



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Estudio de la respuesta no lineal de la
estructura de un edificio a través de eventos
sísmicos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
FÍSICO

PRESENTA:
LEÓN MARTÍNEZ DEL RÍO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ARTURO OLVERA CHÁVEZ



2012



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

<p>1. Datos del alumno Martínez del Río León 55 39 44 26 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 300091742</p>
<p>2. Datos del Tutor Dr Arturo Olvera Chávez</p>
<p>3. Datos del sinodal 1 Dra Catalina Elizabeth Stern Forgach</p>
<p>4. Datos del sinodal 2 Ing Neftalí Rodríguez Cuevas</p>
<p>5. Datos del sinodal 3 Dra Clara Eugenia Garza Hume</p>
<p>6. Datos del sinodal 4 Dr Carlos Málaga Iguñiz</p>
<p>7. Datos del trabajo escrito Estudio de la respuesta no lineal de la estructura de un edificio a través de eventos sísmicos 104p 2012</p>

Índice general

1. Introducción	1
2. Antecedentes	3
2.1. Edificio ejemplo	8
3. Análisis lineal.	12
3.1. Registro de datos de sismos	13
3.2. Modelación lineal de la dinámica del edificio.	21
3.3. Resumen del procedimiento para el análisis lineal	37
3.4. Estudio lineal de los eventos sísmicos.	53
4. Análisis no-lineal	75
4.1. Introducción al estudio de la dinámica no-lineal de un sistema oscilante	75
4.2. Implementación de indicadores	85

4.3. Resultados Preliminares	90
5. Conclusiones	92
A. Gráficas de Resultados Lineales	I
A.1. Orientación	I
A.2. Magnitud de eventos	II

Capítulo 1

Introducción

El propósito de esta tesis consiste en estudiar el comportamiento oscilatorio de un edificio ante eventos sísmicos aproximando primero por ecuaciones diferenciales lineales en intervalos de tiempo y luego buscando una ecuación diferencial no-lineal que modele globalmente el cambio de parámetros de las ecuaciones diferenciales lineales. La motivación de este trabajo es utilizar la teoría de ecuaciones diferenciales asintóticas sobre datos reales de un edificio instrumentado sometido a eventos sísmicos de mediana y alta intensidad donde se espera apreciar efectos no-lineales.

La tesis está dividida en 5 capítulos y un apéndice, de los cuales se hace una breve mención a continuación.

En el capítulo 2 se muestran los antecedentes del edificio sujeto. Se explica que se entiende por edificio y formas simples para su descripción mecánica y partes de éste. Se describe la instrumentación del edificio del cual provienen los registros de los acelerómetros usados para esta tesis.

En el capítulo 3 se plantea y se realiza un análisis lineal a "trozos" de los registros en los eventos sísmicos. Se construye un algoritmo para analizar los registros y se prueba con simulaciones que lo justifican. El algoritmo usa la teoría de regresiones de funciones con formas normales para aproximar ecuaciones diferenciales lineales a "trozos" de los registros de los eventos

telúricos.

En el capítulo 4 se hace un breve desarrollo de la aproximación asintótica de ecuaciones diferenciales con lo que se observa la variación de parámetros por el método de promediación. Además, se muestra un conjunto de valores que sirven como indicadores que describen una dinámica asociada a oscilaciones no-lineales. Utilizando la información obtenida del capítulo 3 que se encuentra en el apéndice, con el conjunto de indicadores se muestran si hay o no efectos no-lineales.

En el capítulo 5 se dan las conclusiones generadas por el trabajo de los capítulos anteriores junto con la conclusiones finales.

Finalmente, en el apéndice se encuentran todas las gráficas de los resultados del análisis lineal a "trozos" obtenidos en el capítulo 3 para los eventos estudiados.

Capítulo 2

Antecedentes

Nosotros, los seres humanos, tenemos la necesidad de establecer nuestras actividades en recintos que brinden seguridad y comodidad a las actividades que se realicen. Esta necesidad ha hecho que a lo largo de la historia se hayan realizado una gran variedad edificaciones y construcciones.

La definición de *edificio* de la RAE¹ es utilitaria pero no descriptiva, esto tiene sentido dada la gran variedad de formas y materiales con los cuales se han construido, construyen y se construirán los edificios. Esto nos lleva a que la descripción de un edificio se vuelva compleja.

Dado que un edificio tiene que ser una estructura eficiente y útil, hay que predecir y/o estimar cómo se va a comportar la estructura bajo situaciones hipotéticas y reales para tomar las medidas correspondientes que maximicen su utilidad y seguridad en un tiempo razonable para que sea redituable su construcción. Para esta tarea se pueden considerar una gran cantidad de variables y parámetros, que se introducen a la modelación mecánica de la estructura y nos regresa información que mejora nuestra comprensión de lo que le sucede al edificio. Por lo que hay que determinar qué parámetros se pueden medir o inferir dada las condiciones físicas del sistema; también

¹edificio: (*Del lat. aedificium*). Construcción fija, hecha con materiales resistentes, para habitación humana o para otros usos. *Diccionario de la lengua Española - Vigésima segunda edición*

hay que determinar cuáles son las variables y cuáles pueden ser medidas o inferidas, dado que un modelo tiene que poder predecir y/o explicar el comportamiento del sistema en el intervalo de condiciones hipotéticas y reales.

La adquisición de información depende de las posibilidades para observar el sistema, por otro lado no sabemos a priori cuál de esta información es relevante. Por lo tanto tenemos que descomponer el sistema en problemas más sencillos, los cuales con menor información nos brinden un mayor entendimiento del sistema. Para esto podemos describir un edificio como un símil mecánico y con este símil adquirir la mayor información del comportamiento de la estructura.

Este estudio por similitud tiene varios problemas.

- Determinar cómo es la similitud del problema real respecto a los parámetros del símil mecánico.
- Determinar el intervalo en donde el símil mecánico aproxima razonablemente al problema real.

A pesar de estos problemas, el símil mecánico no pierde su gran eficacia en darnos una clara guía sobre qué información y datos tenemos que centrar nuestra atención para comprender el sistema. Otro rasgo favorable de los símiles mecánicos es la determinación de los grados libertad de movimiento del sistema. Los grados libertad de movimiento son las variables del sistema que bajo condiciones iniciales y/o de frontera determinan la evolución de éste en el tiempo.

2.0.1. Sistema de un grado de libertad

Un sistema mecánico con un solo grado de libertad es el problema que depende únicamente de una variable de velocidad y posición, que son función del tiempo. El problema dinámico se puede expresar:

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, t; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\right) = 0 \quad (2.1)$$

donde k es el número de parámetros del sistema y x la variable dinámica. En general para resolver este sistema, si es que existe solución, son necesarias dos condiciones iniciales (velocidad y posición al tiempo inicial) debido a que el sistema mecánico se modela con segundas derivadas de la variable dinámica.

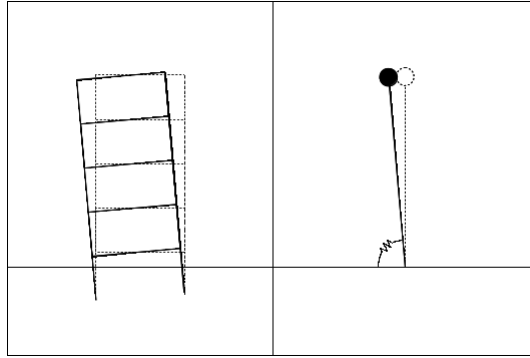


Figura 2.1: Símil mecánico de un Edificio rígido a un péndulo invertido con un resorte en el arco.

Modelar un edificio o parte de un edificio en un sistema de un grado de libertad significa hacer un símil mecánico a un sistema de una masa puntual sometido a campos, fuerzas disipativas y forzamientos, como se ejemplifica en la figura 2.1. Este modelo es la representación mecánica del edificio como si fuera un péndulo invertido.

Dado que queremos modelar al edificio como un sistema simple, podemos suponer que la dinámica es la de una masa sujeta a un resorte, a un amortiguador viscoso y un forzamiento externo. Entonces la ecuación(2.1) se escribe:

$$\ddot{x} + \frac{C}{M}\dot{x} + \frac{K}{M}x = G\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$$

donde G corresponde al forzamiento externo y a términos no-lineales expresados como fuerzas.

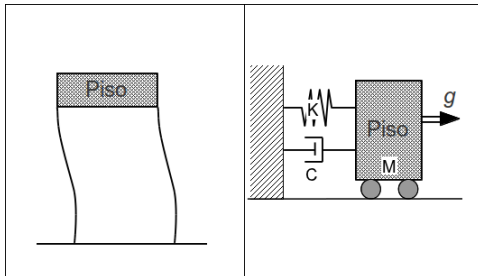


Figura 2.2: Símil mecánico de un piso rígido a un móvil sujeto a un resorte y un amortiguador viscoso y un forzamiento externo g .

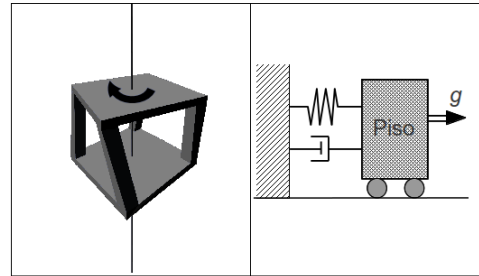


Figura 2.3: Símil mecánico de piso rígido girando alrededor de un eje.

Este modelo mecánico permite modelar sistemas mecánicos oscilantes cuya respuesta elástica no-lineal, donde los términos viscosos son dependientes de la velocidad y le imponemos un forzamiento periódico. Las variables dinámicas que modelan al sistema mecánico pueden ser de desplazamiento o torsión, tal como lo observamos en la figura 2.3.

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = g \left(x, \frac{dx}{dt}, t \right) \quad (2.2)$$

donde g corresponde al forzamiento externo y a términos no-lineales expresados como momentos torsionales. En el caso de torsión, la variable dinámica representa el cambio de momento angular en término del momento torsional aplicado.

Este planteamiento tiene sentido mientras que la dinámica principal sea cercana al de un oscilador lineal disipativo y donde el forzamiento dependa de las condiciones externas del sistema. De forma similar, podemos estudiar a un sistema con varios grados de libertad como un conjunto de sistemas de un grado de libertad mientras los sistemas tengan acoplamientos lineales. Con este planteamiento se puede entender la dinámica de algunos sistemas a través de símiles mecánicos simples e independientes.

2.0.2. Sistemas de varios grados de libertad

Por analogía un sistema con varios grados de libertad es aquel que posee más de una coordenada generalizada que depende del tiempo, es decir, depende de las variables y de sus derivadas en el tiempo. Para este caso podemos expresar a este sistema como un sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} F_1 \left(\vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}, \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}, t; \vec{\alpha} \right) &= 0 \\ F_2 \left(\vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}, \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}, t; \vec{\alpha} \right) &= 0 \\ &\vdots \\ F_n \left(\vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}, \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}, t; \vec{\alpha} \right) &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_s)$ y s es el número de grados de libertad, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ y r es el número de parámetros en el sistema de ecuaciones y, n el número de ecuaciones del sistema.

Para que el sistema de ecuaciones "pueda" tener soluciones es necesario que el número de ecuaciones diferenciales de segundo orden sea igual a la cantidad de variables s del sistema. Además que en general necesitan $2s$ condiciones iniciales (velocidad y posición de la coordenada generalizada al tiempo inicial para cada una).

Una modelación plausible para el movimiento de una estructura en un plano tiene como símil mecánico una cadena de péndulos invertidos con resortes en el arco del giro del péndulo, donde las masas corresponden a las masas de los pisos, como en la figura(2.4)

La dinámica de esta cadena de péndulos se puede expresar como un sistema de ecuaciones $\ddot{\theta}_i + \omega_i^2 \theta_i = \Theta_i(\theta_{i-1}, \theta_{i+1})$ donde i es el péndulo asociado al piso, θ_i es la deflexión del péndulo i -ésimo y Θ_i la función que liga el comportamiento entre péndulos o pisos. Podemos agregar a nuestra modelación el movimiento de torsión entre pisos de un edificio. Esta sería también como una cadena de masas con resortes y amortiguadores viscosos como en la figura 2.5.

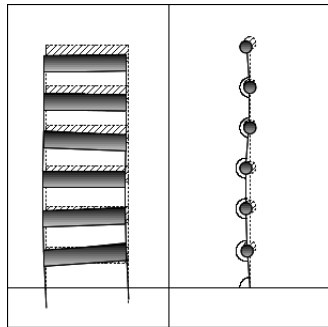


Figura 2.4: Símil mecánico del movimiento de los pisos de un edificio al de una cadena de péndulos invertidos con resortes en el arco del giro del péndulo.

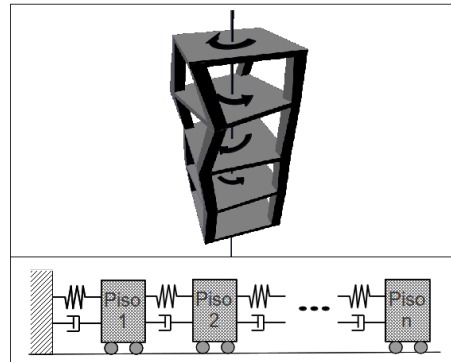


Figura 2.5: Símil mecánico de giros de los pisos de un edificio a una cadena de resortes con amortiguadores viscosos.

Es posible encontrar símiles mecánicos más cercanos a la dinámica de la estructura, suponiendo varillas delgadas en cada columna, placas delgadas en cada muro, etc. Esto significa aumentar la complejidad y complicar el ajuste de parámetros de cada ecuación del sistema con relación al problema original.

Una manera práctica, utilizada por ingenieros, consiste en la utilización de tablas que contienen los parámetros de las características dinámicas de los materiales con el fin de realizar simulaciones y diseños. El inconveniente del uso de tablas radica en la incapacidad de predecir los efectos no-lineales.

Un efecto adicional que se puede agregar a la dinámica del modelo es el comportamiento histerético de las fuerzas elásticas del edificio. Este efecto no lo vamos a considerar en nuestra modelación.

2.1. Edificio ejemplo

La información que se toma en este estudio es el de un Edificio Instrumentado, cuyos datos fueron proporcionados por el Instituto de Ingeniería, UNAM [5].

El edificio sujeto a estudio con denominado *PC*, es de concreto reforzado de con 17 niveles y un sótano. Está cimentado sobre un cajón y pilotes de fricción. El sótano tiene muros perimetrales de concreto reforzado. La planta baja tiene dimensiones de $38m$ por $54m$, los siguientes 9 niveles son escalonados los cuales fungen como estacionamiento unidos con rampas, estos 9 niveles se les considera como 5 niveles del edificio, y arriba de ellos una torre de 12 niveles cuya dimensión en planta disminuye hacia arriba con $23.9m$ por $39m$ en la azotea. La altura de entrepiso de $3.15m$. La altura total es de $55.4m$. El edificio fue diseñado sujeto al Reglamento de Construcción del D.F. de 1977 y construido entre 1980 y 1984. El edificio sufrió daños estructurales en los sismos de 1985 los cuales fueron reparados y se remplazaron las paredes de ladrillo por muros de concreto para mejorar su desempeño ante sismos subsecuentes [4] [3].

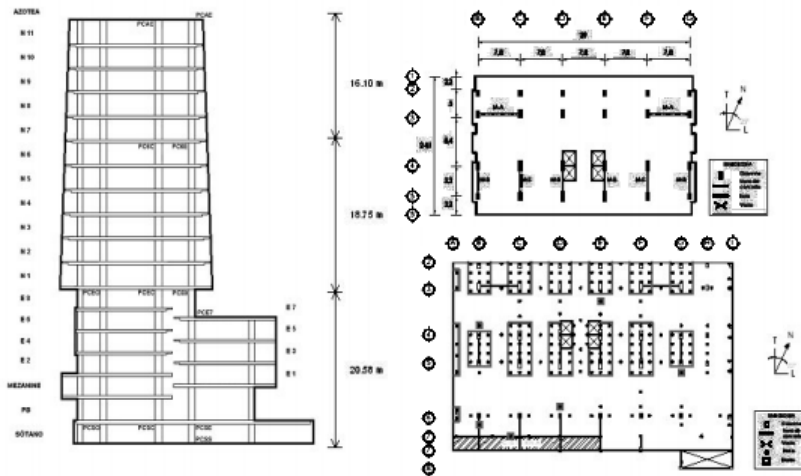


Figura 2.6: Vista transversal y plana del edificio *PC*.

El edificio se encuentra en *suelo blando*, el cual esta conformado por depositaciones de arcillas volcánicas típicas del subsuelo donde alguna vez estuvo el lago de México. La densidad del suelo es de $1.2ton/m^3$ y una profundidad de $35m$, con un promedio del módulo de rigidez de $425ton_{fuerza}/m^2$ y una velocidad de propagación de ondas de corte de $60m/s$ [4].

2.1.1. Propuesta de modelación del edificio.

Tomando en consideración la forma de la estructura del edificio hay que recalcar que al decir que es de concreto reforzado significa que las uniones de los elementos estructurales son reforzados. Es decir que podemos aproximar a que la deformación en las juntas es despreciable, y que no se pandean los pisos.

Considerando que las frecuencias de oscilación típicas de un sismo en la ciudad de México son menores a 1hz y la velocidad promedio de propagación es mayor o igual 60m/s ya sean en las *ondas-P* u *ondas-S*, tenemos que las longitudes de ondas asociadas son mayores a los 60m . En una burda aproximación, esto nos lleva a considerar que en la modelación de la dinámica de la estructura, toda la base del edificio reacciona al mismo tiempo.

Suponiendo que el desplazamiento de cada piso no pueda ser muy grande respecto de sus vecinos, podemos suponer que los desplazamientos son suaves y que cada piso esta acoplado elásticamente con sus primeros vecinos. De esta manera los desplazamientos a nivel del sótano, forzarán la respuesta elástica de las plantas superiores, así esperamos que la azotea experimente los mayores desplazamientos.

2.1.2. Instrumentación

La instrumentación del edificio consta de 13 acelerómetros triaxiales sincronizados, 11 de ellos puestos en 1990, repartidos en 5 niveles, ilustrados en la figura 2.7:

- Dos en el nivel 17 del edificio que es la azotea. Uno en el centro y otro en una esquina. Nombres clave PCAC y PCAE.
- Dos en el nivel 12 del edificio. Uno en el centro y otro en una esquina. Nombres clave PC6C y PC6E.
- Tres en el nivel 6 del edificio. Uno en el centro y los otros dos en esquinas contrarias. Nombres clave PCEC, PCE8 y PCEO.

- Uno en el entre piso del nivel 4 y 5. Nombre clave PCE7.
- Tres en el sótano pegados a la planta baja. Uno en el centro y los otros dos en esquinas contrarias. Nombres clave PCSC, PCSE y PCSO.

Los acelerómetros PCAC, PC6C, PCEC y PCSC están alineados sobre una línea vertical. Además los PCAE, PC6E, PCE8, PCE7 y PCSE están alineados sobre otra línea vertical. De igual forma, los PCEO y PCSO están alineados sobre una tercera línea vertical.

En 1999 se agregaron los otros dos acelerómetros, uno en el jardín cerca del edificio a la misma profundidad que el cajón de cimentación y otro en el sótano acoplado al nivel del sótano en la esquina sureste. La disposición de estos acelerómetros se muestra en la figura 2.7.

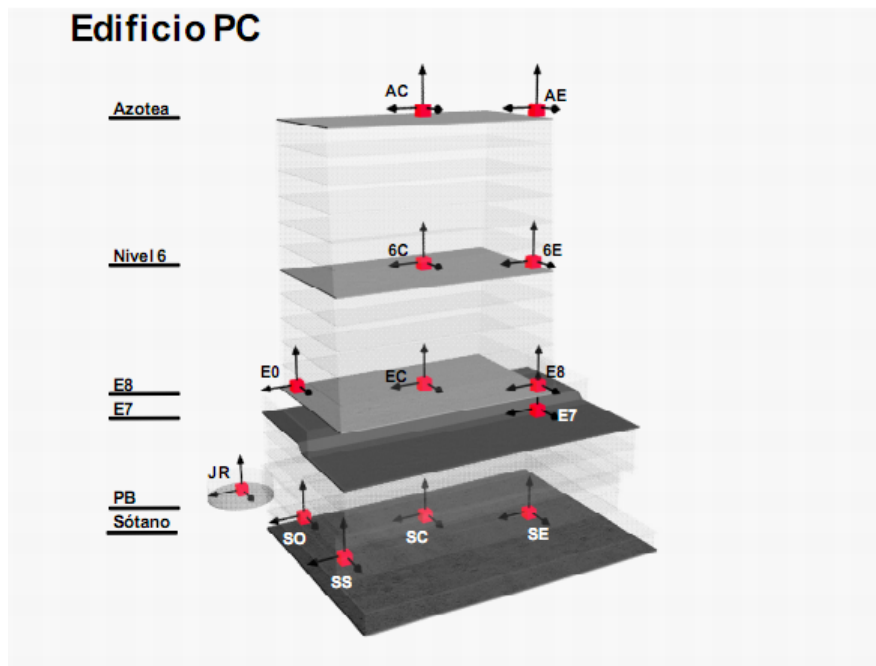


Figura 2.7: Esquema de la disposición de acelerómetros. Imagen de la Revista Digital Universitaria, UNAM, ISSN: 1067-6079 [3]

Los acelerómetros adentro del edificio son del mismo modelo y tienen una frecuencia de adquisición de 100Hz . Estos registros de datos suceden única-

mente en sismos y poseen una memoria de 4 segundos de preevento y 15 segundos de post-evento. El acelerómetro exterior tienen una frecuencia de adquisición de 250hz y una memoria de 30 segundos de preevento y 30 segundos de post-evento.

Puesto que los acelerómetros están colocados sobre líneas verticales estos pueden brindar la información siguiente:

- El desplazamiento de los siguientes niveles: azotea, N17, N1 y planta baja.
- Las torsiones de los siguientes niveles: azotea, N17, N1 y planta baja.
- La aceleración de forzamiento externo, la cual se puede medir a nivel del sótano.

Debido a que sólo contamos con información de aceleración de algunos pisos, proponemos como modelo el del péndulo, donde podemos tener información de la aceleración de la masa con tres grados de libertad. El modelo del péndulo lo podemos aplicar de planta superior (azotea) a las plantas intermedias. Aprovechando que existen aceleradores en los extremos de las plantas, se puede calcular la aceleración angular para determinar la torsión en la masa de cada péndulo.

Esta modelación de pisos como péndulos puede aproximarse sólo como osciladores lineales o como una expansión asintótica de un sistema de ecuaciones diferenciales no-lineales.

Capítulo 3

Análisis lineal.

En este capítulo se desarrolla un algoritmo para extraer la información de la dinámica lineal del edificio a partir de los registros de los acelerómetros. Primero se estudian los datos y se manipulan para trabajar con cantidades físicas que son de nuestro interés, sin dejar de considerar los errores introducidos. Después se propone el modelo lineal más simple que puede emular el comportamiento del edificio de manera *cuasi-instantánea* y se elige el tipo de regresión numérica que ajusta los parámetros del modelo de acuerdo a los datos. A continuación se describe el algoritmo completo que lleva de los registros de los acelerómetros a los parámetros *cuasi-instantáneos* del modelo lineal. Para validar nuestro algoritmo, se realizaron simulaciones numéricas del modelo para generar datos sintéticos, que son aplicados al algoritmo. Así podemos justificar los resultados que se obtengan del algoritmo. Por último se presentan de manera esquemática algunos de los resultados del algoritmo sobre datos reales para ilustrar como tienen que ser leídos los resultados de todos los eventos estudiados que aparecen en el apéndice A.

3.1. Registro de datos de sismos

Los datos con los cuales se trabajan corresponden a los siguientes eventos sísmicos:

- Sismo del 12 de Marzo de 2000 con magnitud de 6.4.
- Sismo del 09 de Agosto de 2000 con magnitud de 7.0.
- Sismo del 08 de Octubre de 2001 con magnitud de 6.1.
- Sismo del 10 de Noviembre de 2001 con magnitud de 6.0.
- Sismo del 18 de Abril de 2002 con magnitud de 6.3.
- Sismo del 22 de Enero de 2003 con magnitud de 7.6.
- Sismo del 01 de Enero de 2004 con magnitud de 6.3.
- Replica del 01 de Enero de 2004 con magnitud de 5.8.

Los datos obtenidos de los acelerómetros triaxiales se presentan en archivos de textos sencillos. En el encabezado aparecen los datos del acelerómetro, el evento asociado, el tiempo de inicio de la recolección de datos. El registro aparece en 3 columnas en la orientación en la que se dispuso el acelerómetro.

Los sistemas de referencia de los acelerómetros están rotados por múltiplos de $\pi/2$ en el plano de los pisos y de π en la vertical. Para el manejo de los datos se reorientaron los datos.

Si bien los acelerómetros están sincronizados, resulta que hay un desfase entre los acelerómetros internos al edificio y el ubicado en el jardín lo cual se puede atribuir al cambio de modelo de acelerómetro. Por tal razón se resincronizó el acelerómetro PCJR respecto al PCSC ajustando que estén en la fase de los extremos de la serie PCSC en PCJR, consiguiendo así que el registro de ambos acelerómetros sean muy parecidos.

Para hacer un estudio comparativo de los acelerómetros en cada evento se excluyen los extremos de las series que no abarcan el mismo intervalo de tiempo en todos los registros de los acelerómetros.

Debido a que queremos obtener información de la dinámica de la estructura del edificio a partir de dichos registros, es necesario manipular los datos y pasar el registro de aceleraciones a un registro de posiciones.

3.1.1. La manipulación de los datos, integración numérica y condiciones de contorno

Para obtener los datos de posiciones es necesario realizar dos integraciones numéricas. Una para obtener las velocidades y otra para las posiciones. Dado que sólo tenemos datos de aceleración y no sabemos las condiciones iniciales, es necesario tomar condiciones de contorno que dejen los datos congruentes con las condiciones promedio de la estructura. Estas condiciones son las siguientes.

- i)* La aceleración promedio igual a cero $\bar{a} = 0$ y deriva igual a cero.
- ii)* La velocidad promedio igual a cero $\bar{v} = 0$ y deriva igual a cero.
- iii)* La posición promedio igual a cero $\bar{x} = 0$ y deriva igual a cero.

La condición *i)* físicamente significa que el edificio no siente una fuerza constante en una dirección. Para esto se le resta el valor promedio de aceleraciones para cada acelerómetro, por evento y dirección.

$$a_j = a_j - \bar{a};$$

La condición *ii)* físicamente significa que el edificio no se desplaza a lo largo de los eventos sísmicos en alguna dirección específica. Para esto se integra numéricamente por el método de trapecios la aceleración obtenida de la condición *i)* y se le resta el valor promedio de velocidades para cada acelerómetro, por evento y dirección. Además, como la integración depende del valor acumulado a lo largo de cadena de datos y que las series pueden ser

largas, tenemos que el error numérico es acumulativo, siendo así, le restamos la recta que se ajusta a lo largo de la serie, que es la deriva de la integración. La deriva es el error acumulativo.

$$\begin{aligned}v_1 &= a_1 * \Delta t; \\v_{j+1} &= v_j + \frac{a_{j+1}+a_j}{2} * \Delta t; \\v_j &= v_j - \bar{v} - D \cdot (j - n/2); \end{aligned}$$

donde $\bar{v} + D \cdot (j - n/2)$ es la recta correspondiente a la deriva y n el numero de puntos.

La condición *iii*) físicamente significa que el edificio no tiene un desplazamiento neto en el evento. Para esto se integra numéricamente por el método de trapecios la velocidad obtenida de la condición *ii*) y se le resta el valor promedio de la posición para cada acelerómetro, por evento y dirección. Y por el mismo motivo de la condición *ii*) le restamos la recta que se ajusta a lo largo de la serie.

$$\begin{aligned}x_1 &= v_1; \\x_{j+1} &= x_j + \frac{v_{j+1}+v_j}{2} * \Delta t; \\x_j &= x_j - \bar{x} - d \cdot (j - n/2); \end{aligned}$$

donde $\bar{x} + d \cdot (j - n/2)$ es la recta correspondiente a la deriva y n el numero de puntos.

Hay que resaltar que la integración modula y suaviza las curvas que representan a las series de datos. En el espacio de frecuencias, la integración amortigua las contribuciones de frecuencias altas.

Nos interesa poder hacer comparaciones de las señales de los acelerómetros para observar el comportamiento dinámico del edificio. Recordando que la velocidad de *muestreo* o recolección de datos es de $100hz$ para los acelerómetros en el edificio y de $250hz$ el ubicado en el jardín, tenemos una relación de 2 : 5 datos para el mismo intervalo de tiempo, lo cual complica la comparación de las señales. Tomando esto en cuenta se pueden realizar dos procedimientos:

1. Realizar interpolaciones en los acelerómetros internos.

2. Reducir la cantidad de datos a lo largo del intervalo de tiempo del evento para todos acelerómetros, de esta manera las series de tiempo quedan con el mismo intervalo de tiempo entre dato y dato.

Tomamos la opción dos por las siguientes razones:

- En el espacio de frecuencias bajo la transformada rápida de Fourier *fft*, tenemos que el rango frecuencias es igual a la mitad de la frecuencia de adquisición de datos. Las frecuencias típicas de movimientos telúricos y de las estructuras es muy inferior a 10hz .
- En el espacio de frecuencias, el intervalo entre frecuencias, Δw , bajo la transformada rápida de Fourier es igual al inverso del intervalo de tiempo al cual se le aplica. Por esto, una reducción de la cantidad de datos distribuidos en un intervalo de tiempo no modifica la graduación en el espacio de frecuencias.

Para este proceso se usó una función *decimate* de Matlab/Octave [2, pág, 483] con un factor de reducción de datos de 2:1 en las señales de las estaciones internas al edificio y 5:1 en las señales del PCJR quedando todas las series con la misma graduación. La reducción de datos a través de la función *decimate* funciona como un filtro pasa-bajos. Tras estas reducciones, tenemos la frecuencia de corte a 25hz , es decir, la información contenida en la señal en el espacio de frecuencias menores a 25hz tiene una variación despreciable.

3.1.2. Definición de los espacios en donde se desea trabajar y compromisos del formateo de los datos

Dado que estudiamos señales de un fenómeno oscilante podemos observar las características promedio de cada evento. Esto consiste en estudiar los eventos en el espacio de frecuencias usando la transformada de Fourier. Pero el fenómeno oscilatorio no es homogéneo en el tiempo, varía con el tiempo la amplitud de la frecuencias que corresponde al espectro del modelo mecánico.

Siendo así plausible utilizar el espectrograma asociado a cada evento en cada acelerómetro.

Definimos el espectrograma como el conjunto de datos asociados a una señal temporal en la cual se le asigna a cada valor de tiempo una distribución amplitudes de frecuencias, donde las amplitudes son calculadas por la transformada de Fourier en una vecindad de un valor de tiempo, llamadas ventanas de tiempo.

Hay que tomar a consideración los siguientes factores:

- Compromisos entre Longitud de Ventana de Tiempo y la Graduación de Frecuencias.
- Función de ventana.

3.1.2.1. Compromisos entre Longitud de Ventana de Tiempo y la Graduación de Frecuencias

Si el tamaño de la ventana de tiempo se elige muy estrecho, el espaciamiento entre frecuencias en el espacio de Fourier aumenta. Es equivalente a tratar de medir micras con una reglas de plástico. Por otro lado, las frecuencias asociadas a los eventos sísmicos son inferiores a $1hz$ y la dinámica que nos interesa examinar ocurre alrededor de $0.5hz$, donde se encuentran los máximos de amplitud en los datos.

Entonces, partiendo que el espaciamiento entre frecuencias es igual al inverso del intervalo de tiempo de la ventana

$$\Delta\nu = \frac{1}{T_v}; \quad T_v \text{ intervalo de la ventana de tiempo.}$$

Si queremos tener una mejor definición de frecuencias por lo menos necesitamos un $\Delta\nu < 0.5hz$ por lo que $T_v > 2seg$.

En los espectrogramas deseamos que la ventana de tiempo sea representativa en dicho intervalo de tiempo de las contribuciones espectrales. Por lo que hay que comprometer entre graduación en frecuencias y qué tan representativa es la ventana del intervalo de tiempo.

3.1.2.2. Función de ventana

En los espectrogramas hay que tomar en cuenta los efectos de las ventanas de tiempo, los cuales reparten la contribución de las amplitudes de las frecuencias en el rango de frecuencias. Si la señal, en el lapso de tiempo de la ventana S_V es igual a la señal en el tiempo S por la función de ventana V , tenemos que bajo la transformada de Fourier es igual a la convolución de sus transformadas [2, pág, 322].

$$S_V(t) = S(t) * V(t) \longrightarrow \widehat{S}_V = \widehat{S} \cdot \widehat{V}$$

Esto genera la aparición de ruido en función de la amplitud y frecuencia, y se le llama *leakage* en términos coloquiales. Este *leakage* se puede entender como una fuga de amplitud en la o las frecuencias de mayor contribución que se reparte en las amplitudes a lo largo del espectro. La forma en que se reparte, es por glóbulos, los cuales decrecen sus amplitudes al alejarse de la frecuencia de la amplitud real de la señal. En la figura 3.1 se muestra cómo afecta la ventana rectangular a las amplitudes de las frecuencias vecinas en decibeles.

Si bien el espectrograma representa las componentes de las frecuencias en cada ventana, tenemos que la longitud de la ventana de tiempo, la función de ventana y optimizaciones al espectro dependen del análisis que se quiera realizar. Esto lo examinaremos después de ver el tipo de análisis que consideremos de los espectrogramas.

Un ejemplo de la función de ventana es la función de ventana *Hann* o *coseno* elevado el cual se define como

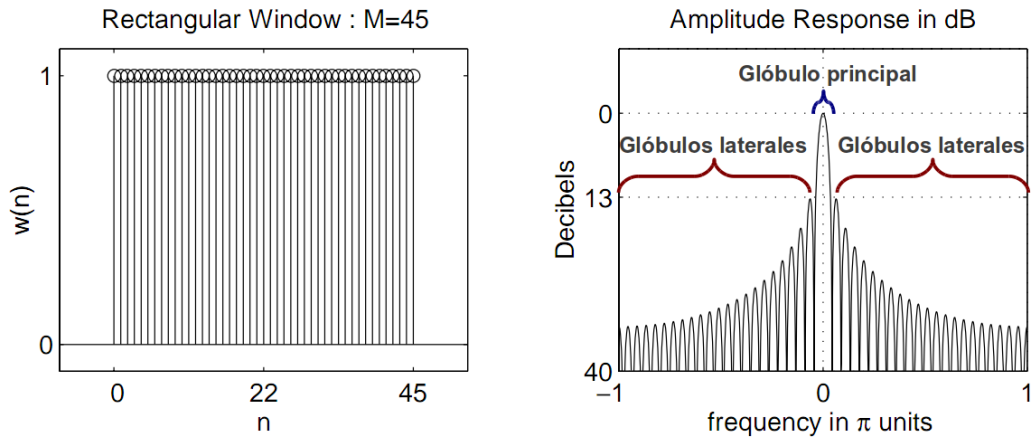


Figura 3.1: Ventada rectangular con 45 entradas de datos y la respuesta de amplitudes por la ventana.

$$w_{ventana}(n) = \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi(n-1)}{N-1}\right)}{2}$$

donde n es un punto de la serie de tiempo que manda a ceros los extremos de la serie de datos, volviéndolos nodos. La ventana tipo *Hann* tiene la característica de disminuir el *leakage* a las frecuencias lejanas, ver la figura 3.2, pero tiene el inconveniente de engrosar el glóbulo central.

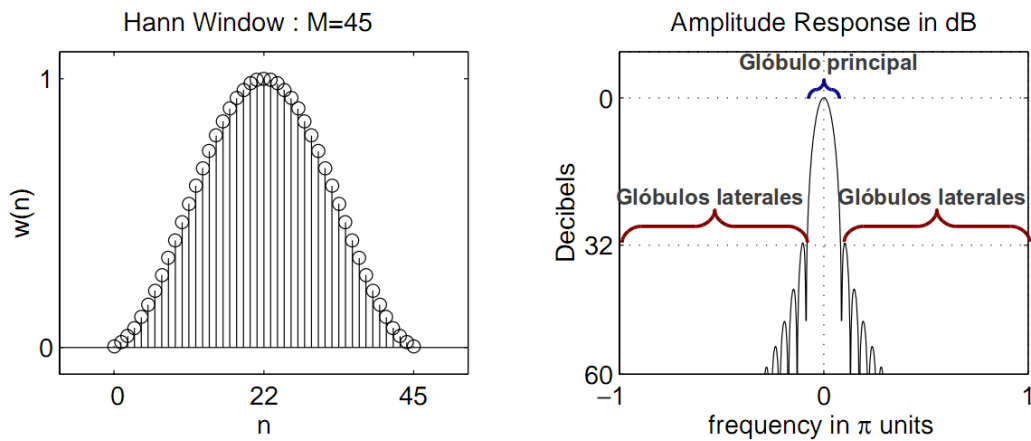


Figura 3.2: Ventada *Hann* con 45 entradas de datos y la respuesta de amplitudes por la ventana.

Se enfatiza que la selección de función de ventana depende de la sensibilidad de amplitudes correspondientes a cada frecuencia y la definición local que se desee. Para más información se puede consultar la sección 7.3 del libro *Digital signal processing using matlab* [2].

3.2. Modelación lineal de la dinámica del edificio.

Hay que notar tres aspectos para considerar un símil mecánico del edificio:

1. Dada la disposición de los acelerómetros, sólo podemos determinar los desplazamientos de algunas plantas del edificio.
2. Tratamos de tomar la menor cantidad de suposiciones y relaciones que no podemos medir a priori.
3. La dinámica la consideramos como un sistema mecánico elástico con fuerzas elásticas de tipo lineal.
4. El movimiento oscilante es la respuesta a la excitación mecánica del suelo.

Tomando estos aspectos podemos suponer que para cada grado de libertad de movimiento de los niveles, la dinámica se comporta como un sistema de masa-resorte amortiguado con el forzamiento de la señal de suelo más el término $\epsilon\mathcal{H}(\vec{\xi}, \dot{\vec{\xi}}, t)$ que son los términos no-lineales los cuales contribuyen a la dinámica en una escala pequeña ϵ . ξ es una coordenada generalizada de grado libertad de movimiento. Tenemos la siguiente ecuación de movimiento:

$$\ddot{\xi} + \gamma\dot{\xi} + \omega^2\xi - \mu F(t) + \epsilon\mathcal{H}(\xi, \dot{\xi}, t) = 0 \quad (3.1)$$

donde definimos:

- γ como el término correspondiente al coeficiente de viscosidad entre la masa del piso o el coeficiente del tensor de inercia en el eje del giro del piso.
- ω a la frecuencia angular natural del sistema, donde $\omega = \sqrt{K/M}$ con K la constante elástica lineal y M la masa del piso o el coeficiente del tensor de inercia en el eje del giro del piso.

- μ como una constante de proporcionalidad del forzamiento con la masa del piso o el coeficiente del tensor de inercia en el eje del giro del piso.

En esta propuesta podemos suponer que a bajas amplitudes de oscilaciones el término no lineal tiende a cero. Por lo que si estudiamos el sistema en condiciones de cuasi-ruido podríamos obtener una buena estimación de los parámetros ω , γ y μ a partir de los datos de los acelerómetros. Sin embargo sólo tenemos datos en eventos sísmicos lo cual significa que las amplitudes de oscilación son grandes. Entonces, para hacer el análisis lineal de la estructura del edificio podemos recurrir a los datos que se localizan a los extremos de la serie de tiempo donde las amplitudes de oscilación son pequeñas. También debemos de considerar cuáles características de las estructuras cambian, en promedio, después de eventos sísmicos significantes y por el paso del tiempo.

Pero, siguiendo esta idea, podemos pensar que en una vecindad de tiempo $T_v/2$ al rededor del tiempo τ , a la cual llamamos ventana de tiempo τ , hay una amplitud promedio y el término no lineal contribuye a la disipación, la frecuencia lineal y el término de acoplamiento. De esta forma, podemos considerar que cuando tenemos amplitudes de oscilación grandes, los parámetros mecánicos ω , γ y μ pueden ir cambiando en el tiempo.

$$\ddot{\xi} + \gamma_\tau \dot{\xi} + \omega_\tau^2 \xi - \mu_\tau F(t) = 0 \quad (3.2)$$

donde γ_τ , ω_τ y μ_τ son los coeficientes promedios con los cuales aproximamos la ecuación (3.1) en la ventana de tiempo τ dada una amplitud promedio.

Considerando la suposición que el forzamiento $F(t)$ es proporcional a la proyección en la misma dirección (libertad de movimiento) de la aceleración $f(t)$ medida en suelo, es decir $F(t) \propto f(t)$. Definimos a μ como una constante de proporcionalidad entre la aceleración del mismo grado libertad de movimiento a nivel de suelo con la masa del piso o el coeficiente del tensor de inercia en el eje del giro del piso.

Haciendo énfasis en que el forzamiento y la respuesta son oscilatorios conviene descomponer la ecuación en la suma de forzamientos y respuestas periódicas en el conjunto de frecuencias $\{\Omega_j\}$ que se encuentran en el intervalo espectral de las series de datos medidos,

$$\sum \left(\ddot{\xi}_j + \gamma_\tau \dot{\xi}_j + \omega_\tau^2 \xi_j \right) = \mu_\tau \sum \widehat{f}_\tau(\Omega_j) e^{i(\Omega_j t + \phi_j)}$$

Ahora consideremos la solución como $\xi_j = \widehat{\xi}_\tau(\Omega_j) e^{i(\Omega_j t + \phi_j)}$. Por las propiedades lineales de la *EDO*, podemos resolver la ecuación para cada frecuencia Ω_j

$$(-\Omega_j^2 + i\gamma_\tau \Omega_j + \omega_\tau^2) \widehat{\xi}_\tau(\Omega_j) e^{i(\Omega_j t + \phi_j)} = \mu_\tau \widehat{f}_\tau(\Omega_j) e^{i(\Omega_j t + \phi_j)}$$

Quitando la dependencia temporal obtenemos

$$[(\omega_\tau^2 - \Omega_j^2) + i\gamma_\tau \Omega_j] \widehat{\xi}_\tau(\Omega_j) e^{i\phi_j} = \mu_\tau \widehat{f}_\tau(\Omega_j) e^{i\phi_j}$$

Multiplicando por el conjugado en cada lado de la expresión anterior

$$[(\omega_\tau^2 - \Omega_j^2) + i\gamma_\tau \Omega_j] [(\omega_\tau^2 - \Omega_j^2) - i\gamma_\tau \Omega_j] \widehat{\xi}_\tau^2(\Omega_j) = \mu_\tau^2 \widehat{f}_\tau^2(\Omega_j)$$

$$[(\omega_\tau^2 - \Omega_j^2)^2 + \gamma_\tau^2 \Omega_j^2] \widehat{\xi}_\tau^2(\Omega_j) = \mu_\tau^2 \widehat{f}_\tau^2(\Omega_j). \quad (3.3)$$

La información deseada es saber las características de la dinámica de cada nivel, que bajo este esquema de linealización para cada ventana de tiempo τ es obtener el comportamiento de los coeficientes γ_τ , ω_τ y μ_τ . Es necesario realizar un ajuste de parámetros mediante un método de regresión dada la información de las amplitudes de oscilación $\widehat{\xi}_\tau(\Omega_j)$ y $\widehat{f}_\tau(\Omega_j)$ y las frecuencias Ω_j .

3.2.1. Regresiones numéricas

El concepto de las regresiones numéricas consiste en encontrar funciones o parámetros que aproximen a un conjunto de valores de manera óptima. Hacer regresiones con *ecuaciones normales* consiste en tomar un conjunto de

ecuaciones independientes en un dominio dado y encontrar la combinación que mejor aproxime a un conjunto de valores.

Pensemos en un registro de datos $R(\chi)$ que varía respecto a la variable χ continua en un dominio D , donde χ puede ser tiempo, frecuencias, posiciones etc. Suponemos que hay un conjunto de funciones $\{\phi_\kappa(\chi)\}$ independientes en D con $\kappa = 1, 2, \dots, m$, tales que sus combinaciones lineales $f_n(\chi)$ se aproximan a R hasta un $\varepsilon_n(\chi)$ para cada $\chi \in D$,

$$\varepsilon_n(\chi) = R(\chi) - f_n(\chi).$$

Entonces la suma del valor absoluto de los errores ε_n^2 para la n -combinación es:

$$\varepsilon_n^2 = \int_D |\varepsilon_n(\chi)|^2 d\chi = \int_D |f_n(\chi) - R(\chi)|^2 d\chi.$$

Que para un conjunto discreto de valores $\chi_j \in D$

$$\varepsilon_n^2 = \sum_{j=1}^N |\varepsilon_n(\chi_j)|^2 = \sum_{j=1}^N |f_n(\chi_j) - R(\chi_j)|^2$$

con $\{\chi_j\} \subseteq D$. Usando la notación

$$(f(\chi), g(\chi))_D = \int_D f(\chi)g(\chi) d\chi \quad \text{ó} \quad (f(\chi_j), g(\chi_j))_D = \sum_{j=1}^N (f(\chi_j) \cdot g(\chi_j))$$

y

$$\|f\|_D^2 = (f, f)_D$$

entonces podemos ver a $\varepsilon_n^2 = \left\| R - f_n \right\|_D^2$. Recordando que queremos encontrar la función f_n que minimiza a ε_n^2 , supongamos que en el conjunto de funciones \mathcal{F} generadas por $\{\phi_\kappa(\chi)\}$ existe una función $f_{n^*} \in \mathcal{F}$ tal que $(f_n, f_{n^*} - R)_D = 0$, $\forall f_n \in \mathcal{F}$, entonces si:

$$\begin{aligned} \left\| R - f_n \right\|_D^2 &= (R - f_n, R - f_n)_D \\ &= (R - f_n + f_{n^*} - f_{n^*}, R - f_n + f_{n^*} - f_{n^*})_D \\ &= (R - f_{n^*} + f_{n^*} - f_n, R - f_{n^*} + f_{n^*} - f_n)_D \\ &= (R - f_{n^*}, R - f_{n^*})_D + 2(f_{n^*} - f_n, R - f_{n^*})_D + (f_{n^*} - f_n, f_{n^*} - f_n)_D \\ &= \left\| R - f_{n^*} \right\|_D^2 + \left\| f_{n^*} - f_n \right\|_D^2 + 2(f_{n^*} - f_n, R - f_{n^*})_D \end{aligned}$$

expandiendo en sumas el tercer término de la derecha

$$(f_{n^*} - f_n, R - f_{n^*})_D = (f_{n^*}, f_{n^*} - R)_D - (f_n, f_{n^*} - R)_D$$

y $f_{n^*}, f_n \in \mathcal{F}$, por la propiedad que le pedimos que cumpliera f_{n^*} tenemos que $(f_{n^*} - f_n, R - f_{n^*})_D = 0$. Entonces

$$\left\| R - f_n \right\|_D^2 = \left\| R - f_{n^*} \right\|_D^2 + \left\| f_{n^*} - f_n \right\|_D^2$$

Como las normas son mayores o iguales a cero y $\left\| f_{n^*} - f_n \right\|_D^2 > 0$ $\forall f_n \in \{f_n(\chi)\} \setminus \{f_{n^*}\}$ para toda $f_n \neq f_{n^*}$ tenemos que $\left\| R - f_n \right\|_D^2 > \left\| R - f_{n^*} \right\|_D^2$, es decir $\varepsilon_n^2 > \varepsilon_{n^*}^2$ por lo tanto dada la base $\{\phi_\kappa(\chi)\}$ existe una combinación lineal que minimiza el error cuadrático $\varepsilon^2 = \varepsilon_{n^*}^2$.

Ahora sólo falta encontrar f_{n^*} . Hay que recordar que el conjunto de \mathcal{F} son todas las funciones generadas por $\{\phi_\kappa(\chi)\}$ por lo tanto las podemos escribir como combinación lineal:

$$f_n(\chi) = \alpha_{n1}\phi_1(\chi) + \alpha_{n2}\phi_2(\chi) + \cdots + \alpha_{nm}\phi_m(\chi).$$

Sea f_n un elemento en \mathcal{F} . Substituyendo en $(f_n, f_{n^*} - R)_D = 0$ y separando los términos en $\phi_\kappa(\chi)$.

$$\begin{aligned}
(f_n, f_{n^*} - R)_D &= (\alpha_{n1}\phi_1(\chi) + \alpha_{n2}\phi_2(\chi) + \cdots + \alpha_{nm}\phi_m(\chi), f_{n^*} - R)_D \\
&= (\alpha_{n1}\phi_1(\chi), f_{n^*} - R)_D + \\
&\quad (\alpha_{n2}\phi_2(\chi), f_{n^*} - R)_D + \\
&\quad \cdots \\
&\quad (\alpha_{nm}\phi_m(\chi), f_{n^*} - R)_D \\
&= \alpha_{n1}(\phi_1(\chi), f_{n^*} - R)_D + \\
&\quad \alpha_{n2}(\phi_2(\chi), f_{n^*} - R)_D + \\
&\quad \cdots \\
&\quad \alpha_{nm}(\phi_m(\chi), f_{n^*} - R)_D
\end{aligned}$$

como \mathcal{F} es el conjunto generado por la combinación de $\{\phi_\kappa(\chi)\}$ entonces $\{\phi_\kappa\} \subset \mathcal{F}$. Por lo que $(\phi_\kappa, f_{n^*} - R)_D = 0 \quad \forall \phi_\kappa \in \{\phi_\kappa(\chi)\}$. Expandiendo la diferencia $f_{n^*} - R$, tenemos:

$$\begin{aligned}
(\phi_\kappa, f_{n^*} - R)_D &= 0 \\
(\phi_\kappa, f_{n^*})_D - (\phi_\kappa, R)_D &= 0 \\
(\phi_\kappa, f_{n^*})_D &= (\phi_\kappa, R)_D
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Como f_{n^*} es una combinación lineal de los $\{\phi_\kappa(\chi)\}$, lo podemos escribir como

$$f_{n^*} = \alpha_{n^*1}\phi_1 + \alpha_{n^*2}\phi_2 + \cdots + \alpha_{n^*m}\phi_m$$

donde los coeficientes $\alpha_{n^*\kappa}$ son nuestras incógnitas para encontrar la mejor aproximación. Substituyendo f_{n^*} en la ec.(3.4) y expandiendo

$$\begin{aligned}
(\phi_\kappa, f_{n^*})_D &= (\phi_\kappa, R)_D \\
(\phi_\kappa, \alpha_{n^*1}\phi_1 + \alpha_{n^*2}\phi_2 + \cdots + \alpha_{n^*m}\phi_m)_D &= (\phi_\kappa, R)_D \\
(\phi_\kappa, \alpha_{n^*1}\phi_1)_D + (\phi_\kappa, \alpha_{n^*2}\phi_2)_D + \cdots + (\phi_\kappa, \alpha_{n^*m}\phi_m)_D &= (\phi_\kappa, R)_D \\
\alpha_{n^*1}(\phi_\kappa, \phi_1)_D + \alpha_{n^*2}(\phi_\kappa, \phi_2)_D + \cdots + \alpha_{n^*m}(\phi_\kappa, \phi_m)_D &= (\phi_\kappa, R)_D
\end{aligned}$$

para $\kappa = 1, 2, \dots, m$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha_{n^*1}(\phi_1, \phi_1)_D + \alpha_{n^*2}(\phi_1, \phi_2)_D + \dots + \alpha_{n^*m}(\phi_1, \phi_m)_D &= (\phi_1, R)_D \\ \alpha_{n^*1}(\phi_2, \phi_1)_D + \alpha_{n^*2}(\phi_2, \phi_2)_D + \dots + \alpha_{n^*m}(\phi_2, \phi_m)_D &= (\phi_2, R)_D \\ &\vdots \\ \alpha_{n^*1}(\phi_m, \phi_1)_D + \alpha_{n^*2}(\phi_m, \phi_2)_D + \dots + \alpha_{n^*m}(\phi_m, \phi_m)_D &= (\phi_m, R)_D \end{aligned}$$

que podemos ver como un sistema lineal de ecuaciones

$$A\vec{\alpha}^* = \vec{b} \quad (3.5)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} (\phi_1, \phi_1)_D & (\phi_1, \phi_2)_D & \dots & (\phi_1, \phi_m)_D \\ (\phi_2, \phi_1)_D & (\phi_2, \phi_2)_D & \dots & (\phi_2, \phi_m)_D \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\phi_m, \phi_1)_D & (\phi_m, \phi_2)_D & \dots & (\phi_m, \phi_m)_D \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} (\phi_1, R)_D \\ (\phi_2, R)_D \\ \vdots \\ (\phi_m, R)_D \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Con $\vec{\alpha}^*$ el vector de coeficientes tales que para la base de funciones $\{\phi_\kappa(\chi)\}$ nos genera la función que minimiza el error. Y dado que nos interesa α^* lo expresamos como

$$\vec{\alpha}^* = A^{-1}\vec{b} \quad (3.7)$$

Donde A^{-1} existe dado que el conjunto de funciones $\{\phi_\kappa(\chi)\}$ es linealmente independiente en D .

3.2.2. Regresión numérica para obtener los parámetros lineales γ_τ , ω_τ y μ_τ

Tomando la ecuación 3.3

$$[(\omega_\tau^2 - \Omega_j^2)^2 + \gamma_\tau^2 \Omega_j^2] \widehat{\xi}_\tau^2(\Omega_j) = \mu_\tau^2 \widehat{f}_\tau^2(\Omega_j)$$

y dejándola como una suma de funciones respecto a la frecuencia y las amplitudes por frecuencias

$$\omega_\tau^4 \widehat{\xi}_\tau^2(\Omega_j) + \Omega_j^4 \widehat{\xi}_\tau^2(\Omega_j) + (\gamma_\tau^2 - 2\omega_\tau^2) \Omega_j^2 \widehat{\xi}_\tau^2(\Omega_j) = \mu_\tau^2 \widehat{f}_\tau^2(\Omega_j)$$

las reorganizamos para dejar al lado izquierdo de la igualdad los términos que deseamos conocer γ_τ , ω_τ y μ_τ ,

$$\omega_\tau^4 \widehat{\xi}_\tau^2(\Omega_j) + (\gamma_\tau^2 - 2\omega_\tau^2) \Omega_j^2 \widehat{\xi}_\tau^2(\Omega_j) - \mu_\tau^2 \widehat{f}_\tau^2(\Omega_j) = -\Omega_j^4 \widehat{\xi}_\tau^2(\Omega_j). \quad (3.8)$$

Hay que recordar que para la *aproximación por ecuaciones normales* [1, pág. 185] pedimos que el conjunto de funciones sean independientes en el dominio D . Podemos pensar que $\widehat{\xi}_\tau^2$ y \widehat{f}_τ^2 son funciones de la frecuencia Ω linealmente independientes para cada ventana τ y sabemos que las funciones polinomiales $Y_1(\Omega) = \Omega^2$ y $Y_2(\Omega) = \Omega^4$ son linealmente independientes. Siendo esto, podemos pensar que si $\widehat{\xi}_\tau^2$ o \widehat{f}_τ^2 no son potencias de las funciones Y_1 o Y_2 , sus multiplicaciones siguen siendo funciones independientes. Por lo que podemos asociar a funciones independientes multiplicadas por un coeficiente de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \phi_1(\Omega_j) &= \widehat{\xi}_\tau^2(\Omega_j) \\ \phi_2(\Omega_j) &= \Omega_j^2 \widehat{\xi}_\tau^2(\Omega_j) \\ \phi_3(\Omega_j) &= -\widehat{f}_\tau^2(\Omega_j) \\ R(\Omega_j) &= -\Omega_j^4 \widehat{\xi}_\tau^2(\Omega_j) \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \omega_\tau^4 \\ \alpha_2 &= \gamma_\tau^2 - 2\omega_\tau^2 \\ \alpha_3 &= \mu_\tau^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde las α_i corresponden a las constantes de la ecuación 3.5. Por tal razón requerimos que ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 sean independientes en el intervalo de frecuencias 0hz a 2hz , que es el intervalo de frecuencias que nos interesan trabajar. Esto es por el intervalo de frecuencias típicas de los sismos y oscilaciones de las estructuras.

Entonces con los datos de los espectrogramas de los eventos podemos encontrar los parámetros γ_τ , ω_τ y μ_τ que aproximan a una dinámica lineal forzada

para cada ventana τ . De la ecuación 3.9 podemos despejar las constantes que nos interesa calcular:

$$\begin{aligned}\omega_\tau &= \alpha_1^{1/4} \\ \gamma_\tau^2 &= \alpha_2 - 2\alpha_1^{1/2} \\ \mu_\tau^2 &= \alpha_3\end{aligned}$$

3.2.2.1. Complicaciones y una propuesta de un método para evitarlas

Si bien tenemos que para obtener γ_τ , ω_τ y μ_τ es necesario resolver la ecuación $\vec{\alpha}^* = A^{-1}\vec{b}$, hay que considerar la sensibilidad del sistema al ruido generado en los espectrogramas.

Consideremos el caso hipotético donde las amplitudes del espectro de frecuencias están restringidas entre $[0, 1]$. Consideramos un intervalo de frecuencias tal que el máximo se encuentra en 0.5hz y en el nivel de ruido es de 0.1 en 1.5hz . Calculando el valor de R de la ecuación 3.9 en 1.5hz es $R(1.5\text{hz}) \simeq -0.05$ y en 0.5hz tenemos que $R(0.5\text{hz}) \simeq -0.06$ es decir el ruido contribuye proporcionalmente al 80% del máximo. Esto significa que nuestro procedimiento es sensible al nivel del ruido y a la localización de las amplitudes del espectro de frecuencias.

Hay que recordar que al hacer la transformada discreta de Fourier no tenemos la certeza respecto al periodo de la ventana de tiempo, respecto si es el adecuado tal que en el espacio de frecuencias ajuste a las frecuencias de la ventana.

- Propongamos el siguiente ejemplo, consideremos las series de datos $S1 = \text{sen}(2\pi t * (0.4\text{hz}))$, $S2 = \text{sen}(2\pi t * (0.45\text{hz}))$ y $S3 = \text{sen}(2\pi t * (0.5\text{hz}))$ durante un periodo de 10 segundos y con una frecuencia de adquisición de datos de 50hz . Tenemos que en el espacio de frecuencia que se obtiene de la rutina de la transformada rápida de Fourier fft , todas tienen la misma resolución en frecuencias con $\Delta\nu = 0.1\text{hz}$, con el espectro correspondiente de la figura (3.3)

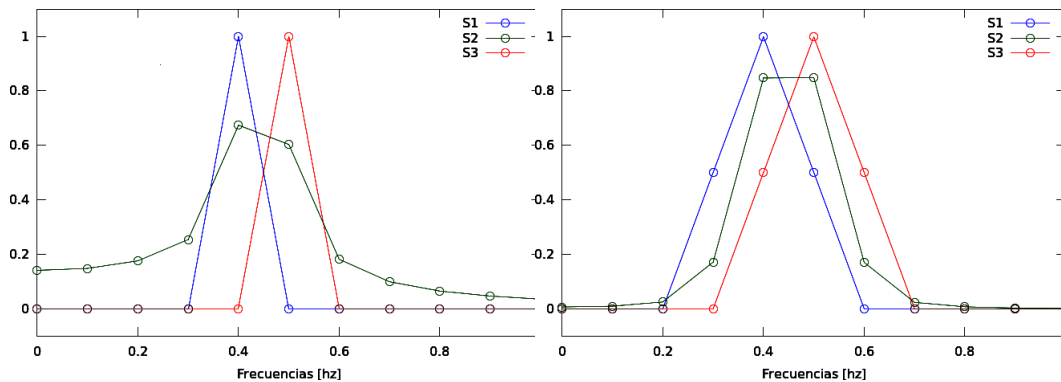


Figura 3.3: El espectro de frecuencias aplicando el *fft* a *S1*, *S2* y *S3*.

Figura 3.4: El espectro de frecuencias aplicando el *fft* a *S1*, *S2* y *S3*.

Nótese que estamos con una utilizando una función de ventana rectangular. Podríamos utilizar algún otro tipo de función de ventana, por ejemplo, la ventana Hann (figura (3.4)). En ese caso, se tiene como resultado que aumenta el *leakage*, es decir, aumenta la amplitud de las frecuencias cercanas pero disminuye el nivel de ruido a frecuencias lejanas. Sin embargo, esa elección de función de ventana no nos puede proporcionar la frecuencia de máxima amplitud ni el valor de la máxima amplitud y en el peor de los casos introduce un error dada la longitud de la ventana de datos.

Siendo esto, se plantear dos procesos:

1. Variar la ventana de tiempo y con esto variar la graduación del espacio de frecuencias.
2. Proponer una graduación del espacio de frecuencias y asignar la magnitud correspondiente al máximo de amplitudes de una vecindad para cada frecuencia de nuestra graduación respecto a los espectros encontrados con el primer proceso.

Podemos observar que el primer problema corresponde al desfase de la definición espectral de frecuencias, entre la frecuencia que favorece a la amplitud correspondiente a una frecuencia y la distribución del espacio discreto.

Nuestro espaciamiento entre frecuencias $\Delta\Omega$ es el inverso del tamaño de la ventana de tiempo T_v , o la frecuencia de adquisición de datos ν_s entre el número de datos en la ventana N_0 .

$$\Delta\Omega = \frac{1}{T_v} = \frac{\nu_s}{N_0}$$

Podemos proponer una ventana ligeramente pequeña respecto a la original, T_{v1} , lo que corresponde a quitarle algunos puntos de los extremos

$$T_v^{(1)} = T_v - \frac{\zeta_1}{\nu_s} = \frac{N_0 - \zeta_1}{\nu_s}$$

Se obtiene una nueva distribución de frecuencias

$$\Delta\Omega^{(1)} = \frac{1}{T_{v1}} = \frac{\nu_s}{N_0 - \zeta_1}$$

con lo cual podríamos repetir el cálculo de la *fft* con diversos ζ_j y así observar cada una de las transformadas discretas. Algunas se aproximaron mejor a las frecuencias del espectro ideal y otras no. En el ejemplo de la figura(3.5) tenemos las mismas series de tiempo pero en cada gráfica la transformada discreta eliminando de uno a cien puntos de los extremos.

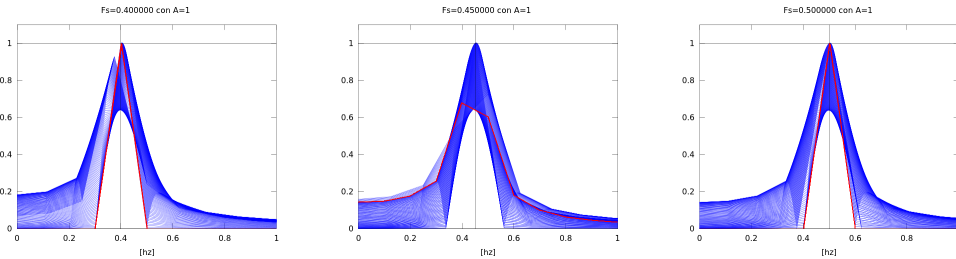


Figura 3.5: Se representan las gráficas aplicando el *fft* con los tamaños de ventana $T_v^{(1)}$ a $T_v^{(100)}$ con $\zeta_i = 1$ en azul y en rojo con el tamaño de ventana original $T_v^{(0)}$ a las señales, a la izquierda la gráfica correspondiente a la señal $S1$, en medio la gráfica correspondiente a la señal $S2$ y a la derecha la gráfica correspondiente a la señal $S3$.

Uno puede considerar usar la envolvente generada, pero para calcularla en forma precisa se requieren al rededor de 100 *fft* y esto sería para cada ventana de tiempo para cada grado de libertad de cada piso en cada evento, lo que requiere un gran poder de cómputo. Para solucionar el problema anterior se propone aproximar la envolvente con un número menor de transformadas.

Para esto, se eligen reducciones ζ_k -puntos de la ventana de tiempo para realizar las transformadas. El conjunto de $\{\zeta_k\}$ esta dado por:

$$\zeta_0 = 0 \quad \text{y} \quad \zeta_{k+1} = \zeta_k + 10 + \mathcal{R}$$

donde \mathcal{R} es un número entero escogido al azar de 0 a 5. La elección por la cual agregamos el parámetro \mathcal{R} es porque no se posee información sobre la cantidad de puntos óptimo para la *fft* que represente mejor a la señal en la ventana de tiempo.

Ya teniendo las transformadas *fft* de cada reducción $\{\widehat{f}_j^{(k)}\}$, con la k -ésima reducción con dominio de frecuencia $\{\Omega_j^{(k)}\}$, construimos el espectro $\{\widehat{f}_i\}$ con dominio $\{\Omega_i\}$ tal que \widehat{f}_i es el máximo de las $\{\widehat{f}_l^{(k)}\}$ con $\Omega_l^{(k)}$ alrededor de Ω_i . Seleccionamos $\Omega_1 = 0.1\text{hz}$ y $\Omega_{i+1} - \Omega_i = 0.05\text{hz}$.

Utilizando $k = 0, 1, \dots, 5$ obtiene una repartición de frecuencias $\{\Omega_j^{(k)}\}$ como en la figura 3.6.

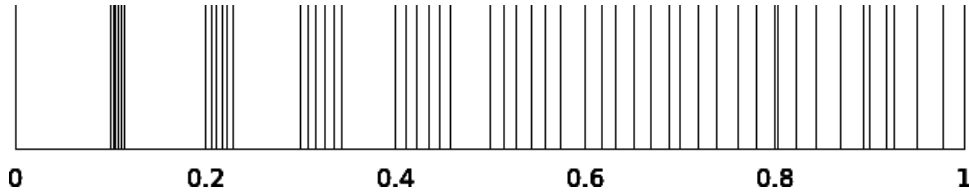


Figura 3.6: Distribución de frecuencias con espaciamientos $\Delta\Omega^{(k)}$ con $k = 0, 1, \dots, 5$

Siguiendo con el mismo ejemplo de las señales $S1$, $S2$ y $S3$, podemos observar en la figura(3.7) el resultado usando el algoritmo propuesto para la transformada.

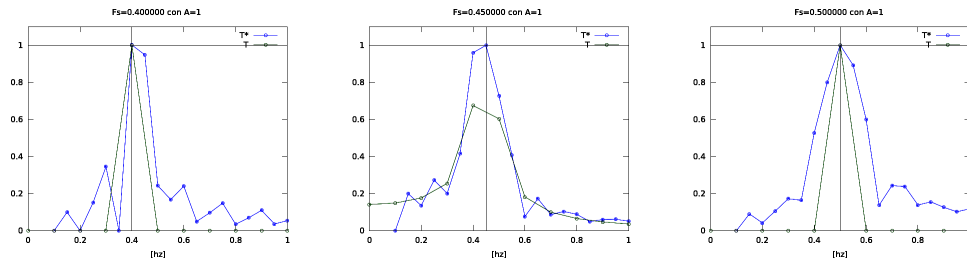


Figura 3.7: El espectro de frecuencias aplicando el *fft* a S_1 , S_2 y S_3 empleando una perturbación al tamaño de la ventana. A la izquierda la gráfica correspondiente a la señal S_1 , en medio la gráfica correspondiente a la señal S_2 y a la derecha la gráfica correspondiente a la señal S_3 .

La tentativa de combinar esta propuesta de método y una función de ventana distinta a la rectangular es muy poco conveniente, esto debido a que el *leakage* del primer glóbulo de la función de ventana rectangular es aquella que decae más rápido alrededor de las frecuencias que contribuyen a la señal, figura(3.8). Como el intervalo de frecuencias con el que trabajamos está acotado entre $[0, 1]$, entonces es más conveniente usar ventaneos rectangulares.

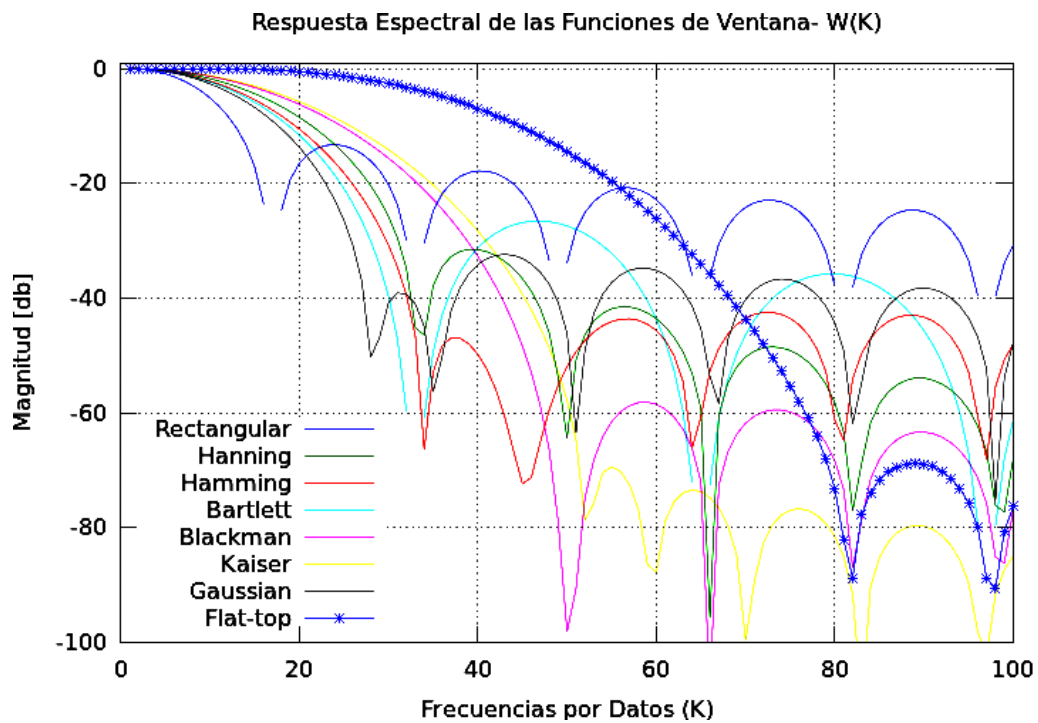
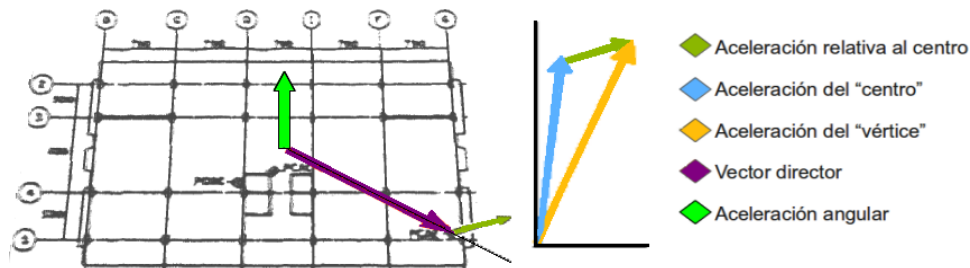


Figura 3.8: Esta gráfica muestra el efecto de *leakage* en las amplitudes de las frecuencias vecinas. El eje X corresponde al vecino n-ésimo de la frecuencia de amplitud local máxima. El eje Y muestra cómo decae la amplitud en decibeles respecto a la amplitud local máxima. Algoritmo para generar la gráfica en <http://gaussianwaves.blogspot.com>

3.3. Resumen del procedimiento para el análisis lineal

El algoritmo propuesto para encontrar los parámetros asociados a la respuesta lineal del sistema para cada momento o ventana de tiempo, t_v , es el siguiente:

1. Leer de datos de los acelerómetros en un evento y asignar los canales de todos los acelerómetros a la orientación que le corresponda.
2. Sincronizar la estación externa PCJR con las internas aprovechando que en los extremos de la serie de tiempo, los acelerómetros ubicados en el sótano, tienen la misma fase en cualquier orientación.
3. Cortar las colas para mantener el mismo dominio de tiempo en cualquier acelerómetro en el evento.
4. Restringir a cuatro grados de libertad el movimiento: tres traslaciones y uno de torsión en el plano horizontal para los cuatro niveles: Azotea, Nivel 7 de oficinas, Nivel 1 de oficinas y planta baja o sótano. Considerando que la rotación está constreñida al plano del piso y que los acelerómetros centrales se encuentran en el eje de rotación, generamos la señal de valores de la aceleración angular como la diferencia entre acelerómetro no-central y central, con el cual tomamos el producto cruz con el vector unitario asociado a la ubicación del acelerómetro no-central respecto al centro del edificio.



5. Integrar numéricamente con la condición que el promedio y la deriva sean nulas en la velocidades y posiciones. Es decir, eliminar la deriva al integrar.
6. Seleccionar la longitud de la ventana de tiempo T_v , el numero de ventanas y el tiempo entre ventana y ventana Δt_v . Con esto, generar las señales de tiempo por cada ventana tiempo y por cada grado de libertad de movimiento.
7. Calcular la amplitud cuadrática media *rms* para cada ventana tiempo t_v .
8. Construir el espectro de frecuencias a través de una interpolación de los máximos dado los múltiples espectros de frecuencias empleando *fft* con la reducción de datos de la misma ventana de tiempo, esto para cada ventana de tiempo t_v .
9. Usar regresiones multivariadas por formas normales para obtener los parámetros lineales de la ecuación diferencial ordinaria que modela el comportamiento en una ventana de tiempo t_v , esto para cada ventana de tiempo.

La finalidad de estos procedimientos es la obtención de series que definen a los parámetros de la dinámica para cada ventana de tiempo t_v y para cada grado de libertad de movimiento en los niveles superiores del edificio. Estos parámetros son: $A_{rms}, B_{rms}, \gamma_\tau^2, \omega_\tau$ y μ donde, recordemos, la ecuación diferencial ordinaria que representa la dinámica para cada ventana de tiempo es:

$$\ddot{x} + \gamma_\tau \dot{x} + \omega_\tau^2 x = \mu_\tau z(t) \quad (3.10)$$

- La serie de tiempo de la frecuencia de resonancia $\omega_\tau = \omega(t_v)$. Esta frecuencia representa la frecuencia de oscilación natural en caso de que no hubiera disipación o forzamientos.
- La serie de tiempo del coeficiente disipación viscosa al cuadrado $\gamma_\tau^2 = \gamma^2(t_v)$.

- La serie de tiempo del coeficiente de acoplamiento del forzamiento al cuadrado $\mu_\tau^2 = \mu^2(t_v)$.
- La serie de tiempo de la amplitud *rms* para cada grado de libertad de movimiento $A_{rms}(t_v)$ y su forzamiento $B_{rms}(t_v)$.

3.3.1. Simulación de datos sintéticos.

El propósito de esta sección es realizar simulaciones numéricas con datos sintéticos, es decir, con datos que son obtenidos de *EDO*'s cuyos parámetros han sido determinado de manera aleatoria. Esto nos permite determinar el error acumulado del algoritmo descrito en la sección anterior. De esta forma podemos obtener los límites y la sensibilidad de estos métodos ante la variación de parámetros. Para cada conjunto de parámetros elegidos aleatoriamente, resolvemos la ecuación diferencial (3.10) y a los resultados obtenidos les aplicamos el algoritmo propuesto para comparar los parámetros resultantes de la regresión con los parámetros originales con los cuales *integramos* las *EDO*'s.

Todas las simulaciones se han realizaron bajo las siguientes consideraciones:

- Una longitud de ventana de tiempo de diez segundos.
- Una discretización de tiempo Δt de 0.02 segundos.
- Forzamiento con una señal periódica policromática

$$z(t) = \sum_1^n F_j \cos(\Omega_j t + \varphi_j) \quad , \quad (3.11)$$

con n -forzamientos.

- Las frecuencias $\Omega_j/2\pi$ del forzamiento se escogieron aleatoriamente en forma equipartita en el intervalo de 0.2hz a 1.0hz, que es el intervalo de interés para un estudio con forzamientos sísmicos.
- Las fases φ_j y las amplitudes del forzamiento F_j , también se eligen aleatoriamente. Las amplitudes se encuentran en el intervalo de 0 a 1.

- El número de forzamientos n también es una variable en las simulaciones, con n en el intervalo $[1, 10]$.
- Las frecuencias de resonancia $\omega_\tau/2\pi$ también se eligieron en el intervalo de las $\Omega_j/2\pi$ porque el valor real reportado cae en este intervalo.
- Con coeficiente de disipación γ de 0 hasta dos veces el valor de $2\omega_\tau$ en cada simulación. De esta manera aseguramos que el amortiguamiento vaya desde subcrítico a supercrítico.
- Con coeficiente μ entre 0 y 10.

Se aplicó el algoritmo para tres métodos de resolución para cada *EDO* sintetizada y se compararon los resultados. La razón de considerar tres soluciones distintas es debido a que deseamos investigar cómo es la respuesta del edificio en función de la solución particular y homogénea. Las tres simulaciones ejemplifican los intervalos de convergencia de nuestro método.

1. La primera regresión es calculada sobre la transformada de Fourier del forzamiento y la solución particular de la *EDO*. Esto con el fin de contrarrestar los efectos de modulación los cuales compiten o superan el tamaño de la ventana de tiempo. Por ejemplo, supongamos que el forzamiento está dado como $z(t) = \cos(\Omega_1 t) + \cos(\Omega_2 t)$, podemos reescribirlo como:

$$\begin{aligned}
 z(t) &= \cos\left(\left(\Omega_1 \pm \frac{\Omega_2}{2}\right)t\right) + \cos\left(\left(\Omega_2 \pm \frac{\Omega_1}{2}\right)t\right) \\
 &= \cos\left(\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} + \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2}\right)t\right) + \cos\left(\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} - \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2}\right)t\right) \\
 &= 2 \cos\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2}t\right)
 \end{aligned}$$

donde si $|\Omega_1 - \Omega_2| \ll 1$ no se podrían notar los efectos de las dos frecuencias en la ventana y numéricamente el forzamiento se consideraría como $z(t) = a \cos(\bar{\Omega}t)$ donde a es la amplitud en función del tiempo que varía en tiempos muy largos, lo cual conlleva resolver un problema parecido pero no el mismo.

Además esta regresión nos servirá para ver los efectos de la transformada discreta Fourier en la regresión de parámetros. A los resultados de esta regresión los llamaremos *Óptimos*.

2. La segunda regresión corresponde al espectro de frecuencias de la señal de tiempo de la solución particular utilizando la transformada discreta de Fourier con correcciones descrita anteriormente en el paso 8 del algoritmo. La transformada discreta de Fourier converge a la transformada de Fourier cuando el tiempo de la señal tiende a infinito. A los resultados de esta regresión los llamaremos *Particulares*.
3. La tercera regresión corresponde al espectro de frecuencias de la señal de tiempo de la solución numérica de la *EDO* con condiciones iniciales aleatorias, es decir, la solución particular más la homogénea. Se resuelve numéricamente y no analíticamente con el fin de agregar ruido por la discretización. A los resultados de esta regresión los llamaremos *Numéricos*

No se realizaron simulaciones con soluciones exactas de la particular más la homogénea dado que los resultados serían muy parecidos entre la segunda y tercera regresión. Además se espera ver los efectos de modulación en la segunda y tercera regresión.

Por lo anterior, nos interesa generar las soluciones de la señal de tiempo de la solución particular y la solución numérica con condiciones iniciales aleatorias. Además es necesario calcular las amplitudes de la transformada de Fourier de la solución particular para encontrar los datos *óptimos*.

3.3.1.1. Solución particular.

Consideremos la ecuación diferencial (3.10) donde el forzamiento esta representado como la suma de varios forzamientos no necesariamente armónicos dados por la ecuación (3.11). Proponemos la solución particular de la *EDO* como la suma de soluciones periódicas

$$x_p = \sum_{j=1}^{j=n} A_j \sin(\Omega_j t) + \sum_{j=1}^{j=n} B_j \cos(\Omega_j t). \quad (3.12)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.12). Obtenemos:

$$\begin{aligned}
& -\Omega_j^2 \left[\sum_{j=1}^{j=n} A_j \sin(\Omega_j t) + \sum_{j=1}^{j=n} B_j \cos(\Omega_j t) \right] + \\
& + \Omega_j \gamma \left[-\sum_{j=1}^{j=n} B_j \sin(\Omega_j t) + \sum_{j=1}^{j=n} A_j \cos(\Omega_j t) \right] + \\
& + \omega^2 \left[\sum_{j=1}^{j=n} A_j \sin(\Omega_j t) + \sum_{j=1}^{j=n} B_j \cos(\Omega_j t) \right] \\
& = \sum_{j=1}^{j=n} \mu F_j \cos(\varphi_j) \cos(\Omega_j t) - \sum_{j=1}^{j=n} \mu F_j \sin(\varphi_j) \sin(\Omega_j t)
\end{aligned}$$

Separando en senos y cosenos:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{j=n} [(\omega^2 - \Omega_j^2)A_j - \Omega_j \gamma B_j] \sin(\Omega_j t) &= \sum_{j=1}^{j=n} -\mu F_j \sin(\varphi_j) \sin(\Omega_j t) \\
\sum_{j=1}^{j=n} [(\omega^2 - \Omega_j^2)B_j + \Omega_j \gamma A_j] \cos(\Omega_j t) &= \sum_{j=1}^{j=n} \mu F_j \cos(\varphi_j) \cos(\Omega_j t)
\end{aligned}$$

Resolviendo para cada frecuencia obtenemos:

$$\begin{aligned}
(\omega^2 - \Omega_j^2)A_j - \Omega_j \gamma B_j &= -\mu F_j \sin(\varphi_j) \\
(\omega^2 - \Omega_j^2)B_j + \Omega_j \gamma A_j &= \mu F_j \cos(\varphi_j)
\end{aligned}$$

donde podemos despejar A_j y B_j

$$\begin{aligned}
A_j &= \frac{\Omega_j \gamma \cos(\varphi_j) - (\omega^2 - \Omega_j^2) \sin(\varphi_j)}{(\omega^2 - \Omega_j^2)^2 + \Omega_j^2 \gamma^2} \mu F_j. \\
B_j &= \frac{(\omega^2 - \Omega_j^2) \cos(\varphi_j) + \Omega_j \gamma \sin(\varphi_j)}{(\omega^2 - \Omega_j^2)^2 + \Omega_j^2 \gamma^2} \mu F_j.
\end{aligned}$$

Con esto obtenemos las amplitudes A_j y B_j con las cuales generamos la serie de tiempo de la solución particular. Y tomaremos como las amplitudes de la transformada de Fourier de la solución particular: $\hat{x}_j = \hat{x}(\Omega_j)$ donde $\hat{x}_j = \sqrt{A_j^2 + B_j^2}$.

3.3.1.2. Solución numérica de la *EDO*

Para generar la serie de tiempo de la solución numérica de la *EDO* con condiciones iniciales aleatorias descomponemos la *EDO* en un sistema de dos ecuaciones diferenciales, con $\dot{x} = v$ y $\ddot{x} = \dot{v}$:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2x = \mu z \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\gamma v - \omega^2x + \mu z \end{cases}$$

discretizando las variables: $\dot{x}(t_i) = \dot{x}_i = \frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta t}$ y $\dot{v}(t_i) = \dot{v}_i = \frac{v_{i+1}-v_i}{\Delta t}$ y resolviendo el sistema con el método de Euler modificado:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + v_i\Delta t \\ v_{i+1} &= v_i + [-\gamma v_i - \omega^2x_{i+1} + \mu z_i] \Delta t \end{aligned}$$

con Δt el intervalo de tiempo del paso de integración con $\Delta t = 1/50\text{seg}$, y donde z_i es la señal discreta del forzamiento propuesto de la ecuación (3.11). Con lo que se obtendrá la serie discreta en el tiempo de la solución numérica de la *EDO* con posición inicial x_0 y velocidad inicial v_0 .

No utilizamos un método de mayor precisión con el fin de aumentar el efecto del ruido por la integración numérica.

3.3.2. Resultados con simulaciones de datos sintéticos

Se realizó una copiosa cantidad de simulaciones, más de 100,000, y se presentan algunos casos relevantes para hacer un análisis comparativo del valor de los resultados del método numérico propuesto. En cada caso se presentan la frecuencia de resonancia ω , el discriminante $\frac{\gamma^2}{4\omega^2}$ y μ obtenidas de las tres regresiones junto con los valores originales.

- **Caso de un forzamiento monocromático.**

En este caso solamente se tiene una frecuencia de forzamiento, lo que causa que el espectro frecuencias de la solución particular para la regresión que nos dan los datos *óptimos* tenga sólo una frecuencia con amplitud distinta de cero; dicha frecuencia es la misma que la del forzamiento.

La matriz A de la ecuación (3.6) se escribe:

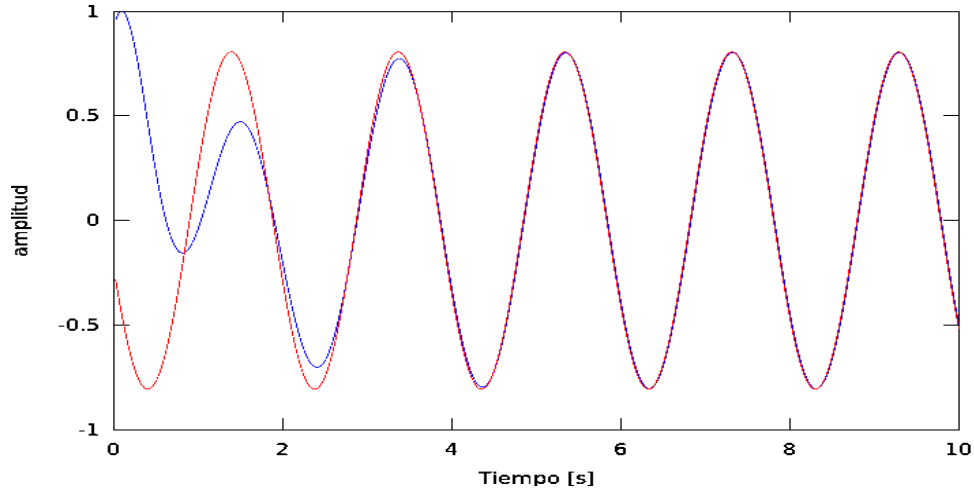


Figura 3.9: Se muestran con un rescalamiento las soluciones numérica en azul y particular en rojo, correspondientes a la *EDO* sintetizada de la tabla 3.1.

$$A = \begin{pmatrix} (\phi_1, \phi_1)_D & (\phi_1, \phi_2)_D & (\phi_1, \phi_3)_D \\ (\phi_2, \phi_1)_D & (\phi_2, \phi_2)_D & (\phi_2, \phi_3)_D \\ (\phi_3, \phi_1)_D & (\phi_3, \phi_2)_D & (\phi_3, \phi_3)_D \end{pmatrix}.$$

Considerando las ecuaciones de (3.9), tenemos que para el espectro de frecuencias de la regresión de los datos *óptimos*, las funciones ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 sólo toman cada una el valor: $\phi_1 = F_a^2$, $\phi_2 = \Omega^2 F_a^2$ y $\phi_3 = -F_b^2$, donde: F_a es la amplitud de la solución particular de la *EDO*, F_b es la amplitud del forzamiento que se está aplicando a la *EDO* y Ω es la frecuencia del forzamiento. Por lo anterior la matriz A asociada para esta regresión de datos *óptimos* queda:

$$A = \begin{pmatrix} F_a^4 & \Omega^2 F_a^4 & -F_a^2 F_b^2 \\ \Omega^2 F_a^4 & \Omega^4 F_a^4 & -\Omega^2 F_a^2 F_b^2 \\ -F_a^2 F_b^2 & -\Omega^2 F_a^2 F_b^2 & F_b^4 \end{pmatrix}.$$

Las columnas de esta matriz no son linealmente independientes por lo que lo único que podemos obtener de esta regresión es ruido. Esto es, aunque la matriz A no es invertible, nuestro procedimiento para obtener $\vec{\alpha}$ de $\vec{\alpha}^* = A^{-1}\vec{b}$ siempre nos dará un vector. Porque la matriz

es degenerada, es decir, transforma vectores de \mathbb{R}^3 en subespacio de menor dimensión.

La segunda regresión, que llamamos *particular*, debería tener un problema similar dado que utiliza la transformada de Fourier de la solución particular. Sin embargo, debido al error numérico del *leakage* descrito en la sección (3.1.2.2) ocasionado por el ventaneo y la transformada numérica propuesta, la matriz A en la mayoría de los casos será invertible. Por lo tanto los datos *particulares* deberán dar alguna información.

Para la tercera regresión, la que nos da los datos *numéricos*, debido a que sólo se consideran coeficientes de disipación γ reales (positivos), la solución numérica tenderá asintóticamente a la solución particular. Esto es, los datos *numéricos* tendrán un error debido a la contribución de la solución homogénea en la ventana de tiempo y al error de la integración numérica. (Ver figura 3.9)

En la siguiente tabla se muestran los resultados de las tres regresiones de una simulación con forzamiento monocromático.

Parámetros	<i>Originales</i>	<i>Óptimos</i>	<i>Particulares</i>	<i>Numéricos</i>
$\frac{\omega}{2\pi}$	0.522	$0.112 + i 0.122$	0.490	0.467
$\frac{\gamma^2}{4\omega^2}$	0.144	$0.500 + i 2.519$	-0.040	-0.117
μ^2	4339	0.014	-880.6	-1408

Tabla 3.1: Los datos de la columna *Originales* corresponden a los parámetros con los que se sintetizó la *EDO* de esta simulación. Los valores de la columna *Óptimos* ejemplifican el *ruido* esperado debido a que la matriz de la regresión no es invertible. Las frecuencias ω de la segunda y tercera regresión se aproximan a la original pero no así los demás parámetros. Los valores negativos son el resultado de la mejor aproximación, hay que recordar que la aproximación por mínimos cuadrados con ecuaciones normales no impone restricciones físicas. Simplemente dado el conjunto base generado por los espectros, es la mejor aproximación. Esto se puede resolver, mejorando los espectros.

- **Caso policromático con alta correlación entre la solución numérica y la particular.**

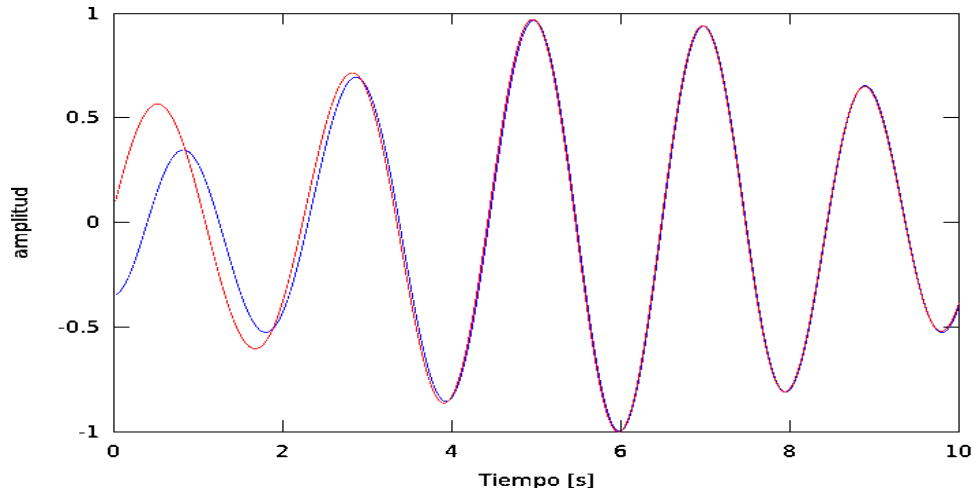


Figura 3.10: Se muestran con un rescalamiento las soluciones numérica en azul y particular en rojo, correspondientes a la *EDO* sintetizada de la tabla 3.2.

En este caso tenemos múltiples frecuencias de forzamiento, por lo que no se esperan problemas al calcular la regresión en el primer caso, los datos *óptimos*. Así mismo, por el *parecido* entre las soluciones numérica y particular se espera que los espectros de frecuencias sean similares y por lo tanto la segunda y tercera regresión tendrán resultados que aproximen mejor a los valores exactos, entre sí y cercanas a la primera.

Entendemos por alta correlación entre dos funciones en una ventana de tiempo cuando el cociente de la convolución de las dos funciones y la convolución de una de las dos funciones consigo misma tiende a uno [1]. Una interpretación gráfica de esto es que las gráficas de las dos funciones en la ventana de tiempo sean muy *parecidas*. (Ver figura 3.10)

En la siguiente tabla se muestran los resultados de las tres regresiones de una simulación con forzamiento policromático. Aquí podemos apreciar la alta correlación entre las soluciones numérica y particular de la *EDO* sintetizada.

Parámetros	<i>Originales</i>	<i>Óptimos</i>	<i>Particulares</i>	<i>Numéricos</i>
$\frac{\omega}{2\pi}$	0.497	0.497	0.496	0.489
$\frac{\gamma^2}{4\omega^2}$	$7.620 \cdot 10^{-02}$	$7.620 \cdot 10^{-02}$	$-4.763 \cdot 10^{-02}$	$1.217 \cdot 10^{-03}$
μ^2	3155	3155	-1561	330

Tabla 3.2: Los datos de la columna *Originales* corresponden a los parámetros con los que se sintetizó la *EDO* de esta simulación. Los valores de la columna *Óptimos* son idénticos a los *Originales*. Las frecuencias ω de la segunda y tercera regresión se aproximan a la original pero no así los demás parámetros.

- **Caso policromático con baja correlación entre la solución numérica y la particular.**

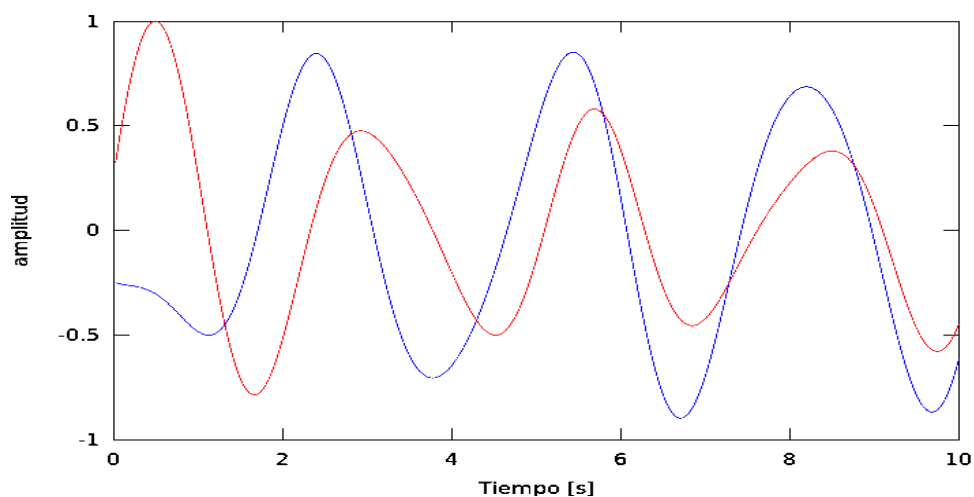


Figura 3.11: Se muestran con un rescalamiento las soluciones numérica en azul y particular en rojo, correspondientes a la *EDO* sintetizada de la tabla 3.3 .

En este caso también tenemos múltiples frecuencias de forzamiento, por lo que no se esperan problemas en la primera regresión, la de los datos *óptimos*. Sin embargo, debido a la modulación y condiciones iniciales,

no se parecen entre sí las soluciones numérica y particular en el intervalo de tiempo dado. Se espera que la segunda y tercera regresión no arrojen resultados parecidos entre sí. No obstante, los resultados de la mayoría de las simulaciones regresan frecuencias de resonancia ω cercanas a la original para cualquiera de las regresiones. Esto nos sugiere que la frecuencia de resonancia ω es un parámetro *robusto* en la regresión.

En la siguiente tabla se muestran los resultados de las tres regresiones de una simulación con forzamiento policromático y baja correlación entre las soluciones numérica y particular de la *EDO* sintetizada. En la figura 3.11 se muestran las gráficas de las soluciones que se usaron en la simulación.

Parámetros	<i>Originales</i>	<i>Óptimos</i>	<i>Particulares</i>	<i>Numéricos</i>
$\frac{\omega}{2\pi}$	0.337	0.337	0.441	0.338
$\frac{\gamma^2}{4\omega^2}$	$5.275 \cdot 10^{-03}$	$5.275 \cdot 10^{-03}$	$-1.016 \cdot 10^{-02}$	$-7.654 \cdot 10^{-03}$
μ^2	4259	4259	5299	115

Tabla 3.3: Los datos de la columna *Originales* corresponden a los parámetros con los que se sintetizó la *EDO* de esta simulación. Los valores de la columna *Óptimos* son idénticos a los *Originales*. La frecuencia ω de la tercera regresión se aproxima a la original. No así la segunda regresión, debido a que en **esta** simulación la modulación es más grande que la ventana de tiempo, lo que añade un error a la transformada de Fourier. Este caso puede suceder en los datos reales y no es detectable.

■ Caso límite.

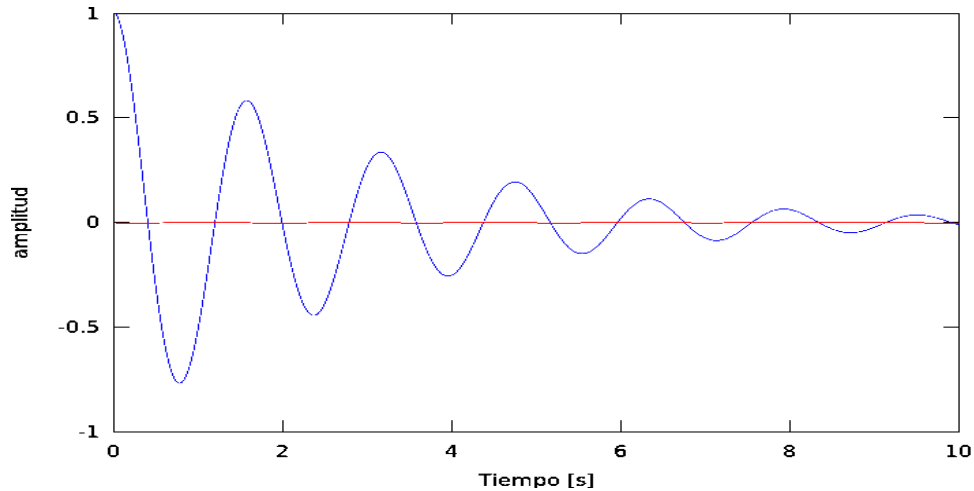


Figura 3.12: Se muestran con un rescalamiento las soluciones numérica en azul y particular en rojo, correspondientes a la *EDO* sintetizada de la tabla 3.4.

En este caso se sintetizó una *EDO* con forzamiento policromático y se tomaron condiciones iniciales tales que la solución numérica tuviera una amplitud mucho mayor que la de la solución particular. Con el fin de ver los efectos sobre la regresión cuando la contribución de la transformada discreta de Fourier de la solución homogénea sea mayor que la particular, ver la figura (3.12). El fin de esta simulación es poner a prueba la *robustez* de la frecuencia ω obtenida por la regresión que sugería el caso anterior. La correlación entre las soluciones de la *EDO* no nos aporta información en este caso.

Los resultados de mil simulaciones muestran una tendencia a dar la frecuencia ω correcta por lo que la hipótesis de la *robustez* del cálculo de la frecuencia ω parece correcta.

En la siguiente tabla se muestran los resultados de las tres regresiones de una simulación con forzamiento policromático de este caso límite.

Parámetros	<i>Originales</i>	<i>Óptimos</i>	<i>Particulares</i>	<i>Numéricos</i>
$\frac{\omega}{2\pi}$	0.630	0.630	0.612	0.664
$\frac{\gamma^2}{4\omega^2}$	$7.592 \cdot 10^{-03}$	$7.592 \cdot 10^{-03}$	$5.340 \cdot 10^{-03}$	$-4.374 \cdot 10^{-03}$
μ^2	$1.369 \cdot 10^{-03}$	$1.369 \cdot 10^{-03}$	$1.988 \cdot 10^{-03}$	$3.756 \cdot 10^1$

Tabla 3.4: Los datos de la columna *Originales* corresponden a los parámetros con los que se sintetizó la *EDO* de esta simulación. Los valores de la columna *Óptimos* son idénticos a los *Originales*. La frecuencia ω de la segunda y la tercera regresión se aproxima a la original.

3.3.3. Conclusiones de las simulaciones

Las simulaciones nos dicen que el algoritmo propuesto es robusto para determinar la frecuencias de resonancia ω dada una señal de forzamiento $z(t)$ y una señal de respuesta $x(t)$, suponiendo que la señal de respuesta es la solución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2x = \mu z(t)$$

teniendo como incógnitas a los parámetros γ , ω y μ .

Esta conclusión se sustenta en las más de 100,000 simulaciones hechas con datos sintéticos en donde los parámetros de la *EDO*, las condiciones iniciales, el número de forzamientos sinusoidales con amplitudes, fases y frecuencias se variaron aleatoriamente en forma equiprobable en los intervalos de interés, expuesto en la sección (3.3.1). La figura 3.13 contiene los resultados para $\frac{\omega}{2\pi}$ de las simulaciones. En la figura 3.13 los resultados se presentan como la densidad de resultados respecto a la frecuencia con el cual se sintetizaron las soluciones y la frecuencia calculada por el algoritmo, se presenta desde varios ángulos a fin de observar el comportamiento.

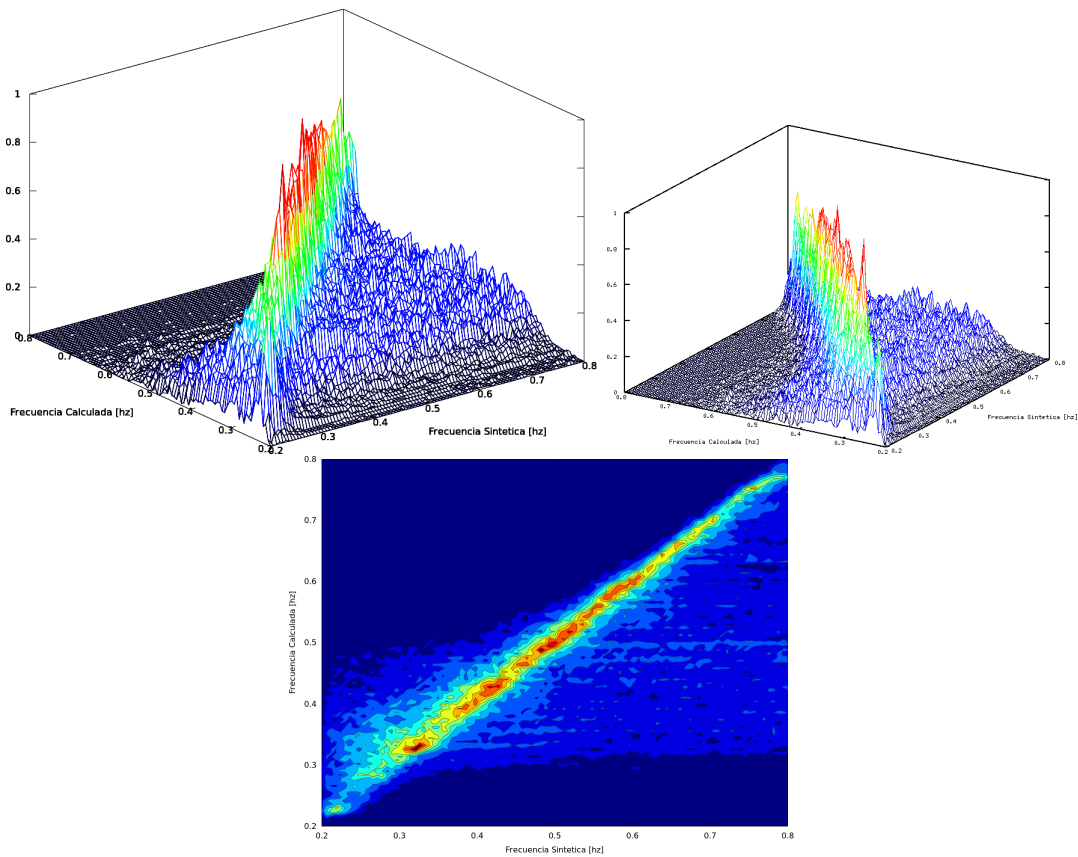


Figura 3.13: La figura muestra la tasa de repetición escalada a uno entre la frecuencia de resonancia usada para sintetizar la simulación y la calculada por el algoritmo.

Gran parte de las desviaciones en el cálculo de la frecuencia que se observan en la figura se deben a problemas de modulación. Se puede observar en la figura 3.13 una mayor desviación hacia frecuencias bajas lo cual tiene sentido dado que la observación de modulaciones en tiempos cortos llevan a la malinterpretación a efectos de mayor escala o de menor frecuencia. La ventana de tiempo es *muy pequeña* para tener una perfecta representación del espectro de frecuencias necesario en el cálculo. Con datos sintéticos es posible eliminar esta desviación aumentando el tamaño de la ventana, sin embargo como nuestro fin es encontrar el comportamiento *cuasi-instantáneo* de la dinámica lineal de la estructura no es posible hacerlo sin pérdida de resolución temporal.

3.4. Estudio lineal de los eventos sísmicos.

En la sección anterior presentamos un procedimiento para encontrar los parámetros que determinan un sistema mecánico elástico forzado. Partiendo de las series de tiempo que representan la amplitud del forzamiento y del desplazamiento del sistema mecánico, podemos estimar el valor de la frecuencia ω , el parámetro de atenuación γ y el parámetro de forzamiento μ . En esta sección vamos a aplicar el mismo procedimiento a los datos reales provenientes de los eventos sísmicos registrados en el edificio descrito en la sección (2.1).

Las características de las ventanas que utilizamos en el procedimiento son:

- Tamaño de la ventana de tiempo $T_v = 10seg$.
- Intervalo de tiempo entre ventanas $\Delta t_v = 1seg$.

Se eligieron los tiempos con la consideración que la frecuencia ω está cercana a $0.5hz$, es decir un periodo $T = 2seg$, entonces tomamos un intervalo de tiempo entre ventanas igual a la mitad de este periodo y el tamaño de la ventana de tiempo igual a cinco veces este periodo.

Para dar las características lineales del edificio llamaremos los grados de libertad de aquí en adelante con las siguientes denominaciones:

- X - al movimiento horizontal sobre el plano del edificio. Presentado en gráficas con color rojo.
- Y - al movimiento perpendicular al plano del edificio. Presentado en gráficas con color azul.
- Z - al movimiento vertical sobre el plano del edificio. Presentado en gráficas con color magenta.
- Θ - al movimiento angular sobre el eje del edificio. Presentado en gráficas con color verde.

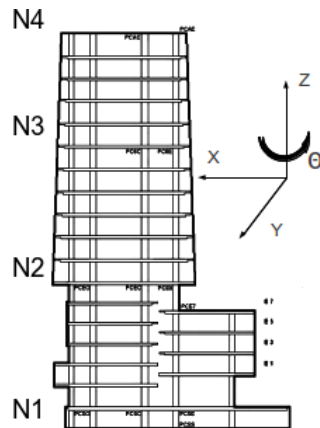


Figura 3.14: Plano del edificio con las direcciones de los grados de libertad.

La selección de los eventos es para comparar la oscilación del edificio con el registro externo del acelerador PCJR para usar el procedimiento de la sección anterior, dado que la instrumentación de este acelerómetro fue en el año 2000. Las amplitudes de los sismos responsables de la oscilación en el listado de la sección (A.2).

Las amplitudes de oscilación son representadas en gráficas ordenadas cronológicamente para comparar el intervalo de amplitudes *rms* de los eventos para cada nivel.

Siendo que tomamos que el intervalo entre ventanas de tiempo $\Delta t_v = 1 \text{ seg}$, representamos que las series de tiempo en el intervalo $[1, N]$, donde N es la cantidad de ventanas que se pueden generar para cada evento. Se representan con una línea continua debido a que consideramos continua la variación de la amplitud. Además para cada nivel del edificio se presentan las gráficas con la misma escala en amplitudes con las unidades en centímetros para las direcciones X y Y , y en radianes en Θ

3.4.1. Nivel-1

El nivel-1 ubicado en la base del edificio, donde se espera el menor desplazamiento. Se observa en las figuras 3.15 y 3.16 una amplitud *rms* máxima de desplazamiento alrededor de 1.4cm a lo largo de los ejes X y Y , y una amplitud *rms* máxima de rotación cerca de $1 \cdot 10^{-4}\text{rad}$ en Θ . Dada la escala, se aprecia en la figura 3.15 en la gráfica del segundo sismo, correspondiente a agosto del 2000. Los desplazamientos en X , Y y Θ no están correlacionados a lo largo de la serie de ventanas de tiempo. También hay que recalcar que en Θ se presenta una función más suave respecto a X y Y .

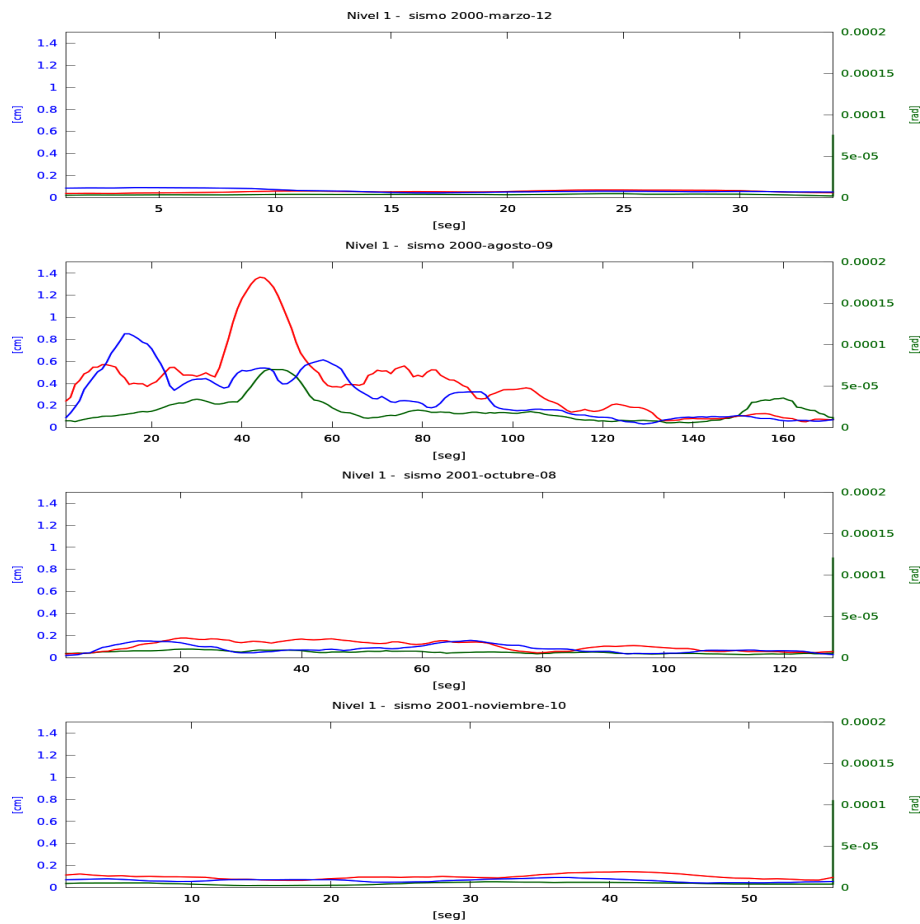


Figura 3.15: Amplitud *rms* al nivel N1 (base).

En la figura 3.16 observando los primeros tres eventos, se puede notar que las amplitudes en Θ aumentan después que las amplitudes en X y Y hayan aumentado. Una explicación es la transferencia de energía de los desplazamientos en X y Y a la componente Θ y/o que las ondas sísmicas "L" y "S" que origina el movimiento Θ [5]. Cabe notar que si las ondas "L" y "S" fueran el único factor que propicia el movimiento en Θ y sus velocidades de propagación son constantes, entonces empezaría el movimiento en Θ al mismo tiempo en todos los eventos.

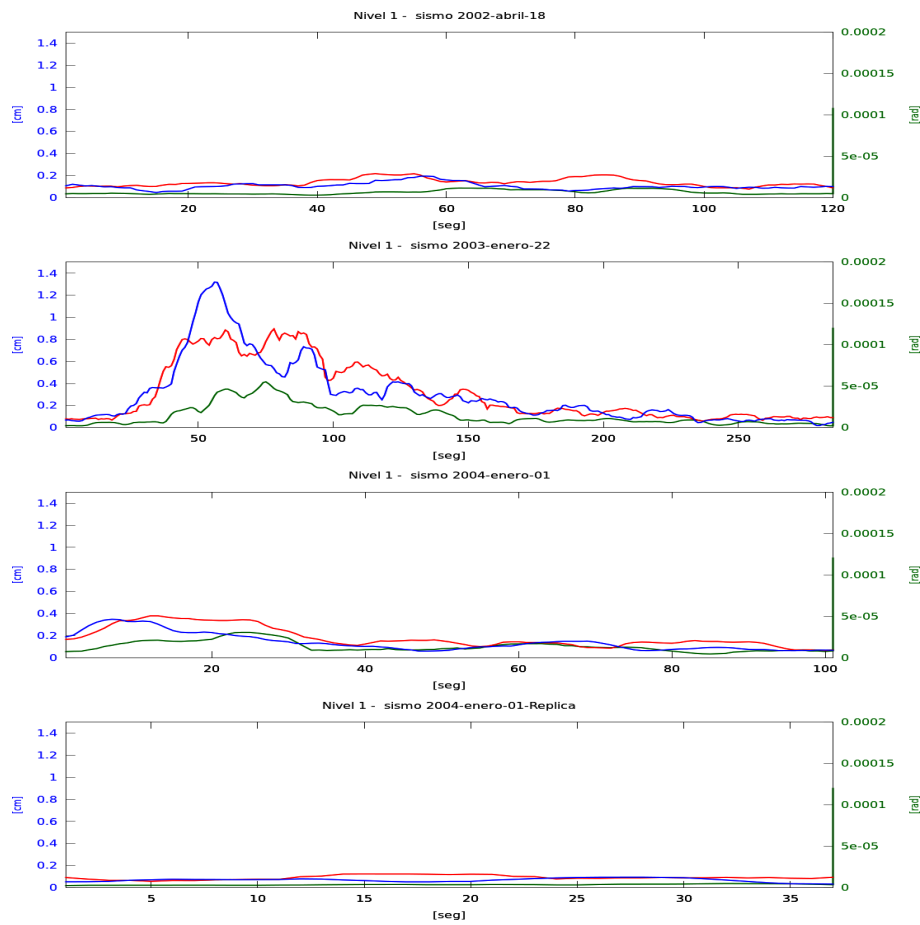


Figura 3.16: Amplitud *rms* al nivel N1 (base).

3.4.2. Nivel-2

En el nivel-2 en los distintos eventos se presenta el máximo en la amplitud *rms* en desplazamientos alrededor de 2.4cm y en rotación de $3.5 \cdot 10^{-4}\text{rad}$. En la figura 3.17 en la gráfica del segundo sismo, parece que el máximo ahora se encuentra en la dirección *Y* en vez del eje *X* como sucede en el nivel-1. Además se puede apreciar que el comportamiento en Θ permanece siendo el mismo.

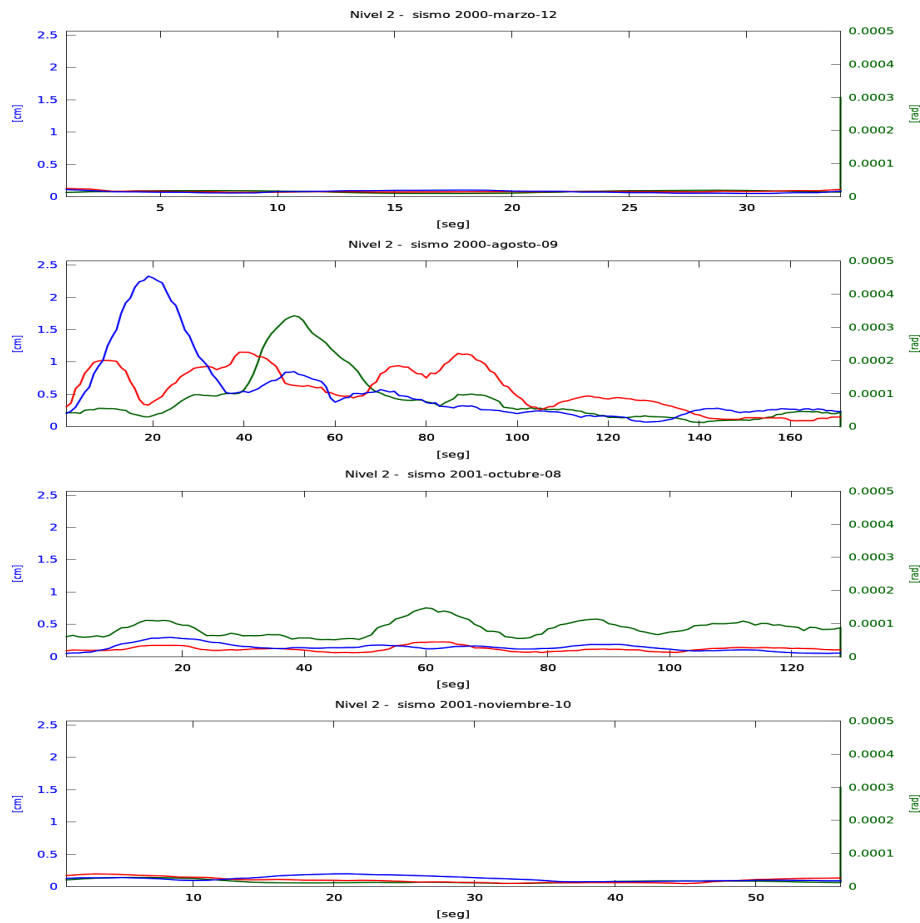


Figura 3.17: Amplitud *rms* al nivel N2.

En la figura 3.18 se puede apreciar que la amplificación en las amplitudes *rms* no ha sido la misma para las componentes ni para todos los tiempos. También se aprecia una mayor amplificación en la dirección *Y* que en *X* con el paso del tiempo lo cual se puede interpretar que hay una mayor disipación de la oscilación en *X* es mayor, lo cual tiene sentido dado a que en las dimensiones del edificio es más largo en *X* que en *Y*.

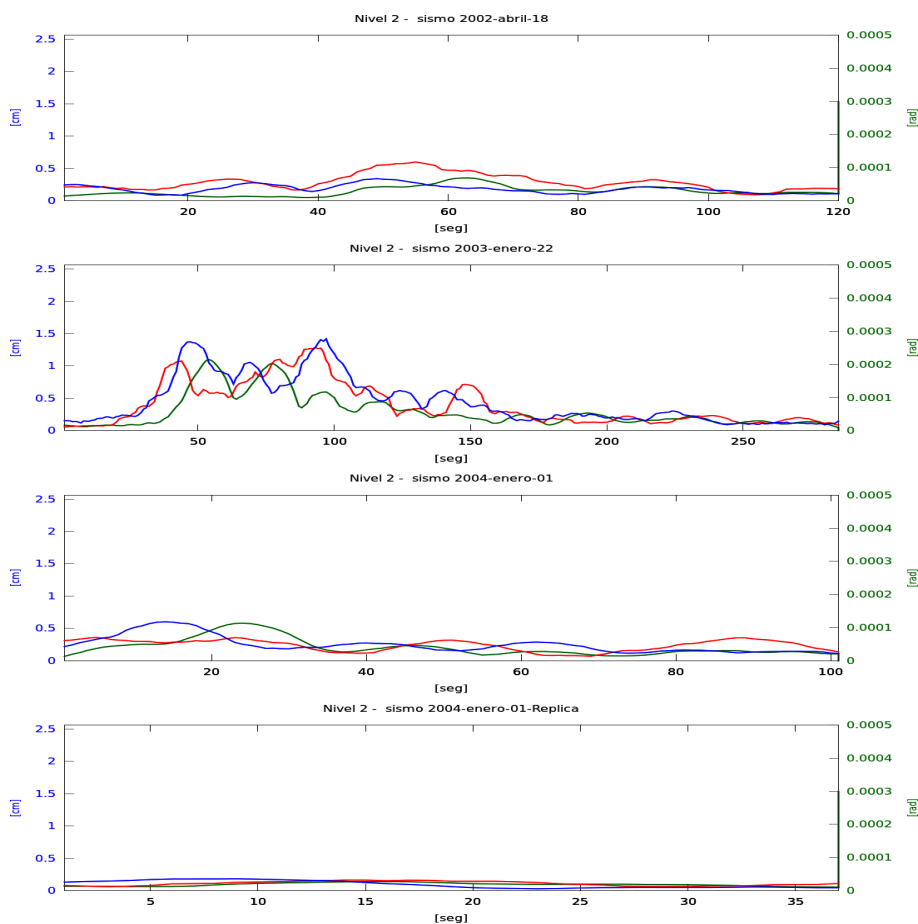


Figura 3.18: Amplitud *rms* al nivel N2.

3.4.3. Nivel-3

En el nivel-3 tenemos la amplitud *rms* máxima de desplazamientos alrededor de 5cm y de rotación de $3 \cdot 10^{-3}\text{rad}$. Comparando las figuras 3.17 y 3.19, se puede apreciar que las gráficas son muy parecidas, los máximos y mínimos locales se encuentran al mismo tiempo. Además de la diferencia en amplitudes, se aprecia que la diferencia respecto al nivel inferior es que la amplificación no es homogénea para todo tiempo.

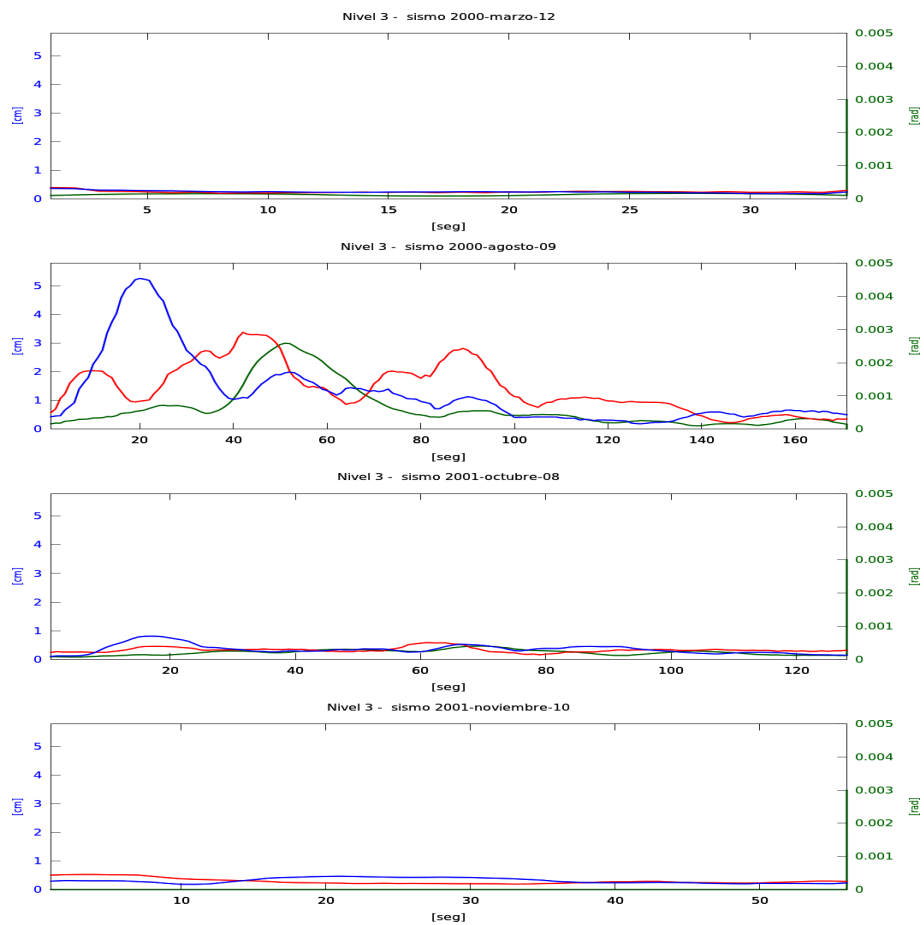


Figura 3.19: Amplitud *rms* al nivel N3.

En la figura 3.20 en los sismos del 2003 alrededor del segundo 80 una mayor

amplificación respecto al resto del tiempo comparando las amplitudes del nivel-2. Si comparamos las gráficas de los sismos de 2002 y 2004 respecto al nivel-2, observaremos que la amplificación es constante. Y en la réplica del sismo del 2004, el de menor magnitud, tenemos que las amplitudes *rms* no presentan amplificaciones observables.

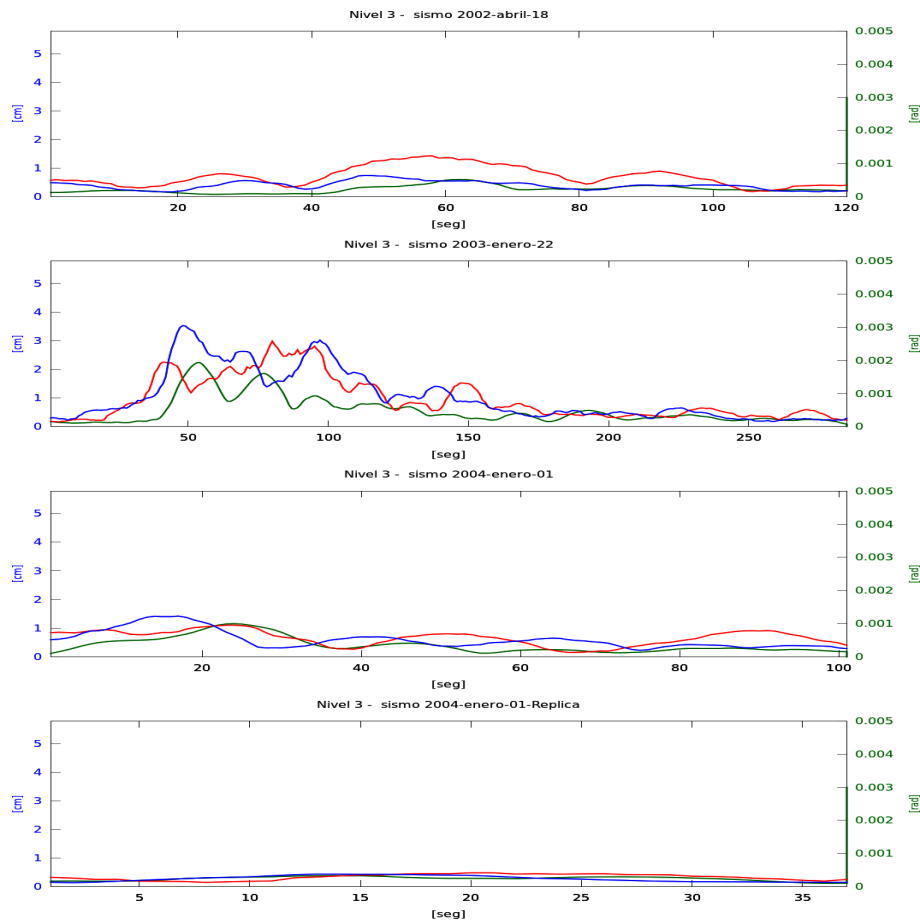


Figura 3.20: Amplitud *rms* al nivel N3.

3.4.4. Nivel-4

En el nivel-4, correspondiente a la azotea, tenemos la amplitud *rms* máxima de desplazamientos alrededor de 7.5cm y de rotación de $3 \cdot 10^{-3}\text{rad}$. Lo primero que podemos observar en la figura 3.21 en el segundo sismo del 2000 es el mismo comportamiento en la amplitud *rms* de rotación, sin ampliificaciones notables respecto al nivel-3. En cambio tenemos ampliificaciones en los desplazamientos, en los cuales se aprecia que la ampliificación tiene una inercia la cual magnifica la amplitud, el cual se entiende como la solución homogénea que describe al nivel el cual persiste para ese tiempo.

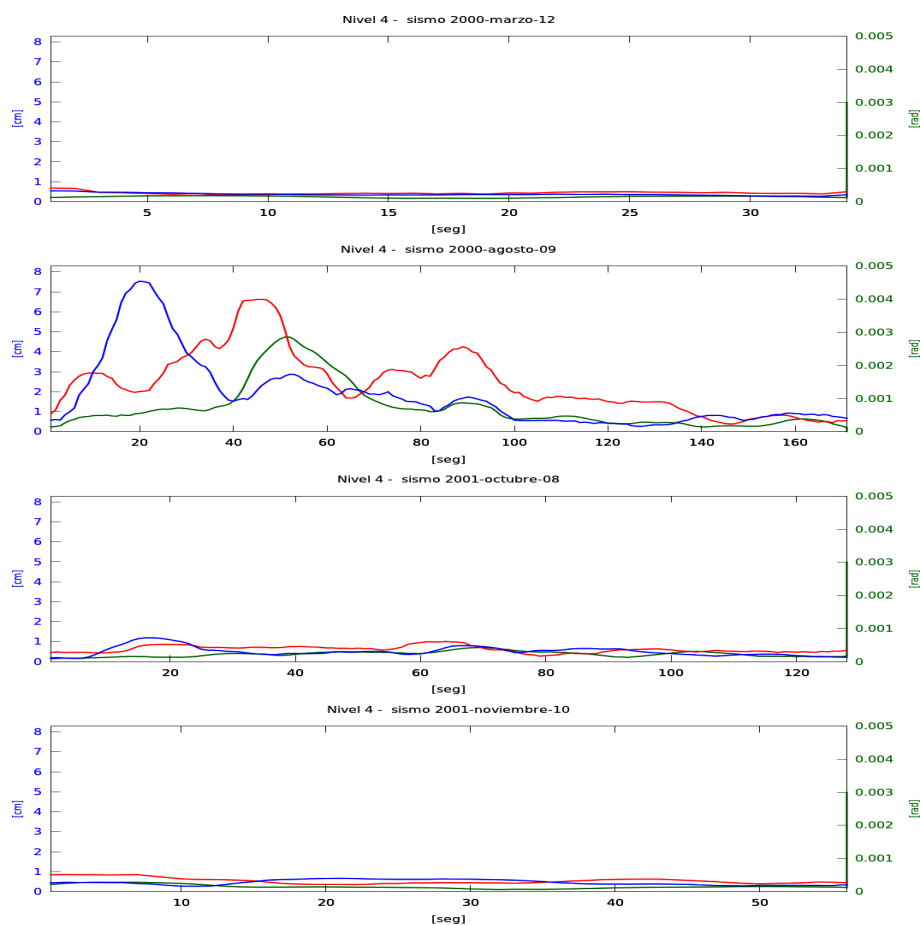


Figura 3.21: Amplitud *rms* al nivel N4.

En la figura 3.22 se puede apreciar el mismo comportamiento de las amplitudes *rms* de rotación en los sismos del 2002 al 2004 respecto al nivel-3 y que su amplificación es muy pequeña. En los desplazamientos para los sismos de 2002 al 2004, se observa el mismo comportamiento inercial de la amplificación que el segundo sismo de 2000 de la figura 3.21. En la réplica del sismo del 2004 no se puede apreciar que haya una amplificación en las amplitudes *rms*.

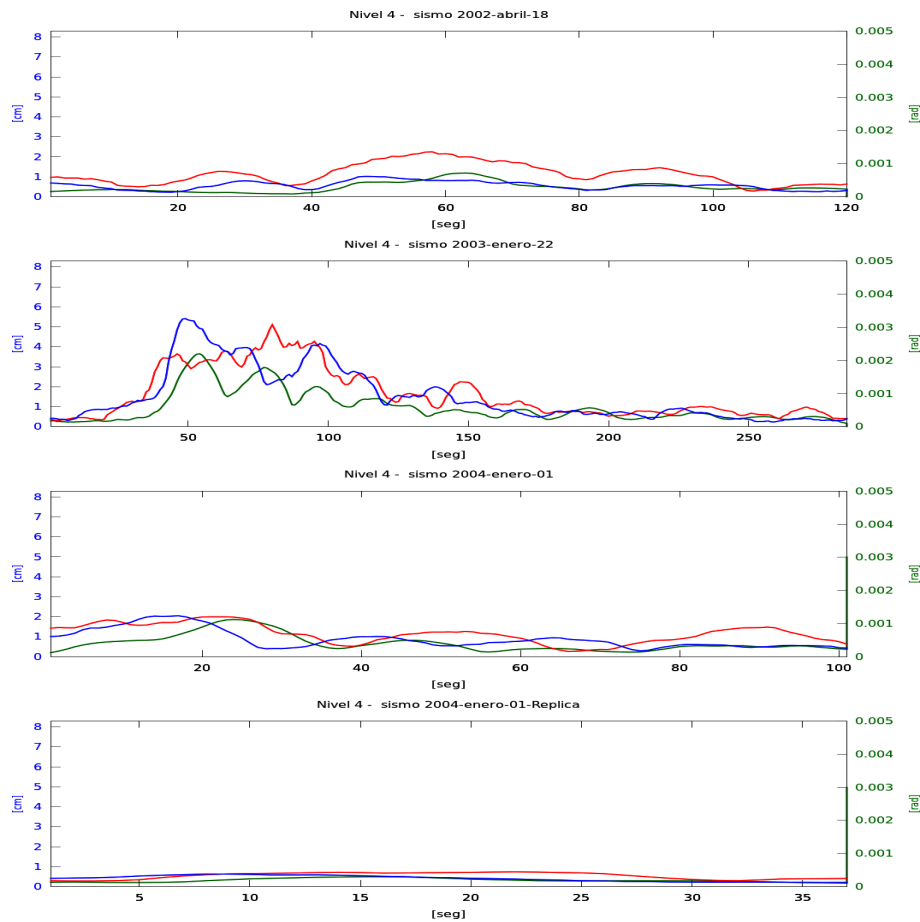


Figura 3.22: Amplitud *rms* al nivel N4.

En la tabla 3.5 están los resultados promedio del algoritmo propuesto para los niveles 2, 3 y 4 para cada evento. Los resultados que se presentan son:

- $\bar{\omega}_i/2\pi$ que es el promedio de las primeras cinco ventanas de tiempo del evento sísmico del resultado para $\omega_\tau/2\pi$. Donde $\bar{\omega}_i$ representaría el parámetro ω que modela la dinámica oscilante lineal con la ecuación (3.13) al principio del evento.

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2x = \mu f \quad (3.13)$$

donde x es la variable de desplazamiento en X , Y , Z o Θ y f la aceleración responsable del forzamiento.

- $\bar{\omega}_f/2\pi$ que es el promedio de las últimas cinco ventanas de tiempo del evento sísmico del resultado para $\omega_\tau/2\pi$. $\bar{\omega}_f$ representaría el parámetro ω que modela la dinámica oscilante lineal con la ecuación (3.13) al final del evento.
- El promedio global $\bar{\omega}/2\pi$, donde representaría el parámetro ω que modela en promedio la dinámica oscilante lineal con la ecuación (3.13) para todo el evento.
- La desviación estándar porcentual $\sigma\%$ del promedio global $\bar{\omega}/2\pi$.

La razón por la que se presentan únicamente los resultados para el parámetro $\omega/2\pi$ es por la robustez del algoritmo para obtener ese parámetro, lo cual ya fue discutido en las simulaciones de la sección (3.3.1)

Tabla 3.5: Resultados promedio para cada nivel y grados de libertad para cada evento sísmico.

	X				Y				Z				Θ				
	$\bar{\omega}_i/2\pi$	$\bar{\omega}_f/2\pi$	$\bar{\omega}/2\pi$	$\sigma\%$	$\bar{\omega}_i/2\pi$	$\bar{\omega}_f/2\pi$	$\bar{\omega}/2\pi$	$\sigma\%$	$\bar{\omega}_i/2\pi$	$\bar{\omega}_f/2\pi$	$\bar{\omega}/2\pi$	$\sigma\%$	$\bar{\omega}_i/2\pi$	$\bar{\omega}_f/2\pi$	$\bar{\omega}/2\pi$	$\sigma\%$	
2000 marzo 12	N2	0.432	0.423	0.474	17.9%	0.466	0.427	0.443	12.0%	0.477	0.433	0.463	9.2%	0.431	0.447	0.447	8.2%
	N3	0.428	0.455	0.440	9.0%	0.446	0.437	0.438	6.7%	0.478	0.442	0.474	8.3%	0.437	0.455	0.453	7.9%
	N4	0.435	0.455	0.460	8.9%	0.445	0.447	0.443	5.6%	0.494	0.463	0.488	8.0%	0.435	0.444	0.448	6.8%
2000 agosto 09	N2	0.334	0.333	0.357	12.6%	0.395	0.368	0.374	12.5%	0.405	0.397	0.400	10.0%	0.424	0.408	0.422	9.0%
	N3	0.372	0.358	0.369	11.3%	0.421	0.367	0.378	10.0%	0.421	0.402	0.416	10.1%	0.443	0.425	0.424	7.6%
	N4	0.386	0.359	0.380	10.5%	0.441	0.370	0.386	9.5%	0.410	0.396	0.420	10.9%	0.419	0.426	0.412	8.1%
2001 octubre 08	N2	0.392	0.379	0.454	20.2%	0.486	0.442	0.442	18.0%	0.499	0.431	0.473	14.4%	0.438	0.407	0.487	21.1%
	N3	0.402	0.388	0.420	10.6%	0.426	0.448	0.427	11.8%	0.438	0.440	0.475	14.2%	0.456	0.512	0.474	6.7%
	N4	0.414	0.436	0.438	11.1%	0.456	0.456	0.438	12.8%	0.467	0.456	0.493	12.4%	0.424	0.478	0.462	7.4%
2001 noviembre 10	N2	0.395	0.372	0.451	13.4%	0.423	0.375	0.441	11.0%	0.450	0.410	0.451	12.2%	0.436	0.402	0.458	9.1%
	N3	0.390	0.385	0.430	12.4%	0.392	0.388	0.430	10.3%	0.455	0.406	0.457	10.4%	0.000	0.000	0.000	NaN%
	N4	0.394	0.400	0.452	10.8%	0.390	0.398	0.433	10.4%	0.466	0.436	0.474	7.1%	0.419	0.410	0.457	9.2%
2002 abril 18	N2	0.374	0.295	0.302	11.3%	0.401	0.294	0.379	14.1%	0.408	0.372	0.401	10.7%	0.437	0.442	0.442	9.0%
	N3	0.373	0.335	0.373	9.1%	0.387	0.338	0.388	9.6%	0.426	0.395	0.414	9.6%	0.430	0.446	0.452	8.4%
	N4	0.372	0.343	0.385	9.4%	0.398	0.363	0.401	8.4%	0.446	0.396	0.419	9.7%	0.422	0.432	0.432	9.3%
2003 enero 22	N2	0.363	0.360	0.373	16.9%	0.362	0.378	0.354	15.3%	0.413	0.412	0.396	10.3%	0.490	0.484	0.428	10.1%
	N3	0.395	0.386	0.381	11.5%	0.372	0.348	0.378	11.6%	0.460	0.437	0.418	9.6%	0.493	0.479	0.436	8.6%
	N4	0.450	0.426	0.398	11.4%	0.384	0.360	0.391	10.2%	0.435	0.439	0.423	10.4%	0.490	0.459	0.422	9.3%
2004 enero 01	N2	0.395	0.415	0.419	14.0%	0.574	0.412	0.417	15.6%	0.439	0.419	0.429	9.6%	0.499	0.395	0.449	10.0%
	N3	0.360	0.398	0.400	10.4%	0.385	0.421	0.395	10.3%	0.459	0.425	0.434	9.8%	0.496	0.406	0.451	8.6%
	N4	0.377	0.405	0.411	10.1%	0.383	0.448	0.403	10.5%	0.462	0.437	0.447	8.7%	0.453	0.396	0.438	9.5%
2004 Replica	N2	0.504	0.430	0.461	13.2%	0.400	0.455	0.484	14.8%	0.447	0.412	0.436	7.1%	0.527	0.500	0.479	9.1%
	N3	0.419	0.476	0.425	9.5%	0.395	0.419	0.416	6.8%	0.466	0.496	0.459	7.9%	0.507	0.472	0.465	10.4%
	N4	0.508	0.422	0.454	13.3%	0.389	0.462	0.434	9.0%	0.510	0.427	0.468	7.4%	0.512	0.494	0.473	8.8%

3.4.5. Lectura de los resultados

Los resultados de todas las regresiones están en el apéndice (A). Aquí describimos cómo es la lectura de los resultados. Tomaremos por ejemplo una serie de Amplitud-*rms* con la serie frecuencia calculada $\omega/2\pi$ por la regresión correspondiente al nivel 4 (azotea) en el eje *X*.

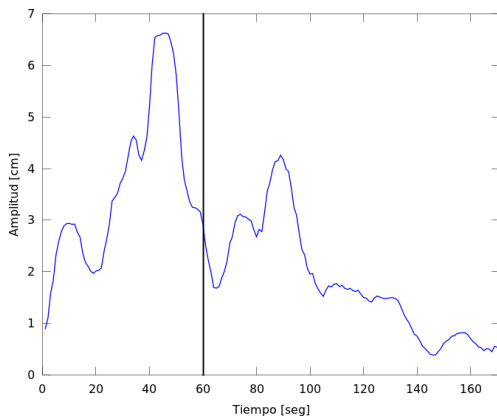


Figura 3.23: Amplitud-*rms*.

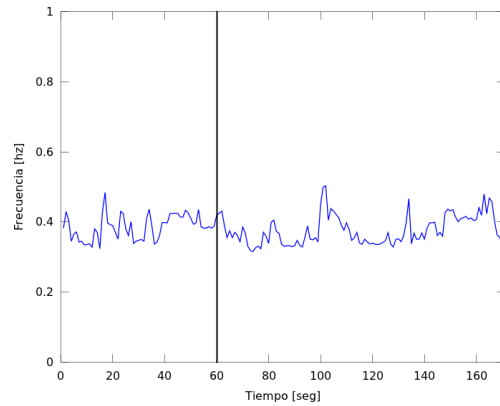
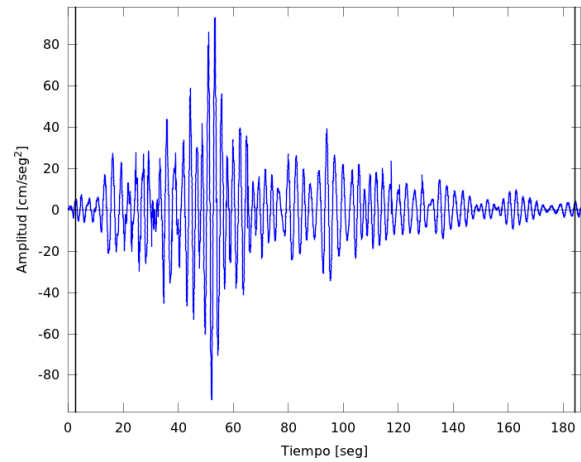


Figura 3.24: Frecuencia calculada ω .

En las figuras 3.23 y 3.24 leemos al *tiempo* de 60 segundos una Amplitud-*rms* igual a 2.905cm y una Frecuencia calculada $\omega/2\pi$ igual a 0.4196Hz . Estos valores los debemos de entender como el resultado de los siguientes pasos respecto a la señal en el nivel 4:

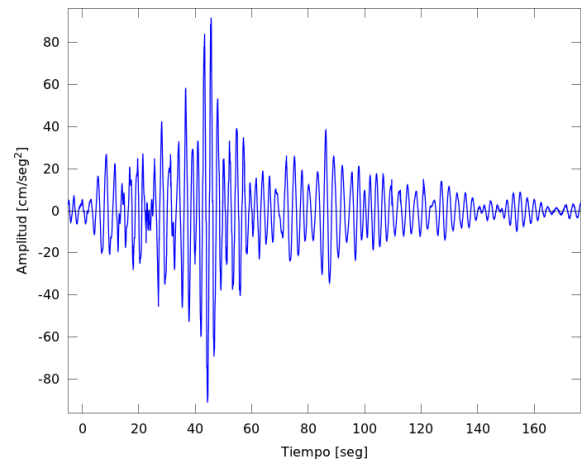
Paso 0:

Respecto al acelerómetro de la azotea tomamos el canal con la orientación en el eje X .



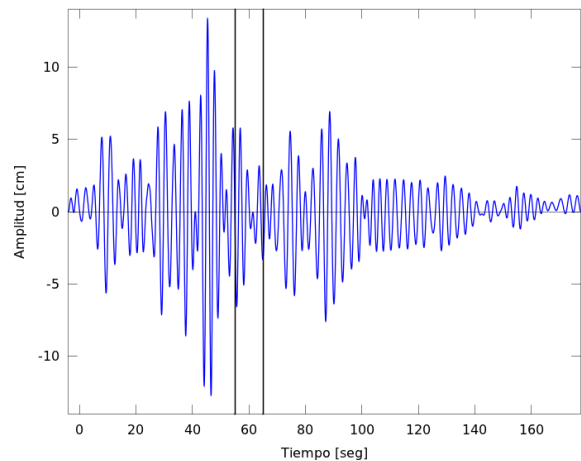
Paso 1:

A la señal tomada en la orientación X se recortan los extremos y se pasa por un filtro pasa altos a 0.1Hz . Y se traslada el tiempo cuatro segundos $t = t - 4$. La traslación es para tomar ventanas centradas en cada segundo, empezando en uno, con un tamaño de diez segundos.



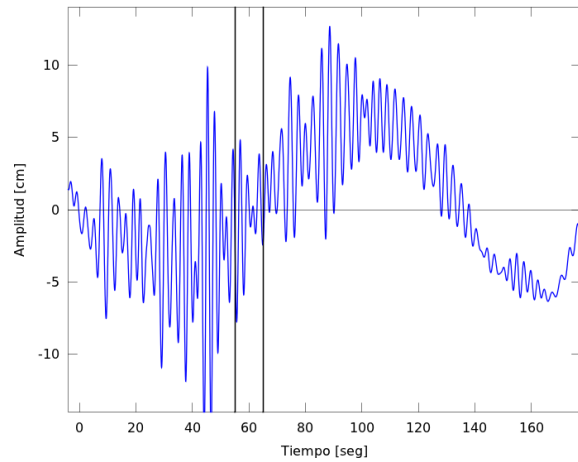
Paso 2:

La señal se integra numéricamente dos veces con condiciones de contorno de traslación promedio cero y velocidad promedio cero.



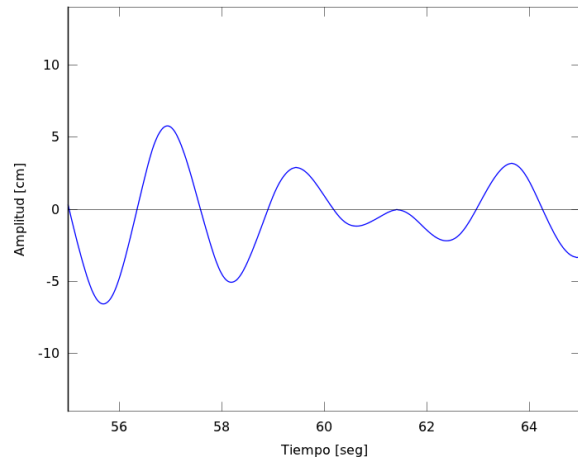
Nota sobre el filtraje:

Esta sería la señal doble-integrada con la mismas condiciones en caso de no haber realizado el filtraje. Recordemos que la integración alisa curvas pero los errores en señales a frecuencias inferiores a 1hz aumentan cuadráticamente respecto al inverso de la frecuencia del error.



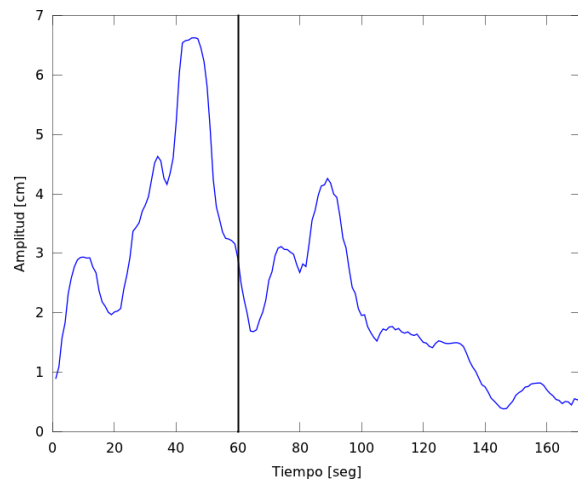
Paso 3:

En nuestro ejemplo tomamos el intervalo de $[55, 65]$.



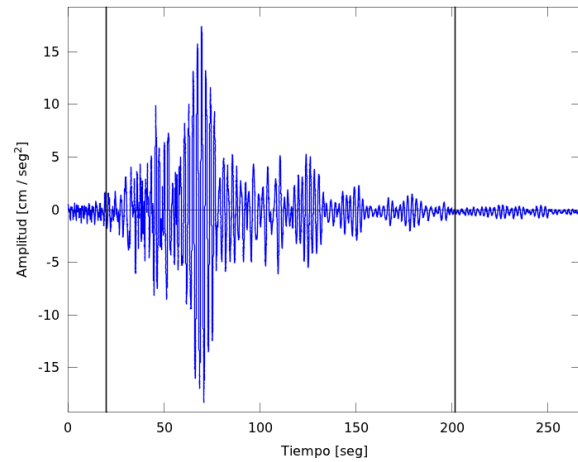
Paso 4:

Se calcula la amplitud cuadrática media igual a 2.905cm y registramos el valor correspondiente a la Amplitud-*rms* al tiempo $t_v = 60$.



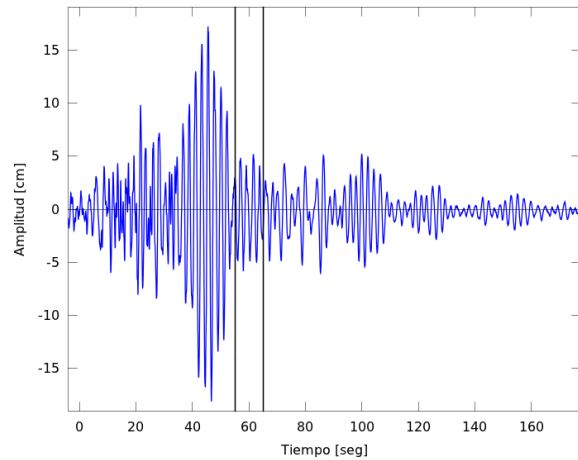
Paso 5:

Continuando con el mismo ejemplo, tomamos la señal registrada por el acelerador externo con la misma orientación en X .



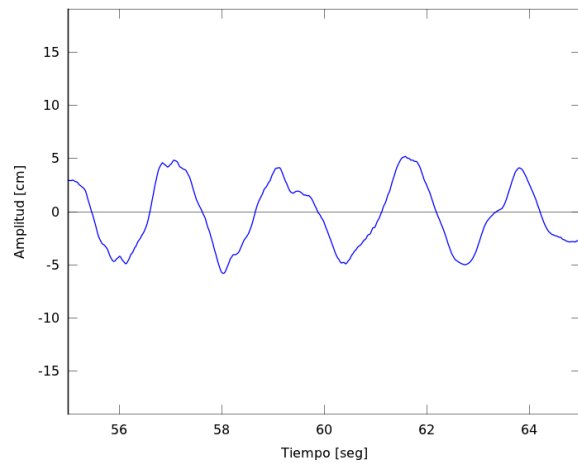
Paso 6:

Se cortan los extremos para que se encuentren las señales en el mismo dominio en el tiempo.



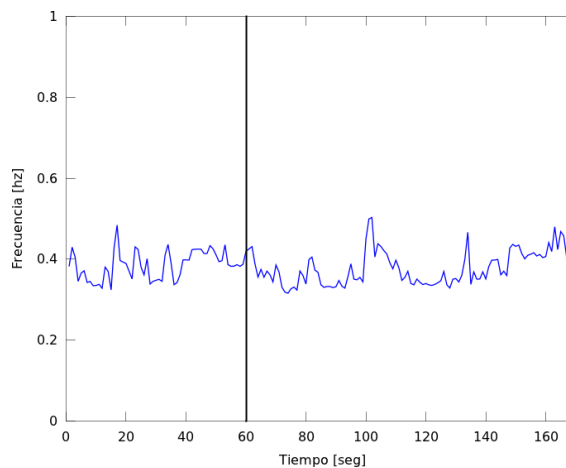
Paso 7:

En nuestro ejemplo tomamos el intervalo de $[55, 65]$. El cual lo tomamos como el forzamiento el cual es aplicado al edificio en ese grado de libertad.



Paso 8:

Se calcula la transformada discreta de Fourier del paso 4 y 7. Y de estas hacemos la regresión numérica para obtener el valor de la frecuencia temporal $\omega/2\pi$ igual a 0.4196hz y registramos el valor correspondiente al tiempo $t_v = 60$.



Resumiendo, para cada segundo de los valores reportados en el apéndice, son el resultado del cálculo de valores promedio, ya sea de la amplitud o de la frecuencia correspondiente a una dinámica de oscilación lineal.

3.4.6. Interpretación de eventos.

Prosiguiendo con la lectura, seguimos con la interpretación de los resultados lineales tomando por ejemplo el evento que tuvo la respuesta con mayor amplitud, el sismo del 09 de agosto de 2000. Se presentan los siguientes resultados en las componentes horizontales en la figura 3.25.

Lo primero que se puede observar en las señales amplitudes respecto los tres niveles es el parecido en la forma, y que los máximos y mínimos tienen en la misma fase. Es congruente suponer que el forzamiento es aplicado a los niveles independientemente en cada ventana de tiempo.

También se puede observar que en la frecuencia temporal calculada hay una oscilación alrededor de los 0.4hz . La oscilación de la frecuencia en los tres niveles presentan picos comunes al mismo tiempo, cuya correlación con la amplitud queda poco clara.

Para explorar más, fijémos nuestra atención en dirección "Y". En los primeros 40 segundos pasa por la máxima amplitud en los tres niveles su-

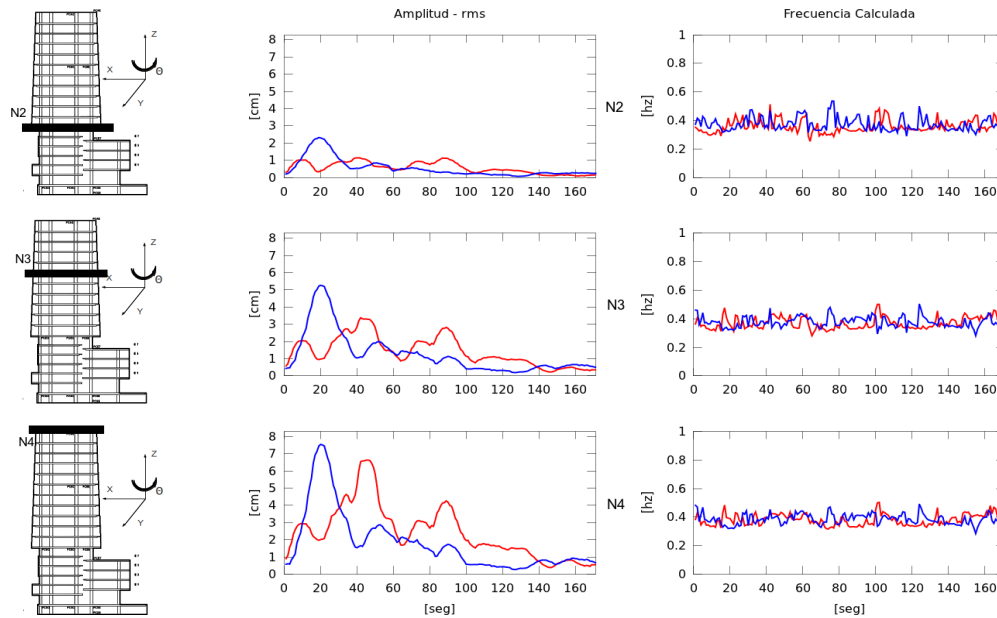


Figura 3.25: Resultados del 09 de Agosto de 2000 sobre la horizontal de los niveles N2, N3 y N4. En rojo en X y en azul Y .

periores. Podemos notar que en la frecuencia calculada hay un valle en correspondiente a la máxima amplitud. Pero no que claro la estructura del comportamiento de la frecuencia dado a que tiende a tener máximos cuando la amplitud se estabiliza.

Pero una interpretación de un evento carece de significado si no se muestra una regularidad. Es conviene comparar con los resultado de un evento de baja amplitud. Tomemos el evento anterior del 12 de Marzo de 2000. Con el mismo año y sin otro evento intermedio relevante cabe suponer que las características dinámicas del sistema no variaron por el paso del tiempo o por un evento que castigue la integridad de la estructura. Ver figura 3.26.

La observación más clara resulta ser que en las frecuencias calculadas los valores tienden a ser mayores. Encontramos en dirección X en el nivel 2 un incremento en la frecuencia donde hubo una respuesta con una amplitud casi constante. En la dirección Y encontramos que en la suave joroba en las amplitudes que corresponde a frecuencias cuasi constantes. Observando en los otros dos niveles no queda claro si hay una relación lineal respecto a la

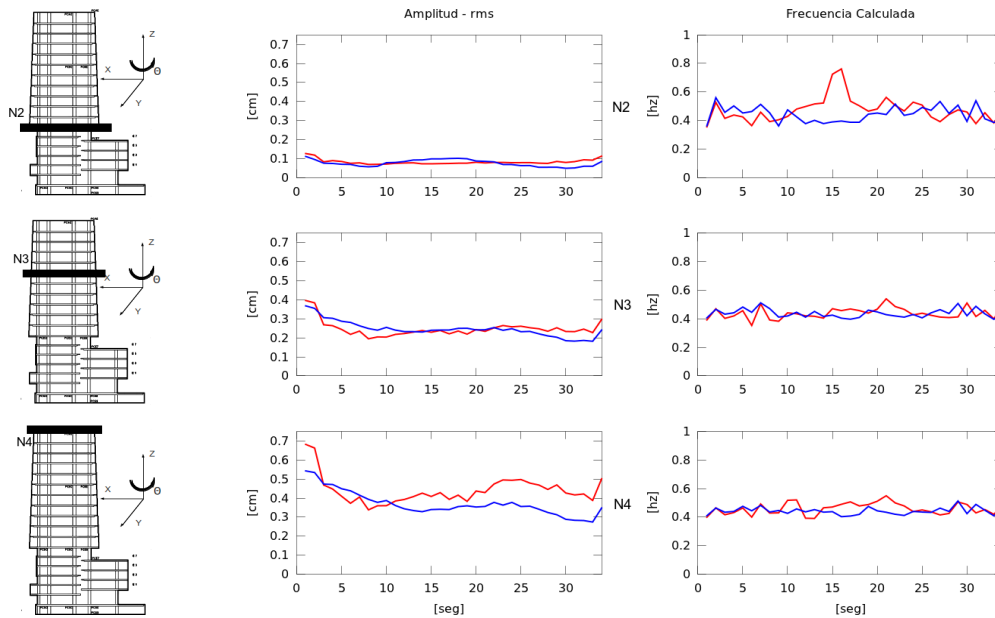


Figura 3.26: Resultados del 12 de Marzo de 2000 sobre la horizontal de los niveles N2, N3 y N4. En rojo en X y en azul Y .

frecuencia y la amplitud, salvo *coincidencias* que se presentan en los picos de las frecuencias calculadas.

Teniendo estos los eventos y suponiendo que tienen las mismas características dinámicas, se puede analizar los resultados para obtener medios fijando la mirada a las variaciones en la respuesta lineal del edificio. Tenemos que interpretar que para cada valor presentado representa una dinámica lineal promedio en la cual esta promediada interacciones lineales y términos superiores. Donde está promediación de términos desconocidos varían en magnitud pero no en forma de respuesta oscilante del edificio. Por lo que se debe de considerar que los resultados presentados, representan la estructura dinámica lineal más el promedio de perturbaciones en órdenes superiores.

Considerando esto, se puede estudiar la dinámica de la estructura, por lo menos en cada nivel superior en sus grados de libertad, encontrando cómo es la variación de parámetros de la respuesta en función de la integración de términos no-lineales y/o acoplamientos.

Capítulo 4

Análisis no-lineal

En el capítulo anterior se estableció un procedimiento para estudiar la dinámica de un edificio instrumentado usando ecuaciones diferenciales lineales en ventanas de tiempo. En este capítulo se examinarán las características que describe un oscilador no-lineal cuya dinámica es muy parecida a un oscilador lineal para oscilaciones pequeñas pero se modifican cuando aumenta la amplitud de la oscilación. La finalidad es generar indicadores que permitan hacer comparaciones con los resultados del análisis lineal del capítulo anterior y de ahí encontrar el tipo de ecuación diferencial no-lineal que mejor describe el comportamiento del edificio.

4.1. Introducción al estudio de la dinámica no-lineal de un sistema oscilante

La caracterización de un oscilador no-lineal se hacen por sus ecuaciones diferenciales y las soluciones de ésta. Por los resultados del capítulo anterior, sabemos que, si hay una ecuación diferencial que describe a la oscilación de cada piso en cada grado de libertad, esta es muy parecida a un oscilador lineal. De manera similar, podemos aproximar la ecuación diferencial no-lineal, que representa al oscilador que deseamos caracterizar, por una secuencia orde-

nada jerárquicamente de ecuaciones diferenciales lineales, donde la ecuación diferencial con la mayor jerarquía, sea una ecuación diferencial lineal cuya solución ya es conocida, este procedimiento es conocido como aproximación asintótica.

Sea la ecuación de oscilador lineal disipativo con forzamiento externo:

$$\ddot{\xi} + \gamma\dot{\xi} + \omega^2\xi = f(t). \quad (4.1)$$

Supongamos que el comportamiento del oscilador que deseamos describir se parece al de la ecuación (4.1) más un forzamiento $H(\dot{\xi}, \xi, t)$ a orden ϵ , donde $\epsilon H(\dot{\xi}, \xi, t)$ es la diferencia entre la ecuación diferencial lineal y la ecuación diferencial no-lineal que describe al oscilador estudiado. Entonces la ecuación diferencial no-lineal que deseamos estudiar es la siguiente:

$$\ddot{\xi} + \gamma\dot{\xi} + \omega^2\xi + \epsilon H(\dot{\xi}, \xi, t) = f(t). \quad (4.2)$$

En principio no sabemos cómo es la función $H(\dot{\xi}, \xi, t)$ pero sabemos que está conformada por términos no lineales. Por lo tanto, podemos expresar como un polinomio de términos no-lineales en la posición y velocidad, ξ y $\dot{\xi}$ respectivamente ,

$$\begin{aligned} H(\dot{\xi}, \xi, t) = & a_{10}(t)\xi + a_{01}(t)\dot{\xi} \\ & + a_{20}(t)\xi^2 + a_{11}(t)\xi\dot{\xi} + a_{02}(t)\dot{\xi}^2 \\ & + a_{30}(t)\xi^3 + a_{21}(t)\xi^2\dot{\xi} + a_{12}(t)\xi\dot{\xi}^2 + a_{03}(t)\dot{\xi}^3 \\ & + \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde los términos $a_{10}(t)$ y $a_{01}(t)$ representan términos de variación paramétrica. Substituyendo la ecuación (4.3) en (4.2)

$$\ddot{\xi} + \gamma\dot{\xi} + \omega^2\xi + \epsilon[a_{10}(t)\xi + a_{01}(t)\dot{\xi} + a_{20}(t)\xi^2 + a_{11}(t)\xi\dot{\xi} + a_{02}(t)\dot{\xi}^2 + a_{30}(t)\xi^3 + a_{21}(t)\xi^2\dot{\xi} + a_{12}(t)\xi\dot{\xi}^2 + a_{03}(t)\dot{\xi}^3 + \dots] = f(t) \quad (4.4)$$

Expresándolo de esta manera el problema resulta ser muy ambicioso pero al considerar amplitudes de oscilación pequeñas, obliga que los términos de

orden superior de ξ y $\dot{\xi}$ tiendan a cero, por lo que nos quedaremos con términos hasta orden 3 en ξ y $\dot{\xi}$. Para hacer el problema manejable, supondremos que no hay términos paramétricos, es decir los parámetros a_{ij} no dependen del tiempo, quedándonos así la ecuación diferencial de un oscilador no-lineal hasta orden 3 no paramétrico,

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \gamma\dot{\xi} + \omega^2\xi + \epsilon[a_{20}\xi^2 + a_{11}\xi\dot{\xi} + a_{02}\dot{\xi}^2 \\ + a_{30}\xi^3 + a_{21}\xi^2\dot{\xi} + a_{12}\xi\dot{\xi}^2 + a_{03}\dot{\xi}^3] = f(t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Expresando la ecuación (4.5) como un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta \\ \dot{\eta} &= -\omega^2\xi - \gamma\eta + f(t) - \epsilon[a_{20}\xi^2 + a_{11}\xi\eta + a_{02}\eta^2 \\ &\quad + a_{30}\xi^3 + a_{21}\xi^2\eta + a_{12}\xi\eta^2 + a_{03}\eta^3]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ahora escribiremos la solución particular de la ecuación (4.6) como una función tal que si ϵ es igual a cero nos quedemos con la ecuación de un oscilador lineal. Para esto supondremos que el forzamiento externo es sinusoidal $f(t) = F \sin(\Omega t)$, donde la solución particular del sistema de ecuaciones diferenciales lineales asociada a la ecuación (4.1) con este forzamiento está dada como:

$$\begin{aligned} \xi_l(t) &= \mathcal{A} \sin(\Omega t) + \mathcal{B} \cos(\Omega t) \\ \eta_l(t) &= \Omega \mathcal{A} \cos(\Omega t) - \Omega \mathcal{B} \sin(\Omega t). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Entonces tomaremos como solución a la ecuación (4.6) como un símil a la solución lineal salvo que los parámetros dependen del tiempo, quedando:

$$\begin{aligned} \xi_p(t) &= A_0(t) \sin(\Omega t) + B_0(t) \cos(\Omega t) \\ \eta_l(t) &= \Omega A_0(t) \cos(\Omega t) - \Omega B_0(t) \sin(\Omega t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

para facilitar los cálculos tomaremos a θ como el argumento, $\theta = \Omega t$. Para expresar la ecuación (4.6) en términos de ξ_p y η_l , desarrollamos las derivadas

de la ecuación (4.8)

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_p(t) &= \dot{A}_0(t) \sin \theta + \dot{B}_0(t) \cos \theta \\
&\quad + \Omega[A_0(t) \cos \theta - B_0(t) \sin \theta] \\
\dot{\eta}_p(t) &= \Omega \dot{A}_0(t) \cos \theta - \Omega \dot{B}_0(t) \sin \theta \\
&\quad - \Omega^2[A_0(t) \sin \theta + B_0(t) \cos \theta]
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Substituyendo las ecuaciones (4.8) y (4.9) en el sistema de ecuaciones diferenciales (4.6):

$$\begin{aligned}
&[\dot{A}_0(t) \sin \theta + \dot{B}_0(t) \cos \theta] + \Omega[A_0(t) \cos \theta - B_0(t) \sin \theta] \\
&\quad = \Omega[A_0(t) \cos \theta - B_0(t) \sin \theta] \\
&\Omega[\dot{A}_0(t) \cos \theta - \dot{B}_0(t) \sin \theta] - \Omega^2[A_0(t) \sin \theta + B_0(t) \cos \theta] \\
&\quad = -\omega^2[A_0(t) \sin \theta + B_0(t) \cos \theta] - \gamma\Omega[A_0(t) \cos \theta - B_0(t) \sin \theta] \\
&\quad + F \sin \theta - \epsilon H(\eta, \xi)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Aproximando $A_0(t) \simeq \mathcal{A}$ y $B_0(t) \simeq \mathcal{B}$, en un periodo de tiempo $2\pi/\Omega$ y considerando que la ecuación (4.7) es solución de la ecuación lineal (4.1), podemos reducir el sistema de ecuaciones (4.10) como:

$$\begin{aligned}
[\dot{A}_0(t) \sin \theta + \dot{B}_0(t) \cos \theta] &= 0 \\
\Omega[\dot{A}_0(t) \cos \theta - \dot{B}_0(t) \sin \theta] &= -\epsilon H(\eta, \xi)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Despejando los términos \dot{A}_0 y \dot{B}_0 :

$$\begin{aligned}
\dot{A}_0 &= -\frac{\epsilon}{2\Omega} H(\eta, \xi) \cos \theta \\
\dot{B}_0 &= \frac{\epsilon}{2\Omega} H(\eta, \xi) \sin \theta
\end{aligned} \tag{4.12}$$

donde podemos observar que las variaciones están escaladas por ϵ . Hay que notar que la aproximación $A_0(t) \simeq \mathcal{A}$ y $B_0(t) \simeq \mathcal{B}$ es válida en periodos de tiempo cortos, debido a que las derivadas de \dot{A}_0 y \dot{B}_0 son de orden ϵ .

Para continuar usaremos la teoría de la promediación para la resolución de ecuaciones diferenciales perturbadas. Consiste en estudiar el comportamiento promedio de las variaciones de parámetros en un ciclo de la solución lineal para estimar es la variación promedio, es decir nos interesa calcular $\dot{\bar{A}}_0$ y $\dot{\bar{B}}_0$.

$$\dot{\bar{A}}_0 = \frac{1}{\frac{2\pi}{\Omega}} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \dot{A}_0 dt \quad , \quad \dot{\bar{B}}_0 = \frac{1}{\frac{2\pi}{\Omega}} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \dot{B}_0 dt \quad (4.13)$$

Hay que notar que la variación de los parámetros \dot{A}_0 y \dot{B}_0 están escaladas por ϵ , dando una escala temporal. Substituyendo \dot{A}_0 y \dot{B}_0 en (4.13):

$$\dot{\bar{A}}_0 = -\frac{\epsilon}{4\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} H(\eta, \xi) \cos \theta dt \quad (4.14)$$

$$\dot{\bar{B}}_0 = \frac{\epsilon}{4\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} H(\eta, \xi) \sin \theta dt \quad (4.15)$$

Por lo que hay que ver como es $H(\eta, \xi)$,

$$\begin{aligned} H(\dot{\xi}, \xi) = & a_{2,0}(\mathcal{A}^2 \sin^2 \theta + 2\mathcal{A}\mathcal{B} \cos \theta \sin \theta + \mathcal{B}^2 \cos^2 \theta) \\ & + a_{1,1}(-\mathcal{A}\mathcal{B} \sin^2 \theta + (\mathcal{A}^2 - \mathcal{B}^2) \cos \theta \sin \theta + \mathcal{A}\mathcal{B} \cos^2 \theta) \\ & + a_{0,2}(\mathcal{B}^2 \sin^2 \theta - 2\mathcal{A}\mathcal{B} \cos \theta \sin \theta + \mathcal{A}^2 \cos^2 \theta) \\ & + a_{3,0}(\mathcal{A}^3 \sin^3 \theta + 3\mathcal{A}^2\mathcal{B} \cos \theta \sin^2 \theta \\ & \quad + 3\mathcal{A}\mathcal{B}^2 \cos^2 \theta \sin \theta + \mathcal{B}^3 \cos^3 \theta) \\ & + a_{2,1}(-\mathcal{A}^2\mathcal{B} \sin^3 \theta + (\mathcal{A}^3 - 2\mathcal{A}\mathcal{B}^2) \cos \theta \sin^2 \theta \\ & \quad + (2\mathcal{A}^2\mathcal{B} - \mathcal{B}^3) \cos^2 \theta \sin \theta + \mathcal{A}\mathcal{B}^2 \cos^3 \theta) \\ & + a_{1,2}(\mathcal{A}\mathcal{B}^2 \sin^3 \theta + (-2\mathcal{A}^2\mathcal{B} + \mathcal{B}^3) \cos \theta \sin^2 \theta \\ & \quad + (\mathcal{A}^3 - 2\mathcal{A}\mathcal{B}^2) \cos^2 \theta \sin \theta + \mathcal{A}^2\mathcal{B} \cos^2 \theta) \\ & + a_{0,3}(-\mathcal{B}^3 \sin^3 \theta + 3\mathcal{A}\mathcal{B}^2 \cos \theta \sin^2 \theta \\ & \quad - 3\mathcal{A}^2\mathcal{B} \cos^2 \theta \sin \theta + \mathcal{A}^3 \cos^2 \theta) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Antes de continuar conviene observar los términos que no contribuyen en la integración o su integral es nula, para facilitar los cálculos agregamos la tabla 4.1:

Potencia	Coefficientes (l, m)	$\int_0^{2\pi/\Omega} \sin^l(\Omega t) \cos^m(\Omega t) dt$
1	(1, 0)	0
	(0, 1)	0
2	(2, 0)	π/Ω
	(1, 1)	0
	(0, 2)	π/Ω
3	(3, 0)	0
	(2, 1)	0
	(1, 2)	0
	(0, 3)	0
4	(4, 0)	$3\pi/4\Omega$
	(3, 1)	0
	(2, 2)	$\pi/4\Omega$
	(1, 3)	0
	(0, 4)	$3\pi/4\Omega$

Tabla 4.1: Tabla de integrales de las funciones trigonométricas $\sin^l \theta \cos^m \theta$ sobre un ciclo del forzamiento $2\pi/\Omega$.

Introduciendo a $\mathbb{A}^2 = \mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2$, que es la amplitud de oscilación del sistema no perturbado, podemos escribir las variaciones promedio de los parámetros como:

$$\dot{\bar{A}}_0 = -\frac{\epsilon \mathbb{A}^2}{16\Omega} (\mathcal{A}(a_{21} + 3a_{03}) + \mathcal{B}(3a_{30} + a_{12})) \quad (4.17)$$

$$\dot{\bar{B}}_0 = \frac{\epsilon \mathbb{A}^2}{16\Omega} (\mathcal{A}(3a_{30} + a_{12}) - \mathcal{B}(a_{21} + 3a_{03})) \quad (4.18)$$

Para un mejor entendimiento físico del oscilador perturbado, conviene pasar coordenadas polares, amplitud \mathbb{A} y fase ϕ

$$\begin{aligned} A_0 &= \mathbb{A} \sin \phi \\ B_0 &= \mathbb{A} \cos \phi \end{aligned} \quad (4.19)$$

entonces, sus derivadas son:

$$\begin{aligned} \dot{A}_0 &= \dot{\mathbb{A}} \sin \phi + \dot{\theta} \mathbb{A} \cos \phi \\ \dot{B}_0 &= \dot{\mathbb{A}} \cos \phi - \dot{\theta} \mathbb{A} \sin \phi \end{aligned} \quad (4.20)$$

Poniendo el sistema respecto a las derivadas de la amplitud $\dot{\mathbb{A}}$ y la fase $\dot{\phi}$:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbb{A}} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} -\mathbb{A} \sin \phi & -\mathbb{A} \cos \phi \\ -\cos \phi & \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{A}_0 \\ \dot{B}_0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Substituyendo (4.17) y (4.18) en (4.21), obtenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbb{A}} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = -\frac{\epsilon \mathbb{A}^2}{16\Omega} \begin{pmatrix} \mathbb{A}(a_{21} + 3a_{03}) \\ (3a_{30} + a_{12}) \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Hay que prestar atención a que los términos no-lineales que contribuyen a la modificación de cada parámetro. La amplitud de oscilación en un periodo $2\pi/\Omega$ se modifican por a_{21} y a_{03} correspondientes a los términos no-lineales $\xi^2\eta$ y η^3 . Y al desfaseamiento se modifican por a_{30} y a_{12} correspondientes a los términos no-lineales ξ^3 y $\xi\eta^2$.

Al resolver la ecuación (4.22), obtenemos las correcciones a primer orden para los parámetros de la solución del sistema no perturbado, es decir \mathbb{A} y ϕ se convierten a $\tilde{\mathbb{A}}$ y $\tilde{\phi}$ cuyas expresiones son:

$$\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{A} - \frac{\epsilon \mathbb{A}^3 (a_{21} + 3a_{03})}{16\Omega} t \quad (4.23)$$

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{\epsilon \mathbb{A}^2 (3a_{30} + a_{12})}{16\Omega} t \quad (4.24)$$

donde ϕ corresponden a la fase de la solución particular lineal. Siendo así, se escribe la aproximación de la solución del sistema perturbado como:

$$\xi = \mathbb{A} \left(1 - \frac{\epsilon \mathbb{A}^2 (a_{21} + 3a_{03})}{16\Omega} t \right) \cos \left(\left(\Omega + \frac{\epsilon \mathbb{A}^2 (3a_{30} + a_{12})}{16\Omega} \right) t - \phi_0 \right) \quad (4.25)$$

Se puede reescribir:

$$\xi = \tilde{\mathbb{A}} \cos(\Omega' t - \phi_0) \quad (4.26)$$

con Ω' la frecuencia de oscilación promedio ante un forzamiento periódico de frecuencia Ω , cuya expresión es:

$$\Omega' = \Omega + \frac{\epsilon \mathbb{A}^2 (3a_{30} + a_{12})}{16\Omega} \quad (4.27)$$

Comprendemos a Ω' como un corrimiento de la frecuencia de la respuesta proporcional al cuadrado de la amplitud, dependiendo de los términos no-lineales a_{30} y a_{12} .

4.1.0.1. Ejemplo con el oscilador modelado por la ecuación de *Duffin*.

Ya teniendo la forma de las soluciones particulares de sistemas perturbados, dada la ecuación (4.26) falta explicar cuál es el significado físico de estas variaciones para el sistema de osciladores. Tomaremos por ejemplo el oscilador no lineal modelado por la ecuación de *Duffin*,

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x - \epsilon \lambda x^3 = F \sin(\Omega t). \quad (4.28)$$

Reconociendo los términos no-lineales de la ecuación (4.28) con la ecuación (4.5), vemos que el único término distinto de cero es el $a_{30} = -\lambda$. Como $a_{21} = a_{03} = 0$, tenemos que $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{A}$, es decir, amplitud promedio es constante en ciclos de forzamiento. Por lo anterior, la solución es:

$$x = \mathbb{A} \cos(\Omega' t - \phi_0) \quad (4.29)$$

donde Ω' se expresa como:

$$\Omega' = \Omega - \frac{3\epsilon\lambda\mathbb{A}^2}{16\Omega} \quad (4.30)$$

Sí λ es positiva a mayor amplitud de oscilación la respuesta aumenta su frecuencia de oscilación y si λ es negativa a mayor amplitud de oscilación la respuesta disminuye la frecuencia de oscilación.

Ahora, considerando la amplitud de la solución sin la perturbación, tenemos:

$$\mathbb{A}^2 = \frac{F^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2} \quad (4.31)$$

Y tomando la solución en el oscilador perturbado solo cambia Ω por Ω' y substituyendo Ω' con la ecuación (4.30), obtenemos:

$$\mathbb{A}^2 = \frac{F^2}{\left(\omega^2 - \left(\Omega - \frac{3\epsilon\lambda\mathbb{A}^2}{16\Omega}\right)^2\right)^2 + \gamma^2\left(\Omega - \frac{3\epsilon\lambda\mathbb{A}^2}{16\Omega}\right)^2} \quad (4.32)$$

La ecuación (4.32) la podemos expresar como un polinomio en términos de \mathbb{A} , y despreciando los términos mayores a ϵ orden uno obtenemos:

$$\frac{3\epsilon\lambda}{8}(2(\Omega^2 - \omega^2) + \gamma^2)\mathbb{A}^4 + ((\Omega^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2)\mathbb{A}^2 = F^2 \quad (4.33)$$

que es un polinomio cuadrático en \mathbb{A}^2 , expresándolo como:

$$\alpha\mathbb{A}^4 + \beta\mathbb{A}^2 - F^2 = 0. \quad (4.34)$$

Podemos expresar a \mathbb{A} ,

$$\mathbb{A} = \sqrt{\frac{-((\Omega^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2) \pm \sqrt{((\Omega^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2)^2 + \frac{3\epsilon\lambda}{8}(2(\Omega^2 - \omega^2) + \gamma^2)F^2}}{\frac{3\epsilon\lambda}{4}(2(\Omega^2 - \omega^2) + \gamma^2)}}} \quad (4.35)$$

Para obtener una mayor claridad sobre la dependencia de la amplitud de oscilación de respuesta \mathbb{A} contra la de forzamiento F , supongamos que $\Omega \rightarrow \omega$ de tal manera que $(\Omega^2 - \omega^2)^2$ es despreciable contra $\Omega^2 - \omega^2$ y $\gamma \rightarrow 0$, entonces:

$$\mathbb{A} = \sqrt{\frac{F}{2\sqrt{\left(\frac{3\epsilon\lambda}{4}(\Omega^2 - \omega^2)\right)}}} \quad (4.36)$$

En la ecuación (4.36) se puede asociar la amplitud de respuesta del oscilador no-lineal como $\mathbb{A} \sim \sqrt{F}$ a diferencia del caso del oscilador lineal donde las amplitudes son proporcionales (4.31).

Se puede concluir que podemos usar como indicadores para un oscilador no-lineal modelado por *Duffin* comparando con la solución lineal de un oscilador lineal amortiguado.

- Uno, el corrimiento de la frecuencia de la respuesta respecto al cuadrado de su amplitud, ecuación (4.30).
- Dos, la amplitud de respuesta \mathbb{A} no es lineal respecto a la amplitud de forzamiento, ecuación (4.33).

Podemos hacer uso de estos indicadores a osciladores no-lineales, en los cuales se pueda expandir en serie de Taylor el término no-lineal como una perturbación con tamaño ϵ . Explorando las soluciones en forma asintótica.

Observemos que los indicadores obtenidos para las soluciones de la ecuación de *Duffin* vendrían a tener la misma forma si exploramos un caso de no-linealidad con términos $a_{ij} \neq 0$ de las ecuaciones (4.21) y (4.22).

Por estos motivos, podemos usar como indicadores de osciladores no-lineales asintóticos a un oscilador lineal, el corrimiento de frecuencia y la potencia del cociente de las amplitudes.

4.2. Implementación de indicadores

En la sección anterior se obtuvieron dos indicadores del comportamiento promedio de un oscilador no-lineal con oscilaciones pequeñas. Se esperaría un comportamiento más exacerbado en los registros del edificio, siendo que los registros son en eventos sísmicos. O pensando en forma conservadora, se esperaría distinguir cuándo los indicadores nos muestra un inicio de comportamiento no-lineal.

Los indicadores, el corrimiento de frecuencia y la relación entre las amplitudes, fueron obtenidos para comportamientos promedios con forzamientos constantes. En el edificio, el forzamiento no es constante a lo largo del tiempo, pero por el capítulo anterior hemos obtenido los parámetros promedios de la ecuación diferencial que mejor aproxima a la oscilación lineal en de ventanas de tiempo. Por lo que se propone ver las correlaciones entre frecuencias y amplitudes de oscilación.

Suponiendo el comportamiento no-lineal, resultaría poco claro ver el corrimiento de frecuencias para cada componente espectral de la oscilación respecto al espectro del forzamiento. Considerando la relación de las amplitudes amplitudes de la oscilación con la de forzamiento es:

$$\mathbb{A}_\Omega^2 = \frac{F_\Omega^2}{(\omega^2 - \Omega'^2)^2 + \gamma^2 \Omega'^2} \quad (4.37)$$

con $\Omega' = \Omega - \frac{\epsilon \kappa \mathbb{A}^2}{16\Omega}$, donde $\kappa = 3a_{30} + a_{12}$ que esta en función de los términos no-lineales.

Entonces, si suponemos que hay un oscilador lineal con frecuencia ω' que aproxime al comportamiento del oscilador no-lineal en promedio en un lapso de tiempo, podemos aproximar $(\omega^2 - \Omega'^2)^2 + \gamma^2 \Omega'^2 \approx (\omega'^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2$, lo

cual tiene la siguiente lógica:

- Si el desplazamiento de frecuencias se interpreta por el desplazamiento de las amplitudes del espectro de frecuencias, el cual está relacionado con la frecuencia natural del oscilador ω , entonces se propone observar la variación de la frecuencia de natural del oscilador ω' que mejor aproxime al oscilador no-lineal respecto a la variación de la amplitud promedio en un lapso de tiempo dado.

Es decir, en vez de ver el corrimiento para cada frecuencia respecto a su amplitud correspondiente del espectro, aproximaremos con un desplazamiento de frecuencias en promedio, y este desplazamiento de frecuencias se puede ver como un desplazamiento de la frecuencia natural de un oscilador lineal.

En el capítulo anterior obtuvimos las frecuencias de oscilación natural respecto a osciladores lineales que mejor aproximaban al comportamiento dinámico del registro de datos del edificio. Siendo que tenemos un registro de ventanas de tiempo con las amplitudes promedio y frecuencias, podemos ver la dispersión de amplitud *rms* y las frecuencias.

Las gráficas 4.1a a la 4.2b son las dispersiones de las frecuencias naturales de un oscilador lineal que se asemeja a la dinámica contra la amplitud *rms* de la ventana correspondiente. En estas gráficas están concentradas todas las ventanas de los eventos sísmicos estudiados.

Con estas gráficas podríamos empezar a dar cierta certidumbre sobre la contribución de términos no-lineales a la oscilación del edificio. Por lo que hay que ver el otro indicador de oscilación no-lineal, el comportamiento de la amplitud de respuesta respecto la del forzamiento. Con este motivo representamos en las gráficas 4.3a a 4.3d el logaritmo de la amplitud *rms* de la respuesta contra la amplitud *rms* del forzamiento, marcando en rojo la amplitud de respuesta promedio a una amplitud de forzamiento.

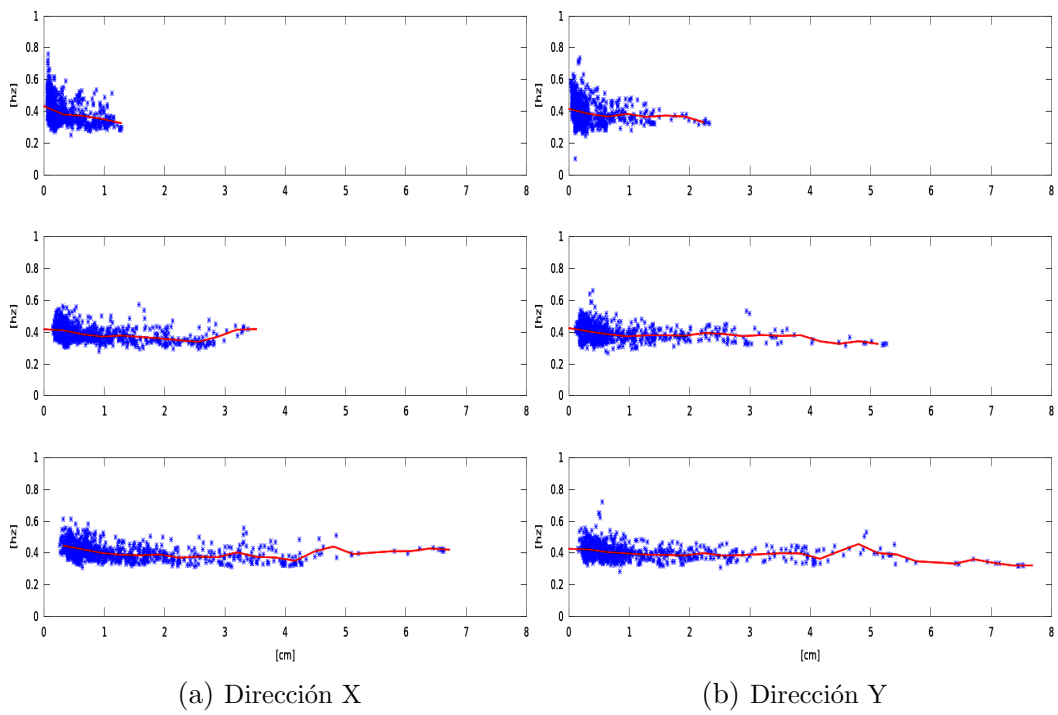


Figura 4.1: Dispersión de frecuencia temporal $\omega/2\pi$ contra la amplitud rms para los niveles N2, N3 y N4 ordenadas verticalmente. En azul la dispersión y en rojo la frecuencia promedio.

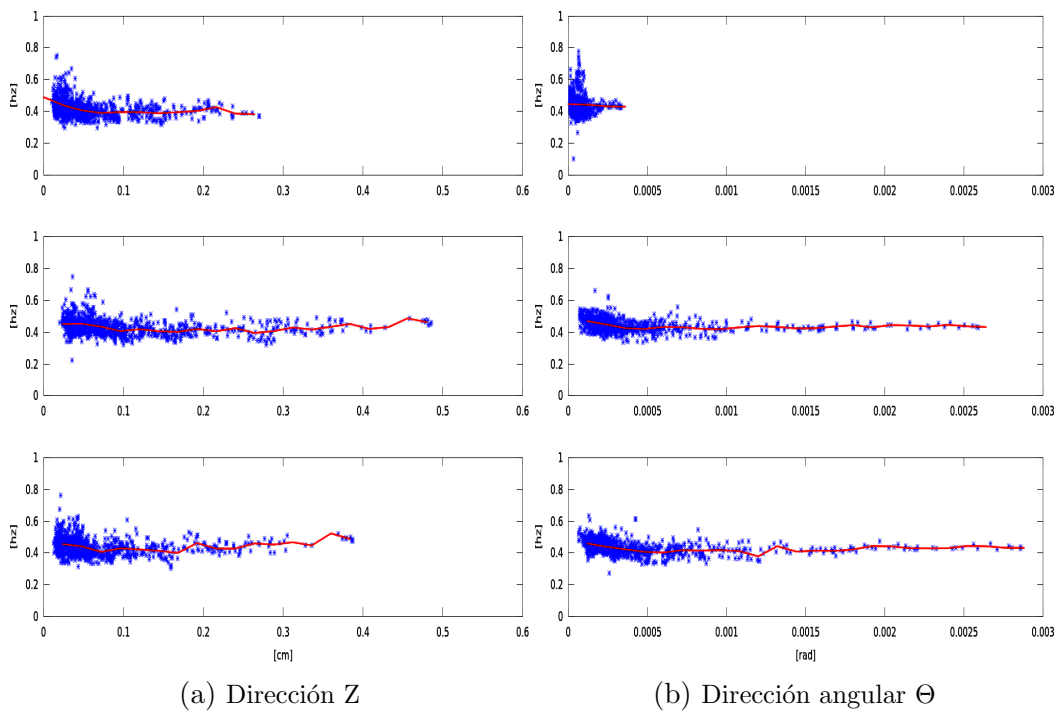


Figura 4.2: Dispersión de frecuencia temporal $\omega/2\pi$ contra la amplitud rms para los niveles N2, N3 y N4 ordenadas verticalmente. En azul la dispersión y en rojo la frecuencia promedio.

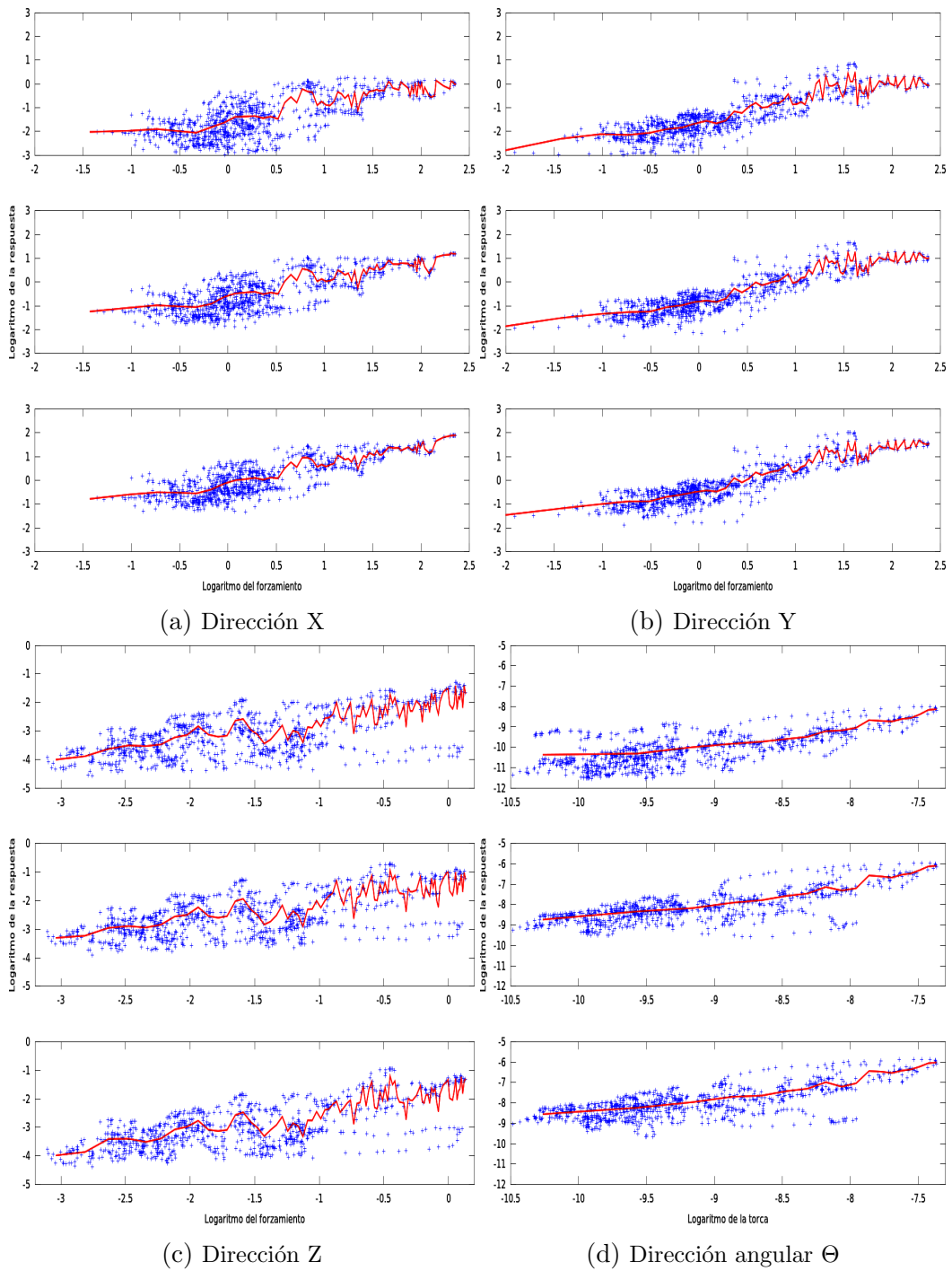


Figura 4.3: Dispersión del logaritmo de la amplitud rms de respuesta contra el logaritmo de la amplitud rms de forzamiento para los niveles N2, N3 y N4 ordenadas verticalmente. En azul la dispersión y en rojo la promedio⁸⁴

4.3. Resultados Preliminares

Las gráficas de las figuras 4.1, 4.2 y 4.3, ilustran el comportamiento no lineal de la oscilación de cada nivel. Pero es de nuestro interés no sólo mostrar la aportación de términos no-lineales a la dinámica sino poderla cuantificar.

Podemos aproximar rectas o parábolas al comportamiento promedio de las gráficas de las figuras 4.1 y 4.2. Pero el error asociado a aproximarlos con rectas o parábolas tienen el mismo orden de magnitud, es decir, no podemos distinguir si la desviación de la frecuencia es lineal o cuadrática respecto a la amplitud promedio. Por otro lado, no podemos dar una prueba formal sobre la contribución promedio de la no-linealidad a la dinámica de oscilación del edificio con este indicador, aunque muestre que hay desviación.

Por otro lado podemos aproximar por rectas las gráficas de la figura 4.3, donde la pendiente es la potencia con la cual se relacionan la amplitud de respuesta con la de forzamiento. Recordando que por propiedades del logaritmo, como estamos viendo la pendiente no importan los parámetros con los cuales se relacionen.

En la tabla 4.2 podemos observar que las pendientes o las potencias con las cuales se relacionan la respuesta y forzamiento difieren de la unidad, la cual corresponde al comportamiento lineal. Siendo así, podemos observar la respuesta en cada nivel sobre su no-linealidad al forzamiento en los eventos sísmicos.

Nivel	Pendiente			
	Dirección X	Dirección Y	Dirección Z	Dirección Θ
N2	0.618	0.743	0.684	0.842
N3	0.677	0.787	0.616	0.960
N4	0.744	0.819	0.746	0.932

Tabla 4.2: Relación de pendientes asociadas a la rectas que mejor aproximan al comportamiento del logaritmo del promedio de las amplitudes de respuesta contra el logaritmo de las amplitudes de forzamiento, de las gráficas de la figura 4.3.

Con estos resultados podemos hacer las siguientes observaciones:

- En las oscilaciones del desplazamiento horizontal se observa que en el nivel-2 las potencias entre forzamiento y respuesta se encuentran más alejadas de un comportamiento lineal. Cabe notar la peculiaridad que a ese nivel se encuentra la mayor reducción relativa de las área entre piso y piso.
- Comparando la relación de las potencias en las direcciones X y Y , se observa que la dirección Y está más cercana a una dinámica lineal respecto a la dirección X . Esto tiene sentido por las dimensiones de los niveles, la longitud de los pisos en la dirección Y es mayor que en la dirección X a partir del nivel-2. Es decir si escalamos los desplazamiento con las longitudes de los pisos en sus direcciones correspondientes, se puede entender que los desplazamientos en la dirección más larga son de menor amplitud y por consiguiente se exhibirán menos los efectos no-lineales.
- En los desplazamientos verticales, en Z , se observa un comportamiento no-lineal más claro que en la horizontal. Y un mayor efecto no-lineal al nivel-3, de acuerdo a los registros se observa un mayor desplazamiento.
- En el desplazamiento angular, en Θ , se observa el mismo comportamiento de menor linealidad al nivel-2 respecto a los niveles superiores, como se presenta en las oscilaciones de desplazamiento horizontal.

Capítulo 5

Conclusiones

Se presenta en este trabajo el primer intento de usar las nociones de una aproximación asintótica para analizar la dinámica del movimiento de un edificio bajo acción sísmica, con el desafío de no conocer la escala de amplitud en la cual varían los movimientos analizados.

En el capítulo 3 se muestra todo el desarrollo que se realizó para lograr una descripción lineal en ventanas de tiempo, del comportamiento del edificio al moverse, al considerar cuatro grados de libertad del movimiento, en los tres niveles superiores del edificio que fueron instrumentados. Este desarrollo se obtuvo como la mejor aproximación al movimiento, controlado por una ecuación diferencial ordinaria lineal *EDOL*, que permite describir el movimiento de los niveles seleccionados del edificio, en los intervalos de tiempo seleccionados. Se puede concluir que al aceptar variaciones pequeñas de parámetros es posible realizar un estudio perturbativo, recurriendo a las soluciones de una *EDOL*, con el fin de encontrar una primera corrección a la descripción de la dinámica del movimiento del edificio mediante ecuaciones diferenciales no lineales.

En el capítulo 3 se muestran los resultados obtenidos, al utilizar los eventos sísmicos que aparecen en el Apéndice A, con énfasis en dos características mecánicas: la amplitud promedio de oscilación y la frecuencia natural de oscilación de la ecuación diferencial ordinaria lineal, que posteriormente se

utilizan en el Capítulo 4.

En el Capítulo 4, después de un breve desarrollo asintótico que recurrió al método de promediación, se compararon las variaciones de los parámetros que controlan la respuesta dinámica la frecuencia natural de oscilación; a partir de ello, se puede observar que se requiere una primera corrección a la *EDOL*. Se destaca que el método de promediación, no permite diferenciar algunos de los términos no-lineales de tercer grado. Además, no fue posible distinguir un comportamiento claro, sobre las modificaciones en la frecuencia que podrían aparecer durante el movimiento de cada evento sísmico. Sin embargo, si fue posible encontrar que la potencia relativa entre las amplitudes del forzamiento y la respuesta, difieren de lo que se espera obtener en un comportamiento lineal. Al reflexionar si los términos no lineales provienen de una corrección a la energía potencial, se logró entender que la reducción en la magnitud de la amplitud del movimiento, respecto a la solución lineal, puede provenir de las condiciones de contorno impuestas a la integración numérica, donde el promedio y la deriva de la velocidad y posición sean nulas en los eventos sísmicos estudiados. Dado que estas condiciones son conocidas como una estabilidad asintótica de la estructura en el contexto de la ingeniería civil, y estas condiciones son atípicas. Se podría realizar el mismo estudio con las condiciones de contorno correctas: posiciones y velocidades iniciales y finales, lo cual requiere aumentar la información. Esto se podría realizar si se colocaran tres puntos de referencia en cada nivel estudiado y planta baja para comparar las posiciones relativas. Suponiendo aún, que los planos de cada nivel son rígidos.

Aunque en este trabajo no se logró encontrar una forma específica para realizar la corrección correspondiente al comportamiento no-lineal observado en los tres niveles del edificio estudiado, sí fue posible realizar dos comparaciones, que mostraron el comportamiento no-lineal, por cada grado de libertad de movimiento de cada nivel; esto indica que al aplicar el análisis realizado para este edificio para entender el comportamiento de otros edificios instrumentados, se pueden establecer correlaciones entre las respuestas no-lineales de cada nivel instrumentado, con la geometría del edificio. Así, con las observaciones finales del Capítulo 3, se sugiere que al existir una drástica reducción en el área de la planta del edificio, y con la idea de que ya existe una reglamentación para construcciones en el Distrito Federal, que busca edificaciones regulares, aparecen manifiestas las características no lineales en

la dinámica del edificio.

Para finalizar, se mencionan dos aspectos que no se consideraron en este trabajo:

- Aproximar por mínimos cuadrados a las formas normales, considerando desde un principio, soluciones de las ecuaciones diferenciales no-lineales, mediante el empleo de algún método asintótico, como por Poincaré-Lindsted.
- Considerar el grado de libertad del movimiento de bamboleo, que es el movimiento del plano de cada nivel, al girar alrededor de un eje centroidal horizontal de cada planta del edificio.

Aún sin tomar en consideración los dos aspectos anteriores, se puede concluir que esta tesis presenta una alternativa para estudiar la dinámica del movimiento de los niveles instrumentados de un edificio, en forma asintótica, a partir de una modelación lineal, la cual permite una primera aproximación para definir dos indicadores del comportamiento de niveles instrumentados del edificio en estudio, que resultaron mostrar características no-lineales.

Apéndice A

Gráficas de Resultados Lineales

A.1. Orientación

- X - al movimiento horizontal sobre el plano del edificio. Representado en gráficas con color rojo.
- Y - al movimiento perpendicular al plano del edificio. Representado en gráficas con color azul.
- Z - al movimiento vertical sobre el plano del edificio. Representado en gráficas con color magenta.
- Θ - al movimiento angular sobre el eje del edificio. Representado en gráficas con color verde.

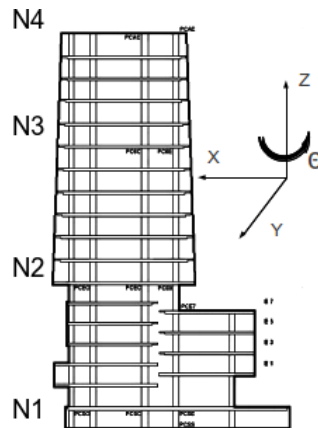
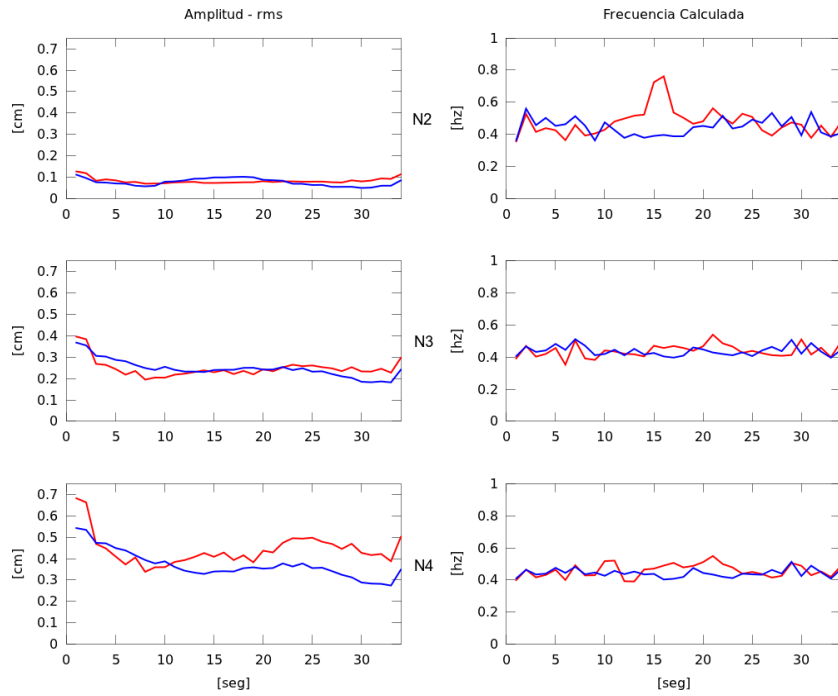


Figura A.1: Plano del edificio con las direcciones de los grados de libertad.

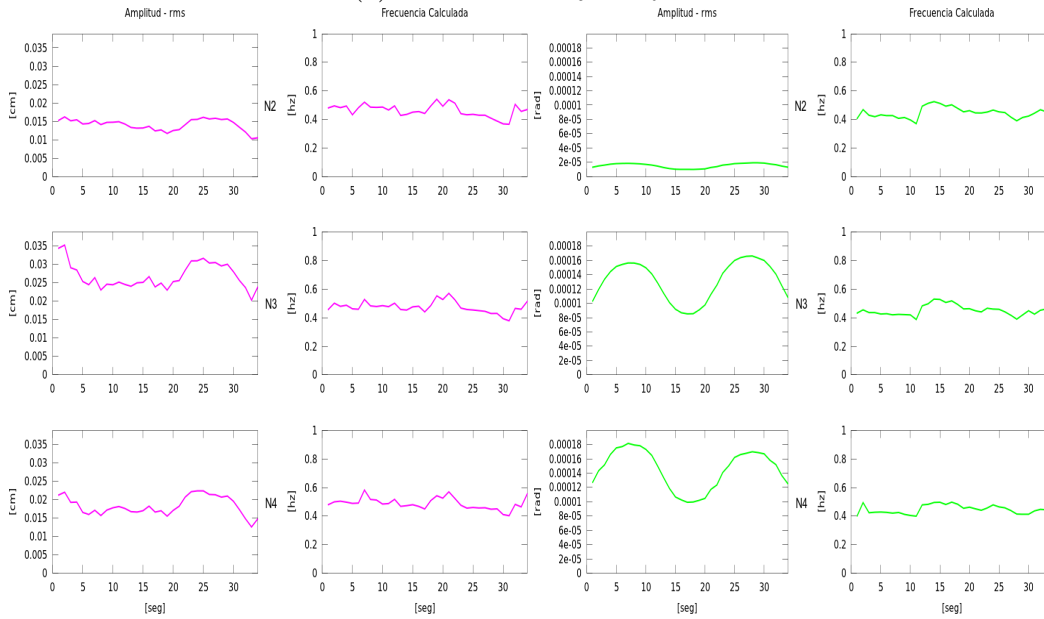
A.2. Magnitud de eventos

La fuente de los datos fue obtenida por Instituto de Geofísica, UNAM los cuales fueron integrados al registro de los acelerómetros.

- Sismo del 12 de Marzo de 2000 con magnitud de 6.4 escala de Richter.
- Sismo del 09 de Agosto de 2000 con magnitud de 7.0 escala de Richter.
- Sismo del 08 de Octubre de 2001 con magnitud de 6.1 escala de Richter.
- Sismo del 10 de Noviembre de 2001 con magnitud de 6.0 escala de Richter.
- Sismo del 18 de Abril de 2002 con magnitud de 6.3 escala de Richter.
- Sismo del 22 de Enero de 2003 con magnitud de 7.6 escala de Richter.
- Sismo del 01 de Enero de 2004 con magnitud de 6.3 escala de Richter.
- Replica del 01 de Enero de 2004 con magnitud de 5.8 escala de Richter.



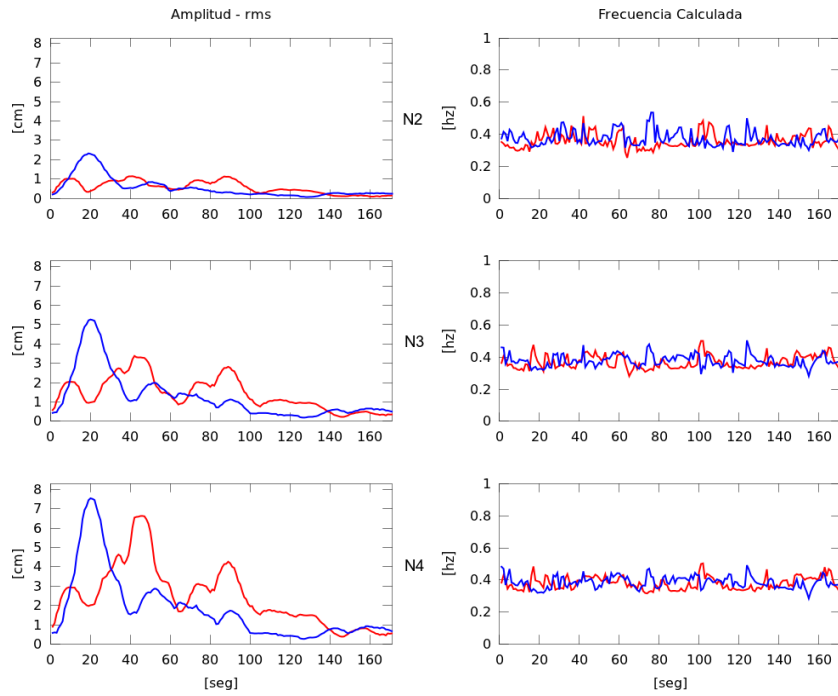
(a) Señales en los ejes X y Y .



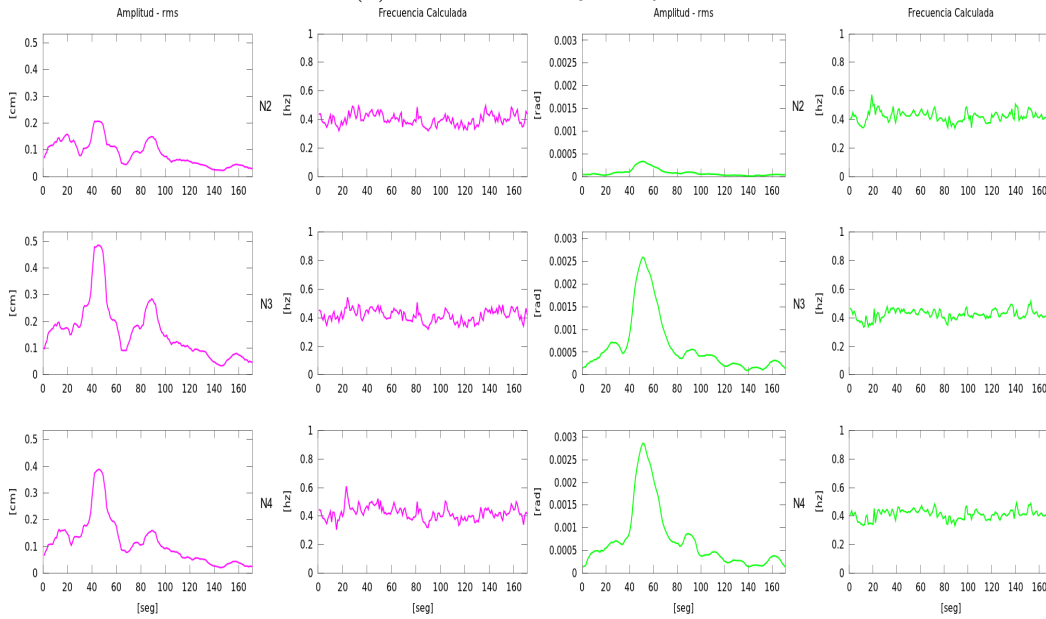
(b) Señales en el eje Z .

(c) Señales en el eje Θ .

Figura A.2: Señales temporales del sismo del 12 de marzo del 2000. Correspondiente a la amplitud *rms* y frecuencia temporal asociado a la frecuencia natural de un oscilador lineal.



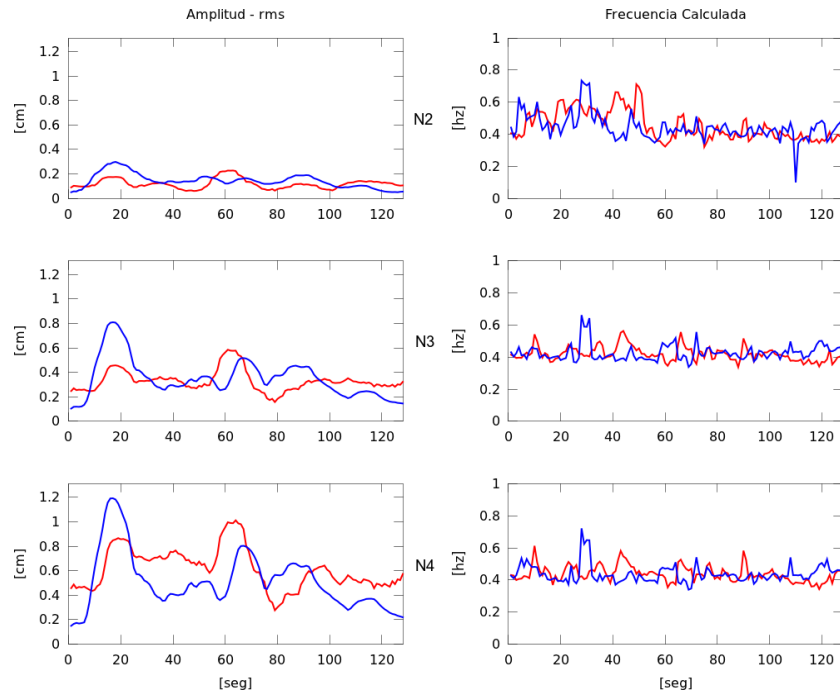
(a) Señales en los ejes X y Y.



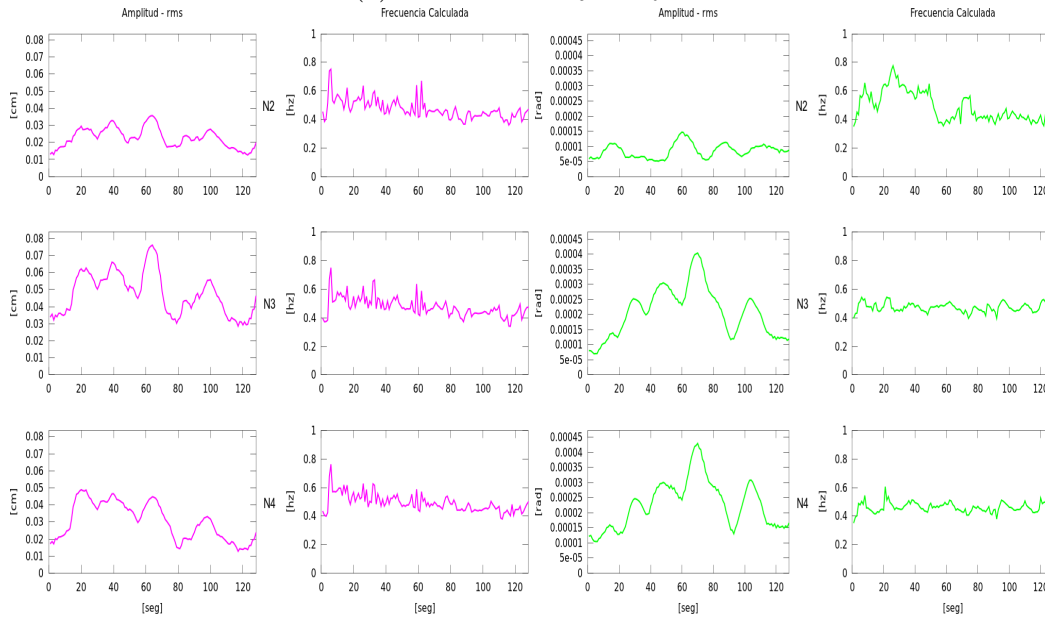
(b) Señales en el eje Z.

(c) Señales en el eje Θ .

Figura A.3: Señales temporales del sismo del 09 de agosto del 2000. Correspondiente a la amplitud *rms* y frecuencia temporal asociado a la frecuencia natural de un oscilador lineal.



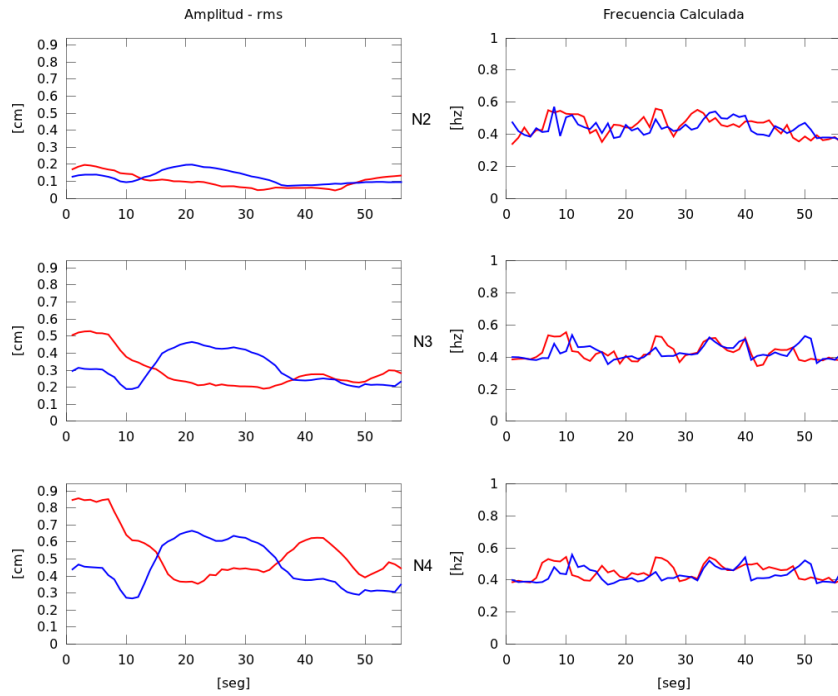
(a) Señales en los ejes X y Y .



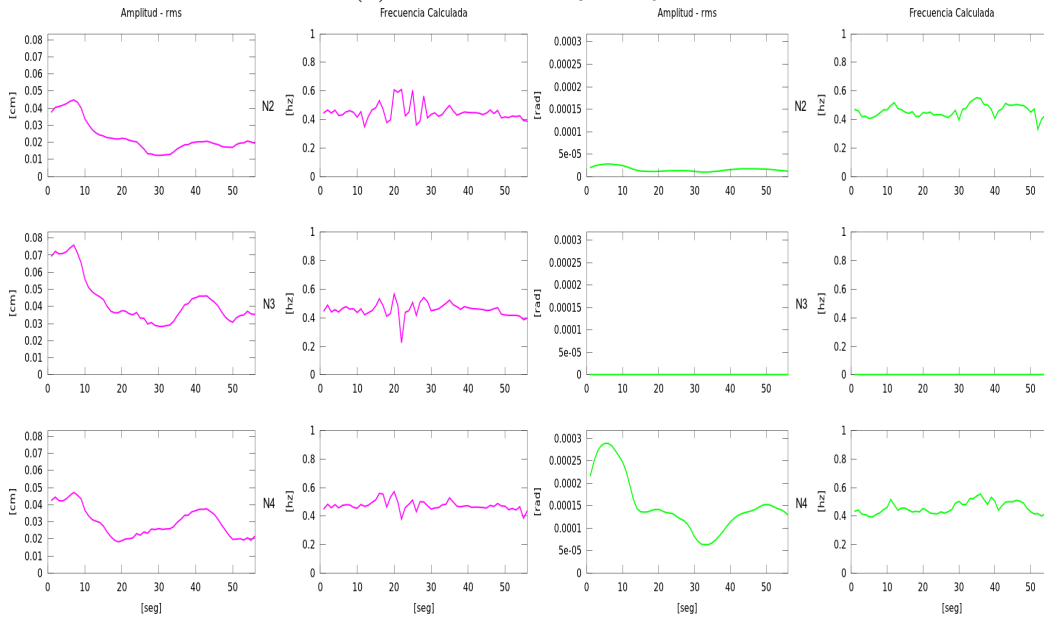
(b) Señales en el eje Z .

(c) Señales en el eje Θ .

Figura A.4: Señales temporales del sismo del del 08 de Octubre de 2001. Correspondiente a la amplitud *rms* y frecuencia temporal asociado a la frecuencia natural de un oscilador lineal.



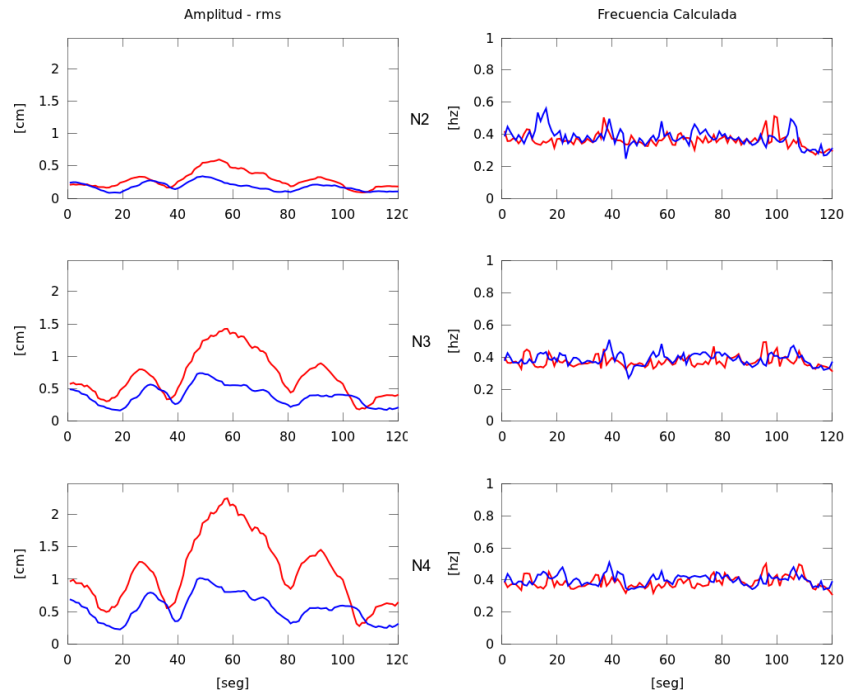
(a) Señales en los ejes X y Y .



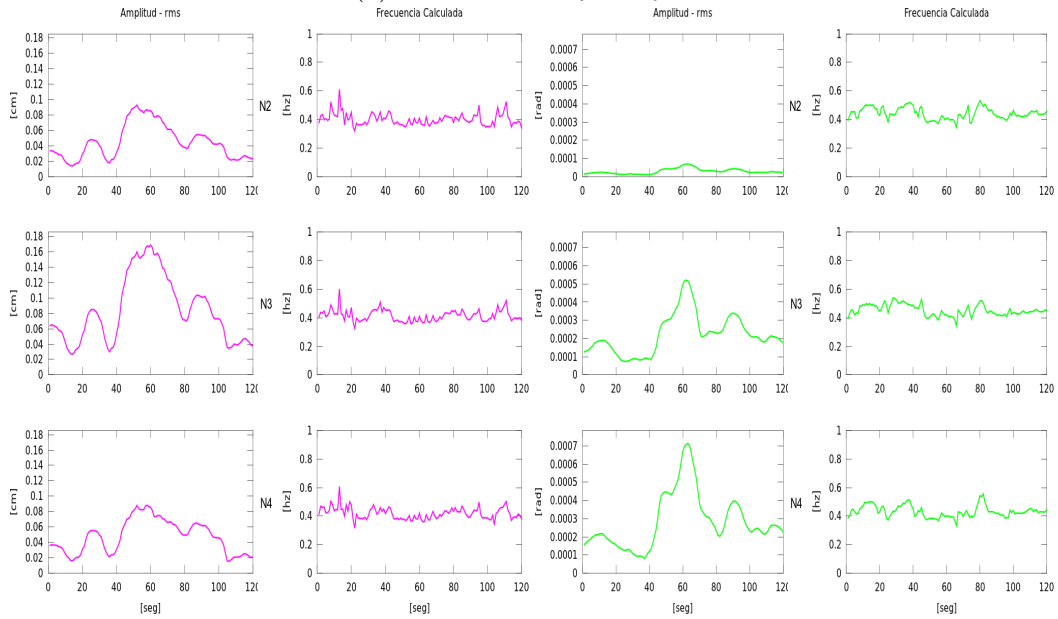
(b) Señales en el eje Z .

(c) Señales en el eje Θ .

Figura A.5: Señales temporales del sismo del 10 de Noviembre de 2001. Correspondiente a la amplitud *rms* y frecuencia temporal asociado a la frecuencia natural de un oscilador lineal.



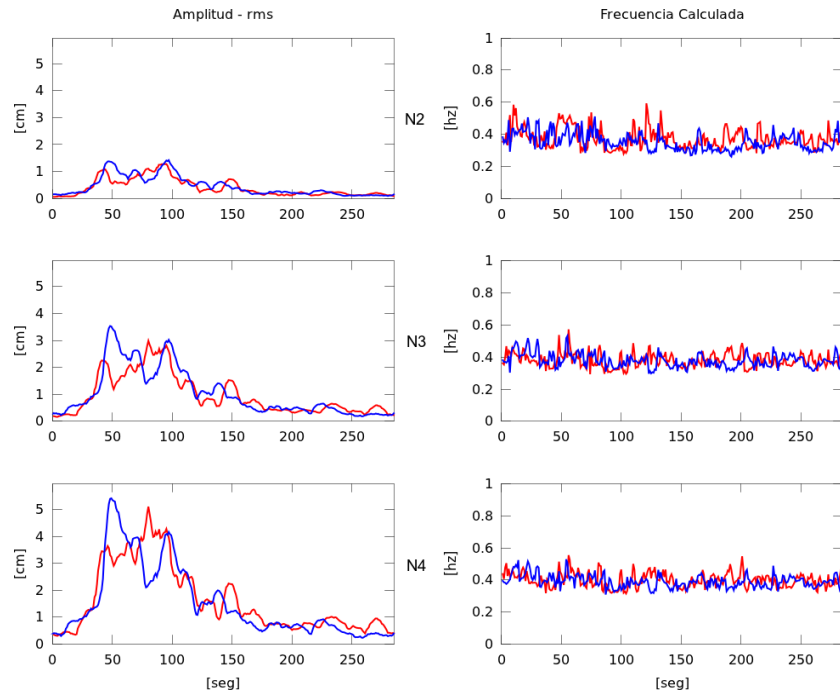
(a) Señales en los ejes X y Y .



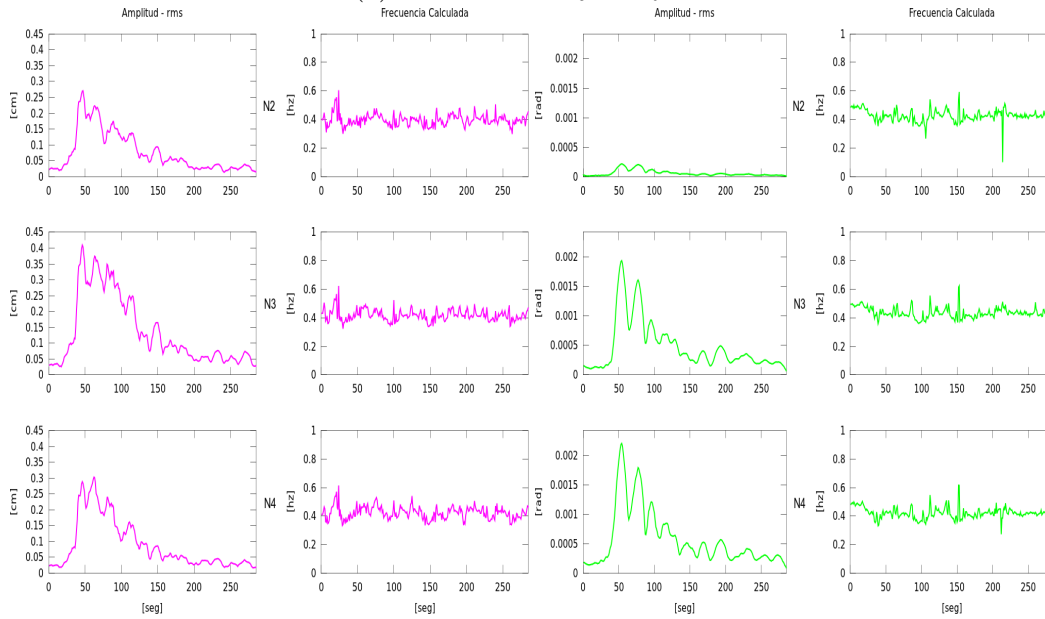
(b) Señales en el eje Z .

(c) Señales en el eje Θ .

Figura A.6: Señales temporales del sismo del 18 de Abril de 2002. Correspondiente a la amplitud rms y frecuencia temporal asociado a la frecuencia natural de un oscilador lineal.



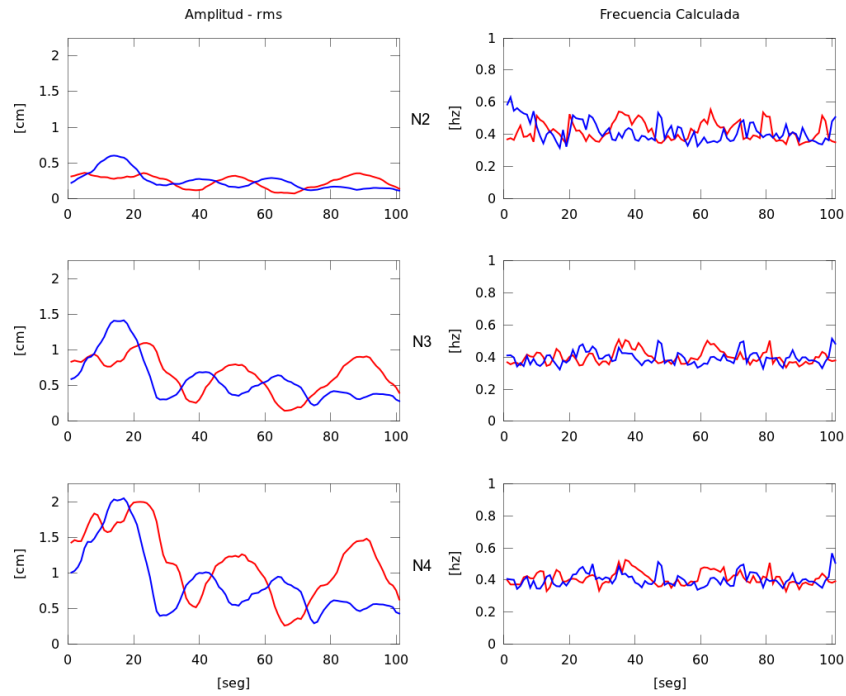
(a) Señales en los ejes X y Y .



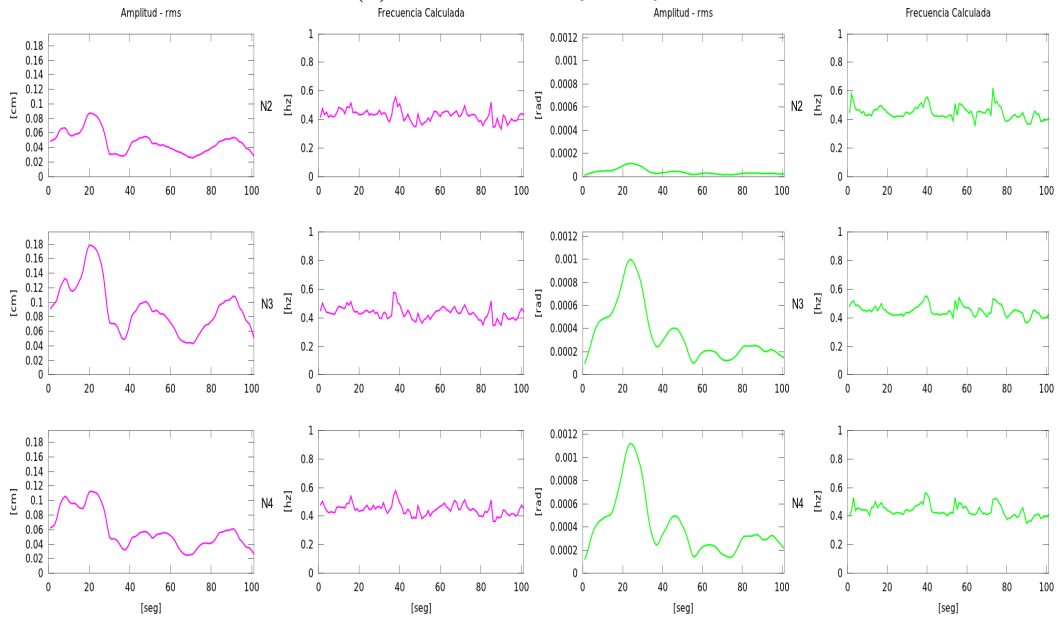
(b) Señales en el eje Z .

(c) Señales en el eje Θ .

Figura A.7: Señales temporales del sismo del 22 de Enero de 2003. Correspondiente a la amplitud rms y frecuencia temporal asociado a la frecuencia natural de un oscilador lineal.



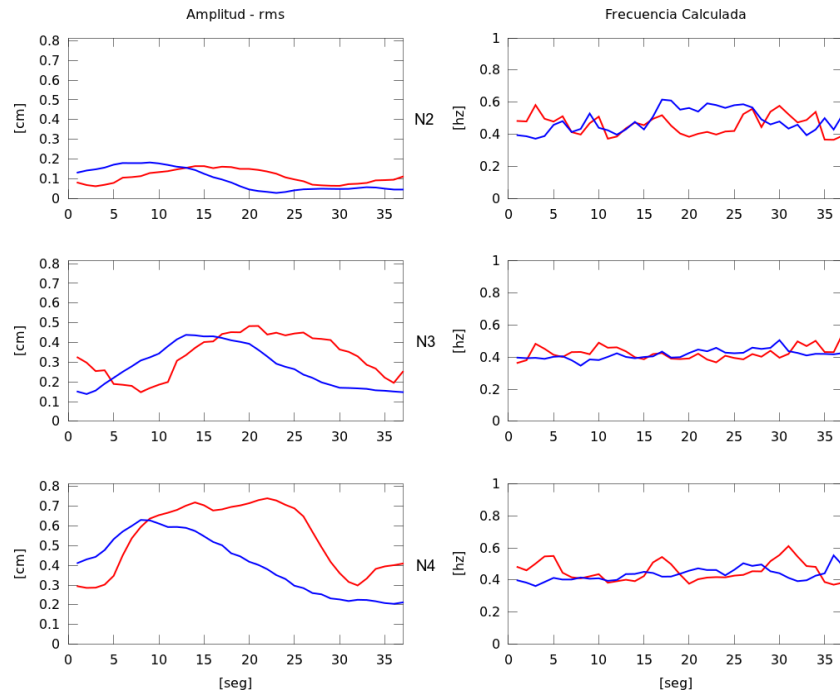
(a) Señales en los ejes X y Y .



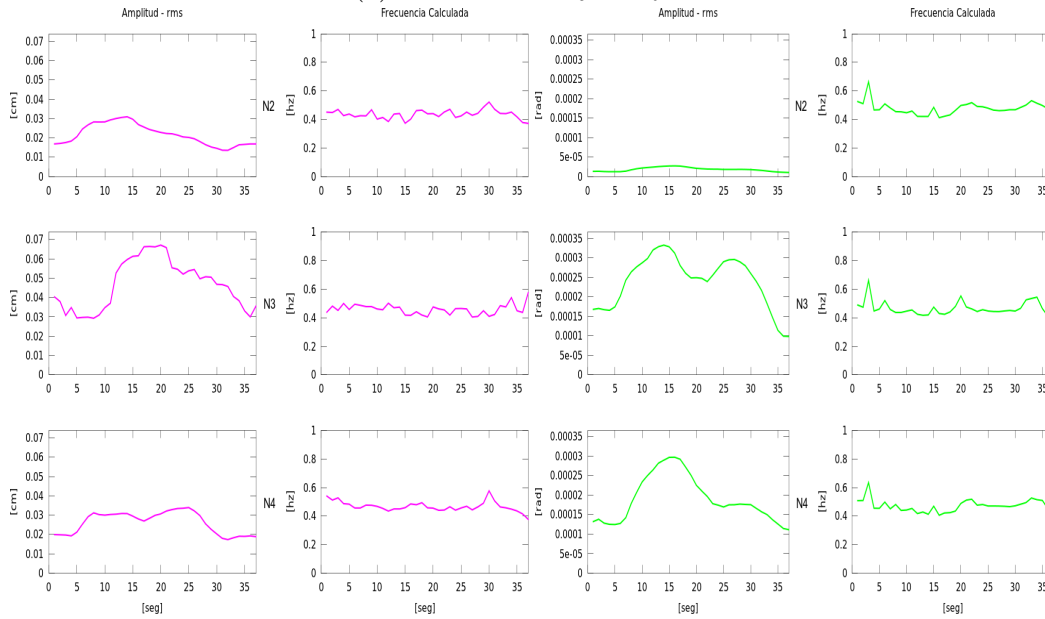
(b) Señales en el eje Z .

(c) Señales en el eje Θ .

Figura A.8: Señales temporales de la replica del 01 de Enero de 2004. Correspondiente a la amplitud *rms* y frecuencia temporal asociado a la frecuencia natural de un oscilador lineal.



(a) Señales en los ejes X y Y .



(b) Señales en el eje Z .

(c) Señales en el eje Θ .

Figura A.9: Señales temporales del sismo del 09 de agosto del 2000. Correspondiente a la amplitud *rms* y frecuencia temporal asociado a la frecuencia natural de un oscilador lineal.

Bibliografía

- [1] A.Aubanell,A.Benseny,A.Delshams, *Útiles básicos de cálculo numérico*, Editorial Labor, 1993.
- [2] Ingle, V.K. and Proakis, J.G., *Digital signal processing using matlab*, Cengage Learning, 2011.
- [3] Murià Vila, David, Aldama Sánchez, Daniel , Loera Pizarro, Santiago, *Alerta estructural para edificios instrumentados*, Revista Digital Universitaria [en línea] **vol.11** (2010), no. 1, Disponible en Internet: <http://www.revista.unam.mx/vol.11/num1/art02/int02.htm>.
- [4] Rodríguez-Cuevas, N. , *Response measurements of a tall building under seismic excitation*, PROCEEDINGS OF THE TENTH WORLD CONFERENCE ON EARTHQUAKE ENGINEERING 19-24 July 1992.
- [5] Rodríguez, N. y Quaas, R., *Respuesta estructural de un edificio instrumentado en la ciudad de méxico, durante sismos recientes*, Memorias del Seminario Internacional sobre Instrumentación Sísmica y uso de Elementos Disipadores de Energía en el Comportamiento Estructural, Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica.