



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Riesgo de Crédito para Microfinancieras

TESIS

Que para obtener el título de:

ACTUARIO

Presenta:

EVEL MARTÍN ARENALES SAN JUAN

Directora de tesis:

DRA. MARÍA ASUNCIÓN BEGOÑA FERNÁNDEZ FERNÁNDEZ

2011





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contenido

| | |
|--|------------|
| Introducción | iii |
| 1 Contexto y objetivos del trabajo | 1 |
| 1.1 Las microfinanzas | 1 |
| 1.2 La administración de riesgos | 5 |
| 1.3 Las IMFs objeto de estudio | 8 |
| 1.4 Planteamiento del problema | 9 |
| 2 Medidas de Riesgo | 11 |
| 2.1 Distribución de las pérdidas | 11 |
| 2.2 La Pérdida Esperada | 16 |
| 2.3 Valor en Riesgo y Capital Económico | 17 |
| 2.4 Expected Shortfall | 18 |
| 2.5 Simulación | 20 |
| 3 Cadenas de Markov | 23 |
| 3.1 Definiciones | 23 |
| 3.2 Probabilidad del proceso. | 24 |
| 3.3 Probabilidad de transición en u pasos. | 25 |
| 3.4 Estimación de las probabilidades de transición. | 26 |
| 3.5 Pruebas de Hipótesis. | 30 |
| 3.5.1 Homogeneidad de la Cadena. | 31 |
| 4 Aplicación | 35 |
| 4.1 Descripción general del portafolio | 35 |
| 4.2 Incumplimiento | 39 |
| 4.2.1 Probabilidades de transición. | 42 |
| 4.2.2 Pruebas de hipótesis. | 44 |
| 4.2.3 Probabilidades de Incumplimiento(PD_n). | 45 |
| 4.3 Valuación de las pérdidas | 47 |
| 4.3.1 La pérdida dado el incumplimiento (LGD_n). | 47 |
| 4.3.2 Cociente de Liapounov. | 49 |
| 4.3.3 Medidas de Riesgo. | 50 |
| 4.3.4 Simulación. | 50 |
| 5 Conclusiones | 53 |
| A Diagrama de Flujo, rutina en R | 55 |

| | |
|--|-----------|
| B Valores n_{ij}^t | 57 |
| C Matrices de Transición | 63 |
| Bibliografía | 69 |

Introducción

El presente trabajo surge como propuesta para cubrir la necesidad de las entidades financieras en nuestro país, dedicadas a las microfinanzas, por administrar sus riesgos crediticios, éstos se refieren a las pérdidas en las que pueden incurrir por falta de pago de sus clientes, situación también conocida como *incumplimiento*. Este sector de los mercados financieros está principalmente dedicado al otorgamiento de préstamos para capital de trabajo, a personas de escasos recursos y, uno de sus principales objetivos es apoyar a este sector de la población para su desarrollo económico.

Siendo la medición de las pérdidas potenciales, parte medular para la administración de riesgos, es que se planteará un modelo matemático que permita estimarlas, basado en la probabilidad de su ocurrencia y así, calcular las medidas de riesgo establecidas por el Banco de México (BANXICO). Dichas medidas son, la Pérdida Esperada, el Valor en Riesgo, la diferencia entre las dos últimas llamada Capital Económico, y las de estrés, para la que se utilizará el llamado Expected Shortfall. Todas estas son medidas basadas en la función de distribución de las pérdidas y permiten conocer los importes monetarios, *reservas*, que deben generarse para hacer frente a los riesgos crediticios. En nuestro país, estas medidas son establecidas por BANXICO de acuerdo a estándares internacionales para asegurar la continuidad y estabilidad de las entidades financieras.

El estado de desarrollo en el que se encuentra el mercado de las microfinanzas en nuestro país, resulta en muchas dificultades para su formalización, entre ellas, y la que más impacto tuvo para el presente trabajo, es encontrar fuentes confiables de información. La única que así se puede considerar para la mayoría de las entidades, es la información contable, pues aunque no estén sujetas a los lineamientos de la autoridad regulatoria en nuestro país, la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV), si lo están a la rendición de cuentas ante la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP) y esta información puede ser auditada.

Con el uso de esta información se procederá a plantear el modelo basado, en primera instancia, en cadenas de Markov para el cálculo de probabilidades de incumplimiento y posteriormente en el uso de un modelo analítico para la distribución de las pérdidas y así calcular las medidas antes mencionadas. Todos los cálculos y gráficas asociados al desarrollo del presente trabajo forman parte de una rutina desarrollada en el lenguaje de programación R. Cuando las pruebas matemáticas de los teoremas que se enuncien superen el alcance del trabajo se darán las referencias para su consulta. La estructura del trabajo es la siguiente:

Capítulo 1: Se expondrá el panorama general y la historia de las microfinanzas en nuestro país, incluyendo los datos más importantes, las figuras legales y su marco regulatorio. Posteriormente se abordará de manera similar la administración de riesgos, su importancia y fundamentos, los principales tipos de riesgo, la regulación aplicable en nuestro país y los elementos que componen el proceso de administración de riesgos. La última parte estará dedicada a una descripción específica de las entidades que serán objeto de estudio así como de la forma en la que operan y su exposición a los riesgos. Ya con estos fundamentos, se procederá a plantear el objetivo principal del trabajo.

Capítulo 2: Se establece el planteamiento del modelo matemático que servirá para caracterizar las pérdidas a nivel individual de un portafolio de acreditados y el detalle sobre los conceptos asociados

como su probabilidad de incumplimiento y su valor de pérdida dado el incumplimiento. Posteriormente y después de una discusión sobre la relación entre las microfinanzas y la macroeconomía, se establecen las principales hipótesis sobre las que se estimará la distribución de las pérdidas así como las condiciones que los datos ligados a los créditos deberán cumplir para que el modelo pueda ser ampliado a un nivel grupal, este es el llamado Cociente de Liapounov, dando así una expresión analítica para dicha distribución y las medidas de riesgo asociadas. Se concluirá con la presentación de una metodología para simular las pérdidas de acuerdo a las hipótesis antes planteadas y confirmar los resultados obtenidos de manera analítica.

Capítulo 3: Este capítulo estará dedicado a las llamadas Cadenas de Markov. El elemento de mayor importancia para el modelo del Capítulo 2 es la probabilidad de que un acreditado provoque pérdidas a la institución en el futuro. Los fundamentos teóricos en los que el cálculo de esta probabilidad estarán basados se expondrán comenzando con la definición de Cadena de Markov y sus principales propiedades. A continuación se enunciarán los teoremas que nos permitan estimar las probabilidades asociadas a eventos en la cadena y así concluir con las pruebas estadísticas que se realizarán en los datos para verificar la consistencia de éstos y las propiedades asumidas sobre la cadena.

Capítulo 4: La aplicación, comenzando con una descripción detallada sobre la operación de los créditos (como funcionan) para la mayoría de las instituciones dedicadas al microcrédito, así como una exposición de los datos reales de un portafolio con el que se trabajará en términos de número de acreditados, valor monetario, antigüedad y morosidad entre otros, para establecer las condiciones que se tendrán en las probabilidades de transición, mismas que se operarán para estimar las de incumplimiento no sin antes realizar las pruebas estadísticas del Capítulo 3. Después haremos uso de la información histórica de un grupo específico de créditos para la estimación de un último elemento, la pérdida dado el incumplimiento, y así verificar vía la prueba de Liapounov del Capítulo 2 si la formulación analítica aquí planteada es plausible y finalmente valuar las pérdidas además de corroborar la distribución de las mismas vía una simulación.

Capítulo 5: Conclusiones.

Capítulo 1

Contexto y objetivos del trabajo

El mercado microfinanciero en el que se desarrolla el presente trabajo así como el planteamiento del objetivo, son los puntos que serán cubiertos a lo largo de este capítulo. Partiendo con una breve historia de las microfinanzas y los conceptos en los que se fundamentan, para después continuar con la descripción del mercado microfinanciero en nuestro país. Posteriormente se comentarán las que de acuerdo a las autoridades competentes en México, son las definiciones y principios básicos de la administración de riesgos, para finalmente, establecer el principal objetivo del trabajo, relacionado con el establecimiento de las medidas de riesgo para la cartera crediticia de una entidad microfinanciera.

1.1 Las microfinanzas

Como menciona Robinson (2000 pp. 15-34)[17], previo a la década de los ochenta del siglo XX, en algunos países subdesarrollados, los gobiernos eran el medio por excelencia para el otorgamiento de créditos a los pequeños agricultores. En la mayoría de las ocasiones éstos eran asignados a los representantes de las poblaciones rurales para ser administrados y muchas de las veces nunca llegaban a los agricultores. En otros países estos apoyos no existían y los agricultores solicitaban créditos al usurero local pagando intereses desproporcionados. Así, los requerimientos de capital para poder apoyar a una determinada población siempre eran insuficientes y las pérdidas sustanciales.

En la década de los setenta, en Bangladesh, el doctor Mohammed Yunus ganador del premio Nobel de la Paz en el año 2006 *por sus esfuerzos para incentivar el desarrollo social y económico desde abajo*, ideó un esquema de préstamos colectivos para personas sin tierra que cristalizaron en lo que actualmente se conoce como el Banco Grameen que, de acuerdo a la información publicada en *www.mixmarket.com* atiende actualmente a más de 6.4 millones de clientes. Fue así que nació el concepto de microfinanzas cuya definición puede ser *la industria dentro de los mercados financieros cuyas metodologías de operación y productos estén dirigidos a sectores de la población de bajos ingresos y sin acceso a los servicios financieros comunes con el objetivo de estimular actividades productivas*. La estrategia del Grameen se basó en diseñar préstamos en los que la responsabilidad del pago era común a todos los miembros de un grupo de agricultores bajo la evaluación y asesoría financiera del banco y con la promesa de un nuevo crédito si el actual se pagaba correctamente, a cada miembro del grupo se le solicitaba también una garantía líquida (obtenida del mismo préstamo) que sería devuelta al final del plazo a manera de ahorro o bien se ejecutaría si el pago de alguna de sus amortizaciones no era cubierta, con lo que el cliente se veía obligado al repago del crédito obteniendo además un beneficio monetario.

Es a partir de la década de los ochenta, que algunos gobiernos, bancos rurales y Organizaciones No Gubernamentales (ONG) en países del sureste asiático por su cercanía con Bangladesh, empezaron a diseñar y aplicar nuevos modelos crediticios (muchos de ellos inspirados en el Banco Grameen) dirigidos a sectores

de la población económicamente activa, de bajos ingresos y sin acceso a los servicios financieros comunes, como alternativa a los tradicionales subsidios gubernamentales. El primer paso consistió en eliminar a los intermediarios y otorgar créditos baratos proporcionados directamente, en los que los gobiernos asumían la responsabilidad de subsidiar dichos préstamos y los donantes (ONG), la administración.

El principio básico era apoyar a este sector de bajos ingresos para convertirlo en autosustentable y generador de ganancias, a través del financiamiento de actividades productivas, el ahorro y la asesoría especializada, entre otros. Las actividades productivas consideradas iban desde el financiamiento de semillas para un pequeño agricultor en una zona rural hasta el de herramientas para un carpintero en una zona semiurbana.

En 1961, Joseph Blatchford, un estudiante norteamericano, fundó junto con algunos de sus compañeros de la escuela de derecho de la Universidad de los Ángeles California (UCLA por sus siglas en inglés), el llamado grupo Accion Internacional (Accion), después de haber visitado 30 ciudades de Sudamérica en una gira amateur de tenis en la que observó la situación de pobreza que en éstas se vivía. El objetivo de esta fundación era (y sigue siendo) formar una iniciativa de desarrollo comunitario dirigida a ayudar a los pobres a que se ayuden a sí mismos. Fue en el año 1989, después de reunir fondos suficientes entre la sociedad norteamericana, que apoyaron el desarrollo de préstamos colectivos para vendedores callejeros principalmente en Brasil, Venezuela y Colombia. Actualmente este grupo cuenta con presencia en África, América y Asia, proporcionando fondos para instituciones microfinancieras, gracias al apoyo y retroalimentación de la Agencia Estadounidense para el Desarrollo Internacional (USAID por sus siglas en inglés), que es una instancia independiente del gobierno federal estadounidense entre cuyos objetivos principales se encuentra velar por la sustentabilidad económica de largo plazo de países pobres o en desarrollo. La importancia del USAID dentro del desarrollo de las microfinanzas ha sido poner en contacto a las microfinancieras de países pobres con grupos como Accion, permitiendo así el flujo de capitales.

Durante los inicios de la década de los noventa y siguiendo el mismo esquema que el Banco Grammen, se fundó en Bolivia con el apoyo del USAID y grupo Accion, el Banco Sol, que a mediados de esta misma década se constituyó como una institución financiera formal, con productos dirigidos al sector de bajos recursos. Debido no sólo al volumen de clientes tan considerable que había logrado, sino también a las pruebas fehacientes de que los créditos que otorgaba podían ser rentables gracias a su buen diseño, su eficiencia operativa (la cual se traduce en bajos costos), al apoyo que recibió para su proceso de calificación mediante asesorías sobre mejores prácticas (que le permitieron cumplir con las normas que los mercados financieros exigen a sus participantes) y, sobre todo, el asesoramiento a los clientes y la correcta evaluación del destino que tendrían los préstamos. Fue así que en 1994, el grupo Accion ayudó a que Banco Sol vendiera certificados de depósito en el mercado financiero de E.U.A., respaldados tan solo por la buena referencia de una mujer que vendía naranjas en las calles de La Paz. Por primera vez, las principales instituciones financieras del mundo invirtieron en las microfinanzas no por ser una iniciativa benéfica, sino por ser un buen negocio.

Banco Sol se convirtió en el pionero en atraer a instituciones microfinancieras al mercado financiero formal. Es a finales de los noventa y durante toda la década pasada, que las microfinancieras han logrado generar toda una industria después de que miles de instituciones alrededor del mundo imitaran los ejemplos antes citados.

En conclusión podemos decir que la evolución que llevó a las microfinanzas de ser subsidios a una industria rentable y atractiva en los mercados financieros formales, fue la necesidad de hacer estas instituciones autosustentables y generadoras de ganancias, para que prevalecieran y su principal objetivo, el acceso de los pobres a servicios financieros de calidad para contrarrestar la pobreza, pudiera ser alcanzado mediante la formalización con el apoyo de gobiernos y algunas ONG, lo cual produjo también el desarrollo de una industria sana. Sobre el apoyo de los gobiernos, un ejemplo puede ser el de nuestro país, donde las bancas de desarrollo otorgan fondos de muy bajo costo a las entidades y al mismo tiempo imponen reglas de operación que poco a poco van evolucionando hasta que pueda llegarse a una transición ligera a una industria formal a pesar de que, como se comentará a continuación muchas no están reguladas.

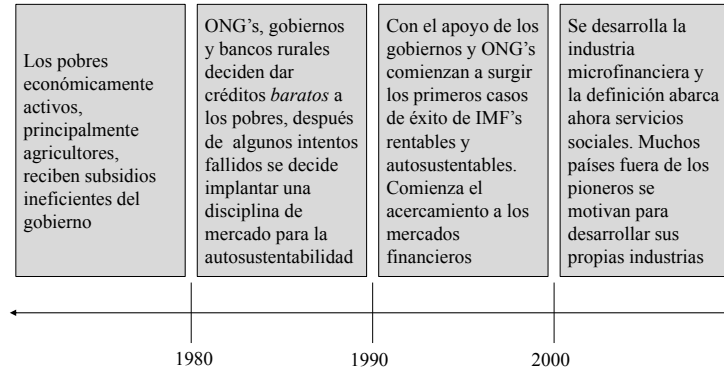


Figura 1.1: Línea de tiempo de las Microfinanzas

Como comenta Martínez Cantero (2004) en una publicación en línea[13], en nuestro país los orígenes de esta industria se remontan a mediados de la década de los años noventa. Aunque se tienen casos aislados previos como en 1973, en Chihuahua, Salud y Desarrollo Comunitario AC (SADEC) fundada con el fin de brindar ayuda al sector más pobre del estado; así como los casos de Compartamos (1982), Came (1992) o Fincomún (1994), instituciones que en sus inicios fueron formadas como ONG y actualmente son líderes del mercado. Es hasta 1996 que la figura de las microfinancieras como tal se desarrolla, siendo Santa Fe de Guanajuato AC la primera microfinanciera oficialmente reconocida. Esta entrada “tardía” de nuestro país a las microfinanzas puede ser atribuida a la visión internacional de que nuestro país no es “tan pobre” como los del resto de América Latina y, como comenta Ledgerwood (2000 p. 14)[9], fue hasta los años 1994 y 1995 que un equipo del Banco Mundial condujo un estudio sobre los mercados financieros rurales de nuestro país que convenció al gobierno federal de solicitar su apoyo para el desarrollo de los mismos.

Siendo este sector en nuestro país, relativamente joven en comparación al resto de América Latina, su estado actual es aún de desarrollo, prueba clara de ello es que Prodesarrollo (2010 p. 11)[15], organización de la que se hablará más adelante, el 61% de éstas instituciones se encuentran regidas por la figura legal de SOFOM (Sociedad Financiera de Objeto Múltiple). De acuerdo a la ley, estas figuras no son reguladas por la autoridad bancaria de nuestro país, la CNBV, a menos que pertenezcan a algún grupo financiero, y sólo se verán sujetas a la Ley de Instituciones de Crédito y las propias de la SHCP. Si además obtienen fondos de instancias gubernamentales como BANXICO, NAFIN (Nacional Financiera, Banca de Desarrollo), PRONAFIM (Programa Nacional del Financiamiento al Microempresario) u otras similares, deben apegarse a los reglamentos de operación que cada instancia maneje. A pesar de esta situación, los pasos para convertirse en una industria formal en los últimos años han sido notables, entre ellos se encuentra la formación de una asociación llamada Prodesarrollo, que desde hace tres años publica anualmente un marco general del sector[15], en la publicación de 2010 (p. 12) se aproximó el número de personas atendidas por IMF's asociadas a esta institución en 4.4 millones con una cartera de 22,570 millones de pesos.

Uno de los mayores retos a los que este sector tendrá que hacer frente en su proceso de formalización, si se desea tener una industria sana y participar formalmente en los mercados financieros, es comenzar a adoptar las prácticas en materia administrativa de las entidades reguladas como los bancos. Los

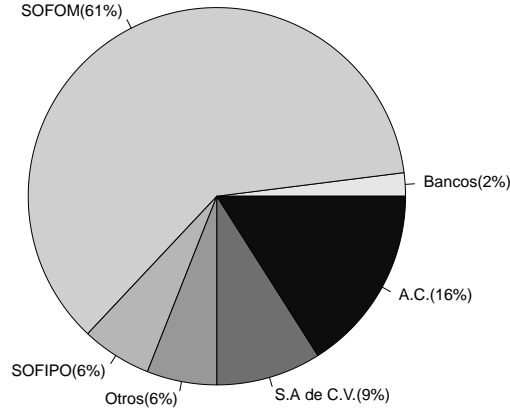


Figura 1.2: Figuras Jurídicas de las microfinanzas en México. Fuente: Prodesarrollo, Finanzas y Microempresas (2010) *Benchmarking de las microfinanzas en México: Un informe del sector*

pioneros en nuestro país en este sentido son el Banco Compartamos, quienes ya cotizan en mercados financieros formales. Estas prácticas abarcan todo tipo de actividades como la revelación de información, la elaboración de reportes, la arquitectura de los sistemas de información, las reglas contables y la que motivó la realización del presente trabajo, la administración de riesgos. Esta última es una actividad que se ha desarrollado de manera formal en los mercados financieros en los últimos 30 años, su importancia dentro de las instituciones financieras es vital para su supervivencia.

Es importante señalar, que de acuerdo a Ledgerwood (2000 pp. 11-31)[9], el simple acceso a estos servicios no eliminaría por completo la pobreza de algún sector de la población por sí mismo, se requerirían esfuerzos en otras materias como educación y salud para hacer de esto una realidad. Sin embargo, el impacto y la eficiencia en esta labor ha sido probada con algunos casos de éxito como los comentados anteriormente. También es importante comentar que los servicios financieros de consumo como pueden ser las tarjetas de crédito o el financiamiento para la compra de artículos de lujo no son contemplados en las microfinanzas. Éstos están dirigidos a individuos con niveles de ingresos mayores a los del mercado microfinanciero, son operados por bancos comerciales y denominados *subprime*. Muchas de las IMF ofrecen además a sus clientes asesorías sobre organización social, educación, salud y capacitación para desarrollar capacidades financieras administrativas, por lo que las microfinanzas no solo son operaciones bancarias sino además, una herramienta para el desarrollo.

Bajo estos conceptos es razonable pensar que esta es una labor correspondiente a los gobiernos o en última instancia de las ya citadas organizaciones sin fines de lucro. Parecería extraño que los intermediarios financieros estructuraran este tipo de instrumentos dirigidos a las clases sociales con bajos ingresos cuando su objetivo último es el de generación de riqueza. En cierto sentido esto no es totalmente errado pues en primera instancia, estos instrumentos están dirigidos a la población en estado de pobreza pero cuyas condiciones les permitan satisfacer por lo menos sus necesidades mínimas (la pobreza extrema no puede ser atendida por las microfinanzas) y al recibir el apoyo de una entidad microfinanciera genere las ganancias que le permitan generar riqueza para ambos. En segunda instancia como ya se vio, estos conceptos no nacieron de la iniciativa privada y menos de los mercados financieros, fueron los resultados obtenidos por tan solo algunos “experimentos” en países de Asia y Sudamérica en los últimos 30 años aproximadamente, que los inversionistas han volteado su mirada a estos mercados.

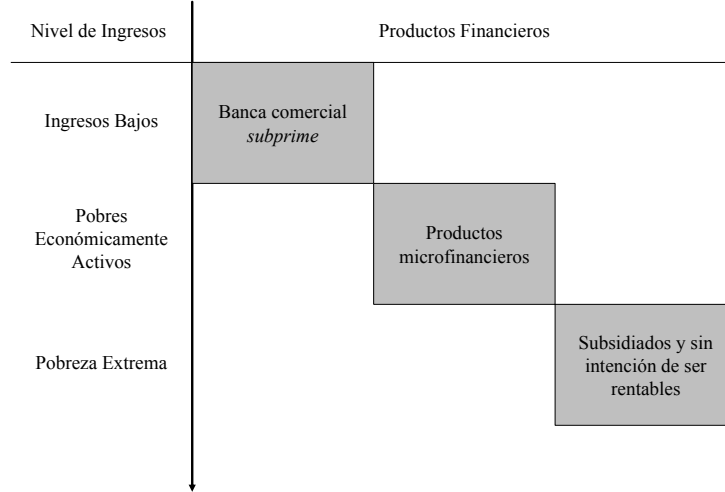


Figura 1.3: Mercado Objetivo de las Microfinanzas. Fuente: Robinson, Margarite S. (2000) *La revolución microfinanciera*, Finanzas sostenibles para los pobres. Banco Mundial, Washington D.C.

1.2 La administración de riesgos

De acuerdo a BANXICO (2005 p. 3)[2], *en finanzas el concepto de riesgo está relacionado con la posibilidad de que ocurra un evento que se traduzca en pérdidas para los participantes en los mercados financieros*. Las actividades que pueden provocar pérdidas no son exclusivas de las entidades financieras. Casi cualquier otro tipo de empresa puede verse afectada por fallas en los sistemas informáticos, desastres naturales, guerras, colapsos de economías extranjeras, etcétera, provocando pérdidas, sin embargo, la naturaleza de los mercados financieros es asumir riesgos dado su objetivo; permitir el flujo de activos financieros de ofertantes a demandantes, pues se presenta por supuesto una promesa de pago que puede no concretarse.

El conocer este tipo de eventos y gestionar correctamente su ocurrencia a través de medidas preventivas, planes de acción ó la generación de reservas, es una parte sustancial del éxito o fracaso que las entidades puedan tener como participantes del mercado financiero. En un esfuerzo por parte de los participantes a nivel internacional, incluidos los gobiernos, de gestionar correctamente los riesgos a los que las entidades financieras están expuestas y evitar colapsos financieros, se ha establecido un documento de mejores prácticas, publicado por el Banco de Pagos Internacionales (BPI) llamado *Convergencia Internacional de Medidas y Normas de Capital*, conocido también como *El Acuerdo de Basilea* (por la ciudad en la que se encuentra este Banco, Basilea en Suiza) el cual debe ser respetado a nivel internacional bajo la supervisión de los reguladores de cada país para evitar que estos colapsos afecten las vidas de muchas personas alrededor del mundo. En México, la autoridad encargada de esta supervisión es la CNBV, a través de su documento, Circular Única de Bancos¹ (CUB)[6].

Los riesgos a los que las entidades se encuentran expuestas pueden tener orígenes y consecuencias muy variadas, hay riesgos que no pueden ser evitados y simplemente deben tener una correcta administración asumiendo una posición de riesgo, por ejemplo, para evitar que una institución tuviera pérdidas por créditos incobrables la única forma de evitarlos totalmente sería dejar de dar crédito. La posición de

¹Existen también circulares para otro tipo de instituciones financieras supervisadas por esta comisión, sin embargo, ésta es la de mayor alcance.

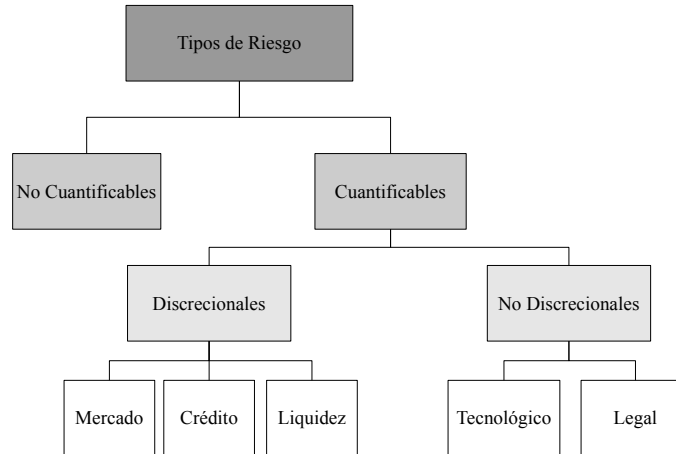


Figura 1.4: Clasificación de riesgos en finanzas

riesgo que la entidad está asumiendo en este caso es el otorgamiento del crédito bajo el riesgo de que no sea pagado. Por otra parte, si por alguna razón los sistemas de información tuvieran un error provocado por una descarga eléctrica la institución nunca habría tenido una posición de riesgo con respecto a esta situación. En este sentido la CNBV (2011 p. 8), define *la Administración Integral de Riesgos es el conjunto de objetivos, políticas, procedimientos y acciones que se llevan a cabo para identificar, medir, vigilar, limitar, controlar, informar y revelar los distintos riesgos a que se encuentran expuestas las instituciones*. Los riesgos a los que esta definición se refiere son citados en dicha circular (pp. 30-31):

1. Riesgos Cuantificables. Son aquéllos para los cuales es posible conformar bases estadísticas que permitan medir sus pérdidas potenciales.
 - (a) Riesgos Discrecionales. Los asociados con una posición de riesgo.
 - i. Riesgo de Crédito. Pérdida potencial por la falta de pago de un acreditado o contraparte en las operaciones que efectúan las Instituciones.
 - ii. Riesgo de Liquidez. Pérdida potencial provocada por la imposibilidad o dificultad para obtener fondos durante una situación de falta de liquidez.
 - iii. Riesgo de Mercado. Pérdida potencial provocada por los cambios desfavorables en los factores de los mercados y que inciden en la valoración de los activos en la institución tales como tasas de interés, tipos de cambio e índices de precios, entre otros.
 - (b) Riesgos No Discrecionales. Aquéllos resultantes de la operación del negocio, pero que no son producto de la toma de una posición de riesgo. También es conocido como riesgo operativo y se define como la pérdida potencial por fallas o deficiencias en los controles internos, por errores en el procesamiento y almacenamiento de las operaciones o en la transmisión de información, así como por resoluciones administrativas y judiciales adversas, fraudes o robos.
2. Riesgos No Cuantificables. Aquéllos derivados de eventos imprevistos para los cuales no se puede conformar una base estadística que permita medir las pérdidas potenciales

La mayor distinción entre los tipos de riesgo es claramente la posibilidad de poder medirlos o no en base a datos históricos, es decir, evaluar en términos monetarios el importe que se pueden llegar a generar si los eventos de riesgo se materializan. Al respecto podemos decir que una parte sustancial en la administración de riesgos es su medición, para lo cual se han definido ciertos estándares y entre cuyas finalidades más importantes se encuentra la generación de importes monetarios llamados reservas que las instituciones deben retener de sus ganancias o extraer de su capital, para poder hacer frente a la materialización de los riesgos.

Dentro de los riesgos cuantificables, la distinción entre los tipos no significa que no estén relacionados entre sí. Pensemos por ejemplo que una afectación en el precio del dólar, un evento en el riesgo de mercado, afecta las inversiones que la institución tiene en esta moneda pero al mismo tiempo tiene un impacto en las inversiones de algunos de sus clientes con pasivos en esta moneda y les impide hacer frente a sus responsabilidades generando un evento en el riesgo de crédito.



Figura 1.5: El proceso de administración de riesgos. Fuente: Prodesarrollo, Finanzas y Microempresas (2011) *Manual de prácticas y herramientas para la gestión integral de riesgos en microfinanzas*

Esta definición de administración de riesgos incluye el llamado *proceso de administración de riesgos*, el cual puede ser resumido de acuerdo a Prodesarrollo (2011 pp. 20-23)[16], brevemente en 5 etapas. La primera es identificar los factores de riesgo que indicarán la ocurrencia de un evento. La segunda es la medición, la parte técnica del proceso; en ésta se deben formular modelos que permitan conocer la probabilidad de ocurrencia de los eventos de riesgo, así como, definir las fuentes de información para la medición de los factores de riesgo y su impacto. Sobre la evaluación del impacto, como se comentó antes, BANXICO (2005)[2] ha establecido sus estándares en un documento oficial. Una vez que se tiene la medición establecida debe procederse a monitorear de manera permanente los riesgos, para poder emprender las acciones que permitan evitar la presencia de factores de riesgo, entre ellas la creación de reservas. Lo anterior no puede ser logrado sin considerar que la calidad de la información que se utiliza para la medición es confiable, y además, se presenta oportunamente mediante el establecimiento de un método de divulgación.

Actualmente en México, las IMF's no reguladas, no están obligadas a revelar ninguna de sus actividades en materia de administración de riesgos, sin embargo dada la importancia antes comentada que tienen para el desarrollo del sector así como para asegurar su continuidad, recientemente Prodesarrollo (2011)[16] publicó un manual de mejores prácticas con los aspectos conceptuales más relevantes que deben considerarse para tal fin, con el apoyo y las experiencias de instituciones del sureste del país.

El principal tipo de riesgo que las IMF's en México tendrán que gestionar además del operativo, es el

de crédito. Debido a la falta de regulación, la información que cada institución posee puede variar tanto que homogeneizar criterios en términos de medición puede llegar a ser un reto cuya solución estará ligada al proceso de formalización. La propuesta que se realiza en el presente trabajo es el uso únicamente de la información contable que, en teoría, no puede variar tanto entre instituciones y es constantemente auditada.

Para terminar con esta sección, a continuación se enumeran los que Prodesarrollo (2011 pp. 14-15)[16] consideró como los principales factores de riesgo que la experiencia en nuestro país ha permitido identificar en las microfinancieras:

- Falta de información crediticia en el sector formal.
- Falta de documentación sobre la actividad económica de los clientes.
- Limitaciones de capitalización de las instituciones.
- Modelo de operación descentralizada.
- Tasa aceleradas de crecimiento.
- Alta rotación y personal sin experiencia en el sistema financiero.
- Altos costos
- Falta de cultura organizacional en Gestión de Riesgos
- Sistemas de información deficientes.
- Deficiencias en la seguridad de los sistemas.
- Inconsistencias entre los sistemas de cartera y contables.
- Extensión o reprogramación de préstamos.
- Inconsistencias en la implementación y administración de los créditos.
- Falta de planes de sucesión para la administración de las instituciones.

Entre los factores comentados no se encuentra el estado económico del país, esta es una característica de las microfinanzas que será comentada más adelante y tiene que ver con la falta de relación entre éstas y la macroeconomía bajo determinadas circunstancias.

1.3 Las IMFs objeto de estudio

El caso particular al que nos referiremos en el presente trabajo, sera el de IMFs con figura legal de SOFOM no regulada, y que se encuentren dedicadas, cuando menos, principalmente al otorgamiento de créditos (algunas de las instituciones en nuestro país pueden también dedicarse a otros productos como los microseguros o la captación de recursos).

Como se comentó anteriormente, esta figura legal únicamente se encuentra bajo el marco de la Ley de Instituciones de Crédito, además de las aplicables de la SHCP como cualquier otra sociedad civil y las reglas de operación de cada una de las instituciones de las que pueden obtener fondos, dentro de las más importantes en nuestro país se encuentran, la instancia de BANXICO, FIRA(Fideicomisos Instituidos en Relación con la Agricultura), la banca de desarrollo NAFIN(Nacional Financiera) y PRONAFIM del que se habló anteriormente.

De acuerdo a los datos publicados por Prodesarrollo (2010 p. 11)[15], cerca del 70% de las IMF's poseen menos de ocho años en el mercado y la mayor presencia se encuentra en los estados del centro, sur y sureste de nuestro país. El otorgamiento de créditos está enfocado a clientes potenciales de bajos recursos y en muchos de los casos, poseedores de un negocio propio o con la intención de iniciarlo y mayormente mujeres (cerca del 80%).

En general, existen tres metodologías a través de las cuales colocan sus productos, estas son Individual, Solidaria y Comunal. La primera está diseñada para clientes individuales, la segunda para grupos de entre 3 y 10 clientes y la última para grupos de más de 10. Para cada metodología, los plazos pueden variar entre 4 y 12 meses, con tasas de interés que oscilan entre el 4% y el 12% mensual, y frecuencias de pago semanales, quincenales o mensuales que dependen del flujo de efectivo que el cliente haya declarado y el monto del préstamo. Los montos otorgados oscilan entre los 3 y 70 mil pesos.

En cuanto a los riesgos a los que están expuestas, además de los no cuantificables, se encuentra en primera instancia el operativo, cuya gestión debe ser comúnmente a través de una *matriz de riesgos y controles* que es lo que usualmente aplica para las operaciones en las que no se tiene una posición de riesgo. Las inversiones en valores de las entidades que obtienen fondos de instancias del gobierno, hasta el día de hoy, se deben encontrar en instrumentos gubernamentales, de manera que el riesgo de mercado no es significativo. De las que obtienen fondos de instancias no gubernamentales, podemos asumir que la infraestructura para un área de tesorería en donde el riesgo de mercado fuera significativo tendría que estar, casi seguramente, en entidades reguladas que no son nuestro caso.

Finalmente, pero de mayor importancia está el de crédito. Dado que la operación se basa en el otorgamiento de préstamos, ésta compone la parte medular de la administración de riesgos que las instituciones tienen que desarrollar. Actualmente en muchas de las IMF's, dicho proceso no incluye la medición de acuerdo a las mejores prácticas establecidas por BANXICO y la CNBV, es decir, la valuación de las posibles pérdidas por los eventos de riesgo que puedan presentarse, y sólo se han tomado algunas medidas para mitigarlo; por una parte las políticas de crédito de las instituciones (basadas principalmente en el poco historial crediticio de los prospectos), y por otra, requerimientos de garantías como pueden ser artículos domésticos o electrónicos que los clientes no siempre cumplen. Las pérdidas por riesgos crediticios de las instituciones se asumen toda vez que las obligaciones sobre sus créditos no son cumplidas por los clientes en un plazo mayor a un número determinado de días, en general 180, esta situación es llamada *castigo*.

1.4 Planteamiento del problema

El objetivo principal del trabajo es establecer el elemento de medición en el proceso de administración del riesgo de crédito para una IMF, es decir, el problema principal será:

Desarrollar un modelo que permita calcular las medidas de riesgo para establecer la suficiencia en las reservas y hacer frente a las pérdidas de la cartera de crédito.

Recordando los elementos que deben ser considerados para la medición, se tiene que, el primero es calcular la probabilidad de ocurrencia del evento que ocasiona pérdidas, para las IMF's este evento es el castigo. El cálculo de esta probabilidad estará basado únicamente en el comportamiento crediticio histórico de los acreditados. Usualmente para este tipo de carteras compuestas por personas físicas, suelen utilizarse variables socioeconómicas y demográficas, sin embargo este tipo de variables, no siempre están disponibles para el mercado en el que las microfinanzas se desarrollan.

Debido a que la información contable es frecuentemente auditada (desde los sistemas que gestionan la operación hasta los reportes contables) por las entidades de las que se obtienen fondos, o bien por la SHCP, esta es una fuente de información confiable que puede tenerse de los acreditados. En particular nos interesará el histórico de pagos mensual de los mismos; éste no es mas que la tabla de amortización de cada crédito acumulada en meses, a la que además se añade una columna con los días de atraso que se vayan presentado para las amortizaciones ya devengadas y, se representa verticalmente como una sucesión

de números. Un ejemplo de este histórico puede ser $(0, 15, 0, 24)$, en donde cada una de las entradas es igual a los días de atraso que se hayan tenido al final de cada uno de cuatro meses. De manera que el evento de riesgo para el que en estos términos nos interesará calcular su probabilidad de ocurrencia, es la aparición de un número mayor a 180, para tal objetivo haremos uso de las llamadas cadenas de Markov.

El segundo elemento de la medición es la severidad de las pérdidas, que será estimada a partir de la información histórica, mediante cocientes de pérdidas contra saldos, en determinados momentos del histórico de pagos para aquellos créditos en los que las pérdidas se hayan materializado.

Finalmente, la probabilidad de ocurrencia de las pérdidas, será evaluada mediante una función de distribución, establecida a partir de ciertas hipótesis sobre el comportamiento de la suma de las pérdidas individuales de los acreditados. Esta distribución y las medidas estadísticas asociadas a la misma, conformarán la base para el establecimiento de las reservas.

Capítulo 2

Medidas de Riesgo

El objetivo del presente Capítulo, es exponer las medidas de riesgo que serán calculadas en el Capítulo 4, basadas en las definiciones de riesgo establecidas por BANXICO (2005)[2], y con formulaciones analíticas basadas en las de Bluhm, Overbeck y Wagner (2003 pp. 11-46)[4] y las de Lütkebohmert (2009 pp. 3-17)[11]. Éstas son medidas estadísticas típicas y describen la distribución de las pérdidas del portafolio sobre algún horizonte de tiempo determinado, su finalidad es establecer los importes de reservas que deben ser acumuladas para hacer frente a la falta de pago de sus acreditados.

Posteriormente, se enunciará el teorema del límite central para variables aleatorias independientes con la formulación de Liapounov, basada en Lehmann (1999 pp. 97-98)[10], así como algunos elementos de simulación, basados en Ross(1998 pp. 487-497)[18]. A lo largo del capítulo, e igual que en la bibliografía antes citada, mucha de la terminología será utilizada en el idioma inglés por la facilidad con la que los términos básicos son distinguidos.

La primera parte estará dedicada a establecer la medida básica en el riesgo de crédito, una variable aleatoria que representa la pérdida para cada crédito en el portafolio, cuyo principal componente será la probabilidad de que el crédito en cuestión caiga en incumplimiento. Posteriormente se establecerán las hipótesis y principios económicos propios de las microfinanzas que se asumirán para encontrar la función de distribución de la suma de estas variables aleatorias individuales, esta suma representa la pérdida total del portafolio.

Las siguientes secciones estarán dedicadas a la definición de los estadísticos asociados a la función de distribución de las pérdidas que son utilizadas para la generación de reservas. Éstas son, la media para la Pérdida Esperada, el cuantil para el Valor en Riesgo como medida bajo condiciones normales (a un determinado nivel de confianza), la diferencia entre los dos anteriores para el Capital Económico, y la esperanza condicional de las pérdidas dado que éstas han rebasado cierto cuantil, para el Expected Shortfall como pérdida bajo condiciones de estrés. La última sección estará dedicada a la distribución empírica de la distribución basada en valores simulados de la misma.

2.1 Distribución de las pérdidas

En el contexto del riesgo de crédito, el evento que provoca pérdidas es el incumplimiento, es decir la falta de pago en un determinado periodo de tiempo por parte del acreditado, generando así una pérdida. En el caso de la mayoría de las IMFs, se considera que un crédito ha caído en incumplimiento (o castigo) si después de 180 días no cumple con la obligación de pagar.

Consideremos un portafolio con N créditos y denotemos por L , las pérdidas que éste puede ocasionar a la institución debidas a incumplimientos que ocurran en un período de tiempo $[0, T]$. Claramente

$$L = \sum_{n=1}^N L_n,$$

donde L_n representa las pérdidas ocasionadas por el n -ésimo crédito en el intervalo $[0, T]$.

El tiempo $t = 0$ es el día en el que se quieren evaluar las pérdidas bajo la hipótesis de que ninguno de los créditos en consideración ha caído en incumplimiento en este momento.

Cada una de las variables aleatorias L_n está compuesta por tres factores: el *Incumplimiento*, la *Exposición al Incumplimiento* y la *Severidad del Incumplimiento*, que describiremos a continuación.

Al tiempo $t = 0$ cada uno de los créditos es sano, y puede caer o no en incumplimiento en el futuro. La ocurrencia de este evento será descrita por una variable aleatoria que denotaremos con D_n :

$$D_n = \begin{cases} 1 & \text{si el cliente } n \text{ cae en incumplimiento en } [0, T] \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La *Exposición al Incumplimiento* es el importe monetario, conocido, que aún no ha sido saldado del crédito en $t = 0$, y que denotaremos como EAD_n (Exposure At Default). Por último la *Severidad del Incumplimiento*, SEV_n (Severity), se refiere a una variable aleatoria que describe la fracción del EAD_n que será asumida como pérdida si el incumplimiento llega a materializarse. La esperanza de esta variable aleatoria $\mathbb{E}[SEV_n] = LGD_n$ es conocida como la pérdida dado el incumplimiento (Loss Given Default), la estimación de esta esperanza, es vía una esperanza condicional sobre el grupo de créditos que hayan caído en incumplimiento. Así, definimos

$$L_n = EAD_n \cdot SEV_n \cdot D_n. \quad (2.1)$$

Las siguientes anotaciones sobre estos factores serán importantes a lo largo de todo el trabajo; las EAD_n no son consideradas variables aleatorias pues la exposición de cada crédito es conocida, y, SEV_n y D_n son consideradas independientes, debido principalmente a que la estimación de las LGD_n se realiza sobre un grupo de observaciones distintas a las de D_n . Regularmente para este tipo de portafolios (con un número grande de acreditados y ninguno con una participación considerable en el riesgo total), suele calcularse un único valor de LGD_n para todos los créditos. En el presente trabajo se asumirán LGD_n distintos dependiendo del plazo y la antigüedad que cada acreditado posea, debido principalmente a los plazos tan cortos que tenemos para su operación. D_n , es una variable aleatoria Bernoulli donde $P[D_n = 1] = PD_n$ y $P[D_n = 0] = 1 - PD_n$, $\mathbb{V}[D_n] = PD_n(1 - PD_n)$ y $\mathbb{E}[D_n] = PD_n$

Los valores PD_n son llamados *Probabilidades de Incumplimiento* y dependerán al igual que las SEV_n del plazo y la antigüedad, además de los meses en atraso que cada crédito posea. Las combinaciones de estas tres características son finitas y compartidas por muchos créditos en el portafolio, para el momento de la evaluación $t = 0$, por lo que compartirán también el valor de sus PD_n . El siguiente capítulo estará dedicado a las bases teóricas para la estimación de estas probabilidades, basada en las llamadas cadenas de Markov, por lo pronto basta considerar que las PD_n pertenecen a un conjunto finito y son conocidas.

La esperanza y la varianza de L_n pueden ser fácilmente calculadas:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_n] &= \mathbb{E}[EAD_n SEV_n D_n] \\ &= EAD_n \mathbb{E}[SEV_n D_n] \text{ (pues } EAD_n \text{ no es variable aleatoria)} \\ &= EAD_n \mathbb{E}[SEV_n] \mathbb{E}[D_n] \text{ (por ser } SEV_n \text{ y } D_n \text{ independientes)} \\ &= EAD_n LGD_n PD_n \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}[L_n] &= \mathbb{V}[EAD_n LGD_n D_n] \\
&= EAD_n^2 \mathbb{V}[LGD_n D_n] \\
&= EAD_n^2 (\mathbb{V}[SEV_n] \mathbb{V}[D_n] + \mathbb{E}[SEV_n]^2 \mathbb{V}[D_n] + \mathbb{E}[D_n]^2 \mathbb{V}[SEV_n]) \\
&= EAD_n^2 (\mathbb{V}[SEV_n] PD_n (1 - PD_n) + LGD_n^2 PD_n (1 - PD_n) + \mathbb{V}[SEV_n] PD_n^2) \\
&= EAD_n^2 (\mathbb{V}[SEV_n] (PD_n - PD_n^2 + PD_n^2) + LGD_n^2 PD_n (1 - PD_n)) \\
&= EAD_n^2 (\mathbb{V}[SEV_n] (PD_n) + LGD_n^2 PD_n (1 - PD_n))
\end{aligned} \tag{2.3}$$

El resultado (2.3) está basado en la propiedad para variables aleatorias independientes X y Y :

$$\mathbb{V}[XY] = \mathbb{V}[X] \mathbb{V}[Y] + \mathbb{E}[X]^2 \mathbb{V}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2 \mathbb{V}[X]$$

Denotaremos a la esperanza (2.2) y a la varianza (2.3) de L_n , como:

$$\mathbb{E}[L_n] = \mu_{L_n} \tag{2.4}$$

y

$$\mathbb{V}[L_n] = \sigma_{L_n}^2 \tag{2.5}$$

Nótese que para cada crédito n , las EAD_n son distintas, luego, sus esperanzas y varianzas también los son a pesar de que los valores de sus PD_n y sus SEV_n puedan no serlo, con lo que se concluye que sus funciones de densidad son distintas. Finalmente, la pérdida del portafolio L está dada por :

$$L = \sum_{n=1}^N L_n = \sum_{n=1}^N [EAD_n \cdot SEV_n \cdot D_n] \tag{2.6}$$

La variable aleatoria L y su distribución, componen la base para estimar las reservas para riesgos crediticios, a continuación haremos un paréntesis para establecer las hipótesis con las que ésta será calculada.

Existen en la industria muchos modelos para aproximar la distribución de L asumiendo ciertas propiedades en el comportamiento de los acreditados, dichos modelos dedican gran parte de su atención a la relación de este comportamiento con condiciones macroeconómicas, en particular la correlación que pueda existir entre esas condiciones y la probabilidad de incumplimiento a pesar de la independencia entre los acreditados¹. Estos modelos están diseñados para portafolios de grandes bancos en los que los créditos son otorgados por montos muy altos a empresas fuertemente relacionadas con determinadas industrias (condiciones macroeconómicas) y en los que la participación de ciertos acreditados en el Riesgo Expuesto Total puede llegar a ser alta en algún sector de la economía y el número de acreditados es “pequeño”.

Para el presente trabajo se asumirá que las L_n son variables aleatorias independientes (en analogía con estos modelos) pero que las PD_n describen en su totalidad los eventos de riesgo en el portafolio y no están correlacionadas con condiciones macroeconómicas, por lo menos reconocibles, dado el nivel de diversificación que se tiene entre actividades productivas del volumen “grande” de clientes, así como de la poca relación que estas pudieran tener con las grandes industrias y sus indicadores.

Estos supuestos pudieran parecer bastante simples para el modelo de riesgo, sin embargo son cualidades observables de las microfinanzas, pues como muestra MicroRate Incorporated (2009)[14], una de las agencias calificadoras de entidades microfinancieras más importante del mundo, existen pocos efectos

¹El ejemplo más claro de esto por ser el más utilizado en la industria, es el modelo de Merton discutido ampliamente en Bluhm (2003 pp. 128-136)[4] y Lütkebohmert (2009 pp. 19-30)[11].

que los movimientos macroeconómicos tienen sobre el incumplimiento² de un portafolio en este sector, siempre y cuando, el concepto de microfinanzas no sea ampliado a sectores como el consumo.

Así mismo, Prodesarrollo (2010 pp. 48-52)[15] expone evidencia de la falta de relación entre la crisis financiera de 2009 y el impacto en la calidad crediticia del sector microfinanciero de nuestro país, dando mayor importancia a las políticas de crédito y demás temas relacionados con la operación que cada una de las instituciones aplica en su portafolio, dando ventaja a aquellas que prefieren las de créditos grupales, situación que asumiremos, será reflejada por las PD_n .

Considerando los supuestos del párrafo anterior (independencia entre las L_n y no correlación reconocible con la macroeconomía) podemos ver que en (2.6) tenemos una suma de N variables aleatorias independientes, L_n , con distintas funciones de distribución, estos son también los supuestos en el siguiente teorema y un corolario que nos permitirá encontrar la distribución de L .

Teorema 2.1.1 Del Límite Central - Liapounov. Sean X_n , $n = 1, 2, \dots, N$ (asumimos que $N \rightarrow \infty$) variables aleatorias independientes con esperanzas $\mathbb{E}[X_n] = \mu_n$, varianzas $\mathbb{V}[X_n] = \sigma_n^2$ y $\mathbb{E}|X_n - \mu_n|^3 < \infty$. Defínanse:

$$S_N = \sum_{n=1}^N X_n \quad (2.7)$$

$$\mu_N = \sum_{n=1}^N \mu_n \quad (2.8)$$

$$\sigma_N^2 = \sum_{n=1}^N \sigma_n^2 \quad (2.9)$$

$$Y_N = \frac{S_N - \mu_N}{\sqrt{\sigma_N^2}} \quad (2.10)$$

Si el llamado Cociente de Liapounov, CL :

$$CL = \frac{\left(\sum_{n=1}^N \mathbb{E}|X_n - \mu_n|^3 \right)^2}{\left(\sum_{n=1}^N \sigma_n^2 \right)^3} \rightarrow 0 \quad (2.11)$$

entonces:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P[Y_N \leq y] = P[Y \leq y], \quad \text{con } Y \sim N_{(0,1)},$$

donde $N_{(0,1)}$ representa a la distribución normal estándar. Es decir, la distribución de Y_N converge a la de una variable aleatoria Normal con media cero y varianza uno, de manera que si $N \rightarrow \infty$

$$P[S_N \leq y] = P\left[\frac{S_N - \mu_N}{\sqrt{\sigma_N^2}} \leq \frac{y - \mu_N}{\sqrt{\sigma_N^2}} \right] \quad (2.12)$$

$$\approx N_{(0,1)}\left(\frac{y - \mu_N}{\sqrt{\sigma_N^2}} \right) \quad (2.13)$$

²No así sobre las fuentes para conseguir fondos, sin embargo, el impacto de este fenómeno es ajeno a nuestro interés.

Para una demostración de este teorema véase Feller (1957 pp. 533-536)[7]. Para tener una primera idea del resultado que se obtendría del cálculo de (2.11) y así poder hacer uso del teorema, podemos aplicar las ideas del siguiente corolario, en este se establece una condición más fácil de verificar a simple vista cuando las variables aleatorias están todas acotadas por alguna constante, este es el caso de las L_n pues los montos que las IMFs otorgan están todos acotados por sus políticas de crédito:

Corolario 2.1.1 Sean X_n , $n = 1, 2, \dots, N$, Y_N (variables aleatorias), μ_n y σ_n^2 con las mismas características que en el teorema (2.1.1), y además existe $A \in \mathbb{R}$ para la que $|X_n| \leq A$, para toda n . Supongamos que

$$\sum_{n=1}^N \mathbb{V}[X_n] = \sum_{n=1}^N \sigma_n^2 \longrightarrow \infty. \quad (2.14)$$

entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P[Y_N \leq y] = P[Y \leq y], \quad \text{con } Y \sim N_{(0,1)},$$

Prueba. De acuerdo a los supuestos tenemos que:

$$|X_n - \mu_n| \leq |X_n| + |\mu_n| \leq |A| + |A| = 2A$$

además:

$$|X_n - \mu_n|^3 = |X_n - \mu_n| |X_n - \mu_n|^2 \leq 2A |X_n - \mu_n|^2 = 2A (X_n - \mu_n)^2$$

luego:

$$\sum_{n=1}^N \mathbb{E}|X_n - \mu_n|^3 \leq 2A \sum_{n=1}^N \mathbb{E}(X_n - \mu_n)^2 = 2A \sum_{n=1}^N \sigma_n^2$$

de manera que podemos acotar (2.11):

$$\frac{\left(\sum_{n=1}^N \mathbb{E}|X_n - \mu_n|^3 \right)^2}{\left(\sum_{n=1}^N \sigma_n^2 \right)^3} \leq \frac{\left(2A \sum_{n=1}^N \sigma_n^2 \right)^2}{\left(\sum_{n=1}^N \sigma_n^2 \right)^3} \leq \frac{4A^2}{\sum_{n=1}^N \sigma_n^2} \quad (2.15)$$

Siendo A una constante, basta que (2.14) se cumpla para que (2.15) tienda a cero y $Y_n \sim N_{(0,1)}$ por la condición de Liapounov.

■

Ahora bien, para poder aplicar el teorema (2.1.1) a las variables aleatorias independientes L_n , calcularemos primero la esperanza y varianza de su suma, L , es decir:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^N L_n \right] \\ &= \sum_{n=1}^N \mathbb{E}[L_n] \quad (\text{por la independencia de las } L_n) \\ &= \sum_{n=1}^N \mu_{L_n} \quad (\text{renombrando como en (2.4)}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}[L] &= \mathbb{V}\left[\sum_{n=1}^N L_n\right] \\
&= \sum_{n=1}^N \mathbb{V}[L_n] \text{ (por la independencia de las } L_n\text{)} \\
&= \sum_{n=1}^N \sigma_{L_n}^2 \text{ (renombrando como en (2.5))}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Es así que, podemos utilizar el teorema (2.1.1), para aproximar la distribución de la variable aleatoria L a través de L_N , definida como:

$$L_N = \frac{L - \mu_L}{\sqrt{\sigma_L^2}} \tag{2.18}$$

donde la esperanza y la varianza de L ((2.16) y (2.17)), fueron sustituidas por μ_L y σ_L^2 , respectivamente para ahorrar notación. Claramente, L_N tiene la misma forma que Y_N en (2.10), luego, podemos aproximarla vía una distribución Normal estándar, si cuando $N \rightarrow \infty$ se cumple que:

$$\sum_{n=1}^N \sigma_{L_n}^2 = \sum_{n=1}^N EAD_n^2 (\mathbb{V}[SEV_n](PD_n) + LGD_n^2 PD_n(1 - PD_n)) \rightarrow \infty \tag{2.19}$$

pues de acuerdo al corolario (2.1.1), si (2.19) se cumple, tendremos que:

$$P[L \leq l] \approx N_{(0,1)}\left(\frac{l - \mu_L}{\sqrt{\sigma_L^2}}\right) \tag{2.20}$$

Para que la suma en (2.19) no diverja necesitaríamos que los valores dentro del paréntesis que multiplica a EAD_n^2 fueran muy cercanos a cero y además éstos *dominaran* la suma, por lo que podemos esperar que la condición se cumpla. A pesar de esta primer idea para la aplicación del teorema, en su momento se calculará el cociente de Liapounov para verificar que la condición (2.11) se cumpla.

2.2 La Pérdida Esperada

Una vez que la distribución de L puede ser aproximada, es momento de utilizarla para estimar lo que sucederá con las pérdidas del portafolio, y administrar así los riesgos crediticios. Una primer medida que puede ser utilizada para la generación de reservas es la esperanza de L :

Definición 2.2.1 Sea L definida como en (2.6), llamaremos *pérdida esperada de L* , $PE(L)$, a la *esperanza*:

$$PE(L) = \mathbb{E}[L] \tag{2.21}$$

El valor de $PE(L)$ ya había sido calculado en (2.16). La pérdida esperada es el valor o piso mínimo que se debe tener como importe de reservas para hacer frente a las responsabilidades adquiridas por la institución en caso de que sus acreditados no cumplan con sus pagos, y debe componerse por los ingresos que se reciban del otorgamiento de créditos, es decir, la tasa de interés que se cobre en el portafolio debe

ser consistente con el riesgo (cantidad de dinero) que resulte de valorar esta esperanza. De acuerdo a (2.13), para el caso en el que L puede ser aproximada con L_N como en (2.18), el valor de la pérdida esperada corresponde a una probabilidad de ocurrencia del 50%, sin embargo, podemos componer otra medida de riesgo con la que la probabilidad de ocurrencia de un determinado valor de L pueda ser ajustado a un nivel de confianza deseado, este es el llamado Valor en Riesgo.

2.3 Valor en Riesgo y Capital Económico

El Valor en Riesgo o *Value at Risk* (VaR) ha sido en las últimas décadas la medida de riesgo más común en los mercados financieros. Esta es una medida de la máxima pérdida posible que no será excedida dada una probabilidad de ocurrencia, mejor conocida como nivel de confianza. Generar reservas con el VaR significaría una cobertura de riesgos para pérdidas esperadas y no esperadas hasta el nivel de confianza deseado. Su definición formal es:

Definición 2.3.1 Sea \mathbb{R} el conjunto de los números reales, dado un nivel de confianza $\alpha \in (0, 1)$ y L definida como en (2.6), el VaR está dado por el menor número x , para el que la probabilidad de que L exceda x no pueda ser mayor que $(1 - \alpha)$:

$$VaR_\alpha(L) = \inf \{x \in \mathbb{R} : P(L > x) \leq (1 - \alpha)\} = \max \{x \in \mathbb{R} : P(L \leq x) \leq \alpha\} \quad (2.22)$$

De la definición puede verse que el *VaR* es un cuantil de la distribución de las pérdidas. Nuevamente, de acuerdo a nuestro planteamiento, y a (2.13) podemos deducir el valor del VaR para L como:

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(L) &= \max \{x \in \mathbb{R} : P(L \leq x) \leq \alpha\} \\ &= \max \left\{ x \in \mathbb{R} : P \left(\frac{L - \mu_L}{\sqrt{\sigma_L^2}} \leq \frac{x - \mu_L}{\sqrt{\sigma_L^2}} \right) \leq \alpha \right\} \\ &= \max \left\{ x \in \mathbb{R} : N_{(0,1)} \left(\frac{x - \mu_L}{\sqrt{\sigma_L^2}} \right) \leq \alpha \right\} \quad (\text{por (2.20)}) \\ &= \max \left\{ x \in \mathbb{R} : \left(\frac{x - \mu_L}{\sqrt{\sigma_L^2}} \right) \leq N_{(0,1)}^{-1}(\alpha) \right\} \\ &= \max \left\{ x \in \mathbb{R} : x \leq \mu_L + \sqrt{\sigma_L^2} N_{(0,1)}^{-1}(\alpha) \right\} \\ &= \mu_L + \sigma_L N_{(0,1)}^{-1}(\alpha) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Donde $N_{(0,1)}^{-1}$ representa la función normal estándar inversa y (2.23) resulta pues el máximo se cumpliría precisamente en la igualdad. Los periodos de tiempo y niveles de confianza a los que esta medida se calcula varían entre instituciones, y oscila entre el 99.5% y 99.9%. A mayores niveles de confianza mayores valores del *VaR* y mayores importes monetarios para asegurar una cobertura contra las pérdidas. Sin embargo, la diferencia entre la pérdida esperada y el *VaR* no puede ser transferido directamente al cliente, debe ser cubierto por ingresos que no provengan de la parte de la tasa de interés correspondiente a la cobertura de riesgos, es decir por ingresos que pudieran formar parte del capital de la empresa, dicha medida es conocida como capital económico:

Definición 2.3.2 Sea L definida como en (2.6), definiremos el Capital Económico de L , $CE(L)$, como la diferencia $VaR_\alpha(L) - PE(L)$:

$$\begin{aligned}
CE(L) &= VaR_\alpha(L) - PE(L) \\
&= \sigma_L N_{(0,1)}^{-1}(\alpha) + \mu_L - \mu_L \\
&= \sigma_L N_{(0,1)}^{-1}(\alpha)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Las reservas de capital económico son una buena práctica entre las instituciones financieras en general y debe cumplirse bajo una disciplina financiera muy rigurosa en la que los ingresos puedan llegar a ser gestionados de manera que se asegure su existencia. Para finalizar esta sección, haremos mención del hecho que el VaR no da ninguna información acerca de las pérdidas que pueden ocurrir en la cola derecha de la distribución, es decir, con probabilidad menor a $(1-\alpha)$, las pérdidas cuya probabilidad de ocurrencia estén en esa cola de la distribución son conocidas como *de estrés* o bien *catastróficas* y generalmente se presentan en portafolios dependientes de factores macroeconómicos y expuestas a sucesos que provoquen pérdidas muy serias, en estos casos las distribuciones de las pérdidas poseen colas pesadas. A pesar de no ser el caso del portafolio de una IMF, como cumplimiento para las medidas descritas por BANXICO, una medida adicional que se presenta para estimar estas pérdidas es el *Expected Shortfall*.

2.4 Expected Shortfall

La palabra *shortfall* puede ser traducida al español como *la incapacidad para lograr una meta u objetivo*, la medida de riesgos crediticios conocida como Expected Shortfall se refiere a la esperanza de las pérdidas que no podrían ser cubiertas por el VaR .

Definición 2.4.1 Dado un nivel de confianza $\alpha \in (0, 1)$ y L definida como en (2.6), con $\mathbb{E}[L] < \infty$, el *Expected Shortfall (ES)* se define como:

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{(1-\alpha)} \int_\alpha^1 VaR_u(L) du \tag{2.25}$$

De la definición puede verse que para valores de α cercanos a uno el valor $1/(1-\alpha)$ es grande y para valores de α cercanos a cero ese mismo valor es muy cercano a uno de manera que $ES_\alpha \geq VaR_\alpha$. Cuando la distribución de las pérdidas es continua podemos expresar (2.25) como una esperanza condicional (véase McNeil, Frey, Embrechts (2005 p. 45) [12] para su demostración):

$$ES_\alpha(L) = \mathbb{E}[L | L \geq VaR_\alpha(L)] \tag{2.26}$$

$$= \frac{\mathbb{E}[L I_{L \geq VaR_\alpha(L)}]}{(1-\alpha)} \tag{2.27}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha(L)}^\infty l f_L(l) dl \tag{2.28}$$

donde $I_{(\cdot)}$ representa la función indicadora definida sobre el intervalo (\cdot) , $f_L(l)$ la función de densidad de las pérdidas. El Expected Shortfall puede ser interpretado como las pérdidas esperadas, dado que las pérdidas han rebasado el VaR , ponderadas con el factor $(1-\alpha)$. Para el caso en el que la distribución de las pérdidas es como en (2.6) podemos calcular el Expected Shortfall como sigue:

$$\begin{aligned}
ES_\alpha(L) &= \mathbb{E}[L|L \geq VaR_\alpha(L)] \\
&= (\sigma_L/\sigma_L)\mathbb{E}[L|L \geq VaR_\alpha(L)] + \mu_L - \mu_L \\
&= \mu_L + \sigma_L \mathbb{E}\left[\frac{L - \mu_L}{\sigma_L} \mid \frac{L - \mu_L}{\sigma_L} \geq N_{(0,1)}^{-1}(\alpha)\right] \text{ (por (2.23))} \\
&= \mu_L + \sigma_L \mathbb{E}\left[L_N | L_N \geq N_{(0,1)}^{-1}(\alpha)\right] \\
&= \mu_L + \frac{\sigma_L}{1 - \alpha} \int_{N_{(0,1)}^{-1}(\alpha)}^{\infty} l_N \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{l_N^2}{2}}\right] dl_N \text{ (por (2.28))} \\
&= \mu_L - \frac{\sigma_L}{\sqrt{2\pi}(1 - \alpha)} \left[e^{-\frac{l_N^2}{2}} \right]_{N_{(0,1)}^{-1}(\alpha)}^{\infty} \\
&= \mu_L + \frac{\sigma_L}{\sqrt{2\pi}(1 - \alpha)} \left[e^{-\frac{(N_{(0,1)}^{-1}(\alpha))^2}{2}} \right]
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Como se dijo anteriormente, el Expected Shortfall siempre es más grande que el VaR de manera que la disciplina financiera para poder incluirlo dentro de las reservas es aún mayor, y no todas las instituciones poseen la solvencia para realizarlo, de manera que sus resultados deben servir también como alerta para que las instituciones corrijan sus políticas de riesgos y las estrategias para mitigarlo cuando éstos sean considerables.

La siguiente figura muestra la relación que guardan entre sí las medidas de riesgo antes mencionadas así como su relación con la distribución de L :

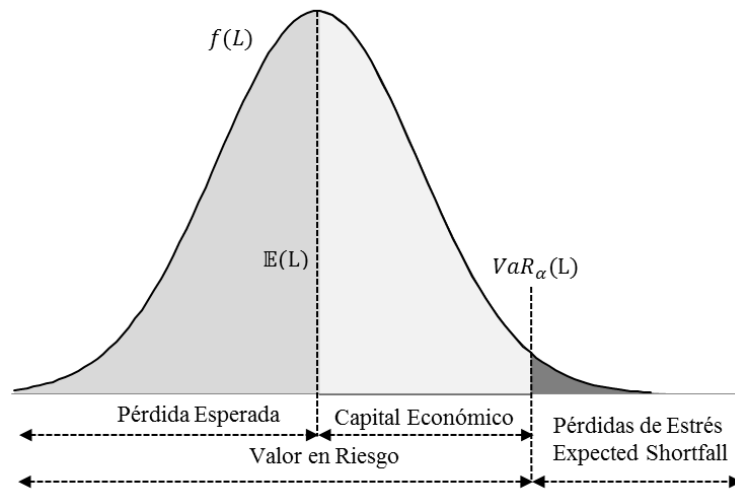


Figura 2.1: Medidas de Riesgo

2.5 Simulación

Simular una variable aleatoria significa obtener valores al azar de la misma a partir de su función de distribución, uno de los métodos más utilizados para realizar esto está basado en la generación de números aleatorios entre 0 y 1 a través de métodos computacionales para después aplicar la siguiente proposición:

Proposición 2.5.1 Sea $U_{(0,1)}$ una variable aleatoria uniforme definida en el intervalo $(0,1)$. Para cualquier función de distribución estrictamente continua, F , defínase la variable aleatoria Y como:

$$Y = F^{-1}(U_{(0,1)})$$

Entonces la variable aleatoria Y tiene función de distribución F . Donde denotamos con $F^{-1}(x) = y$ el valor para el cual $F(y) = x$

Prueba. De acuerdo a las hipótesis tenemos que:

$$F_Y(a) = P[Y \leq a] = P[F^{-1}(U_{(0,1)}) \leq a] \quad (2.30)$$

Como $F(x)$ es estrictamente creciente, se sigue que $F^{-1}(U_{(0,1)}) \leq a$ si y solo si $U_{(0,1)} \leq F(a)$, así que por (2.30) tenemos que:

$$F_Y(a) = P[U_{(0,1)} \leq F(a)] = F(a) \text{ (por ser uniforme } U_{(0,1)}) \quad (2.31)$$

De acuerdo a la proposición (2.5.1) podemos simular variables aleatorias X con distribución F generando números aleatorios $U_{(0,1)}$ y haciendo $X = F^{-1}(U_{(0,1)})$. Cuando la variable aleatoria X es discreta, y entonces

$$P[X = x_j] = P_j; j = 0, 1, 2, \dots; \sum_j P_j = 1$$

Esta metodología puede ser aplicada mediante la siguiente regla de decisión:

$$X = \begin{cases} x_1 & \text{si } U_{(0,1)} < P_1 \\ x_2 & \text{si } P_2 < U_{(0,1)} < P_1 \\ \vdots & \\ x_j & \text{si } \sum_1^{j-1} P_n < U_{(0,1)} < \sum_1^j P_n \\ \vdots & \end{cases} \quad (2.32)$$

a partir del hecho que

$$P[X = x_j] = \sum_1^{j-1} P_n < U_{(0,1)} < \sum_1^j P_n = P_j \quad (2.33)$$

Es así que, una forma de verificar que nuestros supuestos sobre la distribución de L son consistentes con los datos, es a través de la simulación de escenarios en los que los créditos se comporten de acuerdo a su probabilidad de incumplimiento y obtengamos un valor simulado de L . Esto quiere decir que a pesar de no conocer en principio su distribución, si sabemos que es la suma de N variables aleatorias, L_n , independientes de las que si la conocemos, y basta con simular éstas y sumarlas para obtener una simulación de L . De acuerdo a la ocurrencia de estos distintos valores podemos basarnos en su frecuencia relativa para aproximar los valores de su función de distribución (llamada función de distribución empírica).

En lo que resta de la sección denotaremos con $S^r(\cdot)$ al r -ésimo valor simulado de alguna variable aleatoria. Como ya se comentó, cada uno de los valores $S^r(L)$ serán iguales a la suma:

$$S^r(L) = \sum_{n=1}^N S^r(L_n) = \sum_{n=1}^N EAD_nLGD_nS^r(D_n) \quad (2.34)$$

donde los valores simulados $S^r(D_n)$, serán obtenidos gracias a la generación de N números aleatorios $U_{(0,1)n}^r$ y lo establecido en (2.32) de la siguiente forma:

$$S^r(D_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } U_{(0,1)n}^r < PD_n \\ 0 & \text{En cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (2.35)$$

Asumiendo que hemos simulado R pérdidas potenciales del portafolio $S^1(L), S^2(L), \dots, S^R(L)$, llamaremos *Distribución Empírica* de las pérdidas a la suma:

$$F_L^{emp}(l) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R S^r(L) I_{(0,l)} \quad (2.36)$$

Nuevamente $I_{(0,l)}$ representa la función indicadora en el intervalo $(0, l)$. De esta forma, los valores de $F_L^{emp}(l)$ podrán ser comparados con los obtenidos de manera analítica con (2.20) a través de los gráficos (pruebas) llamados *QQ-plot*, para la hipótesis nula de similitud. Este tipo de gráficos son comúnmente usados para verificar la normalidad para algún grupo de observaciones (en nuestro caso los $S^r(L)$) a través de sus cuantiles, para lo cual denotaremos con $S^{r_1}(L) \leq S^{r_2}(L) \leq \dots \leq S^{r_R}(L)$ a los valores ordenados de la simulación y definiremos el cuantil α , q_α de (2.36) como :

$$q_\alpha = \begin{cases} \alpha S^{r_{[n\alpha]}}(L) + (1 - \alpha) S^{r_{[n\alpha]+1}}(L) & \text{si } n\alpha \in \mathbb{N} \\ S^{r_{[n\alpha]}}(L) & \text{si } n\alpha \notin \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.37)$$

donde $[n\alpha] = \min \{k \in \{1, 2, \dots, R\} | n\alpha \leq k\}$

Capítulo 3

Cadenas de Markov

El objetivo del presente capítulo es establecer los fundamentos teóricos con los que se estimarán las probabilidades de incumplimiento PD_n con las que se trabajó en el capítulo anterior, basadas en un concepto dentro de la teoría de los procesos estocásticos atribuido al matemático ruso Andrei Andreevitch Markov, quien presentó por primera vez sus ideas a principios del siglo XX y está basado principalmente en el artículo de Anderson y Goodman (1956)[1], *Statistical Inference for Markov Chains*. En principio se presentarán las definiciones y principales teoremas para este tipo de procesos. Posteriormente se tocarán los temas con los que nos será posible llevarlo a la práctica en un grupo de datos, es decir los relacionados a la inferencia estadística tanto para la estimación de probabilidades como para comprobar que las propiedades de este tipo de procesos se encuentran presentes en los datos.

Consideraciones especiales que deben tenerse a lo largo del capítulo son, que el contexto en el que se hablará de funciones de densidad y distribución será el de variables aleatorias discretas y que en el presente no se tendrá ninguna referencia sobre la aplicación de esta teoría en un portafolio de acreditados por la necesidad del marco operativo en el que funcionan, sin embargo, se hará uso de los resultados de manera puntual en el Capítulo 4 de Aplicaciones.

3.1 Definiciones

Las siguientes definiciones así como la notación utilizada están basadas en Karlin y Taylor (1975 pp. 45-62)[8].

Definición 3.1.1 *Una cadena de Markov es un proceso estocástico discreto $\{X_s\}$; $X_s \in E = \{0, 1, 2, \dots, m\}$, en el que:*

$$P[X_t = i_t | X_{t-1} = i_{t-1}, X_{t-2} = i_{t-2}, \dots, X_0 = i_0] = P[X_t = i_t | X_{t-1} = i_{t-1}] \quad (3.1)$$

con $i_0, \dots, i_t \in E$

Nótese que con esta notación se enfatiza que la probabilidad de transición depende del tiempo en el que se encuentre el proceso. Los valores

$$P[X_t = j | X_{t-1} = i] = p_{ij}^t \quad (3.2)$$

son llamados *probabilidad de transición en un paso*, el conjunto E , *espacio de estados*, y las posibles realizaciones $i_1 i_2 \dots i_t$, *trayectorias*. Dos consecuencias inmediatas de esta definición, así como la de probabilidad condicional son:

$$p_{ij}^t \geq 0, i \in E, j = 0, 1, \dots, t; \quad (3.3)$$

$$\sum_{j=0}^m p_{ij}^t = 1 \text{ con } i \in E \quad (3.4)$$

Un concepto de mayor importancia para el análisis de cadenas de Markov es el de Matriz de Transición:

Definición 3.1.2 Sea $\{X_s\}$ una cadena de Markov, $t > 0$, llamaremos Matriz de Transición al tiempo t , P^t , a la compuesta en cada una de sus entradas $(i, j); i = 0, 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, 2, \dots, m$, por cada uno de los elementos p_{ij}^t :

$$P^t = \begin{pmatrix} p_{00}^t & p_{01}^t & \cdots & p_{0m}^t \\ p_{10}^t & p_{11}^t & \cdots & p_{1m}^t \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{m0}^t & p_{m1}^t & \cdots & p_{mm}^t \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Nótese que, de acuerdo a (3.4), la suma de los renglones de éstas matrices deben ser uno.

La relevancia de estas matrices está relacionada con la facilidad con la que nos permiten calcular las probabilidades asociadas a trayectorias completas de más de dos pasos. En el contexto del presente trabajo, también nos permitirán representar de manera sintetizada las probabilidades de transición como herramienta de análisis.

3.2 Probabilidad del proceso.

Las probabilidades de transición en un paso definidas en la sección anterior así como los valores de $P[X_0 = i_0]$ (pues no hay transición previa al tiempo 0) servirán como base para calcular la probabilidad de ocurrencia de los posibles valores del proceso en más de un paso, o sea, la probabilidad de una determinada trayectoria $i_0 i_1 \dots i_t; t > 1$. Nótese que cada trayectoria es un evento del espacio muestral $\Omega = E \times E \times \dots \times E$, donde el producto se realiza t veces.

Teorema 3.2.1 Sea $\{X_s\}$ una cadena de Markov, para alguna t fija, la probabilidad de una trayectoria $i_0 i_1 \dots i_t$ donde $i_s \in E, s = 0, 1, \dots, t$ puede ser expresada en términos de sus probabilidades de transición en un tiempo y $P[X_0 = i_0]$ como:

$$\begin{aligned} P[X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_t = i_t] &= P[X_0 = i_0] p_{i_0 i_1}^1 p_{i_1 i_2}^2 \cdots p_{i_{t-2} i_{t-1}}^{t-1} p_{i_{t-1} i_t}^t \\ &= P[X_0 = i_0] \prod_{s=1}^{s=t} p_{i_{s-1} i_s}^s \end{aligned} \quad (3.6)$$

Prueba. Aplicando la definición de probabilidad condicional¹ podemos descomponer la trayectoria en dos eventos, para posteriormente aplicar la propiedad Markoviana. Siguiendo este procedimiento t veces:

¹ $P[A \cap B] = P[B] P[A|B]$

$$\begin{aligned}
& P[X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_t = i_t] \\
&= P[X_0 = i_0, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}] P[X_t = i_t | X_0 = i_0, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}] \\
&= P[X_0 = i_0, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}] p_{i_{t-1}i_t}^t \\
&\vdots \\
&= P[X_0 = i_0, X_1 = i_1] p_{i_1i_2}^2 p_{i_2i_3}^3 \dots p_{i_{t-2}i_{t-1}}^{t-1} p_{i_{t-1}i_t}^t \\
&= P[X_0 = i_0] p_{i_0i_1}^1 p_{i_1i_2}^2 \dots p_{i_{t-2}i_{t-1}}^{t-1} p_{i_{t-1}i_t}^t \\
&= P[X_0 = i_0] \prod_{s=1}^{s=t} p_{i_{s-1}i_s}^s
\end{aligned}$$

■

Procediendo de la misma forma, para dos enteros $t, u > 0$ e $i_s \in E; s = t, t+1, \dots, t+u$, podemos calcular la probabilidad de la trayectoria $i_t i_{t+1} i_{t+2} \dots i_{t+u}$:

$$P[X_t = i_t, X_{t+1} = i_{t+1}, \dots, X_{t+u} = i_{t+u}] = P[X_t = i_t] \prod_{s=1}^{s=u} p_{i_{t+s-1}i_{t+s}}^s \quad (3.7)$$

La distribución de X_t debe ser conocida pues depende de la última observación que se tenga del proceso, es decir del valor de X_{t-1} .

3.3 Probabilidad de transición en u pasos.

Una vez que las probabilidades de transición en un paso son conocidas podemos relacionarlas con eventos (trayectorias) en las que solo nos interesen los valores en un tiempo inicial y uno final sin importar lo que suceda en los intermedios. Para tal fin, basta considerar cada uno de los eventos ajenos en los que en los tiempos intermedios la cadena tome cada uno de sus posibles valores, así como, la multiplicación de las matrices de transición en los distintos tiempos. Utilizaremos el signo \times para representar la multiplicación matricial.

Teorema 3.3.1 *Sea $\{X_s\}$ una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{0, 1, 2, \dots, m\}$, t y u dos enteros con $u, t > 0$, para $i_{t+u}, i_t \in E$ se tiene que:*

$$P[X_{t+u} = i_{t+u} | X_t = i_t] = [P^{t+1} \times P^{t+2} \times \dots \times P^{t+u}]_{i_t, i_{t+u}} = p_{i_t i_{t+u}}^{t, t+u}$$

es decir, la entrada (i_t, i_{t+u}) del producto de las matrices de transición desde el tiempo $t+1$ hasta el $t+u$. Los valores $p_{i_t i_{t+u}}^{t, t+u}$ son conocidos como probabilidades de transición en u tiempos desde t .

Prueba. De acuerdo a la definición de producto matricial tenemos que la entrada (i_t, i_{t+u}) del producto:

$$[P^{t+1} \times P^{t+2} \times \dots \times P^{t+u}]_{i_t, i_{t+u}} = \sum_{i_{t+1}=0}^m \dots \sum_{i_{t+u-1}=0}^m \prod_{s=1}^u p_{i_{t+s-1}i_{t+s}}^{t+s} \quad (3.8)$$

Aplicando la definición de probabilidad condicional:

$$P[X_{t+u} = i_{t+u} | X_t = i_t] = \frac{P[X_{t+u} = i_{t+u}, X_t = i_t]}{P[X_t = i_t]} \quad (3.9)$$

El evento $\{X_{t+u} = i_{t+u}, X_t = i_t\}$ en (3.9), está compuesto por la unión de cada uno de los m^{u-1} posibles eventos ajenos en los que para cada tiempo las variables aleatorias $X_s, t < s < t+u$ pueda estar en cualquiera de los estados de E , es decir:

$$\{X_{t+u} = i_{t+u}, X_t = i_t\} = \bigcup_{\substack{i_{t+1} \in E \\ \vdots \\ i_{t+u-1} \in E}} \{X_{t+u} = i_{t+u}, X_{t+u-1} = i_{t+u-1}, \dots, X_{t+1} = i_{t+1}, X_t = i_t\} \quad (3.10)$$

Ya que los eventos en (3.10) son ajenos, la probabilidad de esta unión puede ser expresada como:

$$P \left[\bigcup_{\substack{i_{t+1} \in E \\ \vdots \\ i_{t+u-1} \in E}} \{X_{t+u} = i_{t+u}, X_{t+u-1} = i_{t+u-1}, \dots, X_{t+1} = i_{t+1}, X_t = i_t\} \right] = \sum_{i_{t+1} \in E} \dots \sum_{i_{t+u-1} \in E} P[X_{t+u} = i_{t+u}, X_{t+u-1} = i_{t+u-1}, \dots, X_{t+1} = i_{t+1}, X_t = i_t] \quad (3.11)$$

Aplicando (3.7), a cada una de las sumas en (3.11), ésta puede ser expresada como:

$$\sum_{i_{t+1} \in E} \dots \sum_{i_{t+u-1} \in E} P[X_t = i_t] \prod_{s=1}^u p_{i_{t+s-1} i_{t+s}}^s \quad (3.12)$$

El término $P[X_t = i_t]$ puede ser factorizado pues no depende de los índices de las sumas:

$$\sum_{i_{t+1}=0}^m \dots \sum_{i_{t+u-1}=0}^m P[X_t = i_t] \prod_{s=1}^u p_{i_{t+s-1} i_{t+s}}^s = P[X_t = i_t] \sum_{i_{t+1}=0}^m \dots \sum_{i_{t+u-1}=0}^m \prod_{s=1}^u p_{i_{t+s-1} i_{t+s}}^s \quad (3.13)$$

Sustituyendo (3.13) en (3.9):

$$\begin{aligned} P[X_{t+u} = i_{t+u} | X_t = i_t] &= \frac{P[X_t = i_t] \sum_{i_{t+1}=0}^m \dots \sum_{i_{t+u-1}=0}^m \prod_{s=1}^u p_{i_{t+s-1} i_{t+s}}^s}{P[X_t = i_t]} \\ &= \sum_{i_{t+1}=0}^m \dots \sum_{i_{t+u-1}=0}^m \prod_{s=1}^u p_{i_{t+s-1} i_{t+s}}^s \end{aligned} \quad (3.14)$$

Por lo tanto, como (3.14) es igual a la definición de producto matricial (3.8), el teorema queda demostrado. ■

El teorema (3.3.1) será la base para calcular las probabilidades de incumplimiento en el portafolio de alguna IMF.

3.4 Estimación de las probabilidades de transición.

Hemos visto hasta ahora que, tanto para calcular la probabilidad del proceso, como para las probabilidades de transición en u pasos, es necesario conocer las probabilidades de transición en un paso p_{ij}^t . El objetivo

de esta sección será obtener estimaciones de estos valores a partir de una muestra obtenida de un grupo de datos que asumiremos provienen de una cadena de Markov, para tal fin haremos uso de las siguientes dos definiciones:

Definición 3.4.1 Sea $f(X; \theta)$ una función de densidad con parámetros desconocidos $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_Q)$, $\theta \in \Theta$ para algún conjunto Θ previamente definido, y sea X_1, X_2, \dots, X_R una muestra aleatoria, independiente, de dicha densidad. Llamaremos Función de Verosimilitud $\mathcal{L}(f; \theta)$ al producto:

$$\mathcal{L}(f; \theta) = f(X_1; \theta) f(X_2; \theta) \dots f(X_R; \theta) = \prod_{r=1}^R f(X_r; \theta) \quad (3.15)$$

Esta definición hace hincapié en la necesidad de expresar explícitamente a los parámetros de la función de densidad en el producto que compone la verosimilitud. Siendo los valores de θ desconocidos estos suelen estar relacionados con los valores de la muestra. La utilidad última de esta función será la de estimar θ a partir de la hipótesis que el valor más apropiado para la distribución debe ser el que maximice la probabilidad de ocurrencia de los valores en la muestra, es decir, el que maximiza la función de verosimilitud:

Definición 3.4.2 Sea $\mathcal{L}(f; \theta)$ la función de verosimilitud de alguna función de densidad $f(X; \theta)$ y sea X_1, X_2, \dots, X_R una muestra aleatoria, independiente, de dicha densidad. Llamaremos estimador de máxima verosimilitud $\theta = \hat{\theta}$, para dicha muestra, al valor en Θ para el cual $\mathcal{L}(f; \theta)$ alcanza su máximo, es decir:

$$\mathcal{L}(f; \theta) \leq \mathcal{L}(f; \hat{\theta}), \forall \theta \in \Theta \quad (3.16)$$

Una forma de encontrar $\hat{\theta}$ es maximizar $\mathcal{L}(f; \theta)$ vía primeras derivadas parciales, en este caso con respecto a cada $\theta_q; q = 1, 2, \dots, Q$ en $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_Q)$. Cada una de estas derivadas parciales es igualada a cero y así resolver para θ_q . Cada una de las soluciones sería una componente del vector $\hat{\theta}$. Previo a la aplicación de esta metodología, para asegurar que dichas soluciones son los máximos, tendríamos que verificar que las segundas derivadas parciales para cada θ_q existen y además:

$$\frac{\partial^2 \theta_q \mathcal{L}(f; \theta)}{\partial \theta_q^2} < 0, q = 1, 2, \dots, Q \quad (3.17)$$

Teniendo en consideración lo anterior, procederemos a su aplicación en una cadena de Markov. De acuerdo a (3.4) vemos que para $t > 0$ e $i \in E$ cualesquiera pero fijas, $P[X_t = j | X_{t-1} = i]$ es una función de densidad condicionada al evento $\{X_{t-1} = i\}$, de manera que el espacio muestral para esta densidad sería el conjunto de trayectorias en las que en el tiempo $(t-1)$ el valor de la cadena asume el valor fijo i . Sin embargo, como para esta distribución es irrelevante lo que suceda en tiempos posteriores a t y menores a $(t-1)$, podemos expresar el espacio muestral simplemente como $\Omega_i = \{(i, X_t) : X_t, i \in E\}$ y a una muestra aleatoria, independiente, de tamaño R en este espacio como $(i, j_t^1), (i, j_t^2), \dots, (i, j_t^R)$, por lo que la función de verosimilitud, a la que denotaremos simplemente como \mathcal{L} , es:

$$\mathcal{L} = \prod_{r=1}^R P[X_t = j_t^r | X_{t-1} = i] = \prod_{r=1}^R p_{ij_t^r}^t \quad (3.18)$$

Ahora bien, los parámetros de esta densidad son las probabilidades de transición p_{ij}^t , para expresarlos en términos de la muestra haremos uso de la siguiente función:

Definición 3.4.3 Sean $(i_0^1, \dots, i_t^1), \dots, (i_0^R, \dots, i_t^R)$, R realizaciones de tamaño t cada una, de una cadena de Markov, denotaremos como

$$n_{ij}^s = \# \text{ de veces en la muestra que } i_{s-1}^r = i, i_s^r = j \quad (3.19)$$

para $r = 1, 2, \dots, R$. Nótese que $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m n_{ij}^s = R$ para cualquier s .

Es decir, esta función cuenta el número de veces que el evento $\{(i, j)\}$ ocurre en una muestra para un tiempo determinado. Como se comentó, nos ayudará a expresar el estimador de máxima verosimilitud de p_{ij}^t debido a que, en lugar de multiplicar $p_{ij_t}^t$ tantas veces en (3.18) como valores repetidos se tengan de algún j en particular para todas las j_t^r que observemos en la muestra, podemos simplemente elevar a la potencia n_{ij}^t cuidando no olvidar ninguno de los posibles j , es decir recorriendo todos los valores de E :

$$\mathcal{L} = \prod_{r=1}^R p_{ij_t^r}^t = \prod_{j=0}^m [p_{ij}^t]^{n_{ij}^t} \quad (3.20)$$

Esta expresión nos permitirá encontrar el estimador de máxima verosimilitud para p_{ij}^t :

Teorema 3.4.1 Sea $\{X_s\}$ una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{0, 1, \dots, m\}$ y sean $t > 0$ e $i \in E$ cualesquiera pero fijos, para la función de densidad $P[X_t = j | X_{t-1} = i]$ y una muestra aleatoria de tamaño R $(i, j_t^1), (i, j_t^2), \dots, (i, j_t^R)$, el estimador de máxima verosimilitud para p_{ij}^t es:

$$\hat{p}_{ij}^t = \frac{n_{ij}^t}{\sum_{j=0}^m n_{ij}^t} \quad (3.21)$$

Prueba. Ya sabemos que la función de verosimilitud \mathcal{L} para la cadena de Markov, y la muestra definidas en el teorema, es (3.20) en términos de (3.19). Aplicando logaritmo a \mathcal{L} :

$$\ln(\mathcal{L}) = \ln \left(\prod_{j=0}^m [p_{ij}^t]^{n_{ij}^t} \right) = \sum_{j=0}^m n_{ij}^t \ln [p_{ij}^t] \quad (3.22)$$

Para poder maximizar (3.22) tenemos que considerar la restricción (3.4), para lo cual utilizaremos la sustitución:

$$p_{im}^t = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} p_{ik}^t \quad (3.23)$$

Donde se elige p_{im}^t sin pérdida de generalidad. De esta forma:

$$\ln(\mathcal{L}) = n_{i0}^t \ln(p_{i0}^t) + \dots + n_{i(m-1)}^t \ln(p_{i(m-1)}^t) + n_{im}^t \ln \left(1 - \sum_{k=0}^{m-1} p_{ik}^t \right) \quad (3.24)$$

Con esto, tenemos que para $j = 0, 1, \dots, (m-1)$

$$\frac{\partial \ln(\mathcal{L})}{\partial p_{ij}^t} = \frac{n_{ij}^t}{p_{ij}^t} - \frac{n_{im}^t}{\left(1 - \sum_{k=0}^{m-1} p_{ik}^t \right)} \quad (3.25)$$

Y las segundas derivadas parciales son siempre negativas:

$$\frac{\partial \ln(\mathcal{L})}{\partial^2 p_{ij}^t} = -\frac{n_{ij}^t}{(p_{ij}^t)^2} - \frac{n_{im}^t}{\left(1 - \sum_{k=0}^{m-1} p_{ik}^t\right)^2} < 0 \quad (3.26)$$

Igualando (3.25) a cero, podremos encontrar los máximos, pues se sigue que los valores p_{ij}^t ($j = 0, 1, \dots, (m-1)$) son:

$$p_{ij}^t = \frac{n_{ij}^t}{\left(\frac{n_{im}^t}{1 - \sum_{k=0}^{m-1} p_{ik}^t}\right)} \quad (3.27)$$

El denominador en (3.27) es común para todos los valores de $j \leq m-1$, así que para ahorrar notación llamaremos a este término común simplemente λ . En el caso en el que $j = m$ podemos expresar a p_{im}^t también en términos de λ , basta notar lo siguiente²:

$$p_{im}^t = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} p_{ik}^t = \frac{1}{\left(\frac{1}{1 - \sum_{k=0}^{m-1} p_{ik}^t}\right)} = \frac{n_{im}^t}{\left(\frac{n_{im}^t}{1 - \sum_{k=0}^{m-1} p_{ik}^t}\right)} = \frac{n_{im}^t}{\lambda} \quad (3.28)$$

Gracias a (3.27) y (3.28) podemos generalizar diciendo que para $j = 0, 1, \dots, m$:

$$p_{ij}^t = \frac{n_{ij}^t}{\lambda} \quad (3.29)$$

Utilizando la propiedad (3.4) vemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j=0}^m p_{ij}^t = \sum_{j=0}^m \frac{n_{ij}^t}{\lambda} \quad (\text{multiplicando por } \lambda) \\ \lambda &= \sum_{j=0}^m \lambda p_{ij}^t = \sum_{j=0}^m \lambda \frac{n_{ij}^t}{\lambda} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\text{Por lo tanto, } \lambda = \sum_{j=0}^m n_{ij}^t \quad (3.31)$$

Finalmente, sustituyendo (3.31) en (3.29) se verifica que

$$\hat{p}_{ij}^t = \frac{n_{ij}^t}{\sum_{j=0}^m n_{ij}^t}$$

■

A pesar de que la inferencia se haya hecho para i y t fijas esto aplica para cualesquiera.

²La segunda igualdad resulta de aplicar $x = \frac{1}{(1/x)}$

3.5 Pruebas de Hipótesis.

Hasta ahora hemos visto como dado un grupo de datos, que asumimos provienen de una muestra aleatoria independiente de una cadena de Markov, pueden ser utilizados para estimar las probabilidades de transición en un paso, de la cadena, y así poder aplicar los teoremas de las primeras secciones. Sin embargo, hemos fundamentado la deducción de estas probabilidades en una hipótesis importante: Las probabilidades de transición dependen del tiempo en el que la cadena se encuentre, esta hipótesis es conocida como *de no homogeneidad de la cadena*.

En mucha de la teoría que se ha desarrollado acerca de las cadenas de Markov se asume que las probabilidades de transición no dependen del tiempo es decir: $H_0 : p_{ij} = p_{ij}^1 = p_{ij}^2 = \dots = p_{ij}^t$ y es que en muchas de las aplicaciones asumir no homogeneidad complicaría los modelos, impediría su utilización para hacer proyecciones y sobre todo, los datos no muestran evidencia de que así sea, por lo tanto considerarla no agrega valor al modelo, Thomas, Edelman, David y Crook (2002 pp. 98-101)[19]. Sobre esta última afirmación es que en la presente sección se expondrá una metodología basada en el cociente de verosimilitudes para verificar la presencia (o ausencia) de homogeneidad. Los demás puntos en contra se tocarán en su momento puntualizando por que para la aplicación particular del tipo de riesgo que se desea modelar estos son puntos a favor.

Definición 3.5.1 Sea X_1, X_2, \dots, X_R una muestra aleatoria independiente, de una función de densidad $f(X; \theta)$, con θ desconocido, y $\theta \in \Theta$ y sea $\Theta_0 \subset \Theta$. Llamaremos cociente de verosimilitudes al valor:

$$\lambda(\Theta_0) = \frac{\sup_{\Theta_0} \{\mathcal{L}(f; \theta)\}}{\sup_{\Theta} \{\mathcal{L}(f; \theta)\}} \quad (3.32)$$

donde $\mathcal{L}(f; \theta)$ es la función de verosimilitud de $f(X; \theta)$

En cuanto al cálculo de este cociente, podemos decir que si para cualquier subconjunto $\Theta_0 \subset \Theta$, así como para Θ , conocemos los estimadores de máxima verosimilitud $\hat{\theta}_0 \in \Theta_0, \hat{\theta} \in \Theta$ podemos utilizarlo para tal fin pues:

$$\sup_{\Theta_0} \{\mathcal{L}(f; \theta)\} = \mathcal{L}(f; \hat{\theta}_0) \text{ y } \sup_{\Theta} \{\mathcal{L}(f; \theta)\} = \mathcal{L}(f; \hat{\theta}) \quad (3.33)$$

Además como $\Theta_0 \subset \Theta$, entonces $\sup_{\Theta_0} \{\mathcal{L}(f; \theta)\} \leq \sup_{\Theta} \{\mathcal{L}(f; \theta)\}$, siendo ambas cantidades positivas puede verse también que $0 \leq \lambda(\Theta_0) \leq 1$.

Los valores de este cociente son utilizados para comparar que tan cierta es la hipótesis de que el estimador de máxima verosimilitud de una función de densidad se encuentre en un determinado $\Theta_0 \subset \Theta$ si se sabe $\theta \in \Theta$ pues mientras más cercanos sean los valores de $\lambda(\Theta_0)$ a 1, más parecidos son los valores y más seguros podemos estar de que la hipótesis en cuestión es cierta, y viceversa para su cercanía con 0. Para determinar que tan cercano a cero debe ser el valor del cociente y entonces, rechazar la hipótesis podemos hacer uso del siguiente teorema:

Teorema 3.5.1 Sea X_1, X_2, \dots, X_R una muestra aleatoria de una función de densidad $f(X; \theta)$ con $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$ desconocido, $\theta \in \Theta$ y sea $\Theta_0 \subset \Theta$. Si la hipótesis $H_0 : \theta \in \Theta_0$ es cierta y R es grande, se tiene que:

$$-2 \ln [\lambda(\Theta_0)] \sim \chi_{q-1}^2 \quad (3.34)$$

es decir, se distribuye Ji cuadrada con $(q - 1)$ grados de libertad.

La prueba de este resultado supera el alcance del presente trabajo, puede consultarse el llamado *teorema de Cramér*, en Cramér (1946 p. 445)[5] para su demostración. Este teorema nos permite plantear una prueba para verificar si H_0 es cierta en términos de una distribución χ_{q-1}^2 , dado un nivel de confianza

α , pues si bien la aproximación intuitiva de la prueba era que rechazaríamos H_0 si λ es cercana a cero, 0 es claro que si eso pasa, entonces $-2 \ln [\lambda(\Theta_0)] \rightarrow \infty$ y rechazaremos la hipótesis para valores grandes de $-2 \ln [\lambda(\Theta_0)]$. La ventaja que obtenemos con el teorema (3.5.1) es que podemos decir que estos valores tienen que ser tan grandes o más que $\chi_{q-1}^2(\alpha)$, es decir:

$$\text{Rechazar } H_0 \Leftrightarrow -2 \ln [\lambda(\Theta_0)] > \chi_{q-1}^2(\alpha) \quad (3.35)$$

A continuación procederemos a la aplicación de esta metodología para probar la homogeneidad de una cadena de Markov.

3.5.1 Homogeneidad de la Cadena.

Sea la hipótesis de homogeneidad en la cadena $H_0 : p_{ij} = p_{ij}^1 = p_{ij}^2 = \dots = p_{ij}^t$, para $t > 1$, $i, j \in E$. Para probarla, necesitamos muestras de cada una de las densidades $P[X_s = j | X_{s-1} = i]$, por lo que consideraremos a partir de ahora que se eligen i cualquiera pero fija y R grupos de t parejas. Cada pareja proviene de realizaciones distintas del proceso, observadas en los tiempos $s = 1, 2, \dots, t$, en donde en el tiempo $s - 1$ cada una de estas realizaciones diferentes tiene el valor fijo i y en el tiempo s el valor j_s^r , con r el elemento en la muestra y s representa en primera instancia el tiempo de la observación, pero al mismo tiempo y sin lugar a la ambigüedad puede representar la s -ésima realización independiente del elemento r de la muestra. Podemos expresar a los R elementos de esta muestra como:

$$\{(i, j_1^r), (i, j_2^r), \dots, (i, j_t^r); r = 1, 2, \dots, R; i, j_s^r \in E; s = 1, 2, \dots, t\} \quad (3.36)$$

El planteamiento de esta hipótesis presenta un problema al tratar de aplicar la definición de verosimilitud pues tendríamos más de una función de densidad involucrada (una por cada tiempo), esto nos lleva a verificar que

$$P[\{X_1 = j_1 | X_0 = i\}, \{X_2 = j_2 | X_1 = i\}, \dots, \{X_t = j_t | X_{t-1} = i\}] \quad (3.37)$$

es una función de densidad (nuevamente el subíndice de X_s además de identificar el tiempo se utiliza para diferenciar entre distintas cadenas). Para tal fin nótese que el espacio muestral Ω de esta función de densidad es el conjunto definido en (3.36) pero sin necesidad de variar r , todos los valores que toma son productos de números entre 0 y 1, por lo que todos sus valores están en ese mismo intervalo, de manera que, basta comprobar que la suma para todos los posibles valores de los j_s es igual a 1:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j_1=0}^m \cdots \sum_{j_t=0}^m P[\{X_1 = j_1 | X_0 = i\}, \dots, \{X_t = j_t | X_{t-1} = i\}] \\
&= \sum_{j_1=0}^m \cdots \sum_{j_t=0}^m p_{ij_1}^1 p_{ij_2}^2 \cdots p_{ij_t}^t \quad (\text{Factorizando la primer suma, la de los } j_t:) \\
&= \left[\sum_{j_1=0}^m \cdots \sum_{j_{t-1}=0}^m p_{ij_1}^1 \cdots p_{ij_{t-1}}^{t-1} \right] p_{i0}^t + \cdots + \left[\sum_{j_1=0}^m \cdots \sum_{j_{t-1}=0}^m p_{ij_1}^1 \cdots p_{ij_{t-1}}^{t-1} \right] p_{im}^t \\
&= \left[\sum_{j_1=0}^m \cdots \sum_{j_{t-1}=0}^m p_{ij_1}^1 \cdots p_{ij_{t-1}}^{t-1} \right] \left[\sum_{j_t=0}^m p_{ij_t}^t \right] \\
&= \left[\sum_{j_1=0}^m \cdots \sum_{j_{t-1}=0}^m p_{ij_1}^1 \cdots p_{ij_{t-1}}^{t-1} \right] \\
&\vdots \\
&= \sum_{j_1=0}^m p_{ij_1}^1 \\
&= 1
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Por lo tanto (3.37) es una función de densidad. Continuando con el objetivo principal de la prueba, el conjunto en donde toman valores los parámetros de esta densidad es el usual:

$$\Theta = \left\{ p_{ij}^s \geq 0 : s = 1, 2, \dots, t; i, j \in E; \sum_{j=0}^m p_{ij}^s = 1 \right\} \tag{3.39}$$

Para poder aplicar el método de cociente de verosimilitudes debemos también expresar el conjunto en donde los parámetros tomarán valores bajo la hipótesis nula:

$$\Theta_0 = \{ p_{ij} \in \Theta : p_{ij} = p_{ij}^1 = p_{ij}^2 = \dots = p_{ij}^t \} \tag{3.40}$$

Claramente $\Theta_0 \subseteq \Theta$. Con estos dos componentes (la densidad y los conjuntos de parámetros) podemos expresar la función de verosimilitud en Θ :

$$\prod_{s=1}^t \prod_{r=1}^R p_{ij_r}^s = \prod_{s=1}^t \prod_{j=0}^m [p_{ij}^s]^{n_{ij}^s} \tag{3.41}$$

El lado derecho de la igualdad es el resultado de aplicar la definición (3.4.3) y un cambio de variable igual al de (3.20), Procediendo de la misma forma, la verosimilitud en Θ_0 es:

$$\prod_{s=1}^t \prod_{j=0}^m [p_{ij}]^{n_{ij}^s} \tag{3.42}$$

Sabemos por (3.33), que el supremo de (3.41) se alcanza cuando sustituimos p_{ij}^s por su estimador de máxima verosimilitud \hat{p}_{ij}^s , cuyo valor se expuso en el teorema (3.4.1), un pequeño cambio en este mismo teorema (suponer homogeneidad) puede darnos fácilmente el estimador de máxima verosimilitud para p_{ij} , este es:

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{s=1}^t n_{ij}^s}{\sum_{j=0}^m \sum_{s=1}^t n_{ij}^s} \quad (3.43)$$

De la misma forma, al sustituir \hat{p}_{ij} por p_{ij} , se obtiene el supremo de (3.42) y así, el cociente de verosimilitudes deseado:

$$\lambda_i(\Theta_0) = \prod_{s=1}^t \prod_{j=0}^m \left[\frac{\hat{p}_{ij}}{\hat{p}_{ij}^s} \right]^{n_{ij}^s} \quad (3.44)$$

Del teorema (3.5.1) sabemos que $-2 \ln(\lambda_i(\Theta_0)) \sim \chi_{(m-1)(t-1)}^2$ y podemos rechazar la hipótesis de homogeneidad de p_{ij} con i fija a un nivel $\alpha \Leftrightarrow -2 \ln(\lambda_i(\Theta_0)) > \chi^2(\alpha)_{(m-1)(t-1)}$, es decir, se realizarán m pruebas, una por cada uno de los estados de E .

A pesar de que se pueden realizar m pruebas, puede verificarse también para la cadena completa, gracias a que la suma de variables aleatorias con distribución Ji-cuadrada, se distribuye Ji-cuadrada con grados de libertad iguales a la suma de los números de grados de libertad de cada una, o sea:

$$\sum_{i=0}^m -2 \ln(\lambda_i(\Theta_0)) = \lambda(\Theta_0) \sim \chi_{m(m-1)(t-1)}^2 \quad (3.45)$$

Por lo tanto, rechazaremos la hipótesis de homogeneidad de la cadena completa a un nivel de confianza α , $\Leftrightarrow \lambda(\Theta_0) > \chi^2(\alpha)_{m(m-1)(t-1)}$

Capítulo 4

Aplicación

Los resultados teóricos que se presentaron en los capítulos anteriores, serán aplicados en el presente utilizando datos reales de una IMF. En primera instancia se establecerán las reglas con las que los créditos funcionan en la mayoría de las IMFs de nuestro país como objetos dentro de sus respectivos portafolios, lo que en la práctica se conoce como la operación de los créditos. Lo anterior nos permitirá definir eventos, entre ellos el incumplimiento, asociados al comportamiento de los créditos, modelado como trayectorias de una cadena de Markov. Después de ser sometidas a pruebas de no-homogeneidad, las probabilidades asociadas a la cadena, serán utilizadas para calcular la probabilidad de incumplimiento.

Finalmente, para valuar las pérdidas, se estimará el último elemento del modelo descrito en el Capítulo 2, el LGD_n , para llevar a cabo la llamada prueba de Liapounov, y si los datos cumplen las condiciones que en dicha prueba se establecen, proceder con el cálculo de las medidas de riesgo y verificar que las hipótesis realizadas en el modelo analítico sean consistentes con los datos vía una simulación.

Aunado al desarrollo del presente trabajo se elaboró una rutina computacional para la automatización de los resultados en el lenguaje de programación R, el diagrama de flujo de la figura (A.1) presenta un resumen del mismo, su estructura es similar a la del presente capítulo.

4.1 Descripción general del portafolio

La forma en la que la mayoría de las IMFs operan sus créditos, comienza cuando se desembolsa un importe monetario C y le es otorgado a una o varias personas que han sido elegidos como viables. La evaluación de la viabilidad, se realiza con un análisis del flujo de efectivo de su negocio (existente o potencial), por parte de los promotores de crédito. Posteriormente, se establece un periodo de tiempo en el que el cliente adquiere el compromiso de pagar C , y otro importe monetario I llamado interés. La duración en meses M de este periodo de tiempo llamado plazo, así como un factor a conocido como la tasa, sirven para determinar el importe de intereses $I = aMC$.

La deuda adquirida por el cliente será saldada através de K pagos conocidos como amortizaciones, con valor $C(1 + aM)/K$ cada una. Las fechas calendario correspondientes a cada una de estas fechas son distribuidas de manera homogénea en el plazo, considerando una frecuencia semanal, quincenal o mensual que sea consistente con los flujos de efectivo del cliente, estas son las fechas de exigibilidad del crédito.

Si en alguna fecha calendario posterior a una o más de las de exigibilidad, la amortización correspondiente no es cubierta, la diferencia en días entre estas dos fechas es llamada *días de atraso de la amortización*. Dado que en algún momento más de una amortización puede tener días de atraso, el máximo de las mismas es llamado *días de atraso del crédito*. La suma del importe no cubierto de las amortizaciones exigibles, más las que aún no lo son, es igual a la exposición al riesgo, en la notación del

capítulo dos, para cada uno de los créditos esta es la EAD_n . Si más de una amortización posee días de atraso y el cliente realiza un pago, este servirá para cubrir aquella con la fecha de exigibilidad más antigua, con lo que cada pago puede reducir los días de atraso.

Cuando todas las amortizaciones de un crédito son cubiertas, se dice que éste se encuentra *Saldado*. Esto puede ocurrir durante o después del plazo pactado (con sus respectivos días de atraso), con lo que los compromisos del cliente con la IMF terminarían. Existe la posibilidad de que el crédito no sea saldado y acumule días de atraso, si éstos llegan a superar los 180 (para la mayoría de las IMFs), se dice que el crédito ha caído en incumplimiento y se encuentra en un estatus de *Castigado*. En ese momento la IMF asume el valor EAD_n como una pérdida, debido principalmente a que; la responsabilidad de cobro de los créditos no castigados corre a cargo de los mismos promotores que lo originaron, pero cuando el crédito se castiga resulta poco viable que esta gestión siga siendo llevada a cabo por los mismos, pues si no hubo voluntad de pago durante seis meses, muy probablemente no ocurra en lo posterior (además de ser este período de tiempo una buena práctica entre las instituciones de crédito) y puede mejor dedicarse a originar un nuevo crédito que si genere ingresos. La responsabilidad de cobro de créditos castigados se delega al área legal.

De acuerdo al funcionamiento descrito, el tiempo que las IMFs dedican (sin llegar a instancias legales) a cada uno de sus créditos, también conocido como *horizonte* o *vida* del crédito, estará sujeto al tiempo que tarde en saldarse o bien en castigarse, lo que pase primero. Mientras esto no ocurra diremos que el crédito se encuentra activo.

Cualquiera de estos dos tiempos está acotado por el tiempo que dure el plazo más 7 meses (de 30 días) de acuerdo a que, si el crédito no es saldado al final de su plazo, entonces el mínimo de días de atraso que podría tener después de 30 días son 30, siendo este el caso en el que cubrió todas las amortizaciones excepto la última, después de 60 serían 60 y así hasta 180, momento en el cual poseería 180 días de atraso, y si el crédito no es liberado justo ese día, el próximo estaría automáticamente castigado Véase la figura (4.1) en la que este comportamiento es descrito Nótese que ninguno de los créditos sería atendido por más de M más 182 días, por lo que al último mes de nuestra cota estaría sobrado en 29 días en los que no podría ocurrir ya nada, sin embargo, esto es necesario para cubrir cualquiera de los casos posibles en los que el incumplimiento pudiera materializarse. Aún cuando un crédito pueda ser saldado después de caer en incumplimiento, las pérdidas que generó ya fueron asumidas por la institución, con lo que su estatus de castigado no cambiaría.

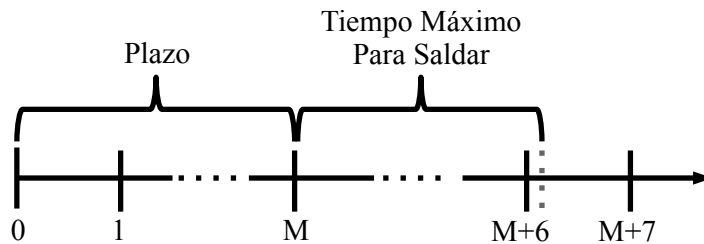


Figura 4.1: Si el crédito no es liberado antes de rebasar la línea gris punteada al primer día después de $M + 6$, estará forzosamente castigado pues el mínimo de sus días de atraso será estrictamente mayor a 180

Los plazos a los que las IMFs otorgan sus créditos varían entre los 4 y 12 meses, por lo que los horizontes de los mismos varían entre los 11 y los 19, que en comparación con los créditos que se otorgan en otro tipo de instituciones financieras, estos periodos de tiempo son cortos. Por ejemplo, las tarjetas de crédito poseen un período de vida de 3 o más años, o los créditos hipotecarios que duran desde 5 hasta 30 años; incluso los créditos comerciales, que en general son superiores a los 18 meses. Estos plazos

cortos de las microfinanzas son explicados principalmente por los montos tan pequeños que se otorgan, así como, para reducir el riesgo de la falta de flujo de efectivo del cliente en un plazo mayor.

La distribución de los plazos tanto en número de créditos como en exposición al riesgo en el portafolio de la IMF, con cuyos datos se trabajó esta aplicación, varían entre los 4 y 8 meses, mismos que se muestran en la figura (4.2). Los plazos mayores a 6 meses cuentan con una participación significativamente menor.

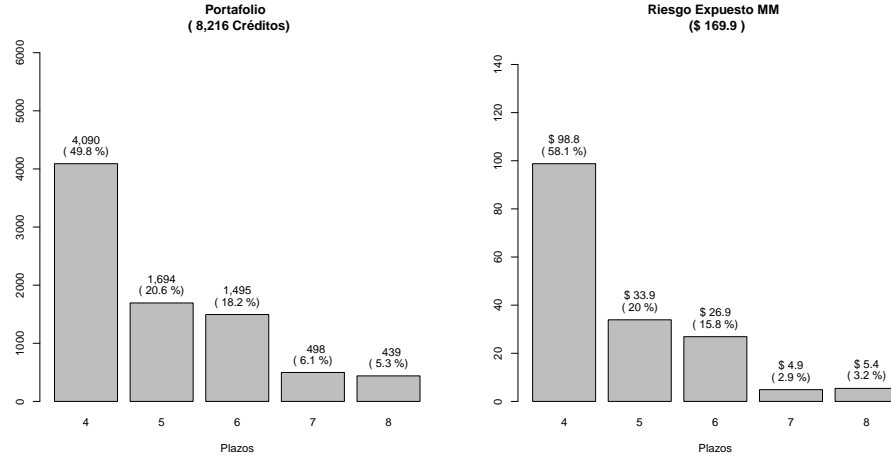


Figura 4.2: Composición por plazos del Portafolio

Una parte importante que debe ser verificada en los datos del portafolio, es la consistencia de la antigüedad de los créditos con las inferencias que se hicieron anteriormente de manera analítica y quedaron resumidas en la figura (4.1). La importancia de esto tiene que ver, en primer lugar, con el correcto funcionamiento del sistema administrador del portafolio y la conformación de la base de datos, pero principalmente para el objetivo del presente trabajo, para poder verificar que los datos están siendo consistentes con las hipótesis sobre el portafolio que después serán utilizadas.

Esto se obtiene a partir del análisis de la figura (4.3), en la que cada barra representa al grupo de créditos activos en cada plazo (en número de créditos y exposición al riesgo), y el número de divisiones de cada una de las barras, representa el porcentaje de créditos que se encuentra en un determinado mes de antigüedad¹ yendo de los menos a los más antiguos desde la base de cada barra hacia arriba, es decir, de colores claros a oscuros la antigüedad aumenta, de manera que el número de divisiones no debe ser mayor al plazo mas seis meses (recuérdese que en el séptimo mes el crédito estaría necesariamente castigado o saldado).

Claramente, los datos del portafolio con el que estaremos trabajando, con un valor de \$169.9 MDP, 8,216 créditos activos (y por lo tanto una EAD_n promedio de \$20,679) otorgados todos bajo la metodología grupal², son consistentes, y de acuerdo a lo antes planteado, el porcentaje de cada barra que se encuentra por encima del valor del plazo corresponde a créditos que se encuentran necesariamente en atraso, este sería el mínimo de créditos o riesgo expuesto en atraso. Por ejemplo, para el plazo de 4 meses el 21% de los créditos poseen una antigüedad mayor a cuatro meses y por lo tanto están en atraso, de manera que por lo menos este es el porcentaje de cuentas deudoras, de la misma forma puede verse que, por lo menos, cerca del 10% del riesgo expuesto de las cuentas de este mismo plazo se encuentran en atraso.

La diferencia entre la distribución de la antigüedad del número de créditos y exposición al riesgo es fácilmente visible en los plazos más cortos pues los créditos jóvenes tienen aún muchas amortizaciones por

¹Los meses de antigüedad son medidos con la función menor entero.

²Esto nos permite considerar el riesgo del portafolio homogéneo, si se tuvieran otras metodologías, tendríamos que segmentar el portafolio y evaluar las pérdidas por separado para cada una

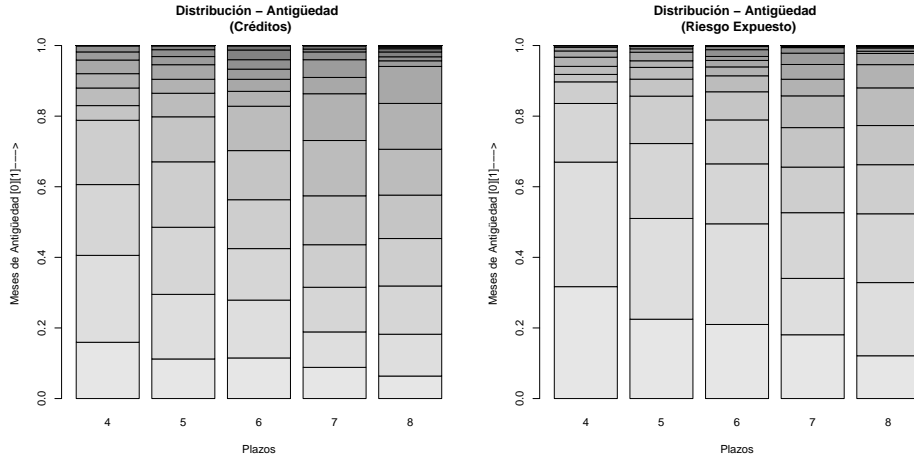


Figura 4.3: Gráfico para verificar la consistencia del portafolio.

vencer, en comparación a los que ya se encuentran en meses más avanzados, esto no se presenta de manera tan marcada en los plazos más largos, 7 y 8, pues conforme pasa el tiempo la exposición disminuye.

Debido a la amplia variedad que un portafolio posee en cuanto a los días de atraso de cada uno de sus créditos, es común agruparlos en los llamados meses de atraso, con lo que además puede afinarse el conocimiento del porcentaje de cuentas en atraso que se aproximó en la figura (4.3). Los meses de atraso son una *propiedad* para cada una de las cuentas en alguna fecha de evaluación, y son asignados de acuerdo a la tabla (4.4). Ya que utilizaremos números para su distinción, éstos asumirán dos valores, 7 y 8, que no están relacionados precisamente con un número de meses sino con un estatus del crédito, por lo que de manera general llamaremos a esta propiedad el *Estado* del crédito, y será denotado por i_t . Evidentemente, los valores 0, 1, ..., 8 servirán más adelante como espacio de estados para una cadena de Markov.

| Estado(i) | Días Atraso (min) | Días Atraso (max) |
|---------------|-------------------|-------------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 30 |
| 2 | 31 | 60 |
| 3 | 61 | 90 |
| 4 | 91 | 120 |
| 5 | 121 | 150 |
| 6 | 151 | 180 |
| 7 | Crédito Castigado | |
| 8 | Crédito Saldado | |

Figura 4.4: Valores para el espacio de estados de los créditos en el portafolio

La distribución por estado (meses de atraso) de un portafolio es comúnmente llamada *Calidad Crediticia* del portafolio. La calidad crediticia del portafolio analizado, tanto en número de cuentas como en riesgo expuesto se describe en la figura (4.5), en la que cada barra horizontal representa cada uno de los 5 plazos, y el estado de los créditos aumenta con cada división hacia la derecha de cada una de las barras.

Nótese como el número de cuentas en el plazo 4 que se encuentran en atraso es del 33% en comparación con el 21% antes mencionado, es decir, existe un 12% de cuentas en este plazo que aún no terminan su

horizonte y se encuentran actualmente en atraso. Nótese también que el número de divisiones de cada una de las barras no supera las 7, es decir, se muestran los estados del 0 al 6, ésto se debe a que únicamente estamos observando los 8,216 créditos activos del portafolio, los que se encuentran en los estados 7 y 8 no forman parte ya del mismo. Gráficos como el anterior comentado, además de dar una idea más precisa de la calidad crediticia del portafolio (el 25% del riesgo expuesto se encuentra en atraso), son utilizados para trazar estrategias de cobranza.

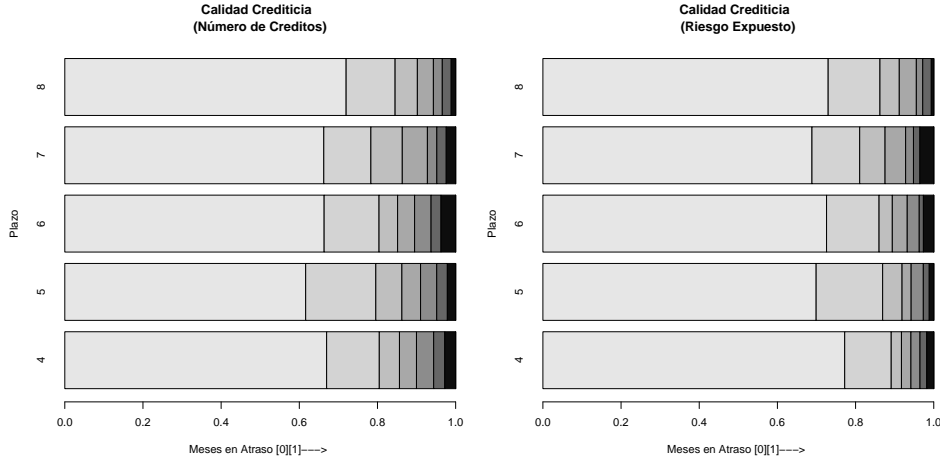


Figura 4.5: Porcentaje de Cuentas en cada estado de acuerdo al plazo

4.2 Incumplimiento

En el contexto de la sección anterior, las probabilidades PD_n deberán describir la probabilidad del evento en el que los créditos de la IMF rebasan por primera vez los 180 días de atraso. Para tal fin, comenzaremos dividiendo la vida del crédito en periodos de 30 días, tantos como el plazo nos permita más los siete en los que puede ser saldado, y llamaremos a cada uno de estos periodos *Tiempos del Crédito*. En cada uno de estos $M + 7$ tiempos asignaremos un valor de *estado* a los créditos de acuerdo a la tabla (4.4), los cuales como ya se dijo, pueden ser interpretados como los meses de atraso del crédito (excepto para los estados 7 y 8).

La secuencia de números correspondientes a los estados del crédito, ordenada de acuerdo a su ocurrencia en el tiempo es el llamado histórico de pagos. Un ejemplo de histórico de pagos para un crédito podría ser 000088888888, en el que un crédito con plazo de cuatro meses cumplió con sus obligaciones a lo largo de todo el plazo y fue saldado al final del mismo, por otra parte, un crédito con plazo de cinco meses que nunca cubrió sus amortizaciones tendría un histórico 012345677777.

Nótese que en los históricos de pagos estamos incluyendo el tiempo $t = 0$, en el que todos los créditos poseen cero días de atraso y, aunque en el segundo ejemplo el crédito pudiera ser saldado después del tiempo 7, los estados posteriores no podrían ser 8 de acuerdo a la condición operativa comentada anteriormente (en la que un crédito castigado no cambia nunca de estatus). De acuerdo a estos dos ejemplos y, denotando con i_t al estado en el que el crédito se encuentra en su tiempo $0 \leq t \leq M + 7$, podemos observar las siguientes características:

1. $i_t \leq t$ para $i_t \neq 8$. Esta condición se desprende del hecho de que un crédito no puede tener más meses de atraso de los que hasta el momento lleva cumplidos en su horizonte. La excepción para el estado 8 se hace por que puede liberarse independientemente del tiempo en el que se encuentre.

2. $i_t \leq i_{t-1} + 1$ para $i_t \neq 8$. Esta condición se refiere a que si se tienen dos meses consecutivos, el estado no puede aumentar en más de una unidad, por ejemplo, un crédito no puede pasar de uno a tres meses de atraso en solo un mes. La excepción para el estado 8 es necesaria nuevamente.
3. Si $i_t = 7$, entonces, $i_u = 7$, para toda $u > t$ y además, $i_s \leq 7$, para toda $s < t$. De acuerdo al funcionamiento de los créditos, cuando un crédito esté castigado, sólo podrá permanecer así y además ninguno de sus estados previos podría ser el de saldado (por eso se restringen sus estados previos a ser menores o iguales a 7). A pesar de que en la práctica si se puedan dar estos casos, para el objetivo del presente trabajo esta condición es necesaria.
4. Si $i_t = 8$, entonces, $i_u = 8$, para toda $u > t$ y además, $i_s \leq 6$, para toda $s < t$. De acuerdo al funcionamiento de los créditos, cuando un crédito esté saldado, sólo podrá permanecer así y además ninguno de sus estados previos podría ser el de castigado (por eso se restringen sus estados previos a ser menores o iguales a 6), de manera similar al punto anterior, en la práctica es posible saldar un crédito castigado, pero la restricción nuevamente es necesaria.
5. $i_{M+k} \geq k$. Donde M representa el plazo en meses. Esto es claro a partir de la discusión sobre el horizonte del crédito resumido en la figura (4.1).

Estas condiciones en el funcionamiento, nos permiten ver que el estado del crédito no puede ser cualquiera en un tiempo dado, y para verificar la consistencia de los estados con respecto a las condiciones anteriores para la transición de los créditos, suelen generarse gráficos como los que se muestran en la figura (4.6). Cada línea de dicho gráfico, representa el nivel de concentración (porcentaje del total), que se tiene de cada estado para cada uno de los tiempos en el eje horizontal.

La concentración por estado proviene de la segmentación que resulta de agrupar a los créditos a la fecha de evaluación, por ejemplo, para el plazo 4, las cuentas con una antigüedad de 2 meses están compuestas en un 80% por cuentas en estado 0 y 20% por cuentas en estado 1. Nótese como en cada una de las cinco gráficas la línea del estado 0, siempre representa el 100% de las cuentas en el tiempo 0, y a partir de ahí ya todas las líneas toman valores después del mes de antigüedad mayor o igual a éste, es decir, se verifica la condición 1. De la misma forma, la condición 5 es evidente al observar que ninguna de las líneas que representan estados menores al plazo, mas ese mismo valor de estado, desaparecen después de dicho mes de antigüedad. Por ejemplo, la línea del estado 1 deja de tomar valores después del tiempo 6 en el gráfico del plazo 5.

Los valores de estado 7 y 8 nuevamente no aparecen, con lo cual se verifica que los créditos saldados o castigados están siendo descartados correctamente del portafolio. La condición 2 no es verificable aquí pues sólo estamos mostrando el estado que los créditos poseen a la fecha de evaluación y no estamos representando el estado anterior, esto se realizará más adelante.

Las gráficas de la figura (4.6) concentran la información de las descriptivas antes vistas y su mayor uso consiste en analizar el estado del portafolio para alinear las estrategias de cobranza y seguimiento de cuentas del portafolio con la rentabilidad o definición de políticas de otorgamiento de crédito.

Un ejemplo de estrategia, es la reducción de la pendiente tan pronunciada que se tiene para las líneas del estado 0, pues esto repercute de manera general en la calidad del portafolio. Puede observarse como en promedio, únicamente cerca del 60% de las cuentas llegan sanas a la recta final de su plazo (último punto de la línea del estado 0). Por otra parte, un ejemplo de política de crédito, sería el análisis riguroso de las cuentas en el plazo 5, pues cuentan con la pendiente más pronunciada de entre los plazos y no siguen el patrón natural de reducción de la misma conforme el aumento del plazo, potencialmente existe alguna condición en el otorgamiento de créditos de este plazo que está siendo deficiente.

La dependencia que tienen los estados de los créditos con el tiempo inmediato anterior, así como el espacio de estados $E = \{0, 1, \dots, 8\}$, nos permiten plantear la hipótesis de que los históricos de pagos $i_1 i_2 \dots i_{M+7}$ pueden ser modelados como una cadena de Markov iguales a las definidas en (3.1.1), para así estimar la probabilidad de que los créditos estén en determinados estados para alguna fecha futura dado

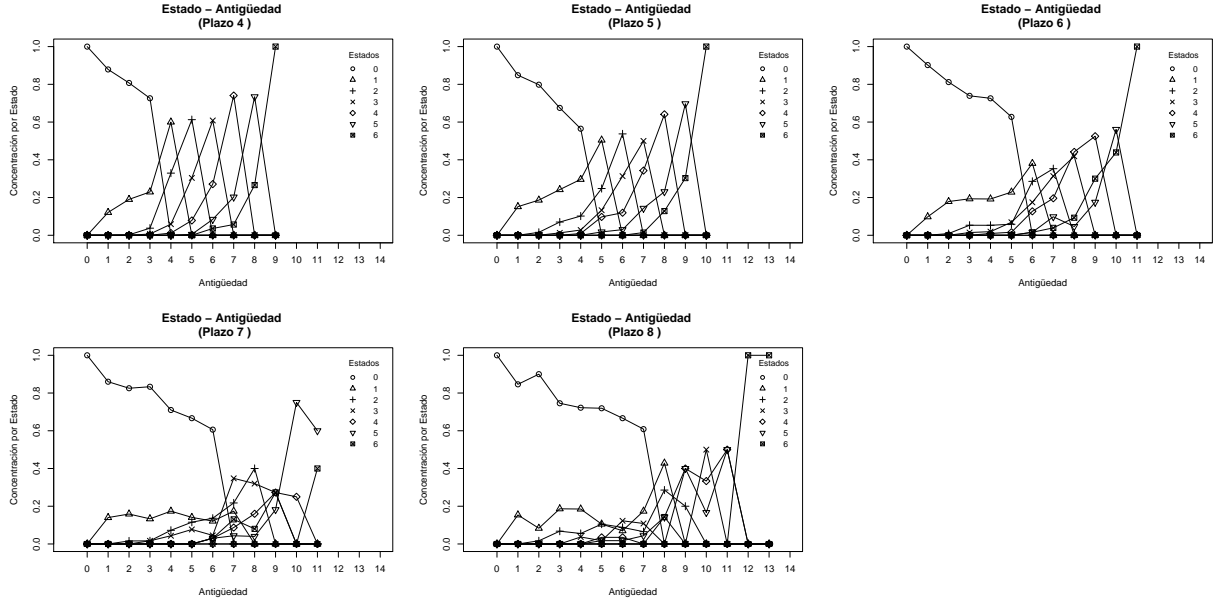


Figura 4.6: Concentración de los distintos atrasos por meses de antigüedad

el estado y tiempo en el que se encuentra actualmente. En particular, la primera vez que éstos puedan llegar a encontrarse en el estado 7. Las condiciones sobre las cuales se presentarían las transiciones pueden ser representadas gráficamente en la figura (4.7).

Ahora bien, supongamos que para alguna fecha de evaluación³, y un portafolio con N créditos, se desea calcular la probabilidad de que el crédito n de plazo M , que se encuentra en su tiempo $t < M + 7$ y estado $i_t < 7$, caiga en incumplimiento en el futuro.

El mínimo de meses que tendrían que pasar para que dicho crédito pudiera caer en incumplimiento es $7 - i_t$, siendo castigado en el tiempo $t + 7 - i_t$. Si el crédito no es castigado en ese tiempo, aún podría serlo en los $M + 7 - (t + 7 - i_t) = M - t + i_t$ tiempos restantes de su horizonte (el último de estos tiempos es $M + 7$), de manera que el evento del que queremos calcular la probabilidad de ocurrencia, es el compuesto por la unión de los eventos ajenos en los que el crédito pueda llegar al estado 7 por primera vez en alguno de los tiempos entre $(t + 7 - i_t)$ y $(M + 7)$. Se especifica que sea la primera vez pues para tiempos posteriores el crédito permanecería en el mismo estado. En este sentido, la probabilidad de incumplimiento para el crédito n y un horizonte de tiempo $M + 7 - t$ puede ser expresada, en términos del teorema (3.3.1) como:

$$\begin{aligned}
 PD_n &= P[\{i_{t+7-i_t-1} = 6, i_{t+7-i_t} = 7\} \cup \{i_{t+7-i_t} = 6, i_{t+7-i_t+1} = 7\} \cup \dots \cup \{i_{M+6} = 6, i_{M+7} = 7\}] \\
 &= P[i_{t+7-i_t-1} = 6, i_{t+7-i_t} = 7] + P[i_{t+7-i_t} = 6, i_{t+7-i_t+1} = 7] + \dots + P[i_{M+6} = 6, i_{M+7} = 7] \\
 &= p_{i6}^{t, (t+7-i_t-1)} p_{67}^{(t+7-i_t-1), (t+7-i_t)} + \dots + p_{i6}^{t, (M+6)} p_{67}^{(M+6), (M+7)} \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Nótese que la segunda igualdad se obtiene gracias a que los eventos son ajenos. También por el teorema (3.3.1), sabemos que las probabilidades de transición en u pasos, $p_{ij}^{t, t+u}$ de (4.1), pueden ser expresadas en términos de las de un paso p_{ij}^t , sobre su estimación se hablará a continuación.

³Como se comentó en el capítulo 2, en esta fecha ninguno de los créditos se encuentra castigado y, claramente, para que el cálculo de esta probabilidad tenga sentido se necesita que tampoco esté saldado.

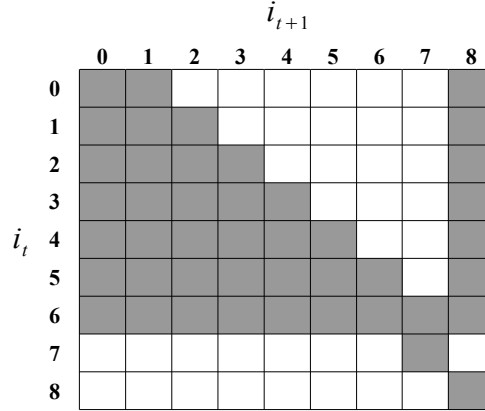


Figura 4.7: Los cuadros grises señalan los estados que puede tomar i_{t+1} dependiendo del valor i_t

4.2.1 Probabilidades de transición.

Como se comentó en la sección (3.4), para el cálculo de los estimadores \hat{p}_{ij}^t de las probabilidades de transición en un tiempo de una cadena de Markov es necesaria una muestra $(i, j_t^1), (i, j_t^2), \dots, (i, j_t^r)$. En el contexto de los créditos analizados para esta aplicación, estas muestras pueden ser extraídas de los históricos de pagos, para lo cual no solo utilizaremos los del portafolio (créditos activos), sino también los de créditos que ya estén saldados o castigados. De otra forma no podríamos encontrar el estimador para la probabilidad p_{67}^t , o bien p_{i8}^t para alguna i . Además, el portafolio puede no tener créditos con comportamientos en el histórico de pagos que se hayan presentado en la historia de la IMF.

Cuán antiguos deben ser los créditos saldados o castigados que se consideren en las muestras, dependerá de cuándo se hayan realizado cambios sustanciales en las políticas de crédito, o bien, las estrategias de cobranza o administración de la cartera hayan pasado por un proceso similar. Para la presente aplicación, consideraremos todos los créditos otorgados desde 18 meses previos a la fecha de evaluación, pues ese es el horizonte de tiempo desde el que se hizo el último cambio sustancial en las políticas de crédito de la IMF propietaria de la información. Es decir, además de los 8,216 créditos activos del portafolio, utilizaremos 39,645 saldados o castigados. La figura (4.8) contiene la descripción general de estos créditos, cerca del 12% fueron castigados.

Así, cada uno de los 39,645 créditos aporta un elemento en la muestra $i_1^n, i_2^n, \dots, i_{M+7}^n$, donde n denota el n -ésimo crédito y M el plazo. Los créditos activos del portafolio no necesariamente han terminado su horizonte, de manera que su trayectoria no contiene $M + 7$ observaciones. Sin embargo, las que ya hayan ocurrido, serán incluidas en las muestras para el cálculo de probabilidades de transición. Esto es de particular importancia si se desea que las transiciones se vean también influenciadas (y así tiene que ser) por los cambios recientes en las políticas de crédito.

Debido a la diferencia en el largo de los históricos de pagos, y las diferencias sustanciales en el perfil de riesgo que se tiene en los distintos plazos, se estimarán probabilidades de transición para cada uno de éstos. Por ejemplo, la probabilidad de que un crédito en el estado 0 en el tiempo 1, esté en el estado 1 en el tiempo 2, p_{01}^2 , tendrá valores distintos para cada plazo.

La base para la estimación de estas probabilidades de transición son los valores n_{ij}^t de la definición (3.4.3), aplicadas a los históricos de pagos, para luego aplicar el teorema (3.4.1), y calcular así el estimador de máxima verosimilitud de \hat{p}_{ij}^t , por lo que deberán ser calculadas para cada uno de los $M + 7$ tiempos en cada uno de los 5 plazos.

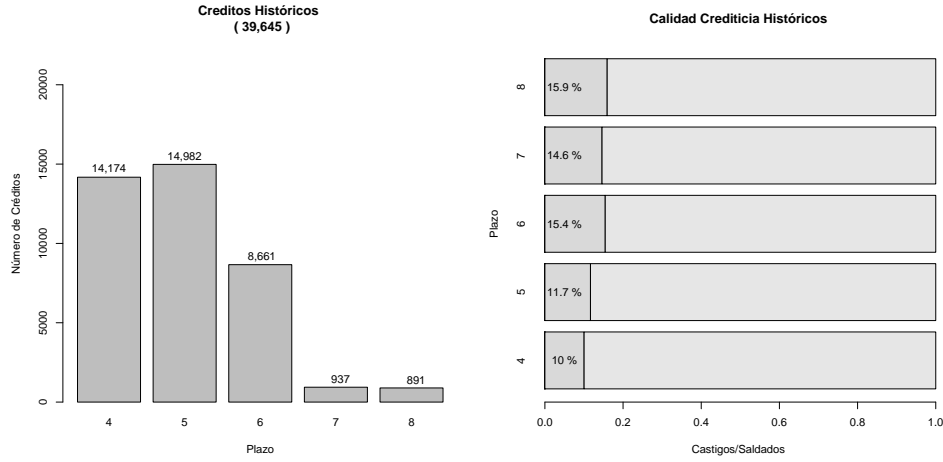


Figura 4.8: Volumen de créditos saldados o castigados incluidos en la muestra de históricos de pagos

Los valores de estas funciones aplicadas a los históricos de pagos pueden observarse en el Apéndice (B), y como ejemplo, la figura (4.9) muestra los obtenidos del plazo 5 meses en el tiempo 5. También se muestra la matriz de transición para ese mismo estado y tiempo que resulta de aplicar (3.21). Nótese como en este tiempo los resultados de la condición 2 que antes se dejó pendiente puede ser verificada pues no se tienen cuentas en los valores que se encuentran por encima de la diagonal formada por las entradas $(i, i + 1), i = 0, \dots, 8$ del arreglo de n_{ij}^t .

Ahora bien, a pesar de que en la realidad podemos tener créditos que migren del estado 7 a uno menor como se comentó anteriormente, dentro de nuestras condiciones, esto no será tomado en cuenta, y la probabilidad de transición de este estado y el de créditos saldados están definidas para cualquier tiempo como $\hat{p}_{77}^t = \hat{p}_{88}^t = 1$, sin importar que en $n_{7j}^t, j \leq 6$ si se tengan valores. Estas mismas condiciones pueden ser verificadas para cada tiempo y plazo en la matrices de transición resultantes para el total de plazos y tiempos del portafolio que se muestran en el Apéndice (C).

Estos valores de transición iguales a 1, para estos estados, significan que una vez que un crédito cae en ellos permanecerá ahí por el resto de su horizonte sin poder salir. Basta observar que al multiplicar las matrices, el único valor que podría verse afectado por \hat{p}_{88}^t , es \hat{p}_{88}^{t+1} , pues todas las demás entradas, de ese mismo renglón, son cero. Resultando siempre en una probabilidad igual a 1 de continuar en ese estado para cualquier $t \geq 1$. A este tipo de estados es común llamarlos *absorbentes*.

Finalmente, nótese como en esta y las demás matrices de transición del Apéndice (C), los renglones correspondientes a estados menores o iguales al 6, que no puedan ser asumidos en determinados tiempos (de acuerdo a nuestras condiciones), necesariamente tendrán un único valor de probabilidad de transición *ficticio* al estado 8, igual a 1. Esto se realiza para que las matrices sigan cumpliendo con la condición del Capítulo (3), en la que se establece que las sumas de los renglones deben ser iguales a 1. Agregar este valor no afecta las probabilidades de transición para los demás estados.

Para comprobar esta última afirmación supongamos que el estado i^* no puede ser asumido en el tiempo $t > 1$, con lo que $\hat{p}_{i^*8}^t = 1$ y $\hat{p}_{i^*j}^t = 0$, para toda $j < 8$. Al multiplicar la matriz de transición del tiempo t por la del tiempo $(t + 1)$, este valor solo podría afectar a la entrada \hat{p}_{88}^{t+1} , resultando en un valor de transición igual a 1 para el estado absorbente 8, siendo este el valor por definición de este estado, las transiciones no se ven afectadas. Así mismo, cuando multiplicamos la matriz de transición del tiempo t por la del tiempo $(t - 1)$, basta notar que toda la columna de i^* en $(t - 1)$ es necesariamente igual a cero, siendo estos los únicos valores que serían afectados por $\hat{p}_{i^*8}^t$, tampoco se tiene una afectación en las

transiciones para los demás tiempos⁴.

| | | n_{ij}^5 | | | | | | | | | | | p_{ij}^5 | | | | | | | | |
|---|---|------------|-----|-----|-----|-----|---|---|---|------|---|------|------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 0 | 0 | 664 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7637 | 0 | 0.00 | 0.08 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.92 |
| 1 | 0 | 1558 | 962 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1217 | 1 | 0.00 | 0.42 | 0.26 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.33 |
| 2 | 0 | 86 | 399 | 539 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 53 | 2 | 0.00 | 0.08 | 0.37 | 0.50 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.05 |
| 3 | 0 | 6 | 24 | 102 | 289 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 3 | 0.00 | 0.01 | 0.06 | 0.24 | 0.68 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 4 | 18 | 136 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.03 | 0.11 | 0.86 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1583 | 8 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 |

Figura 4.9: Valores de n_{ij}^5 y \hat{p}_{ij}^5 para el plazo 5 meses, en el quinto mes de antigüedad.

Las matrices de transición en un paso son de mayor importancia para la gestión del portafolio pues en ellas se muestra el volumen de cuentas en las que las políticas de cobranza y otorgamiento de crédito han o no surtido efecto, y no solo de los créditos activos. En particular las diagonales $(i, i + 1)$ son graficadas como en la figura (4.10), ya que con estas se tiene una buena idea del deterioro del portafolio, es decir, el porcentaje de cuentas que están aumentando en meses de atraso. En esta misma figura puede verse como más del 15% de las cuentas se atrasan en su primer mes y como la posibilidad de recuperar las cuentas aumenta con el plazo pues naturalmente se tiene mas tiempo para las labores de cobranza, sin embargo, las transiciones de los primeros meses, en particular la de dos y tres, aumenta también con el plazo, siendo esta una de las de mayor peso es que los productos con 4 y 5 meses son los que en el histórico tienen menor riesgo. En esta misma figura puede verse también, como las probabilidades de transición, a pesar de estar en tiempos distintos, pueden ser similares y, aunque estas no están siendo observadas para cada uno de los distintos estados, el siguiente punto a tratar antes de calcular las PD_n será verificar, en qué medida son distintas.

4.2.2 Pruebas de hipótesis.

De acuerdo con lo expuesto en la sección (3.5), los resultados que se muestran en la figura (4.11) se obtienen al realizar las pruebas de hipótesis a los valores de las probabilidades de transición en un paso del portafolio. Dichas pruebas tienen que realizarse para cada tiempo y estado, excepto para los valores 7 y 8 pues las probabilidades asociadas a estos dos estados se definieron constantes. Cada gráfica muestra los valores de los estadísticos como puntos circulares $(-2\log(\lambda_i))$ y los valores comparativos de $\chi^2(\alpha)_{(m-1)(t-1)}$ como puntos triangulares con un nivel de confianza del 99.9%, y grados de libertad iguales al número de tiempos que el valor de la probabilidad de transición toma valores distintos de cero (menos uno), multiplicados por el número de estados de E (menos uno), como se estableció al final de la sección (3.5).

Recordemos que si los estadísticos superan los valores $\chi^2(\alpha)_{(m-1)(t-1)}$, entonces la hipótesis de homogeneidad es rechazada. Para cada plazo puede verse que conforme el valor de estado aumenta, el estadístico se hace cada vez más pequeño, con lo que las probabilidades de transición desde ese estado

⁴A pesar de que no se está comentando nada sobre las demás entradas, es evidente que al ser todas iguales a cero, harían que la probabilidad de llegar o partir desde i^* sea siempre cero, esto es el otro objetivo de plantear así las probabilidades de transición

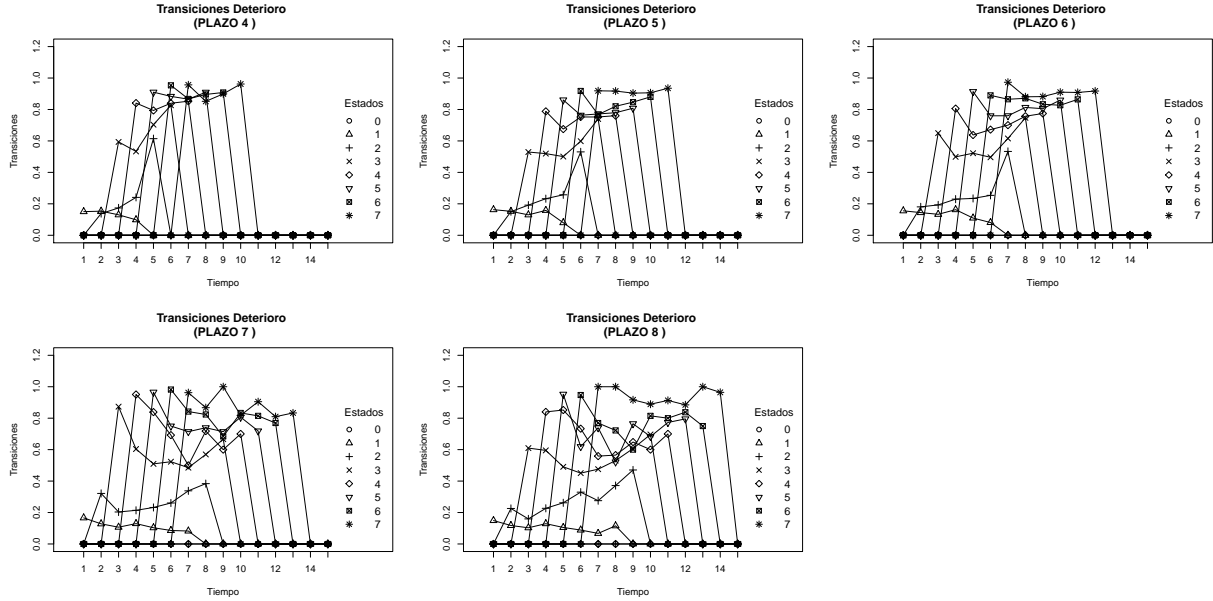


Figura 4.10: Deterioro histórico del portafolio, el estado indicado es el final de la transición en un tiempo.

van perdiendo posibilidad de ser distinta a lo largo del tiempo. Por ejemplo, en el plazo de 4 meses, no importa en cuál de los tiempos entre 1 y 5 se encuentren, la probabilidad de ir del estado 0 a cualquier otro (sabemos que solo podemos ir al 1) es distinta, sin embargo, la probabilidad de ir del estado 6 a cualquier otro, es casi la misma sin importar en que tiempo desde el 6 hasta el 11 se encuentre.

Claramente, para el plazo 4 ninguna de las probabilidades de transición puede ser considerada homogénea pues todos los estadísticos son mayores a los del comparativo, así mismo los de 5 y 6, no así con los tiempos 7 y 8, en los que para los estados mayores o iguales a 3 las probabilidades ya están muy cercanas ó por debajo de la línea. Es de esperarse que mientras el plazo de los créditos crece, la homogeneidad se haga presente en sus probabilidades de transición⁵.

Vale la pena considerar que, por una parte estos plazos tienen una participación muy baja en el portafolio, y por otra, el hecho de tener homogeneidad en los estados significa que podríamos ahorrarnos cálculos y tener sólo una matriz de transición (no tendría sentido diferenciar entre tiempos), pero tener estimaciones para cada tiempo para un estado homogéneo no significa pérdida de información⁶, de manera que no se replanteará el modelo como homogéneo a causa de estos valores.

4.2.3 Probabilidades de Incumplimiento(PD_n).

Después de que las pruebas de hipótesis fueron realizadas para las probabilidades de transición en un paso y no se encontró evidencia de homogeneidad, podemos proceder a la aplicación de la ecuación (4.1) para obtener las probabilidades de incumplimiento, PD_n .

Los resultados de esta aplicación se muestran en la figura (4.12), en donde en cada gráfica corresponde a cada uno de los plazos, y las líneas dentro de estas gráficas, representan las probabilidades de incumplimiento de cada estado en cada uno de los tiempos del horizonte de vida del crédito partiendo desde el

⁵Siendo los plazos cortos los de mayor presencia en el portafolio es que se optó por las cadenas no homogéneas, esta es una de las ventajas de las que se hablaba en el capítulo sobre Cadenas de Markov.

⁶No así para el caso contrario, es decir en el que se utilizaran matrices de transición homogéneas y la prueba arrojara valores significativos de no homogeneidad pues se estaría sobre o sub valorando el riesgo.

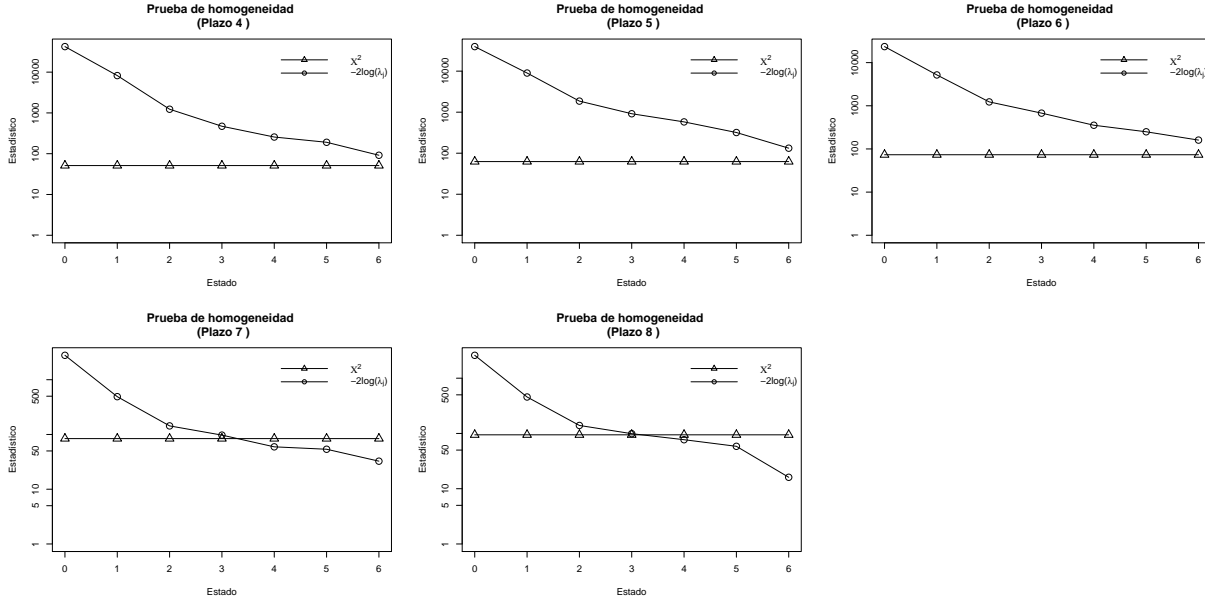


Figura 4.11: Deterioro histórico del portafolio, el estado indicado es el final de la transición en un tiempo.

tiempo 0.

Los valores de cada estado (línea), independientemente del plazo al que nos refiramos, poseen una tendencia conforme la antigüedad avanza, esta es decreciente y menos pronunciada también respecto a la antigüedad, hasta que en el estado 6 es casi nula o no se presenta. La razón de este comportamiento es que si el horizonte de vida del crédito se encuentra ya avanzado, un atraso de corto plazo no necesariamente reflejaría la falta de voluntad de pago, sino descuidos en el cumplimiento de las obligaciones o bien, créditos en los que los efectos de las acciones de cobranza están surtiendo efecto y que finalmente serán saldadas en su totalidad antes de llegar al castigo.

Pensemos por ejemplo en los casos en los que el cliente olvida pagar una de las amortizaciones, no por falta de liquidez sino por olvido, estas situaciones son muy comunes en el mercado microfinanciero, de ahí que exista un valor de 0.92 para la probabilidad de que un crédito con 3 meses de atraso en su tercer mes sea castigado en el futuro, contra un valor de 0.67 para un crédito con los mismos meses de atraso, pero en su sexto mes, lo anterior en el plazo 4. Con esto, queda claro que los créditos que poseen meses de atraso iguales a sus meses de antigüedad poseen una calidad crediticia muy mala y en consecuencia, las probabilidades de incumplimiento más altas. Estos son los créditos a los que las políticas de crédito más estrictas deben ser aplicadas para evitar que lleguen a los 5 meses de atraso, en los que casi para cualquier tiempo y plazo las probabilidades de incumplimiento son superiores a 0.85.

Como último punto, puede verse que la distancia más notoria entre líneas para todos los plazos, se encuentra entre los estados 2 y 3, esto indica la diferencia tan notoria entre las acciones necesarias para recuperar un crédito que rebasa los 2 meses de atraso y los que no, de manera que el principal objetivo del área de crédito y cobranza debe ser contener a los créditos en este nivel de atraso o bien, se tendría que realizar algún análisis de campo en el que se detallen las circunstancias del por qué los asesores de crédito no cobran los créditos que rebasan este límite. Por otra parte, es de particular atención como los créditos en el plazo 7 muestran los peores resultados, es decir los valores más altos de PD_n para cualquier tiempo.

La probabilidad de incumplimiento para un crédito recién otorgado (es decir en el tiempo cero) es un

dato clave para la imagen corporativa de las IMFs. Puede verse que conforme aumenta el plazo éstas crecen desde el 0.17, para el plazo 4, hasta el 0.20 para el plazo 8. Las PD_n son uno de los indicadores más importantes de las IMFs, no solo por que concentran en un sólo dato mucha información correspondientes a la calidad crediticia, sino que además dan una idea de lo que puede pasar en el futuro, en particular, como se comentó en el capítulo de Medidas de Riesgo, son la base para estimar las pérdidas del portafolio como se realizará en la siguiente sección.

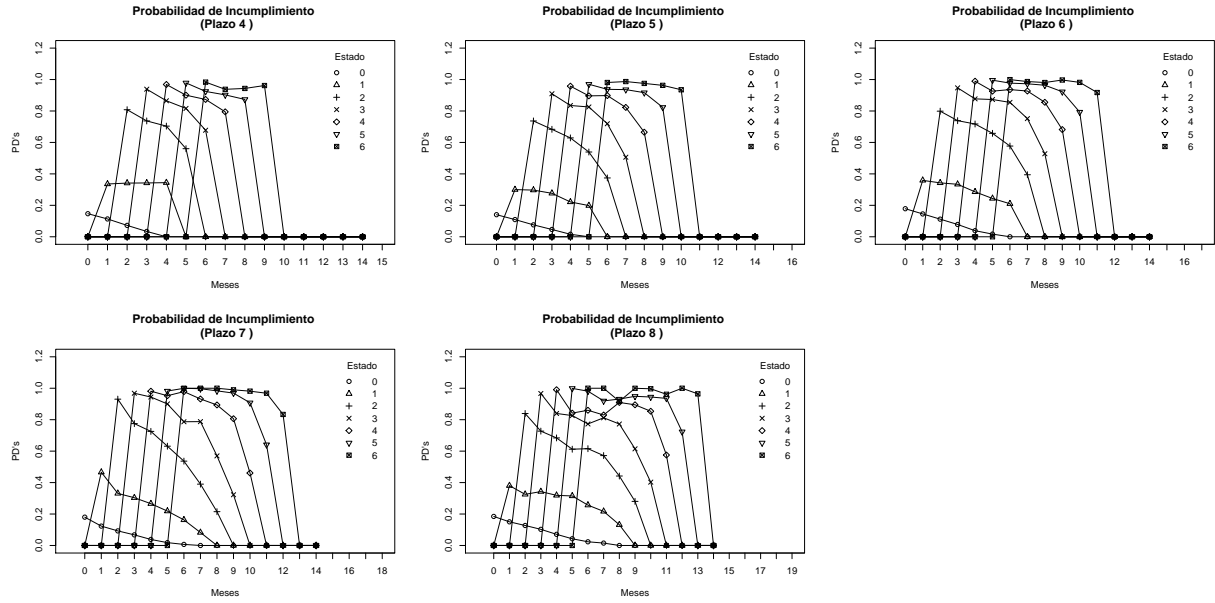


Figura 4.12: Probabilidad de incumplimiento para cada estado y tiempo en el portafolio.

4.3 Valuación de las pérdidas

Para concluir la aplicación de lo expuesto en los dos capítulos anteriores, es que en la presente sección se estimarán las pérdidas potenciales del portafolio, para ello, de acuerdo al planteamiento del modelo, es necesaria la estimación de un último componente para la distribución de las pérdidas, las LGD_n , y que, una vez obtenidas, la condición para el cociente de Liapounov también sea cumplida.

4.3.1 La pérdida dado el incumplimiento (LGD_n).

De acuerdo a su definición, este valor debe ser estimado sobre una muestra de créditos castigados, en nuestro caso serán precisamente los 4,757 que también fueron incluidos en la muestra para la estimación de las probabilidades de transición. Para indicar que nos referimos a uno de dichos créditos, utilizaremos el subíndice $n_C = 1, 2, \dots, N_C = 4,757$. Como se comentó anteriormente, este valor es la esperanza de la fracción de la EAD_{n_C} que puede llegar a materializarse como una pérdida si el crédito cae en incumplimiento. Si llamamos CHO_{n_C} (del término en inglés para el importe castigado *Charge Off*) al importe que se asumió como pérdida para el n_C -ésimo crédito castigado y $EAD_{n_C}^s$ la exposición de ese mismo crédito en el tiempo s , definiremos la severidad en el tiempo s como el cociente

$$SEV_{n_C}^s = (CHO_{n_C} / EAD_{n_C}^s) \quad (4.2)$$

La distinción entre tiempos para los valores de la severidad es necesaria a partir del hecho que conforme el tiempo avanza, los créditos, incluso los castigados, pueden ser pagados parcialmente, o lo que es lo mismo, con el tiempo el saldo de los créditos al ser de monto fijo y sin intereses extra, no puede mas que disminuir y podemos esperar que:

$$\mathbb{E}[SEV_{n_C}^s] \leq \mathbb{E}[SEV_{n_C}^{s+u}] \text{ para } u \geq 1 \quad (4.3)$$

Otro indicador clave para medir el desempeño de la cobranza de las IMF's es la severidad en el tiempo 0, es decir ($CHO_{n_C}/EAD_{n_C}^0$) y es que el valor $EAD_{n_C}^0$ es precisamente el importe total del crédito más los intereses. Por lo que este cociente puede ser interpretado como la fracción que se castiga de un crédito recién otorgado si el incumplimiento llega a materializarse.

Con los valores de severidad definidos en el párrafo anterior es que, el estimador para la esperanza de la severidad ó pérdida dado el incumplimiento y, el estimador de la varianza del n -ésimo crédito del portafolio, que se encuentre en el tiempo s de su horizonte son:

$$LGD_n = \mathbb{E}[SEV_{n_C}^s] = \sum_{n_C=1}^{N_C} \frac{SEV_{n_C}^s}{N_C}; \mathbb{V}[SEV_n] = \mathbb{V}[SEV_{n_C}^s] = \sum_{n_C=1}^{N_C} \frac{(SEV_{n_C}^s - LGD_n)^2}{N_C} \quad (4.4)$$

Donde en el extremo izquierdo de las igualdades no se especifica el tiempo pues evidentemente éste es el que el crédito posea al momento de la evaluación. Estas estimaciones deberán ser realizadas para cada plazo. Nótese que a diferencia de las PD_n el estado del crédito no es considerado pues las trayectorias de los créditos castigados no incluyen muchas de las combinaciones tiempo-estado que tienen los créditos activos, con lo que los valores de los LGD_n para aquellos créditos que no tengan un comportamiento similar al de los castigados serían cero, así también la distribución de sus pérdidas, por lo que se decidió utilizar el valor más cercano, resultando en la omisión del estado. Los resultados para los créditos de la aplicación se muestran en la figura (4.13) en el que puede verse la consistencia de los datos con el supuesto (4.3).

| Tiempo | Plazo (Meses) | | | | | | | | | |
|--------|---------------|--------|------|--------|------|--------|------|--------|------|--------|
| | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | |
| | LGD | V[SEV] | LGD | V[SEV] | LGD | V[SEV] | LGD | V[SEV] | LGD | V[SEV] |
| 0 | 0.29 | 0.070 | 0.32 | 0.067 | 0.35 | 0.077 | 0.62 | 0.120 | 0.42 | 0.094 |
| 1 | 0.35 | 0.083 | 0.37 | 0.080 | 0.40 | 0.087 | 0.65 | 0.117 | 0.45 | 0.098 |
| 2 | 0.43 | 0.095 | 0.43 | 0.092 | 0.45 | 0.096 | 0.69 | 0.111 | 0.49 | 0.104 |
| 3 | 0.54 | 0.099 | 0.50 | 0.100 | 0.51 | 0.102 | 0.72 | 0.102 | 0.54 | 0.107 |
| 4 | 0.74 | 0.083 | 0.60 | 0.099 | 0.58 | 0.104 | 0.76 | 0.093 | 0.58 | 0.105 |
| 5 | 0.82 | 0.065 | 0.73 | 0.083 | 0.65 | 0.096 | 0.79 | 0.079 | 0.63 | 0.102 |
| 6 | 0.88 | 0.050 | 0.81 | 0.069 | 0.78 | 0.072 | 0.83 | 0.067 | 0.68 | 0.094 |
| 7 | 0.92 | 0.035 | 0.86 | 0.055 | 0.84 | 0.058 | 0.89 | 0.049 | 0.74 | 0.078 |
| 8 | 0.95 | 0.022 | 0.91 | 0.039 | 0.88 | 0.047 | 0.93 | 0.038 | 0.83 | 0.061 |
| 9 | 0.98 | 0.008 | 0.95 | 0.021 | 0.92 | 0.032 | 0.95 | 0.029 | 0.87 | 0.052 |
| 10 | 1.00 | 0.000 | 0.99 | 0.005 | 0.96 | 0.017 | 0.96 | 0.019 | 0.91 | 0.038 |
| 11 | 1.00 | 0.000 | 1.00 | 0.000 | 0.99 | 0.005 | 0.99 | 0.006 | 0.95 | 0.017 |
| 12 | | | 1.00 | 0.000 | 1.00 | 0.000 | 1.00 | 0.001 | 0.98 | 0.008 |
| 13 | | | | | 1.00 | 0.000 | 1.00 | 0.000 | 0.99 | 0.005 |
| 14 | | | | | | | 1.00 | 0.000 | 1.00 | 0.000 |
| 15 | | | | | | | | | 1.00 | 0.000 |

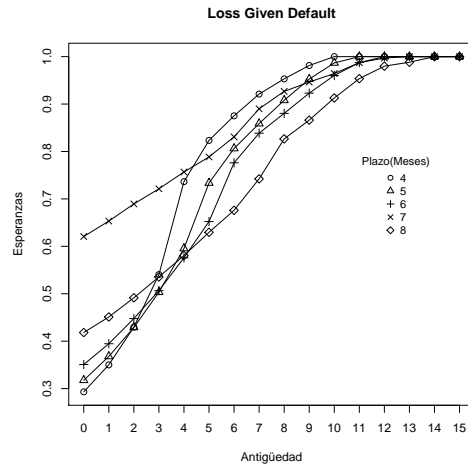


Figura 4.13: LGD_n calculadas sobre el universo de créditos castigados de la IMF.

Nuevamente, y en consistencia con los valores de PD_n , los valores más altos los tiene el plazo 7. Dejándolo aparte, podemos ver que los valores decrecen con respecto al plazo, y es que como se comentó anteriormente, mientras más tiempo se tenga para cobrar, más puede recuperarse antes del límite de tiempo para el castigo. Los indicadores de esperanza de pérdida para créditos recién otorgados se encuentran cerca del 30% en los plazos más representativos y del 62% y 42% para los plazos 7 y 8 respectivamente.

4.3.2 Cociente de Liapounov.

Hasta el momento, se han establecido los valores PD_n y LGD_n que los créditos en el portafolio pueden tener, en las figuras (4.12) y (4.13) respectivamente. Después de la asignación de estos valores a cada uno de los créditos en el portafolio, los resultados se muestran en los histogramas de la figura (4.14), donde además se muestran los saldos insolutos, es decir las exposiciones al incumplimiento EAD_n .

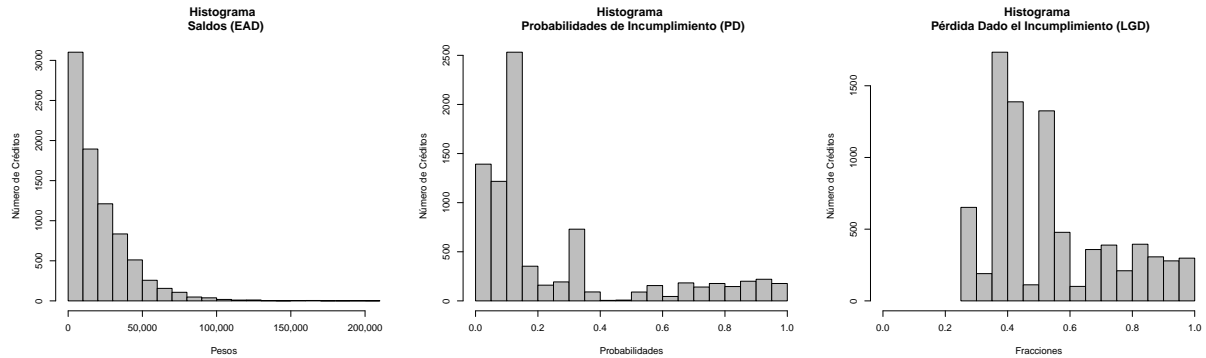


Figura 4.14: Valores en el portafolio

Sabemos que estos son los tres componentes con los que se podrán estimar las pérdidas del portafolio, y que además un valor asociado a los mismos puede ayudarnos en esta estimación, este es el cociente de Liapounov. De acuerdo a la ecuación (2.11) y, sustituyendo los valores para la esperanza y varianza de las pérdidas individuales L_n expuestas en las ecuaciones (2.2) y (2.3), el Cociente de Liapounov, CL , para las pérdidas del portafolio L_N puede ser calculado como:

$$\begin{aligned}
CL &= \frac{\left(\sum_{n=1}^N \mathbb{E}|L_n - \mu_{L_n}|^3 \right)^2}{\left(\sum_{n=1}^N \sigma_{L_n}^2 \right)^3} \\
&= \frac{\left(\sum_{n=1}^N (1 - PD_n) |0 - EAD_n LGD_n PD_n|^3 + PD_n |EAD_n LGD_n - EAD_n LGD_n PD_n|^3 \right)^2}{\left(\sum_{n=1}^N EAD_n^2 (\mathbb{V}[SEV_n](PD_n) + LGD_n^2 PD_n (1 - PD_n)) \right)^3} \\
&= \frac{\left(\sum_{n=1}^N -(1 - PD_n) (EAD_n LGD_n PD_n)^3 + PD_n (EAD_n LGD_n (1 - PD_n))^3 \right)^2}{\left(\sum_{n=1}^N EAD_n^2 (\mathbb{V}[SEV_n](PD_n) + LGD_n^2 PD_n (1 - PD_n)) \right)^3}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Aplicando (4.5) a la información descrita en (4.14), se obtiene un valor para el cociente de Liapounov de 0.0003476145, mismo que por su cercanía con cero será considerado como aceptable para aplicar la metodología analítica descrita en el Capítulo 2.

4.3.3 Medidas de Riesgo.

Las cuatro medidas de riesgo, Pérdida Esperada, Valor en Riesgo, Capital Económico y Expected Shortfall descritas en el Capítulo 2 y establecidas en las ecuaciones (2.21), (2.23), (2.24) y (2.29) respectivamente, se muestran en la figura (4.15) para el portafolio que se utilizó para la aplicación.

Un punto importante que hay que mencionar es que dentro de las definiciones de las medidas de riesgo, se comentó que éstas deben ser calculadas para un determinado período de tiempo. En el caso de las medidas aquí establecidas, este período de tiempo es igual al de la duración máxima del máximo de sus plazos, es decir 15 meses. Este sería el tiempo en que tardaría en completarse el horizonte o vida del crédito más recientemente otorgado, con el plazo más largo, 8 meses.

El nivel mínimo de reservas que la IMF propietaria de la información debe mantener para hacer frente a las pérdidas futuras del portafolio ascienden a \$22.01MDP y al parecer no existe mucha diferencia entre este valor y la cobertura con el VaR o el Expected Shortfall (al respecto se comentó anteriormente pues las IMFs no se encuentra expuesta a pérdidas catastróficas cuya relación con eventos ajenos sea por lo menos reconocible). Comparadas contra el valor del portafolio \$169.9MDP, la pérdida esperada resulta en un nivel de cobertura del 12.9%, y para el máximo de las pérdidas, sería del 13.8%, este punto porcentual de diferencia puede significar el alcanzar o no una meta en la rentabilidad del portafolio y debe ser cuidadosamente evaluada en un sentido financiero. Por otra parte, el 12.9% es la parte de la tasa de interés que la IMF debe aplicar en sus créditos para la cobertura contra el riesgo, finalmente nótese como este valor es muy aproximado a la proporción de créditos castigados contra los que se han saldado.

4.3.4 Simulación.

Para concluir la aplicación, y como se comentó en el Capítulo 2, un ejercicio de simulación para las pérdidas individuales del portafolio fue realizado para verificar que la distribución de su suma estandarizada se

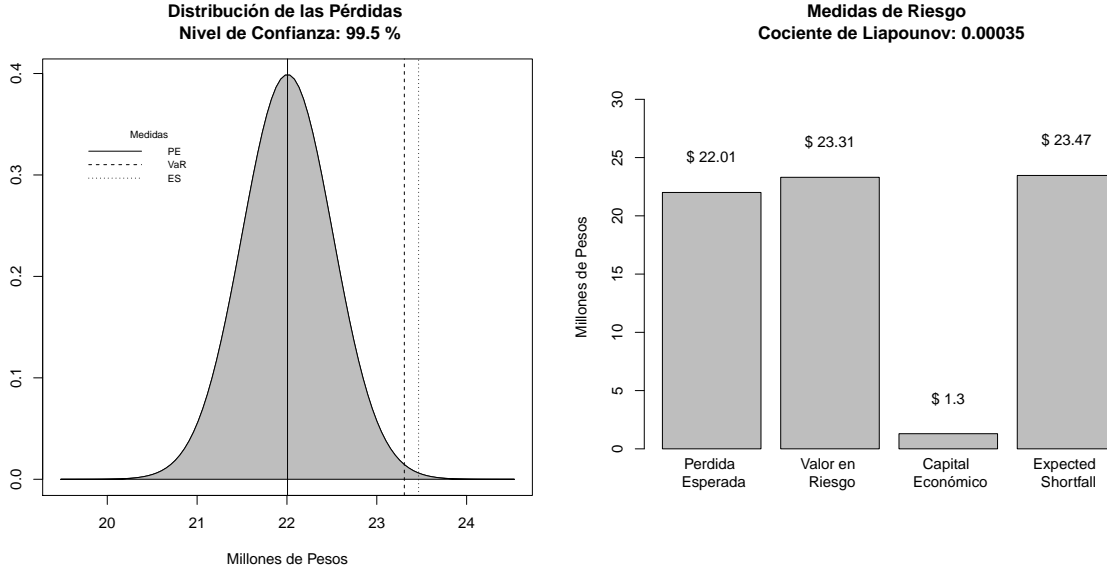


Figura 4.15: Resultados de la valuación de las pérdidas.

aproxime a la de una distribución normal estándar. Dicha simulación está basada en el planteamiento de la sección (2.5) con un valor de $R = 10,000$ escenarios de pérdidas del portafolio en la ecuación (2.34), es decir, se realizaron $10,000 \times 8,216 = 82,160,000$ comparativas como las descritas en la ecuación (2.35), para la obtención de valores 1 ó 0 (dependiendo de los números aleatorios $U_{(0,1)n}^r$ generados vía el programa computacional, y las PD_n), de las indicadores de default D_n , mismos que se multiplicaron por los otros dos componentes de las pérdidas individuales, EAD_n y LGD_n , obteniendo así un valor simulado de las pérdidas para cada uno de los créditos y, al sumarlas, obtener un escenario de pérdidas del portafolio.

Es así que la función de distribución empírica de la ecuación (2.36) es obtenida, y los resultados comparados en la llamada gráfica QQ de la figura (4.16). Este tipo de gráficas muestran en una línea sólida los valores de los cuantiles que una distribución normal estándar posee en cada uno de los valores en un determinado intervalo, y los compara con los cuantiles que se encuentren dentro de una función de distribución empírica obtenidos como en (2.37), mismos que se representan simplemente como puntos (en nuestro caso, los círculos grises). Se dice que la distribución de los datos se aproxima a la de una normal mientras más cerca se encuentran los cuantiles empíricos de la línea sólida, los resultados del portafolio se encuentran lo suficientemente cerca como para considerar que la aproximación vía la distribución normal es plausible.

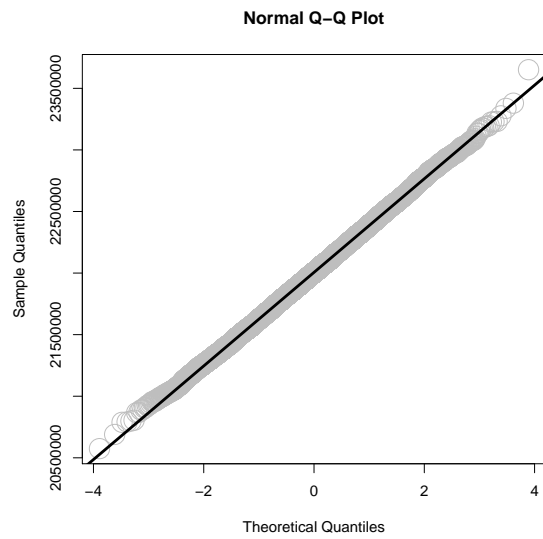


Figura 4.16: Distribución empírica de L comparada contra la distribución Normal estándar.

Capítulo 5

Conclusiones

El sector microfinanciero en nuestro país aún se encuentra lejos de la formalidad de otros países, en los que los reguladores y la iniciativa privada le dan un tratamiento similar al de instituciones dedicadas a la banca tradicional. No obstante, aún en esos países el sector microfinanciero no cuenta aún con la amplitud en investigación teórica (como la posee por ejemplo, la deuda corporativa) para el planteamiento de modelos que permitan la valuación de sus pérdidas y con ello, una correcta administración de sus riesgos, a pesar de cada día penetrar más en los mercados de dinero internacionales. Una parte importante que debe considerarse para el planteamiento de modelos de valuación de pérdidas en entidades financieras cualesquiera, es la calidad de, y acceso a la información que será utilizada para cuantificar en términos monetarios la materialización de los riesgos a los que se encuentran expuestas. Por otra parte, si además se tiene la intención de que los modelos no solo funcionen para una entidad en particular, la homogeneidad en la información también debe ser considerada.

A lo largo del presente trabajo se expuso una alternativa para la valuación de las pérdidas de una IMF, basada en primera instancia en la información más confiable que las instituciones pueden tener, estos son los estados de cuenta de sus clientes. No solo para cumplir correctamente con los contratos que pueda tener firmados con sus acreditados, sino también por su propia conveniencia, pues sólo así puede tener un conocimiento preciso del valor de sus activos y cumplir con los requerimientos de la SHCP o de las entidades de las que se obtengan fondos. Dichos estados de cuenta nos ayudaron a conformar los llamados históricos de pagos, los cuales concentran la información en cuanto a morosidad de los créditos en una sucesión de números, con tantos elementos como meses en su horizonte posean los créditos.

Al interpretar cada una de estas sucesiones como eventos provenientes de una cadena de Markov obtuvimos no solamente una base para la estimación de las probabilidades de incumplimiento, sino también, algunos indicadores con los que puede entenderse el estado actual del portafolio y las características sobre la colocación, así como algunos con los que las estrategias de cobranza pueden comenzar a ser identificadas. Uno de los principales retos para el planteamiento de los históricos de pago como cadenas de Markov consistió en la diferencia entre la perspectiva común de modelar dichos procesos estocásticos como homogéneos y la aquí presentada, sin embargo, de acuerdo al funcionamiento de los créditos y el corto plazo al que éstos se otorgan, las cadenas de Markov que reflejarían de mejor manera el comportamiento real dentro del portafolio deben ser consideradas no homogéneas. Otro reto al que se hizo frente fue la condición en la que no todos los estados de la cadena pueden ser asumidos en cualquier momento durante el proceso, esto fue resuelto gracias al uso de probabilidades de transición ficticias que no afectan los cálculos con las demás.

Toda vez que las probabilidades de incumplimiento fueron estimadas, la distribución de las pérdidas fue valuada bajo el principio de independencia entre los acreditados, y sin considerar elementos macroeconómicos, al respecto se comentaron trabajos en los que esto ha sido estudiado sin encontrar evidencia de elementos reconocibles con los que establecer dichas relaciones, con dicho tema podría ser realizado

todo un trabajo independiente pero desde una perspectiva con un perfil más económico que de administración de riesgos.

La condición de Liapounov en los datos fue satisfactoriamente cercana a cero, permitiéndonos el uso de la distribución normal para estimar los cuantiles de las pérdidas. Los valores obtenidos para las medidas de riesgo bajo condiciones normales, el Valor en Riesgo y la Pérdida Esperada, comparados con el valor del portafolio, resultaron en una proporción similar a la que se tiene en el histórico y la diferencia Entre el VaR y el Expected Shortfall no fue significativa pues las colas de la distribución normal no son de las llamadas pesadas. En consistencia con la realidad de la institución, este tipo de pérdidas catastróficas tendrían que ver tal vez con eventos distintos a los económicos, como las crisis de finales de 2009, de la que los efectos no fueron adversos. Si bien, en un futuro este tipo de evaluaciones sería necesaria, sobre todo si la entidad tiende a la formalización, por el momento no reflejaría su realidad.

Finalmente, debe considerarse que el alcance de un desarrollo como el aquí presentado implica un seguimiento puntual del desempeño del modelo a lo largo del tiempo, es decir, sería necesario comparar los resultados obtenidos con los reales. Dicha actividad, en el ambiente financiero, es conocida como *Back Testing*, sin embargo, solo podría ser realizada observando el portafolio durante poco más de un año a partir de la fecha de evaluación.

Apéndice A

Diagrama de Flujo, rutina en R

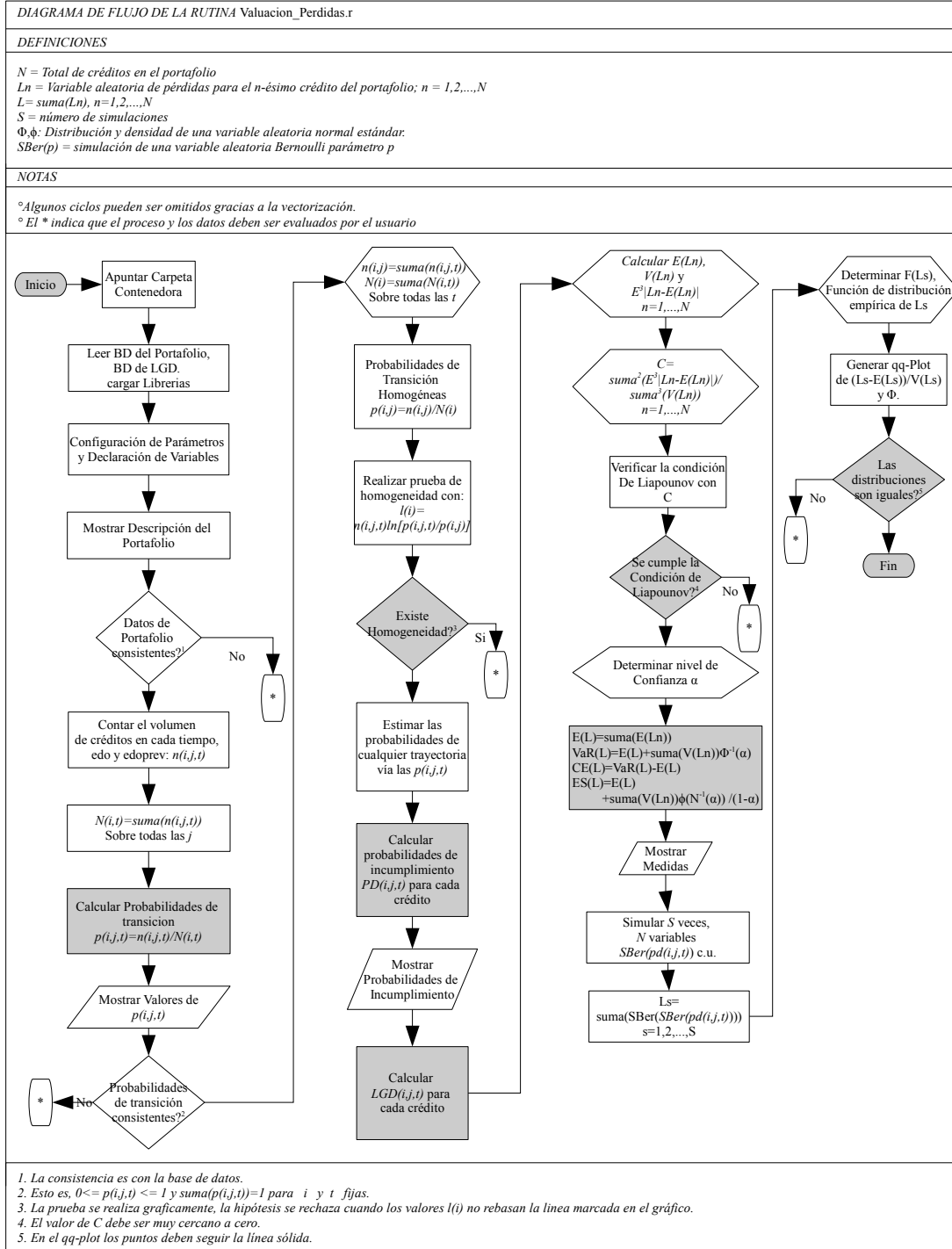


Figura A.1: Diagrama de Flujo de la aplicación en R

Apéndice B

Valores n_{ij}^t

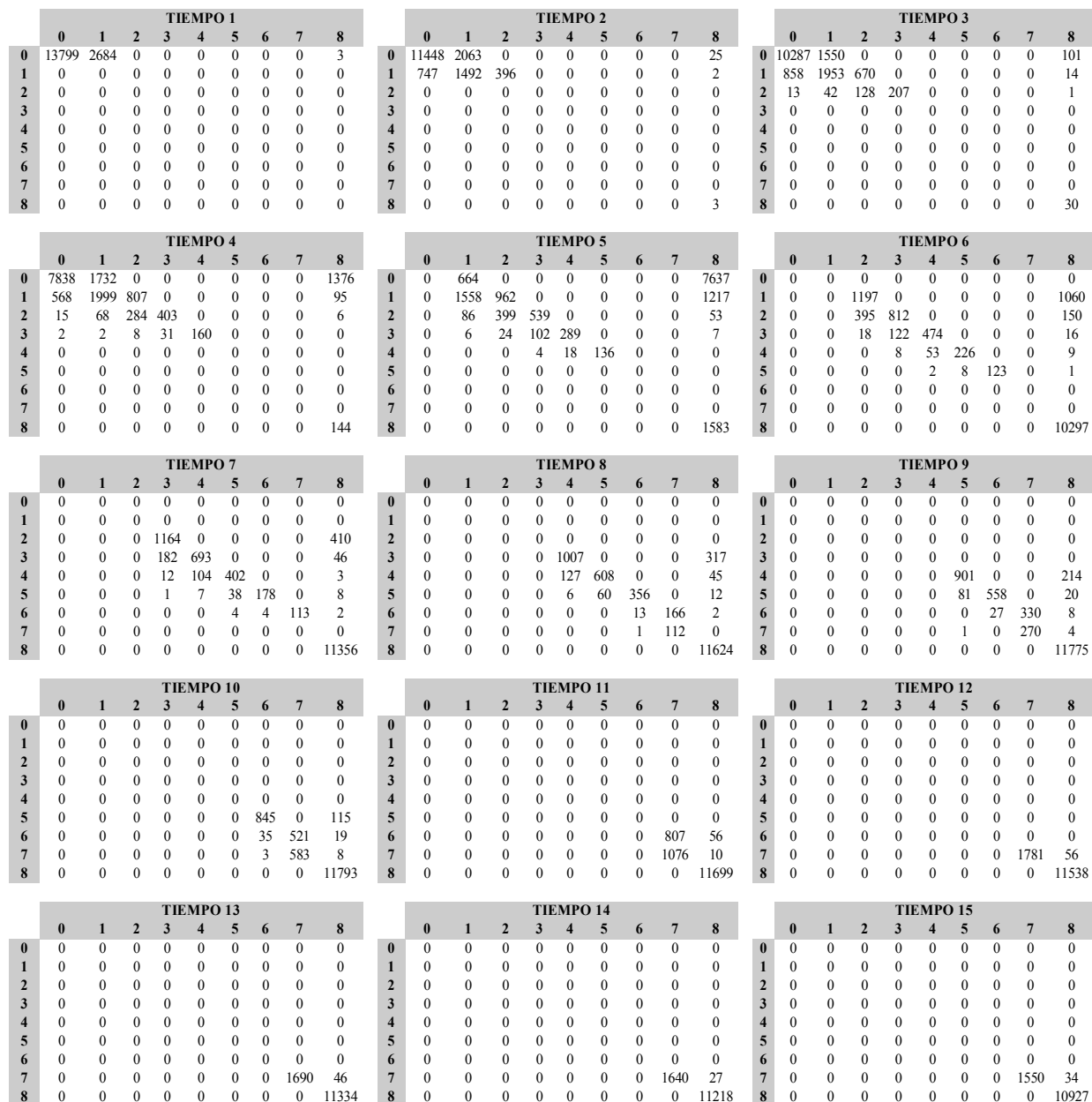


Figura B.2: Volumen de créditos, plazo 5 meses.

Apéndice C

Matrices de Transición

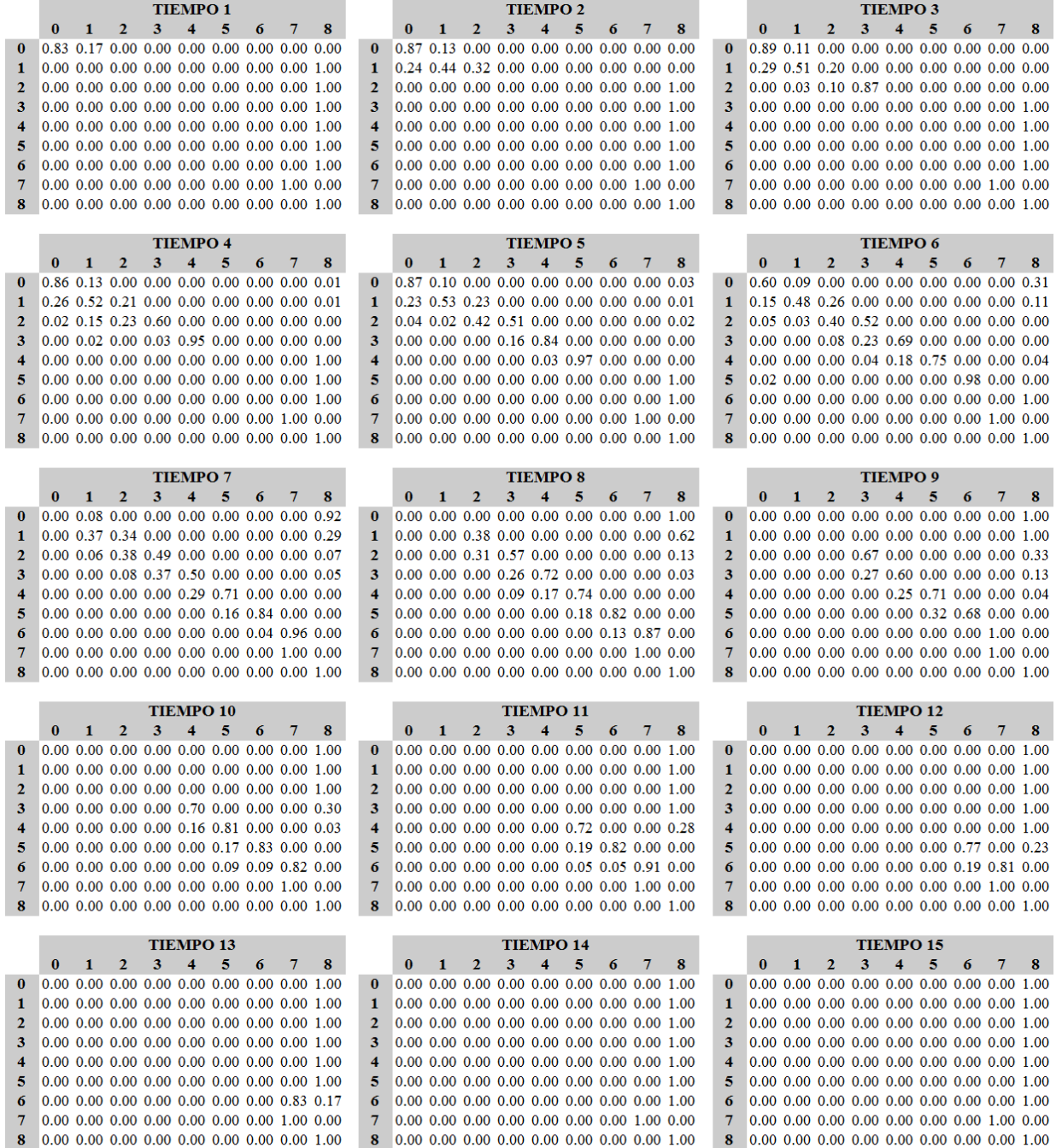


Figura C.4: Matrices de transición, plazo 7 meses.

Bibliografía

- [1] Anderson, T. W.; Goodman, Leo A. (1957) “Statistical inference about Markov chains” *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 28, pp. (89 - 110) Nueva York E.E.U.U.
- [2] Banco de México (2005) *Definiciones básicas de riesgos*, www.banxico.org.mx, México
- [3] Banco de México (2010) *Glosario de términos del sistema financiero Mexicano*, www.banxico.org.mx, México
- [4] Bluhm, Christian; Overbeck Ludger; Wagner Christoph (2003) *An introduction to credit risk modeling*, Chapman & HallCRC, Florida E.E.U.U.
- [5] Cramér, H. (1946) *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, California E.E.U.U.
- [6] Comisión Nacional Bancaria y de Valores (2011) *Circular Única de Bancos*, www.cnbv.gob.mx, México
- [7] Feller, W. (1957) *An Introduction to Probability Theory and its Applications Vol. 2*, John Wiley and Sons, Nueva York E.E.U.U.
- [8] Karlin, S.; Taylor, H. M. (1975) *A First Course in Stochastic Processes*, 2da. ed., Academic Press, Nueva York E.E.U.U.
- [9] Ledgerwood, Joanna (2000) *Manual de microfinanzas. Una perspectiva institucional y financiera*, Finanzas sostenibles para los pobres. Banco Mundial, Washington DC E.E.U.U.
- [10] Lehmann, E.L. (1999) *Elements of Large Sample Theory*, Springer, Nueva York E.E.U.U.
- [11] Lütkebohmert, Eva (2009) *Concentration Risk in Credit Portfolios* Springer, Berlin Alemania
- [12] McNeil, A.; Frey R.; Embrechts P. (2005) *Quantitative Risk Management Concepts Techniques and Tools*, Princeton University Press, California E.E.U.U.
- [13] Martínez Cantero, Eduardo (2004) *Historia mínima de las Microfinanzas* en Carmen Castellanos Gaytán, La otra Banca el Microfinanciamiento en México, Suplemento Semanal de la Jornada en la Economía, México
- [14] MicroRate Inc. (2009) *Resistencia Cautelosa*, www.microrate.com, Virginia E.E.U.U.
- [15] Prodesarrollo, Finanzas y Microempresas (2010) *Benchmarking de las microfinanzas en México: Un informe del sector*, www.prodesarrollo.org, México
- [16] Prodesarrollo, Finanzas y Microempresas (2011) *Manual de prácticas y herramientas para la gestión integral de riesgos en microfinanzas*, www.prodesarrollo.org, México

- [17] Robinson, Margarite S. (2000) *La revolución microfinanciera*, Finanzas sostenibles para los pobres, Banco Mundial, Washington DC E.E.U.U
- [18] Ross, Sheldon (1998) *A first course in probability* Prentice Hall, Nueva Jersey E.E.U.U
- [19] Thomas, L. C.; Edelman, David C.; Crook J. N (2002) *Credit scoring and its applications*, Society of Industrial and Applied Mathematics, Filadelfia E.E.U.U.