



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN ECONOMÍA

MODELACIÓN ECONOMETRICA Y TEORÍA DE CÓPULAS

TESIS
PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN ECONOMÍA

PRESENTA:
JOSÉ MANUEL MÁRQUEZ ESTRADA

TUTOR:
DR. ARMANDO SÁNCHEZ VARGAS
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ECONÓMICAS

MÉXICO, D.F. ENERO DEL 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Introducción	5
2. La Teoría de Cópulas	7
2.1. Preliminares	7
2.2. Cópulas y subcópulas	9
2.3. El teorema de Sklar	12
2.4. Cópulas y variables aleatorias	15
2.5. Cópulas de Supervivencia	19
2.6. Simetría	20
2.7. Cópulas Multivariadas	22
3. Regresión con Copulas y Correlación	27
3.1. Concordancia y la Tau de Kendall	27
3.2. La Rho de Spearman	33
3.3. Relación entre la Tau de Kendall y la Rho de Spearman	35
3.4. Dependencia	38
3.4.1. Dependencia direccional y cópulas	43
3.5. Regresión con Cópula	44
3.5.1. La Función de Regresión	44
3.5.2. Regresión Multivariada	49
4. Tres ejemplos de regresión con cópula	51
4.1. Cópula Normal	51
4.2. Cópula Gumbel-Hougaard	53
4.3. Cópula Pareto	54
4.3.1. Copula Pareto mutivariada	55
5. Conclusiones	57

Capítulo 1

Introducción

El principal objetivo de esta tesis es hacer una aportación para desarrollar la teoría probabilística necesaria para la especificación de modelos econométricos basados en la teoría de cópulas, que es más general que los conceptos clásicos de funciones de densidad. Para ello, enunciaremos y demostraremos algunos conceptos y resultados importantes de la teoría de cópulas que permiten conectar los conceptos estadísticos de función de regresión (media condicionada) con el concepto habitual econométrico de función de modelo de regresión y de dependencia a través del análisis de la regresión cópula y los índices rho de Spearman y Tau de Kendall, así como medidas de dependencia direccionales.

Así pues, esta tesis constituye un trabajo de investigación del área de economía matemática pura y no pretende realizar ninguna aplicación empírica, aunque los resultados de la tesis pueden ser la base para distintos trabajos de economía aplicada, sobre todo cuando las distribuciones de probabilidad de los datos no se comportan como una normal o la función de regresión no es del tipo lineal. De hecho esperamos que esta área de investigación ofrecerá nuevos avances para los estudiosos de los métodos cuantitativos y esta aportación sólo constituye una base probabilística para dichos desarrollos. Cabe destacar que este trabajo sigue la línea de investigación propuesta por Aris Spanos en su libro seminal publicado en 1986 (vea [7]).

El trabajo de tesis busca ofrecer tres nuevos modelos econométricos mucho más generales y potentes que aquel que asume una distribución normal. La aportación de este trabajo será el desarrollar los modelos de regresión para tres familias de cópulas importantes y ampliamente usadas en trabajos sobre finanzas y riesgos, la cópula de Gumbel, la de Pareto y la normal, con el objetivo de proporcionar las bases de un modelo econométrico con cópulas que permita el análisis desde esta perspectiva de los datos estocásticos, económicos y sociales que hasta el momento se tienen que ceñir a un modelo probabilístico preestablecido, lo que le resta predictibilidad y precisión en el diagnóstico estadístico.

La teoría de cópulas en el contexto de la estadística es muy interesante y rica pues, por su definición, separa los efectos marginales de las funciones de densidad de variables aleatorias que actúan en conjunto de los efectos propiamente conjuntos de estas, por lo que permite modelar adecuadamente patrones de dependencia complejos entre ellas. En este sentido encontramos que los valores extremos de las distribuciones y la variabilidad

observada de los datos se pueden reproducir con suficiente precisión propiamente por la distinción que se puede hacer de los efectos separados y porque las funciones de distribución modeladas a través de las cópulas emergen propiamente de los datos que estamos analizando.

El modelo de regresión cópula ha sido desarrollado desde un inicio en el contexto de la teoría de la probabilidad para conocer las relaciones de distribuciones definidas en un mismo espacio de probabilidad. El primero en publicar resultados sobre esto fué Fréchet quien planteó el problema de encontrar la clase de funciones de distribución bivariadas que se pueden obtener a partir de dos funciones de distribución dadas (clase de Fréchet). A partir de ésta hipótesis de Fréchet se hicieron varios trabajos al respecto, siendo el más relevante el de Sklar (1989) quien resolvió este problema demostrando la existencia de dichas funciones llamadas cópulas. El interés de los estudiosos de la estadística por las cópulas surgió un poco antes, cuando A. Rényi¹ probó que se podían construir fácilmente medidas de dependencia utilizando estas herramientas, pero la mayor razón por lo que éstas se han vuelto tan populares es que se han descubierto múltiples aplicaciones de estas en el estudio de diversas disciplinas, entre ellas las ingenierías y las finanzas (vea [5]).

En los últimos años se han modelado más exitosamente modelos de regresión y pronóstico con las cópulas, en diversos trabajos (vea por ejemplo [9], [12], [14], [15], [16], [17]) se han comparado los resultados de modelaciones econométricas tradicionales (que presuponen una función de distribución para los datos) con otras hechas con cópulas, las cuales estiman de inicio la función de densidad que mejor se adapta a los datos (su cópula), viéndose mejores resultados con éste último método.

Esta tesis está estructurada de la siguiente manera. En el primer capítulo se presenta la teoría estandar de cópulas que servirá como base para la propuesta de nuevos modelos condicionales. En el segundo capítulo desarrollamos la teoría de ecuaciones de regresiones condicionales en el contexto de la teoría de cópulas; la cual no ha sido muy trabajada a la fecha. El capítulo final se desarrollan los modelos de regresión cópula para nuestros casos de interés, los modelos normal, pareto y gumbel bivariados y el pareto en el caso multivariado. Cabe destacar que estas especificaciones son innovadoras y no han sido desarrolladas en ningún otro documento de investigación hasta donde sabemos. En las conclusiones discutimos las potenciales aplicaciones de estos nuevos modelos propuestos en esta tesis.

Cabe mencionar que muchas de las demostraciones dadas en esta tesis son de elaboración propia, pero las demás han sido tomadas o se referencian a los libros de Nelsen (1999)[4] y Jurado (2010)[8]. Estas demostraciones se han seleccionadas para aparecer en este trabajo con fines de claridad y de familiarización de los lectores con esta teoría.

¹Rényi, A. On Measures of dependence.

Capítulo 2

La Teoría de Cópulas

2.1. Preliminares

Intuitivamente, una cópula es como el cemento que une a las distribuciones marginales con su función de densidad conjunta, es decir, es una función que relaciona una función de distribución multivariada con sus funciones de distribución marginales. En este sentido, al ser ese lazo entre las funciones de densidad marginales y la función de densidad conjunta y tener una estructura independiente a las funciones de densidad, permite separar los efectos marginales de éstas del comportamiento conjunto de estas variables aleatorias, por lo que además de permitir un ajuste más apegado a los datos que a teorías que anteponen esta relación, se puede hacer un análisis de la medida de dependencia entre las variables aleatorias involucradas.

En lo que resta, denotaremos por $\bar{\mathbb{R}}$ al conjunto de los **reales extendidos**, el cual se define como el conjunto de todos los números reales añadiendo los símbolos $-\infty$ y ∞ , los cuales cumplen que $-\infty < x < \infty, \forall x \in \mathbb{R}$, es decir:

$$\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$$

Definición 2.1.1 Sean $S_1, S_2 \subset \bar{\mathbb{R}}$ no vacíos y H una función cuyo dominio cumple $\text{Dom}H = S_1 \times S_2$; sea $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ un rectángulo cuyos vértices cumplen $x_1, x_2 \in S_1$ y $y_1, y_2 \in S_2$. Entonces el H **volúmen** de B se define como:

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \quad (2.1)$$

Así, podemos definir en este punto conceptos que generalizan las propiedades de las funciones de densidad multivariadas. Comenzaremos con la siguiente definición.

Definición 2.1.2 Una función H es **2-creciente** si $V_H(B) \geq 0$ para todos los rectángulos B cuyos vértices están en el conjunto $\text{Dom}H$.

Definición 2.1.3 Una función $H : S_1 \times S_2 \mapsto \mathbb{R}$ se dirá que está **fija** si dados los números $a_1 = (\inf S_1) \in S_1$ y $a_2 = (\inf S_2) \in S_2$, se cumple que, para todo $(x, y) \in S_1 \times S_2$

$$H(x, a_2) = 0 = H(a_1, y)$$

Lema 2.1.4 Sean S_1, S_2 subconjuntos no vacíos de $\bar{\mathbb{R}}$ y $H : S_1 \times S_2 \mapsto \mathbb{R}$ una función 2-creciente. Sean $x_1, x_2 \in S_1$ con $x_1 \leq x_2$ y $y_1, y_2 \in S_2$ con $y_1 \leq y_2$; entonces las funciones

$$t \mapsto H(t, y_2) - H(t, y_1)$$

$$t \mapsto H(x_2, t) - H(x_1, t)$$

son crecientes sobre S_1 y S_2 respectivamente.

Demostración: Con la notación anterior, sea

$$h_1(t) := H(t, y_2) - H(t, y_1)$$

tome $t_1, t_2 \in S_2$ tales que $t_1 \leq t_2$, así como H es 2-creciente se cumple que

$$H(t_2, y_2) - H(t_2, y_1) - H(t_1, y_2) + H(t_1, y_1) = [H(t_2, y_2) - H(t_2, y_1)] - [H(t_1, y_2) - H(t_1, y_1)] \geq 0$$

pero $h_1(t_2) - h_1(t_1) = [H(t_2, y_2) - H(t_2, y_1)] - [H(t_1, y_2) - H(t_1, y_1)] \geq 0$; por lo que $h_1(t_2) \geq h_1(t_1)$ demostrando que la función h_1 es creciente.

Usando un razonamiento similar podemos demostrar que $h_2(t) = H(x_2, t) - H(x_1, t)$ es una función creciente. ■

Lema 2.1.5 Sean $S_1, S_2 \subset \bar{\mathbb{R}}$ no vacíos y sea $H : S_1 \times S_2 \mapsto \mathbb{R}$ una función que está fija y es 2-creciente, entonces H es creciente en cada argumento, es decir:

- Para cada $x_1 \in S_1$ fija, $H(x_1, y)$ es creciente en $y \in S_2$
- Para cada $y_1 \in S_2$ fija, $H(x, y_1)$ es creciente en $x \in S_1$.

Demostración: Sea $y_0 \in S_2$ arbitrario y $a_2 = \text{Inf}(S_2)$, entonces tomamos $x_1, x_2 \in S_1$ tales que $x_1 \leq x_2$. Como H es fija y 2-creciente tenemos que

$$H(x_2, y_0) - H(x_2, a_2) - H(x_1, y_0) + H(x_1, a_2) = H(x_2, y_0) - H(x_1, y_0) \geq 0$$

luego $H(x_2, y_0) \geq H(x_1, y_0)$, $\forall x_2 \geq x_1$, por lo que H es creciente respecto a la primera entrada.

Ahora si tomamos $x_0 \in S_1$ arbitrario y $a = \text{Inf}(S_1)$, haciendo un razonamiento similar demostramos que H es creciente respecto a la segunda entrada. ■

Definición 2.1.6 Sean $a_1 = (\text{sup}S_1) \in S_1$ y $a_2 = (\text{sup}S_2) \in S_2$. Decimos que la función $H : S_1 \times S_2 \mapsto \mathbb{R}$, tiene **marginales** F y G con dominios S_1 y S_2 respectivamente, dadas por:

$$F(x) = H(x, a_2), \text{ para toda } x \in S_1 \quad (2.2)$$

$$G(y) = H(a_1, y), \text{ para toda } y \in S_2 \quad (2.3)$$

Lema 2.1.7 Sean S_1 y S_2 subconjuntos no vacíos de $\bar{\mathbb{R}}$, sea $H : S_1 \times S_2 \mapsto \mathbb{R}$ una función que está fija y es 2-creciente, con marginales F y G , sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S_1 \times S_2$ dos puntos cualesquiera, entonces:

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

Demostración: Usando la desigualdad del triángulo tenemos que:

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| + |H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)|.$$

Para todo $x_1, x_2 \in S_1$ y para todo $y_1, y_2 \in S_2$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $x_1 \leq x_2$, por lo que, como H es 2-Creciente y creciente en cada entrada, tenemos que:

$$H(x_2, y_2) \geq H(x_1, y_2) \Rightarrow 0 \leq H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)$$

Por otro lado, sea $h_1(x) = H(x, a_2) - H(x, y_2)$. Sabemos que h_1 así definida es creciente, por lo que como $y_2 \leq a_2$, se tiene que

$$h_1(x_2) - h_1(x_1) = [H(x_2, a_2) - H(x_2, y_2)] - [H(x_1, a_2) - H(x_1, y_2)] \geq 0$$

Así tenemos que

$$F(x_2) - F(x_1) = H(x_2, a_2) - H(x_1, a_2) \geq H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)$$

Por lo que

$$0 \leq H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) \leq F(x_2) - F(x_1)$$

Note que si tomáramos $x_1 \geq x_2$ entonces llegaríamos a que

$$0 \leq H(x_1, y_2) - H(x_2, y_2) \leq F(x_1) - F(x_2)$$

por lo que podemos resumir estos resultados como:

$$H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) \leq |F(x_2) - F(x_1)|, \quad \forall x_1, x_2 \in S_1$$

Bajo un razonamiento similar, tomando $a_1 = \text{Inf}(S_1)$, tendríamos que

$$H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1) \leq |G(y_2) - G(y_1)|, \quad \forall y_1, y_2 \in S_2$$

juntando estos dos resultados, se tiene que:

$$\begin{aligned} H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1) &\leq |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| + |H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)| \\ &\leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)| \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.2. Cópulas y subcópulas

En esta sección definiremos unas funciones auxiliares llamadas subcópulas para llegar propiamente al concepto de cópula y demostraremos varios de los resultados a cerca de estos dos tipos de funciones. Algunas de las demostraciones y ejemplos fueron tomadas de Jurado (2010) [8] y se dejan aquí para aclarar los conceptos. Comenzaremos demostrando un lema que tiene que ver con la interpretación de lo que es una cópula en el contexto de la estadística, para posteriormente relacionarlo con los conceptos básicos que daremos sobre este tema.

Lema 2.2.1 Sea $U = F(x)$ la función de densidad acumulada de una variable aleatoria continua X . Entonces U es una nueva variable aleatoria que se distribuye uniformemente en el intervalo $I = [0, 1]$.

Demostración: Recordemos que si Y es una variable aleatoria que se distribuye uniformemente en el intervalo $[0, 1]$, entonces su función generadora de momentos es:

$$m_x(t) = \frac{e^t - 1}{t}$$

Por otro lado, para la variable aleatoria U tenemos que

$$m_u(t) = E[e^{tU}] = E[e^{tF(x)}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tF(x)} f(x) dx$$

Note que $\frac{d}{dx}[e^{tF(x)}] = e^{tF(x)} t f(x)$, por lo que

$$e^{tF(x)} = \int_{-\infty}^x \frac{d}{dx}[e^{tF(x)}] dx = t \int_{-\infty}^x e^{tF(x)} f(x) dx$$

Así tenemos que

$$m_u(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x e^{tF(x)} f(x) dx = \frac{1}{t} e^{tF(x)} \Big|_{x=-\infty}^{\infty} = \frac{e^t - 1}{t}$$

Así, como la función generadora de momentos de U coincide con la de una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $[0, 1]$, entonces la función de densidad de probabilidad de U también es uniforme en $[0, 1]$. ■

Definición 2.2.2 Una **subcópula bidimensional** o **2-subcópula** es una función C' con las siguientes propiedades:

1. $DomC' = S_1 \times S_2$, donde S_1 y S_2 son subconjuntos de I que contienen al 0 y al 1.
2. C' está fija y es 2-creciente.
3. Para todo $u \in S_1$ y $v \in S_2$, se tiene que $C'(u, 1) = u$ y $C'(1, v) = v$.

Una observación pertinente en este punto es que para todo $(u, v) \in DomC'$ se tiene que $0 \leq C'(u, v) \leq 1$, por lo tanto el rango de C' ($RanC'$) es un subconjunto del intervalo I .

Ejemplo 1: Sean $S_1 = S_2 = \{0, 1\}$, si la función C' definida como

$$C'(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u = 0 \text{ ó } v = 0 \\ 1 & \text{si } u = 1 = v. \end{cases}$$

Esta es una subcópula. Así, tenemos que $S_1 \times S_2 = \{(0, 0), (1, 1), (1, 0), (0, 1)\}$, por lo que podemos verificar fácilmente las propiedades de subcópula.

1. Por definición $DomC' = S_1 \times S_2$, con $0, 1 \in S_1, S_2$

2. C' está fija y es 2–creciente pues se cumple que:

- $C(u,0) = 0 = C(0,v)$,
- $C'(0,0) = C'(0,1) = C'(1,0) = 0$
- $C'(1,1) = (1)(1) = 1$.
- $V'_C([0,1] \times [0,1]) = C'(1,1) - C'(0,1) - C'(1,0) + C'(0,0) = 1 \geq 0$.

3. Por último podemos ver que para todo $u \in S_1, v \in S_2$,

$$C'(u,1) = u \quad y \quad C'(1,v) = v.$$

Ésta es la mínima subcópula que podemos definir (contiene el menor número de puntos posibles para formar una subcópula).

Definición 2.2.3 Una **Cópula C** (o **2–cópula**) es una 2–subcópula cuyo $DomC = I$. Equivalentemente, una **cópula** es una función $C : I^2 \mapsto I$ con las siguientes propiedades:

1. Para todo $u, v \in I$,

$$C(u,0) = 0 = C(0,v) \tag{2.4}$$

y

$$C(u,1) = u \quad y \quad C(1,v) = v. \tag{2.5}$$

2. Para cada u_1, u_2, v_1, v_2 en I tal que $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0. \tag{2.6}$$

Ejemplo 2: Sean $S_1 = S_2 = I$, sea la función $C(u, v) = uv$, la cual se conoce como la **cópula producto** y caracteriza la independencia entre las variables aleatorias que relaciona. Verifiquemos las propiedades de **cópula**:

1. Para todo $u, v \in I$,

$$C(u,0) = 0 = C(0,v)$$

y

$$C(u,1) = u \quad y \quad C(1,v) = v.$$

2. Para cada a, b, c, d en I tal que $a \leq b, c \leq d$

$$\begin{aligned} cV_C([a,b] \times [c,d]) &= (b,d) - C(b,c) - C(a,d) + C(a,b) \\ &= bd - bc - ad + ab \\ &= (b-a)(d-c) \geq 0. \end{aligned}$$

Teorema 2.2.4 Desigualdad de Frechet-Hoeffding Sea C' una subcópula, entonces, para cada $(u, v) \in Dom(C')$

$$\max[u + v - 1, 0] \leq C'(u,v) \leq \min[u, v]$$

Demostración: Sea $(u, v) \in \text{Dom}(C')$, luego, como C' es 2-creciente se cumple que:

$$C'(u, v) \leq C'(u, 1) = u \quad \text{y} \quad C'(u, v) \leq C'(1, v) = v$$

luego $C'(u, v) \leq \min[u, v]$. Además vemos que $V_{C'}([u, 1] \times [v, 1]) \geq 0$, es decir

$$C'(u, v) - C'(u, 1) - C'(1, v) + C'(1, 1) = C'(u, v) - u - v + 1 \geq 0$$

por lo que $C'(u, v) \geq u + v - 1$, lo cual, combinado con que $C'(u, v) \geq 0$, $\forall u, v \in \text{Dom}(C')$, implica que

$$C'(u, v) \geq \max[u + v - 1, 0]$$

■

Observación: Note que como toda cópula es una subcópula, entonces la desigualdad anterior también se cumple para toda cópula $H(x, y)$, por lo que se tiene que

$$\max[F(x) + G(y) - 1, 0] \leq H(x, y) \leq \min[F(x), G(y)]$$

2.3. El teorema de Sklar

En esta sección se va a definir y demostrar uno de los principales resultados de la teoría de cópulas, el cual de hecho resuelve el problema planteado por Fréchet sobre las funciones que relacionaban a las funciones de densidad, el llamado teorema de Sklar bidimensional, así como sus variantes en términos de las funciones de distribución y su generalización múltidimensional.

Definición 2.3.1 *Una función de distribución es una función F , con dominio en $\bar{\mathbb{R}}$, tal que:*

1. F es creciente, es decir, si $-\infty \leq x \leq y \leq \infty$, entonces $F(x) \leq F(y)$.
2. $F(-\infty) = 0$ y $F(+\infty) = 1$.

Definición 2.3.2 *Una función de distribución conjunta es una función H con dominio en $\bar{\mathbb{R}}^2$ tal que:*

1. H es 2-creciente.
2. $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$ y $H(+\infty, +\infty) = 1$.

Note entonces que H está fija y dado que $\text{Dom}H = \bar{\mathbb{R}}^2$, H tiene marginales $F(x) = H(x, \infty)$ y $G(y) = H(\infty, y)$, las cuales son funciones de distribución.

Teorema 2.3.3 (Teorema de Sklar) *Sea H una función de distribución conjunta, con marginales F y G , entonces existe una cópula C tal que para todo $x, y \in \bar{\mathbb{R}}$*

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \tag{2.7}$$

Si F y G son continuas entonces C es única, de otra manera C esta únicamente determinada sobre $\text{Ran}F \times \text{Ran}G$.

Inversamente, si C es una cópula y F y G son funciones de distribución, entonces la función H que definimos en (2.7) es una función de distribución conjunta con marginales F y G .

El camino para probar este teorema es estandar y lo haremos a través de estos lemas (las demostraciones se tomaron, para ilustrar el concepto, de Jurado (2011) [8]):

Lema 2.3.4 *Sea H función de distribución conjunta con marginales F y G , entonces existe una única subcópula C' tal que:*

1. $DomC' = RanF \times RanG$.
2. Para todo x, y que pertenece a $\bar{\mathbb{R}}$, se cumple $H(x, y) = C'(F(x), G(y))$.

Demostración: Sea $H : \bar{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ fija y 2-creciente con $S_1 = S_2 = \bar{\mathbb{R}}$. Por el Lema (2.1.7) si $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \bar{\mathbb{R}}^2$, entonces:

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|$$

Así, si ocurre que $F(x_2) = F(x_1)$ y $G(y_2) = G(y_1)$, entonces $H(x_2, y_2) = H(x_1, y_1)$.

Por lo tanto, el conjunto de parejas

$$\{(F(x), G(y)), H(x, y) \mid x, y \text{ pertenecen a } \bar{\mathbb{R}}\}$$

define una función C' con dominio $RanF \times RanG$. Entonces dados $(x_2, y_2), (x_1, y_1)$ en $RanF \times RanG$ tales que $(F(x_2), G(y_2)) = (F(x_1), G(y_1))$, esto implica que $F(x_2) = F(x_1)$ y $G(y_2) = G(y_1)$, luego $H(x_1, y_1) = H(x_2, y_2)$.

Por lo tanto si $C'(F(x), G(y)) = H(x, y)$, entonces C' tiene dominio $RanF \times RanG$. Como H es función de distribución conjunta entonces $H(-\infty, -\infty) = 0$ y $H(\infty, \infty) = 1$. Como 0 pertenece a $RanF \cap RanG$, entonces H está fija pues

$$H(x, -\infty) = C'(F(x), G(-\infty)) = 0 = C'(F(-\infty), G(y)) = H(-\infty, y)$$

■

Lema 2.3.5 *Sea C' una subcópula, Entonces existe una cópula C tal que $C(u, v) = C'(u, v)$ para todo (u, v) en $DomC'$; es decir, cualquier subcópula puede ser extendida a una cópula. La extensión generalmente no es única.*

Demostración. Vease Jurado (2010) [8].

Sea $DomC' = S_1 \times S_2$, con S_1, S_2 conjuntos no vacíos y contenidos en I tales que $\{0, 1\} \in S_1 \cap S_2$. C' es creciente en cada coordenada y es continua. Sea \bar{S}_1, \bar{S}_2 las cerraduras S_1 y S_2 .

Sean x un punto límite de S_1 , y un punto límite de S_2 , entonces existen sucesiones $\{x_n\}$ completamente contenida en S_1 y $\{y_n\}$ completamente contenida en S_2 tales que $\{x_n\} \rightarrow x$ y $\{y_n\} \rightarrow y$, es decir $|x_n - x| \rightarrow 0, |y_n - y| \rightarrow 0$.

Entonces $|(x_n, y_n) - (x, y)| := |x_n - x| + |y_n - y| \rightarrow 0$. Así definimos $C'(x, y) = \lim C'(x_n, y_n)$ que existe por la continuidad de C' .

Supondremos que C' esta definida en $\bar{S}_1 \times \bar{S}_2$. Sea (a, b) en I^2 , sean $a_1 = \sup \{c \in \bar{S}_1 \mid c \leq a\}$ y $a_2 = \inf \{d \in \bar{S}_1 \mid a \leq d\}$.

Si a está en \bar{S}_1 , entonces $a_1 = a = a_2$. Supongamos que a no está en \bar{S}_1 , entonces existe $\epsilon > 0$ tal que el intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ está completamente contenido en $(\bar{S}_1)^c$, entonces $a_1 < a < a_2$.

Sean $b_1 = \sup \{c \in \bar{S}_2 \mid c \leq b\}$ y $b_2 = \inf \{d \in \bar{S}_2 \mid b \leq d\}$.

De la misma manera que para a , si b no está en \bar{S}_2 , entonces existe $\epsilon > 0$ tal que el intervalo $(b - \epsilon, b + \epsilon)$ está completamente contenido en $(\bar{S}_2)^c$, entonces $b_1 < b < b_2$.

Definimos

$$\lambda_1 = \begin{cases} \frac{a-a_1}{a_2-a_1} & \text{si } a_1 < a_2 \\ 1 & \text{si } a_1 = a_2. \end{cases}$$

$$\mu_1 = \begin{cases} \frac{b-b_1}{b_2-b_1} & \text{si } b_1 < b_2 \\ 1 & \text{si } b_1 = b_2. \end{cases}$$

Definimos

$$C(a, b) = (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C'(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_1C'(a_1, b_2) \\ + \lambda_1(1 - \mu_1)C'(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_1C'(a_2, b_2)$$

Si $a \in S_1$ y $b \in S_2$, entonces $C(a, b) = C'(a, b)$, pues $\lambda_1 = \mu_1 = 1$ y $a_1 = a = a_2$, $b_1 = b = b_2$; C es una extensión de C' a todo I^2 .

Verifiquemos las propiedades de cópulas.

Si $a = 0 = a_1 = a_2$ y $b = 0 = b_1 = b_2$, entonces $C(0, b) = 0 = C(a, 0)$.

Si $a = 1 = a_1 = a_2$, $\lambda_1 = 1$, entonces

$$C(1, b) = (1 - 1)(1 - \mu_1)C'(1, b_1) + (1 - 1)\mu_1C'(1, b_2) \\ + (1 - \mu_1)C'(1, b_1) + \mu_1C'(1, b_2) \\ = (1 - \mu_1)C'(1, b_1) + \mu_1C'(1, b_2) \\ = (1 - \mu_1)b_1 + \mu_1b_2$$

Analizamos por casos, si $b \in \bar{S}_2$ entonces $b = b_1 = b_2$ y entonces $C(1, b) = C'(1, b) = b$; ahora supongamos que $b \notin \bar{S}_2$, entonces

$$C(1, b) = (1 - \mu_1)b_1 + \mu_1b_2 \\ = \left(1 - \frac{b - b_1}{b_2 - b_1}\right)b_1 + \frac{b - b_1}{b_2 - b_1}b_2 \\ = \frac{b_2 - b}{b_2 - b_1}b_1 + \frac{b - b_1}{b_2 - b_1}b_2 \\ = \frac{1}{b_2 - b_1}((b_2 - b)b_1 + (b - b_1)b_2) \\ = b$$

sólo resta comprobar que $C(a, b)$ es 2-creciente, es decir que $V_C(B) \geq 0$, para este fin se que analizan varios casos; sea (c, d) otro punto en I^2 que cumple $a \leq c$ y $b \leq d$, sean $c_1 < c < c_2$, $d_1 < d < d_2$ con c_1, c_2, d_1, d_2 definidos de la misma manera que a_1, a_2, c_1, b_2 y definir μ_2, λ_2 como sigue:

$$\lambda_2 = \begin{cases} \frac{c-c_1}{c_2-c_1} & \text{si } c_1 < c_2 \\ 1 & \text{si } c_1 = c_2. \end{cases}$$

$$\mu_2 = \begin{cases} \frac{d-d_1}{d_2-d_1} & \text{si } d_1 < d_2 \\ 1 & \text{si } d_1 = d_2. \end{cases}$$

El caso más sencillo es aquel en donde $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2$, $b_1 = d_1$ y $b_2 = d_2$, entonces μ_2 y λ_2 cambian como sigue

$$\lambda_2 = \begin{cases} \frac{c-a_1}{a_2-a_1} & \text{si } a_1 < a_2 \\ 1 & \text{si } a_1 = a_2. \end{cases}$$

$$\mu_2 = \begin{cases} \frac{d-b_1}{b_2-b_1} & \text{si } b_1 < b_2 \\ 1 & \text{si } b_1 = b_2. \end{cases}$$

calculemos el volúmen $V_C(B)$

$$\begin{aligned} V_C(B) &= C(c, d) - C(c, b) - C(a, d) + C(a, b) \\ &= [(1 - \lambda_2)(1 - \mu_2)C'(a_1, b_1) + (1 - \lambda_2)\mu_2C'(a_1, b_2) \\ &\quad + \lambda_2(1 - \mu_2)C'(a_2, b_1) + \lambda_2\mu_2C'(a_2, b_2)] \\ &\quad - [(1 - \lambda_1)(1 - \mu_2)C'(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_2C'(a_1, b_2) \\ &\quad + \lambda_1(1 - \mu_2)C'(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_2C'(a_2, b_2)] \\ &\quad - [(1 - \lambda_2)(1 - \mu_1)C'(a_1, b_1) + (1 - \lambda_2)\mu_1C'(a_1, b_2) \\ &\quad + \lambda_2(1 - \mu_1)C'(a_2, b_1) + \lambda_2\mu_1C'(a_2, b_2)] \\ &\quad + [(1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C'(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_1C'(a_1, b_2) \\ &\quad + \lambda_1(1 - \mu_1)C'(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_1C'(a_2, b_2)] \\ &= [(1 - \lambda_2)(1 - \mu_2) - (1 - \lambda_1)(1 - \mu_2) - (1 - \lambda_2)(1 - \mu_1) \\ &\quad + (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)]C'(a_1, b_1) \\ &\quad - [-(1 - \lambda_2)\mu_2 + (1 - \lambda_1)\mu_2 + (1 - \lambda_2)\mu_1 \\ &\quad - (1 - \lambda_1)\mu_1]C'(a_1, b_2) \\ &\quad - [-\lambda_2(1 - \mu_2) + \lambda_1(1 - \mu_2) + \lambda_2(1 - \mu_1) \\ &\quad - \lambda_1(1 - \mu_1)]C'(a_2, b_1) \\ &\quad + [\lambda_2\mu_2 - \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_1]C'(a_2, b_2) \\ &= [(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \lambda_1)]C'(a_1, b_2) - [(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \lambda_1)]C'(a_1, b_2) \\ &\quad - [(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \lambda_1)]C'(a_2, b_1) + [(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \lambda_1)]C'(a_2, b_2) \\ &= [(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \lambda_1)]V_{C'}([a_1, a_2] \times [b_1, b_2]). \end{aligned}$$

Los otros casos se hacen de forma similar. ■

Observamos así que, dada una función de distribución conjunta H con marginales F y G , entonces existirá una única subcópula C' ta que tal que $H(x, y) = C'(F(x), G(y))$, la cual se puede extender a una cópula (no necesariamente única). Esta última es la cópula a la que se refiere el Teorema de Sklar.

2.4. Cópulas y variables aleatorias

En esta sección relacionaremos los conceptos y resultados que desarrollamos anteriormente sobre las funciones cópula con los conceptos estadísticos en términos de las

variables aleatorias. Comenzaremos haciendo una definición que nos ayudará a relacionar estos conceptos. Nuevamente los ejemplos fueron tomados de Jurado (2010) [8].

Definición 2.4.1 Dada una función de distribución F , una **cuasi-inversa** de F es una función $F^{(-1)}$ con dominio $\text{Dom}(F) = I$ tal que

1. Si $t \in \text{Ran}(F)$, entonces $F^{(-1)}(t)$ es un número $x \in \bar{\mathbb{R}}$ tal que $F(x) = t$, es decir, $\forall t \in \text{Ran}(F)$,

$$F(F^{(-1)}(t)) = t.$$

2. Si $t \notin \text{Ran}(F)$ entonces

$$F^{(-1)}(t) = \inf \{x \mid F(x) \geq t\} = \sup \{x \mid F(x) \leq t\}$$

Es importante resaltar entonces que si F es estrictamente creciente entonces tiene una única cuasi-inversa, la cual es la inversa ordinaria F^{-1} .

Ejemplo 3: Un ejemplo importante de la cuasi-inversa de una función, es la función salto unitario, definida por

$$\phi_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

Observamos que $\text{Ran}(\phi)_a = \{0, 1\}$, por lo que si $t = 0$, $\phi_a^{-1}(0)$ es cualquier valor $a_0 < a$ y si $t = 1$, $\phi_a^{-1}(1)$ es cualquier valor $a_1 \geq a$. Si $0 < t < 1$,

$$\begin{aligned} y = \phi_a^{(-1)}(t) &= \inf \{x \mid \phi_a(x) \geq t\} \\ &= \sup \{x \mid \phi_a(x) \leq t\} = a \end{aligned}$$

Así, dadas $a_0 < a \leq a_1$, las cuasi-inversas de ϕ están dadas por la familia de funciones

$$\phi_a^{(-1)}(t) = \begin{cases} a_0 & \text{si } t = 0 \\ a & \text{si } t \in (0, 1) \\ a_1 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Definición 2.4.2 Una **variable aleatoria** X es una función medible que va de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ al espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es el σ -álgebra generada por los abiertos de la topología usual de \mathbb{R} .

Como habitualmente, la medibilidad de X significa que cada evento $[X \in B] := X^{[-1]}(B) = \{w \in \Omega \mid X(w) \in B\}$ pertenece a la σ -álgebra \mathcal{F} para todo $B \in \mathcal{B}$. F es una función de distribución de una variable aleatoria X , cuando para todo $x \in \bar{\mathbb{R}}$

$$F(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$$

Sean X, Y son variables aleatorias definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, decimos que H es una función de distribución conjunta de X y Y si para todo $x, y \in \bar{\mathbb{R}}$

$$H(x, y) = \mathbb{P}([X \leq x] \cap [Y \leq y]) = \mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y]$$

Observación: Note que el conjunto $[X \leq x] = \{w \in \Omega | X(w) \in (-\infty, x]\}$ pertenece a la σ -álgebra \mathcal{F} ya que $(-\infty, x] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A continuación escribiremos la versión del teorema de Sklar en términos de variables aleatorias y funciones de densidad, el cual nos ayudará a enlazar directamente la teoría de cópulas con la teoría de la probabilidad y cuya demostración ya se tiene.

Teorema 2.4.3 (Teorema de Sklar en términos de variables aleatorias) Sean X e Y variables aleatorias con funciones de distribución F y G respectivamente, y H su función de distribución conjunta, entonces existe una cópula C tal que

$$H(x, y) = C(F(x), G(y))$$

Si F y G son continuas, la cópula C es única, de lo contrario C esta únicamente determinada en $\text{Ran}F \times \text{Ran}G$. Se denotará por C_{XY} a la cópula de X y Y .

Hasta aquí queda el teorema de Sklar, el cual es una herramienta fundamental para esta teoría. Los siguientes Corolarios son resultado directo de este teorema y se omitirán sus demostraciones.

Corolario 2.4.4 Tome H, C, F_x y F_y como en el Teorema de Sklar, y sean F_x^{-1} y F_y^{-1} las inversas generalizadas de F_x y F_y . Entonces, $\forall (u, v) \in [0, 1]^2$ se tiene que

$$C(u, v) = H(F_x^{-1}(u), F_y^{-1}(v)) = H(x, y)$$

Corolario 2.4.5 Sean H una función de distribución conjunta con marginales F y G , y C' la única subcópula asociada a H . Sean $F^{(-1)}$ y $G^{(-1)}$ cuasi-inversas de F y G respectivamente, entonces para todo $(u, v) \in \text{Dom}(C')$ se tiene que:

$$C'(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)). \quad (2.8)$$

Observación: Cada cópula (con una extensión adecuada de su dominio a $\bar{\mathbb{R}}^2$) define una función de distribución conjunta H_C cuyas marginales son uniformes sobre $[0, 1]^2$, la cual está dada por:

$$H_C(x, y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ ó } y < 0 \\ C(x, y) & (x, y) \in I^2 \\ x & y > 1, x \in I \\ y & x > 1, y \in I \\ 1 & x > 1, y > 1. \end{cases}$$

Como sabemos, una de las características más importantes para el análisis econométrico multivariado es la independencia de las variables aleatorias analizadas, la cual queda caracterizada totalmente en el siguiente teorema.

Teorema 2.4.6 Sean X, Y variables aleatorias continuas entonces X y Y son independientes si y sólo si $C_{XY} = \Pi$ (la función producto definida como $\Pi(u, v) = uv$).

Demostración: La demostración de éste resultado se obtiene inmediatamente de la definición de independencia en términos de funciones de distribución y de la definición de esta cópula. ■

Observación: Un resultado importante que se obtiene de lo anterior es que si la función de distribución de la variable aleatoria X es continua y α es una función real estrictamente monótona cuyo dominio contiene a $\text{Ran}(X)$, entonces $\alpha(X)$ también cumple ser variable aleatoria y su función de distribución es continua. El teorema siguiente nos indica la relación entre sus cópulas.

Teorema 2.4.7 Sean X, Y variables aleatorias continuas con cópula C_{XY} . Si $\alpha : \text{Ran}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ y $\beta : \text{Ran}(Y) \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones estrictamente crecientes, entonces

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$$

es decir, C_{XY} es invariante bajo transformaciones estrictamente crecientes de X y Y .

Demostración: Vemos que como α y β son estrictamente crecientes, entonces $\alpha(X)$ y $\beta(Y)$ son también variables aleatorias (pues mapean intervalos de la forma $(-\infty, w]$ a intervalos de la forma $(-\infty, \alpha(w)]$ y $(-\infty, \beta(w)]$, además de que las imágenes inversas de $(-\infty, z]$ bajo $\alpha(X)$ y $\beta(Y)$ son las mismas que bajo X e Y) con funciones de densidad continuas, por lo que la cópula $C_{\alpha(X)\beta(Y)}$ es única (une a $H(\alpha(X), \beta(Y))$ con $F_{\alpha(X)}$ y $G_{\beta(Y)}$).

Sean F_1, G_1, F_2 y G_2 las funciones de distribución (acumulada) de las variables aleatorias $X, Y, \alpha(X)$ y $\beta(Y)$ respectivamente, entonces

$$F_2(x) = P(\alpha(X) \leq x) = P(X \leq \alpha^{-1}(x)) = F_1(\alpha^{-1}(x)) \quad (2.9)$$

$$G_2(y) = P(\beta(Y) \leq y) = P(Y \leq \beta^{-1}(y)) = G_1(\beta^{-1}(y)) \quad (2.10)$$

pues α y β son estrictamente crecientes, luego de (1,9) y (1,10) se sigue que

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= P[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] \\ &= P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\ &= C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\ &= C_{XY}(F_2(x), G_2(y)) \end{aligned}$$

Como X e Y son continuas, entonces $\text{Ran}(F_2) = \text{Ran}(G_2) = I$, de donde se sigue que $C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$ en I^2 . ■

Para finalizar la sección, el siguiente teorema nos indica la relación de la cópula con las funciones cópula de supervivencia. La demostración es muy técnica y no aporta mucho al entendimiento de la teoría, por lo que la omitimos.

Teorema 2.4.8 Sean X, Y variables aleatorias continuas con cópula C_{XY} . Si α y β son estrictamente monótonas sobre $\text{Ran}X$ y $\text{Ran}Y$ respectivamente

1. Si α es estrictamente creciente y β estrictamente decreciente, entonces

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v)$$

2. Si α es estrictamente decreciente y β estrictamente creciente, entonces

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v)$$

3. Si α y β son estrictamente decrecientes, entonces

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v)$$

2.5. Cópulas de Supervivencia

Las medidas de supervivencia se ocupan para hacer cálculos a cerca del tiempo de vida de algún evento en particular, como el tiempo de vida media de una partícula radioactiva o el tiempo que transcurre antes de ser atendidos en un banco, ahí tiene el origen su nombre. De esta manera, la probabilidad de que el fenómeno de estudio ocurra o sobreviva más allá del tiempo x la podemos conocer de la función de supervivencia, es decir, si F es la función de distribución de la variable aleatoria X , entonces su **función de supervivencia** está dada por $\bar{F}(x) = \mathbb{P}[X > x] = 1 - F(x)$.

Viendolo ahora desde el punto de vista de la teoría de cópulas, dado un par de variables aleatorias (X, Y) con función de distribución conjunta H , la **función conjunta de supervivencia** está dada por

$$\bar{H}(x, y) = \mathbb{P}[X > x, Y > y]$$

en donde las marginales de \bar{H} son las funciones $\bar{F}(x) = \bar{H}(x, -\infty)$ y $\bar{G}(y) = \bar{H}(-\infty, y)$. Vemos que, retomando el teorema de Sklar, si la cópula para X y Y es C , entonces

$$\begin{aligned} \bar{H}(x, y) &= 1 - F(x) - G(y) + H(x, y) \\ &= 1 - 1 + 1 - F(x) - G(y) + H(x, y) \\ &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + H(x, y) \\ &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(F(x), G(y)) \\ &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y)). \end{aligned}$$

Así, llamando a $u = \bar{F}(x)$ y $v = \bar{G}(y)$, tiene sentido definir lo siguiente:

Definición 2.5.1 Definimos la cópula de supervivencia \hat{C} de la cópula C como:

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v). \quad (2.11)$$

Entonces tenemos que

$$\bar{H}(x, y) = \hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y)).$$

Ejemplo 4: La distribución acumulada bivariada de **Pareto** está dada por:

$$\bar{H}_\theta(x, y) = \begin{cases} (1 + x + y)^{-\theta} & x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ (1 + x)^{-\theta} & x \geq 0, \quad y < 0, \\ (1 + y)^{-\theta} & x < 0, \quad y \geq 0, \\ 1 & x < 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

Por el Teorema de Sklar \bar{H}_θ tiene como cópula de supervivencia \hat{C} ,

$$\bar{H}_\theta(x, y) = \hat{C}_\theta(\bar{F}_\theta(x), \bar{G}_\theta(y))$$

entonces

$$\hat{C}_\theta = \bar{H}_\theta(\bar{F}_\theta^{(-1)}(u), \bar{G}_\theta^{(-1)}(v))$$

donde las marginales de \bar{H} están dadas por

$$\bar{F}_\theta(x) = \bar{H}_\theta(x, \infty) = \begin{cases} (1 + x)^{-\theta} & x \geq 0 \\ 1 & x < 0. \end{cases}$$

$$\bar{G}_\theta(y) = \bar{H}_\theta(\infty, y) = \begin{cases} (1 + y)^{-\theta} & y \geq 0 \\ 1 & y < 0. \end{cases}$$

y sus inversas son

$$\bar{F}_\theta^{(-1)}(u) = -1 + u^{-1/\theta} \quad \text{y} \quad \bar{G}_\theta^{(-1)}(v) = -1 + v^{-1/\theta}.$$

Entonces por el Teorema de Sklar, la cópula de supervivencia

$$\begin{aligned} \hat{C}_\theta(u, v) &= \bar{H}_\theta(\bar{F}_\theta^{(-1)}(u), \bar{G}_\theta^{(-1)}(v)) \\ &= \bar{H}_\theta(-1 + u^{-1/\theta}, -1 + v^{-1/\theta}) \\ &= (1 - 1 + u^{-1/\theta} - 1 + v^{-1/\theta})^{-\theta} \\ &= (u^{-1/\theta} + v^{-1/\theta} - 1)^{-\theta}. \end{aligned}$$

Aunque ninguna de las dos es una cópula, éstas relaciones expresan la probabilidad de un evento que relaciona a las variables aleatorias X y Y con probabilidades específicas, es decir

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = C(F(x), G(y)) \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(X > x, Y > y) = \hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y))$$

2.6. Simetría

En esta sección desarrollaremos algunos conceptos de simetría de las variables aleatorias dada a través de la cópula que las relaciona, los cuales nos ayudarán a definir diferentes medidas e índices para esta característica de las variables aleatorias que actúan de manera conjunta. Las pruebas de los resultados que exponemos fueron tomados de Jurado (2011) [8].

Si X es una variable aleatoria y $a \in \mathbb{R}$, diremos que X es **simétrica alrededor de a** , si la función de distribución de las variables aleatorias $X - a$ y $a - X$ es la misma, es decir, si para cualquier x en \mathbb{R} se tiene que:

$$\mathbb{P}[X - a \leq x] = \mathbb{P}[a - X \leq x]$$

Note que si la función de distribución F de la variable aleatoria X es continua, la igualdad anterior es equivalente a

$$\begin{aligned} F(a+x) &= \mathbb{P}[X - a \leq x] = \mathbb{P}[a - X \leq x] = \mathbb{P}[a - x \leq X] \\ &= 1 - \mathbb{P}[a - x \geq X] = 1 - F(a - x) \\ &= \bar{F}(a - x). \end{aligned}$$

En la siguiente definición, especificaremos tres de las formas más usadas de simetría bivariada.

Definición 2.6.1 Sean X, Y variables aleatorias y $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

1. (X, Y) son **marginalmente simétricas con respecto al par (a, b)** si X e Y son simétricas alrededor de a y b respectivamente.
2. (X, Y) son **radialmente simétricas con respecto al par (a, b)** si la función de distribución conjunta de $X - a$ y $Y - b$ es la misma que la función de distribución conjunta de $a - X$ y $b - Y$.
3. (X, Y) son **simétricas de manera conjunta en (a, b)** si los pares $(X - a, Y - b)$, $(X - a, b - Y)$, $(a - X, Y - b)$ y $(a - X, b - Y)$ tienen una función de distribución conjunta común.

Teorema 2.6.2 Sean X e Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H y marginales F y G respectivamente, sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, entonces (X, Y) es radialmente simétrica en (a, b) si y sólo si

$$H(a+x, b+y) = \bar{H}(a-x, b-y)$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Demostración: La demostración es sencilla y sigue los pasos de la nota anterior, así supongamos que (X, Y) son radialmente simétricas con respecto al punto (a, b) entonces se cumple que:

$$H(x+a, y+b) = H(a-x, b-y),$$

por lo que entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} H(x+a, y+b) &= \mathbb{P}[X \leq x+a, Y \leq y+b] \\ &= \mathbb{P}[X - a \leq x, Y - b \leq y] \\ &= \mathbb{P}[a - X \leq x, b - Y \leq y] \\ &= 1 - \mathbb{P}[X \leq a-x, Y \leq b-y] \\ &= 1 - H(a-x, b-y) \\ &= \bar{H}(a-x, b-y). \end{aligned}$$

Note que, aplicando la definición, la simetría conjunta implica simetría radial, y también simetría radial implica simetría marginal. Enunciaremos el siguiente teorema:

Teorema 2.6.3 Sean X, Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H y marginales F y G , respectivamente, y con cópula C . Suponga además que F y G son simétricas alrededor de a y b respectivamente; entonces el par (X, Y) es radialmente simétrico en (a, b) , es decir, H satisface

$$H(a + x, b + y) = \bar{H}(a - x, b - y)$$

si y sólo si $C = \hat{C}$, es decir, si y sólo si C satisface la ecuación

$$C(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v) \quad (2.12)$$

para todo (u, v) en I^2 .

Otra forma interesante de simetría es la **intercambiabilidad**, lo cual se caracteriza, dadas dos variables aleatorias X e Y , se dice que son intercambiables si los vectores (X, Y) y (Y, X) , son idénticamente distribuidos, entonces la función de distribución conjunta H de X y Y satisface

$$H(x, y) = H(y, x)$$

para todo x, y en $\bar{\mathbb{R}}^2$. El siguiente teorema caracteriza a las funciones intercambiables a través de sus características vistos como entes estadísticos y de su cópula.

Teorema 2.6.4 Sean X, Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H , marginales F y G respectivamente, y cópula C , entonces X y Y son intercambiables si y sólo si $F = G$ y $C(v, u) = C(u, v)$ para todo $(u, v) \in I^2$.

Cuando ocurra que $C(v, u) = C(u, v)$ para todo u, v en I^2 , diremos simplemente que C es **simétrica**.

2.7. Cópulas Multivariadas

En esta sección analizaremos la extensión de los conceptos y resultados anteriores al caso multivariado pues es nuestro objetivo aplicar este análisis al caso general multivariado cuando lo relacionemos con la teoría de la estadística y la econometría. Es de destacarse que no todas las definiciones y teoremas tienen algún resultado análogo para este caso, por lo que enunciaremos los resultados más importantes y sus diferencias, estos son resultados estandar de la teoría de cópulas y muchas de estas son tomados de Jurado (2011)[8] y de Nelsen (2007)[6].

Dado un entero positivo n , definimos $\bar{\mathbb{R}}^n$ como el espacio real extendido de n dimensiones, $\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \times \cdots \times \bar{\mathbb{R}}$, denotaremos a los puntos en $\bar{\mathbb{R}}^n$ como $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$; escribiremos $\vec{a} \leq \vec{b}$ cuando $a_k \leq b_k, \forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Así, dados dos vectores tales que $\vec{a} \leq \vec{b}$, denotaremos al producto cartesiano de n intervalos $B = [\vec{a}, \vec{b}]$ como la n -caja $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Los vértices de la n -caja son los puntos de la forma $\vec{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ con c_k igual a a_k ó b_k . La n -caja unitaria I^n es el producto cartesiano de $I \times \cdots \times I$.

Una **función real de n -valores** H , es una función cuyo dominio ($DomH$) es un subconjunto de $\bar{\mathbb{R}}^n$ y cuyo rango ($RanH$) es un subconjunto de $\bar{\mathbb{R}}$. El **cuadrado unitario** es la caja I^2 y una “2-caja” es un rectángulo $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ en $\bar{\mathbb{R}}^2$. Así, estamos listos para hacer la siguiente:

Definición 2.7.1 Sean S_1, S_2, \dots, S_n subconjuntos no vacíos de $\bar{\mathbb{R}}$ y sea H una función real de n -valores con dominio $DomH = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$, sea $B = [\vec{a}, \vec{b}]$ una n -caja cuyos vértices están en $DomH$. Se define el **H-volúmen de B** como:

$$V_H(B) = \sum sgn(\vec{c})H(\vec{c}),$$

donde la suma se toma sobre todos los vértices \vec{c} de B y la función signo (sgn) se define como:

$$sgn(\vec{c}) = \begin{cases} 1, & \text{Si } c_k = a_k \quad \text{para un número par de } k\text{'s} \\ -1, & \text{Si } c_k = a_k \quad \text{para un número impar de } k\text{'s.} \end{cases}$$

Equivalentemente el volúmen H de una n -caja $B = [a, b]$ es la diferencia de orden n de H sobre B dada por:

$$V_H(B) = \Delta_{\vec{a}}^{\vec{b}}H(\vec{t}) = \Delta_{a_n}^{b_n} \Delta_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} H(\vec{t}).$$

Donde la diferencia de orden 1 de la función de n -valores H se expresa como:

$$\Delta_{a_k}^{b_k} H(\vec{t}) = H(t_1, \dots, t_{k-1}, b_k, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(t_1, \dots, t_{k-1}, a_k, t_{k+1}, \dots, t_n)$$

Definición 2.7.2 Análogamente al caso univariado, una función real valuada de n -valores H es **n -creciente** si el volúmen $V_H(B) \geq 0$, para todas las n -cajas B cuyos vértices estén en el conjunto $DomH$.

Suponga que el dominio de la función H está dado por $DomH = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$, donde cada S_k tiene un elemento minimal a_k . Diremos que H esta **fija**, si $H(\vec{t}) = 0$ para toda \vec{t} en el $DomH$ tal que $t_k = a_k$ para al menos una k .

Si cada S_k es no vacío y tiene un elemento máximo o mayor, digamos b_k , para k en $\{1, 2, \dots, n\}$, entonces diremos que H tiene **marginales unidimensionales** H_k con $DomH_k = S_k$ y cumpliendo

$$H_k(x) = H(b_1, \dots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \dots, b_n) \text{ para toda } x \text{ en } S_k.$$

Las marginales de dimensiones mayores se obtienen fijando una menor cantidad de elementos máximos b_k en H , por ejemplo las marginales bidimensionales

$$H_{k,k+1}((x, y)) = H(b_1, \dots, b_{k-1}, x, y, b_{k+2}, \dots, b_n) \text{ para toda } x, y \text{ en } S_k.$$

Los siguientes resultados son muy importantes pues nos ayudan a definir las condiciones y características de las cópulas multivariadas.

Lema 2.7.3 Sean S_1, \dots, S_n subconjuntos no vacíos de $\bar{\mathbb{R}}$ y sea H una función fija n -creciente con dominio $\text{Dom}H = S_1 \times \dots \times S_n$, entonces H es creciente en cada argumento, es decir, sean $(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n)$ y $(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n)$ tales que $x < y$, entonces

$$H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) \leq H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n).$$

Lema 2.7.4 Sean S_1, \dots, S_n subconjuntos no vacíos de $\bar{\mathbb{R}}$ y sea H una función fija n -creciente con dominio $\text{Dom}H = S_1 \times \dots \times S_n$, tal que tiene marginales. Sean $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ puntos en el $\text{Dom}H$, entonces

$$H(\vec{x}) - H(\vec{y}) \leq \sum_{k=1}^n |H_k(x_k) - H_k(y_k)|.$$

Definición 2.7.5 Una **subcópula n -dimensional** o **n -subcópula** es una función C' con las siguientes propiedades.

1. $\text{Dom}C' = S_1 \times \dots \times S_n$, donde cada conjunto S_k está contenido en I , para cada k en el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.
2. C' está fija y es n -creciente.
3. C' tiene marginales uno-dimensionales C_k , para k en el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, que satisfacen

$$C_k(u) = u \quad \text{para todo } u \text{ en } S_k.$$

Notemos que para cada $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\vec{a} = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n)$, $\vec{b} = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, 1, u_{i+1}, \dots, u_n)$ en el $\text{Dom}C'$, tenemos que

$$0 = C'(\vec{a}) \leq C'(\vec{u}) \leq C'(\vec{b}) \leq 1.$$

Por lo tanto $\text{Ran}C'$, al igual que el $\text{Dom}C'$, son subconjuntos de I^n e I respectivamente.

Definición 2.7.6 Una **cópula n -dimensional** o **n -cópula** es una n -subcópula C cuyo dominio es I^n , es decir, es una función $C : I^n \rightarrow I$ con las siguientes propiedades:

1. Para cada $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ en I^n , con $u_k = 0$ para al menos un k en $\{1, 2, \dots, n\}$, $C(\vec{u}) = 0$. Si $\vec{u} = (1, \dots, 1, u_k, 1, \dots, 1)$, entonces $C(\vec{u}) = u_k$.
2. Para cada \vec{a} y \vec{b} en I^n tal que $\vec{a} \leq \vec{b}$, entonces $V_C([\vec{a}, \vec{b}]) \geq 0$.

Se puede verificar que cada marginal bidimensional es por sí misma una cópula.

Teorema 2.7.7 Sea C' una n -subcópula, entonces para cada \vec{u} y \vec{v} en $\text{Dom}C'$

$$|C'(\vec{v}) - C'(\vec{u})| = \sum_{k=1}^n (v_k - u_k)$$

entonces C' es uniformemente continua sobre este dominio.

Las siguientes definiciones y resultados son cuestiones estandar de la teoría de la probabilidad y los enlazamos con la teoría de cópulas para analizarlos en este contexto.

Definición 2.7.8 Una función de distribución n -dimensional H es una función con dominio $\bar{\mathbb{R}}^n$ tal que

1. H es n -creciente.
2. Para todo \vec{t} en $\bar{\mathbb{R}}^n$, el cual cumpla que para al menos un k , $t_k = -\infty$, entonces $H(\vec{t}) = 0$,
3. y $H(\infty, \infty, \dots, \infty) = 1$.

Note que, en este caso podemos concluir que H está fija, además dado que $DomH = \bar{\mathbb{R}}^n$, entonces por el teorema 2.7.3 se sigue que las marginales unidimensionales de H son a su vez funciones de distribución, las cuales denotaremos por F_1, F_2, \dots, F_n , para $n \geq 3$.

El siguiente resultado y sus corolarios son las versiones del teorema de Sklar y sus corolarios para varias dimensiones y generaliza de manera natural estos resultados.

Teorema 2.7.9 Teorema de Sklar en n -dimensiones. Sea H una función de distribución n -dimensional con marginales F_1, F_2, \dots, F_n , entonces existe una n -cópula C tal que para todo $\vec{x} \in DomH = \bar{\mathbb{R}}^n$ se cumple que:

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)).$$

Si F_1, F_2, \dots, F_n son todas continuas, entonces C es única, en caso contrario, C esta determinada de manera única sobre $RanF_1 \times RanF_2 \times \dots \times RanF_n$.

Inversamente, si C es una n -cópula y F_1, F_2, \dots, F_n son funciones de distribución, entonces la función H definida por

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)),$$

es una función de distribución n -dimensional con marginales F_1, F_2, \dots, F_n .

Corolario 2.7.10 Sea H, C y F_1, F_2, \dots, F_n , como en el teorema anterior, y sean $F_1^{(-1)}, F_2^{(-1)}, \dots, F_n^{(-1)}$ las cuasi inversas de F_1, F_2, \dots, F_n , entonces para cualquier \vec{u} en I^n

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1), F_2^{(-1)}(u_2), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)).$$

Teorema 2.7.11 Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias con funciones de distribución F_1, F_2, \dots, F_n respectivamente y función de distribución conjunta H , entonces existe una única n -cópula C , tal que

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)).$$

Si F_1, F_2, \dots, F_n son todas continuas, C es única, de otra forma, C esta determinada de manera única sobre $RanF_1 \times RanF_2 \times \dots \times RanF_n$.

Las extensiones de las cópulas M , Π , W a sus semejantes n -dimensionales se denotarán por M^n , Π^n , W^n y se definen como sigue:

$$\begin{aligned} M^n(\vec{u}) &= \text{mín}(u_1, \dots, u_n), \\ \Pi^n(\vec{u}) &= u_1 \cdot u_2 \cdots u_n, \\ W^n(\vec{u}) &= \text{máx}(u_1 + u_2 + \dots + u_n - n + 1, 0). \end{aligned}$$

Jurado (2011) prueba que las funciones M^n y Π^n son n -cópulas para todo $n \geq 2$, pero que sin embargo la función W^n no es cópula para $n \geq 2$ pues esta función no es n -creciente.

Supongamos que lo es, es decir que para cada \vec{a}, \vec{b} en I^n , se define el intervalo $B = [\vec{a}, \vec{b}]$,

$$V_{W^n}(B) = \Delta_{\vec{a}}^{\vec{b}} W^n(\vec{u}) = \Delta_{a_n}^{b_n} \Delta_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \Delta_{a_1}^{b_1} W^n(\vec{u}) \geq 0.$$

Sean, $\vec{1}/2 = (1/2, \dots, 1/2)$ y $\vec{1} = (1, \dots, 1)$, entonces la desigualdad se cumple para cualquier intervalo B , en especial para la n -caja $B = [\vec{1}/2, \vec{1}]$, observamos que todos los vértices c de la caja se caracterizan por tener entradas 1 ó $1/2$, además que si en un vértice existen k entradas con valor 1, entonces las otras $n - k$ entradas tienen el valor $1/2$, entonces para cada vértice \vec{c}

$$\begin{aligned} W^n(\vec{c}) &= \text{máx}\{k + (n - k)/2 - n + 1, 0\} = \text{máx}\{1 - (n - k)/2, 0\} \\ &= \begin{cases} 1 + \frac{(n-k)}{2} & \text{si } k > n - 2 \\ 0 & \text{si } k \leq n - 2, \end{cases} \end{aligned}$$

si $k > n - 2$, entonces para $k = n - 1$ o n , $W^n(C)$ es positiva. Entonces, aquellos vértices que tengan una sóla entrada con valor $1/2$ y $n - 1$ entradas con valor 1, o bien, el vértice $\vec{1} = (1, \dots, 1)$, son los vértices que cuentan. Entonces

$$\begin{aligned} V_{W^n}(B) &= \sum \text{sgn}(\vec{c}) W^n(\vec{c}) \\ &= W^n(\vec{1}) - n \text{máx}\{n - 1 + 1/2 - n + 1, 0\} = 1 - n(1/2). \end{aligned}$$

Así, una condición para que el volumen $V_{W^n}(B)$ sea mayor que cero es que $n \leq 2$. Por lo tanto W^n no es cópula para $n > 2$.

Teorema 2.7.12 *Si C' es cualquier n -subcópula, entonces para cada \vec{u} en $\text{Dom}C'$*

$$W^n(\vec{u}) \leq C'(\vec{u}) \leq M^n(\vec{u}).$$

Teorema 2.7.13 *Para cualquier $n \geq 3$ y cualquier \vec{u} en I^n , existe una n -cópula C tal que*

$$C(\vec{u}) = W^n(\vec{u}).$$

Esto es una especie de teorema de la envolvente para cópulas para el caso de la cópula menor que acota a las demás, ya que aunque W^n no es cópula, si acota a las copulas n -dimensionales por abajo y se compone de los puntos mínimos de estas cópulas.

Capítulo 3

Regresión con Copulas y Correlación

Uno de los objetivos de esta tesis es el poder construir los puentes entre la teoría de cópulas y la estadística para poder construir mecanismos y medidas de dependencia entre las variables aleatorias y de causalidad entre fenómenos estocásticos, por lo que en este capítulo se intentará hacer esto utilizando algunos indicadores como la tau de Kendall y la rho de Spearman.

Una de las principales características de este tipo de medidas, la cual nos ayuda únicamente a calificar la dependencia, es que estas medidas son independientes de la escala. Así, podremos estudiar la dependencia entre variables aleatorias para poder relacionarlas de manera dependiente con alguna otra variable aleatoria a través de un modelo de regresión (calculando el valor esperado condicional); veremos que las medidas de dependencia y las medidas de asociación están relacionadas.

Comenzaremos analizando dos de las medidas de correlación entre las variables, las cuales tienen la ventaja de ser invariantes bajo escala: la tau de Kendall y la rho de Spearman. Posteriormente haremos un análisis de la función de regresión y de su aplicación en la econometría.

3.1. Concordancia y la Tau de Kendall

Sean (x_i, y_i) y (x_j, y_j) dos observaciones de un vector aleatorio (X, Y) continuo. Diremos que (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son **concordantes** si y sólo si $x_i < x_j$ y $y_i < y_j$ ó $x_i > x_j$ y $y_i > y_j$. Análogamente diremos que son **discordantes** si y sólo si $x_i < x_j$ y $y_i > y_j$ ó $x_i > x_j$ y $y_i < y_j$.

Estas condiciones se traducen en las expresiones, $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ cuando son concordantes, y $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$ cuando son discordantes. Esta propiedad de dependencia en variables aleatorias es muy importante pues nos ayuda a entender las interacciones entre las ellas.

Sean $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ una muestra aleatoria de n observaciones del vector (X, Y) de variables aleatorias continuas; existen $\binom{n}{2}$ pares distintos (x_i, y_j) con i, j en el conjunto de subíndices $\{1, \dots, n\}$ e $i \neq j$. Cada par es concordante o discordante, por lo que c

denotará al número de pares concordantes y d el de pares discordantes. Así se define la **Tau de Kendall muestral** como:

$$t = \frac{c - d}{c + d} = \frac{c - d}{\binom{n}{2}}$$

Por otro lado, la versión poblacional de la **Tau de Kendall** (también conocida como la **función de Concordancia Q**) esta definida como la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia entre dos vectores (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) con funciones de distribución H_1 y H_2 , las cuales pueden ser diferentes, pero con marginales comunes F para X_1 y X_2 , y G para Y_1 y Y_2 , es decir:

$$Q = \tau = \tau_{X,Y} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (3.1)$$

Teorema 3.1.1 Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) vectores aleatorios independientes con funciones de distribución conjunta H_1 y H_2 respectivamente, con marginales comunes F , para X_1 y X_2 , y G , para Y_1 y Y_2 . Si C_1 y C_2 denotan las cópulas de (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) respectivamente, es decir, $H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y))$ y $H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$. Sea Q , la función de Concordancia de (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) definida arriba. Entonces

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1. \quad (3.2)$$

Demostración (tomada de Jurado (2011) [8]): Dado que todas las variables X_1, X_2, Y_1 y Y_2 son variables aleatorias continuas, entonces

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] = 1 - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0],$$

entonces,

$$Q = 2P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1, \quad (3.3)$$

calculamos la probabilidad,

$$\begin{aligned} P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] &= P[\{X_1 > X_2, Y_1 > Y_2\} \cup \{X_1 < X_2, Y_1 < Y_2\}] \\ &= P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] + P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2], \end{aligned}$$

las cuales se pueden calcular integrando insdistintamente sobre la distribución de alguno de los vectores (X_1, Y_1) o (X_2, Y_2) , en este case usamos (X_1, Y_1) ,

$$\begin{aligned} P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] &= P[X_2 < X_1, Y_2 < Y_1] \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} P[X_2 < x, Y_2 < y] dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} H_2(x, y) dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} C_2(F(x), G(y)) dC_1(F(x), G(y)), \end{aligned}$$

tomando $u = F(x)$ y $v = G(y)$,

$$P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] = \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v). \quad (3.4)$$

De la misma manera se comprueba

$$\begin{aligned} P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] &= \int \int_{\mathbb{R}^2} P[X_2 > x, Y_2 > y] dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} 1 - F(x) - G(y) + C_2(F(x), G(y)) dC_1(F(x), G(y)), \end{aligned}$$

de nuevo, tomando $u = F(x)$ y $v = G(y)$,

$$P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] = \int \int_{I^2} [1 - u - v + C_2(u, v)] dC_1(u, v),$$

dado que la cópula C_1 es la función de distribución del par de variables aleatorias (U, V) , las cuales tienen distribución uniforme $(0, 1)$, por lo que, $E(U) = E(V) = 1/2$, entonces

$$P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] = 1 - 1/2 - 1/2 + \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v)$$

entonces la expresión anterior se reduce

$$P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] = \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v). \quad (3.5)$$

Así pues, sustituyendo y sumando las expresiones encontradas (3.5) y (3.6) para Q en la ecuación (3.3), se obtiene

$$\begin{aligned} Q &= 2 \left\{ \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) + \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) \right\} - 1 \\ &= 4 \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1. \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 3.1.2 Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) , dos pares de vectores independientes de variables aleatorias con funciones de distribución conjunta H_1 y H_2 respectivamente, con marginales comunes F , para X_1 y X_2 , y G , para Y_1 y Y_2 . Si C_1 y C_2 denotan las cópulas de (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) respectivamente. Entonces

1. Q es **simétrica**, es decir, $Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1)$.
2. Q es **creciente en cada argumento**, si $C_1 \prec C'_1$ y $C_2 \prec C'_2$, entonces $Q(C_1, C_2) \leq Q(C'_1, C'_2)$.
3. Las cópulas C_1 y C_2 pueden ser reemplazadas por sus cópulas de supervivencia en Q , es decir, $Q(C_1, C_2) = Q(\hat{C}_1, \hat{C}_2)$.

Demostración (tomada de Jurado (2011) [8]): Para el inciso I, recuerde que en la demostración del Teorema 3.1.1, la probabilidad $P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0]$ puede ser calculada usando el vector (X_2, Y_2) , entonces

$$\begin{aligned} P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] &= P[X_2 < X_1, Y_2 < Y_1] \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} P[x < X_2, y < Y_2] dC_2(F(x), G(y)) \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} 1 - F(x) - G(y) + H_1(x, y) dC_2(F(x), G(y)) \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} C_1(F(x), G(y)) dC_2(F(x), G(y)), \end{aligned}$$

tomando $u = F(x)$ y $v = G(y)$,

$$P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] = \int \int_{I^2} C_1(u, v) dC_2(u, v). \quad (3.6)$$

De la misma manera se comprueba

$$\begin{aligned} P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] &= \int \int_{\mathbb{R}^2} P[X_1 < x, Y_1 < y] dC_2(F(x), G(y)) \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} C_1(F(x), G(y)) dC_2(F(x), G(y)), \end{aligned}$$

de nuevo, tomando $u = F(x)$ y $v = G(y)$,

$$P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] = \int \int_{I^2} C_1(u, v) dC_2(u, v),$$

entonces

$$Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1).$$

Demostramos que II se cumple, en efecto, dado que $C_1 \prec C'_1$ y $C_2 \prec C'_2$, entonces $C_1(u, v) \leq C'_1(u, v)$ y $C_2(u, v) \leq C'_2(u, v)$, si y solo si

$$\int \int_{I^2} C_1(u, v) dC_2(u, v) \leq \int \int_{I^2} C'_1(u, v) dC_2(u, v) \leq \int \int_{I^2} C'_1(u, v) dC'_2(u, v),$$

si y sólo si

$$4 \int \int_{I^2} C_1(u, v) dC_2(u, v) - 1 \leq 4 \int \int_{I^2} C'_1(u, v) dC'_2(u, v) - 1,$$

por lo tanto

$$Q(C_1, C_2) \leq Q(C'_1, C'_2).$$

Por último, demostramos el inciso III, partimos del hecho $\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$, evaluamos $\hat{C}(u, v)$ en el punto $(1 - u, 1 - v)$ y obtenemos

$$\hat{C}(1 - u, 1 - v) = (1 - u) + (1 - v) - 1 + C(u, v) = 1 - u - v + C(u, v),$$

entonces

$$C(u, v) = u + v - 1 + \hat{C}(1 - u, 1 - v),$$

observamos que las diferenciales cumplen $dC(u, v) = d\hat{C}(1 - u, 1 - v)$, entonces

$$\begin{aligned} \int \int_{I^2} C_1(u, v) dC_2(u, v) &= \int \int_{I^2} [u + v - 1 + \hat{C}(1 - u, 1 - v)] d\hat{C}(1 - u, 1 - v) \\ &= \int \int_{I^2} \hat{C}(1 - u, 1 - v) d\hat{C}(1 - u, 1 - v), \end{aligned}$$

la última igualdad se cumple del hecho $\int \int_{I^2} [u + v - 1] dudv = 0$; entonces definimos $\hat{u} = 1 - u$ y $\hat{v} = 1 - v$, por lo tanto se obtiene

$$\begin{aligned} Q(C_1, C_2) &= 4 \int \int_{I^2} C_1(u, v) dC_2(u, v) - 1 \\ &= 4 \int \int_{I^2} \hat{C}_1(1 - u, 1 - v) d\hat{C}_2(1 - u, 1 - v) - 1 \\ &= 4 \int \int_{I^2} \hat{C}_1(\hat{u}, \hat{v}) d\hat{C}_2(\hat{u}, \hat{v}) - 1 \\ &= Q(\hat{C}_1, \hat{C}_2). \end{aligned}$$

■

Note que, dado que Q está definida como una diferencia de probabilidades, los valores de Q caen en el intervalo $[-1, 1]$. Sea C una cópula arbitraria, comprobamos que $Q(C, W)$, se prueba usando el Corolario 3.1.2 que esta cae en un intervalo bien definido. Así, se tiene que como $W \prec W$ y $W \prec C$, entonces $Q(C, W) \geq Q(W, W) = -1$, también como $C \prec W$ y $W \prec M$, entonces $Q(C, W) \leq Q(M, W) = 0$, luego entonces

$$-1 \leq Q(C, W) \leq 0.$$

Por otro lado, usando el mismo argumento $Q(C, M)$ cae en un intervalo bien definido, y como $C \prec M$ y $M \prec M$, entonces $Q(C, M) \leq Q(M, M) = 1$, así como también $W \prec C$ y $M \prec M$, entonces $0 = Q(W, M) \leq Q(C, M)$, por lo que

$$0 \leq Q(C, M) \leq 1.$$

De igual manera se comprueba que para toda cópula C se tiene que:

$$-1/3 \leq Q(C, \Pi) \leq 1/3.$$

Así, se puede probar el siguiente resultado.

Teorema 3.1.3 Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C , entonces la versión poblacional de la tau de Kendall está dada por

$$\tau_{X,Y} = \tau_C = Q(C, C) = 4 \int \int_{I^2} C(u, v) dC(u, v) - 1$$

Ejemplo 1: Sea C_Θ (con $\Theta \in [-1, 1]$) una cópula de la familia Farlie-Gumbel-Morgenstern, es decir,

$$C_\Theta(u, v) = uv + \Theta uv(1 - u)(1 - v),$$

y su diferencial está dada por

$$\begin{aligned} dC_\Theta(u, v) &= \frac{\partial^2 C_\Theta(u, v)}{\partial v \partial u} dudv \\ &= 1 + \Theta(1 - 2u)(1 - 2v) dudv. \end{aligned}$$

Así, calculando la integral tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int \int_{I^2} C_{\Theta}(u, v) dC_{\Theta}(u, v) &= \int \int_{I^2} [uv + \Theta uv(1-u)(1-v)] \cdot [1 + \Theta(1-2u)(1-2v)] dudv \\
&= \int \int_{I^2} uv dudv + \int \int_{I^2} \Theta uv(1-u)(1-v) dudv \\
&\quad + \int \int_{I^2} \Theta uv(1-2u)(1-2v) dudv \\
&\quad + \int \int_{I^2} [\Theta^2 uv(1-u)(1-v)] [(1-2u)(1-2v)] dudv \\
&= \left[\int_0^1 u du \right]^2 + \Theta \left[\int_0^1 u(1-u) \right]^2 + \Theta \left[\int_0^1 u(1-2u) du \right]^2 \\
&\quad + \Theta^2 \left[\int_0^1 u(1-u)(1-2u) du \right]^2,
\end{aligned}$$

por último, evaluando la integral tenemos

$$\begin{aligned}
\int \int_{I^2} C_{\Theta}(u, v) dC_{\Theta}(u, v) &= \left[\frac{1}{2} \right]^2 + \Theta \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right]^2 + \Theta \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right]^2 + \Theta^2 \left[\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \right]^2 \\
&= \left[\frac{1}{2} \right]^2 + \Theta \left[\frac{1}{6} \right]^2 + \Theta \left[-\frac{1}{6} \right]^2 \\
&= \frac{1}{4} + \Theta \frac{2}{36} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{\Theta}{18}.
\end{aligned}$$

Entonces, la tau de Kendall está dada por:

$$\begin{aligned}
\tau_{\Theta} &= 4 \left[\frac{1}{4} + \frac{\Theta}{18} \right] - 1 \\
&= \frac{2\Theta}{9}.
\end{aligned}$$

Corolario 3.1.4 Sean X y Y variables aleatorias con cópula Arquimediana C , generada por φ , la versión poblacional de la tau de Kendall τ_C para X y Y , esta dada por

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.$$

Ejemplo 2: Dada la cópula de Pareto

$$C(Y, a_i, b_i) = \max\{[Y_i^{-\alpha} + X_i^{-\alpha} - 1]^{1/\alpha}, 0\}$$

esta cópula es de la familia arquimediana con generador

$$\varphi(t) = \frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1)$$

entonces, la τ_C de Kendall en este caso está dada por

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1)}{-t^{-\alpha-1}} dt = 1 - \frac{2}{\alpha + 2}$$

3.2. La Rho de Spearman

Otra medida importante de dependencia (clásicamente utilizada en la estadística) es la rho de Spearman, la cual está basada en la concordancia y discordancia de pares de variables aleatorias.

Sean (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) y (X_3, Y_3) tres vectores aleatorios independientes con función de distribución común H , marginales F y G para X_i, Y_i para $i = \{1, 2, 3\}$ respectivamente, y cópula C . La versión poblacional de la rho de Spearman es proporcional a la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia de los vectores (X_1, Y_1) y (X_2, Y_3) , es decir:

$$\rho = 3(P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]). \quad (3.7)$$

Notese que (X_1, Y_1) y (X_2, Y_3) tienen las mismas marginales $F(X)$, $G(Y)$, sin embargo, el vector (X_1, Y_1) , tiene función de distribución conjunta $H(x, y)$, mientras que el vector (X_2, Y_3) tiene función de distribución conjunta $F(x)G(y)$. El siguiente resultado nos ayuda a calcular este indicador.

Teorema 3.2.1 Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C , entonces la versión poblacional de la rho de Spearman para X y Y está dada por

$$\rho = \rho_{X,Y} = 3Q(C, \Pi) = 12 \int \int_{I^2} uv dC(u, v) - 3 \quad (3.8)$$

$$= 12 \int \int_{I^2} C(u, v) dudv - 3 \quad (3.9)$$

Ejemplo 3: Sea C_Θ la cópula de la familia Farlie-Gumbel-Morgenstern

$$C_\Theta(u, v) = uv + \Theta uv(1 - u)(1 - v).$$

Calculamos primero:

$$\begin{aligned} \int \int_{I^2} C(u, v) dudv &= \int \int_{I^2} [uv + \Theta uv(1 - u)(1 - v)] dudv \\ &= \int \int_{I^2} uv dudv + \int \int_{I^2} \Theta uv(1 - u)(1 - v) dudv \\ &= \left[\int_0^1 u du \right]^2 + \Theta \left[\int_0^1 u(1 - u) \right]^2 \\ &= \frac{1}{4} + \Theta \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\Theta}{36}. \end{aligned}$$

Así entonces calculamos ρ_Θ de Spearman para este caso:

$$\begin{aligned} \rho_\Theta &= 12 \int \int_{I^2} C(u, v) dudv - 3 \\ &= 12 \left[\frac{1}{4} + \frac{\Theta}{36} \right] - 3 \\ &= \frac{\Theta}{3}. \end{aligned}$$

Ahora, definiremos que condiciones debe cumplir una *medida de concordancia*.

Definición 3.2.2 Una medida numérica de asociación entre dos variables aleatorias continuas X y Y , con cópula C , es una **medida de concordancia** $\kappa_{X,Y}$ o κ_C si satisface:

1. $\kappa_{X,Y}$ esta definida para cada par X, Y de variables aleatorias continuas.
2. $-1 \leq \kappa_{X,Y} \leq 1$, $\kappa_{X,X} = 1$ y $\kappa_{X,-X} = -1$.
3. $\kappa_{X,Y} = \kappa_{Y,X}$.
4. Si X y Y son independientes, entonces $\kappa_{X,Y} = \kappa_{\Pi} = 0$.
5. $\kappa_{-X,Y} = \kappa_{X,-Y} = -\kappa_{X,Y}$.
6. Si C_1 y C_2 son cópulas tales que $C_1 \prec C_2$, entonces $\kappa_{C_1} \leq \kappa_{C_2}$.
7. Si $\{(X_n, Y_n)\}$ es una sucesión de variables aleatorias continuas con cópulas C_n y si la sucesión $\{C_n\}$ converge puntualmente a C , entonces $\lim \kappa_{C_n} = \kappa_C$.

Note que, en el inciso (4), el caso recíproco no se cumple, es decir, si $\kappa_{X,Y} = 0$, no implica que X y Y son independientes. El siguiente resultado nos puntualiza algunas características de las medidas de concordancia. No incluimos la demostración pues es demasiado técnica y no se alinea a nuestros intereses en este trabajo.

Teorema 3.2.3 Sea K una medida de concordancia para X y Y variables aleatorias continuas.

1. Si Y es una función creciente de X , casi seguramente, entonces $\kappa_{X,Y} = \kappa_M = 1$.
2. Si Y es una función decreciente de X , casi seguramente, entonces $\kappa_{X,Y} = \kappa_W = -1$.
3. Si α y β son funciones estrictamente monótonas sobre $\text{Ran}X$ y $\text{Ran}Y$ casi seguramente, entonces $\kappa_{\alpha(X),\beta(Y)} = \kappa_{X,Y}$.
4. Si X y Y son variables aleatorias continuas con cópula C , entonces la versión poblacional de la τ de Kendall y la ρ de Spearman, satisfacen las condiciones de una medida de concordancia.

Note que la ecuación (3.8), es equivalente a la expresión

$$\begin{aligned} \rho = \rho_{X,Y} &= 3Q(C, \Pi) = 12 \int \int_{I^2} uv dC(u, v) - 3 = 12E(UV) - 3 \\ &= \frac{E(UV) - 1/4}{1/12} = \frac{E(UV) - E(U)E(V)}{\sqrt{\text{Var}(U)}\sqrt{\text{Var}(V)}} \\ &= \frac{\text{COV}(U, V)}{\sqrt{\text{Var}(U)}\sqrt{\text{Var}(V)}}. \end{aligned}$$

Esta expresión es el coeficiente de correlación de Pearson entre U y V .

3.3. Relación entre la Tau de Kendall y la Rho de Spearman

Las medidas que hemos desarrollado hasta ahorita son ambas medidas de concordancia, estas están relacionadas entre si. La relación entre τ y ρ varía de una familia de cópulas a otra. Puede encontrar ejemplos en el libro de Nelsen [4].

Teorema 3.3.1 Sean X y Y variables aleatorias continuas, τ y ρ denotan la tau de Kendall y la rho de Spearman en relación a estas variables, entonces se cumple las siguientes desigualdades:

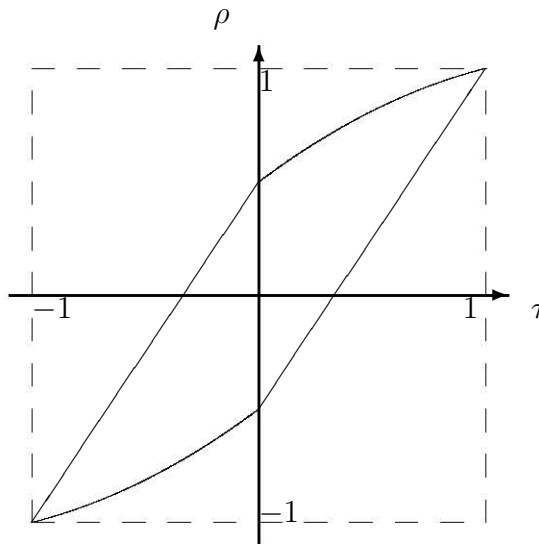
$$a) \quad -1 \leq 3\tau - 2\rho \leq 1$$

$$b) \quad \frac{1+\rho}{2} \geq \left(\frac{1+\tau}{2}\right)^2$$

$$c) \quad \frac{1-\rho}{2} \geq \left(\frac{1-\tau}{2}\right)^2$$

La siguiente figura muestra la relación gráficamente entre la τ y ρ , vemos que entre más grandes (en valor absoluto) son sus valores, más se parecen estas medidas, y entre más pequeñas más se distinguen entre si (tomamos el gráfico de Jurado (2011) [8]).

Figura 3.1: Cotas dadas en el Corolario 3.3.2 para ρ y τ de un par de variables aleatorias con cópula C .



Corolario 3.3.2 Sean X y Y variables aleatorias continuas, τ y ρ denotan la tau de Kendall y la rho de Spearman, entonces

$$\frac{3\tau - 1}{2} \leq \rho \leq \frac{1 + 2\tau - \tau^2}{2} \quad \tau \geq 0,$$

y

$$\frac{\tau^2 + 2\tau - 1}{2} \leq \rho \leq \frac{3\tau + 1}{2} \quad \tau \leq 0.$$

El siguiente ejemplo fue tomado de Jurado (2011) [8].

Ejemplo 4: Sean U, V variables aleatorias uniformes $(0,1)$, $V = U \oplus \Theta$, sea C_Θ la cópula

$$C_\Theta(u, v) = \begin{cases} \min(u, v - \Theta), & \text{para } (u, v) \in [0, 1 - \Theta] \times [\Theta, 1], \\ \min(u + \Theta - 1, v) & \text{para } (u, v) \in [1 - \Theta, 1] \times [0, \Theta], \\ W(u, v) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con Θ en el intervalo $[0, 1]$, por cálculos anteriores, sabemos que $\rho_\Theta = 1 - 6\Theta(1 - \Theta)$, falta calcular la τ_Θ de Kendall, necesitamos calcular la integral

$$\int \int_{I^2} C_\Theta(u, v) dC_\Theta(u, v),$$

para lo cual, usamos el soporte de la función que esta determinado por dos rectas, la recta $v = u + \Theta$ para el intervalo $[0, 1 - \Theta]$ y $v = u - 1 + \Theta$ para el intervalo $[1 - \Theta, 1]$.

$$\begin{aligned} &= \int_0^{1-\Theta} C_\Theta(u, u + \Theta) du + \int_{1-\Theta}^1 C_\Theta(u, u - 1 + \Theta) du \\ &= \int_0^{1-\Theta} \min(u, u) du + \int_{1-\Theta}^1 \min(u - 1 + \Theta, u - 1 + \Theta) du \\ &= \int_0^{1-\Theta} u du + \int_{1-\Theta}^1 u - 1 + \Theta du \\ &= \frac{(1 - \Theta)^2}{2} + \left[\frac{u^2}{2} - (1 - \Theta)u \right]_{1-\Theta}^1 \\ &= \frac{1}{2} + (\Theta - 1) + (1 - \Theta)^2. \end{aligned}$$

Entonces

$$\tau_\Theta = 4 \left[\frac{1}{2} + (\Theta - 1) + (1 - \Theta)^2 \right] - 1 = (1 - 2\Theta)^2.$$

Verificamos que para esta familia,

$$\begin{aligned} \frac{3\tau_\Theta - 1}{2} &= \frac{3[(1 - 2\Theta)^2] - 1}{2} \\ &= \frac{2 - 12\Theta + 12\Theta^2}{2} = 1 - 6\Theta + 6\Theta^2 \\ &= 1 - 6\Theta(1 - \Theta) = \rho_\Theta. \end{aligned}$$

Entonces cada punto de la cota $\frac{3\tau-1}{2}$ es alcanzado por un punto de ésta familia para $\tau \geq 0$. Sean U, V variables aleatorias uniformes $(0,1)$, $U \oplus V = \Theta$, sea C_Θ con Θ en el intervalo $[0, 1]$, la cópula

$$C_\Theta(u, v) = \begin{cases} \text{máx}(0, u + v - \Theta), & \text{para } (u, v) \in [0, \Theta]^2, \\ \text{máx}(\Theta, u + v - 1) & \text{para } (u, v) \in [\Theta, 1]^2, \\ M(u, v) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

Falta calcular la τ_Θ de Kendall y la rho de Spearman, necesitamos calcular la integral

$$\int \int_{I^2} C_\Theta(u, v) dC_\Theta(u, v)$$

para lo cual, usamos el soporte de la función que al igual que para la cópula anteriores está determinado por dos rectas, la recta $v = -u + \Theta$ para el intervalo $[0, \Theta]$ y $v = -u + 1 + \Theta$ para el intervalo $[\Theta, 1]$.

$$\begin{aligned} &= \int_0^\Theta C_\Theta(u, -u + \Theta) du + \int_\Theta^1 C_\Theta(u, -u + 1 + \Theta) du \\ &= \int_0^\Theta \text{máx}(0, u - u + \Theta - \Theta) du + \int_\Theta^1 \text{máx}(\Theta, \Theta) du \\ &= \int_0^\Theta 0 du + \int_\Theta^1 \Theta du = \Theta(1 - \Theta). \end{aligned}$$

Entonces

$$\tau_\Theta = 4[\Theta(1 - \Theta)] - 1 = -(1 - 2\theta)^2.$$

Ahora, calculamos la rho de Spearman

Calculamos la esperanza del producto UV

$$\begin{aligned} E(UV) &= \int_0^\Theta u(\Theta - u) du + \int_\Theta^1 u(1 + \Theta - 1) du \\ &= \left[\Theta \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right]_0^\Theta + \left[(1 + \Theta) \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right]_\Theta^1 \\ &= \left[\Theta \frac{\Theta^2}{2} - \frac{\Theta^3}{3} \right] + \left[\frac{(1 + \Theta)}{2} - \frac{1}{3} - \frac{(1 + \Theta)\Theta^2}{2} + \frac{\Theta^3}{3} \right] \\ &= \frac{\Theta^3}{3} + \frac{1}{2} + \frac{\Theta}{2} - \frac{1}{3} - \frac{\Theta^2}{2} - \frac{\Theta^3}{3} \\ &= \frac{1}{6} [1 + 3\Theta - 3\Theta^2]. \end{aligned}$$

Entonces

$$\rho_\Theta = \frac{1/6(1 + 3\Theta - 3\Theta^2) - 1/4}{1/12} = -1 + 6\Theta - 6\Theta^2 = -1 + 6\Theta(1 - \Theta)$$

Verificamos que para esta familia, cada punto de la cota $\frac{3\tau+1}{2}$ es alcanzado por un punto de ésta familia para $\tau \leq 0$, en efecto,

$$\begin{aligned} \frac{3\tau_{\Theta} + 1}{2} &= \frac{3[-(1-2\theta)^2] - 1}{2} \\ &= \frac{-2 + 12\theta - 12\theta^2}{2} = -1 + 6\theta - 6\theta^2 \\ &= -1 + 6\theta(1 - \theta) = \rho_{\Theta}. \end{aligned}$$

3.4. Dependencia

Uno de los conceptos clave de la estadística es la independencia, la cual se define, usando los conceptos que desarrollamos anteriormente, como la ausencia de dependencia y esta caracterizada a través de la cópula producto (X y Y son independientes si su función de distribución conjunta es igual al producto de sus marginales), es decir, están caracterizados por la cópula $\Pi = UV$.

En este capítulo desarrollaremos algunos conceptos nuevos de dependencia como la dependencia de cuadrante positivo y negativo, las cuales, como veremos más adelante, nos expresarán la idea de que los valores grandes (o pequeños) de las variables aleatorias tienden a ocurrir juntos (dependencia de cuadrante positivo) o que los valores grandes de una ocurren con los valores pequeños de la otra (dependencia de cuadrante negativo).

Definición 3.4.1 Sean X, Y variables aleatorias, estas variables tienen la propiedad de **dependencia de cuadrante positivo** (PQD), *Positive Quadrant Dependence* por sus siglas en inglés, si para todo (x, y) en \mathbb{R}^2

$$P[X \leq x, Y \leq y] \geq P[X \leq x] P[Y \leq y] \quad (3.10)$$

lo cual equivale a pedir que:

$$P[X > x, Y > y] \geq P[X > x] P[Y > y],$$

La propiedad de **dependencia de cuadrante negativo** (NQD) ocurre si para todo (x, y) en \mathbb{R}^2

$$P[X \leq x, Y \leq y] \leq P[X \leq x] P[Y \leq y].$$

Sean X e Y son variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H , marginales F y G , respectivamente y cópula C . Si X, Y son dependientes de cuadrante positivo, entonces la ecuación (3.10) es equivalente a

$$H(x, y) \geq F(x)G(y),$$

y por lo tanto

$$C(u, v) \geq uv = \Pi(u, v).$$

Así, si X e Y son dependientes de cuadrante positivo, diremos que su cópula C es dependiente de cuadrante positivo (PQD), observamos que la gráfica de C siempre se encuentra por arriba de la gráfica de Π , el orden $C \succ \Pi$ es llamado el **orden de cuadrante positivo**.

Una condición más fuerte en este caso sería, por ejemplo, que $P[Y \leq y|X \leq x]$ sea una función decreciente de X . Si X, Y representan el tiempo de vida, entonces en este caso se dice que la probabilidad del tiempo de vida de Y decrece cuando el tiempo de vida X aumenta. En este sentido se tienen las siguientes definiciones:

Definición 3.4.2 Sean X, Y variables aleatorias continuas, entonces

1. Y es decreciente de cola izquierda en X ($LTD(Y|X)$, por sus siglas en inglés *Left Tail Decreasing*), si $P[Y \leq y|X \leq x] = \frac{H(x,y)}{F(x)}$ es una función decreciente de x para cada y .
2. X es decreciente de cola izquierda en Y ($LTD(X|Y)$, por sus siglas en inglés *Left Tail Decreasing*), si $P[X \leq x|Y \leq y] = \frac{H(x,y)}{G(y)}$ es una función decreciente de y para cada x .
3. Y es creciente de cola derecha en X ($RTI(Y|X)$, por sus siglas en inglés *Right Tail Increasing*), si $P[Y > y|X > x] = \frac{\bar{H}(x,y)}{F(x)}$ es una función creciente de x para cada y .
4. X es creciente de cola derecha en Y ($RTI(X|Y)$, por sus siglas en inglés *Right Tail Increasing*), si $P[X > x|Y > y] = \frac{\bar{H}(x,y)}{G(y)}$ es una función creciente de y para cada x .

De igual manera hay 4 propiedades adicionales de dependencia negativa, creciente de cola izquierda LTI (*left tail increasing*) y decreciente de cola derecha RTD (*right tail decreasing*) que se definen de manera análoga intercambiando las palabras decreciente y creciente en la definición anterior.

Note que de la definición se tiene que la monotonia de colas para X e Y implican dependencia de cuadrante positiva. Por ejemplo, si $LTD(Y|X)$, entonces para $x < \infty$

$$P[Y \leq y|X \leq x] \geq P[Y \leq y|X \leq \infty] = P[Y \leq y],$$

entonces, la expresión anterior queda como

$$\frac{P[Y \leq y, X \leq x]}{P[X \leq x]} \geq P[Y \leq y],$$

por lo tanto

$$P[Y \leq y, X \leq x] \geq P[X \leq x] P[Y \leq y],$$

es decir, $PQD(Y|X)$.

Teorema 3.4.3 Sean X e Y variables aleatorias tales que satisfacen cualquiera de las condiciones de la definición 3.4.2 entonces X y Y son dependientes de cuadrante positivo PQD.

Sin embargo, la dependencia de cuadrante positivo no implica ninguna de las cuatro propiedades de monotonía de colas. El siguiente teorema es consecuencia directa de la definición 3.4.2.

Teorema 3.4.4 Sean X e Y variables aleatorias continuas con cópula C , entonces

1. $LTD(Y|X)$ si y sólo si para cualquier v en I , $C(u, v)/u$ es decreciente en u .
2. $LTD(X|Y)$ si y sólo si para cualquier u en I , $C(u, v)/v$ es decreciente en v .
3. $RTI(Y|X)$ si y sólo si para cualquier v en I , $[1 - u - v + C(u, v)]/(1 - u)$ es creciente en u , es equivalente, si $[v - C(u, v)]/(1 - u)$ es decreciente en u .
4. $RTI(X|Y)$ si y sólo si para cualquier u en I , $[1 - u - v + C(u, v)]/(1 - v)$ es creciente en v , es equivalente, si $[u - C(u, v)]/(1 - v)$ es decreciente en v .

Corolario 3.4.5 Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C , entonces

1. $LTD(Y|X)$ si y sólo si para cualquier $v \in I$, $\partial C(u, v)/\partial u \leq C(u, v)/u$ para casi toda u .
2. $LTD(X|Y)$ si y sólo si para cualquier $u \in I$, $\partial C(u, v)/\partial v \leq C(u, v)/v$ para casi toda v .
3. $RTI(Y|X)$ si y sólo si para cualquier $v \in I$,

$$\partial C(u, v)/\partial u \geq [v - C(u, v)]/(1 - u)$$

para casi toda u .

4. $RTI(X|Y)$ si y sólo si para cualquier $u \in I$,

$$\partial C(u, v)/\partial v \geq [u - C(u, v)]/(1 - v)$$

para casi toda v .

Definición 3.4.6 Sean X e Y variables aleatorias:

1. X e Y son **crecientes de conjunto de esquina izquierda** (lo cual denotaremos por $LCS D(X, Y)$ de sus siglas en inglés de *left corner set decreasing*), si

$$P[X \leq x, Y \leq y | X \leq x', Y \leq y']$$

es decreciente en x' e y' para toda x, y .

2. X e Y son **crecientes de conjunto de esquina derecha** (denotado por $RCSI(X, Y)$ de las siglas en inglés *right corner set increasing*), si

$$P[X > x, Y > y | X > x', Y > y']$$

es creciente en x' e y' para toda x, y .

Tenemos que las propiedades de dependencia negativa $LCSI(X, Y)$ (*left corner set increasig*) y $RCSD(X, Y)$ (*right corner set decreasing*) se definen de manera análoga.

Teorema 3.4.7 Sean X e Y variables aleatorias continuas

1. Si $LCSD(X, Y)$, entonces $LTD(Y|X)$ y $LTD(X|Y)$.
2. Si $RCSI(X, Y)$, entonces $RTI(Y|X)$ y $RTI(X|Y)$.

Demostración: Partimos de que se cumple que las variables X y Y son $LCSD(X, Y)$, entonces la probabilidad

$$P[X \leq x, Y \leq y | X \leq x', Y \leq y']$$

es una función decreciente en x' y y' para toda x y y ; en particular para $x = \infty$ y $y' = \infty$, entonces

$$P[X \leq \infty, Y \leq y | X \leq x', Y \leq \infty] = P[Y \leq y | X \leq x']$$

es una función decreciente de x' para toda y , así Y es decreciente de cola izquierda con respecto a X , $LTD(Y|X)$. Para comprobar la otra parte del inciso I, se usa $y = \infty$ y $x' = \infty$, entonces

$$P[X \leq x, Y \leq \infty | X \leq \infty, Y \leq y] = P[X \leq x | Y \leq y']$$

es una función decreciente de y' para toda x , así X es decreciente de cola izquierda con respecto a Y $LTD(Y|X)$. La segunda parte se demuestra de manera similar. ■

Ahora enunciaremos un resultado que permite construir un criterio para determinar las propiedades $LCSD(X, Y)$ y $RCSI(X, Y)$ en términos de desigualdades donde están involucradas las funciones de distribución conjunta y de supervivencia.

Teorema 3.4.8 Sean X e Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H

1. $LCSD(X, Y)$, si y sólo si

$$H(x, y)H(x', y') \geq H(x, y')H(x', y)$$

para toda $x, y, x', y' \in \bar{\mathbb{R}}$ tales que $x < x'$ e $y < y'$

2. $RCSI(X, Y)$, si y sólo si

$$\bar{H}(x, y)\bar{H}(x', y') \geq \bar{H}(x, y')\bar{H}(x', y)$$

para toda $x, y, x', y' \in \bar{\mathbb{R}}$ tales que $x < x'$ e $y < y'$

El criterio del teorema anterior 3.4.8 puede ser expresado usando el concepto de las funciones **totalmente positivas de orden dos** denotado por TP_2 , las cuales se definen de la siguiente forma. Sea $f : \bar{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ entonces f es totalmente positiva de orden dos si $f(x, y) \geq 0$ en $\bar{\mathbb{R}}$ y para $x \leq x'$ e $y \leq y'$

$$\begin{vmatrix} f(x, y) & f(x, y') \\ f(x', y) & f(x', y') \end{vmatrix} \geq 0.$$

Si la desigualdad se invierte, entonces diremos que f es **reversamente regular de orden dos** (abreviada de su expresión en inglés reverse regular of order two RR_2).

Corolario 3.4.9 Sean X e Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H ; entonces $LCSD(X, Y)$ si y sólo si H es TP_2 , y $RCSI(X, Y)$ si y sólo si \bar{H} es TP_2 .

Corolario 3.4.10 Sean X e Y variables aleatorias continuas con cópula C , entonces $LCSD(X, Y)$ si y sólo si C es TP_2 y $RCSI(X, Y)$ si y sólo si \hat{C} es TP_2 .

Definición 3.4.11 Una medida $\delta_{X,Y}$ de asociación entre dos variables aleatorias continuas X e Y con cópula C es una **medida de dependencia**, si satisface las siguientes propiedades:

1. $\delta_{X,Y}$ esta definida para cada par de variables continuas X y Y .
2. $\delta_{X,Y} = \delta_{Y,X}$.
3. $0 \leq \delta_{X,Y} \leq 1$.
4. $\delta_{X,Y} = 0$ si y sólo si X y Y son independientes.
5. $\delta_{X,Y} = 1$ si y sólo si para cada X y Y , alguna de las variables es una función estrictamente monótona casi seguramente de la otra.
6. si α y β son funciones estrictamente monótonas sobre $RanX$ y $RanY$ respectivamente, entonces $\delta_{\alpha(X),\beta(Y)} = \delta_{X,Y}$.
7. Si $\{(X_n, Y_n)\}$ es una sucesión de variables aleatorias con cópulas C_n y si la sucesión $\{C_n\}$ converge puntualmente a C , entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{C_n} = \delta_C$.

Podemos construir un ejemplo de medida de dependencia a través de la rho de Spearman. Recuerde que esta está definida como:

$$\rho_{X,Y} = \rho_C = 12 \int \int_{I^2} [C(u, v) - uv] dudv.$$

Así, ρ_C es proporcional al volumen contenido entre la gráfica de la cópula y la cópula Π . Si sustituimos a la expresión $[C(u, v) - uv]$ por $|C(u, v) - uv|$, entonces obtenemos una medida basada en la distancia L_1 entre las gráficas de las cópulas C y Π , la cual es conocida como σ de Schweizer y Wolff, así tenemos que:

$$\sigma_{X,Y} = 12 \int \int_{I^2} |C(u, v) - uv| dudv.$$

Teorema 3.4.12 Sean X, Y variables aleatorias continuas con cópula C , entonces la cantidad σ_C es una medida de dependencia.

Demostración: Verifiquemos que la métrica

$$\sigma_{X,Y} = 12 \int \int_{I^2} |C(u, v) - uv| dudv,$$

cumple con las propiedades de I a IV de la definición de medida de dependencia. Primero tenemos que:

1. De manera natural vemos que $\sigma_{X,Y}$ esta definida para cualesquiera X, Y variables aleatorias.
2. Por otro lado, dadas X, Y variables aleatorias cualesquiera, se cumple que:

$$\begin{aligned}\sigma_{X,Y} &= 12 \int \int_{I^2} |C(u,v) - uv| dudv \\ &= 12 \int \int_{I^2} |C(v,u) - vu| dvdu = \sigma_{Y,X}.\end{aligned}$$

3. Sabemos que la rho de spearman cumple $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$ y que además $|C(v,u) - vu| \geq 0$ entonces, $0 \leq \sigma_{X,Y} \leq 1$.
4. Tenemos que $\sigma_{X,Y} = 0$ si y sólo si $12 \int \int_{I^2} |C(u,v) - uv| dudv = 0$, pero como $|C(v,u) - vu| \geq 0$ esto sólo puede ocurrir si $|C(u,v) - uv| = 0$, luego $C(u,v) = uv = \Pi(u,v)$ es decir, si X y Y son independientes.

La demostración de las propiedades restantes pueden ser consultadas en el libro de Nelsen (2006)[4]. ■

Note que si las variables aleatorias X, Y son PQD, entonces $C(u,v) \geq uv$ así, $0 \leq \rho_{X,Y} = \sigma_{X,Y}$. Si las variables aleatorias X, Y son NQD entonces $C(u,v) \leq uv$ por lo tanto $0 \leq uv - C(u,v) = -(C(u,v) - uv)$, entonces $\sigma_{X,Y} = -\rho_{X,Y}$.

Vemos que para muchas familias como la Plackett, la Farlie-Gumbel-Morgenstern y varias familias de cópulas Arquimedianas se tiene que $\sigma_{X,Y} = |\rho_{X,Y}|$; sin embargo, para aquellas variables aleatorias X, Y que no son NQD ni PQD (es decir, para aquellas cópulas que no pueden ser comparables con Π), σ frecuentemente es una mejor medida que ρ .

3.4.1. Dependencia direccional y cópulas

En este apartado vamos a relacionar las cuestiones nuevas que hemos incorporado sobre la regresión con cópula con la correlación de las variables aleatorias de un modelo. Comenzaremos distinguiendo dos tipos de dependencia direccional entre dos variables.

Definición 3.4.13 *Considere las variables aleatorias U y V . Diremos que estas son **dependientes direccionalmente en su comportamiento conjunto** si la forma de las funciones de regresión para $U|V = w$ y $V|U = w$ son diferentes, es decir,*

$$E[V|U = w] \neq E[U|V = w]$$

Esta forma de dependencia es estructural, no marginal.

*Otra forma de dependencia direccional se ve a través de las cópulas condicionales. Las variables aleatorias U y V son **direccionalmente independientes** si la forma funcional de las cópulas condicionales para $U|V = w$ y $V|U = w$ son diferentes, es decir*

$$C_{U|V}(s, w) \neq C_{V|U}(s, w)$$

en donde las funciones están dadas (como veremos más adelante) por $C_{U|V} = \frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ y $C_{V|U} = \frac{\partial C(u,v)}{\partial v}$. Este último tipo de dependencia está dado por el comportamiento marginal de las variables aleatorias en cuestión.

Para el caso de las clases de cópulas simétricas [$C(u, v) = C(v, u)$] no es posible hablar sobre dependencia direccional en el comportamiento conjunto de las variables (estas no reconocen a las variables aleatorias para componer su estructura) pero si en el comportamiento marginal.

3.5. Regresión con Cópula

En esta sección definiremos la función de regresión de un modelo estadístico de dependencia funcional entre variables aleatorias. Haremos esto bajo la visión de Spanos, encontrando el valor esperado condicionado de la variable dependiente. Comenzaremos definiendo la función de regresión de un modelo estadístico de dependencia funcional entre variables aleatorias.

3.5.1. La Función de Regresión

Sabemos que, con la notación anterior, $U = F_1(x)$ y $V = F_2(y)$ son variables aleatorias con función de densidad de probabilidad uniforme en $[0, 1]$, entonces por un lado tenemos que la función de densidad de probabilidad conjunta está dada por:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Por otro lado, la densidad de una cópula está dada por

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$$

Combinando estas dos cosas, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial x \partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \right) \left(\frac{du}{dx} \right) \\ &= \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \frac{dv}{dy} \frac{dF_1(x)}{dx} = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \frac{dF_2(y)}{dy} f_1(x) \end{aligned}$$

Por lo que tenemos que $f(x, y) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} f_2(y) f_1(x) = c(u, v) f_1(x) f_2(y)$.

Esta expresión deja de manifiesto como las cópulas descomponen en dos el efecto de la función de densidad, por un lado están los efectos marginales (dados por las funciones de

densidad marginales de las variables aleatorias) y por otro la expresión $\frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} = c(u, v)$ (a la cual se le conoce como la **función de distribución cópula**) que nos da el efecto conjunto no marginal de las variables X y Y .

En el siguiente lema veremos como se relaciona una cópula con las probabilidades condicionadas de las variables aleatorias, lo cual es fundamental para después poder definir nuestra ecuación de regresión cópula.

Lema 3.5.1 Sea $F(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función de densidad acumulada conjunta de las variables aleatorias X y Y , entonces se cumple que:

$$F_{Y|x}(y|x) = P(Y \leq y|X = x) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$$

y también

$$F_{X|y}(x|y) = P(X \leq x|Y = y) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial v}$$

Demostración: Haremos esta demostración para la función condicionada $F_{Y|x}(y|x)$ (la demostración para $F_{X|y}(x|y)$ es de forma similar).

Tenemos que:

$$\frac{\partial C(u, v)}{\partial x} = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} f_1(x)$$

por lo que

$$\frac{\partial C(u, v)}{\partial u} = \frac{1}{f_1(x)} \left[\frac{\partial}{\partial x} C(u, v) \right]$$

Pero también se tiene que

$$\begin{aligned} F_{Y|x}(y|x) &= \int_{-\infty}^y f_{Y|x}(w|x) dw = \int_{-\infty}^y \frac{f(x, w)}{f_1(x)} dw \\ &= \frac{1}{f_1(x)} \int_{-\infty}^y \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^x f(s, w) ds \right) dw \\ &= \frac{1}{f_1(x)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(s, w) ds dw \right) \right] \\ &= \frac{1}{f_1(x)} \left[\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) \right] = \frac{1}{f_1(x)} \left[\frac{\partial}{\partial x} C(u, v) \right] \end{aligned}$$

igualando las dos expresiones anteriores tenemos que:

$$F_{X|y}(x|y) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial v}. \blacksquare$$

Definición 3.5.2 La **función de regresión cópula** (denotada por $r_C(v)$) es el valor esperado de la variable aleatoria de la variable de respuesta u dado el valor de la variable v que la influye, es decir:

$$r_C(v) = E[u|V = v]$$

El siguiente teorema es uno de los más importantes en nuestro trabajo ya que vincula nuestras definiciones y resultados encontrados hasta el momento con la parte econométrica del trabajo, ya que nos permite ajustar los modelos probabilísticos por medio de la función de regresión cópula, el cual es uno de nuestros objetivos en este trabajo.

Teorema 3.5.3 *Con la notación anterior, tenemos que la función de regresión cópula para el caso bivariado está dada por:*

$$r_C(v) = E[u|V = v] = 1 - \int_0^1 \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} du$$

y también

$$r_C(u) = E[v|U = u] = 1 - \int_0^1 \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} dv$$

Demostración: Por un lado tenemos que

$$F_{X|y}(x|y) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \quad \text{y también} \quad F_{Y|x}(y|x) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$$

Además, la función de densidad cópula está dada por $c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$ para $0 \leq u \leq 1$ y $0 \leq v \leq 1$. Como también U y V se distribuyen uniformemente en $[0, 1]$, entonces, para estos valores de u y v se tiene que

$$c(u|v) = \frac{c(u, v)}{f_2(v)} = c(u, u)$$

Luego entonces

$$E[u|V = v] = \int_0^1 uc(u|v)du = \int_0^1 uc(u, v)du$$

Integrando por partes tenemos que

$$\begin{aligned} E[u|V = v] &= [u \int_0^u c(s, v) ds]_{u=0}^1 - \int_0^1 [\int_0^u c(s, v) ds] du \\ &= [u \int_0^u \frac{\partial^2 C(s, v)}{\partial u \partial v} ds]_{u=0}^1 - \int_0^1 [\int_0^u \frac{\partial^2 C(s, v)}{\partial u \partial v} ds] du \\ &= [u \frac{\partial C(u, v)}{\partial v}]_{u=0}^1 - \int_0^1 \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} du \\ &= [F_1(x) F_{X|y}(x|y)]_{x=-\infty}^{\infty} - \int_0^1 \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} du \end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$E[u|V = v] = 1 - \int_0^1 \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} du$$

La demostración de que $E[v|U = u] = 1 - \int_0^1 \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} dv$ se hace de manera análoga. ■

A continuación veremos algunas propiedades de la función de regresión cópula. Nuestro fin último es ver cómo se comporta y de qué forma podemos hacer inferencia estadística con datos económicos, además de ver la forma de cómo nos da información para saber la correlación entre dos variables aleatorias. Comenzaremos describiendo las regresiones de algunos casos importantes, para pasar después al caso más general de la regresión.

Teorema 3.5.4 *Dadas las siguientes cópulas bivariadas, tenemos que:*

1. Si $C_0(u, v) = uv$, entonces $r_0(u) = \frac{1}{2}$
2. Si $C_+(u, v) = \min\{u, v\}$, entonces $r_+(u) = u$
3. Si $C_-(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}$, entonces $r_-(u) = 1 - u$

Demostración:

1. Tenemos que

$$r_0(u) = 1 - \int_0^1 \frac{\partial(uv)}{\partial u} dv = 1 - \int_0^1 v dv = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2. Ahora, como $\frac{\partial}{\partial u}[\min\{u, v\}] = \begin{cases} 1 & \text{si } u \leq v \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ entonces:

$$r_+(u) = 1 - \int_0^1 \frac{\partial(\min\{u, v\})}{\partial u} dv = 1 - \int_u^1 dv = 1 - (1 - u) = u$$

3. Por último tenemos que $\frac{\partial}{\partial u}[\max\{u + v - 1, 0\}] = \begin{cases} 1 & \text{si } u + v > 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ entonces:

$$r_-(u) = 1 - \int_0^1 \frac{\partial(\max\{u + v - 1, 0\})}{\partial u} dv = 1 - \int_{1-u}^1 dv = 1 - [1 - (1 - u)] = 1 - u. \quad \blacksquare$$

El siguiente resultado se puede deducir de fácilmente, dada las propiedades de las funciones involucradas, utilizando resultados estandar como el polinomio de Taylor, la desigualdad de Markov y la propia definición de cópula y función de densidad, por lo que se omite su demostración.

Teorema 3.5.5 *Con la notación del teorema anterior, llamemos $C_U(v) = \frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$, entonces tenemos que:*

1. Podemos reexpresar la función de regresión como:

$$r_C(u) = 1 - \int_0^1 [C_{U_0}(v) + \sum_{t=1}^{n-1} \frac{C_{U_0}^{(t)}(v)}{t!} (u - u_0)^t + \frac{C_{U_r}^{(n)}(v)}{n!} (u - u_r)^n] dv$$

en donde u_r es un punto interior del intervalo (u, u_0) .

2. $r_C(u) \geq r[1 - C_U(r)]$, para algún $r \in (0, 1)$

$$3. E[v] = \int_0^1 r_C(u) du = \frac{1}{2}$$

$$4. \rho_C = 3[1 - 4 \int_0^1 (\int_0^u r_C(w) dw)] du$$

Teorema 3.5.6 Una cópula bivariada, $C(u, v)$, tiene función de regresión lineal, es decir:

$$C(u, v) \in \zeta_L = \{C \mid 1 - \int_0^1 \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} dv = \alpha + \beta u\}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si y sólo si

$$r_C(u) = \alpha + (1 - 2\alpha)u \quad \text{o} \quad r_C(u) = \frac{1 - \beta}{2} + \beta u$$

Demostración: Tenemos que

$$1 - \int_0^1 \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} dv = 1 - \frac{\partial}{\partial u} \int_0^1 C(u, v) dv = \alpha + \beta u$$

despejando la derivada y usando el teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$\int_0^1 C(u, v) dv = (1 - \alpha)u - \beta \frac{u^2}{2} + k$$

para encontrar el valor de k tomamos $u = 1$ y recordando que $C(1, v) = v$, entonces

$$\int_0^1 C(1, v) dv = \int_0^1 v dv = \frac{1}{2} = (1 - \alpha) - \frac{\beta}{2} + k$$

así entonces tenemos que $k = \frac{1}{2} - (1 - \alpha) + \frac{1}{2}\beta$.

Por otro lado, como $E[v] = \int_0^1 r_C(u) du = \frac{1}{2}$ entonces

$$\int_0^1 [1 - \int_0^1 C_U(v) dv] du = \int_0^1 \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 \int_0^1 C_U(v) dv du = \frac{1}{2}$$

Combinando esto con los resultados anteriores, tenemos que

$$\int_0^1 \int_0^1 C_U(v) dv du = \int_0^1 [1 - \alpha - \beta u] du = (1 - \alpha) - \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}$$

De donde se tiene que $\beta = 1 - 2\alpha$ o también $\alpha = \frac{1}{2}(1 - \beta)$. El resultado se sigue sustituyendo este resultado en la expresión lineal de la regresión. ■

3.5.2. Regresión Multivariada

Hasta aquí hemos analizado el caso de la regresión de una variable condicionada respecto a otra, la extensión a varias variables no es tan inmediata pero se puede hacer de manera natural. En esta sección haremos la extensión del resultado de la regresión cópula a varias variables.

Note que, dada una cópula multivariada, como cada una de las variables u_i son distribuidas uniformemente en el intervalo $[0, 1]$, entonces se tiene que:

$$f(u_i|u_j) = \frac{f(u_i, u_j)}{f(u_j)} = \frac{f(u_i, u_j)}{1} = f(u_i, u_j)$$

por lo que tenemos que $c_{i|j} = c_{i,j} = c_{j|i}$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ (la dependencia es intercambiable).

Por otro lado, tenemos que la función de regresión cópula para $n + 1$ variables la podemos plantear como

$$E[u|v_1, v_2, \dots, v_n] = \int_0^1 uc(u|v_1, v_2, \dots, v_n)du = \int_0^1 u \left[\frac{c(u, v_1, v_2, \dots, v_n)}{c_{1,2,\dots,n}(v_1, v_2, \dots, v_n)} \right] du$$

en donde $c_{1,2,\dots,n}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ es la función de densidad marginal cópula de las variables aleatorias v_1, v_2, \dots, v_n . Así, integrando por partes la expresión anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} E[u|v_1, v_2, \dots, v_n] &= \left[u \int_0^u \frac{c(w, v_1, v_2, \dots, v_n)}{c_{1,2,\dots,n}(v_1, v_2, \dots, v_n)} dw \right]_{u=0}^1 - \int_0^1 \left[\frac{\frac{\partial^n C(u, v_1, v_2, \dots, v_n)}{\partial v_1 \partial v_2 \dots \partial v_n}}{c_{1,2,\dots,n}(v_1, v_2, \dots, v_n)} \right] du \\ &= \left[u \int_0^u c_{u|v_1, v_2, \dots, v_n}(w|v_1, v_2, \dots, v_n) dw \right]_{u=0}^1 - \int_0^1 \left[\frac{\frac{\partial^n C(u, v_1, v_2, \dots, v_n)}{\partial v_1 \partial v_2 \dots \partial v_n}}{c_{1,2,\dots,n}(v_1, v_2, \dots, v_n)} \right] du \\ &= \left[u C_{u|v_1, v_2, \dots, v_n}(v|v_1, v_2, \dots, v_n) \right]_{u=0}^1 - \int_0^1 \left[\frac{\frac{\partial^n C(u, v_1, v_2, \dots, v_n)}{\partial v_1 \partial v_2 \dots \partial v_n}}{c_{1,2,\dots,n}(v_1, v_2, \dots, v_n)} \right] du \\ &= 1 - \frac{1}{c_{1,2,\dots,n}(v_1, v_2, \dots, v_n)} \int_0^1 \left[\frac{\partial^n c(u, v_1, v_2, \dots, v_n)}{\partial v_1 \partial v_2 \dots \partial v_n} \right] du \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$E[u|v_1, v_2, \dots, v_n] = 1 - \frac{1}{c_{1,2,\dots,n}(v_1, v_2, \dots, v_n)} \int_0^1 \left[\frac{\partial^n C(u, v_1, v_2, \dots, v_n)}{\partial v_1 \partial v_2 \dots \partial v_n} \right] du$$

la cual es la formula de regresión cópula para funciones multivariadas.

Note que en este caso, la variable $u = u(x)$ es tratada como la variable de respuesta y las variables $v_i = v_i(y_i)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) como las variables explicativas.

Capítulo 4

Tres ejemplos de regresión con cópula

En este apartado vamos a desarrollar la parte de regresión con cópula para tres tipos de estas que nos interesan por sus múltiples aplicaciones y la gran utilización que ellas tienen en econometría, las cuales son la cópula normal, la de Pareto y la de Gumbel.

Una característica importante de las familias de cópulas es que su forma funcional está totalmente caracterizadas por su **generador**, el cual es una función real valuada $\psi : [0,1] \rightarrow [0, \infty]$ continua y estrictamente decreciente en $[0, \psi(0)]$ con $\psi(1) = 0$, $\psi'(u) < 0$ y $\psi''(u) > 0, \forall u \in [0, 1]$. Esta función determina la forma funcional de la cópula y sus características analíticas, ya que es a través de ella que se puede obtener la función cópula a la cual se debe.

Comenzaremos con la regresión cópula de una de las funciones de densidad más usadas por su importancia teórica y por ser usada como parte de de los supuestos de la econometría clásica, la cópula de la función de densidad normal.

4.1. Cópula Normal

También llamada cópula Gaussiana, ésta cópula forma parte de la familia de las cópulas elípticas, las cuales conservan muchas de las propiedades de la distribución normal y son muy estudiadas por esta cuestión (tienen una forma funcional muy conocida y facilita la elaboración de modelos multivariantes) pero también heredan muchas de las restricciones de esta distribución para el análisis de datos.

La cópula normal bivariada está dada por

$$C_R(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \exp\left[-\frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{2(1-\rho^2)}\right] ds dt$$

en donde Φ^{-1} es la inversa de la función normal estandar univariada.¹

¹Esta función la podemos aproximar mediante la función de error gaussiana, la cual es un caso especial

Para el caso multivariado tenemos que, dada una matriz simétrica definida positiva R con $\text{diag}(R) = 1$ y Φ_R^n la función de distribución normal n-variante estandarizada, la cópula Gaussiana se define como:

$$C_R(u_1, u_2, \dots, u_n) = \Phi_R^n[\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n)]$$

cuya función de densidad correspondiente está dada por

$$C_R(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{1}{|R|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi'(R^{-1} - I)\xi\right)$$

en donde las columnas de la matriz ξ están dadas por $\xi_n = \Phi^{-1}(u_n)$.

De regreso al estudio del caso bivariado, tenemos que la función de regresión cópula está dada por:

$$\begin{aligned} r_C(v) &= E[U|V = v] = 1 - \int_0^1 \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} du \\ &= 1 - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial v} \left[\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \exp\left[-\frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{2(1-\rho^2)}\right] ds dt \right] du \\ &= 1 - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial v} \left[\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \left(\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \exp\left[-\frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{2(1-\rho^2)}\right] ds \right) dt \right] du \\ &= 1 - \int_0^1 \left(\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \exp\left[-\frac{s^2 - 2\rho s\Phi^{-1}(v) + [\Phi^{-1}(v)]^2}{2(1-\rho^2)}\right] ds \left[\frac{d\Phi^{-1}(v)}{dv} \right] \right) du \\ &= 1 - \frac{1}{\left[\frac{d\Phi(v)}{dv} \right]} \int_0^1 \left(\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \exp\left[-\frac{s^2 - 2\rho s\Phi^{-1}(v) + [\Phi^{-1}(v)]^2}{2(1-\rho^2)}\right] ds \right) du \end{aligned}$$

Así tenemos que la función regresión cópula bivariada normal está dada por

$$r_C(v) = 1 - \frac{1}{\left[\frac{d\Phi(v)}{dv} \right]} \int_0^1 \left(\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \exp\left[-\frac{s^2 - 2\rho s\Phi^{-1}(v) + [\Phi^{-1}(v)]^2}{2(1-\rho^2)}\right] ds \right) du$$

pero vemos que esta integral no tiene una forma funcional cerrada, por lo que sólo podemos calcular los valores aproximados de esta función usando métodos numéricos.

de la función logística y se define como $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, cuya función inversa puede aproximarse como:

$$\text{erf}^{-1}(x) = \frac{x}{|x|} \sqrt{\sqrt{\left[\frac{2}{\pi a} + \frac{\text{Ln}(1-x^2)}{2} \right]^2 - \frac{\text{Ln}(1-x^2)}{a}} - \left(\frac{2}{\pi a} + \frac{\text{Ln}(1-x^2)}{2} \right)}$$

así, la función de densidad acumulada normal estandar y la función probit se relacionan como

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} \left[1 - \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

4.2. Cópula Gumbel-Hougaard

Esta es una cópula de la familia de las arquimedianas, las cuales se caracterizan porque con ellas se puede reducir el estudio de una cópula multivariante al de una univariada por las características de la forma funcional de su generador, el cual está dado por

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \begin{cases} \psi^{-1}[\psi(u_1) + \psi(u_2), \dots, \psi(u_n)] & \text{si } \sum_{i=1}^n \psi(u_i) \leq \psi(0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La cópula Gumbel univariada está dada entonces por:

$$\psi(u) = (-\ln u)^\theta; \quad \theta \geq 1$$

Y el caso bivariada está dado por:

$$C(u, v) = \exp\{-[(-\ln u)^a + (-\ln v)^a]^{1/a}\} \quad \text{si } a \geq 1$$

Note que como la derivada parcial

$$\frac{\partial C(u, v)}{\partial u} = C(u, v)[(-\ln u)^a + (-\ln v)^a]^{\frac{1-a}{a}} \frac{(-\ln u)^{a-1}}{u}$$

Además, por simetría tenemos que

$$\frac{\partial C(u, v)}{\partial v} = C(u, v)[(-\ln u)^a + (-\ln v)^a]^{\frac{1-a}{a}} \frac{(-\ln v)^{a-1}}{v}$$

Pero estas formas funcionales son no invertibles, luego no se puede simular variables con éste método, por lo que para hacer simulaciones necesitamos un método diferente.

Por otro lado, la función de regresión cópula está dada por:

$$\begin{aligned} r_C(v) &= E[U|V = v] = 1 - \int_0^1 \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} du \\ &= 1 - \int_0^1 C(u, v)[(-\ln u)^a + (-\ln v)^a]^{\frac{1-a}{a}} \frac{(-\ln v)^{a-1}}{v} du \\ &= 1 - \frac{(-\ln v)^{a-1}}{v} \int_0^1 C(u, v)[(-\ln u)^a + (-\ln v)^a]^{\frac{1-a}{a}} du \end{aligned}$$

y por simetría, tenemos que:

$$r_C(u) = 1 - \frac{(-\ln u)^{a-1}}{u} \int_0^1 C(u, v)[(-\ln u)^a + (-\ln v)^a]^{\frac{1-a}{a}} dv$$

Pero estas integrales no se pueden realizar analíticamente pues no hay formas cerradas para su solución, por lo que sólo podríamos calcular soluciones numéricas aproximadas a través de algún método numérico.

Por último, observamos que la tau de Kendall está dada para este caso por la formula:

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\psi(u)}{\psi'(u)} du$$

4.3. Cópula Pareto

Esta también es una cópula de la familia arquimediana, se define como:

$$C(u, v) = \max\{[u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1]^{-\frac{1}{\alpha}}, 0\}; \quad \alpha \in [-1, \infty] \setminus \{0\}$$

su generador es

$$\Phi(t) = \frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1)$$

Luego, la función de regresión cópula para este caso está dada por

$$\begin{aligned} r_C(v) &= E[U|V = v] = 1 - \int_0^1 \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} du \\ &= 1 - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial v} \max\{[u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1]^{-\frac{1}{\alpha}}, 0\} du \\ &= 1 - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial v} [u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1]^{-\frac{1}{\alpha}} du \quad \text{si } u^{-\alpha} + v^{-\alpha} > 1 \\ &= 1 - \int_0^1 [u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1]^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}} v^{-\alpha-1} du \quad \text{si } u^{-\alpha} + v^{-\alpha} > 1 \\ &= 1 - v^{-\alpha-1} \int_0^1 [u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1]^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}} du \quad \text{si } u^{-\alpha} + v^{-\alpha} > 1 \\ &= 1 - \frac{uv^{-\alpha-1}}{v^{-\alpha} - 1} (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{u^{-\alpha}}{v^{-\alpha} - 1} + 1\right)^{\frac{1}{\alpha}} {}_2F_1\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}, 1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{u^{-\alpha}}{v^{-\alpha} - 1}\right) \\ &= 1 - \frac{uv^{-\alpha-1}}{v^{-\alpha} - 1} \frac{(u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{\frac{1}{\alpha}}}{(v^{-\alpha} - 1)^{\frac{1}{\alpha}}} (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-\frac{1}{\alpha}} {}_2F_1\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}, 1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{u^{-\alpha}}{v^{-\alpha} - 1}\right) \end{aligned}$$

en donde ${}_2F_1$ es la función hipergeométrica dada por

$${}_2F_1(a, b, c, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^k (a+i)(b+i)x^k}{\prod_{i=0}^k (c+i)k!}$$

la cual podemos aproximar (dependiendo de la magnitud de los parametros) cortando la suma en 3 o 4 términos. Así entonces, la función de regresión cópula pareto para el caso bivariado está dada por:

$$r_C(v) = \begin{cases} 1 - uv^{-(\alpha+1)}(v^{-\alpha} - 1)^{-\frac{\alpha+1}{\alpha}} {}_2F_1\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}, 1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{u^{-\alpha}}{v^{-\alpha}-1}\right) & \text{si } u^{-\alpha} + v^{-\alpha} > 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde el término ${}_2F_1$ está dado por

$${}_2F_1\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}, 1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{u^{-\alpha}}{v^{-\alpha}-1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^k (1 + \frac{1}{\alpha} + i)(\frac{1}{\alpha} + i)(\frac{u^{-\alpha}}{v^{-\alpha}-1})^k}{\prod_{i=0}^k ([1 - \frac{1}{\alpha}] + i)k!}$$

Una buena aproximación se podría tener tomando los primeros tres o cuatro términos, dado que estos decrecen exponencialmente.

4.3.1. Copula Pareto mutivariada

Los desarrollos anteriores se hicieron para cópulas bivariadas, las cuales son muy usadas para el análisis de riesgos y de correlación entre variables. El caso de más variables tiene varias formas de generalizarse, nosotros desarrollaremos el modelo Pareto tradicional y el anidado con 4 variables.

Recuerde que, para nuestro caso de 4 variables (una de respuesta y las otras explicativas), la formula general de la regresión cópula nos indica que:

$$E[U|v_1, v_2, v_3] = 1 - \frac{1}{c_{1,2,3}(v_1, v_2, v_3)} \int_0^1 \frac{\partial C(u, v_1, v_2, v_3)}{\partial v_1 \partial v_2 \partial v_3} du$$

El modelo de cópula de Pareto tiene como generador a la función

$$\Phi(t) = \frac{1}{t}(t^{-\alpha} - 1)$$

por lo que para nuestro modelo de 4 variables tenemos que:

$$C(u, v_1, v_2, v_3) = \max\{[u^{-\alpha} + v_1^{-\alpha} + v_2^{-\alpha} + v_3^{-\alpha} - 3]^{-\frac{1}{\alpha}}, 0\}$$

Para construir la función de regresión cópula calculamos primero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 C(u, v_1, v_2, v_3)}{\partial v_1 \partial v_2 \partial v_3} &= \frac{\partial^2}{\partial v_2 \partial v_3} [(v_1^{-\alpha-1}) [u^{-\alpha} + v_1^{-\alpha} + v_2^{-\alpha} + v_3^{-\alpha}]^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}] \\ &= \frac{\partial}{\partial v_3} [(1 + \alpha)(v_1 v_2)^{-\alpha-1} [u^{-\alpha} + v_1^{-\alpha} + v_2^{-\alpha} + v_3^{-\alpha}]^{-\frac{1+2\alpha}{\alpha}}] \\ &= (1 + \alpha)(1 + 2\alpha)(v_1 v_2 v_3)^{-\alpha-1} [u^{-\alpha} + v_1^{-\alpha} + v_2^{-\alpha} + v_3^{-\alpha}]^{-\frac{1+3\alpha}{\alpha}} \end{aligned}$$

Todo esto en el caso en que $u^{-\theta} + v_1^{-\theta} + v_2^{-\theta} + v_3^{-\theta} > 3$, en caso contrario la derivada se hace cero.

Por otro lado tenemos que $C(v_1, v_2, v_3) = \max\{[u^{-\alpha} + v_1^{-\alpha} + v_2^{-\alpha} + v_3^{-\alpha} - 2]^{-\frac{1}{\alpha}}, 0\}$, por lo que también calculamos:

$$\begin{aligned} c(v_1, v_2, v_3) &= \frac{\partial^3 C(v_1, v_2, v_3)}{\partial v_1 \partial v_2 \partial v_3} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial v_2 \partial v_3} [(v_1^{-\alpha-1}) [v_1^{-\alpha} + v_2^{-\alpha} + v_3^{-\alpha}]^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}] \\ &= \frac{\partial}{\partial v_3} [(1 + \alpha)(v_1 v_2)^{-\alpha-1} [v_1^{-\alpha} + v_2^{-\alpha} + v_3^{-\alpha}]^{-\frac{1+2\alpha}{\alpha}}] \\ &= (1 + \alpha)(1 + 2\alpha)(v_1 v_2 v_3)^{-\alpha-1} [v_1^{-\alpha} + v_2^{-\alpha} + v_3^{-\alpha}]^{-\frac{1+3\alpha}{\alpha}} \end{aligned}$$

Para el caso en que $v_1^{-\theta} + v_2^{-\theta} + v_3^{-\theta} > 2$, en caso contrario la derivada se hace cero.

Entonces la función de regresión cópula de u respecto a v_1, v_2, v_3 está dada por

$$\begin{aligned}
E[u|v_1, v_2, v_3] &= 1 - \frac{1}{c(v_1, v_2, v_3)} \int_0^1 \left[\frac{\partial^3 C(u, v_1, v_2, v_3)}{\partial v_1 \partial v_2 \partial v_3} \right] du \\
&= 1 - \frac{1}{[v_1^{-\alpha} + v_2^{-\alpha} + v_3^{-\alpha}]^{-\frac{1+3\alpha}{\alpha}}} \int_0^1 [u^{-\alpha} + v_1^{-\alpha} + v_2^{-\alpha} + v_3^{-\alpha}]^{-\frac{1+3\alpha}{\alpha}} du \\
&= 1 - \psi^{\frac{1+3\alpha}{\alpha}} \left[\frac{u}{\psi^3} (u^{-\alpha} + \psi)^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{u^{-\alpha}}{\psi} + 1 \right)^{\frac{1}{\alpha}} {}_2F_1\left(3 + \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}, 1 - \frac{1}{\alpha}, -\frac{u^{-\alpha}}{\psi}\right) \right] \\
&= 1 - u \left[{}_2F_1\left(3 + \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}, 1 - \frac{1}{\alpha}, -\frac{u^{-\alpha}}{\psi}\right) \right]
\end{aligned}$$

en donde $\psi = [v_1^{-\alpha} + v_2^{-\alpha} + v_3^{-\alpha}]$ y la expresión ${}_2F_1(a, b, c; x)$ es la función hipergeométrica dada por:

$${}_2F_1(a, b, c; x) = 1 + \frac{abx}{c} + \frac{a(1+a)b(1+b)}{2c(1+c)}x^2 + \frac{a(1+a)(2+a)b(1+b)(2+b)}{6c(1+c)(2+c)}x^3 + O[x]^4$$

Por lo que podemos aproximar adecuadamente la función con los tres primeros términos de la función hipergeométrica, así nuestra aproximación queda como:

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left(3 + \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}, 1 - \frac{1}{\alpha}, -\frac{u^{-\alpha}}{\psi}\right) &= 1 + \frac{\frac{1}{\alpha}(3 + \frac{1}{\alpha})}{1 - \frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{u^{-\alpha}}{\psi}\right) + \frac{\frac{1}{\alpha}(3 + \frac{1}{\alpha})(4 + \frac{1}{\alpha})(1 + \frac{1}{\alpha})}{2(1 - \frac{1}{\alpha})(2 - \frac{1}{\alpha})} \left(-\frac{u^{-\alpha}}{\psi}\right)^2 \\
&\quad + \frac{\frac{1}{\alpha}(3 + \frac{1}{\alpha})(4 + \frac{1}{\alpha})(5 + \frac{1}{\alpha})(1 + \frac{1}{\alpha})(2 + \frac{1}{\alpha})}{2(1 - \frac{1}{\alpha})(2 - \frac{1}{\alpha})(3 - \frac{1}{\alpha})} \left(-\frac{u^{-\alpha}}{\psi}\right)^3 \\
&= 1 - \frac{(3\alpha + 1)}{\alpha(\alpha - 1)} \left(\frac{u^{-\alpha}}{\psi}\right) + \frac{(\alpha + 1)(3\alpha + 1)(4\alpha + 1)}{2\alpha^2(\alpha - 1)(2\alpha - 1)} \left(\frac{u^{-2\alpha}}{\psi^2}\right) \\
&\quad - \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(3\alpha + 1)(4\alpha + 1)(5\alpha + 1)}{6\alpha^3(\alpha - 1)(2\alpha - 1)(3\alpha - 1)} \left(-\frac{u^{-3\alpha}}{\psi^3}\right)
\end{aligned}$$

Así, nuestra regresión cópula está determinada por

$$\begin{aligned}
E[u|v_1, v_2, v_3] &= 1 - u \left[1 - \frac{(3\alpha + 1)}{\alpha(\alpha - 1)} \left(\frac{u^{-\alpha}}{\psi}\right) + \frac{(\alpha + 1)(3\alpha + 1)(4\alpha + 1)}{2\alpha^2(\alpha - 1)(2\alpha - 1)} \left(\frac{u^{-2\alpha}}{\psi^2}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(3\alpha + 1)(4\alpha + 1)(5\alpha + 1)}{6\alpha^3(\alpha - 1)(2\alpha - 1)(3\alpha - 1)} \left(\frac{u^{-3\alpha}}{\psi^3}\right) \right] \\
&= 1 - u + \frac{(3\alpha + 1)}{\alpha(\alpha - 1)} \left(\frac{u^{1-\alpha}}{\psi}\right) - \frac{(\alpha + 1)(3\alpha + 1)(4\alpha + 1)}{2\alpha^2(\alpha - 1)(2\alpha - 1)} \left(\frac{u^{1-2\alpha}}{\psi^2}\right) \\
&\quad + \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(3\alpha + 1)(4\alpha + 1)(5\alpha + 1)}{6\alpha^3(\alpha - 1)(2\alpha - 1)(3\alpha - 1)} \left(\frac{u^{1-3\alpha}}{\psi^3}\right)
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
E[u|v_1, v_2, v_3] &= 1 - u + \frac{(3\alpha + 1)}{\alpha(\alpha - 1)} \left(\frac{u^{1-\alpha}}{\psi}\right) - \frac{(\alpha + 1)(3\alpha + 1)(4\alpha + 1)}{2\alpha^2(\alpha - 1)(2\alpha - 1)} \left(\frac{u^{1-2\alpha}}{\psi^2}\right) \\
&\quad + \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(3\alpha + 1)(4\alpha + 1)(5\alpha + 1)}{6\alpha^3(\alpha - 1)(2\alpha - 1)(3\alpha - 1)} \left(\frac{u^{1-3\alpha}}{\psi^3}\right)
\end{aligned}$$

Capítulo 5

Conclusiones

La principal conclusión de este trabajo de tesis es que existe la posibilidad de plantear nuevos modelos de regresión, basados en la media condicional, para distintos tipos de datos con características probabilísticas muy diferentes a las que se asumen en los libros de econometría estandar. De hecho es posible proponer modelos donde las variables aleatorias pueden asumir diferentes tipos de distribución probabilística mediante la utilización de la teoría de cópulas.

En este sentido es posible superar las limitaciones que enfrentan actualmente los modelos empiricos que frecuentemente enfrentan datos con distribuciones diferentes y que a la fecha no han sido posible modelar. Aún más, no sólo se podría trabajar con datos con otras distribuciones, sino también cambiar supuestos asociados a la dependencia del tipo lineal y a la homogeneidad de los momentos de las distribuciones en el tiempo.

Uno de los hallazgos fundamentales de esta tesis es que los momentos condicionales derivados mediante la teoría de cópulas no guardan de manera aparente una relación estrecha con los momentos de las distribuciones obtenidos en la teoría clásica de la probabilidad. Sin embargo los momentos condicionales via cópulas contienen información que de manera tradicional se da en la teoría de la probabilidad tales como la correlación y la regresión multivariada. Los momentos tradicionales aparecen reconfigurados de una manera distinta a la tradicional, pudiendo analizar de esta manera diferentes facetas de las distribuciones y aprovechando esto para modelar cuestiones complejas que la teoría tradicional no ha podido o no lo ha hecho de manera satisfactoria.

Así, podemos ver por ejemplo que la regresión (la media condicionada) cópula se lee en términos del comportamiento marginal de las funciones de distribución de las variables condicionantes (las derivdas parciales de la distribución conjunta respecto a las densidades marginales), lo que permite analizar el vinculo que existe entre el caso mas general (la cupula) y las funciones de densidad. Estos hallazgos quedan de manera preliminar y plantean una serie de interrogantes muy interesantes a futuro, por ejemplo el problema de la causalidad y endogeneidad en los modelos econométricos, lo que sugiere una manera promisoria de probar la causalidad en los modelos económicos, lo cual es una de los propósitos de la econometría moderna y ayuda a clarificar una de las mayores preocupaciones de la economía.

Para ejemplificar lo anterior, en esta tesis nos propusimos especificar las medias condicionadas asociadas a las cópulas bivariadas y multivariadas normales, de Gumbel y de Pareto. Así nuestra aportación es una parte, pequeña pero significativa, en el desarrollo de nuevas posibilidades de modelación empírica con datos de tipo no experimental, en los cuales tenemos que inferir los mecanismos generadores de información, haciendo uso de la teoría probabilística existente a la fecha.

Uno de los objetivos de esta tesis a futuro es trabajar en el desarrollo de modelos de tipo microeconómico basados en la teoría de cópulas y poder hacer aproximaciones a la función de producción con estos instrumentos, los cuales estamos desarrollando actualmente para continuar explorando ésta área de investigación.

Bibliografía

- [1] Dias, Alexandra; Embrechts, Paul, *Modeling exchange rate dependence dynamics at different time horizons*. Journal of International Money and Finance, Vol.29, 2010.
- [2] Li, Jing, *an introduction to the directional dependence in the copula regression setting*. Journal of the University of Minnesota, 2010.
- [3] Dorey, Martyn; Joubert, Phil, *Modeling copulas: an overview*. The Stample inn Actuarial Society, 2004.
- [4] Nelsen, R. B., *An introduction to copulas*. Springer, New York, 1999.
- [5] Durante, F.; Sempi, C. *Copula theory: an Introduction*. Journal of American Statistics Association, 2009.
- [6] Nelsen, R.B. *Extremes of nonexchangeability*. Stat. Papers. 48, 329-336. (2007).
- [7] Spanos, Aris. *Statistical foundations of econometric modelling*. Cambridge University Press. (1986)
- [8] Jurado Galicia, Edith. *Cópulas y aplicaciones a pruebas de simetría* Tesis doctoral, IIMAS, UNAM. (2011).
- [9] Becerra, O.; Melo, L. *Medidas de riesgo financiero usando cópulas: teoría y aplicaciones*. Borradores de economía, No. 489, Banco de la República de Colombia, 2008.
- [10] Nelsen, R.; Quesada-Molina, J.; Rodríguez-Lallena, J.; Úbeda-flores, M. *Kendall distributions functions*. Statics and probability letters, No. 65 (263-268), 2003.
- [11] Escarela, G.; Hernández, A. *Modelado de parejas aleatorias usando cópulas*. Revista colombiana de estadística, vol. 32, 2009.
- [12] Nadiezhda, Tania. *Valoración del riesgo utilizando cópulas como medida de la dependencia: aplicación al sector financiero mexicano (2002-2008)*. Tesis de doctorado, Universidad Complutense de Madrid. Madrid, España, 2009.
- [13] De Matteis, R., *Fitting cópulas to data*. Tesis de doctorado, No. 489, Universidad de Zurich, 2001.
- [14] Huerta, H., *Aplicación de las T-cópulas a la modelación estocástica conjunta de porosidad-permeabilidad en 3D restringida por pruebas de presión*. Instituto Mexicano del Petróleo, 2006

- [15] Aguirre, F. *Aplicación del método de cópulas para el cálculo del nivel de liquidez de una institución financiera*. Tesis de licenciatura, Escuela Politécnica Nacional, Ecuador, 2010.
- [16] Cintas, R. *Teoría de cópulas y control del riesgo financiero*. Tesis de doctorado, Universidad Complutense de Madrid, Madrid España, 2007.
- [17] Oakes, D.; Ritz, J. *Regression in a bivariate copula model*. *Biometrika*, No. 87, 2, Gran Bretaña, 2000.