UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Proper Forcing y el Problema del Continuo

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

ERICK IVAN RODRÍGUEZ CASTRO

DIRECTOR DE TESIS:

DOCTOR MIGUEL ÁNGEL MOTA GAYTÁN

México DF 2012

Índice general

Agradecimientos

“Elaborar una tesis es una actividad formativa”, esa es la frase que me viene a la mente al escribir estas líneas. Esto me dijo mi maestro José Alfredo Amor y Montaño en una ocasión en la que me equivoqué al utilizar el Lema de Zorn en una prueba. Cualquier sucesión de palabras que pudiera escribir para intentar describirlo serían sólo parte de la verdad, una persona que nos enseñó, con su irreparable pérdida, que el vacío existe. Personaje fundamental de mi vida, me guió en el principio de este trabajo y me dió la oportunidad de comenzar una carrera académica en la Facultad de Ciencias de nuestra amada universidad, pero lo que más le agradezco es haberme permitido ser su amigo, una afirmación arriesgada de mi parte, pero siempre me hizo sentir así. En donde se encuentre, este trabajo es para usted.

También quiero agradecer a mi tutor, el doctor Miguel Ángel Mota Gaytán, genio creativo de esta idea, sobre todo por haber confiado en que yo podría ejecutarla. Gracias por jalarme las orejas en muchas ocasiones. Gracias por enseñarme tantas cosas, tanto matemáticas como de la vida en general. Confío en que algún día coincidiremos en Barcelona.

A la doctora Gabriela Campero Arena. Ya antes de que aceptara ser cotutora de este trabajo, le había comentado que la consideraba mi madre matemática. Gracias a la doctora Campero y a sus extraordinarios cursos de Lógica Matemática y Teoría de Conjuntos, no sólo obtuve la motivación de seguir en la carrera sino que también, me condujo al estudio de esta hermosa teoría. A pesar de no ser, ni cerca, uno de sus mejores alumnos, nunca me ha dejado de cuidar.

A Luis Jesus Turcio Cuevas y a Osvaldo Guzmán González. Gracias por siempre tener la disposición de ayudarme. Sin ustedes, la idea de este trabajo sería inconcebible.

Al doctor Roberto Pichardo Mendoza, por iluminar con su claridad matemática, caminos por demás tenebrosos.

A mi madre Consuelo Castro Villagómez, lo poco o mucho que yo pueda ser, se lo debo a ella. A mi padre Alfonso Rodríguez Herrera y a mi hermano Diego Alfonso Rodríguez Castro. Gracias por siempre estar conmigo.

A todos mis profesores de la Facultad de Ciencias, en especial a Patricia Cortés Flores, Diana Avella Alaminos, Luis Manuel Hernández Gallardo, Laura Ortiz Bobadilla y Héctor Méndez Lango. Al doctor Alejandro Illanes Mejía y a la doctora Patricia Pellicer Covarrubias, por enseñarme topología. Al arriesgado profesor y amigo personal Rubén Molina Hernández.

A los alumnos que a lo largo de 4 años, me han regalado un poco de atención mientras escribo y habló de matemáticas enfrente de un pizarrón y de los cuales he aprendido tanto.

A todos mis amigos, especialmente a Fernando Ramírez Partida, Jesús Herrera Maldonado, Antonio Cruz, José López, Marco Vega y Juan Carlos Rodríguez Cervantes. A José Juan Zacarias, alumno, maestro y hermano. A Marisol Rodríguez por aconsejarme en tiempos oscuros. A Karina Islas Rios, por ayudarme cuando más lo necesitaba. A Juan Carlos Fernández, por ser como es y compartir conmigo lo que él es. A Rodrigo Hernández Gutierrez, por enseñarme que ser feliz, más que un estado de ánimo, es una actitud. A Mindy Huerta, Jorge Vega, Dalid y Leonel Rito, Christian Díaz, Yazmín Pachecho y Prisma Huerta por siempre escucharme. A Adela Millán, Claudia Solis, Iker Martínez, Rosalía Torres y Luis Paredes, mis amigos topológicos. A Gustavo Jasso, Alfredo Nájera y Manuel Flores, mis amigos algebráicos. A Omar Franca, Gustavo García y Leonardo Araujo, mis amigos complejos. A la excelente matemática y persona Judith Campos por prestarme su tarea de Teoría de Conjuntos I, hay un antes y un después de ese evento. Al último ayudante que tuve en la carrera y ahora amigo Frank Patrick Murphy. A mis patrones Eduardo Tomás Arellano Arjona, Osvaldo Tellez Nieto y Jannina Ovalle, por permitirme trabajar con ellos.

A la reina Channi Alai Alexis Sánchez Souvervielle por regalarme un corazón, y a Monserrat Ezbeidy Velasco Figueroa por, seguramente sin querer, echarlo a andar.

Finalmente, a la Universidad Nacional Autónoma de México, por abrirme las puertas de mi amado Colegio de Ciencias y Humanidades Oriente, y después, de mi hermosa Facultad de Ciencias en la Ciudad Universitaria.

The Place Where People Meet to Seek the Highest is Holy Ground.

Introducción

La teoría de conjuntos vio la luz con el trabajo del matemático alemán George Cantor con una serie de trabajos publicados entre los años 1879 y 1884. En ellos Cantor introdujo la nociones de conjunto infinito, ordinales y cardinales. Los ordinales generalizan la noción de número natural y forman un orden ascendente de todos los posibles buenos órdenes mientras que los cardinales son ordinales que no son biyectables con ordinales menores. De esta manera y dado que todo conjunto se puede bien ordenar, los ordinales imponen una noción de tamaño en el universo conjuntista. Así, se tienen conjuntos que miden qué tan grande es un conjunto infinito y además estos conjuntos están ordenados. Cantor usó la primera letra del alfabeto hebreo $\aleph$ para designar a los cardinales infinitos siendo $\aleph_0$ el que representa al primero de ellos, es decir, al conjunto de los números naturales.

El origen del análisis de Cantor fueron las propiedades de la recta real al estudiar el comportamiento de ciertas funciones trigonométricas. El mismo Cantor probó que el conjunto de los números reales no tiene el mismo tamaño que el de los números naturales, resultando que es de un tamaño mayor. De aquí que una pregunta natural consiste en determinar la cardinalidad de $\mathbb{R}$. Nótese que $\mathbb{R}$ es biyectable con el $[0,1]$ y que cada punto en el intervalo $[0,1]$ tiene a lo más 2 representaciones binarias (pues considerando las colas de ceros, algún punto puede tener más de una representación). Esto implica que el conjunto de todas las funciones que van de $\mathbb{N}$ al conjunto $\{0,1\}$ tiene la misma cardinalidad que el intervalo $[0,1]$ y, por lo tanto, también la cardinalidad de $\mathbb{R}$. Dicha cardinalidad se denota mediante el símbolo $2^{\aleph_0}$.

Entonces $2^{\aleph_0}$ es un cardinal incontable y por tanto es mayor o igual a $\aleph_1$. De ahí surge para Cantor la conjetura de que $2^{\aleph_0}$ es exactamente $\aleph_1$. Esta conjetura es conocida como la Hipótesis del Continuo. El problema de determinar si la conjetura es cierta o no es el primer problema de la célebre lista de 23 problemas que el famoso matemático alemán David Hilbert presentó en 1900 en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos en París. Probar que $\mathbb{R}$ puede ser bien ordenado se presentó como parte de este problema y es que para medir el tamaño de un conjunto con la teoría desarrollada es necesario que el conjunto a medir tenga un buen orden. El hecho de que todos los conjuntos se puedan bien ordenar se conoce como el principio del buen orden.

Cuatro años después Ernest Zermelo probó el principio del buen orden dando pie a críticas por el uso del axioma de elección. En una segunda prueba, en 1908, Zermelo explica con detalle los principios que usa incluyendo el axioma de elección. En ese mismo año Zermelo publicó la primera axiomatización de la teoría de conjuntos. Ésta representa el primer intento de capturar la noción intuitiva de conjunto en una lista de principios básicos. Después con aportaciones de distintos matemáticos entre los que se encuentran Thoralf Skolem, Abraham H. Fraenkel y John von Neumann, se da origen a lo que ahora conocemos como la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección o ZFE.

En matemáticas, la verdad de un enunciado φ se establece por medio de una prueba que apela a principios básicos o axiomas. Similarmente la falsedad de un enunciado se establece por medio de una prueba de $\neg\varphi$ a través de la utilización de ciertos axiomas. El método axiomático tiene sin embargo ciertas limitaciones. En 1930 Kurt Gödel probó su famoso primer teorema de Incompletud, el cual establece que en cualquier sistema axiomático lo suficientemente rico como para desarrollar la aritmética básica existen enunciados indecidibles, es decir, enunciados tales que ni ellos ni sus negaciones pueden ser probados en ese sistema axiomático. En particular, hay enunciados del lenguaje formal de la teoría de conjuntos que no pueden ser probados ni refutados con los axiomas de ZFC[1]. A estos resultados se les conoce como independientes de ZFE.

Uno de los resultados más impresionantes es que la hipótesis del continuo (HC) es indecidible. Este resultado fue obtenido en dos partes y por dos personajes distintos. El primero fue el mismo Gödel quien en 1938 encontró un modelo minimal de ZFE, donde HC es verdadera. Dicho modelo es conocido como el universo construible. Con el universo construible se establece que no hay forma de poder probar la negación de la hipótesis del continuo, dicho de otro modo, la hipótesis del continuo es consistente con ZFE. Por otra parte 25 años después, en 1963, Paul Cohen probó que la negación de la hipótesis del continuo también era consistente con ZFE usando una técnica revolucionaria llamada forcing, resultado por el cual obtuvo la medalla Fields en 1966. Con esto se establece que tanto la hipótesis del continuo como su negación pueden convivir con ZFE de buena manera, por lo cual es un enunciado indecidible.

Después de que Cohen estableciera su método muchos matemáticos comenzaron no sólo a usarlo sino a desarollarlo logrando generalizarlo a tal grado que ahora la técnica de forcing impregna a toda la teoría de los conjuntos, haciendo de ésta un área de las matemáticas que continúa siendo de gran interés. De gran influencia resulta el desarrollo de la teoría del Proper Forcing introducida por Saharon Shelah. El gran número de resultados obtenidos por medio de la técnica de forcing evidencia que los axiomas de ZFE son insuficientes para responder preguntas fundamentales como el problema del continuo. Si bien no sabemos qué lugar ocupa $2^{\aleph_0}$ con respecto al orden de los cardinales, a $2^{\aleph_0}$ le corresponde un $\aleph$, el saber cuál es el problema del continuo.

Otro problema acerca del continuo es la hipótesis de Souslin (SH). Cantor había probado que cualquier conjunto linealmente ordenado, denso, completo, separable y sin extremos es isomorfo a la recta real con respecto al orden. En 1920 Souslin conjeturó que si en lugar de la propiedad de separabilidad uno asume la propiedad más débil conocida como la condición de la cadena contable, la cual establece que cualquier colección de intervalos abiertos disjuntos debe ser a lo más contable, debe seguir siendo isomorfo a $\mathbb{R}$. Solovay y Tanenbaum utilizaron una técnica llamada forcing iterado para demostrar la consistencia de una generalización del Teorema de la Categoría de Baire. Esta generalización llamada Axioma de Martin implica a su vez la hipótesis de Souslin.

La importancia de la hipótesis de Souslin para la teoría de conjuntos es que dio origen al descubrimiento de una nueva clase de axiomas conocidos como axiomas de forcing. Los axiomas de Forcing engloban muchos de los resultados de consistencia que se pueden obtener a través del método de forcing. En los últimos años una gran cantidad de resultados que van desde la aritmética cardinal hasta la topología general han sido obtenidos por medio de los axiomas de Forcing. Sin embargo, muchos de estos resultados pueden ser probados interpolando ciertos principios que juegan el papel de cajas negras, los cuales comparten dos características importantes: una es que son consecuencia de los axiomas de forcing y otra que implican los resultados deseados. Una ventaja de esto es que dichas cajas negras, para ser entendidas y usadas, no necesitan un conocimiento del método de forcing y sólo requiere un modesto conocimiento de la teoría de conjuntos. Es por esto que matemáticos no expertos en teoría de conjuntos se han interesado en este tipo de hipótesis.

[1] Por supuesto que en ZFE se puede desarrollar la aritmética

En la lista de estas cajas negras se encuentra el mapping reflection principle (MRP). Este principio fue introducido por Justin Tatch Moore como una consecuencia del Proper Forcing Axiom (PFA). Por medio del MRP muchos problemas han sido resueltos. Entre ellos el resultado central de este trabajo que es la prueba por medio del MRP de que el PFA decide el cardinal del continuo.

Para la lectura de este trabajo se requiere que el lector tenga conocimientos básicos en Teoría de Conjuntos y Lógica Matemática. En lo que respecta a la Teoría de Conjuntos, daremos por hecho que el lector conoce el desarrollo completo de la aritmética cardinal. En cuanto a Lógica Matemática, el manejo de conceptos como modelo, consistencia relativa e independencia es necesario.

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos. En el capítulo 1 se desarrollan brevemente las herramientas y conceptos a utilizar durante el resto del trabajo. Se introduce el Axioma de Martin y se da una prueba del Teorema de Martin-Solovay que dice que el axioma de Martin implica que si κ es un cardinal infinito menor que el continuo, entonces el conjunto potencia de κ tiene el mismo tamaño que el conjunto potencia de los naturales. Se desarrolla breve pero concisamente el método de forcing y termina con una sección dedicada a las subestructuras elementales en donde se prueban dos teoremas de especial relevancia: el Teorema de la Cadena de Tarski y el Teorema de Löwenheim-Skolem.

El segundo capítulo está dedicado a introducir el concepto de estacionaridad tanto en ordinales como en conjuntos en general. Se prueba que se puede dar una partición de ω_1 en ω_1 conjuntos estacionarios distintos. Se desarrolla una prueba del Teorema de Kueker, el cual da una útil caracterización de los conjuntos cerrados y no acotados.

En el tercer capítulo se desarrolla el concepto de Proper Forcing. Se dan algunas equivalencias en términos de $(N, \mathbb{P})$-genericidad así como en términos de juegos. Se prueba que todos los órdenes parciales que cumplen la condición de la cadena contable y los que son contablemente cerrados son proper. Se introduce el concepto de orden parcial totalmente proper y se da una instancia de uniformización en estos términos. También se prueba el resultado importante de que los órdenes parciales proper preservan a ω_1, finalizando con un ejemplo de un orden parcial que preserva a ω_1 pero que no es proper. Se introduce el Proper Forcing Axiom (PFA).

En el cuarto capítulo se desarrollan los conceptos de M-estacionaridad y se define la topología de Ellentuck para el conjunto $[X]^\omega$. Se introduce el Mapping Reflection Principle (MRP) y se prueba que éste es consecuencia del Proper Forcing Axiom. Se establece un principio conocido como ν_{AC}. Se prueba que este es consecuencia del MRP y tambíen que ν_{AC} implica que $2^{\omega_1} = \omega_2$. Luego, gracias a que el $MA(\omega_1)$ implica que $2^{\omega_1} = \omega_2$ ya que el Proper Forcing Axiom es una generalización de $MA(\omega_1)$, nos da una prueba completa de que PFA implica que $2^\omega = \omega_2$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se desarrollan brevemente los conceptos que constituyen el lenguaje para entender los resultados que se expondrán en este trabajo. Introducimos importantes nociones de la teoría de órdenes parciales para presentar el Axioma de Martin, así como algunos resultados relacionados. Exponemos los resultados fundamentales sobre conjuntos que fungen como modelos de una parte considerable de los axiomas de ZFE. Además, se da un bosquejo del método de forcing que sirve para generar pruebas de consistencia relativa de ciertas proposiciones en la teoría de conjuntos. Por último, se prueban dos resultados necesarios de Teoría de Modelos que involucran a las estructuras elementales.

1.1. Axioma de Martin

El Axioma de Martin (MA) puede ser definido desde un punto de vista topológico como la aserción de que ningún espacio compacto Hausdorff con la condición de la cadena contable[1] es la unión de menos que $2^{\aleph_0}$ conjuntos cerrados densos en ninguna parte. Pero en este trabajo utilizaremos una versión diferente, en términos de órdenes parciales.

Definición 1.1. Un **orden parcial** es un par $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ tal que $\mathbb{P} \neq \emptyset$ y $\leq$ es una relación sobre $\mathbb{P}$ la cual es transitiva, antisimétrica y reflexiva. En este contexto $p \leq q$ se lee "p extiende a q". Los elementos de $\mathbb{P}$ son llamados condiciones.

Un **orden total** es un orden parcial $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ en el que para cualesquiera dos elementos x y y de $\mathbb{P}$ se cumple que $x \leq y$ o $y \leq x$.

Definición 1.2. Sea $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ un orden parcial.

- Una **cadena en** $\mathbb{P}$ es un subconjunto C de $\mathbb{P}$ totalmente ordenado por la relación $\leq$.
- Decimos que dos elementos p y q son **compatibles** si y sólo si existe una condición r que extiende a p y a q.
- Decimos que dos elementos p y q son **incompatibles** si p y q no son compatibles. En tal caso escribimos $p \perp q$.

[1] Un espacio topológico tiene la condición de la cadena contable si no existe una familia incontable de conjuntos abiertos no vacíos disjuntos dos a dos.

- Una **anticadena en** $\mathbb{P}$ es un subconjunto A de $\mathbb{P}$ tal que cualesquiera dos elementos distintos de A son incompatibles.
- Una **anticadena maximal en** $\mathbb{P}$ es una anticadena A de $\mathbb{P}$ tal que para cualquier elemento p de $\mathbb{P}$ existe un elemento q en A tal que p y q son compatibles.
- Un orden parcial $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ tiene la **condición de la cadena contable** si y sólo si toda anticadena en $\mathbb{P}$ es a lo más numerable.

Definición 1.3. Sea $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ un orden parcial.

- Un subconjunto D de $\mathbb{P}$ es **denso en** $\mathbb{P}$ si y sólo si para todo elemento p en el orden parcial existe un elemento q en D tal que q extiende a p.
- Un subconjunto D de $\mathbb{P}$ es **predenso en** $\mathbb{P}$ si y sólo si para todo elemento p en el orden parcial existe un elemento q en D tal que q es compatible con p.
- Si p es un elemento de $\mathbb{P}$, decimos que un subconjunto D de $\mathbb{P}$ es **predenso bajo** p si y sólo si para todo q elemento de $\mathbb{P}$ tal que $q \leq p$ existe r elemento de D tal que q es compatible con r.

Se sigue de la definición que los conjuntos densos son predensos y predensos bajo cualquier elemento del orden parcial.

Ejemplo 1.4. *1. Sea $\mathbb{P} = \{f : n \to 2 \mid n \in \omega\}$; $f \leq g$ si y sólo si $f \supseteq g$.*

- *Sea $h : \omega \to 2$ la función constante 1. Definimos el conjunto $\mathcal{A}$ de la siguiente manera: $\mathcal{A} = \{h \restriction n \cup \{\langle n, 0\rangle\} : n \in \omega\}$.*

  $\mathcal{A}$ es una anticadena de $\mathbb{P}$, ya que si tomamos cualesquiera dos elementos distintos de $\mathcal{A}$, dichos elementos difieren en la evaluación de algún elemento de su dominio.
- *Sea $n \in \omega$. Definimos $D_n = \{f \in \mathbb{P} : n \in dom(f)\}$. D_n es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$. Ya que, considerando un elemento f del orden parcial, si n no pertenece a su dominio, entonces $f \cup \{\langle n, 0\rangle\}$ extiende a f y a su vez es elemento de D_n.*
- *Los conjuntos D_n también son predensos de $\mathbb{P}$.*

2. Sea $\mathbb{P} = \{f : f : A \to 2, A \subseteq \omega, \mid A \mid < \omega\}$; $f \leq g$ si y sólo si $f \supseteq g$.

- *Definimos el siguiente conjunto $\mathcal{H} = \{\{\langle 0, n\rangle\} : n \in \omega\}$. Se puede verificar que $\mathcal{H}$ es un subconjunto predenso de $\mathbb{P}$. Además, a diferencia de los ejemplos de conjuntos predensos anteriores, $\mathcal{H}$ no es un conjunto denso. Considerando $f = \{\langle 1, 1\rangle\}$, ningún elemento de $\mathcal{H}$ extiende a f porque ningún elemento de $\mathcal{H}$ tiene a 1 en su dominio.*

Definición 1.5. Sea $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ un orden parcial. $G \subseteq \mathbb{P}$ es un **filtro** en $\mathbb{P}$ si y sólo si:

1. $\forall p, q \in G \exists r \in G (r \leq$p y $r \leq q)$ y
2. $\forall p \in G \forall q \in \mathbb{P} (q \leq p \to q \in G)$.

Definición 1.6. Sea G un filtro sobre $\mathbb{P}$ y $\mathcal{D}$ una familia de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$. Decimos que G es **$\mathcal{D}$-genérico** si G intersecta no vacuamente a todos los elementos de $\mathcal{D}$.

Introducimos ahora el Axioma de Martin, utilizando los conceptos anteriores.

Definición 1.7. 1. Dado un cardinal infinito κ, $MA(\kappa)$ denota la siguiente proposición: Si $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ es un orden parcial con la condición de la cadena contable, y $\mathscr{D}$ es una familia de a lo más κ subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, entonces $\mathbb{P}$ contiene un filtro G que resulta $\mathscr{D}$-genérico .

2. El Axioma de Martin, es la afirmación de que $MA(\kappa)$ es verdadero para todo κ menor que $2^{\aleph_0}$.

El axioma de Martin resulta ser consistente con la negación de la hipótesis del continuo (HC). Solovay y Tennenbaum demostraron en 1971 que si ZFE es consistente (lo cual se denota por Cons(ZFE)) entonces también lo es $ZFE + MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$. Es importante señalar que ZFE prueba $MA(\aleph_0)$, pero también prueba la negación de $MA(2^{\aleph_0})$.

Teorema 1.8. *La afirmación $MA(\aleph_0)$ es verdadera. Más aún, para todo $p \in \mathbb{P}$ y para cualquier familia $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$ de densos existe un filtro G tal que es $\mathcal{D}$-genérico y $p \in G$.*

Demostración. Sea $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ un orden parcial no vacío y sea $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$ una familia numerable de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$. Mostraremos que existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico sobre $\mathbb{P}$.

Sea $p \in \mathbb{P}$. Definimos por recursión una sucesión de la siguiente manera:
p_0 es p, y p_{n+1} es un elemento q de D_n que extienda a p_n (q existe, pues D_n es denso).

Así, $\{p_n\}_{n \in \omega}$ es una sucesión decreciente con respecto al orden $\leq$. Sea G el filtro generado por $\{p_n\}_{n \in \omega}$, es decir, $G = \{q \in \mathbb{P} : \exists n(p_n \leq q)\}$. Es inmediato verificar que G es filtro y por construcción G intersecta no vacuamente a todos los elementos de $\mathcal{D}$. Por tanto, G es $\mathcal{D}$-genérico sobre $\mathbb{P}$. $\square$

Teorema 1.9. *La afirmación $MA(2^{\aleph_0})$ es falsa.*

Demostración. Definiremos un orden parcial que cumpla la condición de la cadena contable y una colección de $2^{\aleph_0}$ densos en él tales que ningún filtro pueda intersectarlos a todos[2].

Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de las funciones parciales finitas de ω en 2, ordenadas por la relación de inclusión invertida. Es decir,

$$\mathbb{P} = \langle \{p : p \subseteq \omega \times 2,\ p \text{ es una función}, \mid p \mid < \omega\}, \supseteq \rangle.$$

Es claro que $\mathbb{P}$ cumple la condición de la cadena contable, pues $|\mathbb{P}| = \aleph_0$. Observemos que si p y q son elementos de $\mathbb{P}$, entonces p y q son compatibles en $\mathbb{P}$ si y sólo si son compatibles como funciones[3]. Así, si G es un filtro en $\mathbb{P}$, entonces $\bigcup G$ es una función cuyo dominio es un subconjunto de ω.

Definimos ahora para toda $n \in \omega$ los conjuntos $D_n = \{p \in \mathbb{P} : n \in dom(p)\}$. Veamos que cada D_n es denso en $\mathbb{P}$. Dado $q \in \mathbb{P}$, si $n \in dom(q)$, entonces $q \in D_n$ y $q \leq q$; si $n \notin dom(q)$, entonces $q \cup \{\langle n, 0\rangle\} \in D_n$ y $q \cup \{\langle n, 0\rangle\} \supseteq q$.
Definimos $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$. Ahora, para cada $h : \omega \to 2$, definimos el siguiente conjunto:
$E_h = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists n \in dom(p)(p(n) \neq h(n))\}$.
Definimos $\mathcal{E} = \{E_h \mid h : \omega \to 2\}\}$

[2]En este trabajo diremos que un conjunto A intersecta a un conjunto B si y sólo si $A \cap B \neq \emptyset$.

[3]Decimos que dos funciones f y g son compatibles si y sólo si para todo elemento x en la intersección de sus dominios, $f(x) = g(x)$.

Supongamos que G es un filtro $\mathcal{D}\cup\mathcal{E}$-genérico. Como G es un sistema compatible de funciones, $\bigcup G$ es función y $dom(\bigcup G) = \bigcup_{f\in G} dom(f) = \omega$, pues G intersecta a D_n, para toda $n \in \omega$. Además, para cualquier $h : \omega \to 2$ tenemos que $\bigcup G \neq h$, pues $G \cap E_h \neq \emptyset$. Esto es una contradicción. $\square$

Obsérvese que en la demostración de $MA(\aleph_0)$ no se usa la hipótesis de que el orden parcial cumpla la condición de la cadena contable. Esta hipótesis, aunque no es necesaria en el caso numerable, sí es importante para cualquier cardinal mayor que numerable y menor que el cardinal del continuo, es decir, para cada cardinal no numerable κ, con $\kappa < 2^{\aleph_0}$ existe un conjunto parcialmente ordenado que no cumple la condición de la cadena contable y que tiene una familia $\mathcal{D}$ de κ densos tal que ningún filtro es $\mathcal{D}$-genérico.

Ejemplo 1.10. *Sea κ un cardinal tal que $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$. Definimos el siguiente orden parcial:*

$\mathbb{P} = \{f : f$ *es una función finita,* $dom(f) \subseteq \omega$ *y* $ran(f) \subseteq \kappa\}$*;* $f \leq g$ *si y sólo si* $f \supseteq g$.

Notamos que $\mathbb{P}$ no tiene la condición de la cadena contable, pues $\{\{\langle 0, \alpha\rangle\} : \alpha \in \kappa\}$ es una anticadena no numerable.

Definiendo para cada número natural un conjunto $D_n = \{p \in \mathbb{P} : n \in dom(p)\}$. Se puede verificar que cada D_n es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$.

También, para cada α en κ, definimos $F_\alpha = \{f \in \mathbb{P} : \alpha \in rang(f)\}$. Veamos que cada F_α es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$. Sea g un elemento de $\mathbb{P}$. Si α es elemento del rango de g, entonces g es elemento de F_α. Ahora, si α no es elemento del rango de g, sea m en $\omega\setminus dom(g)$. Si $f = g\cup\{\langle n, \alpha\rangle\}$, entonces f es elemento de F_α y $f \leq g$.

Sea $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{F_\alpha : \alpha \in \kappa\}$. Supongamos que G es un filtro que intersecta a todos los densos de $\mathcal{D}$. Se puede verificar que $\bigcup G$ es una función de ω en κ. Finalmente, para cada α en κ, α es elemento del rango de $\bigcup G$, pues para cada α en κ existe f en $G \cap F_\alpha$.

Por lo tanto, $\bigcup G$ es suprayectiva. Esto es una contradicción.

1.2. Una aplicación del Axioma de Martin

Ahora introduciremos el forcing casi disjunto el cual es usado para codificar genéricamente conjuntos incontables.

Definición 1.11. El conjunto $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una **familia de conjuntos casi disjuntos** si y sólo si para cualesquiera α y β distintos, $A_\alpha \cap A_\beta$ es finito.

Lema 1.12. *Existe una familia casi disjunta de $2^{\aleph_0}$ subconjuntos de ω.*

Demostración. Sea S el conjunto de todas las sucesiones finitas de ceros y unos, es decir, sea $S = \bigcup_{n\in\omega}\{0, 1\}^n$. Para cada $f : \omega \to \{0, 1\}$, sea $A_f = \{s \in S : s \subseteq f\}$. Claramente, $A_f \cap A_g$ es finito si f es distinta de g; por tanto $\{A_f : f \in \{0, 1\}^\omega\}$ es una familia de $2^{\aleph_0}$ subconjuntos casi disjuntos del conjunto numerable S. $\square$

Observación 1.13. Podemos suponer que todos los elementos de la familia casi disjunta de tamaño $2^{\aleph_0}$ cuya existencia está dada por el lema anterior son infinitos, puesto que sólo existen $\aleph_0$ subconjuntos finitos de ω.

Teorema 1.14. (Martin-Solovay) *La afirmación $MA(\lambda)$ implica que $2^\kappa = 2^{\aleph_0}$ para todos los cardinales infinitos $\kappa \leq \lambda$.*

Demostración. Supongamos que la afirmación $MA(\lambda)$ es verdadera. Por el Teorema 1.9, λ tiene que ser menor que $2^{\aleph_0}$. Sea κ un cardinal infinito menor o igual que λ y, por el lema anterior, sea $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de subconjuntos infinitos de ω casi disjuntos.

Sea X un subconjunto de κ. Encontraremos un único subconjunto A de ω tal que para todo α menor que κ, α es un elemento de X si y sólo si $A \cap A_\alpha$ es infinito. En otras palabras, el conjunto $X = \{\alpha \in \kappa : A \cap A_\alpha \text{ es infinito}\}$ y de este modo X es codificado por el conjunto A. Por lo tanto, existe una función de $\wp(\omega)$ sobre $\wp(\kappa)$, y así, $2^\kappa \leq 2^{\aleph_0}$.

Sea $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ el siguiente orden parcial:
$\mathbb{P} = \{p : N \to \{0,1\} : N \subseteq \omega, \forall \alpha \in X \mid dom(p) \cap A_\alpha \mid < \omega, \mid \{n : p(n) = 1\} \mid < \omega\}$. Dados p y q en $\mathbb{P}$, $p \leq q$ si y sólo si p extiende a q como función.

Sean p y q elementos incompatibles de $\mathbb{P}$, entonces $\{n : p(n) = 1\} \neq \{n : q(n) = 1\}$. Ahora, como la cantidad de subconjuntos finitos de ω es numerable, el tamaño de una anticadena es a lo más numerable. Por lo tanto, $\mathbb{P}$ cumple la condición de la cadena contable.

Ahora definimos para cada $\beta \in \kappa \setminus X$ el siguiente conjunto:
$D_\beta = \{p \in \mathbb{P} : A_\beta \subseteq dom(p)\}$.

Probaremos que cualquier $q \in \mathbb{P}$ puede ser extendido a un $p \in D_\beta$, para toda $\beta \in \kappa \setminus X$. Dado $q \in \mathbb{P}$, definimos $p = q \cup \{\langle n, 0\rangle \mid n \in A_\beta \setminus dom(q)\}$. Claramente p es función, $dom(p) \subseteq \omega$ y $A_\beta \subseteq dom(p)$. Sea $\alpha \in X$. Dado que $\beta \in \kappa \setminus X$, $\alpha \neq \beta$. Como $dom(p) \cap A_\alpha = (A_\beta \cup dom(q)) \cap A_\alpha = (A_\beta \cap A_\alpha) \cup (dom(q) \cap A_\alpha)$, y $\mid A_\beta \cap A_\alpha \mid < \omega$, por ser casi disjuntos, y $\mid dom(q) \cap A_\alpha \mid < \omega$, pues $q \in \mathbb{P}$, tenemos que $\mid dom(p) \cap A_\alpha \mid < \omega$. Además, claramente $\{n : p(n) = 1\} = \{n : q(n) = 1\}$, por lo que $p \in \mathbb{P}$. Así, D_β es denso en $\mathbb{P}$ para toda $\beta \in \kappa \setminus X$.

Ahora, para cada $\alpha \in X$ y cada $j \in \omega$ definimos los siguientes conjuntos:
$E_{\alpha,j} = \{p \in \mathbb{P} :\mid \{n \in A_\alpha : p(n) = 1\} \mid > j\}$. Sean $q \in \mathbb{P}$, $j \in \omega$ y $\alpha \in X$. Como q es elemento de $\mathbb{P}$, $dom(q) \cap A_\alpha$ es finito, esto asegura la existencia de una colección de $j+1$ elementos de ω, llámese $\{a_i\}_{i \in j+1}$, tal que $\{a_i\}_{i \in j+1} \cap dom(q) = \emptyset$. Definimos $p = q \cup \{\langle n, 1\rangle : n \in \{a_i\}_{i \in j+1}\}$. De esta manera, p es una extensión de q y p es elemento de $E_{\alpha,j}$. Por tanto, $E_{\alpha,j}$ es denso en $\mathbb{P}$.

Ahora sea $\mathcal{D} = \{D_\beta : \beta \in \kappa \setminus X\} \cup \{E_{\alpha,j} : \alpha \in X, j \in \omega\}$. Tenemos que $\mathcal{D}$ es una colección de densos de tamaño menor o igual que κ. Utilizando $MA(\lambda)$, tenemos que existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico G sobre $\mathbb{P}$. Notamos que $\bigcup G$ es una función sobre un subconjunto de ω. Denotemos $\bigcup G$ como f. Definimos $A = \{n : f(n) = 1\} = \{n : p(n) = 1 \text{ para algún } p \in G\}$. Si $\alpha \in X$, entonces $A \cap A_\alpha$ es infinito ya que para cada j existe algún $p \in G \cap E_{\alpha,j}$. Ahora si $\beta \in \kappa \setminus X$, entonces $A \cap A_\beta$ es finito porque para algún $p \in G$, $A_\beta \subseteq dom(p)$ y $\{n : p(n) = 1\}$ es finito. $\square$

1.3. Forcing

Ahora hablaremos un poco del método de Forcing. El forcing es un método expansionista, se parte de la suposición de la existencia de un modelo de ZFE al que se le agregan nuevos conjuntos. Este tipo de procedimiento no es particularmente nuevo si se tiene en cuenta lo que generalmente se hace para cerrar algebráicamente un campo. En este caso, si no se tiene la existencia de una raíz de un polinomio con coeficientes en dicho campo, se puede arreglar este problema agregando esta raíz y cerrando bajo las operaciones de dicho campo. El método de forcing utiliza la idea de agregar nuevos objetos a través de un orden, además de la utilización de un objeto ideal G que filtra y selecciona los nuevos elementos que pertenecerán al nuevo modelo extendido.

Comenzamos con un conjunto numerable y transitivo M tal que $\langle M, \in \rangle$ es un modelo de ZFE[4]. M es llamado el modelo base. Consideramos también un orden parcial $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ perteneciente a M y agregamos a M un subconjunto G de $\mathbb{P}$ ($G \notin M$). La extensión genérica $M[G]$ es definida como el conjunto de todos aquellos conjuntos que se pueden construir a partir de elementos de M y del nuevo conjunto G. Si G es elegido de forma adecuada, entonces $\langle M[G], \in \rangle$ también es modelo de ZFE. Para ello se requiere que G sea $(M, \mathbb{P})$-genérico.

Definición 1.15. Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial. El conjunto G es $(M, \mathbb{P})$**-genérico** si y sólo si G es filtro sobre $\mathbb{P}$ y G intersecta no vacuamente a todos los subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ que sean elementos de M.

Lema 1.16. *Sea E un subconjunto no vacío de $\mathbb{P}$. Si G es $(M, \mathbb{P})$-genérico, entonces $G \cap E \neq \emptyset$ ó $\exists g \in G \forall r \in E(g \perp r)$.*

Demostración. Sea $D = \{p \in \mathbb{P} : \exists r \in E(p \leq r)\} \cup \{p \in \mathbb{P} : \forall r \in E(p \perp r)\}$. Veamos que D es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$. Sea $s \in \mathbb{P}$ y supongamos que $s \notin D$, esto implica que existe un elemento r en E tal que r es compatible con s. Sea d una extensión común de r y s. De esta forma, d es un elemento de D ya que es extensión de un elemento de E y también es extensión de s, con lo que concluimos que D es denso. Como G es $(M, \mathbb{P})$-genérico, podemos tomar un elemento g en $G \cap D$, con lo que existe r elemento de E tal que g es extensión de r, lo cual implicaría que g es un elemento de $G \cap E$ o bien, $\forall r \in E(g \perp r)$. □

Definición 1.17. Un **orden parcial con máximo** es una tripleta $\langle \mathbb{P}, \leq, 1 \rangle$ tal que $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ es un orden parcial y 1 es el elemento máximo de $\mathbb{P}$ con respecto al orden $\leq$.

A partir de este momento nos restringiremos a órdenes parciales $\langle \mathbb{P}, \leq, 1_{\mathbb{P}} \rangle$ con máximo ($1_{\mathbb{P}}$ es el máximo). Abusando de la notación, $\mathbb{P}$ denotará a toda la estructura $\langle \mathbb{P}, \leq, 1_{\mathbb{P}} \rangle$.

Proposición 1.18. *Si A es una anticadena maximal en un orden parcial $\mathbb{P}$ y D es un conjunto denso en $\mathbb{P}$, entonces:*

1. *el conjunto $\mathcal{D} = \{p \in \mathbb{P} : p \leq q$ para alguna $q \in A\}$ es denso en $\mathbb{P}$; y*
2. *existe una anticadena maximal $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \subseteq D$.*

Demostración.

1. Sea $x \in \mathbb{P}$. Sabemos que x es compatible con a_0 para alguna $a_0 \in A$ (porque A es maximal). Esto es, hay un r en $\mathbb{P}$ tal que $r \leq x$ y $r \leq a_0$. Como $r \leq a_0$ y $a_0 \in A$, tenemos que $r \in \mathcal{D}$. Entonces hay un $r \in \mathcal{D}$ tal que $r \leq x$. Por tanto, $\mathcal{D}$ es denso en $\mathbb{P}$.
2. Consideremos el conjunto $\mathcal{C}$ de todas las anticadenas de $\mathbb{P}$ que están contenidas en el denso D. La contención $\subseteq$ es un orden parcial para $\mathcal{C}$. Observemos que la unión de una $\subseteq$-cadena de anticadenas de $\mathbb{P}$ es una anticadena de $\mathbb{P}$. Además, $\mathcal{C}$ es no vacío, ya que si p es un elemento de D, $\{p\}$ es una anticadena. Aplicando el Lema de Zorn, tenemos que existe una anticadena $\subseteq$-maximal $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \subseteq D$. Ahora mostraremos que $\mathcal{A}$ también es maximal en $\mathbb{P}$. Sea p en $\mathbb{P}$. Como D es denso, existe q en D tal que q extiende a p. Entonces existe un a en $\mathcal{A}$ tal que a y q son compatibles (pues $\mathcal{A}$ es maximal con respecto a la contención en D). Por tanto, a y p son compatibles ya que $q \leq p$.

□

[4]En realidad, M no es un modelo de todo ZFE sino un modelo de cualquier segmento finito suficientemente grande de axiomas de ZFE. Para una discusión más amplia de este tema véase [3].

Corolario 1.19. *Sean $\mathbb{P}$ un orden parcial que pertenece a M y G un filtro sobre $\mathbb{P}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *G es $(M, \mathbb{P})$-genérico.*

2. *G intersecta a todos los subconjuntos predensos bajo p de $\mathbb{P}$ que están en M, si p es un elemento de G.*

3. *G intersecta a todos los subconjuntos predensos de $\mathbb{P}$ que están en M.*

4. *G intersecta a todas las anticadenas maximales de $\mathbb{P}$ que están en M.*

Demostración. 1 implica 2. Sea p un elemento de G y sea E un subconjunto predenso bajo p de $\mathbb{P}$. Supongamos que $G \cap E = \emptyset$, luego por el lema 1.16 tenemos que existe g elemento de G tal que $g \perp r$ para todo $r \in E$. Como tanto p como g son elementos de G, existe una extensión común q en G. Como E es denso bajo p, existe s elemento de E compatible con q. Como q es extensión de g y q es compatible con s, g es compatible con s, lo cual contradice el hecho de que g es incompatible con todos los elementos de E. Por tanto, $G \cap E \neq \emptyset$.

2 implica 3. Notamos que cualquier conjunto predenso, es predenso bajo cualquier elemento de G.

3 implica 4. Las anticadenas maximales son subconjuntos predensos.

4 implica 1. Se sigue de la proposición anterior. □

El siguiente lema nos asegura la existencia de filtros $(M, \mathbb{P})$-genéricos para conjuntos numerables M (esta existencia está asegurada en el universo V, pero no así en M).

Lema 1.20. *Si M es numerable y $p \in \mathbb{P}$, entonces existe un filtro G que es $(M, \mathbb{P})$-genérico tal que $p \in G$.*

Demostración. Como M es numerable, podemos enumerar a todos los conjuntos densos que viven en M. Sea $\{D_n : n \in \omega\}$ una enumeración para dichos densos. Usando la técnica de la prueba del Teorema 1.8, se sigue el resultado deseado. □

Definición 1.21. Decimos que un orden parcial $\mathbb{P}$ es **frondoso** si y sólo si para todo p elemento de $\mathbb{P}$ existen q y r en $\mathbb{P}$ tales que $q \leq p$ y $r \leq p$ y $q \perp r$.

El caso en que el filtro G esté en M no es muy interesante, pues el modelo extendido terminará siendo simplemente M, no habremos agregado nada nuevo. El siguiente lema da una condición para que G no sea elemento de M.

Lema 1.22. *Si M es un modelo de $ZF - P$[5], $\mathbb{P} \in M$ es un orden parcial frondoso y G es $(M, \mathbb{P})$-genérico, entonces $G \notin M$.*

Demostración. Supongamos que $G \in M$. Como $\mathbb{P} \in M$, entonces $\mathbb{P} \setminus G \in M$ (pues M es modelo del esquema de comprensión). Sea $\mathcal{D} = \mathbb{P} \setminus G$. Afirmamos que $\mathcal{D}$ es denso en $\mathbb{P}$. Sea $p \in \mathbb{P}$. Como $\mathbb{P}$ es frondoso existen q y r bajo p tales que son incompatibles. Por tanto, q y r no pueden ser ambos elementos de G. Sin perdida de la generalidad, supongamos que q no es elemento de G. Por tanto, q es un elemento de $\mathcal{D}$ que extiende a p y así $\mathcal{D}$ es denso en $\mathbb{P}$. Concluimos que $G \cap (\mathbb{P} \setminus G) \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. □

[5]Con $ZF - P$ nos referimos a ZF sin el axioma de potencia

Vagamente hablando, $M[G]$ será el conjunto de todos los conjuntos que pueden ser construidos desde G aplicando procesos conjuntistas definibles en M. Cada elemento de $M[G]$ tendrá un nombre en M, el cual nos dirá cómo ha sido construido desde G. Usaremos las letras τ, σ, π para referirnos a nombres.

Definición 1.23. τ es un **$\mathbb{P}$-nombre** si y sólo si τ es un conjunto de pares ordenados cuya primera coordenada es un $\mathbb{P}$-nombre y cuya segunda coordenada es un elemento de $\mathbb{P}$.

La definición anterior puede ser formalizada como una definición recursiva (ya que definimos un $\mathbb{P}$-nombre en términos de $\mathbb{P}$-nombres). La colección de los $\mathbb{P}$-nombres será una clase propia, si $\mathbb{P} \neq \emptyset$.

Definición 1.24.

- $V^{\mathbb{P}}$ es definido como la clase de los $\mathbb{P}$-nombres.
- Si M es un modelo de ZFE y $\mathbb{P} \in M$, $M^{\mathbb{P}}$ es definido como la relativización de $V^{\mathbb{P}}$ a M. Esto es, $M^{\mathbb{P}} = V^{\mathbb{P}} \cap M$.

Ahora daremos una interpretación de estos nombres utilizando filtros.

Definición 1.25. Si G es un filtro sobre $\mathbb{P}$ y τ es un $\mathbb{P}$-nombre, entonces $val(\tau, G)$ es definido recursivamente como el conjunto $\{val(\sigma, G) : \exists p \in G(\langle \sigma, p\rangle \in \tau)\}$. También se escribe τ_G en lugar de $val(\tau, G)$.

Esto nos da una forma de valuar o interpretar a los $\mathbb{P}$-nombres. Usando esta interpretación, podemos definir ya a la extensión genérica de M.

Definición 1.26. Si M es un modelo de ZFE, $\mathbb{P} \in M$ y G es un filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico tal que $G \subseteq \mathbb{P}$, entonces la **extensión genérica de** M (denotada por $M[G]$) es definida como el conjunto $\{\tau_G : \tau \in M^{\mathbb{P}}\}$.

Ahora daremos nombres especiales para los elementos del modelo base y del objeto ideal G.

Definición 1.27. Dado un conjunto x, definimos el **$\mathbb{P}$-nombre canónico** de x (denotado por $\check{x}$) como el conjunto $\{(\check{y}, 1_{\mathbb{P}}) : y \in x\}$.

Definición 1.28. El $\mathbb{P}$-nombre $\dot{G}$ denota al conjunto $\{(\check{p}, p) : p \in \mathbb{P}\}$.

Proposición 1.29. *Sea G un filtro sobre $\mathbb{P}$ y x un conjunto que es elemento de M. Entonces:*

1. $\check{x}_G = x$, *y*

2. $\dot{G}_G = G$.

Demostración.

1. La demostración se hace por $\in$-inducción. Véase [3], página 190.
2. Tenemos que $\dot{G}_G = \{\check{p}_G : p \in G\} = \{p : p \in G\} = G$ (la segunda igualdad es verdadera por el inciso 1).

□

De acuerdo a nuestra definición los elementos de la extensión genérica tienen una codificación en el modelo base, y esta codificación está dada por medio de la compleja definición de los $\mathbb{P}$-nombres, los cuales son pares ordenados donde la primera coordenada es un $\mathbb{P}$-nombre y la segunda es un elemento del orden parcial. El $\mathbb{P}$-nombre juega el papel de un posible elemento de la extensión genérica y el elemento del orden parcial mide qué tan seguro es que esté en la extensión genérica. Así, cuando tomamos un nombre canónico, ese nombre es la mejor descripción del $\mathbb{P}$-nombre.

Finalmente si el elemento del orden parcial es un elemento de nuestro filtro $\mathbb{P}$-genérico, entonces el $\mathbb{P}$-nombre codifica a un elemento de la extensión genérica lo cual muestra el poder que tiene el filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico de "dar vida", efecto que tiene su precio ya que G en la extensión genérica ya no es filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico.

Teorema 1.30. *Si M es modelo de ZFE, $\mathbb{P} \in M$ y G es $(M, \mathbb{P})$-genérico, entonces:*

1. *$M[G]$ es modelo de ZFE,*
2. *$M \cup \{G\} \subseteq M[G]$, y*
3. *$OR \cap M = OR \cap M[G]$, es decir, M y $M[G]$ tienen los mismos ordinales.*

Demostración. Véase [3], páginas 190 y 191. □

Definición 1.31. Sean M un modelo de ZFE, $\mathbb{P}$ un orden parcial con $\mathbb{P} \in M$, $\tau_0, ..., \tau_{n-1}$ elementos de $M^{\mathbb{P}}$, $\varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ una fórmula con variables libres $x_0, ..., x_{n-1}$ y p un elemento de $\mathbb{P}$. Decimos que p fuerza a la fórmula φ instanciada con $\tau_0, ..., \tau_{n-1}$ si y sólo si para cualquier filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico G que tenga a p como elemento, se tiene que $M[G] \models \varphi[val(\tau_0, G), ..., val(\tau_{n-1}, G)]$

El teorema fundamental de forcing desarrollado por Paul Cohen permite razonar hechos acerca de $M[G]$ desde M.

Teorema 1.32. *Sean M un modelo transitivo y numerable de ZFE, $\mathbb{P}$ un orden parcial tal que $\mathbb{P} \in M$, $\varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ una fórmula con variables libres $x_0, ..., x_{n-1}$ y $\tau_1, ..., \tau_{n-1}$ elementos de $M^{\mathbb{P}}$. Existe una relación $\Vdash$, definible en M, que cumple lo siguiente.*

1. *Si en $M[G]$ es verdadero $\varphi(\tau_1[G], ..., \tau_n[G])$, entonces hay un elemento p de G tal que $p \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$.*
2. *Si $p \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ entonces en $M[G]$ es verdadero $\varphi(\tau_1[G], ..., \tau_n[G])$, para todo G tal que $p \in G$.*

Demostración. Véase [3], página 198. □

Observación 1.33. $1_{\mathbb{P}} \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ si y sólo si para cualquier extensión genérica $M[G]$ se tiene que $\varphi(\tau_1[G], ..., \tau_n[G])$ es verdadera en $M[G]$.

Demostración. Basta notar que $1_{\mathbb{P}}$ está en cualquier filtro. □

A partir del capítulo 3, para facilitar el entendimiento del uso de los $\mathbb{P}$-nombres, nos referiremos a un $\mathbb{P}$-nombre con símbolos más comunes distinguiéndolos con un punto sobre ellos.

Ejemplifiquemos un poco, supongamos que tenemos un modelo M numerable de ZFE y nuestro objetivo es construir en $M[G]$ un número real nuevo $F : \omega \to 2$ (con nuevo nos referimos a que F no está en M).

Un número real lo podemos ver como una función de ω en 2, entonces justo lograremos nuestro objetivo construyendo una nueva función de ω en 2 que no esté en M, y lo vamos a armar con piezas pequeñas: los pedazos finitos de la función.

Ejemplo 1.34. *$Fun_\omega(\omega, 2)$ son todas las funciones finitas que tienen como dominio un subconjunto de ω y como contradominio el conjunto $2 = \{0, 1\}$.*

Dados p y q, elementos de $Fun_\omega(\omega, 2)$, decimos que p extiende a q si y sólo si $q \subseteq p$. Es sencillo observar que si G es filtro del orden parcial $\langle Fun_\omega(\omega, 2), \supseteq\rangle$, entonces G es un conjunto de funciones compatibles dos a dos, con lo que $\bigcup G$, es también una función parcial (posiblemente infinita) de ω en 2. Más aún, si M es un modelo de ZFE, entonces para cada número natural n, se tiene que el conjunto $D_n = \{p \in \mathbb{P} : n \in dom(p)\}$ es denso en $\mathbb{P}$ y, además, es un elemento de M, pues es definible. Además para cada función $f : \omega \to 2$ que sea elemento de M definimos el conjunto $E_f = \{p \in \mathbb{P} : p \nsubseteq f\}$. Si p es un elemento de $\mathbb{P}$, sabemos que existe un natural m tal que $m \notin dom(p)$ pues los elementos de $\mathbb{P}$ son funciones finitas, así que $p \cup \{\langle m, 1 - f(m)\rangle\}$ es una extensión de p que es tanto elemento de $\mathbb{P}$ por ser una función finita con dominio contenido en ω y contradominio contenido en 2, como de E_f ya que difieren al menos en la valuación en el natural m. Por tanto, para cualquier función $f : \omega \to 2$ que es elemento de M, el conjunto E_f es conjunto denso en $\mathbb{P}$ que es elemento de M, ya que para su definición utilizamos sólo parametros que viven en M. Así, si G es $(M, \mathbb{P})$-genérico, entonces $\bigcup G$ es una función con dominio ω y, además, $\bigcup G \notin M$, ya que para cada función $f : \omega \to 2$ en M, G intersecta al conjunto E_f y, por tanto, difieren en al menos un elemento.

1.4. Subestructuras elementales

En ésta sección se presupone que el lector está familiarizado con los conceptos de lenguaje de primer orden y estructura, para una referencia véase [1]. Además utilizamos aquí la notación utilizada en dicho texto.

Definición 1.35. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ dos L-estructuras. Decimos que $\mathfrak{A}$ es **subestructura** de $\mathfrak{B}$ (equivalentemente $\mathfrak{B}$ es una extensión de $\mathfrak{A}$), y lo denotamos como $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, si y sólo si:

1. $A \subseteq B$, es decir, si el dominio (o universo) de $\mathfrak{A}$ está contenido en el de $\mathfrak{B}$;
2. para todo símbolo de relación n-ario R de L, $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^n$;
3. para todo símbolo de función m-ario f de L, $f^{\mathfrak{B}} \restriction A = f^{\mathfrak{A}}$ y
4. para todo símbolo de constante c de L, $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

Definición 1.36. Decimos que $\mathfrak{A}$ es una **subestructura elemental** de $\mathfrak{B}$, denotado como $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, si y sólo si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ y para toda fórmula $\varphi(\bar{v})$ de L y toda n-ada $\bar{a}$ de elementos de A, $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}]$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi[\bar{a}]$.

Se puede verificar que en la definición anterior podríamos sustituir $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ por $A \subseteq B$. Es decir, bastaría con pedir que el dominio de $\mathfrak{A}$ esté contenido en el dominio de $\mathfrak{B}$, pues la condición adicional con respecto a cualquier fórmula φ implica que se cumplan los incisos 2, 3 y 4 de la definición anterior.

Definición 1.37. Una **cadena** de L-estructuras es una sucesión $\{\mathfrak{A}_\alpha : \alpha < \beta\}$ tal que para todo $\alpha_1 < \alpha_2 < \beta$, $\mathfrak{A}_{\alpha_1} \subseteq \mathfrak{A}_{\alpha_2}$.
La unión de la cadena $\mathfrak{A} = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathfrak{A}_\alpha$, es la L-estructura definida como sigue:

1. $dom(\mathfrak{A}) = \bigcup_{\alpha<\beta} dom(\mathfrak{A}_\alpha)$;

2. $R^{\mathfrak{A}} = \bigcup_{\alpha<\beta} R^{\mathfrak{A}_\alpha}$ para todos los símbolos de relación R de L;
3. $f^{\mathfrak{A}} = \bigcup_{\alpha<\beta} f^{\mathfrak{A}_\alpha}$ para todos los símbolos de función f de L;
4. $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}_\alpha}$ para todo $\alpha < \beta$ y para cada constante de L.

A una cadena la llamamos **cadena elemental** si y sólo si para todo $\alpha_1 < \alpha_2 < \beta$, $\mathfrak{A}_{\alpha_1} \preccurlyeq \mathfrak{A}_{\alpha_2}$.

Teorema 1.38. *Sean $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ L-estructuras tales que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{C}$ y $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{C}$, entonces $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$.*

Demostración. Sea $\varphi(\overline{v})$ una fórmula de L y $\bar{a}$ una n-ada de elementos de A.
Si $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}]$, entonces $\mathfrak{C} \models \varphi[\bar{a}]$, ya que $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{C}$. Ahora, $\bar{a}$ está en $\mathfrak{B}$, ya que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Por lo tanto, $\mathfrak{B} \models \varphi[\bar{a}]$, ya que $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{C}$. Supongamos ahora que $\mathfrak{B} \models \varphi[\bar{a}]$. Como $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{C}$, tenemos que $\mathfrak{C} \models \varphi[\bar{a}]$. Finalmente, como $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$, concluimos que $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}]$. $\square$

Corolario 1.39. *Sea $\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ una sucesión de L-estructuras creciente respecto a la contención tal que $\mathfrak{A}_\alpha \preccurlyeq \mathfrak{B}$ para toda $\alpha < \beta$, entonces $\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ es una cadena elemental.*

Demostración. Basta con probar que si $\alpha < \gamma < \beta$, entonces $\mathfrak{A}_\alpha \preccurlyeq \mathfrak{A}_\gamma$ lo cual se sigue del teorema anterior. $\square$

Teorema 1.40. *Si $\{\mathfrak{A}_\alpha : \alpha < \beta\}$ es una cadena elemental, entonces para toda $\alpha < \beta$ se tiene que $\mathfrak{A}_\alpha \preccurlyeq \mathfrak{A} = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathfrak{A}_\alpha$.*

Demostración. La haremos por inducción sobre la complejidad de la fórmula. Mostraremos que para toda fórmula $\varphi(\overline{x})$ y para toda $\alpha < \beta$ y $\bar{a}$ en $\mathfrak{A}_\alpha$, $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}]$ si y sólo si $\mathfrak{A}_\alpha \models \varphi[\bar{a}]$.
El resultado es claro para las fórmulas atómicas φ y las que son de la forma $\varphi = \neg\psi$, $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ ya que, $\mathfrak{A}_\alpha \subseteq \mathfrak{A}$. Supongamos entonces que φ es $\forall v\psi(v)$. Sea $\bar{a}$ en el dominio de $\mathfrak{A}_\alpha$ para alguna $\alpha < \beta$. Tenemos que $\mathfrak{A} \models \forall v\psi[\bar{a}]$ implica que $\mathfrak{A} \models \psi[\bar{a}, b]$ para toda b en $\mathfrak{A}$. Entonces $\mathfrak{A} \models \psi[\bar{a}, b]$ para toda b en $\mathfrak{A}_\alpha$. Entonces, por la hipótesis de inducción, $\mathfrak{A}_\alpha \models \psi[\bar{a}, b]$ para toda b en $\mathfrak{A}_\alpha$. Por tanto, $\mathfrak{A}_\alpha \models \forall v\psi[\bar{a}]$, es decir, $\mathfrak{A}_\alpha \models \varphi[\bar{a}]$.
Conversamente, si no pasa que $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}]$, entonces $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\bar{a}]$, es decir, $\mathfrak{A} \models \neg\forall v\psi[\bar{a}]$. Así, existe un elemento b en el dominio de $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \neg\psi[\bar{a}, b]$. Como $dom(\mathfrak{A}) = \bigcup_{\alpha<\beta} dom(\mathfrak{A}_\alpha)$, existe $\mu < \beta$ tal que $b \in \mathfrak{A}_\mu$. Sea $\xi = max\{\alpha, \mu\}$ (tomamos ξ así para tener a todos los parámetros), entonces $\bar{a}$ y b están en el dominio de $\mathfrak{A}_\xi$. Ahora, por la hipótesis de inducción, $\mathfrak{A}_\xi \models \neg\psi[\bar{a}, b]$, entonces $\mathfrak{A}_\xi \models \exists v\neg\psi[\bar{a}]$. Por lo tanto, $\mathfrak{A}_\xi \models \neg\varphi[\bar{a}]$. Si $\xi = \alpha$, la prueba está terminada y si $\xi > \alpha$, entonces $\mathfrak{A}_\alpha \preccurlyeq \mathfrak{A}_\xi$, por lo que también terminamos.
Concluimos que $\mathfrak{A}_\alpha \models \neg\varphi[\bar{a}]$. $\square$

Entenderemos por el cardinal de un lenguaje L a la cardinalidad del conjunto de símbolos de L. Como L tiene un número infinito de variables, el cardinal de L siempre será infinito. Las fórmulas de L son sucesiones finitas de símbolos de L, por tanto, la cardinalidad del conjunto de fórmulas de L es el mismo que el cardinal de L.

El siguiente teorema nos da un criterio para verificar que una subestructura sea una subestructura elemental.

Teorema 1.41. (Criterio de Tarski-Vaught) *Sea $\mathfrak{A}$ una subestructura de $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ si y sólo si para toda fórmula $\varphi(v_0, ...v_n)$ de L con variables libres entre $v_0, ..., v_n$, y $a_0, ..., a_{n-1}$ elementos de A tal que para algún $b \in B$ se tiene que $\mathfrak{B} \models \varphi[a_0, ...a_{n-1}, b]$, entonces existe algún $a \in A$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi[a_0, ...a_{n-1}, a]$.*

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{A}$ es una subestructura elemental de $\mathfrak{B}$ y sea $\varphi(v_0, ...v_n)$ una fórmula de L con variables libres entre $v_0, ..., v_n$, y $a_0, ..., a_{n-1}$ elementos de A tal que para algún $b \in B$ se tiene que $\mathfrak{B} \models \varphi(a_0, ...a_{n-1}, b)$. Entonces $\mathfrak{B} \models \exists y\varphi(a_0, ..., a_{n-1}, y)$. Como $\mathfrak{A}$ es subestructura elemental de $\mathfrak{B}$, tenemos que $\mathfrak{A} \models \exists y\varphi(a_0, ..., a_{n-1}, y)$. Entonces tenemos que existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1}, a)$. Como $A \subseteq B$, concluimos que $\mathfrak{B} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1}, a)$.

Para mostrar la implicación restante hagamos inducción sobre la complejidad de la fórmula φ.

- Supongamos que el resultado se cumple para una fórmula φ, es decir, $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_n)$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi(a_0, ..., a_n)$. Equivalentemente tenemos que $\mathfrak{A} \not\models \varphi(a_0, ..., a_n)$ si y sólo si $\mathfrak{B} \not\models \varphi(a_0, ..., a_n)$. Por tanto, $\mathfrak{A} \models \neg\varphi(a_0, ..., a_n)$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \neg\varphi(a_0, ..., a_n)$.

- Supongamos que el resultado se cumple para fórmulas φ y ψ, es decir, $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_n)$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi(a_0, ..., a_n)$ y $\mathfrak{A} \models \psi(a_0, ..., a_n)$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \psi(a_0, ..., a_n)$. Entonces tenemos que $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_n) \wedge \psi$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi(a_0, ..., a_n) \wedge \psi$.

- Supongamos que el resultado se cumple para una fórmula φ, es decir, $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_n)$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi(a_0, ..., a_n)$.

  Supongamos que $\mathfrak{A} \models \exists\varphi(a_0, ..., a_n)$, entonces existe un elemento $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_n, a)$, por hipótesis, $\mathfrak{B} \models \varphi(a_0, ..., a_n, a)$. Por tanto, $\mathfrak{B} \models \exists\varphi(a_0, ..., a_n)$. Ahora supongamos que $\mathfrak{B} \models \exists\varphi(a_0, ..., a_n)$, entonces existe $b \in B$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi(a_0, ...a_n, b)$, por hipótesis del teorema, existe un elemento $a \in A$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi(a_0, ..., a_n, a)$, por hipótesis tenemos entonces que $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_n, a)$.

$\square$

Teorema 1.42. (Löwenheim-Skolem). *Sea $\mathfrak{A}$ una L-estructura de cardinalidad α, y sea $C \subseteq A$ de cardinalidad γ. Si β es un cardinal que satisface $\gamma \leq \beta \leq \alpha$, entonces $\mathfrak{A} \restriction C$ tiene una extensión $\mathfrak{B}$ de cardinalidad β la cual es una subestructura elemental de $\mathfrak{A}$.*

Demostración. Sea $<$ un buen orden fijo para A. Definimos una sucesión $\langle B_n : n \in \omega\rangle$ de subconjuntos de A recursivamente como sigue:
B_0 es cualquier subconjunto de A de cardinalidad β que contiene a C y B_{n+1} es el conjunto de todos los elementos a de A tales que para alguna fórmula $\varphi(v_0, ...v_n)$ de L, y algunos $a_0, ..., a_{n-1}$ en B_n, a es el mínimo elemento de A tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_{n-1}, a]$. Para cada $a_0 \in B_n$, a_0 es el mínimo elemento a de A tal que $\mathfrak{A} \models v_0 = v_1[a_0, a]$. Por lo tanto, $a_0 \in B_{n+1}$ y así $B_n \subseteq B_{n+1}$. Como sólo hay $\aleph_0$ fórmulas de L y $\aleph_0 \leq \beta$, cada B_n es de cardinalidad β. Entonces $B = \bigcup_{n\in\omega} B_n$ es de cardinalidad β. Sea $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \restriction B$. Como $C \subseteq B$, $\mathfrak{B}$ es una extensión de $\mathfrak{A} \restriction C$.

Ahora mostraremos que $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{A}$ con ayuda del Criterio de Tarski-Vaught. Supongamos que $\varphi(v_0, ..., v_n)$ es una fórmula de L, que $a_0, ..., a_{n-1}$ son elementos de B y que existe algún elemento a de A tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_{n-1}, a]$. Para $i < n$, a_i es un elemento de B y así existe algún $n_i < \omega$ tal que a_i está en B_{n_i}. Sea m el máximo del conjunto $\{n_i : 0 \leq i < n\}$. Entonces $a_0, ..., a_{n-1}$ están en B_m. Por hipótesis, el conjunto $\{a \in A : \mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_{n-1}, a]\}$ es no vacío y, por tanto, contiene un mínimo, digamos b. Por construcción $b \in B_{m+1} \subseteq B$. Así, existe un b en B tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_{n-1}, b]$. Finalmente como $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, se sigue que $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{A}$. $\square$

Estaremos usualmente interesados en subestructuras elementales de $H(\lambda)$, con λ regular y no numerable. Porque en $(H(\lambda), \in)$ todos los axiomas de *ZFE* se cumplen con la posible excepción del

Axioma de Potencia, el cual también se cumple si λ es un cardinal fuertemente inaccesible[6]. Por lo tanto, $(H(\lambda), \in)$ es esencialmente un modelo de la Teoría de Conjuntos y lo mismo es cierto para cualquier subestructura elemental N de $H(\lambda)$. Particularmente, si $N \preccurlyeq H(\lambda)$, entonces todos los números naturales y ω están en N, todos los subconjuntos finitos de N están en N y el sucesor de cualquier ordinal en N también está en N.

Proposición 1.43. *Sea λ un cardinal regular no numerable y sea N una subestructura elemental numerable de $H(\lambda)$. Se tiene lo siguiente.*

1. *Si a es numerable y $a \in N$, entonces $a \subseteq N$.*

2. *$\omega_1 \cap N \in \omega_1$.*

Demostración.

1. Si a es numerable y $a \in N$, entonces existe una función biyectiva $f : \omega \to a$ que pertenece a $H(\lambda)$. Por elementalidad, podemos suponer que f también está en N. Para cada n, tenemos que $f(n)$ es un elemento de N, pues $f(n)$ es definible a partir de f y n y ambos con elementos de N.

2. Sabemos por el inciso anterior que $\omega_1 \cap N$ es un segmento inicial de ω_1. Pero como N es numerable, el segmento inicial debe ser un segmento inicial propio. Por lo tanto, $\omega_1 \cap N$ es un elemento de ω_1.

$\square$

[6] Véase [3].

Capítulo 2

Conjuntos Estacionarios

En este capítulo se desarrolla la teoría de los conjuntos estacionarios. El concepto de estacionaridad juega un papel fundamental en la concepción de las nociones de forcing que son propias tema central de este trabajo. Aún cuando el material desarrollado se puede concebir como preliminar, se dedica un capítulo por separado en función de la longitud de éste y del hecho de que es un tema poco común en cursos de licenciatura.

2.1. Estacionaridad en ordinales

Los Axiomas de Forcing son enunciados que garantizan la existencia de filtros suficientemente genéricos para un cierto tipo de órdenes parciales. La propiedad común de los órdenes parciales propios es la preservación bajo forcing de conjuntos estacionarios. Comenzaremos con la definición básica de estacionaridad para ordinales y después generalizaremos este concepto.

Definición 2.1. Sean X un conjunto de ordinales y α un ordinal límite. Decimos que α es un **punto límite de** X si $sup(X \cap \alpha) = \alpha$.

Definición 2.2. Sea κ un ordinal de cofinalidad no numerable y $C \subseteq \kappa$.

- C es un subconjunto **no acotado de** κ si para todo α, elemento de κ, existe β, elemento de C, tal que β es mayor que α.
- C es un subconjunto **cerrado de** κ si todo punto límite de C menor que κ es elemento de C.
- A los conjuntos cerrados y no acotados de κ se les llamará **clubs** de κ (por su nombre en inglés: closed and unbounded).

Es sencillo ver que el conjunto de todos los ordinales límite menores que κ es un club de κ. Además, si A es un subconjunto no acotado de κ, entonces el conjunto de los puntos límite de A menores que κ es un club de κ. Además, todos los segmentos finales de κ son clubs.

Definición 2.3. Un conjunto $S \subseteq \kappa$ es **estacionario** si $S \cap C \neq \emptyset$ para cualquier club C de κ.

Lema 2.4. *Sea κ un cardinal regular de cofinalidad no numerable y sea $\gamma < \kappa$.*

1. *Si C y D son clubs de κ, entonces $C \cap D$ es un club de κ.*

2. Si $\{C_\alpha : \alpha < \gamma\}$ es una colección de clubs, entonces $\bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha$ es un club.

Demostración. 1. Es fácil probar que $C \cap D$ es un subconjunto cerrado de κ. Para mostrar que $C \cap D$ es no acotado, tomamos un ordinal α menor que κ. Como C es no acotado, existe α_1 en C tal que α_1 es mayor que α. Similarmente, existe α_2 en D tal que α_2 es mayor que α_1. De manera recursiva construimos una sucesión creciente $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ tal que $\{\alpha_{2n+1}\}_{n\in\omega}$ es una sucesión creciente en C y $\{\alpha_{2n}\}_{n\in\omega}$ es una sucesión creciente en D. Sea $\beta = \bigcup\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$. Como la cofinalidad de κ es no numerable, β es menor que κ y como β es punto límite tanto de C como de D, se tiene que β es elemento de $C \cap D$. Así, $C \cap D$ es no acotado y, por tanto, un club de κ.

2. Lo probamos por inducción sobre γ. De manera similar a como demostramos el inciso anterior, se puede probar el paso sucesor en la inducción. Supongamos que la afirmación es cierta para todo α menor que γ con γ límite. Podemos reemplazar cada C_α por $C'_\alpha = \bigcap_{\xi\leq\alpha} C_\xi$ obteniendo una sucesión $\{C'_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ cuya intersección es la misma que $\bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha$. Sea $\mathcal{C}$ esta intersección. Es fácil ver que $\mathcal{C}$ es cerrado. Probemos que $\mathcal{C}$ es no acotado en κ. Sea α menor que κ. Construimos por recursión una sucesión $\langle\beta_\xi : \xi < \gamma\rangle$ de tamaño γ como sigue:
β_0 es un elemento en C'_0 tal que $\beta_0 > \alpha$, el cual existe por ser C'_0 no acotado, y para cada ξ menor que γ, sea β_ξ un elemento en C'_ξ tal que β_ξ sea mayor que $sup\{\beta_\nu : \nu < \xi\}$. Como κ es regular y γ es menor que κ, dicha sucesión no sólo existe sino que, si β es su límite, β es menor que κ. Para cada η menor que γ, β es el límite de la sucesión $\{\beta_\xi\}_{\eta\leq\xi<\gamma}$ en C'_η y, entonces, β está en C'_η. Por lo tanto, β está en $\mathcal{C}$. Concluimos entonces que $\mathcal{C}$ es no acotado y, por tanto, un club.

□

Las demostración del siguiente resultado es muy similar a la demostración del Lema 2.4, por lo tanto, las omitiremos.

Definición 2.5. Sea $\langle X_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ una sucesión de subconjuntos de κ. La **intersección diagonal de X_α, $\alpha < \kappa$, se define como sigue:**

$$\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \{\xi < \kappa : \xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} X_\alpha\}.$$

Lema 2.6. *Sea κ tal que $cf(\kappa) = \beta > \omega$. Entonces la intersección diagonal de una β-sucesión de clubs de κ es un club de κ.*

Definición 2.7. Sea S un conjunto de ordinales. Una función f sobre S es **regresiva** si $f(\alpha) < \alpha$ para todo $\alpha \in S$ con $\alpha > 0$.

Teorema 2.8. (Fodor) *Sea κ un cardinal regular no numerable. Si f es una función regresiva sobre un conjunto estacionario $S \subseteq \kappa$, entonces existe un conjunto estacionario $T \subseteq S$ y un $\gamma < \kappa$ tal que $f(\alpha) = \gamma$ para todo α en T.*

Demostración. Supongamos que para cada γ menor que κ, el conjunto $\{\alpha \in S : f(\alpha) = \gamma\}$ no es estacionario. Entonces para cada γ menor que κ, existe un club C_γ tal que $f(\alpha) \neq \gamma$ para cada $\alpha \in S \cap C_\gamma$. Sea $C = \triangle_{\gamma<\kappa} C_\gamma$. El conjunto $S \cap C$ es estacionario y si $\alpha \in S \cap C$, entonces para todo γ menor que α, se tiene que $f(\alpha) \neq \gamma$, es decir, $f(\alpha) \geq \alpha$, lo cual es una contradicción. □

Definición 2.9. Sean κ un cardinal regular no numerable y λ un cardinal regular menor que κ. Definimos al conjunto E^{κ}_{λ} como el conjunto de ordinales menores que κ de cofinalidad λ. Así,

$$E^{\kappa}_{\lambda} = \{\alpha < \kappa : cf(\alpha) = \lambda\}.$$

Lema 2.10. *$E^{\omega_1}_{\omega}$ es un conjunto estacionario de ω_1.*

Demostración. Sea C un club de ω_1. Construimos recursivamente una sucesión $\langle \alpha_n : n < \omega \rangle$ en C como sigue:

Para todo n en ω, α_n es un ordinal de C mayor que $\bigcup\limits_{m<n} \alpha_m$ (esta elección es posible porque C es no acotado). Como C es cerrado, el supremo de ésta sucesión está en C y claramente tiene cofinalidad ω. Ello prueba que $C \cap E^{\omega_1}_{\omega}$ es distinto del vacío. □

Lema 2.11. *Todo subconjunto estacionario de $E^{\omega_1}_{\omega}$ es la unión de ω_1 conjuntos estacionarios disjuntos.*

Demostración. Sea W un subconjunto estacionario de $E^{\omega_1}_{\omega}$. Para cada elemento α de W, tomamos una sucesión estrictamente creciente $\langle a^{\alpha}_n : n \in \omega \rangle$ con límite α. Afirmamos que existe un $n_0 \in \omega$ tal que para todo $\eta < \kappa$, el conjunto $\{\alpha \in W : a^{\alpha}_{n_0} \geq \eta\}$ es estacionario. Si no fuera así, entonces, para todo $n \in \omega$ existirían $\eta_n < \kappa$ y clubs C_n tales que $a^{\alpha}_n < \eta_n$ para todo $\alpha \in C_n \cap W$. Si llamamos η al supremo de los η_n y C a la intersección de los C_n, tendríamos que $a^{\alpha}_n < \eta$ para todo $n \in \omega$ y para toda $\alpha \in C \cap W$. Esto lleva a una contradicción, ya que si $D = \{\alpha \in \omega_1 : \alpha > \eta\}$, sabemos que D es un club por lo que $C \cap D$ sería también un club disjunto de W.

Así, una vez asegurada la existencia de n_0, definimos una función regresiva f de W a ω_1 como sigue: $f(\alpha) = a^{\alpha}_{n_0}$. Usando el Teorema de Fodor en los conjuntos estacionarios $\{\alpha \in W : a^{\alpha}_{n_0} \geq \eta\}$ y la restricción de f a estos, tenemos que para cada $\eta < \omega_1$ podemos encontrar un subconjunto estacionario S_η de $\{\alpha \in W : a^{\alpha}_{n_0} \geq \eta\}$ y $\gamma_\eta \geq \eta$ tales que $f(\alpha) = \gamma_\eta$ para todo α en S_η. Entonces podemos construir una sucesión $\langle T_\eta : \eta < \omega_1 \rangle$ que será subsucesión de la sucesión $\langle S_\eta : \eta < \omega_1 \rangle$ de la siguiente manera:
Sea $\lambda \in \omega_1$, suponiendo que T_η y γ_η están definidos para todo $\eta < \lambda$, sea $\delta > sup(\{\gamma_\eta : \eta < \lambda\})$. Así, para δ podemos encontrar un subconjunto estacionario T_δ de $\{\alpha \in W : a^{\alpha}_n \geq \delta\}$ y $\gamma_\delta \geq \delta$ tales que $f(\alpha) = \gamma_\delta$ sobre T_δ. Como γ_δ es mayor que γ_η para todo $\eta < \lambda$, tenemos que T_δ es un estacionario disjunto de T_η para todo $\eta < \lambda$. Como ω_1 es regular, la sucesión tiene tamaño ω_1. Por lo tanto, $\langle T_\eta : \eta < \omega_1 \rangle$ es una sucesión de ω_1 subcojuntos de W estacionarios disjuntos dos a dos. Finalmente, si la unión de esta sucesión no es W, la diferencia la podemos unir a alguno de los elementos de la sucesión y, al no perder su condición de conjunto estacionario, tenemos el resultado deseado. □

Corolario 2.12. *Existe una partición de ω_1 en ω_1 estacionarios disjuntos.*

Demostración. $E^{\omega_1}_{\omega}$ es un conjunto estacionario de ω_1, además, admite una partición en ω_1 estacionarios disjuntos. Basta con unir la diferencia $\omega_1 \setminus E^{\omega_1}_{\omega}$ a alguno de los conjuntos estacionarios para tener la partición deseada. □

Finalizamos esta subsección introduciendo una relación en $\wp(\omega_1)$. Dos conjuntos estarán relacionados si y sólo si son muy parecidos desde el punto de vista del ideal de los no estacionarios.

Definición 2.13. Dados A y B subconjuntos de ω_1 decimos que $A \sim B$ si y sólo si $A \triangle B$ es no estacionario[1].

Es fácil verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\wp(\omega_1)$.

Observación 2.14. $A \sim B$ si y sólo si existe un club C tal que para todo η en C se tiene que $\eta \in A$ si y sólo si $\eta \in B$.

Definición 2.15. Denotamos como $[A]$ a la clase de equivalencia $\{B \subseteq \omega_1 : A \sim B\}$ y como $\wp(\omega_1)/NS$ al conjunto cociente que resulta de la relación $\sim$, es decir, al conjunto de todas las clases de equivalencia.

Es claro que $\mid \wp(\omega_1)/NS \mid \leq 2^{\omega_1}$. La siguiente proposición afirma que en realidad se da la igualdad.

Proposición 2.16. $\mid \wp(\omega_1)/NS \mid = 2^{\omega_1}$.

Demostración. Sea $\langle S_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ una partición de ω_1 en ω_1 estacionarios disjuntos. Notamos que si A y B son subconjuntos de ω_1 tales que $A \neq B$, entonces $\left[\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha\right] \neq \left[\bigcup_{\alpha \in B} S_\alpha\right]$. □

2.2. Estacionaridad en $[X]^\omega$

Ahora veremos una generalización del concepto de "subconjunto estacionario de un ordinal" visto en la sección anterior. Si A es un conjunto y λ es un cardinal, definimos los siguientes conjuntos:

$[A]^\lambda = \{x \subseteq A : \mid x \mid = \lambda\}$,
$[A]^{\leq\lambda} = \{x \subseteq A : \mid x \mid \leq \lambda\}$,
$[A]^{<\lambda} = \{x \subseteq A : \mid x \mid < \lambda\}$.

Notemos que si λ es el sucesor de κ, entonces $[A]^{<\lambda} = [A]^{\leq\kappa}$

Desde este momento asumiremos que λ es un cardinal regular no numerable.

Definición 2.17.

- Decimos que $C \subseteq [A]^{<\lambda}$ es **no acotado en** $[A]^{<\lambda}$ si y sólo si para toda x en $[A]^{<\lambda}$ existe y en C tal que $x \subsetneq y$.
- Decimos que $C \subseteq [A]^{<\lambda}$ es **cerrado en** $[A]^{<\lambda}$ si y sólo si para cualquier sucesion creciente con respecto a la contención $\{x_\alpha : \alpha < \mu\}$, $\mu < \lambda$, de elementos de C tenemos que $\bigcup\{x_\alpha : \alpha < \mu\} \in C$.
- Si C es cerrado y no acotado en $[A]^{<\lambda}$ diremos que C es un **club** en $[A]^{<\lambda}$.
- Diremos que $S \subseteq [A]^{<\lambda}$ es **estacionario** si y sólo si $S \cap C \neq \emptyset$ para todos los clubs C en $[A]^{<\lambda}$.

[1] Aquí, $\triangle$ representa la diferencia simétrica.

Proposición 2.18. *Dado un conjunto C y un cardinal λ, $C \subseteq [A]^{<\lambda}$ es cerrado si y sólo si C es cerrado bajo uniones dirigidas de cardinalidad menor que λ, es decir, si y sólo si para cualquier $D \subseteq C$ con cardinalidad menor que λ y con la propiedad de que $\forall x, y \in D \exists z \in D$ tal que $x, y \subseteq z$, se tiene que $\bigcup D \in C$.*

Demostración. Lo demostraremos por inducción sobre $\mid D \mid$. Sea D un subconjunto dirigido de C. Supongamos que $\mid D \mid = \gamma < \lambda$, que $D = \{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$ y que C es cerrado bajo uniones dirigidas de cardinalidad menor que γ. Usando recursión sobre $\alpha < \gamma$, definimos D_α como un subconjunto minimal dirigido de D (minimal con respecto a la cardinalidad) tal que $x_\alpha \in D_\alpha$ y $\bigcup\{D_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq D_\alpha$. Notamos que $\mid D_\alpha \mid = \mid \alpha \mid = \gamma$. Sea $y_\alpha = \bigcup D_\alpha$. Usando la hipótesis de inducción, es claro que $\{y_\alpha : \alpha < \gamma\}$ es una sucesión creciente de elementos de C. Como C es cerrado, concluimos que $\bigcup D = \bigcup\{y_\alpha : \alpha < \gamma\} \in C$.

Para el recíproco basta notar que cualquier sucesión creciente es dirigida. □

Definición 2.19. Definimos el **filtro club** sobre $[A]^{<\lambda}$ como el conjunto $\{C \subseteq [A]^{<\lambda} : \exists D \in [A]^{<\lambda} (D \text{ es un club y } D \subseteq C)\}$.

La colección de los clubs en $[A]^{<\lambda}$ cumple la propiedad de la intersección finita, por lo que el conjunto que acabamos de definir es el filtro generado por los clubs en $[A]^{<\lambda}$. En la teoría básica de los conjuntos estacionarios se puede probar que si κ es un cardinal regular no numerable, entonces el filtro club sobre κ es κ-completo.

Proposición 2.20. *El filtro club sobre $[A]^{<\lambda}$ es λ-completo.*

Demostración. Mostremos que la intersección de menos de λ clubs en $[A]^{<\lambda}$ es un club en $[A]^{<\lambda}$. Sea $\gamma < \lambda$ y sea $\{C_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ una colección de clubs en $[A]^{<\lambda}$. Sea $\mathcal{C} = \bigcap\{C_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$. Tomamos una sucesión creciente $\{x_\beta : \beta < \gamma\}$ en $\mathcal{C}$. Ésta también es una sucesión creciente en cada uno de los clubs, por lo que, $\bigcup\{x_\beta : \beta < \gamma\}$ es un elemento de cada uno de los clubs, y por ello, de la intersección. Por tanto, $\mathcal{C}$ es cerrado en $[A]^{<\lambda}$.

Ahora sea $x \in [A]^{<\lambda}$. Entonces en cada uno de los clubs existe y_α tal que $x \subseteq y_\alpha$. Definimos $z_\alpha = \bigcup\{y_\beta : \beta < \alpha\}$. Así, $\{z_\alpha : \alpha < \gamma\}$ es una sucesión creciente, de donde $\bigcup\{z_\alpha : \alpha < \gamma\} \in C_\alpha$ para todo $\alpha < \gamma$, por ser cerrado en C_α. Por tanto, $\bigcup\{z_\alpha : \alpha < \gamma\} \in \mathcal{C}$ y $x \subseteq \bigcup\{z_\alpha : \alpha < \gamma\}$. Concluimos que $\mathcal{C}$ es no acotado, por lo que es un club en $[A]^{<\lambda}$.

Es inmediato ahora que si intersectamos una cantidad menor que λ de elementos del filtro club, la intersección se quedará en el filtro club. Esto es porque la intersección tendrá como subconjunto a la intersección de los clubs que ya contenían cada uno de los elementos del filtro, la cual es un club. □

Definición 2.21. Sea $\{C_\alpha : \alpha \in A\}$ una sucesión de clubs en $[A]^{<\lambda}$. Al conjunto $\{x \in [A]^{<\lambda} : \forall \alpha \in x (x \in C_\alpha)\}$ lo llamamos la **intersección diagonal** de la sucesión y lo denotamos como $\triangle\{C_\alpha : \alpha \in A\}$.

Ahora probaremos que si $\{C_\alpha : \alpha \in A\}$ es una sucesión de clubs en $[A]^{<\lambda}$, entonces su intersección diagonal es un club.

Proposición 2.22. *Sea λ un cardinal regular no numerable y supongamos que A es un conjunto tal que $\mid A \mid \geq \lambda$.*

1. *Si $\{C_\alpha : \alpha \in A\}$ es una sucesión de clubs en $[A]^{<\lambda}$, entonces su intersección diagonal $\triangle\{C_\alpha : \alpha \in A\}$ es un club.*

2. *Supongamos que* $S \subseteq [A]^{<\lambda}$ *es estacionario y que* $f : S \to A$ *es una función regresiva, es decir,* $\forall x \in S(x \neq \emptyset \Rightarrow f(x) \in x)$. *Entonces existe un subconjunto estacionario* $S' \subseteq S$ *tal que* f *es constante sobre* S'.

Demostración. 1. Sea $C = \triangle\{C_\alpha : \alpha \in A\}$. Mostraremos primero que C es cerrado. Sea $\mu < \lambda$ y $\{X_\alpha : \alpha < \mu\}$ una sucesión creciente en C. Definimos $X = \bigcup\{X_\alpha : \alpha < \mu\}$. Sea $r \in X$. Debemos mostrar que $X \in C_r$. Como r pertenece a X, r pertenece a X_β con β suficientemente grande. Como la sucesión es creciente y C_r es un club, tenemos que X pertenece a C_r. Ahora mostremos que C es no acotada. Sea $x_0 \in [A]^{<\lambda}$, encontraremos $y \in C$ tal que $x_0 \subseteq y$. Usando recursión definimos una sucesión creciente $\{y_n : n \in \omega\} \subseteq [A]^{<\lambda}$ de manera que $y_0 = x_0$, y y_{n+1} sea un elemento de $\bigcap\{C_a : a \in y_n\}$ tal que $y_n \subseteq y_{n+1}$. Esta sucesión existe por la Proposición 2.19 que asegura que $\bigcap\{C_a : a \in y_n\}$ es un club.
Sea $y = \bigcup\{y_n : n \in \omega\}$. Resta mostrar que $y \in C$. Si $a \in y$, entonces, existe $k \in \omega$ tal que $a \in y_k$. Por su definición, es claro que $\{y_j : j \geq k+1\}$ es una sucesión creciente en C_a. Como C_a es cerrado y y es el supremo de esta sucesión, concluimos que $y \in C_a$.

2. Por contrapuesta. Supongamos que la función f no es constante sobre ningun subconjunto estacionario de S. Así, para cada $\alpha \in A$ existe un club C_α tal que $C_\alpha \cap \{x \in S : f(x) = \alpha\} = \emptyset$. Sea $C = \triangle\{C_\alpha : \alpha \in A\}$. Por el inciso 1, C es un club, por lo que existe $x \in C \cap S(x \neq \emptyset)$, pero entonces para cualquier $\alpha \in x$, $f(x) \neq \alpha$. Por lo tanto, f no es regresiva.

□

Observación 2.23. Notamos que si λ es un cardinal regular no numerable, entonces λ es un club en $[\lambda]^{<\lambda}$.

Para los propósitos de los Axiomas de Forcing, estamos principalmente interesados en subconjuntos estacionarios de $[A]^{<\omega_1}$. En este caso, es fácil identificar los clubs de $[A]^{<\omega_1}$ con operaciones sobre A.

Definición 2.24. Una operación sobre A es una función $f : [A]^{<\omega} \to A$. Si f es una operación sobre A y x es un subconjunto no vacío de A, diremos que x **es cerrado bajo** f si y sólo si $\forall y \in [x]^{<\omega}(f(y) \in x)$.

Proposición 2.25. *Sean* A *un conjunto y* f *una operación sobre* A*, entonces* $C_f = \{x \in [A]^{\leq\omega} : x$ *es cerrado bajo* $f\}$ *es un club en* $[A]^{\leq\omega}$.

Demostración. Primero mostraremos que C_f es cerrado. Sea $\{x_i\}_{i<\omega}$ una sucesión creciente de elementos de C_f. Nombramos $\mathcal{C} = \bigcup\{x_i\}_{i<\omega}$. Sea $y \in [\mathcal{C}]^{<\omega}$, entonces, $y \in x_j$ para alguna $j \in \omega$ y, como x_j es cerrado bajo f, se tiene que $f(y) \in x_j \subseteq \mathcal{C}$. Por lo tanto, $\mathcal{C} \in C_f$ y C_f es cerrado.

Ahora mostraremos que C_f es no acotado. Sea $x \in [A]^{\leq\omega}$ y sea y el mínimo (con respecto a $\subseteq$) subconjunto de A tal que y contenga a x y y sea cerrado bajo f. La función f se puede descomponer como ω funciones de aridad finita. Por tanto, $| y |=| x |= \aleph_0$ y $x \subseteq y \in C_f$. Así, C_f es no acotado y, por tanto, es un club. □

Definición 2.26. Sea $F : [A]^{\leq\omega} \to [A]^\lambda$. Decimos que un conjunto $x \in [A]^\lambda$ es un **punto cerradura de** F si $F(e) \subseteq x$ siempre que $e \subseteq x$. Denotamos con C_F al conjunto de todos los puntos cerradura de F en $[A]^\lambda$.

Lema 2.27. *Para todo club* C *en* $[A]^\lambda$ *existe una función* $F : [A]^{<\omega} \to [A]^\lambda$ *tal que* $C_F \subseteq C$.

Demostración. Definiremos a F recursivamente, es decir, si $e \in [A]^\omega$, por inducción sobre la cardinalidad de e, construiremos un conjunto $F(e) \in C$ con $e \subseteq F(e)$ y tal que si $e_1 \subseteq e_2$, se cumpla que $F(e_1) \subseteq F(e_2)$.

Si $e = \emptyset$, fijamos un $y_0 \in C$ y definimos $F(\emptyset) = y_0$. Ahora, supongamos que f está definida para toda e con $|e| \leq k$ para $k \in \omega$. Entonces, dado e con $\mid e \mid= k+1$, se tiene que $\mid e \cup \bigcup\{F(d) : d \subsetneq e\} \mid\leq \lambda \cdot 2^{|e|}$, por lo que $e \cup \bigcup\{F(d) : d \subsetneq e\} \in [A]^\lambda$. Como C es un club en $[A]^\lambda$, existe $F(e)$ en C tal que $e \cup \bigcup\{F(d) : d \subsetneq e\} \subseteq F(e)$. Construida así F está bien definida y cumple lo que queríamos. Para mostrar que $C_F \subseteq C$, sea $x \in C_F$.

Veamos que $x = \bigcup\{F(e) : e \in [x]^{<\omega}\}$. Si $z \in x$ entonces, por construcción, $z \in F(\{z\})$ y, por tanto, $z \in \bigcup\{F(e) : e \in [x]^{<\omega}\}$. Ahora, sea $z \in \bigcup\{F(e) : e \in [x]^{<\omega}\}$, entonces $z \in F(e)$ para alguna $e \in [x]^{<\omega}$ y como x es punto cerradura, $F(e) \subseteq x$, por lo que $z \in x$.

Por lo tanto, $x = \bigcup\{F(e) : e \in [x]^{<\omega}\}$ y podemos ver a x como una unión dirigida de elementos de C de tamaño menor o igual que λ. Así, por la Proposición 2.18, tenemos que $x \in C$. $\square$

Teorema 2.28. (Kueker) *Supongamos que C es un club en $[A]^\omega$. Entonces existe una operación F sobre A tal que $\{x \in [A]^\omega : x$ es cerrado bajo $F\} \subseteq C$.*

Demostración. Sea λ la cardinalidad de A. Haremos la demostración para λ en lugar de para A, pues después se puede traducir a una demostración para A por medio de una biyección.

Sea C un club en $[\lambda]^\omega$. De manera similar a como hicimos en la prueba del lema anterior, podemos construir una función $f : [\lambda]^{<\omega} \to C$ tal que $\forall e \in [\lambda]^{<\omega}(e \subseteq f(e))$ y tal que si $e_1 \subseteq e_2$, entonces $f(e_1) \subseteq f(e_2)$. Como cada $f(e)$ es numerable, existen funciones f_k con $k \in \omega$ tales que $f(e) = \{f_k(e) : k \in \omega\}$ para todo e. Estas funciones f_k al ser evaluadas en algún elemento e de $[A]^\omega$ dan el k-ésimo elemento de $f(e)$.

Sea $h : \omega \to \omega \times \omega$ una función suprayectiva tal que $h(n) = (k_n, m_n)$ con $m_n \leq n$. Ahora definiremos una operación F sobre λ. Sea $F(\{\alpha\}) = \alpha + 1$, y si $\alpha_1 < ... < \alpha_n$, $F(\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}) = f_{k_n}(\{\alpha_1, ..., \alpha_{m_n}\})$. Mostraremos que si $x \in [\lambda]^\omega$ es cerrado bajo F, entonces x es un punto cerradura de f, es decir, $C_F \subseteq C_f$.

Sea x cerrado bajo F, sea $k \in \omega$ y sea $e \in [x]^{<\omega}$. Queremos mostrar que $f_k(e) \in x$. Si $e = \{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$ con $\alpha_1 < ... < \alpha_m$, sea $n \geq m$ tal que $k = k_n$ y $m = m_n$. Como x no tiene elemento máximo, ya que $F(\{\alpha\})$=α+1), existen $\alpha_{m+1}, ..., \alpha_n \in x$ tal que $f_k(\{\alpha_1, ...\alpha_m\}) = f(\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}) \in x$.

Entonces, $C_F \subseteq C_f$ y, por el lema anterior, tenemos que $C_f \subseteq C$. Por lo tanto, $C_F \subseteq C$. $\square$

El Teorema de Kueker es una herramienta muy útil al momento de identificar conjuntos estacionarios. Nótese que $S \subseteq [A]^\omega$ es estacionario, si y sólo si para toda $F : [A]^{<\omega} \to A$ existe $B \in S$ tal que B es cerrado bajo F.

Proposición 2.29. *Sea C un club en $[A]^{\leq\omega}$ y sea $B \subseteq A$. Entonces $\{x \cap B : x \in C\}$ contiene un club de $[B]^{\leq\omega}$.*

Demostración. Sea C un club en $[A]^{\leq\omega}$. Aplicando el Teorema de Kueker (2.28), sabemos que existe una operación f sobre A tal que $C_f \subseteq C$. Sea $x \subseteq A$, denotamos como $\bar{x}$ al conjunto $\bigcap\{y : y$ es cerrado bajo f y $x \subseteq y\}$.

Por la demostración de la proposición anterior, sabemos que $\{y : y$ es cerrado bajo f y $x \subseteq y\} \neq \emptyset$, ya que al menos $\mathcal{A}$ esta ahí. Así, $\bar{x}$ es el conjunto cerrado bajo f más pequeño que contiene a x.

Consideramos el conjunto $\mathcal{C} = \{x \in [B]^{\leq\omega} : x = \bar{x} \cap B\}$. Sea $\{x_i\}_{i<\omega}$ una sucesión creciente de elementos de $\mathcal{C}$. Entonces $\bigcup\{x_i\}_{i<\omega} = \bigcup\{\bar{x}_i \cap B\}_{i<\omega} = B \cap \bigcup\{\bar{x}_i\}_{i<\omega}$.

Ahora, como para todo $i < \omega$ se tiene que $\bar{x}_i \in C_f$ y C_f es cerrado, $\bigcup\{\bar{x}_i\}_{i<\omega} \in C_f$. Por lo tanto, $\bigcup\{x_i\}_{i\leq k} \in \mathcal{C}$, es decir, $\mathcal{C}$ es cerrado.

Sea $x \in [B]^{\leq\omega}$ entonces, existe $y \in C_f$ tal que $x \subseteq y$, además, $\bar{y} = y$ y entonces, $x \subseteq y \cap B \in \mathcal{C}$. Por lo tanto $\mathcal{C}$ es no acotado. Por lo tanto, $\mathcal{C}$ es un club en $[B]^{\leq\omega}$ y es subconjunto de $\{x \cap B : x \in C\}$. □

Proposición 2.30. *Sea S un conjunto estacionario en $[A]^{\leq\omega}$ y sea $B \subseteq A$. Entonces $\{x \cap B : x \in S\}$ es estacionario en $[B]^{\leq\omega}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ un club en $[B]^{\leq\omega}$. Veamos que el conjunto $\{x \in [A]^{\leq\omega} : x \cap B \in \mathcal{C}\}$ es un club en $[A]^{\leq\omega}$. Tomemos una sucesión creciente $\{x_i\}_{i<\omega}$ en este conjunto. Sabemos que para cualquier $i \in \omega$, $x_i \cap B \in \mathcal{C}$. Así, estas intersecciones forman una sucesión creciente en $\mathcal{C}$. Como $\bigcup\{x_i \cap B\}_{i<\omega} \in \mathcal{C}$ y además $\bigcup\{x_i \cap B\}_{i<\omega} = B \cap \bigcup\{x_i\}_{i<\omega}$, tenemos que $\bigcup\{x_i\}_{i<\omega} \in \{x \in [A]^{\leq\omega} : x \cap B \in \mathcal{C}\}$, por lo que este conjunto es cerrado.

Ahora, tomemos $x \in [A]^{\leq\omega}$, con lo que $x \cap B \in [B]^{\leq\omega}$. Así, existe $y \in \mathcal{C}$ tal que $x \cap B \subseteq y$. Como $y \in [A]^{\leq\omega}$ y $y = y \cap B$, tenemos que, $y \in \{x \in [A]^{\leq\omega} : x \cap B \in \mathcal{C}\}$. Finalmente, consideremos el conjunto $y \cup (x \setminus B)$, el cual claramente es un elemento de $[A]^{\leq\omega}$ al ser unión de dos conjuntos a lo más numerables de A. Tenemos que $(y \cup (x \setminus B)) \cap B = (y \cap B) \cup ((x \setminus B) \cap B) = (y \cap B) \cup \emptyset = y \cap B$. Por tanto, $x \subseteq y \cup (x \setminus B)$ y $y \cup (x \setminus B) \in \{x \in [A]^{\leq\omega} : x \cap B \in \mathcal{C}\}$, concluyendo que este conjunto es no acotado.

Como $\{x \in [A]^{\leq\omega} : x \cap B \in \mathcal{C}\}$ es un club en $[A]^{\leq\omega}$, existe z tal que $z \in S$ y $z \in \{x \in [A]^{\leq\omega} : x \cap B \in \mathcal{C}\}$. Entonces $z \cap B \in \mathcal{C}$ y $z \cap B \in \{x \cap B : x \in S\}$. Por lo tanto, $\mathcal{C} \cap \{x \cap B : x \in S\} \neq \emptyset$.

Concluimos que $\{x \cap B : x \in S\}$ es estacionario en $[B]^{\leq\omega}$. □

Ahora haremos algunas observaciones sobre la Teoría de Modelos involucrada en los siguientes resultados. Sólo nos enfocaremos en estructuras de la forma $(A, \in)$, donde $A \neq \emptyset$ y la lógica subyacente es la Lógica de Primer Orden (en algunos casos las estructuras pueden ser más ricas y tener relaciones adicionales distintas a la pertenencia). Cuando el contexto sea suficientemente claro, escribiremos A para referirnos a la estructura $(A, \in)$. Además, escribiremos $A \preccurlyeq B$ cuando $(A, \in)$ sea una subestructura elemental de $(B, \in)$.

Proposición 2.31. *Sea A un conjunto infinito (usualmente no numerable) y sea C un subconjunto numerable de A. Entonces $\{B \in [A]^{\leq\omega} : C \subseteq B \preccurlyeq A\}$ es un club en $[A]^{\leq\omega}$.*

Demostración. Sea $\{B_i\}_{i<\omega}$ una sucesión creciente en $\{B \in [A]^{\leq\omega} : C \subseteq B \preccurlyeq A\}$, entonces $\{B_i\}_{i<\omega}$ es una cadena elemental. Así, utilizando el Lema de la Cadena de Tarski[2], $\bigcup\{B_i\}_{i<\omega} \preccurlyeq A$. Por lo tanto, $\{B \in [A]^{\leq\omega} : C \subseteq B \preccurlyeq A\}$ es cerrado.

Ahora, por el Teorema de Löwehneim-Skolem[3], si $x \in [A]^{\leq\omega}$, entonces existe B tal que $x \subseteq B$ y $B \in \{B \in [A]^{\leq\omega} : C \subseteq B \preccurlyeq A\}$. □

[2]Véase el Teorema 1.40.

[3]Véase el Teorema 1.42

Capítulo 3

Proper Forcing

El proper forcing fue introducido por Saharon Shelah. La condición de ser proper es una generalización tanto de la condición de cadena contable como de la condición de ser σ-cerrado.

Definición 3.1. Se dice que un orden parcial $\mathbb{P}$ es **proper** si y sólo si para cualquier conjunto X no numerable y cualquier conjunto estacionario $S \subseteq [X]^\omega$, X y S elementos del modelo base, S permanece estacionario en $M[G]$.

Podríamos decir entonces que $\mathbb{P}$ es proper si y sólo si $\mathbb{P}$ nunca destruye conjuntos estacionarios. Aunque la definición es simple, no siempre es fácil verificar esta condición en la práctica. Así que necesitamos encontrar caracterizaciones equivalentes que sean más sencillas de comprobar.

Recuerdamos que usamos M para denotar un modelo transitivo y numerable de ZFE. Además, recordamos que $\dot{G}$ es el $\mathbb{P}$-nombre G.

Definición 3.2. Sea λ es un cardinal regular no numerable y sea N una subestructura elemental numerable de $H(\lambda)$ con $\mathbb{P} \in N$. Diremos que $p \in \mathbb{P}$ es una **condición** $(N, \mathbb{P})$**-genérica** si y sólo si para cualquier anticadena maximal $A \in N$ se tiene que $A \cap N$ es predenso bajo p, lo que significa que para todo $q \leq p$ existe $r \in A \cap N$ tal que q y r son compatibles.

Proposición 3.3. *Sea λ un cardinal regular no numerable, N una subestructura elemental numerable de $H(\lambda)$ y G un filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *El elemento p de $\mathbb{P}$ es una condición $(N, \mathbb{P})$-genérica.*
2. *El elemento p de $\mathbb{P}$ fuerza que $G \cap N$ sea un filtro $(N, \mathbb{P})$-genérico.*

Demostración. Sea p una condición $(N, \mathbb{P})$-genérica y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre N con $p \in G$. Para probar que $\dot{G} \cap N$ es un filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico basta probar que intersecta a todas las anticadenas maximales[1].

Sea A una anticadena maximal en N. Como $A \cap N$ es predenso bajo p y $p \in G$, se tiene que $G \cap N \cap A \neq \emptyset$.

Ahora demostraremos que el inciso 2 implica el inciso 1 por contradicción. Supongamos que p no es $(N, \mathbb{P})$-genérica, entonces existe una anticadena maximal $A \in N$ y existe $q \leq p$ tal que q es incompatible con todos los elementos de $A \cap N$. Ahora sea G un flitro $(M, \mathbb{P})$-genérico con $q \in G$.

[1] Ver Corolario 1.19

Como G es filtro, $p \in G$. Como $p \Vdash \dot{G} \cap N$ es un filtro $(N, \mathbb{P})$-genérico, se tiene que $M[G] \models G \cap N$ es un filtro $(N, \mathbb{P})$-genérico. Se sigue que $(G \cap N) \cap A \neq \emptyset$. Sea $r \in (G \cap N) \cap A$. Como r y q son elementos de G y G es filtro, r es compatible con q y $r \in A$. Esto se contradice con el hecho de que q sea incompatible con todos los elementos de $A \cap N$. $\square$

Teorema 3.4. *Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *$\mathbb{P}$ es proper.*

2. *Para todo λ regular, si $\lambda >| \{D \subseteq \mathbb{P} : D$ una anticadena maximal$\} |$, entonces $\{N \preccurlyeq H(\lambda) :| N |= \aleph_0,\ \mathbb{P} \in N$ y $\forall p \in \mathbb{P} \cap N \exists q \leq p(q$ es $(N, \mathbb{P})$-genérica$)\}$ contiene un club de $[H(\lambda)]^{\leq\omega}$.*

Demostración. Veamos que el inciso 1 implica el inciso 2. Consideremos el conjunto $C = \{N \preccurlyeq H(\lambda) :| N |= \aleph_0, \mathbb{P} \in N\}$. Utilizando el Teorema 1.42 y el Teorema 1.40 se puede probar que C es un club en $[H(\lambda)]^{\leq\omega}$. Fijemos $p \in \mathbb{P}$ y sea $S_p = \{N \in C : p \in N$ y no existe $q \leq p$ que sea $(N, \mathbb{P})$-genérica$\}$. Sea $D = \{N \preccurlyeq H(\lambda) :| N |= \aleph_0, \mathbb{P} \in N$ y $\forall p \in \mathbb{P} \cap N \exists$q$\leq p(q$ es $(N, \mathbb{P})$-genérica$)\}$. Si que D no contiene ningún club y sea X un club en $[H(\lambda)]^{\leq\omega}$ entonces, $C \cap X \nsubseteq D$, es decir, $X \cap (C \setminus D) \neq \emptyset$. Además, tenemos que si $C \setminus D = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} S_p$ es fuera un conjunto estacionario entonces, para cualquier $N \in C \setminus D$, existe p en $\mathbb{P}$ tal que N es un elemento de S_p, con esto podríamos definir una función $f : C \setminus D \to [H(\lambda)]^{\omega}$ tal que $f(N) = \{p\}$. Es claro que $f(N) \in N$, por lo que f es una función regresiva con dominio un conjunto estacionario. Aplicando el Teorema 2.8, existen p elemento de $\mathbb{P}$ y un subconjunto estacionario E de $C \setminus D$ tal que para todo $N \in E$, $f(N) = \{p\}$. Entonces tendríamos que $E \subset S_p$, lo cual sería una contradicción (nótese que el conjunto del inciso 2 es igual al conjunto $C \setminus \{N \in C : \exists p \in N$ tal que $N \in S_p\})$. Por lo tanto, basta probar que S_p no es estacionario para cada $p \in \mathbb{P}$.

Ahora sea G_p un filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico con $p \in G_p$. Trabajando en $M[G_p]$, definimos una función f como sigue. Nótese que un filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico intersecta a toda anticadena maximal en un único punto (pues si la intersectara en más de uno, éstos resultarían ser compatibles). Si A es una anticadena maximal en $\mathbb{P}$ y $A \in M$, entonces sea $f(A)$ la única q tal que $q \in G_p \cap A$. Sea $C_p = \{N \preccurlyeq H(\lambda)^V : N$ numerable, $\mathbb{P} \in N$ y $\forall A \in N$(si A es una anticadena maximal, entonces $f(A) \in N)\}$. Es claro que C_p es un club. Mostraremos que $C_p \cap S_p$ es vacío y, por tanto, que S_p no es estacionario en $M[G_p]$. Pero como $\mathbb{P}$ es proper, también concluiremos que S_p no es estacionario en M también.

Fijamos $N \in S_p$. Por definición tenemos que el conjunto $E = \{q' \leq p$: existe una anticadena maximal $A \in N$ tal que q' es incompatible con todo elemento de $A \cap N\}$ es denso bajo p. Por tanto, existe $q' \in G_p \cap E$. Sea A una anticadena maximal en N tal que q' es incompatible con todo elemento de $A \cap N$. Ahora, si $N \in C_p$, entonces $f(A) \in N \cap A$ y $f(A) \in G_p$, contradiciendo que q' es incompatible con $f(A)$.

Veamos ahora que el inciso 2 implica el inciso 1. Asumimos que $\mathbb{P}$ es un orden parcial que satisface 2, mostraremos que $\mathbb{P}$ es proper. Sea X no numerable, sea $\dot{f}$ un $\mathbb{P}$-nombre para una operación sobre X, sea S un subconjunto estacionario de $[X]^{\omega}$ y sea $p_0 \in \mathbb{P}$. Encontraremos $q \leq p_0$ y $x \in S$ tal que q fuerza que x es cerrado bajo $\dot{f}$. Sea λ un cardinal regular suficientemente grande tal que $\dot{f}$, X, P, $p_0 \in H(\lambda)$ y se cumpla el inciso 2. Entonces existe un club C cuyos elementos son subestructuras elementales numerables de $H(\lambda)$ tales que si $N \in C$, entonces $\dot{f}$, X, $\mathbb{P}$, $p_0 \in N$ y $\forall p \in N \cap \mathbb{P} \exists q \leq p(q$ es $(N, \mathbb{P})$-genérica$)$.

Por la proposición 2.29 tenemos que el conjunto $\{N \cap X : N \in C\}$ contiene un club de $[X]^{\leq\omega}$ y, por tanto, existe $N \in C$ tal que $N \cap X \in S$. Fijamos tal N. Sea $q \leq p_0$ una condición $(N, \mathbb{P})$-genérica. Terminaremos la prueba mostrando que q fuerza que $N \cap X$ es cerrado bajo $\dot{f}$. Sea e un subconjunto finito de $N \cap X$; probaremos que $q \Vdash (\dot{f}(e) \in N)$. Sea $D = \{r \in \mathbb{P} : [r \perp p_0] \vee [r \leq p_0 \wedge \exists a \in X(r \Vdash (\dot{f}(e) = a))]\}$.

Como $\dot{f}$, X, $\mathbb{P}$, p_0, $e \in N$ y N es subestrucutura elemental, tenemos que el conjunto denso D está también en N. Ahora sea q' cualquier condición $q' \leq q$ y sea a cualquier elemento en X tal que q' fuerce que $\dot{f}(e) = a$. Basta mostrar que $a \in N$. Pero como $D \in N$ y q es $(N, \mathbb{P})$-genérica, existe algún $r \in D \cap N$ tal que r y q' son compatibles y, así $r \Vdash \dot{f}(e) = a$. Usando este hecho y dado que a se define con $\dot{f}$, e, $r \in N$, concluimos que $a \in N$. □

Proposición 3.5. *Sean $\mathbb{P}$ un orden parcial, λ_0 un cardinal regular numerable tal que $\mathbb{P} \in H(\lambda_0)$ y sea C un club de $[H(\lambda_0)]^\omega$ tal que para todo $N \in C$ y para todo p en $N \cap \mathbb{P}$ existe q que extiende a p tal que q es $(N, \mathbb{P})$-genérica. Entonces para todo cardinal regular λ mayor o igual que λ_0, para toda subestructura elemental contable N de $H(\lambda)$ que contenga a $\mathbb{P}$ como elemento y para todo p en $N \cap \mathbb{P}$, existe q que extiende a p tal que q es $(N, \mathbb{P})$-genérica.*

Demostración. Supongamos que existe tal club $C \subseteq [H(\lambda_0)]^\omega$, que $H(\lambda_0) \in H(\lambda)$ y que $N \preccurlyeq H(\lambda)$ con $\mathbb{P} \in N$. Sin pérdida de la generalidad, podemos suponer que λ_0 es el mínimo cardinal que cumple lo planteado. Entonces $H(\lambda_0) \in N$. De igual manera, podemos suponer que $C \in N$. Por lo tanto, $N \cap H(\lambda_0) \in C$ (pues C es cerrado y $\mid N \mid = \aleph_0$). □

Ahora daremos una caracterización de proper forcing en términos de juegos. Dado un orden parcial $\mathbb{P}$, el juego $\Gamma(\mathbb{P})$ para dos jugadores se define como sigue: El jugador I comienza (en el 0-ésimo movimiento) seleccionando $p_0 \in \mathbb{P}$ y una anticadena maximal $A_0 \subseteq \mathbb{P}$. El jugador II responde escogiendo un subconjunto a lo más numerable B_0^0 de A_0. Después, el jugador I selecciona otra anticadena maximal A_1 y II responde seleccionando $B_0^1 \subseteq A_0$ y $B_1^1 \subseteq A_1$ a lo más numerables. En general, en el n-ésimo movimiento ($n > 0$), I selecciona una anticadena maximal A_n y II selecciona $B_i^n \subseteq A_i$ para toda $i \leq n$. Esto continua durante ω movimientos, en donde II gana si y sólo si existe $q \leq p_0$ tal que para toda $i \in \omega$ tenemos que el conjunto $B_i = \bigcup\{B_i^n : i \leq n\}$ es predenso bajo q.

Teorema 3.6. *Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *$\mathbb{P}$ es proper.*

2. *El jugador II tiene una estrategia ganadora en el juego $\Gamma(\mathbb{P})$.*

Demostración. Mostraremos que el inciso 2 es equivalente al inciso 2 del teorema 3.4.

Sea λ cualquier cardinal que satisfaga el inciso 2 y sea C un club dentro del conjunto descrito en el inciso 2 del Teorema 3.4. Describimos una estrategia ganadora para II en $\Gamma(P)$. Supongamos que I comienza jugando p_0 y A_0. Entonces II encuentra $N_0 \in C$ tal que p_0, $A_0 \in N_0$, y II responde jugando $B_0^0 = N_0 \cap A_0$. Si I juega A_1, entonces II encuentra $N_1 \in C$ con $N_0 \subseteq N_1$, $A_1 \in N_1$ y juega $B_0^1 = N_1 \cap A_0$, $B_1^1 = N_1 \cap A_1$. Y así sucesivamente.

Al final del juego, si $N = \bigcup\{N_n : n \in \omega\}$, entonces $N \in C$ ya que C es cerrado. Como $p_0 \in N$, existe $q \leq p_0$ el cual es $(N, \mathbb{P})$-genérico. Pero ahora para cada i tenemos que $\bigcup\{B_i^n : i \leq n\} = \bigcup\{N_n \cap A_i : i \leq n\} = N \cap A_i$, y este conjunto es predenso bajo q. Por lo tanto, II gana el juego.

Ahora demostraremos la otra implicación. Sea σ una estrategia ganadora para II en el juego $\Gamma(\mathbb{P})$. Podemos asumir que esta estrategia es una función definida sobre las sucesiones $\langle p_0, A_0, ..., A_n\rangle$

de jugadas del jugador I y que siempre que el jugador II juegue $\sigma(\langle p_0, A_0, ..., A_n\rangle)$ en su n-ésimo movimiento, él ganará el juego.

Ahora, sea λ como en el inciso 2 y notamos que $\sigma \in H(\lambda)$. Bastará mostrar que si N es una subestructura elemental numerable de $H(\lambda)$ con $\mathbb{P}, \sigma \in N$, entonces $\forall p \in \mathbb{P} \cap N \exists q \leq p(q$ es $(N, \mathbb{P})$-genérica). Fijamos tal N. Sea $p_0 \in N \cap \mathbb{P}$ y sea $\langle A_n : n \in \omega\rangle$ una enumeración de las anticadenas maximales de $\mathbb{P}$ que viven en N. Esta enumeración es posible gracias a que N es numerable. Ahora consideramos el juego en el cual I juega sucesivamente (p_0, A_0), A_1, A_2,.... Como $\sigma \in N$, siempre tendremos que $\sigma(\langle p_0, A_0, ..., A_n\rangle) = \langle B_0^n, ..., B_n^n\rangle \in N$. Más aún, como cada B_i^n es a lo más numerable, tenemos también que $B_i^n \subseteq N$. Por tanto, al final del juego, $B_i = \bigcup\{B_i^n : n \geq i\} \subseteq A_i \cap N$. Pero II gana el juego, así que hay $q \leq p_0$ tal que cada B_i es predenso bajo q, y, por tanto, cada $A_i \cap N$ es predenso bajo q y q es $(N, \mathbb{P})$-genérica. □

Proposición 3.7. *Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial.*

1. *Si $\mathbb{P}$ cumple la condición de la cadena contable entonces, $\mathbb{P}$ es proper.*
2. *Si $\mathbb{P}$ es ω-cerrado entonces $\mathbb{P}$ es proper.*

Demostración. 1. Sea N una subestructura elemental numerable de $H(\lambda)$ y A una anticadena maximal de $\mathbb{P}$ que esté en N. Como $\mathbb{P}$ cumple la condición de la cadena contable entonces A es numerable y, por la Proposición 1.43, $A \subseteq N$. Entonces $A \cap N = A$. Sea G un filtro $(N, \mathbb{P})$-genérico, entonces $G \cap A$ es distinto del vacío. Por tanto, cualquier p en $N \cap \mathbb{P}$ fuerza que $\dot{G} \cap N$ es $(N, \mathbb{P})$-genérico, es decir, p es $(N, \mathbb{P})$-genérica.

Usando el teorema anterior, podemos dar una prueba alternativa.

Si $\mathbb{P}$ cumple la condición de la cadena contable, entonces el jugador II claramente gana el juego $\Gamma(\mathbb{P})$, ya que a cada paso él puede escoger toda la anticadena A_n jugada por el jugador I.

2. Supongamos que N es subestructura elemental de $H(\lambda)$ y que tanto q como p son elementos de N. Sea $\langle D_n : n \in \omega\rangle$ una enumeración de todos los densos de $\mathbb{P}$ que son elementos de N. Por la correctud de N, podemos encontrar una sucesión $\{p_n\}_{n\in\omega}$ tal que $p_0 = q$ y p_{n+1} sea un elemento de $D_n \cap N$ que extiende a p_n. Como $\mathbb{P}$ es ω-cerrado, existe $\bar{q}$ tal que $\bar{q} \leq p_n$ para toda $n \in \omega$. Es inmediato que $\bar{q}$ es $(N, \mathbb{P})$-genérica.

   Podemos aplicar de nuevo el teorema anterior para dar una prueba alternativa de este inciso. Otra vez, consideramos el juego $\Gamma(\mathbb{P})$. Si I juega p_0 y A_0, entonces fijamos $p_1 \in \mathbb{P}$, $q_1 \in A_0$ tal que p_1 es una extensión común de p_0 y q_1 y II responde jugando $B_0^0 = \{q_1\}$. Al siguiente paso, también fijamos $p_2 \in \mathbb{P}$ y encontramos $q_2 \in A_1$ tal que p_2 es una extensión común de p_1 y q_2 y II responde jugando $B_0^1 = \emptyset$, $B_1^1 = \{q_2\}$. Y así sucesivamente. Como $\mathbb{P}$ es ω-cerrado, habrá $q \in \mathbb{P}$ tal que $\forall n \in \omega(q \leq p_n)$. Pero $B_i = \{q_{i+1}\}$ es siempre predenso bajo q ya que $q \leq p_{i+1} \leq q_{i+1}$.

□

Definición 3.8. Un orden parcial $\mathbb{P}$ es **totalmente proper** si y sólo si para todo cardinal regular λ suficientemente grande, para toda N subestructura elemental numerable de $H(\lambda)$ que tenga a $\mathbb{P}$ como elemento y para todo p que pertenece a $N \cap \mathbb{P}$, existe q en $\mathbb{P}$ y una sucesión $\{p_n\}_{n\in\omega}$ en $N \cap \mathbb{P}$ tal que:

1. $p_o = p$,

2. $p_{n+1} \leq p_n$,
3. para todo denso D en N, existe n en ω tal que p_n es elemento de D, y
4. para todo n en ω, $q \leq p_n$

Observación 3.9. Si $\mathbb{P}$ es un orden totalmente proper, entonces $\mathbb{P}$ es proper.

Definición 3.10. Sea $lim(\omega_1)$ el conjunto de ordinales límite de ω_1. Sea $\alpha \in lim(\omega_1)$. Una **escalera sobre** α es un conjunto no acotado de α cuyo tipo de orden es igual a ω.

Una colección $\langle C_\alpha : \alpha \in lim(\omega_1)\rangle$ es un **sistema de escaleras sobre** $lim(\omega_1)$ si y sólo si cada C_α es una escalera sobre α.

Ejemplo 3.11. Una instancia de uniformización. *Sea $\langle C_\alpha : \alpha \in lim(\omega_1)\rangle$ un sistema de escaleras y sea g una función de ω_1 en 2. Entonces existe un orden parcial $\mathbb{P}$ totalmente proper que añade una función f de ω_1 en 2 tal que para cada ordinal límite α de ω_1 se tiene que $f \restriction_{C_\alpha}$ es constante con valor $g(\alpha)$ excepto en un conjunto finito, lo cual denotaremos como $f \restriction_{C_\alpha} \equiv_* g(\alpha)$.*

Definimos $\mathbb{P}$ como el conjunto de todas las aproximaciones a lo más numerables a la función f, con la relación $\supseteq$. Esto es, p es elemento de $\mathbb{P}$ si y sólo si:

- $dom(p) = \delta$ para algún $\delta < \omega_1$, y
- si $\alpha \leq \delta$ es límite, entonces $p \restriction_{C_\alpha} \equiv_* g(\alpha)$.

Afirmamos que para cada $\alpha < \omega_1$, el conjunto $D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} : \alpha \in dom(p)\}$ es denso en $\mathbb{P}$.

Probaremos esto por inducción. Supongamos que esto es cierto para $\beta < \alpha$, que p es un elemento de $\mathbb{P}$ y además que α no está en el dominio de p.

Si $\alpha = \gamma + 1$, entonces primero encontramos una extensión q de p tal que γ esté en el dominio de q. En este caso extendemos q a $q \cup \{\langle \alpha, 0\rangle\}$.

Supongamos ahora que α es límite. Sea $\{\gamma_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión creciente con límite α donde $\gamma_0 = \beta$. Construimos una sucesión $\{p_n\}_{n\in\omega}$ tal que $p_0 = p$ y p_{n+1} es un elemento que, además de extender a p_n, tenga a γ_n en su dominio y $p_{n+1}(\delta) = f(\alpha)$ para todo $\delta \in dom(p_{n+1} \setminus p_n) \cap C_\alpha$. El último requisito es satisfacible, ya que $\mathbb{P}$ es cerrado con respecto a cambios finitos. Finalmente, consideramos $q = \bigcup_{n\in\omega} p_n \cup \{\langle \alpha, 0\rangle\}$. Así, D_α es denso en $\mathbb{P}$.

Supongamos que $\{p_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión decreciente de $\mathbb{P}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. $\{p_n\}_{n\in\omega}$ tiene una cota inferior en $\mathbb{P}$.
2. $\bigcup_{n\in\omega} p_n \in \mathbb{P}$.
3. Si $\alpha = dom(\bigcup_{n\in\omega} p_n)$, entonces hay un $\alpha_0 < \alpha$ tal que $p_n(\xi) = g(\alpha)$ siempre que $\xi \in C_\alpha \cap dom(p_n)$ y $\alpha_0 < \xi$.

Veamos ahora que el orden parcial $\mathbb{P}$ es totalmente proper.

Sea λ un cardinal regular no numerable lo suficientemente grande para que $H(\lambda)$ tenga a todos los objetos que necesitamos y N una subestructura elemental numerable de $H(\lambda)$ que tenga como elementos a $\mathbb{P}$, g, $\langle C_\delta : \delta \in lim(\omega_1)\rangle$ y $H(|\ \mathbb{P}\ |^+)$. Sea $p \in N$ y $(N_k)_{k\in\omega}$ una $\in$-cadena de subestructuras elementales numerables tal que $N \cap H(\omega_2) = \bigcup_{k\in\omega} N_k$ y $\{p, \mathbb{P}\} \subseteq N_0$. Sea $\langle D_k\rangle_{k\in\omega}$ una enumeración de todos los densos de $\mathbb{P}$ que sean elementos de N y tal que $D_k \in N_k$. Construimos ahora una sucesión $(p_k)_{k\in\omega}$ tal que $p_0 = p$ y p_{n+1} es un elemento de $N_n \cap D_n$ que extiende a p_n y tal que para todo α en $C_\delta \cap dom(p_{k+1} \setminus p_k)$, donde $\delta = N \cap \omega_1$, se tenga que $p_{k+1}(\alpha) = g(\delta)$.

Supongamos que p_k ha sido definido y consideremos el conjunto $N_k \cap C_\delta \setminus dom(p_k)$. Este conjunto es finito y por tanto es un elemento de N_k. Dentro de N_k, extendemos a p_k a una condición r tal que $C_\delta \cap N_k \subseteq dom(r)$. Modificamos r en $C_\delta \cap N_k \setminus dom(p_k)$ de tal forma que concordemos con $g(\delta)$. Ahora extendemos r a p_{k+1} en $N_k \cap D_k$. Por la condición 3, $(p_k)_{k\in\omega}$ tiene una cota inferior.

Proposición 3.12. *Si $\mathbb{P}$ es proper y λ es un ordinal tal que $cf(\lambda) > \omega$, entonces $M[G] \models cf(\lambda) > \omega$.*

Demostración. Haremos esta prueba por contradicción. Supongamos que existe $p \in \mathbb{P}$ y que p fuerza que $\dot{f}$ es una función con dominio ω cuyo rango es cofinal en λ. Supongamos que A_n es una anticadena maximal decidiendo el valor de $f(n)$. Sea N una subestructura elemental numerable de $H(\lambda)$ que tiene como elementos a p, a $\{A_n : n \in \omega\}$ y a $\dot{f}$. Como $\mathbb{P}$ es proper, existe $q \leq p$ tal que q es $(N, \mathbb{P})$-genérico. Así, q fuerza que $\dot{G}$ intersecta a A_n en $A_n \cap N$. Pero cada $A_n \cap N$ es a lo más numerable. Sea $\{\nu_{n,m} : m \in \omega\}$ una enumeración de todos los ν para los cuales existe $r \in A_n \cap N$ tal que $r \Vdash \dot{f}(n) = \nu$. Entonces q fuerza que $sup(rango(f)) \leq sup \bigcup_{n\in\omega} \bigcup_{m\in\omega} \{\nu_{n,m} : m \in \omega\} < \lambda$. Por lo tanto, q fuerza que el rango de f es acotado en λ, lo cual es una contradicción. □

Corolario 3.13. *Si un orden parcial $\mathbb{P}$ es proper, entonces $\mathbb{P}$ preserva a ω_1.*

Demostración. Nótese que $cf(\omega_1) = \omega_1 > \omega$. Si ω_1 se colapsara, entonces ω_1 en $M[G]$ sería un ordinal numerable, y entonces $cf(\omega_1) = \omega$, pero por la proposición anterior en $M[G]$, $cof(\omega_1) > \omega$. □

La razón de que preservar ω_1 sea una condición interesante es que si $M[G]$ es una extensión genérica en un orden parcial que no colapsa a ω_1, entonces cada club $C \in M$ permanece siendo un club en $M[G]$. Esto no quiere decir que en $M[G]$ no se generen nuevos clubs. Pero si el orden parcial no es proper, un conjunto estacionario $S \in M$ podría perder esa propiedad en $M[G]$, ya que podría haber un club en $M[G]$ disjunto de S.

Ahora daremos un ejemplo de un orden parcial que preserva a ω_1 pero que no es proper. De hecho veremos que este orden parcial destruye un conjunto estacionario de ω_1.

Definición 3.14. Un orden parcial $\mathbb{P}$ es **ω-distributivo** si y sólo si toda función $f : \omega \to M$ en la extensión genérica está en el modelo base.

Proposición 3.15. *Si $\mathbb{P}$ es ω-distributivo, entonces $\mathbb{P}$ preserva a ω_1.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{P}$ colapsa a ω_1. Entonces $\omega_1^M < \omega_1^{M[G]}$, viendo esta desigualdad en $M[G]$, es decir, ω_1^M en $M[G]$ es un ordinal numerable. Entonces existe $g \in M[G]$ tal que g es una función biyectiva $g : \omega \to \omega_1^M$. Pero sabemos que en M no existe ninguna biyección de ω en ω_1^M. Por lo tanto, $\mathbb{P}$ no puede ser ω-distributivo. □

Gracias al Corolario 2.12 sabemos que ω_1 se puede escribir como la unión de dos subconjuntos estacionarios distintos S y T. Ahora encontraremos un orden parcial que agrega un club contenido en S y que preserva a ω_1.

Ejemplo 3.16. *Sea S un conjunto estacionario de ω_1. Denotamos como $\mathbb{P}_S$ al conjunto de todos los subconjuntos de S que son cerrados y acotados. El orden que consideramos en $\mathbb{P}$ es: $p \leq q$ si y sólo si p es una extensión final de q, es decir, $q \subset p$ y $\forall x \in p \setminus q(x > max(q))$.*

Notamos que si G es un filtro $\mathbb{P}_S$-genérico y $C = \bigcup G$, claramente C es un subconjunto de S.

Por otro lado, el conjunto $D_\alpha = \{p \in \mathbb{P}_S : max(p) \geq \alpha\}$ es denso en $\mathbb{P}_S$ para toda $\alpha < \omega_1$. Por lo tanto, C es un conjunto no acotado de ω_1.

Veamos que C es cerrado.

Sea $\langle p_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión decreciente de elementos de G. Sea $\delta = sup(U)$, donde U es la unión de todos los rangos provenientes de elementos de la sucesión. Debemos mostrar que δ está en el rango de alguna condición que está en G. Sabemos que el conjunto $D_\delta = \{p \in \mathbb{P}_S : \exists \gamma > \delta \wedge \gamma \in ran(p)\}$ es denso. Sea $f \in G \cap D_\delta$. Notamos que $p_n \subseteq f$ ya que ambos son elementos de G y, por tanto, son compatibles. Por tanto, δ es un punto límite del rango de f. Por lo tanto C es cerrado.

Ahora veamos que $\mathbb{P}_S$ es ω-distributivo.

Sea $\dot{f}$ un nombre para una función de ω a M en la extensión genérica. Sea $p \in \mathbb{P}_S$ tal que $p \Vdash \dot{f} : \omega \to M$.

Dado un subconjunto numerable A_α de $\mathbb{P}_S$, definimos $\gamma_\alpha = supA_\alpha$. Además, para cada $q \in A_\alpha$ y cada $n \in \omega$ seleccionamos algún $r_{q,n} \in \mathbb{P}_S$ tal que $r_{q,n} < q$ y $r_{q,n}$ decide $\dot{f}(n)$ y $max(r_{q,n}) > \gamma_\alpha$.

Construyamos una cadena $\{A_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ de subconjuntos numerables de $\mathbb{P}_S$ como sigue:

$$A_0 = \{p\}.$$
$$A_{\alpha+1} = A_\alpha \cup \{r_{q,n} : q \in A_\alpha,\ n \in \omega\}.$$
$$A_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta,\ \textit{si } \alpha \textit{ es límite.}$$

Notamos que la sucesión $\{\gamma_\alpha\}$ es estrictamente creciente y continua.

Entonces $C = \{\lambda : \gamma_\alpha < \lambda \text{ si } \alpha < \lambda\}$ es un club. Si a C lo intersectamos con el club de los ordinales límite de ω_1, obtenemos un nuevo club D. Como S es estacionario, existe un ordinal límite λ en $D \cap S$. Como λ es límite, podemos encontrar una sucesión que converja a λ. Sea $\{\alpha_n\}$ dicha sucesión. Entonces γ_{α_n} tiene a λ como límite. Construimos una sucesión de condiciones de la siguiente manera: $p_0 = p$ y $p_{n+1} \in A_{\alpha_{n+1}}$ de tal forma que decida $\dot{f}(n)$. Así, $\gamma_{\alpha_n} < max(p_{n+1}) \leq \gamma_{\alpha_{n+1}}$.

Por tanto, el límite de la sucesión $\{max(p_n) : n \in \omega\}$ es λ y, como $\lambda \in S$, tenemos que $q = \bigcup_{n\in\omega} p_n \cup \{\lambda\}$ es cerrado y, por lo tanto, es un elemento de $\mathbb{P}_S$.

Ahora como q es una cota inferior de $\langle p_n : n \in \omega \rangle$, para toda $n \in \omega$ existe $q \leq p_n$, q decide a todos los valores de $\dot{f}(n)$. Finalmente, definimos $g : \omega \to M$ como la función tal que $g(n) = m$ si y sólo si $q \Vdash \dot{f}(n) = m$. Así, obtenemos que $q \Vdash \dot{f} = g$.

3.1. Proper Forcing Axiom

El proper forcing axiom (PFA) afirma que: Para todo orden parcial proper $\mathbb{P}$ y para toda sucesión $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha \in \aleph_1\}$ de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico G sobre $\mathbb{P}$ que intersecta a todos los D_α. Como cualquier orden parcial que cumple la condición de la cadena contable es proper, es claro que PFA es una generalización de $MA(\omega_1)$ y, por tanto, todas las consecuencias de $MA(\omega_1)$ son derivables de PFA.

Proposición 3.17. *PFA implica $MA(\omega_1)$. En particular, PFA implica que $2^\omega = 2^{\omega_1}$.*

Demostración. Sabemos que todo orden parcial $\mathbb{P}$ que tiene la condición de la cadena contable es proper. Además, por el Teorema de Martin-Solovay[2]. $MA(\omega_1)$ implica que $2^{\omega} = 2^{\omega_1}$ □

Proposición 3.18. *PFA implica uniformización. Esto es, para todo sistema de escaleras $\langle C_\alpha : \alpha \in lim(\omega_1)\rangle$ y para toda función $g : \omega_1 \to 2$ existe una función $f : \omega_1 \to 2$ tal que para cada $\alpha \in lim(\omega_1)$ se tiene que $f \restriction_{C_\alpha} \equiv_* g(\alpha)$.*

Demostración. Gracias al ejemplo 3.11, sabemos que cada instancia de uniformización se puede forzar mediante un orden parcial proper (nótese además que en cada una de estas instancias basta con que el respectivo filtro sea genérico para una familia de ω_1 densos para obtener la correspondiente función que testifica la propiedad de uniformización). □

Aunque el PFA es una generalización del Axioma de Martin, la consistencia de PFA requiere grandes cardinales. Para mayor detalle puede consultarse el capítulo 31 de [2]. En el siguiente capítulo mostraremos algunas propiedades que se siguen de PFA pero no de $MA(\omega_1)$. Esto lo lograremos por medio de un principio de reflección descubierto por Justin Tatch Moore.

[2]Vease Teorema 1.14

Capítulo 4

Mapping Reflection Principle y el Tamaño del Continuo

Hasta este momento, hemos desarrollado suficientemente la teoría de los órdenes parciales proper como para introducir el Axioma de Proper Forcing. Este axioma pertenece a la categoría de los axiomas de forcing. Estos axiomas conjuntan la fuerza del método de forcing de manera tal que se pueden obtener resultados sin necesidad de tener un conocimiento amplio de dicho método. En este capítulo decidiremos el tamaño del continuo a través del Axioma de Proper Forcing, esto con la ayuda de un principio de reflección conocido como Mapping Reflection Principle y otro principio conocido como ν_{AC}.

Definición 4.1. Sea X conjunto no numerable, sea θ un cardinal regular no numerable y sea M una subestructura elemental de $H(\theta)$ con $[X]^\omega \in M$. Decimos que un subconjunto Σ de $[X]^\omega$ es **M-estacionario** si para todo club E de $[X]^\omega$ que sea elemento de M, se tiene que $M \cap E \cap \Sigma \neq \emptyset$, es decir, Σ intersecta a todos los clubs de $[X]^\omega$ dentro de M.

Para cada conjunto no numerable X definimos una topología para $[X]^\omega$ de la siguiente manera: Dados $N \in [X]^\omega$ y x un subconjunto finito de N, definimos el conjunto básico $[x, N] = \{Y \in [X]^\omega : x \subseteq Y \subseteq N\}$. Estos conjuntos $[x, N]$ serán la base para la topología, es decir, un conjunto abierto será aquel que se pueda expresar como unión de básicos.

Proposición 4.2. *Los conjuntos $[x, N]$ son base para una topología*[1] *para $[X]^\omega$.*

Demostración. Sea $z \in [X]^\omega$. Como z es numerable, podemos tomar un subcojunto finito de él, digamos y. Así, $z \in [y, z]$. Ahora sean $[x_1, N_1]$ y $[x_2, N_2]$ tales que existe $Y \in [x_1, N_1] \cap [x_2, N_2]$, entonces, $x_1 \subseteq Y \subseteq N_1$ y $x_2 \subseteq Y \subseteq N_2$. Por tanto, $x_1 \cup x_2 \subseteq Y \subseteq Y$. Así, $Y \in [x_1 \cup x_2, Y]$ y, además, $[x_1 \cup x_2, Y] \subseteq [x_1, N_1] \cap [x_2, N_2]$ □

[1]Sea Y un conjunto. Una colección F=$\{A_i : i \in I\}$ es base para una topología en Y si se cumplen las siguientes dos condiciones.

1. Para toda $y \in Y$, existe un $i \in I$ tal que y es elemento de A_i y,
2. para todo $i, j \in I$, si $y \in A_i \cap A_j$, entonces existe $k \in I$ tal que $y \in A_k$ y $A_k \subset A_i \cap A_j$.

A la topología inducida por los básicos $[x, N]$ se le conoce como la Topología de Ellentuck. En lo sucesivo la palabra abierto se referirá a un abierto en la Topología de Ellentuck.

Definición 4.3. Se dice que una función Σ es **abierta estacionaria** si y sólo si existe un conjunto no numerable X y θ un cardinal regular no numerable con $[X]^\omega \in H(\theta)$ tal que:

1. Todos los elementos del dominio de Σ son subestructuras elementales numerables de $H(\theta)$.
2. Si M está en el dominio de Σ, entonces $X \in M$.
3. $\Sigma(M) \subseteq [X]^\omega$ es abierto y M-estacionario.

De ser necesario, los parámetros X y θ serán llamados X_Σ y θ_Σ.

Ejemplo 4.4. *Supongamos que $\langle N_\nu : \nu \in \omega_1\rangle$ es una cadena elemental de subestructuras elementales contables de $H(2^{\aleph_0+})$[2] y que $r : \omega_1 \to \omega_1$ es una función regresiva sobre los ordinales límite de ω_1. Sea Σ la función cuyo dominio es $\langle N_\nu : \nu \in \omega_1\rangle$ y tal que $\Sigma(N_\nu) = [\{r(\delta_\nu)\}, \delta_\nu]$, donde $\delta_\nu = \omega_1 \cap N_\nu$. Entonces Σ es abierta estacionaria con parámetros $X = \omega_1$ y $\theta = (2^\omega)^+$.*

Demostración. Por definición, Σ es abierta, así que basta probar que $\Sigma(N_\nu)$ es N_ν-estacionario. Si $E \in N_\nu$ es un club en $[\omega_1]^\omega$ entonces, desde el punto de vista de N_ν, también es un club. Usando este hecho y dado que $r(\delta_\nu) \in \omega_1 \cap N_\nu$, tenemos que existe un $e \in E \cap M$ tal que $\{r(\delta_\nu)\} \subseteq e$. Pero como e es numerable, tenemos que $e \subseteq N_\nu$. Por tanto, $e \subseteq N_\nu \cap \omega_1$, $e \in [\{r(\delta_\nu)\}, \delta_\nu]$ y $E \cap N_\nu \cap \Sigma(N_\nu) \neq \emptyset$. □

En este ejemplo también se puede verificar que para todo ordinal límite $\nu \in \omega_1$, existe un $\nu_0 < \nu$ tal que si $\xi < \nu$ y $\nu_0 \in N_\xi$, entonces $N_\xi \cap X_\Sigma \in \Sigma(N_\nu)$, de hecho $\nu_0 = r(\nu)$. El Set Mapping Reflection Principle (MRP) asegura que un comportamiento similar está presente en cualquier mapeo abierto estacionario.

Definición 4.5. El **Mapping Reflection Principle** es la afirmación siguiente: Si Σ es un mapeo abierto estacionario cuyo dominio es un club en $[H(\theta_\Sigma)]^\omega$, entonces existe una cadena elemental $\langle N_\nu : \nu \in \omega_1\rangle$ en el dominio de Σ de forma que para todo ordinal límite $\nu \in \omega_1$ existe $\nu_0 < \nu$ tal que si $\xi < \nu$ y $\nu_0 \in N_\xi$, entonces $N_\xi \cap X_\Sigma \in \Sigma(N_\nu)$.

Si $\langle N_\nu : \nu \in \omega_1\rangle$ satisface la conclusión de MRP para la función Σ entonces esta cadena elemental se dice que es una **sucesión reflejante para** Σ.

Ejemplo 4.6. *Una consecuencia inmediata de MRP es la negación del* **Weak Club Guessing**. *Esto es, MRP implica que si $\langle C_\delta : \delta \in lim(\omega_1)\rangle$ es un sistema de escaleras, entonces existe un club $E \subseteq \omega_1$ tal que $E \cap C_\delta$ es finito para toda δ.*

Sea C_δ $(\delta < \omega_1)$, y si N es una subestructura elemental numerable de $H(\omega_2)$, sea $\Sigma(N)$ el complemento de $C_\delta \cup \{\delta\}$. Entonces Σ es una función abierta estacionaria y si $\langle N_\nu : \nu < \omega_1\rangle$es una sucesión reflejante para Σ, entonces $E = \{\nu < \omega_1 : N_\nu \cap \omega_1 = \nu\}$ es un club con las propiedades deseadas. Para más detalles véase [7].

Teorema 4.7. **(Moore)** *El Proper Forcing Axiom implica el Mapping Reflection Principle.*

[2] Una sucesión $\langle N_\nu : \nu \in \mu\rangle$ de subestructuras elementales es una cadena elemental si y sólo si $\forall \nu \in \mu (N_\nu \in N_{\nu+1})$ y $\forall \nu \in \mu (lim(\nu) \to N_\nu = \bigcup\{N_\alpha : \alpha \in \nu\})$

Demostración. Sea Σ un mapeo abierto estacionario con parámetros X y θ. Como es usual en el método de forcing, el orden parcial que nos servirá para obtener el resultado son aproximaciones parciales al objeto deseado.

Así, definimos el orden parcial $\mathbb{P}$ como la colección de todas las cadenas elementales $\langle W_\alpha : \alpha \leq \gamma \rangle$ de subestructuras de $H(\theta)$ que estén en el dominio de Σ, con $\gamma \in \omega_1$, tales que para todo ordinal límite $\nu \leq \gamma$ exista un $\nu_0 < \nu$ con la propiedad de que si $\xi < \nu$ y $\nu_0 \in W_\xi$, entonces $W_\xi \cap X \in \Sigma(W_\nu)$; dados p y q en $\mathbb{P}$, diremos $p \leq q$ si y sólo si p es extensión de q.

Probaremos que $\mathbb{P}$ es totalmente proper, pues con la observación 3.9, esto implica que es proper.

Sea λ un cardinal regular suficientemente grande tal que tanto Σ como $H(\mid \mathbb{P} \mid^+)$ sean elementos de $H(\lambda)$. Basta probar que si M es una subestructura elemental numerable de $H(\lambda)$ tal que Σ, $H(\mid \mathbb{P} \mid^+)$ y $\mathbb{P}$ sean elementos de M y si $p \in M \cap \mathbb{P}$, entonces existe una condición $(M, \mathbb{P})$-genérica $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \leq p$.

Como M es numerable, la cantidad de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ que son elementos de M es numerable. Consideramos una enumeración $\langle D_i : i \in \omega \rangle$ de dichos densos.

Ahora, construimos recursivamente una sucesión decreciente de condiciones de la siguiente manera. Sea p_0 en $M \cap \mathbb{P}$ y supongamos que p_i ya está dado con $p_i \in D_{i-1}$ y $Dom(p_i) = \gamma_i + 1$. Sea F_i la colección de todas las intersecciones de la forma $N = N^* \cap X$, donde N^* es subestructura elemental numerable de $H(\mid \mathbb{P} \mid^+)$ tal que tiene a $H(\theta)$, D_i, $\mathbb{P}$ y p_i como elementos, es decir,

$$F_i = \{N^* \cap X : N^* \preccurlyeq H(\mid \mathbb{P} \mid^+) \wedge \mid N^+ \mid = \aleph_0 \wedge H(\theta), D_i, \mathbb{P}, p_i \in N^*\}$$

De esta forma, F_i es un club de $[X]^\omega$ y $F_i \in M$. Por otro lado, $M \cap H(\theta)$ es el límite de algunos elementos en $Dom(\Sigma) \cap M$ y, por tanto, $M \cap H(\theta) \in Dom(\Sigma)$.

Ahora, como $\Sigma(M \cap H(\theta))$ es abierto y $M \cap H(\theta)$ es estacionario, tenemos que existe $N_i \in F_i \cap \Sigma(M \cap H(\theta)) \cap M$ y un subconjunto finito $x_i \subseteq N_i$ tales que $[x_i, N_i] \subseteq \Sigma(M \cap H(\theta))$. Sea W' un elemento de $Dom(\Sigma)$ tal que $x_i \cup \{p_i\} \subseteq W'$. Extendemos p_i a $q_i = p_i \cup \{\langle \gamma_i + 1, W' \rangle\}$. Tenemos que $q_i \in \mathbb{P}$ y como N_i^* es una subestructura elemental de $H(\mid \mathbb{P} \mid^+)$ que tiene como elementos a $H(\theta)$, $\mathbb{P}$ y p_i, podemos asumir que $q_i \in N_i^*$. Pero si $q_i \in N_i^*$, entonces también tenemos que $q_i, N_i^* \in M$, recordando que F_i y N_i están ambos en M. Trabajando en N_i^*, podemos encontrar un $r \in N_i^* \cap D_i$ con $r \leq q_i$. Sea $p_{i+1} = r$.

Observamos que si $W \in Ran(p_{i+1}) \setminus Ran(p_i)$, entonces $x_i \subseteq W$ y $W \cap X \subseteq N_i^* \cap X = N_i$, es decir, $W \cap X \in [x_i, N_i] \subseteq \Sigma(M \cap H(\theta))$. Sea $\gamma = \bigcup\{\gamma_i : i \in \omega\}$. Ahora definimos p_∞ como la función con dominio $\gamma + 1$ que extiende a todo p_i y tal que $p_\infty(\gamma) = M \cap H(\theta)$. Así, p_∞ es una condición $(M, \mathbb{P})$-genérica y $p_\infty \leq p_0$. Por lo tanto, $\mathbb{P}$ es totally proper.

Por el Axioma de Proper Forcing, existe un filtro D-genérico. La unión de dicho filtro es el objeto planteado en el Mapping Reflection Principle. $\square$

Denotaremos el tipo de orden de un conjunto de ordinales A como $otp(A)$.

Definición 4.8. Fijemos un sistema de escaleras $\langle C_\xi : \xi \in lim(\omega_1) \rangle$. Sean N, M conjuntos numerables de ordinales tales que $N \subseteq M$, $otp(M)$ es un límite, y $sup(N) < sup(M)$. Definimos el **peso de N con respecto a M** como $w(N, M) = \mid sup(N) \cap \pi_M^{-1}[C_\alpha] \mid$, donde α es el tipo de orden de M y π_M es el colapso de Mostowski[3].

Observación 4.9. Si N y M conjuntos numerables de ordinales tales que $N \subseteq M$, $otp(M)$ es un límite y $sup(N) < sup(M)$, entonces $w(N, M)$ es finito.

[3]Véase [3] para más detalles sobre este colapso.

Demostración. Se tiene que $\pi_M^{-1}[C_\alpha] \subseteq M$ es una sucesión de tipo de orden ω cofinal en $sup(M)$. □

Observación 4.10. Si $N_1 \subseteq N_2$, entonces $w(N_1, M) \leq w(N_2, M)$.

Demostración. Supongamos que $sup(N_1) \leq sup(N_2)$, entonces $sup(N_1) \cap \pi_M^{-1}[C_\alpha] \subseteq sup(N_2) \cap \pi_M^{-1}[C_\alpha]$. Por lo tanto,

$$| \, sup(N_1) \cap \pi_M^{-1}[C_\alpha] \, | \leq | \, sup(N_2) \cap \pi_M^{-1}[C_\alpha] \, |$$

□

Definición 4.11. Dado un subconjunto A de ω_1, $\nu_{AC}(A)$ es la siguiente afirmación: Existe δ menor que ω_2 y una sucesión $\subseteq$-creciente $\langle N_\epsilon : \epsilon < \omega_1 \rangle$ que es un club en $[\delta]^\omega$ tal que para cada $\nu \in \text{lím}(\omega_1)$ existe ν_0 tal que si $\nu_0 < \xi < \nu$, entonces $N_\nu \cap \omega_1 \in A$ si y sólo si $w(N_\xi \cap \omega_1, N_\nu \cap \omega_1) < w(N_\xi, N_\nu)$.

ν_{AC} es la afirmación de que $\nu_{AC}(A)$ es verdadera para toda A subconjunto de ω_1.

En la definición anterior se asume que $N_\nu \cap \omega_1$ siempre es un ordinal.

Lema 4.12. *Si M es una subestructura elemental numerable de $H((2^{\omega_1})^+)$, entonces los siguientes conjuntos son abiertos y M-estacionarios:*

- $\Sigma_<(M) = \{N \in [\omega_2]^\omega : w(N \cap \omega_1, M \cap \omega_1) < w(N, M \cap \omega_2)\}$,
- $\Sigma_\geq(M) = \{N \in [\omega_2]^\omega : w(N \cap \omega_1, M \cap \omega_1) \geq \; w(N, M \cap \omega_2)\}$.

Demostración. Primero veamos que $\Sigma_<(M)$ es M-estacionario. Sea $E \subseteq [\omega_2]^\omega$ un club en M. Veamos que existe $\gamma < \omega_1$ tal que $\{sup(N) : N \in E \text{ y } N \cap \omega_1 \subseteq \gamma\}$ es no acotado en ω_2. Supongamos que no. Entonces para cada $\gamma < \omega_1$, el conjunto $A_\gamma = \{sup(N) : N \in E \text{ y } N \cap \omega_1 \subseteq \gamma\}$ es acotado en ω_2. Consideremos $\delta = \bigcup_{\gamma < \omega_1} sup(A_\gamma)$. Ahora, si $N \in E$ y $N \cap \omega_1 \subseteq \gamma$, entonces $sup(N) \leq sup(A_\gamma)$ y $sup(A_\gamma) < \omega_2$ para todo $\gamma < \omega_1$. Por lo tanto, existe un ordinal β tal que $\delta < \beta < \omega_2$. Existe entonces un $N' \in E$ tal que $\beta \in N'$, ya que E es no acotado. Ahora denotemos a $N' \cap \omega_1$ como $\gamma_{N'}$. Por lo tanto, $\beta \leq sup(N') \leq sup(A_{\gamma_{N'}}) \leq \delta$, lo cual contradice la suposición de que β era mayor que δ. Ahora por elementaridad de M, existe un $\gamma < M \cap \omega_1$ tal que el conjunto $\{\text{sup}(N) : N \in E \cap M \text{ y } N \cap \omega_1 \subseteq \gamma\}$ es no acotado en $M \cap \omega_2$. Tomamos un N en $E \cap M$ tal que $w(N \cap \omega_2, M \cap \omega_2) = | \, sup(N) \cap \pi_{M \cap \omega_2}^{-1}[C_{otp(M \cap \omega_2)}] \, | > | \, C_{M \cap \omega_1} \cap \gamma \, |$. Como N es un elemento de M y N es numerable, tenemos que $N \subseteq M$ y $sup(N) < sup(M)$. Se sigue de la definición de $\Sigma_<(M)$ que N es un elemento de $E \cap \Sigma_<(M) \cap M$. Por lo tanto, $\Sigma_<(M)$ es M-estacionario.

Veremos ahora que $\Sigma_<(M)$ es abierto. Sea $N \in \Sigma_<(M)$. Ahora N puede o no tener un último elemento, es decir, un máximo.

- Si N tiene un último elemento, definimos $\xi = max(N)$.
- Si N no tiene último elemento, nos fijamos en el siguiente conjunto:

  $$sup(N) \cap \pi_{M \cap \omega_2}^{-1}[C_{otp(M \cap \omega_2)}].$$

  De acuerdo con la definición del peso, este conjunto tiene cardinalidad finita ya que la cardinalidad de este conjunto es $w(N, M \cap \omega_2)$. Por lo tanto, este conjunto tiene máximo. Definimos ξ como el menor elemento de N mayor que $max(sup(N) \cap \pi_{M \cap \omega_2}^{-1}[C_{otp(M \cap \omega_2)}])$.

Definimos entonces $x = (N \cap C_{M\cap\omega_1}) \cup \{\xi\}$. Este conjunto es finito.

Ahora demostraremos que $sup(N \cap C_{M\cap\omega_1}) = sup(N \cap \omega_1)$.

Como $C_{M\cap\omega_1} \subseteq \omega_1$, intersectando ambos conjuntos con N obtenemos que $N \cap C_{M\cap\omega_1} \subseteq N \cap \omega_1$, tomando supremos de ambos lados concluimos que, $sup(N \cap C_{M\cap\omega_1}) \leq sup(N \cap \omega_1)$.

Por otra parte, $N \cap C_{M\cap\omega_1} \subseteq M \cap \omega_1$. Sea $x \in N \cap C_{M\cap\omega_1} \setminus sup(N \cap \omega_1)$, entonces $x > sup(N \cap \omega_1)$, pero $x \in N$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $sup(N \cap \omega_1) \leq sup(N \cap C_{M\cap\omega_1})$.

Concluimos entonces

$$sup(N \cap \omega_1) = sup(N \cap C_{M\cap\omega_1}). \tag{4.1}$$

Por definición, $w(x \cap \omega_1, M \cap \omega_1) = \mid sup(x \cap \omega_1) \cap C_{M\cap\omega_1} \mid$, entonces, $\mid sup(x \cap \omega_1) \cap C_{M\cap\omega_1} \mid = \mid sup(N \cap C_{M\cap\omega_1}) \cap C_{M\cap\omega_1} \mid$, ya que ξ es el único elemento de x que es mayor que ω_1. Entonces, $\mid sup(N \cap C_{M\cap\omega_1}) \cap C_{M\cap\omega_1} \mid = \mid sup(N \cap \omega_1) \cap C_{M\cap\omega_1} \mid$ por 4.1. Finalmente, $\mid sup(N \cap \omega_1) \cap C_{M\cap\omega_1} \mid = w(N \cap \omega_1, M \cap \omega_1)$ por definición.

Como $\xi \in N$, se tiene que $\xi \leq sup(N)$. Por lo tanto,

$$\xi \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}] \leq sup(N) \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}]. \tag{4.2}$$

Además, por definición, $\xi > max(sup(N) \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}])$, por lo que

$$sup(N) \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}] \subseteq \xi. \tag{4.3}$$

Si intersectamos con $\pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}]$, obtenemos

$$sup(N) \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}] \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}] \subseteq \xi \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}]. \tag{4.4}$$

Esto último lo podemos escribir como

$$sup(N) \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}] \subseteq \xi \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}]. \tag{4.5}$$

Concluyendo,

$$sup(N) \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}] \leq \xi \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}]. \tag{4.6}$$

Por 4.2 y 4.6 concluimos que

$$sup(N) \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}] = \xi \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}]. \tag{4.7}$$

Por definición,

$$w(x \cap \omega_2, M \cap \omega_2) = \mid sup(x \cap \omega_2) \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}] \mid. \tag{4.8}$$

Como ξ es el supremo de x,

$$\mid sup(x \cap \omega_2) \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}] \mid = \mid \xi \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}] \mid. \tag{4.9}$$

Por 4.7, tenemos que

$$\mid \xi \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}] \mid = \mid sup(N) \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}] \mid.$$

Como $N \in [\omega_2]^\omega$, $sup(N) = sup(N \cap \omega_2)$, por lo que

$$\mid sup(N) \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}] \mid = \mid sup(N \cap \omega_2) \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}] \mid. \tag{4.10}$$

Por la definición del peso, concluimos que

$$| \, sup(N \cap \omega_2) \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}] \, |= w(N \cap \omega_2, M \cap \omega_2). \tag{4.11}$$

Finalmente, por la monotonía del peso, tenemos que $[x, N] \subseteq \Sigma_<(M)$. Por lo tanto, $\Sigma_<(M)$ es abierto.

Ahora probaremos que $\Sigma_\geq(M)$ es M-estacionario. Sea $E \subseteq [\omega_2]^\omega$ un club en M y sea $\gamma < \omega_2$ un ordinal no numerable tal que $E \cap [\gamma]^\omega$ es un club en $[\gamma]^\omega$. Por elementaridad de M, existe un γ similar en M. Trabajando en M, es posible encontrar un N en $E \cap [\gamma]^\omega$ tal que

$$| \, N \cap \omega_1 \cap C_{M\cap\omega_1} \, |\geq| \, \gamma \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}] \, |$$

y $\gamma \cap \pi^{-1}_{M\cap\omega_2}[C_{otp(M\cap\omega_2)}] \subset N$. Entonces N es un elemento de $E \cap \Sigma_\geq(M) \cap M$.

Finalmente, debido a que

$$w(x \cap \omega_1, M \cap \omega_1) = w(N \cap \omega_1, M \cap \omega_1),$$

y

$$w(x \cap \omega_2, M \cap \omega_2) = w(N \cap \omega_2, M \cap \omega_2)$$

y, el peso es monótono, tenemos que si $N \in \Sigma_\geq(M)$, entonces, $[x, N] \subseteq \Sigma_\geq(M)$. Por lo tanto, $\Sigma_\geq(M)$ es abierto. □

Teorema 4.13. *El Mapping Reflection Principle implica* ν_{AC}.

Demostración. Definimos el siguiente mapeo:

$$\Sigma_A(M) = \begin{cases} \Sigma_<(M) & \text{si } M \cap \omega_1 \in A, \\ \Sigma_\geq(M) & \text{si } M \cap \omega_1 \notin A. \end{cases}$$

Por el lema anterior, Σ_A es un mapeo abierto estacionario. Por el Mapping Reflection Principle existe $\langle N^*_\xi : \xi < \omega_1 \rangle$ una sucesión reflejante para Σ_A. Sea $\delta = \bigcup_{\xi<\omega_1} N_\xi \cap \omega_2$. Ahora definimos $N_\xi = N^*_\xi \cap \omega_2$. Tenemos entonces que δ y $\langle N_\xi : \xi < \omega_1 \rangle$ satisfacen la conclusión de ν_{AC}. □

Teorema 4.14. ν_{AC} *implica que* $2^{\omega_1} = \omega_2$.

Demostración. En el segundo capítulo[4], introdujimos una relación de equivalencia NS en $\wp(\omega_1)$. Además, mostramos que el cociente $\wp(\omega_1)/NS$ tenía la mismo cardinalidad que ω_1.

Para cada $[A]$ en $\wp(\omega_1)/NS$ definimos $\delta_{[A]}$ como el menor δ en ω_2 tal que existe una sucesión creciente $\langle N_\epsilon : \epsilon < \omega_1 \rangle$ que es un club en $[\delta]^\omega$ de forma que para todo ν en $lim(\omega_1)$ exista ν_0 menor que ν tal que para todo ξ con $\nu_0 < \xi < \nu$, tenemos que $N_\nu \cap \omega_1 \in A$ si y sólo si $w(N_\epsilon \cap \omega_1, N_\nu \cap \omega_1) < w(N_\epsilon, N_\nu)$.

Definimos una función $f : \wp(\omega_1)/NS \to \omega_2$ dada por la regla de asociación $f([A]) = \delta_{[A]}$.

Mostraremos que esta función está bien definida, es decir, si $[A] = [B]$, entonces $\delta_{[A]} = \delta_{[B]}$. Por la Proposición 2.29, sabemos que si X y Y son conjuntos no numerables tales que $Y \subseteq X$ y C es un club de $[Y]^\omega$, entonces $\{x \in [X]^\omega : x \cap Y \in C\}$ es un club de $[A]^\omega$. Por otro lado, si $[A] = [B]$, entonces existe un club $C \subseteq \omega_1$ tal que para todo x en C, $x \in A$ si y sólo si $x \in B$. Así, la sucesión $\langle N_\epsilon : \epsilon \in \omega_1 \rangle$ es tal que $\{N_\epsilon : \epsilon \in \omega_1\}$ es un club de $[\delta]^\omega$. Tenemos que

[4] Véanse definiciones 2.13 y 2.15

$\{N_\epsilon : N_\epsilon \cap \omega_1 \in A \leftrightarrow N_\epsilon \cap \omega_1 \in B\}$ también es un club de $[\delta]^\omega$. Sea ahora $\langle M_\eta : \eta \in \omega_1\rangle$ una sucesión creciente de este club. Nótese que $\delta_{[A]}$ y $\langle M_\eta : \eta \in \omega_1\rangle$ testifican ahora $\nu_{AC}(B)$.

Ahora, si $\delta_{[A]} = \delta_{[B]}$, esto implica que para cualesquiera sucesiones crecientes $\langle N_\epsilon^A : \epsilon < \omega_1\rangle$ y $\langle N_\epsilon^B : \epsilon < \omega_1\rangle$ que testifiquen las condiciones de la definición de f, el conjunto $\{\epsilon \in \omega_1 : N_\epsilon^A = N_\epsilon^B\}$ es un club en ω_1 y para cualquier ξ punto límite de este club, $\xi \in A$ si y sólo si $\xi \in B$. Por lo tanto, por la observación 2.15, esto demuestra que $[A] = [B]$. Por lo tanto, f es inyectiva. $\square$

Corolario 4.15. *El Axioma de Proper Forcing implica que* $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Demostración. Como el PFA es un fortalecimiento de $MA(\omega_1)$, PFA implica que $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$.

Por otra parte, PFA implica el MRP, el cual a su vez implica el principio ν_{AC}. Por el teorema anterior, sabemos que ν_{AC} implica que $2^{\omega_1} = \omega_2$. Por lo tanto, $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. $\square$

4.1. Conclusiones

Una de las preguntas que se sabe que no pueden contestarse en ZFE es la del tamaño del continuo. Lo que hemos desarrollado en este trabajo es el hecho de que el Axioma de Proper Forcing responde a esta pregunta concluyendo que dicho tamaño es $\aleph_2$. En el Axioma de Proper Forcing confluyen dos conceptos interesantes, por una parte el de proper forcing y por otra el de los axiomas de forcing.

En cuanto al concepto de proper forcing, en este trabajo demostramos que la colección de órdenes parciales que son proper es un tanto amplia, ya que todos los órdenes que cumplan la condición de la cadena contable y los que son ω-cerrados, son proper. En lo que respecta a los axiomas de forcing a los cuales pertenece el Axioma de Proper Forcing, existe una variante más débil del PFA conocida como el Axioma Acotado de Proper Forcing. el cual en lugar de aplicarse para conjuntos densos arbitrarios, considera solamente anticadenas maximales de tamaño ω_1. El Axioma Acotado de Proper Forcing también decide el tamaño del continuo.

Aunque salen del objetivo de este trabajo, podemos citar que además de resolver el problema del continuo, el PFA implica que cualesquiera dos subconjuntos $\aleph_1$-densos de $\mathbb{R}$ son isomorfos, que cualesquiera dos árboles de Arosnzajn son club-isomorfos y que la Hipótesis del Cardinal Singular se cumpla, es decir, que para cualquier cardinal singular κ, se tenga que $\kappa^{cf(\kappa)} = 2^{cf(\kappa)} + \kappa^+$.

El Mapping Reflection Principle ha resuelto algunos otros problemas combinatorios, entre otros, la Conjetura de la Base de Cinco Elementos, esta conjetura asegura que existen cinco órdenes lineales no numerables tales que cualquier otro orden lineal no numerable contiene una copia isomorfa de alguno de estos cinco.

Bibliografía

[1] A. B. Slomson, J. L. Bell *Models and Ultraproducts: An introduction.* Dover Publications Inc. 1969.

[2] Thomas Jech *Set Theory. The Third Millenium Edition.* Springer Monographs in mathematics. Springer. 2002.

[3] Kenneth Kunen *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* North Holland. 1995.

[4] Justin Tatch Moore *Set Mapping Reflection* Journal of Mathematical Logic, n 1, pp. 87-985, 2005.

[5] Justin Tatch Moore *A tutorial on Set Mapping Reflection. Appalachian Set Theory Workshop, Penn State University (notes by David Milovich), May 2009.*

[6] Justin Tatch Morre, Todd Eisworth *Iterated forcing and the Continuum Hypothesis. Appalachian Set Theory Workshop, Fields Institute (notes by David Milovich), May 2009.*

[7] Miguel Angel Mota Gaytán *Forcing Strong Combinatorial Properties and Cardinal Arithmetic* Tesis doctoral dentro del programa Lógica y Fundamentos de las Matemáticas, Universidad de Barcelona, Septiembre 2009.

[8] James E. Baumgartner *Applications of the Proper Forcing Axiom* Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, pp. 913-959, 1984.