



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

**ESTUDIO NUMÉRICO DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN  
FLUJO A TRAVÉS DE ARREGLOS DE OBSTÁCULOS MAGNÉTICOS**

**TESIS**  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
**MAESTRO EN INGENIERÍA**  
ENERGÍA - FUENTES RENOVABLES

PRESENTA:  
**JOSÉ JOEL ROMÁN GODÍNEZ**

DIRECTOR DE TESIS:  
**DR. SERGIO CUEVAS GARCÍA**  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN ENERGÍA

TEMIXCO, MORELOS. ENERO 2013



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Mariano López de Haro

Secretario: Dr. Sergio Cuevas García

Vocal: Dr. Eduardo Ramos Mora

1er. Suplente: Dr. Aldo Figueroa Lara

2do. Suplente: Dr. Federico Vázquez Hurtado

Lugar donde se realizó la tesis:

Centro de Investigación en Energía, Temixco, Morelos, México.

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Sergio Cuevas García

---

FIRMA

Dedicado a:

Mis padres Joel y Yolanda quienes sus enseñanzas y consejos siempre serán la base de todo lo que logre.

A mis hermanos Israel y Rodrigo, porque se que siempre podré contar con su apoyo incondicional.

A todas aquellas personas que al formar parte de mi vida lograron que esto fuera posible.



# Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México, en especial al Centro de Investigación en Energía por permitirme realizar mis estudios de maestría en sus instalaciones.

A los miembros del jurado Dr. Mariano López de Haro, Dr. Eduardo Ramos Mora, Dr. Aldo Figueroa Lara y Dr. Federico Vázquez Hurtado por los comentarios y el tiempo dedicado para mejorar esta tesis.

A todos los amigos del Centro de Investigación, Memo Ramirez, Memo Hernandez, Michel, Jose Carlos, Mario, Jose, Gerardo, Enrique, James, Alberto, Aldo, Salvador, Beto, Manuel, Roberto, Bianca, Luis, Colin y en especial a Cinthya, Saul y Toño porque siempre pude contar con todos ustedes para un consejo así como para divertirnos.

A CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología) por darme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

En especial agradezco al Dr. Sergio Cuevas García por permitirme trabajar bajo su asesoría, así como por su tiempo, paciencia y consejos.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>3</b>
<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. Formulación del problema</b>	<b>15</b>
1.1. Ecuaciones de balance . . . . .	15
1.2. Cantidades electromagnéticas . . . . .	17
1.3. Modelo cuasi-bidimensional con fricción . . . . .	18
<b>2. Dinámica de flujos a través de arreglos de obstáculos magnéticos</b>	<b>21</b>
2.1. Consideraciones generales para la solución de flujos a través de obstáculos magnéticos. . . . .	21
2.1.1. Formulación del problema. . . . .	22
2.1.2. Condiciones de frontera y método computacional . . . . .	23
2.1.3. Resultados para el flujo a través de un solo obstáculo magnético . . . . .	26
2.2. Flujo a través de un arreglo de dos obstáculos magnéticos: lado-a-lado . . . . .	29
2.2.1. Resultados . . . . .	31
2.3. Flujo a través de arreglos de tres obstáculos . . . . .	40
2.3.1. Resultados . . . . .	42
<b>3. Transferencia de calor en flujo a través de arreglos de obstáculos magnéticos</b>	<b>55</b>
3.1. Transferencia de calor en un flujo a través de un arreglo de dos obstáculos magnéticos . . . . .	55
3.1.1. Resultados . . . . .	57
3.2. Transferencia de calor en un flujo a través de un arreglo de tres obstáculos magnéticos . . . . .	70
3.2.1. Resultados . . . . .	70

Conclusiones	81
Bibliografía	83

---

---

# Resumen

---

En este trabajo se presenta el estudio numérico de la dinámica y la transferencia de calor en el flujo de un electrolito en presencia de arreglos de obstáculos magnéticos, es decir, campos magnéticos localizados producidos por imanes permanentes que interactúan con corrientes eléctricas inyectadas en el fluido. Dicha interacción produce fuerzas de Lorentz que se contraponen al flujo y son capaces de desestabilizarlo, provocando la aparición de patrones de vórtices dependientes del tiempo que ocasionan mezclado en el fluido.

Se estudiaron diversos arreglos de obstáculos magnéticos de uno, dos y tres imanes, de manera similar a los flujos reportados en la literatura con arreglos de obstáculos sólidos. Se presenta el análisis de la dinámica de los flujos producidos por estos arreglos colocando los obstáculos magnéticos lado a lado y variando la separación entre ellos, así como la intensidad de la corriente aplicada. Utilizando los distintos patrones estudiados producto de los arreglos, se realiza el estudio de la transferencia de calor a través del cálculo de los números de Nusselt local y global. El análisis numérico de estos flujos permite determinar las condiciones bajo las cuales es posible mejorar la transferencia de calor hacia las paredes laterales del canal.

En el capítulo *I* se presentan las ecuaciones básicas de la dinámica y la transferencia de calor que se utilizaron para analizar el caso en estudio. Las ecuaciones de la dinámica del flujo son tratadas bajo la aproximación cuasi-bidimensional y se presentan de forma adimensional para su posterior utilización en el desarrollo del método numérico. En el capítulo *II* se presenta de forma breve el desarrollo del método numérico y la validación del mismo comparando los resultados numéricos con resultados experimentales. En el capítulo *III* se presentan los resultados del estudio de la transferencia de calor producto de los patrones de flujo presentados en el capítulo *II*. Para el estudio de la transferencia de calor se definió el número de Nusselt local y global, y se analizó su comportamiento ante los distintos patrones de flujo producidos por los arreglos de obstáculos magnéticos. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo.



---

---

# Introducción

---

En muy diversas aplicaciones industriales y domésticas el aprovechamiento de la energía térmica o calorífica requiere de la utilización de intercambiadores de calor. Estos dispositivos comúnmente utilizan fluidos para transportar calor entre cuerpos a distintas temperaturas. Dependiendo de la aplicación y las condiciones de operación específicas, existe una gran variedad de diseños que tratan de mejorar la transferencia de calor y de esta manera lograr un mejor y más eficiente aprovechamiento de la energía disponible. El mejoramiento de la transferencia de calor se puede lograr mediante diversos métodos, por ejemplo, aumentando el área de contacto del fluido de trabajo con la superficie del intercambiador o bien mediante un aumento en el coeficiente convectivo de transferencia de calor del sistema. Sin embargo, no siempre es viable aumentar el área del intercambiador de calor por cuestiones de espacio, practicidad y costo. Por su parte la intensificación del mecanismo convectivo se logra mediante la modificación del patrón de flujo del fluido de trabajo. Esto se puede lograr incrementando la velocidad del mismo hasta llevarlo a un régimen turbulento, pero esto trae consigo pérdidas de presión y por lo tanto un mayor costo de funcionamiento debido a la demanda de bombeo requerida. Otra forma de alterar el patrón de flujo es mediante la utilización de obstáculos sólidos o aletas que obstruyen el flujo en el canal donde se lleva a cabo el intercambio de calor. Esta obstrucción genera vórtices o recirculaciones de fluido que permiten incrementar el intercambio de calor entre las diversas zonas donde se encuentra el fluido y las paredes que lo contienen.

La importancia de los vórtices o remolinos en la transferencia de calor y el modo de generarlos ha sido estudiado ampliamente. Los vórtices se pueden clasificar dependiendo de la orientación de su eje de rotación. Por ejemplo, los vórtices transversales tienen sus ejes perpendiculares a la dirección principal del flujo, mientras que los longitudinales tienen sus ejes en la dirección del flujo, como se ve en la figura 1 y figura 2, respectivamente.

La utilización de vórtices para el mejoramiento de la transferencia de calor en canales ha sido estudiado por Fiebig. (1997). Este autor encontró que la transferencia de calor producto de la presencia de vórtices es independiente del mecanismo utilizado para generarlos, lo cual puede lograrse mediante el uso de aletas en las paredes del canal o a través de obstáculos sólidos dentro del flujo. En ocasiones estos vórtices son generados debido a la turbulencia del flujo o por inestabilidades térmicas.

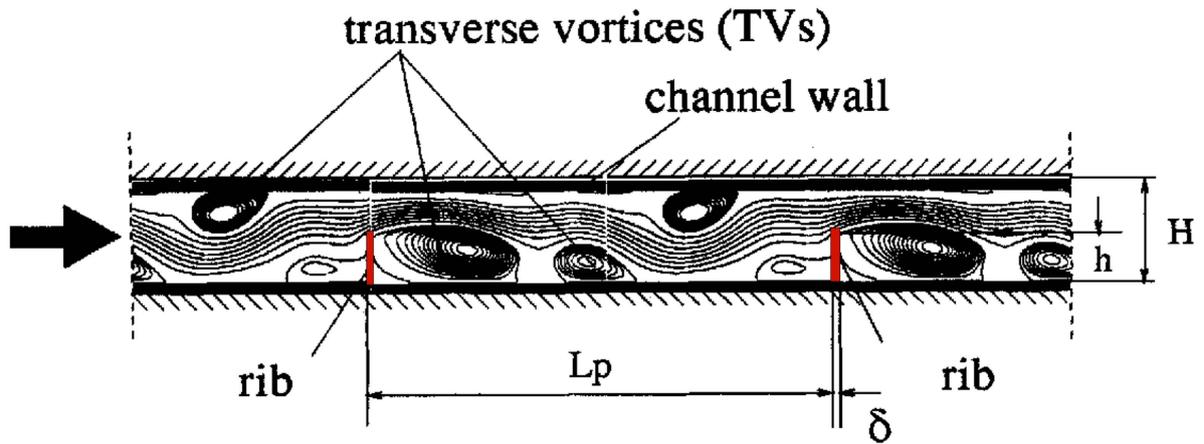


Figura 1: Canal con aletas en una pared -generadores de vórtices transversales y líneas de corriente instantáneas,  $Re = 350$  (Fiebig., 1997)

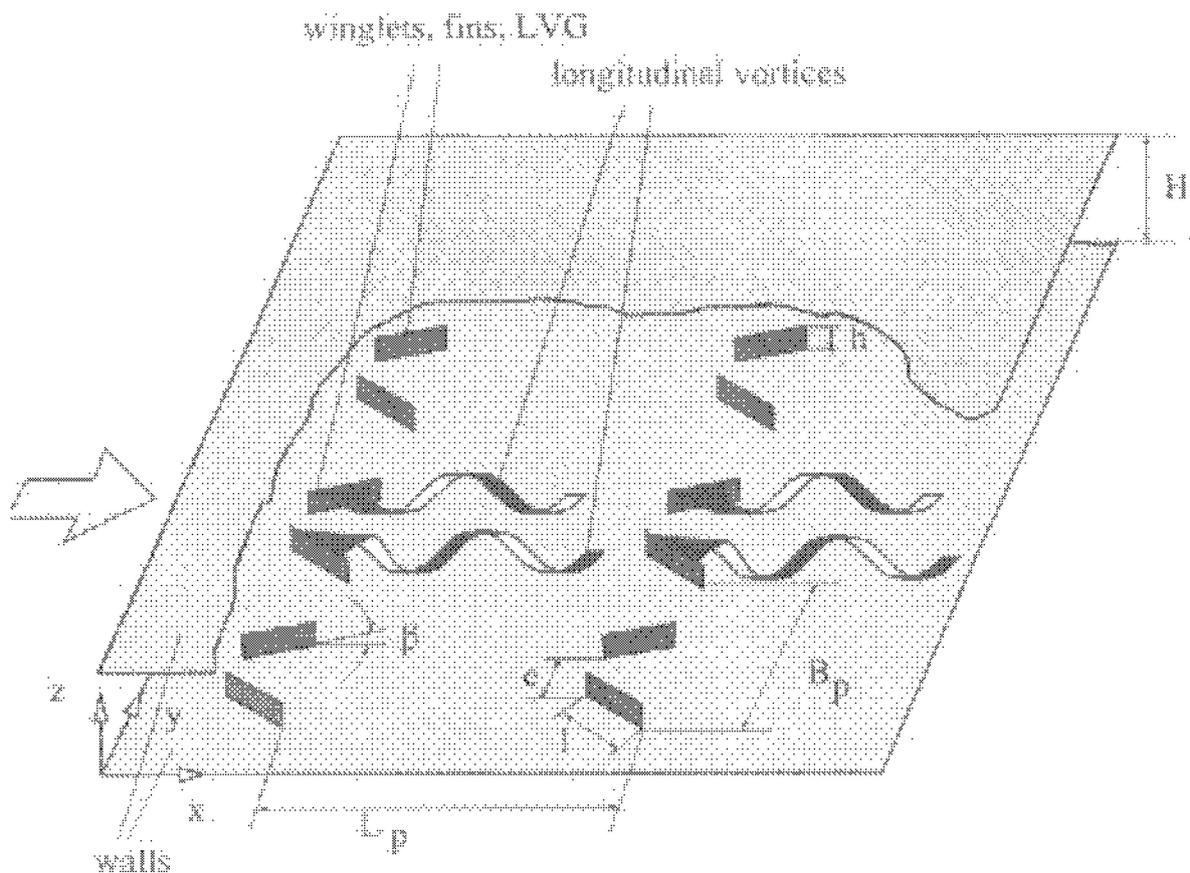


Figura 2: Canal con un arreglo de aletas rectangulares con un ángulo de ataque al flujo principal y esquema de los vórtices longitudinales (Fiebig., 1997)

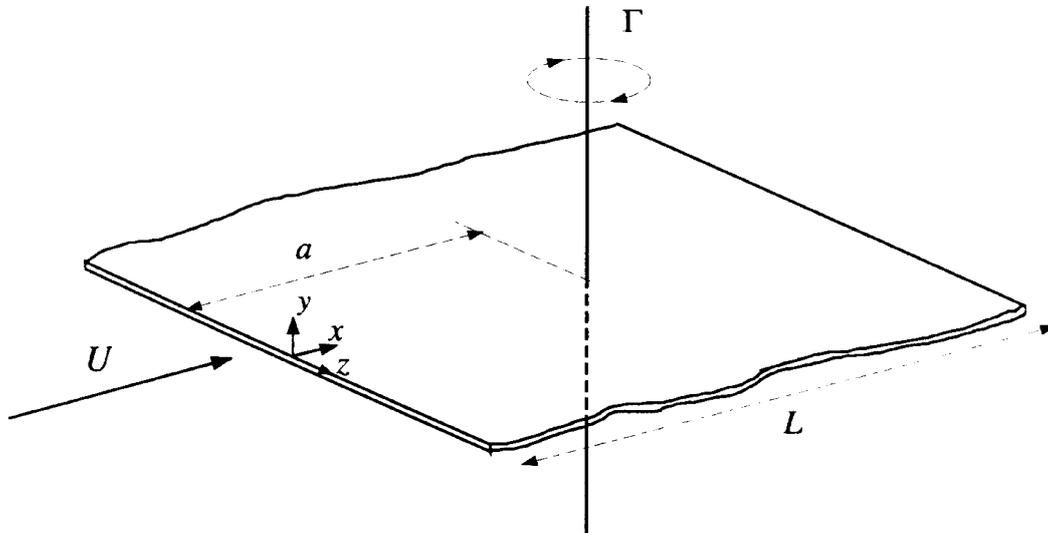


Figura 3: Geometría de vórtices con ejes en dirección normal a la superficie que contiene al fluido. (Romero-Méndez et al., 1998).

Existen otros trabajos que analizan los efectos en la transferencia de calor que tienen los vórtices en contacto con una pared sin importar su origen. Un estudio analítico de este caso es el presentado en el trabajo de Romero-Méndez et al. (1998) en el que se explora el efecto de un vórtice de Rankine superpuesto en un flujo uniforme inviscido. La solución analítica que presentan se obtiene utilizando un método de perturbaciones con una aproximación válida solo para números de Prandtl pequeños. El análisis se realiza para tres tipos de orientaciones de los vórtices: transversal, longitudinal y normal. Estos últimos tienen sus ejes en dirección normal a la superficie horizontal que contiene al fluido, como se observa en la figura 3. Los resultados muestran que el vórtice transversal ayuda más al incremento de la transferencia de calor que el longitudinal.

Uno de los mecanismos más estudiados para generar vórtices transversales es el desprendimiento de vórtices que se produce detrás de un cilindro circular cuando pasa un flujo a través del obstáculo sólido, generando lo que se conoce como la calle de vórtices de von Kármán. En busca de lograr una mejora en la transferencia de calor obtenida al utilizar este tipo de generadores de vórtices, se han estudiado los efectos en el flujo que se producen al colocar distintas configuraciones de obstáculos sólidos.

El estudio de la dinámica de flujos a través de arreglos de obstáculos sólidos ha sido reportado ampliamente en la literatura. Zdravkovich. (1985) estudió arreglos de obstáculos sólidos colocados lado a lado, uno detrás del otro y colocados de modo desfasado entre ellos, presentando una clasificación de los patrones de flujo que se encuentran en estas configuraciones. En la figura 4 se muestra la clasificación para los arreglos de tipo lado-a-lado y uno detrás del otro. Estos patrones de flujo son muy dependientes de la cercanía de los obstáculos sólidos y del número de Reynolds; si la distancia entre ellos es lo su-

ficientemente grande no se presenta interferencia entre los flujos, por lo que las caudas que se producen detrás de los obstáculos sólidos se comportan como lo harían detrás de un solo obstáculo. Este comportamiento se observa en los tres tipos de arreglos antes mencionados.

En la figura 4 se muestran las distintas clasificaciones de los patrones de flujo que se presentan al variar la distancia entre los ejes de los obstáculos sólidos. En el eje vertical se muestra la distancia de separación entre los ejes, la cual es transversal a la dirección del flujo y está normalizada por el diámetro de los cilindros. El eje horizontal corresponde la distancia de separación entre los ejes de los obstáculos sólidos en dirección del flujo normalizada por el diámetro de los mismos.

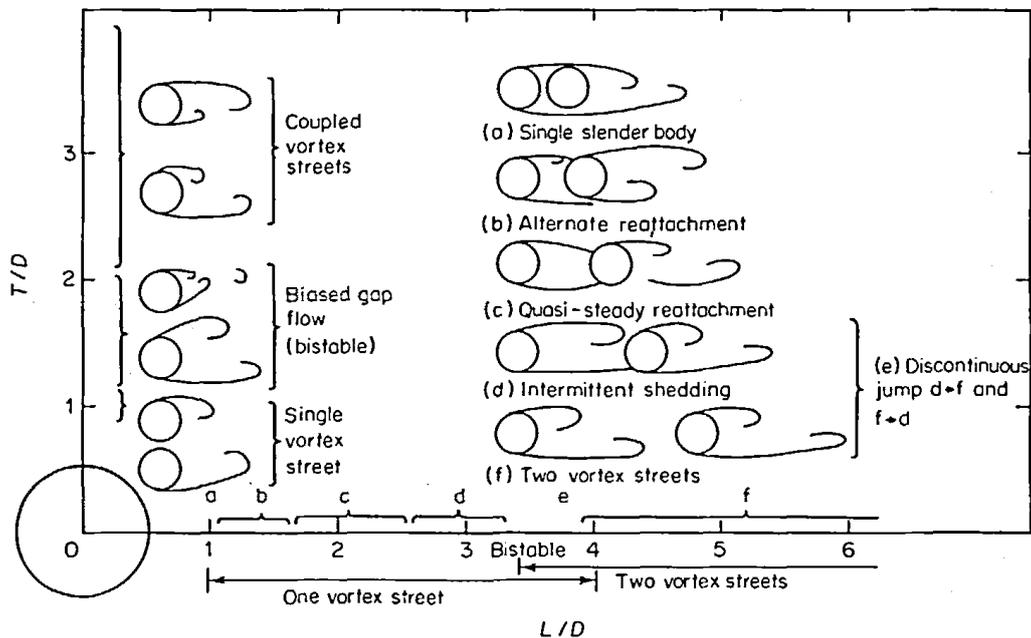


Figura 4: Clasificación de los regímenes de flujo en arreglos de obstáculos colocados lado-a-lado y uno detrás del otro. (Zdravkovich., 1985)

Cuando un obstáculo sólido se encuentra ubicado detrás del otro en la dirección del flujo, al incrementarse la distancia entre sus ejes se presentan distintos patrones de flujo. Estos patrones de flujo se pueden clasificar en dos distintos grupos: 1) Mientras la distancia en la dirección del flujo entre los ejes de los obstáculos sea menor a un valor crítico, la cauda generada detrás de ellos se comporta como la que se presenta detrás de un solo obstáculo. 2) Si la distancia es mayor que el valor crítico, detrás los dos obstáculos se presentan sendas caudas completamente independientes la una de la otra. Como se aprecia en la parte baja de la figura 4, el primer grupo de esta clasificación se puede subdividir en otros patrones de flujo.

Cuando los obstáculos están colocados lado a lado y se encuentran suficientemente cerca el uno del otro, se afectan ambas calles de vórtices. Si están muy cerca se presenta una única cauda; si incrementamos ligeramente la distancia entre ellos se presenta un patrón de flujo biestable, que será definido más adelante. A partir de una distancia determinada ambas calles de vórtices están acopladas de forma desfasada, si la distancia se sigue incrementando el acoplamiento desaparece.

La configuración donde se colocan los obstáculos sólidos lado a lado presenta como principal característica que al estar los obstáculos separados por una distancia crítica, se presenta la naturaleza biestable del flujo. Esto quiere decir que al pasar el flujo sobre los cilindros, la cauda formada se inclina hacia uno de los cilindros rompiendo la simetría de las calles de vórtices. Esto da como resultado una interacción entre las caudas bastante compleja (Gal et al. (1990); Peschard and Gal (1996)). En el flujo biestable la cauda se inclina hacia uno de los obstáculos y tiempo después esta inclinación se invierte, es decir, se inclina hacia el otro obstáculo. Este comportamiento se presenta intermitentemente con el paso del tiempo.

Podemos observar este comportamiento en resultados experimentales y numéricos en las figuras 5 y 6, respectivamente, correspondientes a los trabajos de Sumner et al. (1999) y Slaouti and Stansby. (1992). Como se mencionó anteriormente, la distancia entre los obstáculos está caracterizada por la razón entre la distancia de los ejes de los mismos, esto es  $T$ , y el diámetro de los obstáculos, que se indica con  $D$ .

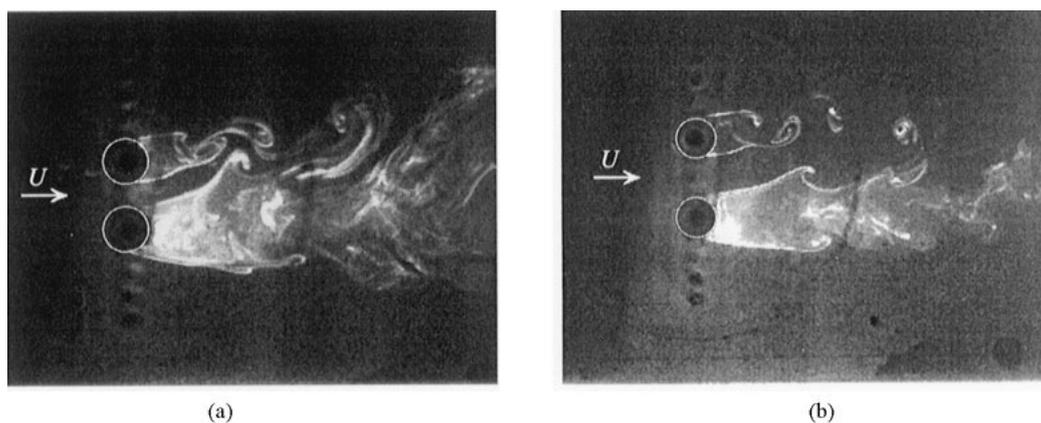


Figura 5: Visualización del flujo a través de cilindros circulares colocados lado a lado, con patrón de flujo biestable, para  $Re=1900$ , con dos valores distintos de separación entre los obstáculos: a)  $T/D= 1.5$ , b)  $T/D= 2.0$  (Sumner et al., 1999)

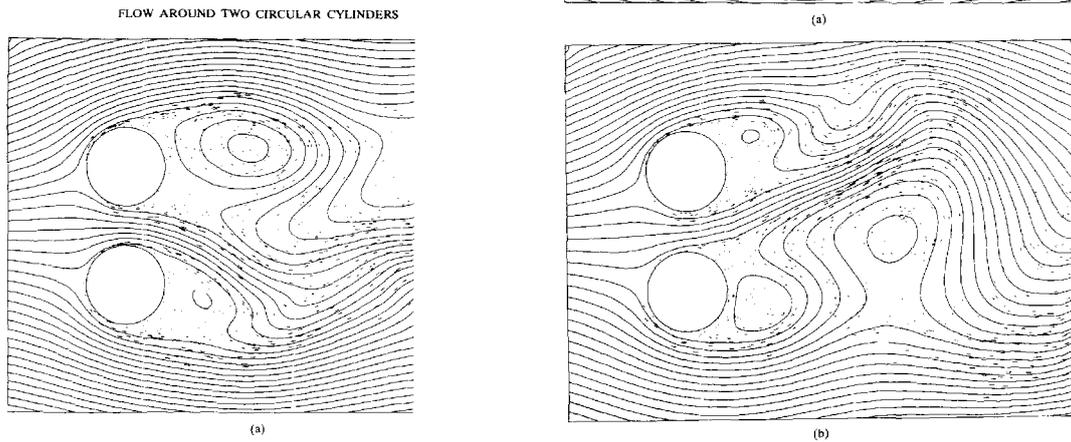


Figura 6: Líneas de corriente instantáneas de la solución numérica de un flujo a través de un arreglo de obstáculos colocados lado a lado. El número de Reynolds es 100, el tiempo es determinado por el ángulo de rotación de un cilindro. En el caso de un arreglo de dos obstáculos, se observaron dos patrones de flujo biestables, los cuales se muestran por las líneas superpuestas (1 en 50 arc plotted). Plots are for  $t'$  between 60 and 146, when initial transient effects appear to have died away. La distancia de separación entre los obstáculos es  $T/D = 1.5$ . Slaouti and Stansby (1992)

En el trabajo de Sumner et al. (1999) se realizó el estudio experimental de flujos a través de arreglos de dos y tres obstáculos sólidos colocados lado a lado, dentro de un túnel de agua cerrado. Se estudiaron distintas configuraciones de flujos obtenidos al variar la separación entre los obstáculos sólidos. Estas configuraciones fueron estudiadas mediante las técnicas de visualización de flujo, anemometría de película caliente y velocimetría de imágenes de partículas. En el caso de un arreglo de dos obstáculos sólidos, se observaron

dos patrones de flujo biestables. Los patrones son: para valores de  $T/D < 1,2$  se presenta una sola cauda detrás de los obstáculos, para valores de  $1,2 < T/D < 2,2$  se observa el flujo biestable y por último con valores de  $T/D > 2,2$  se observan un par de caudas independientes. Se describen también los patrones encontrados para el arreglo de tres obstáculos sólidos. Los experimentos se realizaron variando el número de Reynolds de 500 a 3000, obteniendo resultados similares a los reportados por otros investigadores, como los mostrados en los trabajos de Gal et al. (1990), Sumner et al. (1999) y Meneghini et al. (2001). La similitud entre resultados D. Sumner et al. (1999) Sumner et al. (1999) y la reportada por los demás investigadores, muestra que los patrones de flujo descritos de arreglos de obstáculos sólidos se presentan en un amplio rango de valores del número de Reynolds, lo que se ve reflejado en las mediciones de los números de Strouhal reportados.

El flujo a través de un arreglo de tres obstáculos sólidos es parecido al que se presenta cuando se tienen arreglos de dos obstáculos sólidos pero es mas complejo. Esto se puede apreciar en los distintos comportamientos encontrados al incrementar la separación entre los obstáculos; si los obstáculos se encuentran muy cerca se presenta un comportamiento de la cauda como el observado en el caso de uno y dos obstáculos sólidos, es decir, se forma una sola cauda. Al incrementar ligeramente la separación entre ellos, el flujo se inclina hacia uno de los obstáculos exteriores, presentando éste una cauda más larga que la que se presenta detrás del obstáculo del centro y del obstáculo del otro lado. Si se incrementa aún más la distancia entre los obstáculos, el flujo se abre hacia los obstáculos exteriores,

Figure 5. Near-wake of two cylinders in side-by-side arrangement for  $T/D = 1.5$ : (a)  $t' = 100$ ; (b)  $t' = 140$ . The flow is highly unsteady and turbulent. The stagnation points are deflected away from their initial positions. The flow is determined from the intermediate mesh. Vortex movement in the time step is shown by the dashes superimposed (1 in 50 arc plotted). Plots are for  $t'$  between 60 and 146, when initial transient effects appear to have died away. Figure 4 shows typical configurations of the near-wake for two cylinders with a very small spacing ( $T/D = 1.1$ ). The stagnation points are deflected away from their

dejando en el centro detrás del obstáculo intermedio una cauda amplia en comparación con las que se ven detrás de los obstáculos externos. A una mayor distancia de separación se presentan las tres caudas de vórtices independientes entre ellas (Zhou. (2003); Kang. (2004); Sumner et al. (1999)). Los patrones de flujo generados por este tipo de arreglos se pueden apreciar en la visualización presentada en el trabajo de Sumner et al. (1999), mostrados en la figura 7, donde tenemos un flujo a través de un arreglo de tres obstáculos sólidos con distinta separación entre ellos a diferentes valores del número de Reynolds.

Como se mencionó previamente, los vórtices generados en estas configuraciones de obstáculos sólidos ayudan al mejoramiento de la transferencia de calor, lo que ha sido estudiado y reportado de forma numérica. En particular, se han realizado estudios colocando obstáculos uno detrás de otro en la dirección del flujo para saber cómo afecta la cercanía de los obstáculos sólidos de sección transversal rectangular a la transferencia de calor (ver Valencia. (1998) y Valencia. (1999)).

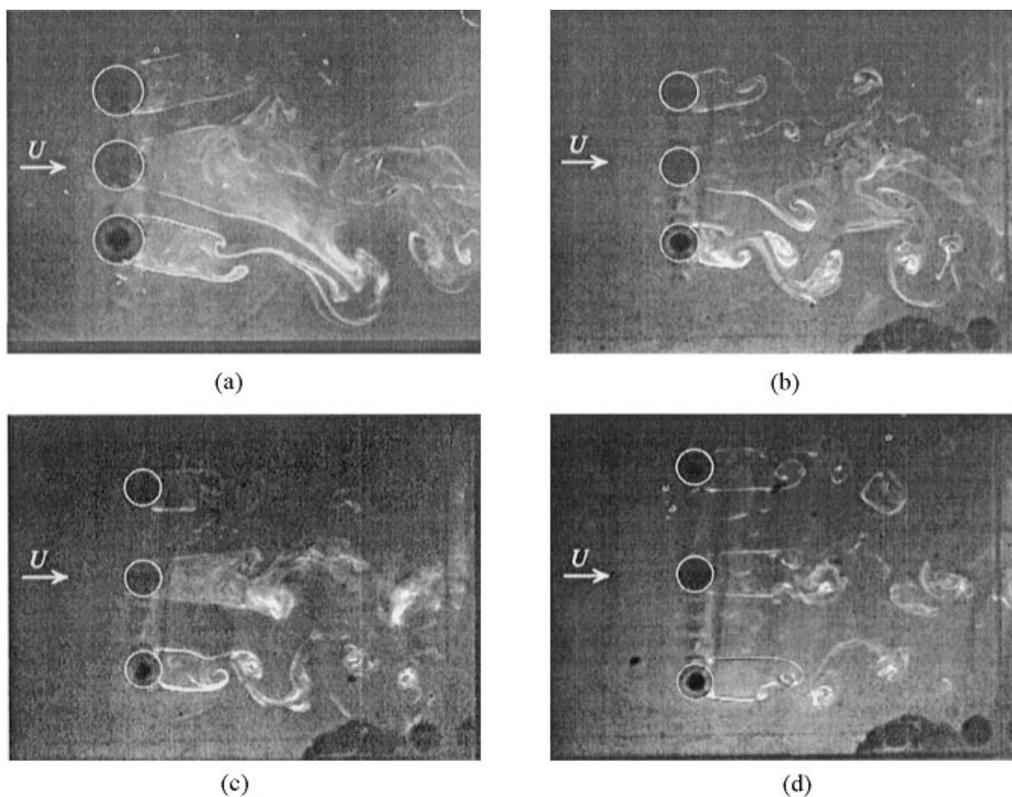


Figura 7: Visualización del flujo a través de 3 cilindros circulares colocados lado a lado, para valor de  $Re=1900$ : a)  $T/D= 1.5$ , b)  $T/D= 2.0$ , c)  $T/D= 2.5$ , d)  $T/D= 3.0$  (Sumner et al., 1999)

El estudio de este tipo de flujos es de interés para el análisis de intercambiadores de calor, en particular para el enfriamiento de componentes electrónicos. En el trabajo de Valencia et al. (2001) se presenta el estudio del mejoramiento de la transferencia de calor en canales, utilizando cilindros cuadrados en configuración lado a lado. Este tipo de estudios se han realizado para entender de mejor forma el mejoramiento de la transferencia de calor mediante los vórtices que se generan en los distintos patrones de flujo obtenidos al incrementar la separación entre los obstáculos sólidos. En el análisis se calcula el número de Nusselt en la pared inferior del canal a un número de Reynolds constante. En el trabajo de Valencia and Paredes. (2003) se hace el estudio de la transferencia de calor en canales con vórtices generados por cilindros cuadrados, incrementando las separaciones de los obstáculos sólidos a un número de Reynolds fijo, asimismo se presenta el análisis para un valor fijo de la separación entre los obstáculos sólidos variando el número de Reynolds. Estos estudios han sido realizados numéricamente resolviendo las ecuaciones de Navier-Stokes en dos dimensiones. Una de las principales conclusiones que se presenta en este trabajo es que el flujo de fluido que pasa entre los obstáculos sólidos tiene un efecto negativo en la transferencia de calor. Esto fue observado cuando comparan los números de Nusselt, medidos en la pared inferior, a lo largo del tiempo generados por las distintas separación de los obstáculos sólidos se observo que todos los casos daban un valor de Nusselt menor al que se obtiene cuando no hay espacio entre los obstáculos sólidos y que la transferencia de calor promedio se incrementa con el número de Reynolds. Algunas de las configuraciones analizadas en este trabajo se muestran en la figura 8.

La utilización de obstáculos sólidos no es la única manera en que se pueden generar vórtices en un flujo. Recientemente se ha encontrado que la existencia de un campo magnético localizado en un flujo de un líquido eléctricamente conductor puede dar lugar a la aparición de vórtices (Cuevas et al. (2006*a*), Cuevas et al. (2006*b*); Afanasyev and Korabel (2006)). Cuando el fluido conductor es un metal líquido se inducen corrientes eléctricas en el medio que interactúan con el campo aplicado y dan lugar a una fuerza magnética (la fuerza de Lorentz) que actúa como un obstáculo para el flujo. Los patrones de flujo resultantes son parecidos a los que se observan en flujos sobre obstáculos sólidos aunque también existen diferencias sustanciales que los distinguen. Por tal motivo, a este tipo de fuerzas localizadas se les denomina obstáculos magnéticos (Cuevas et al., 2006*a*). Cuando el fluido es un electrolito las corrientes inducidas por el movimiento del mismo en el campo magnético localizado son despreciables. En tal caso para obtener una fuerza de Lorentz apreciable es necesario introducir una corriente eléctrica en el fluido a través de electrodos situados en las paredes del canal.

pressure is written as the sum of a mean linear and a time-dependent fluctuating part [13]. The slope of the mean part is adjusted at every time step to satisfy the fixed mass flow condition. Spatially periodic boundary conditions are imposed on the velocities and on the fluctuating part of the pressure. Periodicity of the thermal boundary condition in the  $X$ -direction is also imposed. The temperature is calculated and the

schematically in Fig. 1. The arrangements are repeated spatially and only one unit is shown. Each one has different geometrical parameters and their values are in Tables 1–3. The different configurations and parameter values will be referred to as cases  $a_i$ ,  $b_i$ , etc. Fig. 1(a) shows two square bars; the geometrical parameters are  $T/d$ ,  $L/d$ ,  $d/H$  and  $P/H$  in Table 1.  $a_7$  and  $a_9$  are similar to [10] for  $Re = 300$ .

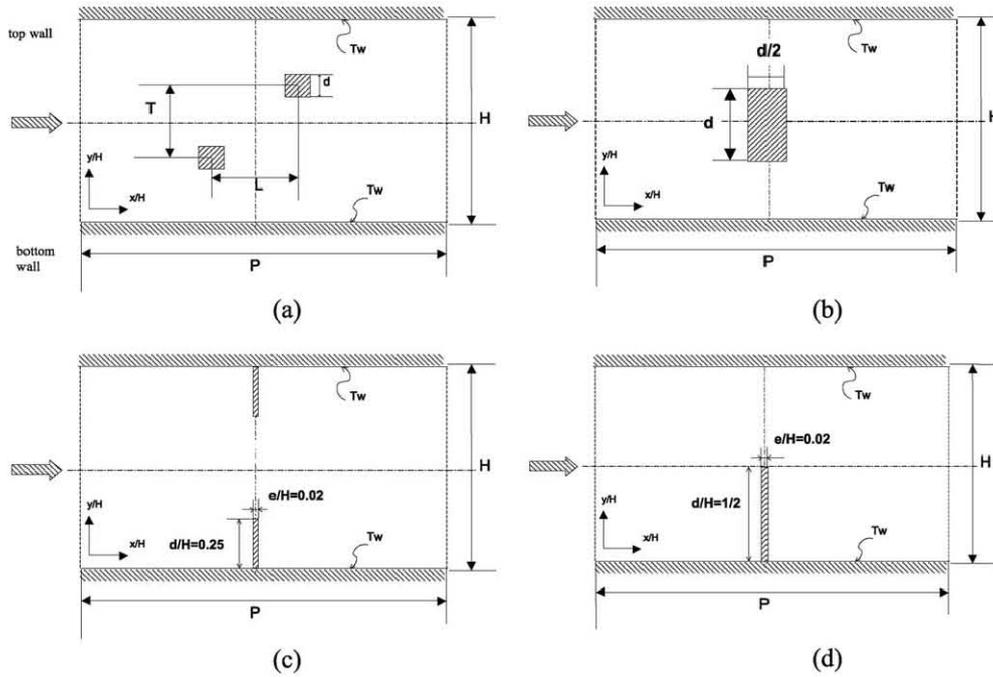


Fig. 1. Computational domain.

Figura 8: Cuatro diferentes tipos de arreglos de obstáculos sólidos en un flujo en un canal usados para el estudio de la transferencia de calor en el canal, (Valencia and Sen., 2003)

El experimento de Afanasyev and Korabel (2006), mostrado en la figura 9, es un ejemplo de la generación de este tipo de flujos con electrolitos. El dispositivo experimental consiste de un canal somero con agua salada y con un par de electrodos paralelos a lo largo de las paredes del mismo por los cuales se introduce una corriente eléctrica. Sobre la superficie del electrolito se desplaza con velocidad constante uno o dos imanes permanentes. El campo localizado de los imanes interactúa con la corriente eléctrica dando lugar a una fuerza de Lorentz que actúa como un obstáculo para el flujo y es capaz de generar diversos patrones de vórtices. Con un imán se observó la formación de vortices dipolares detrás del mismo así como el desprendimiento de vórtices, como sucede en un flujo sobre un obstáculo sólido.

Los flujos de fluidos conductores que pasan a través de campos magnéticos localizados son capaces de generar patrones de flujo mucho más ricos que los producidos en flujos a través de obstáculos sólidos. En aguas someras este tipo de flujos se han estudiado numericamente mediante una aproximación cuasi-bidimensional que permite considerar el efecto de la fricción con el fondo del recipiente mediante un término de fricción que se agrega a las ecuaciones de Navier-Stokes ( Cuevas et al. (2006a), Cuevas et al. (2006b), Beltrán (2010)).



# Formulación del problema

El problema que se aborda en este trabajo es el estudio numérico del flujo y la transferencia de calor en una capa delgada de un electrolito que fluye a través de un canal rectangular expuesto a una corriente eléctrica transversal al flujo y a un campo magnético localizado aplicado (no homogéneo) producido por un arreglo de imanes rectangulares ubicados en la pared del fondo externos al flujo. Los imanes están uniformemente polarizados en la dirección normal, constituyendo dipolos magnéticos finitos como el campo producido por un imán permanente. Este campo magnético se modeló utilizando una expresión analítica (McCaig, 1977). Aunque el campo magnético es tridimensional, debido a que utilizamos una delgada capa de fluido la contribución principal del campo aplicado proviene de la componente normal a dicha capa, que se encuentra en la dirección  $z$  y que es la única que se considera en el presente trabajo.

A la entrada del canal, se impone un flujo estacionario unidireccional con velocidad uniforme en la dirección  $x$ . El efecto obtenido por la interacción entre el campo magnético localizado y la corriente inyectada es una fuerza no uniforme que se opone al flujo, conocida como la fuerza de Lorentz y que actúa como un obstáculo para el flujo.

Como se mencionó previamente la oposición al flujo de la fuerza de Lorentz se conoce como un obstáculo magnético. Cabe resaltar que a diferencia de un obstáculo sólido que ocupa una región bien definida, la extensión del obstáculo magnético puede variar dependiendo de la intensidad del campo magnético y la velocidad del flujo a la entrada. A continuación se presentan las ecuaciones requeridas para describir el fenómeno

## 1.1. Ecuaciones de balance

Partiendo de la hipótesis del continuo, las ecuaciones que establecen la conservación de la masa, el balance de la cantidad de movimiento y la conservación de la energía para un fluido tienen la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\rho \vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla \cdot \vec{\tau} + \vec{f}, \quad (1.2)$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla e = \tau : \nabla \vec{u} - \nabla \cdot \vec{q} + \phi_B. \quad (1.3)$$

donde  $\rho$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{f}$ ,  $e$ ,  $\vec{q}$  y  $\phi_B$  son la densidad de masa del fluido, el vector velocidad, el tensor de esfuerzos, el vector que representa a las fuerzas de cuerpo, la energía interna específica del sistema, el vector flujo de calor y la fuente de disipación (viscosa y óhmica), respectivamente.

El sistema de ecuaciones de balance(1.1)-(1.3) no está cerrado por lo que es necesario proporcionar información adicional a través de las ecuaciones constitutivas para el fluido ( $\vec{\tau}$ ,  $\vec{q}$ ), las ecuaciones de estado ( $\rho$ ,  $e$ ) y la fuerza de cuerpo relevante en el problema ( $\vec{f}$ )

Si consideraremos al electrolito como un fluido incompresible, de manera que su densidad puede considerarse constante, el principio de conservación de la masa queda expresado del siguiente modo:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (1.4)$$

Si suponemos que el fluido de trabajo es Newtoniano y que la fuerza relevante es la de Lorentz, la ecuación de balance de cantidad de movimiento es la ecuación de Navier-Stokes que tiene la forma

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u} + \vec{j} \times \vec{B}, \quad (1.5)$$

donde  $\vec{j}$ ,  $\vec{B}$  y  $\eta$  son el vector densidad de corriente eléctrica, el vector de inducción magnética y la viscosidad dinámica. La ecuación de balance de energía da lugar a la ecuación de transferencia de calor quedando de la siguiente forma para un fluido Newtoniano por donde circulan corrientes eléctricas

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) T = \alpha \nabla^2 T + \Phi + \frac{\vec{j}^2}{\sigma}, \quad (1.6)$$

donde  $T$  es la temperatura y  $\alpha = \kappa/\rho C$  es la difusividad térmica del fluido, siendo  $\kappa$  su conductividad térmica y  $C$  su calor específico. La cantidad  $\Phi$  se conoce como la función disipación y denota una fuente de disipación viscosa que explícitamente involucra términos cuadráticos de los gradientes de velocidad y están definidas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Phi = 2 & \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 \\ & + \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right]^2 + \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 + \left[ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right]^2, \end{aligned} \quad (1.7)$$

donde  $u$ ,  $v$  y  $w$  son las componentes del vector velocidad en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. El ultimo término del lado derecho,  $\frac{\vec{j}^2}{\sigma}$ , es la disipación Óhmica o de Joule presente en el fluido debido a la circulación de corrientes eléctricas en el medio, donde  $\sigma$  es la conductividad eléctrica del medio.

## 1.2. Cantidades electromagnéticas

Cuando la conductividad eléctrica del fluido es alta, la densidad de corriente  $\vec{j}$  puede contener corrientes inducidas por el movimiento que a su vez pueden modificar el campo magnético aplicado. En tal caso es necesario considerar las ecuaciones del campo magnético para cerrar el sistema de ecuaciones. Sin embargo, cuando la conductividad es baja, como en el caso de interés, las corrientes inducidas son despreciables y solo es necesario considerar las corrientes eléctricas aplicadas, las cuales son conocidas, al igual que el campo magnético aplicado. De este modo los términos de fuerza de Lorentz ( $\vec{j} \times \vec{B}$ ) y de calentamiento de Joule ( $\frac{\vec{j}^2}{\sigma}$ ) son completamente conocidos por lo que no se requieren ecuaciones adicionales para determinarlos.

El campo magnético creado por una superficie rectangular magnetizada en la dirección normal a la superficie se puede expresar de forma analítica (McCaig, 1977). La componente del campo en la dirección normal  $z$ , esta dada de la siguiente forma

$$B_z^0 = B_{max} \left\{ \begin{aligned} & \tan^{-1} \left( \frac{(X+a)(Y+b)}{(Z-Z_0) [(X+a)^2 + (Y+b)^2 + (Z-Z_0)^2]^{1/2}} \right) \\ & + \tan^{-1} \left( \frac{(X-a)(Y-b)}{(Z-Z_0) [(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-Z_0)^2]^{1/2}} \right) \\ & - \tan^{-1} \left( \frac{(X+a)(Y-b)}{(Z-Z_0) [(X+a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-Z_0)^2]^{1/2}} \right) \\ & - \tan^{-1} \left( \frac{(X-a)(Y+b)}{(Z-Z_0) [(X-a)^2 + (Y+b)^2 + (Z-Z_0)^2]^{1/2}} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (1.8)$$

donde  $B_{max}$  es la intensidad máxima del campo magnético en el centro geométrico de la superficie magnetizada. Si suponemos que la placa tiene una forma cuadrada con lados de longitud  $X_0 = 2a = L$  y  $Y_0 = 2b = L$ , podemos usar  $L$  como la escala característica para adimensionalizar las variables del flujo. El sistema de coordenadas se coloca en el centro de la placa por lo que al estar ésta en el fondo de la capa líquida de fluido, se encuentra en  $Z_0 = 0$ . La variación del campo en la dirección normal es pequeña dado que el espesor de la capa de fluido es pequeño comparado con la longitud característica del dominio del

flujo en las direcciones  $x$  y  $y$ . De esta forma, supondremos que el campo magnetico solo es función de  $x$  y  $y$ , y solo tiene la componente en la dirección  $z$ . La figura 1.1 muestra la distribución adimensional de la componente normal del campo en la capa de líquido;

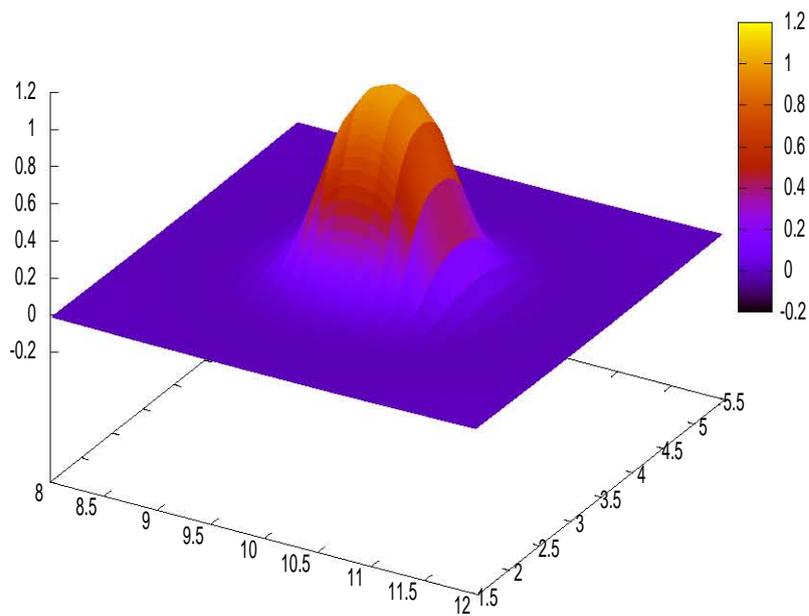


Figura 1.1: Distribución espacial adimensional de la componente normal del campo magnetico aplicado creada por el iman en la capa de líquido.

### 1.3. Modelo cuasi-bidimensional con fricción

Los flujos que nos interesa estudiar tienen lugar en una delgada capa de líquido lo que comúnmente se conoce como flujos en aguas someras donde la distancia característica lateral es grande comparada con la profundidad. En tal caso, para describirlos mediante simulaciones numéricas es posible utilizar una aproximación cuasi-bidimensional donde se toma en cuenta la fricción que se genera por el contacto entre el fluido y la pared inferior, mediante un termino lineal en la ecuación de balance de momentum.

Como se ha dicho, se considera la inyección de corriente eléctrica directa en la delgada capa del fluido, en la dirección perpendicular al flujo principal, de tal forma que al interactuar

con el campo magnético, genera una fuerza de Lorentz no uniforme que se opone al flujo entrante.

Para obtener las ecuaciones de balance en la aproximación cuasi-bidimensional primeramente, se considera explícitamente que el fluido tiene fronteras en la dirección  $z$ , en el fondo por una pared rígida eléctricamente aislante y en la frontera superior se considera una superficie libre también aislante. La superficie magnetizada encargada de producir el campo magnético localizado se supone que está embebida en la pared del fondo.

Los efectos tridimensionales presentes en el flujo debidos a las capas límite presentes en la pared del fondo, se pueden incorporar mediante una integración (promediado) de las ecuaciones en la dirección transversal  $z$  lo que da lugar al término de fricción lineal. ( Cuevas et al. (2006b), Figueroa (2006) y Beltrán (2010))

Las ecuaciones adimensionalizadas en el modelo cuasi-bidimensional tienen la forma(Beltrán (2010)):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla_{\perp}^2 u + \frac{u}{\tau} - QB_z^0, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla_{\perp}^2 v + \frac{v}{\tau}, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pe} \nabla_{\perp}^2 T + \frac{Ec}{Re} \phi + \frac{Q^2 Ec Re}{Ha^2} \vec{j}^2, \quad (1.12)$$

donde  $\tau$  es un término lineal que involucra la escala de tiempo característico (adimensional) para el decaimiento de la vorticidad debido a la fricción de Hartmann-Rayleigh(Beltrán (2010)). Se usó la velocidad uniforme a la entrada como la velocidad característica  $U_0$ , para adimensionalizar el vector velocidad. La longitud lateral de la placa magnética,  $L$ , se usó para normalizar las coordenadas, mientras que el tiempo se normalizó con  $L^2/U_0$ . A su vez, el campo magnético se normalizó usando la máxima intensidad del campo magnético  $B_{max}$ , mientras que la presión, la densidad de corriente y la temperatura se normalizaron mediante  $\rho U_0^2$ , la corriente inyectada  $j_0$  y la diferencia de temperatura entre la pared y la temperatura de bulbo,  $\Delta T$ . La temperatura de bulbo se definirá posteriormente.

$$\begin{aligned}
 Re &= \frac{UL}{\nu}, & Q &= \frac{J_0 B_{max} L}{\rho U^2}, \\
 Pe &= \frac{UL}{\alpha}, & Ec &= \frac{U^2}{C_p \Delta T}, \\
 Ha &= LB_{max} \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}.
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Los parámetros adimensionales que aparecen en las ecuaciones son el número de Reynolds  $Re$  que estima la razón entre fuerzas inerciales y fuerzas viscosas; el número de Péclet  $Pe$ , estima el cociente entre el transporte convectivo y el transporte difusivo de calor, el número de Eckert  $Ec$ , que nos da una medida de la energía cinética del flujo respecto a la diferencia de entalpía a través de la capa límite térmica,  $Q$  es un número adimensional que estima la caída de presión debida a la fuerza de Lorentz aplicada comparada con la presión dinámica y por último, el cuadrado del número de Hartmann  $Ha^2$ , nos da una estimación entre las fuerzas magnéticas y las fuerzas viscosas. Estos parámetros adimensionales están definidos

Las ecuaciones (1.9-1.12) se resolverán numéricamente utilizando condiciones de frontera adecuadas. Primeramente, en el capítulo 2, se resolverá la dinámica del flujo en estudio, lo que implica resolver las ecuaciones (1.9-1.11). Posteriormente, en el capítulo 3, una vez conocidos los campos de velocidad se resolverá la ecuación de transferencia de calor (1.12)

---

# Dinámica de flujos a través de arreglos de obstáculos magnéticos

---

En este capítulo se estudia la dinámica del flujo de un electrolito a través de uno o varios obstáculos magnéticos. Primero, se presenta el caso de un solo obstáculo magnético el cual se compara con dato experimentales y numéricos para validar los resultados obtenidos con el método numérico desarrollado. Posteriormente, se presentan soluciones numéricas para los casos de arreglos de dos y tres obstáculos magnéticos bajo la configuración de lado a lado y se analiza el comportamiento físico de tales flujos ante la variación de los parámetros adimensionales relevantes.

## 2.1. Consideraciones generales para la solución de flujos a través de obstáculos magnéticos.

Como hemos mencionado en el capítulo anterior, entendemos por obstáculo magnético la fuerza de Lorentz que se opone al flujo de un fluido conductor ocasionada por la interacción de un campo magnético localizado y una corriente eléctrica, ya sea inducida por el movimiento del fluido en el campo o bien aplicada externamente. Ya que en el presente estudio se considera un electrolito como fluido de trabajo, las corrientes inducidas son despreciables por lo que en los casos aquí estudiados se aplicará una corriente directa externamente a través de electrodos.

El flujo de un electrolito a través de un obstáculo magnético en configuraciones similares a las que se analizan en este trabajo ha sido estudiado tanto experimental (Afanasyev and Korabel (2006); Honji and Haraguchi (1995)), como teóricamente (Beltrán, 2010) aunque solo se ha considerado el caso de un solo obstáculo. Los estudios experimentales en flujos de electrolitos a través de un obstáculo magnético han sido llevados a cabo en una delgada capa de fluido, por lo que para simularlas es posible utilizar la aproximación de aguas someras donde la distancia característica lateral es grande comparada con la profundidad del fluido. Se puede entonces utilizar la aproximación cuasi-bidimensional donde se toma en cuenta la fricción que se genera por el contacto entre el fluido y el fondo del canal mediante un término lineal en la ecuación de balance de momentum.

2.1.1. Formulación del problema.

En la figura 2.1 se presenta un esquema general del problema de interés en este estudio. Consideramos un canal de forma rectangular por el cual fluye un electrolito en dirección  $x$  debido a la acción de un gradiente de presión,  $\nabla P$ . El electrolito forma una delgada capa con una superficie libre expuesta a la atmósfera. En las paredes laterales del canal se disponen electrodos conectados a una fuente de poder que permite introducir una corriente eléctrica directa en el fluido en dirección  $y$ , transversal al flujo. En el fondo del canal, externamente a éste, se colocan uno o varios imanes permanentes magnetizados en dirección  $z$ , es decir, en la dirección normal a dicho fondo. La interacción entre la corriente eléctrica inyectada y el campo magnético localizado, genera una fuerza de Lorentz que se opone al flujo entrante.

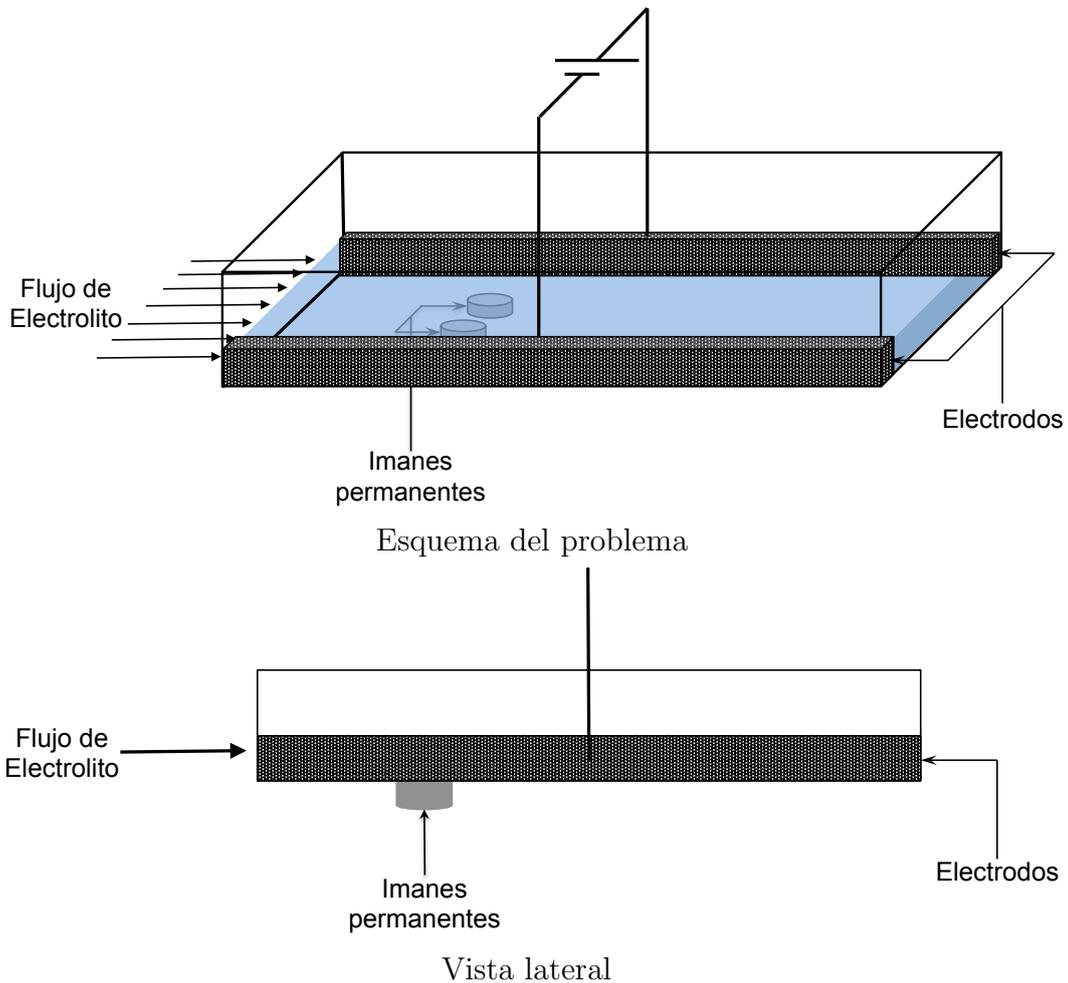


Figura 2.1: Se presenta un canal en el que entra un flujo de un electrolito de izquierda a derecha. Se colocan electrodos a los costados conectados a una fuente de poder para inyectar una corriente eléctrica directa. En la vista lateral se observan los imanes permanente ubicados fuera del canal causantes de los campos magnéticos localizados.



A la salida del dominio se imponen condiciones tipo Neumann. Este tipo de condición de frontera es válida cuando a la salida se presenta un flujo completamente desarrollado, es decir, cuando no hay variación del campo de velocidad en la dirección del flujo. Esta condición de frontera es adecuada para la solución numérica cuando la distancia de la región donde se encuentra el obstáculo a la región de salida del flujo, denotada por  $X_s$ , es lo suficientemente grande (Valencia., 1998). Dicha condición se expresa en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \text{en } x = X_L \quad 0 \leq y \leq H \quad (2.2)$$

En las fronteras laterales, se utilizó la condición de frontera de no deslizamiento, es decir,

$$u = 0, \quad v = 0, \quad 0 \leq y \leq H \quad (2.3)$$

Como condición inicial, se supone que el fluido está en reposo

### Desarrollo del método computacional

En muchas de los problemas de interés básico o aplicado no se puede obtener una solución analítica a las ecuaciones de la dinámica de fluidos, por lo que para resolverlas se requiere de obtener soluciones numéricas aproximadas, para lo cual se pueden emplear distintas técnicas como diferencias finitas, volumen finito, elemento finito, métodos espectrales, entre otros.

En este trabajo se elaboró un programa de computadora que resuelve las ecuaciones utilizando el método de volumen finito. La implementación del método numérico será descrito brevemente a continuación. Para una descripción más detallada del método se recomienda consultar los libros de Versteeg and Malalasekera (1995) y Patankar. (1980).

Para llevar a cabo la implementación numérica, se utilizó una malla ortogonal equidistante, imponiendo las condiciones de frontera (2.1), (2.2) y (2.3) suponiendo un fluido en reposo como condición inicial

La idea básica del método de volumen finito o método de volumen de control es la siguiente: Primero, el dominio de estudio se divide en un número de volúmenes de control no sobrepuestos, las fronteras de estos volúmenes de control coinciden con las fronteras del dominio en estudio. Lo siguiente es integrar la ecuación que nos interesa sobre cada uno de los volúmenes de control para así obtener la ecuación de modo discreto. Finalmente se utilizan diferentes aproximaciones o esquemas numéricos para cada uno de los términos resultantes. De esta manera se llega a la forma discreta de la ecuación en forma de un sistema de ecuaciones algebraicas que al ser resueltas proveen una solución aproximada del problema. Las ecuaciones discretas obtenidas de esta forma, expresan el principio de conservación para la variable de interés en cada volumen de control, de la misma forma que la ecuación diferencial expresa el mismo principio para un volumen de fluido infinitesimal.

Las componentes de velocidad  $u$  y  $v$  fueron definidas en las caras de los volúmenes de control, mientras que la presión y la temperatura se definen en el centro de la celda, tal

como se muestra en la figura 2.3. Los términos convectivos de la ecuación de Navier-Stoke se discretizaron para obtener el valor en las caras de los volúmenes mediante un valor medio central que provee una aproximación de segundo orden. Los términos difusivos se discretizaron mediante diferencias centrales que proveen igualmente una aproximación de segundo orden.

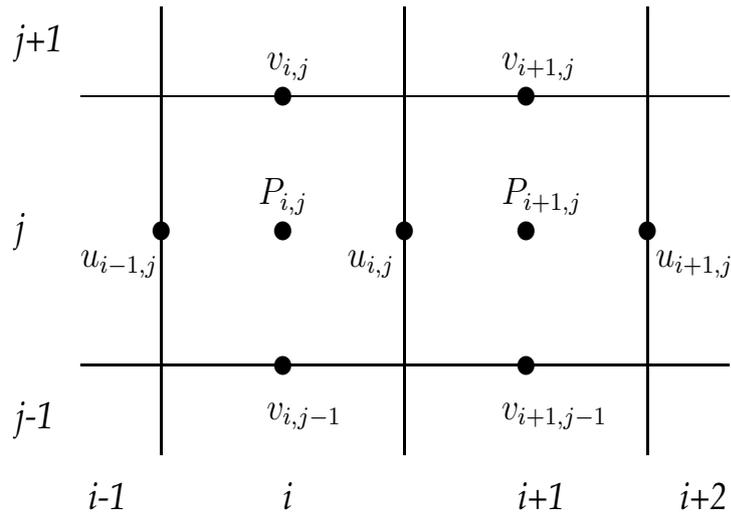


Figura 2.3: Volumen de control utilizado en el programa

Para la ecuación de balance de cantidad de movimiento existe un problema: si se calculan los valores de la presión y la velocidad en el mismo punto se pueden obtener soluciones no realistas físicamente. Para remediar este problema se utilizan mallas desfasadas; usando este método las componentes de las velocidades se calculan en las caras de los volúmenes de control y las variables escalares se calculan en los centros. También se debe calcular el gradiente de presión en la ecuación de cantidad de movimiento. Se obtiene el gradiente de presión correcto cuando al resolver la ecuación de cantidad de movimiento resulta que el campo de velocidad satisface la ecuación de continuidad. Una relación para calcular la presión se puede obtener a partir de las ecuaciones de cantidad de movimiento y de continuidad. Para resolver la presión se usó el método SIMPLEC, y para el término temporal se usó un esquema implícito de primer orden.

### 2.1.3. Resultados para el flujo a través de un solo obstáculo magnético

Las ecuaciones (1.9)-(1.11) se resolvieron numéricamente usando las condiciones de frontera previamente descritas y se utilizaron los parámetros adimensionales utilizados por Honji and Haraguchi (1995) y Beltrán (2010) y definidos en el capítulo anterior (ver ecuaciones 1.13). Como se mencionó anteriormente, los resultados reportados por Honji and Haraguchi (1995) son resultados experimentales para el flujo a través de un obstáculo magnético. El propósito de resolver este caso es el poder realizar comparaciones con estos resultados experimentales para poder validar hasta donde es posible el método numérico desarrollado

Honji and Haraguchi (1995) reportan observaciones experimentales de un flujo en una delgada capa de electrolito (0.005 m de profundidad, 0.2 m de ancho y 1 m de largo) producido por la acción de una fuerza electromagnética creada por la interacción entre una corriente directa impuesta y un campo magnético localizado. Un imán cilíndrico permanente (0.03 m de diámetro con una intensidad máxima del campo magnético de 0.48T) fue puesto por debajo del electrolito y arrastrado a lo largo de la capa delgada de fluido a una velocidad constante  $U$  en el rango entre 0.013 m/s y 0.07 m/s. Los experimentos se realizaron variando los parámetros dentro del rango siguiente,  $31 < Re < 1,7 \times 10^3$  y  $0,13 < Q < 97$ , donde el número de Reynolds está basado en el diámetro del imán. Usando el diámetro del imán cilíndrico como la longitud característica, la razón de aspecto es  $\epsilon = h/L = 0,166$ .

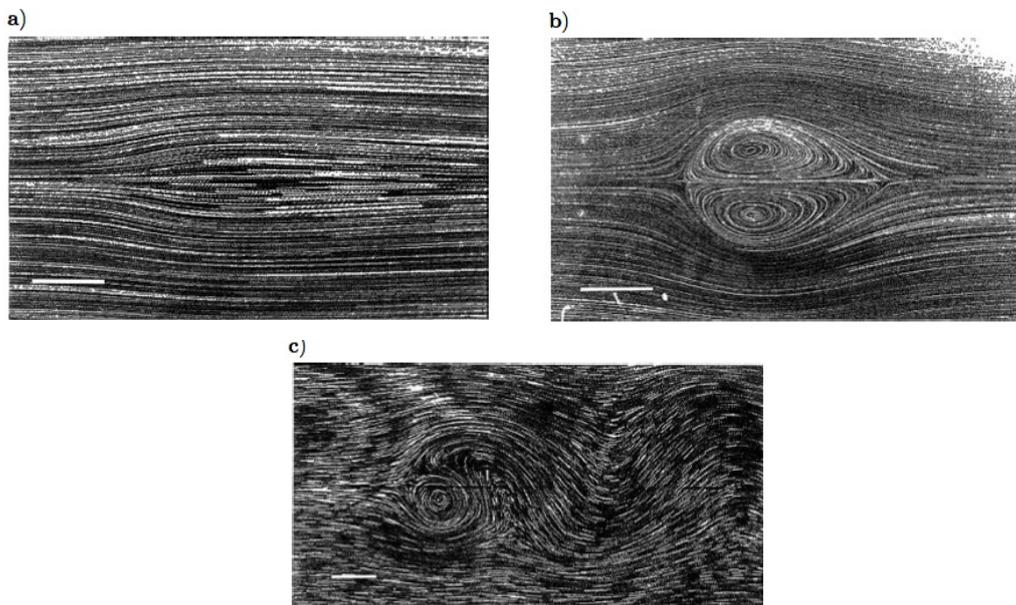


Figura 2.4: Observaciones experimentales reportadas por Honji and Haraguchi (1995) para los siguientes casos: a)  $Re = 700$  y  $Q = 0.7$ , b)  $Re = 1000$  y  $Q = 0.92$ , c)  $Re = 1000$  y  $Q = 1.7$ .

La figura 2.4 muestra las observaciones experimentales reportadas por Honji and Haraguchi (1995), donde se aprecian flujos con tres distintos valores para los parámetros: a) con  $Re=700$ ,  $Q=0.7$ , se observa una zona donde las líneas de corriente se ven ligeramente abiertas y no se presenta recirculación, en b)  $Re=1000$ ,  $Q=0.92$ , se observan un par de vórtices permanentes y c) para  $Re = 1000$ ,  $Q=1.7$ , se observa desprendimiento de vórtices. Beltrán (2010) realizó una simulación numérica utilizando un modelo cuasi-bidimensional con fricción, mediante el método de diferencias finitas, con el objetivo de reproducir las observaciones experimentales. La solución numérica fue obtenida en un dominio rectangular con longitud de 35 unidades adimensionales en la dirección del flujo y 7 unidades en dirección transversal al flujo. Se utilizó una malla de  $212 \times 201$ .

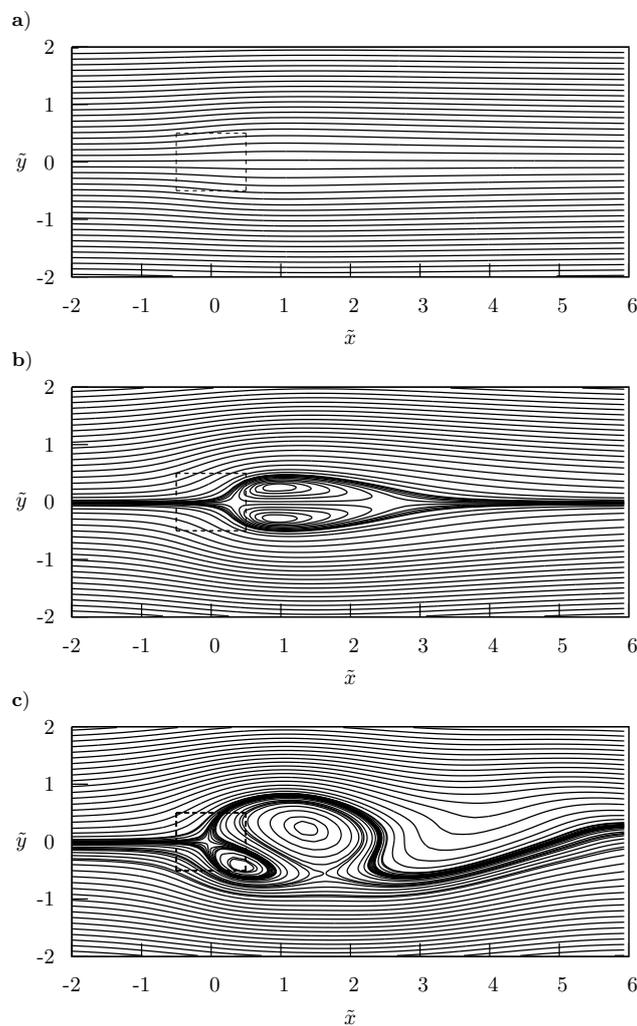


Figura 2.5: Resultados reportados por Beltrán (2010) para los casos de : a)  $Re = 700$ ,  $Q = 0.7$ , b)  $Re = 1000$ ,  $Q = 1.6$ , c)  $Re = 1000$ ,  $Q = 1.9$ .

El resultado obtenido por Beltrán (2010) se muestra en la figura 2.5, donde se observan las líneas de corriente instantáneas calculadas numéricamente, que reproducen los patrones de flujo observados de forma experimental. En el caso a), estos resultados fueron obtenidos con los mismos valores de los parámetros que los reportados en el experimento ( $Re=700$ ,  $Q=0.7$ ). Sin embargo, para los casos b) y c) los valores de  $Q$  en la simulación numérica son mayores que los valores reportados experimentalmente. La diferencia se debe probablemente a efectos tridimensionales no considerados en el modelo numérico. El par de vórtices permanentes que se muestra es el correspondiente a los valores de  $Re = 1000$ ,  $Q=1.6$ , aunque también reporta la existencia de un par de vórtices para el caso de  $Q=1.5$ . Por último, el patrón de flujo de desprendimiento de vórtices (figura 2.5c)) se obtuvo numéricamente para los valores de  $Re = 1000$  y  $Q = 1.9$ .

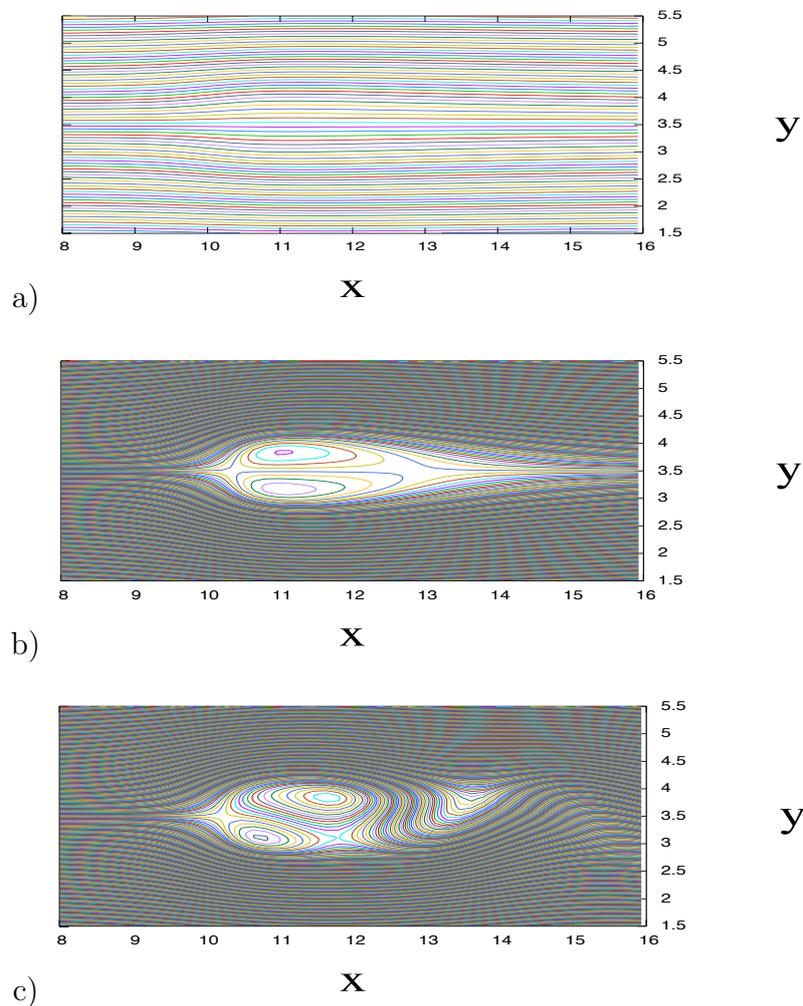


Figura 2.6: Líneas de corriente obtenidas numéricamente en el presente trabajo para los casos : a)  $Re = 700$ ,  $Q = 0.7$ , b)  $Re = 1000$ ,  $Q = 1.6$  , c)  $Re = 1000$ ,  $Q = 1.9$ .

## **2.2. Flujo a través de un arreglo de dos obstáculos magnéticos: lado-a-lado**

En la figura 2.6 se observan las líneas de corriente obtenidas numéricamente mediante el programa elaborado en este trabajo con el método de volumen finito, donde se reproducen los patrones de flujo reportados experimentalmente y los numéricos del modelo cuasi-bidimensional con fricción utilizado por Beltrán (2010). Para los valores de los parámetros,  $Re = 700$ ,  $Q = 0.7$  que coinciden con los experimentales, se observa que las líneas de corriente presentan el mismo patrón de flujo que ha sido reportado experimental y numéricamente. El par de vórtices permanentes se encontraron para valores de  $Re = 1000$  y  $Q = 1.6$ , que coinciden con los encontrados por Beltrán pero difieren de los experimentales. Por último, el patrón de flujo de desprendimiento de vórtices se obtuvo para los valores de  $Re = 1000$  y  $Q = 1.7$ , siendo estos valores los mismos que los encontrados experimentalmente. El número de Strouhal obtenido para el valor de  $Q$  en el cual aparece el desprendimiento de vórtices es de 0.19, este valor es mayor que el reportado por la solución numérica, 0.15 y por los experimentos, 0.11. La diferencia parece ser debida a los diferentes métodos utilizados para implementar el programa para la solución de las ecuaciones.

## **2.2. Flujo a través de un arreglo de dos obstáculos magnéticos: lado-a-lado**

En esta sección se estudiará el flujo a través de arreglos de dos obstáculos magnéticos que se encuentran lado a lado. Como referencia, primeramente se discutirán brevemente los tipos de patrones de flujo que se presentan en obstáculos sólidos y que han sido reportados en la literatura. Para el estudio de flujos en arreglos de dos obstáculos sólidos se pueden utilizar distintas configuraciones dependiendo la ubicación que guarde un obstáculo respecto al otro. En la literatura se encuentran estudios en los cuales los obstáculos se encuentran alineados uno en frente del otro respecto a la dirección del flujo o bien desfazados tanto vertical como horizontalmente respecto a la dirección del flujo. También se pueden colocar ambos de forma perpendicular al flujo entrante, esta última configuración es la que se conoce como arreglo lado a lado, y es la que estudiamos utilizando arreglos de obstáculos magnéticos y que presentamos en la siguiente subsección.

La interferencia que se genera entre las caudas en flujos a través de arreglos de dos obstáculos sólidos colocados lado a lado a sido estudiada de forma numérica y experimental, como se puede ver en los trabajos de Zdravkovich. (1985), Slaouti and Stansby. (1992), Meneghini et al. (2001), Peschard and Gal (1996), entre otros.

Los patrones de flujo que se generan conforme se incrementa la separación entre los ejes de los obstáculos sólidos han sido clasificadas por Zdravkovich. (1985) en cuatro regiones, como se ve en la figura 2.7. Se define una distancia adimensional,  $D$ , que sería igual a la separación entre los ejes normalizada por el diámetro del obstáculo.

Cuando la separación es lo suficientemente grande,  $D > 3,5$ , las calles de vórtices que se generan son independientes entre ellas. Para una separación entre  $2,0 > D > 3,5$  las caudas tienen fase opuesta. Para  $1,2 > D > 2,0$  la interacción entre las caudas es grande y lo que se encuentra que el flujo se inclina hacia uno de los obstáculos y detrás de éste la cauda que se observa es angosta y con una alta frecuencia de desprendimiento de vórtices, mientras que la cauda detrás del otro obstáculo es ancha y con baja frecuencia de desprendimiento de vórtices, en este patrón conocido como biestable, la inclinación de las caudas se va intercambiando en el tiempo. Cuando la separación se reduce aun más,  $1,0 > D > 1,2$ , solo se presenta una gran cauda como la cauda observada en el caso de un sólo obstáculo sólido.

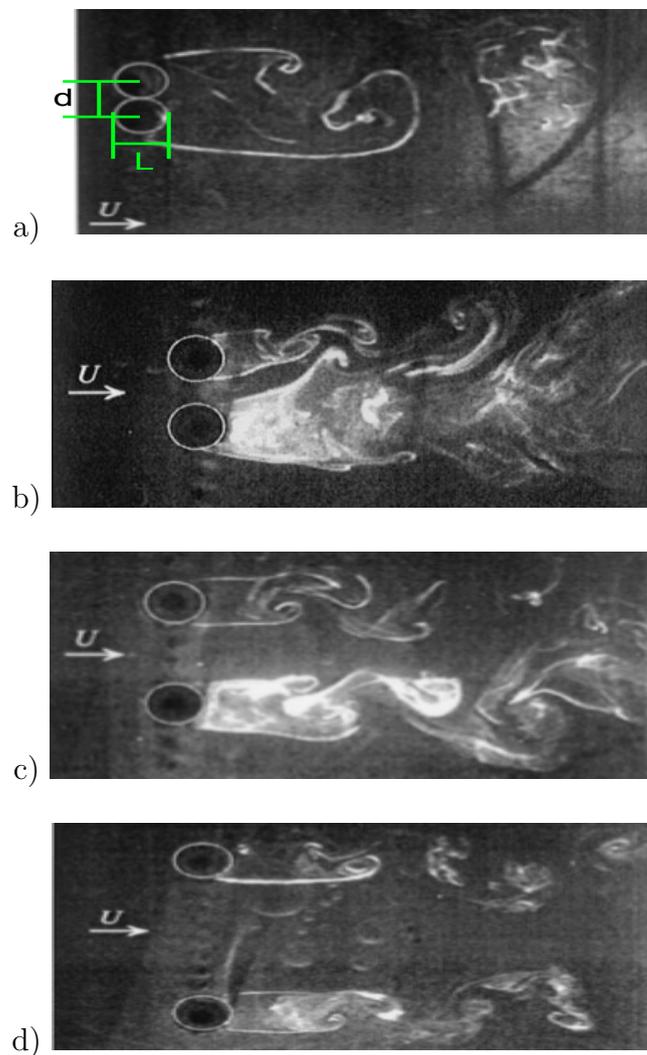


Figura 2.7: Visualización experimental de la clasificación de los regímenes de flujo en arreglos lado a lado en obstáculos sólidos. (Sumner et al., 1999)

## 2.2. Flujo a través de un arreglo de dos obstáculos magnéticos: lado-a-lado 31

En trabajos de Bearman and Wadcock (1973) y (n.d.) se reporta que el patrón de flujo biestable no se origina por causas externas sino que es una característica del flujo, por el contrario Peschard and Gal (1996) sugieren que este patrón puede ser producto de perturbaciones en el flujo de entrada.

Como se puede apreciar por estudios en obstáculos sólidos la separación entre los ejes de los obstáculos es un parámetro importante en los patrones de flujo que se obtienen en arreglos de dos obstáculos sólidos. En los arreglos de dos obstáculos magnéticos la separación entre los centros de los imanes será denotada por  $D$ , como se muestra en la figura 2.8.

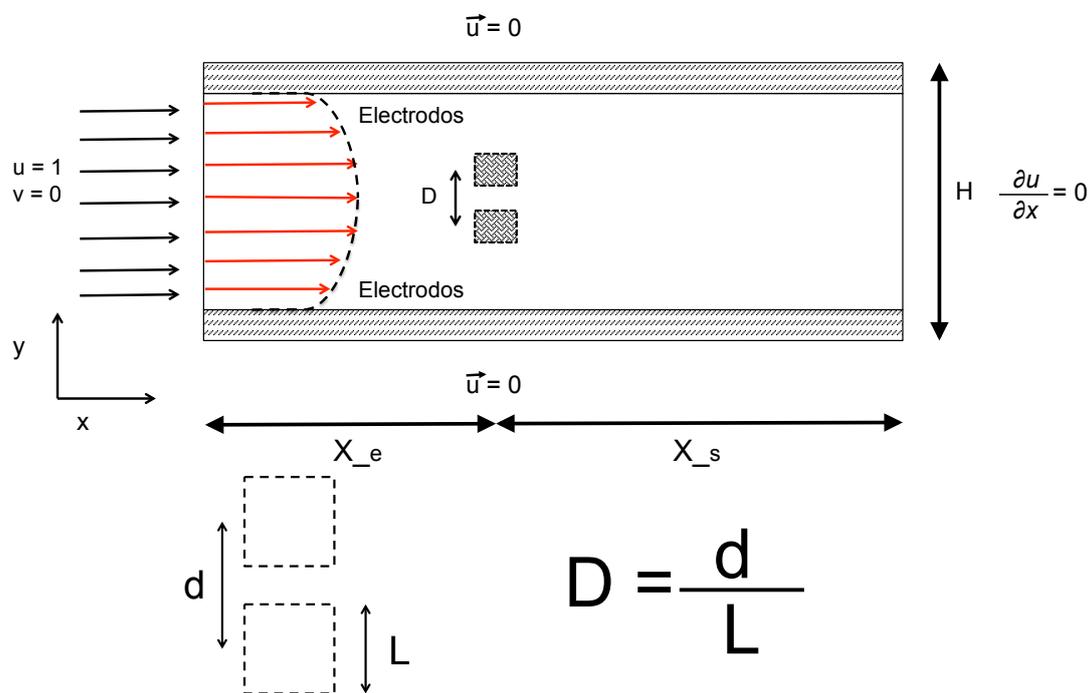


Figura 2.8: Esquema del flujo a través de dos obstáculos magnéticos y parámetros geométricos del problema.

### 2.2.1. Resultados

A continuación presentamos los resultados obtenidos numéricamente para un valor del número de Reynolds  $Re=1000$ , el cual se mantuvo fijo en todos los casos explorados. A su vez, se variaron los valores de los parámetros  $Q$  y  $D$ , que esencialmente determinan la intensidad de la fuerza de Lorentz y la separación entre los centros de los imanes permanentes, respectivamente. Los resultados numéricos fueron obtenidos en los rangos  $1,0 \leq D \leq 3,0$  y  $1,5 \leq Q \leq 10$ . La solución numérica fue obtenida en un dominio rectangular con una longitud de 35 unidades adimensionales en la dirección del flujo y 7 unidades en dirección transversal al flujo, utilizando una malla de  $212 \times 201$ .

Al igual que en el caso de un obstáculo sólidos el comportamiento del flujo pasa por tres regímenes. La transición entre el régimen de flujo de los dos vórtices permanentes y aquel en el que se presenta desprendimiento de vórtices varía dependiendo de los valores de  $D$  y  $Q$ , obteniéndose esta transición. Este comportamiento se puede sintetizar en la figura 2.9, donde se muestra un mapa de estabilidad para los casos que fueron estudiados en este trabajo.

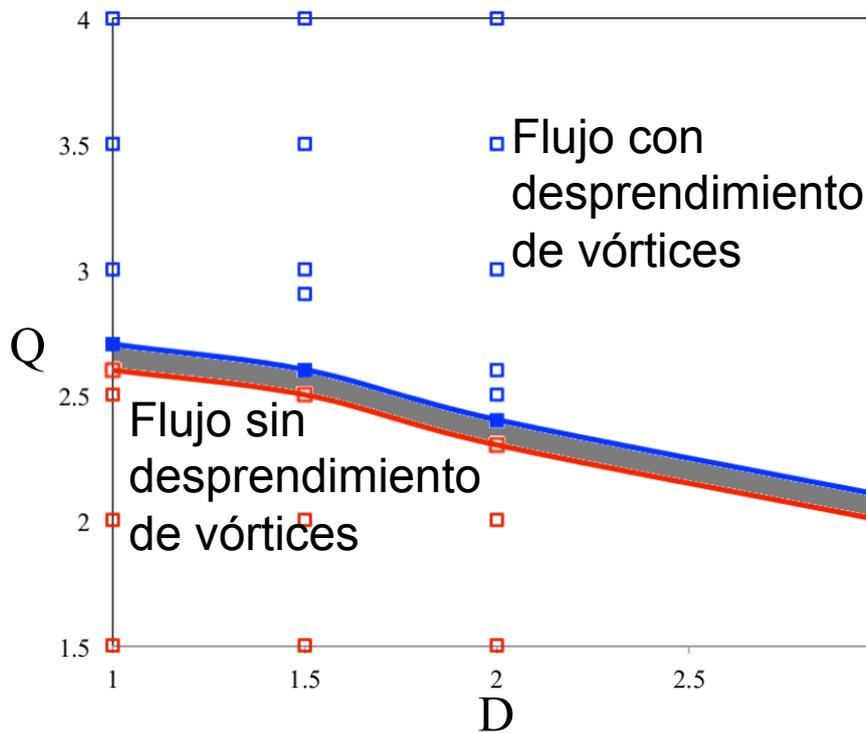


Figura 2.9: Mapa de estabilidad para el flujo a través de dos obstáculos magnéticos

### D=1

En la figura 2.10 se muestran las líneas de corriente instantáneas obtenidas numéricamente, para el caso  $D=1$  y  $Re=1000$  y distintos valores de  $Q$ . Se observa que la variación de  $Q$  da lugar a los tres regímenes de flujo que se presentan en el caso de un obstáculo magnético. En la figura 2.10a), para  $Q=1.5$  se observa un flujo donde las líneas de corriente se abren ligeramente al pasar por la ubicación de los imanes, mientras que la figura 2.10b) se presenta un par de vórtices permanentes cuando  $Q=2.6$ . A su vez, en la figura 2.10c) se observa desprendimiento de vórtices cuando el parámetro  $Q$  alcanza el valor de 2.7. Para valores mayores a  $Q=2.7$  la cauda se intensifica cada vez más, incrementándose la amplitud de la misma. La aparición de una sola cauda concuerda con lo encontrado en obstáculos sólidos y que a sido descrito en la literatura para el caso  $D=1$ .

## 2.2. Flujo a través de un arreglo de dos obstáculos magnéticos: lado-a-lado<sup>33</sup>

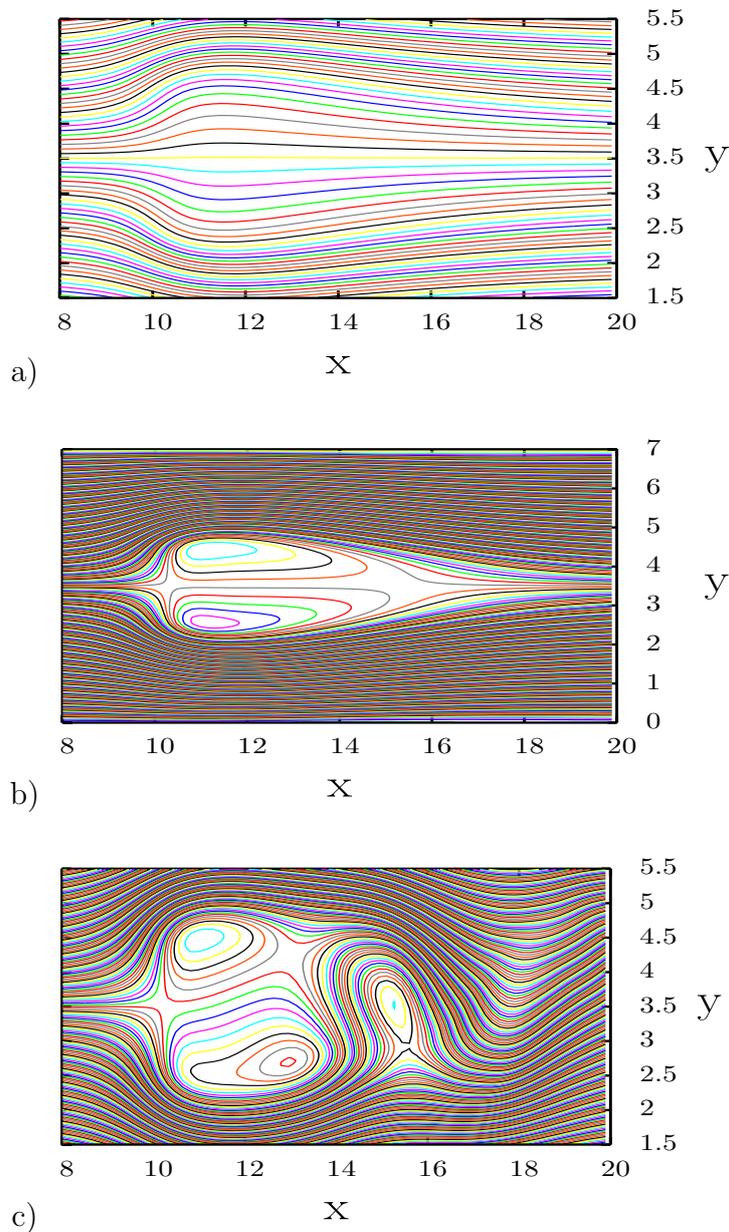


Figura 2.10: Líneas de corriente instantáneas obtenidas numéricamente para el caso de dos obstáculos magnéticos con  $Re=1000$  y  $D=1$ : a)  $Q = 1.5$ , b)  $Q = 2.6$ , c)  $Q = 2.7$ .

Con el propósito de obtener la frecuencia dominante de la calle de vórtices se calculó la vorticidad como función del tiempo cinco unidades detrás de los centros de los obstáculos magnéticos. Para el análisis de esta señal se utilizó la transformada rápida de Fourier con la cual se obtuvo el espectro de frecuencias.

En la figura 2.11 se presentan los espectros de frecuencias para las caudas que se generan a distintos valores del parámetro  $Q$ . La figura 2.11a) se obtuvo cuando  $Q=2.7$  siendo este valor de  $Q$  el primero al cual se presenta el desprendimiento de vórtices. Se observa

claramente un pico que marca la frecuencia dominante del flujo con un valor de 0.1522 y, adicionalmente, aparecen dos armónicos en 0.30 y 0.45. En el espectro de frecuencias mostrado en la figura 2.11b), correspondiente a  $Q=10$ , no es posible distinguir claramente una frecuencia característica lo que indica que para valores altos de  $Q$  el flujo pierde su periodicidad.

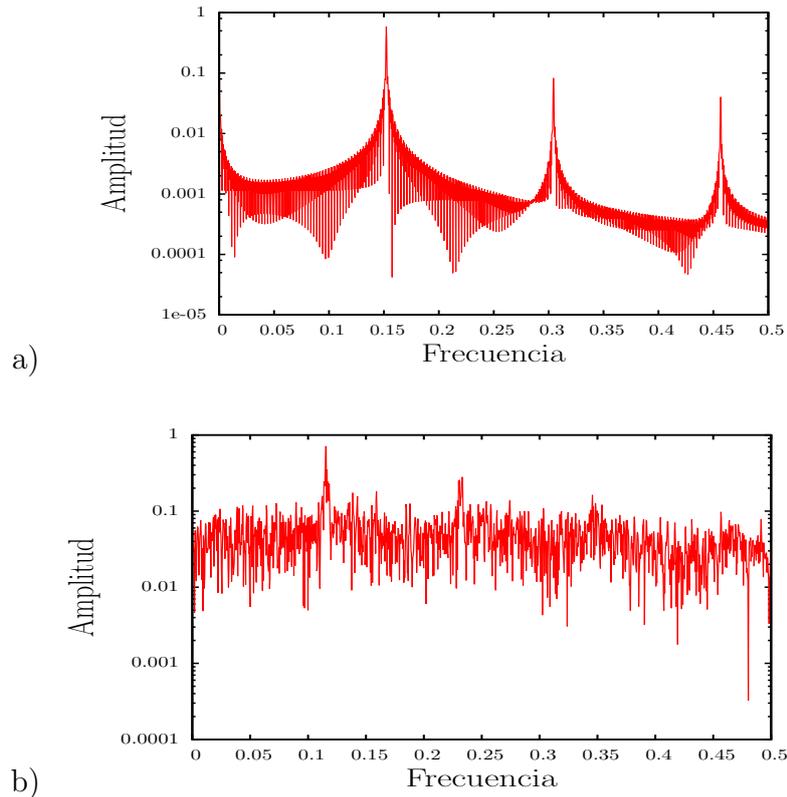


Figura 2.11: Espectro de frecuencias de la vorticidad, para un arreglo de dos obstáculos magnéticos con  $Re=1000$  y  $D=1$  a)  $Q = 2.7$ , b)  $Q = 10.0$

### $D=1.5$

Para una separación de  $D=1.5$  entre los centros de los obstáculos magnéticos se encuentra el patrón de flujo conocido como flujo biestable. En la figura 2.12 se aprecian las líneas de corriente instantáneas para distintos tiempos para un valor de  $Q=2.9$ . Se puede observar que la cauda generada al pasar a través de la brecha que hay entre los obstáculos magnéticos se inclina ligeramente primero hacia la parte inferior del eje de simetría que divide longitudinalmente la región de flujo. Para un tiempo posterior la inclinación se produce hacia la parte superior del eje de simetría. Como se menciono previamente, el patrón de flujo biestable ha sido reportado para flujos a través de arreglos de obstáculos sólidos y es interesante remarcar que en el flujo sobre obstáculos magnéticos se observe también dicho comportamiento.

## 2.2. Flujo a través de un arreglo de dos obstáculos magnéticos: lado-a-lado<sup>35</sup>

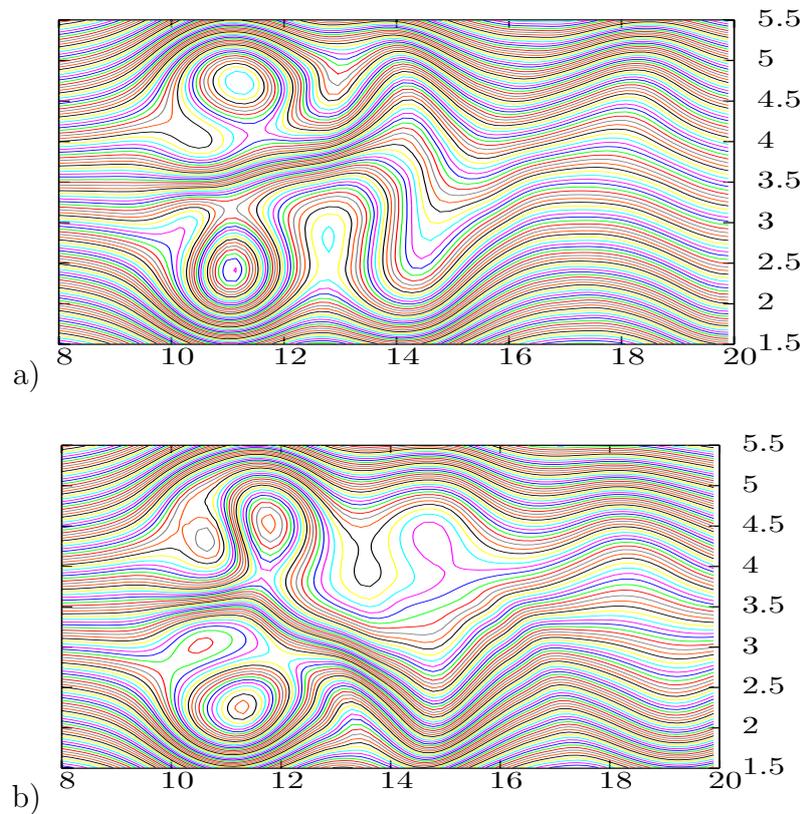


Figura 2.12: Líneas de corriente obtenidas numéricamente en dos instantes distintos para el caso de dos obstáculos magnéticos con  $Re=1000$ ,  $Q=2.9$  y  $D=1.5$ . : a)  $t=1978$ , b)  $t=1992$ .

En la figura 2.13.a) se presenta el espectro de frecuencias obtenido a partir del cálculo de la vorticidad sobre el eje de simetría cinco unidades aguas abajo de la posición de los imanes, para el caso  $Q=2.9$  correspondiente a las líneas de corriente mostradas en la figura 2.12. El espectro no muestra con claridad la existencia de frecuencias características en el flujo aunque se sobresalen ligeramente tres picos que podrían estar asociados con dichas frecuencias.

En la figura 2.13.b) muestra el espectro de frecuencias para un flujo producido por un valor de  $Q=10$ . Aunque en este caso el espectro tampoco tiene una estructura muy clara, al parecer se vislumbran algunos picos que podrían estar asociados a las frecuencias características del flujo. Una de ellas parece estar localizada en 0.28 con un armónico en 0.56. Otros picos aparecen en 0.36, 0.4 y 0.44.

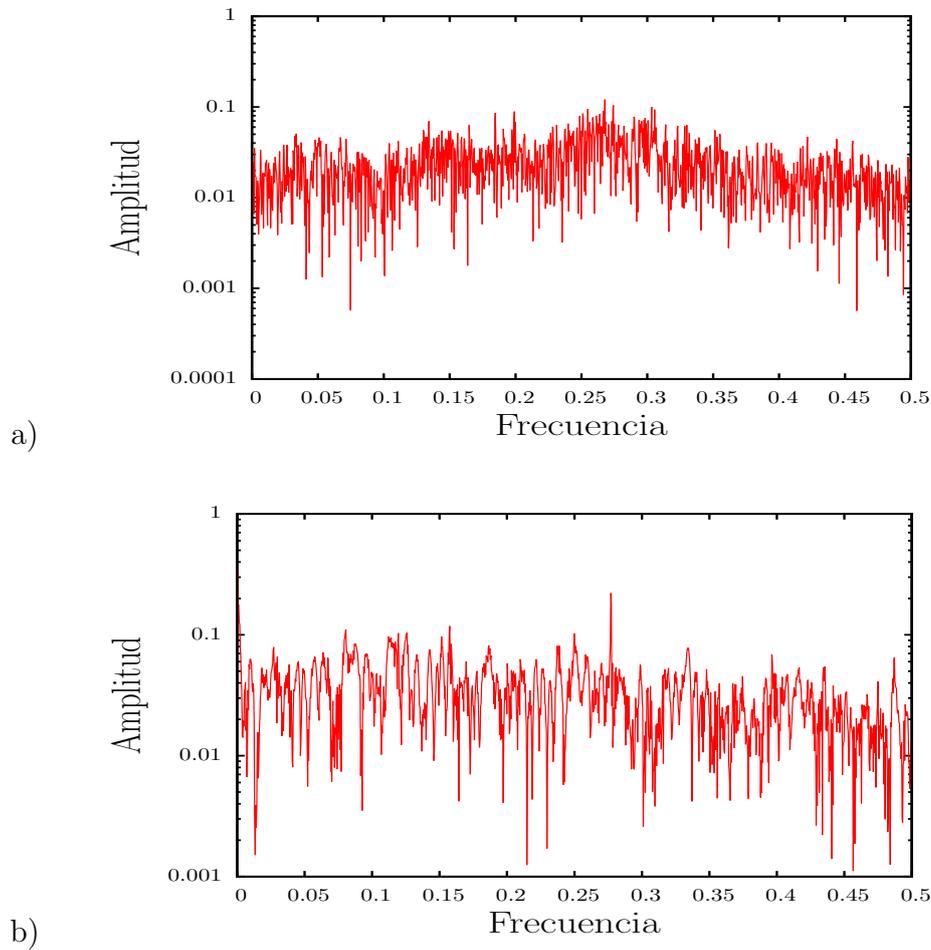


Figura 2.13: Espectro de frecuencias de la vorticidad, para un arreglo de dos obstáculos magnéticos con  $Re=1000$  y  $D=1.5$  a)  $Q = 2.9$ , b)  $Q = 10$ .

### D=2

Ahora exploramos el caso  $D=2$  variando el parámetro  $Q$ . Para valores de  $Q$  menores a 2.3 se encuentra un flujo estacionario donde las líneas de corriente se abren ligeramente en la región donde se encuentra del campo magnético localizado. Cuando  $Q=2.3$  aparece un par de vórtices estacionarios, y para valores mayores o iguales a  $Q=2.4$  se observa el desprendimiento de vórtices.

En la figura 2.14a) se muestra el patrón de flujo para  $Q=2.4$  donde ambas caudas oscilan en fase. En este caso no se observa la inclinación de las caudas por lo que el flujo biestable parece estar ausente.

## 2.2. Flujo a través de un arreglo de dos obstáculos magnéticos: lado-a-lado37

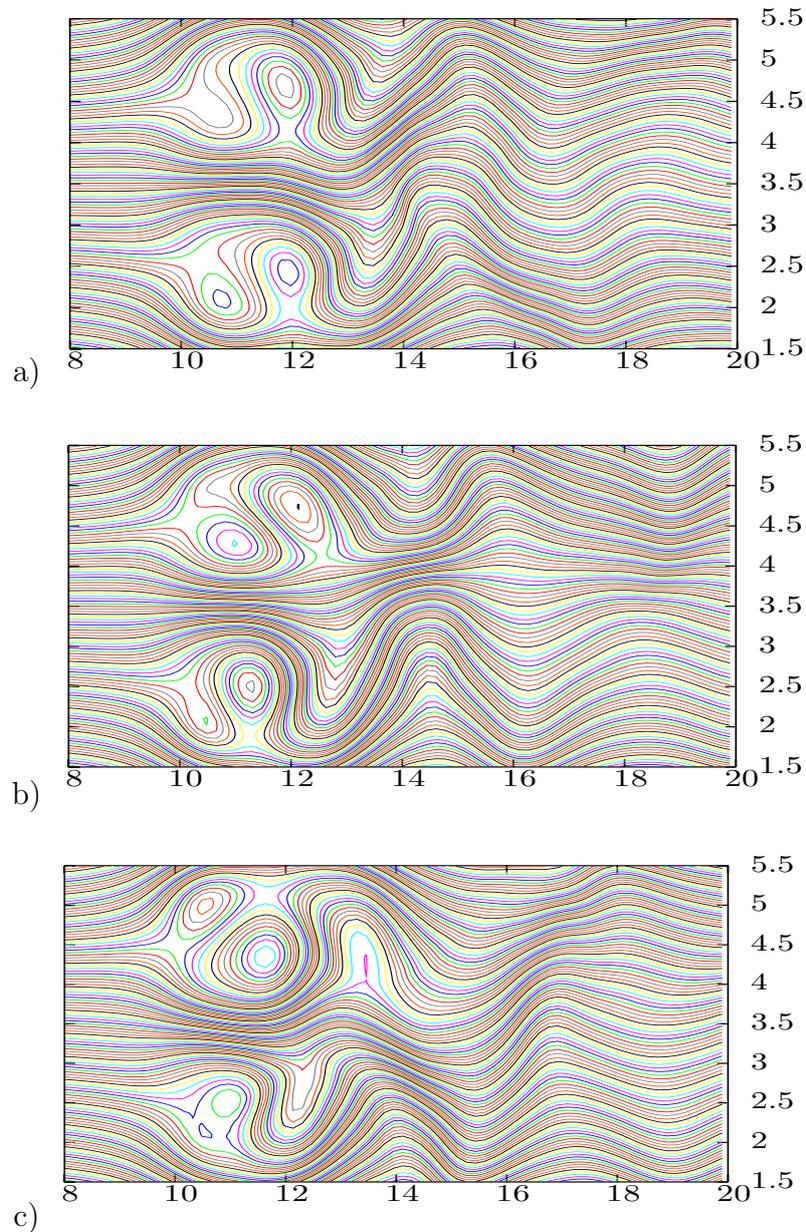


Figura 2.14: Líneas de corriente instantáneas obtenidas numéricamente para el caso dos obstáculos magnéticos con  $Re=1000$  y  $D=2$ . : a)  $Q=2.4$   $t=2000$ , b)  $Q = 2.6$ ,  $t=1990$ , c)  $Q = 2.6$ ,  $t=1997$

Por otro lado, para valores de  $Q$  mayores a 2.4 se encuentra el patrón de flujo biestable. Las figuras 2.14b) y 2.14c) muestran las líneas de corriente para el caso  $Q=2.6$ , a dos distintos tiempos. En estos ejemplos se manifiesta el flujo biestable al observar en la figura 2.14b) que el flujo tiende hacia la parte superior del eje de simetría en un instante dado mientras que en la figura 2.14c) se inclina hacia la parte inferior de dicha línea en un instante posterior.

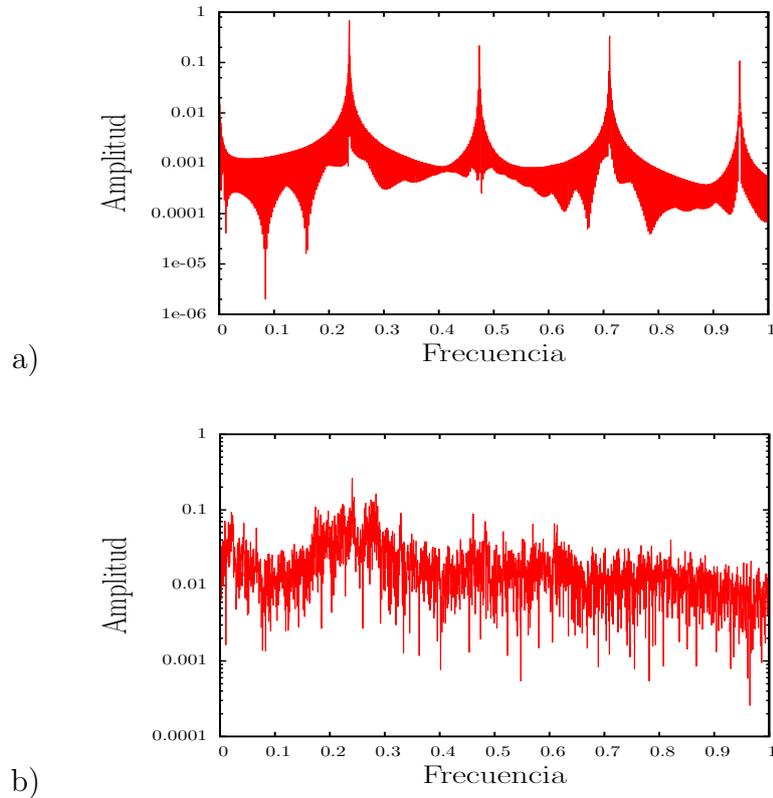


Figura 2.15: Espectro de frecuencias de la vorticidad, para un arreglo de dos obstáculos magnéticos con  $Re=1000$  y  $D=2$ : a)  $Q = 2.4$ , b)  $Q = 2.6$ .

La figura 2.29 muestra el espectro de frecuencias para los casos  $Q=2.4$  y  $2.6$ . La figura 2.29a) corresponde al caso de  $Q=2.4$  en donde claramente se aprecia una frecuencia dominante con un valor de  $0.24$  y sus armónicos ( $0.48$ ,  $0.72$  y  $0.95$ ). Este resultado concuerda cualitativamente con el caso  $D=1$  y  $Q=2.7$  (ver figura 2.11a), donde se tiene una sola cauda y una frecuencia característica bien definida como sucede con un solo obstáculo. Por otra parte, en el espectro de frecuencias correspondiente a  $Q=2.6$  (figura 2.29b) no es clara la existencia de frecuencias características para el flujo biestable. Esto indicaría que la oscilación que lleva a la inclinación de las caudas no es periódica.

### D=3

Al llegar a una separación entre los centros de los imanes de  $D=3$ , la interacción entre las caudas es menos intensa. En este caso el desprendimiento de vórtices se presenta cuando  $Q=2.2$ , observándose dos caudas periódicas en fase. Al aumentar el parámetro  $Q$  a  $2.3$  (figura 2.16a) las caudas siguen manteniéndose en fase.

## 2.2. Flujo a través de un arreglo de dos obstáculos magnéticos: lado-a-lado 39

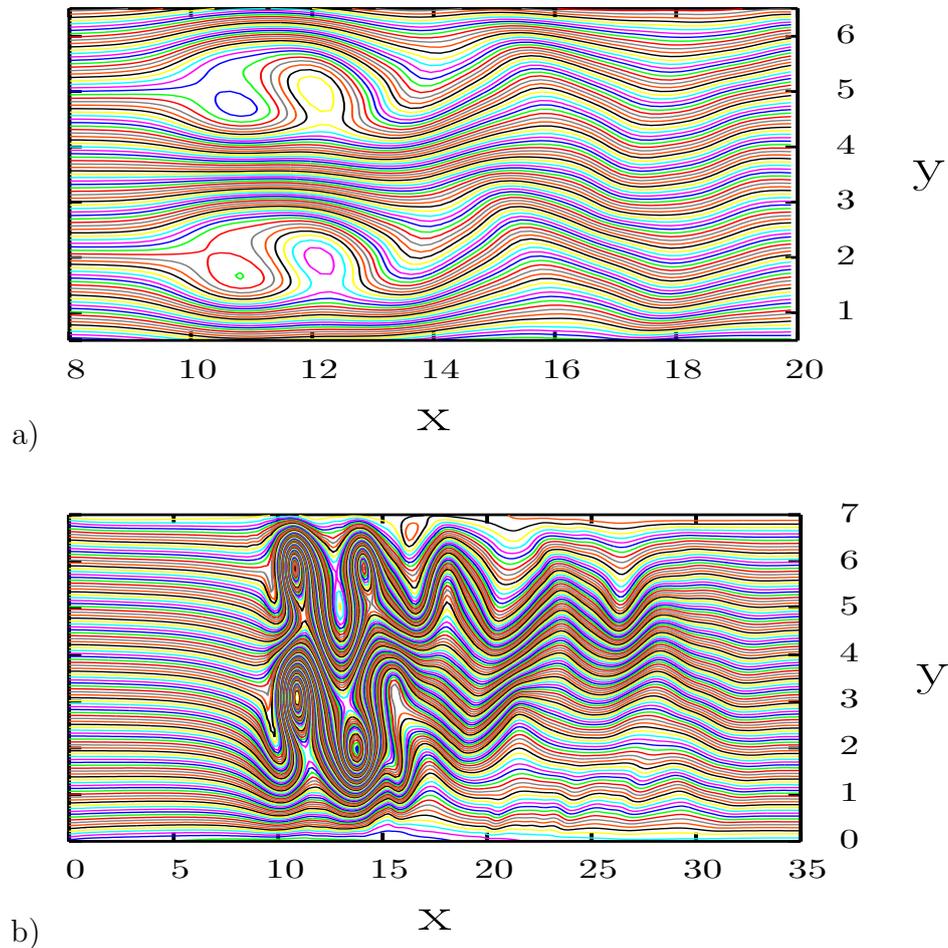


Figura 2.16: Líneas de corriente instantáneas obtenidas numéricamente para el caso de dos obstáculos magnéticos con  $Re=1000$  y  $D=3$ .: a)  $Q = 2.3$ , b)  $Q = 10$ .

Al incrementar el valor de  $Q$  a 10 (figura 2.16b), el flujo se hace más intenso y la amplitud de las caudas es tan grande que éstas interactúan con la pared del ducto.

La figura 2.17 muestra los correspondientes espectros de frecuencias para los casos  $Q=2.3$  y 10. Para  $Q=2.3$  (figura 2.17a) claramente se observa una frecuencia dominante con valor de 0.23 y sus armónicos aproximadamente en 0.46 y 0.72. En el espectro correspondiente a  $Q=10$  (figura 2.17b) no es posible discernir la existencia de una frecuencia característica.

Aunque es necesario un análisis más exhaustivo, los resultados parciales con los que se cuenta en este caso parecen indicar que para valores menores de 2.4 las caudas interactúan muy débilmente y podrían considerarse independientes. Sin embargo, dada la cercanía con las paredes, las caudas parecen ser influenciadas por las mismas.

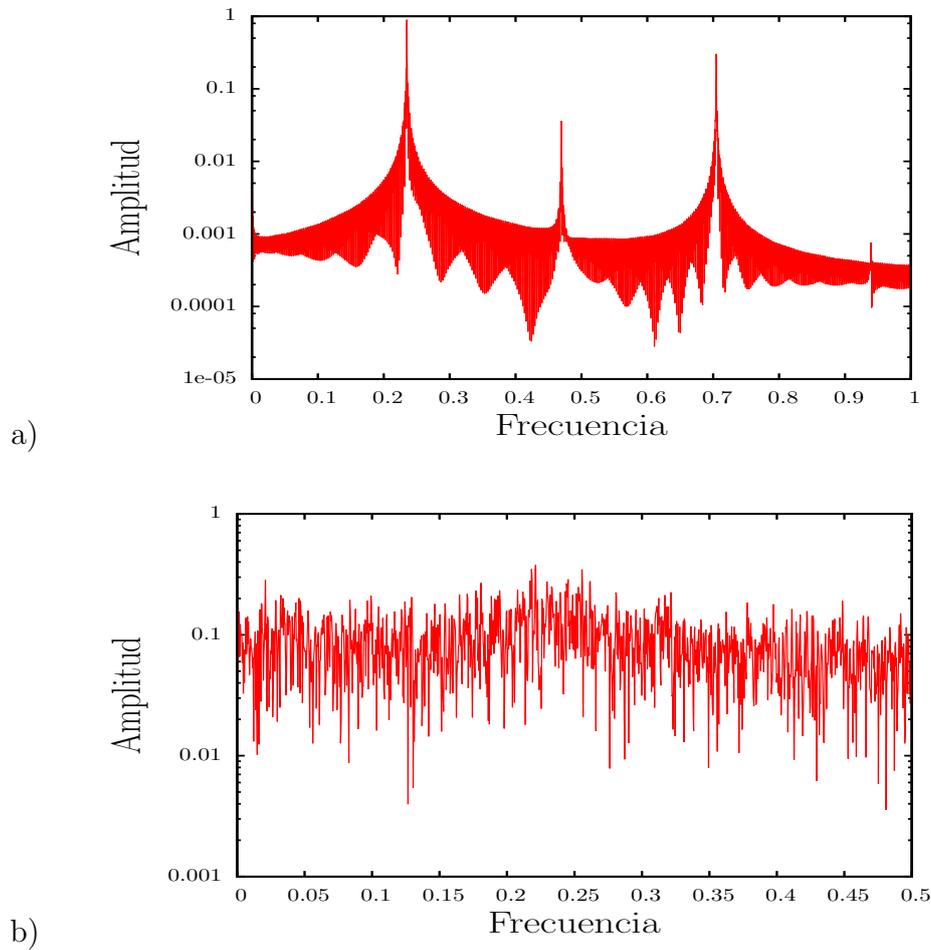


Figura 2.17: Espectro de frecuencias de la vorticidad, para un arreglo de dos obstáculos magnéticos con  $Re=1000$  y  $D=3$ .: a)  $Q = 2.3$ , b)  $Q = 10$

### 2.3. Flujo a través de arreglos de tres obstáculos

El flujo a través de tres obstáculos sólidos a sido estudiado de forma numérica y experimental en los rango  $500 \leq Re \leq 3000$   $Re$ . Se ha logrado clasificar el comportamiento del flujo en distintos patrones de acuerdo a la separación de los centros de los obstáculos, considerando que los tres obstáculos son del mismo tamaño y que la separación entre el obstáculo central y los laterales es la misma.

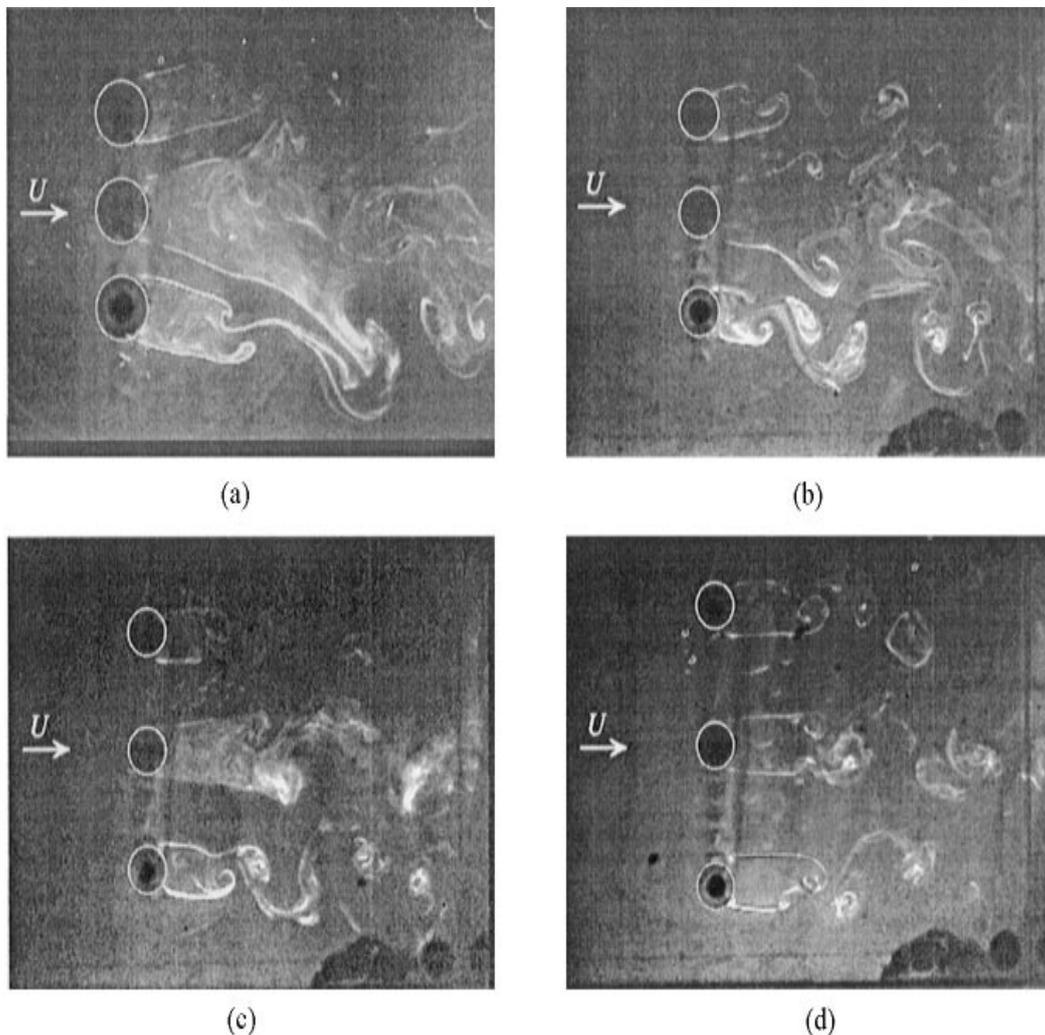


Figura 2.18: Visualización experimental del flujo a través de tres obstáculos sólidos en arreglo lado a lado para  $Re=1900$ : a)  $D=1.5$ , b)  $D= 2.0$ , c)  $D= 2.5$  y d)  $D= 3.0$ ; Sumner et al. (1999)

Se ha reportado (Sumner et al., 1999) que si la separación está en el rango  $1,0 < D < 1,125$ , se presenta solo una cauda como la observada con un solo obstáculo sólido. Al incrementar la separación en el rango  $1,125 < D < 1,35$ , se presenta una inclinación de los flujos que pasan entre los obstáculos hacia uno de los lados. Para  $1,35 < D < 2,2$ , los flujos que pasan entre los obstáculos presentan una inclinación hacia las regiones laterales externas, por lo que detrás del obstáculo del centro se forma una cauda mas ancha que aquellas que se forman detrás de los obstáculos que se encuentran por fuera del arreglo. Para el caso  $3,5 < D$ , las caudas que se generan son independientes entre ellas y tienen la misma frecuencia.

En el trabajo de Kang. (2004) se presenta una clasificación diferente correspondiente a  $D < 0,3$  se presenta solo una cauda como en la clasificación anterior. Para  $D \approx 0,3$  donde solo se presenta una única cauda en la cual los flujos entre los obstáculos presentan una inclinación por lo que el patrón de flujo se llama de cauda desviada. Al incrementar la separación en el rango  $0,3 < D < 1,2$  la estructura de flujo que se presenta es el flujo biestable. Para  $D \approx 1,5$ , la estructura del flujo que se penetra es una acuda en fase sincronizada. Para el caso  $2,0 < D$ , el patrón de flujo se denomina flujo de modulación sincronizada donde se presenta un flujo sincronizado en fase en la cual las calles de vórtices se desprenden casi en fase entre ellos, donde la frecuencia de los dos obstáculos de la orilla es un poco menor que la frecuencia de desprendimiento del obstáculo del centro. Por lo que el autor propone que esta pequeña diferencia de las frecuencias genera un fenómeno de modulación, por lo que le asigna el nombre de modulación sincronizada a este patrón de flujo.

### 2.3.1. Resultados

A continuación se presentarán los resultados numéricos para el flujo a través de tres obstáculos magnéticos variando los parámetros  $D$  y  $Q$ . Todos los resultados corresponden al mismo número de Reynolds ( $Re=1000$ ).

#### $D=1$

Los resultados obtenidos para el arreglo de tres obstáculos magnéticos con una separación de  $D=1$  se presentan en la fig. 2.19, en donde se presentan las líneas de corriente y las gráficas correspondientes de vorticidad contra tiempo obtenidas al variar los valores de  $Q$  entre 4.1 y 5.3. Se puede apreciar que los patrones de flujo son similares a los de un solo obstáculo magnético, dado que al estar juntos los imanes se comportan como un solo imán grande. Las gráficas de vorticidad contra tiempo corresponden al punto  $x=30$ ,  $y=3.5$ , es decir, veinte unidades detrás del obstáculo central sobre la línea de simetría. En la figura 2.19a) observa que para  $Q=4.1$  aparecen dos incipientes recirculaciones y el flujo es estacionario, alcanzando la vorticidad un valor ligeramente mayor a cero. Al aumentar el valor a  $Q=4.5$  (figura 2.19b), se observa una oscilación de la vorticidad al inicio del flujo pero finalmente alcanza un valor cercano a cero. Los vórtices detrás del obstáculo permanecen estacionarios pero aumentan su tamaño. Este comportamiento persiste al aumentar el valor de  $Q$ , observándose cada vez vórtices mejor definidos hasta llegar al valor de  $Q=5.3$  donde se presenta un desprendimiento periódico de vórtices, como se puede ver en la figura 2.19c) por medio de las líneas de corriente y del comportamiento de la vorticidad.

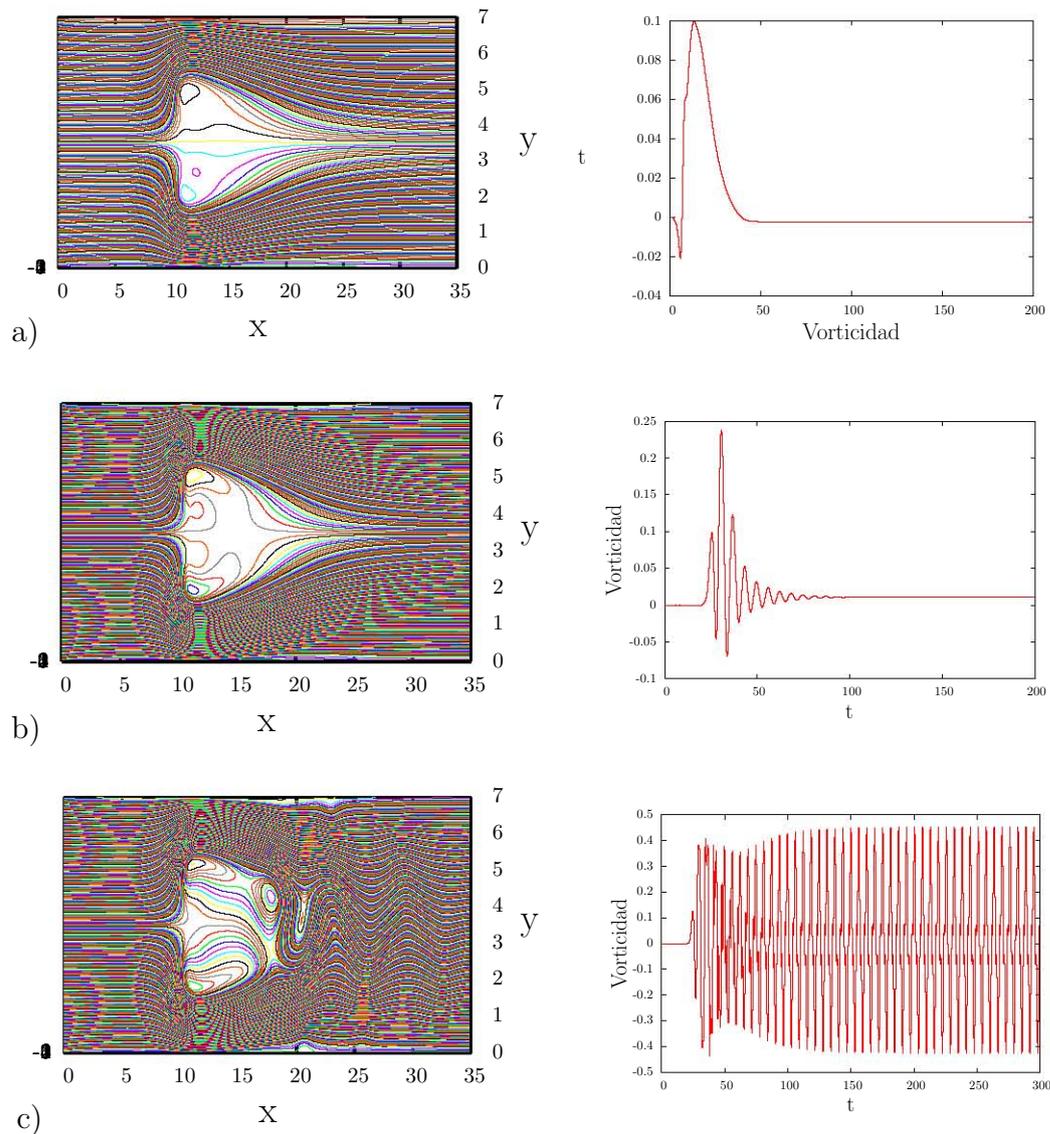


Figura 2.19: Líneas de corriente y vorticidad vs tiempo para un flujo a través de 3 obstáculos magnéticos con  $Re=1000$  y  $D=1$ ; a)  $Q=4.1$ , b)  $Q=4.5$ , c)  $Q=5.3$

En la columna izquierda de la figura 2.20 se presentan las gráficas de vorticidad contra tiempo medida sobre la línea de simetría de cada imán 20 unidades detrás de los centros de cada uno de ellos, para  $Re=1000$  y  $Q=5.3$ , que es el valor de  $Q$  donde se presenta desprendimiento de vórtices. En la columna derecha de la figura 2.20 se muestran los espectros de potencia de la señal de vorticidad para las posiciones correspondientes donde se puede apreciar claramente una misma frecuencia dominante para las tres posiciones y la presencia de armónicos. Notemos que en las gráficas de vorticidad vs tiempo en la posición inferior ( $y=2.5$ , figura 2.20a) la vorticidad oscila alrededor de un valor positivo mientras que en la posición superior ( $y=4.5$ , figura 2.20c) lo hace alrededor de un valor

negativo. A su vez, en la posición central ( $y=3.5$ , figura 2.20b) las oscilaciones se dan alrededor del cero. Observamos también el parecido de los espectros correspondientes a las posiciones superior e inferior y las ligeras diferencias respecto al central.

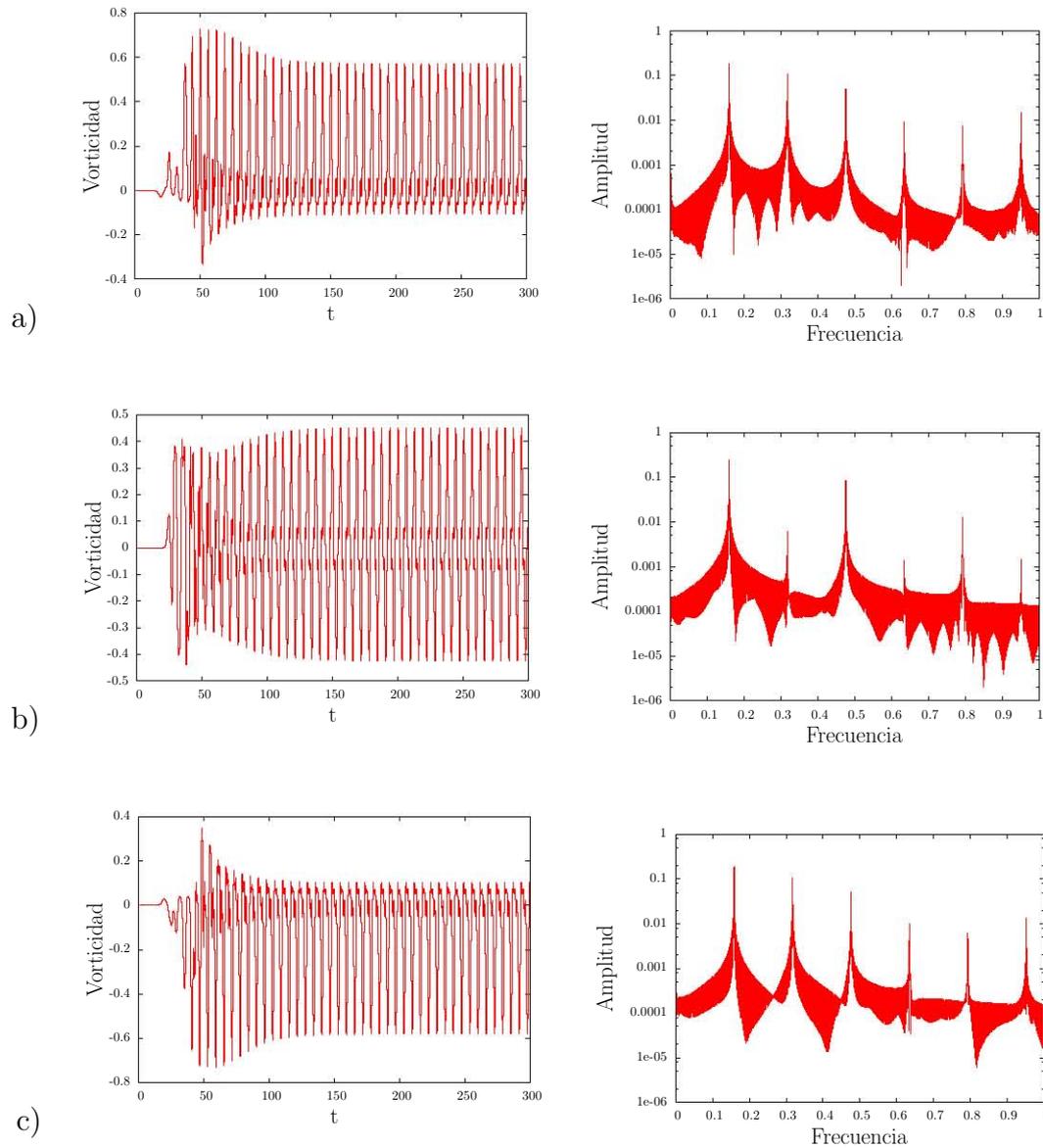


Figura 2.20: Vorticidad vs tiempo (columna izquierda) y espectro de frecuencias de la vorticidad (columna derecha), para un arreglo de 3 obstáculos magnéticos con  $D=1$ ,  $Re=1000$ ,  $Q=5.3$ . La posición donde se calcula la vorticidad es: a)  $x=30$ ,  $y=2.5$ , b)  $x=30$ ,  $y=3.5$ , c)  $x=30$ ,  $y=4.5$ .

La frecuencia dominante obtenida en las tres posiciones es la misma e igual a 0.16, observándose igualmente los armónicos correspondientes, por ejemplo, a 0.32 y 0.48.

**D=1.3**

Al incrementar la separación entre los imanes a  $D=1.3$  el patrón de flujo cambia sustancialmente, lo que puede observarse en la figura 2.21, donde se muestran las líneas de corriente y las gráficas de la vorticidad vs. tiempo calculadas cinco unidades aguas abajo del centro de del imán central, es decir, en el punto  $x=15$ ,  $y=3.5$ . En la fig. 2.21a) se presenta el resultado para  $Q=3.5$  donde podemos observar en el panel izquierdo que no hay desprendimiento en ninguno de los obstáculos magnéticos. En la gráfica de vorticidad vs. tiempo se observa una ligera perturbación solo al inicio del flujo, alcanzándose después una vorticidad nula.

En la fig. 2.21b) correspondiente a  $Q=3.6$ , podemos ver que en los obstáculos laterales se presenta desprendimiento de vórtices, sin embargo en el del centro no se observa la formación de vórtices sino de una estela que oscila periódicamente, lo que puede verificarse observando la gráfica correspondiente (panel derecho) de vorticidad vs. tiempo. Al analizar el espectro de frecuencias (que no se muestra aquí) se encuentra que las caudas detrás de los tres obstáculos tienen la misma frecuencia característica y están en fase. Si incrementamos el valor a  $Q=4.1$  en los obstáculos laterales continua el desprendimiento de vórtices y aparece de manera incipiente en el obstáculo central. Nuevamente el espectro de frecuencias (no mostrado aquí) revela que las tres caudas tienen la misma frecuencia característica y armónicos.

Cuando  $Q=4.2$  (ver figura 2.21c), el desprendimiento periódico de vórtices se da claramente detrás de los tres obstáculos aunque de manera dominante en el obstáculo central.

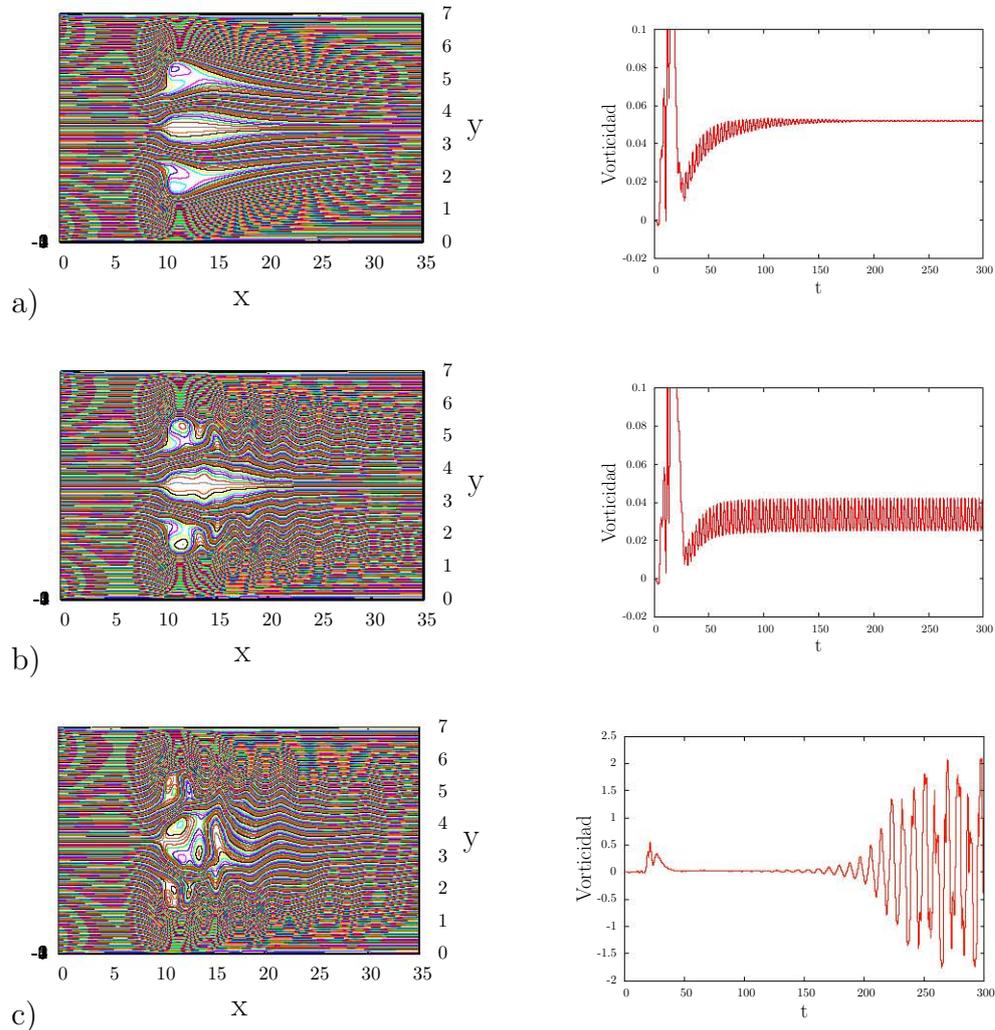


Figura 2.21: Líneas de corriente (columna izquierda) y vorticidad vs tiempo (columna derecha) para un flujo a través de 3 obstáculos magnéticos con  $Re=1000$  y  $D=1.3$ .; a)  $Q=3.5$ , b)  $Q=3.6$ , c)  $Q=4.2$ . Las gráficas de vorticidad corresponden al punto  $x=15$ ,  $y=3.5$ , localizado cinco unidades aguas abajo del imán central.

En la figura 2.22 se muestran los espectros de frecuencia de las señales de vorticidad detrás de obstáculo del centro variando  $Q$  de  $Q=4.0$  a  $Q=4.2$ . Se observa que con  $Q=4.0$  la amplitud de la frecuencia característica es dos órdenes de magnitud menor respecto a la frecuencia característica para el caso  $Q=4.1$  y tres órdenes de magnitud menor respecto al caso  $Q=4.2$ . Hay que notar que mientras que en los casos  $Q=4.0$  y  $Q=4.1$  la frecuencia característica se identifica claramente, cuando  $Q=4.2$  aparecen frecuencias que tienen amplitudes cercanas a la característica.

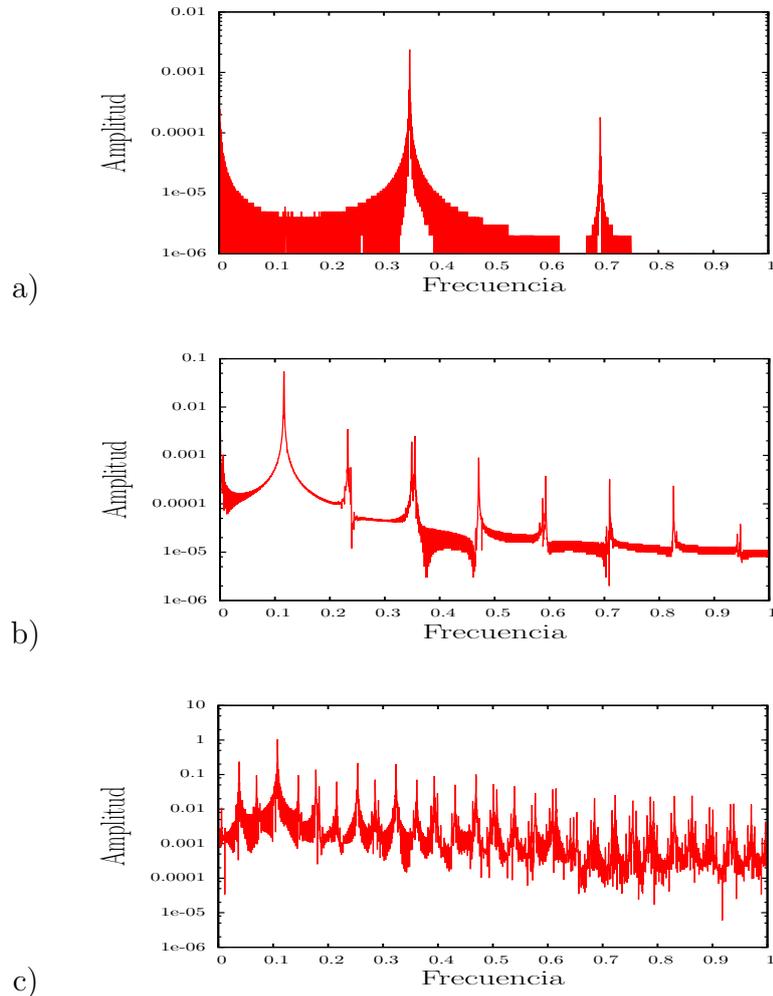


Figura 2.22: Espectro de frecuencias de la vorticidad, para un arreglo de obstáculos magnéticos con  $D=1.3$ ,  $Re=1000$ ,  $x=15$ ,  $y=3.5$ : a)  $Q=4.0$  b)  $Q=4.1$ , c)  $Q=4.2$

### **D=1.8**

Cuando se incrementa la separación de los obstáculos magnéticos a un valor de  $D=1.8$ , se encuentra un patrón de flujo parecido al descrito para los obstáculos sólidos. El flujo puede describirse como flujo biestable para ciertos valores de  $Q$  y una de sus características es que el fluido que pasa entre los obstáculos tiene una inclinación hacia los obstáculos laterales, haciendo que la cauda que se encuentra detrás del obstáculo del centro sea más ancha. Un tiempo después, el fluido entre los obstáculos fluye de manera paralela dando lugar a una cauda en el centro de menor tamaño que el observado tiempo antes.

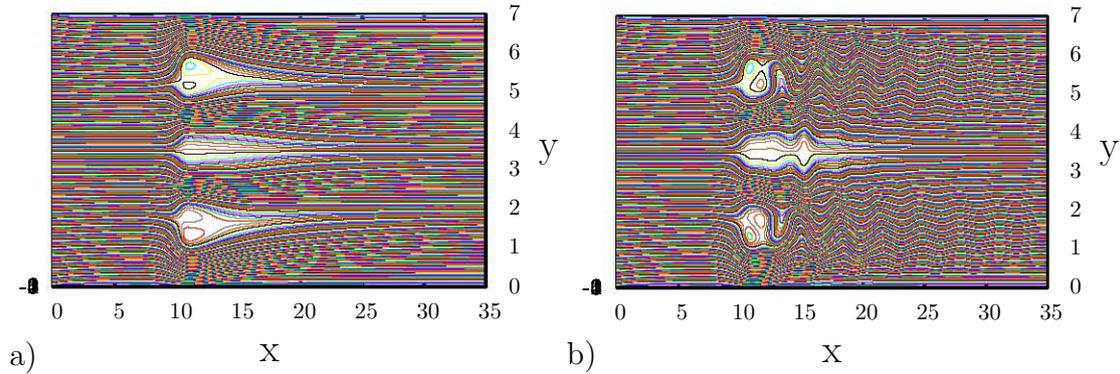


Figura 2.23: Líneas de corriente instantáneas, para un arreglo de 3 obstáculos magnéticos con  $D=1.8$ ,  $Re=1000$ . a)  $Q=3.0$ , b)  $Q=3.1$ .

La figura 2.23 muestra las líneas de corriente instantáneas con  $D=1.8$  para los casos  $Q=3.0$  y  $Q=3.1$ . Se observa que cuando  $Q=3.0$  se forman caudas paralelas estacionarias detrás de los tres obstáculos (figura 2.23a). Al incrementar el valor de  $Q$  a 3.1 (figura 2.23b), de manera similar al caso  $D=1.3$ , en las caudas detrás de los obstáculos externos del arreglo se produce un desprendimiento de vórtices periódico mientras que en la cauda correspondiente al obstáculo central solo se encuentra una oscilación periódica sin desprendimiento de vórtices.

El patrón de flujo ligeramente biestable se puede apreciar en la figura 2.24, donde se muestran las líneas de corriente obtenidas con un valor de  $Q=4.2$  y  $Re=1000$  a dos instantes distintos. La figura 2.24a) corresponde a un tiempo adimensional de  $t=1982$  y se observa un flujo que aunque presenta ondulaciones es aproximadamente paralelo. Por su parte, la figura 2.24b) corresponde a un tiempo  $t=1993$  y se aprecia que el flujo entre los obstáculos tiene una ligera inclinación hacia los obstáculos exteriores del arreglo, ensanchándose la cauda central.

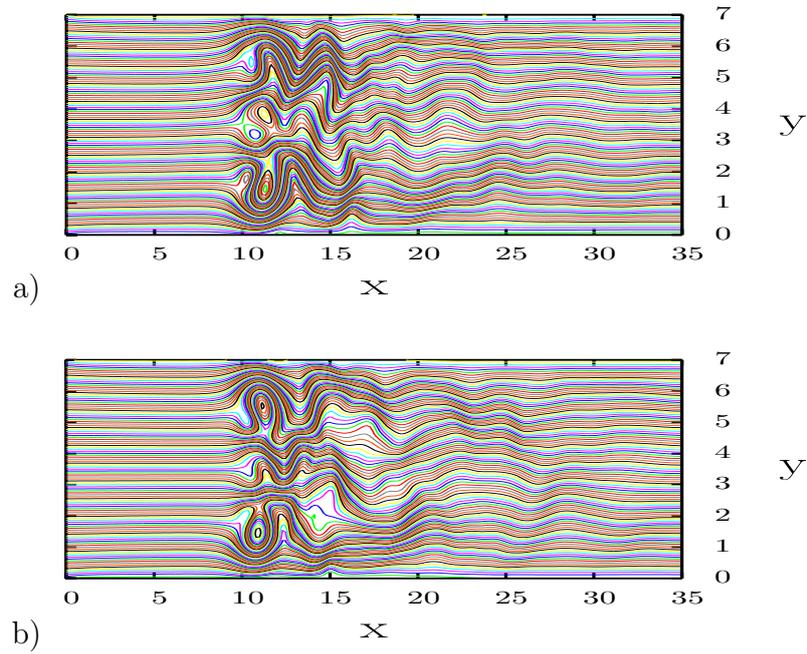


Figura 2.24: Líneas de corriente obtenidas para el caso  $Re=1000$ ,  $Q=4.2$  y  $D=1.8$  para dos instantes distintos. : a)  $t=1982$ , b)  $t=1993$ .

En la figura 2.25 de la vorticidad calculada cinco unidades aguas abajo de los centros de cada obstáculo magnéticos, correspondiente al caso  $Q=4.2$ . Se observa que no es posible determinar una frecuencia dominante del sistema ni para alguna de las caudas en particular.

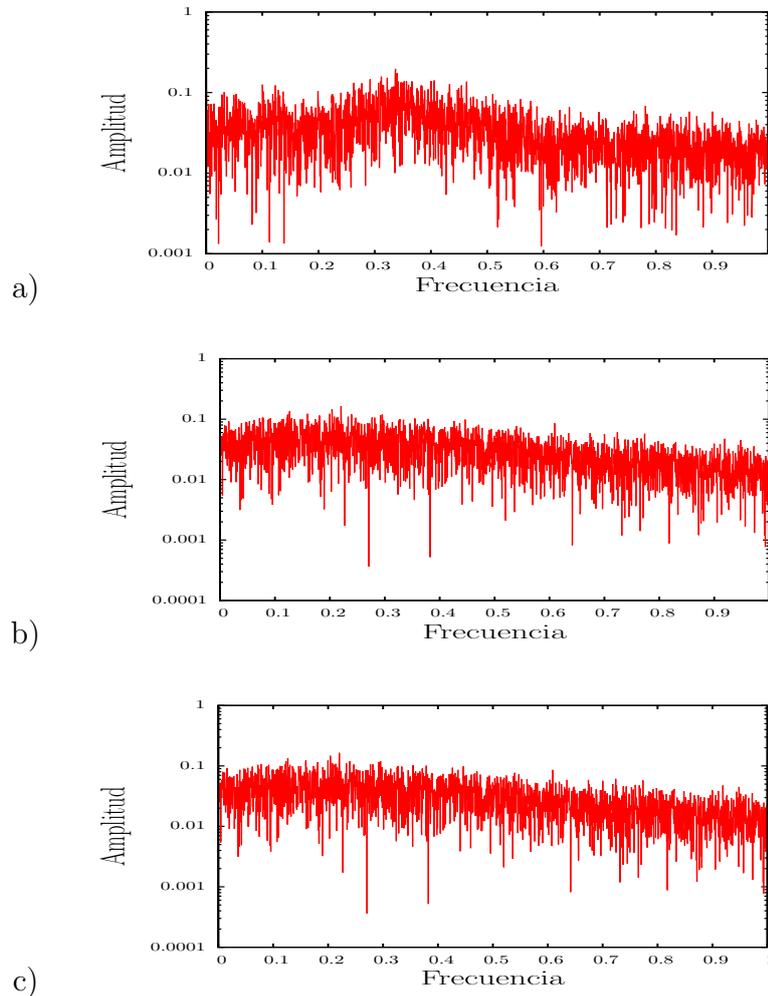


Figura 2.25: Espectro de frecuencias de la vorticidad, para un arreglo de tres obstáculos magnéticos con  $D=1.8$ ,  $Re=1000$ ,  $Q=4.2$ . La vorticidad fue calculada cinco unidades aguas abajo del centro de cada obstáculo en las posiciones: a)  $x=15$ ,  $y=1.7$  b)  $x=15$ ,  $y=3.5$ , c)  $x=15$ ,  $y=5.3$ .

## D=2

En la figura 2.26 se presentan las líneas de corriente y las gráficas de vorticidad vs. tiempo para el caso  $D=2$  con dos valores de  $Q$ . Se observa que cuando  $Q=2.9$  (figura 2.26a) el flujo se altera ligeramente por la presencia de los campos magnéticos localizados, siendo estacionario con caudas paralelas y sin desprendimiento de vórtices. Al aumentar el valor de  $Q$  a 3.0 (figura 2.26b), se observa un desprendimiento periódico de vórtices en las caudas de los obstáculos externos, mientras que la cauda central muestra solo una oscilación periódica sin desprendimiento de vórtices. Dicha oscilación se manifiesta en la gráfica de vorticidad vs. tiempo. Este comportamiento se mantiene hasta el valor de  $Q=4.0$ , como puede observarse en la figura 2.27a), solo que en la cauda central aparecen recirculaciones

y las caudas laterales incrementan su amplitud de oscilación. Al alcanzar el valor de  $Q=4.1$  (figura 2.27b) se observa una intensificación de la vorticidad en el obstáculo del centro creándose una cauda que pareciera estar en fase con las caudas de los obstáculos externos. Sin embargo, la gráfica de vorticidad vs. tiempo detrás del obstáculo central no muestra un comportamiento periódico sino bastante desordenado.

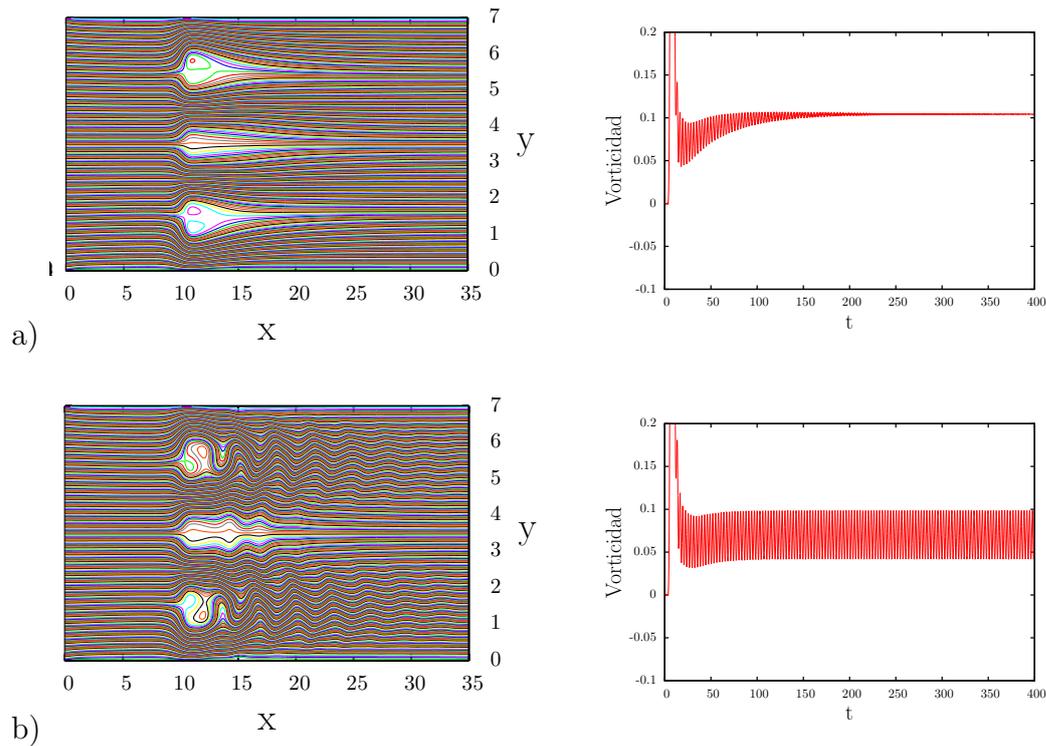


Figura 2.26: Líneas de corriente instantáneas (columna izquierda) y vorticidad vs. tiempo (columna derecha) para un flujo a través de 3 obstáculos magnéticos con  $Re=1000$ ,  $D=2$ . La vorticidad está calculada en el punto  $x=15$ ,  $y=3.5$ .; a)  $Q=2.9$ , b)  $Q=3.0$ .

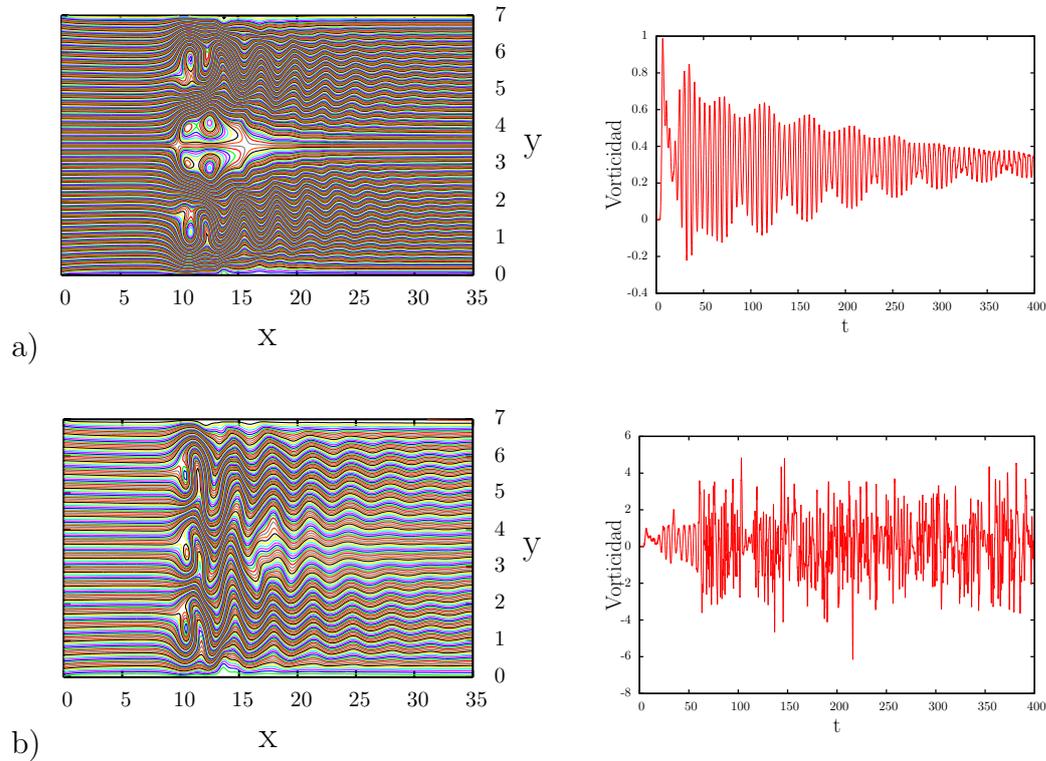


Figura 2.27: Líneas de corriente instantáneas (columna izquierda) y vorticidad vs. tiempo (columna derecha) para un flujo a través de 3 obstáculos magnéticos con  $Re=1000$ ,  $D=2$ . La vorticidad está calculada en el punto  $x=15$ ,  $y=3.5$ .; a)  $Q=4.0$ , b)  $Q=4.1$

En la figura 2.28 se muestran los espectros de frecuencia de la vorticidad detrás de los obstáculos externos del arreglo para los valores  $Q=3.0$ ,  $4.0$  y  $4.1$ . Se puede observar que para  $Q=3.0$  y  $4.0$  (figuras 2.28a y 2.28b) las correspondientes frecuencias características para las caudas externas son las mismas y éstas varían ligeramente al pasar de  $Q=3.0$  a  $4.0$ . Sin embargo, para el caso  $Q=4.1$  ya no es posible determinar una frecuencia característica.

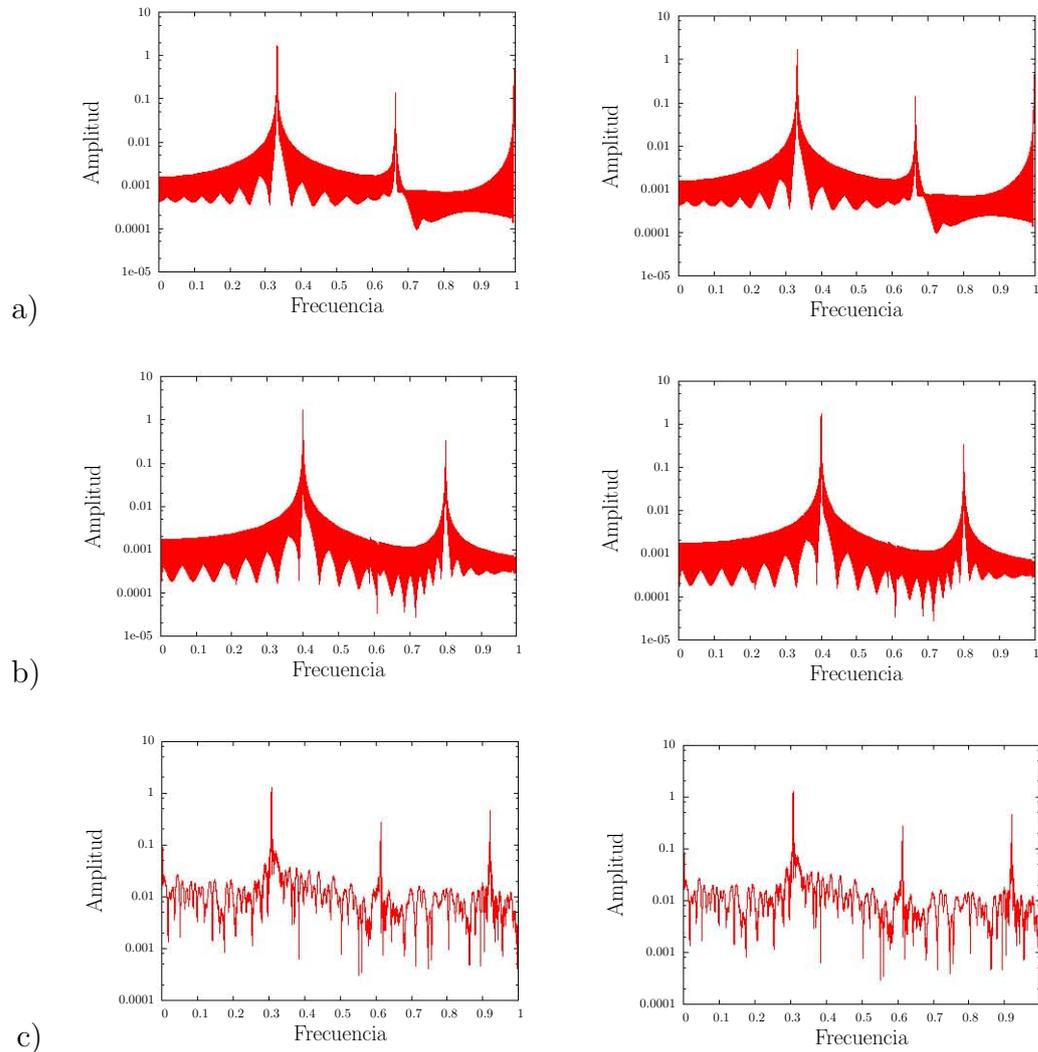


Figura 2.28: Espectro de frecuencias de la vorticidad calculada aguas abajo de los obstáculos exteriores en un arreglo de 3 obstáculos magnéticos con  $D=2.0$ ,  $Re=1000$ . La columna izquierda corresponde a un punto en la cauda inferior ( $x=15$ ,  $y=1.5$ ) y la columna derecha a un punto en la cauda superior ( $x=15$ ,  $y=5.5$ ). :a)  $Q=3.0$  , b)  $Q=4.0$ , c)  $Q=4.1$

Los espectros de frecuencia de la vorticidad aguas abajo del obstáculo magnético central se presentan en la figura 2.29 para los tres valores de  $Q$  previamente mencionados. Las frecuencias características para los casos  $Q=3.0$  y  $4.0$  son las mismas que las obtenidas en las caudas externas pero la amplitud es dos órdenes de magnitud menor que en las caudas externas.

En el siguiente capítulo analizaremos la influencia de las caudas generadas por los obstáculos magnéticos en la transferencia de calor hacia las paredes laterales.

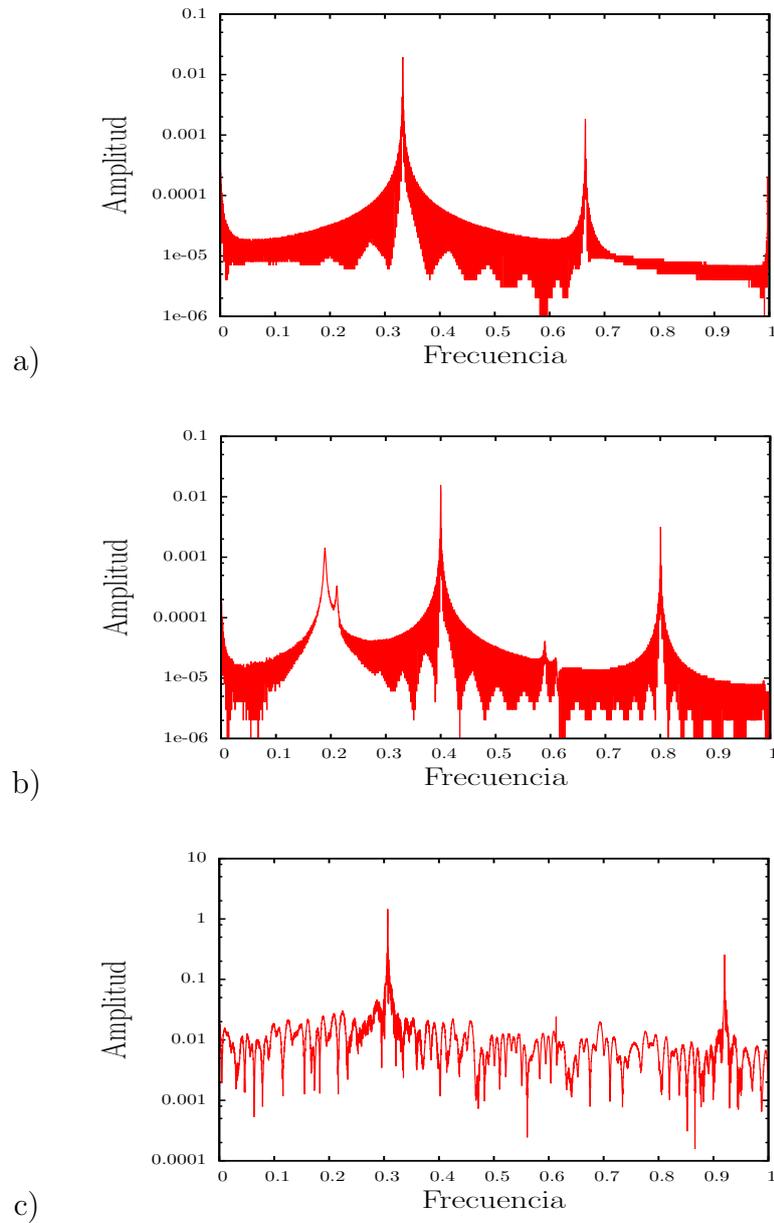


Figura 2.29: Espectro de frecuencias de la vorticidad calculada aguas abajo del obstáculo central en un arreglo de 3 obstáculos magnéticos con  $D=2.0$ ,  $Re=1000$ : a)  $Q=3.0$  b)  $Q=4.0$ , c)  $y=Q=4.1$ .

---

# Transferencia de calor en flujo a través de arreglos de obstáculos magnéticos

---

En este capítulo se presenta el estudio de la transferencia de calor producida por un fluido eléctricamente conductor que pasa a través de obstáculos magnéticos, cuyos patrones de flujo fueron estudiados en el capítulo anterior para los casos de dos y tres obstáculos magnéticos. Se considera que las paredes paralelas a la dirección del flujo tienen una zona donde la temperatura es mayor a la temperatura del fluido que ingresa al canal. Dicha zona está comprendida en la región donde se encuentran los obstáculos magnéticos y termina aguas abajo de los mismos, manteniéndose el resto de las paredes a temperatura igual a la del fluido entrante. Se determina el campo de temperaturas de forma numérica y se realiza el análisis del número de Nusselt local y global.

## 3.1. Transferencia de calor en un flujo a través de un arreglo de dos obstáculos magnéticos

Como se mencionó previamente, existen estudios del mejoramiento de la transferencia de calor en flujos producidos por arreglos lado a lado de dos obstáculos sólidos, buscando la configuración que favorece en mayor medida a la transferencia de calor y el incremento del número de Nusselt (Valencia and Paredes. (2003); Valencia et al. (2001))

En esta sección se presentan los resultados obtenidos numéricamente, mediante el programa realizado en volumen finito, de la transferencia de calor en configuraciones de dos obstáculos magnéticos, variando la separación de los centros de los obstáculos.

### Condiciones de frontera

Recordemos que el dominio estudiado es de 35 unidades adimensionales en la dirección del flujo y 7 unidades en la sección transversal al flujo. Como se aprecia en la figura 3.1, el flujo viaja de izquierda a derecha. La temperatura adimensional del flujo a la entrada es de  $T = 0$ . A la salida del dominio se implementaron condiciones tipo Neumann:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (3.1)$$

La temperatura en las paredes laterales es constante ( $T=1$ ) desde el inicio del ducto hasta la posición  $X=25$ . A partir de dicha posición la temperatura de las paredes toma el valor  $T=0$ , es decir, igual que la temperatura de entrada del fluido (ver figura 3.1).

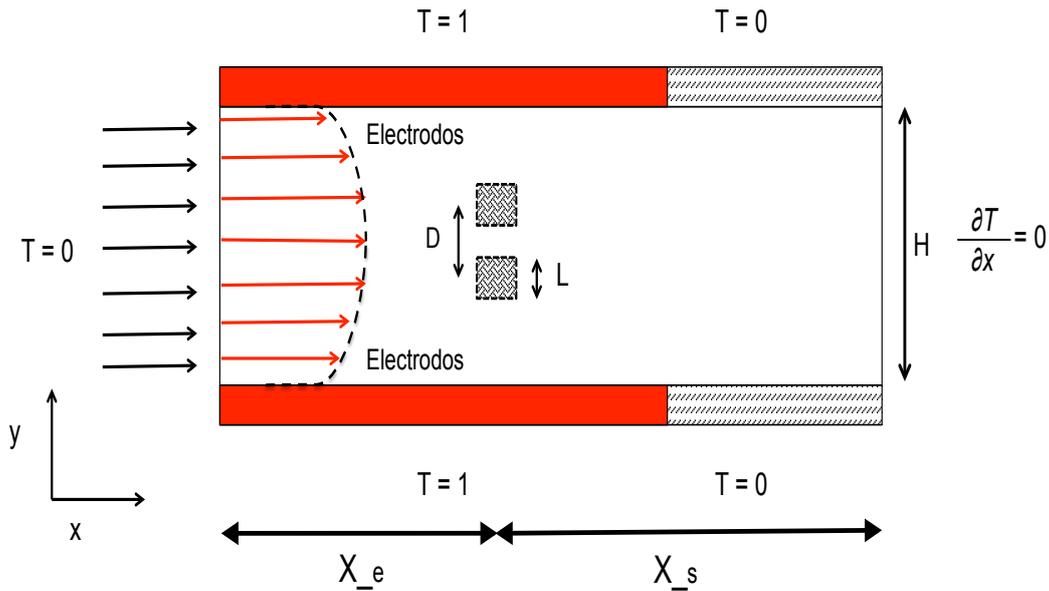


Figura 3.1: Esquema del problema de transferencia de calor de un flujo a través de dos obstáculos magnéticos. Parámetros geométricos del problema y condiciones de frontera.

La transferencia de calor local fue caracterizada mediante el número de Nusselt local calculado con la siguiente ecuación:

$$Nu_x = \frac{H\partial T}{L\partial y}, \quad (3.2)$$

$$Nu_x = \frac{1}{t} \int_0^t Nu_x dt, \quad (3.3)$$

donde la ecuación (3.3) proporciona un promedio temporal en un intervalo de tiempo  $t$ . A su vez, el número de Nusselt global se calcula a través de la ecuación siguiente:

$$Nu = \frac{1}{X_L} \int_0^{X_L} Nu_x dx, \quad (3.4)$$

donde  $X_L$  es la longitud donde la condición es  $T=1$ .

### 3.1.1. Resultados

La ecuación de transferencia de calor (1.12) se resolvió numéricamente utilizando un programa hecho en Fortran basado en el método de volumen finito y aplicando las condiciones de frontera mencionadas arriba. Para considerar los efectos convectivos en la transferencia de calor se utilizaron los campos de velocidad discutidos en el capítulo anterior correspondientes a diversos valores de la separación entre los centros de los imanes (parámetro  $D$ ) y distintas magnitudes de la fuerza de Lorentz (parámetro  $Q$ ). En la figura 3.2 se presentan los valores del número de Nusselt local para un intervalo de tiempo de 200 unidades adimensionales, calculado una vez que el flujo está bien establecido y han desaparecido completamente los transitorios. El número de Nusselt se calcula a una distancia de  $X = 15$ . En dicha figura se muestra el comportamiento temporal de  $Nu_x$  para distintos valores del parámetro  $D$ , es decir, distintas separaciones de los obstáculos. El valor de  $Q$  correspondiente a cada caso es el valor más bajo al cual el flujo comienza a desprender vórtices detrás de los obstáculos magnéticos. Dichos valores son  $Q = 2.7, 2.6, 2.4$  y  $2.3$ , correspondientes a  $D = 1, 1.5, 2$  y  $3$ , respectivamente. Se observa que en todos los casos el comportamiento oscilatorio del flujo se ve reflejado en la oscilación del número de Nusselt local. Nótese que mientras mayor es la separación  $D$ , mayor es el valor del Número de Nusselt, lo cual es consistente con el hecho de que a mayor separación la agitación se da más cerca de las paredes y por tanto la transferencia de calor aumenta. Por otro lado, también debe notarse que para la separación  $D = 1.5$ , se presenta el flujo biestable lo que lleva a una oscilación con amplitud variable del número de Nusselt, que se diferencia de los demás casos.

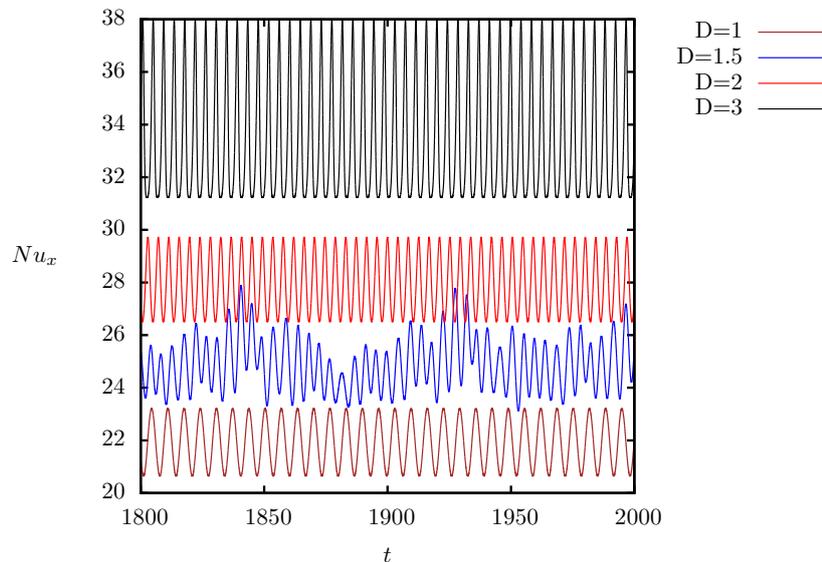


Figura 3.2: Variación temporal del Nusselt local calculado en la pared ubicada en  $y = 0$  a una distancia de  $x = 15$ , para distintos valores del parámetro  $D$ . Los valores de  $Q$  son 2.7, 2.6, 2.4 y 2.3, correspondientes a  $D = 1, 1.5, 2$  y  $3$ , respectivamente.

En la figura 3.3 se muestra en la columna de la izquierda, las frecuencias características que se obtienen del cálculo de la medición de la vorticidad 5 unidades detrás del obstáculo magnético más cercano a la pared  $y = 0$ , y en la columna de la derecha de la figura, se muestra la frecuencia característica de la oscilación de los números de Nusselt obtenidas mediante la transformada rápida de Fourier. Se puede observar que las frecuencias características en ambas oscilaciones presentan el mismo valor. En el caso de la figura 3.3a) la frecuencia es de 0.15 en ambas señales. En la figura 3.3b) la frecuencia característica no es tan clara debido a que se trata del patrón de flujo biestable descrito en el capítulo anterior.

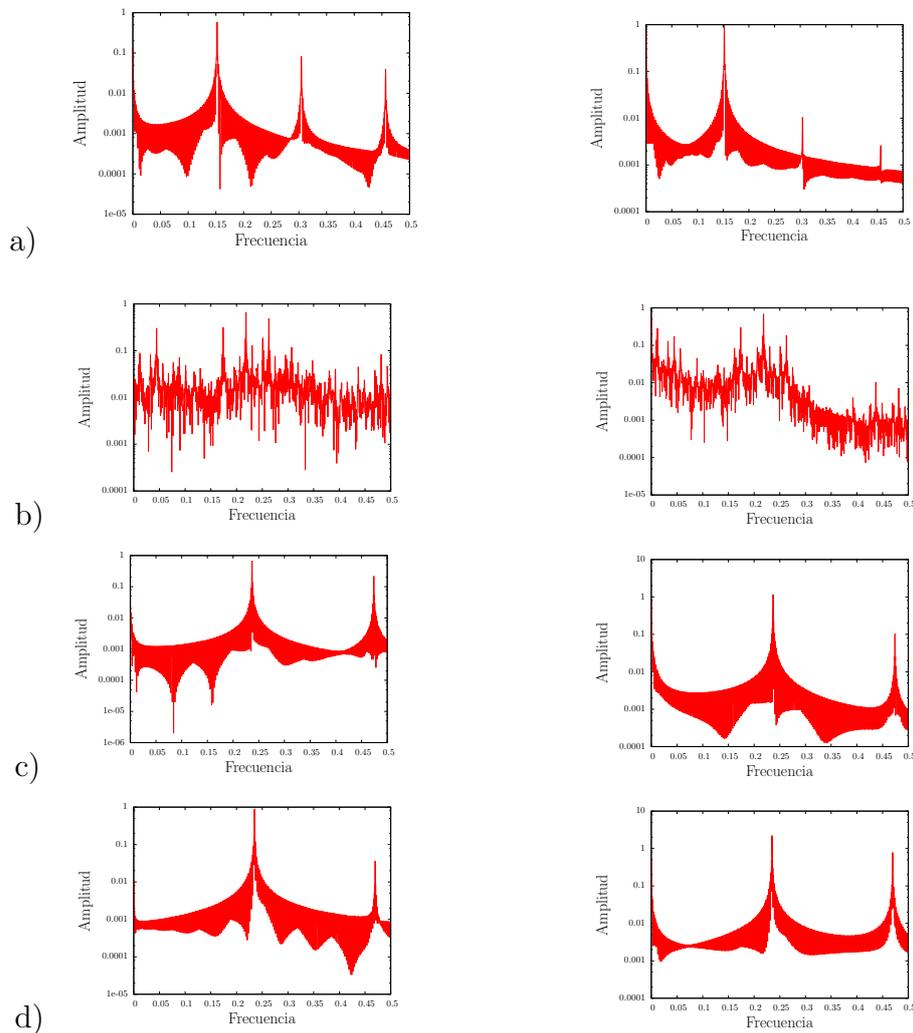


Figura 3.3: En la columna de la izquierda se presenta el espectro de potencia de la vorticidad medida 5 unidades aguas abajo del obstáculo magnético. En la columna de la derecha se presenta el espectro de potencia obtenido de la oscilación del número de Nusselt en el tiempo. Los valores de  $Q$  corresponden a los cuales el flujo comienza a desprender vórtices.  $Re=1000$ .; a)  $Re=1000$ ,  $Q=2.7$ , b)  $D=1.5$ ,  $Q=2.6$ , c)  $D=2$ ,  $Q=2.4$ , d)  $D=3$ ,  $Q=2.3$

$D=1$

Como se presentó en el capítulo anterior sobre de la dinámica de este tipo de flujos, existen tres patrones de flujo al ir incrementando el valor de  $Q$  para esta separación de los obstáculos. Al estar prácticamente unidos los obstáculos, su efecto es similar a si se tuviera un solo obstáculo más grande. A continuación se analiza el efecto de tales patrones de flujo sobre la transferencia de calor.

En la figura 3.4 se muestra una comparación entre los valores del número de Nusselt local como función de la coordenada longitudinal  $x$ , obtenidos por un flujo sin obstáculos magnéticos y los flujos producidos para distintos valores de  $Q$  que generan los distintos patrones de flujo.

Dado que la ubicación longitudinal de los centros de los obstáculos magnéticos es  $x = 10$ , podemos observar claramente en la figura 3.4 que al pasar el flujo a través de los obstáculos magnéticos el número de Nusselt presenta un incremento notable respecto al caso del flujo sin obstáculos en la zona donde éstos se localizan, para los tres valores de  $Q$ , siendo mayor el incremento mientras mayor es el valor de  $Q$ . De hecho, para  $Q=1.5$  y  $2.6$  no existe desprendimiento de vórtices, el cual aparece hasta  $Q=2.7$  y que lleva al mayor incremento del número de Nusselt. Sin embargo, aguas abajo de dicha zona el valor del número de Nusselt primero disminuye por debajo del valor encontrado en el flujo sin obstáculo y más adelante recupera dicho valor. Este efecto parece reflejar el hecho de que la recirculación es mucho más intensa en la zona de los obstáculos lo que pareciera inhibir al flujo en la estela aguas abajo.

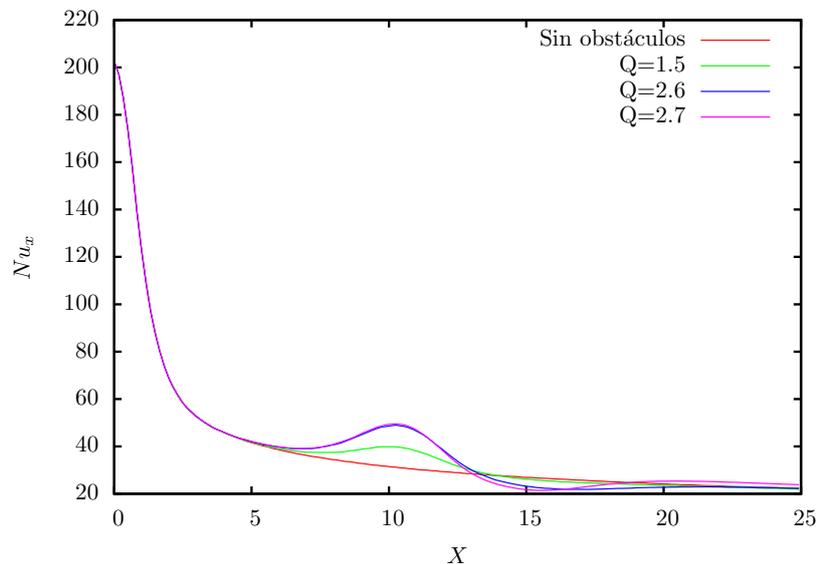


Figura 3.4: Número de Nusselt local como función de la posición axial para distintos valores de  $Q$ , calculado en la pared ubicada en  $y = 0$ .  $Re=1000$ ,  $D=1$ .

D=1.5

Con una separación de  $D=1.5$  los patrones de flujo ya no son parecidos al caso del flujo a través de un solo obstáculo magnético. En la figura 3.5 se presenta el número de Nusselt local como función de la coordenada axial para distintos valores del  $Q$ . El valor  $Q=2.5$  corresponde a un flujo sin desprendimiento de vórtices, mientras que con  $Q=2.6$  ya existe dicho desprendimiento. A su vez, con  $Q=2.9$  se tiene un flujo biestable. Nuevamente se observa que en la zona del obstáculo magnético se presenta un incremento en el número de Nusselt para los tres valores de  $Q$ , el cual disminuye conforme nos alejamos de dicha zona. En la figura 3.6 se muestra un acercamiento de la zona donde se da el incremento del número de Nusselt local. Se observa que los incrementos para los valores  $Q=2.5$  y  $2.6$  son muy cercanos mientras que el incremento mayor corresponde al caso de flujo biestable  $Q=2.9$ . Hay que remarcar que solo en este último,  $Nu_x$  toma siempre valores por encima del correspondiente al caso sin obstáculos, lo que pareciera indicar que el flujo biestable favorece el mejoramiento de la transferencia de calor.

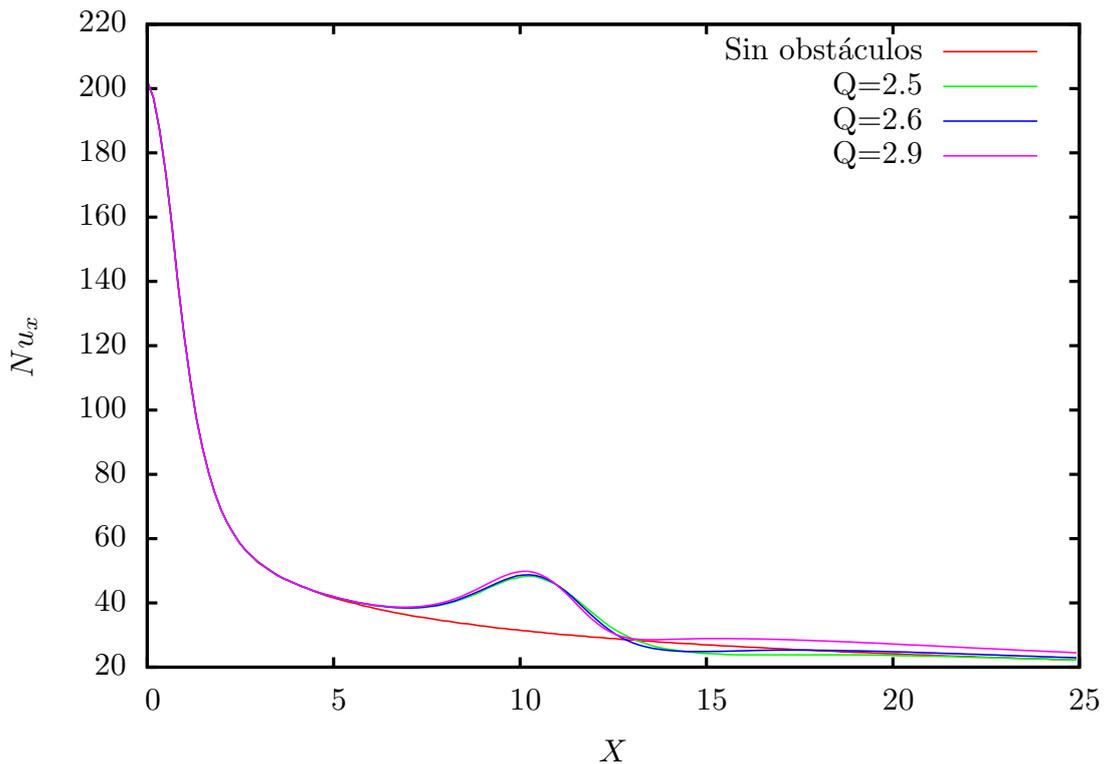


Figura 3.5: Número de Nusselt local como función de la posición axial para distintos valores de  $Q$ , calculado en la pared ubicada en  $y = 0$ .  $Re=1000$ ,  $D=1.5$ .

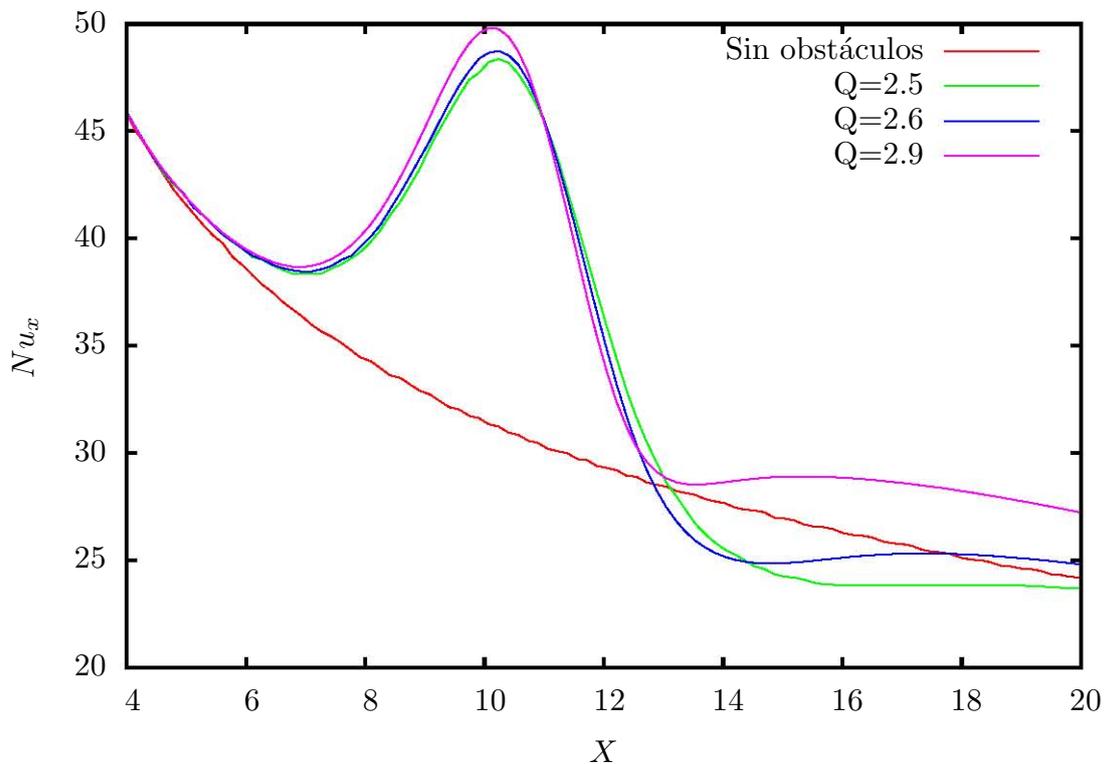


Figura 3.6: Número de Nusselt local como función de la posición axial para distintos valores de  $Q$ , calculado en la pared ubicada en  $y = 0$ .  $Re=1000$ ,  $D=1.5$ .

### D=2

El comportamiento del número de Nusselt local como función de la coordenada axial para el caso  $D=2$ , se presenta en las figuras 3.7 y 3.8 (donde se muestra un acercamiento) para distintos valores de  $Q$ . Se observa que este caso es muy similar al anterior, encontrando incrementos en el número de Nusselt para los tres valores de  $Q$ , incluido cuando no hay desprendimiento de vórtices ( $Q=2.3$ ). Nuevamente, el mayor incremento se da cuando el flujo es biestable ( $Q=2.6$ ) aunque en este caso si existe un ligero decremento aguas abajo respecto al caso del flujo sin obstáculos.

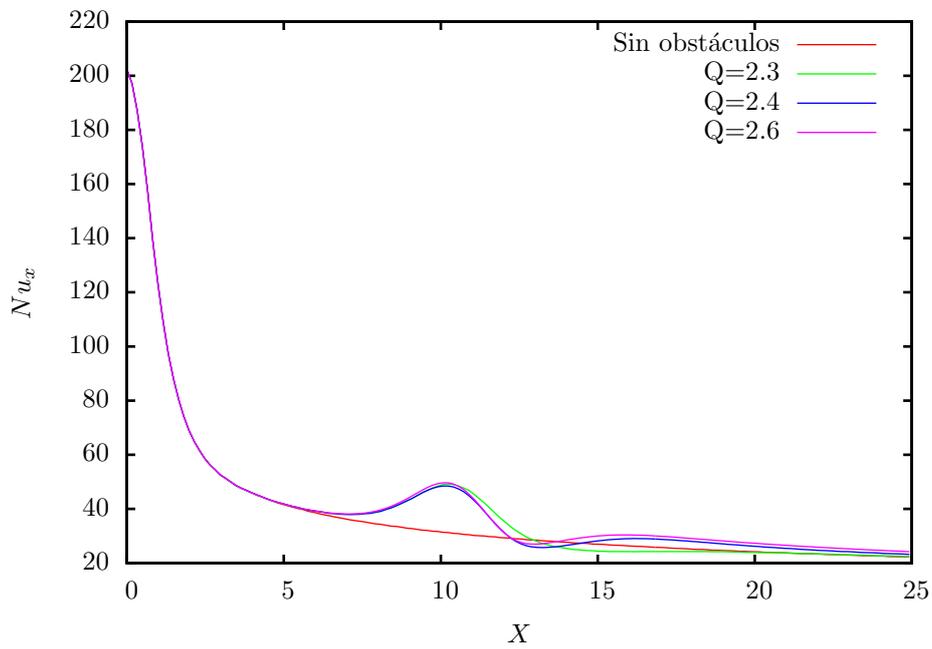


Figura 3.7: Número de Nusselt local como función de la posición axial para distintos valores de  $Q$ , calculado en la pared ubicada en  $y = 0$ .  $Re=1000$ ,  $D=2$ .

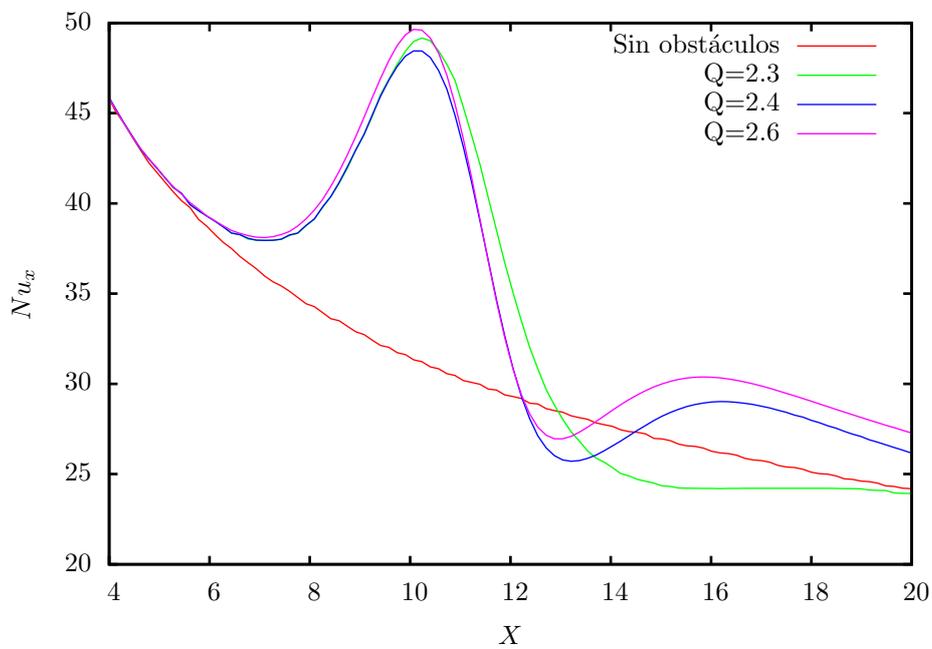


Figura 3.8: Número de Nusselt local como función de la posición axial para distintos valores de  $Q$ , calculado en la pared ubicada en  $y = 0$ .  $Re=1000$ ,  $D=2$ .

D=3

Las figuras 3.9 y 3.10 presentan el número de Nusselt local como función de la coordenada axial para el caso D=3 y tres valores de Q correspondientes a flujo sin desprendimiento de vórtices (Q=2.1), flujo con un par de vórtices permanentes y flujo con desprendimiento de vórtices (Q=2.3). En los tres valores de Q se tiene incremento de  $Nu_x$ , alcanzándose el máximo cuando se tiene un flujo con desprendimiento de vórtices. Nótese que en este caso, el incremento es mayor que en los anteriores debido a que cuando D=3, los obstáculos están más cerca de la pared y las recirculaciones tienen un mayor efecto sobre la transferencia de calor.

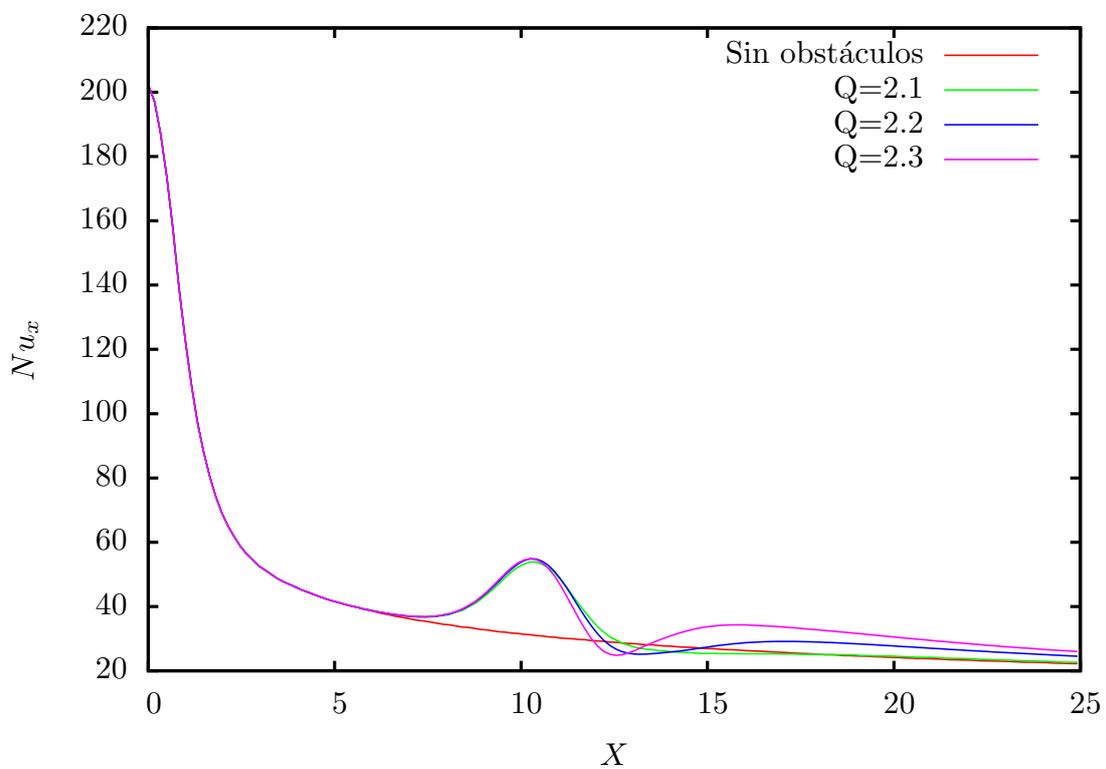


Figura 3.9: Número de Nusselt local como función de la posición axial para distintos valores de Q, calculado en la pared ubicada en  $y = 0$ .  $Re=1000$ ,  $D=3$ .

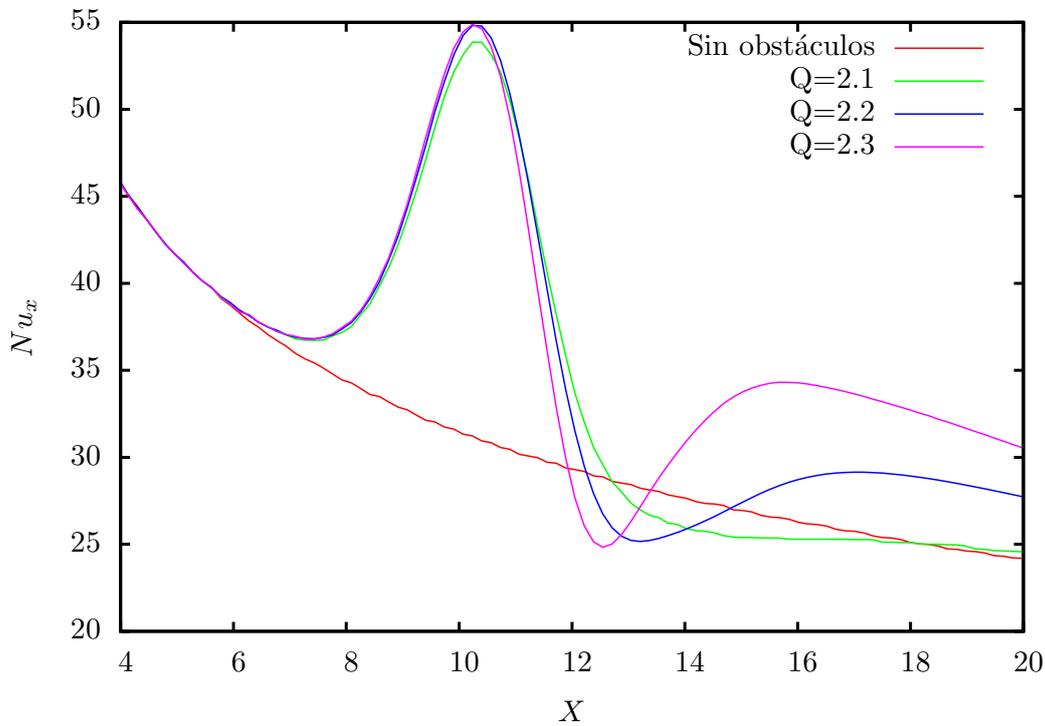


Figura 3.10: Número de Nusselt local como función de la posición axial para distintos valores de  $Q$ , calculado en la pared ubicada en  $y = 0$ .  $Re=1000$ ,  $D=3$ .

En la figura 3.11 se presenta el número de Nusselt como función de la coordenada axial para las distintas separaciones entre los centros de los imanes, es decir,  $D=1$ ,  $2$  y  $3$ . Los valores de  $Q$  para cada caso corresponden justo al valor en donde se pasa de un flujo estacionario sin desprendimiento de vórtices a un flujo en donde los vórtices se desprenden periódicamente. Para  $Q=1.5$  el valor de  $Q$  es el correspondiente al caso de flujo biestable. Se observa que el mayor incremento en el número de Nusselt se obtiene para una separación de  $D=3$ , esto es debido a que, como se mencionó previamente, con esta separación los obstáculos magnéticos se encuentran cercanos a la pared lo que ocasiona que los vórtices que se desprenden aguas abajo del obstáculo magnético causen una mayor recirculación en el fluido que se encuentra en contacto con la pared. Nótese que valores de Nusselt para las distancias de  $D=1$ ,  $1.5$  y  $2$  son valores muy cercanos entre ellos en la zona del obstáculo magnético. Cabe señalar que aun con la separación de  $D=1$ , que es la distancia más lejana a la cual se encuentran los obstáculos magnéticos respecto a la pared, no es el menor incremento del número de Nusselt. Por otra parte, con la separación de  $D=1.5$  se presenta el segundo mejor incremento del número de Nusselt el cual es debido a la presencia del patrón de flujo bistable en esta separación de obstáculos.

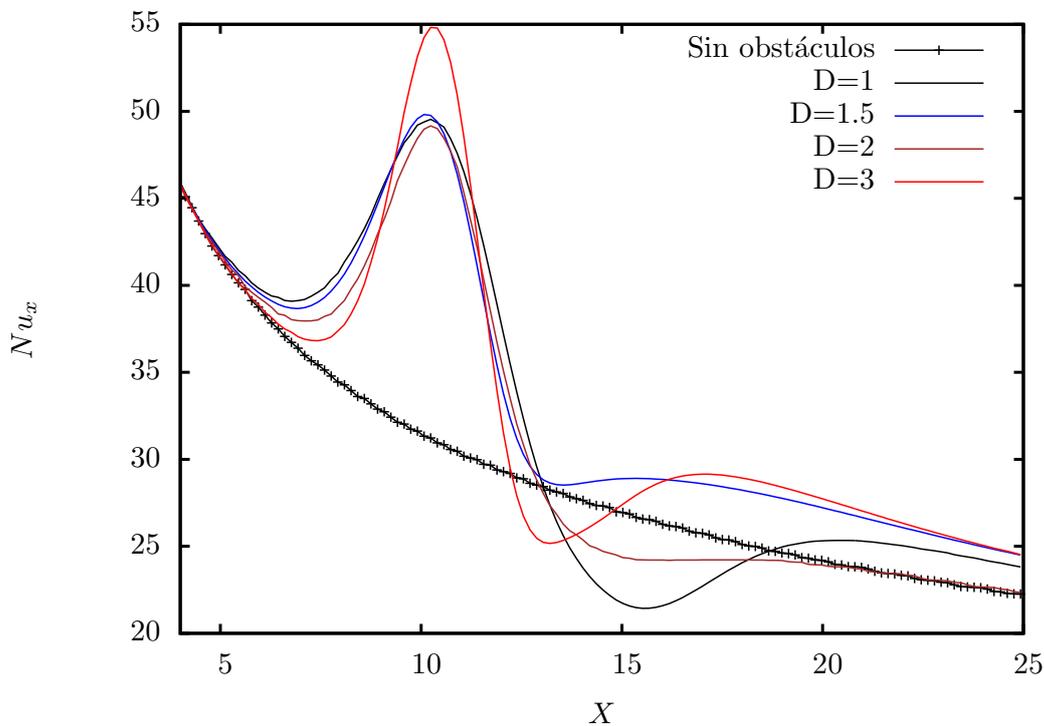


Figura 3.11: Nusselt local calculado en la pared ubicada en  $y = 0$  en el dominio a lo largo de la dirección  $x$ . Para distintos valores de la separación de los obstáculos magnéticos. Los resultados mostrados corresponden a los valores de  $Q$  mas bajos en los cuales se presentan el desprendimiento de vórtices

Con el fin de evaluar el incremento neto en la transferencia de calor en la pared debido a los diversos patrones de flujo, en la figura 3.12 se muestra el cociente del número de Nusselt global para el flujo con obstáculos y el número de Nusselt global para el flujo sin obstáculos, como función del parámetro  $Q$  para los distintos valores de  $D$ .

Para una separación de  $D=1$ , se presentan claramente dos cambios bruscos en la pendiente de la curva, el primero para un valor de  $Q=2.7$  y el segundo en  $Q=4.5$ . Estos cambios en el número de Nusselt son un reflejo del cambio de patrón de flujo en el fluido. Para corroborar esta afirmación, en la figura 3.13 se muestran los patrones de flujo encontrados con esta separación. En el panel izquierdo (figura 3.13a), se muestra el flujo estacionario correspondiente a  $Q=1.5$ . El flujo estacionario se mantiene hasta que el parámetro  $Q$  alcanza el valor de 2.7 donde se presenta desprendimiento periódico de vórtices (ver figura 3.13b), identificándose claramente una frecuencia característica (panel derecho de la figura 3.13b). El desprendimiento periódico de vórtices se mantiene para valores mayores a  $Q=2.7$  hasta que al llegar a  $Q=4.5$  el flujo cambia su naturaleza pues ahora aunque se presenta desprendimiento de vórtices (panel izquierdo de la figura 3.13c), ya no se identifica claramente una sola frecuencia característica (panel derecho de la figura 3.13c) y el flujo se vuelve más desordenado.

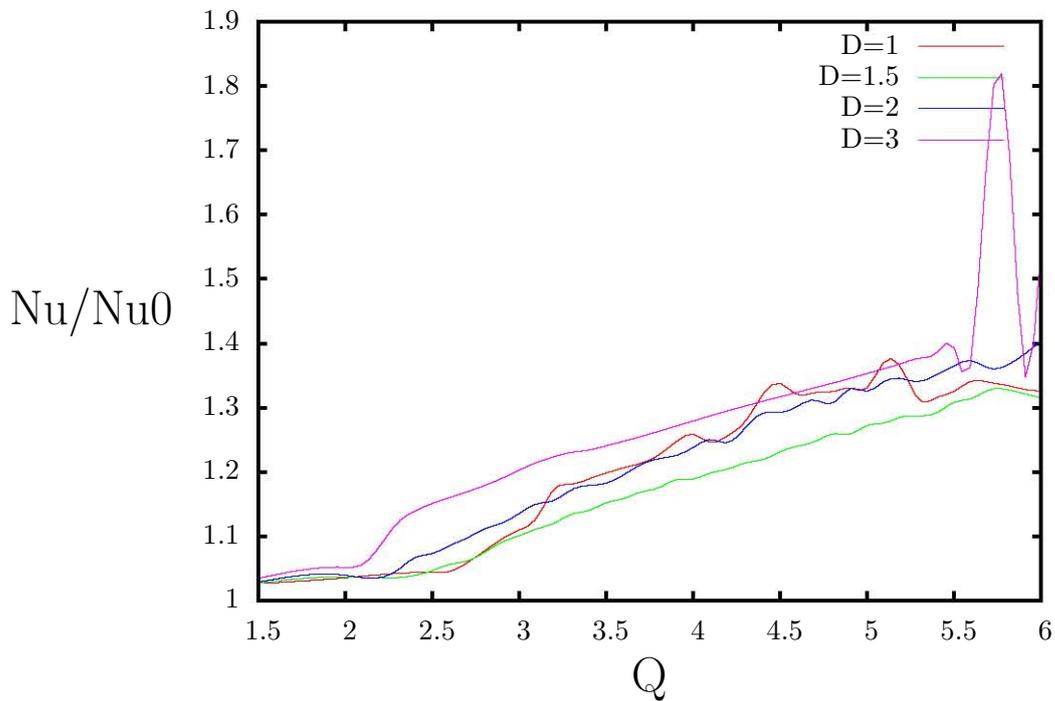


Figura 3.12: Cociente del número de Nusselt global con obstáculos magnéticos y el número de Nusselt global sin obstáculos, como función del parámetro  $Q$  para los distintos valores de  $D$ . Calculado en la pared  $y=0$ .

Un comportamiento similar se encuentra en la figura 3.12 cuando  $D=1.5$ , donde también se observan cambios bruscos en la pendiente de la curva al aumentar  $Q$ . El primer cambio brusco se encuentra para el valor de  $Q=2.6$ , que corresponde justamente al valor donde se presenta el desprendimiento de vórtices. El segundo cambio brusco en la pendiente se da para  $Q=5.5$  donde también existe una transición de un flujo con desprendimiento periódico de vórtices a un flujo con desprendimiento no periódico, que ocasiona un flujo más desordenado.

Para la separación de  $D=1.5$  se presenta el primer incremento del número de Nusselt para el valor de  $Q=2.6$ , valor en el cual empieza el desprendimiento de vórtices. Para un valor de  $Q$  mayor a  $5.5$  se presenta un cambio en el número de Nusselt este cambio se ve reflejado en un cambio en el espectro de potencia que se ve en la figura ??

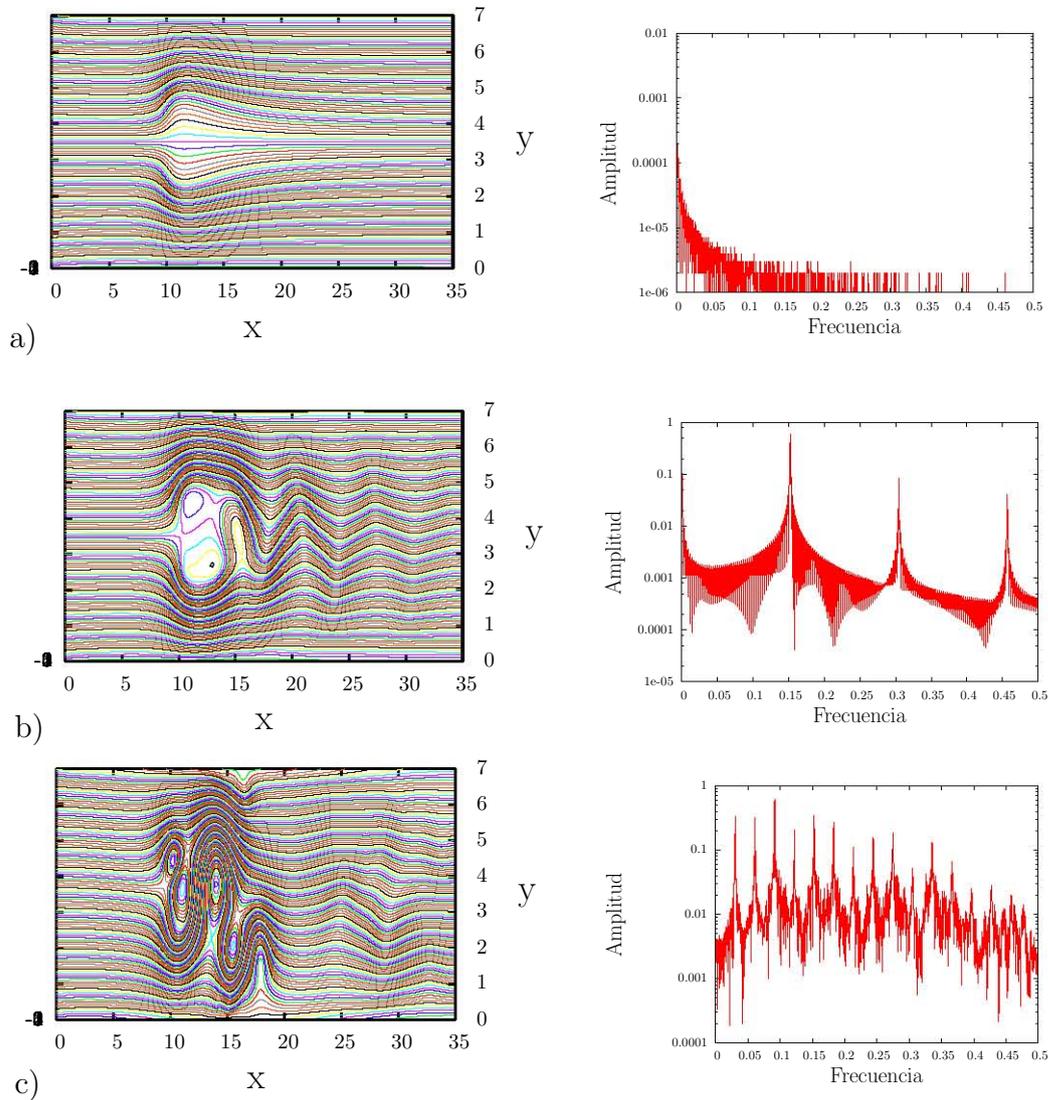


Figura 3.13: En la columna de la izquierda se presentan las líneas de corriente instantáneas de los tres patrones de flujo que se presentan el flujo con dos obstáculos magnéticos con una separación de  $D=1$ . En la columna de la derecha se presenta el espectro de potencia de la voracidad medida 5 unidades detrás del obstáculo magnético.  $Re=1000$ . a)  $Q=1.5$ , b)  $Q=2.7$ , c)  $Q=4.5$

Para la separación de  $D=2$  solo se presenta un cambio brusco en la pendiente de la curva correspondiente de la figura 3.12, cuando  $Q=2.3$ , valor en el cual se inicia el desprendimiento periódico de vórtices. Con una separación de  $D=3$ , el primer cambio brusco en la pendiente de la curva correspondiente se presenta para un valor de  $Q=2.2$ , que corresponde al inicio del desprendimiento periódico de vórtices. Para valores mayores a  $Q=2.2$  el cociente de los números de Nusselt globales mantiene un crecimiento aproximadamente uniforme hasta llegar a  $Q=5.6$ , donde se presenta un cambio en el patrón del flujo.

En la figura 3.14 podemos observar los tres distintos patrones de flujo que dan lugar a las distintas regiones en la curva  $D=3$  de la figura 3.12. En la figura 3.14a) se presenta las líneas de corriente y el espectro de frecuencia para el caso  $Q=1.5$ , que corresponde a un flujo estacionario con estelas paralelas. El flujo estacionario se mantiene hasta que el parámetro  $Q$  alcanza el valor de 2.3 donde se presenta desprendimiento periódico de vórtices (ver figura 3.14b), identificándose claramente una frecuencia característica (panel derecho de la figura 3.14b). El desprendimiento periódico de vórtices se mantiene para valores mayores a  $Q=2.3$  hasta que al llegar a  $Q=5.6$  el flujo cambia su naturaleza pues ahora aunque se presenta desprendimiento de vórtices (panel izquierdo de la figura 3.14c), el flujo se vuelve más desordenado, las caudas tienden hacia la parte superior del eje de simetría, el flujo se vuelve más desordenado y se identifica claramente una sola frecuencia característica (panel derecho de la figura 3.14c). Para  $Q=5.7$  continua habiendo desprendimiento de vórtices (panel izquierdo de la figura 3.14d), ahora las caudas se inclina hacia la parte inferior del eje de simetría y se continua identificando una sola frecuencia característica (panel derecho de la figura 3.14d).

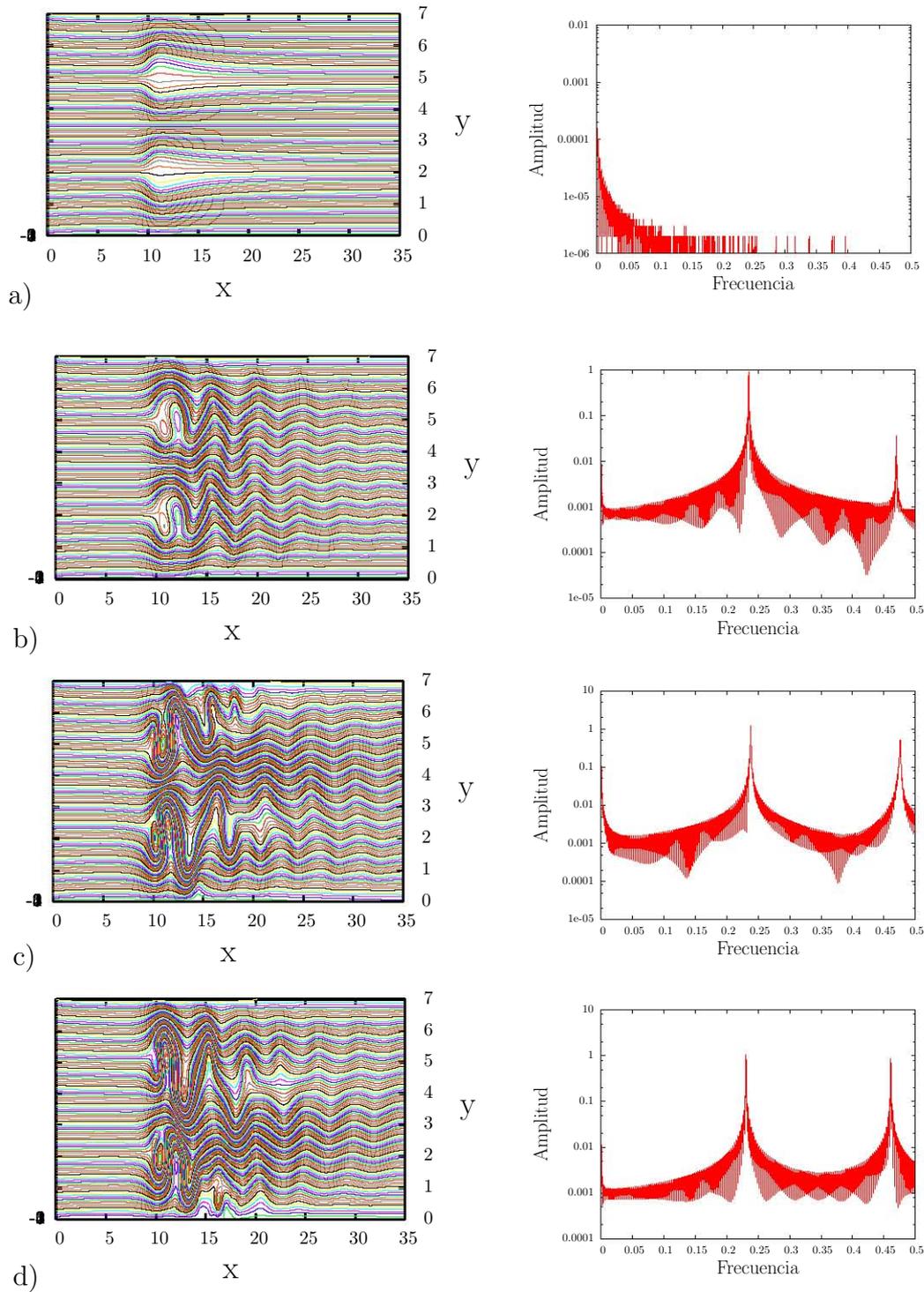


Figura 3.14: En la columna de la izquierda se muestra las líneas de corriente de los tres patrones de flujo que se presentan en el flujo con dos obstáculos magnéticos con una separación de  $D=3$ . En la columna de la derecha se presenta el espectro de potencia de la vorticidad medida 5 unidades detrás del obstáculo magnético.  $Re=1000$ . a)  $Q=1.5$ , b)  $Q=2.3$ , c)  $Q=5.6$ , d)  $Q=5.7$ .

## 3.2. Transferencia de calor en un flujo a través de un arreglo de tres obstáculos magnéticos

En esta sección se presenta el estudio de la transferencia de calor en un arreglo de tres obstáculos magnéticos colocados lado a lado. Para este análisis se presentan los resultados del número de Nusselt calculados de acuerdo a las ecuaciones 3.2 y 3.4, en la pared ubicada en  $y = 0$  en el dominio estudiado. Se pretende evaluar el efecto sobre la transferencia de calor de los diversos patrones de flujo presentados en el capítulo 2 para el caso de tres obstáculos magnéticos.

### 3.2.1. Resultados

#### D=1

Para evaluar el efecto del patrón de flujo con  $D=1$  se realizó el análisis del número de Nusselt local como función de la coordenada axial en la pared inferior del dominio, ubicada en  $y = 0$ . En la figura 3.15 se muestra una comparación entre el número de Nusselt local obtenido con un flujo sin obstáculos magnéticos y los flujos con obstáculos para distintos valores de  $Q$ . Dado que  $D=1$ , los bordes de los tres imanes se encuentran unidos por lo que el campo magnético generado por ellos actúa como si fuera un solo obstáculo de mayor extensión. En este caso solo se presenta flujo con y sin desprendimiento periódico de vórtices. La gráfica claramente muestra que en la posición axial donde se localizan los obstáculos el número de Nusselt presenta un incremento notable para los tres valores de  $Q$ , comparado con el valor del flujo sin obstáculos. También podemos observar que la zona donde se presenta el incremento en el número de Nusselt es mayor que en el caso de dos obstáculos. En una región un poco más alejada de donde se localiza el centro de los obstáculos, entre  $15 < x < 20$ , el número de Nusselt toma valores por debajo de los del flujo sin obstáculos. Al parecer esto se debe a que existe un área de recirculación detrás de los obstáculos magnéticos, cuyo efecto es reducir la velocidad del flujo cerca de la pared. El caso  $Q=4.4$  corresponde a un flujo sin desprendimiento de vórtices, mientras que con  $Q=5.3$  se presenta un desprendimiento periódico de vórtices que conlleva un incremento en el número de Nusselt local respecto al caso  $Q=4.4$ . Nótese también que este incremento es aproximadamente un 20 % mayor que en el caso de flujo con dos obstáculos.

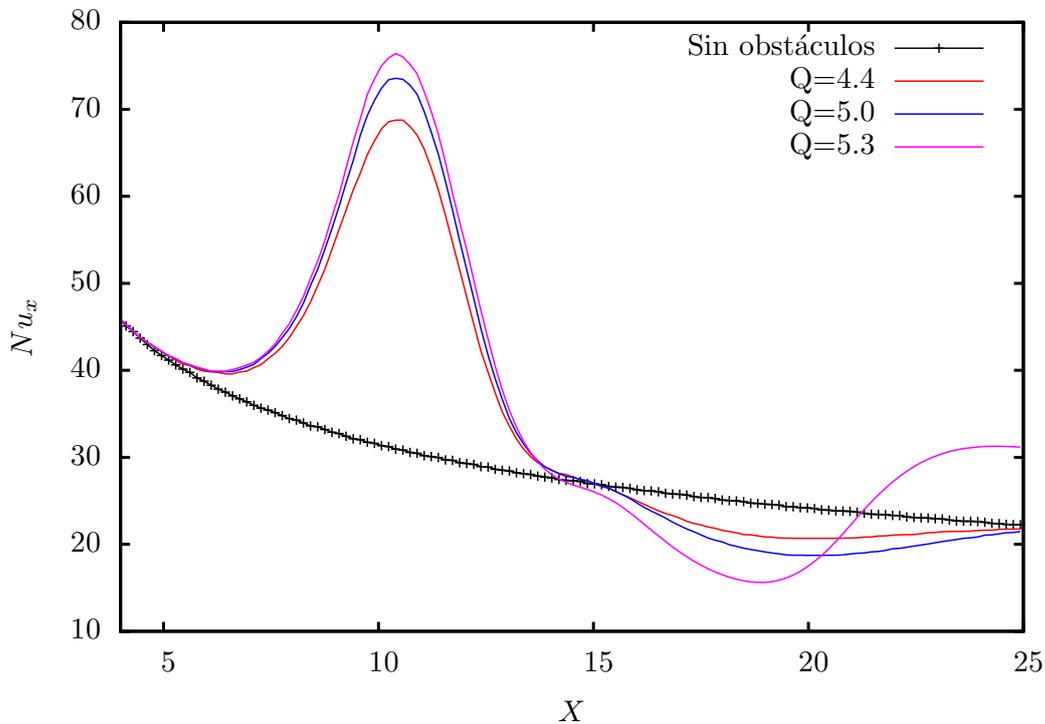


Figura 3.15: Número de Nusselt local como función de la coordenada axial para un flujo con tres obstáculos magnéticos, calculado en la pared ubicada en  $y = 0$  para distintos valores de  $Q$ .

### D=1.3

Como se mencionó en el capítulo anterior, cuando la distancia entre el centro de los obstáculos se incrementa a  $D=1.3$ , el desprendimiento de vórtices en los obstáculos ubicados en los extremos del arreglo se presenta a distintos valores de  $Q$  que el correspondiente para que el desprendimiento ocurra en el obstáculo del centro del arreglo. Cuando  $Q=3.5$  el flujo presenta una recirculación detrás de los obstáculos magnéticos ubicados en el exterior del arreglo, pero no se presenta desprendimiento de vórtices. Esto se mantiene al incrementar  $Q$  a 3.6. Con un valor de  $Q=4.0$  se presenta el desprendimiento de vórtices en los obstáculos de los extremos del arreglo, mientras que detrás del obstáculo del centro se presentan vórtices simétricos que no se desprenden. Por último, al alcanzar un valor de  $Q=4.2$ , el desprendimiento de vórtices se observa detrás de los tres obstáculos.

En la figura 3.16 se presenta el número de Nusselt local en la pared inferior del dominio como función de la coordenada  $x$  para los distintos valores de  $Q$  mencionados, y se compara contra el número de Nusselt calculado para un flujo sin obstáculos. Se observa que al pasar por la posición axial donde se localizan los obstáculos ( $x = 10$ ), se presenta un aumento considerable del número de Nusselt en todos los patrones de flujo estudiados. El mayor incremento se da para el valor de  $Q=4.2$  en el cual el hay desprendimiento de vórtices en

los tres obstáculos. A diferencia del caso  $D=1$ , para todos los valores de  $Q$  presentados el número de Nusselt aguas abajo de los obstáculos magnéticos se mantiene por encima del calculado para un flujos sin obstáculos.

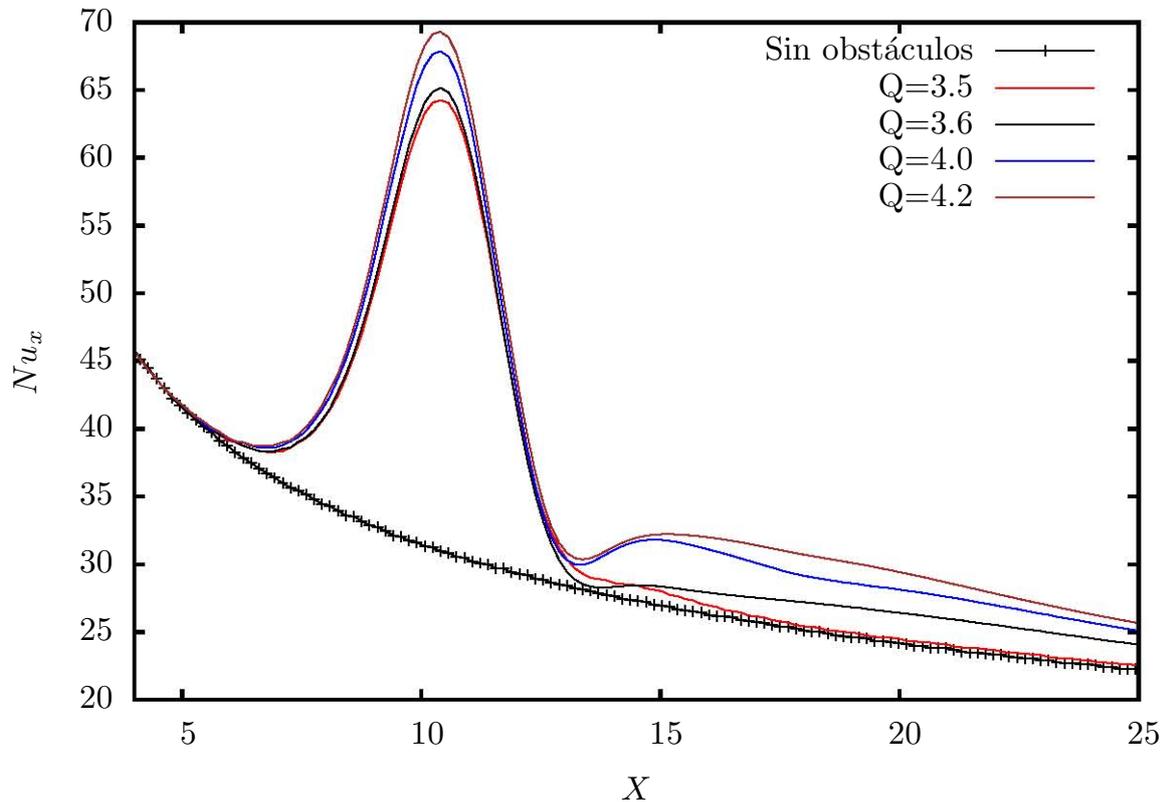


Figura 3.16: Número de Nusselt local como función de la coordenada axial para un flujo con tres obstáculos magnéticos, calculado en la pared ubicada en  $y = 0$  para distintos valores de  $Q$ .

### D=1.8

Al incrementar la distancia de separación de los obstáculos magnéticos a un valor de  $D=1.8$ , con un valor de  $Q=3.1$  se presenta un desprendimiento alternado de vórtices en los obstáculos externos del arreglo. Al alcanzar el valor  $Q=4.1$ , el desprendimiento de vórtices se presenta en los tres obstáculos, como puede observarse en la figura 3.17a), mientras que con  $Q=4.2$  tiene lugar un flujo que se aproxima al biestable (ver Figura 3.17b). En ambos casos, no puede definirse claramente una frecuencia característica (ver columna izquierda de la figura 3.17).

En la figura 3.18 se muestra el número de Nusselt local como función de la coordenada axial para el caso  $D=1.8$  y los distintos valores de  $Q$  mencionados arriba. En todos los casos se observa un incremento notorio del número de Nusselt, sin embargo el incremento

para el caso del desprendimiento periódico de vórtices ( $Q=4.1$ ) es ligeramente superior que para el flujo biestable ( $Q=4.2$ ). Otro efecto interesante es que detrás del arreglo de obstáculos magnéticos se presenta un segundo incremento en el número de Nusselt para ambos valores de  $Q$  pero ahora el mayor valor de Nusselt se obtiene para el flujo generado con  $Q=4.2$  (flujo biestable). Con esto podemos ver que la cauda generada por el patrón de flujo biestable ayuda a sostener por una distancia mayor el incremento de la transferencia de calor en la pared.

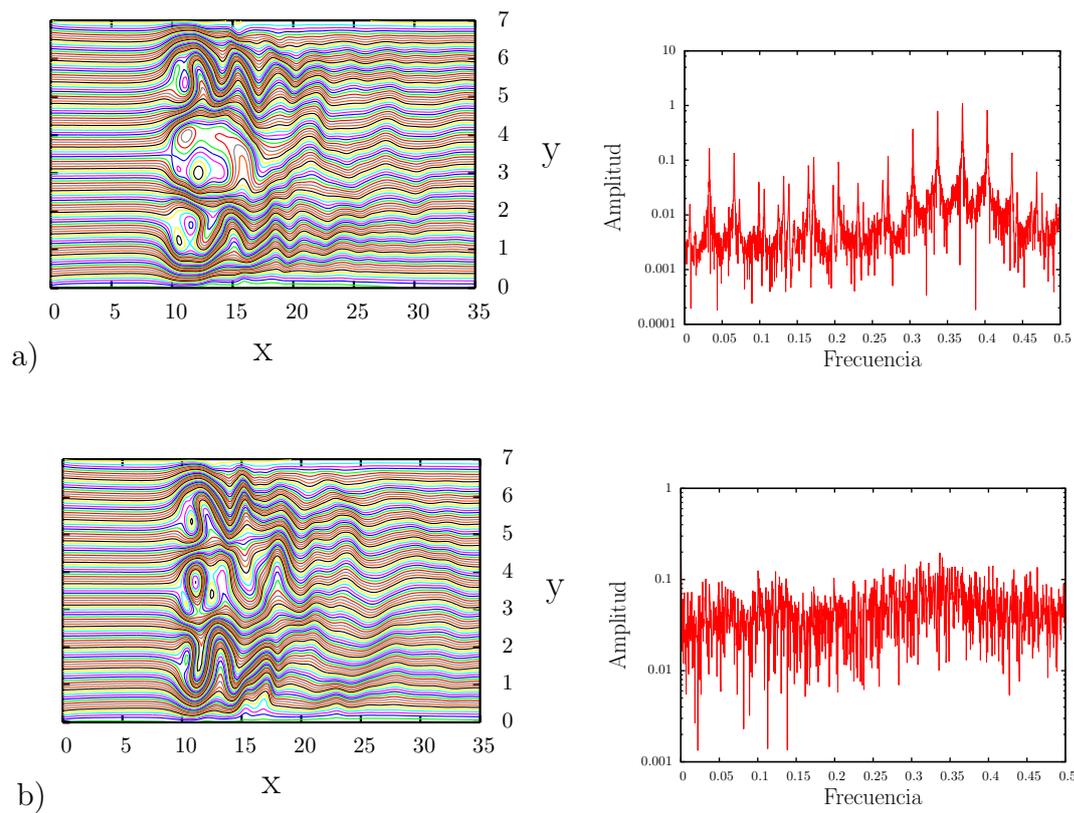


Figura 3.17: Líneas de corriente (columna izquierda) y espectro de potencia de la vorticidad medida 5 unidades detrás del obstáculo magnético (columna derecha) para el flujo a través de tres obstáculos magnéticos.  $Re=1000$ ,  $D=1.8$ . a)  $Q=4.1$ , b)  $Q=4.2$ .

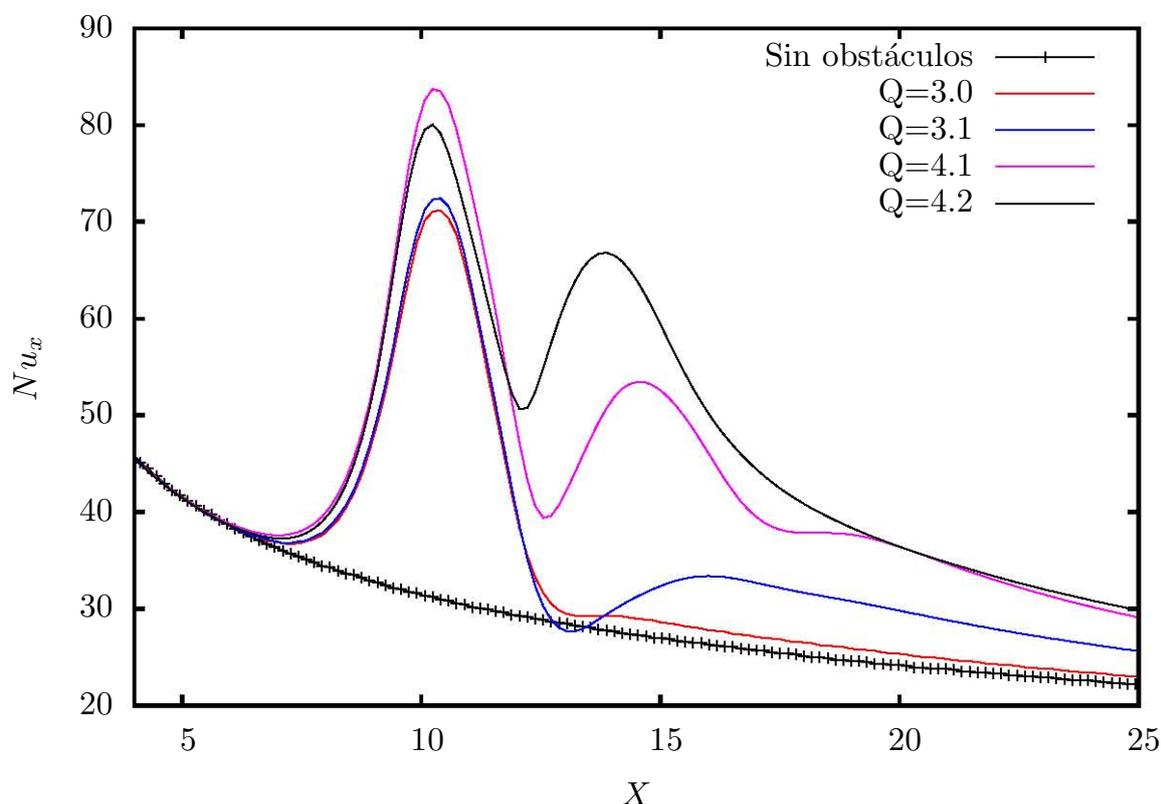


Figura 3.18: Número de Nusselt local como función de la coordenada axial para un flujo con tres obstáculos magnéticos, calculado en la pared ubicada en  $y = 0$  para distintos valores de  $Q$ .

### D=2

Dada la extensión transversal del dominio de integración (7 unidades adimensionales), la mayor separación de los obstáculos magnéticos que se analizó en este trabajo es  $D=2$ . En la figura 3.19 se muestra el número de Nusselt local como función de la coordenada axial para dicha separación y para distintos valores del parámetro  $Q$ , a saber, 2.9, 3.0, 4.1 y 4.2. En todos ellos se observa un marcado incremento en el número de Nusselt local debido al efecto de los patrones de flujo. Para los valores de  $Q=3.0$  y  $Q=4.0$  el patrón de flujo permite identificar claramente una frecuencia característica en la señal obtenida al medir la vorticidad 5 unidades detrás del obstáculo exterior más cercano a la pared ubicada en  $y = 0$ , donde se calcula el número de Nusselt. Para el valor de  $Q=4.0$ , se alcanza el máximo incremento en  $Nu_x$ , y además se presenta un segundo incremento detrás del arreglo de obstáculos debido a un incremento en la intensidad de la cauda reflejado en el incremento en la frecuencia de oscilación de la misma. Para el valor de  $Q=4.1$ , el patrón de flujo ya no presenta una frecuencia característica clara. Al igual que en el caso de la separación anterior ( $D=1.8$ ), esto tiene una influencia directa en el valor del número de

Nusselt, ocasionando que este sea menor que en el caso  $Q=4.0$ , como se observa en la figura 3.19. Sin embargo, para  $Q=4.1$  el incremento de  $Nu_x$  no solo se concentra en la vecindad de los obstáculos sino que se extiende más de 15 unidades aguas abajo.

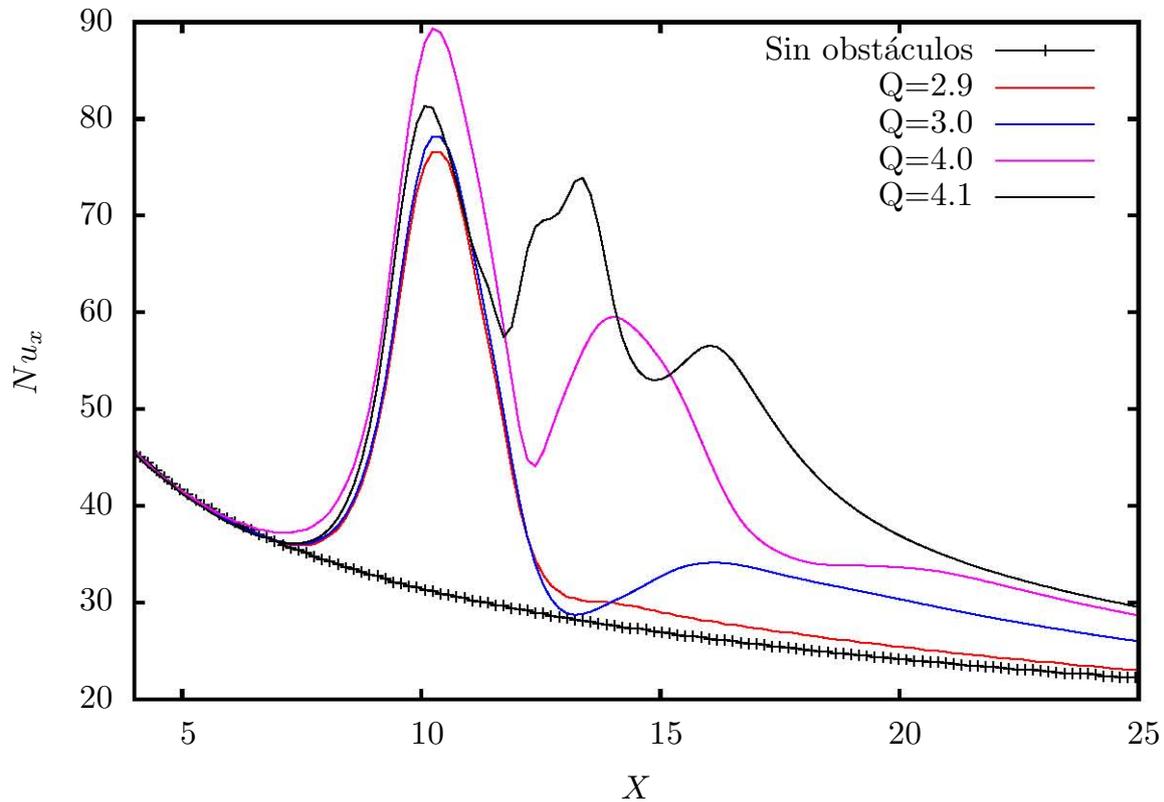


Figura 3.19: Número de Nusselt local como función de la coordenada axial para un flujo con tres obstáculos magnéticos, calculado en la pared ubicada en  $y = 0$  para distintos valores de  $Q$ .

Con el fin de estimar el incremento neto en la transferencia de calor a través de la pared ocasionada por los diversos patrones de flujo con tres obstáculos, en la figura 3.20 se presenta la razón entre el número de Nusselt global para cada separación entre el número de Nusselt global para el flujo sin obstáculos como función del parámetro  $Q$ . Se observa que el incremento mayor se encuentra para la separación de  $D=2$  debido a la cercanía de los obstáculos magnéticos externos del arreglo respecto a la pared. La figura 3.20 también muestra la presencia de variaciones en la pendiente de las curvas correspondientes a las distintas separaciones. Tales cambios en la pendiente se deben a variaciones en los patrones de flujo.

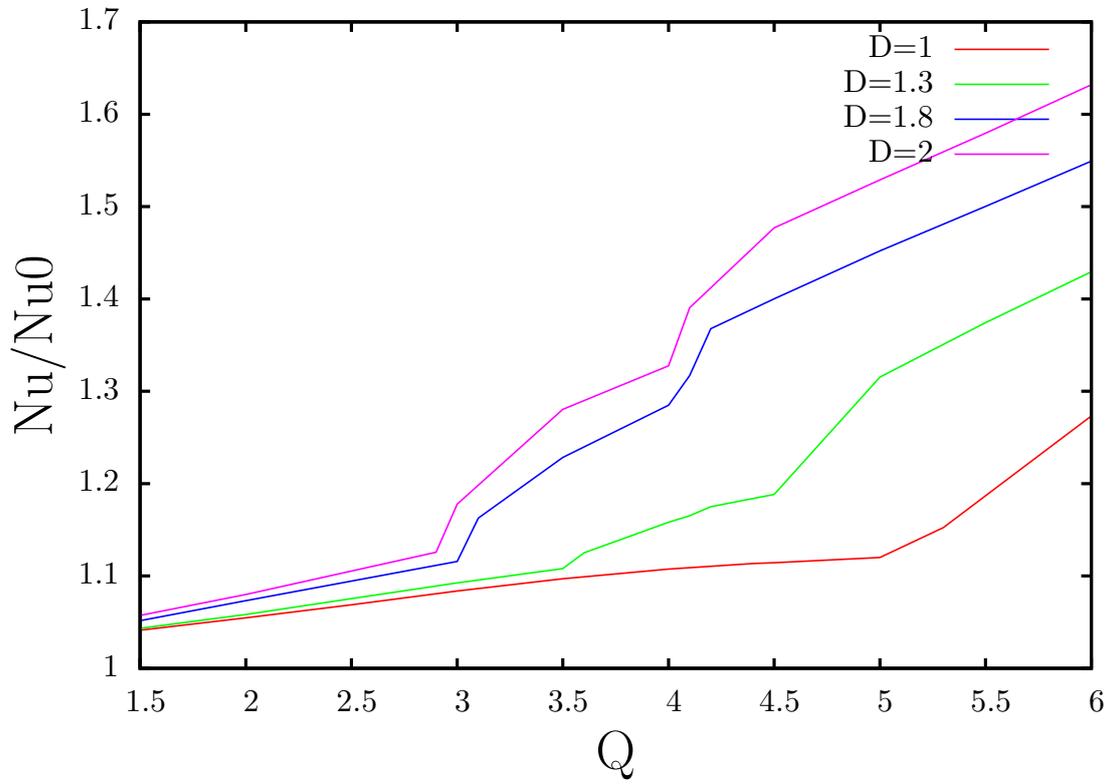


Figura 3.20: Nusselt global para distintos valores de  $Q$ , en el caso de tres obstáculos magnéticos. Para distintos valores de la separación de los obstáculos magnéticos ( $D$ )

De hecho, para la separación  $D=1$  el cambio en la pendiente se da en  $Q=5.3$ , es decir, cuando el patrón de flujo pasa de uno sin desprendimiento de vórtices a otro donde existe tal desprendimiento. Con la separación  $D=1.3$ , el primer cambio en la pendiente se da para un valor de  $Q=3.6$  donde el flujo pasa de no tener oscilación en la cauda a tener desprendimiento periódico de vórtices, como puede observarse en la figura 3.21a). El flujo continua desprendiendo vórtices periódicamente hasta un valor de  $Q=5.0$  donde el patrón de flujo cambia a un comportamiento más desordenado como se puede ver en la figura 3.21b), donde ya no se puede identificar una frecuencia característica clara.

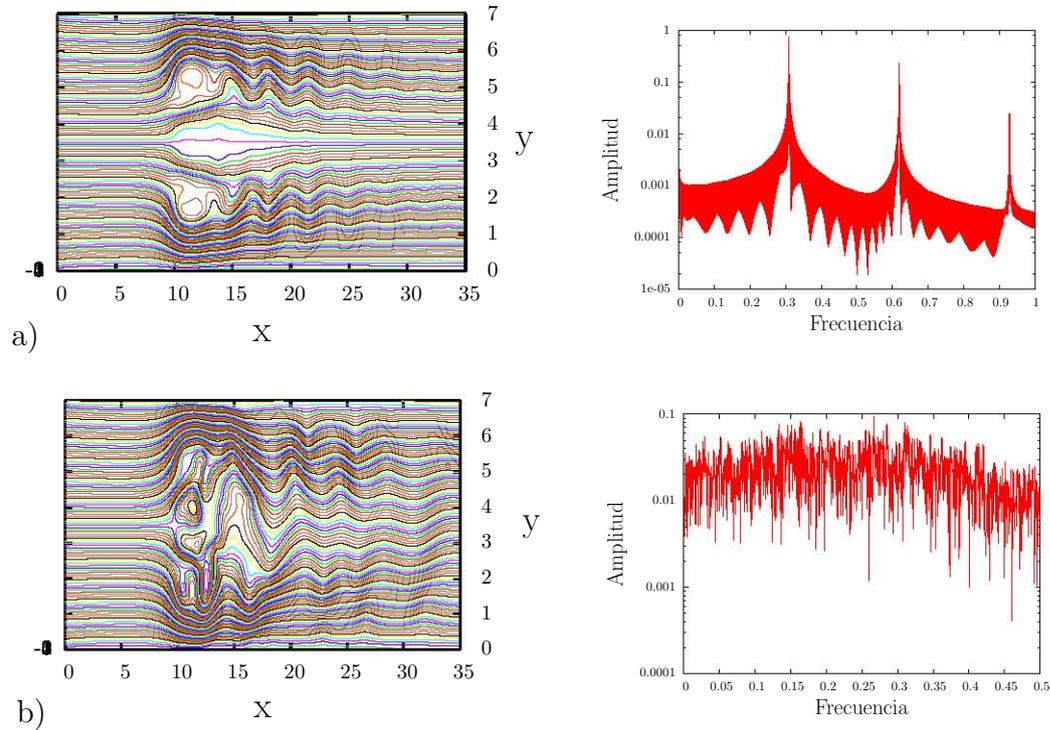


Figura 3.21: Líneas de corriente (columna izquierda) y espectro de frecuencia de la vorticidad calculada 5 unidades aguas abajo del obstáculo (columna derecha) para el flujo sobre tres obstáculos magnéticos.  $Re=1000$ ,  $D=1.3$ . a)  $Q=3.6$ , b)  $Q=5.0$ .

Para una separación de  $D=1.8$  se encuentran esencialmente dos cambios en la pendiente encerrados en un círculo. El primero se presenta con  $Q=3.1$ , cuando el flujo cambia de un patrón de flujo sin desprendimiento de vórtices en el obstáculo más cercano a la pared (figura 3.22a), a un patrón de flujo con desprendimiento periódico de vórtices como se observa en la figura 3.22b). El siguiente cambio en la pendiente se da entre los valores  $Q=4.1$  y  $Q=4.2$ , donde el flujo pasa de tener una frecuencia característica clara (ver figura 3.22b) a un flujo más desordenado donde es difícil identificar una frecuencia característica (ver figuras 3.22c,d).

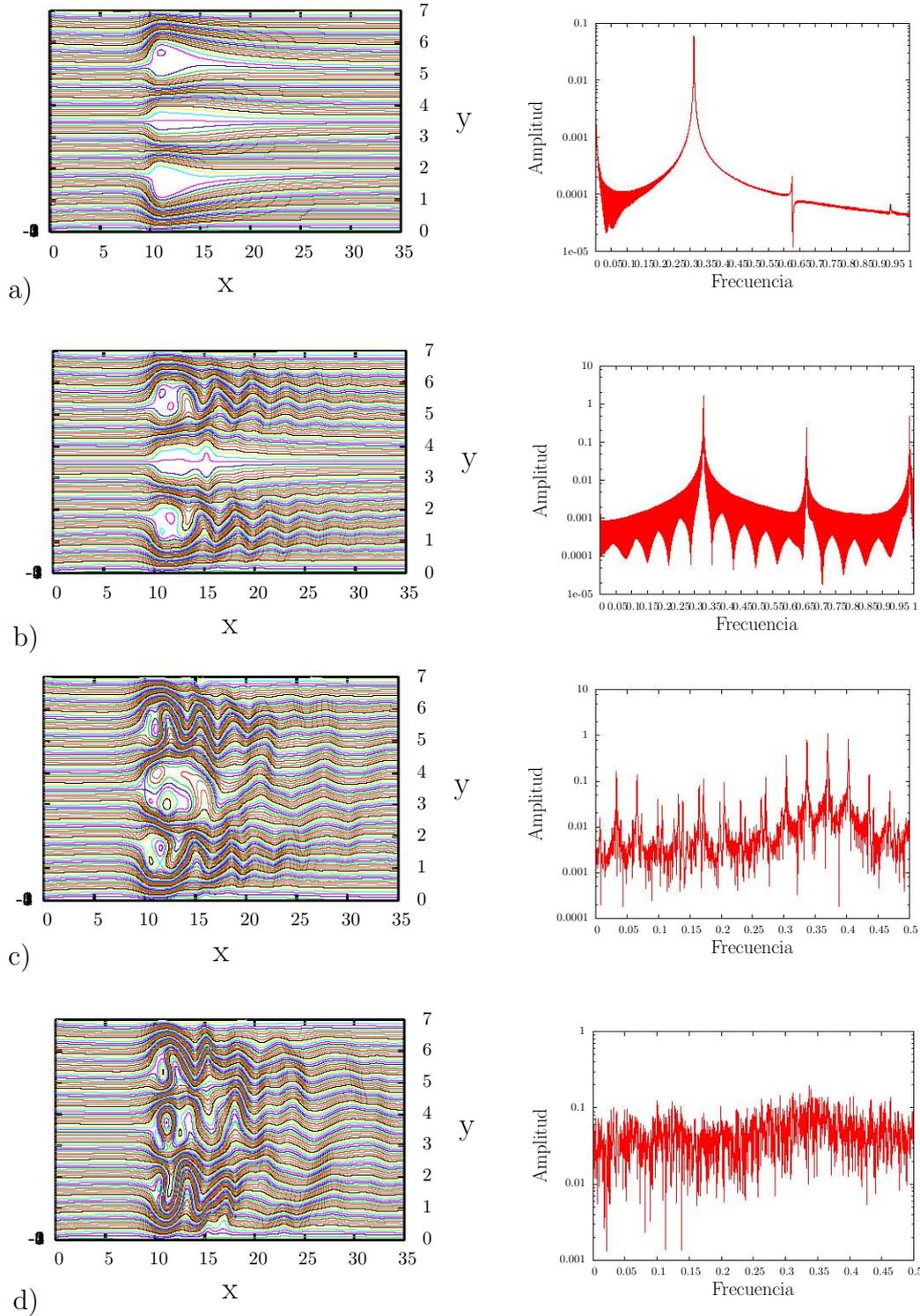


Figura 3.22: Líneas de corriente y espectro de potencia de la vorticidad medida 5 unidades detrás del obstáculo magnético para un flujo sobre tres obstáculos.  $Re=1000$ ,  $D=1.8$ . a)  $Q=3.0$ , b)  $Q=3.1$ , c)  $Q=4.1$ , d)  $Q=4.2$ .

Finalmente, para la separación  $D=2$  se presentan de nuevo los dos cambios importantes en la pendiente de la curva correspondiente de la figura 3.20. Como en los casos anteriores el primer cambio se da cuando el flujo pasa del patrón de flujo sin desprendimiento de vórtices a uno donde ya presenta desprendimiento, esto es para un valor de  $Q=3.0$  (ver figura 3.23a). Al alcanzar el valor  $Q=4.0$  se mantiene el desprendimiento periódico de vórtices pero se amplía la recirculación detrás del obstáculo central (ver figura 3.23b) y para  $Q=4.1$  el desprendimiento de vórtices se da en los tres obstáculos y la amplitud de las caudas aumenta, pareciendo estar en fase (ver figura 3.23c).

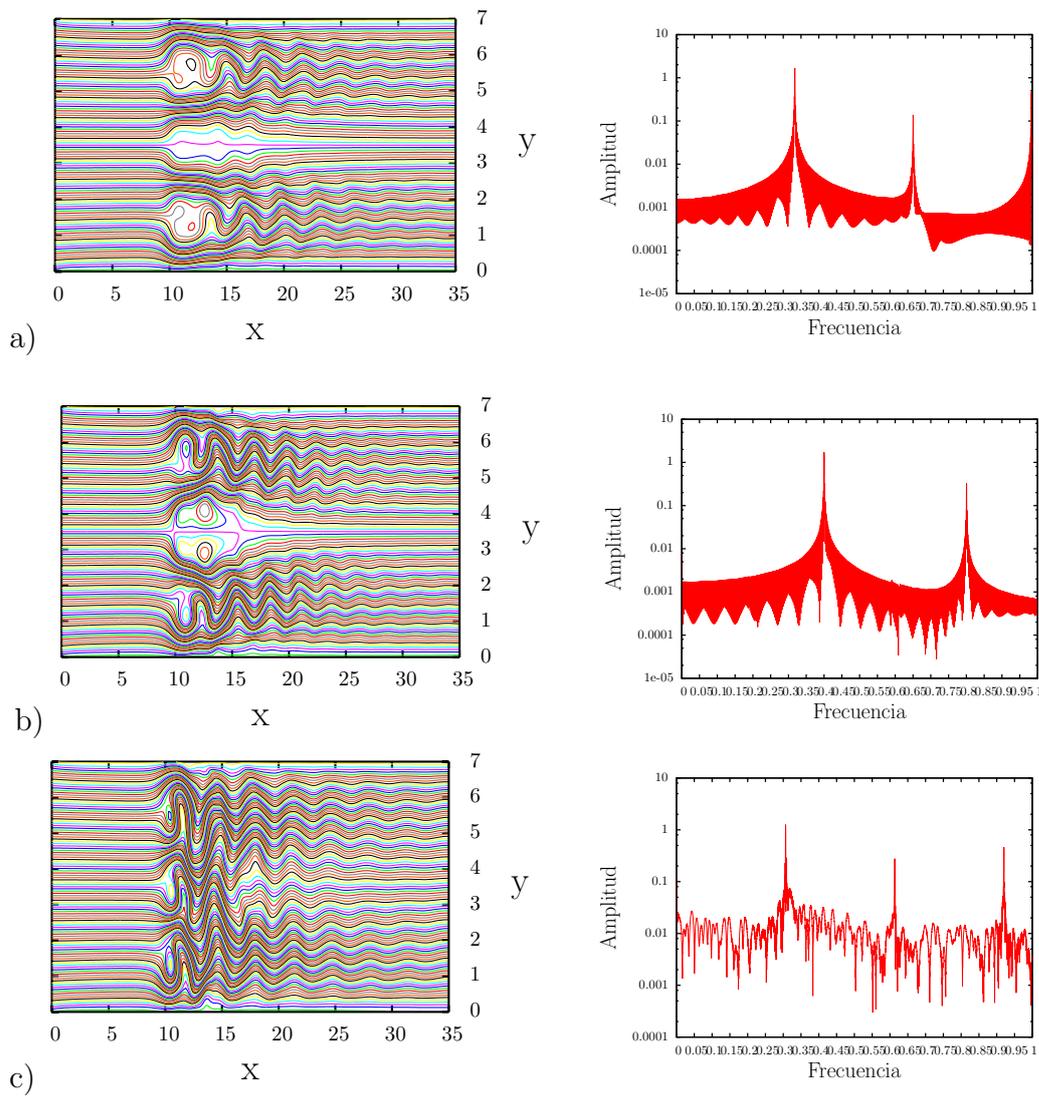


Figura 3.23: Líneas de corriente y espectro de potencia de la vorticidad medida 5 unidades detrás del obstáculo magnético para un flujo sobre tres obstáculos.  $Re=1000$ ,  $D=1.8$ . a)  $Q=3.0$ , b)  $Q=4.0$ , c)  $Q=4.1$ .



---

# Conclusiones

---

En el presente trabajo se realizó un estudio numérico con el fin de simular la dinámica y la transferencia de calor de flujos en una delgada capa de electrolito fluyendo a través de un arreglo de campos magnéticos localizados bajo la aplicación de una corriente eléctrica directa transversal al flujo. Para el desarrollo del modelo computacional se utilizó un enfoque cuasi-bidimensional para incluir el efecto de la superficie inferior del canal a través de un término de fricción lineal que se incluye en las ecuaciones de movimiento.

Los resultados de la dinámica del flujo presentan una similitud cualitativa bastante buena respecto a la clasificación hecha para este tipo de arreglos en obstáculos sólidos. Se encontró que los patrones de flujo dependen tanto de la separación de los obstáculos magnéticos así como de la intensidad de la fuerza de Lorentz caracterizada por el parámetro  $Q$ . Al aumentar la separación de los obstáculos magnéticos se requiere de un valor menor de corriente inyectada para lograr el desprendimiento periódico de vórtices. Si se continúa aumentando dicho parámetro, el flujo se vuelve muy desordenado y deja de tener una frecuencia característica clara para todas las separaciones de obstáculos magnéticos. Estos patrones de flujo fueron utilizados para buscar un mejoramiento de la transferencia de calor.

Para el estudio de la transferencia de calor las paredes laterales presentan una temperatura uniforme mayor a la del fluido a la entrada del canal, la cual abarca solo un tramo de la longitud total de la pared, manteniendo el resto de la misma a la temperatura del fluido en la entrada. El análisis de la transferencia de calor se efectuó para arreglos de dos y tres imanes permanentes colocados lado a lado y variando tanto la distancia entre sus centros de forma equidistante, como el parámetro que gobierna la intensidad de la fuerza magnética.

Se encontró que la presencia de los obstáculos magnéticos en el flujo mejora notablemente la transferencia de calor a través de las paredes laterales del canal comparado con la transferencia de calor producida por un flujo sin obstáculos. Esta mejora se observó analizando el valor del número de Nusselt local y global calculado en una de las paredes del canal.

Para flujos que tienen desprendimiento de vórtices periódicos se obtiene un incremento máximo en la zona donde se encuentran localizados los obstáculos magnéticos. Sin embargo aun los flujos que no presentan frecuencias características bien definidas, también logran mejorar la transferencia de calor. Esto se debe a que la cauda aguas abajo de la ubicación de los arreglos de obstáculos tiene también una influencia sobre la transferencia de calor ya que para una  $Q$  suficientemente alta, puede causar recirculaciones cerca de la pared en regiones relativamente alejadas de la posición axial de los obstáculos.

Aunque los resultados arrojados por el estudio numérico son optimistas en cuanto a la posibilidad de mejorar la transferencia de calor utilizando flujos sobre obstáculos magnéticos, es necesario realizar un estudio experimental para validar el código numérico desarrollado. También es necesario extender el trabajo numérico para considerar un flujo en tres dimensiones y lograr un análisis más realista del problema físico. Por supuesto, también es necesario explorar nuevas configuraciones que permitan establecer un arreglo óptimo de imanes que lleven a mejorar la transferencia de calor mediante la generación de vórtices. Eventualmente, esto podría dar lugar al diseño de un intercambiador de calor eficaz.

---

---

# Bibliografía

---

(n.d.).

Afanasyev, Y. D. and Korabel, V. N. (2006), ‘Wakes and vortex streets generated by translating force and force doublet: laboratory experiments’, *J. Fluid Mech.* **553**, 119–141.

Bearman, P. W. and Wadcock, A. J. (1973), ‘The interaction between a pair of circular cylinders normal to a stream.’, *J. Fluid Mech.* **61**, 499–511.

Beltrán, A. (2010), Dinámica de flujos en obstáculos magnéticos, PhD thesis, UNAM.

Cuevas, S., Smolentsev, S. and Abdou, M. (2006*a*), ‘On the flow past a magnetic obstacle.’, *J. Fluid Mech.* **553**, 227–252.

Cuevas, S., Smolentsev, S. and Abdou, M. (2006*b*), ‘Vorticity generation in the creeping flow past a magnetic obstacle’, *Phys. Rev. E* **74**, 056301–1–056301–10.

Fiebig., M. (1997), ‘Vortices and heat transfer.’, *Math. Mech* **77**, 2–18.

Figuroa, A. (2006), Generación de vorticidad mediante fuerzas magnéticas., Master’s thesis, UNAM.

Gal, P. L., Chauve, M. P., Lima, R. and Rezende., J. (1990), ‘Couple wakes behind two circular cylinders’, *Phys. Rev. A* **41**, 4566–4569.

Honji, H. and Haraguchi, Y. (1995), ‘Electrolytically induced quasi-two-dimensional vortex pairs.’, *J. Phys. Soc. Japan* **64**, 2274–2277.

Kang., S. (2004), ‘Numerical study on laminar flow over three side-by-side cylinders.’, *KSME International Journal* **18**, 1869–1879.

McCaig, M. (1977), *Permanent Magnets in Theory and Practice*, Wiley.

Meneghini, J. R., Saltara, F., Siqueira, C. R. and Ferrari, J. A. (2001), ‘Numerical simulation of flow interference between two circular cylinders in tandem and side-by-side arrangements.’, *J. Fluids and Structures* **15**, 327–350.

Patankar., S. V. (1980), *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw Hill.

- Peschard, I. and Gal, P. L. (1996), ‘Coupled wakes of cylinders.’, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3122–3125.
- Romero-Méndez, R., Sen, M., Yang, K. T. and McClain, R. L. (1998), ‘Enhancement of heat transfer in an inviscid-flow thermal boundary layer due to a rankine vortex.’, *Intl J. Heat Mass Transfer* **41**, 3829–3840.
- Slaouti, A. and Stansby., P. (1992), ‘Flow around two circular cylinders by the random-vortex method.’, *J. Fluids and Structures* **6**, 641–670.
- Sumner, D., Wong, S. S. T., Price, S. J. and Paidoussis, M. P. (1999), ‘Flow behavior of side-by-side circular cylinders in steady cross-flow.’, *J. Fluids and Structures* **13**, 309–338.
- Valencia., A. (1998), ‘Numerical study of self-sustained oscillatory flows and heat transfer in channels with a tandem of transverse vortex generators.’, *Intl J. Heat Mass Transfer* **3**, 465–470.
- Valencia., A. (1999), ‘Heat transfer enhancement due to self-sustained oscillating transverse vortices in channels with periodically mounted rectangular bars.’, *Intl J. Heat Mass Transfer* **42**, 2053–2062.
- Valencia, A., Martin, J. S. and Gormaz., R. (2001), ‘Numerical study of the unsteady flow and heat transfer in channels with periodically mounted square bars.’, *Intl J. Heat Mass Transfer* **37**, 265–270.
- Valencia, A. and Paredes., R. (2003), ‘Laminar flow and heat transfer in confined channel flow past square bars arranged side by side.’, *Intl J. Heat Mass Transfer* **39**, 721–728.
- Valencia, A. and Sen., M. (2003), ‘Unsteady flow and heat transfer in plane channels with spatially periodic vortex generators.’, *Intl J. Heat Mass Transfer* **46**, 3189–3199.
- Versteeg, H. K. and Malalasekera, W. (1995), *An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method*, Longman Scientific & Technical.
- Zdravkovich., M. M. (1985), ‘Flow induced oscillations of two interfering circular cylinders.’, *J. of Sound and Vibration* **101**, 511–521.
- Zhou., Y. (2003), ‘Vortical structures behind three side-by-side cylinders.’, *Experiments in fluids* **34**, 68–76.