UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Las matemáticas en Aristóteles

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

P R E S E N T A :

Agustín Hernández Carapia

DIRECTOR DE TESIS:
Mat. Guillermo Zambrana Castañeda
2012

Hoja de Datos del Jurado
1.Datos del alumno
Apellido paterno: Hernández
Apellido materno: Carapia
Nombre: Agustín
Teléfono: 47533845
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Carrera: Matemático
Número de cuenta: 096505221
2. Datos del tutor
Grado: Matemático
Nombre: Guillermo
Apellido paterno: Zambrana
Apellido materno: Castañeda
3. Datos del sinodal 1
Grado: Dr
Nombre: Carlos
Apellido paterno: Torres
Apellido materno: Alcarás
4. Datos del sinodal 2
Grado: M.en C.
Nombre: Rafael
Apellido paterno: Rojas
Apellido materno: Barbachano
5. Datos del sinodal 3
Grado; M. en C.
Nombre: Rafael
Apellido paterno: Martínez
Apellido materno: Enríquez
6. Datos del sinodal 4
Grado: Mat.
Nombre: Eratóstenes
Apellido paterno: Flores
Apellido materno: Torres
7.Datos del trabajo escrito.
Título: Las matemáticas en Aristóteles
Número de páginas 69
Año: 2012

Índice:

0.- Introducción

Durante la noche, cuando sólo brillan las estrellas, el cielo parece frío y lejano, medido en distancias increíbles nos recuerda lo pequeños que somos; lo corta que es nuestra vida. Y si te preguntas ¿cómo se guiaban los navegantes en la antigüedad? Verás que las estrellas que utilizaron aún están en el cielo, dentro de las mismas constelaciones, cerca del lugar que guardaban siglos atràs, y que las construcciones prehispánicas muestran indicios de que en alguna época tuvieron una orientación con respecto de las estrellas. Incluso, los registros más antiguos nos hablan de las mismas estrellas. Nada parece haber cambiado allá arriba. Pareciera que sólo la tierra ha cambiado en el cosmos, más que nada, por causa del hombre. Sin embargo para nosotros los hombres, el universo no siempre ha sido el mismo y probablemente las nuevas ideas científicas, la tecnología y las comunicaciones modifiquen nuestra concepción del universo cada vez más rápidamente.

Leer la descripción del universo de algún pueblo es encontrar mucho más que un retrato del cielo nocturno. Más bien, es leer acerca de su religión, sus costumbres, su forma de ser y de pensar, sus miedos, sus esperanzas y sus sueños. Gran parte de la cultura de cualquier pueblo queda resumida en su cosmovisión. Y es que el universo lo abarca todo: lo que es, lo que fue, lo que podría ser o haber sido. Aún nuestras más extravagantes fantasías forman parte del cosmos. Por eso, aceptar un modelo del universo implica aceptar también muchas ideas, no sólo acerca del cielo sino también acerca de todo el quehacer humano.

En el siglo IV antes de Cristo, Aristóteles concibió una descripción del mundo, un universo perfecto y racional, hecho por un ser superior. En el centro de ese universo estaba el hombre y alrededor de él giraban planetas, estrellas, dioses, mitos. En resumen: La floreciente cultura griega de aquellos días. En ella, sin embargo, Aristóteles mismo advirtió contradicciones entre las ideas matemáticas y físicas que sustentaban su "modelo" del mundo y en algunas nociones ya aceptadas en su tiempo, en particular las nociones de número e infinito.

Él mismo analiza estas ideas en varios de sus escritos desde distintas perspectivas, en algunos textos los conceptos son tratados de manera individual. El *filósofo* opta por un tratamiento formal apegado siempre a las definiciones ya conocidas; en otros textos las ideas matemáticas son tratadas con mayor libertad, pues aparecen dentro de contextos más amplios. Es entonces cuando los conceptos se mezclan tomando nuevas características y rebasando, por lo tanto, sus definiciones individuales. Al hablarnos sobre el movimiento, por ejemplo, tiempo, infinito, magnitud y número aparecen unidos, lo que contradice las definiciones que el propio Aristóteles nos propone en otros escritos. Si bien no encuentro nuevas definiciones en su obra, existen en cambio párrafos que justifican esas libertades y que, a mi entender, buscan complementar las definiciones en cierta forma. Creo que estas ideas no aparecen sólo en los escritos de Aristóteles, si no que posiblemente eran conocidas por un grupo de personas en aquella época.

Aunque posteriores, en los libros VIII, IX y X de *Los elementos* de Euclides encontramos proposiciones aritméticas cuyas demostraciones utilizan un leguaje geométrico y que pueden ser admitidas a la luz de estas ideas[1].

Es curioso, las mismas ideas que Aristóteles promovió para colocar al hombre como el centro del cosmos, como el universo esférico inmutable y finito al ser estudiadas con mayor profundidad comenzaron a desplazar al hombre poco a poco hacia un pequeño planeta azul que gira en torno a una estrella enana, localizada en un brazo de una galaxia compuesto por millones de estrellas. Un lugar insignificante dentro del inmenso universo.

[1] Jones, 1987:Vol. III 4, pp. 379 – 380


[2]

2. El mundo aristotélico

Para Aristóteles el universo estaba compuesto por cinco elementos: tierra, aire, fuego, agua y éter. Estos estaban ordenados según su naturaleza; de esta manera:"el mundo" tenía dos acepciones. Por un lado, *es el orden y el arreglo de todas las cosas conservado por acción de Dios y por causa de*

[2] En esta imagen podemos ver el universo como Aristóteles lo concebía. En el centro la tierra luego la luna, el sol, los planetas y finalmente las estrellas fijas. Todo girando alrededor de la tierra. Imagen gratuita tomada de la página galileorice.edu

Dios[3]. Y por otro lado, el mundo estaba compuesto por el cielo, la tierra y toda la naturaleza en ellos contenidas.

"En el centro de este universo inmóvil y fijo esta la tierra, fuente de vida que es el origen[4] y la madre de todos los seres vivos y animales de todas clases. La región superior del universo está toda y en todos sentidos encerrada en sus propios límites, y su parte más elevada, morada de los dioses, se llama cielo".[5]

La descripción del universo no comienza con su creación, como en *La Biblia*, por ejemplo, tampoco nos narra el comienzo del mundo o la razón de su existencia, sino que nos explica que el universo no tiene principio ni fin, porque la idea de un universo que surge de la nada, sin razón de ser, para luego desaparecer de la misma forma era absurda para el pensamiento griego.

"… El cielo, que está lleno de cuerpos divinos que llamamos estrellas[6], está dotado de un movimiento eterno, sobre una sola órbita en una revolución circular junto con todos los cuerpos celestes, esto, sin fin por toda la eternidad. El cielo y el mundo siendo esféricos y moviéndose continuamente como ya he dicho. Tiene[7]necesariamente dos puntos que están inmovibles, opuestos el uno al otro.[8] Como en el caso del movimiento de rotación impreso a la rueda al girarla; puntos que quedan fijos y retienen la esfera, y alrededor de los cuáles la masa entera del cielo gira en círculo.

Estos puntos se llaman polos. Si nos imaginamos una línea recta que pase por esos polos uniendo el uno al otro (el eje, como la nombramos a

---

[3]Aristóteles, 1949: 180 (11_12) Opté por traducir este texto porque expone breve y claramente el universo aristotélico sin omitir detalles relevantes para este trabajo. De ahora en adelante por razones de facilidad voy a citar a Aristóteles en las obras *Metafísica* y *Física* no por autor sino por obra.
Traduzco *sous l'action de Dieu* como: por acción de Dios.

[4] Traduzco *foyer* como origen.
[5] Aristóteles, 1949: 180 (12_16)
[6] Traduzco *astres* (astros) como estrellas.
[7] Traduzco *il y a necesairement* como tiene necesariamente.
[8] Traduzco *situés à l'opposé l'un de l'autre* como opuestos el uno al otro.

veces) tendremos el diámetro del mundo con la tierra como centro y los dos polos por extremos. De esos polos fijos, uno es siempre visible y es llamado polo ártico; el otro está siempre escondido bajo la tierra, en la región meridional y es llamado polo antártico"[9].

El mundo aristotélico es eterno e inmutable, en una palabra, perfecto, y su forma debe de contenerse a sí misma, es decir, no debe tener ni principio ni fin, por eso debe ser esférico. Sólo nos resta saber su diámetro. Consideremos por un momento una esfera de diámetro infinito, en cualquier punto de ella, el plano tangente se confundirá con la superficie de la misma, lo que daría cierta imperfección a la figura, porque podría ser confundida con otra menos perfecta, un poliedro por ejemplo. Otra particularidad es que podemos considerar que cualquier punto interior de la esfera es su centro, pues estaría a infinita distancia de la superficie de la esfera.

Estas dos observaciones hacen imposible, para Aristóteles, pensar en un universo infinito y esférico al mismo tiempo, porque éste revelaría cierta imperfección, sin embargo podemos evitar el problema si consideramos un universo esférico pero finito.

"La sustancia del cielo y de los astros, a la que llamamos éter, no como lo pretenden algunos, porque arde por causa de su naturaleza ígnea (esto es desconocer su naturaleza, que es la más alejada de la naturaleza del fuego) sino porque corre siempre[10] *en su movimiento circular, siendo un elemento distinto de los cuatro anteriores, sin mezcla y divino.*

De las estrellas que están contenidas en el cielo, unas son fijas, pues sus revoluciones se completan junto con el cielo entero, mientras que sus posiciones relativas se mantienen iguales; en medio de ellas, lo que llamamos circulo zodiacal forma un anillo[11] *que pasa oblicuamente a través*

[9] Aristóteles, 1949: 180-181:(16_32).
[9] Traduzco *court toujour*s como corre siempre.
[11] Traduzco *une ceinture* como un anillo.

de los Trópicos y está dividido en partes correspondientes a las doce regiones del Zodiaco.

Los otros astros son los planetas, ellos no se mueven naturalmente con la misma velocidad que las estrellas, ni con la misma velocidad unos con respecto a otros, sino que se mueven en órbitas diferentes, de suerte que una está más cerca de la tierra y otra está más alto en el Cielo.

En cuanto al número de estrellas fijas, es impenetrable para los hombres, aunque estas se muevan en una sola superficie, que es la del cielo entero".[12]

Si bien, el mundo es un lugar finito, por lo que sólo puede contener un número finito de astros; el número parece ser demasiado *grande* para ser conocido o manipulado por el hombre, este sin embargo, podía concebir de alguna manera conjuntos de números muy grandes, incluso infinitos.

De este párrafo infiero que para Aristóteles el hombre era incapaz de manejar números *grandes,* aunque fuera capaz de concebirlos, en la práctica, estos eran inaccesibles para él, tal vez por ser imposibles. Pero si el número de estrellas fijas es impenetrable para los hombres ¿cómo podría entonces entender el infinito el hombre? y ¿qué debería pensar de números como pí o raíz de 2?, ¿existe entonces algo infinito dentro del universo finito que propone este filósofo?

"*Por el contrario, el número de planetas se reduce sólo a siete divisiones distribuidas en igual número de círculos sucesivos y situados de manera que siempre el círculo que está arriba es más grande que él círculo que se encuentra abajo. Los siete círculos están contenidos el uno en el otro, y todos están encerrados en la esfera de las estrellas fijas. La posición contigua a esta última esfera está constantemente ocupada por el círculo de la estrella brillante o de Saturno; enseguida, está él circulo de Phaéton o de Júpiter; luego está el círculo de la estrella resplandeciente*[13]*llamada también*

[12] Aristóteles, 1949. 181:(5-18)

[13] Traduzco *flamboyante* como resplandeciente.

Hércules ó Marte; enseguida la estrella centelleante consagrada según algunos a Mercurio, según otros a Apolón; después viene él circulo de Lucifer llamado tanto Venus como Junón; enseguida, él círculo del Sol, y en último lugar el de la Luna hasta el cual el éter extiende su límite, y que envuelve los cuerpos divinos y de orden invariable en su movimiento.

Luego de la naturaleza etérea y divina, la cual claramente hemos mostrado que obedece a un orden determinado y que es en todo[14] *constante, sin modificación e impasible, viene inmediatamente la sustancia que es enteramente pasible y cambiante, y, para decirlo en una palabra, corruptible y sujeta a la muerte. En su parte más exterior, está situada la sustancia compuesta de finas partículas de naturaleza ígnea, que está rodeada por la naturaleza etérea en razón de su tamaño y de la prontitud de su movimiento. Y en el elemento llamado ígneo y desordenado, a la vez fuegos* [15] *lo recorren por todas partes, las flamas se enlazan y (así los nombran) vigas, hoyos y cometas tienen ahí su posición fija, y se apagan frecuentemente.*

Después, bajo esta región está repartido el aire, que es de naturaleza tenebrosa y glacial; pero bajo la acción del elemento ígneo se aclara y se inflama, y se vuelve a la vez caliente y brillante. Y, en el seno de este elemento, por causa de su pasividad y de su aptitud para soportar toda clase de alteración, las nubes se condensan y la lluvia[16] *cae, así como las nieves, las heladas y los hielos, las ráfagas y los tifones*”[17]

[14] Traduzco *en outre* que significa exceso o exageración como en todo.
[15] Traduzco *éclats* como fuegos,
[16] Traduzco *averses que quiere decir* aguaceros o chaparrones como lluvia.
[17] Aristóteles, 1949:392a17-392b15.

[18]

La idea de que el universo debe ser finito ya era cuestionada por Aquitas. Simplicio extrae de Eudemo la historia en la que Aquitas expuso el problema y que reproduzco a continuación:

“Si yo estuviera parado en el extremo límite del círculo de las estrellas fijas. ¿Podría estirar mi brazo hacia fuera o no?, suponer que no sería absurdo, pero si estiro mi brazo lo que esté afuera deberá ser un cuerpo o un lugar, lo que no hace ninguna diferencia como veremos.

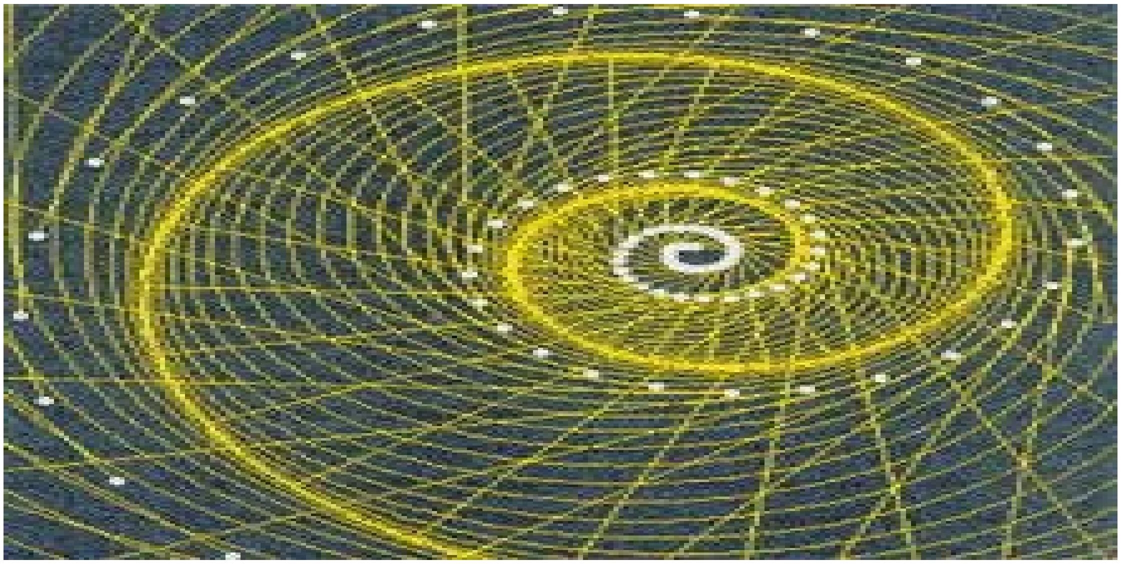
Yo podría de nuevo pararme en el nuevo extremo límite (donde antes estiré mi brazo) y repetir la pregunta. Y siempre habrá algo más donde colocar mi brazo, de tal suerte que ese algo debe ser infinito. Si es un cuerpo, entonces existe un cuerpo infinito y si es un lugar y un lugar es aquello donde un cuerpo puede estar se sigue entonces que existen un cuerpo infinito y un lugar infinito.”[19]

Aristóteles no está de acuerdo con la idea de un universo infinito, aunque para él, *“en lo eterno ser posible y ser no hace ninguna*

[18] Ahora el mundo de Aristóteles será cuestinado, en la imagen el hombre saca la cabeza del universo para ver que hay más allá. Imagen gratuita tomada de la página ruthlessculture.com.

[19] Simplicius 2005. On Aristotle’s “On heavens 2.10.14” p.94

diferencia"[20]. Un universo infinito se opone al orden del mundo que él propone, obligado, dedica una parte de su obra al análisis de este concepto matemático:



21

3. El Infinito

En su obra titulada *Física*[22], Aristóteles comienza a hablarnos sobre el infinito:

La creencia de que algo es ilimitado existe, se da principalmente a partir de cinco {reflexiones}: [1] a partir [de la reflexión acerca] del tiempo (pues éste es ilimitado);

Simplicio, otra vez, no está de acuerdo con este filósofo, y comenta acerca del tiempo siguiente: "Si el tiempo no fuera infinito entonces hubo un momento sin tiempo y habrá otro momento sin tiempo". Lo que

[20] En el presente estudio me referiré a esta obra citando el número de línea en la que se localiza la información requerida, debido a la conformación misma de la traducción del texto.
Física, 2005:IIi 203b 30-31
[21] Mire bien esta espiral ¿Dónde comienza? Y si usted sacara una lupa y viera que el punto de inicio es en realidad otra espiral ¿Qué pensaría? ¿Acaso tendrá un punto de partida? Y ¿Dónde termina la espiral? ¿Vemos sólo un pequeño pedazo de ella?Imagen gratuita tomada de la página saiching.org
[22] 2005:III 203b 15-31

resulta inconcebible no sólo para Simplicio sino para el pensamiento griego en este periodo.

Es obvio que el examen corresponde a los estudiosos de la naturaleza. Con buena razón todos lo ponen como principio, pues ni es posible que exista en vano, ni tampoco que le sobrevenga otra función salvo la de ser principio; todo es o bien principio o bien partir de un principio, pero de lo ilimitado no hay principio, pues sería su límite. Además, en tanto que es un principio es inengendrado e indestructible[23].

Por eso, aunque concebían al tiempo de manera unidimensional, como nosotros, no asociaron la recta con el concepto de eternidad temporal. En cambio, buscaron una figura geométrica que no tuviera ni principio ni fin:

"La idea de infinitud asumía mayor vigor y carácter de necesidad lógica al representarla en una forma geométrica que por sí misma hiciese contradictoria e inadmisible la determinación de un límite".[24]

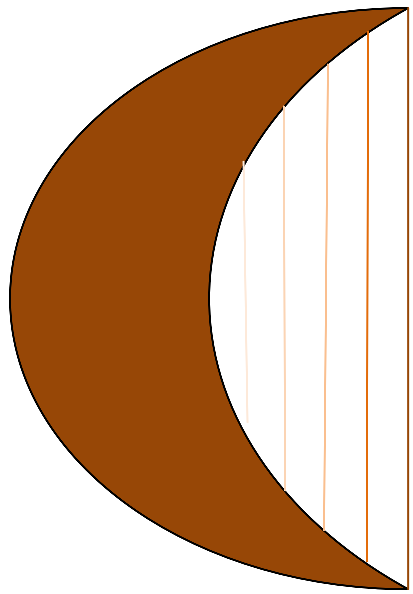
Así, el ciclo del tiempo o su eterno volver quedan asociados con el círculo, que puede suponerse iniciado y terminado en cualquiera de sus puntos.

[23] Física, 2005: III 203b 3-9.
[24] Mondolfo, 1971:40

Continúa Aristóteles hablándonos sobre el infinito de la de la siguiente manera:

"[2] a partir de la división de las magnitudes (pues también los matemáticos usan {la noción} de lo ilimitado); [3] además, {de la reflexión} de que la generación y la corrupción no se agotan, siempre y cuando fuera ilimitada la fuente de la cual se toma lo que deviene; [4] además {de la reflexión} de que lo limitado siempre colinda con algo, así que necesariamente no puede haber un límite {absoluto} si una cosa colinda necesariamente con otra

Respecto de la divisibilidad de las magnitudes, Simplicio propone dos ilustraciones, la cuerda del círculo que al acercarse a la circunferencia jamás es igual a ella.



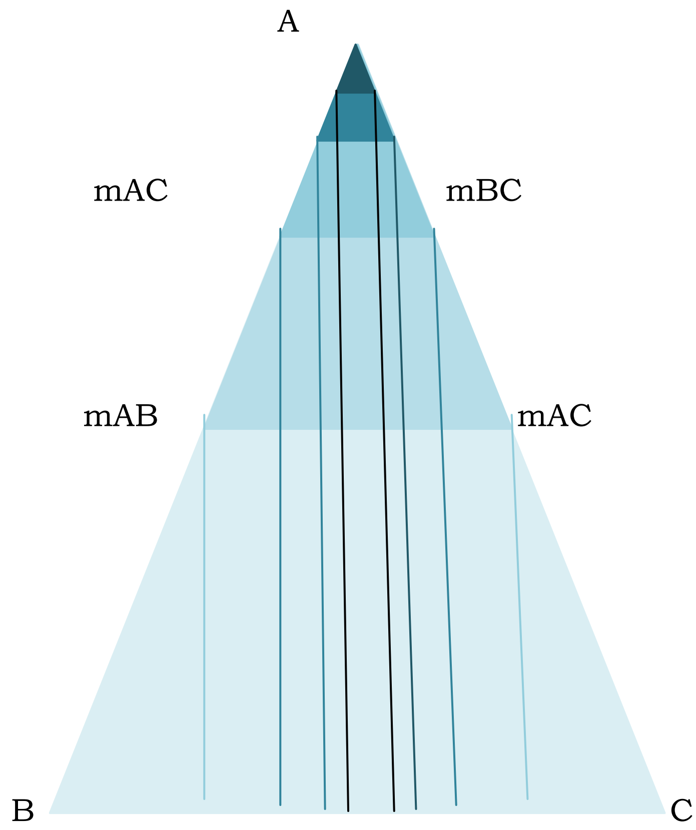
Y el triángulo isósceles ABC donde Mab y Mac los puntos medios de los lados AB y AC respectivamente. Tracemos la recta que pasa Mab y Mac y observemos que:

AB = AC sí y sólo sí AB/2 = AC/2 sí y sólo sí AMab = Amac

Por lo tanto MabA Mac es un triángulo isósceles. De donde B= Mab y C= Mac.

Luego entonces AC es paralelo a MabMac.

Observemos que podemos trazar una perpendicular a AC que pase por M1 y otra que pase por M2 proyectando de esta manera el segmento MabMac sobre el segmento AC.



Simplicio comenta que se puede repetir este proceso *ad infinitum*. Obsérvese que al proyectar los segmentos tenemos una serie de segmentos centrados en el punto medio del segmento BC al que llamo Mbc. Como podemos continuar el proceso infinitamente y cada vez tomamos una parte de la recta AC tendremos que admitir que el punto Mbc es también parte de la recta, lo que nos llevaría a la conclusión de que la recta está hecha de puntos. Para Platón, como para la escuela griega, las líneas estaban constituidas de puntos, "de hecho todas las magnitudes especiales se constituyen de puntos".[25]

Aristóteles crítica esta concepción porque considera que la magnitud no puede constituirse de indivisibles.

[25]En el presente estudio me referiré a esta obra citando el número de línea en la que se localiza la información requerida, debido a la conformación misma de la traducción del texto. *Metafísica*, 1982:XII 9, 1085B28

Por otra parte si consideramos las longitudes de los segmentos así obtenidos como una sucesión tendremos entonces que hay un número: *cero*, que correspondería con la magnitud del punto, pero esto era imposible de considerar por los griegos porque no conocían el cero, siguiendo este orden de ideas es posible hablar de una magnitud mínima, pero no de un número asociado a ella. Sin embargo, las ilustraciones, que Simplicio presenta, nos hacen pensar que el punto es la magnitud mínima, lo que contradice la definición de punto.

Finalmente, Aristóteles compara los dos últimos conceptos con *"lo que esta mas allá del firmamento"*[26], es decir con el infinito físico, tratando de retratar de alguna manera el atributo físico del que proviene el infinito matemático.

[5] La reflexión más poderosa que crea una dificultad común a todos es esta: la serie de los números, las magnitudes matemáticas y lo que está más allá del firmamento parecen ser ilimitados, porque el pensamiento no los agota.

Para el estagirita las propiedades del espacio matemático deben abstraerse de las propiedades del espacio físico que es el único espacio real.

Aristóteles es el primer filósofo griego que distingue los conceptos físicos de los conceptos matemáticos[27]. Para él, como para nosotros, los conceptos matemáticos se pueden abstraer del mundo sensible, pero una vez separados, se pueden obtener nuevos conceptos matemáticos a través de la razón. Es decir, los conceptos matemáticos son diferentes de los conceptos físicos, por lo tanto, son susceptibles de un análisis distinto, que no se basa en los sentidos, sino que separa a los conceptos matemáticos del mundo sensible, y permite desarrollar nuevos conceptos a través sólo de la razón sin que esto de lugar a errores.

---

[26] *Fisica*, 2005:203b 27-28
[27] Vita, 1992:Vol. VIII/No 2

De estas cosas se ocupa también el matemático, pero no de cada una de ellas como límite de un cuerpo finito, ni examina sus atributos en tanto atributos de tales substancias. Es por esto que él los separa, porque en pensamiento ellos son separables del movimiento y no hace diferencia, ni ningún resultado falso, si ellos son separados.

Pero hay conceptos que pertenecen al ámbito de la física y al de las matemáticas. Es decir, que deben cumplir dentro del pensamiento aristotélico una doble función, por un lado, justifican la física aristotélica y por el otro, sirven a la matemática. Uno de los conceptos que en el pensamiento de Aristóteles juega este doble papel es el concepto de infinito.

En este orden de ideas, cada concepto físico dará lugar a un concepto matemático que será su retrato en el espacio matemático. Pero si los conceptos matemáticos son separables de los físicos existe la posibilidad de hallar nuevos conceptos matemáticos a través del análisis puramente matemático. Por ejemplo, el concepto de inconmensurabilidad, cada concepto matemático hallado de esta manera deberá retratar un concepto físico, que es justamente del que proviene. Por lo que de todas formas, para Aristóteles, física y matemática están tan íntimamente ligadas, que resultan casi indistinguibles. Por eso, El filósofo griego asocia al infinito matemático con el infinito físico, porque para él los atributos matemáticos de un cuerpo deben inferirse de los sus atributos físicos, ya que cada atributo matemático debe retratar algún atributo físico, pero varios atributos físicos pueden ser retratados por algún concepto matemático, por ejemplo, los conceptos físicos de cambio y tiempo son retratados por el concepto matemático del continuo[28].

Esto es lo que lleva al filósofo a deducir que la existencia del infinito matemático implica la existencia de un cuerpo que podríamos sentir de tamaño infinito:

---

[28] *Física*, 2005: IV 10.21ª6-8, 11 219b11-15 220ª4-13, 18-21

"Le corresponde al físico indagar si existe una magnitud sensiblemente infinita"[29].

En otras palabras, Aristóteles piensa que el concepto matemático del infinito extensional debe retratar el concepto físico de un cuerpo sensible de dimensiones infinitas que justifique su existencia. Pero este cuerpo no existe en el mundo sensible, para probarlo, retoma la definición de superficie dada por Platón: *"*llámese cuerpo a aquello que es limitado por una superficie*"*. Argumentando lógicamente que un cuerpo infinito no puede ser limitado por ninguna superficie. En realidad, el centro de esta demostración es puramente matemático porque lo que está realmente en tela de juicio es si existe el concepto matemático de sólido extendiéndose al infinito, concepto que parece no ser admitido por Aristóteles, aunque es claro que el concepto de recta extendiéndose al infinito si existía.

Por ejemplo en la proposición 1. 12 de sus Elementos, Euclides dice lo siguiente:

"Trazar una línea recta perpendicular a una recta infinita dada desde un punto dado que no este en ella."[30]

Observemos que es necesario que la recta sea infinita en acto, pues si consideramos sólo un segmento de la misma, podríamos encontrar un punto cuya perpendicular no intersecte el segmento dado. Obligandonos entonces a encontrar el segmento apropiado para cada punto.

En una segunda demostración, Aristóteles argumenta lo siguiente:

"El cuerpo es limitado por todas partes, mientras que el infinito se extiende ilimitadamente, así que un cuerpo infinito debe tener una extensión infinita."

De este argumento podemos desprender dos observaciones, primero que para Aristóteles el espacio geométrico es ilimitado, porque cualquier cuerpo puede estar en él; en segundo lugar, inferimos que el infinito es un

---

[29] Jones, 1982
[30] Euclídes de Alejandría. Elementos. Vol.1. Madrid. P.215

ente inteligible como un concepto abstracto y no como un concepto práctico, por ejemplo, el número de las estrellas.

El estagirita pone punto final a esta discusión en su libro *De Caelo* donde concluye que el universo es finito, ya que:

"El cuerpo del todo no es infinito". "La longitud del cielo es la distancia entre sus polos".

En este punto el filósofo debe librarse de dos contradicciones, por una parte, el tiempo aparece como un infinito en acto dentro del universo finito. Para salvar esta contradicción Aristóteles considera que el tiempo tiene la forma de un círculo cuyo diámetro es muy grande pero finito. Asi que no tiene ni principio ni final, pero en algún momento la humanidad deberá volver a pasar por el mismo punto una y otra vez repitiendo siempre su historia sin remedio.

Por otra parte, el estagirita no puede admitir la existencia de un cuerpo infinito pues esto destruiría con su concepción del universo. ¿Dónde estaría ese cuerpo? Para su desgracia, la conclusión que persigue el filosofo, es decir que no existe un cuerpo material infinito, nos obliga, si seguimos la filosofía aristotélica, a negar el concepto matemático de espacio infinito, lo que nos conduciría a contradicciones. Aristóteles mismo reconoce que:

"Si se niega en modo absoluto el infinito, derivamos en muchas consecuencias absurdas; de hecho se dará un principio y un final al tiempo, las magnitudes no serán divididas en magnitudes y el numero no será infinito."

¿Pero, còmo puede existir el infinito dentro de un universo finito?

Es en la mente y solo como un concepto abstracto que podemos lidiar con el.

Por eso, el infinito extensional no existe para el estagirita en acto, pero:

"Una cosa es infinita por adición, o por sustracción... o de ambos modos".

Es decir, el infinito sólo puede existir en potencia y no existe ni como sustancia, ni como atributo. Desde el punto de vista matemático Aristóteles dice que:

"Si el infinito no es ni una magnitud ni un número, sino que es en sí mismo una sustancia y no es un atributo, será indivisible, porque lo divisible es magnitud y número; pero si esta es indivisible no es finita {...} No obstante, esto no es lo que dicen aquellos que sostienen la existencia del infinito, ni nosotros lo investigamos como tal, sino como lo que no alcanza su fin."[31]

Es decir, que el infinito matemático no es una cosa en sí, sino que es en potencia ya que en realidad el infinito es una propiedad del número y de la magnitud. Sin embargo, la presencia del infinito como concepto matemático resulta contradictoria con su solución al problema físico y geométrico, pero, Aristóteles afronta este problema, considerando la infinita divisibilidad de la magnitud:

"Se ha dicho que una magnitud no es infinita en acto, ella lo es por sustracción, no siendo difícil eliminar las líneas indivisibles; de ello se deriva que el infinito es en potencia".

Es interesante observar que Aristóteles se opone a la teoría de Demócrito, quien piensa que existe una partícula elemental indivisible, el átomo, porque, al eliminar las líneas indivisibles, como concepto matemático, se debe eliminar al átomo como concepto físico. Además de aclarar que no existe el infinito extensional.

Heath recoge en su libro *Las matemáticas en Aristóteles* de la Física del filósofo griego lo siguiente:

> *Es claro que el infinito (para Aristóteles) toma diferentes formas, en el tiempo, en las generaciones de los hombres y en la división de las magnitudes. En general, el infinito es*

[31] Vita 1992:Mathesis Vol VIII No 2

uno en el sentido de que podemos tomar siempre una parte distinta y finita cada vez del sin llegar a agotarlo nunca. En el caso de las magnitudes, sin embargo, lo que se toma durante el proceso queda ahí, mientras que en los casos del tiempo y las generaciones de los hombres lo que se toma pasa y se pierde aunque siempre se puede tomar algo nuevo.[32]

La clasificación, que hace Aristóteles del infinito, se basa en atributos físicos sensibles.

Entonces el infinito (por división) no puede ser de otro modo, pero de éste si puede ser, a saber, en potencia y por disminución (y en acto es como decimos que son el día y la competencia) en potencia es como la materia, y no en sí, como lo ilimitado: [...]

[...] También por adición se da así lo ilimitado, en potencia, caso del cual decimos que de cierto modo es el mismo que el que se da por división, pues siempre será posible tomar algo que esta fuera Física.[33]

Sucede que lo ilimitado es lo opuesto de lo que se dice. Ilimitado no es lo que no tiene nada fuera, sino lo que siempre tiene algo fuera. [34]

Después de analizar el infinito por sustracción, el estagirita discute el infinito por adición, al que trata de la misma manera:

El infinito por adición es en algún modo lo mismo que aquel por sustracción, generándose en una cantidad finita por adición en modo inverso; como la sustracción se continúa hasta el infinito, del mismo modo se comporta la adición en una cantidad finita, dado que si se agrega a una parte cualquiera de una magnitud dada una cantidad finita en la misma razón, de modo que no se agote la magnitud, no se logra alcanzar la magnitud finita asignada.

Un modo de entender la propuesta de Aristóteles es considerar lo que hoy conocemos como series convergentes, en particular si pensamos

---

[32] *Física*, 2005:III 206b33-207a2
[33] 2005:III 206b 12-20.
[34] *Física*, 2005:III 206b 31-207a 2.

en el procedimiento "inverso" al procedimiento de sustracción obtendremos series de la forma:

$(1/n)\,x + (1/n^2)\,x + \ldots$

Donde x es la magnitud inicial y n es mayor que 1, observemos que esta serie converge a:

$\{1/(n+1)\}x < x$ donde $n \in N$

Esta observación, en particular cuando n=2, corresponde a las paradojas de Zenón: Alquiles el gran corredor no puede alcanzar a la tortuga que ha salido tan sólo un momento antes, porque para alcanzarla debe primero recorrer la distancia que lo separa de la tortuga, pero en ese mismo tiempo la tortuga habrá recorrido cierta distancia y por lo tanto seguirá siempre delante de Aquiles.

Así, al menos para el caso de las series convergentes, el infinito por adición es similar al infinito por sustracción, porque el infinito por sustracción tiene por límite la magnitud nula, es decir la serie converge a cero y el infinito por adición tiene por límite la magnitud inicial:

"También el infinito por adición es potencial, del mismo modo que decimos que lo es por sustracción; siempre se podrá tomar cualquier cosa de lo que está fuera de él, que no superara cualquier magnitud finita, así como el infinito por sustracción siempre sobrepasa cada magnitud finita, permaneciendo inferior".

Aristóteles observa que el infinito de los números tiene un elemento mínimo, la unidad, pero no tiene un elemento máximo:

"Por lo tanto, él número es infinito en potencia y no en acto y siempre se puede tomar un número que supere cualquier pluralidad determinada. Pero este número de la dicotomía no es especifico y la infinidad no permanece, sino que se genera con el tiempo y él número del tiempo".

Y que, por otra parte, el infinito por sustracción carece de elemento mínimo, pues las series convergentes no alcanzan su límite a menos que se vuelvan constantes en algún momento.

“Pero para las magnitudes sucede lo contrario; en efecto, el continuo es divisible al infinito, mientras hacia lo más grande no existe el infinito. Entre más grande se admita que sea una cosa en potencia, más grande se debe admitir que sea en acto. Y dado que no existe magnitud sensible infinita; no se puede admitir que exista una magnitud que supere toda magnitud finita; existiría de hecho cualquier cosa más grande que el cielo".

Para Aristóteles la infinidad de los números y la infinita divisibilidad de las magnitudes son dos conceptos análogos, existe entonces, una analogía entre el infinito por sustracción y el infinito por adición. Lo dicho para uno es válido también para el otro, *porque son infinitas las dicotomías de una magnitud.*

Esta observación no termina la discusión sobre el infinito por adición, porque:

Si nosotros incrementamos la razón de la parte, de modo de tomarla siempre en la misma cantidad, recorreremos toda la magnitud, porque cualquier magnitud finita es agotada por medio de cualquier cantidad determinada aunque sea muy pequeña.

En otras palabras, si tomamos una magnitud finita, podremos rebasar cualquier otra distancia si sumamos la primera magnitud suficientes veces. Aristóteles no contempla el caso de las series divergentes argumentando que el infinito por adición existe sólo en potencia, y es, por definición, el inverso del infinito por sustracción. Hecho que confirma su visión cosmológica:

De modo que sobrepasar el todo tampoco es posible en potencia, salvo que el infinito sea considerado en acto, como dicen los físicos, quienes consideraban como infinitos a los cuerpos que están más allá del cosmos y cuya sustancia es aire o cualquier otra cosa. Pero si no es posible que exista un cuerpo que sea infinito en acto, tampoco podrá existir uno en potencia por adición habiendo definido el infinito por adición como el inverso del infinito por sustracción.

En el párrafo anterior el estagirita menciona una corriente de pensamiento que aceptaba la existencia del infinito físico. En efecto para los pitagóricos, el infinito era aquello que está más allá del cielo. Entre los filósofos presocráticos existía ya esta controversia. Parménides sostenía que *"el todo está limitado y equisita del centro"* mientras que Melisso pensaba que el todo es infinito.

Para otros, tal vez los físicos a quienes menciona, el infinito existía en acto y se definía como *"aquello que no hay nada fuera de él"* y no como *"aquello fuera de lo cual siempre existe algo"*. Para Aristóteles la opinión de Melisso es falsa porque confunde al infinito con lo que es completo o entero porque: *"nada es completo si no tiene un extremo y el final es un extremo"*.

Al adherirse a la opinión de Parménides, Aristóteles condiciona su visión, excluyendo por completo el caso de las series divergentes que sin duda eran conocidas, como lo prueban las paradojas de Zenón, porque éstas sólo tienen cabida en su cosmología como algo meramente potencial. Esta concepción del infinito es acorde, según el estagirita, con el pensamiento matemático ya que:

En nuestro razonamiento, al negar la existencia actual del infinito por crecimiento, por ser inagotable no se elimina la teoría de los matemáticos. De hecho por ahora ellos no tienen necesidad del infinito y no lo operan, sino que se sirven sólo de una magnitud finita escogida arbitrariamente y dividen otra magnitud en la misma razón en la que dividen la magnitud máxima. Así que, en sus demostraciones, para ellos no habrá ninguna diferencia, mientras que esta diferencia estará en la magnitud en cuanto tal".

En el capítulo octavo el filósofo pone punto final a la discusión sobre el infinito argumentando que no basta con imaginar que existe el infinito para que sea real:

Es absurdo creer que el pensamiento: el exceso y el defecto no están en la cosa en sí, sino en el pensamiento. De hecho cada uno de nosotros puede imaginar que nuestro tamaño ha crecido hasta el infinito como consecuencia de una multiplicación de nosotros mismos repetida muchas veces: pero incluso si afuera de la ciudad viésemos a alguien que tuviera un tamaño semejante, no va a existir sólo porque lo hemos pensado, sino porque realmente existe. { ... } El tiempo y el movimiento son infinitos y la percepción de aquello que permanece no queda; la magnitud, por otra parte, no es infinita ni por disminución ni por acrecentamiento por solo haberlo pensado.

De lo que se concluye que una magnitud geométrica no puede ser pensada como una recta en la actualidad, es decir, no puede ser infinita en acto si no sólo en potencia.

Sin embargo, el tiempo es un concepto que captamos a través de los sentidos, porque nuestro entorno cambia y nosotros mismos también cambiamos. Tenemos entonces un atributo sensible e infinito que por un lado conviene al concepto aristotélico de universo, pero representa una contradicción, porque al ser un atributo sensible e infinito equivale entonces al cuerpo infinito que según Aristóteles no puede existir en acto. La forma circular del tiempo, encaja en el universo aristotélico, porque su diámetro es finito, en otras palabras, el tiempo es infinito y finito a la vez

Del mismo modo, el número debe ser infinito en acto. Lo que obliga a Aristóteles a estudiar detenidamente este concepto.

4. El concepto de número

4.1. Antes de Platón

Pitágoras de Samos es uno de los hombres más importantes de la historia. De él sabemos en realidad muy poco, "su vida es en parte leyenda más que historia", comenta Ramón Xirau, y es que ni él ni sus discípulos escribieron sus pensamientos ni sus doctrinas. Así como ocurrió con Cristo, no hay evidencia directa de sus logros. Parece como si Pitágoras fuera una invención antigua, un súper dotado que descubrió las matemáticas, más que un hombre, pero no debemos olvidar que nació después que Tales de Mileto, ni que tuvo grandes predecesores en el campo de las matemáticas.

Aproximadamente en el 540 a. C. Pitágoras fundó en el sur de Italia, en Crotona, una escuela de matemáticas y filosofía cuya influencia llega aún hasta nosotros. A los pitagóricos debemos el progreso de la aritmética, como una ciencia abstracta, y otros avances en geometría principalmente. Ellos adoptaron las realizaciones más valiosas de la cultura mesopotámica en matemáticas y astronomía, las desarrollaron y transformaron dándoles una estructura formal y sistemática.

También fueron ellos quienes observaron que la escala de sonidos emitidos por una cuerda al variar su tensión pueden expresarse como una razón numérica. Este descubrimiento, atribuido usualmente a Pitágoras podría explicarnos el origen de una idea que ha guiado el desarrollo científico y por lo tanto el desarrollo tecnológico del mundo occidental hasta hoy. La idea de que las matemáticas son el lenguaje que nos permite comprender el universo.

> En la lira de siete cuerdas cuatro cuerdas estaban afinadas según intervalos fijos, es decir, las dos exteriores, que abarcaban una octava, y dos de las que estaban entre ellas, de las cuales a cuerda del centro se afinaba un cuarto por encima de la más baja (y por ello, un quinto por debajo de la más alta). Estas cuatro cuerdas proporcionaban así los tres intervalos que los griegos consideraban como “concordantes”, octava, quinta y cuarta, además el intervalo entre las dos cuerdas centrales era de un tono. El tono de las restantes cuerdas variaba según el tipo de la escala exigido.
>
> Hasta la época helenística, no existió nada semejante a la armonía en el sentido en que la empleamos nosotros. Harmonía significaba a) tono, b) escala y c) octava. La música clásica griega era melódica, sin uso de acordes. En consecuencia, al llamar a ciertos intervalos concordantes, los contemporáneos de Pitágoras aludían a la progresión melódica. El punto esencial, sin embargo; es que los tres intervalos octava, cuarta y quinta fueron considerados como primarios, como los elementos a partir de los cuales se construye cualquier escala o composición musical.[35]

Pitágoras encontró que toda la música, al menos la que él y sus contemporáneos conocían dependía de tres razones numéricas, a saber 1:2 para la octava, 3:2 para la quinta y 4:3 para la cuarta. ¡Que cosa tan sencilla! Ahora la música quedaba totalmente ordenada, totalmente contenida por los números. Y si una creación tan humana, tan íntima como la música podía ser simplificada totalmente por razones numéricas ¿hasta dónde llegaría el poder de los números?, ¿no explicaban ellos ya el

[35] Burnet (1920, *apud*Guthrie 1962:216).

curso de los astros? Y si los astros influenciaban el destino de los hombres ¿no eran en realidad los números quienes gobernaban el universo?

Los pitagóricos unificaron los conceptos de número, ritmo y armonía. Cuando se ocupaban de astronomía pensaban que las estrellas emitían en su curso sonidos musicales. Aristóteles explica que para ellos los elementos del número eran los elementos de las cosas y que los cielos no eran sino escalas musicales y números. Heath comenta que Pitágoras fue posiblemente el primer griego en observar el movimiento de este a oeste de los planetas en el cielo.

Platón señala que Pitágoras fue célebre, no sólo porque enseñaba matemáticas, sino también, una forma de vida. Y es que. En verdad, los pitagóricos formaron una secta religiosa que enseñaba la trasmigración de las almas, el culto a la santidad y la abstinencia. A principios del siglo V a. C. existían por lo menos dos vertientes de la escuela:

La primera, fundada por Hippasus[36], estudiaba lo que después se convertiría en varias disciplinas matemáticas: música, geometría y proporciones. Los *matematitikoi*, por fortuna enseñaban los secretos de la secta tal vez para sostenerse. Jones comenta que probablemente enseñaban geometría.

La segunda vertiente eran los *akousmatikoi*, quienes se interesaban por lo sagrado y lo místico.

Para ellos, los números tenían y conservaban un significado místico, una realidad independiente. Los fenómenos, aunque afirmaban explicarlos, eran secundarios, porque la única cosa significativa respecto a los fenómenos era el modo en que reflejaban el número. El número era responsable de “la armonía”, el principio divino que gobernaba la

[36] De Hippasus se cuentan varias historias, una es que fue expulsado de la escuela por publicar las doctrinas de la escuela pitagórica, otra es que fue arrojado al mar por revelar la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado (Thomas Heath 1981:65).

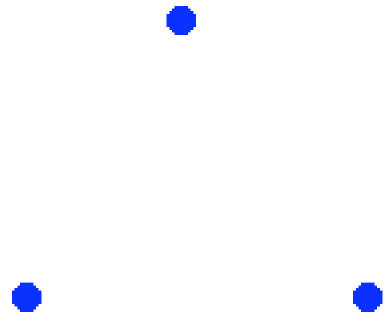
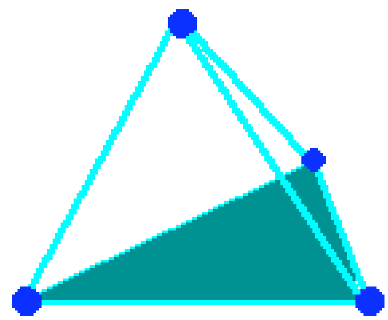
estructura de la totalidad del mundo. Los números no sólo explicaban el mundo físico, sino también simbolizaban o representaban, (pero los pitagóricos decían que "eran") cualidades y otras abstracciones.[37]

Así el uno representaba la razón y la unidad que generaba todos los números, el dos era el primer número femenino, simbolizaba la diversidad, la opinión. El tres era la suma de la diversidad y la unidad, es decir, la armonía y el primer número masculino, el cuatro quedaba ligado a la justicia y a la retribución, el cinco era la suma de lo masculino y lo femenino, es decir el matrimonio. El diez representaba el universo. "Era algo perfecto y contenía en su seno la naturaleza del número"[38].

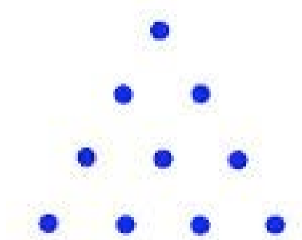
Quizás por ser el dígito más grande quizás porque 1+2+3+4=10 y además de sus significados, con estos números se formaban las razones que contenían la música, quizás porque estos números tenían también un significado geométrico:

Número	Propiedad geométrica	Figura
1	Punto sin extensión	
2	Línea de dimensión uno, es decir. con magnitud, (largo)	

[37] Guthrie, 1962:207.
[38] *Metafísica* 1982:986a 8, *apud* Guthrie 1962:207.

3	Triángulo de dimensión dos, es decir, con área, (largo y ancho.	
4	Tetraedro de dimensión 3, es decir con volumen. (Largo, ancho y alto)	

Así el diez también representaba todas las dimensiones del universo y era representado por la figura conocida como *tetratys* que era un símbolo sagrado para ellos



Se decía que los seguidores de Pitágoras juraban por ella (reconociendo con ello, su categoría sobrehumana), mediante una fórmula cuya antigüedad es difícil de poner en duda: "Por él que nos lego la tetractys fuente y raíz de la naturaleza eterna" [39]

[39] Guthrie 1962:216

El estudio de los números o aritmética, surgió como una parte fundamental de las matemáticas en la escuela pitagórica. Para ellos: "... la armonía del mundo consistía de razones numéricas solamente. Por eso, entender la armonía de los números era el camino hacia la divinidad y hacia Dios[40]".

Los pitagóricos trataban de entender la naturaleza por medio del orden, pues para ellos la condición esencial del mundo es la presencia de un arreglo ordenado, anterior a todo, al que el mundo entero obedece. Para ordenar los fenómenos, debían primero distinguir claramente los objetos que los constituían, por eso, los objetos debían estar perfectamente delimitados y ser claramente distintos los unos de los otros, pero debían tener cierta similitud entre sí, porque a la hora de contarlos serían unidades. Así pues, para los pitagóricos ordenar la naturaleza dependía, en última instancia, de que los objetos formaran un conjunto discreto, de su similitud y su indivisibilidad.

De esta manera, los fenómenos podían ser comprendidos, ya que se reducían a colecciones ordenadas de objetos, es decir de unidades. El comprender pues un fenómeno dependía de ordenar las unidades, es decir, de encontrar las razones numéricas propias del objeto, lo que dependía en última instancia de la posibilidad de contar las unidades que constituían al fenómeno.

Como él número era una colección de unidades y las unidades eran objetos concretos, era imposible separar al número de los objetos: " *La condición natural de arithmos enfatiza que él número es siempre el número de objetos... él número representaba a los objetos contados en sí*[41]".

La unidad no era un número, sino que generaba a los demás números, luego entonces los números para los pitagóricos eran aquellos que surgían del proceso de contar.

---

[41] *Física*, 2005: XXV

Por si esto fuera poco, Aristóteles afirma en la *Metafísica* que para los pitagóricos: *“el ser de todas las cosas es él número*[42]*".*Pero ¿qué era el número para los pitagóricos?

Los griegos contaban con una noción empírica de número. Para ellos la noción de *arihmos* estaba ligada con el acto de contar y lo que se contaba eran objetos que se podían ver o tocar como hombres o caballos. La definición de *arithmos* siempre está vinculada con una multitud de unidades que percibimos a través de nuestros sentidos.

Desde este punto de vista, no se puede pensar en el número como algo abstracto. Debemos referirnos siempre a una colección de objetos *reales* como 7 vacas o 13 vasos.

Esta noción cotidiana de *arithmos* empuja a los matemáticos griegos a definir al número como una multitud de unidades así: “la unidad es aquello en virtud de lo cual se llama a cada una de las cosas” y “el número es la multitud compuesta de unidades[43]”

“El sentido de número está pues en las cosas contadas[44]”. Si pensamos de esta manera, la afirmación que hace Platón en *La República*, en la que los números tienen cuerpos visibles y tangibles, debe comprenderse textualmente que el número queda ligado a la multitud de objetos que cuantifica; desde este punto de vista, debemos referirnos a la multitud de cien mil espectadores como tal, como una multitud de espectadores, pero el número 100000 no tiene un sentido claro pues no cuantifica multitud alguna.

Los pitagóricos no modificaron el concepto de *arithmos,* sino propusieron una filosofía que basaba su comprensión del mundo en el *carácter numérico* de todos sus entes. Aunque tuvieron que lidiar, no sólo con las limitaciones científicas y matemáticas propias de su época sino también con su propia lengua. Para ellos existía una sola palabra para

---

[42] Metafísica *1982:987 a 19*).
[43] Euclídes, 1992: VII def. 1.
[44] *Física*, 2005: XXV.

denotar semejanza o igualdad, lo que nos revela que los pitagóricos debían desarrollar y explicar claramente para sí mismos y para sus contemporáneos estos conceptos.

Más allá de sus creencias religiosas o de su inclinación mística, la deuda que las matemáticas, y todas las ciencias que se sirven de ellas, tienen con Pitágoras y sus segadores es enorme. En palabras de Galileo “el gran libro de la naturaleza está escrito con símbolos matemáticos”.

Uno de los pitagóricos era Ecfanto o Ecphantus, quien pensaba que el universo estaba hecho de átomos y de vacío, una idea que también guiará a la ciencia por mucho tiempo. Ecfanto identificó a los átomos con las unidades, dándoles así extensión.

Su teoría tuvo gran éxito entre los pitagóricos. Para ellos, la unidad se identificaba con el punto, porque ambos eran indivisibles, es decir eran los átomos del universo los que generaban todos los objetos. Entonces, un objeto cualquiera tiene una cierta extensión y está hecho de puntos, por lo tanto, los puntos quedan espacialmente extendidos, y las unidades tiznen así extensión. Aristóteles escribió en la Metafisica que: "de acuerdo con la filosofa natural pitagórica, todas las cosas sensibles y visibles están hechas de números"[45]. Philolaus, quien también era pitagórico, pensaba que:*"todo lo que puede ser conocido tiene número, pues no es posible que algo sea siquiera concebido sin ayuda del número[46]".*

Aunque esta la idea de asociar la unidad al átomo pueda parecer mística o religiosa, y en consecuencia, muy alejada de las matemáticas, aparecerá de manera implícita en los trabajos de Euclídes como se verá más adelante, por lo que tendrá una gran influencia sobre nosotros. Quizás más de lo que pensamos.

[45] *Metafísica*, 1982:1-5 985b 22, 986a 1

[46] Heath, 1977: 67.

El uso práctico que los propios griegos daban a los números da lugar a la abstracción. El calculista manipula objetos reales, pero comienza a simbolizarlos, como resultado la presencia de los objetos deja de ser importante para calcular y el número se despoja entonces de la multitud que representa, para convertirse en un ente abstracto cuyas propiedades son independientes de todo lo demás.

Para el calculista, como para nosotros, tiene sentido hablar del número y las propiedades, que descubre a través del cálculo y que no dependen de colección alguna. La definición que asocia al número con una multitud no resulta ya apropiada. Platón propone una nueva ontología del número que le permite situarlo por encima de los objetos sensibles y se ajusta mejor al *uso práctico* del número.

4.2 Platón

En el pasaje de la línea dividida[47], Sócrates le muestra a Glaucón cuál es la relación entre lo inteligible y lo sensible y qué papel juega el número en todo esto[48]:

> *De los dioses que están en el cielo, ¿a cuál podrías imputar el señorío de aquello cuya luz hace que nuestra vista vea con toda la perfección posible, y que puedan ser vistos los objetos visibles?*
>
> *Al mismo, dijo, que tú y los demás atribuyen aquello; es evidente, en efecto, que preguntas por el sol.*
>
> *Pero la vista ¿no se encuentra con este dios en la siguiente relación?*
>
> *¿En cuál?*
>
> *La vista, así ella misma, como el órgano en que se produce, y que llamamos ojo, no es el sol.*
>
> *Desde luego que no.*

[47] Platón, 1971 La república:508d 4-a 511d 5

[48] Decidí reproducer el dialogo en su totalidad primero por su belleza, segundo porque pienso que servirá como base y aclarará las ideas que expondré a continuación y tercero, para no interrumpir la exposición que lo sugue. .

Pero de todos los órganos de los sentidos, el ojo es, a lo que pienso, el de mayor solaridad.

Con mucho.

Y el poder que tiene, ¿no lo posee como un fluido dispensado por el sol y que se instila en él?

En absoluto.

Y el sol, por otra parte, que no es la vista, pero si su causa, ¿no es visto por la vista misma?

Exactamente, dijo.

Y ahora proseguí, puedes ya declarar que es el sol a quien yo designaba como el fruto vital del bien, engendrado por éste a su semejanza, y que es, en la región visible, con relación a la vista y a los objetos visibles, lo que es el bien en la región inteligible, con relación a la inteligencia y a los objetos inteligibles.

¿Cómo?, preguntó. Explícamelo algo más.

Según sabes, repuse, los ojos, cuando se les vuelve a aquellos objetos sobre cuyos colores se extiende no la luz del día, sino las débiles luminarias de la noche, están como empañados y son muy semejantes a las de los ciegos, cual si la vista no estuviera en ellos en su integridad.

Por cierto, dijo.

Cuando, por el contrario, se vuelven a los objetos iluminados por el sol, los ven creo yo, distintamente, y se comprueba que los mismos ojos tienen la vista pura.

No hay duda.

Pues hazte ahora la misma idea respecto con al alma. Cuando fija sus miradas en objetos iluminados por la verdad y por el ser, entonces, los concibe y los conoce y muestra poseer la inteligencia. Cuando, por el contrario, se fija sobre algo que está envuelto en tinieblas, como lo es lo que nace y perece, entonces, como lo ve turbio, no tiene sino opiniones que van de un extremo a otro, y parece incluso hallarse privada de toda inteligencia.

Tal parece, en efecto.

Ten por cierto, en suma, que lo que comunica la verdad a los objetos de conocimiento, y lo que confiere al sujeto cognoscente la respectiva facultad, es la idea del bien. Represéntatela como la causa del saber y la verdad, tal como nos es conocida; y así, por muy bellas que sean ambas cosas, el saber y la verdad, juzgarás rectamente al pensar que esta idea es algo distinta de ellas y de mayor belleza todavía. Y así como en el mundo visible hay razón para creer que la luz y la vista tienen analogía con el sol, del mismo modo, en el mundo inteligible, puede creerse con razón que el saber y la verdad son semejantes al bien.

Indescriptible belleza, dijo, es la que atribuyes, si por una parte confiere el saber y la verdad, y por otra los excede en belleza. Por lo menos es cierto que no vas a identificar el bien con el placer.

¡Silencio!, replique; y continua considerando más bien, del modo que voy a decirte, la imagen del bien.

¿De qué modo?

Del sol dirás, creo yo que no sólo confiere a los objetos visibles la aptitud de ser vistos, sino que también la generación, el crecimiento, y el alimento; el mismo, sin embargo, no es generación.

¿Cómo había de serlo?

Pues del mismo modo habrá que decir, con respecto a los objetos inteligibles, que del bien reciben no solamente su inteligibilidad, sino que reciben por añadidura, y de él también, la existencia y la esencia, y con todo, el bien no es esencia, sino algo que está todavía más allá de la esencia y la sobrepasa en dignidad y poder.

¡Qué Apolo nos asista!, dijo con mucha gracia Glaucón. ¡Qué maravillosa trascendencia!

El responsable eres tú, contesté, al obligarme a decir sobre esto lo que siento.

Pues no te quedes allí, dijo, no, por favor; y si en algo no pasas adelante, si hazlo por lo menos en lo relativo a la comparación con el sol, si ha habido alguna omisión.

Muchas cosas seguramente, dije, son las que he omitido.

Pues ahora, dijo, no vayas a dejar ni la más insignificante.

Me temo contesté que todavía serán muchas; no obstante, y hasta donde puede hacerlo quien esta improvisando no omitiré ninguna voluntariamente.

Guárdate de hacerlo, dijo.

Has de pensar, pues, proseguí, que, conforme a lo que decimos, son dos los que reinan, uno sobre el género y la región inteligible, y el otro, a su vez, sobre la visible; y no digo que sobre el cielo, para no dar la apariencia de que estoy haciendo juegos de palabras. ¿Tienes ya estas dos especies: la visible y la inteligible?

Tengo.

Sobre esta base, toma ahora una línea que esté cortada en dos segmentos desiguales, y corta luego, según la misma proporción, cada segmento, el del género visible y el del inteligible; y tendrás así el mundo visible, de acuerdo con la relativa claridad y oscuridad de las cosas, una primera sección, la de las imágenes. Por imágenes entiendo ante todo, las sombras, y después las figuras reflejadas en el agua o en la superficie de los cuerpos compactos, lisos y brillantes y otras representaciones semejantes. Supongo que me entiendes.

Te entiendo, sí."

"Represéntate ahora la segunda sección de la que la otra es imagen, y pon en ella todos los animales que nos rodean, todas las plantas y los objetos de todo género fabricados por el hombre.

Lo pongo, dijo.

¿Estarás luego, continué, dispuesto a reconocer que hay una división de lo visible con arreglo a lo verdadero y lo falso, de modo tal que la imagen es al modelo como lo opinable es a lo conocible?

Lo estoy, dijo de buen grado.

Y ahora mira de que manera hay que cortar el segmento de lo inteligible.

¿De qué manera?

De la siguiente. En la primera sección de este segmento, el alma, sirviéndose, como de imágenes, de los objetos que en el otro segmento eran originales, se ve obligada a investigar partiendo de hipótesis, y sigue un camino que la lleva no al principio no hipotético, y sin recurrir a las imágenes de la primera sección, y prosigue su investigación con el sólo recurso de las ideas en sí mismas.

No he comprendido suficientemente, expresó, lo que dices.

Volvamos a la carga, pues, dije; lo entenderás mejor después del siguiente preámbulo. No ignoras creo yo, que quienes se ocupan de la geometría, aritmética y otras disciplinas similares, parten de la hipótesis de que existen el número par y el impar, diversas figuras, tres clases de ángulos y otras cosas emparentadas con éstas en cada disciplina, y proceden luego como si las conocieran, cuando en realidad no las han tratado sino como hipótesis; por lo cual estiman que no tienen en absoluto por qué dar razón de ellas ni a sí mismos ni a los demás, dándolas así por evidentes a todos. De ellas arrancan, en suma, para recorrer lo que les resta, hasta terminar, por deducciones consecuentes, en la proposición por alcanzar (hacia) la cual emprendieron la marcha.

Sí, dijo, lo sé muy bien.

Pues también debes saber que se sirven de figuras visibles, a las que refieren sus razonamientos, sólo que no pensando en ellas mismas, sino en las otras figuras perfectas a las que las otras se asemejan. De este modo razonan en vista del cuadrado en sí y de la diagonal en sí, y no de la diagonal que dibujan, y otro tanto con respecto a las demás figuras. Todas estas figuras que modelan o dibujan, y que proyectan sombras o reflejan en el agua sus imágenes, las tratan como si a su vez fueran imágenes, en su afán de llegar a ver aquellas figuras absolutas que nadie puede ver de otro modo que por el pensamiento.

Es verdad lo que dices, asintió.

He aquí pues, continué, lo que entendía yo, por la primera clase de objetos inteligibles, en cuya investigación se ve el alma obligada a servirse de hipótesis, sin remontar hasta el principio, por no poder elevarse por encima de la hipótesis, sino que usa como imágenes aquellos mismos objetos que son a su vez copiados en las sombras o imágenes de la sección inferior, y que, por comparación con sus copias, son tenidos y estimados por realidades evidentes.

Por lo que entiendo, dijo, estás refiriéndote a lo que es del dominio de la geometría y de las ciencias de la misma familia.

Pues aprende ahora lo que entiendo por objetos inteligibles de la segunda sección. Son aquellos con que la razón toma contacto por sí misma y por virtud de la dialéctica, tomando las hipótesis no por principios, sino por lo que en efecto son: hipótesis, es decir, peldaños y trampolines que le permitirán lanzarse hasta lo no hipotético, hasta el principio del todo. Y una vez que haya tomado contacto con él, irá aprehendiendo la razón, en su camino inverso de descenso, todas las conclusiones, hasta la última, que derivan de aquel principio, y ya sin recurrir en absoluto a ningún dato sensible, sino tan sólo a las ideas en sí mismas pasando de una a otra y terminando en ideas. […]

En el diálogo, Platón divide al mundo en dos modos: el modo de ser de lo visible y el modo de ser de lo inteligible. En el modo de ser de lo inteligible, está la verdad de todas las cosas, mientras que, en el modo de ser de lo visible, gobiernan nuestros sentidos, y los objetos son sólo *apariencias*, imágenes deformadas por nosotros mismos de los objetos verdaderos que están en el modo de ser inteligible. Pues, según su *grado de verdad* los objetos entrarán en alguno de los modos.

Para explicarle a Glaucón, Sócrates le pide que tome un segmento de recta y lo corte en alguna razón distinta a la mitad. El segmento más grande representará el modo de ser de lo inteligible, y el más pequeño, el modo de ser de lo visible. Luego Glaucón cortará a su vez cada segmento en dos usando la misma razón.

Así, el modo inteligible tendrá dos secciones, que llamaré D y G.
En la sección D aparecen sólo los inteligibles puros, es decir, aquello que contiene, según Platón, la esencia de las cosas y que es totalmente verdadero. De esta sección se desprenden todos los objetos que están en las demás secciones y que resultan ser *copias imperfectas*, imágenes de lo que está en D.

Los objetos de la sección D, y la razón, nos permiten comprender la sección G, que a su vez hace comprensible la sección Q, es decir:

El mundo en que vivimos, que no es más que una imagen de G. Finalmente, en la sección W encontramos sólo imágenes y reflejos de lo que vemos.

Modo de ser de lo inteligible

D: *Noeta* = Inteligibles puros

Objetos verdaderos

Eikasia:

Dianoia:

Capacidad del
Alma para formar
Imágenes

Actividad del alma
cuyo trabajo
consiste en
Comparar,
Relacionar y
Distinguir igualdad
Y diferencia

G: Eide = Formas inteligible s

En esta sección encontramos los objetos matemáticos y sus propiedades. Platón sugiere que quienes aplican la aritmética y la geometría trabajan con ellos como si fueran inteligibles puros, es decir, "piensan que los objetos matemáticos son la base de la inteligibidad[49]".

[49] *Física*, 2005: XXXI -13.

Modo de ser de lo visible

Q:*Pistis*= Confianza

Imágenes de lo que los objetos situados en G.

Este es el mundo que captamos a través de nuestros sentidos y que comprendemos gracias al *eidos* de las cosas. El *eidos,* es la definición quede cada cosa tenemos.

Por ejemplo, aunque todas las mesas son distintas, podemos distinguirlas de cualquier otra cosa porque cada uno de nosotros sabe de antemano lo que es una mesa. Platón sugiere que el alma conoce todos los inteligibles puros y los recuerda al encontrarse con sus imágenes en la sección Q.

W:

Imágenes y reflejos de los objetos en Q.

Para pasar del modo de ser de lo sensible al modo de ser de lo inteligible, es decir, de la sección Q a la sección G, hay que usar la actividad del alma que Sócrates llama *dianoia*. Sin ella, no podríamos relacionar el mundo en el que vivimos con las ideas, y por lo tanto, el mundo resultaría incomprensibles para nosotros.

La *dianoia* es la facultad del alma que compara, relaciona, distingue e iguala. Así, aunque nuestros sentidos nos engañen, la razón nos permite esclarecer la confusión y llegar a la verdad. Si Miguelito observa que su pulgar es más grande que la torre a lo lejos, no es porque su dedo le importe más que la torre, como dice Quino ni tampoco porque así sea. Miguelito puede ver otra cosa, pero la *dianoia* le permite comparar la distancia que lo separa de la torre y de su dedo, distinguir el tamaño real de la torre y saber que es más grande pero no más importante que su dedo. La *dianota* es la facultad del alma que nos permite saber la verdad.

Distinguiendo lo igual, igualando lo distinto y relacionando las cosas encontramos, según Platón, la verdad, pero también así contamos.

Por ejemplo, si quisiéramos contar los libros de una biblioteca, tendríamos que distinguir primero el *eidos* de libro, es decir la idea que cada quien tiene de lo que es un libro y que le permite distinguirlo de otras cosas, como una mesa o un estante, luego relacionaríamos a cada libro con los demás libros y aunque fuesen distintos, serian iguales pues los tomaríamos como unidades "con las cuales medimos la multiplicidad[50]".

Lo que contamos entonces, no son multitudes de objetos sino *mónadas*, inteligibles puros. La primera consecuencia de esto es que el número queda completamente separado de los objetos, la segunda, es que "la clarificación del mundo sensible supone una estructura numérica que es la base de la inteligibilidad[51]". Para Platón la unidad es un inteligible puro que se *materialza* en este caso como un *libro* y nos permite contar. El libro no es la medida de la colección sino sólo un reflejo de la unidad, de la misma manera que la multiplicidad de libros no es número alguno, sino sólo la imagen en Q de un concepto superior que está más cerca de la verdad.

El número como ente abstracto no tiene nada que ver con nuestros sentidos, sus propiedades sólo pueden ser descubiertas a través de la

[50] *Física*, 2005: XXIX-7.
[51] *Física*, 2005:XXX 10-11

razón, es decir, las propiedades del número son formas inteligibles y por lo tanto pertenecen al segundo segmento del modo inteligible. Como el número está *por encima* de sus propiedades, el número es un inteligible puro.

Platón no modifica la definición pitagórica de número, simplemente nos explica en qué circunstancias es posible hablar del número como una multitud de objetos y de la unidad como un objeto real que sirve como medida de una colección y por eso se vuelve indivisible.

Colocando al número por encima de todas las cosas sensibles, como un objeto abstracto, Platón explica también la condición del calculista y su punto de vista, pues es gracias al número, y a los demás objetos inteligibles puros comprendemos las propiedades de las cosas.

El pasaje de la línea dividida termina de la siguiente manera:

> *…"Y ahora admíteme también, que a aquellas cuatro secciones corresponde la existencia, en el alma, de cuatro estados: a la sección más elevada, la intelección; la segunda, la inteligencia discursiva; a la tercera, dale la creencia, y a la última, la conjetura. Y en seguida, ordena estos estados en razón de su claridad, teniendo presente que participarán de ella tanto más cuanto más participen de la verdad sus respectivos objetos.*
>
> *Lo entiendo, dijo; estoy de acuerdo contigo y los ordeno como has dicho.*

En breve, Platón separa al número de la multitud, porque no se puede contar multiplicidad alguna, y desprender de ella al número, sin antes distinguir sus partes, ordenarlas e identificarlas. Por ello, el concepto de número no puede desprenderse de la multiplicidad.

Lo que en realidad contamos no son los objetos del mundo sensible, sino mónadas idénticas y es el proceso de contar, el que hace comprensible el mundo para nosotros, porque es el puente entre el modo de ser de lo sensible y el modo de ser de lo inteligible.

Platón coloca al número en un lugar privilegiado en su ontología, como un inteligible puro, y a la *dianota* como la base de la inteligibilidad.

4.3 Aristóteles

Aristóteles no está de acuerdo con el status ontológico que Platón concede al número, como el mismo lo explica: "nuestra controversia no es sobre su ser sino sobre su modo de ser" (*Metafísica*, 1982: 1076a36), y es que, para Aristóteles el número no es más que un simple adjetivo, una característica del discurso y no algo más allá del mundo sensible.

Según Aristóteles, cuando describimos un objeto, por ejemplo un edificio, hablamos de su tamaño, su uso o su ubicación y al hacerlo resaltamos algunas de sus características. Decimos entonces: "La enorme biblioteca central de Ciudad Universitaria". El discurso es entonces la suma de todas estas características y otras más que el discurso ha dejado de lado. Ninguna de estas características está por encima al discurso o *logos*.

En este sentido, cuando hablamos de "siete jinetes malditos", el siete es una parte del discurso que no es separable de los jinetes porque precisamente una de las características que resalta el discurso es que son siete. Aristóteles remarca esto cuando escribe: "Estar presente en número es ser algún número de algún objeto dado[52]".

Aristóteles retoma, en este punto, el concepto de número anterior a Platón. Por eso, "la cantidad no es separable de su ser[53]". En este sentido Klein[54] comenta lo siguiente:

> "*En la raíz de esta noción aristotélica, se encuentra el sentido "natural" de arithmos, la afirmación de que ciertas cosas*

[52] *Física*, 2005: 211b14-21.
[53] *Física, 2005:* XXIII-6.
[54] *Klein, 1968:101*

están presentes "en cierto número" significa sólo que tal cosa esta presente en justo esa multitud definida.

Ahora bien, el número, a diferencia del color o la forma, resulta ser un aspecto invariante de las cosas, por eso puede ser estudiado sin tener en Cuenta nada más. Las propiedades algebraicas o geométricas de las que se ocupa el matemático son pues totalmente independientes del mundo sensible.

Pero si el número es invariante en el mundo sensible, ¿cuál es su papel en el pensamiento aristotélico?

Para Platón, el número pertenece al segmento de los *eide* o inteligibles puros. Por lo tanto, tiene existencia separada de las cosas y sólo podemos llegar a él a través de la razón o *dianota*, como he mencionado antes, son las propiedades algebraicas y geométricas las que nos ayudan a comprender el mundo sensible y de ninguna manera podemos deducirlas de objeto alguno valiéndonos sólo de nuestros sentidos porque ellas rigen al mundo según Platón.

Aristóteles se opone a Platón en este sentido, porque considera que "el ser de los objetos matemáticos no es independiente, ni separado de las cosas sensibles pero puede ser estudiado como si lo fuese[55]".

Para el estagirita, Platón se ve forzado a considerar una comunidad superior de inteligibles puros como consecuencia de haber colocado al número por encima del mundo sensible; en cambio Aristóteles propone que el número no es parte de una comunidad más allá de del mundo sensible sino una medida de éste.

Aristóteles se ve entonces obligado a repensar el acto de contar, en su metafísica nos habla de la cantidad en los siguientes términos:

> "Cantidad es aquello que es divisible en dos o varios elementos que la integran, de los cuales cada uno es por naturaleza una cosa individual. Si una multiplicidad es numerable (entonces) es una cantidad, si es medible, es una

[55] *Física*, 2005: XXXIV.

> magnitud,[56] la magnitud continúa en una sola dimensión es una longitud, en dos dimensiones posee ancho y en tres posee profundidad. Una multiplicidad finita es una longitud finita y una profundidad finita un cuerpo".

En este pasaje, podemos ver que tanto el número como la magnitud cumplen con la definición de cantidad propuesta por Aristóteles, sin embargo cualquier unidad de medida, llámese metro o litro, parece no cumplir con la definición anterior, medimos el volumen, por ejemplo en litros y, aunque podemos tener menos de un litro, no cambiamos nuestra unidad de medida y medimos medio litro de leche.

Las unidades de medida se ajustan a la definición de cantidad propuesta por Aristóteles, ya que cada medio litro de leche, puede ser considerado como una cosa individual, lo que implica que el litro es una cantidad, y sólo *el uno* no cumple con esta definición porque es indivisible, la unidad no es entonces cantidad pero es la medida de los números.

J. Tricot hace hincapié además, en que siendo el número una cantidad numerable no puede ser infinito "una multiplicidad infinita no puede ser número" (Segunda nota al pie p.269) pero en la metafísica encontramos una inesperada generalización del concepto de cantidad:
"la cantidad por accidente, se entiende, en el sentido en el que nos hemos referido al músico [...] como cantidad (porque) es cantidad aquello a lo que pertenece".

En este sentido, la cantidad conecta varios aspectos; por una parte el número y la magnitud son ambas cantidades, pero por otra parte cualquier objeto puede cuantificar una colección, al menos de objetos similares. Así decimos que hay 80 músicos en la orquesta tomando al músico como unidad de medida. Aristóteles plantea que se puede deducir la cantidad de los objetos o de las magnitudes o de los números, y esta idea es la que nos permite contar. Y por ende, asignarle un número y una medida a cualquier cosa.

---

[56] Traduzco *grandeur* como magnitud.

El músico es la medida de la colección de músicos que conforman la orquesta, pero para saber de qué tamaño es una orquesta, tenemos que contar a los músicos, luego entonces la medida de la orquesta es de 80 músicos.

Bajo esta prespectiva, la unidad resulta ser la medida de los números; aunque aún no queda claro que es la unidad, la cantidad por accidente nos deja ver que para contar, al menos en el mundo sensible, elegimos la unidad de manera que nos acomode. Aristóteles define a la unidad como "el indivisible (en la categoría) de la cantidad,[57] lo que implicaría que sólo tendríamos números enteros. En cambio, el concepto de medida resulta mucho más flexible porque la "unidad-medida" no tiene que ser indivisible sino sólo se considera como tal si esto nos facilita el contar: la misma orquesta puede tener distintas medidas, porque podemos verla como una orquesta de tres secciones, percusiones, alientos y cuerdas o una orquesta de 80 músicos o simplemente, una orquesta.

Me parece que el concepto de medida permite una generalización del concepto de unidad, la unidad no es más indivisible ni tampoco genera a los números; es decir, la unidad es un número como cualquier otro porque es cantidad. El filósofo nunca trata este punto específicamente pero el aspecto práctico del número lo obliga a tratar esta generalización de manera implícita. Aristóteles, sin embargo, nos habla de la unidad de manera explícita en otros términos pues se opone abiertamente a los filósofos pitagóricos.

En vez de separar a la unidad y decir que no es un número sino que da origen a los números, el estagirita señala que "la sustancia es una" y es ella la que cuantifica los objetos, "además, es necesario que exista en el número un principio que lo vuelva uno, (unidad o mónada), y aquellos que

[57] *Metafísica* 1982: 1089b35.

lo componen en unidades son incapaces de decir en que el número es uno […] hace falta decir que constituye la unidad o la pluralidad[58]".

Incluso número y medida quedan casi fusionados cuando leemos que:

> "En todos los casos (largo, ancho, peso, velocidad…) hay una medida y un principio que son de alguna forma[59] uno e indivisible. Porque incluso cuando medimos líneas consideramos al pie como indivisible. Por todas partes la medida es una e indivisible y esta medida es simple según el orden y la cantidad de lo medido[60]".

En este pasaje se habla de la medida como una mónada, y por lo tanto los conceptos de número y medida son complementarios, la medida nos permite asignar a cualquier colección un número y cuantificarla.

Para él, los números son uno y el alma y el cuerpo también (son uno)[61] es decir la unidad o mónada no representa el ser de las cosas sino la medida que nos acomoda según la ocasión y nos hace más fácil el acto de contar.

Un hombre tiene dos piernas, una nariz, un alma y otras cosas pero para contar hombres hace falta concebir una medida que agrupe todas estas características en una unidad.

Aristóteles va aún más allá al señalar que "un número es o bien aquello qué ha sido contado o bien aquello que puede contarse". Así podemos pensar a la mónada como una medida o metrón, la prioridad del uno con respecto a los números no se sigue de una relación de superioridad de género a especie sino más bien del carácter del uno en cuanto *medida*. Y, de manera similar la unidad de un número no se obtiene del género sino que se deriva de la unidad que cada objeto tiene por ser una *medida* para contar. Entendemos un número como uno porque contamos una y la misma cosa, porque fijamos los ojos en una y la misma cosa. Y, así a la inversa, que las cosas son uno las hace contables

[58] *Metafísica* 1982:1049ª.
[59] Traduzco *quelque chose* como alguna forma.
[60] *Metafísica* 1982:1053ª
[61] *Metafísica,* 1982: 1075b34.

y de esto se sigue y sólo de esto que ser uno es indivisible, pues la indivisibilidad pertenece a las cosas sólo en cuanto aportan la medida para un posible conteo.

Revisemos ahora que es la unidad según Aristóteles, comenzando por su libro primero de *La Metafísica*[62]:

> "Tales son entonces las diferentes acepciones[63] (o significados) de la unidad[64]: el continuo natural, el todo, el individuo y lo universal".

Los diferentes tipos de unidad que se nos presentan en el pasaje anterior, nos permiten agrupar cualquier colección en un sólo objeto, el mejor ejemplo es el de la esfera celeste que es continúa por naturaleza, esta primera aproximación al concepto de unidad resulta insuficiente porque no revela principio alguno como Aristóteles esperaría, en *La Metafísica* es aun más específico:

> "Por esa razón también, la esencia de la unidad consiste en la indivisibilidad y en el hecho de ser esencialmente una cosa determinada, particular (y) separable [...] finalmente, sobretodo, es el ser de la medida de cada género y especialmente, la medida primera de la cantidad y de la calidad[65]".

La unidad ha sido extendida a las demás categorías. Es medida, en efecto, y es por lo que la cantidad se conoce; es por la unidad o por el número que es conocida la cantidad como tal, y todo número es conocido por la unidad [...] en consecuencia toda cantidad es conocida gracias a la unidad [...] la unidad es el principio del número como tal; de ahí viene que, en las demás categorías también se dé el nombre de medida a aquello por lo que primitivamente cada cosa es conocida y la medida de (los) distintos

---

[62] *Ibid*, I-1 1052b 34-39.
[63] Traduzco *significations* como acepciones.
[64] Traduzco *de l'un* como de la unidad.
[65] *Metafísica*, 1982 I-1 1053ª 1-10.

géneros es una unidad, unidad para la longitud, el área[66] el peso, la velocidad. […] En todos estos casos, hay una medida y un principio que son de cierta forma uno e indivisible, porque hasta para medir líneas, consideramos al pie como indivisible[67], en efecto la medida buscada es una forma de uno e indivisible. Y esta medida es simple según el orden de la calidad o de la cantidad".

Por una parte, es más fácil contar hombres tomando al hombre como unidad de medida, pero también es válido, según Aristóteles, el contar por ejemplo batallones de hombres aunque esencialmente se haga lo mismo, contar hombres, la unidad de un batallón, puede resultar más cómoda en ciertos casos.

Pero por otra, Aristóteles como Platón se ve obligado a otorgarle a la unidad un estatus superior porque "la cantidad es conocida gracias a la unidad y la unidad es el principio del número" y de esta manera salvar el concepto pitagórico al menos como algo puramente abstracto dentro de su filosofía.

Dicho esto, donde no podemos aumentar ni quitar nada la medida es precisa. Es por eso que la medida del número es la más exacta de todas, porque la unidad es representada como un indivisible absoluto; todas las demás medidas no son más que imitaciones […] esto es lo que hace que tomemos como medida siempre lo primero a lo que no sea posible quitarle algo de una manera visible".

El concepto de unidad queda ligado al concepto de indivisibilidad por un argumento puramente filosófico, donde los números están por encima de los objetos sensibles y todas las medidas son *imitaciones* de la verdadera medida, la de la unidad en los números. Por eso, la unidad debe ser indivisible para ajustarse a la definición pitagórica, que en ese momento de la historia de las matemáticas era aceptada, pensar en una unidad indivisible no sólo implica negar la existencia de los números

[66] Traduzco *largeur* como área.
[67] Traduzco *insecable*, que no puede ser cortado o dividido, como indivisible.

reales sino incluso la posibilidad de dividir cualquier cosa porque como sabemos Aristóteles reconoce que la unidad puede ser cualquier objeto. La unidad pitagórica debe sostenerse aún a costa de ello, por otro lado, en el pensamiento aristotélico es válido asignar a cualquier medida un número, esta idea plantea un isomorfismo entre magnitud y número sólo roto por la unidad indivisible. Pero este aparente obstáculo puede ser salvado dentro del contexto antes planteado si pensamos que la medida es variable en el sentido de que puede acomodarse a nuestras necesidades, me parece que implícitamente Aristóteles plantea la posibilidad de *cambiar* el nombre de la unidad, después de todo llamarle uno al ½ no cambia en nada la estructura de anillo de los números reales.

La *unidad-medida* no genera los demás números porque es arbitraria, de manera que podemos asignar a cada número una medida, es decir, una magnitud; esta magnitud depende de la medida o magnitud que elijamos para la unidad. En los elementos de Euclides encontramos en los libros VII, VIII, IX y X varios ejemplos de ello. Número y magnitud quedan incluso en la matemática formal fusionados implícitamente aunque sus definiciones no permitan este tratamiento.

En el libro séptimo de los elementos de Euclides la segunda proposición dice lo siguiente:

> *"Dados dos números no primos entre si, hallar su medida común máxima"*
>
> *Demostración:*
>
> *Sean AB, TZ los dos números dados no primos entre sí.*
>
> *Así pues, hay que hallar la medida común máxima entre AB y TZ.*
>
> *Si en efecto TZ mide a AB, y se mide también a sí mismo, entonces TZ es la medida común de TZ, AB. Y está claro que también es la máxima, pues ninguna mayor que TZ Medirä a TZ.*

B E A

Z w T

H

Pero si TZ no mide a AB, entonces restándose sucesiamente el menor de los (números) AB, TZ del mayor, quedará un número que medirá al anterior. Pues no quedará una unidad: porque en otro caso AB y TZ serán primos entre si (7.1), que es precisamente lo que se ha supuesto que no. Así pues, quedará un numero que medirá al anterior. Ahora bien. Tz, al medir a BE, deje EA menor que el mismo, y EA al medir a ZW, deje WTmenor que el mismo y mida TW y AE. Así pues, como TW mide AE, y AE mide a ZW, entonces TW medirá también ZW; pero se mide también a sí mismo; entonces medirá también al total TZ. Pero TZ mide a BE, luego TW mide también a EA, por tanto medira también al total BA, pero mide también a TZ; entonces TW mide a AB, TZ. Por lo tanto es medida común de AB, TZ.

Digo ahora que también es la máxima, pues si TW no es la medida común máxima de AB, TZ, un número que que sea mayor que TW medirá a los números AB, TZ. Midalos (un número) y sea H como H mide a TZ y TZ mide a BE, entonces H mide también a BE; pero también mide al total BA, entonces medirá también al resto AE, pero mide a ZW; por lo tanto H medirá también al resto WT, esto es .el mayor al menor, lo cual es imposible; así pues, no medirá a los números AB,TZ un número que sea mayor que TW.

Por consiguiente, TW es la medida común máxima de AB y TZ.

Corolario:

A partir de esto queda claro que; si un número mide a dos números, medirá también a su medida común máxima."[68]

[68] Euclídes de Alejandría. Elementos. P.80

A primera vista uno podría pensar que la proposición trata sobre magnitudes y no sobre números porque Euclides utiliza un lenguaje *geométrico*. Busca la medida común más grande, los números miden otros números etcétera, pero en el libro X de los elementos encontramos la proposición V que es la proposición análoga para magnitudes conmensurables.

La demostración de la tercera propiedad del libro X es casi idéntica a la segunda del libro VII, Euclides sólo pide que las magnitudes sean conmensurables entre sí en vez de pedir dos primos relativos, para poder hallar una medida común.

Me resulta sorprendente que Euclides utilice una demostración donde a cada número se le asigna una magnitud y luego se resten magnitudes para encontrar la medida común más grande. El lenguaje y la demostración son totalmente *geométricos* y sólo podemos aceptar la demostración si aceptamos que cualquier número puede ser representado por una magnitud.

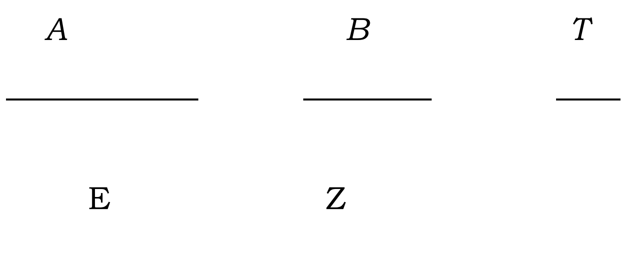
Debemos admitir entonces que la unidad es infinitamente divisible, aunque sea sólo potencialmente, y que es la medida de los números. En este contexto, se pueden hacer demostraciones geométricas para proposiciones algebraicas o a la inversa. El gran desarrollo de la geometría griega nos brinda muchos ejemplos del primer tipo en los libros VII, VIII y IX de los elementos de Euclides.

La segunda proposición del libro VII, nos muestra un algoritmo para encontrar el máximo común divisor de dos enteros, el algoritmo es muy parecido al que actualmente se incluye en la mayoría de los libros que tratan el tema, al restar una magnitud de la otra ponemos al residuo como una combinación lineal de los dos números iniciales. Repitiendo el algoritmo encontramos la combinación lineal más pequeña que es el máximo común divisor.

En el libro X de los elementos de Euclides encontramos dos proposiciones que ligan definitivamente los conceptos de número y magnitud conmensurable a través del concepto de medida.

Proposición (10, 5):

"Las magnitudes conmensurables guardan entre si la misma razón que un número guarda con un número.
Sean A,B magnitudes conmensurables.
Digo que A guarda con B la misma razón que un número con otro número.
Pues, como A,B son conmensurables, alguna magnitud las medirá. Midalas una magnitud y sea T



Y cuantas vaces t mida a A, tantas unidades haya en Z. y cuantas veces T mida a B, tantas unidades haya en E.
Así pues, dado que T mide a A según las unidades de Z y la unidad mide a Z según sus unidades, entonces la unidad mide al número Z el mismo número de veces que la magnitud T a la (magnitud) A; luego como T es aA así la unidad es a Z (definición 20 del libro 7) ; entonces, por inversión, como A es a T, así z a la unidad (5,7 Por.). Como T mide a su vez a Z según las unidades de E, mientras que la unidad mide también a E según sus unidades, entonces la unidad mide también a E según sus unidades, entonces la unidad mide a E el mismo número de veces que T a B. Luego, como T es a B, así la unidad es al (número) E.
Pero se ha demostrado que también como A es a T, Z es a la unidad. Luego, por igualdad, como A es a B Así el número Z es al (número) E. (5,22).

Por consigiente las magnitudes conmensurables A,B."[69]

En la proposición anterior, Euclides toma una magnitud común y la utiliza como unidad de medida. La elección de la unidad depende de su uso, en particular esta elección simplifica la proposición.

De esta manera, Euclides abre definitivamente el camino geométrico para estudiar al número, pero queda aún por descubrir el camino analítico para estudiar la magnitud; en la siguiente proposición Euclides prueba que si dos magnitudes tienen la misma razón que un entero con otro entonces son conmensurables (6, X); la magnitud conmensurable y el número quedan así relacionados, pero para poder pensar al número como una magnitud y viceversa, hace falta definir lo que es un número inconmensurable, porque sea cual fuere la magnitud asociada a la unidad, es decir la medida, habrá siempre magnitudes inconmensurables.

La proposición 7 del libro X dice lo siguiente:

> *Las magnitudes inconmensurables no guardan entre sí la razón que un número guarda con otro número.*
>
> *Sean A,B magnitudes inconmensurables.*
>
> *Digo que A no guarda con B la razón que un número guarda con un número.*
>
> *A*
>
> *B*

[69] Euclides de Alejandría. Elementos. Libro 10 P.129-130.

> *Porque si A guarda con B la razón que un número guarda con un número. A sera conmensurable con B (10.6), Pero no lo es. Por tanto A no guarda con B la razón que un número guarda con un número."*[70]

Euclides se refiere en estas proposiciones a los números en general, pero creo que en realidad hace referencia únicamente a los enteros por lo que las proporciones sólo pueden arrojar números racionales y no pueden *medir* magnitudes inconmensurables.

En este contexto, del tratamiento geométrico de los números se puede pensar en la definición de un nuevo tipo de número cuya proporción involucra una magnitud inconmensurable. Es decir, ¿existirá proporción alguna entre el segmento unidad y la diagonal del cuadrado de lado uno?, y si existe ¿cuál es?

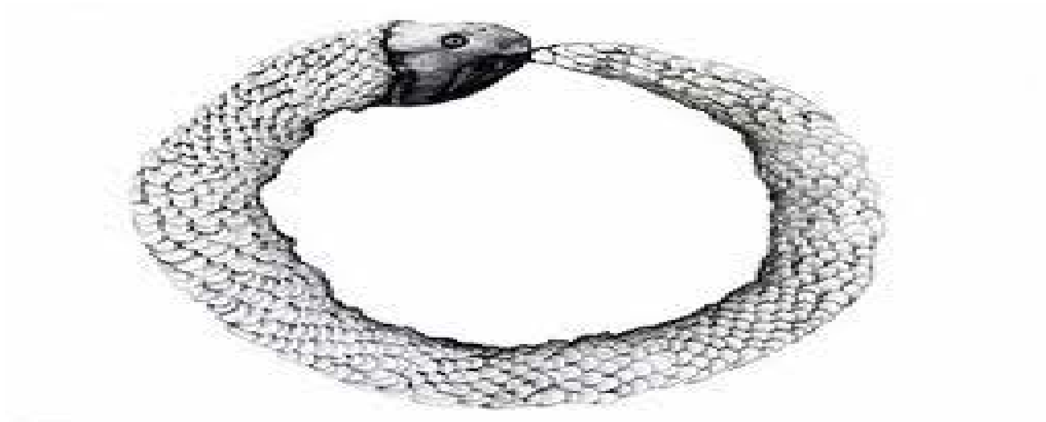
5. Un tratamiento más flexible

Aristóteles escribió sobre el infinito, el número, la unidad y la magnitud analizando cada concepto por separado. Como hemos visto, la definición de número queda "complementada" por la definición de medida. Lo que plantea un isomorfismo entre número y magnitud sólo roto por la unidad indivisible. Aristoteles salva este obstáculo pensando en que quien cuenta es puede elegir la medida que màs le convenga para contar, es decir la unidad dependiendo de lo que se quiera contar. A pesar de que el tiempo también ha sido acotado por su forma circular para sostener al universo aristotélico y aunque las definiciones de estos conceptos se han adaptado al pensamiento aristotélico, cuando el filósofo analiza el concepto de movimiento, número, tiempo, infinito, magnitud, y tiempo deberán

[70] Euclídes de Alejandría. Elementos. Libro 10. P132.

fundirse, a pesar de sus definiciones, para explicar el movimiento dentro del universo aristotélico.

5.1 Del tiempo



71

Para Aristóteles el tiempo es infinito, y por lo tanto perfecto, en otras palabras: "Acabado [perfecto] significa, en primer lugar aquello fuera de lo cual no es posible [concebir] parte alguna, por ejemplo el tiempo[72]".

Es decir, que no podemos concebir nada fuera del tiempo, aún las cosas eternas que "no pueden estar en el tiempo ni ser abrazadas por este, ni ser medidas por él[73]" son *extra temporales* justamente porque al compararlas con la infinitud del tiempo, nos damos cuenta que siempre han existido y siempre existirán[74].

"El *instante*[75] no es una parte, pues la parte mide [el todo], y el todo debe estar hecho de sus partes; el tiempo, empero, no parece estar hecho de *instantes*[76]".

---

71 La imagen del tiempo circular donde la historia se repite es asociada con la imagen de la serpiente mordiendo su propia cola como si se devorara a si misma.

72 *Metafísica,* 1982: 16 1022ª1-5

73 *Física* 2005: VII -1 251

74 En Aristóteles la eternidad tiene dos caras, por un lado, es la serie de cambios y movimientos contenidos en la infinitud temporal; y por otro la extra temporalidad divina, "substancia eterna e inmóvil separada de los seres sensibles" *Metafísica* 1982: XII 1973ª, y "primera eternidad divina en acto puro" *Metafísica* 1982: 6-9 1973-74.

75 Traduzco *now* como instante y no como el ahora.

76 *Física* 2005, IV 218a 6-8

“El instante separa al tiempo en antes y después. En cierto sentido el instante es el mismo[77]”, es decir, es simplemente una medida de tiempo que no tiene duración, sin importar cuando ocurre. “En otro sentido (el instante) no es el mismo[78]”. A lo largo del tiempo ningún instante es igual a otro, lo que constituye la naturaleza misma del instante, además:

“El tiempo es continuo en virtud del instante que (también) lo divide [...].

Lo mismo ocurre con el punto, pues es el punto el que conecta y divide a la magnitud, porque es el inicio de una longitud y el fin de otra.
Es claro que el instante no es parte del tiempo ni una división del movimiento como tampoco el punto es parte de la línea. Son las dos líneas conectadas por el punto las partes de la recta[79]”.

Aristóteles puede identificar el instante con el punto porque ambos dividen, limitan, conectan y no son parte del tiempo y de la línea respectivamente.

Notemos que el instante no genera el tiempo, ni es posible tampoco generar la magnitud a partir del punto. Al igual que la magnitud, el tiempo se puede dividir en lapsos tan pequeños como queramos. Ésta es la diferencia entre la pareja instante-punto y la unidad.

Por otra parte, para Aristóteles el continuo no puede estar hecho de indivisibles, así la línea no puede estar hecha de puntos: “Suponiendo que una línea y un tiempo puedan ser divididos en las partes que los constituyen, entonces serían divididos en indivisibles. Pero nada que sea continuo es divisible en elementos que no tengan partes. Y los puntos y los instantes no pueden tener nada distinto de ellos entre sí”[80].
“... todo aquello que es continuo es divisible en partes (a su vez) divisibles *ad infinitum*, pues si el continuo fuese divisible en indivisibles tendríamos que un indivisible estaría en contacto con otro indivisible (y por lo tanto

[77] *Ibid* , IV 11 219b 11-15
[78] Heath, 1977: 120.
[79] *Física*, 2005: 220ª4-13, 18-21.
[80] *Heath*, 1977: 130.

estarían en el mismo lugar). El mismo argumento es válido para la magnitud, el tiempo, y el movimiento"[81].

"De nuevo, queda de manifiesto por el argumento usado en la vida diaria, que, si el tiempo es continuo, la magnitud también lo es, ya que un cuerpo en movimiento (uniforme) recorre la mitad de la distancia en la mitad del tiempo y generalmente menor distancia en menor tiempo; por lo que debemos tener las mismas divisiones en el tiempo y en la magnitud. Así, si el tiempo es infinito respecto a sus extremos (es decir, se extiende en ambas direcciones) de la misma manera también lo es la magnitud, y si cada lapso de tiempo puede dividirse de la misma manera también la magnitud puede dividirse"[82].

Así, para Aristóteles, un intervalo de tiempo finito y un segmento de recta pueden considerarse isomorfos. Ya que ambos son continuos y el instante juegan en el tiempo el mismo papel que el punto juega en el segmento. Sin embargo, tiempo y magnitud no son enteramente isomorfos. La magnitud se extiende infinitamente sólo de manera potencial mientras el tiempo es infinito en acto.

La razón por la que no podemos hablar de un isomorfismo entre tiempo y magnitud es cosmológica, no obstante, Aristóteles continúa remarcando las similitudes entre tiempo y magnitud.

"El punto, toda división y cualquier indivisible en el mismo sentido se hacen claros de la misma forma como privación"[83].

"Posiblemente en algunos casos es necesario para quien define utilizar la negación [...], por ejemplo, se define como privación: "ciego" es aquello que no posee el sentido de la vista cuando está en su naturaleza el poseerlo"[84].

Para entender la definición de "ciego", necesitamos saber que significa "ver". Lo que la hace, a todas luces incompleta, al menos para

---

[81] *Ibidem.*
[82] *Física*, 2005: VI. 2.233ª13-31.
[83] *De Anima* III.6.430b20-I
[84] *Tópicos* VI 143bII-144ª4

un ciego de nacimiento. Lo mismo ocurre con las definiciones de los conceptos más elementales en geometría, así *un punto* se define como aquello que no tiene longitud o una recta como aquello que no tiene ancho. De la misma manera podemos definir *el instante* como aquello que no tiene duración temporal.

“Lo que es indivisible en todo sentido respecto de la magnitud y no tiene posición es una unidad mientras que aquello que es también indivisible pero tiene posición es un punto”[85].

Heath[86] comenta que la definición pitagórica de punto, como una unidad con posición, es la primera definición de punto conocida entre los griegos que no utiliza la negación, aunque no nos dice nada acerca de la naturaleza del punto.

Por una parte, Aristóteles define la recta como una magnitud divisible en un sólo sentido[87] o continúa en un sólo sentido o en una sola dirección[88].

Por otra, es sólo por medio del movimiento que el punto puede generar una recta, pero esto requeriría de un tiempo eterno por lo que la recta es sólo potencial y no real. Aunque si consideramos,como Aristótelas, que el tiempo es infinito en acto, la recta debe serlo también.

Como vemos, es posible generar una recta, según Aristóteles, moviendo un punto, es decir, que podemos asociar a cada instante con una posición en el espacio del punto, lo que nos permite asociar a cada punto del segmento un instante.

Abandonemos por un momento la comparación entre tiempo y magnitud para saber qué relaciones encuentra Aristóteles entre el tiempo y el número.

---

[85] *Metafísica*,1982: 6.1016b24-6
[86] *Heath*, 1977: 89.
[87] *Metafísica* 1982, 6.1016b25-7
[88] *Ibid*, 13.1020aII.

5.2. Del número

Aristóteles acepta la definición pitagórica de número: "Relativo se dice, en un sentido, como lo doble es relativo a la mitad, lo triple al tercio y, en general lo que es muchas veces mayor a lo muchas veces menor, y el exceso al defecto [...] ".

En otro [sentido] como lo medido es relativo a la medida o lo cognoscible al conocimiento. "En cualquier circunstancia la unidad es indivisible sea en cantidad o en especie"[89].

En el primer sentido, las relaciones son numéricas, indeterminadas o determinadas en relación con los números mismos o en relación con el uno. Por ejemplo, lo doble está en relación numérica determinada con la unidad de la misma manera que el 10 está en relación con la unidad. Sin embargo, hay cantidades que no aparecen en relación estrictamente numérica con la unidad, como: "mucho", "poco", "bastante". La relación del exceso con el defecto es, según el número, totalmente indeterminada. En efecto, todo número es conmensurable, y el número no se atribuye a lo inconmensurable, porque el exceso en relación con el defecto es tanto como el defecto, más algo más. No obstante, este algo más es indeterminado, porque puede indistintamente ser o no igual al defecto.

"... el uno es principio y medida del número, de modo que se llaman numéricas a todas estas relaciones"[90].

En este pasaje, Aristóteles nos expone de nueva cuenta sus ideas respecto del número. De manera explícita subraya que el número es conmensurable siempre y que la unidad genera a los demás números, pero también contempla otra posibilidad, la inconmensurabilidad del número que se apresura a descartar a favor de sus ideas previas.

[89] *Metafísica* 1982: 6.1016b11-13, 23-31.

[90] Metafísica 15.1020b26-1021ª7[90]

En este contexto, podemos pensar que la mitad de un número está en relación 2:1 con el mismo. De la misma manera que 3 está en relación 3:1 con 1.

Así, 1+1/2 está en la misma proporción con 1 que 3 y 2 y en general 1+1/n está en la misma proporción con1 que n con n+1.

Los números están siempre en razón unos de otros por lo que no existen números *inconmensurables* y la unidad se convierte entonces en generadora de todos los números.

Ahora, si tomamos dos magnitudes, éstas no estarán forzosamente en relación numérica una con otra pues podrían resultar inconmensurables, Heath, de acuerdo con Ross que en 1021ª5 de *La Metafísica* se podría leer como: "el exceso puede ser un número inconmensurable" lo que daría a Aristóteles el crédito de concebir al número de una manera más general. Aunque no existen pruebas contundentes de esto. Aristóteles compara al tiempo con el número como parte del movimiento en un contexto mucho más amplio.

"Si tenemos la impresión de que el tiempo no existe cuando no distinguimos ningún cambio y cuando el alma parece permanecer en un [ahora] único e indivisible, cuando por otra parte percibimos [un cambio] y lo distinguimos y luego decimos que paso tiempo, es claro que el tiempo no se da sin movimiento y cambio". Ahora bien, es claro que el tiempo no es movimiento pero tampoco se da sin movimiento.

"En efecto, percibimos simultáneamente el movimiento y el tiempo, también cuando hay oscuridad y no tenemos ninguna impresión de nuestro cuerpo, se da, sin embargo, algún movimiento en el alma y parece inmediatamente que ha pasado algún tiempo, pero también a la inversa: cuando parece haber pasado algún tiempo, simultáneamente también parece haber pasado algún movimiento. De tal suerte, el tiempo es o bien movimiento o bien algún [elemento] del movimiento [...].

Puesto que aquello que se mueve, se mueve a partir de algo hacia algo y, puesto que cada magnitud es continua, el movimiento sigue a la magnitud; por el hecho de que esta es continua, el movimiento también es continuo, y por serlo el movimiento, también el tiempo lo es [...].

Por tanto, el tiempo no es movimiento sino sólo en tanto que el movimiento contiene número, es decir, el número es el momento numérico del movimiento. Un signo de ello: juzgamos lo más y lo menos por medio del número, pero más o menos movimiento por medio del tiempo; por ello el tiempo es un tipo de número. Puesto que el número se da en dos acepciones (pues llamamos número a lo contado y a lo contable, y también es aquello mediante lo cual contamos) [...].

Mediante el tiempo medimos el movimiento, y mediante el movimiento, el tiempo. Y esto sucede por una buena razón: el movimiento le sigue a la magnitud, el tiempo al movimiento siendo [todos] cantidades continuas e indivisibles"[91].

En este pasaje, Aristóteles se desprende otra vez de algunos conceptos cosmológicos y matemáticos propios de su tiempo. El resultado coloca al tiempo como el puente que conecta al número y a la magnitud. Esta idea prepara el camino para rebatir a Zenón de Elea, quien argumentaba que una flecha nunca llegaría a su blanco pues primero tendría que recorrer la mitad de la distancia en cierto tiempo, y luego la mitad de la distancia restante en otro tiempo más, y luego la mitad de la distancia restante en más tiempo. Como el argumento se repite indefinidamente Zenón sostenía que no existe el movimiento porque la flecha necesitaría un tiempo infinito para recorrer una infinidad de partes y así llegar al blanco.

Arist+oteles se opone argumentando que: "si (el cuerpo) no recorre cada magnitud en un tiempo infinito, sino que puede recorrer alguna, por ejemplo BE, en un tiempo finito, y si esta mide el todo, y si rrecorre la misma distancia en igual (tiempo), también el tiempo será finito.

[91] *Física* V 208b29-35[91]

Pero es claro que (el cuerpo) no recorre BE en un (tiempo) infinito, si el tiempo se concibiera de un lado como finito; si en un (tiempo) menor recorre una parte, esta necesariamente es limitada, estando presente el limite de l otro lado. La misma (prueba) se aplica también si la longitud nes infinita, pero el tiempo, finito.

Es claro entonces a partir de lo dicho que ni una línea, ni una superficie, ni en general ningún continuo puede ser indivisible, no sólo por lo que se acaba de decir, sino también porque (de otro modo) se dará una división de lo indivisible. Pero puesto que en todo tiempo hay lo que es más rápido y lo que es más lento, y lo más rápido recorre una mayor longitud en un tiempo igual, es posible que recorra la doble longitud o una y media(podría ser esto una relación de velocidad); aceptemos que lo que es más rápido haya corrido en el mismo tiempo un tramo y medio, y aceptemos que las magnitudesestén divididas: aquella según la misma proporción. Y si se divide el tramo, también el tiempo. Y esto será siempre así, al pasar de lo más rápido a lo mas lento, y de lo más lento a lo más rápido, utilizando lo comprobado, a saber que aquello que es más rápido dividirá el tiempo, pero lo que es más lento la longitud. Ahora bien, si este permanente ir y venir es posible y como resultado de ello siempre se genera una división, es claro que todo el tiempo será continuo. Asimismo es claro también que toda magnitud será continua, pues el tiempo y la magnitud se dividen con las mismas e iguales divisiones.

Además, a partir de las expresiones cotidianas es claro también que: si el tiempo es continuo, la magnitud también lo es: en la mitad de un tiempo (un cuerpo) atraviesa la mitad de un camino, y en general, en menos tiempo menos (camino), pues las mismas divisiones serán del tiempo y de la magnitud.

Y si uno de los dos fuera limitado, también el otro lo sería, y ambos del mismo modo, como por ejemplo: si el tiempo fuera ilimitado en sus extremos, lo mismo pasaría a la longitud en sus extremos: pero si (el tiempo fuera ilimitado) con respecto a la divisibilidad, también lo sería la

longitud; pero si el tiempo se comportara en ambos sentidos {=ilimitado en sus extremos y en su divisibilidad}, en ambos también la magnitud.
Por ello también el argumento de Zenón resulta falso (al afirmar) que no es posible recorrer los (tramos) infinitos o bien tocarlos uno por uno en un tiempo finito."[92]

Tiempo, número y magnitud son partes del movimiento, para Aristóteles estas tres partes deben *ocurrir* simultáneamente para que exista movimiento.

Por una parte el movimiento conecta al tiempo y a la magnitud. Cuando hay movimiento percibimos a la magnitud y al tiempo simultáneamente, así que el tiempo debe adoptar las mismas propiedades que posee la magnitud para dar lugar al movimiento. Luego, podemos representar al tiempo como una línea recta que es paralela a la magnitud y asociar a cada punto de esta línea un punto de la magnitud porque el movimiento es el desplazamiento de un punto sobre una magnitud en un tiempo. Por ello, Aristóteles no duda en afirmar varias veces que el tiempo es continuo.

En el contexto de la cosmología aristotélica, tiempo y magnitud no pueden ser isomorfos, pero en este párrafo, Aristóteles va mas allá de su cosmología, porque habla del concepto de movimiento de una forma general en la que no interviene ninguna idea ajena al movimiento colocando al tiempo, al número y a la magnitud en un contexto general, el tiempo entonces no sólo tiene las propiedades la magnitud sino también hereda las propiedades del número, porque es gracias al tiempo que podemos cuantificar el movimiento.

Las tres partes del movimiento deben poseer las mismas propiedades, no se puede medir el movimiento sin tiempo, por lo que el tiempo es número y por lo tanto posee las propiedades de éste. Además el tiempo es magnitud lurgo posee las propiedades de ésta.

[92] Ftsica VI1 232ª 13-34

Así, número y magnitud deben poseer las mismas propiedades. El número mide la distancia (magnitud) recorrida en una cierta cantidad de tiempo, lo que nos permite finalmente medir el movimiento.

"Puesto que *el tiempo* es como *el número* se tomará un tiempo mayor que todo aquello que está en el tiempo; por ello es necesario que todo lo que está en el tiempo este abarcado por el tiempo"[93].

"Estar" en el número significa que hay cierto número de una cosa, y que su existencia es medida por el número bajo el cual cae; de tal suerte, si está en el tiempo es medida por el tiempo"[94].

"Se podría preguntar todavía de qué tipo de cambio el tiempo es número. ¿De cualquiera? en efecto, en el tiempo se dan generación, destrucción, crecimiento, cambio de cualidad y traslación; en la medida en la que hay cambio, en esa medida hay un número de cada tipo de cambio. Por ello, en general hay número de cambio continuo, pero no de un {cambio} determinado. Pero se da el caso de que {junto a una cosa} ahora ha cambiado otra. Cada uno de los dos cambios tendrá un número"[95].

En este punto, podemos asociar un número a una magnitud si consideramos a la magnitud como resultado de un movimiento, es decir, como resultado de un proceso finito; este problema queda totalmente resuelto dentro de la cosmología aristotélica.

El cielo, por ser lo más cercano al primer motor y por lo tanto perfecto, es decir, es eterno y circular; posee un movimiento de rotación "y este movimiento, [es] el único que es por sí mismo continuo sin ninguna interrupción del principio y fin y sin ninguna variación"[96] {…} "es el único continuo e infinito"[97].

---

[93] Física IV 220b 25-30.
[94] Física 221b15-20.
[95] Física 223ª29-223b5.
[96] Física VIII I 258s.
[97] Física VIII 8 261b.

Lo que implica que el tiempo es infinito y continuo, y como el tiempo es “el número del movimiento según el antes y el después”[98], el número debe ser entonces continuo e infinito en acto. Pues el número es “numerado y no numerante”[99], es decir que el número existe en acto y no sólo en potencia, pues “de no ser lo que es el tiempo por su propio ser, como si pudiese haber movimiento sin alma; porque el antes y el después existen en el movimiento, y el tiempo está representado por ellos en cuanto son numerables” es decir que el tiempo existe en acto, en tanto exista el movimiento eterno de rotación.

Para que la maquinaria del universo aristotélico funcione, es necesario que número y magnitud posean las mismas propiedades, para que asiera el movimiento celeste pueda existir y se puedan dar “todas las series de seres y movimientos del mundo sublunar, que se desarrollan sin cesar en el curso del tiempo mismo”[100].

Pero si “no hay otro ser que numere que no sea el alma, o mejor dicho, su intelecto, de no existir el alma, no podrá existir tampoco el tiempo[101]”, así que debe existir un numerante eterno. Según Aristóteles este es el primer motor, responsable del movimiento eterno de rotación, y numerante del tiempo.

“La numeración de tiempo aparece cumplida por ella [el alma de la esfera celeste] en el acto mismo en que produce aquel movimiento del cual el tiempo es número, es decir, no un movimiento cualquiera, (como Aristóteles lo aclara inmediatamente) sino aquel continuo que es el movimiento circular de los cuerpos celestes. Por consiguiente, se deberá inferir que así como *ab aeterno* (por toda la eternidad), el alma de la esfera celeste produce la rotación del cielo, así también la numera *ab aeterno*, por

[98] Física VI II 219ª.
[99] Ibíd.
[100] El infinito en el pensamiento de la antigüedad clásica p.95-10-12.
[101] Física 14 223ª.

ser tal movimiento el único numerable: la infinitud del tiempo pasado está, por tanto, ya numerada, o sea es infinito en acto y no en potencia"[102].

Tenemos entonces una cantidad infinita en acto, pues el número pertenece a la categoría de cantidad, pero esto no es posible según Aristóteles, porque "no se da un número infinito en acto, sino sólo en potencia; puesto que todo número y toda realidad que tenga número es numerable: si lo numerable admite, pues, ser numerado, sería posible recorrer un camino infinito[103]. "Este camino no es otro que el de la esfera celeste. Luego entonces el tiempo es un atributo sensible, eterno en acto" y la magnitud generada por ese movimiento también lo es, porque aunque la trayectoria sea circular, el número de veces que el punto que genera este movimiento, es infinito

Aristóteles se ve forzado a empujar las definiciones de número y magnitud para sostener su cosmología, en particular, su movimiento infinito de rotación. Pero si en este punto retomaramos los argumentos que sostienen al universo finito de Aristóteles encontraríamos contradicciones insalvables como por ejemplo la idea de que no existe un cuerpo infinito en acto.

Estas ideas quedan implícitas en la obra de Aristóteles, pero siempre a la sombra de su concepción cosmológica y de las ideas matemáticas del momento. La filosofía aristotélica no puede exponerlas abiertamente sin caer en contradicciones y poémicas con sus propios contemporáneos.

Como hemos leído,el filosofo hizo un enorma ezfuerso por adaptar estas ideas a su filosofía sin caer en contradicciones. El marco filosófico en el que estas ideas aparecen las relega y las subordina a otros conceptos como el del orden del mundo o el argumento del progreso aristotélico.

---

[102] *El infinito en el pensamiento de la antigüedad clásica* p.97 22-30.
[103] *Física* IV 222.

Por su parte, Euclides utiliza estas ideas en algunas de sus proposiciones pero sin modificar sus definiciones. Lo que nos hace pensar que la idea de representar a los números sobre una recta como lo hacemos hoy, era ya conocida y aceptada por los contemporáneos de Euclides. Pero la semilla de estas ideas tendrá que esperar hasta el siglo XVII, donde un marco filosófico muy distinto, donde el universo es infinito, como su creador, y donde el concepto pitagórico de número ya no es dominante, les permitirá madurar.

ARISTÓTELES. 1949. *Traité du ciel suivi du traité pseudo-Aristotelien du monde*. Trad. al francés y notas pot J.Tricot. Paris. J. Vrin.

———————— 1982. *Metafísica*. tr. Valentín García Yerba Madrid: Gredos.

———————— 2005. *Física*. tr. Ute Schmidt Osmanczik. Mexico:UNAM. (Bibliotheca scriptorvm graecorvm et romanorvm mexicana).

DICSON, I.E. 1929. *Introduction to the theory of numbers.* Dover.

EUCLIDES DE ALEJANDRÍA. 1992. *Elementos de Geometría*. Versión, introducción y notas de Juan David

EUCLIDES DE ALEJANDRIA. 1994. *Elementos*. Madrid. Gredos. Tomos I, II y III.

FOWER, D.H. 1987. *The mathematics on Plato's academy. A new reconstruction*. Oxford: Oxford press

GARCÍA VACA. Mexico: UNAM. (Biblioteca scriptorvm graecorvm et romanorvm mexicana).

GORDON, PIERRE. 1949. *L'image du monde dans l'antiquité*. Paris: Universidad de Francia.

THOMAS HEATH. 1977. *A manual of greek's mathematics*. Nueva York: Dover.

———————— 1977. *Mathematics in Aristotle.* Thoemmes press.

———————— 1981. *History of greek's mathematics*. Vol I. From Thales to Euclid. Nueva York: Dover.

JONES, CHARLES V. 1987. "La influencia de Aristóteles en los elementos de Euclides", *Matesis*, VOL III/NO 4/Nov. México: UNAM.

KLEIN JACOB, 1968. Greek mathematical though. Massachuset. The Massachusetts Institute of technology.

KOYRÉ, ALEXANDRE. 1979. *Del mundo cerrado al universo infinito.* Traducciòn de Carlos Solis Santos. México: Siglo XXI.

MONDOLFO, ROBERTO. 1972. *El infinito en el pensamiento de la antiguedad clasica.* Buenos Aires: Eudeba.

SIMPLICIUS. 2005. *On Aristotle's "On Heavens 2.10.14"*. Trad. Ian Muller. Cornell University Press.

SONDHEIMER y ROGERION. 1981. *Numbers and infinity. An historical account of mathematical concepts*. Cambridge.

SZABÓ, A. 1977. *Les debuts des mathematiques greques*. Trad. del alemán al francés por M.Federpie. Paris. L Vrin.

TOULMIN, STEPHEN, ENDELSON. 1968. *El descubrimiento del tiempo*. Versión castellana de Hector Migues. Buenos Aires: Paidos.
PLATÓN. 2000. *La República.* Versión, introducción y notas de Antonio Gómez Robledo. Mexico: UNAM. (Biblioteca scriptorvm graecorvm et romanorvm mexicana).
VITA, VINCENZO. 1992. "El infinito matemático en Aristóteles y en su tiempo". *Mathesis*. Vol. VIII/No 2/ Mayo. México: UNAM.