UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LUGARES GEOMÉTRICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

GILBERTO SANTOS HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. EMMA LAM OSNAYA

2012

UNAM
Universidad Nacional
Autónoma de México

Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
Santos
Hernández
Gilberto
53731113
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
408027726

2. Datos del tutor
M. en C.
Osnaya
Lam
Emma

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Garciadiego
Hernández
Carlos

4. Datos del sinodal 2
M. en C.
de Oteyza
de Oteyza
Elena

5. Datos del sinodal 3
M. en C.
Linares
Altamirano
María Juana

6. Datos del sinodal 4
M. en C.
Argueta
Villamar
Héctor

7. Datos del trabajo escrito
Lugares Geométricos
146 p.
2012

Agradecimientos

A Juanita, mi mamá biológica, por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, por su cobijo, por sus grandes esfuerzos por educarme, por la motivación que me ha dado para ser una persona de bien.

A mis tíos: Pedro y Gloria a quienes considero mis padres adoptivos, a mi tío Lazarito por estar siempre a mi lado, brindándome todo su gran amor, entrega y dedicación, y sobre todo por tenerme mucha paciencia y por su comprensión durante estos años de mi vida. Todos ellos han sido muy importantes en mi desarrollo profesional. Mil gracias porque siempre están conmigo, en las buenas y en las malas.

A mi profesora, Emma Lam a quien considero mi mamá académica, por todo el apoyo y motivación durante toda la carrera y por la asesoría en el desarrollo de esta tesis. Por ser un ejemplo a seguir.

Al Programa Universitario México Nación Multicultural por la ayuda económica que me permitió realizar mis estudios y a la tutora del grupo al que estuve asignado, por las tutorías constantes, sin cuya ayuda no habría podido asegurar la permanencia y la culminación de mi carrera.

Índice General

Introducción

Un lugar geométrico es el conjunto de puntos que satisfacen determinadas condiciones, el cual visualmente se puede apreciar al dibujarlo en el espacio correspondiente.

En Geometría analítica es común encontrar alguno de los siguientes dos enunciados:

- Dada una ecuación, encontrar el conjunto de puntos que la satisfacen.
- Dadas ciertas condiciones, hallar la ecuación analítica que deben satisfacer los puntos que las cumplan.

En el primer caso, el lugar geométrico es precisamente el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación, en el segundo se trata de encontrar la ecuación analítica para tratar de identificar a todos los puntos que satisfacen las condiciones.

Comúnmente, cuando pensamos en un lugar geométrico lo primero que viene a nuestra mente es la definición de las cónicas, pues en los libros de texto, ellas son presentadas de manera genérica como un lugar geométrico, es decir, nos dicen cuáles son las propiedades, en términos de distancias, que deben satisfacerse, para posteriormente encontrar las ecuaciones generales que los puntos correspondientes satisfacen. Sin embargo, aún cuando las rectas, círculos, parábolas, elipses e hipérbolas resultan ser las curvas interesantes para una parte de la Geometría analítica, existen otros lugares geométricos que no resultan ser una de las curvas mencionadas, o bien, aunque la curva en cuestión sí es una de ellas, con las condiciones que deben satisfacer los puntos no es posible identificarla de manera inmediata.

Este trabajo tiene como fin presentar ejemplos, planteados de la segunda forma que mencionamos anteriormente. Así, todos ellos cuentan al inicio con las condiciones que debe cumplir un punto del plano para poder ser considerado un elemento del lugar geométrico. Una vez establecidas las condiciones, procedemos a encontrar la ecuación que debe satisfacerse, para identificar la curva. Una vez logrado nuestro objetivo, nos preguntamos si el lugar geométrico es toda la curva obtenida o solamente parte de ella, con el fin de determinar con exactitud el lugar geométrico.

Haremos uso de conceptos abordados en los distintos cursos de Geometría analítica, moderna y euclidiana del plan de estudios de la carrera de matemáticas (Ver Apéndice B, página 137) y por supuesto, echaremos mano de tantos desarrollos algebraicos como haga falta. En ocasiones, puede parecer engorroso, por la cantidad de cálculos, el desarrollo de un problema, sin embargo, hemos preferido hacerlo de esa manera, con el fin de que estén al alcance de cualquier estudiante.

Para tener una manera gráfica de comprobar los resultados obtenidos, usaremos el software Geolab, que es un laboratorio de Geometría que nos permite llevar a cabo las construcciones, definir una animación y ver cómo se modifica al ejecutarla, dibujando el lugar geométrico.

Una copia de Geolab puede obtenerse en:

http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/geolab/html/obtencion.html

El trabajo está dividido en tres capítulos:

El capítulo 1, consta de seis problemas, en todos ellos, el lugar geométrico obtenido es una recta.

El capítulo 2 está dedicado a los círculos, en él se encuentran cuatro problemas.

Al capítulo 3 lo hemos llamado parábolas, elipses, hipérbolas y algo más. En él hay cuatro problemas, en los que los lugares geométricos son: parábolas, elipses y/o hipérbolas, y uno más en el que el lugar geométrico obtenido no corresponde a una cónica.

Al terminar la presentación de los problemas, aparecen dos apéndices. En el primero aparece una pequeña introducción al programa Geolab, para quienes no lo conocen, mientras que en el segundo hemos enlistado las definiciones y resultados que se utilizan a lo largo del desarrollo del trabajo.

También, se incluye un disco compacto que contiene las construcciones, en Geolab, de todos los problemas.

Capítulo 1

Rectas

I. Consideremos un triángulo $\triangle OAB$, donde O es el origen del plano coordenado y los lados OA y OB están sobre los ejes X e Y respectivamente. Trazamos una paralela al lado AB del triángulo. Llamamos C y D a los puntos de intersección de la recta paralela con los ejes X e Y respectivamente. Encontrar el lugar geométrico que describe el punto M de intersección de las rectas AD, BC a medida que la recta CD se mueve.

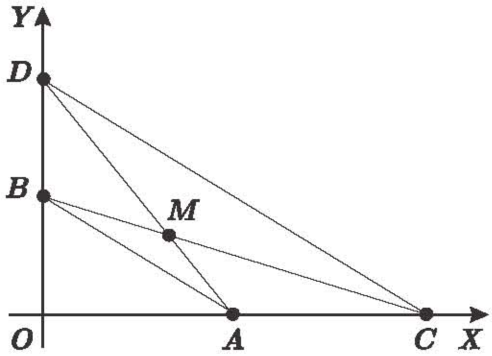


Figura 1-1

Solución:

Para obtener la ecuación del lugar geométrico descrito, encontraremos las ecuaciones de las rectas AD y BC y las resolveremos simultáneamente.

Llamemos $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ y $OD = d$.

Observamos que los triángulos $\triangle OAB$ y $\triangle OCD$ son semejantes, ya que por construcción tienen lados paralelos, entonces:

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = \lambda,$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\lambda \neq 0$. Despejando c y d tenemos:

$$\begin{aligned} c &= \lambda a \\ d &= \lambda b. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Por otro lado, las rectas AD y BC tienen por ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{d} &= 1 \\ \frac{x}{c} + \frac{y}{b} &= 1, \end{aligned} \tag{1.2}$$

sustituyendo (1.1) en (1.2) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda b} &= 1 \\ \frac{x}{\lambda a} + \frac{y}{b} &= 1. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Sea M el punto de intersección de las rectas AD y BC.

Consideremos la primera ecuación de (1.3), es decir,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda b} = 1.$$

Sumando y restando $\frac{y}{b}$ al miembro izquierdo, tenemos:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda b} + \left(\frac{y}{b} - \frac{y}{b}\right) = 1,$$

de donde:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{y}{\lambda b} - \frac{y}{b} &= 1 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{y}{b}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) &= 1. \end{aligned}$$

De la misma manera, considerando la segunda ecuación de (1.3), y sumando y restando $\frac{x}{a}$ al miembro izquierdo, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\lambda a} + \frac{y}{b} + \left(\frac{x}{a} - \frac{x}{a}\right) &= 1 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{x}{\lambda a} - \frac{x}{a} &= 1 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{x}{a}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) &= 1. \end{aligned}$$

Así, reescribimos las ecuaciones (1.3) como:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{y}{b}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) &= 1 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{x}{a}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) &= 1. \end{aligned}$$

Para encontrar la ecuación del lugar geométrico descrito por M, debemos resolver simultáneamente las dos ecuaciones obtenidas:

Multiplicamos la primera ecuación por -1 y las sumamos:

$$\begin{array}{rcr} -\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{y}{b}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) &=& -1 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{x}{a}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) &=& 1 \\ \hline -\frac{y}{b}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) + \frac{x}{a}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) &=& 0, \end{array}$$

de donde
$$\left(-\frac{y}{b}+\frac{x}{a}\right)\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)=0,$$
entonces
$$\frac{1}{\lambda}-1=0$$
o
$$-\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=0.$$

- Si $\frac{1}{\lambda}-1=0$, entonces
$$\frac{1}{\lambda}=1,$$
es decir,
$$\lambda=1.$$
En cuyo caso, las rectas AD y BC coinciden con las rectas AB y CD respectivamente. Más aún, las rectas AB y CD coinciden, por lo que en ese caso, no se forma un cuadrilátero.
- Si $-\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=0$, entonces
$$\frac{y}{b}=\frac{x}{a},$$
es decir,
$$y=\frac{b}{a}x,$$
que es la ecuación de la recta que pasa por el origen con pendiente $\frac{b}{a}$.

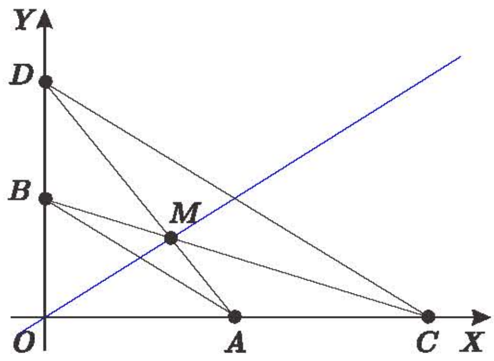


Figura 1-2

Por lo tanto el lugar geométrico descrito por M está contenido en la recta que coincide con la mediana OM del triángulo $\triangle OAB$.

Para ver que el lugar geométrico es toda la recta mencionada:

Consideremos un punto en la recta ℓ con ecuación $y = \dfrac{b}{a}x$.

Sea $M = (\alpha, \beta)$ un punto en la recta, entonces

$$\beta = \frac{b}{a}\alpha. \tag{1.4}$$

Tomamos $A = (a, 0)$ y $B = (0, b)$, unimos ambos puntos mediante una recta que llamaremos ℓ_1. Trazamos una recta ℓ_2 que una los puntos B, M y una recta ℓ_3 que pase por A, M. Llamamos C a la intersección de ℓ_2 con el eje X, y D a la intersección de ℓ_3 con el eje Y. Por último, trazamos la recta ℓ_4 que pasa por C y D.

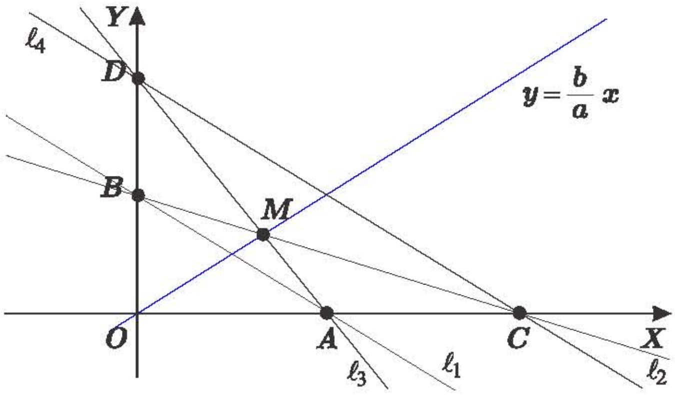


Figura 1-3

Por construcción, el punto M es la intersección de las rectas ℓ_2 y ℓ_3. Para demostrar que M pertenece al lugar geométrico, debemos probar que ℓ_4 es paralela a ℓ_1. Para ello basta ver que las rectas mencionadas tienen la misma pendiente.

En efecto, calculamos la ecuación de la recta ℓ_1:

Puesto que A, B están en la recta ℓ_1, entonces la pendiente m de ℓ_1 es:

$$\begin{aligned} m &= \frac{b-0}{0-a} \\ &= -\frac{b}{a}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Para encontrar la pendiente de la recta ℓ_4, primero encontraremos las coordenadas de los puntos C y D:

La recta ℓ_2, que pasa por los puntos B y M, tiene por ecuación:

$$\begin{aligned} y-b &= \left(\frac{\beta-b}{\alpha-0}\right)(x-0) \\ y-b &= \left(\frac{\beta-b}{\alpha}\right)x \end{aligned} \tag{1.6}$$

y la recta ℓ_3, que pasa por los puntos A y M, tiene por ecuación:

$$\begin{aligned} y-0 &= \left(\frac{\beta-0}{\alpha-a}\right)(x-a) \\ y &= \left(\frac{\beta}{\alpha-a}\right)(x-a) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Así, para obtener C y D tomamos $y=0$ en (1.6) y $x=0$ en (1.7) es decir,

$$\begin{aligned} 0-b &= \left(\frac{\beta-b}{\alpha}\right)x \\ \frac{-\alpha b}{\beta-b} &= x \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{\beta}{\alpha-a}\right)(0-a) \\ y &= \frac{-a\beta}{\alpha-a}, \end{aligned}$$

luego,

$$C=\left(\frac{-\alpha b}{\beta-b},0\right) \quad \text{y} \quad D=\left(0,\frac{-a\beta}{\alpha-a}\right),$$

entonces la recta ℓ_4 que pasa por C y D, tiene pendiente

$$\begin{aligned} m' &= \frac{\left(\dfrac{-a\beta}{\alpha-a}\right)-0}{0-\left(\dfrac{-\alpha b}{\beta-b}\right)} \\ &= \frac{-a\beta(\beta-b)}{\alpha b(\alpha-a)}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

sustituyendo (1.4) en (1.8) y simplificando tenemos:

$$\begin{aligned} m' &= \frac{-a\left(\frac{b}{a}\alpha\right)\left(\left(\frac{b}{a}\alpha\right)-b\right)}{\alpha b\left(\alpha-a\right)} \\ &= \frac{-\left(\frac{b}{a}\alpha-b\right)}{\left(\alpha-a\right)} \\ &= \frac{-\frac{b}{a}\left(\alpha-a\right)}{\left(\alpha-a\right)} \\ &= -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Así

$$m = m'.$$

Por lo tanto M pertenece al lugar geométrico.

Concluimos que el lugar geométrico es la recta $y = \frac{b}{a}x$.

Construcción con Geolab

1. En el icono *Define escalares* selecciona la opción **definición directa**. Llama $a1$ a ésta y asígnale $x = 5$ y luego haz clic en .
2. Repitiendo el paso anterior, define el escalar directo $a2$ de valor 0.
3. Construye el punto $A\left(a1, a2\right)$. (Ver Apéndice A, página 130).
4. Define los escalares directos:
    - $b1$ de valor 0
    - $b2$ de valor 4
5. Construye el punto $B\left(b1, b2\right)$
6. Define los escalares directos:
    - $o1$ de valor 0
    - $o2$ de valor 0
7. Construye el punto $O\left(o1, o2\right)$
8. Construye las rectas eX y eY que pasan por los puntos O, A y O, B respectivamente. (Ver Apéndice A, página 132).
9. Haz clic en el icono *Define puntos* y selecciona la opción **Punto en segmento**. Llama C a este punto y luego haz clic en O y A.

10. Haz clic en el punto C y arrástralo a la derecha del punto A.

11. Construye los segmentos:

    - OA definido por los puntos O y A.
    - OB definido por los puntos O y B.
    - $l1$ definido por los puntos A y B.

12. Cambia el color y el grosor de los segmentos OA, OB y AB, el mismo color y grosor para los tres segmentos. (Ver Apéndice A, página 132).

13. Construye la recta $parl1$ paralela al segmento $l1$ que pase por C. (Ver Apéndice A, página 132).

14. En el icono selecciona la opción **Intersección de rectas**. Llama D a este punto y después haz clic en las rectas eY y $parl1$.

15. Crea las rectas $l2$ y $l3$ que pasan por los puntos A, D y C, B respectivamente.

16. Llama M al punto de intersección de las rectas $l2$ y $l3$.

17. Cambia el color del punto M. (Ver Apéndice A, página 132).

18. Define una animación (Ver Apéndice A, página 134) para el punto C con los siguientes datos: Inicial $= -100$; Final $= 100$, Pasos $= 800$

19. Activa la traza del punto M. (Ver Apéndice A, página 134).

20. En la pantalla gráfica, haz clic en el icono *Empieza animación*.

    Para verificar que la recta $y = \frac{b}{a}x$ coincide con el lugar geométrico buscado, dibujamos la gráfica correspondiente a la construcción anterior:

21. Define la recta calculada $l4$ usando los valores $A = B.y, B = -A.x, C = 0$, es decir, en la ecuación general de la recta el coeficiente de x es la coordenada y del punto B y el coeficiente de y es la coordenada x del punto A.

22. Cambia el color de la recta $l4$. (Ver Apéndice A, página 132).

23. Para volver a ver la construcción original cierra la ventana de animación haciendo clic en el icono *Cerrar ventana* y en la parte derecha de la ventana selecciona el objeto C, para arrastrarlo si deseas ver, de manera manual, cómo se genera el lugar geométrico.

La construcción anterior es la que se encuentra en el archivo Construcción_1rec.lab. ■

II. Consideremos un triángulo $\triangle ABC$ de tal manera que la base AB está sobre el eje X y el pie de la altura desde el vértice C es el origen O. Tomemos un rectángulo inscrito en el triángulo $\triangle ABC$ y llamemos M a su centro. Encontrar el lugar geométrico que describe el punto M al considerar todos los rectángulos inscritos.

Solución:

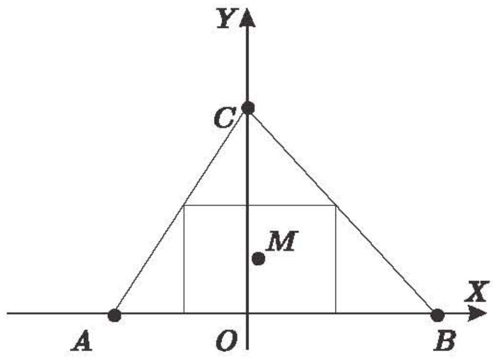


Figura 1-4

Consideremos un rectángulo cualquiera inscrito en el triángulo $\triangle ABC$. Llamemos E, D, D' y E' a sus vértices, de tal manera que D' y E' están sobre el eje X, D sobre el lado AC y E en el lado BC.

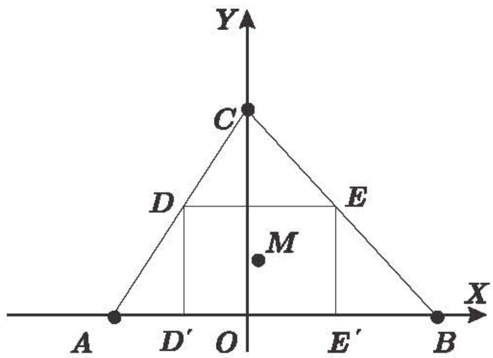


Figura 1-5

Para encontrar la ecuación del lugar geométrico que describe M, debemos encontrar las coordenadas del punto de intersección de las diagonales ED' y DE' del rectángulo.

Llamemos $OA = a$, $OB = b$ y $OC = c$.

La ecuación de la recta DE es

$$y = \lambda,$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, con $\lambda \in (o, c)$.

Observamos que

$$DD' = EE' = \lambda.$$

Como los triángulos $\triangle AOC$ y $\triangle AD'D$ tienen ángulos correspondientes iguales, entonces son semejantes, de donde:

$$\frac{D'A}{D'D} = \frac{OA}{OC},$$

como $OA = a$, $OC = c$ y $D'D = \lambda$, tenemos:

$$\frac{D'A}{\lambda} = \frac{a}{c},$$

despejando AD':

$$D'A = \frac{a}{c}\lambda.$$

Así,

$$\begin{aligned} OD' &= OA - D'A \\ &= a - \frac{a}{c}\lambda \\ &= a\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right), \end{aligned}$$

de donde las coordenadas del punto D son:

$$x_1 = -a\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)$$

y

$$y_1 = \lambda.$$

Del mismo modo tenemos que $\triangle BCO$ y $\triangle BEE'$ son semejantes, entonces

$$\frac{E'B}{E'E} = \frac{OB}{OC},$$

como $OB = b$, $OC = c$ y $E'E = \lambda$

$$\frac{E'B}{\lambda} = \frac{b}{c},$$

despejando $E'B$:

$$E'B = \frac{b}{c}\lambda.$$

Por lo tanto las coordenadas del punto E, situado sobre la recta BC, son:

$$\begin{aligned} x_2 &= OB - E'B \\ &= b - \frac{b}{c}\lambda \\ &= b\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right) \end{aligned}$$

y

$$y_2 = \lambda.$$

Luego, el centro M del rectángulo con vértices E, D, D' y E', tiene coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\left[-a\left(1-\frac{\lambda}{c}\right)+b\left(1-\frac{\lambda}{c}\right)\right]}{2} \\ &= \frac{(b-a)\left(1-\frac{\lambda}{c}\right)}{2} \\ &= \frac{b-a}{2}\left(1-\frac{\lambda}{c}\right) \end{aligned} \tag{1.9}$$

y

$$y = \frac{\lambda}{2}.$$

La ecuación del lugar geométrico descrito por el punto M se obtiene eliminando λ en (1.9). Despejando λ tenemos:

$$\lambda = 2y, \tag{1.10}$$

sustituyendo (1.10) en (1.9):

$$x = \frac{b-a}{2}\left(1-\frac{2y}{c}\right)$$

y simplificando obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)}x &= 1-\frac{2y}{c} \\ \frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)}x+\frac{2y}{c} &= 1 \\ \frac{x}{\left(\frac{b-a}{2}\right)}+\frac{y}{\left(\frac{c}{2}\right)} &= 1. \end{aligned} \tag{1.11}$$

La ecuación (1.11) está escrita en la forma simétrica y corresponde a la recta que pasa por los puntos

$$I = \left(\frac{b-a}{2}, 0\right)$$

y

$$H = \left(0, \frac{c}{2}\right),$$

es decir, M está en la recta que pasa por los puntos medios de la altura OC y la base AB del triángulo $\triangle ABC$.

Ahora bien, puesto que $\lambda \in (0, c)$ y la segunda coordenada de M es $y = \dfrac{\lambda}{2}$, entonces

$$0 < y < \frac{c}{2}.$$

Por consiguiente, el lugar geométrico que describe M está contenido en el segmento de recta que une los puntos $I = \left(\dfrac{b-a}{2}, 0\right)$ y $H = \left(0, \dfrac{c}{2}\right)$.

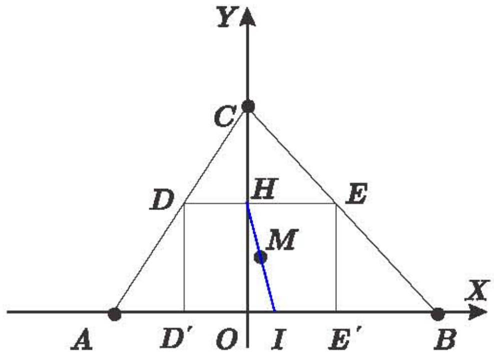


Figura 1-6

Para ver que el lugar geométrico que describe M es exactamente el segmento mencionado: Tomamos un punto de coordenadas (α, β) en el segmento de recta que une los puntos $I = \left(\dfrac{b-a}{2}, 0\right)$ y $H = \left(0, \dfrac{c}{2}\right)$.

Puesto que la recta que pasa por los puntos I y H tiene ecuación

$$\begin{aligned} y - \frac{c}{2} &= \frac{\frac{c}{2}}{-\left(\frac{b-a}{2}\right)} x \\ &= -\frac{c}{b-a} x \end{aligned}$$

y (α, β) está en la recta, entonces:

$$\beta = -\frac{c}{b-a}\alpha + \frac{c}{2}. \tag{1.12}$$

Ahora consideremos la recta $y = 2\beta$ y las ecuaciones de las rectas AC y CB respectivamente:

$$\begin{aligned} &\text{recta } AC: \quad && y = \frac{c}{a}x + c \\ &\text{recta } CB: \quad && y = -\frac{c}{b}x + c, \end{aligned}$$

Encontramos la intersección de la recta AC con la recta $y = 2\beta$:

$$\begin{aligned} 2\beta &= \frac{c}{a}x + c \\ x &= -a\left(1 - \frac{2\beta}{c}\right), \end{aligned}$$

y la de la recta CB con la recta $y = 2\beta$:

$$\begin{aligned} 2\beta &= -\frac{c}{b}x + c \\ x &= b\left(1 - \frac{2\beta}{c}\right). \end{aligned}$$

Consideramos los puntos $D = \left(-a\left(1 - \frac{2\beta}{c}\right), 2\beta\right)$, $D' = \left(-a\left(1 - \frac{2\beta}{c}\right), 0\right)$, $E = \left(b\left(1 - \frac{2\beta}{c}\right), 2\beta\right)$ y $E' = \left(b\left(1 - \frac{2\beta}{c}\right), 0\right)$.

Afirmamos que el punto de coordenadas (α, β) es el centro del rectángulo, inscrito en el triángulo, con vértices D, D', E y E'. Para comprobarlo, basta con ver que el punto medio del segmento DE tiene abscisa α.

En efecto, sumando las primeras coordenadas de D y E y sustituyendo el valor de β que obtuvimos en (1.12):

$$\begin{aligned} \frac{-a\left(1 - \frac{2\beta}{c}\right) + b\left(1 - \frac{2\beta}{c}\right)}{2} &= \frac{(b-a)\left(1 - \frac{2\beta}{c}\right)}{2} \\ &= \frac{(b-a)\left(1 - \frac{2\left(-\frac{c}{b-a}\alpha + \frac{c}{2}\right)}{c}\right)}{2} \\ &= \frac{(b-a)\left(1 - 2\left(-\frac{1}{b-a}\alpha + \frac{1}{2}\right)\right)}{2} \\ &= \frac{(b-a)}{2}\left(1 + \frac{2}{b-a}\alpha - 1\right) \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Por tanto, el lugar geométrico buscado es el segmento de recta determinado por los puntos $I = \left(\frac{b-a}{2}, 0\right)$ y $H = \left(0, \frac{c}{2}\right)$.

Construcción con Geolab

1. Define los siguientes escalares directos:

   - $a = 6$
   - $b = 8$
   - $c = 5$
   - $o1 = 0$
   - $o2 = 0$

2. Construye los puntos $O\left(o1, o2\right), A\left(-a, o2\right), B\left(b, o2\right)$ y $C\left(o1, 5\right)$.

3. Construye las rectas eX y eY que pasan por los puntos O, A y O, C respectivamente.

4. Construye los segmentos:

   - AB definido por los puntos A y B.
   - BC definido por los puntos B y C.
   - CA definido por los puntos C y A.

5. Cambia el color y el grosor de los segmentos AB, BC y CA de manera que se vean iguales.

6. Construye un punto D en el segmento CA. En caso de que el punto D aparezca encimado sobre el punto A o el punto C, muévelo aproximadamente a la mitad del segmento CA.

7. Construye la recta paralela d a la recta eX que pasa por el punto D.

8. Llama E a la intersección de las rectas d y BC.

9. Oculta la recta d. (Ver Apéndice A, página 136).

10. Define los puntos $D'\left(D.x, o2\right)$ y $E'\left(E.x, o2\right)$

11. Construye los segmentos:

    - DE definido por los puntos D y E
    - EE' definido por los puntos E y E'
    - $E'D'$ definido por los puntos E' y D'
    - $D'D$ definido por los puntos D' y D

12. Cambia el color y grosor de los segmentos del paso anterior.

13. Construye los segmentos DE' y $D'E$, y cámbialos de color.

14. Llama M a la intersección de los segmentos DE' y $D'E$.

15. En la pantalla de datos analíticos, activa la traza del punto M.

16. Define una animación para el punto D con los siguientes datos:

Inicial = 0; Final = 1; Pasos = 100

17. En la pantalla gráfica, activa la traza.

18. Ejecuta la animación.

Para verificar que el lugar geométrico buscado coincide con el segmento de la recta

$$\frac{x}{\frac{b-a}{2}}+\frac{y}{\frac{c}{2}}=1,$$

encontrado, dibujamos la gráfica correspondiente a la construcción anterior:

19. Define los puntos $I\left((b-a)/2, o2\right)$ y $H\left(o1, c/2\right)$, así como la recta calculada f usando los valores $A=2/\left(b-a\right), B=2/c$ y $C=-1$.

20. Construye el segmento IH y oculta los puntos I y H.

21. Cambia el color y el grosor al segmento IH.

22. Para volver a ver la construcción original cierra la ventana de animación haciendo clic en el icono  *Cerrar ventana* y en la parte derecha de la ventana selecciona el objeto D para arrastrarlo sobre el segmento AC, si deseas ver, de manera manual, cómo se genera el lugar geométrico.

La construcción anterior es la que se encuentra en el archivo Construcción_2rec.lab.■

III. Consideremos dos puntos A y B, colocados sobre los ejes X y Y respectivamente y un triángulo rectángulo $\triangle ABM$ con hipotenusa AB, llamamos M' al punto simétrico de M con respecto a la recta AB. Encontrar el lugar geométrico descrito por los puntos M y M' a medida que A o B se desplazan sobre los ejes cartesianos correspondientes.

Solución:

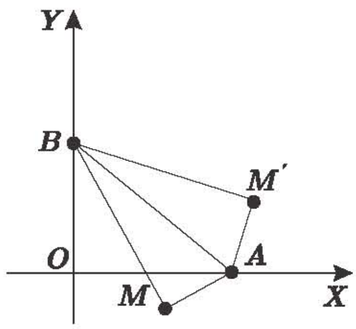


Figura 1-7

Observación

Lo más que puede subir B en el eje Y es AB, en cuyo caso la abscisa de M es menos la altura del triángulo tomando AB como base:

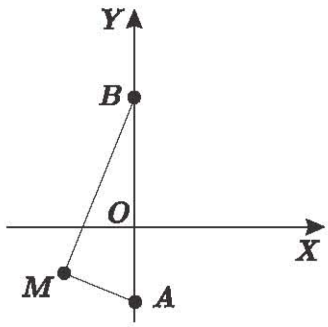


Figura 1-8

Lo más a la derecha que puede llegar M es cuando:

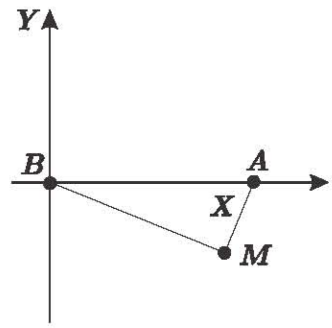


Figura 1-9

Si A pasa del lado negativo del eje X, se completa el lugar geométrico.

Llamemos $OA = \alpha$, $OB = \beta$ y también llamemos a, b a las longitudes de los segmentos MA y MB respectivamente.

Consideremos los círculos, uno con centro $(\alpha, 0)$ y radio a y el otro con centro $(0, \beta)$ y radio b.

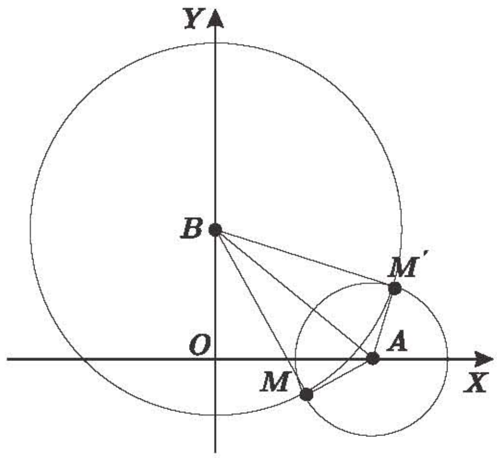


Figura 1-10

Las ecuaciones de los círculos mencionados son (ver Apéndice B [**5**], página 139):

$$(x-\alpha)^2 + y^2 = a^2 \qquad \text{y} \qquad x^2 + (y-\beta)^2 = b^2. \tag{1.13}$$

Haciendo uso del teorema de Pitágoras en los triágulos $\triangle AMB$ y $\triangle OAB$ tenemos que:

$$\begin{aligned} AB^2 &= a^2 + b^2 \\ AB^2 &= \alpha^2 + \beta^2, \end{aligned}$$

luego

$$a^2 + b^2 = \alpha^2 + \beta^2. \tag{1.14}$$

Despejando α y β de (1.13) obtenemos:

$$\begin{aligned} \alpha &= x \pm \sqrt{a^2 - y^2} \\ \beta &= y \pm \sqrt{b^2 - x^2}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

sustituimos (1.15) en (1.14) y simplificamos:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (x \pm \sqrt{a^2 - y^2})^2 + (y \pm \sqrt{b^2 - x^2})^2 \\ a^2 + b^2 &= [x^2 \pm 2x\sqrt{a^2 - y^2} + (a^2 - y^2)] + [y^2 \pm 2y\sqrt{b^2 - x^2} + (b^2 - x^2)] \\ a^2 + b^2 &= x^2 - x^2 \pm 2x\sqrt{a^2 - y^2} + a^2 + b^2 - y^2 + y^2 \pm 2y\sqrt{b^2 - x^2} \\ 0 &= \pm 2x\sqrt{a^2 - y^2} \pm 2y\sqrt{b^2 - x^2} \\ \mp 2x\sqrt{a^2 - y^2} &= \pm 2y\sqrt{b^2 - x^2}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Elevamos al cuadrado (1.16) y simplificamos:

$$\begin{aligned} 4x^2(a^2 - y^2) &= 4y^2(b^2 - x^2) \\ x^2a^2 - x^2y^2 &= y^2b^2 - y^2x^2 \\ x^2a^2 &= y^2b^2 \\ x^2a^2 - y^2b^2 &= 0 \\ (xa + yb)(xa - yb) &= 0, \end{aligned}$$

entonces:

$$xa + yb = 0 \tag{1.17}$$

o

$$xa - yb = 0. \tag{1.18}$$

Despejando y de (1.17) y (1.18), tenemos:

$$y = -\frac{a}{b}x$$

o

$$y = \frac{a}{b}x.$$

Las últimas dos expresiones representan rectas que pasan por el origen con pendientes $-\frac{a}{b}$ y $\frac{a}{b}$. Observemos que la recta $y = \frac{a}{b}x$ es simétrica a $y = -\frac{a}{b}x$ con respecto al eje X.

Ahora bien, también observamos que las expresiones (1.15) solamente tienen sentido cuando $a^2 - y^2 \geq 0$ y $b^2 - x^2 \geq 0$, es decir, $y \in [-a, a]$ y $x \in [-b, b]$.

Recordemos que α, β son las longitudes de los catetos del $\triangle ABM$ así que $0 \leq \alpha \leq AB$ y $0 \leq \beta \leq AB$, pero como $-a \leq y \leq a$, $-b \leq x \leq b$, entonces el lugar geométrico que describe el punto M está contenido en una parte de las rectas, la limitada por las paralelas $x = \pm b$, $y = \pm a$ y que pasa por los puntos (b, a), $(-b, -a)$.

Haciendo un análisis similar para el punto M', obtenemos las mismas rectas.

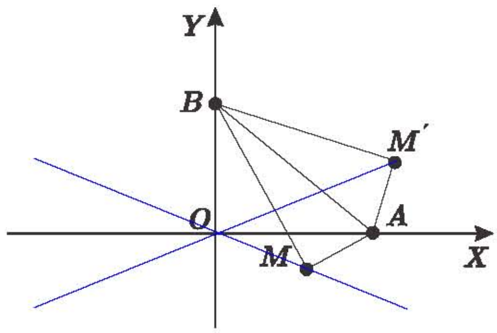


Figura 1-11

Para mostrar que el lugar geométrico descrito por los puntos M y M' son todos los de los segmentos mencionados, tomamos un punto, que llamaremos M, en una de las dos rectas, digamos $y = \frac{a}{b}x$, y veremos que podemos encontrar A y B sobre los ejes X y Y, respectivamente de tal manera que M es el vértice del ángulo recto en el triángulo $\triangle ABM$.

En efecto, sea M un punto de la recta $y = \frac{a}{b}x$, con $x \in [-b, b]$ y $y \in [-a, a]$.

Entonces $M\left(x_1, \frac{a}{b}x_1\right)$ con $x_1 \in [-b, b]$.

Para encontrar los puntos del eje X cuya distancia a M es a, resolvemos:

$$d\left((x, 0), \left(x_1, \frac{a}{b}x_1\right)\right) = a,$$

es decir,

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + \frac{a^2}{b^2}x_1^2} = a,$$

elevando al cuadrado tenemos:

$$\begin{aligned} x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + \frac{a^2}{b^2}x_1^2 &= a^2 \\ x^2 - 2xx_1 + \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)x_1^2 - a^2 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvemos para x:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{2x_1 \pm \sqrt{4x_1^2 - 4\left(\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)x_1^2 - a^2\right)}}{2} \\
&= x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - \left(\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)x_1^2 - a^2\right)} \\
&= x_1 \pm \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2}x_1^2} \\
&= x_1 \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x_1^2}.
\end{aligned}
$$

En el eje X hay dos puntos cuya distancia al punto M es a.

Ahora encontramos los puntos del eje Y cuya distancia a M es b. Para lo cual resolvemos:

$$d\left((0,y)\,,\left(x_1, \frac{a}{b}x_1\right)\right) = b,$$

es decir:

$$\sqrt{x_1^2 + \left(\frac{a}{b}x_1 - y\right)^2} = b,$$

elevando al cuadrado tenemos:

$$
\begin{aligned}
x_1^2 + \frac{a^2}{b^2}x_1^2 - 2\frac{a}{b}x_1 y + y^2 &= b^2 \\
\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)x_1^2 - b^2 - 2\frac{a}{b}x_1 y + y^2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Resolvemos para y:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{2\frac{a}{b}x_1 \pm \sqrt{4\frac{a^2}{b^2}x_1^2 - 4\left(\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)x_1^2 - b^2\right)}}{2} \\
&= \frac{a}{b}x_1 \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2}x_1^2 - \left(\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)x_1^2 - b^2\right)} \\
&= \frac{a}{b}x_1 \pm \sqrt{b^2 - x_1^2}.
\end{aligned}
$$

En el eje Y hay dos puntos cuya distancia al punto M es b.

Consideremos los puntos $A\left(x_1 + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x_1^2}, 0\right)$ y $B\left(0, \frac{a}{b}x_1 - \sqrt{b^2 - x_1^2}\right)$. Calculamos la distancia entre ellos:

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= \sqrt{\left(x_1+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x_1^2}\right)^2+\left(\frac{a}{b}x_1-\sqrt{b^2-x_1^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{x_1^2+2\frac{a}{b}x_1\sqrt{b^2-x_1^2}+\frac{a^2}{b^2}\left(b^2-x_1^2\right)+\frac{a^2}{b^2}x_1^2-2\frac{a}{b}x_1\sqrt{b^2-x_1^2}+b^2-x_1^2} \\
&= \sqrt{a^2+b^2}.
\end{aligned}
$$

Entonces M es el vértice del ángulo recto del triángulo cuyos catetos miden a y b, con vértices sobre los ejes coordenados.

Observamos que los puntos $A\left(x_1-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x_1^2},0\right)$ y $B\left(0,\frac{a}{b}x_1+\sqrt{b^2-x_1^2}\right)$, sirven también para nuestra construcción. Las posibilidades restantes las desechamos porque en ese caso las distancias entre los puntos no es $\sqrt{a^2+b^2}$.

Tomando M en la otra recta, puede hacerse una construcción similar.

Concluimos que el lugar geométrico son los segmentos de rectas con ecuaciones $y=\frac{a}{b}x$ y $y=-\frac{a}{b}x$, para los cuales $x\in[-b,b]$ y $y\in[-a,a]$.

Construcción con Geolab

1. Define los siguientes escalares:

- $u = 10$
- $v = 10$
- $o1 = 0$
- $o2 = 0$

2. Construye los puntos $O\,(o1, o2)\,, U\,(u, o2)$ y $V\,(o1, v)$

3. Construye los ejes coordenados eX y eY usando los puntos O, U y V.

4. Construye un punto B en el segmento OV

5. Oculta los puntos U y V.

6. Define el escalar $r1$ =(6/5)*v

7. Construye el círculo $cir1$, usando el constructor de círculos y eligiendo del menú la opción *centro y radio*, con centro B y radio $r1$.

8. En el icono  elige la opción *Intersección de recta y círculo por ratón*, llama A a este punto y haz clic en eX y $cir1$.

9. Construye el segmento AB

10. En el icono elige la opción *Punto medio*, llama C a este punto y haz clic en A y B.

11. Haz clic en el icono  y elige la opción *Círculo centro y punto*, llama $cir2$ a este círculo y haz clic en C y B.

12. Define el escalar directo $r3$ =(9*$r1$)/10

13. En el icono  y elige la opción *Círculo centro y radio*, llama $cir3$ a este círculo y haz clic en B y $r3$.

14. En el icono elige la opción *Intersección de círculos por ratón*, llámalo M y haz clic en $cir2$ y $cir3$.

15. En el icono elige la opción *Intersección de círculos otro lado del punto*, llámalo M' y haz clic en $cir2, cir3$ y M.

16. En la pantalla de datos analíticos activa la traza de M y M'; haz invisibles los círculos $cir1, cir2$ y $cir3$, y el punto C.

17. Construye los segmentos BM, MA, BM' y $M'A$ y cámbialos de color y grosor de manera uniforme.

18. En la pantalla gráfica activa la traza.

19. Define una animación para el punto B con los siguientes datos:

    Inicial $= -1.199$; Final $= 1.199$, Pasos $= 1000$

20. Ejecuta la animación.

21. Mueve el punto A para considerar la otra intersección del círculo $cir1$ con el eje eX.

22. Ejecuta, sin borrar, nuevamente la animación.

    Para verificar que el lugar geométrico buscado está contenido en las rectas con ecuación $y = -\frac{a}{b}x$ y $y = \frac{a}{b}x$ dibujamos la gráfica correspondiente a la construcción anterior:

23. Construye los puntos $M1\,(-b,-a)\,, M2\,(-b,a)\,, M3\,(b,a)$ y $M4\,(b,-a)$

24. Construye los segmentos $M1M3$ y $M2M4$ y cámbialos de color.

25. Oculta los puntos $M1, M2, M3$ y $M4$. Define el escalar calculado m como el cociente $\frac{a}{b}$

26. Para volver a ver la construcción original cierra la ventana de animación haciendo clic en el icono  *Cerrar ventana* y en la parte derecha de la ventana selecciona el objeto B para arrastrarlo, si deseas ver, de manera manual, cómo se genera el lugar geométrico.

    La construcción anterior es la que se encuentra en el archivo Construcción_3rec.lab■

IV. Consideremos dos puntos fijos A y B en el plano cartesiano; un punto C en el eje X. Sean D el punto de intersección de la recta CA con el eje Y y ℓ la recta paralela a la recta AB que pasa por D. Encontrar el lugar geométrico descrito por el punto M de intersección de ℓ con la recta CB, cuando C se desplaza sobre el eje X.

Solución:

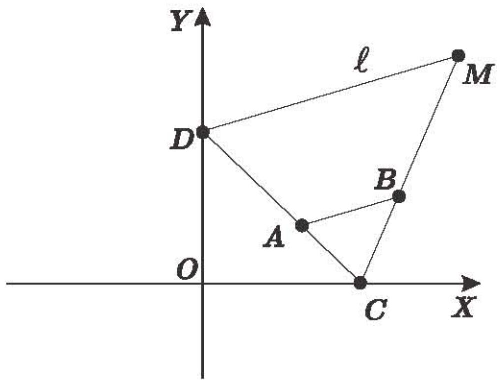


Figura 1-12

Encontraremos las ecuaciones de las rectas DM y CB y las resolveremos simultáneamente para obtener la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto M.

Sean $A = (x', y')$, $B = (x'', y'')$, $C = (\alpha, 0)$, $D = (0, \beta)$ y $m = \dfrac{y'' - y'}{x'' - x'}$ la pendiente de la recta AB.

La ecuación de la recta CD es

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1.$$

Como A pertenece a la recta CD, entonces

$$\frac{x'}{\alpha} + \frac{y'}{\beta} = 1. \tag{1.19}$$

Puesto que DM es paralela a AB y $D = (0, \beta)$, entonces, haciendo uso de la expresión de la recta conociendo un punto y su pendiente (ver Apéndice B [**2**], página 138), sabemos que tiene por ecuación

$$\begin{aligned} y - \beta &= m(x - 0) \qquad (1.20)\\ &= mx. \end{aligned}$$

Por otro lado, como $C = (\alpha, 0)$, entonces, haciendo uso de la expresión de la recta que pasa por dos puntos (ver Apéndice B [**2**], página 138), sabemos que la recta CB tiene por ecuación:

$$y - y'' = \left(\frac{y'' - 0}{x'' - \alpha}\right)(x - x''). \tag{1.21}$$

Así, el lugar descrito por M se obtiene resolviendo simultáneamente (1.20) y (1.21), para ello, lo que hacemos es utilizar (1.19) para eliminar α y β.

Despejemos β de (1.20):

$$\begin{aligned} y-\beta &= mx \\ \beta &= y-mx. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Haciendo lo mismo con α de (1.21)

$$\begin{aligned} y-y'' &= \left(\frac{y''}{x''-\alpha}\right)(x-x'') \\ x''-\alpha &= \left(\frac{y''}{y-y''}\right)(x-x'') \\ -\alpha &= \left(\frac{y''}{y-y''}\right)(x-x'')-x'' \\ \alpha &= -\left(\frac{y''}{y-y''}\right)(x-x'')+x'', \end{aligned} \tag{1.23}$$

sustituimos (1.22) y (1.23) en (1.19) y simplificamos:

$$\begin{aligned} \frac{x'}{\left(-\dfrac{y''(x-x'')}{y-y''}+x''\right)}+\frac{y'}{(y-mx)} &= 1 \\ \frac{x'(y-y'')}{(-y''(x-x'')+x''(y-y''))}+\frac{y'}{(y-mx)} &= 1 \\ \frac{x'(y-y'')}{-xy''+x''y}+\frac{y'}{y-mx} &= 1 \\ \frac{x'(y-y'')(y-mx)}{x''y-xy''}+y' &= y-mx \\ \frac{x'(y-y'')(y-mx)}{x''y-xy''} &= y-y'-mx \\ \frac{x'(y-y'')(y-mx)}{x''y-xy''}+mx' &= y-y'-mx+mx' \\ \frac{x'(y-y'')(y-mx)}{x''y-xy''}+mx' &= y-y'-m(x-x') \\ x'(y-y'')(y-mx)+mx'(x''y-xy'') &= (y-y'-m(x-x'))\,(x''y-xy'') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (y-y'')x'y-x'mx(y-y'')+mx'x''y-mx'xy'' &= (y-y'-m(x-x'))\,(x''y-xy'') \\ (y-y'')x'y-yx'mx+mx'x''y &= (y-y'-m(x-x'))\,(x''y-xy'') \\ (y-y'')x'y+(-mx+mx'')x'y &= [y-y'-m(x-x')](x''y-xy'') \\ (y-y''-m(x-x''))\,x'y &= [y-y'-m(x-x')][x''y-xy''] \end{aligned} \tag{1.24}$$

Observemos que:

$$y - y'' - m(x - x'') = 0$$

y

$$y - y' - m(x - x') = 0$$

representan a la misma recta, puesto que tienen la misma pendiente $m = \dfrac{y'' - y'}{x'' - x'}$, la primera pasa por B y la segunda pasa por A, o sea, cualquiera de las 2 ecuaciones representan a la recta AB, entonces la expresión (1.24) se simplifica de la siguiente forma

$$\begin{aligned}(y - y'' - m(x - x''))\, x'y &= (y - y' - m(x - x'))\,(x''y - xy'') \\ 0 &= (y - y' - m(x - x'))(x''y - xy'' - x'y),\end{aligned}$$

entonces

$$y - y' - m(x - x') = 0$$

o

$$x''y - xy'' - x'y = 0.$$

Habíamos mencionado que la primera expresión $y - y' - m(x - x') = 0$ representa la recta AB, pero ésta no es la solución del problema, basta con ver la figura (1-12), este caso se cumple cuando el punto C está en la recta que pasa por A y B:

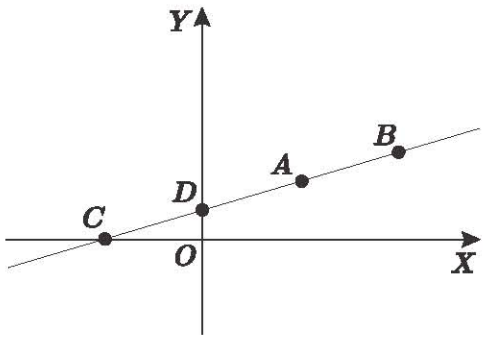


Figura 1-13

Simplificando la segunda obtenemos:

$$\begin{aligned}x''y - xy'' - x'y &= 0 \\ x''y - x'y &= xy'' \\ (x'' - x')\, y &= xy'' \\ y &= \left(\frac{y''}{x'' - x'}\right) x,\end{aligned}$$

que identificamos como una recta que pasa por el origen, con pendiente:

$$\frac{y''}{x''-x'}$$

Así, el punto M está en la recta que pasa por el origen con pendiente $\frac{y''}{x''-x'}$.

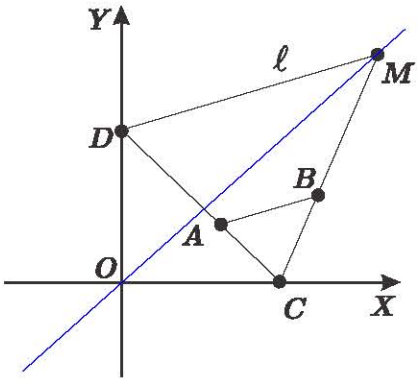


Figura 1-14

Para mostrar que el lugar geométrico descrito por el punto M es toda la recta que pasa por el origen con pendiente $\frac{y''}{x''-x'}$, tomamos un punto M' en la recta y veremos que podemos encontrar C sobre el eje X, de tal manera que M' se obtiene de la manera considerada.
En efecto, si M' es un punto en la recta, entonces:

$$M'\left(x_1, \left(\frac{y''}{x''-x'}\right)x_1\right).$$

para algún $x_1 \in \mathbb{R}$.
Trazamos la recta ℓ_1 por M' paralela a AB que pasa por M', entonces ésta tiene por ecuación:

$$y-\left(\frac{y''}{x''-x'}\right)x_1=\left(\frac{y''-y'}{x''-x'}\right)(x-x_1).$$

El punto de intersección de la recta ℓ_1 con el eje Y tiene coordenadas:

$$x=0$$

y

$$\begin{aligned}
y-\left(\frac{y''}{x''-x'}\right)x_1 &= -\left(\frac{y''-y'}{x''-x'}\right)x_1\\
y &= \left(\left(\frac{y''}{x''-x'}\right)-\left(\frac{y''-y'}{x''-x'}\right)\right)x_1\\
y &= \left(\frac{y'}{x''-x'}\right)x_1.
\end{aligned}$$

Llamemos D al punto obtenido, es decir, $D\left(0, \left(\frac{y'}{x''-x'}\right)x_1\right)$.

Consideremos las rectas que pasan por D, A y M', B respectivamente:

La recta que pasa por D y A tiene por ecuación:

$$\begin{aligned} y-\left(\frac{y'}{x''-x'}\right)x_1 &= \left(\frac{y'-\left(\frac{y'}{x''-x'}\right)x_1}{x'-0}\right)(x-0) \\ y-\left(\frac{y'-\left(\frac{y'}{x''-x'}\right)x_1}{x'}\right)x &= \left(\frac{y'}{x''-x'}\right)x_1 \\ y-y'\left(\frac{x''-x'-x_1}{x'\left(x''-x'\right)}\right)x &= \left(\frac{y'}{x''-x'}\right)x_1 \end{aligned} \tag{1.25}$$

y la recta que pasa por M' y B tiene por ecuación:

$$\begin{aligned} y-\left(\frac{y''}{x''-x'}\right)x_1 &= \left(\frac{y''-\left(\frac{y''}{x''-x'}\right)x_1}{x''-x_1}\right)(x-x_1) \\ y-\left(\frac{y''-\left(\frac{y''}{x''-x'}\right)x_1}{x''-x_1}\right)x &= \left(\frac{y''}{x''-x'}\right)x_1-\left(\frac{y''-\left(\frac{y''}{x''-x'}\right)x_1}{x''-x_1}x_1\right) \\ y-y''\left(\frac{x''-x'-x_1}{\left(x''-x_1\right)\left(x''-x'\right)}\right)x &= \left(\frac{y''\left(x''-x_1\right)-y''\left(x''-x'\right)+y''x_1}{\left(x''-x'\right)\left(x''-x_1\right)}\right)x_1 \\ y-y''\left(\frac{x''-x'-x_1}{\left(x''-x_1\right)\left(x''-x'\right)}\right)x &= \frac{x'y''x_1}{\left(x''-x'\right)\left(x''-x_1\right)}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Ahora, resolvemos simultáneamente las ecuaciones (1.25) y (1.26) para hallar las coordenadas del punto de intersección de las rectas DA y $M'B$.

Multiplicamos la ecuación (1.25) por -1 y consideramos (1.26), así obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} -y+y'\left(\frac{x''-x'-x_1}{x'\left(x''-x'\right)}\right)x &= -\left(\frac{y'}{x''-x'}\right)x_1 \\ y-y''\left(\frac{x''-x'-x_1}{\left(x''-x_1\right)\left(x''-x'\right)}\right)x &= \frac{x'y''x_1}{\left(x''-x'\right)\left(x''-x_1\right)}, \end{aligned}$$

sumando tenemos:

$$\left(y'\left(\frac{x''-x'-x_1}{x'\left(x''-x'\right)}\right)-y''\left(\frac{x''-x'-x_1}{\left(x''-x_1\right)\left(x''-x'\right)}\right)\right)x=\left(-\frac{y'}{x''-x'}+\left(\frac{x'y''}{\left(x''-x'\right)\left(x''-x_1\right)}\right)\right)x_1.$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}
\left(y'\left(\frac{x''-x'-x_1}{x'}\right)-y''\left(\frac{x''-x'-x_1}{(x''-x_1)}\right)\right)x &= \left(-y'+\frac{x'y''}{x''-x_1}\right)x_1\\
(x''-x'-x_1)\left(\frac{y'}{x'}-\frac{y''}{x''-x_1}\right)x &= -x'\left(\frac{y'}{x'}-\frac{y''}{x''-x_1}\right)x_1\\
(x''-x'-x_1)\,x &= -\ x'x_1\\
x &= \frac{-\ x'x_1}{x''-x'-x_1}, \qquad (1.27)
\end{aligned}$$

sustituimos (1.27) en (1.25) y simplificamos:

$$\begin{aligned}
y-y'\left(\frac{x''-x'-x_1}{x'\,(x''-x')}\right)\left(\frac{-\ x'x_1}{x''-x'-x_1}\right) &= \left(\frac{y'}{x''-x'}\right)x_1\\
y-y'\frac{(-\ x_1)}{x''-x'} &= \left(\frac{y'}{x''-x'}\right)x_1\\
y &= 0.
\end{aligned}$$

Así las coordenadas del punto de intersección de las rectas DA y $M'B$ son:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-\ x'x_1}{x''-x'-x_1}\\
y &= 0,
\end{aligned}$$

entonces las rectas se cortan en el punto $C\left(\frac{-\ x'x_1}{x''-x'-x_1},0\right)$ que está sobre el eje X, es decir, M es uno de los puntos del lugar geométrico.

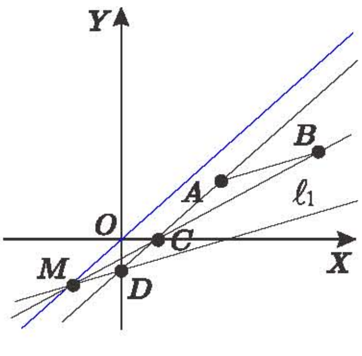


Figura 1-15

Por lo tanto, el lugar geométrico descrito por el punto M es toda la recta que pasa por el origen con pendiente $\frac{y''}{x''-x'}$.

Construcción con Geolab

1. Define los escalares:

   - $x' = 2$
   - $y' = 2$
   - $x'' = 5$
   - $y'' = 3$
   - $u = 10$
   - $v = 10$
   - $o1 = 0$
   - $o1 = 0$

2. Construye los puntos $A(a1, a2), B(b1, b2), O\,(o1, o2)\,, U\,(u, o2)$ y $V\,(o1, v)$
3. Construye los ejes coordenados eX y eY usando los puntos O, U y V
4. Construye un punto C sobre el segmento OU
5. Oculta los puntos U, V.
6. Construye las rectas $l1, l2$ que pasan por los puntos C, A y C, B respectivamente, y el punto D, de intersección de las rectas $l1$ y eY.
7. Construye el segmento AB y cámbialo de color y grosor.
8. Construye la recta $l3$ paralela a la recta que contiene al segmento AB que pase por el punto D y llama M a la intersección de las rectas $l2$ y $l3$.
9. En la pantalla de datos analíticos, activa la traza del punto M.
10. Define una animación para el punto C con los siguientes datos:
    Inicial $= -10$; Final $= 10$, Pasos $= 1000$
11. En la pantalla gráfica, activa la traza.
12. Ejecuta la animación.

    Para verificar que la recta que pasa por el origen, con pendiente $\dfrac{y''}{x'' - x'}$ coincide con el lugar geométrico buscado, dibujamos la gráfica de la recta correspondiente a la construcción anterior:

13. Define el escalar directo m =y"/(x"-x')
14. Construye la recta f, usando el constructor de rectas y eligiendo del menú la opción *punto pendiente*, que pasa por O con pendiente m.

15. Cambia el color a la recta f.

16. Para volver a ver la construcción original cierra la ventana de animación haciendo clic en el icono  *Cerrar ventana* y en la parte derecha de la ventana selecciona el objeto C, para arrastrarlo si deseas ver, de manera manual, cómo se genera el lugar geométrico.

    La construcción anterior es la que se encuentra en el archivo Construcción_4rec.lab. ■

V. Consideremos el origen O del plano coordenado, un círculo con centro en O y radio R, un punto A, fuera del círculo, situado sobre el eje X positivo y la recta tangente al círculo, con pendiente negativa, pasando por el punto A. Sea B el punto de tangencia y M la proyección del punto O, sobre la bisectriz del ángulo $\measuredangle OAB$. Encontrar el lugar geométrico descrito por M a medida que el punto A se desplaza lo largo del eje X positivo.

Solución:

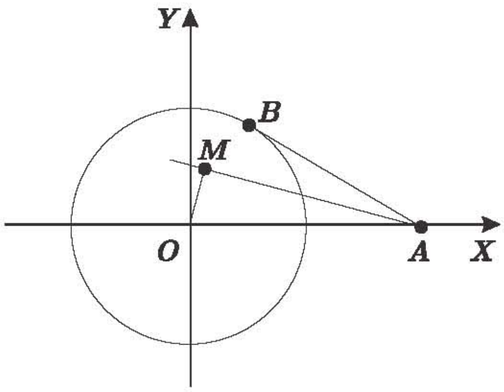


Figura 1-16

Para encontrar la ecuación que satisfacen los puntos del lugar geométrico, calculamos las ecuaciones de la bisectriz del ángulo $\measuredangle OAB$ y la recta perpendicular a ésta que pasa por el punto O y resolvemos simultáneamente ambas ecuaciones:

Como B está en el círculo, entonces

$$B = (R\cos\varphi, R\operatorname{sen}\varphi),$$

donde φ es el ángulo de $\measuredangle AOB$.

La pendiente de la recta OB es:

$$\tan\varphi$$

y puesto que OB es el radio del círculo, es perpendicular a AB. Por tanto, la pendiente de la recta AB es:

$$m = -\frac{1}{\tan\varphi},$$

de donde

$$m = -\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}.$$

Utilizando la expresión de la recta conociendo un punto y su pendiente (ver Apéndice B [**2**], página 138), que en este caso son B y m, la ecuación de la recta tangente AB es

$$y - R\operatorname{sen}\varphi = \left(-\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\right)(x - R\cos\varphi),$$

multiplicando la ecuación por $\operatorname{sen}\varphi$,tenemos:

$$\begin{aligned}
y\operatorname{sen}\varphi - R\operatorname{sen}^2\varphi &= -x\cos\varphi + R\cos^2\varphi \\
y\operatorname{sen}\varphi + x\cos\varphi &= R\cos^2\varphi + R\operatorname{sen}^2\varphi \\
y\operatorname{sen}\varphi + x\cos\varphi &= R.
\end{aligned}$$

Por otra parte, sabemos que la distancia de un punto $P = (x_1, x_2)$ a la recta $Ax+By+C = 0$ (ver Apéndice B [9], página 139), está dada por

$$d(P, \{Ax + By + C = 0\}) = \frac{|Ax_1 + Bx_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Recordemos que M es la proyección de O sobre la bisectriz del ángulo $\measuredangle OAB$.

Como los puntos de AM equidistan de las rectas

$$y = 0$$

y

$$x\cos\varphi + y\operatorname{sen}\varphi = R,$$

entonces la bisectriz determinada por el ángulo $\measuredangle OAB$ está dada por los puntos $P\,(x, y)$ que satisfacen la igualdad

$$d(P, \{x = 0\}) = d(P, \{x\cos\varphi + y\operatorname{sen}\varphi = R\}),$$

luego,

$$\begin{aligned}
\frac{|y|}{\sqrt{1}} &= \frac{|x\cos\varphi + y\operatorname{sen}\varphi - R|}{\sqrt{\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi}} \\
|y| &= |x\cos\varphi + y\operatorname{sen}\varphi - R|\,. \qquad (1.28)
\end{aligned}$$

Pero sólo nos interesa la bisectriz de $\measuredangle OAB$ cuyos puntos $P\,(x, y)$ satisfacen:

$$y > 0 \qquad \text{y} \qquad x\cos\varphi + y\operatorname{sen}\varphi - R < 0,$$

es decir, (1.28) se escribe como:

$$\begin{aligned}
y &= -\left(x\cos\varphi + y\operatorname{sen}\varphi - R\right) \\
y(1 + \operatorname{sen}\varphi) &= -x\cos\varphi + R \\
y &= \frac{-x\cos\varphi + R}{1 + \operatorname{sen}\varphi} \\
y &= \left(-\frac{\cos\varphi}{1 + \operatorname{sen}\varphi}\right)x + \frac{R}{1 + \operatorname{sen}\varphi}. \qquad (1.29)
\end{aligned}$$

Ahora calculamos la ecuación de la recta OM:

Como OM es perpendicular a AM, entonces su pendiente, digamos m'', es

$$m'' = -\frac{1}{m'},$$

donde m' es la pendiente de AM, es decir,

$$\begin{aligned} m'' &= -\frac{1}{\left(-\dfrac{\cos\varphi}{1+\operatorname{sen}\varphi}\right)} \\ &= \frac{1+\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}. \end{aligned}$$

Como además, OM pasa por el origen, entonces la ecuación de la recta OM es:

$$y = \left(\frac{1+\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}\right)x$$

o bien,

$$x = \frac{\cos\varphi}{1+\operatorname{sen}\varphi}y. \tag{1.30}$$

Para hallar la ecuación del lugar geométrico descrito M, eliminamos φ de las ecuaciones (1.29) y (1.30).

Sustituimos (1.30) en (1.29) y simplificamos:

$$\begin{aligned} y &= \left(-\frac{\cos\varphi}{1+\operatorname{sen}\varphi}\right)x + \frac{R}{1+\operatorname{sen}\varphi} \\ y &= \left(-\frac{\cos\varphi}{1+\operatorname{sen}\varphi}\right)\frac{\cos\varphi}{1+\operatorname{sen}\varphi}y + \frac{R}{1+\operatorname{sen}\varphi} \\ \left(1+\frac{(\cos\varphi)^2}{(1+\operatorname{sen}\varphi)^2}\right)y &= \frac{R}{1+\operatorname{sen}\varphi} \\ \left((1+\operatorname{sen}\varphi)^2+(\cos\varphi)^2\right)y &= R\,(1+\operatorname{sen}\varphi) \\ 2(1+\operatorname{sen}\varphi)y &= R\,(1+\operatorname{sen}\varphi) \\ (2y-R)(\operatorname{sen}\varphi+1) &= 0, \end{aligned}$$

pero $\operatorname{sen}\varphi + 1 \neq 0$, entonces:

$$\begin{aligned} 2y - R &= 0 \\ y &= \frac{R}{2}. \end{aligned}$$

Así, el lugar geométrico descrito por el punto M está contenido en la recta paralela al eje X que pasa por el punto $\left(0, \dfrac{R}{2}\right)$.

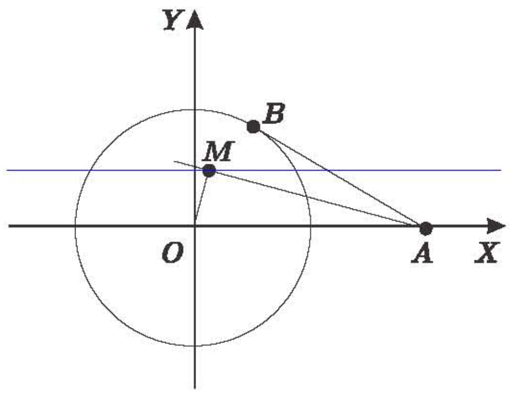


Figura 1-17

De hecho, se trata de un segmento de la recta mencionada.

Veamos cuál es dicho segmento.

Por las condiciones del problema, las rectas OA y AB no pueden ser perpendiculares (la recta que pasa por AB es tangente al círculo). Igualmente, las rectas OA y AB no pueden ser paralelas (se cortan en A).

Por otra parte, entre más pequeña sea la pendiente de la recta tangente AB, es decir, cuando A se aleja del círculo, más pequeño es φ y la abscisa de M se aproxima a $\frac{R}{2}$, ya que:

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{\cos \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi} \left(\frac{R}{2} \right) = \frac{R}{2} \lim_{\varphi \to 0} \frac{\cos \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi} = \frac{R}{2}.$$

Cuando A se acerca al círculo, la pendiente de la recta tangente AB es más grande y φ se acerca a $\dfrac{\pi}{2}$, puesto que:

$$\lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi} \left(\frac{R}{2} \right) = \frac{R}{2} \lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi} = 0,$$

la abscisa de M se aproxima a 0.

Por lo tanto el lugar geométrico descrito por el punto M es el segmento tal que:

$$y = \frac{R}{2} \qquad \text{con} \qquad 0 < x < \frac{R}{2}.$$

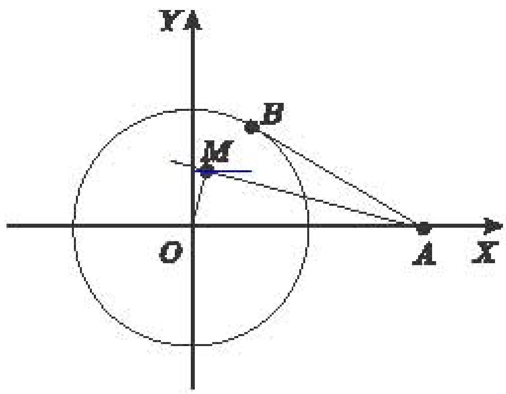


Figura 1-18

Construcción con Geolab

1. Define los escalares:

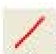
   - $r = 5$
   - $u = 10$
   - $v = 10$
   - $o1 = 0$
   - $o2 = 0$

2. Construye los puntos $R(r, o2)$, $O(o1, o2)$, $E(u, o2)$ y $F(o1, v)$

3. Construye los ejes coordenados eX y eY usando los puntos O, E y F.

4. Construye el punto A sobre el segmento RE

5. Construye el círculo $cir1$ con centro O y que pase por el punto R.

6. En el icono  elige la opción *Tangente a círculo por ratón*, llámala $tcir$, posteriormente haz clic en $cir1$ y el punto A, y llama B a la intersección de la recta $tcir$ con $cir1$.

7. En el icono  elige la opción *Bisectriz interior*, llámala bis, posteriormente haz clic en las rectas $tcir$ y eX.

8. Construye la recta l perpendicular a la bisectriz, bis, que pase por el punto O y llama M al punto de intersección de las rectas l y bis.

9. En la pantalla de datos analíticos, activa la traza del punto M.

10. Define una animación para el punto A con los siguientes datos:

    Inicial $= -0.2$; Final $= 10$, Pasos $= 1000$

11. En la pantalla gráfica, activa la traza.

12. Ejecuta la animación.

    Para verificar que el segmento de recta $y = \dfrac{R}{2}$ con $0 < x < \dfrac{R}{2}$ coincide con el lugar geométrico buscado, dibujamos la recta correspondiente a la construcción anterior:

13. Construye los puntos $M1\,(o1, r/2)\,, M2\,(r/2, r/2)\,,$ y el segmento $M1M2$. Oculta los puntos $M1$ y $M2$.

14. Cambia el color y grosor al segmento $M1M2$.

15. Para volver a ver la construcción original cierra la ventana de animación haciendo clic en el icono  *Cerrar ventana* y en la parte derecha de la ventana selecciona el objeto A, para arrastrarlo sobre el eje X si deseas ver, de manera manual, cómo se genera el lugar geométrico.

    La construcción anterior es la que se encuentra en el archivo Construcción_5rec.lab. ■

VI. Consideremos dos círculos ajenos Θ_1, Θ_2 con centros en C y C' respectivamente, situados sobre el eje X, de manera que el eje Y sea el eje radical de ellos. Tomamos A un punto en Θ_1.

Hagamos las siguientes consideraciones:

Llamamos:

a. ℓ_1 a la recta que pasa por los puntos A y C, B a la intersección de ℓ_1 con Θ_1 y P a la intersección de ℓ_1 con el eje Y.

b. ℓ_2 la recta que pasa por P, C'. A' y B' los puntos de intersección de ℓ_2 con Θ_2.

c. ℓ_3, ℓ_4 las rectas perpendiculares a las rectas ℓ_1, ℓ_2 por C y C' respectivamente.

d. M al punto de intersección de ℓ_3, ℓ_4.

e. Φ el círculo con centro en M y radio MA.

Encontrar el lugar geométrico que describe M a medida que A se mueve sobre Θ_1.

Solución:

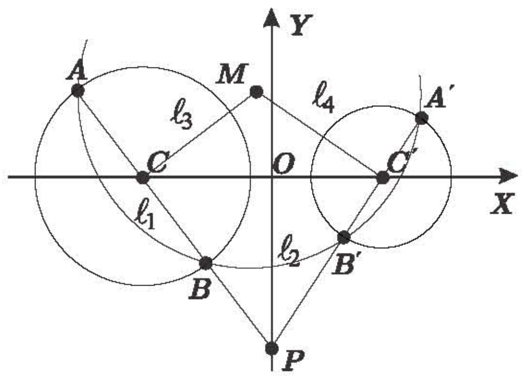


Figura 1-19

Supongamos que $C(a,0), C'(a',0)$ y $M(\alpha,\beta)$.

Si R es el radio del círculo Θ_1, entonces su ecuación es:

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - R^2 = 0.$$

Si R' es el radio del círculo Θ_2, entonces su ecuación es:

$$x^2 + y^2 - 2a'x + (a')^2 - (R')^2 = 0.$$

Si $MA = R''$ es el radio del círculo Φ,entonces su ecuación es:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - (R'')^2 = 0.$$

Ahora, puesto que O está en el eje radical de Θ_1 y Θ_2, de la figura:

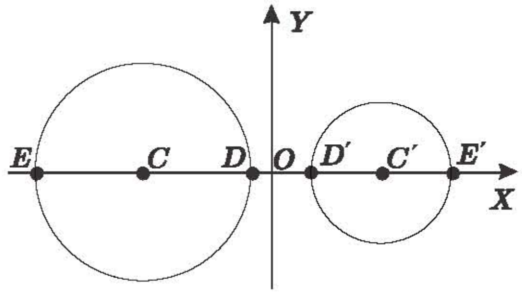


Figura 1-20

tenemos que:

$$OD' \cdot OE' = OD \cdot OE,$$

pero

$$\begin{aligned} OE' &= OC' + R' \\ &= a' + R' \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} OE &= OC + R \\ &= a + R, \end{aligned}$$

sustituyendo:

$$OD' \cdot (a' + R') = OD \cdot (a + R)$$

y puesto que

$$OD' = a' - R' \qquad \text{y} \qquad OD = (a - R)\,,$$

obtenemos:

$$(a' - R')\,(a' + R') = (a - R)\,(a + R)\,,$$

entonces:

$$(a')^2 - (R')^2 = a^2 - R^2,$$

escribimos

$$b^2 = a^2 - R^2 = (a')^2 - (R')^2\,.$$

De donde las ecuaciones de los círculos Θ_1, Θ_2 y Φ se escriben como:

$$x^2 + y^2 - 2ax + b^2 = 0 \tag{1.31}$$

$$x^2 + y^2 - 2a'x + b^2 = 0 \tag{1.32}$$

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 \tag{1.33}$$

respectivamente, donde $\gamma = \alpha^2 + \beta^2 - (R'')^2$.

Calculamos la ecuación del eje radical de los círculos Θ_1 y Φ.

Multiplicamos por -1 la ecuación (1.33), la sumamos a (1.31) y simplificamos:

$$\begin{aligned} -[x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma] + x^2 + y^2 - 2ax + b^2 &= 0 \\ 2\alpha x - 2ax + 2\beta y - \gamma + b^2 &= 0 \\ 2(\alpha - a)x + 2\beta y - \gamma + b^2 &= 0, \end{aligned}$$

como los círculos se cortan, en A y B, entonces el eje radical de los círculos Θ_1 y Φ es la recta que pasa por ellos, entonces pasa por C, de donde:

$$\begin{aligned} 2(\alpha-a)(a)+2\beta(0)-\gamma+b^2 &= 0 \\ 2a(\alpha-a)+b^2-\gamma &= 0. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Por otra parte, la ecuación del eje radical de Θ_2 y Φ se obtiene multiplicando (1.33) por -1 y sumando (1.32):

$$\begin{aligned} -[x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma]+x^2+y^2-2a'x+b^2 &= 0 \\ 2(\alpha-a')x+2\beta y-\gamma+b^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ahora probaremos que el círculo Φ pasa por los puntos A' y B':

Puesto que el punto P se encuentra sobre el eje radical de Θ_1 y Θ_2, la potencia a cualquiera de ellos es una constante, llamémosla k, entonces:

$$k = PB \cdot PA = PB' \cdot PA'.$$

Trazamos desde P, las tangentes a círculos Θ_1 y Θ_2 que los cortan en E y E' respectivamente,

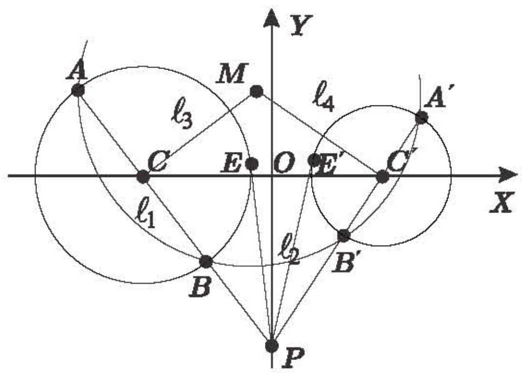


Figura 1-21

luego:

$$k = PE^2 = (PE')^2$$

y los triángulos $\triangle CPE$ y $\triangle C'E'P$ son rectángulos, entonces:

$$CP^2 = CE^2 + EP^2 \qquad \text{y} \qquad (C'P)^2 = (C'E')^2 + (E'P)^2,$$

es decir:

$$\begin{aligned} CP^2 &= CE^2 + k \\ &= R^2 + k \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} (C'P)^2 &= (C'E')^2 + k \\ &= (R')^2 + k, \end{aligned}$$

despejando k de ambas ecuaciones e igualando:

$$CP^2 - R^2 = (C'P)^2 - (R')^2.$$

Como por construcción los triángulos $\triangle ACM$ y $\triangle MC'A'$ son rectángulos:

$$\begin{aligned} CP^2-\left(AM^2-CM^2\right) &= (C'P)^2-\left((AM')^2-(C'M)^2\right) \\ -AM^2+\left(CP^2+CM^2\right) &= -(A'M)^2+\left((C'P)^2+(C'M)^2\right), \end{aligned}$$

puesto que también $\triangle CPM$ y $\triangle PC'M'$ son rectángulos, tenemos:

$$\begin{aligned} -AM^2+PM^2 &= -(A'M)^2+PM^2 \\ AM^2 &= (A'M)^2. \end{aligned}$$

Entonces el círculo Φ pasa por el punto A'.

Por último, puesto que el triángulo $\triangle A'MB'$ es isósceles y MC' es una mediatriz, el círculo pasa también por B'.

Así, puesto que C' pertenece al eje radical, tenemos:

$$2a'(\alpha-a')+b^2-\gamma=0. \tag{1.35}$$

Eliminando γ de (1.34) y (1.35) obtenemos la ecuación del lugar geométrico descrito por M:

$$\begin{aligned} a(\alpha-a)-a'(\alpha-a') &= 0 \\ \alpha(a-a')-aa+a'a' &= 0 \\ \alpha &= \frac{a^2-(a')^2}{a-a'} \\ \alpha &= a+a'. \end{aligned}$$

Puesto que el valor de α no depende del punto A que está sobre el círculo Θ_1, concluimos que el lugar descrito por M está contenido en la recta paralela al eje Y, que pasa por el punto $(a+a',0)$.

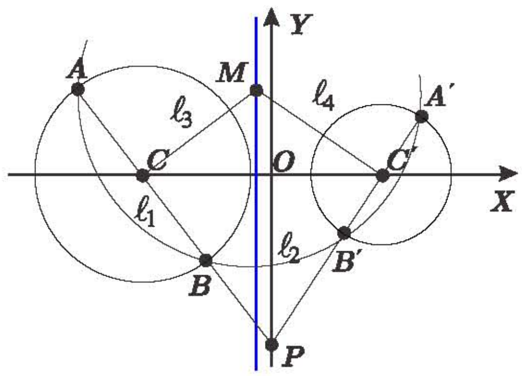


Figura 1-22

Para mostrar que el lugar geométrico es toda la recta, tomamos un punto $M\,(a+a',t)$, $t\in\mathbb{R}$, es decir, sobre la recta vertical $x=a+a'$.

Recordamos que $C(a,0)$ y $C'(a',0)$.

Encontramos la ecuación de las rectas que contienen a los segmentos MC y MC':

$$\begin{array}{ll} MC: & y=\dfrac{t}{a'}(x-a) \\ MC': & y=\dfrac{t}{a}(x-a') \end{array}$$

Supongamos que $t\neq 0$.

Consideramos la recta que pasa por C', perpendicular a MC':

$$y=-\frac{a}{t}(x-a')$$

y la recta que pasa por C, perpendicular a MC:

$$y=-\frac{a'}{t}(x-a). \tag{1.36}$$

Encontramos el punto P de intersección de las dos últimas, igualando:

$$\begin{aligned} -\frac{a}{t}(x-a') &= -\frac{a'}{t}(x-a) \\ a(x-a') &= a'(x-a) \\ ax-aa' &= a'x-a'a \\ x(a-a') &= 0, \end{aligned}$$

puesto que $a\neq a'$, tenemos que $x=0$, y sutituyendo en la ecuación (1.36) tenemos:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{a'}{t}(-a) \\ &= \frac{aa'}{t}. \end{aligned}$$

Así $P\left(0,\dfrac{aa'}{t}\right)$, es decir, P se encuentra en el eje radical de los círculos Θ_1 y Θ_2.

Si $t=0$, las rectas MC y MC' tienen ecuación:

$$y=0,$$

entonces $P=(0,0)$, es decir, está en el eje radical de Θ_1 y Θ_2.

La recta MC corta al círculo Θ_1 en dos puntos A y B.

Dibujamos el círculo con centro en M y radio el segmento AM, entonces, M pertenece al lugar geométrico buscado. Concluimos que el lugar geométrico que describe M es la recta vertical $x=a+a'$.

Construcción con Geolab

1. Define los escalares:
    - $a = -4.5$
    - $a' = 3$
    - $o1 = 0$
    - $o2 = 0$
2. Construye los puntos $O\,(o1, o2)\,, C(a, o2)$ y $C'(a', o2)$
3. Construye el eje coordenado eX usando los puntos O y C'.
4. Define los escalares $r1$ y $r2$ de valores 3.5 y 1 respectivamente.
5. Construye los círculos $cir1$ y $cir2$ con centros en C y C', y radios $r1$ y $r2$ respectivamente.
6. Haz clic en el icono  y elige la opción *Eje radical*, llámale eY y luego haz clic en los círculos $cir1$ y $cir2$.

    Observación: Se consideraron $a, a', r1$ y $r2$ de tal forma que el eje radical fuese el eje Y.
7. Construye un punto A en $cir1$.
8. Construye la recta $l1$ que pasa por los puntos A y C. Llama P a la intersección de la recta $l1$ y el eje radical eY.

    Nota. En caso de que el punto P no sea visible en la pantalla gráfica, mueve el punto A.
9. Construye la recta 12 que pasa por los puntos P y C'
10. Construye las rectas perpendiculares $l3$ y $l4$ a las rectas $l1$ y $l2$ que pasen por C y C' respectivamente. Llama M a la intersección de las rectas obtenidas.
11. En la pantalla de datos analíticos, activa la traza de M.
12. Define una animación para el punto A con los siguientes datos:

    Inicial = 0; Final = 1, Pasos = 1000
13. En la pantalla gráfica, activa la traza.
14. Ejecuta la animación.

    Para verificar que el lugar geométrico buscado está contenido en la recta vertical $x = a + a'$, donde a y a'son las primeras coordenadas de C y C', dibujamos la recta correspondiente a la construcción anterior:
15. Construye la recta calculada f con los valores $A = 1, B = 0$ y $C = -(a + a')$

16. Cambia el color y el grosor a la recta f.

17. Para volver a ver la construcción original cierra la ventana de animación haciendo clic en el icono  *Cerrar ventana* y en la parte derecha de la ventana selecciona el objeto A, para arrastrarlo sobre el círculo $cir1$ si deseas ver, de manera manual, cómo se genera el lugar geométrico.

La construcción anterior es la que se encuentra en el archivo Construcción_6rec.lab. ■

Capítulo 2

Círculos

I. Consideremos dos triángulos equiláteros $\triangle ABC$ y $\triangle ABD$ con un lado AB en común de tal manera que AB esté situado sobre el eje X y que además el eje Y pase por el punto medio del lado AB. Consideremos un punto E sobre la recta que contiene al segmento BC. Trazamos la recta que une D y E y llamamos F al punto de intersección de esta última con la recta que pasa por C y A. Llamemos M al punto de intersección de las rectas AE y BF. Encontrar el lugar geométrico descrito por M a medida que el punto E se desplaza a lo largo de la recta BC.

Solución:

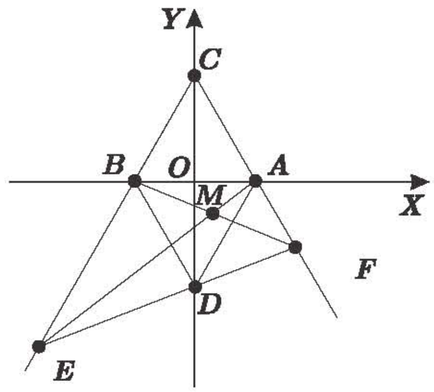


Figura 2-1

Para encontrar la ecuación del lugar geométrico requerido, encontraremos las ecuaciones de las rectas AE y BF y las resolveremos simultáneamente.

Sea O el origen de nuestro plano coordenado.

Llamemos $OA = a$, $OC = b$.

Como el $\triangle ABC$ es equilátero y el ángulo $\measuredangle AOC$ es recto, entonces aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $\triangle AOC$ tenemos:

$$\begin{aligned} CA^2 &= OA^2 + OC^2 \\ (2a)^2 &= a^2 + OC^2 \\ OC &= \sqrt{(2a)^2 - a^2} \\ OC &= \sqrt{3a^2} \\ OC &= \sqrt{3}a. \end{aligned}$$

La recta AC tiene por ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 1 \\ ay + bx - ab &= 0, \end{aligned}$$

la ecuación de la recta BC es:

$$\begin{aligned}\frac{x}{-a}+\frac{y}{b} &= 1\\ -ay+bx+ab &= 0\end{aligned}$$

y para la recta ED tenemos:

$$\begin{aligned}y-(-b) &= m(x-0)\\ y+b-mx &= 0.\end{aligned}$$

Ahora consideremos a las rectas BC y EF como los ejes de nuestro plano coordenado, entonces la recta AE, vista en este plano coordenado, tiene por ecuación:

$$(bx-ay+ab)+\lambda(y+b-mx)=0, \tag{2.1}$$

donde λ es la pendiente de la recta AE.

Despejando λ obtenemos:

$$\lambda=\frac{-(bx-ay+ab)}{y+b-mx}.$$

Puesto que $A=(a,0)$ está sobre la recta AE, entonces sustituyendo en la ecuación anterior tenemos:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-(b(a)-a(0)+ab)}{0+b-ma}\\ &= -\frac{2ab}{b-ma}.\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de λ en (2.1) tenemos:

$$(bx-ay+ab)+\left(-\frac{2ab}{b-ma}\right)(y+b-mx)=0.$$

Así, la ecuación de AE es:

$$(bx-ay+ab)(b-ma)-2ab(y+b-mx)=0. \tag{2.2}$$

De la misma manera, considerando el sistema coordenado cuyos ejes son las rectas EF y AC, obtenemos la ecuación de la recta BF. Así, la ecuación es:

$$(bx+ay-ab)+\lambda'(y+b-mx)=0 \tag{2.3}$$

donde λ' es su pendiente.

Como $B=(-a,0)$ está en la recta BF, entonces:

$$\begin{aligned}\lambda' &= -\left(\frac{bx+ay-ab)}{y+b-mx}\right)\\ &= -\frac{(b(-a)+a(0)-ab)}{0+b-m(-a)}\\ &= \frac{2ab}{b+ma},\end{aligned}$$

sustituyendo este valor de λ' en (2.3) tenemos:

$$(bx+ay-ab)+\left(\frac{2ab}{b+ma}\right)(y+b-mx)=0,$$

es decir, la ecuación de la recta BF es:

$$(bx+ay-ab)(b+ma)+2ab(y+b-mx)=0. \tag{2.4}$$

Para obtener la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto M, debemos encontrar la intersección de las rectas AE y BF, es decir, debemos eliminar m de las ecuaciones (2.2) y (2.4).

Primero, sumamos (2.2) y (2.4):

$$\begin{aligned}(bx-ay+ab)(b-ma)-2ab(y+b-mx)+(bx+ay-ab)(b+ma)+2ab(y+b-mx)=0\\ (bx-ay+ab)(b-ma)+(bx+ay-ab)(b+ma)=0\end{aligned}$$

simplificando:

$$2b^2x+2a^2my-2a^2bm=0, \tag{2.5}$$

pero $b=\sqrt{3}a$, sustituyendo este valor en el primer sumando de (2.5) tenemos:

$$\begin{aligned}2(\sqrt{3}a)^2x+2a^2my-2a^2bm &= 0\\ 6a^2x+2a^2my-2a^2bm &= 0,\end{aligned}$$

dividiendo entre $2a^2$:

$$\begin{aligned}3x+my-bm &= 0\\ 3x+m(y-b) &= 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ahora, multiplicamos (2.2) por -1 y sumamos (2.4):

$$\begin{aligned}[-(bx-ay+ab)(b-ma)-2ab(y+b-mx)]+[(bx+ay-ab)(b+ma)+2ab(y+b-mx)]=0\\ -(bx-ay+ab)(b-ma)+(bx+ay-ab)(b+ma)+4ab(y+b-mx)=0\end{aligned}$$

simplificando:

$$\begin{aligned}
(2ay-2ab)\,b+(2bx)\,ma+4ab(y+b-mx) &= 0\\
2aby-2ab^2+2abmx+4aby+4ab^2-4abmx &= 0\\
6aby+2ab^2-2abmx &= 0\\
3y+b-mx &= 0\\
m &= \frac{3y+b}{x}. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Así, sustituyendo (2.7) en (2.6) y simplificando, tenemos:

$$\begin{aligned}
3x+\left(\frac{3y+b}{x}\right)(y-b) &= 0\\
3x^2+(3y+b)(y-b) &= 0\\
3x^2+3y^2-2by-b^2 &= 0\\
x^2+y^2-\frac{2}{3}by-\frac{b^2}{3} &= 0\\
x^2+\left(y-\frac{b}{3}\right)^2 &= \frac{b^2}{3}+\frac{b^2}{9}\\
x^2+\left(y-\frac{b}{3}\right)^2 &= \left(\frac{2}{3}b\right)^2. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Por lo tanto el lugar descrito por el punto M está contenido en el círculo que tiene como centro el punto de coordenadas $\left(0,\dfrac{b}{3}\right)$ y radio $\dfrac{2}{3}b$.

Además pasa por los puntos A, B y C. Verifiquemos lo anterior con el punto A.

Como $A=(a,0)$, entonces evaluando (2.8) en A:

$$a^2+(0-\frac{b}{3})^2=a^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2,$$

pero $a=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$, luego:

$$\begin{aligned}
a^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2 &= \frac{b^2}{3}+\frac{b^2}{9}\\
&= \left(\frac{2b}{3}\right)^2,
\end{aligned}$$

es decir, A es un punto del círculo.

Análogamente podemos ver que B y C están en el círculo.

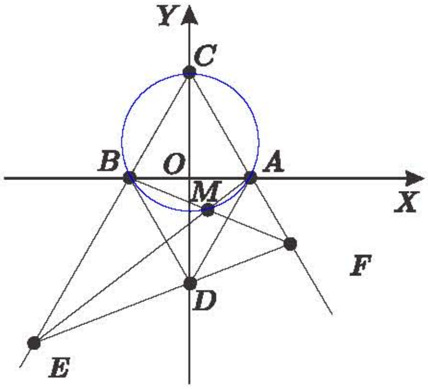


Figura 2-2

Para mostrar que el lugar geométrico descrito por el punto M es todo el círculo que tiene como centro el punto de coordenadas $\left(0, \frac{b}{3}\right)$ y radio $\frac{2}{3}b$, tomamos un punto M' en el círculo y veremos que podemos encontrar el punto E correspondiente, sobre la recta BC.

Sea $M' = (x_1, y_1)$, entonces M' satisface:

$$\begin{aligned}
(x_1)^2 + \left(y_1 - \frac{b}{3}\right)^2 &= \left(\frac{2}{3}b\right)^2 \\
(x_1)^2 + (y_1)^2 - \frac{2}{3}y_1 b &= \frac{b^2}{3} \\
(by_1)^2 - \frac{2}{3}y_1 bb^2 &= b^2\left(\frac{b^2}{3} - (x_1)^2\right) \\
(by_1)^2 - \frac{2}{3}y_1 bb^2 &= -b^2\left((x_1)^2 - \frac{b^2}{3}\right).
\end{aligned}$$

Como $b = \sqrt{3}a$, sustituimos b^2 por su valor correspondiente, excepto en la primera que se encuentra en el segundo miembro, es decir,

$$\begin{aligned}
(3a^2)(y_1)^2 - \frac{2}{3}y_1 b\,(3a^2) &= -b^2\left((x_1)^2 - \frac{3a^2}{3}\right) \\
3a^2y_1^2 - 2y_1a^2b &= -b^2\left((x_1)^2 - a^2\right),
\end{aligned}$$

sumando $2abx_1y_1$ de ambos lados de la igualdad tenemos:

$$\begin{aligned}
2abx_1y_1 + 3a^2y_1^2 - 2y_1a^2b &= 2abx_1y_1 - b^2\left((x_1)^2 - a^2\right) \\
2abx_1y_1 + 2a^2y_1^2 - 2y_1a^2b &= -a^2y_1^2 + 2abx_1y_1 - b^2\left((x_1)^2 - a^2\right) \\
2ay_1\left(b\,(x_1 - a) + ay_1\right) &= -a^2y_1^2 + 2abx_1y_1 - b^2\left((x_1)^2 - a^2\right) \\
2ay_1\left(b\,(x_1 - a) + ay_1\right) &= -a^2y_1^2 + aby_1\,(x_1 + a) + aby_1\,(x_1 - a) - b^2\left((x_1)^2 - a^2\right) \\
2ay_1\left(b\,(x_1 - a) + ay_1\right) &= \left(ay_1 - (x_1 + a)\,b\right)\left(-ay_1 + (x_1 - a)\,b\right) \\
\frac{a\left(b\,(x_1 - a) + ay_1\right)}{ay_1 - (x_1 + a)\,b} &= \frac{-ay_1 + (x_1 - a)\,b}{2y_1}. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Utilizaremos lo anterior, más adelante.

Si $M' = C$, entonces $E = C = F$ y hemos terminado.

Si $M' = A$, la única posibilidad para que M sea un punto en la recta que une B y F, es $F = A$, en cuyo caso la recta FD coincide con la recta AD, la cual es paralela a la recta BC y el punto E no puede elegirse, es decir, A no es un punto del lugar geométrico.

De igual manera tenemos que $M' = B$ no es un punto del lugar geométrico.

Supongamos que $M' \neq A, B, C$.

Hallemos las rectas $M'A$, $M'B$.

La ecuación de la recta $M'A$ es:

$$\begin{aligned} y - 0 &= \left(\frac{y_1 - 0}{x_1 - a}\right)(x - a) \\ y &= \left(\frac{y_1}{x_1 - a}\right)(x - a) \end{aligned} \tag{2.10}$$

y la ecuación de la recta $M'B$ es:

$$\begin{aligned} y - 0 &= \left(\frac{y_1 - 0}{x_1 + a}\right)(x + a) \\ y &= \left(\frac{y_1}{x_1 + a}\right)(x + a). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Por otro lado, la recta CA tiene ecuación:

$$\begin{aligned} y - b &= \left(\frac{b - 0}{0 - a}\right)(x - 0) \\ y &= -\frac{b}{a}x + b \end{aligned} \tag{2.12}$$

y la recta BC tiene ecuación:

$$\begin{aligned} y - b &= \left(\frac{b - 0}{0 + a}\right)(x - 0) \\ y &= \frac{b}{a}x + b. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Hallamos las coordenadas del punto de intersección de las rectas $M'B$ y CA:

Para ello, igualamos (2.11) y (2.12), y simplificamos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{y_1}{x_1+a}\right)(x+a) &= -\frac{b}{a}x+b\\
\left(\frac{y_1}{x_1+a}+\frac{b}{a}\right)x &= -\left(\frac{y_1}{x_1+a}\right)a+b\\
x &= \frac{-\left(\frac{y_1}{x_1+a}\right)a+b}{\left(\frac{y_1}{x_1+a}+\frac{b}{a}\right)}\\
x &= \frac{\left(-ay_1+\left(x_1+a\right)b\right)a}{ay_1+\left(x_1+a\right)b},
\end{aligned} \tag{2.14}$$

sustituimos este valor en (2.12):

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{b}{a}\left(\frac{\left(-ay_1+\left(x_1+a\right)b\right)a}{ay_1+\left(x_1+a\right)b}\right)+b\\
y &= -b\left(\frac{-ay_1+\left(x_1+a\right)b}{ay_1+\left(x_1+a\right)b}\right)+b\\
y &= \frac{b\left(ay_1-\left(x_1+a\right)b+ay_1+\left(x_1+a\right)b\right)}{ay_1+\left(x_1+a\right)b}\\
y &= \frac{2aby_1}{ay_1+\left(x_1+a\right)b}.
\end{aligned}$$

Sea $F\left(\frac{\left(-ay_1+\left(x_1+a\right)b\right)a}{ay_1+\left(x_1+a\right)b}, \frac{2aby_1}{ay_1+\left(x_1+a\right)b}\right)$.

La recta FD tiene por ecuación:

$$\begin{aligned}
y+b &= \left(\frac{\frac{2aby_1}{ay_1+\left(x_1+a\right)b}+b}{\frac{\left(-ay_1+\left(x_1+a\right)b\right)a}{ay_1+\left(x_1+a\right)b}-0}\right)(x-0)\\
y+b &= \left(\frac{b\left(2ay_1+ay_1+\left(x_1+a\right)b\right)}{a\left(-ay_1+\left(x_1+a\right)b\right)}\right)x\\
y &= \left(\frac{b\left(3ay_1+\left(x_1+a\right)b\right)}{a\left(-ay_1+\left(x_1+a\right)b\right)}\right)x-b.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Tenemos las ecuaciones de las rectas $FD, M'A$ y BC. Si aseguramos que el punto de intersección de las rectas:

$$FD \text{ con } BC \qquad \text{y} \qquad M'A \text{ con } BC$$

es el mismo, entonces habremos encontrado un punto E sobre la recta BC.

Primero calculemos las coordenadas del punto de intersección de las rectas FD y BC.
Igualamos las ecuaciones (2.15) y (2.13), y simplificamos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{b\left(3ay_1+\left(x_1+a\right)b\right)}{a\left(-ay_1+\left(x_1+a\right)b\right)}\right)x-b &= \frac{b}{a}x+b \\
\left(\frac{\left(3ay_1+\left(x_1+a\right)b\right)}{-ay_1+\left(x_1+a\right)b}-1\right)\frac{b}{a}x &= 2b \\
\left(\frac{\left(3ay_1+\left(x_1+a\right)b\right)+ay_1-\left(x_1+a\right)b}{-ay_1+\left(x_1+a\right)b}\right)x &= 2a \\
\left(\frac{4ay_1}{-ay_1+\left(x_1+a\right)b}\right)x &= 2a \\
x &= \frac{-ay_1+\left(x_1+a\right)b}{2y_1}, \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

sustituimos (2.16) en (2.13):

$$\begin{aligned}
y &= \frac{b}{a}\left(\frac{-ay_1+\left(x_1+a\right)b}{2y_1}\right)+b \\
y &= \frac{b}{a}\left(\frac{ay_1+\left(x_1+a\right)b}{2y_1}\right),
\end{aligned}$$

entonces

$$\left(\frac{-ay_1+\left(x_1+a\right)b}{2y_1},\frac{b}{a}\left(\frac{ay_1+\left(x_1+a\right)b}{2y_1}\right)\right)$$

es el punto de intersección de las rectas FD y BC.
Ahora, hallemos el punto de intersección de las rectas $M'A$ y BC.
Igualemos las ecuaciones (2.10) y (2.13), y simplifiquemos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{y_1}{x_1-a}\right)\left(x-a\right) &= \frac{b}{a}x+b \\
\left(\frac{y_1}{x_1-a}-\frac{b}{a}\right)x &= b+\frac{y_1a}{x_1-a} \\
\left(\frac{y_1a-b\left(x_1-a\right)}{\left(x_1-a\right)a}\right)x &= \frac{b\left(x_1-a\right)+y_1a}{x_1-a} \\
x &= \frac{a\left(b\left(x_1-a\right)+y_1a\right)}{y_1a-b\left(x_1-a\right)}, \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

pero por (2.9)tenemos:

$$\frac{a\left(b\left(x_1-a\right)+y_1a\right)}{y_1a-b\left(x_1-a\right)}=\frac{-ay_1+\left(x_1+a\right)b}{2y_1},$$

luego,

$$x = \frac{-ay_1 + (x_1 + a)\, b}{2y_1}.$$

Así:

$$\left(\frac{-ay_1 + (x_1 + a)\, b}{2y_1}, \frac{b}{a} \left(\frac{ay_1 + (x_1 + a)\, b}{2y_1} \right) \right)$$

también es el punto de intersección de las rectas $M'A$ y BC, es decir, las rectas FD, $M'A$ y BC se cortan en un mismo punto, entonces $E \left(\frac{-ay_1 + (x_1 + a)\, b}{2y_1}, \frac{b}{a} \left(\frac{ay_1 + (x_1 + a)\, b}{2y_1} \right) \right)$, sobre la recta BC, es el punto buscado.

Por lo tanto el lugar geométrico descrito por el punto M es el círculo que tiene como centro el punto de coordenadas $\left(0, \frac{b}{3} \right)$ y radio $\frac{2}{3}b$, excepto los puntos A y B.

Construcción con Geolab

1. Define los escalares:

   - $u = 10$
   - $v = 10$
   - $o1 = 0$
   - $o2 = 0$

   y construye los puntos $O\,(o1, o2)\,, U\,(u, o2)$ y $V\,(o1, v)$

2. Construye los ejes coordenados eX y eY usando los puntos O, U y V.

3. Haz clic en ⊙ y elige la opción *Calculado*. Llama $cir1$ a este círculo. Escribe $a = o1, b = o2$ y $r = 3$. Llama A a la intersección de la recta eX y el círculo $cir1$.

4. En el icono · elige la opción *Intersección de recta y círculo otro lado del punto*, llama B a este punto y haz clic en $eX, cir1$ y A.

5. En el icono ⊙ elige la opción *centro y punto*, llama $cir2$ a este círculo y después haz clic en A y B.

6. En el icono ℝ elige la opción *escalares distancia entre puntos*, llámale a y haz clic en O y A.

7. Define el escalar $r3 = 2{*}a$ y construye el círculo $cir3$ con centro en B y radio $r3$.

8. En el icono · elige la opción *Intersección de círculos otro lado del punto*, llama D a este punto y haz clic en $cir2, cir3$ y B.

9. En el icono elige la opción *Intersección de círculos otro lado del punto*, llama C a este punto y haz clic en $cir2, cir3$ y D. Define el escalar *distancia entre puntos*, llámale b y haz clic en O y C.

10. Construye los segmentos BC, CA, AD y DB, y cámbiales de color y grosor.

11. Construye un punto E en el segmento BC y traza la recta l que pasa por los puntos B y C y traza la recta $l1$ que pasa por los puntos E y D.

12. Construye la recta $l2$ que pasa por los puntos A y C, y llama H a la intersección de ésta con la recta $l1$.

Nota: En caso de que el punto F no esté visible, mueve el punto E.

13. Construye las rectas $l3$ y $l4$ que pasan por los puntos B, F y A, E. Llama M a la intersección de estas rectas.

14. En la pantalla de datos analíticos activa la traza de M y haz invisibles los siguientes objetos: $U, V, cir1, cir2$ y $cir3$.

15. Define una animación para el punto E con los siguientes datos:

Inicial $= -50$; Final $= 50$, Pasos $= 500$

16. Ejecuta la animación.

Para verificar que el lugar geométrico buscado está contenido en el círculo con centro $\left(0, \frac{b}{3}\right)$ y radio $\frac{2}{3}b$, dibujamos el círculo correspondiente a la construcción anterior:

17. Construye el círculo $cir4$ con centro en $(o1, b/3)$ y radio $(2/3)*b$

18. Cambia el color y el grosor al círculo.

19. Para volver a ver la construcción original cierra la ventana de animación haciendo clic en el icono  *Cerrar ventana* y en la parte derecha de la ventana selecciona el objeto E, para arrastrarlo sobre la recta que pasa por B y C si deseas ver, de manera manual, cómo se genera el lugar geométrico.

La construcción anterior es la que se encuentra en el archivo Construcción_1cir.lab. ■

II. Consideremos un círculo con centro en un punto C situado sobre el eje X distinto al origen y un punto A sobre el círculo. Unimos con una recta el origen O y el punto A y trazamos una recta perpendicular a OA que pase por el punto O. Llamemos B al punto de intersección de dicha perpendicular con el círculo y M al punto medio de la cuerda AB. Encontrar el lugar geométrico descrito por M cuando el punto A se mueve sobre el círculo.

Solución:

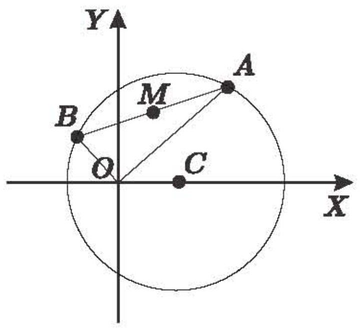


Figura 2-3

Sea $OC = a$, entonces la ecuación del círculo está dada por

$$(x-a)^2 + y^2 = R^2,$$

donde R es el radio del círculo.

Sean $A = (x', y')$ y $B = (x'', y'')$. Como A, B están en la circunferencia, entonces:

$$(x'-a)^2 + (y')^2 = R^2 \tag{2.18}$$

y

$$(x''-a)^2 + (y'')^2 = R^2. \tag{2.19}$$

OA y OB son perpendiculares entre sí, entonces el producto punto entre los vectores A y B es cero, es decir,

$$\begin{aligned} (x', y') \cdot (x'', y'') &= 0 \\ x'x'' + y'y'' &= 0, \end{aligned}$$

en particular,

$$2(x'x'' + y'y'') = 0. \tag{2.20}$$

Por otra parte, las coordenadas del punto M, son:

$$x = \frac{x' + x''}{2} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{y' + y''}{2},$$

es decir,

$$\begin{aligned} 2x &= x' + x'' \\ 2y &= y' + y''. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Así, para hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por M debemos eliminar x', x'', y', y'' de las ecuaciones (2.18), (2.19), (2.20), (2.21).

Para ello, primero sumamos (2.18) y (2.19):

$$\begin{aligned} (x'-a)^2 + (y')^2 + (x''-a)^2 + (y'')^2 &= 2R^2 \\ (x')^2 + (x'')^2 + (y')^2 + (y'')^2 - 2a(x'+x'') + 2(a^2 - R^2) &= 0, \end{aligned} \tag{2.22}$$

sumando (2.20) y (2.22) tenemos:

$$\begin{aligned} (x')^2 + (x'')^2 + (y')^2 + (y'')^2 - 2a(x'+x'') + 2(a^2 - R^2) + 2(x'x'' + y'y'') &= 0 \\ [(x')^2 + 2x'x'' + (x'')^2] + [(y')^2 + 2y'y'' + (y'')^2] - 2a(x'+x'') + 2(a^2 - R^2) &= 0 \\ (x'+x'')^2 + (y'+y'')^2 - 2a(x'+x'') + 2(a^2 - R^2) &= 0 (2.23) \end{aligned}$$

Por último sustituimos (2.21) en (2.23):

$$(2x)^2 + (2y)^2 - 2a(2x) + 2(a^2 - R^2) = 0,$$

dividiendo entre 4 obtenemos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - ax + \frac{a^2 - R^2}{2} &= 0 \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 &= -\frac{a^2}{4} + \frac{R^2}{2} \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{1}{4}(2R^2 - a^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto el lugar geométrico descrito por M está contenido en el círculo con centro en el punto de coordenadas $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ y radio $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - a^2}$.

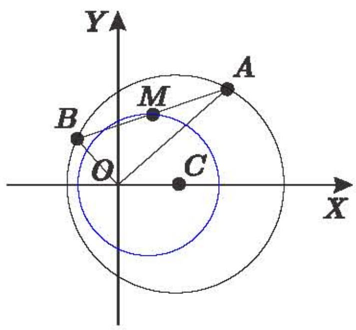


Figura 2-4

A continuación veremos que el lugar geométrico que describe M es todo el círculo:

Tomamos un punto M sobre el círculo, trazamos el segmento que une C y M, dibujamos la recta perpendicular al segmento CM que pase por M, llamamos A y B a los puntos de intersección de dicha recta con el círculo. Trazamos los segmentos OA y OB.

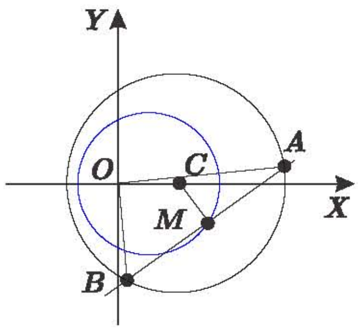


Figura 2-5

Puesto que CM es perpendicular a la cuerda AB y C es el centro del círculo original, entonces CM es la mediatriz del segmento AB, es decir, M es el punto medio de AB.

Si probamos que OB es perpendicular al segmento OA, entonces M pertenecerá al lugar geométrico.

Sean $M = (\alpha, \beta)$, $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$.

Para demostrar que los segmentos OB y OA son perpendiculares, basta ver que el producto punto entre A y B es cero.

Como M está en el círculo con ecuación:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}(2R^2 - a^2),$$

entonces

$$\left(\alpha - \frac{a}{2}\right)^2 + \beta^2 = \frac{1}{4}(2R^2 - a^2). \tag{2.24}$$

Desarrollando la expresión (2.24) y multiplicando por 4 tenemos:

$$\begin{aligned} 4\alpha^2 - 4\alpha a + a^2 + 4\beta^2 &= 2R^2 - a^2 \\ (2\alpha)^2 + (2\beta)^2 - 4\alpha a + a^2 &= 2R^2 - a^2 \\ (2\alpha)^2 + (2\beta)^2 - 4\alpha a + 2a^2 &= 2R^2. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Por otro lado, como A, B están sobre el círculo con ecuación:

$$(x - a)^2 + y^2 = R^2,$$

entonces:

$$\begin{aligned}(x_1-a)^2+y_1^2 &= R^2\\ (x_2-a)^2+y_2^2 &= R^2,\end{aligned}$$

sumando las dos últimas ecuaciones tenemos:

$$(x_1-a)^2+y_1^2+(x_2-a)^2+y_2^2=2R^2. \tag{2.26}$$

Como M es el punto medio de AB, entonces:

$$\alpha=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad \text{y} \qquad \beta=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{2.27}$$

Sustituimos (2.27) en (2.25) y obtenemos:

$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2-2(x_1+x_2)a+2a^2=2R^2, \tag{2.28}$$

igualamos (2.28) con (2.26) y simplificamos:

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2-2(x_1+x_2)a+2a^2 &= (x_1-a)^2+y_1^2+(x_2-a)^2+y_2^2\\ 2x_1x_2+2y_1y_2-2(x_1+x_2)a+2a^2 &= -2x_1a-2x_2a+a^2+a^2\\ 2x_1x_2+2y_1y_2-2(x_1+x_2)a+2a^2 &= -2(x_1+x_2)a+2a^2\\ 2(x_1x_2+y_1y_2) &= 0,\end{aligned}$$

dividiendo entre 2:

$$x_1x_2+y_1y_2=0.$$

Así, OB es perpendicular al segmento OA.

Por lo tanto M describe el círculo con centro en el punto de coordenadas $\left(\frac{a}{2},0\right)$ y radio $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2-a^2}$.

Construcción con Geolab

1. Define los escalares:

   - $a=3$
   - $u=10$
   - $v=10$
   - $o1=0$
   - $o2=0$

y construye los puntos $O\,(o1, o2)$, $U\,(u, o2)$ y $V\,(o1, v)$

2. Construye los ejes coordenados eX y eY usando los puntos O, U y V.

3. Construye el punto $C(a, o2)$ y el escalar directo $r = 5$

4. Construye el círculo $cir1$ con centro en C y de radio r.

5. En el icono selecciona *Punto en círculo.* Llama A a este punto y elige $cir1$.

6. Construye el segmento OA

7. Construye la recta $l1$ perpendicular a OA que pasa por O y llama B a la intersección de ésta con el círculo $cir1$.

8. Construye los segmentos AB y OB

9. En el icono selecciona *Punto medio.* Llama M a este punto y haz clic en A y B.

10. En la pantalla de datos analíticos, activa la traza de M.

11. Define una animación para el punto A con los siguientes datos:

12. Inicial $= 0$; Final $= 1$, Pasos $= 100$

13. En la pantalla gráfica, activa la traza.

14. Ejecuta la animación.

Para verificar que el lugar geométrico buscado está contenido en el círculo con centro $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - a^2}$, dibujamos el círculo correspondiente a la construcción anterior:

15. Construye el círculo $cir2$ con centro en $(a/2, o2)$ y radio $sqrt(2{*}r{*}r - a{*}a)/2$

16. Cambia el color al círculo.

17. Para volver a ver la construcción original cierra la ventana de animación haciendo clic en el icono  *Cerrar ventana* y en la parte derecha de la ventana selecciona el objeto A, para arrastrarlo sobre el círculo $cir1$ si deseas ver, de manera manual, cómo se genera el lugar geométrico.

La construcción anterior es la que se encuentra en el archivo Construcción_2cir.lab. ■

III. Consideremos dos puntos fijos A, B situados sobre el eje X, de manera que el eje Y pase por el punto medio del segmento AB, las rectas ℓ_1, ℓ_2, perpendiculares al eje X que pasan por A, B respectivamente y un punto A' sobre ℓ_1 distinto al punto A. Trazamos la recta ℓ_3 que pasa por los puntos A', B y la recta ℓ_4, por A, perpendicular a ℓ_3. Llamemos B' al punto de intersección de las rectas ℓ_2 y ℓ_4 y M al punto de intersección de ℓ_3 y ℓ_4. Encontrar el lugar geométrico descrito por M a medida que el punto A' se mueve a lo largo de ℓ_1 y demostrar que la recta tangente en M a la curva que describe el lugar geométrico, pasa por el punto de intersección de las rectas AB, $A'B'$.

Solución:

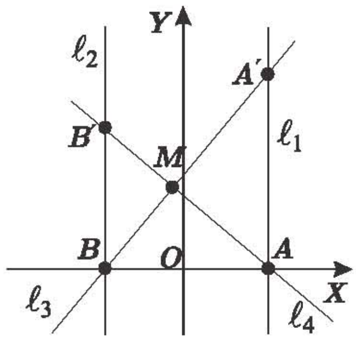


Figura 2-6

Para encontrar el lugar geométrico descrito por M, encontraremos las ecuaciones de las rectas ℓ_3 y ℓ_4 y las resolveremos simultáneamente.

Llamemos $AB = 2a$, $AA' = \alpha$, $BB' = \beta$, entonces la ecuación de la recta ℓ_4 está dada por:

$$\begin{aligned} y - 0 &= \left(\frac{\beta - 0}{-a - a}\right)(x - a) \\ \frac{y}{\beta} &= -\frac{x - a}{2a} \end{aligned} \tag{2.29}$$

y la de la recta ℓ_3 está dada por:

$$\begin{aligned} y - 0 &= \left(\frac{\alpha - 0}{a - (-a)}\right)(x - (-a)) \\ \frac{y}{\alpha} &= \frac{x + a}{2a}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Para hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto M eliminaremos α y β de (2.29) y (2.30).

Multiplicamos (2.29) por (2.30) y obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{\beta}\right)\left(\frac{y}{\alpha}\right) &= \left(-\frac{x - a}{2a}\right)\left(\frac{x + a}{2a}\right) \\ \left(\frac{y}{\beta}\right)\left(\frac{y}{\alpha}\right) &= -\frac{(x^2 - a^2)}{4a^2}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Pero
$$\alpha\beta = 4a^2.$$

En efecto, para verificarlo, mostraremos que los triángulos $\triangle B'BA$ y $\triangle BA'A$ son semejantes.
Primero observemos que:

$$\begin{aligned} \measuredangle BB'A &= 90° - \measuredangle B'BM \\ \measuredangle ABA' &= 90° - \measuredangle B'BM, \end{aligned}$$

de donde:
$$\measuredangle BB'A = \measuredangle ABA'.$$

De igual manera:

$$\begin{aligned} \measuredangle AA'B &= 90° - \measuredangle A'AM \\ \measuredangle BAB' &= 90° - \measuredangle A'AM, \end{aligned}$$

luego:
$$\measuredangle AA'B = \measuredangle BAB'$$

y
$$\measuredangle B'BA = \measuredangle BAA' = 90°.$$

Así, tenemos que los triángulos $\triangle B'BA$ y $\triangle BA'A$ tienen ángulos correspondientes iguales, por lo que son semejantes.

Entonces tenemos:
$$\frac{B'B}{BA} = \frac{BA}{A'A},$$

es decir,

$$\begin{aligned} AA' \times BB' &= AB^2 \\ \alpha\beta &= 4a^2, \end{aligned} \tag{2.32}$$

sustituyendo (2.32) en (2.31):

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{4a^2} &= -\frac{(x^2 - a^2)}{4a^2} \\ y^2 &= a^2 - x^2 \\ x^2 + y^2 &= a^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto el lugar geométrico descrito por M está contenido en el círculo con centro en el punto medio de AB y diámetro AB.

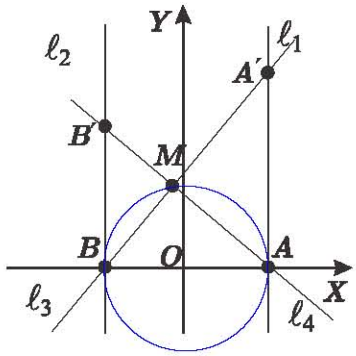


Figura 2-7

Por otro lado, las coordenadas del punto M se obtienen resolviendo simultáneamente las ecuaciones (2.29) y (2.30). Para obtenerlas, despejamos y de (2.29):

$$\begin{aligned} \frac{y}{\beta} &= -\frac{x-a}{2a} \\ y &= -\frac{x-a}{2a}\beta, \end{aligned}$$

sustituimos en (2.30):

$$\begin{aligned} \frac{y}{\alpha} &= \frac{x+a}{2a} \\ \frac{-\left(\frac{x-a}{2a}\beta\right)}{\alpha} &= \frac{x+a}{2a} \end{aligned}$$

y simplificamos

$$\begin{aligned} -\left(\frac{x-a}{2a}\beta\right) &= \alpha\left(\frac{x+a}{2a}\right) \\ -(x-a)\beta &= \alpha(x+a) \\ x &= a\left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}\right). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Ahora sumamos (2.29) y (2.30):

$$\frac{y}{\beta}+\frac{y}{\alpha}=-\frac{x-a}{2a}+\frac{x+a}{2a}$$

y simplificamos:

$$\begin{aligned} y\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right) &= 1 \\ y &= \frac{1}{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}} \\ y &= \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}. \end{aligned} \tag{2.34a}$$

Así, de (2.33), (2.34a) tenemos que:

$$M = \left(a\left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}\right), \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \right).$$

Por último demostremos que la ecuación de la recta tangente en M pasa por el punto de intersección de las rectas AB y $A'B'$. Para ello tenemos que encontrar las ecuaciones de nuestras rectas que supuestamente compartirán un punto en común.

La ecuación de recta tangente en M, al círculo obtenido es:

$$a\left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}\right)x + \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}y = a^2. \tag{2.35}$$

La ecuación de la recta AB está dada por:

$$y = 0$$

y la de la recta $A'B'$ está dada por:

$$\begin{aligned} y-\beta &= \left(\frac{\beta-\alpha}{-a-a}\right)(x-(-a)) \\ y-\beta &= -\left(\frac{\beta-\alpha}{2a}\right)(x+a). \end{aligned}$$

Así, las coordenadas del punto de intersección de las rectas AB y $A'B'$ son:

$$x = 2a\frac{\left(\beta - a\left(\frac{\beta-\alpha}{2a}\right)\right)}{\beta-\alpha} = a\left(\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}\right) \qquad \text{y} \qquad y = 0. \tag{2.36}$$

Si logramos probar que este punto pertenece a la recta tangente en M del círculo obtenido tendríamos que las 3 rectas se cortan en un punto en común. Sustituyamos (2.36) en el miembro izquierdo de (2.35):

$$\begin{aligned} a\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}a\left(\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}\right) + \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}(0) &= a\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}a\left(\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}\right) \\ &= a\cdot a\frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\beta+\alpha}{\beta+\alpha} \\ &= a^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto la recta tangente al círculo con centro en el punto medio de AB y diámetro AB, que pasa por el punto M, pasa por el punto de intersección de las rectas AB, $A'B'$.

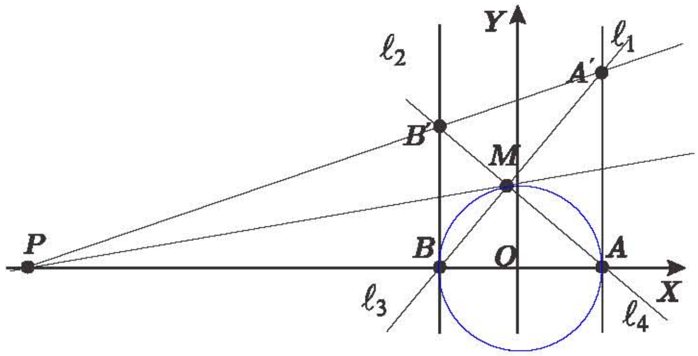
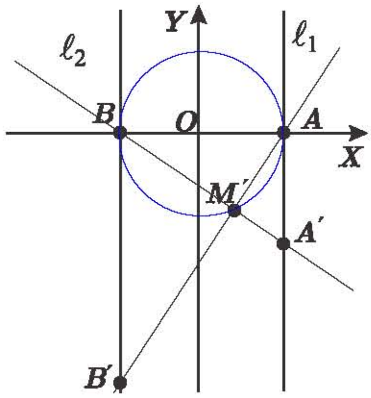


Figura 2-8

Por último, observaremos que cualquiera de los puntos del círculo con ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, pertenece al lugar geométrico considerado.

En efecto, si M' está en el círculo, puesto que AB es un diámetro, el ángulo $\measuredangle BM'A$ es recto.

Trazamos la recta BM' y llamamos A' al punto de intersección de dicha recta con ℓ_1. De la misma manera, trazamos la recta AM' y llamamos B' al punto de intersección de dicha recta con ℓ_2. Así, M' forma parte del lugar geométrico.



Construcción con Geolab

1. Define los escalares:

   - $a1 = 5$
   - $b1 = -3$
   - $u = 10$
   - $v = 10$
   - $o1 = 0$

- $o2 = 0$

y construye los puntos $O\,(o1, o2)$, $U\,(u, o2)$ y $V\,(o1, v)$

2. Construye los ejes coordenados eX y eY usando los puntos O, E y F.

3. Construye los puntos $A(a1, o2), B(b1, o2)$ y el escalar AB *distancia entre dos puntos* y haz clic en A y B.

4. Construye la rectas $l1, l2$ perpendiculares al eje eX que pasen por los puntos A y B respectivamente.

5. Construye el punto $R(a1, b1)$ sobre la recta $l1$ y un punto A' sobre el segmento AR. Oculta los puntos U, V y R.

6. Construye la recta $l3$ que pasa por los puntos B y A'.

7. Construye la recta $l4$ perpendicular a $l3$ que pase por el punto A y llama B' a la intersección de las rectas $l2$ y $l4$.

8. Llama M a la intersección de las rectas $l3$ y $l4$.

   Nota: En caso de que el punto B' no esté visible en nuestra pantalla gráfica, mueve el punto A'.

9. En la pantalla de datos analíticos, activa la traza de M.

10. Define una animación para el punto A' con los siguientes datos:

    Inicial $= -100$; Final $= 100$, Pasos $= 400$

11. En la pantalla gráfica activa la traza.

12. Ejecuta la animación.

    Para verificar que el lugar geométrico buscado está contenido en el círculo con centro en el punto medio del segmento AB y diámetro AB, dibujamos el círculo correspondiente a la construcción anterior:

13. Construye el círculo $cir1$ con centro $((a1 + b1)/2, o2)$ y radio $AB/2$

14. Para volver a ver la construcción original cierra la ventana de animación haciendo clic en el icono  *Cerrar ventana* y en la parte derecha de la ventana selecciona el objeto A', para arrastrarlo sobre la recta $l1$ si deseas ver, de manera manual, cómo se genera el lugar geométrico.

    La construcción anterior es la que se encuentra en el archivo Construcción_3cir.lab. ■

IV. Sean A, B puntos fijos sobre el eje X de tal manera que el eje Y pase por el punto medio del segmento que une A y B, O el origen del plano coordenado y un punto fijo P situado en el primer cuadrante. Consideremos un círculo Θ con centro C en el eje Y y que pasa por los puntos A y B, y la recta ℓ, la polar del punto P con respecto al círculo. Sea M el punto de intersección de la recta ℓ y la recta que une a P con el centro del círculo Θ. Encontrar el lugar geométrico descrito por el punto M a medida que el centro del círculo Θ se mueve a lo largo del eje Y.

Solución:

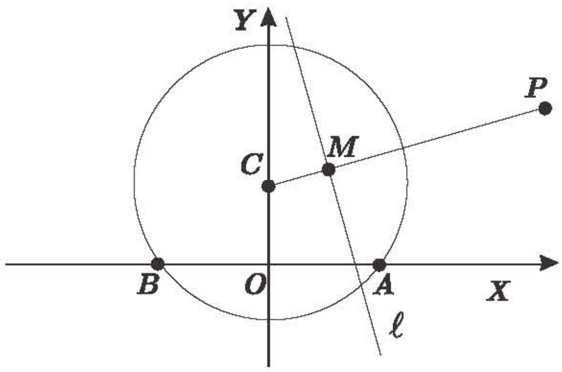


Figura 2-9

Sean $P = (\alpha, \beta), C = (0, \lambda)$ y $A = (a, 0)$.

Como el círculo pasa por A, su radio es

$$d(C, A) = \sqrt{\lambda^2 + a^2}.$$

Entonces la ecuación del círculo Θ es:

$$x^2 + (y - \lambda)^2 = a^2 + \lambda^2.$$

Por otra parte, la recta ℓ, la polar del punto P, tiene ecuación:

$$\begin{aligned} \alpha x + (\beta - \lambda)(y - \lambda) - \left(a^2 + \lambda^2\right) &= 0 \\ \alpha x + \beta y - \lambda\beta - \lambda y + \lambda^2 - \left(a^2 + \lambda^2\right) &= 0 \\ \alpha x + \beta y - a^2 - \lambda(\beta + y) &= 0. \qquad (2.37) \end{aligned}$$

Asimismo, la ecuación de la recta que pasa por C y P tiene ecuación:

$$\begin{aligned} y - \beta &= \left(\frac{\beta - \lambda}{\alpha}\right)(x - \alpha) \\ (y - \beta)\alpha &= (\beta - \lambda)(x - \alpha) \\ \alpha y - \alpha\beta &= \beta x - \alpha\beta - \lambda x + \lambda\alpha \\ \beta x - \alpha y - \lambda(x - \alpha) &= 0. \qquad (2.38) \end{aligned}$$

Para obtener la ecuación del lugar geométrico que describe M, debemos eliminar λ de las ecuaciones (2.37) y (2.38).

Multiplicamos (2.37) por $(x-\alpha)$ y (2.38) por $-(\beta+y)$ y sumamos ambas expresiones:

$$\begin{array}{rcl} (x-\alpha)\left(\alpha x+\beta y-a^2-\lambda(\beta+y)\right) &=& 0 \\ -(\beta+y)\left(\beta x-\alpha y-\lambda(x-\alpha)\right) &=& 0 \\ \hline \left(\alpha x+\beta y-a^2\right)(x-\alpha)-(\beta x-\alpha y)(\beta+y) &=& 0. \end{array}$$

Luego, la ecuación que satisfacen los puntos del lugar geométrico descrito por M es:

$$\begin{aligned} \left(\alpha x+\beta y-a^2\right)(x-\alpha)-(\beta x-\alpha y)(\beta+y) &= 0 \qquad (2.39) \\ \alpha x^2-\left(\alpha^2+a^2\right)x+\beta yx-\alpha\beta y+a^2\alpha-\beta^2 x-\beta yx+\alpha\beta y+\alpha y^2 &= 0 \\ \alpha\left(x^2+y^2\right)-\left(\alpha^2+a^2+\beta^2\right)x+a^2\alpha &= 0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2+a^2+\beta^2}{\alpha}\right)^2+y^2 &= \left(\frac{1}{2}\frac{\alpha^2+a^2+\beta^2}{\alpha}\right)^2-a^2, \end{aligned}$$

es decir, el lugar geométrico descrito por M está contenido en un círculo con centro $\left(\frac{1}{2}\frac{\alpha^2+a^2+\beta^2}{\alpha},0\right)$ y radio $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{\alpha^2+a^2+\beta^2}{\alpha}\right)^2-a^2}$.

Observamos que $\left(\frac{1}{2}\frac{\alpha^2+a^2+\beta^2}{\alpha}\right)^2-a^2>0$. En efecto:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\frac{\alpha^2+a^2+\beta^2}{\alpha}\right)^2-a^2 &= \frac{\left(\alpha^2+a^2+\beta^2\right)^2}{(2\alpha)^2}-a^2 \\ &= \frac{\left(\alpha^2+a^2+\beta^2\right)^2-4\alpha^2a^2}{4\alpha^2}. \end{aligned}$$

Como $4\alpha^2>0$ analizamos el signo del numerador:

$$\begin{aligned} \left(\alpha^2+a^2+\beta^2\right)^2-4\alpha^2a^2 &= \alpha^4+2\alpha^2a^2+2\alpha^2\beta^2+a^4+2a^2\beta^2+\beta^4-4\alpha^2a^2 \\ &= \alpha^4-2\alpha^2a^2+2\alpha^2\beta^2+a^4+2a^2\beta^2+\beta^4 \\ &= \left(\alpha^2-a^2\right)^2+2\beta^2\left(\alpha^2+a^2\right)+\beta^4 \end{aligned}$$

y la última expresión, por supuesto es mayor que cero.

Así, el lugar geométrico está contenido en un círculo cuyo centro está sobre el eje X.

Ahora bien, considerando la expresión (2.39), podemos observar que las intersecciones de las rectas con ecuaciones:

a. $\alpha x+\beta y-a^2=0$ y $\beta x-\alpha y=0$;

b. $x-\alpha=0$ y $\beta x-\alpha y=0$;

c. $\alpha x + \beta y - a^2 = 0$ y $\beta + y = 0$;

d. $x - \alpha = 0$ y $\beta + y = 0$.

la satisfacen.

Para identificar el círculo, analicemos los pares de rectas mencionados:

a. $\alpha x + \beta y - a^2 = 0$ y $\beta x - \alpha y = 0$.
La segunda recta tiene ecuación $\beta x - \alpha y = 0$, es decir,

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x,$$

que es la ecuación de la recta que une el origen O con el punto P.
Ahora analizamos la recta con ecuación $\alpha x + \beta y - a^2 = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y - a^2 &= 0 \\ \beta y &= -\alpha x + a^2 \\ y &= -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{a^2}{\beta} \\ &= -\frac{\alpha}{\beta}\left(x - \frac{a^2}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

observando la pendiente notamos que esta recta es perpendicular a la recta que une O con el punto P.
Puesto que el punto de intersección de dichas rectas satisface la ecuación del lugar geométrico, tenemos que el punto H, de intersección de la recta que pasa por O y P y la perpendicular a esta última, que pasa por el punto de coordenadas $\left(\frac{a^2}{\alpha}, 0\right)$, es un punto del círculo.

b. $x - \alpha = 0$ y $\beta x - \alpha y = 0$.
Como vimos en el caso anterior, la segunda es la ecuación de la recta que pasa por O y P.
La primera es la recta $x = \alpha$.
El punto de intersección de ambas debe satisfacer:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\beta}{\alpha}x \\ x &= \alpha, \end{aligned}$$

de donde:

$$x = \alpha \quad \text{y} \quad y = \beta.$$

Es decir, el punto P está en el círculo.

Puesto que para determinar un círculo bastan tres puntos, consideramos solamente uno de los dos pares de rectas sobrantes. Elegimos el último por ser el más fácil.

d. $x - \alpha = 0$ y $\beta + y = 0$.

De las dos ecuaciones tenemos:

$$x = \alpha \quad \text{y} \quad y = -\beta.$$

Es decir, el punto P', simétrico de P con respecto al eje X, está también en el círculo. Así, el círculo obtenido pasa por los puntos P, P' y H.

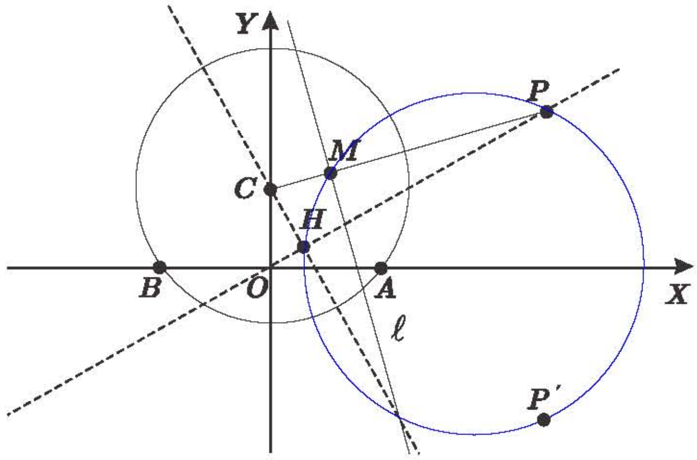


Figura 2-10

Veremos ahora que el lugar geométrico descrito por M es todo el círculo:

Sea $M' = (x_1, y_1)$ un punto del círculo. Debemos encontrar un círculo que tenga centro sobre el eje Y, que pase por los puntos A y B de tal manera que la polar de P pase por M'.

Si $M' = P$, consideramos el círculo que pasa por A, B y P, en cuyo caso tenemos que la polar de P pasa por M' ya que si P está sobre el círculo, entonces la polar de P es la recta tangente en este punto.

Vayamos al caso general. Si $M' \neq P$ consideramos la recta que une a M'y P.

Llamamos C a la intersección de esta recta con el eje Y.

Construimos el círculo Ω que tiene como radio el segmento CA. El círculo Ω claramente pasa por A, B.

Por el *Teorema fundamental de polos y polares*, (ver Apéndice B [**17**], página 140) sabemos que si con respecto a un círculo Ω, la polar de M' pasa por P, entonces la polar de P pasa por M'. Así, basta con demostrar que el punto P está sobre la polar de M'.

Primero hallaremos la ecuación del círculo Ω:

La ecuación de la recta $M'P$ es:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_1 - \beta}{x_1 - \alpha}\right)(x - x_1),$$

luego, el punto de intersección C con el eje Y tiene coordenadas:

$$x = 0$$

y

$$\begin{aligned} y &= -\left(\frac{y_1 - \beta}{x_1 - \alpha}\right) x_1 + y_1 \\ &= \frac{\beta x_1 - \alpha y_1}{x_1 - \alpha}, \end{aligned}$$

entonces la longitud del segmento CA es:

$$\begin{aligned} |CA| &= \sqrt{\left(\frac{\beta x_1 - \alpha y_1}{x_1 - \alpha} - 0\right)^2 + (0 - a)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\beta x_1 - \alpha y_1}{x_1 - \alpha}\right)^2 + a^2}. \end{aligned}$$

Así, tenemos que el círculo Ω tiene ecuación:

$$x^2 + \left(y - \frac{\beta x_1 - \alpha y_1}{x_1 - \alpha}\right)^2 = \left(\frac{\beta x_1 - \alpha y_1}{x_1 - \alpha}\right)^2 + a^2,$$

entonces la ecuación de la polar de M' es:

$$\begin{aligned} x_1 x + \left(y_1 - \frac{\beta x_1 - \alpha y_1}{x_1 - \alpha}\right)\left(y - \frac{\beta x_1 - \alpha y_1}{x_1 - \alpha}\right) &= \left(\frac{\beta x_1 - \alpha y_1}{x_1 - \alpha}\right)^2 + a^2 \\ x_1 x + \left(\frac{y_1 x_1 - \beta x_1}{x_1 - \alpha}\right)\left(y - \frac{\beta x_1 - \alpha y_1}{x_1 - \alpha}\right) &= \left(\frac{\beta x_1 - \alpha y_1}{x_1 - \alpha}\right)^2 + a^2. \end{aligned}$$

Ahora, sustituimos $P = (\alpha, \beta)$ en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} x_1 \alpha + \left(\frac{y_1 x_1 - \beta x_1}{x_1 - \alpha}\right)\left(\beta - \frac{\beta x_1 - \alpha y_1}{x_1 - \alpha}\right) &= \left(\frac{\beta x_1 - \alpha y_1}{x_1 - \alpha}\right)^2 + a^2 \\ x_1 \alpha \left(x_1 - \alpha\right) + \frac{\left(y_1 x_1 - \beta x_1\right)\left(\alpha y_1 - \alpha \beta\right)}{x_1 - \alpha} &= \frac{\left(\beta x_1 - \alpha y_1\right)^2}{x_1 - \alpha} + a^2 \left(x_1 - \alpha\right) \end{aligned}$$

y simplificamos:

$$\begin{aligned}
\left(x_1\alpha - a^2\right)(x_1-\alpha) + \frac{(y_1x_1-\beta x_1)(\alpha y_1-\alpha\beta) - (\beta x_1-\alpha y_1)^2}{x_1-\alpha} &= 0\\
\left(x_1\alpha - a^2\right)(x_1-\alpha) + \frac{x_1\alpha y_1^2+\beta^2x_1\alpha - (\beta x_1)^2-(\alpha y_1)^2}{x_1-\alpha} &= 0\\
\left(x_1\alpha - a^2\right)(x_1-\alpha) + \frac{x_1\left(\alpha y_1^2-\beta^2x_1\right) - \alpha\left(\alpha y_1^2-\beta^2x_1\right)}{x_1-\alpha} &= 0\\
\left(x_1\alpha - a^2\right)(x_1-\alpha) + \left(\alpha y_1^2-\beta^2x_1\right) &= 0\\
\left(x_1\alpha - a^2\right)(x_1-\alpha) + \left(\alpha y_1^2-\beta^2x_1\right) + (\beta y_1x_1-\beta y_1x_1) + (\beta y_1\alpha-\beta y_1\alpha) &= 0\\
\left(x_1\alpha - a^2\right)(x_1-\alpha) + (\beta y_1x_1-\beta y_1\alpha) + \left(\beta y_1\alpha-\beta^2x_1\right) + \left(\alpha y_1^2-\beta y_1x_1\right) &= 0\\
\left(x_1\alpha - a^2\right)(x_1-\alpha) + \beta y_1(x_1-\alpha) - (\beta x_1-y_1\alpha)\beta - (\beta x_1-y_1\alpha)y_1 &= 0\\
\left(x_1\alpha + \beta y_1 - a^2\right)(x_1-\alpha) - (\beta x_1-y_1\alpha)(\beta+y_1) &= 0.
\end{aligned}$$

Pero $M' = (x_1, y_1)$ satisface (2.39), es decir,

$$\left(x_1\alpha + \beta y_1 - a^2\right)(x_1-\alpha) - (\beta x_1-y_1\alpha)(\beta+y_1) = 0,$$

entonces P está sobre la polar de M'.

Por lo tanto, el lugar geométrico descrito por M es el círculo con centro $\left(\frac{1}{2}\frac{\alpha^2+a^2+\beta^2}{\alpha}, 0\right)$ y radio $\left(\frac{1}{2}\frac{\alpha^2+a^2+\beta^2}{\alpha}\right)^2 - a^2$.

Construcción con Geolab

1. Define los escalares:

- $p1 = 7$
- $p2 = 6$
- $a = 5$
- $v = 10$
- $o1 = 0$
- $o2 = 0$

y construye los puntos $A(a, o2), B(-a, o2), V(o1, v)$ y $O(o1, o2)$

2. Usando los puntos O, A y V, construye los ejes coordenados eX y eY.

3. Construye el punto $P(p1, p2)$

Nota: En el desarrollo del texto $P = (\alpha, \beta)$.

4. Construye un punto C en el segmento OV.

5. Construye el círculo cir con centro en C, que pasa por el punto A.

6. Define la recta l, la polar del punto P con respecto al círculo cir.

7. Construye el segmento CP.

8. Construye el punto M de intersección del segmento CP con la recta l.

9. En la pantalla de datos analíticos activa la traza de M.

10. Define una animación para el punto C con los siguientes datos:

    Inicial $= -35$; Final $= 35$, Pasos $= 1000$

11. En la pantalla gráfica, activa la traza.

12. Ejecuta la animación.

    Para verificar que el lugar geométrico buscado está contenido en el círculo que pasa por los puntos P, P' y H dibujamos dichos elementos, correspondientes a la construcción anterior:

13. Define el escalar $r1 = (p1{*}p1 + a{*}a + p2{*}p2) \,/\, (2{*}p1)$ y construye el círculo $cir1$ con centro en $(r1, o2)$ y radio $r1{*}r1 - a{*}a$

14. Construye los puntos $P'\,(p1, -p2)$ y $F\,(a{*}a/p1, o2)$

15. Construye la recta $l1$ que pasa por O y P.

16. Construye la recta $l2$, perpendicular a $l1$,que pasa por F. Llama H al punto de intersección de $l1$ y $l2$.

17. Oculta los objetos V y F.

18. Para volver a ver la construcción original cierra la ventana de animación haciendo clic en el icono  *Cerrar ventana* y en la parte derecha de la ventana selecciona el objeto C, para arrastrarlo sobre el eje Y si deseas ver, de manera manual, cómo se genera el lugar geométrico.

    La construcción anterior es la que se encuentra en el archivo Construcción_4cir.lab. ■

Capítulo 3

Parábolas, elipses, hipérbolas y algo más

I. Consideremos una recta ℓ_1 que pase por el origen O del plano cartesiano, sea ℓ_2 la recta obtenida al reflejar ℓ_1 con respecto al eje X. Tomemos dos puntos P y Q, distintos de O, situados sobre ℓ_1 y ℓ_2 respectivamente. Tracemos el segmento PQ y las rectas, perpendicular a ℓ_1 que pasa por P y perpendicular a ℓ_2 que pasa por Q. Llamamos M a la intersección de dichas rectas. Encontrar el lugar geométrico descrito por M a medida que los puntos P y Q son desplazados sobre las rectas ℓ_1 y ℓ_2 respectivamente de tal manera que el área del triángulo $\triangle POQ$ sea fija.

Solución:

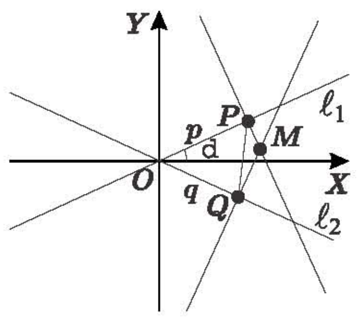


Figura 3-1

Sean α el ángulo formado por el eje X y la recta $\ell_1, OP = p$ y $OQ = q$.

Analicemos las rectas PM y QM.

Notemos que la pendiente de la recta PM es $\dfrac{-1}{\tan\alpha}$.

Si consideramos el triángulo rectángulo formado por O, P y la proyección de P sobre el eje X, tenemos que el punto P tiene coordenadas:

$$x = p\cos\alpha$$

y

$$y = p\operatorname{sen}\alpha$$

luego, la recta PM tiene por ecuación:

$$\begin{aligned}
y - p\operatorname{sen}\alpha &= \frac{-1}{\tan\alpha}(x - p\cos\alpha) \\
y\operatorname{sen}\alpha - p\operatorname{sen}^2\alpha &= -x\cos\alpha + p\cos^2\alpha \\
y\operatorname{sen}\alpha + x\cos\alpha - p\operatorname{sen}^2\alpha &= p\cos^2\alpha \\
x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha &= p\left(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha\right) \\
x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha &= p. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Observaciones:

a. Puesto que ℓ_2 es la recta obtenida al reflejar ℓ_1 con respecto al eje X, entonces el ángulo que forma con el eje X es $-\alpha$.

b. La función coseno es par y la función seno es impar.

De la misma manera que antes, considerando las observaciones anteriores, encontramos la ecuación de la recta QM:

El punto Q tiene coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= q\cos(-\alpha) \\ &= q\cos\alpha \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y &= q\operatorname{sen}(-\alpha) \\ &= -q\operatorname{sen}\alpha, \end{aligned}$$

la ecuación de la recta QM es

$$x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha = q. \tag{3.2}$$

Sea k el área de la superficie del triángulo $\triangle POQ$.

Analicemos el triángulo $\triangle POQ$. Consideremos el triángulo rectángulo formado por O, P y la proyección de P sobre la recta ℓ_2, llamemos H al punto de intersección con la recta ℓ_2.

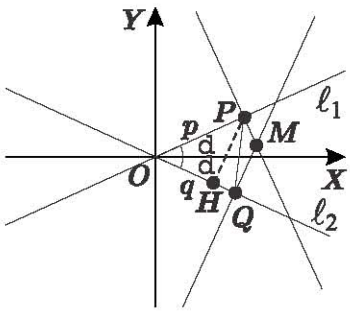


Figura 3-2

Observemos que el ángulo $\measuredangle POQ$ tiene valor 2α.

Sabemos que el área de un triángulo se calcula como:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\,(\text{base})\,(\text{altura})\,.$$

Calculamos la altura del triángulo $\triangle POQ$, considerando al lado q como base:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{PH}{p}$$

despejando PH:

$$PH = p \operatorname{sen} 2\alpha,$$

entonces el área del triángulo $\triangle POQ$ es:

$$\text{Área } \triangle POQ = k = \frac{1}{2} qp \operatorname{sen} 2\alpha,$$

de donde:

$$pq = \frac{2k}{\operatorname{sen} 2\alpha}. \tag{3.3}$$

Por otro lado, de las expresiones (3.1) y (3.2) tenemos:

$$\begin{aligned} pq &= (x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha)(x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha) \\ &= x^2 \cos^2\alpha - y^2 \operatorname{sen}^2\alpha, \end{aligned} \tag{3.4}$$

igualando (3.4) con (3.3) tenemos:

$$x^2 \cos^2\alpha - y^2 \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{2k}{\operatorname{sen} 2\alpha},$$

pero $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$, entonces:

$$\begin{aligned} x^2 \cos^2\alpha - y^2 \operatorname{sen}^2\alpha &= \frac{k}{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha} \\ \frac{x^2}{\left(\frac{k}{\operatorname{sen}\alpha \cos^3\alpha}\right)} - \frac{y^2}{\left(\frac{k}{\operatorname{sen}^3\alpha \cos\alpha}\right)} &= 1. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Así, el lugar geométrico descrito por M, a medida que los puntos P y Q se desplazan sobre las rectas ℓ_1 y ℓ_2 respectivamente, de tal manera que el área del triángulo $\triangle POQ$ es fija, está contenido en la hipérbola horizontal cuya distancia del origen a los vértices sobre el eje focal es:

$$\sqrt{\frac{k}{\operatorname{sen}\alpha \cos^3\alpha}}$$

y la longitud del lado recto es:

$$\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{\operatorname{sen}^3\alpha \cos\alpha}} \cot\alpha.$$

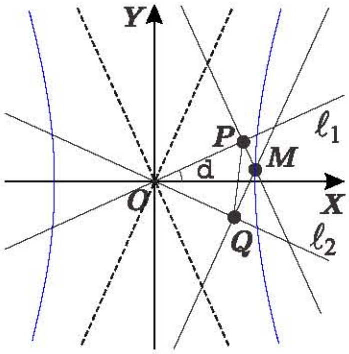


Figura 3-3

Ahora veremos que el lugar geométrico descrito por M es toda la hipérbola:

Sea $M' = (x_1, y_1)$ un punto de nuestro lugar geométrico. Debemos encontrar un triángulo, con un vértice en el origen y los dos restantes, P y Q, en las rectas ℓ_1 y ℓ_2, de tal manera que PM' sea perpendicular a ℓ_1, QM' sea perpendicular a ℓ_2 y el área del triángulo con vértices OQP sea igual a k.

Trazamos la recta r perpendicular a la recta ℓ_1 que pase por M'. Como la recta ℓ_1 tiene pendiente igual a $\tan\alpha$, entonces la recta r tiene pendiente igual a $\dfrac{-1}{\tan\alpha}$.

Así, la ecuación de la recta r está dada por:

$$y - y_1 = \frac{-1}{\tan\alpha}(x - x_1). \tag{3.6}$$

Llamemos P' a la intersección de la rectas r y ℓ_1 y hallemos sus coordenadas:

La recta ℓ_1 tiene ecuación:

$$y = (\tan\alpha)\, x. \tag{3.7}$$

Sustituyendo (3.7) en (3.6) tenemos:

$$\begin{aligned}(\tan\alpha)\, x - y_1 &= \frac{-1}{\tan\alpha}(x - x_1)\\ \left(\tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha}\right) x &= y_1 + \frac{x_1}{\tan\alpha}\\ x &= \frac{y_1 + \frac{x_1}{\tan\alpha}}{\tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha}}\\ x &= \frac{y_1\tan\alpha + x_1}{\tan^2\alpha + 1}.\end{aligned}$$

Sustituimos la expresión anterior en (3.7):

$$y = \tan\alpha\left(\frac{y_1\tan\alpha + x_1}{\tan^2\alpha + 1}\right).$$

Así, hemos obtenido las coordenadas de P':

$$P'\left(\frac{y_1\tan\alpha+x_1}{\tan^2\alpha+1},\frac{y_1\tan\alpha+x_1}{\tan^2\alpha+1}\tan\alpha\right).$$

Ahora trazamos la recta s perpendicular a la recta ℓ_2 que pase por M'. Como la recta ℓ_2 tiene una pendiente igual a $\tan(-\alpha)$, entonces la recta s tiene pendiente igual a $\frac{-1}{\tan(-\alpha)}$. Llamemos Q' a la intersección de la rectas s y ℓ_1. De manera análoga al procedimiento que se realizó para obtener las coordenadas del punto P', obtenemos las coordenadas del punto Q', es decir,

$$Q'=\left(\frac{y_1\tan(-\alpha)+x_1}{\tan^2(-\alpha)+1},\frac{y_1\tan(-\alpha)+x_1}{\tan^2(-\alpha)+1}\tan(-\alpha)\right).$$

Consideremos el triángulo $\triangle OP'Q'$. Probaremos que el área de este triángulo es k.

Sea R la proyección de P' sobre la recta ℓ_2. Considerando el triángulo rectángulo $\triangle OP'R$, tenemos

$$\operatorname{sen}2\alpha=\frac{P'R}{OP'},$$

luego, el área del triángulo $\triangle OP'Q'$ será:

$$\text{Área}=\frac{1}{2}OQ'\times OP'\operatorname{sen}2\alpha, \tag{3.8}$$

pero la longitud del segmento OP' es:

$$\begin{aligned}
|OP'| &= \sqrt{\left(\frac{y_1\tan\alpha+x_1}{\tan^2\alpha+1}\right)^2+\left(\frac{y_1\tan\alpha+x_1}{\tan^2\alpha+1}\tan\alpha\right)^2}\\
&= \frac{\sqrt{(y_1\tan\alpha+x_1)^2+((y_1\tan\alpha+x_1)\tan\alpha)^2}}{\tan^2\alpha+1}\\
&= .\frac{(y_1\tan\alpha+x_1)\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{1+\tan^2\alpha}\\
&= \frac{y_1\tan\alpha+x_1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\\
&= (y_1\tan\alpha+x_1)\cos\alpha.
\end{aligned}$$

La longitud del segmento OQ' es:

$$\begin{aligned}
|OQ'| &= \sqrt{\left(\frac{y_1\tan(-\alpha)+x_1}{\tan^2(-\alpha)+1}\right)^2+\left(\frac{y_1\tan(-\alpha)+x_1}{\tan^2(-\alpha)+1}\tan(-\alpha)\right)^2}\\
&= \frac{\sqrt{(y_1\tan(-\alpha)+x_1)^2+((y_1\tan(-\alpha)+x_1)\tan(-\alpha))^2}}{1+\tan^2(-\alpha)},
\end{aligned}$$

puesto que la tangente es una función impar, tenemos:

$$\begin{aligned}
|OQ'| &= \frac{\sqrt{(-y_1\tan\alpha + x_1)^2 + ((-y_1\tan\alpha + x_1)\tan\alpha)^2}}{\tan^2\alpha + 1} \\
&= .\frac{(-y_1\tan\alpha + x_1)\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{1+\tan^2\alpha} \\
&= (-y_1\tan\alpha + x_1)\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Así, la expresión (3.8) queda como:

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \frac{1}{2}(-y_1\tan\alpha + x_1)\cos\alpha\,(y_1\tan\alpha + x_1)\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,2\alpha \\
&= \frac{1}{2}\left(-(y_1\tan\alpha)^2 + x_1^2\right)2\cos^3\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha \\
&= \left(x_1^2 - (y_1\tan\alpha)^2\right)\cos^3\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Pero $M' = (x_1, y_1)$ satisface (3.5), es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{x_1^2}{\left(\dfrac{k}{\mathrm{sen}\,\alpha\cos^3\alpha}\right)} - \frac{y_1^2}{\left(\dfrac{k}{\mathrm{sen}^3\,\alpha\cos\alpha}\right)} &= 1 \\
x_1^2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos^3\alpha - y_1^2\,\mathrm{sen}^3\,\alpha\cos\alpha &= k \\
\left(x_1^2 - y_1^2\frac{\mathrm{sen}^3\,\alpha\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha\cos^3\alpha}\right)\mathrm{sen}\,\alpha\cos^3\alpha &= k \\
\left(x_1^2 - y_1^2\frac{\mathrm{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\mathrm{sen}\,\alpha\cos^3\alpha &= k \\
\left(x_1^2 - (y_1\tan\alpha)^2\right)\mathrm{sen}\,\alpha\cos^3\alpha &= k, \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

entonces de las expresiones (3.9) y (3.10) tenemos que área del triángulo $\triangle OP'Q'$ es igual a k.

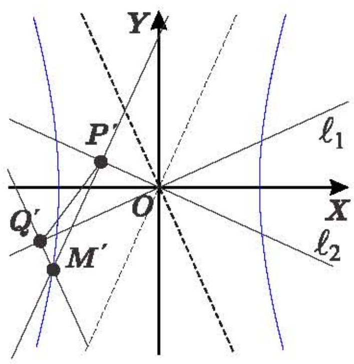


Figura 3-4

Por lo tanto, el lugar geométrico descrito por M es la hipérbola horizontal

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{k}{\operatorname{sen}\alpha\cos^3\alpha}\right)}-\frac{y^2}{\left(\dfrac{k}{\operatorname{sen}^3\alpha\cos\alpha}\right)}=1.$$

Construcción con Geolab

1. Define los escalares:

- $u=0$
- $v=0$
- $k=5$
- $m=3/5$
- $m'=-3/5$
- $c1=5$
- $c2=3$
- $o1=0$
- $o2=0$

y construye los puntos $O(o1,o2), C\,(c1,c2)\,, U(u,o2)$ y $V(o1,v)$

2. Construye los ejes coordenados eX y eY usando los puntos O, U y V.

3. Crea las rectas $l1$ y $l2$ que pasan por el punto O con pendiente m y m' respectivamente.

4. Construye un punto P sobre el segmento OC

5. En el icono $\mathbb{R}$ elige la opción **Escalares distancia de un punto a recta.** Llama $dPl2$ a este escalar y luego haz clic sobre el punto P y la recta $l2$.

6. Define $z1$ el escalar calculado con valor $-2{*}k/dPl2$

7. En el icono $\mathbb{R}$ elige la opción **Medida de ángulos del ángulo AOB.** Llama s a este ángulo y posteriormente, en el orden siguiente, haz clic en los puntos U, O y C.

8. Define el punto $Q\,(z1{*}cos(s), -z1{*}sen(s))$

9. Traza las rectas $r1, r2$ perpendiculares a las rectas $l1, l2$ que pasen por los puntos P y Q respectivamente.

10. Llama M a la intersección de $r1$ y $r2$, y en la pantalla de datos analíticos, activa la traza del punto M.

11. En el icono selecciona la opción **Polígonos**. Asigna 3, el número de vértices y luego haz clic en . Llama QPO a este polígono y después, en el siguiente orden, haz clic en los puntos Q, P y O. Cámbialo de color y grosor.

12. En la pantalla de datos analíticos selecciona el objeto **Triángulo de vértices:Q, P, O** y haz clic sobre la siguiente imagen:y selecciona la opción **Rombos.**

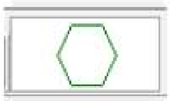


Figura 3-5

13. Define una animación para el punto P con los siguientes datos:

    Inicial $= -5$; **Final** $= 5$, **Pasos** $= 1000$

14. En la pantalla gráfica, activa la traza de M.

15. En la pantalla gráfica, haz clic en el icono *Empieza animación.*

    Para verificar que la hipérbola $\frac{x^2}{\left(\frac{k^2}{\operatorname{sen}\alpha\cos^3\alpha}\right)} - \frac{y^2}{\left(\frac{k^2}{\operatorname{sen}^3\alpha\cos\alpha}\right)} = 1$ coincide con el lugar geométrico buscado, dibujamos la gráfica correspondiente a la construcción anterior:

16. En el icono *Define cónica* selecciona la opción **Calculada**. Llama f a esta cónica y asigna los siguientes valores:

    - $A = (sen(s)*cos(s)*cos(s)*cos(s))/k$
    - $2B = 0$
    - $C = -(sen(s)*sen(s)*sen(s)*cos(s))/k$
    - $2D = 0$
    - $2E = 0$
    - $F = -1$

17. Para volver a ver la construcción original cierra la ventana de animación haciendo clic en el icono *Cerrar ventana* y en la parte derecha de la ventana selecciona el objeto P, para arrastrarlo sobre la recta $l1$ si deseas ver, de manera manual, cómo se genera el lugar geométrico.

    La construcción anterior es la que se encuentra en el archivo Construcción_1con.lab. ■

II. En este ejercicio consideraremos la trayectoria ideal de un proyectil que se mueve en un medio que no ofrece resistencia al avance y que está sujeto a un campo gravitatorio uniforme. Este tipo de movimiento se denomina tiro parabólico, debido a que el recorrido que describe es precisamente una parábola.

Situemos la posición inicial de nuestro proyectil en el origen del plano coordenado. Sean v_0 la velocidad inicial, θ el ángulo de inclinación inicial de nuestro proyectil y g la constante de gravedad. Tracemos la recta ℓ que pasa por el origen formando un ángulo θ con el eje X y consideremos F el foco y V el vértice de nuestro tiro parabólico.

Hallar el lugar geométrico descrito por:

a. El foco F,

b. El vértice V,

c. El punto A, de intersección de la recta que pasa por el origen y F con la parábola.

En los tres casos, a medida que el ángulo de inclinación varía de 0 a π.

Solución:

Sabemos que la ecuación de la trayectoria del tiro parabólico es (ver Bibliografía [**3**], página 145):

$$y = (\tan\theta)\, x - \frac{1}{2}\frac{g}{(v_o\cos\theta)^2}x^2. \tag{13.1}$$

Para distinguir los elementos de la parábola, escribimos la ecuación en la forma estándar:

$$\begin{aligned}
y &= (\tan\theta)\, x - \frac{1}{2}\frac{g}{(v_o\cos\theta)^2}x^2 \\
y &= \frac{1}{2}\frac{g}{(v_o\cos\theta)^2}\left(\frac{2\tan\theta\,(v_o\cos\theta)^2}{g}x - x^2\right) \\
-2\frac{(v_o\cos\theta)^2}{g}y &= \left(x^2 - \frac{2\tan\theta\,(v_o\cos\theta)^2}{g}x\right) \\
-2\frac{(v_o\cos\theta)^2}{g}y &= \left(x - \frac{\tan\theta\,(v_o\cos\theta)^2}{g}\right)^2 - \left(\frac{\tan\theta\,(v_o\cos\theta)^2}{g}\right)^2,
\end{aligned}$$

de donde:

$$
\begin{aligned}
-2\frac{(v_o\cos\theta)^2}{g}y+\left(\frac{\tan\theta\,(v_o\cos\theta)^2}{g}\right)^2 &= \left(x-\frac{\tan\theta\,(v_o\cos\theta)^2}{g}\right)^2\\
-2\frac{(v_o\cos\theta)^2}{g}\left(y-\frac{1}{2}\frac{g}{(v_o\cos\theta)^2}\left(\frac{\tan\theta\,(v_o\cos\theta)^2}{g}\right)^2\right) &= \left(x-\frac{v_o^2\operatorname{sen}2\theta}{2g}\right)^2\\
-2\frac{(v_o\cos\theta)^2}{g}\left(y-\frac{(\operatorname{sen}\theta)^2\,v_o^2}{2g}\right) &= \left(x-\frac{v_o^2\operatorname{sen}2\theta}{2g}\right)^2\\
-4\left(\frac{(v_o\cos\theta)^2}{2g}\right)\left(y-\frac{(\operatorname{sen}\theta)^2\,v_o^2}{2g}\right) &= \left(x-\frac{v_o^2\operatorname{sen}2\theta}{2g}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Así, nuestra parábola (ver Apéndice B [**21**], página **21**) tiene:

- Vértice V con coordenadas

$$V\left(\frac{v_o^2\operatorname{sen}2\theta}{2g},\frac{(\operatorname{sen}\theta)^2\,v_o^2}{2g}\right). \tag{3.11}$$

- Parámetro p con valor:

$$p=\frac{(v_o\cos\theta)^2}{2g}.$$

- Foco F con coordenadas:

$$F\left(\frac{v_o^2\operatorname{sen}2\theta}{2g},\frac{(\operatorname{sen}\theta)^2\,v_o^2}{2g}-\frac{(v_o\cos\theta)^2}{2g}\right),$$

  simplificando tenemos:

$$F\left(\frac{v_o^2\operatorname{sen}2\theta}{2g},-\frac{v_o^2\cos2\theta}{2g}\right). \tag{3.12}$$

a. Encontraremos la ecuación del lugar geométrico descrito por el foco F a medida que el ángulo θ varía.

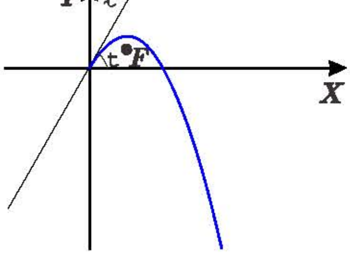


Figura 3-6

Para obtenerla, Puesto que las coordenadas del foco son $F\left(\frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\theta}{2g}, -\frac{1}{2}\frac{v_o^2 \cos 2\theta}{g}\right)$, debemos eliminar θ de las ecuaciones:

$$x = \frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\theta}{2g} \tag{3.13}$$

y

$$y = -\frac{1}{2}\frac{v_o^2 \cos 2\theta}{g}. \tag{3.14}$$

Para ello, elevamos al cuadrado las dos expresiones:

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\theta}{2g}\right)^2 \\ &= \left(\frac{v_o^2}{2g}\right)^2 \operatorname{sen}^2 2\theta \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y^2 &= \left(-\frac{1}{2}\frac{v_o^2 \cos 2\theta}{g}\right)^2 \\ &= \left(\frac{v_o^2}{2g}\right)^2 (\cos 2\theta)^2, \end{aligned}$$

sumando las dos expresiones obtenidas tenemos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left(\frac{v_o^2}{2g}\right)^2 \operatorname{sen}^2 2\theta + \left(\frac{v_o^2}{2g}\right)^2 \cos^2 2\theta \\ &= \left(\frac{v_o^2}{2g}\right)^2 \left(\operatorname{sen}^2 2\theta + \cos^2 2\theta\right) \\ &= \left(\frac{v_o^2}{2g}\right)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el lugar geométrico descrito por el foco está contenido en el círculo con centro en el origen y radio

$$r = \frac{v_o^2}{2g}. \tag{3.15}$$

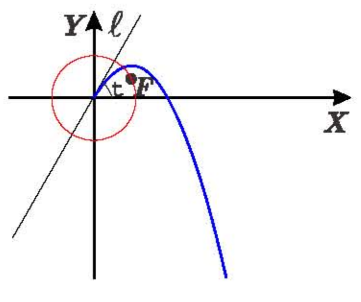


Figura 3-7

Para mostrar que el lugar geométrico descrito por el foco es todo el círculo con centro en el origen y radio

$$r = \frac{v_o^2}{2g}.$$

Tomemos un punto sobre él. Sea $P(x_0, y_0)$ tal que

$$x_0^2 + y_0^2 = \left(\frac{v_o^2}{2g}\right)^2. \tag{3.16}$$

Debemos encontrar un ángulo θ_0 tal que éste sea el ángulo inicial de un tiro parábolico de manera que su foco sea P.

Puesto que las coordenadas de P satisfacen (3.16) tenemos:

$$x_0 = \frac{v_o^2}{2g} \cos \varphi$$

y

$$y_0 = \frac{v_o^2}{2g} \operatorname{sen} \varphi$$

donde φ es el ángulo que forma la recta que une el origen y el punto P, con el eje X.

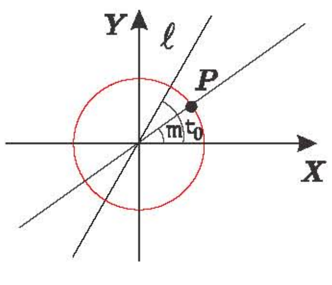


Figura 3-8

Definimos

$$\theta_0 = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \tag{3.17}$$

y afirmamos que el ángulo θ_0 es el ángulo deseado.

En efecto: Despejando φ de la expresión (3.17) tenemos:

$$\varphi = 2\theta_0 - \frac{\pi}{2}.$$

Sustituimos este valor en la expresión de x_0:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{v_o^2}{2g}\cos\varphi \\ &= \frac{v_o^2}{2g}\cos\left(2\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{v_o^2}{2g}\left(\cos(2\theta_0)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(2\theta_0)\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{v_o^2}{2g}\left(-\operatorname{sen}(2\theta_0)\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{v_o^2}{2g}\operatorname{sen}2\theta_0. \end{aligned}$$

y en la expresión de y_0:

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{v_o^2}{2g}\operatorname{sen}\varphi \\ &= \frac{v_o^2}{2g}\operatorname{sen}\left(2\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{v_o^2}{2g}\left(\operatorname{sen}2\theta_0\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos 2\theta_0\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= -\frac{v_o^2}{2g}\cos 2\theta_0. \end{aligned}$$

De manera que

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{v_o^2}{2g}\operatorname{sen}2\theta_0, -\frac{v_o^2}{2g}\cos 2\theta_0\right),$$

que de acuerdo con (3.12) son las coordenadas del foco de la parábola

$$y = (\tan\theta_o)\,x - \frac{g}{2\left(v_o\cos\theta_o\right)^2}x^2.$$

Por lo tanto, el lugar geométrico descrito por el foco es el círculo con centro en el origen y radio $r = \dfrac{v_o^2}{2g}$.

Construcción con Geolab

1. Define los escalares:

- $u = 10$
- $v = 10$
- $o1 = 0$
- $o2 = 0$

y construye los puntos $O(o1, o2), E1\,(u, o2)$ y $E2\,(o1, v)$

2. Construye los ejes coordenados eX y eY usando los puntos $O, E1$ y $E2$.
3. Define el escalar **Medida de ángulos directo.** Llámalo a y asigna $\beta = 1$
4. Define el escalar $v0 = 10$
5. En el icono *Define funciones* selecciona la opción **Curva paramétrica.** Nombra C a esta curva y asigna los siguientes valores:
   - $a = 0$
   - $b = 4$
   - $x = v0*cos(a)*t\_$
   - $y = v0*\text{sen}(a)*t\_ - 4.9*t\_*t\_$
   - $Pasos = 100$
6. Define los escalares:
   - $A = v0*v0*\text{sen}(a)*\text{sen}(a)/(9.8*2)$
   - $B = 2*v0*v0*cos(a)*\text{sen}(a)/9.8$
   - $p = v0*v0*cos(a)*cos(a)/(2*9.8)$
7. Construye el punto $F\,(B/2, A - p)$
8. En la pantalla de datos analíticos, activa la traza del punto F.
9. Define una animación para el ángulo a con los siguientes datos:
   Inicial = 0; Final = 3.14, Pasos = 100
10. En la pantalla gráfica, activa la traza.
11. En la pantalla gráfica, haz clic en el icono *Empieza animación.*

    Para verificar que el círculo $x_0^2 + y_0^2 = \left(\dfrac{v_o^2}{2g}\right)^2$ coincide con el lugar geométrico buscado, dibujamos la gráfica correspondiente a la construcción anterior:
12. Define los escalares:
    - $g = 9.8$
    - $r = ((v0*v0)/(2*g))$
13. Construye el círculo cir con centro en O de radio r.
14. Para volver a ver la construcción original cierra la ventana de animación haciendo clic en el icono *Cerrar ventana.*

    La construcción anterior es la que se encuentra en el archivo Construcción_2acon.lab. ■

b. Encontraremos el lugar geométrico descrito por el vértice V.

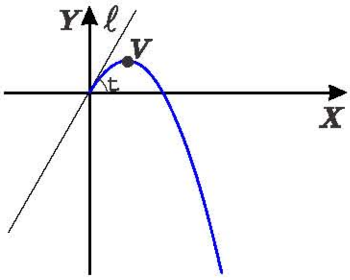


Figura 3-9

Para obtenerla, puesto que las coordenadas del vértice son $V\left(\frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\theta}{2g}, \frac{(\operatorname{sen}\theta)^2 v_o^2}{2g}\right)$ debemos eliminar θ de las ecuaciones:

$$x = \frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\theta}{2g} \tag{3.18}$$

y

$$y = \frac{(\operatorname{sen}\theta)^2 v_o^2}{2g}. \tag{3.19}$$

Para ello, elevamos al cuadrado la expresión (3.18):

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\theta}{2g}\right)^2 \\ &= \left(\frac{v_o^2}{2g}\right)^2 \operatorname{sen}^2 2\theta, \end{aligned} \tag{3.20}$$

elevamos al cuadrado (3.19) y lo multiplicamos por 4:

$$\begin{aligned} 4y^2 &= 4\left(\frac{(\operatorname{sen}\theta)^2 v_o^2}{2g}\right)^2 \\ &= \left(\frac{v_o^2}{g}\right)^2 \operatorname{sen}^4\theta. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Por otro lado, multipliquemos por $-\dfrac{2v_o^2}{g}$ a (3.19) y sumamos ésta con (3.20) y (3.21):

$$\begin{aligned}
-\frac{2v_o^2}{g}y + x^2 + 4y^2 &= -\frac{2v_o^2}{g}\left(\frac{(\operatorname{sen}\theta)^2 v_o^2}{2g}\right) + \left(\frac{v_o^2}{2g}\right)^2 \operatorname{sen}^2 2\theta + \left(\frac{v_o^2}{g}\right)^2 \operatorname{sen}^4\theta. \\
&= -\left(\frac{v_o^2}{g}\right)^2 (\operatorname{sen}\theta)^2 + \left(\frac{v_o^2}{2g}\right)^2 \operatorname{sen}^2 2\theta + \left(\frac{v_o^2}{g}\right)^2 \operatorname{sen}^4\theta \\
&= -\left(\frac{v_o^2}{g}\right)^2 (\operatorname{sen}\theta)^2 + \left(\frac{v_o^2}{g}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta + \left(\frac{v_o^2}{g}\right)^2 \operatorname{sen}^4\theta \\
&= \left(\frac{v_o^2}{g}\right)^2 \left((\operatorname{sen}\theta)^2\left(-1+\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta\right)\right) \\
&= \left(\frac{v_o^2}{g}\right)^2 \left((\operatorname{sen}\theta)^2(-1+1)\right) \\
&= \left(\frac{v_o^2}{g}\right)^2 \left((\operatorname{sen}\theta)^2(0)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así, las coordenadas de V satisfacen la ecuación

$$-\frac{2v_o^2}{g}y + x^2 + 4y^2 = 0,$$

que corresponde a una cónica.

Para identificar la curva, la escribimos en la forma estándar:

$$\begin{aligned}
-\frac{2v_o^2}{g}y + x^2 + 4y^2 &= 0 \\
x^2 + 4\left(y^2 - \frac{v_o^2}{2g}y\right) &= 0 \\
x^2 + 4\left(y - \frac{v_o^2}{4g}\right)^2 &= 4\left(\frac{v_o^2}{4g}\right)^2 \\
x^2 + 4\left(y - \frac{v_o^2}{4g}\right)^2 &= \left(\frac{v_o^2}{2g}\right)^2 \\
\frac{x^2}{\left(\frac{v_o^2}{2g}\right)^2} + 4\frac{\left(y - \frac{v_o^2}{4g}\right)^2}{\left(\frac{v_o^2}{2g}\right)^2} &= 1 \\
\frac{x^2}{\left(\frac{v_o^2}{2g}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{v_o^2}{4g}\right)^2}{\left(\frac{v_o^2}{4g}\right)^2} &= 1. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

sustituyendo (3.15) en (3.22):

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{\left(y-\frac{1}{2}r\right)^2}{\left(\frac{1}{2}r\right)^2}=1.$$

Por lo tanto, el lugar geométrico descrito por el vértice, está contenido en la elipse horizontal con centro $\left(0,\frac{1}{2}r\right)$, semieje mayor r y semieje menor $\frac{1}{2}r$.

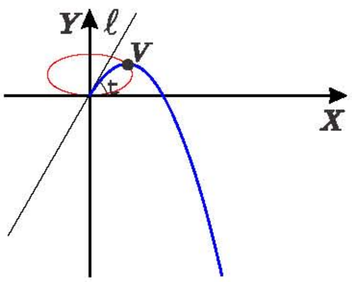


Figura 3-10

Para mostrar que el lugar geométrico descrito por el vértice es toda la elipse horizontal con centro $\left(0,\frac{1}{2}r\right)$, semieje mayor r y semieje menor $\frac{1}{2}r$. Tomemos un punto sobre él.

Sea $Q\,(x_1,y_1)$ tal que

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{v_o^2}{2g}\right)^2}+\frac{\left(y_1-\frac{v_o^2}{4g}\right)^2}{\left(\frac{v_o^2}{4g}\right)^2}=1. \tag{3.23}$$

Debemos encontrar un ángulo θ_1 tal que éste sea el ángulo inicial de un tiro parábolico de manera que su vértice sea Q.

Puesto que las coordenadas de Q satisfacen (3.23) tenemos:

$$x_1=\frac{v_o^2}{2g}\cos\gamma$$

y

$$y_1=\frac{v_o^2}{4g}+\frac{v_o^2}{4g}\operatorname{sen}\gamma$$

para algún ángulo γ.

Definimos

$$\theta_1=\frac{\gamma}{2}+\frac{\pi}{4} \tag{3.24}$$

y afirmamos que el ángulo θ_1 es el ángulo deseado.

En efecto: Despejando γ de la expresión (3.24) tenemos:

$$\gamma = 2\theta_1 - \frac{\pi}{2}.$$

Sustituimos este valor en la expresión de x_0:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{v_o^2}{2g}\cos\gamma \\ &= \frac{v_o^2}{2g}\cos\left(2\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{v_o^2}{2g}\left(\cos(2\theta_1)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(2\theta_1)\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{v_o^2}{2g}\left(-\operatorname{sen}(2\theta_1)\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{v_o^2}{2g}\operatorname{sen}2\theta_1. \end{aligned}$$

y en la expresión de y_0:

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{4}\frac{v_o^2}{g} + \frac{v_o^2}{4g}\operatorname{sen}\gamma \\ &= \frac{1}{4}\frac{v_o^2}{g} + \frac{v_o^2}{4g}\operatorname{sen}\left(2\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\frac{v_o^2}{g} + \frac{v_o^2}{4g}\left(\operatorname{sen}2\theta_1\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos 2\theta_0\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\frac{v_o^2}{g} - \frac{v_o^2}{4g}\cos 2\theta_1. \\ &= \frac{1}{2}\frac{v_o^2}{g}\left(\frac{1-\cos 2\theta_1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{v_o^2}{g}\operatorname{sen}^2\theta_1. \end{aligned}$$

De manera que

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{v_o^2}{2g}\operatorname{sen}2\theta_1, \frac{v_o^2}{2g}\sin^2\theta_1\right),$$

que de acuerdo con (3.11), son las coordenadas del vértice de la parábola

$$y = (\tan\theta_1)\,x - \frac{1}{2}\frac{g}{(v_o\cos\theta_1)^2}x^2.$$

Por lo tanto, el lugar geométrico descrito por el vértice es la elipse horizontal con centro $\left(0, \frac{1}{2}r\right)$, semieje mayor r y semieje menor $\frac{1}{2}r$.

Construcción con Geolab

1. Repite los primeros 6 pasos de la construcción con GeoLab del inciso a.

1. Construye el punto $V\,(B/2, A)$

2. En la pantalla de datos analíticos, activa la traza del punto V.

3. Define una animación para el ángulo a con los siguientes datos:
Inicial = 0; Final = 3.14, Pasos = 400

4. En la pantalla gráfica, activa la traza.

5. En la pantalla gráfica, haz clic en el icono *Empieza animación.*

Para verificar que la elipse $\dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{\left(y - \dfrac{1}{2}r\right)^2}{\left(\dfrac{1}{2}r\right)^2} = 1$ coincide con el lugar geométrico buscado, dibujemos la gráfica correspondiente a la construcción anterior:

6. Define los escalares:

- $g = 9.8$
- $r = (v0{*}v0)/(2{*}g)$
- $c = sqrt(r{*}r - (r{*}r)/4)$

7. Construye los puntos $F1\,(-c, (v0{*}v0)/(4{*}g))$ y $F2\,(c, (v0{*}v0)/(4{*}g))$

8. Construye la elipse *elip* con focos F_1, F_2 y que pase por el punto O.

9. Para volver a ver la construcción original cierra la ventana de animación haciendo clic en el icono *Cerrar ventana.*
La construcción anterior es la que se encuentra en el archivo Construcción_2bcon.lab. ■

c. Encontraremos el lugar geométrico descrito por el punto A.

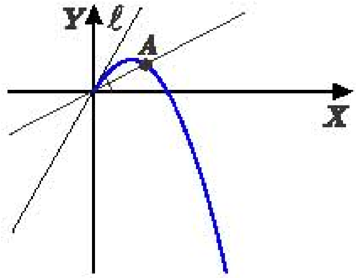


Figura 3-11

Recordemos que el foco tiene coordenadas $\left(\frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\theta}{2g}, -\frac{v_o^2 \cos 2\theta}{2g}\right)$.

La recta, que pasa por el origen y el foco, tiene por ecuación:

$$\begin{aligned} y &= \frac{-\frac{v_o^2 \cos 2\theta}{2g}}{\frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\theta}{2g}} x \\ &= -\left(\frac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}\right) x \\ &= -(\cot 2\theta)\, x \end{aligned} \tag{3.25}$$

Para hallar las coordenadas del punto A igualamos la ecuación de la parábola:

$$y = (\tan\theta)\, x - \frac{g}{2\,(v_o \cos\theta)^2} x^2$$

con (3.25), y simplificamos:

$$\begin{aligned} (\tan\theta)\, x - \frac{g}{2\,(v_o \cos\theta)^2} x^2 &= -(\cot 2\theta)\, x \\ (\tan\theta)\, x - \frac{g}{2\,(v_o \cos\theta)^2} x^2 + (\cot 2\theta)\, x &= 0 \\ x\left((\tan\theta + \cot 2\theta) - \frac{g}{2\,(v_o \cos\theta)^2} x\right) &= 0, \end{aligned}$$

luego

$$x = 0$$

o

$$(\tan\theta + \cot 2\theta) - \frac{g}{2\,(v_o \cos\theta)^2} x = 0,$$

pero $x = 0$ no nos interesa porque tendríamos que $y = 0$.

Entonces consideramos:

$$\begin{aligned} (\tan\theta + \cot 2\theta) - \frac{1}{2}\frac{g}{(v_o \cos\theta)^2} x &= 0 \\ \frac{1}{2}\frac{g}{(v_o \cos\theta)^2} x &= (\tan\theta + \cot 2\theta) \\ x &= \frac{2v_0^2}{g} \cos^2\theta\, (\tan\theta + \cot 2\theta) \\ x &= \frac{2v_0^2}{g} \cos\theta \left(\operatorname{sen}\theta + \frac{\cos 2\theta}{2 \operatorname{sen}\theta}\right) \\ x &= \frac{2v_0^2}{g} \cos\theta \left(\frac{2 \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{2 \operatorname{sen}\theta}\right) \\ x &= \frac{v_0^2}{g} \cot\theta. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Sustituimos (3.26) en la ecuación del tiro parabólico y simplificamos:

$$
\begin{aligned}
y &= (\tan\theta)\, x - \frac{1}{2}\frac{g}{(v_o\cos\theta)^2}x^2 \\
&= (\tan\theta)\,\frac{v_0^2}{g}\cot\theta - \frac{1}{2}\frac{g}{(v_o\cos\theta)^2}\left(\frac{v_0^2}{g}\cot\theta\right)^2 \qquad (3.27)\\
&= \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g}\csc^2\theta \\
&= \frac{v_0^2}{g}\left(1-\frac{1}{2}\csc^2\theta\right), \\
&= \frac{v_0^2}{g}\left(1-\frac{1}{2}\left(\cot^2\theta+1\right)\right) \\
&= \frac{v_0^2}{2g}\left(1-\cot^2\theta\right), \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

entonces

$$A\left(\frac{v_0^2}{g}\cot\theta, \frac{v_0^2}{2g}\left(1-\cot^2\theta\right)\right).$$

Para hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por A, debemos eliminar θ de las expresiones (3.26) y (3.28).

Elevamos al cuadrado (3.26), multiplicamos por $\dfrac{2v_o^2}{g}$ a (3.28), sumamos ambos resultados y simplificamos:

$$
\begin{aligned}
x^2 + \frac{2v_o^2}{g}y &= \left(\frac{v_0^2}{g}\cot\theta\right)^2 + \frac{2v_o^2}{g}\left(\frac{v_0^2}{2g}\left(1-\cot^2\theta\right)\right) \\
&= \left(\frac{v_o^2}{g}\right)^2\cot^2\theta + \left(\frac{v_o^2}{g}\right)^2\left(1-\cot^2\theta\right) \\
&= \left(\frac{v_o^2}{g}\right)^2\left(\cot^2\theta + 1 - \cot^2\theta\right) \\
&= \left(\frac{v_o^2}{g}\right)^2,
\end{aligned}
$$

es decir, las coordenadas del punto A satisfacen la ecuación:

$$x^2 + \frac{2v_o^2}{g}y = \left(\frac{v_o^2}{g}\right)^2,$$

que corresponde a una cónica. Para identificar sus elementos, la escribimos en la forma estándar:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{2v_o^2}{g}y &= \left(\frac{v_o^2}{g}\right)^2 \\ -\frac{2v_o^2}{g}y + \left(\frac{v_o^2}{g}\right)^2 &= x^2 \\ -4\left(\frac{v_o^2}{2g}\right)\left(y - \frac{v_o^2}{2g}\right) &= x^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el lugar geométrico descrito por el punto A está contenido en la parábola vertical, que abre hacia abajo con vértice $\left(0, \frac{v_o^2}{2g}\right)$ y $p = \frac{v_o^2}{2g}$.

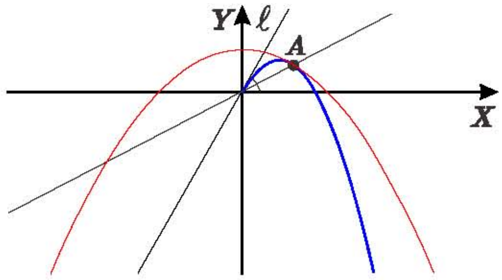


Figura 3-12

Para mostrar que el lugar geométrico descrito es toda la parábola, tomamos un punto $A(x_0, y_0)$ sobre ella, es decir, satisface:

$$-4\left(\frac{v_o^2}{2g}\right)\left(y_0 - \frac{v_o^2}{2g}\right) = x_0^2.$$

Consideramos el segmento de recta que une el origen de coordenadas con A y llamamos P al punto de intersección de dicho segmento con el círculo:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2.$$

Ahora, de la misma manera que en el inciso a, encontramos el ángulo θ_0 de tal manera que el tiro parabólico correspondiente a este ángulo tiene a P como foco.

Así, la parábola que describe el tiro es:

$$y = (\tan\theta_0)\,x - \frac{1}{2}\frac{g}{(v_o\cos\theta_0)^2}x^2$$

y P tiene coordenadas

$$\left(\frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{2g}, -\frac{1}{2}\frac{v_o^2\cos 2\theta_0}{g}\right).$$

Probaremos que el punto A está sobre la parábola.

La recta que pasa por el foco y el origen tiene ecuación (ver 3.25):

$$y = -(\cot 2\theta_0)\, x,$$

entonces

$$A(x_0, y_0) = A(x_0, -(\cot 2\theta_0)\, x_0).$$

Por otra parte, $A(x_0, y_0)$ está en la parábola

$$-4\left(\frac{v_o^2}{2g}\right)\left(y_0 - \frac{v_o^2}{2g}\right) = x_0^2,$$

sustituimos el valor de la segunda coordenada de A y simplificamos:

$$\begin{aligned}
-4\left(\frac{v_o^2}{2g}\right)\left(-(\cot 2\theta_0)\, x_0 - \frac{v_o^2}{2g}\right) &= x_0^2 \\
x_0^2 - 4\left(\frac{v_o^2}{2g}\right)(\cot 2\theta_0)\, x_0 - 4\left(\frac{v_o^2}{2g}\right)^2 &= 0 \\
x_0^2 - 2\left(\frac{v_o^2}{g}\right)(\cot 2\theta_0)\, x_0 - \left(\frac{v_o^2}{g}\right)^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Resolvemos para x_0:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{2\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\cot 2\theta_0 \pm \sqrt{4\left(\frac{v_o^2}{g}\right)^2(\cot^2 2\theta_0) - 4\left(-\left(\frac{v_o^2}{g}\right)^2\right)}}{2} \\
&= \frac{2\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\cot 2\theta_0 \pm \sqrt{4\left(\frac{v_o^2}{g}\right)^2(\cot^2 2\theta_0 + 1)}}{2} \\
&= \frac{2\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\cot 2\theta_0 \pm 2\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\sqrt{\csc^2 2\theta_0}}{2} \\
&= \left(\frac{v_o^2}{g}\right)\cot 2\theta_0 \pm \left(\frac{v_o^2}{g}\right)\csc 2\theta_0 \\
&= \left(\frac{v_o^2}{g}\right)(\cot 2\theta_0 \pm \csc 2\theta_0) \\
&= \left(\frac{v_o^2}{g}\right)\left(\frac{\cos 2\theta_0 \pm 1}{\operatorname{sen} 2\theta_0}\right) \\
&= \left(\frac{v_o^2}{g}\right)\left(\frac{\frac{\pm 1 + \cos 2\theta_0}{2}}{\operatorname{sen}\theta_0 \cos\theta_0}\right).
\end{aligned}$$

Si consideramos el signo positivo tenemos:

$$\begin{aligned} x_0 &= \left(\frac{v_o^2}{g}\right)\left(\frac{\frac{1+\cos 2\theta_0}{2}}{\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0}\right) \\ &= \left(\frac{v_o^2}{g}\right)\left(\frac{\cos^2\theta_0}{\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0}\right) \\ &= \left(\frac{v_o^2}{g}\right)\left(\frac{\cos\theta_0}{\operatorname{sen}\theta_0}\right) \\ &= \left(\frac{v_o^2}{g}\right)\cot\theta_0, \end{aligned}$$

considerando el signo negativo:

$$\begin{aligned} x_0 &= \left(\frac{v_o^2}{g}\right)\left(\frac{\frac{-1+\cos 2\theta_0}{2}}{\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0}\right) \\ &= \left(\frac{v_o^2}{g}\right)\left(\frac{-\operatorname{sen}^2\theta_0}{\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0}\right) \\ &= \left(\frac{v_o^2}{g}\right)\left(\frac{-\operatorname{sen}\theta_0}{\cos\theta_0}\right) \\ &= -\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\tan\theta_0, \end{aligned}$$

así, las intersecciones de la recta que pasa por el foco y el origen con la parábola descrita por el lugar geométrico son:

$$\left(\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\cot\theta_0, -\cot(2\theta_0)\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\cot\theta_0\right) \quad \text{y} \quad \left(-\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\tan\theta_0,\ \cot(2\theta_0)\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\tan\theta_0\right).$$

Ahora veremos que el punto $\left(-\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\tan\theta_0, \left(\frac{v_o^2}{g}\right)\cot(2\theta_0)\tan\theta_0\right)$ no está en el parábola correspondiente al tiro parabólico:

El tiro parabólico tiene por ecuación:

$$y = (\tan\theta_0)\,x - \frac{1}{2}\frac{g}{(v_o\cos\theta_0)^2}x^2.$$

Supongamos que el punto satisface la ecuación, entonces:

$$\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\cot(2\theta_0)\tan\theta_0 = (\tan\theta_0)\left(-\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\tan\theta_0\right) - \frac{1}{2}\frac{g}{(v_o\cos\theta_0)^2}\left(\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\tan\theta_0\right)^2,$$

simplificando tenemos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\cot(2\theta_0)\tan\theta_0 &= -\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\tan^2\theta_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\frac{\tan^2\theta_0}{\cos^2\theta_0}\\
\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\cot(2\theta_0)\tan\theta_0 &= -\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\tan^2\theta_0\left(\frac{1}{2}\sec^2\theta_0+1\right)\\
\tan\theta_0\frac{\cos(2\theta_0)}{\operatorname{sen}(2\theta_0)} &= -\tan^2\theta_0\left(\frac{1}{2}\sec^2\theta_0+1\right)\\
\frac{\cos(2\theta_0)}{\operatorname{sen}(2\theta_0)} &= -\tan\theta_0\left(\frac{1}{2}\sec^2\theta_0+1\right)\\
\frac{\cos^2\theta_0-\operatorname{sen}^2\theta_0}{2\cos\theta_0\sin\theta_0} &= -\frac{\operatorname{sen}\theta_0}{\cos\theta_0}\left(\frac{1}{2}\sec^2\theta_0+1\right)\\
\cos^2\theta_0-\operatorname{sen}^2\theta_0 &= -\frac{2\cos\theta_0^2\operatorname{sen}\theta_0}{\cos\theta_0}\left(\frac{1}{2}\sec^2\theta_0+1\right)\\
\cos^2\theta_0-\operatorname{sen}^2\theta_0 &= -2\operatorname{sen}^2\theta_0\left(\frac{1}{2}\sec^2\theta_0+1\right)\\
\cos^2\theta_0-\operatorname{sen}^2\theta_0 &= -\tan^2\theta_0-2\operatorname{sen}^2\theta_0\\
\cos^2\theta_0+\operatorname{sen}^2\theta_0 &= -\tan^2\theta_0,
\end{aligned}$$

de donde

$$\tan^2\theta_0=-1,$$

lo cual no es posible.

Así,

$$A\left(\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\cot\theta_0, -\cot(2\theta_0)\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\cot\theta_0\right).$$

Vamos a simplificar la segunda coordenada de A:

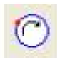
$$\begin{aligned}
-\cot(2\theta_0)\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\cot\theta_0 &= -\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\cot\theta_0\frac{\cos(2\theta_0)}{\operatorname{sen}(2\theta_0)}\\
&= -\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\frac{\cos\theta_0}{\operatorname{sen}\theta_0}\frac{\cos^2\theta_0-\operatorname{sen}^2\theta_0}{2\cos\theta_0\operatorname{sen}\theta_0}\\
&= -\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\frac{\cos^2\theta_0-\operatorname{sen}^2\theta_0}{2\operatorname{sen}^2\theta_0}\\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\left(\cot^2\theta_0-1\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\left(1-\cot^2\theta_0\right),
\end{aligned}$$

de donde:

$$A\left(\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\cot\theta_0, \frac{1}{2}\left(\frac{v_o^2}{g}\right)\left(1-\cot^2\theta_0\right)\right),$$

que sabemos, satisface la ecuación del tiro parabólico (ver 3.26 y 3.28).

Construcción con Geolab

1. Repite los primeros 2 pasos de la construcción con GeoLab del inciso b.
2. Define el escalar $b = F.y + 2*p$
3. Contruye la recta calculada dir con ecuación $y = b$
4. Construye f la parábola con foco F y directriz c.
5. Construye la recta $l1$ que pase por los puntos O y F.
6. Llama M a la intersección de la recta $l1$ con la parábola f, del otro lado del punto O.
7. En la pantalla de datos analíticos, activa la traza del punto M.
8. Define una animación para el ángulo a con los siguientes datos:
   Inicial = 0; Final = 3.14, Pasos = 100
9. En la pantalla gráfica, activa la traza.
10. En la pantalla gráfica, haz clic en el icono  *Empieza animación.*

    Para verificar que la parábola $-4\left(\frac{v_o^2}{2g}\right)\left(y - \frac{v_o^2}{2g}\right) = x^2$ coincide con el lugar geométrico buscado, dibujemos la gráfica correspondiente a la construcción anterior:
11. Define los escalares:
    - $g = 9.8$
    - $r = (v0*v0)/(2*g)$
12. Define h una cónica calculada con los siguientes valores:
    - $A = 1$
    - $2B = 0$
    - $C = 0$
    - $2D = 0$
    - $2E = 4*r$
    - $F = -4*r*r$
13. Para volver a ver la construcción original cierra la ventana de animación haciendo clic en el icono  *Cerrar ventana.*

    La construcción anterior es la que se encuentra en el archivo Construcción_2ccon.lab. ■

III. Sean ℓ una recta cualquiera con pendiente positiva que pase por el origen, ℓ' la recta que se obtiene al reflejar ℓ con respecto al eje X y A un punto de sobre el eje X positivo. Sea s una recta que pasa por A y corta, a ℓ en el punto C y a ℓ' en el punto C'. Consideremos P un punto cualquiera en el primer cuadrante y llamemos P' al punto que se obtiene al reflejar P con respecto al eje X. Sea M el punto de intersección las rectas que pasan por C, P y C', P'. Hallar el lugar geométrico descrito por el punto M a medida que la recta s gira alrededor del punto A.

Solución:

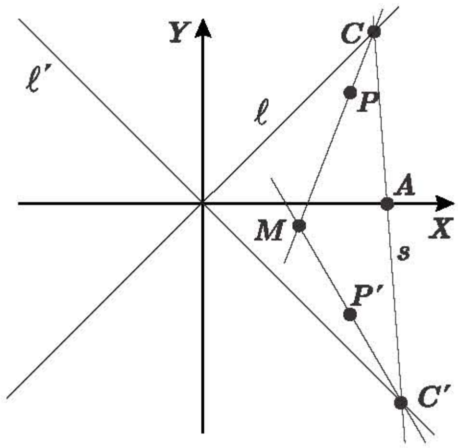


Figura 3-13

Sea $A = (x_0, 0)$. Como la recta s pasa por el punto A, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} y - 0 &= m(x - x_0) \\ y &= m(x - x_0), \end{aligned} \tag{3.29}$$

donde m es la pendiente de la recta.

Sea

$$y = m_1 x \tag{3.30}$$

la ecuación de la recta ℓ, luego la ecuación de ℓ', por ser ℓ' la recta que se obtiene al reflejar ℓ con respecto al eje X, es

$$y = -m_1 x. \tag{3.31}$$

Sea $P = (x_1, y_1)$, entonces $P' = (x_1, -y_1)$.

Hallemos las coordenadas de los puntos C y C'.

Para hallar las coordenadas del punto C debemos resolver el sistema formado por las expresiones (3.29) y (3.30). Sustituimos (3.30) en (3.29) y despejamos x:

$$\begin{aligned} m_1 x &= m(x - x_0) \\ m_1 x - mx &= -mx_0 \\ (m_1 - m)x &= -mx_0 \\ x &= -\frac{mx_0}{m_1 - m} \\ x &= \frac{mx_0}{m - m_1}. \end{aligned}$$

Ahora, la expresión anterior la sustituimos en (3.30):

$$y = m_1 \left(\frac{mx_0}{m - m_1} \right).$$

Así $C \left(\frac{mx_0}{m - m_1}, m_1 \left(\frac{mx_0}{m - m_1} \right) \right)$.

Análogamente, para hallar las coordenadas del punto C' debemos resolver el sistema formado por las expresiones (3.29) y (3.31). Sustituimos (3.31) en (3.29) y despejamos x:

$$\begin{aligned} -m_1 x &= m(x - x_0) \\ -m_1 x - mx &= -mx_0 \\ -(m_1 + m)x &= -mx_0 \\ x &= \frac{mx_0}{m + m_1}. \end{aligned}$$

Esta expresión la sustituimos en (3.31):

$$y = -m_1 \left(\frac{mx_0}{m + m_1} \right).$$

Así $C' = \left(\frac{mx_0}{m + m_1}, -m_1 \left(\frac{mx_0}{m + m_1} \right) \right)$.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos C y P tiene por ecuación:

$$y - y_1 = \left(\frac{m_1 \left(\frac{mx_0}{m - m_1} \right) - y_1}{\frac{mx_0}{m - m_1} - x_1} \right) (x - x_1),$$

que al simplificar tenemos:

$$\begin{aligned}
y-y_1 &= \left(\frac{m_1\left(\dfrac{mx_0}{m-m_1}\right)-y_1\left(\dfrac{m-m_1}{m-m_1}\right)}{\dfrac{mx_0}{m-m_1}-x_1\left(\dfrac{m-m_1}{m-m_1}\right)}\right)(x-x_1)\\
y-y_1 &= \left(\frac{m_1mx_0-y_1\left(m-m_1\right)}{mx_0-x_1\left(m-m_1\right)}\right)(x-x_1)\\
\left(y-y_1\right)\left(mx_0-x_1\left(m-m_1\right)\right) &= \left(m_1mx_0-y_1\left(m-m_1\right)\right)\left(x-x_1\right)\\
\left(y-y_1\right)\left(m\left(x_0-x_1\right)+x_1m_1\right) &= \left(m\left(m_1x_0-y_1\right)+y_1m_1\right)\left(x-x_1\right). \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos C' y P' tiene por ecuación:

$$y-(-y_1)=\left(\frac{-m_1\left(\dfrac{mx_0}{m+m_1}\right)-(-y_1)}{\dfrac{mx_0}{m+m_1}-x_1}\right)(x-x_1),$$

al simplificar tenemos:

$$\begin{aligned}
y+y_1 &= \left(\frac{-m_1\left(\dfrac{mx_0}{m+m_1}\right)-\left(-y_1\left(\dfrac{m+m_1}{m+m_1}\right)\right)}{\dfrac{mx_0}{m+m_1}-x_1\left(\dfrac{m+m_1}{m+m_1}\right)}\right)(x-x_1)\\
y+y_1 &= \left(\frac{-m_1mx_0+y_1\left(m+m_1\right)}{mx_0-x_1\left(m+m_1\right)}\right)(x-x_1)\\
\left(y+y_1\right)\left(mx_0-x_1\left(m+m_1\right)\right) &= \left(-m_1mx_0+y_1\left(m+m_1\right)\right)\left(x-x_1\right)\\
\left(y+y_1\right)\left(m\left(x_0-x_1\right)-x_1m_1\right) &= \left(-m\left(m_1x_0-y_1\right)+y_1m_1\right)\left(x-x_1\right). \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

Para obtener el lugar geométrico descrito por M debemos eliminar m de las expresiones (3.32) y (3.33). Consideremos ambas expresiones:

$$\begin{aligned}
\left(y-y_1\right)\left(m\left(x_0-x_1\right)+x_1m_1\right) &= \left(m\left(m_1x_0-y_1\right)+y_1m_1\right)\left(x-x_1\right)\\
\left(y+y_1\right)\left(m\left(x_0-x_1\right)-x_1m_1\right) &= \left(-m\left(m_1x_0-y_1\right)+y_1m_1\right)\left(x-x_1\right),
\end{aligned}$$

sumando obtenemos:

$$\begin{array}{rcl}
\left(y-y_1\right)\left(m\left(x_0-x_1\right)+x_1m_1\right) &=& \left(m\left(m_1x_0-y_1\right)+y_1m_1\right)\left(x-x_1\right)\\
\left(y+y_1\right)\left(m\left(x_0-x_1\right)-x_1m_1\right) &=& \left(-m\left(m_1x_0-y_1\right)+y_1m_1\right)\left(x-x_1\right)\\
\hline
\multicolumn{3}{l}{2m\left(x_0-x_1\right)y-2y_1x_1m_1=2y_1m_1\left(x-x_1\right).}
\end{array}$$

Despejamos m:

$$\begin{aligned}
m\left(x_0-x_1\right)y-y_1x_1m_1 &= y_1m_1\left(x-x_1\right)\\
m\left(x_0-x_1\right)y &= y_1m_1\left(x-x_1\right)+y_1x_1m_1\\
m\left(x_0-x_1\right)y &= xy_1m_1\\
m &= \frac{xy_1m_1}{\left(x_0-x_1\right)y}\\
m &= \frac{y_1m_1}{x_0-x_1}\left(\frac{x}{y}\right). \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

Sustituimos la expresión (3.34) en (3.32) y simplificamos:

$$\begin{aligned}
\left(y-y_1\right)\left(\frac{y_1m_1}{x_0-x_1}\left(\frac{x}{y}\right)\left(x_0-x_1\right)+x_1m_1\right) &= \left(\frac{y_1m_1}{x_0-x_1}\left(\frac{x}{y}\right)\left(m_1x_0-y_1\right)+y_1m_1\right)\left(x-x_1\right)\\
\left(y-y_1\right)\left(y_1m_1\frac{x}{y}+x_1m_1\right) &= \left(\frac{y_1m_1}{x_0-x_1}\left(\frac{x}{y}\right)\left(m_1x_0-y_1\right)+y_1m_1\right)\left(x-x_1\right)\\
\left(y-y_1\right)\left(y_1m_1x+yx_1m_1\right) &= \left(\frac{y_1m_1}{x_0-x_1}x\left(m_1x_0-y_1\right)+yy_1m_1\right)\left(x-x_1\right)\\
y_1m_1x\left(y-y_1\right)+yx_1m_1\left(y-y_1\right) &= \frac{y_1m_1}{x_0-x_1}x\left(m_1x_0-y_1\right)\left(x-x_1\right)+yy_1m_1\left(x-x_1\right)\\
y_1m_1xy-y_1m_1xy_1+yx_1m_1\left(y-y_1\right) &= \frac{y_1m_1}{x_0-x_1}x\left(m_1x_0-y_1\right)\left(x-x_1\right)+yy_1m_1x-yy_1m_1x_1\\
-y_1m_1xy_1+yx_1m_1\left(y-y_1\right) &= \frac{y_1m_1}{x_0-x_1}x\left(m_1x_0-y_1\right)\left(x-x_1\right)-yy_1m_1x_1\\
-y_1m_1xy_1+y^2x_1m_1-yy_1m_1x_1 &= \frac{y_1m_1}{x_0-x_1}x\left(m_1x_0-y_1\right)\left(x-x_1\right)-yy_1m_1x_1\\
-y_1m_1xy_1+y^2x_1m_1 &= \frac{y_1m_1}{x_0-x_1}x\left(m_1x_0-y_1\right)\left(x-x_1\right)\\
-y_1xy_1+y^2x_1 &= \frac{y_1}{x_0-x_1}x\left(m_1x_0-y_1\right)\left(x-x_1\right)\\
\left(-y_1xy_1+y^2x_1\right)\left(x_0-x_1\right) &= y_1x\left(m_1x_0-y_1\right)\left(x-x_1\right)\\
-y_1xy_1\left(x_0-x_1\right)+y^2x_1\left(x_0-x_1\right) &= y_1\left(m_1x_0-y_1\right)x^2-y_1\left(m_1x_0-y_1\right)x_1x\\
y^2x_1\left(x_0-x_1\right)-y_1\left(m_1x_0-y_1\right)x^2 &= y_1xy_1\left(x_0-x_1\right)-y_1\left(m_1x_0-y_1\right)x_1x\\
y^2x_1\left(x_0-x_1\right)-y_1\left(m_1x_0-y_1\right)x^2 &= \left(y_1y_1\left(x_0-x_1\right)-y_1\left(m_1x_0-y_1\right)x_1\right)x\\
y^2x_1\left(x_0-x_1\right)-y_1\left(m_1x_0-y_1\right)x^2 &= \left(y_1y_1x_0-y_1m_1x_0x_1\right)x\\
y^2x_1\left(x_0-x_1\right)-y_1\left(m_1x_0-y_1\right)x^2 &= \left(y_1-m_1x_1\right)y_1x_0x\\
y^2x_1\left(x_0-x_1\right) &= y_1\left(m_1x_0-y_1\right)x^2+\left(y_1-m_1x_1\right)y_1x_0x.
\end{aligned}$$

Sean $\alpha=y_1\left(m_1x_0-y_1\right)$ y $\beta=\left(y_1-m_1x_1\right)y_1$, luego:

$$y^2x_1\left(x_0-x_1\right)=\alpha x^2+\beta x_0x$$

Completamos el trinomio cuadrado perfecto del miembro derecho y simplificamos:

$$\begin{aligned}
y^2x_1\left(x_0-x_1\right) &= \alpha\left(x^2+\frac{\beta x_0}{\alpha}x\right)\\
y^2x_1\left(x_0-x_1\right) &= \alpha\left(x+\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)^2-\frac{1}{4}\frac{\left(\beta x_0\right)^2}{\alpha}\\
y^2x_1\left(x_0-x_1\right)-\alpha\left(x+\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)^2 &= -\frac{1}{4}\frac{\left(\beta x_0\right)^2}{\alpha}\\
\alpha\left(x+\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)^2-x_1\left(x_0-x_1\right)y^2 &= \frac{1}{4}\frac{\left(\beta x_0\right)^2}{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha\left(x+\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)^2}{\frac{1}{4}\frac{\left(\beta x_0\right)^2}{\alpha}}-\frac{x_1\left(x_0-x_1\right)y^2}{\frac{1}{4}\frac{\left(\beta x_0\right)^2}{\alpha}} &= 1\\
\frac{\left(x+\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)^2}-\frac{y^2}{\frac{1}{4}\frac{\left(\beta x_0\right)^2}{\alpha x_1\left(x_0-x_1\right)}} &= 1\\
\frac{\left(x-\left(-\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)^2}-\frac{y^2}{\frac{1}{4}\frac{\left(\beta x_0\right)^2}{\alpha x_1\left(x_0-x_1\right)}} &= 1. \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

Observemos que la anterior es la forma canónica de la ecuación de una hipérbola o una elipse, dependiendo de cuál sea el signo de la expresión:

$$\alpha x_1\left(x_0-x_1\right),$$

o sea

$$y_1\left(m_1x_0-y_1\right)x_1\left(x_0-x_1\right).$$

Puesto que el punto P está en el primer cuadrante, x_1, y_1 siempre son positivos, entonces basta ver cuál es el signo de

$$\left(m_1x_0-y_1\right)\left(x_0-x_1\right). \qquad (3.36)$$

Veamos qué condiciones deben cumplir la pendiente de la recta ℓ, el punto A y el punto P para que (3.36) sea positiva.

Sabemos que $m_1, x_1, y_1 > 0$.

Tenemos dos casos:

a. Sean $(m_1x_0 - y_1) > 0$ y $(x_0 - x_1) > 0$, entonces $m_1x_0 > y_1, x_0 > x_1$. Esto nos dice que si consideramos las rectas

$$y = m_1x_0 \qquad y \qquad x = x_0,$$

si el punto $P\,(x_1, y_1)$ está en la región limitada por los ejes X e Y y las rectas $y = m_1x_0$ y $x = x_0$, la expresión (3.35) es la ecuación de una hipérbola horizontal con centro $\left(\left(-\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right), 0\right)$.

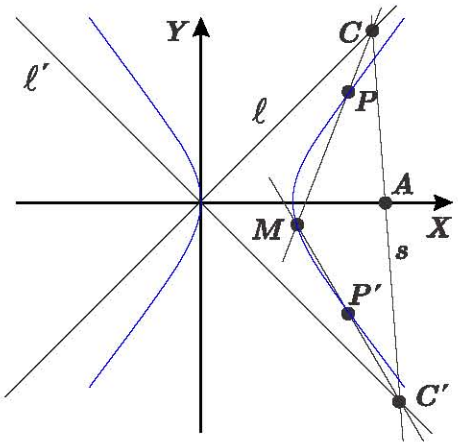


Figura 3-14

b. Sean $(m_1x_0 - y_1) < 0$ y $(x_0 - x_1) < 0$, entonces $m_1x_0 < y_1$, $x_0 < x_1$. Si el punto $P\,(x_1, y_1)$ está por arriba de la recta $y = m_1x_0$ y la derecha de la recta $x = x_0$, la expresión (3.35) es la ecuación de una hipérbola horizontal con centro $\left(-\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}, 0\right)$.

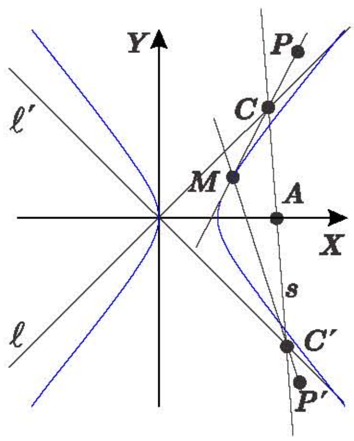


Figura 3-15

Así, en ambos casos la expresión (3.35) representa la ecuación de una hipérbola horizontal con centro en $\left(-\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}, 0\right)$.

Ahora, debemos hallar las condiciones de ℓ, A y P para que (3.36) sea negativa.

Tenemos dos casos:

(a) Sean $(m_1x_0 - y_1) > 0$ y $(x_0 - x_1) < 0$, entonces $m_1x_0 > y_1$, $x_0 < x_1$. Esto nos dice que si el punto $P\,(x_1, y_1)$ está por debajo de la recta $y = m_1x_0$ y a la derecha de la recta $x = x_0$, la expresión (3.35) es la ecuación de una elipse horizontal o vertical con centro en $\left(-\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}, 0\right)$.

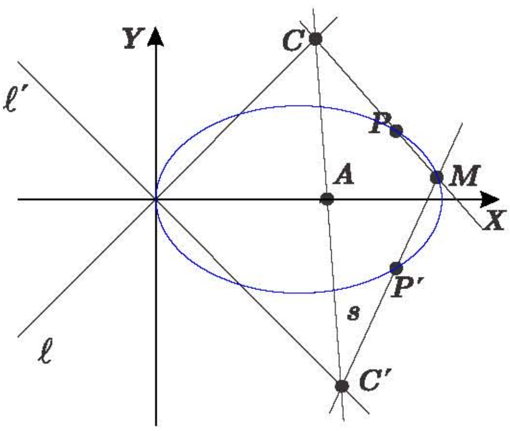


Figura 3-16

(b) Sean $(m_1x_0 - y_1) < 0$ y $(x_0 - x_1) > 0$, entonces $m_1x_0 < y_1, x_0 > x_1$. Si el punto $P\,(x_1, y_1)$ está por arriba de la recta $y = m_1x_0$ y la izquierda de la recta $x = x_0$, la expresión (3.35) es la ecuación de una elipse horizontal o vertical con centro en $\left(-\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}, 0\right)$.

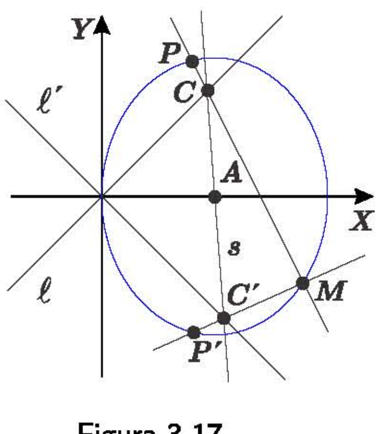


Figura 3-17

Dependiendo de cómo sea el valor de $\left(-\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)^2$ con respecto a $\frac{1}{4}\frac{(\beta x_0)^2}{\alpha x_1(x_0-x_1)}$, la expresión (3.35) será una elipse horizontal o vertical. En ambos casos la expresión (3.35) representa la ecuación de una elipse horizontal o vertical con centro en $\left(-\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}, 0\right)$.

Por lo tanto, el lugar geométrico descrito por el punto M está contenido en una hipérbola horizontal, o bien una elipse horizontal o vertical con centro en $\left(-\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}, 0\right)$ dependiendo de cómo sea el signo de $(m_1x_0-y_1)(x_0-x_1)$.

Veamos que el lugar geométrico descrito por M es, en cada caso, toda la curva mencionada anteriormente.

Supongamos $(m_1x_0-y_1)(x_0-x_1)>0$.

Consideremos

$$\frac{\left(x-\left(-\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)^2}-\frac{y^2}{\frac{1}{4}\frac{(\beta x_0)^2}{\alpha x_1(x_0-x_1)}}=1.$$

Sea $M=(z_0,w_0)$ un punto en la curva, es decir,

$$\frac{\left(z_0-\left(-\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)^2}-\frac{w_0^2}{\frac{1}{4}\frac{(\beta x_0)^2}{\alpha x_1(x_0-x_1)}}=1. \tag{3.37}$$

Debemos hallar una recta que pase por A y corte a ℓ en el punto C, y a la recta ℓ' en el punto C' de tal manera que las rectas que pasan C, P y C', P' se corten en el punto M.

La recta que pasa por los puntos P y M tiene ecuación:

$$y-y_1=\frac{w_0-y_1}{z_0-x_1}(x-x_1) \tag{3.38}$$

y la que pasa por los puntos P' y M es:

$$\begin{aligned} y-(-y_1) &= \frac{w_0-(-y_1)}{z_0-x_1}(x-x_1) \\ y+y_1 &= \frac{w_0+y_1}{z_0-x_1}(x-x_1). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Hallemos las coordenadas del punto C. Para ello debemos resolver el sistema formado por las expresiones (3.30) y (3.38). Sustituimos (3.30) en (3.38) y despejamos x:

$$\begin{aligned}
m_1x - y_1 &= \frac{w_0 - y_1}{z_0 - x_1}(x - x_1) \\
\left(m_1 - \frac{w_0 - y_1}{z_0 - x_1}\right)x &= y_1 - \frac{w_0 - y_1}{z_0 - x_1}x_1 \\
x &= \frac{y_1 - \dfrac{w_0 - y_1}{z_0 - x_1}x_1}{m_1 - \dfrac{w_0 - y_1}{z_0 - x_1}} \\
x &= \frac{y_1(z_0 - x_1) - (w_0 - y_1)x_1}{m_1(z_0 - x_1) - (w_0 - y_1)} \\
x &= \frac{y_1z_0 - w_0x_1}{m_1(z_0 - x_1) - w_0 + y_1} \\
x &= \frac{y_1z_0 - w_0x_1}{(y_1 - m_1x_1) - (w_0 - m_1z_0)}.
\end{aligned}$$

Esta expresión la sustituimos en (3.30) obteniendo:

$$y = m_1\frac{y_1z_0 - w_0x_1}{(y_1 - m_1x_1) - (w_0 - m_1z_0)}.$$

Así,

$$C = \left(\frac{y_1z_0 - w_0x_1}{(y_1 - m_1x_1) - (w_0 - m_1z_0)}, m_1\frac{y_1z_0 - w_0x_1}{(y_1 - m_1x_1) - (w_0 - m_1z_0)}\right).$$

Análogamente, para hallar las coordenadas del punto C' debemos resolver el sistema conformado por las expresiones (3.31) y (3.39). Sustituimos (3.31) en (3.39) y despejamos x:

$$\begin{aligned}
-m_1x + y_1 &= \frac{w_0 + y_1}{z_0 - x_1}(x - x_1) \\
-\left(m_1 + \frac{w_0 + y_1}{z_0 - x_1}\right)x &= -\left(y_1 + \frac{w_0 + y_1}{z_0 - x_1}x_1\right) \\
x &= \frac{y_1 + \frac{w_0+y_1}{z_0-x_1}x_1}{m_1 + \frac{w_0+y_1}{z_0-x_1}} \\
x &= \frac{y_1(z_0 - x_1) + (w_0 + y_1)x_1}{m_1(z_0 - x_1) + w_0 + y_1} \\
x &= \frac{y_1z_0 + w_0x_1}{m_1(z_0 - x_1) + w_0 + y_1} \\
x &= \frac{y_1z_0 + w_0x_1}{(y_1 - m_1x_1) + (w_0 + m_1z_0)},
\end{aligned}$$

la expresión anterior la sustituimos en (3.31):

$$y = -m_1\frac{y_1z_0 + w_0x_1}{(y_1 - m_1x_1) + (w_0 + m_1z_0)}.$$

Así,

$$C' = \left(\frac{y_1 z_0 + w_0 x_1}{(y_1 - m_1 x_1) + (w_0 + m_1 z_0)}, -m_1 \frac{y_1 z_0 + w_0 x_1}{(y_1 - m_1 x_1) + (w_0 + m_1 z_0)} \right).$$

Afirmamos que la recta CC' es la deseada, es decir, basta ver que el punto $A = (x_0, 0)$ pertenece a esta recta.

Para ello consideremos las rectas CA y $C'A$. Como ambas rectas pasan por el mismo punto A, si verificamos que las pendientes de ambas son iguales, entonces C, C' y A son colineales, es decir, A está sobre la recta CC'.

De la expresión (3.37) tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\left(z_0 - \left(-\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)^2} - \frac{w_0^2}{\frac{1}{4}\frac{(\beta x_0)^2}{\alpha x_1 (x_0 - x_1)}} &= 1. \\
\alpha \left(z_0 + \frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)^2 - x_1 (x_0 - x_1) w_0^2 &= \frac{1}{4}\frac{(\beta x_0)^2}{\alpha} \\
w_0^2 x_1 (x_0 - x_1) &= \alpha \left(z_0 + \frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{(\beta x_0)^2}{\alpha} \\
w_0^2 x_1 (x_0 - x_1) &= \alpha \left(z_0^2 + \frac{\beta x_0}{\alpha} z_0\right) \\
w_0^2 x_1 (x_0 - x_1) &= \alpha z_0^2 + \beta x_0 z_0,
\end{aligned}$$

pero $\alpha = y_1 (m_1 x_0 - y_1)$ y $\beta = (y_1 - m_1 x_1) y_1$, luego:

$$\begin{aligned}
w_0^2 x_1 (x_0 - x_1) &= y_1 (m_1 x_0 - y_1) z_0^2 + (y_1 - m_1 x_1) y_1 x_0 z_0 \\
2w_0^2 x_1 (x_0 - x_1) &= 2y_1 (m_1 x_0 - y_1) z_0^2 + 2 (y_1 - m_1 x_1) y_1 x_0 z_0,
\end{aligned}$$

lo cual escribimos como:

$$\begin{aligned}
& -y_1 (m_1 x_0 - y_1) z_0^2 - (y_1 - m_1 x_1) y_1 x_0 z_0 + w_0^2 x_1 (x_0 - x_1) = \\
= \; & y_1 (m_1 x_0 - y_1) z_0^2 + (y_1 - m_1 x_1) y_1 x_0 z_0 - w_0^2 x_1 (x_0 - x_1),
\end{aligned}$$

factorizamos $y_1 z_0$ en los primeros dos sumandos del primer miembro y $-y_1 z_0$ de los dos primeros sumandos del segundo miembro:

$$\begin{aligned}
& y_1 z_0 (-m_1 x_0 z_0 + y_1 z_0 - (y_1 - m_1 x_1) x_0) + w_0^2 x_1 (x_0 - x_1) \\
= \; & -y_1 z_0 (-m_1 x_0 z_0 + y_1 z_0 - (y_1 - m_1 x_1) x_0) - w_0^2 x_1 (x_0 - x_1),
\end{aligned}$$

reagrupamos en ambos miembros lo que hay en el primer sumando:

$$\begin{aligned}
& y_1 z_0 (y_1 z_0 - x_0 (y_1 - m_1 x_1 + m_1 z_0)) + w_0^2 x_1 (x_0 - x_1) \\
= \; & -y_1 z_0 (y_1 z_0 - x_0 (y_1 - m_1 x_1 + m_1 z_0)) - w_0^2 x_1 (x_0 - x_1),
\end{aligned}$$

factorizamos $(y_1z_0 - w_0x_1)$ en el primer miembro y $(-y_1z_0 - w_0x_1)$ en el segundo miembro

$$\begin{aligned}&(y_1z_0 - w_0x_1)\left[y_1z_0 - w_0(x_0 - x_1) - x_0((y_1 - m_1x_1) + m_1z_0)\right] =\\ = \;&(-y_1z_0 - w_0x_1)\left[y_1z_0 + w_0(x_0 - x_1) - x_0((y_1 - m_1x_1) + m_1z_0)\right],\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\frac{y_1z_0-w_0x_1}{y_1z_0+w_0(x_0-x_1)-x_0((y_1-m_1x_1)+m_1z_0)} &= \frac{-y_1z_0-w_0x_1}{y_1z_0-w_0(x_0-x_1)-x_0((y_1-m_1x_1)+m_1z_0)}\\ \frac{y_1z_0-w_0x_1}{y_1z_0-w_0x_1-x_0((y_1-m_1x_1)-(w_0-m_1z_0))} &= \frac{-y_1z_0-w_0x_1}{y_1z_0+w_0x_1-x_0((y_1-m_1x_1)+(w_0+m_1z_0))}\\ \frac{m_1(y_1z_0-w_0x_1)}{y_1z_0-w_0x_1-x_0((y_1-m_1x_1)-(w_0-m_1z_0))} &= \frac{-m_1(y_1z_0+w_0x_1)}{y_1z_0+w_0x_1-x_0((y_1-m_1x_1)+(w_0+m_1z_0))}\\ \frac{m_1\frac{y_1z_0-w_0x_1}{(y_1-m_1x_1)-(w_0-m_1z_0)}}{\frac{y_1z_0-w_0x_1}{(y_1-m_1x_1)-(w_0-m_1z_0)}-x_0} &= \frac{-m_1\frac{y_1z_0+w_0x_1}{(y_1-m_1x_1)+(w_0+m_1z_0)}}{\frac{y_1z_0+w_0x_1}{(y_1-m_1x_1)+(w_0+m_1z_0)}-x_0}. \qquad (3.40)\end{aligned}$$

En la última igualdad aparecen justamente las pendientes de las rectas que pasan por CA y $C'A$, ya que la pendiente de la recta que pasa por los puntos C y A es:

$$\frac{m_1\dfrac{y_1z_0 - w_0x_1}{(y_1 - m_1x_1) - (w_0 - m_1z_0)} - 0}{\dfrac{y_1z_0 - w_0x_1}{(y_1 - m_1x_1) - (w_0 - m_1z_0)} - x_0}$$

y la pendiente de la recta que pasa por los puntos C' y A es:

$$\frac{-m_1\dfrac{y_1z_0 + w_0x_1}{(y_1 - m_1x_1) + (w_0 + m_1z_0)} - 0}{\dfrac{y_1z_0 + w_0x_1}{(y_1 - m_1x_1) + (w_0 + m_1z_0)} - x_0}.$$

Así, por la expresión (3.37) tenemos que las rectas CA y $C'A$ tienen pendientes iguales, luego A está sobre la recta CC'.

Por lo tanto, el lugar geométrico que describe el punto M es la:

hipérbola horizontal:	$\frac{\left(x-\left(-\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)^2} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}\frac{(\beta x_0)^2}{\alpha x_1(x_0-x_1)}} = 1$	si $(m_1x_0 - y_1)(x_0 - x_1) > 0$
elipse horizontal:	$\frac{\left(x-\left(-\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)^2} + \frac{y^2}{-\frac{1}{4}\frac{(\beta x_0)^2}{\alpha x_1(x_0-x_1)}} = 1$	si $(m_1x_0 - y_1)(x_0 - x_1) < 0$ y $\left(\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)^2 > \frac{1}{4}\frac{(\beta x_0)^2}{\alpha x_1(x_0-x_1)}$
elipse vertical:	$\frac{y^2}{-\frac{1}{4}\frac{(\beta x_0)^2}{\alpha x_1(x_0-x_1)}} + \frac{\left(x-\left(-\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)^2} = 1$	si $(m_1x_0 - y_1)(x_0 - x_1) < 0$ y $\left(\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)^2 < \frac{1}{4}\frac{(\beta x_0)^2}{\alpha x_1(x_0-x_1)}$

Construcción con Geolab

1. Define los escalares:

   - $u = 10$
   - $v = 10$
   - $o1 = 0$
   - $o2 = 0$
   - $x0 = 4$
   - $m1 = 1$
   - $m1' = -m1$

   y construye los puntos $A\,(x0, o2)\,, O\,(o1, o2)\,, U\,(u, o2)$ y $V\,(o1, v)$

2. Construye los ejes coordenados eX y eY usando los puntos O, U y V.

3. Construye las rectas l y l' que pasen por O con pendientes $m1$ y $m1'$ respectivamente.

4. Construye los puntos $P\,(10, 5)$ y $P'\,(P.x, -P.y)$

5. En el icono  elige la opción *Recta por un punto*, llama s a esta recta y haz clic en el punto A. Gira esta recta de tal manera que se pueda apreciar dónde corta a las rectas l y l'.

6. Llama C a la intersección de las rectas l, s, y C' a la intersección de las rectas l', s.

7. Traza las rectas $r1$ y $r2$ que pasan por P, C y P', C' respectivamente y llama M al punto de intersección de estas rectas.

8. En la pantalla de datos analíticos, activa la traza del punto M.

9. Define una animación para la recta s con los siguientes datos:

   Inicial = 0; Final = 0.5, Pasos = 500

10. En la pantalla gráfica, activa la traza.

11. Ejecuta la animación.

    Para verificar que el lugar geométrico buscado está contenido en la cónica con ecuación

$$\frac{\left(x-\left(-\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\frac{\beta x_0}{\alpha}\right)^2}-\frac{y^2}{\frac{1}{4}\frac{(\beta x_0)^2}{\alpha x_1\,(x_0-x_1)}}=1$$

dibujamos la cónica correspondiente a la construcción anterior:

12. En el icono *Define cónica* selecciona la opción **Calculada.** Llama *lug* a esta cónica y asigna los siguientes valores:

- $A = -P.y{*}((-l.A/l.B){*}A.x - P.y)$
- $2B = 0$
- $C = P.x{*}(A.x - P.x)$
- $2D = -(P.y - (-l.A/l.B){*}P.x){*}P.y{*}A.x$
- $2E = 0$
- $F = 0$

Para poder ver cuándo la curva es una hipérbola o una elipse hagamos lo siguiente:

13. Construye la recta calculada z con los siguientes valores:

- $A = 1$
- $B = 0$
- $C = -A.x$

Cambia el color de la recta z.

14. Construye la recta calculada w con los siguientes valores:

- $A = 0$
- $B = 1$
- $C = -A.x * (-l.A/l.B)$

Cambia el color de esta recta.

15. Mueve el punto P en el primer cuadrante y notarás cómo la curva cambia dependiendo de en qué posición se encuentra, respecto a las rectas z y w. Ejecuta la animación.

16. Para volver a ver la construcción original cierra la ventana de animación haciendo clic en el icono *Cerrar ventana* y en la parte derecha de la ventana selecciona el objeto s, para arrastrarlo alrededor del punto A si deseas ver, de manera manual, cómo se genera el lugar geométrico.

La construcción anterior es la que se encuentra en el archivo Construcción_3con.lab. ■

IV. Sean A y B dos puntos cualesquiera. Encontrar el lugar geométrico descrito por el punto M de tal manera que el producto de pendientes de las rectas AM y BM sea igual a una constante k.

Solución:

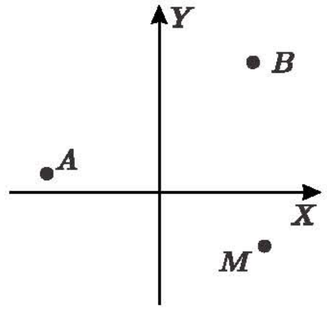


Figura 3-18

Una vez fijos los puntos A y B, el lugar geométrico dependerá del valor elegido de la constante k. En la figura anterior hemos elegido k de manera que se satisfacen las condiciones del último de los casos que consideraremos más adelante.

Sean $A = (x_0, y_0)$ y $B = (x_1, y_1)$. Denotemos por m_{AM} y m_{BM} las pendientes de las rectas AM y BM respectivamente. Necesitamos hallar $M(x, y)$ de tal manera que

$$m_{AM} \times m_{BM} = k = \text{constante}.$$

La pendiente de la recta AM está dada por

$$m_{AM} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

y la pendiente de la recta BM está dada por

$$m_{BM} = \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

luego:

$$\begin{aligned}
\frac{y - y_0}{x - x_0} \times \frac{y - y_1}{x - x_1} &= k \\
(y - y_0)(y - y_1) &= k(x - x_0)(x - x_1) \\
y^2 - (y_1 + y_0)y + y_0 y_1 &= k\left(x^2 - (x_1 + x_0)x + x_0 x_1\right).
\end{aligned}$$

En ambos lados de la igualdad completamos el trinomio cuadrado perfecto y simplificamos:

$$\begin{aligned}
\left(y-\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2-\left(\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2+y_0y_1 &= k\left(\left(x-\frac{x_1+x_0}{2}\right)^2-\left(\frac{x_1+x_0}{2}\right)^2+x_0x_1\right)\\
\left(y-\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2-k\left(x-\frac{x_1+x_0}{2}\right)^2 &= k\left(-\left(\frac{x_1+x_0}{2}\right)^2+x_0x_1\right)+\left(\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2-y_0y_1.\\
\left(y-\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2-k\left(x-\frac{x_1+x_0}{2}\right)^2 &= k\left(-\frac{1}{4}\left(x_1^2-2x_0x_1+x_0^2\right)\right)+\frac{1}{4}\left(y_1^2-2y_0y_1+y_0^2\right)\\
\left(y-\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2-k\left(x-\frac{x_1+x_0}{2}\right)^2 &= -k\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_0}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Llamemos $\alpha=-k\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_0}{2}\right)^2$ y analicemos esta expresión:

a. Si $\alpha>0$, es decir,

$$\begin{aligned}
-k\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_0}{2}\right)^2 &> 0\\
\left(\frac{y_1-y_0}{2}\right)^2 &> k\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^2\\
\left(\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right)^2 &> k,
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\left(y-\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2-k\left(x-\frac{x_1+x_0}{2}\right)^2 &= \alpha\\
\frac{\left(y-\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2}{\alpha}-\frac{\left(x-\frac{x_1+x_0}{2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha}{k}\right)} &= 1.
\end{aligned}$$

Ahora debemos considerar el signo de k.

i. Si $k>0$.
En este caso $\frac{\alpha}{k}>0$, por tanto, es una hipérbola vertical con centro en el punto de coordenadas $\left(\frac{x_1+x_0}{2},\frac{y_1+y_0}{2}\right)$.

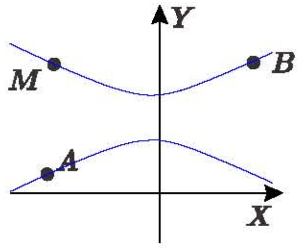


Figura 3-19

ii. Si $k < 0$.
En este caso $\dfrac{\alpha}{k} < 0$, por lo que la ecuación

$$\frac{\left(y - \dfrac{y_1 + y_0}{2}\right)^2}{\alpha} - \frac{\left(x - \dfrac{x_1 + x_0}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{\alpha}{k}\right)} = 1$$

se puede escribir como

$$\frac{\left(y - \dfrac{y_1 + y_0}{2}\right)^2}{\alpha} + \frac{\left(x - \dfrac{x_1 + x_0}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{\alpha}{-k}\right)} = 1,$$

donde α y $\dfrac{\alpha}{-k}$ son ambos positivos, por lo que afirmamos que se trata de una elipse, horizontal si $\alpha < \dfrac{\alpha}{-k}$, o vertical si $\alpha > \dfrac{\alpha}{-k}$, es decir, horizontal si $k > -1$ y vertical si $k < -1$.
Dibujamos a continuación un caso en el que $k > -1$:

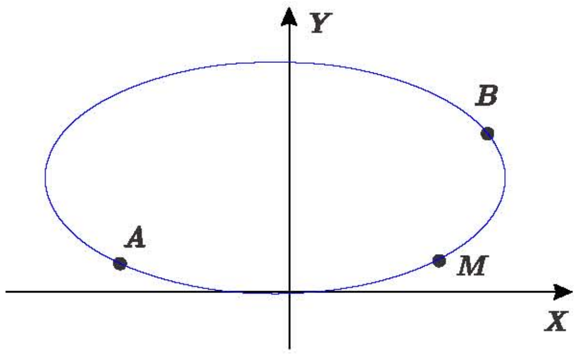


Figura 3-20

b. Si $\alpha < 0$, es decir,

$$\begin{aligned} -k\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_0}{2}\right)^2 &< 0 \\ \left(\frac{y_1 - y_0}{2}\right)^2 &< k\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^2 \\ \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)^2 &< k. \end{aligned}$$

Este caso solamente es posible cuando $k > 0$.
Entonces escribimos $\beta = -\alpha > 0$, o sea:

$$\frac{\left(x - \dfrac{x_1 + x_0}{2}\right)^2}{\dfrac{\beta}{k}} - \frac{\left(y - \dfrac{y_1 + y_0}{2}\right)^2}{\beta} = 1$$

que es la ecuación de una hipérbola horizontal con centro en $\left(\dfrac{x_1 + x_0}{2}, \dfrac{y_1 + y_0}{2}\right)$.

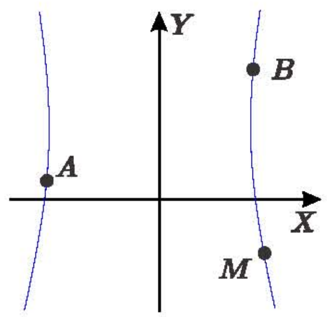


Figura 3-21

Por lo tanto, el lugar geométrico descrito por el punto M está contenido en una hipérbola horizontal o vertical, o bien una elipse con centro en $\left(\dfrac{x_1 + x_0}{2}, \dfrac{y_1 + y_0}{2}\right)$ dependiendo de cómo sean los signos de α y k.

Es posible verificar que el lugar geométrico descrito por M es, en cada caso toda la curva mencionada. A continuación haremos el análisis cuando $\alpha > 0$:

- Supongamos que $\alpha > 0$.
  Consideremos la cónica con ecuación:

$$\frac{\left(y - \dfrac{y_1 + y_0}{2}\right)^2}{\alpha} - \frac{\left(x - \dfrac{x_1 + x_0}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{\alpha}{k}\right)} = 1.$$

Sea $M = (z_0, w_0)$ un punto sobre la hipérbola, es decir,

$$\frac{\left(w_0 - \dfrac{y_1+y_0}{2}\right)^2}{\alpha} - \frac{\left(z_0 - \dfrac{x_1+x_0}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{\alpha}{k}\right)} = 1. \tag{3.41}$$

Debemos verificar que el producto de las pendientes de las rectas que pasan por A, M y B, M es igual a k.
La pendiente de la recta AM está dada por:

$$m_{AM} = \frac{w_0 - y_0}{z_0 - x_0}$$

y la pendiente de la recta BM está dada por:

$$m_{BM} = \frac{w_0 - y_1}{z_0 - x_1}$$

luego

$$\begin{aligned} m_{AM} \times m_{BM} &= \frac{w_0 - y_0}{z_0 - x_0} \times \frac{w_0 - y_1}{z_0 - x_1} \\ &= \frac{w_0^2 - (y_1 + y_0)\, w_0 + y_0 y_1}{z_0^2 - (x_1 + x_0)\, z_0 + x_0 x_1} \\ &= \frac{\left(w_0 - \dfrac{y_1+y_0}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{y_1+y_0}{2}\right)^2 + y_0 y_1}{\left(z_0 - \dfrac{x_1+x_0}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x_1+x_0}{2}\right)^2 + x_0 x_1} \\ &= \frac{\left(w_0 - \dfrac{y_1+y_0}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{y_1-y_0}{2}\right)^2}{\left(z_0 - \dfrac{x_1+x_0}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x_1-x_0}{2}\right)^2}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

De la expresión (3.41) tenemos:

$$\left(w_0 - \frac{y_1+y_0}{2}\right)^2 - k\left(z_0 - \frac{x_1+x_0}{2}\right)^2 = \alpha,$$

pero

$$\alpha = -k\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1-y_0}{2}\right)^2,$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\left(w_0-\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2-k\left(z_0-\frac{x_1+x_0}{2}\right)^2 &= -k\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_0}{2}\right)^2\\
\left(w_0-\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2-\left(\frac{y_1-y_0}{2}\right)^2 &= k\left(z_0-\frac{x_1+x_0}{2}\right)^2-k\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^2\\
\left(w_0-\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2-\left(\frac{y_1-y_0}{2}\right)^2 &= k\left(\left(z_0-\frac{x_1+x_0}{2}\right)^2-\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^2\right)\\
\frac{\left(w_0-\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2-\left(\frac{y_1-y_0}{2}\right)^2}{\left(z_0-\frac{x_1+x_0}{2}\right)^2-\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^2} &= k,
\end{aligned}$$

de donde:

$$m_{AM}\times m_{BM}=k$$

Así, el producto de las pendientes de las rectas que pasan por A, M y B, M es igual a k.

- Si $\alpha<0$, escribimos $\beta=-\alpha>0$ y consideramos:

$$\frac{\left(x-\frac{x_1+x_0}{2}\right)^2}{\frac{\beta}{k}}-\frac{\left(y-\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2}{\beta}=1,$$

obteniendo el resultado de manera análoga.

Por lo tanto, el lugar geométrico descrito por el punto M es la

hipérbola vertical: $$\frac{\left(y-\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2}{\alpha}-\frac{\left(x-\frac{x_1+x_0}{2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha}{k}\right)}=1 \quad \text{si}\,\alpha>0 \text{ y } k>0$$

elipse horizontal: $$\frac{\left(y-\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2}{\alpha}+\frac{\left(x-\frac{x_1+x_0}{2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha}{-k}\right)}=1 \quad \text{si } \alpha>0 \text{ y } -1<k<0$$

elipse vertical: $$\frac{\left(y-\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2}{\alpha}+\frac{\left(x-\frac{x_1+x_0}{2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha}{-k}\right)}=1 \quad \text{si}\,\alpha>0 \text{ y } k<-1$$

hipérbola horizontal: $$\frac{\left(x-\frac{x_1+x_0}{2}\right)^2}{\frac{\beta}{k}}-\frac{\left(y-\frac{y_1+y_0}{2}\right)^2}{\beta}=1 \quad \text{con } \beta=-\alpha \text{ si } \alpha<0, k>0$$

donde $\alpha=-k\left(\dfrac{x_1-x_0}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y_1-y_0}{2}\right)^2$.

Construcción con Geolab

1. Define los escalares:

   - $u = 10$
   - $v = 10$
   - $x0 = 5$
   - $y0 = 7$
   - $x1 = -6$
   - $x2 = 1$
   - $o1 = 0$
   - $o2 = 0$

   y construye los puntos $O\,(o1, o2)\,, U\,(u, o2)\,, V\,(o1, v)\,, A(x0, y0)$ y $B(x1, y1)$, y los ejes coordenados eX y eY usando los puntos O, U y V.

2. Construye un círculo cir con centro en $(B.x, B.y)$ con radio 2

3. Define Z un punto sobre cir y oculta el círculo cir.

4. Construye s la recta que pasa por los puntos B y Z.

5. Define los escalares:

   - $mAM = -s.A/s.B$
   - $k = 6$
   - $mBM = k/mAM$
   - $w1 = ((x1 - x0)\,/2)*((x1 - x0)\,/2)$
   - $w2 = ((y1 - y0)\,/2)*((y1 - y0)\,/2)$
   - $alf = -k*w1*w1 + w2*w2$

6. Construye g la recta que pase por A con pendiente mBM.

7. Llama M a la intersección de las rectas s y g.

8. En la pantalla de datos analíticos, activa la traza de M.

9. Define una animación para el punto Z con los siguientes datos:

   Inicial = 0; Final = 1, Pasos = 500

10. En la pantalla gráfica, activa la traza.

11. Ejecuta la animación.

Para verificar que la hipérbola $\dfrac{\left(y-\dfrac{y_1+y_0}{2}\right)^2}{\alpha}-\dfrac{\left(x-\dfrac{x_1+x_0}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{\alpha}{k}\right)}=1$ coincide con el lugar geométrico buscado, dibujemos la gráfica correspondiente a la construcción anterior:

12. Haz clic en  y elige la opción **Calculada.** Llama *hiper* a esta cónica y asigna los siguientes valores:

- $A=-k$
- $2B=0$
- $C=1$
- $2D=k^*(A.x+B.x)$
- $2E=-(A.y+B.y)$
- $F=A.y^*B.y-k^*A.x^*B.x$

13. Para volver a ver la construcción original cierra la ventana de animación haciendo clic en el icono  *Cerrar ventana* y en la parte derecha de la ventana selecciona el objeto Z, para arrastrarlo alrededor del punto B si deseas ver, de manera manual, cómo se genera el lugar geométrico.

La construcción anterior es la que se encuentra en el archivo Construcción_4con.lab ■

V. Consideremos un círculo Γ con centro en el origen y radio R, un punto A en Γ y la recta ℓ tangente a Γ en el punto A. Sean C, D las intersecciones de ℓ con los ejes X y Y respectivamente. Sean ℓ_1 y ℓ_2 las rectas perpendiculares a X y Y que pasen por C, D respectivamente y M la intersección de dichas rectas. Encontrar el lugar geométrico descrito por el punto M a medida que A se desplaza en Γ.

Solución:

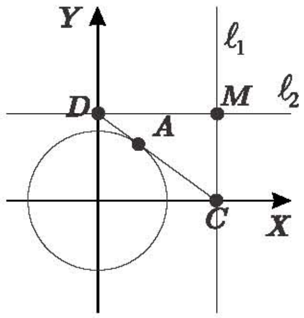


Figura 3-22

Sean $C = (\alpha, 0)$ y $D = (0, \beta)$. Veamos qué condiciones deben cumplir α y β para que la recta que pasa por los puntos C, D sea tangente a Γ:

Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$CD = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Por otra parte, puesto que la recta que pasa por los puntos C y D debe ser tangente al círculo, los triángulos $\triangle OAD$ y $\triangle OCA$ son rectángulos con hipotenusa OD y OC respectivamente, entonces:

$$\begin{aligned} CA &= \sqrt{\alpha^2 - R^2} \\ AD &= \sqrt{\beta^2 - R^2}. \end{aligned}$$

Como ℓ debe ser tangente a Γ, entonces:

$$CD = CA + AD,$$

es decir,

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{\alpha^2 - R^2} + \sqrt{\beta^2 - R^2},$$

elevando al cuadrado y simplificando tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= \left(\sqrt{\alpha^2 - R^2} + \sqrt{\beta^2 - R^2}\right)^2 \\ \alpha^2 + \beta^2 &= \alpha^2 - R^2 + 2\sqrt{\alpha^2 - R^2}\sqrt{\beta^2 - R^2} + \beta^2 - R^2 \\ 2R^2 &= 2\sqrt{\alpha^2 - R^2}\sqrt{\beta^2 - R^2}, \end{aligned}$$

elevando nuevamente al cuadrado:

$$\begin{aligned} R^4 &= \left(\alpha^2 - R^2\right)\left(\beta^2 - R^2\right) \\ R^4 &= \alpha^2\beta^2 - \alpha^2R^2 - \beta^2R^2 + R^4 \\ \alpha^2R^2 + \beta^2R^2 &= \alpha^2\beta^2, \end{aligned} \tag{3.43}$$

entonces el punto M debe cumplir la condición (3.43).

Pero el punto M tiene coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= \beta, \end{aligned}$$

entonces sustituyendo en (3.43) y simplificando tenemos:

$$\begin{aligned} x^2R^2 + y^2R^2 &= x^2y^2 \\ \left(x^2 + y^2\right)R^2 &= x^2y^2 \\ \frac{1}{\left(x^2 + y^2\right)R^2} &= \frac{1}{x^2y^2} \\ \frac{1}{R^2} &= \frac{x^2 + y^2}{x^2y^2} \\ \frac{1}{R^2} &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los puntos del lugar geométrico descrito por M están sobre la curva cuya ecuación está dada por:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{R^2}. \tag{3.44}$$

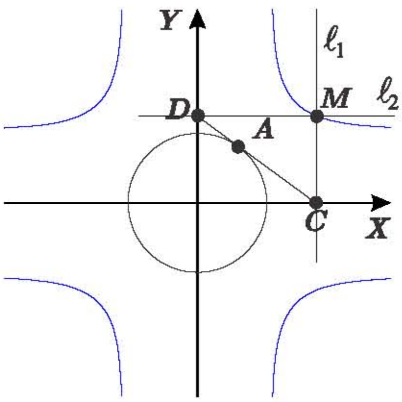


Figura 3-23

Para mostrar que el lugar geométrico descrito por el punto M es toda la curva descrita por (3.44), dado un punto M sobre la curva, debemos encontrar una recta tangente al círculo Γ

de tal manera que el punto de intersección de las rectas perpendiculares a los ejes que pasan por los puntos donde dicha recta tangente los corta, coincida con el punto M.

Sea $M = (x_0, y_0)$, entonces

$$\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2} = \frac{1}{R^2}. \tag{3.45}$$

Sea $C = (x_0, 0)$ y $D = (0, y_0)$.

Sea s la recta que pasa por los puntos C, D. Afirmamos que s es la recta tangente deseada.

La ecuación de la recta s es:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= -\frac{y_0}{x_0} x \\ y &= -\frac{y_0}{x_0} x + y_0. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Vamos a ver que la recta s corta a Γ en solamente un punto.

El círculo Γ tiene por ecuación

$$x^2 + y^2 = R^2, \tag{3.47}$$

sustituyendo (3.46) en (3.47) tenemos:

$$\begin{aligned} x^2 + \left(-\frac{y_0}{x_0} x + y_0\right)^2 &= R^2 \\ x^2 + \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 x^2 - 2\frac{y_0^2}{x_0} x + y_0^2 &= R^2 \\ x^2 + \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 x^2 - 2\frac{y_0^2}{x_0} x + y_0^2 - R^2 &= 0 \\ \left(1 + \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2\right) x^2 - 2\frac{y_0^2}{x_0} x + y_0^2 - R^2 &= 0 \\ \left(\frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0^2}\right) x^2 - 2\frac{y_0^2}{x_0} x + y_0^2 - R^2 &= 0, \end{aligned}$$

dividimos entre y_0^2:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0^2 y_0^2}\right) x^2 - 2\frac{1}{x_0} x + 1 - \frac{R^2}{y_0^2} &= 0 \\ \left(\frac{1}{y_0^2} + \frac{1}{x_0^2}\right) x^2 - 2\frac{1}{x_0} x + 1 - \frac{R^2}{y_0^2} &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, puesto que M está sobre la curva, satisface (3.45), sustituyendo en la expresión anterior tenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R^2}\right) x^2 - 2\frac{1}{x_0} x + 1 - R^2 \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{x_0^2}\right) &= 0 \\ \left(\frac{1}{R^2}\right) x^2 - 2\frac{1}{x_0} x + 1 - 1 + \frac{R^2}{x_0^2} &= 0, \end{aligned}$$

multiplicando por R^2 tenemos:

$$x^2 - 2\frac{R^2}{x_0}x + \frac{R^4}{x_0^2} = 0.$$

Resolvemos usando la fórmula general de la ecuación general de segundo grado tenemos:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{2\frac{R^2}{x_0} \pm \sqrt{\left(2\frac{R^2}{x_0}\right)^2 - 4\left(\frac{R^4}{x_0^2}\right)}}{2} \\
&= \frac{R^2}{x_0} \pm \sqrt{\left(\frac{R^2}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{R^4}{x_0^2}\right)} \\
&= \frac{R^2}{x_0} \pm \sqrt{\frac{R^4}{x_0^2} - \frac{R^4}{x_0^2}} \\
&= \frac{R^2}{x_0}.
\end{aligned}$$

Así, el único punto de intersección A de la recta s y el círculo Γ tiene coordenadas:

$$x = \frac{R^2}{x_0}$$

y

$$y = -\frac{y_0}{x_0}\left(\frac{R^2}{x_0}\right) + y_0,$$

es decir, la recta s es tangente al círculo Γ.

Por lo tanto el lugar geométrico descrito por el punto M es la curva cuya ecuación está dada por:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Construcción con Geolab

1. Define los escalares:

   - $u = 10$
   - $v = 10$
   - $o1 = 0$
   - $o2 = 0$
   - $r = 4$

   y construye los puntos $O\,(o1, o2)\,, U\,(u, o2)$ y $V\,(o1, v)$

2. Construye los ejes coordenados eX y eY usando los puntos O, U y V.

3. Construye el círculo cir con centro en O y radio r.

4. Haz clic en el icono y elige la opción **Punto en círculo.** Llama A a este punto y haz clic en el círculo cir.

5. En el icono elige la opción *Tangente a círculo por ratón*, llámala l, posteriormente haz clic en cir y el punto A.

6. Llama C, D a las intersecciones de las rectas eX, l y eY, l, respectivamente.

7. Traza las rectas $l1$ y $l2$ perpendiculares a eX, eY que pasan por C, D respectivamente. Llama M al punto de intersección de estas rectas.

8. En la pantalla de datos analíticos, activa la traza del punto M.

9. Define una animación para el punto A con los siguientes datos:

   Inicial = 0; Final = 1, Pasos = 200

10. En la pantalla gráfica, activa la traza.

11. Ejecuta la animación.

    Para verificar que el lugar geométrico descrito por M coincide con el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{R^2}$, dibujamos la curva correspondiente a la construcción anterior:

12. En el icono *Define funciones* selecciona la opción **Gráfica de función.** Nombra $f1$ a esta gráfica y asigna los siguientes valores:

    - $a = 4.01$
    - $b = 50$
    - $y =$ (4*abs(t_))/sqrt(t_*t_-16)
    - Pasos = 100

13. Define $f2$, la gráfica de función, con valores:

    - $a = 4.01$
    - $b = 50$
    - $y =$ -(4*abs(t_))/sqrt(t_*t_-16)
    - Pasos = 100

14. Define $f3$, la gráfica de función, con valores:

- $a = -4.01$
- $b = -50$
- $y =$ (4*abs(t_))/sqrt(t_*t_-16)
- Pasos = 100

15. Define $f4$, la gráfica de función, con valores:

- $a = -4.01$
- $b = -50$
- $y =$ -(4*abs(t_))/sqrt(t_*t_-16)
- Pasos = 100

16. Cambia de color y grosor los objetos $f1, f2, f3, f4$. De preferencia a un mismo color y grosor.

17. Para volver a ver la construcción original cierra la ventana de animación haciendo clic en el icono  *Cerrar ventana* y en la parte derecha de la ventana selecciona el objeto A, para arrastrarlo sobre el círculo, si deseas ver, de manera manual, cómo se genera el lugar geométrico.

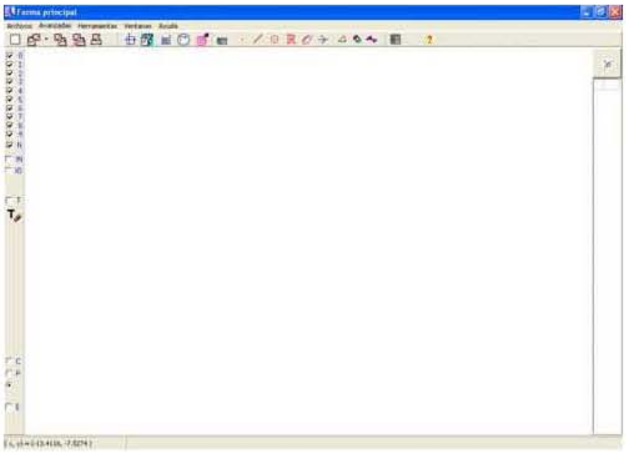
La construcción anterior es la que se encuentra en el archivo Construcción_5con.lab. ■

Apéndice A

Conociendo Geolab

Conociendo Geolab

Al abrir el programa aparece la ventana:



Ésta se llama *Pantalla Gráfica*, y es la pantalla en la que se realizan las construcciones de puntos, rectas, números, etcétera. Haciendo clic en el icono  podemos ir a la *Pantalla de datos analíticos*, en la que podemos observar los datos de las construcciones.

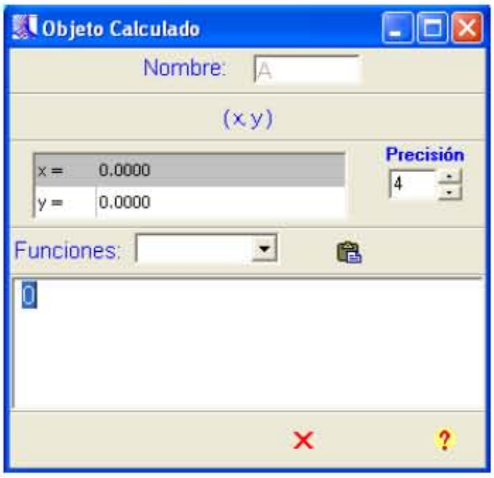
Construcción de puntos

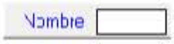
Construcción de los puntos $A(4,3)$ y $B(2,5)$

1. Haz clic en el icono *Define puntos* y aparecerá el menú:

2. Elige **Calculado.**

Aparecerá la siguiente ventana:



3. Escribe A en la ventana que señala  y teclea enter.

4. Escribe $x = 4$, $y = 3$ y luego haz clic en .

5. Repitiendo los pasos 1, 2 y 3 construimos el punto B. En la ventana **Objeto Calculado**, para el punto B, escribe $x = 2$, $y = 5$.

Al final, en la pantalla tendremos dos puntos cuyos nombres son A y B.

Construcción de segmentos

Construcción del segmento que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(3, 5)$

1. Construye los puntos $A(1, 2)$ y $B(3, 5)$.

2. Haz clic en  *Define rectas* y aparecerá el menú:

elige **Segmento por dos puntos**. En la ventana que señala Nombre escribe AB y después haz clic en A y B.

Construcción de rectas

Construcción de la recta que pasa por los puntos $A(2,3)$ y $B(5,1)$

1. Construye los puntos $A(2,3)$ y $B(5,1)$.

2. En el icono elige **Recta por dos puntos.** En la ventana que señala Nombre: escribe l y después haz clic en A y B.

Construcción de la recta paralela, por $C(6,0)$, a la recta que pasa por los puntos $A(1,2)$, $B(2,4)$

1. Construye los puntos $A(1,2)$, $B(2,4)$ y $C(6,0)$.

2. En el icono escoge la opción **Recta por dos puntos** y llama $l1$ esta recta, posteriormente da clic en los puntos A y B.

3. En el icono escoge la opción **Recta paralela.** Llama $l2$ a esta recta y luego haz clic en la recta $l1$ y en el punto C.

Construcción de la recta perpendicular, por $C = (7,0)$, a la recta que pasa por los puntos $A = (2,3)$, $B = (0,4)$

1. Construye los puntos $A = (2,3)$, $B = (0,4)$ y $C = (-1,0)$.

2. En el icono escoge la opción **Recta por dos puntos** y llama $l1$ a esta recta, posteriormente da clic en los puntos A y B.

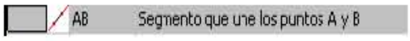
3. En el icono escoge la opción **Recta perpendicular**. Llama $l2$ a esta recta y luego haz clic en la recta $l1$ y en el punto C.

Dar color y grosor a puntos, segmentos, rectas, círculos, etc.

En la ventana del icono se halla el área de definiciones de nuestros objetos. Para que dichos objetos se vean de color distinto en la pantalla gráfica hay que seleccionar el objeto y posteriormente hacer clic en

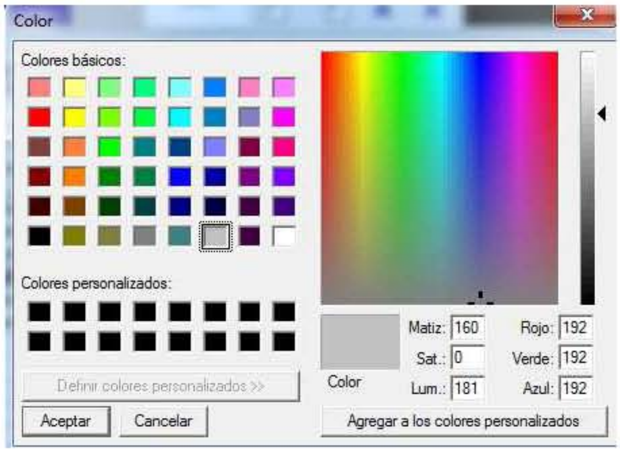
para que cambie de color. Por ejemplo podemos cambiar el color al segmento AB.

En la ventana del icono haz clic en



Haz clic en

en la sección de color azul. Aparecerá la siguente ventana:



Elige un color, ya sea básico o personalizado y haz clic en aceptar. En la pantalla gráfica notarás que el segmento AB está del color que elegiste.

Además, para que dichos objetos se vean de grosor distinto hay que seleccionar el objeto y luego, en la parte superior izquierda de nuestra ventana de datos analíticos, se ecuentra el apartado denominado **Ancho.** Ésta acepta sólo valores del 1 al 9, según el grosor que se desea tener.

Borrar puntos, segmentos, rectas, círculos, etcétera.

Usemos la construcion del segmento AB.

En la ventana del icono  haz clic con el botón derecho en

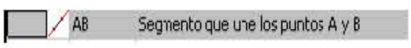
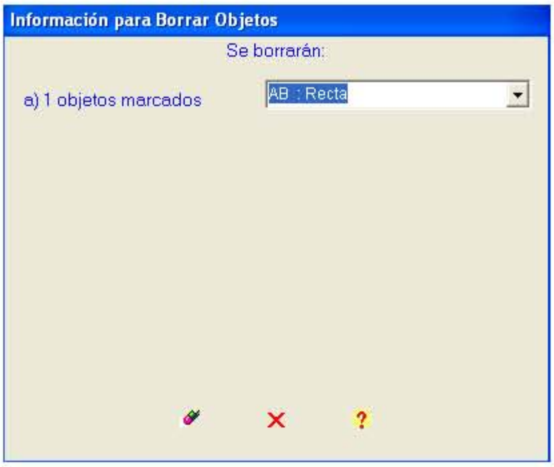


Figura A-1

y observa que cambia a color amarillo.

Haz clic en el icono  *Borrar objetos* y aparecerá la ventana:



Haz clic en . El segmento AB se ha borrado.

Activar la traza de un punto

Activar la traza de un punto A

1. En el icono selecciona la opción **Punto directo**, llama A a este punto y luego haz clic en la pantalla.

2. En la ventana del icono , pon el cursor en el reglón del punto A y posteriormente haz clic, con el botón izquierdo, en Traza × y selecciona **Visible**, posteriormente en la pantalla gráfica activa el boton de traza T .

3. Mueve el punto A y verás cómo se marca la traza.

Dar animación a un punto

Para animar un punto, éste debe ser un punto en segmento, punto en círculo o punto en cónica.

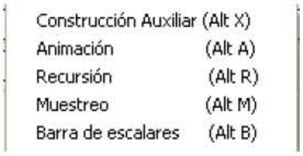
Los 3 pasos siguientes realizan una construcción auxiliar para dar animación a un punto en específico.

1. Construye un segmento AB.

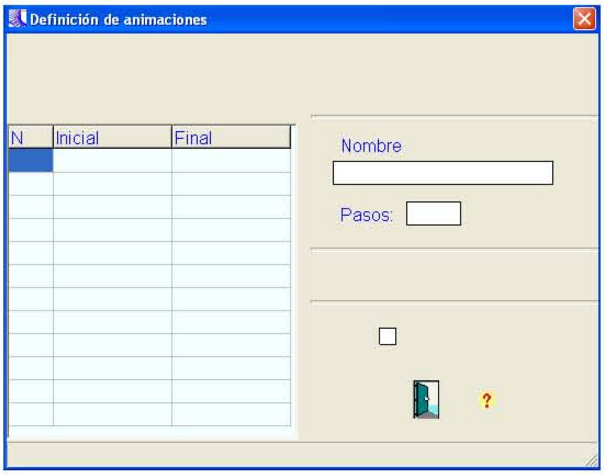
2. Construye un punto C arbitrario cualquiera sobre el segmento AB y traza la perpendicular a AB que pase por C.

3. Construye un punto D sobre el recta que se obtuvo en el paso anterior.

4. En la ventana del icono haz clic en el icono *Otras acciones* y aparecerá el menú:



elige **Animación** y aparecerá la ventana:

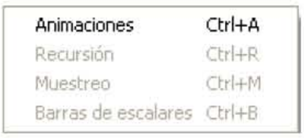


5. Haz clic *Animación nueva* y llama a esta animación **Movimiento de D,** posteriormente escribe C en la ventana que señala:

6. En fila que corresponde a la letra C escribe 0 en **Inicial** y 1 en **Final**.

7. En la parte de la ventana *Definicion de animaciones* que indica **Pasos**, escribe 100, haz clic en y por último selecciona *Cerrar la ventana.*

8. En la pantalla de datos analíticos, activa la traza del punto D y luego haz clic en el icono *Activar otras acciones* y aparecerá el menú:



elige **Animaciones.**

9. En la pantalla gráfica, haz clic en el icono *Empieza animación.*

10. Si deseas volver a ver cómo se mueve el punto, sólo haz clic en el icono *Borrar traza y empieza animación.*

Hacer invisibles puntos, segmentos, rectas, círculos, etcétera.

En la ventana del icono se halla el área de definiciones de nuestros puntos, rectas, círculos, etcétera. Para hacer que dichos objetos sean invisibles en la pantalla gráfica hay que seleccionar el objeto y posteriormente hacer clic en Visible ✓ para que cambie a Visible ×. Por ejemplo: Sea A un punto cualquiera en nuestra pantalla gráfica. En la ventana del icono seleccionamos:

luego hacemos clic en Visible ×. Vamos a la pantalla gráfica y vemos que el punto A no se ve.

Apéndice B

Definiciones y resultados para recordar

Definiciones y resultados para recordar

1. Consideremos la ecuación general de la recta $Ax+By+C=0$, con $A,B,C\neq 0$, dicha ecuación puede escribirse como:

$$\begin{aligned} Ax+By+C &= 0 \\ Ax+By &= -C \\ \frac{A}{-C}x+\frac{B}{-C}y &= 1 \\ \frac{x}{\frac{-C}{A}}+\frac{y}{\frac{-C}{B}} &= 1. \end{aligned}$$

La ecuación anterior se llama forma *simétrica* de la ecuación de la recta y tiene la ventaja de que en ella podemos ver explícitamente los puntos donde la recta corta los ejes coordenados.

En particular, si $P=(a,0)$ y $Q=(0,b)$, la ecuación simétrica de la recta que pasa por P y Q es:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

2. Dados dos puntos $A=(x_1,y_1)$ y $B=(x_2,y_2)$, la pendiente m de la recta que pasa por A y B es:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

y la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B es:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

o bien:

$$y-y_2=m(x-x_2).$$

3. Sean m_1 y m_2 las pendientes de las rectas ℓ_1 y ℓ_2 respectivamente. Entonces:

- Las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas si $m_1=m_2$.
- Las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son perpendiculares si $m_2=\dfrac{-1}{m_1}$.

4. Dos triángulos son semejantes si las razones de los lados correspondientes son iguales.

En la figura siguiente, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son semejantes,

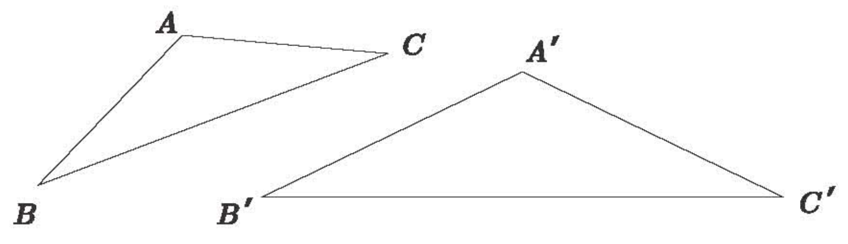


Figura B-1

entonces:
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

5. Si $A = (a_1, a_2)$ y $r > 0$, entonces la ecuación del círculo con centro en A y radio r es:
$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2.$$

6. (Teorema de Pitágoras). Sean a, b los catetos y c la hipotenusa de un triángulo rectángulo, entonces:
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

7. Sean A un punto en el plano cartesiano, r la distancia de A al origen y θ el ángulo formado por el eje X con el segmento que une A con el origen, entonces:

- Las coordenadas del punto A se pueden escribir en términos de r y θ como:
$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta. \end{aligned}$$

- La pendiente de la recta que pasa por el origen y el punto A es:
$$m = \tan\theta.$$

8. Sean $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ dos puntos del plano, la distancia entre los puntos A y B es:
$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

9. Sean $P = (x_1, x_2)$ un punto del plano y $Ax + By + C = 0$ la ecuación general de una recta. La distancia del punto P a la recta está dada por:
$$\frac{|Ax_1 + Bx_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

10. Sean P un punto en el plano y C un círculo con centro en el origen. Si una línea recta corta a C en dos puntos A y B, entonces el producto $PA \cdot PB$ es constante. El valor de dicha constante se denomina *la potencia del punto P*.

11. Dados dos círculos no concéntricos, el lugar geométrico formado por los puntos cuyas potencias respecto a los dos círculos son iguales, es llamado *eje radical.* Dicho conjunto de puntos es una recta. En particular, si los círculos se cortan, el eje radical es la recta que pasa por los puntos de intersección.

12. Sean $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$. Decimos u y v son perpendiculares si su producto punto es cero, es decir,
$$(u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1u_2 + v_1v_2 = 0.$$

13. Dados dos números reales a y b, si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

14. Sean $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ dos puntos en el plano. Las coordenadas del punto medio del segmento AB son:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

15. Sea $B = (b_1, b_2)$ un punto en un círculo con centro en $A = (a_1, a_2)$ y radio r, entonces la ecuación de la recta tangente al círculo en el punto B está dada por:

$$b_1 (x - a_1) + b_2 (y - a_2) - r^2 = 0.$$

16. Sean P y P' dos puntos inversos cualesquiera con respecto a un círculo dado. La recta que pasa por P' y que es perpendicular a la recta que une los puntos P y P' es llamada la polar de P.

17. (Teorema fundamental de polos y polares). Si con respecto a un círculo Ω, Para dos puntos P y M' se tiene que la polar de M' pasa por P, entonces la polar de P pasa por M'.

18. Una función f es par si $f(x) = f(-x)$ para todo x en el dominio de f.

19. Una función f es impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en el dominio de f.

20. Algunas identidades trigonométricas:

- $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$
- $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$
- $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

21. La parábola vertical que abre hacia abajo con vértice (h, k) tiene por ecuación:

$$(x - h)^2 = -4p(y - k)$$

donde p es la distancia del foco al vértice.

22. La elipse horizontal con centro en (h, k) semieje mayor a y semieje menor b tiene por ecuación:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1.$$

23. La elipse vertical con centro en (h, k) semieje mayor a y semieje menor b tiene por ecuación:

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

24. La hipérbola horizontal con centro en (h, k), semieje mayor a y semieje menor b está dada por la ecuación:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1.$$

25. Si $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ es la ecuación canónica de una hipérbola horizontal, entonces la longitud del lado recto es:

$$\frac{2b^2}{a}.$$

26. La hipérbola vertical con centro en (h, k), semieje mayor a y semieje menor b está dada por la ecuación:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

Conclusiones

Un estudiante de licenciatura está acostumbrado a ser guiado mediante ejemplos específicos. El enfrentarse a situaciones desconocidas, que se presentan al encontrar condiciones generales, resulta en ocasiones un reto difícil de aceptar.

Pensar en qué pasaría si una condición dada tuviese alguna limitación adicional, fue la constante en este trabajo, incluso, algunos de los ejemplos presentados daban para explicar más o bien podrían ser modificados para obtener lugares geométricos distintos; pero harían interminable el trabajo, o bien no eran parte del objetivo del mismo.

Entender qué es un lugar geométrico, cómo se genera, cómo se representa y verlo finalmente dibujado, resultó interesante, pero sobre todo sorprendente. El uso de *Geolab* fue una importante ayuda, pues permite ver de qué manera cambia la curva si alguna de las condiciones cambia. Muy probablemente, un lector se sentiría satisfecho con las construcciones en *Geolab.* A mí me queda la satisfacción de haber usado los conocimientos adquiridos para resolver cada uno de los problemas, aunque para quienes tienen la habilidad de visualizar antes de ver el desarrollo algebraico, los cálculos pueden parecerles largos o muy latosos.

Al inicio, este trabajo tenía como fin ponerlo al alcance de los estudiantes de educación media superior, por lo que se trató de explicar con detalle cada uno de los pasos para llegar a la ecuación analítica de cada lugar geométrico; durante el desarrollo, fue necesario echar mano de algunas herramientas de Geometría moderna y euclidiana, sin embargo, el objetivo se logró en casi todo el trabajo.

Bibliografía

1. Mosnat, E. *Problèmes de Géométrie Analitique*, Librairie Nony & Cie, Paris, Francia, 1897.
2. Oteyza, Lam. Hernández, Carrillo, Ramírez, *Geometría Analítica y trigonometría*, Pearson Eduación, Segunda edición, México 2008.
3. Resnick, R. Halliday, D. Kenneth, S., *Física*, CECSA, Tercera edición, México 1997.
4. Shively, L. *Introducción a la Geometría Moderna*, Compañía Editorial Continental, S.A., Segunda edición, México 1970.
5. Spivak, M. *Calculo Infinitesimal*, Editorial Reverté, Segunda Edición, México 1996.
6. Wentworth J., Smith, D. *Elementos de Álgebra*, Ginn y Compañía, USA, 1945.