UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

El tiempo local del Movimiento Browniano.

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:

JUAN PABLO ROBERTO MÁRQUEZ ARIAS

DIRECTOR DE TESIS: DR. JUAN CARLOS PARDO MILLÁN.

CIMAT, A.C.

MÉXICO, D. F. 5 DE FEBRERO DE 2013.

El tiempo local del movimiento Browniano.

Juan Pablo Roberto Márquez Arias

Febrero 2013

A mis hermanos,
Bere, Fallo y Daniel.

En sincero agradecimiento:

A mi amiga, profesora y tutora,
Ma. Emilia

A mi amigo y profesor,
Miguel Ángel

A mi amigo, profesor y director,
Juan Carlos

A los miembros de mi honorable jurado:
Dra. María Emilia Caballero
Dr. Miguel Ángel García
Dr. Juan González Hernández
Dr. José Luis Pérez Garmendia
Dr. Arno Siri-Jégousse,
por sus comentarios,
sugerencias, correcciones,
su interés y apoyo brindado.

A mis hermanos, a mi padre y a Mary por todo el apoyo incondicional que me han brindado siempre.
Y a todos aquellos que de alguna u otra forma
me han apoyado durante estos últimos años,
ya que gracias a ellos ha sido posible la
realización de esta tesis.
No los enlisto, pues siempre se corre el riesgo de no apuntar a alguno.

Índice general

Prefacio iii

1. El movimiento Browniano y tiempos de paro. **1**
1.1. Procesos estocásticos. 1
1.2. Filtraciones. 3
1.3. El movimiento Browniano. 5
1.4. Tiempos de paro y la propiedad fuerte de Markov. 13

2. Martingalas y el Teorema de paro opcional. **21**
2.1. Martingalas. 21
2.1.1. Desigualdades maximales. 24
2.2. Regularidad y convergencia. 27
2.3. Teorema de paro opcional de Doob. 31
2.3.1. Algunas consecuencias del teorema de paro opcional de Doob para el movimiento Browniano. 32

3. La integral estocástica. **35**
3.1. La integral estocástica con respecto al movimiento Browniano. 35
3.1.1. Procesos previsibles básicos. 35
3.1.2. Procesos previsibles simples. 39
3.1.3. Procesos previsibles. 40
3.2. La integral estocástica con respecto a martingalas locales. 44
3.3. La fórmula de Itô. 46
3.4. El teorema de Lévy. 49
3.5. El teorema de Dubins-Schwarz. 51
3.6. El teorema de Burkholder-Davis-Gundy. 56

4. El tiempo local de una martingala local. **59**
4.1. Tiempos locales de martingalas locales continuas. 59
4.2. La fórmula de Itô-Tanaka. 65

5. Propiedades del tiempo local del movimiento Browniano. **71**

A. Integrabilidad Uniforme. **91**

Prefacio

Este trabajo surgió de la idea de hacer una monografía del movimiento Browniano y algunos procesos asociados a él. La intención era crear un texto útil para el estudio del movimiento Browniano y una introducción al cálculo estocástico a un nivel de maestría. Es por ello, que en esta tesis, la cual consta de cinco partes, se abarcan los resultados necesarios para la comprensión de los tiempos locales para martingalas locales continuas.

En la primera parte empezaremos por definir algunos conceptos básicos de la teoría de los procesos estocásticos. También se define al movimiento Browniano, se prueba su existencia haciendo uso del teorema de Daniell-Kolmogorov y también se estudian algunas de sus propiedades más importantes.

En una segunda parte se estudiarán a las martingalas a tiempo continuo. Se revisarán algunos ejemplos, algunos de ellos asociados al movimiento Browniano. Además se probarán sus propiedades más importantes entre ellas las desigualdades conocidas como maximales y el teorema de paro opcional de Doob. Cabe señalar que las martingalas son de gran importancia en la teoría de los procesos estocásticos ya que, como se verá en este trabajo, han ayudado al desarrollo del cálculo estocástico. En la década de los cuarenta del siglo XX Itô probó la existencia de la integral estocástica para el movimiento Browniano y en particular dió una fórmula que lleva su nombre. En la década siguiente Doob y Meyer notaron que dicha fórmula debía sus propiedades gracias a que el movimiento Browniano es una martingala. Fue entonces que el conceptó de martingala, que fue introducido originalmente por Paul Lévy a la teoría de los procesos estocásticos, tomó importancia teórica y en la década de los sesentas Meyer desarrolló gran parte de la teoría de las martingalas y a su vez de las teorías de integración estocástica y del compensador.

En la tercera parte se construye la integral estocástica con respecto al movimiento Browniano para procesos previsibles. Más adelante este tercer capítulo se extiende el concepto de integral estocástica para martingalas locales continuas y se prueban algunos resultados importantes como la célebre fórmula de Itô y los teoremas de Lévy, de Dubins-Schwarz y de Burkholder-Davis-Gundy.

En el capítulo cuatro se estudian a los tiempos locales de martingalas locales continuas, así como las fórmulas de Tanaka y de Itô-Tanaka. También se establece la fórmula de los tiempos de ocupación.

El capítulo cinco se estudian algunas propiedades del tiempo local del movimiento Browniano y algunos resultados relativos como el lema de Skorokhod y algunas propiedades de la ley arco seno de Lévy.

Este trabajo comprende resultados de la teoría de los procesos estocásticos que van de un nivel intermedio a un nivel avanzado de cursos de maestría. Las dos primeras partes corresponden al nivel intermedio y las últimas tres al nivel avanzado.

Capítulo 1

El movimiento Browniano y tiempos de paro.

El objetivo de este capítulo es estudiar al movimiento Browniano y algunas de sus propiedades. Para ello vamos a introducir algunos conceptos generales de la teoría de los procesos estocásticos. En particular construiremos al movimiento Browniano usando el Teorema Daniell-Kolmogorov y probaremos la propiedad fuerte de Markov.

1.1. Procesos estocásticos.

De manera intuitiva se puede pensar a un proceso estocástico como un modelo matemático asociado a un fenómeno aleatorio que evoluciona a través del tiempo. Una definición formal es la siguiente,

Definición 1.1. Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $X = (X_t)_{t\in I}$, donde $I \subseteq [0,\infty)$, definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que toma valores en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$, al cual llamaremos espacio de estados.

Generalmente I puede ser cualquier conjunto arbitrario pero en este trabajo vamos a tomar a I como $[0,\infty)$.

Definición 1.2. Las trayectorias de un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ se definen como las funciones $t \to X_t(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$.

Vamos a decir que un proceso estocástico es continuo por la derecha o por la izquierda, si sus trayectorias son continuas casi seguramente por la derecha o por la izquierda respectivamente. Es decir, que para casi toda $\omega \in \Omega$ se tiene que $t \to X_t(\omega)$ es continuo por la derecha o por la izquierda. De manera análoga se define la continuidad por la derecha con límites por la izquierda o la continuidad por la izquierda con límites por la derecha.

Consideremos a dos procesos estocásticos $(X_t)_{t\geq 0}$ y $(Y_t)_{t\geq 0}$ en el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Si para toda $t \geq 0$ y toda $\omega \in \Omega$ se cumple que $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ diremos que los procesos son iguales. Esta propiedad entre dos procesos estocástico es muy fuerte. Enseguida veremos tres conceptos de "igualdad" entre procesos, las condiciones de éstos son un poco más débiles que las de la definición mencionada anteriormente. Dichos conceptos serán de gran utilidad más adelante.

Definición 1.3. El proceso $(Y_t)_{t\geq 0}$ es una modificación del proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ si para toda $t \geq 0$ se tiene que

$$\mathbb{P}[\omega \in \Omega : Y_t(\omega) = X_t(\omega)] = 1$$

Definición 1.4. Los procesos $(Y_t)_{t\geq 0}$ y $(X_t)_{t\geq 0}$ son indistinguibles si

$$\mathbb{P}[\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega);\ \text{para toda } t \in [0, \infty)] = 1$$

Definición 1.5. Los procesos $(Y_t)_{t\geq 0}$ y $(X_t)_{t\geq 0}$ definidos en los espacios $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ respectivamente, ambos con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ se les llama equivalentes si tienen las mismas distribuciones finito dimensionales, es decir , si para t_1, t_2, ... , t_n tales que $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$, con $A_i \in \mathcal{E}$, tenemos

$$\mathbb{P}\left[X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \ldots, X_{t_n} \in A_n\right] = \mathbb{P}\left[Y_{t_1} \in A_1, Y_{t_2} \in A_2, \ldots, Y_{t_n} \in A_n\right].$$

Es claro que si dos procesos son indistinguibles uno es modificación del otro y por ende equivalentes. Observemos también que un proceso puede ser modificación de otro y tener trayectorias distintas. De hecho, si consideramos a Z una variable aleatoria positiva con distribución continua, $X_t \equiv 0$ para $t \geq 0$ y

$$Y_t = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t = Z, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que el proceso $(Y_t)_{t\geq 0}$ es una modificación de $(X_t)_{t\geq 0}$, ya que para toda $t \geq 0$ tenemos

$$\mathbb{P}[X_t = Y_t] = \mathbb{P}[Z \neq t] = 1,$$

y además

$$\mathbb{P}[X_t = Y_t;\ \text{para toda } t \in [0, \infty)] = 0.$$

En general si un proceso es una modificación de otro y ambos son continuos por la derecha o la izquierda, entonces van a ser indistinguibles. Como nosotros sólo estamos interesados en el movimiento Browniano, vamos a probar este resultado en el caso continuo, pero la prueba del caso general es muy similar.

Proposición 1.1. *Sea $(Y_t)_{t\geq 0}$ una modifcación de $(X_t)_{t\geq 0}$ y supongamos que ambos son continuos, entonces $(Y_t)_{t\geq 0}$ y $(X_t)_{t\geq 0}$ son indistinguibles.*

Demostración. Tomemos a A como el conjunto de trayectorias de $(X_t)_{t\geq 0}$ que no son continuas, y sea B el conjunto análogo pero para el proceso $(Y_t)_{t\geq 0}$. Si $C_t = \{X_t \neq Y_t\}$, y $C = \bigcup_{t\in\mathbb{Q}^+} C_t$, entonces $\mathbb{P}(C) = 0$, ya que uno es modificación del otro. De ahí que si $D = A \cup B \cup C$, tenemos que $\mathbb{P}(D) = 0$. Se sigue que para cada $\omega \notin D$ se tiene $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ para toda $t \in \mathbb{Q}^+$. Supongamos que t es irracional y que $(t_n)_{n\geq 1}$ es una suceción de racionales que converge a t. Para $\omega \notin D$, $X_{t_n}(\omega) = Y_{t_n}(\omega)$ para cada $n \geq 1$, entonces

$$X_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{t_n}(\omega) = \lim_{n\to\infty} Y_{t_n}(\omega) = Y_t(\omega).$$

Como D tiene probabilidad nula, esto implica que $(X_t)_{t\geq 0}$ es indistinguible de $(Y_t)_{t\geq 0}$. $\square$

Como ya se ha visto un proceso estocástico es una función que depende de (ω, t). Si tomamos a t fija sabemos que $X_t(\omega) \in E$, pero si ω es fijo no tenemos ninguna propiedad de medibilidad sobre sus trayectorias. Es por ello que es conveniente tener alguna propiedad de medibilidad conjunta.

Definición 1.6. Un proceso estocástico $X = (X_t)_{t\geq 0}$ con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ se llama medible si, para toda $A \in \mathcal{E}$, el conjunto $\{(t,\omega) : X_t(\omega) \in A\}$ pertenece a la σ-álgebra producto $\mathcal{B}[0,\infty) \times \mathcal{F}$, es decir,

$$(t,\omega) \to X_t(\omega) : \big([0,\infty) \times \Omega, \mathcal{B}[0,\infty) \times \mathcal{F}\big) \to (E, \mathcal{E})$$

es medible.

Gracias al teorema de Fubini tenemos que si X es medible entonces sus trayectorias son funciones $\mathcal{B}[0,\infty)$-medibles.

1.2. Filtraciones.

Las filtraciones son un concepto fundamental en la teoría de los procesos estocásticos. Esto se verá más adelante cuando estudiemos a los tiempos de paro, las martingalas y la propiedad de Markov.

Definición 1.7. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Una filtración es una familia $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$, tales que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para $s \leq t$. Al sistema $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ se le llama espacio de probabilidad filtrado.

Al proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ le podemos asociar la filtración $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$, la cual llamaremos filtración canónica.

Denotaremos por

$$\mathcal{F}_{t^-} = \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\right) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \qquad \text{para toda } t \geq 0.$$

Es claro que $\mathcal{F}_{t^-} \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t^+}$. $\mathcal{F}_{0^-}$ es la σ-álgebra trivial.

Introducir una filtración nos va a permitir ver conceptos más interesantes y más útiles que la noción de proceso medible.

Definición 1.8. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado y sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Diremos que el proceso está adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si para toda $t \geq 0$ se tiene que la variable aleatoria X_t es $\mathcal{F}_t$-medible.

Definición 1.9. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado y $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se dice que $(X_t)_{t\geq 0}$ es progresivamente medible si para toda $t \in \mathbb{R}$

$$(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \to X_s(\omega)$$

es $\mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t$-medible.

Es claro que todo proceso está adaptado a su filtración canónica y que todo proceso progresivamente medible es adaptado. Pero no siempre se tendrá que un proceso adaptado es progresivamente medible, salvo que sea continuo por la derecha o por la izquierda. Recalcamos que nuestro interés es estudiar al movimiento Browniano el cual es continuo, por esta razón sólo lo probaremos para procesos con trayectorias continuas. La demostración general es análoga.

Teorema 1.1. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico con valores en un espacio métrico $(E, \mathcal{B}(E))$, adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, y continuo, entonces $(X_t)_{t\geq 0}$ es progresivamente medible.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{B}(E)$. Para probar este resultado basta ver que

$$\big\{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega : X_s(\omega) \in A\big\} \in \mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t. \tag{1.1}$$

Para cada $n \geq 1$, $k = \{0, 1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}$ y $0 \leq s \leq t$, definimos el proceso

$$X_s^n(\omega) = \begin{cases} X_{\frac{(k+1)t}{2^n}}(\omega) & \text{si} \quad \frac{kt}{2^n} \leq s < \frac{(k+1)t}{2^n}, \\ X_0(\omega) & \text{si} \quad s = 0. \end{cases}$$

Dado que $(X_t)_{t\geq 0}$ es continuo tenemos que $\lim_{n\to\infty} X_s^n(\omega) = X_s(\omega)$ para cualquier $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega$. Entonces si probamos que $X_s^n(\omega)$ es $\mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t$-medible es claro que (1.1) se satisface. Notemos que el conjunto

$$\big\{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega : X_s^n(\omega) \in A\big\}$$

se puede ver como

$$\bigcup_{k=1}^{2^n} \Big\{ [kt/2^n, (k-1)t/2^n] \times \big\{X_{(k+1)t/2^n}(\omega) \in A\big\} \Big\} \bigcup \big\{\{0\} \times \{X_0(\omega) \in A\}\big\}.$$

Como cada uno de los conjuntos de la unión son elementos de la σ-álgebra $\mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t$ entonces la unión de ellos lo es. $\square$

Definición 1.10. Una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ se llama continua por la derecha si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ para toda $t \geq 0$.

Notemos que $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$ es continua por la derecha. En efecto, sea $\mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{G}_t$, entonces,

$$\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{G}_{t^+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{G}_s = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_{s^+} = \bigcap_{s>t} \left(\bigcap_{u>s} \mathcal{F}_u \right) \subseteq \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{G}_t,$$

para toda $t \geq 0$. Por lo tanto es continua por la derecha.

1.3. El movimiento Browniano.

El objetivo principal de esta sección es construir al movimiento Browniano haciendo uso del teorema de Daniell-Kolmogorov y del criterio de continuidad de Kolmogorov.
Primero recordemos la definición del movimiento Browniano.

Definición 1.11. [Movimiento Browniano.] El movimiento Browniano, $B = (B_t, t \geq 0)$, es un proceso estocástico con valores en $\mathbb{R}$ que satisface:

i) $B_0 = 0$ con probabilidad uno.

ii) Si $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ entonces B_{t_0}, $B_{t_1} - B_{t_0}$, $\ldots$, $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ son independientes.

iii) Si $s, t \geq 0$ entonces

$$\mathbb{P}\big[(B_{s+t} - B_s) \in A\big] = \int_A \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} \exp(-x^2/2t) dx$$

.

iv) El mapeo $t \to B_t$ es continuo con probabilidad uno.

En otras palabras el movimiento Browniano tiene incrementos independientes y estacionarios. Cada incremento se distribuye como una normal con media 0 y con varianza la longitud del intervalo.

Antes de enunciar al Teorema de Daniell-Kolmogorov recordemos la definición de un espacio de Luzin.

Definición 1.12. [Espacio de Luzin.] Se dice que E es un espacio de Luzin si este es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.

Notemos que $\mathbb{R}^d$ es un espacio de Luzin, esto se ve gracias a la proyección estereográfica de la esfera S^d en $\mathbb{R}^{d+1}$.

Introduzcamos otro concepto que será de gran utilidad en nuestra construcción. Sea E un espacio de Luzin y consideremos al espacio

$$E^{[0,\infty)} = \big\{\text{las aplicaciones de } [0,\infty) \to E\big\}.$$

Sea $F \subseteq [0,\infty)$ finito y y A^F es un conjunto medible de E^F el cual está dotado de la σ-álgebra producto. Definamos a Π_F de la siguiente manera

$$\Pi_F : E^{[0,\infty)} \longrightarrow E^F.$$

Llamaremos cilindro de $E^{[0,\infty)}$ a todo conjunto de la forma $\Pi_F^{-1}(A^F)$.

Solamente vamos a enunciar al teorema de Daniell-Kolmogorov, la prueba de este resultado puede ser consultada en [6].

Teorema 1.2. *(Teorema de consistencia de Daniell-Kolmogorov.) Sean $(E, \mathcal{E})$ un espacio de Luzin y para todo subconjunto finito $F \subseteq [0, \infty)$, μ_F una medida de probabilidad en $(E^F, \mathcal{E}^F)$. Supongamos que se satisface la propiedad de consistencia, i.e. si $F' \subseteq F$ y p'_F es la proyección natural de E^F a $E^{F'}$ entonces $\mu_{F'}$ es la medida imagen de μ_F por la proyección p'_F. Entonces existe una única medida de probabilidad μ en $(E, \mathcal{E})$ tal que para todo subconjunto finito $F \subseteq [0, \infty)$ la imagen de μ por la proyección $\Pi_F : E^{[0,\infty)} \to E^F$ es μ_F.*

A partir de este momento vamos a considerar a $E = \mathbb{R}$, $\Omega = E^{[0,\infty)}$ y a $\mathcal{F}$ como la σ-álgebra generada por los cilindros. Nuestro objetivo es construir una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ en $(\Omega, \mathcal{F})$ de tal forma que el proceso canónico $(X_t)_{t\geq 0}$ definido por $X_t(\omega) = \omega(t)$ sea un proceso que cumple las tres primeras propiedades de la definición 1.11. Para ello definamos una medida $\mu_{t_1,t_2,\ldots,t_n}$ en $\mathbb{R}^n$, tal que para cada $0 < t_1 < \ldots < t_n$, se tiene

$$\mu_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = \int_{A_1} \cdots \int_{A_n} \prod_{i=1}^{n} p_{t_i - t_{i-1}}(x_{i-1}, x_i) \mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1,$$

donde $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $x_0 = 0$, $t_0 = 0$ y

$$p_t(x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} e^{-(x-y)^2/2t}.$$

Se puede ver que $\mu_{t,t+h}(\mathbb{R} \times A) = \mu_{t+h}(A)$. Verifiquemos que esta medida satisface la propiedad de consistencia. Consideremos

$$\{s_1, \ldots, s_{n-1}\} \subset \{t_1, \ldots, t_n\},$$

y supongamos que $t_j \notin \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$, entonces vemos que

$$\mu_{s_1,\ldots,s_{n-1}}(A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) = \mu_{t_1,\ldots,t_n}(A_1 \times \cdots \times A_{j-1} \times \mathbb{R} \times A_{j+1} \times \cdots \times A_n).$$

Por lo tanto, del Teorema de Daniell-Kolmogorov podemos concluir la existencia de una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ en $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que

$$\mathbb{P}\big[\{\omega : X_{t_i}(\omega) \in A_i, 1 \leq i \leq n\}\big] = \mu_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n).$$

En resumen, hemos probado que existe una medida $\mathbb{P}$ en $(\Omega, \mathcal{F})$, bajo la cual el proceso canónico

$$X_t(\omega) = \omega(t); \qquad \omega \in \Omega, \quad t \geq 0,$$

tiene incrementos independientes y estacionarios. Cada incremento de la forma $X_t - X_s$, donde $t > s$, se distribuye como una variable aleatoria normal con media cero y varianza $t-s$.

Nuestra construcción estaría terminada si probamos que

$$\mathbb{P}\big[\mathcal{C}([0,\infty),\mathbb{R})\big] = 1$$

Donde $\mathcal{C}([0,\infty),\mathbb{R}) = \{\text{aplicaciones continuas en } \Omega\}$. Pero $\mathcal{C}([0,\infty),\mathbb{R})$ no es $\mathcal{F}$-medible y por ende dicha probabilidad no está bien definida. Esto pone de manifiesto que la σ-álgebra $\mathcal{F}$ no es lo suficientemente grande para el espacio Ω. En si, ningún conjunto en $\mathcal{F}$ tendrá restricciones en una cantidad no numerable de coordenadas. En contraste al espacio $\mathcal{C}([0,\infty),\mathbb{R})$, es imposible de determinar a una función en Ω al especificar sus valores en una cantidad numerable de coordenadas.

A continuación demostraremos el criterio de continuidad de Kolmogorov, con el propósito de ver que el proceso canónico que acabamos de construir admite una modificación continua con la cual trabajaremos y llamaremos movimiento Browniano.

Teorema 1.3. *(Criterio de continuidad de Kolmogorov.) Sea $X = (X_t, t \in I)$ un proceso aleatorio indexado por un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ con valores en (E,d) un espacio métrico completo. Supongamos que existen $p, \epsilon, c > 0$ tales que*

$$\mathbb{E}\big[\,(d(X_s,X_t))^p\,\big] \leq c|t-s|^{1+\epsilon}, \;\; s,t \in I.$$

Entonces existe una modificación X' de X cuyas trayectorias son localmente hölderianas de índice α, para toda $\alpha \in (0,\epsilon/p)$, es decir, para toda $T \geq 0$. En particular, X admite una modificación continua que es única salvo indistinguibilidad.

Demostración. Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $I = [0,1]$. De la desigualdad de Chebyshev tenemos que para toda $a > 0$ y $s,t \in [0,1]$

$$\mathbb{P}\big[d(X_s,X_t) > a\big] \leq \frac{\mathbb{E}\big[\,(d(X_s,X_t))^p\,\big]}{a^p} \leq \frac{c|t-s|^{1+\epsilon}}{a^p}$$

Tomemos $s = (i-1)/2^n$, $t = i/2^n$ y $a = 2^{-n\alpha}$.

$$\mathbb{P}\left[d(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}) > 2^{-n\alpha}\right] \leq \frac{c}{2^{n(1+\epsilon-p\alpha)}}.$$

De ahí que

$$\mathbb{P}\left[\max_{1\leq i\leq 2^n} d(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}) > 2^{-n\alpha}\right] \leq c\frac{2^n}{2^{n(1+\epsilon-p\alpha)}} = c\frac{1}{2^{n(\epsilon-p\alpha)}}$$

Si $\epsilon - p\alpha > 0$, entonces

$$\sum_{n\geq 1} \frac{c}{2^{n(\epsilon-p\alpha)}} < \infty.$$

Por el lema de Borel-Cantelli sabemos que existe un conjunto $\widetilde{\Omega} \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}[\widetilde{\Omega}] = 1$ y tal que para cada $\omega \in \widetilde{\Omega}$, existe $n_0 = n_0(\omega)$ finito de tal forma que para toda $n \geq n_0$,

$$d(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}) \leq 2^{-n\alpha}, \qquad \text{para toda } 1 \leq i \leq 2^n$$

Entonces

$$\sup_{n \geq n_0} \max_{1 \leq i \leq 2^n} \frac{d\big(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}\big)}{2^{-n\alpha}} \leq 1,$$

y se sigue que

$$\sup_{n \geq 1} \max_{1 \leq i \leq 2^n} \frac{d\big(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}\big)}{2^{-n\alpha}} \leq K(\omega).$$

Ahora sea C el conjunto de los números diádicos del intervalo $[0, 1)$, es decir

$$t \in C \quad \Leftrightarrow \quad t = \sum_{k=1}^{N} \frac{\xi_k}{2^k} \qquad \text{donde } \xi_k = 0, 1,$$

y consideremos a $s, t \in C$, $s < t$ y $p \geq 1$ el entero más grande que satisface $t - s < 2^{-p}$. Además sea $k = [2^p s]$, donde $[x] \leq x < [x + 1]$ y observemos que

$$k = [2^p s] \leq [2^p t] \leq [2^p(s + 2^{-p})] = k + 1,$$

y

$$s = \frac{k}{2^p} + \frac{\xi_{p+1}}{2^{p+1}} + \frac{\xi_{p+2}}{2^{p+2}} + \cdots + \frac{\xi_{p+l}}{2^{p+l}}, \qquad \xi_j = 0, 1.$$

$$t = \frac{k}{2^p} + \frac{\tilde{\xi}_p}{2^p} + \frac{\tilde{\xi}_{p+1}}{2^{p+1}} + \frac{\tilde{\xi}_{p+2}}{2^{p+2}} + \cdots + \frac{\tilde{\xi}_{p+m}}{2^{p+m}}, \qquad \tilde{\xi}_j = 0, 1.$$

Sean

$$s_i = \frac{k}{2^p} + \frac{\xi_{p+1}}{2^{p+1}} + \frac{\xi_{p+2}}{2^{p+2}} + \cdots + \frac{\xi_{p+i}}{2^{p+i}}, \qquad i = 0, 1, \ldots, l.$$

$$t_j = \frac{k}{2^p} + \frac{\tilde{\xi}_p}{2^p} + \frac{\tilde{\xi}_{p+1}}{2^{p+1}} + \frac{\tilde{\xi}_{p+2}}{2^{p+2}} + \cdots + \frac{\tilde{\xi}_{p+j}}{2^{p+j}}, \qquad j = 0, 1, \ldots, m.$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
d(X_s, X_t) &= d(X_{s_l}, X_{t_m}) \\
&= d(X_{s_0}, X_{t_0}) + \sum_{i=0}^{l} d(X_{s_i}, X_{t_{i-1}}) + \sum_{j=0}^{m} d(X_{t_j}, X_{t_{j-1}}) \\
&\leq K(\omega)2^{-p\alpha} + \sum_{i=0}^{l} K(\omega)2^{-(p+i)\alpha} + \sum_{j=0}^{m} K(\omega)2^{-(p+j)\alpha} \\
&= K(\omega)2^{-p\alpha}\left[1 + \sum_{i=0}^{l} 2^{-i\alpha} + \sum_{j=0}^{m} 2^{-j\alpha}\right] \\
&\leq 2K(\omega)2^{-p\alpha}\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i\alpha} \\
&= \frac{2K(\omega)2^{-p\alpha}}{1-2^{-\alpha}} \leq \frac{2^{\alpha+1}K(\omega)}{1-2^{-\alpha}}(t-s)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

esto último debido a que $2^{-(p+1)} < t-s$. De ahí que para cada $\omega \in \widetilde{\Omega}$, el mapeo $t \to X_t(\omega)$ en C es hölderiano de índice α (uniformemente continua en C).
Definamos para $t \in I$

$$
\widetilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} \lim_{s\to t} X_s(\omega) & \text{si} \quad \omega \in \widetilde{\Omega} \quad \text{y} \quad s \in C \\ x_0 \in E & \text{si} \quad \omega \in \widetilde{\Omega}^c \end{cases}
$$

Como consecuencia de la continuidad uniforme y del criterio de Cauchy, para $s \in C$, el $\lim_{s\to t} X_s(\omega)$ existe. Por definición el proceso $\widetilde{X}$ es hölderiano de índice α.
Ahora veremos que $\widetilde{X}$ es una modificación de X, para esto observemos que para $t \in I$

$$
X_t = \lim_{s\to t} X_s \quad \text{en probabilidad.}
$$

Esto se debe a la desigualdad de Chebyshev, es decir para $\delta > 0$

$$
\mathbb{P}[d(X_s, X_t) > \delta] \leq \frac{c|t-s|^{1+\epsilon}}{\delta^p} \longrightarrow 0
$$

cuando $s \to t$.
Como $\widetilde{X}_t = \lim_{s\to t} X_s$ c.s. y además $X_t = \lim_{s\to t} X_s$ en probabilidad, para $s \in C$, entonces $\widetilde{X}_t = X_t$ c.s. □

El siguiente corolario nos garantiza que el proceso canónico construido anteriormente admite una modificación con trayectorias continuas.

Corolario 1.1. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso que satisface (i), (ii) y (iii) de la definición del movimiento Browniano. El proceso X admite una modificación cuyas trayectorias son localmente holderianas de índice $\alpha = 1/2 - \epsilon$, para $\epsilon \in (0, 1/2)$. En particular, X admite una modificación continua.*

Demostración. Para $\epsilon \in (0,1/2)$ y $p>0$, se tiene

$$\mathbb{E}\big[|X_s - X_t|^p\big] = |t-s|^{p/2}\mathbb{E}\big[|N(0,1)|^p\big] = c(p)|t-s|^{1+(p/2-1)},$$

Donde $N(0,1)$ es una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 1. Si tomamos $p > 2$, vemos que $1/2 - \epsilon < (p/2-1)/p$. Al aplicar el criterio de continuidad de Kolmogorov obtenemos el resultado deseado. $\square$

Proposición 1.2. *Existe una única medida* $\mathbb{W}$ *en* $(\mathcal{C}([0,\infty),\mathbb{R}),\mathcal{B}(\mathcal{C}))$*, donde* $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ *es la* σ*-álgebra de Borel con la topología de los compactos-abiertos, tal que el proceso canónico* $B=(B_t)_{t\geq 0}$ *definido por*

$$B_t(\omega) = \omega(t), \qquad \textit{donde} \quad \omega \in \mathcal{C}([0,\infty),\mathbb{R}),$$

es un movimiento Browniano en $(\mathcal{C}([0,\infty),\mathbb{R}),\mathcal{B}(\mathcal{C}),\mathbb{W})$.

Demostración. Es claro que $\mathbb{W}[d\omega]$ es la imagen de B bajo $\mathbb{P}$ ya que

$$\mathbb{P}[(B_t)_{t\geq 0} \in A] = \mathbb{W}[A], \qquad \text{para toda} \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{C})).$$

De ahí que es fácil ver que $\mathbb{W}$ es una medida y que B satisface todo bajo $\mathbb{W}$.
La unicidad es obvia ya que dicha medida está determinada por las marginales del movimiento Browniano. $\square$

Ahora veamos algunas propiedades importantes del movimiento Browniano.

Proposición 1.3. *Sea* B *un movimiento Browniano. Entonces,*

i) $-B$ *tambien es un movimiento Browniano.*

ii) Para toda $\lambda > 0$*, el proceso* $B_t^\lambda = \frac{1}{\lambda}B_{\lambda^2 t}$*, es un movimiento Browniano. (Invariante ante el cambio de escala.)*

iii) Para toda $s \geq 0$*, el proceso* $\left(B_t^{(s)}\right)_{t\geq 0}$*, definido por* $B_t^{(s)} = B_{s+t} - B_s$*, es un movimiento Browniano independiente de* $\sigma(B_r, r \leq s)$*. (Propiedad de Markov.)*

Demostración. Los incisos $i)$ y $ii)$ son sencillos de probar, se dejan al lector los detalles.
iii) Sean H_s el espacio vectorial generado por $(B_r, 0 \leq r \leq s)$ y $\widetilde{H}_s$ el espacio vectorial generado por $(B_{s+u} - B_s, u \geq 0)$. La σ-álgebra generada por $B_t^{(s)}$ es $\sigma(\widetilde{H}_s)$, la cual es independiente de $\sigma(H_s) = \sigma(B_r, 0 \leq r \leq s)$. Es claro que $B_0^{(s)} = 0$. Dado que $B_{t_i}^{(s)} - B_{t_{i-1}}^{(s)} = B_{s+t_i} - B_{s+t_{i-1}}$, para $0 = t_1 < \ldots < t_n$, es claro que $B^{(s)}$ tiene incrementos independientes y estacionarios. Finalmente, tambien es claro que $t \longrightarrow B_t^{(s)}$ es un mapeo continuo con probabilidad 1. $\square$

Teorema 1.4. *(Ley 0-1 de Blumenthal.) Para toda $t \geq 0$ sea $\mathcal{F}_t$ la σ-álgebra definida por*

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$$

y sea

$$\mathcal{F}_{0+} = \bigcap_{s>0} \mathcal{F}_s.$$

Entonces la σ-álgebra $\mathcal{F}_{0+}$ es trivial, es decir, para toda $A \in \mathcal{F}_{0+}$, $\mathbb{P}[A] = 0$ ó 1.

Demostración. Sean $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ y sea $g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada. Consideramos $A \in \mathcal{F}_{0+}$. Entonces, gracias a la continuidad,

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A g(B_{t_1}, \ldots, B_{t_k})\big] = \lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A g(B_{t_1} - B_\epsilon, \ldots, B_{t_k} - B_\epsilon)\big]$$

Por otro lado, como $\epsilon < t_1$, las variables aleatorias $B_{t_1} - B_\epsilon, \ldots, B_{t_k} - B_\epsilon$ son independientes de $\mathcal{F}_\epsilon$ (propiedad de Markov), y por ende tambien lo son de la σ-álgebra $\mathcal{F}_{0+}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A g(B_{t_1}, \ldots, B_{t_k})\big] &= \lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{P}\big[A\big]\mathbb{E}\big[g(B_{t_1} - B_\epsilon, \ldots, B_{t_k} - B_\epsilon)\big] \\ &= \mathbb{P}\big[A\big]\mathbb{E}\big[g(B_{t_1}, \ldots, B_{t_k})\big] \end{aligned}$$

Hemos visto que $\mathcal{F}_{0+}$ es independiente de $\sigma(B_{t_1}, \ldots, B_{t_k})$. Como esto es cierto para toda familia finita de reales estrictamente positivos $\{t_1, \ldots, t_2\}$, tenemos que $\mathcal{F}_{0+}$ es independiente de $\sigma(B_t, t > 0)$. Finalmente $\sigma(B_t, t > 0) = \sigma(B_t, t \geq 0)$ ya que B_0 es el límite de B_t cuando $t \to 0$. Como $\mathcal{F}_{0+} \subset \sigma(B_t, t \geq 0)$, vemos que $\mathcal{F}_{0+}$ es independiente de ella misma, esto implica $\mathcal{F}_{0+}$ es trivial. $\square$

El siguiente corolario implica que el movimiento Browniano toma valores en todo el conjunto de los números reales, a esta propiedad se le conoce con el nombre de recurrencia.

Corolario 1.2. *Tenemos que para toda $\epsilon > 0$*

$$\sup\nolimits_{0 \leq s \leq \epsilon} B_s > 0, \qquad \inf\nolimits_{0 \leq s \leq \epsilon} B_s < 0 \qquad c.s.$$

Para toda $a \in \mathbb{R}$, sea $T_a = \inf\{t, B_t = a\}$ $\quad (\inf \emptyset = \infty)$. Entonces

$$\textit{para toda} \quad a \in \mathbb{R}, \qquad T_a < \infty. \quad c.s.$$

En consecuencia,

$$\limsup_{t \to \infty} B_t = +\infty, \qquad \liminf_{t \to \infty} B_t = -\infty, \qquad c.s.$$

Demostración. Sea (ϵ_p) una sucesión decreciente de reales que tiende a cero. Además consideremos al conjunto

$$A = \bigcap_{p \geq 1} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq \epsilon_p} B_s > 0 \right\}.$$

Es claro que el evento A es $\mathcal{F}_{0+}$-medible.
Por otro lado observemos que $\{\sup_{0\leq s\leq \epsilon_p} B_s > 0\}$ es una suceción decreciente de eventos, ya que (ϵ_p) es una sucesión decreciente de reales, entonces por la continuidad de la medida de probabilidad tenemos que

$$\mathbb{P}[A] = \lim_{p\to\infty} \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq \epsilon_p} B_s > 0\right],$$

y

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq \epsilon_p} B_s > 0\right] \geq \mathbb{P}\left[B_{\epsilon_p} > 0\right] = \frac{1}{2},$$

esto muestra que $\mathbb{P}[A] \geq \frac{1}{2}$. De la Ley 0-1 de Blumenthal tenemos que $\mathbb{P}[A] = 1$, de donde deducimos que

$$\text{para toda} \quad \epsilon > 0, \quad \sup_{0\leq s\leq \epsilon} B_s > 0, \qquad \text{c.s.}$$

Por simetría se tiene que

$$\text{para toda} \quad \epsilon > 0, \quad \inf_{0\leq s\leq \epsilon} B_s < 0 \qquad \text{c.s.}$$

Ahora notemos que para $\delta > 0$

$$1 = \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq 1} B_s > 0\right] = \lim_{\delta\to 0} \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq 1} B_s > \delta\right].$$

Al aplicar la propiedad (ii) de la proposición 1.3 con $\lambda = \frac{1}{\delta}$ tenemos que

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq 1} B_s > \delta\right] = \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq 1/\delta^2} B_s^{1/\delta} > 1\right] = \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq 1/\delta^2} B_s > 1\right].$$

Al hacer tender δ a 0, vemos

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s} B_s > 1\right] = 1.$$

Nuevamente por rescalamiento en el tiempo y espacio, observamos que para $C > 0$

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s} B_s > C\right] = 1.$$

Nuevamente por simetría obtenemos que

$$\mathbb{P}\left[\inf_{0\leq s} B_s < -C\right] = 1.$$

Las últimas aseveraciones del corolario se siguen fácilmente. De hecho para la última basta observar que una función continua $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ toma todos los valores reales si y solo si

$$\limsup_{t\to\infty} f(t) = +\infty, \quad \liminf_{t\to\infty} f(t) = -\infty.$$

$\square$

La siguiente proposición será de gran importancia y utilidad, esto se verá en el capítulo 3 donde estudiaremos el cálculo estocástico. La demostración de esta proposición se puede consultar en [1].

Proposición 1.4. *Sean* $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{p_n}^n = t$ *subdivisiones de* $[0,t]$ *cuya norma tiende a cero, es decir* $\sup_i(t_i^n - t_{i-1}^n) \to 0$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 = t,$$

en L^2.

1.4. Tiempos de paro y la propiedad fuerte de Markov.

En esta última sección del capítulo vamos a introducir a los tiempos de paro, concepto importante para describir la propiedad fuerte de Markov del movimiento Browniano.

Definición 1.13. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado. Una función $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ se llama tiempo de paro si

i) τ es $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t : t \in [0,\infty])$ medible.

ii) El conjunto $(\tau \leq t)$ pertenece a $\mathcal{F}_t$ para toda $t \geq 0$.

Si el conjunto de los posibles valores de τ es discreto, diremos que τ es un tiempo de paro discreto.
Ahora daremos una caracterización de los tiempos de paro para filtraciones continuas por la derecha.

Proposición 1.5. *Si la filtración* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *es continua por la derecha, entonces* τ *es un tiempo de paro si y sólo si* $(\tau < t) \in \mathcal{F}_t$ *para toda* $t \geq 0$.

Demostración. Sea $t \geq 0$ fijo, por ser τ tiempo de paro

$$(\tau \leq s) \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \quad \text{para toda} \quad s < t,$$

entonces

$$(\tau < t) = \bigcup_{s<t} (\tau \leq s) \in \mathcal{F}_t \quad \text{para toda} \quad t \geq 0.$$

Ahora probemos el recíproco. Ya que la filtración es continua por la derecha y además $(\tau < t) \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \geq 0$, tenemos que

$$(\tau \leq t) = \bigcap_{s>t} (\tau < s) \in \mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$$

□

Observemos que en la primera parte nunca se utilizó la hipótesis de que la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es continua por la derecha, en otras palabras, si τ es un tiempo de paro entonces $(\tau < t) \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \geq 0$.
El tiempo de entrada en A o primera vez que el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ entra en el conjunto A está dado por

$$T_A(\omega) = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in A\} & \text{si} \quad \{t \geq 0 : X_t(\omega) \in A\} \neq \emptyset, \\ \infty & \text{si} \quad \{t \geq 0 : X_t(\omega) \in A\} = \emptyset. \end{cases}$$

La siguiente proposición da condiciones suficientes para que los tiempos de entrada sean tiempos de paro.

Proposición 1.6. *Sea $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico con trayectorias continuas adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, y con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$, donde E es un espacio métrico y sea $A \in \mathcal{B}$*

i) Si $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es continua por la derecha y A es un conjunto abierto entonces T_A es un tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

ii) Si A es un conjunto cerrado entonces T_A es un tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Demostración. i) Sea Ω_0 tal que para cualquier $\omega \in \Omega_0$ la trayectoria $X_t(\omega)$ es continua, entonces $\mathbb{P}[\Omega_0] = 1$. Consideremos

$$C_t = \bigcup_{\substack{s \in \mathbb{Q}^+ \\ s < t}} (X_s \in A) \qquad \text{para} \quad t \geq 0 \quad \text{fija},$$

donde A es un abierto de $\mathcal{B}$. Claramente $C_t \in \mathcal{F}_t$ ya que el proceso X es $\mathcal{F}_t$-adaptado. En consecuencia, basta ver que $(T_A < t) = C_t$ para probar que T_A es un tiempo de paro.
Tomemos a $\omega \in C_t$, entonces existe $s \in \mathbb{Q}^+$ y $s < t$ tal que $X_s(\omega) \in A$, por lo tanto $T_A(\omega) \leq s < t$, es decir, $\omega \in (T_A < t)$.
Como $\omega \in (T_A < t)$, entonces existe $t_0 < t$ tal que $X_{t_0}(\omega) \in A$, y gracias a que el proceso X es continuo y A es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $s \in \mathbb{Q} \cap [t_0, t_0 + \epsilon)$ y $X_s(\omega) \in A$.

ii) Para $x \in E$, definamos $\rho(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$, y consideremos la sucesión de vecindades abiertas de A dada por $A_n = \{x \in E : \rho(x, A) < 1/n\}$. Gracias a (i) tenemos que $(T_A < t) \in \mathcal{F}_t$.
Es claro que $T_{A_n} < T_{A_{n+1}}$, ya que $A_{n+1} \subset A_n$, además $T_A \geq T_{A_n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto el límite de $(T_{A_n})_{n\geq 1}$ existe y es menor que T_A. Consideremos $T = \lim_{n\to\infty} T_{A_n}$. Bajo el evento $(T_A = 0)$ se tiene que $T_{A_n} = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Bajo el evento $(T_A > 0)$ existe un entero $k = k(\omega) \geq 1$ tal que

$$T_{A_n} = 0, \quad \text{para} \quad 1 \leq n \leq k, \quad \text{y} \quad 0 < T_{A_n} < T_{A_{n+1}} < T_A \quad \text{para} \quad n \geq k$$

Es suficiente ver que $T \geq T_A$ en el conjunto $(T_A > 0, T < \infty)$, para tener que $T_A = T$. En dicho evento tenemos, por la continuidad de las trayectorias de

X, que $\lim_{n\to\infty} X_{T_{A_n}} = X_T$ y $X_{T_{A_m}} \in \partial A_m \subseteq A_n$, para toda $m > n \geq k$. Si hacemos tender m a infinito, obtenemos que $X_T \in A_n$, para toda $n \geq k$, y por lo tanto $X_T \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$, es decir, $T_A \leq T$. Finalmente

$$(T_A = 0) = (X_0 \in A) \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_t,$$

y para $t > 0$

$$(T_A \leq t) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (T_{A_n} < t) \in \mathcal{F}_t.$$

Por lo tanto T_A es tiempo de paro. $\square$

La parte (i) de la proposición anterior vale tambien para procesos que sean continuos por la derecha o por la izquierda, la demostración es análoga.

Definición 1.14. Tomemos a τ un tiempo de paro con respecto a la la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Denotamos por $\mathcal{F}_\tau$ a la colección de eventos $A \in \mathcal{F}$ tal que

$$A \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}^+$$

Llamaremos a $\mathcal{F}_\tau$ la σ-álgebra detenida en τ.

Proposición 1.7. *Sea τ un tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, entonces $\mathcal{F}_\tau$ es una σ-álgebra.*

Demostración. Claramente $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$ y $\emptyset \in \mathcal{F}_\tau$, ya que

$$\Omega \cap (\tau \leq t) = (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t \qquad \text{y} \qquad \emptyset \cap (\tau \leq t) = \emptyset \in \mathcal{F}_t.$$

Probemos que es cerrada bajo complementos. Dado que $(\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t$, si $A \in \mathcal{F}$ entonces

$$(A^c \cap (\tau \leq t)) = (\tau \leq t) \cap (A \cup (\tau \leq t))^c \in \mathcal{F}_t$$

Por lo tanto $A^c \in \mathcal{F}_\tau$.
Tomemos $\{A_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión tal que $A_n \in \mathcal{F}_\tau$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Queremos ver que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_\tau$,

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \bigcap (\tau \leq t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A_n \bigcap (\tau \leq t)\right) \in \mathcal{F}_t.$$

Por lo tanto $\mathcal{F}_\tau$ es una σ-álgebra. $\square$

La siguiente serie de lemas nos será muy útil en el manejo de los tiempos de paro. En el primero se muestra que el máximo y el mínimo entre dos tiempos de paro son tiempos de paro.

Lema 1.1. *Sean θ y τ tiempos de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, entonces $\theta \wedge \tau$ y $\theta \vee \tau$ son tiempos de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*

Demostración. Como $(\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t$ y $(\theta \leq t) \in \mathcal{F}_t$ entonces

$$(\theta \wedge \tau > t) = (\theta > t) \cap (\tau > t) = (\theta \leq t)^c \cap (\tau \leq t)^c \in \mathcal{F}_t$$

de ahí que $(\theta \wedge \tau \leq t) = (\theta \wedge \tau > t)^c \in \mathcal{F}_t$ y entonces $\theta \wedge \tau$ es tiempo de paro. Para la segunda parte ahora observemos que

$$(\theta \vee \tau \leq t) = (\theta \leq t) \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t$$

y llegamos a lo que queríamos probar. □

Ahora veamos que los límites de sucesiones de tiempos de paro tambien son tiempos de paro.

Lema 1.2. *Sea $(\tau_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de tiempos de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$, entonces*

$$\sup_{n\geq 1} \tau_n, \quad \inf_{n\geq 1} \tau_n, \quad \liminf_{n\to\infty} \tau_n, \quad \limsup_{n\to\infty} \tau_n$$

son tiempos de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$. Si además $(\tau_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de tiempos de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, entonces el $\sup_{n\geq 1} \tau_n$ *tambien es un tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*

Demostración. Observemos lo siguiente

$$\left(\sup_{n\geq 1} \tau_n \leq t\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\tau_n \leq t) \in \mathcal{F}_t,$$

y

$$\left(\inf_{n\geq 1} \tau_n < t\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\tau_n < t) \in \mathcal{F}_t.$$

Además como

$$\limsup_{n\to\infty} \tau_n = \inf_{m\geq 1} \left(\sup_{n\geq m} \tau_n\right)$$

y

$$\liminf_{n\to\infty} \tau_n = \sup_{m\geq 1} \left(\inf_{n\geq m} \tau_n\right)$$

el resultado se obtiene fácilmente. □

En el siguiente lema veremos un par de propiedades que se cumplen entre dos σ-álgebras detenidas en distintos tiempos de paro.

Lema 1.3. *Sean θ y τ dos tiempos de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, y $B \in \mathcal{F}_\theta$ entonces $B \cap (\theta \leq \tau) \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$ En particular, si $\theta \leq \tau$ entonces $\mathcal{F}_\theta \subset \mathcal{F}_\tau$.*

Demostración. Probaremos que $B \cap (\theta \leq \tau)$ esta en $\mathcal{F}_\tau$ y en $\mathcal{F}_\theta$. Observemos que

$$B \cap (\theta \leq \tau) \cap (\tau \leq t) = B \cap (\theta \leq t) \cap (\theta \wedge t \leq \tau \wedge t) \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t.$$

Dado que $B \cap (\theta \leq t) \in \mathcal{F}_t$,$(\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t$ y $\theta \wedge t$ y $\tau \wedge t$ son $\mathcal{F}_t$-medibles, entonces $B \cap (\theta \leq \tau) \in \mathcal{F}_\tau$. Por ende

$$B \cap (\theta \leq \tau) \cap (\tau \leq t) \cap (\theta \leq t) \in \mathcal{F}_t,$$

y

$$B \cap (\theta \leq \tau) \cap (\tau > t) \cap (\theta \leq t) = (\tau > t) \cap B \cap (\theta \leq t) \in \mathcal{F}_t.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} B \cap (\theta \leq \tau) \cap (\theta \leq t) &= (B \cap (\theta \leq \tau) \cap (\tau \leq t) \cap (\theta \leq t)) \\ &\quad \cup (B \cap (\theta \leq \tau) \cap (\tau > t) \cap (\theta \leq t)) \in \mathcal{F}_t, \end{aligned}$$

por lo tanto $B \cap (\theta \leq \tau) \in \mathcal{F}_\theta$.

Supongamos que $\theta \leq \tau$ y sea $B \in \mathcal{F}_\theta$ entonces

$$B \cap (\theta \leq t) \in \mathcal{F}_t.$$

Observemos además que

$$(\theta \leq t) \cap (\tau \leq t) = (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t$$

ya que $\theta \leq \tau$ y τ es tiempo de paro. Entonces

$$B \cap (\tau \leq t) = B \cap (\theta \leq t) \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t,$$

y por lo tanto $\mathcal{F}_\theta \subset \mathcal{F}_\tau$. □

Lema 1.4. *Sea τ un tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y θ una función $\mathcal{F}_\tau$-medible tal que $\theta \geq \tau$, entonces θ es un tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*

Demostración. Dado que θ es $\mathcal{F}_t$-medible y además $\theta \geq \tau$, se tiene

$$(\theta \leq t) = (\theta \leq t) \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t$$

□

Lema 1.5. *La suma de dos tiempos de paro es tiempo de paro.*

Demostración. Sean θ y τ dos tiempos de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, entonces $\theta \vee \tau$ es un tiempo de paro con respecto a la misma filtración, es obvio que $\theta + \tau \geq \theta \vee \tau$ y además sabemos que τ es $\mathcal{F}_\tau$-medible, θ es $\mathcal{F}_\theta$-medible y $\mathcal{F}_\tau, \mathcal{F}_\theta \subset \mathcal{F}_{\tau\vee\theta}$, de ahí tenemos que $\theta + \tau$ es $\mathcal{F}_{\tau\vee\theta}$-medible. En consecuencia del lema anterior $\theta + \tau$ es un tiempo de paro. □

Lema 1.6. *Sea τ un tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ entonces existe una sucesión $(\tau_n)_{n\geq 1}$ de tiempos de paro discretos tal que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau$.*

Demostración. Definamos primero una sucesión de tiempos aleatorios $(\tau_n)_{n\geq 1}$ de la siguiente manera

$$\tau_n(\omega) = \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & \text{si} \quad \frac{k-1}{2^n} \leq \tau(\omega) < \frac{k}{2^n}, \quad k = \{1, 2, \dots\} \\ \infty & \text{si} \quad \tau(\omega) = \infty. \end{cases}$$

Por definición es una sucesión de tiempos aleatorios decreciente, es decir, $\tau_n \geq \tau_{n+1}$ y τ_n es $\mathcal{F}_\tau$-medible para toda n. Como $\tau_n \geq \tau$, por el lema 1.4. vemos que τ_n es un tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
Es claro que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau$ ya que

$$|\tau_n - \tau| \leq \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0, \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

□

Lema 1.7. *Sean τ y θ dos tiempos de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ entonces $\mathcal{F}_{\tau\wedge\theta} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$ y cada uno de los eventos*

$$(\tau < \theta), \quad (\theta < \tau), \quad (\tau \leq \theta), \quad (\theta \leq \tau), \quad (\tau = \theta)$$

pertenecen a $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$.

Demostración. Por el lema 1.3., es claro que $\mathcal{F}_{\tau\wedge\theta} \subseteq \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$. Para la otra inclusión primero tomemos $A \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$ y observemos que

$$\begin{aligned} A \cap (\tau \wedge \theta \leq t) &= A \cap \big[(\theta \leq t) \cup (\tau \leq t)\big] \\ &= \big[A \cap (\theta \leq t)\big] \cup \big[A \cap (\tau \leq t)\big] \in \mathcal{F}_t, \end{aligned}$$

de ahí que $A \in \mathcal{F}_{\tau\wedge\theta}$ y $\mathcal{F}_{\tau\wedge\theta} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$.
Nuevamente como consecuencia del mismo lema tenemos que $(\theta \leq \tau) \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$ y si intercambiamos τ y θ observamos que $(\tau \leq \theta) \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$. De esto concluimos que $(\tau = \theta) \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$ ya que $(\theta = \tau) = (\theta \leq \tau) \cap (\tau \leq \theta)$.
Por último $(\theta < \tau) \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$ ya que $(\theta < \tau) = (\theta \leq \tau) \cap (\theta = \tau)^c$ y si intercambiamos nuevamente a τ y θ entonces $(\tau < \theta) \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$. □

Ahora probaremos la propiedad fuerte de Markov para el movimiento Browniano, la cual nos indica que la propiedad de Markov también se cumple para tiempos de paro.

Teorema 1.5. *(Propiedad Fuerte de Markov.) Sea T un tiempo de paro finito c.s. y $(B_t)_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano. Entonces el proceso $\left(B_t^{(T)}\right)_{t\geq 0}$ definido por*

$$B_t^{(T)} = B_{T+t} - B_T,$$

es un movimiento Browniano independiente de $\mathcal{F}_T$.

Demostración. Se demostrará que para $A \in \mathcal{F}_T$, $0 \leq t_1 < t_2 \ldots < t_p$ y F una función continua de $\mathbb{R}^p$ a $\mathbb{R}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A F(B^{(T)}_{t_1}, B^{(T)}_{t_2}, \ldots, B^{(T)}_{t_p})\big] = \mathbb{P}\big[A\big]\mathbb{E}\big[F(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_p})\big].$$

Observemos que si $A = \Omega$ esta igualdad muestra que $\left(B^{(T)}_t\right)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano. Por otro lado la igualdad de arriba nos dará que el vector $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_p})$ es independiente de $\mathcal{F}_T$, usando un argumento de clases monótonas tendremos que $\left(B^{(T)}_t\right)_{t\geq 0}$ es independiente de $\mathcal{F}_T$. Para demostrar la ecuación vemos que

$$\begin{aligned} &F\big(B^{(T)}_{t_1}, B^{(T)}_{t_2}, \ldots, B^{(T)}_{t_p}\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{(k-1)2^{-n} < T \leq k2^{-n}\}} F\big(B_{k2^{-n}+t_1} - B_{k2^{-n}}, \ldots, B_{k2^{-n}+t_p} - B_{k2^{-n}}\big), \end{aligned}$$

y por convergencia dominada tenemos,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A F\big(B^{(T)}_{t_1}, B^{(T)}_{t_2}, \ldots, B^{(T)}_{t_p}\big)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{(k-1)2^{-n} < T \leq k2^{-n}\}} F\big(B_{k2^{-n}+t_1} - B_{k2^{-n}}, \ldots, B_{k2^{-n}+t_p} - B_{k2^{-n}}\big)\right]. \end{aligned}$$

Para $A \in \mathcal{F}_T$, el evento $A \cap \{(k-1)2^{-n} < T \leq k2^{-n}\}$ es $\mathcal{F}_{k2^{-n}}$-medible, de ahí que coincide c.s. con un evento de $\sigma(B_r, r \leq k2^{-n})$. Después al aplicar la propiedad simple de Markov observamos

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{A\cap\{(k-1)2^{-n} < T \leq k2^{-n}\}} F\big(B_{k2^{-n}+t_1} - B_{k2^{-n}}, \ldots, B_{k2^{-n}+t_p} - B_{k2^{-n}}\big)\right] \\ &\qquad = \mathbb{P}\left[A \cap \big\{(k-1)2^{-n} < T \leq k2^{-n}\big\}\right] \mathbb{E}\left[F\big(B_{t_1}, \ldots, B_{t_p}\big)\right]. \end{aligned}$$

Haciendo la suma sobre k se llega al resultado. □

A continuación veremos un resultado que nos será útil para calcular la densidad de T_a, mejor conocido como el principio de reflexión.

Teorema 1.6. *Para toda $t > 0$ denotemos $S_t = \sup_{s\leq t} B_s$. Entonces, si $a \geq 0$ y $b \leq a$, tenemos que*

$$\mathbb{P}[S_t \geq a, B_t \leq b] = \mathbb{P}[B_t \geq 2a - b].$$

En particular, S_t tiene la misma distribución que $|B_t|$.

Demostración. Apliquemos la propiedad fuerte de Markov a los tiempos de paro

$$T_a = \text{ínf}\{t \geq 0, B_t = a\}.$$

Gracias al corolario 1.4.1 de la sección anterior tenemos que $T_a < \infty$ c.s. Entonces

$$\mathbb{P}[S_t \geq a, B_t \leq b] = \mathbb{P}[T_a \leq t, B_t \leq b] = \mathbb{P}\big[T_a \leq t, B^{(T_a)}_{t-T_a} \leq b - a\big],$$

ya que $B^{(T_a)}_{t-T_a} = B_t - B_{T_a} = B_t - a$. Denotemos $B' = B^{(T_a)}$, por el teorema anterior el proceso B' es un movimiento browniano independiente de $\mathcal{F}_{T_a}$ y en particular de T_a. Como B' tiene la misma distribución que $-B'$, (T_a, B') tiene la misma distribución que $(T_a, -B')$. Sea

$$H = \big\{(s, w) \in [0, 1) \times C([0, 1), \mathbb{R}); s \leq t, w(t - s) \leq b - a\big\}.$$

La probabilidad anterior vale

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big[(T_a, B') \in H\big] &= \mathbb{P}\big[(T_a, -B') \in H\big] = \mathbb{P}\big[T_a \leq t, -B^{(T_a)}_{t-T_a} \leq b - a\big] \\
&= \mathbb{P}[T_a \leq t, B_t \geq 2a - b] = \mathbb{P}[B_t \geq 2a - b]
\end{aligned}$$

esto debido a que el evento $\{B_t \geq 2a - b\}$ está contenido en $\{T_a \leq t\}$. Entonces por la segunda aseveración

$$\mathbb{P}[S_t \geq a] = \mathbb{P}[S_t \geq a, B_t \geq a] + \mathbb{P}[S_t \geq a, B_t \leq a] = 2\mathbb{P}[B_t \geq a] = \mathbb{P}\big[|B_t| \geq a\big],$$

de donde se obtiene el resultado. □

Corolario 1.3. *Para toda $a > 0$, T_a tiene la misma distribución que $\frac{a^2}{B_1^2}$ y en particular tiene por densidad*

$$f(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right) \mathbf{1}_{\{t>0\}}. \tag{1.2}$$

Demostración. Por el resultado anterior observamos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[T_a \leq t] &= \mathbb{P}[S_t \geq a] = \mathbb{P}[B_t^2 \geq a^2] \\
&= \mathbb{P}[tB_1^2 \geq a^2] = \mathbb{P}\left[\frac{a^2}{B_1^2} \leq t\right].
\end{aligned}$$

Dado que B_1 tiene una distribución $N(0, 1)$ es fácil verificar que la densidad de T_a está dada por (1.2). □

Capítulo 2

Martingalas y el Teorema de paro opcional.

En este capítulo vamos a introducir el concepto de martingala a tiempo continuo. Revisaremos algunos ejemplos y estudiaremos algunas de sus propiedades. En particular estudiaremos uno de los teoremas fundamentales de la teoría de martingalas, el teorema de paro opcional de Doob. Como veremos, las martingalas son una herramienta fundamental para analizar propiedades importantes de una gran cantidad de procesos estocásticos, como por ejemplo estudiar problemas de salida.

2.1. Martingalas.

Las martingalas son procesos estocásticos que presentan una cierta relación entre las variables aleatorias que las componen y se han convertido en una herramienta básica en la teoría de los procesos estocásticos y sus aplicaciones. Son usadas para calcular probabilidades de absorción, para analizar problemas de salida o de la ruina, para generar desigualdades de procesos estocásticos, para analizar modelos de control, y para muchos otros. En esta sección estudiaremos algunas de sus propiedades así como algunos ejemplos relacionados con el proceso de Poisson y con el movimiento Browniano.

Definición 2.1. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ tal que $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ para toda t. Decimos que es submartingala si para $0 \leq s < t < \infty$,

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$$

y sobremartingala si para $0 \leq s < t < \infty$,

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s.$$

Decimos que el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es martingala si es submartingala y sobremartingala, es decir,

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s, \quad \text{para} \quad 0 \leq s < t < \infty,$$

En otras palabras, una martingala es una familia adaptada de variables aleatorias integrables tales que

$$\int_A X_s d\mathbb{P} = \int_A X_t d\mathbb{P}$$

para toda $s < t$ con $A \in \mathcal{F}_s$.

Veamos algunos ejemplos de martingalas relacionados con el proceso de Poisson y el movimiento Browniano.

Definición 2.2. [Proceso de Poisson.] Sea $(N_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, se dice que $(N_t)_{t\geq 0}$ es un $\mathcal{F}_t$-proceso de Poisson de intensidad $c > 0$ si:

i) $N_0 = 0$ con probabilidad uno.

ii) $(N_t)_{t\geq 0}$ tiene incrementos independientes. Es decir, $N_t - N_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ para $0 \leq s < t$.

iii) Para $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{P}[N_t - N_s = n] = e^{-c(t-s)}\frac{(c(t-s))^n}{n!}, \; n = 0, 1, \dots$$

En otras palabras, $N_t - N_s$ se distribuye Poisson con media $c(t-s)$.

El Proceso de Poisson compensado, $(M_t, t \geq 0)$ definido por

$$M_t = N_t - ct.$$

es una martingala. Para mostrar que M_t es martingala utilizaremos las propiedades (ii) y (iii) de la definición 2.2. Sea $s < t$, entonces por la independencia de los incrementos,

$$\mathbb{E}[M_t - M_s|\mathcal{F}_s] \;=\; \mathbb{E}[N_t - N_s] - c(t-s) = 0.$$

Por lo tanto M_t es $\mathcal{F}_t$-martingala.

El proceso $(M_t^2 - ct, t \geq 0)$ también es martingala. Primero observemos que

$$M_t^2 = N_t^2 - 2ctN_t + c^2t^2.$$

Sea $s < t$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_t^2 - ct - M_s^2 + cs|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s] - c(t-s) \\
&= \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s] + 2\mathbb{E}[M_s(M_t - M_s)|\mathcal{F}_s] - c(t-s) \\
&= \mathbb{E}[(N_t - ct - N_s + cs)^2] - c(t-s) \\
&= \mathbb{E}[N_{t-s}^2 - 2c(t-s)N_{t-s}) + c^2(t-s)^2] - c(t-s) \\
&= \mathbb{E}[N_{t-s}^2] - c^2(t-s)^2 - c(t-s) = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $M_t^2 - ct$ es $\mathcal{F}_t$-martingala.

Otro ejemplo es el proceso $(\xi_t^{(q)}, t \geq 0)$ definido por

$$\xi_t^{(q)} = \exp(-qN_t + ct(1 - e^{-q})), \quad q > 0.$$

Sea $s < t$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_t^{(q)}|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\exp(-qN_t + ct(1 - e^{-q}))|\mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp(-q(N_t - N_s) - qN_s + c(t-s)(1 - e^{-q}) + cs(1 - e^{-q}))|\mathcal{F}_s\right],\end{aligned}$$

como $\exp(-qN_s + cs(1 - e^{-q}))$ es $\mathcal{F}_s$-medible entonces la parte de la derecha en la identidad anterior es igual a

$$\exp(-qN_s + cs(1 - e^{-q}))\mathbb{E}\left[\exp(-q(N_t - N_s) + c(t-s)(1 - e^{-q}))|\mathcal{F}_s\right]$$

por las propiedades (ii) y (iii) de la definición 2.2 tenemos que

$$\begin{aligned}\exp(-qN_s + cs(1 - e^{-q}))\sum_{k=0}^{\infty}\exp(-qk + c(t-s)(1 - e^{-q}))\frac{(c(t-s))^k e^{-c(t-s)}}{k!} \\ = \exp(-qN_s + cs(1 - e^{-q})).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\xi_t^{(q)}$ es martingala.

Ahora veamos que el movimiento Browniano, $(B_t)_{t\geq 0}$, es una martingala. Gracias a que el movimiento Browniano tiene incrementos independientes, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[B_t - B_s] + B_s = B_s\end{aligned}$$

entonces el movimiento Browniano es martingala.

El proceso $(B_t^2 - t, t \geq 0)$ tambien es una martingala. Sea $s < t$, entonces

$$\mathbb{E}[B_t^2 - t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t^2 - t - B_s^2 + s|\mathcal{F}_s] + B_s^2 - s.$$

Basta mostrar que el primer sumando es cero para obtener el resultado deseado, entonces

$$\mathbb{E}[B_t^2 - t - B_s^2 + s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] + 2\mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] - (t-s),$$

claramente el primer término es igual a $(t - s)$ y el segundo es igual a cero, esto gracias a que el movimiento Browniano tiene incrementos independientes. Por lo tanto $B_t^2 - t$ es martingala.

El proceso $(\xi_t^{(\alpha)}, t \geq 0)$ definido por

$$\xi_t^{(\alpha)} = \exp(\alpha B_t - \alpha^2 t/2),$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, es una martingala. Para demostrarlo basta ver que

$$\mathbb{E}\left[\frac{\xi_{t+s}^{(\alpha)}}{\xi_t^{(\alpha)}}\middle| \mathcal{F}_t\right] = 1 \qquad \text{donde} \qquad 0 < s < \infty.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha B_{t+s} - \frac{\alpha^2}{2}(t+s) - \alpha B_t + \frac{\alpha^2}{2}t\right)\middle| \mathcal{F}_t\right] \\ = \quad & \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}s\right)\mathbb{E}\big[\exp\big(\alpha(B_{t+s} - B_t)\big)\big|\mathcal{F}_t\big] = 1, \end{aligned}$$

esto debido a que $B_{t+s} - B_t$ es independiente de $\mathcal{F}_t$ y se distribuye normal con media cero y varianza s. Esto implica que $\xi_t^{(\alpha)}$ es martingala.

Otra observación importante es que si X_t es una martingala tal que para toda t, $\mathbb{E}[|X_t|^p] < \infty$, entonces de la desigualdad de Jensen se tiene que $|X_t|^p$ es una submartingala para $p \geq 1$.

Ejercicio 2.1. Sean $\big(M_t, t \geq 0\big)$ una martingala y τ un tiempo de paro con respecto a la filtración $\mathcal{F}_t$, entonces $\big(M_{t\wedge\tau}, t \geq 0\big)$ es una martingala.

2.1.1. Desigualdades maximales.

En esta parte vamos a estudiar las desigualdades maximales para martingalas continuas. Cabe resaltar que los resultados obtenidos para submartingalas son válidas para sobremartingalas, basta reemplazar X_t por $-X_t$.

Proposición 2.1. *Sea $(X_n)_{n\in J}$, donde $J = 0, 1, 2, \ldots, N$, una colección de submartingalas integrables y $\lambda > 0$, entonces*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{n\in J} X_n \geq \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left[X_N \mathbf{1}_{\{\sup_{n\in J} X_n \geq \lambda\}}\right] \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[X_N].$$

Demostración. Sea

$$\tau = \begin{cases} \inf\{n : X_n \geq \lambda\} & \text{si existe } n \leq N \quad \text{tal que } X_n \geq \lambda, \\ N & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil ver que $N \geq \tau$. Dado que $(X_n)_{n\in J}$ es una submartingala y τ un tiempo de paro, entonces por el Teorema de paro opcional de Doob (caso discreto) tenemos que $\mathbb{E}[X_N] \geq \mathbb{E}[X_\tau]$. Sea

$$A = \left\{\omega \in \Omega : \sup_{n\in J} X_n(\omega) \geq \lambda\right\},$$

si $\omega \in A$ tenemos que $X_\tau(\omega) \geq \lambda$, ya que al menos existe una $k \in J$ tal que $X_k(\omega) \geq \lambda$ y la más pequeña de ellas cumple que es mayor o igual a λ. Entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_N] \ \geq \ \mathbb{E}[X_\tau] &= \mathbb{E}[X_\tau \mathbf{1}_A] + \mathbb{E}[X_\tau \mathbf{1}_{A^c}] \\
&\geq \lambda \mathbb{P}[A] + \mathbb{E}[X_\tau \mathbf{1}_{A^c}],
\end{aligned}
$$

pero en A^c, τ es igual a N, de ahí que

$$
\mathbb{E}[X_N] \geq \lambda \mathbb{P}[A] + \mathbb{E}[X_N \mathbf{1}_{A^c}].
$$

Si después restamos el último término en los dos lados de la desigualdad obtenemos que

$$
\mathbb{E}[X_N \mathbf{1}_A] \geq \lambda \mathbb{P}[A].
$$

□

Los siguientes corolarios son extensiones del resultado anterior y el último de ellos es conocido como las desigualdades de Doob.

Corolario 2.1. *Sea $(X_n)_{n\in J}$, donde $J = 0, 1, 2, \ldots, N$, una colección de submartingalas o martingalas y $\lambda > 0$. Si $\mathbb{E}[|X_N|^p] < \infty$ para alguna $p \geq 1$, entonces*

$$
\lambda^p \mathbb{P}\left(\sup_{n\in J} |X_n| \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}[|X_N|^p].
$$

Si $p > 1$, tenemos

$$
\mathbb{E}[|X_N|^p] \leq \mathbb{E}[\sup_{n\in J} |X_n|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|X_N|^p].
$$

Demostración. Si $(X_n)_{n\in J}$ es una martingala o submartingala, entonces se sigue que $(|X_n|^p)_{n\in J}$ es una submartingala positiva gracias a la desigualdad de Jensen. Si aplicamos la proposición 2.1 a $(|X_n|^p)_{n\in J}$ obtenemos que

$$
\mathbb{P}\left(\sup_{n\in J} |X_n|^p \geq \lambda^p\right) \leq \frac{1}{\lambda^p}\mathbb{E}[|X_N|^p]
$$

y dado que

$$
\mathbb{P}\left(\sup_{n\in J} |X_n| \geq \lambda\right) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{n\in J} |X_n|^p \geq \lambda^p\right),
$$

queda probada la primera desigualdad. Para la segunda desigualdad consideremos a $X^* = \sup_{n\in J} |X_n|$ y a k una constante positiva. Por la proposición 2.1, el teorema de Fubini y la desigualdad de Hölder tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X^* \wedge k)^p] &= \mathbb{E}\left[\int_0^{X^*\wedge k} p\lambda^{p-1} d\lambda\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^k p\lambda^{p-1} \mathbf{1}_{\{\lambda \leq X^*\}} d\lambda\right] \\
&= \int_0^k p\lambda^{p-1} \mathbb{P}[\lambda \leq X^*] d\lambda \leq \int_0^k p\lambda^{p-1} \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[|X_N| \mathbf{1}_{\{\lambda \leq X^*\}}] d\lambda \\
&= \mathbb{E}\left[|X_N| \int_0^{X^*\wedge k} p\lambda^{p-2} d\lambda\right] = \frac{p}{p-1}\mathbb{E}[|X_N|(X^*\wedge k)^{p-1}] \\
&\leq \frac{p}{p-1}\mathbb{E}[|X_N|^p]^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}[(X^*\wedge k)^p]^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Si dividimos entre $\mathbb{E}[(X^* \wedge k)^p)]^{\frac{p-1}{p}}$ en ambos extremos de la última desigualdad, tenemos que

$$\mathbb{E}[(X^* \wedge k)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|X_N|^p].$$

Para obtener el resultado basta hacer tender k a infinito. $\square$

Este resultado se puede generalizar de la siguiente manera.

Corolario 2.2. *Sea $(X_t)_{t\in[0,T]}$ una colección de martingalas, $\lambda > 0$ y $A \subset [0,T]$ numerable. Si $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[|X_t|^p] < \infty$ para alguna $p > 1$, entonces*

$$\lambda^p \mathbb{P}\left[\sup_{t\in A} |X_t| \geq \lambda\right] \leq \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\big[|X_t|^p\big].$$

Si $p > 1$, tenemos

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in A} |X_t|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\big[|X_t|^p\big].$$

Demostración. Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión creciente de subconjuntos finitos de A, tal que $A = \cup_{n\geq 1} A_n$. Por el resultado anterior, para cada A_n observamos que

$$\lambda^p \mathbb{P}\left[\sup_{t\in A_n} |X_t| \geq \lambda\right] \leq \sup_{t\in A_n} \mathbb{E}\big[|X_t|^p\big] \leq \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\big[|X_t|^p\big].$$

Consideremos $(Y_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias definidas por $Y_n = \sup_{t\in A_n} |X_t|$ y $Y = \sup_{t\in A} |X_t|$. Es claro que la sucesión mencionada es creciente y que además converge a Y. Por otra parte sea $\lambda > 0$, definimos a los siguientes conjuntos

$$B_n = \{\omega \in \Omega : Y_n(\omega) \geq \lambda\} \qquad y \qquad B = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \geq \lambda\},$$

claramente $(B_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente de subconjuntos de Ω. Si $B = \cup_{n\geq 1} B_n$, entonces

$$\lambda^p \mathbb{P}[B] = \lambda^p \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[B_n] \leq \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\big[|X_t|^p\big],$$

esto prueba la primera desigualdad.
Probemos que $\lim_{n\to\infty} B_n = B$. Notemos que $\omega \in B$ si y solo si $Y(\omega) \geq \lambda$, esto es equivalente a que para toda $\epsilon > 0$ exista $t \in A$ tal que $|X_t(\omega)| \geq \lambda - \epsilon$, esto último sucede si y solamente si para toda $\epsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ y $t \in A_m$ tal que $|X_t(\omega)| \geq \lambda - \epsilon$, es decir, que $\omega \in \cup_{n\geq 1} B_n$.
Para probar la otra desigualdad veamos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_m^p] = \mathbb{E}\left[\sup_{t\in A_m} |X_t|^p\right] &\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\in A_m} \mathbb{E}\big[|X_t|^p\big] \\ &\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\big[|X_t|^p\big], \end{aligned}$$

para toda $m \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{n\to\infty} Y_n^p = Y^p$ si aplicamos el teorema de la Convergencia Monótona observamos que $\mathbb{E}[Y^p] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n^p]$, es decir

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in A} |X_t|^p\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in A_m} |X_t|^p\right],$$

por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in A} |X_t|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\big[|X_t|^p\big].$$

□

Corolario 2.3. *(Desigualdades de Doob). Sea $(X_t)_{t\in[0,T]}$ una colección de martingalas continuas por la derecha (o por la izquierda) y $\lambda > 0$.*
Si $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[|X_t|^p] < \infty$ para alguna $p \geq 1$,entonces

$$\lambda^p \mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t| \geq \lambda\right] \leq \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[|X_t|^p].$$

Si $p > 1$, tenemos

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[|X_t|^p].$$

Demostración. Gracias al corolario anterior, sabemos que ambas desigualdades se cumplen para $A \subset [0,T]$ numerable y como tenemos continuidad por la derecha (o por la izquierda) podemos aproximar y así obtener el resultado. □

2.2. Regularidad y convergencia.

En esta sección se expone la regularidad de las trayectorias de las martingalas logran tener dadas ciertas condiciones. Además estudiaremos algunos teoremas de convergencia para estas.

Sean $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico con valores en $\mathbb{R}$, $a < b$ y I un subconjunto de $[0,\infty)$. Además consideremos a $F = \{t_1 < t_2 < \ldots < t_d\}$ un subconjunto finito de I y definamos de manera inductiva:

$$s_1 = \inf\{t_i : X_{t_i} > b\}, \quad s_2 = \inf\{t_i > s_1 : X_{t_i} < a\},$$

$$s_{2n+1} = \inf\{t_i > s_{2n} : X_{t_i} > b\}, \quad s_{2n+2} = \inf\{t_i > s_{2n+1} : X_{t_i} < a\},$$

por convención $\inf(\emptyset) = t_d$. Ahora definamos al número de veces que el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cruza por debajo del nivel a en F por

$$D(X, F, [a,b]) = \sup\{n : s_{2n} < t_d\}.$$

De manera similar definamos al número de veces que el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cruza por debajo del nivel a en el intervalo I por

$$D(X, I, [a,b]) = \sup\{D(X, F, [a,b]) : F \in I \text{ y finito.}\}.$$

Proposición 2.2. *Sean* $(X_t)_{t\geq 0}$ *una martingala y* I *un conjunto numerable, entonces*
$$(b-a)\mathbb{E}[D(X,I,[a,b])] \leq \sup_{t\in I}\mathbb{E}[(X_t-b)^+].$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, basta probar la desigualdad para el caso cuando I es finito. Sea $I=\{t_i\}_{i=1}^d$ tales que $t_i<t_{i+1}$ para toda $1\leq i\leq d$ y sean $s_1,s_2,\dots,s_{2n},\dots$ los tiempos de paro definidos como arriba. Si $A_k = \{s_k<t_d\}$, entonces $A_k\in\mathcal{F}_{s_k}$ y $A_{k+1}\subset A_k$ debido a que $s_k<s_{k+1}$. Se sabe que en el conjunto A_{2n-1} se cumple que $X_{s_{2n-1}}>b$ y que en el conjunto A_{2n} tenemos que $X_{s_{2n}}<a$. Si aplicamos el teorema de paro para el caso discreto observamos que
$$\begin{aligned}0 &\leq \int_{A_{2n-1}}(X_{s_{2n-1}}-b)d\mathbb{P} \leq \int_{A_{2n-1}}(X_{s_{2n}}-b)d\mathbb{P}\\ &= \int_{A_{2n}}(X_{s_{2n}}-b)d\mathbb{P}+\int_{A_{2n-1}\setminus A_{2n}}(X_{s_{2n}}-b)d\mathbb{P}\\ &\leq (a-b)\mathbb{P}[A_{2n}]+\int_{A_{2n-1}\setminus A_{2n}}(X_{s_{2n}}-b)d\mathbb{P}.\end{aligned}$$
Como en el conjunto A_{2n}^c el tiempo $s_{2n}=t_d$, entonces
$$(b-a)\mathbb{P}[A_{2n}] \leq \int_{A_{2n-1}\setminus A_{2n}}(X_{s_{2n}}-b)^+d\mathbb{P} = \int_{A_{2n-1}\setminus A_{2n}}(X_{t_d}-b)^+d\mathbb{P}$$
Pero $\mathbb{P}[A_{2n}]=\mathbb{P}[D(X,I,[a,b])\geq n]$ y los conjuntos $A_{2n-1}\setminus A_{2n}$ son disjuntos dos a dos, entonces
$$\sum_{n=1}^{\infty}(b-a)\mathbb{P}[D(X,I,[a,b])\geq n] \leq \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_{2n-1}\setminus A_{2n}}(X_{t_d}-b)^+d\mathbb{P}$$
esto es equivalente a
$$(b-a)\mathbb{E}[D(X,I,[a,b])] \leq \mathbb{E}[(X_{t_d}-b)^+].$$
De aquí se sigue el resultado. □

Una consecuencia de la proposición anterior es el Teorema fundamental de regularidad para submartingalas a tiempo continuo. La prueba de dicho resultado se puede ver en [4].

Teorema 2.1. *Sea* $(X_t)_{t\geq 0}$ *una colección de submartingalas tales que*
$$\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}[|X_t|]<\infty, \tag{2.1}$$
entonces
$$X_t^+(\omega) = \lim_{\substack{s\downarrow t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_s(\omega), \qquad X_t^-(\omega) = \lim_{\substack{s\uparrow t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_s(\omega),$$
existen casi seguramente para toda $t\geq 0$ *y toda* $t>0$ *respectivamente.*

El teorema anterior nos garantiza la existencia de los límites por la derecha y por la izquierda de una submartingala a tiempo continuo, bajo la condición (2.1).

El siguiente teorema, el cual no probaremos (véase [4] para su prueba), nos garantiza la existencia de una modificación continua por la derecha y con límites por la izquierda para martingalas adaptadas a una filtración completa y continua por la derecha.

Teorema 2.2. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una submartingala con respecto a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ continua por la derecha y completa. Si la función $t \to \mathbb{E}[X_t]$ es continua por la derecha entonces el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ tiene una modificación continua por la derecha y con límite por la izquierda.*

Gracias al teorema anterior, de ahora en adelante sólo consideraremos a la modificación de X que es continua por la derecha y con límite por la izquierda. En este caso la desigualdad de la proposición 2.2 se extiende a

$$(b-a)\mathbb{E}[D(X, \mathbb{R}^+, [a,b])] \leq \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[(X_t - b)^+],$$

ya que podemos considerar a I como $\mathbb{Q}_+$ y dado que este es un subconjunto denso de $\mathbb{R}_+$ se puede intercambiar a $\mathbb{Q}_+$ por $\mathbb{R}_+$ en la desigualdad. Ahora veamos un par de resultados de convergencia.

Teorema 2.3. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una submartingala tal que*

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[X_t^+] < \infty.$$

Entonces $X_t \mapsto X_\infty$ casi seguramente, cuando t se va a infinito y X_∞ integrable.

Demostración. Dado que $|X_t| = 2X_t^+ - X_t$, entonces es claro que

$$\mathbb{E}[|X_t|] = 2\mathbb{E}[X_t^+] - \mathbb{E}[X_t] \leq 2\mathbb{E}[X_t^+] - \mathbb{E}[X_0],$$

esto implica que $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|X_t|] < \infty$. Por lo tanto para toda $a < b$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D(X, \mathbb{R}^+, [a,b])] &\leq \frac{1}{(b-a)} \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[(X_t - b)^+] \\ &\leq \frac{1}{(b-a)} \left(|b| + \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|X_t|] \right) < \infty. \end{aligned}$$

Entonces deducimos que $D(X, \mathbb{R}^+, [a,b]) < \infty$ casi seguramente.
Entonces el conjunto

$$A = \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}} \left\{ \omega \in \Omega : D(X(\omega), \mathbb{R}^+, [a,b] = \infty \right\},$$

tiene probabilidad cero. De ahí resulta que

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{t\to\infty} X_t < \limsup_{t\to\infty} X_t\right) = 0$$

ya que de lo contrario existirían dos números racionales a y b tales que el conjunto

$$\left\{\omega \in \Omega : \liminf_{t\to\infty} X_t(\omega) < a < b < \limsup_{t\to\infty} X_t(\omega)\right\},$$

tendría probabilidad positiva y por ende el conjunto A tambien. Por lo tanto $X_t \to X_\infty$ cuando $t \to \infty$.
Por otro lado, por el Lema de Fatou se tiene que

$$\mathbb{E}[|X_\infty|] \leq \liminf_{t\to\infty} \mathbb{E}[|X_t|] < \infty,$$

esto prueba que X_∞ es integrable. □

Teorema 2.4. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una martingala, entonces las siguientes condiciones son equivalentes,*

i) El $\lim_{t\to\infty} X_t$ existe en $\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$.

ii) Existe una variable aleatoria X_∞ en $\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, tal que $X_t = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t]$.

iii) La familia $(X_t)_{t\geq 0}$ es uniformemente integrable.

Si estas condiciones se satisfacen entonces $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_t$ casi seguramente.

Demostración. Primero demostraremos que (ii) implica (iii). Es claro que

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|X_t|] \leq \mathbb{E}[|X_\infty|] < \infty$$

Luego, si $A = \{|X_t| > c\}$ entonces

$$\int_A |X_t| d\mathbb{P} = \int_A |\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t]|\, d\mathbb{P} \leq \int_A \mathbb{E}[|X_\infty||\mathcal{F}_t] d\mathbb{P} = \int_A |X_\infty| d\mathbb{P}.$$

Por otro lado, gracias a la desigualdad de Chebyshev, tenemos que

$$\mathbb{P}[A] \leq \frac{1}{c}\mathbb{E}[|X_t|] \leq \frac{\mathbb{E}[|X_\infty|]}{c} \longrightarrow 0, \qquad \text{si} \quad c \to \infty.$$

Ahora veamos que (iii) implica a (i). Si (iii) se satisface entonces se tiene que $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ y por lo tanto la condición del teorema anterior también, entonces X_t converge a X_∞ casi seguramente. Como $(X_t)_{t\geq 0}$ también es uniformemente integrable, por el teorema A.1, X_t converge en $\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, lo cual prueba (i).

Por último, si (i) se cumple entonces de la igualdad

$$X_t = \mathbb{E}[X_{t+h}|\mathcal{F}_t] \qquad \text{para toda} \quad t \geq 0 \quad \text{y} \quad h > 0,$$

resulta que $X_t = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t]$, para toda $t \geq 0$.

□

2.3. Teorema de paro opcional de Doob.

Concluimos el capítulo con el teorema de paro opcional. Este resultado es de gran importancia como veremos más adelante. Pero antes enunciaremos una versión más débil de dicho resultado, cuya prueba se puede encontrar en [2].

Teorema 2.5. *(Teorema de Paro Opcional, caso discreto). Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de martingalas y T un tiempo de paro.*
Si $\mathbb{P}[T<\infty]=1$ y $\mathbb{E}[\sup_n |X_{T\wedge n}|]<\infty$, entonces

$$\mathbb{E}[X_T]=\mathbb{E}[X_0].$$

Ahora sí, probemos el resultado que da nombre a esta sección.

Teorema 2.6. *(Teorema de Paro Opcional de Doob). Sean τ y θ dos tiempos de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de tal manera que $\theta\leq\tau$ casi seguramente. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ es una martingala continua por la derecha que satisface las condiciones (i), (ii) o (iii) del teorema anterior entonces*

i) X_τ y X_θ son integrables.

ii) Se cumple que
$$X_\theta=\mathbb{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\theta]=\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_\theta].$$

En particular $\mathbb{E}[X_\tau]=\mathbb{E}[X_0]$.

Demostración. Como consecuencia del teorema de paro en el caso discreto tenemos que
$$X_\theta=\mathbb{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\theta]=\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_\theta], \tag{2.2}$$
para todo tiempo de paro $\theta\leq\tau$, donde θ y τ toman a lo más valores numerables. Definamos dos sucesiones de tiempos de paro discretos $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que decrecen a θ y τ respectivamente.
Sea $A\in\mathcal{F}_\theta\subset\mathcal{F}_{\theta_n}$, entonces

$$\int_A X_{\theta_n}d\mathbb{P}=\int_A X_{\tau_n}d\mathbb{P} \tag{2.3}$$

para $n\geq 1$.
Gracias a la continuidad por la derecha del proceso se tiene que $\lim_{n\to\infty}X_{\theta_n}=X_\theta$ y $\lim_{n\to\infty}X_{\tau_n}=X_\tau$ casi seguramente. Debido a la igualdad (2.2) tenemos que las familias $(X_{\theta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(X_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}}$ son uniformemente integrables y por consiguiente los límites $\lim_{n\to\infty}X_{\theta_n}=X_\theta$ y $\lim_{n\to\infty}X_{\tau_n}=X_\tau$ existen en $\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$. Entonces al pasar al límite en la igualdad (2.3) obtenemos que

$$\int_A X_\theta d\mathbb{P}=\int_A X_\tau d\mathbb{P}.$$

Esto último prueba el teorema. $\square$

2.3.1. Algunas consecuencias del teorema de paro opcional de Doob para el movimiento Browniano.

Veamos un par de proposiciones relacionadas con el teorema de paro opcional, pero antes definamos los siguientes tiempos de paro con respecto a la filtración natural del movimiento Browniano.

$$T_a = \text{ínf}\{t > 0 : B_t = a\}, \qquad \tilde{T}_a = \text{ínf}\{t > 0 : |B_t| = a\};$$

gracias a la continuidad de las trayectorias estos tiempos también se pueden definir de la siguiente manera

$$T_a = \text{ínf}\{t > 0 : B_t \geq a\}, \qquad \tilde{T}_a = \text{ínf}\{t > 0 : |B_t| \geq a\}.$$

Estos tiempos son finitos, esto como consecuencia de la recurrencia del movimiento Browniano.

Proposición 2.3. *Las transformadas de Laplace de las leyes de T_a y $\tilde{T}_a$ están dadas por*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\lambda T_a\right)\right] = \exp\left(-a\sqrt{2\lambda}\right), \quad \mathbb{E}\left[\exp\left(-\lambda \tilde{T}_a\right)\right] = \left(\cosh\left(-a\sqrt{2\lambda}\right)\right)^{-1}.$$

Demostración. Para $s \geq 0$, $M_t^s = \exp\left(sB_t - s^2t/2\right)$ es una martingala, como vimos al inicio del capítulo. En consecuencia, $M_{t\wedge T_a}^s$ es una martingala acotada por e^{sa}. Una martingala acotada es uniformemente integrable, de ahí que, podemos aplicar el teorema de paro opcional y obtener

$$\mathbb{E}\left[M_{T_a}^s\right] = \mathbb{E}\left[M_0^s\right] = 1,$$

de esto se sigue que $\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{s^2}{2}T_a\right)\right] = e^{-sa}$, el primer resultado se obtiene al tomar $\lambda = s^2/2$.

Para probar el segundo resultado el razonamiento es el mismo, se usa la martingala $N_t^s = \left(M_t^s + M_t^{-s}\right)/2 = \cosh\left(sB_t\right)\exp\left(-\frac{s^2}{2}t\right)$, así como $N_{t\wedge\tilde{T}_a}^s$ está acotada por $\cosh(sa)$. □

Aquí otra aplicación en la cual denotamos a la ley de $x + B$ por $\mathbb{P}_x$, de igual forma denotaremos a la integral con respecto a ella por $\mathbb{E}_x$.

Proposición 2.4. *Para $a < x < b$, tenemos*

$$\mathbb{P}_x\left[T_a < T_b\right] = \frac{b-x}{b-a}, \qquad \mathbb{P}_x\left[T_b < T_a\right] = \frac{x-a}{b-a}.$$

Demostración. Como el movimiento Browniano es recurrente se tiene

$$\mathbb{P}_x\left[T_a < T_b\right] + \mathbb{P}_x\left[T_b < T_a\right] = 1.$$

Por otro lado, tenemos que $B_{T_a \wedge T_b}$ es una martingala acotada por lo cual podemos aplicar el teorema de paro opcional para obtener

$$\mathbb{E}_x\left[B_{T_a \wedge T_b}\right] = \mathbb{E}_x\big[B_0\big] = x.$$

Como consecuencia podemos observar

$$a\mathbb{P}_x\big[T_a < T_b\big] + b\mathbb{P}_x\big[T_b < T_a\big] = x,$$

ya que $B_{T_a} = a$ y $B_{T_b} = b$. Con estas dos observaciones obtuvimos un sistema lineal el cual al resolver nos arroja el resultado deseado. $\square$

Ejercicio 2.2. Sean c y d dos numeros estrictamente positivos, B un movimiento Browniano estándar y $T = T_c \wedge T_{-d}$.

i) Probar que, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-(s^2/2)T\right)\mathbf{1}_{(T=T_c)}\right] = \frac{\operatorname{senh}(sd)}{\operatorname{senh}\big(s(c+d)\big)}.$$

ii) Probar que, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{s^2}{2}T\right)\right] = \frac{\cosh\big(s(c-d)/2\big)}{\cosh\big(s(c+d)/2\big)}.$$

Demostración. i) Sea $M_t^s = \exp\Big(s\left(B_t - (c-d)\right) - \frac{s^2}{2}t\Big)$, es claro que M_t^s es martingala. Ahora sea

$$N_t^s = \frac{M_t^s - M_t^{-s}}{2} = \operatorname{senh}\left(s\left(B_t - (c-d)\right)\right)\exp\left(-\frac{s^2}{2}t\right).$$

$N_{t\wedge T_c}^s$ también es martingala y está acotada por $\operatorname{senh}\big(s\left(\frac{c+d}{2}\right)\big)$. Por el teorema de paro opcional tenemos que

$$\mathbb{E}\big[N_T^s\mathbf{1}_{(T=T_c)}\big] = \mathbb{E}\big[N_0^s\big] = \operatorname{senh}(sd).$$

Como

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[N_T^s\mathbf{1}_{(T=T_c)}\big] &= \mathbb{E}\left[\operatorname{senh}(s(c+d))\exp\left(-\frac{s^2}{2}T\right)\mathbf{1}_{(T=T_c)}\right]\\ &= \operatorname{senh}(s(c+d))\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{s^2}{2}T\right)\mathbf{1}_{(T=T_c)}\right].\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{s^2}{2}T\right)\mathbf{1}_{(T=T_c)}\right] = \frac{\operatorname{senh}(sd)}{\operatorname{senh}(s(c+d))}.$$

ii) Se prueba de manera análoga usando la martingala

$$M_t^s = \exp\left(s\left(B_t - \frac{(c-d)}{2}\right) - \frac{s^2}{2}t\right).$$

□

Ejercicio 2.3.

i) Haciendo uso de la notación de la proposición 2.3, si B es un movimiento Browniano estándar probar que $\tilde{T}_a$ es integrable y calcular $\mathbb{E}\big[\tilde{T}_a\big]$. Esto último haciendo uso de la martingala $(B_t^2 - t, t \geq 0)$.

ii) Haciendo uso de la notación de la proposición 2.4, probar que

$$\mathbb{E}_x\big[T_a \wedge T_b\big] = (x-a)(b-x).$$

Demostración. i) Consideremos a la martingala $M_t = B_t^2 - t$ entonces la martingala $M_{t\wedge\tilde{T}_a}$ está acotada y por lo tanto es uniformemente integrable. Por el teorema de paro opcional tenemos que

$$\mathbb{E}\big[M_{\tilde{T}_a}\big] = \mathbb{E}[M_0] = 0,$$

por otro lado observamos que

$$\mathbb{E}\big[M_{\tilde{T}_a}\big] = \mathbb{E}\big[B_{\tilde{T}_a}^2 - \tilde{T}_a\big] = a^2 - \mathbb{E}\big[\tilde{T}_a\big].$$

Se concluye que

$$\mathbb{E}\big[\tilde{T}_a\big] = a^2.$$

□

Capítulo 3

La integral estocástica.

En este capítulo construiremos la integral estocástica con respecto al movimiento Browniano y estudiaremos algunas de sus propiedades más importantes. En particular veremos la célebre fórmula de Itô. También se mencionará la extensión de dicha integral estocástica con respecto a las martingalas locales continuas y algunas de las propiedades de ella. Terminaremos el capítulo con la demostración de las desigualdades de Burckholder-Davis-Gundy que serán de gran utilidad en el próximo capítulo.

3.1. La integral estocástica con respecto al movimiento Browniano.

En esta sección se construirá la integral estocástica para procesos previsibles con respecto al movimiento Browniano. Esto se realizará en tres pasos. Primero lo haremos para procesos previsibles básicos, después lo haremos para procesos previsibles simples y finalmente para procesos previsibles.

3.1.1. Procesos previsibles básicos.

En esta parte definiremos a los procesos previsibles básicos y después a la integral estocástica de estos con respecto al movimiento Browniano. Además probaremos algunas propiedades de dicha integral.

A lo largo de este trabajo seguiremos considerando a B como un movimiento Browniano adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Definición 3.1. Decimos que $H(s,\omega)$ es un proceso previsible básico si

$$H(s,\omega) = \mathbf{1}_{(a,b]}(s)C(\omega)$$

donde $C \in \mathcal{F}_a$.

Sea Π_0 el espacio de todos los procesos previsibles básicos. Si $H = \mathbf{1}_{(a,b]}C$ entonces definimos a la integral estocástica de H con respecto a B como

$$\int H_s dB_s = C\big(B_b - B_a\big).$$

Notemos que estamos integrando sobre $[0,\infty)$. Establecido esto ahora vamos a definir la integral sobre $[0,t]$ de la siguiente manera:

$$(H \cdot B)_t = \int_0^t H_s dB_s = \int H_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s) dB_s.$$

Antes de pasar a la primera proposición definamos a las martingalas locales. Para ello primero definamos lo siguiente: si T es una variable aleatoria no negativa y X_t es cualquier proceso estocástico entonces

$$X_t^T = \begin{cases} X_{T\wedge t} & en \quad \{T > 0\}, \\ 0 & en \quad \{T = 0\}. \end{cases}$$

El proceso $(X_t^T, t \geq 0)$ es conocido como el proceso parado.

Definición 3.2. M_t es una martingala local continua con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si existe una sucesión de tiempos de paro, (T_n), creciente y no acotada tal que $M_t^{T_n}$ es una martingala con respecto a $(\mathcal{F}_{t\wedge T_n})_{t\geq 0}$. Si (T_n) cumple estas condiciones, decimos que (T_n) reduce a la martingala M_t.

Es claro que toda martingala es martingala local.

Definamos otro concepto que será parte fundamental de nuestro estudio.

Definición 3.3. Si $(M_t, t \geq 0)$ es una martingala local continua diremos que $(\langle M\rangle_t, t \geq 0)$ es el único proceso creciente tal que $M_t^2 - \langle M\rangle_t$ es martingala local continua. El proceso $(\langle M\rangle_t, t \geq 0)$ es conocido como la variación cuadrática de M.

Ahora probemos que $(H \cdot B)$ es martingala y una propiedad sobre su variación cuadrática.

Proposición 3.1. *Sean $H, K \in \Pi_0$ acotados, entonces:*

1. $(H \cdot B)_t$ *es una martingala continua.*

2. $\big((H + K) \cdot B\big)_t = (H \cdot B)_t + (K \cdot B)_t$.

3. $\langle H \cdot B\rangle_t = \int_o^t H^2 ds$.

Demostración. La prueba de estos incisos requiere de varios casos de los cuales sólo daremos la prueba para los más interesantes.

1. Observemos que

$$(H\cdot B)_t = \begin{cases} 0 & 0\le t\le a,\\ C(B_t-B_a) & a\le t\le b,\\ C(B_b-B_a) & b\le t. \end{cases}$$

De esto podemos concluir que $(H\cdot B)_t$ es continuo con esperanza finita y que $(H\cdot B)_t \in \mathcal{F}_t$.

Si $s\le a<t$, tenemos que $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_a$, entonces

$$\mathbb{E}\big[C(B_t-B_a)\big|\mathcal{F}_s\big] = C\mathbb{E}[B_t-B_a]=0.$$

Si $s\in(a,b)$ tenemos que $C\in\mathcal{F}_a\subset\mathcal{F}_t$ y por ende

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[C(B_t-B_a)\big|\mathcal{F}_s\big] &= \mathbb{E}\big[C(B_t-B_s)\big|\mathcal{F}_s\big]+\mathbb{E}\big[C(B_s-B_a)\big|\mathcal{F}_s\big]\\ &= C\mathbb{E}\big[(B_t-B_s)\big]+C(B_s-B_a)=C(B_s-B_a)\\ &= \int_0^s H_s dB_s.\end{aligned}$$

Si $s\ge b$ entonces $\mathcal{F}_b\subset\mathcal{F}_s$ y de ahí que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[C(B_b-B_a)\big|\mathcal{F}_s\big] &= C(B_b-B_a)\\ &= \int_0^s H_s dB_s.\end{aligned}$$

Por lo tanto $(H\cdot B)_t$ es martingala.

2. Antes de probar lo deseado primero veremos que si $a<c<b$ y $H=C\mathbf{1}_{(a,b]}$ es un proceso previsible básico entonces

$$\int HdB_s = \int H\mathbf{1}_{(a,c]}dBs + \int H\mathbf{1}_{(c,b]}dBs.$$

Observemos por un lado que

$$\int HdB_s = C(B_b-B_a).$$

Por el otro vemos

$$\int H\mathbf{1}_{(a,c]}dBs+\int H\mathbf{1}_{(c,b]}dBs = C(B_c-B_a)+C(B_b-B_c)=C(B_b-B_a).$$

Lo que se acaba de probar es que la integral con respecto al movimiento Browniano sobre un intervalo es igual a la suma de las integrales sobre dos intervalos que son partición del primero. Este resultado se puede extender a una partición de tamaño n mediante inducción.

Ahora probemos la linealidad para la cual bastará probar la propiedad de la suma, ya que es claro que las constantes salen de la integral. Para esto último consideraremos únicamente el caso más interesante.

Supongamos que $a < c < b < d$ y sean $H, K \in \Pi_0$ tales que

$$H = C\mathbf{1}_{(a,b]} \quad y \quad K = D\mathbf{1}_{(c,d]}.$$

Dado que $C, D \in \mathcal{F}_c$ entonces $C + D \in \mathcal{F}_c$. Además por lo probado anteriormente

$$\begin{aligned}\int_0^t (H_s + K_s) dBs &= \int_0^t (H_s + K_s)\mathbf{1}_{(a,c]} dBs + \int_0^t (H_s + K_s)\mathbf{1}_{(c,b]} dBs \\ &+ \int_0^t (H_s + K_s)\mathbf{1}_{(b,d]} dBs.\end{aligned}$$

De ahí se sigue que

$$\begin{aligned}\int_0^t (H_s + K_s) dBs &= \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq a, \\ C(B_t - B_a) & a \leq t \leq c, \\ C(B_t - B_a) + D(B_t - B_c) & c \leq t \leq b, \\ C(B_b - B_a) + D(B_t - B_c) & b \leq t \leq d, \\ C(B_b - B_a) + D(B_d - B_b) & d \leq t. \end{cases} \\ &= \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t K_s dB_s.\end{aligned}$$

3. Sabemos que para $a \leq t \leq b$

$$\begin{aligned}\langle H \cdot B \rangle_t &= \left\langle \int H_s dB_s \right\rangle_t \\ &= \left\langle C(B - B_a) \right\rangle_t.\end{aligned}$$

Por un lado B es martingala y por ende martingala local. Además vimos que $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$ es martingala, por lo tanto de la definición 3.3 tenemos que $\langle B \rangle_t = t$ por la unicidad. Como $M_t = C(B_t - B_a)$ es martingala, si nosotros probamos que $M_t' = M_t^2 - C^2(t - a)$ es martingala, nuevamente de la definición 3.3 tendremos que $\langle M \rangle_t = C^2(t - a)$. En efecto probemos que $M_t' = M_t^2 - C^2(t - a)$ es martingala. Sea $a < s < t$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_t' | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\big[C^2(B_t - B_a)^2 \big| \mathcal{F}_s\big] - C^2(t - a) \\ &= C^2\mathbb{E}\big[(B_t^2 - t)\big| \mathcal{F}_s\big] - C^2 2B_a \mathbb{E}[B_t | \mathcal{F}_s] + C^2(B_a^2 + a) \\ &= C^2(B_s - B_a)^2 - C^2(s - a).\end{aligned}$$

Esto prueba que

$$\langle M \rangle_t = C^2(t - a) = \int_o^t H^2 ds,$$

de donde se sigue el resultado.

$\square$

3.1.2. Procesos previsibles simples.

Diremos que $H(s,\omega)$ es un proceso previsible simple si se puede escribir como la suma finita de procesos previsibles básicos. Al conjunto de todos los procesos previsibles simples lo denotaremos por Π_1. Si $H \in \Pi_1$ entonces H se puede escribir como

$$H(s,\omega) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{(t_{i-1},t_i]}(s) C_i(\omega)$$

donde $t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ y $C_i \in \mathcal{F}_{t_{i-1}}$. Hemos de observar que dicha representación no es única, ya que se pueden dividir los intervalos en uno o más pedazos. En este caso, gracias a la afirmación 2 de la proposición 3.1, se tiene que

$$\int H_s dB_s = \sum_{i=1}^{m} C_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Por lo anteriormente mencionado la representación de la integral anterior tampoco es única. Es fácil probar que el lado derecho de la igualdad anterior no depende de la representación que se elija de H.
Los siguientes tres resultados son extensiones de la proposición 3.1 al conjunto Π_1.

Teorema 3.1. *Sean $H, K \in \Pi_1$ entonces*

$$\big((H+K)\cdot B\big)_t = (H\cdot B)_t + (K \cdot B)_t.$$

Demostración. Esto es una consecuencia directa del enunciado 2 de la proposición 3.1. Aparte es fácil ver que $(H+K) \in \Pi_1$. □

Teorema 3.2. *Si $H \in \Pi_1$ es acotado, entonces $(H \cdot B)_t$ es una martingala continua.*

Demostración. Esto se sigue de la proposición 3.1 parte 1, esta afirma que cada uno de los sumandos de $(H\cdot B)$ es una martingala continua. Como la suma finita de martingalas continuas es una martingala continua entonces $(H \cdot B)$ también lo es. □

Teorema 3.3. *Si $H \in \Pi_1$ entonces*

$$\langle H \cdot B \rangle_t = \int_0^t H^2 ds.$$

Demostración. Basta mostrarlo para $H = C\mathbf{1}_{(a,b]} + D\mathbf{1}_{(b,c]}$ con $C \in \mathcal{F}_a$ y $D \in \mathcal{F}_b$, luego el resultado se extiende por inducción. Supongamos que $a < b < t < c$ y observemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^t H^2 ds &= \int_0^t (C\mathbf{1}_{(a,b]} + D\mathbf{1}_{(b,c]})^2 ds \\
&= \int_0^t (C^2\mathbf{1}_{(a,b]} + D^2\mathbf{1}_{(b,c]}) ds \\
&= C^2(b-a) + D^2(t-b).
\end{aligned}$$

Verifiquemos que M_t definido por

$$M_t = \left(\int_0^t H_s dB_s\right)^2 - \big(C^2(b-a) + D^2(t-b)\big),$$

es martingala para probar que $\left\langle \int H_s dB_s \right\rangle_t = C^2(b-a)+D^2(t-b)$. Supongamos $a < b < s < t < c$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\big[\big(C(B_b - B_a) + D(B_t - B_b)\big)^2|\mathcal{F}_s\big] - C^2(b-a) - D^2(t-b) \\
&= C^2\big((B_b - B_a)^2 - (b-a)\big) + 2CD(B_b - B_a)\mathbb{E}[B_t - B_b|\mathcal{F}_s] \\
&+ D^2\mathbb{E}\big[(B_t - B_b)^2 - (t-b)|\mathcal{F}_s\big]
\end{aligned}$$

Haciendo un reacomodo y usando las propiedades de esperanza condicional y martingalas se obtiene que

$$\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = \big(C(B_b - B_a) + D(B_s - B_b)\big)^2 - (C^2(b-a) - D^2(s-b)).$$

□

Definición 3.4. Si X y Y son martingalas continuas, vamos a definir

$$\langle X, Y\rangle_t = \frac{1}{4}\big(\langle X+Y\rangle_t - \langle X-Y\rangle_t\big).$$

Veamos una propiedad relacionada con este último concepto.

Proposición 3.2. *Si H y H' pertenecen a Π_1 entonces*

$$\langle H \cdot B, H' \cdot B\rangle_t = \int_0^t H_s H'_s ds.$$

Demostración. Como consecuencia de los teoremas 3.1 y 3.3, y la definición anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle H \cdot B, H' \cdot B\rangle_t &= \frac{1}{4}\left(\big\langle (H+H') \cdot B\big\rangle_t - \big\langle (H-H') \cdot B\big\rangle_t\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_0^t (H_s + H'_s)^2 ds - \int_0^t (H_s - H'_s)^2 ds\right) \\
&= \int_0^t H_s H'_s ds.
\end{aligned}$$

□

3.1.3. Procesos previsibles.

En esta sección extenderemos la integral estocástica para los procesos previsibles.

Definición 3.5. Sea Π' la σ-álgebra de todos los subconjuntos de $[0,\infty)\times\Omega$ generada por los procesos adaptados que son continuos por la izquierda. Un procesos H es predecible si $H(s,\omega)\in\Pi'$.

Definamos a $\Pi_2(B)$, como el conjunto de todos los procesos previsibles H, tales que

$$\|H\|_{\mathcal{L}^2} = \left(\mathbb{E}\left[\int H_s^2 ds\right]\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Probemos que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}^2$ es una norma para Π_2.

Proposición 3.3. *$\|H\|_{\mathcal{L}^2}$ es una norma en $\Pi_2(B)$.*

Demostración. Sea $H, K \in \Pi_2$ y notemos que

i) Es claro que $\|H\|_{\mathcal{L}^2} = 0$ si y solo si $H_s^2 = 0$, esto a su vez pasa si y solo $H_s = 0$ c.s. (clases de equivalencia).

ii) $\|H\|_{\mathcal{L}^2} \geq 0$, gracias a la monotonía de la integral y a que $H_s^2 \geq 0$.

iii) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

$$\|\alpha H\|_{\mathcal{L}^2} = |\alpha|\|H\|_{\mathcal{L}^2},$$

esto se debe a la definición de $\|H\|_{\mathcal{L}^2}$.

iv) $\|H+K\|_{\mathcal{L}^2} \leq \|H\|_{\mathcal{L}^2} + \|H\|_{\mathcal{L}^2}$ como consecuencia del teorema de Fubini y de la desigualdad de Minkowsky.

□

Sea $\mathcal{M}^2$ el conjunto de todas las martingalas, M, que están adaptadas a la filtración $\{\mathcal{F}_t, t\geq 0\}$ y tales que

$$\|M\|_2 = \left(\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}\big[M_t^2\big]\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

El siguiente enunciado es conocido como la propiedad de isometría y es importante para la siguiente extensión de la integral.

Proposición 3.4. *Si $H \in \Pi_1$ es acotado entonces*

$$\|H\cdot B\|_2 = \|H\|_{\mathcal{L}^2}.$$

Demostración. Por el teorema 3.3 tenemos que

$$\begin{aligned}\|H\|_{\mathcal{L}^2}^2 &= \mathbb{E}\left[\int H_s^2 ds\right] = \sup_t \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 ds\right]\\ &= \sup_t \mathbb{E}\big[(H\cdot B)_t^2\big] = \|H\cdot B\|_2^2.\end{aligned}$$

□

El siguiente lema nos servirá para poder extender nuestra integral en $\Pi_2(B)$.

Lema 3.1. *Sea $H \in \Pi_2(B)$ entonces existe una sucesión $H^n \in \Pi_1$ acotada tal que*

$$\|H^n - H\|_{\mathcal{L}^2} \longrightarrow 0.$$

Demostración. Es fácil ver que si $H \in \Pi_1$ es acotado, entonces $H \in \Pi_2(B)$. Sea $\mathcal{H}_t$ el conjunto de los procesos previsibles que se anulan en (t, ∞) y que cumple la conclusión del teorema.
Claramente si $r < s < t$ y $A \in \mathcal{F}_r$ entonces $G = \mathbf{1}_{(r,s]}\mathbf{1}_A \in \mathcal{H}_t$.
Por otra parte, supongamos que $0 \leq G^n \in \mathcal{H}_t$ y que $G^n \uparrow G$ con G acotada. El teorema de convergencia dominada implica que

$$\|G - G^n\|^2_{\mathcal{L}_2} = \mathbb{E}\left[\int (G_s - G^n_s)^2 ds\right] \longrightarrow 0,$$

cuando $n \to \infty$. Esto implica que dada $\epsilon > 0$ podemos escoger una n tal que

$$\|G - G^n\|^2_{\mathcal{L}_2} < \epsilon^2.$$

Dado que $G^n \in \mathcal{H}_t$ se puede encontrar una sucesión de procesos acotados $H^{m,n} \in \Pi_1$ tales que $\|H^{n,m} - G^n\|_{\mathcal{L}_2} \to 0$, cuando $m \to \infty$. En consecuencia podemos escoger una m tal que

$$\|H^{n,m} - G^n\|_{\mathcal{L}_2} < \epsilon.$$

Aplicando la desigualdad del triángulo obtenemos que $\|H^{n,m} - G\|_{\mathcal{L}_2} < 2\epsilon$ y como la ϵ es arbitraria entonces $G \in \mathcal{H}_t$. Por el lema de clases monótonas funcional tenemos que $\mathcal{H}_t$ contiene a todos los procesos previsibles y acotados que se anulan en (t, ∞). Ahora si $K \in \Pi_2(B)$ definimos $K^n = K\mathbf{1}_{|K|\leq n}\mathbf{1}_{[0,t]}$, entonces por el teorema de convergencia dominada tenemos que

$$\|K^n - K\|_{\mathcal{L}_2} \longrightarrow 0,$$

cuando $n \to \infty$. Dado que K^n es acotada y se anula en (t, ∞) se puede encontrar $H'^n = H^{n,m} \in \Pi_1$ acotada que converge a K^n. Aplicando nuevamente la desigualdad del triángulo obtenemos que K es un límite de H'^n. □

Teorema 3.4. *$\mathcal{M}^2$ es completo.*

Demostración. Sea $M \in \mathcal{M}^2$. Como $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[M^2] < \infty$ entonces $(M_t)_{t\geq 0}$ es unifomemente integrable. Como consecuencia del teorema 2.4, M_t converge casi seguramente y en $\mathcal{L}^2$ a un límite M_∞, con $\mathbb{E}[M^2_\infty] = \sup_t \mathbb{E}[M^2_t]$ y además $M_t = \mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_t]$. Sea $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$. Dado que $M_\infty = \lim M_t \in \mathcal{F}_\infty$, la observación anterior muestra que $M \to M_\infty$ es un mapeo uno a uno de $\mathcal{M}^2$ a $\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_\infty)$. Por otro lado, si $Y \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_\infty)$, entonces $Y_t = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]$ es una martingala tal que $Y_t \to Y$ cuando $t \to \infty$. Por la desigualdad de Jensen tenemos que

$$\mathbb{E}[Y^2_t] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]^2\big] \leq \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y^2|\mathcal{F}_t]\big] = \mathbb{E}[Y^2],$$

por ende $Y_t \in \mathcal{M}^2$. De esto junto con la observación anterior podemos concluir que $M \to M_\infty$ es una isometría de $\mathcal{M}^2$ a $\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_\infty)$ y esto prueba el teorema.

□

Para definir $(H \cdot B)$, con $H \in \Pi_2(B)$, utilizaremos que $\mathcal{M}^2$ es completo. Observemos lo siguiente. Sea $H^n \in \Pi_1$ acotado tal que $\|H^n - H\|_{\mathcal{L}^2} \longrightarrow 0$. Dado que $\|H^n - H^m\|_{\mathcal{L}^2} \longrightarrow 0$ cuando $m, n \longrightarrow \infty$, $(H^n \cdot B)$, por la isometría, es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{M}^2$ y por el teorema 3.4 converge en dicho espacio. Por lo anterior definimos la integral estocástica para $H \in \Pi_2(B)$ de la siguiente manera.

$$(H \cdot B) = \lim_{n \longrightarrow \infty} (H^n \cdot B).$$

Es fácil ver que dicho límite es independiente de las sucesiones de aproximación elegidas. Esto se comprueba verificando que el límite para dichas sucesiones es único.

Veamos un par de teoremas relativos a esta nueva extensión de la integral estudiada.

Teorema 3.5. *Si $H \in \Pi_2(B)$ entonces $(H \cdot B) \in \mathcal{M}^2$ y tiene trayectorias continuas.*

Demostración. $H \cdot B \in \mathcal{M}^2$ por definición. Si $H^n \in \Pi_1$ es acotado y tal que $\|H^n - H\|_{\mathcal{L}^2} \to 0$, entonces el teorema 3.2 implica que $(H^n \cdot B)_t$ es continuo. Sea $\epsilon > 0$ dado que $\big\|(H^n \cdot B) - (H \cdot B)\big\|_2 \to 0$, si aplicamos Chebyshev y la desigualdad maximal para $\mathcal{L}^2$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\sup_t \big|(H^n \cdot B)_t - (H \cdot B)_t\big| > \epsilon\right] &\leq \epsilon^{-2}\mathbb{E}\left[\sup_t \big|(H^n \cdot B)_t - (H \cdot B)_t\big|^2\right] \\
&\leq \epsilon^{-2} \cdot 4\big\|(H^n \cdot B)_t - (H \cdot B)_t\big\|_2 \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Como esto ocurre para cualquier $\epsilon > 0$ diremos que $(H^n \cdot B)_t$ converge uniformemente en probabilidad a $(H \cdot B)_t$. Al aplicar esto a una subsucesión tenemos que

$$\sup_t \big|(H^n \cdot B)_t - (H \cdot B)_t\big| \longrightarrow 0 \qquad \text{c.s.}$$

De ahí se sigue que $t \to (H \cdot B)_t$ es continua. □

Teorema 3.6. *Sean $H, K \in \Pi_2(B)$ entonces $H + K \in \Pi_2(B)$ y*

$$((H + K) \cdot B)_t = (H \cdot B)_t + (K \cdot B)_t.$$

Demostración. Por la desigualdad del triángulo para $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2}$ tenemos que $H+K \in \Pi_2(B)$.
Sean $H^n, K^n \in \Pi_1$, acotados y tales que $\|H^n - H\|_{\mathcal{L}^2} \to 0$ y $\|K^n - K\|_{\mathcal{L}^2} \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces nuevamente por la desigualdad del triángulo tenemos que $\big\|(H^n + K^n) - (H + K)\big\|_{\mathcal{L}^2} \to 0$. El teorema 3.1 implica que

$$\big((H^n + K^n) \cdot B\big)_t = (H^n \cdot B)_t + (K^n \cdot B)_t.$$

Si $n \to \infty$ y consideramos el hecho de que $(G^n \cdot B)_t \to (G \cdot B)_t$, cuando $G = H, K, H + K$, obtenemos el resultado. □

Para finalizar esta sección extenderemos la propiedad de isometría a los procesos previsibles.

Proposición 3.5. *Sea $H \in \Pi_2(B)$ entonces $\|H \cdot B\|_2 = \|H\|_{\mathcal{L}^2}$.*

Demostración. Sea (H^n) una sucesión tal que $H^n \in \Pi_1$ es acotado para toda n y cumple que $\|H^n - H\|_{\mathcal{L}^2} \to 0$. De ahí que $\left\|(H^n \cdot B) - (H \cdot B)\right\|_2 \to 0$. Además por la proposición 3.4 tenemos que

$$\|H^n\|_{\mathcal{L}^2} = \|H^n \cdot B\|_2, \qquad \text{para toda} \quad n.$$

Si tomamos el límite en ambos lados de la igualdad se obtiene el resultado deseado

$$\|H\|_{\mathcal{L}^2} = \|H \cdot B\|_2.$$

□

3.2. La integral estocástica con respecto a martingalas locales.

En esta sección veremos algunos resultados importantes de la integral estocástica con respecto a martingalas locales. Solamente enunciaremos las propiedades de esta integral, las cuales son extensiones de las propiedades de la integral estocástica con respecto al movimiento Browniano. Las pruebas de estos resultados se pueden encontrar en [1].

Sea M una martingala local continua. Primero definamos a $\Pi_2(M)$ como el conjunto de todos los procesos previsibles, H tales que

$$\|H\|_{\mathcal{L}^2(M)} := \left(\mathbb{E}\left[\int H_s^2 d\langle M\rangle_s\right]\right)^{1/2} < \infty.$$

Definamos para una martingala local continua, M, el conjunto

$$\Pi_3(M) = \left\{H : \int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty \quad \text{c.s.,} \quad \text{para toda} \quad t \geq 0\right\},$$

donde H es un proceso previsible.
Ahora revisemos un resultado que nos será útil.

Proposición 3.6. *Si M es una martingala local continua, T un tiempo de paro y $H \in \Pi_3(M)$ entonces*

$$H^T \cdot M = (H \cdot M)^T = H \cdot M^T = H^T \cdot M^T.$$

El siguiente teorema será útil en la construcción de la integral estocástica en $\Pi_3(M)$.

Teorema 3.7. *Supongamos que M es una martingala continua y acotada, $H, K \in \Pi_2(M)$ y $H_s = K_s$ para $s \leq T$, donde T es un tiempo de paro, entonces $(H \cdot M)_s = (K \cdot M)_s$ para $s \leq T$.*

Este resultado se puede extender a la siguiente propiedad.

Sean M una martingala continua y acotada, $H, K \in \Pi_2(M)$ y $H_s = K_s$ para $S \leq s \leq T$, donde S y T son tiempos de paro, entonces $(H \cdot M)_s - (H \cdot M)_S = (K \cdot M)_s - (K \cdot M)_S$.

Para extender la integral a $\Pi_3(M)$ consideremos a la sucesión de tiempos de paro S_n tal que para toda n

$$S_n \leq T_n = \text{ínf}\left\{ t : |M_t| > n \quad \text{o} \quad \int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s > n \right\}$$

y además $S_n \uparrow \infty$. Sea $H_s^n = H_s \mathbf{1}_{\{s \leq S_n\}}$, observemos que si $m < n$, el teorema 3.7 implica que $(H^m \cdot M)_t = (H^n \cdot M)_t$ para $t \leq S_m$. Esto nos lleva a definir a $(H \cdot M)_t = (H^n \cdot M)_t$ para $t \leq S_n$. Para completar la definición sólo basta probar que $(H \cdot M)_t$ es independiente de la sucesión de tiempos de paro que se elija. Esto último es una consecuencia de la proposición 3.6 y del teorema 3.7.

Ahora enunciaremos tres propiedades básicas que cumple la integral estocástica en $\Pi_3(M)$.

Teorema 3.8. *Si M es una martingala local continua y $H \in \Pi_3(M)$, entonces $(H \cdot M)_t$ es una martingala local continua.*

Teorema 3.9. *Sean M y N martingalas locales continuas. Si $H, K \in \Pi_3(M)$ entonces $H + K \in \Pi_3(M)$ y*

$$\big((H + K) \cdot M\big)_t = (H \cdot M)_t + (K \cdot M)_t.$$

Si $H \in \Pi_3(M) \cap \Pi_3(N)$ entonces $H \in \Pi_3(M + N)$ y

$$\big(H \cdot (M + N)\big)_t = (H \cdot M)_t + (H \cdot N)_t.$$

Proposición 3.7. *Sean M una martingala continua, T un tiempo de paro y $r \geq 0$ entonces*

$$\left\langle \int_r^T dM_t \right\rangle = \int_r^T d\langle M \rangle$$

es decir,

$$\big\langle \mathbf{1}_{(r,T]} \cdot M \big\rangle = \mathbf{1}_{(r,T]} \cdot \langle M \rangle.$$

Teorema 3.10. *Sean M y N martingalas locales continuas, $H \in \Pi_3(M)$ y $K \in \Pi_3(N)$ entonces*

$$\langle H \cdot M, K \cdot N \rangle_t = \int_0^t H_s K_s d\langle M, N \rangle_s.$$

Una generalización del teorema anterior para la suma de integrales estocásticas es la siguiente. Sean

$$M = \textstyle\sum_{i=1}^m H^i \cdot M^i \quad \text{y} \quad N = \sum_{j=1}^m K^j \cdot N^j,$$

donde M^i y N^i son martingalas locales continuas donde $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. Si además $H^i \in \Pi_3(M^i)$ y $K^j \in \Pi_3(N^j)$ para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$, entonces

$$\langle M, N \rangle_t = \sum_{i,j} \int_0^t H_s^i K_s^j d\langle M^i, N^j \rangle_s.$$

También podemos extender la propiedad de isometría para martingalas locales continuas.

Proposición 3.8. *Si M es una martingala local continua y $H \in \Pi_2(M)$ entonces $H \cdot M \in \mathcal{M}^2$ y $\|H \cdot M\|_2 = \|H\|_{\mathcal{L}^2(M)}$.*

Definamos a $\Delta_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{k_n}^n = t\}$, como una sucesión de particiones de $[0, t]$ tales que $|\Delta_n| = \sup_i |t_i^n - t_{i-1}^n| \to 0$, esta notación se mantendrá en el resto del capítulo.

El siguiente lema será necesario para probar la fórmula de Itô.

Lema 3.2. *Sea M_t una martingala local continua con $\langle M \rangle_t \leq R$ para toda t. Si H^n es una sucesión de procesos previsibles tales que $|H^n| \leq R$ para toda s, ω y $\sup_s |H_s^n - H_s| \to 0$ en probabilidad entonces $(H^n \cdot M) \to (H \cdot M)$ en $\mathcal{M}^2$.*

Del lema anterior se sigue que si M es una martingala local continua y $t \to H_t$ es un mapeo continuo, entonces cuando $n \to 0$

$$\sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i^n} \left\{ M(t_{i+1}^n) - M(t_i^n) \right\} \longrightarrow \int_0^t H_s dM_s \quad \text{en probabilidad.}$$

3.3. La fórmula de Itô.

En esta sección expondremos la fórmula de Itô, antes probaremos un lema necesario.

Lema 3.3. *Si (μ_n) es una sucesión de medidas finitas en $[0, t]$ que convergen débilmente a μ_∞, una medida finita. Además si g_n es una sucesión de funciones acotadas, $|g_n| \leq R$, tales que si $s_n \to s$ tenemos que $g_n(s_n) \to g(s)$ para $s_n \in [0, t]$, entonces cuando $n \to \infty$*

$$\int g_n d\mu_n = \int g d\mu_\infty.$$

Demostración. Sea $\mu_n'(A) = \mu_n(A)/\mu_n([0, t])$. μ_n' es una medida de probabilidad para toda n, ya que $\mu_n([0, t])$ es finita. Una construcción estándar (ver el teorema de representación de Skorokhod, capítulo 2 de [7]), muestra que existe una sucesión de variables aleatorias X_n con distribución μ_n' tal que $X_n \to X_\infty$ c.s. cuando $n \to \infty$. La convergencia de g_n a g implica que $g_n(X_n) \to g(X_\infty)$, por ende el resultado se sigue del teorema de convergencia dominada. $\square$

Ahora consideremos a $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots\}$, una partición de $[0, \infty)$, tal que $\lim_n t_n = \infty$, y sea $k(t) = \sup\{k : t_k < t\}$ el índice del último punto antes del tiempo t.
Definimos a

$$Q_t^{\Delta}(M) = \sum_{k=1}^{k(t)} (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 + (M_t - M_{t_{k(t)}})^2,$$

y ahora mencionaremos algunas propiedades de $Q_t^{\Delta}(M)$. Nuevamente, las pruebas de dichas propiedades se pueden ver en [1].

Lema 3.4. *Si M_t es una martingala acotada y continua entonces $M_t^2 - Q_t^{\Delta}(M)$ es una martingala.*

Lema 3.5. *Sea M_t una martingala acotada y continua. Sea $r > 0$ fijo y sea $\Delta_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{k_n}^n = r\}$ una sucesión de particiones de $[0, r]$ tales que $|\Delta_n| \to 0$. Entonces $Q_t^{\Delta_n}(M)$ converge a un límite en $\mathcal{L}_2$.*

Teorema 3.11. *Sea M_t una martingala local continua. Para toda t y para toda sucesión de particiones Δ_n de $[0, t]$ tal que $|\Delta_n| \to 0$ tenemos que*

$$\sup_{s \leq t} \left| Q_s^{\Delta_n}(M) - \langle M \rangle_s \right| \longrightarrow 0, \quad \textit{en probabilidad.}$$

A continuación probaremos la célebre fórmula de Itô.

Teorema 3.12. *Supongamos que M es una martingala local continua y f una función de clase $\mathcal{C}^2$. Entonces, para toda $t \geq 0$ tenemos que*

$$f(M_t) - f(M_0) = \int_0^t f'(M_s) dM_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(M_s) d\langle M_s \rangle_s. \qquad c.s.$$

Demostración. Para probar el resultado vamos a usar el método de localización, el cual consiste en suponer que todo está acotado y luego se extiende a dicha cota hasta infinito. Sea $T_R = \inf\{t : |M_t| \geq R \quad \text{o} \quad \langle M \rangle_t \geq R\}$. Sabemos que para cualquier a y b, existe una $c(a, b)$ tal que $a < c(a, b) < b$ y además

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(a) + \frac{1}{2}(b - a)^2 f''\big(c(a, b)\big). \tag{3.1}$$

Sea $t > 0$, consideremos a $\Delta_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{k_n}^n = t\}$, como una sucesión de particiones de $[0, t]$ tales que $|\Delta_n| \to 0$. Por (3.1) tenemos que

$$\begin{aligned} f(M_t) - f(M_0) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(M_{t_{i+1}^n}) - f(M_{t_i^n}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f'(M_{t_i^n})(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n}) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} g_i^n(\omega)(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})^2, \end{aligned} \tag{3.1'}$$

donde $g_i^n(\omega) = f''(c(M_{t_i^n}, M_{t_{i+1}^n}))$. Lo que nos interesa probar es lo siguiente,

$$\sum_{i=0}^{n-1} f'(M_{t_i^n})(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n}) \longrightarrow \int_0^t f'(M_s)dM_s \tag{3.2}$$

y

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} g_i^n(\omega)(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})^2 \longrightarrow \frac{1}{2}\int_0^t f''(M_s)d\langle M_s\rangle_s, \tag{3.3}$$

ambas convergencias en probabilidad, cuando n tiende a infinito. Observemos que (3.2) se sigue del lema 3.2.

Para probar (3.3) definamos a $G_s^n = g_i^n(\omega) = f''\big(c(M_{t_i^n}, M_{t_{i+1}^n})\big)$ cuando $s \in (t_i^n, t_{i+1}^n]$, $G_s^n = f''(M_t)$ para $s \geq t$ y sea

$$A_s^n = \sum_{i;t_{i+1}\leq s} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2$$

tal que

$$\sum_{i=0}^{n-1} g_i^n(\omega)(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})^2 = \int_0^t G_s^n dA_s^n.$$

Esto último se reduce a mostrar al siguiente límite,

$$\int_0^t G_s^n dA_s^n \longrightarrow \int_0^t f''(M_s)d\langle M\rangle_s. \tag{3.4}$$

Para ello observemos que la continuidad uniforme de f'' implica que cuando $n \to \infty$ tenemos que $G_s^n \to f''(M_{s\wedge t})$ uniformemente en s. Además por el teorema 3.11 deducimos que A_s^n converge en probabilidad a $\langle M\rangle_s$. Ahora tomando subsucesiones podemos suponer que con probabilidad 1, $A_{s\wedge t}^n$ converge debilmente a $\langle M\rangle_{s\wedge t}$. En otras palabras, si fijamos ω y vemos a $s \to A_s^n$ y a $s \to \langle M\rangle_s$ como funciones de distribución, entonces las medidas asociadas convergen débilmente. Una vez realizado esto podemos fijar a ω y del lema 3.3 podemos deducir el límite en (3.4). Esto completa la prueba de (3.3).

De (3.3), (3.2) y (3.1'), se puede deducir que para cada t,

$$f(M_t) - f(M_0) = \int_0^t f'(M_s)dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(M_s)d\langle M_s\rangle_s. \qquad \text{c.s.}$$

Dado que ambos lados de esta igualdad son funciones continuas de t, se concluye que dicha igualdad se cumple para toda $t \geq 0$ c.s. $\square$

Observemos que esta fórmula aplicada al movimiento Browniano será de la forma

$$f(B_t) - f(0) = \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds.$$

En la siguiente sección utilizaremos la fórmula de Îto para f con valores en $\mathbb{C}$. Dicha extensión es trivial y está dada por

$$\begin{aligned} f(M_t) - f(M_0) &= \int_0^t u'(M_s)dM_s + i\int_0^t (v')(M_s)dM_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t u''(M_s)d\langle M_s\rangle_s + i\frac{1}{2}\int_0^t v''(M_s)d\langle M_s\rangle_s, \end{aligned}$$

donde $f = u + iv$.

3.4. El teorema de Lévy.

En esta sección demostraremos un par de lemas que nos permitirán obtener la caracterización del movimiento Browniano de Paul Lévy.

Lema 3.6. *Sea $Z = (Z_t, t \geq 0)$ un proceso adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y tal que para toda función medible y acotada f, se tiene*

$$\mathbb{E}\big[f(Z_t - Z_s)\big|\mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}\big[f(Z_{t-s})\big].$$

Entonces Z_t tiene incrementos independientes.

Demostración. Sean $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ y f_i medibles y acotadas con $1 \leq i \leq n$. Si aplicamos la hipótesis condicionando con $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n f_i(Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})\right] &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n-1} f_i(Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}}) \cdot \mathbb{E}\big[f_n(Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}})\big|\mathcal{F}_{t_{n-1}}\big]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n-1} f_i(Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})\right]\mathbb{E}\big[f_n(Z_{t_n - t_{n-1}})\big]. \end{aligned}$$

Por inducción se tiene que

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n f_i(Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\big[f_i(Z_{t_i - t_{i-1}})\big] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\big[f_i(Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})\big],$$

lo cual implica lo deseado. □

La siguiente caracterización es conocida como el teorema de Lévy.

Lema 3.7. *Sea M_t una martingala local continua con $M_0 = 0$ y $\langle M\rangle_t = t$, entonces $M_{t+s} - M_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ y tiene una distribución normal con media 0 y varianza t, para toda s y t.*

Demostración. Si aplicamos la fórmula de Itô a $M'_r = M_{s+r} - M_s$ con respecto a $f(x) = \exp(i\theta x)$, obtenemos que

$$\exp(i\theta M'_t) - 1 = i\theta\int_0^t \exp(i\theta M'_u)dM'_u - \frac{\theta^2}{2}\int_0^t \exp(i\theta M'_u)du.$$

Sean $\mathcal{F}'_r = \mathcal{F}_{r+s}$ y $A \in \mathcal{F}_s = \mathcal{F}'_0$. Al primer término de la derecha en la igualdad anterior le llamaremos N_t, el cual es una martingala local continua con respecto a $\mathcal{F}'_t$. Sea $T_n \uparrow \infty$ una sucesión de tiempos de paro que reduce a N_t, sustituyamos t por $t \wedge T_n$ e integremos sobre A. La definición de esperanza condicional implica que

$$\mathbb{E}[N_{t\wedge T_n}|A] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[N_{t\wedge T_n}|\mathcal{F}'_0]\big|A\big] = \mathbb{E}[N_0|A] = 0,$$

esto debido a que $N_0 = 0$. Por ende tenemos que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(i\theta M'_{t\wedge T_n}\right)\big|A\right] - \mathbb{P}[A] = 0 - \frac{\theta^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge T_n} \exp(i\theta M'_u)du\Big|A\right].$$

Dado que $|\exp(i\theta x)| = 1$ podemos tomar el límite sobre n y por el teorema de convergencia dominada tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left(i\theta M'_t\right)\big|A\right] - \mathbb{P}[A] &= -\frac{\theta^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^t \exp(i\theta M'_u)du\Big|A\right] \\
&= -\frac{\theta^2}{2}\int_0^t \left(\mathbb{E}\left[\exp(i\theta M'_u)\big|A\right]\right) du,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia del teorema de Fubini, ya que la esperanza es finita y los espacios son de medida finita. Sea $j(t) = \mathbb{E}\big[\exp(i\theta M'_t)|A\big]$ entonces

$$j(t) - \mathbb{P}[A] = -\frac{\theta^2}{2}\int_0^t j(u)du. \tag{3.5}$$

Como sabemos que $\big|j(s)\big| \leq 1$, se tiene que $\big|j(t) - j(u)\big| \leq |t-u|\theta^2/2$ y por lo tanto j es continua. Se puede mostrar también que j es derivable. Si derivamos la ecuación (3.5) obtenemos que

$$j'(t) = \frac{-\theta^2}{2}j(t). \tag{3.6}$$

Observemos que $j(0) = \mathbb{P}[A]$, esto junto con (3.6) muestran que

$$j(t) = \mathbb{P}[A]\exp(-\theta^2 t/2).$$

En consecuencia, para toda $A \in \mathcal{F}'_0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\exp(i\theta M'_t)|A\big] &= \mathbb{P}[A]\exp(-\theta^2 t/2) \\
&= \int_A \exp(-\theta^2 t/2)d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Podemos concluir que

$$\mathbb{E}\big[\exp(i\theta M'_t)|\mathcal{F}'_0\big] = \exp(-\theta^2 t/2). \tag{3.7}$$

Si integramos de ambos lados obtenemos que

$$\mathbb{E}\big[\exp(i\theta M_t')\big] = \exp(-\theta^2 t/2).$$

En otras palabras, la función característica condicional de M_t' por $\mathcal{F}_0'$ es la de una distribución normal con media 0 y varianza t.

Para probar la independencia observemos lo siguiente. Sea $g \in C^1$ una función con soporte compacto cuya tranformada de fourier está dada por

$$\varphi(\theta) = \int \exp(i\theta x) g(x) dx.$$

De lo anterior se puede concluir que φ es integrable y además

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int \exp(i\theta x)\varphi(-\theta) d\theta.$$

Si multiplicamos ambos lados de la ecuación (3.7) por $\varphi(-\theta)$ e integramos con respecto a θ obtenemos que $\mathbb{E}[g(M_t')|\mathcal{F}_0']$ es constante y entonces

$$\mathbb{E}[g(M_t')|\mathcal{F}_0'] = \mathbb{E}[g(M_t')]. \tag{3.8}$$

Por el lema de clases monótonas funcional podemos afirmar que lo anterior se cumple para cualquier función g medible y acotada. En particular tomemos a $g = \mathbf{1}_B$. Si integramos (3.8) sobre $A \in \mathcal{F}_0'$ entonces

$$\mathbb{P}[A]\mathbb{P}[M_t' \in B] = \int_A \mathbb{E}[\mathbf{1}_B(M_t')|\mathcal{F}_0'] d\mathbb{P} = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(M_t')\mathbf{1}_B(M_t')] = \int_A \mathbf{1}_B(M_t') d\mathbb{P}.$$

Esto como consecuencia de la definición de esperanza condicional. De ahí obtenemos la independencia deseada. □

Teorema 3.13. *(Teorema de Lévy.) Sea M_t una martingala local continua con $M_0 = 0$ y $\langle M\rangle_t = t$, entonces M_t es un movimiento Browniano.*

Demostración. Es consecuencia de los lemas 3.6 y 3.7. □

3.5. El teorema de Dubins-Schwarz.

En esta sección probaremos el teorema de Dubins- Scharwz, el cual utilizaremos en la siguiente sección para probar las desigualdades de Burkholder-Davis-Gundy. Primero definiremos un par de conceptos útiles.

Definición 3.6. Una martingala continua M está acotada en $\mathcal{L}^2$ si

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\big[M_t^2\big] < \infty.$$

Por la desigualdad de Doob notamos

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} M_t^2\right] \leq 4 \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\big[M_t^2\big] < \infty.$$

En particular M es uniformemente integrable y $M_\infty \in \mathcal{L}^2$.

Definición 3.7. Una martingala continua M es cuadrado integrable si para toda $t > 0$,

$$\mathbb{E}\big[M_t^2\big] < \infty.$$

Observemos nuevamente que gracias a la desigualdad de Doob

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} M_s^2\right] \leq 4\mathbb{E}\big[M_t^2\big] < \infty.$$

Los siguientes dos resultados serán de gran utilidad para probar el teorema de Dubins-Schwarz.

Teorema 3.14. *Sea M una martingala local continua tal que $M_0 = 0$ c.s. Entonces,*

i) $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$ *existe y es finito c.s. en el evento* $\{\langle M\rangle_\infty < \infty\}$.

ii) Para toda $t \geq 0$, $\mathbb{E}\big[\langle M\rangle_t\big] < \infty$ *si y solo si M es una martingala cuadrado integrable. En este caso,* $M^2 - \langle M\rangle$ *es una martingala.*

iii) $\mathbb{E}\big[\langle M\rangle_\infty\big] < \infty$ *si y solo si M es una martingala acotada en* $\mathcal{L}^2$. *En este caso,* $M^2 - \langle M\rangle$ *es una martingala uniformemente integrable.*

Demostración. Primero probemos (iii). Supongamos que M es una martingala continua y acotada en $\mathcal{L}^2$. Sea $(\tau_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de tiempos de paro crecientes tal que

$$\tau_n = \text{ínf}\left\{t \geq 0 : \langle M\rangle_t = n\right\}.$$

Notemos que $N_t = M_{t\wedge\tau_n}^2 - \langle M\rangle_{t\wedge\tau_n}$ es una martingala local dominada por $\sup_{t\geq 0} M_t^2 + n$, la cual es integrable. Por lo tanto N es una martingala uniformemente integrable. Por el teorema de paro opcional tenemos

$$\mathbb{E}\big[M_{\tau_n}^2\big] = \mathbb{E}\big[\langle M\rangle_{\tau_n}\big].$$

Si tomamos el límite cuando n tiende a infinito, observamos por el teorema de convergencia monótona

$$\mathbb{E}\big[\langle M\rangle_{\tau_n}\big] \longrightarrow \mathbb{E}\big[\langle M\rangle_\infty\big],$$

y por el teorema de convergencia dominada

$$\mathbb{E}\big[M_{\tau_n}^2\big] \longrightarrow \mathbb{E}\big[M_\infty^2\big].$$

Se concluye que $\mathbb{E}\big[\langle M\rangle_\infty\big] = \mathbb{E}\big[M_\infty^2\big] < \infty$, ya que $M_\infty \in \mathcal{L}^2$.

Ahora supondremos que para toda $t > 0$, $\mathbb{E}\big[\langle M\rangle_t\big] < \infty$. Sea $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de tiempos de paro crecientes tal que

$$\sigma_n = \text{ínf}\big\{t \geq 0 : |M|_t + \langle M\rangle_t = n\big\}.$$

Notemos que $M^2_{t\wedge\sigma_n} - \langle M\rangle_{t\wedge\sigma_n}$ es una martingala local acotada, entonces es una martingala uniformemente integrable. Por lo tanto,

$$\mathbb{E}\big[M^2_{t\wedge\sigma_n}\big] = \mathbb{E}\big[\langle M\rangle_{t\wedge\sigma_n}\big] \leq \mathbb{E}\big[\langle M\rangle_t\big] < \infty,$$

y en consecuencia $M_{t\wedge\sigma_n}$ es una martingala local acotada, es decir, es una martingala uniformemente integrable. Gracias a la desigualdad de Doob, tenemos

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} M^2_{s\wedge\sigma_n}\right] \leq 4\mathbb{E}\big[M^2_{t\wedge\sigma_n}\big] \leq 4\mathbb{E}\big[\langle M\rangle_t\big].$$

Por el teorema de convergencia monótona vemos

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} M^2_s\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} M^2_{s\wedge\sigma_n}\right] \leq 4\mathbb{E}\big[\langle M\rangle_t\big]. \tag{3.9}$$

Ahora si $\mathbb{E}\big[\langle M\rangle_\infty\big] < \infty$, de la desigualdad anterior tenemos

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} M^2_s\right] \leq 4\mathbb{E}\big[\langle M\rangle_\infty\big] < \infty.$$

Nuevamente por convergencia monótona tenemos

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} M^2_s\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{s\geq 0} M^2_s\right] \leq 4\mathbb{E}\big[\langle M\rangle_\infty\big] < \infty.$$

por lo tanto M es una martingala acotada en $\mathcal{L}^2$. Probemos ahora que $M^2 - \langle M\rangle$ es una martingala uniformemente integrable. Esto es claro, ya que $M^2 - \langle M\rangle$ es una martingala local dominada por $\sup_{t\geq 0} M^2_t + \langle M\rangle_\infty$, la cual es integrable.

(ii) Supongamos que para toda $t \geq 0$, $\mathbb{E}\big[\langle M\rangle_t\big] < \infty$. Como consecuencia de (3.8) tenemos que para toda $t \geq 0$

$$\mathbb{E}\big[M^2_t\big] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} M^2_s\right] \leq 4\mathbb{E}\big[\langle M\rangle_t\big] < \infty,$$

de ahí que M es una martingala cuadrado integrable.

Ahora supongamos que M es una martingala cuadrado integrable. Entonces para toda $t \geq 0$

$$\sup_{s\geq 0} \big(M^t_s\big)^2 = \sup_{u\in[0,t]} M^2_u \in \mathcal{L}^1.$$

Por lo tanto M^t es una martingala acotada en $\mathcal{L}^2$. Gracias a (iii) tenemos que $\mathbb{E}\big[\langle M^t\rangle_\infty\big] < \infty$, recordemos que $\langle M^t\rangle_\infty = \langle M\rangle_t$, entonces $\mathbb{E}\big[\langle M\rangle_t\big] < \infty$.

Probemos que $M^2 - \langle M \rangle$ es una martingala. Para toda $t \geq 0$, M^t es una martingala acotada en $\mathcal{L}^2$. De (iii) tenemos que $\big(M^t\big)^2 - \langle M^t \rangle$ es una martingala uniformemente integrable. Por lo tanto, si $s < t$

$$\mathbb{E}\big[M_t^2 - \langle M \rangle_t \big| \mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}\big[(M_t^t)^2 - \langle M^t \rangle_t \big| \mathcal{F}_s\big] = (M_s^t)^2 - \langle M^t \rangle_s = M_s^2 - \langle M \rangle_s,$$

esto implica que $M^2 - \langle M \rangle$ es martingala.

(i) Para probar este inciso primero definamos a los tiempos de paro

$$\tau_n = \text{ínf}\,\big\{t \geq 0 : \langle M \rangle_t \geq n\big\},$$

y notemos que $\langle M^{\tau_n} \rangle = \langle M \rangle_{\tau_n} \leq n$. Por (iii), M^{τ_n} es una martingala acotada en $\mathcal{L}^2$, en otras palabras una martingala uniformemente integrable. Esto tiene como consecuencia que $\text{lím}_{t \to \infty} M_t^{\tau_n}$ existe y es finito.

Por otro lado, notemos que $\big\{\langle M \rangle_\infty < \infty\big\} = \cup_{n \geq 1}\{\tau_n = \infty\}$ y que bajo $\{\tau_n = \infty\}$, $\text{lím}_{t \to \infty} M_t$ existe c.s. y es finito. Por lo tanto, M_∞ existe c.s. y es finita en el evento $\big\{\langle M \rangle_\infty < \infty\big\}$. □

Corolario 3.1. *Sea M una martingala local tal que $M_0 = 0$ c.s. Entonces $\langle M \rangle_t = 0$ c.s. para toda $t > 0$ si y solamente si M es indistinguible de 0.*

Demostración. Supongamos que $\langle M \rangle_t = 0$ c.s. para toda $t > 0$, entonces $\langle M \rangle_\infty = 0$. Por (iii) del teorema 3. 14, tenemos que M^2 es una martingala uniformemente integrable, entonces para $t > 0$,

$$\mathbb{E}\big[M_t^2\big] = 0.$$

De ahí tenemos que para toda $t > 0$, $M_t = 0$ c.s. y por la continuidad de las trayectorias de m concluimos que M es indistinguible de 0. □

Lema 3.8. *Sea M una martingala local tal que $M_0 = 0$ c.s. Entonces c.s. las aplicaciones $t \to M_t$ y $t \to \langle M \rangle_t$ tienen los mismo intervalos de constancia.*

Demostración. Para toda $r \geq 0$, sean

$$T_r = \text{ínf}\{t > r : M_t \neq M_r\} \qquad \text{y} \qquad S_r = \text{ínf}\{t > r : \langle M \rangle_t \neq \langle M \rangle_r\}.$$

Para probar este lema basta ver ver que para toda $r \in \mathbb{Q}_+$, $T_r = S_r$ c.s. Veamos primero que $T_r \leq S_r$ c.s. Recordemos que $\mathbf{1}_{(r,T_r]} \cdot M$ es una martingala local y que su variación caudrática satisface

$$\langle \mathbf{1}_{(r,T_r]} \cdot M \rangle = \mathbf{1}_{(r,T_r]} \cdot \langle M \rangle,$$

esto gracias a la proposición 3.7.

Observemos que, para toda $t \geq 0$

$$\big(\mathbf{1}_{(r,T_r]} \cdot M\big)_t = \big(\mathbf{1}_{[0,T_r]} \cdot M\big)_t - \big(\mathbf{1}_{[0,r]} \cdot M\big)_t = M_{T_r \wedge t} - M_{t \wedge r} = 0.$$

Entonces $\mathbf{1}_{(r,T_r]} \cdot \langle M \rangle = 0$, es decir, $\langle M \rangle_{T_r} = \langle M \rangle_r$. Esto implica que $T_r \leq S_r$, c.s.

Por último probemos la otra desigualdad. Para ello consideremos a la martingala local

$$\mathbf{1}_{(r,S_r]} \cdot M = M^{S_r} - M^r,$$

y vemos que

$$\langle \mathbf{1}_{(r,S_r]} \cdot M \rangle = \mathbf{1}_{(r,S_r]} \cdot \langle M \rangle = \langle M \rangle^{S_r} - \langle M \rangle^r = 0.$$

Esto implica que $\mathbf{1}_{(r,S_r]} \cdot M = 0$ y por ende $\langle M \rangle^{S_r} = \langle M \rangle^r$. De ahí que $S_r \leq T_r$ c.s.

□

En seguida probaremos el teorema de Dubins-Schwarz.

Teorema 3.15. *Sea M una martingala local tal que $M_0 = 0$ c.s. y $\langle M \rangle_\infty = \infty$ c.s. Entonces existe un movimiento Browniano B tal que $M_t = B_{\langle M \rangle_t}$.*

Demostración. Para toda $r \geq 0$ consideremos a $\tau_r = \text{ínf}\{t : \langle M \rangle_t > r\}$. Dado que $\langle M \rangle_\infty = \infty$ c.s., entonces $\tau_r < \infty$ c.s. El mapeo $r \to \tau_r$ es creciente y càdlàg, ya que el proceso $\langle M \rangle$ es continuo y creciente. Además

$$\tau_{r^-} = \lim_{s \uparrow r} \tau_s = \text{ínf}\left\{t : \langle M \rangle_t \geq r\right\}, \qquad r > 0.$$

Sea $B_r = M_{\tau_r}$, $r \geq 0$. Se puede ver que el proceso B está adaptado a la filtración $\big(\mathcal{G}_r = \mathcal{F}_{\tau_r}\big)_{r \geq 0}$. Además como la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ satisface las condiciones habituales (recordemos que para toda sucesión $(T_n)_{n \geq 1}$ de tiempos de paro que decrecen a T, se tiene que $\mathcal{F}_T = \cap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{T_n}$), la filtración $(\mathcal{G}_r)_{r \geq 0}$ también las satisface.

Verifiquemos ahora que B es un proceso con trayectorias continuas. Por definición el proceso B tiene trayectorias càdlàg. Entonces consideremos a r tal que $B_r \neq B_{r-}$, de otra forma $M_{\tau_{r-}} \neq M_{\tau_r}$ pero esto es equivalente a $\tau_{r-} < \tau_r$. Si $\tau_{r-} < \tau_r$ el proceso $\langle M \rangle$ es constante en el intervalo $[\tau_{r-}, \tau_r]$ y vale r. Gracias al lema 3.9, M es constante c.s. en el intervalo $[\tau_{r-}, \tau_r]$, lo que implica $M_{\tau_{r-}} = M_{\tau_r}$. Por ende B tiene trayectorias continuas.

Para concluir la demostración, veamos que B_t y $B_t^2 - t$ son $(\mathcal{G}_r)_{r \geq 0}$-martingalas y que $M_t = B_{\langle M \rangle_t}$, para $t \geq 0$. Sean $s \leq t$ y $n \geq t$, entonces

$$\langle M^{\tau_n} \rangle_\infty = \langle M \rangle_{\tau_n} = n.$$

Esto implica $\mathbb{E}\big[\langle M^{\tau_n} \rangle_\infty\big] < \infty$, entonces M^{τ_n} y $\big(M^{\tau_n}\big)^2 - \langle M^{\tau_n} \rangle_\infty$ son martingalas uniformemente integrable. Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[B_t | \mathcal{G}_s] = \mathbb{E}\left[M_{\tau_t}^{\tau_n} | \mathcal{F}_{\tau_s}\right] = M_{\tau_s}^{\tau_n} = M_{\tau_s} = B_s,$$

y

$$\mathbb{E}[B_t^2 - t | \mathcal{G}_s] = \mathbb{E}\left[(M_{\tau_t}^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n} \rangle_{\tau_t} | \mathcal{F}_{\tau_s}\right] = (M_{\tau_s}^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n} \rangle_{\tau_s} = B_s^2 - s.$$

Es decir, B es una $(\mathcal{G}_r)_{r\geq 0}$-martingala con variación cuadrática $\langle B\rangle_t = t$. Gracias al teorema de caracterización de Lévy podemos afirmar que B es un movimiento Browniano.

Por último, probemos que $M_t = B_{\langle M\rangle_t}$, para $t \geq 0$. Si $t < \tau_{\langle M\rangle_t}$, entonces $\langle M\rangle$ es constante en $[t, \tau_{\langle M\rangle_t}]$ y por el lema 3.9, M también lo es en $[t, \tau_{\langle M\rangle_t}]$, es decir,

$$M_t = M_{\tau_{\langle M\rangle_t}} = B_{\langle M\rangle_t}.$$

□

Ahora enunciaremos una versión más general del teorema de Dubins-Schwarz, esta generalización abarca el caso en que $\langle M\rangle_\infty < \infty$. La demostración de dicha generalización se puede ver en el capítulo V de [4].

Teorema 3.16. *Sea M una martingala local continua que empieza en 0. Entonces eventualmente sobre un espacio de probabilidad agrandado que verifica las condiciones habituales, existe un movimiento Browniano B tal que $M_t = B_{\langle M\rangle_t}$.*

3.6. El teorema de Burkholder-Davis-Gundy.

En esta parte demostraremos algunas desigualdades de martingalas locales que nos servirán en el siguiente capítulo. La última desigualdad de esta sección es conocida con el teorema de Burkholder-Davis-Gundy.

Sea M_t una martingala local continua con $M_0 = 0$ y sea $M_t^* = \sup_{s\leq t}|M_s|$. En particular si B es un movimiento Browniano, $B_t^* = \sup_{s\leq t}|B_s|$.

Lema 3.9. *Sea $\beta > 1$ y $\delta > 0$ y τ un tiempo de paro. Entonces para cualquier $\lambda > 0$,*

a) $\mathbb{P}\left[B_\tau^* > \beta\lambda, \tau^{1/2} \leq \delta\lambda\right] \leq \frac{\delta^2}{(\beta-1)^2}\mathbb{P}\left[B_\tau^* > \lambda\right]$.

b) $\mathbb{P}\left[\tau^{1/2} > \beta\lambda, B_\tau^* \leq \delta\lambda\right] \leq \frac{\delta^2}{\beta^2-1}\mathbb{P}\left[\tau^{1/2} > \lambda\right]$.

Demostración. Basta probar el resultado de (a) para un tiempo de paro acotado, τ, si no es el caso reeplazamos τ por $\tau\wedge n$ y aplicamos el teorema de convergencia monótona. Sean

$$\begin{aligned} S_1 &= \inf\{t : |B(t\wedge\tau)| > \lambda\}, \\ S_2 &= \inf\{t : |B(t\wedge\tau)| > \beta\lambda\}. \end{aligned}$$

Por definición sabemos que $S_1 < S_2 < \tau$ y además si $\omega \in \left\{B_\tau^* > \beta\lambda, \tau^{1/2} \leq \delta\lambda\right\}$ tenemos que $|B(\tau\wedge S_1\wedge\delta^2\lambda^2)| = \lambda$ y $|B(\tau\wedge S_2\wedge\delta^2\lambda^2)| = \beta\lambda$. De ahí que

$$\left|B(\tau\wedge S_2\wedge T) - B(\tau\wedge S_1\wedge\delta^2\lambda^2)\right| \geq (\beta-1)\lambda.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[B^*_\tau > \beta\lambda, \tau^{1/2} \le \delta\lambda] &\le \mathbb{P}\left[\left|B(\tau \wedge S_2 \wedge \delta^2\lambda^2) - B(\tau \wedge S_1 \wedge \delta^2\lambda^2)\right| \ge (\beta - 1)\lambda\right] \\
&\le (\beta-1)^{-2}\lambda^{-2}\mathbb{E}\left[\left(B(\tau \wedge S_2 \wedge \delta^2\lambda^2) - B(\tau \wedge S_1 \wedge \delta^2\lambda^2)\right)^2\right]
\end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad es una consecuencia de la desigualdad de Chebyshev. Supongamos que $R_1 \le R_2$ son dos tiempos de paro acotados, entonces por el teorema de paro opcional de Doob

$$\mathbb{E}\big[B(R_1)B(R_2)\big] = \mathbb{E}\big[B(R_1)\mathbb{E}\big[B(R_2)|\mathcal{F}_{R_1}\big]\big] = \mathbb{E}\left[B(R_1)^2\right].$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(B(R_2) - B(R_1)\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[B(R_2)^2\right] - 2\mathbb{E}[B(R_1)B(R_2)] + \mathbb{E}\left[B(R_1)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[B(R_2)^2\right] - \mathbb{E}\left[B(R_1)^2\right] = \mathbb{E}[R_2 - R_1].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[B^*_\tau > \beta\lambda, \tau^{1/2} \le \delta\lambda] &\le (\beta-1)^{-2}\lambda^{-2}\mathbb{E}\left[\left(B(\tau \wedge S_2 \wedge \delta^2\lambda^2) - B(\tau \wedge S_1 \wedge \delta^2\lambda^2)\right)^2 \mathbf{1}_{\{S_1<\infty\}}\right] \\
&\le (\beta-1)^{-2}\lambda^{-2}\mathbb{E}\left[\left((\tau \wedge S_2 \wedge \delta^2\lambda^2) - (\tau \wedge S_1 \wedge \delta^2\lambda^2)\right)\mathbf{1}_{\{S_1<\infty\}}\right] \\
&\le (\beta-1)^{-2}\lambda^{-2}(\delta\lambda)^2\mathbb{P}[S_1 < \infty] \\
&= (\beta-1)^{-2}\delta^2\mathbb{P}[B^*_\tau > \lambda].
\end{aligned}$$

Esto prueba (a).
Para probar (b) definamos ahora

$$\begin{aligned}
S_1 &= \inf\{t : (t \wedge \tau)^{1/2} > \lambda\}, \\
S_2 &= \inf\{t : (t \wedge \tau)^{1/2} > \beta\lambda\}, \\
T &= \inf\{t : |B(t \wedge \tau)| > \delta\lambda\}.
\end{aligned}$$

Si $\omega \in \{\tau^{1/2} > \beta\lambda, B^*_\tau \le \delta\lambda\}$ tenemos que $S_1 \wedge \tau \wedge T = \lambda^2$ y $S_2 \wedge \tau \wedge T = \beta^2\lambda^2$. Entonces $S_2 \wedge \tau \wedge T - S_1 \wedge \tau \wedge T = (\beta^2 - 1)\lambda^2$. De ahí se sigue

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\tau^{1/2} > \beta\lambda, B^*_\tau \le \delta\lambda] &\le \mathbb{P}\left[(\tau \wedge S_2 \wedge T) - (\tau \wedge S_1 \wedge T) \ge (\beta^2-1)\lambda^2, S_1 < \infty\right] \\
&\le (\beta^2-1)^{-1}\lambda^{-2}\mathbb{E}\left[\left((\tau \wedge S_2 \wedge T) - (\tau \wedge S_1 \wedge T)\right)\mathbf{1}_{\{S_1<\infty\}}\right] \\
&= (\beta^2-1)^{-1}\lambda^{-2}\mathbb{E}\left[\left(B(\tau \wedge S_2 \wedge T)^2 - B(\tau \wedge S_1 \wedge T)^2\right)\mathbf{1}_{\{S_1<\infty\}}\right] \\
&\le (\beta^2-1)^{-1}\lambda^{-2}\mathbb{E}\left[B(\tau \wedge S_2 \wedge T)^2\mathbf{1}_{\{S_1<\infty\}}\right] \\
&\le (\beta^2-1)^{-1}\lambda^{-2}(\delta\lambda)^2\mathbb{P}[S_1 < \infty] \\
&= (\beta^2-1)^{-1}\delta^2\mathbb{P}[\tau^{1/2} > \lambda].
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 3.10. *Sean X, Y dos variables aleatorias positivas tales que para toda $\delta, x > 0$,*

$$\mathbb{P}[X > 2x, Y \leq \delta x] \leq \delta^2 \mathbb{P}[X > x]. \tag{3.10}$$

Entonces para toda $p > 0$ existe $K(p) > 0$ (constante que solo depende de p), tal que

$$\mathbb{E}[X^p] \leq K(p)\mathbb{E}[Y^p].$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que X está acotada (sino es el caso, reemplazaremos a la variable aleatoria X por $X \wedge n$ que también verifica (3.9)). Gracias a (3.9) podemos observar

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^p] &= p\int_0^\infty x^{p-1}\mathbb{P}[X > x]dx = 2^p p\int_0^\infty x^{p-1}\mathbb{P}[X > 2x]dx \\
&\leq 2^p p\int_0^\infty x^{p-1}\left(\mathbb{P}[X > 2x, Y \leq \delta x] + \mathbb{P}[Y > \delta x]\right)dx \\
&\leq 2^p p\int_0^\infty x^{p-1}\delta^2\mathbb{P}[X > x]dx + 2^p p\int_0^\infty x^{p-1}\mathbb{P}[Y > \delta x]dx \\
&= 2^p\delta^2\mathbb{E}[X^p] + 2^p\delta^{-p}\mathbb{E}[Y^p].
\end{aligned}$$

Si elegimos δ tal que $2^p\delta^2 = 1/2$, obtenemos que $\mathbb{E}[X^p] \leq 2^{p+1}\delta^{-p}\mathbb{E}[Y^p]$.

□

Teorema 3.17. *Para toda $0 < p < \infty$ existen $0 < c_p < C_p < \infty$ constantes tales que para cualquier martingala local continua M que empieza en 0, se satisface*

$$c_p\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty^{p/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[(M_\infty^*)^p\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty^{p/2}\right].$$

Demostración. Sean $p > 0$ y M una martingala local continua que empieza en 0. Del teorema de Dubins-Schwarz sabemos que existe un movimiento Browniano B tal que $M_t = B_{\langle M\rangle_t}$. B es un $(\mathcal{G}_r)$-movimiento Browniano, donde $\mathcal{G}_r = \mathcal{F}_{\tau_r}$, y $\tau_r = \inf\{t : \langle M\rangle_t > r\}$. Para toda t, $\langle M\rangle_t$ es un $(\mathcal{G}_r)$-tiempo de paro, esto debido a que

$$\left\{\langle M\rangle_t \leq r\right\} = \{\tau_r \geq t\} \in \mathcal{F}_{\tau_r} = \mathcal{G}_r.$$

Para obtener ambas desigualdades aplicamos el lema 3.10 a
$(X, Y) = \left(B^*_{\langle M\rangle_\infty}, \sqrt{\langle M\rangle_\infty}\right)$ y a $(X, Y) = \left(\sqrt{\langle M\rangle_\infty}, B^*_{\langle M\rangle_\infty}\right)$.
Se observa que en ambos casos se cumple la hipótesis (3.9) gracias al lema 3.9 y a que $M^*_\infty = B^*_{\langle M\rangle_\infty}$.

□

Corolario 3.2. *Para cualquier $p > 0$ y todo tiempo de paro τ existen $0 < c_p < C_p < \infty$ constantes tales que para toda martingala local continua M que empieza en 0 se satisface*

$$c_p\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\tau^{p/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[(M_\tau^*)^p\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\tau^{p/2}\right].$$

Capítulo 4

El tiempo local de una martingala local.

El objetivo de este capítulo es construir un proceso estocástico bi-continuo $(L_t^x, t \geq 0, x \in \mathbb{R})$, al cual llamaremos tiempo local, que cumpla casi seguramente con la siguiente propiedad: para todo A subconjunto de $\mathbb{R}$, boreliano y para toda $t \geq 0$,

$$\int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s \in A\}} ds = \int_A L_t^x dx \tag{4.1}$$

4.1. Tiempos locales de martingalas locales continuas.

Para empezar esta sección demostraremos la existencia del tiempo local en 0 de una martingala local continua M.

Teorema 4.1. *Sea M una martingala local continua. Existe un proceso creciente, adaptado y continuo $(L_t^0, t \geq 0)$ tal que*

$$|M_t| = |M_0| + \int_0^t sgn(M_s) dM_s + L_t^0,$$

donde $sgn(x) = -1$ si $x \leq 0$ y $sgn(x) = 1$ si $x > 0$. El proceso $(L_t^0, t \geq 0)$ es llamado el tiempo local en 0 de la martingala local M.

Demostración. Primero lo demostraremos para M una martingala local continua y acotada. Para esto primero haremos una aproximación de la función $f(x) = |x|$ por funciones C^2. Sea $h : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ una función C^∞ creciente tal que $h(x) = -1$ para $x \leq 0$ y $h(x) = 1$ para $x \geq 1$. Lo cual es posible ya que se puede extrapolar de $f(0) = -1$ a $f(1) = 1$ con una curva suficientemente suave y creciente.

Para toda $n \geq 1$ definamos a f_n de la siguiente manera:

$$f_n(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f'_n(x) = h(nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se puede ver que $f_n \in C^\infty$, que $f_n(x) = -x$ para $x \leq 0$ y además que $f_n(x) = x$ para $x \geq \frac{1}{n}$. Si aplicamos la fórmula de Itô tenemos que

$$f_n(M_t) = f_n(M_0) + \int_0^t f'_n(M_s)dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_n(M_s)d\langle M\rangle_s.$$

Notemos que $f'_n(x) \uparrow \operatorname{sgn}(x)$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Gracias a esto último, a la proposición 3.7 y al teorema de convergencia dominada de Lebesgue si hacemos tender a n a ∞ obtenemos

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty \big(\operatorname{sgn}(M_s) - f'_n(M_s)\big)dM_s\right)^2\right] \\ &\quad= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \big(\operatorname{sgn}(M_s) - f'_n(M_s)\big)^2 d\langle M_s\rangle\right] \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Doob se tiene

$$\sup_{t\geq 0}\left|\int_0^t \big(\operatorname{sgn}(M_s) - f'_n(M_s)\big)dM_s\right| \longrightarrow 0,$$

en $\mathcal{L}^2$ y casi seguramente. De ahí que $\int_0^t f'_n(M_s)dM_s$ converge uniformemente a $\int_0^t \operatorname{sgn}(M_s)dM_s$, además

$$f_n(M_t) - f_n(M_0) \longrightarrow f(M_t) - f(M_0),$$

ya que f_n converge uniformente a f, esto último debido a que $f_n(x) = -x$ para $x \leq 0$ y a que $f_n(x) = x$ para $x \geq \frac{1}{n}$.
Entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^t f''_n(M_s)d\langle M\rangle_s &= f_n(M_t) - f_n(M_0) - \int_0^t f'_n(M_s)dM_s \\ &\longrightarrow f(M_t) - f(M_0) - \int_0^t \operatorname{sgn}(M_s)dM_s.\end{aligned}$$

Dada la continuidad y la convergencia uniforme se tiene que el límite también es continuo, a dicho límite lo denotaremos por L_t^0. Por lo tanto L_t^0 es continuo, creciente y adaptado.
Ahora para extender el resultado a martingalas locales continuas no necesariamente acotadas definiremos una sucesión de tiempo de paro, para $n \geq 1$, dada por

$$T_n = \operatorname{ínf}\{t : |M_t| \geq n\}.$$

Entonces para la martingala local $M^{T_n} = (M_{t\wedge T_n}; t \geq 0)$ tenemos

$$|M_t^{T_n}| = |M_0^{T_n}| + \int_0^t \operatorname{sgn}(M_s^{T_n})dM_s^{T_n} + L_t^0(M^{T_n}).$$

Por la proposición 3.6 observamos

$$\int_0^t \operatorname{sgn}(M_s^{T_n})dM_s^{T_n} = \int_0^{t\wedge T_n} \operatorname{sgn}(M_s)dM_s.$$

Entonces para n suficientemente grande tal que $T_n \geq t$ tenemos

$$|M_t| - |M_0| - \int_0^t \operatorname{sgn}(M_s)dM_s = L_t^0(M^{T_n}).$$

Por lo tanto el proceso $L_t^0 = L_t^0(M^{T_n})$ para $T_n \geq t$, es continuo, creciente y adaptado. □

El teorema anterior introduce la noción del tiempo local en 0 de la martingala local continua M. De la misma forma podemos definir el tiempo local de una martingala local para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.2. *(Fórmula de Tanaka.) Sea M una martingala local continua. Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe un proceso adaptado y continuo $(L_t^x, t \geq 0)$ tal que*

$$|M_t - x| = |M_0 - x| + \int_0^t sgn(M_s - x)dM_s + L_t^x.$$

Llamaremos al proceso $(L_t^x, t \geq 0)$, el tiempo local de M en x.

Demostración. El resultado es consecuencia del anterior solo tomando en cuenta que se hace una traslación de M. □

Probemos ahora una consecuencia del teorema anterior.

Ejercicio 4.1. Probar que

$$(M_t - x)^+ = (M_0 - x)^+ + \int_0^t \mathbf{1}_{\{M_s > x\}} dM_s + \frac{1}{2}L_t^x,$$
$$(M_t - x)^- = (M_0 - x)^- - \int_0^t \mathbf{1}_{\{M_s \leq x\}} dM_s + \frac{1}{2}L_t^x,$$

donde $x^+ = x \vee 0$ y $x^- = -(x \wedge 0)$.

Demostración. Observemos lo siguiente

$$|M_t - x| = (M_t - s)^+ + (M_t - x)^-$$

y

$$M_t - x = (M_t - s)^+ - (M_t - x)^-.$$

Si resolvemos el sistema para $(M_t - s)^+$ tenemos que

$$(M_t - s)^+ = \frac{1}{2}\left(|M_t - x| - (M_t - x)\right).$$

Por la fórmula de Tanaka y por la fórmula de Itô obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
(M_t - s)^+ &= \frac{1}{2}\left(|M_0 - x| + \int_0^t \operatorname{sgn}(M_s - x)dM_s + L_t^x + (M_t - x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(|M_0 - x| + \int_0^t \operatorname{sgn}(M_s - x)dM_s + L_t^x + (M_0 - x) + \int_0^t dM_s\right) \\
&= (M_0 - x)^+ \frac{1}{2}L_t^x + \frac{1}{2}\int_0^t \big(\operatorname{sgn}(M_s - x) + 1\big)dM_s \\
&= (M_0 - x)^+ \frac{1}{2}L_t^x + \frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{1}_{\{M_s - x > 0\}} dM_s.
\end{aligned}$$

Donde la última igualdad es consecuencia de

$$\operatorname{sgn}(M_s - x) + 1 = \begin{cases} 2 & M_s - x \leq 0, \\ 0 & M_s - x < 0. \end{cases}$$

El otro caso es análogo. $\square$

Ahora veamos algunas propiedades del tiempo local de la martingala local M. En el siguiente resultado estudiaremos el soporte de dL^x, dicho resultado es consecuencia de la fórmula de Itô y de la fórmula de Tanaka.

Teorema 4.3. *Sea M una martingala local continua. Para todo $x \in \mathbb{R}$, el soporte de la medida aleatoria dL^x es un subconjunto de $\{s : M_s = x\}$.*

Demostración. Gracias a la fórmula de Itô tenemos

$$(M_t - x)^2 = (X_0 - x)^2 + 2\int_0^t (M_s - x)dM_s + \langle M\rangle_t,$$

$$|M_t - x|^2 = |X_0 - x|^2 + 2\int_0^t |M_s - x|dM_s + \langle |M - x|\rangle_t,$$

Entonces por la fórmula de Tanaka y la identidad $\langle |M - x|\rangle = \langle M\rangle$, tenemos

$$(M_t - x)^2 - (M_0 - x)^2 = 2\int_0^t |M_s - x|(\operatorname{sgn}(M_s - x)dM_s + dL_s^x) + \langle M\rangle_t.$$

De esto se sigue

$$\int_0^t |M_s - x|\operatorname{sgn}(M_s - x)dM_s + \int_0^t |M_s - x|dL_s^x = \int_0^t (M_s - x)dM_s.$$

Como $x = |x|\operatorname{sgn}(x)$, tenemos

$$\int_0^t |M_s - x|dL_s^x = 0$$

Esto prueba el resultado. $\square$

Los resultados vistos hasta aquí solo nos dejan ver al tiempo local como un proceso que varia en el tiempo. En el resto del capítulo lo estudiaremos como un proceso que varía tanto en tiempo como en espacio. El siguiente resultado nos da información sobre la bi-continuidad en (t,x) del tiempo local.

Teorema 4.4. *(Regularidad, Trotter.) Sea M una martingala local continua. Existe una modificación $(L_t^x; t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ bi-continua en t y x.*

Demostración. Por un argumento de localización supondremos que M está acotada por una constante K. Gracias a la fórmula de Tanaka tenemos

$$L_t^x = \big(|M_t - x| - |M_0 - x|\big) - \int_0^t \operatorname{sgn}(M_s - x) dM_s.$$

Es claro que $\big(|M_t - x| - |M_0 - x|\big)$ es bi-continuo en (t,x). Si

$$\int_0^t \operatorname{sgn}(M_s - x) dM_s$$

admite una versión bi-continua en (t,x), entonces L_t^x tendría una versión bi-continua. Sea $N_t^x = \int_0^t \operatorname{sgn}(M_s - x) dM_s$, para probar que N_t^x admite una versión bi-continua en (t,x), vamos a hacer uso del criterio de continuidad de Kolmogorov y la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy. Para toda $p > 0$ y todas $x < y$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} |N_t^x - N_t^y|^p\right] &= 2^p \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}\left|\int_0^t \mathbf{1}_{\{x\leq M_s \leq y\}} dM_s\right|^p\right] \\
&\leq C_p \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{x\leq M_s\leq y\}} d\langle M\rangle_s\right)^{p/2}\right].
\end{aligned}$$

La ecuación anterior se debe a que $\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(y) = 2$ si $x \leq M_s \leq y$ y la desigualdad se debe al teorema de Burkholder-Davis-Gundy.
Ahora para estimar los momento de la variable

$$\xi = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{x\leq M_s\leq y\}} d\langle M\rangle_s,$$

tomaremos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en C^2 tal que

$$\begin{array}{cc}
0 \leq f''(u) \leq 1, & u \in \mathbb{R}, \\
f''(u) = 0, & u \notin (-1,2), \\
f''(u) = 1, & u \in [0,1], \\
f'(u) = 0, & u \leq -1.
\end{array}$$

Observemos que $\mathbf{1}_{(0,1]}(u) \leq f''(u)$ y que $0 \leq f'(u) \leq 3$ para toda $u \in \mathbb{R}$.
Definamos $h(u) = f(\frac{u-x}{y-x})$ para toda $u \in \mathbb{R}$, y observemos

$$\mathbf{1}_{(x,y]}(u) \leq (y-x)^2 h''(u) \qquad \text{y} \qquad 0 \leq h'(u) \leq \frac{3}{y-x}.$$

Esto implica

$$\begin{aligned}
0 &\le \int_0^t \mathbf{1}_{\{x\le M_s\le y\}} d\langle M\rangle_s \\
&\le (y-x)^2\int_0^t h''(M_s)d\langle M\rangle_s \\
&= 2(y-x)^2\left(h(M_t)-h(M_0)-\int_o^t h'(M_s)dM_s\right) \\
&\le 2(y-x)^2|h(M_t)-h(M_0)|+2(y-x)^2\left|\int_0^t h'(M_s)dM_s\right|.
\end{aligned}$$

Como $0\le h'(u)\le \frac{3}{y-x}$ tenemos

$$2(y-x)^2|h(M_t)-h(M_0)|\le 6(y-x)|M_t-M_0|\le 12K(y-x).$$

Entonces,

$$0\le \int_0^t \mathbf{1}_{\{x\le M_s\le y\}} d\langle M\rangle_s \le 12K(y-x)+2(y-x)\left|\int_0^t f'\left(\frac{M_s-x}{y-x}\right)dM_s\right|,$$

en particular tenemos

$$0\le \xi\le 12K(y-x)+2(y-x)\sup_{t\ge 0}\left|\int_0^t f'\left(\frac{M_s-x}{y-x}\right)dM_s\right|.$$

Nuevamente por la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy, verificamos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\xi^{p/2}\right] &\le C_p^K(y-x)^{p/2}\left(1+\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty\left(f'\left(\frac{M_s-x}{y-x}\right)\right)^2 d\langle M\rangle_s\right)^{p/4}\right]\right) \\
&\le C_p^K(y-x)^{p/2}\left(1+3^{p/2}\mathbb{E}\left[\left(\langle M\rangle_\infty\right)^{p/4}\right]\right) \\
&\le C_p^K(y-x)^{p/2}\left(1+\widetilde{C}_p\mathbb{E}\left[\sup_{t\ge 0}|M_t|^{p/2}\right]\right) \\
&\le C_p^K(y-x)^{p/2}\left(1+\widetilde{C}_pK^{p/2}\right).
\end{aligned}$$

La segunda se sigue de $|f'(u)|\le 3$ y la tercera es gracias a la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy nuevamente.
Por lo tanto, para toda $p>0$ y toda pareja $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ se tiene

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\ge 0}|N_t^x-N_t^y|^p\right]\le C(K,p)|x-y|^{p/2},$$

donde $C(K,p)$ es una constante que depende de los valores de K y p. Si se toma $p>2$ y se aplica el criterio de continuidad de Kolmogorov se obtiene el resultado deseado. $\square$

Gracias a este último teorema a partir de ahora sólo consideraremos a los tiempos locales bi-continuos en (t,x).

4.2. La fórmula de Itô-Tanaka.

En esta sección se probará la extensión de la fórmula de Itô a funciones que son diferencia de dos funciones convexas, la cual es conocida como la fórmula de Itô-Tanaka.

Antes de ver la prueba revisemos algunos aspectos de las funciones convexas. De la definición de convexidad, podemos ver que para x fija,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

es creciente. Gracias a esto último podemos obtener, para cada x, las derivadas por la izquierda y por la derecha de la función f. Las cuales denotaremos por f'_- y f'_+, respectivamente. Además para $y > x$ tenemos

$$f'_-(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'_+(x).$$

Ejercicio 4.2. Las funciones f'_+ y f'_- son crecientes, continuas por la izquierda y por la derecha respectivamente y el conjunto

$$\{x : f'_- \neq f'_+\}$$

es a lo más numerable.

Demostración. Como $f'_- \leq f'_+$, la primera propiedad es consecuencia de las desigualdades antes mencionadas. Para probar que f_+ es continua por la derecha intercambiamos los limites ascendentes, de tal forma que si $a_n \downarrow 0$ y $b_m \downarrow 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f'_+(x+a_n) &= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\frac{f(x+a_n+b_m)-f(x+a_n)}{b_m}\right) \\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{f(x+b_m)-f(x)}{b_m} = f'_+(x). \end{aligned}$$

La demostración para la continuidad por la izquierda de f'^- es análoga.
$\{x : f'_- \neq f'_+\}$ es a lo más numerable ya que f'_- y f'_+ tienen a lo más una cantidad numerable de discontinuidades y donde f'_- es continua, tenemos que $f'_- = f'_+$. □

El siguiente resultado (el cual no se probará), estudia la segunda derivada de f y es indispensable para la prueba de la fórmula de Itô-Tanaka.

Proposición 4.1. *La segunda derivada f'' de f en el sentido de distribuciones es una medida de Radon; de manera equivalente para cualquier medida de Radon μ en $\mathbb{R}$, existe una función convexa f tal que $f'' = \mu$ y para cada intervalo I y $x \in int(I)$,*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\int_I |x-a|\mu(da) + \alpha_I x + \beta_I \\ f'(x) &= \frac{1}{2}\int_I \operatorname{sgn}(x-a)\mu(da) + \alpha_I, \end{aligned}$$

donde α_I y β_I son constantes.

Teorema 4.5. *(Fórmula de Itô-Tanaka.) Si f es diferencia de dos funciones convexas y M es una martingala local continua, entonces*

$$f(M_t) = f(M_0) + \int_0^t f'_-(M_s)dM_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^x f''(dx). \tag{4.2}$$

Demostración. Basta probar el resultado para el caso en que f es una función convexa. Sea $f'' = \mu$ una medida de Radon (ver apéndice 3 de [4]). Por un argumento de localización supondremos que $|M| < K$ y que $\text{supp}(\mu) \subset [-K, K]$ en caso contrario a esto último paramos a M cuando salga del intervalo $[-K, K]$). Además supongamos que $\mu(\mathbb{R}) = 1$ (sino, sustituimos a conveniencia f por cf) y que $f'_-(x) = 0$ para todo $x \leq -K$, esto debido a que si la fórmula (4.2) es válida para f también será válida para $f(x)+cx$, sin importar el valor de $c \in \mathbb{R}$.

Podemos observar que si $\text{supp}(\mu)$ es un singulete la fórmula (4.2) se reduce a la fórmula de Tanaka. Cuando el soporte de μ sea un conjunto finito, por linealidad (4.2) se seguirá cumpliendo.

Sean Y una variable aleatoria con ley μ y F su distribución, es decir $F(x) = \mu((-\infty, x])$. Entonces

$$f(x) = \int_{-\infty}^x F(y)dy$$

Definamos para $n \geq 1$ a $j_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$j_n(x) = \frac{j}{2^n} \qquad \text{si} \quad \frac{j-1}{2^n} < x \leq \frac{j}{2^n}.$$

De ahí que $x \leq j_n(x) \leq x + 1/2^n$.

Sean $Y_n = j_n(Y)$, μ_n su ley y F_n su función de distribución. Dada su definición el soporte de μ_n es finito.
Sea

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^x F_n(y)dy,$$

la cual es convexa y además $f''_n = \mu_n$. Por lo mencionado anteriormente tenemos

$$f_n(M_t) = f_n(M_0) + \int_0^t (f_n)'_-(M_s)dM_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^x \mu_n(dx). \tag{4.3}$$

Fijemonos en que $\{Y < x\} = \cup_{n\geq 1}\{j_n(Y) < x\}$, para toda x. Como consecuencia de esto tenemos que $F_n(x-)$ crece hacia $F(x-)$ y $f_n(x)$ hacia $f(x)$. Entonces,

$$f_n(M_t) \longrightarrow f(M_t) \qquad \text{y} \qquad f_n(M_0) \longrightarrow f(M_o). \tag{4.4}$$

Estudiemos al término $\int_{\mathbb{R}} L_t^x \mu_n(dx)$ y observemos que

$$\mathbb{E}\big[\psi(Y_n)\big] = \int \psi(x)\mu_n(dx) \longrightarrow \mathbb{E}\big[\psi(Y)\big] = \int \psi(Y)\mu(dx),$$

para toda función ψ continua por la derecha y acotada, esto debido a que Y_n decrece a Y casi seguramente. Ya que $x \to L_t^x$ es continua por la derecha y tiene soporte compacto (esto es consecuencia del teorema 4.3), tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} L_t^x \mu_n(dx) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} L_t^x \mu(dx) \qquad \text{casi seguramente.} \tag{4.5}$$

Además

$$\begin{aligned} 0 \leq (f)'_-(x) - (f_n)'_-(x) &= F(x-) - F_n(x-) \\ &= \mathbb{P}[Y < x, j_n(Y) \geq x] \leq \mathbb{P}[x - 1/2^n \leq Y < x]. \end{aligned}$$

De ahí tenemos, para Y independiente de M,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (f_n)'_-(M_s)dM_s - \int_0^t (f)'_-(M_s)dM_s\right)^2\right] \\ &\quad = \mathbb{E}\left[\int_0^t \big((f_n)'_-(M_s) - (f)'_-(M_s)\big)^2 d\langle M\rangle_s\right] \\ &\quad \leq \mathbb{E}\left[\int_0^t (\mathbb{P}[M_s - 1/2^n \leq Y < M_s | M_s])^2 d\langle M\rangle_s\right], \end{aligned}$$

converge a 0 por convergencia dominada. Esto prueba que

$$\int_0^t (f_n)'_-(M_s)dM_s \longrightarrow \int_0^t (f)'_-(M_s)dM_s, \tag{4.6}$$

en $\mathcal{L}^2$ y en particular en probabilidad. De las ecuaciones (4.2)-(4.5) se tiene que para toda $t \geq 0$

$$f(M_t) = f(M_0) + \int_0^t f'_-(M_s)dM_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^x f''(dx) \qquad \text{casi seguramente.}$$

La identidad es válida para toda t debido a la continuidad en t. $\square$

Teorema 4.6. *(Tiempos de ocupación.) Existe un conjunto de probabilidad nula fuera del cual se cumple*

$$\int_0^t f(M_s)d\langle M\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} f(x)L_t^x dx, \tag{4.7}$$

para toda $t \geq 0$ y toda función boreliana $f \geq 0$.

Demostración. Sea $f = g''$ donde $g \in C^2$, g es convexa ya que $f \geq 0$. De las fórmulas de Itô y de Itô-Tanaka podemos deducir que (4.7) se cumple fuera de un conjunto, N_f, de probabilidad nula para toda t. Ahora probémoslo para $f \geq 0$ boreliana. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de dichas funciones densas en $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, el espacio de las funciones continua que tienden a 0 en infinito. Tomando el límite vemos que fuera de $N = \cup_{n\geq 1} N_{f_n}$ la relación (4.7) se cumple para toda $f \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y toda t. Gracias al lema de las clases monótonas, tenemos que fuera de N se cumple (4.7) para toda función boreliana y acotada. De ahí se sigue que también se cumple para toda función boreliana $f \geq 0$. $\square$

Ahora veremos una serie de ejercicios que son consecuencia de los resultados anteriores.

Ejercicio 4.3. Si M es una martingala local continua, entonces

$$L_t^a = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{(a-\epsilon, a+\epsilon)}(M_s) d\langle M \rangle_s.$$

Demostración. Por el teorema de tiempos de ocupación observamos que.

$$\frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{(a-\epsilon,a+\epsilon)}(M_s) d\langle M \rangle_s = \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{(a-\epsilon,a+\epsilon)}(x) L_t^x dx$$
$$= \frac{1}{2\epsilon} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} L_t^x dx = \frac{1}{2\epsilon} \left(\int_{-\infty}^{a+\epsilon} L_t^x dx - \int_{-\infty}^{a-\epsilon} L_t^x dx \right).$$

Entonces tenemos que

$$\frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{(a-\epsilon,a+\epsilon)}(M_s) d\langle M \rangle_s = \frac{F(a+\epsilon) - F(a-\epsilon)}{2\epsilon},$$

donde

$$F(t) = \int_{-\infty}^t L_t^x dx.$$

Gracias al teorema de regularidad de Trotter sabemos que L_t^x es bicontinua en t y x. Además si tomamos el límite cuando ϵ tiende a 0, por el teorema fundamental del cálculo, obtenemos que el límite es L_t^a. $\square$

Ejercicio 4.4. Sea M una martingala local continua tal que $M_0 = 0$ y $\lim_{t\to\infty} \langle M \rangle_t = \infty$ casi seguramente. Entonces, existe un movimiento browniano $\beta = (\beta_t, t \geq 0)$ tal que

$$\int_0^t f(M_s) d\langle M \rangle_s = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) L_{\langle M \rangle_t}(\beta) dx,$$

donde f es una función boreliana y positiva; y deducir que casi seguramente $L_t^a(M) = L_{\langle M \rangle_t}(\beta)$ para toda a y toda t.

Demostración. Por el teorema de tiempos de ocupación sabemos que

$$\int_0^t f(M_s) d\langle M \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} f(x) L_t^x dx.$$

Además como M es martingala local continua que cumple con las hipótesis del teorema de Dubins-Schwarz, sabemos que existe β, un movimiento Browniano, tal que $M_t = \beta_{\langle M \rangle_t}$. De ahí que

$$\int_0^t f(M_s) d\langle M \rangle_s = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) L_{\langle M \rangle_t}(\beta) dx.$$

Del ejercicio anterior se deduce que $L_t^a(M) = L_{\langle M \rangle_t}(\beta)$ casi seguramente para toda a y toda t. $\square$

Ejercicio 4.5. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $B = (B_t, t \geq 0)$ el movimiento browniano estándar. Consideremos al proceso $(X_t^{(\alpha)}, t \geq 0)$, donde $X_t^{(\alpha)} = \mathrm{sgn}(B_t)|B_t|^\alpha$. Entonces, para toda $\alpha < 3/2$,

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^t \frac{ds}{X_s^{(\alpha)}} \mathbf{1}_{\{|B_s| \geq \epsilon\}} \qquad \text{existe.}$$

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{ds}{X_s^{(\alpha)}} \mathbf{1}_{\{|B_s| \geq \epsilon\}} &= \int_0^t \frac{ds}{X_s^{(\alpha)}} \mathbf{1}_{\{B_s \geq \epsilon\}} + \int_0^t \frac{ds}{X_s^{(\alpha)}} \mathbf{1}_{\{B_s \leq -\epsilon\}} \\ &= \int_0^t \frac{ds}{B_s^{(\alpha)}} \mathbf{1}_{\{B_s \geq \epsilon\}} - \int_0^t \frac{ds}{(-B_s)^{(\alpha)}} \mathbf{1}_{\{B_s \leq -\epsilon\}}\end{aligned}$$

Por el teorema de tiempos de ocupación tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{ds}{X_s^{(\alpha)}} \mathbf{1}_{\{|B_s| \geq \epsilon\}} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^\alpha} \mathbf{1}_{\{x \geq \epsilon\}} L_t^x - \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(-x)^\alpha} \mathbf{1}_{\{x \leq -\epsilon\}} L_t^x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^\alpha} \mathbf{1}_{\{x \geq \epsilon\}} L_t^x - \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^\alpha} \mathbf{1}_{\{x \geq \epsilon\}} L_t^{-x} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^\alpha} \mathbf{1}_{\{x \geq \epsilon\}} (L_t^x - L_t^{-x}).\end{aligned}$$

Sea $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión que decrece a 0, tal que $\epsilon_n > 0$ para toda n. Definimos a H_n de la siguiente manera

$$H_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^\alpha} \mathbf{1}_{\{x \geq \epsilon_n\}} (L_t^x - L_t^{-x}).$$

Tomemos $m > n$, sabemos que existen $C > 0$ y $\beta > 0$ tales que

$$\begin{aligned}0 \leq |H_m - H_n| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^\alpha} \big(\mathbf{1}_{\{x \geq \epsilon_m\}} - \mathbf{1}_{\{x \geq \epsilon_n\}}\big)(L_t^x - L_t^{-x}) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{dx}{x^\alpha} \big(\mathbf{1}_{\{x \geq \epsilon_m\}} - \mathbf{1}_{\{x \geq \epsilon_n\}}\big) C|x + x|^\beta \right| = 2^\beta C \int_{\epsilon_n}^{\epsilon_m} x^{\beta - \alpha} dx \\ &= 2^\beta C \frac{(\epsilon_m)^{\beta - \alpha + 1} - (\epsilon_n)^{\beta - \alpha + 1}}{\beta - \alpha + 1}.\end{aligned}$$

Como $\alpha < 3/2$ y $(\beta - \alpha + 1) > 0$ entonces $\beta \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$. De ahí se sigue que $(\frac{1}{2} - \beta) \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$. Como consecuencia de esto tenemos que

$$-\alpha + \frac{1}{2} - \beta > -1$$

lo cual implica que

$$\beta < \frac{3}{2} - \alpha.$$

De todo esto concluimos que el límite de $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existe si $\beta < \big(\frac{3}{2} - \alpha\big) \wedge \frac{1}{2}$. $\square$

Capítulo 5

Propiedades del tiempo local del movimiento Browniano.

En esta capítulo se estudiaran algunas propiedades del tiempo local del movimiento Browniano estándar $B = (B_t, t \geq 0)$. Recordemos que $(L_t^x, t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ es una familia bi-continua. A continuación probaremos el lema de Skorokhod el cual nos será muy útil para encontrar la ley del tiempo local en 0.

Lema 5.1. *(Skorokhod.) Sea $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $y(0) \leq 0$. Entonces existe una única pareja de funciones (z, a) definidas en $\mathbb{R}_+$ tal que cumplen*

i) $z = y + a$.

ii) z *es positiva.*

iii) a *es creciente y continua,* $a(0) = 0$, *y la medida* $da(s)$ *satisface*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\{z(s)>0\}} da(s) = 0.$$

Además la función a está dada por

$$a(t) = \sup_{0\leq s\leq t} (-y(s) \vee 0).$$

Demostración. Primero verifiquemos (i), (ii) y (iii) para la pareja (a, z) definida por

$$a(t) = \sup_{0\leq s\leq t} (-y(s) \vee 0) \qquad \text{y} \qquad z = y + a.$$

(i) y (ii) son consecuencia de la definición de z, y y a, al igual que las propiedades de a en (iii). Para la integral en (iii) observemos que cuando $z(s) > 0$ la función

$a(s)$ permanece constante de ahí que al integrar con respecto a la medida $da(s)$ la integral se anule.

Ahora probaremos la unicidad de (a, z) para culminar la prueba. Sea $(\widetilde{a}, \widetilde{z})$ otra pareja que cumple con las propiedades (i), (ii) y (iii). Entonces, $z - \widetilde{z} = a - \widetilde{a}$ es de variación acotada sobre cada intervalo $[0, t]$. Si integramos por parte tenemos

$$0 \leq (z(t) - \widetilde{z}(t))^2 = 2\int_0^t (z(t) - \widetilde{z}(t))d(a(t) - \widetilde{a}(t)).$$

Gracias a la propiedad (iii), la integral anterior es igual a

$$-2\int_0^t \widetilde{z}(t)d(a(t)) - 2\int_0^t z(t)d(\widetilde{a}(t))$$

lo cual es menor o igual a 0, esto como consecuencia de (i) y (ii). Por ende

$$(z(t) - \widetilde{z}(t))^2 = 0.$$

De ahí que

$$z(t) = \widetilde{z}(t).$$

□

Corolario 5.1. *El proceso $\beta = (\beta_t, t \geq 0)$ definido por*

$$\beta_t = \int_0^t sgn(B_s)dB_s,$$

es un movimiento Browniano estándar y $\mathcal{F}_t^{\beta} = \mathcal{F}_t^{|B|}$. Además,
$L_t^0 = \sup_{0\leq s\leq t}(-\beta_s)$.

Demostración. Observemos que β es una martingala local continua que empieza en 0 y además

$$\langle\beta\rangle_t = \int_0^t (\mathrm{sgn}(B_s))^2 ds = t.$$

Entonces por el teorema de caracterización de Lévy deducimos que β es un movimiento Browniano estándar. Si aplicamos la fórmula de Tanaka tenemos

$$|B_t| = \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s)dB_s + L_t^0.$$

Por el lema de Skorokhod obtenemos la identidad $L_t^0 = \sup_{0\leq s\leq t}(-\beta_s)$. Ahora como β_t y $L_t^0 = \sup_{0\leq s\leq t}(-\beta)$ son $\mathcal{F}_t^{\beta}$-medibles, de la fórmula de Tanaka se deduce que $\mathcal{F}_t^{|B|} \subset \mathcal{F}_t^{\beta}$. De la misma forma, por la fórmula de Tanaka vemos $\beta_t = |B_t| - L_t^0$. Del ejercicio 4.3 tenemos

$$L_t^o = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\epsilon}\int_0^t \mathbf{1}_{\{|B_s|<\epsilon\}}ds,$$

el cual es $\mathcal{F}_t^{|B|}$-medible y por lo tanto $\mathcal{F}_t^{\beta} \subset \mathcal{F}_t^{|B|}$. □

Teorema 5.1. *(Identidad de Lévy.) Sea* $S_t = \sup_{0\le s\le t} B_s$ *para* $t \ge 0$*. Los procesos* $(S_t - B_t, S_t; t\ge 0)$ *y* $(|B_t|, L_t^0; t \ge 0)$ *tiene la misma ley.*

Demostración. Recordemos que

$$|B_t| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) dB_s + L_t^0.$$

y escribimos $S_t - B_t = -B_t + S_t$. Por el lema de Skorokhod, tenemos que $(S-B, S)$ y $(|B|, L^0)$ son las parejas asociadas a los movimientos Brownianos B y $-\beta$, respectivamente. Como B y $-\beta$ tienen la misma ley, concluimos que $(S-B, S)$ y $(|B|, L^0)$ también. □

Ejercicio 5.1. Sea $h > 0$. Entonces, existe un movimiento Browniano $\beta = (\beta_t; t \ge 0)$ tal que

$$\left(\log\left(1 + \frac{|B_t|}{h}\right), \frac{L_t^0}{h}; t \ge 0\right) \overset{(d)}{=} (S_{H_t} - X_{H_t}, S_{H_t}; t \ge 0)\,,$$

donde $X_u = \beta_u + u/2$, $S_u = \sup_{0\le s\le u} X_s$ y

$$H_t = \int_0^t \frac{ds}{(h+|B_s|)^2}.$$

Demostración. Por la fórmula de Itô y por la definición de tiempo local tenemos que

$$\begin{aligned}
\log\left(1+\frac{|B_t|}{h}\right) &= \int_0^t \frac{1}{1+\frac{|B_t|}{h}}\frac{d|B_s|}{h} - \frac{1}{2h^2}\int_0^t \frac{1}{\left(1+\frac{|B_t|}{h}\right)^2} d\langle|B|\rangle_s \\
&= \int_0^t \frac{1}{1+\frac{|B_t|}{h}}\frac{\operatorname{sgn}(B_s)dB_s}{h} + \int_0^t \frac{1}{1+\frac{|B_t|}{h}}\frac{dL_s^0}{h} - \frac{1}{2h^2}\int_0^t \frac{1}{\left(1+\frac{|B_t|}{h}\right)^2} ds \\
&= \int_0^t \frac{1}{1+\frac{|B_t|}{h}}\frac{\operatorname{sgn}(B_s)dB_s}{h} - \frac{1}{2h^2}\int_0^t \frac{1}{\left(1+\frac{|B_t|}{h}\right)^2} ds + \int_0^t \frac{1}{h+|B_t|} dL_s^0 \\
&= \int_0^t \frac{1}{h+|B_t|}\operatorname{sgn}(B_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{(h+|B_t|)^2} + \frac{L_t^0}{h}
\end{aligned}$$

Por el teorema de Dubins-Schwarz sabemos que si M es una martingala local tal que $M_0 = 0$ c.s. y $\langle M\rangle_\infty = \infty$ c.s. Entonces existe un movimiento Browniano β tal que $M_t = \beta_{\langle M\rangle_t}$. Sean

$$M_t = \int_0^t \frac{1}{h+|B_t|}\operatorname{sgn}(B_s)dB_s = -\beta_{H_t}$$

y

$$\langle M\rangle_t = \int_0^t \frac{ds}{(h+|B_t|)^2},$$

entonces

$$\log\left(1+\frac{|B_t|}{h}\right) = M_{H_t} - \frac{1}{2}H_t + \frac{L_t^0}{h}$$
$$= -X_{\langle M\rangle_t} + \frac{L_t^0}{h}.$$

Ahora definamos a

$$z(t) = \log\left(1+\tfrac{|B_t|}{h}\right) \quad \text{y} \quad a(t) = \tfrac{L_t^0}{h},$$

entonces por el lema de Skorokhod tenemos que

$$\frac{L_t^0}{h} = \sup_{0\le s\le t}\left(X_{\langle M\rangle_s}\right) = \sup_{0\le s\le \langle M\rangle_t} X_s.$$

De lo anterior se concluye

$$\log\left(1+\frac{|B_t|}{h}\right) = -X_{\langle M\rangle_t} + \sup_{0\le s\le \langle M\rangle_t} X_s,$$

de lo cual se sigue el resultado. □

Ejercicio 5.2. Sean

$$A_t^{(+)} = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s>0\}}ds \qquad \text{y} \qquad A_t^{(-)} = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s<0\}}ds.$$

Además consideramos a sus inversos generalizados,

$$\alpha_t^{(+)} = \text{ínf}\{s : A_s^{(+)} > t\} \qquad \text{y} \qquad \alpha_t^{(-)} = \text{ínf}\{s : A_s^{(-)} > t\}.$$

Entonces,

i) Existen dos movimientos Brownianos independientes $\beta^{(+)}$ y $\beta^{(-)}$ tales que $L^0_{\alpha_t^{(+)}} = 2\sup_{0\le s\le t}(-\beta_s^{(+)})$ y $L^0_{\alpha_t^{(-)}} = 2\sup_{0\le s\le t}(\beta_s^{(-)})$.

ii) $(B^+_{\alpha_t^{(+)}}, t\ge 0)$ y $(B^-_{\alpha_t^{(-)}}, t\ge 0)$ son dos movimientos Brownianos reflejados independientes.

Demostración. i) Gracias a la fórmula de Tanaka tenemos

$$B_t^+ = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s>0\}}dB_s + \frac{1}{2}L_t^0.$$

Sean $z(t) = B_t^+$, $y(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s>0\}}dB_s$ y $a(t) = \frac{1}{2}L_t^0$, entonces por el lema de Skorokhod observamos que (z,a) es la pareja de funciones asociadas a y. Además

$$\frac{1}{2}L_t^0 = \sup_{0\le s\le t}\{-y(s)\}.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2}L^0_{\alpha_t^{(+)}} = \sup_{0\le s\le \alpha_t^{(+)}} \{-y(s)\} = \sup_{0\le s\le t} \left\{-y\left(\alpha_t^{(+)}\right)\right\}.$$

Ahora probaremos que $y(\alpha_t^{(+)})$ es un movimiento Browniano, para ello observemos que y es una martingala local continua tal que

$$\langle y\rangle_{\alpha_t^{(+)}} = \int_0^{\alpha_t^{(+)}} \mathbf{1}_{\{B_s>0\}} ds = A^{(+)}_{\alpha_t^{(+)}} = t.$$

Por el teorema de Lévy concluimos que $y(\alpha_t^{(+)})$ es un movimiento Browniano. De manera análoga se tiene que

$$\widetilde{y}\left(\alpha_t^{(-)}\right) = -\int_0^{\alpha_t^{(-)}} \mathbf{1}_{\{B_s<0\}} dB_s,$$

es un movimiento Browniano con $L^0_{\alpha_t^{(-)}} = 2\sup_{0\le s\le t}\left\{\widetilde{y}\left(\alpha_t^{(-)}\right)\right\}$.

Sean $\beta_t^{(+)} = y(\alpha_t^{(+)})$ y $\beta_t^{(-)} = \widetilde{y}(\alpha_t^{(-)})$. Para probar la independencia entre $\beta_t^{(+)}$ y $\beta_t^{(-)}$ basta ver que $\langle \beta^{(+)}, \beta^{(-)}\rangle_t = 0$.

$$\langle \beta^{(+)}, \beta^{(-)}\rangle_t = \int_0^t -\mathbf{1}_{\{B_s>0\}}\mathbf{1}_{\{B_s<0\}} d\langle \beta^{(+)}, \beta^{(-)}\rangle_s = 0.$$

ii) Sea $S_t = \sup_{0\le s\le t} B_s$ podemos escribir $S_t - B_t = -B_t + S_t$, además por la fórmula de Tanaka tenemos

$$B^+_{\alpha_t^{(+)}} = \int_0^{\alpha_t^{(+)}} \mathbf{1}_{\{B_s>0\}} ds + \frac{1}{2}L^0_{\alpha_t^{(+)}} = -\left(-\beta_t^{(+)}\right) + \sup_{0\le s\le t}\left\{-\beta_s^{(+)}\right\}.$$

Por el lema de Skorokhod $\left(B^+_{\alpha_t^{(+)}}, \sup_{0\le s\le t}\{-\beta_s^{(+)}\}\right)_{t\ge 0}$ y $(S_t - B_t, S_t)_{t\ge 0}$ son las parejas de funciones asociadas a $-\beta^{(+)}$ y B respectivamente. Como $-\beta^{(+)}$ y B son movimientos Brownianos se concluye que $(B^+_{\alpha_t^{(+)}})_{t\ge 0}$ tiene la misma distribución que $(S_t - B_t)_{t\ge 0}$, pero este último a su vez se distribuye igual que $(|B_t|)_{t\ge 0}$ gracias a la identidad de Lévy. Por lo tanto $\left(B^+_{\alpha_t^{(+)}}\right)_{t\ge 0}$ es un movimiento Browniano reflejado. De igual forma se puede ver que $\left(B^-_{\alpha_t^{(-)}}\right)_{t\ge 0}$ también lo es.

La independencia de ambos procesos es debido a que $(B^+_{\alpha_t^{(+)}})_{t\ge 0}$ es una funcional de $\beta^{(+)}$ y $\left(B^-_{\alpha_t^{(-)}}\right)_{t\ge 0}$ de $\beta^{(-)}$.

□

Ejercicio 5.3. Sean $\mu \in \mathbb{R}$ y $B^{(\mu)} = (B_t^{(\mu)}, t \geq 0)$, donde $B_t^{(\mu)} = B_t + t\mu$. Además sea $X^\mu = (X_t^\mu, t \geq 0)$ el proceso ”Bang-Bang”, el cual es solución (en ley) a la ecuación

$$X_t^\mu = \beta_t - \mu \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^\mu)\, ds,$$

donde $\beta = (\beta_t, t \geq 0)$ es un movimiento Browniano estándar. Entonces los procesos $\left(S_t^{(\mu)} - B_t^{(\mu)}, S_t^{(\mu)}; t \geq 0\right)$ y $\left(|X_t^\mu|, L_t^0(X^\mu); t \geq 0\right)$ tienen la misma ley.

Demostración. Sea

$$\gamma_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^\mu)\, d\beta_s - \mu t,$$

por la caracterización de Lévy, $\gamma_t + \mu t$ es un movimiento Browniano. De ahí que

$$-\gamma \overset{(\mathrm{d})}{=} B^{(\mu)}.$$

, Gracias a la fórmula de Tanaka tenemos que

$$|X_t^\mu| = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^\mu)\, dX_s^\mu + L_t^0(X^\mu).$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^\mu)\, dX_s^\mu = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^\mu)\, d\left(\beta_s - \mu \int_0^s \operatorname{sgn}(X_s^\mu)\, ds\right) \\
&= \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^\mu)\, d\beta_s - \mu \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^\mu) \operatorname{sgn}(X_s^\mu)\, ds = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^\mu)\, d\beta_s - \mu t \\
&= \gamma_t.
\end{aligned}$$

Se concluye que

$$|X_t^\mu| = \gamma_t + L_t^0(X^\mu).$$

Por el lema de Skorokhod obtenemos que

$$L_t^0(X^\mu) = \sup_{0 \leq s \leq t} (-\gamma_s).$$

Sea $\mathcal{H}(X) = \big(\big(S_t(X) - X_t, S_t(X)\big), t \geq 0\big)$, como $-\gamma \overset{(\mathrm{d})}{=} B^{(\mu)}$ entonces $\mathcal{H}(B^{(\mu)})$ y $\mathcal{H}(-\gamma)$ tienen la misma ley y

$$\mathcal{H}(-\gamma) = \left(|X_t^\mu|, L_t^0(X^\mu); t \geq 0\right).$$

Por lo tanto $\left(S_t^{(\mu)} - B_t^{(\mu)}, S_t^{(\mu)}; t \geq 0\right)$ y $\left(|X_t^\mu|, L_t^0(X^\mu); t \geq 0\right)$ tienen la misma ley. $\square$

Recordemos que una manera de aproximar al tiempo local del movimiento Browniano es la siguiente

$$L_t^x = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{|B_s - x| < \epsilon\}} ds.$$

Existen varias aproximaciones del tiempo local del movimiento Browniano. El siguiente resultado, el cual se conoce como *Lévy's downcrossing theorem*, nos da otra manera de aproximar al tiempo local del movimiento Browniano.

Para $\epsilon > 0$, definimos

$$\begin{aligned} \sigma_0^\epsilon &= 0, & \tau_0^\epsilon &= \inf\{t > 0 : B_t = x + \epsilon\}, \\ \sigma_n^\epsilon &= \inf\{t > \tau_{n-1}^\epsilon : B_t = x\}, & \tau_n^\epsilon &= \inf\{t > \sigma_n^\epsilon : B_t = x + \epsilon\}. \end{aligned}$$

Sea

$$d_\epsilon(t) = \max\{n : \sigma_n^\epsilon \leq t\},$$

el número de veces que el movimiento Browniano bajo del nivel $x + \epsilon$ al nivel x antes del tiempo t.

Teorema 5.2. *Para toda $t \geq 0$ y toda $x \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{\epsilon \to 0} 2\epsilon d_\epsilon(t) = L_t^x, \qquad \textit{casi seguramente.}$$

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x = 0$. Gracias a la fórmula de Tanaka, tenemos

$$B^+_{t\wedge\tau_n^\epsilon} - B^+_{t\wedge\sigma_n^\epsilon} = \int_{t\wedge\sigma_n^\epsilon}^{t\wedge\tau_n^\epsilon} \mathbf{1}_{\{B_s > 0\}} dB_s + \frac{1}{2}\left(L^0_{t\wedge\tau_n^\epsilon} - L^0_{t\wedge\sigma_n^\epsilon}\right).$$

Como B no se anula en $[\tau_n^\epsilon, \sigma_{n+1}^\epsilon)$ entonces,

$$L^0_{t\wedge\tau_n^\epsilon} - L^0_{t\wedge\sigma_n^\epsilon} = L^0_{t\wedge\sigma_{n+1}^\epsilon} - L^0_{t\wedge\sigma_n^\epsilon}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (B^+_{t\wedge\tau_n^\epsilon} - B^+_{t\wedge\sigma_n^\epsilon}) = \int_0^t X_s(\epsilon) \mathbf{1}_{\{B_s > 0\}} dB_s + \frac{1}{2} L_t^0,$$

donde

$$X_s(\epsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[\sigma_n^\epsilon, \tau_n^\epsilon)}(s) \mathbf{1}_{(0,\epsilon]}(B_s).$$

Ahora notemos que $B^+_{t\wedge\tau_n^\epsilon} - B^+_{t\wedge\sigma_n^\epsilon} = \epsilon$ sobre el evento $\{\tau_n^\epsilon < t\}$. Entonces

$$\epsilon d_\epsilon(t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (B^+_{t\wedge\tau_n^\epsilon} - B^+_{t\wedge\sigma_n^\epsilon}) \leq \epsilon(d_\epsilon(t) + 1).$$

Esto implica que

$$\left| \epsilon d_\epsilon(t) - \frac{1}{2} L_t^0 \right| \leq \epsilon + \left| \int_0^t X_s(\epsilon) \mathbf{1}_{\{B_s > 0\}} dB_s \right|.$$

Sea $p \geq 1$. Por la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy,

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t X_s(\epsilon)\mathbf{1}_{\{B_s>0\}} dB_s\right|^p\right] \leq C(p)\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \big(X_s(\epsilon)\big)^2 \mathbf{1}_{\{B_s>0\}} ds\right)^{p/2}\right].$$

Por el teorema de convergencia dominada la expresión de la derecha en la desigualdad anterior converge a 0. Por lo tanto hemos probado que $2\epsilon d_\epsilon(t)$ converge a L_t^0 en $\mathcal{L}^p$, para todo $p \geq 1$.

Para probar la convergencia casi segura, tomemos $p = 2$ en la última desigualdad. Notemos que $\big(X_s(\epsilon)\big)^2 = X_s(\epsilon) \leq \mathbf{1}_{(0,\epsilon]}(B_s)$, de ahí que

$$\mathbb{E}\left[\big(X_s(\epsilon)\big)^2\right] \leq \mathbb{P}[0 < B_s \leq \epsilon] \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi s}}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X_s(\epsilon)\mathbf{1}_{\{B_s>0\}} dB_s\right)^2\right] \leq C(2)\int_0^t \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi s}} ds = \frac{\sqrt{2}C(2)\sqrt{t}\epsilon}{\sqrt{\pi}}$$

y

$$\mathbb{E}\left[\big(2\epsilon d_\epsilon(t) - L_t^0\big)^2\right] \leq K \times \epsilon,$$

donde K es una constante positiva.

Sea $\epsilon = \epsilon_n = n^{-4}$. De la desigualdad de Markov, se tiene

$$\mathbb{P}\left[\big(2\epsilon_n d_{\epsilon_n}(t) - L_t^0\big)^2 \geq n\right] \leq \frac{K}{n^2}.$$

Gracias al lema de Borel-Cantelli, vemos que $|2\epsilon_n d_{\epsilon_n}(t) - L_t^0| < n^{-1}$ casi seguramente para todo n suficientemente grande.

Sea $\epsilon \in [\epsilon_{n+1}, \epsilon_n]$. Dado que $\epsilon \to d_\epsilon(t)$ es creciente, tenemos

$$2\epsilon d_\epsilon(t) \geq 2\epsilon_{n+1} d_{\epsilon_n}(t) \geq \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n}(L_t^0 - n^{-1}),$$

y

$$2\epsilon d_\epsilon(t) \leq 2\epsilon_n d_{\epsilon_{n+1}}(t) \leq \frac{\epsilon_n}{\epsilon_{n+1}}(L_t^0 - (n+1)^{-1}).$$

Por ende, tenemos que $\lim_{\epsilon\to 0} 2\epsilon d_\epsilon(t) = L_t^0$, casi seguramente. $\square$

Finalizaremos esta sección con la ley arco seno del movimiento Browniano. Es por ello que estudiaremos al conjunto de ceros del movimiento Browniano en términos del tiempo local en 0. Sea $(\tau_t, t \geq 0)$ el inverso generalizado del tiempo local L_t^0, es decir,

$$\tau_t = \inf\big\{s > 0 : L_s^0 > t\big\}.$$

Por la indentidad de Lévy, vemos que $L_\infty^0 = \infty$ casi seguramente. Esto implica que $\tau_t < \infty$ para toda $t \geq 0$. Sea

$$\mathcal{O}(\omega) = \bigcup_{s\geq 0} \big(\tau_{s-}(\omega), \tau_s(\omega)\big),$$

donde $\tau_{0-} = 0$. Los intervalos (τ_{s-}, τ_s) son vacíos excepto si el tiempo local L^0 es constante en el nivel s. En este caso (τ_{s-}, τ_s) es precisamente el intervalo en el cual L^0 es constante en el nivel s. Esto tiene como consecuencia el que los intervalos (τ_{s-}, τ_s) son disjuntos dos a dos y $\mathcal{O}(\omega)$ es una unión numerable de intervalos. En el siguiente resultado veremos que $\mathcal{O}(\omega)$ no es más que el complemento del conjunto de ceros del movimiento Browniano.

Proposición 5.1. *Los siguientes conjuntos*

i) $Z(\omega) = \{t \geq 0 : B_t(\omega) = 0\}$,

ii) $\mathcal{O}(\omega)^c$,

iii) el soporte $\Sigma(\omega)$ *de la medida* $dL_t^0(\omega)$,

son idénticos para casi toda ω.

Demostración. Sea $A = \cup_{i \in J} A_i$ un abierto de $\mathbb{R}_+$. Denotemos por μ a la medida aleatoria dL_t^0. Observemos que $\mu(A) = 0$ si y solamente si L^0 es constante en cada A_i. Entonces $\mathcal{O}(\omega)$ es el abierto más grande de medida cero. De ahí se concluye que $\Sigma(\omega) = \mathcal{O}(\omega)^c$.

Del teorema 4.3, $\Sigma(\omega) \subset Z(\omega)$. Ahora demostraremos que $Z(\omega) \subset \Sigma(\omega)$, para ello observemos que $L_t^0 > 0$ c.s. para toda $t > 0$, i.e. que $\tau_0 = 0$ c.s. Además observemos que $d_t = \inf\{s \geq t : B_s = 0\}$ es un tiempo de paro y $B_{d_t} = 0$. De la fórmula de Tanaka tenemos

$$|B_{d_t+u}| = \int_0^{d_t+u} \operatorname{sgn}(B_s) dB_s + L_{d_t+u}^0 \tag{5.1}$$

$$= \int_0^{d_t} \operatorname{sgn}(B_s) dB_s + \int_{d_t}^{d_t+u} \operatorname{sgn}(B_s) dB_s + L_{d_t+u}^0. \tag{5.2}$$

Observamos que si $u = 0$ entonces

$$-L_{d_t}^0 = \int_0^{d_t} \operatorname{sgn}(B_s) dB_s. \tag{5.3}$$

Entonces de (5.1), (5.2) y (5.3) obtenemos

$$|B_{d_t+u}| = \int_0^u \operatorname{sgn}(\widetilde{B}_s) d\widetilde{B}_s - L_t^0 = |\widetilde{B}_u|,$$

donde $\widetilde{B}_u = B_{d_t+u} - B_{d_t}$. Por lo tanto $L_{d_t+u}^0 - L_{d_t}^0$ es el tiempo local en 0 de $\widetilde{B}$. De ahí se deduce que $L_{d_t+s}^0 - L_{d_t} > 0$ c.s. para toda $s > 0$. Es decir, para cualquier t fija, el punto $d_t(\omega) \in \Sigma(\omega)$ para casi toda ω. Por ende para casi toda ω fija, $d_r(\omega) \in \Sigma(\omega)$ para toda $r \in \mathbb{Q}_+$. Debido a esto último veamos que si $\mathbb{P}[d_r \in \Sigma, r \in \mathbb{Q}_+] = 1$ entonces $\mathbb{P}[d_t \in \Sigma, t \geq 0] = 1$.

Sea $s \in Z(\omega) \setminus \{0\}$ y recordemos que $Z(\omega)$ es cerrado debido a que $t \to B_t(\omega)$ es continuo. Entonces, existe una sucesión (r_n) de racionales estrictamente creciente tal que $r_n \to s$ y que para toda $n \geq 1$, $r_n \notin Z(\omega)$. Esto es cierto, de lo contrario existiría un intervalo no vacío $(s-\delta) \subset Z(\omega)$ y esto contradice el hecho de que el interior de $Z(\omega)$ es vacío (ya que tiene medida de Lesbegue 0). Por definición, $r_n < s$ para toda $n \geq 1$ y dado que $B_s(\omega) = 0$ entonces $d_{r_n}(\omega) \leq s$. De ahí que, s es el límite de $(d_{r_n}(\omega)) \in \Sigma(\omega)$ y por lo tanto $s \in \Sigma(\omega)$. Se concluye que $Z(\omega) \subset \Sigma(\omega)$.

□

Ejercicio 5.4. Sea $0 < c < \infty$.

i) Probar que $\left(B_t, L_t^\alpha; t \geq 0\right)$ y $\left(B_{ct}, L_{ct}^{\alpha\sqrt{c}}\right)/\sqrt{c}$, $a \in \mathbb{R}$ tienen la misma ley.

ii) Probar que el proceso $(\tau_t, t \geq 0)$ es un subordinador estable de índice $1/2$.

iii) Probar que casi seguramente, $B_{\tau_t} = B_{\tau_{t-}} = 0$ para toda $t \geq 0$.

iv) Si $T_\alpha = \text{ínf}\{t : B_t = a\}$, probar que

$$\left(L_{T_\alpha}^x, x \in \mathbb{R}, a \geq 0\right) \quad \text{y} \quad \left(c^{-1} L_{T_{c\alpha}}^{cx}, x \in \mathbb{R}, a \geq 0\right)$$

tienen la misma ley.

Demostración. i) Si B y β son movimientos Brownianos, entonces

$$(B_t, L_t^a(B); t \geq 0) \overset{(d)}{=} (\beta_t, L_t^a(\beta); t \geq 0)\,.$$

Por la propiedad de "scaling" sobre B_t, tenemos que $\frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}$ es movimiento Browniano de ahí se puede ver que

$$(B_t, L_t^a(B); t \geq 0) \overset{(d)}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}, L_t^a\left(\frac{1}{\sqrt{c}} B_c\right); t \geq 0\right),$$

basta verificar que en ley

$$\frac{1}{\sqrt{c}} L_{ct}^{a\sqrt{c}}(B_c) \overset{(d)}{=} L_t^a\left(\frac{1}{\sqrt{c}} B_c\right). \tag{5.4}$$

En sí esto se probará c.s. Por la fórmula de Tanaka, $L_t^a\left(\frac{1}{\sqrt{c}} B_c\right)$. satisface que

$$\left|\frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct} - a\right| = |-a| + \int_0^t \text{sgn}\left(\frac{1}{\sqrt{c}} B_{cs} - a\right) d\left(\frac{1}{\sqrt{c}} B_{cs}\right) + L_t^a\left(\frac{1}{\sqrt{c}} B_c\right),$$

es decir,

$$\left|B_{ct} - a\sqrt{c}\right| = \left|-a\sqrt{c}\right| + \int_0^t \text{sgn}\left(B_{cs} - a\sqrt{c}\right) d\left(B_{cs}\right) + \sqrt{c} L_t^a\left(\frac{1}{\sqrt{c}} B_c\right).$$

De manera similar, por Tanaka, podemos obtener una ecuación similar para $L_{ct}^{a\sqrt{c}}(B_c)$. De ahí que para concluir que se satisface (5.4) falta probar que

$$\int_0^t \operatorname{sgn}\left(B_{cs} - a\sqrt{c}\right) d\left(B_{cs}\right) = \int_0^{ct} \operatorname{sgn}\left(B_s - a\sqrt{c}\right) d\left(B_s\right).$$

Esto se logra con el cambio de variable $u = cs$ en la integral de la izquierda.

ii) Se puede ver que para cada $t \geq 0$,

$$T_t = \text{ínf}\{s > 0 | B_s > t\} = \text{ínf}\left\{s > 0 \,\middle|\, \sup_{0\leq u\leq s} B_u > t\right\}$$

y por la identidad de Lévy

$$\left(L_s^0(B)\right)_{s\geq 0} \overset{(\mathrm{d})}{=} \left(\sup_{0\leq u\leq s} B_s\right)_{s\geq 0}.$$

Así, para cada $t \geq 0$

$$\tau_t \overset{(\mathrm{d})}{=} T_t. \tag{5.5}$$

Probemos que $T = (T_t, t \geq 0)$ es un subordinador estable de índice $1/2$, para esto verifiquemos primero que es un proceso de Lévy.

Por la continuidad de las trayectorias del movimiento Browniano, se tiene que $B_{T_t} = t$ c.s. y por la propiedad fuerte de Markov

$$\left(B_{T_t+s} - t, s \geq 0\right) \overset{(\mathrm{d})}{=} \left(B_s, s \geq 0\right).$$

Luego, para cada $0 \leq t < s$

$$T_s \overset{(\mathrm{d})}{=} T_t + \widetilde{T}_{s-t},$$

donde $\widetilde{T}_{s-t}$ es una copia de T_{s-t} independiente de T_t. Por lo tanto, T tiene incrementos independientes y estacionarios. Ahora, gracias a la continuidad de las trayectorias del movimiento Browniano, se sigue que T tiene trayectorias càdlàg y así obtenemos que T es un procesos de Lévy. Además, T es un subordinador, ya que tiene trayectorias no decrecientes.

Por otro lado, para $\lambda > 0$, $\exp\left(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right)$ es una martingala. Notemos que la martingala parada, $\exp\left(\lambda B_{t\wedge T_s} - \frac{1}{2}\lambda^2(t\wedge T_s)\right)$ está acotada por $e^{\lambda s}$. Como consecuencia del teorema de paro opcional y de la continuidad de las trayectorias de B deducimos que

$$\mathbb{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 T_s}\right] = e^{-\lambda s},$$

o de manera equivalente,

$$\mathbb{E}\left[e^{-qT_s}\right] = e^{-\sqrt{2q}s}.$$

De aquí se observa que la transformada de Laplace de T coincide con la de un proceso estable de índice $1/2$, de esto se tiene que T pertenece a esta familia de procesos estocásticos.

Debido a que T es un proceso de Lévy y a (5.5), sólo resta mostrar que τ también es un proceso de Lévy. Claramente es càdlàg. Veamos ahora que tiene incrementos independientes y estacionarios, para ello mostraremos que

$$\tau_{t+s} \stackrel{\text{(d)}}{=} \tau_t + \widetilde{\tau}_t,$$

donde $\widetilde{\tau}_t$ es una copia de τ_t independiente de τ_s. Notamos que

$$\begin{aligned}
\tau_{t+s} &= \text{ínf}\{u > 0 | L_u > t + s\} = \tau_s + \text{ínf}\{u > \tau_s | L_u > t + L_{\tau_s}\} \\
&= \tau_s + \text{ínf}\{v > 0 | L_{\tau_s+v} - L_{\tau_s} > t\}.
\end{aligned}$$

Ahora todo se reduce a verificar que

$$L_{\tau_s+v} - L_{\tau_s} \stackrel{\text{(d)}}{=} \widetilde{L}_v, \qquad v \geq 0,$$

donde $\widetilde{L}_v$ es el tiempo local del movimiento Browniano independiente a τ_s. Gracias a la fórmula de Tanaka

$$|B_{\tau_s+u}| = \int_0^{\tau_s+u} \text{sgn}(B_v) dB_v + L^0_{\tau_s+u}(B) \tag{5.6}$$

$$= \int_0^{\tau_s} \text{sgn}(B_v) dB_v + \int_{\tau_s}^{\tau_s+u} \text{sgn}(B_v) dB_v + L^0_{\tau_s+u}(B). \tag{5.7}$$

Así mismo tenemos que

$$\int_0^{\tau_s} \text{sgn}(B_v) dB_v = |B_{\tau_s}| - L^0_{\tau_s}(B) = -L^0_{\tau_s}(B) \tag{5.8}$$

y

$$\int_{\tau_s}^{\tau_s+u} \text{sgn}(B_v) dB_v = \int_0^u \text{sgn}(B_{\tau_s+v}) dB_{\tau_s+v} = |B_{\tau_s+u}| - L^0_u(\widetilde{B}). \tag{5.9}$$

Donde $\widetilde{B}_u = B_{\tau_s+u}$, $\widetilde{B}$ es un movimiento Browniano independiente de τ_s. Sustituyendo (5.8) y (5.9) en (5.7) obtenemos el resultado que deseamos probar.

iii) Por la proposición 5.1, sabemos que $Z(\omega) = \mathcal{O}(\omega)^c$. Observemos que $\mathcal{O}(\omega)^c = \{\tau_{s^-}(\omega), \tau_s(\omega) | s \geq 0\}$, de lo cual se sigue el resultado. Ya que $Z(\omega) = \{t \geq 0 | B_t(\omega) = 0\}$.

iv) Si asignamos a t, T_a y a c, c^2 en (i) se tiene que

$$L^{\alpha}_t(B) \stackrel{\text{(d)}}{=} \frac{1}{\sqrt{c}} L^{a\sqrt{c}}_{ct}(B),$$

entonces, en particular

$$L^x_{T_a} \overset{(d)}{=} \frac{1}{c} L^{ac}_{c^2 T_a}(B).$$

Por la propiedad de "scaling" del movimiento Browniano observamos que

$$\begin{aligned} T_c a &= \inf\{t | B_t = ca\} = \inf\left\{ t \,\middle|\, \frac{1}{c} B_t = a \right\} \\ &\overset{(d)}{=} \inf\left\{ t | B_{\frac{1}{c^2} t} = a \right\} = c^2 \inf\{s | B_s = a\} = c^2 T_a. \end{aligned}$$

De ahí que

$$L^x_{T_a}(B) \overset{(d)}{=} \frac{1}{c} L^{ac}_{T_{ca}}(B).$$

$\square$

Corolario 5.2. *Casi seguramente, para toda $t \in Z$ tenemos que $t = \tau_s$ ó $t = \tau_{s-}$.*

Demostración. Sea $t \in Z(\omega) \setminus \{0\} = \Sigma(\omega) \setminus \{0\}$. Sólo hay dos posibilidades. En la primera posibilidad $L^0_{t+\epsilon} - L^0_t > 0$ para toda $\epsilon > 0$. De ahí que $t = \inf\{u : L^0_u \geq L^0_t\}$ y por lo tanto $t = \tau_s$, donde $s = L^0_t$. En la segunda, si existe $\epsilon > 0$ tal que $L^0_{t+\epsilon} = L^0_t$, entonces para toda $\delta > 0$, $L^0_t > L^0_{t-\delta}$. Esto último implica que $t = \inf\{u : L^0_u \geq L^0_t\} = \tau_{s-}$ donde $s = L^0_t$. $\square$

Una variable aleatoria Y tiene la ley del arco seno si su densidad es de la forma

$$\mathbb{P}[Y \in dx] = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \mathbf{1}_{[0,1)}(x).$$

La variable aleatoria Y se puede representar de varias maneras, por ejemplo

$$Y \overset{(d)}{=} \frac{N^2}{N^2 + (N')^2} \overset{(d)}{=} \cos^2(\theta) \overset{(d)}{=} \frac{T}{T+T'},$$

donde N yN' son dos variables aleatorias normales estándar independientes, θ es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, 2\pi]$ y T y T' son dos variables aleatorias independientes con la misma distribución que $1/N^2$.

Ejercicio 5.5. Probar que $T_1 = \inf\{s : B_s = 1\}$ tiene la misma distribución en ley que T y deducir (usando la propiedad fuerte de Markov) que $g_1 = \sup\{t < 1 : B_t = 0\}$ tiene la misma ley del arco seno.

Demostración. Sea $T \overset{(d)}{=} \frac{1}{N^2}$ donde N se distribuye normal con media 0 y varianza 1. Sea $S_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s$, observemos que

$$\begin{aligned} S_t &= \sup_{0 \leq s \leq t} B_s = \sup_{0 \leq s \leq t} B_{\frac{s}{t} t}, \qquad \text{si} \quad \frac{s}{t} = u, \\ &= \sup_{0 \leq ut \leq t} B_{ut} \overset{(d)}{=} t^{\frac{1}{2}} \sup_{0 \leq u \leq 1} B_u \qquad \text{(esto debido a la propiedad de "scaling")} \\ &= t^{\frac{1}{2}} S_1. \end{aligned}$$

$T_1 = \text{ínf}\{s : B_s = 1\}$ entonces como consecuencia de las propiedades de "scaling" y reflexión tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[T_1 > t] &= \mathbb{P}[S_t < 1] = \mathbb{P}\left[S_1 < t^{-\frac{1}{2}}\right] = \mathbb{P}\left[|B_1| < t^{-\frac{1}{2}}\right] \\ &= \mathbb{P}[N^2 < t^{-1}] = \mathbb{P}\left[t < \frac{1}{N^2}\right].\end{aligned}$$

$g_1 = \sup\{t < 1 : B_t = 0\}$ y además, sean $du = \text{ínf}\{s > u | B_s = 0\}$ y $\widetilde{B} = ((B_{t+u} - B_u)_{t\geq 0})$. Se puede deducir que

$$\mathbb{P}[g_1 < u] = \mathbb{P}[du > 1].$$

Antes de seguir nuestro cálculo de distribuciones fijemonos en lo siguiente.

$$\begin{aligned} du &= u + \text{ínf}\{s \geq 0 | B_{s+u} = 0\} = u + \text{ínf}\{s \geq 0 | B_{s+u} - B_u = -B_u\} \\ &= u + \text{ínf}\{s \geq 0 | \widetilde{B}_s = -B_u\}.\end{aligned}$$

Sea $\widetilde{T}_x = \text{ínf}\{s \geq 0 | \widetilde{B}_s = x\}$, por la propiedad de "scaling" obtenemos que $\widetilde{T}_x \stackrel{(d)}{=} x^2 \widetilde{T}_1$ y de ahí se deduce que $\widetilde{T}_1 \stackrel{(d)}{=} T_1$, donde $T_1 = \text{ínf}\{s \geq 0 | B_s = 1\}$. Si además recordamos que $\widetilde{B}$ es independiente de $(B_w, w \leq u)$, entonces

$$du = u + \widetilde{T}_{-B_u}.$$

De esto se sigue que

$$du \stackrel{(d)}{=} u + T_1 (B_u)^2.$$

Continuando con nuestros cálculos de distribuciones deducimos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[g_1 < u] &= \mathbb{P}[du > 1] = \mathbb{P}\left[u + T_1(B_u)^2 > 1\right] = \mathbb{P}\left[\frac{1-u}{(B_u)^2} < T_1\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\frac{1-u}{(B_u)^2} < \frac{1}{N^2}\right] = \mathbb{P}\left[\frac{1-u}{uN'^2} < \frac{1}{N^2}\right] = \mathbb{P}\left[\frac{1}{u} < \frac{N'^2 + N^2}{N^2}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\frac{N^2}{N'^2 + N^2} < u\right].\end{aligned}$$

donde N es independiente de B_u. Además, B_u se distribuye normal con media 0 y varianza u. $B_u \stackrel{(d)}{=} N' u^{1/2}$, donde N' es una normal con media 0 y varianza 1. Por lo tanto, $g_1 = \sup\{t < 1 : B_t = 0\}$ tiene la misma ley del arco seno. $\square$

El siguiente objetivo es determinar la ley de la funcional

$$A_1^{(+)} = \int_0^1 \mathbf{1}_{\{B_s > 0\}} ds.$$

Teorema 5.3. *(Ley arco seno de Lévy.) La ley de $A_1^{(+)}$ es la ley arco seno en* $[0, 1]$.

Demostración. Recordemos las definiciones de los inversos generalizados de las funcionales $A^{(+)}$ y $A^{(-)}$,

$$\alpha_t^{(+)} = \text{ínf}\left\{s \geq 0 : A_s^{(+)} > t\right\} \quad \text{y} \quad \alpha_t^{(-)} = \text{ínf}\left\{s \geq 0 : A_s^{(-)} > t\right\}.$$

Además del ejercicio 5.2 recordemos que existen dos movimientos Brownianos independientes $\beta^{(+)}$ y $\beta^{(-)}$, tales que

$$L^0_{\alpha_t^{(+)}} = 2 \sup_{0\leq s\leq t}\left(-\beta_s^{(+)}\right) \quad y \quad L^0_{\alpha_t^{(-)}} = 2 \sup_{0\leq s\leq t}\beta_s^{(+)}.$$

Para $t > 0$ fijo, vamos a probar que $A^{(-)}_{\alpha_t^{(+)}} = A^{(-)}\left(\tau_{L^0_{\alpha_t^{(+)}}}\right)$. Para ello observemos que $\tau_{L^0_s} \geq s$. Si $\tau_{L^0_s} = s$ entonces s es un punto de crecimiento de L^0, claramente la igualdad es válida para $s = \alpha_t^{(+)}$. Ahora si $\tau_{L^0_s} > s$ entonces $L_{s+\epsilon} = L_s$ para $\epsilon = \tau_{L^0_s} - s > 0$. En este caso el movimiento Browniano no se anula en el intervalo $(s, \tau_{L^0_s})$ (ya que $Z(\omega)$ es el soporte de $dL^0(\omega)$). Sigamos el caso $s = \alpha_t^{(+)}$. Si $\tau_{L^0_{\alpha_t^{(+)}}} > \alpha_t^{(+)}$, entonces B no se anula en el intervalo $\left(\alpha_t^{(+)}, \tau_{L^0_{\alpha_t^{(+)}}}\right)$, lo cual significa que $B \geq 0$, en $\left[\alpha_t^{(+)}, \tau_{L^0_{\alpha_t^{(+)}}}\right)$ y que $A^{(-)}_{\alpha_t^{(+)}} = A^{(-)}\left(\tau_{L^0_{\alpha_t^{(+)}}}\right)$.

Como $A^{(-)}$ es el inverso generalizado de $\alpha^{(-)}$, vemos

$$\begin{aligned}
A^{(-)}_{\tau_t} &= \text{ínf}\left\{u : \alpha_u^{(-)} > \tau_s\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{u : L^0_{\alpha_u^{(-)}} > s\right\} && \big(\text{ya que} \quad \{\tau_s < a\} = \left\{L^0_a > s\right\}\big) \\
&= \text{ínf}\left\{u : 2\sup_{0\leq v\leq u}\beta_v^{(-)} > s\right\} && \left(\text{ya que} \quad L^0_{\alpha_u^{(-)}} = 2\sup_{0\leq v\leq u}\beta_v^{(-)}\right).
\end{aligned}$$

Entonces

$$A^{(-)}_{\alpha_t^{(+)}} = A^{(-)}\left(\tau_{L^0_{\alpha_t^{(+)}}}\right) = \text{ínf}\left\{u : \sup_{0\leq v\leq u}\beta_v^{(-)} > \sup_{0\leq s\leq t}\big(-\beta_s^{(+)}\big)\right\}.$$

Recordemos que $\beta^{(-)}$ y $\beta^{(+)}$ son dos movimientos Brownianos independientes. Por el ejercicio 5.5 sabemos que $\sup_{0\leq s\leq t}\big(-\beta_s^{(+)}\big)$ tiene la misma ley que $\sqrt{(t)}|N|$, donde N es una variable aleatoria normal estándar. Además para cada $a > 0$,

$$\text{ínf}\left\{u : \sup_{0\leq v\leq u}\beta_v^{(-)} > a\right\} \overset{(\mathrm{d})}{=} \frac{a^2}{N^2}.$$

De ahí que

$$A^{(-)}_{\alpha_t^{(+)}} \overset{(\mathrm{d})}{=} t\frac{(N')^2}{N^2},$$

donde N' es una copia independiente de N. Dado que $\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{B_s=0\}}ds = 0$, tenemos que $u = A_u^{(+)} + A_u^{(-)}$. Esto implica que $\alpha_t^{(+)} = t + A^{(-)}_{\alpha_t^{(+)}}$. Por lo tanto,

$$\mathbb{P}\left[A_1^{(+)} > t\right] = \mathbb{P}\left[\alpha_t^{(+)} < 1\right] = \mathbb{P}\left[t < \frac{1}{1+\frac{(N')^2}{N^2}}\right].$$

Es decir, la ley de $A_1^{(+)}$ es la ley del arco seno. □

Finalizaremos esta sección con la segunda ley del arco seno, la prueba de dicha ley se basa en las propiedades de cambio de tiempo aleatorio del movimiento Browniano y en un resultado de absoluta continuidad que se presenta a continuación.

Sea $\big(A_t; t \geq 0\big)$ un proceso creciente tal que la pareja $\big((B_t, A_t); t \geq 0\big)$ satisface la propiedad de "scaling", es decir, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que para cada $c > 0$

$$\big((B_c t, A_c t); t \geq 0\big) \overset{\text{(d)}}{=} \big((\sqrt{c}B_t, c^{r+1}A_t)\,; t \geq 0\big)\,.$$

Sea $\alpha_t = \text{ínf}\{s : A_s > t\}$ y consideremos la medida $\mu^{A,F}$ sobre $\mathbb{R}_+$ definida por

$$I_\varphi = \int_0^\infty \mu^{A,F}(dt)\varphi(t) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty dA_t F\big(t^{-1/2}B_{ut}; 0 \leq u \leq 1\big)\varphi(t)\right],$$

donde F es una funcional definida en $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ y $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función boreliana. De manera equivalente

$$\mu^{A,F}(dt) = \mathbb{E}\left[dA_t F\big(t^{-1/2}B_{ut}; 0 \leq u \leq 1\big)\right].$$

Teorema 5.4. *La medida $\mu^{A,F}$ satisface*

$$\mu^{A,F}(dt) = C_{A,F}t^r dt,$$

donde

$$C_{A,F} = \mathbb{E}\left[\frac{r+1}{\alpha_1^{r+1}}F\left(\alpha_1^{-1/2}B_{u\alpha_1}; 0 \leq u \leq 1\right)\right].$$

Demostración. Por el teorema de cambio de variable tenemos

$$I_\varphi = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty du F\big(\alpha_u^{-1/2}B_{v\alpha_u}; 0 \leq v \leq 1\big)\varphi(\alpha_u)\right].$$

De la propiedad de "scaling"deducimos que $A_u \overset{\text{(d)}}{=} u^{r+1}A_1$ y $\alpha_u \overset{\text{(d)}}{=} u^{1/(r+1)}\alpha_1$. Entonces,

$$\begin{aligned}
I_\varphi &= \int_0^\infty du \mathbb{E}\left[F\big(\alpha_1^{-1/2}B_{v\alpha_1}; 0 \leq v \leq 1\big)\varphi(u^{1/(r+1)}\alpha_1)\right] \\
&= (r+1)\mathbb{E}\left[\int_0^\infty (dt)t^r \frac{\varphi(t)}{\alpha_1^{r+1}} F\big(\alpha_1^{-1/2}B_{v\alpha_1}; 0 \leq v \leq 1\big)\right].
\end{aligned}$$

De ahí se concluye lo deseado. □

Corolario 5.3. *Sean $r \in \mathbb{R}$, $c > 0$ y $A_t = \int_0^t ds\theta_s$, donde el proceso $\theta = (\theta_t, t \geq 0)$ satisface que*

$$\big((B_{ct}, \theta_{ct}); t \geq 0\big) = \big((\sqrt{c}B_t, c^r\theta_t); t \geq 0\big) \quad \textit{en distribución,}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[\theta_1 F\big(B_u; 0 \leq u \leq 1\big)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{r+1}{\alpha_1^{r+1}} F\left(\alpha_1^{-1/2} B_{u\alpha_1}; 0 \leq u \leq 1\right)\right]. \tag{5.10}$$

Demostración. De la definición de $\mu^{A,F}$, se tiene

$$\mu^{A,F}(dt) = \mathbb{E}\left[\theta_t F\big(t^{-1/2} B_{ut}; 0 \leq u \leq 1\big)\right] = (dt)t^r \mathbb{E}\left[\theta_1 F\big(B_u; 0 \leq u \leq 1\big)\right].$$

Si aplicamos el teorema 5.4 obtenemos (5.4). $\square$

Si aplicamos el corolario 5.3 a la funcional $A^{(+)}$ obtenemos la siguiente igualdad

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{B_1>0\}} F\big(B_v; 0 \leq v \leq 1\big)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\alpha_1^{(+)}} F\left(\left(\alpha_1^{(+)}\right)^{-1/2} B_{u\alpha_1^{(+)}}; 0 \leq u \leq 1\right)\right], \tag{5.11}$$

la cual será de gran utitlidad para probar el siguiente resultado.

Teorema 5.5. *Sea T un tiempo aleatorio y*

$$Z_T = \frac{1}{T}\left(A_T^{(+)}, A_T^{(-)}, \left(L_t^0\right)^2\right).$$

La tripleta Z_T tiene la misma ley en los siguientes tres casos:

$$i) \quad T = t, \qquad ii) \quad T = \alpha_s^{(+)}, \qquad iii) \quad T = \tau_u.$$

En particular,

$$\frac{A_T^{(+)}}{T} = \frac{A_{\tau_u}^{(+)}}{\tau_u} = \frac{A_{\tau_u}^{(+)}}{A_{\tau_u}^{(+)} + A_{\tau_u}^{(-)}} \quad \textit{en distribución,}$$

y la ley común de estas tres variables aleatorias es la ley arco seno en $[0,1]$.

Demostración. Primero vamos a probar que (ii) y (iii) tienen la misma ley. Recordemos de la prueba del teorema 5.3 que

$$A_{\alpha_t^{(+)}}^{(-)} = A^{(-)}\left(\tau_{L^0_{\alpha_t^{(+)}}}\right) = \inf\left\{u : \sup_{0\leq v\leq u} \beta_v^{(-)} > \sup_{0\leq s\leq t}\big(-\beta_s^{(+)}\big)\right\},$$

donde $\beta^{(-)}$ y $\beta^{(+)}$ son dos movimientos Brownianos independientes. De la independencia de $\beta^{(-)}$ y $\beta^{(+)}$, la propieda de "scaling" o autosimilitud y el ejercicio 5.2, se deduce lo siguiente

$$\begin{aligned} A^{(-)}\left(\tau_{L^0_{\alpha_t^{(+)}}}\right) &\overset{(\mathrm{d})}{=} \left(2\sup_{0\leq s\leq t}\big(-\beta_s^{(+)}\big)\right)^2 \cdot \inf\left\{u : 2\sup_{0\leq v\leq u}\beta_v^{(-)} > 1\right\} \\ &= \left(L^0_{\alpha_t^{(+)}}\right)^2 A_{\tau_1}^{(-)}. \end{aligned}$$

Por otro lado, observamos que $\alpha_1^{(+)} = A^{(+)}_{\alpha_1^{(+)}} + A^{(-)}_{\alpha_1^{(+)}} = 1 + A^{(-)}_{\alpha_1^{(+)}}$ y por un cambio de tiempo aleatorio.

$$\left(\left(L^0_{\alpha_t^{(+)}}\right)^2 < t\right) = \left(\alpha_u^{(+)} < \tau_{\sqrt{t}}\right) = \left(u < A^{(+)}_{\tau_{\sqrt{t}}}\right).$$

De esto podemos deducir las siguientes identidades en ley

$$\begin{aligned}\left(A^{(-)}_{\alpha_t^{(+)}}, \left(L^0_{\alpha_t^{(+)}}\right)^2, \alpha_1^{(+)}\right) &\overset{(\mathrm{d})}{=} \left(\left(L^0_{\alpha_t^{(+)}}\right)^2 A^{(-)}_{\tau_1}, \left(L^0_{\alpha_t^{(+)}}\right)^2, 1 + \left(L^0_{\alpha_t^{(+)}}\right)^2 A^{(-)}_{\tau_1}\right) \\ &\overset{(\mathrm{d})}{=} \left(\frac{A^{(-)}_{\tau_1}}{A^{(+)}_{\tau_1}}, \frac{1}{A^{(+)}_{\tau_1}}, 1 + \frac{A^{(-)}_{\tau_1}}{A^{(+)}_{\tau_1}}\right) \overset{(\mathrm{d})}{=} \left(\frac{A^{(-)}_{\tau_1}}{A^{(+)}_{\tau_1}}, \frac{1}{A^{(+)}_{\tau_1}}, \frac{\tau_1}{A^{(+)}_{\tau_1}}\right),\end{aligned}$$

y concluimos que

$$\frac{1}{\alpha_1^{(+)}}\left(A^{(-)}_{\alpha_t^{(+)}}, \left(L^0_{\alpha_t^{(+)}}\right)^2\right) \overset{(\mathrm{d})}{=} \frac{1}{\tau_1}\left(A^{(-)}_{\tau_1}, 1\right).$$

Por lo tanto (ii) y (iii) tienen la misma ley. Para probar que (i) y (iii) tienen la misma ley, vamos a utilizar el resultado de absoluta continuidad (5.5),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{B_1>0\}} f\left(A_1^{(+)}, A_1^{(-)}, (L_1^0)^2\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{\alpha_1^{(+)}} f\left(\frac{A^{(+)}_{\alpha_t^{(+)}}}{\alpha_1^{(+)}}, \frac{A^{(-)}_{\alpha_t^{(+)}}}{\alpha_1^{(+)}}, \frac{\left(L^0_{\alpha_t^{(+)}}\right)^2}{\alpha_1^{(+)}}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{A^{(+)}_{\tau_1}}{\tau_1} f\left(\frac{A^{(+)}_{\tau_1}}{\tau_1}, \frac{A^{(-)}_{\tau_1}}{\tau_1}, \frac{(L^0_{\tau_1})^2}{\tau_1}\right)\right].\end{aligned}$$

Por simetría tenemos

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{B_1<0\}} f\left(A_1^{(+)}, A_1^{(-)}, (L_1^0)^2\right)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{A^{(-)}_{\tau_1}}{\tau_1} f\left(\frac{A^{(+)}_{\tau_1}}{\tau_1}, \frac{A^{(-)}_{\tau_1}}{\tau_1}, \frac{(L^0_{\tau_1})^2}{\tau_1}\right)\right].$$

Si sumamos las dos últimas ecuaciones obtenemos

$$\mathbb{E}\left[f\left(A_1^{(+)}, A_1^{(-)}, (L_1^0)^2\right)\right] = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{A^{(+)}_{\tau_1}}{\tau_1}, \frac{A^{(-)}_{\tau_1}}{\tau_1}, \frac{(L^0_{\tau_1})^2}{\tau_1}\right)\right].$$

Por lo tanto (i) y (iii) tienen la misma ley. $\square$

Epílogo

Para concluir en este trabajo vale la pena observar que dentro de la teoría de los procesos estocásticos hay dos procesos que son fundamentales, uno es el proceso de Poisson y el otro el movimiento Browniano. El movimiento Browniano, el cual fue parte principal de este trabajo, ha sido objeto de gran estudio en varios libros y publicaciones. Esto debido a lo que implicó en el desarrollo del cálculo estocástico, tal y como se deja ver a lo largo de esta tesis. Pero es poco común encontrar libros en los cuales se le dé un estudio tan minucioso sin partir de resultados más generales, es decir, en la mayoría de textos de cálculo estocástico los resultados que se estudian son para martingalas locales continuas o para semimartingalas; y los resultados del movimiento Browniano se ven como consecuencia de los anteriores.

Dadas estas observaciones se puede concluir que un resultado de esta tesis es la exposición de la importancia del movimiento Browniano y su riqueza teórica. Otro resultado a considerar es la compilación de resultados que no se encuentran juntos, en el orden expuesto, en otra publicación; así como darles una notación homogénea. El texto se presta a ser una buena guía para un curso introductorio al estudio de tiempos locales del movimiento Browniano.

Apéndice A

Integrabilidad Uniforme.

En esta parte se estudia un concepto, que se utiliza en el capítulo 2, muy importante para la convergencia de las martingalas. Comenzaremos por motivarlo.

Si X es una variable aleatoria integrable, es fácil ver que $X\mathbf{1}_{\{|X|\geq\alpha\}}$ se va a cero conforme α se va a infinito y está dominada por $|X|$, entonces por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{\{|X|\geq\alpha\}}|X|d\mathbb{P}=0.$$

Consideremos ahora una familia de variables aleatorias integrables $(X_i)_{i\in J}$, donde J es un conjunto de índices, observemos que para cada $i\in J$ se cumple

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{\{|X_i|\geq\alpha\}}|X_i|d\mathbb{P}=0,$$

pero el límite no necesariamente es uniforme en J.
El siguiente concepto, como se ve en el captúlo 2, es de gran utilidad para la convergencia de las martingalas.

Definición A.1. Una familia $U=(X_i)_{i\in J}$ de variables aleatorias integrables, donde J es un conjunto de índice, se llama uniformemente integrables si

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left[\sup_{i\in J}\int_{\{|X_i|\geq\alpha\}}|X_i|d\mathbb{P}\right]=0.$$

En la siguiente proposición se enuncian las propiedades más importantes de una familia uniformemente integrable, a su vez, dichas propiedades serán las condiciones suficientes para que una familia de variables aleatorias sea uniformemente integrable.

Proposición A.1. *Sea $\mathcal{U}=(X_i)_{i\in J}$ una familia de variables aleatorias integrables, para que $\mathcal{U}$ sea uniformemente integrable es necesario y suficiente que*

i) $\sup_{i\in J}\mathbb{E}[|X_i|]<\infty$, *ii)* $\sup_{i\in J}\mathbb{P}[|X_i|>c]\longrightarrow 0$ *cuando* $c\to\infty$*,*

iii) Sea Q^i *una medida definida en* $\mathcal{F}$ *por*

$$Q^i(A)=\int_A |X_i|d\mathbb{P},$$

entonces la familia $\{Q^i\}_{i\in J}$ *es uniformemente absolutamente continua, es decir, para toda* $\epsilon>0$ *existe* $\delta>0$ *tal que para toda* $A\in\mathcal{F}$ *con* $\mathbb{P}[A]\leq\delta$ *implica que* $\sup_{i\in J}Q^i(A)<\epsilon$*.*

Demostración. Para establecer la necesidad de las condiciones observemos que para toda X_i variable aleatoria integrable y toda $A\in\mathcal{F}$ se tiene,

$$\begin{aligned}\int_A |X_i|d\mathbb{P} &= \int_{A\cap\{|X_i|\geq\alpha\}}|X_i|d\mathbb{P}+\int_{A\cap\{|X_i|<\alpha\}}|X_i|d\mathbb{P}\\ &\leq \int_{\{|X_i|\geq\alpha\}}|X_i|d\mathbb{P}+\alpha\mathbb{P}[A].\end{aligned}$$

Por ser $\mathcal{U}$ uniformemente integrable, para $\epsilon>0$ dada existe $\alpha_0>0$ tal que

$$\sup_{i\in J}\int_{\{|X_i|\geq\alpha\}}|X_i|d\mathbb{P}<\frac{\epsilon}{2}\qquad\text{para}\quad\alpha\geq\alpha_0.$$

Sea $A\in\mathcal{F}$ tal que, $\mathbb{P}[A]\leq\frac{\epsilon}{2\alpha_0}$. Por lo anterior se tiene que

$$\sup_{i\in J}\int_A|X_i|d\mathbb{P}\leq\sup_{i\in J}\int_{\{|X_i|\geq\alpha\}}|X_i|d\mathbb{P}+\alpha_0\mathbb{P}[A]<\epsilon.$$

Lo cual demuestra la necesidad de (iii).
Para ver que (i) es necesaria, observemos que

$$\int_\Omega|X_i|d\mathbb{P}\leq\int_{\{|X_i|\geq\alpha\}}|X_i|d\mathbb{P}+\alpha,$$

como $\mathcal{U}$ es uniformemente integrable al aplicar el supremo a ambas partes de la desigualdad se obtiene

$$\sup_{i\in J}\int_\Omega|X_i|d\mathbb{P}\leq\frac{\epsilon}{2}+\alpha,$$

para $\alpha>\alpha_0$. Para obtener (ii) basta aplicar la desigualdad de Chebyshev a X_i y ver que

$$\mathbb{P}[|X_i|\geq c]\leq\frac{1}{c}\mathbb{E}[|X_i|]\leq\frac{1}{c}\sup_{i\in J}\mathbb{E}[|X_i|],$$

al hacer tender a c a infinito $\mathbb{P}[|X_i|\geq c]$ se va a cero.

Reciprocamente, si (i) y (iii) se cumplen vamos a tener que $\mathcal{U}$ es uniformemente integrable, ya que para $\alpha>\alpha_0$ existe $\epsilon>0$ tal que

$$\mathbb{P}[|X_i|\geq\alpha]\leq\delta,$$

debido a que (i) implica (ii). Por lo tanto

$$\sup_{i\in J}\int_{\{|X_i|\geq\alpha\}}|X_i|d\mathbb{P}<\epsilon.$$

Lo cual prueba que $\mathcal{U}$ es uniformemente integrable. $\square$

El siguiente teorema es una caraterización de las familias de variables aleatorias que son uniformemente integrables en L_1.

Teorema A.1. *Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias integrables. Si $\lim_{n\to\infty}X_n=X$ casi seguramente, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

i) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es uniformemente integrable.*

ii) X_n *converge a* X *en* L_1.

Demostración. Supongamos que X_n converge a X en L_1 y veamos que se cumplen las condiciones del teorema anterior. Sea $A\in\mathcal{F}$, entonces

$$\int_A|X_n|d\mathbb{P}\leq\int_A|X|d\mathbb{P}+\int|X_n-X|d\mathbb{P}.$$

De esta desigualdad se deduce la condición (i). Por otro lado, sea $\epsilon>0$ y $n\in\mathbb{N}$ tal que

$$\int_\Omega|X_n-X|d\mathbb{P}<\frac{\epsilon}{2}\qquad\text{para}\qquad n\geq N,$$

y sea $\delta>0$ tal que

$$\mathbb{P}[A]<\delta\qquad\Longrightarrow\qquad\sup_{0\leq i\leq N}\int_A|X_i|d\mathbb{P}\leq\frac{\epsilon}{2},$$

donde $X_o=X$, esto es posible ya que la familia $\{X_0,X_1,\ldots,X_n\}$ es finita y en consecuencia es uniformemente integrable. Entonces

$$\int_A|X_n|d\mathbb{P}\leq\frac{\epsilon}{2}+\int|X_n-X|d\mathbb{P}<\infty.$$

Por lo tanto X es integrable.
Sea $c>0$, definamos a X_n^c por

$$X_n^c(\omega)=\begin{cases}X_n(\omega) & \text{si}\quad |X_n(\omega)|\leq c,\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

y a $X_{nc}=X_n-X_n^c$. De la misma forma se define a X_c y a X^c, entonces

$$\mathbb{E}[|X_n-X|]\leq\mathbb{E}[|X_n^c-X^c|]+\mathbb{E}[|X_{nc}|]+\mathbb{E}[|X_c|]$$

Dada $\epsilon>0$, tomemos a c lo suficientemente grande de tal manera que las últimas dos esperanzas de la desigualdad sean menores a $\frac{\epsilon}{3}$, independientemente del valor de n. Gracias al teorema de Convergencia Dominada tenemos que para n suficientemente grande

$$\mathbb{E}[|X_n^c - X^c|] \leq \frac{\epsilon}{3},$$

ya que las variables aleatorias $|X_n^c - X^c|$ están dominadas por $|X_n - X|$ y además convergen casi seguramente a cero. Por lo tanto

$$\mathbb{E}[|X_n - X|] \leq \epsilon,$$

por lo tanto X_n converge a X en L_1. $\square$

Bibliografía

[1] Richard Durret.
Stochastic Calculus. A Practical Introduction.
Primera edición.
CRC Press, 1996.

[2] Samuel Karlin y Howard M. Taylor.
A First Course in Stochastic Processes.
Segunda edición.
Academic Press, 1975.

[3] Philip Protter.
Stochastic Integration and Differential Equations.
Primera edición.
Springer-Verlag, 1990.

[4] Daniel Revuz y Marc Yor.
Continuous Martingales and Brownian Motion.
Primera edición.
Springer-Verlag,1991.

[5] L.C.G. Rogers y D. Williams.
Diffusions, Markov Processes and Martingales. Volumen 2: Itô Calculus.
John Wiley & Sons, 1987.

[6] Constantin Tudor.
Procesos Estocáticos.
Segunda Edición.
Sociedad Matemática Mexicana, 1997.

[7] Richard Durret.
Probability: Theory and Examples.
Segunda Edición.
Duxbury Press, 1995.