



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

ESTUDIO TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE LA AGITACIÓN ELECTROMAGNÉTICA DE FLUJOS EN AGUAS SOMERAS

T E S I S

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN INGENIERIA (ENERGÍA)**

**PRESENTA:
CINTHYA GUTIÉRREZ LARA**

**TUTOR PRINCIPAL:
DR. SERGIO CUEVAS GARCÍA
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN ENERGÍA-UNAM**

TEMIXCO, MORELOS. ENERO 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Eduardo Ramos Mora

Secretario: Dr. Sergio Cuevas García

Vocal: Dr. Jesús Antonio del Rio Portilla

1er. Suplente: Dr. Aldo Figueroa Lara

2do. Suplente: Dr. Fernando Zenaido Sierra Espinoza

Lugar donde se realizó la tesis:

Centro de Investigación en Energía, Temixco, Morelos, México.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Sergio Cuevas García

FIRMA

Dedicado a:

Dios quien desde el cielo me ha enviado a un maravilloso ángel como esposo, Saúl gracias por cuidarme, apoyarme y sobre todo amarme como lo haces.

A mi madre por todo su amor, trabajo y desvelos, nunca los olvidaré; a mis hermanos por su grandioso apoyo y a mis sobrinos porque han venido a complementar mi mundo de felicidad.

A toda mi familia Lara, a mis tíos Caty y Poly quienes siempre están en mis pensamientos.

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México, en especial al Centro de Investigación en Energía por el apoyo brindado durante mis estudios de maestría.

A los miembros del jurado el Dr. Eduardo Ramos Mora, al Dr. Jesús Antonio del Rio Portilla, al Dr. Fernando Zenaido Sierra Espinoza y al Dr. Aldo Figueroa Lara por haberme sabido guiar en el momento preciso.

A mis amigos del Centro de Investigación Joel, Tenoch, Paulina, Gerardo, Manuel, Militza, José Ángel, José Antonio, Guillermo O, Enrique, José Carlos, Heberto, Roberto, Patricio Salvador y particularmente a Michel y José Nuñez por su gran apoyo para la realización de este proyecto.

A CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología) por darme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

En especial agradezco al Dr. Sergio Cuevas García por permitirme trabajar bajo su asesoría, así como también por apoyarme en el desarrollo de la investigación, pero sobre todo por todo su tiempo y sus consejos.

Índice general

Resumen	3
Introducción	5
1. Planteamiento del problema	11
1.1. Dispositivo experimental	11
1.2. Patrones de flujo para diversos arreglos de imanes	13
1.3. Ecuaciones de conservación de la mecánica de fluidos	16
1.4. Ecuaciones del campo electromagnético	18
1.5. Ecuaciones fundamentales de la MHD	20
1.6. Aproximación bidimensional	22
2. Modelo analítico para bajos números de Reynolds	23
2.1. Solución analítica para el flujo con un imán	23
2.1.1. Resultado analítico para el flujo producido por un dipolo magnético puntual	28
2.2. Solución analítica para varios imanes	29
2.3. Resultados analíticos para diferentes arreglos de imanes	30
3. Modelación cuasi-bidimensional del flujo generado por fuerzas electromagnéticas	35
3.1. Ecuaciones del modelo cuasi-bidimensional	35
3.2. Campo magnético aplicado	39
3.3. Condiciones de frontera y condición inicial	42
3.4. Características del mallado, localización de los arreglos de imanes y paso en el tiempo	42
3.5. Implementación del método numérico	43

3.5.1. Visualización de flujo mediante partículas trazadoras	44
3.6. Resultados	45
3.6.1. Comparación de las soluciones analíticas y numéricas	45
3.6.2. Comparación con los experimentos	50
Conclusiones	71
Bibliografía	73

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio analítico, numérico y experimental sobre la generación e interacción de vórtices creados mediante fuerzas electromagnéticas en capas delgadas de un fluido eléctricamente conductor, a saber, un electrolito. Los flujos se generan al interactuar una corriente eléctrica directa con el campo magnético producido por un arreglo simétrico de imanes permanentes. Al suponer que el número de Reynolds es muy pequeño y que las corrientes eléctricas inducidas son despreciables, se obtiene una solución analítica puramente bidimensional para el flujo producido por un sólo imán. Posteriormente, mediante la superposición de esta solución, se estudia el flujo producido en diversos arreglos de imanes permanentes. Con el modelo analítico se presentan comparaciones cualitativas razonablemente buenas con los resultados experimentales, pero con fuertes limitaciones que restringen los flujos estudiados a intensidades de fuerza electromagnética muy pequeñas. Asimismo, se desarrolla un modelo numérico cuasi-bidimensional en el que se considera el efecto de la capa límite adherida a la pared del fondo del contenedor. Los patrones de flujo generados con el modelo numérico primeramente se comparan con los resultados analíticos obteniendo muchas similitudes entre ellos. El comportamiento del fluido obtenido a partir de las simulaciones numéricas para los diversos arreglos de imanes también es comparado cualitativamente con los resultados experimentales encontrando un acuerdo muy razonable al comparar el seguimiento Lagrangiano del flujo calculado numéricamente con las visualizaciones experimentales correspondientes. Además, se realizaron simulaciones variando la intensidad de la corriente eléctrica aplicada en cada uno de los arreglos de imanes, encontrando diferentes patrones de vórtices que muestran comportamientos independientes y dependientes del tiempo. Con ello, se logró construir un mapa de estabilidad numérico en el que se muestra el valor de la intensidad de corriente eléctrica a la que cada arreglo de imanes pasa de ser un régimen independiente del tiempo a uno dependiente del mismo. Este mapa también muestra que entre mayor sea el número de imanes en el arreglo menor será la intensidad de corriente aplicada para pasar de un estado independiente a un estado dependiente del tiempo.

Introducción

El estudio de la interacción de vórtices es un tema de la dinámica de fluidos que ha tomado una gran importancia, ya que se presenta en un gran número de fenómenos naturales así como en aplicaciones industriales. De manera no muy precisa, comúnmente se entiende por vórtice una región dentro de un fluido donde el flujo tiene un movimiento de recirculación alrededor de un eje o un punto imaginario. En fenómenos oceánicos y atmosféricos como las corrientes marinas, los huracanes, los tornados y los torbellinos se presenta claramente la interacción de vórtices, la cual determina en gran medida la evaluación de dichos fenómenos. A su vez, en diversas aplicaciones industriales, principalmente relacionadas con la agitación y el mezclado de fluidos, la interacción de vórtices es de fundamental importancia. La agitación y el mezclado de fluidos son empleados en diversas aplicaciones tecnológicas relacionadas con las industrias metalúrgica, de pinturas, química, de alimentos, farmacéutica, entre otras, en donde la eficiencia de los procesos depende de contar con una agitación y un mezclado eficaces (Ottino, 1990).

La dinámica de vórtices es un tópico de gran interés tanto básico como aplicado y su estudio ha dado lugar al descubrimiento de muchas estructuras interesantes producidas por interacciones de vórtices (Vincent y Meneguzzi, 1991). Es de particular interés el estudio de vórtices laminares que permiten conocer de manera detallada el comportamiento dinámico y las propiedades de transporte, fundamentales para comprender los procesos de mezclado. Meunier y Villermaux (2003) estudiaron teórica y experimentalmente la evolución de un vórtice cuasi-bidimensional creado al mover en forma de aleteo, una placa plana dentro de un tanque de agua que inicialmente se encontraba en reposo. Utilizando tinta como trazador, se midió la evolución de la concentración de la tinta y se comparó con un modelo teórico, determinando también el tiempo de mezclado y el decaimiento de la concentración máxima. A su vez, Meunier y Leweke (2005), realizaron visualizaciones tridimensionales de dos vórtices paralelos con el mismo sentido de rotación, generados de la misma forma que en el ejemplo anterior, sólo que en este experimento se utilizaron dos placas planas moviéndose en forma de aleteo por mayor tiempo, dando como resultado la formación de tubos de corriente en la dirección normal al plano. A tiempos largos los núcleos de ambos vórtices quedan separados a una distancia menor, formando una inestabilidad elíptica que envuelve a ambos, llegando más tarde a la formación de un sólo vórtice dentro del régimen turbulento, dando como resultado un buen mezclado. A pesar de que Meunier y Leweke (2005) se interesaron en medir y predecir las condiciones iniciales que dan lugar a la fusión de dos vórtices, no dedicaron mucha atención al mecanismo físico

que genera esta fusión. No obstante, un par de años antes Cerretelli y Williamson (2003) estudiaron este fenómeno desde el punto de vista experimental midiendo directamente el campo de vorticidad antisimétrica que hace que los vórtices co-rotando se acerquen uno hacia el otro hasta lograr la fusión. Además encontraron el campo de velocidad inducida que hace que los centroides de los vórtices se unan con mayor facilidad.

Otra investigación interesante que muestra la manera en que tiene lugar la generación e interacción de vórtices fue realizada por Wells et al. (2007). Primeramente, estos autores generaron movimiento en el fluido haciendo rotar un tanque de manera periódica, observando inicialmente la generación de un vórtice que gira en sentido horario, el cual abarca el tamaño del contenedor; en segunda instancia se observó la generación de cuatro pequeños vórtices girando en sentido anti-horario en las esquinas del contenedor, esto debido a efectos no lineales y a la fricción que se genera entre las paredes y el fluido. Posteriormente se observó la formación de estructuras dipolares que finalmente se propagan interactuando entre sí, como se muestra en la Figura 1.

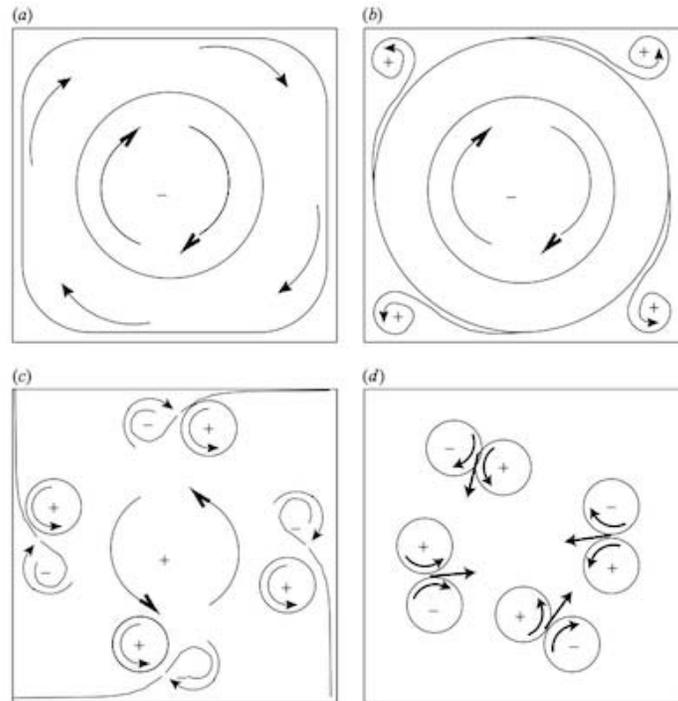


Figura 1: Esquema de la formación de vórtices dipolares en un flujo oscilatorio generado por el movimiento periódico de un contenedor cuadrado. (a) Vorticidad uniforme negativa. (b) Vorticidad positiva en las esquinas del contenedor. (c) Formación de estructuras dipolares. (d) Interacción entre los vórtices dipolares (Wells et al., 2007).

Por supuesto, existe una infinidad de problemas donde la interacción de vórtices da lugar a diferentes estructuras de flujo y comportamientos. De hecho, uno de los problemas clásicos de la dinámica de fluidos se relaciona con determinar el movimiento de vórtices puntuales y en particular, con encontrar las condiciones en donde un cierto número de vórtices puntuales es estable. Este problema es muy antiguo, iniciado a partir de los trabajos de Helmholtz (1858) y Kelvin (1867), y ha atraído la atención de un gran número de autores (Aref et al., 2003; Aref, 2007, 2009). El problema principal es establecer el equilibrio relativo de vórtices puntuales idénticos, que son patrones de vórtices en rotación uniforme que no cambian su forma o tamaño. Se le denomina equilibrio relativo para distinguirlo del equilibrio absoluto del sistema en reposo. En estos sistemas existen en el fluido puntos que están en equilibrio respecto al patrón de vórtices. Estos se denominan puntos corrotantes. Dirksen (2012) realizó una compilación de diversos patrones de flujo donde existe el equilibrio relativo entre puntos corrotando y vórtices ideales puntuales, lo que en algunos casos puede lograrse de manera analítica resolviendo las ecuaciones de balance correspondientes, mientras que en otros casos las soluciones son numéricas. Las Figuras 2 y 3 muestran ejemplos de configuraciones de 4 y 6 vórtices ideales puntuales, respectivamente, en donde se establece el equilibrio relativo, alcanzando un estado estacionario.

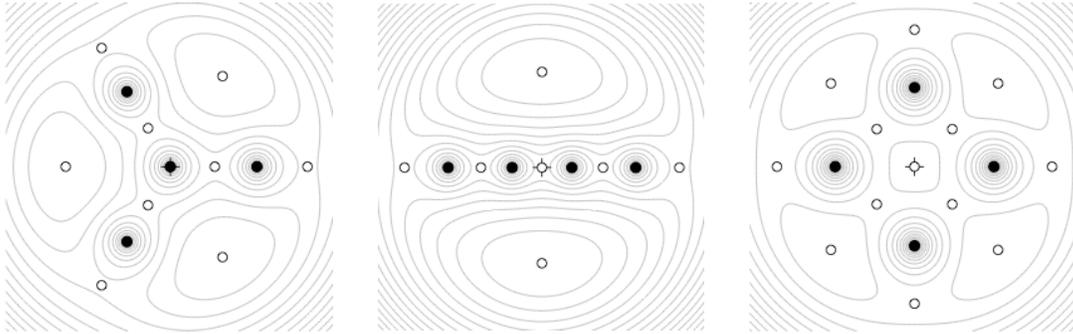


Figura 2: Configuraciones de 4 vórtices ideales puntuales donde se establece un estado de equilibrio relativo. Los puntos en color negro representan a los vórtices ideales puntuales y los puntos huecos son los puntos corrotantes (Dirksen, 2012).

Sin embargo, crear sistemas que se asemejen a vórtices ideales puntuales de manera experimental es complicado. Para tal efecto se han desarrollado, por ejemplo, sistemas de discos magnetizados flotando en una interfaz líquido-aire, donde existe una combinación entre la interacción del fluido producida por los discos en rotación y el campo magnético (Grzybowski et al., 2000). También se han realizado visualizaciones de patrones de vórtices en rotación en helio superfluido que asemejan a los vórtices ideales puntuales (Yarmchuk et al., 1979). Por otra parte, el tener un buen control sobre vórtices producidos mediante diversas formas mecánicas, donde los parámetros varían constantemente, tampoco es sencillo. Una alternativa relativamente sencilla para la generación de vórtices de manera no intrusiva a nivel laboratorio es la utilización de campos eléctricos y magnéticos que dan

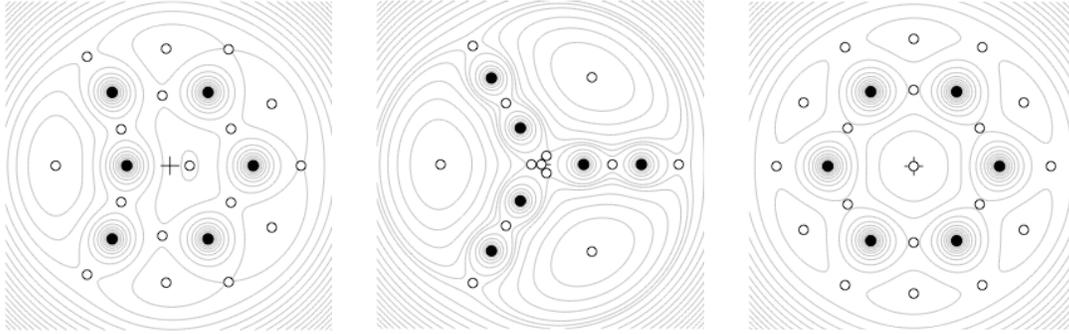


Figura 3: Configuraciones de 6 vórtices ideales puntuales donde se establece un estado de equilibrio relativo. Los puntos en color negro representan a los vórtices ideales puntuales y los puntos huecos son los puntos corrotantes (Dirksen, 2012).

lugar a fuerzas electromagnéticas que producen movimiento en un fluido eléctricamente conductor no magnetizable. La utilización de fuerzas electromagnéticas para producir movimiento en un fluido conductor se conoce como agitación electromagnética y es una metodología utilizada comúnmente en el procesamiento de materiales. Esta es solo una de las muchas aplicaciones de lo que se ha dado en llamar el Procesamiento Electromagnético de Materiales cuyo propósito es ayudar a obtener las características requeridas por los materiales como lo son la calidad, pureza y homegeneidad, entre otras. La agitación electromagnética ha sido empleada para estudiar la dinámica de vórtices utilizando distintos fluidos conductores, en particular, metales líquidos en donde la interacción electromagnética tiende a producir flujos cuasi-bidimensionales (Sommeria, 1988). Los vórtices generados electromagnéticamente también han sido estudiados teórica y experimentalmente utilizando capas delgadas de electrolito (Salas et al., 2001; Figueroa et al., 2009, 2011; Akkermans et al., 2010; Rossi y Lardeau, 2011). Estos estudios han permitido una comprensión más profunda de la dinámica de vórtices en sistemas cuasi-bidimensionales y en particular, de los procesos de transporte que tienen lugar en los fenómenos de agitación y mezclado, que son de fundamental importancia en innumerables aplicaciones tecnológicas y fenómenos naturales.

En este contexto, la presente tesis tiene como objetivo estudiar la estabilidad y el comportamiento espacio-temporal arreglos de vórtices generados electromagnéticamente en capas delgadas de electrolitos. Estos vórtices se generan mediante fuerzas magnéticas surgidas de la interacción de una corriente eléctrica directa con campos magnéticos localizados producidos por imanes permanentes, dispuestos por debajo del recipiente que contiene al electrolito. De manera análoga al estudio del equilibrio relativo de vórtices puntuales ideales, en el presente trabajo se estudia el comportamiento de los flujos producidos por arreglos de imanes dispuestos de manera equidistante sobre un círculo cuyo diámetro es mucho mayor que el diámetro de los imanes. Así, se analizan flujos producidos por arreglos que van de tres a diez imanes. En la Figura 4 se muestra el flujo producido por la interacción del campo magnético generado por un solo imán (cuya localización se marca

con una línea punteada) y una corriente directa inyectada de izquierda a derecha. Dicha interacción ocasiona a una fuerza magnética (fuerza de Lorentz) en dirección vertical hacia abajo que da lugar a la formación de un dipolo, es decir, dos vórtices rotando en contra sentido, con una elongación en la dirección hacia donde apunta la fuerza. Si ahora se cuenta con más de un imán localizado a una distancia suficientemente cercana, los vórtices dipolares producidos por cada imán interactuarán dando lugar a un flujo más complicado. La pregunta es entonces si el flujo resultante es estable y tiene un comportamiento independiente del tiempo o bien, la configuración es tal que el flujo presenta una dependencia temporal. Por supuesto, el comportamiento espacio-temporal del flujo no solo depende del número y la disposición de los imanes sino también de la magnitud de la corriente inyectada. En este trabajo se aborda este problema tanto experimental como teóricamente, en particular se presentan soluciones analíticas con ciertas aproximaciones y soluciones numéricas que reproducen de mejor manera las observaciones experimentales.

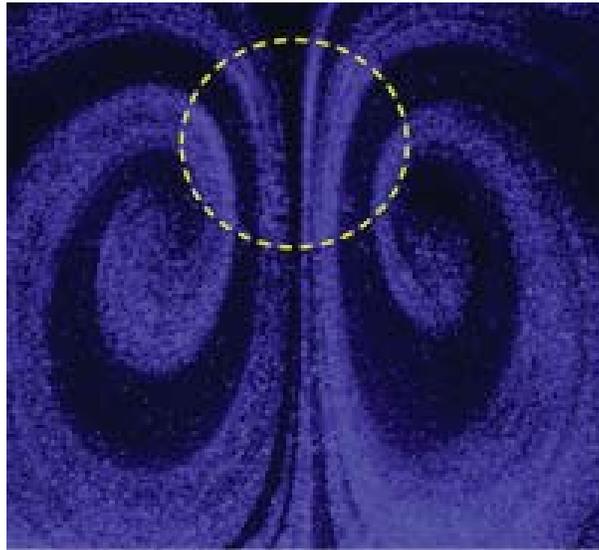


Figura 4: Vórtice dipolar generado electromagnéticamente mediante la interacción del campo magnético producido por un imán permanente (localizado externamente donde se muestra la línea punteada) y una corriente eléctrica directa aplicada de izquierda a derecha.

En el Capítulo 1 se presentará una descripción general del equipo experimental utilizado durante la realización de los experimentos, así como también las características de las configuraciones de imanes utilizadas en el mismo. Se presentarán resultados experimentales de arreglos de 3, 4, 6, 8 y 10 imanes. Además de que en este capítulo también se realiza el compendio de las ecuaciones que rigen el fenómeno de estudio, las cuales serán analizadas en el Capítulo 2 de forma analítica, en donde con algunas aproximaciones se obtendrá una solución analítica que da un buen acercamiento a la solución del

fenómeno, pudiendo comparar algunas de las soluciones analíticas con los experimentos. En el Capítulo 3 se presenta un modelo cuasi-bidimensional resuelto numéricamente, en el que se obtienen resultados más apegados a la realidad, ya que en estas simulaciones se toma en cuenta la fricción generada entre la pared del fondo y el fluido. Además se mostrarán comparaciones cualitativas con las soluciones analíticas y experimentales.

Planteamiento del problema

En el presente capítulo se presenta primeramente el dispositivo experimental que fue utilizado para estudiar la interacción de vórtices generados electromagnéticamente en una delgada capa de electrolito. Se muestran asimismo algunas de las configuraciones de imanes utilizadas y los patrones de flujo obtenidos con ellas. Aunque la mayoría de los resultados experimentales son solo cualitativos, se presenta un caso en donde el flujo se analizó mediante el método de velocimetría por imágenes de partículas, conocido como PIV por sus siglas en inglés. Posteriormente, se establecen las ecuaciones de balance que gobiernan los flujos en cuestión y se escriben en forma adimensional. Dichas ecuaciones se resuelven en los capítulos 2 y 3 de forma analítica y numérica, respectivamente, y las soluciones obtenidas se comparan cualitativamente con los patrones de flujo experimentales.

1.1. Dispositivo experimental

El dispositivo experimental consiste en un recipiente rectangular o cuba con dimensiones interiores de 28 cm de ancho, 36 cm de largo y 1.3 cm de altura; tres lados del contenedor están hechos de acrílico, mientras que el lado restante de 36 cm está hecho de vidrio con el fin de tener un índice de refracción cercano al del agua al realizar experimentos de Velocimetría por Imágenes de Partículas de manera que la hoja láser presente una mínima desviación permitiendo obtener resultados con mayor precisión. A lo largo de los lados cortos del recipiente se colocan electrodos de cobre conectados a una fuente de voltaje variable. En el recipiente se vierte una solución electrolítica con un volumen de 400 cm³ con lo cual la capa de electrolito alcanza una altura de 0.4 cm. El electrolito es una mezcla de agua destilada con bicarbonato de sodio al 8.8% en masa, cuya densidad, viscosidad cinemática y conductividad eléctrica a temperatura ambiente son, respectivamente, $\rho = 1086 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ y $\sigma = 6.36 \text{ S/m}$. Los imanes dipolares utilizados para generar el campo magnético están hechos de Neodimio (*NdFe*), tienen forma cilíndrica con un diámetro de 0.92 cm y 0.62 cm de altura. La intensidad magnética máxima sobre la superficie de cada imán es de 0.3 T. Para los experimentos se utilizaron arreglos de tres a diez imanes colocados sobre un círculo de 3.75 cm de radio, equidistantes entre sí, de modo que para cada arreglo de los imanes están colocados en los vértices de un polígono regular.

La corriente eléctrica directa aplicada en los experimentos se varió en dos rangos distintos. Primeramente, con el fin de evitar en lo posible los efectos inerciales (no lineales) y poder

realizar una comparación cualitativa con soluciones analíticas aproximadas, la corriente se varió entre 3 y 10 mA. En este rango los flujos obtenidos son independientes del tiempo. Posteriormente, se realizaron experimentos con corrientes que van de los 50 a los 200 mA, rango en el cual los efectos inerciales no son despreciables. Los patrones de flujo obtenidos, que pueden ser dependientes o independientes del tiempo, se compararon con soluciones numéricas de un modelo cuasi-bidimensional.

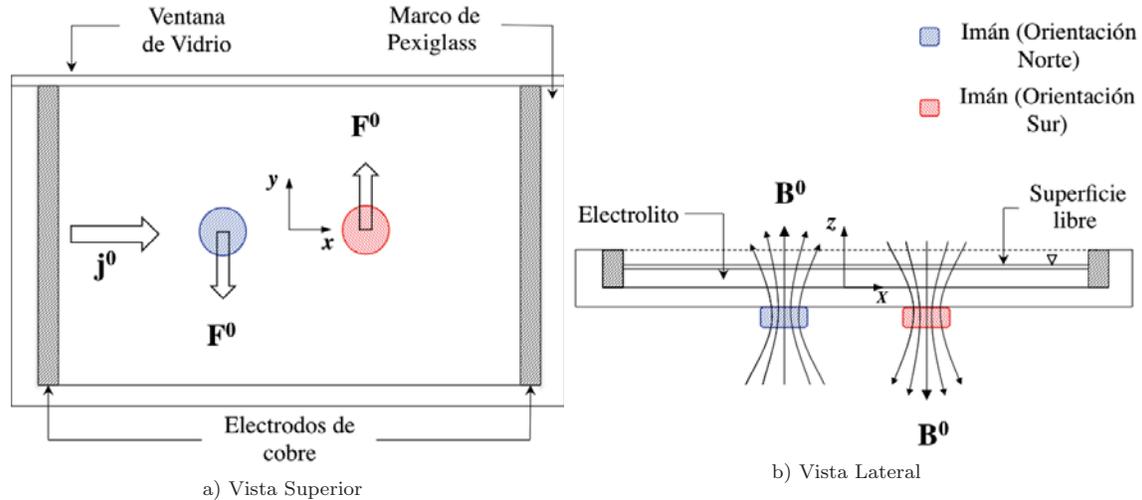


Figura 1.1: Esquema del dispositivo experimental utilizado para el estudio de la interacción de vórtices generados mediante fuerzas electromagnéticas en campos magnéticos producidos por arreglos de imanes permanentes.

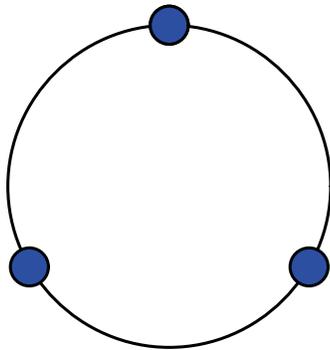
En la Figura 1.1a se muestra esquemáticamente la vista superior del montaje experimental, mientras que la Figura 1.1b muestra la vista lateral del mismo, donde observa que la superficie superior es libre, mientras que la superficie inferior del fluido se encuentra en contacto con el fondo del recipiente. En el experimento la corriente eléctrica directa es aplicada de izquierda a derecha por medio de los electrodos, obteniendo aproximadamente una densidad de corriente uniforme en toda la capa de fluido. Además, en la Figura 1.1b se muestra cómo están colocados los imanes debajo del contenedor, quedando la componente normal del campo magnético del imán perpendicular al fondo de la cuba. Los colores azul y rojo representan, respectivamente, las orientaciones norte y sur del imán. La dirección de la fuerza electromagnética o fuerza de Lorentz que se genera al hacer interactuar el campo magnético con la corriente eléctrica depende de la orientación del imán, es decir, si el polo norte del imán apunta en la dirección z positiva, la fuerza generada apunta en la dirección y negativa. A su vez, si es el polo sur el que apunta en la dirección z positiva, la fuerza producida apunta en la dirección en y positiva. Como veremos más adelante, las distintas configuraciones de imanes dan lugar a fuerzas de Lorentz que originan patrones de flujo con distinto grado de complejidad. En la siguiente sección se muestran algunos de los patrones de flujo obtenidos experimentalmente.

1.2. Patrones de flujo para diversos arreglos de imanes

Con el fin de poder visualizar los patrones de flujo generados en el electrolito mediante fuerzas electromagnéticas, se utilizó pintura comestible, con una densidad aproximadamente igual a la de la solución electrolítica.

La Figura 1.2a muestra un arreglo de tres imanes con orientación norte, representados por los círculos en color azul, colocados en los vértices de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia con radio de 3.81 cm. El centro de la circunferencia mayor se desplazó 3 cm en el eje y por encima del centro geométrico de la cuba, mostrado en la Figura 1.1a, con el propósito de que los vórtices formados no sean afectados por las paredes laterales del contenedor. En la Figura 1.2b se muestra el patrón de flujo estacionario que se desarrolla en este arreglo de imanes cuando se aplica una corriente de 100 mA. Se pueden observar tres pares de vórtices, los cuales se elongan en la dirección de la fuerza de Lorentz, es decir, en la dirección y negativa. Esta elongación, que rompe la simetría del patrón de flujo, es un efecto no lineal. Como veremos en el capítulo siguiente, cuando se omiten los efectos inerciales los patrones de flujo son simétricos.

a)



b)



Figura 1.2: a) Arreglo de tres imanes permanentes con orientación norte, b) Patrón de flujo experimental obtenido para el arreglo de tres imanes con una corriente aplicada de $I = 100$ mA.

En la Figura 1.3a se puede observar un arreglo alternado de seis imanes colocados en los vértices de un hexágono regular inscrito en una circunferencia del mismo radio que en el caso anterior, donde la orientación norte de los magnetos se representa por los círculos en color azul, mientras que la orientación sur se representa por los círculos en color rojo. En este experimento el centro de la circunferencia se encuentra localizado en el centro geométrico del recipiente rectangular. En la Figura 1.3b se muestra el patrón de flujo estacionario obtenido con dicho arreglo de imanes para una corriente aplicada de 100 mA.

Se puede observar que existe interacción entre los vórtices dipolares que se forman por la presencia de cada imán. A diferencia del caso en donde todos los imanes tienen la misma orientación, la orientación alternada de los imanes da lugar a fuerzas de Lorentz en direcciones opuestas y por tanto los vórtices dipolares adyacentes tendrán direcciones de giro encontradas. Esto ocasiona la coalescencia o unión de dos vórtices para formar otro de mayor tamaño o bien la distorsión de las estructuras vortiginosas, lo que aunado con los efectos no lineales, propicia la formación de patrones de flujo más complejos.

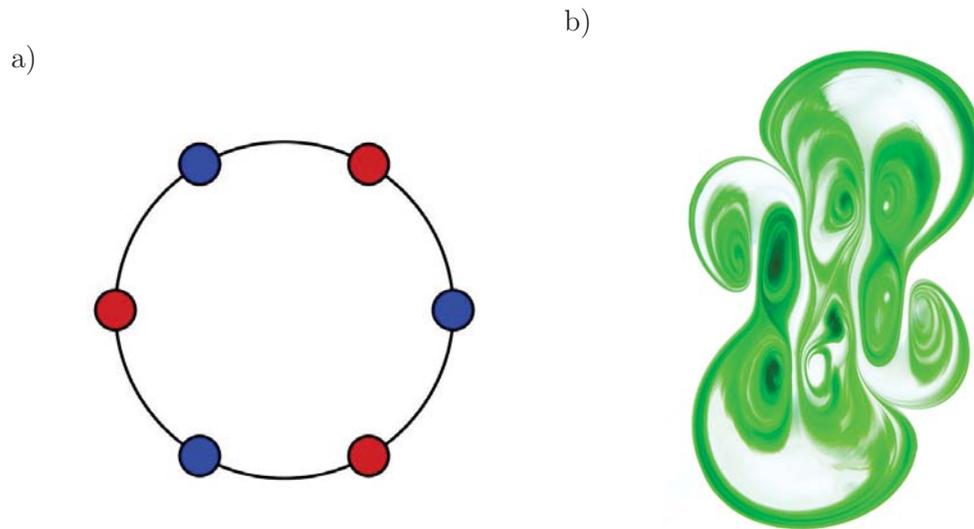


Figura 1.3: a) Arreglo de seis imanes permanentes con orientación alternada norte y sur; b) Patrón de flujo experimental obtenido al aplicar una corriente de 100 mA con un arreglo de seis imanes.

La Figura 1.4a muestra un arreglo de ocho imanes permanentes alternados localizados en los vértices de un octágono regular inscrito en una circunferencia con el mismo radio de los casos anteriores. El centro de la circunferencia se encuentra localizado en el centro geométrico del contenedor. En la Figura 1.4b se muestra el patrón de flujo estacionario obtenido con este arreglo de imanes cuando la corriente aplicada es de 50 mA. Nuevamente, debido a la configuración alternada de los imanes se observa que la interacción entre los vórtices da lugar a la coalescencia de estructuras vortiginosas, generando uniones de dos o tres vórtices dependiendo de la cercanía y sentido de giro entre ellos. En este caso, debido a que la corriente aplicada es la mitad de la utilizada para el arreglo de seis imanes, los efectos inerciales son menores y el patrón de flujo presenta una mayor simetría.

Para este arreglo en particular, pero con una corriente aplicada de 75 mA, se realizaron mediciones experimentales utilizando la técnica de PIV, ya que el fluido de estudio es ópticamente transparente (Tropea et al., 2007). Para lograr mediciones mediante esta técnica es necesario agregar partículas trazadoras de plata con flotación neutra en el fluido de trabajo que se moverán con la misma velocidad local del

mismo. Las partículas trazadoras son capaces de reflejar la luz al ser iluminadas. Después, se ilumina uniformemente un plano horizontal con una hoja láser que entra a través de la pared de vidrio de la cuba que contiene al electrolito. Posteriormente, se captura una serie de imágenes consecutivas por medio de una cámara con un lente de alta calidad, colocada por encima del plano a analizar. Al capturar dos imágenes separadas por un tiempo muy pequeño, es posible determinar el desplazamiento de las partículas durante dicho intervalo de tiempo. Seguido de esto, las imágenes fotográficas son digitalizadas por medio de un escáner y la salida de datos se transfiere a la memoria de una computadora. Para la evaluación de la serie de imágenes el área de estudio se divide en subáreas pequeñas llamadas “áreas de interrogación”. En estas pequeñas áreas se determinan los vectores de desplazamiento por medio de métodos estadísticos, suponiendo que las partículas se han movido homogéneamente entre las dos imágenes. La proyección del vector de velocidad de flujo local en el plano de la hoja del láser se calcula teniendo en cuenta el retardo de tiempo entre los dos iluminaciones y el aumento en la imagen. Este proceso se repite para todas las áreas de interrogación de la grabación de PIV obteniendo así el campo de velocidades bidimensional en el área de estudio (Raffel et al., 2007). El plano horizontal donde se realizó la medición se encuentra a una altura de 3.5 mm y el intervalo de tiempo entre los pulsos para la captura entre una imagen y otra fue de 30 ms. Por otra parte, el tiempo determinado entre una secuencia de capturas fue de 50 ms y para el análisis se utilizó un área de interrogación de 64×64 píxeles, con una coincidencia del 50 % en x y y , siendo el área estudiada de 14 cm \times 15 cm.

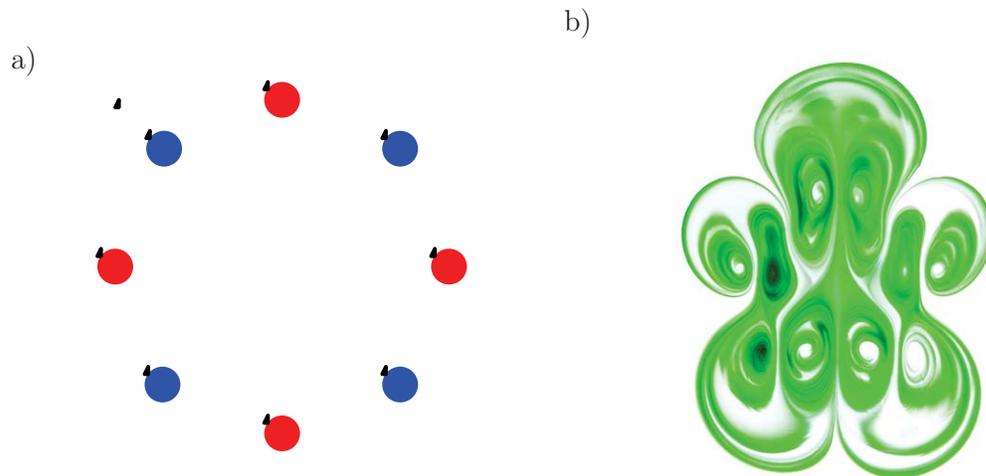


Figura 1.4: a) Arreglo de ocho imanes permanentes con orientación alternada, b) Patrón de flujo experimental obtenido al aplicar una corriente de 50 mA en un arreglo de ocho imanes.

La Figura 1.5 muestra el campo vectorial de velocidades resultante de un experimento realizado con la configuración de 8 imanes colocados alternadamente, mostrada en la Figura 1.4a. Puede observarse que la medición de PIV reproduce las recirculaciones principales que caracterizan a este flujo y da una idea de dónde se presenta el flujo con mayor

intensidad. En este caso se pudo determinar la velocidad máxima del flujo está es de aproximadamente $U = 1$ cm/s, lo cual equivale a un número de Reynolds ($Re = UL/\nu$) de 90, donde la longitud característica L se toma como el diámetro de los imanes utilizados.

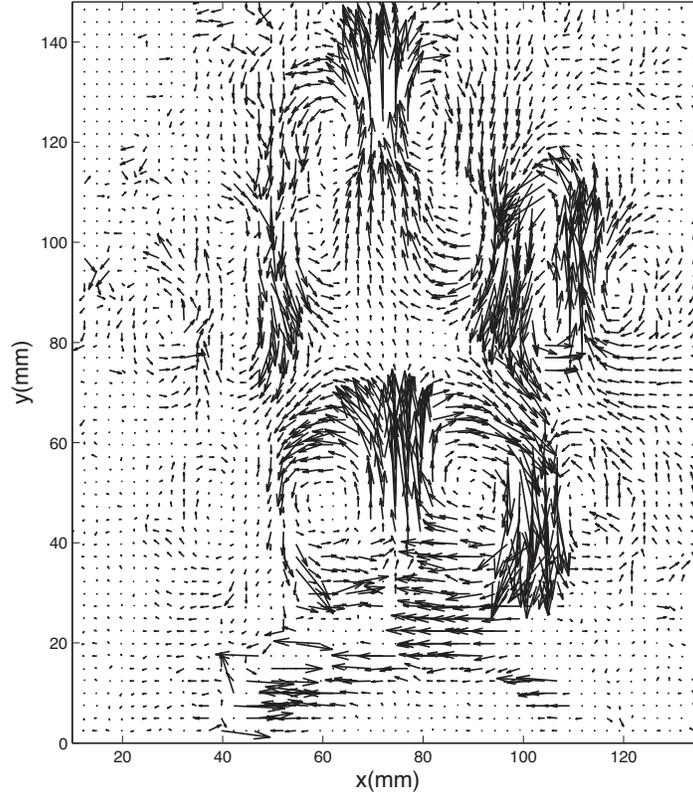


Figura 1.5: Campo vectorial de la velocidad, medido a una altura $z = 3.5$ mm, generado por ocho imanes alternados con un $B_{max} = 0.14$ T cada uno, una $I = 75$ mA y un $Re = 98$.

1.3. Ecuaciones de conservación de la mecánica de fluidos

En la dinámica de fluidos se estudia el comportamiento de los fluidos desde un punto de vista macroscópico y bajo la hipótesis del continuo. Debido a esto, se pueden definir en cada punto del espacio y a todo tiempo las variables que caracterizan a un fluido, como son la velocidad, la presión, la densidad, la viscosidad y la temperatura, entre otras (Gary Leal, 2007). A partir de los principios fundamentales de conservación de la masa, la Segunda Ley de Newton y la Primera Ley de la Termodinámica, y haciendo uso de ecuaciones constitutivas y relaciones termodinámicas basadas en la hipótesis de equilibrio local, es posible derivar las ecuaciones de balance de masa, cantidad de movimiento y

energía que gobiernan la evolución espacio-temporal de los fluidos. Dado que la solución electrolítica utilizada en este trabajo puede considerarse como un fluido incompresible, la ecuación de conservación de masa se reduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.1)$$

donde \mathbf{u} representa al vector del campo de velocidades. Por otra parte, puesto que el fluido de trabajo es un fluido Newtoniano la ecuación de balance de cantidad de movimiento se reduce a la ecuación de Navier-Stokes, es decir,

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (1.2)$$

donde ρ es la densidad de masa, P es el campo de presión, η es la viscosidad dinámica del fluido y \mathbf{f} es el vector de una fuerza de cuerpo que actúa sobre el fluido. En particular, para el problema estudiado en esta tesis, la fuerza externa \mathbf{f} es la fuerza electromagnética o fuerza de Lorentz, que se expresa en la forma $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$, donde \mathbf{j} es el vector de la densidad de corriente eléctrica y \mathbf{B} es el vector de campo magnético. De esta manera, la ecuación de Navier-Stokes queda

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (1.3)$$

La tercera ecuación que permite completar la caracterización del sistema, es la ecuación de balance de energía o ecuación de transferencia de calor, que para un fluido Newtoniano toma la forma

$$\rho C_P \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) T \right) = k \nabla^2 T + \eta \Phi + \dot{q}, \quad (1.4)$$

donde C_P es el calor específico a presión constante, T es el campo de temperaturas, k es la conductividad térmica, Φ es una fuente de disipación que incluye los efectos por fricción viscosa y \dot{q} representa la tasa de calentamiento por unidad de volumen producido por algún trabajo externo, como la disipación de Joule. Dado que la densidad es constante, la ecuación (1.4) está desacoplada de las ecuaciones (1.1) y (1.3). En este trabajo no consideraremos el problema de transferencia de calor por lo que la ecuación (1.4) no será resuelta.

Hasta el momento, se han presentado las ecuaciones de balance de la dinámica de fluidos. Sin embargo el término de Fuerza de Lorentz que aparece en la ecuación de Navier-Stokes (1.3) introduce variables adicionales que ocasionan que el sistema de ecuaciones no esté cerrado. Es por ello, que las ecuaciones de balance se deben complementar con las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones constitutivas del campo electromagnético para obtener un sistema de ecuaciones cerrado.

1.4. Ecuaciones del campo electromagnético

Las ecuaciones de Maxwell son las ecuaciones básicas que gobiernan los fenómenos electromagnéticos y junto con la ecuación para la fuerza de Lorentz establecen las interacciones de los campos electromagnéticos. En un medio homogéneo, isotrópico y lineal dichas ecuaciones se pueden escribir de manera diferencial de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon}, \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.8)$$

donde la ecuación (1.5) se conoce como la ley de Gauss y establece que la fuente del campo eléctrico \mathbf{E} son las cargas eléctricas, donde ρ_e es la densidad de carga y ϵ es la permitividad eléctrica del medio. La ecuación (1.6) establece la inexistencia de los monopolos magnéticos, donde \mathbf{B} es el vector de inducción magnética. La ecuación (1.7) se conoce como la ley de inducción de Faraday y establece la posibilidad de generar campos eléctricos a partir de variaciones temporales del campo magnético. Por último, la ecuación (1.8) es la ley de Ampère-Maxwell que establece que los campos magnéticos pueden producirse a partir de corrientes eléctricas y variaciones temporales del campo eléctrico, donde μ es la permeabilidad magnética del medio. Para metales líquidos y electrolitos se tiene que en muy buena aproximación $\mu = \mu_0$, donde μ_0 es la permeabilidad del vacío (Davidson, 2001).

Además de las ecuaciones de Maxwell se requiere una relación entre la densidad de corriente eléctrica con los campos eléctricos y magnéticos, que está dada por una ecuación constitutiva conocida como la ley de Ohm, que en el sistema respecto al cual el fluido se encuentra en reposo se expresa como

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}', \quad (1.9)$$

donde σ es la conductividad eléctrica y \mathbf{E}' es el campo eléctrico en reposo. Desde el sistema de laboratorio, es decir, el sistema respecto al cual el medio se desliza con velocidad \mathbf{u} , la ley de Ohm toma la forma

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \rho_e \mathbf{u}, \quad (1.10)$$

donde el término $\rho_e \mathbf{u}$ se conoce como la corriente de convección.

Ya que deseamos acoplar las ecuaciones de la dinámica de fluidos (no relativistas) con las ecuaciones del campo electromagnético (relativistas) debemos utilizar lo que se conoce como la aproximación Magnetohidrodinámica (MHD) para simplificar las ecuaciones de manera que todas sean invariantes ante transformaciones de Galileo. En síntesis, la aproximación MHD comprende las siguientes suposiciones (Cuevas, 2004):

1. La velocidad del fluido es mucho menor que la de la luz $|\mathbf{u}| \ll c$, esto quiere decir que no se consideran fenómenos relativistas.
2. Los campos eléctricos son del orden de los efectos inducidos por el movimiento del fluido, es decir, $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$.
3. Los fenómenos considerados involucran únicamente variaciones a bajas frecuencias, por ende, la corriente de desplazamiento (último término en la ecuación (1.8)) es despreciable comparada con la densidad de corriente de conducción \mathbf{j} en la ley de Ampère-Maxwell.

A raíz de la aproximación MHD se establece la invarianza del campo magnético en los distintos sistemas de referencia. Asimismo el término $\rho_e \mathbf{u}$ en la ley de Ohm (ecuación 1.10), resulta despreciable respecto a la corriente de conducción \mathbf{j} (Davidson, 2001).

Utilizando la aproximación MHD, las ecuaciones del campo electromagnético toman la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (1.14)$$

que también se conocen como las ecuaciones del campo electromagnético en la aproximación cuasi-estática (Hughes y Young, 1966). Nótese que de la ecuación (1.13) se sigue

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (1.15)$$

que establece la conservación de la carga eléctrica (Davidson, 2001). Las ecuaciones (1.11)-(1.14) junto con las ecuaciones de continuidad (1.1) y Navier-Stokes (1.2), forman un sistema cerrado que se puede solucionar siempre y cuando se tengan las condiciones iniciales y de frontera adecuadas, permitiendo así describir el comportamiento de un fluido eléctricamente conductor bajo la presencia de un campo magnético.

1.5. Ecuaciones fundamentales de la MHD

Para modelar los experimentos presentados en la sección 1.2 es necesario realizar la adimensionalización de las ecuaciones (1.1) y (1.3). Específicamente en la ecuación (1.3) aparece el término que representa la interacción de la corriente eléctrica con el campo magnético en el electrolito. Como resultado de esta interacción se produce una fuerza de Lorentz que provoca el movimiento en el fluido. De acuerdo a la ley de inducción de Faraday, cuando el electrolito tiene un movimiento relativo al campo magnético aplicado se genera una fuerza electromotriz que induce la circulación de una corriente eléctrica en el electrolito. Por lo tanto, en el electrolito existe una densidad de corriente total que es la corriente aplicada más la corriente inducida

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^0 + \mathbf{j}^i, \quad (1.16)$$

donde \mathbf{j}^0 y \mathbf{j}^i denotan a la corriente aplicada e inducida, respectivamente. En concordancia con la ley de Ampère, estas corrientes inducen campos magnéticos, por lo que el campo magnético total es la suma del campo magnético aplicado (\mathbf{B}_0) más el campo inducido (\mathbf{b}) por la corriente que circula en el fluido

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{b}. \quad (1.17)$$

Una característica que es importante tener en cuenta de la corriente inducida \mathbf{j}^i es que produce fuerzas electromagnéticas que actúan en dirección contraria a las fuerzas aplicadas, por lo que tienden a frenar el movimiento del fluido, tratando de llevarlo al equilibrio.

En la adimensionalización de las ecuaciones (1.1) y (1.3) se optó por seguir la forma propuesta por Figueroa (2006), la cual considerará los parámetros que se pueden controlar externamente como la intensidad del campo magnético y la densidad de corriente aplicada, asimismo, se toman en cuenta las propiedades del electrolito como la densidad, la viscosidad cinemática, la permeabilidad magnética y la conductividad eléctrica; todas estas se suponen conocidas. Tomando en cuenta las propiedades anteriores, se presentan las variables adimensionales denotadas con un asterisco:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \frac{\mathbf{u}}{u_0}, & P^* &= \frac{P}{\rho u_0^2}, \\ \mathbf{j}^* &= \frac{\mathbf{j}}{j^0}, & \mathbf{B}^{0*} &= \frac{\mathbf{B}^0}{B_m}, \\ \mathbf{b}^* &= \frac{\mathbf{b}}{Rm B_m}, & x^* &= \frac{\mathbf{x}}{d}, \\ t^* &= \frac{t}{d^2/\nu}, & u_0^* &= \frac{\nu}{d}, \end{aligned}$$

donde d es el diámetro del imán, el cual también representa la longitud característica, u_0 es la velocidad viscosa y está denotada por $u_0 = \nu/d$; $Rm = \mu_0 \sigma d U_0$ es el parámetro adimensional denominado número de Reynolds magnético, en el que la velocidad característica es $U_0 = j^0 B^0 d^2 / \rho \nu$ y B_m es la magnitud máxima del campo magnético. Al utilizar todas estas variables, las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento pueden expresarse de forma adimensional como:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \nabla^2 \mathbf{u} + Re(\mathbf{j} \times \mathbf{B}^0) + ReRm(\mathbf{j} \times \mathbf{b}), \quad (1.19)$$

donde

$$Re = \frac{U_0 d}{\nu}, \quad (1.20)$$

y representa el número de Reynolds, siendo esta cantidad una comparación entre las fuerzas inerciales contra las fuerzas viscosas, Rm interpreta la razón del campo magnético inducido por el movimiento del fluido y el campo externo aplicado B^0 . En la gran mayoría de los flujos de metales líquidos y electrolitos el número de Reynolds magnético es muy pequeño, es decir, $Rm \ll 1$, lo que conlleva a que el campo magnético inducido por el movimiento del fluido sea despreciable en comparación con el campo magnético aplicado. Como consecuencia de esta aproximación las ecuaciones que gobiernan el flujo son

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \nabla^2 \mathbf{u} + Re(\mathbf{j} \times \mathbf{B}^0), \quad (1.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{b} = \frac{Re}{Ha^2} \mathbf{j}^i, \quad (1.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^0 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B}^0 = 0, \quad (1.24)$$

donde las ecuaciones (1.23) y (1.24) resultan directamente de sustituir las ecuaciones (1.16) y (1.17) en la $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ y en la ley de Ampère. El número de Hartmann, Ha , está definido por

$$Ha = B^0 d \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}. \quad (1.25)$$

El cuadrado de este número adimensional representa una relación entre la magnitud de la fuerza magnética comparada con la fuerza viscosa.

1.6. Aproximación bidimensional

Los experimentos mostrados en la sección 1.1.1 fueron realizados en capas delgadas de electrolito, lo que lleva a considerar que la altura de la capa del fluido es mucho menor la dimensión horizontal del flujo que es del orden de los lados del contenedor. Esta suposición permite modelar el comportamiento del fluido de manera aproximada como si fuera un flujo cuasi-bidimensional, de hecho, al ser una capa muy delgada, la fricción con el fondo del recipiente amortigua la componente de velocidad en dirección z haciendo tender al flujo a un comportamiento cuasi-bidimensional. Afanasyev y Korabel (2006) dejan claro que aunque esta situación es idealizada, no está muy lejos de la realidad.

En el Centro de Investigación en Energía se han realizado diversos estudios teórico-experimentales de flujos producidos por fuerzas electromagnéticas en capas delgadas de electrolitos, los que han sido modelados mediante una aproximación bidimensional (Salas et al., 2001) o cuasi-bidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Re j_y^i B_z^0, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - Re B_z^0 - Re j_x^i B_z^0. \quad (1.28)$$

donde las corrientes inducidas a partir de la ley de Ampère se expresan como

$$j_x^i = \frac{Ha^2}{Re} \frac{\partial b_z}{\partial y}, \quad j_y^i = -\frac{Ha^2}{Re} \frac{\partial b_z}{\partial x}. \quad (1.29)$$

En el siguiente capítulo buscaremos soluciones analíticas para estas ecuaciones bajo ciertas suposiciones, y trataremos de reproducir los flujos observados experimentalmente para distintas configuraciones de imanes.

Modelo analítico para bajos números de Reynolds

En este capítulo se obtienen soluciones analíticas de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los flujos generados electromagnéticamente con diversos arreglos de imanes, bajo ciertas suposiciones que ayudan a simplificar el análisis matemático. Una de estas consideraciones es suponer que el número de Reynolds es muy pequeño, y por lo tanto, las ecuaciones pueden ser resueltas por el método de perturbaciones. De esta forma, se encuentra la solución que modela el comportamiento de un fluido eléctricamente conductor interactuando con un sólo imán. Dado el carácter lineal del problema para números de Reynolds pequeños, mediante el principio de superposición la solución para un imán se utiliza para describir el flujo producido por distintos arreglos de imanes. Dichas soluciones se comparan cualitativamente con los resultados experimentales.

2.1. Solución analítica para el flujo con un imán

Con el fin de obtener una solución analítica para el flujo producido por la interacción de una corriente eléctrica directa y el campo magnético producido por un solo imán permanente, supondremos que el flujo es puramente bidimensional. Esta aproximación desprecia la influencia que el fondo del recipiente tiene sobre el movimiento del fluido. Partiendo de la definición del vector vorticidad (ω)

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

y tomando el rotacional de la ecuación de balance de cantidad de movimiento, la ecuación de transporte de vorticidad toma la forma

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} - Re \frac{\partial B_z^0}{\partial x} - Re \left(\frac{\partial(j_x^i B_z^0)}{\partial x} + \frac{\partial(j_y^i B_z^0)}{\partial y} \right), \quad (2.2)$$

donde ω_z denota a la componente z de la vorticidad y los últimos tres términos del lado derecho de esta ecuación representan al término fuente, es decir, a las fuerzas electromagnéticas que provocan el movimiento del fluido. En la ecuación (2.2), los últimos dos

términos serán despreciados, debido a que las corrientes inducidas son del orden de Ha^2 , tal como se expresa en la ecuación (1.29). Entonces la ecuación simplificada es:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} - Re \frac{\partial B_z^0}{\partial x}, \quad (2.3)$$

donde el tercer término del lado derecho es el único término fuente que corresponde a la fuerza producida por la interacción de la corriente aplicada y el campo magnético del imán.

El campo magnético del imán permanente se modela a partir de la expresión analítica para el campo producido por un dipolo magnético puntual (Good y Nelson, 1971). Ya que estamos considerando un modelo bidimensional, tomamos únicamente la componente z del dipolo ideal la cual depende solo de las coordenadas en el plano. De esta forma, el dipolo magnético puntual bidimensional toma la forma (Cuevas et al., 2006):

$$B_z^0(x, y) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{x^2 + y^2} + \mu_0 m \delta(x) \delta(y), \quad (2.4)$$

donde B_z^0 denota al campo magnético dimensional y m representa el momento dipolar magnético apuntando en la dirección normal al plano xy . El primer término del lado derecho de la ecuación (2.4) da el valor del campo magnético de cualquier punto fuera del origen, mientras que el segundo término da el valor del campo justo en el origen donde se encuentra el dipolo puntual. La singularidad es tomada en cuenta a través de la delta de Dirac. Para escribir el campo en forma adimensional, B_z^0 debe ser normalizada con $B_m = \mu m / L^2$, donde L es una longitud característica. La longitud L puede presentar cierta ambigüedad, ya que no hay una longitud característica definida para un dipolo puntual. Para propósitos prácticos L se elige de modo que la constante de normalización sea $B_m = 1$, llevando a que $L = \sqrt{\mu_0 m}$ (Cuevas et al., 2006). De manera tal que el campo magnético del dipolo puntual en el origen en forma adimensional es

$$B_z^0(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} + \delta(x) \delta(y). \quad (2.5)$$

De esta forma, el campo magnético de un dipolo puntual localizado fuera del origen es

$$B_z^0(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad (2.6)$$

donde x_0, y_0 son las coordenadas donde se localiza el dipolo puntual. A pesar de que la ecuación (2.5) no cumple la propiedad de irrotacionalidad (ecuación 1.24b) por considerar solo la componente normal del campo magnético, proporciona una buena descripción del campo magnético de un dipolo magnético finito, es decir, del imán permanente utilizado en los experimentos.

Las condiciones de frontera utilizadas para obtener la solución analítica se plantean en un dominio infinito. Dado que el tamaño del imán utilizado en los experimentos es mucho menor que el tamaño del contenedor, el considerar un dominio infinito es una buena aproximación.

Por tanto consideraremos que en infinito tenemos una presión constante y el fluido estático. Por otro lado, en el punto donde se localiza el dipolo puntual, suponemos que el campo magnético debe tomar un valor finito. Tenemos entonces que las condiciones a la frontera se pueden expresar en la forma:

$$\left. \begin{array}{l} u \rightarrow \text{finito} \\ v \rightarrow \text{finito} \\ P \rightarrow \text{finito} \end{array} \right\} \text{ cuando } x, y \rightarrow 0, \quad (2.7)$$

$$\left. \begin{array}{l} u \rightarrow 0 \\ v \rightarrow 0 \\ P \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ cuando } x, y \rightarrow \pm\infty, \quad (2.8)$$

Por otro lado, como condición inicial suponemos que el fluido está en reposo, es decir, en $t = 0$ las componentes de la velocidad u y v , así como la presión P son cero.

Para resolver la ecuación (2.3) con las ecuaciones de frontera e inicial planteadas, suponemos que el número de Reynolds es muy pequeño, de tal manera que cada una de las variables puede expresarse como una serie de potencias en el parámetro Re , es decir,

$$\begin{aligned} \omega_z &= \omega^{(0)} + Re \omega^{(1)} + Re^2 \omega^{(2)} + O(Re^3), \\ u &= u^{(0)} + Re u^{(1)} + Re^2 u^{(2)} + O(Re^3), \\ v &= v^{(0)} + Re v^{(1)} + Re^2 v^{(2)} + O(Re^3), \\ P &= P^{(0)} + Re P^{(1)} + Re^2 P^{(2)} + O(Re^3), \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde el superíndice denota el orden de aproximación. Aquí solo consideraremos las solución a orden cero y a primer orden, ya que las siguientes contribuciones son muy pequeñas y pueden considerarse despreciables.

A orden cero la vorticidad satisface la ecuación

$$\frac{\partial \omega_z^{(0)}}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial \omega_z^{(0)}}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial \omega_z^{(0)}}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega_z^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z^{(0)}}{\partial y^2}, \quad (2.10)$$

donde no se cuenta con un término fuente que provoque algún movimiento dentro del fluido, por lo que éste permanece en reposo y la solución tanto de la vorticidad como de la velocidad es

$$\omega_z^{(0)} = u^{(0)} = v^{(0)} = 0. \quad (2.11)$$

Por otro lado, dado que el fluido está en reposo, la presión a este orden es constante.

La vorticidad a primer orden debe cumplir con la ecuación:

$$\frac{\partial \omega_z^{(1)}}{\partial t} + \nabla^2 \omega_z^{(1)} = -\frac{\partial B_z^0}{\partial x}. \quad (2.12)$$

Ésta a diferencia de la expresión a orden cero si cuenta con un término fuente y tiene que resolverse en un dominio infinito $-\infty < x < \infty$ y $-\infty < y < \infty$ para $t > 0$ y con la condición inicial

$$w_z^{(1)} = 0 \text{ en } t = 0.$$

Puede demostrarse que de las dos contribuciones que componen el campo del dipolo puntual (ecuación 2.6), únicamente la contribución de las deltas de Dirac dan una solución distinta de cero. Utilizando el método de la función de Green (Özişik, 1993; Salas et al., 2001; Figueroa, 2006) se encuentra que la solución para la vorticidad a primer orden tiene la forma

$$\omega_z^{(1)}(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} e^{-\frac{x^2 + y^2}{4t}}. \quad (2.13)$$

La solución estacionaria puede obtenerse cuando $t \rightarrow \infty$, obteniendo entonces

$$\omega_z^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (2.14)$$

La solución de la vorticidad, ya sea la dependiente del tiempo o estacionaria presenta una singularidad en el origen, por lo que no cumplen con la condición de frontera en dicho punto (ecuación 2.7). Dicho comportamiento es heredado del mismo campo magnético puntual, el cual también es singular en el origen. Sin embargo, como se verá posteriormente, a pesar de dicho inconveniente los resultados analíticos encontrados para diferentes arreglos de imanes tienen una buena comparación cualitativa con los experimentos.

Después de haber encontrado una expresión para la vorticidad se puede calcular la función de corriente $\psi(x, y)$ para encontrar el campo de velocidad, que está dado como:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.15)$$

satisfaciendo así la condición de conservación de masa (ecuación 1.26). Para encontrar la solución de la función de corriente, al igual que para la vorticidad, se hace una expansión en serie de potencias en el número de Reynolds, es decir,

$$\psi = \psi^{(0)} + Re \psi^{(1)} + Re^2 \psi^{(2)} + O(Re^3). \quad (2.16)$$

Como ya se mencionó a orden cero la solución es $\psi^{(0)} = 0$. A primer orden, la función de corriente satisface la ecuación

$$\nabla^2 \psi^{(1)} = -\omega_z^{(1)}. \quad (2.17)$$

Buscamos la solución en coordenadas cilíndricas y asumiendo que la solución es un producto de funciones, representada por:

$$\psi(r, \theta) = f(r) \cos \theta. \quad (2.18)$$

Para resolver la ecuación que satisface la función de corriente debe encontrarse una solución homogénea y una particular, esta última solución se obtiene usando el método de variación de parámetros (Lagrange). La solución general de la ecuación (2.17) en coordenadas cilíndricas y cartesianas, respectivamente es de la forma

$$\psi^{(1)}(r, \theta) = \frac{r \cos \theta}{8\pi} (1 - \ln r^2) + Ar \cos \theta + \frac{B}{r} \cos \theta, \quad (2.19)$$

$$\psi^{(1)}(x, y) = \frac{x}{8\pi} [1 - \ln(x^2 + y^2)] + Ax + B \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (2.20)$$

Ahora bien, para encontrar el valor de las constantes A y B se utilizan las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (2.7) y (2.8). Para evitar divergencias en el origen y en infinito, las constantes A y B deben ser cero. Así, la función de corriente a primer orden resulta

$$\psi^{(1)}(x, y) = \frac{x}{8\pi} [1 - \ln(x^2 + y^2)]. \quad (2.21)$$

A partir de la ecuación (2.21) se obtienen las componentes de la velocidad, utilizando la definición presentada en la ecuación (2.15), de manera que

$$u^{(1)} = -\frac{1}{4\pi} \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (2.22)$$

$$v^{(1)} = -\frac{1}{8\pi} \left[1 - \ln(x^2 + y^2) - \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \right]. \quad (2.23)$$

Sin embargo, a pesar de haber eliminado las constantes de integración, observamos que la solución a primer orden no cumple con las condiciones de frontera. Por un lado, en el origen no se satisface la condición de frontera debido a la singularidad existente en el campo magnético aplicado. Por otro lado, no cumplir con la condición en infinito manifiesta un problema intrínseco a la aproximación $Re \ll 1$ (Figuroa, 2006). En el problema que se está analizando es difícil precisar la región de estudio donde la solución es válida, ya que para ello se requiere hacer un análisis más cuidadoso. A pesar de las limitaciones de esta solución analítica, es interesante analizar los resultados que se obtienen con este enfoque para un sólo dipolo magnético.

La ecuación para la presión a primer orden es

$$\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial y^2} = \frac{\partial B_z^0}{\partial y}. \quad (2.24)$$

Esta ecuación puede resolverse de la misma manera en que fue resuelta la ecuación (2.12), obteniendo como solución estacionaria

$$P^{(1)} = -\frac{1}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (2.25)$$

Dado que las contribuciones adicionales son muy pequeñas, no se calcularán los órdenes superiores al primero.

2.1.1. Resultado analítico para el flujo producido por un dipolo magnético puntual

Los resultados analíticos para el flujo producido por un dipolo magnético puntual con $Re \ll 1$ se muestran en la Figura 2.1 que abarca la región $-2 < x < 2$ y de $-2 < y < 2$. En la Figura 2.1a se puede observar el campo vectorial de velocidades calculado por las ecuaciones (2.22) y (2.23) en donde claramente se identifica un vórtices dipolar, es decir, dos vórtices girando en sentidos contrarios, el vórtice izquierdo gira en sentido horario y el vórtice derecho en sentido antihorario. El campo magnético se encuentra localizado en el centro geométrico, representado por el punto en color azul, donde se encuentra la magnitud máxima de la velocidad, lo cual se debe a que en dicho punto se concentra la fuerza de Lorentz con dirección negativa en el eje y . Las líneas de corriente correspondientes se muestran en la Figura 2.1b, donde se observa que los vórtices son simétricos tanto respecto al eje x , como al eje y . Esto se debe a que los efectos convectivos son despreciables dominando por completo a los efectos difusivos para un $Re \ll 1$. Como veremos más adelante, es precisamente la convección forzada que apunta en la dirección de la fuerza de Lorentz la que acarrea la pérdida de simetría con respecto al eje x .

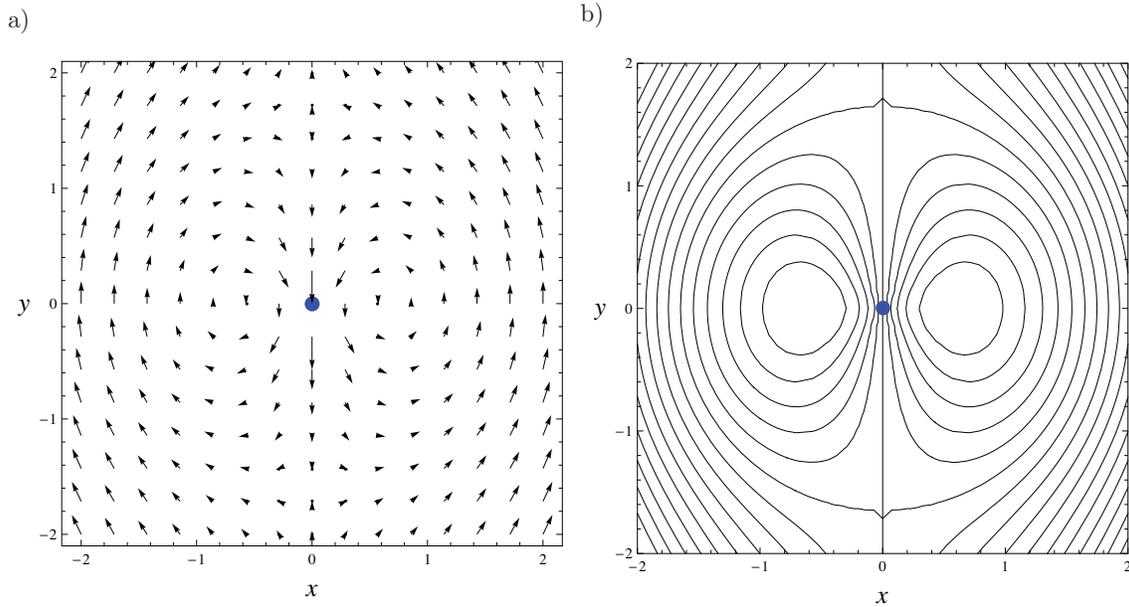


Figura 2.1: Solución analítica para el flujo producido por una corriente uniforme en dirección x y un dipolo magnético puntual localizado en el origen. a) Campo de velocidad. b) Líneas de corriente.

2.2. Solución analítica para varios imanes

Después de encontrar la solución analítica para el flujo producido por un dipolo magnético puntual con las condiciones de frontera mencionadas en la sección 2.2, se puede proceder a realizar la superposición de dicha solución para encontrar la solución de diferentes arreglos de imanes. Esto es posible ya que en la aproximación $Re \ll 1$ el problema es lineal. Sin embargo, al realizar directamente la superposición de esta solución no fue posible encontrar una solución que describiera razonablemente el flujo producido por un arreglo de imanes; esto se debe principalmente a que la condición de frontera implementada cuando $r \rightarrow \infty$ da lugar a comportamientos no físicos en las vecindades de los puntos donde se localizan los dipolos magnéticos puntuales. Por ello se decidió utilizar el par de condiciones de frontera descritas a continuación:

$$\left. \begin{array}{l} u \rightarrow \text{finito} \\ v \rightarrow \text{finito} \end{array} \right\} \text{ cuando } r \rightarrow 0, \quad (2.26)$$

$$\left. \begin{array}{l} u \rightarrow 0 \\ v \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ cuando } r \rightarrow R, \quad (2.27)$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y R representa una distancia suficientemente lejana (pero finita) del punto donde se localiza el dipolo magnético puntual, de tal modo que la velocidad a dicha distancia pueda considerarse cero. En otras palabras, la distancia R delimita el área

de estudio. Una vez que se ha definido la región a analizar, se aplican las condiciones de frontera (2.26) y (2.27) para encontrar el valor de las constantes A y B , que al sustituirlas en la ecuación (2.20) dan por resultado la siguiente expresión de la función de corriente para un sólo imán con origen en el centro geométrico:

$$\psi^{(1)}(x, y) = \frac{x}{8\pi} \left[1 - \text{Ln}(x^2 + y^2) + \text{Ln} R^2 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right]. \quad (2.28)$$

De acuerdo a las Ecs. (2.15a), (2.15b) y a la función de corriente [Ec. (2.28)] las componentes de la velocidad son:

$$u = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{xy}{x^2 + y^2} - \frac{R^2 xy}{(x^2 + y^2)^2} \right], \quad (2.29)$$

$$v = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{2x^2}{x^2 + y^2} + \text{Ln} \left(\frac{x^2 + y^2}{R^2} \right) + \frac{R^2(x^2 + y^2 - 2x^2)}{x^2 + y^2} - 1 \right]. \quad (2.30)$$

La función de corriente que representa el flujo producido por un imán localizado en cualquier punto (x_0, y_0) se presenta a continuación:

$$\psi^{(1)}(x, y) = \frac{x - x_0}{8\pi} \left\{ 1 + \text{Ln} \left[\frac{R^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right] - \frac{R^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right\}. \quad (2.31)$$

Para obtener la función de corriente correspondiente al flujo producido por un arreglo de imanes, se hace la superposición de la Ec. (2.31) especificando la ubicación de los diferentes dipolos magnéticos, es decir,

$$\psi(x, y) = \sum_i \psi(x_i, y_i), \quad (2.32)$$

donde (x_i, y_i) representan a las coordenadas de cada dipolo magnético puntual. A continuación mostraremos la comparación cualitativa de los resultados analíticos con los experimentales para el flujo producido por distintos arreglos de imanes.

2.3. Resultados analíticos para diferentes arreglos de imanes

Las soluciones analíticas para $Re \ll 0.1$ que se muestran a continuación presentan los patrones de flujo obtenidos a partir de las ecuaciones (2.31) y (2.32), formados al colocar diferentes arreglos de dipolos magnéticos puntuales, separados de manera equidistante y colocados sobre una circunferencia. Los resultados experimentales corresponden a arreglos de imanes que se encuentran sobre una circunferencia de 7.6 cm de diámetro, con origen

en el centro geométrico de la cuba descrito en la sección 1.1. En la Figura 2.2 se muestra el flujo generado al colocar un arreglo de tres imanes permanentes con orientación norte localizados en los vértices de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia.

Las líneas de corriente calculadas a partir de la solución analítica son presentadas en la Figura 2.2a, donde se puede observar la formación de tres dipolos, donde cada uno de ellos se produjo por un imán perteneciente a dicho arreglo. Dada la cercanía entre los tres vórtices dipolares, existe una interacción entre ellos que se manifiesta mediante líneas de corriente que entrelazan los distintos vórtices, en particular los exteriores al arreglo. Dichos vórtices rotan en el mismo sentido por lo que se presenta una especie de coalescencia o mezclado entre ellos. El patrón de flujo experimental (Figura 2.2b) se muestra con el propósito de hacer una comparación cualitativa con la solución analítica. En el experimento se inyectó una corriente directa de 3 mA. Aunque no fue posible determinar la velocidad máxima del flujo y con ello el número de Reynolds experimental, se observó que para la intensidad de corriente mencionada el patrón de flujo es aproximadamente simétrico y los efectos convectivos son pequeños. Una de las diferencias entre el experimento y la solución analítica se observa en el núcleo de cada uno de los vórtices, ya que en el resultado analítico los núcleos están unidos y en el experimento se observan de manera separada.

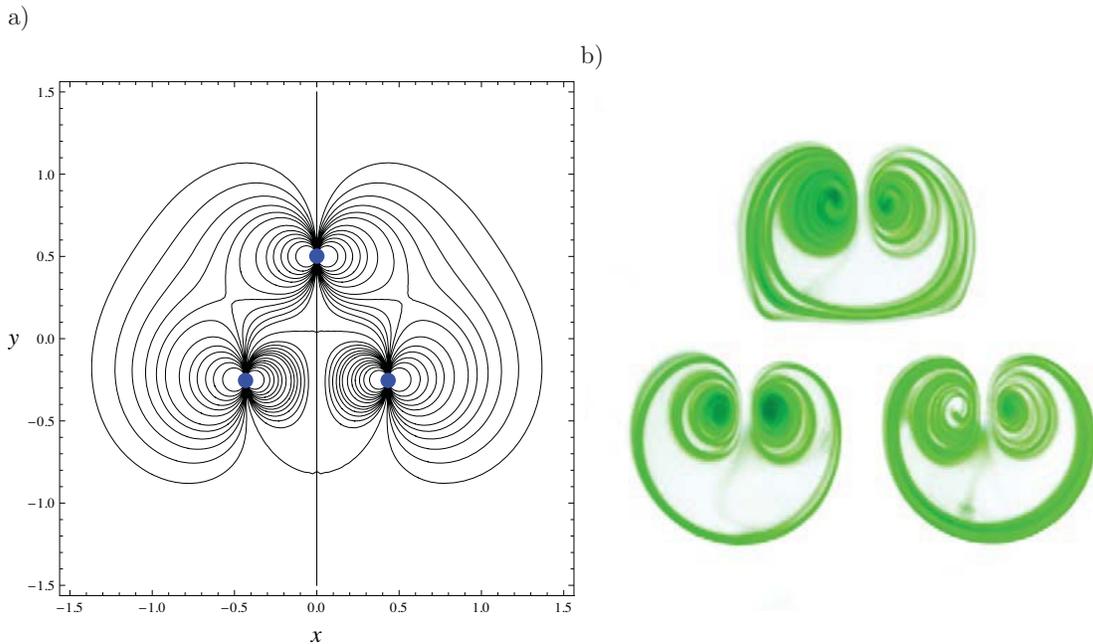


Figura 2.2: Flujo independiente del tiempo generado por tres imanes permanentes localizados en los vértices de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 8.5 cm. a) Solución analítica para las líneas de corriente. b) Patrón de flujo experimental ($I = 3$ mA).

En la Figura 2.3 se muestra el flujo producido por un arreglo de cuatro imanes permanentes colocados alternadamente (ver Figura 2.3a), donde los puntos en color azul y rojo

representan imanes con orientación norte y orientación sur, respectivamente. La Figura 2.3a muestra las líneas de corriente resultantes de la solución analítica, las cuales forman puntos hiperbólicos entre cada par de vórtices centrales superiores e inferiores, mismos que aparecen en el resultado experimental, correspondiente a una intensidad de corriente de 10 mA (Figura 2.3b). Las diferencias entre el resultado analítico y el experimento son que en este último se observa la pérdida de simetría respecto al eje x y la longitud de elongación de los vórtices, lo que se debe en parte a la distancia de separación que hay entre los imanes. Asimismo, dado que la intensidad de la corriente es ligeramente mayor que en el caso anterior, los efectos convectivos son más intensos y por tanto las condiciones experimentales se alejan de las suposiciones de la solución analítica.

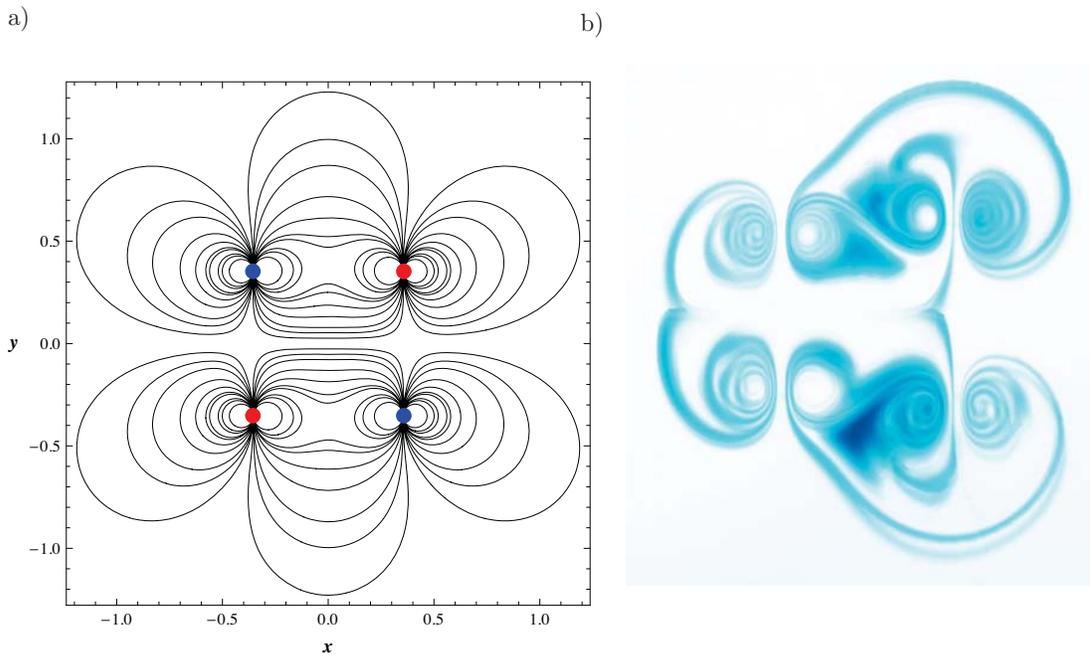


Figura 2.3: Flujo independiente del tiempo generado por cuatro imanes permanentes con polaridades alternadas localizados en los vértices de un cuadrado inscrito en una circunferencia de diámetro 8.5 cm. a) Solución analítica para las líneas de corriente. b) Patrón de flujo experimental ($I = 10$ mA).

La Figura 2.4 presenta el caso correspondiente a un arreglo de seis imanes permanentes colocados alternadamente, donde los puntos de colores, al igual que en el resultado descrito anteriormente, representan imanes con orientación norte y sur. Las líneas de corriente correspondientes a la solución analítica se muestran en la Figura 2.4a, donde se puede observar que las líneas de corriente muestran una total simetría, tanto al eje x como al eje y . Con respecto al resultado experimental correspondiente a una intensidad de corriente de 5 mA (Figura 2.4b), la solución analítica muestra una interacción correcta entre los vórtices, y aunque en las uniones de los mismos no se pierda la simetría, comparación cualitativa reproduce correctamente algunos rasgos del experimento. Otro aspecto cla-

ramente apreciable en la Figura 2.4b es la unión entre vórtices que giran en un mismo sentido, ya sea sentido horario o antihorario. No obstante, el sentido de rotación no es el único factor que provoca estas interacciones, sino también la cercanía que hay entre los vórtices, la intensidad de campo magnético que tiene cada imán y la corriente directa que le sea inyectada al sistema.

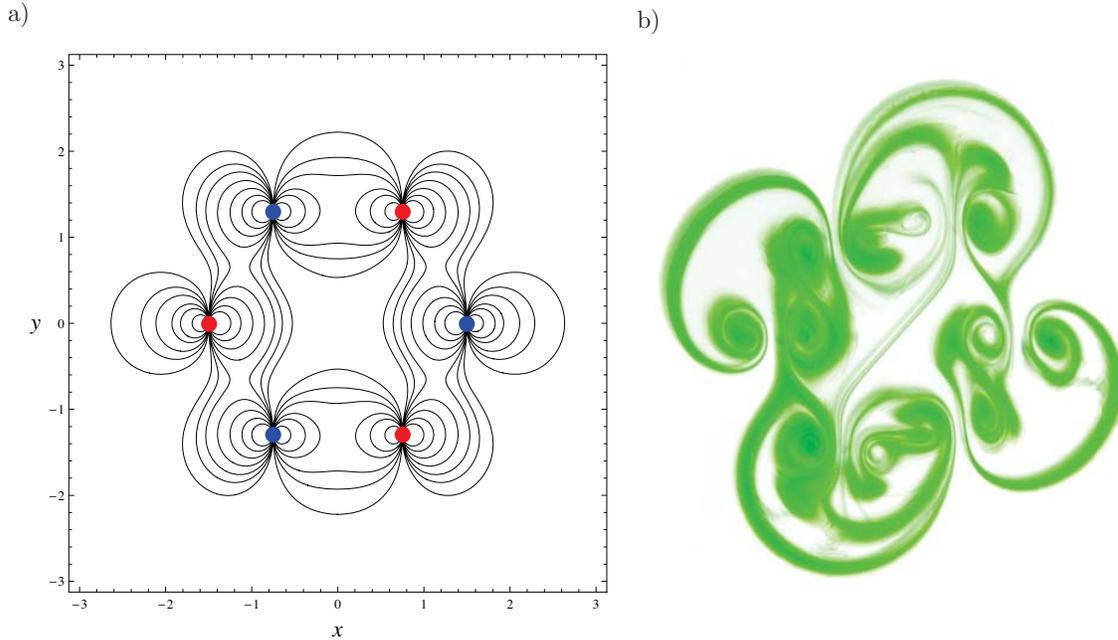


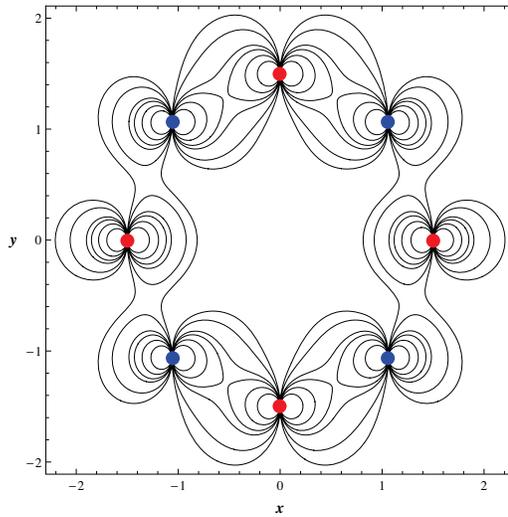
Figura 2.4: Flujo independiente del tiempo generado por seis imanes permanentes con polaridades alternadas localizados en los vértices de un hexágono inscrito en una circunferencia de diámetro 8.5 cm. a) Solución analítica para las líneas de corriente. b) Patrón de flujo experimental ($I = 5$ mA).

En la Figura 2.5 se muestran los resultados teóricos y experimentales para el flujo producido por un arreglo de ocho imanes permanentes alternados. Del lado izquierdo (Figura 2.5a) se muestra la orientación de los imanes, tomando el código de colores mencionado con anterioridad; en esta figura también se presentan las líneas de corriente obtenidas con la solución analítica, en la que los vórtices conservan la simetría respecto al eje x y al eje y . En el resultado correspondiente a una intensidad de corriente de 10 mA (Figura 2.5b) la simetría solo se pierde en el eje y .

Debido a las aproximaciones que se realizaron para obtener la solución analítica, surgen diversas diferencias respecto a los resultados experimentales. A pesar de ello, las comparaciones cualitativas permiten observar que la solución analítica a pesar de sus limitaciones, reproduce razonablemente algunas características del flujo experimental. Sin embargo, es evidente que la comparación dista mucho de ser totalmente adecuada por lo que es neces-

rio recurrir a una solución numérica del problema que permita una mejor descripción del flujo. Esto permitirá también considerar efectos convectivos que son importantes cuando se utilizan intensidades de corriente mayores a las reportadas en los ejemplos anteriores. En el siguiente capítulo se presentarán las soluciones numéricas obtenidas para diversos arreglos y su comparación cualitativa con los experimentos.

a)



b)



Figura 2.5: Flujo independiente del tiempo generado por ocho imanes permanentes con polaridades alternadas localizados en los vértices de un octágono inscrito en una circunferencia de diámetro 8.5 cm. a) Solución analítica para las líneas de corriente. b) Patrón de flujo experimental ($I = 10$ mA).

Modelación cuasi-bidimensional del flujo generado por fuerzas electromagnéticas

En el capítulo 2 se presentaron soluciones analíticas difusivas que describen los flujos generados electromagnéticamente para números de Reynolds muy pequeños. Aunque los resultados analíticos mostraron comparaciones cualitativas razonables con el experimento, el modelo presenta limitaciones severas cuando se tienen números de Reynolds mayores. Por otro lado, la solución analítica también presenta divergencias en el origen y el área de estudio está limitada por un radio R . Pensando en resolver estas limitantes en el presente capítulo se plantea un modelo numérico cuasi-bidimensional que evita este tipo de problemas, ampliando el rango de números de Reynolds a analizar, de manera que se mejoran las comparaciones cualitativas entre los resultados teóricos y experimentales. Además de tomar en cuenta el término convectivo en el modelo cuasi-bidimensional, también se considerará la fricción causada por la pared del fondo del recipiente. A partir de los resultados numéricos para el campo de velocidad, se calculan las trayectorias Lagrangianas las cuales se comparan cualitativamente con las visualizaciones experimentales encontrando un acuerdo razonable.

3.1. Ecuaciones del modelo cuasi-bidimensional

Los principales efectos tridimensionales del flujo producido por fuerzas electromagnéticas en una capa delgada de electrolito se generan debido a las capas límite presentes en el fondo del recipiente y en la superficie libre. En este proyecto será considerada una superficie libre uniforme de manera que el esfuerzo cortante es nulo. Dentro de las capas límite presentes en los flujos magnetohidrodinámicos están: la capa límite de Hartmann generada en la zona donde el campo magnético es normal a la pared y la capa límite viscosa en la región donde el campo magnético es despreciable. La capa límite de Hartmann tiene un grosor del orden ($O(Ha^{-1})$) de modo que es muy delgada cuando se tienen campos magnéticos intensos. Cuando se tienen flujos de metales líquidos bajo campos magnéticos intensos se presenta una tendencia hacia la cuasi-bidimensionalidad del flujo lo que ha motivado a desarrollar modelos cuasi-bidimensionales para su descripción Sommeria y Moreau (1982). Esto se logra promediando las variables de flujo a lo largo de las líneas de campo

(Bühler, 1996; Smolentsev, 1997). En los modelos de flujo cuasi-bidimensional los efectos tridimensionales se retienen a través de la fricción magnética conocida como el frenado de Hartmann, y un término de fuerza magnética sobre el núcleo del flujo (Beltrán, 2006). Otra situación donde se han aplicado estos modelos es en los flujos sometidos a campos magnéticos no uniformes, producidos por arreglos de imanes permanentes (Cardoso et al., 1994). También se han utilizado modelos cuasi-bidimensionales sin presencia de campos magnéticos (ver por ejemplo Satijn et al. (2001); Clercx et al. (2003)) para modelar flujos en aguas someras, en donde un término lineal dentro de las ecuaciones de Navier-Stokes conocido como fricción de Rayleigh representa la fricción del fondo. En síntesis en muchas investigaciones se han usado modelos cuasi-bidimensionales para modelar este tipo de flujos. En el presente proyecto se partirá del modelo planteado por Figueroa et al. (2009), en el que se explora un flujo generado electromagnéticamente en una capa delgada de electrolito bajo la influencia de un sólo imán. A continuación se presentará el modelo de manera resumida; los detalles del modelo se pueden consultar en Figueroa et al. (2009). Para este análisis sólo se considerará la contribución dominante de campo magnético aplicado que es la componente normal del campo a lo largo de la dirección z , que a su vez presenta una dependencia en la coordenada z y que se supone de la forma

$$\mathcal{B}_z^0(x, y, z) = \mathcal{B}_z^0(x, y)g(z). \quad (3.1)$$

La expresión anterior reproduce la variación del campo magnético \mathcal{B}_z^0 en el plano ($x - y$) usando la expresión analítica presentada por McCaig (1977) para el campo de una superficie rectangular uniformemente magnetizada, normalizada con el campo magnético máximo B_{max} que se tiene en el plano horizontal. El término $g(z)$ en la expresión es la variación del campo magnético en la dirección normal. Dicho término fue obtenido experimentalmente y tiene la forma

$$g(z) = \exp(-\gamma \varepsilon z), \quad (3.2)$$

donde z es adimensionalizada con la profundidad de la capa de líquido h , $\gamma = 2.05$ es una constante empírica y $\varepsilon = h/L$ donde L es la longitud característica.

Por otro lado, en la aproximación cuasi-bidimensional se considerarán las capas límites presentes en el fondo del contenedor y se supone que el principal transporte de momentum se da de manera difusiva en la dirección normal a la pared del fondo del recipiente. En tal caso, las componentes de la velocidad se expresan de la forma

$$\mathbf{u} = [u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), 0]. \quad (3.3)$$

Al sustituir el campo de velocidad (3.3) en las ecuaciones de cantidad de continuidad y Navier-Stokes, toman la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + Re j_y^i B_z^0, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - Re B_z^0 + Re j_x^i B_z^0. \quad (3.6)$$

Tomando el rotacional de las ecuaciones (3.5) y (3.6), obtenemos la ecuación de vorticidad en la forma

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} - Re \frac{\partial B_z^0}{\partial x} - Re \left[\frac{\partial(j_x^i B_z^0)}{\partial x} + \frac{\partial(j_y^i B_z^0)}{\partial y} \right]. \quad (3.7)$$

Ya que las corrientes inducidas son de orden $O(Ha^{-1})$ y Ha es muy pequeño en este flujo, las corrientes inducidas pueden despreciarse de manera que la ecuación de vorticidad queda

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} - Re \frac{\partial B_z^0}{\partial x}. \quad (3.8)$$

Las componentes de la velocidad y la vorticidad se expresan en la forma (Figuroa, 2006)

$$u(x, y, z, t) = \bar{u}(x, y, t) \hat{f}(x, y, z), \quad (3.9)$$

$$v(x, y, z, t) = \bar{v}(x, y, t) \hat{f}(x, y, z), \quad (3.10)$$

$$\omega_z(x, y, z, t) = \bar{\omega}_z(x, y, t) \hat{f}(x, y, z), \quad (3.11)$$

donde las variables con barra representan variables promediadas en el plano $(x - y)$, mientras que la función \hat{f} dependiente de z , da la variación del perfil de velocidad y vorticidad. Además esta función satisface la condición

$$\int_0^\varepsilon \hat{f} dz = 1. \quad (3.12)$$

Una consideración importante que se realiza para una aproximación cuasi-bidimensional, es que el valor de ε en la ecuación (3.12) debe ser mucho menor a la unidad, lo que para los flujos estudiados se cumple razonablemente bien, ya que experimentalmente el valor máximo de ε es 0.26.

Para obtener la forma explícita de \hat{f} se efectúa un balance de fuerzas electromagnéticas y viscosas. Ya que la fuerza del Lorentz es negativa y máxima en el centro del imán, se establece el balance en el centro ($y - z$) en el plano $x = 0$. La función f sin normalizar satisface la ecuación (Figuroa et al., 2009)

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - (Ha\mathcal{B}_z^0)^2 f = \varepsilon^2 Re\mathcal{B}_z^0 g, \quad (3.13)$$

donde el primer término del lado izquierdo representa las fuerzas viscosas y el segundo la fuerza de frenado de Hartmann, mientras que el término del lado derecho representa la fuerza electromagnética que impulsa al fluido. Para, resolver esta ecuación se deben satisfacer las condiciones de no deslizamiento en el fondo de la cuba, así como también la condición de la ausencia de esfuerzos cortantes en la superficie libre, es decir,

$$f(z = 0) = 0, \quad \frac{df}{dz}(z = \varepsilon) = 0. \quad (3.14)$$

Resolviendo la ecuación 3.13 bajo las condiciones 3.14 y normalizando de acuerdo a 3.12, la función \hat{f} toma la forma (Figuroa et al., 2009)

$$\hat{f} = \frac{[e^{-\gamma z + z\gamma\varepsilon e^{-\gamma\varepsilon^2}} - 1]}{\frac{1}{\gamma\varepsilon}(1 - e^{-\gamma\varepsilon^2}) + \frac{\gamma\varepsilon^3}{2}e^{-\gamma\varepsilon^2} - \varepsilon}. \quad (3.15)$$

Una vez que se encontró el valor de la función \hat{f} , se efectúa la integración de las ecuaciones a lo largo de la coordenada z de 0 a ε . Al sustituir las variables promediadas representadas en las ecuaciones (3.9)-(3.11a) junto con la ecuación (3.15) en las ecuaciones de balance y al realizar la integración se encuentran las ecuaciones que rigen la aproximación cuasi-bidimensional (Figuroa et al., 2009)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{u}{\tau}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y^2} + \frac{v}{\tau} - \alpha Re\mathcal{B}_z^0, \quad (3.18)$$

donde del lado derecho de las ecuaciones (3.17 - 3.18) aparece un término lineal que considera los efectos de fricción producidos por la capa límite viscosa que se genera en la pared del fondo del recipiente. En estas ecuaciones aparece una escala de tiempo característica adimensional τ para el decaimiento de la vorticidad, debida a la disipación de las capas viscosas, cuyo inverso está dado como

$$\tau^{-1} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{df}{dz} \Big|_0^\varepsilon = \frac{\gamma(1 - e^{-\gamma\varepsilon^2})}{\frac{1}{\gamma}(1 - e^{-\gamma\varepsilon^2}) + \frac{\gamma\varepsilon^4}{2}e^{-\gamma\varepsilon^2} - \varepsilon^2}. \quad (3.19)$$

Además, en el término de la fuerza de Lorentz de la ecuación 3.18, el factor $\alpha = \int_0^\varepsilon g(z)dz$ representa la atenuación del campo magnético en la dirección normal, y tiene la forma

$$\alpha = \frac{1}{\gamma\varepsilon}(1 - e^{-\gamma\varepsilon^2}). \quad (3.20)$$

El sistema de ecuaciones (3.16 - 3.18) fue desarrollado e implementado por Figueroa et al. (2009) para estudiar los flujos generados electromagnéticamente en una delgada capa de fluido utilizando un sólo imán. En dicho análisis, las soluciones numéricas reprodujeron cuantitativamente los resultados experimentales. En el presente estudio se utilizará este modelo aplicado a la descripción de flujos producidos por diversos arreglos de imanes.

3.2. Campo magnético aplicado

Retomando la expresión para el campo magnético [ecuación (3.1)], el primer término que aparece en la ecuación es $\mathcal{B}_z^0(x, y)$, el cual como ya se mencionó anteriormente representa el campo magnético en el plano $(x - y)$. Para reproducir mejor el campo magnético medido experimentalmente se realizó la superposición de dos superficies cuadradas paralelas magnetizadas de longitud a , separadas entre sí una distancia c y polarizadas de manera opuesta, con la finalidad de que las superficies externas de ambas placas actúen como polos norte y sur, es decir como un imán permanente. Las dimensiones a y c fueron elegidas de manera tal que la distribución del campo magnético coincida con la distribución del campo magnético medida experimentalmente. Es importante mencionar que en los experimentos se utilizaron imanes cilíndricos, por esta razón el valor de a utilizada para obtener el campo magnético analítico fue de 3.6 mm, para que cada lado del cuadrado mida $2a$ y se tenga una área proporcional magnetizada a la utilizada experimentalmente. La expresión explícita para una superficie rectangular magnetizada tiene la forma (McCaig, 1977)

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{zi}^0(x, y) = \xi \left\{ \arctan \left(\frac{(X + a)(Y + b)}{Z_{0i} [(X + a)^2 + (Y + b)^2 + Z_{0i}^2]^{1/2}} \right) \right. \\ + \arctan \left(\frac{(X - a)(Y - b)}{Z_{0i} [(X - a)^2 + (Y - b)^2 + Z_{0i}^2]^{1/2}} \right) \\ - \arctan \left(\frac{(X + a)(Y - b)}{Z_{0i} [(X + a)^2 + (Y - b)^2 + Z_{0i}^2]^{1/2}} \right) \\ \left. - \arctan \left(\frac{(X - a)(Y + b)}{Z_{0i} [(X - a)^2 + (Y + b)^2 + Z_{0i}^2]^{1/2}} \right) \right\} \quad (3.21) \end{aligned}$$

En la ecuación (3.21) ξ es una constante de normalización calculada a partir del campo magnético máximo, el índice i toma valores de 1 y 2, que corresponden a los campos magnéticos producidos por las dos superficies cuadradas. Para encontrar el campo magnético total en el plano (x, y) solo se realiza la superposición de los campos

$$\mathcal{B}_z^0(x, y) = \mathcal{B}_{z1}^0 - \mathcal{B}_{z2}^0. \quad (3.22)$$

En la Figura 3.1 se muestra la comparación entre los resultados experimentales y la el campo obtenido a partir de la ecuación (3.21) de McCaig (1977) para el plano $z = 3.5$ mm, colocando el sistema coordenado en el centro de la superficie superior cuadrada cuyas dimensiones son $X_0 = 2a$ y $Y_0 = 2b$, donde a y b son iguales por la forma geométrica de las superficies magnetizadas. La Figura 3.2 muestra la distribución adimensional de la componente normal del campo en la capa del líquido, donde el valor máximo del campo es igual a 1. En la imagen también se observa el rápido decaimiento al irse alejando del centro. Debido a esta razón, el campo magnético muestra una alta intensidad en una zona muy localizada (ver Figuras 3.1 y 3.2).

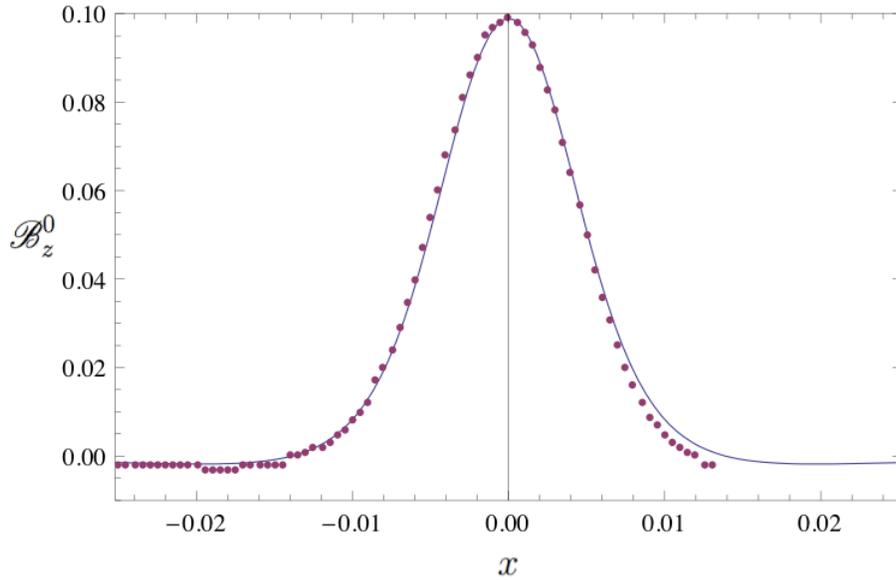


Figura 3.1: Componente z normalizada del campo magnético a $z = 3.5$ mm como función de x . Los puntos representan la expresión analítica, obtenida a partir de la ecuación de McCaig (1977) haciendo la superposición (ecuación 3.22) de las superficies magnetizadas de lado $a = 3.6$ mm, con una distancia de separación entre las placas de $c = 14$ mm.

Hasta el momento, se ha hablado del campo magnético producido por un sólo imán, sin embargo, en la solución numérica se implementará un campo magnético producido por

un arreglo de imanes colocados con diferentes orientaciones. Por ejemplo, en la Figura 3.3 se muestra el campo magnético generado por un arreglo de cuatro imanes con orientación alternada localizados sobre un círculo de diámetro 10.58, con centro localizado en el origen del sistema de estudio, de modo que el campo magnético está lo suficientemente alejado de las fronteras y no se vea afectado por éstas.

Debe notarse que al tomar sólo en cuenta una componente del campo magnético, no satisfacen las ecuaciones de magnetostática ecuación (1.24). Sin embargo, gracias a que las componentes del campo en las direcciones x, y son muy pequeñas comparadas con su componente normal dentro de la delgada capa de fluido, se puede obtener una buena descripción del comportamiento del campo considerando únicamente la componente normal.

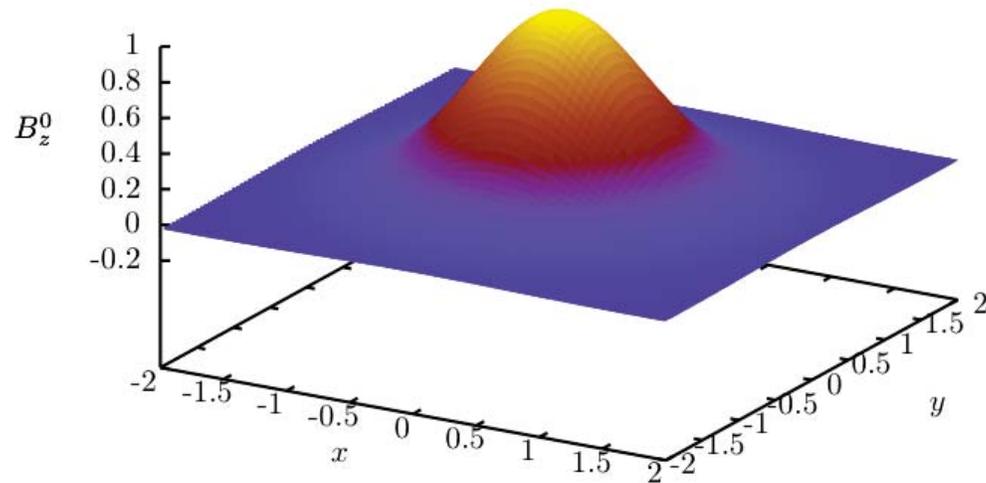


Figura 3.2: Campo magnético aplicado producido por dos placas cuadradas magnetizadas de lado $2a$.

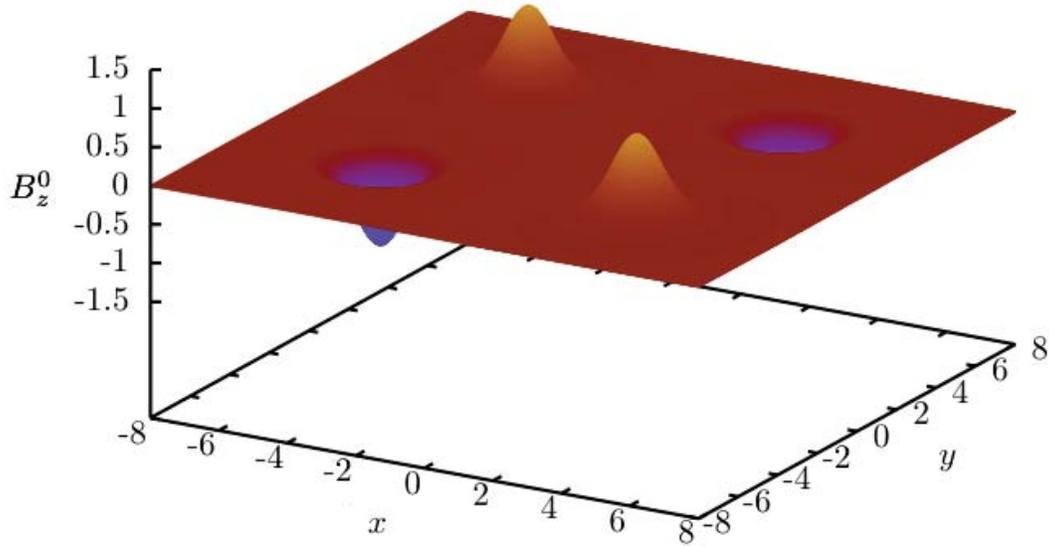


Figura 3.3: Campo magnético producido por un arreglo de cuatro imanes alternados colocados sobre un círculo de diámetro 10.58 con centro en el origen del sistema.

3.3. Condiciones de frontera y condición inicial

El contenedor utilizado en el experimento donde se vierte el fluido de trabajo (electrolito) tiene cuatro paredes que en la solución numérica son representadas como cuatro fronteras Dirichlet con condiciones de no deslizamiento, en las que se anula el campo de velocidades, es decir,

$$u = 0 \quad v = 0. \quad (3.23)$$

Inicialmente, el fluido se encuentra en reposo, por lo que la condición inicial es

$$u = v = 0, \quad \text{para } t = 0. \quad (3.24)$$

3.4. Características del mallado, localización de los arreglos de imanes y paso en el tiempo

Antes de presentar la resolución de la malla se debe recordar que la longitud característica para la adimensionalización de los parámetros es el diámetro del imán multiplicado por

una constante de proporcionalidad. El área de estudio adimensionalizada en la simulación numérica es un marco rectangular de 48×37.4 . El centro geométrico del sistema se localizó en el punto $(0,0)$, fijando las coordenadas en un rango de $-24 < x < 24$ y $-18.7 < y < 18.7$, lo que representa visualizar toda el área en la que se lleva a cabo el experimento.

El centro del círculo sobre el cual se colocan las configuraciones equidistantes de los imanes está localizado en el punto $(0,0)$. En la solución numérica el dominio rectangular es dividido en un tamaño de malla de $nx = ny = 201$ para la coordenada x y y , respectivamente.

El paso de tiempo utilizado para la integración temporal fue $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$. Con estas características del mallado y el paso de tiempo dado, se satisface la condición de divergencia del campo de velocidades, con una tolerancia de 1×10^{-4} , cumpliendo la condición de conservación de masa $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

3.5. Implementación del método numérico

Para la simulación numérica se discretizaron las ecuaciones de balance (3.16 - 3.18) por medio del método de volumen finito descrito en Versteeg y Malalasekera (1995), haciendo una discretización espacial a segundo orden para una malla desfasada como la mostrada en la Figura 3.4. Con este tipo de malla se resuelven los problemas que se presentan al calcular la presión y la velocidad en el mismo punto y que lleva a soluciones no realistas físicamente.

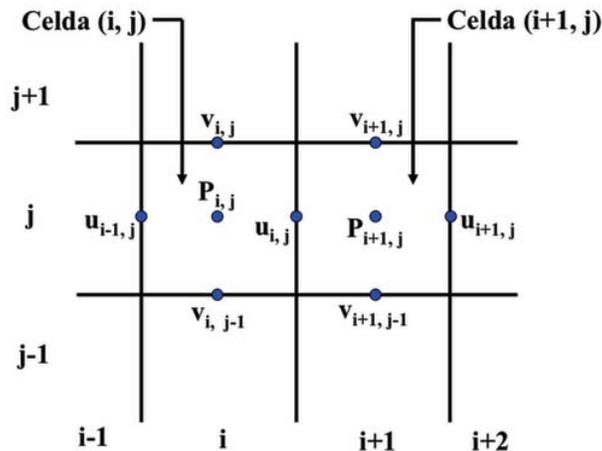


Figura 3.4: Malla desfasada en donde se muestra la localización de las variables escalares (en este caso, la presión) en los puntos nodales y el campo de velocidades en las caras del volumen.

En lo que se refiere a los términos convectivos, éstos deben tratarse con mayor cuidado debido a que representan la parte no lineal de las ecuaciones y para poder calcular su valor en las caras de los volúmenes se utilizó un valor promedio central que permite obtener una aproximación a segundo orden. La discretización del término difusivo se hizo mediante diferencias centrales lo que provee también una aproximación a segundo orden. Para discretizar el término temporal se empleo el método de Euler (primer orden). En la imagen de la malla desfasada se observa que las componentes de la velocidad fueron calculadas en las caras de los volúmenes de control, mientras que la presión fue definida en el centro de las celdas. En la solución numérica el campo de velocidades satisface las condiciones de frontera (3.23) y la condición inicial (3.24).

Debido al acoplamiento que existe entre la presión y la velocidad se requiere de un tratamiento especial para resolver el sistema de ecuaciones (3.16)-(3.18). Este tratamiento se lleva a cabo mediante el método SIMPLEC descrito por Versteeg y Malalasekera (1995).

Por otra parte, para analizar visualmente los campos de velocidad se cuenta con muchas técnicas que pueden ser empleadas para presentar los resultados obtenidos a partir de la simulación numérica. En este caso serán presentados los campos vectoriales, las líneas de corriente y las líneas de trayectoria. La última técnica mencionada será presentada a continuación.

3.5.1. Visualización de flujo mediante partículas trazadoras

La técnica de visualización de flujo mediante partículas trazadoras también llamada seguimiento Lagrangiano de partículas será utilizada para comparar de manera cualitativa las soluciones numéricas con los resultados experimentales. Esta técnica de visualización permite analizar el comportamiento del flujo en términos del movimiento de partículas de fluido individuales (Griebel et al., 1998). Específicamente el método se lleva a cabo estudiando las líneas de trayectoria, las cuales corresponden a las líneas trazadas por las trayectorias de partículas pasivas que se mueven siguiendo el flujo (Currie, 2003). Puesto que la partícula analizada se mueve con la velocidad local del fluido, las trayectorias deben satisfacer la ecuación:

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i(x_i, t) \tag{3.25}$$

donde x_i representa las coordenadas de la partícula, en la que el índice $i = 1, 2, 3$ y U_i representa las componentes del campo de velocidad. Entonces, integrando la ecuación (3.25) para las tres coordenadas, es posible determinar la trayectoria de las partículas que son acarreadas por el flujo.

3.6. Resultados

Con la finalidad de estudiar el fenómeno de manera teórico-experimental se analizaron los patrones de flujo producidos por fuerzas electromagnéticas comparando los resultados experimentales con las soluciones obtenidas a partir de los modelos analítico y numérico. Estos estudios se llevaron a cabo variando el número de imanes, cuyos arreglos van desde tres hasta ocho imanes.

3.6.1. Comparación de las soluciones analíticas y numéricas

A continuación se presenta la comparación de los patrones de flujo obtenidos de la simulación numérica con las soluciones analíticas que fueron mostradas en la sección 2.5 del capítulo 2. Para poder comparar de manera adecuada estos resultados, se presentarán soluciones numéricas con un número de Reynolds muy pequeño de manera que la solución analítica sea válida, es decir, $Re = 0.1$. El número de Reynolds se calcula como $Re = U_{max}L/\nu$, donde U_{max} es la velocidad máxima resultante a partir de la simulación numérica.

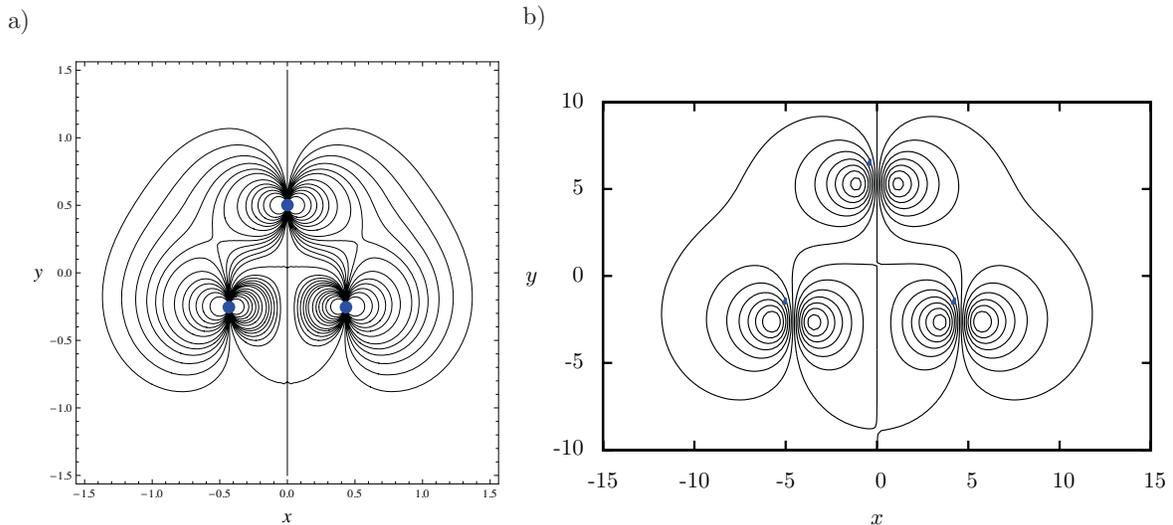


Figura 3.5: Líneas de corriente obtenidas a partir de la solución analítica (a) y la solución numérica (b), para un arreglo de tres imanes con orientación norte. $Re = 0.1$.

La Figura 3.5b muestra las líneas de corriente obtenidas a través de la solución numérica de un arreglo de tres imanes con orientación norte, la localización de cada imán está representada por los círculos en color azul. En esta imagen al igual que en la Figura 3.5a se observa la formación de un dipolo por cada imán. En ambas soluciones, se observa la unión del vórtice superior izquierdo con el vórtice inferior izquierdo, así como también se observa la unión del vórtice superior derecho con el vórtice inferior derecho, dichas uniones

se deben a que estos vórtices rotan en el mismo sentido. Una diferencia que existe entre la solución analítica y la solución numérica es la ubicación del centro de cada vórtice, ya que en la solución analítica los núcleos de los vórtices de un mismo dipolo se encuentran unidos debido a que el campo magnético es generado por un dipolo puntual, mientras que en la solución numérica se localizan separados porque el campo es producido por un dipolo finito. Además, la solución numérica muestra la elongación que tienen los vórtices en dirección y negativa hacia donde apunta la fuerza de Lorentz. Finalmente, en las dos soluciones se observa la simetría de cada dipolo, así como también la simetría del patrón de flujo respecto al eje x .

En la Figura 3.6b se muestran las líneas de corriente obtenidas a través de la solución numérica para un arreglo de cuatro imanes con orientación alternada, la localización de cada imán está representada por los círculos en color azul (orientación norte) y rojo (orientación sur). En la solución analítica (Figura 3.6a) como en la solución numérica es posible observar la formación de un dipolo por cada imán, aunque en este caso las líneas de corriente terminan encerrando a los vórtices centrales formando un sólo vórtice de mayor tamaño. En ambas soluciones, se observan puntos hiperbólicos en los vórtices centrales inferiores y superiores. Aquí también se observa que los núcleos de los vórtices están separados, mientras que en la solución analítica se encuentran unidos lo que al igual que en el arreglo anterior, se debe a la naturaleza (puntual o finita) de los campos magnéticos utilizados para modelar el fenómeno.

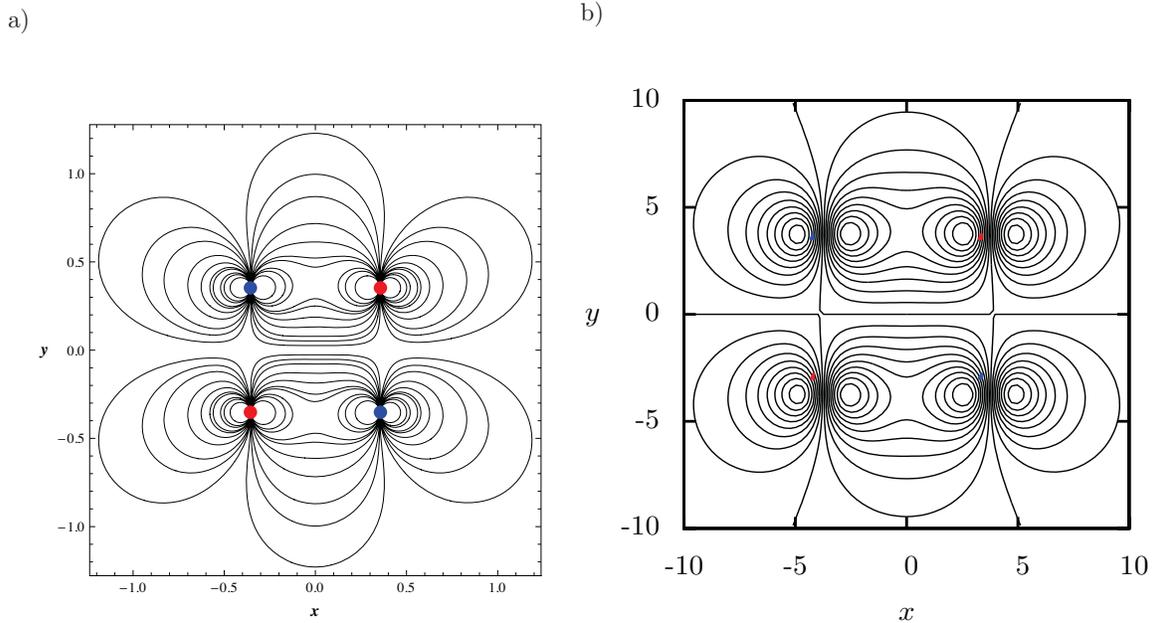


Figura 3.6: Líneas de corriente obtenidas a partir de la solución analítica (a) y la solución numérica (b), para un arreglo de cuatro imanes con orientación alternada norte y sur. $Re = 0.1$.

En la Figura 3.7 se ejemplifica esquemáticamente la interacción entre los vórtices generados por el arreglo presentado en la Figura 3.6. Las flechas mostradas en el esquema presentan el sentido de rotación de cada vórtice, ocasionado por la dirección en la que apunta la fuerza electromagnética. Poniendo atención en los dos imanes ubicados en el lado izquierdo del arreglo mostrado en la Figura 3.6b, se observa que el sentido de rotación de los vórtices en el imán superior es contrario al que se tiene en el imán inferior debido a la polaridad opuesta de los imanes que ocasiona fuerzas de Lorentz también opuestas. Al rotar en sentidos encontrados los vórtices externos del arreglo no se unen o mezclan mientras que los vórtices centrales producidos ya sea por los dos imanes superiores o los dos inferiores, rotan en el mismo sentido de modo que tienden a mezclarse o unirse.

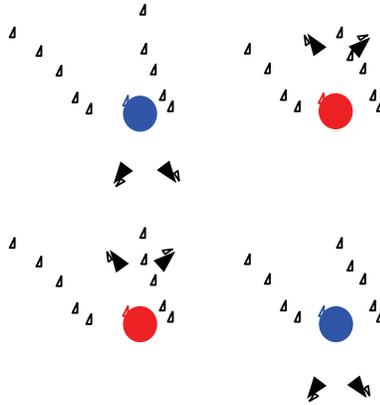


Figura 3.7: Ilustración esquemática de la interacción de vórtices generados por cuatro imanes con orientación alternada norte y sur.

La Figura 3.8 muestra las líneas de corriente del patrón de flujo generado por un arreglo de seis imanes con orientación alternada norte y sur, donde, la localización de cada imán está representada por los círculos en color azul (orientación norte) y rojo (orientación sur). Tanto en la solución analítica (Figura 3.8a) como en la solución numérica (Figura 3.8b) se observa el dipolo que se forma por cada imán, aunque en este caso al igual que en el arreglo de cuatro imanes se presentan puntos hiperbólicos encerrados por líneas de corriente que forman un vórtice de mayor tamaño. Aquí también se observa que los núcleos de los vórtices están separados, mientras que en la solución analítica se encuentran unidos. La Figura 3.8b no muestra elongaciones dominantes en alguna dirección lo que se debe a la simetría del arreglo que no favorece la elongación en una dirección particular.

La Figura 3.9 muestra las líneas de corriente obtenidas a través de las soluciones analítica y numérica de un arreglo de ocho imanes con orientación alternada, donde la localización de cada imán está representada por los círculos en color azul (orientación norte) y rojo (orientación sur). A diferencia de la solución analítica (Figura 3.9a), la solución numérica (Figura 3.9b) muestra la unión de ocho vórtices en pares, formados por los tres imanes

superiores y los tres imanes inferiores. La interacción mostrada se debe a la separación que existe entre los imanes. En ella, también se observa la unión de los tres vórtices del lado izquierdo y los del lado derecho, debido a que tienen el mismo sentido de rotación.

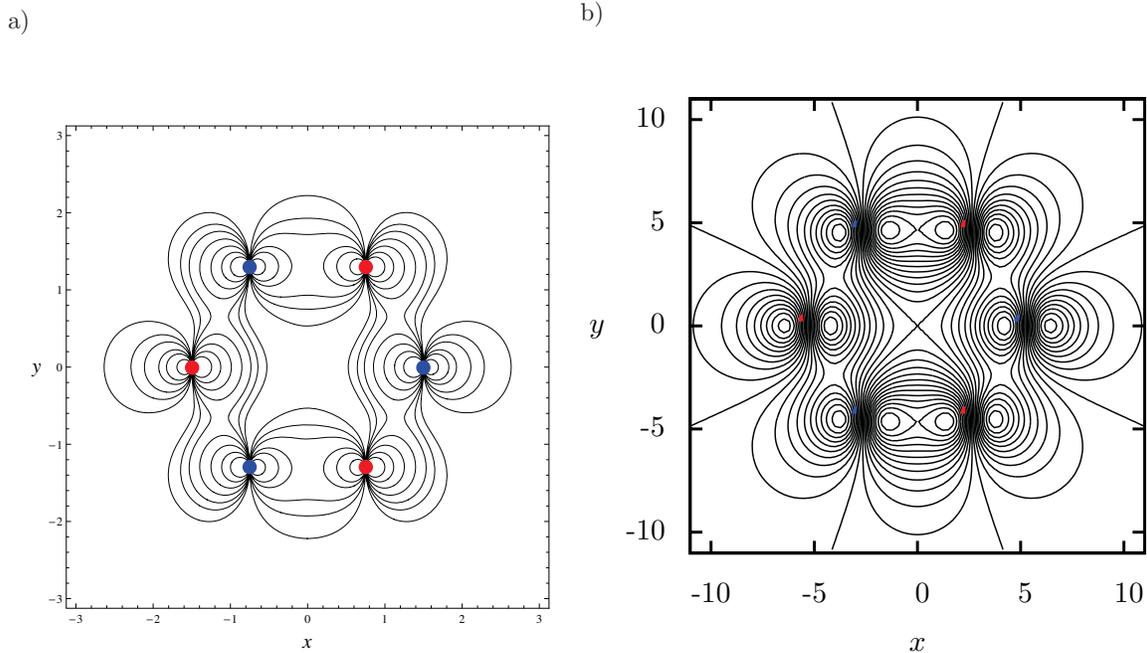


Figura 3.8: Líneas de corriente obtenidas a partir de la solución analítica (a) y la solución numérica (b), para un arreglo de seis imanes con orientación alternada norte y sur. $Re = 0.1$.

En la Figura 3.10 se muestran las líneas de corriente de un arreglo de diez imanes con orientación alternada norte y sur, obtenidas con las soluciones analítica (Figura 3.10a) y numérica (Figura 3.10b). En ambas figuras se observa que la interacción de vórtices es similar, sin embargo, en los vórtices que generan los cuatro imanes superiores e inferiores existen diferencias muy notorias, en la solución analítica la unión de estos vórtices produce puntos hiperbólicos, mientras que en la solución numérica estos puntos desaparecen, dando lugar a tres vórtices de mayor tamaño. Estos puntos se mantienen en los vórtices generados por los tres imanes del lado derecho e izquierdo. En este arreglo, así como en el de cuatro (Figura 3.6), seis (Figura 3.8) y ocho (Figura 3.9) imanes alternados, se pueden apreciar patrones de flujo simétricos, respecto a los ejes coordenados $(x - y)$. A pesar de que ambas soluciones son muy parecidas cualitativamente, no se pueden obtener comparaciones cuantitativas, ya que en la solución analítica el campo magnético se generó con un dipolo puntual y en la solución numérica fue producido a partir de un dipolo magnético finito. Por otro lado, hay que considerar que la separación entre los imanes debe ser la adecuada, ya que si ésta es demasiado grande, no se apreciaría la interacción de vórtices.

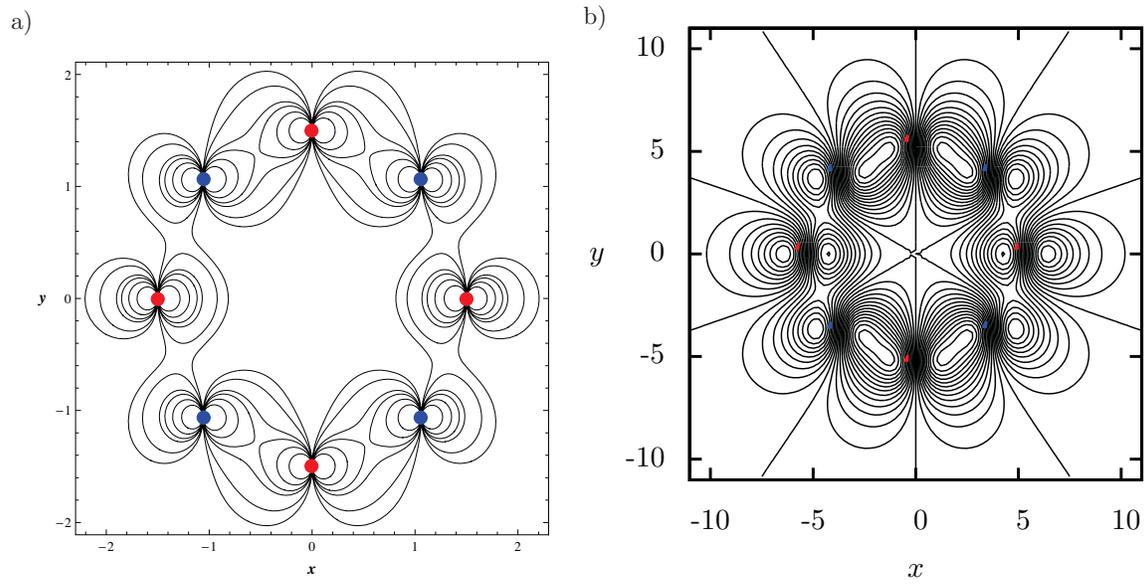


Figura 3.9: Líneas de corriente obtenidas a partir de la solución analítica (a) y la solución numérica (b), para un arreglo de ocho imanes con orientación alternada norte y sur. $Re = 0.1$.

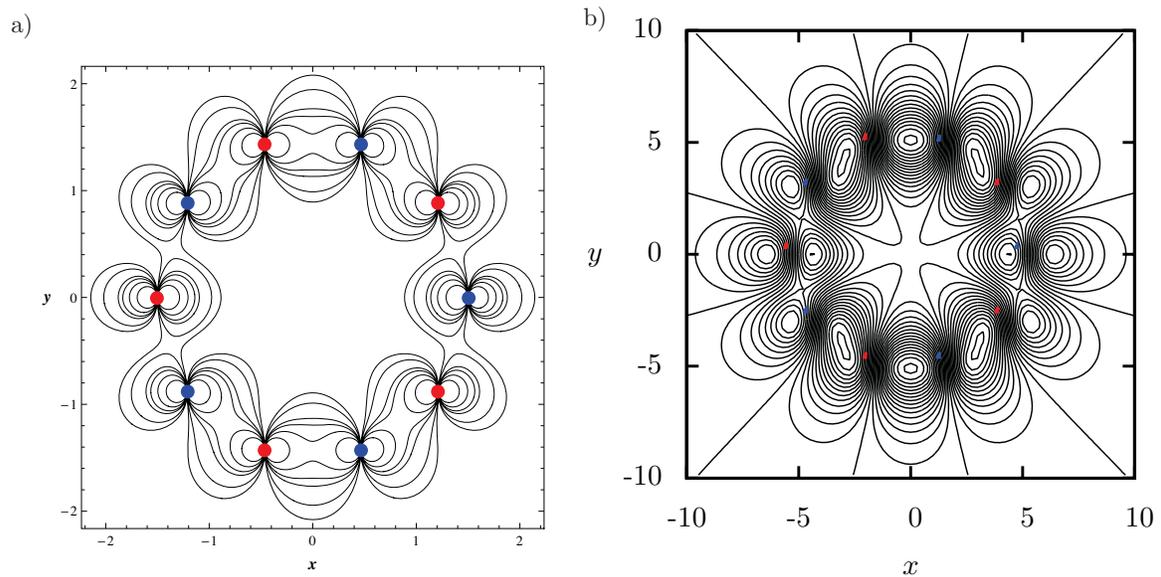


Figura 3.10: Líneas de corriente obtenidas a partir de la solución analítica (a) y la solución numérica (b), para un arreglo de diez imanes con orientación alternada norte y sur. $Re = 0.1$.

3.6.2. Comparación con los experimentos

En esta sección se mostrarán los patrones de flujo resultantes de las simulaciones numéricas con la finalidad de compararlos de manera cualitativa con los resultados experimentales para números de Reynolds mayores que los analizados en la sección anterior. En general, los resultados numéricos de los flujos generados por los diferentes arreglos de imanes se comparan cualitativamente de manera razonable con los resultados experimentales, ya que dicho modelo incluye efectos importantes como la fricción generada por la existencia de capas límite en el fondo del contenedor. Esta fricción produce una mayor estabilidad en el flujo debido a la inclusión de un efecto disipativo adicional, lo que hace que el modelo numérico represente de manera más precisa al fenómeno. Como ya se ha mencionado previamente, el arreglo de imanes para cada caso se colocó sobre un círculo descrito en la sección 3.2. Además en cada arreglo se aplicaron diferentes intensidades de corriente eléctrica.

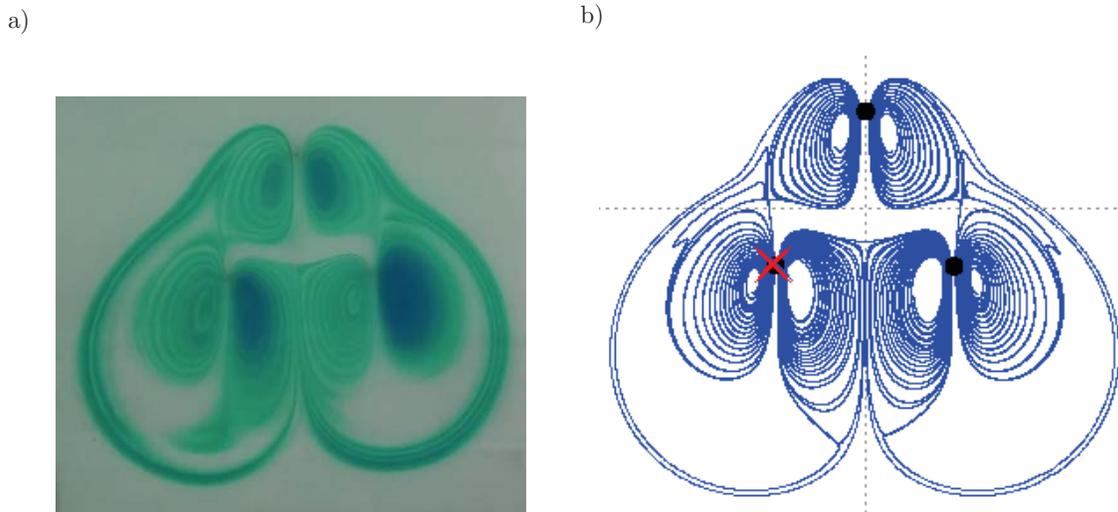


Figura 3.11: Flujo producido en un arreglo de tres imanes con orientación norte. a) Patrón de flujo experimental, b) Líneas de trayectoria calculadas a partir de la solución numérica. La ubicación de los imanes se puede observar como puntos negros en la simulación numérica, $I = 100$ mA. El número de Reynolds numérico correspondiente a esta intensidad de corriente es $Re = 111.6$.

En la Figura 3.11 se presenta el patrón de flujo de un arreglo de tres imanes con orientación norte y una corriente aplicada de 100 mA. Del lado izquierdo se muestra el resultado experimental y del lado derecho el seguimiento Lagrangiano de partículas obtenido a partir de la simulación numérica. En estos resultados a diferencia de los presentados anteriormente, se puede observar una mejor comparación cualitativa con el experimento ya que las líneas de trayectoria calculadas mediante el seguimiento Lagrangiano ofrecen una mejor descripción de lo que se observa en el experimento al introducir tinta trazadora. Nótese

que la simulación numérica reproduce de forma muy satisfactoria la observación experimental, en particular la elongación de los vórtices en la dirección de la fuerza de Lorentz. Asimismo, se observa la unión entre los vórtices superiores con los inferiores centrales que rotan en sentido contrario, haciendo con ello que se produzca un mezclado entre ellos.

La Figura 3.12 muestra los resultados numéricos para la componente de la velocidad v en función de x para un valor y constante ($y = 0$). Los perfiles mostrados corresponden a diferentes corrientes aplicadas (números de Reynolds) en el arreglo de imanes presentado en la Figura 3.11. Las corrientes aplicadas para obtener estos perfiles de velocidad fueron de $I = 50, 100, 150$ y 200 mA, que corresponden a los números de Reynolds $Re = 69.6, 111.6, 143.9, 171.5$, respectivamente. Se puede observar que para los tres valores de Re mayores, la velocidad máxima se alcanza en el origen. En el perfil correspondiente al $Re = 69.6$ se observa que la velocidad máxima se localiza en dos puntos distintos al origen, esto se debe a que los efectos convectivos todavía no son suficientemente intensos. En los perfiles mostrados se observa que lejos del campo magnético generado por el arreglo de tres imanes la velocidad tiende a cero. Además, en ellos también se observan máximos y mínimos locales, los cuales representan los cambios de la velocidad al atravesar de un vórtice a otro. Una característica evidente en esta gráfica es que al aumentar el número de Reynolds la velocidad máxima incrementa.

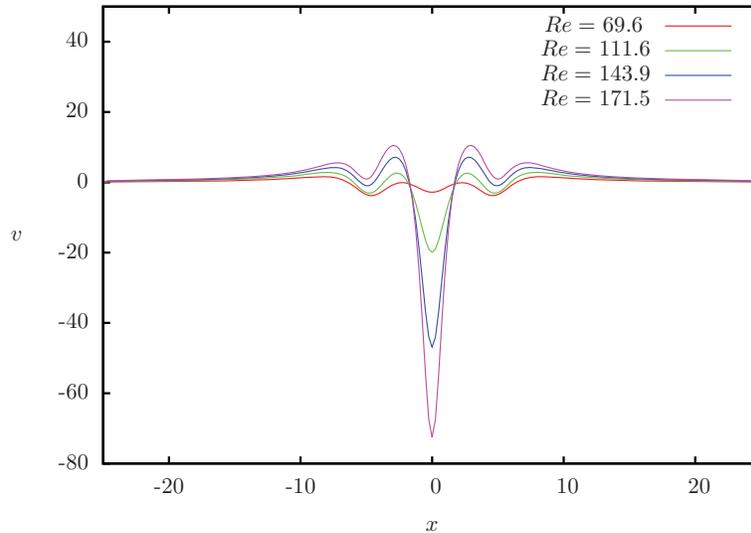


Figura 3.12: Componente de la velocidad en dirección y como función de la coordenada x , calculada en el punto $y = 0$ para distintos números de Reynolds en el arreglo de tres imanes mostrado en la Figura 3.11.

La Figura 3.13 muestra la componente de la velocidad v en función de la coordenada y calculada en $x = 0$ para distintas intensidades de corriente. Al igual que en los perfiles

presentados anteriormente, estos muestran un incremento en la magnitud de la velocidad al aumentar el número de Reynolds. En esta figura también se observa que al alejarse del campo magnético, las velocidades tienden a cero. La componente de la velocidad horizontal u no será mostrada en este arreglo, ya que las variaciones en función de x y y no son representativas, debido a que para el valor constante en x y y igual a cero, la componente vertical v es dominante.

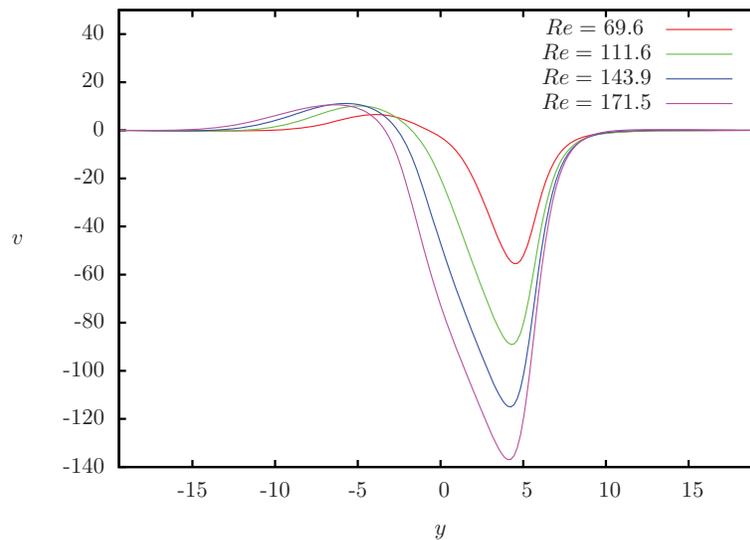


Figura 3.13: Componente de la velocidad en dirección y como función de la coordenada y , calculada en el punto $x = 0$ para distintos números de Reynolds en el arreglo de tres imanes mostrado en la Figura 3.11.

El punto marcado en color rojo en la Figura 3.11 representa la ubicación donde se calculó la vorticidad como función del tiempo. Esta propiedad local como se sabe depende de los gradientes de velocidad y de la difusión por efectos viscosos. Esta variable fue elegida para determinar la dependencia temporal del flujo. En la Figura 3.14 se presenta la vorticidad en dicho punto como función del tiempo para $Re = 50, 100, 150$ y 200 . Se observa que la vorticidad inicia con un valor igual a cero y al ir transcurriendo el tiempo se va incrementando hasta llegar a un valor constante lo que indica que el flujo alcanza un estado independiente del tiempo. En la figura también se puede notar que al incrementar el número de Reynolds la magnitud de la vorticidad también aumenta y el estado transitorio entre el reposo y el estado independiente del tiempo, se alarga.

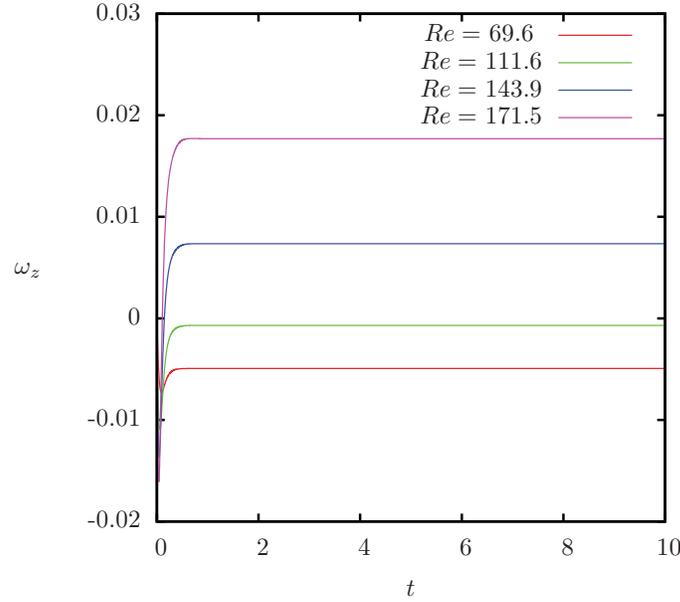


Figura 3.14: Vorticidad ω_z como función del tiempo calculada en el punto en color rojo de la Figura 3.11 para distintos números de Reynolds.

En la Figura 3.15 se presentan los resultados experimentales y numéricos para el flujo producido en un arreglo de cuatro imanes con orientación alternada norte y sur y una corriente aplicada de 50 mA. La Figura 3.15a muestra el patrón de flujo experimental y la Figura 3.15b el resultado del seguimiento Lagrangiano de partículas obtenido a partir de la simulación numérica. Comparando ambos patrones de flujo, se observa que la solución numérica logra reproducir cualitativamente bien diversas características del movimiento, como lo son: los puntos hiperbólicos que se producen en la interacción de los vórtices centrales, la pérdida de simetría respecto al eje y , la separación y elongación de los vórtices generados por los imanes ubicados del lado derecho, así como también la unión entre los vórtices del lado izquierdo.

En la Figura 3.16 se muestra la componente de la velocidad u en función de la coordenada x calculada en $y = 0$. Los perfiles mostrados corresponden a diferentes corrientes aplicadas en el caso presentado en la Figura 3.15. Las corrientes aplicadas para obtener estos perfiles de velocidad son nuevamente 50, 100, 150 y 200 mA que corresponden a los números de Reynolds $Re = 69.7$, 112.1 , 144.9 y 171.9 , respectivamente. A pesar de que las diferentes corrientes que fueron aplicadas a este arreglo de imanes, son las mismas que fueron aplicadas al arreglo de tres imanes, el Re es diferente porque se obtiene a partir de la velocidad máxima resultante de la simulación numérica. En los perfiles de velocidad se observa que la velocidad es distinta de cero sólo en el área que se encuentra afectada por el campo magnético y una vez fuera de esta área la velocidad se anula. Además, al igual

que en los perfiles de la componente v mostrados para el arreglo de tres imanes, cuando se aumenta el Re la velocidad máxima se incrementa, como es de esperarse. Esto también se observa en la Figura 3.17 donde se muestra la componente de la velocidad u en función de la coordenada y calculada en $x = 0$. Asimismo, en esta figura se observan máximos y mínimos locales que sólo representan el cambio de signo de las velocidades al pasar de un vórtice a otro. Nótese que, los valores máximos de la velocidad se encuentran en el origen.

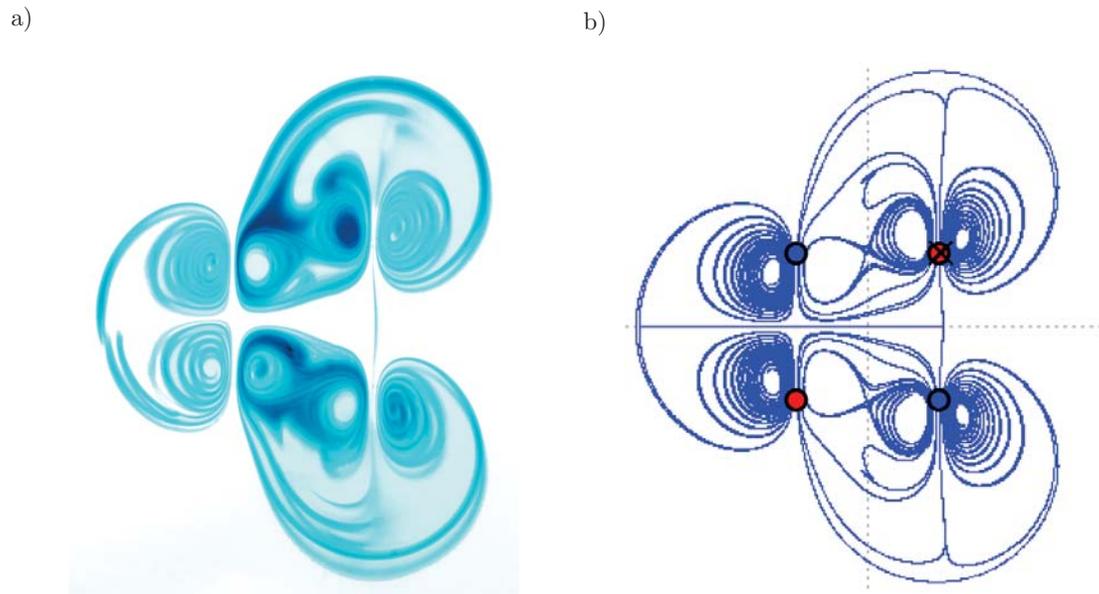


Figura 3.15: Flujo producido en un arreglo de cuatro imanes con orientación alternada norte y sur. a) Patrón de flujo experimental, b) Líneas de trayectoria calculadas a partir de la solución numérica. La ubicación de los imanes se puede observar como puntos azules y rojos en la simulación numérica. La corriente aplicada es de 50 mA y corresponde a un número de Reynolds numérico de $Re = 69.7$.

La Figura 3.18 muestra la componente de la velocidad en dirección y como función de la coordenada y calculada en $x = 0$ para el caso del arreglo de cuatro imanes. Se puede observar que el perfil de velocidades es antisimétrico con respecto al origen y como en los casos anteriores, la magnitud de la velocidad aumenta con el número de Reynolds. El punto marcado con una cruz en color negro mostrado en la Figura 3.15 sobre el imán con orientación sur localizado en la parte superior del arreglo, denota la ubicación donde fue realizado el cálculo de la vorticidad como función del tiempo. La Figura 3.19 muestra el efecto del número de Reynolds en la vorticidad ω_z , en la que se observa como incrementa más rápidamente que en el arreglo de tres imanes, llegando hasta un valor constante que es mayor mientras más grande es Re . Es claro entonces que el flujo es independiente del tiempo para todas las intensidades de corriente exploradas.

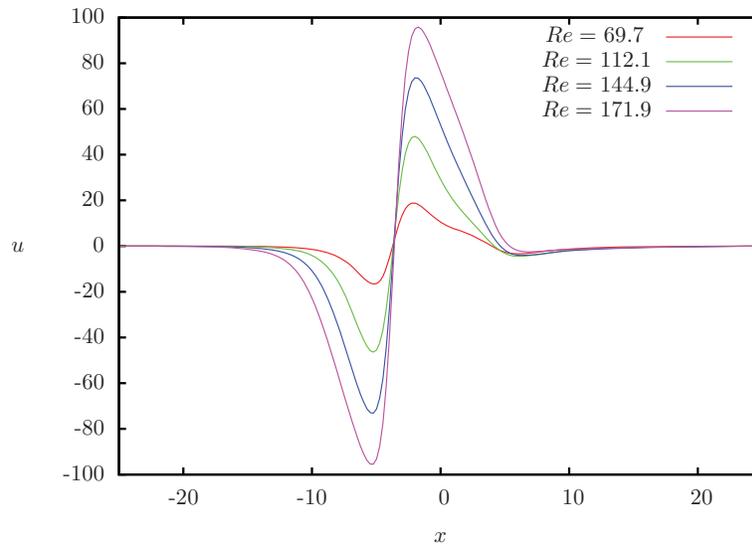


Figura 3.16: Componente de la velocidad en dirección x como función de x calculada en $y = 0$ para distintos números de Reynolds en el arreglo con cuatro imanes mostrado en la Figura 3.15.

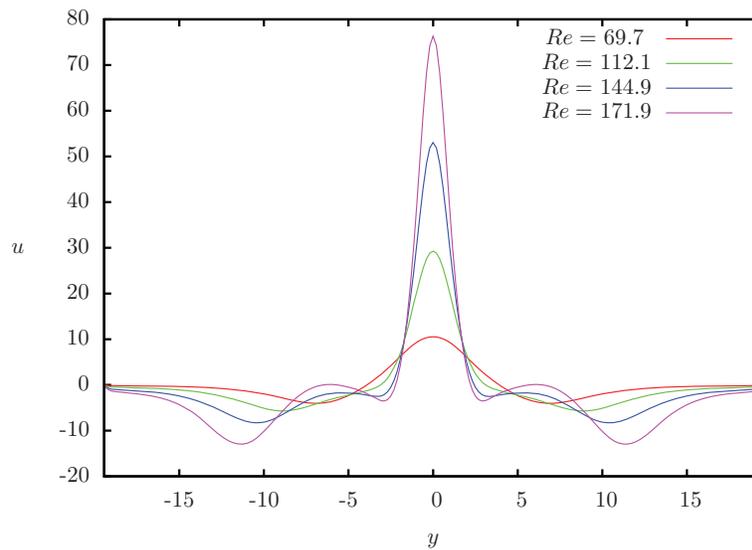


Figura 3.17: Componente de la velocidad en dirección x como función de y calculada en $x = 0$ para distintos números de Reynolds en el arreglo con cuatro imanes mostrado en la Figura 3.15.

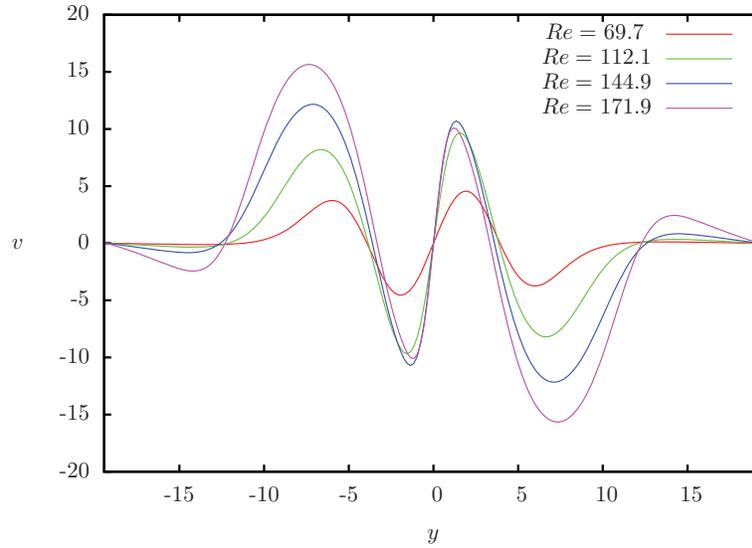


Figura 3.18: Componente de la velocidad en dirección y como función de y calculada en $x = 0$ para distintos números de Reynolds en el arreglo con cuatro imanes mostrado en la Figura 3.15.

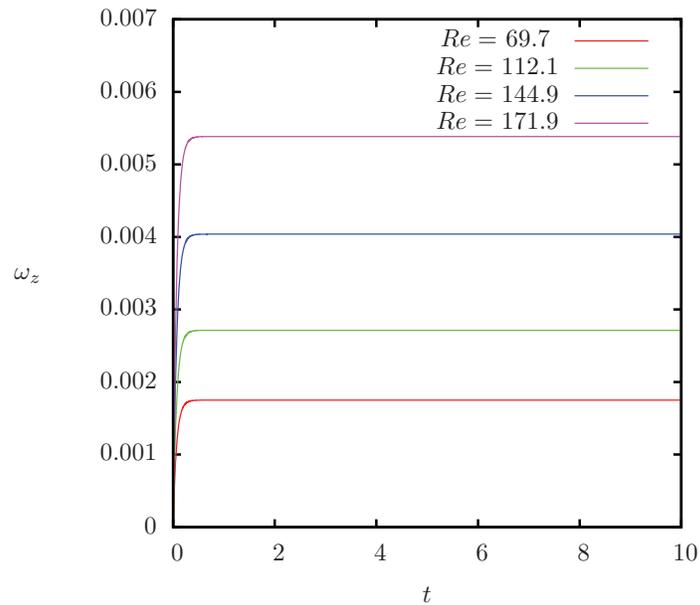


Figura 3.19: Vorticidad ω_z como función del tiempo calculada en el punto marcado con una cruz en color negro en la Figura 3.15 para distintos números de Reynolds.

La Figura 3.20 presenta el patrón de flujo obtenido con un arreglo de seis imanes con orientación alternada norte y sur y una corriente eléctrica aplicada de 50 mA. En la Figura 3.20a se muestra el resultado experimental y en la Figura 3.20b el seguimiento Lagrangiano de partículas obtenido a partir de la simulación numérica. Comparando los dos resultados se observa que la simulación numérica reproduce satisfactoriamente de forma cualitativa todas las interacciones de los vórtices que se presentan en el resultado experimental. En ambos patrones de flujo se observa la simetría entre el primer y el tercer cuadrante, así como también entre el segundo y el cuarto. En este caso se observa claramente que la interacción entre los vórtices es más intensa debido a que la longitud de separación entre los imanes es menor.

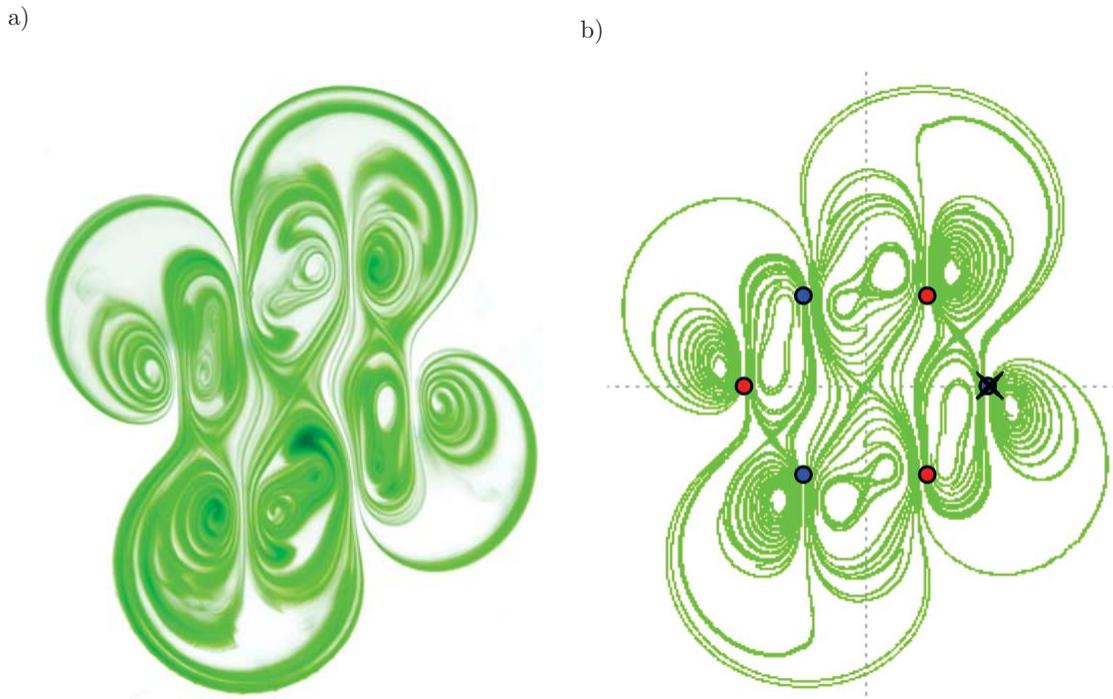


Figura 3.20: Flujo producido con un arreglo de seis imanes con orientación alternada norte y sur. a) Visualización experimental. b) Líneas de trayectoria obtenidas a partir de la simulación numérica. La ubicación de los imanes se puede observar en la simulación numérica (panel b). La corriente aplicada es de 50 mA y corresponde a un número de Reynolds numérico de 69.8.

En la Figura 3.21 y Figura 3.22 se muestra el efecto del aumento del número de Reynolds en la componente horizontal de la velocidad u como función de las coordenadas x y y , cuando $y = 0$ y $x = 0$, respectivamente. Los perfiles mostrados corresponden a diferentes corrientes aplicadas en el arreglo de seis imanes presentado en la Figura 3.20. Las corrientes inyectadas para obtener estos perfiles de velocidad fueron de $I = 50, 100, 150$ y 200 mA. Los números de Reynolds resultantes al aplicar las corrientes eléctricas

mencionadas difieren ligeramente de los valores encontrados en los arreglos previos pues la velocidad máxima con la que se calcula Re varía entre un arreglo y otro. Claramente se observa que al ir incrementando este parámetro adimensional la magnitud de la velocidad aumenta. En ambos resultados se observan máximos y mínimos locales, los cuales representan los cambios de signo de la velocidad al atravesar de un vórtice a otro. Los perfiles de la componente u , al igual que los perfiles de la componente v mostrados en las Figuras 3.23 y 3.24 presentan una antisimetría respecto al origen. Como consecuencia de la forma de interaccionar de los vórtices, en la componente u y en la componente v como función de y se observa que la magnitud de la velocidad correspondiente solo es nula en la pared, mientras que en la componente u y en la componente v como función de x se tienen magnitudes de velocidad diferentes de cero en un área más limitada.

La Figura 3.25 muestra el efecto del número de Reynolds en la vorticidad ω_z calculada en el punto con la cruz en color negro de la Figura 3.20b como función del tiempo. Para el arreglo de seis imanes alternados se observa que al ir incrementando el número de Reynolds, la magnitud de la vorticidad aumenta, asimismo mientras que para los dos valores más pequeños de Re la vorticidad constante se alcanza en un intervalo de tiempo muy pequeño, para los dos mayores se observa una oscilación transitoria antes de alcanzar el valor constante. Esta es una indicación de que para estas condiciones el flujo en dicha configuración se encuentra cerca de pasar a un estado dependiente del tiempo. La transición entre el reposo y el estado estacionario toma mayor tiempo debido a que al aumentar el número de Reynolds las fuerzas inerciales también aumentan por lo que el flujo requiere más tiempo para llegar al estado estacionario. Específicamente, cerca de donde el campo magnético es más intenso se manifiesta mayormente el efecto inercial.

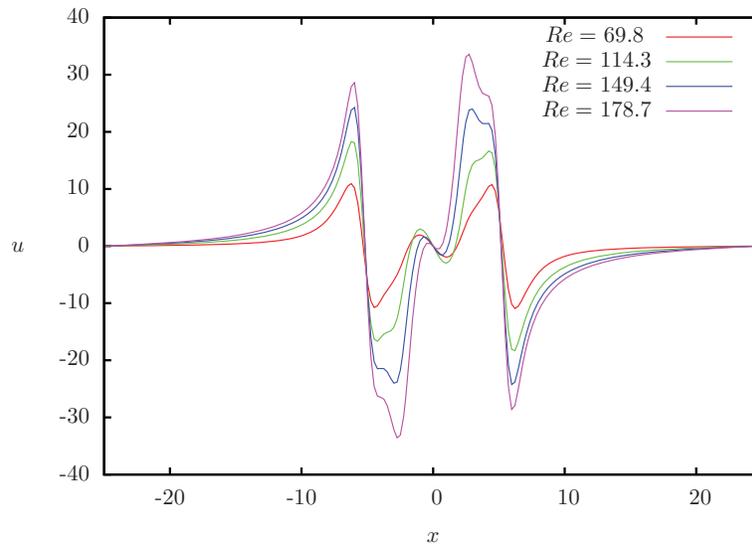


Figura 3.21: Componente de la velocidad en dirección x como función de la coordenada x calculada en $y = 0$ para distintos números de Reynolds en el arreglo de seis imanes mostrado en la Figura 3.20.

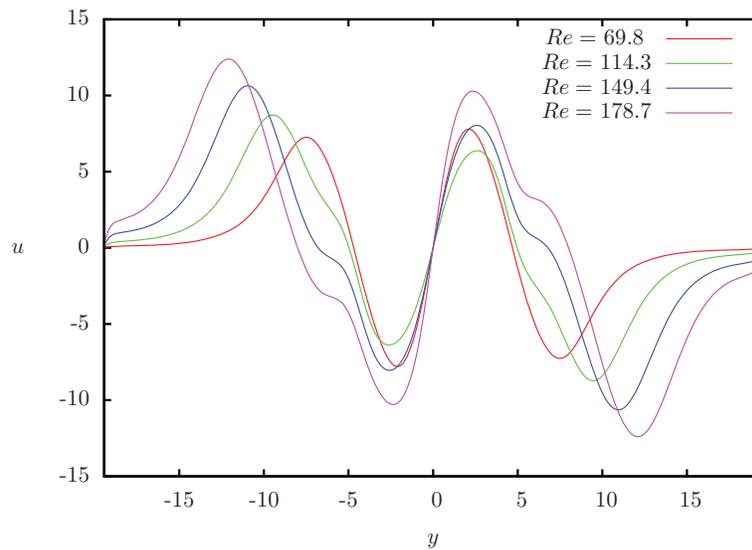


Figura 3.22: Componente de la velocidad en dirección x como función de la coordenada y calculada en $x = 0$ para distintos números de Reynolds en el arreglo de seis imanes mostrado en la Figura 3.20.

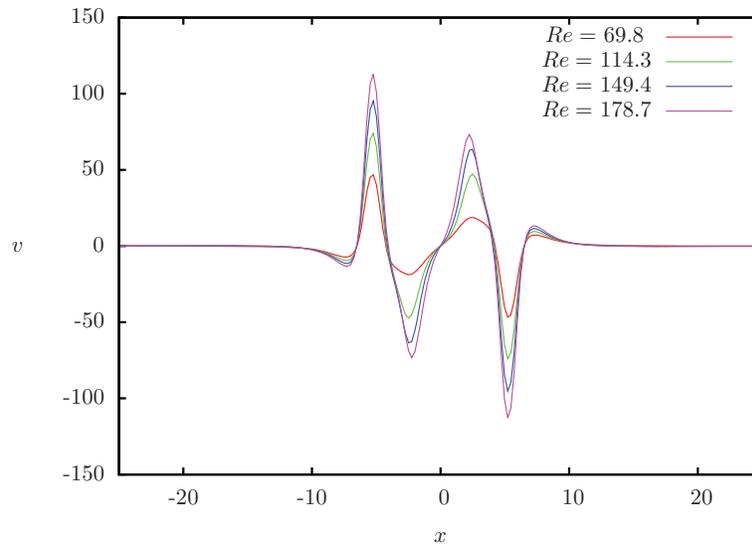


Figura 3.23: Componente de la velocidad en dirección y como función de la coordenada x calculada en $y = 0$ para distintos números de Reynolds en el arreglo de seis imanes mostrado en la Figura 3.20.

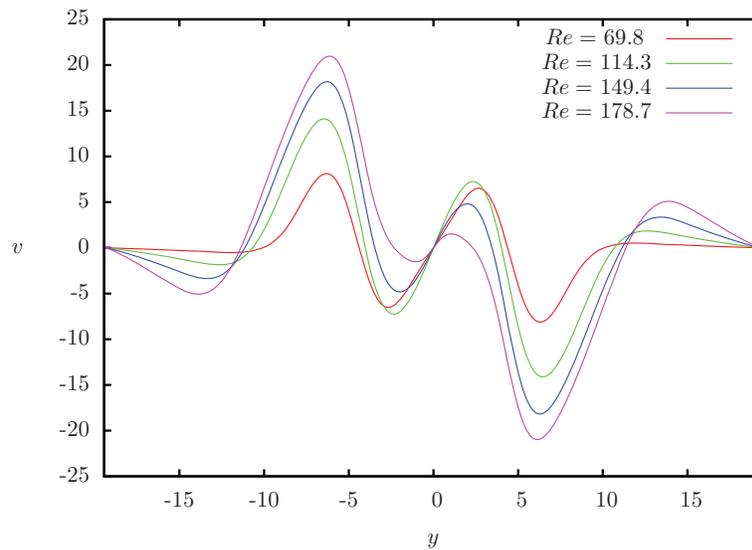


Figura 3.24: Componente de la velocidad en dirección y como función de la coordenada y calculada en $x = 0$ para distintos números de Reynolds en el arreglo de seis imanes mostrado en la Figura 3.20.

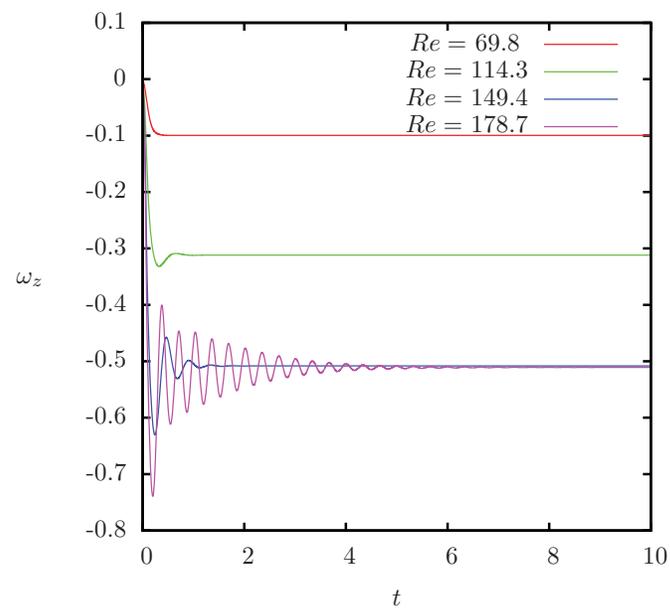


Figura 3.25: Vorticidad ω_z calculada en el punto en color negro de la Figura 3.20 como función del tiempo para distintos números de Reynolds.

En la Figura 3.26 se muestra la comparación del patrón de flujo experimental correspondiente a un arreglo de ocho imanes alternados norte y sur y una corriente directa aplicada de 50 mA con las líneas de trayectoria calculadas a partir de la simulación numérica. Se observa que la solución numérica reproduce cualitativamente de manera satisfactoria el comportamiento del fluido, no obstante que en este caso el flujo tiene una estructura compleja. El punto marcado con la cruz en color negro en la Figura 3.26b representa la ubicación donde se calculó la vorticidad como función del tiempo. En la Figura 3.27, donde se muestra la vorticidad como función del tiempo calculada con la solución numérica, se puede observar que después de un tiempo corto la vorticidad toma un valor constante, lo que implica que para dicha corriente, que corresponde a un número de Reynolds de $Re = 77.85$, el flujo llega a un estado estacionario.

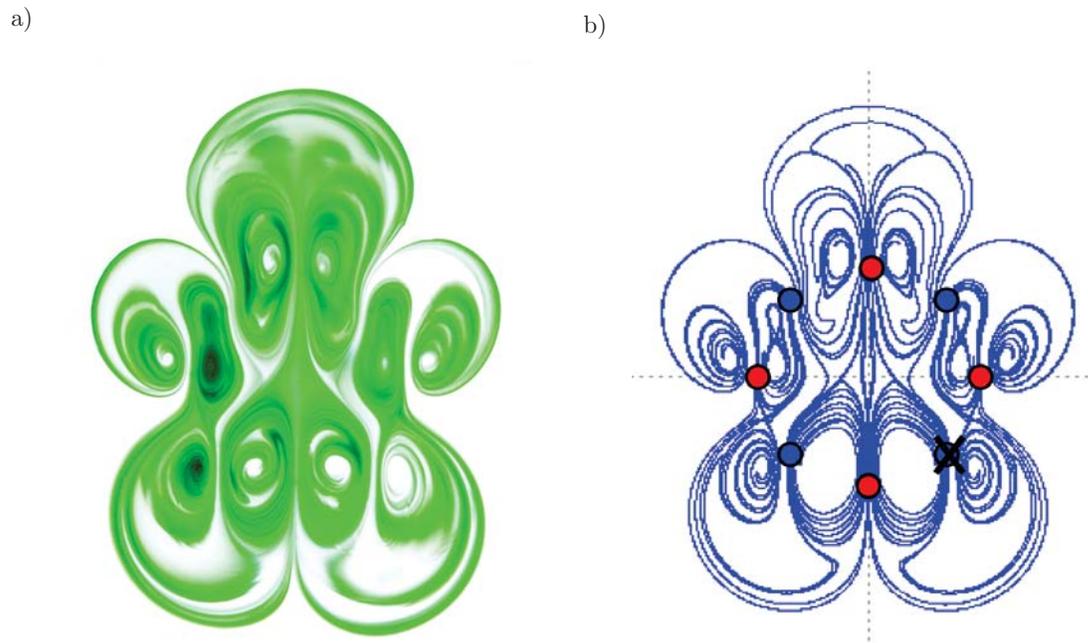


Figura 3.26: Flujo producido en un arreglo de ocho imanes con orientación alternada norte y sur. a) Visualización experimental. b) Líneas de trayectoria calculadas a partir de la solución numérica. La ubicación de los imanes se puede observar en la simulación numérica (panel b). La corriente aplicada es de 50 mA que corresponde a un número de Reynolds de 77.85 en la simulación numérica.

Utilizando el arreglo de ocho imanes alternados se explicará la transición de un estado independiente del tiempo a un estado dependiente del tiempo. En este trabajo se encontró experimental y teóricamente que para cualquier configuración, ya sea de un solo imán o un arreglo de imanes como los presentados previamente, el flujo resultante llega a un estado dependiente del tiempo, si la intensidad de la corriente eléctrica es lo suficientemente alta.

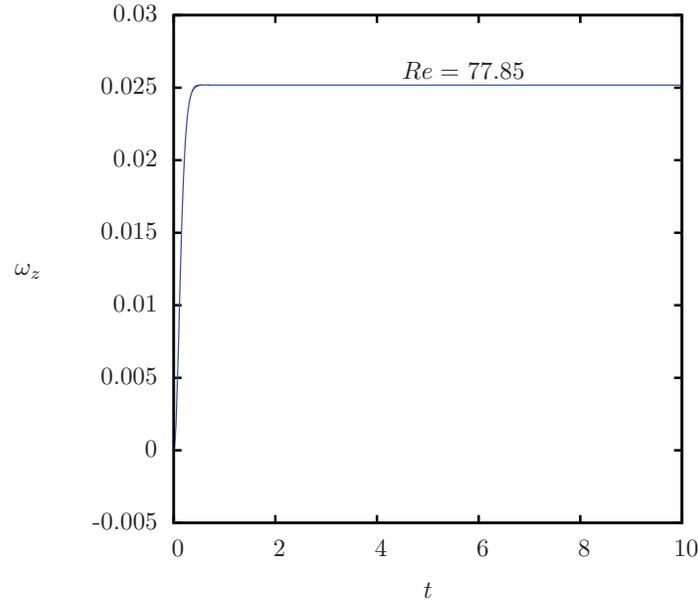


Figura 3.27: Vorticidad como función del tiempo para un arreglo de seis imanes con orientación alternada norte y sur y una corriente aplicada de 50 mA, correspondiente a un número de Reynolds numérico de 77.85.

Para el arreglo de ocho imanes, la transición ocurre en el rango $100 < I < 120$ mA, lo que corresponde a un intervalo en el número de Reynolds $131.9 < Re < 142.3$. En este régimen el flujo desarrolla un comportamiento temporalmente periódico, caracterizado por el movimiento oscilatorio de los vórtices. Las Figuras 3.28a y 3.28b correspondiente a una corriente eléctrica de 100 y 116 mA, respectivamente, muestran la vorticidad como función del tiempo, medida en el punto marcado con la cruz en color negro en la Figura 3.26b. Se observa que al aumentar la corriente aplicada, la vorticidad presenta un transitorio más largo para llegar a un estado estacionario. De hecho para $I = 116$ mA el flujo presenta ya una oscilación periódica de pequeña amplitud que eventualmente desaparece. Por otro lado, al incrementar la corriente en este arreglo de imanes a 120 mA, la vorticidad (mostrada en la Figura 3.29a), presenta un comportamiento plenamente periódico con una frecuencia característica $f_c = 3.72$ calculada mediante la transformada rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés), donde la Figura 3.29b) muestra el espectro de potencias correspondiente. A continuación se presentarán resultados numéricos para mayores intensidades de corriente, con el fin de analizar el comportamiento del flujo en tales condiciones.

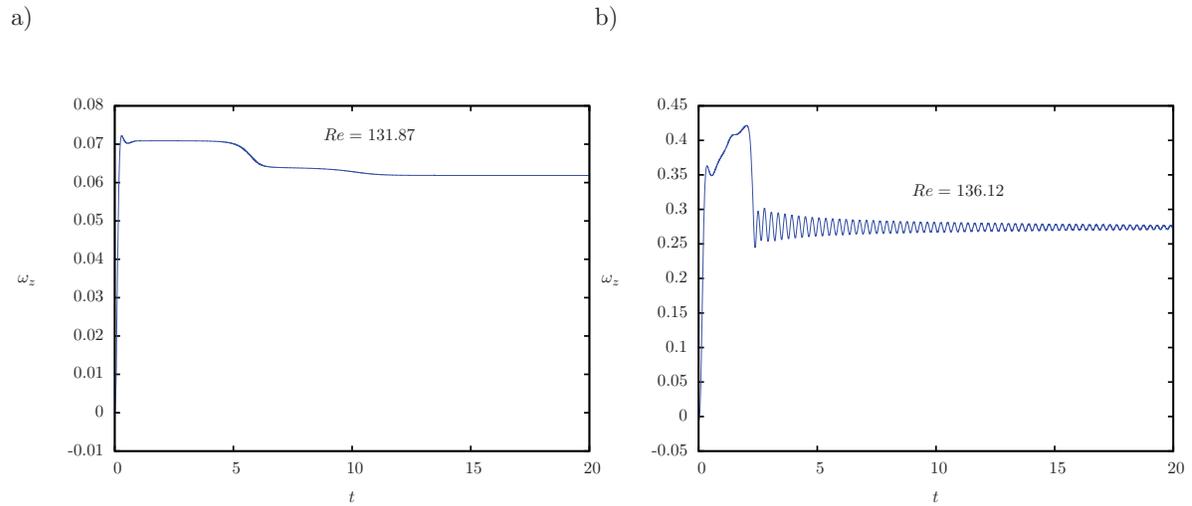


Figura 3.28: Vorticidad como función del tiempo, calculada en el punto representado con una cruz en color negro mostrado en la Figura 3.26b. a) $I = 100$ mA ($Re = 131.87$). b) $I = 116$ mA ($Re = 136.12$)

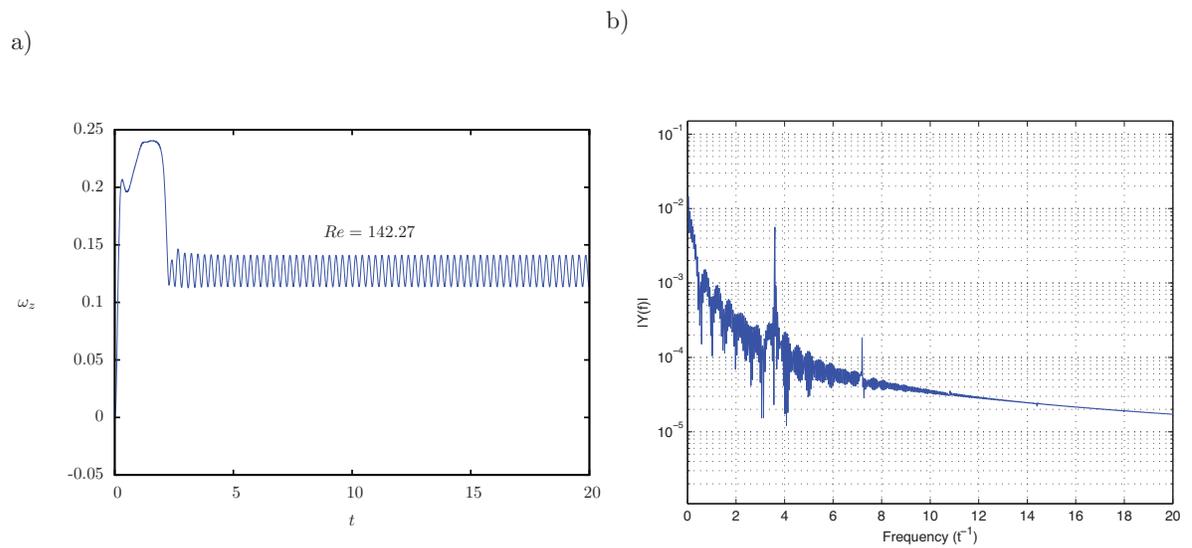


Figura 3.29: a) Vorticidad como función del tiempo para un arreglo de ocho imanes (ver Figura 3.26b). b) Espectro de potencias de la señal de vorticidad calculado mediante la Transformada Rápida de Fourier. $I = 120$ mA ($Re = 142.3$).

En las Figuras 3.30, 3.31 y 3.32 se muestra en el panel izquierdo a) la vorticidad como función del tiempo, y en el panel derecho b) el espectro de potencias, para corrientes aplicadas de $I = 150, 250, 280$ mA, respectivamente que corresponden a $Re = 169.55, 255.78$ y 268.74 . La vorticidad mostrada en la Figura 3.30a ($Re = 169.55$) tiene un comportamiento periódico similar al caso $Re = 142.27$ (Figura 3.29a) pero con una amplitud y una frecuencia característica mayores ($f_c = 4.34$). Sin embargo, al aumentar el número de Reynolds a $Re = 255.78$ (Figura 3.31a) se observa que la oscilación ya no presenta una amplitud constante aunque todavía se puede distinguir una frecuencia característica ($f_c = 6.25$), con sus respectivos armónicos, la cual es mayor a la de los casos anteriores. Esta característica pareciera indicar el inicio de un comportamiento físico distinto al puramente periódico.

La Figura 3.32a muestra que la vorticidad como función del tiempo ya no presenta un comportamiento periódico, observándose oscilaciones con amplitud variable y bastante irregular. Lo anterior se confirma al observar el espectro de frecuencias (Figura 3.32b) donde ya no es posible distinguir una frecuencia característica para este flujo. Queda por determinar como trabajo a futuro si lo que se está observando es un comportamiento caótico. A este nivel lo que se puede afirmar es que el incremento de la corriente (i.e. número de Reynolds) lleva a una agitación más intensa lo que puede mejorar el mezclado en el fluido. Como se verá más adelante, la corriente requerida para pasar de un estado independiente del tiempo a uno dependiente del tiempo es inversamente proporcional al número de imanes del arreglo.

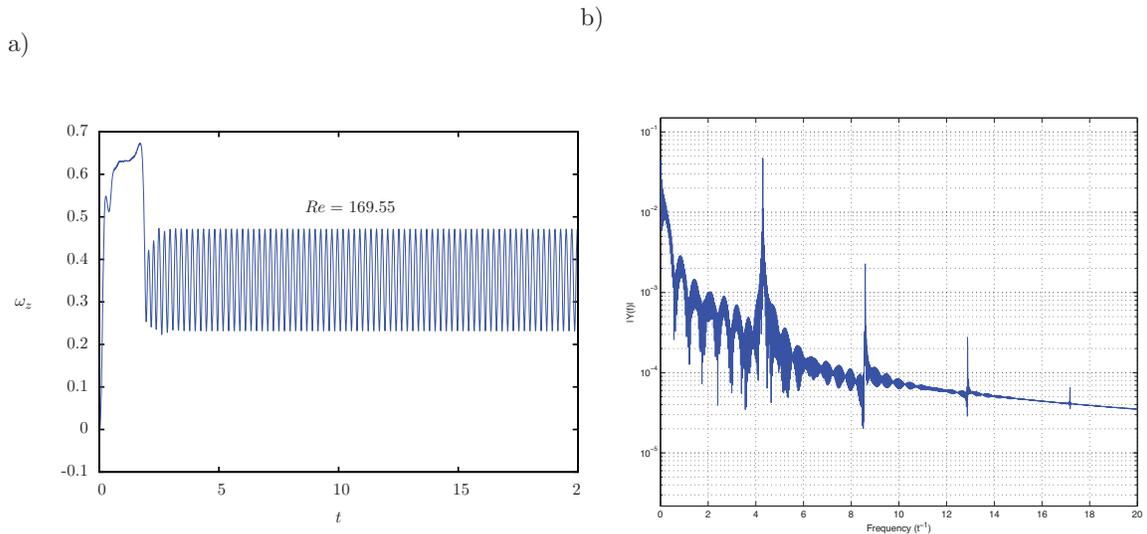


Figura 3.30: a) Vorticidad como función del tiempo para un arreglo de ocho imanes (ver Figura 3.26b). b) Espectro de potencias de la señal de vorticidad calculado mediante la Transformada Rápida de Fourier. $I = 150$ mA ($Re = 169.55$).

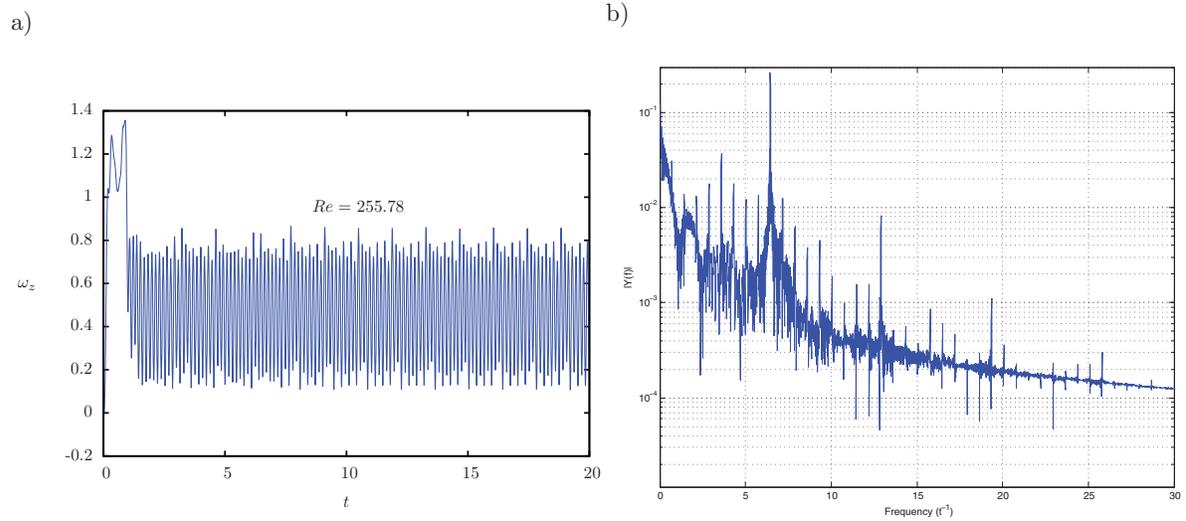


Figura 3.31: a) Vorticidad como función del tiempo para un arreglo de ocho imanes (ver Figura 3.26b). b) Espectro de potencias de la señal de vorticidad calculado mediante la Transformada Rápida de Fourier. $I = 250$ mA ($Re = 255.78$).

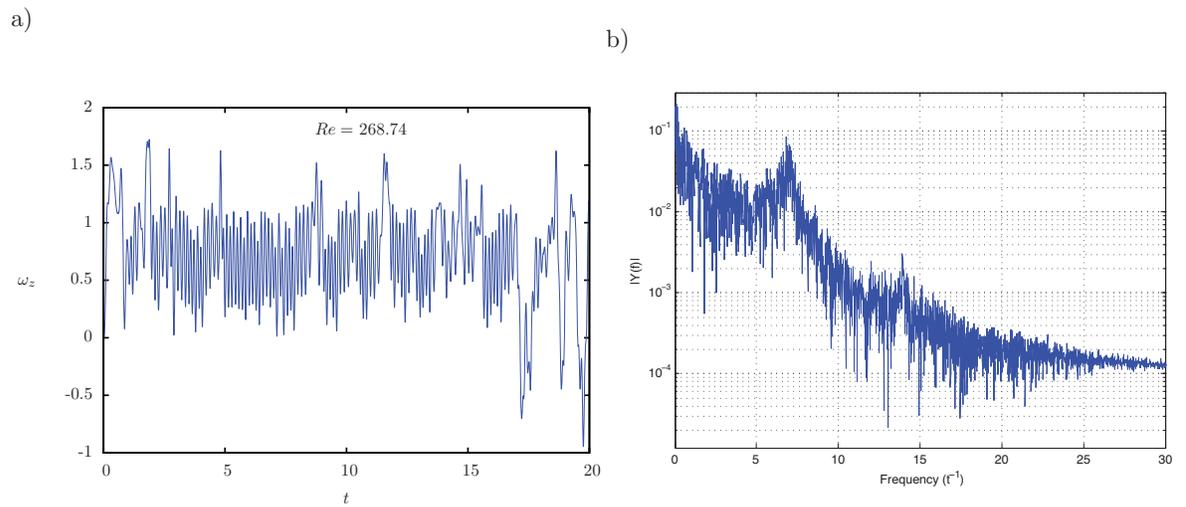


Figura 3.32: a) Vorticidad como función del tiempo para un arreglo de ocho imanes (ver Figura 3.26b). b) Espectro de potencias de la señal de vorticidad calculado mediante la Transformada Rápida de Fourier. $I = 250$ mA ($Re = 268.74$).

En las Figuras 3.33 y 3.34 se muestra la evolución temporal del patrón de flujo producido con un arreglo de ocho imanes con orientación alternada norte y sur y con una corriente aplicada de 200 mA ($Re = 212.23$). Del lado derecho se presenta la visualización experimental y del lado izquierdo las líneas de trayectoria calculadas del seguimiento Lagrangiano de partículas obtenido a partir de la integración numérica de las ecuaciones de balance. En las figuras se observa que la simulación numérica reproduce cualitativamente de manera satisfactoria la visualización experimental. En particular, se observan claramente los efectos convectivos que llevan a la elongación de los vórtices. En la simulación numérica a un tiempo de $t = 116$ s (Figura 3.33) el patrón de flujo presenta una simetría respecto al eje y . A un tiempo de $t = 141$ s (panel superior de la Figura 3.34) la interacción entre los vórtices es mayor y como consecuencia se pierde la simetría mencionada. Mediante una animación de los resultados numéricos puede observarse que los vórtices marcados con los puntos en color rojo y negro en la Figura 3.34b, giran en sentido antihorario, generando un desprendimiento de vórtices en dirección y , aumentando la velocidad del flujo. A un tiempo posterior de $t = 143$ s (panel inferior de la Figura 3.34) el flujo continua su evolución mostrando mayor agitación en la región central que en la periferia.

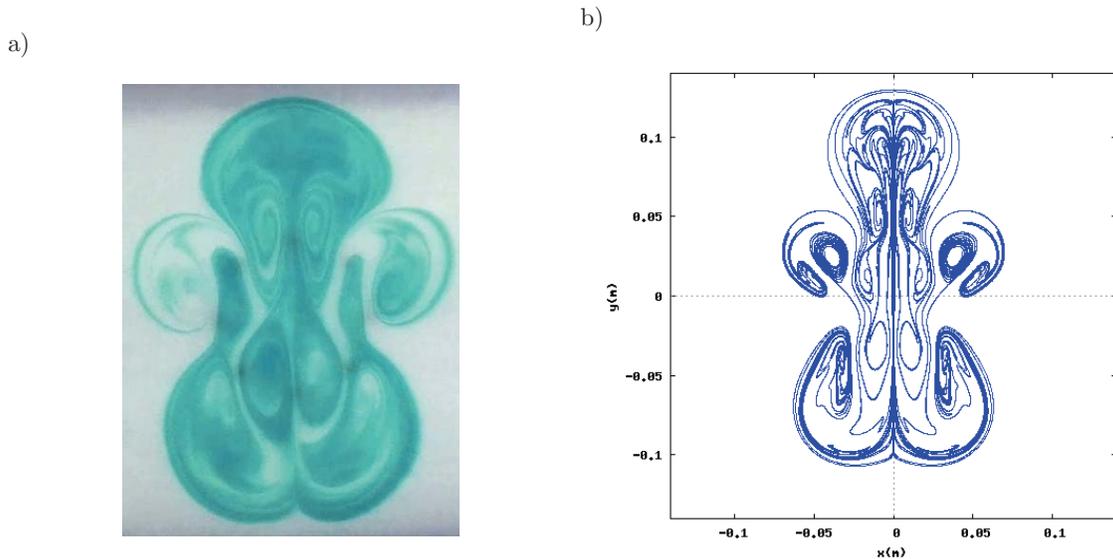
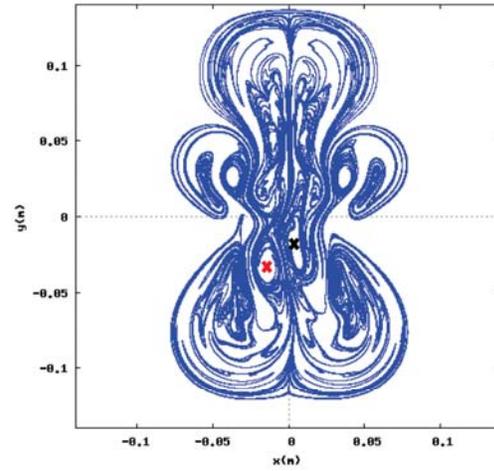


Figura 3.33: Patrón de flujo dependiente del tiempo generado a partir de un arreglo de ocho imanes con orientación alternada. a) Visualización experimental. b) Líneas de trayectoria calculadas a partir de la simulación numérica. $I = 200$ mA ($Re = 212.23$), $t = 116$ s.

a)



b)



a)



b)

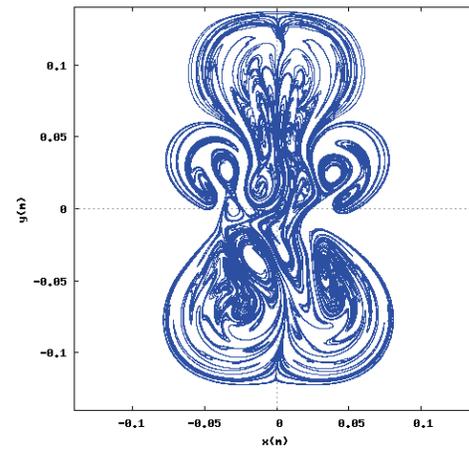


Figura 3.34: Patrón de flujo dependiente del tiempo generado a partir de un arreglo de ocho imanes con orientación alternada en dos instantes de tiempo. El panel superior corresponde a $t = 141$ s y el panel inferior a $t = 143$ s. a) Visualización experimental. b) Líneas de trayectoria calculadas a partir de la simulación numérica. $I = 200$ mA ($Re = 212.23$).

De igual manera que en el arreglo de ocho imanes alternados, se analizó la vorticidad como función del tiempo producida en los arreglos de tres, cuatro, seis y diez imanes (mostrados anteriormente) para distintas corrientes eléctricas aplicadas. Para cada una de estas configuraciones se determinó la intensidad de corriente a la cual el comportamiento del fluido pasa de un estado independiente del tiempo a uno dependiente del tiempo. La Figura 3.35 muestra el mapa de estabilidad que condensa la información de todas las simulaciones numéricas junto con los resultados experimentales disponibles referentes al comportamiento temporal de los distintos flujos estudiados.

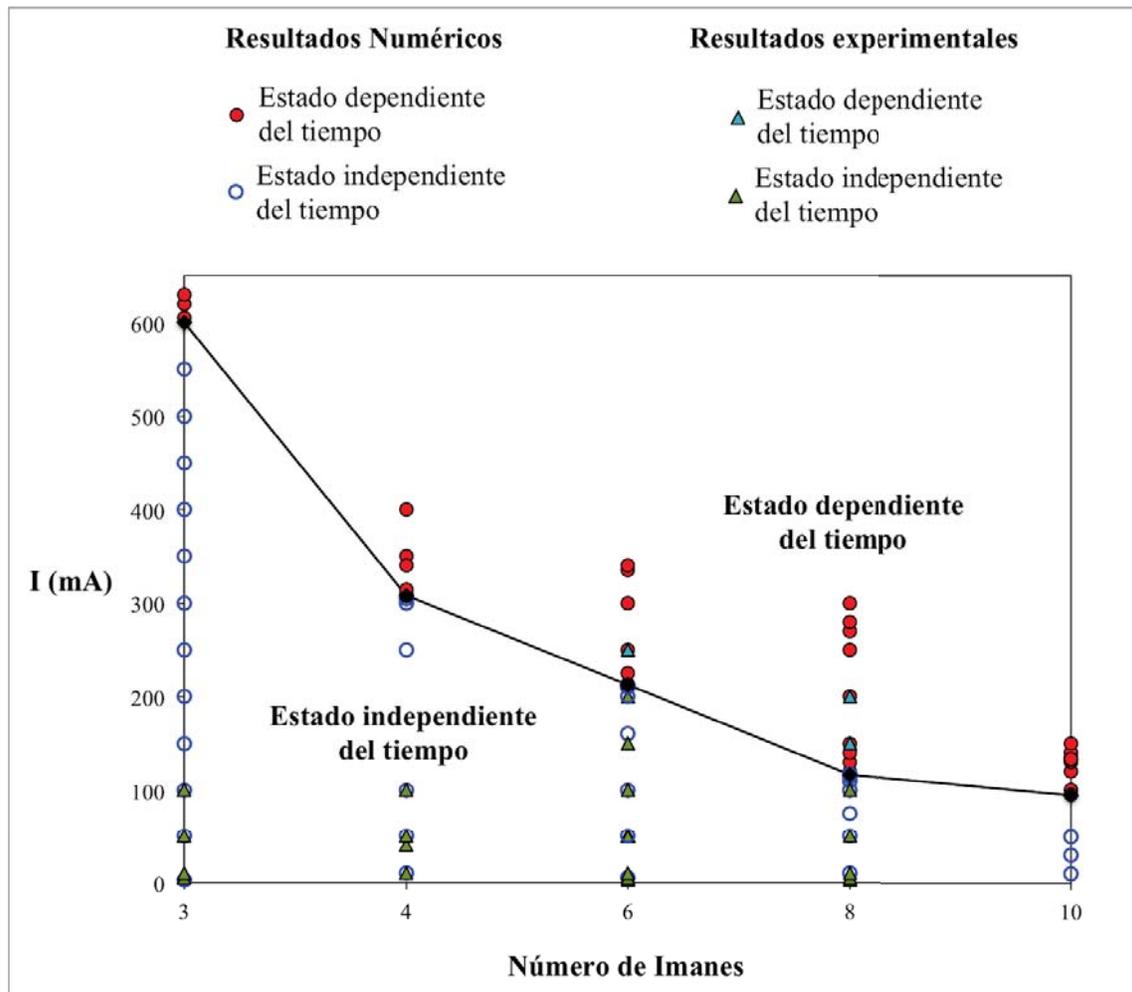


Figura 3.35: Mapa de estabilidad para los flujos producidos por los distintos arreglos de imanes analizados.

En dicho mapa se grafica la intensidad de corriente en el eje vertical y el número de imanes de los arreglos analizados en el eje horizontal. Para cada arreglo de imanes se muestran

las corridas a distintas intensidades de corriente, estableciendo si el resultado da lugar a un flujo independiente o dependiente del tiempo, y se localiza la condición en donde se da el tránsito entre un comportamiento y otro. El punto en color negro muestra el valor de la corriente I donde se presenta la transición entre un estado independiente y uno dependiente del tiempo para cada arreglo de imanes. Aunque la mayor parte de los resultados fueron obtenidos de simulaciones numéricas, en esta gráfica también se muestran algunos resultados experimentales. Es de resaltar que en estos casos, la predicción numérica coincide con la observación experimental.

En el mapa de estabilidad claramente se puede observar que al aumentar el número de imanes en el arreglo, la transición a un estado dependiente del tiempo ocurre a intensidades de corriente eléctrica menores. Esto puede entenderse notando que al aumentar el número de imanes aumenta también el número de vórtices en el flujo al tiempo que disminuye la distancia entre ellos. De esta forma, la interacción entre vórtices se da más fácilmente lo que ocasiona que el flujo sea menos estable y proclive a desarrollar un comportamiento dependiente del tiempo. En principio, dicho comportamiento puede ser útil para producir un mejor mezclado en el fluido.

Conclusiones

En el presente trabajo se realizó un estudio teórico-experimental del comportamiento espacio-temporal de flujos generados en una capa delgada de electrolito mediante la interacción de una corriente eléctrica directa y un campo magnético producido por diversos arreglos de imanes. El estudio teórico consta de un modelo analítico y un modelo numérico.

Para el enfoque analítico, primeramente se establecieron las ecuaciones que describen el fenómeno de estudio de manera puramente bidimensional, ignorando la fricción generada entre el fluido y el fondo del contenedor. Dichas ecuaciones se resolvieron considerando primero un sólo imán por medio del método de perturbaciones, el cual es válido para flujos con números de Reynolds muy pequeños. Una vez que se obtuvo la solución para el flujo producido por un sólo imán, se realizó la superposición de ésta para encontrar el flujo producido por un arreglo de imanes dispuestos de manera equidistante sobre una circunferencia. Dicha superposición es válida cuando los efectos convectivos (no lineales) son despreciables y el flujo es puramente difusivo. A pesar de que esta última característica restringe mucho el rango de validez de la solución y de que se presentan algunas limitantes para satisfacer las condiciones de frontera, las soluciones analíticas obtenidas a partir de este modelo permiten una comparación cualitativa razonable con los experimentos. Las limitantes mencionadas motivaron el desarrollo de un modelo numérico cuasi-bidimensional en el que además de estudiar el fenómeno en un rango más amplio de valores del número de Reynolds, permite considerar efectos como el de las capas límite adheridas en el fondo del contenedor y la convección forzada que permiten llevar a cabo una descripción más realista del flujo. Primeramente se compararon los patrones de flujo estacionarios obtenidos por los dos modelos teóricos para bajos números de Reynolds, encontrando un acuerdo razonable entre los resultados pero notando igualmente limitaciones serias en las soluciones analíticas, en particular, en la ubicación y separación de sus núcleos de los vórtices. Para los arreglos de tres a diez imanes se encuentran claras simetrías espaciales que reproducen ambos enfoques.

En las comparaciones de los resultados numéricos y experimentales para $Re \gg 1$ se observó un acuerdo cualitativo satisfactorio tanto en flujos estacionarios como en flujos dependientes del tiempo. Las soluciones numéricas son capaces de describir adecuadamente el desplazamiento y la elongación de los vórtices en la dirección de la fuerza de Lorentz. Se encontró que aun para flujos con números de Reynolds relativamente grandes pero en estado estacionario, existen simetrías espaciales bien definidas que dependen del arreglo

de imanes utilizado. Por otra parte, se analizaron numéricamente los flujos generados con todos los arreglos de tres a diez imanes, aumentando la intensidad de corriente eléctrica aplicada hasta encontrar el punto de transición de un régimen independiente del tiempo a uno dependiente del tiempo. Finalmente, se recopilaron todas las simulaciones en el mapa de estabilidad, que incluye varias observaciones experimentales que coinciden con las simulaciones numéricas. A partir de dicho mapa, se puede observar que entre mayor sea el número de imanes, menor será la intensidad de corriente requerida para pasar a un estado dependiente del tiempo.

Los resultados obtenidos aquí muestran la posibilidad de obtener flujos dependientes del tiempo para ciertas configuraciones de imanes que son capaces de propiciar un buen mezclado del fluido con intensidades de corriente eléctrica relativamente bajas. Como trabajo a futuro queda la tarea de caracterizar el comportamiento espacio-temporal de los flujos cuando se pierde el carácter periódico y determinar si se presenta una transición hacia un flujo caótico. Resta asimismo por hacer un estudio experimental cuantitativo que permita comparar de manera precisa los resultados numéricos con su contra parte experimental con el fin de establecer la validez del modelo numérico.

Bibliografía

- Afanasyev, Y. D. y Korabel, V. N. (2006), ‘Wakes and vortex streets generated by translating force and force doublet: laboratory experiments’, *J. Fluid Mech.* **553**, 119–141.
- Akkermans, R. A. D., Kamp, L. P. J., Clercx, H. J. H. y Heijst van, G. J. F. (2010), ‘Three-dimensional flow in electromagnetically driven shallow two-layer fluid’, *Phys. Rev. E* **82**, 026314.
- Aref, H. (2007), ‘Point vortex dynamics: A classical mathematical playground’, *Journal of Mathematical Physics* **48**, 065401.
- Aref, H. (2009), ‘Stability of relative equilibria of three vortices’, *Phys. Fluids* **21**, 094101.
- Aref, H., Newton, P. K., Stremmer, M. A., Tokieda, T. y Vainchtein, D. L. (2003), ‘Vortex crystals’, *Advances in Applied Mechanics* **39**, 1–79.
- Beltrán, A. (2006), Flujo de líquidos conductores en campos magnéticos localizados, Tesis de Maestría, UNAM.
- Bühler, L. (1996), ‘Instabilities in quasi-two-dimensional magnetohydrodynamics flows’, *J. Fluid Mech.* **326**, 125–150.
- Cardoso, O., Marteau, D. y Tabeling, P. (1994), ‘Quantitative experimental study of the free decay of quasi-two-dimensional turbulence’, *Phys. Rev. E* **49(1)**, 454–461.
- Cerretelli, C. y Williamson, C. H. K. (2003), ‘The physical mechanism for vortex merging’, *J. Fluid Mech.* **475**, 41–77.
- Clercx, H. J. H., Van Heijst, G. J. F. y Zoetewij (2003), ‘Quasi-two-dimensional turbulence in shallow fluid layers: The role of bottom friction and fluid layer depth’, *Phys. Rev. E* **67**, 066303.
- Cuevas, S. (2004), ‘Introducción a la magnetohidrodinámica. Memorias de la escuela de verano de física’, *UNAM-UAEM* pp. 1–22.
- Cuevas, S., Smolentsev, S. y Abdou, M. (2006), ‘Vorticity generation in the creeping flow past a magnetic obstacle’, *Phys. Rev. E* **74**, 056301.
- Currie, I. M. (2003), *Fundamental Mechanics of Fluids*, Marcel Dekker.

- Davidson, P. A. (2001), *Introduction to magnetohydrodynamics flows*, Cambridge.
- Dirksen, T. (2012), Numerical computations of relative equilibria of identical vortices on the plane and on the sphere, Master's thesis, Technical University of Denmark.
- Figueroa, A. (2006), Generación de vorticidad mediante fuerzas magnéticas, Tesis de maestría, UNAM.
- Figueroa, A., Cuevas, S. y Ramos, E. (2011), 'Electromagnetically driven oscillatory shallow layer', *Phys. Fluids* **23**, 013601–1–013601–10.
- Figueroa, A., Demiaux, F., Cuevas, S. y Ramos, E. (2009), 'Electrically driven vortices in a weak dipolar magnetic field in a shallow electrolytic layer', *J. Fluid Mech.* **641**, 245–261.
- Gary Leal, L. (2007), *Advanced Transport Phenomena*, Cambridge.
- Good, R. H. y Nelson, T. J. (1971), *Classical theory of electric and magnetic fields*, Academic Press.
- Griebel, M., Dornseifer, T. y Neunhoeffer, T. (1998), *Numerical Simulation in Fluid Dynamics: A Practical Introduction*, SIAM.
- Grzybowski, B. A., Stone, H. A. y Whitesides, G. M. (2000), 'Dynamic self-assembly of magnetized, millimetre-sized objects rotating at a liquid-air interface', *Nature* **405**, 1033–1036.
- Helmholtz1858, H. V. (1858), 'Über integrale der hydrodynamischen gleichungen, welche der wirbelbewegung entsprechen', *J. für die reine und angewandte Mathematik* **55**, 25–55.
- Hughes, W. y Young, F. (1966), *The Electromagnetodynamics of Fluid*, John Wiley and Sons.
- Kelvin, L. (1867), 'On vortex atom', *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **VI**, 94–105.
- McCaig, M. (1977), *Permanent Magnets in Theory and Practice*, Wiley.
- Meunier, P. y Leweke, T. (2005), 'Elliptic instability of a co-rotating vortex pair', *J. Fluid Mech.* **533**, 125–159.
- Meunier, P. y Villermaux, E. (2003), 'How vortices mix', *J. Fluid Mech.* **476**, 213–222.
- Ottino, J. M. (1990), 'Chaotic advection and turbulence', *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 207–253.
- Özişik, M. N. (1993), *Heat conduction*, 2nd edn, Wiley, New York.
- Raffel, M., Willert, C., Wereley, S. y Kompenhans, J. (2007), *Particle Image Velocimetry*, Springer.

- Rossi, L. y Lardeau, S. (2011), ‘Lamination and folding in electromagnetically driven flows of specified geometries’, *Journal of Turbulence* **12**, 1–31.
- Salas, H., Cuevas, S. y Ramos, E. (2001), ‘Electrically driven vortices in a dipolar magnetic field’, *Magnetohydrodynamics* **37**, 38–44.
- Satijn, M. P., W., C. A., Verzicco, R., Clercx, H. J. H. y Van Heijst, G. J. F. (2001), ‘Three-dimensional structure and decay properties of vortices in shallow fluid layer’, *Phys. Fluids* **13**(7), 1932–1945.
- Smolentsev, S. (1997), ‘Averaged model in mhd duct flow calculations’, *Magnetohydrodynamics* **33**(1), 42–47.
- Sommeria, J. (1988), ‘Electrically driven vortices in a strong magnetic field’, *J. Fluid Mech.* **189**, 553–569.
- Sommeria, J. y Moreau, R. (1982), ‘Why, how and when, mhd turbulence becomes two-dimensional’, *J. Fluid Mech.* **118**, 507–518.
- Tropea, C., Yarin, A. L. y Foss, J. (2007), *Handbook of Experimental Fluid Mechanics*, Springer.
- Versteeg, H. K. y Malalasekera, W. (1995), *An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method*, Longman Scientific & Technical.
- Vincent, A. y Meneguzzi, M. (1991), ‘The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence’, *J. Fluid Mech.* **225**, 1–20.
- Wells, M. G., Clercx, H. J. H. y Van Heijst, G. J. F. (2007), ‘Vortices in oscillating spin-up’, *J. Fluid Mech.* **573**, 339–369.
- Yarmchuk, E. J., Gordon, M. J. V. y Packard, R. E. (1979), ‘Observation of stationary vortex arrays in rotating superfluid helium’, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 214.