



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**PROPUESTA DE TRAYECTORIA DE OPOSICIÓN DEL
PULGAR**

TESINA

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

INGENIERO MECATRÓNICO

PRESENTA:

IVAN ALBERTO TRUJILLO PRIEGO

DIRECTORA DE TESIS:

M.I ROSA ITZEL FLORES LUNA

MÉXICO D.F.

NOVIEMBRE 2012



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

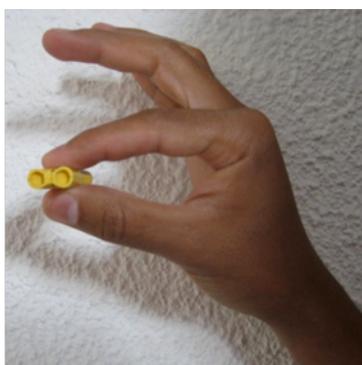
CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN	2
2. OBJETIVO	7
3. REQUERIMIENTOS	7
4. ESPECIFICACIONES	7
5. DISEÑO CONCEPTUAL	9
6. CONFIGURACIÓN	14
7. SELECCIÓN DE CONCEPTOS	17
8. DISEÑO DE DETALLE	19
9. FABRICACIÓN Y PRUEBAS	21
10. RESULTADOS	31
CONCLUSIÓN	45
BIBLIOGRAFIA	47
ANEXOS	49

INTRODUCCIÓN

El dedo pulgar es el elemento más importante de la mano, sin él la movilidad de la mano se ve reducida en gran medida, de acuerdo con diversos autores el pulgar representa entre el 40 y el 75% de la movilidad de la mano (Nordin 1980); Keller, (1947). Una forma de medir la funcionalidad de la mano es a través de las prensiones que realiza para manipular objetos, estas se dividen en fuerza y precisión; de acuerdo a Zur Verth (1927,1936), Hilgenfeldt (1950) y Trebes (1970) existen cuatro prensiones básicas de las cuales solamente una no utiliza el dedo pulgar, viéndolo desde este punto de vista el pulgar representa el 75% de funcionalidad, a continuación se presentan las prensiones básicas:

1) Prensión en pinza, fina, con la punta de los dedos: se efectúa con la acción conjunta del pulpejo de los dedos pulgar, índice y medio, o pulgar e índice solamente, empleada para sujetar o agarrar objetos pequeños.



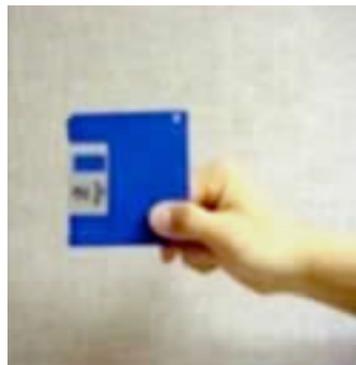
2) Prensión en puño: se da al introducir los cuatro dedos triarticulados en la palma de la mano.



3) Prensión en gancho: al tener el brazo colgando se flexionan los cuatro dedos triarticulados. No se emplea el pulgar.



4) Prensión en llave: el pulpejo del pulgar se coloca sobre la cara radial de la segunda falange del dedo índice.



Debido a lo anterior, las personas que han perdido el pulgar buscan obtenerlo de nuevo, incurriendo en el uso de prótesis. Existen distintos tipos de prótesis que se clasifican de manera general en pasivas y activas. Las primeras son puramente cosméticas, no funcionales, en tanto que las segundas son funcionales, esto es tener un medio de actuación. Dentro de las prótesis activas se encuentran las mecánicas y las mioeléctricas, encontrando en las mioeléctricas la tecnología más avanzada en donde se activa la prótesis por medio de los impulsos eléctricos de los músculos, pudiendo así manipular cada uno de los dedos de forma independiente y teniendo movimiento de flexión y oposición del pulgar, obteniendo una gran versatilidad de movimiento y tienen como desventaja el que sea necesario tener aun nervios funcionales en el miembro residual además del alto costo de éstas.

En la actualidad tres compañías principales de prótesis que pueden mover el dedo pulgar, la movilidad depende del número de actuadores y de articulaciones asociadas a este dedo, en la tabla se muestra la comparación entre los principales prótesis comerciales. El precio de estas resulta un gran problema, ya que es muy elevado con respecto a la capacidad adquisitiva de la mayoría de la población por lo cual muy pocas personas pueden adquirirlas.

Prótesis	Grados de Libertad	Rotación	Costo (USD)
----------	--------------------	----------	-------------

<p>i-limb (touch bionics)</p> 	<p>1</p>	<p>Manual</p>	<p>48, 000</p>
<p>Be-bionic</p> 	<p>1</p>	<p>Manual</p>	<p>11, 000</p>
<p>Michelangelo (Otto Bock)</p> 	<p>2</p>	<p>Activa</p>	<p>50, 000</p>

En esta investigación se estudia la obtención de la trayectoria de oposición del pulgar para el diseño de un mecanismo para prótesis de mano, para esto se tomó en cuenta que a la fecha sólo se cuenta con la descripción del espacio de trabajo del dedo pulgar, más no con una trayectoria específica del dedo. En Kuo et al. (2008) se presenta la intersección de los espacios de trabajo de cada dedo con respecto al pulgar definiendo un espacio de trabajo funcional de prensión de precisión de la mano. A través de la metodología presentada en este trabajo se podrán obtener

distintas trayectorias dependiendo de la necesidad que se tenga para la prótesis así como tener un mejor estudio biomecánico del pulgar; se quiere obtener el mayor número de prensiones de la mano con una sola trayectoria de oposición del dedo pulgar, incluyendo tanto presión de fuerza como presión de precisión. Con trayectoria definida se podrán generar tres distintas prensiones al ser aplicada en el diseño de un mecanismo implementando un control adecuado a la prótesis; además se hizo el análisis por medio de sistema de video y marcadores superficiales para análisis de movimiento del dedo pulgar. La fidelidad de éste método ha sido probada y comprobada con respecto a otros métodos de análisis clínicos como el método del goniómetro o la fluoroscopia (Kuo et. al. 2002), (Su et. al. 2003), además los sistemas de visión tienen como ventaja el poder analizar el movimiento de la mano dinámicamente con lo cual se pueden observar distintos comportamientos que no se aprecian en estudios estáticos como el método del goniómetro al igual que realizar estudios en tiempo real en el que el sujeto puede realizar prensiones con objetos, obteniendo estudios más detallados. Debido a esto, a la facilidad de uso de dichos sistemas y su bajo costo, se optó por emplear la visión en este estudio.

OBJETIVO

A partir del estudio de movilidad del pulgar se propondrá una trayectoria de oposición del dedo.

REQUERIMIENTOS

- Proponer una trayectoria de oposición del pulgar.
- Dar la secuencia de puntos o la ecuación que defina la trayectoria de oposición del pulgar.
- Para la mayor cantidad de prensiones.
- Repetibilidad del experimento con diferentes personas, fenotipo?

ESPECIFICACIONES

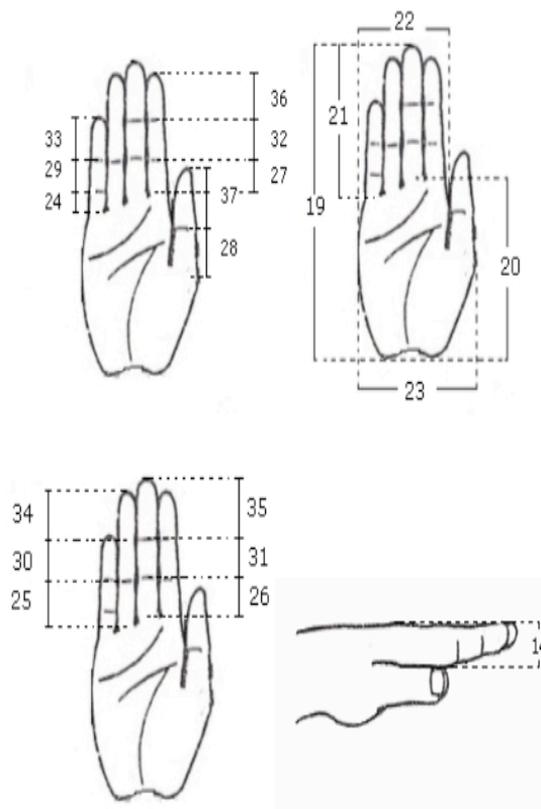
- Proponer una trayectoria de oposición del pulgar -> Dar la secuencia de puntos o la ecuación que defina la trayectoria de oposición del pulgar.
- Tener la mayor cantidad de prensiones-> Se tienen cuatro prensiones básicas de la mano de las cuales solo se definieron las que emplean el pulgar.

El análisis de la trayectoria se llevó a cabo en sujetos con un tamaño de mano del promedio de la población mexicana. A continuación se presenta la tabla 1 con las medidas de la mano, (Flores, Juárez, 2007):

Parámetro	Longitud [cm]
14- Espesor de la mano	3.57
19-Longitud total de la mano	20.5
21- Longitud de los dedos	9.5
22- Ancho de los dedos	8.7
23- Ancho palmar	9.5
24- Longitud falange proximal meñique	4
25- Longitud falange proximal anular	4.9
26- Longitud falange proximal medio	5.2
27- Longitud falange proximal índice	4.7
28- Longitud falange proximal pulgar	2.4
29- Longitud falange medial meñique	2
30- Longitud falange medial anular	2.5
31- Longitud falange medial medio	2.6
32- Longitud falange medial índice	2.4
33- Longitud falange distal meñique	2
34- Longitud falange distal anular	2.4
35- Longitud falange distal medio	2.6
36- Longitud falange distal índice	2.3
37- Longitud falange distal pulgar	3.1

Tabla 1 Antropometría de la mano estándar de la población mexicana

Medidas Antropométricas de la mano



Se realizaron mediciones de la mano de distintos sujetos de acuerdo con este estándar para seleccionar a los sujetos a evaluar.

Se definieron tres trayectorias de prensiones de la mano que ocupan el pulgar, de las cuatro básicas existentes, una de ellas con dos configuraciones distintas, de tal manera que se realizaron experimentos de cuatro movimientos los cuales :

- 1) Oposición libre del pulgar llegando hasta un punto entre el índice y el dedo medio.
- 2) Prensión en punta fina con el dedo índice.
- 3) Prensión en punta fina con dedo índice y medio.
- 4) Prensión en puño.

Finalmente se definió una trayectoria que comprendiera a tres de los cuatro movimientos evaluados y se obtuvo una ecuación que define a dicha curva a partir de la nube de puntos obtenida a través de dichos experimentos.

DISEÑO CONCEPTUAL

Adquisición de movimiento

Para realizar la adquisición de movimiento se investigaron las distintas formas en que se hacen los estudios de movimiento, entre los cuales existen los manuales y los sistemas de visión, dentro de estos últimos se pueden realizar por medio de video y optoelectrónicos.

Métodos estáticos

Dentro de los métodos estáticos, el más utilizado es el del goniómetro que es un método manual con el cual se pueden medir los ángulos que han rotado las falanges de los dedos pero de manera estática por lo cual no se puede tener un estudio completo del movimiento durante alguna prensión. Un goniómetro es un dispositivo usado para medir los ángulos de las articulaciones o rango de movimiento. Para usar un goniómetro es necesario:

- 1) Alinear el fulcro del dispositivo con el fulcro o la articulación a ser medida.
- 2) Alinear el brazo estático del dispositivo con el miembro a ser evaluado.
- 3) Sostener los brazos del goniómetro en su lugar mientras la articulación es movida a través de su rango de movimiento.

El ángulo entre las puntas finales representa el rango de movimiento completo.



Figura 1.1 Uso de goniómetro [1]

Se tiene también el estudio por fotografía de rayos-X el cual tiene la limitante de ser estático y una alta radiación.

Métodos dinámicos

Un método similar al de rayos-X pero que quita la limitante de lo estático y ofrece una mucho menor radiación es la fluoroscopia, la cual es una técnica de imagenología de movimiento en tiempo real de la estructura interna de un paciente empleando un fluoroscopio, que consiste en una fuente de rayos -X y una pantalla fluorescente entre la cual se coloca al paciente. Se tiene la desventaja de obtener un análisis de un solo plano limitando el estudio a una proyección en la cual no es posible tener datos completos o evaluar todas las variables en cuestión.

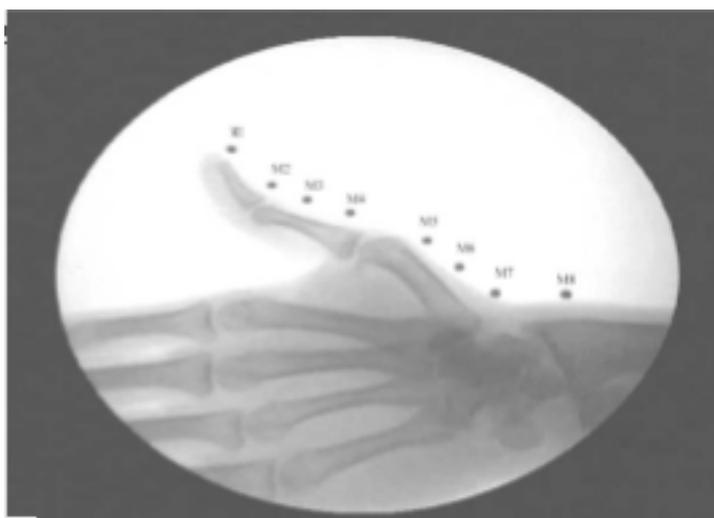


Figura 1.2 Uso de fluoroscopia. [2]

Finalmente se tiene el sistema de video, compuesto por cámaras. Se tienen sistemas de video compuestos desde dos hasta seis cámaras para análisis de movimiento en 3D. Con la ventaja de tener un análisis dinámico, sin algún tipo de radiación y su implementación es más sencilla. En estos sistemas las cámaras están posicionadas en distintos planos y se encuentran sincronizadas, se realizan las grabaciones y después se hace una reconstrucción de las coordenadas espaciales. Es necesario calibrar las cámaras para poder hacer una equivalencia entre pixeles (unidades de medición de las cámaras) y centímetros

(unidades de longitud) y, además de tener un ambiente de luz controlado para realizar todas las pruebas.

Existen sistemas de video que cuentan con un software para realizar el rastreo de objetos y la obtención de sus coordenadas y también es posible obtener las grabaciones y, posteriormente emplear algún software de rastreo de objetos y obtención de sus coordenadas.

Los sistemas más usados actualmente son los de visión, los cuales emplean cámaras sincronizadas colocadas en distintos planos. Kuo y Su (2003) realizaron una comparación entre los métodos mencionados, encontrando que el análisis por sistema de visión obtiene resultados similares a los demás métodos además de tener ventajas como un análisis dinámico, visualización de distintos planos a un menor costo.

Software para procesamiento de video

Como ya se mencionó existen sistemas de video que cuentan con un software que realiza el procesamiento de video y dan al usuario las coordenadas de los objetos a evaluar, pero estos sistemas tienen un costo muy elevado.

Existen diversos programas para el procesamiento de video, tales como *LabView*, *OptiTrack*, *Predator*, *Noesis*, *Mantra*, *TEMA* etc. el problema es que muchos de estos requieren de una programación avanzada para su implementación. El software TEMA no requiere programación, simplemente se cargan los videos de cada plano a evaluar se selecciona el objeto a seguir, el cual se requiere que sea un marcador con contraste con respecto a los otros objetos en el video, y se obtienen las coordenadas del marcador junto con una gráfica de velocidad.

LabView es un software muy usado en la academia y su programación resulta relativamente sencilla. Su módulo de visión tiene la cualidad de poder aplicar distintos filtros de edición y reconocimiento de objetos por formas o por contraste de colores y da como resultado una tabla con las coordenadas de los

objetos evaluados. Para poder realizar este análisis es necesario tener cada cuadro de grabación del video, los cuales se pueden obtener a través de este mismo software.

Bancos de Pruebas

Para realizar pruebas con sistemas de visión es necesario tener un banco de pruebas de tal manera que se puedan realizar diversos experimentos bajo las mismas condiciones. Para diseñar un banco de pruebas es necesario tomar en cuenta distintos factores, como lo es el tipo y posicionamiento de las cámaras, el objeto a seguir, la distancia a la cual se encontrará este objeto, temperatura ambiente del lugar donde se realicen las pruebas, superficie en donde se trabajará, condiciones de luz, entre otras. Para estudios de movimiento de mano se requiere tener un lugar con un clima templado, ya que de tener una temperatura baja los movimientos del cuerpo humano se pueden ver afectados. Es necesario contar con una mesa de trabajo en la cual el sujeto pueda recargar su brazo o en donde poder realizar las pruebas señaladas, dicha mesa de trabajo no debe de presentar alguna pendiente para no alterar la prueba.

Las condiciones de luz resultan importantes ya que es posible generar sombras y alterar la obtención de datos, incidiendo en la identificación de varios objetos y no sólo del marcador estudiado o por ejemplo si hay un reflejo de luz sobre los marcadores es posible que no se pueda realizar la identificación del objeto en puntos críticos y alterar de forma grave la trayectoria de la curva.

Para determinar donde se posicionarán las cámaras y por medio de qué, es necesario tomar en cuenta si el objeto en estudio está dentro del campo de visión de la cámara.

El posicionamiento de las cámaras depende del número de cámaras que se emplean, por ejemplo si tienen dos cámaras, se recomienda colocarlas a 45° y -45° con respecto al objeto en estudio, si se emplean tres cámaras es posible colocarlas perpendiculares al objeto de grabación en tres distintos planos. Para fijarlas es posible usar un tripié o tener algún dispositivo para esto. De usar un

tripié se recomienda que este cuente con un calibrador de nivel para poder asegurar que la cámara esté bien orientada.

Tipos de cámara

Las cámaras que emplean diversos sistemas de video graban a una resolución de 640x480 pixeles a 60 fps. Algunas de las cámaras comerciales que presentan estas características se presentan en la siguiente tabla:

Cámara	fps	Resolución	Costo
National Instruments 722 Smart Camera	60	640 x 480	\$30,785.00 MXN
Xbox Kinect	30	640 x 480	\$1427.00 MXN
Playstation Eye	60	640 x 480	\$500.00 MXN

Las cámaras digitales de uso común presentan como máximo una tasa de video de 30 fps , teniendo como problema que si el sujeto evaluado hace un movimiento rápido puede que no se realice la captura de la posición de los marcadores y además el formato de salida está comprimido, lo que afecta la visibilidad, que también puede resultar en pérdida de datos.

CONFIGURACIÓN

Tipos de bancos de prueba

El banco de pruebas se utilizará para la grabación de los experimentos que consisten en evaluar la punta del pulgar durante el movimiento de oposición del dedo, para esto es solamente necesario que las dimensiones del banco sean las adecuadas para poder visualizar en las cámaras la mano del sujeto a evaluar.

A partir del análisis de la literatura, se determinó que el posicionamiento de las cámaras debía de cumplir con una perpendicularidad entre las tres y posicionar cada una en un plano de grabación distinto y de esta manera se obtiene la serie de puntos espaciales. Se colocaron a una distancia de 25 cm del objeto en estudio ya que a partir de esta distancia las cámaras tienen su mayor campo de visión.

Considerando esto se realizaron distintas pruebas para determinar el cómo se colocaron las cámaras.

La primera opción que se probó fue posicionar tres cámaras comerciales perpendicularmente entre sí, dos de ellas colocadas a una distancia fija con respecto a un punto de origen y al objeto en estudio, sobre una mesa y detenidas con un medio de sujeción de adhesión y la tercera cámara en la parte superior sobre un tripié a la misma distancia que las otras cámaras. Se hizo uso de un nivel para garantizar que la mesa no tuviera alguna pendiente y el estudio fuese adecuado. Este método no resultaba viable ya que cada vez había que colocar y quitar las cámaras en la posición deseada y realizar mediciones para garantizar una correcta posición, Figura 4.1

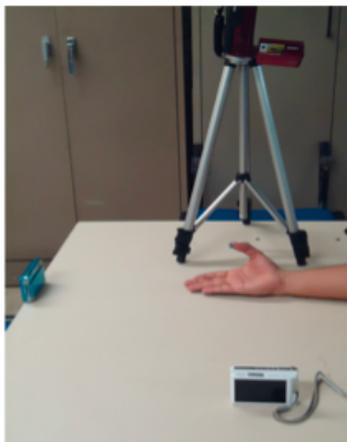


Figura 4.1 Primera prueba colocando cámaras comerciales sobre una mesa y una de ellas en tripié

La segunda opción fue el uso de tres trípodes posicionados a una misma distancia con respecto a un origen fijo y al objeto en estudio. Los tres trípodes fueron dispuestos de la misma manera y se empleó un nivel para garantizar que las cámaras no tuvieran una inclinación al momento de las grabaciones. Se presentó el problema de necesitar colocar y quitar las cámaras cada vez de cada tripié y tener que nivelarlos por lo que se empleaba más tiempo y no era viable para poder realizar muchas pruebas, además de que la cámara superior era difícil de colocar debido a que el tripié obstruía el campo de visión y resultaba complicado el estarla moviendo de posición.

Por lo tanto se pensó en posicionar un riel en la parte superior para poder colocar la cámara y poder desplazarla a lo largo de este riel para revisar distintas posiciones de las cámaras. El problema de este diseño incurría nuevamente en ocupar tiempo para la manufactura del riel y de ser necesario un cambio, realizar estos al riel o manufacturar uno nuevo. A partir de esta idea, se probó la grabación en una mesa que contaba con una repisa sobre la cual se podía colocar la cámara superior en distintas posiciones. Esta idea generó buenos resultados pero de nuevo se perdía mucho tiempo en estar colocando las cámaras cada vez que se realizaba otro experimento.

Considerando esto, se optó por el empleo de una caja transparente con la finalidad de poder dejar pasar la luz y tener un banco de pruebas móvil.

Para resolver el cómo sostener se optó por diseñar orificios en la caja transparente para fijar las cámaras, facilitar su colocación, garantizar perpendicularidad entre las cámaras y que no presentaran ninguna inclinación. Las cámaras están posicionadas equidistantes a un origen y al objeto en estudio. Dicha caja fue diseñada en CAD para poder realizar su manufactura a través de un corte laser el cual tiene un error de corte de 0.3mm, lo cual es una buena tolerancia para garantizar que no haya una variación grande de medidas diseñadas con respecto a las reales.

Software procesamiento de datos

El procesamiento de datos puede ser llevado a cabo mediante diferente software como lo es *Matlab, Mathematica, Excel y Maple*. Cada uno tiene una manera distinta de manejo de datos por lo que es necesario saber como se quieren manipular los datos y como es que se tienen. Por ejemplo, Excel fácilmente puede manejar datos numéricos y es posible realizar operaciones matemáticas a los mismo sin mayor complicación pero no es posible obtener graficas en 3D e inclusive para las gráficas en 2D no es lo más adecuado.

Matlab es un software de manipulación de datos avanzado en el cual es necesario realizar una programación para procesar los datos pero estos se manejan como matrices lo cual puede ser una desventaja ya que el realizar operaciones sobre los datos se tienen que tener diversas consideraciones. Es posible realizar graficación en 3D, dar distintos formatos a las gráficas y sobreponerlas para su comparación, por lo cual podría ser adecuado su uso en esa parte.

Mathematica puede realizar manipulación de datos a través de programación, la ventaja es que se pueden manejar los datos de cualquier forma, ya sea de forma matricial, en forma de tabla o como lista. Es posible realizar operaciones a los datos fácilmente y gráficas tanto en 2D como en 3D, además de poder sobreponer estas gráficas para poder realizar análisis comparativos. Aun más es posible realizar animaciones a partir de los datos obtenidos y realizar simulaciones de mecanismos. Por esto resulta mejor ocupar este software para el post procesamiento de datos, esto es el ver lo que los datos representan.

En distintos momentos de la experimentación se empleó tanto Matlab como Mathematica para procesar los datos concluyendo que Mathematica era el programa que mejor satisfacía las necesidades de la investigación, además de ser más fácil su uso debido a la versatilidad de formas para manejar los datos.

SELECCIÓN DE CONCEPTOS

El dedo pulgar tiene cinco grados de libertad permitiéndole una enorme versatilidad de movimiento a diferencia de los demás dedos de la mano que tienen solamente dos grados de libertad. Debido a esto resulta difícil la definición de sus trayectorias por lo que en el análisis de movimiento de la mano se recurre al estudio de la prensión de objetos. Por lo anterior, la manera en que se definió la trayectoria de oposición del pulgar fue tomando en cuenta el abarcar el mayor número de prensiones con una sola trayectoria, para poder diseñar un mecanismo de un grado de libertad a partir de ésta; para esto se realizó el estudio de los cuatro movimientos antes mencionados.

Se empleó un sistema de visión de tres cámaras para el rastreo de la punta del dedo pulgar durante su movimiento de oposición. Se seleccionaron las cámaras *Playstation Eye* debido a que tienen un costo muy reducido y presentan muy buenas características, similares a las que tienen los sistemas de movimiento comerciales. Para la sincronización de las cámaras se empleó el software *iPisoft* ya que para usar las cámaras en otro software se requería más tiempo al igual que el realizar la programación para la captura y sincronización de las cámaras.

Dichas cámaras cuentan con las siguientes características:

Interfaz: USB 2.0

Conector: USB

Power consumption: DC5V, Max. 500mA

Dimensión (aprox.): 84 x 67 x 57mm

Peso (aprox.): 173g

Longitud de cable (aprox.): 2 metros

Temperatura de operación: 5°C a 35°C

Captura de video: 640 x 480 pixel

Formato de video: Uncompressed o JPEG

Cabeza de lente: 2.1 F-stop, <1% distorsión, enfoque fijo (25cm a ∞ a 75° de

FOV)

Campo de visión (FOV): 56º a 75º FOV zoom óptico

Tasa de cuadros: 640 x 480 a 60 cuadros/segundo, 320 x 240 a 120 cuadros/segundo(fps)

Se empleó la captura de video de 640x480 pixel a 60fps y sin zoom óptico, esto es un campo de visión de 75º.



Cámara *Playstation-Eye* ,empleada para la captura de video

Las cámaras fueron posicionadas en un banco de pruebas de forma de caja cuadrada de acrílico transparente.

Para el rastreo del dedo se empleó el software *LabView* al igual que para el procesamiento del video, esto es la edición de los videos para poder rastrear los objetos al contrastar los marcadores e identificarlos de manera más fácil. Este software genera una tabla con las coordenadas (x,y) de los objetos identificados.

DISEÑO DE DETALLE

Los sistemas de visión por video otorgan datos en unidades de pixel por lo que es necesario realizar una conversión a unidades métricas, dependiendo de las características de la cámara cambia esta relación. Para poder obtener el factor de conversión de unidades es necesario realizar una calibración, esta se puede hacer de diversas formas, la forma en que se hizo fue tomar una foto con una de las cámaras posicionada en el banco de pruebas y se colocó en la toma una cinta métrica, con esta imagen se midió la distancia de 1cm en *LabView* y se obtuvo el número de píxeles a los cuales equivalen a ese 1 cm pudiendo así generar una regla de correspondencia entre píxeles y centímetros; para las cámaras empleadas por cada 1cm se tenían 19 píxeles, teniendo así que :

$$1 \text{ pixel} = 0.052631579 \text{ cm}$$

También se verificó la perpendicularidad de las cámaras, para esto fue necesario realizar esta misma calibración pero en distintos segmentos de la toma, garantizando así que siempre se tenga la misma relación y no haya error en los datos a lo largo del movimiento del objeto en estudio.

Para poder determinar la distancia a la cual se debe posicionar la cámara con respecto al objeto en estudio se puede realizar un análisis del campo de visión, el cual varía de acuerdo a las características de cada cámara.

$$FOV = \text{Pixel pitch} \times \text{Active pixels} \times \text{Working distance} / \text{focal length}$$

donde:

FOV: es el campo de visión en dirección horizontal o vertical.

Pixel pitch: mide la distancia entre los centros de los píxeles adyacentes en dirección horizontal o vertical.

Active Pixel: es el número de píxeles en dirección horizontal o vertical.

Working Distance: es la distancia del elemento frontal (lente externo) del lente al objeto evaluado.

Focal Length: mide que tanto un lente converge o diverge la luz

Resulta necesario realizar el cálculo tanto para el eje vertical como para el horizontal tomando en cuenta la distancia a la cual se encuentra el objeto de grabación con respecto a la cámara. De esta manera es posible determinar la distancia a la cual se puede colocar una cámara con respecto al objeto a estudiar.

Para el caso particular de las cámaras empleadas se sabe por datos del fabricante que el FOV medido en forma angular es de 75° a una distancia de 25 cm del objeto, dicha distancia es a la cual se colocaron las cámaras con respecto a la mano.

FABRICACIÓN Y PRUEBAS

Fabricación de banco de pruebas

Para poder realizar los experimentos teniendo las cámaras siempre en el mismo lugar, a la misma distancia de la mano, se diseñó un banco de pruebas a partir de un diseño en CAD, en el cual se dibujó cada cara de la caja rectangular con un corte de dientes en cada lado y un barreno en cada de las caras en donde se posicionarían las caras. Los cortes fueron simétricos para las caras paralelas. La manufactura de la caja se realizó con corte láser debido a que se tiene un error de 0.03 mm en el corte, otorgando una buena tolerancia, de esta manera realizar la unión de la caja a través de presión y asegurar una buena colocación de las cámaras, ver Figura 6.2

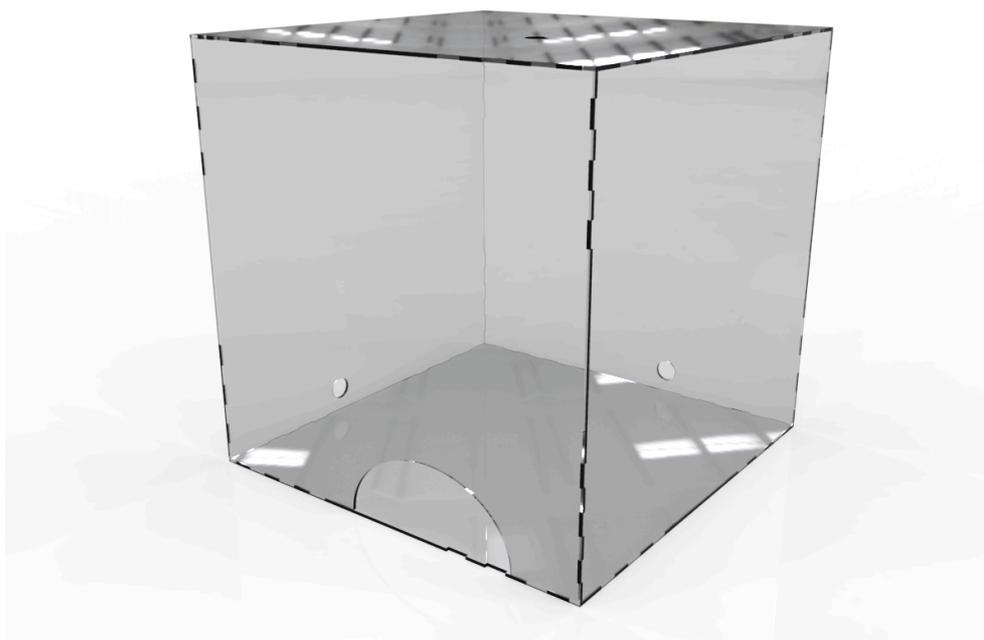


Figura 6.2

Una vez manufacturado el banco de pruebas se colocaron las cámaras y se comprobó que se pudiera observar la mano desde los tres distintos planos y que las tomas fueron las adecuadas. A partir de esto se vio que era necesario realizar un análisis de la disposición de los planos de grabación, ya que es necesario tener un sistema inercial de referencia para los demás planos. Para esto se realizaron

rotaciones a los planos de grabación con respecto a un origen base, quedando las siguientes relaciones en relación a los planos vistos en *LabView* (lv):

Plano b (XY) : $X_{lv} = -Y_b$ $Y_{lv} = -X_b$

Plano c (YZ) : $X_{lv} = -Y_c$ $Y_{lv} = -Z_c$

Plano a (XZ) : $X_{lv} = X_a$ $Y_{lv} = -Z_a$

A continuación se muestra una imagen del banco de pruebas con los sistemas inerciales de cada plano y el del origen donde se indica la correspondencia de las rotaciones de los planos, ver Figura 6.3.

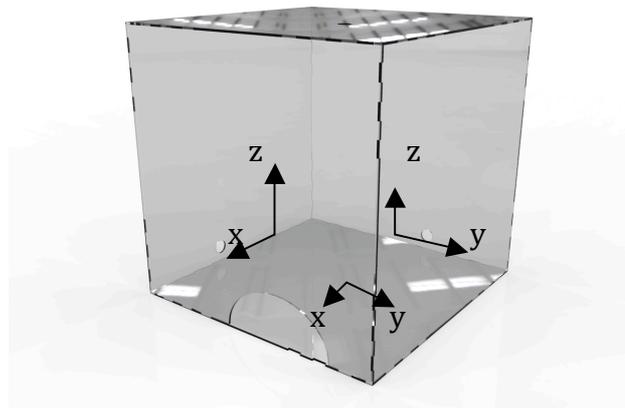


Figura 6.3

Fabricación de sistema de video

El sistema de video se conforma por tres cámaras *Playstation EYE* colocadas sobre el banco de pruebas. Las cámaras se conectan a través de un cable USB a la computadora, debido a la alta cantidad de transferencia de datos es necesario contar con un procesador de buena capacidad, adicionalmente es necesario contar con un controlador, "*CL-EYE Platform Driver*" el cual es distribuido por *Code Laboratories* . Para poder manipular las cámaras se empleó el software *iPi Motion capture* a través de la aplicación *iPi Recorder* en el cual se puede escoger el número de cámaras de las cuales se quiere obtener las grabaciones. Después se escoge el número de cuadros por segundo a los cuales se quiere grabar y el software además realiza una calibración de luz. Finalmente se escoge la ruta de

salida del archivo y se comienza a grabar con las cámaras sincronizadas. Durante la grabación es posible observar las tomas de las tres cámaras o enfocarse en una sola. *iPi Recorder* genera un archivo de video RAW, este formato no presenta ninguna compresión por lo que se obtiene toda la capacidad que la cámara ofrece en términos de pixeles; genera un solo video en donde aparecen las tres tomas de las cámaras juntas por lo cual es necesario separar la toma de cada cámara. Para esto se empleó el programa *iPi Mocap* el cual permite observar cada cámara por separado y se exporta un archivo de video en formato RAW. Al haber separado el video de cada cámara se puede proceder al procesamiento de video.

También se realizó la calibración de las cámaras y se comprobó la perpendicularidad con respecto al objeto en estudio.

Diseño del procesamiento de video

El procesamiento de video es el que se realiza sobre un video para obtener una característica específica de éste. En el caso de la presente investigación se uso el procesamiento de video para poder rastrear la punta del dedo pulgar lo largo de los experimentos realizados. Para esto se utilizó la aplicación de sistema de visión de *LabView*.

Para comenzar es necesario cambiar el formato del video de *RAW* a *.avi* ya que es el que admite *LabView*. Primero se tienen que obtener las tomas que nos interesan del video, esto es seleccionar únicamente los cuadros de grabación desde el comienzo hasta el final del movimiento. Para esto se empleó la aplicación *Vission Assistant*, en la cual, como primer paso el usuario debe de elegir el video a analizar desde el directorio donde este guardado el archivo, después podrá observar cuadro a cuadro el video seleccionado y finalmente deberá hacer una selección del rango de cuadros que desea evaluar. Posterior a la selección de cuadros, es necesario guardar las imágenes en una carpeta seleccionando el formato de la imagen en el cual se quiere guardar. El formato de la imagen es muy importante ya que *LabView* tiene distintos filtros de imágenes dependiendo del tipo de archivo que se tenga, además que ciertos formatos

comprimen las imágenes, por lo tanto en esta investigación se ocupó el formato *TIFF*. El rango de cuadros por video fue el mismo para cada uno de los planos de este mismo para tener así una coordinación en las imágenes de cada experimento.

Al haber realizado esto, se puede continuar a realizar la edición de las imágenes para poder rastrear los objetos en estudio. Para poder realizar dicha edición se implementó un programa en la aplicación *Vission Builder*, en el cual se pueden editar las imágenes de los videos a partir de distintos filtros, para poder identificar los objetos por medio de estos filtros.

PRUEBAS

A partir de la configuración final del banco de pruebas, el posicionamiento de las cámaras y la forma del procesamiento de video, se realizaron distintas pruebas para determinar los colores que se usarían tanto en los marcadores como en el fondo del banco de pruebas, tomando en cuenta también el efecto de ruido que puede causar la luz sobre los materiales empleados esto es el reflejo de la luz, eligiendo como primera opción el recubrir la pared inferior y lateral derecha del banco de pruebas con terciopelo negro y marcadores blancos. Al procesar el video se pudo observar que era muy complicado el discriminar el marcador blanco al cruce con la mano con los distintos filtros de imagen que presenta el software, por lo que se optó por colocar una hoja de un color rosa similar al color de la piel con una dimensión tal que abarcara todo el movimiento realizado por el pulgar sobre el terciopelo y además en la cara frontal cubriendo así todos los planos de grabación, manteniendo el fondo de terciopelo para evitar el reflejo de la luz, como ya se mencionó, y debido a esto se decidió usar marcadores de color negro.

Se llevó a cabo una primera grabación con marcadores planos opacos, pero se pudo observar que durante el movimiento de la mano la dimensión de los marcadores cambiaban afectando de esta manera la precisión en los datos. Debido a esto se emplearon marcadores esféricos ya que no se pierde su

dimensión y se puede saber siempre su volumen. Se colocó un marcador M1 en la punta del pulgar, el cual es nuestro objeto de evaluación, y un segundo marcador M2 en la base de la palma de la mano, el cual se usó como referencia para el seguimiento del dedo, ver Figura 6.4 .

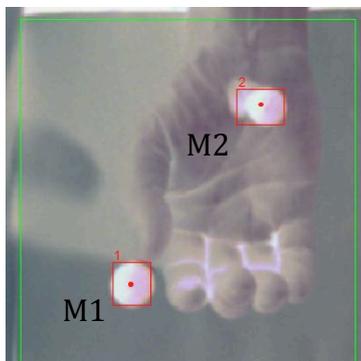


Figura 6.4 marcadores esféricos M1: punta pulgar, M2: referencia.

Experimentación

Para las pruebas se reclutaron cinco personas diestras con ningún antecedente médico de lesión o fractura en el brazo. A cada persona se le explicaron previamente los cuatro movimientos a realizar y se les permitió practicar el movimiento varias veces antes de realizar la prueba final. Las personas evaluadas fueron seleccionadas con respecto al tamaño de su mano el cual se determinó que sería el de la mano estándar de la población mexicana, con las medidas mencionadas anteriormente, esto es debido a que la fabricación de prótesis no puede ser de una dimensión personalizada porque su costo sería muy alto.

Para la realización de las grabaciones fue necesario ubicar el banco de pruebas en un lugar bien iluminado, requiriendo el uso de un reflector para garantizar una iluminación uniforme en las pruebas.

El sujeto debe introducir su mano al banco de pruebas y colocar la mano sobre una hoja de color rosa y llegar con el dedo medio hasta una marca indicada sobre ella, después se procedió a grabar, por lo cual se solicitó a cada sujeto que realizara los movimientos de manera natural, comenzando desde la posición de reposo de la mano y llevaran a cabo la siguiente secuencia para cada caso, ver Figura 6.1 :

1) Prensión en puño: Abducción el pulgar seguido de una rotación y flexión del dedo hasta llegar a la intersección de los dedos anular y medio a una altura media sin tocar la palma de la mano

2) Prensión en punta fina: Abducción del pulgar y rotación con flexión hasta tocar la yema del dedo índice mientras éste es simultáneamente flexionado.

3) Prensión en punta fina: Abducción, rotación y flexión del pulgar hasta tocar las yemas de los dedos índice y medio.

4) Prensión gruesa: Abducción, rotación y flexión del pulgar mientras se flexionan todos los demás dedos terminando el movimiento hasta que se haga contacto con la falange medial de los dedos medio y anular.

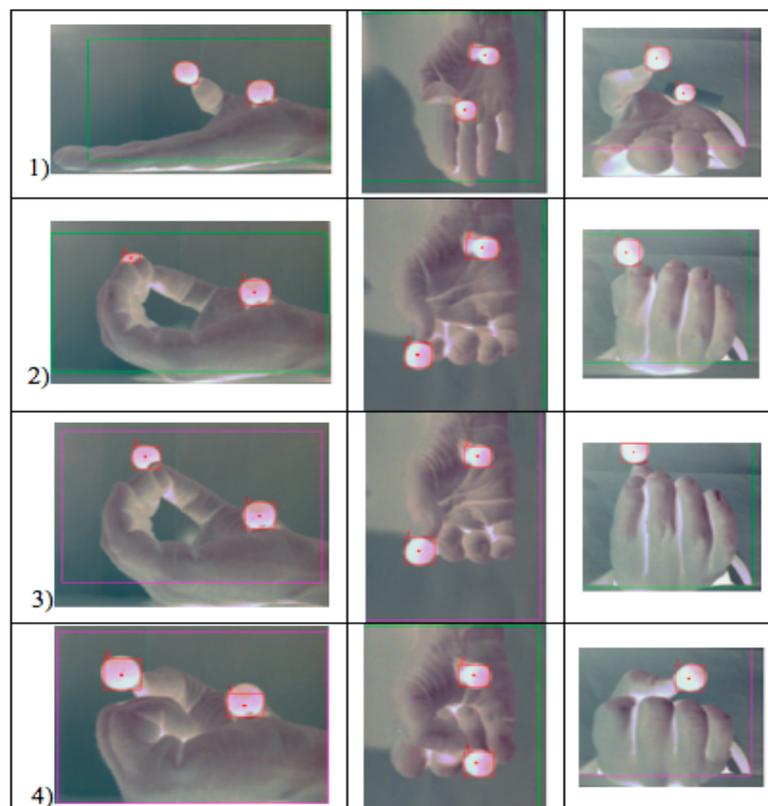


Figura 6.1 movimientos evaluados

Ya determinadas estas características se realizaron los experimentos con los sujetos escogidos para ser evaluados. Previo a la realización de las pruebas se le explicó a cada sujeto por separado los cuatro distintos movimientos a realizar y se les dio tiempo para practicar cada uno de estos, se observó que cada vez que se practicaba se mejoraba el movimiento y se podía realizar con mayor facilidad, rapidez y menor error. Al observar que el sujeto realizaba los movimientos con naturalidad y de manera fluida se procedió a la grabación de los experimentos con la única restricción de colocar su mano dentro del banco de prueba colocando la parte dorsal de la mano sobre la base inferior y que el dedo medio llegara hasta una marca y sentándose de frente al banco de pruebas, como ya mencionó. Los sujetos comenzaron los movimientos en el momento que se les dio la orden, se les solicitó realizar una pausa entre cada movimiento, Figura 6.5



Figura 6.5

Asimismo se realizó una prueba para medir el espacio de trabajo del pulgar en uno de los sujetos, esto debido a que la única información con que se cuenta sobre trayectorias del dedo pulgar es el estudio del espacio de trabajo del pulgar y su intersección con los espacios de los demás dedos, teniendo así el espacio funcional de trabajo del pulgar con los dedos.

El espacio de trabajo del pulgar está definido por dos movimientos extremos, uno es la circumducción del dedo, manteniendo el pulgar en completa extensión y rotándolo hasta su máximo alcance en forma cónica. El otro es manteniendo el pulgar en su máxima flexión, realizar un movimiento de rotación a nivel del metacarpo. De esta manera se obtiene un espacio cónico, teniendo cómo punto mínimo la posición del segundo movimiento y como máximo la posición del primero. Se pidió al sujeto evaluado que realizara estos dos movimientos

repetidas veces antes de la grabación ya que son movimientos difíciles de realizar y muy incómodos, presentando al igual en cada repetición una mejoría. Al finalizar las pruebas, se procedió con el procesamiento de video de acuerdo a lo mencionado anteriormente; para cada sujeto se determinó el intervalo de cuadros a evaluar para cada movimiento y se grabaron las imágenes correspondientes en carpetas individuales. Para editar las imágenes se hicieron pruebas con los distintos filtros que presenta la aplicación *Vission Builder* para seleccionar el filtro que mejor identifique los marcadores. Se escogió el filtro “Not” el cual obtiene la matriz inversa de la matriz de pixeles de la imagen, esto es cambiar los colores oscuros blancos y los blancos a oscuros, esto con el fin de poder contrastar los colores en la imagen y realizar el rastreo a través de identificación de objetos por opacidad, además se tiene la ventaja de tener marcadores esféricos con lo que el programa al momento de identificarlos, proporcionaba la posición del centro de la esfera. Para tener una buena identificación de los objetos, además del filtro ya usado, se determinaron restricciones de identificación en la gama de colores permitiendo así identificar únicamente los marcadores y no algún otro objeto opaco, al igual que limitar el área de trabajo. Además es posible ajustar parámetros de color sobre este filtro como lo son : RGB, HSL, HLV . Se utilizó el formato RGB que permite ajustar los colores rojo, verde y azul de las imágenes. Fue necesario el ajustar estos parámetros para cada plano en particular para poder rastrear los marcadores en todo momento, ver Figura 6.6 .

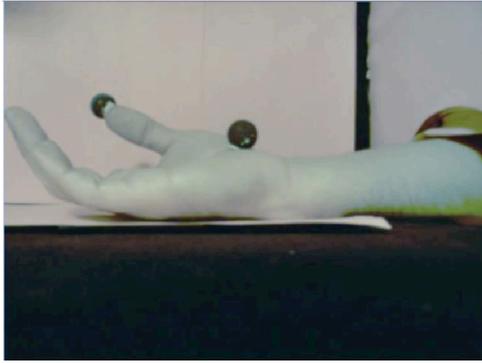


Figura 6.6 Imagen sin filtro

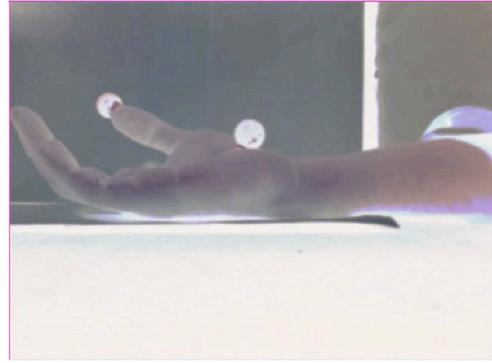


Imagen con filtro *Not*

Los objetos rastreados son identificados por un número de acuerdo a la intensidad de opacidad que presenten, por lo cual puede variar el cómo se numere y se muestren las coordenadas en la tabla que se genera con los datos. Es posible que se detecte más de un objeto en la inspección a pesar de ajustar los parámetros, por lo que es necesario revisar los datos una vez obtenidos para poder identificar cual objeto es cual. Finalmente el programa genera un archivo de texto con las coordenadas (x,y) de los objetos identificados en unidades de pixeles y el tiempo de muestreo de las imágenes.

Procesamiento de datos

Los datos generados por *LabView* fueron vaciados en una hoja de cálculo, colocando en un mismo archivo las coordenadas de cada plano de grabación para cada prueba de los distintos sujetos, se dispusieron en una hoja diferente cada una para facilitar la manipulación de los datos y se identificaron las coordenadas de cada marcador por medio de colores.

Para poder obtener las coordenadas espaciales de la posición tanto del dedo pulgar como de la referencia fue necesario primero que nada convertir las coordenadas a unidades métricas, con el factor de conversión obtenido a través de la calibración de las cámaras. Después se hizo una rotación de ejes para tener los datos de manera correcta y congruentes en cuanto a signo, esto es, todos referenciados a un mismo sistema inercial. Además resolutivo necesario el restarle

el radio de la esfera a las coordenadas en unidades de cm para obtener la coordenada real de la punta del dedo pulgar.

Finalmente se juntaron las coordenadas correspondientes a cada coordenada, esto es de los planos X1Y1, X2Z1, Y2Z2, se hicieron coincidir X1 con X2, Y1 con Y2 y Z1 con Z2 y se obtuvo una coordenada resultante a través de un promedio simple, formando así las coordenadas (x,y,z) espaciales. En algunos casos no se obtuvieron datos continuos, para solucionar esto se realizó una interpolación para obtener los datos faltantes.

Ya obtenidas las coordenadas espaciales para cada uno de los movimientos en cada uno de los sujetos evaluados, se realizó un programa en *Mathematica* para poder visualizar las curvas de dichas coordenadas. Este programa obtiene los datos de las coordenadas desde un archivo de hoja de cálculo, localizado en la computadora con que se esté trabajando. Se genera una lista de los elementos del archivo de las coordenadas del dedo pulgar y de la referencia y se gráfica en 3D cada curva para su análisis por separado. Además se obtiene otra gráfica trazando vectores con origen en la referencia hasta las coordenadas de la yema del pulgar, pudiendo así definir un volumen de trabajo para cada movimiento.

Es necesario referenciar todas las coordenadas a un mismo punto, por lo que se restó el primer punto de las coordenadas de referencia tanto a las coordenadas de referencia como a las coordenadas del dedo pulgar, ver Figura 6.7

```
(*y=Import["/Users/ivantp/Dropbox/Prótesis/Tesis Ivan/Coord finales/refalartur.xls"]*)
y = Import["/Users/ivan/Documents/UNIVERSIDAD/Tesis/Articulo Trayect/Coord finales/refalartur.xls"];
Y = Flatten[y, 1];
Yp = Table[Y[[i]], {i, 1, 152, 1}];
Length[Y]
Length[Yp];

(*z=Import["/Users/ivantp/Dropbox/Prótesis/Tesis Ivan/Coord finales/pulgalartur.xls"]*)
z = Import["/Users/ivan/Documents/UNIVERSIDAD/Tesis/Articulo Trayect/Coord finales/pulgalartur.xls"];
Z = Flatten[z, 1];
Zp = Table[Z[[j]], {j, 1, 152, 1}];
Length[Z]
Length[Zp];

pts = {Yp, Zp};
(*spline de cada grafica*)
Pulgar = Graphics3D[{BSplineCurve[Z], Green, Line[Z], Red, Point[Z]}];
Refer = Graphics3D[{BSplineCurve[Y], Green, Line[Y], Red, Point[Y]}];
Show [Refer, Pulgar]
Refer = Graphics3D[{BSplineCurve[pts], Green, Line[pts], Red, Point[pts]}];
```

Figura 6.7 Código para importar datos de las coordenadas esféricas para graficar las nubes de puntos obtenidas.

RESULTADOS

Se obtuvieron los videos de cada uno de los sujetos para cada una de las pruebas a través del software iPirecorder, como ya se mencionó se obtiene un solo video con las tres tomas de las cámara, ver Figura 7.1

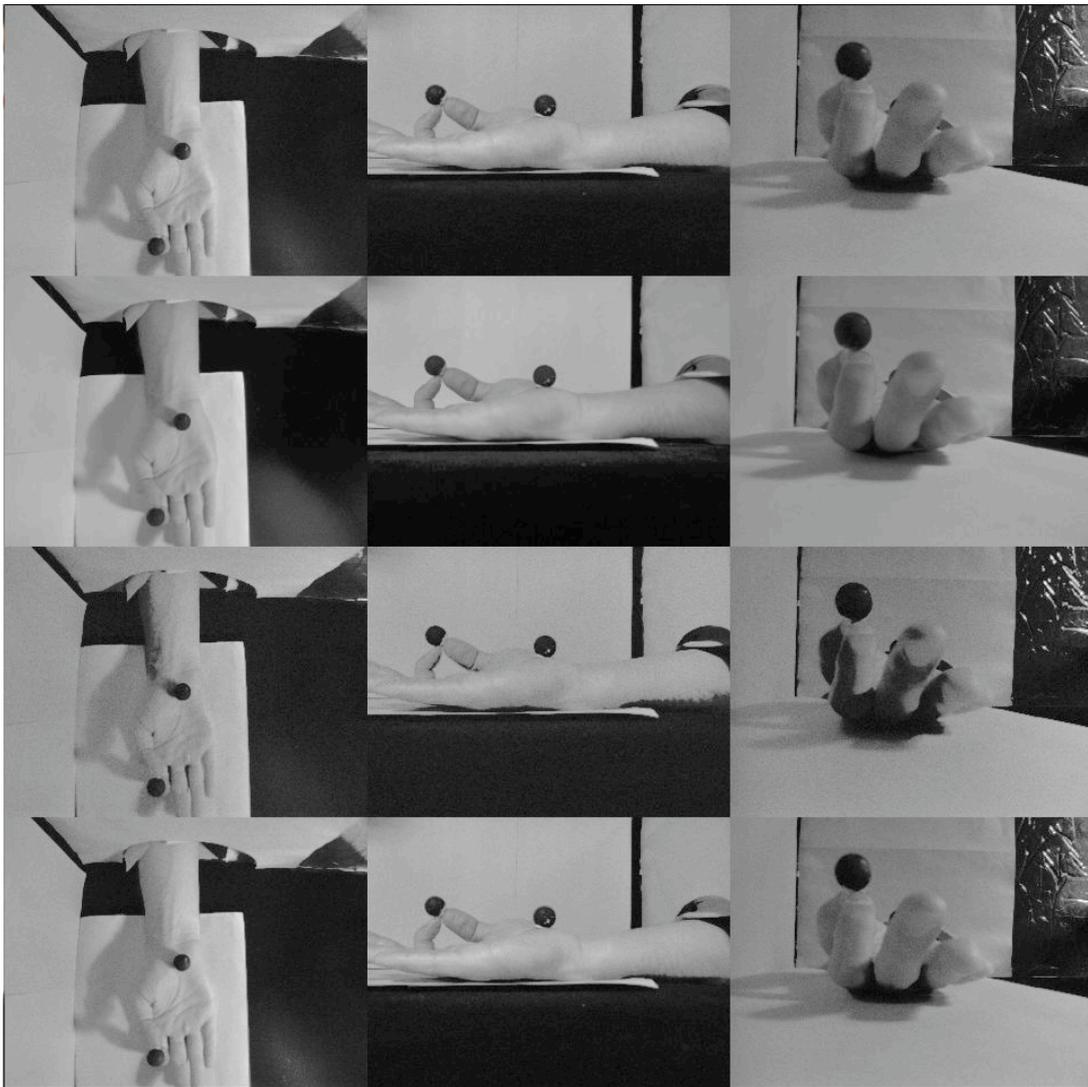


Figura 7.1

Después se realizó la separación del video de cada cámara por medio del software iPimotion, obteniendo tomas individuales para cada plano, ver Figura 7.2



Figura 7.2

Al tener los videos individuales se determinaron los intervalos de grabación para cada movimiento de cada sujeto y se utilizó la aplicación Vission Assitant para obtener las imágenes cuadro a cuadro de los segmentos de video de los cuatro distintos movimientos realizados, ver Figura 7.3

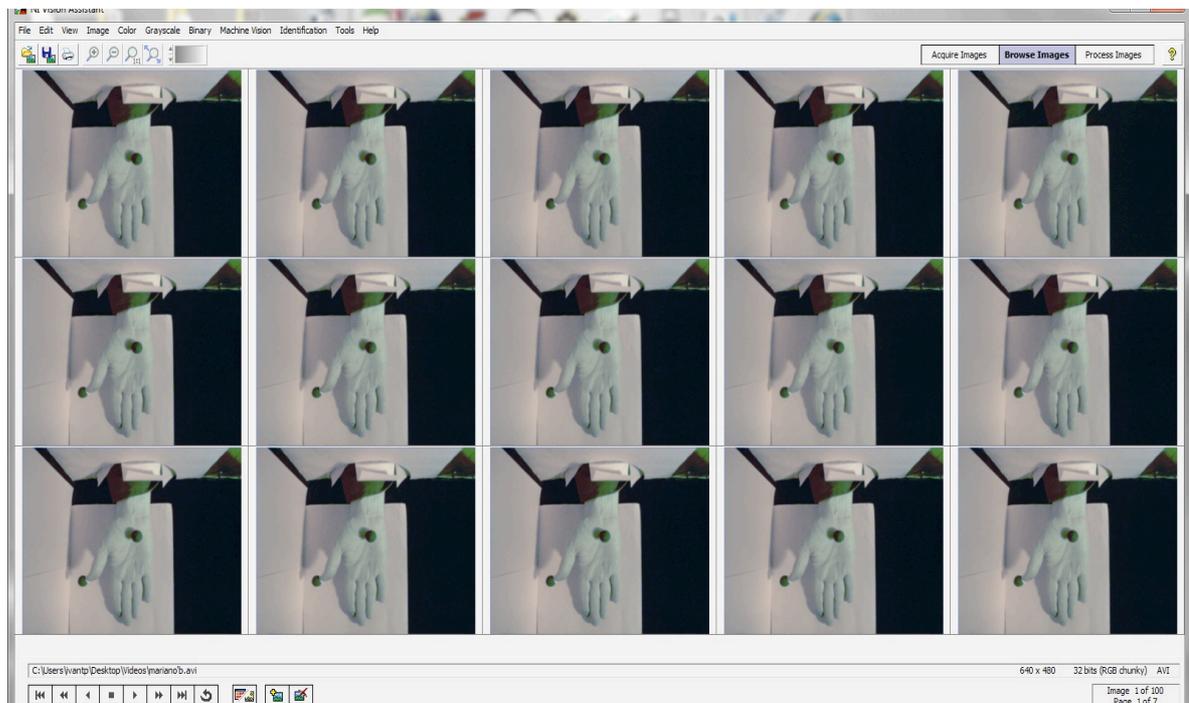


Figura 7.3

Ya que se tienen todas las imágenes de las pruebas, se realizó la edición conforme a lo mencionado anteriormente, obteniendo las coordenadas (x,y) de cada plano de grabación, ver Figura 7.4

State Name	Inspect	Inspect	Inspect	Inspect	Inspect	Inspect	Inspect	Inspect	Inspect	Inspect
Step Name	Detect	Objects	1	Detect	Objects	1	Detect	Objects	1	Detect
Result Name	Step	Status	Status	#	Objects	Object	[1].X	Position	(Pixel)	Object
Units			pix	pix	pix	pix				
Iteration	Date	Time	Time (milliseconds)	Status	Status	pix	pix	pix	pix	pix
1	07/11/2011	02:05:54 p.m.	651	Pass	Pass	2.00000	180.06818	338.15152	332.22791	226.63509
2	07/11/2011	02:05:54 p.m.	736	Pass	Pass	2.00000	179.99750	339.52881	332.11353	226.53699
3	07/11/2011	02:05:54 p.m.	819	Pass	Pass	2.00000	180.03374	340.48434	332.21530	226.45525
4	07/11/2011	02:05:54 p.m.	902	Pass	Pass	2.00000	179.83942	340.58881	332.46982	226.59692
5	07/11/2011	02:05:54 p.m.	986	Pass	Pass	2.00000	179.71223	340.67386	332.17557	226.51625
6	07/11/2011	02:05:55 p.m.	069	Pass	Pass	2.00000	179.37231	340.75180	332.16751	226.53093
7	07/11/2011	02:05:55 p.m.	152	Pass	Pass	2.00000	179.14919	341.04196	332.26019	226.62755
8	07/11/2011	02:05:55 p.m.	237	Pass	Pass	2.00000	178.46635	341.40140	332.04968	226.45351
9	07/11/2011	02:05:55 p.m.	320	Pass	Pass	2.00000	177.92627	341.74194	332.60233	226.47021
10	07/11/2011	02:05:55 p.m.	403	Pass	Pass	2.00000	177.45676	342.05099	332.88287	226.54312
11	07/11/2011	02:05:55 p.m.	487	Pass	Pass	2.00000	176.92551	341.74493	332.63104	226.48856
12	07/11/2011	02:05:55 p.m.	573	Pass	Pass	2.00000	176.83112	341.62000	332.77765	226.40359
13	07/11/2011	02:05:55 p.m.	657	Pass	Pass	2.00000	176.63637	341.70731	332.39899	226.20844
14	07/11/2011	02:05:55 p.m.	741	Pass	Pass	2.00000	176.62227	342.04584	332.51340	226.18901
15	07/11/2011	02:05:55 p.m.	823	Pass	Pass	2.00000	176.15678	342.62711	332.64902	226.04129
16	07/11/2011	02:05:55 p.m.	906	Pass	Pass	2.00000	175.63559	343.04874	332.81137	225.89923
17	07/11/2011	02:05:55 p.m.	989	Pass	Pass	2.00000	175.41336	343.25052	332.90222	225.77705
18	07/11/2011	02:05:56 p.m.	075	Pass	Pass	2.00000	175.33759	343.49683	333.23007	225.83530
19	07/11/2011	02:05:56 p.m.	160	Pass	Pass	2.00000	175.39212	343.68466	332.95380	225.80359
20	07/11/2011	02:05:56 p.m.	244	Pass	Pass	2.00000	175.30165	343.85123	333.08728	225.59178
21	07/11/2011	02:05:56 p.m.	328	Pass	Pass	2.00000	175.05305	343.98981	333.25354	225.56371
22	07/11/2011	02:05:56 p.m.	413	Pass	Pass	2.00000	174.91650	344.68390	333.45117	225.43059
23	07/11/2011	02:05:56 p.m.	498	Pass	Pass	2.00000	175.05859	345.82227	333.70026	225.32722
24	07/11/2011	02:05:56 p.m.	582	Pass	Pass	2.00000	175.48961	346.74481	333.73752	225.23303
25	07/11/2011	02:05:56 p.m.	666	Pass	Pass	2.00000	175.82954	347.36365	334.34152	225.32730
26	07/11/2011	02:05:56 p.m.	748	Pass	Pass	2.00000	175.98674	348.10226	334.12064	225.27107
27	07/11/2011	02:05:56 p.m.	830	Pass	Pass	2.00000	176.24486	348.95889	334.24222	225.06735
28	07/11/2011	02:05:56 p.m.	912	Pass	Pass	2.00000	176.81723	350.68716	334.46085	224.99486
29	07/11/2011	02:05:56 p.m.	996	Pass	Pass	2.00000	178.08629	352.80881	334.57703	224.88643
30	07/11/2011	02:05:57 p.m.	080	Pass	Pass	2.00000	179.77742	355.26233	334.71875	224.95183
31	07/11/2011	02:05:57 p.m.	165	Pass	Pass	2.00000	180.87422	356.35403	335.01035	224.71022
32	07/11/2011	02:05:57 p.m.	249	Pass	Pass	2.00000	182.24368	357.58395	335.36517	224.56937
33	07/11/2011	02:05:57 p.m.	333	Pass	Pass	2.00000	184.28864	359.07144	335.53262	224.45432
34	07/11/2011	02:05:57 p.m.	418	Pass	Pass	2.00000	187.40646	360.85654	335.53946	224.37369
35	07/11/2011	02:05:57 p.m.	502	Pass	Pass	2.00000	190.67957	362.35648	335.48413	224.30556
36	07/11/2011	02:05:57 p.m.	585	Pass	Pass	2.00000	193.05952	363.30820	335.76221	224.22061
37	07/11/2011	02:05:57 p.m.	670	Pass	Pass	2.00000	194.75523	363.92932	335.72995	224.12834
38	07/11/2011	02:05:57 p.m.	752	Pass	Pass	2.00000	196.18475	364.39404	336.13254	224.11111
39	07/11/2011	02:05:57 p.m.	835	Pass	Pass	2.00000	197.67183	364.86047	336.41083	224.24571
40	07/11/2011	02:05:57 p.m.	919	Pass	Pass	2.00000	200.68582	366.01276	336.14417	224.17195
41	07/11/2011	02:05:58 p.m.	003	Pass	Pass	2.00000	204.98495	366.87970	336.36340	224.09019
42	07/11/2011	02:05:58 p.m.	086	Pass	Pass	2.00000	208.45012	367.40524	336.56470	224.13986
43	07/11/2011	02:05:58 p.m.	171	Pass	Pass	2.00000	211.28230	367.71530	337.08923	224.01312
44	07/11/2011	02:05:58 p.m.	256	Pass	Pass	2.00000	214.26285	368.00119	337.36209	223.78954
45	07/11/2011	02:05:58 p.m.	339	Pass	Pass	2.00000	217.82169	368.53372	337.53918	223.71049
46	07/11/2011	02:05:58 p.m.	423	Pass	Pass	2.00000	221.43094	369.12277	337.71222	223.67674
47	07/11/2011	02:05:58 p.m.	507	Pass	Pass	2.00000	225.48372	369.61157	337.91040	223.57576
48	07/11/2011	02:05:58 p.m.	591	Pass	Pass	2.00000	228.76720	369.78046	337.82846	223.45213
49	07/11/2011	02:05:58 p.m.	675	Pass	Pass	2.00000	232.07664	369.58563	338.13831	223.47340
50	07/11/2011	02:05:58 p.m.	760	Pass	Pass	2.00000	235.30270	369.24619	338.66846	223.49400
51	07/11/2011	02:05:58 p.m.	844	Pass	Pass	2.00000	237.92244	368.93317	338.73816	223.16579
52	07/11/2011	02:05:58 p.m.	928	Pass	Pass	2.00000	240.77321	369.28320	338.82346	223.14757
53	07/11/2011	02:05:59 p.m.	013	Pass	Pass	2.00000	243.06375	369.80637	339.04593	222.98163
54	07/11/2011	02:05:59 p.m.	098	Pass	Pass	2.00000	245.14784	370.31314	338.86588	222.97211
55	07/11/2011	02:05:59 p.m.	182	Pass	Pass	2.00000	247.07585	370.85297	339.19455	223.01686
56	07/11/2011	02:05:59 p.m.	266	Pass	Pass	2.00000	248.75621	371.22131	338.96707	222.98419

Figura 7.4 Tabla de datos generada por LabView

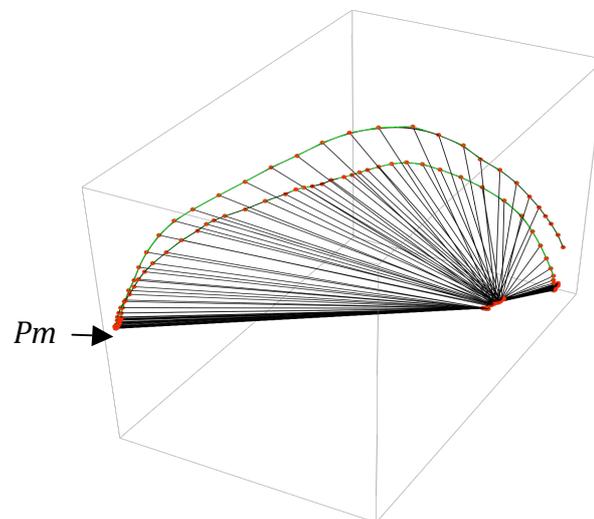
Después de realizar las operaciones a los datos correspondientes a la conversión de unidades, rotación de ejes y la resta del radio de los marcadores se obtuvieron las coordenadas espaciales de todos los movimientos para cada sujeto, teniendo como resultados dos conjuntos de triada de coordenadas, uno del marcador de referencia y otro del marcador de la punta del dedo pulgar en unidades de cm, ver Figura 7.5

REFERENCIA			PULGAR		
X	Y	Z	X	Y	Z
0.68856737	-13.070633	-15.121194	0.95778158	-9.1827811	-9.8893863
0.68969974	-13.073189	-15.122026	0.95565421	-9.1940295	-9.8311187
0.68131053	-13.076354	-15.128241	0.95154395	-9.2095816	-9.7324116
0.68035395	-13.080502	-15.124672	0.94657447	-9.2257908	-9.5670934
0.68005526	-13.080423	-15.133604	0.95651921	-9.2456461	-9.3339603
0.67449868	-13.084639	-15.134491	0.95600368	-9.2968687	-9.0827424
0.68226684	-13.083377	-15.143618	0.94031605	-9.3830037	-8.8552024
0.67335684	-13.086749	-15.14947	0.92353421	-9.4721013	-8.6508671
0.67395026	-13.085066	-15.151905	0.90994342	-9.5438382	-8.5120382
0.66852842	-13.088921	-15.158158	0.89588921	-9.5903958	-9.1143389
0.66893553	-13.088284	-15.171033	0.85158816	-9.6619945	-8.9991147
0.66517553	-13.091626	-15.176766	0.80114395	-9.7381311	-8.8110153
0.66484711	-13.095965	-15.182412	0.75693421	-9.8397342	-8.5250524
0.66760184	-13.095255	-15.184307	0.7111375	-9.9528947	-8.1840058
0.66001105	-13.098607	-15.190888	0.67710526	-10.053352	-7.8825755
0.65302737	-13.101703	-15.194992	0.65655316	-10.120851	-7.6905763
0.65404711	-13.102191	-15.200992	0.647695	-10.159609	-7.5685242
0.66035053	-13.09902	-15.21249	0.63918026	-10.210539	-7.4478797
0.65675184	-13.100141	-15.215498	0.56460368	-10.356018	-7.1921789
0.65685	-13.101058	-15.224068	0.45827658	-10.58027	-6.8390392
0.65484447	-13.107863	-15.233237	0.34475395	-10.754251	-6.5853816
0.64795237	-13.111286	-15.236591	0.26865474	-10.918113	-6.3496208
0.64305763	-13.114465	-15.238602	0.24445421	-11.059657	-6.1794053
0.64059211	-13.114597	-15.243125	0.22350579	-11.194737	-6.0563842
0.63689526	-13.114363	-15.248765	0.19375211	-11.334606	-5.9392366
0.63792421	-13.116411	-15.249534	0.13568526	-11.478403	-5.7983045
0.63769289	-13.119501	-15.256529	0.03362921	-11.627361	-5.6297668
0.63574289	-13.12536	-15.255356	-0.0914668	-11.780367	-5.4577816
0.63409184	-13.125779	-15.251375	-0.1906924	-11.924756	-5.30831
0.62532605	-13.128805	-15.25275	-0.2515045	-12.062378	-5.2046905
0.63405816	-13.125129	-15.251881	-0.3322913	-12.197345	-5.1105726
0.63172921	-13.123566	-15.252935	-0.4169216	-12.331391	-5.0117808
0.63221816	-13.126459	-15.254769	-0.488055	-12.462292	-4.8997826
0.63044079	-13.125901	-15.260294	-0.5647434	-12.587508	-4.7875974

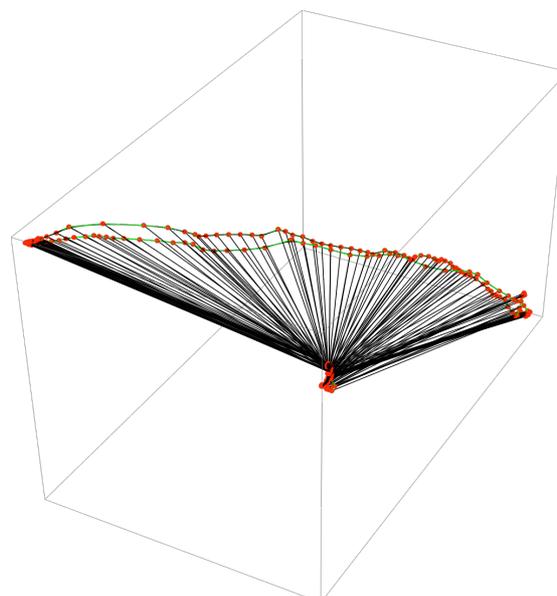
Figura 7.5 Coordenadas espaciales del marcador del pulgar y de referencia.

Se realizó la programación pertinente para poder graficar cada una de las trayectorias, obteniendo una gráfica en 3D para cada uno de los experimentos. A continuación se muestran las gráficas de un sujeto para cada uno de los cuatro movimientos en los cuales se observa todo el movimiento del dedo pulgar en las pruebas, donde se tienen un punto inicial que es teniendo el pulgar en posición de reposo, un punto máximo P_m el cual se tiene cuando el usuario llega a la posición en la que se realiza el contacto entre los dedos para tener una prensión y un punto final donde se regresa a la posición de reposo de la mano.

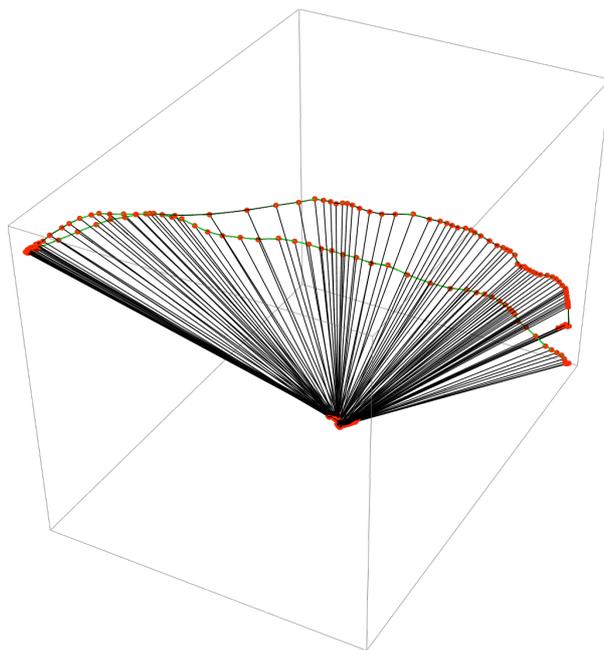
1) MOVIMIENTO DE OPOSICIÓN LIBRE



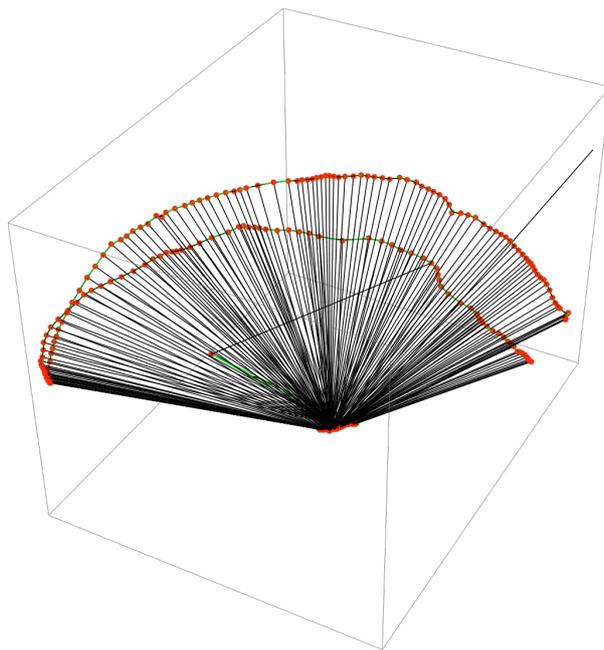
2) MOVIMIENTO DE PRENSIÓN EN PUNTA FINA CON ÍNDICE



3) MOVIMIENTO DE PRENSIÓN EN PUNTA FINA CON ÍNDICE Y MEDIO



4) MOVIMIENTO DE PRENSIÓN GRUESA.



Al realizar un análisis gráfico se pudo observar que el regreso en los distintos movimientos (retroposición) no era el mismo que la ida y que además no se llegaba al mismo punto de inicio. Debido a esto y a que en el diseño de mecanismos para prótesis se realiza el mismo recorrido de ida que de regreso se optó por tomar en cuenta solo la parte de la ida de los movimientos. Para esto se tuvo que realizar un análisis con los datos de coordenadas y los videos para evaluar el punto máximo de movimiento, P_m , y así establecer el final de la trayectoria de ida de cada uno de los sujetos en las distintas pruebas. Para poder evaluarlos se juntaron los datos de cada prueba y se determinó que era necesario el tener el mismo número de puntos en la trayectoria, por lo cual se fijó el número máximo de puntos a partir del sujeto que tuviera el menor número de puntos. Se sustrajeron a los puntos de los demás sujetos aquellos que tenían la menor variación entre sí, posterior a esto se graficaron las trayectorias promedio de cada movimiento, ver Figura 7.6, pudiendo observar un patrón similar en los recorridos, por lo cual se sobrepusieron estas con el fin de realizar comparaciones entre los movimientos y encontrar relaciones entre ellos para poder diseñar un mecanismo de 1 GDL que comprenda el mayor número de prensiones. Se pudo identificar que existen intersecciones entre las gráficas al igual que una similitud entre la forma de las curvas. Aun más se pudo identificar una envolvente en la cual están contenidas las cuatro trayectorias pudiendo así determinar esta envolvente como el volumen en donde se puede encontrar una trayectoria que comprenda distintas prensiones, además se observó que existe una gran similitud entre el 1er y 4º movimiento, y el 2º y 3er movimiento, ver Figura 7.7. En el primer caso se observan levantamiento y decaimientos de la gráfica similares, esto era esperado ya que se trata de una prensión muy similar.

A su vez se sobrepusieron estas trayectorias con el espacio de trabajo del dedo pulgar para poder verificar que los puntos se encuentran dentro de este espacio, ya que como se mencionó no se cuenta en la literatura con trayectorias del pulgar sino solo con algunos estudios del espacio de trabajo del pulgar, Su, Kuo 2003; Kramper, Cruz 2003; Kuo, Chu, 2008; y se puede observar que se obtuvieron resultados similares a estos trabajos, identificando los distintos

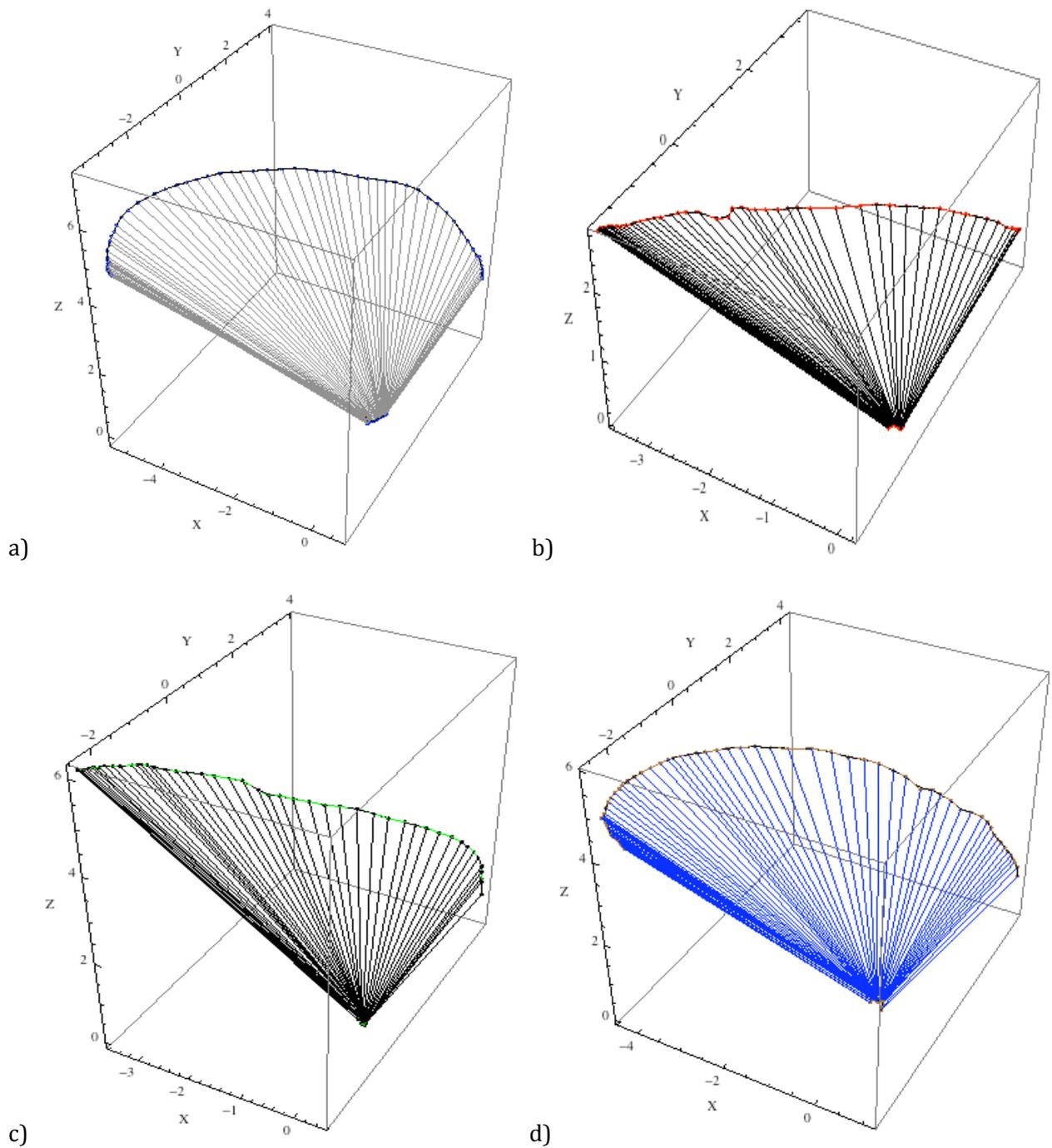
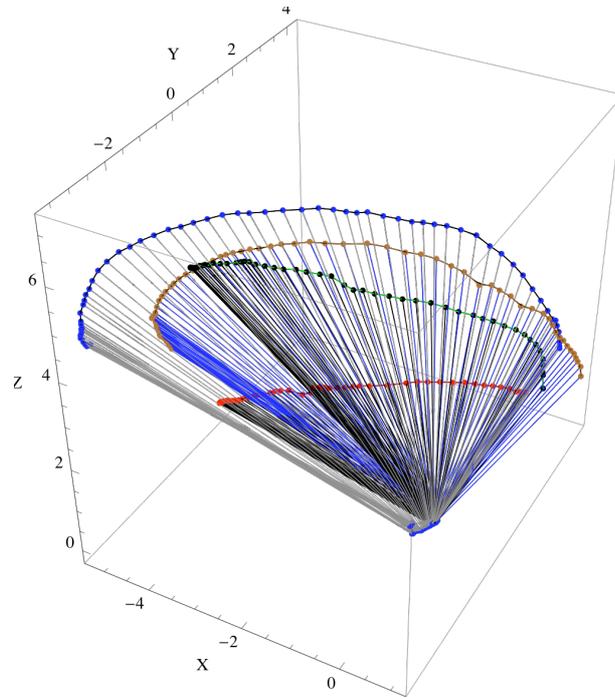


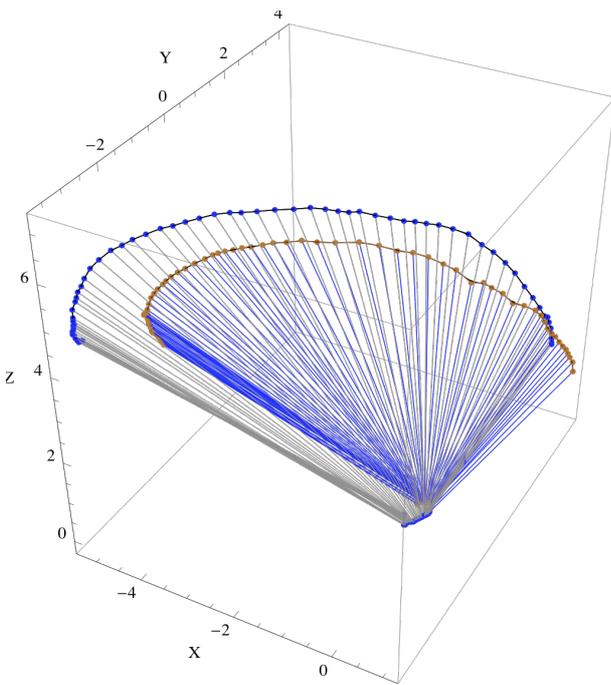
Figura 7.6

a) presión gruesa (oposición libre), b) presión en punta fina con dedo índice, c) presión en punta fina con dedo índice y medio, d) presión gruesa (oposición con puño cerrado).

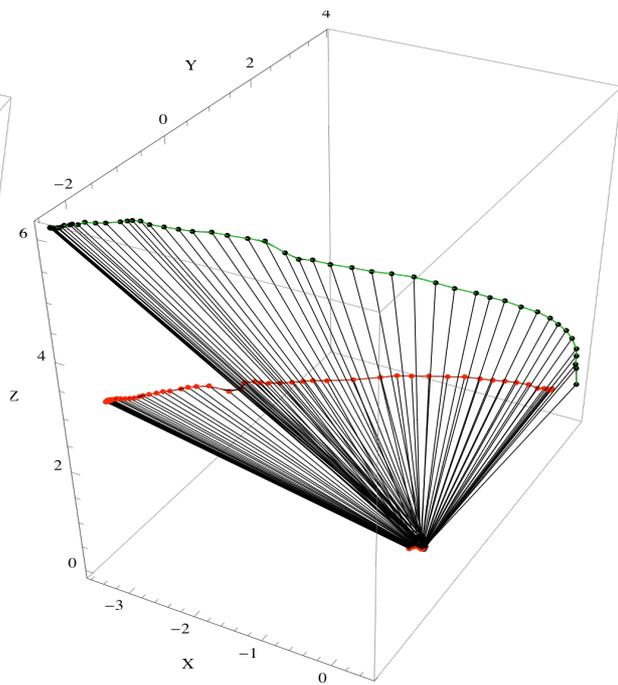
movimientos a lo largo de la circumducción, esto es una sección de abducción, pasando por una rotación y finalmente la adducción del pulgar. Ver Figura 7.8.



a)



b)

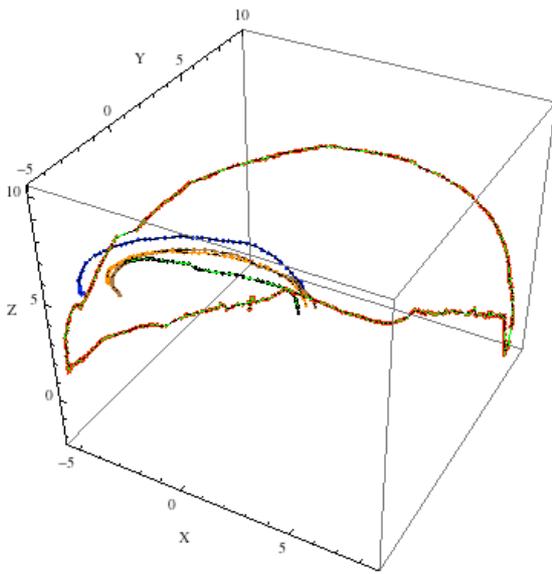


c)

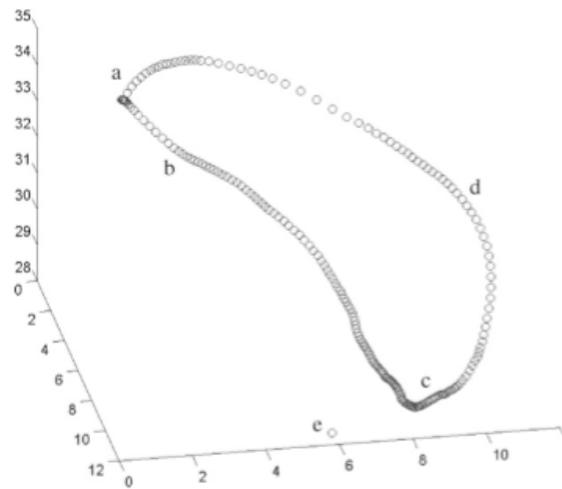
Figura 7.7 a) superposición de trayectorias promedio, b) graficas de primer y cuatro movimiento, trayectorias de segundo y terecer movimiento.

Para las gráficas b) y c) se puede apreciar curvas con características similares pero difieren en la altura, esto debido a la posición del pulgar.

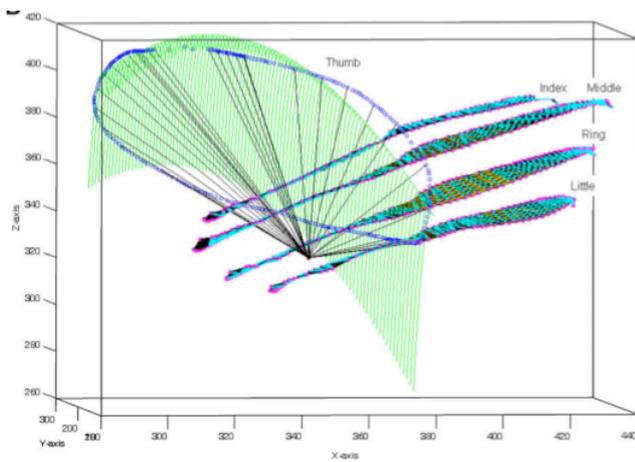
Se puede apreciar en la imagen a) una sección entre la gráfica azul y la verde en la en la cual existen intersecciones y en dicho espacio se puede definir una trayectoria.



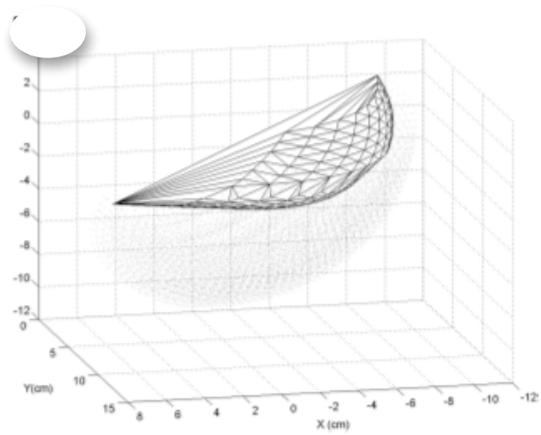
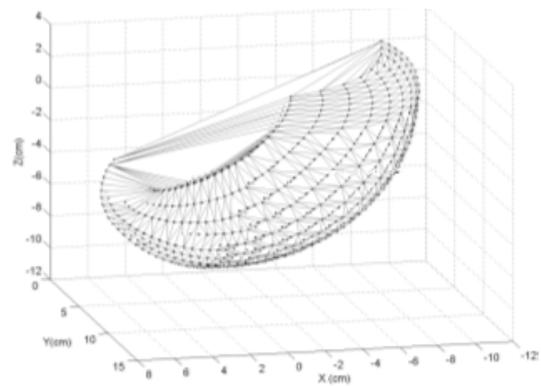
a)



b)



c)



d)

Figura 7.8 a) espacio de trabajo y trayectorias promedio; b) espacio de trabajo Kuo, Su 2003; c) espacio de trabajo de pulgar intersectando espacio de trabajo dedos, Kuo, Chu, 2008; d) espacio de trabajo Kramper, Cruz 2003. Se puede apreciar las similitud en la curva de las distintas graficas mostradas, validando el método empleado en este trabajo.

Con el fin de poder realizar un análisis más a fondo de las trayectorias y obtener características particulares de cada movimiento se obtuvieron las gráficas por planos de cada movimiento y se compararon las de los movimientos más similares. Se observó para el 1er y 4º movimiento una similitud a lo largo del recorrido pudiendo identificar claramente un rizo al final del movimiento el cual está asociado con el aumento en la flexión de la falange, ver Figura 7.10a. Ambos presentan un levantamiento y curvatura similar donde se puede identificar la abducción al principio de la gráfica y la rotación en la parte media, pudiendo combinar de esta manera dos variaciones de la presión gruesa, una introduciendo los dedos triarticulados en la palma y otra con los dedos flexionados sin hacer contacto con la palma.

En el 2º y 3er movimiento se tienen en los dos una presión en punta fina, por lo que resulta congruente el obtener curvas con una forma similar pero se identifica una diferencia importante, una mayor abducción y rotación para la presión con dedo índice y medio, ver Figura 7.10b.

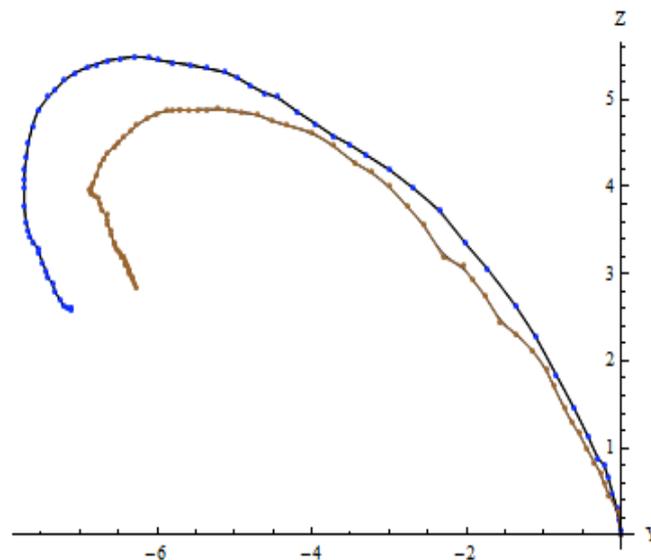


Figura 7.10a. Gráfica de plano de la presión en puño (café) y oposición libre (azul).

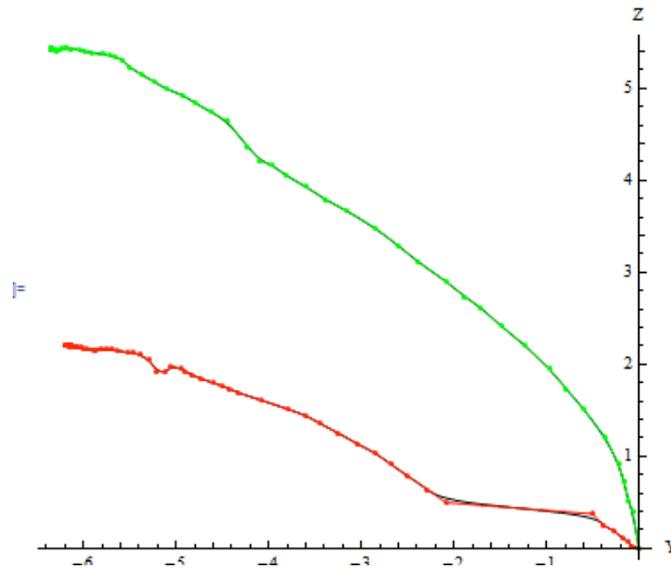


Figura 7.10b Gráfica de plano de prensión en punta fina con dedo índice (rojo), índice y medio (verde)

Posteriormente se realizó el análisis conjunto de los planos de los cuatro movimientos en donde se encontraron características similares en tres de los cuatro movimientos, como lo es el comportamiento de abducción y adducción al momento de la rotación, al igual que el comportamiento de flexión el cual cambia de acuerdo a la distancia recorrida y posición final de la punta del pulgar, ver Figura 7.11. La variación en el rizo final es debido a una rotación angular en la falange proximal que para los fines de diseñar una prótesis no se toma en cuenta ya que el pulgar en una prótesis es un elemento rígido y no presentan rotación en las distintas falanges.

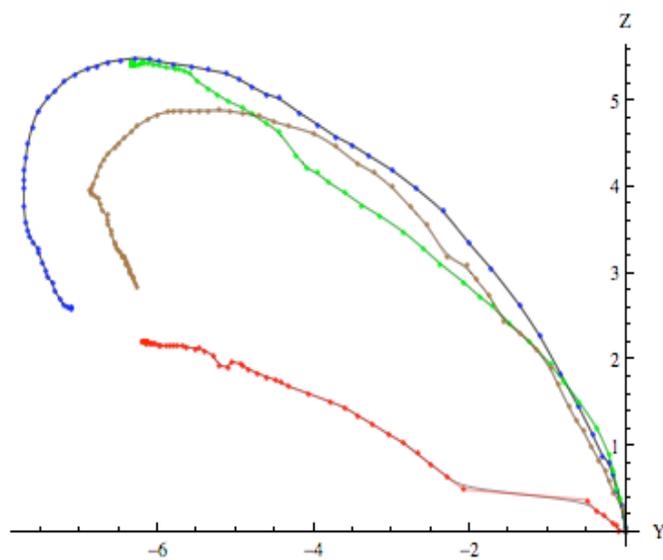


Figura 7.11. Curva azul: 1er movimiento. Curva roja 2º movimiento. Curva Verde: 3er movimiento. Curva café 4º movimiento.

A partir de este análisis se definió una región de operación en la cual se pueden combinar tres de los cinco movimientos estudiados, con lo que se determinó el espacio en el cual se debe de encontrar la trayectoria definitiva para el diseño del mecanismo. Esta trayectoria se definió como el promedio simple de las curvas promedio de los movimientos 1, 3 y 4, ver Figura 7.12. Es posible observar que esta trayectoria promedio se encuentra dentro de la envolvente mencionada e intersecta en cierto puntos con las gráficas promedio de los distintos movimientos asegurando de esta manera el que comprenda más de una prensión a lo largo del recorrido. El poder realizar los tres movimientos que se conjuntaron dependerá del control que se le dé a los dedos de la prótesis para intersectar con el pulgar.

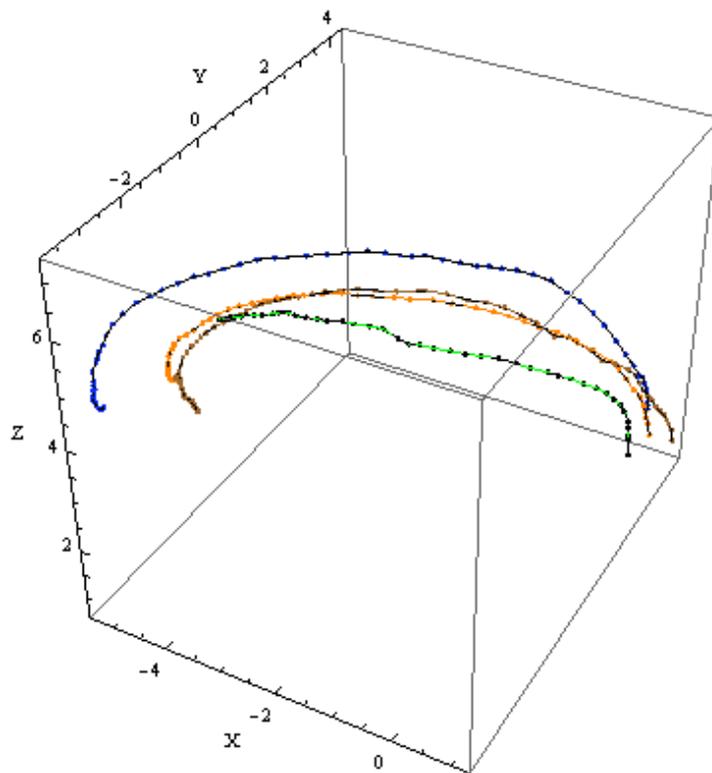


Figura 7.12 Grafica en azul: prensión gruesa; rojo: prensión en punta fina con dedo índice; verde: prensión en punta fin con dedo medio e índice; naranja: trayectoria promedio definida. Se puede observar que la trayectoria promedio definida se encuentra dentro de la envolvente generada por la curva azul y la naranja, y a su vez tiene intersecciones con las curvas, lo cual indica que las contiene a lo largo de la trayectoria, pudiendo contener las distintas prensiones en una sola curva.

Al haber definido la trayectoria definitiva se vio la necesidad de obtener una ecuación que definiría a dicha curva con el fin de posteriormente diseñar el mecanismo de 1 GDL. Para esto se empleó el método de bsplines cúbicos según Shene¹, el cual genera una serie de polinomios que se ajustan a la curva por secciones, de tal manera que se obtuvo un conjunto de 61 ecuaciones paramétricas que definen a la curva final. A partir de estas ecuaciones será posible realizar el diseño de un mecanismo de un grado de libertad. Finalmente se graficó cada una de las ecuaciones consecutivamente para formar la curva aproximada por polinomios y se superpusieron con la gráfica obtenida a partir de los datos experimentales, ver Figura 7.13.

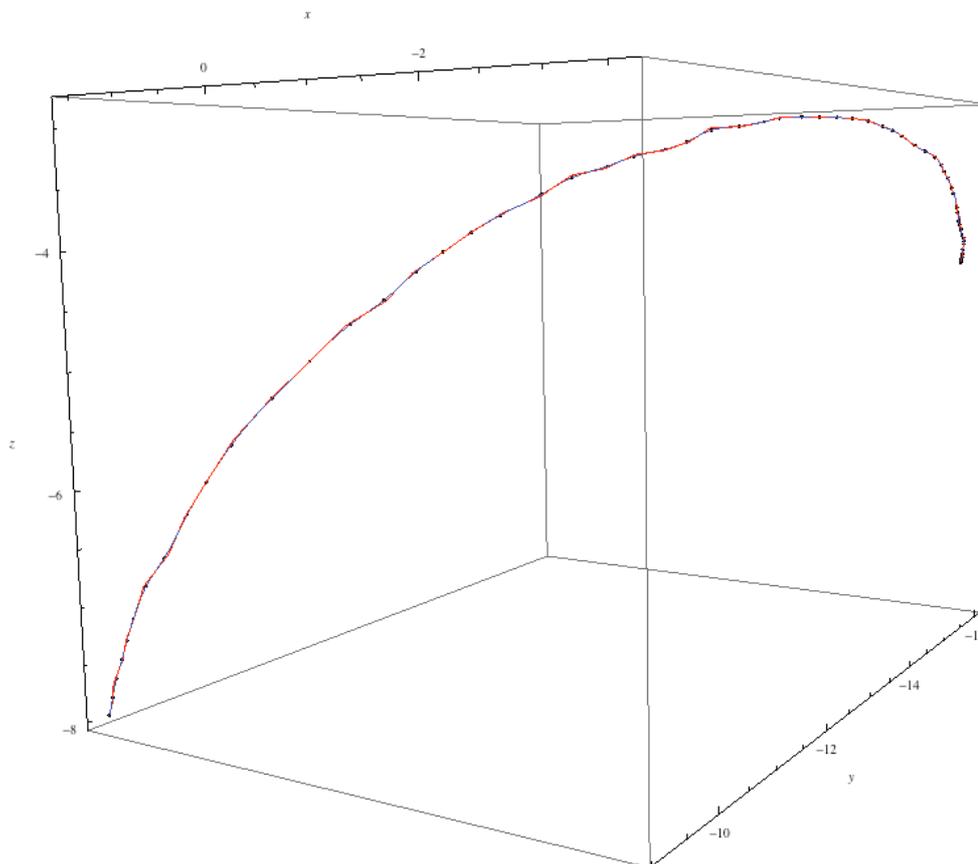


Figura 7.13 Gráfica experimental (rojo) gráfica de polinomios por secciones (azul).

¹ <http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/notes.html>

CONCLUSIÓN

Se obtuvieron las trayectorias de cuatro distintos movimientos de la mano comprendiendo tres distintos tipos de prensión. Se encontraron similitudes muy grandes entre tres de las prensiones, a partir de esto fue posible generar una trayectoria que contenga más de un tipo de prensión en su recorrido. Dicha trayectoria se formó a partir de los promedios de las coordenadas de estos tres y será empleada posteriormente para el diseño de un mecanismo para el pulgar de una prótesis de mano.

Debido a la versatilidad de movimiento del dedo pulgar resulta muy difícil establecer una trayectoria específica del dedo, por lo cuál se tiene que evaluar por movimientos definidos, ya sea cómo de acuerdo a las prensiones que se quieren implementar en una prótesis o por las deficiencias a estudiar o tareas específicas de la mano. En la actualidad no existe ninguna trayectoria definida del movimiento del dedo pulgar; en este estudio se han encontrado y definido las trayectorias para tres distintas prensiones además de una que comprende dos de estas prensiones en su recorrido, este hallazgo facilitará el diseño de mecanismos para el pulgar ayudando además a generar prótesis personalizadas, pudiendo diseñar algún mecanismo que comprenda simplemente una prensión o varias. Además la metodología planteada puede ser extendida a otros movimientos del pulgar e inclusive al análisis de los demás dedos u otras funciones de la mano.

Las gráficas de los distintos movimientos que se definieron son de una forma cónica, teniendo congruencia con los estudios que se han realizado, los cuales como ya se mencionó, sólo se enfocan en el espacio del trabajo de los dedos Kuo et.al (2003), Kamper et al (2003). Kuo et al. (2008) muestran un estudio de la intersección del espacio de trabajo del dedo pulgar con el espacio de trabajo de cada dedo, mostrando el espacio de trabajo real para la interacción del pulgar

con dichos dedos. Al obtener resultados similares es posible garantizar la validación del estudio presente.

El método propuesto emplea elementos muy sencillos y de bajo costo con el que se pueden realizar distintas pruebas sobre el movimiento del dedo pulgar y puede ser extendido a pruebas de los demás dedos de las mano, permitiendo de esta forma obtener nuevas ecuaciones para ser implementadas en prótesis con distintos finalidades y abarcando necesidades más específicas del usuario de una prótesis.

Trabajo a Futuro

El siguiente paso de este método, es la implementación de la trayectoria definida para la generación de un mecanismo de un grado de libertad y realizar su implementación en tiempo real, con lo cuál se podría ayudar a análisis clínicos, ya que se tiene repetibilidad y es de muy fácil implementación, operación y de bajo costo.

BIBLIOGRAFÍA

Cruz E.G., Kamper D.G. Kinematics of point-to-point finger movements. 2006;174(1):29–34.

Cruz, E. G., H. C. Waldinger and D. G. Kamper, Kinetic and kinematic workspaces of the index finger following stroke, Brain Journal (2005), 128, 1112–1121

Fong Chin-Su, Lo-Chi Kuo , Fong Chin-Su, Lo-chie Kuo , Thumb motion Path, Journal of Biomechanics 36 (2003) 937–942.

Hilgenfeld, O. Operative Daumenersatz und Beseitigung von Greifstörungen bei Fingerverlust. Enke, Stuttgart 1950.

Kapandji IA. The Physiology of the Joints. Upper Limb (2nd ed.). London: E and S Livingstone, 1970.

Kramper, Cruz Stereotypical Thumb Trajectories, Journal of Neurophysiology, 90: 3702–3710, 2003.

Kuo L. , Chiu , Functional workspace for precision manipulation between thumb and fingers in normal hands. Journal of Electromyography and Kinesiology 19 (2009) 829–839.

Lin, Hwai-Ting , Kuo, Li-Chieh , Liu, Hsin-Yi , Wu, Wen-Lan , Su, Fong-Chin , A The three-dimensional analysis of three thumb joints coordination in activities of daily living. Image and Vision Computing 17 (1999) 149 – 156.

Mason, C. R., Gomez, J. E., Ebner T. J. Hand Synergies During Reach-to-Grasp, J Neurophysiology 86:2896- 2910, 2001-

Napier, Jr. The prehensile movement of the human hand. Journal of Bone Joint Surg 38B: 902-913, 1956.

Nordin, M., Frankel, V. , Basic Biomechanics of the Musculoskeletal System,. Second Edition, 1984.

Santiago, A.; Valenzuela I.; "Ergonomía de miembro superior". Tesis. Facultad de Ingeniería. UNAM. Mayo 2005

Zur Verth, M. Absetzung und Auslösung an Hand und Fuss von Standpunkt der Funktion. Ergeb. Chir. Orthop., 20 (1927), 131-135.

Zur Verth, M. Behandlung der Verletzung und eiterung an Gingen und Hand,2, Aufl. Springer, Berlin, 1936.

Trebes, Gisela , Protesis del miembro superior: Entrenamiento fisioterapico del amputado; versión española de Rico, Abad J. , Barcelona, 1973.

ANEXOS

GRAFICACIÓN DE MOVIMIENTO COMPLETO

Código para graficar en 3D

Aplicable en todos los sujetos y todos los movimientos, lo unico necesario es cambiar el directorio del archivo.

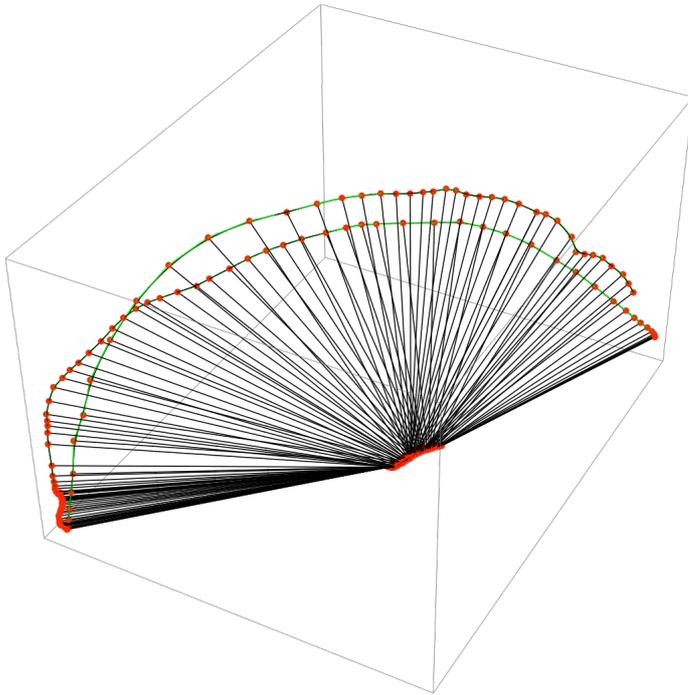
```
y=Import["directorio / *.xls"];
Y=Flatten[y,1];
Yp=Table[Y[[i]],{i,1,152,1}];
Length[Y]
Length[Yp];

z=Import["directorio / *.xls"];
Z=Flatten[z,1];
Zp=Table[Z[[j]],{j,1,152,1}];
Length[Z];
Length[Zp];
pts={Yp, Zp};
Pulgar=Graphics3D[{BSplineCurve[Z],Green,Line[Z],Red,Point[Z]}];
Refer = Graphics3D[{BSplineCurve[Y],Green,Line[Y],Red,Point[Y]}];
Show [ Refer, Pulgar]
Refer = Graphics3D[{BSplineCurve[pts],Green,Line[pts],Red,Point[pts]}];

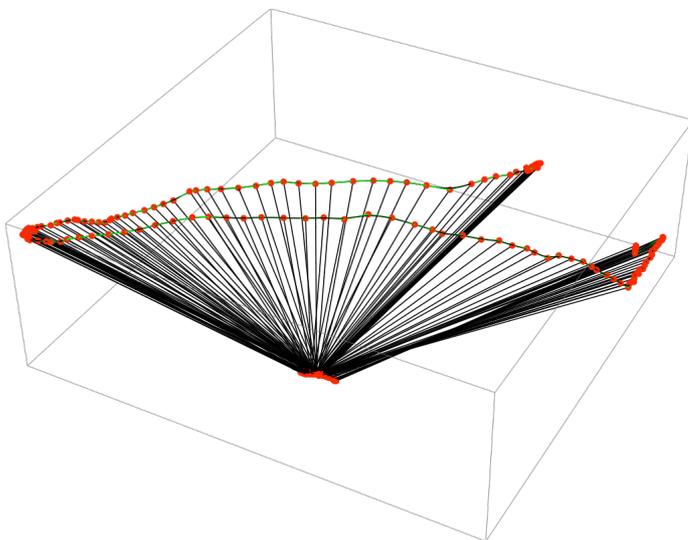
For[i=0, i<158, i++,
  a[i]=Graphics3D[Line[{Z[[i]],Y[[i]]}]];
];
listaA=Table[a[j],{j,1,158,1}];
Show[listaA];
Show[ listaA, Refer, Pulgar ]
```

Gráficas de los cuatro movimientos completos de un sujeto:

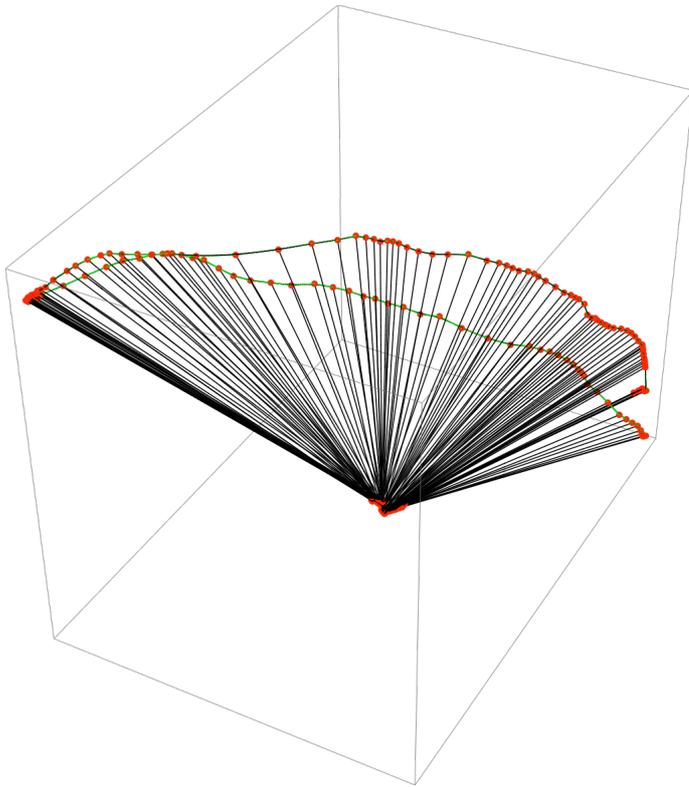
1er movimiento: oposición libre



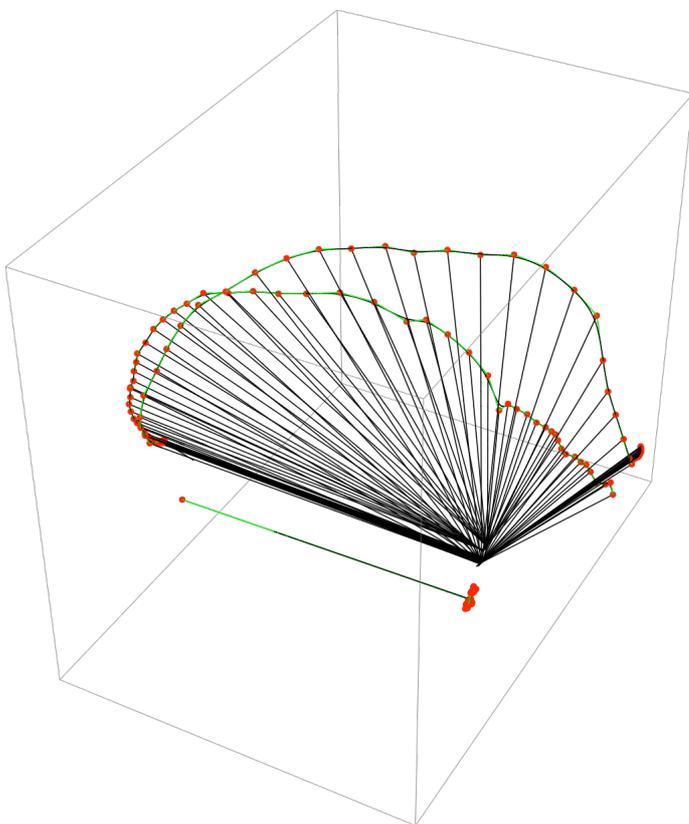
2º movimiento: prensión en punta fina con dedo índice



3er movimiento: prensión en punta fina con dedo índice y medio.



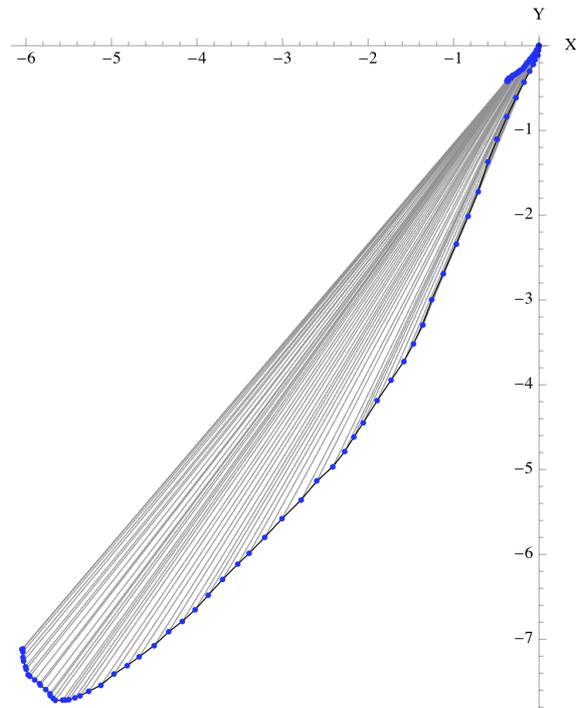
4º movimiento: oposición libre triarticulando los dedos



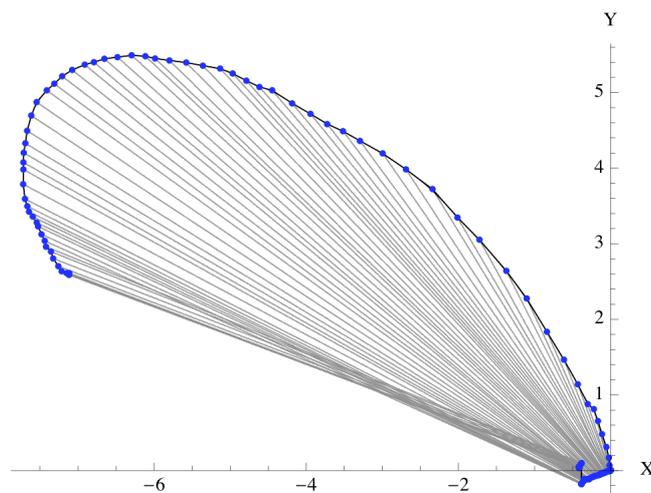
Graficación por planos

Se uso el mismo código de la graficación anterior salvo que ahora son solo dos coordenadas a graficar.

Plano XY



Plano YZ



Plano xz

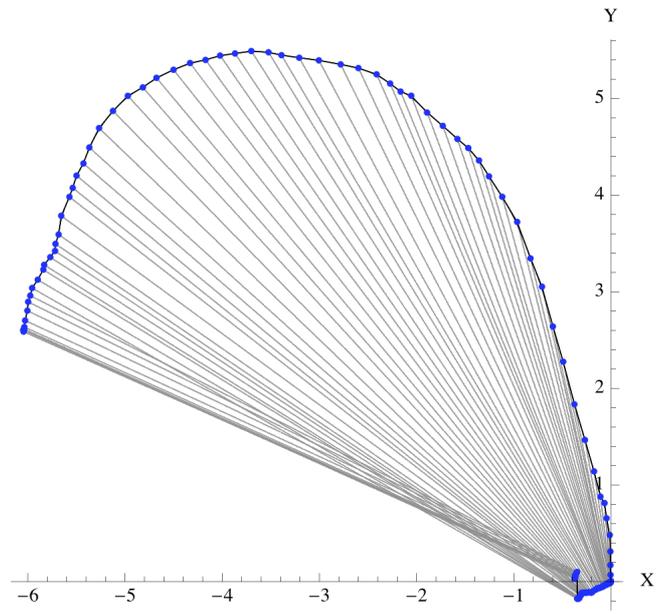


TABLA DE NUBE DE PUNTOS

A continuación se muestran tres tablas de datos de un experimento de diferentes sujetos:

Experimento 1								
Sujeto 1			Sujeto 2			Sujeto 3		
x	y	z	x	y	z	x	y	z
0.778	-11.691	-3.671	0.345	-10.754	-6.585	-0.370	-10.024	-9.705
0.459	-12.035	-3.420	0.269	-10.918	-6.350	-0.484	-10.197	-9.169
0.161	-12.410	-3.180	0.224	-11.195	-6.056	-0.624	-10.432	-8.565
-0.146	-12.850	-3.045	0.136	-11.478	-5.798	-0.802	-10.737	-7.892
-0.537	-13.336	-2.891	0.034	-11.627	-5.630	-1.048	-11.250	-7.144
-0.851	-13.772	-2.760	-0.091	-11.780	-5.458	-1.336	-11.863	-6.435
-1.040	-13.980	-2.709	-0.191	-11.925	-5.308	-1.586	-12.466	-5.838
-1.229	-14.214	-2.700	-0.252	-12.062	-5.205	-1.816	-13.039	-5.347
-1.473	-14.508	-2.715	-0.417	-12.331	-5.012	-2.002	-13.511	-4.970
-1.780	-14.846	-2.746	-0.488	-12.462	-4.900	-2.179	-13.897	-4.752
-1.987	-15.133	-2.775	-0.565	-12.588	-4.788	-2.332	-14.265	-4.638
-2.188	-15.385	-2.808	-0.676	-12.628	-4.827	-2.468	-14.571	-4.595
-2.415	-15.645	-2.898	-0.829	-12.883	-4.757	-2.575	-14.853	-4.564
-2.639	-15.906	-3.032	-0.944	-13.072	-4.693	-2.643	-15.065	-4.536
-2.885	-16.188	-3.155	-1.026	-13.210	-4.662	-2.711	-15.256	-4.526
-3.024	-16.394	-3.236	-1.167	-13.523	-4.644	-2.797	-15.429	-4.512

BSPLINES

Funciones para B-Spline

Funciones base

```
FuncionesBaseSpline[ur_,p_,m_,n_]:=
Module[{NN2,NNfinal,cont},

  NN2=Table[0,{m-p}];
  NNfinal=Table[0,{m-2p}];
  cont=1;
  Do[

    NN2[[k+1]]=1;

  Do[

    NN2[[k-d+1]]=Expand[(ur[[k+1+1]]-u)/(ur[[k+1+1]]-
ur[[k-d+1+1]]) NN2[[k-d+1+1]]];
    Do[

      NN2[[i+1]]=Expand[(u-ur[[i+1]])/(ur[[i+d+1]]-
ur[[i+1]]) NN2[[i+1]]+(ur[[i+d+1+1]]-u)/(ur[[i+d+1+1]]-
ur[[i+1+1]]) NN2[[i+1+1]]];
      ,{i,k-d+1,k-1}
    ];

    NN2[[k+1]]=Expand[(u-ur[[k+1]])/(ur[[k+d+1]]-
ur[[k+1]]) NN2[[k+1]]];

    ,{d,1,p}
  ];

  NN2=Expand[NN2];
  NNfinal[[cont]]=NN2;
  cont+=1;
  ClearAll[NN,suma];
  NN2=Table[0,{m-p}];
  ,{k,p,m-p-1}
  ];
  NNfinal
]
```

Graficación

```
GraficaParametrica[cBs_,Pc_,ur_,c1_,c2_,c3_,c4_]:=
Module[{g1,g2,gtpc,um,pseg,gtseg},
  g1=Table[0,{Length[cBs]}];
  g2=Table[0,{Length[cBs]+1}];

  g2[[1]]=Graphics[{PointSize[0.015],Point[({cBs[[1,1]],cBs
[[1,2]])/.u->ur[[p+1]]}]}];
```

```

Do[

g1[[i]]=ParametricPlot[{cBs[[i,1]],cBs[[i,2]]},{u,ur[[p+i
]],ur[[p+1+i]]},PlotStyle-
>{Thickness[0.005],c2},DisplayFunction->Identity];

g2[[i+1]]=Graphics[{PointSize[0.015],Point[({cBs[[i,1]],c
Bs[[i,2]]}/.u->ur[[p+1+i]])]}];
  ,{i,1,Length[cBs]}
  ];

gtpc=Table[Graphics[Text[Style[ToString[i],c3,Bold,20],Pc
[[i]],{-2,-1.5}]],{i,Length[Pc]}];

um=Table[(ur[[i]]+ur[[i+1]])/2//N,{i,p+1,Length[cBs]+p}];
(*Print[um]*);
  pseg=Table[{cBs[[i,1]]/.u->um[[i]],cBs[[i,2]]/.u-
>um[[i]]},{i,Length[cBs]}];(*Print[pseg];*)

gtseg=Table[Graphics[Text[Style[ToString[i],c4,Bold,18],p
seg[[i]],{-2,-1.5}]],{i,Length[pseg]}];

Show[g1,g2,gtpc,gtseg,Graphics[{c1,Line[Pc]}],ListPlot[Pc
,PlotStyle->{c1,PointSize[0.02]},DisplayFunction-
>Identity],ImageSize->200,DisplayFunction-
>$DisplayFunction,Axes->False]
]

ur={0,0,0,0,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,20,20,20,20}
; (*knots o valores del parámetro*)
Length[ur]
p=3 (*Grado del los segmentos polinomiales*)
m=Length[ur]-1 (*Número de intervalos en el dominio del
parámetro*)
n=m-1-p (*Número de intervalos válidos de soporte | n+1
Número de puntos de control Pc necesarios para construir
la curva B-Spline*)
Pc1={{0,0},{1,-1},{2,0},{1,2},{2,4},{0,3},{-
2,5},{0,7},{2,8},{4,8},{8,7},{7,3},{5,5},{4,2},{6,3},{7,1
},{7,0}};

NNfinal=FuncionesBaseSpline[ur,p,m,n];
NNfinal//MatrixForm;
NNfinal//Dimensions

cBs1=NNfinal.Pc1;
{xml,xM1,ym1,yM1}={Min[Pc1[[All,1]]],Max[Pc1[[All,1]]],Mi
n[Pc1[[All,2]]],Max[Pc1[[All,2]]]};

```

```

g1=Show[GraficaParametrica[cBs1,Pc1,ur,Red,Blue,Red,Black
],PlotRange->{{xm1-0.1Abs[xm1-xM1],xm1+0.1Abs[xm1-
xm1]}, {ym1-0.1Abs[ym1-yM1],yM1+0.1Abs[ym1-yM1]}}]

```

```

SetDirectory["C:\\Users\\UNAM\\Desktop\\Articulo_Revista_
FI\\"];
puntos=Import["p.xls"][[1]];
Length[puntos]

```

```

Show[Graphics3D[Line[puntos]],Table[Graphics3D[Point[punt
os[[i]]]],{i,Length[puntos]},Axes->True]

```

```

Clear[u]
Long=Table[Norm[puntos[[i+1]]-
puntos[[i]]],{i,1,Length[puntos]-1}];
utemp=Long/Total[Long]
ur=Table[0.,{Length[puntos]}];
ur[[2]]=utemp[[1]];
Do[
  ur[[i+2]]=ur[[i+1]]+utemp[[i+1]]
  ,{i,1,Length[puntos]-2}];
Length[ur];
Length[puntos];
urt=ur;
(* metodo para hacer una tabla ya con puntos anclados,
que va de 0 a 1 *)
ur=Join[Join[{0.,0.,0.},ur],{1.,1.,1.}]
Length[ur]
p=3 ;
m=Length[ur]-1 ;(*Número de intervalos en el dominio del
parámetro*)
n=m-1-p ;(*Número de intervalos válidos de soporte | n+1
Número de puntos de control Pc necesarios para construir
la curva B-Spline*)

```

```

NNfinal=FuncionesBaseSpline[ur,p,m,n];
NNfinal//MatrixForm;
NNfinal//Dimensions

```

```

pmedio1=(puntos[[1]]+puntos[[2]])/2; (* se agrega un
punto de puntosC al primer intervalo y otro al último por
medio de un promedi simple, para poder cuadrar matriz*)
um1=(ur[[5]]+ur[[4]])/2;
pmedio2=(puntos[[Length[puntos]]]+puntos[[Length[puntos]-
1]])/2;
um2=(ur[[Length[ur]-4]]+ur[[Length[ur]-3]])/2;
matNN=Table[NNfinal[[i]]/.u-
>urt[[i]],{i,Length[NNfinal]}]; (*se forma la matriz a
partir de una tabla con lo elementos de NNfinal,

```

```

evaluando u en urt*)
matNN=Join[matNN,{NNfinal[[Length[NNfinal]]]/.u-
>urt[[Length[urt]]]};
Dimensions[matNN]

matNNtotal=Insert[matNN,NNfinal[[1]]/.u->um1,2]; (*
agrego el punto que se agregó al primer intervalo a la
segunda posicion evaluado con u para um1*)
puntosFinal=Insert[puntos,pmedio1,2];
matNNtotal=Insert[matNNtotal,NNfinal[[Length[NNfinal]]]/.
u->um2,Length[matNNtotal]-1];
puntosFinal=Insert[puntosFinal,pmedio2,Length[puntosFinal
]-1];
MatrixForm[matNNtotal]
MatrixForm[puntosFinal]

{62,64}
{{1.58732,-9.11843,-7.96193},{1.57784,-9.15879,-
7.8078},{1.56836,-9.19915,-7.65367},{1.54753,-9.25448,-
7.49686},{1.53537,-9.30599,-7.34011},{1.51992,-9.37687,-
7.16916},{1.47302,-9.49459,-6.89914},{1.41753,-9.66229,-
6.68083},{1.33576,-9.87779,-6.32371},{1.26311,-10.0442,-
6.06473},{1.17495,-10.2809,-5.7587},{1.00168,-10.6402,-
5.37029},{0.816214,-10.9462,-5.05721},{0.615821,-
11.2836,-4.74682},{0.445899,-11.5774,-
4.53476},{0.286503,-11.8602,-4.28488},{0.137434,-12.077,-
4.11465},{-0.023786,-12.3132,-3.93813},{-0.194593,-
12.561,-3.7781},{-0.445658,-12.8806,-3.59116},{-
0.636281,-13.1323,-3.43397},{-0.868103,-13.4232,-
3.32605},{-1.04805,-13.6041,-3.23724},{-1.27877,-
13.8293,-3.16883},{-1.4304,-14.0045,-3.09492},{-1.58745,-
14.2035,-2.98469},{-1.78872,-14.4134,-2.94652},{-
1.96846,-14.614,-2.90281},{-2.0825,-14.731,-2.86791},{-
2.23244,-14.9203,-2.85442},{-2.36428,-15.069,-2.85699},{-
2.48865,-15.2102,-2.86296},{-2.60687,-15.3281,-
2.87377},{-2.72449,-15.4525,-2.89881},{-2.83004,-
15.5749,-2.95127},{-2.90839,-15.6622,-2.99551},{-
2.98433,-15.7324,-3.05203},{-3.08378,-15.8342,-
3.14605},{-3.16515,-15.9121,-3.2069},{-3.25303,-15.9659,-
3.2694},{-3.30252,-16.0102,-3.34723},{-3.33736,-15.9979,-
3.41607},{-3.37483,-16.0058,-3.48164},{-3.42513,-
15.9845,-3.58773},{-3.44655,-15.9899,-3.64258},{-
3.48619,-15.9726,-3.78419},{-3.4971,-15.9642,-3.83802},{-
3.51619,-15.9609,-3.89256},{-3.51808,-15.9417,-
3.92707},{-3.53477,-15.9176,-3.95773},{-3.55587,-
15.8948,-3.99684},{-3.55958,-15.8902,-4.0122},{-3.57728,-
15.8643,-4.06102},{-3.60062,-15.8496,-4.09416},{-
3.60651,-15.8423,-4.12808},{-3.6143,-15.818,-4.15434},{-
3.61306,-15.7983,-4.2093},{-3.61838,-15.7716,-4.2487},{-
3.62342,-15.75,-4.28338},{-3.62469,-15.7245,-4.30068},{-
3.6268,-15.7086,-4.31494},{-3.62973,-15.7036,-4.32316},{-
3.62771,-15.6942,-4.33478}}

```

```

({
  {1., 0., 0., 0., 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {0.125, 0.518908, 0.315976, 0.0401163, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {0, 0.118508, 0.560561, 0.320931, 0., 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {0, 0, 0.12602, 0.711418, 0.162562, -1.77636*10-15, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {0, 0, 0, 0.189316, 0.690646, 0.120038, -1.77636*10-15,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {0, 0, 0, 0, 0.283059, 0.623775, 0.0931667, 0., 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {0, 0, 0, 0, 0, 0.17806, 0.668942, 0.152998, 3.55271*10-15,
  15, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.254888, 0.63581, 0.109302,
  3.55271*10-15, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0},
  {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.132016, 0.653867, 0.214118,
  1.42109*10-14, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0},
  {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.194027, 0.695506, 0.110466,
  0., 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.255967, 0.628463,
  0.11557, 7.10543*10-15, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0},
  {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.153248, 0.650808,
  0.195944, 2.84217*10-14, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

```

```

0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.167422, 0.664238,
0.16834, 0., 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.129254,
0.658559, 0.212187, 0., 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.158129,
0.665784, 0.176087, 1.13687*10-13, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.120951,
0.659938, 0.219111, 0., 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.164181,
0.683099, 0.15272, 0., 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0.173333, 0.678279, 0.148388, 0., 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0.225798, 0.644986, 0.129216, 0., 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0.136321, 0.653062, 0.210617, 9.09495*10-13, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0.170716, 0.662846, 0.166438, -4.54747*10-13, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0.10988, 0.658946, 0.231174, -9.09495*10-13, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0.183474, 0.672146, 0.14438, -1.81899*10-12, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0.122516, 0.654204, 0.22328, -1.81899*10-12,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0.173202, 0.686803, 0.139995, 9.09495*10-

```

```

13, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.185732, 0.655069, 0.159199, -
1.81899*10-12, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.156042, 0.636706, 0.207253, -
3.63798*10-12, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.0865404, 0.665244, 0.248216, -
7.27596*10-12, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.209773, 0.677873, 0.112354, -
3.63798*10-12, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.147533, 0.641398,
0.21107, -7.27596*10-12, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.145712, 0.670228,
0.18406, -1.45519*10-11, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.141964, 0.669363,
0.188673, 1.45519*10-11, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.166369,
0.672426, 0.161204, 0., 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.165014,
0.648609, 0.186377, 2.91038*10-11, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.113677,
0.649691, 0.236633, 2.91038*10-11, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.13826,
0.705588, 0.156152, 5.82077*10-11, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},

```

```

    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0.243727, 0.640607, 0.115666, 0., 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0.131844, 0.635724, 0.232433, 0., 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0.139419, 0.672574, 0.188008, -5.82077*10-11, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0.133848, 0.649538, 0.216615, 1.74623*10-10, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0.112434, 0.661341, 0.226224, 0., 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0.145973, 0.709081, 0.144947, -1.16415*10-10, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0.266736, 0.617191, 0.116074, 0., 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0.0770114, 0.678632, 0.244357, -1.16415*10-10,
10, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.324084, 0.611702, 0.0642138, 0., 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.0576627, 0.530542, 0.411796,
4.65661*10-10, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.112956, 0.709249, 0.177796, -
9.31323*10-10, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0},
    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.104951, 0.649139, 0.245911,
1.86265*10-9, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,

```

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.156874, 0.698437,
 0.144689, -1.86265×10^{-9} , 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0},
 {0,
 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.204952, 0.616236,
 0.178812, 9.31323×10^{-10} , 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0},
 {0,
 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.0374483, 0.660457,
 0.302095, 0., 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0,
 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.36324, 0.605855,
 0.0309056, -4.65661×10^{-10} , 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0,
 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.156372,
 0.599509, 0.244119, 0., 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0,
 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.115942,
 0.677331, 0.206728, 1.86265×10^{-9} , 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0,
 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.16232,
 0.705162, 0.132518, -1.86265×10^{-9} , 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0,
 0,
 0,
 0.275782, 0.625585, 0.0986336, -9.31323×10^{-10} , 0, 0, 0, 0,
 0, 0},
 {0,
 0,
 0,
 0.151161, 0.631379, 0.21746, 0., 0, 0, 0, 0, 0},
 {0,
 0,
 0,
 0.128983, 0.656113, 0.214904, 0., 0, 0, 0, 0},
 {0,
 0,
 0,
 0, 0.110242, 0.638057, 0.251701, 3.72529×10^{-9} , 0, 0, 0},
 {0,
 0,
 0,
 0, 0, 0.094069, 0.614022, 0.291909, 2.98023×10^{-8} , 0, 0},
 {0,
 0,
 0,

```

0, 0, 0, 0.0515727, 0.635172, 0.313256, -1.19209*10-7, 0},
  {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0.0242476, 0.305531, 0.545221, 0.125},
  {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0.193981, 0.645646, 0.160372, 0.},
  {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0., -4.76837*10-7, -2.38419*10-7, 1.}
})
({
  {1.58732, -9.11843, -7.96193},
  {1.57784, -9.15879, -7.8078},
  {1.56836, -9.19915, -7.65367},
  {1.54753, -9.25448, -7.49686},
  {1.53537, -9.30599, -7.34011},
  {1.51992, -9.37687, -7.16916},
  {1.47302, -9.49459, -6.89914},
  {1.41753, -9.66229, -6.68083},
  {1.33576, -9.87779, -6.32371},
  {1.26311, -10.0442, -6.06473},
  {1.17495, -10.2809, -5.7587},
  {1.00168, -10.6402, -5.37029},
  {0.816214, -10.9462, -5.05721},
  {0.615821, -11.2836, -4.74682},
  {0.445899, -11.5774, -4.53476},
  {0.286503, -11.8602, -4.28488},
  {0.137434, -12.077, -4.11465},
  {-0.023786, -12.3132, -3.93813},
  {-0.194593, -12.561, -3.7781},
  {-0.445658, -12.8806, -3.59116},
  {-0.636281, -13.1323, -3.43397},
  {-0.868103, -13.4232, -3.32605},
  {-1.04805, -13.6041, -3.23724},
  {-1.27877, -13.8293, -3.16883},
  {-1.4304, -14.0045, -3.09492},
  {-1.58745, -14.2035, -2.98469},
  {-1.78872, -14.4134, -2.94652},
  {-1.96846, -14.614, -2.90281},
  {-2.0825, -14.731, -2.86791},
  {-2.23244, -14.9203, -2.85442},
  {-2.36428, -15.069, -2.85699},
  {-2.48865, -15.2102, -2.86296},
  {-2.60687, -15.3281, -2.87377},
  {-2.72449, -15.4525, -2.89881},
  {-2.83004, -15.5749, -2.95127},
  {-2.90839, -15.6622, -2.99551},
  {-2.98433, -15.7324, -3.05203},

```

```

{-3.08378, -15.8342, -3.14605},
{-3.16515, -15.9121, -3.2069},
{-3.25303, -15.9659, -3.2694},
{-3.30252, -16.0102, -3.34723},
{-3.33736, -15.9979, -3.41607},
{-3.37483, -16.0058, -3.48164},
{-3.42513, -15.9845, -3.58773},
{-3.44655, -15.9899, -3.64258},
{-3.48619, -15.9726, -3.78419},
{-3.4971, -15.9642, -3.83802},
{-3.51619, -15.9609, -3.89256},
{-3.51808, -15.9417, -3.92707},
{-3.53477, -15.9176, -3.95773},
{-3.55587, -15.8948, -3.99684},
{-3.55958, -15.8902, -4.0122},
{-3.57728, -15.8643, -4.06102},
{-3.60062, -15.8496, -4.09416},
{-3.60651, -15.8423, -4.12808},
{-3.6143, -15.818, -4.15434},
{-3.61306, -15.7983, -4.2093},
{-3.61838, -15.7716, -4.2487},
{-3.62342, -15.75, -4.28338},
{-3.62469, -15.7245, -4.30068},
{-3.6268, -15.7086, -4.31494},
{-3.62872, -15.6989, -4.32897},
{-3.62973, -15.7036, -4.32316},
{-3.62771, -15.6942, -4.33478}
})

```

pControl=Inverse[matNNtotal].puntosFinal

```

{{1.58732,-9.11843,-7.96193},{1.57664,-9.15022,-
7.86114},{1.5803,-9.17635,-7.69846},{1.54444,-9.25705,-
7.49884},{1.53567,-9.30382,-7.33196},{1.51933,-9.3957,-
7.13665},{1.47602,-9.47274,-6.89222},{1.40597,-9.70521,-
6.65301},{1.34841,-9.85464,-6.34973},{1.25387,-10.0549,-
6.04121},{1.17146,-10.3098,-5.71224},{1.01913,-10.6248,-
5.38561},{0.810942,-10.9498,-5.05196},{0.635204,-
11.2516,-4.75133},{0.436802,-11.5863,-
4.54694},{0.310292,-11.8366,-4.29426},{0.131887,-
12.0823,-4.11199},{-0.0235851,-12.312,-3.93349},{-
0.206547,-12.5883,-3.75623},{-0.433752,-12.8597,-
3.61572},{-0.637337,-13.1343,-3.40817},{-0.839811,-
13.4041,-3.35026},{-1.05843,-13.6152,-3.21804},{-
1.26436,-13.8067,-3.18299},{-1.4419,-14.0127,-3.10035},{-
1.57939,-14.2086,-2.95933},{-1.79039,-14.4053,-
2.95412},{-1.94119,-14.5928,-2.91352},{-2.10364,-
14.7436,-2.85622},{-2.21883,-14.9134,-2.85332},{-
2.36382,-15.0646,-2.8565},{-2.48108,-15.2079,-2.86165},{-
2.6094,-15.3281,-2.8725},{-2.72615,-15.4521,-2.89158},{-
2.82063,-15.564,-2.94728},{-2.90577,-15.6637,-2.99091},{-
2.99796,-15.7423,-3.05898},{-3.07437,-15.8223,-
3.14234},{-3.1582,-15.9187,-3.20558},{-3.25731,-15.9552,-

```

```

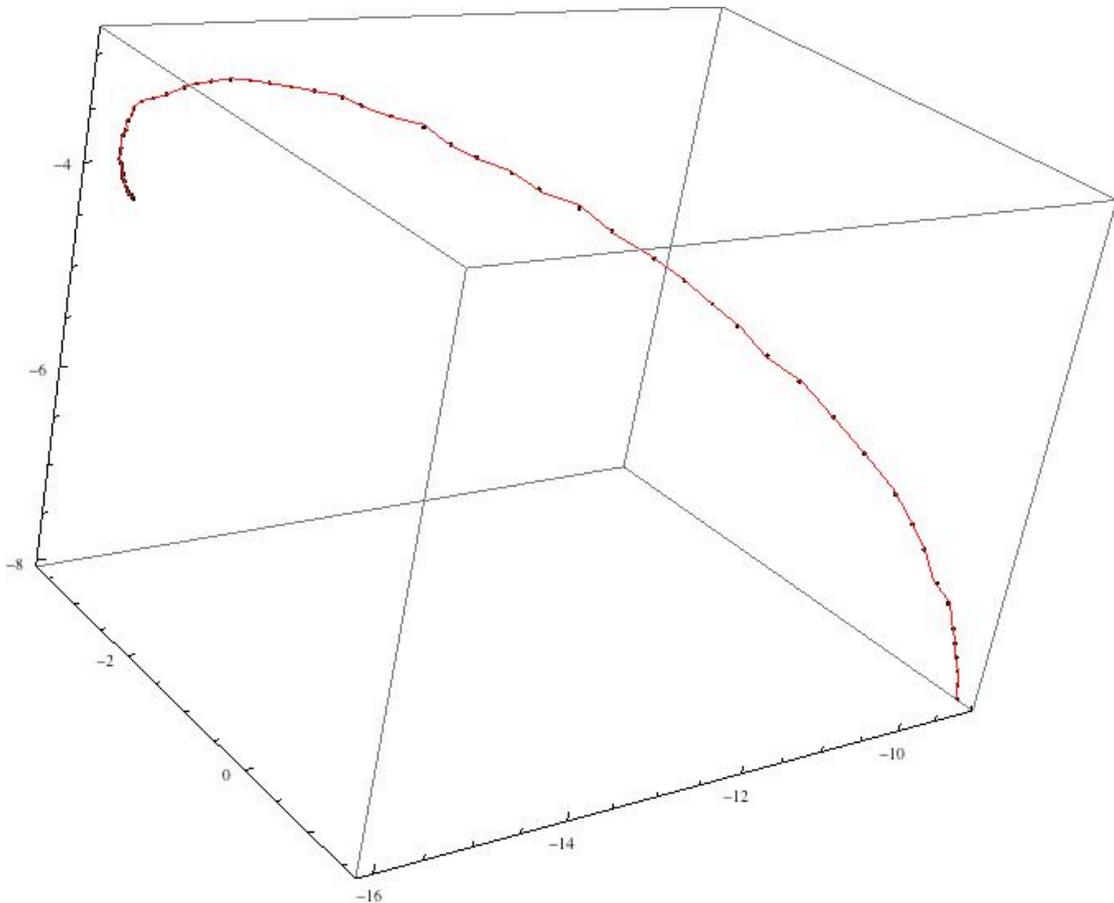
3.25949}, {-3.2988, -16.0273, -3.33855}, {-3.33586, -15.9874, -
3.4162}, {-3.38352, -16.0195, -3.49352}, {-3.41812, -15.9755, -
3.56881}, {-3.4577, -15.9988, -3.66996}, {-3.48379, -15.9788, -
3.75404}, {-3.49327, -15.9609, -3.83905}, {-3.52083, -
15.9685, -3.88726}, {-3.5137, -15.9411, -3.9294}, {-3.53619, -
15.9159, -3.959}, {-3.554, -15.897, -3.98582}, {-3.56238, -
15.8874, -4.02563}, {-3.57, -15.8651, -4.05902}, {-3.60467, -
15.8474, -4.08862}, {-3.60453, -15.8478, -4.13204}, {-
3.61932, -15.8068, -4.15539}, {-3.60975, -15.8061, -
4.21004}, {-3.61833, -15.77, -4.24464}, {-3.62369, -15.7557, -
4.28428}, {-3.62498, -15.7267, -4.29808}, {-3.62442, -
15.7097, -4.31144}, {-3.63193, -15.7034, -4.32481}, {-
3.62735, -15.6969, -4.33076}, {-3.62771, -15.6942, -4.33478}

```

```

grafPuntos=Show[Graphics3D[{Red,Line[pControl]}],Table[Gr
aphics3D[Point[puntosFinal[[i]]]],{i,Length[puntosFinal]
},Axes->True]

```



LOS POLINOMIOS QUE CONSTITUYEN A LA CURVA B-SPLINE DE LOS PUNTOS DADOS, ESTÁ CONSTITUIDA POR 61 SEGMENTOS VÁLIDOS EN 61 INTERVALOS.

```

bspline=Expand[NNfinal.pControl];

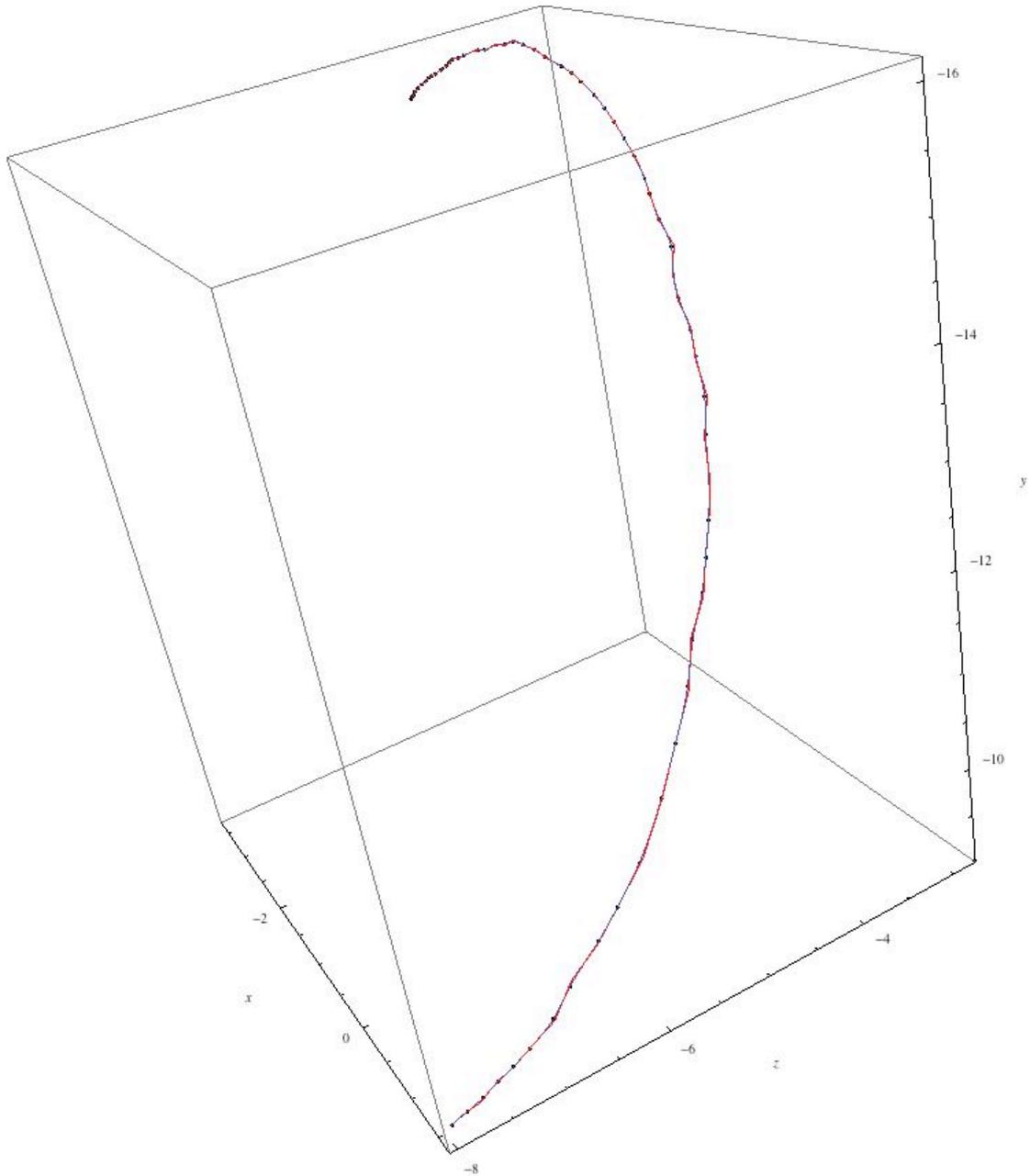
```

```

grafSplines=Show[Table[ParametricPlot3D[bspline[[i]],{u,ur
t[[i]],urt[[i+1]]}],{i,Length[bspline]-1}]];

```

```
grafTotal=Show[grafPuntos,grafSplines,AxisLabel-
>{x,y,z}]
```



pControl

```
{ {1.58732, -9.11843, -7.96193}, {1.57664, -9.15022, -
7.86114}, {1.5803, -9.17635, -7.69846}, {1.54444, -9.25705, -
7.49884}, {1.53567, -9.30382, -7.33196}, {1.51933, -9.3957, -
7.13665}, {1.47602, -9.47274, -6.89222}, {1.40597, -9.70521, -
6.65301}, {1.34841, -9.85464, -6.34973}, {1.25387, -10.0549, -
6.04121}, {1.17146, -10.3098, -5.71224}, {1.01913, -10.6248, -
5.38561}, {0.810942, -10.9498, -5.05196}, {0.635204, -
11.2516, -4.75133}, {0.436802, -11.5863, -
4.54694}, {0.310292, -11.8366, -4.29426}, {0.131887, -
12.0823, -4.11199}, {-0.0235851, -12.312, -3.93349}, {-
0.206547, -12.5883, -3.75623}, {-0.433752, -12.8597, -
```

3.61572}, {-0.637337, -13.1343, -3.40817}, {-0.839811, -
 13.4041, -3.35026}, {-1.05843, -13.6152, -3.21804}, {-
 1.26436, -13.8067, -3.18299}, {-1.4419, -14.0127, -3.10035}, {-
 1.57939, -14.2086, -2.95933}, {-1.79039, -14.4053, -
 2.95412}, {-1.94119, -14.5928, -2.91352}, {-2.10364, -
 14.7436, -2.85622}, {-2.21883, -14.9134, -2.85332}, {-
 2.36382, -15.0646, -2.8565}, {-2.48108, -15.2079, -2.86165}, {-
 2.6094, -15.3281, -2.8725}, {-2.72615, -15.4521, -2.89158}, {-
 2.82063, -15.564, -2.94728}, {-2.90577, -15.6637, -2.99091}, {-
 2.99796, -15.7423, -3.05898}, {-3.07437, -15.8223, -
 3.14234}, {-3.1582, -15.9187, -3.20558}, {-3.25731, -15.9552, -
 3.25949}, {-3.2988, -16.0273, -3.33855}, {-3.33586, -15.9874, -
 3.4162}, {-3.38352, -16.0195, -3.49352}, {-3.41812, -15.9755, -
 3.56881}, {-3.4577, -15.9988, -3.66996}, {-3.48379, -15.9788, -
 3.75404}, {-3.49327, -15.9609, -3.83905}, {-3.52083, -
 15.9685, -3.88726}, {-3.5137, -15.9411, -3.9294}, {-3.53619, -
 15.9159, -3.959}, {-3.554, -15.897, -3.98582}, {-3.56238, -
 15.8874, -4.02563}, {-3.57, -15.8651, -4.05902}, {-3.60467, -
 15.8474, -4.08862}, {-3.60453, -15.8478, -4.13204}, {-
 3.61932, -15.8068, -4.15539}, {-3.60975, -15.8061, -
 4.21004}, {-3.61833, -15.77, -4.24464}, {-3.62369, -15.7557, -
 4.28428}, {-3.62498, -15.7267, -4.29808}, {-3.62442, -
 15.7097, -4.31144}, {-3.63193, -15.7034, -4.32481}, {-
 3.62735, -15.6969, -4.33076}, {-3.62771, -15.6942, -4.33478}}

bspline

{{1.58732 -1.20189 u+55.1993 u²-1380.12 u³, -9.11843-
 3.57748 u+61.8859 u²-1547.3 u³, -7.96193+11.34 u+24.8663
 u²-621.721 u³}, {1.51405 +7.0421 u-253.982 u²+2485.04 u³, -
 9.19526+5.06671 u-262.305 u²+2505.49 u³, -7.99407+14.9556
 u-110.731 u²+1073.41 u³}, {1.77722 -12.3748 u+223.54 u²-
 1429.55 u³, -8.85466-20.0622 u+355.694 u²-2560.68 u³, -
 7.84752+4.14318 u+155.179 u²-1106.44 u³}, {1.60803 -3.05847
 u+52.541 u²-383.332 u³, -9.61298+21.694 u-410.732
 u²+2128.51 u³, -8.17387+22.1136 u-174.663 u²+911.623
 u³}, {1.39312 +6.15307 u-79.0654 u²+243.427 u³, -8.27147-
 35.805 u+410.763 u²-1783.76 u³, -7.50717-6.46218 u+233.602
 u²-1032.69 u³}, {1.38317 +6.46761 u-82.3795 u²+255.067 u³, -
 11.6075+69.6468 u-700.338 u²+2118.64 u³, -9.55689+58.3291
 u-449.076 u²+1365.01 u³}, {2.17529 -13.6092 u+87.2395 u²-
 222.609 u³, -7.01645-46.7163 u+282.756 u²-649.915 u³, -
 6.50705-18.9709 u+203.993 u²-474.145 u³}, {0.147463
 +25.9281 u-169.718 u²+334.056 u³, -9.48893+1.49047 u-
 30.5447 u²+28.8115 u³, -8.5852+21.5475 u-59.34 u²+96.3323

u^3 }, {3.8589 -35.8313 u+172.846 u²-299.317 u³, -
9.67803+4.63718 u-47.9987 u²+61.0826 u³, -7.6371+5.77087
u+28.1689 u²-65.4646 u³}, {0.48732 +11.5595 u-49.1942
u²+47.4591 u³, -9.94747+8.42446 u-65.7433 u²+88.7956 u³, -
8.91627+23.7509 u-56.0731 u²+66.1021 u³}, {-1.00389+28.77
u-115.405 u²+132.366 u³, -7.39609-21.0218 u+47.5396 u²-
56.4749 u³, -8.47273+18.6318 u-36.3795 u²+40.8477
u³}, {5.75602 -38.9086 u+110.456 u²-118.886 u³, -5.91409-
35.8593 u+97.056 u²-111.558 u³, -0.899478-57.1898 u+216.656
u²-240.634 u³}, {-11.6472+114.001 u-337.377 u²+318.311 u³, -
24.0488+123.477 u-369.6 u²+344.015 u³, -36.8512+258.691 u-
708.479 u²+662.529 u³}, {32.734 -241.17 u+610.068 u²-
524.149 u³, 5.71653 -114.727 u+265.827 u²-221.001
u³, 32.9738 -300.099 u+782.136 u²-662.913 u³}, {-
38.7081+282.744 u-670.625 u²+519.39 u³, -14.106+30.6398 u-
89.5177 u²+68.5418 u³, -44.5005+268.052 u-606.692
u²+468.737 u³}, {15.1377 -88.3798 u+182.013 u²-133.574
u³, 0.133258 -67.5021 u+135.958 u²-104.131 u³, 13.4568 -
131.41 u+311.05 u²-234.085 u³}, {20.713 -124.479 u+259.924
u²-189.625 u³, -25.5121+98.5463 u-222.419 u²+153.693 u³, -
4.57795-14.6387 u+59.0266 u²-52.7739 u³}, {-38.7029+237.955
u-477.016 u²+309.851 u³, -6.37933-18.1622 u+14.8865 u²-
7.14553 u³, -60.3075+325.308 u-632.191 u²+415.713
u³}, {60.3601 -323.658 u+584.289 u²-358.682 u³, 33.3736 -
243.531 u+440.777 u²-275.421 u³, 162.231 -936.317 u+1751.96
u²-1086.1 u³}, {-7.64317+41.5349 u-69.4322 u²+31.3877 u³, -
114.492+550.537 u-980.663 u²+572.74 u³, -239.712+1222.2 u-
2111.95 u²+1219.46 u³}, {6.66012 -31.072 u+53.4245 u²-
37.9068 u³, 139.07 -736.6 u+1197.27 u²-655.675 u³, 366.721 -
1856.19 u+3096.94 u²-1718.49 u³}, {-121.798+597.028 u-
970.283 u²+518.256 u³, -7.14659-21.6694 u+32.0468 u²-
22.6267 u³, -332.436+1562.36 u-2474.79 u²+1308.53 u³}, {-
13.8437+91.8466 u-182.268 u²+108.523 u³, -68.4606+265.255
u-415.518 u²+210.087 u³, -79.2064+377.353 u-626.326
u²+347.412 u³}, {411.825 -1838.93 u+2736.98 u²-1362.74 u³, -

25.8181+71.8349 u-123.074 u²+62.6996 u³,811.546 -3662.98
 u+5482.48 u²-2731.34 u³},{-441.192+1899.7 u-2724.96
 u²+1297.13 u³,93.3304 -450.374 u+639.844 u²-308.828 u³,-
 778.047+3303.94 u-4695.81 u²+2225.31 u³},{364.589 -1509.86
 u+2084.09 u²-963.857 u³, -282.406+1139.51 u-1602.62
 u²+745.473 u³,63.4556 -256.771 u+326.425 u²-135.912 u³},{-
 791.27+3228.7 u-4391.3 u²+1985.75 u³,902.994 -3720.15
 u+5038.26 u²-2279.52 u³,1053.16 -4314.15 u+5870.96 u²-
 2661.51 u³},{656.701 -2596.31 u+3419.79 u²-1505.7 u³, -
 724.882+2828.59 u-3743.32 u²+1645.73 u³, -555.59+2157.64 u-
 2807.44 u²+1217.61 u³},{-571.653+2214.89 u-2861.68
 u²+1227.99 u³,541.279 -2130.69 u+2731.48 u²-1172.1 u³, -
 52.8252+188.42 u-236.433 u²+98.7192 u³},{614.858 -2333.84
 u+2951.13 u²-1248.08 u³, -606.256+2268.61 u-2890.39
 u²+1222.63 u³,85.1903 -340.69 u+439.715 u²-189.298 u³},{-
 691.627+2576.13 u-3199.66 u²+1320.32 u³,708.23 -2671.42
 u+3298.08 u²-1361.5 u³,82.1325 -329.198 u+425.32 u²-
 183.286 u³},{-186.103+708.979 u-900.896 u²+376.937 u³, -
 322.031+1133.84 u-1386.82 u²+561.129 u³,984.865 -3663.43
 u+4530.31 u²-1867.93 u³},{560.079 -1998.87 u+2374.64 u²-
 943.807 u³,100.679 -400.147 u+468.754 u²-187.067 u³, -
 1685.52+6027.2 u-7191.91 u²+2858.65 u³},{440.161 -1571.04
 u+1865.85 u²-742.117 u³, -1780.15+6310.08 u-7511.24
 u²+2976.28 u³,2352.57 -8379.41 u+9940.84 u²-3932.94 u³},{-
 1859.64+6533. u-7653.16 u²+2984.89 u³,2007.48 -7036.78
 u+8165.99 u²-3161.88 u³, -1139.07+3924.42 u-4511.25
 u²+1725.54 u³},{1278.84 -4399.92 u+5041.84 u²-1928.8
 u³,754.762 -2672.93 u+3098.82 u²-1200.6 u³, -
 1891.91+6546.97 u-7556.47 u²+2904.21 u³},{2468.32 -8476.07
 u+9697.92 u²-3701.64 u³, -5739.34+19581.2 u-22321.5
 u²+8478.4 u³,1641.33 -5560.85 u+6273.99 u²-2361.85 u³},{-
 9823.39+33137. u-37261.9 u²+13962.9 u³,11206.8 -37789.4
 u+42420.5 u²-15875.1 u³,4736.17 -16038.3 u+18097.6 u²-
 6809.46 u³},{8516.26 -28253.7 u+31238.5 u²-11515. u³, -
 34032.2+113645. u-126552. u²+46971.9 u³, -3386.17+11150.7

$u-12240.1 u^2+4474.28 u^3$, $\{2517.66 -8363.44 u+9254.35 u^2-$
 $3415.45 u^3, 65227.1 -215481. u+237222. u^2-87051.3 u^3,-$
 $5812.83+19197.1 u-21133.6 u^2+7750.84 u^3\}, \{-6721.51+22052.6$
 $u-24122.9 u^2+8793.46 u^3,-56396.7+184913. u-202153.$
 $u^2+73666. u^3, 3430.29 -11232. u+12257.9 u^2-4463.3$
 $u^3\}, \{1331.1 -4273.95 u+4567.04 u^2-1628.37 u^3, 32262.4 -$
 $104941. u+113723. u^2-41078.3 u^3, 92.1087 -318.384 u+364.632$
 $u^2-142.966 u^3\}, \{-496.814+1637.85 u-1806.26 u^2+661.902 u^3,-$
 $48693.5+156885. u-168543. u^2+60355.1 u^3,-668.018+2140.01$
 $u-2285.67 u^2+809.431 u^3\}, \{-1875.45+6073. u-6562.3$
 $u^2+2361.96 u^3, 7259.71 -23119.4 u+24485.6 u^2-8643.23 u^3,-$
 $239.871+762.634 u-808.638 u^2+281.464 u^3\}, \{41250.6 -130850.$
 $u+138345. u^2-48757.4 u^3, 26264.3 -83458.1 u+88343. u^2-$
 $31170.3 u^3,-2939.05+9332.4 u-9878.16 u^2+3480.94 u^3\}, \{-$
 $92897.3+292982. u-308011. u^2+107935. u^3,-90998.+287025. u-$
 $301829. u^2+105799. u^3,-1312.29+4192.74 u-4465.35$
 $u^2+1580.78 u^3\}, \{192285. -603469. u+631299. u^2-220138.$
 $u^3, 98520.7 -308714. u+322392. u^2-112223. u^3,-$
 $30105.8+94703.1 u-99303. u^2+34704.7 u^3\}, \{-99695.2+311184.$
 $u-323777. u^2+112291. u^3, 4450.61 -14031.4 u+14685.6 u^2-$
 $5120.87 u^3, 42356.4 -132291. u+137723. u^2-47795.8 u^3\}, \{-$
 $41980.3+131053. u-136379. u^2+47304.7 u^3, 38626.6 -120696.$
 $u+125654. u^2-43602.8 u^3, 26273.1 -82094.3 u+85501.2 u^2-$
 $29686.1 u^3\}, \{133475. -414182. u+428404. u^2-147705. u^3,-$
 $279479.+867834. u-898314. u^2+309956. u^3,-149476.+464055.$
 $u-480227. u^2+165650. u^3\}, \{50963.3 -158138. u+163557. u^2-$
 $56388. u^3, 56738.5 -175495. u+180880. u^2-62141.8 u^3,-$
 $4514.01+14218.6 u-14927. u^2+5218.41 u^3\}, \{-188079.+579942.$
 $u-596087. u^2+204225. u^3, 40230.8 -124524. u+128421. u^2-$
 $44144.5 u^3, 99263.6 -306210. u+314864. u^2-107924.$
 $u^3\}, \{221163. -678986. u+694836. u^2-237019. u^3,-$
 $277843.+853948. u-874918. u^2+298802. u^3,-218718.+671979.$
 $u-688186. u^2+234923. u^3\}, \{-154297.+472548. u-482416.$
 $u^2+164162. u^3, 339454. -1.0393*10^6 u+1.06061*10^6 u^2-360784.$
 $u^3, 216285. -662176. u+675765. u^2-229881. u^3\}, \{86240.2 -$

262881. u+267095. u²-90458.9 u³, -154598.+471236. u-478849.
 u²+162196. u³, -98793.1+301159. u-306016. u²+103646. u³}, {-
 46122.2+139809. u-141275. u²+47584.9 u³, 126815. -384915.
 u+389380. u²-131296. u³, 85216. -258656. u+261697. u²-
 88260.9 u³}, {-11111.7+33726.1 u-34130.7 u²+11512.7 u³, -
 165060.+499474. u-503859. u²+169430. u³, -146587.+443713.
 u-447701. u²+150572. u³}, {-265.267+974.853 u-1166.24
 u²+453.031 u³, 184024. -554596. u+557075. u²-186518.
 u³, 208799. -629388. u+632387. u²-211802. u³}, {461760. -
 1.39052*10⁶ u+1.39576*10⁶ u²-467009. u³, 294259. -886595.
 u+890370. u²-298051. u³, 81017.9 -244548. u+246044. u²-
 82518. u³}, {-3.22816*10⁶+9.70254*10⁶ u-9.72064*10⁶
 u²+3.24626*10⁶ u³, -1.58198*10⁶+4.75396*10⁶ u-4.76205*10⁶
 u²+1.59006*10⁶ u³, -728907.+2.19034*10⁶ u-2.19397*10⁶
 u²+732532. u³}, {3.10184*10⁶-9.31139*10⁶ u+9.31726*10⁶ u²-
 3.10771*10⁶ u³, 1.11659*10⁶-3.35196*10⁶ u+3.35408*10⁶ u²-
 1.11873*10⁶ u³, 453923. -1.36262*10⁶ u+1.36347*10⁶ u²-
 454778. u³}}