tediosa similar a la realizada para demostrar el teorema 1.8.1. Dado el objetivo de utilizar estos resultados en varias variables independientes y la necesidad de usar el teorema de la divergencia, no será necesaria una prueba donde y es solo C^2, de hecho, en el siguiente capítulo se hará una extensión de esta misma ecuación 1.3 a varias variables para poder incluír al escalar de curvatura en el Lagrangiano, el cual dependerá de segundas derivadas de la métrica.

1.12. Cambio de Varias Variables Independientes

Sea

$$J(u) = \int_\Omega \cdots \int F(x^1, ..., x^n, u, \partial_1 u, ..., \partial_n u)\, \mathrm{d}x^1, ..., \mathrm{d}x^n$$

un funcional definido para $u(x^1, ..., x^n)$ con $(x^1, ..., x^n)$ en Ω, un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$. Suponemos que F y u son C^2 para poder usar el teorema de la divergencia. Si hacemos un cambio de variables

$$(x^1, ..., x^n) \longrightarrow (\xi^1, ..., \xi^n), \quad \Omega \longrightarrow \Omega', \quad X \longrightarrow \xi$$

entonces

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_{\Omega} F(X, u, \partial_i u)\,\mathrm{d}X \\ &= \int_{\Omega'} \dots \int F\left(X(\xi), u, \partial_i \xi^j \frac{\partial u}{\partial \xi^j}\right) \left|\frac{D(x^1, \dots, x^n)}{D(\xi^1, \dots, \xi^n)}\right| \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\Omega'} \dots \int H\,\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

Haciendo $w_i = \frac{\partial u}{\partial \xi^i}$, la diferencial de Fréchet se calcula como

$$\begin{aligned} J(u+h) - J(u) &= \int_{\Omega} \dots \int \left(\frac{\partial F}{\partial u} h + \frac{\partial F}{\partial u_{,i}} h_{,i}\right) \mathrm{d}X + \dots \\ &= \int_{\Omega'} \dots \int \left(\frac{\partial H}{\partial u} h + \frac{\partial H}{\partial w_i} \frac{\partial h}{\partial \xi^i}\right) \mathrm{d}\xi + \dots \end{aligned}$$

Podemos identificar las partes lineales y usar el teorema de la divergencia en cada una, suponiendo que $h = 0$ en $\partial\Omega$ (y por lo tanto en $\partial\Omega'$, si pedimos por ejemplo que $h \in C_0^\infty(\Omega)$).

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \dots \int \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}x^i}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{,i}}\right)\right] h\,\mathrm{d}X = \int_{\Omega'} \dots \int \left[\frac{\partial H}{\partial u} - \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}\xi^i}\left(\frac{\partial H}{\partial w_i}\right)\right] h\,\mathrm{d}\xi \\ = \; & \int_{\Omega'} \dots \int \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}x^i}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{,i}}\right)\right] h \left|\frac{D(x^1, \dots, x^n)}{D(\xi^1, \dots, \xi^n)}\right| \mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{1.4}$$

(cambiando de variables), para todo h en $C_0^\infty(\Omega')$. Por el lema de Haar 1.6.7

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}x^i}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{,i}}\right)\right] \left|\frac{D(x^1, \dots, x^n)}{D(\xi^1, \dots, \xi^n)}\right| = \frac{\partial H}{\partial u} - \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}\xi^i}\left(\frac{\partial H}{\partial w_i}\right)$$

con lo cual tenemos el siguiente teorema:

1.12.1. Teorema

Bajo el cambio de variables $(x^1, \dots, x^n) \longrightarrow (\xi^1, \dots, \xi^n)$ tenemos:

$$\mathfrak{EL}_u(F)(x^1, \dots, x^n) \frac{D(x^1, \dots, x^n)}{D(\xi^1, \dots, \xi^n)} = \mathfrak{EL}_u\left(F \frac{D(x^1, \dots, x^n)}{D(\xi^1, \dots, \xi^n)}\right)(\xi^1, \dots, \xi^n)$$

En particular los puntos críticos no dependen de las variables.

Obsérvese que se ha quitado el valor absoluto en el Jacobiano puesto que éste cambia de signo de igual manera en ambos lados.

1.13. Regla de la cadena

Si para el funcional
$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x$$
cambiamos no solamente la variable independiente x, pero también la función $y(x)$, es decir tenemos el mapeo
$$(x, y) \longrightarrow (u, v)$$
en este caso la curva $y = y(x)$ da una curva en el espacio (u, v) pero no necesariamente de la forma $v = v(u)$, como es el caso cuando solo se transforma a x. Evitamos el papel especial de la variable x como parámetro pasando primero a otro completamente independiente, t por ejemplo, en $[0, 1]$. La curva $(x(t), y(t))$ dará entonces una curva parametrizada como $(u(t), v(t)) \equiv (u(x(t), y(t)), v(x(t), y(t))$ e inversamente. Se tiene entonces que $y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$. Denotando por $\cdot$ la derivada respecto al tiempo por simplicidad
$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y_u\dot{u} + y_v\dot{v}}{x_u\dot{u} + x_v\dot{v}}$$
así se tiene que
$$\begin{aligned} J(x, y) &= \int_0^1 F(x(t), y(t), \dot{y}/\dot{x})\dot{x}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 F\left(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), \frac{y_u\dot{u} + y_v\dot{v}}{x_u\dot{u} + x_v\dot{v}}\right)(x_u\dot{u} + x_v\dot{v})\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 G(u, v, \dot{u}, \dot{v})\,\mathrm{d}t = J_1(u, v) \end{aligned}$$
es decir, tenemos la composición de operadores:
$$\begin{array}{ccccc} C^1[a,b] \times C^1[a,b] & \xrightarrow{I} & C^1[a,b] \times C^1[a,b] & \xrightarrow{J} & \mathbb{R} \\ (u(t), v(t)) & \longmapsto & (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t))) \longmapsto J(x, y) & & \end{array}$$
donde suponemos que la tranformación $(u, v) \longrightarrow (x, y)$ es C^1.

Tenemos entonces
$$J_1(u, v) = J(I(u, v)) = J \circ I(u, v)$$
y nos interesa su derivada de Fréchet.

1.13.1. **Teorema** (Regla de la cadena)

Sean X, Y, Z tres espacios normados, I, J dos operadores (no lineales en general)
$$X \xrightarrow{I} Y \xrightarrow{J} Z.$$

cuyas derivadas de Fréchet existen. Entonces $J \circ I$ tiene una derivada de Fréchet con

$$D(J \circ I)(\varphi)\, h = DJ(I(\varphi) DI(\varphi)\, h$$

para toda h en X, donde las derivadas de Fréchet son operadores lineales.

Demostración. Recordemos que

$$J(y+k) - J(y) = DJ(y)k + o(\|k\|_Y)$$

donde $DJ(y) : Y \longrightarrow Z$ es un operador lineal continuo. Además

$$I(\varphi+h) - I(\varphi) = DI(\varphi)h + o(\|h\|_X)$$

donde $DI(\varphi) : X \longrightarrow Y$ también es un operador lineal continuo. Entonces

$$\begin{aligned} J(I(\varphi+h)) - J(I(\varphi)) &= DJ(I(\varphi+h) - I(\varphi)) + o(\|I(\varphi+h) - I(\varphi)\|_Y) \\ = DJ(I(\varphi))DI(\varphi)h &+ DJ(I(\varphi))o(\|h\|_X) + o(\|DI(\varphi)h\|_Y + \|o(\|h\|_X)\|_Y). \end{aligned}$$

Como los operadores y residuos son continuos:

$$J(I(\varphi+h)) - J(I(\varphi)) = DJ(I(\varphi))DI(\varphi)h + o(\|h\|_X).$$

Por la unicidad de la derivada de Fréchet, proposición 1.4.1, el resultado queda demostrado. $\mathcal{Q.E.D}$.

Este resultado es muy útil en los casos cuando el funcional depende en realidad de curvas geométricas más que de funciones. Ejemplos donde se aplica este resultado son: Dar una curva cerrada en el plano de longitud l que contenga la mayor área posible, Lagrangianos donde se incluye un potencial central, etc.

El contar con herramientas matemáticas como el cambio de varias variables independientes y la regla de la cadena resultan particularmente útiles en el tratamiento de Lagrangianos definidos sobre variedades diferenciables. Puesto que un atlas relaciona la variedad M de dimensión m con $\mathbb{R}^m$, de manera inmediata sale la necesidad de hacer variaciones las cuales no dependan de una carta (atlas) particular. Así, no habrá ningún misterio ni confusión al aplicar nuestros resultados hasta aquí obtenidos a problemas sobre una variedad diferenciable de orden r puesto que con la aplicación de cualquier carta (diferenciable de orden r) ya estaremos trabajando en $\mathbb{R}^m$ con la única restricción que el orden r sea mayor o igual a $2k$ con k, como se ha acostumbrado, el orden de las derivadas de las cuales depende el Lagrangiano. El Lagrangiano tendrá como variables dependientes a campos tensoriales los cuales también tienen la propiedad de no depeder de las coordenadas que se usan. Así el usar un conjunto de coordenadas particular “el cual conozcamos bien (o más nos convenga)” no provocará ninguna pérdida de generalidad de nuestros resultados.

1.13.2. Observación

Aunque hasta aquí hemos sido cuidadosos en especificar adecuadamente los espacios requeridos en nuestros funcionales y en quitar las restricciones mayormente posibles a nuestras derivadas funcionales, estos resultados son aún inútiles para ciertos problemas en física, que normalmente se suelen pasar por alto. Por ejemplo pensemos en el principio de Fermat: un haz de luz siguiendo la trayectoria más corta entre dos puntos, cuando se tiene una interfaz o un espejo, la trayectoria es continua pero no diferenciable y no cumple con los requerimentos del tratamiento anterior. Otro ejemplo sería una pompa de jabon restringida a una curva cerrada y que además pasa por un punto fijo, externo a dicha curva. En estos problemas las soluciones requeridas estan sujetas a nuestra experiencia y la herramienta matemática debe de ajustarse a ella, al requisito de sólo soluciones continuas. Pero el problema puede ser mucho más grave, por ejemplo, soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein como la de Schwarzschild o la de Kerr que tienen singularidades las cuales, como se ha comprobado [11], no dependen de la carta en la que se trabaje sino que es una singularidad misma de la métrica (la solución). Este serio problema general aún no es completamente tratado, pero sí cuando las soluciones que uno busca son necesariamente continuas, vease [7], condición de Weierstrass. En los casos en que la variedad posee una singularidad es necesario remover de ella una vencidad de la singularidad, y trabajar en la nueva variedad resultante.

1.14. Teorema de Noether

Consideremos el funcional

$$J(y_1, ..., y_n) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, y_1, ..., y_n, \dot{y}_1, ..., \dot{y}_n)\,\mathrm{d}t.$$

Supongamos que hay una familia de aplicaciones, parametrizada por ϵ, de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$

$$(t, y_i, z_i) \longmapsto (\tau_\epsilon, Y_\epsilon) = (\tau_\epsilon(t, y_i, z_i), Y_{j\epsilon}(t, y_i, z_i))$$

tal que $(\tau_\epsilon, Y_\epsilon)$ sean C^2 (tambien en ϵ) y

$$\tau_0 = t, \quad Y_0 = y$$

Esto implica que para ϵ pequeño podemos invertir parcialmente de la forma

$$t = t(\tau_\epsilon, Y_\epsilon, z), \quad y = y(\tau_\epsilon, Y_\epsilon, z). \tag{1.5}$$

Si tenemos $y_i = y_i(t),\ z_i = \dot{y}_i(t)$, entonces $\tau_\epsilon = \tau_\epsilon(t, y_i(t), \dot{y}_i(t)) = \tau_\epsilon(t)$, con $\tau_0 = t$, y podemos expresar, para ϵ pequeño, $t = t(\tau_\epsilon),\ Y_\epsilon(t, y_i(t), \dot{y}_i(t)) = Y_\epsilon(t) = Y_\epsilon(t(\tau_\epsilon))$ a través de la trasformación de $t = t(\tau_\epsilon)$.

1.14.1. Definición

Diremos que el funcional J es **invariante** bajo la familia de aplicaciones 1.5 si:

$$\begin{aligned} J_\epsilon(Y_{1\epsilon},...,Y_{n\epsilon}) &= \int_{\tau_{0\epsilon}}^{\tau_{1\epsilon}} F\left(\tau_\epsilon, Y_{i\epsilon}(t(\tau_\epsilon)), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_\epsilon} Y_{i\epsilon}(t(\tau_\epsilon))\right) \mathrm{d}\tau_\epsilon \\ &= J(y_1,...,y_n) \quad \text{para todo} \quad y_1,...,y_n,t_0,t_1. \end{aligned}$$

Observación No se trata de un cambio de variables sino de una sustitución de t por τ_ϵ (incluída en los argumentos de las funciones y en las derivadas) y de y_i por $Y_{i\epsilon}$.

Si se cumple esta condición, diremos que tal aplicación es una simetría de Noether del sistema descrito por la función F.

De manera general podemos relajar la condición de que $J_\epsilon(Y_{1\epsilon},...,Y_{n\epsilon}) - J(y_1,...,y_n)$ sea identicamente 0 a que esta diferencia sea una contante, la cual no afectará la derivada funcional, constante que puede verse como

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\Omega(t,y_1,...,y_n)dt$$

donde Ω es una función en el mismo espacio de la F. Por sustitución directa puede demostrarse algebraicamente que $[\mathfrak{C}\mathfrak{L}_y]_i(\Omega) = 0$, es decir, tampoco modifica las ecuaciones de Euler-Lagrange.

1.14.2. Ejemplo

Si consideramos la familia $\tau_\epsilon = t+\epsilon,\ Y_{i\epsilon} = y_i$ entonces $t = \tau_\epsilon - \epsilon,\ y_i(t) = y_i(\tau_\epsilon - \epsilon) = Y_{i\epsilon}(t(\tau_\epsilon))$.

$$J_\epsilon = \int_{t_0+\epsilon}^{t_1+\epsilon} F(\tau_\epsilon, y_i(\tau_\epsilon - \epsilon), \dot{y}_i(\tau_\epsilon - \epsilon))\, \mathrm{d}\tau_\epsilon.$$

Al hacer el cambio de variables $t = \tau_\epsilon - \epsilon$ tenemos:

$$J_\epsilon = \int_{t_0}^{t_1} F(t+\epsilon, y_i(t), \dot{y}_i(t))\, \mathrm{d}t$$

el cual es invariante si F no depende explícitamente de t.

En general si hacemos el cambio de variables $\tau_\epsilon = \tau_\epsilon(t)$ tendremos $\mathrm{d}\tau_\epsilon = \frac{\mathrm{d}\tau_\epsilon}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t$ con $\tau_\epsilon = \tau_\epsilon(t, y_i(t), \dot{y}_i(t))$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_\epsilon} Y_{i\epsilon}(t(\tau_\epsilon)) = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau_\epsilon} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Y_{i\epsilon}(t, y_i(t), \dot{y}_i(t))$$

y por lo tanto

$$J_\epsilon(Y_{1\epsilon},...,Y_{n\epsilon}) = \int_{t_0}^{t_1} F\left(\tau_\epsilon(t), Y_{i\epsilon}(t, y_i(t), \dot{y}_i(t)), \frac{\mathrm{d}Y_{i\epsilon}}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau_\epsilon}\right) \frac{\mathrm{d}\tau_\epsilon}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t.$$

1.14.3. **Teorema** (Noether)

Si J_ϵ es invariante bajo la aplicación 1.5, entonces en un punto crítico de J_0 se tiene la primera integral:

$$\frac{\partial F}{\partial z_i}\frac{\partial Y_{i\epsilon}}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} + \left(F - \dot{y}_i\frac{\partial F}{\partial z_i}\right)\frac{\partial \tau_\epsilon}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} = \quad constante$$

Demostración. Como $J_\epsilon = J_0$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}J_\epsilon}{\mathrm{d}\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} = 0$$
$$= \int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial \tau_\epsilon}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial Y_{i\epsilon}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial \epsilon}\left(\frac{\mathrm{d}Y_{i\epsilon}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\tau_\epsilon}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}\right)\right)\frac{\mathrm{d}\tau_\epsilon}{\mathrm{d}t} + F\frac{\partial}{\partial \epsilon}\left(\frac{\mathrm{d}\tau_\epsilon}{\mathrm{d}t}\right)\right]_{\epsilon=0}\mathrm{d}t.$$

Recordemos que hay una suma implícita en cada par de $i's$. Ahora, como $\tau_0 = t$, $\frac{\mathrm{d}\tau_\epsilon}{\mathrm{d}t}\big|_{\epsilon=0} = 1$, $\frac{\mathrm{d}Y_{i\epsilon}}{\mathrm{d}t}\Big|_{\epsilon=0} = \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = \dot{y}_i$, tenemos entonces:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial \tau_\epsilon}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial Y_{i\epsilon}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial z_i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial Y_{i\epsilon}}{\partial \epsilon}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \tau_\epsilon}{\partial \epsilon}\right)\dot{y}_i\right) + F\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \tau_\epsilon}{\partial \epsilon}\right)\right]\mathrm{d}t$$

donde hemos usado el hecho que $\tau_\epsilon, Y_{i\epsilon}$ son C^2.

Notando que para $\epsilon = 0$ los argumentos de $\frac{\partial F}{\partial z_i}$ son $(t, y_i, \dot{y}_i)$, y por ser y_i un punto crítico podemos integrar por partes, ya que $\frac{\partial F}{\partial z_i}$ y $F - \dot{y}_i\frac{\partial F}{\partial z_i}$ son C^1 (primera y segunda ecuaciones de Euler) con derivadas $\frac{\partial F}{\partial y_i}$ y $\frac{\partial F}{\partial t}$ respectivamente:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial z_i}\frac{\partial Y_{i\epsilon}}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} + \left(F - \dot{y}_i\frac{\partial F}{\partial z_i}\right)\frac{\partial \tau_\epsilon}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}\right]_{t_0}^{t_1} = 0$$

como el resultado debe ser cierto para todo t_0 y t_1 obtenemos lo que deseamos. $\mathcal{Q.E.D.}$

Extender esta demostración a varias variables independientes no resulta inmediato pero puede consultarse [7] para el caso de dos dimensiones. Para el caso general de n variables independientes puede consultarse [9] donde se deduce la expresión correspondiente.

1.14.4. Conservación de la energía

Cuando se trata de un funcional que describe a un sistema físico, es decir una acción de la forma

$$S(q_1, ..., q_n) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n)\,\mathrm{d}t$$

donde L es cualquier función C^1 (Lagrangiano en Mecánica) con condiciones $q_i(t_0) = A_i, q_i(t_1) = B_i$, podemos definir la energía del sistema como

$$E(t, q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\dot{q}_i - L \tag{1.6}$$

Hay que tener en cuenta que esta definición no necesariamente corresponde estrictamente con la energía física del sistema, esta equivalencia se tiene sólo cuando la energía cinética es cuadrática y homogénea en las velocidades. De manera general a esta definición se le suele llamar la cantidad de Jacobi cuando se supone se han sustituído todos los argumentos en función de t, es decir $E = E(t)$. Si en el ejemplo 1.14.2 se aplica el teorema de Noether (Teorema 1.14.3) tenemos que

$$L - \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = constante$$

es decir, la energía se conserva.

Notemos que en este caso la conservación de la energía también es una consecuencia directa de la segunda ecuación de Euler. En otras palabras, si en un sistema sólo se busca la conservación de su energía basta con aplicar la segunda ecuación de Euler que se puede ampliar sin mucha complicación de un sólo parámetro a varios como se verá en el siguiente capítulo.

La utilidad del teorema de Noether recae en el hecho de que por cada simetría hay una cantidad conservada. Así por ejemplo si el Lagrangiano $L(t, q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n)$ no depende explícitamente de y_1 podemos hacer la transformación

$$\tau_\epsilon = t,\ Y_{1\epsilon} = y_1 + \epsilon,\ Y_{i\epsilon} = y_{i\epsilon},\ i \geq 2$$

y puede mostrarse fácilmente que el Lagrangiano es invariante ante esta familia de aplicaciones dando como resultado del teorema de Noether que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = constante\ sobre\ las\ soluciones\ de\ las\ ecuaciones\ de\ movimiento.$$

En este caso se dice que el "momento (lineal)" se conserva en la direción y_1. Hay que tener en cuenta que y_1 no necesariamente corresponde a una coordenada física ya que la formulación Lagrangiana se hace usando coordenadas generalizadas. Otro ejemplo sería un sistema cuyas funciones y_i en el Lagrangiano son invariantes bajo el grupo de rotaciones en tres dimensiones, es decir L es invariante bajo la transformación $Y_{i\epsilon} = A(\epsilon)y_i$ donde $A(\epsilon)$ es una familia de rotaciones en $\mathbb{R}^3$; en tal caso obtenemos el momento angular como la cantidad conservada.

1.14.5. Observación

A través del formalismo de este capítulo hemos llegado a un resultado muy importante y útil: Por cada simetría hay una cantidad conservada (una integral de movimiento) y viceversa. Su utilidad es clara puesto que por cada integral de movimiento que hay, una de las ecuaciónes de movimiento se reduce de segundo a primer orden, facilitando su estudio analítico y en el caso de haber las suficientes integrales de movimiento podemos conocer la trayectoria del sistema sin resolver siquiera una sola ecuación de movimiento como se hizo observar en la Introducción. Nos gustaría rescatar esta herramienta en el contexto de relatividad general, es decir, ayudarnos de las simetrías que posee un sistema que obedece un principio variacional, para facilitar el estudio de su comportamiento. El lograrlo resultaría en una gran ventaja debido a que las ecuaciones de campo de Einstein son muy complejas de resolver. La dificultad de la aplicación del teorema de Noether a este esquema radica en el hecho de que las densidades E y $\mathbf{P}$, densidades de energía y momento respectivamente, no están bien definidas, además de que en mecánica clásica estas cantidades están en términos de las velocidades mientras que para las variables análogas $g^{\alpha\beta}$ en relatividad general, podemos siempre hacer cero su primera derivada en cualquier punto. Ayudados por el manejo apropiado de unas cantidades llamadas pseudotensores podremos definir una energía gravitacional del sistema y con ello recuperar el formalismo de Noether. Estos pseudotensores permiten definir densidades de momento e inclusive de momento angular también. En particular, al final de este trabajo demostraremos que la energía total del sistema materia más gravedad siempre se conserva si todas su variables de campo son invariantes ante un vector de Killing de tipo temporal.

En el Capítulo 2 se definen tanto el tensor de energía-momento canónico $\mathfrak{t}_\beta{}^\alpha$ como el simétrico de Landau y Lifshitz $T^{\alpha\beta}$ obtenidos del Lagrangiano de materia, y se derivan las ecuaciones de campo de Einstein. Posteriormente se obtiene el pseudotensor de energía canónico del Lagrangiano gravitacional. También se definen otros tensores de energía-momento y pseudotensores de energía, y se estudian brevemente las relaciones entre ellos.

En el Capítulo 3, en una extesión inmediata del formalismo precendente, se deriva de una manera natural el operador de Noether, una generalización de los tensores y pseudotensores tratados en el capítulo 2. El uso adecuado de este operador nos permite formular el teorema de Noether en el contexto de espacios curvos asociado a la invariancia de la acción ante un arrastre de Lie dado por un vector ξ. Obtener cantidades conservadas específicas a partir de este teorema lleva a trabajar sistemas menos generales. En el Capítulo 4 esto se hace para la energía y se da como ejemplo a un sistema consistente de un fluído perfecto.

Capítulo 2

Relatividad General

Es común encontrar en la literatura más de una definición de "variación", según se deseen variar las variables dependientes o independientes e incluso si se trata de un arrastre. En la primera parte de este Capítulo, luego de definir los espacios funcionales de trabajo, mostraremos la equivalencia entre la derivada de Gâteaux y un arrastre (derivada) de Lie, y conforme se desarrolle este trabajo se verá que no hay necesidad de definir más derivadas funcionales sino sólo especificar el espacio funcional en el que se trabaja. Posteriormente definiremos los tensores canónico y simétrico asociados a un Lagrangiano de materia y al incorporar el Lagrangiano gravitacional deduciremos las ecuaciones de campo. La última parte de este Capítulo esta dedica a obtener los pseudotensores asociados a los tensores canónico y simétrico, y las cantidades conservadas que definen. Todo esto como mera aplicación del formalismo deducido anteriormente.

2.1. Espacios Funcionales Necesarios

Dado que en Relatividad General se trabaja sobre variedades diferenciables con una métrica Lorentziana asociada, a partir de ahora nuestras variables independientes $(x^0, ..., x^n) = X$ son las coordenadas de una variedad diferenciable M de dimensión $n + 1$ y nuestras variables dependientes Q son tensores de rango $r \geq 0$, los cuales siempre determinamos por sus componentes en las coordenadas X. Estas componentes son funciones de M a $\mathbb{R}$. También, dependiendo el problema particular que se trabaje, podemos quitar el carácter especial de una carta particular X, considerando las transformaciones entre coordenadas (entre distintas cartas) como un conjunto de variables dependientes, de esta forma un atlas particular en realidad son los parametros libres usados en nuestro cálculo de variaciones. En breve formalizaremos la idea de estos espacios.

El espacio funcional de las variables independientes (parámetros) ses el conjunto $\{\varphi_s\}$ de todas las posibles cartas de M de clase s, donde s es el grado de diferenciabilidad requerido en el tratamiento del funcional según el sistema que describa. Dado que un solo atlas cubre toda la variedad, cualquiera de ellos que se tenga es suficiente para trabajar sobre la variedad completa. Como se hizo notar en el capítulo anterior, el tratamiento que se aplica es de manera local y se requiere sólo de una vecindad abierta $\Omega \subset M$, la cual puede ser cubierta por una sola carta. Siempre denotaremos a dicha carta por $X = (x^0, ..., x^n)$.

El espacio funcional de las variables dependientes Q (las componentes usando X) será $C^l(M, \mathbb{R})$, donde l también será el grado de diferenciabilidad requerido en el tratamiento del funcional particular en el que estémos trabajando, mismo que denotaremos por $J[Q]$. Desde luego las funciones componentes no serán arbitrarias sino que están sujetas a las leyes de transformación de un tensor, pero dado que la suma de tensores es un tensor, y la multiplicación de un tensor por un escalar es un tensor, queda claro que cumple con nuestra definición de espacio lineal.

Debemos especificar ahora un espacio funcional para hacer variaciones entre sistemas de coordenadas y en general entre regiones de la variedad. Esto es con la finalidad de comparar el valor del funcional J de una región $\mathfrak{X} \subset M$ y el obtenido en otra región "cercana" $\mathfrak{X}' \subset M$, es decir suponemos una dependecia $J[\mathfrak{X}]$ lo cual tiene sentido puesto que los funcionales que trabajaremos son integrales sobre una región dada de M. Sea $\Omega \subseteq M$ y Φ una (o un conjunto de) carta cualquiera para Ω tal que $\mathfrak{X}$, nuestra región de interés, esté contenido en Ω. Sea Y la restricción de Φ a $\mathfrak{X}$, es decir, $Y(\mathfrak{X}) = \Phi(\mathfrak{X})$ la cual en nuestro atlas conocido la podemos ver como $Y(X^{-1})$ para todo punto donde Y está definida y sea $\xi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ cualquier transformación continuamente diferenciable de orden s tal que restringidos al codominio de X, $(x^0, x^1, ..., x^n)(p) \longmapsto \xi(X(p)) = (\xi^0, \xi^1, ..., \xi^n)$. Entonces la suma $Y(X^{-1}(X(p))) + t\xi(X(p))$ está definida para todo t y para todo punto $X(p)$ donde Y tiene soporte, esto implica que para t pequeño $Y + t\xi \in \Phi(\Omega)$ y $\Phi^{-1}(Y + t\xi(X))$ define un flujo tal que en $t = 0$ tenemos la región $\mathfrak{X}$ y para $t \neq 0$ tenemos una región $\mathfrak{X}'$.(Este flujo no necesariamente está definido para t grande pero no hay problema en ello puesto que estamos interesados en la derivada funcional la cual sólo precisa aproximación a primer orden). De hecho $\phi(X, t) = \Phi^{-1}(Y(X^{-1}(X(p))) + t\xi(X(p)))$ cumple con la definición de un grupo 1-paramétrico en t para todo punto p sobre la variedad. Así, nuestro espacio funcional para identificar distintas regiones sobre la variedad (mediante un "arrastre" dado por ϕ) es un subconjunto del espacio de funciones C^s de $\mathbb{R}^{n+1}$ a $\mathbb{R}^{n+1}$, con la norma $|\ |_s$, lo cual no permite que ξ pueda diverger. Dado que al trabajar las integrales se hace sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ y no sobre la variedad, obviaremos Φ en nuestras interpretaciones.

2.2. Relación de la Derivada de Gâteaux con la Derivada de Lie

Frecuentemente en la literatura uno se encuentra con conceptos como "La variación de la variable de campo Q a lo largo de un arrastre de Lie dado por el vector ξ ($\delta_\xi Q =$

$-\pounds_\xi Q)$," donde Q puede ser un tensor de rango r. En esta sección demostraremos que esto es un caso particular de la derivada de Gâteaux.

Para darnos una idea antes de arribar al caso general en que Q es una variable tensorial de rango $r \geq 1$ iniciemos con una función, es decir cuando $r = 0$. Sea $f \in C^1 : \Omega \subset M \longrightarrow \mathbb{R}$ (pensada como que ya ha sido escrita en coordenadas mediante X, lo cual de aquí en adelante obviaremos) y sea $\xi = (\xi^0, ..., \xi^n)$ cualquier campo particular como descrito anteriormente con $s = 1$, es decir $\xi^\mu \in C^1$. Considérese el funcional

$$J(y^0, y^1, ..., y^n) = f(x^0, x^1, ..., x^n). \tag{2.1}$$

donde $Y = (y^0, y^1, ..., y^n)$ es otro conjunto de coordenadas similar a X. Es decir, este operador representa el cambio de coordenadas $X(Y^{-1})$ de una función escalar. El valor de esta función en cualquier punto de la variedad debe ser independiente del conjunto de coordenadas que se le asigne por lo que tiene sentido preguntarse cuál es su derivada de Gâteaux en algún punto $Y = Y(X^{-1})$ el cual se ve arrastrado por el flujo provocado por ξ. Podemos calcular esta derivada de Gâteaux como

$$D_{(\xi^0,\xi^1,...,\xi^n)}J(y^0, y^1, ..., y^n) = \frac{d}{dt}(f(x^0, x^1, ..., x^n)|_{t=0}$$

pero como $Y = Y(X^{-1})$ implica que $X = X(Y^{-1})$, con esto $\frac{dx^\mu(Y'-t\xi)}{dt}|_{t=0} = -\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\,\xi^\nu$ de lo cual se sigue inmediatamente que

$$D_{(\xi^0,\xi^1,...,\xi^n)}f(x^0, x^1, ..., x^n) = -\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\,\xi^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} f(x^0, x^1, ..., x^n) \tag{2.2}$$

Como esto se hizo para cualquier $\xi^\mu \in C^1$, y se obtuvo un operador lineal, podemos aplicar el lema 1.4.3 al caso particular en que $Y \equiv X$ y obtener que la derivada de Fréchet es

$$\begin{aligned} Df(x^0, x^1, ..., x^n)(\xi^0, \xi^1, ..., \xi^n) &= D_{(\xi^0,\xi^1,...,\xi^n)}f(x^0, x^1, ..., x^n) \\ &= -\xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} f(x^0, x^1, ..., x^n) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Lo que hicimos aquí es mantener fija la función en un punto de la variedad y mover las coordenadas en una dirección ξ, y luego obtener el límite cuando las coordenadas tienden a la configuración inicial. En el cálculo usual las coordenadas se mantienen fijas y nos preocupamos por conocer el cambio de una función en una dirección determinada. Así, mientras en el cálculo usual se toma el límite de la función hacia el punto de partida habiendo avanzado en la dirección ξ, aquí la función se regreso en la dirección $-\xi$ y luego se tomo su límite hacia el punto inicial. Esto justifica el signo negativo que aparece en 2.3.

Observación. Si mapeamos las funciones ξ^μ a los coeficientes de un campo vectorial en M

$$(\xi^0, \xi^1, ..., \xi^n) \longrightarrow \vec{\xi} \equiv \xi^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + ... + \xi^n \frac{\partial}{\partial x^n} = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{2.4}$$

entonces la direccion funcional ξ pasa a ser una direccion vectorial en la variedad M, y mediante este mapeo tenemos

$$D_{(\xi^0,\xi^1,...,\xi^n)}f(x^0,x^1,...,x^n) = -\xi[f] \tag{2.5}$$

Notemos que esto no representa ningún misterio y de hecho era esperado puesto que a $\xi(X = q)$ lo podemos ver como un elemento del espacio tangente al punto q en $\mathbb{R}^{n+1}$, así intuitivamente ξ sería un campo traído de la variedad M a $\mathbb{R}^{n+1}$ mediante lo que se conoce como el mapeo diferencial inducido por la carta X, donde ξ solo está definido para $\mathfrak{X}$. En una manera burda entonces ξ puede verse como las coordenadas de un campo vectorial sobre $\mathfrak{X}$, aunque realmente uno no puede definir $Y + \xi$ sino hasta cuando se le asocia el flujo $\phi(x,t)$ de la manera en cómo lo hicimos en la sección anterior.

De la relacion entre la derivada de Lie y la aplicación de un vector a una función, dada por $\pounds_\xi f = \xi[f]$, se puede poner de una manera general la relación entre la derivada de Gâteaux y la derivada de Lie mediante el mapeo (2.4) para cualquier f, ξ^μ en $C^1(\Omega \subset M)$ como

$$Df(x^0,x^1,...,x^n)(\xi^0,\xi^1,...,\xi^n) = -\pounds_\xi f \tag{2.6}$$

Ahora procedemos a extender este resultado para cualquier variable tensorial $T^{\alpha\beta...\kappa}$ de rango k, lo cuál se logra fácilmente teniendo en cuenta las reglas de transformación para tensores.

Nuevamente usamos las cartas X e Y donde Y tiene soporte en $\Omega \subset M$. Sabemos que la transformación de un tensor (los coeficientes de) está determinada por el operador $\hat{T}^{\alpha\beta}(Y) : C^1(\Omega) \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow C^1(\Omega)$, cuya relación es, suponiendo que tenemos la transformación de coordenadas $Y = Y(X^{-1})$,

$$\hat{T}^{\alpha\beta...\kappa}(Y) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\gamma}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\delta}...\frac{\partial y^\kappa}{\partial x^\rho}T^{\gamma\delta...\rho}(X) \tag{2.7}$$

donde $\hat{T}$ es solo para remarcar que las componentes de un tensor pueden tener distinta forma en distintos sistemas de coordenadas. Haciendo nuestros pequeños incrementos, dados por el parámetro t, a $Y(X^{-1})$ en la dirección $\xi(X) = (\xi^0(X), \xi^1(X), ..., \xi^n(X))$ de la forma $Y'(X^{-1}) \equiv Y(X^{-1}) + t\xi(X)$ donde cada $\xi^\mu \in C^1$, podemos obtener la derivada de Gâteaux de $\hat{T}^{\alpha\beta...\kappa}$ donde el parámetro libre es X^{-1}. Para ello necesitamos tener en cuenta que dada la transformación $X^{-1} \longrightarrow Y(X^{-1})$, donde la inversa es de la forma $X = X(Y^{-1})$, al variar Y a $Y + t\xi$ vemos que X se modifica a $X'^{-1} \equiv X^{-1}(Y + t\xi)$. Para mantener fijo a X^{-1} entonces se necesita que $X^{-1}(Y) = X^{-1}(Y' - t\xi)$ y con ello la derivada de Gâteaux de $\hat{T}^{\alpha\beta...\kappa}$ es

$$\begin{aligned} D_\xi\hat{T}^{\alpha\beta...\kappa}(Y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{T}^{\alpha\beta...\kappa}(Y + t\xi)|_{t=0} = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial x^\gamma}(y^\alpha + t\xi^\alpha)\,\frac{\partial}{\partial x^\delta}(y^\beta + t\xi^\beta)\,...\frac{\partial}{\partial x^\rho}(y^\kappa + t\xi^\kappa)T^{\gamma\delta...\rho}(Y' - t\xi)\right]_{t=0} \end{aligned}$$

de lo cual, como es $\forall \xi^\mu \in C^1$ y usando la Proposición 1.4.3, tenemos

$$\begin{aligned} D_\xi \hat{T}^{\alpha\beta\ldots\kappa}(Y) &= D\hat{T}^{\alpha\beta\ldots\kappa}(Y)\xi = \\ &= (\xi^\alpha{}_{,\gamma}\, y^\beta_\delta \ldots y^\kappa{}_{,\rho} + y^\alpha{}_{,\gamma}\, \xi^\beta{}_{,\delta} \ldots y^\kappa{}_{,\rho} + \ldots + y^\alpha{}_{,\gamma}\, y^\beta{}_{,\delta} \ldots \xi^\kappa{}_{,\rho})T^{\gamma\delta\ldots\rho} + \\ &\quad - y^\alpha{}_{,\gamma}\, y^\beta{}_{,\delta} \ldots y^\kappa{}_{,\rho}\, \frac{\partial x^\mu(Y)}{\partial y^\nu}\, \xi^\nu T^{\gamma\delta\ldots\rho}{}_{,\mu} \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.2.1. Proposición

La derivada de Gâteaux de cualquier cantidad tensorial T en el punto X en la dirección funcional ξ es equivalente, mediante el mapeo 2.4, a un arrastre de Lie en la dirección vectorial $-\xi$, es decir, $D_\xi T(X) = -\pounds_\xi T(X)$

Demostración. Suponiendo que T es un tensor de rango k la regla de transformanción de sus componentes está dada por la ecuación 2.7 y tendrá como derivada de Fréchet la ecuación 2.8 para cualquier conjunto de coordenadas $Y = Y(X)$. En particular si $Y = X$ se tiene que $y^\sigma{}_{,\tau} = \delta^\sigma{}_{,\tau}$ y la ecuación 2.8 se reduce a

$$DT^{\alpha\beta\ldots\kappa}(X)\xi = \xi^\alpha{}_{,\gamma}\, T^{\gamma\beta\ldots\kappa} + \xi^\beta{}_{,\delta}\, T^{\alpha\delta\ldots\kappa} + \ldots + \xi^\kappa{}_{,\rho} T^{\alpha\beta\ldots\rho} - \xi^\mu T^{\alpha\beta\ldots\kappa}{}_{,\mu}$$

Finalmente haciendo uso del mapeo 2.4 para una dirección funcional particular ξ, podemos darnos cuenta que la ecución anterior es precisamente menos la derivada de Lie de un tensor T de rango k escrito en componentes bajo las coordenadas X, es decir

$$D_\xi T^{\alpha\beta\ldots\kappa}(X) = -(\pounds_\xi T)^{\alpha\beta\ldots\kappa} \tag{2.9}$$

$\mathcal{Q.E.D.}$

En particular para el tensor métrico que se transforma como

$$\mathcal{G}^{\alpha\beta}(Y) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\gamma}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\delta}\, g^{\gamma\delta}(X)$$

su derivada de Fréchet en $Y = X$ es el operador lineal que cumple con

$$Dg^{\alpha\beta}(X)\xi = \xi^\alpha{}_{,\gamma}\, g^{\gamma\beta} + \xi^\beta{}_{,\gamma}\, g^{\alpha\gamma} - \xi^\gamma g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} \tag{2.10}$$

Si hacemos uso del mapeo 2.4 para un ξ específico podemos reescribir la ecuación 2.10 como

$$D_\xi g^{\alpha\beta}(X) = -(\pounds_\xi g)^{\alpha\beta} = \xi^{\alpha;\beta} + \xi^{\beta;\alpha} = 2\xi^{(\alpha;\beta)} \tag{2.11}$$

Hemos visto ya la equivalencia entre la derivada de Gâteaux y la de Lie para las variables tensoriales Q, lo cual se puede extender a cualquier tipo de variables únicamente conociendo su regla de transformación, y a lo largo de este trabajo también veremos que no hay necesidad de definir más derivadas funcionales como usualmente se hace en la literatura donde se definen distintos tipos de variaciones (δQ, $\delta^* Q$, $\bar{\delta} Q$, etc) sino solo especificar el espacio funcional en el que se trabaja.

2.2.2. La Variación Lagrangiana

El resultado anterior se ha intepretado como el cambio provocado por el "arrastre" infinitesimal de la región $\mathfrak{X}$ a la región $\mathfrak{X}'$, esto es lo que en la literatura se le conoce como la "variación euleriana" y como vimos no necesita una designación especial. Algo similar es el caso de la "variación Lagrangiana". Esta es la variación de una función f sobre un punto particular, es decir, cómo cambia la f de manera libre en cada punto y en general como cambia un campo tensorial Q, i.e., una variación de la forma $Q'(X)-Q(X)$, pero desde luego esta relación simplemente por definición es la derivada de Fréchet definida sobre el espacio funcional al que pertenece la Q y entonces esta variación es tal que $Q'(X) = Q(X) + h(X) + o(||h||)$, donde $Q, h \in C^l[\Omega \times (TM)^s, \Omega \times (TM)^s]$ son campos tensoriales definidos sobre $\Omega \subset M$. Para cualquier $F = F(Q)$ entonces, como es usual, la variación lagrangiana es simplemente $DF(Q)h$. Veamos un ejemplo.

Los símbolos de Christoffel, dependen de $g_{\mu\nu}$ y de $g_{\mu\nu},_\tau$ por lo que podemos obtener su variación lagrangiana como la derivada de Fréchet en el espacio de funciones asociado a la métrica, es decir, una variación $h_{\mu\nu}$ cumple con ser un elemento de un espacio tensorial de rango 2, diferenciable y además, dado que $g_{\mu\nu}$ es simétrico, $h_{\mu\nu}$ también debe serlo. Entonces, dado que $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}(g_{\beta\lambda},_\gamma + g_{\gamma\lambda},_\beta - g_{\beta\gamma},_\lambda)$ y usando algunas relaciones del Apendice A, tenemos

$$
\begin{aligned}
D\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} h =& \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial g_{\mu\nu}} h_{\mu\nu} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial g_{\mu\nu},_\tau} h_{\mu\nu},_\tau \\
=& \frac{1}{2}(-g^{\alpha\mu} g^{\lambda\nu})(2\, g_{\delta\lambda} \Gamma^\delta_{\beta\gamma})\, h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}(\delta^\mu_\beta \delta^\nu_\lambda \delta^\tau_\gamma + \delta^\mu_\gamma \delta^\nu_\lambda \delta^\tau_\beta - \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\gamma \delta^\tau_\lambda) h_{\mu\nu},_\tau
\end{aligned}
$$

de lo cual se obtiene que

$$
D\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} h = -g^{\alpha\mu} \Gamma^\nu_{\beta\gamma} h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}(h_{\beta\lambda},_\gamma + h_{\gamma\lambda},_\beta - h_{\beta\gamma},_\lambda) \tag{2.12}
$$

Tomando en cuenta que

$$
(g^{\alpha\nu} h_{\beta\nu})_{;\gamma} = g^{\alpha\nu} h_{\beta\nu;\gamma} = g^{\alpha\nu} h_{\beta\nu},_\gamma - g^{\alpha\nu} \Gamma^\delta_{\beta\gamma} h_{\delta\nu} - g^{\alpha\nu} \Gamma^\delta_{\nu\gamma} h_{\beta\delta}
$$

mediante una sustititución directa tenemos que

$$
D\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} h = \frac{1}{2} \left[g^{\alpha\nu} h_{\beta\nu} \delta^\sigma_\gamma + g^{\alpha\nu} h_{\gamma\nu} \delta^\sigma_\beta - g^{\alpha\sigma} h_{\beta\gamma} \right]_{;\sigma} \tag{2.13}
$$

Es decir, la derivada funcional de los símbolos de Christoffel es la derivada covariante de un tensor y en consecuencia también es un tensor, aunque los símbolos en sí no lo son.

2.2.3. Algunas puntualizaciones

Antes de abordar el objetivo principal de este Capítulo donde no se hace más incapié en la rigurosidad del formalismo matemático, es necesario hacer notar algunas limitaciones importantes que usualmente no se toman en cuenta.

El difícil trabajo de haber definido un espacio funcional para lo que se conoce como un arrastre nos llevó a poder relacionar diferentes puntos mediante un flujo, esto representó una ventaja puesto que mientras en el excelente libro de Landau y Lifshitz [10] se tiene $g'^{ik}(x^l + \xi^l) = g^{ik}(x^l) + ...$ lo cual, siendo estrictos, carece de sentido puesto que no podemos comparar tensores en distintos puntos hasta que se hace uso de un arrastre de Lie, en referencias cómo [8] y [12] se toma directamente como una definición. Esta ventaja es ampliamente aprovechada puesto que en todo el calculo de variaciones trabajamos sobre espacios de funciones más que sobre tensores.

Entre las desventajas, además de las que ya se mencionaron como continuamente diferenciables de orden l, también está el hecho de que si $\Omega \subset M$ no es acotado y $\mathfrak{X} = \Omega$ necesitaremos que la carta en la que estamos trabajando $\Phi = Y$, $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sea también no acotada. Pero esto también pasa cuando se trabaja con las variables de campo estrictamente como tensores definidos sobre el haz tangente. Aunque esto nunca se menciona, siempre se da por hecho cuando se utilizan argumentos como, "cuando $r \to \infty$ la métrica debe ser asintóticamente plana" ó, nuestra región $\mathfrak{X}$ estará acotada por dos hipersuperficies espaciales y "una superficie temporal que tiende al infinito". Desde luego para poder integrar se hace en $\mathbb{R}^{n+1}$ y esto asume de igual manera, que la carta es no acotada.

Por definición nuestro flujo no admite ningún tipo de singularidad, es decir que un volumen de dimensión $n+1$ a lo largo del arrastre de pronto colapse a algo de dimensión menor, por ejemplo a un punto. Pero tampoco lo hace el definir directamente un campo puesto que este debe ser diferenciable y distinto de cero, ya que la derivada de Lie no esta definida para campos nulos.

Cuando la región $\mathfrak{X} = \Omega$ no puede ser agrandada a otro abierto de M que la contenga será también necesario en nuestro formalismo que el codominio de Y sea no acotado para poder definir un flujo tan cerca como se quiera de la frontera. Esta es otra de las limitaciones en general del cálculo de variaciones sobre variedades. No se admiten variedades diferenciables con frontera dado que no es trivial definir un espacio tangente sobre los puntos de la frontera y carece de sentido un ξ ya sea para un arrastre de campo vectorial o como arrastre funcional, excepto hacia el interior de la variedad, i.e., una contracción.

Una ventaja más viene de haber obtenido la derivada de Gâteaux en téminos de cualquier carta Y dada por la ecuación 2.8. Esto es sin duda muy útil puesto que en mecánica clásica estamos acostumbrados a hacer cambios de variables a aquellas donde se nos hace más fácil resolver las ecuaciones, un ejemplo común sería donde X son las coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^n$ mientras que Y son las coordenadas polares, cambio que acostumbramos hacer cuando tratamos con potenciales centrales. Así, la ecuación 2.8 ya nos da directamente la transformación de la variación entre coordenadas.

2.3. Tensor de Energía-Momento en un Espacio Plano

Sea

$$S_p = \int_\Omega \Lambda\left(q^{(i)}(x^\alpha), \frac{\partial}{\partial x^\gamma} q^{(i)}(x^\alpha)\right) \mathrm{d}X \tag{2.14}$$

el funcional (la accíon) que describe un sistema de materia en un espacio plano donde $q^{(i)}$ $i = 1, ..., m$ representa a las m variables dinámicas independientes del sistema y estamos considerando que la integral se extiende sobre todo el espacio $n+1$-*dimensional* Ω cuyas coordenadas x^α, $\alpha = 0, 1, ..., n$, son el argumento de cada q.

Para conocer las ecuaciones de movimiento del sistema necesitamos encontrar el punto extremo del funcional. Por simplicidad suponemos por el momento que solo hay una variable q y sea $\tilde{q}$ un extremo local de S_p (suponemos que tiene al menos uno). Definimos el funcional

$$I(h) = S_p(\tilde{q} + h) = \int_\Omega \Lambda\left(\tilde{q}(x^\alpha) + h(x^\alpha), \partial_\gamma \tilde{q}(x^\alpha) + \partial_\gamma h(x^\alpha)\right) \mathrm{d}X \tag{2.15}$$

donde $h \in C_0^1(\Omega)$ con $||h|| = |h|_1$. En este caso tenemos que $I(h)$ tiene un extremo en $h = 0$ (por lo cual su derivada de Fréchet se anula en 0) y cumple las condiciones necesarias para poder aplicar el teorema que nos da la ecuación de Euler-Lagrange (teorema 1.7.1), así tenemos que

$$DI(0)h = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial}{\partial q}\Lambda(\tilde{q}, \partial_\gamma \tilde{q})\right) h + \left(\frac{\partial}{\partial q_{,\alpha}}\Lambda(\tilde{q}, \partial_\gamma \tilde{q})\right) h_\alpha\right] \mathrm{d}X = 0 \tag{2.16}$$

es la derivada de Fréchet de I evaluada en su extremo 0, con lo cual su respectiva ecuación de Euler-Lagrange es

$$\frac{\partial}{\partial q}\Lambda(\tilde{q}, \partial_\gamma \tilde{q}) - \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}x^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial q_{,\alpha}}\Lambda(\tilde{q}, \partial_\gamma \tilde{q})\right) = 0 \tag{2.17}$$

Podemos extender, usando los teoremas 1.9.1 y 1.10.2, este resultado a varias variables $q^{(i)}$. Debido a que en este caso Λ no depende explícitamente de x^μ no hay confusión entre el operador $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}x^\mu}$ y $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, así obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial q^{(i)}}\Lambda(\tilde{q}, \partial_\gamma \tilde{q}) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial q^{(i)}{}_{,\alpha}}\Lambda(\tilde{q}, \partial_\gamma \tilde{q})\right) = 0 \tag{2.18}$$

donde $i = 1, ..., m$, enumera las variables dependientes. Tenemos entonces m ecuaciones diferenciales de segundo orden.

También podemos obtener la segunda ecuación de Euler (teorema 1.9.1)

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\delta^\alpha_\beta \Lambda(\tilde{q}, \partial_\gamma \tilde{q}) - \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial q_{,\alpha}}\Lambda(\tilde{q}, \partial_\gamma \tilde{q})\right] = \delta^\alpha_\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Lambda(\tilde{q}, \partial_\gamma \tilde{q}) \tag{2.19}$$

El lado derecho de esta ecuación es 0 debido a que Λ no depende explícitamente de las coordenadas x^μ, esto último porque se trata de una cantidad escalar y debe ser invariante bajo cualquier transformación de coordenadas. Definiendo al *tensor canónico de energía-momento en un espacio plano* como

$$\mathfrak{T}_{\beta}{}^{\alpha} = -\delta^{\alpha}_{\beta}\Lambda(\tilde{q}, \partial_\gamma \tilde{q}) + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial q_{,\alpha}}\Lambda(\tilde{q}, \partial_\gamma \tilde{q}) \tag{2.20}$$

hallamos que

$$\mathfrak{T}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \tag{2.21}$$

i.e., la divergencia del tensor $\mathfrak{T}_{\beta}{}^{\alpha}$ definido en (2.20) se anula. Aunque, siendo estrictos, no hemos deducido una expresión análoga a la segunda ecuación de Euler para varias variables independientes, lo haremos más adelante como un caso particular de un Lagrangiano de segundo orden.

2.4. Tensor de Energía-Momento en un Espacio Curvo

Supongamos que tenemos un sistema de materia sobre un espacio cuervo. En esta sección no consideraremos al tensor métrico $g^{\alpha\beta}$ como una variable dinámica sino más bien como el que define a la variedad curva sobre la que se trabaja. Esto no imposibilita la variación del funcional que describe al sistema con respecto a la métrica, solo que una derivada de Fréchet igual a cero no dará arribo a unas ecuaciones de campo sino más bien asegura que el Lagrangiano del sistema tenga las misma forma en todos los sistemas coordenados posibles de la variadad. Así, ademas de $g^{\alpha\beta}$ como variables en nuesto sistema de materia, también podemos tener un conjunto de variables de campo arbitrarias ψ_r con $(r = 1, ..., N)$ y una función Z^α, $\alpha = 0, ..., n$ la cual describe la línea de universo de partículas simples. El funcional que describe el sistema (la acción), entonces, es de la forma (para más detalle puede consultarse [8])

$$S_m = \int_\Omega \mathfrak{L} dX = \int_\Omega \left(\Lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\delta(X - Z)ds\right) dX \tag{2.22}$$

donde se asume que $\Lambda = \Lambda(g^{\alpha\beta}, \psi_r, \partial_\alpha \psi_r)$ es una densidad escalar y $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi_r, \dot{Z}^\alpha)$ un escalar. La integral de $\mathcal{L}\delta$ es tomada sobre toda la línea de universo de las particulas y ya que la función delta es una densidad escalar, $\mathfrak{L}$ es también una densidad escalar, y entonces tiene la misma forma en todos los sistemas de coordenadas.

En esta sección estamos interesados en conocer aquella cantidad que se conserva bajo cualquier cambio de coordenadas en la acción más que conocer las ecuaciones de campo, lo que incluye una variación en las $g^{\alpha\beta}$. Así, dejando de lado las variables de campo y las variables dinámicas de las particulas (puede suponerse que el sistema satisface sus propias ecuaciones de campo y de movimiento), el funcional con el que trabajaremos es de la forma

$$S_m = \int_\Omega \Lambda\left(g^{\alpha\beta}, \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right)\sqrt{-g}\mathrm{d}X \tag{2.23}$$

donde el escalar Λ es C^2 en sus argumentos y no depende explícitamente de X.

Podemos pensar que hay dos tipos de espacios donde se puede obtener la derivada funcional: que las $g^{\alpha\beta} \in C^2(\Omega \subset M)$ son las funciones independientes a variar ($S_m = S_m(g^{\alpha\beta})$), o que la variaciones libres se hacen a $X \in C^1(\Omega' \subset \mathbb{R}^{n+1})$ y en cuyo caso hay una variación dependiente en las $g^{\alpha\beta}$, es decir $S_m = S_m(X)$. Supongamos que esto último es el caso que nos interesa en este funcional, es decir, queremos la derivada de Fréchet de $S_m(X)$ donde los incrementos se hacen a X de la forma $X + t\xi$ y en cuyo caso hay que aplicar el teorema de regla de la cadena, Teorema 1.13.1.
Primero obtenemos la derivada de Fréchet de $S(g^{\alpha\beta})$ para toda $h^{\alpha\beta} \in C_0^1$, y como se mencionó en un ejmplo anterior, tienen que ser simétricos dado que $g^{\alpha\beta}$ lo es. De los ejemplos 1.3.4 y 1.3.5 podemos ver fácilmente que

$$DS_m(g^{\alpha\beta})h^{\alpha\beta} = \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}} \left(\Lambda\sqrt{-g}\right) h^{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta},_\gamma} \left(\Lambda\sqrt{-g}\right) h^{\alpha\beta},_\gamma \right] \mathrm{d}X$$

Dado que $\sqrt{-g}$ no depende de $g^{\alpha\beta},_\gamma$ y $\Lambda \in C^2$ podemos integrar por partes y obtener

$$DS_m(g^{\alpha\beta})h^{\alpha\beta} = \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}} \left(\Lambda\sqrt{-g}\right) - \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta},_\gamma} \left(\Lambda\sqrt{-g}\right) \right) \right] h^{\alpha\beta} \, \mathrm{d}X \qquad (2.24)$$

2.4.1. **Definición**(Tensor de energía-momento en un espacio curvo)

Definimos el tensor de energía-momento $T_{\alpha\beta}$ como

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, T_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}} \left(\Lambda\sqrt{-g}\right) - \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta},_\gamma} \left(\Lambda\sqrt{-g}\right) \right) \qquad (2.25)$$

donde se puede ver que $T_{\alpha\beta}$ es simétrico dado que $g^{\alpha\beta}$ lo es.

Con esta definición la ecuación 2.24 se convierte en

$$DS_m(g^{\alpha\beta})h^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int_\Omega T_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}X \qquad (2.26)$$

Podemos ahora aplicar el teorema de regla de la cadena (Teorema 1.13.1) para obtener $DS_m(X)\xi$, donde $\xi \in C_0^1$. Usando las ecuaciones 2.10 y 2.26 se tiene

$$\begin{aligned} DS_m(X)\xi &= \frac{1}{2} \int_\Omega T_{\alpha\beta}\sqrt{-g} \left(\xi^\alpha,_\gamma g^{\gamma\beta} + \xi^\beta,_\gamma g^{\alpha\gamma} - \xi^\gamma g^{\alpha\beta},_\gamma \right) \mathrm{d}X \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega \left[2T_\alpha{}^\beta \sqrt{-g}\, \xi^\alpha,_\beta - T_{\gamma\delta} g^{\gamma\delta},_\alpha \sqrt{-g}\, \xi^\alpha \right] \mathrm{d}X \qquad (2.27) \end{aligned}$$

Dado que Λ es un escalar y mantiene la misma forma ante cambios de coordenadas entonces $DS_m(X)\xi = 0$ para cualquier sistema de coordenadas X. De los teoremas 1.9.1 y 1.10.2 tendremos que

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(2T_\alpha{}^\beta \sqrt{-g} \right) + T_{\gamma\delta} g^{\gamma\delta},_\alpha \sqrt{-g} = 0$$

usando algunas de las propiedades de la métrica que aparecen en el Apéndice (A), la ecuación anterior se desarrolla como

$$\begin{aligned}0 &= 2T_\alpha{}^\beta{}_{,\beta}\sqrt{-g} + 2\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\beta}T_\alpha{}^\beta + T_{\gamma\delta}\left(-\Gamma^\gamma_{\beta\alpha}g^{\beta\delta} - \Gamma^\delta_{\beta\alpha}g^{\beta\gamma}\right)\sqrt{-g}\\ &= 2T_\alpha{}^\beta{}_{,\beta}\sqrt{-g} + 2T_\alpha{}^\beta\Gamma^\gamma_{\beta\gamma}\sqrt{-g} - 2T_\gamma{}^\beta\Gamma^\gamma_{\beta\alpha}\sqrt{-g}\\ &= 2T_\alpha{}^\beta{}_{;\beta}\sqrt{-g}\end{aligned}$$

implicando que

$$T_\alpha{}^\beta{}_{;\beta} = 0 \tag{2.28}$$

i.e., la divergencia covariante del tensor $T_\alpha{}^\beta$ definido en la ecuación 2.25 se anula, esto justifica el haberle dado el mismo nombre que el que teníamos para un espacio plano.

2.5. Lagrangiano de Segundo Orden en Varias Variables

Dado que estamos interesados en trabajar con la acción de Einstein-Hilbert necesitamos obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange para Lagrangianos que dependen de segundas derivadas de varias variables de campo Q y de variables variables independientes $X = (x^0, x^1, ..., x^n)$. Suponemos que las variables Q reprensentan todo el conjunto posible de campos de los cuales puede depender un Lagrangiano, es decir $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(X, Q^A, \partial_\mu Q^A, \partial_{\mu\nu}Q^A)$, Donde el superindice A representa el conjunto de indices que puede tener Q en coordenadas, que además puede estar compuesta de campos distintos los cuales incluso tengan distinto rango y por lo tanto vivir en espacios diferentes. La única condición que deben de cumplir es que sean continuamente diferenciables hasta un orden 4 en un dominio $\Omega \subset M$; 2 de la dependencia en $\mathfrak{L}$ y 2 para poder usar el teorema de la divergencia en dos ocasiones. En este caso la variación h^A pertenece al mismo espacio de las Q^A con la condición de que en la frontera de Ω se anulen, es decir, $h \in C_0^4(\Omega)$ y cumple con las reglas de transformación de tensores.

La acción de un sistema descrito por un Lagrangiano general de segundo orden es

$$S[Q] = \int_\Omega \mathfrak{L}(X, Q^A, \partial_\mu Q^A, \partial_{\mu\nu}Q^A)\, dX \tag{2.29}$$

y tomando su derivada de Fréchet tenemos

$$\begin{aligned}DS(Q)h &= \int_\Omega \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^A}h^A + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\mu}}h^A{}_{,\mu} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\mu\nu}}h^A{}_{,\mu\nu}\right)dX\\ &= \int_\Omega \left(\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^A} - \mathfrak{D}_\mu\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\mu}} + \mathfrak{D}_{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\mu\nu}}\right]h^A\right.\\ &\qquad \left. + \mathfrak{D}_\mu\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\mu}} - \mathfrak{D}_\nu\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\mu\nu}}\right)h^A + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\mu\nu}}h^A{}_{,\nu}\right]\right)dX\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se puede comprobar por sustititución directa y se ha usado la continuidad en las derivadas: en $\mathfrak{L}$ continuidad hasta tercer orden mientras que en Q^A hasta cuarto. Ahora podemos usar el teorema de la divergencia y darnos cuenta que dado que h^A y $h^A{}_{,\nu}$ se anulan en la frontera la condición de que el funcional esté en un punto crítico, $DS(Q)h = 0$ (usando el lema de Haar 1.6.7), es que Q^A cumpla con

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A} - \mathfrak{D}_\mu \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\mu}} + \mathfrak{D}_{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\mu\nu}} = 0 \tag{2.30}$$

En este caso tenemos A ecuaciones las cuales llamaremos ecuaciones de campo.

Para la dedución de estas ecuaciones no nos ha importado si $\mathfrak{L}$ depende explícitamente o no de X, por lo cuál nos gustaría tener un análogo a la segunda ecuación de Euler para este Lagrangiano. Esto resultaría muy útil en Relatividad General puesto que no existen Lagrangianos que dependan explícitamente de X dado que la acción S debe ser invariante ante cualquier cambio de coordenadas (invariancia de norma ante el grupo $G_{\infty(n+1)}$), teniendo automáticamente $n+1$ cantidades conservadas [6].

Dada la continuidad que hemos pedido en las variables de campo, podemos lograr estas nuevas ecuaciones haciendo simplemente combinaciones de derivadas y usando 2.30. Vemos que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_\nu \mathfrak{L} &= Q^A{}_{,\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A} + Q^A{}_{,\alpha\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha}} + Q^A{}_{,\alpha\beta\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha\beta}} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^\nu} \\
\mathfrak{D}_\alpha \left(Q^A{}_{,\beta\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha\beta}} \right) &= Q^A{}_{,\alpha\beta\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha\beta}} + Q^A{}_{,\beta\nu} \mathfrak{D}_\alpha \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha\beta}} \\
\mathfrak{D}_\alpha \left(Q^A{}_{,\nu} \mathfrak{D}_\beta \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha\beta}} \right) &= Q^A{}_{,\alpha\nu} \mathfrak{D}_\beta \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha\beta}} + Q^A{}_{,\nu} \mathfrak{D}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha\beta}} \\
\mathfrak{D}_\alpha \left(Q^A{}_{,\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha}} \right) &= Q^A{}_{,\alpha\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha}} + Q^A{}_{,\nu} \mathfrak{D}_\alpha \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha}}
\end{aligned}$$

y de estas relaciones se sigue que

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{D}_\alpha \left(Q^A{}_{,\beta\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha\beta}} - Q^A{}_{,\nu} \mathfrak{D}_\beta \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha\beta}} + Q^A{}_{,\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha}} \right) = \\
&= Q^A{}_{,\alpha\beta\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha\beta}} - Q^A{}_{,\nu} \mathfrak{D}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha\beta}} + Q^A{}_{,\alpha\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha}} + Q^A{}_{,\nu} \mathfrak{D}_\alpha \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha}} \\
&= Q^A{}_{,\alpha\beta\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha\beta}} + Q^A{}_{,\alpha\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha}} + Q^A{}_{,\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A} \\
&= \mathfrak{D}_\nu \mathfrak{L} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^\nu}
\end{aligned}$$

donde hemos usado la ecuación 2.30 en la penultima igualdad. Finalmente podemos ordenar esto como

$$\mathfrak{D}_\alpha \left[Q^A{}_{,\beta\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha\beta}} - Q^A{}_{,\nu} \left(\mathfrak{D}_\beta \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha\beta}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha}} \right) - \delta^\alpha_\nu \mathfrak{L} \right] = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^\alpha} \tag{2.31}$$

Así, cuando $\mathfrak{L}$ no depende explícitamente de X tenemos esta divergencia total igual a cero, lo cual podemos convertir a través del teorema de la divergencia a una integral de frontera y mediante esto definir cantidades conservadas, como lo veremos más tarde. Dado que de ahora en adelante solo trabajaremos con Lagrangianos sobre variedades los cuales no dependen explícitamente de X no habrá confusión en que nuevamente denotemos el operador $\mathfrak{D}_\alpha$ por ∂_α.

Nótese que cuando $\mathfrak{L}$ depende de hasta primeras derivadas solamente, es decir $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(X, Q^A, \partial_\mu Q^A)$, las expresiones 2.30 y 2.31 se reducen a

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A} - \mathfrak{D}_\mu \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\mu}} = 0 \tag{2.32}$$

$$\mathfrak{D}_\alpha \left[Q^A{}_{,\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^A{}_{,\alpha}} - \delta^\alpha_\nu \mathfrak{L} \right] = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^\alpha} \tag{2.33}$$

respectivamente. De esto se deduce que cuando $\mathfrak{L}$ no depende explícitamente de X la ecuación 2.33 representa una generalización del tensor canónico, presentado en 2.20 y 2.21.

2.5.1. Regla del producto

Antes de avanzar más, es necesario demostrar correctamente que la derivada de Fréchet satisface la regla de Leibniz. Supongamos que J y S son dos operadores Fréchet diferenciables en el mismo espacio funcional y que además el producto entre ellos está definido. Sean Q y h dos elementos del espacio funcional dominio de J y S, entonces

$$DJS[Q]h = J(Q+h)S(Q+h) - J(Q)S(Q) + o(||h||)$$

usando la Fréchet diferenciabilidad en J y S

$$\begin{aligned} DJS[Q]h =& (J(Q) + DJ[Q]h + o(||h||))(S(Q) + DS[Q]h + o(||h||)) \\ & - J(Q)S(Q) + o(||h||) \\ =& J(Q)DS[Q]h + S(Q)DJ[Q]h + DJ[Q]hDS[Q]h \\ & + (J(Q) + S(Q))o(||h||) + (DJ[Q]h + DS[Q]h)o(||h||) + o(||h||) \end{aligned}$$

vemos que: $DJ[Q]hDS[Q]h$ ya es un operador de segundo orden en h así que ya entra en $o(||h||)$, $(J(Q) + S(Q))o(||h||)$ sigue siendo $o(||h||)$ ya que el coeficiente no depende de h y $(DJ[Q]h + DS[Q]h)o(||h||)$ también es $o(||h||)$ puesto que el coeficiente ya es un operador a primer orden en h. De donde finalmente

$$DJS[Q]h = J(Q)DS[Q]h + S(Q)DJ[Q]h + o(||h||)$$

y esto corresponde a la regla conocida de la derivada de un producto en el cálculo elemental.

Otra de las propiedades de la derivada de Fréchet es que conmuta con la derivada parcial, cuando la derivada funcional se hace en el espacio de las variables dependientes.

Sea $F(X,Q)$ un operador Fréchet diferenciable en Q con derivadas $\partial_\nu F$ y $\partial_\nu Q$ continuas (o un orden más en la Q que de aquella que depende F, sea éste s). Entonces

$$\begin{aligned}\partial_\nu(DF[Q]h) =&\partial_\nu(F(X,Q+h)-F(X,Q)+o(||h||))\\ =&\partial_\nu F(X,Q+h)-\partial_\nu F(X,Q)+\partial_\nu o(||h||)=D\partial_\nu F[Q]h\end{aligned}$$

donde para que $\partial_\nu o(||h||)$ sea también $o(||h||)$ hemos usado el hecho, aunque no lo mencionamos, de que estamos usando la norma de convergencia uniforme $||h||=|h|_s$. Obsérvese que cuando se trata de una derivada de Fréchet en el espacio de las transformaciones para X, la derivada parcial no conmuta con la de Fréchet puesto que si $G_\nu(X)=\partial_\nu F(X)$, entonces $G_\nu(X+\xi)\neq\partial_\nu F(X+\xi)$. Nótese bien que esto es para la derivada funcional de un operador solamente, puesto que para funcionales no tiene sentido preguntarse de la derivada parcial de $DJ[Q]h$ puesto que esto ya es un real.

2.6. Ecuaciones de Campo de Einstein

Para poder deducir rigurosamente las ecuaciones de campo a partir de un funcional, además de especificar la continuidad necesaria tanto en el Lagrangiano como en sus argumentos también necesitamos dar condiciones de frontera útiles, ya que intuitivamente uno puede pensar que un sistema general permitiría que la métrica varie en la frontera, mientras que anteriormente solo se ha trabajado con variación de frontera nula en las variables de campo como es el caso de la ecuación 2.30. A continuación veremos que podemos relajar esta restricción además de deducir las ecuaciones de campo para Relatividad General.

2.6.1. La acción gravitacional

El funcional que describe un sistema gravitacional es

$$S_g(g^{\alpha\beta})=-\frac{1}{16\pi}\int_\Omega R\left(g^{\alpha\beta},\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma},\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma\delta}}\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}X \qquad (2.34)$$

donde R es el escalar de curvatura. Dada la expresión para el tensor de curvatura en términos de los simbolos de Christoffel

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}=\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma}-\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta}+\Gamma^\alpha_{\eta\gamma}\Gamma^\eta_{\beta\delta}-\Gamma^\alpha_{\eta\delta}\Gamma^\eta_{\beta\gamma} \qquad (2.35)$$

tenemos que

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-g}R =&\sqrt{-g}g^{\beta\delta}R_{\beta\delta} = \sqrt{-g}g^{\beta\delta}R^{\gamma}{}_{\beta\gamma\delta}\\
=&\sqrt{-g}g^{\beta\delta}\left(\frac{\partial\Gamma^{\gamma}_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial\Gamma^{\gamma}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma^{\gamma}_{\eta\gamma}\Gamma^{\eta}_{\beta\delta} - \Gamma^{\gamma}_{\eta\delta}\Gamma^{\eta}_{\beta\gamma}\right)\\
=&\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left(\sqrt{-g}g^{\beta\delta}\Gamma^{\gamma}_{\beta\delta}\right) - \Gamma^{\gamma}_{\beta\delta}\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left(\sqrt{-g}g^{\beta\delta}\right)\\
&-\frac{\partial}{\partial x^{\delta}}\left(\sqrt{-g}g^{\beta\delta}\Gamma^{\gamma}_{\beta\gamma}\right) + \Gamma^{\gamma}_{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x^{\delta}}\left(\sqrt{-g}g^{\beta\delta}\right) + \sqrt{-g}g^{\beta\delta}\left(\Gamma^{\gamma}_{\eta\gamma}\Gamma^{\eta}_{\beta\delta} - \Gamma^{\gamma}_{\eta\delta}\Gamma^{\eta}_{\beta\gamma}\right)
\end{aligned}
$$

agrupamos las divergencias y las derivadas de $g^{\beta\delta}$ por los correspondientes simbolos de Christoffel vemos que

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-g}R =&\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left(\sqrt{-g}g^{\beta\delta}\Gamma^{\gamma}_{\beta\delta} - \sqrt{-g}g^{\beta\gamma}\Gamma^{\delta}_{\beta\delta}\right) - \sqrt{-g}g^{\beta\delta}\left(\Gamma^{\gamma}_{\eta\delta}\Gamma^{\eta}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\gamma}_{\eta\gamma}\Gamma^{\eta}_{\beta\delta}\right)\\
&+\Gamma^{\gamma}_{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x^{\delta}}\left(\sqrt{-g}g^{\beta\delta}\right) - \Gamma^{\gamma}_{\beta\delta}\left(\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\gamma}}g^{\beta\delta} + \sqrt{-g}g^{\beta\delta}{}_{,\gamma}\right)\\
=&\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left(\sqrt{-g}g^{\beta\delta}\Gamma^{\gamma}_{\beta\delta} - \sqrt{-g}g^{\beta\gamma}\Gamma^{\delta}_{\beta\delta}\right) - \sqrt{-g}g^{\beta\delta}\left(\Gamma^{\gamma}_{\eta\delta}\Gamma^{\eta}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\gamma}_{\eta\gamma}\Gamma^{\eta}_{\beta\delta}\right)\\
&-\sqrt{-g}\Gamma^{\gamma}_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{\rho\sigma}g^{\rho\sigma} - \Gamma^{\gamma}_{\beta\delta}\left[\sqrt{-g}\Gamma^{\rho}_{\gamma\rho}g^{\beta\delta} - \sqrt{-g}\left(\Gamma^{\beta}_{\nu\gamma}g^{\nu\delta} + \Gamma^{\delta}_{\nu\gamma}g^{\beta\nu}\right)\right]\\
=&\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left(\sqrt{-g}g^{\beta\delta}\Gamma^{\gamma}_{\beta\delta} - \sqrt{-g}g^{\beta\gamma}\Gamma^{\delta}_{\beta\delta}\right) - \sqrt{-g}g^{\beta\delta}\left(\Gamma^{\gamma}_{\eta\delta}\Gamma^{\eta}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\gamma}_{\eta\gamma}\Gamma^{\eta}_{\beta\delta}\right)\\
&+\sqrt{-g}\left(-\Gamma^{\gamma}_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{\rho\sigma}g^{\rho\sigma} - \Gamma^{\gamma}_{\beta\delta}\Gamma^{\rho}_{\gamma\rho}g^{\beta\delta} + 2\Gamma^{\gamma}_{\beta\delta}\Gamma^{\beta}_{\nu\gamma}g^{\nu\delta}\right)\\
=&\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left(\sqrt{-g}g^{\beta\delta}\Gamma^{\gamma}_{\beta\delta} - \sqrt{-g}g^{\beta\gamma}\Gamma^{\delta}_{\beta\delta}\right) - \sqrt{-g}g^{\beta\delta}\left(\Gamma^{\gamma}_{\eta\delta}\Gamma^{\eta}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\gamma}_{\eta\gamma}\Gamma^{\eta}_{\beta\delta}\right)\\
&+\sqrt{-g}\left(2\Gamma^{\gamma}_{\beta\delta}\Gamma^{\beta}_{\nu\gamma}g^{\nu\delta} - 2\Gamma^{\gamma}_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{\rho\sigma}g^{\rho\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

y finalmente obtenemos que $\sqrt{-g}R$ se escribe como

$$
\sqrt{-g}R = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left(\sqrt{-g}g^{\beta\delta}\Gamma^{\gamma}_{\beta\delta} - \sqrt{-g}g^{\beta\gamma}\Gamma^{\delta}_{\beta\delta}\right) + \sqrt{-g}g^{\beta\delta}\left(\Gamma^{\gamma}_{\eta\delta}\Gamma^{\eta}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\gamma}_{\eta\gamma}\Gamma^{\eta}_{\beta\delta}\right) \tag{2.36}
$$

Así, de manera equivalente tenemos también la acción para el campo gravitacional

$$
S_g(g^{\alpha\beta}) = -\frac{1}{16\pi}\int_{\Omega} G\sqrt{-g}\,\mathrm{d}X \quad \text{donde} \quad G = g^{\alpha\beta}\left(\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\beta\mu} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\gamma\mu}\right) \tag{2.37}
$$

la cual solo difiere por una divergencia con aquella de la ecuación 2.34. De esta expresión podemos obtener la derivada de Fréchet de S_g para toda función $h^{\alpha\beta} \in C^2$, nula en la frontera de Ω y simétrica,

$$
\begin{aligned}
S_g(g^{\alpha\beta})h^{\alpha\beta} &= -\frac{1}{16\pi}\int_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}}\left(G\sqrt{-g}\right)h^{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}}\left(G\sqrt{-g}\right)h^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}\right]\mathrm{d}X\\
&= -\frac{1}{16\pi}\int_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}}\left(G\sqrt{-g}\right) - \partial_{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}}\left(G\sqrt{-g}\right)\right)\right]\mathrm{d}X \qquad (2.38)
\end{aligned}
$$

de lo cual en un punto crítico tenemos que se cumple que $S_g(g^{\alpha\beta}) = 0$ lo que implica que

$$\frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}}\left(G\sqrt{-g}\right) - \partial_\gamma\left(\frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}}\left(G\sqrt{-g}\right)\right) = 0 \tag{2.39}$$

Esta expresión resulta un tanto tediosa de calcular, por lo que, como se hace de manera estándar, deduciremos las ecuaciones equivalentes usando la acción dada por 2.34. Para este caso sea h una función con continuidad C^4 (asumimos que $g_{\mu\nu}$ también es C^4), entonces

$$\begin{aligned} DS_g h &= -\frac{1}{16\pi}\int_\Omega \left(R\sqrt{-g}[g^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}] - R\sqrt{-g}[g^{\mu\nu}]\right) dX = -\frac{1}{16\pi}\int_\Omega D[R\sqrt{-g}](g)h\, dX \\ &= -\frac{1}{16\pi}\int_\Omega \left[\sqrt{-g}DR(g)h + R\, D\sqrt{-g}(g)h\right] dX \end{aligned}$$

donde hemos usado la regla del producto para la derivada de Fréchet. Teniendo en cuenta que $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ y que $D\sqrt{-g}(g)h = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta}$ (ver apéndice A) se sigue

$$DS_g h = -\frac{1}{16\pi}\int_\Omega \left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}DR_{\mu\nu}h + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}h^{\mu\nu}\right] dX \tag{2.40}$$

Calculemos por separado el término $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}DR_{\mu\nu}h$. Para ello usaremos algunas de las herramientas que hemos construído, como la ecuación 2.13.

2.6.2. Condición de frontera

De la ecuación 2.35 obtenemos que la derivada de Fréchet del tensor de Riemman es

$$\begin{aligned} DR^\sigma{}_{\mu\rho\nu}h =& \partial_\rho(D\Gamma^\sigma_{\nu\mu}h) - \partial_\nu(D\Gamma^\sigma_{\rho\mu}h) + (D\Gamma^\sigma_{\rho\lambda}h)\Gamma^\lambda_{\nu\mu} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda}(D\Gamma^\lambda_{\nu\mu}h) + \\ & - (D\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}h)\Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}(D\Gamma^\lambda_{\rho\mu}h) \end{aligned}$$

donde hemos usado la regla del producto y la propiedad de que la parcial y la derivada de Fréchet en este espacio funcional conmutan. Por otro lado, ya mostramos que $D\Gamma^\rho_{\nu\mu}h$ es un tensor, por lo que su derivada covariante es

$$(D\Gamma^\sigma_{\nu\mu}h)_{;\rho} = \partial_\rho(D\Gamma^\sigma_{\nu\mu}h) + \Gamma^\sigma_{\lambda\rho}(D\Gamma^\lambda_{\nu\mu}h) - \Gamma^\lambda_{\nu\rho}(D\Gamma^\sigma_{\lambda\mu}h) - \Gamma^\lambda_{\mu\rho}(D\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}h)$$

y por sustitución directa puede verse que

$$DR^\sigma{}_{\mu\rho\nu}h = (D\Gamma^\sigma_{\nu\mu}h)_{;\rho} - (D\Gamma^\sigma_{\rho\mu}h)_{;\nu} \tag{2.41}$$

de lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}g^{\mu\nu}DR_{\mu\nu}h &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left[(D\Gamma^\rho_{\nu\mu}h)_{;\rho} - (D\Gamma^\rho_{\rho\mu}h)_{;\nu}\right] \\ &= \left[\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\, D\Gamma^\rho_{\mu\nu}h - g^{\mu\rho}\, D\Gamma^\nu_{\nu\mu}h\right)\right]_{;\rho} \end{aligned}$$

Sustituyendo 2.13,

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g}g^{\mu\nu}DR_{\mu\nu}h =& \frac{1}{2}\left[\sqrt{-g}\left(g^{\sigma\nu}g^{\rho\lambda}h_{\nu\lambda} + g^{\mu\sigma}g^{\rho\lambda}h_{\mu\lambda} - g^{\mu\nu}g^{\sigma\rho}h_{\nu\mu}\right)_{;\sigma}\right. \\
&\left. + \sqrt{-g}\left(-g^{\sigma\rho}g^{\nu\lambda}h_{\nu\lambda} - g^{\mu\rho}g^{\sigma\lambda}h_{\mu\lambda} + g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}h_{\nu\mu}\right)_{;\sigma}\right]_{;\rho} \\
=& \left[\sqrt{-g}\left((g^{\sigma\nu}g^{\rho\mu} - g^{\sigma\rho}g^{\mu\nu})h_{\mu\nu}\right)_{;\sigma}\right]_{;\rho}
\end{aligned}$$

Finalmente, usando el hecho que para cualquier densidad vectorial $\mathfrak{T}^{\alpha}{}_{;\alpha} = \mathfrak{T}^{\alpha}{}_{,\alpha}$, arribamos a

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}DR_{\mu\nu}h = \left[\sqrt{-g}\left((g^{\sigma\nu}g^{\rho\mu} - g^{\sigma\rho}g^{\mu\nu})h_{\mu\nu}\right)_{;\sigma}\right]_{,\rho} \tag{2.42}$$

lo que nos dice que es una divergencia total por lo que el primer término de la ecuación 2.40 es tal que

$$\int_{\Omega} \sqrt{-g}g^{\mu\nu}DR_{\mu\nu}h\, dX = \int_{\partial\Omega} \sqrt{-g}(g^{\sigma\nu}g^{\rho\mu} - g^{\sigma\rho}g^{\mu\nu})h_{\mu\nu;\sigma}\, d\sigma_{\rho} \tag{2.43}$$

El desarrollo anterior se ha hecho para cualquier h en C^4 y no se ha impuesto todavía ninguna condición de frontera. Para que la integral en 2.43 se anule hay dos maneras de lograrlo: Que h esté en $C^4 \cap C_0 \cap C_0^1$ ó que la conexión no varé sobre la frontera. El que h y sus primeras derivadas se anulen en la frontera es la condición usada en el formalismo anterior y consistente con el hecho que $\mathfrak{L} = \sqrt{-g}R$ es un Lagrangiano de segundo orden, pero muy restrictiva puesto que no permite variaciones de la métrica en la frontera. En el otro caso, dado que $\bar{g} = g + h$ es la nueva métrica perturbada, ésta debe satisfacer la nueva relación con la conexión afín para que no haya torsión, es decir $\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{g}^{\mu\nu} = 0$. Si imponemos como restricción que en la frontera $\bar{\nabla} = \nabla$, entonces ahí $\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{g}^{\mu\nu} = \nabla_{\alpha}\bar{g}^{\mu\nu} = \nabla_{\alpha}g^{\mu\nu} + \nabla_{\alpha}h^{\mu\nu} = h^{\mu\nu}{}_{;\alpha}$ y en este caso la variación no necesita anularse en la frontera lo cuál es bastante útil cuando se desea trabajar con sistemas que incluyen radiación o cuando no podemos imponer que la métrica sea "asintóticamente plana", incluso si la variedad tiene una singularidad. Finalmente obsérvese que cuando se trabaja en variedades cerradas la integral en 2.43 automaticamente es cero puesto que no hay frontera.

2.6.3. Las ecuaciones en un punto crítico

Sea h en C^4 y que cumple con alguna de las 2 condiciones para que se anule la ecuación 2.43, entonces tenemos que la ecuación 2.40 se escribe como

$$DS_g h = -\frac{1}{16\pi}\int_{\Omega}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\right] h^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, dX \tag{2.44}$$

Si imponemos que $DS_g h = 0$ entonces se trata de un caso generalizado del lema de Lagrange por lo que podemos concluir que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \tag{2.45}$$

Esto reprensenta las ecuaciones de campo de un sistema puramente gravitacional. Podemos ver que una solución trivial será cualquier variedad que cumpla con que $R_{\mu\nu} = 0$, es decir, las soluciones a las ecuaciones de campo en el vacío son aquellas variedades cuyo tensor de Ricci es nulo.

Conforme a la literatura definimos al *tensor de Einstein* como

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{2.46}$$

Por simple comparación podemos ver de la ecuación 2.39 que

$$\frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}}\left(G\sqrt{-g}\right) - \partial_\gamma\left(\frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}}\left(G\sqrt{-g}\right)\right) \sim R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R \tag{2.47}$$

donde $\sim$ significa que pueden diferir hasta en una divergencia total. de hecho esta divergencia depende solamente de de la métrica.

Un sistema en relatividad general estará constituido por una parte de materia y otra gravitacional, así podemos pensar que la acción total es $S = S_m + S_g$,

$$S = \int\left(\Lambda - \frac{1}{16\pi}R\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}\Omega \tag{2.48}$$

de donde se sigue que en un punto crítico tendremos que $DS(g^{\mu\nu})h^{\mu\nu} = 0$, es decir

$$DS_m(g^{\mu\nu})h^{\mu\nu} + DS_g(g^{\mu\nu})h^{\mu\nu} = 0 \tag{2.49}$$

y haciendo uso de las ecuaciones 2.26 y 2.38 obtenemos las ecuaciones de campo gravitacionales en presencia de materia

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{2.50}$$

las cuales se conocen comúnmente como ecuaciones de campo de Einstein.

2.7. Pseudotensor Canónico de Energía-Momento

Ya vimos que en un espacio plano la divergencia de $\mathfrak{T}^{\alpha}{}_{\beta}$ es cero en un punto crítico, esto es útil puesto que con ello podemos definir una cantidad conservada que viene del hecho de que Λ no depende explícitamente de X,

$$P_\beta = \int_{\partial\Omega}\mathfrak{T}^{\alpha}{}_{\beta}\,\mathrm{d}\sigma_\alpha \tag{2.51}$$

donde $\mathrm{d}\sigma_\alpha$ representa al elemento de volumen de la superficie n-dimensional (M es $(n+1)$-dimensional).

La generalización a un espacio curvo resulta en que la derivada covariante de $T^{\alpha\beta}$ es cero en un punto crítico de S_m con respecto a variaciones en el espacio región de integración. Por otro lado, las ecuaciones de campo fueron obtenidas mediante variaciones de S en el espacio de las $g^{\mu\nu}$ y en la cual se ha supuesto que Λ y R son (densidades) escalares por lo que no dependen explícitamente de X, en realidad esto es válido para cualquier Lagrangiano que no depende de manera explícita de los parámetros. Así uno esperaría tener cantidades conservadas debido al hecho de que son invariantes bajo cualquier transformación de coordenadas. Estas cantidades estarán determinadas por la divergencia en 2.31. Tal divergencia será transformada a una integral de frontera la cual es nula sobre toda la variedad y un propósito útil consistirá en buscar hipersuperficies (y condiciones) que conserven alguna cantidad específica, energía, momento angular, etc. El caso de la energía, objetivo de esta tesis, se trabajará ampliamente en los dos siguientes capítulos, ahora solo daremos arribo a las cantidades conservadas que salen de manera directa de 2.31.

Enfocándonos en el caso en que las variables de campo son las componentes de la métrica, reescribimos la ecuación 2.31 de manera particular como

$$\partial_\alpha \left[g^{\sigma\rho}{}_{,\beta\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\sigma\rho}{}_{,\alpha\beta}} - g^{\sigma\rho}{}_{,\nu} \left(\mathfrak{D}_\beta \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\sigma\rho}{}_{,\alpha\beta}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\sigma\rho}{}_{,\alpha}} \right) - \delta^\alpha_\nu \mathfrak{L} \right] = 0 \tag{2.52}$$

En el caso particular en el que $\mathfrak{L}$ sólo depende de primeras derivadas de la métrica, esto se reduce (de manera análoga que la ecuación 2.33) a

$$\partial_\alpha \left[g^{\beta\gamma}{}_{,\nu} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha}} \right) - \delta^\alpha_\nu \mathfrak{L} \right] = 0 \tag{2.53}$$

Esta es una cantidad similar al tensor canónico de energía-momento, aunque en este caso $\mathfrak{L}$ no necesariamente tiene caracter tensorial. De hecho podemos usar el Lagrangiano de primer orden para obetener la cantidad conservada, es decir, sea $\mathfrak{L} = \sqrt{-g}(\Lambda + \frac{1}{16\pi}G)$, entonces tenemos que

$$\partial_\alpha \left[\left(\Lambda - \frac{1}{16\pi} G \right) \sqrt{-g}\delta^\alpha_\nu - g^{\beta\gamma}{}_{,\nu} \frac{\partial}{\partial g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha}} \left(\left(\Lambda - \frac{1}{16\pi} G \right) \sqrt{-g} \right) \right] = 0 \tag{2.54}$$

Por un lado podemos desarollar esta expresión fácilmente

$$\partial_\nu \left(\Lambda\sqrt{-g} \right) - \frac{1}{16\pi} \partial_\nu \left(G\sqrt{-g} \right) - \partial_\alpha \left[g^{\beta\gamma}{}_{,\nu} \frac{\partial \left(\Lambda\sqrt{-g} \right)}{\partial g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha}} - \frac{1}{16\pi} g^{\beta\gamma}{}_{,\nu} \frac{\partial \left(G\sqrt{-g} \right)}{\partial g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha}} \right] = 0$$

usando regla de la candena vemos que

$$\begin{aligned}
0 =& \frac{\partial \left(\Lambda\sqrt{-g} \right)}{\partial g^{\beta\gamma}} g^{\beta\gamma}{}_{,\nu} + \frac{\partial \left(\Lambda\sqrt{-g} \right)}{\partial g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha}} g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha\nu} - g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha\nu} \frac{\partial \left(\Lambda\sqrt{-g} \right)}{\partial g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha}} \\
& - g^{\beta\gamma}{}_{,\nu} \partial_\alpha \frac{\partial \left(\Lambda\sqrt{-g} \right)}{\partial g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha}} - \frac{1}{16\pi} \frac{\partial \left(G\sqrt{-g} \right)}{\partial g^{\beta\gamma}} g^{\beta\gamma}{}_{,\nu} - \frac{1}{16\pi} \frac{\partial \left(G\sqrt{-g} \right)}{\partial g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha}} g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha\mu} \\
& + g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha\nu} \frac{1}{16\pi} \frac{\partial \left(G\sqrt{-g} \right)}{\partial g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha}} + \frac{1}{16\pi} g^{\beta\gamma}{}_{,\nu} \partial_\alpha \frac{\partial \left(G\sqrt{-g} \right)}{\partial g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha}} \\
=& \left[\frac{\partial \left(\Lambda\sqrt{-g} \right)}{\partial g^{\beta\gamma}} - \partial_\alpha \frac{\partial \left(\Lambda\sqrt{-g} \right)}{\partial g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha}} - \frac{1}{16\pi} \left(\frac{\partial \left(G\sqrt{-g} \right)}{\partial g^{\beta\gamma}} - \partial_\alpha \frac{\partial \left(G\sqrt{-g} \right)}{\partial g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha}} \right) \right] g^{\beta\gamma}{}_{,\nu}
\end{aligned}$$

lo cual lo podemos identifcar con el tensor simétrico $T_{\beta\gamma}$ y el tensor de Einstein, es decir, tenemos

$$\left[\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\beta\gamma} - \frac{1}{16\,\pi}\sqrt{-g}\left(R_{\beta\gamma} - \frac{1}{2}\,g_{\beta\gamma}\,R\right)\right]g^{\beta\gamma}{}_{,\nu} = 0$$

o de una manera compacta esto se escribe como

$$[8\,\pi\,T_{\beta\gamma} - G_{\beta\gamma}]\sqrt{-g}\,g^{\beta\gamma}{}_{,\nu} = 0 \tag{2.55}$$

la cual resulta válida en vista de las ecuaciones de campo. Estrictamente, puede haber una divergencia aquí metida en vista de la relación 2.47, que no afecta la ecuación 2.54 ya que produce una doble divergencia la cual en la frontera es cero.

Por otro lado, si generalizamos la definición 2.20 del tensor canónico de energía-momento obtenida para un espacio plano,

$$\mathfrak{T}_{\nu}{}^{\alpha} = -\Lambda\delta^{\alpha}_{\nu} + g^{\beta\gamma}{}_{,\nu}\,\frac{\partial\Lambda}{\partial g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha}} \tag{2.56}$$

tendremos que la ecuación 2.54 se convierte en

$$\partial_{\alpha}\left[\left(\mathfrak{T}_{\nu}{}^{\alpha} + \frac{1}{16\pi}G\delta^{\alpha}_{\nu} - \frac{1}{16\pi}g^{\beta\gamma}{}_{,\nu}\,\frac{\partial\,G}{\partial g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha}}\right)\sqrt{-g}\right] = 0 \tag{2.57}$$

de donde puede demostrarse (consúltese en el apéndice B) que

$$g^{\beta\gamma}{}_{,\nu}\,\frac{\partial\,G}{\partial g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(g^{\beta\sigma}\sqrt{-g}\right)_{,\nu}\left(\Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma} - \delta^{\alpha}_{\sigma}\Gamma^{\gamma}_{\beta\gamma}\right) \tag{2.58}$$

de lo cual definimos al *pseudotensor canónico de energía-momento* ó *pseudotensor de Einstein* como

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_{\beta}{}^{\alpha} =& \frac{1}{16\pi}G\delta^{\alpha}_{\nu} - \frac{1}{16\pi}g^{\beta\gamma}{}_{,\nu}\,\frac{\partial\,G}{\partial g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha}} \\ =& \frac{1}{16\pi}\delta^{\alpha}_{\beta}g^{\sigma\rho}\left(\Gamma^{\gamma}_{\sigma\delta}\Gamma^{\delta}_{\rho\gamma} - \Gamma^{\delta}_{\sigma\rho}\Gamma^{\gamma}_{\delta\gamma}\right) + \frac{1}{16\pi\sqrt{-g}}\left(g^{\delta\mu}\sqrt{-g}\right)_{,\beta}\left(\Gamma^{\alpha}_{\delta\mu} - \delta^{\alpha}_{\mu}\Gamma^{\nu}_{\beta\nu}\right) \end{aligned} \tag{2.59}$$

Con ésta definición la ecuación 2.57 se convierte en

$$\partial_{\alpha}\left[\left(\mathfrak{T}_{\beta}{}^{\alpha} + \mathfrak{t}_{\beta}{}^{\alpha}\right)\sqrt{-g}\right] = 0 \tag{2.60}$$

Algunas observaciones de estos resultados son: debido a que todos los términos de $\mathfrak{t}_{\beta}{}^{\alpha}$ contienen al menos un símbolo de Christoffel y a que podemos hacerlos cero en algún punto arbitrario, queda claro que la cantidad definida en 2.59 no es una cantidad tensorial. La generalización del tensor canónico de energía-momento, ecuación 2.56, estrictamente ya no será un tensor como en el caso de espacio plano puesto que depende de primeras derivadas de la métrica. En el siguiente Capítulo veremos bajo que grupo de transformaciones éste lo hace como un tensor.

Por otro lado con ello ya podemos definir una cantidad conservada análoga a aquella definida en 2.51 mediante simple integración y el uso del teorema de la divergencia, esto es

$$P_\beta = \int_{\partial\Omega} \left(\mathfrak{T}_\beta{}^\alpha + \mathfrak{t}_\beta{}^\alpha \right) \sqrt{-g}\, d\sigma_\alpha \tag{2.61}$$

Para dejar en claro éste punto, si elegimos una región Ω acotada por dos superficies espacialoides $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ y una superficie "cilindrica" S, sobre infinito espacial, obtenemos

$$\int_{\mathscr{H}_1} \left(\mathfrak{T}_\beta{}^\alpha + \mathfrak{t}_\beta{}^\alpha \right) \sqrt{-g}\, d\sigma_\alpha - \int_{\mathscr{H}_2} \left(\mathfrak{T}_\beta{}^\alpha + \mathfrak{t}_\beta{}^\alpha \right) \sqrt{-g}\, d\sigma_\alpha + \int_S \left(\mathfrak{T}_\beta{}^\alpha + \mathfrak{t}_\beta{}^\alpha \right) \sqrt{-g}\, d\sigma_\alpha = 0 \tag{2.62}$$

Si el término $\mathfrak{T}_\beta{}^\alpha + \mathfrak{t}_\beta{}^\alpha$ decae rápidamente, la integral sobre S se anula y esta ecuación justo expresa la conservación del vector canónico de energía-momento, es decir, la integral

$$P_\beta[\mathscr{H}] \equiv \int_{\mathscr{H}} \left(\mathfrak{T}_\beta{}^\alpha + \mathfrak{t}_\beta{}^\alpha \right) \sqrt{-g}\, d\sigma_\alpha \tag{2.63}$$

será una cantidad conservada si se cumplen las ecuaciones de campo y no hay problemas sobre infinito espacial. Más adelante veremos algunas condiciones necesarias para que la integral sobre la superficie cilíndrica S se anule.

2.8. Otros (Pseudo) Tensores de Energía-Momento

El pseudotensor canónico de Einstein (2.59) fue obtenido de una manera muy natural al aplicar la segunda ecuación de Euler generalizada. Una serie de pseudotensores han sido encontrados a partir tanto del mejoramiento del canónico como por otros métodos en los que se pueden usar herramientas como teoría de grupos de Lie y el segundo teorema de Noether. Entre las muchas objeciones y desventajas sobre el pseudotensor canónico destacan:
i) El hecho que no siempre es simétrico por lo cual no se puede obtener una definición para el momento angular.
ii) La necesidad de que su traza sea cero para que tenga un sentido completamente físico.

El principal argumento para pedir que un pseudotensor de energía-momento deba ser simétrico y de traza cero es el hecho que estas dos propiedades son indispensables para que una cantidad sea físicamente medible [13]. En otros casos, según el sistema que se trate, se puede pedir invariancia de escala o conforme.

2.8.1. Tensor de Belinfante-Rosenfeld

Los dos primeros procesos de mejoramiento análogos al pseudotensor canónico fueron hechos por Belinfante y Rosenfeld [14] [15]. Este mejoramiento consiste en sumar una divergencia que simetriza al pseudotensor. Ellos inician con una acción general usando un Lagrangiano $\mathfrak{L}$ que puede depender de las coordenadas, de variables de campo arbitrarias y de la métrica $g_{\alpha\beta}$. Hacen variaciones del tipo $x \longmapsto x + \xi$ con la particularidad de que ahora las ξ no necesariamente son cero en la frontera, es decir ahora las variaciones son completamente libres y esto se refleja en la variación de la acción (en la derivada de Fréchet de la acción). Al hacer esto, en particular Rosenfeld obtiene las siguientes expresiones:

$$\left([\mathfrak{EL}_Q]^\omega(\mathfrak{L})c^\alpha_{\omega,\beta}\right)_{,\alpha} + [\mathfrak{EL}_Q]^\omega(\mathfrak{L})Q_{\omega;\beta} \equiv 0 \tag{2.64}$$

$$\mathfrak{L}\delta^\alpha_\beta - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q_{\omega;\alpha}}Q_{\omega;\beta} + [\mathfrak{EL}_Q]^\omega(\mathfrak{L})c^\alpha_{\omega,\beta} + \mathfrak{R}^{\gamma\alpha}_{\beta\ \ ;\gamma} \equiv 0 \tag{2.65}$$

y

$$\mathfrak{R}^{\gamma\alpha}_\beta + \mathfrak{R}^{\alpha\gamma}_\beta \equiv 0 \tag{2.66}$$

donde Q_ω son las variables de campo (en este caso ω representa los posibles índices de las variables de campo con lo cual se puede incluir a $g_{\alpha\beta}$), $c^\alpha_{\omega,\beta}$ esta definido mendiante

$$c^\alpha_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n,\omega} = -\sum_{p=1}^{n}\delta^\alpha_{\omega_p}\,Q_{\omega_1\ldots\omega_{p-1}\omega\omega_{p+1}\ldots\omega_n}$$

y $\mathfrak{R}^{\alpha\gamma}_\beta$ denota

$$\mathfrak{R}^{\alpha\gamma}_\beta = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q_{\omega;\alpha}}\,c^\gamma_{\omega,\beta}$$

Con esto se define el tensor de energía-momento mejorado para variables de campo puramente tensoriales Q_τ

$$\underset{B}{\mathfrak{T}}{}^\alpha{}_\beta = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q_{\tau;\alpha}}Q_{\tau;\beta} - \mathfrak{L}\delta^\alpha_\beta - \mathfrak{R}^{\gamma\alpha}_{\beta;\gamma} - \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta Q_\tau}c^\alpha_{\tau,\beta} \tag{2.67}$$

En este nuevo tensor (densidad si $\mathfrak{L}$ lo es) puede verse que sobre la solución $Q_{\bar{\tau}}$ de las ecuaciones de campo ($[\mathfrak{EL}_Q]^\omega(\mathfrak{L}) = 0$) se reduce a

$$\underset{B}{\mathfrak{T}}{}^\alpha{}_\beta = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial Q_{\tau;\alpha}}Q_{\tau;\beta} - \mathfrak{L}\delta^\alpha_\beta - \mathfrak{R}^{\gamma\alpha}_{\beta;\gamma} \tag{2.68}$$

Esta definición no necesariamente garantiza que $\mathfrak{T}_B{}^{\alpha\beta}$ será simétrico de manera general, pero esto siempre se cumplira sobre la "capa" de soluciones, es decir, que sea simétrico es una concecuencia de las ecuaciones de campo. Esto se ve fácilmente de la ecuación 2.65

$$\underset{B}{\mathfrak{T}}{}^{\alpha\beta} - \underset{B}{\mathfrak{T}}{}^{\beta\alpha} = g^{\sigma\beta}\,\underset{B}{\mathfrak{T}}{}^\alpha{}_\sigma - g^{\sigma\alpha}\,\underset{B}{\mathfrak{T}}{}^\beta{}_\sigma = [\mathfrak{EL}_Q]^\tau(\mathfrak{L})\left(c^\alpha_{\tau,\sigma}\,g^{\sigma\beta} - c^\beta_{\tau,\sigma}\,g^{\sigma\alpha}\right) \tag{2.69}$$

Para el caso específico de Relatividad General donde las variables de campo solo son $g_{\alpha\beta}$ ($\mathfrak{L} = \mathfrak{L}[g_{\alpha\beta}]$, $\mathfrak{L}_m = \Lambda\sqrt{-g}$ y $\mathfrak{L}_g = R\sqrt{-g}$, el Lagrangiano de materia y gravitacional respectivamente, $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_m + \mathfrak{L}_g$) y dada la restricción de que éstas cumplen $g^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} = 0$, la derivada covariante en las relaciones anteriores se relaja a la derivada parcial y se obtiene

$$c^{\gamma}_{\rho\sigma,\beta} = -(\delta^{\gamma}_{\rho}\, g_{\sigma\beta} + \delta^{\gamma}_{\sigma}\, g_{\rho\beta})$$

$$\mathfrak{R}^{\gamma\alpha}_{\beta} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\rho\sigma,\alpha}}\, c^{\gamma}_{\rho\sigma,\beta} = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\rho\sigma,\alpha}}\, (\delta^{\gamma}_{\rho}\, g_{\sigma\beta} + \delta^{\gamma}_{\sigma}\, g_{\rho\beta})$$

Dada la simetría de $g_{\alpha\beta}$ se encuentra que

$$\mathfrak{R}^{\gamma\alpha}_{\beta} = -2\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\gamma\sigma,\alpha}}\, g_{\sigma\beta} \tag{2.70}$$

y con esto para un sistema donde $g_{\alpha\beta}$ es una variable dinámica el tensor de Belinfante-Rosenfeld es

$$\underset{B}{\mathfrak{T}}{}^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\rho\sigma,\alpha}} g_{\rho\sigma,\beta} - \mathfrak{L}\delta^{\alpha}_{\beta} + 2\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\gamma\sigma,\alpha}}\, g_{\sigma\beta}\right) \tag{2.71}$$

y la relación 2.66 para este caso particular se traduce en

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\gamma\sigma,\alpha}} = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha\sigma,\gamma}} \tag{2.72}$$

En este caso podemos darnos cuenta que el tensor canónico está relacionado mediante la divergencia de un tensor de rango 3 antisimétrico en dos índices (ecuación 2.70) con el tensor de Belinfante-Rosenfeld. Además, de la ecuación 2.64 y teniendo en cuenta que $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$, vemos que se cumple que

$$\underset{B}{\mathfrak{T}}{}^{\alpha}{}_{\beta;\alpha} = 0 \tag{2.73}$$

independientemente de si se cumplen las ecuaciones de campo o no. Cómo $\mathfrak{R}^{\gamma\alpha}_{\beta,\gamma\alpha} = 0$ es claro que podemos asociar el mismo pseudotensor de energía-momento que aquel obtenido para el tensor canónico dado por la ecuación 2.59, satisfaciendo de igual modo la ecuación 2.60 donde ahora el tensor no es el canónico sino el tensor de Belinfante-Rosenfeld.

2.8.2. Pseudotensor a segundo orden

Dado que el pseudotensor de Einstein lo obtuvimos de manera natural usando el Lagrangiano de primer orden estamos motivados a obtener un pseudotensor equivalente usando el Lagrangiano de segundo orden. Es decir, usando el mismo Lagrangiano con el cual deducimos las ecuaciones de Einstein $\mathfrak{L} = (\Lambda - \frac{1}{16\pi}R)\sqrt{-g}$ y la ecuación 2.31

obtenemos la divergencia de una cantidad igual cero

$$
\begin{aligned}
0 = \partial_\alpha \Bigg[& g_{\mu\nu},_{\beta\gamma} \frac{\partial(\Lambda - \frac{1}{16\pi}R)\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu},_{\alpha\beta}} - g_{\mu\nu},_\gamma \left(\partial_\beta \frac{\partial(\Lambda - \frac{1}{16\pi}R)\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu},_{\alpha\beta}} - \frac{\partial(\Lambda - \frac{1}{16\pi}R)\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu},_\alpha} \right) \\
& - \delta^\alpha_\gamma (\Lambda - \frac{1}{16\pi}R)\sqrt{-g} \Bigg] \\
= \partial_\alpha \Bigg[& \left(-\delta^\alpha_\gamma \Lambda\sqrt{-g} + g_{\mu\nu},_\gamma \frac{\partial \Lambda\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu},_\alpha} + g_{\mu\nu},_{\beta\gamma} \frac{\partial \Lambda\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu},_{\alpha\beta}} - g_{\mu\nu},_\gamma \partial_\beta \left(\frac{\partial \Lambda\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu},_{\alpha\beta}} \right) \right) \\
& + \frac{1}{16\pi} \left(\delta^\alpha_\gamma R\sqrt{-g} - g_{\mu\nu},_\gamma \frac{\partial R\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu},_\alpha} + 2\, g_{\mu\nu},_\gamma \partial_\beta \left(\frac{\partial R\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu},_{\alpha\beta}} \right) \right) \\
& - \partial_\beta \left(\frac{g_{\mu\nu},_\gamma}{16\pi} \frac{\partial R\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu},_{\alpha\beta}} \right) \Bigg]
\end{aligned} \tag{2.74}
$$

De la derivada de los símbolos de Christoffel

$$
\Gamma^\alpha_{\beta\gamma},_\delta = \frac{1}{2} g\, g^{\alpha\lambda},_\delta (g_{\beta\lambda},_\gamma + g_{\gamma\lambda},_\beta - g_{\beta\gamma},_\lambda) + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(g_{\beta\lambda},_{\gamma\delta} + g_{\gamma\lambda},_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma},_{\lambda\delta})
$$

se puede mostrar fácilmente que

$$
\frac{\partial R}{\partial g_{\mu\nu},_{\alpha\beta}} = \frac{1}{(-g)}(h^{\mu\alpha\beta\nu} + h^{\mu\beta\alpha\nu})
$$

donde

$$
h^{\mu\alpha\beta\nu} = (-g)(g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu} - g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu})
$$

y es claro que un término de la forma

$$
\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\gamma},_\delta}{\partial g_{\sigma\rho},_\tau}
$$

es lineal en primeras derivadas de la métrica. Por lo tanto, teniendo en cuenta que Λ solo depende de primeras derivadas de la métrica, no es difícil mostrar que la expresión 2.74 puede ser escrita como

$$
\begin{aligned}
\partial_\alpha \Bigg[& (\mathfrak{T}_\gamma{}^\alpha + \mathfrak{t}_\gamma{}^\alpha)\sqrt{-g} - \frac{g_{\mu\nu},_\gamma}{16\pi} \left(\frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu},_\alpha} (\sqrt{-g}(g^{\beta\delta}\Gamma^\sigma_{\beta\delta} - g^{\sigma\beta}\Gamma^\delta_{\beta\delta})),_\sigma - \left(\frac{4}{\sqrt{-g}} h^{\alpha\mu\nu\beta} \right)_{,\beta} \right) \\
& + \partial_\beta \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} \left(\delta^\alpha_\gamma (g^{\nu\delta}\Gamma^\beta_{\nu\delta} - g^{\nu\beta}\Gamma^\delta_{\nu\delta}) - \frac{2}{(-g)}\, g_{\mu\nu},_\gamma\, h^{\alpha\mu\nu\beta} \right) \Bigg] = 0
\end{aligned} \tag{2.75}
$$

de donde podemos ver que los términos correspondientes a segundas derivadas de la métrica han sido agrupadas en una doble divergencia por lo que su integral se anulará y entonces la cantidad pseudotensorial importante se encuentra en la primer línea de esta ecuación, la cual es claro que depende cuadráticamente de primeras derivadas de la métrica. Hasta el momento no hay razón matemática para despreciar en un cálculo la doble divergencia, de hecho si asumimos en una teoría que el Lagrangiano de materia depende de segundas derivadas de la métrica y extendemos las definiciones del tensor canónico de Einstein (ecuación 2.56) a

$$\mathfrak{T}^{\alpha}_{\gamma}\sqrt{-g} = -\delta^{\alpha}_{\gamma}\Lambda\sqrt{-g} + g_{\mu\nu},_{\gamma}\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu},_{\alpha}} + g_{\mu\nu},_{\beta\gamma}\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu},_{\alpha\beta}} - g_{\mu\nu},_{\gamma}\partial_{\beta}\left(\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu},_{\alpha\beta}}\right) \quad (2.76)$$

y del tensor simétrico de Landau y Lifshitz (definición 2.25) a

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}}\left(\Lambda\sqrt{-g}\right) - \partial_{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}}\left(\Lambda\sqrt{-g}\right)\right) + \partial_{\gamma\delta}\left(\frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma\delta}}\left(\Lambda\sqrt{-g}\right)\right) \quad (2.77)$$

tanto las ecuaciones de campo 2.50 como la cantidad conservada 2.75 tendrán exactamente la misma forma. Esto constituye una generalización a cualquier Lagrangiano que depende de segundas derivadas en la métrica y en el cual no necesariamente podemos agrupar todas estas derivadas como una doble divergencia.

2.8.3. Ley de conservación en el espacio de las ξ's

Hasta ahora las cantidades conservadas que se han obtenido de manera muy natural son asociadas a una variación en el espacio de la métrica y suponiendo que el Lagrangiano en cuestión no depende explícitamente de las coordenadas. Aquí veremos que también existen cantidades conservadas asociadas al espacio de las coordenadas para una variación dada ξ.

Supongamos que en vez de que $\xi \in C^1_0$ como se usó en los cálculos precedentes ahora ξ solamente es C^1, es decir quitamos la restricción de que ξ se anule en la frontera. En tal caso, para calcular la derivada $DS[\mathfrak{X}]\xi$ hay que considerar que ahora la región de integración cambia ya que un punto p en la frontera de la imagen de X se ve modificado a $p+\xi(p)$ y por lo tanto la frontera de la región de integración Ω cambia. En el siguiente Capítulo estudiaremos detalladamente esta variación y las condiciones suficientes para la existencia de una derivada funcional con frontera libre, por simplicidad ahora solo pondremos el resultado (cf. ecuación 3.5) y lo aplicaremos directamente al Lagrangiano $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_m + \mathfrak{L}_g = (\Lambda - \frac{1}{16\pi}R)\sqrt{-g}$. La derivada $DS[\Omega]\xi$ es

$$DS[\Omega]\xi = \int_{\Omega} D\mathfrak{L}(X,[Q(X)])\,h\,\mathrm{d}X + \oint_{\partial\Omega}\mathfrak{L}\xi^{\mu}\,d\sigma_{\mu}$$

Introduciendo la variación asociada a $\mathfrak{L}_m$ (ecuación 2.24) pero ahora sin despreciar el término de frontera y la variación asociada a $\mathfrak{L}_g$ dada por las ecuaciones 2.40 y 2.43, la expresión anterior se convierte en

$$\begin{aligned} DS[\Omega]\xi = {} & \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\right]\right)h^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}X + \\ & + \int_{\partial\Omega}\left[\left(\Lambda\xi^{\rho} + \frac{\partial\Lambda}{\partial g_{\mu\nu},_{\rho}}h_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g} - \frac{1}{16\pi}\left(R\xi^{\rho}\sqrt{-g} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(h^{\rho\nu\mu\sigma}h_{\mu\nu}\right)_{;\sigma}\right)\right]d\sigma_{\rho} \end{aligned} \quad (2.78)$$

Teniendo en cuenta que por regla de la cadena $h_{\mu\nu} = Dg_{\mu\nu}\xi = \xi_{(\mu;\nu)}$ y que para una densidad vectorial $V^{\alpha}{}_{;\alpha} = V^{\alpha}{}_{,\alpha}$, podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} DS[\Omega]\xi = &-\int_{\Omega}\left[\sqrt{-g}\left(T^{\mu\nu}-\frac{1}{8\pi}G^{\mu\nu}\right)_{;\nu}\xi_{\mu}-\left(\sqrt{-g}(T^{\mu\nu}-\frac{1}{8\pi}G^{\mu\nu})\xi_{\mu}\right)_{,\nu}\right]dX \\ &+\int_{\partial\Omega}\left[\left(\Lambda\xi^{\rho}-\frac{\partial\Lambda}{\partial g_{\mu\nu},_{\rho}}\xi_{(\mu;\nu)}\right)\sqrt{-g}-\frac{1}{16\pi}\left(R\xi^{\rho}\sqrt{-g}-\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(h^{\rho\nu\mu\sigma}\xi_{(\mu;\nu)}\right)_{;\sigma}\right)\right]d\sigma_{\rho} \end{aligned} \tag{2.79}$$

En este caso el Lagrangiano que hemos usado es una densidad escalar y de manera automática $DS[\Omega]\xi = 0$, pero de manera general se pueden usar Lagrangianos que no necesariamente tienen caracter tensorial y sin embargo podrían haber direcciones ξ que dejen invariantes la acción (más adelante hablaremos más ampliamente sobre esta idea). En este caso, la ecuación 2.79 es valida para cualquier ξ y para cualquier región Ω, por lo tanto se tienen que cumplir de manera separada las ecuaciones: en el interior

$$\left(T^{\mu\nu}-\frac{1}{8\pi}G^{\mu\nu}\right)_{;\nu}=0 \tag{2.80}$$

y sobre la frontera

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega}\Bigg[&(T^{\mu\rho}-\frac{1}{8\pi}G^{\mu\rho})\xi_{\mu}\sqrt{-g}+\left(\Lambda\xi^{\rho}-\frac{\partial\Lambda}{\partial g_{\mu\nu},_{\rho}}\xi_{(\mu;\nu)}\right)\sqrt{-g} \\ &-\frac{1}{16\pi}\left(R\xi^{\rho}\sqrt{-g}-\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(h^{\rho\nu\mu\sigma}\xi_{(\mu;\nu)}\right)_{;\sigma}\right)\Bigg]d\sigma_{\rho}=0 \end{aligned} \tag{2.81}$$

Observemos que estas dos ecuaciones siempre se satisfacen independientemente de si las ecuaciones de campo se cumplen o no, como consecuencia directa de usar una densidad escalar como Lagrangiano. Así, la ecuación 2.80 representa la ley de conservación local que generaliza a la ecuación 2.28. Por otra parte a la ecuación 2.81 la podemos convertir en una integral de una divergencia mediante el teorema de la divergencia. Dicha divergencia será nula debido a la arbitrariedad de Ω independiente de las ecuaciones de campo, y esto es lo que se conoce en la literatura como una ley de conservación fuerte (la leyes de conservación débiles son aquellas que se cumplen sólo si se satisfacen las ecuaciones de campo). Es decir, obtenemos que

$$\begin{aligned} \underset{\xi}{\mathfrak{T}}{}^{\rho\mu}\cdot\xi_{\mu} \equiv &(T^{\mu\rho}-\frac{1}{8\pi}G^{\mu\rho})\xi_{\mu}\sqrt{-g}+\left(\Lambda\, g^{\rho\mu}\xi_{\mu}-\frac{\partial\Lambda}{\partial g_{\mu\nu},_{\rho}}\xi_{(\mu;\nu)}\right)\sqrt{-g} \\ &-\frac{1}{16\pi}\left(R\, g^{\rho\mu}\xi_{\mu}\sqrt{-g}-\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(h^{\rho\nu\mu\sigma}\xi_{(\mu;\nu)}\right)_{;\sigma}\right) \end{aligned} \tag{2.82}$$

cumple con

$$\partial_{\rho}\left(\underset{\xi}{\mathfrak{T}}{}^{\rho\mu}\cdot\xi_{\mu}\right)=0$$

Esta cantidad es debida al grupo de simetría que se conoce como $G_{\infty q}$ que reprensenta la invariancia de $\mathfrak{L}$ ante cualquier cambio de coordenadas, donde $q = n + 1$ es la dimensión de la variedad. Para un tratamiento más amplio y detallado vease [8] y [6] donde se expone una amplia variedad de leyes de conservación fuertes e incluyen como caso particular al Lagrangiano $\mathfrak{L} = (\Lambda - \frac{1}{16\pi}R)\sqrt{-g}$ obteniebdo un resultado al dado por la ecuación 2.82.

Finalmente obsérvese de la ecuación 2.78 que cuando se satisfacen las ecuaciones de campo, la cantidad debilmente conservada es

$$\underset{\xi}{\mathfrak{T}}{}^{\rho\mu}\cdot\xi_\mu = \left(\Lambda\, g^{\rho\mu}\xi_\mu - \frac{\partial\Lambda}{\partial g_{\mu\nu,\rho}}\xi_{(\mu;\nu)}\right)\sqrt{-g} - \frac{1}{16\pi}\left(R\, g^{\rho\mu}\xi_\mu\sqrt{-g} - \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(h^{\rho\nu\mu\sigma}\xi_{(\mu;\nu)}\right)_{;\sigma}\right) \tag{2.83}$$

Aunque esta expresión equivale a que se cumplan las ecuaciones de campo en 2.82, hay una diferencia fundamental; para obtener 2.82 se utilizó fuertemente que ξ es un campo vectorial y $\mathfrak{L}_m$ una densidad escalar, mientras que para que 2.83 sea válida sólo se precisa que ξ sea un flujo que satisfaga $DS[\Omega]\xi = 0$ sin importar si $\mathfrak{L}_m$ tiene carácter tensorial o no.

2.8.4. Más pseudotensores

Hasta ahora hemos obtenido de una manera natural varios pseudotensores de energía-momento asociados a un Lagrangiano $\mathfrak{L}$ que describe un sistema de materia más gravedad, explotando de una y otra forma el hecho que $\mathfrak{L}$ permanece invariante ante transformaciones de coordenadas. Un pseudotensor obtenido de manera algebraica a partir de $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ ha sido exhibido por [10], cabe mencionar que para obtenerlo se estan asumiendo las ecuaciones de campo y el hecho que $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, llamada la identidad de Bianchi, la cual es una identidad algebraica dadas la simetrías que posee el tensor de Riemman. Para obtenerlo Landau y Lifshitz asumen la validez de las ecuaciones de campo 2.50 y la ecuación 2.80, y llegan a la expresión

$$t^{\mu\nu} = \frac{-1}{8\pi}G^{\mu\nu} + \frac{1}{16\pi(-g)}(h^{\mu\rho\nu\sigma} - h^{\mu\nu\rho\sigma})_{,\sigma\rho} \tag{2.84}$$

La cantidad $(h^{\mu\rho\nu\sigma} - h^{\mu\nu\rho\sigma})$ es antisimétrica en ν y ρ por lo que es inmediato ver que esta ecuación cumple

$$((-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}))_{,\nu} = 0 \tag{2.85}$$

lo cual puede ser transformado mediante el teorema de la divergencia a una integral sobre la frontera y tener de esta forma una cantidad conservada.

Entre las propiedades que cumple este pseudotensor esta el hecho de que es simétrico, lo cual permite formular conservación de momento angular, es cuadrático en primeras derivadas de la métrica, y no depende de segundas derivadas.

Otro pseudotensor más general y a nivel de variaciones sobre el espacio de coordenadas y no sobre la métrica como el anterior es el exhibido por Schutz y Sorkin [12] cuya expresión es

$$8\pi \underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu} \cdot \xi^{\nu} = -\sqrt{-g}\, G^{\mu}_{\nu} \xi^{\nu} + \frac{1}{2} \partial_{\alpha} \left(h^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\beta} \frac{\xi_{\nu}}{\sqrt{-g}} \right) \tag{2.86}$$

Esta cantidad de igual forma no depende de segundas derivadas de la métrica y su divergencia se anula. Si hacemos $\xi_{\nu} = constante$ esta cantidad se reduce al pseudotensor de Einstein y también, como es afirmado en [12], si hacemos $\xi_{\nu} = (const)\sqrt{-g}$ entonces recuperamos el pseudotensor de Landau y Lifshitz, pero esto es inconsistente con la manera en que se obtuvo este pseudotensor puesto que en su derivación (análoga a la realizada para obtener 2.82), como veremos en el Capítulo siguiente, se usa fuertemente el hecho de que ξ es un vector; mientras el que las componentes de un vector sean constantes depende de las coordenadas elegidas, también el pedir que sea una constante por $\sqrt{-g}$ le da un caracter de densidad.

Las cantidades 2.82 y 2.86 solo difieren por una divergencia puesto que ambas son obtenidas del mismo Lagrangiano. Una manera de calcular tal divergencia se puede encontrar en el Apéndice C.

En el siguiente Capítulo formalizaremos matemáticamente la idea de hacer variaciones con frontera libre a un funcional tipo acción, la cual es necesaria para obtener cantidades conservadas en el espacio de las variaciones de coordenadas como la obtenida en 2.86. Posteriormente, apoyandonos en algunas expresiones de variación libre obtenidas rigurosamente, demostraremos un equivalente al teorema de Noether para un Lagrangiano que consta solo de materia y donde la métrica no es una variable de campo dinámica. Finalmente terminaremos incluyendo al Lagrangiano de gravedad y dándole un caracter dinámico a la métrica para obtener de manera general la formulación del teorema de Noether cualquier sistema que incluye materia más gravedad y cuyo Lagrangiano puede tener restricciones.

Capítulo 3

Teorema de Noether en Relatividad General

En este capítulo extenderemos los conceptos creados anteriormente sobre tensores y pseudotensores de energía-momento con la finalidad de que sean aplicables al teorema de Noether en cualquier espacio curvo y en particular al caso de Relatividad General.

3.1. Variación Con Frontera Libre

En esta sección estudiaremos el cambio de la acción de un sistema cuando su región de integración es arrastrada a lo largo de un campo vectorial ξ. Esto es útil, por ejemplo, para conocer cómo evoluciona la acción a lo largo de un vector temporaloide lo cual da información acerca del cambio de la energía al "arrastrar" la región considerada en el tiempo.

Sea

$$S = \int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{L}(X, [Q(X)])\mathrm{d}X \tag{3.1}$$

la acción que describe un sistema físico donde $\mathfrak{X}$ representa la región de integración sobre una variedad M, y $[Q(X)]$ representa todas las posibles derivadas de las variables de campo $Q(X)$ de las que puede depender el Lagrangiano $\mathfrak{L}$, es decir $\mathfrak{L}(X, [Q(X)]) = \mathfrak{L}(X, Q(X), \partial_\alpha Q(X), \partial_{\alpha\beta} Q(X), ...)$. Las Q también pueden incluir a los coeficientes de la métrica $g^{\alpha\beta}$. De manera general $\mathfrak{L}$ no necesariamente será un escalar o una densidad escalar y se especificará cuando algún resultado requiera que lo sea.

Vimos en el capítulo 2 que para obtener la derivada de Fréchet (o de Gâteaux) de la acción S, donde el Lagrangiano usado es el de materia, tenemos que especificar el espacio funcional sobre el que trabajamos, es decir si queremos obtener un punto crítico (Derivada de Fréchet igual a cero) sobre el espacio funcional de coordenadas X o sobre el espacio funcional del cual forman parte las variables de campo Q. En el primer caso rigurosamente sólo es necesario suponer que las funciones son continuas con derivadas continuas, mientras que en el segundo se necesita continuidad en las derivadas hasta el orden aquel del cual depende $\mathfrak{L}$. Por simplicidad en los cálculos de esta primera parte, como se manejó en el Capítulo 2, supondremos en ambos casos continuidad en las derivadas de las variables hasta dos veces el orden que aparece en el Lagrangiano.

Calculemos la derivada de Fréchet de S cuando la región de integración $\mathfrak{X}$ se ve arrastrada por un campo vectorial ξ el cual no necesariamente se anula en la frontera. De manera más clara, al mapear el punto $p \in \mathfrak{X}$ al punto $p' = p + \xi(p)$ (donde se ha usado el mapeo 2.4) se "arrastra" la región $\mathfrak{X}$ a otra $\mathfrak{X}'$ y la derivada de Gâteaux nos dará el cambio a primer orden de $S = S[\mathfrak{X}]$ a lo largo de este arrastre. Entonces, ignorando $o(||\xi||)$ tenemos que la derivada de Fréchet va como:

$$DS[\mathfrak{X}]\xi = S[\mathfrak{X}'] - S[\mathfrak{X}] = \int_{\mathfrak{X}'} \mathfrak{L}'(X', [Q'(X')])\mathrm{d}X' - \int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{L}(X, [Q(X)])\mathrm{d}X \tag{3.2}$$

donde la prima en $\mathfrak{L}'$ es sólo para enfatizar que al hacer el cambio de variables $X = X(X')$ o bien $X' = X'(X) = X + \xi$ el Lagrangiano pudo haber cambiado de forma. De igual manera la prima en Q' es solo para indicar que en estas nuevas coordenadas puede tener una nueva forma pero el mismo significado físico ya que como variables de campo son cantidades tensoriales y en la sección 2.2 ya se calculó su derivada de Fréchet para cualquier cambio de coordenadas.

De manera general $\mathrm{d}X' = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|\mathrm{d}X$ pero dado que $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$ entonces $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu} + \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$, y como la derivada de Fréchet requiere de sólo calcular el operador lineal (aproximación a primer orden), tenemos que

$$\mathrm{d}X' = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|\mathrm{d}X = \left|\delta^{\mu}_{\nu} + \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right|\mathrm{d}X = \left(1 + \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + ...\right)\mathrm{d}X \tag{3.3}$$

y tomando en cuenta que $\mathfrak{L}(X+\xi) = \mathfrak{L}(X) + D\mathfrak{L}(X)\xi + o(||\xi||)$ entonces

$$\begin{aligned} DS[\mathfrak{X}]\xi &= \int_{\mathfrak{X}} (\mathfrak{L}(X) + D\mathfrak{L}(X)\xi)\left(1 + \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + ...\right)\mathrm{d}X - \int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{L}(X)\mathrm{d}X \\ &= \int_{\mathfrak{X}} \left(\frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\mu}}\mathfrak{L}(X) + D\mathfrak{L}(X)\xi\right)\mathrm{d}X \end{aligned} \tag{3.4}$$

en donde hemos despreciado los términos cuadráticos en las derivadas de ξ debido a que la derivada de Fréchet debe ser un operador lineal para todo ξ (un ξ lineal en X no cumple con tener $o(|(\partial_{\mu}\xi^{\mu})^2|_{2k-1})$. Luego, haciendo uso del teorema de la regla de la cadena, la derivada de Fréchet del Lagrangiano se puede descomponer en una parte debida al espacio de las $Q's$ y otra al espacio de las X, es decir

$$D\mathfrak{L}(X, [Q(X)])\xi = D\mathfrak{L}(X, [Q(X)])DQ(X)\xi + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^{\mu}}\xi^{\mu}$$

donde $DQ(X)\xi$ es un elemento h del espacio de funciones de posibles variaciones de Q. Obsérvese que en este caso la parte relacionada a X no aparece con signo negativo como sucedió en la ecuación 2.3, esto se debe a que en aquel caso había un sistema de referencia común X desde donde se hizo la variación de Y a $Y+\xi$, aquí se ha movido nuestro sistema de referencia de X a X' en la integral y nuestro flujo ξ ahora se ve en la dirección contraria, resultando positiva la derivada de Fréchet, solo dentro de la integral. Insertando esto en la ecuación (3.4) vemos que

$$\begin{aligned} DS[\mathfrak{X}]\xi &= \int_{\mathfrak{X}} \left(\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\mu} \mathfrak{L}(X) + D\mathfrak{L}(X,[Q(X)])\, h + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^\mu}\, \xi^\mu \right) \mathrm{d}X \\ &= \int_{\mathfrak{X}} \left(D\mathfrak{L}(X,[Q(X)])\, h + \frac{\partial \mathfrak{L}\, \xi^\mu}{\partial x^\mu} \right) \mathrm{d}X \end{aligned}$$

y éste es el resultado ya bien conocido para una variación de S en el espacio funcional de las coordenadas

$$DS[\mathfrak{X}]\xi = \int_{\mathfrak{X}} D\mathfrak{L}(X,[Q(X)])\, h\, \mathrm{d}X + \oint_{\partial\mathfrak{X}} \mathfrak{L}\xi^\mu\, d\sigma_\mu \tag{3.5}$$

Nótese que si ξ se anula en la frontera, este resultado se reduce a los cosos trabajados en el capítulo anterior.

3.2. El Operador de Noether

Para el caso particular cuando todas las variables de campo Q que aparecen en el Lagrangiano cumplen con $Q_{;\alpha}=0$ (como es el caso de la métrica, $g^{\mu\nu}{}_{;\alpha}=0$) podemos desarrollar la derivada de Fréchet de $\mathfrak{L}$ con respeto a estas variables como

$$\begin{aligned} D\mathfrak{L}(Q)h =& \mathfrak{L}(X,[Q+h]) - \mathfrak{L}(X,[Q]) = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q}\, h + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{,\alpha}}\, h_{,\alpha} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{,\alpha\beta}}\, h_{,\alpha\beta} + ... \\ =& \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q}\, h + \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{,\alpha}}\, h \right) - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{,\alpha}} \right) h + \partial_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{,\alpha\beta}} \right) h \\ &+ \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{,\alpha\beta}}\, h_{,\beta} - \partial_\beta \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{,\alpha\beta}}\, h \right) + ... \end{aligned}$$

lo cual es precisamente el operador $\mathfrak{EL}_Q = \frac{\partial}{\partial Q} - \partial_\alpha \frac{\partial}{\partial Q_{,\alpha}} + \partial_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial Q_{,\alpha\beta}} - \ +...$ aplicado a $\mathfrak{L}$ más una divergencia:

$$D\mathfrak{L}(Q)h = \mathfrak{EL}_Q(\mathfrak{L})h + \partial_\alpha \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{,\alpha}} - \partial_\beta \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{,\alpha\beta}} \right) h + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{,\alpha\beta}}\, h_{,\beta} + ... \right] \tag{3.6}$$

Así, en la ecuación 3.5 tenemos una integral sobre la región $\mathfrak{X}$ y otra sobre su frontera (aplicando nuevamente el teorema de la divergencia a la obtenida anteriormente), es decir

$$DS[\mathfrak{X}]\xi = \int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{EL}_Q(\mathfrak{L})\, h\, \mathrm{d}X + \oint_{\partial\mathfrak{X}} \underset{N}{\mathfrak{T}}{}^\mu{}_\nu \cdot \xi^\nu\, d\sigma_\mu \tag{3.7}$$

En estas cantidades no hemos incluido el término $\sqrt{-g}$ ya que, como se dijo anteriormente, éstas en general no serán de carácter (densidad) tensorial; si lo son, entonces ya lo incluyen. A la cantidad $\underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu}$ la llamaremos el *Operador de Noether* asociado a $\mathfrak{L}$. Como se indica por el punto y se sugiere por el nombre, esta cantidad de manera general será un operador diferencial sobre ξ^{ν}, como queda claro de la ecuación 3.6. Cabe mencionar también que no es único el operador de Noether ya que sumarle a $\underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu} \cdot \xi^{\nu}$ cualquier término de la forma

$$\partial_{\alpha}(\mathfrak{F}^{\mu\alpha}{}_{\nu} \cdot \xi^{\nu}) \quad \text{con} \quad \mathfrak{F}^{\mu\alpha}{}_{\nu} = -\mathfrak{F}^{\alpha\mu}{}_{\nu}$$

dejará sin cambio alguno a la integral de superficie de la ecuación 3.7.

Veamos como ejemplo el caso particular cuando $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(X, Q, \partial_{\alpha} Q)$. Esto implíca que la ecuación 3.6 se reduce ha

$$D\mathfrak{L}(Q)h = \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q} - \partial_{\alpha}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{,\alpha}}\right) h + \partial_{\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{,\alpha}}\, h\right)$$

e inmediatamente tenemos que

$$\underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu} \cdot \xi^{\nu} = \mathfrak{L}\xi^{\mu} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{,\mu}}\, h$$

En el caso especial en que ξ es un vector constante en las coordenadas X ($\xi^{\mu}{}_{,\nu} = 0$), $h = DQ(X)\xi = -\xi^{\mu} Q_{,\mu}$ y la expresión $\underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu} \cdot \xi^{\nu}$ se reduce a $\underset{C}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu}\xi^{\nu}$ donde

$$\underset{C}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu} = \mathfrak{L}\delta^{\mu}_{\nu} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{,\mu}} Q_{,\nu} \tag{3.8}$$

es el ya conocido tensor de energía-momento canónico $\mathfrak{T}_{\nu}{}^{\mu}$. Ahora se puede ver que no es un tensor verdadero sino más bien un pseudotensor ya que sólo se transforma como tensor bajo el grupo restringido de transformaciones que dejan constantes las componentes del campo ξ. Podemos extender la definición del tensor canónico a Lagrangianos de orden más alto por mantener la relación:

$$\xi^{\nu} = constante \implies \underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu} \cdot \xi^{\nu} = \underset{C}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu}\xi^{\nu} \tag{3.9}$$

o probar a obtener algún otro proponiendo un campo ξ particular.

3.3. Equivalencia Entre el Operador de Noether y $T_{LL}{}^{\mu\nu}$

Recordando la definición 2.25 podemos reescribir al tensor simétrico $T^{\mu\nu}$ ahora como una densidad tensorial (o tener el mismo carácter que tiene $\mathfrak{L}$) para cualquier Lagrangiano de materia mediante

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu} \equiv 2\,\boldsymbol{\mathfrak{C}\mathfrak{L}}_{g_{\mu\nu}}(\mathfrak{L}) \equiv 2\,[\boldsymbol{\mathfrak{C}\mathfrak{L}}_{g}]^{\mu\nu}(\mathfrak{L}) \tag{3.10}$$

En un Lagrangiano de materia $\mathfrak{L}([Q])$ podemos separar las variables $Q's$ en $g_{\alpha\beta}$ y las variables q asociadas con la dinámica del campo de materia, con esto podemos enunciar el siguiente

3.3.1. **Teorema** (Equivalencia entre el operador de Noether y el tensor simétrico)

Sea $\mathfrak{L}([Q])$ un Lagrangiano (densidad escalar) asociado a un campo de materia. Asumimos que se cumplen las ecuaciones de movimiento para el campo de materia

$$\mathfrak{EL}_q(\mathfrak{L}) = 0$$

Entonces, para cualquier campo ξ y cualquier región $\mathfrak{X}$ se cumple que

$$\int_{\partial\mathfrak{X}} \underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu} \cdot \xi^{\nu}\, d\sigma_{\mu} = \int_{\partial\mathfrak{X}} \mathfrak{T}^{\mu\nu} \xi_{\nu}\, d\sigma_{\mu} \tag{3.11}$$

Demostración. Separando a Q en la parte de $g_{\alpha\beta}$ y en la de las $q's$, tenemos

$$\mathfrak{EL}_Q(\mathfrak{L})\, h = [\mathfrak{EL}_g]^{\alpha\beta}(\mathfrak{L})\, h_{\alpha\beta} + \mathfrak{EL}_q(\mathfrak{L})\, k \tag{3.12}$$

donde $k = Dq(X)\xi$ es una función en el espacio de las $q's$ tal que en la frontera $\partial\mathfrak{X}$ se anula. Entonces podemos reescribir la derivada funcional de $\mathfrak{L}$ como

$$\begin{aligned}
\mathfrak{EL}_Q(\mathfrak{L})\, DQ\xi =& \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{\alpha\beta} Dg_{\alpha\beta}\, \xi + \mathfrak{EL}_q(\mathfrak{L})\, k \\
=& \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}(-\xi_{\alpha};_{\beta} - \xi_{\beta};_{\alpha}) + \mathfrak{EL}_q(\mathfrak{L})\, k = -\mathfrak{T}^{\alpha\beta}\xi_{\alpha};_{\beta} + \mathfrak{EL}_q(\mathfrak{L})\, k \\
=& -\left(\mathfrak{T}^{\alpha\beta}\, \xi_{\alpha}\right);_{\beta} + \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{\alpha\beta};_{\beta}\, \xi_{\alpha} + \mathfrak{EL}_q(\mathfrak{L})\, k
\end{aligned}$$

y dado que $\mathfrak{T}^{\alpha\beta}\, \xi_{\alpha}$ es una densidad vectorial entonces $\left(\mathfrak{T}^{\alpha\beta}\, \xi_{\alpha}\right);_{\beta} = \left(\mathfrak{T}^{\alpha\beta}\, \xi_{\alpha}\right),_{\beta}$ y por lo tanto la ecuación 3.7 se escribe como

$$DS[\mathfrak{X}]\xi = \int_{\mathfrak{X}} \left[-\left(\mathfrak{T}^{\alpha\beta}\, \xi_{\alpha}\right),_{\beta} + \mathfrak{T}^{\alpha\beta};_{\beta}\, \xi_{\alpha} + \mathfrak{EL}_q(\mathfrak{L})\, k\right] \mathrm{d}X + \oint_{\partial\mathfrak{X}} \underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu} \cdot \xi^{\nu}\, d\sigma_{\mu}$$

Aplicando el teorema de la divergencia al primer término, usando que $\mathfrak{T}^{\alpha\beta};_{\beta} = 0$ (lo cual no es necesario suponer dada la arbitrariedad de ξ) y la hipótesis que $\mathfrak{EL}_q = 0$ llegamos a que

$$DS[\mathfrak{X}]\xi = \oint_{\partial\mathfrak{X}} \underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu} \cdot \xi^{\nu}\, d\sigma_{\mu} - \oint_{\partial\mathfrak{X}} \mathfrak{T}^{\alpha\beta}\, \xi_{\alpha}\, d\sigma_{\beta} \tag{3.13}$$

Para completar la prueba solo basta con recordar que $\mathfrak{L}$ es una densidad escalar y que por lo tanto S es un invariante ante cualquier cambio de coordenadas con lo que $DS[\mathfrak{X}]\xi = 0$ $\mathcal{Q.E.D.}$

Este resultado se ha hecho de manera general para cualquier región de la variedad $\mathfrak{X}$ y cualquier campo vectorial ξ, en particular nos gustaría pensar en (hiper) superficie de tipo espacial ya que estamos familiarizados con la idea de que en un sistema la energía o momento se puede conservar a lo largo del tiempo, es decir, a partir del resultado anterior nos gustaría poder decir que el operador de Noether es equivalente al tensor de Landau-Lifshitz para una superficie de tipo espacial y de esto poder deducir que cantidades se conservan a "un tiempo dado".

3.3.2. Corolario

Aunado a las hipótesis del teorema anterior asumimos que toda la materia de nuestro sistema esta dentro de una región espacial de soporte compacto. Sea $\mathscr{H}$ una (hiper) superficie de tipo espacial asintóticamente plana, entonces

$$\int_{\mathscr{H}} \underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}_{\nu} \cdot \xi^{\nu} d\sigma_{\mu} = \int_{\mathscr{H}} \mathfrak{T}^{\mu\nu} \xi_{\nu} d\sigma_{\mu} \tag{3.14}$$

Demostración. Sea $\mathscr{H}'$ otra superficie de tipo espacial asintóticamente plana que no intersecta a $\mathscr{H}$ y $\mathfrak{X}$ la región entre estas dos superficies. Sea $\mathfrak{N}$ un subcojunto compacto de $\mathfrak{X}$ tal que en su interior incluye la intersección de $\mathscr{H}$ con la materia pero excluye por completo a $\mathscr{H}'$, i.e. $\mathfrak{N} \cap \mathscr{H}' = \emptyset$. Elegimos a un campo vectorial ξ tal que en el complemento de $\mathfrak{N}$ tenemos $\xi = 0$ pero en el interior vale lo que sea.

Con la región $\mathfrak{X}$ elegida el dominio $\partial\mathfrak{X}$ de las integrales en la ecuación 3.11 se divide en $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}'$ y una superficie cilíndrica sobre infinito. Dado el campo vectorial particular que elegimos las integrales de superficie asociadas a $\mathscr{H}'$ y a la superficie cilíndrica sobre infinito se anulan y solo queda la asociada a $\mathscr{H}$

$$\int_{\mathscr{H}} \underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}_{\nu} \cdot \xi^{\nu} d\sigma_{\mu} - \int_{\mathscr{H}} \mathfrak{T}^{\mu\nu} \xi_{\nu} d\sigma_{\mu} = 0$$

que es precisamente lo que se quería demostrar. $\mathcal{Q.E.D.}$

Con este corolario se hace evidente la funcionalidad que puede tener el operador de Noether y queda totalmente justificado su nombre.

3.4. Extremo de Soporte Compacto en un Sistema de Materia

La conservación de la energía en un sistema clásico, además de ayudarnos a resolver las ecuaciones de movimiento, también nos da una forma más sencilla de visualizar la evolución del sistema. Imaginemos una partícula moviendose en una dimensión bajo la influencia de un potencial suave (continuidad en segundas derivadas), la única solución estática es aquella donde el potencial tiene pendiente cero. En tales puntos donde el potencial es crítico la energía total del sistema está en un extremo ya que cualquier variación en la velocidad afectará a la energía cinética solamente a segundo orden ($E = T(\dot{x}^2) + V(x) = T(\dot{x}_c^2)$). Podemos parafrasear lo anterior diciendo, que una configuación (a) *Estacionaria* y (b) *Solución* a las ecuaciones de movimiento debe ser (c) un *Extremo* de la energía total.

Esta relación es parte de un caso más general: de las tres condiciones (a), (b), (c), cualquiera dos de ellas implican la tercera. En el caso anterior, es muy fácil converserse uno mismo de ello. Lo probaremos a continuación para situaciones mucho más generales.

Cómo se mencionó al principio de este Capítulo, nos gustaría incluir a funcionales cuyo Lagrangiano $\mathfrak{L}$ no necesariamente es de carácter tensorial sino sólo una densidad afín, lo cual implica que $DS[\mathfrak{X}]\xi = 0$ no sea necesariamente válida; sin embargo pueden haber direcciones ξ que dejen invariante al Lagrangiano. Para esta dirección ξ particular tendremos que $D_\xi S[\mathfrak{X}] = 0$ y la ecuación 3.7 toma la forma particular

$$D_\xi S[\mathfrak{X}] = \int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{C}\mathfrak{L}_Q(\mathfrak{L})\, D_\xi Q(X)\, \mathrm{d}X + \oint_{\partial\mathfrak{X}} \underset{N}{\mathfrak{T}}^\mu{}_\nu \cdot \xi^\nu \, d\sigma_\mu = 0 \tag{3.15}$$

Podemos tomar la derivada de Fréchet de este nuevo funcional en el espacio de las $Q's$ dada por

$$D(D_\xi S[\mathfrak{X}])(Q)h = D_\xi S[\mathfrak{X}](Q+h) - D_\xi S[\mathfrak{X}](Q) - o(||h||)$$

lo cual, sustituyendo en la ecuación 3.15, nos da

$$\begin{aligned} 0 = &\int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{C}\mathfrak{L}_Q[\mathfrak{L}(Q+h)]\, D_\xi(Q+h)\, \mathrm{d}X - \int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{C}\mathfrak{L}_Q(\mathfrak{L})\, D_\xi Q\, \mathrm{d}X \\ &+ \oint_{\partial\mathfrak{X}} \underset{N}{\mathfrak{T}}^\mu{}_\nu(Q+h) \cdot \xi^\nu \, d\sigma_\mu - \oint_{\partial\mathfrak{X}} \underset{N}{\mathfrak{T}}^\mu{}_\nu(Q) \cdot \xi^\nu \, d\sigma_\mu \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $D_\xi(Q+h) = D_\xi Q + D_\xi h$ hallamos finalmente que

$$\int_{\mathfrak{X}} D\left[\mathfrak{C}\mathfrak{L}_Q(\mathfrak{L})\right](Q)\, h\, D_\xi Q\, \mathrm{d}X + \int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{C}\mathfrak{L}_Q(\mathfrak{L})\, D_\xi h\, \mathrm{d}X + \oint_{\partial\mathfrak{X}} \left(D\underset{N}{\mathfrak{T}}^\mu{}_\nu\,(Q)\, h \right) \cdot \xi^\nu \, d\sigma_\mu = 0 \tag{3.16}$$

Como condición suficiente para que esta ecuación sea válida se necesita tanto que $\mathfrak{L}$ como las variables de las que depende (Q y X) sean continuamente diferenciables hasta dos veces más uno el orden de las derivadas de las cuales depende $\mathfrak{L}$, por ejemplo si $\mathfrak{L}$ es un Lagrangiano de segundo orden, ($\mathfrak{L}$, Q y X) tienen que ser continuamente diferenciables hasta quinto orden (recordemos que el operador $\mathfrak{C}\mathfrak{L}$ duplica el orden de derivadas de las variables de campo Q y la derivada $D\mathfrak{L}(Q)h$ necesita un orden más de diferenciabilidad de $\mathfrak{L}$ y Q). Desde luego, también tiene que converger la integral de acción ante variaciones de X y/o Q para que $D_\xi S[\mathfrak{X}]$ y $D(D_\xi S[\mathfrak{X}])(Q)h$ tengan sentido. Usando esta última idantidad probaremos el siguiente

3.4.1. Teorema

Sea $\mathfrak{L}$ un Lagrangiano sin constricciones para un sistema de materia, que cumple las condiciones necesarias para que la ecuación 3.16 sea válida. Sea ξ un campo vectorial para el cual $D_\xi S = 0$ y definamos para cualquier superficie $\mathscr{H}$,

$$P[\xi, \mathscr{H}] \equiv \int_{\mathscr{H}} \underset{N}{\mathfrak{T}}^{\mu}{}_{\nu} \cdot \xi^{\nu} d\sigma_{\mu} \tag{3.17}$$

como el "ξ-momento" total asociado. Entonces de las condiciones siguientes, cualquiera dos de ellas implican la tercera:

(a) Q es estacionaria con respecto a $\xi : D_\xi Q = 0$,

(b) Q satisface las ecuaciones de campo: $\mathfrak{E}\mathfrak{L}_Q(\mathfrak{L}) = 0$ donde quiera que $\xi \neq 0$,

(c) Para cualquier superficie $\mathscr{H}$ tipo espacial asintóticamente plana (regular), $P[\xi, \mathscr{H}]$ es un extremo, i.e. $DP[\xi, \mathscr{H}]h = 0$, para cualquier variación h con dominio de soporte compacto.

Demostración. $(a) + (b) \Rightarrow (c)$
De la ecuación 3.16 se sigue por hipótesis que los dos primeros términos se anulan y entonces tenemos

$$\oint_{\partial\mathfrak{X}} \left(D\underset{N}{\mathfrak{T}}^{\mu}{}_{\nu}\,(Q)\, h \right) \cdot \xi^{\nu}\, d\sigma_{\mu} = 0$$

lo que por construcción es equivalente a

$$D\left(\oint_{\partial\mathfrak{X}} \underset{N}{\mathfrak{T}}^{\mu}{}_{\nu}(Q) \cdot \xi^{\nu}\, d\sigma_{\mu} \right) h = 0 \tag{3.18}$$

De manera análoga a la demostración del Corolario 3.3.2 tomemos a h con soporte compacto, pero arbitrario en cualquier otra manera. Elegimos a la región $\mathfrak{X}$ como la región entre $\mathscr{H}$, la cual intersecta el dominio de h, con otra segunda superficie $\mathscr{H}'$ la cual no intersecta el dominio de h, donde las superficies $\mathscr{H}$ y $\mathscr{H}'$ cumplen con los requisitos del teorema. Entonces la ecuación 3.18 se divide en la derivada de tres integrales de superficie: sobre $\mathscr{H}$, sobre $\mathscr{H}'$ y otra sobre una superficie cilíndrica en infinito, lo cual se reduce a

$$D\left(\oint_{\mathscr{H}} \underset{N}{\mathfrak{T}}^{\mu}{}_{\nu}(Q) \cdot \xi^{\nu}\, d\sigma_{\mu} \right) h = 0$$

y prueba el primer caso.

$(b) + (c) \Rightarrow (a)$
Como en el caso anterior, sea $\mathfrak{X}$ la región contenida entre $\mathscr{H}$ y $\mathscr{H}'$ y por lo tanto la ecuación 3.18 se divide en las tres partes ya mencionadas: la derivada de la integral sobre las superficies $\mathscr{H}$ y $\mathscr{H}'$ y sobre una superficie cilíndrica en infinito. Como la variación h es de soporte compacto la derivada funcional de la integral sobre la superficie cilíndrica siempre se anula y sólo quedan los términos

$$D\left(\oint_{\mathscr{H}} \underset{N}{\mathfrak{T}}^{\mu}{}_{\nu}(Q) \cdot \xi^{\nu}\, d\sigma_{\mu} - \oint_{\mathscr{H}'} \underset{N}{\mathfrak{T}}^{\mu}{}_{\nu}(Q) \cdot \xi^{\nu}\, d\sigma_{\mu} \right) h = 0$$

los cuales siempre son nulos por separado en vista de (c). Por lo tanto usando la hipótesis (b) la ecuación 3.16 se reduce a

$$\int_{\mathfrak{X}} D\left[\mathfrak{CL}_Q(\mathfrak{L})\right](Q)\, h\, D_\xi Q\, \mathrm{d}X = 0$$

Aunque Q es solución de $\mathfrak{CL}_Q(\mathfrak{L})$, al momento de hacer la variación $Q+h$ se tiene que $\mathfrak{CL}_{Q+h}(\mathfrak{L}) \neq 0$ y, dado que h es arbitraria, $\mathfrak{CL}_{Q+h}(\mathfrak{L})$ también será arbitrario. Se pidió continuidad en las derivadas de h y Q hasta dos veces más uno el orden que aquel que aparece en $\mathfrak{L}$; sea este orden $2k+1$, dado que el operador $\mathfrak{CL}_Q(\mathfrak{L})$ es también de orden $2k$ entonces podemos garantizar que $D\left(\mathfrak{CL}_Q(\mathfrak{L})\right) h$ es un operador continuo y por lo tanto, aplicado a un par Q y h da como resultado una función continua. En ese caso podemos aplicar el lema de Haar y concluímos que $D_\xi Q$ es cero. Esto nos indica que ξ es una dirección funcional (vectorial si usamos el mapeo 2.4) en la cual las variables de campo Q no cambian, es decir, la dirección particular ξ es una simetría de Q: $D_\xi Q = 0$

$(c) + (a) \Rightarrow (b)$

Usamos los argumentos del caso anterior para decir que el tercer término de la ecuación 3.16 se anula y (a) para decir que el primero también. Entonces, tenemos que

$$\int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{CL}_Q(\mathfrak{L})\, D_\xi h\, \mathrm{d}X = 0 \tag{3.19}$$

pero h es arbitraria con derivadas continuas hasta un orden $2k+1$, por lo tanto $D_\xi h$ también es abitraria y con derivadas continuas hasta un orden $2k$, entonces se concluye (nuevamente por lema de Haar) que $\mathfrak{CL}_Q(\mathfrak{L}) = 0$ $\mathcal{Q.E.D.}$

Veamos una utilidad inmediata de este teorema en el siguiente

3.4.2. **Corolario** (Aplicación al campo Electromagnético)

No existe principio variacional sin constricciones para las ecuaciones de Maxwell en el cual la variable de campo es el tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$ (equivalentemente, los campos electricos y magnéticos, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$).

Demostración. Sabemos que la energía de un campo electromagnético estacionario esta dada por

$$U = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2) d^3x$$

Dado que los términos dentro de la integral son cuadráticos, para que la energía esté en un extremo se necesita que estos sean nulos, por lo cual cualquier posible cambio en $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ de soporte compacto cambia a primer orden esta cantidad a menos que $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B} = 0$.De aquí que no pueda haber un principio variacional no constreñido en $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ del cuál las ecuaciones de Maxwell puedan ser deducidas. $\mathcal{Q.E.D.}$

Dado que de manera general una variacíon arbitraria se lleva a cabo en toda la variedad ($h \in C^{2k+1}(M)$) nos gustaría relajar la restricción de soporte compacto del teorema anterior. De lograrlo, una aplicación inmediata sería la inclusión de la métrica como un campo dinámico y extender los conceptos anteriores a la Relatividad General.

3.5. Operador de Noether para Gravedad

Como Lagrangiano para gravedad podemos usar el de Hilbert mostrado en el Capítulo 2, el cual es

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}R \tag{3.20}$$

donde R es el escalar de curvatura. En la literatura se suele definir

$$[\mathfrak{C}\mathfrak{L}_g]^{\mu\nu}(\mathfrak{L}) = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}G^{\mu\nu} \tag{3.21}$$

con lo cual la ecuación 3.7 se convierte en

$$\begin{aligned} 8\pi DS_g[\mathfrak{X}]\xi &= -\frac{1}{2}\int_{\mathfrak{X}} G^{\mu\nu}Dg_{\mu\nu}\xi\sqrt{-g}\,dX + 8\pi\oint_{\partial\mathfrak{X}} \underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu}\cdot\xi^{\nu}d\sigma_{\mu} \\ &= \int_{\mathfrak{X}} G^{\mu\nu}\,\xi_{\mu;\nu}\,\sqrt{-g}\,dX + 8\pi\oint_{\partial\mathfrak{X}} \underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu}\cdot\xi^{\nu}d\sigma_{\mu} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Dado que $\mathfrak{L}$ es una densidad tensorial en este caso $8\pi DS_g[\mathfrak{X}]\xi = 0$ para todo $\xi \in C^2M$. Posteriormente necesitaremos continuidad en derivadas de tercer orden, en este caso no necesitamos continuidad en derivadas hasta quinto orden para una segunda variación puesto que $\mathfrak{L}$ es lineal en segundas derivadas por lo que su diferencial de Fréchet sigue conteniendo solo hasta derivadas de segundo orden de manera tal que la diferenciabilidad estará determinada por los requerimientos del Lagrangiano de materia. Considerando que $(G^{\mu\nu}\xi_\mu\sqrt{-g})_{;\nu} = (G^{\mu\nu}\xi_\mu\sqrt{-g})_{,\nu}$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathfrak{X}} \left[(G^{\mu\nu}\xi_\mu\sqrt{-g})_{;\nu} - G^{\mu\nu}{}_{;\nu}\xi_\mu\sqrt{-g}\right]\,dX + 8\pi\oint_{\partial\mathfrak{X}} \underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu}\cdot\xi^{\nu}d\sigma_{\mu} \\ &= \int_{\mathfrak{X}} (G^{\mu\nu}\xi_\mu\sqrt{-g})_{,\nu}\,dX + 8\pi\oint_{\partial\mathfrak{X}} \underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu}\cdot\xi^{\nu}d\sigma_{\mu} \end{aligned}$$

donde hemos usado que $G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$. Usando el teorema de la divergencia en la ultima igualdad se tiene que

$$8\,\pi\,\underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu} = -\sqrt{-g}\,G^{\mu}{}_{\nu} \tag{3.23}$$

Estrictamente esta igualdad es válida hasta una divergencia, puesto que no consideramos en la definición 3.21 la divergencia dada por la ecuación 2.43, como obtuvimos de manera completa esta cantidad en 2.82.

Esta manera inmediata de obtener el operador de Noether es inapropiada cuando se supone al tensor métrico como un campo dinámico puesto que se anula cuando se satisfacen las ecuaciones de campo ($G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}$). Es necesario así utilizar la ventaja de que es invariante bajo una divergencia y podemos añadirle un término de esta forma aunque en este caso no será covariante. Schutz y Sorkin [12] proponen una divergencia que permite al operador de Noether depender solo de primeras derivadas y además lo hace de manera cuadrática y homogenea bajo la elección apropiada de un ξ. Esta cantidad es entonces (ecuación 2.86)

$$8\pi \underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu} \cdot \xi^{\nu} = -\sqrt{-g}\, G^{\mu}{}_{\nu}\xi^{\nu} + \frac{1}{2}\partial_{\alpha}\left(\frac{h^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\beta}\,\xi_{\nu}}{\sqrt{-g}}\right) \tag{3.24}$$

donde solo para recordar

$$h^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv (-g)(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\nu\alpha}g^{\mu\beta})$$

Este es un operador de Noether para el campo gravitacional que nos será muy útil en la siguiente sección. Como ya se dijo en el Capítulo 2, en el caso particular cuando $\xi = constante$ esta cantidad se reduce al pseudotensor de Einstein, mientras que cuando $\xi = (constante)\sqrt{-g}$ se convierte en el pseudotensor de Landau-Lifshitz.

Hasta aquí hemos hablado de Lagrangianos de manera general y en consecuencia su operador de Noether $\underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu}$ también lo es. De ahora en adelante por convención y practicidad distinguiremos el operador de Noether asociado a un Lagrangiano de materia, denotado por $\underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu}$ ó $\mathfrak{T}^{\mu\nu}$, de aquel asociado a un campo gravitacional el cual será denotado por $\underset{N}{\mathfrak{t}}{}^{\mu}{}_{\nu}$.

Con esta definición tenemos que el ξ-momento del operador de Noether asociado a un sistema completo descrito por un Lagrangiano de materia más uno de campo gravitacional es entonces

$$P[\xi, \mathscr{H}] \equiv \int_{\mathscr{H}} \left(\underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}_{\nu} \cdot \xi^{\nu} + \underset{N}{\mathfrak{t}}{}^{\mu}{}_{\nu} \cdot \xi^{\nu}\right) d\sigma_{\mu} \tag{3.25}$$

Obsérvese que en el caso especial cuando se satisfacen las ecuaciones de campo de Einstein y usamos la definición 3.24 la expresión anterior se vuelve

$$P[\xi, \mathscr{H}] = \frac{1}{16\pi}\int_{\mathscr{H}} \partial_{\alpha}\left(\frac{h^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{,\beta}\,\xi_{\beta}}{\sqrt{-g}}\right) d\sigma_{\mu} \tag{3.26}$$

Observemos que de manera general para un sistema total, materia mas campo gravitacional, siempre se satisface (usando la ecuación 3.11)

$$\begin{aligned} 8\pi \oint_{\partial\mathfrak{X}} \left(\underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}_{\nu} \cdot \xi^{\nu} + \underset{N}{\mathfrak{t}}{}^{\mu}{}_{\nu}\right) d\sigma_{\mu} &= \oint_{\partial\mathfrak{X}} \left[- G^{\mu\nu} + 8\pi T^{\mu\nu}\right] \xi_{\nu}\sqrt{-g} d\sigma_{\mu} \\ &\sim \oint_{\partial\mathfrak{X}} \left(\left[- G^{\mu\nu} + 8\pi T^{\mu\nu}\right] \xi_{\nu}\sqrt{-g} + \partial_{\alpha}\left(F^{\mu\alpha\nu}\xi_{\nu}\right)\right) d\sigma_{\mu} \end{aligned} \tag{3.27}$$

que es idénticamente cero cuando se cumplen las ecuaciones de campo de Einstein. En otras palabras, la divergencia de las cantidades conservadas asociada al sistema total, materia más gravitación, debida a la invariancia de $\mathfrak{L}$ ante cualquier cambio de coordenadas es cero cuando se satisfacen las ecuaciones de campo, lo cual era de esperarse siempre porque de la misma manera es como deducimos todos los pseudotensores del Capítulo anterior.

Supongamos que las ecuaciones de campo para la materia se satisfacen y que ξ^μ = *constante* en la ecuación 3.25. Entonces de acuerdo al corolario 3.3.2 podemos reemplazar a $\underset{N}{\mathfrak{T}^\mu_\nu}$ por $\mathfrak{T}^\mu{}_\nu$ mientras que $\underset{N}{\mathfrak{t}}{}^\mu{}_\nu$ se vuelve el Pseudotensor de Einstein. Así P es lo que usualmente se identifica como (la ξ-componente de) el cuatro-momento total del sistema. En particular si $\xi^\mu = \delta^\mu_0$ entonces $P[\xi, \mathscr{H}]$ es la masa total M (consultese [12] y [11]). De hecho, cuando (1) $g_{\mu\nu}$ es asintóticamente Schwarzschild, en coordenadas rectangulares (siempre hemos supuesto que la métricas debe ser asintóticamente Lorentziana), (2) ξ^μ se aproxima a δ^μ_ν, y (3) $\mathscr{H}$ es la superficie $t = 0$, entonces la integral en 3.26 es justamente M.

La ecuación 3.25 tiene sentido independientemente de si las ecuaciones de campo se satisfacen o no. Esto no solo nos posibilita a definir M independiente de cualquier conjunto de constricciones de valores iniciales, pero también podemos ver que, expresado en esta forma, M es, en ausencia de radiación gravitacional sobre el infinito espacial, también independiente del comportamiento asintótico de la métrica. Este punto lo aclararemos en la siguiente sección.

Notemos el hecho que para deducir 3.27 no se supuso nada más allá de que $\mathfrak{L}$ era una densidad tensorial, por lo cuál este resultado es aplicable a cualquier sistema. En particular, se puede utilizar para estudiar un sistema con radiación donde las variaciones desde luego no serán de soporte compacto como se supuso en el teorema 3.4.1. En la siguiente sección trataremos el problema de un sistema de materia acotada pero donde las variaciones dejan de ser acotadas espacialmente.

3.6. La Métrica Como Un Campo Dinámico

En esta sección nos proponemos extender el teorema 3.4.1 a sistemas que incluyen gravitación además de materia. Esto le da a la métrica no solo un caracter auxiliar en el Lagrangiano de materia pero también pasa a ser una variable de campo dinámica en el Lagrangiano asociado a la parte gravitacional. Esto hace que debamos prescindir de las variaciones de soporte compacto requeridas en la demostración del inciso (c) del teorema 3.4.1 puesto que una variación de la gravedad afecta a la variedad completa. Para lograr este objetivo debemos de auxiliarnos en el siguiente

3.6.1. Lema

Sea $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski en coordenadas Cartesianas y supongase que cuando $r \to \infty$

$$\begin{aligned} (i)\ \ h_{\mu\nu} \quad & \text{es } O(r^{-\frac{1+\epsilon}{2}}) \\ (ii)\ \partial_\alpha h_{\mu\nu} \quad & \text{es } O(r^{-\frac{3+\epsilon}{2}}) \end{aligned}$$

en donde ϵ es alguna constante positiva. Sea $\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \hat{h}_{\mu\nu}$ cualquier otra métrica con el comportamiento asintótico dado por (i) y (ii). Sea I cualquier integral de la forma indicada simbólicamente por

$$I = \int \partial h \, \partial h \, d^3x \tag{3.28}$$

Entonces el comportamiento asintótico de $g_{\mu\nu}$ puede ser cambiado a ese de $\hat{g}_{\mu\nu}$ con un cambio arbitrariamente pequeño de I. En particular I en sí mismo converge a cero cuando $r \to \infty$.

Demostración. Sea R un radio fijo, y "peguemos" g a $\hat{g}$ en la región $R < r < 2R$ por reemplazar a g por la función

$$t\hat{g}_{\mu\nu} + (1-t)g_{\mu\nu} \tag{3.29}$$

donde $0 \leq t \leq 1$ y $t = t(r) = 0$ para $r < R$, 1 para $r > 2R$. Intuitivamente podemos ver que $t = f(r/R)$ donde $f(x)$ es cualquier función la cual se anula para $0 < x \leq 1$ y es 1 para $x \geq 1$. Un ejemplo de tal función es

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

la cual tiene derivada continua y ademas $f'(x) \in [0, \frac{3}{2}]$. Se pueden ajustar polinomios de orden mayor si se necesitan derivadas continuas de orden más alto, en nuestro caso solo necesitaremos primeras derivadas continuas. Con el ejemplo de $f(x)$ anterior podemos garantizar que

$$|\partial_\alpha t| = |\frac{dt}{dr}\partial_\alpha r| = |f'(x)\frac{1}{R}\frac{x_\alpha}{r}| \leq \frac{2}{R}$$

donde se ha usado que estamos en la región donde r es grande por lo que $|\frac{x_\alpha}{r}| \leq 1$ y que $|f'(x)| \leq 2$ además de que se anula para $x \geq 2$ ($\partial_\alpha t = 0$ para $r \geq 2R$ y $r \leq R$).

Dado que $\partial_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha h_{\mu\nu}$ obtenemos que

$$\partial_\alpha(t\hat{g}_{\mu\nu} + (1-t)g_{\mu\nu}) = \hat{h}_{\mu\nu}\partial_\alpha t + t\partial_\alpha \hat{h}_{\mu\nu} + \partial_\alpha h_{\mu\nu} - (h_{\mu\nu}\partial_\alpha t + t\partial_\alpha h_{\mu\nu})$$

de donde podemos ver que el término que denotamos simbólicamente por $\partial g \partial g$ ($\partial h \partial h$) se ve transformado por la ecuación 3.29 a una expresión la cual incluye solamente términos de la forma: $h\,h\,\partial t\,\partial t$, $t\,h\,\partial t\,\partial h$, $t\,t\,\partial h\,\partial h$, $h\,\partial t\,\partial h$, $t\,\partial h\,\partial h$ y $\partial h\,\partial h$. Así, tomando en cuenta el rango de valores que puede tomar t, la integral I definida en 3.28 consiste en tres tipos de términos que simbólicamente indicamos por

$$\begin{aligned} I_0 &= \int \partial t\,\partial t\,h\,h\,d^3x \\ I_1 &= \int t\,\partial t\,h\,\partial h\,d^3x \\ I_2 &= \int t\,t\,\partial h\,\partial h\,d^3x \end{aligned}$$

Ahora procedermos a demostrar que cada una de las tres integrales anteriores se anula cuando $R \to \infty$. Tomando en cuenta las condiciones (i) y (ii) sobre h, existen constantes C_i tal que

$$\begin{aligned} |I_0| &\leq C_0 \int_R^{2R} |\partial t|\,|\partial t|\,\frac{r^2 dr}{r^{1+\epsilon}} \leq \frac{4C_0}{R^2}\int_R^{2R} r^{1-\epsilon} dr = \frac{16C}{2-\epsilon}\left(42^{-\epsilon}-1\right)R^{-\epsilon} \\ |I_1| &\leq C_1 \int_R^{2R} 1\cdot\frac{2}{R}\,r^{-2-\epsilon}r^2\,dr = \frac{2C_1}{R}\int_R^{2R} r^{-\epsilon}\,dr = \frac{2C_1}{1-\epsilon}\left(2^{1-\epsilon}-1\right)R^{-\epsilon} \\ |I_2| &\leq C_2 \int_R^{\infty} 1\cdot\frac{r^2 dr}{r^{3+\epsilon}} = C_2\int_R^{\infty}\frac{dr}{r^{1+\epsilon}} = \frac{C_2}{\epsilon}R^{-\epsilon} \end{aligned}$$

Puede pensarse que hay problemas en las desigualdades anteriores cuando ϵ vale 1 ó 2, pero si sacamos el límite cuando $\epsilon \to 2$ en I_0 y $\epsilon \to 1$ en I_1 veremos que este converge a una cantidad finita, por lo tanto $I_i \to 0$ cuando $R \to \infty$ $\forall\epsilon > 0$ y en cosecuencia $I \to 0$ cuando $R \to \infty$, ya que todos los términos que contiene se anulan por separado. $\mathcal{Q.E.D.}$

Como aplicaciones inmediatas de este lema está el hecho de que podemos describir el comportamiento asintótico de alguna solución a las ecuaciones de campo mediante cualquier otra solución sin afectar la energía más que en una cantidad tan pequeña como se quiera y que podemos quitar la restricción de variacion de soporte compacto en el teorema 3.4.1, esto se demostrará en los siguientes dos corolarios.

En algunas ocasiones se suele hacer uso de superficies a las que se le añade el adjetivo “asintóticamente regular”, por lo cual es conveniente definir adecuadamente tal concepto ya que posterioremente lo usaremos. Definimos *un par* $(\xi, \mathscr{H})$ *asintóticamente regular* como aquel que cumple con

$a)$ $\mathscr{H}$ es una n-variedad sin frontera y con una región asintóticamente simple en la cual se vuelve plana y de tipo espacial.

$b)$ En alguna vecindad espacio-temporal de su región asintótica existen coordenadas tales que los incisos (i) y (ii) del lema anterior son válidos

$c)$ Donde sea aplicable, el campo vectorial ξ^μ se vuelve constante cuando $r \to \infty$. Este ultimo inciso es suficiente para el tratamiento del $(n+1)$-momento; para momento angular son requeridas restricciones más fuertes.

3.6.2. Corolario

Cualquier solución de las ecuaciones de campo sin radiación gravitacional sobre infinito espacial puede ser descrita mediante el comportamiento asintótico de cualquier otra solución sin cambiar la energía gravitacional, $P[\xi, \mathscr{H}]$, por más que una cantidad arbitrariamente pequeña.

Demostración. De acuerdo al operador de Noether dado por la ecuación 3.24, la energía gravitacional es

$$\int_{\mathscr{H}} \underset{N}{\mathfrak{t}}{}^{\mu}{}_{\nu} \cdot \xi^{\nu} d\sigma_{\mu}$$

donde $(\xi, \mathscr{H})$ cumple con la definición de asintóticamente regular y además $\xi^{\nu} \to \delta_0^{\nu}$ en coordenadas asintóticamente galileanas (las coordenadas galileanas son aquellas donde una transformación galileana es válida). La elección que hicimos de $\mathfrak{t}_N{}^{\mu}{}_{\nu}$ es de la forma 3.28 (ecuación 3.26). En particular, si ξ^{ν} es un vector temporaloide de Killing y $\xi^{\nu} = \delta_0^{\nu}$ entonces el término $\partial_{\alpha}\xi_{\nu} = \partial_{\alpha}g_{\nu 0}$ en la formula 3.24 es de la forma 3.28.

La hipótesis acerca de la exclusión de radiación gravitacional significa (ver por ejemplo [11]) que (i) e (ii) del lema se satisfacen con $\epsilon = 1$, si las coordenadas se eligen apropiadamente, por lo tanto concluímos que el cambio en $P[\xi, \mathscr{H}]$ es arbitrariamente pequeño cuando usamos alguna otra solución. $\mathcal{Q.E.D.}$

3.6.3. Corolario

En el Teorema 3.4.1 supongase que $(\xi, \mathscr{H})$ son una pareja asintóticamente regular. Podemos relajar la restricción de variaciones de soporte compacto en (c) a aquellas que necesitan solamente preservar las condiciones (i) y (ii) del Lema 3.6.1.

Demostración. La única demostración que necesitamos modificar es $(a) + (b) \Rightarrow (c)$. Pero por la demostración del corolario anterior, cualquier variación del tipo más general es (hasta una diferencia arbitrariamente pequeña) equivalente en su efecto sobre la masa M (que hemos supuesto acotada) a una de soporte compacto. $\mathcal{Q.E.D.}$

Con este último corolario hemos podido extender el teorema de Noether para la energía (Teorema 3.4.1) para cualquier sistema descrito por un Lagrangiano no constreñido que incluye materia acotada y campo gravitacional. Como un último objetivo de esta tesis es extender este teorema a cualquier Lagrangiano y que pueda incluir cualquier variación, tanto en el espacio de funciones al que pertenece ξ (transformaciones de coordenadas) como en el que pertenecen las variables de campo.

3.7. Teorema Extremal General En Relatividad

Imaginemos un largo río con flujo constante y lo suficientemente pequeño como para que no exista turbulencia ante pequeñas perturbaciones, y el cual queremos estudiar pensando en que las partículas que lo constituyen forman un flujo de líneas continuas. Si nos paramos en la orilla podemos hacer mediciones acerca de cantidades como por ejemplo la dirección que llevan las partículas en cierta región, la presión y temperatura en determinado punto, etc. La otra forma de hacer mediciones es movernos a la par con una diferencial de volumen del río. Desde esteúltimo sistema de referencia podemos medir la curvatura intrínseca de las líneas de flujo, el cambio del volumen, el cambio de la temperatura, etc. Así, las perturbaciones que se le pueden hacer al flujo de un río son de distinta índole; variación de la temperatura, de la dirección que siguen las partículas y en consecuencia de las trayectorias que siguen, incluso aumento de particulas, etc. Aunque son de naturaleza diferente nada impide el poder aplicarlas todas al mismo tiempo, es decir, pensar en el río como todo en conjunto y alterar su trayectoria, presión, volumen, temperatura, cantidad de materia contenida, etc. Desde luego el que la temperatura cambie de un punto a otro no solo puede ser consecuencia de una fuente externa pero también al cambio del tamaño y presión que sufre un elemento de volumen a lo largo de la trayectoria que une dichos puntos. Esto nos lleva a pensar en un Lagrangiano donde las variables de las que depende pueden tener constricciones, y de hecho las ecuaciones de Euler para un fluido perfecto compresible (no se considera temperatura) nunca han sido deducidas satisfactoriamente de un principio variacional (consultese [12]). Su dificultad desde luego radica, como se hizo notar, en que las variaciones posibles están sometidas a restricciones.

Un esquema similar se tiene en Relatividad General; la evolución de una tres-variedad (n-variedad) a lo largo de una dirección (por ejemplo) de tipo temporal, y la evolución de más variables de campo que describen al sistema, se sigue que una variación general puede en principio incluír tanto una perturbación de la 4-variedad ($n+1$-variedad) de fondo en la que se hace “fluir” la 3-variedad así como variaciones externas en cada una de las variables de campo que le describen. Al igual que el ejemplo anterior, pueden existir constricciones entre las variables por lo que un Lagrangio y/o una acción que describen al sistema pueden estar constreñidos y de ahí que el teorema 3.4.1 no aplique en el caso más general posible de Relatividad General. Es posible quitar la restricción a principios variacionales no constreñidos de dicho teorema aunque hay un precio que pagar como lo veremos a continuación, pero antes debemos dejar en claro el espacio funcional en el cual haremos las variaciones.

3.7.1. Definición de variación total

Hasta ahora hemos hecho variaciones esencialmente de dos tipos: arrastrar una región $\mathfrak{X}$ a una región $\mathfrak{X}'$, lo cual tradujimos en una variación de las coordenadas dada por un parámetro ξ el cual define un flujo y que podemos asociarlo a las componentes de un campo vectorial. La otra variación ha sido de las variables de campo Q, en las que incluímos a la métrica. Al variar la métrica esencialmente estamos modificando la geometría de la variedad que describimos. Podríamos pensar también que dos variaciones distintas hechas a la metrica pueden estar describiendo dos variedades topológimante distintas pero que se reduzcan en el límite a la misma variedad no perturbada, como por ejemplo si la perturbación tiende a contener una singularidad; es por eso que en nuestro estudio siempre hemos tratado con abiertos solamente y no con la variedad completa. En este sentido podemos ver que las variables de campo Q diferentes de las métrica se ven modificadas tanto por el arrastre (y cambio de la variedad) como también debido a una posible perturbación a priori en ellas. Esto lleva a la necesidad de un mapeo que identifique las nuevas variables Q de la nueva variedad perturbada con las de la variedad inicial. Veámoslo con más claridad a continuación.

En los principios variacionales anteriores hablamos de la variación de Q y se dijo abiertamente que entre esta variación se podría incluír a la métrica. Como ya hicimos notar, al variar la métrica variamos el espacio base donde residen los parámetros, es decir se modifica (se perturba) la variedad en si misma y en consecuencia, debemos identificar a las variables Q distintas de la métrica en la nueva variedad perturbada y luego hacer en ellas un principio variacional [1]. Sea e un mapeo que asocia a cada punto $p' \in \mathfrak{X}' \subset M'$ un punto $p \in \mathfrak{X} \subset M$, donde M' es el resultado de aplicar una perturbación a la variedad M. Dadas las condiciones de diferenciabilidad necesarias para hacer una variación a M, necesitamos que e sea un mapeo 1-1 de un abierto (que puede ser descompuesto en una familia de superficies de Cauchy) $\mathfrak{X}' \subset M'$ a otro abierto $\mathfrak{X} \subset M$ con la misma clase de diferenciabilidad que M y M'. Entonces e genera un único mapeo de campos Q' sobre campos Q'_* en M. Teniendo dos campos a comparar en el mismo espacio ya podemos definir la derivada de Fréchet como aquel operador lineal que cumple con

$$Q'_* = Q + D_e(Q)\, k + o(||k||) \tag{3.30}$$

donde ahora k es un elemento de un espacio compuesto por el espacio de las Q's y por el de las transformaciones de coordenadas que caracterizamos por un flujo que representan las ξ's. Este espacio extendido no debe de representar ninguna confusión ya que así como anteriormente al decir que h era una variación general para los diferentes campos Q's, cuyo espacio de trabajo era la unión de los distintos espacios tensoriales donde tienen soporte cada Q ($g_{\alpha\beta}$, ϕ, etc), así ahora k es un elemento de la unión de los diferentes espacios tensoriales que soportan a las Q's con el espacio de las trasformaciones de coordenadas reprentadas por el parámetro ξ. No olvidemos que el grado de diferenciabilidad suficiente s (el cual asigna una norma al espacio $|\ |_s$) para llevar a cabo un principio variacional sobre estas variables esta dictado tanto por el Lagrangiano así como por el problema particular que se trabaje.

Veamos un ejemplo. Sea $F(X,Q) = F(X, g_{\alpha\beta}, \phi, ...)$, observemos que en este caso una variación k aplicada a las variables de las que depende F contiene una variación ξ para las coordenadas X, una variación $h_{\alpha\beta}$ para las componentes de la métrica $g_{\alpha\beta}$, y variaciones h para ϕ y los otros posibles campos de los cuales pueda depender F. Por

[1] Obsérvese que esto no entra en conflicto con el trabajo anterior puesto que en los principios donde variamos la métrica explícitamente no se hizo ninguna variación de otro campo. Cuando se habló de una Q que puede incluír a la métrica podemos pensar que la variación de los campos distintos de la métrica se hacen una vez satisfechas las ecuaciones de la métrica (es decir ya establecida la variedad) o viceversa como es el caso del Teorema 3.4.1.

lo tanto la diferencial $D_eF(X,Q)k$ la podemos separar

$$D_eF(X,Q)k = D_eF(X)\xi + D_eF(g_{\alpha\beta})h_{\alpha\beta} + D_eF(\phi)\,h \tag{3.31}$$

donde se puede ver que aunque esta diferencial se descompone en operadores con dominios distintos, la suma sí esta bien definida puesto que el codominio de cada uno de los términos es el mismo. Con esto podemos decir que $D_eF(X,Q)k$ es la diferencial total y más general posible de un operador. Hay que hacer notar también que cuando $M' = M$ el mapeo e es solamente una transformación de coordenadas de la misma forma en que lo hace ξ. Es importante darse cuenta que en ningún momento usamos la palabra infinitesimal como muchas veces se recalca en la literatura cuando se habla de variaciones.

Esta nueva forma de definir la derivada de Fréchet ha incluido un mapeo arbitrario e, podríamos pensar de igual forma en otro mapeo f que también cumple las condiciones impuestas a e y con ello definir otra derivada $D_fF(X,Q)k$, pero obsérvese que existe una transformación $\eta(p) = f(e^{-1}(p))$ que lleva el punto $p \in M$ al punto $f(p') \in M$ y de esta forma η es un flujo al igual como definimos ξ, con ello queda claro que

$$D_fF(X,Q)k = D_eF(X,Q)k + DF(X,Q)\xi \tag{3.32}$$

lo que hace evidente que la diferencia de dos derivadas de Fréchet correspondienes a distintos mapeos e y f es simplemente la derivada de Fréchet correspondiente a la transformación dada por $f(e^{-1})$. Elegir un mapeo en particular dependerá de cada problema particular; por ejemplo, cuando perturbamos las líneas de flujo de un fluído dinámico, nos gustaría mapear la línea de universo de una partícula en M' con esa línea que corresponde a la "misma" partícula en M, y el mapeo que hace esto es conocido como "*mapeo Lagrangiano*" l. Otros mapeos pueden también resultar útiles como en el caso de que M' y M sean variedades isométricas (como en la gravedad Newtoniana) uno puede desear que e sea una isometría.

Mientras que $D_eF[X,Q]k$ la hemos podido definir para cualquier campo Q, la diferencial $D_e(Q)\,k$ solo está definida para tensores, podemos incluso extenderla a derivadas de la métrica puesto que conocemos su regla de transformación. De esta forma la derivada funcional del operador de Noether esta bien definida ya que depende solamente de la métrica y de campos tensoriales y también de cualquier otro operador que tenga este tipo de dependencia solamente.

3.7.2. Cantidad conservada general

Por completéz de esta sección reescribiremos algunos resultados anteriores conforme se necesiten. Sea S la acción que describe a un sistema general en la teoría de la Relativadad General, es decir contiene una parte asociada al campo de materia S_m y una parte asociada al campo gravitacional S_g. De manera general esto es

$$S[X,Q] = S_m[X,Q] + S_g[X,g_{\mu\nu}] = \int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{L}_m(X,g_{\mu\nu},\phi)dX + \int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{L}_g\,dX \tag{3.33}$$

donde los campos ϕ son diferentes de la métrica y son los que describen la dinámica de la materia (e.g. campos electromagnéticos, temperatura, densidad, etc). $\mathfrak{L}_m$ no necesariamente tiene carácter tensorial al igual que $\mathfrak{L}_g$ pero en este tratamiento particular supondrémos que $\mathfrak{L}_m$ es una densidad escalar y tomaremos $\mathfrak{L}_g = -\frac{1}{16\pi}R\sqrt{-g}$.

La variación de S_m con respecto a ξ manteniendo fija la frontera y la métrica se hace de manera similar a como se hizo en la sección donde se definió por primera vez el tensor simétrico de Landau y Lifshitz. Primero hacemos la variación de S_m en el esapcio de las ϕ's resultando

$$\begin{aligned} DS_m(\phi)h &= \int_{\mathfrak{X}} \left[\frac{\partial \mathfrak{L}_m}{\partial \phi} h + \frac{\partial \mathfrak{L}_m}{\partial \phi_{,\alpha}} h_{,\alpha} + \cdots \right] dX \\ &= \int_{\mathfrak{X}} \left[\mathfrak{EL}_\phi(\mathfrak{L}_m) \right] h \, dX \end{aligned} \tag{3.34}$$

En este caso los términos de frontera son nulos ya que h lo es ahí. Como hipótesis adicional suponemos que las variables ϕ son expresables en términos de la métrica, dandole a $g_{\mu\nu}$ el carácter de variables auxiliares por lo que, si $\phi = \phi([g_{\mu\nu}])$ (no olvidemos que ϕ tiene carácter tensorial por lo que el arreglo de las $g_{\mu\nu}$'s y sus derivadas debe ser tal que conforme un tensor), entonces usando la regla de la cadena y despreciando términos de frontera

$$\begin{aligned} DS_m(g_{\mu\nu})h_{\mu\nu} =& DS_m(\phi)D\phi(g_{\mu\nu})h_{\mu\nu} = \int_{\mathfrak{X}} [\mathfrak{EL}_\phi(\mathfrak{L}_m)]\,)D\phi(g_{\mu\nu})h_{\mu\nu} \, dX \\ =& \int_{\mathfrak{X}} [\mathfrak{EL}_\phi(\mathfrak{L}_m)] \left(\frac{\partial \phi}{\partial g_{\mu\nu}} h_{\mu\nu} + \frac{\partial \phi}{\partial g_{\mu\nu},_\rho} h_{\mu\nu},_\rho + \cdots \right) dX \\ =& \int_{\mathfrak{X}} \left[[\mathfrak{EL}_\phi(\mathfrak{L}_m)] \frac{\partial \phi}{\partial g_{\mu\nu}} + \partial_\rho \left([\mathfrak{EL}_\phi(\mathfrak{L}_m)] \frac{\partial \phi}{\partial g_{\mu\nu},_\rho} \right) + \cdots \right] h_{\mu\nu} \, dX \end{aligned}$$

Definimos al tensor (densidad tensorial) de energía-momento asociado a las variables de campo ϕ como

$$\frac{1}{2} \underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu} = [\mathfrak{EL}_\phi(\mathfrak{L}_m)] \frac{\partial \phi}{\partial g_{\mu\nu}} + \partial_\rho \left([\mathfrak{EL}_\phi(\mathfrak{L}_m)] \frac{\partial \phi}{\partial g_{\mu\nu},_\rho} \right) + \cdots \tag{3.35}$$

Observemos que esta cantidad es simétrica ya que $g_{\mu\nu}$ lo es y además cuando $\phi = g_{\mu\nu}$ se reduce a $\sqrt{-g}T^{\mu\nu}$. Con esta definición la derivada de Fréchet de S_m en el espacio de las variables auxiliares $g_{\mu\nu}$ es

$$DS_m(g_{\mu\nu})h_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{X}} \underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \, dX \tag{3.36}$$

En este caso el parámetro libre es ξ mientras que las variaciones $h_{\mu\nu}$ son dependientes por lo que es natural preguntarse qué ecuación cumple el tensor asociado a las variables de campo. Sabemos que $Dg^{\mu\nu}\xi = 2\xi^{(\mu;\nu)}$ por lo que

$$\begin{aligned} DS_m(X)\xi = DS_m(g_{\mu\nu})Dg_{\mu\nu}\xi &= \int_{\mathfrak{X}} \underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu} \, dX \\ &= -\int_{\mathfrak{X}} \underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}{}_{;\nu} \xi_\mu \, dX + \int_{\mathfrak{X}} \left(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu} \xi_\mu \right)_{;\nu} dX \end{aligned}$$

Finalmente, usando que el campo ξ es nulo en la frontera de $\mathfrak{X}$ y que $\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}\xi_\mu$ es una densidad vectorial, obtenemos que

$$DS_m(X)\xi = -\int_{\mathfrak{X}} \underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}{}_{;\nu}\xi_\mu \, dX \tag{3.37}$$

Dado que ξ es arbitrario, obtenemos explícitamente que

$$\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{3.38}$$

Es decir, la divergencia covariante de esta densidad tensorial es cero, lo cual justifica el haberle dado el mismo nombre de tensor de energía-momento. Notemos también que en ningún momento específicamos algún rango para ϕ por lo que puede ser una variable tensorial de cualquier rango. Para que el resultado anterior tenga total validéz debemos de suponer que el orden diferenciabilidad de ϕ (y de las variaciones h) es de dos veces el orden aquel que aparece en $\mathfrak{L}_m$ mientras que el orden de $g_{\mu\nu}$ (y las variaciones $h_{\mu\nu}$) debe de ser dos veces el orden de aquel que aparece en ϕ al ser expresada en términos de $g_{\mu\nu}$.

Para poder obtener 3.37 hemos tenido que escribir los campos ϕ en términos de $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas, si esto no fuera posible tendríamos que hallar una manera diferente de definir el tensor de energía-momento para ϕ a manera de que a partir de la ecuación 3.34, mediante $DS_m(X)\xi = DS_m(\phi)D\phi(X)\xi$, podamos recuperar la ecuación 3.37, la cual es una extensión natural del tensor de energía-momento definido en un espacio plano de variables q^α.

La parte análoga a lo hecho anteriormente es suponer que las variables ϕ no cambian, mientras que la métrica sí, Esto es una variación directa a la métrica, es decir ahora la métrica es un campo dinámico. Esta suposición nos lleva al resultado obtenido en 2.26, esto es

$$DS_m(g_{\mu\nu})h_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{X}} T^{\mu\nu}h_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}X$$

del cual inmediatamente se obtiene

$$DS_m(X)\xi = DS_m(g_{\mu\nu})Dg_{\mu\nu}(X)\xi = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{X}} T^{\mu\nu}\sqrt{-g}Dg_{\mu\nu}\xi\,\mathrm{d}X \tag{3.39}$$

donde también hemos despreciado los términos de frontera. Las variables ϕ y $g_{\mu\nu}$ son independientes por lo que la variación total en el caso de que ξ se anule en la frontera, es entonces

$$DS_m(X)\xi = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{X}} T^{\mu\nu}\sqrt{-g}Dg_{\mu\nu}\xi\,\mathrm{d}X - \int_{\mathfrak{X}} \underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}{}_{;\nu}\xi_\mu\,\mathrm{d}X \tag{3.40}$$

Si ahora suponemos que ξ no es nulo en la frontera, es decir hay un arrastre de la región de integración, entonces tendremos que agregar el operador de Noether el cual incluye todos los términos de frontera, tanto los asociados al campo ϕ como los de $g_{\mu\nu}$ (definición 3.7)

$$DS_m[\mathfrak{X}]\xi = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{X}} T^{\mu\nu}\sqrt{-g}Dg_{\mu\nu}\xi\,\mathrm{d}X - \int_{\mathfrak{X}} \underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu}\xi_\mu\,\mathrm{d}X + \oint_{\partial\mathfrak{X}} \underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu}\cdot\xi^\nu\,d\sigma_\mu \tag{3.41}$$

De manera similar a lo hecho anteriormente tenemos una expresión análoga asociada al campo gravitacional. Usando el Lagrangiano particular $\mathfrak{L}_g$ que elegimos obtenemos la ecuación 3.22

$$DS_g[\mathfrak{X}]\xi = -\frac{1}{16\pi}\int_{\mathfrak{X}} G^{\mu\nu}Dg_{\mu\nu}\xi\sqrt{-g}\,dX + \oint_{\partial\mathfrak{X}} \underset{N}{\mathfrak{t}}{}^{\mu}{}_{\nu}\cdot\xi^\nu d\sigma_\mu \tag{3.42}$$

donde $\underset{N}{\mathfrak{t}}{}^{\mu}{}_{\nu}$ es cualquier pseudotensor asociado al campo gravitacional como los exhibidos en las ecuaciones 2.82, 2.84 o 3.24.

Dado el carácter tensorial que impusimos a $\mathfrak{L}_m$ y $\mathfrak{L}_g$ tanto $DS_m[\mathfrak{X}]\xi$ como $DS_g[\mathfrak{X}]\xi$ son nulos, por lo que también $DS[\mathfrak{X}]\xi = DS_m[\mathfrak{X}]\xi + DS_g[\mathfrak{X}]\xi = 0$. Ésta es una identidad ya que la anulación de la derivada de Fréchet no supone en ningún momento el cumplimiento de ecuación alguna.

En el teorema 3.3.1 encontramos la equivalencia entre el operador de Noether y el tensor simétrico $T^{\mu\nu}$ (ecuación 3.11) suponiendo que se cumplian las ecuaciones de campo asociadas a un Lagrangiano de materia. Con la nueva definición de $\mathfrak{T}_\phi{}^{\mu\nu}$, si ahora $\mathfrak{T}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}T^{\mu\nu} + \mathfrak{T}_\phi{}^{\mu\nu}$ entonces podremos darnos cuenta que en el teorema 3.3.1 no hay necesidad de suponer el cumplimiento de las ecuaciones de campo asociadas a ϕ para que se cumpla la siguiente identidad

$$\oint_{\partial\mathfrak{X}} \underset{N}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu}\cdot\xi^\nu\,d\sigma_\mu = \oint_{\partial\mathfrak{X}} \mathfrak{T}^{\mu}{}_{\nu}\xi^\nu\,d\sigma_\mu \tag{3.43}$$

Condensando los resultados anteriores (ecuaciones 3.41, 3.42 y 3.43, el hecho de que $DS[\mathfrak{X}]\xi = DS(Q)Dh[X]\xi$ se anule debido al caracter tensorial de $\mathfrak{L}$ nos lleva a la identidad

$$\frac{1}{2}\int_{\mathfrak{X}}\left(\frac{1}{8\pi}G^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}Dg_{\mu\nu}\xi\,\mathrm{d}X + \int_{\mathfrak{X}} \underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu}\xi_\mu\,\mathrm{d}X = \oint_{\partial\mathfrak{X}}\left(\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\nu}\xi^\nu + \underset{N}{\mathfrak{t}}{}^{\mu}{}_{\nu}\cdot\xi^\nu\right)\mathrm{d}\sigma_\mu \tag{3.44}$$

Esta igualdad se cumple para todo campo ξ. Dado que una simetría de interés siempre se da a lo largo de un campo ξ específico, podemos aplicar la ecuación anterior a ξ particulares en cuyo caso ya no tendremos la derivadad de Fréchet sino la de Gâteaux, es decir $D_\xi g_{\mu\nu} = -\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}$.

Observemos que cuando imponemos las ecuaciones de movimiento en 3.44, dada la arbitrariedad de $\mathfrak{X}$ y ξ obtenemos que $\mathfrak{T}_\phi{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ y si $[\xi, \mathscr{H}]$ es un par asintóticamente regular, también se cumple que

$$P[\xi,\mathscr{H}] = \int_{\mathscr{H}}\left(\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\nu}\xi^\nu + \underset{N}{\mathfrak{t}}{}^{\mu}{}_{\nu}\cdot\xi^\nu\right)\mathrm{d}\sigma_\mu \tag{3.45}$$

es una cantidad conservada ya que no depende de la $\mathscr{H}$. De hecho es más general el resultado, veamoslo en el siguiente

3.7.3. Lema

Sea ξ un campo vectorial asintóticamente regular definido en todos lados sobre una variedad que contiene materia de soporte espacial compacto. Entonces el ξ-momento $P[\xi, \mathscr{H}]$ definido por la ecuación 3.45 sobre cualquier superficie asintóticamente regular $\mathscr{H}$ es conservado (independiente de $\mathscr{H}$) si cualquiera de las dos condiciones siguientes se cumple

(a) La métrica y la materia satisfacen las ecuaciones de Einstein: o

(b) ξ^ν es un vector de Killing de la métrica, y el ξ-momento de materia es localmente coservado

$$\partial_\mu(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^\mu{}_\nu \xi^\nu) = 0$$

Demostración. (a) Por hipótesis el primer término del lado izquierdo de la ecuación 3.44 se anula. Dado que la variación que hacemos es para cualquier campo vectorial que sea asintóticamente regular pero arbitrario en cualquier otro caso, se cumple la identidad de Bianchi $\mathfrak{T}_\phi{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ y además

$$\oint_{\partial\mathfrak{X}} \left(\mathfrak{T}^\mu{}_\nu \xi^\nu + \underset{N}{\mathfrak{t}}{}^\mu{}_\nu \cdot \xi^\nu \right) \mathrm{d}\sigma_\mu = 0$$

Suponemos que la región $\mathfrak{X}$ es la comprendida entre dos superficie $\mathscr{H}$ y $\mathscr{H}'$ asintóticamente regulares y que no se intersectan, y una superficie cilíndrica S en infinito. Dividimos en estas tres contribuciones la integral anterior y por el lema 3.6.1 la integral sobre S no contribuye (eligiendo un pseudotensor asociado al campo gravitacional como el dado en la ecuación 3.24). Por lo tanto

$$\int_{\mathscr{H}} \left(\mathfrak{T}^\mu{}_\nu \xi^\nu + \underset{N}{\mathfrak{t}}{}^\mu{}_\nu \cdot \xi^\nu \right) \mathrm{d}\sigma_\mu = \int_{\mathscr{H}'} \left(\mathfrak{T}^\mu{}_\nu \xi^\nu + \underset{N}{\mathfrak{t}}{}^\mu{}_\nu \cdot \xi^\nu \right) \mathrm{d}\sigma_\mu \tag{3.46}$$

En donde ya consideramos que la diferencial $\mathrm{d}\sigma_\mu$ apunta hacia el exterior de $\mathfrak{X}$. Dado que este resultado es valido para cualesquiera dos $\mathscr{H}$ y $\mathscr{H}'$ concluímos que $P[\xi, \mathscr{H}]$ se conserva. Observemos que ξ más allá de ser asintóticamente regular sigue siendo arbitrario.

(b) El que ξ sea un vector de Killing de la métrica implica que $D_\xi g_{\mu\nu} = -\pounds_\xi g_{\mu\nu} = 0$ por lo que el primer término de la ecuación 3.44 se anula. El segundo término también se anula puesto que

$$\partial_\mu(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^\mu{}_\nu \xi^\nu) = (\underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^{\mu\nu} \xi_\nu)_{;\mu} = \underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^{\mu\nu}{}_{;\mu} \xi_\nu + \frac{1}{2}(\xi_{\nu;\mu} + \xi_{\mu;\nu}) \underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^{\mu\nu} = \xi_\nu \underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \tag{3.47}$$

Por lo que nuevamente tenemos que el lado derecho de la ecuación 3.44 se anula. Dado que la ecuación 3.46 es para cualquier par $[\xi, \mathscr{H}]$ asintóticamente regular, en particular también lo es para el vector de Killing ξ de la métrica en cuestión, lo que concluye la prueba.

$\mathcal{Q.E.D.}$

Cabe destacar que el resultado anterior es completamente general, puesto que en ningún momento se ha supuesto el cumplimiento de las ecuaciones de campo de la materia y ni siquiera se ha especificado la naturaleza de la materia con la que se trabaja. Más alla de las hipótesis matemáticas necesarias la única restricción que deben cumplir los campos de materia es que sean expresables en términos de la métrica. Esto da una amplia posibilidad de aplicaciones como más adelante veremos en el caso del fluído perfecto.

3.7.4. Segunda variación

Camino hacia una versión general y sin constricciones del teorema 3.4.1, es necesario hacer la versión equivalente a la ecuación 3.16 la cuál la obtendrémos haciendo una variación general a la ecuación 3.44. Intuitivamente, aplicar una variación general a la ecuación 3.44 (la cual se obtuvo de una primera variación) significa variar al mismo tiempo tanto la métrica como los campos de materia y las coordenadas, y teniendo en mente que esta variación modifica la variedad M a otra M' se hace necesario el uso de los conceptos definidos en 3.7.1.

Consideremos una región $\mathfrak{X}$ sobre una variedad M con una métrica arbitraria, conteniendo un campo de materia con soporte espacial compacto, y sobre la cual un campo vectorial arbitrario ξ es definido. Permitiremos a la perturbación ser arbitraria a una región $\mathfrak{X}'$ sobre una variedad M' y a un campo ξ' definido en $\mathfrak{X}'$. Elijamos un mapeo e tal que $e(\mathfrak{X}') = \mathfrak{X}$. Si definimos unas coordenadas X sobre $\mathfrak{X}$ el mapeo e automáticamente asigna unas coordenadas a $\mathfrak{X}'$. Aplicamos una variación en el espacio de las variables de campo (la cual necesita que $D_e\xi\eta = \xi$, donde η es una variación vectorial) que cumpla con las condiciones anteriores a la ecuación 3.44. Usando el teorema de la regla de la cadena obtenemos

$$\int_{\mathfrak{X}} \left\{ D_e \left[\frac{1}{16\pi} \left(G^{\mu\nu} - 8\pi T^{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} \right] h \, D_\xi g_{\mu\nu} + \left[\frac{1}{16\pi} \left(G^{\mu\nu} - 8\pi T^{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} \right] D_\xi h_{\mu\nu} + \right.$$
$$\left. + \, D_e \left(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^{\mu\nu}{}_{;\mu} \right) h \, \xi_\nu \right\} \mathrm{d}X = D_e \left[\oint_{\partial\mathfrak{X}} \left(\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\nu}\xi^\nu + \underset{N}{\mathfrak{t}}{}^{\mu}{}_{\nu} \cdot \xi^\nu \right) \mathrm{d}\sigma_\mu \right] k \qquad (3.48)$$

donde $h = D_e Q$ es la variación del conjunto de variables de campo y $h_{\mu\nu}$ la variación asociada a la métrica. Hemos usado también el hecho de que

$$\begin{aligned} D_e(D_\xi Q)h &= (Q'_*(X+\xi) - Q'_*(X)) - (Q(X+\xi) - Q(X)) \\ &= (Q'_*(X+\xi) - Q(X+\xi)) - (Q'_*(X) - Q(X)) \\ &= (D_e Q)(X+\xi) - (D_e Q)(X) = D_\xi(D_e Q) \end{aligned}$$

es decir

$$D_e(D_\xi Q)h = D_\xi h \qquad (3.49)$$

La validéz de los principios variacionales que llevan a la ecuación 3.48 impone que el Lagrangiano $\mathfrak{L}$ y las variables ϕ y X sean continuamente diferenciables hasta dos veces más uno el orden de las derivadas de las cuales depende $\mathfrak{L}$ (supongamos que $\mathfrak{L}$ depende de derivadas de ϕ de hasta orden k, entonces $\mathfrak{L}$ y ϕ deben ser continunas en sus derivadas de orden $2k+1$). Por otro lado al imponer como hipótesis adicional que $\phi = \phi([g_{\mu\nu}])$ necesitamos que sobre este argumento, ϕ sea también continuamente diferenciable el mismo orden máximo de la derivada de $g_{\mu\nu}$ que contiene. Es decir, si ϕ depende de derivadas en $g_{\mu\nu}$ de hasta orden s entonces la continuidad suficiente para realizar el principio variacional sobre $g_{\mu\nu}$ es de orden $2(k+s)+1$ y en este caso para la métrica el espacio funcional es el de funciones que se transforman ante cambios de coordenadas como un tensor de rango dos con norma $|\ |_{2(k+s)+1}$. Veremos para el caso de un fluido perfecto que $s = 0$ ($\phi = \phi(g_{\mu\nu})$ y que $k = 1$ ya que el Lagrangiano de materia es de primer orden por lo que la continuidad suficiente de la métrica debe ser 3, hecho que queda claro al notar que $T^{\mu\nu}$ es de primer orden en $g_{\mu\nu}$ por lo que $T^{\mu\nu}{}_{;\mu}$ es de segundo y en consecuencia $DT^{\mu\nu}{}_{;\mu}(g_{\mu\nu})h_{\mu\nu}$ es de tercer orden. Desde luego también hay que tener en cuenta que la integral debe converger ante las variaciones de X, ϕ o $g_{\mu\nu}$, para que las derivadas de Fréchet en cualquiera de estos espacios tenga sentido.

Como en casos anteriores, la anulación del lado derecho de la ecuación 3.48 implica la conservación de la variación de la integral del ξ-momento. Podemos determinar ahora bajo qué condiciones esto sucede. Esto es el análogo al teorema 3.4.1:

3.7.5. Teorema

Definamos al ξ-momento $P[\xi, \mathscr{H}]$ por la ecuación 3.45 para un par asintóticamente regular $(\xi, \mathscr{H})$. Sean las hipótesis necesarias para que la ecuación 3.48 sea válida. De las siguientes tres afirmaciones, cualquiera dos de ellas implican la tercera

(a) La métrica es estacionaria con respecto a ξ: $D_\xi g_{\mu\nu} = 0$;

(b) Las ecuaciones de Einstein son satisfechas: $G^{\mu\nu} - 8\pi T^{\mu\nu} = 0$ (con la implicación $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$) donde quiera que $\xi \neq 0$;

(c) $P[\xi, \mathscr{H}]$ es un extremo para un ξ fijo y para cualquier $\mathscr{H}$ una vez hecha la derivada de Fréchet en el espacio de la métrica y los campos de materia, la cual se anula sobre alguna $\mathscr{H}'$ y satisface

$$D_e \left(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^{\mu\nu}{}_{;\mu} \right) h\xi_\nu = 0 \tag{3.50}$$

de dos formas: como hipótesis débil sobre $\mathscr{H}$, y como hipótesis fuerte sobre la región entre $\mathscr{H}$ y $\mathscr{H}'$.

Observación Estamos haciendo una perturbación alrededor de $\mathscr{H}$ la cual se anula para una superficie distante $\mathscr{H}'$, esto puede entenderse como una variación en una vencidad de $\mathscr{H}$ pero dicha variación se anula en la distancia, es decir la variación en este teorema se hace de manera local. Desde luego este resultado tiene trascendencia general ya que no se ha impuesto restricción alguna sobre $\mathscr{H}$ a excepción de que sea una superficie asintóticamente regular al igual que ξ. El que $D_e\xi\eta = \xi$ refleja el hecho que la segunda variación la hacemos en el espacio de las variables de campo por lo que es independiente de coordenadas y solo estamos identificando un campo ξ sobre M con otro ξ' sobre M. Las demostraciones $(a)+(b) \Rightarrow (c)$ y $(a)+(c) \Rightarrow (b)$ solo precisan de la hipótesis débil de (c) mientras que $(b)+(c) \Rightarrow (a)$ precisa de la fuerte como veremos a continuación.

Demostración. $(a) + (b) \Rightarrow (c)$ Por hipótesis de (a) y (b) los dos términos del lado izquierdo de la ecuación 3.48 se anulan. Sea $\mathfrak{X}$ la región comprendida entre las superficies $\mathscr{H}$ y $\mathscr{H}'$, que es como la región usada en el teorema 3.4.1. De la ecuación 3.47 (ya que en este caso ξ es un vector de Killing) tenemos que

$$\partial_\mu(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu}\xi^\nu) = \xi_\nu \underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^{\mu\nu}{}_{;\mu}$$

y teniendo en cuenta que la derivada parcial conmuta con la derivada de Fréchet cuando ésta se hace en el espacio de las variables dependientes, la condición 3.50 se convierte en que

$$D_e\left(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^{\mu\nu}{}_{;\mu}\right)h\xi_\nu = D_e\left(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^{\mu\nu}{}_{;\mu}\xi_\nu\right)h = D_e\left(\partial_\mu(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu}\xi^\nu)\right)h = \partial_\mu\left(D_e\left(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu}\xi^\nu\right)h\right)$$

se anula sobre $\mathscr{H}$. Dado este resultado vemos que podemos convertir al tercer término de la ecuación 3.48 en una integral sobre la frontera de $\mathfrak{X}$, la cual consiste de las superficies $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}'$ y de una superficie S sobre infinito. Dado que la derivada de Fréchet se anula sobre $\mathscr{H}'$, la integral sobre esta superficie no contribuye. $\mathfrak{T}_\phi{}^{\mu}{}_{\nu}$ tiene soporte compacto por lo que la integral sobre S tampoco contribuye, por lo que finalmente la condición 3.50 establece que

$$\int_{\mathscr{H}} D_e\left(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu}\xi_\nu\right)h\,\mathrm{d}\sigma_\mu = 0 \tag{3.51}$$

De esta forma todo el lado izquierdo de la ecuación 3.48 se anula. La integral sobre el lado derecho también se puede dividir en tres partes: una sobre $\mathscr{H}'$ cuya variación se anula una vez más por que la variación ahí no tiene presencia; una más sobre una superficie cilíndrica S en infinito cuya variación se anulará en vista del lema 3.6.1 y el corolario 3.6.2, y otra integral sobre $\mathscr{H}$ lo que implica que $D_eP[\xi,\mathscr{H}]h = 0$.

$(a) + (c) \Rightarrow (b)$

La hipótesis (a) implica que el primer término del lado izquierdo de la ecuación 3.48 se anula y además se retiene la hipótesis de que ξ es un vector de Killing por lo que el tercer término es cero usando también la hipótesis 3.50 del inciso (c). Por argumentos similares al primer paso de esta prueba el lado derecho de la ecuación 3.48 también se anula, por lo que tenemos

$$\int_{\mathfrak{X}}\left[\frac{1}{16\pi}\left(G^{\mu\nu} - 8\pi T^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\right]D_\xi h_{\mu\nu}\mathrm{d}X = 0 \tag{3.52}$$

Dado que esta segunda variación es para cualquier $h_{\mu\nu}$ y dada la diferenciabilidad que impusimos, la función $D_\xi h_{\mu\nu}$ es al menos contínua y podemos aplicar el lema de Haar con lo que se obtine

$$G^{\mu\nu} - 8\pi T^{\mu\nu} = 0 \tag{3.53}$$

Obsérvese que el hecho de que se tiene que cumplir la condicón 3.50 debilmente no evita la arbitrariedad de $h_{\mu\nu}$ ya que ésta es sólo una condición de frontera pero arbitraria en el interior.

$(b) + (c) \Rightarrow (a)$ La hipótesis (b) implica que el segundo término de la ecuación 3.48 se anula y por argumentos similares al paso uno de esta demostración debidos al inciso (c), el lado derecho también se anula. La demostración de que el tercer término se anula ya no es como en los casos anteriores y usa la hipótesis fuerte del inciso (c), ya que ahora $\xi^{\nu}{}_{;\mu}$ no es cero. Esto hace menos elegante la prueba. El problema de no poder usar la hipótesis débil radica en que ahora aparece sumado al término de superficie uno de la forma

$$\frac{1}{2}\int_{\mathfrak{X}} D_e \left(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu}\xi_{(\mu;\nu)} \right) h \, \mathrm{dX}$$

Entonces usando la hipótesis fuerte de (c) tenemos que

$$\int_{\mathfrak{X}} D_e \left[\frac{1}{16\pi} \left(G^{\mu\nu} - 8\pi T^{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} \right] h \, D_\xi g_{\mu\nu} \mathrm{d}X = 0$$

Dado que esta ecuación debe cumplirse para todo h, y dadas las condiciones de continuidad impuestas sobre el espacio a donde pertenece, implica que $D_e\left[\frac{1}{16\pi}\left(G^{\mu\nu} - 8\pi T^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\right] h$ es una función arbitraria y por lo menos continua. Usando el lema de Haar se tiene que

$$D_\xi g_{\mu\nu} = 0$$

lo que concluye la prueba.

Q.E.D.

El incluír la restricción 3.50 a este teorema permite poder trabajar sobre cualquier campo de materia sea que se incluyan restricciones o no, hecho que no está permitido en el teorema 3.4.1. A cambio de esta más amplia aplicabilidad hemos pagado un precio: el resultado obtenido es menos general. El presente teorema solo nos dice que las ecuaciones de campo de Einstein se cumplen resultando el sistema estacionario y cumpliendo extremalidad, mientras que el teorema 3.4.1 también implica que las ecuaciones de campo de materia se cumplen. En un fluído perfecto estas ecuaciones resultan redundantes debido a las constricciones que satisface dicho sistema.

En el siguiente capítulo se aplican los resultados hasta aquí obtenidos al caso particular de un sisema consistente en un fluído perefecto. También incluiremos la versión del teorema de Noether para la energía en éste sistema e inspirados en este caso particular lo formularemos para cualquier sistema que posee un vector de Killing de tipo temporal.

Capítulo 4

Fluido Perfecto

Para tener una idea más clara del teorema 3.7.5 y comprender su gran utilidad, estudiaremos brevemente en este capítulo unicamente un sistema que consiste de un fluído perfecto. Concluiremos enunciando el teorema de Noether para la energía de un sistema que consiste de un campo de materia y de un campo gravitacional invariante ante un vector de Killing de tipo temporal.

4.1. Cantidad Extremal

Se define como *fluído perfecto* a aquel sistema que puede ser completamente caracterizado por su densidad de energía en el sistema en reposo ρ y por su presión isotrópica p [16]. Además es no viscoso, no conduce calor y no hay tensión de corte (fuerzas externas i.e., no ofrece resistencia a tangenciales).

En analogía con la definición de un fluído perfecto en mecánica clasica, definimos al Lagrangiano en Relatividad General como

$$\mathfrak{L} = -\rho\sqrt{-g} \tag{4.1}$$

Veamos el límite no-relativista de este Lagrangiano. Supongamos que estamos en un espacio de Minkowski. En un sistema que se mueve junto con un elemento de volumen del fluído tenemos

$$\rho\sqrt{-g}dX = \rho\, dV\, ds = (\rho_0 + u)\, dV\, ds$$

donde dV es elemento de volumen en el sistema de referencia fijo a este y s es el tiempo propio. Hemos descompuesto a ρ en la masa en reposo y en la energía interna del fluído medidas en el sistema fijo al elemento de volumen. En un sistema en el cual el fluído tiene velocidad v, la coordenada temporal t' satisface

$$ds = (1-v^2)^{\frac{1}{2}}dt' = \left((1 - \frac{1}{2}v^2\right) dt' + O(v^4)$$

Dado que $\rho_0 dV$ es un elemento de la masa en reposo el cual es el mismo en todos los sistemas de referencia, y $dV\,ds = dV'\,dt'$ es el elemento de volumen invariante, donde dV' es el volumen espacial en el nuevo sistema, uno tiene

$$\rho\sqrt{-g}dX = \rho_0\left(1 - \frac{1}{2}v^2\right)dV'\,dt' + u\,dV'\,dt' + O(v^4).$$

Dado que $\rho_0 dV dt'$ es una constante bajo cualquier variación, se puede descartar y encontramos que

$$-\rho\sqrt{-g}dX \longrightarrow -\left(u - \frac{1}{2}\rho_0 v^2\right)dV'dt' + O(v^4) \tag{4.2}$$

Éste es el Lagrangiano restringido que se usa en mecánica de fluídos clásicos para obtener las ecuaciones de Euler de un fluído perfecto (hay otras formas de obtener las ecuaciones de Euler de un fluído mediante principios variaciones, como por ejemplo usar potenciales generalizados, cosultese por ejemplo [12]).

Aunque la correspondencia anterior se ha dado entre relatividad especial y el límite no-relativista no es inesperado suponer que un sistema consistente de un fluído perfecto que incluye presión en Relatividad General esta descrito por la acción

$$S = -\int_{\mathfrak{X}}\rho\sqrt{-g}\,dX \tag{4.3}$$

Dado que en la definión de fluído perfecto precisamos de no conducción de calor y exclusión de fuerzas externas tangenciales, esperamos que la acción S este sujeta a las constricciones de que la entropía y el numero de particulas son constantes. Escritas estas restricciones de manera general significan:

$$D_e S\,h = 0 \;\text{ y }\; D_e\mathfrak{N}^\alpha = 0 \tag{4.4}$$

donde h es un elemento del espacio donde se llevan acabo la variación de las variables de campo, lo que significa que no hay ninguna adición o alguna extracción tanto de calor como de particulas provocada por la variación. Desde luego la entropía en un solo elemento de volumen puede cambiar debido al arrastre así como el numero de partículas y se puede incluir una fuente externa como veremos a contunuación. $\mathfrak{N}$ es el el *vector de flujo de densidad* definido por

$$\mathfrak{N}^\alpha \equiv n\sqrt{-g}\,U^\alpha \tag{4.5}$$

siendo U^α la 4-velocidad de cada una de las partículas. Es claro de la ecuación 3.31 que estas restricciones se convierten en

$$D_e\mathfrak{N}^\alpha\,k = D_e\mathfrak{N}^\alpha\xi + D_e\mathfrak{N}^\alpha\,h = D_e\mathfrak{N}^\alpha\xi$$

y para una dirección particular ξ lo anterior se convierte en

$$D_e\mathfrak{N}^\alpha\,k = D_{e\xi}\mathfrak{N}^\alpha = -\pounds_\xi\mathfrak{N}^\alpha \tag{4.6}$$

Podemos obtener la divergencia de esta expresión y dado que la variación k afecta sólo a los campos y a ξ, la derivada parcial conmuta con la derivada de Fréchet, por lo que obtenemos.

$$\partial_\alpha(D_e\mathfrak{N}^\alpha\, k) = D_e\partial_\alpha\mathfrak{N}^\alpha\, k = -\pounds_\xi(\partial_\alpha\mathfrak{N}^\alpha) \tag{4.7}$$

Estas últimas dos ecuaciones se pueden obtener de igual forma para S con lo que podemos llegar a la identidad

$$D_e[\mathfrak{N}^\alpha\partial_\alpha S]\, k = -\pounds_\xi(\mathfrak{N}^\alpha\partial_\alpha S) \tag{4.8}$$

Las ecuaciones 4.7 y 4.8 se anulan para todo ξ^α sí y solo sí $\partial_\alpha\mathfrak{N}^\alpha = 0$ y $\mathfrak{N}^\alpha\partial_\alpha S = 0$ respectivamente, lo cual es la conservación de partículas y de entropía del sistema no variado. En otras palabras, no necesitamos suponer que $\partial_\alpha\mathfrak{N}^\alpha = 0$ y $\mathfrak{N}^\alpha\partial_\alpha S = 0$, permitimos a priori fuentes y pérdida de partículas y entropía, la constricción sólo nos fuerza a que éstas sean llevadas a lo largo de ξ, pero la variación en sí misma no agrega o remueve partículas ni entropía. De esta manera estamos suponiendo un principio mínimamente constreñido. Debido a estas dos contricciones solo podemos aplicar el teorema 3.7.5.

Ahora hacemos la variación del Lagrangiano 4.3 sometido a la conservación de particulas y entropía. Esta variación la haremos asumiendo que la métrica tiene un caracter auxiliar y el campo ξ se anula en la frontera. Es decir estamos interesados en la derivada de Fréchet de S dada por $DS[g_{\mu\nu}]D(g_{\mu\nu})\xi$, la cuál es simplemente

$$DS[g_{\mu\nu}]D(g_{\mu\nu})\xi = \int_{\mathfrak{X}} D\mathfrak{L}[g_{\mu\nu}]h_{\mu\nu}dX \tag{4.9}$$

donde $D(g^{\mu\nu})\xi = h^{\mu\nu} = 2\xi^{(\mu;\nu)}$ es la variación de la métrica dada por ξ. Notemos de la ecuación 4.5 que

$$n = \sqrt{\frac{\mathfrak{N}^\alpha\mathfrak{N}^\beta g_{\alpha\beta}}{g}} \tag{4.10}$$

Usando la segunda restrcción de 4.4 no es difícil mostrar que

$$Dn(g_\alpha)h_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}n(g^{\alpha\beta} + U^\alpha U^\beta)h_{\alpha\beta} \tag{4.11}$$

Por otro lado, de la primera ley de la termodinámica

$$d\rho = \mu\, dn + n\, T\, dS \tag{4.12}$$

dado que la variación de la entropía es nula tenemos

$$D\rho(g_{\alpha\beta})h_{\alpha\beta} = \mu\, Dn(g_{\alpha\beta})h_{\alpha\beta} \tag{4.13}$$

por lo que tenemos entonces

$$D[\rho\sqrt{-g}](g_{\alpha\beta})h_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\mu n(g^{\alpha\beta} + U^\alpha U^\beta)h_{\alpha\beta}\sqrt{-g} + \rho\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} \tag{4.14}$$

Definiendo al *tensor de energía-momento de un fluído perfecto* como

$$T^{\mu\nu} = \mu n(g^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu) - \rho\, g^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + p\, g^{\mu\nu} \tag{4.15}$$

tenemos que la derivada de Fréchet de S dada por la ecuación 4.3 con respecto a una variación de las variables de campo es

$$DS(g_{\mu\nu})h_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{X}} T^{\mu\nu}\sqrt{-g}h_{\mu\nu}dX \tag{4.16}$$

y haciendo uso de que $h_{\mu\nu} = 2\xi_{(\mu;\nu)}$ y que ξ es nulo en la frontera, mediante una integración por partes, llegamos a la identidad

$$DS(g_{\mu\nu})Dg_{\mu\nu}(X)\xi = -\int_{\mathfrak{X}} T^{\mu\nu}{}_{;\mu}\xi_\nu\sqrt{-g}dX \tag{4.17}$$

Esta identidad es para todo ξ, con esto podemos establecer que: *para un sistema que consiste de un fluído perfecto todas aquellas configuraciones satisfaciendo $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$, donde $T^{\mu\nu}$ esta definido por la ecuación 4.15, son extremos de la acción una vez que todas las variaciones obedecen las restricciones 4.7 y 4.8.*

En este caso particular, si consideramos un sistema total, materia más campo gravitacional, y en cuyo caso las $g_{\mu\nu}$ son variables dinámicas, podemos ver que las ecuaciones de campo de Einstein son

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi\left[(\rho + p)U^\mu U^\nu + p\, g^{\mu\nu}\right] \tag{4.18}$$

para la región donde $T^{\mu\nu} \neq 0$, y para la región donde no hay materia se tiene

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 0 \tag{4.19}$$

Estas ecuaciones determinan la geometría del espacio en el que se encuentra el fluído perfecto.

La variación 4.17 no es más que la ecuación 3.37 aplicada al fluído perfecto, esto nos da la oportunidad de poder usar todas las herramientas construídas en el capítulo anterior, entre ellas la ecuación 3.44 y el teorema 3.7.5, cuando tratamos al sistema general materia más campo gravitacional.

4.2. Variación Sobre Vectores De Killing

En el teorema 3.7.5 encontramos que, para demostrar que la métrica sea estacionaria con respecto a un vector ξ además de suponer que las ecuaciones de campo de Einstein se cumplen y la variación del ξ-momento asociado al sistema (ecuación 3.45) es nula, también hubo que suponer la hipótesis fuerte de que $D_e\,(\mathfrak{T}_\phi{}^{\mu\nu}{}_{;\mu})\,h\xi_\nu = 0$ se anula en toda la región comprendida entre $\mathscr{H}$ y $\mathscr{H}'$. Veamos que esta condición no es necesaria cuando la variación del sistema posee un vector de Killing.

4.2.1. Lema

Si la métrica no perturbada y el tensor de energía-momento son invariantes bajo movimientos de un ξ particular, esto es

$$D_\xi g_{\mu\nu}(X) = D_\xi \underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}(X) = 0 \tag{4.20}$$

pero de otro modo arbitrarios, entonces

(a) Para una región arbitraria $\mathfrak{X}$ la siguiente es una identidad

$$\int_{\mathfrak{X}} D_e\left(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}{}_{;\mu}\right) h\xi_\nu \, dX = \oint_{\partial\mathfrak{X}} \left[D_e\left(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu}{}_{\nu}\right) h + \frac{1}{2}\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}\delta^\mu_\nu\right] \xi^\nu \, d\sigma_\mu \tag{4.21}$$

(b) Si $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento de un fluído perfecto, entonces la integral de superficie en (a) se vuelve

$$-\oint_{\partial\mathfrak{X}} (\mathfrak{N}^\alpha D_e V_\alpha h \delta^\mu_\nu - \mathfrak{N}^\mu D_e V_\nu h - V_\nu D_e \mathfrak{N}^\mu h + nT\sqrt{-g}\, D_e S h\, \delta^\mu_\nu)\xi^\nu d\sigma_\mu \tag{4.22}$$

Donde definimos

$$V_\mu \equiv \mu\, U_\nu \tag{4.23}$$

el cual es convencionalmente llamado el *momento por partícula.*

Demostración. En este caso h denota una variación de los campos pero no de ξ por lo que $D_e\xi h = 0$, y similarmente a la demostración realizada en el teorema 3.7.5 tenemos

$$\begin{aligned}
D_e\left(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}{}_{;\mu}\right) h\xi_\nu &= D_e\left(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}{}_{;\mu}\xi_\nu\right) h \\
&= D_e\left[(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}\xi_\nu)_{;\mu} - \frac{1}{2}\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}\xi_{(\mu;\nu)}\right] h \\
&= D_e\left[(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}\xi_\nu)_{,\mu}\right] h - D_e\left[\frac{1}{2}\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu} D_\xi g_{\mu\nu}\right] h \\
&= D_e\left[(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}\xi_\nu)_{,\mu}\right] h - D_e\left[\frac{1}{2}\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}\right] h\, D_\xi g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}\, D_e\left[D_\xi g_{\mu\nu}\right] h \\
&= \partial_\mu\left(D_e\left[\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}\xi_\nu\right] h\right) - \frac{1}{2}\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}\, D_\xi\left(D_e\left[g_{\mu\nu}\right] h\right) \\
&= \partial_\mu\left(D_e\left[\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}\right] h\, \xi_\nu\right) - \frac{1}{2} D_\xi\left(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}\, D_e\left[g_{\mu\nu}\right] h\right)
\end{aligned}$$

donde hemos usado que los operadores diferenciación parcial y $D_e[Q]h$ conmutan debido a que trabajan en espacios diferentes. Finalmente, poniendo como antes $D_e\left[g_{\mu\nu}\right] h = h_{\mu\nu}$ y usando que $D_\xi\phi = -\pounds_\xi\phi$ (proposición 2.2.1), obtenemos

$$D_e\left(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}{}_{;\mu}\right) h\xi_\nu = \partial_\mu\left(D_e\left[\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\mu\nu}\right] h\, \xi_\nu\right) + \partial_\mu\left(\frac{1}{2}\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}\right)\xi^\mu \tag{4.24}$$

Esto demuestra al inciso (a)

Para probar (b) vemos que de la definición de V_α, $\mu = \sqrt{-V^\alpha V^\beta g_{\alpha\beta}}$ de lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} D_e\mu h &= \frac{1}{2\sqrt{-V^\alpha V^\beta g_{\alpha\beta}}}\left(-V^\alpha V^\beta h_{\mu\nu} - 2V^\alpha g_{\alpha\beta} D_e V^\beta h\right) \\ &= -U^\alpha D_e V_\alpha h - \frac{1}{2} U^\alpha V^\beta h_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

De la definición de $T^{\mu\nu}$, $\mathfrak{N}^\mu$ y V_ν es fácil encontrar que

$$\mathfrak{T}^\mu{}_\nu = V_\nu \mathfrak{N}^\mu + \delta^\mu_\nu p\sqrt{-g} \tag{4.25}$$

de lo cual obtenemos

$$D_e\mathfrak{T}^\mu{}_\nu h = \mathfrak{N}^\mu D_e V_\nu + V_\nu D_e \mathfrak{N}^\mu + \delta^\mu_\nu \sqrt{-g} D_e p h - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \sqrt{-g}\delta^\mu_\nu$$

De la primera ley de la termodinámica

$$dp = n\, d\mu - nTdS \tag{4.26}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} D_e p h\sqrt{-g} &= n\, D_e\mu h\,\sqrt{-g} - nTD_e S h\,\sqrt{-g} \\ &= -\mathfrak{N}^\alpha D_e V_\alpha h - \frac{1}{2}\mathfrak{N}^\alpha V^\beta h_{\alpha\beta} - nTD_e S h\,\sqrt{-g} \end{aligned}$$

con lo que obtenemos que

$$\begin{aligned} D_e\mathfrak{T}^\mu{}_\nu h =& \mathfrak{N}^\mu D_e V_\nu + V_\nu D_e\mathfrak{N}^\mu - \frac{1}{2} p\, g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\delta^\mu_\nu - \mathfrak{N}^\alpha D_e V_\alpha h \delta^\mu_\nu \\ &- \frac{1}{2}\mathfrak{N}^\alpha V^\beta h_{\alpha\beta}\delta^\mu_\nu - nTD_e S h\,\sqrt{-g}\delta^\mu_\nu \\ =& \mathfrak{N}^\mu D_e V_\nu + V_\nu D_e \mathfrak{N}^\mu - \mathfrak{N}^\alpha D_e V_\alpha h - nTD_e S h\,\sqrt{-g}\delta^\mu_\nu - \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}\delta^\mu_\nu \end{aligned}$$

Esto demuestra el inciso (b) $\mathcal{Q.E.D.}$

Este lema ha sido demostrado para cualquier vector de Killing y no asume que las ecuaciones de Einstein no pertubadas se satisfacen. De hecho se puede explotar mucho más la ventaja de que $D_\xi g_{\mu\nu}(X) = 0$: por ejemplo, por el teorema de la regla de la cadena $D_\xi G^{\mu\nu}(X) = DG^{\mu\nu}(g_{\alpha\beta})\, D_\xi g_{\alpha\beta}(X) = 0$, sy similarmente para $T^{\mu\nu}$ y para $\sqrt{-g}$, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi}\int_{\mathfrak{X}} (G^{\mu\nu} - 8\pi T^{\mu\nu})\sqrt{-g} D_\xi h_{\mu\nu}\, dX &= \frac{1}{16\pi}\int_{\mathfrak{X}} D_\xi\left((G^{\mu\nu} - 8\pi T^{\mu\nu})\sqrt{-g} h_{\mu\nu}\right)\, dX \\ &= \frac{1}{16\pi}\oint_{\partial\mathfrak{X}} (G^{\mu\nu} - 8\pi T^{\mu\nu})\sqrt{-g} h_{\mu\nu}\xi^\alpha d\sigma_\alpha \end{aligned}$$

y finalmente la ecuación 3.48 se conviente en

$$\begin{aligned}&\oint_{\partial\mathfrak{X}}\frac{1}{16\pi}(G^{\mu\nu}-8\pi T^{\mu\nu})\sqrt{-g}h_{\mu\nu}\xi^{\alpha}d\sigma_{\alpha}+\oint_{\partial\mathfrak{X}}\left[D_e\left(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu}\right)h+\frac{1}{2}\underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}\delta^{\mu}_{\nu}\right]\xi^{\nu}\,d\sigma_{\mu}\\ =&D_e\left[\oint_{\partial\mathfrak{X}}\left(\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\nu}\xi^{\nu}+\underset{N}{\mathfrak{t}}{}^{\mu}{}_{\nu}\cdot\xi^{\nu}\right)\mathrm{d}\sigma_{\mu}\right]k\end{aligned}\tag{4.27}$$

Obsérvese que esta identidad se cumple para cualquier ξ que deje invariante la métrica y para cualquier campo de materia acotado sin importar la naturaleza del tensor de energía-momento. En este caso hemos escrito a las variables de campo en términos de la métrica por lo que la anulación de $D_\xi\,\mathfrak{T}_\phi{}^{\mu\nu}(X)=0$ es una consecuencia del teorema de la regla de la cadena dado que $D_\xi g_{\mu\nu}(X)=0$. Este no es el caso en tensores de energía-momento que no podemos escribir en términos de una métrica, por ejemplo el tensor de energía-momento electromagnético. Es por ello que se ha hecho su mención explćita en el lema anterior.

4.3. Teorema De Noether Para La Energía

El interés particular de esta tesis es encontrar el análogo al teorema de Noether para la energía en Relatividad General. Clásicamente este teorema dice: un sistema es invariante ante translaciones temporales (la simetría) si y solo si la energía se conserva (la cantidad conservada), siempre y cuando las ecuacions de movimiento se cumplan (ley de conservación débil). El análogo a las translaciones temporales en Relatividad General es que la métrica posea un vector de Killing de tipo temporal ξ.

Dadas las variaciones que tomamos en cuenta en el teorema 3.7.5, aunado al corolario 3.6.2, la ecuación 4.27 (proceso similar a la demostración del teorema antes mencionado) puede ser puesta en la forma

$$\begin{aligned}&\oint_{\mathscr{H}}\frac{1}{16\pi}(G^{\alpha\beta}-8\pi T^{\alpha\beta})\sqrt{-g}h_{\alpha\beta}\xi^{\mu}d\sigma_{\mu}+\oint_{\mathscr{H}}\left[D_e\left(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^{\mu}{}_{\nu}\right)h+\frac{1}{2}\underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}\delta^{\mu}_{\nu}\right]\xi^{\nu}\,d\sigma_{\mu}\\ =&D_e\left[\oint_{\mathscr{H}}\left(\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\nu}\xi^{\nu}+\underset{N}{\mathfrak{t}}{}^{\mu}{}_{\nu}\cdot\xi^{\nu}\right)\mathrm{d}\sigma_{\mu}\right]k\end{aligned}\tag{4.28}$$

Para que esta relación sea válida deben de cumplirse las mismas condiciones que garantizan que la ecuación 3.48 sea válida, ya que sólo es un caso particular de ésta.

En el sistema particular consistente de un fluído perfecto tenemos el siguiente

4.3.1. **Teorema** (Teorema de Noether para la energía en un fluído perfecto)

Un conjunto $(g_{\alpha\beta},\mathfrak{N},S)$ invariante bajo un vector de Killing asintóticamente temporal ξ, es una solución de la ecuaciones de Einstein *si y solo si* su integral de ξ-momento (definida sobre cualquier superficie regular $\mathscr{H}$ que en ningún lado es paralela a ξ, y la cual tiene un campo normal n_α) es un extremo bajo perturbaciones en $\mathscr{H}$ que obedecen las siguiente restricciones:

(a) El número de partículas es constante si $V_\mu \xi^\nu \neq 0$, es decir

$$D\mathfrak{N}^\mu n_\mu = 0 \;\text{ ó }\; V_\mu \xi^\nu = 0 \tag{4.29}$$

(b) La entropía específica es constante: $D_e Sh = 0$;

(c) La perturbación en V_μ es restringida por

$$P^\mu{}_\nu U^\nu D_e V_\mu h = 0 \tag{4.30}$$

donde $P^\mu{}_\nu \equiv \delta^\mu_\nu - \frac{\xi^\mu n_\nu}{\xi^\alpha n_\alpha}$ es el proyector de ξ sobre $\mathscr{H}$.

(d) Si el conjunto $(g_{\alpha\beta}, \mathfrak{N}, S)$ es invariante bajo movimientos a lo largo de un campo η que conmuta con ξ ($\pounds_\xi \eta = 0$), entonces las perturbaciones son también invariantes ante éstas. (Esto aplica en particular, por supuesto, a ξ mismo.)

Demostración. Los incisos (a), (b) y (c) son el análogo de la hipótesis débil 3.50 en el teorema 3.7.5, que garantizan que la segunda integral en 4.28 se anula. Estas condiciones se han puesto en tres partes ya que cada una de ellas es una restrición sobre las variables del campo del fluído y que físicamente pueden tener sentido: número de partículas, entropía y velocidad.

La condición (d) es solo por conveniencia, expresa el hecho de que si la métrica no perturbada es invariante ante dos campos, se siga cumpliendo dicha propiedad después de la perturbación, y el presente teorema siga teniendo validéz ante un arrastre provocado por el vector η. Desde luego, la reglas que impone este teorema siguen siendo ciertas si prescindimos de dicha restricción.

($\Rightarrow$) La primera integral en la ecuación 4.28 es nula por hipótesis y debido a las restricciones (a), (b) y (c) la segunda también lo es. De esta forma

$$D\left[\oint_{\mathscr{H}} \left(\mathfrak{T}^\mu{}_\nu \xi^\nu + \underset{N}{\mathfrak{t}}{}^\mu{}_\nu \cdot \xi^\nu\right) \mathrm{d}\sigma_\mu\right] k = 0 \tag{4.31}$$

lo que establece la primera parte del teorema

($\Leftarrow$) Por hipótesis el lado derecho de la ecuación 4.28 se anula. Las tres constricciones (a), (b) y (c) pueden ser satisfechas por las cinco perturbaciones ($D_e\mathfrak{N}^\mu h$, $D_e Sh$) de tal manera que dejen a la variación $D_e g_{\mu\nu} h$ ser arbitraria. De esta forma si el ξ-momento es extremo las ecuaciones de campo se cumplen, como consecuencia de que $D_e g_{\mu\nu} h$ es válida para toda h en el espacio que hace válida la ecuación 3.48 y por el lema de Haar.

Ahora sólo necesitamos mostrar que la restricción (d) sobre las variaciones no afecta la aseveración anterior. En el caso particular donde la invariancia η es una isometría de $\mathscr{H}$, como lo es ξ, la demostración es obviamente inalterada, ya que los valores de $D_\eta h_{\mu\nu}$, $D_\eta D_e \eta^\mu h$ y $D_\eta Sh$ nunca entran en las integrales del lado derecho de la ecuación 4.28. La posible dificultad es si las curvas integrales de η o parte de ellas viven en $\mathscr{H}$. Supongamos que es el caso, i.e., que existe una región $U \subset \mathscr{H}$ cubierta por las curvas integrales de η. En ese caso es posible construir coordenadas (x, y, λ) en U tal que las curvas definidas por λ constante son curvas integrales de η. Por hipótesis ξ^μ y $(G^{\alpha\beta} - 8\pi T^{\alpha\beta})\sqrt{-g}$ son independientes de λ y $d\sigma_\mu \to dxdyd\lambda$, así, la primer integral en 4.28, depende solamente de la integral de $D_e g_{\mu\nu} h$ a lo largo de λ a través de U. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $D_e g_{\mu\nu} h$ constante a lo largo de λ en la región U. De manera similar, la segunda integral en 4.28 puede ser hecha nula. Entonces la clase de perturbaciones permitidas pueden ser requeridas a ser invariantes bajo η sin pérdida de generalidad, lo que concluye la segunda parte de la prueba. $\mathcal{Q.E.D.}$

Estrictamente, este teorema no habla acerca de la extremalidad de la energía ya que, en acuerdo con la definición de masa a partir del ξ-momento, nosotros precisamos de un vector de tipo temporal definido sobre toda la superficie $\mathscr{H}$, como lo hicimos notar en el comentario inmediato a la ecuación 3.26. Es decir, si ξ es un vector de tipo temporal entonces existen coordenadas de tal forma que $\xi = \delta_0^\mu$ y la energía esta definida por

$$P[\delta_0^\mu, \mathscr{H}] \equiv \int_{\mathscr{H}} \left(\mathfrak{T}^\mu{}_\nu \delta_0^\nu + \underset{N}{\mathfrak{t}}{}^\mu{}_\nu \cdot \delta_0^\nu \right) d\sigma_\mu = M \tag{4.32}$$

en donde hemos usado el corolario 3.3.2, $\underset{N}{\mathfrak{t}}{}^\mu{}_\nu$ es estrictamente el pseudotensor de Schutz y Sorkin definido en 3.24 y suponemos que la superficie $\mathscr{H}$ es ortogonal a ξ (el campo unitario n_α ortogonal a $\mathscr{H}$ es paralelo a ξ). Hay que imponer que además $\mathscr{H}$ sea una superficie asintóticamente plana. Obsérvese que el construir coordenadas en donde $\xi = \delta_0^\mu$ no afecta la construcción asintótica que deben cumplir con respecto a la métrica para que el lema 3.6.1 sea válido, ya que esta imposición es sobre las coordenadas espaciales.

Para todos aquellos sistemas en donde la métrica posee un vector de Killing de tipo temporal ξ podemos establecer el siguiente

4.3.2. **Teorema** (Teorema de Noether para la energía)

Supongamos las condiciones suficientes de continuidad y convergencia para que la ecuación 4.28 sea válida. Supongamos que la métrica $g_{\mu\nu}$ y los campos ϕ de un sistema no perturbado son invariantes ante un vector de Killing de tipo temporal ξ, cuyo conjunto de superficies $\mathscr{H}$ ortogonales a este campo son asintóticamente planas. Sean las coordenadas (X) tales que en ellas $\xi = \delta_0^\mu$; Entonces el conjunto $(g_{\mu\nu}, \phi)$ es una solución de las ecuaciones de campo de Einstein *si y solo si* el ξ-momento $P[\delta_0^\mu, \mathscr{H}]$ es un extremo una vez hechas todas las perturbaciones en $\mathscr{H}$ que obedecen la siguiente restricción:

$$D_e \left(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}{}^\mu{}_\nu \right) h \, \delta_0^\nu \, \delta_\mu^0 = 0 \tag{4.33}$$

donde tenemos en cuenta que $\xi^\nu d\sigma_\mu = \xi^\nu \cdot n_\mu d\sigma = \delta_0^\nu \, \delta_\mu^0 d\sigma$

Demostración. Se ha incluído una sola restricción ya que al enunciar este teorema de manera general no conocemos la naturaleza de los campos ϕ como lo fue en el caso específico del teorema 4.3.1, donde queda claro que la restricción 4.33 es la manera compacta de escribir las contricciones (a)-(c) de dicho teorema y hemos prescindido de la restricción (d). Particularizamos la ecuación 4.28 a que $\xi = \delta_0^\nu$ y a que la superficie $\mathscr{H}$ es ortogonal a dicho campo como lo dicta el teorema.

($\Rightarrow$) Por hipótesis la primera integral del la ecuación 4.28 se anula. Dada la restricción 4.33 y que $h_{\mu\nu} = D_e g_{\mu\nu} h$, vemos que

$$\begin{aligned}\left(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\alpha\beta}\, h_{\alpha\beta}\delta_\nu^\mu\right)\delta_0^\nu\,\delta_\mu^0 &= \left(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\alpha\beta}\, D_e g_{\alpha\beta} h\right)\delta_0^\mu\,\delta_\mu^0 = D_e\left(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\alpha\beta}\, g_{\alpha\beta}\right) h\,\delta_0^\mu\,\delta_\mu^0 \\ &= D_e\left(\underset{\phi}{\mathfrak{T}}^{\alpha}{}_{\alpha}\right) h\,\delta_0^\mu\,\delta_\mu^0 = 0\end{aligned}$$

por lo cual la segunda integral en la ecuación 4.28 también se anula y con ello obtenemos

$$D_e P[\delta_0^\mu, \mathscr{H}]h = 0 \tag{4.34}$$

lo que concluye la primera parte de la prueba.

($\Leftarrow$) Por hipótesis el lado derecho de la ecuación 4.28 se anula y por un tratamiento similar al anterior la segunda integral también se anula, por lo que se obtiene

$$\oint_{\mathscr{H}} \frac{1}{16\pi}(G^{\alpha\beta} - 8\pi T^{\alpha\beta})\sqrt{-g}h_{\alpha\beta}\delta_0^\mu d\sigma_\mu = 0 \tag{4.35}$$

Como en el caso anterior, la restricción 4.33 puede hacerse sobre las variables de campo dejando a $h_{\mu\nu}$ ser arbitraria. Puede uno poner objeción sobre qué tan grande es la arbitrariedad y decir que las variaciones $h_{\mu\nu}$ no son todas las funciones continuas o al menos todas las de alguna clase C^k (las condiciones suficientes garantizan que, si existe una variación $h_{\mu\nu}$ que cumpla con la restricción 4.33, entonces ésta debe de ser continua). Pero esto no representa ningún problema, ya que así como evitamos las funciones en donde un funcional J diverge o no está definido, también podemos prescindir de funciones en el espacio donde viven las $g_{\mu\nu}$'s (este espacio es el de las funciones $C^{2(k+s)+1}$ con norma $|\ |_{2(k+s)+1}$, como detallamos previo al teorema 3.7.5) que no cumplen con la restricción 4.33. La única condición sobre el conjunto de funciones donde la variación tiene sentido es que incluya al menos una función no nula con la que podamos demostrar satisfactoriamente el lema de Haar y con ello concluír que

$$G^{\alpha\beta} - 8\pi T^{\alpha\beta} = 0 \tag{4.36}$$

lo que finaliza la demostración de este teorema. $\mathcal{Q.E.D.}$

Este teorema es bastante general y aplica para todo sistema invariante ante un vector de Killing de tipo temporal y cualquier superficie $\mathscr{H}$ asintóticamente regular que en ningún lado es paralela al campo ξ, aunque aquí para hablar estrictamente de la energía nos hemos restringido a que ξ sea ortogonal a $\mathscr{H}$, una superficie asintóticamente plana, y que existan coordenadas (X) en las cuales $\xi = \delta_0^\nu$. Este teorema va más allá de la simple conservación de la energía e impone más a fondo que la energía debe ser un extremo. La conservación de la energía entonces viene como un caso particular del lema 3.7.3 una vez que se satisface este último teorema.

Finalmente, podemos concluir este capítluo y este trabajo diciendo que debido al lema 3.6.1 y a los dos corolarios que le siguen, que: *el lema 3.7.3 y los teoremas 3.7.5 y 4.3.2 siguen siendo válidos cuando el campo de materia no es acotado pero $T^{\mu\nu}$ y ${\mathfrak{T}_\phi}^\mu{}_\nu$ cumplen con las condiciones del lema 3.6.1.*

Capítulo 5

Conclusiones

Este trabajo tuvo como objetivo formular el teorema de Noether para la energía en Relatividad General, el cuál hemos logrado enunciar satisfactoriamente para todo aquel sistema cuyas variables de campo Q que lo describen son invariantes ante un arrastre de Lie a lo largo de un vector de tipo temporal ξ. Incluyendo algunas otras restricciones específicas, como las dictadas por el sistema que se describe, este resultado establece que: si las ecuaciones de campo de Einstein se cumplen entonces la energía no solo es una cantidad conservada pero también un extremo del sistema, y viceversa, si la energía es un extremo del sistema entonces se satisfacen las ecuaciones de campo de Einstein. Una de las ventajas de este resultado es que no necesitamos cumplir a priori las ecuaciones del campo de materia, con lo que al encontrar unas variables Q que extremicen la energía de un sistema automaticamente tendremos una variedad sobre la cual trabajar. Visto de otra forma, si somos capaces de encontrar que un sistema es invariante ante un vector de Killing de tipo temporal, de una manera análoga a como funciona el método variacional en la mecánica anlítica podemos introducir funciones que minimicen la energía y de esta forma obtener una solución aproximada de $g_{\mu\nu}$ para las ecuaciones de campo de Einstein, sin siquiera resolver las ecuaciones del campo de materia. Este resultado es independiente de cualquier simetría espacial intrínseca del sistema.

En el Capítulo 1 hemos establecido de una manera rigurosa el cálculo de variaciones tradicional, haciendo énfasis en las limitaciones que tiene, como es el cierto grado de continuidad necesario, pero también mostrando que una de sus ventajas es el establecer con exactitud el espacio de funciones en el que los resultados son válidos. Esto trae como consecuencia que no se admitan singularidades de ningún tipo, y es por eso que sobre variedades nos retringimos a abiertos. Este capítulo lo concluímos enunciando y demostrando el teorema de Noether clásico y exhibiendo algunas cantidades conservadas que se encuentran frecuentemente en mecánica clásica.

En el Capítulo 2 establecimos los espacios de funciones necesarios para llevar a cabo el cálculo de variaciones sobre una variedad, y especificamos el tipo de variaciones que se pueden aplicar a un funcional en Relatividad General. Luego de deducir las ecuaciones de Einstein arribamos a lo que consideramos la parte más importante de ese capítulo: la deducción de cantidades pseudotensoriales cuya divergencia se anula. Todas y cada una de estas cantidades exhibidas se lograron debido a que un Lagrangiano relativista $\mathfrak{L}$ no depende explícitamente de las coordenadas. Incluso más allá de esta propiedad de $\mathfrak{L}$, pudimos ver que si además es una densidad escalar, la acción S que describe al sistema es invariante ante cualquier arrastre de Lie dado por el vector ξ, y encontramos cantidades pseudotensoriales cuya divergencia es nula independientemente de si las ecuaciones de campo de Einstein se cumplen o no.

En el capítulo 3 extendimos el cálculo a variaciones a arrastres que en la frontera no se anulan. Esto nos permitió introducir el *operador de Noether* para materia, cuya integral sobre la frontera es equivalente a ésa del ya conocido pseudotensor de Landau y Lifshitz. Con ello introducimos un primer teorema de conservación para un Lagrangiano no restringido: si el campo de materia se encuentra en una región acotada, entonces cualesquiera 2 de las siguientes 3 aseveraciones implican la tercera: (1) las variables de campo Q son estacionarias con respecto a vector ξ, (2) Q es solución de las ecuaciones de campo, y (3) el ξ-momento asociado $P[\xi, \mathscr{H}]$ es un extremo. Aunque originalmente este teorema fue enunciado únicamente para materia y con la restricción de que las variaciones debían ser acotadas, luego de las modificaciones necesarias fue enunciado para incluír el campo gravitacional y dejar a las variaciones tener precencia en toda una región no acotada. El caso general de un Lagrangiano restringido pudo ser cubierto hacia el final de este capítulo pero el resultado que logramos fue menos poderoso, Teorema 3.7.5, el cual enuncia que de (1) la métrica es estacionaria con respecto a ξ, (2) las ecuaciones de campo de Einstein son satisfechas y (3) $P[\xi, \mathscr{H}]$ es un extremo una vez hechas todas las variaciones que obedecen las restricciones hechas al Lagrangiano; cualesquiera dos de estas tres afirmaciones implican la tercera. Aunque este teorema no menciona nada acerca de satisfacer las ecuaciones de campo para materia es bastante útil para el estudio de cantidades conservadas puesto que no se menciona la naturaleza del ξ ni de las variables de campo.

En el Capítulo 4, como una mera aplicación de las herramientas que obtuvimos en el capítulo previo a este, tratamos un sistema consistente de un fluído perfecto el cual nos inspiró a formular el teorema de Noether para la energía en el contexto de Relatividad General como un caso particular del Teorema 3.7.5.

Obtener una formulación del Teorema de Nether para otras cantidades conservadas específicas puede resultar complicado dada la naturaleza bastante abstracta con la que ha sido definido el ξ-momento. Un tratamiento exhaustivo para el momento angular es mostrado en [19] y [20]. De una manera inversa, imponiendo simetría axial se pueden deducir las ecuaciones de Euler relativistas para un fluído perfecto en un cilindro rotante [21].

Dado que trabajamos sobre una variedad con métrica Lorentziana, el tratamiento anterior no esta exento de que las cantidades conservadas y/o los invariantes sean nulos para un sistema particular, y por lo cual no podamos describir una variedad de trabajo satisfactoriamente. Este es el caso de las variedades Lorentzianas con invariantes escalares nulos (VSI por sus siglas en inglés) cuyos invariantes de curvatura polinomiales de todos los órdenes son nulos (R, $R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $R^{\alpha\beta\gamma\delta *}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, etc). Esta peculiaridad que puede presentarse en un espacio-tiempo no arriba del hecho de que las ecuaciones de Einstein solo proporcionan al tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$ y haga falta el tensor de Weyl para obtener la información completa del tensor de Riemman $R^{\alpha\beta\gamma\delta}$, sino del hecho de que la métrica tiene una signatura $n-1$. Así, mientras que en variedades riemmanianas el único espacio con la propiedad VSI es el espacio plano, en variedades Lorentzianas existen espacios no-triviales con dicha propiedad como es el caso de la métrica solución a un sistema consistente en pura radiación, donde $R_{\mu\nu} = \phi l_\mu l_\nu$ (ϕ es una función escalar y l_μ un campo nulo). Ha sido demostrado que con dicha solución $g_{\mu\nu}$ a las ecuaciones de campo de Einstein no podemos obtener ninguna simetría ni construir ningún invariante no nulo [22].

"Symmetry, as wide or as narrow as you may define its meaning, is one idea by which man through the ages has tried to comprehend and create order, beauty and perfection.

H. Weyl

Apéndice A

Algunas Propiedades de la Métrica

Debido al gran uso que se le da a muchas de las propiedades de la métrica de una variedad M, muchas veces difícil de recordar, condenso aquí algunas de ellas.

Por definición tenemos que $g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = \delta^{\alpha}_{\alpha} = dim(M)$ de lo cual $g^{\alpha\beta}\mathrm{d}g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\mathrm{d}g^{\alpha\beta} = 0$. Aplicando esta diferencial al vector $\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}$ se obtiene

$$g^{\alpha\beta}\, g_{\alpha\beta},_{\gamma} = -g_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta},_{\gamma} \tag{A.1}$$

De la misma manera, de la expresión sin doble contracción $g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$ se obtiene

$$g^{\alpha\beta}\, g_{\beta\gamma},_{\nu} = -g_{\beta\gamma}\, g^{\alpha\beta},_{\nu} \tag{A.2}$$

y como consecuencia

$$g_{\alpha\beta},_{\nu} = -g_{\alpha\gamma}\, g_{\beta\sigma}\, g^{\gamma\sigma},_{\nu} \tag{A.3}$$

además de la versión con índices arriba

$$g^{\alpha\beta},_{\gamma} = -g^{\alpha\sigma}\, g^{\beta\gamma}\, g_{\sigma\gamma},_{\mu} \tag{A.4}$$

De esto podemos deducir también que

$$\frac{\partial\, g_{\alpha\beta},_{\gamma}}{\partial g^{\delta\sigma},_{\rho}} = -g_{\delta\alpha}\, g_{\sigma\beta}\, \delta^{\rho}_{\gamma} \tag{A.5}$$

Como $g = det(g_{\alpha\beta})$, calculamos su diferencial $\mathrm{d}g$ tomando la diferencial de cada componente del tensor $g_{\alpha\beta}$ y multiplicándola por el coeficiente del determinante, es decir por el correspondiente menor. Por otro lado, las componentes del tensor $g^{\alpha\beta}$ recíprocas a $g_{\alpha\beta}$ son iguales a los menores del determinante de la $g_{\alpha\beta}$, divididas por el determinante. Entonces los menores del determinante g son iguales a $gg^{\alpha\beta}$. Así tenemos que

$$\mathrm{d}g = g\, g^{\alpha\beta}\, \mathrm{d}g_{\alpha\beta} = -g\, g_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}g^{\alpha\beta} \tag{A.6}$$

Si aplicamos esta última diferencial al vector $\frac{\partial}{\partial g^{\gamma\nu}}$ es claro que

$$\frac{\partial g}{\partial g^{\gamma\nu}} = -g\, g_{\alpha\beta}\, \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial g^{\gamma\nu}} = -g\, g_{\gamma\nu} \tag{A.7}$$

de lo cual se sigue inmediatamente que

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\gamma\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\gamma\nu} \tag{A.8}$$

y usando regla de la cadena $\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\alpha\beta}}\, g^{\alpha\beta},_{\gamma}$ tenemos la relación más usada del Capítulo 2

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\, g_{\alpha\beta},_{\gamma} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta},_{\gamma} \tag{A.9}$$

Aquí ha sido clara la manera en que trabaja el operador $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$ pero cabe mencionar que sea ha utilizado de la misma forma como usamos el operador $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}x^{\alpha}}$ a lo largo de éste trabajo.

Finalmente terminamos relacionando lo anterior con los símbolos de Christoffel, los cuales cumplen con la ecuación

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\nu}\left(g_{\nu\beta,\gamma} + g_{\nu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\nu}\right) \tag{A.10}$$

y cuya contracción $\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}$ se reduce a:

$$\Gamma^{\alpha}_{\gamma\alpha} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}\, g_{\alpha\beta}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{\partial ln(\sqrt{-g})}{\partial x^{\nu}} \tag{A.11}$$

Luego usando A.2

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} g^{\beta\sigma} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\sigma},_{\gamma} + \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} g^{\beta\sigma}\left(g_{\nu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\nu}\right)$$

y haciendo un simple cambio de β por ν y σ por β, vemos que

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} g^{\beta\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma} g^{\beta\alpha} = -g^{\alpha\sigma},_{\gamma} \tag{A.12}$$

Usando nuevamente A.10 tenemos que

$$\begin{aligned} g^{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} &= g^{\beta\gamma}\frac{1}{2}\, g^{\alpha\nu}\left(g_{\nu\beta,\gamma} + g_{\nu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\nu}\right) = g^{\beta\gamma} g^{\alpha\nu}\left(g_{\nu\beta,\gamma} - \frac{1}{2} g_{\beta\gamma,\nu}\right) \\ &= -g^{\beta\gamma} g_{\nu\beta} g^{\alpha\nu},_{\gamma} - \frac{1}{2} g^{\beta\gamma} g_{\beta\gamma,\nu} g^{\alpha\nu} \end{aligned}$$

y haciendo uso de A.9 se sigue que

$$g^{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = -\left(g^{\alpha\nu},_{\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\nu}} g^{\alpha\nu}\right) = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}g^{\alpha\nu}}{\partial x^{\nu}} \tag{A.13}$$

Apéndice B

Derivada de G

Éste apéndice es para obtener la derivada del Lagrangiano de primer orden con respecto a $g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}$ la cuál es utilizada para deducir el pseudotensor canónico de energía momento.

Primero calculamos la derivada de los simbolos de Christoffel; dada su definición A.10 se sigue que

$$\frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}}{\partial g^{\delta\sigma}{}_{,\rho}} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \frac{\partial}{\partial g^{\delta\sigma}{}_{,\rho}} \left(g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\alpha} \right)$$

desarrollando y haciendo uso de A.5 tenemos que

$$\frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}}{\partial g^{\delta\sigma}{}_{,\rho}} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left[\left(-g_{\delta\alpha}\, g_{\beta\sigma} \delta^{\rho}_{\gamma} \right) + \left(-g_{\delta\alpha}\, g_{\gamma\sigma} \delta^{\rho}_{\beta} \right) - \left(-g_{\delta\beta}\, g_{\sigma\gamma} \delta^{\rho}_{\alpha} \right) \right]$$

lo cual puede ser arreglado como

$$\frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}}{\partial g^{\delta\sigma}{}_{,\rho}} = \frac{1}{2} \left[-g_{\sigma\beta}\, \delta^{\mu}_{\delta}\, \delta^{\rho}_{\gamma} - g_{\gamma\sigma} \delta^{\mu}_{\delta} \delta^{\rho}_{\beta} + g_{\delta\beta}\, g_{\sigma\gamma}\, g^{\mu\rho} \right] \tag{B.1}$$

Una vez obtenido este primer resultado ya podemos calcular la derivada de G y dado que obedece la ecuación

$$G = g^{\alpha\beta} \left(\Gamma^{\gamma}_{\alpha\mu} \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \Gamma^{\gamma}_{\mu\gamma} \right) \tag{B.2}$$

si sólo derivamos usando regla del producto tendremos

$$\frac{\partial G}{\partial g^{\delta\sigma}{}_{,\rho}} = g^{\alpha\beta} \left[\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} \frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\alpha\mu}}{\partial g^{\delta\sigma}{}_{,\rho}} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\mu} \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}}{\partial g^{\delta\sigma}{}_{,\rho}} - \Gamma^{\gamma}_{\mu\gamma} \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}}{\partial g^{\delta\sigma}{}_{,\rho}} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\mu\gamma}}{\partial g^{\delta\sigma}{}_{,\rho}} \right]$$

Procediendo a desarrollar cada término y usando algunas de las propiedades del apéndice A tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial g^{\delta\sigma}{}_{,\rho}} &= \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}\,\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\left(-g_{\sigma\alpha}\,\delta^{\gamma}_{\delta}\,\delta^{\rho}_{\mu} - g_{\mu\sigma}\delta^{\gamma}_{\delta}\delta^{\rho}_{\alpha} + g_{\delta\alpha}\,g_{\sigma\mu}\,g^{\gamma\rho}\right)\\
&+ \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}\,\Gamma^{\gamma}_{\alpha\mu}\left(-g_{\gamma\sigma}\,\delta^{\mu}_{\delta}\,\delta^{\rho}_{\gamma} - g_{\sigma\rho}\delta^{\mu}_{\delta}\delta^{\rho}_{\beta} + g_{\delta\beta}\,g_{\sigma\gamma}\,g^{\mu\rho}\right)\\
&- \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}\,\Gamma^{\gamma}_{\mu\gamma}\left(-g_{\sigma\alpha}\,\delta^{\mu}_{\delta}\,\delta^{\rho}_{\beta} - g_{\beta\sigma}\delta^{\mu}_{\delta}\delta^{\rho}_{\alpha} + g_{\delta\alpha}\,g_{\sigma\beta}\,g^{\mu\rho}\right)\\
&- \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}\,\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\left(-g_{\sigma\mu}\,\delta^{\gamma}_{\delta}\,\delta^{\rho}_{\gamma} - g_{\gamma\sigma}\delta^{\gamma}_{\delta}\delta^{\rho}_{\mu} + g_{\delta\mu}\,g_{\sigma\gamma}\,g^{\gamma\rho}\right)
\end{aligned}$$

quitamos parentesis y ponemos cada término por separado para poder cancelarlos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial g^{\delta\sigma}{}_{,\rho}} = &- \frac{1}{2}\,\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\,\delta^{\beta}_{\sigma}\,\delta^{\gamma}_{\delta}\,\delta^{\rho}_{\mu} - \frac{1}{2}\,\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\,g^{\beta\rho}\,g_{\mu\sigma}\,\delta^{\gamma}_{\delta} + \frac{1}{2}\,\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\,\delta^{\beta}_{\delta}\,g_{\sigma\mu}\,g^{\gamma\rho}\\
&- \frac{1}{2}\,\Gamma^{\gamma}_{\alpha\mu}\,\delta^{\alpha}_{\sigma}\,\delta^{\mu}_{\delta}\,\delta^{\rho}_{\gamma} - \frac{1}{2}\,\Gamma^{\gamma}_{\alpha\mu}\,g_{\gamma\sigma}\,g^{\alpha\rho}\,\delta^{\mu}_{\delta} + \frac{1}{2}\,\Gamma^{\gamma}_{\alpha\mu}\,\delta^{\alpha}_{\delta}\,g_{\sigma\gamma}\,g^{\mu\rho}\\
&+ \frac{1}{2}\,\Gamma^{\gamma}_{\mu\gamma}\,\delta^{\beta}_{\sigma}\,\delta^{\mu}_{\delta}\,\delta^{\rho}_{\beta} + \frac{1}{2}\,\Gamma^{\gamma}_{\mu\gamma}\,\delta^{\alpha}_{\sigma}\,\delta^{\mu}_{\delta}\,\delta^{\rho}_{\alpha} - \frac{1}{2}\,\Gamma^{\gamma}_{\mu\gamma}\,\delta^{\beta}_{\delta}\,g_{\sigma\beta}\,g^{\mu\rho}\\
&+ \frac{1}{2}\,\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\,g_{\sigma\mu}\,g^{\alpha\beta}\,\delta^{\rho}_{\delta} + \frac{1}{2}\,\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\,g_{\delta\sigma}\,g^{\alpha\beta}\,\delta^{\rho}_{\mu} - \frac{1}{2}\,\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\,g_{\delta\mu}\,g^{\alpha\beta}\,\delta^{\rho}_{\sigma}
\end{aligned}$$

Con esto ya podemos reducir índices mudos en las deltas obteniendo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial g^{\delta\sigma}{}_{,\rho}} = &- \frac{1}{2}\,\Gamma^{\rho}_{\sigma\delta} - \frac{1}{2}\,\Gamma^{\mu}_{\beta\delta}\,g_{\mu\sigma}\,g^{\beta\rho} + \frac{1}{2}\,\Gamma^{\mu}_{\delta\beta}\,g_{\sigma\mu}\,g^{\beta\rho} - \frac{1}{2}\,\Gamma^{\rho}_{\sigma\delta}\\
&- \frac{1}{2}\,\Gamma^{\gamma}_{\alpha\delta}\,g_{\gamma\sigma}\,g^{\alpha\rho} + \frac{1}{2}\,\Gamma^{\gamma}_{\delta\mu}\,g_{\sigma\gamma}\,g^{\mu\rho} + \frac{1}{2}\,\Gamma^{\gamma}_{\delta\gamma}\,\delta^{\rho}_{\sigma} + \frac{1}{2}\,\Gamma^{\gamma}_{\delta\gamma}\,\delta^{\rho}_{\sigma}\\
&- \frac{1}{2}\,\Gamma^{\gamma}_{\mu\gamma}\,g_{\sigma\delta}\,g^{\mu\rho} + \frac{1}{2}\,\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\,g_{\sigma\mu}\,g^{\alpha\beta}\,\delta^{\rho}_{\delta} + \frac{1}{2}\,\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\,g_{\delta\sigma}\,g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\,\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\,g_{\delta\mu}\,g^{\alpha\beta}\,\delta^{\rho}_{\sigma}
\end{aligned}$$

y finalmente llegamos a que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial g^{\delta\sigma}{}_{,\rho}} &= \Gamma^{\alpha}_{\delta\alpha}\,\delta^{\rho}_{\sigma} - \frac{1}{2}\,\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\,g_{\sigma\delta}\,g^{\beta\rho} + \frac{1}{2}\,\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\,g_{\sigma\gamma}\,g^{\alpha\beta}\,\delta^{\rho}_{\delta}\\
&+ \frac{1}{2}\,\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\,g_{\delta\sigma}\,g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\,g_{\delta\gamma}\,g^{\alpha\beta}\,\delta^{\rho}_{\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\delta} \qquad \text{(B.3)}
\end{aligned}$$

Una vez calculado este término podemos obtener uno de los dos términos que conforman el pseudotensor canónico,

$$\begin{aligned}
g^{\delta\sigma}{}_{,\mu}\,\frac{\partial G}{\partial g^{\delta\sigma}{}_{,\rho}} &= \Gamma^{\alpha}_{\delta\alpha}\,g^{\delta\sigma}{}_{,\mu}\,\delta^{\rho}_{\sigma} - \frac{1}{2}\,\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\,g^{\delta\sigma}{}_{,\mu}\,g_{\sigma\delta}\,g^{\beta\rho} + \frac{1}{2}\,\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\,g_{\sigma\gamma}\,g^{\alpha\beta}\,g^{\rho\sigma}{}_{,\mu}\\
&+ \frac{1}{2}\,\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\,g_{\delta\sigma}\,g^{\delta\sigma}{}_{,\mu}\,g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\,g_{\delta\gamma}\,g^{\alpha\beta}\,g^{\delta\sigma}{}_{,\mu}\,\delta^{\rho}_{\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\delta}\,g^{\delta\sigma}{}_{,\mu}\\
&= \Gamma^{\alpha}_{\delta\alpha}\,g^{\delta\rho}{}_{,\mu} - \frac{1}{2}\,\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\,g^{\beta\rho}\left(g_{\delta\sigma}\,g^{\delta\sigma}{}_{,\mu}\right) + \frac{1}{2}\,\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\,g_{\sigma\gamma}\,g^{\alpha\beta}\,g^{\rho\sigma}{}_{,\mu}\\
&+ \frac{1}{2}\,\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\,g^{\alpha\beta}\left(g_{\delta\sigma}\,g^{\delta\sigma}{}_{,\mu}\right) - \frac{1}{2}\,\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\,g_{\delta\gamma}\,g^{\alpha\beta}\,g^{\delta\rho}{}_{,\mu} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\delta}\,g^{\delta\sigma}{}_{,\mu}
\end{aligned}$$

Cancelando los dos términos similares, agrupando y sustituyendo lo que está entre parentesis por A.9 tenemos que

$$g^{\delta\sigma},_{\mu}\,\frac{\partial\, G}{\partial g^{\delta\sigma},_{\rho}} = \Gamma^{\alpha}_{\delta\alpha}\, g^{\delta\rho},_{\mu} + \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\, g^{\beta\rho}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\mu}}\right) - \Gamma^{\rho}_{\sigma\delta}\, g^{\delta\sigma},_{\mu}$$

y agrupando de manera adecuada se sigue que

$$\begin{aligned} g^{\delta\sigma},_{\mu}\,\frac{\partial\, G}{\partial g^{\delta\sigma},_{\rho}} &= \left(\Gamma^{\alpha}_{\delta\alpha}\,\delta^{\rho}_{\sigma}\, g^{\delta\sigma},_{\mu} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\delta}\, g^{\delta\sigma},_{\mu}\right) + \left(\Gamma^{\alpha}_{\delta\alpha}\,\delta^{\rho}_{\sigma}\, g^{\delta\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta}\right)\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\mu}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\left(\Gamma^{\alpha}_{\delta\alpha}\,\delta^{\rho}_{\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\delta}\right) g^{\delta\sigma},_{\mu}\,\sqrt{-g} + \left(\Gamma^{\alpha}_{\delta\alpha}\,\delta^{\rho}_{\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\delta\sigma}\right)\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\mu}} g^{\delta\sigma}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\left(\Gamma^{\alpha}_{\delta\alpha}\,\delta^{\rho}_{\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\delta}\right)\left(g^{\delta\sigma},_{\mu}\,\sqrt{-g} + \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\mu}} g^{\delta\sigma}\right)\right] \end{aligned}$$

Finalmente hemos obtenido la expresión deseada, la cuál se usa en el Capítulo 2 para formar el pseudotensor canónico:

$$g^{\delta\sigma},_{\mu}\,\frac{\partial\, G}{\partial g^{\delta\sigma},_{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(g^{\delta\sigma}\sqrt{-g}\right),_{\mu}\left(\Gamma^{\alpha}_{\delta\alpha}\,\delta^{\rho}_{\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\delta}\right) \tag{B.4}$$

Apéndice C

Relación Entre Tensores de Energía-Momento

Como se menciona en el Capítulo 2 el tensor de energía momento no es únicamente definido y representará al mismo sistema físico si a éste se le suma la divergencia de un tensor de tercer rango $\psi^{\alpha\beta\gamma}$ antisimétrico en sus dos ultimos índices, es decir $\psi^{\alpha\beta\gamma} = -\psi^{\alpha\gamma\beta}$. Podemos ver por sustitución directa que

$$\frac{\partial\psi^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\beta}} = \frac{\partial\psi^{\alpha\gamma\beta}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}} = -\frac{\partial\psi^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\beta}}$$

de lo que se concluye que esta derivada es cero y de manera inmediatamente también que

$$\bar{T}^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + \frac{\partial\psi^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^{\gamma}} \text{ cumple con } \bar{T}^{\alpha\beta}, \beta = 0 \tag{C.1}$$

es decir, la divergencia de este nuevo tensor también se anula.

De manera general como también se vio al final del Capítulo 2 e inicios del 3, no es necesariamente un tensor el cuál cuya derivada se anula sino que también puede tratarse de un pseudotensor y se le llamó operador de Noether, el cuál describe la densidad de energía del sistema y se vio su unicidad salvo hasta una divergencia. Así se hace conveniente dar una relación general entre estos operadores de energía momento que quede determinada por las características del lagrangiano que se tiene. Aquí se presenta la divergencia que relaciona dos distintos operadores de Noether para un lagrangiano que no depende más allá de primeras derivadas en sus variables de campo. La demostración para un lagrangiano general que puede depender de derivadas de orden más alto se puede consultar en [18].

En el Capítulo 3 se vio que para un funcional S de la forma

$$S(\mathfrak{X}) = \int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{L}[Q]\,\mathrm{d}X$$

cuando se toma la derivada de Gâteaux sobre $\mathfrak{X}$ en la dirección ξ se obtiene que

$$D_\xi S(\mathfrak{X}) = \int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{EL}_Q(\mathfrak{L}) DQ(\mathfrak{X})\, \xi \, \mathrm{d}X + \oint_{\partial \mathfrak{X}} \mathfrak{T}^{\mu}{}_{\lambda} \cdot \xi^{\lambda} \mathrm{d}\sigma_\mu \tag{C.2}$$

Cuando se tiene que S es invariante ante cualquier dirección ξ y las ecuaciones de movimiento (campo) se cumplen, es decir $DS(\mathfrak{X})\,\xi = 0$ y $\mathfrak{EL}_Q(\mathfrak{L}) = 0$ podemos definir la equivalencia entre operadores como

$$\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\lambda} \simeq \hat{\mathfrak{T}}^{\mu}{}_{\lambda} \Longleftrightarrow \mathfrak{T}^{\mu}{}_{\lambda} - \hat{\mathfrak{T}}^{\mu}{}_{\lambda} \simeq 0$$

donde la igualdad es salvo una divergencia, además tenemos que

$$\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\lambda} \simeq 0 \Longleftrightarrow \forall \mathfrak{X}, \forall \xi \ \oint_{\partial \mathfrak{X}} \mathfrak{T}^{\mu}{}_{\lambda} \cdot \xi^{\lambda} \mathrm{d}\sigma_\mu = 0 \tag{C.3}$$

La condición C.3 de que $\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\lambda} \simeq 0$ puede escribirse de la forma

$$\forall \xi^{\lambda} \ \partial_\mu (\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\lambda} \cdot \xi^{\lambda}) = 0 \tag{C.4}$$

Pero esto equivale a decir, al menos localmente, que se cumple la condición que $\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\lambda} \cdot \xi^{\lambda}$ es la divergencia de alguna densidad antisimétrica $\mathfrak{D}^{\mu\nu}$. Veremos que de la forma particular en la que está ξ en C.4 se puede dar una construcción explícita de $\mathfrak{D}^{\mu\nu}$ en términos de los coeficientes de $\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\lambda}$.

Cómo ya se mencionó antes, ni ξ ni $\mathfrak{T}^{\mu}{}_{\lambda}$ tienen necesariamente carácter vectorial y tensorial respectivamente, pero esto no tiene relevancia en lo que sigue por lo cual podemos ignorar este hecho y simplemente escribir la condición C.4 como

$$\forall \xi \ \partial_\mu (T^\mu \cdot \xi) = 0 \tag{C.5}$$

De manera general T^μ se puede escribir explícitamente como un operador diferencial de orden N, a saber

$$T^\mu \cdot \xi = A_0^\mu \xi + A_1^{\mu\alpha} \partial_\alpha \xi + A_2^{\mu\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} \xi + ... + A_N^{\mu\alpha...\beta} \partial_{\alpha...\beta} \xi \tag{C.6}$$

Como primer caso suponemos que este operador es de primer orden, es deci $N = 1$

$$T^\mu \cdot \xi = A^\mu \xi + A^{\mu\alpha} \partial_\alpha \xi \tag{C.7}$$

la condición C.5 implica entonces

$$\begin{aligned} 0 = \partial_\mu (T^\mu \cdot \xi) &= \partial_\mu A^\mu \xi + A^\mu \partial_\mu \xi + \partial_\mu A^{\mu\alpha} \partial_\alpha \xi + A^{\mu\alpha} \partial_{\mu\alpha} \xi \\ &= (\partial_\mu A^\mu) \xi + (A^\alpha + \partial_\mu A^{\mu\alpha}) \partial_\alpha \xi + (A^{\mu\alpha}) \partial_{\mu\alpha} \xi \end{aligned}$$

Dada la independencia de ξ con respecto a sus derivadas, cada coeficiente por separado debe anularse, es decir tenemos el conjunto de ecuaciones

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{C.8}$$

$$A^\alpha + \partial_\mu A^{\mu\alpha} = 0 \tag{C.9}$$

$$A^{(\mu\alpha)} = 0 \tag{C.10}$$

La última de estas ecuaciones nos dice que $A^{\mu\alpha}$ tiene que ser necesariamente antisimétrico mientras que de la segunda obtenemos $A^{\alpha} = -\partial_\mu A^{\mu\alpha} = \partial_\mu A^{\alpha\mu}$. De esta manera reescribmos el operador mediante $A^\mu\xi + A^{\mu\alpha}\partial_\alpha\xi = \partial_\alpha A^{\mu\alpha} + A^{\mu\alpha}\partial_\alpha\xi$ lo que nos da finalmente que

$$T^\mu \cdot \xi = \partial_\alpha(A^{\mu\alpha}\xi) \tag{C.11}$$

Segundo caso con $N = 2$, es decir

$$T^\mu \cdot \xi = A^\mu\xi + A^{\mu\alpha}\partial_\alpha\xi + A^{\mu\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\xi \tag{C.12}$$

dado que $\partial_\mu(A^{\mu\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\xi) = \partial_\mu A^{\mu\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}\xi + A^{\mu\alpha\beta}\,\partial_{\mu\alpha\beta}\xi$ y ayudados por el caso anterior tenemos que la condición C.5 para este caso se expresa como

$$0 = \partial_\mu(T^\mu \cdot \xi) = (\partial_\mu A^\mu)\xi + (A^\alpha + \partial_\mu A^{\mu\alpha})\partial_\alpha\xi + (A^{\alpha\beta} + \partial_\mu A^{\mu\alpha\beta})\partial_{\alpha\beta}\xi + (A^{\mu\alpha\beta})\partial_{\mu\alpha\beta}\xi \tag{C.13}$$

Al ser ξ independiente de sus derivadas la relación anterior nos da los coeficientes igualados a cero, es decir

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{C.14}$$

$$A^\alpha + \partial_\mu A^{\mu\alpha} = 0 \tag{C.15}$$

$$A^{(\mu\alpha)} + \partial_\mu A^{\mu\alpha\beta} = 0 \tag{C.16}$$

$$A^{(\mu\alpha\beta)} = 0 \tag{C.17}$$

De C.16 y C.17 puede verse que $A^{\mu\alpha\beta} = A^{\mu\beta\alpha}$ y que es antisimétrico en los dos primeros índices, con lo cual se puede definir

$$S^{\mu(\alpha\beta)} = A^{\mu\alpha\beta} \quad \text{donde} \quad S^{\mu\alpha\beta} = -S^{\alpha\mu\beta} \tag{C.18}$$

Con lo cual

$$S^{\mu\nu\alpha} = \frac{2}{3}(A^{\mu\nu\alpha} - A^{\nu\mu\alpha}) \tag{C.19}$$

Con esto la relación C.16 se convierte en $A^{(\alpha\beta)} + \partial_\mu S^{\mu(\alpha\beta)} = 0$ y esto nos sugiere la definición de un tensor $S^{\alpha\beta}$ antisimétrico dado por

$$S^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} + \partial_\mu S^{\mu\alpha\beta} \tag{C.20}$$

De esta manera la relación C.15 no da

$$A^\alpha = \partial_\mu A^{\alpha\mu} = \partial_\mu(S^{\alpha\beta} - \partial_\nu S^{\nu\alpha\beta}) = \partial_\mu S^{\alpha\mu} \tag{C.21}$$

Con esto finalmente vemos que

$$\begin{aligned}
T^\mu \cdot \xi &= A^\mu\xi + A^{\mu\alpha}\partial_\alpha\xi + A^{\mu\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\xi \\
&= \partial_\alpha S^{\mu\alpha}\xi + (S^{\mu\alpha} - \partial_\beta S^{\beta\mu\alpha})\partial_\alpha\xi + S^{\mu\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\xi \\
&= \partial_\alpha(S^{\mu\alpha}\xi) + \partial_\beta S^{\mu\beta\alpha}\partial_\alpha\xi + S^{\mu\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\xi \\
&= \partial_\alpha(S^{\mu\alpha}\xi) + \partial_\beta(S^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\xi)
\end{aligned}$$

y obtenemos que $T^\mu \cdot \xi$ en efecto es también la divergencia de un tensor antisimétrico de rango 2, a saber

$$T^\mu \cdot \xi = \partial_\alpha (S^{\mu\alpha}\xi + S^{\mu\alpha\beta}\partial_\beta \xi) \tag{C.22}$$

Dado que un lagrangiano que depende hasta derivadas de primer orden en las variables de campo produce unas ecuaciones de Euler-Lagrange de segundo orden, la relación C.2 implíca que el operador de Noether también será a lo más de segundo orden y en este caso se puede aplicar la divergencia obtenida en C.22.

Bibliografía

[1] M. M. Woolfson, *The Origin and Evolution of the Solar System* (The Graduate Series in Astronomy, IOP Publishing, London, 2000).

[2] E. Yépez-Mulia y M. Y. Yépez-Martinez, *Mecánica Analítica* (Las prensas de ciencias, Facultad de Ciencias, UNAM, 2007).

[3] H. Goldstein, C. P. Poole y J. Safko, *Classical Mechanics* 3ra Ed. (Addison Wesley, 2002)

[4] E. Noether, Göttingen Nachr. 2352-57 (1918); Transp. Thy. Statist. Phys. **1**, 186-207 (1971); arXiv:physics/o503066 (2005).

[5] B. L. Moiseiwitsch, *Variational Principles* (Dover Publications, Inc., Mineloa, New York, 2004).

[6] A. Trautman, *Gravitation: An Introduction To Current Research*, Chap. 5, Louis Witten (ed.), (Wiley, New York, 1962).

[7] J. Ize, *Cálculo de Variaciones* (IIMAS-FENOMEC Series, UNAM, 2002).

[8] A. Trautman, *Lectures on General Relativity*, Brandeis Summer School 1964, (Pretince Hall Inc. 1965).

[9] E. L. Hill, Rev. Mod. Phys. **23**, 3 (1951).

[10] L. D. Landau y E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Vol. 2, (Pergamon Press, New York, 1975).

[11] C. W. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973).

[12] B. F. Schutz y R. Sorkin, Ann. Phys. **107**, 1-43 (1977).

[13] J. Ponds, J. Math. Phys. **2**, 012904 (2011).

[14] F. J. Belinfante, Physica **7**, 449 (1940).

[15] L. Rosefeld, *Sur le tenseur D'Impulsion-Energie*, Acad. Roy. Belg. Memoirs de classes de Science **18** 3 (1940).

[16] B. F. Schutz *A Fisrt Course In General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).

[17] E. Nahmad-Achar, Class. Quantum Grav. **4**, 943 (1987).

[18] R. Sorkin, Gen. Rel. Grav. **8** (6), 437-449 (1977).

[19] E. Nahmad-Achar y B. F. Schutz, Gen. Rel. Grav. **6** (7) (1987).

[20] E. Nahmad-Achar y B. F. Schutz, Class. Quantum Grav. **4**, 929-942 (1987).

[21] E. Nahmad-Achar, J. Math. Phys **34** (11), 5181 (1993).

[22] A. Koutras y C. McIntosh, Class. Quantum Grav. **13**, L47-L49 (1996).