



**Universidad Nacional Autónoma de México**  
**Programa de Posgrado en Ciencias de la Tierra**

**Modelado de la dinámica de la fuente sísmica y de  
la propagación de ondas viscoelásticas con el  
método de Galerkin Discontinuo**

**Tesis**

que para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias de la Tierra**

presenta

**Josué Tago Pacheco**

**Jurado Examinador**

<b>Director de Tesis</b>	Dr. Víctor Manuel Cruz Atienza Instituto de Geofísica
<b>Presidente</b>	Dr. Francisco José Sánchez Sesma Instituto de Ingeniería
<b>Vocal</b>	Dr. Ramón Zúñiga Dávila-Madrid
<b>Suplente</b>	Dra. Úrsula Iturrarán Viveros
<b>Suplente</b>	Dra. Vala Hjörleifsdóttir

*México, D.F.*

*Noviembre de 2012*



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Para Abigaíl*

“The secret of happiness is this: let your interests be as wide as possible, and let your reactions to the things and persons that interest you be as far as possible friendly rather than hostile.”

Bertrand Russell



# Agradecimientos

Antes que a nadie quisiera expresar mi absoluta gratitud y amistad por mi tutor el Dr. Víctor Manuel Cruz Atienza. Me siento afortunado por todo lo que le he aprendido y más aún porque sé que podré seguir haciéndolo. Espero haberme siquiera salpicado de la inquietud, pasión y perseverancia que lo caracterizan.

Les agradezco a mis sinodales por haber leído y corregido esta tesis. Entre estos quiero nombrar de forma especial al Dr. Francisco José Sánchez Sesma por haberme apoyado siempre, a pesar de las dificultades que esto conllevó.

Ha sido un verdadero privilegio el haber trabajado con el Dr. Steven Day, el Dr. Jean Virieux, el Dr. Vincent Etienne y el Dr. Emmanuel Chaljub. Su generosidad y sencillez han marcado mi vida, muchas gracias a todos.

Quiero aprovechar para agradecerles a mis tutores anteriores, el Dr. Mariano José Juan Rivera Meraz y el Dr. Richart Vázquez Román, por haber sido los pilares de mi formación académica. Sus enseñanzas las llevaré siempre conmigo.

Gracias a la persona más importante de mi vida, mi esposa Abigaíl. Nunca olvides que te amo. Tú y yo, tú y yo. Tu apoyo y comprensión infinita son invaluable para mí. Mue, me haces el hombre más feliz. Esta tesis es para tí.

No tengo palabras para expresar mi gratitud por mis papás, siempre han estado conmigo y son mi ejemplo de vida. Todo lo que he logrado ha sido gracias a ustedes. Hermano eres genial, me siento afortunado de tenerte en mi vida.

Tengo la suerte de haberme topado con personas extraordinarias en mi camino. Mis mejores amigos Abraham, Checo, Jorge y Luis Iván, gracias por estar ahí. Saben que son parte de mí. ¡Arriba la banda jarocho!. Gracias a muchos otros amigos que han sido fundamentales en mi vida, ustedes saben quienes son.

Tengo la dicha de haber formado parte de la UNAM, máxima casa de estudios y orgullo de México. Finalmente gracias al CONACYT por la beca que me fue asignada durante mis estudios de posgrado.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>I Propagación de ondas viscoelásticas</b>	<b>7</b>
<b>2. Introducción (Parte I)</b>	<b>9</b>
<b>3. Formulación continua</b>	<b>15</b>
3.1. Medio viscoelástico . . . . .	15
3.1.1. Conceptos básicos . . . . .	16
3.1.2. Modelo reológico . . . . .	19
3.1.3. Funciones anelásticas . . . . .	22
3.1.4. Formulación 3D . . . . .	25
3.2. Sistema viscoelástico hiperbólico de primer orden . . . . .	27
<b>4. Formulación discreta</b>	<b>35</b>
4.1. Galerkin Discontinuo . . . . .	35
4.1.1. Cómputo de las funciones anelásticas . . . . .	42
<b>5. Condiciones de frontera</b>	<b>47</b>
5.1. Superficie libre . . . . .	47
5.2. Fronteras absorbentes . . . . .	48
5.2.1. Formulación PML clásica . . . . .	48
5.2.2. Formulación CPML . . . . .	51
5.2.3. Incorporación de CPML en un esquema GD . . . . .	53
<b>6. Artículo: 3D Anelastic Wave Propagation with an hp-Adaptive Discontinuous Galerkin Method</b>	<b>59</b>
6.1. Resumen . . . . .	59
6.2. 3D Anelastic Wave Propagation with an hp-Adaptive Discontinuous Galerkin Method	60
6.2.1. Abstract . . . . .	61
6.2.2. Introduction . . . . .	63
6.2.3. Viscoelastic equations . . . . .	67
6.2.4. hp-Discontinuous Galerkin method . . . . .	72
6.2.5. Model verification . . . . .	75
6.2.6. Mesh coarsening analysis . . . . .	80
6.2.7. Conclusions . . . . .	83
6.2.8. Appendix A: Matrices Used in the DG-FEM Formulation . . . . .	84

6.2.9. Acknowledgments . . . . .	85
6.2.10. References . . . . .	85
6.2.11. Tables . . . . .	90
6.2.12. Figures . . . . .	91
<b>II Dinámica de la ruptura sísmica</b>	<b>101</b>
<b>7. Introducción (Parte II)</b>	<b>103</b>
<b>8. Formulación continua</b>	<b>107</b>
8.1. Condiciones de frontera . . . . .	107
8.2. Ley de fricción . . . . .	108
<b>9. Formulación discreta</b>	<b>111</b>
9.1. Galerkin Discontinuo . . . . .	111
9.1.1. Flujos a través de la falla para el esquema de las velocidades . . . . .	117
9.1.2. Flujos a través de la falla para el esquema de los esfuerzos . . . . .	120
<b>10. Artículo: 3D hp-Adaptive Discontinuous Galerkin Method for Modeling Earthquake Dynamics</b>	<b>121</b>
10.1. Resumen . . . . .	121
10.2. 3D hp-Adaptive Discontinuous Galerkin Method for Modeling Earthquake Dynamics	123
10.2.1. Abstract . . . . .	124
10.2.2. Introduction . . . . .	126
10.2.3. Elastodynamics Equations . . . . .	129
10.2.4. Dynamic Rupture Model . . . . .	132
10.2.5. Rupture Model Verification, Convergence and Efficiency . . . . .	144
10.2.6. Rupture along the 1992 Landers-Earthquake Fault System . . . . .	153
10.2.7. Conclusions . . . . .	157
10.2.8. Appendix A: DG-FEM Method for Wave Propagation . . . . .	161
10.2.9. Appendix B: Matrices Used in the DG-FEM Formulation . . . . .	165
10.2.10. Acknowledgments . . . . .	165
10.2.11. References . . . . .	166
10.2.12. Tables . . . . .	176
10.2.13. Figures . . . . .	177
<b>11. Benchmarks de SCEC</b>	<b>189</b>
11.1. (SCEC/USGS 2012) Ejercicio de verificación de códigos . . . . .	189
11.1.1. Benchmarks TPV16 y TPV17 . . . . .	190
11.1.2. Benchmarks TPV18 y TPV20 . . . . .	199
<b>12. Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>213</b>
<b>A. Cómputo de los coeficientes anelásticos</b>	<b>217</b>
<b>B. Cómputo del módulo sin relajamiento</b>	<b>221</b>
<b>C. Dinámica de la ruptura utilizando la ley de fricción “rate &amp; state”</b>	<b>223</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>229</b>

# Índice de figuras

2.1. Demostración de la dispersión física de un pulso atenuado. a) Una onda delta que se propaga sin atenuación. b) Una onda delta atenuada que se propaga sin dispersión. c) Una onda delta atenuada con dispersión. Imagen tomada de ( <i>Stein y Wysession, 2003</i> ). . . . .	11
3.1. Modelo reológico viscoelástico de un CGM-EK. MB denota un cuerpo de Maxwell , $M_H$ y $M_l$ son los módulos elásticos del cuerpo de Hooke y del $l$ -ésimo cuerpo de Maxwell respectivamente y $\eta_l$ la viscosidad del $l$ -ésimo cuerpo de Maxwell. Imagen tomada de ( <i>Moczo et al., 2007</i> ). . . . .	20
5.1. Esquema del dominio principal y el estrato PML. . . . .	49
7.1. Modos de ruptura para una grieta de cizalla. Modo III conocido como modo antiplano y Modo II conocido como modo plano. Dentro de una falla ambos modos se presentan. Imagen tomada de ( <i>Madariaga, 2007</i> ). . . . .	104
11.1. Diagrama de flujo que muestra lo que se requiere para la elaboración de un benchmark de la dinámica de la ruptura sísmica. Imagen tomada de <i>Harris y Archuleta (2004)</i> . . . . .	190
11.2. Geometría de la falla para los benchmarks TPV16 y TPV17. Imagen tomada de la descripción del benchmark TPV16 en <a href="http://scecddata.usc.edu/cvws/tpv16_17docs.html">http://scecddata.usc.edu/cvws/tpv16_17docs.html</a> . El punto A corresponde al registro sobre la falla faultst-090dp090 y su ubicación se puede revisar en la Tabla 11.2. El punto B corresponde al registro fuera de la falla body-002st-090dp000 y su ubicación se puede revisar en la Tabla 11.3. . . . .	191
11.3. Esfuerzo cizallante inicial del benchmark TPV16. . . . .	193
11.4. Comparación de los tiempos de ruptura del benchmark TPV16 entre FEM, SEM y DGCrack. Imagen generada en <a href="http://scecddata.usc.edu/cvws">http://scecddata.usc.edu/cvws</a> . . . . .	193
11.5. Comparación de los esfuerzos cizallantes horizontales y verticales y las velocidades de deslizamiento horizontales y verticales entre FEM, SEM y DGCrack en el registro A del benchmark TPV16 (ver Figura 11.2). Las series de tiempo se filtraron hasta 3 Hz. Imágenes individuales generadas en <a href="http://scecddata.usc.edu/cvws">http://scecddata.usc.edu/cvws</a> . . . . .	194
11.6. Comparación de las velocidades horizontales, verticales y normales entre FEM, SEM y DGCrack en el registro B del benchmark TPV16 (ver Figura 11.2). Las series de tiempo se filtraron hasta 3 Hz. Imágenes individuales generadas en <a href="http://scecddata.usc.edu/cvws">http://scecddata.usc.edu/cvws</a> . . . . .	195
11.7. Esfuerzo cizallante inicial del benchmark TPV17. . . . .	196
11.8. Comparación de los tiempos de ruptura del benchmark TPV17 entre FEM, SEM y DGCrack. Imagen generada en <a href="http://scecddata.usc.edu/cvws">http://scecddata.usc.edu/cvws</a> . . . . .	196

11.9. Comparación de los esfuerzos cizallantes horizontales y verticales y las velocidades de deslizamiento horizontales y verticales entre FEM, SEM y DGCrack en el registro A del benchmark TPV17 (ver Figura 11.2). Las series de tiempo se filtraron hasta 3 Hz. Imágenes individuales generadas en <a href="http://scecddata.usc.edu/cvws">http://scecddata.usc.edu/cvws</a> . . . . .	197
11.10 Comparación de las velocidades horizontales, verticales y normales entre FEM, SEM y DGCrack en el registro B del benchmark TPV17 (ver Figura 11.2). Las series de tiempo se filtraron hasta 3 Hz. Imágenes individuales generadas en <a href="http://scecddata.usc.edu/cvws">http://scecddata.usc.edu/cvws</a> . . . . .	198
11.11 Geometría de la falla para los benchmarks TPV18 y TPV20. Imagen tomada de la descripción del benchmark TPV18 en <a href="http://scecddata.usc.edu/cvws/tpv18_21docs.html">http://scecddata.usc.edu/cvws/tpv18_21docs.html</a> . El punto A sobre la falla principal corresponde al registro faultst020dp075 y el punto B sobre la falla rama corresponde al registro branchst020dp075. Las ubicaciones los registros sobre la falla de pueden revisar en la Tabla 11.7. . . . .	199
11.12 Comparación de los tiempos de ruptura entre FEM, EQdyna-FEM y DGCrack del benchmark TPV18. Imagen generada en <a href="http://scecddata.usc.edu/cvws">http://scecddata.usc.edu/cvws</a> . . . . .	203
11.13 Comparación de los esfuerzos cizallantes horizontales, verticales y las velocidades de deslizamiento horizontales y verticales entre FEM, EQdyna-FEM y DGCrack en el registro A del benchmark TPV18 (ver Figura 11.11). Las series de tiempo se filtraron hasta 3 Hz. Imágenes individuales generadas en <a href="http://scecddata.usc.edu/cvws">http://scecddata.usc.edu/cvws</a> . . . . .	204
11.14 Comparación de los esfuerzos cizallantes horizontales, verticales y las velocidades de deslizamiento horizontales y verticales entre FEM, EQdyna-FEM y DGCrack en el registro A del benchmark TPV18 (ver Figura 11.11). Las series de tiempo se filtraron hasta 3 Hz. Imágenes individuales generadas en <a href="http://scecddata.usc.edu/cvws">http://scecddata.usc.edu/cvws</a> . . . . .	205
11.15 Comparación de las velocidades horizontales, verticales y normales entre FEM, EQdyna-FEM y DGCrack en el registro C del benchmark TPV18 (ver Figura 11.11). Las series de tiempo se filtraron hasta 3 Hz. Imágenes individuales generadas en <a href="http://scecddata.usc.edu/cvws">http://scecddata.usc.edu/cvws</a> . . . . .	206
11.16 Comparación de los tiempos de ruptura entre FEM, EQdyna-FEM y DGCrack del benchmark TPV20. Imagen generada en <a href="http://scecddata.usc.edu/cvws">http://scecddata.usc.edu/cvws</a> . . . . .	207
11.17 Comparación de los esfuerzos cizallantes horizontales, verticales y las velocidades de deslizamiento horizontales y verticales entre FEM, EQdyna-FEM y DGCrack en el registro A del benchmark TPV20 (ver Figura 11.11). Las series de tiempo se filtraron hasta 3 Hz. Imágenes individuales generadas en <a href="http://scecddata.usc.edu/cvws">http://scecddata.usc.edu/cvws</a> . . . . .	208
11.18 Comparación de los esfuerzos cizallantes horizontales, verticales y las velocidades de deslizamiento horizontales y verticales entre FEM, EQdyna-FEM y DGCrack en el registro A del benchmark TPV20 (ver Figura 11.11). Las series de tiempo se filtraron hasta 3 Hz. Imágenes individuales generadas en <a href="http://scecddata.usc.edu/cvws">http://scecddata.usc.edu/cvws</a> . . . . .	209
11.19 Comparación de las velocidades horizontales, verticales y normales entre FEM, EQdyna-FEM y DGCrack en el registro C del benchmark TPV20 (ver Figura 11.11). Las series de tiempo se filtraron hasta 3 Hz. Imágenes individuales generadas en <a href="http://scecddata.usc.edu/cvws">http://scecddata.usc.edu/cvws</a> . . . . .	210
12.1. Primera aproximación de un mallado adaptado para el Valle de la Ciudad de México de acuerdo a sus velocidades de propagación. . . . .	215
A.1. Aproximaciones de $Q$ usando (a) 2, (b) 3, (c) 5 o (d) 10 mecanismos de relajación en la banda de frecuencias [0.1, 10] Hz. Las gráficas (b), (c) y (d) cuentan con los mismos ejes. . . . .	219
C.1. Snapshots con la evolución temporal del esfuerzo cizallante, velocidad de deslizamiento y variable de estado del benchmark TPV103 (Resultados preliminares). . . . .	228

**Figuras de: “3D Anelastic Wave Propagation with an hp-Adaptive Discontinuous Galerkin Method”**

Figure 1. Moment rate-time time history and spectrum. The spectrum is almost flat until 5 Hz. 91

Figure 2. Velocity fields (m/s) of the three farthest receivers of the LOH1 and the LOH3 benchmark that wer computed on an unstructured mesh with DG-FEM. They were filtered using a two-pass four-pole Butterworth in the frequency band [1 – 5] Hz. The viscoelastic modulus used in the LOH3 benchmark was computed computed using 3 mechanism of relaxation. .... 92

Figure 3. Velocity fields (m/s) of the three farthest receivers of the LOH1 benchmark that were computed on an unstructured mesh with DG-FEM and AXITRA. They were filtered using a two-pass four-pole Butterworth in the frequency band [1 – 5] Hz. .... 93

Figure 4. Velocity fields (m/s) of the three farthest receivers of the LOH3 benchmark that were computed on an unstructured mesh with DG-FEM and AXITRA. They were filtered using a two-pass four-pole Butterworth in the frequency band [1 – 5] Hz. The viscoelastic modulus used in AXITRA is the same used in DG-FEM computed using 3 mechanism of relaxation. .... 94

Figure 5. Convergence analysis for the LOH1 and LOH3 benchmarks with structured and unstructured meshes. .... 95

Figure 6. a)  $v_z$  trace from 1.5 s to 2.5 s filtered up to 5 Hz with a two-pass four-pole Butterworth; b) Maximum normalized velocity of the traces from the different meshes shown in Figure 7.a. The normalization was done with the maximum value of the applied source filtered up to 5 Hz. .... 96

Figure 7. Logarithm of the source-normalized  $v_z$  traces in the time window [1.5 – 2.5] s for different coarsening rates and cut-off frequencies. The low pass filter applied was the two-pass four-pole Butterworth filter in the frequency range [3 – 9] Hz. The white contours show the numbers of elements per minimum wavelength. The red contour shows the value where the amplitude of the spurious reflections is 0.05% of the peak source velocity. This Figure shows the strong relation between the spurious reflection amplitudes and the number of elements per minimum wavelength. 97

Figure 8. Normalized  $v_z$  traces in the time window [1.5 – 2.5] s for different coarsening rates. For  $c = 0$  we use the accurate criterion of  $n_\lambda = 3$  and for the other cases we use  $n_\lambda = 2$ . The cutoff frequencies depend on the selection of  $n_\lambda$  and the maximum characteristic length. The two-pass four-pole Butterworth filter was used. We can see that with the criterion chosen for  $n_\lambda = 2$  with  $c > 0$ , the amplitude of the spurious reflections are below of those obtained with the accurate criterion of  $n_\lambda = 3$  with no coarsening. .... 98

**Figuras de: “3D hp-Adaptive Discontinuous Galerkin Method for Modeling Earthquake Dynamics”**

Figure 1. Second-order (P2) interpolation-order tetrahedra illustrating two mesh elements shearing the fault surface  $\Gamma$ . Red dots represent the six split nodes (*i.e.* two collocated nodes, one per element) lying on the fault from which the fluxes across  $\Gamma$  are computed and the dynamic-rupture boundary conditions applied. .... 177

Figure 2. TPV3 rupture problem geometry. The gray square represents the nucleation patch, and the PA and PI dots represent the pure-antiplane and pure-inplane observational fault points, respectively. .... 178

Figure 3. Comparison of rupture times for TPV3 yielded by the DGCrack and DFM (*Day et al., 2005*) methods, both with an effective mesh increment of 50 m (*i.e.* 100 m fault elements for DGCrack). 179

Figure 4. Comparison of on-fault time histories at PI (left column) and PA (right column) for a) the slip, b) the shear stress, and the slip rate (c and d) produced by four different numerical methods (inset legend: DFM, <i>Day et al. (2005)</i> ; ADER-DG and MDSBI, <i>Pelties et al. (2012)</i> ), all of them with an effective grid size of 50 <i>m</i> . . . . .	180
Figure 5. DGCrack convergence, accuracy and efficiency analysis based on TPV3 solutions. Frames a) and c) show regression lines with the power convergence rates for two error metrics with exponents reported on Table 2 for unstructured meshes, as a function of both the characteristic fault-element size (lower axis) and the cohesive zone resolution (upper axis). Frame b) presents a cross-correlation based comparison between four different methods (see text). Frame d) shows CPU total-time regressions yielded by the DGCrack and ADER-DG ( <i>Pelties et al., 2012</i> ) methods for the same accuracy range. Since the DGCrack simulations were run in a faster computing platform, time differences should be divided by a factor of $\sim 3$ to obtain actual values (see text). . . . .	181
Figure 6. Averages of the cross-correlation measurements between pairs of solutions of Figure 5b yielded by four numerical methods. . . . .	182
Figure 7. TPV10 60° dipping normal-fault (orange rectangle) problem geometry discretized with an unstructured mesh. The CPML slab is discretized by the blue tetrahedra while the physical domain by the green tetrahedra. The blue square represents the nucleation patch, and the yellow crosses represent the fault point (FP) and hanging-wall free-surface ground point (GP) where solutions were obtained and compared (see Figure 9). . . . .	183
Figure 8. Comparison of rupture times for TPV10 yielded by the DGCrack, FEM ( <i>Barall, 2009</i> ) and SEM ( <i>Kaneko et al., 2008</i> ) methods, all of them obtained with an effective mesh increment over the fault of 100 <i>m</i> . . . . .	184
Figure 9. TPV10 on-fault at FP (left column, see Figure 7) and off-fault at GP (right column, see Figure 7) waveforms comparison for three methods (inset) with (lower traces) and without (upper traces) 3 <i>Hz</i> low-pass filtering. . . . .	185
Figure 10. 1992 Landers earthquake fault-system geometry embedded in a 1D layered medium (L1, L2 and L3) and discretized with an hp-adaptive tetrahedral mesh (see text). . . . .	186
Figure 11. Landers earthquake dynamic rupture simulation results. Slip rate (left column) and shear stress (right column) snapshots over the non-planar fault system (Figure 10) for different times of the rupture process. . . . .	187
Figure 12. Landers earthquake fault parameters displayed in a single plane with major geometrical barriers (i.e. kinks) indicated with black dotted lines. a) Initial shear stress used in this study; b) discretization (grey dots) of the Landers earthquake fault system taken from the Community Fault Model for Southern California ( <i>Plesch et al., 2007</i> ). The red line indicates the fault geometry used in this study (Figure 10); c) final slip produced by the DGCrack dynamic rupture simulation; and d) final slip and fault discretization for the 1992 Landers earthquake found by <i>Wald y Heaton (1994)</i> . . . . .	188

# Índice de tablas

11.1. Propiedades del medio de propagación de los benchmarks TPV16 y TPV17. . . . .	191
11.2. Nombres y ubicaciones de los registros sobre la falla de los benchmarks TPV16 y TPV17. El centro de la falla sobre la superficie libre corresponde al origen ( $0\text{ km}$ en dirección del rumbo y $0\text{ km}$ en dirección del buzamiento). El registro en negritas corresponde al registro A que se encuentra en la Figura 11.2. . . . .	192
11.3. Nombres y ubicaciones de los registros fuera de la falla sobre la superficie libre de los benchmarks TPV16 y TPV17. El centro de la falla sobre la superficie libre corresponde al origen ( $0\text{ km}$ en dirección del rumbo y $0\text{ km}$ en dirección del buzamiento). El registro en negritas corresponde al registro B que se encuentra en la Figura 11.2. La dirección perpendicular negativa apunta de la falla a la posición del registro B que se encuentra en la Figura 11.2. . . . .	192
11.4. Propiedades del medio de propagación de los benchmarks TPV18 y TPV20. . . . .	199
11.5. Componentes del tensor de esfuerzos de los benchmarks TPV18 y TPV20. . . . .	200
11.6. Coeficientes del tensor de esfuerzos inicial de los benchmarks TPV18 y TPV20. . . . .	200
11.7. Nombres y ubicaciones de los registros sobre la falla principal y rama de los benchmarks TPV18 y TPV20. El punto de intersección sobre la superficie libre corresponde al origen ( $0\text{ km}$ en dirección del rumbo y $0\text{ km}$ en dirección del buzamiento). Los registros en negritas de la falla principal y rama corresponden a los registro A y B respectivamente, que se encuentran en la Figura 11.11. . . . .	201
11.8. Nombres y ubicaciones de los registros fuera de la falla sobre la superficie libre de los benchmarks TPV18 y TPV20. El punto de intersección sobre la superficie libre corresponde al origen ( $0\text{ km}$ en dirección del rumbo y $0\text{ km}$ en dirección del buzamiento). El registro en negritas corresponde al registro C que se encuentra en la Figura 11.11. La dirección perpendicular negativa apunta de la falla principal a la falla rama, ver la Figura 11.11. . . . .	202
C.1. Propiedades del medio de propagación del benchmark TPV103. . . . .	226
C.2. Parámetros de fricción del benchmark TPV103. . . . .	227

**Tablas de: “3D Anelastic Wave Propagation with an hp-Adaptive Discontinuous Galerkin Method”**

Table 1. Medium parameters of the LOH3 benchmark. . . . .	90
Table 2. Receivers location of the LOH1 and LOH3 benchmarks. . . . .	90



**Tablas de: “3D hp-Adaptive Discontinuous Galerkin Method for Modeling Earthquake Dynamics”**

Table 1. On-fault frictional and stress parameters for TPV3. The initial shear stress points to the along-strike direction. Medium properties outside the fault represent an infinite barrier. . . . . 176

Tabla 2. TPV3 convergence rate exponents for different methods and error metrics. . . . . 176

Tabla 3. On-fault frictional and stress parameters for TPV10. The initial shear stress points to the along-dip direction.  $h_d$  is the along-dip distance measured in meters from the free surface. Medium properties outside the fault represent an infinite barrier. . . . . 176

# Resumen

En este trabajo se introducen dos modelos computacionales basados en el método Galerkin discontinuo para la propagación de ondas viscoelásticas y la dinámica de la fuente sísmica. Ambos modelos fueron implementados en un código paralelo respetando la hp-adaptividad del método, permitiendo así la simulación realista de escenarios sísmicos en regiones de interés. Estos dos modelos, a pesar de ser complementarios, requieren un tratamiento cuidadoso de manera independiente, de modo que la tesis está dividida en dos partes. La primera parte, presenta la ecuación constitutiva que modela la anelasticidad intrínseca asociada a un cuerpo viscoelástico a través de la convolución de los esfuerzos con la tasa de las deformaciones. Posteriormente se presenta una formulación alterna, con la introducción de funciones anelásticas, que evita el cómputo de dicha convolución. Esta formulación hace factible la solución numérica de las ecuaciones que rigen la propagación de ondas viscoelásticas. La discretización de estas ecuaciones con el esquema de Galerkin Discontinuo se hizo de forma novedosa y eficiente respetando la hp-adaptatividad del esquema numérico. En la segunda parte, se introducen las condiciones de frontera y leyes de fricción que deben operar sobre una falla preexistente para simular la dinámica de la ruptura sísmica. Para la modelación computacional se construyeron flujos *ad hoc* a través de la falla que respetan en todo momento las condiciones de frontera impuestas. De ambas partes de la tesis se obtuvieron artículos científicos en los cuales se realizaron análisis de convergencia y comparaciones con otros métodos existentes. Estos análisis demuestran que las herramientas desarrolladas son una excelente alternativa comparable con el estado del arte. Ambos desarrollos ahora forman parte de un mismo código que permitirá determinar el peligro sísmico de ciudades como la de México, a través de la simulación computacional en paralelo de posibles escenarios sísmicos.



# Capítulo 1

## Introducción

Los sismos para México no sólo representan fenómenos naturales de gran interés científico sino también una amenaza permanente. De modo que para aquellos investigadores que dedican su vida al estudio de la sismología en México, su objeto de estudio les permite no sólo apaciguar su inquietud intelectual, sino también la satisfacción de saber que sus productos científicos, utilizados con fines prácticos, podrían salvar vidas.

Para entender los terremotos nos debemos preguntar ¿cómo es que estos se producen? y ¿por qué los podemos observar a pesar de que, en ocasiones, estamos a miles de kilómetros de distancia?, el origen de los terremotos se debe esencialmente a la liberación espontánea de energía elástica acumulada entre placas tectónicas vecinas. Este evento sucede cuando el movimiento continuo, asociado al flujo convectivo del manto, al que están sujetas las placas en contacto tiene diferente dirección. De modo que la fricción entre las placas se opone a su deslizamiento induciéndose un crecimiento en los esfuerzos en la vecindad de la interfaz de contacto. La nucleación de los terremotos se da justamente cuando los esfuerzos que se van acumulando superan la resistencia al movimiento ejercida por la fricción. Esto produce un desplazamiento entre las placas que libera la energía acumulada, de la cual una parte viaja en forma de ondas.

La complejidad del trayecto que siguen las ondas se debe a la estructura heterogénea de la tierra. La atenuación que sufren las ondas se debe en gran parte a la disipación de la energía durante el trayecto y es debido a ésta que la vida de las ondas en la Tierra tiene una duración finita.

Es a través de las matemáticas que se han creado modelos que pretenden representar la física de los terremotos. Estos modelos se han vuelto con el tiempo más complejos acercándose, cada vez más a la realidad. Con frecuencia las ecuaciones involucradas en estos modelos no pueden resolverse de forma analítica de modo que es necesario recurrir a aproximaciones computacionales.

Nuestro objetivo final es poder determinar el peligro sísmico en ciudades como la de México a través de la modelación de posibles escenarios sísmicos. Quisiéramos poder modelar correctamente el inicio del sismo en la trinchera del Pacífico y la subsecuente propagación de las ondas a través de la masa continental hasta el Valle de la Ciudad de México. Se busca que esta modelación sea útil para magnatarios e ingenieros que podrían utilizar esta información para tomar medidas preventivas. Esto se dice fácil pero en realidad es una tarea monumental con muchísimas complicaciones. Entre estas es imprescindible conocer la estructura interna de la Tierra para lograr una correcta simulación de la propagación de ondas sísmicas.

Con este trabajo se da un pequeño paso hacia ese objetivo. Se plantearon dos tareas: 1) simular la propagación de ondas en un medio viscoelástico (un medio con atenuación intrínseca) y 2) modelar

la dinámica de la ruptura sísmica. La propagación de ondas puede modelarse a través una ecuación diferencial que, para resolverse sobre un medio estructuralmente complejo y heterogéneo como la Tierra, deben aplicarse estrategias numéricas sofisticadas. Se decidió trabajar con un esquema numérico relativamente nuevo (1970's) llamado Galerkin discontinuo. La elección de este esquema numérico se debe a que demostró ser muy eficiente para modelar la propagación de ondas elásticas en medios heterogéneos, puede trabajar con topografías no planas y, como su nombre lo señala, permite modelar fácilmente discontinuidades, lo cual resulta muy útil para modelar la dinámica del deslizamiento sobre una falla. Otro punto muy importante, es que las simulaciones sísmicas requieren del uso de super cómputo, *i.e.* clusters, por la extensión de los dominios de simulación y el esquema de Galerkin discontinuo permite una fácil paralelización del código. Los códigos desarrollados fueron programados en Fortran90 y utilizan la librería *Message Passage Interface* (MPI) para su paralelización.

La inclusión de la atenuación intrínseca dentro del esquema de Galerkin discontinuo se hizo permitiendo modelar la intensidad de la atenuación en un medio de propagación heterogéneo. Para obtener un esquema numérico eficiente, la discretización implementada permite tener distintos órdenes de aproximación de acuerdo a las propiedades físicas del medio. Por otro lado, la implementación de la dinámica de la ruptura permite trabajar sobre fallas no planas con estados iniciales heterogéneos. Ambos desarrollos demostraron ser una herramienta alternativa viable con respecto al estado del arte.

El resultado de este trabajo culminó con dos artículos científicos que están incluidos en la tesis. El primero sobre la dinámica de la ruptura sísmica, aceptado el 14 de Agosto del 2012 por la revista *Journal of Geophysical Research*. El segundo sobre la propagación de ondas viscoelásticas que será pronto sometido a la revista *Geophysical Journal International*.

A continuación se da una breve descripción de cada parte de la tesis.

- *Resumen*. Se describe brevemente la tesis.

1. *Introducción*. Explica la motivación y contenido de la tesis.

## Parte I Propagación de ondas viscoelásticas

2. *Introducción (Parte I)*. Se define el concepto de anelasticidad y la manera en que se cuantifica.
3. *Formulación continua*. Explica la reología de un medio viscoelástico, su modelación matemática y una representación alterna que permite su incorporación a un esquema numérico en el dominio del tiempo. Finalmente, las ecuaciones que modelan la propagación de ondas viscoelásticas se formulan como un sistema lineal hiperbólico .
4. *Formulación discreta*. La formulación desarrollada en el capítulo anterior se discretiza utilizando un esquema de Galerkin Discontinuo.
5. *Condiciones de frontera*. Para hacer la tesis autocontenida se explica como incorporar las condiciones de frontera libre y absorbentes en un esquema de Galerkin Discontinuo.
6. *Artículo: 3D Anelastic Wave Propagation with an hp-Adaptive Discontinuous Galerkin Method*. Incluye el artículo sobre la anelasticidad incorporada en un esquema de Galerkin Discontinuo. Se presenta un análisis interesante sobre la discretización del medio de propagación.

## Parte II Dinámica de la ruptura sísmica.

7. *Introducción (Parte II)*. Explica la modelación de fuentes finitas y los modos de propagación de ruptura de grietas.
8. *Formulación continua*. Presenta las condiciones de frontera y la ley de fricción que modelan la superficie de contacto de una falla preexistente.

9. *Formulación discreta*. Explica como implementar las condiciones de frontera que modelan la dinámica de la ruptura en un esquema de Galerkin Discontinuo.
10. *Artículo: 3D hp-Adaptive Discontinuous Galerkin Method for Modeling Earthquake Dynamics*. Incluye el artículo aceptado sobre la dinámica de la ruptura. Este incluye un pequeño estudio del sismo de Landers de 1992.
11. *Benchmarks de SCEC*. Presenta los últimos benchmarks propuestos por el Southern California Earthquake Center y se compara nuestra solución contra las de otros modeladores.
12. *Conclusiones y Trabajo Futuro*. Indica la relevancia de nuestros resultados y el trabajo que queda pendiente.
  - A. *Cómputo de los coeficientes anelásticos*. Incluye dos métodos para calcular los coeficientes anelásticos que son parámetros que deben incorporarse en el esquema de Galerkin Discontinuo para la propagación de ondas en un medio viscoelástico. Finalmente se analizan ambas metodologías.
  - B. *Cómputo del módulo sin relajamiento*. Presenta como deben calcularse los parámetros que forman parte de la respuesta elástica en una propagación de ondas viscoelásticas.
  - C. *Dinámica de la ruptura utilizando la ley de fricción "rate & state"*. Se introducen las ecuaciones de la ley de fricción "rate & state", se incorporan en un esquema de Galerkin Discontinuo y se presentan algunos resultados preliminares.



Parte I

Propagación de ondas  
viscoelásticas





## Capítulo 2

# Introducción (Parte I)

Las ondas sísmicas se atenúan, *i.e.* decrecen en amplitud conforme se propagan, debido a la transmisión y reflexión que ocurre en las discontinuidades del medio de propagación, a la dispersión geométrica y a la *anelasticidad*. Los primeros dos son procesos elásticos, en donde la energía se extiende en el medio de propagación pero se conserva. Por otro lado la anelasticidad, a veces llamada atenuación intrínseca, involucra la transformación, *i.e.* disipación, de energía elástica en calor.

La intensidad de la atenuación intrínseca se mide en términos de la fracción de energía que se pierde por ciclo y se define como

$$\frac{1}{Q(\omega)} = -\frac{\Delta E}{2\pi E}, \quad (2.1)$$

donde  $Q$  se conoce como el factor de calidad del medio,  $E$  es la energía de deformación máxima y  $-\Delta E$  es la energía que se disipa por ciclo. Note que  $Q$  es inversamente proporcional a la cantidad de energía disipada, *i.e.* regiones de pequeños valores de  $Q$  tienen mayor atenuación que aquellas regiones de valores grandes de  $Q$ . Para el caso de las ondas sísmicas en la Tierra, la energía que se pierde por ciclo es muy pequeña de modo que el valor esperado para el factor de calidad es  $Q \gg 1$ .

La Ecuación (2.1) rara vez es utilizada de forma directa, debido a que únicamente en experimentos muy especiales es posible someter a un material con ondas de esfuerzos cuyas amplitudes y periodos permanezcan sin cambios. Resulta más fácil que uno pueda observar el decaimiento espacial de la amplitud de una onda que se propaga con una frecuencia fija. La situación más común en sismología involucra la atenuación de una señal compuesta de un rango de frecuencias, y se debe hacer la fuerte suposición (que debe ser verificada posteriormente) que la atenuación es un fenómeno lineal, en el sentido de que una onda puede ser resuelta con sus componentes de Fourier y con la subsecuente síntesis de estos componentes se obtiene el efecto correcto de la atenuación en las señales sísmicas (*Aki y Richards, 2002*).

Para un medio con una relación lineal de esfuerzo-deformación, la amplitud de la onda  $A$  es proporcional a  $E^{1/2}$ . Por lo tanto

$$\frac{1}{Q(\omega)} = -\frac{1}{\pi} \frac{\Delta A}{A}, \quad (2.2)$$

de la cual se puede obtener las fluctuaciones de la amplitud debido a la atenuación.

Con el fin de determinar una fórmula para calcular  $A$  en función de la distancia de propagación  $x$ , se asume que la dirección de la máxima atenuación es a lo largo de la dirección  $x$  que es la misma que la dirección de propagación. El estudio implica seguir un pico de la onda a lo largo de una distancia

$dx$  y observar el decaimiento espacial de  $A$  tal que

$$\Delta A = \frac{dA}{dx} \lambda, \quad (2.3)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda que puede formularse como

$$\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega}, \quad (2.4)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia y  $c$  es la velocidad de fase  $c$  (e.g.,  $c = \alpha$  para ondas P con atenuación  $Q_\alpha$  y  $c = \beta$  para ondas S con atenuación  $Q_\beta$ ).

Utilizando las Ecuaciones (2.3) y (2.4), la Ecuación (2.2) se puede escribir como la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dA}{dx} = -\frac{\omega}{2cQ} A,$$

con solución

$$A(x) = A_0 \exp^{-\omega x/2cQ}, \quad (2.5)$$

donde  $A_0$  es la amplitud inicial de la onda original. A partir de observaciones del decaimiento exponencial de valores de  $A(x)$  se puede calcular, a partir de la Ecuación (2.5), el valor de  $Q$  siempre y cuando se considere los efectos de la dispersión geométrica.

Una consecuencia importante de la atenuación de ondas sísmicas es la *dispersión física*, donde las ondas con diferentes frecuencias viajan a diferentes velocidades, *i.e.* la velocidad de las ondas es función de la frecuencia. Esta se distingue de la dispersión comúnmente observada en las ondas superficiales donde ondas de diferentes frecuencias tienen diferentes velocidades aparentes. Sin embargo esa dispersión observada se debe a que las ondas de diferentes frecuencias muestrean distintas profundidades que tienen asociadas diferentes velocidades, las cuales en un medio elástico son independientes de la frecuencia.

Con el fin de notar cómo la dispersión física es consecuencia de la atenuación, se deducirá como cambia la forma de una onda atenuada. Para lograrlo se asume una onda que es una función delta (ver Figura 2.1a), que se nombrará como onda delta, y se propaga a través de un medio elástico homogéneo con una velocidad intrínseca  $c$

$$u(x, t) = \delta(t - x/c). \quad (2.6)$$

La transformada de Fourier de la función delta es

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \exp^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - x/c) \exp^{-i\omega t} dt = \exp^{-i\omega x/c}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

cuya amplitud espectral está dada por

$$\begin{aligned} |F(\omega)| &= [F(\omega)F^*(\omega)]^{1/2} \\ &= (\exp^{-i\omega x/c} \exp^{i\omega x/c})^{1/2} = 1, \end{aligned} \quad (2.8)$$

que muestra que la función delta excita a todas las frecuencias. Si no existe dispersión, todas las frecuencias viajan a la misma velocidad y arriban al mismo tiempo. El efecto de la atenuación como una función de la distancia está dada por la Ecuación (2.5) que muestra que si  $Q$  es constante, la tasa a la cual la amplitud decae con la distancia se incrementa fuertemente con la frecuencia. Para notar cómo es que la atenuación afecta a la onda delta se multiplicará a la Ecuación (2.7) por el

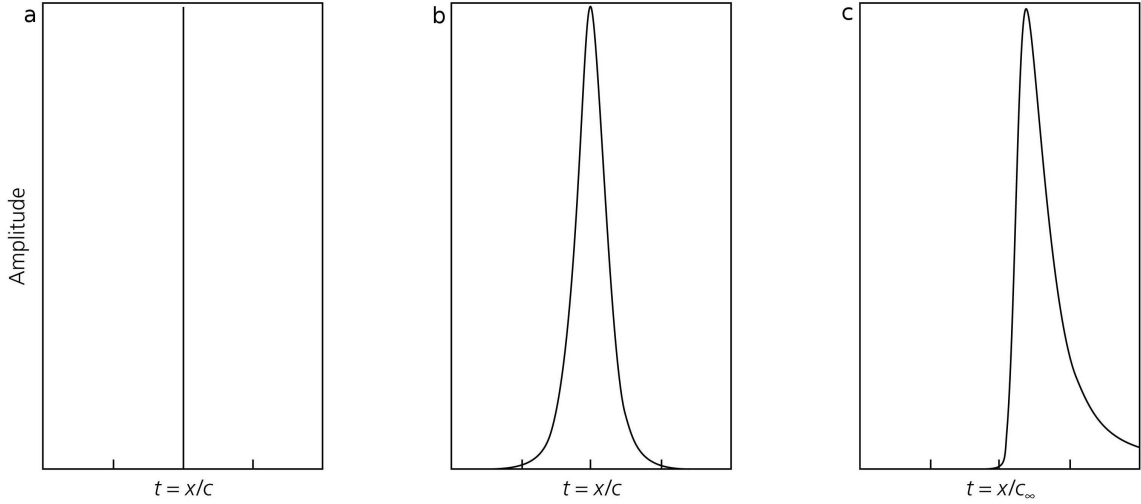


Figura 2.1: Demostración de la dispersión física de un pulso atenuado. a) Una onda delta que se propaga sin atenuación. b) Una onda delta atenuada que se propaga sin dispersión. c) Una onda delta atenuada con dispersión. Imagen tomada de (*Stein y Wysession, 2003*).

factor atenuante de la Ecuación (2.5) y se aplicará la transformada inversa de Fourier para regresar al dominio del tiempo como

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{-\omega x/2cQ} F(\omega) \exp^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{-\omega x/2cQ} \exp^{-i\omega x/c} \exp^{i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Evaluando la integral se obtiene

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \frac{x/2cQ}{(x/2cQ)^2 + (x/c - t)^2}, \quad (2.10)$$

cuya forma puede observarse en la Figura 2.1b, que muestra que la función delta se ha ensanchado en una onda que es simétrica en el tiempo con un máximo en  $t = x/c$ .

El problema con esta solución es que la energía sísmica arribaría antes que el tiempo de arribo geométrico que tendría la onda delta (*i.e.*  $t = x/c$ ). Además como la onda es asintótica en ambos lados de  $t = x/c$ , algo de energía llegaría incluso antes de que el sismo ocurriera. Esta situación imposible, llamada *no causalidad*, resulta del hecho de que la atenuación ensancha al pulso al remover de forma preferencial los componentes correspondientes a las altas frecuencias.

Por lo tanto los mecanismos físicos que causan la atenuación en la tierra provocan que las ondas de todas las frecuencias viajen a la misma velocidad. Como resultado se tiene la dispersión física donde las bajas frecuencias viajan más lentamente a través de un medio anelástico.

La condición matemática para la causalidad es que  $u(x, t) = 0$  para todo  $t < x/c_\infty$  donde  $c_\infty = c(\infty)$  es la velocidad de las ondas con frecuencia infinita que arriban primero. Una relación de dispersión para la velocidad de fase como función de la frecuencia es la llamada ley de atenuación de Azimi (*Azimi et al., 1968*) que está dada por

$$c(\omega) = c_0 \left[ 1 + \frac{1}{\pi Q} \ln \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right], \quad (2.11)$$

donde  $c_0$  es una velocidad de referencia con su correspondiente frecuencia de referencia  $\omega_0$ . Esta relación provee la causalidad requerida porque el pulso resultante (ver Figura 2.1c) contiene altas frecuencias que arriban después de  $t = x/c_\infty$  y cuyas bajas frecuencias arriban después de estas con una duración que depende del valor de  $Q$ . Si no existe atenuación, *i.e.*  $Q = \infty$ , la Ecuación (2.11) no sufre de dispersión de modo que la onda delta no se ensancha. El pulso de la Figura 2.1c también se conoce como operador atenuante, y puede ser usado para modelar los efectos de la atenuación en la forma de las ondas sísmicas al convolucionarlo con estas. Esta puede ser una alternativa para que a partir de sismogramas sintéticos calculados sobre un medio elástico se pueda incorporar la atenuación para obtener sismogramas más realistas.

A partir de la Ecuación (2.11) se pueden determinar funciones para las velocidades  $\alpha$  y  $\beta$  de las ondas  $P$  y  $S$  respectivamente, como una función del periodo  $T$  tal que

$$\begin{aligned}\beta(T) &= \beta(1) \left( 1 - \frac{\ln T}{\pi} Q_\mu^{-1} \right) \\ \alpha(T) &= \alpha(1) \left[ 1 - \frac{\ln T}{\pi} (LQ_\mu^{-1} + (1-L)Q_K^{-1}) \right],\end{aligned}\quad (2.12)$$

donde  $L = 4/3(\beta/\alpha)^2$ ,  $\mu$  es el módulo de rigidez,  $K$  es el módulo de compresibilidad y  $\alpha(1)$  y  $\beta(1)$  son las velocidades a 1 s. La diferencia entre velocidades con distintos periodos puede ser significativo, *e.g.* para un tiempo total de viaje de 934 s una onda vertical  $ScS$  con  $T = 40$  s es 5 s más lenta que una con  $T = 1$  s (una diferencia del 0.5%).

Este fenómeno causa una discrepancia entre la estructura de las velocidades sísmicas calculada al invertir las observaciones entre los modos normales de periodo largo y las ondas de cuerpo de periodo corto. Las velocidades inferidas a partir de los modos normales son considerablemente más lentas que las obtenidas por las ondas de cuerpo. Esta discrepancia refleja el efecto de la atenuación que provoca que las ondas de periodo largo, como los modos normales, viajen a velocidades más lentas que las ondas de cuerpo. El no tomar este efecto en cuenta puede causar errores en las predicciones de los tiempos de varios segundos para el arribo de las ondas de cuerpo.

Un modelo común para los procesos anelásticos en la tierra es tratarla como una combinación de sólidos estándar lineales que combinan la respuesta elástica y viscosa de una onda sísmica incidente. Un sólido estándar lineal está representado por un resorte conectado en paralelo con otro resorte conectado a su vez en serie con un amortiguador. *Liu et al.* (1976) propuso este modelo para modelar la fricción interna en la tierra para una  $Q$  independiente de la frecuencia. La elección de una  $Q$  constante se deriva de observaciones sismológicas donde se observa que la fricción interna en la tierra es casi constante en el rango de frecuencias sísmicas que corresponde aproximadamente a periodos desde 0.01 s hasta de 1 hr. Esto se asume a la naturaleza multi-material de la tierra de modo que la atenuación global se debe a la contribución de la atenuación que sufre cada uno de los materiales. Sin embargo, para estudios regionales y locales una atenuación constante no modela correctamente la observación de ondas incidentes como ha sido demostrado por ejemplo en la Ciudad de México por *Ordaz y Singh* (1992); *Singh y Ordaz* (1993) donde la atenuación depende de la frecuencia como  $Q(f) = 273f^{0.66}$ . Esta aproximación de la atenuación, modelada a partir de datos, es fundamental para estudios ingenieriles de riesgo sísmico como los realizados por *García et al.* (2004, 2005).

En esta primera parte del trabajo inicialmente se detalla la relación constitutiva que caracteriza a un medio viscoelástico. A partir de dicha relación se desarrolla el módulo viscoelástico expresado en términos del factor de calidad del medio  $Q$ . Así se introducen diferentes modelos reológicos para deducir dicho módulo y la función de relajación correspondientes a un cuerpo generalizado de Maxwell. En seguida se introducen las funciones anelásticas junto con las EDOs que las gobiernan para evitar la convolución temporal de la ecuación constitutiva del medio. Se presenta entonces el desarrollo del sistema hiperbólico de primer orden en 3D para la propagación de ondas viscoelásticas implicando las funciones anelásticas y se discretiza detalladamente siguiendo un esquema numérico en Galerkin

Discontinuo. Después de presentar los desarrollos detallados necesarios para la aplicación de condiciones de frontera libre y absorbentes (CPML), finalmente se presenta un artículo donde se resume el método computacional Galerkin Discontinuo propuesto. Un análisis cuidadoso de verificación y convergencia le siguen para terminar con otro análisis cuantitativo sobre el efecto del refinamiento de la malla en la solución del problema.



# Capítulo 3

## Formulación continua

### Índice

---

<b>3.1. Medio viscoelástico</b> . . . . .	<b>15</b>
3.1.1. Conceptos básicos . . . . .	16
3.1.2. Modelo reológico . . . . .	19
3.1.3. Funciones anelásticas . . . . .	22
3.1.4. Formulación 3D . . . . .	25
<b>3.2. Sistema viscoelástico hiperbólico de primer orden</b> . . . . .	<b>27</b>

---

En este capítulo se presenta la ecuación constitutiva de un medio viscoelástico como la convolución entre los esfuerzos y las tasas de las deformaciones. Se introduce una formulación alterna a través de la elección de un modelo reológico particular y la inclusión de funciones anelásticas con el objeto de evitar la relación de convolución. Finalmente la ecuación constitutiva resultante junto a la ecuación de movimiento se plantean como un sistema hiperbólico de primer orden que será discretizado, en el siguiente capítulo, siguiendo un esquema de Galerkin Discontinuo.

### 3.1. Medio viscoelástico

La relación esfuerzo-deformación en un medio viscoelástico está definida como

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t \psi_{ijkl}(t - \tau) \partial_t \epsilon_{kl}(\tau) d\tau, \quad (3.1)$$

donde  $\sigma_{ij}(t)$  es el tensor de esfuerzos,  $\psi_{ijkl}$  es el tensor de funciones de relajación que describen el comportamiento del material y  $\epsilon_{kl}$  es el tensor de deformaciones. Esta ecuación se obtiene a partir de los principios de causalidad y de superposición de Boltzmann (*Christensen, 1971*).

Cuando el medio es isotrópico, la Ecuación (3.1) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) = & \delta_{ij} \delta_{kl} \int_{-\infty}^t \lambda(t - \tau) \partial_t \epsilon_{kl}(\tau) d\tau \\ & + (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \int_{-\infty}^t \mu(t - \tau) \partial_t \epsilon_{kl}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.2)$$



donde  $\lambda(t)$  y  $\mu(t)$  son las funciones de Lamé relajadas. Es fácil notar que la diferencia con el caso elástico es que las constantes de Lamé son ahora funciones del tiempo y que están incorporadas en la ley constitutiva dentro de una convolución.

Desde un punto de vista numérico, el cálculo de las integrales en la Ecuación (3.2) es inviable debido a los altos requerimientos de memoria y tiempo de cómputo. Esto se debe a que el tensor de esfuerzos al instante  $t$  depende de la historia completa de la tasa de deformaciones en todo el dominio. De modo que la meta será transformar la formulación integral por una serie de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que podrán ser incorporadas en un esquema numérico.

En la siguiente subsección se presentan los conceptos básicos sobre la ecuación constitutiva viscoelástica en 1D que serán primordiales en los desarrollos de las subsecciones posteriores.

### 3.1.1. Conceptos básicos

Para simplificar la descripción matemática de la física involucrada en un medio viscoelástico, consideraremos por el momento el caso 1D cuya ecuación constitutiva es

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \psi(t - \tau) \partial_t \epsilon(\tau) d\tau, \quad (3.3)$$

donde  $\sigma(t)$  es el esfuerzo,  $\epsilon(t)$  es la deformación y  $\psi(t)$  es la función de relajación que representa la respuesta del esfuerzo ante una función escalón Heaviside aplicada a la deformación. En esta ecuación el esfuerzo  $\sigma$  en el momento  $t$  recolecta la historia completa de la deformación hasta ese instante. Se puede reescribir la Ecuación (3.3) como

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \psi(t) * \partial_t \epsilon(t) \\ &= \partial_t \psi(t) * \epsilon(t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde por propiedades de la convolución hemos cambiado de lugar la derivada temporal parcial. De modo que siendo  $\psi(t)$  es el esfuerzo sujeto a una función escalón en la deformación, su derivada temporal

$$M(t) = \partial_t \psi(t)$$

se conoce como el módulo viscoelástico y determina la respuesta del esfuerzo ante un delta de Dirac en la deformación. Se puede entonces reescribir la Ecuación (3.4) como

$$\sigma(t) = M(t) * \epsilon(t). \quad (3.5)$$

Si se aplica la transformada de Fourier a la Ecuación (3.5) se tiene

$$\sigma(\omega) = M(\omega) \cdot \epsilon(\omega), \quad (3.6)$$

donde

$$M(\omega) = \mathcal{F}\{M(t)\} = \mathcal{F}\{\partial_t \psi(t)\}, \quad (3.7)$$

es el módulo viscoelástico complejo que depende de la frecuencia. Aplicando la transformada inversa de Fourier a la Ecuación (3.7) se tiene

$$\partial_t \psi(t) = \mathcal{F}^{-1}\{M(\omega)\}, \quad (3.8)$$

y como  $\mathcal{F}\{f^{(k)}(t)\} = (i\omega)^k F(\omega)$  se puede escribir la Ecuación (3.8) como

$$\psi(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{M(\omega)}{i\omega} \right\}. \quad (3.9)$$

Como  $\psi(t)$  es la respuesta del esfuerzo ante una función escalón en la deformación, se puede reescribir como

$$\psi(t) = \tilde{\psi}(t)H(t),$$

donde

$$\tilde{\psi}(t) = \begin{cases} \tilde{\psi}(0) = \psi(0) & \text{if } t = 0, \\ \tilde{\psi}(t) = \psi(t) & \text{if } t > 0. \end{cases}$$

De modo que la derivada temporal de  $\psi(t)$  puede escribirse como

$$\partial_t \psi(t) = \partial_t \tilde{\psi}(t)H(t) + \tilde{\psi}(t)\delta(t). \quad (3.10)$$

Para analizar el comportamiento del módulo viscoelástico desarrollamos la Ecuación (3.7) utilizando (3.10)

$$\begin{aligned} M(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\partial_t \tilde{\psi}H(t) + \tilde{\psi}(t)\delta(t)] \exp^{-i\omega t} dt \\ &\text{Debido al pulso de Dirac} \\ &= \psi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t \tilde{\psi}H(t) \exp^{-i\omega t} dt \\ &\text{Cambiando los límites de la integral por la función de Heaviside} \\ &= \psi(0) + \int_0^{\infty} \partial_t \psi(t) \exp^{-i\omega t} dt \\ &\text{Extrayendo la derivada temporal e incluyendo una constante conveniente} \\ &= \psi(0) + \int_0^{\infty} \partial_t [\psi(t) - \psi(\infty)] \exp^{-i\omega t} dt \\ &\text{Integrando por partes} \\ &= \psi(0) + [\psi(t) - \psi(\infty)] \exp^{-i\omega t} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} [\psi(t) - \psi(\infty)] \partial_t \exp^{-i\omega t} dt \\ &= \psi(0) - [\psi(0) - \psi(\infty)] - \int_0^{\infty} [\psi(t) - \psi(\infty)] (-i\omega) \exp^{-i\omega t} dt \\ &= \psi(\infty) + i\omega \int_0^{\infty} [\psi(t) - \psi(\infty)] \exp^{-i\omega t} dt. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Entonces si se evalúa la Ecuación (3.11) en  $\omega = 0$  se tiene que

$$M(\omega = 0) = \psi(t = \infty). \quad (3.12)$$

De forma alternativa al procedimiento anterior, a partir de la Ecuación (3.7) tenemos que

$$\begin{aligned} M(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\partial_t \tilde{\psi}H(t) + \tilde{\psi}(t)\delta(t)] \exp^{-i\omega t} dt \\ &\text{Debido al pulso de Dirac} \\ &= \psi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t \tilde{\psi}H(t) \exp^{-i\omega t} dt \\ &\text{Cambiando los límites de la integral por la función de Heaviside} \\ &= \psi(0) + \int_0^{\infty} \partial_t \psi(t) \exp^{-i\omega t} dt \\ &\text{Integrando por partes} \\ &= \psi(0) + \partial_t \psi(t) \frac{\exp^{-i\omega t}}{-i\omega} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \partial_t^2 \psi(t) \frac{\exp^{-i\omega t}}{-i\omega} dt. \end{aligned}$$

Aplicando el límite cuando  $\omega \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow \infty} M(\omega) &= \psi(0) + \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[ \partial_t \psi(t) \frac{\exp^{-i\omega t}}{-i\omega} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \partial_t^2 \psi(t) \frac{\exp^{-i\omega t}}{-i\omega} dt \right] \\ &= \psi(0) + 0,\end{aligned}$$

de modo que

$$M(\omega = \infty) = \psi(t = 0). \quad (3.13)$$

Con las relaciones (3.12) y (3.13), se pueden definir los siguientes estados del módulo viscoelástico

- $M_U$  es el módulo *sin relajamiento* y es responsable de la respuesta elástica instantánea del material viscoelástico

$$\begin{aligned}M_U &= \lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) && \text{en el dominio del tiempo} \\ M_U &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} M(\omega) && \text{en el dominio de la frecuencia.}\end{aligned}$$

- $M_R$  es el módulo *relajado* y corresponde a la respuesta en estado estacionario

$$\begin{aligned}M_R &= \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) && \text{en el dominio del tiempo} \\ M_R &= \lim_{\omega \rightarrow 0} M(\omega) && \text{en el dominio de la frecuencia.}\end{aligned}$$

El módulo *defecto o de relajación* está definido como

$$\delta M := M_U - M_R.$$

Los términos usados para los límites del módulo viscoelástico se deben a que si se aplica un función escalón al esfuerzo  $\epsilon(t) = H(t)$  se produce un decremento de  $\psi(t)$ , i.e. una relajación del estado sin relajamiento con  $\psi(0) = M_U$  a un estado relajado con  $\psi(\infty) = M_R$ .

Finalmente para que el módulo viscoelástico atenúe de acuerdo a una reología dada se debe cumplir que

$$Q^{-1}(\omega) = \frac{\text{Im}M(\omega)}{\text{Re}M(\omega)}, \quad (3.14)$$

donde  $Q^{-1}(\omega)$  es el inverso del factor de calidad del medio y representa una medida de la fricción interna de un cuerpo viscoelástico lineal que puede obtenerse a partir de datos geofísicos, para conocer los detalles revisar el Capítulo 2.

## Complicaciones en la modelación de la atenuación

La incorporación de la atenuación en el dominio de la frecuencia es relativamente fácil debido al principio de linealidad de la teoría viscoelástica donde el modulo real independiente de la frecuencia del caso elástico es simplemente remplazado por una función compleja dependiente de la frecuencia. Por otro lado, en el dominio del tiempo la relación esfuerzo-deformación es una convolución, ver la Ecuación (3.3).

Si se quieren utilizar métodos numéricos en el dominio del tiempo, *e.g.* Diferencias Finitas, Elemento Finito o Galerkin Discontinuo, resulta prácticamente imposible conservar en la memoria de una computadora toda la historia de la deformación en cada punto de la malla. Además de que la evaluación de la convolución conforme avance el tiempo de simulación incrementaría mucho el tiempo requerido para su cómputo. Estos son los problemas para incorporar una atenuación realista en los

métodos numéricos del dominio del tiempo y una posible solución es cambiar esta convolución por una forma diferencial, i.e. encontrar ecuaciones diferenciales parciales equivalentes que puedan resolverse por el método de nuestra elección.

Si  $M(\omega)$  fuera una función racional

$$M(\omega) = \frac{P_m(i\omega)}{Q_n(i\omega)}, \quad (3.15)$$

con

$$\begin{aligned} P_m(i\omega) &= \sum_{l=1}^m p_l (i\omega)^l \\ Q_n(i\omega) &= \sum_{l=1}^n q_l (i\omega)^l. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Entonces si se aplica la transformada inversa de Fourier a la Ecuación (3.6) con  $M(\omega)$  dado por la Ecuación (3.15) tenemos

$$\sum_{l=1}^n q_l \partial_t^l \sigma(t) = \sum_{l=1}^m p_l \partial_t^l \epsilon(t),$$

donde la EDO de  $n$ -ésimo orden puede eventualmente resolverse mucho más fácilmente que la convolución. *Day y Minster* (1984) asumieron que, en general, el módulo viscoelástico no es una función racional. De modo que sugirieron aproximar el módulo viscoelástico por una función racional de  $n$ -ésimo orden y determinar sus coeficientes por la aproximación de Padé. Ellos obtuvieron  $n$  EDOs para cada  $n$  variables internas adicionadas que reemplazan la convolución. La suma de las variables internas multiplicadas por el módulo sin relajamiento genera un término viscoelástico adicional a los esfuerzos elásticos. El trabajo de Day y Minster no sólo produjo una aproximación particular pero de hecho sugirió la futura evolución que consiste en la construcción de modelos reológicos cuyo módulo viscoelástico,  $M(\omega)$ , es una función racional de  $i\omega$ .

En la siguiente subsección se construirá un modelo reológico como una función racional, en base al trabajo de *Emmerich y Korn* (1987), que permitirá la correcta modelación de la atenuación intrínseca del medio.

### 3.1.2. Modelo reológico

Existen muchos modelos reológicos que podríamos considerar para modelar la tierra. Desafortunadamente los modelos más sencillos, como el cuerpo de Maxwell, cuerpo de Kelvin-Voigt y cuerpo de Zener, no son adecuados para modelar la fricción interna,  $Q^{-1}$ , presente en la Tierra. Siguiendo la idea propuesta por *Day y Minster* (1984) de trabajar con una  $M(\omega)$  que sea una función racional aparecieron dos aproximaciones. Una introducida por *Emmerich y Korn* (1987), usando un **Cuerpo Generalizado de Maxwell (CGM-EK)** -  $n$  cuerpos de Maxwell y un elemento de Hooke conectados en paralelo - y otra hecha por *M. Carcione et al.* (1988a,b), que de acuerdo a lo propuesto por *Liu et al.* (1976) utilizó un **Cuerpo Generalizado de Zener (CGZ)** -  $n$  cuerpos de Zener conectados en paralelo -. Desde entonces muchos trabajos surgieron utilizando uno de los dos modelos sin hacer ninguna referencia de la otra alternativa. Fue hasta que *Moczo y Kristek* (2005) analizaron los dos modelos y demostraron que eran equivalentes. A continuación se explicará el modelo CGM-EK porque es el modelo que utilizamos - siguiendo el consejo en (*Moczo et al.*, 2007) - por tratarse de una formulación más sencilla.

## Cuerpo Generalizado de Maxwell (CGM-EK)

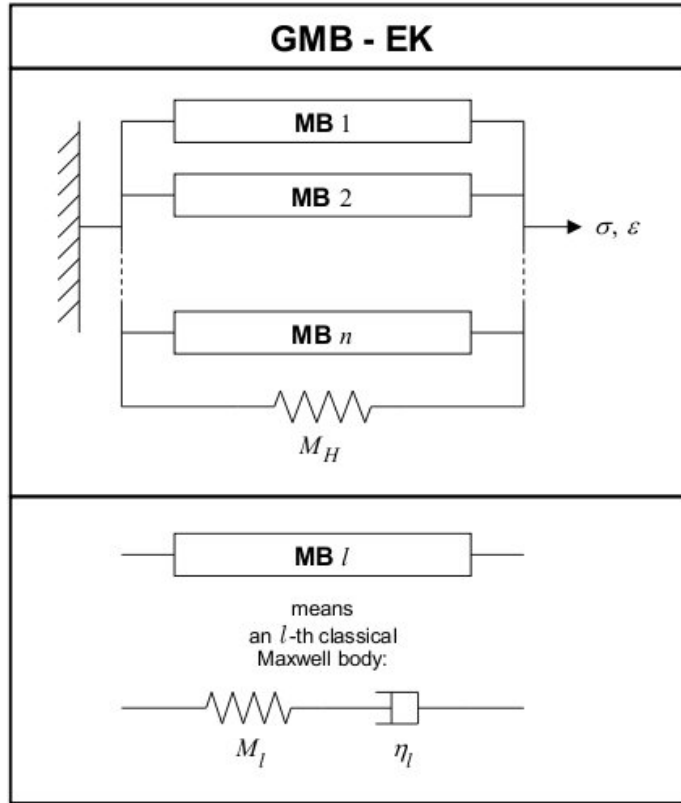


Figura 3.1: Modelo reológico viscoelástico de un CGM-EK. MB denota un cuerpo de Maxwell,  $M_H$  y  $M_l$  son los módulos elásticos del cuerpo de Hooke y del  $l$ -ésimo cuerpo de Maxwell respectivamente y  $\eta_l$  la viscosidad del  $l$ -ésimo cuerpo de Maxwell. Imagen tomada de (Moczo et al., 2007).

En la Figura 3.1, se puede observar la estructura reológica de un CGM-EK. Como se encuentra compuesto por modelos reológicos más sencillos, se introducirán sus partes para entender el comportamiento del modelo.

Los modelos reológicos más simples son los modelos extremos para el caso perfectamente elástico y el puramente viscoso que se enlistan a continuación.

- **Cuerpo de Hooke (CH):** Representa el comportamiento de un material sólido perfectamente elástico, donde el esfuerzo es proporcional a la deformación como

$$\sigma(t) = M \cdot \epsilon(t), \quad (3.17)$$

donde  $M$  es el módulo elástico independiente del tiempo. Al aplicar una carga se produce una deformación instantánea y cuando esta se retira se obtiene una recuperación total. Este proceso no tiene memoria dado que el esfuerzo en un momento dado dependen solamente en la deformación del instante. Se puede representar este modelo como una resorte perfecto. Al aplicar la transformada de Fourier a la Ecuación (3.17) se tiene

$$\sigma(\omega) = M \cdot \epsilon(\omega). \quad (3.18)$$

- **Cuerpo de Stokes (CS):** Representa el comportamiento de un material sólido viscoso, donde el esfuerzo es proporcional a la tasa de la deformación como

$$\sigma(t) = \eta \cdot \partial_t \epsilon(t), \quad (3.19)$$

donde  $\eta$  es la viscosidad independiente del tiempo. Al aplicar una carga se produce una respuesta lineal no-instantánea en la deformación y al retirar esta no se remueve la deformación obtenida. Como no existe recuperación, se dice que el cuerpo tiene memoria extrema o absoluta. Se puede representar este modelo como un amortiguador. Al aplicar la transformada de Fourier a la Ecuación (3.19) se tiene

$$\sigma(\omega) = i\omega\eta \cdot \partial_t \epsilon(\omega). \quad (3.20)$$

Un **cuerpo de Maxwell (CM)** es uno de los modelos viscoelásticos más simples y se contruye con un cuerpo de Hooke y un cuerpo de Stokes conectados en serie, de modo que

$$\sigma = \sigma_H = \sigma_S \quad \epsilon = \epsilon_H + \epsilon_S.$$

Entonces, la deformación puede ser calculada usando (3.18) y (3.20) como

$$\epsilon(\omega) = \frac{\sigma(\omega)}{M} + \frac{\sigma(\omega)}{i\omega\eta},$$

y por lo tanto

$$\sigma(\omega) = \left( \frac{i\omega\eta M}{M + i\omega\eta} \right) \epsilon(x).$$

Con estos modelos reológicos se puede construir un CGM-EK con  $n$  CMs Y un CH conectados en paralelo. Por su configuración se tiene

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_H + \sum_{i=1}^n \sigma_M \\ \epsilon &= \epsilon_H = \epsilon_{M_1} = \epsilon_{M_2} = \dots = \epsilon_{M_n}, \end{aligned}$$

lo cual permite la construcción del módulo viscoelástico de un CGM-EK como

$$\begin{aligned} M(\omega) &= M_H + \sum_{l=1}^n \frac{i\eta_l M_l \omega}{M_l + i\omega\eta_l} \\ M(\omega) &= M_H + \sum_{l=1}^n \frac{iM_l \omega}{\omega_l + i\omega}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

con las frecuencias de relajación

$$\omega_l = \frac{M_l}{\eta_l} \quad l = 1, \dots, n.$$

Siguiendo la sección 3.1.1, de la Ecuación (3.21) podemos obtener el módulo relajado y el módulo sin relajamiento como

$$\begin{aligned} M_R &= \lim_{\omega \rightarrow 0} M(\omega) = M_H \\ M_U &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} M(\omega) = M_R + \sum_{l=1}^n M_l. \end{aligned}$$

Debido a que el módulo sin relajamiento se puede escribir como  $M_U = M_R + \delta M$  entonces se tiene que

$$M_l = \delta M_l,$$

lo cual nos permite incorporar, sin simplificación alguna, al módulo defecto total

$$\delta M_l = a_l \delta M \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1,$$

e integrarlo con el módulo relajado a la Ecuación (3.21) como

$$M(\omega) = M_R + \delta M \sum_{l=1}^n \frac{ia_l \omega}{\omega_l + i\omega}. \quad (3.22)$$

Para obtener la función de relajación se debe utilizar la siguiente identidad

$$f(t) = e^{-at} \iff \frac{1}{i\omega + a} = F(\omega), \quad (3.23)$$

que con la Ecuación (3.9) y a partir de (3.22) se tiene

$$\psi(t) = \left[ M_R + \delta M \sum_{l=1}^n a_l \exp^{-\omega_l t} \right] \cdot H(t).$$

A continuación se reescribirá el modelo viscoelástico a través de funciones anelásticas y se introducirán las ecuaciones diferenciales ordinarias asociadas a estas.

### 3.1.3. Funciones anelásticas

La introducción de las funciones anelásticas nos permitirá evitar la convolución en la ecuación constitutiva viscoelástica (3.4) pero antes es conveniente reescribir el módulo viscoelástico (3.5) usando el módulo sin relajamiento

$$\begin{aligned} M(\omega) &= M_R + \delta M \sum_{l=1}^n \frac{ia_l \omega}{\omega_l + i\omega} \\ &\text{Usando (3.14)} \\ &= M_U - \delta M \sum_{l=1}^n a_l \delta M + \delta M \sum_{l=1}^n \frac{ia_l \omega}{\omega_l + i\omega} \\ &= M_U - \delta M \sum_{l=1}^n a_l \left( 1 - \frac{i\omega}{\omega_l + i\omega} \right) \\ &= M_U - \delta M \sum_{l=1}^n \frac{a_l \omega_l}{\omega_l + i\omega}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

y la función de relajación usando la Ecuación (3.9)

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ M_U \left( \frac{1}{i\omega} \right) - \delta M \sum_{l=1}^n \frac{a_l \omega_l}{\omega_l + i\omega} \left( \frac{1}{i\omega} \right) \right\} \\
&= \mathcal{F}^{-1} \left\{ M_U \left( \frac{1}{i\omega} \right) - \delta M \sum_{l=1}^n \left( a_l - \frac{a_l i \omega_l}{\omega_l + i\omega} \right) \left( \frac{1}{i\omega} \right) \right\} \\
&= \mathcal{F}^{-1} \left\{ M_U \left( \frac{1}{i\omega} \right) - \delta M \sum_{l=1}^n a_l \left( \frac{1}{i\omega} - \frac{1}{\omega_l + i\omega} \right) \right\} \\
&\text{Usando (3.23)} \\
&= \left[ M_U - \delta M \sum_{l=1}^n a_l (1 - \exp^{-\omega_l t}) \right] \cdot H(t).
\end{aligned}$$

Aplicando la derivada temporal a la función de relajación se obtiene el módulo viscoelástico en el dominio del tiempo

$$\begin{aligned}
M(t) &= \partial_t \psi(t) \\
&= -\delta M \sum_{l=1}^n a_l \omega_l \exp^{-\omega_l t} \cdot H(t) \\
&\quad + \left[ M_U - \delta M \sum_{l=1}^n a_l (1 - \exp^{-\omega_l t}) \right] \cdot \delta(t).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Insertando (3.25) en la ecuación constitutiva viscoelástica (3.5) tenemos

$$\begin{aligned}
\sigma(t) &= - \int_{-\infty}^t \delta M \sum_{l=1}^n a_l \omega_l \exp^{-\omega_l(t-\tau)} H(t-\tau) \cdot \epsilon(\tau) d\tau \\
&\quad + \int_{-\infty}^t M_U \delta(t-\tau) \cdot \epsilon(\tau) d\tau \\
&\quad - \int_{-\infty}^t \delta M \sum_{l=1}^n a_l (1 - \exp^{-\omega_l(t-\tau)}) \delta(t-\tau) \cdot \epsilon(\tau) d\tau \\
&\text{Debido al pulso de Dirac y la función de Heaviside} \\
&= -\delta M \sum_{l=1}^n a_l \omega_l \int_{-\infty}^t \exp^{-\omega_l(t-\tau)} \cdot \epsilon(\tau) d\tau + M_U \epsilon(t) \\
&\quad - \delta M \sum_{l=1}^n a_l (1 - \exp^{-\omega_l(t-t)}) \epsilon(t) \\
&= M_U \epsilon(t) - \delta M \sum_{l=1}^n a_l \omega_l \int_{-\infty}^t \epsilon(\tau) \exp^{-\omega_l(t-\tau)} d\tau.
\end{aligned}$$

Con esta formulación es posible reemplazar la convolución con la introducción de funciones adiciones que se llamarán *funciones anelásticas*. En (*Day y Minster, 1984*), (*Emmerich y Korn, 1987*) y (*M. Carcione et al., 1988a,b*) definieron estas funciones extras como dependientes de las propiedades del medio de propagación. Pero a continuación se seguirá la ruta tomada por *Kristek y Moczo (2003)*, al definir sus funciones anelásticas como independientes del material

$$\zeta_l(t) = \omega_l \int_{-\infty}^t \epsilon(\tau) \cdot \exp^{-\omega_l(t-\tau)} d\tau \quad l = 1, \dots, n, \tag{3.26}$$



tal que la relación esfuerzo-deformación adquiere la forma

$$\sigma(t) = M_U \cdot \epsilon - \sum_{l=1}^n \delta M a_l \zeta_l(t). \quad (3.27)$$

Para seguir la evolución de las funciones anelásticas se aplica la derivada temporal a la Ecuación (3.26) y se utiliza el Teorema de Leibniz<sup>1</sup> tal que

$$\begin{aligned} \partial_t \zeta_l(t) &= \omega_l \partial_t \int_{-\infty}^t \epsilon(\tau) \cdot \exp^{-\omega_l(t-\tau)} d\tau \\ &\text{Aplicando el Teorema de Leibniz} \\ &= \omega_l \left[ \epsilon(t) \cdot \exp^{-\omega_l(t-t)} + \int_{-\infty}^t \partial_t \epsilon(\tau) \cdot \exp^{-\omega_l(t-\tau)} d\tau \right] \\ &= \omega_l \left[ -\omega_l \int_{-\infty}^t \epsilon(\tau) \cdot \exp^{-\omega_l(t-\tau)} d\tau + \epsilon(t) \right] \\ &= \omega_l (-\zeta_l(t) + \epsilon(t)). \end{aligned}$$

de modo que la EDO asociada a  $\zeta_l(t)$  es

$$\partial_t \zeta_l(t) + \omega_l \zeta_l(t) = \omega_l \epsilon(t) \quad l = 1, \dots, n. \quad (3.28)$$

Las Ecuaciones (3.27) y (3.28) constituyen una relación esfuerzo-deformación en el dominio del tiempo para un medio viscoelástico cuya reología corresponde a la de un CGM-EK. Pero lo más importante es que es una formulación análoga a (3.4) pero sin la convolución que la hacía prácticamente imposible de implementar en un esquema numérico.

Es útil reagrupar algunos parámetros de la Ecuación (3.27) en otros que se llamarán coeficientes anelásticos definidos por

$$Y_l := a_l \frac{\delta M}{M_U} \quad l = 1, \dots, n. \quad (3.29)$$

Usando los coeficientes anelásticos (3.29) se puede reescribir la relación esfuerzo-deformación (3.27) como

$$\sigma(t) = M_U \cdot \epsilon(t) - \sum_{l=1}^n M_U Y_l \zeta_l(t).$$

Resulta claro que los esfuerzos pueden calcularse si el módulo sin relajamiento y los coeficientes anelásticos son conocidos. El módulo sin relajamiento está directamente relacionado con la velocidad propagación de ondas elásticas mientras que los coeficientes anelásticos se obtienen a partir del factor de calidad. Las metodologías para calcular los coeficientes anelásticos y el módulo sin relajamiento se explican en los Apéndices A y B respectivamente.

En la siguiente subsección se extiende el desarrollo anterior para un medio viscoelástico tridimensional.

---

<sup>1</sup>Teorema de Leibniz

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \frac{db(\alpha)}{d\alpha} f(b(\alpha), \alpha) - \frac{da(\alpha)}{d\alpha} f(a(\alpha), \alpha) + \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{d}{d\alpha} f(x, \alpha) dx.$$

### 3.1.4. Formulación 3D

Con la introducción de las variables anelásticas en la sección 3.1.3 se cambiará la formulación de un medio viscoelástico en 3D, Ecuación (3.2), para evitar el cálculo de la convolución. Cada una de las integrales de la Ecuación (3.2) tienen la misma forma que la Ecuación (3.3) que corresponde al caso 1D. Para cada integral se modela su reología como la de un CGM-EK, de modo que tenemos la superposición de dos CGM-EK para nuestro medio isotrópico viscoelástico.

Se puede escribir cada módulo viscoelástico de Lamé en el dominio de la frecuencia, ver Apéndice A, como

$$\lambda(\omega) = \lambda_U \left( 1 - \sum_{l=1}^n Y_l^\lambda \frac{\omega_l}{\omega_l + i\omega} \right) \quad (3.30)$$

$$\mu(\omega) = \mu_U \left( 1 - \sum_{l=1}^n Y_l^\mu \frac{\omega_l}{\omega_l + i\omega} \right), \quad (3.31)$$

donde  $\lambda_U$  y  $\mu_U$  son los parámetros de Lamé sin relajamiento que corresponden a la respuesta elástica instantánea del material viscoelástico. Por simplicidad, de ahora en adelante, se usará únicamente  $\lambda$  y  $\mu$  como los parámetros de Lamé sin relajamiento en lugar de  $\lambda_u$  y  $\mu_u$  (para calcularlos revisar el Apéndice B).

Para calcular los coeficientes anelásticos  $Y_l^\lambda$  y  $Y_l^\mu$ , ver Apéndice A, se deberían conocer los factores de calidad para cada término de Lamé,  $Q_\lambda(\omega)$  y  $Q_\mu(\omega)$ . Pero en la práctica sólo se pueden estimar las factor de calidad para las ondas P y S,  $Q_\alpha(\omega)$  y  $Q_\beta(\omega)$  respectivamente, y definirlos en función de los módulos viscoelásticos de Lamé (3.30) y (3.31) utilizando (3.14) como

$$Q_\nu^{-1}(\omega) = \sum_{l=1}^n \frac{\omega_l \omega + Q_\nu^{-1}(\omega) \omega_l^2}{\omega_l^2 + \omega^2} Y_l^\nu \quad \nu \in \{\alpha, \beta\}.$$

Para expresar a los coeficientes anelásticos con respecto a los parámetros de Lamé  $\lambda$  y  $\mu$ , primero establecemos las siguientes relaciones entre las velocidades de las ondas P y S,  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente, con los parámetros de Lamé

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \\ \iff \lambda &= \rho\alpha^2 - 2\mu \\ &= \rho\alpha^2 - 2\rho\beta^2 \\ &= \rho(\alpha^2 - 2\beta^2), \end{aligned} \quad (3.32)$$

y

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{\mu}{\rho} \\ \iff \mu &= \rho\beta^2. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ahora usando las Ecuaciones (3.32) y (3.33) se pueden encontrar los coeficientes anelásticos para el parámetro  $\lambda$

$$\begin{aligned} Y_l^\lambda &= \rho(\alpha^2 Y_l^\alpha - 2\beta^2 Y_l^\beta) \\ \Leftrightarrow Y_l^\lambda &= \frac{\rho(\alpha^2 Y_l^\alpha - 2\beta^2 Y_l^\beta)}{\rho(\alpha^2 - 2\beta^2)} \\ &= \frac{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}{\frac{\lambda+2\mu}{\rho} - \frac{2\mu}{\rho}} Y_l^\alpha - \frac{2\left(\frac{\mu}{\rho}\right)}{\frac{\lambda+2\mu}{\rho} - \frac{2\mu}{\rho}} Y_l^\beta \\ &= \left(1 + \frac{2\mu}{\lambda}\right) Y_l^\alpha - \frac{2\mu}{\lambda} Y_l^\beta, \end{aligned}$$

y usando la Ecuación (3.33) se pueden encontrar los coeficientes anelásticos para el parámetro  $\mu$

$$\begin{aligned} Y_l^\mu &= \rho\beta^2 Y_l^\beta \\ \Leftrightarrow Y_l^\mu &= \frac{\rho\beta^2}{\rho\beta^2} Y_l^\beta \\ &= Y_l^\beta. \end{aligned}$$

Para sustituir las integrales de la Ecuación (3.2) con las funciones anelásticas, se debe seguir exactamente el mismo procedimiento de la sección 3.1.3 a los módulos viscoelásticos (3.30) y (3.31) para obtener

$$\int_{-\infty}^t \lambda(t-\tau) \partial_t \epsilon_{kl}(\tau) d\tau = \lambda \epsilon_{kl} - \lambda \sum_{m=1}^n Y_m^\lambda \zeta_m^{kl}(t) \quad (3.34)$$

$$\int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \partial_t \epsilon_{kl}(\tau) d\tau = \mu \epsilon_{kl} - \mu \sum_{m=1}^n Y_m^\mu \zeta_m^{kl}(t), \quad (3.35)$$

donde las funciones anelásticas están definidas como

$$\zeta_m^{kl}(t) = \omega_m \int_{-\infty}^t \epsilon_{kl}(\tau) \exp^{-\omega_m(t-\tau)} d\tau \quad m = 1, \dots, n \quad k, l \in \{1, 2, 3\}.$$

Además cada función anelástica tiene asociada una EDO

$$\dot{\zeta}_m^{kl}(t) + \omega_m \zeta_m^{kl}(t) = \omega_m \epsilon_{kl}(t) \quad m = 1, \dots, n \quad k, l \in \{1, 2, 3\}.$$

Sustituyendo las integrales por los términos con las funciones anelásticas (3.34) y (3.35) en la relación esfuerzo-deformación viscoelástica 3D (3.2) se tiene

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) &= \delta_{ij} \delta_{kl} \epsilon_{kl}(t) - \delta_{ij} \delta_{kl} \lambda \sum_{m=1}^n Y_m^\lambda \zeta_m^{k,l}(t) \\ &\quad + (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \mu \epsilon_{kl}(t) - (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \mu \epsilon_{kl}(t) \sum_{m=1}^n Y_m^\mu \zeta_m^{k,l}(t) \\ &= \delta_{ij} \delta_{kl} \lambda \epsilon_{kl}(t) + (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \mu \epsilon_{kl}(t) \\ &\quad - \sum_{m=1}^n (\delta_{ij} \delta_{kl} \lambda Y_m^\lambda \zeta_m^{k,l}(t) + (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \mu Y_m^\mu \zeta_m^{k,l}(t)), \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde los primeros dos términos de la suma en la Ecuación (3.36) están relacionados a la respuesta elástica y el otro término a anelástica. De modo que puede reescribirse la Ecuación (3.36) como

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^E - \sum_{l=1}^n \sigma_{ij}^A,$$

donde

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^E &= \delta_{ij}\delta_{kl}\lambda\epsilon_{kl}(t) + (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\mu\epsilon_{kl}(t) \\ \sigma_{ij}^A &= -\sum_{m=1}^n (\delta_{ij}\delta_{kl}\lambda Y_m^\lambda \zeta_m^{k,l}(t) + (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\mu Y_m^\mu \zeta_m^{k,l}(t)).\end{aligned}$$

En la siguiente sección se plantea a la ecuación constitutiva viscoelástica junto a la ecuación de movimiento como un sistema hiperbólico de primer orden que será discretizado en el siguiente capítulo.

### 3.2. Sistema viscoelástico hiperbólico de primer orden

A continuación se presentará como a partir de las ecuaciones involucradas para la modelación de la propagación de ondas viscoelásticas puede construirse un sistema hiperbólico de primer orden que resulta muy conveniente para un esquema de Galerkin Discontinuo.

Como el tensor de esfuerzos  $\underline{\underline{\sigma}}$  es simétrico, se desarrollan únicamente aquellos términos independientes de  $\underline{\underline{\sigma}}$  en función del vector de desplazamientos  $\underline{u}$  a partir de la Ecuación (3.36) para obtener

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \partial_x(\lambda + 2\mu)u_x + \partial_y\lambda u_y + \partial_z\lambda u_z - \sum_{l=1}^n ((\lambda Y_l^\lambda + 2\mu Y_l^\mu)\zeta_l^{xx} + \lambda Y_l^\lambda \zeta_l^{yy} + \lambda Y_l^\lambda \zeta_l^{zz}) \\ \sigma_{yy} &= \partial_x\lambda u_x + \partial_y(\lambda + 2\mu)u_y + \partial_z\lambda u_z - \sum_{l=1}^n (\lambda Y_l^\lambda \zeta_l^{xx} + (\lambda Y_l^\lambda + 2\mu Y_l^\mu)\zeta_l^{yy} + \lambda Y_l^\lambda \zeta_l^{zz}) \\ \sigma_{zz} &= \partial_x\lambda u_x + \partial_y\lambda u_y + \partial_z(\lambda + 2\mu)u_z - \sum_{l=1}^n (\lambda Y_l^\lambda \zeta_l^{xx} + \lambda Y_l^\lambda \zeta_l^{yy} + (\lambda Y_l^\lambda + 2\mu Y_l^\mu)\zeta_l^{zz}) \\ \sigma_{xy} &= \partial_y\mu u_x + \partial_x\mu u_y - \sum_{l=1}^n 2\mu Y_l^\mu \zeta_l^{xy} \\ \sigma_{xz} &= \partial_z\mu u_x + \partial_x\mu u_z - \sum_{l=1}^n 2\mu Y_l^\mu \zeta_l^{xz} \\ \sigma_{yz} &= \partial_z\mu u_y + \partial_y\mu u_z - \sum_{l=1}^n 2\mu Y_l^\mu \zeta_l^{yz},\end{aligned}$$

que pueden agruparse y reescribirse de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \partial_x \underline{\underline{\tilde{N}}}_x \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} + \partial_y \underline{\underline{\tilde{N}}}_y \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} + \partial_z \underline{\underline{\tilde{N}}}_z \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} - \sum_{l=1}^n \underline{\underline{\tilde{A}}}_l \begin{bmatrix} \zeta_l^{xx} \\ \zeta_l^{yy} \\ \zeta_l^{zz} \\ \zeta_l^{xy} \\ \zeta_l^{xz} \\ \zeta_l^{yz} \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

donde

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\tilde{N}}}_x &= \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \underline{\underline{\tilde{N}}}_y &= \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \\
 \underline{\underline{\tilde{N}}}_z &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \end{bmatrix} \\
 \underline{\underline{\tilde{A}}}_l &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_l^1 & \tilde{A}_l^2 & \tilde{A}_l^2 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{A}_l^2 & \tilde{A}_l^1 & \tilde{A}_l^2 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{A}_l^2 & \tilde{A}_l^2 & \tilde{A}_l^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_l^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_l^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_l^3 \end{bmatrix} \\
 \tilde{A}_l^1 &= \lambda Y_l^\lambda + 2\mu Y_l^\mu \\
 \tilde{A}_l^2 &= \lambda Y_l^\lambda \\
 \tilde{A}_l^3 &= 2\mu Y_l^\mu,
 \end{aligned}$$

o de manera compacta como

$$\tilde{\sigma} = \sum_{\theta \in \{x, y, z\}} \partial_\theta \underline{\underline{\tilde{N}}}_\theta u - \sum_{l=1}^n \underline{\underline{\tilde{A}}}_l \zeta_l.$$

Para factorizar las propiedades físicas, las primeras tres filas de las matrices  $\underline{\underline{\tilde{N}}}_\theta$  requieren tener las mismas variables en cada columna. Se puede observar fácilmente que las propiedades físicas de las primeras tres filas son las mismas en cada matriz  $\underline{\underline{\tilde{N}}}_\theta$  pero en diferente orden. De modo que para poder factorizar basta una combinación lineal de las primeras tres filas. Se seguirá la propuesta de *Benjema et al.* (2009) donde, para el caso puramente elástico, factoriza los esfuerzos normales a las direcciones canónicas con el auxilio de la traza y la parte deviatorica del tensor de esfuerzos.

De modo que en lugar de  $\sigma_{xx}$  se usará la traza

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \\ &= \begin{aligned} &\partial_x \begin{bmatrix} \frac{3\lambda+2\mu}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \partial_y \begin{bmatrix} 0 & \frac{3\lambda+2\mu}{3} & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \partial_z \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3\lambda+2\mu}{3} \end{bmatrix} \end{aligned} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \\ &- \sum_{l=1}^n \begin{bmatrix} \frac{3\lambda Y_l^\lambda + 2\mu Y_l^\mu}{3} & \frac{3\lambda Y_l^\lambda + 2\mu Y_l^\mu}{3} & \frac{3\lambda Y_l^\lambda + 2\mu Y_l^\mu}{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_l^{xx} \\ \zeta_l^{yy} \\ \zeta_l^{zz} \\ \zeta_l^{xy} \\ \zeta_l^{xz} \\ \zeta_l^{yz} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De igual forma se sustituirá  $\sigma_{yy}$  por el componente  $xx$  del tensor de esfuerzos deviatorico

$$\begin{aligned} \tau' &= \frac{2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}}{3} \\ &= \begin{aligned} &\partial_x \begin{bmatrix} \frac{4\mu}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \partial_y \begin{bmatrix} 0 & \frac{-2\mu}{3} & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \partial_z \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-2\mu}{3} \end{bmatrix} \end{aligned} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \\ &- \sum_{l=1}^n \begin{bmatrix} \frac{4\mu Y_l^\mu}{3} & \frac{-2\mu Y_l^\mu}{3} & \frac{-2\mu Y_l^\mu}{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_l^{xx} \\ \zeta_l^{yy} \\ \zeta_l^{zz} \\ \zeta_l^{xy} \\ \zeta_l^{xz} \\ \zeta_l^{yz} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente en lugar de  $\sigma_{zz}$  se usará el componente  $yy$  del tensor de esfuerzos deviatorico

$$\begin{aligned} \tau'' &= \frac{-\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy} - \sigma_{zz}}{3} \\ &= \begin{aligned} &\partial_x \begin{bmatrix} \frac{-2\mu}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \partial_y \begin{bmatrix} 0 & \frac{4\mu}{3} & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \partial_z \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-2\mu}{3} \end{bmatrix} \end{aligned} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \\ &- \sum_{l=1}^n \begin{bmatrix} \frac{-2\mu Y_l^\mu}{3} & \frac{4\mu Y_l^\mu}{3} & \frac{-2\mu Y_l^\mu}{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_l^{xx} \\ \zeta_l^{yy} \\ \zeta_l^{zz} \\ \zeta_l^{xy} \\ \zeta_l^{xz} \\ \zeta_l^{yz} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De esta forma podemos definir al vector de esfuerzos como

$$\underline{\sigma} := \begin{bmatrix} \tau \\ \tau' \\ \tau'' \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}.$$

Con la manipulación algebraica propuesta, la Ecuación (3.37) es equivalente a

$$\underline{\sigma} = \partial_x \underline{\hat{N}}_x \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} + \partial_y \underline{\hat{N}}_y \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} + \partial_z \underline{\hat{N}}_z \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} - \sum_{l=1}^N \underline{\hat{A}}_l \begin{bmatrix} \zeta_l^{xx} \\ \zeta_l^{yy} \\ \zeta_l^{zz} \\ \zeta_l^{xy} \\ \zeta_l^{xz} \\ \zeta_l^{yz} \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

donde

$$\begin{aligned} \underline{\hat{N}}_x &= \begin{bmatrix} \frac{3\lambda+2\mu}{3} & 0 & 0 \\ 2\frac{2\mu}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2\mu}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{\hat{N}}_y &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{3\lambda+2\mu}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2\mu}{3} & 0 \\ 0 & 2\frac{2\mu}{3} & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \\ \underline{\hat{N}}_z &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3\lambda+2\mu}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2\mu}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2\mu}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{\hat{A}}_l &= \begin{bmatrix} \hat{A}_l^1 & \hat{A}_l^1 & \hat{A}_l^1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\hat{A}_l^2 & -\hat{A}_l^2 & -\hat{A}_l^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{A}_l^2 & 2\hat{A}_l^2 & -\hat{A}_l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_l^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{A}_l^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{A}_l^3 \end{bmatrix} \\ \hat{A}_l^1 &= \frac{3\lambda Y_l^\lambda + 2\mu Y_l^\mu}{3} \\ \hat{A}_l^2 &= \frac{2\mu Y_l^\mu}{3} \\ \hat{A}_l^3 &= \tilde{A}_l^3. \end{aligned}$$

De esta forma se pueden fácilmente factorizar las propiedades físicas como

$$\underline{\sigma} = \underline{\Lambda}^{-1} \left( \partial_x \underline{N}_x \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} + \partial_y \underline{N}_y \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} + \partial_z \underline{N}_z \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} - \sum_{l=1}^n \underline{A}_l \begin{bmatrix} \zeta_l^{xx} \\ \zeta_l^{yy} \\ \zeta_l^{zz} \\ \zeta_l^{xy} \\ \zeta_l^{xz} \\ \zeta_l^{yz} \end{bmatrix} \right), \quad (3.39)$$

donde

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{3\lambda+2\mu}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\mu}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\mu}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{N}}_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{N}}_y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{N}}_z &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{A}}_l &= \begin{bmatrix} A_l^1 & A_l^1 & A_l^1 & 0 & 0 & 0 \\ 2A_l^2 & -A_l^2 & -A_l^2 & 0 & 0 & 0 \\ -A_l^2 & 2A_l^2 & -A_l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2A_l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2A_l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2A_l^2 \end{bmatrix} \\ A_l^1 &= \frac{3\lambda Y_l^\lambda + 2\mu Y_l^\mu}{3\lambda + 2\mu} \\ A_l^2 &= Y_l^\mu. \end{aligned}$$

La factorización pudo remover las propiedades físicas de los términos elásticos únicamente pero en los términos anelásticos no fue posible por la relación entre las propiedades físicas y los coeficientes anelásticos en  $A_l^1$ .

La Ecuación (3.39) puede escribirse de forma compacta como

$$\underline{\underline{\Lambda}}\sigma = \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta \underline{\underline{N}}_\theta u - \sum_{l=1}^n \underline{\underline{A}}_l \zeta_l, \quad (3.40)$$

donde  $\underline{\underline{\Lambda}} = \text{diag} \left( \frac{3}{3\lambda+2\mu}, \frac{3}{2\mu}, \frac{3}{2\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu} \right)$ .

Para obtener una ecuación hiperbólica basta con aplicar la derivada temporal a la Ecuación (3.40)



tal que

$$\begin{aligned}
\partial_t \left( \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{\sigma}} \right) &= \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta \underline{\underline{N}}_\theta \underline{\underline{u}} - \sum_{l=1}^n \underline{\underline{A}}_l \underline{\underline{\zeta}}_l \\
\iff \underline{\underline{\Lambda}} \partial_t \underline{\underline{\sigma}} &= \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta \underline{\underline{N}}_\theta \partial_t \underline{\underline{u}} - \sum_{l=1}^n \underline{\underline{A}}_l \partial_t \underline{\underline{\zeta}}_l \\
\iff \underline{\underline{\Lambda}} \partial_t \underline{\underline{\sigma}} &= \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta \underline{\underline{N}}_\theta \underline{\underline{v}} - \sum_{l=1}^n \underline{\underline{A}}_l \underline{\underline{\xi}}_l.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Como se aplicó la derivada temporal, la Ecuación (3.41) involucra ahora a las velocidades  $\underline{\underline{v}} = \partial_t \underline{\underline{u}}$ . También al cambiar las funciones anelásticas como  $\partial_t \underline{\underline{\zeta}}_l = \underline{\underline{\xi}}_l$  entonces la ODE asociada a  $\underline{\underline{\xi}}_l$  sería

$$\partial_t \underline{\underline{\xi}}_l(t) + \omega_l \underline{\underline{\xi}}_l(t) = \omega_l \partial_t \underline{\underline{\epsilon}}(t), \tag{3.42}$$

donde

$$\partial_t \underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial_x v_x}{\frac{\partial}{\partial y} v_y} \\ \frac{\partial}{\partial z} v_z \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial y} v_x + \frac{\partial}{\partial x} v_y \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z} v_x + \frac{\partial}{\partial x} v_z \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z} v_y + \frac{\partial}{\partial y} v_z \right) \end{bmatrix}.$$

Finalmente para obtener el sistema hiperbólico además de la ecuación constitutiva de la tierra (3.41), se necesita la ecuación de movimiento para rastrear la velocidad de partícula

$$\rho \partial_t \underline{\underline{v}} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{f}}, \tag{3.43}$$

donde  $\rho$  es la densidad del medio de propagación y  $\underline{\underline{f}}$  es un vector de fuerzas externas.

Como para la ecuación constitutiva (3.41) no se está utilizando todo el tensor de esfuerzos  $\underline{\underline{\sigma}}$  sino al vector  $\underline{\underline{\sigma}}$  definido en la Ecuación (3.38), es este mismo vector que se utilizará para la ecuación de movimiento (3.43). Entonces para recuperar los esfuerzos normales a las direcciones canónicas a partir de  $\underline{\underline{\sigma}}$  se tiene

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \tau + \tau' \\
\sigma_{yy} &= \tau + \tau'' \\
\sigma_{zz} &= \tau - \tau' - \tau''.
\end{aligned}$$

Separando los términos de la divergencia de la Ecuación (3.43)

$$\rho \partial_t \underline{\underline{v}} = \partial_x \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} + \partial_y \begin{bmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} + \partial_z \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} + \underline{\underline{f}}.$$

Debido al cambio de variables introducido por la factorización de las propiedades físicas, se tiene

$$\rho \partial_t \underline{\underline{v}} = \partial_x \begin{bmatrix} \tau + \tau' \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} + \partial_y \begin{bmatrix} \sigma_{xy} \\ \tau + \tau'' \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} + \partial_z \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \tau - \tau' - \tau'' \end{bmatrix} + \underline{\underline{f}}.$$

Introduciendo a  $\underline{\sigma}$  en la ecuación anterior, esta puede escribirse como

$$\rho \partial_t \underline{v} = \partial_x \underline{M}_x \underline{\sigma} + \partial_y \underline{M}_y \underline{\sigma} + \partial_z \underline{M}_z \underline{\sigma} + \underline{f},$$

donde

$$\begin{aligned} \underline{M}_x &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{M}_y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \underline{M}_z &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

o de forma compacta como

$$\rho \partial_t \underline{v} = \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta (\underline{M}_\theta \underline{\sigma}) + \underline{f}. \quad (3.44)$$

Las Ecuaciones (3.41) y (3.44) forman el sistema viscoelástico hiperbólico de primer orden que modela la velocidad de partícula y los esfuerzos en un medio con atenuación intrínseca. Si se definen las funciones

$$\begin{aligned} \underline{F}(\underline{\sigma}) &= (\underline{M}_x \underline{\sigma}, \underline{M}_y \underline{\sigma}, \underline{M}_z \underline{\sigma}) \\ \underline{G}(\underline{v}) &= (\underline{N}_x \underline{v}, \underline{N}_y \underline{v}, \underline{N}_z \underline{v}), \end{aligned}$$

entonces las Ecuaciones (3.41) y (3.44) pueden escribirse con la divergencia de  $\underline{F}(\underline{\sigma})$  y  $\underline{G}(\underline{v})$  como

$$\begin{aligned} \rho \partial_t \underline{v} &= \underline{\nabla} \cdot (\underline{F}(\underline{\sigma})) + \underline{f} \\ \underline{\Lambda} \partial_t \underline{\sigma} &= \underline{\nabla} \cdot (\underline{G}(\underline{v})) - \sum_{l=1}^n \underline{A}_l \xi_l. \end{aligned} \quad (3.45)$$

En el capítulo siguiente se discretiza el sistema obtenido y las ecuaciones diferenciales ordinarias asociadas a las funciones anelásticas siguiendo el método de Galerkin Discontinuo.



# Capítulo 4

## Formulación discreta

### Índice

---

4.1. Galerkin Discontinuo . . . . .	35
4.1.1. Cómputo de las funciones anelásticas . . . . .	42

---

En este capítulo se muestra de manera detallada el desarrollo matemático para discretizar, a través del esquema numérico de Galerkin Discontinuo, el sistema viscoelástico hiperbólico de primer orden. De igual manera se presenta como resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias asociadas a las funciones anelásticas siguiendo el mismo esquema con una formulación que preserva la  $p$ -adaptividad, *i.e.* la elección arbitraria de elementos P0, P1 o P2 en el dominio discretizado.

### 4.1. Galerkin Discontinuo

Para resolver de forma numérica el sistema hiperbólico (3.45), primero se requiere descomponer al dominio  $\Omega$  en  $K$  elementos

$$\Omega \simeq \Omega_h = \bigcup_{i=1}^K D^i, \quad (4.1)$$

donde cada  $D^i$  es un tetraedro de caras planas que forman una malla conforme. Se asume que  $\underline{\sigma}$  y  $\underline{v}$  pueden aproximarse en estos tetraedros a través de interpolación nodal en un espacio polinomial por tramos

$$\underline{V}_h = \bigoplus_{i=1}^K \underline{P}_N^i(D^i).$$

Los espacios de funciones en cada  $i$ -ésimo elemento,  $\underline{P}_N^i$ , es un base polinomial de orden  $N$  que se contruye por polinomios de Lagrange con  $d^i$  nodos soporte. Para determinar el número de nodos soporte requeridos para una aproximación de orden  $N$ , se utiliza la siguiente fórmula

$$d^i = \frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}.$$

Los polinomios de Lagrange pueden ser ordenados por elemento de forma matricial, de modo que si el vector que queremos aproximar pertenece a  $\mathbb{R}^3$  entonces se tendría

$$\underline{\underline{\varphi}}^i(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \varphi_1^i & 0 & 0 & \varphi_2^i & 0 & 0 & \cdots & \varphi_{d^i}^i & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1^i & 0 & 0 & \varphi_2^i & 0 & \cdots & 0 & \varphi_{d^i}^i & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1^i & 0 & 0 & \varphi_2^i & \cdots & 0 & 0 & \varphi_{d^i}^i \end{bmatrix},$$

donde cada columna de  $\underline{\underline{\varphi}}^i$  puede identificarse como un vector en el cual se debe identificar la dimensión en la que actúa el polinomio y su nodo de soporte. Para clarecer esto, las primeras tres columnas de  $\underline{\underline{\varphi}}^i$  pueden identificarse por los siguientes vectores

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}_{x1}^i &= [\varphi_1^i \ 0 \ 0]^T \\ \underline{\varphi}_{y1}^i &= [0 \ \varphi_1^i \ 0]^T \\ \underline{\varphi}_{z1}^i &= [0 \ 0 \ \varphi_1^i]^T, \end{aligned}$$

y estos vectores pueden ser agrupados en una matriz como

$$\underline{\underline{\varphi}}_1^i = [\underline{\varphi}_{x1}^i \ \underline{\varphi}_{y1}^i \ \underline{\varphi}_{z1}^i].$$

Siguiendo esta notación el vector  $\underline{v}$  puede aproximarse como

$$\underline{v}^i(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{d^i} \underline{\varphi}_j^i \underline{v}_j^i = \sum_{j=1}^{d^i} \varphi_j^i \underline{I}_3 \underline{v}_j^i. \quad (4.2)$$

De igual manera se puede aproximar al vector  $\underline{\sigma}$  como

$$\underline{\sigma}^i(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{d_i} \underline{\varphi}_j^i \underline{\sigma}_j^i = \sum_{j=1}^{d_i} \varphi_j^i \underline{I}_6 \underline{\sigma}_j^i. \quad (4.3)$$

Es fácil notar que la diferencia entre las aproximaciones (4.2) y (4.3) se debe únicamente a las diferentes dimensiones de los vectores  $\underline{v}$  y  $\underline{\sigma}$ .

Para obtener la formulación débil del sistema hiperbólico (3.45), se multiplica por una función prueba y después se integra sobre el volumen del elemento

$$\int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\theta j}^i)^T \rho \partial_t \underline{v} dV = \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\theta j}^i)^T \left[ \nabla \cdot (\underline{F}(\underline{\sigma})) + \underline{f} \right] dV \quad (4.4)$$

$$\int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\theta j}^i)^T \underline{\underline{A}} \partial_t \underline{\sigma} dV = \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\theta j}^i)^T \left[ \nabla \cdot (\underline{\underline{G}}(\underline{v})) - \sum_{l=1}^n \underline{A}_l \xi_l \right] dV, \quad (4.5)$$

donde  $\theta$  es una dimensión elegida. Estas ecuaciones deben satisfacerse para cada función prueba de un espacio de funciones previamente definido. Esta condición de ortogonalidad con respecto al residual asegura que el esquema numérico sea óptimo en este espacio de funciones prueba, ver (*Reddy*, 1998).

Si se elige el espacio de funciones prueba sea el mismo que el espacio de funciones base entonces se tiene el método de Galerkin estandar, ver (*Zienkiewicz et al.*, 2005). Cabe señalar que el espacio de funciones prueba no es el mismo para (4.4) que para (4.5) por las diferentes dimensiones entre

los vectores  $\underline{v}$  y  $\underline{\sigma}$ . Usando una regla de identidad de cálculo<sup>1</sup> las Ecuaciones (4.4) y (4.5) pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\theta_j}^i)^T \rho \partial_t \underline{v} dV &= - \int_{V^i} \nabla \underline{\varphi}_{\theta_j}^i : \underline{F}(\underline{\sigma}) dV + \int_{V^i} \nabla \cdot (\underline{F}(\underline{\sigma}) \underline{\varphi}_{\theta_j}^i) dV \\ &\quad + \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\theta_j}^i)^T \underline{f} dV \\ \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\theta_j}^i)^T \underline{\Lambda} \partial_t \underline{\sigma} dV &= - \int_{V^i} \nabla \underline{\varphi}_{\theta_j}^i : \underline{G}(\underline{v}) dV + \int_{V^i} \nabla \cdot (\underline{G}(\underline{v}) \underline{\varphi}_{\theta_j}^i) dV \\ &\quad - \sum_{l=1}^n \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\theta_j}^i)^T \underline{A}_l \underline{\xi}_l dV. \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de la Divergencia se tiene

$$\begin{aligned} \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\theta_j}^i)^T \rho \partial_t \underline{v} dV &= - \int_{V^i} \nabla \underline{\varphi}_{\theta_j}^i : \underline{F}(\underline{\sigma}) dV + \int_{S^i} (\underline{\varphi}_{\theta_j}^i)^T (\underline{F}(\underline{\sigma}) \underline{n}) dS \\ &\quad + \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\theta_j}^i)^T \underline{f} dV \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\theta_j}^i)^T \underline{\Lambda} \partial_t \underline{\sigma} dV &= - \int_{V^i} \nabla \underline{\varphi}_{\theta_j}^i : \underline{G}(\underline{v}) dV + \int_{S^i} (\underline{\varphi}_{\theta_j}^i)^T (\underline{G}(\underline{v}) \underline{n}) dS \\ &\quad - \sum_{l=1}^n \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\theta_j}^i)^T \underline{A}_l \underline{\xi}_l dV, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde  $S^i$  es la superficie del  $i$ -ésimo elemento y  $\underline{n}$  es el vector normal unitario de  $S^i$  que apunta hacia afuera del volumen.

En las Ecuaciones (4.6) y (4.7) aparecen los flujos de  $\underline{F}(\underline{\sigma})$  y  $\underline{G}(\underline{v})$  respectivamente, que van a ser evaluados usando un esquema central por su propiedad no disipativa, ver (*Hesthaven y Warburton*, 2008). Además, asumiendo propiedades físicas constantes por elemento, se pueden reescribir las Ecuaciones (4.6) y (4.7) como

$$\begin{aligned} \rho^i \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\theta_j}^i)^T \partial_t \underline{v}^i dV &= - \int_{V^i} \nabla \underline{\varphi}_{\theta_j}^i : \underline{F}(\underline{\sigma}^i) dV + \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\theta_j}^i)^T \underline{f} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in N^i} \int_{S^{ik}} (\underline{\varphi}_{\theta_j}^i)^T (\underline{F}(\underline{\sigma}^i) + \underline{F}(\underline{\sigma}^k)) \underline{n}^{ik} dS \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \underline{\Lambda}^i \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\theta_j}^i)^T \partial_t \underline{\sigma}^i dV &= - \int_{V^i} \nabla \underline{\varphi}_{\theta_j}^i : \underline{G}(\underline{v}^i) dV - \sum_{l=1}^n \underline{A}_l \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\theta_j}^i)^T \underline{\xi}_l \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in N^i} \int_{S^{ik}} (\underline{\varphi}_{\theta_j}^i)^T (\underline{G}(\underline{v}^i) + \underline{G}(\underline{v}^k)) \underline{n}^{ik} dS, \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde  $N^i$  es el grupo de elementos adyacentes al  $i$ -ésimo elemento,  $S^{ik}$  es la cara compartida entre el  $i$ -ésimo y el  $k$ -ésimo elemento y  $\underline{n}^{ik}$  es el vector normal unitario de  $S^{ik}$  que apunta del  $i$ -ésimo elemento al  $k$ -ésimo elemento.

Es importante señalar que los campos  $\underline{\sigma}$  y  $\underline{v}$  requieren únicamente la información de sus elementos

<sup>1</sup>Regla de identidad de cálculo

$$\nabla \cdot (\underline{T} \cdot \underline{s}) = \underline{T} : \nabla \underline{s} + \underline{s} \cdot (\nabla \cdot \underline{T}),$$

donde  $\underline{T}$  es un tensor y  $\underline{s}$  es un vector.

vecinos, que ilustran la naturaleza local de cualquier esquema Galerkin Discontinuo (GD). Esta propiedad es muy conveniente cuando se quiera trabajar con discontinuidades, ver Parte II de la tesis, y cuando se requiera cómputo en paralelo por el tamaño del dominio.

A partir de ahora se trabajará cada término de (4.8) sustituyendo los vectores  $\underline{v}$  y  $\underline{\sigma}$  por su respectiva aproximación nodal (4.2) y (4.3).

Para el término

$$\rho^i \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\theta k}^i)^T \partial_t \underline{v}^i dV, \quad (4.10)$$

con  $\theta = x$

$$\begin{aligned} \rho^i \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{xk}^i)^T \partial_t \underline{v}^i dV &= \rho^i \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{xk}^i)^T \sum_{j=1}^{d^i} \varphi_j^i \underline{I}_3 \partial_t \underline{v}_j^i dV \\ &= \rho^i \int_{V^i} \sum_{j=1}^{d^i} [\varphi_k^i \quad 0 \quad 0] \varphi_j^i \underline{I}_3 \partial_t \underline{v}_j^i dV \\ &= \rho^i \int_{V^i} \sum_{j=1}^{d^i} \varphi_k^i \varphi_j^i (\underline{I}_3)_1 \partial_t \underline{v}_j^i dV, \end{aligned}$$

donde  $(\underline{I}_3)_1$  es la primer fila de la matriz  $\underline{I}_3$  (Esta notación para indicar una fila será utilizada posteriormente de manera frecuente).

Haciendo lo mismo con  $\theta = y$  y  $\theta = z$  e incluyendo estos términos

$$\begin{aligned} \rho^i \int_{V^i} \sum_{j=1}^{d^i} \begin{bmatrix} \varphi_k^i \varphi_j^i (\underline{I}_3)_1 \\ \varphi_k^i \varphi_j^i (\underline{I}_3)_2 \\ \varphi_k^i \varphi_j^i (\underline{I}_3)_3 \end{bmatrix} \partial_t \underline{v}_j^i dV &= \rho^i \int_{V^i} \sum_{j=1}^{d^i} \varphi_k^i \varphi_j^i \underline{I}_3 \partial_t \underline{v}_j^i dV \\ &= \rho^i \int_{V^i} [ \varphi_k^i \varphi_1^i \underline{I}_3 \quad \varphi_k^i \varphi_2^i \underline{I}_3 \quad \cdots \quad \varphi_k^i \varphi_{d^i}^i \underline{I}_3 ] \begin{bmatrix} \partial_t \underline{v}_1^i \\ \partial_t \underline{v}_2^i \\ \vdots \\ \partial_t \underline{v}_{d^i}^i \end{bmatrix} dV, \end{aligned}$$

como esta ecuación debe satisfacerse para cada función prueba, i.e.  $\forall k \in \{1, 2, \dots, d^i\}$

$$\rho^i \int_{V^i} \begin{bmatrix} \varphi_1^i \varphi_1^i \underline{I}_3 & \varphi_1^i \varphi_2^i \underline{I}_3 & \cdots & \varphi_1^i \varphi_{d^i}^i \underline{I}_3 \\ \varphi_2^i \varphi_1^i \underline{I}_3 & \varphi_2^i \varphi_2^i \underline{I}_3 & \cdots & \varphi_2^i \varphi_{d^i}^i \underline{I}_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{d^i}^i \varphi_1^i \underline{I}_3 & \varphi_{d^i}^i \varphi_2^i \underline{I}_3 & \cdots & \varphi_{d^i}^i \varphi_{d^i}^i \underline{I}_3 \end{bmatrix} dV \partial_t \hat{\underline{v}}^i = \rho^i (\underline{I}_3 \otimes \underline{\mathcal{K}}^i) \partial_t \hat{\underline{v}}^i, \quad (4.11)$$

donde  $\underline{\mathcal{K}}$  es la matriz de masa, definida por

$$\mathcal{K}_{jr}^i := \int_{V^i} \varphi_j^i \varphi_r^i dV \quad j, r \in \{1, 2, \dots, d^i\},$$

y  $\hat{\underline{v}}^i$  es un vector con todos los vectores  $\underline{v}_j^i$  ordenados de manera ascendente con respecto al subíndice  $j$  que representa al  $j$ -ésimo nodo de soporte (Esta notación con el circunflejo para agrupar vectores de forma ascendente será frecuentemente usada).

Para el término

$$- \int_{V^i} \nabla \varphi_{\theta k}^i : \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{\sigma}}^i) dV, \quad (4.12)$$

con  $\theta = x$

$$- \int_{V^i} \begin{bmatrix} \varphi_{k,x}^i & \varphi_{k,y}^i & \varphi_{k,z}^i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : (\underline{\underline{M}}_x \underline{\underline{\sigma}}^i, \underline{\underline{M}}_y \underline{\underline{\sigma}}^i, \underline{\underline{M}}_z \underline{\underline{\sigma}}^i) dV.$$

Sustituyendo  $\underline{\underline{\sigma}}^i$  por su aproximación nodal (4.3)

$$- \int_{V^i} \begin{bmatrix} \varphi_{k,x}^i & \varphi_{k,y}^i & \varphi_{k,z}^i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : (\underline{\underline{M}}_x \sum_{j=1}^{d^i} \varphi_j^i \underline{\underline{\sigma}}_j^i, \underline{\underline{M}}_y \sum_{j=1}^{d^i} \varphi_j^i \underline{\underline{\sigma}}_j^i, \underline{\underline{M}}_z \sum_{j=1}^{d^i} \varphi_j^i \underline{\underline{\sigma}}_j^i) dV.$$

Aplicando la contracción y volviendo a arreglar los términos

$$- \int_{V^i} \sum_{j=1}^{d^i} \varphi_{k,x}^i \varphi_j^i (\underline{\underline{M}}_x)_1 \underline{\underline{\sigma}}_j^i + \sum_{j=1}^{d^i} \varphi_{k,y}^i \varphi_j^i (\underline{\underline{M}}_y)_1 \underline{\underline{\sigma}}_j^i + \sum_{j=1}^{d^i} \varphi_{k,z}^i \varphi_j^i (\underline{\underline{M}}_z)_1 \underline{\underline{\sigma}}_j^i dV. \quad (4.13)$$

Por el momento solamente se trabajará con el término que involucra a  $\underline{\underline{M}}_x$ . De modo que el primer término de la suma en la Ecuación (4.13) puede escribirse como un producto interior de la forma

$$- \int_{V^i} \left[ \varphi_{k,x}^i \varphi_1^i (\underline{\underline{M}}_x)_1 \quad \varphi_{k,x}^i \varphi_2^i (\underline{\underline{M}}_x)_1 \quad \cdots \quad \varphi_{k,x}^i \varphi_{d^i}^i (\underline{\underline{M}}_x)_1 \right] \begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma}}_1^i \\ \underline{\underline{\sigma}}_2^i \\ \vdots \\ \underline{\underline{\sigma}}_{d^i}^i \end{bmatrix} dV.$$

Haciendo lo mismo con  $\theta = y$  y  $\theta = z$  e incluyendo estos términos

$$- \int_{V^i} \begin{bmatrix} \varphi_{k,x}^i \varphi_1^i (\underline{\underline{M}}_x)_1 & \varphi_{k,x}^i \varphi_2^i (\underline{\underline{M}}_x)_1 & \cdots & \varphi_{k,x}^i \varphi_{d^i}^i (\underline{\underline{M}}_x)_1 \\ \varphi_{k,x}^i \varphi_1^i (\underline{\underline{M}}_x)_2 & \varphi_{k,x}^i \varphi_2^i (\underline{\underline{M}}_x)_2 & \cdots & \varphi_{k,x}^i \varphi_{d^i}^i (\underline{\underline{M}}_x)_2 \\ \varphi_{k,x}^i \varphi_1^i (\underline{\underline{M}}_x)_3 & \varphi_{k,x}^i \varphi_2^i (\underline{\underline{M}}_x)_3 & \cdots & \varphi_{k,x}^i \varphi_{d^i}^i (\underline{\underline{M}}_x)_3 \end{bmatrix} \underline{\underline{\hat{\sigma}}}^i dV,$$

o de forma compacta como

$$- \int_{V^i} \left[ \varphi_{k,x}^i \varphi_1^i \underline{\underline{M}}_x \quad \varphi_{k,x}^i \varphi_2^i \underline{\underline{M}}_x \quad \cdots \quad \varphi_{k,x}^i \varphi_{d^i}^i \underline{\underline{M}}_x \right] \underline{\underline{\hat{\sigma}}}^i dV.$$

Como debe de satisfacerse para cada función de prueba se tiene

$$- \int_{V^i} \begin{bmatrix} \varphi_{1,x}^i \varphi_1^i \underline{\underline{M}}_x & \varphi_{1,x}^i \varphi_2^i \underline{\underline{M}}_x & \cdots & \varphi_{1,x}^i \varphi_{d^i}^i \underline{\underline{M}}_x \\ \varphi_{2,x}^i \varphi_1^i \underline{\underline{M}}_x & \varphi_{2,x}^i \varphi_2^i \underline{\underline{M}}_x & \cdots & \varphi_{2,x}^i \varphi_{d^i}^i \underline{\underline{M}}_x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{d^i,x}^i \varphi_1^i \underline{\underline{M}}_x & \varphi_{d^i,x}^i \varphi_2^i \underline{\underline{M}}_x & \cdots & \varphi_{d^i,x}^i \varphi_{d^i}^i \underline{\underline{M}}_x \end{bmatrix} \underline{\underline{\hat{\sigma}}}^i dV = -(\underline{\underline{M}}_x \otimes \underline{\underline{\mathcal{E}}}_x^i) \underline{\underline{\hat{\sigma}}}^i,$$

donde  $\underline{\underline{\mathcal{E}}}_x^i$  es la matriz de rigidez con respecto a  $x$ , definida por

$$\mathcal{E}_{x_{jr}}^i := \int_{V^i} \varphi_{j,x}^i \varphi_r^i dV \quad j, r \in \{1, 2, \dots, d^i\}.$$



Haciendo lo mismo con los términos que contienen a  $\underline{\underline{M}}_y$  y  $\underline{\underline{M}}_z$  en (4.13) se obtiene

$$\begin{aligned} & -\underline{\underline{M}}_y \otimes \underline{\underline{\mathcal{E}}}_y^i \hat{\sigma}^i \\ & -\underline{\underline{M}}_z \otimes \underline{\underline{\mathcal{E}}}_z^i \hat{\sigma}^i. \end{aligned}$$

De modo que al incluir cada término derivado del término (4.12) se tiene

$$-\sum_{\theta \in \{x, y, z\}} (\underline{\underline{M}}_\theta \otimes \underline{\underline{\mathcal{E}}}_\theta^i) \hat{\sigma}^i. \quad (4.14)$$

Para el término

$$\int_{V^i} (\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\theta k}^i)^T \underline{\underline{f}} dV,$$

se debe evaluar la función vectorial  $\underline{\underline{f}}$  en los nodos de soporte del  $i$ -ésimo elemento para formar el vector  $\hat{\underline{\underline{f}}}^i$ . Una vez con los valores de los nodos de soporte conocidos se sigue el mismo procedimiento que se le aplicó al término (4.10) para obtener

$$(\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{K}}^i) \hat{\underline{\underline{f}}}^i. \quad (4.15)$$

Para el término

$$\int_{S^{ik}} (\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\theta l}^i)^T (\underline{\underline{F}}(\underline{\underline{\sigma}}^i) + \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{\sigma}}^k)) \underline{\underline{n}}^{ik} dS, \quad (4.16)$$

el espacio de funciones de interpolación y de prueba es diferente al usado en las integrales de volumen debido a que la integral de superficie opera con una dimensión menor. Sin embargo esta es la única diferencia porque su construcción es igual y para distinguirlas se utilizará la letra  $\phi$  para las funciones de interpolación y de prueba que se utilizarán para las integrales de superficie.

Por el momento, sólo se trabajará con el primer término de la suma en la Ecuación (4.16), i.e.

$$\int_{S^{ik}} (\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\theta l}^i)^T (\underline{\underline{M}}_x \underline{\underline{\sigma}}^i, \underline{\underline{M}}_y \underline{\underline{\sigma}}^i, \underline{\underline{M}}_z \underline{\underline{\sigma}}^i) \underline{\underline{n}}^{ik} dS, \quad (4.17)$$

con  $\theta = x$

$$\int_{S^{ik}} \begin{bmatrix} \phi_l^i & 0 & 0 \end{bmatrix} (\underline{\underline{M}}_x \underline{\underline{\sigma}}^i, \underline{\underline{M}}_y \underline{\underline{\sigma}}^i, \underline{\underline{M}}_z \underline{\underline{\sigma}}^i) \underline{\underline{n}}^{ik} dS.$$

Sustituyendo  $\underline{\underline{\sigma}}^i$  por su aproximación nodal (4.3)

$$\int_{S^{ik}} \begin{bmatrix} \phi_l^i & 0 & 0 \end{bmatrix} (\underline{\underline{M}}_x \sum_{j=1}^{d^i} \phi_j^i \underline{\underline{I}}_6 \underline{\underline{\sigma}}_j^i, \underline{\underline{M}}_y \sum_{j=1}^{d^i} \phi_j^i \underline{\underline{I}}_6 \underline{\underline{\sigma}}_j^i, \underline{\underline{M}}_z \sum_{j=1}^{d^i} \phi_j^i \underline{\underline{I}}_6 \underline{\underline{\sigma}}_j^i) \underline{\underline{n}}^{ik} dS.$$

Haciendo el producto interior y reorganizando los términos

$$\int_{S^{ik}} \left[ (\underline{\underline{M}}_x)_1 \sum_{j=1}^{d^i} \phi_l^i \phi_j^i \underline{\underline{\sigma}}_j^i, (\underline{\underline{M}}_y)_1 \sum_{j=1}^{d^i} \phi_l^i \phi_j^i \underline{\underline{\sigma}}_j^i, (\underline{\underline{M}}_z)_1 \sum_{j=1}^{d^i} \phi_l^i \phi_j^i \underline{\underline{\sigma}}_j^i \right] \underline{\underline{n}}^{ik} dS. \quad (4.18)$$

Por el momento sólo se trabajará con el término que involucra a  $\underline{\underline{M}}_x$ . De modo que el primer término en la Ecuación (4.18) puede escribirse como el producto interior como

$$\int_{S^{ik}} \left( \begin{bmatrix} \phi_l^i \phi_1^i (\underline{\underline{M}}_x)_1 & \phi_l^i \phi_2^i (\underline{\underline{M}}_x)_1 & \cdots & \phi_l^i \phi_{d^i}^i (\underline{\underline{M}}_x)_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma}}_1^i \\ \underline{\underline{\sigma}}_2^i \\ \vdots \\ \underline{\underline{\sigma}}_{d^i}^i \end{bmatrix} \right) \underline{\underline{n}}^{ik} dS.$$

Haciendo lo mismo con  $\theta = y$  y  $\theta = z$  e incluyendo estos términos

$$\int_{S^{ik}} \begin{bmatrix} \phi_l^i \phi_1^i n_x^{ik}(\underline{\underline{M}}_x)_1 & \phi_l^i \phi_2^i n_x^{ik}(\underline{\underline{M}}_x)_1 & \cdots & \phi_l^i \phi_{d^i}^i n_x^{ik}(\underline{\underline{M}}_x)_1 \\ \phi_l^i \phi_1^i n_x^{ik}(\underline{\underline{M}}_x)_2 & \phi_l^i \phi_2^i n_x^{ik}(\underline{\underline{M}}_x)_2 & \cdots & \phi_l^i \phi_{d^i}^i n_x^{ik}(\underline{\underline{M}}_x)_2 \\ \phi_l^i \phi_1^i n_x^{ik}(\underline{\underline{M}}_x)_3 & \phi_l^i \phi_2^i n_x^{ik}(\underline{\underline{M}}_x)_3 & \cdots & \phi_l^i \phi_{d^i}^i n_x^{ik}(\underline{\underline{M}}_x)_3 \end{bmatrix} \hat{\sigma}^i dS,$$

o de forma compacta

$$\int_{S^{ik}} [ \phi_l^i \phi_1^i n_x^{ik} \underline{\underline{M}}_x \quad \phi_l^i \phi_2^i n_x^{ik} \underline{\underline{M}}_x \quad \cdots \quad \phi_l^i \phi_{d^i}^i n_x^{ik} \underline{\underline{M}}_x ] \hat{\sigma}^i dS.$$

Como se debe satisfacer para toda función prueba, i.e.  $\forall l \in \{1, 2, \dots, d^i\}$

$$\int_{S^{ik}} \begin{bmatrix} \phi_1^i \phi_1^i n_x^{ik} \underline{\underline{M}}_x & \phi_1^i \phi_2^i n_x^{ik} \underline{\underline{M}}_x & \cdots & \phi_1^i \phi_{d^i}^i n_x^{ik} \underline{\underline{M}}_x \\ \phi_2^i \phi_1^i n_x^{ik} \underline{\underline{M}}_x & \phi_2^i \phi_2^i n_x^{ik} \underline{\underline{M}}_x & \cdots & \phi_2^i \phi_{d^i}^i n_x^{ik} \underline{\underline{M}}_x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{d^i}^i \phi_1^i n_x^{ik} \underline{\underline{M}}_x & \phi_{d^i}^i \phi_2^i n_x^{ik} \underline{\underline{M}}_x & \cdots & \phi_{d^i}^i \phi_{d^i}^i n_x^{ik} \underline{\underline{M}}_x \end{bmatrix} \hat{\sigma}^i dS.$$

Factorizando con el producto tensorial

$$n_x^{ik} \underline{\underline{M}}_x \otimes \underline{\underline{\mathcal{F}}}^{ik} \hat{\sigma}^i,$$

donde  $\underline{\underline{\mathcal{F}}}^{ik}$  es la matriz de flujo definida por

$$\underline{\underline{\mathcal{F}}}_{jr}^{ik} := \int_{S^{ik}} \phi_j^i \phi_r^i dS \quad j, r \in \{1, 2, \dots, d^i\}.$$

Haciendo lo mismo con los términos que contienen a  $\underline{\underline{M}}_y$  y  $\underline{\underline{M}}_z$  en la Ecuación (4.18) se tiene

$$\begin{aligned} n_y^{ik} \underline{\underline{M}}_y \otimes \underline{\underline{\mathcal{F}}}^{ik} \hat{\sigma}^i \\ n_z^{ik} \underline{\underline{M}}_z \otimes \underline{\underline{\mathcal{F}}}^{ik} \hat{\sigma}^i. \end{aligned}$$

De modo que se puede escribir la Ecuación (4.17) como

$$\begin{aligned} & n_x^{ik} \underline{\underline{M}}_x \otimes \underline{\underline{\mathcal{F}}}^{ik} \hat{\sigma}^i + n_y^{ik} \underline{\underline{M}}_y \otimes \underline{\underline{\mathcal{F}}}^{ik} \hat{\sigma}^i + n_z^{ik} \underline{\underline{M}}_z \otimes \underline{\underline{\mathcal{F}}}^{ik} \hat{\sigma}^i \\ &= (n_x^{ik} \underline{\underline{M}}_x + n_y^{ik} \underline{\underline{M}}_y + n_z^{ik} \underline{\underline{M}}_z) \otimes \underline{\underline{\mathcal{F}}}^{ik} \hat{\sigma}^i \\ &= (\underline{\underline{\mathcal{P}}}^{ik} \otimes \underline{\underline{\mathcal{F}}}^{ik}) \hat{\sigma}^i, \end{aligned} \tag{4.19}$$

donde

$$\underline{\underline{\mathcal{P}}}^{ik} = \sum_{\theta \in \{x, y, z\}} n_\theta^{ik} \underline{\underline{M}}_\theta.$$

Trabajando de la misma manera con el segundo término de la suma en la Ecuación (4.16) se tiene

$$(\underline{\underline{\mathcal{P}}}^{ik} \otimes \underline{\underline{\mathcal{G}}}^{ik}) \hat{\sigma}^k, \tag{4.20}$$

donde  $\underline{\underline{\mathcal{G}}}^{ik}$  es otra matriz de flujo definida por

$$\underline{\underline{\mathcal{G}}}_{jr}^{ik} := \int_{S^{ik}} \phi_j^i \phi_r^k dS \quad j \in \{1, 2, \dots, d^i\} \quad r \in \{1, 2, \dots, d^k\}. \tag{4.21}$$

Es importante resaltar que la dimensión de  $\underline{\underline{G}}^{ik}$  no es necesariamente cuadrada dado que no existe la restricción de que dos elementos adyacentes tengan el mismo orden de interpolación. Es esta una de las propiedades más útiles de un esquema GD que permite establecer el orden de los elementos de interpolación de forma individual de acuerdo a criterios físicos por su ubicación espacial.

Finalmente la formulación débil discreta de la Ecuación (4.8) se obtiene incorporando los términos obtenidos, (4.11), (4.14), (4.15), (4.19) y (4.20), en una sola expresión como

$$\begin{aligned} \rho^i(\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{K}}^i) \partial_t \hat{v}^i &= - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\underline{\underline{M}}_\theta \otimes \underline{\underline{E}}_\theta^i) \hat{\sigma}^i + (\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{K}}^i) \underline{f}^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in N^i} [(\underline{\underline{P}}^{ik} \otimes \underline{\underline{F}}^{ik}) \hat{\sigma}^i + (\underline{\underline{P}}^{ik} \otimes \underline{\underline{G}}^{ik}) \hat{\sigma}^k]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para la ecuación hiperbólica constitutiva (4.9) que se hizo para la ecuación hiperbólica de movimiento (4.8) se obtiene

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{\Lambda}}^i \otimes \underline{\underline{K}}^i) \partial_t \hat{\sigma}^i &= - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\underline{\underline{N}}_\theta \otimes \underline{\underline{E}}_\theta^i) \hat{v}^i - \sum_{l=1}^n (\underline{\underline{A}}_l^i \otimes \underline{\underline{K}}^i) \hat{\xi}_l^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in N^i} [(\underline{\underline{Q}}^{ik} \otimes \underline{\underline{F}}^{ik}) \hat{v}^i + (\underline{\underline{Q}}^{ik} \otimes \underline{\underline{G}}^{ik}) \hat{v}^k], \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde  $\underline{\underline{Q}}^{ik} = \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} n_\theta^{ik} \underline{\underline{N}}_\theta$ .

Finalmente para la integración del tiempo de (4.22) y (4.23) se usa un esquema *leap-frog* explícito de segundo orden que permite el cómputo alternado de la velocidad y los esfuerzos en cada medio paso de tiempo

$$\begin{aligned} \rho^i(\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{K}}^i) \frac{\hat{v}_{m+\frac{1}{2}}^i - \hat{v}_{m-\frac{1}{2}}^i}{\Delta t} &= - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\underline{\underline{M}}_\theta \otimes \underline{\underline{E}}_\theta^i) \hat{\sigma}_m^i + (\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{K}}^i) \underline{f}^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in N^i} [(\underline{\underline{P}}^{ik} \otimes \underline{\underline{F}}^{ik}) \hat{\sigma}_m^i + (\underline{\underline{P}}^{ik} \otimes \underline{\underline{G}}^{ik}) \hat{\sigma}_m^k] \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{\Lambda}}^i \otimes \underline{\underline{K}}^i) \frac{\hat{\sigma}_{m+1}^i - \hat{\sigma}_m^i}{\Delta t} &= - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\underline{\underline{N}}_\theta \otimes \underline{\underline{E}}_\theta^i) \hat{v}_{m+\frac{1}{2}}^i - \sum_{l=1}^n (\underline{\underline{A}}_l^i \otimes \underline{\underline{K}}^i) \hat{\xi}_{l,m+\frac{1}{2}}^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in N^i} [(\underline{\underline{Q}}^{ik} \otimes \underline{\underline{F}}^{ik}) \hat{v}_{m+\frac{1}{2}}^i + (\underline{\underline{Q}}^{ik} \otimes \underline{\underline{G}}^{ik}) \hat{v}_{m+\frac{1}{2}}^k], \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde el subíndice  $m$  indica el paso de tiempo. El orden de la aproximación del esquema temporal es igual al máximo orden del espacio de funciones espacial, que es de orden 2 (P2), propuesto en (Etienne et al., 2010) por representar una buena opción considerando la relación costo-rendimiento.

A continuación se presenta como discretizar con un esquema de Galerkin Discontinuo las EDO's de las funciones anelásticas. Esta formulación permite resolver las ecuaciones en elementos P0, P1 y P2.

#### 4.1.1. Cómputo de las funciones anelásticas

Hasta ahora no se ha explicado como calcular los vectores  $\hat{\xi}_{l,m+\frac{1}{2}}^i$  que determinan la respuesta anelástica de cada  $l$ -ésimo mecanismo de relajación para el  $i$ -ésimo elemento. Para conocer su valor en cada

medio paso de tiempo  $m + \frac{1}{2}$  se resolverá la EDO asociada (3.42) con el mismo esquema de GD.

Para aproximar las funciones anelásticas se seguirá la misma estrategia propuesta para  $\underline{\sigma}^i$  en la Ecuación (4.3) tal que

$$\underline{\xi}_l^i(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{d_i} \underline{\varphi}_j^i \underline{\xi}_{lj}^i = \sum_{j=1}^{d_i} \varphi_j^i \underline{I}_6 \underline{\xi}_{lj}^i. \quad (4.26)$$

Para obtener la fomulación débil en cada elemento, se multiplica a la Ecuación (3.42) por una función prueba y se integra sobre el volumen del  $i$ -ésimo elemento

$$\int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\theta j}^i)^T \partial_t \underline{\xi}_l^i dV = \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\theta j}^i)^T [-\omega_l \underline{\xi}_l^i + \omega_l \partial_t \underline{\xi}^i] dV,$$

donde  $\theta$  es la dimensión elegida. Si se utiliza la aproximación (4.26), elige el método de Galerkin estándar y se sigue el mismo procedimiento elegido para la Ecuación (4.8) se obtiene el siguiente sistema

$$(\underline{I}_6 \otimes \underline{K}^i) \partial_t \hat{\underline{\xi}}_l^i = -\omega_l (\underline{I}_6 \otimes \underline{K}^i) (\hat{\underline{\xi}}_l^i - \partial_t \hat{\underline{\xi}}^i). \quad (4.27)$$

Si se aproxima  $\partial_t \hat{\underline{\xi}}_l^i$  con diferencias finitas hacia adelante, se puede resolver (4.27) en cada medio paso de tiempo como

$$(\underline{I}_6 \otimes \underline{K}^i) \frac{\hat{\underline{\xi}}_{l, m+\frac{1}{2}}^i - \hat{\underline{\xi}}_{l, m-\frac{1}{2}}^i}{\Delta t} = -\omega_l (\underline{I}_6 \otimes \underline{K}^i) (\hat{\underline{\xi}}_{l, m-\frac{1}{2}}^i - \partial_t \hat{\underline{\xi}}_{m-\frac{1}{2}}^i). \quad (4.28)$$

Resolviendo (4.28) para cada  $l$ -ésimo mecanismo de relajación se puede aproximar el valor de cada función anelástica en cualquier parte del  $i$ -ésimo elemento en el paso de tiempo  $m + \frac{1}{2}$ . Sin embargo por las derivadas espaciales involucradas en  $\partial_t \hat{\underline{\xi}}_{m-\frac{1}{2}}^i$  esta formulación no podría utilizarse para una base de funciones constante P0, i.e. una aproximación de Volumen Finito. Como los elementos P0 son muy económicos numéricamente, pueden ser muy útiles para algunos problemas dependiendo de las propiedades físicas del medio. De modo que es conveniente reformular la EDO (3.42) para permitir elementos P0. Para lograrlo se reescribirá al vector  $\partial_t \underline{\xi}$  como

$$\partial_t \underline{\xi} = \partial_x \underline{Q}_x \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \partial_y \underline{Q}_y \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \partial_z \underline{Q}_z \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Q}}_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{Q}}_y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{Q}}_z &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

o de forma compacta

$$\partial_t \underline{\xi} = \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta \underline{\underline{Q}}_\theta v.$$

Si se define la función

$$\underline{\underline{H}}(v) = (\underline{\underline{Q}}_x v, \underline{\underline{Q}}_y v, \underline{\underline{Q}}_z v), \quad (4.29)$$

entonces puede escribirse  $\partial_t \underline{\xi}$  como la divergencia de (4.29)

$$\partial_t \underline{\xi} = \nabla \cdot (\underline{\underline{H}}(v)).$$

De modo que la Ecuación (3.42) puede reescribirse como

$$\partial_t \underline{\xi}_l + \omega_l \underline{\xi}_l = \omega_l \nabla \cdot (\underline{\underline{H}}(v)). \quad (4.30)$$

Para obtener la formulación débil, se multiplica (4.30) por una función prueba y se integra sobre el volumen del elemento

$$\int_{V^i} (\varphi_{\theta j}^i)^T [\partial_t \underline{\xi}_l^i + \omega_l \underline{\xi}_l^i] dV = \int_{V^i} (\varphi_{\theta j}^i)^T [\omega_l \nabla \cdot (\underline{\underline{H}}(v))],$$

donde  $\theta$  es la dimensión elegida. Como se indicó previamente se puede seguir el procedimiento realizado a (4.8) y aproximar a  $\partial_t \underline{\xi}_l$  con el método de diferencias finitas hacia adelante para obtener

$$\begin{aligned} \underline{\underline{I}}_6 \otimes \underline{\underline{K}}^i & \frac{\hat{\underline{\xi}}_{l, m+\frac{1}{2}}^i - \hat{\underline{\xi}}_{l, m-\frac{1}{2}}^i}{\Delta t} = -\omega_l (\underline{\underline{I}}_6 \otimes \underline{\underline{K}}^i) \hat{\underline{\xi}}_{l, m-\frac{1}{2}}^i - \omega_l \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\underline{\underline{Q}}_\theta \otimes \underline{\underline{E}}_\theta^i) \hat{v}_{m-\frac{1}{2}}^i \\ & + \omega_l \frac{1}{2} \sum_{k \in N^i} [(\underline{\underline{R}}^{ik} \otimes \underline{\underline{F}}^{ik}) \hat{v}_{m+\frac{1}{2}}^i + (\underline{\underline{R}}^{ik} \otimes \underline{\underline{G}}^{ik}) \hat{v}_{m+\frac{1}{2}}^k], \end{aligned}$$

donde  $\underline{\underline{R}}^{ik} = \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} n_\theta^{ik} \underline{\underline{Q}}_\theta$ .

En esta formulación para elementos P0 la evolución de las funciones anelásticas se presentará, a diferencia que en el esquema anterior (4.28), por los flujos numéricos a través de las fronteras de los elementos.

En el siguiente capítulo se detalla la inclusión de condiciones de frontera libre y absorbentes en un esquema de Galerkin Discontinuo. Estas condiciones son esenciales para la simulación de escenarios sísmicos a una escala regional.



# Capítulo 5

## Condiciones de frontera

### Índice

---

<b>5.1. Superficie libre</b> . . . . .	<b>47</b>
<b>5.2. Fronteras absorbentes</b> . . . . .	<b>48</b>
5.2.1. Formulación PML clásica . . . . .	48
5.2.2. Formulación CPML . . . . .	51
5.2.3. Incorporación de CPML en un esquema GD . . . . .	53

---

Existen dos tipos de condiciones de frontera que usualmente se utilizan en la simulación de escenarios sísmicos: de superficie libre y absorbentes. Estas últimas han sido extensamente estudiadas por la dificultad numérica que implica la propagación de ondas sísmicas en un medio acotado, *i.e.* escalas regionales y locales. A continuación se explicará la implementación de estas condiciones en un esquema de GD.

### 5.1. Superficie libre

A pesar de que nuestro esquema GD se construye a partir de la formulación débil, la implementación de la superficie libre resulta un poco más complicada que en otros métodos basados en la misma formulación, como el método de Elemento Finito (MEF) y el método de Elemento Espectral (MES), donde basta con eliminar un término de la formulación débil. Esta diferencia se debe esencialmente al método escalonado propuesto donde se intercalan los cálculos de las velocidades y los esfuerzos en cada medio paso de tiempo, ver las Ecuaciones (4.24) y (4.24).

En la superficie libre se pide la continuidad en el campo de velocidades pero de igual forma se debe anular el campo de esfuerzos. De modo que para todas las caras localizadas en la superficie libre, se utiliza una condición explícita en el flujo. Para lograr esto se crean elementos virtuales que son las imágenes espejo de aquellos elementos interiores que contienen a la superficie libre. En estos elementos virtuales, se impone el mismo campo de velocidades y el campo de esfuerzos opuesto que aquellos del elemento interior correspondiente. Como puede notarse esta estrategia es similar a aquella utilizada en los métodos de Diferencias Finitas (MDF).



## 5.2. Fronteras absorbentes

Para poder simular un medio infinito, se requieren aplicar condiciones absorbentes a lo largo de los límites del modelo numérico. En los últimos 30 años, numerosas técnicas han sido desarrolladas para este propósito: capas amortiguantes (*Cerjan et al.*, 1985), condiciones paraxiales (*Clayton y Engquist*, 1977; *Engquist y Majda*, 1977), condiciones optimizadas (*Peng y Toksoz*, 1995), etc. Sin embargo aquellas condiciones locales exhiben un comportamiento malo bajo algunas circunstancias, e.g. reflejan grandes cantidades de energía espuria cuando la incidencia de ondas es casi paralela a la frontera o emisión de energía de bajas frecuencias a cualquier ángulo de incidencia. Por otro lado las condiciones no-locales son difíciles de implementar y muy caras numéricamente.

Para el estudio de los fenómenos electromagnéticos, *Bérenger* (1994) introdujo para las ecuaciones de Maxwell las *estratos perfectamente acoplados* (PML por las siglas en inglés de “Perfectly Matched Layer”). Las PML en su formulación continua cuentan con la notoria propiedad de no tener reflexión alguna para cualesquiera ángulo de incidencia y frecuencia. Esta formulación ha demostrado ser muy eficiente con respecto a formulaciones anteriores y se ha vuelto muy popular.

A continuación se presentarán las condiciones PML y una posterior modificación de estas condiciones llamadas *estratos perfectamente acoplados convolucionados* (CPML por las siglas en inglés de “Convolutional Perfectly Matched Layer”) con base en los trabajos (*Collino y Tsogka*, 2001; *Komatitsch y Martin*, 2007). Finalmente se ilustra el desarrollo numérico para la incorporación de las CPML para nuestro esquema GD propuesto por *Etienne et al.* (2010).

### 5.2.1. Formulación PML clásica

La ecuación diferencial de onda elástica puede escribirse como

$$\rho \partial_t^2 \underline{u} = \nabla \cdot \left( \underline{\underline{c}} : \nabla \underline{u} \right), \quad (5.1)$$

donde  $\underline{u}(\underline{x}, t)$  es el vector de desplazamientos,  $\underline{\underline{c}}$  es el tensor elástico y  $\rho$  es la densidad.

Se cambia la Ecuación (5.1) al dominio de la frecuencia aplicando la transformada de Fourier

$$-\rho \omega^2 \underline{u} = \nabla \cdot \left( \underline{\underline{c}} : \nabla \underline{u} \right),$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular,  $\underline{u}(\underline{x}, \omega)$  es el vector desplazamiento en el dominio de la frecuencia.

En el caso de un medio homogéneo, se tiene la solución como una onda plana de la forma

$$\underline{u} = \underline{A} \exp^{-i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)},$$

donde  $\underline{A}$  representa la amplitud y polarización de la onda plana,  $\underline{k} = k_1 \hat{x} + k_2 \hat{y} + k_3 \hat{z}$  es el vector de onda y  $\underline{x} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$  es el vector posición.

Además, si el medio es isotrópico se puede hacer la siguiente distinción

- Para las ondas  $P$  de velocidad  $\alpha$  se cumple que  $\underline{A} \times \underline{k} = 0$  y  $k = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{\frac{1}{2}} = \omega/\alpha$ .
- Para las ondas  $S$  de velocidad  $\beta$  se cumple que  $\underline{A} \cdot \underline{k} = 0$  y  $k = \omega/\beta$ .

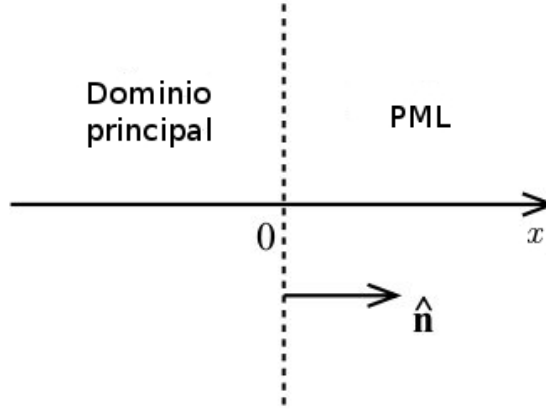


Figura 5.1: Esquema del dominio principal y el estrato PML.

El estrato PML consiste en la continuación analítica de las coordenadas reales en el plano complejo. Considere una región PML como la que se muestra en la Figura 5.1 contenida en  $x \geq 0$  con un vector normal a la interfaz denotado por  $\hat{\mathbf{n}}$ . Se incorpora una nueva coordenada compleja  $\tilde{x}$  expresada en términos de un perfil de amortiguamiento como

$$\tilde{x}(x) = x - \frac{i}{\omega} \int_0^x d_x(s) ds, \quad (5.2)$$

donde  $d_x$  es una función de amortiguamiento. Derivando la Ecuación (5.2) con respecto a  $x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} &= \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x d_x(s) ds \\ &\text{Applying the Leibniz Theorem} \\ &= 1 - \frac{i}{\omega} d_x(x) \\ &= \frac{i\omega + d_x(x)}{i\omega}. \end{aligned}$$

Si se define

$$s_x = \frac{i\omega + d_x}{i\omega} = 1 + \frac{d_x}{i\omega}, \quad (5.3)$$

entonces se puede escribir al operador diferencial como

$$\partial_{\tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{s_x} \partial_x. \quad (5.4)$$

A continuación se mostrará como reescribir la Ecuación (5.1) en función de las nuevas coordenadas  $(\tilde{x}, y, z)$ . El operador gradiente  $\nabla$  puede dividirse en término de los componentes perpendiculares y paralelos a la superficie

$$\nabla = \hat{\mathbf{n}} \partial_x + \nabla'', \quad (5.5)$$

donde  $\partial_x = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla$  es el componente perpendicular del gradiente y  $\nabla'' = (\underline{\underline{I}}_3 - \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}}) \cdot \nabla$  es el componente paralelo del gradiente.

La Ecuación (5.1) puede escribirse con la formulación clásica esfuerzo-velocidad de primer orden como

$$\begin{aligned} \rho \partial_t \underline{\underline{v}} &= \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \\ \partial_t \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{c}} : \nabla \underline{\underline{v}}, \end{aligned}$$

o en el dominio de la frecuencia

$$\begin{aligned} i\omega\rho\underline{v} &= \nabla \cdot \underline{\sigma} \\ i\omega\underline{\sigma} &= \underline{\underline{c}} : \nabla\underline{v}, \end{aligned}$$

y utilizando el operador descompuesto (5.5) se puede escribir como

$$\begin{aligned} i\omega\rho\underline{v} &= \hat{n}\partial_x \cdot \underline{\sigma} + \nabla'' \cdot \underline{\sigma} \\ i\omega\underline{\sigma} &= \underline{\underline{c}} : \hat{n}\partial_x\underline{v} + \underline{\underline{c}} : \nabla''\underline{v}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ahora se puede reemplazar el operador diferencial de  $x$  con aquel de  $\tilde{x}$  para obtener

$$\begin{aligned} i\omega\rho\underline{v} &= \hat{n}\partial_{\tilde{x}} \cdot \underline{\sigma} + \nabla'' \cdot \underline{\sigma} \\ i\omega\underline{\sigma} &= \underline{\underline{c}} : \hat{n}\partial_{\tilde{x}}\underline{v} + \underline{\underline{c}} : \nabla''\underline{v}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

En el dominio principal, las Ecuaciones (5.6) y (5.7) son equivalentes dado que  $d_x = 0$ . Pero en la región PML, la Ecuación (5.7) tiene como soluciones ondas planas que decaen exponencialmente de la forma

$$\begin{aligned} \underline{A} \exp^{-i(k_x\tilde{x} + k_y y + k_z z - \omega t)} &= \underline{A} \exp^{-i(k_x(x - \frac{i}{\omega} \int_0^x d_x(s) ds) + k_y y + k_z z - \omega t)} \\ &= \underline{A} \exp^{-i(k_x\tilde{x} - \omega t)} \exp^{-\frac{k_x}{\omega} \int_0^x d_x(s) ds}, \end{aligned}$$

donde el término  $\exp^{-\frac{k_x}{\omega} \int_0^x d_x(s) ds}$  es el coeficiente de decaimiento en la dirección  $x$  que es inversamente proporcional a la frecuencia angular  $\omega$ . Es importante recalcar que como el coeficiente de decaimiento dependen de la dirección de la propagación de ondas, el amortiguamiento será mayor para aquellas ondas cuya incidencia es casi normal. También vale la pena destacar que el coeficiente de reflexión entre el medio y la región PML es exactamente cero sin importar su ángulo de incidencia o frecuencia debido al perfecto acoplamiento entre ambas regiones, por lo tanto el nombre de *estratos perfectamente acoplados*.

Para reescribir la Ecuación (5.7) en términos de  $x$ , se utiliza la definición del operador diferencial (5.4) tal que

$$\begin{aligned} i\omega\rho\underline{v} &= \hat{n} \frac{1}{s_x} \partial_x \cdot \underline{\sigma} + \nabla'' \cdot \underline{\sigma} \\ i\omega\underline{\sigma} &= \underline{\underline{c}} : \hat{n} \frac{1}{s_x} \partial_x \underline{v} + \underline{\underline{c}} : \nabla'' \underline{v}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Si se dividen los campos de velocidades y esfuerzos como

$$\begin{aligned} \underline{v} &= \underline{v}^1 + \underline{v}^2 \\ \underline{\sigma} &= \underline{\sigma}^1 + \underline{\sigma}^2, \end{aligned}$$

entonces se pueden dividir las Ecuaciones (5.8) para obtener

$$\begin{aligned} i\omega\rho\underline{v}^1 &= \frac{1}{s_x} \hat{n} \cdot \partial_x \underline{\sigma} \\ i\omega\rho\underline{v}^2 &= \nabla'' \cdot \underline{\sigma} \\ i\omega\underline{\sigma}^1 &= \underline{\underline{c}} : \hat{n} \frac{1}{s_x} \partial_x \underline{v} \\ i\omega\underline{\sigma}^2 &= \underline{\underline{c}} : \nabla'' \underline{v}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier se pueden enviar las Ecuaciones (5.9) al dominio del tiempo como

$$\begin{aligned}
(\partial_t + d_x)\rho \underline{v}^1 &= \hat{n} \partial_x \cdot \underline{\sigma} \\
\partial_t \rho \underline{v}^2 &= \nabla'' \cdot \underline{\sigma} \\
(\partial_t + d_x)\underline{\sigma}^1 &= \underline{c} : \hat{n} \partial_x \underline{v} \\
&= \\
\partial_t \underline{\sigma}^2 &= \underline{c} : \nabla'' \underline{v}. \\
&=
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones modelan la propagación de ondas elásticas en una región PML en su formulación clásica de primer orden. A pesar de tener ventajas sobre otros esquemas cuenta con dos problemas, el primero es que requiere la partición de los campos con respecto a la geometría de la interfaz y el segundo es que después de la discretización su eficiencia se vuelve muy pobre cuando la incidencia es casi paralela a la interfaz. A continuación se presentará una versión de las PML que ataca las desventajas de la formulación clásica.

### 5.2.2. Formulación CPML

Esta versión fué introducida por *Roden y Gedney* (2000) y consiste en reescribir la formulación de la PML como una convolución en tiempo para después sustituirla por la inclusión de variables de memoria. Esto último con el objeto de evitar problemas con los límites de almacenamiento y un pobre rendimiento. Además no se requerirá la partición de los campos de modo que el cómputo de las velocidades y de los esfuerzos no será modificada.

La idea principal consiste en hacer una elección más general para  $s_x$ , de modo que además del perfil de decaimiento  $d_x$  se incluyen otras dos variables reales  $\alpha_x \geq 0$  y  $\kappa_x \geq 1$  tal que

$$s_x = \kappa_x + \frac{d_x}{\alpha_x + i\omega}. \quad (5.10)$$

Note que cuando  $\kappa_x = 1$  y  $\alpha_x = 0$  se obtiene la definición para  $s_x$  previa (5.3).

Como la definición (5.10) depende de la frecuencia, cuando regresa al dominio del tiempo se obtiene una convolución temporal en cada derivada espacial modificada

$$\mathcal{F}^{-1}\{\partial_{\bar{x}} = \frac{1}{s_x} \partial_x\} \Rightarrow \partial_{\bar{x}} = \bar{s}_x(t) * \partial_x.$$

Reescribiendo la Ecuación (5.10)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s_x} &= \frac{1}{\kappa_x + \frac{d_x}{\alpha_x + i\omega}} = \frac{1}{\frac{\kappa_x^2 \alpha_x + \kappa_x^2 i\omega + \kappa_x d_x}{\kappa_x \alpha_x + \kappa_x i\omega}} \\
&= \frac{1}{\frac{\kappa_x^2 (d_x/\kappa_x + \alpha_x + i\omega)}{\kappa_x (d_x/\kappa_x + \alpha_x + i\omega) - d_x}} \\
&= \frac{\kappa_x (d_x/\kappa_x + \alpha_x + i\omega)}{\kappa_x^2 (d_x/\kappa_x + \alpha_x + i\omega)} - \frac{d_x}{\kappa_x^2 (d_x/\kappa_x + \alpha_x + i\omega)} \\
&= \frac{1}{\kappa_x} - \frac{d_x}{\kappa_x^2 (d_x/\kappa_x + \alpha_x + i\omega)},
\end{aligned}$$

y utilizando las siguientes propiedades de la transformada de Fourier

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{1\} &\Rightarrow \delta(t) \\ \mathcal{F}^{-1}\{1/(i\omega + a)\} &\Rightarrow \exp^{-at} H(t),\end{aligned}$$

se obtiene el siguiente valor de  $\bar{s}_x$

$$\bar{s}_x(t) = \frac{\delta t}{\kappa_x} - \frac{d_x}{\kappa_x^2} H(t) \exp^{-(d_x/\kappa_x + \alpha_x)t}.$$

Si realizamos la siguiente definición

$$\zeta_x(t) := -\frac{d_x}{\kappa_x^2} H(t) \exp^{-(d_x/\kappa_x + \alpha_x)t},$$

entonces  $\partial_{\bar{x}}$  puede escribirse como

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{x}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t)}{\kappa_x} \partial_x(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{d_x}{\kappa_x^2} H(t) \exp^{-(d_x/\kappa_x + \alpha_x)t} \partial_x(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\kappa_x} \partial_x + \zeta_x * \partial_x.\end{aligned}\tag{5.11}$$

*Roden y Gedney* (2000) demostraron que la convolución temporal en (5.11) puede llevarse a cabo de forma recursiva con el uso de variables de memoria definidas por

$$\psi_x := \zeta_x * \partial_x.$$

Esta variable de memoria  $\psi_x$  será relacionada a una EDO, de la misma manera como se hace con las funciones anelásticas (ver la sección 3.1.3). Debido a la propiedad conmutativa de la convolución,  $\psi_x$  puede escribirse como

$$\begin{aligned}\psi_x(t) &= \partial_x * \zeta_x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x)^\tau \left[ -\frac{d_x}{\kappa_x^2} H(t) \exp^{-(d_x/\kappa_x + \alpha_x)(t-\tau)} \right] d\tau \\ &\quad \text{NOTA: El superíndice de } (\partial_x)^\tau \text{ indica el instante de tiempo en que debe aplicarse el operador.} \\ &= \int_0^{\infty} (\partial_x)^\tau \left[ -\frac{d_x}{\kappa_x^2} \exp^{-(d_x/\kappa_x + \alpha_x)(t-\tau)} \right] d\tau.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Aplicando la derivada temporal a la Ecuación (5.12) se tiene

$$\begin{aligned}\partial_t \psi_x(t) &= -\frac{d_x}{\kappa_x^2} \partial_t \int_0^t (\partial_x)^\tau \exp^{-(d_x/\kappa_x + \alpha_x)(t-\tau)} d\tau \\ &\quad \text{Aplicando el Teorema de Leibniz} \\ &= -\frac{d_x}{\kappa_x^2} \left[ (\partial_x)^t \exp^{-(d_x/\kappa_x + \alpha_x)(t-t)} + \int_0^t \partial_t (\partial_x)^\tau \exp^{-(d_x/\kappa_x + \alpha_x)(t-\tau)} d\tau \right] \\ &= -\frac{d_x}{\kappa_x^2} (\partial_x)^t - (d_x/\kappa_x + \alpha_x) \int_0^t (\partial_x)^\tau \left[ -\frac{d_x}{\kappa_x^2} \exp^{-(d_x/\kappa_x + \alpha_x)(t-\tau)} \right] d\tau \\ &= -\frac{d_x}{\kappa_x^2} (\partial_x)^t - (d_x/\kappa_x + \alpha_x) \psi_x(t).\end{aligned}$$

Se podría pensar que como la formulación de un medio viscoelástico y de una región CPML son muy similares se podría utilizar cualquiera de estas para cumplir ambas tareas. Sin embargo esto

no es posible, primero porque el origen de las formulaciones es totalmente diferente dado que para un medio viscoelástico se busca encontrar aquel modelo reológico que atenue las ondas de acuerdo a las propiedades físicas del medio y los esfuerzos son el único campo alterado. Por otro lado para una región CPML la idea es usar un sistema coordenado complejo para incluir un factor de amortiguamiento a ambos campos, velocidades y esfuerzos, sin reflexión entre la región principal y la de amortiguamiento. Además si fuera posible extraer el módulo viscoelástico a partir de la formulación CPML, no se podría decir que este modelo es reológicamente realista, además de que no sería posible relacionarlo con los factores de calidad de las ondas P y S.

A continuación se presenta como incorporar las CPML en el esquema de GD desarrollado anteriormente para la propagación de ondas para poder utilizarlo en escalas regionales.

### 5.2.3. Incorporación de CPML en un esquema GD

En la sección previa se introdujo la formulación CPML cuando la interfaz es el plano  $yz$ , pero se debe generalizar para considerar los otros dos planos ortogonales. Se debe recordar que la función de amortiguamiento es aplicada únicamente a la derivada espacial relativa a la dirección perpendicular de la CPML. De modo que la función de amortiguamiento, previamente definida en (5.10), se puede escribir como

$$s_\theta = \kappa_\theta + \frac{d_\theta}{\alpha_\theta + i\omega} \quad \forall \theta \in \{x, y, z\}.$$

Para definir el perfil de amortiguamiento  $d_\theta$  se sigue el trabajo de *Collino y Tsogka* (2001), el cual varía de 0 en la entrada de la región a su valor máximo  $d_{\theta \text{ máx}}$  al final de esta como

$$\begin{aligned} d_\theta &= d_{\theta \text{ máx}} \left( \frac{\delta_\theta}{L_{CPML}} \right)^2 & \forall \theta \in \{x, y, z\} \\ d_{\theta \text{ máx}} &= -3V_P \frac{\log(R_{coeff})}{2L_{CPML}} & \forall \theta \in \{x, y, z\}, \end{aligned}$$

donde  $\delta_\theta$  es la profundidad del baricentro del elemento dentro de la CPML,  $L_{CPML}$  es el grosor del estrato absorbente y  $R_{coeff}$  es el coeficiente de reflexión teórico.

*Etienne et al.* (2010) eligieron  $R_{coeff} = 0.1\%$ ,  $\kappa_\theta = 1$  y  $\alpha_\theta$  que varía de un valor de máximo ( $\alpha_{\theta \text{ máx}} = \pi f_0$ ) a la entrada de la CPML y cero en su fin. Con esta elección, las derivadas espaciales en la región CPML serían reemplazadas por

$$\partial_{\bar{\theta}} \rightarrow \partial_\theta + \zeta_\theta * \partial_\theta, \quad (5.13)$$

con las variables de memoria definidas como

$$\psi_\theta = \zeta_\theta * \partial_\theta \quad \forall \theta \in \{x, y, z\},$$

y su respectiva EDO

$$\partial_t \psi_\theta = -d_\theta \partial_\theta - (d_\theta + \alpha_\theta) \psi_\theta \quad \forall \theta \in \{x, y, z\}.$$

Como debe introducirse una variable de memoria por cada componente del campo de velocidades y de esfuerzos y pensando en la formulación previa (3.45), se definen los siguientes vectores

$$\begin{aligned} \underline{\psi}_\theta(\underline{v}) &= (\psi_\theta(v_x), \psi_\theta(v_y), \psi_\theta(v_z))^T & \forall \theta \in \{x, y, z\} \\ \underline{\psi}_\theta(\underline{\sigma}) &= (\psi_\theta(\tau), \psi_\theta(\tau'), \psi_\theta(\tau''), \psi_\theta(\sigma_{xy}), \psi_\theta(\sigma_{xz}), \psi_\theta(\sigma_{yz})). \end{aligned}$$

Si se cambian las derivadas espaciales incluidas en la divergencia del sistema (3.45) por aquellas definidas en (5.13), se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\rho \partial_t \underline{v} &= \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta (\underline{M}_\theta \underline{\sigma}) + \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \underline{M}_\theta \underline{\psi}_\theta(\underline{\sigma}) + \underline{f} \\ \underline{\Lambda} \partial_t \underline{\sigma} &= \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta (\underline{N}_\theta \underline{v}) + \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \underline{N}_\theta \underline{\psi}_\theta(\underline{v}) - \sum_{l=1}^n r_l^A,\end{aligned}\quad (5.14)$$

y además de las EDO relacionadas con las funciones anelásticas, se requiere incluir las siguientes EDOs que corresponden a las variables de memoria

$$\begin{aligned}\partial_t \underline{\psi}_\theta(\underline{\sigma}) &= -d_\theta \partial_\theta(\underline{\sigma}) - (d_\theta + \alpha_\theta) \underline{\psi}_\theta(\underline{\sigma}) \\ \partial_t \underline{\psi}_\theta(\underline{v}) &= -d_\theta \partial_\theta(\underline{v}) - (d_\theta + \alpha_\theta) \underline{\psi}_\theta(\underline{v}) \quad \forall \theta \in \{x, y, z\}.\end{aligned}\quad (5.15)$$

Ahora se incorporarán los términos nuevos relacionados a las variables de memoria del sistema (5.14) en el esquema GD compuesto por (4.24) y (4.25). Primero se desarrollarán los términos de las variables de memoria relacionados al campo de esfuerzos que aparecen en la ecuación de movimiento dados por

$$\sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \underline{M}_\theta \underline{\psi}_\theta(\underline{\sigma}). \quad (5.16)$$

Para obtener la formulación débil se debe multiplicar por una función prueba y después integrar sobre el volumen del elemento

$$\sum_{\Theta \in \{x,y,z\}} \int_{V^i} (\varphi_{\theta k}^i)^T \underline{M}_\Theta \underline{\psi}_\Theta^i(\underline{\sigma}) dV.$$

Trabajando con el primer término de la suma  $\Theta = x$  y con la elección de la dimensión  $\theta = x$

$$\int_{V^i} (\varphi_{xk}^i)^T \underline{M}_x \underline{\psi}_x^i(\underline{\sigma}) dV.$$

Sustituyendo  $\underline{\psi}_x(\underline{\sigma})$  por su aproximación nodal<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\int_{V^i} (\varphi_{xk}^i)^T \underline{M}_x \sum_{j=1}^{d^i} \varphi_j^i \underline{I}_{6-xj} \underline{\psi}_{xj}^i(\underline{\sigma}) dV &= \int_{V^i} [ \varphi_k^i \quad 0 \quad 0 ] \underline{M}_x \sum_{j=1}^{d^i} \varphi_j^i \underline{I}_{6-xj} \underline{\psi}_{xj}^i(\underline{\sigma}) dV \\ &= \int_{V^i} \sum_{j=1}^{d^i} \varphi_k^i \varphi_j^i (\underline{M}_x)_1 \underline{\psi}_{xj}^i(\underline{\sigma}) dV.\end{aligned}$$

Haciendo lo mismo con  $\theta = y$  y  $\theta = z$  e incluyendo estos términos

$$\begin{aligned}\int_{V^i} \sum_{j=1}^{d^i} \begin{bmatrix} \varphi_k^i \varphi_j^i (\underline{M}_x)_1 \\ \varphi_k^i \varphi_j^i (\underline{M}_x)_2 \\ \varphi_k^i \varphi_j^i (\underline{M}_x)_3 \end{bmatrix} \underline{\psi}_{xj}^i(\underline{\sigma}) dV &= \int_{V^i} \sum_{j=1}^{d^i} \varphi_k^i \varphi_j^i \underline{M}_x \underline{\psi}_{xj}^i(\underline{\sigma}) dV \\ &= \int_{V^i} [ \varphi_k^i \varphi_1^i \underline{M}_x \quad \varphi_k^i \varphi_2^i \underline{M}_x \quad \cdots \quad \varphi_k^i \varphi_{d^i}^i \underline{M}_x ] \begin{bmatrix} \underline{\psi}_{x1}^i(\underline{\sigma}) \\ \underline{\psi}_{x2}^i(\underline{\sigma}) \\ \vdots \\ \underline{\psi}_{xd^i}^i(\underline{\sigma}) \end{bmatrix} dV.\end{aligned}$$

<sup>1</sup>Esta aproximación nodal será exactamente igual a la realizada para  $\underline{\sigma}$  en la Ecuación (4.3).

Como debe satisfacerse para cada función prueba, i.e.  $\forall k \in \{1, 2, \dots, d^i\}$

$$\int_{V^i} \begin{bmatrix} \varphi_1^i \varphi_1^i \underline{M}_x & \varphi_1^i \varphi_2^i \underline{M}_x & \cdots & \varphi_1^i \varphi_{d^i}^i \underline{M}_x \\ \varphi_2^i \varphi_1^i \underline{M}_x & \varphi_2^i \varphi_2^i \underline{M}_x & \cdots & \varphi_2^i \varphi_{d^i}^i \underline{M}_x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{d^i}^i \varphi_1^i \underline{M}_x & \varphi_{d^i}^i \varphi_2^i \underline{M}_x & \cdots & \varphi_{d^i}^i \varphi_{d^i}^i \underline{M}_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\psi}_{x1}^i(\underline{\sigma}) \\ \underline{\psi}_{x2}^i(\underline{\sigma}) \\ \vdots \\ \underline{\psi}_{xd^i}^i(\underline{\sigma}) \end{bmatrix} dV = \underline{M}_x \otimes \underline{K}^i \hat{\underline{\psi}}_x^i(\underline{\sigma}),$$

donde  $\underline{K}$  es la matriz de masa previamente definida en (4.12). Haciendo el mismo procedimiento con los otros términos de la suma (5.16) cuando  $\Theta = y$  y  $\Theta = z$  se tiene

$$\underline{M}_y \otimes \underline{K}^i \hat{\underline{\psi}}_y^i(\underline{\sigma})$$

$$\underline{M}_z \otimes \underline{K}^i \hat{\underline{\psi}}_z^i(\underline{\sigma}).$$

Juntando todos los sumandos se tiene

$$\sum_{\theta \in \{x, y, z\}} \underline{M}_\theta \underline{\psi}_\theta(\underline{\sigma}) \implies \sum_{\theta \in \{x, y, z\}} (\underline{M}_\theta \otimes \underline{K}^i) \hat{\underline{\psi}}_\theta^i(\underline{\sigma}) \quad (5.17)$$

Formulación continua Formulación GD.

Para la misma suma pero de las variables de memoria de la velocidad se puede seguir el mismo procedimiento para obtener

$$\sum_{\theta \in \{x, y, z\}} \underline{N}_\theta \underline{\psi}_\theta(\underline{v}) \implies \sum_{\theta \in \{x, y, z\}} (\underline{N}_\theta \otimes \underline{K}^i) \hat{\underline{\psi}}_\theta^i(\underline{v}) \quad (5.18)$$

Formulación continua Formulación GD.

Estos nuevos términos difieren ligeramente de aquellos presentados por *Etienne et al.* (2010) pero son equivalentes porque ellos hacen la aproximación nodal con  $\underline{M}_\theta \underline{\psi}_\theta^i$  mientras que en el desarrollo anterior se optó hacer la aproximación con las variables de memoria  $\underline{\psi}_\theta^i$ .

Para resolver las EDO's relacionadas con las variables de memoria, se desarrollará la formulación propuesta en (*Etienne et al.*, 2010) con un esquema GD. Primero se trabajará con las ecuaciones asociadas con las variables de memoria de los esfuerzos dadas por

$$\partial_t \underline{\psi}_\theta(\underline{\sigma}) = -d_\theta \partial_\theta(\underline{\sigma}) - (d_\theta + \alpha_\theta) \underline{\psi}_\theta(\underline{\sigma}) \quad \forall \theta \in \{x, y, z\},$$

cuya formulación débil es

$$\int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\Theta k}^i)^T \partial_t \underline{\psi}_\theta(\underline{\sigma}) dV = \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\Theta k}^i)^T [-d_\theta^i \partial_\theta(\underline{\sigma}) - (d_\theta^i + \alpha_\theta^i) \underline{\psi}_\theta(\underline{\sigma})] dV, \quad (5.19)$$

donde  $\Theta$  es una dimensión elegida y  $\theta \in \{x, y, z\}$ . Integrando por partes se puede reescribir (5.19) como

$$\begin{aligned} \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\Theta k}^i)^T \partial_t \underline{\psi}_\theta(\underline{\sigma}) dV &= -d_\theta^i \int_{S^i} (\underline{\phi}_{\Theta k}^i)^T \underline{\sigma} n_\theta dS + d_\theta^i \int_{V^i} (\partial_\theta \underline{\varphi}_{\Theta k}^i)^T \underline{\sigma} dV \\ &\quad - (d_\theta^i + \alpha_\theta^i) \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\Theta k}^i)^T \underline{\psi}_\theta(\underline{\sigma}) dV. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Para obtener el esquema GD se trabajará con cada término de la Ecuaciones (5.20) sustituyendo los vectores  $\underline{\psi}_\theta(\underline{\sigma})$  y  $\underline{\psi}_\theta(\underline{v})$  por su aproximación nodal en la misma manera que se hizo con los vectores



$\underline{\sigma}$  y  $\underline{v}$  en (4.3) y (4.2) respectivamente. Después con las funciones de prueba en la formulación débil se cumple la condición de ortogonalidad. Mucha de la nomenclatura que se usará y la definición de algunas matrices no serán dadas por encontrarse en la sección 4.1.

Para el término

$$\int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\Theta k}^i)^T \partial_t \underline{\psi}_{\theta}(\underline{\sigma}) dV,$$

con  $\Theta = 1$

$$\begin{aligned} \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{1k}^i)^T \partial_t \underline{\psi}_{\theta}(\underline{\sigma}) dV &= \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{1k}^i)^T \sum_{j=1}^{d^i} \varphi_j^i \underline{I}_6 \partial_t \underline{\psi}_{\theta j}^i(\underline{\sigma}) dV \\ &= \int_{V^i} \sum_{j=1}^{d^i} [ \varphi_k^i \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 ] \varphi_j^i \underline{I}_6 \partial_t \underline{\psi}_{\theta j}^i(\underline{\sigma}) dV \\ &= \int_{V^i} \sum_{j=1}^{d^i} \varphi_k^i \varphi_j^i (\underline{I}_6)_1 \partial_t \underline{\psi}_{\theta j}^i(\underline{\sigma}) dV. \end{aligned}$$

Haciendo lo mismo con  $\Theta = 2, \Theta = 3, \dots, \Theta = 6$  e incluyendo estos términos

$$\begin{aligned} \int_{V^i} \sum_{j=1}^{d^i} \begin{bmatrix} \varphi_k^i \varphi_j^i (\underline{I}_6)_1 \\ \varphi_k^i \varphi_j^i (\underline{I}_6)_2 \\ \vdots \\ \varphi_k^i \varphi_j^i (\underline{I}_6)_6 \end{bmatrix} \partial_t \underline{\psi}_{\theta j}^i(\underline{\sigma}) dV &= \int_{V^i} \sum_{j=1}^{d^i} \varphi_k^i \varphi_j^i \underline{I}_6 \partial_t \underline{\psi}_{\theta j}^i(\underline{\sigma}) dV \\ &= \int_{V^i} [ \varphi_k^i \varphi_1^i \underline{I}_6 \quad \varphi_k^i \varphi_2^i \underline{I}_6 \quad \cdots \quad \varphi_k^i \varphi_{d^i}^i \underline{I}_6 ] \begin{bmatrix} \partial_t \underline{\psi}_{\theta 1}^i(\underline{\sigma}) \\ \partial_t \underline{\psi}_{\theta 2}^i(\underline{\sigma}) \\ \vdots \\ \partial_t \underline{\psi}_{\theta d^i}^i(\underline{\sigma}) \end{bmatrix} dV. \end{aligned}$$

Como debe satisfacerse para cada función prueba, i.e.  $\forall k \in \{1, 2, \dots, d^i\}$

$$\int_{V^i} \begin{bmatrix} \varphi_1^i \varphi_1^i \underline{I}_6 & \varphi_1^i \varphi_2^i \underline{I}_6 & \cdots & \varphi_1^i \varphi_{d^i}^i \underline{I}_6 \\ \varphi_2^i \varphi_1^i \underline{I}_6 & \varphi_2^i \varphi_2^i \underline{I}_6 & \cdots & \varphi_2^i \varphi_{d^i}^i \underline{I}_6 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{d^i}^i \varphi_1^i \underline{I}_6 & \varphi_{d^i}^i \varphi_2^i \underline{I}_6 & \cdots & \varphi_{d^i}^i \varphi_{d^i}^i \underline{I}_6 \end{bmatrix} dV \partial_t \hat{\underline{\psi}}_{\theta}^i(\underline{\sigma}) = \underline{I}_6 \otimes \underline{K}^i \partial_t \hat{\underline{\psi}}_{\theta}^i(\underline{\sigma}). \quad (5.21)$$

Haciendo exactamente el mismo procedimiento con el término

$$-(d_{\theta}^i + \alpha_{\theta}^i) \int_{V^i} (\underline{\varphi}_{\Theta k}^i)^T \underline{\psi}_{\theta}(\underline{\sigma}) dV,$$

se obtiene la formulación discreta

$$-(d_{\theta}^i + \alpha_{\theta}^i) (\underline{I}_6 \otimes \underline{K}^i) \hat{\underline{\psi}}_{\theta}^i(\underline{\sigma}). \quad (5.22)$$

Para el término

$$d_{\theta}^i \int_{V^i} (\partial_{\theta} \underline{\varphi}_{\Theta k}^i)^T \underline{\sigma} dV, \quad (5.23)$$

con  $\Theta = 1$

$$\begin{aligned}
d_\theta^i \int_{V^i} (\partial_\theta \underline{\varphi}_{1k}^i)^T \underline{\sigma} dV &= d_\theta^i \int_{V^i} (\partial_\theta \underline{\varphi}_{1k}^i)^T \sum_{j=1}^{d^i} \varphi_j^i \underline{I}_6 \underline{\sigma}_j^i dV \\
&= d_\theta^i \int_{V^i} \sum_{j=1}^{d^i} [ \varphi_{k,\theta}^i \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 ] \varphi_j^i \underline{I}_6 \underline{\sigma}_j^i dV \\
&= d_\theta^i \int_{V^i} \sum_{j=1}^{d^i} \varphi_{k,\theta}^i \varphi_j^i (\underline{I}_6)_1 \underline{\sigma}_j^i dV.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Haciendo lo mismo con  $\Theta = 2, \Theta = 3, \dots, \Theta = 6$  e incluyendo estos términos

$$\begin{aligned}
d_\theta^i \int_{V^i} \sum_{j=1}^{d^i} \begin{bmatrix} \varphi_{k,\theta}^i \varphi_j^i (\underline{I}_6)_1 \\ \varphi_{k,\theta}^i \varphi_j^i (\underline{I}_6)_2 \\ \vdots \\ \varphi_{k,\theta}^i \varphi_j^i (\underline{I}_6)_6 \end{bmatrix} \underline{\sigma}_j^i dV &= d_\theta^i \int_{V^i} \sum_{j=1}^{d^i} \varphi_{k,\theta}^i \varphi_j^i \underline{I}_6 \underline{\sigma}_j^i dV \\
&= d_\theta^i \int_{V^i} [ \varphi_{k,\theta}^i \varphi_1^i \underline{I}_6 \quad \varphi_{k,\theta}^i \varphi_2^i \underline{I}_6 \quad \cdots \quad \varphi_{k,\theta}^i \varphi_{d^i}^i \underline{I}_6 ] \begin{bmatrix} \underline{\sigma}_1^i \\ \underline{\sigma}_2^i \\ \vdots \\ \underline{\sigma}_{d^i}^i \end{bmatrix} dV.
\end{aligned}$$

Como debe satisfacerse para cada función prueba, i.e.  $\forall k \in \{1, 2, \dots, d^i\}$

$$d_\theta^i \int_{V^i} \begin{bmatrix} \varphi_{1,\theta}^i \varphi_1^i \underline{I}_6 & \varphi_{1,\theta}^i \varphi_2^i \underline{I}_6 & \cdots & \varphi_{1,\theta}^i \varphi_{d^i}^i \underline{I}_6 \\ \varphi_{2,\theta}^i \varphi_1^i \underline{I}_6 & \varphi_{2,\theta}^i \varphi_2^i \underline{I}_6 & \cdots & \varphi_{2,\theta}^i \varphi_{d^i}^i \underline{I}_6 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{d^i,\theta}^i \varphi_1^i \underline{I}_6 & \varphi_{d^i,\theta}^i \varphi_2^i \underline{I}_6 & \cdots & \varphi_{d^i,\theta}^i \varphi_{d^i}^i \underline{I}_6 \end{bmatrix} dV \underline{\hat{\sigma}}^i = d_\theta^i \underline{I}_6 \otimes \underline{\xi}_\theta^i \underline{\hat{\sigma}}^i. \tag{5.25}$$

Para el término

$$-d_\theta^i \int_{S^i} (\underline{\phi}_{\Theta k}^i)^T \underline{\sigma} n_\theta dS, \tag{5.26}$$

se usará un esquema central para su evaluación como

$$-d_\theta^i \frac{1}{2} \sum_{k \in N^i} \int_{S^{ik}} (\underline{\phi}_{\Theta l}^i)^T (\underline{\sigma}^i + \underline{\sigma}^k) n_\theta^{ik} dS. \tag{5.27}$$

Por el momento, se trabajará únicamente con el  $k$ -ésimo vecino y el término que contiene  $\underline{\sigma}^i$ , i.e.

$$n_\theta^{ik} \int_{S^{ik}} (\underline{\phi}_{\Theta l}^i)^T \underline{\sigma}^i dS, \tag{5.28}$$

con  $\Theta = 1$

$$\begin{aligned}
n_\theta^{ik} \int_{S^{ik}} (\underline{\phi}_{1l}^i)^T \underline{\sigma}^i dS &= n_\theta^{ik} \int_{S^{ik}} (\underline{\phi}_{1l}^i)^T \sum_{j=1}^{d^i} \phi_j^i \underline{I}_6 \underline{\sigma}_j^i dS \\
&= n_\theta^{ik} \int_{S^{ik}} \sum_{j=1}^{d^i} [ \phi_l^i \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 ] \phi_j^i \underline{I}_6 \underline{\sigma}_j^i dS \\
&= n_\theta^{ik} \int_{S^{ik}} \sum_{j=1}^{d^i} \phi_l^i \phi_j^i (\underline{I}_6)_1 \underline{\sigma}_j^i dS.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Haciendo lo mismo con  $\Theta = 2, \Theta = 3, \dots, \Theta = 6$  e incluyendo estos términos

$$\begin{aligned}
n_\theta^{ik} \int_{S^{ik}} \sum_{j=1}^{d^i} \begin{bmatrix} \phi_l^i \phi_j^i(\underline{I}_6)_1 \\ \phi_l^i \phi_j^i(\underline{I}_6)_2 \\ \vdots \\ \phi_l^i \phi_j^i(\underline{I}_6)_6 \end{bmatrix} \underline{\sigma}_j^i dS &= n_\theta^{ik} \int_{S^{ik}} \sum_{j=1}^{d^i} \phi_l^i \phi_j^i \underline{I}_6 \underline{\sigma}_j^i dS \\
&= n_\theta^{ik} \int_{S^{ik}} [ \phi_l^i \phi_1^i \underline{I}_6 \quad \phi_l^i \phi_2^i \underline{I}_6 \quad \cdots \quad \phi_l^i \phi_{d^i}^i \underline{I}_6 ] \begin{bmatrix} \underline{\sigma}_1^i \\ \underline{\sigma}_2^i \\ \vdots \\ \underline{\sigma}_{d^i}^i \end{bmatrix} dS.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Como debe satisfacerse para cada función prueba, i.e.  $\forall l \in \{x, y, z\}$

$$n_\theta^{ik} \int_{S^{ik}} \begin{bmatrix} \phi_1^i \phi_1^i \underline{I}_6 & \phi_1^i \phi_2^i \underline{I}_6 & \cdots & \phi_1^i \phi_{d^i}^i \underline{I}_6 \\ \phi_2^i \phi_1^i \underline{I}_6 & \phi_2^i \phi_2^i \underline{I}_6 & \cdots & \phi_2^i \phi_{d^i}^i \underline{I}_6 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{d^i}^i \phi_1^i \underline{I}_6 & \phi_{d^i}^i \phi_2^i \underline{I}_6 & \cdots & \phi_{d^i}^i \phi_{d^i}^i \underline{I}_6 \end{bmatrix} dS \underline{\hat{\sigma}}^i = n_\theta^{ik} (\underline{I}_6 \otimes \underline{\mathcal{F}}^{ik}) \underline{\hat{\sigma}}^i. \tag{5.31}$$

Trabajando de la misma manera con el término que contiene  $\underline{\sigma}^k$ , en (5.27), para  $k$ -ésimo vecino se tiene

$$n_\theta^{ik} (\underline{I}_6 \otimes \underline{\mathcal{G}}^{ik}) \underline{\hat{\sigma}}^k. \tag{5.32}$$

Juntando los dos términos del flujo, (5.31) y (5.32), y aplicando la suma de la Ecuación (5.27) sobre todos los vecinos

$$-d_\theta^i \frac{1}{2} \sum_{k \in N^i} n_\theta^{ik} [(\underline{I}_6 \otimes \underline{\mathcal{F}}^{ik}) \underline{\hat{\sigma}}^i + (\underline{I}_6 \otimes \underline{\mathcal{G}}^{ik}) \underline{\hat{\sigma}}^k]. \tag{5.33}$$

Entonces a partir de la formulación débil (5.20) se obtuvieron para cada uno de los términos su formulación discreta, (5.21),(5.22),(5.25) y (5.33), que al incorporarlos todos se obtiene

$$\begin{aligned}
(\underline{I}_6 \otimes \underline{\mathcal{K}}^i) \partial_t \underline{\hat{\psi}}_\theta^i(\underline{\sigma}) &= d_\theta^i \underline{I}_6 \otimes \underline{\mathcal{E}}_\theta^i \underline{\hat{\sigma}}^i - d_\theta^i \frac{1}{2} \sum_{k \in N^i} n_\theta^{ik} [(\underline{I}_6 \otimes \underline{\mathcal{F}}^{ik}) \underline{\hat{\sigma}}^i + (\underline{I}_6 \otimes \underline{\mathcal{G}}^{ik}) \underline{\hat{\sigma}}^k] \\
&\quad - (d_\theta^i + \alpha_\theta^i) (\underline{I}_6 \otimes \underline{\mathcal{K}}^i) \underline{\hat{\psi}}_\theta^i(\underline{\sigma}) \quad \forall \theta \in \{x, y, z\}.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Si se trabaja en la misma forma con las EDOs relacionadas con las variables de memoria de (5.15), i.e. obtener la formulación débil y después su esquema GD, se obtiene

$$\begin{aligned}
(\underline{I}_3 \otimes \underline{\mathcal{K}}^i) \partial_t \underline{\hat{\psi}}_\theta^i(\underline{v}) &= d_\theta^i \underline{I}_3 \otimes \underline{\mathcal{E}}_\theta^i \underline{\hat{v}}^i - d_\theta^i \frac{1}{2} \sum_{k \in N^i} n_\theta^{ik} [(\underline{I}_3 \otimes \underline{\mathcal{F}}^{ik}) \underline{\hat{v}}^i + (\underline{I}_3 \otimes \underline{\mathcal{G}}^{ik}) \underline{\hat{v}}^k] \\
&\quad - (d_\theta^i + \alpha_\theta^i) (\underline{I}_3 \otimes \underline{\mathcal{K}}^i) \underline{\hat{\psi}}_\theta^i(\underline{v}) \quad \forall \theta \in \{x, y, z\}.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Finalmente para incorporar regiones CPML en nuestro esquema GD basta con incluir los términos de las variables de memoria (5.17) y (5.18) en las ecuaciones hiperbólicas (4.24) y (4.25) respectivamente. Y para calcular las variables de memoria de los esfuerzos y las velocidades en cada paso de tiempo deben resolverse las EDOs (5.34) y (5.35) respectivamente.

## Capítulo 6

# Artículo: 3D Anelastic Wave Propagation with an hp-Adaptive Discontinuous Galerkin Method

**NOTA:** El artículo que se presenta a continuación sigue el formato requerido para su publicación. De modo que cuenta con su propia bibliografía y las referencias de las ecuaciones y figuras son con respecto al cuerpo del mismo. En el artículo se obvian los pasos detallados en los capítulos anteriores de la primera parte de la tesis. Además se incluye el análisis de convergencia del esquema propuesto y otro análisis sobre el efecto que tiene el engrosamiento de la malla.

### 6.1. Resumen

Un tópico importante que debe tratarse para la simulación de la propagación de ondas sísmicas es la atenuación intrínseca del medio. En este trabajo se presenta cómo puede introducirse fácilmente la respuesta viscoelástica del medio en un esquema de Galerkin discontinuo (DG-FEM) hp-adaptativo que fue previamente formulado para la propagación de ondas elásticas por *Etienne et al.* (2010). El efecto anelástico se calcula de acuerdo a los factores de calidad, definidos sobre un rango de frecuencias de interés. La aproximación utilizada consiste en evitar la relación de convolución presente en la ecuación constitutiva viscoelástica con el uso de funciones anelásticas propuestas por *Kristek y Moczo* (2003). La evolución temporal de cada función anelástica está relacionada con su propia ecuación diferencial ordinaria (EDO) tal que la p-adaptividad, *i.e.* diferentes órdenes de aproximación entre elementos adyacentes, usada en DG-FEM se preserva. Para verificar la implementación computacional del modelo se resolvió el benchmark viscoelástico LOH3 del *Southern California Earthquake Center* (SCEC) (*Day et al.*, 2003) y se comparó la solución con la solución semi-analítica obtenida con el método de onda discreto llamado AXITRA (*Bouchon y Coutant*, 1994). En la comparación, en lugar de tratar de aproximar un factor de calidad constante, se usó el mismo módulo viscoelástico en DG-FEM y en AXITRA, para que las diferencias entre las soluciones no se deban a la aproximación del factor de calidad, sino a la precisión del esquema numérico. Para el análisis de convergencia, también se resolvió la versión elástica de LOH3 llamada LOH1 (*Day et al.*, 2003) para comparar las tasas de convergencia entre los dos casos, elástico y viscoelástico, usando mallas estructuradas y no estructuradas. Finalmente también se hizo un análisis de la tasa de engrosamiento aplicada a la malla para cuantificar las reflexiones espurias presentadas en la solución.

# 3D Anelastic Wave Propagation with an hp-Adaptive Discontinuous Galerkin Method

J. Tago<sup>1</sup>, V. M. Cruz-Atienza<sup>1</sup>, V. Etienne<sup>2</sup>, E. Chaljub<sup>3</sup>, J. Virieux<sup>3</sup>, and F.

J. Sánchez-Sesma<sup>4</sup>

---

J. Tago, Instituto de Geofísica, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito de la Investigación Científica s/n, México, D.F. 04510, Mexico. (josue.tago@gmail.com)

V. M. Cruz-Atienza, Instituto de Geofísica, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito de la Investigación Científica s/n, México, D.F. 04510, Mexico.

V. Etienne, Géoazur, Université de Nice-Sophia Antipolis, 06108 Nice Cedex 02, France.

E. Chaljub, Institut des Sciences de la Terre, Université Joseph Fourier, 38041 Grenoble Cedex 9, France.

J. Virieux, Institut des Sciences de la Terre, Université Joseph Fourier, 38041 Grenoble Cedex 9, France.

F. J. Sánchez-Sesma, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito de la Investigación Científica s/n, México, D.F. 04510, Mexico.

<sup>1</sup>Instituto de Geofísica, Universidad Nacional Autónoma, D.F., Mexico.

<sup>2</sup>Géoazur, Univeristé de Nice-Sophia Antipolis, Nice, France.

**Abstract.** An essential issue that must be considered in realistic simulations of seismic waves propagation is the intrinsic attenuation due to the anelastic energy loss. In this work we present how we can easily take account of this phenomenon by introducing a viscoelastic response of the medium in an hp-Discontinuous Galerkin (DG-FEM) scheme, which was previously formulated for elastic wave propagation by *Etienne et al.* [2010]. The anelastic effect is introduced via frequency dependent rocks quality factors  $Q$  defined over a frequency range of interest. The approximation consists in avoiding the convolutional relationship present in the viscoelastic constitutive equation through the incorporation of anelastic functions, as proposed by *Kris-tek and Moczo* [2003], such that the p-adaptivity is preserved, i.e. different approximation orders between two adjacent elements. To verify our model implementation we solved the viscoelastic benchmark LOH3 of the Southern California Earthquake Center (SCEC) [*Day et al.*, 2003] and compared our results with the semi-analytical solution obtained with the discrete wave number method [AXITRA; *Bouchon and Coutant* [1994]] considering exactly the same viscoelastic modulus (*i.e.* the same frequency-dependent  $Q$  func-

---

<sup>3</sup>Institut des Sciences de la Terre,

Université Joseph Fourier, Grenoble, France.

<sup>4</sup>Instituto de Ingeniería, Universidad

Nacional Autónoma, D.F., Mexico.

tions) in both the DG-FEM and AXITRA methods. Our results show that the viscoelastic DG-FEM has convergence rate to the third power as a function of elements per minimum wavelength,  $n_\lambda$ , in unstructured meshes. However, this rate degrades by a factor 1.8 in structured meshes due to the enhancement of numerical anisotropy. RMS errors of 1.2% and 2% for unstructured and unstructured meshes are obtained respectively, provided that  $n_\lambda \geq 3$ . A detailed analysis of spurious oscillations due to the mesh coarsening revealed that such undesired effect depends on both frequency and the coarsening rate,  $c$ , in a similar way  $n_\lambda$  does. It shows that preserving  $n_\lambda \geq 2$  everywhere in the simulation domain, no matters  $c$ , guarantees the amplitude of the spurious oscillations to be smaller than those observed without coarsening.

## 1. Introduction

In the past few decades the computational seismology has been developed very quickly thanks to sophisticated numerical methods with the ultimate goal of simulating realistic seismic scenarios. These numerical methods have incorporated important medium characteristics such as the waves anelastic attenuation [e.g. *Day and Minster*, 1984; *Emmerich and Korn*, 1987; *Carcione et al.*, 1988a, b] and anisotropy [e.g. *Backus*, 1962; *Cara*, 2002; *Carcione*, 2002].

The role of the attenuation in wave propagation is a key characteristic for assessing the seismic hazard. There are two effects of a linear anelastic solid that must modeled in a numerical scheme. These are the attenuation absorption, related with to the energy dissipation [e.g. *Anderson et al.*, 1965; *Anderson*, 1967] and the waves dispersion which is due to the difference of propagation velocity between waves as a function of frequency [e.g. *Lomnitz*, 1957; *Futterman*, 1962; *Lamb*, 1962].

The anelasticity is frequency dependent. For instance, regional studies for engineering purposes in central Mexico have shown an exponential increase of attenuation with frequency. However, for long period wave propagation, the earth's internal friction, translated into the rocks quality factor  $Q$ , is nearly constant over a wide range of frequencies [*Liu et al.*, 1976]. This can be explained by the heterogeneous composition of the earth whose different components contribute in the attenuation through all the seismic frequency range. Because of this, a realistic numerical approximation should be able to model any kind of frequency dependency of  $Q$ .

The constitutive law of a viscoelastic rheology lead a medium to behave as a mixture of



an elastic and a viscous body. Its formulation is achieved with the use of the Boltzmann superposition and causality principle that states that the stress can be computed through the convolution in time of the entire strain history with a tensor of relaxation functions [Christensen, 1971]. This convolutional relationship is the main difficulty for the incorporation of the anelasticity in any time domain numerical scheme because of the memory requirements that would need to save the entire strain history.

It was not feasible to integrate the attenuation of seismic waves into time domain numerical schemes until the work of *Day and Minster* [1984], which proposed to change the convolutional relationship by approximating the viscoelastic modulus with a rational function through the Padé approximant method. However, this approximation requires the introduction of additional variables with their own ordinary differential equations. This was indeed a revolutionary work because it showed how to avoid the time convolution in the constitutive equation and paved the way for the works developed later. The alternative idea developed a few years later by two independent investigations (*Emmerich and Korn* [1987] and *Carcione et al.* [1988a]), was to build from the beginning the viscoelastic modulus as a rational function. This approach allows to model any frequency dependency of  $Q$  by using a linear combination of multiple relaxation mechanisms [Liu et al., 1976]. Each relaxation mechanism is represented by a set of anelastic functions determined by their own ordinary differential equations. On one hand, *Emmerich and Korn* [1987] defined the rheology model with a Generalized Maxwell body plus a Hooke body (GMB), while *Carcione et al.* [1988a, b] opted for a Generalized Zener body (GZB). Following these works, later investigations either the GMB [*Emmerich*, 1992; *Fäh*, 1992; *Moczo and Bard*, 1993; *Kaser et al.*, 2007] or the GZB [*Robertsson et al.*, 1994; *Blanch*

*et al.*, 1995; *Xu and McMechan*, 1998] in their approaches. It was until *Moczo and Kristek* [2005] that the equivalence of both models was demonstrated.

More recently, *Liu and Archuleta* [2006] introduced an alternative to approximate  $Q$  through empirical formula to compute the parameters of the relaxation mechanisms, which has been implemented by *Ma and Liu* [2006] and more recently by *Martin* [2011].

In all these approaches the approximation of  $Q$  depends on the number of relaxation mechanisms. Increasing the number of relaxation mechanisms improves the approximation of  $Q$  but also increases both the memory storage requirements and the computation time. To reduced the memory storage requirements, *Day* [1998] introduced the coarse-grained method where the parameters of the relaxation mechanisms are distributed in a spatially periodic manner such that only one anelastic function would be needed for every degree of freedom. This approach was originally formulated for a staggered-grid velocity-stress finite-difference scheme and has been theoretical and numerical extended by *Day and Bradley* [2001]; *Graves and Day* [2003]; *Ma and Liu* [2006]. However, as pointed out by *Martin* [2011], when using unstructured meshes this spatial periodic distribution becomes a shortcoming so we are not applying this technique since we would like to be able to use unstructured meshes.

In this work we introduce the intrinsic attenuation in a discontinuous Galerkin approach following the strategy introduced by *Emmerich and Korn* [1987] and further developed in the works by *Kristek and Moczo* [2003], *Moczo and Kristek* [2005] and *Moczo et al.* [2007]. The numerical platform of our model is the GeoDG3D parallel code [*Etienne et al.*, 2010] developed for the elastic wave propagation. For the parallel implementation it uses the Message Passing Interface (MPI) and achieves 80% strong scalability. GeoDG3D ac-

counts for free surface boundary conditions along arbitrary topographies, and includes Convolutional Perfectly Matching Layer (CPML) absorbing boundary conditions at the external edges of the physical domain. To maximize both the efficiency and the accuracy of the scheme depending on the model properties and geometry, the method handles unstructured mesh refinements (*i.e.* h-adaptivity) and locally adapts the order of the nodal interpolations (*i.e.* within every grid element; p-adaptivity). Recently the earthquake dynamic rupture has also been successfully introduced in the same scheme through *ad hoc* fluxes across a predefined fault geometry. This approach, namely by the DGCrack [Tago *et al.*, 2012], shows convergence rates close to those of well-established methods and handles realist fault-system geometries.

We first introduce the mathematical formulation of the viscoelastic equations as a first order hyperbolic system separating the elastic terms from those incorporating the viscous rheology. We then develop the ODE associated to each anelastic function. We show, as proposed by *Emmerich and Korn* [1987], how to set the attenuation parameters to model correctly the quality factors  $Q$  as a function of frequency for a given propagation medium. Then we propose how to solve the viscoelastic equations with an hp-adaptive discontinuous Galerkin Scheme (DG-FEM) in unstructured tetrahedral meshes. This scheme proved to be efficient and accurate enough for modeling the wave propagation in large domains and within highly heterogeneous elastic media [Etienne *et al.*, 2010]. The ODE of the anelastic functions are also discretized with the DG-FEM such that the p-adaptivity is preserved. For the verification of the implementation we solve the LOH3 viscoelastic benchmark [Day *et al.*, 2003] and its elastic version called LOH1 (both benchmarks of the Southern California Earthquake Center, SCEC) and compare our solutions with those

obtained with the semi-analytical discrete wave number method [AXITRA, *Bouchon and Coutant* [1994]]. For the LOH3, instead of studying the number of relaxation mechanisms required to achieve a constant quality factor as previously done by several authors [*Emmerich and Korn*, 1987; *Kaser et al.*, 2007; *Martin*, 2011], we use the viscoelastic modulus approximation computed for DG-FEM in AXITRA, such that the differences between the solutions are only related to the accuracy of our numerical approximation, and not the approximation of the quality factor. We made a convergence analysis for the viscoelastic and elastic cases with the LOH3 and LOH1 problems respectively, with structured and unstructured meshes. Finally we performed a test to study the mesh coarsening effect through the quantification of the spurious oscillations due to such domain discretization feature.

## 2. Viscoelastic equations

The stress-strain constitutive relationship in an isotropic viscoelastic medium can be defined as

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) = & \delta_{ij}\delta_{kl} \int_{-\infty}^t \lambda(t-\tau) \partial_t \epsilon_{kl}(\tau) d\tau \\ & + (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \partial_t \epsilon_{kl}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1)$$

where  $\sigma_{ij}(t)$  is the stress tensor,  $\lambda(t)$  and  $\mu(t)$  are the Lamé relaxation functions and  $\epsilon_{kl}(t)$  is the strain tensor.

Following *Emmerich and Korn* [1987], to avoid the computation of the convolutions in Equation (1) we will model the viscoelastic rheology like a *Generalized Maxwell Body* (GMB-EK) with  $n$  *Maxwell Bodies* (MB) and 1 *Hooke Body* (HB) connected in parallel, for each Lamé relaxation function. In the frequency domain, the relaxation functions can

be written as

$$\lambda(\omega) = \lambda_U \left( 1 - \sum_{l=1}^n Y_l^\lambda \frac{\omega_l}{\omega_l + i\omega} \right) \quad (2)$$

$$\mu(\omega) = \mu_U \left( 1 - \sum_{l=1}^n Y_l^\mu \frac{\omega_l}{\omega_l + i\omega} \right), \quad (3)$$

where  $\lambda_U$  and  $\mu_U$  are the unrelaxed Lamé parameters that correspond to the instantaneous elastic response of the viscoelastic material,  $Y_l^\lambda$  and  $Y_l^\mu$  are the anelastic coefficients and  $\omega_l$  are the relaxation frequencies for the  $l^{\text{th}}$  MB. The anelastic coefficients,  $Y_l^\lambda$  and  $Y_l^\mu$ , gather some physical properties of the propagation medium (see *Moczo and Kristek* [2005]) and its computation will be explain in Section 2.1.

We use the inverse Fourier transformation to express the Lamé relaxation functions (Equations (2) and (3)) in the time domain, so that convolutions in Equation (1) may be written as:

$$\int_{-\infty}^t \lambda(t - \tau) \partial_t \epsilon_{kl}(\tau) d\tau = \lambda_U \epsilon_{kl} - \lambda_U \sum_{m=1}^n Y_m^\lambda \zeta_m^{kl}(t) \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^t \mu(t - \tau) \partial_t \epsilon_{kl}(\tau) d\tau = \mu_U \epsilon_{kl} - \mu_U \sum_{m=1}^n Y_m^\mu \zeta_m^{kl}(t), \quad (5)$$

where we define the anelastic functions as

$$\zeta_m^{kl}(t) = \omega_m \int_{-\infty}^t \epsilon_{kl}(\tau) \exp^{-\omega_m(t-\tau)} d\tau \quad m = 1, \dots, n \quad k, l \in \{1, 2, 3\}, \quad (6)$$

and, because of the exponential term in Equation 6, their time evolution can be associated with their own ODE [*Kristek and Moczo*, 2003]:

$$\partial_t \zeta_m^{kl}(t) + \omega_m \zeta_m^{kl}(t) = \omega_m \epsilon_{kl}(t) \quad m = 1, \dots, n \quad k, l \in \{1, 2, 3\}. \quad (7)$$

By substituting Equations (4) and (5) into Equation (1) our constitutive relationship becomes

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij} \delta_{kl} \lambda_U \epsilon_{kl}(t) + (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \mu_U \epsilon_{kl}(t)$$

$$- \sum_{m=1}^n (\delta_{ij}\delta_{kl}\lambda_U Y_m^\lambda \zeta_m^{kl}(t) + (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\mu_U Y_m^\mu \zeta_m^{kl}(t)). \quad (8)$$

Following the algebraic transformation proposed by *Benjema et al.* [2009], Equation (8) may be written in a matrix form as

$$\Lambda \vec{\sigma} = \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta \mathcal{N}_\theta \vec{u} - \sum_{l=1}^n \mathcal{A}_l \vec{\zeta}_l \quad (9)$$

where  $\vec{\sigma} = (\omega, \omega', \omega'', \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})^t$  is the stress vector,  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)^t$  is the displacement vector and  $\vec{\zeta}_l = (\zeta_l^{xx}, \zeta_l^{yy}, \zeta_l^{zz}, \zeta_l^{xy}, \zeta_l^{xz}, \zeta_l^{yz})^t$  is the anelastic function vector for the  $l^{\text{th}}$  MB. To get Equation (9) we performed a change of variable in the stress vector, to separate the physical properties of Equation (9) from the elastic term (*i.e.* first term in the RHS), leading to its first three components  $\omega = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$ ,  $\omega' = \frac{1}{3}(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz})$  and  $\omega'' = \frac{1}{3}(-\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy} - \sigma_{zz})$ . This procedure will simplify the fluxes computation in the DG scheme (see Section 3).

The matrix  $\Lambda = \text{diag}(3/(3\lambda_U + 2\mu_U), (3/2\mu_U), 3/(2\mu_U), 1/\mu_U, 1/\mu_U, 1/\mu_U)$  which gathers the physical properties of the medium, is given by the unrelaxed Lamé parameters,  $\lambda_U$  and  $\mu_U$ , and  $\mathcal{N}_\theta$  are constant real matrices whose definition can be found in Appendix A. The matrix  $\mathcal{A}$ , associated with the anelastic term (*i.e.* second term of the RHS) is given by

$$\mathcal{A}_l = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_l^1 & \mathcal{A}_l^1 & \mathcal{A}_l^1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\mathcal{A}_l^2 & -\mathcal{A}_l^2 & -\mathcal{A}_l^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathcal{A}_l^2 & 2\mathcal{A}_l^2 & -\mathcal{A}_l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mathcal{A}_l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathcal{A}_l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathcal{A}_l^2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

where  $\mathcal{A}_l^1 = \frac{3\lambda_U Y_l^\lambda + 2\mu_U Y_l^\mu}{3\lambda_U + 2\mu_U}$  and  $\mathcal{A}_l^2 = Y_l^\mu$ .

To obtain a hyperbolic system of partial differential equations for the viscoelastic consti-

tutive equation, we just applied the time derivative to Equation (9):

$$\Lambda \partial_t \vec{\sigma} = \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta \mathcal{N}_\theta \vec{v} - \sum_{l=1}^n \mathcal{A}_l \vec{\xi}_l, \quad (11)$$

where  $\vec{v} = \partial_t \vec{u} = (v_x, v_y, v_z)^t$  is the velocity vector, and  $\vec{\xi}_l = \partial_t \vec{\zeta}_l = (\xi_l^{xx}, \xi_l^{yy}, \xi_l^{zz}, \xi_l^{xy}, \xi_l^{xz}, \xi_l^{yz})^t$ , is the time derivative of the anelastic functions vector  $\vec{\zeta}_l$  that for simplicity, we will still call it will be called the anelastic function vector. Then the ODE associated with  $\vec{\xi}_l$  is given by

$$\partial_t \vec{\xi}_l + \omega_l \vec{\xi}_l = \omega_l \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta \mathcal{O}_\theta \vec{v}, \quad (12)$$

where

$$\mathcal{O}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{O}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \mathcal{O}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

To complete the hyperbolic system, describing the viscoelastic wave propagation, besides the Equations (11) we require incorporating the equation of motion to track the velocity field which, following *Benjema et al.* [2009], can be written as

$$\rho \partial_t \vec{v} = \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta \mathcal{M}_\theta \vec{\sigma} + \vec{f}, \quad (14)$$

where  $\rho$  is the medium density,  $\vec{f}$  is the external force vector and  $\mathcal{M}_\theta$  are constant real matrices whose definition can be found in Appendix A. Thus, the system of hyperbolic equations given by Equations (11) and (14) completely describes the physical problem we need to solve.

## 2.1. Computation of the anelastic coefficients

The computation of the anelastic coefficients,  $Y_l^\lambda$  and  $Y_l^\mu$ , in Equations (2) and (3) respectively, is done such that the quality factors,  $Q_\varphi$ , for  $\varphi \in \{\lambda, \mu\}$ , are approximated

over a frequency range of interest. The inverse of the quality factor is defined for each Lamé relaxation function (Equations (2) and (3)) as

$$Q_\varphi^{-1}(\omega) = \frac{\text{Im}\varphi(\omega)}{\text{Re}\varphi(\omega)} = \sum_{l=1}^n \frac{\omega_l \omega + Q^{-1}(\omega) \omega_l^2}{\omega_l^2 + \omega^2} Y_l^\varphi \quad \varphi \in \{\lambda, \omega\}. \quad (15)$$

To approximate a nearly constant  $Q_\varphi(\omega)$  in a given frequency range, *Emmerich and Korn* [1987] proposed that the relaxation frequencies  $\omega_l$  should cover the frequency range of interest with a logarithmically equidistant spacing. A constant  $Q$  has been proved to be a good approximation for most geophysical applications [*Liu et al.*, 1976] but it is important to notice that the following procedure can also be applied for any frequency dependency of  $Q$  [*Liu and Archuleta*, 2006]. Once the relaxation frequencies are spread along the frequency range, we used a least square method to find the anelastic coefficients in Equation (15) that best fit the function  $Q_\varphi(\omega)$ .

However, seismically observable are the quality factors  $Q_\alpha$  and  $Q_\beta$ , for the  $P$ - and  $S$ -waves, respectively. Then, we can get the corresponding coefficients  $Y_l^\alpha$  and  $Y_l^\beta$  that can be expressed in terms of the Lamé parameters by the transformations

$$Y_l^\lambda = \left(1 + \frac{2\mu}{\lambda}\right) Y_l^\alpha - \frac{2\mu}{\lambda} Y_l^\beta \quad \text{and} \quad Y_l^\mu = Y_l^\beta. \quad (16)$$

It is important to notice that the more relaxation frequencies the better is the approximation of the given function  $Q_\varphi(\omega)$ . Nevertheless increasing the amount of relaxation frequencies cause a significant increment in the memory storage.



### 3. hp-Discontinuous Galerkin method

Before solving the hyperbolic system given by Equations (11) and (14), we first need to decompose the domain  $\Omega$  into  $K$  elements, so that

$$\Omega \simeq \Omega_h = \sum_{i=1}^K D_i \quad (17)$$

where each  $D_i$  is a straight-sided tetrahedron which union compose a geometrically conforming mesh.

We approximate the velocity and stress vectors in every tetrahedron,  $D_i \forall i \in \{1, \dots, K\}$ , using a nodal interpolation by

$$\hat{v}_i(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^{d_i} \vec{v}_{ij}(\vec{x}_j, t) \varphi_{ij}(\vec{x}) \quad (18)$$

$$\hat{\sigma}_i(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^{d_i} \vec{\sigma}_{ij}(\vec{x}_j, t) \varphi_{ij}(\vec{x}), \quad (19)$$

where  $\vec{x} \in D_i$ ,  $t$  is the time and  $d_i$  is the number of nodes associated with the interpolation Lagrangian polynomial basis function  $\varphi_{ij}$  relative to the  $j$ -node located at  $\vec{x}_j$  [Hesthaven and Warburton, 2008].

Then, using the nodal interpolations (18) and (19), we can apply the discontinuous Galerkin approach proposed by *Etienne et al.* [2010], to Equations (11) and (14) to get

$$\begin{aligned} \rho_i(\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i) \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = & - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\mathcal{M}_\theta \otimes \mathcal{E}_{i\theta}) \vec{\sigma}_i^n \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} [(\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{F}_{ik}) \vec{\sigma}_i^n + (\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{G}_{ik}) \vec{\sigma}_k^n] \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} (\Lambda_i \otimes \mathcal{K}_i) \frac{\vec{\sigma}_i^{n+1} - \vec{\sigma}_i^n}{\Delta t} = & - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\mathcal{N}_\theta \otimes \mathcal{E}_{i\theta}) \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{l=1}^n (\mathcal{A}_{il} \otimes \mathcal{K}_i) \xi_{il}^{n+\frac{1}{2}} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} [(\mathcal{Q}_{ik} \otimes \mathcal{F}_{ik}) \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + (\mathcal{Q}_{ik} \otimes \mathcal{G}_{ik}) \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}] \end{aligned} \quad (21)$$

where the matrices involved are: the mass matrix

$$(\mathcal{K}_i)_{rj} = \int_{V_i} \varphi_{ir} \varphi_{ij} dV \quad j, r \in [1, d_i],$$

the stiffness matrix

$$(\mathcal{E}_{i\theta})_{rj} = \int_{V_i} (\partial_\theta \varphi_{i_r}) \varphi_{i_j} dV \quad j, r \in [1, d_i] \quad \theta \in \{x, y, z\},$$

the flux matrices

$$(\mathcal{F}_{ik})_{rj} = \int_{S_{ik}} \varphi_{i_r} \varphi_{i_j} dS \quad j, r \in [1, d_i]$$

$$(\mathcal{G}_{ik})_{rj} = \int_{S_{ik}} \varphi_{i_r} \varphi_{k_j} dS \quad r \in [1, d_i] \quad j \in [1, d_k].$$

and the auxiliary flux matrices

$$\mathcal{P}_{ik} = \sum_{\theta \in \{x, y, z\}} n_{ik_\theta} \mathcal{M}_\theta$$

$$\mathcal{Q}_{ik} = \sum_{\theta \in \{x, y, z\}} n_{ik_\theta} \mathcal{N}_\theta,$$

where  $n_{ik_\theta}$  is the component along the  $\theta$  axis of the unit normal vector  $\vec{n}_{ik}$  of the element face  $S_{ik}$  which points from the  $i$ - to the  $k$ -element.

The size of these matrices depends on the order of the polynomial basis (*e.g.* P0, P1, P2) used for the nodal interpolation. In the code we have implemented P0, P1 and P2 approximation orders that can be assigned for each tetrahedron  $D_i$  according to its characteristic size and corresponding medium properties. Staggered time integration is done through a second-order explicit leap-frog scheme, which allows the alternation of velocities and stresses computation. The order of approximation used in the time integration scheme matches the highest approximation order used for the spatial interpolation (*i.e.* P2). The flux terms of the  $i^{\text{th}}$ -tetrahedron are computed following a centered scheme with its  $N_i$  adjacent elements and  $\otimes$  represent the tensor product. Thanks to the change of variables previously introduced, the Equation 21 fluxes does not involve the neighbors physical properties but only their velocity fields.

To solve each ODE of the anelastic functions (12), we apply a nodal interpolation for the

anelastic functions and the same Galerkin approach, used before for Equations (11) and (14), to get

$$\begin{aligned}
(\mathcal{I}_6 \otimes \mathcal{K}_i) \frac{\bar{\xi}_{i_l}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\xi}_{i_l}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= -\omega_l \left( (\mathcal{I}_6 \otimes \mathcal{K}_i) \bar{\xi}_{i_l}^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\mathcal{O}_\theta \otimes \mathcal{E}_{i\theta}) \bar{v}_i^{n-\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + \omega_l \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} \left[ (\mathcal{R}_{ik} \otimes \mathcal{F}_{ik}) \bar{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + (\mathcal{R}_{ik} \otimes \mathcal{G}_{ik}) \bar{v}_k^{n-\frac{1}{2}} \right] \quad (22)
\end{aligned}$$

where  $\mathcal{R}_{ik} = \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} n_{ik\theta} \mathcal{O}_\theta$ . It is important to notice that the discontinuous Galerkin approximation used in the ODE allow us to use the same p-adaptivity achieved in *Etienne et al.* [2010] for the pure elastic case.

There are two main features of DG-FEM that make it a very flexible and powerful numerical scheme. One is the h-adaptivity, which allows working with unstructured tetrahedral meshes that can be geometrically adapted to the physical properties of the medium and the free surface topography. The other is the p-adaptivity that allows to chose the order of approximation the most convenient for each tetrahedron. This later property is possible and easily implemented thanks to the fluxes between neighboring elements that do not need to have the same order of approximation. We chose to compute the fluxes with a centered scheme because it is non-dissipative, although suffers from numerical dispersion [*Hesthaven and Warburton*, 2008].

*Etienne et al.* [2010] showed that to achieve good accuracy for P2 elements, 3 tetrahedra per minimum wavelength is required when using unstructured tetrahedral meshes. As we will see later on, this criterion is less restrictive in the viscoelastic case. The stability of the scheme is given by the heuristic criterion proposed by *Kaser and Dumbser* [2008] expressed as

$$\Delta t < \min_i \left( \frac{1}{2k_i + 1} * \frac{2r_i}{\alpha_i} \right)$$

where  $r_i$  is the radius of the sphere inscribed in the element indexed by  $i$ ,  $\alpha_i$  is the  $P$ -wave velocity in the element and  $k_i$  is the polynomial degree used in the element.

We are currently exploring higher interpolation orders and different fluxes schemes to improve the convergence rates and minimize the computational cost.

#### 4. Model verification

The verification of our approach consists in solving benchmarks problems and measuring the correctness of the solutions as compared to reference ones. We solved two benchmarks from SCEC and compared our solutions with a semi-analytical solution computed with the discrete wave number method, AXITRA [*Bouchon and Coutant, 1994*]. These benchmarks are the elastic and viscoelastic versions of a layer over an homogeneous half-space model, LOH1 and LOH3 respectively [*Day et al., 2003*]. All the simulations were run on Puhualli, the parallel computer with 172 cores (2.33 GHz quad-core Xeon processors) of the Department of Seismology at UNAM.

For the viscoelastic LOH3 benchmark, the reference solution by AXITRA was computed considering exactly the same viscoelastic modulus used in the DG-FEM simulation. This choice was taken to test only the numerical implementation of the attenuation without including differences due to the approximation of  $Q$  for a given number of relaxation mechanisms. Analysis of the number of relaxation mechanisms to approximate  $Q$  in a finite frequency range has been previously done in many works [e.g. *Emmerich and Korn, 1987; Kaser et al., 2007; Martin, 2011*]. The general conclusion, using the approximation proposed by *Emmerich and Korn* [1987], which is the one we adopted, is that three relaxation mechanisms are enough to approximate a constant  $Q$  with a deviation of around 5%. Using two mechanisms are not enough for a good approximation while more than

three increases, in an unnecessary way, the memory storage requirements and the CPU time (see *Kaser et al.* [2007]).

From solutions for the LOH1 and LOH3 benchmarks we studied the convergence of this scheme using structured and unstructured meshes. We analyzed the difference between the convergence rates found in both cases as well as the effect of using unstructured meshes.

#### 4.1. SCEC benchmarks

The viscoelastic wave propagation in a *Layer Over an homogeneous Halfspace* (LOH3) benchmark was developed by SCEC [*Day et al.*, 2003]. We solve this benchmark because the anelastic response must be accurately simulated for a correct propagation of the surface waves trapped in the layer. The layer is only 1000 m thick and the physical properties of the whole model can be found in Table 1. For this benchmark we approximate the frequency-independent quality factors  $Q_\alpha$  and  $Q_\beta$  with three relaxation mechanisms. All receivers are located in the free surface ( $z = 0$ ) with a position relative to the epicenter ( $x \rightarrow$  North and  $y \rightarrow$  East) given in Table 2.

(Figure 1)

A point source is located 2000 m below the free surface with all components of its moment tensor equal to zero except  $M_{xy} = M_{yx}$ , which have the moment value  $M_0 = 10^{18}$  Nm. The Moment rate time history is a gaussian pulse given by

$$\frac{1}{t_r \sqrt{\pi}} \exp \frac{-(t - t_0)^2}{t_r^2}, \quad (23)$$

where  $t$  is the time,  $t_r = 0.05$  s is the rise time and  $t_0 = 0.25$  s is the origin time. The duration of the simulation is 9 s and the synthetic seismograms must be accurate up to

5.0  $Hz$ . The moment-rate time history and its spectrum can be seen in Figure 1. Notice that the spectrum is almost flat up to 5  $Hz$  so all the frequencies below have almost the same energy.

The elastic version of the LOH3 test (*i.e.*  $Q_\alpha = Q_\beta = \infty$ ) is called LOH1 and was also proposed by SCEC [Day *et al.*, 2003]. Solving both benchmarks is important to understand if the convergence rates are different between the elastic and viscoelastic cases.

All the solutions were computed using P2 elements in the physical domain and approximately ten P1 elements in the CPML region away from every limit of the physical domain, as suggested by Etienne *et al.* [2010], except at the top where free surface boundary conditions are applied. The characteristic size of the tetrahedra used for both the structured and the unstructured meshes was 100  $m$ , as proposed in the benchmarks descriptions [Day *et al.*, 2003]. This choice is convenient for our method since the number of elements per minimum wavelength,  $n_\lambda$ , is about three which is the suggested value for elastic wave propagation reported by Etienne *et al.* [2010].

(Figure 2)

Figure 2 shows the three velocity components of the three farthest receivers (*i.e.* located about 32 times the minimum wavelength from the epicenter) for both benchmarks computed with DG-FEM using the same unstructured mesh. The time series were filtered using a two-pass four-pole Butterworth filter in the frequency band [1 – 5]  $Hz$ . The low cut off frequency of 1  $Hz$  was applied because of computation limitations (*i.e.* several tens of simulations were required in our further analysis) that force us to make the simulation region not big enough (*i.e.* 8  $km$ ) to correctly model low frequency Love waves. Nevertheless this constraint does not affect our comparisons and further analysis since the upper

limit of the frequency band is respected. From 3 s the attenuation is clearly affecting the amplitude in every component, still no significant dispersion can be observed.

(Figure 3)

Velocities in the same receivers for both benchmarks computed with AXITRA and DG-FEM using an unstructured mesh can be seen in Figures 3 and 4 for the LOH1 and LOH3 benchmarks, respectively. We find an excellent agreement between solutions for both benchmarks. However, the agreement is slightly better in the LOH3 comparison. This is because most discrepancies in the elastic LOH1 case are associated with high frequencies, which are attenuated in the viscoelastic LOH3 benchmark.

(Figure 4)

In the next section we present a convergence analysis using both the elastic (LOH1) and the viscoelastic (LOH3) benchmarks in structured and unstructured meshes.

#### 4.1.1. Convergence analysis

The LOH1 and LOH3 benchmarks were solved on both structured and unstructured meshes in the same physical domain. The Normalized Root Mean Square (NRMS) difference of the velocities, was computed to quantify the error between our DG-FEM solutions and the reference solutions computed with AXITRA, is given by

$$NRMS(v_{\theta}^{DG-FEM}, v_{\theta}^{AXITRA}) = \frac{\sqrt{(\sum_{i=1}^n (v_{\theta_i}^{DG-FEM} - v_{\theta_i}^{AXITRA})^2)/n}}{\max(v_{\theta}^{AXITRA}) - \min(v_{\theta}^{AXITRA})}, \quad (24)$$

where  $n$  is the velocities arrays length and  $\theta \in \{x, y, z\}$ . Because of the relative position of receivers 1, 2 and 3 (see Table 2) with respect the source position and mechanism, the velocity components  $y$  and  $z$  are zero there we are not using them to compute the NRMS since it would be undetermined. For the rest of receivers we compute the NRMS

in the 3 velocity components and average them to have a single value without a preferable direction.

(Figure 5)

Figure 5 presents NRMS values computed for the following four cases: 1) the LOH1 benchmark with structured mesh, 2) the LOH1 benchmark with unstructured mesh, 3) the LOH3 benchmark with structured mesh and 4) the LOH3 benchmark with unstructured mesh. The NRMS were computed with respect to the number of elements per minimum wavelength,  $n_\lambda$ , related with the corner frequency of the low pass filter applied. Linear regressions of the NRMS data are also plotted in the log-log scale. The resulting slopes give the convergence rates of the solutions with respect  $n_\lambda$ .

Three main observations detach from Figure 5: 1) viscoelastic solutions are systematically better than the elastic ones no matter we use structured or unstructured meshes; 2) the convergence rate of both viscoelastic and elastic solutions is virtually the same and depends on the kind of mesh we use; and 3) the convergence rate of DG-FEM significantly degrades in structured meshes no matter we solve the elastic or viscoelastic equations (*i.e.* convergence rate about 1.8 times lower).

We expected observation 1 since the high frequency content has lower energy in the viscoelastic solution than in the elastic one, so using the same  $n_\lambda$  implies a better resolution condition for the viscoelastic benchmark.

Given that the elastic model implementation has been previously verified [*Etienne et al.*, 2010], observation 2 implies both that we are correctly solving the viscoelastic equations and that our second order approximation solves the elastic and viscoelastic wavefields the same way even if the later has been smoothed by the attenuation effect.



Finally, observation 3 reveals an interesting and well known numerical problem. Since the convergence rates for structured meshes are significantly lower (*i.e.* about a factor 1.8), the mesh anisotropy reveals to be strongly enhanced in those cases. On the contrary, the unstructured elements disposition breaks up the anisotropy thanks to the absence of regular mesh geometrical patterns that ultimately increase the convergence rate. Linear regressions cross around  $n_\lambda = 2.25$ , value that is below the minimum required to obtain an accurate solution ( $n_\lambda = 3$  see *Etienne et al.* [2010]). In the region where  $n_\lambda < 2.25$  the difference of the NRMS is due to noise related to the high frequency content that is promoted in the unstructured meshes.

In the next section we show that the mesh coarsening must be handled carefully because it may produce spurious reflections that would pollute the solutions.

## 5. Mesh coarsening analysis

Mesh coarsening, often used with h-adaptive methods, may induce significant spurious oscillations if not handled carefully. This mesh feature may be used, for instance, to move away as far as possible the CPML by applying an outward mesh coarsening to minimize possible undesired reflections without unaffordable computational costs. Our experience with this kind of meshes shows that significantly spurious oscillations are produced due to numerical reflections associated with the mesh coarsening (see the spurious oscillations reported in Figure 9 of [*Tago et al.*, 2012]) so that the greater the coarsening rate the greater the oscillations.

We thus designed a series of tests to quantify this effect in an homogeneous full space with  $P$ - and  $S$ -waves speeds of 4000  $m/s$  and 2000  $m/s$ , respectively, and density of 2600  $kg/m^3$ . The point source is the same as for the LOH1 and LOH3 benchmarks. Only

one receiver is considered and is located at the source from which the mesh becomes radially coarser with a different rate for each test. As a result, once the source excitation ends, any registered signal corresponds to spurious reflections caused by the mesh coarsening. For every test the coarsening rate is constant in the whole physical domain, which measures  $2000\text{ m} \times 2000\text{ m} \times 2000\text{ m}$ . The coarsening is applied in the three Cartesian directions away from the source, so that we define its rate  $c = c_i$  as

$$c_i = \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (25)$$

We performed five tests. For each one we constructed a specific unstructured mesh that goes from a characteristic element size of  $100\text{ m}$  at the source to a larger value at the external domain boundary (*i.e.* where the CPML begins). These values are  $100\text{ m}$  (no coarsening  $c = 0$ ),  $200\text{ m}$  ( $c = 0.05$ ),  $300\text{ m}$  ( $c = 0.1$ ),  $400\text{ m}$  ( $c = 0.15$ ) and  $500\text{ m}$  ( $c = 0.20$ ). Since the point source we considered should not excite any motion in the vertical component at the observational point (*i.e.* located at the hypocenter), we used the  $z$  component for our analysis within  $5\text{ Hz}$  low pass filtered windows lasting  $1.0\text{ s}$  from  $1.5\text{ s}$  to  $2.5\text{ s}$ . Figure 6a shows the signals obtained for all tests. Notice that the higher the coarsening rate the largest are the signal amplitudes, revealing that spurious oscillations are proportional to that rate. Although very small, velocities with no coarsening ( $c = 0$ ) are not zero, as expected from previous tests (*e.g.* see Figure 3). Figures 6b show the source-normalized peak amplitude measurements along the entire time window for the five tests as a function of  $c$ . In accordance with Figure 6a, this measurement reveals a clear correlation between the content of spurious oscillations and the mesh coarsening rate.

Although the amplitude of spurious oscillations (ESO) depends on  $c$  as previously pointed out, it also depends on frequency. Figure 7 presents a spectral analysis for the same tests

where such a complex dependency can be seen (background colours). We have applied the logarithm to the source-normalized peak amplitude for a better data visualization. However, the most interesting thing is that the ESO behaves very much as  $n_\lambda$  (white contours) (i.e. gradients of both functions are approximately parallel). This implies there is a lower bound number of grid elements per minimum wavelength that minimizes the ESO for any value of  $c$ . In other words, the ESO is essentially a function of  $n_\lambda$ , which means that any coarsening rate is possible provided that such a lower bound value is guaranteed in the whole simulation domain. From Figure 7 we also see that for values of  $n_\lambda$  higher than three, which is the minimum required to maintain under control the numerical dispersion, the ESO exceeds less than 0.05%,  $-1.3$  in logarithm scale (see red contour), of the peak velocity, which is a reasonably low noise level. Thus we conclude that no matter the mesh coarsening rate, if the accuracy criterion given by  $n_\lambda \geq 3$  is guaranteed all over the simulation domain, the ESO due to the coarsening will never exceed more than 0.05% of the peak source velocity.

Figure 8 shows the normalized velocities in the time window  $[1.5 - 2.5]$  s for all coarsening rates using  $n_\lambda = 2$ , except for  $c = 0$  where  $n_\lambda = 3$  which is the case with no coarsening and the accuracy criterion fulfilled. Keeping a fixed  $n_\lambda$  means that the cutoff frequency changes due to the maximum characteristic length of each case. We have relaxed the accuracy criterion and observed that the ESO for all  $c$  are below the amplitude of the optimal case and its lower for lower  $c$  values. This means that even though  $n_\lambda = 3$  is a good criterion it can be relaxed since the ESO higher frequency energy content is near the frequency of the optimal case,  $n_\lambda = 3$ , with no coarsening. The relaxation of the accuracy criterion,  $n_\lambda$  selection, depends on two factors 1) how many elements will be below  $n_\lambda = 3$

and 2) how far they are from the receivers. This two factors will help to discretize a physical domain avoiding ESO with optimal memory requirements to achieve accurate simulations. This analysis made for the  $z$  component of the velocity is valid for the other components because of the use of unstructured meshes, *i.e.* we expect reflections in the other directions proportionally to the ESO of each direction of the case with  $c = 0$  and  $n_\lambda = 3$ . Even though this analysis was made for elastic simulations, the conclusions are valid for the viscoelastic case because of the convergence analysis shown in the previous section.

## 6. Conclusions

We have incorporated the attenuation in a 3D discontinuous Galerkin method previously proposed for elastic wave propagation by *Etienne et al.* [2010]. This method is p-adaptive so it can use P0, P1 or P2 elements according to the medium properties and it is also h-adaptive which makes it capable of using unstructured tetrahedral meshes. For the viscoelastic implementation we have avoided the convolution between the stresses and the strain rates by introducing anelastic functions *Kristek and Moczo* [2003]. The number of the anelastic functions chosen depends on the precision to approximate the quality factors. Each anelastic function has its own ODE that need to solve to update the anelastic response.

We solve the elastic LOH1 and viscoelastic LOH3 benchmarks of SCEC [*Day et al.*, 2003] and compare our solutions with the semi-analytical solution computed with AXITRA *Bouchon and Coutant* [1994]. For the viscoelastic LOH3 benchmark we compute the AXITRA solution using the same viscoelastic modulus, approximated with 3 mechanisms of relaxation, used by DG-FEM. This procedure was made such that the convergence analysis

considers exclusively the solution of the viscoelastic equations leaving aside the approximation of the quality factors. A convergence analysis was done with both benchmarks using structured and unstructured meshes. It shows that we are solving the viscoelastic equations as well as the elastic equations achieving in both cases a very good convergence. We also show that the convergence, for the elastic and viscoelastic case, using unstructured meshes is better than using structured meshes if we respect the accuracy criterion of 3 number of elements per minimum wavelength.

A coarsening analysis was also presented in this work. We constructed a test to quantify the spurious reflections caused by the coarsening of the mesh. We found that the spurious oscillations are essentially a function of the elements per minimum wavelength instead of mesh coarsening rate. To keep reasonably low the spurious reflections we can fulfilled the accuracy criterion in the whole simulation domain, but this criterion can be relaxed according to the number of elements that does not fulfilled it and their distance from the receiver. This test can be used to analyze any other numerical scheme with the h-adaptivity property.

## Appendix A: Matrices Used in the DG-FEM Formulation

The following matrices are used in our DG-FEM method and where previously introduced by *Benjema et al.* [2009].

Matrices  $\mathcal{M}_\theta$  and  $\mathcal{N}_\theta$ , which are required for the wave propagation scheme, are constant real matrices defined as

$$\mathcal{M}_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{N}_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\mathcal{M}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{N}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$\mathcal{M}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{N}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

**Acknowledgments.** We thank the HPC-Team of the Institute of Geophysics at UNAM for the assistance in setting the parallel supercomputer Pohualli, in which all simulations were performed. All the meshes used in this work was done with the Gmsh software [Geuzaine and Remacle, 2009]. This work has been possible thanks to the financial support of CONACYT under the grant number 80205 and of “Marie Curie Actions-International Research Staff Exchange Scheme” with the grant number 295217.

## References

- Anderson, D. L., The anelasticity of the mantle, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, *14*, 135–164, 1967.
- Anderson, D. L., A. Ben-Menahem, and C. B. Archambault, Attenuation of seismic energy in the upper mantle, *J. Geophys. Res.*, *70*, 1441–1448, 1965.
- Backus, G. E., Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering, *J. Geophys. Res.*, *67*, 4427–4440, 1962.
- Benjema, M., N. Glinsky-Olivier, V. M. Cruz-Atienza, and J. Virieux, 3-d dynamic rupture simulations by a finite volume method, *Geophys. J. Int.*, *178*(1), doi:10.1111/j.1365-246X.2009.04088.x, 2009.
- Blanch, J. O., J. O. A. Robertsson, and W. W. Symes, Modeling of a constant  $Q$ : Methodology and algorithm for an efficient and optimally inexpensive viscoelastic technique, *Geophysics*, *60*(1), 176–184, 1995.

- Bouchon, M., and O. Coutant, Calculation of synthetic seismograms in a laterally varying medium by the boundary element-discrete wavenumber method, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *84*, 1869–1881, 1994.
- Cara, M., Seismic Anisotropy, in *International Handbook of Earthquake and Engineering Seismology*, edited by W. H. K. Lee, H. Kanamori, P. C. Jennings, and C. Kisslinger, Academic Press Press, London, 2002.
- Carcione, J. M., Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic and Porous Media, in *Handbook of Geophysical Exploration*, edited by K. Helbig and S. Treitel, Pergamon Press, Oxford, 2002.
- Carcione, J. M., D. Kosloff, and R. Kosloff, Wave propagation in a linear viscoacoustic medium, *Geophys. J.*, *93*, 393–407, 1988a.
- Carcione, J. M., D. Kosloff, and R. Kosloff, Wave propagation in a linear viscoelastic medium, *Geophys. J.*, *95*, 597–611, 1988b.
- Christensen, R. M., *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*, Academic Press, 1971.
- Day, S. M., Efficient simulation of constant  $q$  using coarse-grained memory variables, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *88*, 1051–1062, 1998.
- Day, S. M., and C. R. Bradley, Memory-efficient simulation of anelastic wave propagation, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *91*, 520–531, 2001.
- Day, S. M., and J. B. Minster, Numerical simulation of wave-fields using a Padé approximant method, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, *78*, 105–118, 1984.
- Day, S. M., J. Bielak, D. Dreger, R. Graves, S. Larsen, K. Olsen, and A. Pitarka, Test of 3D elastodynamics codes: Final report for lifelines project 1A02, *Tech rept.*, Pacific Earthquake Engineering Research Center, Berkeley, California, 2003.

- Emmerich, H., *PSV-wave propagation in a medium with local heterogeneities: a hybrid formulation and its application*, *Geophys. J. Int.*, *109*, 54–64, 1992.
- Emmerich, H., and M. Korn, Incorporation of attenuation into time-domain computations of seismic wave fields, *Geophysics*, *52*(9), doi:10.1190/1.1442386, 1987.
- Etienne, V., E. Chaljub, J. Virieux, and N. Glinsky, An hp-adaptive discontinuous Galerkin finite-element method for 3-D elastic wave modelling, *Geophys. J. Int.*, *183*(2), doi:10.1111/j.1365-246X.2010.04764.x, 2010.
- Fäh, D., A hybrid technique for the estimation of strong ground motion in sedimentary basins, Ph.D. thesis, ETH, Zürich, Swiss, 1992.
- Futterman, W. I., Dispersive body waves, *J. Geophys. Res.*, *67*, 5279–5291, 1962.
- Geuzaine, C., and J. F. Remacle, Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, *79*(11), 1309–1331, 2009.
- Graves, R. W., and S. M. Day, Stability and accuracy analysis of coarse-grain viscoelastic simulations, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *93*, 283–300, 2003.
- Hesthaven, J. S., and T. Warburton (Eds.), *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis and Applications*, 1st ed., 515 pp., Springer, 2008.
- Kaser, M., and M. Dumbser, A highly accurate discontinuous Galerkin method for complex interfaces between solids and moving fluids, *Geophysics*, *73*(3), 23–35, 2008.
- Kaser, M., M. Dumbser, J. de la Puente, and H. Igel, An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes III: Viscoelastic Attenuation, *Geophys. J. Int.*, *168*(1), 224–242, 2007.



- Kristek, J., and P. Moczo, Seismic-Wave Propagation in Viscoelastic Media with Material Discontinuities: A 3d Fourth-Order Staggered-Grid Finite-Difference Modeling, *Bull. Seism. Soc. Am.*, *93*, doi:10.1785/0120030023, 2003.
- Lamb, G. L., The attenuation of waves in a dispersive medium, *J. Geophys. Res.*, *67*, 5273–5278, 1962.
- Liu, H. P., D. L. Anderson, and H. Kanamori, Velocity dispersion due to anelasticity; implications for seismology and mantle composition, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, *47*, 41–58, 1976.
- Liu, P., and R. J. Archuleta, Efficient Modeling of  $Q$  for 3D Numerical Simulation of Wave Propagation, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *96*(4), 1352–1358, 2006.
- Lomnitz, C., Linear dissipation in solids, *J. Appl. Phys.*, *28*, 201–205, 1957.
- Ma, S., and P. Liu, Modeling of the perfectly matched layer absorbing boundaries and intrinsic attenuation in explicit finite-element methods, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *96*, 1779–1794, 2006.
- Martin, F. D., Verification of a Spectral-Element Method Code for the Southern California Earthquake Center LOH.3 Viscoelastic Case, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *101*(6), 2855–2865, 2011.
- Moczo, P., and P. Y. Bard, Wave diffraction, amplification and differential motion near strong lateral discontinuities, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *83*, 85–106, 1993.
- Moczo, P., and J. Kristek, On the rheological models used for time-domain methods of seismic wave propagation, *Geophys. Res. Lett.*, *32*(L01306), doi:10.1029/2004GL021598, 2005.

Moczo, P., J. Kristek, M. Galis, P. Pazaka, and M. Balazovjecha, The Finite-Difference and Finite-Element Modeling of Seismic Wave Propagation and Earthquake Motion, *Acta Physica Slovaca*, 57(2), 177–406, 2007.

Robertsson, J. O. A., J. O. Blanch, and W. W. Symes, Viscoelastic finite-difference modeling, *Geophysics*, 59(9), 1444–1456, 1994.

Tago, J., V. M. Cruz-Atienza, J. Virieux, V. Etienne, and F. J. Sánchez-Sesma, 3d hp-adaptive discontinuous galerkin method for modeling earthquake dynamics, *J. Geophys. Res.*, *In press*, doi:10.1029/2012JB009313, 2012.

Xu, T., and G. A. McMechan, Efficient 3-D viscoelastic modeling with application to near-surface land seismic data, *Geophysics*, 63(2), 601–612, 1998.

### Tables

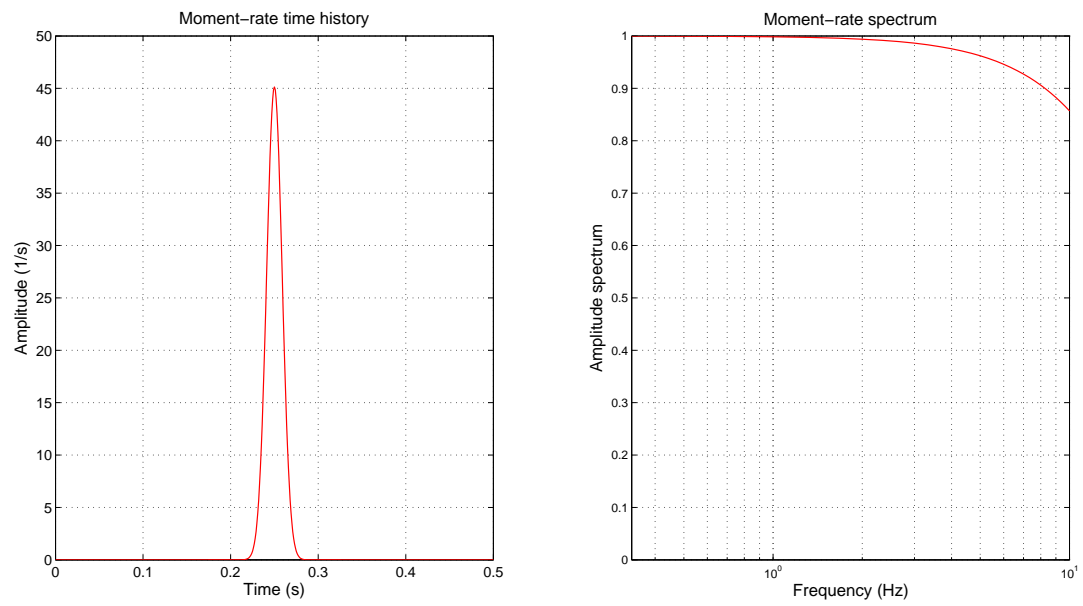
**Table 1.** Medium parameters of the LOH3 benchmark

	$\alpha$ (m/s)	$\beta$ (m/s)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$Q_\alpha$	$Q_\beta$
layer	4000	2000	2600	120	40
halfspace	6000	3464	2700	180	80

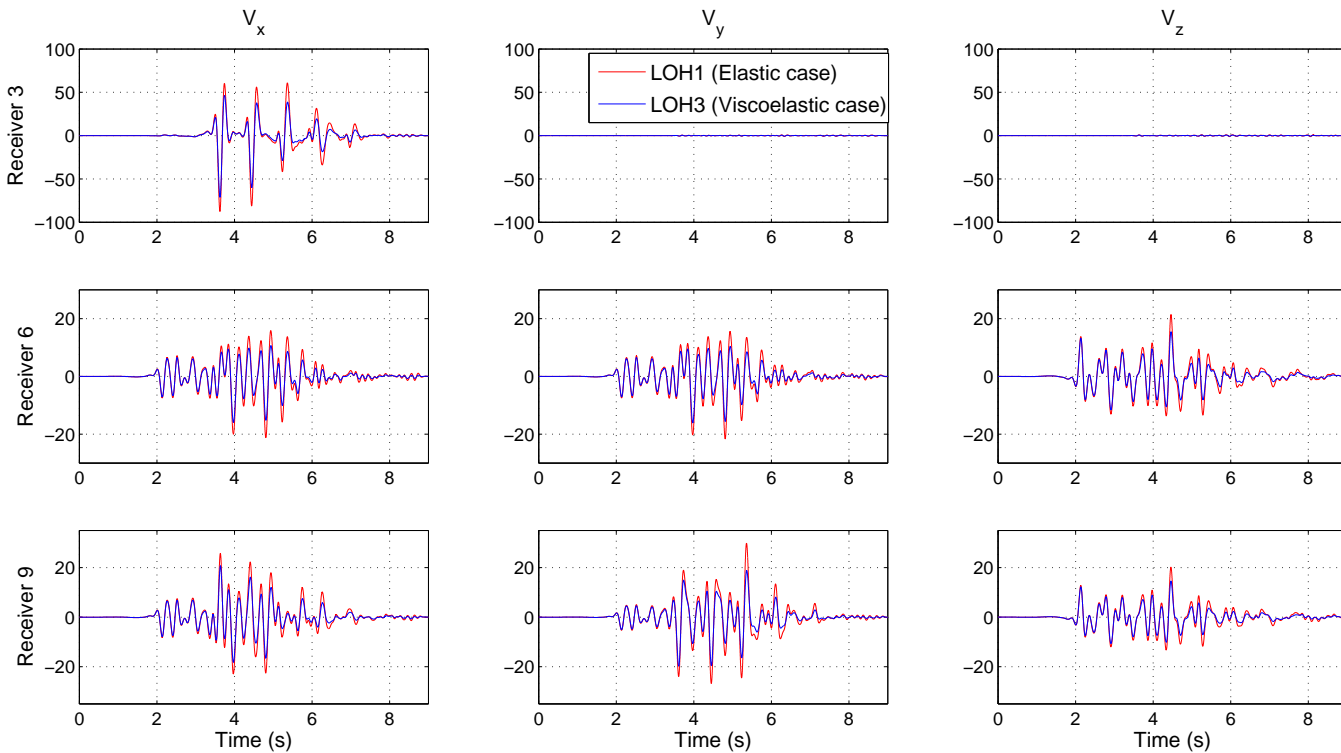
**Table 2.** Receivers location of the LOH1 and LOH3 benchmarks

Receiver	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x (m)	0	0	0	490	3919	7348	577	4612	8647
y (m)	693	5543	10392	490	3919	7348	384	3075	5764

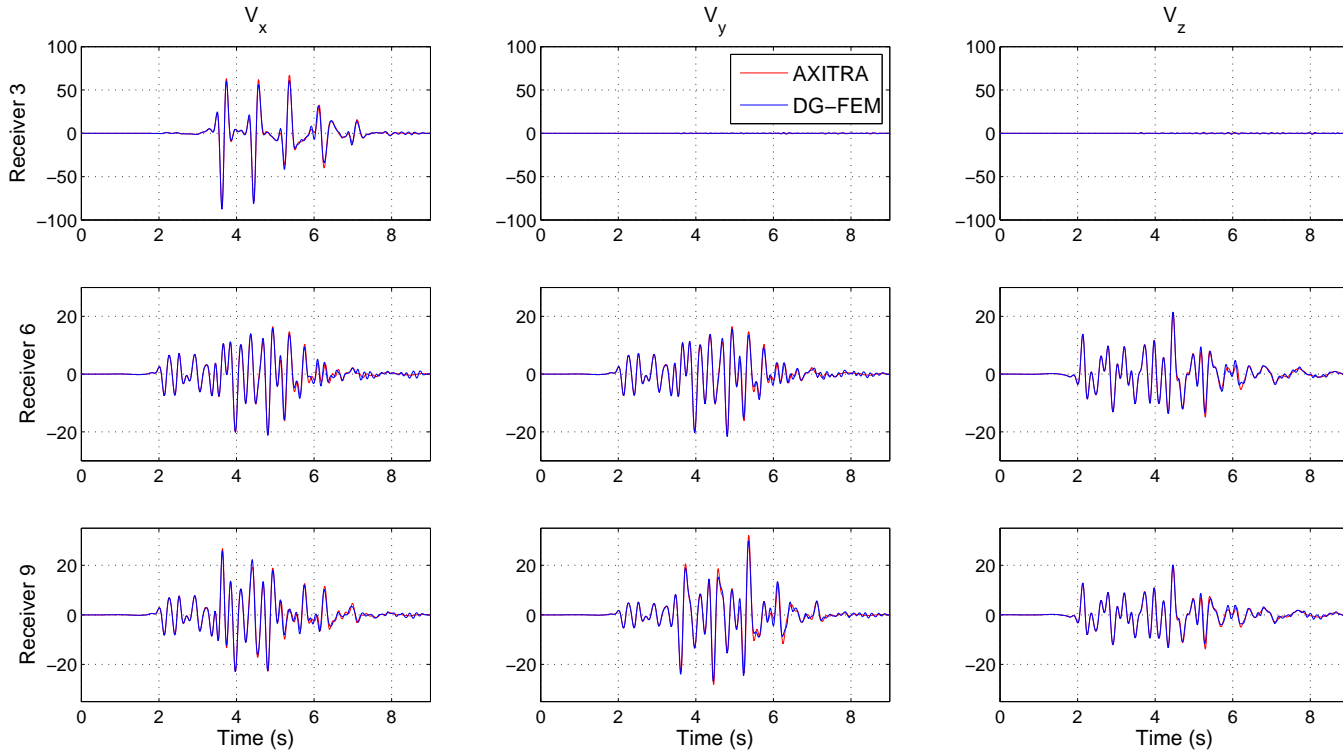
## Figures



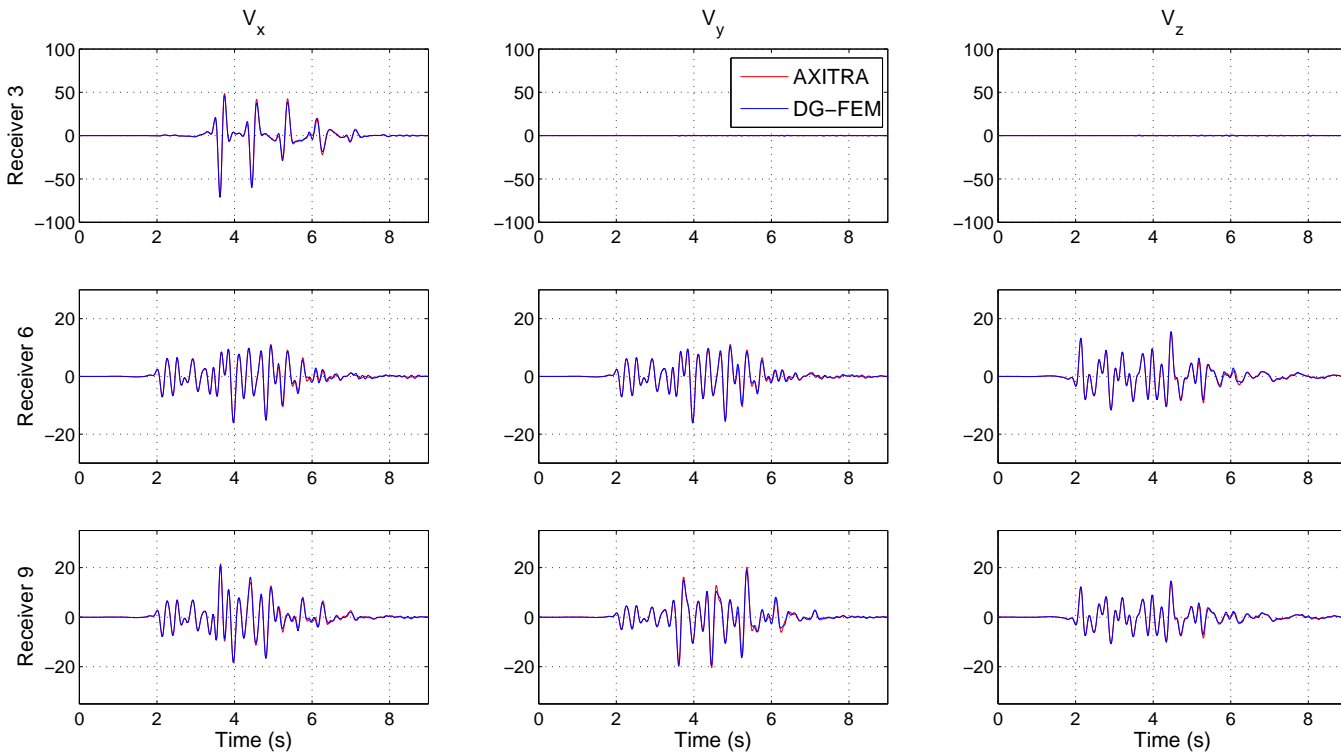
**Figure 1.** Moment rate-time time history and spectrum. The spectrum is almost flat until  $5\text{ Hz}$ .



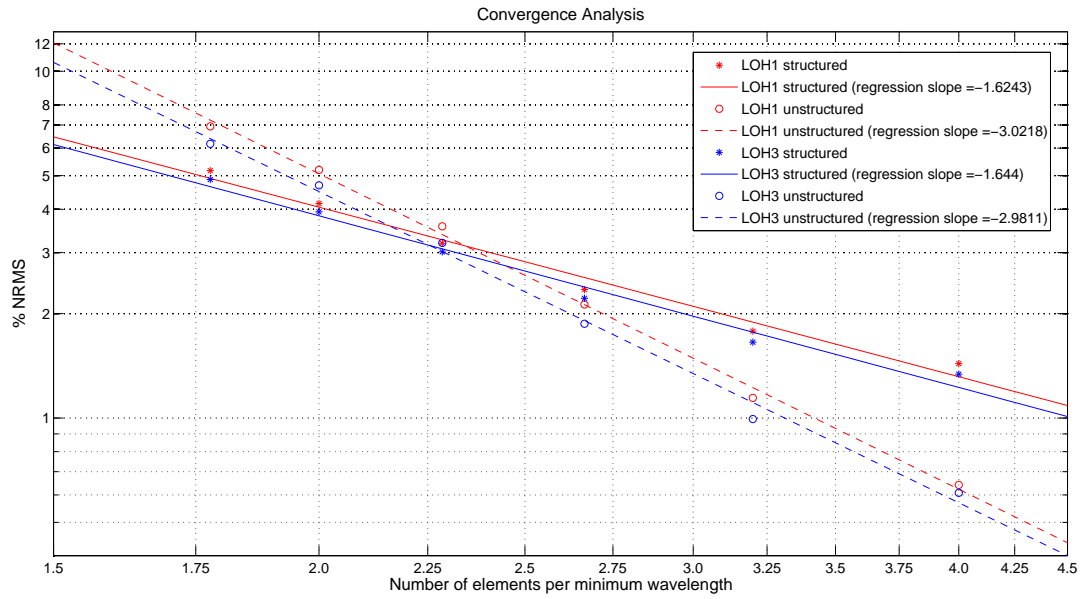
**Figure 2.** Velocity fields (m/s) of the three farthest receivers of the LOH1 and the LOH3 benchmark that were computed on an unstructured mesh with DG-FEM. They were filtered using a two-pass four-pole Butterworth in the frequency band  $[1 - 5] \text{ Hz}$ . The viscoelastic modulus used in the LOH3 benchmark was computed using 3 mechanisms of relaxation.



**Figure 3.** Velocity fields (m/s) of the three farthest receivers of the LOH1 benchmark that were computed on an unstructured mesh with DG-FEM and AXITRA. They were filtered using a two-pass four-pole Butterworth in the frequency band  $[1 - 5] Hz$ .

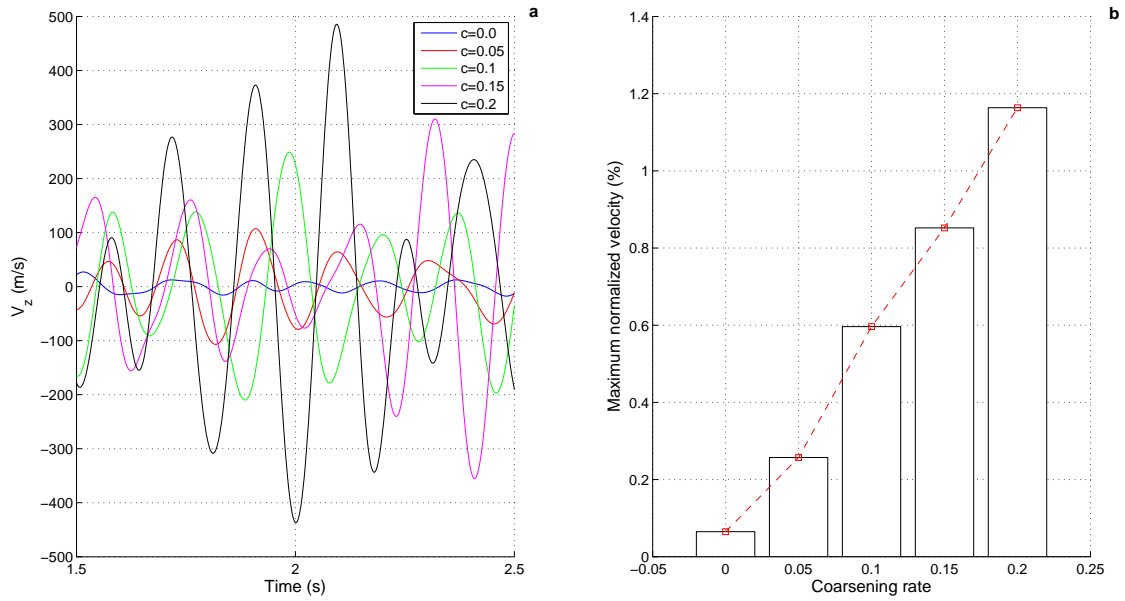


**Figure 4.** Velocity fields (m/s) of the three farthest receivers of the LOH3 benchmark that were computed on an unstructured mesh with DG-FEM and AXITRA. They were filtered using a two-pass four-pole Butterworth in the frequency band  $[1 - 5] \text{ Hz}$ . The viscoelastic modulus used in AXITRA is the same used in DG-FEM computed using 3 mechanism of relaxation.

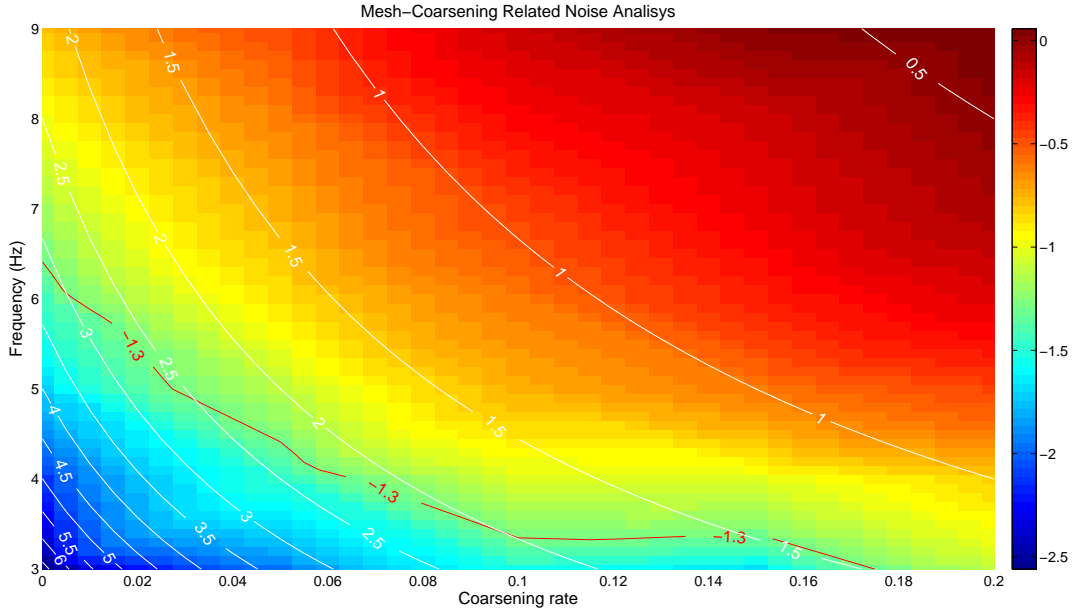


**Figure 5.** Convergence analysis for the LOH1 and LOH3 benchmarks with structured and unstructured meshes.

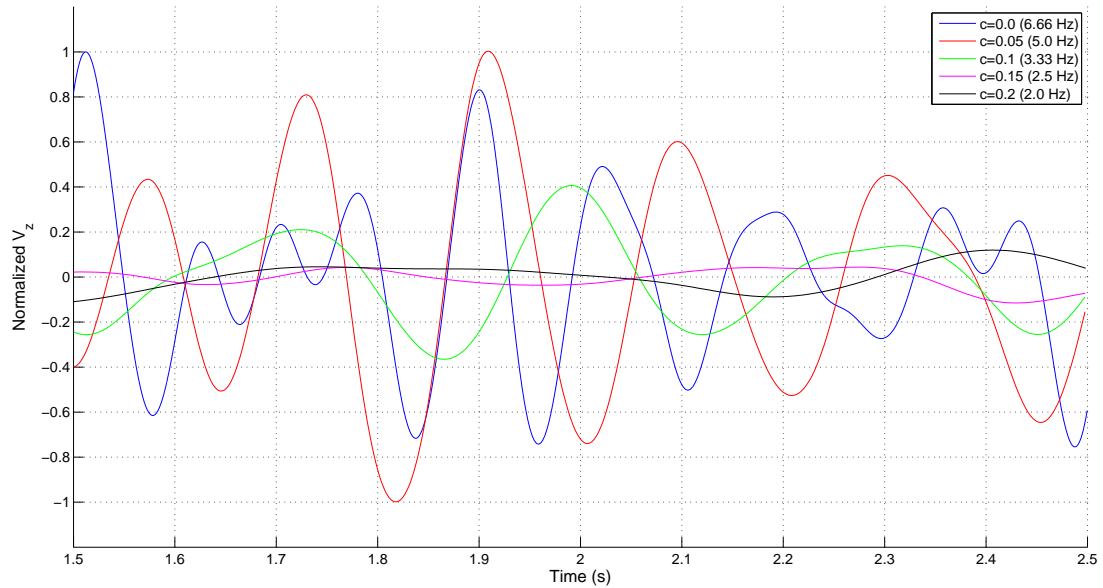




**Figure 6.** a)  $v_z$  trace from 1.5 s to 2.5 s filtered up to 5 Hz with a two-pass four-pole Butterworth; b) Maximum normalized velocity of the traces from the different meshes shown in Figure 7.a. The normalization was done with the maximum value of the applied source filtered up to 5 Hz.



**Figure 7.** Logarithm of the source-normalized  $v_z$  traces in the time window  $[1.5 - 2.5]$  s for different coarsening rates and cut-off frequencies. The low pass filter applied was the two-pass four-pole Butterworth filter in the frequency range  $[3 - 9]$  Hz. The white contours show the numbers of elements per minimum wavelength. The red contour shows the value where the amplitude of the spurious reflections is 0.05% of the peak source velocity. This Figure shows the strong relation between the spurious reflection amplitudes and the number of elements per minimum wavelength.



**Figure 8.** Normalized  $v_z$  traces in the time window  $[1.5 - 2.5]$  s for different coarsening rates. For  $c = 0$  we use the accurate criterion of  $n_\lambda = 3$  and for the other cases we use  $n_\lambda = 2$ . The cutoff frequencies depend on the selection of  $n_\lambda$  and the maximum characteristic length. The two-pass four-pole Butterworth filter was used. We can see that with the criterion chosen for  $n_\lambda = 2$  with  $c > 0$ , the amplitude of the spurious reflections are below of those obtained with the accurate criterion of  $n_\lambda = 3$  with no coarsening.





## Parte II

# Dinámica de la ruptura sísmica



## Capítulo 7

# Introducción (Parte II)

Los modelos de fuentes puntuales proveen una aproximación simple para la simulación de radiación sísmica. Resultan útiles para modelar fuentes situadas lejos del observador de modo que la fuente pueda verse como una fuente puntual. Los detalles del proceso de ruptura se encuentran ocultos dentro del tensor de momento que es función del tiempo. Para grandes terremotos, y especialmente para aquellos que se registran cerca de la fuente, los modelos de fuente sísmica no son suficiente y uno debe tomar en cuenta la geometría de la fuente y la propagación de la ruptura a través de la falla finita.

Para fuentes de dimensión finita se pueden tener dos aproximaciones que son los modelos cinemáticos y los modelos dinámicos. A pesar de que se han obtenido grandes avances en el entendimiento de la dinámica de la ruptura, los modelos cinemáticos siguen siendo los más utilizados para interpretar la radiación sísmica. En estos modelos los terremotos son simulados con la propagación cinemática de la discontinuidad del deslizamiento, comúnmente llamado dislocación, a lo largo del plano de falla. En estos modelos, se asume que el espesor de la zona de falla es despreciable con respecto a su anchura y longitud, de modo que la falla puede idealizarse como una superficie donde se presenta una discontinuidad del desplazamiento.

Para los modelos de dislocación cinemática, el deslizamiento es una función del tiempo y de la posición que puede ser completamente arbitraria y la propagación de la ruptura puede ser tan general como se desee. Ejemplos clásicos de tales modelos son el modelo de resorte-caja propuesto por *Burridge y Knopoff* (1967) y el modelo de dislocación rectangular propuesto por *Haskell* (1964). El modelo de *Haskell* (1964) fue el más utilizado a finales de los 1960's y principios de los 1970's. Estos modelos de dislocación representan una descripción aceptable de un terremoto como la propagación de un episodio de deslizamiento en un plano de falla. Sin embargo, cabe señalar que no todas las evoluciones del deslizamiento son físicamente posibles y/o admisibles. *Madariaga* (1978) demostró que el modelo de *Haskell* podría presentar casos inaceptables como interpenetración de masa, emisión de cantidades de energía no acotadas, etc., además de que no puede generar las altas frecuencias que se saben excitadas durante la ruptura. Por esta razón los modelos de dislocación deben ser considerados como un paso intermedio muy útil en la formulación de una descripción física aceptable de la ruptura, pero debe ser críticamente examinado cuando quiera ser utilizado para explicar la física del fenómeno.

Un modelo de dislocación puede ser descrito como una distribución de fuentes con su propio tensor de momento. Cada una de estas fuentes produce radiación sísmica y el desplazamiento total observado



en un punto arbitrario  $x$  puede representarse como

$$u_i(\underline{x}, t) = \int_0^t \int_{S_{x_0}} \mu(\underline{x}_0) \Delta u_j(\underline{x}_0, \tau) G_{ij,k}(\underline{x}, t | \underline{x}_0, \tau) n_k(\underline{x}_0) d^2 \underline{x}_0 d\tau \quad (7.1)$$

donde  $S_{x_0}$  representa la superficie de la falla,  $\mu(\underline{x}_0)$  es la rigidez en la posición  $\underline{x}_0$ ,  $\Delta u_j(\underline{x}_0, \tau)$  es el deslizamiento a través de la falla como una función de la posición en esta  $\underline{x}_0$  y el tiempo  $\tau$ ,  $\underline{n}$  es el vector normal a la falla y  $G(x, t)$  es el tensor de Green que puede ser calculado utilizando un medio estratificado o a través de simulaciones numéricas (*e.g.* Método de Diferencias Finitas, Métodos de Frontera, etc.). Para revisar más detalles sobre los métodos de dislocación se pueden consultar en las revisiones hechas por *Aki y Richards* (2002), *Madariaga y Olsen* (2002) y *Madariaga* (2007).

Como ya se mencionó los modelos de dislocación capturan algunas de las propiedades geométricas de las fuentes sísmicas pero a su vez pueden conducir a escenarios irreales. Los modelos de grieta son más adecuados debido a que el deslizamiento y los esfuerzos están relacionados cerca de la orilla de la grieta, de modo que una cantidad finita de energía es acumulada en la vecindad de la grieta. *Griffith* (1920) introdujo la teoría de grietas bajo el requerimiento de que la aparición de una grieta en un cuerpo provoca que los esfuerzos se relajen y se libere una cantidad finita de energía. Este simple requerimiento es suficiente para definir muchas de las propiedades de las grietas a partir del balance de energía (*Kostrov y Das*, 1988; *Freund*, 1989).

La dinámica de la fuente sísmica provee elementos clave para la predicción del movimiento fuerte y para entender la física de los terremotos que involucra su iniciación, propagación y término. Un estudio pionero en los modelos de grieta fue el de *Kostrov* (1964, 1966) quien propuso la propagación de una grieta de cizalla como un modelo de ruptura circular auto-similar. Para la comunidad sismológica resultó claro que la propuesta de *Kostrov* (1966) de intentar modelar la dinámica de una grieta de cizalla es la formulación adecuada de la propagación y radiación de una ruptura sísmica.

A continuación se presentan las características principales de un modelo de grieta. En la Figura

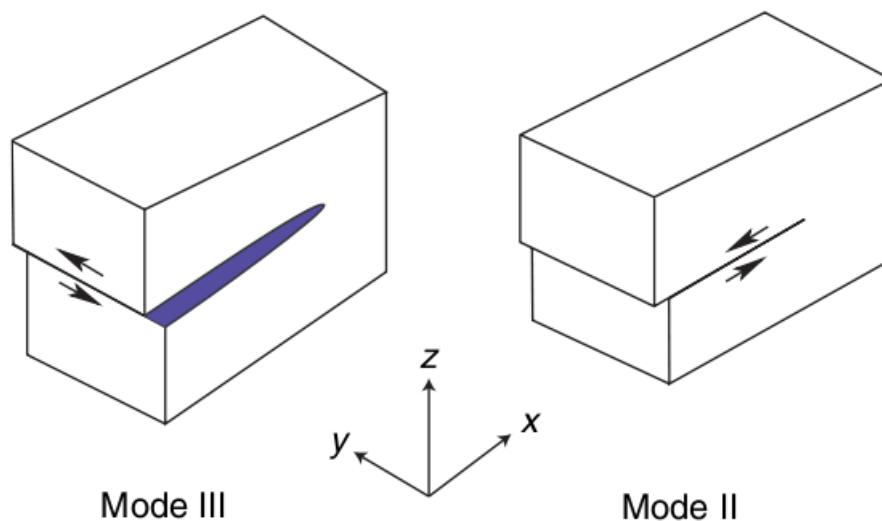


Figura 7.1: Modos de ruptura para una grieta de cizalla. Modo III conocido como modo antiplano y Modo II conocido como modo plano. Dentro de una falla ambos modos se presentan. Imagen tomada de (*Madariaga*, 2007).

7.1, se presentan dos modos de fractura de una falla plana sobre el plano  $x - y$  con normal  $z$ . A pesar de que el plano de ruptura puede tener cualquier forma, es más sencillo considerar un frente

de ruptura lineal perpendicular al eje  $x$  que se mueve a una velocidad  $v_r$  en la dirección positiva de  $x$ . Tres modos de fractura pueden definirse con respecto a esta configuración:

- Modo III o antiplano, cuando el deslizamiento y la caída de esfuerzos se da en la dirección  $y$ , *i.e.* el esfuerzo  $\sigma_{zy}$  se relaja con el deslizamiento.
- Modo II o plano, cuando el deslizamiento y la caída de esfuerzos se da en la dirección  $x$ , *i.e.* el esfuerzo  $\sigma_{zx}$  se relaja con el deslizamiento.
- Modo I o apertura, cuando la falla se abre con una discontinuidad en la dirección  $z$ . En este caso el esfuerzo  $\sigma_{zz}$  se hace cero.

En los terremotos, el modo de apertura es poco probable que ocurra para escalas grandes aunque es posible que surja para grietas pequeñas debido a las concentraciones de los esfuerzos, o a las discontinuidades geométricas de la falla, etc.

Para rupturas reales, cuando el frente de ruptura es curvo (o múltiples rupturas disjuntas si la fuente es compleja), los modos II y III ocurrirán de manera simultánea en la periferia de la grieta. Afortunadamente, en medios homogéneos, excepto cerca de esquinas bruscas y fuertes discontinuidades geométricas, los dos modos están localmente desacoplados, de modo que la mayoría de las características determinadas en 2D pueden llevarse a grietas en 3D con pocas consideraciones.

Para estudiar un modelo de grieta bidimensional se resuelven la ecuación de elastodinámica junto a las siguientes condiciones de frontera en el plano  $z = 0$ , para el modo III se tiene

$$\begin{aligned}\sigma_{zy}(x, t) &= \Delta\sigma & \text{para } x < l(t) \\ u_y(x, t) &= 0 & \text{para } x < l(t)\end{aligned}\tag{7.2}$$

y para el modo II

$$\begin{aligned}\sigma_{zx}(x, t) &= \Delta\sigma & \text{para } x < l(t) \\ u_x(x, t) &= 0 & \text{para } x < l(t)\end{aligned}\tag{7.3}$$

donde  $l(t)$  es la posición actual del frente de ruptura en el eje  $x$ . Estas condiciones de frontera constituyen un problema de fronteras mixtas que pueden resolverse usando técnicas de variable compleja. La solución para el modo III con una variación de tiempo arbitraria de  $l(t)$  fue encontrada por *Kostrov* (1964). Para rupturas planas, la solución para una  $l(t)$  arbitraria fue encontrada por *Freund* (1972).

Por otro lado, la fricción juega un papel fundamental durante todo el fenómeno de la ruptura. El modelo clásico de Coulomb modela la caída repentina en la fricción del coeficiente estático al dinámico, lo cual conduce a singularidades de los esfuerzos en el frente de ruptura. Este problema se debe a que el modelo carece de una escala de longitud característica requerida para definir una tasa de energía finita cerca del frente de ruptura. Mejores modelos de la fricción para bajas velocidades de deslizamiento fueron estudiados en el laboratorio por *Dieterich* (1978, 1979) y *Ruina* (1983), quienes propusieron el modelo de fricción *rate and state*. Por otro lado la ley de fricción *slip weakening* fue introducida en la modelación de la ruptura por *Ida* (1972). Esta ley fue introducida en modelos 2D por *Andrews* (1976a,b) y en modelos 3D por *Day* (1982). Estos autores demostraron que la ley *slip weakening* regulariza el modelo numérico del frente de ruptura, distribuyendo las concentraciones de esfuerzo y deslizamiento sobre una distancia controlada por la longitud característica de la ley de fricción. *Ohnaka y Kuwahara* (1990), *Ohnaka* (1996) y *Ohnaka y Shen* (1999) concluyeron que sus experimentos podrían ser explicados con la simple ley de fricción *slip weakening*. Cabe señalar que las leyes de fricción *rate and state* y *slip weakening* se emparentan en que ambos modelos contienen una escala de longitud finita que controla el comportamiento del frente de ruptura (*Okubo*, 1989; *Dieterich y Kilgore*, 1996).

Estudios posteriores sobre los procesos de ruptura para algunos terremotos han mejorado el entendimiento que se tienen sobre estos. Estos modelos sugieren una complejidad en los procesos de ruptura que los primeros modelos de fuente con medios uniformemente cargados eran incapaces de explicar. A pesar de que a finales de los 1970's, *Das y Aki* (1977), *Mikumo y Miyatake* (1978, 1979), *Madariaga* (1979) y *Andrews* (1980, 1981) señalaron las deficiencias de los modelos clásicos de dislocación y grieta, no fué sino hasta a finales de los 1980's cuando observaciones de muy buena calidad en campo cercano estuvieron disponibles para algunos grandes terremotos.

*Heaton* (1996) observó que la ruptura de los grandes terremotos se caracteriza por un comportamiento tipo pulso, donde sólo una pequeña parte de la falla rompe en un instante dado de tiempo. Este resultado ha sido confirmado por inversiones del campo de deslizamiento de grandes terremotos, como el terremoto de Landers de 1992 en California (*Cohee y Beroza*, 1994; *Wald y Heaton*, 1994; *Cotton y Campillo*, 1995).

Utilizando una modelación directa, *Olsen et al.* (1997) y *Peyrat et al.* (2001) demostraron que la propagación de la ruptura en un modelo dinámico del terremoto de Landers de 1992 sigue una trayectoria compleja sobre una falla plana controlada únicamente por la variación espacial del campo de esfuerzos iniciales. Por otro lado, (*Bouchon*, 1997) calculó los cambios dinámicos de los esfuerzos en este terremoto y observó distribuciones muy variables de la caída de los esfuerzos a lo largo de la falla.

*Ide y Takeo* (1997) estimó los parámetros de la ley de fricción para el terremoto de Kobe de 1995 a partir de sus resultados de la inversión cinemática. Para este mismo terremoto, *Spudich et al.* (1998) detectaron cambios cosísmicos en la dirección del deslizamiento. *Nielsen et al.* (2000) indicaron que aquel fenómeno podría deberse al resultado de muchos terremotos recurrentes sobre la misma falla por un largo periodo de tiempo. Otros autores han estudiado modelos de fallas complejas desde un punto de vista teórico como *Harris y Day* (1993, 1997). *Beroza y Mikumo* (1996) observaron que modelos dinámicos con parámetros de falla heterogéneos tienden a generar deslizamientos de pequeña duración.

En esta segunda parte del trabajo se introducen conceptos fundamentales sobre la dinámica de la fuente sísmica, como son las leyes de fricción, y las condiciones de frontera sobre la superficie de ruptura que deben aplicarse para modelar este tipo de fuente. Asimismo se introduce un modelo numérico empleado el método de Galerkin Discontinuo para la ruptura dinámica de terremotos sobre fallas de geometría compleja empleado la ley de fricción *slip weakening*. Se estudia entonces la fuente del terremoto de Landers (1992) empleando el método de modelación desarrollado. Posteriormente se presenta una serie de ejercicios de verificación del método propuesto por SCEC implicando condiciones heterogéneas del estado inicial de esfuerzos y la propagación espontánea de la ruptura en fallas oblicuas a la principal.

# Capítulo 8

## Formulación continua

### Índice

---

8.1. Condiciones de frontera . . . . .	107
8.2. Ley de fricción . . . . .	108

---

En este capítulo se introducen las condiciones de frontera que deben aplicarse en una falla predeterminada para permitir el deslizamiento sobre esta. Este deslizamiento se modela como la discontinuidad que sufre el campo de desplazamientos sobre la falla. Posteriormente se explica la ley de fricción que determina la dinámica de la ruptura.

### 8.1. Condiciones de frontera

La falla,  $\Gamma$ , es la superficie de ruptura cuyo vector normal  $\underline{n}$  es dirigido, i.e. cada lado de la falla está claramente identificado. Las deformaciones y los esfuerzos sobre la falla están relacionados a través de una ley de fricción, tal que las tracciones tangenciales a la falla evolucionan de acuerdo a esa ley, que a su vez dependen de algunos parámetros cinemáticos de falla y de la propagación de ondas en la vecindad del frente de ruptura. Por otro lado, el campo de deformaciones en el medio se debe a las discontinuidades de desplazamiento a través de la falla. De modo que es conveniente dividir nuestro dominio en un lado positivo (+) y un lado negativo (-) con respecto a la falla y expresar la velocidad,  $\underline{v}$ , sobre  $\Gamma$  como

$$\underline{v}^{\pm}(t, \underline{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underline{v}(t, \underline{x} \pm \epsilon \underline{n}(\underline{x})). \quad (8.1)$$

Aún más se puede descomponer a  $\underline{v}^{\pm}$  en sus componentes normal y tangencial con respecto a  $\underline{n}$  como

$$\begin{aligned} \underline{v}_N^{\pm} &= (\underline{n} \cdot \underline{v}^{\pm}) \underline{n} \\ \underline{v}_T^{\pm} &= \underline{v}^{\pm} - \underline{v}_N^{\pm} = \underline{v}^{\pm} - (\underline{n} \cdot \underline{v}^{\pm}) \underline{n}. \end{aligned}$$

Ahora se puede definir al vector  $\underline{V}$  como la discontinuidad de la velocidad a través de  $\Gamma$ , donde su componente tangencial de falla, llamado velocidad de deslizamiento, es

$$\underline{V}_T := \llbracket \underline{v}_T \rrbracket = \underline{v}_T^+ - \underline{v}_T^-, \quad (8.2)$$

y su componente normal de falla es

$$\underline{V}_N := \llbracket \underline{v}_N \rrbracket = \underline{v}_N^+ - \underline{v}_N^-. \quad (8.3)$$

La magnitud del deslizamiento en cualquier instante de tiempo  $t$  se define como la integral del módulo de  $\underline{V}_T$  sobre el tiempo:

$$U(t) = \int_0^t \|\underline{V}(s, \underline{x})\| ds. \quad (8.4)$$

Las condiciones de frontera dinámicas de ruptura sobre la falla son las siguientes dos condiciones de salto, que involucran a los campos tangenciales (*Day et al.*, 2005)

$$\tau_c - \|\underline{T}_T\| \geq 0 \quad (8.5)$$

$$\tau_c \underline{V} - \underline{T}_T \|\underline{V}\| = 0, \quad (8.6)$$

y una tercera condición aplicada a (8.3)

$$\underline{V}_N = 0, \quad (8.7)$$

donde  $\underline{T}_T$  es el vector tracción tangencial de falla y  $\tau_c$  es la fuerza de fricción de falla.

En la siguiente sección se explica la ley de fricción que determina la dinámica de la ruptura sobre la falla.

## 8.2. Ley de fricción

La fuerza de fricción se determina con la ley de fricción de Coulomb, que depende del esfuerzo normal sobre la falla (con valores negativos en caso de compresión),  $\sigma_N$ , el coeficiente de fricción,  $\mu$ , y la cohesión de la falla,  $C$ , como

$$\tau_c = C - \sigma_N \mu. \quad (8.8)$$

La condición (8.5) limita por arriba a la magnitud de  $\underline{T}_T$  con el valor de la fuerza de fricción,  $\tau_c$ , que siempre actúa oponiéndose al deslizamiento sobre  $\Gamma$ . La segunda condición (8.6) fuerza que la velocidad de deslizamiento sea paralela a la tracción tangencial,  $\underline{T}_T$ . Otra implicación de estas condiciones de salto es que cuando la desigualdad de (8.5) se mantenga, la velocidad de deslizamiento es cero (lo cual puede observarse fácilmente a través del módulo de (8.6)). Finalmente, la condición (8.7) implica que no se va a permitir que la falla se abra o haya penetración de masa a través de la falla durante la propagación de la ruptura.

El coeficiente de fricción depende del deslizamiento, de la velocidad de deslizamiento y de variables de estado sobre la falla determinados por la historia de deslizamiento y la edad de la falla (*e.g. Dieterich*, 1979; *Ruina*, 1983) (ver Apéndice C). Sin embargo, se asumirá una relación más sencilla llamada *slip weakening law* (*Ida*, 1972; *Palmer y Rice*, 1973), que hace a  $\mu$  función lineal del deslizamiento como

$$\mu(U) = \mu_d + (\mu_s - \mu_d) \left(1 - \frac{U}{\delta_0}\right) H\left(1 - \frac{U}{\delta_0}\right), \quad (8.9)$$

donde  $H(\cdot)$  es la función de Heaviside,  $\mu_s$  and  $\mu_d$  son los coeficientes de fricción estático y dinámico, respectivamente, y  $\delta_0$  es la distancia de deslizamiento crítico. Ahora se puede definir la energía de fracturación como

$$G = \int_0^{\delta_0} \tau_c(\mu_s) - \tau_c(\mu_d) dU \quad (8.10)$$

que representa el trabajo hecho por las fuerzas cohesivas durante la caída de esfuerzos.

Una serie de estudios han tratado de estimar  $\delta_0$  a partir de eventos sísmicos basándose en observaciones de la fuente indirecta a través de la inversión de sismogramas de movimiento fuerte (*e.g. Ide y Takeo*, 1997; *Mikumo y Yagi*, 2003). Sin embargo, debido al ancho de banda limitado de los sismogramas, la distancia de deslizamiento crítico fue pobremente encontrada en estos estudios. Mas

aún, modelos dinámicos basado en valores de  $\delta_0$ , inferidos de forma indirecta, pueden estar sesgados y ser incapaces de predecir la caída de esfuerzos sobre la falla (*Guatteri y Spudich, 2000; Spudich y Guatteri, 2004*). La observación de  $\delta_0$  de los datos de campo cercano es poco probable (*Cruz-Atienza et al., 2009*); excepto por algunos casos aislados cuya ruptura se propaga a velocidad *supershear*, i.e. cuya velocidad supera a la de las ondas S (*Cruz-Atienza y Olsen, 2010*).

A continuación se presenta la manera en que se incorpora el modelo de falla, respetando las condiciones de salto (8.5) a (8.6) y la ley de fricción (8.8) y (8.9), en el esquema GD dado por (4.24) y (4.25).



# Capítulo 9

## Formulación discreta

### Índice

---

<b>9.1. Galerkin Discontinuo</b> . . . . .	<b>111</b>
9.1.1. Flujos a través de la falla para el esquema de las velocidades . . . . .	117
9.1.2. Flujos a través de la falla para el esquema de los esfuerzos . . . . .	120

---

En este capítulo se muestra de manera detallada cómo se incorporan las condiciones de frontera sobre la falla para la ruptura dinámica en un esquema de Galerkin Discontinuo. La aplicación de estas condiciones de frontera permiten que el campo de desplazamiento sea discontinuo en su componente tangencial a la falla pero a la vez asegura la continuidad del componente normal. De igual manera se presenta cómo introducir la ley de fricción para modelar la magnitud de la tracción tangencial que determina la dinámica de la ruptura.

### 9.1. Galerkin Discontinuo

La descomposición de dominio introducida anteriormente en (4.1) debe ahora incorporar la presencia de la falla  $\Gamma$ . La superficie de la falla estará discretizada por triángulos que deberán corresponder a la superficie compartida por tetraedros adyacentes, i.e.  $\Gamma$  no podrá encontrarse dentro de ningún tetraedro. El dominio físico,  $\Omega$ , es entonces descompuesto como

$$\Omega \simeq \Omega_h = \sum_{i=1}^K D_i \text{ tal que si } \Gamma \subset \Omega \text{ entonces } \{\forall D_i : (D_i \setminus S_i) \cap \Gamma = \emptyset\}, \quad (9.1)$$

donde cada  $D_i$  es un tetraedro de caras planas con una superficie total de  $S_i$  y la unión de todos los  $K$  tetraedros describen una malla conforme. El orden de la base polinomial elegida corresponde a funciones cuadráticas P2 porque aproximaciones de orden más alto no mejoran de forma significativa ni la precisión de los esquemas numéricos de la dinámica de ruptura ni su tasa de convergencia (*e.g.* Moczó *et al.*, 2007; Rojas *et al.*, 2009; Pelties *et al.*, 2012). El mantener un orden bajo de aproximación (*i.e.* funciones de interpolación P2) provee a nuestro esquema numérico tanto de buena precisión como eficiencia. Como cada tetraedro tiene sus propios nodos en el método GD (en su forma nodal), un nodo de falla se compone por dos nodos localizados en la misma ubicación espacial (*i.e.* un *split-node*). Uno de estos corresponde al  $i$ -ésimo tetraedro que se encuentra en el lado-positivo del dominio y el otro al  $k$ -ésimo tetraedro adyacente en el lado negativo. Esto significa que cada *split-node* se ubica entre dos tetraedros que comparten un elemento de falla. Aún más, como el método



GD no requiere de la continuidad entre las caras de los elementos, la dislocación producida por la ruptura puede fácilmente manejarse sobre la falla,  $\Gamma$ , a través de la discontinuidad de las velocidades tangenciales  $\underline{v}_T^\pm = \{v_{i_T}, v_{k_T}\}$ . Sin embargo, esto debe tomarse cuidadosamente porque la mayoría de los campos elásticos deben permanecer continuos a través de  $\Gamma$ .

El método numérico del cual se va a partir para la introducción de la dinámica de la ruptura, es el desarrollado en (*Etienne et al.*, 2010) para la propagación de ondas elásticas, dado por

$$\begin{aligned} \rho^i(\underline{I}_3 \otimes \underline{K}^i) \frac{\hat{v}_{m+\frac{1}{2}}^i - \hat{v}_{m-\frac{1}{2}}^i}{\Delta t} &= - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\underline{M}_\theta \otimes \underline{\mathcal{E}}_\theta^i) \hat{\sigma}_m^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in N^i} [(\underline{P}^{ik} \otimes \underline{F}^{ik}) \hat{\sigma}_m^i + (\underline{P}^{ik} \otimes \underline{G}^{ik}) \hat{\sigma}_m^k] \end{aligned} \quad (9.2)$$

$$\begin{aligned} (\underline{A}^i \otimes \underline{K}^i) \frac{\hat{\sigma}_{m+1}^i - \hat{\sigma}_m^i}{\Delta t} &= - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\underline{N}_\theta \otimes \underline{\mathcal{E}}_\theta^i) \hat{v}_{m+\frac{1}{2}}^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in N^i} [(\underline{Q}^{ik} \otimes \underline{F}^{ik}) \hat{v}_{m+\frac{1}{2}}^i + (\underline{Q}^{ik} \otimes \underline{G}^{ik}) \hat{v}_{m+\frac{1}{2}}^k]. \end{aligned} \quad (9.3)$$

La única diferencia de este esquema elástico con el esquema viscoelástico (4.24) y (4.25), desarrollado en la Parte I de la tesis, es justamente que no estamos incluyendo los términos anelásticos ni el de las fuerzas externas. Se decidió trabajar con este esquema para simplificar la lectura de las ecuaciones pero uno debería perder de vista que la incorporación de la reología viscoelástica con la dinámica de la ruptura es inmediata.

El sistema (9.2) y (9.3) se resuelve en todo  $\Omega$  excepto sobre  $\Gamma$ , donde las condiciones de salto (8.5) a (8.7) deben verificarse. Sin embargo, como ha sido señalado por *Benjema et al.* (2009), antes de buscar la forma de calcular los flujos de falla uno debe notar que el sistema no es simétrico por

$$\underline{Q}^{ik} \neq (\underline{P}^{ik})^T, \quad (9.4)$$

que se debe a la transformación de variable que se hizo para agrupar las propiedades del medio en el lado izquierdo de la ecuación constitutiva. A pesar de que método no requiere que el sistema sea simétrico, esta condición resulta conveniente porque de esta forma nuestro esquema para elementos P0 se reduce esencialmente al propuesto por *Benjema et al.* (2009) (*i.e.* la aproximación de volumen finito), que se obtuvo a través de un balance de energía a través de la falla.

Para obtener un sistema simétrico, se requiere multiplicar a (9.3) por la matriz simétrica positiva definida  $\underline{S}$  dada por

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.5)$$

Entonces al multiplicar (9.3) por  $\underline{\underline{S}}$  se obtiene el siguiente sistema simétrico, que es equivalente a (9.2) y (9.3), como

$$\begin{aligned} \hat{v}_{m+\frac{1}{2}}^i &= \hat{v}_{m-\frac{1}{2}}^i + \frac{\Delta t}{\rho^i} (\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{K}}^i)^{-1} \left[ - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\underline{\underline{M}}_\theta \otimes \underline{\underline{E}}_\theta^i) \hat{\sigma}_m^i \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{k \in N^i} [(\underline{\underline{P}}^{ik} \otimes \underline{\underline{F}}^{ik}) \hat{\sigma}_m^i + (\underline{\underline{P}}^{ik} \otimes \underline{\underline{G}}^{ik}) \hat{\sigma}_m^k] \right] \end{aligned} \quad (9.6)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{m+1}^i &= \hat{\sigma}_m^i + \Delta t (\underline{\underline{\Lambda}}_S^i \otimes \underline{\underline{K}}^i)^{-1} \left[ - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\underline{\underline{N}}_{S\theta} \otimes \underline{\underline{E}}_\theta^i) \hat{v}_{m+\frac{1}{2}}^i \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{k \in N^i} [((\underline{\underline{P}}^{ik})^T \otimes \underline{\underline{F}}^{ik}) \hat{v}_{m+\frac{1}{2}}^i + ((\underline{\underline{P}}^{ik})^T \otimes \underline{\underline{G}}^{ik}) \hat{v}_{m+\frac{1}{2}}^k] \right], \end{aligned} \quad (9.7)$$

donde

$$\underline{\underline{\Lambda}}_S^i = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{\Lambda}}^i = \begin{bmatrix} \frac{3}{3\lambda+2\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\mu} & \frac{1}{2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\mu} & \frac{1}{2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \quad (9.8)$$

$$\underline{\underline{N}}_{Sx} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{N}}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.9)$$

$$\underline{\underline{N}}_{Sy} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{N}}_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.10)$$

$$\underline{\underline{N}}_{Sz} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{N}}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.11)$$

$$(\underline{\underline{P}}^{ik})^T = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{Q}}^{ik}. \quad (9.12)$$

Como los flujos a través de los elementos de falla  $S^{\Gamma^i} = \{S^{ik} \subseteq \Gamma | S^{ik} := S^i \cap S^k\}$  deben satisfacer las condiciones (8.5) a (8.7), no se puede simplemente aplicar el esquema centrado propuesto por *Etienne et al.* (2010) para el flujo entre elementos regulares. De modo que se incluirán los vectores flujos de falla  $\underline{\underline{F}}^{\Gamma^i}$  y  $\underline{\underline{G}}^{\Gamma^i}$  para los esquemas de velocidad y esfuerzos respectivamente. Introduciendo

estos nuevos términos en la formulación débil del sistema hiperbólico, (4.8) y (4.9), como

$$\int_{S^{\Gamma_i}} (\underline{\phi}_{\theta l}^i)^T \underline{\mathbb{F}}^{\Gamma_i} dS \quad (9.13)$$

$$\int_{S^{\Gamma_i}} (\underline{\phi}_{\theta l}^i)^T \underline{\mathbb{G}}^{\Gamma_i} dS. \quad (9.14)$$

Para desarrollar el término (9.13) se empieza eligiendo  $\theta = x$

$$\int_{S^{\Gamma_i}} [ \phi_{\theta l}^i \quad 0 \quad 0 ] \underline{\mathbb{F}}^{\Gamma_i} dS.$$

Sustituyendo  $\underline{\mathbb{F}}^{\Gamma_i}$  por su aproximación nodal

$$\int_{S^{\Gamma_i}} [ \phi_{\theta l}^i \quad 0 \quad 0 ] \sum_{j=1}^{d^{\Gamma}} \phi_j^{\Gamma} \underline{I}_3^{\Gamma} \underline{\mathbb{F}}_j^{\Gamma_i} dS = \int_{S^{\Gamma_i}} \sum_{j=1}^{d^{\Gamma}} \phi_l^i \phi_j^{\Gamma} (\underline{I}_3)_1 \underline{\mathbb{F}}_j^{\Gamma_i} dS.$$

Haciendo lo mismo con  $\theta = y$  y  $\theta = z$  e incluyendo estos términos

$$\begin{aligned} \int_{S^{\Gamma_i}} \sum_{j=1}^{d^{\Gamma}} \begin{bmatrix} \phi_l^i \phi_j^{\Gamma} (\underline{I}_3)_1 \\ \phi_l^i \phi_j^{\Gamma} (\underline{I}_3)_2 \\ \phi_l^i \phi_j^{\Gamma} (\underline{I}_3)_3 \end{bmatrix} \underline{\mathbb{F}}_j^{\Gamma_i} dS &= \int_{S^{\Gamma_i}} \sum_{j=1}^{d^{\Gamma}} \phi_l^i \phi_j^{\Gamma} \underline{I}_3^{\Gamma} \underline{\mathbb{F}}_j^{\Gamma_i} dS \\ &= \int_{S^{\Gamma_i}} [ \phi_l^i \phi_1^{\Gamma} \underline{I}_3^{\Gamma} \quad \phi_l^i \phi_2^{\Gamma} \underline{I}_3^{\Gamma} \quad \cdots \quad \phi_l^i \phi_{d^{\Gamma}}^{\Gamma} \underline{I}_3^{\Gamma} ] \begin{bmatrix} \underline{\mathbb{F}}_1^{\Gamma_i} \\ \underline{\mathbb{F}}_2^{\Gamma_i} \\ \vdots \\ \underline{\mathbb{F}}_{d^{\Gamma}}^{\Gamma_i} \end{bmatrix} dS. \end{aligned}$$

Como debe de satisfacerse para cada función prueba, i.e.  $\forall l \in \{1, 2, \dots, d^i\}$

$$\int_{S^{\Gamma_i}} \begin{bmatrix} \phi_1^i \phi_1^{\Gamma} \underline{I}_3^{\Gamma} & \phi_1^i \phi_2^{\Gamma} \underline{I}_3^{\Gamma} & \cdots & \phi_1^i \phi_{d^{\Gamma}}^{\Gamma} \underline{I}_3^{\Gamma} \\ \phi_2^i \phi_1^{\Gamma} \underline{I}_3^{\Gamma} & \phi_2^i \phi_2^{\Gamma} \underline{I}_3^{\Gamma} & \cdots & \phi_2^i \phi_{d^{\Gamma}}^{\Gamma} \underline{I}_3^{\Gamma} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{d^i}^i \phi_1^{\Gamma} \underline{I}_3^{\Gamma} & \phi_{d^i}^i \phi_2^{\Gamma} \underline{I}_3^{\Gamma} & \cdots & \phi_{d^i}^i \phi_{d^{\Gamma}}^{\Gamma} \underline{I}_3^{\Gamma} \end{bmatrix} dS \hat{\underline{\mathbb{F}}}^{\Gamma_i} = (\underline{I}_3 \otimes \underline{\mathcal{G}}^{i\Gamma}) \hat{\underline{\mathbb{F}}}^{\Gamma_i}, \quad (9.15)$$

donde la matriz  $\underline{\mathcal{G}}^{\Gamma_i}$  es exactamente a la matriz de flujo previamente definida en (4.21).

Siguiendo el mismo procedimiento pero trabajando con el flujo de falla del esquema de los esfuerzos (9.14) se obtiene

$$(\underline{I}_3 \otimes \underline{\mathcal{G}}^{i\Gamma}) \hat{\underline{\mathbb{G}}}^{\Gamma_i}. \quad (9.16)$$

Considerando el flujo sobre la falla, se puede reescribir (9.6) y (9.7) como

$$\begin{aligned} \hat{\underline{v}}_{m+\frac{1}{2}}^i &= \hat{\underline{v}}_{m-\frac{1}{2}}^i + \frac{\Delta t}{\rho^i} (\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{K}}^i)^{-1} \left[ - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\underline{\underline{M}}_\theta \otimes \underline{\underline{E}}_\theta^i) \hat{\underline{\sigma}}_m^i \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \in N^i \\ S_{ik} \cap \Gamma = \emptyset}} [(\underline{\underline{P}}^{ik} \otimes \underline{\underline{F}}^{ik}) \hat{\underline{\sigma}}_m^i + (\underline{\underline{P}}^{ik} \otimes \underline{\underline{G}}^{ik}) \hat{\underline{\sigma}}_m^k] + \delta^\Gamma (\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{G}}^{i\Gamma}) \hat{\underline{F}}_m^{\Gamma i} \right] \end{aligned} \quad (9.17)$$

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\sigma}}_{m+1}^i &= \hat{\underline{\sigma}}_m^i + \Delta t (\underline{\underline{\Lambda}}_S^i \otimes \underline{\underline{K}}^i)^{-1} \left[ - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\underline{\underline{N}}_{S\theta} \otimes \underline{\underline{E}}_\theta^i) \hat{\underline{v}}_{m+\frac{1}{2}}^i \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \in N^i \\ S_{ik} \cap \Gamma = \emptyset}} [((\underline{\underline{P}}^{ik})^T \otimes \underline{\underline{F}}^{ik}) \hat{\underline{v}}_{m+\frac{1}{2}}^i + ((\underline{\underline{P}}^{ik})^T \otimes \underline{\underline{G}}^{ik}) \hat{\underline{v}}_{m+\frac{1}{2}}^k] + \delta^\Gamma (\underline{\underline{I}}_6 \otimes \underline{\underline{G}}^{i\Gamma}) \hat{\underline{G}}_{m+\frac{1}{2}}^{\Gamma i} \right], \end{aligned} \quad (9.18)$$

donde  $\delta^\Gamma$  es una delta de Kronecker que es igual a 1 si  $S_{i\Gamma} \neq \emptyset$  y 0 en el caso contrario.

Como las condiciones de frontera de falla (8.5) a (8.7) se deben aplicar al vector tracción  $\underline{T}$ , como *Benjema et al.* (2009) sugiere, entonces deberíamos escribir los flujos en el esquema de la velocidad (9.17) en función de las tracciones y no de los esfuerzos. El primer componente del flujo en (9.17) está dado por

$$(\underline{\underline{P}}^{ik} \otimes \underline{\underline{F}}^{ik}) \hat{\underline{\sigma}}_m^i. \quad (9.19)$$

Si se escribe (9.19) de forma matricial

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{P}}^{ik} \otimes \underline{\underline{F}}^{ik}) \hat{\underline{\sigma}}_m^i &= \int_{S^{ik}} \begin{bmatrix} \phi_1^i \phi_1^i \underline{\underline{P}}^{ik} & \phi_1^i \phi_2^i \underline{\underline{P}}^{ik} & \cdots & \phi_1^i \phi_{d^i}^i \underline{\underline{P}}^{ik} \\ \phi_2^i \phi_1^i \underline{\underline{P}}^{ik} & \phi_2^i \phi_2^i \underline{\underline{P}}^{ik} & \cdots & \phi_2^i \phi_{d^i}^i \underline{\underline{P}}^{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{d^i}^i \phi_1^i \underline{\underline{P}}^{ik} & \phi_{d^i}^i \phi_2^i \underline{\underline{P}}^{ik} & \cdots & \phi_{d^i}^i \phi_{d^i}^i \underline{\underline{P}}^{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma}}_{1_m}^i \\ \underline{\underline{\sigma}}_{2_m}^i \\ \vdots \\ \underline{\underline{\sigma}}_{d^i_m}^i \end{bmatrix} dS \\ &= \int_{S^{ik}} \begin{bmatrix} \phi_1^i \phi_1^i \underline{\underline{I}}_3 & \phi_1^i \phi_2^i \underline{\underline{I}}_3 & \cdots & \phi_1^i \phi_{d^i}^i \underline{\underline{I}}_3 \\ \phi_2^i \phi_1^i \underline{\underline{I}}_3 & \phi_2^i \phi_2^i \underline{\underline{I}}_3 & \cdots & \phi_2^i \phi_{d^i}^i \underline{\underline{I}}_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{d^i}^i \phi_1^i \underline{\underline{I}}_3 & \phi_{d^i}^i \phi_2^i \underline{\underline{I}}_3 & \cdots & \phi_{d^i}^i \phi_{d^i}^i \underline{\underline{I}}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{P}}^{ik} \underline{\underline{\sigma}}_{1_m}^i \\ \underline{\underline{P}}^{ik} \underline{\underline{\sigma}}_{2_m}^i \\ \vdots \\ \underline{\underline{P}}^{ik} \underline{\underline{\sigma}}_{d^i_m}^i \end{bmatrix} dS \\ &= (\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{F}}^{ik}) \begin{bmatrix} \underline{\underline{P}}^{ik} \underline{\underline{\sigma}}_{1_m}^i \\ \underline{\underline{P}}^{ik} \underline{\underline{\sigma}}_{2_m}^i \\ \vdots \\ \underline{\underline{P}}^{ik} \underline{\underline{\sigma}}_{d^i_m}^i \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Si se desarrolla a su vez para el instante  $m$  cualquier elemento del vector en (9.20) se tiene

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{P}}^{ik} \underline{\sigma} &= \begin{bmatrix} \omega n_x^{ik} + \omega' n_x^{ik} + \sigma_{xy} n_y^{ik} + \sigma_{xz} n_z^{ik} \\ \omega n_y^{ik} + \omega'' n_y^{ik} + \sigma_{xy} n_x^{ik} + \sigma_{yz} n_z^{ik} \\ \omega n_z^{ik} - \omega' n_z^{ik} - \omega'' n_z^{ik} + \sigma_{xz} n_x^{ik} + \sigma_{yz} n_y^{ik} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left( \frac{\sigma_{xx}}{3} + \frac{\sigma_{yy}}{3} + \frac{\sigma_{zz}}{3} + \frac{2\sigma_{xx}}{3} - \frac{\sigma_{yy}}{3} - \frac{\sigma_{zz}}{3} \right) n_x^{ik} + \sigma_{xy} n_y^{ik} + \sigma_{xz} n_z^{ik} \\ \left( \frac{\sigma_{xx}}{3} + \frac{\sigma_{yy}}{3} + \frac{\sigma_{zz}}{3} - \frac{\sigma_{xx}}{3} + \frac{2\sigma_{yy}}{3} - \frac{\sigma_{zz}}{3} \right) n_y^{ik} + \sigma_{xy} n_x^{ik} + \sigma_{yz} n_z^{ik} \\ \left( \frac{\sigma_{xx}}{3} + \frac{\sigma_{yy}}{3} + \frac{\sigma_{zz}}{3} - \frac{2\sigma_{xx}}{3} + \frac{\sigma_{yy}}{3} + \frac{\sigma_{zz}}{3} + \frac{\sigma_{xx}}{3} - \frac{2\sigma_{yy}}{3} + \frac{\sigma_{zz}}{3} \right) n_z^{ik} + \sigma_{xz} n_x^{ik} + \sigma_{yz} n_y^{ik} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} n_x^{ik} + \sigma_{xy} n_y^{ik} + \sigma_{xz} n_z^{ik} \\ \sigma_{xy} n_x^{ik} + \sigma_{yy} n_y^{ik} + \sigma_{yz} n_z^{ik} \\ \sigma_{xz} n_x^{ik} + \sigma_{yz} n_y^{ik} + \sigma_{zz} n_z^{ik} \end{bmatrix} \\
&= \underline{\underline{\sigma}} n^{ik} = \underline{T}^i, \tag{9.21}
\end{aligned}$$

donde  $\underline{n}^{ik}$  es el vector normal unitario a la superficie  $S^{ik}$  cuyo sentido es del  $i$ -tetraedro al  $k$ -tetraedro y  $\underline{T}^i$  es la contribución de la tracción del  $i$ -tetraedro. De modo que se puede escribir el flujo (9.19) usando la tracción  $\underline{T}^i$  como

$$\begin{aligned}
(\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{F}}^{ik}) \begin{bmatrix} \underline{\underline{P}}^{ik} \underline{\sigma}_m^i \\ \underline{\underline{P}}^{ik} \underline{\sigma}_m^j \\ \vdots \\ \underline{\underline{P}}^{ik} \underline{\sigma}_m^{d^i} \end{bmatrix} &= (\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{F}}^{ik}) \begin{bmatrix} \underline{T}_{1m}^i \\ \underline{T}_{2m}^i \\ \vdots \\ \underline{T}_{d^i m}^i \end{bmatrix} \\
&= (\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{F}}^{ik}) \hat{\underline{T}}_m^i, \tag{9.22}
\end{aligned}$$

de modo que haciendo lo mismo para el segundo componente del flujo en (9.17), se puede escribir el esquema centrado del flujo en función de las tracciones en lugar de los esfuerzos como

$$\frac{1}{2} [(\underline{\underline{P}}^{ik} \otimes \underline{\underline{F}}^{ik}) \hat{\underline{\sigma}}_m^i + (\underline{\underline{P}}^{ik} \otimes \underline{\underline{G}}^{ik}) \hat{\underline{\sigma}}_m^k] = \frac{1}{2} [(\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{F}}^{ik}) \hat{\underline{T}}_m^i + (\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{G}}_{ik}) \hat{\underline{T}}_m^k]. \tag{9.23}$$

Al imponer la continuidad de  $\hat{\underline{T}}_m^i$  a través del elemento de falla  $S^{\Gamma i}$  (i.e.  $\hat{\underline{T}}_m^{ik} = \hat{\underline{T}}_m^i = \hat{\underline{T}}_m^k$ ) y asumiendo el mismo orden de aproximación en los dos tetraedros que comparten al elemento de falla (i.e.  $\underline{\underline{F}}_{ik} = \underline{\underline{G}}_{ik}$ ), se escribe al vector de flujo a través de la falla,  $\hat{\underline{\mathbb{F}}}_m^{\Gamma i}$ , como el vector de tracción único  $\hat{\underline{T}}_m^{ik}$ . De modo que el flujo a través de falla está dado por

$$(\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{G}}^{ik}) \hat{\underline{\mathbb{F}}}_m^{\Gamma i} = (\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{F}}^{ik}) \hat{\underline{T}}_m^{ik}. \tag{9.24}$$

Al sustituir (9.24) en el esquema de velocidad (9.17) y reagrupando los términos que no involucran a la falla en  $\hat{\underline{R}}_m^i$  se tiene

$$\hat{\underline{v}}_{m+\frac{1}{2}}^i = \hat{\underline{v}}_{m-\frac{1}{2}}^i + \hat{\underline{R}}_m^i + \delta^\gamma \frac{\Delta t}{\rho^i} (\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{K}}^i)^{-1} (\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{F}}^{ik}) \hat{\underline{T}}_m^{ik}, \tag{9.25}$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\underline{R}}_m^i &= \frac{\Delta t}{\rho^i} (\underline{I}_3 \otimes \underline{K}^i)^{-1} \left[ - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\underline{M}_\theta \otimes \underline{E}_\theta^i) \hat{\underline{\sigma}}_m^i \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \in N^i \\ \mathcal{T}^i \cap \mathcal{T}^k \not\subseteq \Gamma}} [(\underline{P}^{ik} \otimes \underline{F}^{ik}) \hat{\underline{\sigma}}_m^i + (\underline{P}^{ik} \otimes \underline{G}^{ik}) \hat{\underline{\sigma}}_m^k] \right]. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Debido a que el esfuerzo normal a la falla determina la fuerza de fricción vía (8.8) y el esfuerzo cizallante a las condiciones (8.5) y (8.6), resulta conveniente descomponer al vector tracción  $\hat{\underline{T}}_m^{ik}$  en sus componentes tangencial,  $\hat{\underline{T}}_{T_m}^{ik}$ , y normal,  $\hat{\underline{T}}_{N_m}^{ik}$ , para finalmente reescribir el esquema de velocidad (9.25) como

$$\hat{\underline{v}}_{m+\frac{1}{2}}^i = \hat{\underline{v}}_{m-\frac{1}{2}}^i + \hat{\underline{R}}_m^i + \delta^\gamma \frac{\Delta t}{\rho^i} (\underline{I}_3 \otimes \underline{K}^i)^{-1} (\underline{I}_3 \otimes \underline{F}^{ik}) (\hat{\underline{T}}_{T_m}^{ik} + \hat{\underline{T}}_{N_m}^{ik}). \quad (9.27)$$

### 9.1.1. Flujos a través de la falla para el esquema de las velocidades

Para actualizar las velocidades sobre  $\Gamma$ , se deben especificar los flujos a través de la falla en (9.27). Con este objeto, se deben calcular  $\hat{\underline{T}}_{T_m}^{ik}$  tal que las condiciones de salto (8.5) y (8.6) se satisfagan, y  $\hat{\underline{T}}_{N_m}^{ik}$  garantizando la continuidad de la velocidad normal a la falla (condición (8.7)). Todas las condiciones a las tracciones deben ser verificadas en cada nodo de falla y para cada paso de tiempo.

A partir de este momento se asumirá que  $S_{i\Gamma} \neq \emptyset$  tal que  $\delta_\Gamma = 1$  en (9.27), donde el  $i$ - y  $k$ -tetraedros se encuentran en el lado positivo y en el lado negativo de  $\Gamma$  respectivamente. Entonces se define  $\underline{V}^{ik}$  como la discontinuidad en la velocidad sobre el fragmento de  $\Gamma$  que comparte el  $i$ -tetraedro con el  $k$ -tetraedro. Para calcular las tracciones tangenciales de falla,  $\hat{\underline{T}}_{T_m}^{ik}$ , cuando la desigualdad de la condición de salto (8.5) es estricta<sup>1</sup>

$$\hat{\tau}_c - \|\hat{\underline{T}}_T^{ik}\| > 0, \quad (9.29)$$

y usando el módulo sobre la condición (8.6) se tiene

$$\begin{aligned} \|\hat{\tau}_c \hat{\underline{V}}_T^{ik} - \hat{\underline{T}}_T^{ik}\| \|\hat{\underline{V}}_T^{ik}\| &= 0 \\ \text{donde } \|\hat{\underline{V}}_T^{ik}\| &= [ \|\underline{V}_{T_1}^{ik}\| \quad \|\underline{V}_{T_2}^{ik}\| \quad \cdots \quad \|\underline{V}_{T_{d^i}}^{ik}\| ]' \\ \hat{\tau}_c \|\hat{\underline{V}}_T^{ik}\| - \|\hat{\underline{T}}_T^{ik}\| \|\hat{\underline{V}}_T^{ik}\| &= 0 \\ (\hat{\tau}_c - \|\hat{\underline{T}}_T^{ik}\|) \|\hat{\underline{V}}_T^{ik}\| &= 0 \end{aligned}$$

Como se tiene que (9.29) entonces

$$\hat{\underline{V}}_T^{ik} = 0, \quad (9.30)$$

que implica que mientras  $\|\hat{\underline{T}}_T^{ik}\|$  permanezca por debajo de la fuerza de fricción,  $\tau_c$ , la tracción tangencial debe asegurar la continuidad de las velocidades tangencial en cada nodo de falla compartido

<sup>1</sup>Se están agrupando las fuerzas de fricción de los nodos de falla de la misma forma en que se agrupan vectores y usando la notación del circunflejo

$$\hat{\tau}_c = [ (\tau_c)_1 \quad (\tau_c)_2 \quad \cdots \quad (\tau_c)_{d^i} ]'. \quad (9.28)$$

entre los  $i$ - y  $k$ -tetraedros.

Como lo anterior concierne únicamente a los nodos de falla, se debe construir la matriz  $\underline{\underline{K}}^{i\Gamma^{-1}}$  como la inversa de la matriz de masa cuyas componentes dependen exclusivamente a los nodos de falla. Esta se construye simplemente a partir de  $\underline{\underline{K}}^{i\Gamma^{-1}}$  al eliminar las filas y columnas asociadas con los nodos que no pertenecen a la falla.

Para calcular  $\hat{\underline{T}}_{T_m}^{ik}$  de acuerdo a la condición (9.30) se requiere que los tetraedros que comparten el mismo segmento de falla tengan el mismo orden, para que los nodos en ambos lados de la falla coincidan entre sí. Además de esto, para el cómputo de  $\hat{\underline{T}}_{T_m}^{ik}$ , se requiere calcular las integrales de volumen y de superficie de  $\underline{\underline{K}}^{i\Gamma^{-1}}$  y  $\underline{\underline{F}}^{ik}$ , respectivamente, en un elemento estándar (*Zienkiewicz et al.*, 2005) tal que

$$\underline{\underline{K}}^{i\Gamma^{-1}} = \frac{1}{V^i} \underline{\underline{K}}^{e\Gamma^{-1}} \quad \underline{\underline{F}}^{ik} = S^{ik} \underline{\underline{F}}^e, \quad (9.31)$$

donde  $V^i$ , el volumen del  $i$ -tetraedro, y  $S^{ik}$ , la superficie de falla del  $i$ -tetraedro, son los correspondientes Jacobianos. Entonces al sustituir (9.27) en la definición (8.2) y usando (9.31), se puede escribir al vector de velocidad de deslizamiento como

$$\begin{aligned} \hat{\underline{V}}_{T_{m+\frac{1}{2}}}^{ik} &:= \hat{\underline{v}}_{T_{m+\frac{1}{2}}}^i - \hat{\underline{v}}_{T_{m+\frac{1}{2}}}^k \\ &= \hat{\underline{v}}_{T_{m-\frac{1}{2}}}^i + \hat{\underline{R}}_{T_m}^i + \frac{\Delta t S^{ik}}{\rho^i V^i} (\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{K}}^{e\Gamma})^{-1} (\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{F}}^e) \hat{\underline{T}}_{T_m}^{ik} \\ &\quad - \hat{\underline{v}}_{T_{m-\frac{1}{2}}}^k - \hat{\underline{R}}_{T_m}^k - \frac{\Delta t S^{ki}}{\rho^k V^k} (\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{K}}^{e\Gamma})^{-1} (\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{F}}^e) \hat{\underline{T}}_{T_m}^{ki} \\ &\quad \text{Como } S^{ik} = S^{ki} \text{ y } \hat{\underline{T}}_{T_m}^{ik} = -\hat{\underline{T}}_{T_m}^{ki} \\ &= \hat{\underline{V}}_{T_{m-\frac{1}{2}}}^{ik} + \hat{\underline{R}}_{T_m}^i - \hat{\underline{R}}_{T_m}^k + \Delta t S^{ik} \left( \frac{1}{\rho^i V^i} + \frac{1}{\rho^k V^k} \right) (\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{K}}^{e\Gamma})^{-1} (\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{F}}^e) \hat{\underline{T}}_{T_m}^{ik} \end{aligned} \quad (9.32)$$

Para finalmente poder calcular la tracción tangencial, se usa la condición (9.30) en (9.32) para obtener la siguiente expresión

$$\hat{\underline{T}}_{T_m}^{ik} = \left( \frac{\rho^i \rho^k V^i V^k}{\Delta t S^{ik} (\rho^i V^i + \rho^k V^k)} \right) (\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{F}}^e)^{-1} (\underline{\underline{I}}_3 \otimes \underline{\underline{K}}^{e\Gamma}) \left( -\hat{\underline{V}}_{T_{m-\frac{1}{2}}}^{ik} - \hat{\underline{R}}_{T_m}^i + \hat{\underline{R}}_{T_m}^k \right). \quad (9.33)$$

Este procedimiento asegura la continuidad de la velocidad tangencial a través de la falla. Sin embargo, si la fuerza de fricción,  $\tau_{c_m}$ , es superada por el módulo de la tracción tangencial,  $\|\hat{\underline{T}}_{T_m}^{ik}\|$ , la ruptura debe ocurrir y la velocidad tangencial ya no será continua en el nodo de falla asociado. En ese caso, la igualdad de la condición (8.5) se mantiene tal que

$$\tau_{c_m} - \|\hat{\underline{T}}_{T_m}^{ik}\| = 0 \Leftrightarrow \|\hat{\underline{T}}_{T_m}^{ik}\| = \tau_{c_m}.$$

Por lo tanto, para calcular la velocidad de deslizamiento (9.32) en cada nodo de falla y para cada paso de tiempo, la tracción tangencial es ajustada de acuerdo al siguiente criterio, dependiendo si el nodo de falla ha roto o no

$$\underline{\underline{T}}_{T_m}^{ik} = \begin{cases} \hat{\underline{T}}_{T_m}^{ik} & \text{si } \|\hat{\underline{T}}_{T_m}^{ik}\| < \tau_{c_m}, \\ \frac{\hat{\underline{T}}_{T_m}^{ik}}{\|\hat{\underline{T}}_{T_m}^{ik}\|} \tau_{c_m} & \text{si } \|\hat{\underline{T}}_{T_m}^{ik}\| \geq \tau_{c_m}. \end{cases} \quad (9.34)$$

Como los nodos dentro de un elemento de falla están acoplados a través de la matriz de flujo,  $\underline{\underline{F}}^{ik}$ , y la matriz de masa,  $\underline{\underline{K}}^{e\Gamma}$ , cuando un nodo rompe y la condición (9.34) se aplica, las tracciones de los

nodos restantes cambian en el mismo paso de tiempo. Por lo tanto, para cumplir con (9.34) de forma simultánea en cada nodo de falla, *i.e.* para una correcta propagación de la ruptura en los elementos de falla, se usa un esquema iterativo *predictor-corrector* (PC). Si  $n_{\text{falla}}$  es el número de nodos en un elemento de falla dado (*i.e.* seis para elementos P2) y  $n_{\text{rotos}}$  es el número de nodos que han roto, entonces el esquema PC opera sólo si  $0 < n_{\text{rotos}} < n_{\text{falla}}$ . El esquema PC calcula las tracciones tangenciales,  $\underline{T}_{T_m}^{ik}$  en aquellos nodos que no han roto dada la condición de frontera aplicada en los nodos que han roto para el mismo paso de tiempo. Por lo tanto, este procedimiento sólo incumbe aquellos elementos que comparten la misma porción de superficie de falla.

Este esquema PC es simple y converge rápidamente: cuando un nodo de falla rompe en un elemento dado, el módulo de la tracción tangencial se ajusta al valor de la fuerza de fricción (condición (9.34)). Una vez aplicada esta condición, las tracciones tangencial predecidas  $\underline{T}_{T_m}^{ik}$  en aquellos nodos que no rompieran del mismo elemento deben ser recalculadas con (9.33). Con este propósito, una nueva matriz  $\underline{K}_{\text{sanos}}^{e\Gamma}$  se debe construir considerando únicamente aquellos nodos que no han roto mientras que para los nodos que han roto se fija su tracción tangencial como conocida. Si la magnitud de las nuevas tracciones predecidas superan la fuerza de fricción, entonces se corrigen fijando su valor al de  $\tau_{c_n}$ . Este ciclo de actualizaciones continua de forma iterativa a través de nuevas predicciones y correcciones hasta que ningún otro nodo del elemento rompe después de la anterior corrección. El máximo número de posibles iteraciones está dado por el orden de aproximación, *i.e.* DOF, usado en los elementos de falla, y siempre será menor que  $n_{\text{falla}}$  (*i.e.* seis o menos iteraciones para elementos P2). El procedimiento PC tiene que aplicarse localmente en cada elemento de la superficie de falla. Es una verificación iterativa eficiente de las condiciones de frontera y representa una razón adicional para preservar bajos órdenes de interpolación, aproximaciones P2, en los tetraedros que comparten la falla.

Como los esquemas GD no imponen la continuidad de los campos entre dos tetraedros adyacentes, y la precisión de nuestro método depende del tratamiento especial sobre las velocidades en la falla, entonces se debe poner atención en las tracciones normales a la falla de la misma forma en que se hizo para las tracciones tangenciales. A continuación se deducirá una fórmula para calcular la tracción normal,  $\underline{T}_{N_m}^{ik}$ , que asegura la continuidad del campo de velocidades normal a la falla. Esta restricción está dada por la condición de salto (8.7).

De la misma forma en que se calculó la velocidad de deslizamiento (9.33), la definición (8.3) puede desarrollarse como

$$\begin{aligned} \underline{\hat{V}}_{N_{m+\frac{1}{2}}}^{ik} &:= \underline{\hat{v}}_{N_{m+\frac{1}{2}}}^i - \underline{\hat{v}}_{N_{m+\frac{1}{2}}}^k \\ &= \underline{\hat{V}}_{N_{m-\frac{1}{2}}}^{ik} + \underline{\hat{R}}_{N_m}^i - \underline{\hat{R}}_{N_m}^k + \Delta t S^{ik} \left( \frac{1}{\rho^i V^i} + \frac{1}{\rho^k V^k} \right) (\underline{I}_3 \otimes \underline{K}^{e\Gamma})^{-1} (\underline{I}_3 \otimes \underline{\mathcal{F}}^e) \underline{\hat{T}}_{N_m}^{ik} \end{aligned} \quad (9.35)$$

Una vez usando la condición (8.7) para forzar la continuidad de la velocidad normal, entonces se define la tracción normal a la falla como

$$\underline{\hat{T}}_{N_m}^{ik} = \left( \frac{\rho^i \rho^k V^i V^k}{\Delta t S^{ik} (\rho^i V^i + \rho^k V^k)} \right) (\underline{I}_3 \otimes \underline{\mathcal{F}}^e)^{-1} (\underline{I}_3 \otimes \underline{K}^{e\Gamma}) \left( -\underline{\hat{V}}_{N_{m-\frac{1}{2}}}^{ik} - \underline{\hat{R}}_{N_m}^i + \underline{\hat{R}}_{N_m}^k \right), \quad (9.36)$$

a partir de la cual se calcula el esfuerzo normal en cada nodo de la falla por

$$\sigma_{N_m} = \underline{T}_{N_m}^{ik} \cdot \underline{n}. \quad (9.37)$$

La fuerza de fricción,  $\tau_{c_m}$ , puede ahora calcularse de forma nodal usando (8.8) como función tanto de  $\sigma_{N_m}$  como del coeficiente de fricción,  $\mu_m$ , que depende a su vez del deslizamiento en la falla,  $U_m$  (8.4), a través de la ley de fricción (8.9).



### 9.1.2. Flujos a través de la falla para el esquema de los esfuerzos

Para actualizar los esfuerzos se requiere únicamente su estado anterior y el campo de velocidades calculado un medio paso de tiempo antes, ver (9.18). Como el campo de velocidades puede ser discontinuo en su componente tangencial sobre  $\Gamma$  entonces el flujo de esquemas centrados no puede ser utilizado. Es por esto que para calcular el flujo a través de  $\Gamma$  del  $i$ -tetraedro para el esquema de los esfuerzos,  $\hat{\underline{G}}_{m+\frac{1}{2}}^{\Gamma i}$ , se utiliza únicamente el campo de velocidades en ese tetraedro, de modo que está dado por

$$\hat{\underline{G}}_{m+\frac{1}{2}}^{\Gamma i} = (\underline{\underline{P}}_{ik})^T \underline{\underline{v}}_{m+\frac{1}{2}}^i. \quad (9.38)$$

Cabe señalar que para el componente normal se sigue utilizando un esquema centrado pero como este es continuo por la condición (8.7) impuesta en el cálculo de la tracción normal (9.36), basta con tomar únicamente el campo de velocidades del tetraedro que se esté actualizando. Este flujo fue propuesto por *Benjema et al.* (2009) para elementos P0, el cual lo obtuvo a través de un balance de energía. Este resultado es esperado debido a que los flujos siguiendo un esquema centrado son conservativos (*Hesthaven y Warburton*, 2008).

## Capítulo 10

# Artículo: 3D hp-Adaptive Discontinuous Galerkin Method for Modeling Earthquake Dynamics

**NOTA:** El artículo que se presenta a continuación sigue el formato requerido para su publicación. De modo que cuenta con su propia bibliografía y las referencias de las ecuaciones y figuras son con respecto al cuerpo del mismo. En el artículo se obvian los pasos detallados en los capítulos anteriores de la segunda parte de la tesis. Se incluyen la verificación y los análisis de convergencia y eficiencia del esquema propuesto. Finalmente se incluye un análisis sobre el sismo Landers de 1992.

### 10.1. Resumen

Se introduce un nuevo esquema, llamado DGCrack, para simular la dinámica de ruptura de terremotos en tres dimensiones (3D) sobre un método Galerkin Discontinuo hp- adaptativo. Este resuelve la forma débil de la formulación velocidades-esfuerzos de las ecuaciones elastodinámicas sobre mallas tetraédricas no estructuradas con posibles refinamientos de la malla (h- adaptividad) y con elección local sobre los órdenes de aproximación (p- adaptividad).

El esquema DGCrack considera elementos de falla de segundo orden (P2) donde las condiciones de frontera para la dinámica de la ruptura se verifican a través de flujos *ad hoc* a través de la falla. Para modelar la ley de Coulomb del rozamiento dependiente del deslizamiento, se introduce un esquema predictor-corrector para estimar las tracciones cizallantes de falla, además de aplicar un tratamiento especial a las tracciones normales que garantiza la continuidad de las velocidades normales de falla.

Se verifica el esquema DGCrack al compararlo con varios métodos para dos *benchmarks* de ruptura espontánea y se encontraron excelentes resultados (i.e. errores cuadráticos medios para los tiempos de ruptura menores al 1%) usando uno o más elementos de falla sobre la zona de cohesión. Para hacer la comparación clara, se introduce una metodología basada en medidas de correlación cruzada que proveen una forma simplificada para cuantificar similitudes entre diferentes soluciones. Uno de los *benchmarks* consiste de una falla normal con un ángulo de buzamiento de 60° que alcanza la superficie libre. El método DGCrack revela tener tasas de convergencia similares a las de métodos de referencia y una eficiencia numérica significativamente mayor que la obtenida por aproximaciones similares de Galerkin Discontinuo.

Finalmente se aplica el método al terremoto de Landers en un medio estratificado considerando condiciones de esfuerzos iniciales heterogéneas y usando una malla adaptada. Los resultados muestran que los modelos dinámicos previamente propuestos para el terremoto de Landers requiere una reevaluación en término de las condiciones iniciales de los esfuerzos.

# 3D hp-Adaptive Discontinuous Galerkin Method for Modeling Earthquake Dynamics

J. Tago<sup>1</sup>, V. M. Cruz-Atienza<sup>1</sup>, J. Virieux<sup>2</sup>, V. Etienne<sup>3</sup>, and F. J.

Sánchez-Sesma<sup>4</sup>

---

J. Tago, Instituto de Geofísica, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito de la Investigación Científica s/n, México, D.F. 04510, Mexico. (josue.tago@gmail.com)

V. M. Cruz-Atienza, Instituto de Geofísica, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito de la Investigación Científica s/n, México, D.F. 04510, Mexico.

J. Virieux, Institut des Sciences de la Terre, Université Joseph Fourier, 38041 Grenoble Cedex 9, France.

V. Etienne, Géoazur, Université de Nice-Sophia Antipolis, 06108 Nice Cedex 02, France.

F. J. Sánchez-Sesma, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito de la Investigación Científica s/n, México, D.F. 04510, Mexico.

<sup>1</sup>Instituto de Geofísica, Universidad Nacional Autónoma, D.F., Mexico.

<sup>2</sup>Institut des Sciences de la Terre, Université Joseph Fourier, Grenoble, France.

<sup>3</sup>Géoazur, Univeristé de Nice-Sophia Antipolis, Nice, France.

**Abstract.** We introduce a novel scheme, DGCrack, to simulate dynamic rupture of earthquakes in three dimensions based on an hp-adaptive discontinuous Galerkin method. We solve the velocity-stress weak formulation of elastodynamic equations on an unstructured tetrahedral mesh with arbitrary mesh refinements (h-adaptivity) and local approximation orders (p-adaptivity). Our scheme considers second-order fault elements (P2) where dynamic-rupture boundary conditions are enforced through *ad hoc* fluxes across the fault. To model the Coulomb slip-dependent friction law, we introduce a predictor-corrector scheme for estimating shear fault tractions, in addition to a special treatment of the normal tractions that guarantees the continuity of fault normal velocities. We verify the DGCrack by comparison with several methods for two spontaneous rupture tests and find excellent agreement (*i.e.* rupture times RMS errors smaller than 1.0%) provided that one or more fault elements resolve the fault cohesive zone. For a quantitative comparison, we introduce a methodology based on cross-correlation measurements that provide a simple way to quantify the similarity between solutions. Our verification tests include a 60° dipping normal fault reaching the free surface. The DGCrack method reveals convergence rates close to those of well-established methods and a numerical efficiency significantly higher than that of similar

---

<sup>4</sup>Instituto de Ingeniería, Universidad

Nacional Autónoma, D.F., Mexico.

discontinuous Galerkin approaches. We apply the method to the 1992 Landers-earthquake fault system in a layered medium, considering heterogeneous initial stress conditions and mesh adaptivities. Our results show that previously proposed dynamic models for the Landers earthquake require a reevaluation in terms of the initial stress conditions that take account of the intricate fault geometry.

## 1. Introduction

The availability of high-quality near-field records of large subduction earthquakes in the last few years makes it possible to test and validate physics-based rupture models. The development of sophisticated models to explain such aggregate of observations is now largely justified. Huge efforts have been made by the seismological community in the last ten years to overcome technical limitations preventing most methods for dynamic rupture calculations from integrating the effect of fault geometry in the spontaneous rupture of earthquakes. Because of both its simplicity and efficiency, the finite difference (FD) method has been one of the first and most persistent approaches to simulate rupture dynamics along planar faults [*e.g.* Andrews, 1976; Madariaga, 1976; Miyatake, 1980; Day, 1982; Virieux and Madariaga, 1982; Harris and Day, 1993; Madariaga et al., 1998; Peyrat et al., 2001; Day et al., 2005; Dalguer and Day, 2007]. Although different strategies have been proposed in recent years to integrate complex fault geometries into such methods [*Cruz-Atienza and Virieux, 2004; Kase and Day, 2006; Cruz-Atienza et al., 2007; Kozdon et al., 2012*], most common approaches handle numerical lattices (meshes) that are adaptable to the problem geometry (*i.e.* fault geometry). One set of methods is based on well established boundary integral equations (BIE), [*e.g.* Das and Aki, 1977; Andrews, 1985; Cochard and Madariaga, 1994; Kame and Yamashita, 1999; Aochi et al., 2000; Lapusta et al., 2000; Hok and Fukuyama, 2011]. However, since these methods discretize only boundaries and require semi-analytical approximations of Green functions, they have difficulties integrating heterogeneities of the bulk properties into which the fault is embedded. The other set consists of domain methods based on weak formulations of the

elastodynamic equations, and can be separated into two subgroups depending on how the lattice boundaries are treated. On one hand the continuous finite element methods (FEM), whose formulations require continuity between the mesh elements except where special treatments of boundary conditions are imposed [*e.g.* *Oglesby and Day*, 2001; *Ampuero*, 2002; *Festa and Vilotte*, 2006; *Ma and Archuleta*, 2006; *Kaneko et al.*, 2008; *Ely et al.*, 2009; *Barall*, 2009]. On the other, the discontinuous finite element methods, better known as the discontinuous Galerkin (DG) methods, which only consider fluxes between elements and, therefore, do not impose any field continuity across their boundaries.

When studying the earthquakes source physics, the discontinuity produced across the fault by the rupture process must be accurately treated, so that the DG strategy is naturally suitable for tackling this problem.

The first dynamic rupture model based on a DG approach was introduced in two dimensions (2D) by *Benjemma et al.* [2007] for low-order (P0) interpolation functions. In this case, where the basis functions are constants, the DG schemes are also known as finite volume (FV) methods [*LeVeque*, 2002] and provide computationally efficient algorithms that are as fast as second order FD schemes (*i.e.* they are equivalent in efficiency on rectangular meshes). However, the extension to three dimensions (3D) of this model [*Benjemma et al.*, 2009] revealed convergence problems for unstructured tetrahedral grids (*e.g.* non-planar faults) [*Tago et al.*, 2010]. On these irregular grids, P0 elements have zero-order convergence for wave propagation modeling due to the centered flux approximation [*Brossier et al.*, 2009; *Remaki et al.*, 2011], so increasing the element interpolation order to achieve a proper numerical convergence of wave propagation with a DG scheme is mandatory. Nevertheless, in practice, high-order convergence rates are not clearly ob-



served for the dynamic-rupture numerical problem (*i.e.* 4th order or higher), and second order interpolation methods are often the most accurate and efficient approximations for applying the corresponding fault boundary conditions [*Cruz-Atienza et al.*, 2007; *Moczo et al.*, 2007; *Rojas et al.*, 2009; *Kozdon et al.*, 2012]. A notable case for which the convergence rate is essentially insensitive to increments in the interpolation order is the ADER-DG discontinuous Galerkin method for 2D and 3D geometries by *de la Puente et al.* [2009] and *Pelties et al.* [2012], respectively, despite its spectral convergence for the wave propagation problem [*Dumbser and Kaser*, 2006]. The ADER-DG is based on a modal interpolation formulation, instead of the nodal interpolation we consider here. Both formulations are mathematically equivalent but computationally different [*Hesthaven and Warburton*, 2008]. Our choice of using the nodal approximation essentially relies on the fact that the evaluation of fluxes requires fewer computations than in a modal scheme, as we shall explain on Section 4.1.

In this work we introduce a novel discontinuous Galerkin approach, namely the DGCrack method, to model the dynamic rupture of earthquakes in 3D geometries. The numerical platform of our model is the GeoDG3D parallel code [*Etienne et al.*, 2010] developed for the elastic wave propagation. For the parallel implementation it uses the Message Passing Interface (MPI) and achieves  $\sim 80\%$  strong scalability. GeoDG3D accounts for free surface boundary conditions along arbitrary topographies, and includes Convolutional Perfectly Matching Layer (CPML) absorbing boundary conditions at the external edges of the physical domain [*Etienne et al.*, 2010, and references therein]. Furthermore, intrinsic attenuation has been recently introduced into GeoDG3D via the rock quality  $Q$  [*Tago et al.*, 2010], but will not be discussed in the present work. To maximize both the

efficiency and the accuracy of the scheme depending on the model properties and geometry, the method handles unstructured mesh refinements (*i.e.* h-adaptivity) and locally adapts the order of the nodal interpolations (*i.e.* within every grid element; p-adaptivity) [Etienne *et al.*, 2010].

We first introduce the mathematical and computational concepts for the 3D dynamic rupture problem, and then assess both its accuracy and convergence rate by comparing calculated solutions with those yielded by finite difference (DFM), finite element (FEM), spectral boundary integral (MDSBI) and spectral element (SPECFEM3D) methods for two spontaneous rupture benchmark tests [Harris *et al.*, 2009]. Since one of our major goals in the near future is the investigation of dynamic rupture propagation along realistic (nonplanar) fault geometries, we take special care to verify the accuracy of the normal stress field across the fault during rupture propagation, as the fault normal tractions strongly determine the radiated energy throughout the Coulomb failure criterion. We finally illustrate the capabilities of the DGCrack method through a spontaneous rupture simulation along the 1992 Landers earthquake fault system, which is a geometrically intricate and physically interesting study case.

## 2. Elastodynamic Equations

Velocities and stresses induced by the propagation of waves in a homogeneous elastic medium can be modeled with a first order hyperbolic system [Madariaga, 1976]. Following the transformation proposed by Benjema *et al.* [2009], a pseudo-conservative form of the

system is given by

$$\begin{aligned}\rho\partial_t\vec{v} &= \sum_{\theta\in\{x,y,z\}} \partial_\theta(\mathcal{M}_\theta\vec{\sigma}) \\ \Lambda\partial_t\vec{\sigma} &= \sum_{\theta\in\{x,y,z\}} \partial_\theta(\mathcal{N}_\theta\vec{v}),\end{aligned}\tag{1}$$

where  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$  is the velocity vector and  $\vec{\sigma} = (\omega, \omega', \omega'', \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})^T$ . To avoid physical properties on the right hand side of (1), a change of variables is applied to the stress vector leading to its first three components

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \\ \omega' &= \frac{1}{3}(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}) \\ \omega'' &= \frac{1}{3}(-\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy} - \sigma_{zz}),\end{aligned}\tag{2}$$

which involve the mean and the deviatoric stresses.

In this model, the physical properties of the medium are the density,  $\rho$ , and the medium matrix  $\Lambda = \text{diag}(3/(3\lambda + 2G), 3/(2G), 3/(2G), 1/G, 1/G, 1/G)$  which is composed of the Lamé parameters  $\lambda$  and  $G$ . The terms  $\mathcal{M}_\theta$  and  $\mathcal{N}_\theta$  are constant real matrices whose definition can be seen in Appendix B.

## 2.1. hp-Adaptive Discontinuous Galerkin Scheme

To construct the local approximation of the hyperbolic system (1), we first decompose the domain  $\Omega$  into  $K$  elements, such that

$$\Omega \simeq \Omega_h = \sum_{i=1}^K D_i,\tag{3}$$

where each  $D_i$  is a straight-sided tetrahedron and the mesh (*i.e.* decomposed domain) is assumed to be geometrically conforming. By applying a Discontinuous Galerkin approach to the weak formulation of (1) as proposed by *Etienne et al.* [2010], we obtain the following

velocity-stress iterative scheme in every  $i$ -tetrahedron,

$$\rho_i(\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i) \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\mathcal{M}_\theta \otimes \mathcal{E}_{i\theta}) \vec{\sigma}_i^n + \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} [(\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{F}_{ik}) \vec{\sigma}_i^n + (\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{G}_{ik}) \vec{\sigma}_k^n] \quad (4)$$

$$(\Lambda_i \otimes \mathcal{K}_i) \frac{\vec{\sigma}_i^{n+1} - \vec{\sigma}_i^n}{\Delta t} = - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\mathcal{N}_\theta \otimes \mathcal{E}_{i\theta}) \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} [(\mathcal{Q}_{ik} \otimes \mathcal{F}_{ik}) \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + (\mathcal{Q}_{ik} \otimes \mathcal{G}_{ik}) \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}], \quad (5)$$

where the superscript  $n$  indicates the time step,  $N_i$  is the group of adjacent elements to the  $i$ -tetrahedron and  $\otimes$  represents the tensor product. The matrices involved are the mass matrix,  $\mathcal{K}_i$ , the stiffness matrices,  $\mathcal{E}_{i\theta}$ , for all  $\theta \in \{x, y, z\}$ , the flux matrices,  $\mathcal{F}_{ik}$  and  $\mathcal{G}_{ik}$ , and the auxiliary flux matrices,  $\mathcal{Q}_{ik}$  and  $\mathcal{P}_{ik}$ . A derivation of the numerical scheme and the matrices definition can be found in Appendix A. The size of these matrices depends on the order of the polynomial basis (*e.g.* P0, P1, P2,  $\dots$ , Pk) used for the nodal interpolation. Staggered time integration is done through a second-order explicit leap-frog scheme, which allows the alternation of velocities and stresses computation.

One of the main features of this scheme is the h-adaptivity, which allows working with unstructured tetrahedral meshes and thus to adapt the mesh geometry to both the physical properties of the medium and the problem geometry (*i.e.* mesh refinement). Furthermore, the p-adaptivity is possible thanks to the fluxes between neighboring elements, which are such that two adjacent tetrahedra may have different interpolation orders. The fluxes are computed via a non-dissipative centered scheme that allows choosing different degrees of freedom (DOF) in every tetrahedron. As shown by *Etienne et al.* [2010], the p-adaptivity is a powerful tool for the optimization of the domain discretization by adapting the element order to the medium waves speed. Our scheme includes finite volume approximation

orders, P0 (*i.e.* constant functions), linear interpolation functions, P1, and quadratic interpolation functions, P2. *Etienne et al.* [2010] have shown that this scheme is efficient and accurate enough for modeling wave propagation in large domains and in highly heterogeneous elastic media. The accuracy for P2 elements with unstructured tetrahedral meshes is achieved with 3 tetrahedra per minimum wavelength, which is comparable with the 5 gridpoints required by the fourth-order staggered-grid finite-difference method [Levander, 1988], while the stability is determined with an heuristic criterion proposed by *Kaser and Dumbser* [2008] expressed as

$$\Delta t < \min_i \left( \frac{1}{2k_i + 1} * \frac{2r_i}{v_{p_i}} \right),$$

where  $r_i$  is the radius of the sphere inscribed in the element indexed by  $i$ ,  $v_{p_i}$  is the P-wave velocity in the element and  $k_i$  is the polynomial degree used in the element.

The distribution of interpolation orders in the computational domain is such that P0 elements describe the CPML slab while elements with both P1 and P2 approximations discretize the physical domain depending on their sizes. This enhances the accuracy of the scheme and minimizes the computational load. Current computational developments will allow us in the near future to consider higher interpolation orders away from the rupture zone for large-distance wave propagation.

### 3. Dynamic Rupture Model

Earthquakes are highly nonlinear phenomena produced by sliding instabilities along geological faults. The stability of the rupture system depends on several physical factors, like the initial state of stresses in the earth, the material properties and rheology, the sliding rate, the fault geometry, and the constitutive relationship governing the mechanics

of the rupture surface. During rupture propagation, fault tractions evolve dynamically depending on all these factors, and the accuracy of an earthquake model strongly depends on the correctness of boundary conditions applied to these tractions in accordance with the fault constitutive relationship (*i.e.* friction law), which in turn depends on the accurate energy transportation through elastic waves in the medium. Insuring the accuracy of both boundary conditions (local feature) and wave propagation (global feature) has longly been a difficult task for many seismologists. In the next sections, we shall introduce both the fault boundary conditions and the friction law used in our dynamic source model and then its formulation into the DG scheme. In spite of the attention they deserve, we will not discuss the features of wave propagation in this study since they have been previously analyzed by *Etienne et al.* [2010] and *Tago et al.* [2010].

### 3.1. Boundary Conditions and Friction Law

The fault,  $\Gamma$ , is a piecewise discretized surface with a directed normal vector  $\vec{n}$ , such that each side of each surface element is clearly identified. Slip and stresses over  $\Gamma$  are related through a friction law in such a way that the fault tangential tractions evolve according to that law, which in turn depends, for instance, on some fault kinematic parameter (*i.e.* slip and slip rate) and wave propagation in the surroundings of the rupture tip. On the other hand, the strain field is accommodated, in the elastic medium, through displacement (*i.e.* velocity) discontinuities across  $\Gamma$ . It is thus convenient to split our domain into a plus- and a minus-side with respect to the fault (Figure 1) and express the limiting velocity field,  $\vec{v}$ , over  $\Gamma$  as

$$\vec{v}^{\pm}(t, \vec{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \vec{v}(t, \vec{x} \pm \epsilon \vec{n}(\vec{x})) \quad \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Furthermore, we define the normal and tangential components of  $\vec{v}^\pm$  with respect to  $\vec{n}$  as

$$\vec{v}_N^\pm = (\vec{n} \cdot \vec{v}^\pm) \vec{n}$$

$$\vec{v}_T^\pm = \vec{v}^\pm - \vec{v}_N^\pm = \vec{v}^\pm - (\vec{n} \cdot \vec{v}^\pm) \vec{n}.$$

Now we can define the vector  $\vec{V}$  as the velocity discontinuity across  $\Gamma$ , where its fault tangential component, namely the fault slip rate, is

$$\vec{V}_T := \llbracket \vec{v}_T \rrbracket = \vec{v}_T^+ - \vec{v}_T^-, \quad (6)$$

and its fault normal component is

$$\vec{V}_N := \llbracket \vec{v}_N \rrbracket = \vec{v}_N^+ - \vec{v}_N^-. \quad (7)$$

The slip magnitude at any time  $t$  is thus defined as the integral of the modulus of  $\vec{V}_T$  over time given by

$$U(t) = \int_0^t \|\vec{V}_T(s, \vec{x})\| ds. \quad (8)$$

The dynamic rupture boundary conditions on the fault are the following two jump conditions, involving the tangential fields [*Day et al.*, 2005],

$$\tau_c - \|\vec{T}_T\| \geq 0 \quad (9)$$

$$\tau_c \vec{V}_T - \vec{T}_T \|\vec{V}_T\| = 0, \quad (10)$$

and a third jump condition applied to (7)

$$\vec{V}_N = 0, \quad (11)$$

where  $\vec{T}_T$  is the fault tangential traction vector and  $\tau_c$  is the fault frictional strength. The fault strength is determined by the Coulomb friction law, which depends on the fault normal stress (with negative values for compression),  $\sigma_N$ , the friction coefficient,  $\mu$ , and

the fault cohesion,  $C$ , as

$$\tau_c = C - \sigma_N \mu. \quad (12)$$

Condition (9) provides an upper bound to the magnitude of  $\vec{T}_T$  to the fault strength,  $\tau_c$ , that always acts opposite to sliding on  $\Gamma$ . The second condition (10) forces the slip rate to be parallel to  $\vec{T}_T$ , the tangential traction. Another implication of these jump conditions is that, whenever the inequality of (9) holds, the slip rate vector is zero, which can be easily seen through the modulus of (10). Finally, condition (11) implies that there is neither fault opening nor mass interpenetration across the fault during rupture propagation.

In nature, the friction coefficient depends on the fault slip, slip rate and state variables accounting for the sliding history and fault age [*e.g.* Dieterich, 1979; Ruina, 1983]. However, we shall assume a simple slip weakening law [Ida, 1972; Palmer and Rice, 1973], which makes  $\mu$  linearly depend on the slip as

$$\mu(U) = \mu_d + (\mu_s - \mu_d) \left(1 - \frac{U}{\delta_0}\right) H\left(1 - \frac{U}{\delta_0}\right), \quad (13)$$

where  $H(\cdot)$  is the Heaviside function,  $\mu_s$  and  $\mu_d$  are the static and dynamic friction coefficients, respectively, and  $\delta_0$  is the critical slip weakening distance.

A series of studies have tried to estimate  $\delta_0$  from historical earthquakes based on indirect source observations through the inversion of strong motion seismograms [*e.g.* Ide and Takeo, 1997; Mikumo and Yagi, 2003]. However, due to the limited bandwidth of the seismograms, the slip weakening distance was poorly resolved in these studies. Moreover, dynamic models based on such indirectly inferred  $\delta_0$  values may be biased and not able to resolve the stress breakdown process over the fault [Guatteri and Spudich, 2000; Spudich and Guatteri, 2004]. Direct observation of  $\delta_0$  from near-field data is seldom possible [Cruz-Atienza *et al.*, 2009]; except for some isolated cases where rupture propagated with



supershear speeds [*Cruz-Atienza and Olsen, 2010*].

The manner by which we incorporate the fault model given by both the jump conditions (9) to (11), and the friction law (12) and (13), into our DG scheme is presented next.

### 3.2. Discrete Source Model

The domain decomposition introduced in equation (3) should account for the presence of  $\Gamma$ , such that the fault surface is discretized by triangles lying on the faces of adjacent tetrahedra (Figure 1), *i.e.* we preclude  $\Gamma$  to be embedded inside any tetrahedron  $D_i$ . The physical domain,  $\Omega$ , is then decomposed as follows

$$\Omega \simeq \Omega_h = \sum_{i=1}^K D_i \text{ such that if } \Gamma \subset \Omega \text{ then } \{\forall D_i : (D_i \setminus S_i) \cap \Gamma = \emptyset\},$$

where each  $D_i$  is a straight-sided tetrahedron with surface  $S_i$  and the union of all  $K$  elements describes a geometrically conforming mesh. The order of the polynomial basis chosen in our method corresponds to P2 quadratic functions because higher approximation orders do not significantly improve neither the accuracy of the dynamic-rupture numerical schemes nor their convergence rate [*e.g. Moczo et al., 2007; Rojas et al., 2009; Pelties et al., 2012*]. As we shall see, keeping a low approximation order (*i.e.* P2 interpolation functions) provides both good accuracy and efficiency to our numerical scheme.

Since every tetrahedron has its own nodes in the nodal form of the DG method (*i.e.* ten independent nodes for P2 elements, Figure 1), a fault node is then composed of two co-located nodes (*i.e.* a split-node). One of them belongs to the  $i$ -tetrahedron within the plus-side of the domain and the other to the adjacent  $k$ -tetrahedron in the minus-side (see Figure 1). This means that each split-node lies between two tetrahedra sharing a fault element. Furthermore, since the DG method does not require field continuity over the

element faces, the dislocation produced by the rupture may be handled naturally over the fault,  $\Gamma$ , through the discontinuity of the tangential velocities  $\vec{v}_T^\pm = \{\vec{v}_{i_T}, \vec{v}_{k_T}\}$ . However, this should be treated carefully because most of the elastic fields must remain continuous across  $\Gamma$ .

(Figure 1)

System (4) and (5) is solved everywhere inside  $\Omega$  except over  $\Gamma$ , where jump conditions (9) to (11) must be verified. However, as pointed out by *Benjema et al.* [2009], before treating the fault fluxes accordingly we should notice that the system is not symmetric because of

$$\mathcal{Q}_{ik} \neq (\mathcal{P}_{ik})^T,$$

which is due to the variable transformation (2) required to group all the medium properties on the left-hand side. Although our method does not require the system to be symmetric, that condition is convenient because then our scheme for P0 elements essentially reduces to the one proposed by *Benjema et al.* [2009] (*i.e.* finite volume approach), which was derived from energy balance consideration across the fault.

To obtain a symmetric system, we first multiply (5) by the symmetrical positive definite matrix  $\mathcal{S}$ , defined in Appendix B, and then we isolate the updated field values to get the

equivalent symmetric system

$$\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho_i} (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i)^{-1} \left[ - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\mathcal{M}_\theta \otimes \mathcal{E}_{i\theta}) \vec{\sigma}_i^n + \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} [(\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{F}_{ik}) \vec{\sigma}_i^n + (\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{G}_{ik}) \vec{\sigma}_k^n] \right] \quad (14)$$

$$\vec{\sigma}_i^{n+1} = \vec{\sigma}_i^n + \Delta t (\Lambda_i^S \otimes \mathcal{K}_i)^{-1} \left[ - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\mathcal{N}_\theta^S \otimes \mathcal{E}_{i\theta}) \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} [(\mathcal{P}_{ik}^T \otimes \mathcal{F}_{ik}) \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + (\mathcal{P}_{ik}^T \otimes \mathcal{G}_{ik}) \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}] \right], \quad (15)$$

where  $\Lambda_i^S = \mathcal{S}\Lambda_i$ ,  $\mathcal{N}_\theta^S = \mathcal{S}\mathcal{N}_\theta$  and  $\mathcal{P}_{ik}^T = \mathcal{S}\mathcal{Q}_{ik}$ .

Since the fluxes across the fault elements  $S_{i\Gamma} = \{S_{ik} \subseteq \Gamma | S_{ik} := S_i \cap S_k\}$  must satisfy the jump conditions (9) to (11), we cannot simply use the centered scheme proposed by *Etienne et al.* [2010] for fluxes between regular elements. Introducing the fault vector fluxes  $\vec{f}_i$  and  $\vec{g}_i$  for the velocity and stress schemes, respectively, the system (14) and (15) may be rewritten as

$$\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho_i} (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i)^{-1} \left[ - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\mathcal{M}_\theta \otimes \mathcal{E}_{i\theta}) \vec{\sigma}_i^n + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \in N_i \\ S_{ik} \cap \Gamma = \emptyset}} [(\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{F}_{ik}) \vec{\sigma}_i^n + (\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{G}_{ik}) \vec{\sigma}_k^n] + \delta_\Gamma (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{G}_{ik}) \vec{f}_i^n \right] \quad (16)$$

$$\vec{\sigma}_i^{n+1} = \vec{\sigma}_i^n + \Delta t (\Lambda_i^S \otimes \mathcal{K}_i)^{-1} \left[ - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\mathcal{N}_\theta^S \otimes \mathcal{E}_{i\theta}) \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \in N_i \\ S_{ik} \cap \Gamma = \emptyset}} [(\mathcal{P}_{ik}^T \otimes \mathcal{F}_{ik}) \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + (\mathcal{P}_{ik}^T \otimes \mathcal{G}_{ik}) \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}] + \delta_\Gamma (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{G}_{ik}) \vec{g}_i^{n+\frac{1}{2}} \right], \quad (17)$$

where  $\delta_\Gamma$  is a Kronecker delta that is 1 if  $S_{i\Gamma} \neq \emptyset$  and 0 otherwise.

Since the fault boundary conditions (9) to (11) must be applied to the traction vector  $\vec{T}$ , following *Benjemaa et al.* [2009] we notice that the flux in the velocity scheme (14)

through any element surface may be expressed in terms of tractions as

$$\frac{1}{2}[(\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{F}_{ik})\vec{\sigma}_i^n + (\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{G}_{ik})\vec{\sigma}_k^n] = \frac{1}{2}[(\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{F}_{ik})\vec{T}_i^n + (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{G}_{ik})\vec{T}_k^n].$$

By imposing continuity of  $\vec{T}_i$  over the fault element  $S_{i\Gamma}$  (*i.e.*  $\vec{T}_{ik}^n = T_i^n = T_k^n$ ) and assuming the same approximation order in the two tetrahedra sharing the element (*i.e.*  $\mathcal{F}_{ik} = \mathcal{G}_{ik}$ ), we set the flux vector across the fault,  $\vec{f}_i^n$ , to the unique traction vector  $\vec{T}_{ik}^n$ , and define the flux across the fault as

$$(\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{G}_{ik})\vec{f}_i^n = (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{F}_{ik})\vec{T}_{ik}^n. \quad (18)$$

By substituting (18) into the velocity scheme (16) and regrouping the terms excluding the flux across the fault on  $\vec{R}_i^n$ , we obtain

$$\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + \vec{R}_i^n + \delta_\Gamma \frac{\Delta t}{\rho_i} (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i)^{-1} (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{F}_{ik})\vec{T}_{ik}^n, \quad (19)$$

where

$$\vec{R}_i^n = \frac{\Delta t}{\rho_i} (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i)^{-1} \left[ - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\mathcal{M}_\theta \otimes \mathcal{E}_{i\theta})\vec{\sigma}_i^n + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \in N_i \\ S_{ik} \cap \Gamma = \emptyset}} [(\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{F}_{ik})\vec{\sigma}_i^n + (\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{G}_{ik})\vec{\sigma}_k^n] \right].$$

Because the fault normal stress determines the frictional strength via (12), and because boundary conditions are applied to the shear tractions, the fault traction vector  $\vec{T}_{ik}^n$  has to be decomposed into its tangential,  $\vec{T}_{ik_T}^n$ , and normal,  $\vec{T}_{ik_N}^n$ , components to rewrite the velocity scheme (19) as

$$\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + \vec{R}_i^n + \delta_\Gamma \frac{\Delta t}{\rho_i} (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i)^{-1} (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{F}_{ik})(\vec{T}_{ik_T}^n + \vec{T}_{ik_N}^n). \quad (20)$$

### 3.2.1. Fluxes across the fault for the velocity scheme (20)

For updating velocities on  $\Gamma$ , we need to specify the flux across the fault in (20). For this we require  $\vec{T}_{ik_T}^n$  such that the jump conditions (9) and (10) are fulfilled, and  $\vec{T}_{ik_N}^n$  such

that the continuity of the fault normal velocity is also guaranteed (condition (11)). All traction conditions must be verified at every fault node and for every time step.

Let us assume that  $S_{i\Gamma} \neq \emptyset$  so  $\delta_\Gamma = 1$  in (20), where the  $i$ - and  $k$ -tetrahedra lie at the plus-side and the minus-side of the fault  $\Gamma$ , respectively. Then we define  $\vec{V}_{ik}$  to be the velocity discontinuity between the  $i$ - and  $k$ -tetrahedra over the face  $\Gamma$ . To compute the fault tangential tractions,  $\vec{T}_{ikT}^n$ , we first notice that the inequality of condition (9) along with the modulus of (10) implies that

$$\vec{V}_{ikT} = 0, \quad (21)$$

which means that, whenever  $\|\vec{T}_{ikT}^n\|$  remains below the frictional strength,  $\tau_c$ , the tangential traction must ensure the continuity of the tangential velocities at every fault node shared by the  $i$ - and  $k$ -tetrahedral.

Since we only deal with fault nodes, we thus construct the matrix  $\mathcal{K}_{i\Gamma}^{-1}$ , which is the inverse mass matrix whose components depend exclusively on those nodes. It is simply constructed from  $\mathcal{K}_i^{-1}$  by eliminating its rows and columns associated with the off-fault nodes.

The computation of  $\vec{T}_{ikT}^n$  verifying condition (21) requires both tetrahedra sharing a fault element to have the same order, so that the nodes in both sides of the fault match to each other (see Figure 1). Besides this, for the specific contribution of  $\vec{T}_{ikT}^n$ , we need to compute the volume and surface integrals of  $\mathcal{K}_{i\Gamma}^{-1}$  and  $\mathcal{F}_{ik}$ , respectively, in a standard element [Zienkiewicz *et al.*, 2005] such that

$$\mathcal{K}_{i\Gamma}^{-1} = \frac{1}{V_i} \mathcal{K}_{e\Gamma}^{-1} \text{ and } \mathcal{F}_{ik} = S_{ik} \mathcal{F}_e, \quad (22)$$

where  $V_i$ , the  $i$ -tetrahedron volume, and  $S_{ik}$ , the  $i$ -tetrahedron fault surface, are the corresponding Jacobians. Then by substituting (19) into definition (6) and using (22), we express the slip rate vector as

$$\begin{aligned} \vec{V}_{ik_T}^{n+\frac{1}{2}} &:= \vec{v}_{i_T}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}_{k_T}^{n+\frac{1}{2}} \\ &= \vec{V}_{ik_T}^{n-\frac{1}{2}} + \vec{R}_{i_T}^n - \vec{R}_{k_T}^n + \Delta t S_{ik} \left( \frac{1}{\rho_i V_i} + \frac{1}{\rho_k V_k} \right) (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_{e_T})^{-1} (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{F}_e) \mathcal{T}_{ik_T}^n. \end{aligned} \quad (23)$$

For computing the tangential traction, we use (21) into (23), which leaves us the following expression

$$\vec{T}_{ik_T}^n = \left( \frac{\rho_i \rho_k V_i V_k}{\Delta t S_{ik} (\rho_i V_i + \rho_k V_k)} \right) (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{F}_e)^{-1} (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_{e_T}) \left( -\vec{V}_{ik_T}^{n-\frac{1}{2}} - \vec{R}_{i_T}^n + \vec{R}_{k_T}^n \right). \quad (24)$$

This procedure ensures the continuity of the tangential velocity across the fault. However, if the time-dependent frictional strength,  $\tau_c^n$ , is overcome by the modulus of the tangential traction,  $\|\vec{T}_{ik_T}^n\|$ , rupture must occur and the tangential velocity is no longer continuous across the associated fault node. In that case, the equality of condition (9) holds so that

$$\tau_c^n - \|\vec{T}_{ik_T}^n\| = 0 \Leftrightarrow \|\vec{T}_{ik_T}^n\| = \tau_c^n.$$

Therefore, to compute the slip rate (23) at every fault node and for every time step, the tangential traction is adjusted according to the following criterion, which depends on whether or not the fault point has broken:

$$\vec{T}_{ik_T}^n = \begin{cases} \vec{T}_{ik_T}^n & \text{if } \|\vec{T}_{ik_T}^n\| < \tau_c^n, \\ \frac{\vec{T}_{ik_T}^n}{\|\vec{T}_{ik_T}^n\|} \tau_c^n & \text{if } \|\vec{T}_{ik_T}^n\| \geq \tau_c^n. \end{cases} \quad (25)$$

Since the nodes within a fault element are coupled through the flux matrix,  $\mathcal{F}_{ik}$ , and the mass matrix,  $\mathcal{K}_{i_T}$ , when rupture happens in a given node and the condition (25) is imposed, tractions in the remaining nodes change for the same time step. Thus, to accurately and simultaneously satisfy (25) on every fault node, *i.e.* to allow rupture propagation inside

the fault elements, we use an iterative *predictor-corrector* (PC) scheme. If  $n_{\text{fault}}$  is the number of nodes in a given fault element (*i.e.* six for P2 elements) and  $n_{\text{broken}}$  is the number of nodes that have broken, then the PC scheme operates only if  $0 < n_{\text{broken}} < n_{\text{fault}}$ . The PC scheme will basically find the tangential tractions,  $\vec{T}_{ik_T}^n$ , in the unbroken nodes, given the boundary condition applied in the broken nodes for the same time step. Thus, the procedure will only influence the two interacting elements sharing the same breakable portion of the fault surface.

Our PC scheme is simple and converges fast: when a fault node breaks in a given element, the modulus of its tangential traction is set to  $\tau_c^n$  (condition (25)). Once this condition applies, the predicted tangential tractions  $\vec{T}_{ik_T}^n$  in the unbroken nodes of the same element must be recomputed accordingly via (24). For this purpose, a new matrix,  $\mathcal{K}_{e_T}^{\text{unbroken}}$ , must be constructed considering only the unbroken fault nodes while for the broken nodes the tangential traction condition is set. If the magnitude of the new-predicted tractions overcomes the fault strength, then it is corrected by setting it to  $\tau_c^n$ . This updating cycle continues iteratively through new predictions and corrections until no other node breaks inside the element after the last correction. The maximum number of possible iterations is given by the order of approximation, *i.e.* DOF, used in the fault elements, and will always be smaller than  $n_{\text{fault}}$  (*i.e.* five or less iterations for P2 elements). The PC procedure has to be performed locally in each piece of fault surface. It is an efficient iterative verification of boundary conditions and represents an additional reason to preserve low interpolation orders (*i.e.* P2 specifically) in the tetrahedra sharing a fault segment.

Since the DG schemes do not enforce continuity of the fields between two adjacent tetrahedra, and the accuracy of our method depends on the special treatment of velocities over

the fault, we must take care of the fault normal tractions in the same manner as for the tangential components. We now derive a formula to compute the normal traction,  $\vec{T}_{ik_N}^n$ , which ensures continuity of the fault normal velocity field. This model constrain is given by the jump condition (11).

As done for the tangential slip rate (23), definition (7) may be written as

$$\begin{aligned} \vec{V}_{ik_N}^{n+\frac{1}{2}} &:= \vec{v}_{i_N}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}_{k_N}^{n+\frac{1}{2}} \\ &= \vec{V}_{ik_N}^{n-\frac{1}{2}} + \vec{R}_{i_N}^n - \vec{R}_{k_N}^n + \Delta t S_{ik} \left( \frac{1}{\rho_i V_i} + \frac{1}{\rho_k V_k} \right) (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_{e_\Gamma})^{-1} (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{F}_e) \mathcal{T}_{ik_N}^n. \end{aligned}$$

Using condition (11) to force continuity of the normal velocity, we then define the fault normal traction

$$\vec{T}_{ik_N}^n = \left( \frac{\rho_i \rho_k V_i V_k}{\Delta t S_{ik} (\rho_i V_i + \rho_k V_k)} \right) (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{F}_e)^{-1} (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_{e_\Gamma}) \left( -\vec{V}_{ik_N}^{n-\frac{1}{2}} - \vec{R}_{i_N}^n + \vec{R}_{k_N}^n \right), \quad (26)$$

from which the fault normal stress is given by

$$\sigma_N^n = \vec{T}_{ik_N}^n \cdot \vec{n}.$$

The frictional strength,  $\tau_c^n$ , can now be computed on every fault node using (12) as a function of both  $\sigma_N^n$  and the friction coefficient,  $\mu^n$ , which depends on the fault slip,  $U^n$  (8), through the slip weakening law (13).

Definitions given for the normal (26) and tangential (24) traction components finally allow us to update the velocity field in every fault node via equation (20).

### 3.2.2. Fluxes across the fault for the stress scheme (17)

For the stress scheme and within the  $i$ -tetrahedron, the flux across the fault,  $\vec{g}_i^{n+\frac{1}{2}}$ , is computed using only the velocity field in that tetrahedron, through the equation (20), so that the flux is given by

$$\vec{g}_i^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{P}_{ik}^T \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}}. \quad (27)$$



The simplicity of this flux stems from the computation of a unique traction vector on the fault that guarantees either the continuity or discontinuity of the velocity field depending on whether the fault has broken or not. This fault-flux approximation is equivalent to the one proposed by *Benjema et al.* [2009] for P0 elements, where the flux estimation is based on an energy balance consideration across the fault, but the simpler form of definition (27) is due to the continuity of the fault normal velocity implicit in the computation of  $\vec{T}_{ik_N}^n$  through (26).

#### 4. Rupture Model Verification, Convergence and Efficiency

Verification of dynamic rupture models is a particularly difficult task. Since no analytical solution exists for the spontaneous rupture problem (*i.e.* closed form equations for the resulting motions), the only possible way to be confident of a given approach is the comparison of results for a well-posed rupture problem between various numerical techniques based on different approximations. This kind of exercise has been systematically performed in recent years by an international group of modelers [*Harris et al.*, 2009]. In this section we present results for two benchmark tests proposed by this group, TPV3 and TPV10 (see: <http://scecddata.usc.edu/cvws/index.html>), and compare them with those obtained with finite difference, finite element, spectral element, discontinuous Galerkin and spectral boundary integral methods. Based on these comparisons, we assess the numerical convergence rate of our method, its efficiency and determine numerical criteria to guarantee its accuracy.

#### 4.1. The Problem Version 3 (TPV3)

Consider the spontaneous rupture of a vertical right-lateral strike-slip fault embedded in a homogeneous fullspace with P- and S-waves speeds of  $6000 \text{ m/s}$  and  $3434 \text{ km/s}$ , respectively, and density of  $2670 \text{ kg/m}^3$ . The fault is rectangular and measures  $30 \text{ km}$  in length by  $15 \text{ km}$  in width (Figure 2). Rupture nucleation happens in a  $3 \text{ km}$  by  $3 \text{ km}$  square region, centered both along-strike and along-dip, because the initial shear stress there is higher than the fault strength. The friction law is linear slip-weakening with zero cohesion (Equations (12) and (13)), and both static and dynamic friction coefficients are constant over the fault. The initial fault normal traction is also constant, as are the static and dynamic fault strengths. Values for all source parameters, *i.e.* initial stress conditions and friction parameters, are shown in Table 1. Results for this problem are compared with those obtained by the DFM finite difference scheme [Day *et al.*, 2005], the ADER-DG discontinuous Galerkin scheme [Pelties *et al.*, 2012] and the spectral boundary integral equation method by Geubelle and Rice [1995] with the implementation of E.M. Dunham (MDSBI: Multidimensional Spectral Boundary Integral, version 3.9.10, 2008); all of them for an equivalent grid size of  $50 \text{ m}$ .

All DGCrack solutions presented in this section were calculated for the same  $100 \times 110 \times 95 \text{ km}^3$  physical domain discretized with unstructured h-adaptive meshes such that the element characteristic lengths extends from  $1 \text{ km}$  in the CPML slab to the desired length over the fault plane (*i.e.*  $1.0, 0.8, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2$  and  $0.1 \text{ km}$ ).

(Figure 2)

Our first comparison corresponds to the rupture times on the fault plane with the DFM method (Figure 3). We have used a characteristic elements size of  $100 \text{ m}$  over the

fault (*i.e.* an effective grid size (internode distance) of about 50  $m$  in our P2 elements approximation). The fit between both solutions is almost perfect. No significant difference may be seen in this comparison. Figure 4 compare DGCrack seismograms at fault points PI (pure in-plane deformation) and PA (pure anti-plane deformation) (see Figure 2) for the slip (4a), shear traction (4b) and slip rate (4c and 4d) fields with those obtained by the DFM, ADER-DG and MDSBI methods. Except for weak oscillations, the comparison is also excellent. Besides the stress build-ups, which are nicely resolved at both observational points before failure, let us notice how the friction law is well resolved as compared to the other solutions, with stress overshoots around 7  $s$  and 8  $s$  at PI, and 8.5  $s$  and 10.5  $s$  at PA. The associated slip reactivations are also well modeled and can be seen in the slip rate functions at both points. Stopping phases from the fault edges strongly determine the slip rate and are well resolved at 6.5  $s$  and 7  $s$  at PI, and at 4  $s$  and 7.5  $s$  at PA. A closer comparison of slip rates at both observational points (Figure 4d) suggests that the closest two solutions to each other correspond to ours and the one generated by the spectral boundary integral method (MDSBI). Despite weak oscillations present in the DFM, MDSBI and DGCrack waveforms, both amplitude and phase of the DGCrack and MDSBI solutions are remarkably similar.

(Figure 3)

(Figure 4)

Since no analytic solution exists for this problem, quantitative comparisons between all the approximations may give insights about their correctness. Figure 5b presents a quantitative comparison of all numerical solutions based on cross-correlation,  $cc$ , measurements of the slip rate time series on both PI and PA observational points. Each colored

square of the Cross-Correlation Matrix,  $CCM$ , corresponds to a  $cc$ -based metric between two solutions: for a given method, its metrics with respect to the other approaches are those corresponding to its associated row and column of the matrix. Values in the upper triangular part of  $CCM$  are given by

$$CCM_{ij}^{\text{upper}} = \frac{cc_{ij} - cc_{\min}}{1 - cc_{\min}}, \quad (28)$$

where  $cc_{ij}$  is the maximum cross-correlation coefficient between the  $i$  and  $j$  solutions, and subscript  $min$  reads for the smallest coefficient of all possible combinations. Values in the lower triangular part of  $CCM$  are given by

$$CCM_{ij}^{\text{lower}} = \frac{dt_{ij} - dt_{\max}}{dt_{\max}}, \quad (29)$$

where  $dt_{ij}$  is the delay in seconds between the  $i$  and  $j$  solutions for the maximum correlation coefficient, and the  $max$  subscript means the maximum delay of all possible combinations. Both measures provide a quantitative mean to assess the similarity between solutions relative to the worst comparison found between all combinations. However, they do not provide absolute cross-correlation information except for the auto-correlations along the  $CCM$  diagonal. While the ADER-DG solution is the closest to both the DGCrack and MDSBI solutions in terms of correlation coefficients (see  $CCM^{\text{upper}}$  in Figure 5b), the smallest phase error is found between the DGCrack and MDSBI solutions (see  $CCM^{\text{lower}}$ ). As may also be seen in Figure 4d, the solution with the lowest correlation metrics with respect to the other ones is that from DFM (*i.e.* first column and first row). By averaging both metrics per solutions couple, we may better assess which time series are the closest to each other. Figure 6 presents the results of this exercise, where the two discontinuous Galerkin solutions reveal to be the more similar, although very close to the one yielded by

the Boundary Integral method. Measures provided by this method should be interpreted carefully since they do not account for the computational cost required by each method to achieve its solution.

(Figure 5)

One important issue in dynamic rupture modeling is the control of spurious oscillations produced by the advance of the crack tip throughout the discrete lattice. Using either artificial viscosity or intrinsic dissipation procedures in rupture models is a delicate matter because the associated damping does not distinguish between numerical and physical contributions. In other words, if badly handled, dissipation may absorb frequencies belonging to the physical-problem bandwidth affecting, for instance, peak slip rates and rupture speeds, as shown by *Knopoff and Ni* [2001]. This is probably why the ADER-DG scheme [*de la Puente et al.*, 2009], which uses intrinsically dissipative Godunov fluxes [*LeVeque*, 2002; *González-Casanova*, 2006], requires high interpolation orders to achieve good accuracy (*e.g.* compare O2 with O3 or higher order solutions in *Pelties et al.* [2012]). In the DGCrack scheme, in contrast, the centered flux scheme is conservative such that the energy is not intrinsically dissipated [*Hesthaven and Warburton*, 2008] but, because it is dispersive, contains spurious oscillations. However, since these oscillations remain reasonable small and we expect them to be even smaller for physically attenuating media or different friction laws (*e.g.* rate- and state-dependent), we have decided not to integrate an artificial viscosity.

(Figure 6)

The upper horizontal axis in the Figures 5a and 5c represents the number of fault elements in the cohesive zone,  $N_c$ , associated to the characteristic element sizes shown in the

lower horizontal axis. The cohesive zone is the fault area next to the crack tip where the shear stress drops from its static to its dynamic value.  $N_c$  is measured along the rupture-front propagation direction and its values correspond to the reference DFM solution for  $h = 50 m$  reported in *Day et al.* [2005].

To assess the convergence rate of the DGCrack scheme and to determine a quantitative criterion that guaranties its accuracy, Figures 5a and 5c present two different error metrics, defined by *Day et al.* [2005] as the relative root mean square difference between a given solution and the reference one (*i.e.* the DFM solution for  $h = 50 m$ ), as a function of the characteristic elements size on the fault. These metrics correspond to the rupture times over the fault and the peak slip rates at fault points PA and PI (Figure 2). Both figures reveal a power-law convergence rate of the DGCrack method with regression exponents reported in Table 2 and compared to those for other methods. We also report in that table the exponent for the final slip on both observational points (not shown in the figure). It is important to notice that all DGCrack solutions presented in the manuscript correspond to unstructured meshes with refinements around the rupture surfaces. As mentioned by *de la Puente et al.* [2009], this is a critical issue since the accuracy of solutions significantly depends on the quality of the tetrahedral lattice built independently using standard tools (in this work we have used the Gmsh software developed by *Geuzaine and Remacle* [2009]), as can be seen in the error dispersion on both Figures 5a and 5c with respect to the regression lines.

The accuracy of dynamic rupture models depends on the resolution of the cohesive zone, which may vary during rupture evolution.  $N_c$  is thus the numerical criterion that guaranties a given accuracy level. Figures 5a and 5c also reveal that one or more fault elements

inside the cohesive zone (*i.e.*  $N_c \geq 1$ ) is enough to achieve errors smaller than 1% and 10% for rupture times and peak slip rates, respectively. In the TPV3 test case, this condition implies fault element sizes smaller or equal to  $\sim 450$  m.

We finally address a fundamental question in computational sciences: the numerical efficiency. *Pelties et al.* [2012] have recently introduced a method to solve the dynamic rupture problem based on a discontinuous Galerkin scheme that incorporates a sophisticated strategy allowing arbitrarily high order approximations in space and time, *i.e.* the ADER-DG method. Since both the DGCrack and ADER-DG methods share many different capabilities linked to the DG approximation, it is worth comparing their differences and to estimate the computational cost of each method to achieve the same accuracy level. Since the ADER-DG method is based on a modal approximation, the fluxes across the element faces are sensitive to all modes across the element. In a nodal approximation, however, like in the DGCrack method, they only depend on the nodes lying on the element face where the flux is computed. This difference translates into fewer computations in the nodal approximations [*Hesthaven and Warburton, 2008*]. Figure 5d presents a quantitative comparison of rupture times errors as a function of total computing times (*i.e.* the CPU time, which is given by the duration of each simulation multiplied by the number of cores) for both methods. The DGCrack simulations were run on a parallel computer with 172 cores (2.33 GHz quad-core Xeon processors) of the Department of Seismology at UNAM. Since the computational cost is not reduced by the ADER-DG method when using high approximation orders [*Pelties et al., 2012*], values reported in Figure 5d correspond to the ADER-DG O3 solution. Both regression lines have about the same slope; so similar CPU time differences between the methods are expected for

any grid size. If we take the same accuracy level used to establish the  $N_c$  condition in the last paragraph (*i.e.* 1% error for rupture times) then the CPU time of the ADER-DG O3 method is about 30 times larger than the one required by the DGCrack method in our computing platform. Since the simulation times reported by Pelties et al. were obtained using a 0.85 GHz BlueGene parallel computer, the actual CPU time difference would be reduced to a factor of  $\sim 10$  if both methods were run on the same platform, which still is a significant factor, especially if multiple large scale simulations are required. This comparison was made with the available data reported by Pelties et al. [2012], however it would be interesting to design a speed test of dynamic rupture simulations that could better reflect the CPU time required by both schemes. Besides, it is important to notice that ADER-DG shows smooth time series on the fault and accurate wave propagation away from it [Dumbser and Kaser, 2006]. These characteristics are not quantified here and may be essential for long-range wave propagation problems.

#### 4.2. The Problem Version 10 (TPV10)

Our last verification test consists of a  $60^\circ$  dipping normal fault reaching the free surface of a homogeneous halfspace (Figure 7) with P- and S-waves speeds of 5716 m/s and 3300 km/s, respectively, and density of 2700 kg/m<sup>3</sup>. The fault has the same dimensions as in TPV3 (*i.e.* 30 km, 15 km wide) but the center of its  $3 \times 3$  km<sup>2</sup> nucleation patch is located deeper, at 12 km along dip. Frictional and initial stress conditions on the fault plane are reported in Table 3, where the cohesion term of equation (12) is not zero, and both pre-stress conditions are dependent on the along-dip distance,  $h_d$ . The unstructured h-adaptive tetrahedral mesh used to obtain the DGCrack solution is shown in Figure 7, which has a characteristic element size of 100 m over the fault plane.



(Figure 7)

This test case has interesting features that are essential to verify a dynamic rupture model for non-planar faults. Since we deal with a dipping normal fault reaching the Earth's surface, reflected waves are bounced back to the source, inducing transient variations of the fault traction vector that significantly affect rupture propagation via the Coulomb failure criterion (12) [Nielsen, 1998; Oglesby *et al.*, 1998]. Figure 8 presents a comparison of rupture times over the fault obtained with three different methods [Harris *et al.*, 2009]: a finite element (FaulMod; Barall [2009]), a spectral element (SPECFEM3D; Kaneko *et al.* [2008]) and the DGCrack methods. The three solutions were computed with a fault elements size of 100 *m*. Despite the complexity of the rupture model, the match between all solutions is remarkably good. Dynamic effects on rupture propagation due to the presence of the free surface are clearly seen in the upper most 2 *km*, where a secondary rupture front propagating down-dip is initiated about 2.5 *s* after nucleation.

(Figure 8)

Figure 9 shows on- and off-fault waveforms computed by the same three methods with (lower traces) and without (upper traces) low-pass filtering at 3 *Hz*. From top to bottom, the left column presents the time evolution of the slip rate, shear stress and normal stress at fault point FP (Figure 7), which is aligned along strike with the center of the nucleation patch and located 1.5 *km* from the free surface along dip. On-fault solutions reveal that the best fits along the entire waveforms correspond to the DGCrack and SEM signals during the first 10 *s*, and to the DGCrack and FEM signals during the remaining 5 *s*. This suggests that, despite the spurious oscillations present in the latter part of the DGCrack waveforms, this method provides the most robust solution for this problem compared to

the SEM and FEM methods. The right column of Figure 9 shows, from top to bottom, the two horizontal components (*i.e.* fault parallel, FP, and fault normal, FN, components) of the ground velocity and vertical displacements at the ground point GP (Figure 7), which is located 3 *km* in the along strike direction from the fault extremity and 3 *km* away from the fault trace on the hanging wall. In the ground motion synthetics the situation is slightly different. The closest two solutions along the entire records are those produced by the DGCrack and FEM methods (see filtered velocities and displacements up to 10 *s*). Although both the DGCrack and SEM solutions present spurious oscillations, the 3 *Hz* low pass filter did not eliminate longer-period oscillations in the DGCrack seismograms, particularly present after 10 *s*. Since similar noise is found in the on-fault seismograms, this inaccuracy is probably due either to long-range numerical dispersion associated with the centered fluxes across the fault or wave reflections associated with the mesh coarsening around the fault surface.

(Figure 9)

## 5. Rupture along the 1992 Landers-Earthquake Fault System

The 28 June 1992 Landers earthquake (Mw 7.3) in southern California produced one of the most valuable data sets ever recorded. The amount and diversity of geophysical observations allowed constraining the earthquake rupture history, revealing a large complexity of the slip pattern in a wide frequency range ( $< 0.5$  *Hz*) [*e.g.* Campillo and Archuleta, 1993; Wald and Heaton, 1994; Olsen *et al.*, 1997; Hernández *et al.*, 1999]. The large rupture size (80 *km* long, 16 *km* wide), the long rupture duration ( $> 20$  *s*) and the intricate fault-system geometry bring an exceptional opportunity to test our discontinuous Galerkin source model. However, to fully understand the detailed rupture process of the

Landers earthquake deserves an extensive analysis that goes beyond the purpose of this work. For this reason we shall mainly use this study case for illustrating the capabilities of the DGCrack approach in realistic conditions, and to elucidate some essential aspects of such an event related to the initial stress conditions along the fault.

(Figure 10)

The Landers earthquake broke four main right-lateral faults, namely the Johnson Valley, Homestead Valley and Emerson and Camp Rock faults, which are connected through jogs and step-overs (Figure 12b) forming a complex nonplanar fault system (Figure 10 and red segment in Figure 12b). The detailed fault geometry was taken from the Community Fault Model for Southern California [Plesch *et al.*, 2007], which essentially consists of several strike-slip vertical segments, as shown in Figure 12b with grey dots. To discretize the model we considered a 1D layered medium [Wald and Heaton, 1994] (see L1, L2 and L3 layer boundaries on Figure 10) and took advantage of the hp-adaptivity. This means that we refined the mesh around the rupture surface and simultaneously adapted the bulk elements sizes to resolve 0.5 *Hz* waves according to each layer properties, so that the wave-propagation accuracy criterion determined by Etienne *et al.* [2010] is largely satisfied (*i.e.* five elements per minimum wavelength). The gradual mesh coarsening from 300 *m* over the fault to 1100 *m* throughout the CPML region produced a discrete lattice with 4.48 millions tetrahedra, from which 48.6% are P1 elements and belong to the CPML slab (Figure 10), and the rest (51.4%) are P2 elements and discretize the physical domain. Dimensions of the computational volume are  $67.0 \times 101.6 \times 29.0 \text{ km}^3$  in the *x*, *y* and *z* directions, respectively, such that to complete a 20 *s* simulation, the DGCrack model spent a total CPU time of  $1.73 \times 10^6 \text{ s}$ , which correspond to 9.6 hours in 50 cores of our

Pohualli parallel platform.

The initial stress conditions in the fault (*i.e.* pre-stress conditions) correspond to the initial shear tractions,  $\tau_0$ , determined by *Peyrat et al.* [2001] on a planar fault (Figure 12a), which represent an improved version of those used by *Olsen et al.* [1997]. To estimate these initial conditions, they computed the static stress change in a planar fault associated with the total slip found by *Wald and Heaton* [1994] (Figure 12d), reversed its sign and added a homogeneous tectonic field of 5 MPa. *Peyrat et al.* [2001] also considered a constant static fault strength  $\tau_s = \sigma_0 \cdot \mu_s = 12.5$  MPa,  $\mu_d = 0.0$ , and an upper bound for  $\tau_0$  equal to  $0.95 \cdot \tau_s$  everywhere on the fault. We proceed in the same way except in the uppermost 2.5 km, where we obtained unreasonable large slips in our first simulations. For producing reasonable simulation results, we thus lowered the upper bound of  $\tau_0$  to  $0.9 \cdot \tau_s$  over the whole fault and multiplied  $\tau_0$  by a linear taper going from 1 at 2.5 km depth to 0 at the free surface. Instead of searching suitable friction coefficients to explain the observed ground motions as done in previous studies [*Aochi and Fukuyama*, 2002; *Aochi et al.*, 2003] we simply set them homogeneous over the fault such that both the strength excess and the dynamic stress drop exactly match those considered by *Peyrat et al.* [2001], except in the shallow part where the taper was applied and within those small regions where the initial shear stress was upper bounded to  $0.9 \cdot \tau_s$ . As expected when including the real fault geometry, to allow spontaneous rupture propagation through the stepovers and fault kinks we had to reduce fracture energy by a factor of two as compared with *Peyrat et al.* [2001] model by setting  $\delta_0$ , the stress breakdown slip (*i.e.* the slip-weakening distance (13)), equal to 40 cm instead of 80 cm. Rupture was nucleated in a 7 km deep circular patch with 1 km of radius [*Olsen et al.*, 1997] located 67 km from the northern

fault edge in the along-strike direction [*Wald and Heaton, 1994*] (Figure 12a). To initiate a sustained rupture, we raised the initial shear stress 5% above the fault strength in that patch. As a result, an initial stress-drop kick of about 0.6 MPa initiated the earthquake. Figure 11 shows a series of snapshots of the slip rate (left column) and shear stress (right column) on the fault during rupture propagation. Interesting rupture patterns appeared in the rupture process, as reflected waves in the layers interfaces (2.9 s snapshot), rupture front jumps (5.1 s snapshot) and bifurcations (7.9 s snapshot), and supershear fault segments (11.3 s snapshot), among others.

(Figure 11)

Previous models of the Landers earthquake have shown that considering both the fault system geometry and the heterogeneities of the surrounding medium is critical to explain different geophysical observations [*e.g. Fialko, 2004; Cianetti et al., 2005; Cruz-Atienza, 2006*]. Our results (Figures 11 and 12) lead to the same conclusion. If the fault geometry did not play a major role during the earthquake, both the initial stress conditions and frictional parameters adopted by *Peyrat et al. [2001]*, which were determined assuming a planar rupture surface [*Olsen et al., 1997*], would have been valid over the real fault-system geometry. Instead, the fault geometrical barriers (*i.e.* kinks) strongly affect the energy budget, making the spontaneous rupture propagation more difficult. The effect of fault geometry into that budget is clear in our results, since we had to reduce the planar-fault fracture energy by a factor of two to allow rupture propagation along the entire fault system. It can be said that half of the amount of energy that *Peyrat et al. [2001]* found to be dissipated through cohesive forces (*i.e.* frictional work) with constant normal tractions seems to be related with other physical mechanisms promoting energy leakage possibly

related to the fault geometry, such as off-fault anelastic processes [Duan and Day, 2008] or high frequency radiation associated with changes of rupture speed and direction in the vicinity of the fault kinks [Adda-Bedia and Madariaga, 2008].

Figure 12 finally shows a comparison between the final slip determined by Wald and Heaton [1994] over a three planar fault segments projected into a single plane (Figure 12d) and the one yielded by our simulation deployed over a plane (Figure 12c). There is clearly an underestimation of the seismic moment in our model, which is based on the static stress change produced by the final slip of Wald and Heaton [1994] in a planar fault [Olsen et al., 1997]. Notice that both fault segments where the final slip is dramatically underestimated are either confined between (i.e. Kickapoo stepover) or overlapping (i.e. stepover joining the Homestead Valley and Emerson faults) fault kinks. Since the final slip we obtained is so different to the one found by Wald and Heaton [1994] that explains a large set of observed data (e.g. regional seismograms and GPS records), we do not expect our earthquake model to be realistic (i.e. to fit the ground surface observations). This finally leads us to conclude that a realistic dynamic source model of the Landers earthquake may only be constructed by considering its real and intricate fault geometry when determining the initial fault-traction conditions.

(Figure 12)

## 6. Conclusions

In this work we have introduced a novel discontinuous Galerkin method, the DGCrack, to simulate the dynamic rupture propagation of earthquakes in 3D along faults with intricate geometries (i.e. non-planar). The method is hp-adaptive, which means that the elements of the unstructured tetrahedral mesh discretizing the simulation domain may

adapt both their sizes (h-adaptivity) and approximation orders (p-adaptivity) depending on the problem geometry and the medium properties (*i.e.* P0, P1 or P2 elements in the wave propagation domain, and P2 elements over the fault). To guarantee a fast convergence rate, our scheme imposes the dynamic-rupture boundary conditions through *ad hoc* fluxes across the fault that verify both the jump conditions introduced by *Day et al.* [2005] and an additional condition forcing the continuity of the fault-normal velocity field. The jump conditions imply the continuity of the tangential fault velocities on the fault nodes where rupture did not happen, and the collinearity of both the fault shear traction and the slip rate in those nodes where rupture has occurred. On the other hand, the additional condition guarantees the numerical stability and accuracy of the fault normal tractions required in the Coulomb slip-dependent friction law. For modeling rupture propagation throughout the interior of each fault element, we have introduced an efficient predictor-corrector scheme on these elements that accurately estimates the shear tractions at every fault node for every time step.

A convergence analysis based on the SCEC-USGS TPV3 spontaneous-rupture benchmark has revealed power-law convergence rates of the DGCrack method for three different fault-observable RMS error metrics [*Day et al.*, 2005], with exponents equal to 1.65 for rupture times, 1.52 for final slip and 1.83 for peak slip rates. These estimates are similar to those reported for well-established finite difference (DFM and SGSN), discontinuous Galerkin (ADER-DG) and boundary integral (BI) methods. We have obtained excellent results (*i.e.* rupture times and peak slip rate RMS errors smaller than 1% and 10%, respectively) provided that the cohesive zone is resolved by one or more fault elements (*i.e.*  $N_c \geq 1$ ). For the TPV3 test case, this condition translates into fault element smaller or equal than

$\sim 450$  m. Since both the DGCrack and ADER-DG methods share many different capabilities linked to the DG approximation, we have assessed the difference in computational cost to achieve the same accuracy level for rupture times. We find that DGCrack is about 10 times faster than ADER-DG irrespectively of the mesh size if they were run in the same computing platform.

Since no analytical solution exists for the spontaneous rupture problem, quantitative comparisons between different approximated solutions may give insights about the correctness of the numerical approaches to solve a given problem. We have thus introduced a simple way to assess the similarity among solutions for TPV3 generated by four different methods, based on the phase and cross-correlation coefficients of slip rate time series. Results of this exercise show that the DGCrack and ADER-DG discontinuous Galerkin solutions are the most similar, although very close to the one computed by the spectral boundary integral method (*i.e.* the MDSBI approach). As suggested by *Ampuero* [2012], this procedure may be systematically used to quantitatively compare approaches for different rupture problems like those undertaken by the international group of modelers promoted by SCEC-USGS [*Harris et al.*, 2009, see <http://sceccdata.usc.edu/cvws/>].

To complete the verification of the DGCrack method, we have also solved TPV10 [*Harris et al.*, 2009], which consists of a  $60^\circ$  dipping normal fault reaching the free surface. This test case has interesting features that are essential to verify a dynamic rupture model for non-planar faults, because reflected waves in the Earth's surface are bounced back to the source inducing transient variations of the fault traction vector that significantly affect rupture propagation via the Coulomb failure criterion. Comparison of rupture times and both on-fault and ground-motion seismograms with those calculated by the



SEM [Kaneko *et al.*, 2008] and FEM [Barall, 2009] approaches reveal a very good overall agreement among all solutions (especially between the DGCrack and FEM solutions), including the strong dynamic perturbations on the fault normal tractions close to the free surface. Numerical oscillations in the DGCrack solution are mainly present after 10 *s* of the earthquake nucleation, which is probably due either to long-range numerical dispersion associated with the centered fluxes across the fault or reflections associated with the unstructured mesh coarsening around the fault. However, since these oscillations remain reasonable small and we expect them to be even smaller for physically attenuating media [Tago *et al.*, 2010] or different friction laws (*e.g.* rate- and state-dependent), we have decided not to integrate an artificial viscosity into the scheme.

We finally applied the DGCrack method to study some aspects of the 1992 Landers earthquake considering a realistic fault-system geometry. Our simulation deploy a 1D layered medium and took advantage of the hp-adaptivity by refining the unstructured mesh around the rupture surface and simultaneously adapting the elements sizes to resolve 0.5 *Hz* waves everywhere in the simulation domain. 48.6% of the 4.48 millions tetrahedra in the mesh are P1 elements and belong to the CPML slab, while the rest (51.4%) are P2 elements and discretize the entire physical domain. Our source model is based on a slightly modified version of the heterogeneous initial shear stress determined by Peyrat *et al.* [2001] on a planar fault from the final slip found by Wald and Heaton [1994]. Since both we had to reduce fracture energy by a factor of two with respect to the earthquake model proposed by Peyrat *et al.* [2001] to allow rupture propagation along the entire non-planar fault system, and obtained a significant seismic moment underestimation, we conclude that generating realistic pre-stress conditions for the Landers

earthquake from its final slip distribution requires considering the fault-system geometry. Recent large subduction earthquakes have raised fundamental questions concerning the stability and segmentation of the subduction zones. To study this seismogenic regions accounting for more realistic physical behaviors, introducing into DGCrack both flexible friction laws (*e.g.* rate- and state-dependent) and the presence of fluids in the fault zone (*i.e.* thermal pressurization) would be essential in the near future.

## Appendix A: DG-FEM Method for Wave Propagation

To solve the hyperbolic system (1), which models the wave propagation in an elastic medium, we follow the DG-FEM method proposed by *Etienne et al.* [2010]. The method requires a discretization of the entire domain into sub-domains called elements. The DG-FEM is a mixture of two well-known methods: the Finite Element method (FEM), because it uses a space of basis functions and a space of test functions in each element [*Zienkiewicz et al.*, 2005], and the Finite Volume method (FVM), since the elements are decoupled from each other but integrated through the evaluation of fluxes across the elements faces [*LeVeque*, 2002]. The result of this combination is a method that ensures the geometric flexibility that supports local resolution adaptivity and that can deal with wave-dominated problems. However, the cost of having decoupled elements is an increment of the total amount of degrees of freedom (DOF).

For the space approximation was adopted the nodal form of the DG-FEM formulation, *i.e.* the solution in each element has a spatial support (nodes) that depends on the amount of degrees of freedom chosen for the discretization [*Hesthaven and Warburton*, 2008]. To

approximate the stress and velocity vectors in the  $i$ -element we write

$$\begin{aligned}\hat{\vec{v}}_i(\vec{x}, t) &= \sum_{j=1}^{d_i} \vec{v}_{i_j}(\vec{x}_j, t) \varphi_{i_j}(\vec{x}) \\ \hat{\vec{\sigma}}_i(\vec{x}, t) &= \sum_{j=1}^{d_i} \vec{\sigma}_{i_j}(\vec{x}_j, t) \varphi_{i_j}(\vec{x}),\end{aligned}\tag{A1}$$

where  $\vec{x} \in D_i$ ,  $t$  is the time and  $d_i$  is the number of nodes or DOF associated with the interpolation Lagrangian polynomial basis function  $\varphi_{i_j}$  relative to the  $j$ -node located at  $\vec{x}_j$ . This representation differs from the modal form in that the DOF,  $\vec{v}_{i_j}$  and  $\vec{\sigma}_{i_j}$ , are space dependent.

For the DG-FEM formulation we require a weak formulation of (1). The weak form makes the residual to be orthogonal to a space of test functions. The case when that space is the same as the space of interpolation functions is called Galerkin. To do so, we multiply (1) by a test function  $\varphi_{i_r}$  and integrate the system over the volume of the  $i$ -element

$$\begin{aligned}\int_{V_i} \varphi_{i_r} \rho \partial_t \vec{v} dV &= \int_{V_i} \varphi_{i_r} \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta (\mathcal{M}_\theta \vec{\sigma}) dV \\ \int_{V_i} \varphi_{i_r} \Lambda \partial_t \vec{\sigma} dV &= \int_{V_i} \varphi_{i_r} \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta (\mathcal{N}_\theta \vec{v}) dV \quad \forall r \in [1, d_i],\end{aligned}\tag{A2}$$

where  $V_i$  is the volume of the  $i$ -element.

Integration by parts of the right side of (A2) leads to

$$\begin{aligned}\int_{V_i} \varphi_{i_r} \rho \partial_t \vec{v} dV &= - \int_{V_i} \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta \varphi_{i_r} (\mathcal{M}_\theta \vec{\sigma}) dV + \int_{S_i} \varphi_{i_r} \left( \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \mathcal{M}_\theta n_\theta \right) \vec{\sigma} dS \\ \int_{V_i} \varphi_{i_r} \Lambda \partial_t \vec{\sigma} dV &= - \int_{V_i} \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta \varphi_{i_r} (\mathcal{N}_\theta \vec{v}) dV + \int_{S_i} \varphi_{i_r} \left( \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \mathcal{N}_\theta n_\theta \right) \vec{v} dS,\end{aligned}\tag{A3}$$

where  $S_i$  is the surface of the  $i$ -element and  $\vec{n}$  is the outward pointing unit normal vector with respect to  $S_i$ .

The second terms of the right-hand side of (A3) correspond to the fluxes of the stress

and velocity wavefields across  $S_i$ . In the classical FEM, the fluxes are canceled between adjacent elements because the surface nodes are unique, *i.e.* the method enforces continuity of the wavefields. In contrast, since each element has its own nodes in the DG-FEM, the elements are coupled through the fluxes, similar to the FVM. To evaluate the fluxes, we chose the centered flux scheme for its computational efficiency and its non-dissipative property [Remaki, 2000; Benjema et al., 2009; Delcourte et al., 2009].

Using the approximation (A1) and assuming constant physical properties per element, the weak formulation (A3) can be approximated as

$$\begin{aligned} \rho_i \int_{V_i} \varphi_{i_r} \partial_t \hat{v}_i dV &= - \int_{V_i} \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta \varphi_{i_r} (\mathcal{M}_\theta \hat{\sigma}_i) dV + \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} \int_{S_{ik}} \varphi_{i_r} \mathcal{P}_{ik} (\hat{\sigma}_i + \hat{\sigma}_k) dS \\ \Lambda_i \int_{V_i} \varphi_{i_r} \partial_t \hat{\sigma}_i dV &= - \int_{V_i} \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta \varphi_{i_r} (\mathcal{N}_\theta \hat{v}_i) dV + \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} \int_{S_{ik}} \varphi_{i_r} \mathcal{Q}_{ik} (\hat{v}_i + \hat{v}_k) dS, \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

where  $N_i$  represents the adjacent elements to the  $i$ -element and  $S_{ik}$  is the face between the  $i$ - and  $k$ -element. The matrices  $\mathcal{P}_{ik}$  and  $\mathcal{Q}_{ik}$  are defined as follows

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ik} &= \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} n_{ik_\theta} \mathcal{M}_\theta \\ \mathcal{Q}_{ik} &= \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} n_{ik_\theta} \mathcal{N}_\theta, \end{aligned}$$

where  $n_{ik_\theta}$  is the component along the  $\theta$  axis of the unit normal vector  $\vec{n}_{ik}$  of the face  $S_{ik}$  which points from the  $i$ - to the  $k$ -element.

The local nature of DG-FEM is illustrated in (A4) through the surface integrals that only require the faces shared with the neighbor elements. Because the orthogonality of the residual must be accomplished with the complete space of test functions and using the

tensor product  $\otimes$ , we obtain the expression

$$\begin{aligned} \rho_i(\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i)\partial_t \vec{v}_i &= - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\mathcal{M}_\theta \otimes \mathcal{E}_{i\theta})\vec{\sigma}_i + \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} [(\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{F}_{ik})\vec{\sigma}_i + (\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{G}_{ik})\vec{\sigma}_k] \\ (\Lambda_i \otimes \mathcal{K}_i)\partial_t \vec{\sigma}_i &= - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\mathcal{N}_\theta \otimes \mathcal{E}_{i\theta})\vec{v}_i + \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} [(\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{F}_{ik})\vec{v}_i + (\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{G}_{ik})\vec{v}_k], \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

where  $\mathcal{I}_3$  represents the identity matrix. In system (A5), the vectors  $\vec{v}_i$  and  $\vec{\sigma}_i$  should be read as the collection of all nodal values of the velocity and stress components in the  $i$ -element, respectively. The matrices involved in (A5) are: the mass matrix

$$(\mathcal{K}_i)_{rj} = \int_{V_i} \varphi_{i_r} \varphi_{i_j} dV \quad j, r \in [1, d_i],$$

the stiffness matrix

$$(\mathcal{E}_{i\theta})_{rj} = \int_{V_i} (\partial_\theta \varphi_{i_r}) \varphi_{i_j} dV \quad j, r \in [1, d_i] \quad \theta \in \{x, y, z\},$$

and the flux matrices

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{ik})_{rj} &= \int_{S_{ik}} \varphi_{i_r} \varphi_{i_j} dS \quad j, r \in [1, d_i] \\ (\mathcal{G}_{ik})_{rj} &= \int_{S_{ik}} \varphi_{i_r} \varphi_{k_j} dS \quad r \in [1, d_i] \quad j \in [1, d_k]. \end{aligned}$$

The scheme (A5) allows different approximation orders between adjacent elements, (*i.e.* p-adaptivity), and mesh refinement, (*i.e.* h-adaptivity). For more details see *Etienne et al.* [2010].

This method was selected to implement the dynamic rupture because it is suitable for handling discontinuities across the elements boundaries through the application of *ad hoc* fluxes. Besides, the implementation of the DGCrack method into the GeoDG3D code (developed by *Etienne et al.* [2010]) was straightforward since we only need to recognize the fault surface in the domain and substitute the centered scheme fluxes with the *ad hoc*

expressions derived in Sections 3.2.1 and 3.2.2 over the fault, while leaving intact the rest of the code.

## Appendix B: Matrices Used in the DG-FEM Formulation

The following matrices are used in the DGCrack method and were previously introduced by *Benjema et al.* [2009].

Matrices  $\mathcal{M}_\theta$  and  $\mathcal{N}_\theta$ , required for the wave propagation scheme explained in the Appendix A, are constant real matrices defined as

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \mathcal{N}_x &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \\ \mathcal{M}_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathcal{N}_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \\ \mathcal{M}_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathcal{N}_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T. \end{aligned}$$

Matrix  $\mathcal{S}$ , required for the dynamic rupture model explained in Section 3.2, is a symmetric positive definite matrix given by

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Acknowledgments.** We especially thank Steven Day for his advice and clarifications regarding some physical model considerations, for corrections of this manuscript, as well as for the cohesive zone resolution data of TPV3. We thank Christian Pelties for fruitful discussions and for providing us the TPV3 solutions by the ADER-DG and MDSBI codes. We thank Ana Rocher for drawing Figure 1. We thank Mondher Benjema for his comments and experience. Without the Gmsh software this work could not be possible, so we

are grateful to its developers. We thank Alfonso Trejo, from HPC-Team, for his outstanding assistance in setting the parallel supercomputer Pohualli, in which all simulations were performed. We also thank Carl Gable for his advise on meshing strategies for the Landers earthquake fault-system. MDSBI solutions have been computed by Gilbert B. Brietzke. We finally thank David Oglesby and Jeremy Kozdon for their remarks and suggestions. This work has been possible thanks to the Mexican “Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología” (CONACyT) under the grant number 80205, and partially supported by both the French “Agence Nationale de la Recherche” under the grant ANR-2011-BS56-017 and the European “Marie Curie Actions-International Research Staff Exchange Scheme”, under the grant 295217.

## References

- Adda-Bedia, M., and R. Madariaga (2008), Seismic Radiation from a Kink on an Antiplane Fault, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 98(5), 2291–2302, doi:10.1785/0120080003.
- Ampuero, J. P. (2002), Etude physique et numérique de la nucléation des séismes, Ph.D. thesis, Université Paris VII.
- Ampuero, J. P. (2012), SCEC-USGS Dynamic Rupture Code Validation Workshop, February 6, University of Southern California.
- Andrews, D. J. (1976), Rupture velocity of plane strain shear cracks, *J. Geophys. Res.*, 81(32), 5679–5687, doi:10.1029/JB081i032p05679.
- Andrews, D. J. (1985), Dynamic plane-strain shear rupture with a slipweakening friction law calculated by a boundary integral method, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 75, 1–21.

- Aochi, H., and E. Fukuyama (2002), Three-dimensional nonplanar simulation of the 1992 Landers earthquake, *J. Geophys. Res.*, *107*(B2), doi:10.1029/2000JB000061.
- Aochi, H., E. Fukuyama, and M. Matsu'ura (2000), Spontaneous rupture propagation on a non-planar fault in 3-D elastic medium, *Pure Appl. Geophys.*, *157*(11-12), 2003–2027, doi:10.1007/PL00001072.
- Aochi, H., R. Madariaga, and E. Fukuyama (2003), Constraint of fault parameters inferred from nonplanar fault modeling, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, *4*, doi:10.1029/2001GC000207.
- Barall, M. (2009), A grid-doubling finite-element technique for calculating dynamic three-dimensional spontaneous rupture on an earthquake fault, *Geophys. J. Int.*, *178*, 845–859, doi:10.1111/j.1365-246X.2009.04190.x.
- Benjema, M., N. Glinsky, V. M. Cruz-Atienza, J. Virieux, and S. Piperno (2007), Dynamic non-planar crack rupture by a finite-volume method, *Geophys. J. Int.*, *171*, 271–285, doi:10.1111/j.1365-246X.2006.03500.x.
- Benjema, M., N. Glinsky-Olivier, V. M. Cruz-Atienza, and J. Virieux (2009), 3-D dynamic rupture simulations by a finite volume method, *Geophys. J. Int.*, *178*(1), 541–560, doi:10.1111/j.1365-246X.2009.04088.x.
- Brossier, R., S. Operto, and J. Virieux (2009), Seismic imaging of complex onshore structures by 2D elastic frequency-domain full-waveform inversion, *Geophysics*, *74*(6), doi:10.1190/1.3215771.
- Campillo, M., and R. Archuleta (1993), A rupture model for the 28 June 1992 Landers, California, earthquake, *Geophys. Res. Lett.*, *20*(8), 647–650, doi:10.1029/92GL02822.



- Cianetti, S., C. Giunchi, and M. Cocco (2005), Three-dimensional finite element modeling of stress interaction: An application to Landers and Hector Mine fault systems, *J. Geophys. Res.*, *110*(B05S17), doi:10.1029/2004JB003384.
- Cochard, A., and R. Madariaga (1994), Dynamic faulting under rate-dependent friction, *Pure Appl. Geophys.*, *142*, 419–445.
- Cruz-Atienza, V. M. (2006), Rupture dynamique des faille non-planaires en différences finies, Ph.D. thesis, Université Nice-Sophia Antipolis.
- Cruz-Atienza, V. M., and K. B. Olsen (2010), Super shear mach-waves expose the fault breakdown slip, *Tectonophysics*, *493*, 285–296, doi:10.1016/j.tecto. 2010.05.012.
- Cruz-Atienza, V. M., and J. Virieux (2004), Dynamic rupture simulation of non-planar faults with a finite-difference approach, *Geophys. J. Int.*, *158*, 939–954, doi: 10.1111/j.1365?246X.2004.02291.x.
- Cruz-Atienza, V. M., J. Virieux, and H. Aochi (2007), 3D finite-difference dynamic-rupture modeling along non-planar faults, *Geophysics*, *72*(SM123), doi: 10.1190/1.2766756.
- Cruz-Atienza, V. M., K. B. Olsen, and L. A. Dalguer (2009), Estimation of the breakdown slip from strong-motion seismograms: Insights from numerical experiments, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *99*(6), 3454–3469, doi:10.1785/0120080330.
- Dalguer, L. A., and S. M. Day (2007), Staggered-grid split-node method for spontaneous rupture simulation, *J. Geophys. Res.*, *112*(B02302), doi:10.1029/2006JB004467.
- Das, S., and K. Aki (1977), Fault plane with barriers: a versatile earthquake model, *J. Geophys. Res.*, *82*, 5658–5670.

- Day, S. M. (1982), Three-dimensional simulation of spontaneous rupture: The effect of nonuniform prestress, *Bull. Seism. Soc. Am.*, *72*(6), 1881–1902.
- Day, S. M., L. A. Dalgner, N. Lapusta, and Y. Liu (2005), Comparison of finite difference and boundary integral solutions to three-dimensional spontaneous rupture, *J. Geophys. Res.*, *110*(B12307), doi:10.1029/2005JB003813.
- de la Puente, J., J. P. Ampuero, and M. Kaser (2009), Dynamic rupture modeling on unstructured meshes using a discontinuous galerkin method, *J. Geophys. Res.*, *114*(B10302), doi:10.1029/2008JB006271.
- Delcourte, S., L. Fezoui, and N. Glinsky-Olivier (2009), A high-order discontinuous Galerkin method for the seismic wave propagation, *ESAIM: Proc.*, *27*, 70–89.
- Dieterich, J. (1979), Modeling of rock friction 1. Experimental results and constitutive equations, *J. Geophys. Res.*, *84*(B5), 2161–2168, doi:10.1029/JB084iB05p02161.
- Duan, B., and S. M. Day (2008), Inelastic strain distribution and seismic radiation from rupture of a fault kink, *J. Geophys. Res.*, *113*(B12311), doi:10.1029/2008JB005847.
- Dumbser, M., and M. Kaser (2006), An arbitrary high order discontinuous galerkin method for elastic waves on unstructured meshes II: The three-dimensional isotropic case, *Geophys. J. Int.*, *167*(1), 319–336.
- Ely, G., S. M. Day, and J. B. Minster (2009), A support-operator method for 3D rupture dynamics, *Geophys. J. Int.*, *177*, 1140–1150, doi:10.1111/j.1365-246X.2009.04117.x.
- Etienne, V., E. Chaljub, J. Virieux, and N. Glinsky (2010), An hp-adaptive Discontinuous Galerkin finite-element method for 3-d elastic wave modelling, *Geophys. J. Int.*, *183*(2), 941–962, doi:10.1111/j.1365-246X.2010.04764.x.

- Festa, G., and J. P. Vilotte (2006), Influence of the rupture initiation on the intersonic transition: Crack-like versus pulse-like modes, *Geophys. Res. Lett.*, *33*(L15320), doi:10.1029/2006GL026378.
- Fialko, Y. (2004), Probing the mechanical properties of seismically active crust with space geodesy: Study of the coseismic deformation due to the 1992 Mw 7.3 Landers (southern California) earthquake, *J. Geophys. Res.*, *109*(B03307), doi:10.1029/2003JB002756.
- Geubelle, P., and J. Rice (1995), A spectral method for three-dimensional elastodynamic fracture problems, *J. Mech. Phys. Solids*, *43*, 1791–1824.
- Geuzaine, C., and J. F. Remacle (2009), Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, *79*(11), 1309–1331.
- González-Casanova, P. (2006), Solución Numérica de Leyes de Conservación Hiperbólicas, Notas de Modelación y Métodos Numéricos I. CIMAT y CIMNE., Guanajuato, México.
- Guatteri, M., and P. Spudich (2000), What can strong-motion data tell us about slip-weakening fault-friction laws?, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *90*(1), 98–116, doi:10.1785/0119990053.
- Harris, R. A., and S. M. Day (1993), Dynamics of fault interaction: Parallel strike-slip faults, *J. Geophys. Res.*, *98*(B3), 4461–4472.
- Harris, R. A., M. Barall, R. Archuleta, E. Dunham, B. Aagaard, J. P. Ampuero, H. Bhat, V. M. Cruz-Atienza, L. Dalguer, P. Dawson, S. Day, B. Duan, G. Ely, Y. Kaneko, Y. Kase, N. Lapusta, Y. Liu, S. Ma, D. Oglesby, K. Olsen, A. Pitarka, S. Song, and E. Templeton (2009), The SCEC/USGS Dynamic Earthquake-Rupture Code Verification Exercise, *Seismol. Res. Lett.*, *80*(1), 119–126, doi:10.1785/gssrl.80.1.119.

- Hernández, B., F. Cotton, and M. Campillo (1999), Contribution of radar interferometry to a two-step inversion of kinematic process of the 1992 Landers earthquake, *J. Geophys. Res.*, *104*(B6), 13,083–13,099, doi:10.1029/1999JB900078.
- Hesthaven, J. S., and T. Warburton (2008), *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis and Applications*, 1st ed., 515 pp., Springer.
- Hok, S., and E. Fukuyama (2011), A new BIEM for rupture dynamics in half-space and its application to the 2008 Iwate-Miyagi Nairiku earthquake, *Geophys. J. Int.*, *184*, 301–324, doi:10.1111/j.1365-246X.2010.04835.x.
- Ida, Y. (1972), Cohesive force across the tip of a longitudinal-shear crack and Griffith's specific surface energy, *J. Geophys. Res.*, *77*, 3796–3805.
- Ide, S., and M. Takeo (1997), Determination of constitutive relations of fault slip based on seismic wave analysis, *J. Geophys. Res.*, *102*(B12), doi:10.1029/97JB02675.
- Kame, N., and T. Yamashita (1999), Simulation of the spontaneous growth of a dynamic crack without constraints on the crack tip path, *Geophys. J. Int.*, *139*(2), 345–358, doi:10.1046/j.1365-246x.1999.00940.x.
- Kaneko, Y., N. Lapusta, and J. P. Ampuero (2008), Spectral element modeling of spontaneous earthquake rupture on rate and state faults: Effect of velocity-strengthening friction at shallow depths, *J. Geophys. Res.*, *113*(B09317), doi:10.1029/2007JB005553.
- Kase, Y., and S. M. Day (2006), Rupture processes on a bending fault, *Geophys. Res. Lett.*, *33*(L10601), doi:10.1029/2006GL025865.
- Kaser, M., and M. Dumbser (2008), A highly accurate discontinuous Galerkin method for complex interfaces between solids and moving fluids, *Geophysics*, *73*(3), 23–35.

- Knopoff, L., and X. X. Ni (2001), Numerical instability at the edge of a dynamic fracture, *Geophys. J. Int.*, *147*(3), 1–6, doi:10.1046/j.1365-246x.2001.01567.x.
- Kozdon, J. E., E. M. Dunham, and J. Nordstrom (2012), Simulation of Dynamic Earthquake Ruptures in Complex Geometries Using High-Order Finite Difference Methods, *Journal of Scientific Computing*, 1–33, doi:10.1007/s10915-012-9624-5.
- Lapusta, N., J. R. Rice, Y. Ben-Zion, and G. Zheng (2000), Elastodynamic analysis for slow tectonic loading with spontaneous rupture episodes on faults with rate- and state-dependent friction, *J. Geophys. Res.*, *105*(23), 765–790.
- Levander, A. R. (1988), Fourth-order finite-difference P-SV seismograms, *Geophysics*, *53*(11), 1425–1436.
- LeVeque, R. J. (2002), *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, 1st ed., 578 pp., Cambridge Univ. Press.
- Ma, S., and R. J. Archuleta (2006), Radiated seismic energy based on dynamic rupture models of faulting, *J. Geophys. Res.*, *111*(B05315), doi:10.1029/2005JB004055.
- Madariaga, R. (1976), Dynamics of an expanding circular fault, *Bull. Seism. Soc. Am.*, *66*(3), 5679–5687.
- Madariaga, R., K. Olsen, and R. Archuleta (1998), Modeling dynamic rupture in a 3D earthquake fault model, *Bull. Seism. Soc. Am.*, *88*(5), 1182–1197.
- Mikumo, T., and Y. Yagi (2003), Slip-weakening distance in dynamic rupture of in-slab normal-faulting earthquakes, *Geophys. J. Int.*, *155*(2), 443–455.
- Miyatake, T. (1980), Numerical simulations of earthquake source process by a three-dimensional crack model. part I rupture process, *J. Phys. Earth*, *28*(6), 565–598.

- Moczo, P., J. Kristek, M. Galis, P. Pazak, and M. Balazovjeh (2007), The finite-difference and finite-element modeling of seismic wave propagation and earthquake motion, *Acta Physica Slovaca*, *57*(2), 177–406.
- Nielsen, S. B. (1998), Free surface effects on the propagation of dynamic rupture, *Geophys. Res. Lett.*, *25*(1), 125–128, doi:10.1029/97GL03445.
- Oglesby, D. D., and S. M. Day (2001), The effect of fault geometry on the 1999 Chi-Chi (Taiwan) earthquake, *Geophys. Res. Lett.*, *28*, 1831–1834.
- Oglesby, D. D., R. J. Archuleta, and S. B. Nielsen (1998), Earthquakes on Dipping Faults: The Effects of Broken Symmetry, *Science*, *280*(5366), 1055–1059, doi:10.1126/science.280.5366.1055.
- Olsen, K. B., R. Madariaga, and R. J. Archuleta (1997), Three-Dimensional Dynamic Simulation of the 1992 Landers Earthquake, *Science*, *278*(5339), 834–838, doi:10.1126/science.278.5339.834.
- Palmer, A., and J. R. Rice (1973), The grow of slip surfaces in the progressive failure of over-consolidated clay, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, *332*, 527–548.
- Pelties, C., J. de la Puente, J. Ampuero, G. Brietzke, and M. Kaser (2012), Three-dimensional dynamic rupture simulation with a high-order Discontinuous Galerkin method on unstructured tetrahedral meshes, *J. Geophys. Res.*, *117*(B02309), doi:10.1029/2011JB008857.
- Peyrat, S., K. B. Olsen, and R. Madariaga (2001), Dynamic modeling of the 1992 Landers earthquake, *J. Geophys. Res.*, *106*(26), 467–482.
- Plesch, A., J. H. Shaw, C. Benson, W. A. Bryant, S. Carena, M. Cooke, J. Dolan, G. Fuis, E. Gath, L. Grant, E. Hauksson, T. Jordan, M. Kamerling, M. Legg, S. Lindvall,

- H. Magistrale, C. Nicholson, N. Niemi, M. Oskin, S. Perry, G. Planansky, T. Rockwell, P. Shearer, C. Sorlien, M. P. Suss, J. Suppe, J. Treiman, and R. Yeats (2007), Community Fault Model (CFM) for Southern California, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *97*(6), 1793–1802, doi:10.1785/0120050211.
- Remaki, L., O. Hassan, and K. Morgan (2011), Aerodynamic computations using a finite volume method with an HLLC numerical flux function, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, *6*(3).
- Remaki, M. (2000), A new finite volume scheme for solving Maxwell’s system, *COMPEL*, *19*(3), 913–931.
- Rojas, O., E. Dunham, S. M. Day, L. A. Dalguer, and J. E. Castillo (2009), Finite difference modeling of rupture propagation with strong velocity-weakening friction, *Geophys. J. Int.*, *179*, 1831–1858, doi:10.1111/j.1365-246X.2009.04387.x.
- Ruina, A. (1983), Slip instability and state variable friction laws, *J. Geophys. Res.*, *88*(B12), 10,359–10,370, doi:10.1029/JB088iB12p10359.
- Spudich, P., and M. Guatteri (2004), The effect of bandwidth limitations on the inference of earthquake slip-weakening distance from seismograms, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *94*(6), 2028–2036, doi:10.1785/0120030104.
- Tago, J., V. M. Cruz-Atienza, V. Etienne, J. Virieux, E. Chaljub, M. Benjema, and F. J. Sánchez-Sesma (2010), 3-D dynamic rupture with anelastic wave propagation using an hp-adaptive discontinuous galerkin method, *Eos Trans AGU*, *91*, Fall Meet. Suppl., Abstract S51A-1915.
- Virieux, J., and R. Madariaga (1982), Dynamic faulting studied by a finite difference method, *Bull. Seism. Soc. Am.*, *72*(2), 345–369, doi:10.1029/92JB02272.

- Wald, D., and T. Heaton (1994), Spatial and temporal distribution of slip for the 1992 Landers, California, earthquake, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *84*(3), 668–691.
- Zienkiewicz, O. C., R. L. Taylor, and J. Z. Zhu (2005), *Finite Element Method - Its Basis and Fundamentals*, 6th ed., 752 pp., Butterworth-Heinemann.



## Tables

**Table 1.** On-fault frictional and stress parameters for TPV3. The initial shear stress points to the along-strike direction. Medium properties outside the fault represent an infinite barrier.

Fault Parameters	Nucleation	Outside Nucleation
Static friction coefficient, $\mu_s$	0.677	0.677
Dynamic friction coefficient, $\mu_d$	0.525	0.525
Slip weakening distance, $\delta_0$ (m)	0.40	0.40
Initial shear stress, $\tau_0$ (MPa)	81.6	70.0
Initial normal stress, $\sigma_0$ (MPa)	120.0	120.0

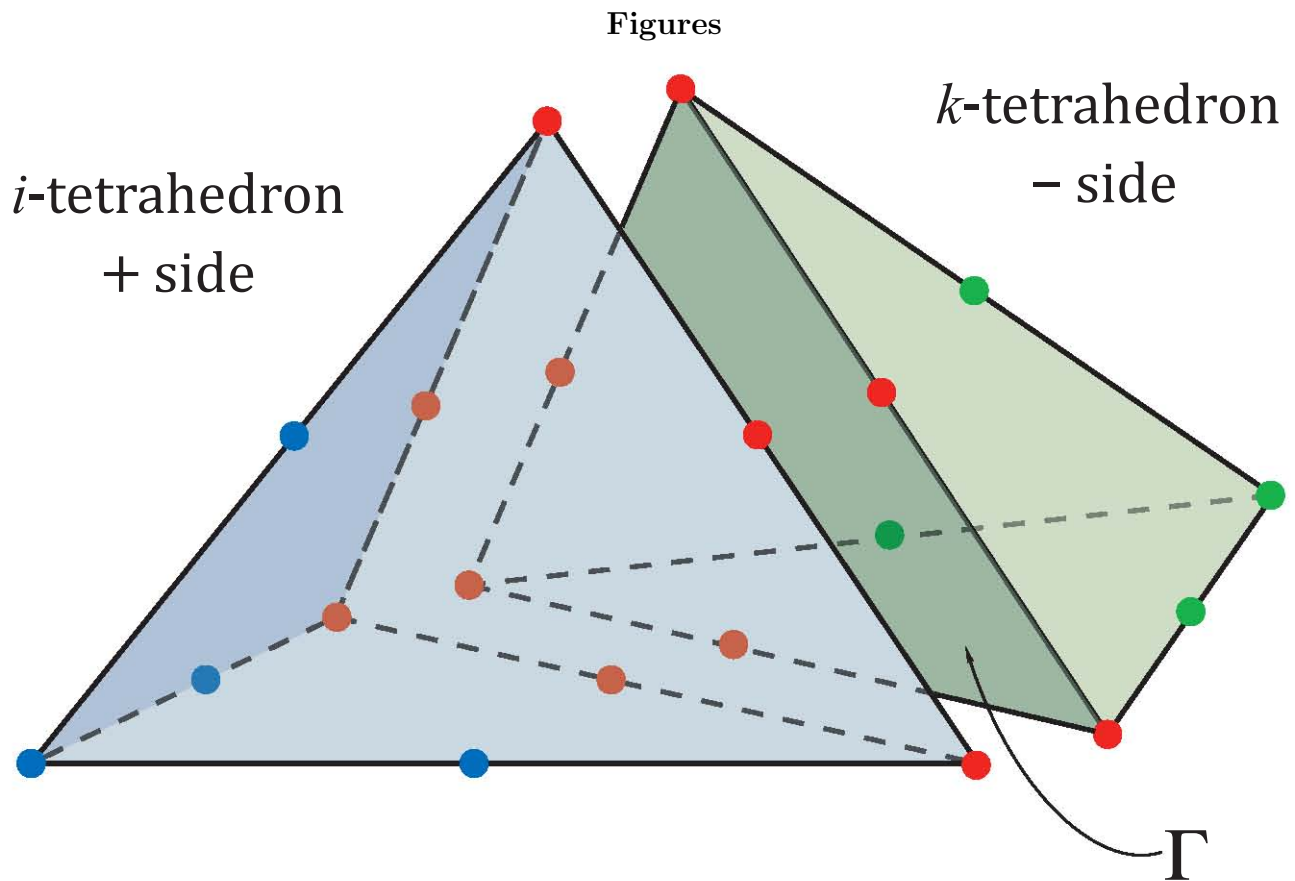
**Table 2.** TPV3 convergence rate exponents for different methods and error metrics.

Method	Rupture Times	Final Slip	Peak Slip Rate
DGCrack	1.65	1.52	1.83
ADER-DG 03 <sup>1</sup>	2.84	0.99	0.80
DFM <sup>2</sup>	2.96	1.58	1.18
BI <sup>2</sup>	2.74	1.53	1.19
SGSN <sup>3</sup>	-	1.63	0.70

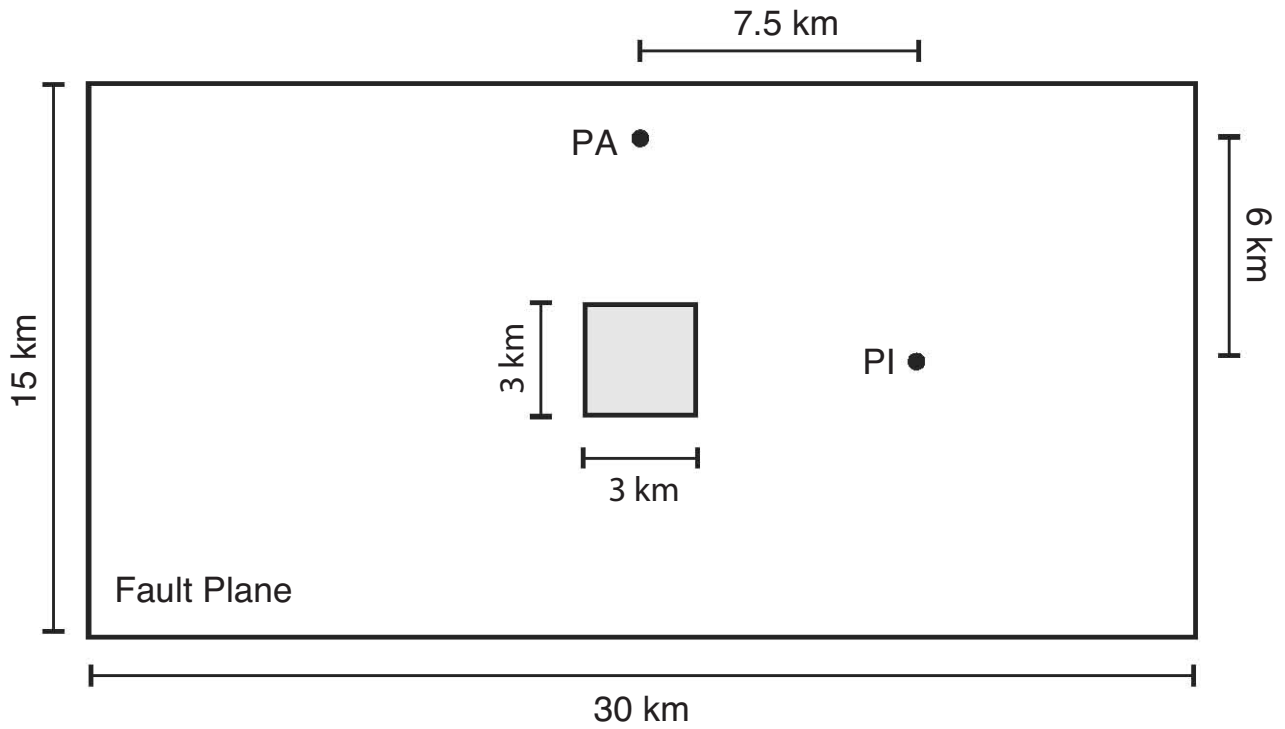
<sup>1</sup>*Pelties et al.* [2012]; <sup>2</sup>*Day et al.* [2005]; <sup>3</sup>*Dalguer and Day* [2007]

**Table 3.** On-fault frictional and stress parameters for TPV10. The initial shear stress points to the along-dip direction.  $h_d$  is the along-dip distance measured in meters from the free surface. Medium properties outside the fault represent an infinite barrier.

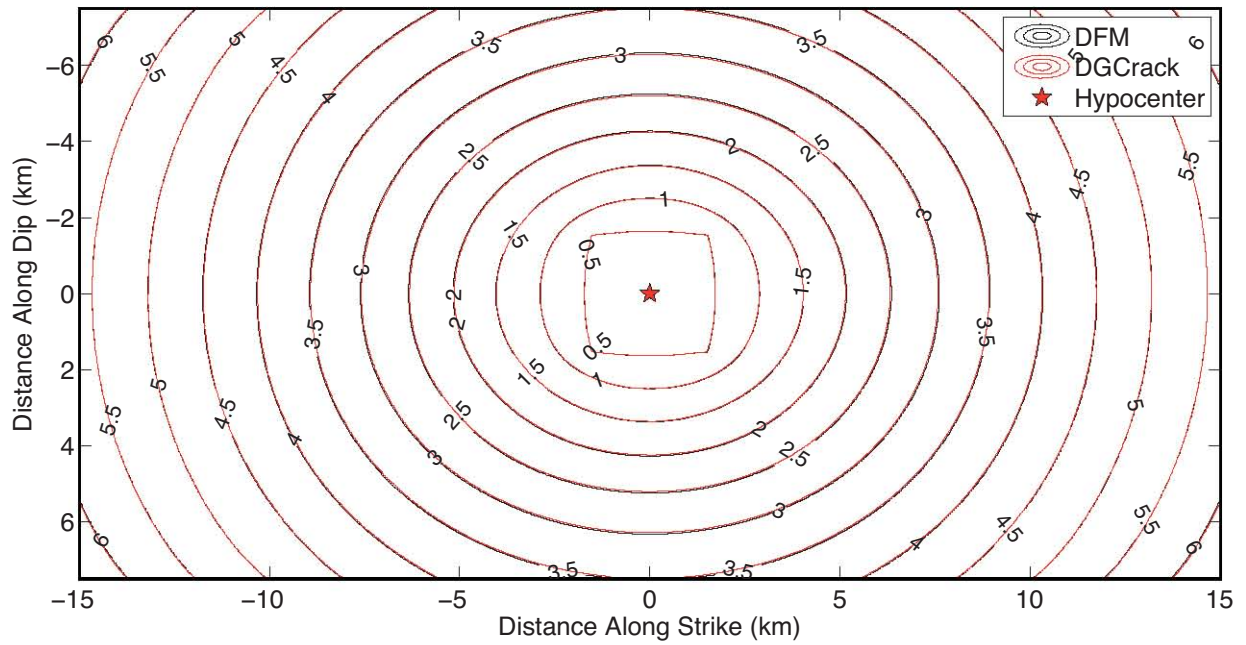
Fault Parameters	Nucleation	Outside Nucleation
Cohesion, $C$ (MPa)	0.20	0.20
Static friction coefficient, $\mu_s$	0.760	0.760
Dynamic friction coefficient, $\mu_d$	0.448	0.448
Slip weakening distance, $\delta_0$ (m)	0.50	0.50
Initial normal stress, $\sigma_0$ (MPa)	$0.007378h_d$	$0.007378h_d$
Initial shear stress, $\tau_0$ (MPa)	$C + \sigma_0(0.0057 + \mu_s)$	$0.55\sigma_0$



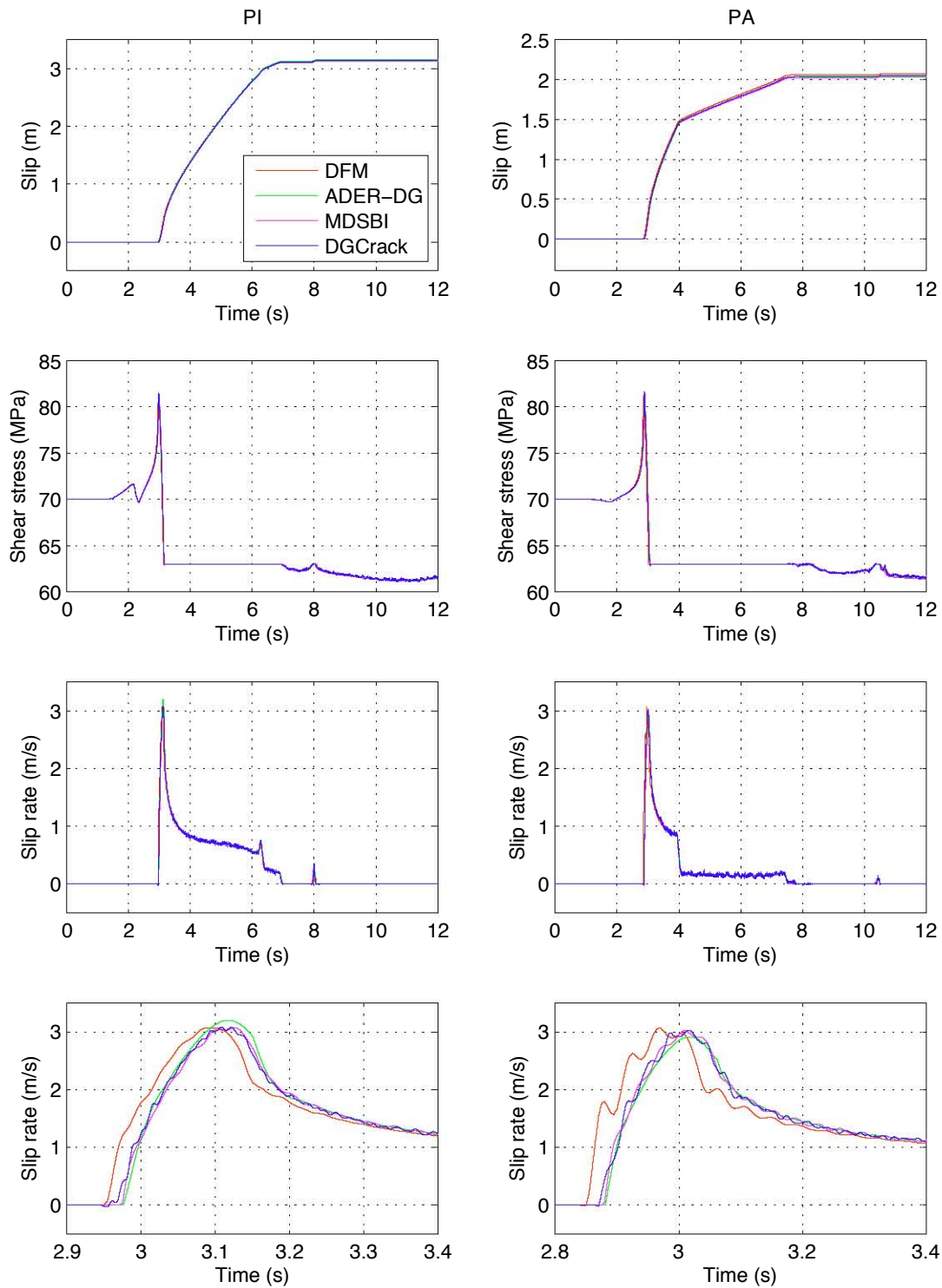
**Figure 1.** Second-order (P2) interpolation-order tetrahedra illustrating two mesh elements shearing the fault surface  $\Gamma$ . Red dots represent the six split nodes (*i.e.* two collocated nodes, one per element) lying on the fault from which the fluxes across  $\Gamma$  are computed and the dynamic-rupture boundary conditions applied.



**Figure 2.** TPV3 rupture problem geometry. The gray square represents the nucleation patch, and the PA and PI dots represent the pure-antiplane and pure-inplane observational fault points, respectively.



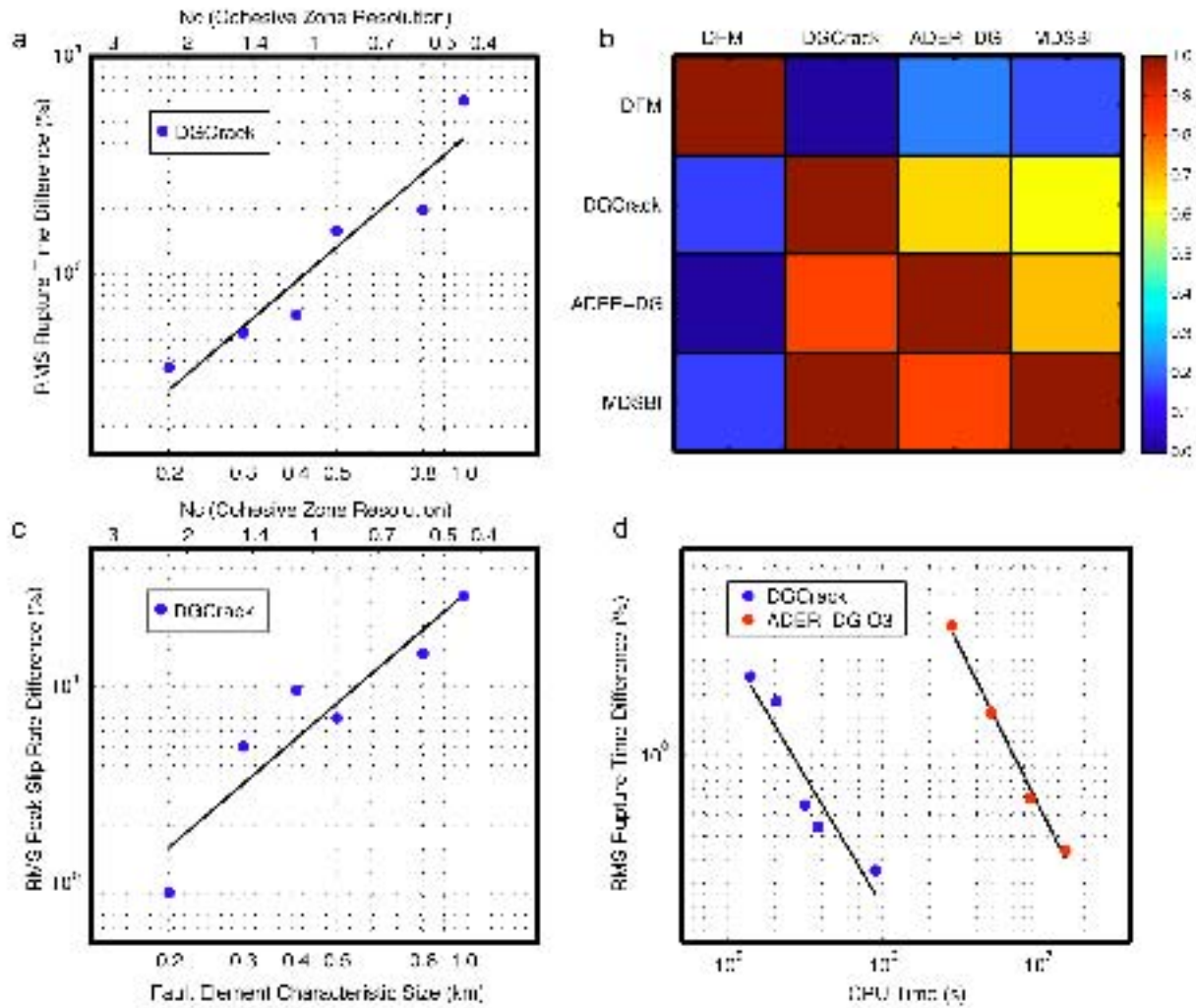
**Figure 3.** Comparison of rupture times for TPV3 yielded by the DGCrack and DFM [Day *et al.*, 2005] methods, both with an effective mesh increment of 50 m (*i.e.* 100 m fault elements for DGCrack).



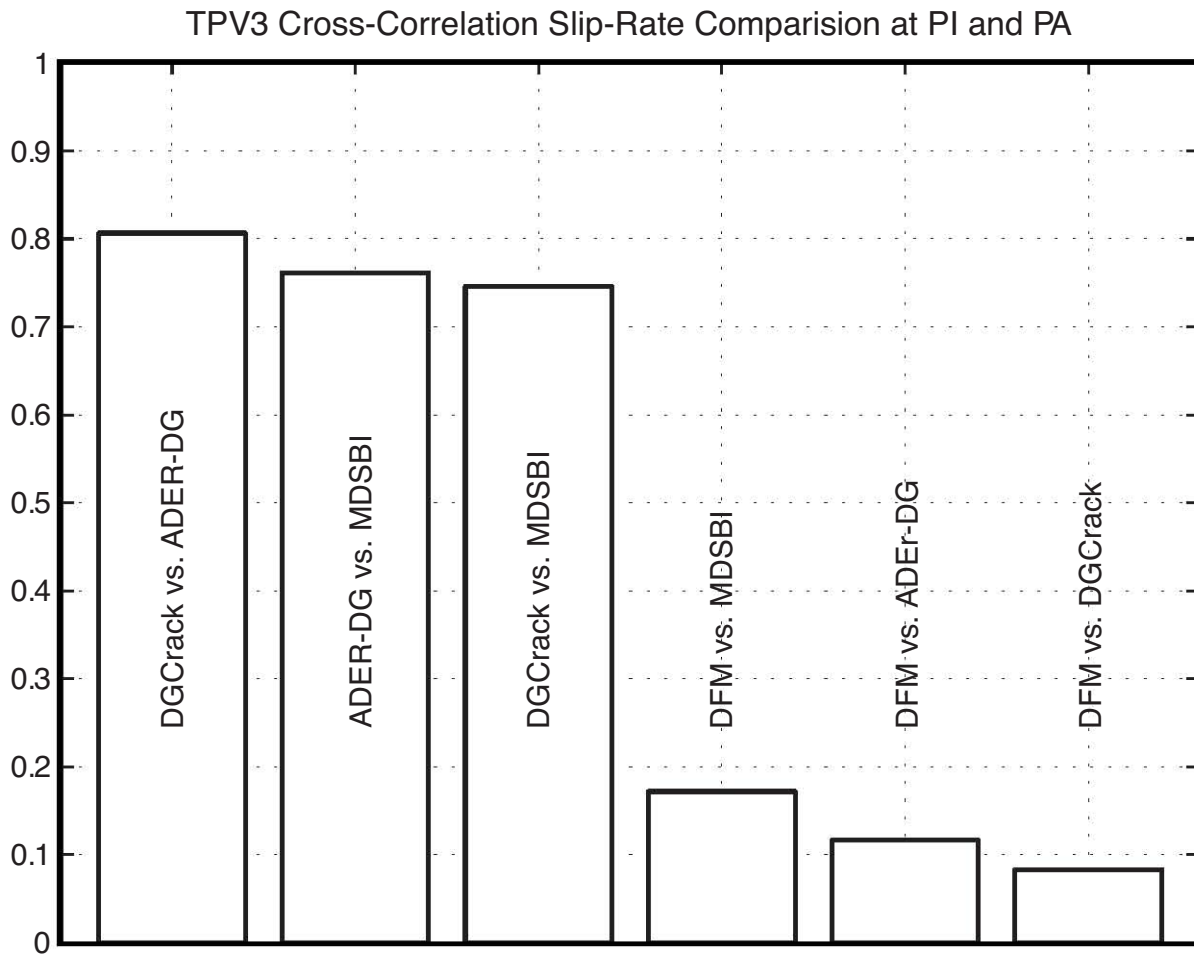
**Figure 4.** Comparison of on-fault time histories at PI (left column) and PA (right column) for

a) the slip, b) the shear stress, and the slip rate (c and d) produced by four different numerical methods (inset legend: DFM, *Day et al.* [2005]; ADER-DG and MDSBI, *Pelties et al.* [2012]),

all of them with an effective grid size of 50 m.

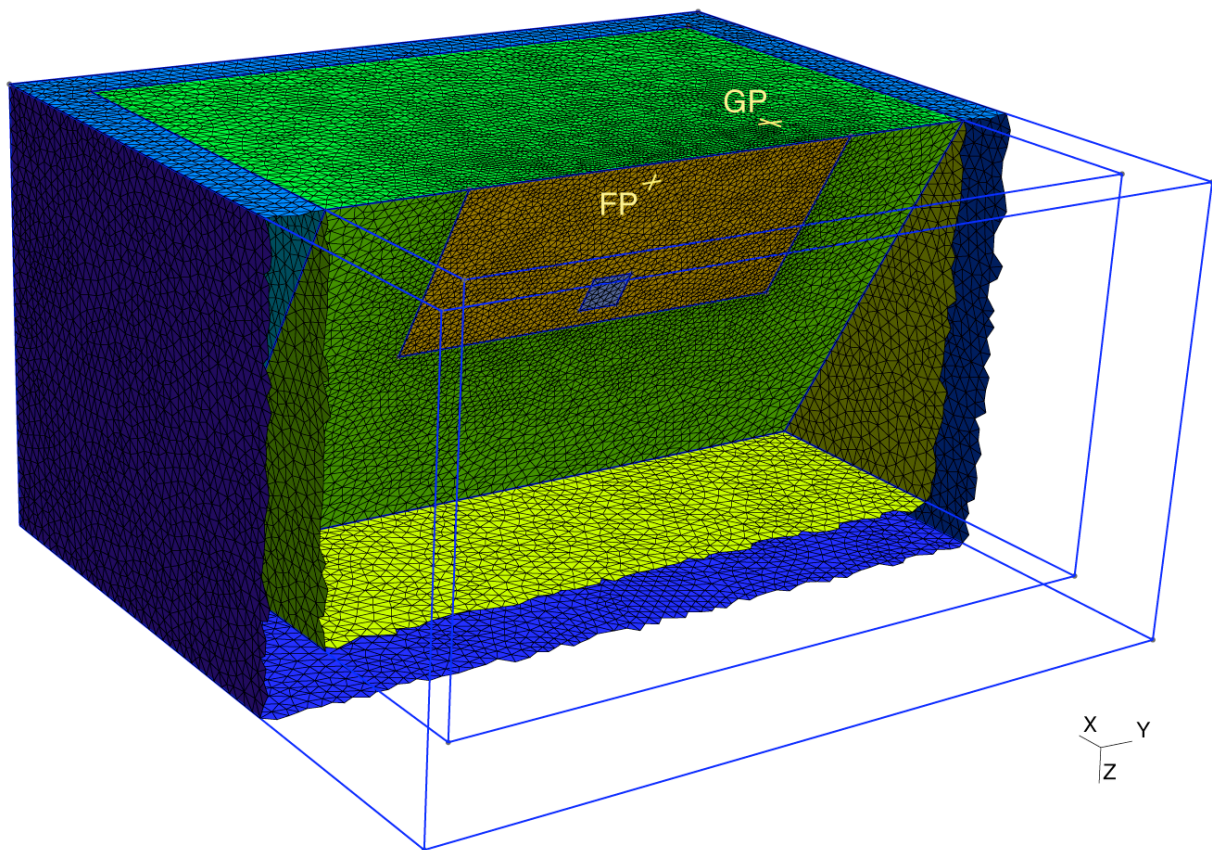


**Figure 5.** DGCrack convergence, accuracy and efficiency analysis based on TPV3 solutions. Frames a) and c) show regression lines with the power convergence rates for two error metrics with exponents reported on Table 2 for unstructured meshes, as a function of both the characteristic fault-element size (lower axis) and the cohesive zone resolution (upper axis). Frame b) presents a cross-correlation based comparison between four different methods (see text). Frame d) shows CPU total-time regressions yielded by the DGCrack and ADER-DG [Pelties *et al.*, 2012] methods for the same accuracy range. Since the DGCrack simulations were run in a faster computing platform, time differences should be divided by a factor of  $\sim 3$  to obtain actual values (see text).



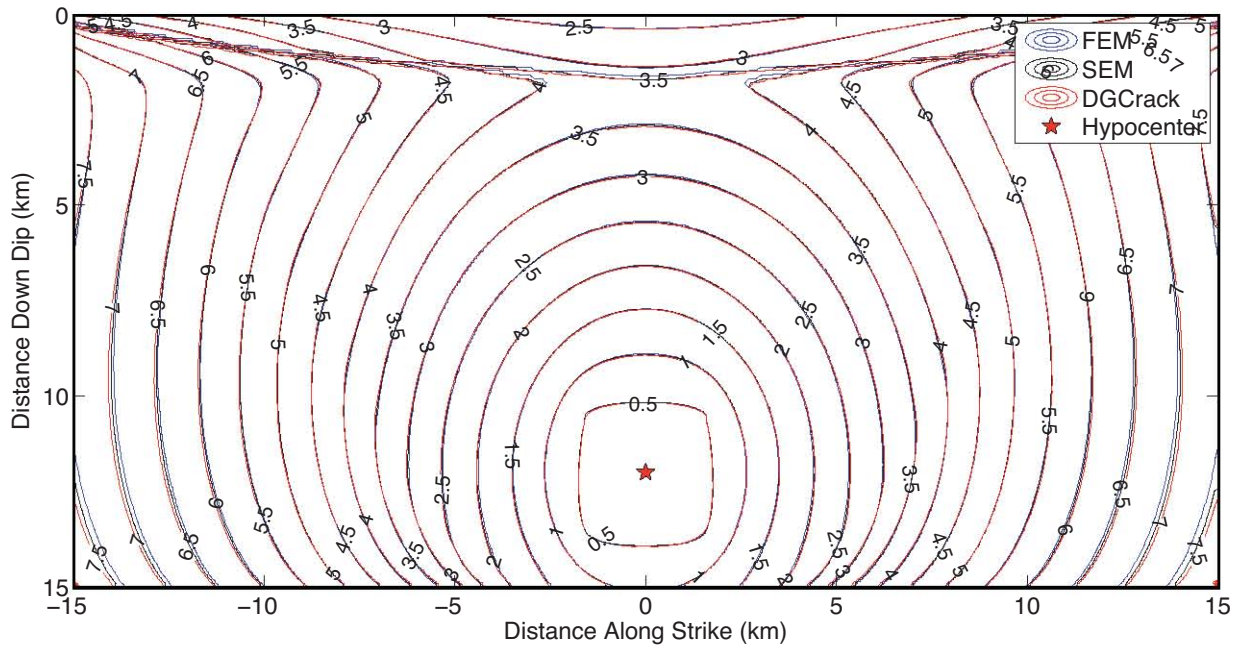
**Figure 6.** Averages of the cross-correlation measurements between pairs of solutions of Figure 5b yielded by four numerical methods.



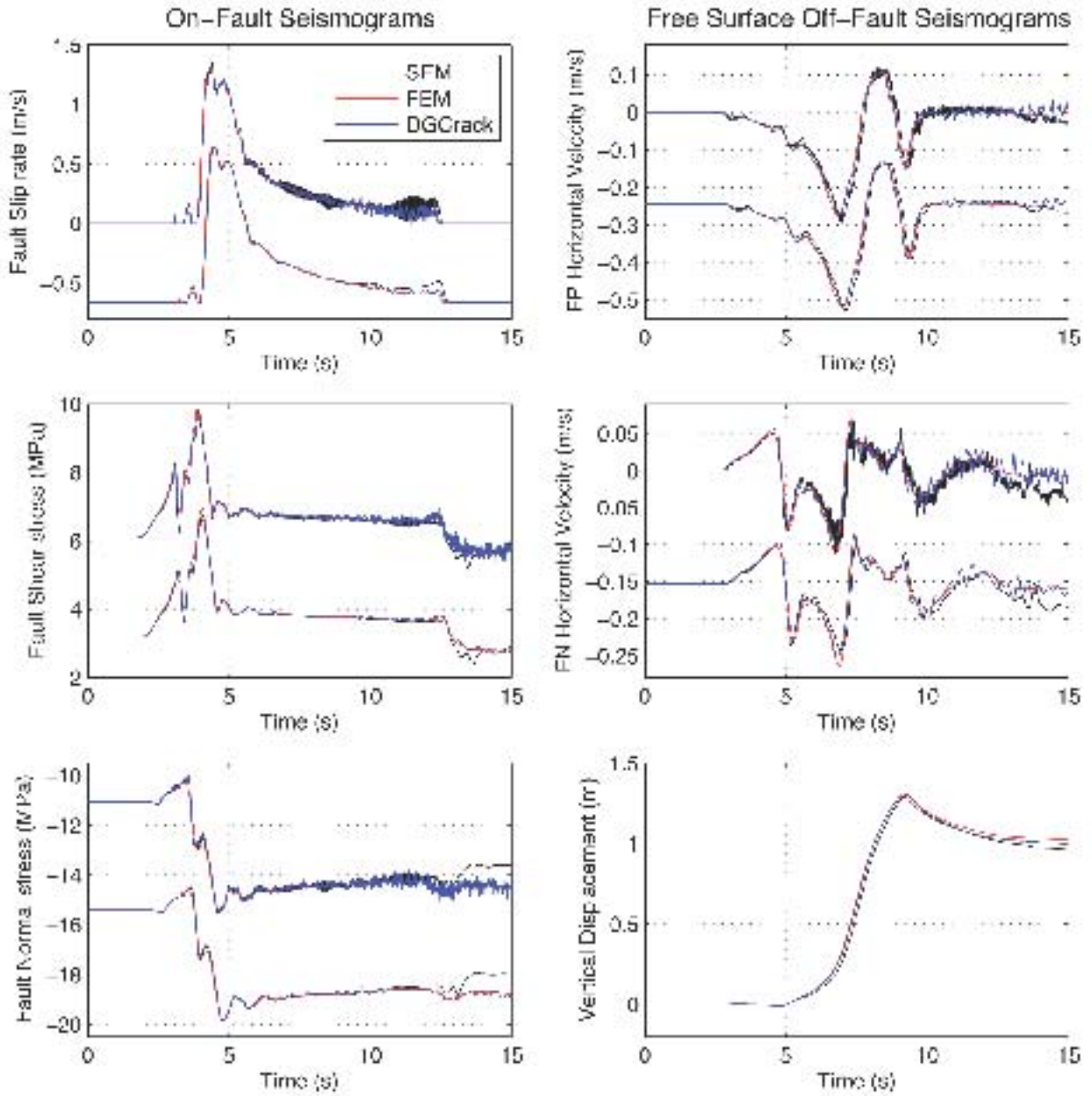


**Figure 7.** TPV10 60° dipping normal-fault (orange rectangle) problem geometry discretized with an unstructured mesh. The CPML slab is discretized by the blue tetrahedra while the physical domain by the green tetrahedra. The blue square represents the nucleation patch, and the yellow crosses represent the fault point (FP) and hanging-wall free-surface ground point (GP) where solutions were obtained and compared (see Figure 9).

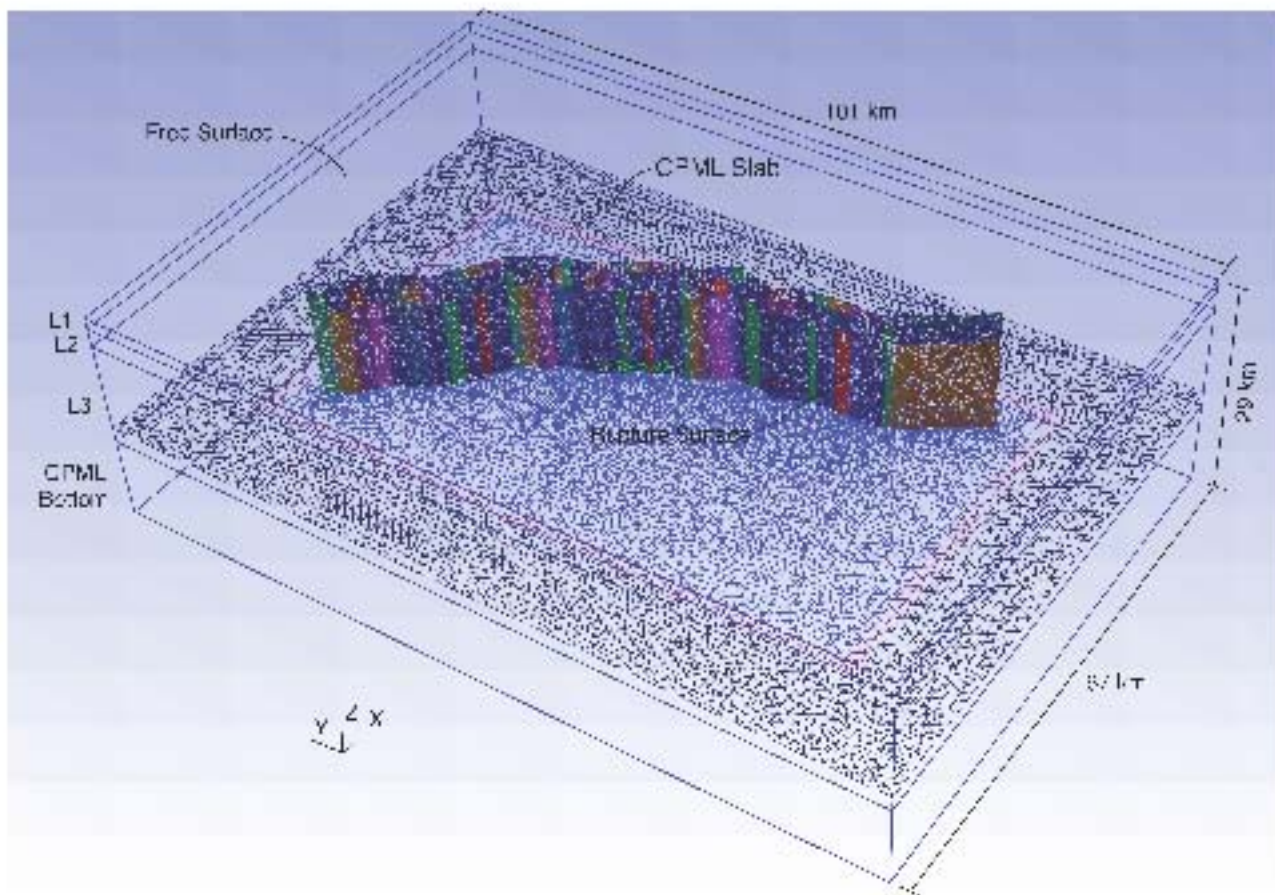




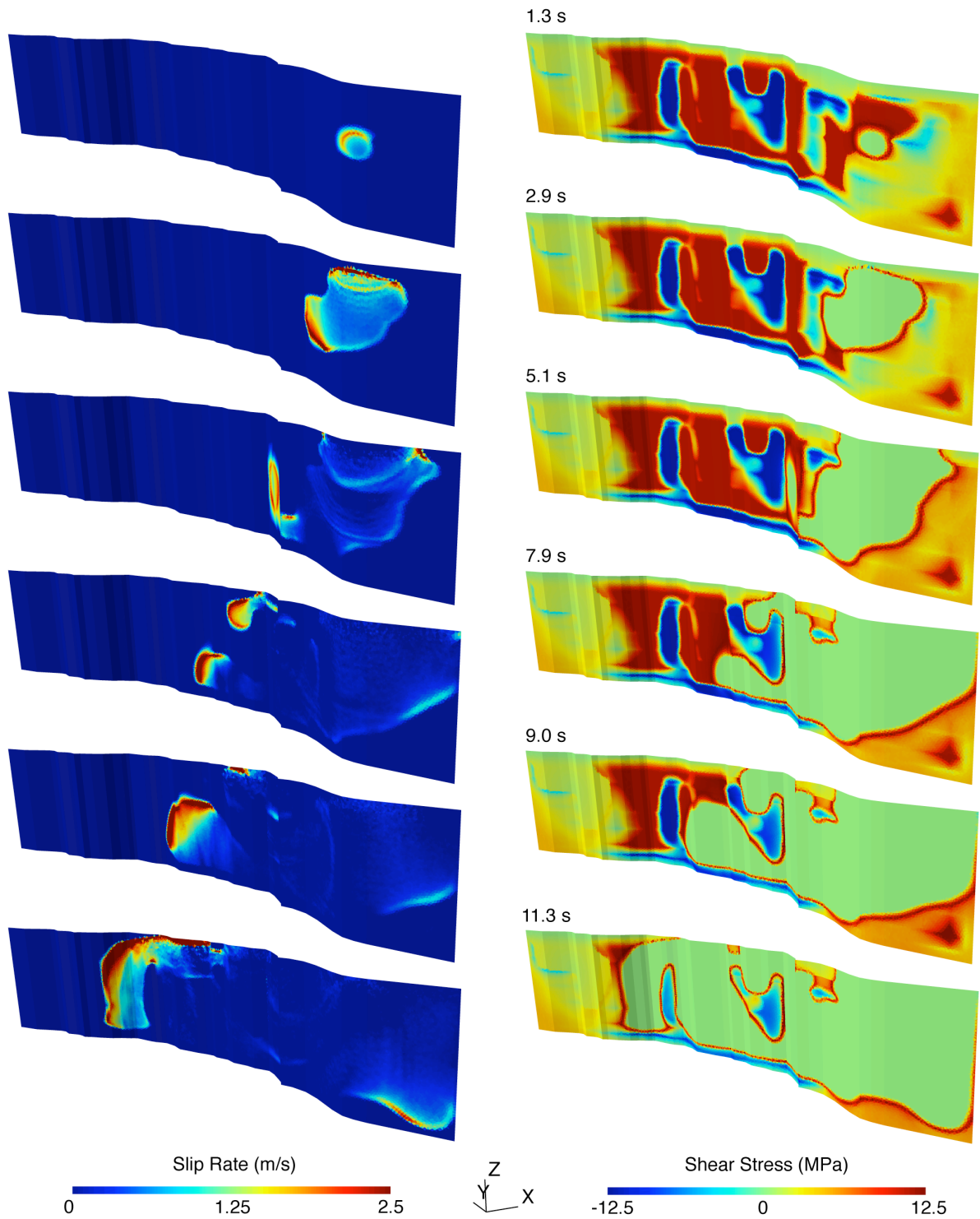
**Figure 8.** Comparison of rupture times for TPV10 yielded by the DGCrack, FEM [Barall, 2009] and SEM [Kaneko et al., 2008] methods, all of them obtained with an effective mesh increment over the fault of 100 m.



**Figure 9.** TPV10 on-fault at FP (left column, see Figure 7) and off-fault at GP (right column, see Figure 7) waveforms comparison for three methods (inset) with (lower traces) and without (upper traces) 3 Hz low-pass filtering.

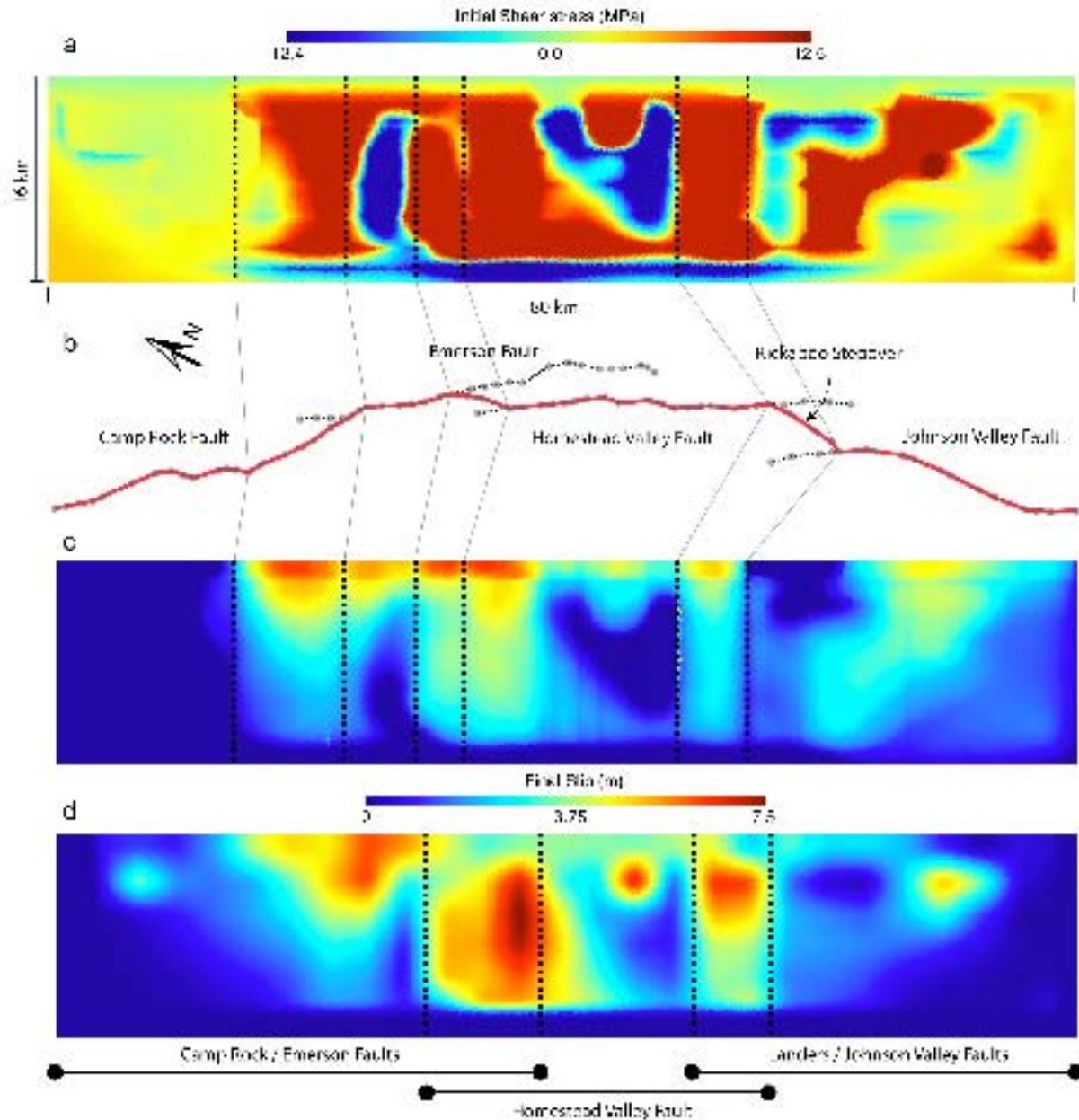


**Figure 10.** 1992 Landers earthquake fault-system geometry embedded in a 1D layered medium (L1, L2 and L3) and discretized with an hp-adaptive tetrahedral mesh (see text).



**Figure 11.** Landers earthquake dynamic rupture simulation results. Slip rate (left column) and shear stress (right column) snapshots over the non-planar fault system (Figure 10) for different times of the rupture process.





**Figure 12.** Landers earthquake fault parameters displayed in a single plane with major geometrical barriers (i.e. kinks) indicated with black dotted lines. a) Initial shear stress used in this study; b) discretization (grey dots) of the Landers earthquake fault system taken from the Community Fault Model for Southern California [Plesch *et al.*, 2007]. The red line indicates the fault geometry used in this study (Figure 10); c) final slip produced by the DGCrack dynamic rupture simulation; and d) final slip and fault discretization for the 1992 Landers earthquake found by Wald and Heaton [1994].

# Capítulo 11

## Benchmarks de SCEC

### Índice

---

<b>11.1. (SCEC/USGS 2012) Ejercicio de verificación de códigos . . . . .</b>	<b>189</b>
11.1.1. Benchmarks TPV16 y TPV17 . . . . .	190
11.1.2. Benchmarks TPV18 y TPV20 . . . . .	199

---

En este capítulo se resuelven cuatro de los últimos benchmarks para la dinámica de la ruptura sísmica propuestos por el Southern California Earthquake Center (SCEC) en 2012. Dos de los benchmarks propuestos presentan por primera vez un estado de esfuerzos y parámetros de la falla heterogéneo. Los otros dos benchmarks están compuestos por una falla bifurcada, cuya dinámica es la más compleja hasta ahora propuesta por SCEC.

### 11.1. (SCEC/USGS 2012) Ejercicio de verificación de códigos

En esta última década, han surgido muchos esquemas numéricos que buscan modelar la dinámica de la ruptura sísmica. Sin embargo, validar estas simulaciones es muy complicado porque no existen soluciones exactas y a su vez no se tienen las suficientes observaciones en campo cercano con las cuales comparar los resultados simulados. El Southern California Earthquake Center (SCEC) con el U.S. Geological Survey (USGS) desde el 2003 se han dedicado a conducir un ejercicio de comparación computacional para verificar la concordancia entre las simulaciones obtenidas a partir de códigos basados en distintas estrategias numéricas (*Harris y Archuleta, 2004*). Su principal objetivo es el de crear benchmarks, año con año cada vez más sofisticados, entregarlos a la comunidad especializada para que esta trabaje de forma independiente sobre estos y finalmente se reúna para comparar los resultados obtenidos. Se espera que estos ejercicios conduzcan al desarrollo de códigos que inspiren confianza en futuros usuarios de los productos, como ingenieros civiles o protección civil, que lleguen a considerar el uso de las simulaciones de ruptura dinámica como parte de la estimación del riesgo sísmico.

En el diagrama de flujo que muestra en la Figura 11.1 se puede observar que para la creación de un benchmark se deben especificar tres aspectos fundamentales para la dinámica de la ruptura que son el estado de esfuerzos inicial sobre la falla, la estructura geológica en la cual está inmersa la falla y el criterio de ruptura que depende de la ley de fricción elegida. Estos deben ser introducidos al código como archivos de entrada.

por los esfuerzos iniciales, la discretización recomendada es de 100 m y el tiempo de simulación es de 15 s.

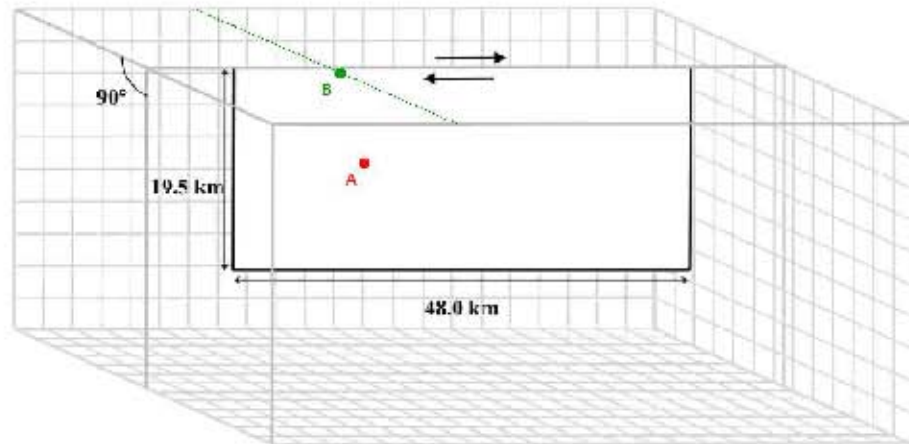


Figura 11.2: Geometría de la falla para los benchmarks TPV16 y TPV17. Imagen tomada de la descripción del benchmark TPV16 en [http://scecddata.usc.edu/cvws/tpv16\\_17docs.html](http://scecddata.usc.edu/cvws/tpv16_17docs.html). El punto A corresponde al registro sobre la falla faultst-090dp090 y su ubicación se puede revisar en la Tabla 11.2. El punto B corresponde al registro fuera de la falla body-002st-090dp000 y su ubicación se puede revisar en la Tabla 11.3.

El método de nucleación es un método de dos estados que se construyó en los archivos de entrada con un ajuste en los parámetros de fricción en la vecindad del hipocentro. Este método introduce una nueva variable  $T$  que es el tiempo en que se fuerza la ruptura dentro de la zona de nucleación. Cuando una punto sobre la falla alcanza el tiempo  $t = T$ , este debe romper estableciendo su coeficiente de fricción  $\mu$  igual al correspondiente valor dinámico  $\mu_d$ .

Densidad ( $\rho$ )	Velocidad de la onda P ( $\alpha$ )	Velocidad de la onda S ( $\beta$ )
2670.0 kg/m <sup>3</sup>	3464.0 m/s	6000.0 m/s

Tabla 11.1: Propiedades del medio de propagación de los benchmarks TPV16 y TPV17.

El primer estado del método de nucleación es una zona circular de aproximadamente 1 km alrededor del hipocentro donde se fuerza la ruptura iniciando en el hipocentro con  $T = 0$ . El valor de  $T$  se incrementa con la distancia con respecto al hipocentro, lo que crea una región circular donde se fuerza la ruptura. Esta ruptura forzada se expande a una velocidad de  $0.7 * \beta$  para el 80% del camino, y después  $0.35 * \beta$  para el restante 20%. Fuera de esta zona no se fuerza la ruptura haciendo  $T = 1.0E9$ .

El segundo estado es una zona circular, con un radio que mide aproximadamente 4 km, que rodea al hipocentro en la que se reduce  $\delta_0$ . En una zona cercana al hipocentro, el valor de  $\delta_0$  es constante y conforme uno se aleja del hipocentro el valor de  $\delta_0$  se incrementa de forma lineal hasta que se alcanza el perímetro. Fuera de esta zona circular el valor de  $\delta_0$  permanece constante con el valor que  $\delta_0$  alcanzó en el perímetro. El efecto de este segundo estado es crear una región circular donde la energía de fracturación es menor en la región circundante al hipocentro para facilitar la ruptura durante la etapa inicial de la simulación.

Los registros sobre la falla son 6 y sus nombres y ubicaciones se encuentran en la Tabla 11.2.

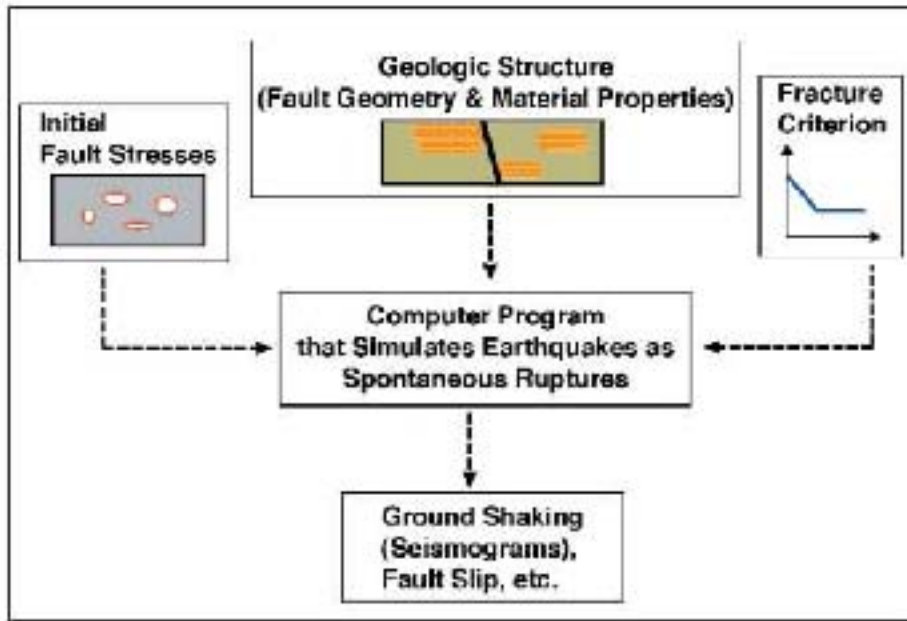


Figura 11.1: Diagrama de flujo que muestra lo que se requiere para la elaboración de un benchmark de la dinámica de la ruptura sísmica. Imagen tomada de *Harris y Archuleta (2004)*.

Para revisar las especificaciones de cada benchmark y comparar los resultados de las simulaciones, el SCEC/USGS creó el sitio web <http://scecddata.usc.edu/cvws/> (*Harris et al., 2009*). En este se especifica la estructura que deben tener los archivos de salida para poder ingresarlos en la página y poder comparar las soluciones con aquellos modeladores que hayan subido sus resultados.

Para el taller del 2012, celebrado el 6 de febrero del 2012 en la Universidad del Sur de California (USC), se presentaron las comparaciones de los benchmarks cuya numeración va del 16 al 21. Los benchmarks fueron entregados a los modeladores con tres meses de anterioridad. Los casos 16 y 17 representan fallas de corrimiento lateral que alcanzan la superficie libre cuyos estados iniciales son heterogéneos. Por otro lado los casos 18 y 20 cuentan con una falla de corrimiento lateral bifurcada contenida en un medio elástico, mientras que para los casos 19 y 21 el medio es plástico. En total para los casos 16 y 17 participaron 10 modeladores, para los casos 18 y 20 hubo 5 modeladores y para los casos 19 y 21 tan sólo 3. Como por el momento no se ha incluido un medio plástico nuestra participación con DGCrack fue únicamente en los casos 16, 17, 18 y 20. A continuación se dará una breve descripción de los benchmarks que se pudieron resolver y algunas comparaciones.

### 11.1.1. Benchmarks TPV16 y TPV17

Los benchmarks TPV16 y TPV17 emplean esfuerzos iniciales heterogéneos que fueron generados aleatoriamente. Los esfuerzos iniciales y los parámetros de fricción de cada punto sobre la falla son archivos de entrada que pueden descargarse en [http://scecddata.usc.edu/cvws/tpv16\\_17docs.html](http://scecddata.usc.edu/cvws/tpv16_17docs.html). Como puede observarse en la Figura 11.2, estos benchmarks incorporan una falla rectangular vertical de 48 km de largo por 19 km de ancho. Su mecanismo es de corrimiento lateral que alcanza la superficie libre en un semiespacio homogéneo elástico (ver la Tabla 11.1). La ley de fricción es la ley de Coulomb dada por la Ecuación 8.8 y la evolución del coeficiente de fricción sigue la ley *linear slip weakening law* dada por la Ecuación 8.9. Los benchmarks TPV16 y TPV17 son idénticos excepto



Nombre del registro	Ubicación
faultst-090dp000	−9.0 <i>km</i> en dirección del rumbo, 0 <i>km</i> en dirección del buzamiento
faultst000dp000	0 <i>km</i> en dirección del rumbo, 0 <i>km</i> en dirección del buzamiento
faultst090dp000	9.0 <i>km</i> en dirección del rumbo, 0 <i>km</i> en dirección del buzamiento
<b>faultst-090dp090</b>	−9.0 <i>km</i> en dirección del rumbo, 9 <i>km</i> en dirección del buzamiento
faultst000dp090	0 <i>km</i> en dirección del rumbo, 9 <i>km</i> en dirección del buzamiento
faultst090dp090	9.0 <i>km</i> en dirección del rumbo, 9 <i>km</i> en dirección del buzamiento

Tabla 11.2: Nombres y ubicaciones de los registros sobre la falla de los benchmarks TPV16 y TPV17. El centro de la falla sobre la superficie libre corresponde al origen (0 *km* en dirección del rumbo y 0 *km* en dirección del buzamiento). El registro en negritas corresponde al registro A que se encuentra en la Figura 11.2.

Los registros fuera de la falla se ubican sobre la superficie libre, son 12 y sus nombres y ubicaciones se encuentran en la Tabla 11.3.

Nombre del registro	Ubicación
body-002st000dp000	−0.2 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, 0 <i>km</i> en dirección del rumbo
body002st000dp000	2.0 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, 0 <i>km</i> en dirección del rumbo
<b>body-002st-090dp000</b>	−0.2 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, −9.0 <i>km</i> en dirección del rumbo
body-002st090dp000	−0.2 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, 9.0 <i>km</i> en dirección del rumbo
body002st-090dp000	0.2 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, −9.0 <i>km</i> en dirección del rumbo
body002st090dp000	0.2 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, 9.0 <i>km</i> en dirección del rumbo
body-060st000dp000	−6.0 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, 0 <i>km</i> en dirección del rumbo
body060st000dp000	6.0 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, 0 <i>km</i> en dirección del rumbo
body-060st-090dp000	−6.0 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, −9.0 <i>km</i> en dirección del rumbo
body-060st090dp000	−6.0 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, 9.0 <i>km</i> en dirección del rumbo
body060st-090dp000	6.0 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, −9.0 <i>km</i> en dirección del rumbo
body060st090dp000	6.0 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, 9.0 <i>km</i> en dirección del rumbo

Tabla 11.3: Nombres y ubicaciones de los registros fuera de la falla sobre la superficie libre de los benchmarks TPV16 y TPV17. El centro de la falla sobre la superficie libre corresponde al origen (0 *km* en dirección del rumbo y 0 *km* en dirección del buzamiento). El registro en negritas corresponde al registro B que se encuentra en la Figura 11.2. La dirección perpendicular negativa apunta de la falla a la posición del registro B que se encuentra en la Figura 11.2.

### Benchmark TPV16

En la Figura 11.3 se muestra el estado inicial heterogéneo del esfuerzo cizallante sobre la falla.

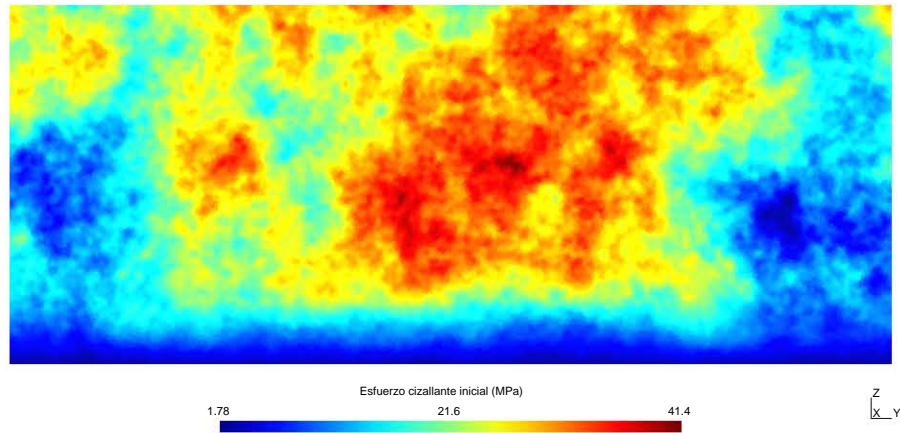


Figura 11.3: Esfuerzo cizallante inicial del benchmark TPV16.

Para este benchmark se comparan las soluciones entre los códigos de Elemento Finito (FEM) (*Barall, 2009*), de Elementos Espectrales (SEM) (*Kaneko et al., 2008*) y DGCrack. Los contornos de los tiempos de ruptura de los 3 métodos pueden verse en la Figura 11.4 donde puede observarse que los tiempos de ruptura entre SEM y DGCrack son muy similares mientras que para FEM la ruptura es más lenta.

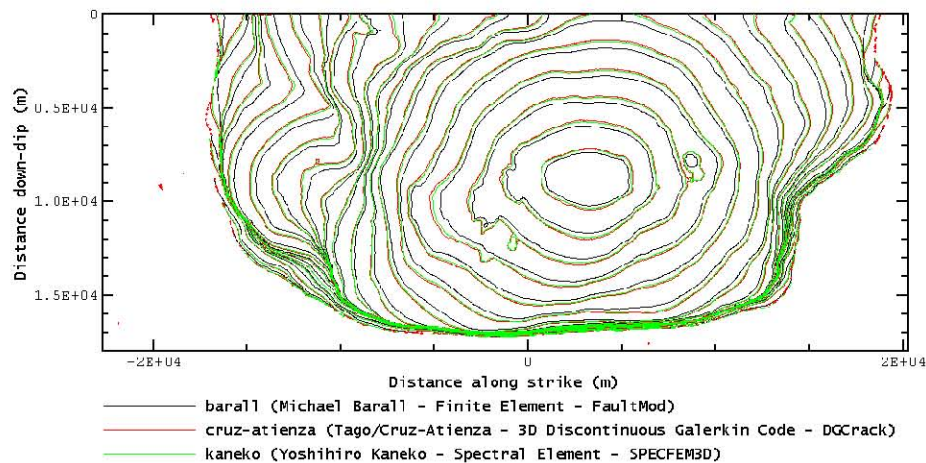


Figura 11.4: Comparación de los tiempos de ruptura del benchmark TPV16 entre FEM, SEM y DGCrack. Imagen generada en <http://scedata.usc.edu/cvws>.

En las Figuras 11.5 y 11.6 se comparan las series de tiempo de FEM, SEM y DGCrack con un filtro pasa bajas con una frecuencia esquina de  $3\text{ Hz}$  sobre los registros A y B respectivamente. Las soluciones obtenidas entre los 3 métodos son muy similares en cuanto a su forma y amplitud.

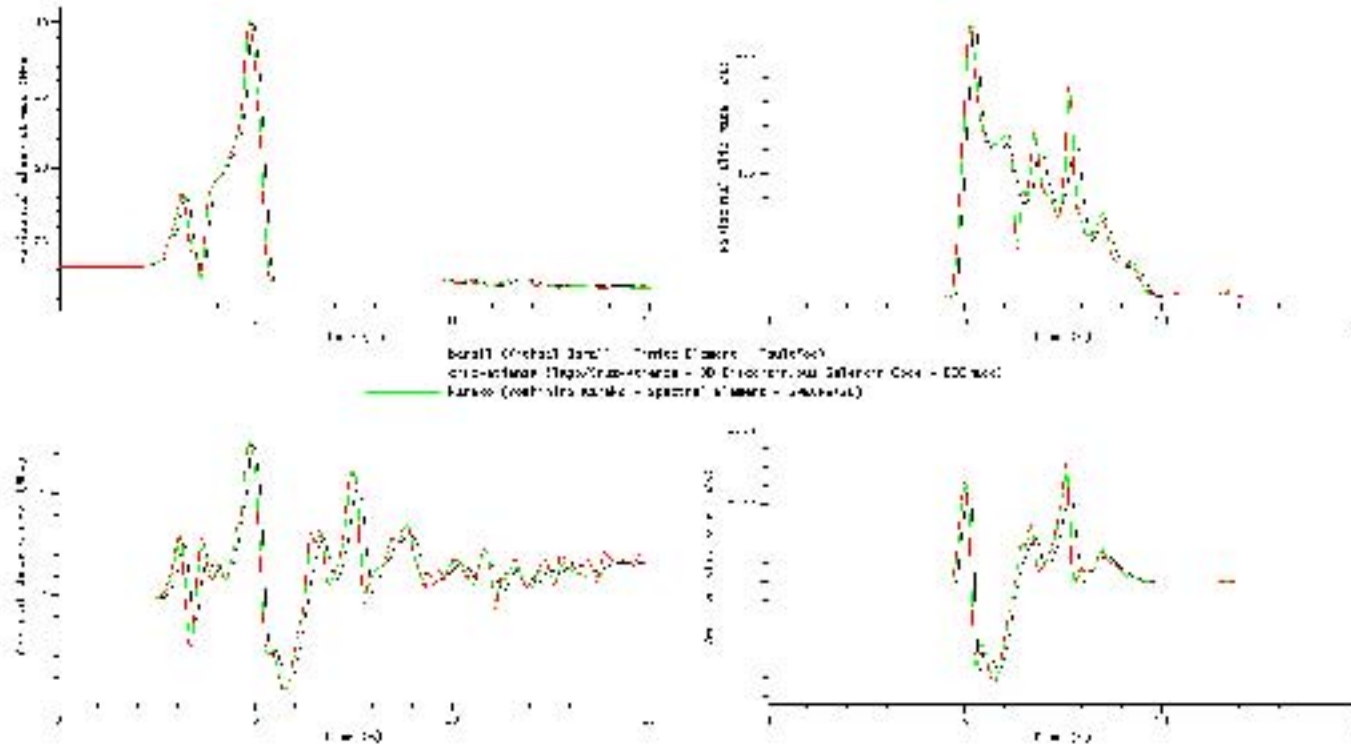


Figura 11.5: Comparación de los esfuerzos cizallantes horizontales y verticales y las velocidades de deslizamiento horizontales y verticales entre FEM, SEM y DGCrack en el registro A del benchmark TPV16 (ver Figura 11.2). Las series de tiempo se filtraron hasta  $3\text{ Hz}$ . Imágenes individuales generadas en <http://scecddata.usc.edu/cvws>.

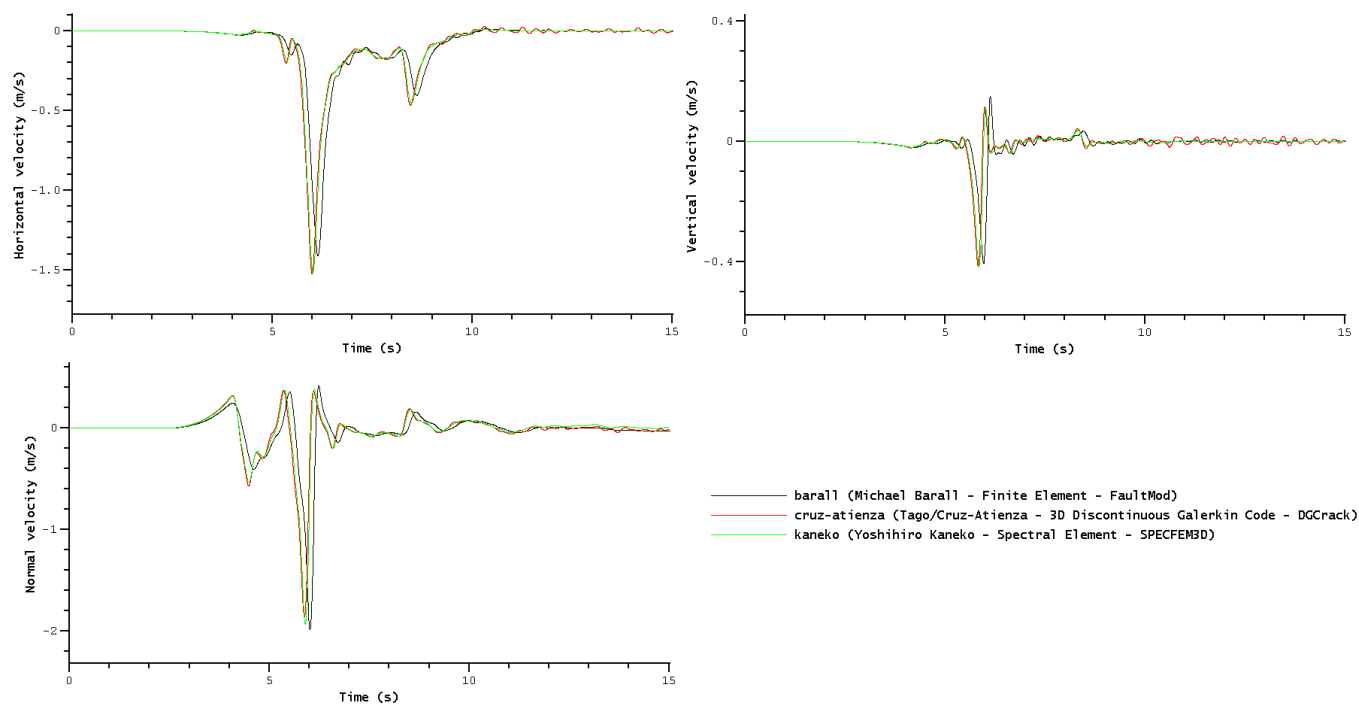


Figura 11.6: Comparación de las velocidades horizontales, verticales y normales entre FEM, SEM y DGCrack en el registro B del benchmark TPV16 (ver Figura 11.2). Las series de tiempo se filtraron hasta  $3\text{ Hz}$ . Imágenes individuales generadas en <http://scecddata.usc.edu/cvws>.

La oscilaciones presentes en DGCrack probablemente se deban a la tasa de engrosamiento aplicada a la malla, revisar el Capítulo 6.

### Benchmark TPV17

En la Figura 11.7 se muestra el estado inicial heterogéneo del esfuerzo cizallante sobre la falla.

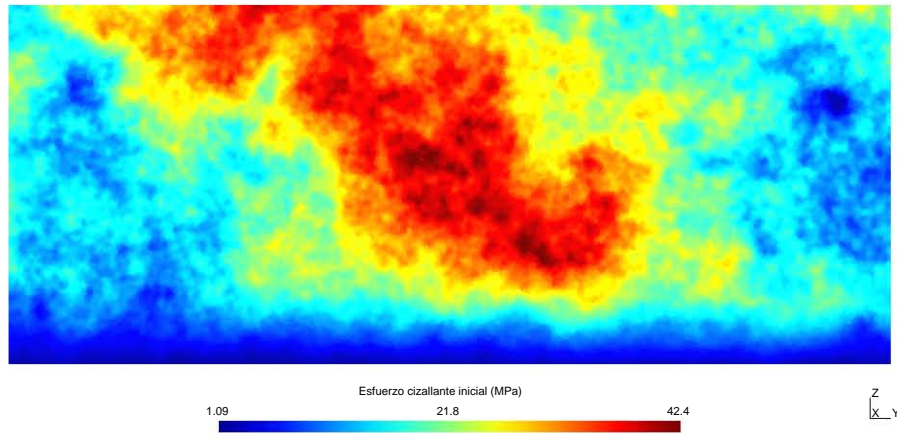


Figura 11.7: Esfuerzo cizallante inicial del benchmark TPV17.

Para este benchmark se comparan las soluciones entre los códigos de Elemento Finito (FEM) (*Barall*, 2009), de Elementos Espectrales (SEM) (*Kaneko et al.*, 2008) y DGCrack. Los contornos de los tiempos de ruptura de los 3 métodos pueden verse en la Figura 11.8. Al igual que para el benchmark TPV16 puede observarse que los tiempos de ruptura entre SEM y DGCrack son muy similares mientras que para FEM la ruptura es más lenta.

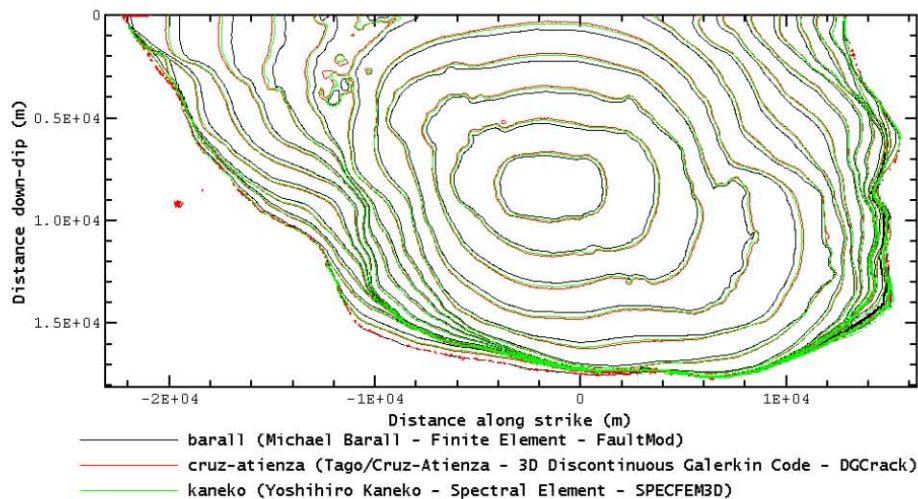


Figura 11.8: Comparación de los tiempos de ruptura del benchmark TPV17 entre FEM, SEM y DGCrack. Imagen generada en <http://scecddata.usc.edu/cwvs>.

En las Figuras 11.9 y 11.10 se comparan las series de tiempo de FEM, SEM y DGCrack con un filtro pasa bajas con una frecuencia esquina de  $3\text{ Hz}$  sobre los registros A y B respectivamente. Como para el benchmark TPV16, las soluciones obtenidas entre los 3 métodos son muy similares en cuanto a su forma y amplitud.

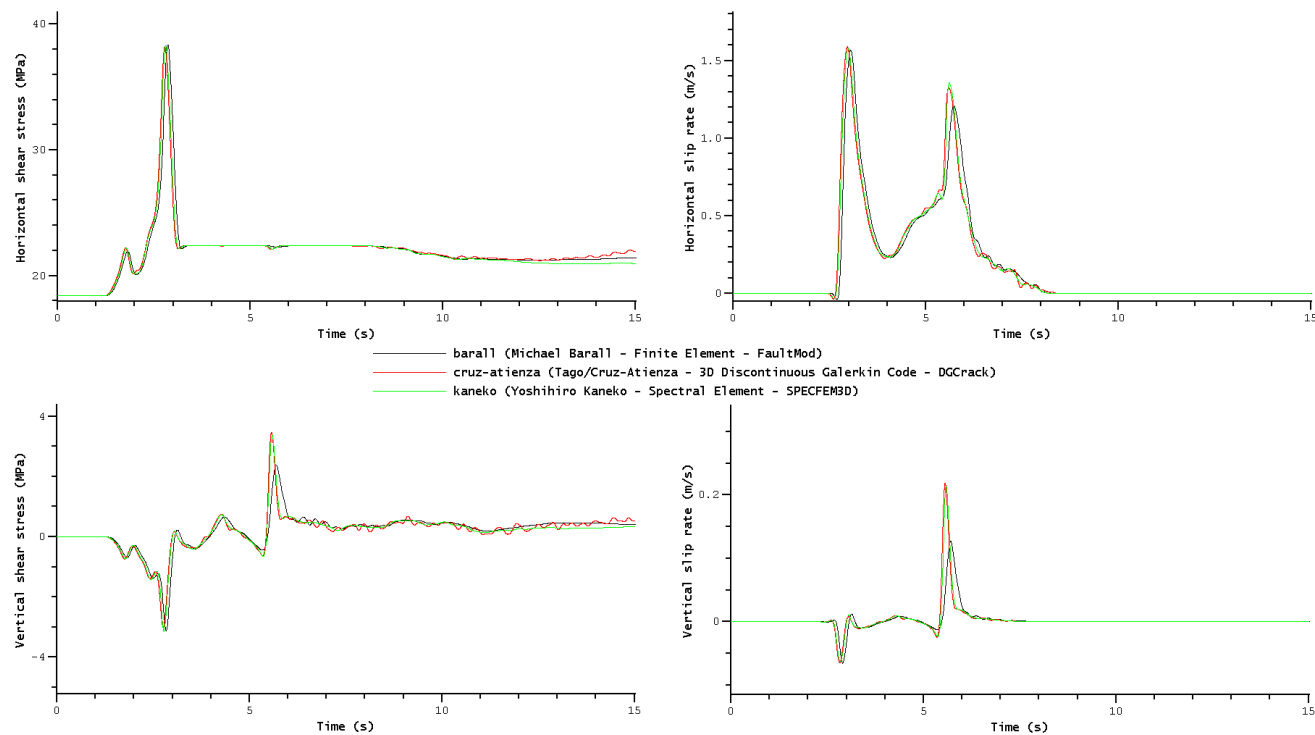


Figura 11.9: Comparación de los esfuerzos cizallantes horizontales y verticales y las velocidades de deslizamiento horizontales y verticales entre FEM, SEM y DGCrack en el registro A del benchmark TPV17 (ver Figura 11.2). Las series de tiempo se filtraron hasta  $3\text{ Hz}$ . Imágenes individuales generadas en <http://scecddata.usc.edu/cvws>.

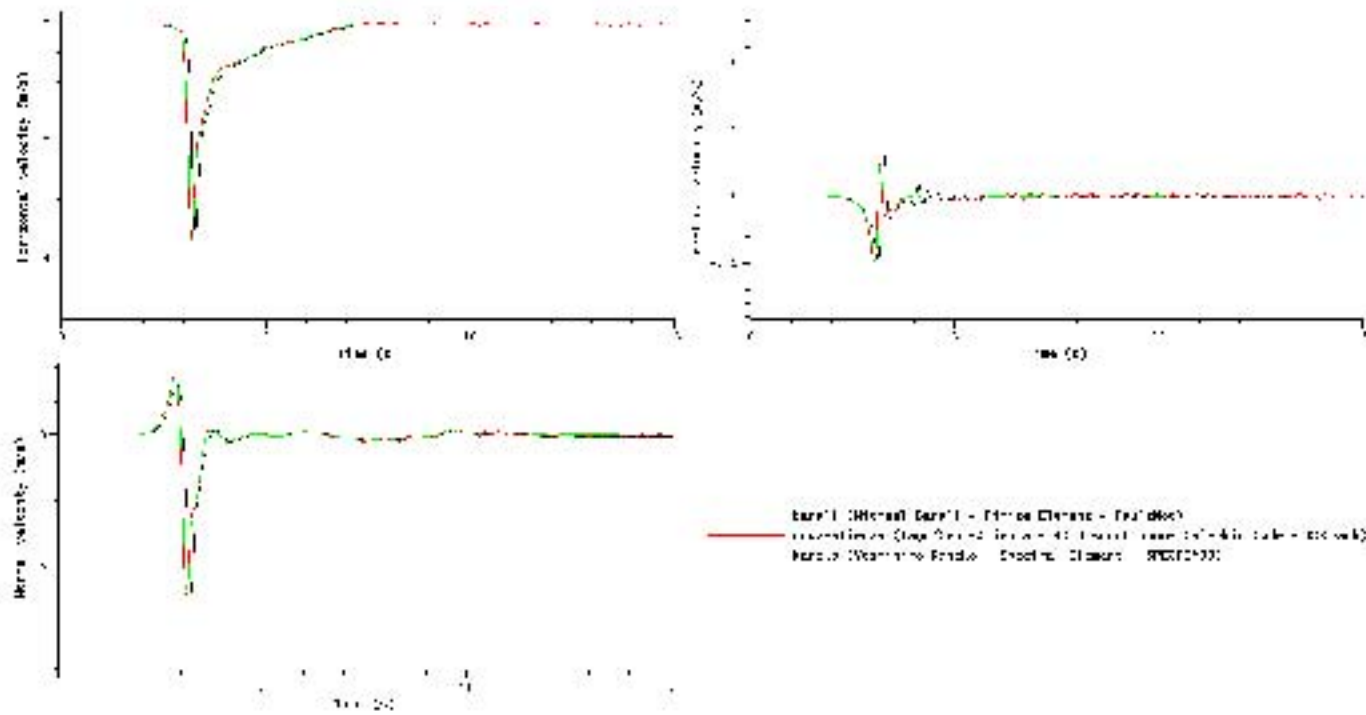


Figura 11.10: Comparación de las velocidades horizontales, verticales y normales entre FEM, SEM y DGCrack en el registro B del benchmark TPV17 (ver Figura 11.2). Las series de tiempo se filtraron hasta  $3\text{ Hz}$ . Imágenes individuales generadas en <http://scecddata.usc.edu/cvws>.

La oscilaciones presentes en DGCrack probablemente se deban a la tasa de engrosamiento aplicada a la malla, revisar el Capítulo 6.



### 11.1.2. Benchmarks TPV18 y TPV20

Los benchmarks TPV18 y TPV20 cuentan con una falla principal y una falla rama. La diferencia entre ambos benchmarks es que el mecanismo del benchmark TPV18 es un corrimiento lateral derecho que separa a las fallas mientras que el del benchmark TPV20 es un corrimiento lateral izquierdo que junta ambas fallas. En la Figura 11.11 se muestran las dos fallas que alcanzan la superficie libre, la falla principal (cuyo perímetro está en rojo) y la falla rama (cuyo perímetro está en azul). La falla principal mide  $28 \text{ km}$  en dirección del rumbo y  $15 \text{ km}$  en profundidad. La falla rama mide  $12 \text{ km}$  en dirección del rumbo y  $15 \text{ km}$  en profundidad. El punto de intersección está localizado a  $12 \text{ km}$  del borde derecho de la falla principal. La falla rama hace un ángulo de  $30^\circ$  con respecto a la falla principal pero por  $100 \text{ m}$  en dirección del rumbo no alcanza el punto de intersección.

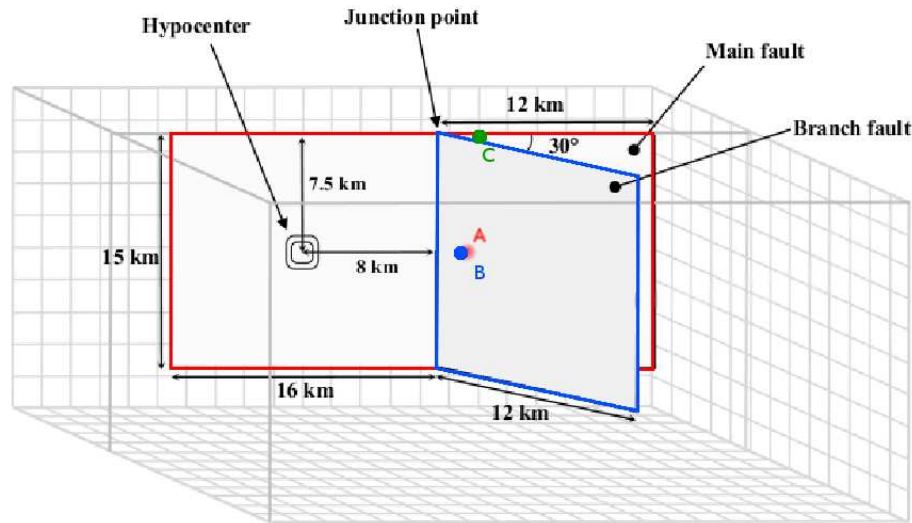


Figura 11.11: Geometría de la falla para los benchmarks TPV18 y TPV20. Imagen tomada de la descripción del benchmark TPV18 en [http://scedata.usc.edu/cvws/tpv18\\_21docs.html](http://scedata.usc.edu/cvws/tpv18_21docs.html). El punto A sobre la falla principal corresponde al registro faultst020dp075 y el punto B sobre la falla rama corresponde al registro branchst020dp075. Las ubicaciones los registros sobre la falla de pueden revisar en la Tabla 11.7.

El medio de propagación es un semiespacio homogéneo elástico cuyas propiedades pueden revisarse en la Tabla 11.4. El hipocentro está localizado en el lado izquierdo de la falla principal a  $8 \text{ km}$  del punto de intersección y  $7.5 \text{ km}$  en profundidad.

Densidad ( $\rho$ )	Velocidad de la onda P ( $\alpha$ )	Velocidad de la onda S ( $\beta$ )
$2700.0 \text{ kg/m}^3$	$3300.0 \text{ m/s}$	$5716.0 \text{ m/s}$

Tabla 11.4: Propiedades del medio de propagación de los benchmarks TPV18 y TPV20.

El estado inicial de esfuerzos sobre ambas fallas depende únicamente de la profundidad. Los componentes del tensor de esfuerzos están definidos en la Tabla 11.5. La presión de fluido  $P_f$  es hidrostática y varía con la profundidad pero es constante en el tiempo.



Componente	Definición
$\sigma_{11}$	Esfuerzo compresivo en la dirección vertical. Valores negativos denotan compresión.
$\sigma_{22}$	Esfuerzo compresivo en la dirección paralela a la falla principal. Valores negativos denotan compresión.
$\sigma_{33}$	Esfuerzo compresivo en la dirección perpendicular a la falla principal. Valores negativos denotan compresión. Este equivale al negativo del esfuerzo normal total en la falla principal.
$\sigma_{23}$	Esfuerzo cizallante en el plano horizontal. Valores positivos denotan esfuerzo cizallante lateral derecho en la falla principal. Este equivale al esfuerzo cizallante en la falla principal.
$\sigma_{13}$	Esfuerzo cizallante en el plano vertical perpendicular a la falla principal.
$\sigma_{12}$	Esfuerzo cizallante en el plano vertical paralelo a la falla principal.

Tabla 11.5: Componentes del tensor de esfuerzos de los benchmarks TPV18 y TPV20.

La presión de fluido y los valores iniciales del tensor de esfuerzos son:

$$\begin{aligned}
P_f &= (1000 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(\text{profundidad en metros}) \\
\sigma_{11} &= -(2700 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(\text{profundidad en metros}) \\
\sigma_{22} &= \begin{cases} b_{22}(\sigma_{11} + P_f) - P_f, & \text{si la profundidad} \leq 15 \text{ km}, \\ \sigma_{11}, & \text{si la profundidad} > 15 \text{ km}. \end{cases} \\
\sigma_{33} &= \begin{cases} b_{33}(\sigma_{11} + P_f) - P_f, & \text{si la profundidad} \leq 15 \text{ km}, \\ \sigma_{11}, & \text{si la profundidad} > 15 \text{ km}. \end{cases} \\
\sigma_{23} &= \begin{cases} b_{23}(\sigma_{11} + P_f), & \text{si la profundidad} \leq 15 \text{ km} \\ 0, & \text{si la profundidad} > 15 \text{ km}. \end{cases} \\
\sigma_{13} &= 0 \\
\sigma_{12} &= 0
\end{aligned}$$

Los coeficientes  $b_{22}$ ,  $b_{33}$  y  $b_{23}$  están dados en la Tabla 11.6.

Coficiente	Valor para TPV18	Valor para TPV20
$b_{22}$	0.44327040	0.67738619
$b_{33}$	0.50911055	0.27499476
$b_{23}$	-0.15487679	0.09812971

Tabla 11.6: Coeficientes del tensor de esfuerzos inicial de los benchmarks TPV18 y TPV20.

La ley de fricción es la ley de Coulomb dada por la Ecuación 8.8 y la evolución del coeficiente de fricción sigue la ley *linear slip weakening law* dada por la Ecuación 8.9. La distancia al hipocentro se representa por  $r$  y los valores de los parámetros de la ley de fricción son:

$$\begin{aligned}
\mu_s &= 0.60 \\
\mu_d &= 0.12 \\
\delta_0 &= \begin{cases} 0.04 \text{ m}, & \text{si } r \leq 360 \text{ m}, \\ r/9000, & \text{si } 360 \text{ m} \leq r \leq 3600 \text{ m} \\ 0.40 \text{ m}, & \text{si } r > 3600 \text{ m} \end{cases} \\
C &= \begin{cases} 0.20 \text{ MPa} + (0.0006 \text{ MPa/m})(3000 \text{ m} - \text{profundidad}), & \text{si profundidad} \leq 3000 \text{ m} \\ 0.20 \text{ MPa}, & \text{si profundidad} > 3000 \text{ m} \end{cases}
\end{aligned}$$

El método de nucleación es un método de dos estados que introduce una nueva variable  $T$  que es el tiempo en que se fuerza la ruptura dentro de la zona de nucleación. Cuando una punto sobre la falla alcanza el tiempo  $t = T$ , este debe romper estableciendo su coeficiente de fricción  $\mu$  igual al correspondiente valor dinámico  $\mu_d$ . Los valores del  $T$  sobre la falla están dados por:

$$T = \begin{cases} r/(0.7\beta), & \text{si } r \leq 720 \text{ m} \\ (720 \text{ m})/(0.7\beta) + (r - 720 \text{ m})/(0.35\beta), & \text{si } 720 \text{ m} \leq r \leq 900 \text{ m} \\ 1.0E + 9, & \text{si } r > 900 \text{ m} \end{cases}$$

El primer estado del método de nucleación es una zona circular con un radio de 0.9 km que rodea al hipocentro. En el hipocentro  $T = 0$  y su valor se incrementa con respecto a la distancia del hipocentro creando una región circular donde se fuerza la ruptura. La ruptura forzada se expande a una velocidad de  $0.7 * \beta$  para el 80 % del trayecto, después desacelera a  $0.35 * \beta$  para el 20 % restante. Afuera de la zona de ruptura forzada el valor de  $T$  es igual a 1.0E9 para que no se siga forzando la ruptura.

El segundo estado es una zona circular con un radio de 3.6 km alrededor del hipocentro donde  $\delta_0$  es reducido. En el 10 % del interior más próximo al hipocentro  $\delta_0$  es igual a 0.04 m. El valor de  $\delta_0$  se incrementa de manera lineal con respecto a la distancia del hipocentro y alcanza un valor final de 0.4 m, el cual persiste en todo el resto de la falla. El efecto de esta zona es reducir la energía de fracturación alrededor del hipocentro para facilitar la expansión de la ruptura al principio de la simulación.

Los registros sobre la fallas son 8 en la falla principal y 6 en la falla rama. Sus nombres y ubicaciones se encuentran en la Tabla 11.7.

Nombre del registro	Ubicación
Registros en la falla principal	
faultst-020dp000	-2.0 km en dirección del rumbo, 0 km en dirección del buzamiento
faultst020dp000	2.0 km en dirección del rumbo, 0 km en dirección del buzamiento
faultst050dp000	5.0 km en dirección del rumbo, 0 km en dirección del buzamiento
faultst090dp000	9.0 km en dirección del rumbo, 0 km en dirección del buzamiento
faultst-020dp075	-2.0 km en dirección del rumbo, 7.5 km en dirección del buzamiento
<b>faultst020dp075</b>	2.0 km en dirección del rumbo, 7.5 km en dirección del buzamiento
faultst050dp075	5.0 km en dirección del rumbo, 7.5 km en dirección del buzamiento
faultst090dp075	9.0 km en dirección del rumbo, 7.5 km en dirección del buzamiento
Registros en la falla rama	
branchst020dp000	2.0 km en dirección del rumbo, 0 km en dirección del buzamiento
branchst050dp000	5.0 km en dirección del rumbo, 0 km en dirección del buzamiento
branchst090dp000	9.0 km en dirección del rumbo, 0 km en dirección del buzamiento
<b>branchst020dp075</b>	2.0 km en dirección del rumbo, 7.5 km en dirección del buzamiento
branchst050dp075	5.0 km en dirección del rumbo, 7.5 km en dirección del buzamiento
branchst090dp075	9.0 km en dirección del rumbo, 7.5 km en dirección del buzamiento

Tabla 11.7: Nombres y ubicaciones de los registros sobre la falla principal y rama de los benchmarks TPV18 y TPV20. El punto de intersección sobre la superficie libre corresponde al origen (0 km en dirección del rumbo y 0 km en dirección del buzamiento). Los registros en negritas de la falla principal y rama corresponden a los registro A y B respectivamente, que se encuentran en la Figura 11.11.

Los registros fuera de la falla se ubican sobre la superficie libre, son 11 y sus nombres y ubicaciones se encuentran en la Tabla 11.8.

Nombre del registro	Ubicación
body030st-020dp000	3.0 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, -2.0 <i>km</i> en dirección del rumbo
body-030st-020dp000	-3.0 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, -2.0 <i>km</i> en dirección del rumbo
body030st020dp000	3.0 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, 2.0 <i>km</i> en dirección del rumbo
<b>body-006st-020dp000</b>	-0.6 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, 2.0 <i>km</i> en dirección del rumbo
body-042st020dp000	-4.2 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, 2.0 <i>km</i> en dirección del rumbo
body030st050dp000	3.0 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, 5.0 <i>km</i> en dirección del rumbo
body-014st050dp000	-1.4 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, 5.0 <i>km</i> en dirección del rumbo
body-059st-050dp000	-5.9 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, 5.0 <i>km</i> en dirección del rumbo
body030st080dp000	3.0 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, 8.0 <i>km</i> en dirección del rumbo
body-023st080dp000	-2.3 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, 8.0 <i>km</i> en dirección del rumbo
body-076st080dp000	-7.6 <i>km</i> en dirección perpendicular de la falla, 8.0 <i>km</i> en dirección del rumbo

Tabla 11.8: Nombres y ubicaciones de los registros fuera de la falla sobre la superficie libre de los benchmarks TPV18 y TPV20. El punto de intersección sobre la superficie libre corresponde al origen (0 *km* en dirección del rumbo y 0 *km* en dirección del buzamiento). El registro en negritas corresponde al registro C que se encuentra en la Figura 11.11. La dirección perpendicular negativa apunta de la falla principal a la falla rama, ver la Figura 11.11.

## Benchmark TPV18

En general las comparaciones entre todos los modeladores que participaron en este benchmark fueron malas sobre todo en los registros de la falla rama. Para que las soluciones se parecieran un poco mucho de los simuladores tuvieron que reducir el tamaño característico de sus mallas a la mitad de 100 *m* a 50 *m*. A continuación se presentarán las soluciones obtenidas por los códigos de EQdyna-Elemento Finito (EQdyna-FEM) (Duan y Oglesby, 2006) con un tamaño característico de malla de 50 *m*, Elemento Finito (FEM) (Barall, 2009) con un tamaño característico de malla de 50 *m* y DGCrack con un tamaño característico de malla de 100 *m*.

Los contornos de los tiempos de ruptura de los 3 métodos pueden verse en la Figura 11.12 donde puede observarse que para cada método la ruptura avanza diferente, la más rápida es DGCrack, después EQdyna-FEM y finalmente FEM. En la falla rama existe una diferencia en el contorno de ruptura significativa entre FEM con respecto a EQdyna-FEM y DGCrack.

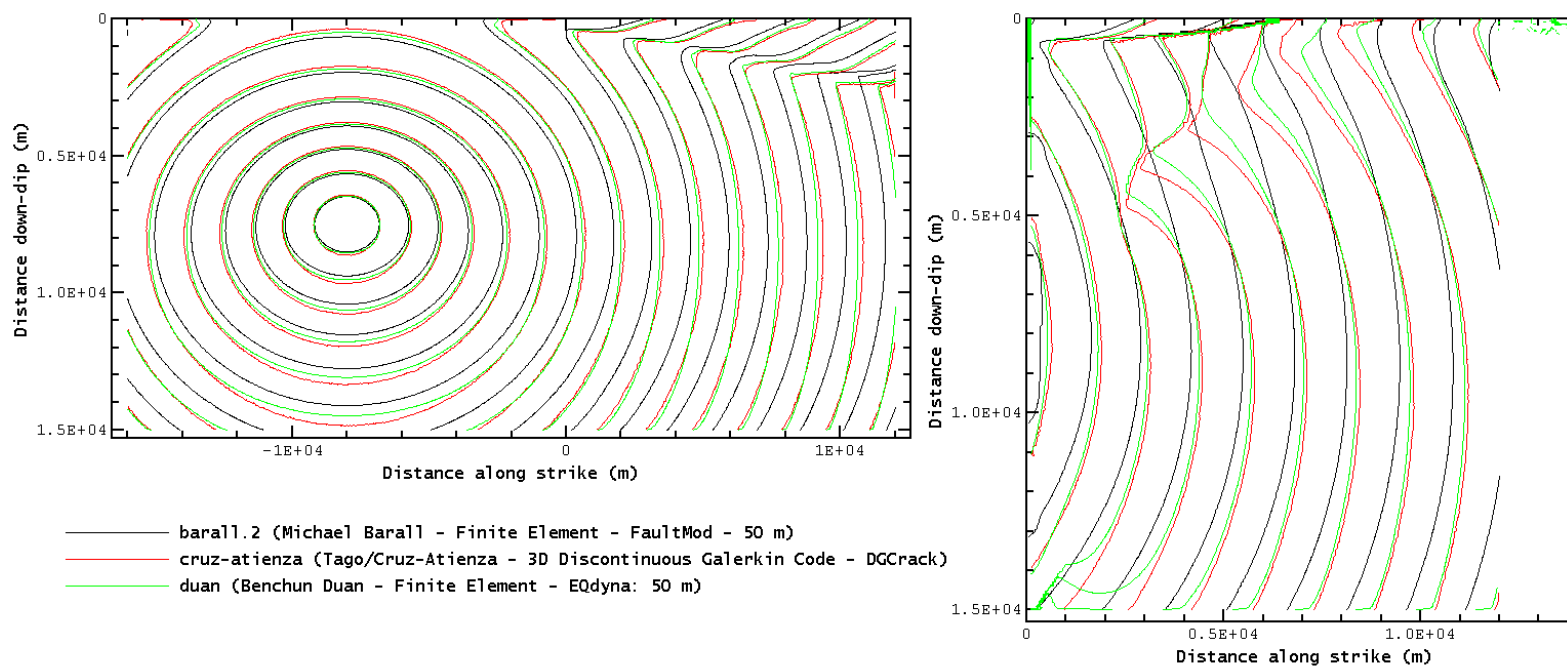


Figura 11.12: Comparación de los tiempos de ruptura entre FEM, EQdyna-FEM y DGCrack del benchmark TPV18. Imagen generada en <http://scecddata.usc.edu/cvws>.

En la Figura 11.13 se comparan las series de tiempo de FEM, EQdyna-FEM y DGCrack extraídas del registro A ubicado en la falla principal. Se aplicó un filtro pasa bajas con una frecuencia esquina de  $3 \text{ Hz}$ .

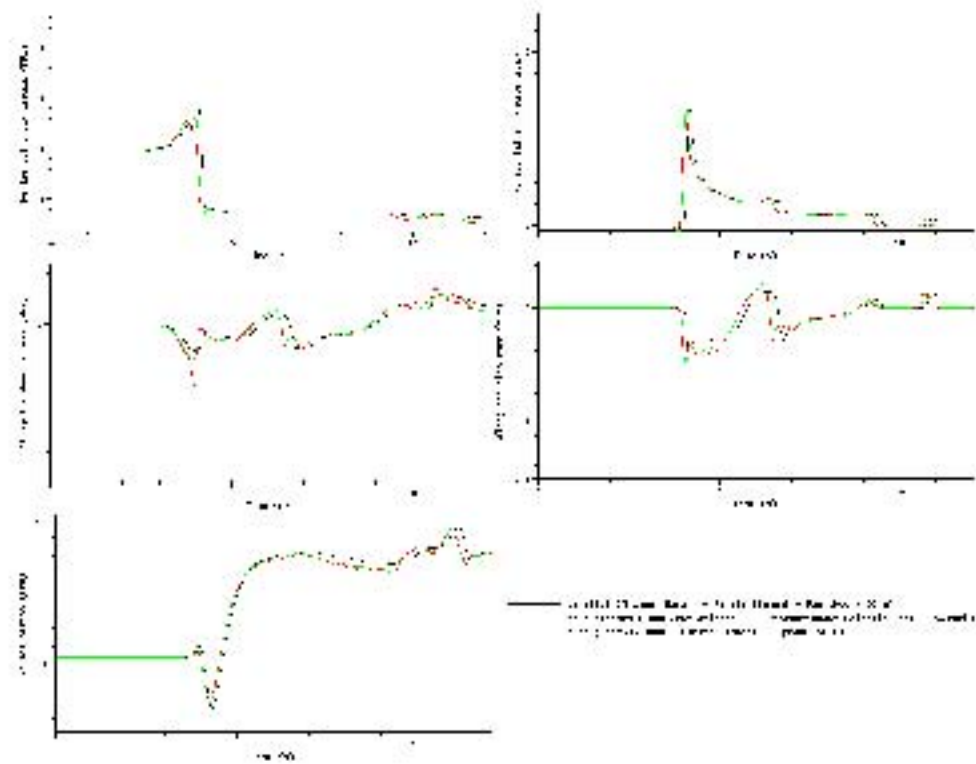


Figura 11.13: Comparación de los esfuerzos cizallantes horizontales, verticales y las velocidades de deslizamiento horizontales y verticales entre FEM, EQdyna-FEM y DGCrack en el registro A del benchmark TPV18 (ver Figura 11.11). Las series de tiempo se filtraron hasta  $3 \text{ Hz}$ . Imágenes individuales generadas en <http://scecddata.usc.edu/cvws>.

En la Figura 11.14 se comparan las series de tiempo de FEM, EQdyna-FEM y DGCrack extraídas del registro B ubicado en la falla rama. Se aplicó un filtro pasa bajas con una frecuencia esquina de  $3\text{ Hz}$ .

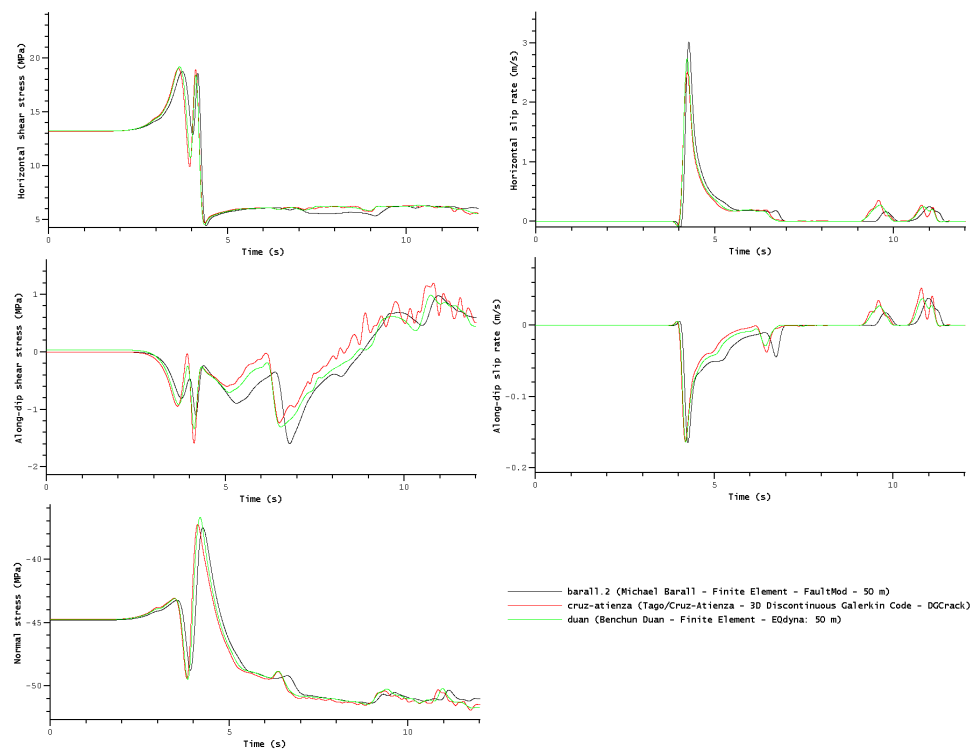


Figura 11.14: Comparación de los esfuerzos cizallantes horizontales, verticales y las velocidades de deslizamiento horizontales y verticales entre FEM, EQdyna-FEM y DGCrack en el registro A del benchmark TPV18 (ver Figura 11.11). Las series de tiempo se filtraron hasta  $3\text{ Hz}$ . Imágenes individuales generadas en <http://scecddata.usc.edu/cvws>.

En la Figura 11.15 se comparan las series de tiempo de FEM, EQdyna-FEM y DGCrack extraídas del registro C ubicado en la superficie libre. Se aplicó un filtro pasa bajas con una frecuencia esquina de  $3\text{ Hz}$ .

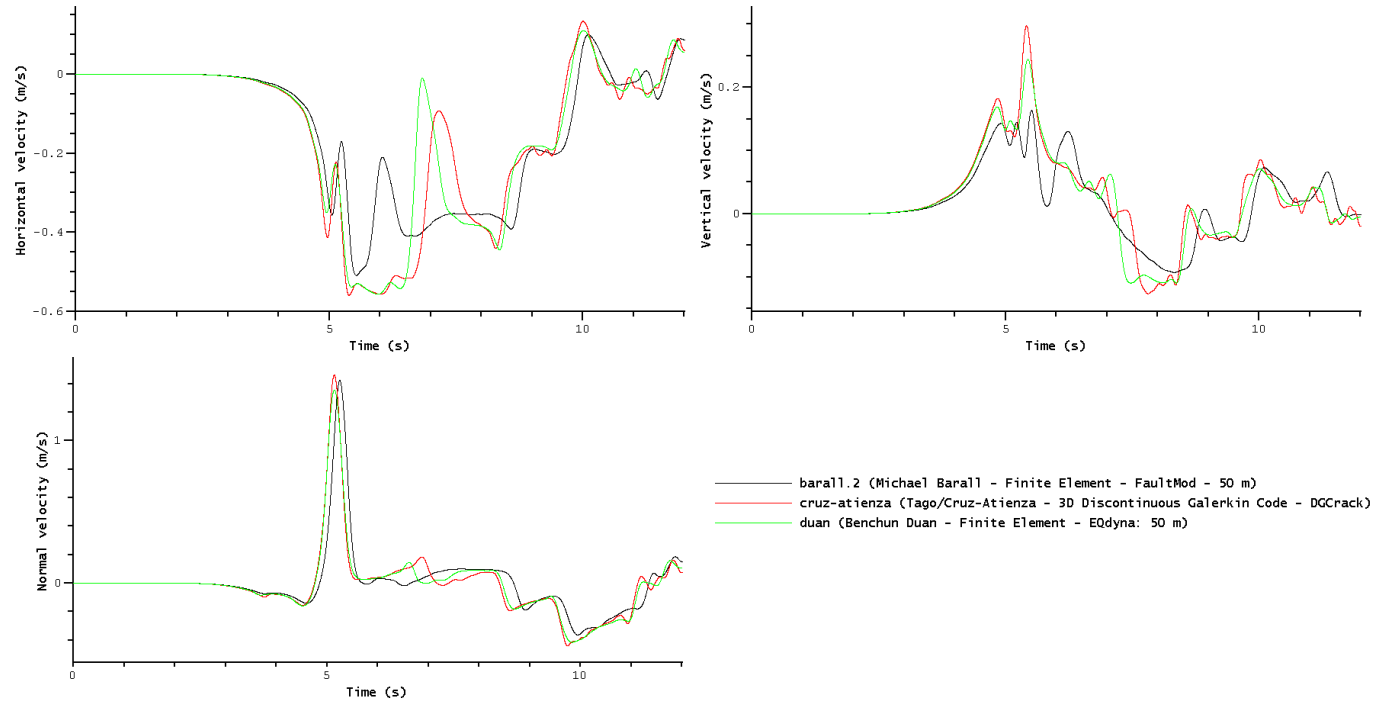


Figura 11.15: Comparación de las velocidades horizontales, verticales y normales entre FEM, EQdyna-FEM y DGCrack en el registro C del benchmark TPV18 (ver Figura 11.11). Las series de tiempo se filtraron hasta  $3\text{ Hz}$ . Imágenes individuales generadas en <http://scecddata.usc.edu/cvws>.

## Benchmark TPV20

Al igual que para el benchmark TPV18, las comparaciones entre todos los modeladores que participaron en este benchmark fueron malas sobre todo en los registros de la falla rama. Para que las soluciones se parecieran un poco mucho de los simuladores tuvieron que reducir el tamaño característico de sus mallas a la mitad de 100 m a 50 m. A continuación se presentarán las soluciones obtenidas por los códigos de EQdyna-Elemento Finito (EQdyna-FEM) (Duan y Oglesby, 2006) con un tamaño característico de malla de 50 m, Elemento Finito (FEM) (Barall, 2009) con un tamaño característico de malla de 50 m y DGCrack con un tamaño característico de malla de 100 m.

Los contornos de los tiempos de ruptura de los 3 métodos pueden verse en la Figura 11.16 donde puede observarse que para cada método la ruptura avanza diferente y la intersección entre las fallas dificulta la ruptura para EQdyna-FEM. En la falla rama existe una diferencia en el contorno de ruptura significativa entre los tres métodos.

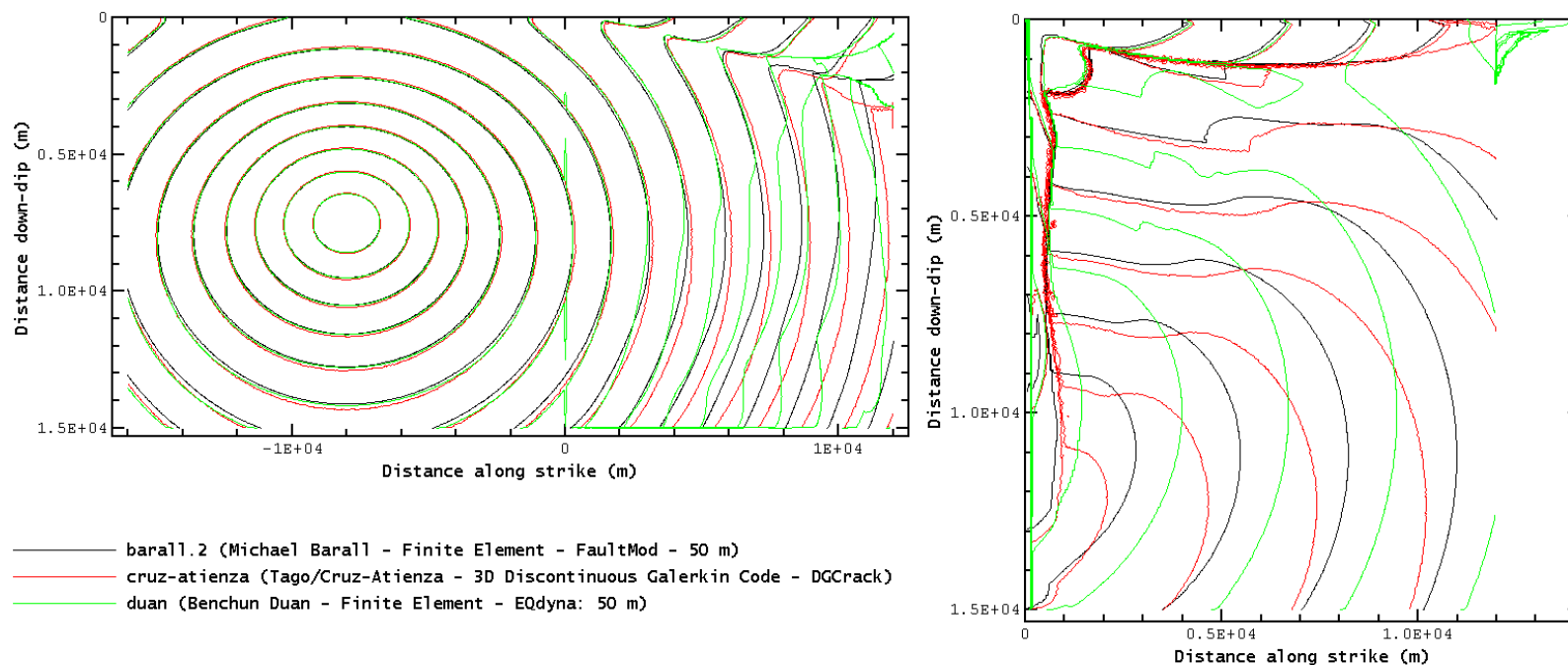


Figura 11.16: Comparación de los tiempos de ruptura entre FEM, EQdyna-FEM y DGCrack del benchmark TPV20. Imagen generada en <http://scecddata.usc.edu/cvws>.



En la Figura 11.17 se comparan las series de tiempo de FEM, EQdyna-FEM y DGCrack extraídas del registro A ubicado en la falla principal. Se aplicó un filtro pasa bajas con una frecuencia esquina de  $3\text{ Hz}$ .

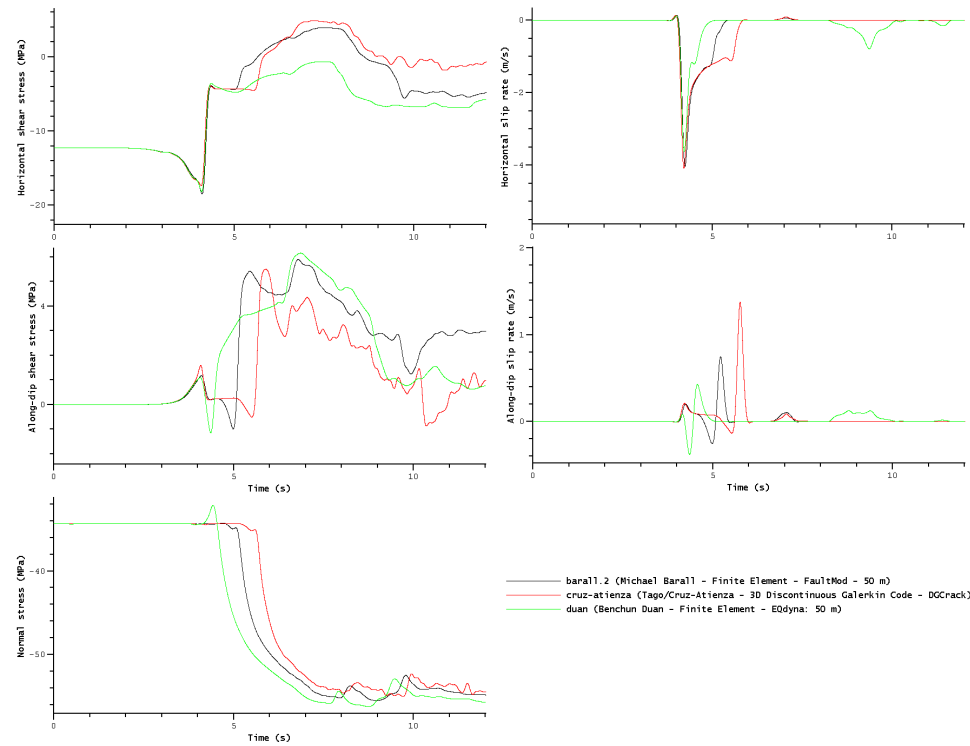


Figura 11.17: Comparación de los esfuerzos cizallantes horizontales, verticales y las velocidades de deslizamiento horizontales y verticales entre FEM, EQdyna-FEM y DGCrack en el registro A del benchmark TPV20 (ver Figura 11.11). Las series de tiempo se filtraron hasta  $3\text{ Hz}$ . Imágenes individuales generadas en <http://scecddata.usc.edu/cvws>.

En la Figura 11.18 se comparan las series de tiempo de FEM, EQdyna-FEM y DGCrack extraídas del registro B ubicado en la falla rama. Se aplicó un filtro pasa bajas con una frecuencia esquina de  $3\text{ Hz}$ .

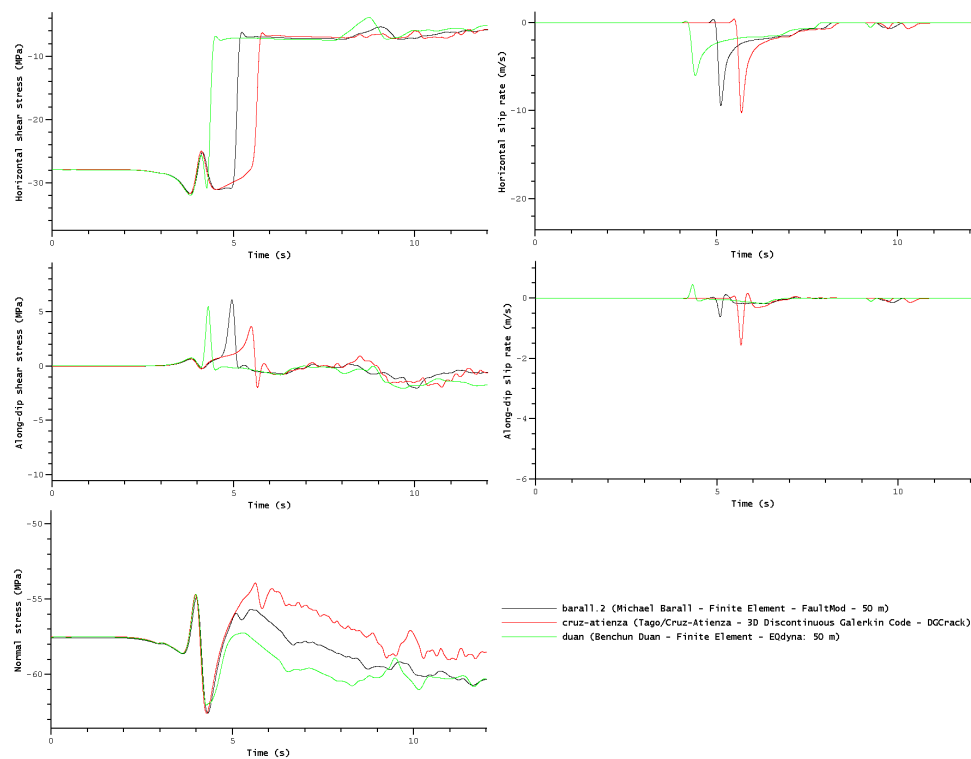


Figura 11.18: Comparación de los esfuerzos cizallantes horizontales, verticales y las velocidades de deslizamiento horizontales y verticales entre FEM, EQdyna-FEM y DGCrack en el registro A del benchmark TPV20 (ver Figura 11.11). Las series de tiempo se filtraron hasta  $3\text{ Hz}$ . Imágenes individuales generadas en <http://sceccdata.usc.edu/cvws>.

En la Figura 11.19 se comparan las series de tiempo de FEM, EQdyna-FEM y DGCrack extraídas del registro C ubicado en la superficie libre. Se aplicó un filtro pasa bajas con una frecuencia esquina de 3 Hz.

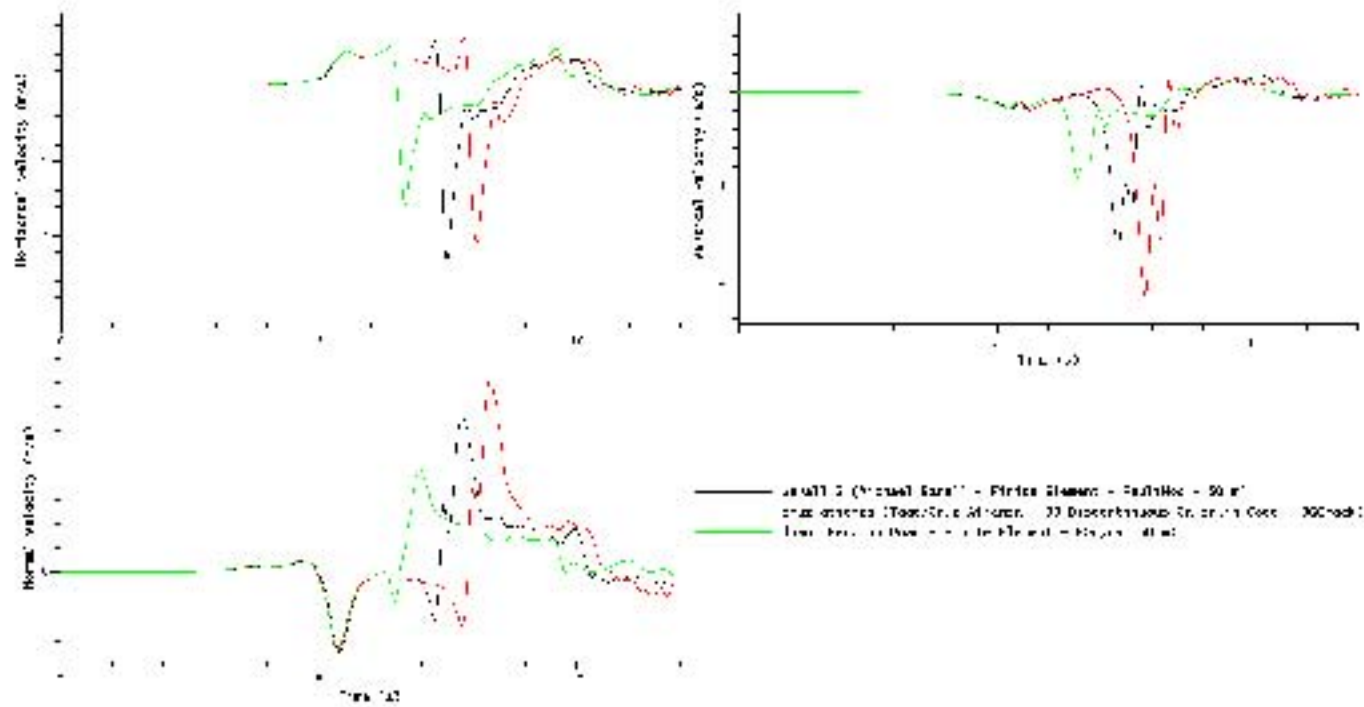


Figura 11.19: Comparación de las velocidades horizontales, verticales y normales entre FEM, EQdyna-FEM y DGCrack en el registro C del benchmark TPV20 (ver Figura 11.11). Las series de tiempo se filtraron hasta 3 Hz. Imágenes individuales generadas en <http://scecddata.usc.edu/cvws>.





## Capítulo 12

# Conclusiones y Trabajo Futuro

En este trabajo se incorporó la propagación de ondas viscoelásticas y la dinámica de la ruptura en un esquema de Galerkin Discontinuo (DG-FEM) hp-adaptativo. De cada investigación se escribió un artículo científico, el correspondiente al de la dinámica de la ruptura se titula “3D hp-Adaptive Discontinuous Galerkin Method for Modeling Earthquake Dynamics” y fué publicado en la revista *Journal of Geophysical Research*. El artículo sobre la propagación de ondas viscoelásticas se titula “3D Anelastic Wave Propagation with an hp-Adaptive Discontinuous Galerkin Method” y será pronto sometido a la revista *Geophysical Journal International*. Ambos artículos se encuentran incluidos en esta tesis. Complementando dichas publicaciones se presentan los desarrollos matemáticos detallados de los métodos y aproximaciones propuestos. Así, el lector encontrará los pormenores que me condujeron a las conclusiones principales de la investigación. Aunque se trabajaron por separado, tanto el desarrollo para la propagación de ondas como el de la fuente dinámica, ahora forman parte de un mismo código de simulación con el que pretendemos generar escenarios sísmicos realistas en el Valle de México desde la nucleación del sismo y hasta la propagación de ondas en un medio heterogéneo con atenuación intrínseca. A continuación se presentan las conclusiones y el trabajo a futuro que se tiene para cada tema desarrollados en la tesis.

### Propagación de ondas viscoelásticas

Hasta ahora no se había hecho la incorporación de una reología viscoelástica en un esquema de Galerkin Discontinuo como sea ha propuesto en la tesis. Ésta respeta la propiedad p-adaptativa de modo que pueden utilizarse elementos P0, P1 o P2 de acuerdo a las características físicas del medio. Para la implementación viscoelástica se evitó la convolución entre los esfuerzos y la tasa de las deformaciones en la relación constitutiva del medio con la introducción de funciones anelásticas (*Kristek y Moczo, 2003*). El número de funciones anelásticas, *i.e.* el número de mecanismos de relajación, depende de la precisión con la que se quiera obtener la respuesta anelástica del medio. Sin embargo, la introducción de las funciones anelásticas requieren la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias asociadas a estas.

Se resolvieron los benchmarks LOH1 y LOH3 propuestos por SCEC (*Day et al., 2003*) y se compararon las soluciones obtenidas con la solución semi-analítica calculada con AXITRA (*Bouchon y Coutant, 1994*). La solución del benchmark LOH3 calculada por AXITRA se hizo utilizando el mismo módulo viscoelástico aproximado con 3 mecanismos de relajación para un factor de calidad constante utilizado por DG-FEM. Esto permitió que la comparación entre las soluciones considerará exclusivamente la solución de las ecuaciones viscoelásticas dejando afuera la aproximación del

factor de calidad. Se hizo un análisis de convergencia con los dos benchmarks utilizando mallas estructuradas y no estructuradas. Las tasas de convergencia para ambos benchmarks fueron muy altas y similares, lo que demuestra que se están resolviendo las ecuaciones viscoelásticas tan bien como las elásticas. También se demostró que la tasa de convergencia es mejor cuando se utilizan mallas no estructuradas y que si se cumple el criterio de precisión de 3 elementos por longitud de onda mínima siempre será más conveniente utilizar mallas no estructuradas.

Se diseñó una prueba para cuantificar el efecto que tiene el engrosamiento de la malla en la solución numérica. El resultado que se obtuvo es que las reflexiones espurias responden esencialmente al número de elementos por longitud de onda mínima y no a la tasa de engrosamiento aplicada sobre los elementos de la malla. De modo que si se respeta el criterio de precisión en todo el dominio de simulación, la magnitud de las reflexiones espurias debido a la malla son comparables con respecto a las observadas en una malla no estructurada regular. El criterio de precisión puede ser relajado,  $n_\lambda \leq 3$ , siempre y cuando sean pocos los elementos que no cumplan con el criterio y estos se encuentren alejados de los registros. Esta prueba puede utilizarse para cualquier otro método numérico que sea h-adaptativo.

Para que la tesis sea autocontenida y pueda usarse como referencia para entender el método de Galerkin Discontinuo para la propagación de ondas, se incluyó un capítulo que explica cómo incorporar las condiciones de frontera libre y absorbentes. Las fronteras absorbentes explicadas son las llamadas CPML que hasta el momento son las más eficientes del estado del arte.

Actualmente se está trabajando en la simulación viscoelástica del Valle de Volvi (*Chaljub et al.*, 2009) con la colaboración de Dr. Emmanuel Chaljub (ISTerre) y el Dr. Vincent Etienne (Géoazur). También se está trabajando con el Dr. Vincent Etienne sobre la construcción del mallado tetraédrico del Valle de México que respete el criterio de precisión de 3 elementos de longitud de onda mínima con respecto a las velocidades de propagación de la cuenca (ver Figura 12.1). La velocidad de las ondas  $S$  alcanza un valor mínimo de  $50 \text{ m/s}$ , de modo que la estrategia de mallado debe aprovechar al máximo la h-adaptividad sin descuidar la precisión. Para la simulación de este tipo de escenarios, donde existe un alto contraste entre las velocidades de propagación al igual en el tamaño de los elementos de la malla, se explorará la estrategia de tamaño de paso local en tiempo para agilizar el tiempo de cómputo requerido.

Por otro lado, se quiere hacer más flexible el código haciéndolo capaz de utilizar ordenes de aproximación espacial arbitrarios, i.e. elementos con órdenes de aproximación mayores que  $P2$ . También se prevé hacer del esquema numérico  $f$ -adaptativo de modo que se pueda elegir el esquema de aproximación del flujo numérico entre los elementos de la malla.

## Dinámica de la ruptura sísmica

Se creó el método DGCrack que incorpora la dinámica de la ruptura en un esquema de Galerkin Discontinuo a lo largo de fallas 3D con geometrías no planas. A pesar de que el método de la propagación de ondas es p-adaptativo se decidió trabajar sobre la falla con elementos  $P2$  únicamente para alcanzar una mejor precisión a un bajo costo computacional. Para garantizar una rápida tasa de convergencia, este esquema impone las condiciones de frontera de la dinámica de la ruptura a través de flujos *ad hoc* sobre la falla. Las condiciones que se cumplen en cada paso de tiempo corresponden a las condiciones de salto introducidas por (*Day et al.*, 2005) y una condición adicional que se incluyó para forzar la continuidad del campo de velocidad normal a la falla. Esta última condición garantiza la estabilidad numérica y la precisión de las tracciones normales a la falla requeridas en la ley de Coulomb. Para modelar correctamente la propagación de la ruptura en el interior de cada elemento de falla, se introdujo un esquema predictor-corrector para garantizar que las tracciones

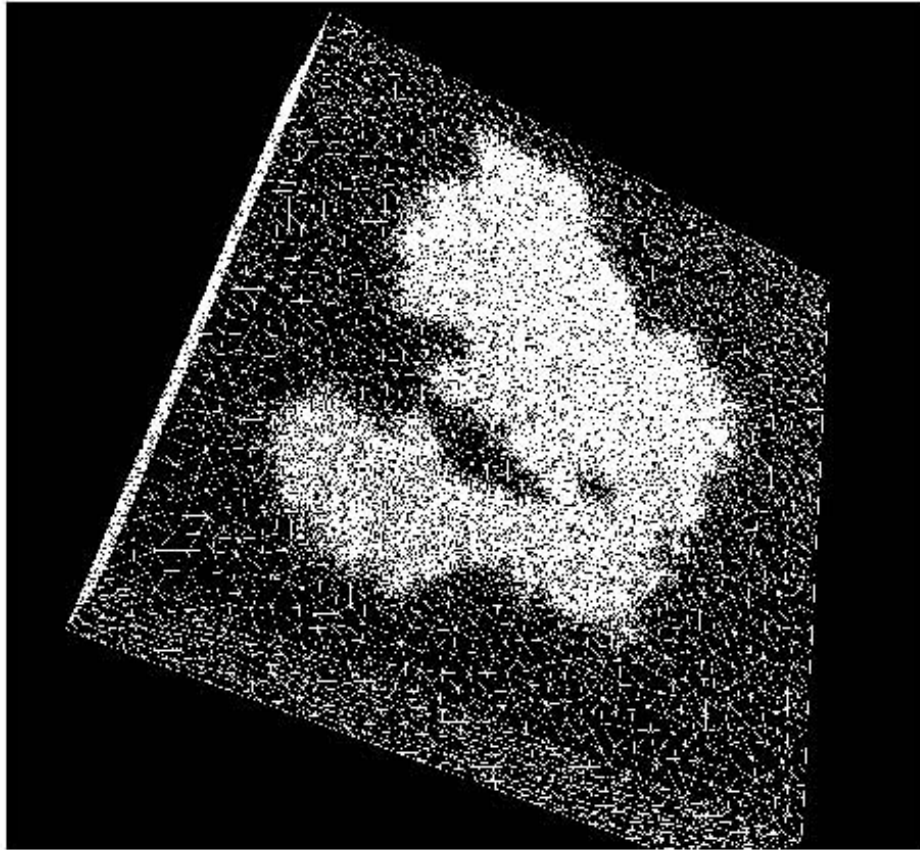


Figura 12.1: Primera aproximación de un mallado adaptado para el Valle de la Ciudad de México de acuerdo a sus velocidades de propagación.

cizallantes respeten las condiciones de salto durante toda la simulación.

Se resolvieron los benchmarks TPV3 y TPV10 de SCEC-USGS (*Harris y Archuleta, 2004*). Con el benchmark TPV3 se realizó el análisis de convergencia demostrando tasas de convergencia similares a las reportadas por otros métodos bien establecidos. Se obtuvieron muy buenos resultados con errores NRMS menores al 1% en los tiempos de ruptura con tan sólo 1 elemento en la zona de cohesión. Se probó la eficiencia del método comparándolo con otra aproximación en Galerkin discontinuo y se mostró que DGCrack es 10 veces más rápido.

Como para la dinámica de la ruptura no existen soluciones analíticas, se presentó un método que permite la comparación, a través de un análisis cuantitativo, de forma sencilla y práctica entre muchos esquemas de forma simultánea.

El benchmark TPV10 se resolvió para verificar que se estaba calculando correctamente la tracción normal en la falla, lo cual es esencial cuando uno quiere simular la dinámica de la ruptura en fallas no planas. Durante esta verificación se observa que con los métodos con lo que se comparó DGCrack (*i.e.* SEM y FEM), éste resultó ser el más robusto.

Finalmente se utilizó DGCrack para estudiar el sismo de Landers de 1992 y se demostró que usando los esfuerzos iniciales propuesto en estudios anteriores considerando una falla plana (*Peyrat et al., 2001*), si se respeta la geometría real de la falla no es posible obtener el deslizamiento final determinado por *Wald y Heaton (1994)* y por ende un buen ajuste de los sismogramas observados. Con esto se



concluye que la geometría jugó un papel fundamental y que para la obtención del estado inicial de esfuerzos debe hacerse considerando la geometría real de la falla.

Adicionalmente se presentó una serie de benchmarks propuestos por SCEC para fallas con estados de esfuerzos heterogéneos y la propagación espontánea en fallas oblicuas a una principal, obteniendo resultados excelentes, especialmente en los primeros casos.

Actualmente se está trabajando con Dr. Steven Day (SDSU) para la implementación de la ley de fricción “rate & state” (ver Apéndice C) y la presurización térmica. Con estas dos contribuciones a DGCrack se tiene por objeto estudiar la estabilidad de brechas sísmicas y como caso particular la brecha de Guerrero.

En Enero del 2013 empezaré un postdoctorado en ISTerre con el Dr. Jean Virieux para trabajar sobre la inversión de la dinámica de la ruptura utilizando el código de DGCrack y estrategias de inversión con métodos de optimización numérica y heurísticas.

## Apéndice A

# Cómputo de los coeficientes anelásticos

Para calcular los coeficientes anelásticos, se debe escribir el módulo viscoelástico (3.24) en función de estos como

$$\begin{aligned} M(\omega) &= M_U - \delta M \sum_{l=1}^n \frac{a_l \omega_l}{\omega_l + i\omega} \\ &= M_U \left( 1 - \sum_{l=1}^n \frac{a_l \frac{\delta M}{M_U} \omega_l}{\omega_l + i\omega} \right) \\ &= M_U \left( 1 - \sum_{l=1}^n Y_l \frac{\omega_l}{\omega_l + i\omega} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

y separando la parte real de la imaginaria

$$\begin{aligned} M(\omega) &= M_U \left[ 1 - \sum_{l=1}^n Y_l \frac{\omega_l}{\omega_l + i\omega} \cdot \frac{\omega_l - i\omega}{\omega_l - i\omega} \right] \\ &= M_U \left[ 1 - \sum_{l=1}^n Y_l \frac{\omega_l^2 - i\omega_l \omega}{\omega_l^2 + \omega^2} \right] \\ &= M_U \left[ 1 - \sum_{l=1}^n Y_l \frac{\omega_l^2}{\omega_l^2 + \omega^2} \right] + M_U \left[ \sum_{l=1}^n Y_l \frac{\omega_l \omega}{\omega_l^2 + \omega^2} \right] i. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Entonces se puede escribir el factor de calidad (3.14) como

$$\frac{1}{Q(\omega)} = \frac{\text{Im}M(\omega)}{\text{Re}M(\omega)} = \frac{\sum_{l=1}^n Y_l \frac{\omega_l \omega}{\omega_l^2 + \omega^2}}{1 - \sum_{l=1}^n Y_l \frac{\omega_l^2}{\omega_l^2 + \omega^2}} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow Q^{-1}(\omega) - \sum_{l=1}^n \frac{Q^{-1}(\omega) \omega_l^2}{\omega_l^2 + \omega^2} Y_l &= \sum_{l=1}^n \frac{\omega_l \omega}{\omega_l^2 + \omega^2} Y_l \\ \Leftrightarrow Q^{-1}(\omega) &= \sum_{l=1}^n \frac{\omega_l \omega + Q^{-1}(\omega) \omega_l^2}{\omega_l^2 + \omega^2} Y_l. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

La Ecuación (A.4) es la que se utiliza para el ajuste numérico de  $Q(\omega)$ . *Emmerich y Korn* (1987) demostraron que una aproximación suficientemente precisa para una  $Q(\omega)$  constante se obtiene si las frecuencias de relajación  $\omega_l$  cubren el rango de frecuencias de interés de forma equidistante en una escala logarítmica.

## Métodos de aproximación

Para aproximar  $Q(\omega)$  se ha utilizado el método de mínimos cuadrados (MMC) sugerido por *Emmerich y Korn* (1987) y el de recocido simulado propuesto por *Liu et al.* (1995). Como no se había hecho una comparación entre métodos de optimización matemática y heurística, en este trabajo se exploraron dos estrategias, el MMC y un algoritmo genético (AG).

### Mínimos cuadrados

Para el MMC se define la función error  $\epsilon$  como

$$\epsilon = \sum_{k=1}^{2n-1} \left( Q^{-1}(\tilde{\omega}_k) - \sum_{l=1}^n \frac{\omega_l \tilde{\omega}_k + Q^{-1}(\tilde{\omega}_k) \omega_l^2}{\omega_l^2 + \tilde{\omega}_k^2} Y_l \right)^2. \quad (\text{A.5})$$

Dado que lo que se busca es minimizar  $\epsilon$  y este se formuló como una función cuadrática, basta con hacer las primeras derivadas igual a cero. De modo que tomando la derivada de  $\epsilon$  con respecto a cada coeficiente anelástico se tiene

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial Y_m} = 2 \sum_{k=1}^{2n-1} \left( Q^{-1}(\tilde{\omega}_k) - \sum_{l=1}^n \frac{\omega_l \tilde{\omega}_k + Q^{-1}(\tilde{\omega}_k) \omega_l^2}{\omega_l^2 + \tilde{\omega}_k^2} Y_l \right) \frac{\omega_m \tilde{\omega}_k + Q^{-1}(\tilde{\omega}_k) \omega_m^2}{\omega_m^2 + \tilde{\omega}_k^2} \\ \forall m \in \{1, \dots, n\}. \quad (\text{A.6})$$

Con las Ecuaciones de (A.6), se puede construir un sistema lineal de ecuaciones, cuyo conjunto de variables son los coeficientes anelásticos, que puede resolverse fácilmente.

### Algoritmo genético

Para el AG los individuos de la población corresponden a una posible configuración de los coeficientes anelásticos. Mientras que la función de aptitud se plantea como el valor absoluto de la diferencia entre la  $Q_{\text{apr}}(\omega)$  aproximada dada por la Ecuación (A.4) y la  $Q_{\text{obj}}(\omega)$  objetivo como

$$f_A(Y_l, \omega) = \left| Q_{\text{obj}}^{-1}(\omega) - \sum_{l=1}^n \frac{\omega_l \omega + Q^{-1}(\omega) \omega_l^2}{\omega_l^2 + \omega^2} Y_l \right|. \quad (\text{A.7})$$

Para el AG se utilizó una

- Codificación real: Esto agiliza al algoritmo por requerir menos operaciones al no cambiar a la población a su representación binaria.
- Selección por torneo binario: En esta selección se eligen de forma aleatoria a dos individuos de los cuales prevalece el más apto, i.e. que su función de aptitud  $f_A$  sea la más pequeña.
- Cruza binaria simulada: Se simula la cruce de un punto utilizada en la codificación binaria.
- Mutación polinomial: Esta mutación perturba ligeramente el valor de los individuos utilizando una distribución de probabilidad polinomial.

- Elitismo: Evita perder al individuo más apto de una generación a otra.

El número de individuos fue de 100 por población, los parámetros en cada proceso del AG son los estándar y como condición de paro además del número de iteraciones se estableció el estancamiento del individuo óptimo por varias generaciones.

## Comparación entre los métodos de aproximación

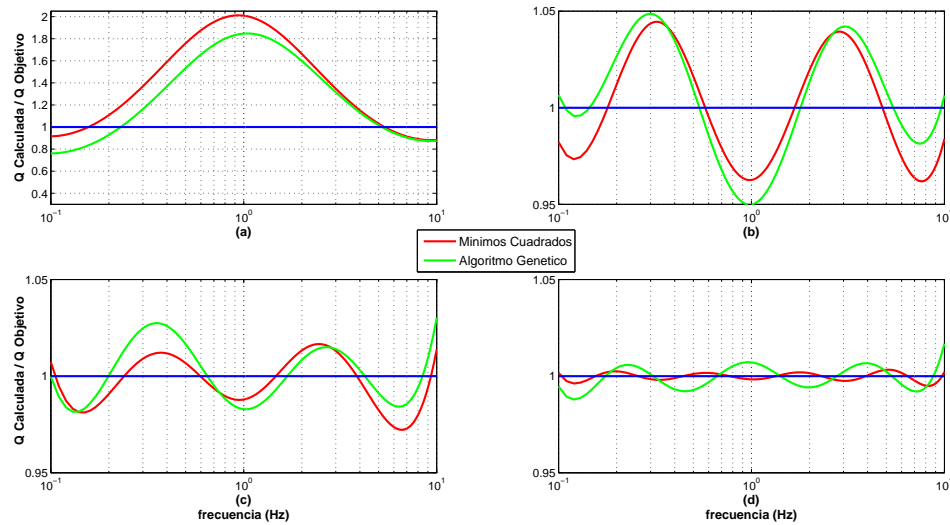


Figura A.1: Aproximaciones de  $Q$  usando (a) 2, (b) 3, (c) 5 o (d) 10 mecanismos de relajación en la banda de frecuencias  $[0.1, 10]$  Hz. Las gráficas (b), (c) y (d) cuentan con los mismos ejes.

En la Figura A.1 se comparan las aproximaciones hechas por los diferentes métodos. Se puede observar que no hay grandes diferencias entre estos y que para pocos mecanismos de relajación el AG realiza un mejor ajuste que el MMC, ver (a), pero mientras se incrementa el número de mecanismos de relajación la solución del AG tiende a ser peor que el MMC, ver (d). El comportamiento del AG resulta evidente porque al incrementar la dimensión del espacio paramétrico se dificulta la búsqueda del óptimo, como en cualquier método de optimización heurística, que podría solucionarse al incrementar el número de iteraciones para una mejor exploración pero que conlleva un mayor tiempo de cómputo. Es por estas observaciones que no vale la pena implementar un método de optimización heurística porque para este problema el MMC es muy preciso y sumamente eficiente.

También se puede observar en la Figura A.1 que utilizar 3 mecanismos de relajación es suficiente para aproximar una  $Q$  constante con un error menor al 5%. Este resultado ya había sido señalado *Emmerich y Korn* (1987) y posteriormente *Moczo et al.* (1997), como el número sugerido de mecanismos de relajación porque logra el mejor compromiso entre costo, por el número de variables que introduce, y beneficio, por la buena aproximación de  $Q$ .



## Apéndice B

# Cómputo del módulo sin relajamiento

El módulo sin relajamiento no puede ser medido pero puede ser calculado a partir de la velocidad de fase a una cierta de frecuencia de referencia  $\omega_r$ , que sí puede obtenerse a partir de datos observados. La relación entre la velocidad de fase  $c(\omega_r)$  y el módulo de relajamiento está dado por

$$\frac{1}{c(\omega_r)} = \text{Re} \left[ \left( \frac{M(\omega_r)}{\rho} \right)^{1/2} \right]. \quad (\text{B.1})$$

Para calcular el módulo sin relajamiento conviene reescribir el módulo viscoelástico (A.2) como

$$\begin{aligned} M(\omega_r) &= M_U \left[ 1 - \sum_{l=1}^n Y_l \frac{\omega_l^2}{\omega_l^2 + \omega_r^2} \right] + M_U \left[ \sum_{l=1}^n Y_l \frac{\omega_l \omega_r}{\omega_l^2 + \omega_r^2} \right] i \\ M(\omega_r) &= M_U \left[ 1 - \sum_{l=1}^n Y_l \frac{1}{1 + (\omega_r/\omega_l)^2} \right] + M_U \left[ \sum_{l=1}^n Y_l \frac{\omega_r/\omega_l}{1 + (\omega_r/\omega_l)^2} \right] i \\ M(\omega_r) &= M_U(\Theta_1 + \Theta_2 i), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

donde

$$\Theta_1 = 1 - \sum_{l=1}^n Y_l \frac{1}{1 + (\omega_r/\omega_l)^2} \quad (\text{B.3})$$

$$\Theta_2 = \sum_{l=1}^n Y_l \frac{\omega_r/\omega_l}{1 + (\omega_r/\omega_l)^2}. \quad (\text{B.4})$$

Sustituyendo la Ecuación (B.2) en la relación (B.1) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c(\omega_r)} &= \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{M_U(\Theta_1 + \Theta_2 i)}{\rho} \right)^{-1/2} \right] \\
&= \left( \frac{\rho}{M_U} \right)^{1/2} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{(\Theta_1 + \Theta_2 i)^{1/2}} \right] \\
&= \left( \frac{\rho}{M_U} \right)^{1/2} \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{\Theta_1 - \Theta_2 i}{\Theta_1^2 + \Theta_2^2} \right)^{1/2} \right] \\
&= \left( \frac{\rho}{M_U(\Theta_1^2 + \Theta_2^2)} \right)^{1/2} \operatorname{Re} [(\Theta_1 - \Theta_2 i)^{1/2}] \\
&= \left( \frac{\rho(\Theta_1 + (\Theta_1^2 + \Theta_2^2)^{1/2})}{2M_U(\Theta_1^2 + \Theta_2^2)} \right)^{1/2}. \tag{B.5}
\end{aligned}$$

De modo que el módulo sin relajamiento puede despejarse de la Ecuación (B.5) como

$$M_U = \rho c^2(\omega_r) \left( \frac{(\Theta_1^2 + \Theta_2^2)^{1/2} + \Theta_1}{2 \cdot (\Theta_1^2 + \Theta_2^2)} \right). \tag{B.6}$$

La Ecuación (B.6) permite calcular el módulo sin relajamiento una vez conocidos los coeficientes anelásticos y la velocidad de fase a una frecuencia de referencia.

## Apéndice C

# Dinámica de la ruptura utilizando la ley de fricción “rate & state”

La incorporación de la ley de fricción “rate & state” (r&s) en un esquema de Galerkin Discontinuo se hizo en colaboración con el Dr. Steven Day (SDSU) durante su estancia en la UNAM a principios del 2012. A pesar de que la implementación no está totalmente terminada, pues aún existen problemas de estabilidad numérica, es un trabajo muy avanzado y novedoso que por ende tiene cabida en la tesis.

### Introducción

La fricción es la resistencia al movimiento que ocurre cuando un cuerpo se desliza tangencialmente a una superficie que se encuentra en contacto con otro cuerpo. A través de experimentos de fricción en los 1950's, *Brace y Byerlee* (1966) propusieron el modelo de “stick-slip” como el mecanismo de los terremotos. Este fenómeno consiste en cualquier variación de la resistencia de fricción opuesta a un deslizamiento constante entre cuerpos, induciendo una inestabilidad dinámica asociada con un deslizamiento muy repentino y una caída de esfuerzos. Después de un periodo sin movimiento, los esfuerzos se vuelven a cargar y otra inestabilidad ocurre.

La formulación r&s intenta imitar el mecanismo “stick-slip” y modela las variaciones de la fuerza de fricción cizallante a través de la dependencia de la velocidad del deslizamiento y las propiedades dinámicas del contacto entre los cuerpos (*Dieterich*, 1978; *Ruina*, 1983). La dependencia de las propiedades dinámicas de contacto son representadas a través de una o varias variables de estado.

Existen varias formas de la ley de fricción r&s por tratarse de un modelo que intenta simular las observaciones en laboratorio de fricción de rocas. La formulación de la ley de fricción que se incorporará en el esquema de Galerkin Discontinuo, es la utilizada por *Dunham et al.* (2011).

A continuación se describe la modelación matemática y computacional de la ley de fricción r&s. La nomenclatura y algunos procedimientos son los utilizados en la Parte II de la tesis y no serán introducidos nuevamente.



## Formulación continua

El módulo de la tracción cizallante a la falla sigue la Ley de Coulomb como

$$\tau = f(\mathcal{V}, \psi)\sigma_N, \quad (\text{C.1})$$

donde  $\sigma_N$  es el esfuerzo normal a la falla y  $f$  es el coeficiente de fricción, que es función del módulo de la velocidad tangencial a la falla,  $\mathcal{V}$ , y de la variable de estado,  $\psi$ , que representa el tiempo promedio de contacto (*Rice et al.*, 2001). El coeficiente de fricción  $f$  evoluciona siguiendo la ley r&s

$$f(\mathcal{V}, \psi) = a \cdot \operatorname{arcsinh} \left[ \frac{\mathcal{V}}{2\mathcal{V}_0} \exp \left( \frac{\psi}{a} \right) \right], \quad (\text{C.2})$$

donde  $\mathcal{V}_0$  es la velocidad inicial y  $a$  es una constante determinada de manera empírica. La diferencia de r&s con respecto a *slip weakening law* (8.9) es que el coeficiente de fricción es función del módulo de la velocidad tangencial y de una variable de estado en lugar de simplemente el deslizamiento.

La variable de estado evoluciona de acuerdo a la EDO

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\mathcal{V}}{L} [\psi - \psi_{ss}(\mathcal{V})], \quad (\text{C.3})$$

donde  $L$  es la distancia de deslizamiento crítica y  $\psi_{ss}(\mathcal{V})$  es la variable de estado en estado estacionario que se calcula como

$$\psi_{ss}(\mathcal{V}) = a \cdot \ln \left\{ \frac{2\mathcal{V}_0}{\mathcal{V}} \sinh \left[ \frac{f_{ss}(\mathcal{V})}{a} \right] \right\}, \quad (\text{C.4})$$

donde  $f_{ss}$  es el coeficiente de fricción en estado estacionario, el cual a su vez se calcula como

$$f_{ss}(\mathcal{V}) = f_w + \frac{f_{LV}(\mathcal{V}) - f_w}{[1 + (\mathcal{V}/\mathcal{V}_w)^8]^{1/8}}, \quad (\text{C.5})$$

donde  $f_w$  es el coeficiente de fricción totalmente debilitado,  $V_w$  es la velocidad de debilitamiento y  $f_{LV}$  es el coeficiente de fricción a baja velocidad dado por

$$f_{LV}(\mathcal{V}) = f_0 - (b - a) \ln(\mathcal{V}/\mathcal{V}_0) \quad (\text{C.6})$$

donde  $f_0$  es el coeficiente de fricción estacionario calculado con la velocidad inicial (*i.e.*  $f_{ss}(\mathcal{V}_0)$ ) y  $b$  es otra constante determinada empíricamente.

Finalmente se introduce la condición de deslizamiento

$$\frac{\tau}{\tau} = \frac{V}{\mathcal{V}}, \quad (\text{C.7})$$

que es equivalente a la condición de salto 8.6.

## Formulación discreta

A continuación se trabajará con el esquema numérico de Galerkin Discontinuo propuesto por *Etienne et al.* (2010) para la propagación de ondas elásticas. Para introducir la dinámica de la ruptura, primero se deben separar los flujos a través de la falla  $\Gamma$  como se hizo para las Ecuaciones (9.17) y (9.18), cuyos términos pueden escribirse como

- Para la ecuación de movimiento

$$\mathbb{F}_m^{\gamma i} = \hat{\mathbb{T}}_{N_m}^{ik} + \hat{\mathbb{T}}_{T_m}^{ik}.$$

- Para la ecuación constitutiva

$$\underline{\mathbb{G}}_{m+\frac{1}{2}}^{\gamma i} = (\underline{\mathbb{D}}^{ik})^T \hat{\underline{v}}_{m+\frac{1}{2}}^i.$$

Para el cómputo de la velocidad normal  $\hat{\underline{v}}_{N_{m+\frac{1}{2}}}^i$  con la proyección en la dirección normal de la Ecuación (9.17), primero se calcula  $\hat{\underline{T}}_{N_m}^{ik}$  con la Ecuación (9.36) que asegura la continuidad de  $\hat{\underline{v}}_{N_{m+\frac{1}{2}}}^i$ .

Por otro lado, para actualizar la velocidad tangencial  $\hat{\underline{v}}_{T_{m+\frac{1}{2}}}^i$  se reescribe la Ecuación (9.17) como

$$\hat{\underline{v}}_{T_{m+\frac{1}{2}}}^i = \tilde{\underline{v}}_{T_{m+\frac{1}{2}}}^i - \Delta t (\underline{\mathbb{I}}_3 \otimes \underline{\mathbb{C}}) \hat{\underline{T}}_{T_m}^{ik}, \quad (\text{C.8})$$

donde  $\tilde{\underline{v}}_{T_{m+\frac{1}{2}}}^i$  es la velocidad tangencial sin fricción dada por

$$\tilde{\underline{v}}_{T_{m+\frac{1}{2}}}^i = \hat{\underline{v}}_{T_{m-\frac{1}{2}}}^i + \Delta t \left( (\underline{R}_T^i)_m - (\underline{R}_T^k)_m + (\underline{\mathbb{I}}_3 \otimes \underline{\mathbb{C}}) \hat{\underline{T}}_{T_0}^{ik} \right),$$

la matriz  $\underline{\mathbb{C}}$  está definida por

$$\underline{\mathbb{C}} = \frac{S^{ik} (\rho^i V^i + \rho^k V^k)}{\rho^i \rho^k V^i V^k} (\underline{\mathbb{K}}^i)^{-1} \underline{\mathcal{T}}^{ik},$$

y la tracción tangencial se calcula utilizando las Ecuaciones (C.1) y (C.7) como

$$\hat{\underline{T}}_{T_m}^{ik} = (\underline{\mathbb{I}}_3 \otimes [\hat{\underline{\sigma}}_{N_m} * \hat{\underline{f}}(\hat{\underline{V}}_{m+\frac{1}{2}}, \hat{\underline{\psi}}_{m+\frac{1}{2}})]) (\underline{\mathbb{I}}_3 \otimes \tilde{\underline{V}}_{m+\frac{1}{2}}^i)^{-1} \tilde{\underline{v}}_{T_{m+\frac{1}{2}}}^i,$$

donde el factor  $(\underline{\mathbb{I}}_3 \otimes \tilde{\underline{V}}_{m+\frac{1}{2}}^i)^{-1} \tilde{\underline{v}}_{T_{m+\frac{1}{2}}}^i$  determina que la dirección de la tracción tangencial sea la misma que la dirección de la velocidad tangencial sin fricción por la condición de deslizamiento (C.7).

Para desacoplar la EDO de la variable de estado (C.3), con la EDO de la velocidad de deslizamiento (C.8) se utiliza un esquema escalonado en tiempo. Tal que el coeficiente de fricción (C.2) se calculará como  $\hat{\underline{f}}(\hat{\underline{V}}_{m+\frac{1}{2}}, \hat{\underline{\psi}}_m)$  en lugar de  $\hat{\underline{f}}(\hat{\underline{V}}_{m+\frac{1}{2}}, \hat{\underline{\psi}}_{m+\frac{1}{2}})$ . De esta forma, se debe calcular primero  $\hat{\underline{f}}_{LV}(\hat{\underline{V}}_{m-\frac{1}{2}})$  (C.6),  $\hat{\underline{f}}_{ss}(\hat{\underline{V}}_{m-\frac{1}{2}})$  (C.5) y  $\hat{\underline{\psi}}_{ssm}$  (C.4) para después actualizar  $\psi$  de forma nodal con la solución exacta de su EDO dada por

$$\psi_m = \psi_{m-1} \exp\left(\frac{-\mathcal{V}_{m-\frac{1}{2}} \Delta t}{L}\right) + \psi_{ss}(\mathcal{V}_{m-\frac{1}{2}}) \left(1 - \exp\left(\frac{-\mathcal{V}_{m-\frac{1}{2}} \Delta t}{L}\right)\right).$$

Para calcular la velocidad de deslizamiento,  $\hat{\underline{v}}_{T_{m+\frac{1}{2}}}^i$ , se asume que todos los nodos de falla de un mismo elemento se deslizan en la misma dirección. Esta suposición permite escribir a la Ecuación (C.8) como el sistema algebraico no lineal dado por

$$r(\hat{\underline{V}}_{m+\frac{1}{2}}) := \hat{\underline{V}}_{m+\frac{1}{2}} + \Delta t \underline{\mathbb{C}} [\hat{\underline{\sigma}}_{N_m} * \hat{\underline{f}}(\hat{\underline{V}}_{m+\frac{1}{2}}, \hat{\underline{\psi}}_m)] - \tilde{\underline{V}}_{m+\frac{1}{2}} = 0, \quad (\text{C.9})$$

cuyo Jacobiano está dado por

$$\underline{\mathbb{J}}(\hat{\underline{V}}_{m+\frac{1}{2}}) = \left[ \frac{\partial r_i}{\partial (\hat{V}_j)_{m+\frac{1}{2}}} \right] \quad i, j = 1, \dots, 6,$$

donde

$$J_{ii} = 1 + \frac{\Delta t C_{ii} \hat{\sigma}_{N_i} a \cdot \exp\left(\frac{(\hat{\psi}_i)_m}{a}\right)}{2\mathcal{V}_0 \sqrt{1 + \left(\frac{(\hat{V}_i)_{m+\frac{1}{2}}}{2\mathcal{V}_0} \exp\left(\frac{(\hat{\psi}_i)_m}{a}\right)\right)^2}},$$

$$J_{ij} = \frac{\Delta t C_{ij} \hat{\sigma}_{N_j} a \cdot \exp\left(\frac{(\hat{\psi}_j)_m}{a}\right)}{2\mathcal{V}_0 \sqrt{1 + \left(\frac{(\hat{V}_j)_{m+\frac{1}{2}}}{2\mathcal{V}_0} \exp\left(\frac{(\hat{\psi}_j)_m}{a}\right)\right)^2}}.$$

Para resolver el sistema (C.9) se propone un Método de Búsqueda en Línea tipo Newton cuyo pseudocódigo se presenta en el Algoritmo 1. Las restricciones del tamaño de paso  $\alpha$  aseguran que siempre se tendrán valores físicos permisibles de  $\hat{\underline{V}}_{m+\frac{1}{2}}$  y que en cada iteración se mejora su aproximación.

---

**Algoritmo 1** Cómputo de  $\hat{\underline{V}}_{m+\frac{1}{2}}$

---

$$\hat{\underline{V}}_{m+\frac{1}{2}}^0 = \hat{\underline{V}}_{m-\frac{1}{2}}$$

**for**  $k=0,1,2,\dots$  **do**

A) Calcular la dirección de descenso  $\underline{p}^k$  resolviendo el sistema

$$\underline{J}(\hat{\underline{V}}_{m+\frac{1}{2}}^k) \underline{p}^k = -\underline{r}(\hat{\underline{V}}_{m+\frac{1}{2}}^k).$$

B) Actualizar  $\hat{\underline{V}}_{m+\frac{1}{2}}^{k+1}$  con  $\underline{p}^k$

$$\hat{\underline{V}}_{m+\frac{1}{2}}^{k+1} \leftarrow \hat{\underline{V}}_{m+\frac{1}{2}}^k + \alpha \underline{p}^k$$

donde  $\alpha \in (0, 1]$  y garantiza que  $\hat{\underline{V}}_{m+\frac{1}{2}}^{k+1} > 0$  y  $\underline{r}(\hat{\underline{V}}_{m+\frac{1}{2}}^{k+1}) < \underline{r}(\hat{\underline{V}}_{m+\frac{1}{2}}^k)$ .

**end for**

---

## Benchmark TPV103 de SCEC

Este benchmark consiste de una falla plana inmersa en un espacio elástico lineal e isótropo (ver Tabla C.1). El sistema coordinado adoptado es que la falla se encuentra en el plano  $z = 0$ , con el hipocentro localizado en  $(x_0, y_0) = (0, 7.5 \text{ km})$ . La región central de la falla,  $-W < x < W, 0 < y < W$ , con  $W = 15 \text{ km}$  es “velocity-weakening”, *i.e.*  $a - b < 0$  donde deslizamiento inestable puede ocurrir. Una región de transición de ancho  $w = 3 \text{ km}$  en donde los parámetros de fricción cambian de manera continua de una región “velocity-weakening” a una región “velocity-strengthening”. Fuera de esta región de transición, el resto de la falla es “velocity-strengthening”, *i.e.*  $a - b > 0$  donde deslizamiento estable ocurre.

Densidad ( $\rho$ )	Velocidad de la onda P ( $\alpha$ )	Velocidad de la onda S ( $\beta$ )
2670.0 $kg/m^3$	3464.0 $m/s$	6000.0 $m/s$

Tabla C.1: Propiedades del medio de propagación del benchmark TPV103.

Los parámetros de ley de fricción están dados en la Tabla C.2. Note que con excepción de  $a$  y  $V_w$ , estos son uniformes sobre la falla.

$f_0$	$V_0$	$a(x, y)$	$b$	$L$	$f_w$	$V_w(x, y)$
0.6	$10^{-6} \text{ m/s}$	$0.01 + \Delta a(x, y)$	0.014	$0.4 \text{ m}$	0.2	$0.1 \text{ m/s} + \Delta V_w(x, y)$

Tabla C.2: Parámetros de fricción del benchmark TPV103.

Los cambios en  $a$  y  $V_w$  están dados por

$$\begin{aligned}\Delta a(x, y) &= \Delta a_0 [1 - B(x; W, w) B(y - y_0; W/2, w)] \\ \Delta V_w(x, y) &= \Delta V_{w_0} [1 - B(x; W, w) B(y - y_0; W/2, w)],\end{aligned}$$

donde  $\Delta a_0 = 0.01$ ,  $\Delta V_{w_0} = 0.9$  y  $B(x; W, w)$  es una versión suavizada de una función caja dada por

$$B(x; W, w) = \begin{cases} 1, & |x| \leq W \\ \frac{1}{2} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{w}{|x| - W - w} + \frac{w}{|x| - W} \right) \right], & W < |x| < W + w \\ 0, & |x| \geq W + w \end{cases}$$

Al inicio de la simulación,  $t = 0$ , toda la falla se desliza en la dirección horizontal con una velocidad inicial  $V = 10^{-16} \text{ m/s}$ . El esfuerzo cizallante inicial sobre la falla, que también es horizontal está dado por  $\tau = 40 \text{ MPa}$  y el esfuerzo normal por  $\sigma_N = 120 \text{ MPa}$ . La variable de estado inicial varía de acuerdo a su posición y se calcula con la Ecuación (C.4).

La nucleación de la ruptura se inicia con la imposición de una perturbación en la tracción cizallante, que depende de la posición y el tiempo de simulación, dada por

$$\Delta \tau(r, t) = \Delta \tau_0 F(r) G(t),$$

donde

$$F(r) = \begin{cases} \exp\left(\frac{r^2}{r^2 - R^2}\right), & r < R \\ 0, & r \geq R, \end{cases} \quad G(t) = \begin{cases} \exp\left[\frac{(t-T)^2}{t(t-2T)}\right], & 0 < t < T \\ 1, & t \geq T, \end{cases}$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \Delta \tau_0 = 45 \text{ MPa}, R = 3 \text{ km} \text{ y } T = 1 \text{ s}.$$

Los resultados obtenidos siguiendo la estrategia propuesta no funciona correctamente debido a que en el Algoritmo 1, a pesar de las restricciones en la búsqueda aplicadas en el tamaño de paso  $\alpha$ , en ocasiones por los valores iniciales de  $\dot{\gamma}_{m+\frac{1}{2}}$  la solución diverge. Se espera que con un precondicionamiento se pueda obtener un sistema que siempre converja. La Figura C.1 muestra la evolución temporal del esfuerzo cizallante, velocidad de deslizamiento y variable de estado. Estos son resultados preliminares donde a pesar de que la escala se ve afectada por puntos anómalos en la falla, *i.e.* tetraedros que divergieron, el frente de ruptura sigue un patrón deseado.

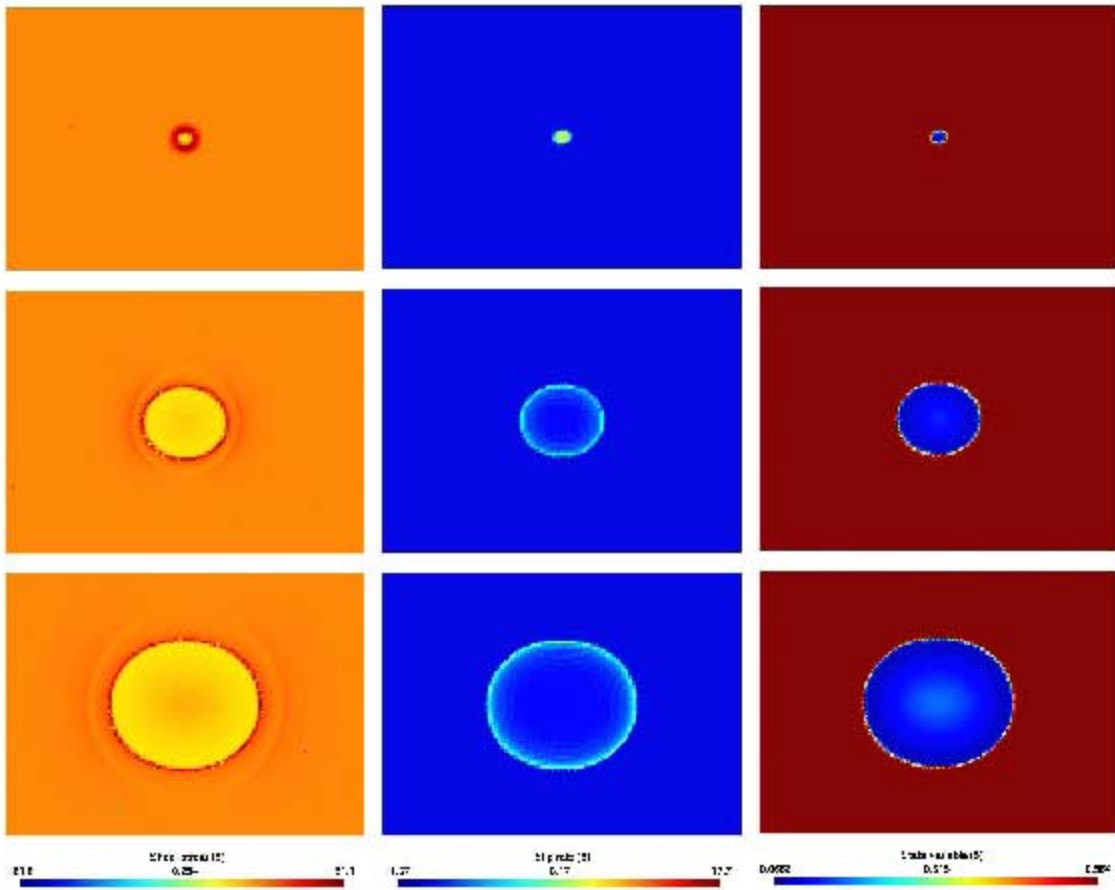


Figura C.1: Snapshots con la evolución temporal del esfuerzo cizallante, velocidad de deslizamiento y variable de estado del benchmark TPV103 (Resultados preliminares).

# Bibliografía

- Aki, K., y P. Richards (2002), *Quantitative Seismology*, University Science Books.
- Andrews, J. (1976a), Rupture propagation with finite stress in anti-plane strain, *J. Geophys. Res.*, *81*, 3575–3582.
- Andrews, J. (1976b), Rupture velocity of plane strain shear cracks, *J. Geophys. Res.*, *81*, 5679–5687.
- Andrews, J. (1980), A stochastic fault model. i. static case., *J. Geophys. Res.*, *85*, 3867–3877.
- Andrews, J. (1981), A stochastic fault model. ii. time-dependent case., *J. Geophys. Res.*, *87*, 10,821–10,834.
- Azimi, S. A., A. V. Kalinin, V. V. Kalinin, y B. L. Pivovarov (1968), Impulse and transient characteristics of media with linear and quadratic absorption law, *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, pp. 88–93.
- Barall, M. (2009), A grid-doubling finite-element technique for calculating dynamic three-dimensional spontaneous rupture on an earthquake fault, *Geophys. J. Int.*, *178*, 845–859, doi: 10.1111/j.1365?246X.2009.04190.x.
- Benjema, M., N. Glinsky-Olivier, V. Cruz-Atienza, y J. Virieux (2009), 3-d dynamic rupture simulations by a finite volume method, *Geophysics Journal International*.
- Beroza, G., y T. Mikumo (1996), Short slip duration in dynamic rupture in the presence of heterogeneous fault properties, *J. Geophys. Res.*, *101*, 22,449–22,460.
- Bouchon, M. (1997), The state of stress on some faults of the san andreas system as inferred from near-field strong motion data, *J. Geophys. Res.*, *102*, 11,731–11,744.
- Bouchon, M., y O. Coutant (1994), Calculation of synthetic seismograms in a laterally varying medium by the boundary element-discrete wavenumber method, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *84*, 1869–1881.
- Brace, W. F., y J. D. Byerlee (1966), Stick slip as a mechanism for earthquakes, *Science*, *153*, 990–992.
- Burridge, R., y L. Knopoff (1967), Model and theoretical seismicity, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *67*, 341–371.
- Bérenger, J. (1994), A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *Journal of Computational Physics*.
- Carlson, J., y J. Langer (1989), Mechanical model of an earthquake fault, *Phys. Rev.*, *40*, 6470–6484.

- Cerjan, C., D. Kosloff, R. Kosloff, y M. Reshef (1985), A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equation, *Geophysics*.
- Chaljub, E., P. Bard, S. Tsuno, J. Kristek, P. Moczo, P. Franek, F. Hollender, M. Manakou, D. Raptakis, y K. Pitilakis (2009), Assessing the capability of numerical methods to predict earthquake ground motion: the euroseistest verification and validation project, *Eos Trans AGU*, 90, Fall Meet. Suppl., Abstract S43A-1968.
- Christensen, R. (1971), *Theory of Viscoelasticity, An Introduction*, Academic Press.
- Clayton, R., y B. Engquist (1977), Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations, *Bull. Seism. Soc. Am.*
- Cochard, A., y R. Madariaga (1996), Dynamic faulting under rate-dependent friction, *J. Geophys. Res.*, 142, 419–445.
- Cohee, B., y G. Beroza (1994), Slip distribution of the 1992 landers earthquake and its implications for earthquake source mechanics, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 84, 692–712.
- Collino, F., y C. Tsogka (2001), Application of the perfectly matched absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media, *Geophysics*.
- Cotton, F., y M. Campillo (1995), Frequency domain inversion of strong motions: application to the 1992 landers earthquake, *J. Geophys. Res.*, 100, 3961–3975.
- Cruz-Atienza, V. M., y K. B. Olsen (2010), Super shear mach-waves expose the fault breakdown slip, *Tectonophysics*, 493, 285–296.
- Cruz-Atienza, V. M., K. B. Olsen, y L. A. Dalguer (2009), Estimation of the breakdown slip from strong-motion seismograms: Insights from numerical experiments, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 99(6), 3454–3469.
- Das, S., y K. Aki (1977), Fault plane with barriers: a versatile earthquake model, *J. Geophys. Res.*, 82, 5658–5670.
- Day, S., y J. Minster (1984), Numerical simulation of wavefields using padé approximant method, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*.
- Day, S., L. Dalguer, N. Lapusta, y Y. Liu (2005), Comparison of finite difference and boundary integral solutions to three-dimensional spontaneous rupture, *Journal of Geophysical Research*.
- Day, S. M. (1982), Three-dimensional simulation of spontaneous rupture: the effect of non-uniform prestress, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 72, 1881–1902.
- Day, S. M., J. Bielak, D. Dreger, R. Graves, S. Larsen, K. Olsen, y A. Pitarka (2003), Test of 3D elastodynamics codes: Final report for lifelines project 1A02, *Tech rept.*, Pacific Earthquake Engineering Research Center, Berkeley, California.
- Dieterich, J. (1978), Time-dependent friction and the mechanics of stick-slip, *Pageoph.*, 116, 790–860.
- Dieterich, J. (1979), Modeling of rock friction 1. Experimental results and constitutive equations, *J. Geophys. Res.*, 84(B5), 2161–2168.
- Dieterich, J., y B. Kilgore (1996), Implications of fault constitutive properties for earthquake predictions, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 93, 3787–3794.

- Duan, B., y D. D. Oglesby (2006), Heterogeneous fault stresses from previous earthquakes and the effect on dynamics of parallel strike-slip faults, *J. Geophys. Res.*, *111*(B05309), doi:10.1029/2005JB004138.
- Dunham, E. M., D. Belanger, L. Cong, y J. E. Kozdon (2011), Earthquake ruptures with strongly rate-weakening friction and off-fault plasticity, 1: Planar faults, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *110*(5), 2296–2307, doi:10.1785/0120100075.
- Emmerich, H., y M. Korn (1987), Incorporation of attenuation into time-domain computations of seismic wave fields, *Geophysics*.
- Engquist, B., y A. Majda (1977), Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves, *Math. Comp.*
- Etienne, V., E. Chaljub, J. Virieux, S. Operto, y N. Glinisky (2010), An *hp*-adaptive discontinuous galerkin finite-element method for 3d elastic wave modelling, *Geophysics Journal International*.
- Freund, L. B. (1972), Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading. ii: Nonuniform rate of extension, *J. Mech. Phys. Solids*, *20*, 141–152.
- Freund, L. B. (1989), *Fracture Dynamics*, Cambridge University Press.
- García, D., S. K. Singh, M. Herráiz, J. F. Pacheco, y M. Ordaz (2004), Inslab earthquakes of central Mexico:  $Q$ , source spectra and stress drop, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *94*(3), 789–802.
- García, D., S. K. Singh, M. Herráiz, M. Ordaz, y J. F. Pacheco (2005), Inslab earthquakes of central Mexico: Peak Ground-Motion Parameters and Response Spectra, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *95*(6), 2272–2282.
- Griffith, A. A. (1920), The phenomenon of rupture and flow in solids, *Phil. Trans. R. Soc.*, *A221*, 163–198.
- Guatteri, M., y P. Spudich (2000), What can strong-motion data tell us about slip-weakening fault-friction laws?, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *90*(1), 98–116.
- Harris, R., y R. Archuleta (2004), Earthquake Rupture Dynamics: Comparing the Numerical Simulation Methods, *EOS*, *85*(34), 321.
- Harris, R., y S. Day (1993), Dynamics of fault interaction: parallel strike-slip faults, *J. Geophys. Res.*, *98*, 4461–4472.
- Harris, R., y S. Day (1997), Effect of a low velocity zone on a dynamic rupture, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *87*, 1267–1280.
- Harris, R., M. Barall, R. Archuleta, B. Aagaard, J. Ampuero, H. Bhat, V. Cruz-Atienza, L. Dalguer, P. Dawson, S. Day, B. Duan, E. Dunham, G. Ely, Y. Kaneko, Y. Kase, N. Lapusta, Y. Liu, S. Ma, D. Oglesby, K. Olsen, A. Pitarka, S. Song, y E. Templeton (2009), The SCEC/USGS Dynamic Earthquake Rupture Code Verification Exercise, *Seismological Research Letters*, *80*(1), 119–126.
- Haskell, N. A. (1964), Total energy spectral density of elastic wave radiation from propagating faults, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *54*, 1811–1841.
- Heaton, T. (1996), Evidence for and implications of self-healing pulses of slip in earthquake rupture, *Phys. Earth. Planet. Inter.*, *93*, 3787–3794.
- Hesthaven, J., y T. Warburton (2008), *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis and Applications*, Springer.



- Ida, Y. (1972), Cohesive force across the tip of a longitudinal-shear crack and Griffith's specific surface energy, *J. Geophys. Res.*, *77*, 3796–3805.
- Ide, S., y M. Takeo (1997), Determination of constitutive relations of fault slip based on seismic wave analysis, *J. Geophys. Res.*, *102*(B12).
- Kaneko, Y., N. Lapusta, y J. P. Ampuero (2008), Spectral element modeling of spontaneous earthquake rupture on rate and state faults: Effect of velocity-strengthening friction at shallow depths, *J. Geophys. Res.*, *113*(B09317), doi:10.1029/2007JB005553.
- Komatitsch, D., y R. Martin (2007), An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation, *Geophysics*.
- Kostrov, B. (1964), Unsteady propagation of longitudinal shear cracks, *J. Appl. Math. Mech.*, *28*, 1077–1087.
- Kostrov, B. (1966), Unsteady propagation of longitudinal shear cracks, *J. Appl. Math. Mech.*, *30*, 1241–1248.
- Kostrov, B., y S. Das (1988), *Principles of Earthquake Source Mechanics*, Cambridge University Press.
- Kristek, J., y P. Moczo (2003), Seismic-wave propagation in viscoelastic media with material discontinuities: a 3d fourth-order staggered-grid finite-difference modeling, *Bulletin of Seismological Society of America*.
- Liu, H., D. Anderson, y H. Kanamori (1976), Velocity dispersion due to anelasticity; implications for seismology and mantle composition, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*.
- Liu, P., S. Hartzell, y W. Stephenson (1995), Nonlinear multiparameter inversion using a hybrid global search algorithm: Applications in reflection seismology, *Geophysics Journal International*.
- M. Carcione, J., D. Kosloff, y R. Kosloff (1988a), Wave propagation simulation in a linear viscoacoustic medium, *Geophysical Journal*.
- M. Carcione, J., D. Kosloff, y R. Kosloff (1988b), Wave propagation simulation in a linear viscoacoustic medium, *Geophysical Journal*.
- Madariaga, R. (1978), The dynamic field of Haskell's rectangular dislocation fault model, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *66*, 639–667.
- Madariaga, R. (1979), On the relation between seismic moment and stress drop in the presence of stress and strength heterogeneity, *J. Geophys. Res.*, *84*, 2243–2250.
- Madariaga, R. (2007), 4.02 seismic source theory, in *Treatise on Geophysics: Volume 4 Earthquake Seismology*, edited by H. Kanamori, pp. 59–81, Elsevier.
- Madariaga, R., y K. B. Olsen (2002), Chapter 12: Earthquake dynamics, in *International Handbook of Seismology and Physics of the Earth's Interior, Part A: Theoretical Seismology*, pp. 175–194, Academic Press.
- Mikumo, T., y T. Miyatake (1978), Dynamical rupture process on a three-dimensional fault with non-uniform friction and near-field seismic waves, *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, *54*, 417–438.
- Mikumo, T., y T. Miyatake (1979), Earthquake sequences on a frictional fault model with non-uniform strength and relaxation times, *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, *59*, 497–522.

- Mikumo, T., y Y. Yagi (2003), Slip-weakening distance in dynamic rupture of in-slab normal-faulting earthquakes, *Geophys. J. Int.*, 155(2), 443–455.
- Moczo, P., y J. Kristek (2005), On the rheological models used for the time domain methods of seismic wave propagation, *Geophysical Resource Letters*.
- Moczo, P., E. Bystricky, J. Kristek, J. M. Carcione, y M. Bouchon (1997), Hybrid modeling of p-sv seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures, *Bulletin of Seismological Society of America*.
- Moczo, P., J. Kristek, M. Galis, P. Pazak, y M. Balazovjeh (2007), The finite-difference and finite-element of seismic wave propagation and earthquake motion, *Acta Physica Slovaca*.
- Nielsen, S. B., J. Carlson, y K. B. Olsen (2000), The influence of friction and fault geometry on earthquake rupture, *J. Geophys. res.*, 105, 6069–6088.
- Ohnaka, M. (1996), Non-uniformity of the constitutive law parameters for shear rupture and quasi-static nucleation to dynamic rupture: a physical model of earthquake generation processes, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 93, 3795–3802.
- Ohnaka, M., y Y. Kuwahara (1990), Characteristic features of local breakdown near crack-tip in the transition zone from nucleation to dynamic rupture during stick-slip shear failure, *Tectonophysics*, 175, 197–220.
- Ohnaka, M., y L. F. Shen (1999), Scaling of rupture process from nucleation to dynamic propagation: implications of geometric irregularity of the rupturing surfaces, *J. Geophys. Res.*, 104, 817–844.
- Okubo, P. (1989), Dynamic rupture modeling with laboratory-derived constitutive relations, *J. Geophys. Res.*, 94, 12,321–12,335.
- Olsen, K. B., R. Madariaga, y R. Archuleta (1997), Three dimensional dynamic simulation of the 1992 Landers earthquake, *Science*, 278, 834–838.
- Ordaz, M., y S. K. Singh (1992), Source spectra and spectral attenuation of seismic waves from Mexican earthquakes and evidence of amplification in the hill zone of Mexico City, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 82, 24–43.
- Palmer, A., y J. R. Rice (1973), The grow of slip surfaces in the progressive failure of over-consolidated clay, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 332, 527–548.
- Pelties, C., J. de la Puente, J. Ampuero, G. Brietzke, y M. Kaser (2012), Three-dimensional dynamic rupture simulation with a high-order Discontinuous Galerkin method on unstructured tetrahedral meshes, *J. Geophys. Res.*, 117(B02309).
- Peng, C., y M. Toksoz (1995), An optimal absorbing boundary condition for elastic wave modeling, *Geophysics*.
- Peyrat, S., K. B. Olsen, y R. Madariaga (2001), Dynamic modeling of the 1992 Landers earthquake, *J. Geophys. Res.*, 106(26), 467–482.
- Plesch, A., J. H. Shaw, C. Benson, W. A. Bryant, S. Carena, M. Cooke, J. Dolan, G. Fuis, E. Gath, L. Grant, E. Hauksson, T. Jordan, M. Kamerling, M. Legg, S. Lindvall, H. Magistrale, C. Nicholson, N. Niemi, M. Oskin, S. Perry, G. Planansky, T. Rockwell, P. Shearer, C. Sorlien, M. P. Suss, J. Suppe, J. Treiman, y R. Yeats (2007), Community Fault Model (CFM) for Southern California, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 97(6), 1793–1802, doi:10.1785/0120050211.

- Reddy, B. (1998), *Intoductory Functional Analysis: With Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements*, Springer.
- Rice, J. R., N. Lapusta, y K. Ranjith (2001), Rate and state dependent friction and the stability of sliding between elastically deformable solids, *J. Mech. Phys. Solids*, 49, 1865–1898.
- Roden, J., y S. Gedney (2000), Convolution pml (cpml): An efficient fdtd implementation of the cfs-pml for arbitrary media, *Microwave and Optical Technology Letters*.
- Rojas, O., E. Dunham, S. M. Day, L. A. Dalguer, y J. E. Castillo (2009), Finite difference modeling of rupture propagation with strong velocity-weakening friction, *Geophys. J. Int.*, 179, 1831–1858.
- Ruina, A. (1983), Slip instability and state variable friction laws, *J. Geophys. Res.*, 88(B12), 10,359–10,370.
- Singh, S. K., y M. Ordaz (1993), On the origin of long coda observed in the lake-bed strong-motion records of Mexico City, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 83, 1298–1306.
- Spudich, P., y M. Guatteri (2004), The effect of bandwidth limitations on the inference of earthquake slip-weakening distance from seismograms, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 94(6), 2028–2036.
- Spudich, P., M. Guatteri, K. Otsuki, y J. Minagawa (1998), Use of fault striations and dislocation models to infer tectonic shear stress during the 1995 hogyo-ken nambu (kobe) earthquake, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 88, 413–427.
- Stein, S., y M. Wysession (2003), *An Introduction to Seismology, Earthquakes and Earth Structure*, Blackwell Publishing.
- Wald, D., y T. Heaton (1994), Spatial and temporal distribution of slip for the 1992 Landers, California, earthquake, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 84(3), 668–691.
- Zienkiewicz, O., R. Taylor, y J. Zhu (2005), *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, Elsevier.