UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS
TEORÍA DE MODELOS

LA CONSTRUCCIÓN DE HRUSHOVSKI, CAMPOS ESMERALDA Y TOROS CUÁNTICOS

TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
JESÚS LARA POPOCA

DIRECTOR DE TESIS: DR. TIMOTHY MOONEY GENDRON THORNTON
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MÉXICO D.F. NOVIEMBRE 2012

La Construcción de Hrushovski, Campos Esmeralda y Toros Cuánticos

Jesús Lara Popoca

13 de noviembre de 2012

Índice general

Parte I

Límite de Fraïssé y Construcción de Hrushovski

Capítulo 1

Introducción

Dada una estructura $\mathcal{M}$ y un subconjunto D fuertemente minimal de $\mathcal{M}$, es posible asociar una pregeometría a D si se define, para cada subconjunto $A \subset D$, el operador $cl(A) = acl(A) \cap D$ y donde $acl(A)$ es la cerradura algebraica de A en $\mathcal{M}$. Las nociones de independencia y dimensión de un conjunto fuertemente minimal se pueden generalizar a una pregeometría abstracta. Desde el punto de vista de su estructura geométrica, se tienen 3 tipos de estructuras, a saber, las estructuras triviales (un conjunto sin estructura), las (localmente) modulares que interpretan espacios vectoriales y un tercer tipo que interpreta campos algebraicamente cerrados de característica p. Boris Zilber conjeturó que un conjunto fuertemente minimal no localmente modular siempre interpreta un campo algebraicamente cerrado de característica p [Zil84]. Esto se conoce como la **conjetura de tricotomía** que Hrushovski refutó [Hru] al construir un conjunto fuertemente minimal no localmente modular que no interpreta un campo. Esta construcción mostró que para el tercer caso, había más posibilidades de las que se había pensado.

Aunque la conjetura de tricotomía resultó falsa, puso en evidencia, por un lado, la existencia de un conjunto grande de estructuras en las que la conjetura es cierta, y por otro, un conjunto interesante de contraejemplos. El conjunto para el que es cierta, es el de las llamadas geometrías de Zariski clásicas [Zil10]. Mediante la primera construcción de Hrushovski [Hru] se obtienen todos los ejemplos conocidos de geometrías de Zariski no clásicas, entre los que se encuentra el toro no conmutativo.

En [Poi], utilizando la metodología desarrollada por Hrushovski, Poizat construye una extensión $\mathcal{F} = (F, +, \cdot, G)$ de un campo F algebraicamente cerrado de característica 0 por un subgrupo G de $F^{\times}$ tal que G es divisible y libre de torsión. El rango de Morley de $\mathcal{F}$ es igual a $\omega \cdot 2$ y el de G es igual a ω. Poizat llama a los puntos de G *verdes* y a los puntos en $F \setminus G$ *blancos*. Los campos verdes de Poizat son análogos de rango (de Morley) infinito de los llamados *campos malos*, que son campos con un subgrupo propio definible del grupo multiplicativo y de rango de Morley finito.

La construcción de Poizat ha sido retomada por Zilber en una nueva dirección. En [Zil04], se demuestra que si se asume la conjetura de Schanuel, dado ϵ un número complejo algebraico que no está en los ejes, la estructura:

$$\mathcal{G} = (\mathbb{C}, +, \cdot, G = exp(\epsilon\mathbb{R} + i\mathbb{Q}))$$

es un modelo de la teoría del campo de puntos verdes de Poizat. Este modelo tiene la particularidad de ser $\omega-$estable. Algunas variantes de la estructura anterior están íntimamente relacionadas con la construcción del toro no conmutativo (toro cuántico).

En este trabajo hacemos evidente la relación entre el límite de Fraïssé, la construcción de Hrushovski, la construcción de los campos coloreados y como se puede usar esta construcción para obtener una teoría superestable, tal como lo plantea Zilber y cuyo modelo es, en realidad, el toro cuántico.

Procederemos de la siguiente manera: En el capítulo 3 presentamos la construcción básica de una estructura numerable $\omega-$categórica a partir del conjunto de sus subestructuras finitas mediante un proceso de amalgamación. Siguiendo la exposición presentada en [Hod] llamamos al resultado de esta construcción el **límite de Fraïssé**.

La construcción de Hrushovski es un límite de Fraïssé que se obtiene mediante un proceso de amalgamación más fuerte que cuenta con tres propiedades adicionales, a saber, tiene rango de Morley finito, es fuertemente minimal y no interpreta un campo algebraicamente cerrado de característica p. Las dos últimas características son las que refutan la conjetura de tricotomía. Esta construcción se presenta en el capítulo 4 y recibe el nombre de **construcción de Hrushovski**.

Poizat, utilizando una técnica de amalgamación libre, parecida a la de Hrushovski, obtiene una teoría $\omega-$estable. Un **campo coloreado** (también se les conoce como campos *bicoloreados*) es un campo expandido por un predicado de aridad 1 que se denomina su **color**. El color negro (o campos de color negro) distingue un subconjunto algebraicamente independiente; el color rojo un subgrupo aditivo, conexo, propio y no trivial; el color verde un subgrupo multiplicativo, conexo, propio y no trivial. De esta clasificación se obtiene el nombre de los campos esmeralda y en el capítulo 5 se presenta su construcción. La idea es seguir el desarrollo de Poizat para la construcción del campo verde que, a su vez, se basa en la construcción de Hrushovski.

Zilber muestra que, asumiendo la conjetura de Schanuel, la estructura $\mathcal{G}$ es un modelo de la teoría de campos verdes y notó que esta estructura está íntimamente relacionada con el Toro Cuántico. En el capítulo 6 se demuestran los resultados necesarios para probar que la estructura que se obtiene es superestable, y esto se hace principalmente mediante argumentos geométricos.

En el capítulo 7 se considera en particular la estructura

$$\mathcal{E} = (\mathbb{C}, +, \Gamma) \xrightarrow{exp} (\mathbb{C}, +, \cdot),$$

en donde $\Gamma = \epsilon\mathbb{R} + i\mathbb{Z}$. Al tomar el cociente del campo por el grupo definido por el nuevo predicado, se obtiene el Toro Cuántico. En este caso a los puntos de Γ se les llama puntos *esmeralda*. Zilber afirma en [Zil05] que, si se asume la conjetura de Schanuel, es posible obtener la teoría de $\mathcal{E}$ por un procedimiento parecido al de Poizat. Más aún, esta teoría es superestable.

Capítulo 2

Prerequisitos

A continuación presentamos el mínimo de conceptos necesarios para el desarrollo del presente trabajo. se asume que el lector está familiarizado con los conceptos elementales de la teoría de modelos y de la lógica de primer orden.

Diremos que un lenguaje $\mathscr{L}$ es finito o numerable si tiene, respectivamente, un número finito o numerable de símbolos de función, relación y/o constantes. Una **fórmula atómica** de un lenguaje consta solo de símbolos de relación (incluyendo el símbolo de igualdad). En general nos referiremos a conjuntos finitos o numerables como conjuntos **a lo más numerables**. También haremos la distinción entre modelo y estructura. En general una **estructura** es un conjunto (un dominio o universo de discurso) en donde puede ser interpretado un lenguaje. Por otro lado un **modelo** es una estructura en la que es posible asignar un valor de verdad a un enunciado de nuestro lenguaje. Un conjunto de enunciados es una **teoría**. Por lo mismo hablaremos de modelos de teorías y de estructuras de lenguajes. Un subconjunto A de una estructura B que es, a su vez una estructura es una **subestructura** y diremos que B es una extensión de A. Denotaremos esta relación como $A \subseteq B$ y $A \subset B$, aclarando de manera explícita cuando esta relación sea entre simples conjuntos. Un **encaje** entre dos estructuras A y B es un mapeo inyectivo que preserva la interpretación de los símbolos del lenguaje. Si el mapeo es también suprayectivo entonces es un isomorfismo de estructuras. Si dados dos modelos y para toda fórmula φ de un lenguaje (de 1er. orden), φ es verdadera en un modelo si y sólo si es verdadera en el otro, entonces diremos que los modelos son **elementalmente equivalentes**. Es claro que si dos modelos son isomorfos entonces son elementalmente equivalentes. Un encaje entre dos modelos que preserva los valores de verdad es un **encaje elemental**. Por $Th_A(\mathfrak{M})$ denotaremos el conjunto de todos los enunciados verdaderos de $\mathscr{L}$, con parámetros en un subconjunto A del universo de una estructura $\mathfrak{M}$. $Th_A(\mathfrak{M})$ es la **teoría completa de** $\mathfrak{M}$ (en el lenguaje $\mathscr{L} \cup A$ y que en adelante denotaremos por $\mathscr{L}_A$). Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje de 1er. orden. El lenguaje $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ consta de los mismos símbolos que $\mathscr{L}$ pero permite como fórmulas conjunciones y disyunciones infinitas. Un campo de conjuntos es una colección de conjuntos $\mathcal{S}$ que es cerrada bajo uniones, intersecciones y complementación con respecto a $\mathcal{S}$.

Definición 1. Sea **DLO** la teoría axiomatizada por el siguiente conjunto de enunciados:

(i) DLO es un orden lineal.

(ii) $(\forall xy)(\exists z)(x < z < y)$

(iii) $(\forall xy)(\exists zw)(z < x \quad \wedge \quad y < w)$

(iv) $(\exists xy)(x \neq y)$

DLO es la **teoría de órdenes lineales densos sin puntos extremos**.

Denotaremos por $\mathscr{P}(X)$ el conjunto potencia de X y por $|A|$ o $card(A)$ la cardinalidad del conjunto A. A los conjuntos con un elemento los llamaremos **conjuntos singulares**. En general a los elementos de M^n los denotaremos como vectores $\bar{b}$ y cuando esté claro del contexto escribiremos $\bar{b} \in M$ en lugar de $\bar{b} \in M^n$.

Definición 2. Sean X un conjunto y $cl : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ un operador en $\mathscr{P}(X)$. Diremos que (X, cl) es una pregeometría si cumple con:

(i) Si $A \subseteq X$, entonces $A \subseteq cl(A)$ y $cl(cl(A)) = cl(A)$.

(ii) Si $A \subseteq B \subseteq X$, entonces $cl(A) \subseteq cl(B)$.

(iii) Si $A \subseteq X, a, b \in X$ y $a \in cl(A \cup \{b\})$, entonces $a \in cl(A)$ o $b \in cl(A \cup \{a\})$

(iv) Si $a \in X$ y $a \in cl(A)$, entonces existe $A_0 \subseteq A$ finito tal que $a \in cl(A_0)$.

Diremos que $A \subseteq X$ es cerrado si $cl(A) = A$. Una pregeometría es una **geometría** si los conjuntos singulares y el conjunto vacío son cerrados.

Definición 3. Diremos que $\bar{b}$ es $\mathscr{L}-$**algebraico** sobre A si existe una fórmula $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ con $\bar{a} \in A$ tal que el conjunto de elementos de M que satisfacen a $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ es finito y $\bar{b}$ es uno de ellos. Diremos que $\bar{b}$ es $\mathscr{L}-$definible sobre A si el conjunto de elementos que satisface $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ es precisamente $\bar{b}$. La **cerradura algebraica** (**definible**) de un conjunto A es el conjunto de todos los elementos algebraicos (definibles) sobre A. Denotamos por $acl(A)$ a la cerradura algebraica del conjunto A.

De manera alternativa. Sea M un conjunto y G un grupo de permutaciones de M. Entonces, $\bar{a}$ es **definible** sobre $X \subset M$ si todo elemento de G que fija puntualmente a X, también fija $\bar{a}$. Un elemento $\bar{a}$ es **algebraico** sobre $X \subset M$ si su órbita bajo el conjunto de elementos de G que fijan puntualmente a X es finita. Las respectivas cerraduras se definen igual. Los conjuntos que se obtienen de esta manera dependen de la elección de G. Cuando G es igual al grupo de automorfismos de M, entonces los conjuntos que se obtienen coinciden con los de la definición 3.

Definición 4. Sean $\mathcal{M}$ una estructura y D un subconjunto de $\mathcal{M}$. Entonces D es **minimal** en $\mathcal{M}$ si para cada $Y \subseteq D$ definible se tiene que Y es finito o $D \setminus Y$ es finito. Si $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ es la fórmula que define a D diremos que φ es minimal.

D y φ serán **fuertemente minimales** si φ es minimal en cada extensión elemental de $\mathcal{M}$.

Definición 5. Sea D fuertemente minimal en $\mathcal{M}$. Diremos que $A \subseteq D$ es **independiente** si $a \notin acl(A \setminus \{a\})$ para todo $a \in A$. A es una **base** de $Y \subseteq D$ si $A \subseteq Y$ es independiente y $Y = acl(A)$. La **dimensión** de Y en D es igual a la cardinalidad de una base de Y.

La dimensión estará bien definida siempre que acl forme una pregeometría. Sea $acl_D(A) = \{b \in D \mid b \text{ es algebraico sobre } A\}$, y definamos $cl(A) = acl_D(A)$. Entonces todo conjunto fuertemente minimal con la cerradura algebraica da lugar a una pregeometría.

Sea $\varphi(\bar{x})$ una fórmula de un lenguaje $\mathscr{L}$. Diremos que $\varphi(\bar{x})$ es **satisfactible** si existe un modelo $\mathcal{A}$ y un elemento $\bar{a} \in A$ tal que $\mathcal{A}$ es un modelo de $\varphi(\bar{a})$ y lo denotaremos por $\mathcal{A} \vDash \varphi(\bar{a})$. Diremos que $\mathcal{A}$ **satisface** a $\varphi(\bar{a})$ o que $\varphi(\bar{a})$ es **verdadera** en $\mathcal{A}$.

Definición 6. Sea $\mathfrak{M}$ un estructura para un lenguaje $\mathscr{L}$. Sea p un conjunto de fórmulas con parámetros en $A \subseteq M$ en las variables libres $v_1, \ldots, v_n$. Diremos que p es un $n-$**tipo** si $Th_A(\mathfrak{M}) \cup p$ es satisfactible. Diremos que p es un $n-$**tipo completo** si $\varphi \in p$ o $\neg\varphi \in p$ para toda fórmula φ de $\mathscr{L}_A$ con n variables libres y denotaremos por $S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ el conjunto de todos los $n-$tipos completos de $\mathfrak{M}$ sobre A. Si un tipo p no es completo, diremos que es un tipo **parcial**. Si $\mathfrak{M}_A$ es el modelo con universo M y con símbolos de constante para cada $a \in A$, entonces el tipo generado por $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_k) \in M^k$ sobre A es el conjunto

$$\{\varphi(\bar{x}) \mid \mathfrak{M}_A \vDash \varphi(\bar{b})\}.$$

y lo denotaremos por $tp_{\mathfrak{M}}(\bar{b}/A)$. Diremos que un tipo $p(\bar{x})$ sobre $A \subseteq M$ **es realizado** por $\bar{b} \in M$ (o de manera alternativa que $\bar{b}$ **realiza** a $p(\bar{x})$) si $p(\bar{x}) \subseteq tp_{\mathfrak{M}}(\bar{b}/A)$. Un **tipo atómico** es un tipo que sólo consta de fórmulas atómicas.

Observemos que en la definición de tipo generado por, y realización de un tipo por un $\bar{b}$ se supone dado un orden sobre los elementos que forman a $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_k)$. Dada una permutación σ del conjunto $\{1, \ldots, k\}$ de subíndices, $\bar{b}' = (b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(k)})$ no necesariamente genera el mismo tipo que $\bar{b}$ ni satisface el mismo tipo que $\bar{b}$, sin embargo, para estructuras finitas A, podemos considerar el conjunto de tipos generados por todas las permutaciones σ de los subíndices de $\bar{a}$ tales que $a_i \in A$ y considerar esto como una clase de equivalencia en la clase de todos los tipos. En otras palabras, diremos que el tipo atómico generado por $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_k)$ **es equivalente** al tipo atómico generado por $\bar{b}'$, y lo escribiremos como $tp(\bar{b}) \sim tp(\bar{b}')$, si existe σ una permutación del conjunto $\{1, \ldots, k\}$ tal que $\bar{b}' = (b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(k)})$. De esta manera, dada una estructura finita A, podemos hablar de la clase de isomorfismo del tipo atómico de $A = (a_1, \ldots, a_k) = \bar{a}$

Una **función** μ **de tipos atómicos** es una función tal que si $tp\ A \sim tp\ A'$, entonces $\mu(A) = \mu(A')$.

Definición 7. Sean κ un cardinal infinito y T una teoría. Diremos que un modelo $\mathfrak{M}$ de T es $\kappa-$**saturado** si para todo $A \subseteq M$ con $|A| < \kappa$ y p un $n-$tipo completo con parámetros en A, entonces p se realiza en $\mathfrak{M}$. Si $\mathfrak{M}$ es $|M|-$saturado entonces diremos que $\mathfrak{M}$ es **saturado**.

A menudo para simplificar el desarrollo se usan **modelos monstruo** que son simplemente modelos suficientemente grandes con la propiedad de ser saturados y que contienen como subestructuras a todas las estructuras con las que estemos trabajando.

Ahora definiremos el concepto de **juego Ehrenfeucht-Fraïssé de longitud** γ **entre** $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, en símbolos $EF_\gamma(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Sea γ menor o igual a ω, en donde ω es el primer ordinal límite infinito. γ será la longitud del juego. Se tienen dos jugadores, $\forall$ y $\exists$. El jugador $\forall$ elige entre una de las dos estructuras $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ (digamos que elige $\mathcal{A}$) y un elemento de la misma estructura ($a \in \mathcal{A}$). El jugador $\exists$ debe elegir entonces un elemento de la otra estructura ($b \in \mathcal{B}$ en este caso). Esto se repite γ veces para obtener una jugada $(\bar{a}, \bar{b})$ en donde $\bar{a}, \bar{b}$ son sucesiones de elementos de A y B respectivamente. Sean $\langle \bar{a} \rangle_{\mathcal{A}}, \langle \bar{b} \rangle_{\mathcal{B}}$ las subestructuras de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ generadas por $\bar{a}, \bar{b}$ respectivamente. Diremos que $(\bar{a}, \bar{b})$ es una victoria para $\exists$ si existe un isomorfismo $f : \langle \bar{a} \rangle_{\mathcal{A}} \to \langle \bar{b} \rangle_{\mathcal{B}}$ tal que $f\bar{a} = \bar{b}$. Si una jugada no es una victoria para $\exists$, entonces es una victoria para $\forall$.

Definición 8 (Bisimulación)**.** Diremos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son **equivalentes por bisimulación** si el jugador $\exists$ tiene una estrategia ganadora para el juego $EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ y lo denotaremos por $\mathcal{A} \sim_\omega \mathcal{B}$.

De manera alternativa diremos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ permiten bisimulación para referirnos a la definición anterior.

Teorema 1. *Sean $\mathscr{L}$ un lenguaje finito que no contiene símbolos de función y $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ $\mathscr{L}-$estructuras. Entonces, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ serán elementalmente equivalentes si y sólo si $\mathcal{A} \sim_\omega \mathcal{B}$.*

Teorema 2. *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son numerables, entonces $\mathcal{A} \sim_\omega \mathcal{B}$ si y sólo si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son isomorfos.*

La demostración de estos dos teoremas se puede encontrar en [Mar] (págs. 53-55).

Teorema 3. *Sean $\mathcal{M}$ un modelo saturado, A un subconjunto de $\mathcal{M}$ tal que $|A| < |M|$ y $b \in M$. Entonces lo siguiente es equivalente:*

i) *b es algebráico sobre A;*

ii) *b tiene sólo una cantidad finita de imágenes bajo automorfismos de $\mathcal{M}$ que fijan A puntualmente;*

iii) *$tp^{\mathcal{M}}(b/A)$ tiene una cantidad finita de realizciones.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en [Mar] (pág. 147).

Definición 9 (Amalgamación)**.** Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ estructuras. Diremos que $\mathcal{D}$ es una **amalgama** de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ sobre $\mathcal{A}$ si se cumple lo siguiente:

- $B \cap C = A$

- B y C se encajan en D mediante encajes que coinciden en A, i.e.

$$\begin{tikzcd}
 & D & \\
B \arrow[ur, "g"] & & C \arrow[ul, "h"'] \\
 & A \arrow[ul, "e"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

  donde $g \circ e = h \circ f$.

Diremos que una clase $\mathcal{K}$ tiene la **propiedad de amalgama libre** si se cumple lo siguiente:

(a) dados $A, B \in \mathcal{K}$ su unión disjunta pertenece a $\mathcal{K}$,

(b) si $A, B \in \mathcal{K}$ tales que $A \cap B \neq \varnothing$ y las respectivas subestructuras de A, B que resultan de restringir las respectivas relaciones de A y B a $A \cap B$ son iguales, entonces $A \cup B \in \mathcal{K}$.

Llamaremos a $A \cup B$ la **amalgama libre** de A y B.

El siguiente lema y su demostración aparecen en [Hod] y se usará en la demostración del corolario 5.

Lema 1 (Karp)**.** *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos estructuras para $\mathscr{L}$. Entonces $\mathcal{A} \sim_\omega \mathcal{B}$ si y sólo si son $\mathscr{L}_{\infty\omega}-$equivalentes.*

Definición 10. Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje de 1er. orden y T una teoría de $\mathscr{L}$. Diremos que T es **inestable** si existe una fórmula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ de $\mathscr{L}$ y un modelo $\mathfrak{M}$ de T con elementos $\bar{a}_i \in M$ $(i < \omega)$ tales que

$$\mathfrak{M} \vDash \varphi(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \quad \Leftrightarrow \quad i < j < \omega.$$

Diremos que T es **estable** si no es inestable.

Sean $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ una $\mathscr{L}_A-$fórmula y

$$[\varphi] = \{p \in S_n^{\mathfrak{M}}(A) : \varphi \in p\}.$$

Entonces la **topología de Stone** en $S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ es la topología generada al tomar los conjuntos $[\varphi]$ como abiertos básicos.

Definición 11. Sean T una teoría completa en un lenguaje numerable y λ un cardinal infinito. Diremos que T es $\lambda-$estable si, siempre que $\mathfrak{M} \vDash T,\ A \subset M$ y $|A| = \lambda$, entonces $|S_n^{\mathfrak{M}}(A)| = \lambda$. T será **superestable** si existe μ tal que T es $\lambda-$estable para todo $\lambda \geqslant \mu$.

Capítulo 3

Límite de Fraïssé

Podemos entender el límite de Fraïssé como la estructura numerable $\mathfrak{D}$ que se obtiene al "pegar" de una forma conveniente subestructuras finitas. $\mathfrak{D}$ es única salvo isomorfismo y es homogénea, i.e. cualquier isomorfismo entre subestructuras de $\mathfrak{D}$ puede ser extendido a un automorfismo de $\mathfrak{D}$. Para esta sección y a menos de que se indique lo contrario $\mathscr{L}$ será un lenguaje finito y que carece de símbolos de función. Sea D una $\mathscr{L}-$estructura. Definimos la **edad** de D como la clase K de todas las estructuras finitamente generadas que son encajables en D.

En realidad estaremos más interesados en las clases de isomorfismo de los elementos de K por lo que definimos

$$[K] = \{[A] \mid A \text{ es finitamente generada y encajable en } D\}$$

donde $[A]$ es la clase de isomorfismo de la $\mathscr{L}-$ estructura A y f es un encaje de A en D. De esta forma, diremos que una estructura D tiene edad finita o numerable si $[K]$ es finita o numerable. Diremos que una clase K es una edad si es la edad de alguna estructura.

Ejemplo 1. $(\mathbb{Z}, +, 0)$ tiene edad numerable. Por otro lado la estructura $(\mathbb{R}, +, 0, f_r)$ en donde $f_r(s) = rs$ tiene edad finita con dos elementos, a saber, 0 y el generado por 1.

Si K es una edad, entonces, además de ser no vacía, cumple con las siguientes propiedades:

- HP **(Propiedad de herencia)** Si $A \in K$ y B es una subestructura finitamente generada de A, entonces $B \in K$.

- JEP **(Propiedad de encaje conjunta)** Si $A, B \in K$, entonces existe un $C \in K$ tal que A, B son encajables en C.

Observemos que si A, B son estructuras finitamente generadas y $\bar{a}, \bar{b}$ son conjuntos de generadores para A y B respectivamente, entonces tanto A como B se encajan en la estructura C (finitamente) generada por $\bar{a} \cup \bar{b}$ y se tiene la propiedad JEP. Ahora mostraremos que si K cumple con HP y JEP, entonces K es la edad de una estructura.

Teorema 4. *Dados $\mathscr{L}$ y $[K]$ un conjunto no vacío (finito o numerable) de clases de isomorfismo de estructuras finitamente generadas y sea*

$$K = \{A \mid [A] \in [K]\}$$

tal que cumple con HP y JEP. Entonces K es la edad de alguna estructura a lo más numerable.

Demostración: Sea $(A_i : i < \omega)$ una enumeración de los elementos de K. Definamos una cadena $(B_i : i < \omega)$ de estructuras isomorfas a estructuras en K de la siguiente manera: Sea $B_0 = A_0$. Para B_i, usamos la JEP para encontrar un $B' \in K$ tal que B_i y A_{i+1} son encajables en B'. Sea B_{i+1} una copia isomorfa a B' que extiende a B_i. Por último, sea $C = \bigcup_{i<\omega} B_i$. Como C es la unión numerable de estructuras a lo más numerables se sigue que C es a lo más numerable. Por construcción cada estructura en K es encajable en C. Si A es cualquier subestructura finitamente generada de C, entonces los generadores de A están contenidos en algún B_i y se tiene que A es encajable en B_i. Luego podemos pensar que A es una subestructura de B_i. Por la HP A es isomorfo a alguna estructura en K. Por lo tanto K es la edad de C. $\dashv$

El teorema anterior se cumple aún cuando $\mathscr{L}$ tiene símbolos de función pero, una manera de garantizar que la estructura resultante sea a lo más numerable es pedir que $\mathscr{L}$ sea finito y que no contenga símbolos de función. De hecho si $\mathscr{L}$ es finito y no contiene símbolos de función, entonces toda estructura finitamente generada es finita. Esto es inmediato pues al tener un número finito de generadores y no tener símbolos de función, el dominio de la estructura será finito.

El ejemplo clásico de un límite de Fraïssé es la construcción de $(\mathbb{Q}, <)$ a partir de sus subestructuras finitas ya que DLO es $\omega-$categórica y el límite de Fraïssé es una estructura numerable, única salvo isomorfismo, se sigue que $(\mathbb{Q}, <)$ es precisamente el límite de Fraïssé de la clase de órdenes lineales finitos. Además, la edad de $(\mathbb{Q}, <)$ cumple con la propiedad AP que se enuncia a continuación:

AP **(Propiedad de Amalgamación)** Si $A, B, C \in K$ y $e : A \to B,\ f : A \to C$ son encajes, entonces existen $D \in K$ y encajes $g : B \to D,\ h : C \to D$ tales que $g \circ e = h \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
& D & \\
B \arrow[ur, "g"] & & C \arrow[ul, "h"'] \\
& A \arrow[ul, "e"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Diremos que un conjunto K tiene la **propiedad fuerte de amalagama** (SAP) si, además de cumplir con AP, se tiene que

$$im\ g \cap im\ h = im\ g \circ e = im\ h \circ f.$$

Definición 12. Diremos que una estructura D es **débilmente homogénea** si dadas A, B subestructuras finitamente generadas de D, $A \subseteq B$ y $f : A \to D$ es un encaje, entonces existe un encaje $g : B \to D$ que extiende a f:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\subseteq"'] & D \\ B \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Diremos que una estructura D es **homogénea** si todo isomorfismo entre subestructuras finitamente generadas de D puede ser extendido a un automorfismo de D.

Teorema 5 (Fraïssé)**.** *Sean $\mathscr{L}$ un lenguaje numerable, $[K]$ un conjunto no vacío, a lo más numerable de clases de isomorfismo de $\mathscr{L}-$estructuras finitamente generadas y*

$$K = \{A \mid [A] \in [K]\},$$

y supongamos que tienen las propiedades HP, JEP y AP. Entonces existe una única $\mathscr{L}-$estructura $\mathfrak{D}$ (salvo isomorfismo) tal que:

- *$\mathfrak{D}$ es a lo más numerable*
- *K es la edad de $\mathfrak{D}$*
- *$\mathfrak{D}$ es homogénea*

$\mathfrak{D}$ en el teorema anterior es el **límite de Fraïssé**. A continuación presentamos un bosquejo de la demostración de la existencia del límite de Fraïssé[1]:

Lema 2. *Sea J un conjunto de estructuras finitamente generadas y $(D_i : i < \alpha)$ una cadena de estructuras. Si para cada $i < \alpha$ la edad de D_i pertenece a J, entonces la edad de la unión $\cup_{i<\alpha} D_i$ también pertenece a J. Si cada D_i tiene edad J, entonces $\cup_{i<\alpha} D_i$ tiene edad J.*

Demostración: Evidente. $\dashv$

Ahora presentamos la demostración del Teorema 5. En esta sección asumiremos que K es no vacío, que cumple con las propiedades HP, JEP y AP. Construiremos una cadena de estructuras $(D_i : i < \alpha)$ en K tal que se cumple lo siguiente:

$\circledast$ Si A, B son estructuras en K con $A \subseteq B$ y existe un encaje $f : A \to D_i$ para algún $i < \omega$, entonces existen $j > i$ y un encaje $g : B \to D_j$ que extiende a f.

Supongamos que hemos construido la cadena. Sea D igual a $\cup_{i<\alpha} D_i$. Entonces la edad de D pertenece a K por el lema anterior pues por HP la edad de cada D_i pertenece a K. Más aún, la edad de D es precisamente K. En efecto, si A en K, entonces por la propiedad JEP existe B en K tal que $A \subseteq B$ y D_0 es encajable en B. Por $\circledast$ es posible extender el mapeo identidad en D_0 a un encaje de B en D_j, para alguna j, y de esta forma A, B pertenecen a la edad de D. Luego, $\circledast$ muestra que D

[1] Para más detalles y la demostración de la unicidad del límite de Fraïssé ver [Hod] pp. 326-330.

es débilmente homogénea, pero una estructura a lo más numerable es homogénea si y sólo si es débilmente homogénea[2], D es homogénea con edad K.

Ahora construimos la cadena. Sea P un conjunto numerable de pares de estructuras (A, B) tales que $A, B \in K$ y $A \subseteq B$. Es posible elegir P de tal forma que dados $[A], [B] \in [K]$ con $A \subseteq B$, P incluya a un representante de cada tipo de isomorfismo de estos pares de estructuras. Tomemos una biyección $\pi : \omega \times \omega \to \omega$ tal que $\pi(i, j) \geqslant i$ para todo i, j. Procedemos por inducción: Sea D_0 cualquier estructura en K y supongamos que hemos construido D_k. Entonces existen i_k, j_k tales que, para $i_k \leqslant k$ se tiene que $\pi(i_k, j_k) = k$.

Se listan las ternas (f, A, B) en donde $(A, B) \in P$ y $f : A \to D_k$ como

$$((f_{kj}, A_{kj}, B_{kj}) : j < \omega).$$

Construimos D_{k+1} por AP como en el siguiente diagrama de amalgamación:
si $k = \pi(i_k, j_k) \geqslant i_k$, entonces $f_{i_kj_k} : A_{i_kj_k} \to D_{i_k} \subseteq D_k$ y $(f_{i_kj_k}, A_{i_kj_k}, B_{i_kj_k})$
se puede extender a un encaje de $B_{i_kj_k}$ en D_{k+1} como en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & D_{k+1} & & \\
B_{i_kj_k} \arrow[urr, "\overline{f}_{i_kj_k}"] & & & & D_k \arrow[ull, "\subseteq"'] \\
 & & & D_{i_k} \arrow[ur, "\subseteq"'] & \\
 & & A_{i_kj_k} \arrow[uull, "\subseteq"] \arrow[ur, "f_{i_kj_k}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Con esto se garantiza que se cumple la propiedad $\circledast$ pues dados $A \subseteq B$ y $f : A \to D_n$, si $n \leqslant k$, entonces $D_n \subseteq D_k$ y la propiedad se cumple de manera trivial. Si $k \leqslant n$ entonces se toma D_{n+1}, y por construcción, f se puede extender a un encaje de B en D_{n+1} $\dashv$

El siguiente teorema nos muestra que todas las condiciones del teorema 5 son indispensables.

Teorema 6. *Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje numerable y D una estructura homogénea a lo más numerable. Sea K la edad de D. Entonces K es distinta del vacío, satisface las propiedades HP, JEP y AP y $[K]$ es a lo más numerable.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A \subseteq B \subseteq D$. Luego,

[2]Lema 7.1.4 (b) en [Hod] pag. 327.

se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& D & \\
B \arrow[ur, "\subseteq"] & & C \arrow[ul, "h"'] \\
& A \arrow[ul, "\subseteq"] \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Este diagrama no necesariamente conmuta pero, por homogeneidad existe $H : B \to D$ que extiende a h. Sean $e : A \to B$ el encaje inclusión y $D_0 = \langle H(B), h(C)\rangle$. Entonces $H \circ\ e = H|_A = h \circ i$ y se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& D & \\
& D_0 \arrow[u, "\subseteq"] & \\
B \arrow[ur, "H"] & & C \arrow[ul, "h"'] \\
& A \arrow[ul, "e"] \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

$\dashv$

En conjunto, el teorema anterior y el teorema 5 nos dicen que el problema de construir una estructura homogénea numerable se reduce a encontrar conjuntos bien portados de estructuras finitas. En general mientras más información se tenga de las estructuras finitas, más se podrá decir de la estructura homogénea. A continuación se presentan una serie de ejemplos de límites de Fraïssé.

Ejemplo 2. Sean p un número primo y K la clase de todos los campos finitos de característica p (con $\mathscr{L} = \{+, -, \cdot\ , 0, 1\}$). Recordemos que un campo de orden p^r es isomorfo a $\underbrace{\mathbb{F}_p \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}_p}_{r\ veces}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{F}_p$.

HP: En general las subestructuras de campos (en el lenguaje de anillos) no son campos, pero para el caso de campos finitos las subestructuras son a su vez campos.

JEP: Sean $A, B \in K$. Entonces el campo generado por A, B pertenece a K y A, B son encajables de manera natural en este campo.

AP: Si $A, B, C \in K$ y existen encajes e, f tales que $e : A \to B$ y $f : A \to C$, entonces tomamos $D \in K$ igual a BC. Luego, de manera natural tenemos $g : B \to D$ y $h : C \to D$ de tal forma que se tiene $g \circ e = h \circ f$.

El límite de Fraïssé es la cerradura algebraica del campo primo de característica p. En efecto, sea $F_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{p^{n!}}$. Observemos que F_∞ es un campo algebraicamente cerrado de característica p y que es de hecho la cerradura algebraica del campo primo F_p de característica p.

En efecto, observemos que dados $x, y \in F_\infty$ existe n tal que $x, y \in F_{p^{n!}}$ y por lo tanto $x + y$ y xy pertenecen también a F_∞. Sea $q = p^n$ para $n \geqslant 1$. Entonces es claro que F_q es un subcampo de $F_{q!}$ y por lo tanto F_q es un subcampo de F_∞. Esto demuestra que F_∞ es un campo de característica p. Ahora veamos que es algebraicamente cerrado. Sea $p(x)$ un polinomio sobre F_∞, entonces existe n tal que $p(x)$ es un polinomio sobre $F_{p^{n!}}$ y el campo de descomposición de $p(x)$ es una extensión finita de $F_{p^{n!}}$ y por lo tanto es isomorfo a F_k para algún k. Se sigue que F_k es un subcampo de F_∞ y por lo tanto éste es algebraicamente cerrado.

F_∞ es numerable pues es la unión numerable de conjuntos finitos. Es claro que K es la edad de F_∞. Por el teorema 2.8 del capítulo V en [Lan][3] sabemos que F_∞ es homogéneo pues dado un automorfismo de F_∞ es posible aproximarlo por extensiones finitas de isomorfismos entre subestructuras finitas.

Ejemplo 3. Sea K la clase de los grupos abelianos finitamente generados libres de torsión. En este ejemplo suponemos que nuestro lenguaje incluye un símbolo para inverso. Ver [Hod] pág. 37.

Recordemos que todo grupo abeliano finitamente generado libre de torsión es isomorfo a $\mathbb{Z}^n$ para algún n.

HP: El lenguaje de grupos incluye un símbolo para inversos, luego toda subestructura es un subgrupo. Por otro lado, todo subgrupo de $\mathbb{Z}^n$ es libre de torsión, de donde se sigue esta propiedad.

JEP: De manera natural cumple con esta propiedad considerando el grupo generado por la unión de los generadores de los grupos más pequeños.

AP: Sean $i : A \to B$ y $j : A \to C$ encajes. Entonces, dado $a \in A$, defininimos los conjuntos $D_0 = B \oplus C / \langle i(a), -j(a) \rangle$, $T_0 = \{x \in D_0 \mid x \text{ es de torsión}\}$. Sea $D = D_0 / T_0$. Entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& D & \\
& D_0 \arrow[u, "\subseteq"] & \\
B \arrow[ur, "k"] & & C \arrow[ul, "l"'] \\
& A \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

[3]Sean k un campo, E una extensión algebraica de k y $\sigma : k \to L$ un encaje de k en un campo L algebraicamente cerrado. Entonces existe una extensión de σ a un encaje de E en L. Si E es algebraicamente cerrado y L es algebraico sobre σk, entonces cualquier extensión de σ es un isomorfismo de E en L.

Definimos $k : B \to D$ y $l : C \to D$ como

$$B \to B \oplus C \to D$$

y

$$C \to B \oplus C \to D$$

en donde las flechas son proyecciones y se cumple que $k \circ i(a) = [i(a), 0]$, $l \circ j(a) = [0, j(a)]$. Además $[i(a), 0] = [0, j(a)] + [i(a), -j(a)]$.

Observemos que k, l son encajes. En efecto, supongamos que existe $b \neq 0$ en B tal que $k(b) = 0$. Entonces

$$b \longmapsto (b, 0) \longmapsto (b, 0) + \langle (i(a), -j(a)) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow (b, 0) \in \langle (i(a), -j(a)) \rangle$$

para algún $a \neq 0$.

$$(b, 0) = (i(a), -j(a)) \Rightarrow j(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow (b, 0) = (0, 0)$$

lo cual es una contradicción.

El límite de Fraïssé de K es la suma directa de una cantidad numerable de copias del grupo aditivo de los racionales.

En efecto, sea G_l la suma directa de una cantidad numerable de copias del grupo aditivo de los racionales. Entonces G_l es numerable pues es igual a la unión numerable de conjuntos numerables, K es la edad de G_l y la homogeneidad de G_l se sigue por un argumento similar al del ejemplo anterior.

Ejemplo 4. Sea K la clase de álgebras booleanas finitas. Recordemos que toda álgebra booleana finita es isomorfa a un campo de conjuntos y que de hecho es isomorfa a $\mathscr{P}(X)$ para algún conjunto X finito. Recordemos también que si A es un álgebra booleana, diremos que $a \in A$ es un átomo si para todo $b \in A$, $0 \leqslant b \leqslant a$ implica que $b = 0$ o $b = a$. Denotamos por x^{-1} el complemento de x (en donde $^{-1}$ es una operación de un argumento) y por $At\ A$ al conjunto de átomos de A.

HP: Inmediato.

JEP: Sean A, B y C álgebras booleanas finitas, $At\ A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $At\ B = \{b_1, \dots, b_n\}$ y $At\ C = \{c_1, \dots, c_l\}$ con $m, n \leqslant l$. Definimos $f : A \to C$ de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ c_i & \text{si} \quad x \in At\ A \quad \text{y} \quad 1 \leqslant i \leqslant m-1 \\ \left(\bigvee_{i=1}^{m-1} c_i\right)^{-1} & \text{si} \quad x \in At\ A \quad \text{e} \quad i = m \\ \bigvee f(a_i) & \text{para} \quad a_i \in At\ A \quad \text{tal que} \quad a_i \leqslant x \end{cases}$$

Análogamente para $g : B \to C$. Es claro que f, g son encajes de A, B en C.

AP: Los encajes definidos para JEP funcionan para probar que K tiene la propiedad AP siempre que los encajes $e : A \to B$ y $i : A \to C$ sean definidos de la misma forma. Como se demuestra en [FriGra], lema 4, la clase de álgebras booleanas cumple con la propiedad SAP, y por lo tanto con AP.

El límite de Fraïssé de K es el álgebra booleana numerable sin átomos ($ABNSA$), que es única salvo isomorfismos. En efecto, la clase de subestructuras finitamente generadas encajables en $ABNSA$ es K. Para ver que $ABNSA$ es homogénea basta mostrar que es débilmente homogénea (lema 7.1.4 en [Hod]). Sean $A, B \in K$ tales que $A \subseteq B$, M el $ABNSA$ y $f : A \to M$ un encaje. Entonces por AP existe $D \in K$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & M & \\
 & D \arrow[u, "k"] & \\
B \arrow[ur, "g"] & & f(A) \arrow[ul, "h"'] \\
 & A \arrow[ul, "e"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

con $e : A \to B$ igual a la identidad. Entonces $k \circ g$ es un encaje de B en M que extiende a f.

Ahora estamos listos para presentar el desarrollo de la construcción de Hrushovski tomando como punto de partida el límite de Fraïssé ya que el segundo es una particularización del primero.

Capítulo 4

Construcción de Hrushovski

En el presente capítulo presentaremos la construcción de Hrushovski de una estructura fuertemente minimal tal como aparece en [Hru]. La motivación para desarrollar este método fue el construir un contraejemplo que refutara la conjetura de Zilber en la que se afirma que todo conjunto fuertemente minimal no trivial ni localmente modular interpreta un campo algebraicamente cerrado.

La construcción de Hrushovski se desarrolla de la siguiente manera. Buscamos obtener una estructura estable que llamaremos *el genérico*, y que se obtiene como un límite de Fraïssé que además cumple con las siguientes condiciones:

- para A, M dos estructuras, una función $d(A, M)$ que será la dimensión de A en M;
- la noción de encaje fuerte, que depende totalmente de la función dimensión;
- la propiedad de amalgama fuerte;
- una función entera del tipo atómico de pares de estructuras finitas que garantiza que el rango de Morley del *genérico* es finito. A esta etapa de la construcción se le conoce con el nombre de *colapso*.

El interés central del presente trabajo no es la conjetura de Zilber ni la construcción de Hrushovski como tal, sino las posibilidades que esta técnica ofrece, en particular en el estudio de la exponencial compleja y de los toros cuánticos. Los toros cuánticos, o estructuras parecidas a toros cuánticos surgen en teoría de modelos como cocientes de estructuras que se obtienen mediante la construcción de Hrushovski y que se desarrollará con más detalle en el siguiente capítulo.

Convención: En el presente capítulo $\mathscr{L}$ denotará un lenguaje que consta de una única relación ternaria R. Observemos que esto implica que si A es una $\mathscr{L}-$estructura y B es un subconjunto de A, entonces B es también una $\mathscr{L}-$estructura. Más aún, si A_i, A_j son $\mathscr{L}-$estructuras, entonces $A_i \cup A_j$ es una $\mathscr{L}-$estructura. De esta forma si pensamos en A, B como estructuras, $A \subseteq B$ significa que A es una subestructura de B. Si pensamos en A, B como conjuntos entonces tendrá su significado usual.

4.1. Dimensión

Definamos pues la función dimensión. Sean M una $\mathscr{L}$ estructura (posiblemente infinita), $A \subseteq M$ finita, $n(A)$ la cardinalidad de A y $r(A)$ el número de tripletas $\bar{a} \in A^3$ tales que $M \vDash R(\bar{a})$. Entonces:

(i) $d_0(A) = n(A) - r(A)$ y $d_0(A/B) = d_0(A \cup B) - d_0(B)$.

(ii) $d(A, M) = \text{mín}\{d_0(B) : B \text{ finito }, A \subseteq B \subseteq M\}$ y

$$d(A/B, M) = d(A \cup B, M) - d(B, M)$$

La función d_0 es una **predimensión** y $d(A, M)$ es la **dimensión** de A sobre M. En general d no es acotada como veremos a continuación.

Con la finalidad de tener un ejemplo concreto, útil e intuitivo que nos permita comprender mejor el empleo de la función $d(A, M)$ en la construcción de Hrushovski, presentamos a continuación una familia de estructuras particulares que clarificarán el comportamiento de las funciones d_0 y d.

Ejemplo 5. Sean $M = \mathbb{R}^2$ y $R \subset M^3$ tales que

$$(a, b, c) \in R \Leftrightarrow a, b, c \text{ son colineales.}$$

Observemos que si A es una colección cualquiera de puntos de cardinalidad m y sin tripletas colineales, como el conjunto de vértices de un polígono convexo regular de m lados, entonces $r(A) = 0$ y se sigue que $d_0(A) = m - 0 = m$.

Ejemplo 6. Sean M y R como en el ejemplo antrerior y $A_0 = \{\ (i, j) \mid i, j \in \{0, 1\}\ \}$. Entonces $d_0(A_0) = 4$. Consideremos el conjunto $A_1 = A_0 \cup \{(0, k)\}$ con $k \notin \{0, 1\}$. Se sigue que $n(A_1) = 5$ y $r(A_1) = 6$ pues $(0, 0), (0, 1)$ y $(0, k)$ son colineales y existen 6 formas diferentes de ordenar los puntos $(0, 0), (0, 1)$ y $(0, k)$ para formar elementos de A_1^3 que pertezcan a R. Luego $d_0(A_1) = -1$.

El ejemplo anterior muestra que $d_0(A)$ puede no estar acotada y por lo tanto $d(A, M)$ no estar bien definida. Para evitar esta situación restringiremos nuestra atención a una clase particular de subestructuras en donde la predimensión siempre está acotada.

4.2. Subestructuras finitas

Definición 13. Una subestructura (finita) $A \subseteq M$ es **autosuficiente** en M si

$$d(A, M) = d(A, A) = d_0(A),$$

y lo denotaremos por $A \leqslant M$.

Si $A \leqslant M$, entonces diremos que M es una **extensión fuerte** de A, o que A es una **subestructura fuerte** de M.

Sea A una $\mathscr{L}-$ estructura tal que R no se satisface en A, entonces cualquier subestructura de A es autosuficiente. A continuación se construye una familia de ejemplos no triviales de estructuras autosuficientes.

Ejemplo 7. Si M, A_1 y R son como en el ejemplo 6 y $A_2 = A_1 \cup \{\overline{a}_1\}$ en donde $\overline{a}_1$ no es colineal con ningún par de elementos de A_1. Definimos de manera recursiva el conjunto $A_n = A_{n-1} \cup \{\overline{a}_{n-1}\}$ con la condición de que el punto $\overline{a}_{n-1}$ no sea colineal con ningún par de puntos de A_{n-1}. Entonces $A_i \leqslant A_j$ para $i < j$.

Sea
$$\mathscr{C}_0 = \{A \mid \varnothing \leqslant A\},$$
i.e. el conjunto de estructuras finitas A tales que toda subestructura de A tiene predimensión no negativa. En efecto, si $\varnothing \leqslant A$, entonces por definición se tiene que para todo $B \subseteq A$
$$0 = d_0(\varnothing) = d(\varnothing, \varnothing) = d(\varnothing, A) \leqslant d_0(B)$$
En el ejemplo 5, $\mathscr{C}_0$ constaría de todos los conjuntos en los que R no se satisface. En efecto, supongamos que M y R son como en el ejemplo 5 y sea B tal que existe $\overline{a} \in B$ con $\overline{a} \in R$, entonces $A \subset B$ con $A = \overline{a}$ es una subestructura de B con predimensión igual a -3.

Si $c \in M \in \mathscr{C}_0$ y $X \subseteq M$, diremos que c **depende de** X en M si
$$d(X \cup \{c\}, M) = d(X, M).$$

Definición 14. Dados dos subestructuras finitas A, B de M, diremos que B es **simplemente algebraico** sobre A en M si:

i) $A \cap B = \varnothing$.

ii) $A \leqslant A \cup B$.

iii) $d_0(A \cup B) = d_0(A)$.

iv) no existe un subconjunto propio $B' \subset B$ tal que $d_0(B' \cup A) = d_0(A)$.

B es **simplemente algebraico minimal** sobre A si además de cumplir con las condiciones anteriores se cumple que no existe un subconjunto propio $A' \subset A$ tal que B sea simplemente algebraico sobre A'.

Lema 3. *Sean $A \leqslant N$. Entonces:*

(i) Si $X \subseteq N$ y X finito, entonces $d_0(X \cap A) \leqslant d_0(X)$.

(ii) Si $A' \subseteq A$, entonces $d(A', A) = d(A', N)$.

(iii) Si $A' \leqslant A \leqslant N$, entonces $A' \leqslant N$.

Demostración:

(i) Sean $Y = X \setminus A$ y r' la cardinalidad de R en $X^3 \setminus A^3$. Entonces
$$d(A, N) \leqslant d_0(A \cup Y) = d_0(A) + (n(Y) - r')$$
pero como $A \leqslant N$, se sigue que $n(Y) - r' \geqslant 0$. Por lo tanto
$$\begin{aligned} d_0(X) &= n(X) - r(X) \\ &= n(Y) + n(X \cap A) - r(X \cap A) - r' \\ &= d_0(X \cap A) + (n(Y) - r') \\ &\geqslant d_0(X \cap A). \end{aligned}$$

(ii) $d(A', N) = \text{mín}\{d_0(B) \mid A' \subseteq B\} = \text{mín}\{d_0(B \cap A') \mid A' \subseteq B\} = d(A', A)$.

(iii) Es inmediato a partir de (ii).

$\dashv$

4.3. Amalgamación Algebraica

En esta sección se presentan los pasos principales en la construcción de Hrushovski. La idea central consiste en restringir la clase $\mathscr{C}_0$ a una subclase $\mathscr{C}$ cuyos elementos tengan sólo un número finito de realizaciones de (tipos de isomorfismo de) tipos atómicos y que cumpla con la propiedad de amalgama. Sin la cota en el número de realizaciones es posible obtener un *genérico* de acuerdo a la construcción de Fraïssé. En este caso es necesario acotar el número de realizaciones para garantizar que el modelo resultante sea fuertemente minimal.

Definición 15. Sean A un subconjunto de M y $\{B_i\}$ una familia de subestructuras de M tal que $B_i \cap B_j = A$ para $i \neq j$. Sea B la subestructura que tiene como universo al conjunto $\cup B_i$, entonces B es el **ensamble libre** de los B_i sobre A si $R(\bar{c})$ y $\bar{c} \in B^3$, entonces se tiene que $\bar{c} \in B_i^3$ para alguna i. Denotaremos por $\Cup(B, B')_A$ el ensamble libre de B, B' sobre A y por $\Cup_{i \in I}(A_i)_A$ el ensamble libre de la familia $\{A_i\}_{i \in I}$ sobre A.

Nota: En general para dos subestructuras finitas B_1, B_2 se tiene que

$$d_0(B_1 \cup B_2) \leqslant d_0(B_1) + d_0(B_2) - d_0(B_1 \cap B_2),$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $B_1 \cup B_2$ es el ensamble libre de B_1, B_2 sobre $B_1 \cap B_2$. En efecto, si $\Cup(B_1, B_2)_{B_1 \cap B_2}$, entonces no existe $\bar{a} \in (B_1 \cap B_2)^3$ tal que $R(\bar{a})$. Luego

$$\begin{aligned}
d_0(B_1) + d_0(B_2) - d_0(B_1 \cap B_2) &= n(B_1) - r(B_1) + n(B_2) - r(B_2) \\
&\quad\; -n(B_1 \cap B_2) + r(B_1 \cap B_2) \\
&= n(B_1 \cup B_2) - r(B_1) - r(B_2) + r(B_1 \cap B_2) \\
&\geqslant n(B_1 \cup B_2) - r(B_1 \cup B_2) \\
&= d_0(B_1 \cup B_2).
\end{aligned}$$

La desigualdad se da si existen relaciones entre elementos de los B_i que no pertenecen a la intersección y entonces

$$-r(B_1 \cup B_2) \leqslant -r(B_1) - r(B_2) + r(B_1 \cap B_2).$$

Si por hipótesis no existen relaciones entre los elementos de B_1 y B_2 salvo, tal vez, las que se cumplen para elementos en $B_1 \cap B_2$, entonces al restar $-r(B_1) - r(B_2)$ se están restando dos veces estos elementos de la intersección y al sumar $r(B_1 \cap B_2)$ se tiene la igualdad, lo que demuestra la afirmación de la nota.

Observemos que si $A \leqslant B$, entonces $d_0(X/B) \leqslant d_0(X/A)$. En efecto, sea $A' = A \cup (X \cap B)$. Entonces $A \subseteq A'$ y

$$d_0(X/A') + d_0(A'/A) = d_0(X \cup A') - d_0(A') + d_0(A' \cup A) - d_0(A)$$

pero $d_0(A' \cup A) = d_0(A')$, entonces

$$\begin{aligned} d_0(X/A') + d_0(A'/A) &= d_0(X \cup A') - d_0(A) \\ &= d_0(X \cup A) - d_0(A) \\ &= d_0(X/A). \end{aligned}$$

Como $A \leqslant B$, se sigue que $d(A, B) = d_0(A) \leqslant d_0(A \cup A')$. Luego

$$0 \leqslant d_0(A \cup A') - d_0(A) = d_0(A'/A),$$

lo que implica que

$$d_0(X/A) = d_0(X/A') + d_0(A'/A) \geqslant d_0(X/A').$$

Por último, haciendo uso repetido de la nota anterior y del hecho de que $A \subseteq B$ podemos ver que se tiene que $d_0(X/A') \geqslant d_0(X/B)$ pues

$$\begin{aligned} d_0(X/B) &= d_0(X \cup B) - d_0(B) \\ &= d_0(X \cup A \cup B) - d_0(A \cup B) \\ &\leqslant d_0(X \cup A) + d_0(B) - d_0((X \cup A) \cap B) - d_0(A \cup B) \\ &\leqslant d_0(X \cup A) + d_0(B) - d_0((X \cup A) \cap B) - d_0(A) - d_0(B) + d_0(A \cap B) \\ &= d_0(X \cup A) - d_0((X \cup A) \cap B) - d_0(A) + d_0(A \cap B) \\ &= d_0(X/A) - d_0((X \cup A) \cap B) + d_0(A \cap B) \\ &= d_0(X/A) - d_0(A') + d_0(A) \\ &= d_0(X/A') + d_0(A'/A) - d_0(A') + d_0(A) \\ &\leqslant d_0(X/A') + d_0(A' \cup A) - d_0(A) - d_0(A') + d_0(A) \\ &= d_0(X/A') + d_0(A') - d_0(A) - d_0(A') + d_0(A) \\ &= d_0(X/A') + 0. \end{aligned}$$

Lema 4. *Sean $M \in \mathscr{C}_0$, $A \subset M$ y supongamos que B_i es simplemente algebraico sobre A y $A \leqslant (A \cup \bigcup_i B_i)$. Entonces*

(i) $B_i \cap B_j = \varnothing$ *para* $i \neq j$.

(ii) $A \cup \bigcup_i B_i = \Cup_{i \in I} (B_i')_A$, *con* $B_i' = B_i \cup A$.

(iii) Supóngase que $A \subseteq \bar{A} \subseteq M$, $\bar{A} \leqslant \bar{A} \cup B_i$ y $B_i \nsubseteq \bar{A}$. Entonces cualquier isomorfismo de B_1' con B_2' sobre A se puede extender a un isomorfismo sobre $\bar{A}$. Más aún, $\bar{A} \cup B_i$ es el ensamble libre de $\bar{A}$ y B_i' sobre A.

Demostración:

(i) En efecto, demostraremos que $B_1 \cap B_2 = \varnothing$

$$\begin{aligned} d_0(A) &\leqslant d_0(A \cup B_1 \cup B_2) \\ &\leqslant d_0(A \cup B_1) + d_0(A \cup B_2) - d_0(A \cup (B_1 \cap B_2)) \\ &= 2d_0(A) - d_0(A \cup (B_1 \cap B_2)). \end{aligned}$$

La primera desigualdad se cumple por ser $A \leqslant A \cup \bigcup_i B_i$, la segunda se sigue de la nota anterior al lema y la igualdad se sigue del hecho de que A es simplemente algebraico sobre B_i.

Entonces como $d_0(A) \leqslant 2d_0(A) - d_0(A \cup (B_1 \cap B_2))$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant d_0(A) - d_0(A \cup (B_1 \cap B_2)) \\ d_0(A \cup (B_1 \cap B_2)) &\leqslant d_0(A), \end{aligned}$$

y $A \leqslant (A \cup B_1 \cup B_2)$, entonces se cumple la igualdad. Pero B_1, B_2 son simplemente algebraicos sobre A, lo que implica por el punto $iv)$ de la definición 14 que $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ o $B_1 \cap B_2 = B_1 = B_2$.

(ii) Del argumento anterior en particular se sigue que

$$d_0(A \cup B_1 \cup B_2) = d_0(A \cup B_1) + d_0(A \cup B_2) - d_0(A \cup (B_1 \cap B_2))$$

pues $d_0(A) = d_0(A \cup (B_1 \cap B_2))$ y se tiene una cadena de igualdades. Por la nota anterior a este lema se sigue el resultado.

(iii) Como $\bar{A} \leqslant \bar{A} \cup B_i$ se tiene que $0 \leqslant d_0(B_i/\bar{A}) \leqslant d_0(B_i/A \cup (B_i \cap \bar{A}))$.

La segunda desigualdad se da porque $A \cup (B_i \cap \bar{A}) \subseteq \bar{A}$ y

$$n(B_i \smallsetminus (A \cup (B_i \cap \bar{A}))) \geqslant n(B_i \smallsetminus \bar{A})$$

y por otro

$$r(B_i \cup (A \cup (B_i \cap \bar{A}))) \leqslant r(B_i \cup \bar{A})$$

luego, como B_i es simplemente algebraico sobre A se sigue que $B_i \cap \bar{A} = \varnothing$ o $B_i \cap \bar{A} = B_i$.

Por hipótesis lo segundo no puede pasar por lo que $B_i \cap \bar{A} = \varnothing$. No ocurre ninguna relación entre B_i y $\bar{A}$ salvo las que ya ocurrían entre B_i y A, de lo contrario se tendría que $d_0(B_i/\bar{A}) < 0$. Por lo tanto

$$B_i \cup \bar{A} = \Cup(B_i, \bar{A})_A.$$

$\dashv$

Sea μ cualquier función de la clase de isomorfismo del tipo atómico de B sobre A

en los enteros que estará definida cuando B es no vacío y simplemente algebraico minimal sobre A y tal que cumple con

$$\mu(\ [tp(B/A)]\ ) \geqslant d_0(A),$$

en donde $[tp(B/A)]$ representa la clase de isomorfismo del tipo (atómico) de B sobre A. μ cumple con ser "finita a uno", es decir que aunque no es uno a uno, dado un entero k, existe un número finito de parejas (B, A) de clases de isomorfismo tales que $\mu(B, A) = k$. Para facilitar la lectura escribiremos $\mu(B, A)$ en lugar de $\mu(\ [tp(B/A)]\ )$ y el tipo de (B, A) en lugar de $tp(B/A)$.

Definición 16. Sea $\mathscr{C}$ la clase de $\mathscr{L}-$ estructuras finitas M que cumplen con:

(i) $\varnothing \leqslant M$

(ii) Sean B, A_i $(i = 1, ..., n)$ subconjuntos no vacíos de $M \in \mathscr{C}$ ajenos entre si. Supongamos que (la clase de isomorfismo de) el tipo atómico de (A_i, B) es constante para cada i y que A_i es simplemente algebraico minimal sobre B. Entonces

$$n \leqslant \mu(A_i, B).$$

La clase $\mathscr{C}$ resulta ser la clase de subestructuras finitas del modelo a construir. Observemos que la primera condición implica que $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}_0$. La segunda condición impone una cota sobre el número de soluciones posibles para el tipo atómico sobre B.

Lema 5 (Amalgamación algebraica)**.** *Supóngase que $A, B_1, B_2 \in \mathscr{C}$, con A subestructura de B_i y $B_1 \smallsetminus A$ es simplemente algebraico sobre A en B_1. Por conveniencia supóngase que la intersección de los B_i es A y sea $E = \Cup(B_1, B_2)_A$. Entonces $E \in \mathscr{C}$ siempre que no suceda alguna de las dos siguientes condiciones:*

(1) $B_1 \smallsetminus A$ es simplemente algebraico minimal sobre algún $F \subseteq A$ y B_2 contiene $\mu(B_1 \smallsetminus A, F)$ conjuntos ajenos, y cada uno de estos realiza el tipo atómico de $B_1 \smallsetminus A$ sobre F.

(2) Existe un subconjunto X de B_2 tal que $X \cap A \nleqslant X$ y X se encaja isomórficamente en B_1.

Demostración: Veamos primero que E cumple con la primera condición de la definición 16. En efecto, para $X \subseteq E$ se tiene por definición que $d_0(X) = n(X) - r(X)$, y como E es un ensamble libre se sigue que:

$$r(X) = r(X \cap B_1) + r(X \cap B_2) - r(X \cap A),$$

y

$$n(X) = n(X \cap B_1) + n(X \cap B_2) - n(X \cap A),$$

luego

$$d_0(X) = d_0(X \cap B_1) + d_0(X \cap B_2) - d_0(X \cap A).$$

Por hipótesis $B_1 \smallsetminus A$ es simplemente algebraico sobre A, entonces

$$A \leqslant (B_1 \smallsetminus A) \cup A = B_1.$$

Por el lema 3 se tiene que $d_0(X \cap B_1) \geqslant d_0(X \cap A)$. Por lo tanto $d_0(X) \geqslant 0$.

Ahora se mostrará que si $E \notin \mathscr{C}$, entonces se cumple el caso (1) o el caso (2). Por el párrafo anterior tenemos que E cumple con la condición (i) de la definición 16, entonces $E \notin \mathscr{C}$ significa que falla la condición (ii), i.e. existen $F, C^1, \ldots, C^r$ subconjuntos mutuamente ajenos de E, tales que C^i es simplemente algebraico minimal sobre F y que la enumeración de los C^i es tal que realizan la misma clase de isomorfismo del mismo tipo atómico sobre F y se tiene que $r > \mu(F, C^i)$.

Observemos que se tienen dos casos posibles, a saber, $F \subset B_2$ o $F \nsubseteq B_2$, luego se tiene lo siguiente:

caso 1: $F \subset B_2$ y $E \notin \mathscr{C}$ implica (1).

caso 2: $F \nsubseteq B_2$ y $E \notin \mathscr{C}$ implica (2).

Definimos los conjuntos:

- $C_0^i = C^i \cap A,\ C_\nu^i = C^i \cap B_\nu,$ para $\nu = 1, 2$
- $F_0 = F \cap A,\ F_\nu = F \cap B_\nu,$ para $\nu = 1, 2$
- k_ν^i la cardinalidad de C_ν^i
- $r(X/Y) = r(X \cup Y) - r(Y)$ y $n(X/Y) = n(X \cup Y) - n(Y)$
- $\beta_\nu^i = r(C_\nu^i/F)$ para $\nu = 0, 1, 2$

Escogemos r_0, r_1 tales que $0 \leqslant r_0 \leqslant r_1 \leqslant r$ y podemos reenumerar de tal forma que se tenga

$$\beta_1^i - \beta_0^i > k_1^i - k_0^i \quad \text{si y sólo si} \quad i \leqslant r_0,$$

y para $i > r_0$, $C^i = C_2^i$ si y sólo si $i \leqslant r_1$.

Afirmación 1: $r_0 \leqslant d_0(F_1/A)$.

En efecto, sea $i \leqslant r_0$. Entonces, Como $\Cup(B_1, B_2)_A$, no existen relaciones entre $C_1^i \setminus C_0^i$ y $A \cup F$ salvo aquellas que se cumplen entre $C_1^i \setminus C_0^i$ y $A \cup F_1$. Por otro lado $(C_1^i \setminus C_0^i) \cap (A \cup F) = \varnothing$, luego

$$d_0((C_1^i \setminus C_0^i)/A \cup F_1) = d_0((C_1^i \setminus C_0^i)/A \cup F) \tag{4.1}$$

Por el mismo argumento y la definición de d_0 se tiene que

$$d_0((C_1^i \setminus C_0^i)/A \cup F) \leqslant d_0((C_1^i \setminus C_0^i)/C_0^i \cup F). \tag{4.2}$$

Ahora

$$\begin{aligned} d_0(C_1^i \setminus C_0^i / C_0^i \cup F) &= d_0((C_1^i \setminus C_0^i) \cup C_0^i \cup F) - d_0(C_0^i \cup F) \\ &= d_0(C_1^i \cup F) - d_0(C_0^i \cup F) \qquad (4.3) \\ &= d_0(C_1^i \cup F) - d_0(C_0^i \cup F) + (d_0(F) - d_0(F)) \\ &= d_0(C_1^i / F) - d_0(C_0^i / F) \\ &= (k_1^i - \beta_1^i) - (k_0^i - \beta_0^i) \\ &< 0\,. \end{aligned}$$

Entonces por las ecuaciones 4.1, 4.2 y la cadena de ecuaciones 4.3 se tiene que

$$d_0(C_1^i \setminus C_0^i / A \cup F) = d_0(C_1^i \setminus C_0^i / A \cup F_1) \leqslant d_0(C_1^i / F) - d_0(C_0^i / F) < 0.$$

Sea $C^* = \bigcup_{i \leqslant r_0} (C_1^i \setminus C_0^i)$. Entonces

$$d_0(C^* / \cup_{i \leqslant r_0} C_0^i \cup F) = d_0(\cup_{i \leqslant r_0} C_1^i \cup F) - d_0(\cup_{i \leqslant r_0} C_0^i \cup F)$$

pero como los C^i son mutuamente ajenos y E es un ensamble libre se tiene (por la nota posterior a la definición 15) que

$$d_0(C^* / \cup_{i \leqslant r_0} C_0^i \cup F) =$$

$$d_0(C_1^1 \cup F) + d_0\left(\bigcup_{i=2}^{r_0} C_1^i \cup F\right) - d_0(F) - d_0(C_0^1 \cup F) - d_0\left(\bigcup_{i=2}^{r_0} C_0^i \cup F\right) + d_0(F).$$

$$= d_0(C_1^1 / F) - d_0(C_0^1 / F) + d_0\left(\bigcup_{i=2}^{r_0} C_1^i \cup F\right) - d_0\left(\bigcup_{i=2}^{r_0} C_1^i \cup F\right)$$

y por las ecuaciones 4.3 $d_0(C_1^1/F) - d_0(C_0/F) < 0$ se sigue que lo anterior es menor o igual que

$$-1 + \left(\bigcup_{i=2}^{r_0} C_1^i \cup F\right) - d_0\left(\bigcup_{i=2}^{r_0} C_1^i \cup F\right).$$

Procediendo de esta manera concluímos que

$$d_0(C^* / \cup_{i \leqslant r_0} C_0^i \cup F) = \sum_{i=1}^{r_0} \left(d_0(C_1^i / F) - d_0(C_0^i / F) \right) \leqslant \sum_{i=1}^{r_0} -1 = -r_0.$$

Pero

$$d_0(C^* / A \cup F_1) \leqslant d_0(C^* / \cup_{i \leqslant r_0} C_0^i \cup F)$$

$$d_0((C_1^1 \setminus C_0^1) \cup (C_1^2 \setminus C_0^2) / A \cup F_1) \leqslant d_0((C_1^1 \setminus C_0^1) \cup (C_1^2 \setminus C_0^2) / C_0 \cup F_1)$$

Pero $A \leqslant B_1$, entonces $A \leqslant (A \cup C^* \cup F_1)$ y $d_0(C^* \cup F_1 / A) \geqslant 0$. Luego

$$\begin{array}{rcl} d_0(F_1/A) & = & d_0(A \cup F_1) - d_0(A) \\ & \geqslant & r_0 + d_0(C^* \cup F_1 \cup A) - d_0(A) \\ & = & r_0 + d_0(C^* \cup F_1/A) \\ & \geqslant & r_0. \end{array}$$

Afirmación 2: Si $i > r_1$, entonces $C_2^i = \varnothing$.

En efecto, sea $i > r_0$. Entonces $\beta_1^i - \beta_0^i \leqslant k_1^i - k_0^i$. Por la estructura de E y el hecho de que C^i es simplemente algebraico sobre F, es claro que

$$\beta_1^i + \beta_2^i - \beta_0^i = k_1^i + k_2^i - k_0^i.$$

pues

$$\beta_1^i + \beta_2^i - \beta_0^i = r(C_1^i/F) + r(C_2^i/F) - r(C_0^i/F) = r(C^i/F)$$

y

$$k_1^i + k_2^i - k_0^i = n(C_1^i) + n(C_2^i) - n(C_0^i) = n(C^i) = n(C^i/F),$$

pero $n(C^i/F) - r(C^i/F) = d_0(C^i/F) = 0$. Por otro lado $F \leqslant (C^i \cup F)$ implica $F \leqslant (C_2^i \cup F)$, entonces $\beta_2^i \leqslant k_2^i$.

Las tres relaciones juntas implican que $\beta_2^i = k_2^i$ y entonces C_2^i es simplemente algebraico sobre F. Por minimalidad se tiene que $C_2^i = \varnothing$ o que $C_2^i = C^i$ pero por definición $C_2^i \neq C^i$ entonces se sigue el resultado.

Ahora veremos qué sucede cuando se cumple alguno de los dos casos especiales del lema:

Caso (1): $F \subseteq B_2$ y $E \notin \mathscr{C}$.

Entonces $F \cap (B_1 \setminus A) = \varnothing$ y $F_1 \subseteq A$. Por la afirmación 1 $d_0(F_1/A) \geqslant r_0$, pero $F_1 \subseteq A$ implica que $d_0(F_1/A) = 0$, luego $r_0 = 0$. Por la demostración de la afirmación 2, $C_2^i = \varnothing$ o $C_2^i = C^i$ para cada i. Si $C_2^i = C^i$ para cada i, entonces tanto F como todas las C^i están en B_2 y la cota requerida sobre r es una consecuencia del hecho de que $B_2 \in \mathscr{C}$. Por lo tanto supongamos que $C_2^i = \varnothing$ para algún i, i.e. $C^i \subseteq B_1 \setminus A$. Como B_1, B_2 están en amalgama libre sobre A en E, y $C^i = C_1^i$ es simplemente algebraico sobre $F = F_2$, se sigue que C^i es simplemente algebraico sobre $F \cap A$, pero C^i es simplemente algebraico minimal sobre F, entonces $F \subseteq A$. Por otro lado $C^i \subseteq B_1 \setminus A$ es simplemente algebraico sobre $F \subseteq A$ y entonces $d_0(C^i \cup F) = d_0(F)$ mientras que $B_1 \setminus A$ es simplemente algebraico sobre A, de tal manera que $C^i = B_1 \setminus A$. Entonces cada C^j realiza el tipo atómico de $B_1 \setminus A$ sobre F. Luego, si $r > \mu(C^1, F)$, entonces se cumple (1).

Asumamos en lo que resta de la demostración que $F \neq F_2$, i.e. que $F \nsubseteq B_2$. En particular esto significa que $F \nsubseteq A$.

Afirmación 3: $r_1 - r_0 \leqslant d_0(F_1/F_0) - d_0(F_1/A))$.

En efecto, sea $r_0 < i \leqslant r_1$. Entonces $C^i = C_2^i$. Como C^i es simplemente algebraico minimal sobre F y $F_2 \subseteq F$, se tiene que

$$d_0(C^i/F_2) > d_0(C^i/F) = 0,$$

Se sigue que se realiza una instanciación de R entre C^i y $F \setminus F_2$ que no se cumplía entre C^i y F_2. Todas las instanciaciones de R en E suceden entre elementos de B_1 o de B_2. La instanciación en cuestión debe por lo tanto involucrar elementos de B_1. Entonces la relación ocurre entre algunos elementos de C^i y de F_1 y por lo menos un elemento de $F_1 \setminus F_0$ debe estar involucrado. Podemos decir entonces que $F_1 \setminus F_0$ y $F_0 \cup C_0^i$ están relacionados ya que $C^i = C_2^i$. Como los C_0^i son mutuamente ajenos y están contenidos en A, existen al menos $r_1 - r_0$ relaciones entre $F_1 \setminus F_0$ y A. Luego,

$$d_0(F_1/F_0) - d_0(F_1/A) \geqslant (r_1 - r_0).$$

pues

$$d_0(F_1/F_0) - d_0(F_1/A) = d_0(F_1 \cup F_0) - d_0(F_0) - d_0(F_1 \cup A) + d_0(A)$$

pero

$$\begin{aligned} d_0(F_1 \cup F_0) - d_0(F_0) &= n(F_1 \cup F_0) - r(F_1 \cup F_0) - n(F_0) + r(F_0) \\ &= n(F_1 \setminus F_0) - r(F_1 \cup F_0) + r(F_0) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -d_0(F_1 \cup A) + d_0(A) &= -n(F_1 \cup A) + r(F_1 \cup A) + n(A) - r(A) \\ &= -n(F_1 \setminus F_0) + r(F_1 \cup A) - r(A). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} d_0(F_1/F_0) - d_0(F_1/A) &= -r(F_1 \cup F_0) + r(F_0) + r(F_1 \cup A) - r(A). \\ &= -r(F_1) + r(F_0) + r(F_1 \cup A) - r(A) \\ &= r(F_1/A) - r(F_1/F_0) \end{aligned}$$

Caso (2): Supongamos que $r > r_1$.

Entonces por la afirmación 2 se tiene que $C_2^r = \varnothing$, i.e. $C^r \subseteq B_1$, y como se mostró arriba en caso 1, se sigue que $F \subseteq B_1$. Si $C^i \subseteq B_1$, para todo i, entonces todo sucede dentro de $B_1 \in \mathscr{C}$ y por lo tanto $E \in \mathscr{C}$.

Supongamos que $C^i \nsubseteq B_1$ para algún i. Si $C^i \subseteq B_2 \setminus A$, entonces, al ser C^i simplemente algebraico minimal sobre F, y $F \subseteq B_1$, debe suceder que $F \subseteq A$ y entonces $F \subseteq B_2$. Lo cual contradice nuestra suposición. Luego $C_0^i \neq \varnothing$ y otra vez por minimalidad $d_0(C_0^i/F) > 0$.

Entonces

$$d_0(C_2^i \setminus C_0^i/C_0^i \cup F) = d_0(C_2^i/F) - d_0(C_0^i/F) < d_0(C_2^i/F).$$

Pero

$$d_0(C_2^i/F) = d_0(C_2^i/F \cup C_1^i)$$

pues $(F \cup C_1^i) \subseteq B_1$ mientras que $C_2^i \subseteq B_2$ y entonces C_1^i no contribuye nuevas relaciones. Por la propiedad de ser simplemente algebraico $d_0(C_2^i/F \cup C_1^i) \leqslant 0$. Luego $d_0(C_2^i \smallsetminus C_0^i/C_0^i \cup F) < 0$.

Sea $X = F_0 \cup C_2^i$. Entonces

$$\begin{aligned} d(X/X \cap A) &= d_0(C_2^i \cup F_0/C_0^i \cup F_0) \\ &= d_0(C_2^i \cup F_0) - d_0(C_0^i \cup F_0) \\ &= d_0(C_2^i \cup F) - d_0(C_0^i \cup F) < 0. \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de la suposición de que $F \neq F_2$. Esta cadena de igualdades implica que $X \cap A$ no es fuerte en X y el tipo atómico de X se realiza en B_1 dentro de $F \cup C^r$. Esto implica la existencia de un encaje de X en B_1, y por lo tanto se cumple (2).

Si no se cumplen ninguno de los dos casos especiales, entonces por la negación de (2), y por las afirmaciones 1 y 3 se tiene que

$$\begin{aligned} r = r_1 = (r_1 - r_0) + r_0 &\leqslant (d_0(F_1/F_0) - d_0(F_1/A)) + d_0(F_1/A) \\ &= d_0(F_1/F_0) \leqslant d_0(F). \end{aligned}$$

La última desigualdad se sigue del hecho de que $F = F_1$. Por la elección de μ se tiene que $d_0(F) \leqslant \mu(C^1, F)$. $\dashv$

4.4. Amalgamación Autosuficiente

Por el lema 5 sabemos que $\mathscr{C}$ cumple con la propiedad de amalgama libre. Ahora veremos que también cumple con la propiedad de amalgama autosuficiente.

Lema 6 (Amalgamación autosuficiente)**.** *Supóngase que $A, A_1, A_2 \in \mathscr{C}$, $A \leqslant A_i$. Entonces existen $E \in \mathscr{C}$ y encajes f_i de A_i en E tales que $f_1|A = f_2|A$ y $f_iA_i \leqslant E$.*

Demostración: Procedemos por inducción sobre $n = |A_1 \smallsetminus A| + |A_2 \smallsetminus A|$. Para $n = 0$ es inmediato pues esto implica que

$$|A| = |A_1| = |A_2|.$$

Supongamos que el resultado se cumple para $n = k$. Sea

$$d(A, A_1) = d(A, A_2) = d(A, A) = d.$$

Caso 1: *existe X, con $A \subset X \subset A_1$, tal que $d_0(X) = d_0(A) = d$.* En este caso se tiene que $A \leqslant X \leqslant A_1$. Por inducción, podemos amalgamar X con A_2 sobre A pues

$$|X \smallsetminus A| + |A_2 \smallsetminus A| \ < \ |A_1 \smallsetminus A| + |A_2 \smallsetminus A|.$$

Análogamente se amalgama A_1 con $X \cup A_2$ sobre X. El resultado es E, con $A_1 \leqslant E$ y $A_2 \leqslant X \cup A_2 \leqslant E$.

Caso 2: $d(A_1, A_1) > d$ *y no ocurre el caso 1*. Sea $b \in A_1$. Entonces no existe X tal que $A \cup b \subseteq X \subseteq A_1$ y $d_0(X) = d$, luego $d(A \cup b, A_1) = d + 1$. Observemos que la amalgama libre de $A \cup b$ y A_2 esta en $\mathscr{C}$ y satisface los requisitos. Como

$$d(A \cup b, A \cup b) \leqslant d(A, A) + 1 = d + 1$$

se sigue que $A \cup b \leqslant A_1$. Por inducción es posible amalgamar A_1 con A_2 sobre $A \cup b$.

Caso 3: $d(A_1, A_1) = d$ *y no ocurre el caso 1*. en este caso $A_1 \smallsetminus A$ es simplemente algebraico sobre A y digamos que es simplemente algebraico minimal sobre $F \subseteq A$. El punto (2) del lema 5 no puede ocurrir pues $A \leqslant A_2$. Si ocurre (1) del lema 5, el tipo atómico de $A_1 \smallsetminus A$ sobre F se realiza $\mu(A_1 \smallsetminus A, F)$ veces en A_2. Como se tiene que $A \leqslant A_2$, cada realización está contenida en A o, por el punto (iii) del lema 4 está libremente ensamblada con A sobre F. Si ocurre el segundo caso, entonces la realización en cuestión realiza el tipo atómico de $A_1 \smallsetminus A$ sobre F, luego la amalgamación se puede obtener al identificar $A_1 \smallsetminus A$ con esta parte de A_2. En el otro caso A contiene $\mu(A_1 \smallsetminus A, F)$ realizaciones ajenas del tipo atómico de $A_1 \smallsetminus A$ sobre F, por lo que A_1 contiene $\mu(A_1 \smallsetminus A, F) + 1$, contradiciendo el hecho de que $A_1 \in \mathscr{C}$.

Por último, si no se cumplen ni (1) ni (2), entonces el lema anterior afirma que A_1, A_2 pueden ser libremente ensamblados en $\mathscr{C}$ sobre A. Sólo queda por ver que la amalgama E cumple con ser una extensión fuerte de A_1 y A_2, pero esto se sigue del lema 3 ya que $A \leqslant A_1$ y $A \leqslant A_2$. $\dashv$

4.5. El conjunto fuertemente minimal

Consideremos la siguiente descripción de un modelo $\mathcal{M}$:

(1) $\mathcal{M}$ es una $\mathscr{L}$ estructura numerable.

(2) Toda subestructura finita de $\mathcal{M}$ está en $\mathscr{C}$.

(3) Sean $B \leqslant \mathcal{M}$ y $B \leqslant C$, con $C \in \mathscr{C}$. Entonces existe un encaje $f : C \to \mathcal{M}$ tal que $f(C) \leqslant \mathcal{M}$ y $f|B = Id_B$.

Observemos que en toda $\mathscr{L}-$estructura que satisface (2), para cada $A \subset M$ finita existe B finita tal que $A \subseteq B \subseteq M$, $d(A, M) = d(B, M)$ y B es autosuficiente en $\mathcal{M}$. Por un argumento de bisimulación es posible ver que $\mathcal{M}$ es única salvo isomorfismos. Fijemos una tal estructura $\mathcal{M}$.

Observemos que existe $A \subseteq M$ tal que $d(A, M)$ es arbitrariamente grande.

Lema 7. *Sea* $d(A) = d(A, M)$. *Entonces*

(i) $d(C) \leqslant d(aC) \leqslant d(C) + 1$.

(ii) Si $d(aCb) = d(Cb) = d(C)$*, entonces* $d(aC) = d(C)$.

(iii) *Si* $d(aCb) = d(Cb)$ *y* $d(aC) > d(C)$*, entonces* $d(aCb) = d(Ca)$.

(iv) *Si* $d(Ca) = d(C) = d(Cb)$*, entonces* $d(C) = d(aCb)$.

(v) *Si* $d(aC) = d(C)$*, entonces* $d(aCb) = d(Cb)$.

Demostración: (i) y (ii) son evidentes.

(iii) $d(aCb) = d(Cb) \leqslant d(C) + 1 \leqslant d(aC)$.

(iv) Sean E_1, E_2 tales que $Ca \subseteq E_1$, $Cb \subseteq E_2$ y $d_0(E_1) = d(C) = d_0(E_2)$ y cada uno es minimal. Si $a \in E_2$ o $b \in E_1$ no hay problema. Sea $E = E_1 \cap E_2$. E_1 aporta por lo menos tantas relaciones como elementos a E pues en caso contrario se tendría que $d(C) < d_0(E_1)$. Así,

$$d_0(E_1 \cup E_2) \leqslant d_0(E_2) = d(Cb).$$

De manera análoga para E_1 y $d_0(Ca)$ se sigue el resultado.

(v) Observemos que si $d(C) = d(Cb)$ entonces se cumple (iv) y el resultado se sigue. Por lo que supondremos que $d(C) < d(Cb)$. Entonces

$$d(C) < d(Cb) \leqslant d(aCb) \leqslant d(aC) + 1 = d(C) + 1.$$

$d(Cb) = d(aCb)$.

$\dashv$

El lema anterior demuestra que la relación $d(aC) = d(C)$ es una relación de dependencia. Observemos que si $d(aC) > d(C)$, $C \subset E$, $d_0(E) = d(C)$, entonces $d(E) = d(C)$, luego tanto E como aE son autosuficientes en M y no se cumple ninguna relación entre a y E, por lo que $tp(aC)$ queda completamente determinado por este hecho, es decir, por el tipo de C y el hecho de que a no depende de C.

(3) no es una propiedad de 1er. orden así que la reemplazamos por:

(3') M contiene un conjunto infinito tal que $d(A) = n(A)$ para $A \subseteq I$ finito.

(3") Supongamos que $B \subseteq M$, $B \leqslant C$, $C \in \mathscr{C}$ y $C \setminus B$ es simplemente algebraico sobre B. Supongamos también que siempre que $X \subseteq M$ realice un tipo atómico realizado por C, se tiene que $X \cap B \leqslant X$. Entonces existen $\mu(C \setminus B, B)$ soluciones distintas C' en M del tipo atómico de C sobre B.

Afirmación: (1,2,3) y (1,2,3',3") son equivalentes. En efecto, supongamos (1,2,3). Entonces (3") se sigue del lema 5 y (3') es trivial.

Supongamos ahora (1,2,3',3"). Entonces (3) se sigue tal como en la demostración del lema 6, i.e. podemos asumir que no existe C' tal que $B < C' \leqslant C$ salvo que se cumpla que $C' = B$ o $C' = C$. Esto implica que C es simplemente algebraico sobre B, o si no $C = B \cup \{c\}$ y c no depende de B. En el segundo caso, sea $I' \subseteq I$ tal que la cardinalidad de I' es mayor que la de B. Entonces existe un $c' \in I$ tal que c' no depende de B y $c \longmapsto c'$ es el encaje requerido. En el caso algebraico, digamos que $C \setminus B$ es simplemente algebraico minimal sobre $B' \subseteq B$. Por (3"), existen $r = \mu(C \setminus B, B')$ soluciones $C_1, \ldots, C_r$ del tipo atómico de $C \setminus B$ sobre B' ajenas entre sí. Como $B \leqslant \mathcal{M}$ también se tiene que $B \cap (B' \cup C_i) \leqslant (B' \cup C_i)$ de tal manera que si $C_i \cap B \neq \varnothing$, entonces $C_i \subseteq B$. Si cada C_i está contenido en B, entonces existen $r+1$ soluciones (incluido $C \setminus B$) en C del tipo atómico, lo que contradice el hecho de que $C \in \mathscr{C}$. Si alguno de los C_i no está contenido en B, entonces es ajeno a B y, más aún, no tiene relaciones con B salvo las que tiene con B' (pues $B \leqslant \mathcal{M}$). Luego, $C \longmapsto C_i$ nos da el encaje que buscamos.

Lema 8. *Sean $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ tales que satisfacen (1,2,3',3") y $f : A_1 \to A_2$ un encaje de $\mathscr{L}-$estructuras, con $A_i \leqslant \mathcal{M}_i$ y A_i finito. Entonces f se puede extender a un isomorfismo entre $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$.*

Demostración: (1,2,3) permite bisimulación entre estructuras autosuficientes. $\dashv$

Corolario 1. *$\mathcal{M}$ es saturado*

Demostración: Por el teorema 1 $\mathcal{M}$ será equivalente por bisimulación a sus extensiones elementales y, por el teorema 2, $\mathcal{M}$ será isomorfo a cada extensión elemental numerable de sí mismo. Se sigue que sólo hay una cantidad numerable de tipos realizados en cada estrato de extensiones elementales de $\mathcal{M}$. Por lo tanto existe una extensión elemental saturada de $\mathcal{M}$ a la cual debe ser isomorfa. $\dashv$

Corolario 2. *$\mathcal{M}$ es fuertemente minimal*

Demostración: Sean $A \subseteq M$ un conjunto finito y x un elemento cualquiera. Por el lema 4 sabemos que existe una única órbita de elementos que no dependen de A. Como $\mathcal{M}$ es saturado, basta demostrar que cualquier otra órbita es finita.

1. Existe A' autosuficiente, algebraico sobre $A \subseteq A'$. Elijamos A' minimal tal que $A \subseteq A'$ y $d_0(A') = d(A)$. Sea A'' cualquier conjugado de A' sobre A. Afirmamos que $A'' = A'$. Si esto no se cumple, sea $A''' = A'' \cap A'$. Entonces $d_0(A''') > d(A)$, y por minimalidad se tiene que $d_0(A'/A''') < 0$. Luego $d_0(A'/A'') < 0$ y se tiene que $d_0(A'/A'') < 0$. Entonces $d_0(A' \cup A'') < d_0(A'') = d(A)$. Esto contradice la definición de
   $d(A) = d(A, M)$.

2. Si x depende de A entonces x es algebraico sobre A y $d(xA) = d(A)$. Sea B un superconjunto de $\{x\} \cup A$ tal que $d_0(B) = d(xA) = d(A)$. Es claro que podemos elegir A' de tal forma que $A' \subseteq B$. Sea $B_0 = A'$ y tómense $B_1, \ldots, B_n$ tales que $B_{i+1} \setminus B_i$ es distinto del vacío, simplemente algebraico sobre B_i y $B_n = B$. Claramente B_{i+1}/B_i es algebraico para cada i. Como A'/A es algebraico y $x \in B_n$ se sigue el resultado.

$\dashv$

Parte II

Campos Esmeralda y Toros Cuánticos

Capítulo 5

Construcción del Campo Esmeralda

En el presente capítulo seguimos el desarrollo presentado en [Cay] sobre el tratamiento de los campos esmeralda.

Definición 17. Sea $\mathcal{K}$ la clase de todas las estructuras bicoloreadas de la forma

$$\mathcal{V} = \big((V, +, 0, (q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}}, \Gamma, 1, (P_m)_{m\in\mathbb{Z}_+}); (F, +, \cdot); ex : V \to F\big)$$

y que satisfacen las siguientes condiciones:

(K1) $V = (V, +, 0, (q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}})$ es un $\mathbb{Q}-$espacio vectorial en el que la multiplicación por escalares está dada como funciones unarias $q\cdot$.

(K2) $F = (F, (W)_{W\in Zar_{\mathbb{Q}}})$ es un campo algebraicamente cerrado de característica 0, equipado con relaciones para puntos que pertenecen a subvariedades algebraicas de F^n (para cada $n \in \mathbb{Z}^+$) definidas sobre $\mathbb{Q}$. Al conjunto de estas variedades las denotaremos por $Zar_{\mathbb{Q}}$. En particular esto incluye relaciones ternarias $x+y=z$ y $xy=z$ y relaciones unarias $x=q$, para cada $q\in\mathbb{Q}$.

(K3) ex es un homomorfismo de V sobre el grupo multiplicativo F^*.

(K4) Γ es un subgrupo de V con un elemento distinguido 1 y relaciones unarias $P_m \subset \Gamma$ tales que $(\Gamma, +, 0, 1, (P_m)_m)$ es elementalmente equivalente a $(\mathbb{Z}, +, 0, 1, (m\mathbb{Z})_m)$.

(K5) $Ker(ex)$ tiene intersección trivial con Γ.

En una estructura $\mathcal{V} \in \mathcal{K}$ llamaremos a los elementos de Γ y a sus imágenes bajo ex **puntos esmeralda.** Denotaremos por $\mathcal{V} = (V, \Gamma, ex, F)$ a los elementos $\mathcal{V}$ de $\mathcal{K}$ y lo llamaremos **campo esmeralda**.

Lema 9. *La clase $\mathcal{K}$ tiene una axiomatización de primer orden que consiste de $\forall\exists-$enunciados.*

Definición 18. Sea $Sub\ \mathcal{K}$ la clase de todas las estructuras $\mathcal{A} = (V^{\mathcal{A}}, \Gamma^{\mathcal{A}}, ex^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}})$ tales que:

(i) $\mathcal{A}$ es una subestructura de $\mathcal{V} \in \mathcal{K}$

(ii) $ex^{\mathcal{A}}$ es sobre $F^{\mathcal{A}} \setminus \{0\}$.

Sea $Fin\,\mathcal{K}$ la clase de estructuras de $Sub\mathcal{K}$ con dominio de dimensión finita (como espacio vectorial).

Notación: Denotaremos por spanΓ al espacio generado por Γ y escribiremos A en lugar de $V^{\mathcal{A}}$.

Sea S un subconjunto de un campo de característica 0. Entonces $tr.d.(S)$ denotará el grado de trascendencia del campo $\mathbb{Q}(S)$. Si S es un subconjunto de un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, entonces $lin.d.(S)$ denotará la dimensión de S como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$.

Definición 19. Sea $\mathcal{A} \in Sub\mathcal{K}$ y X un subespacio de dimensión finita de A. entonces la **predimensión** de X en $\mathcal{A}$ se define como

$$\delta_{\mathcal{A}}(X) = 2\mathrm{tr.d.}(exX) - \mathrm{lin.d.}(X \cap \mathrm{span}\Gamma)$$

y para X, Y subespacios de A, con X de dimensión (lineal) finita

$$\delta_{\mathcal{A}}(X/Y) = 2tr.d.(ex(X+Y)/exY) - lin.d.((X+Y) \cap span\Gamma/Y \cap span\Gamma).$$

En adelante escribiremos X_Γ en lugar de $X \cap span\Gamma$.

Observemos que si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ contienen a X y ambos inducen la misma estructura en X, entonces $\delta_{\mathcal{A}}(X) = \delta_{\mathcal{A}'}(X)$. En particular se cumple cuando una estructura es subestructura de la otra. De manera similar el valor de $\delta_{\mathcal{A}}(X/Y)$ es igual para cualquier estructura $\mathcal{A}'$ que contenga e induzca la misma estructura en $X+Y$. En general confiaremos en que del contexto quede clara la estructura en X y omitiremos el subíndice de $\delta_{\mathcal{A}}(X)$.

Si X y Y son ambos de dimensión lineal finita entonces

$$\delta(X/Y) = \delta(X+Y) - \delta(Y).$$

Lema 10. *Sea $\mathcal{A} \in$ $sub\mathcal{K}$. Si X, Y, Z son subespacios de A, X, Y son de dimensión finita y $Y \subset X$, entonces*

$$\delta(X/Z) = \delta(Y/Z) + \delta(X/Y+Z).$$

Definición 20. Sea $sub\mathcal{K}_0$ la clase de estructuras en $sub\mathcal{K}$ tales que, para cada subespacio X de dimensión finita de A, se tiene que $\delta_{\mathcal{A}}(X) \geqslant 0$.

Diremos que los elementos de $sub\mathcal{K}_0$ **satisfacen la condición de predimensión**. Sean $\mathcal{K}_0$ y $Fin\mathcal{K}_0$ las clases $\mathcal{K} \cap Sub\mathcal{K}_0$ y $Fin\mathcal{K} \cap Sub\mathcal{K}_0$ respectivamente.

5.1. Extensiones Fuertes

Definición 21. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ estructuras en $Sub\mathcal{K}$ tales que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$. Diremos que la extensión $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ es **fuerte** o que $\mathcal{A}$ es **autosuficiente** en $\mathcal{A}'$ (denotado por $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{A}'$) si para cada subespacio de dimensión finita $X \subset \mathcal{A}'$ se tiene que $\delta(X/A) \geqslant 0$.

Si $f : A \to B$ es un encaje de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$, entonces diremos que f es un encaje fuerte.

Lema 11. *Si $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ son elementos de $Sub\mathcal{K}$ tales que $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B} \leqslant \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{C}$.*

Demostración: Sea X un subespacio de $\mathcal{C}$ de dimensión finita. Observemos que

$$\delta(X/A) \geqslant \delta((X + A)_\Gamma/A)$$

ya que, por un lado se tiene que

$$\begin{aligned} tr.d.(ex\ X/ex\ A) &\geqslant tr.d.(ex(X_\Gamma + A)/ex\ A) \\ &= tr.d.(ex((X + A)_\Gamma + A)/ex\ A), \end{aligned}$$

y por otro se tiene que

$$\begin{aligned} lin.d.((X + A)_\Gamma + A)_\Gamma/A_\Gamma) &= lin.d.((X + A)_\Gamma/A_\Gamma) \\ &\geqslant lin.d.(X_\Gamma/A_\Gamma). \end{aligned}$$

Observemos también que se cumple la siguiente igualdad:

$$\delta((X + A)_\Gamma/A) = \delta((X + A)_\Gamma/(X + A)_\Gamma \cap B) + \delta((X + A)_\Gamma \cap B/A).$$

En efecto, por definición

- $$\begin{aligned} \delta((X + A)_\Gamma/A) &= 2tr.d.[ex((X + A)_\Gamma + A)/ex\ A] - lin.d.[(X + A)_\Gamma + A)_\Gamma/A_\Gamma] \\ &= 2tr.d.[ex(X_\Gamma + A)/exA] - lin.d.[(X + A)_\Gamma/A_\Gamma]; \end{aligned}$$

- $$\delta((X{+}A)_\Gamma/(X{+}A)_\Gamma{\cap}B) = 2tr.d.[\,ex((X{+}A)_\Gamma{+}(X{+}A)_\Gamma{\cap}B)/ex(\,(X{+}A)_\Gamma{\cap}B\,)\,]$$
$$-lin.d.[((X + A)_\Gamma + (X + A)_\Gamma \cap B)_\Gamma/\,((X + A)_\Gamma \cap B)_\Gamma]$$
$$= 2tr.d.[ex(X + A)_\Gamma/ex((X + A)_\Gamma \cap B)] - lin.d.[(X + A)_\Gamma/(X + A)_\Gamma \cap B_\Gamma];$$

- $$\delta((X{+}A)_\Gamma{\cap}B/A) = 2tr.d.[ex((X{+}A)_\Gamma{\cap}B{+}A)/ex\ A]{-}lin.d.[((X{+}A)_\Gamma{\cap}B{+}A)_\Gamma/A_\Gamma]$$
$$= 2tr.d.[ex((X \cap B)_\Gamma + A)/exA] - lin.d.[(X \cap B)_\Gamma + A_\Gamma/A_\Gamma].$$

Luego, debemos mostrar que

$$2tr.d.[ex(X_\Gamma + A)/exA] - lin.d.[(X + A)_\Gamma/A_\Gamma]$$

es igual a

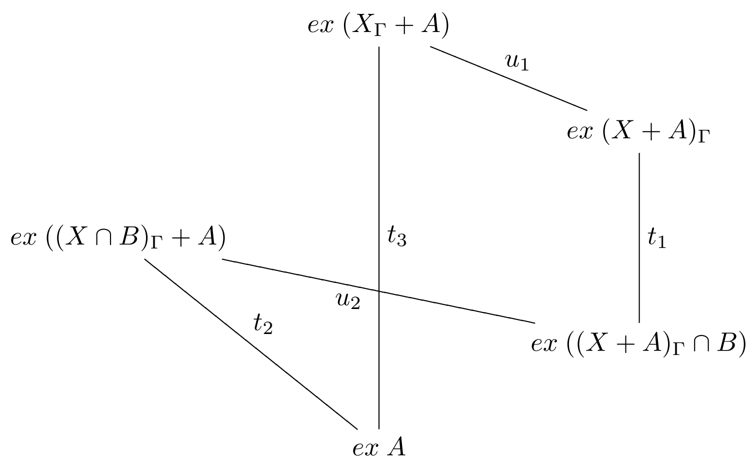
$$2tr.d.[ex(X+A)_\Gamma/ex((X+A)_\Gamma\cap B)]+2tr.d.[ex((X\cap B)_\Gamma+A)/exA]$$

$$-(\ lin.d.[(X+A)_\Gamma/(X+A)_\Gamma\cap B_\Gamma]+lin.d.[(X\cap B)_\Gamma+A_\Gamma/A_\Gamma]\ ).$$

Observemos que $lin.d.[(X+A)_\Gamma/A_\Gamma]=lin.d.(X_\Gamma)$. Por otro lado

$$\begin{gathered}
lin.d.[(X+A)_\Gamma/(X+A)_\Gamma\cap B_\Gamma]+lin.d.[(X\cap B)_\Gamma+A_\Gamma/A_\Gamma]\\
=lin.d.[(X+A)_\Gamma/(X+A)_\Gamma\cap B_\Gamma]+lin.d.(X\cap B)_\Gamma\\
=lin.d.[(X+A)_\Gamma/(X_\Gamma+A_\Gamma)\cap B_\Gamma]+lin.d.(X\cap B)_\Gamma\\
=lin.d.[(X+A)_\Gamma/(X_\Gamma\cap B_\Gamma+A_\Gamma\cap B_\Gamma)]+lin.d.(X\cap B)_\Gamma\\
=lin.d.[(X+A)_\Gamma/(X_\Gamma\cap B_\Gamma+A_\Gamma)]+lin.d.(X\cap B)_\Gamma\\
=lin.d.(X_\Gamma).
\end{gathered}$$

Para los grados de trascendencia tenemos el siguiente diagrama para las extensiones:



en donde los t_i,u_j representan los grados de trascendencia de las respectivas extensiones y entonces $t_3=u_1+t_1-u_2+t_2$.

En efecto, observemos que

$$u_1=tr.d.[ex\ (X_\Gamma+A)/ex\ (X+A)_\Gamma]=tr.d.[A/A_\Gamma]$$

y que

$$\begin{gathered}
u_2=tr.d.[ex\ ((X\cap B)_\Gamma+A)/ex\ ((X+A)_\Gamma\cap B)]\\
=tr.d.[ex\ ((X\cap B)_\Gamma+A)/ex\ ((X\cap B)_\Gamma+(A\cap B)_\Gamma)]\\
=tr.d.[ex\ ((X\cap B)_\Gamma+A)/ex\ ((X\cap B)_\Gamma+(A)_\Gamma)]\\
=tr.d.[A/A_\Gamma]
\end{gathered}$$

y se tiene que $t_3 = t_1 + t_2$.

$\delta((X + A)_\Gamma \cap B/A)$ es no negativo ya que $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$. Por otro lado,

$$tr.d.(ex(X + A)_\Gamma/ex((X + A)_\Gamma \cap B)) \geqslant tr.d.(ex(X + A)_\Gamma/ex\ B)$$

y por la modularidad de la dimensión lineal se tiene que

$$\begin{aligned} lin.d.((X + A)_\Gamma/((X + A)_\Gamma \cap B)_\Gamma) &= lin.d.((X + A)_\Gamma/((X + A)_\Gamma \cap B_\Gamma)) \\ &= lin.d.((X + A)_\Gamma + B_\Gamma/B_\Gamma) \\ &= lin.d.(((X + A)_\Gamma + B)_\Gamma/B_\Gamma). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\delta((X + A)_\Gamma/(X + A)_\Gamma \cap B) \geqslant \delta((X + A)_\Gamma/B)$. La parte de la derecha de la desigualdad es no negativa pues $\mathcal{B} \leqslant \mathcal{C}$. $\dashv$

Lema 12. *Si $(\mathcal{A}_i)_{i<\omega}$ es una cadena ascendente de estructuras de $Sub\mathcal{K}_0$ con $\mathcal{A}_i \leqslant A_j$ para todo $i \leqslant j$, entonces $\mathcal{A} = \cup_i \mathcal{A}_i$ pertenece a $Sub\mathcal{K}_0$ y es una extensión fuerte de cada $\mathcal{A}_i$. Si cada $\mathcal{A}_i$ pertenece a $\mathcal{K}_0$, entonces $\mathcal{A}$ pertenece a $\mathcal{K}_0$.*

Demostración: Sea $(\mathcal{A}_i)_{i<\omega}$ una cadena ascendente de estructuras de $Sub\mathcal{K}_0$ tal que $\mathcal{A}_i \leqslant A_j$ para todo $i \leqslant j$. Como la clase $Sub\mathcal{K}$ tiene una $\forall\exists-$axiomatización, se sigue que $\mathcal{A}$ pertenece a $Sub\mathcal{K}$. Por otro lado, como cada subespacio X de A de dimensión finita pertenece a algún A_i, se sigue que $\mathcal{A}$ satisface la condición de predimensión y es una extensión fuerte de cada $\mathcal{A}_i$. $\dashv$

5.2. Existencia

Ahora mostraremos que $\mathcal{K}_0$ es no vacío. Para esto primero mostraremos que existe una estructura en $Sub\mathcal{K}_0$. Sea $\mathcal{E} = (E, \Gamma^{\mathcal{E}}, ex^{\mathcal{E}}, ex^{\mathcal{E}}(E))$ la estructura tal que $E = \mathbb{Q}$, $\Gamma^{\mathcal{E}} = \mathbb{Z}$, $ex^{\mathcal{E}} = exp|_E$ y las interpretaciones necesarias para los demás símbolos del lenguaje. Entonces $\mathcal{E}$ está en $Sub\mathcal{K}_0$. Que $\mathcal{E}$ cumple con la condición de predimensión equivale a revisar que $\delta(0) = 0 \geqslant 0$ y $\delta(E) = 2 - 1 = 1 \geqslant 0$. Más aún, observemos que para cualquier $\mathcal{A} \in Sub\mathcal{K}$, $\mathcal{E}$ es una subestructura de $\mathcal{A}$.

Lema 13. *Para cada $\mathcal{A}$ en $Sub\mathcal{K}_0$, existe $\mathcal{V}$ en $\mathcal{K}_0$ tal que $\Gamma^{\mathcal{V}} = \Gamma^{\mathcal{A}}$. En particular $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{V}$.*

Demostración: Sea F un campo algebraicamente cerrado tal que $(F^{\mathcal{A}}, (W^{\mathcal{A}})_W)$ es una subestructura de $(F, (W)_W)$. F existe por la definición de $Sub\mathcal{K}$. Si $F = F^{\mathcal{A}}$ no hay nada que hacer. Supongamos por lo tanto que esto no sucede. Sea $\{b_i : i < \lambda\}$ una enumeración de $F \setminus (F^{\mathcal{A}} \cup \{0\})$. Definamos una cadena ascendente de homomorfismos $ex_i : A_i \to F^*$ con $i < \lambda$ y tales que $A_0 = A$, $ex_0 = ex^{\mathcal{A}}$, y para cada i, A_i es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ y b_i es la imagen de ex_{i+1} de la siguiente manera:

Sea $\{a_i : i < \lambda\}$ una enumeración de un conjunto linealmente independiente sobre A. Dado ex_i, si b_i pertenece a la imagen de ex_i, entonces $ex_{i+1} = ex_i$, si no, entonces elegimos de manera inductiva elementos $b_i^{\frac{1}{m}} \in F$, $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que, para todo $m, l \in$

$\mathbb{Z}^+$, $(b_i^{\frac{1}{ml}})^l = b_i^{\frac{1}{m}}$ y definimos $A_{i+1} = A_i + span(a_i)$ y $ex_{i+1}(v + \frac{l}{m}a_i) = ex(v)(b^{\frac{1}{m}})^l$ para cada $v \in A_i,\ l \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{Z}^+$.

Por último tomamos $V = \bigcup_i A_i,\ ex = \bigcup_i ex_i,\ \Gamma = \Gamma_0$ y las interpretaciones adecuadas para los demás símbolos se tiene que la estructura $\mathcal{V} = (V, \Gamma, ex, F)$ contiene a $\mathcal{A}$ como subestructura. Además, como $\Gamma = \Gamma_0$, es claro que $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{V}$. Del lema 11 se sigue que $\mathcal{V} \in \mathcal{K}_0$. $\dashv$

Observemos que en la construcción de $\mathcal{V}$ a partir de $\mathcal{A}$ en la demostración anterior, es posible que el núcleo vaya creciendo. Si asumimos que $\mathcal{A}$ es tal que $ex(A)$ contiene a todas las raíces de la unidad, entonces la construcción preserva el núcleo, i.e. $ker^{\mathcal{V}} = ker^{\mathcal{A}}$. De hecho, en este caso $ker \cap A_i = ker \cap A_{i+1}$ para todo i. Para ver que esto se cumple, tomemos $a \in ker \cap A_{i+1}$ y escribamos $a = qa_i + a'$ con $a' \in A_i$. Entonces, si $q = \frac{m}{n}$, para $m, n \in \mathbb{Z}$, tenemos que $ex(a_i)^m = ex(-a')^n \in ex(A_i)$. Observemos que como A_i es divisible, todo elemento de $ex(A_i)$ tiene raíces en $ex(A_i)$ de todos los órdenes. Por lo tanto la suposición de que también contiene a todas las raíces de la unidad implica que todas las raíces de elementos de $ex(A_i)$ pertenecen a $ex(A_i)$. Como sabemos que el elemento $ex(a_i)$ no pertenece a $ex(A_i)$ pero el elemento $ex(A_i)^m$ si está, necesariamente $m = 0$. Por lo tanto $a \in A_i$.

5.3. Amalgamación

Ahora probaremos que los elementos de $Sub\mathcal{K}_0$ cumplen con la propiedad de amalgamación con respecto a encajes fuertes. Aplicando de manera inductiva esta propiedad y el lema 13 se demuestra que existe un tipo especial de elementos de $\mathcal{K}_0$ llamados *modelos ricos* que tienen en común una teoría de 1er. orden que es bien portada.

Lema 14 (Amalgamación)**.** *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in Sub\mathcal{K}_0$ tales que $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{C}$. Entonces existe $\mathcal{D} \in Sub\mathcal{K}_0$ tal que $\mathcal{C} \leqslant \mathcal{D}$ y $\mathcal{B}$ se encaja de manera fuerte en $\mathcal{D}$ sobre $\mathcal{A}$.*

Demostración: Si reemplazamos a $\mathcal{B}$ por una copia isomórfica de $\mathcal{B}$ sobre $\mathcal{A}$, podemos asumir que $B \cap C = A$ y que $\mathbb{Q}(F^{\mathcal{B}})$ y $\mathbb{Q}(F^{\mathcal{C}})$ son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}(F^{\mathcal{A}})$, i.e. para cualquier $\beta \in \mathbb{Q}(F^{\mathcal{B}})$ que sea algebraicamente independiente sobre $\mathbb{Q}(F^{\mathcal{A}})$ también lo es sobre $\mathbb{Q}(F^{\mathcal{C}})$, y para cualquier $\gamma \in \mathbb{Q}(F^{\mathcal{C}})$ algebraicamente independiente sobre $\mathbb{Q}(F^{\mathcal{A}})$, también lo es sobre $\mathbb{Q}(F^{\mathcal{B}})$. Sea $\bar{b}$ una base lineal de B sobre A. Sea D la suma de C y B en un espacio vectorial más grande, i.e. $D = C + span\,\bar{b}$. Sean $\Gamma^{\mathcal{D}} = \Gamma^{\mathcal{C}} + \Gamma^{\mathcal{B}}$ y $P_m^{\mathcal{D}} = P_m^{\mathcal{C}} + P_m^{\mathcal{B}}$ para cada m.

Sea $ex^{\mathcal{D}} : D \to \mathbb{Q}(F^{\mathcal{C}} \cup F^{\mathcal{B}})^{alg}$ definida por $ex^{\mathcal{D}}(c + b) = ex^{\mathcal{C}}(c)ex^{\mathcal{B}}(b)$ para todos $c \in C$ y $b \in span\,\bar{b}$.

Es fácil ver que las estructuras $\mathcal{D} = (D, \Gamma^{\mathcal{D}}, ex^{\mathcal{D}}, ex^{\mathcal{D}}(D))$ satisfacen las condiciones necesarias para pertenecer a $Sub\mathcal{K}$.

Veamos ahora que la predimensión es no negativa en $\mathcal{D}$. Observemos que para cualquier subespacio X de $\mathcal{D}$ de dimensión finita se tiene que $\delta(X) \geqslant \delta(X_\Gamma^{\mathcal{D}})$ luego, podemos asumir que X está contenido en $span\,\Gamma^{\mathcal{D}}$. Tenemos que

$$\delta(X) = \delta(X \cap C) + \delta(X/X \cap C).$$

La primera parte es no negativa ya que $C \in \mathcal{K}_0$. Para la segunda parte recordemos que para cada $x \in X$, es posible escribir $x = x^B + x^C$ para algún $x^B \in B_\Gamma$ y $x^C \in C_\Gamma$. Luego, para $X^B = \{x^B \in B_\Gamma \,:\, \exists x^C \in C_\Gamma, x^B + x^C\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} tr.d.(exX/ex(X \cap V)) &\geqslant tr.d.(exX/F) \\ &= tr.d.(exX^B/F^{\mathcal{C}}) \\ &= tr.d.(exX^B/F^{\mathcal{A}}). \end{aligned}$$

Por otro lado, usando la modularidad de la dimensión lineal y nuestra suposición anterior se tiene que

$$\begin{aligned} lin.d(X/X \cap C) &= lin.d.(X/X \cap C_\Gamma) \\ &= lin.d.(X + C_\Gamma/C_\Gamma) \\ &= lin.d.(X^B + C_\Gamma/C_\Gamma) \\ &= lin.d.(X^B + A_\Gamma/A_\Gamma). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\delta(X/X \cap C)$ es mayor o igual a $\delta(X^B/A)$, que es no negativa pues, por hipótesis, $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$.

Más aún, para cualquier subespacio X de $\mathcal{D}$ de dimensión finita se tiene que

$$\delta(X/C) \geqslant \delta((X + C)_\Gamma/C)$$

y de la misma manera que se hizo arriba, existe un subespacio X^B de B tal que

$$\delta((X + C)_\Gamma/C) \geqslant \delta(X^B/A) \geqslant 0.$$

Por lo tanto, $\mathcal{C} \leqslant \mathcal{D}$. Un argumento similar prueba que $\mathcal{B} \leqslant \mathcal{D}$. $\dashv$

En la demostración anterior $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ se encuentran dentro de $\mathcal{D}$ de la manera más independiente posible. Cuando esto sucede es común decir que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ están en **amalgama libre**.

Definición 22. Sean $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ subestructuras (en $Sub\mathcal{K}_0$) de un elemento $\mathcal{V}$ de $Sub\mathcal{K}_0$. Diremos que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ están en **amalgama libre** si $\mathbb{Q}(F^{\mathcal{B}})$ y $\mathbb{Q}(F^{\mathcal{C}})$ son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}(F^{\mathcal{A}})$ y tales que $(B + C) \cap \Gamma = (B \cap \Gamma) \cup (C \cap \Gamma)$ en donde $\mathcal{A}$ es la estructura con universo $A = B \cap C$.

Es importante resaltar que si $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ son subestructuras (en $Sub\mathcal{K}_0$) de una estructura $\mathcal{V}$ de $Sub\mathcal{K}_0$, entonces $\delta(B{+}C/B) \leqslant \delta(C/B{\cap}C)$ y es fácil ver que se tendrá igualdad si y sólo si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ están en amalgama libre. Como por el lema 13 todo elemento en $Sub\mathcal{K}_0$ tiene una extensión fuerte en $Sub\mathcal{K}_0$, se tiene el siguiente corolario al lema 14

Corolario 3. *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ elementos de $Sub\mathcal{K}_0$ tales que $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{C}$. Entonces existe $\mathcal{V}$ en $\mathcal{K}_0$ tal que $\mathcal{C} \leqslant \mathcal{V}$ y tal que $\mathcal{B}$ se encaja fuertemente en $\mathcal{V}$ sobre $\mathcal{A}$.*

A continuación definimos la subclase de estructuras de $\mathcal{K}_0$ en la que centraremos nuestro estudio.

Definición 23. Diremos que una estructura $\mathcal{V}$ de $\mathcal{K}_0$ es **rica** si para cualesquiera $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ elementos de $Fin\mathcal{K}_0$ tales que $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{V}$ y $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$ existe un encaje fuerte de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{V}$ sobre $\mathcal{A}$.

La existencia de modelos *ricos* en $\mathcal{K}_0$ se puede derivar de la aplicación inductiva del corolario anterior.

Lema 15. *Para cualquier $\mathcal{C}$ en $Sub\mathcal{K}_0$ existe $\mathcal{V}$ en $\mathcal{K}_0$, con $\mathcal{C} \leqslant \mathcal{V}$ tal que para cualesquiera $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ en $Fin\mathcal{K}_0$ tales que $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{C}$ existe un encaje fuerte de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{V}$ sobre $\mathcal{A}$.*

Demostración: Sea $\{\mathcal{A}_i : i < \lambda\}$ una enumeración de todas las subestructuras fuertes de $\mathcal{C}$ en $Fin\mathcal{K}_0$, y para cada i sea $\{\mathcal{B}_{ij} : j < \lambda_i\}$ una enumeración de todas las extensiones fuertes de $\mathcal{A}_i$ en $Fin\mathcal{K}_0$ módulo isomorfismos sobre $\mathcal{A}_i$.

Obtenemos $\mathcal{V}$ como la unión de una cadena fuerte ascendente $\{\mathcal{V}_i : i < \lambda\}$ en $\mathcal{K}_0$, una extensión fuerte de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{K}_0$ como en el lema 13. Dado $\mathcal{V}_i$ definimos $\mathcal{V}_{i+1}$ de la siguiente manera: sea $\mathcal{V}_{i0} = \mathcal{V}_i$. Para $\mathcal{V}_{ij}$, sea $\mathcal{V}_{i(j+1)}$ (en $\mathcal{K}_0$) una extensión fuerte de $\mathcal{V}_{ij}$ en la que $\mathcal{B}_{ij}$ se encaja de manera fuerte sobre $\mathcal{A}_i$. La existencia de esta extensión queda garantizada por el corolario anterior. Por último hacemos $\mathcal{V}_{i+1} = \cup_j \mathcal{V}_{ij}$. Es claro que si construimos $\mathcal{V}$ de esta manera, entonces tiene las propiedades deseadas. $\dashv$

Lema 16. *Para cualquier $\mathcal{C}$ en $Sub\mathcal{K}_0$ existe un $\mathcal{V}$ en $\mathcal{K}_0$ tal que $\mathcal{C} \leqslant \mathcal{V}$.*

Demostración: Se sigue de la aplicación inductiva ω veces del lema anterior y tomando la unión de la cadena fuerte resultante. $\dashv$

5.4. Cerradura autosuficiente

Definición 24. Sea $\mathcal{A}$ una estructura en $Sub\mathcal{K}_0$ y sea X un subconjunto de A. La **cerradura autosuficiente** de X, denotada por $cl_{\mathcal{A}}(X)$, es la subestructura fuerte de $\mathcal{A}$ más pequeña que contiene a X.

Sea $\mathcal{A}$ en $Sub\mathcal{K}_0$. Diremos que un subconjunto X de A es de **dimensión finita** si está contenido en un subespacio de dimensión finita de $\mathcal{A}$.

Definición 25. Definimos la función dimensión $d_{\mathcal{A}}$ asociada a δ en $\mathcal{A}$ de la siguiente manera: para cualquier subconjunto X de dimensión finita de A, sea

$$d_{\mathcal{A}}(X) = \text{mín}\{\delta(B) : X \subset B \subset V, \ \dim B < \infty, \ 1 \in B\}.$$

Observemos que si $\mathcal{A}$ satisface la condición de predimensión, $d_{\mathcal{A}}(X)$ existe para cualquier subconjunto $X \subset A$ de dimensión finita.

Para cualquier X, sea $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ un sistema dirigido de subespacios autosuficientes de $\mathcal{A}$ tales que $X \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Entonces definimos $cl_{\mathcal{A}}(X) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$

Lema 17. *La cerradura autosuficiente de cualquier conjunto X del universo de $\mathcal{A}$ siempre existe.*

Demostración: Sea $\mathcal{S}$ la colección de todos los subespacios B de A de dimensión finita que contienen al elemento 1 y tales que $X \subset B$ y $\delta(B) = d_{\mathcal{A}}(X)$. Observemos que basta demostrar que:

- $\bigcap \mathcal{S} \in \mathcal{S}$

- $\bigcap S = cl_{\mathcal{A}}(X)$

i.e. que $\bigcap \mathcal{S} \leqslant \mathcal{A}$. Como todos los elementos de $\mathcal{S}$ son de dimensión finita, esta intersección es igual a la intersección de un número finito de elementos de $\mathcal{S}$. Luego, bastará con demostrar que $\mathcal{S}$ es cerrado bajo intersecciones finitas:

Sean B_1, B_2 en $\mathcal{S}$. Entonces para $B = B_1 \cap B_2$ tenemos que

$$\delta(B_1) = \delta(B) + \delta(B_1/B).$$

Por la submodularidad de δ, $\delta(B_1/B) \geqslant \delta(B_1/B_2)$, y como B_2 pertenece a $\mathcal{S}$,

$$\delta(B_1/B_2) \geqslant 0;$$

Luego $\delta(B_1) \geqslant \delta(B)$. Por lo tanto $\delta(B) = \delta(B_1)$, ya que B_1 está en $\mathcal{S}$. Luego $B \in \mathcal{S}$.

Ahora, para ver que se cumple la segunda condición, sean D un subespacio de $\mathcal{A}$ de dimensión finita y $\bar{\mathcal{S}} = \bigcap \mathcal{S}$. Entonces

$$\delta(D/\bar{\mathcal{S}}) = \delta(D + \bar{\mathcal{S}}) - \delta(\bar{\mathcal{S}}),$$

pero como $\bar{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$, se sigue que $\delta(D + \bar{\mathcal{S}}) \geqslant \delta(\bar{\mathcal{S}})$ y por lo tanto $\bar{\mathcal{S}} \leqslant \mathcal{A}$. $\dashv$

De lo anterior es claro que si X es de dimensión finita, entonces $cl_{\mathcal{A}}(X)$ también lo será.

Lema 18. *Sea $\mathcal{B}$ en $Sub\mathcal{K}_0$ una subestructura fuerte de $\mathcal{A}$ (en $Sub\mathcal{K}_0$) y sea X un subespacio de dimensión finita de $\mathcal{A}$. Entonces $cl_{\mathcal{A}}(B + X)$ tiene dimensión finita sobre B.*

Demostración: Como $\mathcal{B} \leqslant \mathcal{A}$, de todos los subespacios de $\mathcal{A}$ de dimensión finita que contienen a X, podemos elegir Y tal que $\delta(Y/B)$ es mínimo. Para cualquier Z de dimensión finita tenemos que

$$\delta(Z/B + Y) = \delta(Z + Y/B + Y) = \delta(Z + Y/B) - \delta(Y/B)$$

y por la elección de Y estos valores son no negativos. Por lo tanto $B + Y \leqslant \mathcal{A}$, de donde se sigue el resultado. $\dashv$

Observemos que si $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ están en $Sub\mathcal{K}_0$ y $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{A}'$, entonces para cualquier subconjunto X de A de dimensión finita

$$d_{\mathcal{A}}(X) = d_{\mathcal{A}'}(X) \quad \text{y} \quad cl_{\mathcal{A}}(X) = cl_{\mathcal{A}'}(X).$$

Luego, para cualquier X, no necesariamente de dimensión finita se tiene que

$$cl_{\mathcal{A}}(X) = cl_{\mathcal{A}'}(X).$$

5.5. Riqueza y cerradura existencial

Definición 26. Dadas $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ en $\mathcal{K}$. Sea $\mathcal{S}$ un conjunto no vacío de isomorfismos, tal que cada uno tiene una subestructura $\mathcal{B}$ de $\mathcal{V}$ como dominio y una subestructura $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{V}'$ como contradominio. Diremos que $\mathcal{S}$ es un **sistema de bisimulación** de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}'$ si

- para cualquier $f \in \mathcal{S}$ y cualquier $c \in V$, existe $\bar{f} \in \mathcal{S}$ que extiende a f y tal que c está en el dominio de $\bar{f}$.
- para cualquier $f \in \mathcal{S}$ y cualquier $c' \in V'$, existe $\bar{f} \in \mathcal{S}$ que extiende a f y tal que c' está en el contradominio de $\bar{f}$.

Lema 19. *Sean $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ estructuras ricas. Si el conjunto de isomorfismos*

$$\mathcal{S} = \{f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}' : \mathcal{B}, \mathcal{B}' \in \ Fin\mathcal{K}_0, \mathcal{B} \leqslant \mathcal{V}, \mathcal{B}' \leqslant \mathcal{V}'\}$$

es no vacío, entonces es un sistema de bisimulación[1] *de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}'$.*

Demostración: Para cualquier $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ en $\mathcal{S}$, y cualquier $c \in V$, sea $\mathcal{C} = cl_{\mathcal{V}}(Bc) \leqslant \mathcal{V}$, entonces $f^{-1} : \mathcal{B}' \to \mathcal{C}$ es un encaje fuerte. Como $\mathcal{V}'$ es rica, debe existir un encaje fuerte $\bar{f} : \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ que extiende a f. Esto establece la primera condición de la definición 26. Un argumento similar usando el hecho de que $\mathcal{V}$ es una estructura rica demuestra la segunda parte. $\dashv$

Corolario 4. *Sean $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ dos estructuras ricas. Si $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ pertenecen a $Fin\mathcal{K}_0$ son subestructuras fuertes de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ respectivamente, entonces cualquier isomorfismo*

$$f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$$

es un mapeo elemental de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}'$.

Demostración: Se sigue de la definición de riqueza, o del lema anterior por inducción en la complejidad de las fórmulas. $\dashv$

Corolario 5. *Cualesquiera dos estructuras $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ ricas son $\mathscr{L}_{\infty\omega}-$equivalentes y, en particular, elementalmente equivalentes.*

Demostración: Bastará con mostrar que existen subestructuras fuertes isomorfas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ respectivamente pues el corolario se sigue del lema anterior y de la caracterización de Karp de $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ (lema 1). Las subestructuras de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ con dominio $span(1, \epsilon)$, en cada caso, cumplen con las propiedades requeridas. $\dashv$

Denotaremos por $\mathrm{qf} - \mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$ al tipo, libre de cuantificadores, de $\bar{b}$ sobre $\bar{a}$.

Lema 20. *Si $\mathcal{V}$ es una estructura rica y $\bar{a}$ es una $n-$ada de elementos de $\mathcal{V}$, entonces para cualquier extensión fuerte $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$ y cualquier $\bar{b}' \subset \mathcal{V}'$, existe $\bar{b} \subset \mathcal{V}$ tal que*

$$\mathrm{qf} - \mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a}) = \mathrm{qf} - \mathrm{tp}(\bar{b}'/\bar{a}).$$

Si $\mathcal{V}'$ también es rica, entonces se tiene

$$\mathrm{tp}_{\mathcal{V}}(\bar{b}/\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\mathcal{V}}(\bar{b}'/\bar{a}).$$

[1] En inglés a esto se le llama *back and forth system*.

Demostración: Sean $\mathcal{V}, \bar{a}, \mathcal{V}'$ y $\bar{b}'$ como en el lema ($\mathcal{V}'$ no es necesariamente una estructura rica)

Sean $\mathcal{A} = cl_{\mathcal{V}}(\bar{a}) \leqslant \mathcal{V}$ y $\mathcal{B}' = cl_{\mathcal{V}'}(\bar{a}\bar{b}') \leqslant \mathcal{V}'$. Se sigue de $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{V}'$ que $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}'$. Luego, por la riqueza de $\mathcal{V}$, existe un encaje fuerte $f : \mathcal{B}' \to \mathcal{V}$ sobre A. Sea $\bar{b}$ la imagen de $\bar{b}'$ bajo f. Como f es un isomorfismo de $\mathcal{B}'$ sobre su imagen, se tiene que

$$\mathrm{qf}-\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a}) = \mathrm{qf}-\mathrm{tp}(\bar{b}'/\bar{a}).$$

Si asumimos que $\mathcal{V}'$ es también rica, entonces por el corolario 4 se tiene que f es un encaje elemental entre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ y entonces

$$\mathrm{tp}_{\mathcal{V}}(\bar{b}/\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\mathcal{V}}(\bar{b}'/\bar{a}).$$

$\dashv$

Definición 27. Diremos que una estructura $\mathcal{V} \in \mathcal{K}_0$ es **existencialmente cerrada** con respecto a extensiones fuertes si para cualquier fórmula $\varphi(\bar{x})$ sin cuantificadores (en donde las variables toman valores en el espacio vectorial), si existe una extensión fuerte $\mathcal{V}' \in \mathcal{K}_0$ de $\mathcal{V}$ y una $n-$ada $\bar{b}' \subset V'$ tales que $\mathcal{V}' \vDash \varphi(\bar{b}')$, entonces existe $\bar{b} \subset V$ tal que $\mathcal{V} \vDash \varphi(\bar{b})$.

Diremos que $\mathcal{V}$ es **fuertemente existencialmente cerrada** con respecto a extensiones fuertes si para cualquier tipo (parcial) $\Phi(\bar{x})$ sin cuantificadores sobre un conjunto finito de parámetros $\bar{a} \subset V$(en donde las variables toman valores en el espacio vectorial), si existe una extensión fuerte $\mathcal{V}' \in \mathcal{K}_0$ de $\mathcal{V}$ y una $n-$ada $\bar{b}' \subset V'$ tales que $\mathcal{V}' \vDash \Phi(b')$, entonces existe $\bar{b} \subset V$ tal que $\mathcal{V} \vDash \Phi(\bar{b})$.

Corolario 6. *Si $\mathcal{V}$ es rica, entonces $\mathcal{V}$ es fuertemente existencialmente cerrada con respecto a extensiones fuertes.*

Ahora mostraremos de manera explícita el conjunto de axiomas de la teoría completa de 1er. orden que es común a todas las estructuras ricas. Los métodos desarrollados por Hrushovski proporcionan una forma estándar de axiomatizar una teoría obtenida mediante la construcción por amalgamación.

Para esto es necesario añadir dos conjuntos de enunciados al conjunto básico de axiomas (en este caso los axiomas de $\mathcal{K}$). El primer conjunto de enunciados universales para expresar la condición de predimensión y otro de $\forall\exists-$enunciados que, módulo $\omega-$saturación, captura la propiedad de riqueza.

Capítulo 6

Geometría de los Campos Esmeralda

6.1. La condición de predimensión y la teoría T_0

Mostraremos que existe una teoría T_0 de 1er. orden que axiomatiza a la clase $\mathcal{K}_0$. El paso correspondiente en la construcción de la teoría de campos verdes es explicado por Poizat en [Poi] y, como en este caso estamos usando esencialmente la misma función de predimensión, los argumentos presentados por Poizat de hecho implican el resultado que necesitamos.

El punto principal es que se requiere una cierta propiedad de finitud que obtendremos mediante el teorema 7 y que está relacionado con la *conjetura de intersecciones con toros*[Zil02].

Ahora mostraremos como derivar a partir de este teorema que la clase $\mathcal{K}_0$ es axiomatizada por una teoría de 1er. orden T_0 y que existe un tipo parcial $\Phi_0(\bar{y})$ sobre el conjunto vacío tal que para toda $\mathcal{V} \in \mathcal{K}_0$ y $\bar{b} \in \mathcal{V}$,

$\mathcal{V} \models \Phi_0(\bar{b})$ si y sólo si la subestructura de $\mathcal{V}$ con dominio $span(\bar{b} \cup \{1\})$ es fuerte en $\mathcal{V}$.

Definición 28. Sea F un campo algebraicamente cerrado de característica 0. Llamaremos a los subgrupos del grupo multiplicativo $(F^*)^n$ **toros**. Un toro que no es igual a todo $(F^*)^n$ será **propio**.

Usaremos el hecho de que todo toro T es definido por un número finito de ecuaciones de la forma

$$y_1^{m_1} \cdots y_n^{m_n} = 1,$$

en donde $\bar{m} = (m_1, \ldots m_n)$ es una $n-$ada de números enteros. Más aún, si T es definido por k ecuaciones y las correspondientes $n-$adas $\bar{m}$ forman un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{Z}^n$, entonces la dimensión de T es $n - k$ y diremos que T tiene codimensión k. Observemos que una clase lateral de un toro T es definida por una ecuación de la forma

$$y_1^{m_1}\cdots y_n^{m_n}=b,$$

en donde $\bar{m}=(m_1,\dots m_n)$ es una $n-$ada de números enteros y $b\in F^*$.

Para una estructura $\mathcal{V}\in\mathcal{K}$ y un toro en $(F^*)^n$ definido por ecuaciones de la forma

$$y_1^{m_1}\cdots y_n^{m_n}=1$$

consideremos el subespacio X de V^n definido por las correspondientes ecuaciones lineales

$$m_1\cdot x_1+\cdots+m_n\cdot x_n=0.$$

Es claro que $exX\subset T$. Observemos que para $\bar{x}\in\Gamma^n$ se tiene de manera recíproca que, si $ex(\bar{x})\in T$, entonces $\bar{x}\in X$, pues se tiene que $\Gamma\cap ker\ ex=\{0\}$.

En adelante usaremos las siguiente abreviaciones:

$$y_1^{m_1}\cdots y_n^{m_n}=\bar{y}^{\bar{m}}$$

y

$$m_1\cdot x_1+\cdots+m_n\cdot x_n=\bar{m}\cdot\bar{x}.$$

Definición 29. Sea F un campo algebraicamente cerrado de característica 0. Dada una variedad $W\subset F^n$ definida sobre un subcampo k de F algebraicamente cerrado, el **toro minimal de** W **sobre** k es el toro T mas pequeño tal que W está contenido en una clase lateral αT para algún $\alpha\in k$.

Definición 30. Dadas una variedad $W\subset F^n$ y una clase lateral $T\bar{d}$ de un toro $T\subset F^n$. Una componente irreducible S de $W\cap T\bar{d}$ será **atípica** si la dimensión de S es estrictamente mayor que $\dim W+\dim T-n$. Por otro lado, si

$$\dim S=\dim W+\dim T-n$$

diremos que S es una componente **típica** de $W\cap T\bar{d}$.

En algunos casos puede resultar de interés para nosotros el relativizar las definiciones anteriores. Si S está contenida en una clase lateral $P\bar{b}$ de un toro P, diremos que S es una componente atípica de $W\cap T\bar{d}$ con respecto a $P\bar{b}$ si

$$\dim S>\dim W\cap P\bar{b}+\dim T\bar{d}\cap P\bar{b}-\dim P.$$

En caso contrario diremos que S es una componente típica de $W\cap T\bar{d}$ con respecto a $P\bar{b}$.

A continuación enunciaremos la condición de finitud que se mencionó al inicio de esta sección, la cual, entre otras cosas, nos permitirá expresar la condición de predimensión como un conjunto de enunciados de 1er. orden

Teorema 7 (Zilber)**.** *Sea F un campo algebraicamente cerrado. Para cualquier variedad $W(\bar{x},\bar{y})\subset F^{n+k}$, con $n\geqslant 1$ y $k\geqslant 0$, existe un conjunto finito de toros propios $T_1,\dots,T_s\subset F^n$ tal que, para cualquier $\bar{b}\in F^k$ y cualquier toro $F\subset F^n$, si S es una componente atípica irreducible infinita de $W(\bar{x},\bar{b})\cap T\bar{d}$, para algún $\bar{d}\in\mathbb{C}^n$, entonces, para algún $i\in\{1,\dots,s\}$ y $\bar{d}'\in\mathbb{C}^n$, S está contenida en $T_i\bar{d}d$ y S es un componente típico de $W(\bar{x},\bar{b})\cap T\bar{d}$ con respecto a $T_i\bar{d}'$.*

Lema 21. *La clase $\mathcal{K}_0$ es axiomatizada por una $\forall\exists-$teoría*

Demostración: Añadimos el siguiente conjunto de enunciados universales a los axiomas de la clase $\mathcal{K}$. Primero agregamos enunciados que afirman que si $a \in \Gamma$ y $ex(a)$ es algebraico, entonces $a = 0$. Esto garantiza que el generado de no más de dos puntos coloreados en V deba tener predimensión no negativa.

Nos ocupamos del espacio generado de un conjunto cualquiera de puntos al agregar, para cada $n \geqslant 1$ y cada variedad $W \subset F^{2n+1}$ de dimensión a lo más n, el enunciado

$$\forall \bar{x} \left((W(ex\ \bar{x}) \wedge \bigwedge_j \Gamma(x_j)) \to \bigvee_i T_i(ex\ \bar{x}) \right),$$

con $T_1, \ldots, T_s \subset F^{2n+1}$ son toros, tal como se menciona en el teorema 7 para W.

Es fácil ver que si una estructura $\mathcal{V}$ satisface estos enunciados entonces pertenece a $\mathcal{K}_0$. En efecto, si $\mathcal{V}$ pertenece a $\mathcal{K}_0$ y A es un subespacio de $span\ \Gamma$ de dimensión finita tomamos $\bar{a} \subset \Gamma$ una base para A. Si la longitud de $\bar{a}$ es $2n+1$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces es claro que el conjunto de enunciados anteriores elimina la posibilidad de que $\bar{a}$ sea linealmente independiente cuando $ex(\bar{a})$ pertenece a una variedad de dimensión menor o igual a n. Si $\bar{a}$ tiene longitud $2n$, tomemos un nuevo elemento $a_{2n+1} \in \Gamma$ linealmente independiente sobre $\bar{a}$, entonces, si $ex(\bar{a})$ perteneciera a una variedad W de dimensión menor que n, entonces $ex(\bar{a}a_{2n+1})$, que pertenece a $W \times F$ estaría en una variedad de dimensión menor o igual que n. Esto contradice el hecho de que $\mathcal{V}$ satisface el nuevo conjunto de enunciados pues $\bar{a}a_{2n+1}$ es un conjunto linealmente independiente.

Ahora mostraremos que el recíproco también se cumple. Sea $\mathcal{V} \in \mathcal{K}_0$ y supongamos que $\bar{a} \in \Gamma^{2n+1}$ es tal que $ex(\bar{a})$ pertenece a una variedad W de dimensión $\leqslant n$, mostraremos que para alguna $i,\ ex(\bar{a})$ pertenece a T_i.

Sean W' el lugar geométrico de los puntos sobre $\mathbb{Q}^{alg}$ tales que $W' = ex\ \bar{a}$, T el toro minimal de W sobre $\mathbb{Q}^{alg}$ y sea $d \subset \mathbb{Q}^{alg}$ tal que W está contenida en la clase lateral Td. Td está definida por ecuaciones de la forma $\bar{y}^{\bar{m}} = c$ en donde cada c es algebraico y, ya que todos los puntos en $\bar{a}$ son puntos coloreados, cada c pertenece a $ex\ \Gamma$. Si consideramos que $ex\ \Gamma$ es libre de torsión se sigue que cada $c = 1$ y por lo tanto $T\bar{d} = T$.

Como $dim\ W' = tr.d.(ex\ \bar{a})$ y $dim\ T = lin.d.(\bar{a})$, la condición de predimensión para $\mathcal{V}$ implica que $2\ dim\ W' - dim\ T \geqslant 0$. Entonces se tiene que

$$dim\ W + dim\ T - (2n-1) \leqslant dim\ T - (n+1) < \frac{1}{2}\, dim\ T \leqslant dim\ W'.$$

De esta forma, la componente irreducible de $W \cap T$ en la que se encuentra $ex(\bar{a})$, y en la que está contenida W', es atípica. Más aún, podemos suponer que esta componente es infinita pues en caso contrario $ex(\bar{a})$ sólo tendría coordenadas algebraicas y entonces se tendría que $\bar{a} = 0$, luego $ex(\bar{a}) = 1 \in T_i$ para todo i. Por el teorema 7 existen $i, \bar{d}'$ tales que la clase lateral $T_i\bar{d}'$ contiene a la componente antes mencionada. Como W' está definida sobre $\mathbb{Q}^{alg}$, podemos asumir que todas las coordenadas de $\bar{d}'$ son algebraicas. Se sigue, tal como se hizo para $T\bar{d}$, que $T_i\bar{d}' = T_i$. Por lo tanto $ex(\bar{a})$ pertenece a T_i. $\dashv$

Ahora mostraremos que al añadir un conjunto de $\forall\exists-$enunciados a la teoría de T_0 obtenemos la teoría completa común de todas las estructuras ricas.

Nota: En adelante y hasta nuevo aviso, F representará un campo algebraicamente cerrado de característica 0.

Definición 31. Sea $W \subset F^n$ una variedad irreducible. Para $\bar{m}^1, \ldots, \bar{m}^k \in \mathbb{Z}^n$ sea $W^{(\bar{m}^1,\ldots,\bar{m}^k)}$ la imagen de W bajo la transformación $\bar{x} \mapsto (\bar{x}^{\bar{m}^1}, \ldots, \bar{x}^{\bar{m}^k})$. Diremos que W es **normal** si

$$dim\, W^{(\bar{m}^1,\ldots,\bar{m}^k)} \geqslant \frac{k}{2}$$

para cualquier conjunto linealmente independiente de $n-$adas $\bar{m}^1, \ldots, \bar{m}^k \in \mathbb{Z}^n$.

Si W está definida sobre el subcampo $\mathbb{Q}(C)$ de F y es irreducible, entonces la dimensión del conjunto construible $W^{(\bar{m}^1,\ldots,\bar{m}^k)}$ es igual a la dimensión de su cerradura en la topología de Zariski sobre $\mathbb{Q}(C)$. De esta forma, si $\bar{b}$ es un genérico de la variedad W sobre $\mathbb{Q}(C)$, entonces W es normal si y sólo si

$$tr.d.(\bar{b}^{\bar{m}^1}, \ldots, \bar{b}^{\bar{m}^k}/\mathbb{Q}(C)) \geqslant \frac{k}{2},$$

para cualquier conjunto linealmente independiente de $n-$adas $\bar{m}^1, \ldots, \bar{m}^k \in \mathbb{Z}^n$.

Para el caso $k = 1$ en la definición de normalidad es posible expresar esta propiedad de la siguiente forma: Para toda $\bar{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$,

$$\bar{b}^{\bar{m}} \notin \mathbb{Q}(C)^{alg}.$$

Es esencial que, dada una variedad $W(\bar{x}, \bar{y}) \subset F^{n+k}$ sobre $\mathbb{Q}$, exista una fórmula (libre de cuantificadores) $\varphi(\bar{y})$ tal que, para todo $\bar{b} \in F^k$, $F \vDash \varphi(\bar{b})$ si y sólo si la variedad $W(\bar{x}, \bar{y}) \subset F^n$ es normal. Para mostrar lo anterior nos basaremos en el hecho de que, para cada variedad $W(\bar{x}, \bar{y}) \subset F^{n+k}$ y para cada entero l, existe una fórmula libre de cuantificadores en las variables $\bar{y}$ que se satisface para $\bar{b}$ si y sólo si la dimensión de la variedad $W(\bar{x}, \bar{b}) \subset F^n$ es mayor o igual a l. Además, existe otra fórmula libre de cuantificadores que es verdadera para $\bar{b}$ precisamente cuando $W(\bar{x}, \bar{b}) \subset F^n$ es irreducible.

La manera obvia de expresar la normalidad de la variedad $W(\bar{x}, \bar{b})$ como una condición sobre el conjunto $\bar{b}$, utilizando las fórmulas antes mencionadas, es mediante una conjunción infinita de fórmulas, una por cada conjunto de $n-$adas $\bar{m}^1, \ldots, \bar{m}^k \in \mathbb{Z}^n$ linealmente independientes. El teorema 7 nos permite mostrar que la condición de normalidad puede ser expresada por una fórmula de primer orden.

Para la demostración de este hecho se introduce la siguente notación: Si T es un toro definido por las ecuaciones $\bar{y}^{\bar{m}^i} = 1$ escribiremos $dim\, W^T$ para denotar la dimensión del conjunto $W^{(\bar{m}^1,\ldots,\bar{m}^k)}$.

Lema 22. *Dada una variedad $W(\bar{x}, \bar{y}) \subset F^{n+l}$ definida sobre $\mathbb{Q}$, existe una fórmula de primer orden libre de cuantificadores $\varphi(\bar{y})$ tal que, para todo $\bar{b} \in F^l$, $F \vDash \varphi(\bar{b})$ si y sólo si la variedad $W(\bar{x}, \bar{b}) \subset F^n$ es normal.*

Demostración: Dada una variedad $W(\bar{x},\bar{y}) \subset F^{n+l}$ definida sobre $\mathbb{Q}$. Sean $T_1,\ldots,T_s$ los toros que se obtienen por el teorema 7. Sea $\varphi(\bar{y})$ una fórmula libre de cuantificadores tal que $\varphi(\bar{b})$ es verdadera si y sólo si la variedad $W(\bar{x},\bar{b})$ es irreducible y tiene dimensión mayor o igual a $\frac{n}{2}$ y, para cada i, la cerradura de Zariski de $W(\bar{x},\bar{b})^{(\bar{m}_i^1,\ldots,\bar{m}_i^k)}$ sobre $\mathbb{Q}(\bar{b})$ tiene dimensión mayor o igual que $\frac{k_i}{2}$ donde $\bar{m}_i^1,\ldots,\bar{m}_i^k$ son $n-$adas linealmente independientes de enteros tales que T_i está definido por el conjunto de ecuaciones $\bar{y}^{\bar{m}_i^j}=1, j=1,\ldots,k_i$.

Es claro que para cada $\bar{b}$, si $W(\bar{x},\bar{b})$ es normal, entonces $\varphi(\bar{b})$ es verdadera. Para el recíproco, supongamos para llegar a una contradicción que para algún $\bar{b}$, $\varphi(\bar{b})$ es verdadero pero $W(\bar{x},\bar{b})$ no es normal. Tomemos $\bar{b}$ fijo tal que se cumple lo anterior y sea T un toro con codimensión k tal que $dim\ W(\bar{x},\bar{b})^T < \frac{k}{2}$. En lo que resta de la prueba denotaremos $W(\bar{x},\bar{b})$ simplemente por W. Sea $\bar{d}$ un genérico de W sobre $\bar{b}$ y sea S la componente irreducible de $W\cap T\bar{d}$ a la que pertenece $\bar{d}$.

En particular se tiene que $dim\ W^T < k$ y, por el teorema sobre la dimensión de fibras [Sha][1] se tiene que

$$dim\ S \geqslant dim\ W - dim\ W^T > dim\ W - k.$$

Como

$$dim\ W + dim\ T - n = dim\ W + (n-k) - n = dim\ W - k,$$

se sigue que $dim\ S > dim\ W + dim\ T - n$, i.e. S es una componente atípica de $W\cap T\bar{d}$. Más aún, observemos que $dim\ S > 0$ pues en caso contrario tendríamos que $dim\ W = dim\ W^T,\ n=k$, y por lo tanto $dim\ W^T < \frac{n}{2}$, lo que contradice la hipótesis.

Luego, por el teorema 7 existe i tal que $S\subset T_i\bar{d}'$ y S es una componente típica de $W\cap T\bar{d}$ con respecto a $T_i\bar{d}'$, i.e.

$$dim\ S = dim\ W\cap T_i\bar{d}' + dim\ T\cap T_i - dim\ T_i.$$

Observemos que nuestra suposición de que $dim\ W^T < \frac{k}{2}$ puede ser expresada como $dim\ W\cap T\bar{d} > \frac{1}{2}dim\ T$. Observemos también que S es una componente de dimensión maximal en $W\cap T\bar{d}$, y entonces se tiene que $dim\ W\cap T\bar{d} = dim\ S$.

Para cualquier toro T' contenido en T tal que $S\subset T'\bar{d}$ se tiene que

$$dim\ W\cap T'\bar{d} \geqslant dim\ S > \frac{1}{2}dim\ T \geqslant \frac{1}{2}dim\ T'.$$

Por esto podemos asumir que T es el toro minimal de S, lo que implica que $T\cap T_i = T$, y

$$dim\ S = dim\ W\cap T_i\bar{d}' + dim\ T - dim\ T_i.$$

[1] Teorema 7 de la sección 6.3, capítulo I, pág. 76.

En resumen

$$
\begin{aligned}
dim\, W \cap T_i \bar{d}' &= dim\, S - dim\, T \cap T_i + dim\, T_i \\
&> -\frac{1}{2} dim\, T + dim\, T_i \\
&> \frac{1}{2} dim\, T_i.
\end{aligned}
$$

Esto da como resultado que $dim\ W^{T_i} < \frac{k_i}{2}$, lo cual es una contradicción pues por hipótesis $\varphi(\bar{b})$ es verdadera. $\dashv$

Nota: En este punto concluímos con la convención sobre F como campo algebraicamente cerrado de característica 0.

6.2. La teoría T

Definición 32. Sea T la teoría que se obtiene al extender T_0 al añadir un conjunto de enunciados que expresen lo siguiente:

Para cualquier variedad normal $W \subset F^n$, cualquier subvariedad propia W' de W y cualquier sistema consistente de relaciones de congruencia

$$\{x_j \equiv r_{jm} \pmod{m} : j \in \{1, \ldots, n\}, m \in \{1, \ldots, N\}\},$$

en donde N es un entero positivo y $r_{jm} \in \{0, \ldots, m-1\}$, existe $\bar{b} \in \Gamma^n$ tal que $ex(\bar{b})$ pertenece a $W \setminus W'$ y $\bar{b}$ satisface todas las relaciones de congruencia en Γ.

Por el lema 22 es fácil ver que podemos obtener T a partir de T_0 al agregar un conjunto de $\forall\exists-$enunciados.
Ahora mostraremos que si $\mathcal{V} \in \mathcal{K}_0$ es existencialmente cerrado con respecto a encajes fuertes, entonces $\mathcal{V}$ es un modelo de T. El siguiente lema implica este resultado.

Lema 23. *Sea $\mathcal{V}$ una estructura en $\mathcal{K}_0$. Para cualquier variedad normal $W \subset F^n$ y cualquier conjunto consistente de relaciones de congruencia*

$$\{x_j \equiv r_{jm} \pmod{m} : j \in \{1, \ldots, n\}, m \in \mathbb{Z}_+\},$$

con $r_{jm} \in \{0, \ldots, m-1\}$ para cada j y m, existe una extensión fuerte $\mathcal{V}' \in \mathcal{K}_0$ de $\mathcal{V}$ en la que W tiene un genérico de la forma $ex(\bar{b})$ para algún $\bar{b} \in (\Gamma')^n$ que satisface todas las congruencias del sistema.

Demostración: Sea Γ_1 un $\mathbb{Z}-$grupo que extiende a Γ con algún $\bar{b}^1 \in \Gamma_1^n$ tal que $\bar{b}$ satisface todas las relaciones de congruencia en el sistema y es linealmente independiente sobre $span\Gamma$. Al intersectar Γ_1 con $span(\Gamma \cup \bar{b}^1)$ resulta un $\mathbb{Z}-$grupo, por lo que podemos asumir que Γ_1 está contenido en $span(\Gamma \cup \bar{b}^1)$.

Sea B un campo vectorial que extiende a V tal que $lin.d.(B/V) = n$ y sea $\bar{b}$ una base para B sobre V. Sea

$$f : span(\Gamma \cup \bar{b}^1) \to span(\Gamma \cup \bar{b})$$

un isomorfismo sobre $span\ \Gamma$ que manda cada b_j^1 a b_j, y sea $\Gamma^{\mathcal{B}}$ la imagen de Γ_1 bajo f. Entonces $\Gamma^{\mathcal{B}}$ es un $\mathbb{Z}-$grupo, $\bar{b}$ satisface todas las relaciones de congruencia del sistema en $\Gamma^{\mathcal{B}}$, y se tiene que $\Gamma^{\mathcal{B}} \cap V = \Gamma$.

Sean F' un campo algebraicamente cerrado que extiende a F tal que $tr.d.(F'/F)$ es mayor o igual a n y $\bar{d} \in F'^n$ un genérico de W sobre F. Sea $ex^{\mathcal{B}} : B \to F'$ dada por

$$ex^{\mathcal{B}}\left(v + \frac{1}{l}(k_1 b_1 + \cdots + k_n b_n)\right) = ex(v)(d_1^{\frac{1}{l}})^{k_1} \cdots (d_n^{\frac{1}{l}})^{k_n}),$$

para cualesquiera $v \in V,\ l \in \mathbb{Z}_+$ y $k_j \in \mathbb{Z}$ y tal que para cada j los elementos $d_j^{\frac{1}{l}}$ se definen de manera inductiva para cumplir lo siguiente: para cualesquiera $l, m \in \mathbb{Z}_+$,

$$d_j^1 = d_j, \quad (d_j^{\frac{1}{lm}})^m = d_j^{\frac{1}{l}}.$$

Hemos definido una estructura $\mathcal{B} = (B, \Gamma^{\mathcal{B}, ex^{\mathcal{B}}}, ex^{\mathcal{B}}(B))$ de manera explícita considerando la existencia de una $\bar{b}$ adecuada.

Sólo resta mostrar que $\mathcal{B} \in\ Sub\mathcal{K}_0$ y $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{B}$ pues de esto se sigue que existe una extensión fuerte en $\mathcal{K}_0$ que cumple con todos los requisitos del lema.

Mostraremos primero que $\mathcal{B}$ cumple la condición de predimensión. Sea X un subespacio de $span(\Gamma^{\mathcal{B}})$. Entonces

$$\delta(X) = \delta(X \cap V) + \delta(X \cap span(\bar{b})/X \cap V)$$

en donde los dos sumandos son no negativos, el primero por la condición de predimensión para $\mathcal{V}$ y el segundo por la normalidad de W. La condición de normalidad también nos da como resultado el que $\mathcal{B}$ sea una extensión fuerte de $\mathcal{V}$ pues para cualquier X se tiene que

$$\delta(X/V) = \delta(X \cap span(\bar{b})/V) \geqslant 0.$$

$\dashv$

Corolario 7. *Si $\mathcal{V}$ es existencialmente cerrado con respecto a extensiones fuertes, entonces $\mathcal{V}$ es un modelo de T. Si $\mathcal{V}$ es fuertemente existencialmente cerrado con respecto a encajes fuertes, entonces para cualquier variedad normal $W \subset F^n$ y cualquier sistema consistente de relaciones de congruencia*

$$\{x_j \equiv r_{jm} \pmod{m} : j \in \{1, \ldots, n\}, m \in \mathbb{Z}_+\},$$

con $r_{jm} \in \{0, \ldots, m-1\}$ para cada j y m, W tiene un genérico de la forma $ex(\bar{b})$ para algún $\bar{b} \in \Gamma^n$ que satisface todas las relaciones de congruencia del sistema.

6.3. Extensiones minimales

Definición 33. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in Sub\mathcal{K}_0$ tales que $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$. Diremos que la extensión $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$ es **minimal** si $A \subsetneq B$ y no existe $\mathcal{C} \in Sub\mathcal{K}_0$ con $A \subsetneq C \subsetneq B$ tal que $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{C} \leqslant \mathcal{B}$.

Observemos que si $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in Fin\mathcal{K}_0$ y $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$, entonces la extensión fuerte $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$ se factoriza en una torre finita de extensiones fuertes minimales. Se sigue que la definición de riqueza no cambia si se añade la restricción para extensiones fuertes minimales.

Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in Fin\mathcal{K}_0$ y $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$ una extensión fuerte minimal. Entonces se tienen los siguientes cuatro casos:

Caso 1: $\Gamma^{\mathcal{B}} \neq \Gamma^{\mathcal{A}}$ y $\delta(B/A) = 0$.

Primero observemos que, por minimalidad, $B = A + span\Gamma^{\mathcal{B}}$. Sea n la dimensión de B sobre A, que por modularidad es también la dimensión de B_Γ sobre A_Γ, entonces $tr.d.(ex\ B/ex\ A) = \frac{n}{2}$. La minimalidad también nos da el hecho de que para cada subespacio propio B' de B que contiene de manera propia a A, $\delta(B'/A) > 0$.

En este caso, para $\bar{b} \subset \Gamma^{\mathcal{B}}$ una base de B sobre A, se tiene que

$$\Gamma^{\mathcal{B}} = \Gamma^{\mathcal{A}} + \langle b_j/m : b_j \in P_m^{\mathcal{B}}, j = 1, \ldots, n \rangle.$$

Caso 2: $\Gamma^{\mathcal{B}} \neq \Gamma^{\mathcal{A}}$ y $\delta(B/A) > 0$.

Como en el caso anterior se tiene que $B = A + span\Gamma^{\mathcal{B}}$, y además

$$lin.d.(B/A) = lin.d.(B_\Gamma/A_\Gamma) = 1.$$

En efecto, tomemos $b \in \Gamma^{\mathcal{B}} \setminus \Gamma^{\mathcal{A}}$. Observemos que $ex\ b$ es trascendental sobre $ex\ A$ y por lo tanto $\delta(A + spanb/A)$ debe ser igual a 1. Si $lin.d.(B/A) > 1$ entonces obtenemos una torre no trivial de extensiones fuertes: o bien $A \leqslant A + span\ b \leqslant B$ es la torre resultante, o bien existe $\bar{b} \subset B$ que contiene a b tal que $span\ b \subsetneq span\ \bar{b} \subsetneq B$ y $\delta(span\ \bar{b}/span\ b) < 0$ y por lo tanto $\delta(A + span\ \bar{b}) = \delta(A)$. De esto se sigue que $A \leqslant A + span\ b \leqslant B$ es una torre no trivial de extensiones fuertes.

Luego, para $b \in B \setminus A$,

$$\Gamma^{\mathcal{B}} = \Gamma^{\mathcal{A}} + \langle b/m : b \in P_m^{\mathcal{B}} \rangle.$$

El tipo de b sobre A en este caso es llamado **el tipo genérico coloreado** sobre A.

Caso 3: $\Gamma^{\mathcal{B}} = \Gamma^{\mathcal{A}}$ y $\delta(B/A) > 0$.

Como $\Gamma^{\mathcal{B}} = \Gamma^{\mathcal{A}}$, se sigue que $B = A + span\ b$ para algún $b \in B \setminus A$ pues en caso contrario para cualquier $b \in B \setminus A$, la subestructura $\mathcal{D}$ de $\mathcal{B}$ tal que $D = A + span\ b$ sería un contraejemplo a la minimalidad de la extensión.

Luego $tr.d.(ex\ B/ex\ A) \leqslant 1$ y, como por hipótesis $\delta(B/A) > 0$, se tiene que $ex(b)$ debe ser trascendental sobre $ex\ A$, y por lo tanto $\delta(B/A) = 2$. En este caso, el tipo de b sobre A recibe el nombre **el tipo genérico blanco** sobre A.

Caso 4: $\Gamma^{\mathcal{B}} = \Gamma^{\mathcal{A}}$ y $\delta(B/A) = 0$.

Como en los casos anteriores se tiene que $B = A + span\ b$, pero en este caso $ex(b)$ es algebraico sobre $ex\ A$.

En lo que sigue haremos referencia a los cuatro casos anteriores mediante el calificativo “del primer tipo”, “del segundo tipo”, etc.

6.4. Los modelos $\omega-$saturados de T son ricos

Lema 24. *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in Sub\mathcal{K}_0$ tales que $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$. Entonces para cada $\bar{b} \subset \Gamma^{\mathcal{B}}$ linealmente independiente sobre A, el lugar geométrico de los puntos en $ex(\bar{b})$ sobre $\mathbb{Q}(ex\ A)^{alg}$ es una variedad normal.*

Demostración: Supongamos que la variedad no es normal, i.e. existen $\bar{m}^1, \ldots, \bar{m}^k \in \mathbb{Z}^r$ linealmente independientes (y donde r es la longitud de $\bar{b}$) tales que

$$2tr.d.((ex\ \bar{b})^{\bar{m}^1}, \ldots, (ex\ \bar{b})^{\bar{m}^k}/ex\ A) < k.$$

Como

$$lin.d.(\bar{m}^1 \cdot \bar{b}, \ldots, \bar{m}^k \cdot \bar{b}/A) = k,$$

y todos los $\bar{m}^i \cdot \bar{b}$ están en $\Gamma^{\mathcal{B}}$. Esto implica que la predimensión de

$$span(\bar{m}^1 \cdot \bar{b}, \ldots, \bar{m}^k \cdot \bar{b})$$

sobre A es negativa. Lo cual es una contradicción. $\dashv$

Lema 25. *Si $\mathcal{V}$ es un modelo $\omega-$saturado de T, entonces $\mathcal{V}$ es rico.*

Demostración: Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in Fin\mathcal{K}_0$ tales que $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{V}$ y $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$. Consideramos los cuatro casos para los diferentes tipos de extensiones fuertes minimales:

Caso 1: $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$ es del primer tipo.

Sea $\bar{b} \in (\Gamma^{\mathcal{B}})^n$ una base para B sobre A. Recordemos que en ese caso $tr.d.(ex\ \bar{b}/ex\ A) = \frac{n}{2}$ y $\Gamma^{\mathcal{B}} = \Gamma^{\mathcal{A}} + \langle b_j/m : P_m^{\mathcal{B}}(b_j)\rangle$.

Por el lema anterior, para W igual al lugar geométrico $(ex(\bar{b})/\mathbb{Q}(ex\ A))$, es una variedad normal. Entonces, como $\mathcal{V}$ es un modelo de T, para cada subvariedad propia W' de W sobre $\mathbb{Q}(ex\ A)$ y cualquier $N \in \mathbb{Z}_+$, existe $\bar{b}' \subset \Gamma$ tal que $ex(\bar{b}') \in W \setminus W'$ y, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, para cada $m \in \{1, \ldots, N\}$ y $r_{jm} \in \{0, \ldots, m-1\}$, $b'_j \equiv r_{jm} \pmod{m}$ en Γ si y sólo si $b'_j \equiv r_{jm} \pmod{m}$ en $\Gamma^{\mathcal{B}}$.

Como $\mathcal{V}$ es saturado existe $\bar{b}' \subset \Gamma$ tal que $ex(\bar{b}' \in W)$ y, para cada $m \in \mathbb{Z}_+$ y $r_{jm} \in \{0, \ldots, m-1\}$, $b'_j \equiv r_{jm} \pmod{m}$ en Γ si y sólo si $b'_j \equiv r_{jm} \pmod{m}$ en $\Gamma^{\mathcal{B}}$. Como W es normal, $\bar{b}'$ es linealmente independiente sobre A.

Sea $\mathcal{B}'$ la subestructura de $\mathcal{V}$ generada por $A \cup \bar{b}'$. Las condiciones sobre $\bar{b}'$ garantizan que la única transformación de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ sobre A tal que la imagen de b_j es b'_j es un isomorfismo. Por último, la suposición de que $\delta(A) = \delta(B)$ da como resultado que esta transformación es un encaje fuerte de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{V}$.

Caso 2: $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$ es del segundo tipo.

Sea $\mathcal{V}' \in \mathcal{K}_0$ tal que $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}'$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe algún $c \in \Gamma'$ tal que $ex(c)$ es trascendental sobre $ex\ B$. Sea $\mathcal{C}$ la subestructura de $\mathcal{V}'$ generada por $\mathcal{B} \cup c$.

Se tiene que $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B} \leqslant \mathcal{C}$, luego es suficiente probar que $\mathcal{C}$ se encaja de manera fuerte en $\mathcal{V}$ sobre $\mathcal{A}$.

Sea $\bar{a}$ una base para A y consideremos el $2-$tipo (parcial) sobre $\bar{a}$ que consiste de las fórmulas que expresan lo siguiente:

- x y y son linealmente independientes sobre A
- $ex(x)$ y $ex(y)$ son algebraicamente independientes sobre $ex(A)$
- $x \in \Gamma$ y $y \in \Gamma$
- $x \equiv r_m \pmod{m}$ para cada $m \in \mathbb{Z}_+$ y $r_m \in \{0, \ldots, m-1\}$ tal que $b \equiv r_m \pmod{m}$ en $\Gamma^{\mathcal{C}}$
- $y \equiv r_m \pmod{m}$ para cada $m \in \mathbb{Z}_+$ y $r_m \in \{0, \ldots, m-1\}$ tal que $c \equiv r_m \pmod{m}$ en $\Gamma^{\mathcal{C}}$
- $\Phi_0(x, y, \bar{a})$

Ahora mostraremos que cada subconjunto finito de $\Phi(x, y)$ se realiza en $\mathcal{V}$.

Para cada $N \in \mathbb{Z}_+$ consideremos la estructura $\mathcal{C} \in Fin\mathcal{K}_0$ que extiende a $\mathcal{B}$ tal que $C = B + span\ c$ para algún $c \notin B$, $\Gamma^{\mathcal{C}} = \Gamma^{\mathcal{B}} + span\ c$ y $ex^{\mathcal{C}}(c)$ es trascendente sobre $\mathbb{Q}(ex\ A)$ y algebraico sobre $\mathbb{Q}(ex\ B)$ con polinomio minimal de grado al menos $N+1$, e.g. $c = (b+1)^{\frac{1}{N+1}}$ (es posible verificar la irreducibilidad del polinomio obvio que se anula en c usando [Lan] VI.9.1). Así, $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{C}$ es una extensión minimal del primer tipo. Luego existe un encaje fuerte de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{V}$ sobre A. Dado un subconjunto finito $\Theta(x, y)$ de $\Phi(x, y)$, existe un N suficientemente grande tal que la imagen del par (b, c) bajo el encaje satisface todas las fórmulas de $\Theta(x, y)$.

Luego, como por hipótesis $\mathcal{V}$ es $\omega-$saturado, existen $\tilde{b}, \tilde{c} \in V$ tal que el tipo $\Phi(x, y)$ es realizado por $(\tilde{b}, \tilde{c}) \in \mathcal{V}$. Sea $\tilde{\mathcal{C}}$ la subestructura de $\mathcal{V}$ generada por $A \cup \{\tilde{b}, \tilde{c}\}$. La definición de $\Phi(x,y)$ nos da que $\tilde{\mathcal{C}} \leqslant \mathcal{V}$ es isomorfo a $\mathcal{C}$ sobre A.

Caso 3: $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$ es del tercer tipo.

Sea $\bar{a}$ una base para A y consideremos el tipo $\Phi(x)$ sobre $\bar{a}$ que consiste de enunciados que expresan lo siguiente:

- $ex\ x$ es trascendental sobre $ex\ A$
- $n \cdot x \notin \Gamma$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$
- $\Phi_0(x, \bar{a})$

Observemos que basta con probar que el tipo $\Phi(x)$ se realiza en $\mathcal{V}$.

Consideremos la extensión $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ generada por un solo punto c, i.e. $C = A + span\ c$, con $ex(c)$ trascendental sobre $ex(A)$ y $\Gamma^{\mathcal{C}} = \Gamma^{\mathcal{A}} + \langle c \rangle$. La extensión $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{C}$ es una extensión minimal del segundo tipo, luego, por el resultado para ese caso, podemos asumir que $\mathcal{C} \leqslant \mathcal{V}$. Observemos que cualquier subconjunto finito de $\Phi(x)$ es realizado por $\frac{c}{N}$ para cualquier entero N suficientemente grande. Como $\mathcal{V}$ es $\omega-$saturado, $\Phi(x)$ debe realizarse en $\mathcal{V}$.

Caso 4: $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$ es del cuarto tipo.

Sea $b' \in V$ tal que $ex(b')$ es una raíz del polinomio minimal de $ex(b)$ sobre $ex\ A$. Claramente ningún múltiplo racional de b' puede pertenecer a Γ o A. Se sigue que la subestructura $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{V}$ generada por A y b' es isomorfa a $\mathcal{B}$ sobre A, y es fuerte en $\mathcal{V}$ pues $\delta(B') = \delta(B) = \delta(A)$. $\dashv$

Teorema 8. *La teoría T es completa y sus modelos $\omega-$saturados son precisamente las estructuras ricas.*

Demostración: Mostraremos que para cualquier estructura $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}$ es rica si y sólo si es un modelo de T y un modelo $\omega-$saturado de su teoría completa. La completud de T se sigue del corolario 5 (la consistencia se sigue del lema 16 y de las observaciones hechas en la sección 5.2).

La suficiencia de esta afirmación es el lema anterior. Del corolario 6 y el lema 7 se sigue que si $\mathcal{V}$ es rica, entonces es un modelo de T.

Falta probar que toda estructura rica es $\omega-$saturada. Sea $\mathcal{V}$ una estructura saturada. Sea $\mathcal{V}'$ una extensión elemental de $\mathcal{V}$ que es $\omega-$saturada. Por el lema anterior $\mathcal{V}'$ también es rica y, por el corolario 5 $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ son $L_{\infty\omega}-$equivalentes. Es fácil ver que esta equivalencia preserva $\lambda-$saturación para cualquier cardinal infinito λ, por lo tanto $\mathcal{V}$ es un modelo $\omega-$saturado de su teoría completa. $\dashv$

Como en la demostración del lema anterior la $\forall\exists-$axiomatización sólo se usó para extensiones fuertes minimales del primer tipo, es posible una axiomatización diferente para T.

Definición 34. Diremos que una variedad normal $W \subset F^n$ **viene de una extensión fuerte minimal del primer tipo** si $dim\, W = \frac{n}{2}$ y para cualquier toro propio T en F^n de codimensión k, $dim\, W^T > \frac{k}{2}$.

Como corolario de la demostración anterior se tiene el siguiente resultado.

Corolario 8. *Sea $\mathcal{V} = (V, \Gamma, ex, F)$ una estructura en $\mathcal{K}_0$. Entonces $\mathcal{V}$ es un modelo de T si y sólo si se cumple lo siguiente:*

Para cualquier variedad normal $W \subset F^n$ que se obtiene de una extensión fuerte minimal del primer tipo, cualquier subvariedad propia W' de W, y cualquier sistema consistente de relaciones de congruencias

$$\{x_j \equiv r_{jm} \pmod{m} : j \in \{1, \ldots, n\}, m \in \{1, \ldots, N\}\}$$

donde $N \in \mathbb{Z}_+$ y $r_{jm} \in \{0, \ldots, m-1\}$, existe $\bar{b} \in \Gamma^n$ tal que $ex(\bar{b}) \in W \smallsetminus W'$ y $\bar{b}$ satisface todas las relaciones de congruencia en Γ.

La equivalencia del corolario anterior simplifica la tarea de revisar que una estructura en particular sea un modelo de T.

6.5. Superestabilidad

A continuación se mostrará que la teoría T es superestable. Observemos que es posible aplicar el corolario 4 a isomorfismos entre estructuras fuertes que no son necesariamente de dimensión finita.

Lema 26. *Sean $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ estructuras ricas. Si $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \in Sub\mathcal{K}_0$ son subestructuras fuertes de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ respectivamente entonces cualquier isomorfismo $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ es un mapeo elemental de $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}'$.*

Demostración: Como $\mathcal{B} \leqslant \mathcal{V}$, $\mathcal{B}$ puede representarse como $\cup_i \mathcal{B}_i$, en donde los $\mathcal{B}_i$ son una enumeración de todas las subestructuras fuertes de dimensión finita de $\mathcal{B}$. Veremos que para cada i, $f(\mathcal{B}_i)$ es una subestructura fuerte de $\mathcal{V}'$ y luego, por el corolario 4 la restricción de f a $\mathcal{B}_i$ es un mapeo elemental de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}'$. Como todo subconjunto finito de $\mathcal{B}$ está contenido en algún $\mathcal{B}_i$, se sigue que f es también un mapeo elemental de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}'$.

Como $\mathcal{B}' \leqslant \mathcal{V}'$, para cada i se tiene que

$$cl_{\mathcal{V}'}(f(B_i)) = cl_{\mathcal{B}'}(f(B_i)).$$

Y como f es un isomorfismo y cada $\mathcal{B}_i$ es una subestructura fuerte de $\mathcal{B}$,

$$cl_{\mathcal{B}'}(f(B_i)) = cl_{\mathcal{B}}(f(B_i)) = f(B_i).$$

Luego, $cl_{\mathcal{V}'}(f(B_i)) = f(B_i)$, lo que significa que $f(\mathcal{B}_i) \leqslant \mathcal{V}'$. $\dashv$

En lo que resta del capítulo $\mathcal{V}$ denotará un modelo monstruo de T. En particular $\mathcal{V}$ será un modelo rico.

Ahora puntualizamos el significado de estabilidad en este contexto multivariado. Para cualquier cardinal infinito λ, T será $\omega-$estable si y sólo si para cualesquiera $A \subset V$ y $C \subset F$ tales que $|A \cup C| \leqslant \lambda$ existen a lo más λ tipos diferentes en una variable (en V o F), sobre $A \cup C$. Diremos que la teoría T es **superestable** si es $\lambda-$estable para todo cardinal λ suficientemente grande.

Teorema 9. *La teoría T es superestable.*

Demostración: Observemos que al ser ex sobre $F \setminus \{0\}$, para mostrar que T es $\lambda-$estable (para cualquier cardinal infinito λ) podemos restringirnos a tipos de una variable que tome valores en el universo V y sobre un conjunto de parámetros $A \subset V$ tal que $|A| = \lambda$. Más aún, como para cada A se tiene que $A \subset cl(A)$ y $|cl(A)| = |A|$, es posible asumir que A es el dominio de una subestructura fuerte de $\mathcal{V}$.

Sea $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{V}$ de cardinalidad λ. Para cada tipo p sobre A en una variable que recorre V, elegimos una realización $b \in V$ de p y una base correspondiente $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ de $cl(A + span(b))$ sobre A, con $b_1 = b$ (la dimensión de $cl(A + span(b))$ sobre A es finita por el lema 18). El mapeo inducido

$$p \mapsto \mathrm{qf} - \mathrm{tp}(\bar{b}/A).$$

es injectivo (por el lema anterior).

El tipo libre de cuantificadores de cada $\bar{b}$ sobre A queda determinado $\dashv$

Capítulo 7

Toros Cuánticos y Campos Esmeralda

En el presente capítulo expondremos la relación entre el campo esmeralda y los toros cuánticos. El interés principal es la posibilidad de usar la teoría de modelos para introducir nociones propias de geometría algebraica como variedades (conjuntos definibles), ideales (tipos) y dimensión (rangos de Lascar y Morley) en el estudio de los toros cuánticos. Además queremos hacer evidente la relación entre diferentes construcciones de estructuras (modelos) y el toro cuántico u objetos geométricos relacionados. Por la extensión y densidad del material ajeno a la teoría de modelos, el presente capítulo es esencialmente expositorio. Para un desarrollo más claro sobre geometría no conmutativa y toros cuánticos ver [CM], y para un desarrollo más completo sobre el material de este capítulo ajeno a la teoría de modelos ver [Con].

7.1. Toros cuánticos

Existen varias formas en las que podemos pensar en los toros cuánticos y a continuación presentaremos algunas. El toro cuántico es el ejemplo prototípico de un espacio no conmutativo. La definición más sencilla es la siguiente:

Definición 35. Sea $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Entonces el **toro cuántico** $\mathbb{T}_\theta$ se define como

$$\mathbb{T}_\theta = \mathbb{R}/\langle 1, \theta \rangle$$

en donde $\langle 1, \theta \rangle$ es el grupo generado por 1 y θ.

Proposición 1 (Kronecker)**.** *$\langle 1, \theta \rangle$ es denso en $\mathbb{R}$.*

Demostración: Ver el capítulo XXIII en [Har]. $\dashv$

De la proposición anterior se sigue que la topología de $\mathbb{T}_\theta$ es la topología indiscreta. Luego, es necesario desarrollar herramientas adecuadas para estudiar $\mathbb{T}_\theta$ con una topología interesante. La primera de estas herramientas es la de foliaciones.

Una $n-$**foliación** $\mathcal{F}$ consiste de una M variedad de dimensión $n+k$ dotada de un atlas de cartas de la siguiente forma:

$$\varphi : U \subset M \to \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$$

donde $U, \mathcal{O}$ son abiertos y las transiciones $\psi \circ \varphi^{-1}$ son funciones de la forma

$$(x,t) \longmapsto (h_t(x), \phi(t)),$$

h es suave, ϕ es continua y la familia h_t es normal.

De manera intuitiva esta condición dice que las transiciones son congruentes con las familias

$$\mathbb{R}^n \times \{t\}, \quad t \in \mathbb{R}^k.$$

Escribimos $x \sim y$ si existe una carta φ tal que $\varphi(x), \varphi(y) \in \mathbb{R}^n \times \{t\}$ para algún $t \in \mathbb{R}^k$. La clase de equivalencia

$$L_x = \{y \mid y \sim x\}$$

es una $n-$variedad a la que llamaremos **la hoja por** x. Observemos que $M = \sqcup L_x$. Definimos **el espacio de hojas de** $\mathcal{F}$ como el cociente

$$Hoja(\mathcal{F}) = M/\sim$$

con la topología cociente.

El concepto dual de hoja es el de una transversal. Si $x \in \mathcal{F}$, entonces una **transversal** que contiene a x es una $k-$subvariedad T contenida en $\mathcal{F}$ tal que $T \cap L$ es numerable y discreta para cada hoja L. Para todo $x \in T$, existe una vecindad $V \subset T$ en donde $\mathcal{O} = \varphi^{-1}(\{\varphi(x)\} \times \mathcal{V})$, con $\mathcal{V}$ un abierto en $\mathbb{R}^k$.

Sea $\gamma : I \to L$ un camino contenido en una hoja L. Sean T_1, T_2 transversales homeomorfos a $D^k \subset \mathbb{R}^k$, el disco unitario en $\mathbb{R}^k$, que contienen a $\gamma(0), \gamma(1)$. Si T_1 y T_2 son suficientemente pequeños, entonces γ define un homeomorfismo $\gamma : T_1 \to T_2$ al trasladar T_1 a T_2 a lo largo de una cadena de trivializaciones locales que cubren γ. El germen de este homeomorfismo recibe el nombre de **holonomía** de γ.

Como ejemplo podemos considerar $\tilde{\mathcal{F}}_\theta = \mathbb{R}^2$ con la familia de líneas de pendiente θ, que es una $1-$foliación.

Definición 36. Sea $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Entonces la **foliación de Kronecker** $\mathcal{F}_\theta$ es la imagen de $\tilde{\mathcal{F}}_\theta$ en $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Las hojas de $\mathcal{F}_\theta$ son las imágenes de las líneas de $\tilde{\mathcal{F}}_\theta$ y por la irracionalidad de θ, las hojas no se cierran. Más aún, ya que son homeomorfas a $\mathbb{R}$, son densas en el toro.

Sea L_θ la hoja que pasa por cero, que es un subgrupo del toro $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Dados $x, y \in \mathbb{T}$, observamos que

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in L_\theta.$$

Por lo tanto el espacio de hojas de $\mathcal{F}_\theta$ es $Hoja(\mathcal{F}_\theta) = \mathbb{T}/\sim = \mathbb{T}/L_\theta$.

Proposición 2. $Hoja(\mathcal{F}_\theta) \cong \mathbb{T}_\theta$.

Demostración: Damos el siguiente bosquejo. El mapeo $f : \mathbb{R} \to \{0\} \times \mathbb{R}$ induce un isomorfismo $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \{0\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \subset \mathbb{T}$. Sean $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Si $\bar{x} = \bar{y} + n\bar{\theta}$, entonces $f(\bar{y}) - f(\bar{x}) = f(n\bar{\theta})$ es igual a la imagen en $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ de $(n, n\theta) \in L_\theta \subset \mathbb{R}^2$, luego f induce un homomorfismo.

$$(\mathbb{R}/\mathbb{Z})/\langle\bar{\theta}\rangle = \mathbb{T}_\theta \to Hoja(\mathcal{F}_\theta).$$

$$\bar{x} + \langle\bar{\theta}\rangle \longmapsto L_{f(\bar{x})}.$$

Este mapeo es inyectivo y sobre, y por lo tanto define un isomorfismo. ⊣

La segunda herramienta que consideraremos es la de las álgebras C^* y el programa de la geometría no conmutativa.

Definición 37. Un **álgebra** C^* A es un álgebra de Banach sobre los números complejos junto con una involución $* : A \to A$ conjugada lineal, que satisface

$$||x^*x|| = ||x||\,||x^*|| = ||xx^*||.$$

Por ejemplo, si X es un espacio Hausdorff compacto observemos que

$$C^*(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ continua}\}$$

es un álgebra C^* con norma definida por

$$||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

y con $f^* = \bar{f}$.

La piedra angular de este enfoque es el teorema de dualidad de Gelfand.

Teorema 10 (Dualidad de Gelfand)**.** *Sean ECH la categoría de los espacios de Hausdorff compactos, AC^*C la categoría de álgebras C^* conmutativas, X un espacio de Hausdorff compacto y $C(X)$ el álgebra C^* conmutativa de funciones continuas $f : X \to \mathbb{C}$. Entonces la asociación*

$$X \to C(X)$$

define un functor invertible y por lo tanto una equivalencia de categorías .

La idea detrás del programa de la geometría no conmutativa es extender el rango del functor del teorema 10 a álgebras C^* no conmutativas cuando X es un espacio compacto no necesariamente Hausdorff. En general no hay un procedimiento obvio para lograr esta extensión, sin embargo, para el caso de un espacio de hojas (como el toro cuántico) sí existe un procedimiento y lo describimos a continuación.

Sea Γ_θ la gráfica de holonomía de $\mathcal{F}_\theta$. Esto consiste de clases de equivalencia de la forma

$$\{\gamma : [0,1] \to \mathbb{T} \quad | \quad \gamma(s) \sim \gamma(t) \quad \forall s,t\}/\approx$$

en donde

$$\gamma \approx \eta \quad \Leftrightarrow \quad \gamma(0) = \eta(0), \gamma(1) = \eta(1)$$

y $\gamma^{-1} \circ \eta$ define la misma holonomía [Con]. En el caso de $\mathcal{F}_\theta$, esta equivalencia se simplifica a

$$\gamma \approx \eta \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \quad \text{es homotópica a} \quad \eta,$$

i.e. si $\gamma(0) = \eta(0), \gamma(1) = \eta(1)$ pues las hojas son simplemente conexas. Γ_θ es una generalización del grupoide fundamental de topología.

Se puede definir una topología en Γ_θ para que sea un espacio de Hausdorff y definimos $C(\mathbb{T}_\theta) = C_0(\Gamma_\theta)$, en donde C_0 es el conjunto de funciones con soporte compacto en Γ_θ con producto de convolución, i.e.

$$(f * g)(\gamma) = \int f(\eta) g(\gamma \cdot \eta^{-1}) d\eta$$

integrando sobre $\{\eta \mid \eta(1) = \gamma(1)\}$.

Sea $L^2(K)$ el espacio de sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (con $x_n \in K$ y K un campo) tales que $\sum |x_n|^2 < \infty$. Entonces definimos $\mathcal{H}_a = L^2(L_a)$, en donde L_a es la imagen de $y = \theta x + a$, que es igual a la hoja que pasa por $\bar{a} \in S^1$ y que identificamos con (es igual a) L_a. Observemos que $L^2(L_a) \approx L^2(\mathbb{R})$. Luego el conjunto

$$\Gamma_{\theta,a} = \{\gamma \in \Gamma_\theta \mid \gamma(0) = a\}$$

es isomorfo a L_a y se tiene que $\Gamma_{\theta,a} \subset \Gamma_\theta$, entonces $H_a = L^2(L_a) \approx L^2(\Gamma_{\theta,a})$.

Ahora definimos la acción de $C(\mathbb{T}_\theta)$ sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_a$ de la siguiente manera. Si $\xi \in H_a,\ f \in C(\mathbb{T}_\theta)$, entonces

$$(f \cdot \xi)(\gamma) = \int_{\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2} f(\gamma_1) \cdot \xi(\gamma_2).$$

Esta acción nos da una representación $\pi_a : C(\mathbb{T}_\theta) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_a)$ en donde $\mathcal{B}(\mathcal{H}_a)$ es el conjunto de operadores acotados de $\mathcal{H}_a$. Por último definimos la norma de $f \in C(\mathbb{T}_\theta)$ de la siguiente manera

$$||f|| := \sup_a ||\pi_a(f)||.$$

Resulta que en geometría no conmutativa, la relación de equivalencia relevante no es un isomorfismo, sino algo más crudo, a saber, la equivalencia de Morita. Luego esta álgebra es equivalente en el sentido de Morita a un álgebra más simple, a saber, el álgebra de rotaciones generada por dos elementos [Rie].

Sean $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ y $\mathcal{A}_\lambda = \langle U, V \mid UV = \lambda UV\rangle$ el álgebra compleja generada por U, V con la relación $UV = \lambda UV$.

Sea $H = L_2(\mathbb{T})$ (con $\mathbb{T}$ igual al círculo unitario) y definimos para toda $\xi \in H$

$$U\xi(t) := e^{2\pi it}\xi(t)$$

$$V\xi(t) := \xi(t+\theta)$$

se tiene

$$VU = \lambda UV.$$

Esto induce una representación $\pi : A_\lambda \to \mathcal{B}(H)$. Luego, para todo x en A_λ definimos

$$||x|| := ||\pi(x)||.$$

Teorema 11. *$C(\mathbb{T}_\theta)$ es Morita equivalente a $\mathcal{A}_\lambda$.*

Hasta ahora se han presentado el estudio del toro cuántico desde el enfoque de las foliaciones. En lo que resta se presentará la relación existente entre los campos esmeralda y el enfoque de la geometría no conmutativa.

7.2. Toros cuánticos asociados a una estructura superestable

En esta sección se mostrará que a partir de la estructura $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, \mathcal{A}_\theta \rangle$ (en donde $\mathcal{A}_\theta$ es un subgrupo aditivo) se obtiene el toro cuántico. Más aún, se presentará una construcción que sugiere un camino posible que permita recuperar el álgebra C^* asociada a $\mathbb{T}_\theta$.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ tales que generan $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}-$espacio vectorial y escribamos i en esta base como $i = i_a\alpha + i_b\beta$. Supongamos que el conjunto $\mathcal{A} = \{1, 2\pi i_a, 2\pi i_a\theta\}$, con $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, es linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$ (esto siempre se puede garantizar con una elección adecuada de los parámetros). Consideremos $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, \mathcal{A}_\theta \rangle$ donde $\mathcal{A}_\theta$ es un predicado que representa al subgrupo aditivo

$$\mathcal{A}_\theta = \beta\mathbb{R} + 2\pi i\mathbb{Z} + 2\pi i\theta\mathbb{Z} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Ejemplo: Sean $\alpha = i, \beta = 1$, entonces, $i_a = 1, i_b = 0$ y elegimos θ tal que $\{1, 2\pi, 2\pi\theta\}$ es un conjunto linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$, luego

$$\mathbb{C}/\mathcal{A}_\theta \cong i\mathbb{R}/\langle 2\pi i, 2\pi i\theta \rangle \cong \mathbb{T}_\theta.$$

Lema 27. *Podemos expresar $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:*

$$\mathbb{R} = R \oplus 2\pi i_a \cdot \mathbb{Q} \oplus 2\pi i_a\theta \cdot \mathbb{Q} \quad \text{con} \quad \mathbb{Q} < R < \mathbb{R}.$$

Demostración: Sea $T = 2\pi i_a \cdot \mathbb{Q} \oplus 2\pi i_a\theta \cdot \mathbb{Q}$. Entonces T es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ generado por $\{2\pi i_a, 2\pi i_a h\}$

$$T \hookrightarrow \mathbb{R} \to \mathbb{R}/T$$

es una sucesión exacta de $\mathbb{Q}-$espacios vectoriales. Como consecuencia del splitting lemma se sigue que existe $\sigma : \mathbb{R}/T \to \mathbb{R}$ tal que σ es una sección. σ es un homomorfismo y

$$\mathbb{R} = T \oplus \sigma(\mathbb{R}/T)$$

con $R = \sigma(\mathbb{R}/T)$. $\dashv$

Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces por el lema anterior existen $r \in R$ y $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ tales que

$$x = r + q_1 \cdot 2\pi i_a + q_2 \cdot \pi i_a \theta.$$

Definamos la función "parte entera de x con respecto a θ" como

$$\begin{aligned} [\,x]_\theta &:= [\,r + q_1 \cdot 2\pi i_a + q_2 \cdot \pi i_a \theta]_\theta \\ &= [\,r + (q_1 - [\,q_1])2\pi i_a + (q_2 - [\,q_2])2\pi i_a \theta]. \end{aligned}$$

en donde $[\,\cdot]$ es la parte entera usual. Observemos que esta función cumple con:

(i) $[\,0]_\theta = 0$

(ii) $[\,x+1]_\theta = [\,x]_\theta + 1$

(iii) $[\,x + 2\pi i_a]_\theta = [\,x]_\theta$

(iv) $[\,x + 2\pi i_a \theta]_\theta = [\,x]_\theta$

y definimos la función

$$\mathbf{bd}w = 2\pi i \theta [w_a]_\theta,$$

con $w = w_a \alpha + w_b \beta$. Observemos que para (ii) usamos el hecho de que 1 es independiente sobre $\mathbb{Q}$ de $2\pi i_a$ y $2\pi i_a \theta$.

Definición 38. Sean $\tilde{u}, \tilde{v} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definidas por

$$\tilde{u}(w) = w + \alpha$$

y

$$\tilde{v}(w) = w + \beta + \mathbf{bd}(w).$$

Sea $[\tilde{v}, \tilde{u}]w$ el conmutador de $\tilde{v}, \tilde{u}$ aplicado al elemento w. Entonces de la definición anterior se sigue que $[\tilde{v}, \tilde{u}]w = w + 2\pi i \theta$. En efecto,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(w) &= \alpha + w; \\ \tilde{v} \circ \tilde{u}(w) &= \alpha + \beta + w + bd_\theta(\alpha + w) \\ &= \alpha + \beta + bd_\theta w + 2\pi i \theta; \\ \tilde{u}^{-1} \circ \tilde{v} \circ \tilde{u}(w) &= \beta + w + 2\pi i \theta + bd_\theta w; \\ \tilde{v}^{-1} \circ \tilde{u}^{-1} \circ \tilde{v} \circ \tilde{u}(w) &= 2\pi i \theta + w. \end{aligned}$$

Nota: $\mathcal{A}_\theta$ es el subgrupo de todos los periodos de bd_θ. Las traslaciones $w \mapsto a + w$ de $\mathbb{C}$ que conservan la estructura $(\mathbb{C}, \tilde{u}, \tilde{v})$ son exactamente las traslaciones con $a \in \mathcal{A}_\theta$ (i.e. traslaciones que conmutan con $\tilde{u}, \tilde{v}$).

Ahora consideraremos el campo esmeralda, que es la estructura bivariada

$$((\mathbb{C}, +, \mathcal{A}_\theta), exp, \mathbb{C}^*)$$

en donde[1] $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ y la parte de $\mathbb{C}^*$ viene equipada con el lenguaje usual de todas las relaciones cerradas de Zariski (como en el caso de $\mathcal{V}$ en la definición 17 del capítulo 5).

Sea $t = exp\ w$. Entonces definimos

$$\mathrm{ang}_\theta t := \exp \mathrm{bd}_\theta w.$$

De las definiciones de las funciones bd_θ y ang_θ se sigue que, para $q = exp\ 2\pi i\theta$,

$$\mathrm{ang}_\theta qt = \mathrm{ang}_\theta t,$$

$$\mathrm{ang}_\theta e^\beta t = \mathrm{ang}_\theta t,$$

$$\mathrm{ang}_\theta e^\alpha t = q \cdot \mathrm{ang}_\theta t.$$

Entonces, si definimos

$$U : t \mapsto e^\alpha \cdot t$$

y

$$V : t \mapsto e^\beta \cdot t \cdot \mathrm{ang}_\theta t,$$

se tiene que para todo $t \in \mathbb{C}^*$

$$VUt = qUVt.$$

Formalmente obtenemos un álgebra que cumple con la relación indicada que es isomorfa a A_λ mediante la representación $\pi : A_\lambda \to \mathcal{B}(H)$.

Nota: Sería interesante encontrar una representación natural de estos operadores en un espacio de funciones C^*. Hay algunas ideas en [Zil05] (págs. 32,33) pero aún no es posible obtener un espacio de Hilbert con este procedimiento.

7.3. Implicaciones de estabilidad

El grado de estabilidad de una estructura está íntimamente relacionado con la posibilidad de darle una estructura geométrica. De manera más precisa, la estabilidad de una estructura esta íntimamente relacionada con la posibilidad de definir una buena noción de dimensión en ella.

Definición 39 (rango de Morley)**.** Sea M una $\mathscr{L}-$estructura y $\varphi(\bar{v})$ una fórmula de $\mathscr{L}$. Definimos $RM^M(\varphi) \geqslant \alpha$ de manera inductiva:

i) $RM^{\mathcal{M}}(\varphi) \geqslant 0$ si y sólo si $\varphi(M) \neq \varnothing$;

[1]Para esta estructura usamos la convención de notación de la definición 17. Escribimos $((\mathbb{C}, +, \mathcal{A}_\theta), exp, \mathbb{C}^*)$ en lugar de $(\mathbb{C}, \mathcal{A}_\theta, exp, \mathbb{C}^*)$ para enfatizar que la estructura de la primera parte es aditiva, mientras que la segunda parte es multiplicativa.

ii) si α es un ordinal límite, entonces $RM^M(\varphi) \geqslant \alpha$ si y sólo si $RM^M(\varphi) \geqslant \beta$, para todo $\beta < \alpha$;

iii) para cualquier ordinal α, $RM^M(\varphi) \geqslant \alpha + 1$ si y sólo si existen fórmulas $\psi_1(\bar{v}), \psi_2(\bar{v}), \ldots$ tales que $\psi_1(M), \psi_2(M), \ldots$ es una familia infinita de subconjuntos disjuntos dos a dos de $\varphi(M)$ y $RM^M(\psi_i) \geqslant \alpha$ para todo i.

El **rango de Morley** de φ en M, denotado por $RM^M(\varphi)$, se define de la siguiente manera:

- si $\varphi(M) = \varnothing$, entonces $RM^M(\varphi) = -1$;
- si $RM^M(\varphi) \geqslant \alpha$ pero $RM^M(\varphi) \ngeqslant \alpha + 1$, entonces $RM^M(\varphi) = \alpha$;
- si $RM^M(\varphi) \geqslant \alpha$ para todo ordinal α, entonces $RM^M(\varphi) = \infty$.

Para p un tipo, definimos $RM(p) = \text{ínf}\{RM(\varphi) \mid p \vDash \varphi\}$.

Observemos que si p es un tipo completo, la definición de $RM(p)$ se reduce a

$$RM(p) = \text{ínf}\{RM(\varphi) \mid \varphi \in p\}.$$

En una estructura $\mathcal{M}$ que es $\omega-$estable es posible definir una noción de dimensión mediante el rango de Morley que funciona para conjuntos definibles y tipos pues si $T = th(\mathcal{M})$ es $\omega-$estable, entonces el rango de Morley siempre existe para todo tipo p ([Bal], pág. 159, lema 2.4). Por otro lado, $\omega-$estabilidad implica minimalidad fuerte ([Mar], pág 212.) y esto como ya se mencionó permite definir una (pre)geometría. Más aún, para una estructura fuertemente minimal tenemos la siguiente relación: modificando un poco la definición 5 tenemos que, para $Y, B \subset X$ con X una pregeometría, la **dimensión** de Y **sobre** B será igual a la cardinalidad de un conjunto A que sea maximal en $cl(Y \cup B)$ como conjunto independiente sobre B, y lo denotaremos por $dim(Y/B)$. El siguiente resultado y su demostración se encuentran en [Bue] pág. 78.

Lema 28. *Sea φ fuertemente minimal sobre A' y $D = \varphi(M)$ (con $M \vDash T$ y T una teoría completa). Si $\bar{a} \in D$ y $A' \subset A$, entonces el rango de Morley de $tp(\bar{a}/A)$ es igual a $dim(\bar{a}/A)$.*

En [Mar] (lemas de las páginas 217 y 218) se demuestra que es posible definir el rango de Morley de manera que sea independiente del modelo del cual provienen los parámetros, para esto se pide la condición adicional de que M, N sean modelos $\omega-$saturados y $M \prec N$ y entonces se define el rango de Morley de φ (lo denotaremos por $RM(\varphi)$), como $RM^N(\varphi)$. Con esto estamos listos para definir una noción de dimensión sobre los conjuntos definibles de la siguiente manera:

Definición 40. Sea T una teoría completa con modelos infinitos, $M \vDash T$ y $X \subseteq M^n$ es definido por la fórmula $\varphi(\bar{v})$. Definimos **el rango de Morley** de X, denotado por $RM(X)$, como $RM(\varphi)$ ([Mar], pág. 218).

En particular, si M es $\aleph_0-$saturado y $X \subseteq M^n$ es un conjunto definible, entonces $RM(X) \geqslant \alpha + 1$ si y sólo si existen $Y_1, Y_2, \ldots$ subconjuntos definibles de X mutuamente ajenos tales que $RM(Y_i) \geqslant \alpha$ para cada i. El rango de Morley cumple con las siguientes propiedades: si X, Y son subconjuntos definibles de M^n, entonces $X \subseteq Y$ implica $RM(X) \leqslant RM(Y)$; $RM(X \cup Y)$ es el máximo entre $RM(X)$ y $RM(Y)$ y, para X no vacío, $RM(X) = 0$ si y sólo si X es finito.

Como ya se mencionó los conjuntos definibles son algo parecido a las variedades algebraicas. De hecho para campos algebraicamente cerrados de característica 0, el rango de Morley coincide con la dimensión de Krull, aunque para el desarrollo general de las geometrías de Zariski no es conveniente tomar la dimensión de Krull pues genera problemas al extender a estructuras analíticas de Zariski (definidas en la siguiente sección). Para una estructura superestable es posible definir el rango de Lascar sobre tipos de la siguiente manera:

Definición 41. Sea $\mathcal{M}$ una estructura de primer orden, $A \subseteq M$ un subconjunto del universo, $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ una fórmula del lenguaje de $\mathcal{M}$ y $\bar{b}$ elementos de M. Diremos que $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ **se divide** sobre A si existen $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}$ una extensión elemental de $\mathcal{M}$ y una sucesión $\bar{b}_0, \bar{b}_1, \ldots$ de realizaciones del tipo de $\bar{b}$ sobre A tal que para para cualquier $K \subset \omega$ de cardinalidad k,

$$\bigcap_{i \in K} \varphi(N, \bar{b}_i) = \varnothing.$$

Diremos que la fórmula $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ **bifurca** sobre A si implica a una disyunción finita de fórmulas que se dividen, i.e.

$$\varphi \rightarrow \psi_1 \vee \psi_2 \vee \cdots \vee \psi_n.$$

Si $A \subseteq B \subseteq M$ y $p \in S_n^{\mathcal{M}}(B)$, entonces diremos que p **bifurca sobre** A si existe una fórmula en p que bifurca. Si $\bar{a} \in M$, entonces diremos que $\bar{a}$ **es libre de** B **sobre** A si el tipo de $\bar{a}$ sobre B no bifurca sobre A.

Para los casos en los que es posible definir el rango de Morley, la definición de bifurcación se reduce al siguiente enunciado más simple: sean $A \subseteq B$, $p \in S_n(A)$, $q \in S_n(B)$ y $p \subseteq q$. Si $RM(q) < RM(p)$, diremos que q es una extensión de p que **bifurca** y que q **bifurca** sobre A. Si $RM(q) = RM(p)$ entonces diremos que q es una extensión de p que **no bifurca**.

Definición 42. El **rango de Lascar** (o el rango U), de un tipo completo $p \in S(A)$ (denotado por $U(p)$) sobre un subconjunto $A \subseteq M$ del universo de un modelo M se define por:

- $U(p) \geqslant 0$;
- $U(p) \geqslant \alpha + 1$ si y sólo si p tiene una extensión que bifurca de rango U al menos α, i.e. existe una extensión elemental N de M, un conjunto $A \subseteq B \subseteq N$ y un tipo $q \in S(B)$ una extensión que bifurca de p tal que $U(p) \geqslant \alpha$;
- $U(p) \geqslant \lambda$, con λ un ordinal límite, si y sólo si para todo $\alpha < \lambda$, $U(p) \geqslant \alpha$.

Definimos entonces que $U(p) = \alpha$ si $U(p) \geqslant \alpha$ pero no se tiene que $U(p) \geqslant \alpha + 1$. Si no existe un tal ordinal entonces definimos $U(p) = \infty$.

En [Bue] (pág. 295) se demuestra que para T superestable, el rango de Lascar siempre existe.

A manera de recapitulación, para una teoría $\omega-$estable (siempre) es posible definir el rango de Morley para fórmulas, tipos y conjuntos definibles. Por otro lado, para una teoría superestable (siempre) es posible definir el rango de Lascar, pero sólo sobre tipos completos. Esto de alguna manera permite portar herramientas propias de la geometría algebraica al estudio de estructuras en las cuales es posible definir una buena noción de dimensión, i.e. las estructuras en las que es posible definir una noción conveniente de rango.

Conjetura 1 (Schanuel)**.** *Dados $z_1, \ldots, z_n$ números complejos linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, entonces el campo de extensión $\mathbb{Q}(z_1, \ldots, z_n, exp(z_1), \ldots, exp(z_n))$ tiene grado de transcendencia al menos n sobre $\mathbb{Q}$.*

Teorema 12. *La teoría de $((\mathbb{C}, +, \mathcal{A}_\theta), exp, \mathbb{C}^*)$ es superestable, siempre que la conjetura de Schanuel sea cierta.*

Esta conjetura, en caso de ser cierta implicaría a la mayoría de los resultados conocidos en teoría de números transendentales. El caso particular en el que los $z_1, \ldots, z_n$ son todos algebraicos es el Teorema de Lindemann-Weierstrass. Si se eligen los $z_1, \ldots, z_n$ de tal manera que $exp(z_1), \ldots, exp(z_n)$ sean todos algebraicos entonces se estaría demostrando que logaritmos de números algebraicos son algebraicamente independientes, lo cual sería una versión más fuerte del Teorema de Baker. De esta versión más robusta del Teorema de Baker se sigue el Teorema de Gelfond-Schneider al igual que la conjetura de las cuatro exponenciales.

El teorema 12 se demuestra en el capítulo anterior para el caso general siguiendo el desarrollo de [Cay] y como se menciona en [Zil10] se sigue esencialmente del desarrollo de Poizat. En [Zil04] se demuestra la $\omega-$estabilidad de la teoría para el caso

$$\mathcal{G} = exp(\beta\mathbb{R} + \delta\mathbb{Q})$$

en donde β no pertenece a los ejes de $\mathbb{C}$ y $\delta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi i\mathbb{Q}$. El mismo argumento funciona para el caso con $\mathcal{G}_\theta = exp(\mathcal{A}_\theta)$, el cual genera una $\mathbb{C}-$álgebra.

7.4. Geometrías analíticas de Zariski

Como se mencionó en la introducción la conjetura de tricotomía resulto falsa en general, pero cierta para el conjunto de estructuras denominadas geometrías de Zariski clásicas y que fueron desarrolladas en [HZ].

Esta sección está basada en [Zil10] y busca contextualizar el desarrollo del toro cuántico dentro de la teoría de modelos como un ejemplo de una geometría de Zariski no clásica, lo cual permite pensar en el toro cuántico como si fuera un campo. Las páginas indicadas hacen referencia a [Zil10].

Presentamos a continuación las definiciones básicas relevantes a este tema.

Definición 43. Una **estructura topológica** consta de un conjunto M y, una familia de subconjuntos (definibles) de M^n (para cada n) que cumplen con las condiciones de conjuntos cerrados. Esta estructura será **noetheriana** si cumple con la condición de cadenas descendentes[2] (pág. 12).

Notación: $K \subseteq_{cl} M$ significa que K es cerrado en M y análogamente para subconjuntos abiertos U de M denotaremos $U \subseteq_{op} M$. $pr(S)$ denotará la proyección del subconjunto $S \subset M^n$ dada por

$$pr_I : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) \quad \text{donde} \quad I = (i_1, \ldots, i_m),$$

con $m \leqslant n$.

En el capítulo 2 se dió una definición algebraica para los conjuntos definibles. En [Zil10] (pág. 7) se da una definición inductiva netamente conjuntista en donde toda relación $S \subset M^n$ que representa a un elemento primitivo (símbolo de relación, función o constante) del lenguaje $\mathscr{L}$ es definible; dados dos definibles su producto cartesiano, unión, intersección, complemento y proyección es definible. Esta definición es de hecho equivalente a la más usual que es por inducción sobre la complejidad de las fórmulas.

Diremos que un subconjunto definible S es **irreducible** si no existen subconjuntos propios $S_1, S_2 \subseteq_{cl} S$ relativamente cerrados tales que $S = S_1 \cup S_2$ (pág 14).

Ahora, definimos lo que entendemos por una **buena noción de dimensión** (pág. 25) para conjuntos definibles. A cada $S \subset M^n$ le asociamos un entero positivo $dim\ S$ de la siguiente manera:

Definición 44. (buena noción de dimensión)

- la dimensión de un punto será igual a 0;
- $dim\ S_1 \cup S_2 = \max\{dim\ S_1, dim\ S_2\}$;
- para cualquier $S \subseteq_{cl} U \subseteq_{op} M^n$ irreducible y sus subconjuntos cerrados $S_i \subseteq_{cl} S$, si $S_i \neq S$, entonces $dim\ S_i < dim\ S$;
- para cualquier $S \subseteq_{cl} U \subseteq_{op} M^n$ irreducible y una proyección $pr : M^n \to M^m$,

  $$dim\ S = dim\ pr(S) + \min_{a \in pr(S)} dim(pr^{-1}(a) \cap S);$$

- para cualquier $S \subseteq_{cl} U \subseteq_{op} M^n$ irreducible y una proyección $pr : M^n \to M^m$,existe $V \subseteq_{op} pr\ S$ tal que

  $$\min_{a \in pr(S)} dim(pr^{-1}(a) \cap S) = dim(pr^{-1}(v) \cap S)$$

  para cualquier $v \in V \cap pr(S)$.

De manera más precisa, diremos que dim es una buena noción de dimensión para conjuntos cerrados si cumple lo anterior para $U = M^n$.

[2]i.e. que toda cadena descendente de conjuntos cerrados anidados es finita.

El rango de Morley es un ejemplo de una buena noción de dimensión.

Definición 45. Sea $S \subseteq_{cl} M^n$ irreducible. Una **geometría de Zariski de dimensión** 1 **en un conjunto** M es una estructura topológica noetheriana que satisface

$$\overline{pr\ (S)} \setminus F \subseteq pr\ S \tag{7.1}$$

para algún $F \subseteq_{cl} \overline{pr\ (S)}$ (con F subconjunto propio), y con una buena noción de dimensión[3] (pág. 31).

Una **estructura analítica de Zariski** es una estructura topológica no noetheriana con una buena noción de dimensión sobre los conjuntos definibles y tal que la condición sobre las proyecciones (7.1) ha sido debilitada (ver pág. 137). Las estructuras analíticas de Zariski fueron desarrolladas en [PZ] por N. Peatfield y Zilber con la idea de permitir el acceso al mundo de las estructuras de Zariski a dos clases nuevas de ejemplos, a saber, estructuras construidas en términos de funciones y relaciones analíticas complejas y, estructuras estables “nuevas”, introducidas por la construcción de Hrushovski en [Hru], en particular los campos coloreados. Como se menciona en [Zil10] el estatus de *estructura analítica* de los campos coloreados aún no se comprenden ni a nivel de conjetura[4], sin embargo se han establecido varias propiedades interesantes como estructura topológica.

Luego, uno de los objetivos principales a futuro es demostrar que los campos coloreados son estructuras analíticas de Zariski.

[3]Es posible definir la dimensión igual a la dimensión de Krull, pero esto acarrea confilctos al hacer la generalización a las estructuras analíticas.

[4]pag. 162.

Bibliografía

[Bal] Baldwin, J.T. *Principles of Stability Theory*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer, 1987.

[BalLach] Baldwin, T.J. Lachlan, A. *On strongly minimal sets*, J. Symbolic Logic 36 (1971) 79-96.

[Bue] Buechler, S. *Essential Stability Theory*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer, 1996.

[Cay] Caycedo, J.D. *Expansions of 1-dimensional algebraic groups by a predicate for a subgroup*. Ph. D. Thesis, 2011.

[Con] Connes, A. *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1994.

[FriGra] Fried, E. Grätzer, G. *Strong Amalgamation of Distributive Lattices*. Journal of Algebra Vol.128, No. 2, 1990.

[CM] Connes, A. Marcolli, M. *A walk in the noncommutative garden*. http://arxiv.org/abs/math/0601054v1

[Fra] Fraïsse, R. *Sur l'extension aux relations de quelques propriétés des ordres*. Ann. Sci. École Norm. Sup, 1954.

[GBVF] Garcia-Bondía, J.M. Várilly, J.C. Figueroa, H. *elements of Noncommutative Geometry*. Brickhäuser Advanced Texts. 2000.

[Har] Hardy, G.H. Wright, A.M. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, 1960.

[Hod] Hodges, W. *Model Theory*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications Vol. 42. Cambridge University Press, 1994.

[Hru] Hrushovski, E. *A new strongly minimal set*, Annals of Pure and Applied Logic 62 (1993) 147-166.

[HZ] Hrushovski, E. Zilber, B. *Zariski Geometries*. J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), 1-56.

[Mar] Marker, D. *Model Theory: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[Lan] Lang, S. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 2002.

[PZ] Peatfield, N. Zilber, B. *Analytic Zariski structures and the Hrushovski construction*. Annals of Pure and Applied Logic, Vol 132/2-3 pp 127-180, 2005.

[Poi] Poizat, B. *L'égalité au cube.* J. Symbolic Logic 66(4):1647-1676, 2001.

[Rie] Rieffel, M.A. C^*-*algebras associated with irrational rotations*. Pacific J. Math. 93 (1981), 415-429; MR 83b:46087.

[Sha] Shafarevich, I. *Basic algebraic geometry. 1*. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 1994.

[Wag] Wagner, F.O. *Fields and Fusions: Hrushovski constructions and their definable groups*. New developments of independence notions in model theory. pp 27-40. Masanori Itai, Kyoto University, Japan, 2010.

[Zil84] Zilber, B. *Strongly minimal countable categorical theories II-III*. Siberian Math. J. 25: 396-412, 559-571. 1984.

[Zil02] Zilber, B. *Exponential sum equations and the Schanuel conjecture*. J. London Math. Soc. (2), 65(1):27-44, 2002.

[Zil04] Zilber, B. *Bi-coulored fields on the complex numbers*. J. Symbolic Logic, 69(4):1171-1186, 2004.

[Zil05] Zilber, B. *Non-commutative geometry and new stable structures*. preprint, 2005.

[Zil10] Zilber, B. *Zariski Geometries: Geometry from the Logician's Point of View*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2010.