



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGACIONES NUCLEARES

RADIACIÓN OSCURA Y LOS PARÁMETROS COSMOLÓGICOS

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

AZTLÁN ELOHIM BASTARRACHEA ALMODÓVAR

TUTOR PRINCIPAL:

DR. JORGE LUIS CERVANTES COTA
INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGACIONES NUCLEARES

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTORAL:

DR. OCTAVIO VALENZUELA TIJERINO
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA
DR. LUKAS NELLEN FILLA
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MÉXICO, D.F. NOVIEMBRE DE 2012



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen

El estudio de la física del Universo primigenio nos permite analizar la evolución del fondo cósmico y su dinámica perturbativa. Actualmente, hay numerosos estudios que brindan la posibilidad de que el número efectivo de grados de libertad para la componente energética de radiación sea superior al establecido por el modelo estándar de partículas elementales. A estos grados de libertad extra relativistas ΔN_{eff} se les denomina Radiación Oscura. Este trabajo tiene la finalidad de explicar las consecuencias de la existencia de este tipo de radiación extra dentro del modelo estándar de cosmología ΛCDM , para lo cual exponemos en los primeros 3 capítulos las observaciones cosmológicas, el modelo estándar de cosmología ΛCDM y las evidencias observacionales de la expansión acelerada del Universo. Posteriormente se explica la historia térmica del Universo temprano y el origen de los grados de libertad relativistas N_{eff} , cuyo valor es $N_{\text{eff}} = 3.046$ en el modelo estándar de partículas elementales. En el siguiente capítulo se habla de la teoría de perturbaciones cosmológicas y se exponen las observables tanto de la *RCFM* como de las *BAO*. Posterior al estudio de los conceptos básicos de cosmología del fondo y perturbativa, así como las observaciones astronómicas relevantes, se muestran en el capítulo final las degeneraciones que surgen entre $N_{\text{eff}} \neq 3.046$ y algunos parámetros cosmológicos. Así mismo, se analizan los resultados que se obtienen al correr una versión modificada del programa CosmoMC que hace libre de variar el parámetro N_{eff} . Se estudian las consecuencias que tiene este parámetro en la cosmología cuando es diferente de su valor estándar y es ajustado a los datos observacionales de la *RCFM*, la constante de Hubble, H_0 , supernovas Ia, así como las *BAO*, resultando que al menos un grado de libertad relativista extra es favorecido por la combinación de datos de *WMAP7 + ACBAR + HST + SN* arrojando un valor tal que $N_{\text{eff}} = 4.03^{+0.74}_{-0.76}$ a una desviación estándar. Finalmente se exponen las conclusiones del análisis.

Abstract

The study of the physics of the primordial Universe allows us to analyze the cosmic background and its perturbed dynamics. Nowadays, there are multiple studies that bring us the possibility of the variation of the effective number of relativistic freedom degrees for the energy component of radiation which seems to be greater than the established value by the standard model of particles. Such extra freedom degrees, ΔN_{eff} , are denominated as Dark Radiation. The objective of this work is to explain the consequences of the existence of this type of extra radiation in the standard model of cosmology ΛCDM so we present in the first 3 chapters, the cosmological observations, the standard model of cosmology ΛCDM and the observational evidences of the accelerating expansion of the Universe. After that, we explain the thermal history of the early Universe and the origin of the effective freedom relativistic degrees N_{eff} whose standard value is $N_{\text{eff}} = 3.046$ in the standard model of particles. In the next chapter we talk about the cosmological perturbations theory and we illustrate the *CMB* and *BAO* observables. After the global study of the basic concepts of the background and perturbed cosmology, and some relevant cosmological observations, in the last chapter we exposed the degeneracies that appear between $N_{\text{eff}} \neq 3.046$ and some cosmological parameters. In the same sense, we analyze the results that we get from the runs of the CosmoMC program which has been changed in such way that it can freely vary the parameter N_{eff} . We study the consequences of this parameter in the cosmology when it varies freely and it is compared with observational data from *CMB*, Hubble constant, H_0 , Ia supernovae and *BAO*. As a result we get that there is at least an extra relativistic freedom degree which is benefited by the data combination *WMAP7* + *ACBAR* + *HST* + *SN* whose value is $N_{\text{eff}} = 4.03_{-0.76}^{+0.74}$ at one standard deviation. At the end, we expose the conclusions of the analysis.

A Patricia Osuna...

La estrella más brillante de mi Universo...

Índice general

Introducción	VII
1. Observaciones cosmológicas	1
1.1. La paradoja de Olbers	1
1.2. La ley de Hubble	2
1.3. Radiación cósmica de fondo de microondas	3
1.3.1. COBE	4
1.3.2. Boomerang y Máxima	5
1.3.3. Oscilaciones acústicas	6
1.3.4. WMAP	7
1.4. Función de correlación y espectro de potencias	7
1.4.1. Función de correlación	8
1.4.2. El espectro de potencias	10
1.4.3. El espectro de potencias de la luz	11
1.5. Supernovas tipo Ia	11
1.6. Catálogos de galaxias	14
2. Modelo estándar de cosmología	16
2.1. El principio cosmológico	16
2.2. Universos homogéneos e isotrópicos	18
2.3. Relatividad General y Modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	19
2.4. La constante cosmológica	23
2.5. Inflación	24
2.5.1. El problema del horizonte	25
2.5.2. El problema de la planitud	26
2.6. Modelos de quintaesencia	27
3. Evidencias observacionales de energía oscura	32
3.1. Distancia lumínica	33
3.2. Distancia diametral angular	35
3.3. Restricciones provenientes de las supernovas Ia	36
3.4. La edad del Universo y la constante cosmológica	39
3.5. Restricciones impuestas por la radiación cósmica de fondo y las estructuras a gran escala	42

4. Historia térmica del Universo temprano	44
4.1. Termodinámica cosmológica	44
4.2. Conservación de la entropía, recalentamiento de los fotones y temperatura de los neutrinos.	49
4.3. Abundancias cósmicas	50
5. Teoría de perturbaciones, Radiación Cósmica de Fondo de Mi- croondas y Oscilaciones Acústicas de Bariones	53
5.1. Teoría básica de perturbaciones cosmológicas	53
5.1.1. La norma Newtoniana	54
5.1.2. Modelo para un sólo fluido	57
5.1.3. Modelo de dos fluidos	59
5.2. Radiación Cósmica de Fondo de Microondas	61
5.3. Oscilaciones Acústicas de Bariones	66
5.3.1. Observables cosmológicas	66
5.3.2. La física de <i>BAO</i>	68
6. Radiación Oscura	74
6.1. Naturaleza de la Radiación Oscura	75
6.2. Las ecuaciones perturbativas en la época de dominación de la radiación	76
6.3. Sensibilidad de las diferentes componentes cosmológicas en la <i>RCFM</i>	80
6.3.1. Sensibilidad a las componentes no relativistas	80
6.3.2. El efecto de la Radiación oscura	81
6.4. Efecto en BBN	82
6.5. Degeneración de N_{eff}	84
6.6. Radiación Oscura y el efecto en los parámetros cosmológicos . .	87
6.6.1. Análisis de los resultados	89
Conclusiones	109
Apéndices	112
A. Apéndice	113
A.1. Los programas CAMB y CosmoMC	113
A.1.1. CAMB (Code for Anisotropies in the Microwave Back- ground)	113
A.1.2. CosmoMC (Cosmological Monte Carlo)	114
A.2. Cadenas de Markov en el método de Monte-Carlo (MCMC). . .	116
A.2.1. El algoritmo Metrópolis-Hastings	116
Bibliografía	117
Agradecimientos	123

Introducción

Desde que el hombre tuvo conciencia de sí mismo y alzó su mirada hacia las estrellas, se percató de que allá arriba terminaba lo terrenal y comenzaba el resto del Universo. Con ello fueron surgiendo numerosas hipótesis acerca de la composición, tamaño y edad del lugar en que todos habitamos. Numerosos pensadores plantearon modelos que trataban de explicar, según el conocimiento de la época, el comportamiento de los astros y el significado de los fenómenos astronómicos. Desde entonces y hasta nuestros días, los avances tecnológicos y de conocimientos matemáticos nos han acercado hacia un mayor entendimiento de la complejidad del cosmos.

La humanidad ha dejado de ver el mundo desde el punto de vista de la mecánica newtoniana para adentrarse en otras ramas más complicadas de las ciencias. Así mismo, ha dejado de usar sus ojos para observar el cielo en la parte visible de la luz hasta llegar a utilizar sofisticados aparatos para ver cada vez más lejos y en longitudes de onda imposibles para cualquiera de nosotros. Prueba de ello son los avances que fueron suscitados durante las primeras décadas del siglo XX. En primer lugar está Albert Einstein y la introducción la constante cosmológica Λ dentro de sus ecuaciones de la teoría de la Relatividad General para contrarrestar la expansión del Universo. En segundo lugar está Edwin Hubble quien en 1929 descubrió mediante el análisis del corrimiento al rojo del espectro electromagnético, que las galaxias se alejan unas de otras y en todas direcciones. Estos dos descubrimientos de la época moderna, dieron un giro tanto teórico como experimental a la cosmología, pues se descubrió que el Universo no era estático como todo el mundo pensaba en esa época, sino todo lo contrario, se encontraba en expansión. Estos grandes saltos en la astrofísica dieron como resultado nuevas preguntas abiertas acerca la dinámica y composición del Universo.

El Universo, todo aquello que vemos día a día al mirar hacia fuera de casa o al observar el cielo nocturno, todo lo que nos rodea y podemos ver, o incluso aquello que no podemos percibir por su lejanía o por su composición, tuvo un “inicio” hace aproximadamente 13 mil 800 millones de años. El estudio de la física del Universo primigenio nos permite saber mucho acerca de la evolución así como la dinámica del mismo. Actualmente, hay numerosos estudios que brindan la posibilidad de que el número efectivo de grados de libertad para la componente energética de radiación sea superior su valor estándar, tales grados de libertad, N_{eff} , se intuye que pueden provenir de una nueva clase de radiación denominada *Radiación Oscura*.

Este trabajo tiene la finalidad de explicar y ver las consecuencias de la existencia de este tipo de radiación extra dentro del modelo estándar de cosmología, Λ CDM, el cual se explicará a detalle.

Primeramente, el capítulo 1 trata de las observaciones cosmológicas fundamentadas en la ley de Hubble y que principalmente consisten en un estudio de la *Radiación Cósmica de Fondo de Microondas*, *RCFM*, así como supernovas tipo Ia y estructura a gran escala donde también entran las *Oscilaciones Acústicas de Bariones*, *BAO*.

Posteriormente, en el capítulo 2 se muestra que nos encontramos dentro de un Universo homogéneo e isotrópico en expansión. Además, se explica la parte teórica de la cual parte el modelo estándar de cosmología moderna el cual se basa principalmente en la Relatividad General de Einstein, así como en la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Se hace mención de la constante cosmológica, Λ , así como la inflación y los modelos de quinta-esencia a grandes rasgos.

En el siguiente capítulo se tratan las cuestiones observacionales que evidencian la existencia de la energía oscura, la cual es la encargada de la expansión acelerada del Universo. Se explica cómo se miden distancias en el Universo, así como las constricciones que imponen las mediciones observacionales tomadas a supernovas tipo Ia, la edad de cúmulos estelares, la *RCFM*, así como las estructuras a gran escala las cuales son explicadas a detalle.

En el capítulo 4 se habla de la historia térmica del Universo temprano. En este capítulo se hace uso de la termodinámica para poder explicar la física a estas escalas energéticas y ver el comportamiento de la radiación y la materia primigenia.

En el siguiente capítulo se hace una introducción a la teoría de perturbaciones cosmológicas y se explica con todo detalle la física de la *RCFM* así como de las *BAO* y su importancia en las constricciones de parámetros cosmológicos.

Finalmente en el el capítulo 6 se introduce el concepto de la *Radiación Oscura*, se explica su naturaleza y las implicaciones dentro de la cosmología que este tipo de radiación impone. De esta manera, se muestran los resultados que se obtienen al correr el programa CosmoMC con el parámetro libre N_{eff} . Se analizan las consecuencias que tiene este parámetro en la cosmología cuando se deja variar libremente y es comparado con datos observacionales de la *RCFM*, la constante de Hubble, H_0 , supernovas Ia, *SN*, así como las *BAO*. Así mismo, se muestran las degeneraciones que surgen con diversos parámetros ya conocidos y se exponen las conclusiones del análisis.

Capítulo 1

Observaciones cosmológicas

La base de la cosmología actual se remonta a observaciones hechas desde la época de Kepler hasta nuestros días. Tales observaciones originaron los grandes descubrimientos modernos sobre la naturaleza, edad, tamaño y destino del Universo. Aunque las interrogantes siguen siendo muchas, poco a poco los nuevos métodos de observación han estado comprobando lo predicho por el modelo estándar de cosmología actual. A continuación se presenta una breve reseña de las observaciones que dieron origen a tal modelo.

1.1. La paradoja de Olbers

Sin duda, la principal observación cosmológica es la oscuridad del cielo nocturno. Esto fue analizado por Johannes Kepler quien utilizó tal hecho como evidencia de un Universo finito, ya que la idea de un Universo infinito lleno de estrellas fue derrocada con la revolución de Copérnico. Sin embargo, la oscuridad de la noche seguía siendo una cuestión sin explicación. En los siglos XVIII y XIX, Edmond Halley, Loys de Ch'eseaux y Heinrich Olbers consideraron esta cuestión en sus escritos como lo que posteriormente se conoció como la *paradoja de Olbers*.

La paradoja consiste en suponer que el Universo es infinito y está lleno de estrellas uniformemente distribuidas, por lo que sin importar la dirección de observación, tarde o temprano se encontrará una estrella [1]. Si la luminosidad promedio (energía emitida por unidad de tiempo) de una estrella es L , entonces la brillantez vista a una distancia r sería $f(r) = L/4\pi r^2$. El flujo resultante de integrar sobre todas las estrellas, debido a que la brillantez de la estrella no depende de la distancia, en el Universo infinito sería [2]:

$$B = \int n f(r) dV = nL \int_{r_{\min}}^{\infty} dr = \infty, \quad (1.1)$$

donde n es la densidad de número de estrellas, que se asume que sea constante. Este resultado de *infinito brillo* es sobrestimado debido a que las estrellas tienen tamaños angulares finitos, y la ec. (1.1) no asume la obstrucción de las

estrellas del primer plano [2]. La conclusión es que el cielo nocturno debería ser tan brillante como la superficie del sol. Sin embargo eso no es lo que se percibe.

La explicación moderna de esta paradoja es que las estrellas sólo duran un cierto tiempo y muchas de ellas aún no las alcanzamos a ver debido a su lejanía. Por lo tanto, esta paradoja más que tratar de mostrar la extensión finita del Universo, mostró que tiene una edad finita [1]. La cuestión de la edad finita del Universo se analizará más adelante cuando se introduzca el concepto de la expansión del Universo.

1.2. La ley de Hubble

Los astrónomos han descubierto toda una nueva serie completa de técnicas que han sido usadas para estimar distancias cada vez mayores en el espacio. Durante el período de 1910–1930, se alcanzó a divisar distancias que superaban los 100 kpc. El gran descubrimiento fue que nuestro Universo estaba compuesto por una vasta colección de galaxias semejantes a la nuestra. Después de esto, se intentó estudiar el movimiento de tales galaxias mediante el efecto Doppler, el cual establece que cuando un objeto se aleja de nosotros, su longitud de onda aumenta, tal que el corrimiento hacia el rojo se denota como:

$$z = \frac{(\lambda_0 - \lambda)}{\lambda}, \quad (1.2)$$

donde λ y λ_0 son la longitud de onda emitida y la medida respectivamente. En general cualquier cantidad física con subíndice 0 significa que es evaluada hoy en día. Lo cual se reduce a:

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a_0}{a}, \quad (1.3)$$

donde a es el factor de escala del Universo en cualquier momento del pasado y a_0 es el factor de escala hoy en día. Uno espera que para diferentes galaxias, distribuidas de manera aleatoria, se encuentre de la misma forma, corrimientos al rojo o *redshift* o corrimientos a azul o *blueshift*. Y esto es más o menos verdad en el Grupo Local. Sin embargo, más allá de las galaxias cercanas, las mediciones hechas por Vesto Slipher de cerca de 40 galaxias mostraron corrimiento al rojo. Poco después, Edwin Hubble (Observatorio monte Wilson en California) intentó correlacionar estos corrimientos al rojo con mediciones más complicadas de distancias galácticas. Fue así, que en 1929 Hubble logró encontrar dicha correlación. Él encontró que las líneas de emisión de las galaxias estaban desfasadas de donde deberían estar según las observaciones en la Tierra. Más aún, el corrimiento z era proporcional a la distancia d [2]:

$$z = \left(\frac{H_0}{c} \right) d, \quad (1.4)$$

donde la constante de Hubble, H_0 , es la pendiente que se obtiene al graficar la velocidad de diversas galaxias en función de su distancia, c es la velocidad de la luz y d la distancia a la galaxia. Para velocidades pequeñas, $V \ll c$, el corrimiento hacia el rojo nos queda $z = V/c$; por lo que al sustituir z en la ecuación anterior:

$$V = H_0 d, \quad (1.5)$$

la cual es la forma más común de la ley de Hubble [1] y .

Esta ecuación nos dice cómo las galaxias a nuestro alrededor están alejándose de nosotros a velocidades proporcionales a la distancia que nos separa de ellas, por lo que se podría pensar que somos el centro de la expansión, o sea, hipotéticamente el centro del Universo. Sin embargo, dada la homogeneidad e isotropía que plantea el *principio cosmológico* (capítulo 2) a distancias de más de 100 – 200 Mpc [3], implica que todas las galaxias, incluyendo la Vía Láctea, se están alejando unas de otras. Este planteamiento es el correcto ya que la ley de Hubble no depende del punto de observación. Desde cualquier parte del Universo, se verá que las galaxias se alejan entre sí.

Antes de este descubrimiento, la comunidad científica de todo el mundo había crecido bajo la concepción de que vivíamos en un Universo estático, donde nada más allá de los objetos cercanos, como nuestro propio sistema solar, se encontraba en movimiento. Incluso Einstein vivía con esa concepción, por lo que al desarrollar su teoría de Relatividad General, a pesar de que sus ecuaciones le mostraban un Universo dinámico y en expansión, decidió introducir la *constante cosmológica* para así poder mantener el Universo estático que se creía en esa época. Esto último lo consideró el error más grande de su vida al darse cuenta de la expansión observada por Hubble en 1929.

La constante de Hubble se define como:

$$H_0 \equiv 100 h \text{ km seg}^{-1} \text{ Mpc}^{-1},$$

y $h = 0.72 \pm 0.08$ de acuerdo a las observaciones del Hubble Key Project [4], por lo que H_0 tiene un valor aproximado alrededor de los $72 \pm 0.7 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. H_0^{-1} se utiliza para calcular la edad del Universo, a través de las ecuaciones cosmológicas, y corresponde a aproximadamente $t_H = H_0^{-1} \approx 13.6$ mil millones de años. De la misma forma, H_0 es un buen indicador del tamaño del Universo mediante $l_H = c t_H \approx 4200 \text{ Mpc}$ [1, 2] .

1.3. Radiación cósmica de fondo de microondas

El acontecimiento ocurrido hace aproximadamente trece mil ochocientos millones de años, mejor conocido como la gran explosión (*big bang*, en idioma Inglés), dejó un remanente del poderoso estallido que aún percibimos hasta nuestros días, la Radiación Cósmica de Fondo de Microondas (*RCFM*).

No importa en que dirección veamos, estamos inmersos en este tipo de radiación. Durante los primeros instantes de la existencia del Universo, cuando la temperatura descendió lo suficiente, se formaron los primeros elementos de la tabla periódica incluyendo en mayor medida el Hidrógeno, H después el Helio, He y sólo un poco de Litio, Li , y algunos isótopos. Los elementos más pesados como el Hierro del núcleo de nuestro planeta fueron formados mediante nucleosíntesis dentro de las estrellas y posteriormente lanzados hacia el espacio debido a las explosiones de las supernovas. Durante los primeros instantes en el Universo también se produjeron los primeros neutrinos y fotones. Conforme pasaba el tiempo y la temperatura iba descendiendo, los neutrinos se desacoplaron del resto de la materia y dejaron de interactuar con ella por lo que actualmente se puede decir que hay un fondo cósmico de neutrinos con una temperatura alrededor de los 1.96°K . A la radiación electromagnética le corresponde una temperatura de 2.73°K aproximadamente (ver capítulo 4). La luz siguió interactuando con la materia durante unos 380,000 años después del big bang para desacoplarse de ella después. La superficie de la última interacción, cuando la luz fue dispersada por último, se denomina superficie de última dispersión (SUD). Después de esto, la luz ha viajado prácticamente sin interacción alguna con el resto del Universo. Dado que la luz tiene intensidad y frecuencia, por ser una onda, ésta se puede detectar cuando tiene su máximo de intensidad en la banda de las microondas a 2.73°K . De ahí que este tipo de radiación tenga la palabra microondas en su nombre, Radiación Cósmica de Fondo de Microondas.

Este tipo tan peculiar de radiación fue descubierto en la década de los 60's por Robert Wilson y Arno Penzias quienes se percataron de la gran cantidad de ruido electromagnético en la antena que percibían en todas direcciones, por lo que era claramente isotrópica, ver figura 1.1 [5]. Inmediatamente después del descubrimiento, se determinó que lo que Wilson y Penzias habían detectado era nada más y nada menos que la *RCFM*, cuya temperatura corresponde a los 2.73°K y su intensidad varía en función de la frecuencia o de la longitud de onda de la misma manera que un cuerpo negro, encontrándose su pico principal a los 2 mm. Por este descubrimiento, Wilson y Penzias recibieron el premio Nobel de física en 1979, aunque ellos no dieron explicación teórica de su hallazgo [6]. Cabe destacar que el tema de la *RCFM* se retomará en el capítulo 5 donde se analizará desde la teoría de perturbaciones el comportamiento físico de la misma.

1.3.1. COBE

COBE (COsmic Background Explorer por sus siglas en Inglés) fue el primer satélite lanzado para detectar la radiación cósmica de fondo con mayor precisión que con la antena de Penzias y Wilson. Mediante él, se pretendía encontrar anisotropías ocurridas durante los primeros momentos del Universo, esto con el afán de explicar la existencia de estructuras ya que las irregularidades y variaciones en la temperatura de la luz implican variaciones en la densidad de

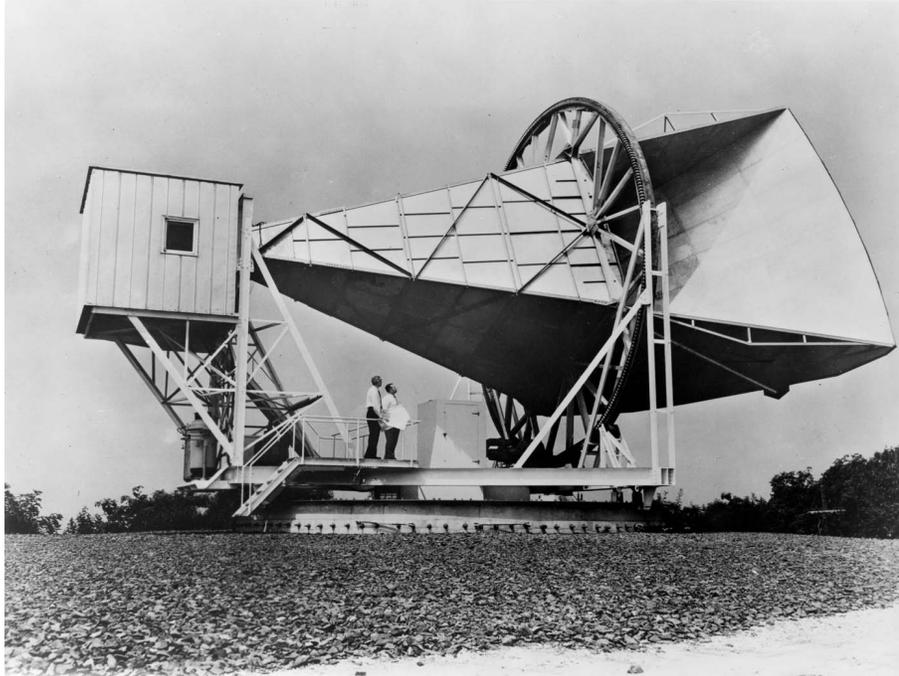


Figura 1.1: La antena con la que Penzias y Wilson descubrieron la radiación de fondo (*RCFM*) en 1965.

materia la que se desarrolla para formar estrellas, galaxias, cúmulos, etc. La luz y la materia tenían un origen común en el pasado.

El satélite fue lanzado en 1989. Se puso en órbita y se le enfrió a 1.5°K para evitar ruido. Finalmente en 1992 el equipo de científicos anunció los primeros resultados de la medición. Tras haber detectado, para ángulos de más de 7 grados en el cielo, anisotropías en la radiación cósmica de fondo, los científicos comprobaron las predicciones teóricas sobre anisotropías en el Universo primigenio.

COBE también determinó que el espectro de luz de microondas detectado obedece a la de un cuerpo negro, lo que implica que el plasma que estuvo acoplado a luz se encontraba en equilibrio. Por estos dos grandes hallazgos se les otorgó el premio Nobel de Física 2006, a George Smoot y a John Mather, los dos principales investigadores asociados a COBE [6].

1.3.2. Boomerang y Máxima

A pesar de que las medidas de COBE respecto a la *RCFM* eran de gran precisión, mediciones para ángulos más pequeños de las anisotropías eran necesarias. Debido a que, si se podían medir tales anisotropías, podría explicarse qué tipo de curvatura tiene el Universo y su contenido de materia. Llevar a cabo este nuevo experimento representó un gran desafío tecnológico debido a que debía llevarse a cabo a gran altitud para evitar ruido a causa de la atmósfera. Por esa razón, el experimento se realizó en el polo sur. En este tipo

de experimentos el equipo e instrumentación se deben llevar en un globo a gran altura y constan sólo de cierto tiempo de vuelo. El globo BOOMERANG (Ballon Observations of Millimetric Extragalactic Radiation and Geophysics, por sus siglas en Inglés) fue propuesto para medir anisotropías para ángulos pequeños en la *RCFM*. BOOMERANG realizó su primer vuelo en la Antártida en 1998, el cual estaba equipado con 16 detectores sin polarizar diseñados para cuatro diferentes longitudes de onda, además contaba con bolómetros¹ para la detección de radiación enfriados a 0.3°K. La sensibilidad del instrumento logró captar las anisotropías esperadas a pequeños ángulos ($\theta < 1$) para el plasma primordial del Big Bang.

Otro experimento similar a BOOMERANG fue MAXIMA (Millimeter Anisotropy Experiment Imaging Array, en Inglés) el cual consistió en un arreglo de bolómetros de 16 pixeles enfriados a una temperatura de 100 mK, para alcanzar alta sensibilidad. El equipo necesario fue llevado en globo y se tomaron mediciones dos veces en la misma porción del cielo en un tiempo de aproximadamente una hora. Esto se hizo para eliminar ruido de las mediciones y dejar sólo los datos reales de la *RCFM*. Cabe destacar que los resultados de MAXIMA fueron consistentes con los de BOOMERANG [6].

1.3.3. Oscilaciones acústicas

El propósito experimental de BOOMERANG y MAXIMA era poder medir las anisotropías predichas teóricamente que corresponden a un patrón de oscilaciones acústicas. Durante el período de inflación del Universo se generaron perturbaciones de campos escalares primordiales, como la temperatura, las cuales salen del horizonte y vuelven a entrar mucho tiempo después, desencadenando una serie de ondas acústicas que fueron comprimiendo y enrareciendo regiones del plasma primordial producido durante la gran explosión. Una vez que el Universo se enfrió lo suficiente para que se formaran átomos neutros, las variaciones en la densidad del plasma quedaron plasmadas en la *RCFM* [6].

El espectro acústico del Universo temprano tenía armónicos, similares a los de los instrumentos musicales. Por ejemplo, si se sopla por un tubo, el sonido corresponde a una onda cuya máxima compresión se representa una cresta y la mínima compresión se encuentra un valle al final del tubo, ver figura 1.2 [7]. Sin embargo, el sonido cuenta a su vez con una serie de armónicos de menores longitudes de onda, los cuales corresponden a fracciones enteras de la longitud de onda fundamental. Las longitudes de onda del primer, segundo y tercer armónicos son la mitad, un tercio y una cuarta parte de la longitud de onda fundamental, respectivamente.

De igual manera como en cualquier instrumento musical, el plasma del Universo primigenio contaba con las mismas ondas sonoras o acústicas. Tras la inflación, la onda fundamental comprimió algunas regiones del plasma y diluyó algunas otras, de modo que la temperatura de la *RCFM* alcanzó esas

¹Instrumentos que miden la radiación electromagnética en todas las longitudes de onda.

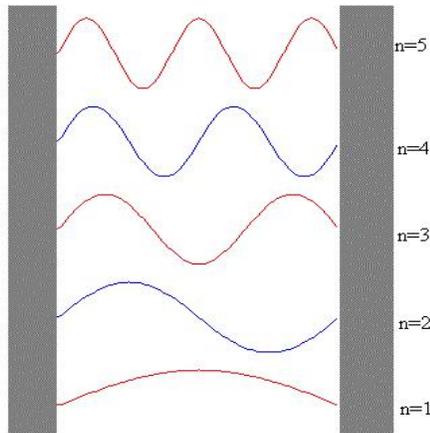


Figura 1.2: Onda con su modo fundamental y sus respectivos modos secundarios.

zonas máximas y mínimas cuando la recombinación². Los armónicos oscilaban varias veces más rápido, por lo que otras regiones menores también presentaban temperaturas máximas y mínimas en la recombinación [8]. El tema de la *RCFM* se desarrollará con detenimiento en el capítulo 5.

1.3.4. WMAP

El satélite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe en idioma Inglés), fue lanzado en 2001 para repetir las mediciones del COBE, pero esta vez con el interés de encontrar anisotropías con una resolución del orden de los 13 minutos de arco. En este caso, WMAP tenía una sensibilidad 45 veces superior a su antecesor COBE y una resolución 33 veces mayor. Así se consiguieron detectar anisotropías a ángulos pequeños en el cielo de temperatura del orden de $10^{-5} K$ [8], ver figura 1.3 [9].

1.4. Función de correlación y espectro de potencias

Conforme ha pasado el tiempo y los estudios astronómicos, se ha venido acumulando una gran cantidad de datos que juegan un papel fundamental al momento de probar modelos cosmológicos. Debido a esto, la estadística es una herramienta muy útil al momento de procesar datos para determinar si un modelo cosmológico es o no un buen candidato al momento de modelar la dinámica universal.

Una de estas herramientas es precisamente la función de correlación y el espectro de potencias.

²Un proceso mediante el cual los electrones y los iones de hidrógeno se combinaron para producir hidrógeno neutro.

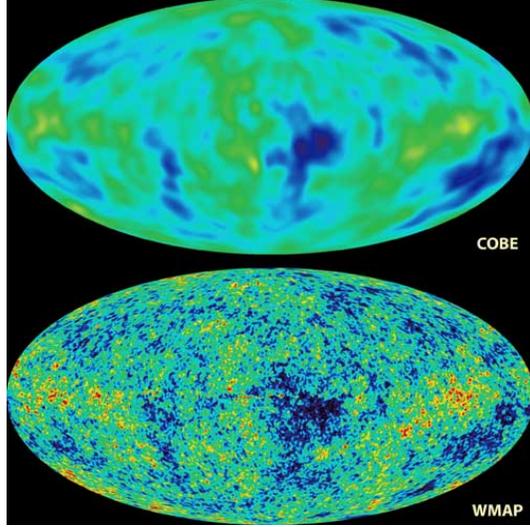


Figura 1.3: Datos mostrados por COBE y WMAP, donde claramente se muestran las diferencias en la resolución de ambas mediciones. De esta manera las anisotropías predichas teóricamente fueron confirmadas.

1.4.1. Función de correlación

Lo que se pretende es poder describir una distribución de partículas de una manera compacta para ser identificadas con objetos astronómicos. Si se tienen contenidos una cantidad de puntos N , o densidad de número, en cierto volumen V , se puede obtener la densidad por unidad de masa $\rho_0 = N/V$. Sin embargo, esta no es una descripción de la distribución de los puntos en sí misma. Si, por otro lado tenemos en cuenta un pequeño volumen dV , entonces se puede hablar a su vez, de un número infinitesimal de partículas tales que $dN = \rho_0 dV$. De esta manera, se puede definir también, $dN_{ab} = \langle n_a n_b \rangle$ que es el número de pares en los volúmenes dV_a y dV_b , separados por r_{ab} . Esto nos lleva la función de correlación para dos puntos $\xi(r_{ab})$, tal que:

$$dN_{ab} = \langle n_a n_b \rangle = \rho_0^2 dV_a dV_b [1 + \xi(r_{ab})]. \quad (1.6)$$

Se puede construir un ensamble promedio si se consideran elementos de volumen dV_a , dV_b en la misma localización y promediando el número $n_a n_b$.

De manera alternativa, se pueden tomar pares a diferentes puntos dentro de la misma realización, y separados por el mismo r_{ab} . De esta manera, los pares no tienen *correlación* si se encuentran muy distantes y eso implica que se pueden tomar como si provinieran de diferentes realizaciones, entonces ambos métodos coinciden. El problema con la aproximación deviene del hecho de que no se conoce a ciencia cierta si los puntos están o no correlacionados hasta que se comparan con un ensamble de realizaciones. Este problema es muy común en astrofísica ya que sólo se tiene un Universo.

Si la distribución se ha obtenido de manera que las partículas N son puestas de manera aleatoria, entonces no hay razón para que dN_{ab} depen-

de la la ubicación. Por lo tanto, el número promedio de pares es exactamente igual al producto de los promedios de los pares en los dos volúmenes, $\langle n_a n_b \rangle = \langle n_a \rangle \langle n_b \rangle = \rho_0^2 dV_a dV_b$ y la correlación ξ desaparece. En el caso contrario, si $\xi \neq 0$ decimos que las partículas están correlacionadas. Entonces la función de correlación se puede escribir como un promedio espacial del producto de los contrastes de densidades $\delta(r_a) = n_a/(\rho_0 dV_a) - 1$ para dos puntos diferentes:

$$\xi(r_{ab}) = \frac{dN_{ab}}{\rho_0^2 dV_a dV_b} - 1 = \langle \delta(r_a) \delta(r_b) \rangle, \quad (1.7)$$

donde se usó $\langle \delta(r_a) \rangle = \langle \delta(r_b) \rangle = 0$. Si este promedio es tomado como la muestra promedio, eso significa que se tiene que promediar sobre todas las posiciones posibles:

$$\xi(r) = \frac{1}{V} \int \delta(y) \delta(y+r) dV_y. \quad (1.8)$$

Cuando $\xi(r)$ depende sólo de la separación r y no entre r_a y r_b de manera independiente, entonces se dice que el sistema es *estadísticamente homogéneo*, o sea, que posee las mismas propiedades estadísticas en todos lados. En cosmología se suele decir que se trata de una *buena muestra* del Universo.

En la práctica, es fácil derivar la función de correlación como la densidad promedio de las partículas a una distancia r de otra partícula, y se escoge una normalización, por ejemplo, cierto volumen dV_a tal que $\rho_0 dV_a = 1$. Entonces el número de pares está dado por el número de partículas en el volumen dV_b

$$dN_b = \rho_0 dV_b [1 + \xi(r_b)], \quad (1.9)$$

y la función de correlación queda:

$$\xi(r) = \frac{dN(r)}{\rho_0 dV} - 1 = \frac{\langle \rho_c \rangle}{\rho_0} - 1. \quad (1.10)$$

En un volumen infinito con $N = \rho_0 V$ partículas, se tiene una integral que nos constriñe el valor de $\xi(r)$ debido al hecho de que la densidad promedio es calculada dentro del volumen mismo:

$$\int \xi(r) dV = \frac{1}{\rho_0} \int \frac{dN}{dV} dV - V = \frac{N}{\rho_0} - V = 0. \quad (1.11)$$

Si la función de correlación $\xi(r)$ es positiva, hay más partículas que en una distribución uniforme. Entonce se dice que la distribución está aglomerada positivamente.

La manera más simple de medir ξ es comparar el catálogo real con un catálogo artificial aleatorio con exactamente las mismas fronteras y la misma función de selección. Entonces el estimador se puede escribir como:

$$\xi = \frac{DD}{DR} - 1, \quad (1.12)$$

donde DD es el número de galaxias a una distancia r contadas por un observador centrado en una galaxia real (datos D), el cual es dividido por el número de galaxias DR a la misma distancia pero en un catálogo aleatorio. En otras palabras, en vez de calcular el volumen del cascarón, se estima ξ al contar las galaxias por el método de Monte Carlo [4].

1.4.2. El espectro de potencias

Una manera de estudiar las perturbaciones es descomponer las fluctuaciones en modos ortonormales, ya que de esta manera, a nivel lineal, éstas evolucionan independientemente. En el espacio de Fourier, cualquier función cuadrática de alguna variable de perturbación es llamada *espectro de potencias*. Por ejemplo:

$$P_\delta(k) = A|\delta_k|^2, \quad (1.13)$$

$$P_\Phi(k) = A|\Phi_k|^2, \quad (1.14)$$

donde δ_k y Φ_k son los coeficientes de Fourier del contraste de densidad y el potencial gravitacional, respectivamente, con A y B constantes. La convención para la normalización de la transformada de Fourier en tres dimensiones es:

$$f(x) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int f_k e^{ik \cdot x} d^3 k, \quad (1.15)$$

$$f_k = \frac{1}{V} \int f(x) e^{-ik \cdot x} d^3 x, \quad (1.16)$$

de tal manera que tanto $f(x)$ como f_k tienen las mismas dimensiones. La función delta de Dirac $\delta_D(x)$ está definida como:

$$\delta_D(x) = (2\pi)^{-3} \int e^{ik \cdot x} d^3 k. \quad (1.17)$$

De manera análoga, se define la función delta de Dirac en el espacio de Fourier como:

$$\delta_D(k) = (2\pi)^{-3} \int e^{ik \cdot x} d^3 x. \quad (1.18)$$

Ambas cumplen con las condiciones de normalización. Por otro lado, el contraste de un campo de densidad $\delta(x)$ tiene su transformada de Fourier:

$$\delta_k = \frac{1}{V} \int \delta(x) e^{-ik \cdot x} dV, \quad (1.19)$$

y el espectro de potencias se define como:

$$P(k) = V|\delta_k|^2 = V\delta_k\delta_k^*, \quad (1.20)$$

como el espectro de potencias tiene dimensiones de volumen, entonces:

$$P(k) = \frac{1}{V} \int \delta(x)\delta(y) e^{-ik \cdot (x-y)} dV_x dV_y, \quad (1.21)$$

haciendo el cambio $r = x - y$ el espectro adquiere la forma:

$$P(k) = \int \xi(r) e^{-ik \cdot r} dV. \quad (1.22)$$

Por lo tanto, el espectro de potencias es la transformada de Fourier de la función de correlación, de tal manera que:

$$\xi(r) = (2\pi)^{-3} \int P(k) e^{ik \cdot x} d^3k. \quad (1.23)$$

Asumiendo isotropía espacial, la función de correlación sólo depende del módulo $r = |r|$, y el espectro sólo depende de $k = |k|$:

$$P(k) = \int \xi(r) r^2 dr \int_0^\pi e^{-ikr \cos\theta} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi \int \xi(r) \frac{\text{sen}kr}{kr} r^2 dr \quad (1.24)$$

El caso más simple de este análisis es cuando las galaxias siguen una distribución Poissoniana con el valor de expectación medio δ_m [4].

1.4.3. El espectro de potencias de la luz

Las observaciones de la *RCFM* proporcionan un mapa de las variaciones de temperatura a lo largo de todo el cielo. Para analizar porciones de este mapa se utilizan filtros que muestran la variación de la temperatura de la radiación a escalas angulares diferentes. Las variaciones apenas son apreciables tanto a grandes escalas, del orden de los 30 grados en el cielo, como a escalas pequeñas de una decima de grado. Pero son notables en regiones del tamaño de un grado. El primer pico en la figura del espectro de potencia corresponde a las compresiones y enrarecimientos originados por la onda fundamental del Universo primigenio; los picos siguientes muestran los efectos de los armónicos [8], ver figura 1.4.

1.5. Supernovas tipo Ia

Las supernovas surgen cuando una estrella con cierto número de masas solares explota produciendo una luminosidad que alcanzamos a ver desde la Tierra. Dependiendo de lo masiva que sea la estrella, se pueden distinguir dos tipos de supernovas, el tipo I en el cual nos enfocaremos y el II, el cual no es de mucha importancia en el tema.

Las supernovas I ocurren en enanas blancas. Éstas se encuentran en sistemas binarios acompañadas de una gigante roja la cual le sede materia a la enana blanca hasta alcanzar una masa de 1.4 masas solares, conocido como límite de Chandrasekhar, donde esta última pierde su estabilidad y comienza a fusionar carbono para finalmente estallar produciendo radiación debido a la descomposición radiactiva del níquel y el cobalto que surge de la explosión.

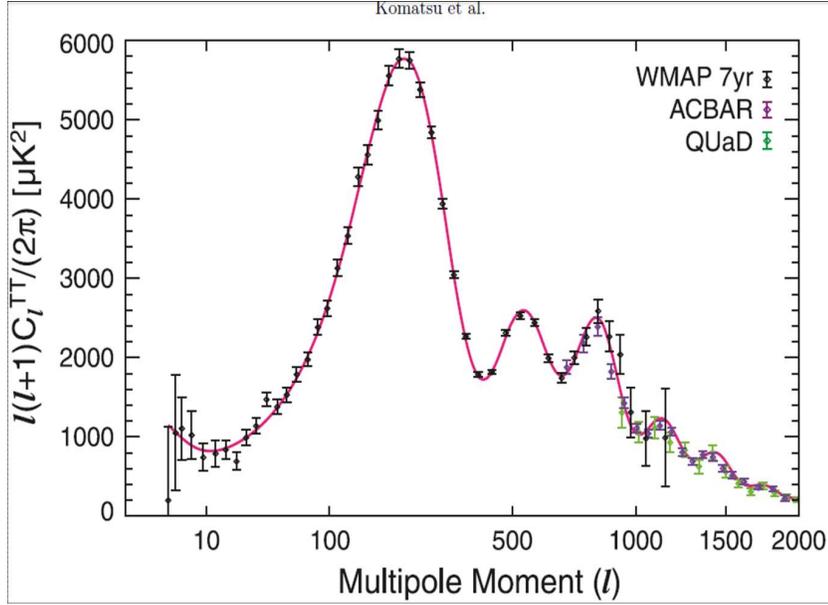


Figura 1.4: El espectro de potencias de temperatura del *WMAP* de 7 años, ACBAR y QUaD. La línea sólida muestra el mejor ajuste del modelo Λ CDM con los datos de *WMAP*. Se muestra el modo de vibración fundamental y sus respectivos modos secundarios, tal y como los que se presentan en un instrumento musical, y que durante los primeros cientos de miles de años se presentaron de una manera análoga en el Universo [9].

Dentro de esta clasificación se encuentran las supernovas tipo Ia, las cuales por su escasez en hidrógeno, tienen una banda de absorción en el rojo del espectro electromagnético a los 6100 Amstrongs, lo cual corresponde al Silicio II^3 [10].

La utilidad de este tipo de supernovas reside en el hecho de que se pueden utilizar para medir distancias ya que la intensidad de la supernova disminuye entre más alejada esté de nosotros. Dado que se conoce el valor de la intensidad de este tipo de supernovas, y es prácticamente el mismo para todas, por eso es una candela estándar, de esta manera también se puede medir la constante de Hubble con mayor precisión. Actualmente se han logrado grandes avances. Los resultados han sido que la constante de Hubble parece ser mayor de lo que se creía antes de mediados de los años 90s. Además, tal parece que la expansión del Universo se está acelerando, ya que la longitud de onda observada de lugares más distantes parece estar más elongada. Esto evidencia la presencia en el cosmos de una energía, aún no detectada de manera directa, llamada *energía oscura*, y que debe estar presente desde hace algunos miles de millones de años, o quizás, desde el comienzo del Universo [10].

El resultado de tales mediciones arrojan una constante de Hubble H_0 aproximadamente igual a los 72 km/s/Mpc. La forma para obtener estas mediciones

³Un átomo de silicio que ha perdido su electrón más externo.

emplea la luminosidad que es la magnitud absoluta de las supernovas Ia.

$$M = -19.5 \pm 0.2, \quad (1.25)$$

y la magnitud aparente, m , dada por la relación:

$$m = M + 25 + 5(cz)\log_{10}(cz) - 5\log_{10}H_0, \quad (1.26)$$

donde H_0 es el valor de la constante de Hubble hoy en día y z el corrimiento hacia el rojo definido anteriormente. Debido al efecto Doppler, objetos con $z \approx 0$ corresponden a objetos próximos con menos expansión y z mayores corresponden a objetos lejanos que han experimentado más expansión en relación a nuestro punto de observación. Ajustando la curva más exacta de la figura se consigue un valor para H_0 . Este valor, en la actualidad corresponde a:

$$H_0 = 72 \pm 8 \frac{km}{s} \frac{1}{Mpc}. \quad (1.27)$$

La constante de Hubble se relaciona con otros parámetros cosmológicos tales como: $\Omega_m \equiv \frac{8\pi G\rho}{3H^2}$ y $\Omega_\Lambda \equiv \frac{8\pi G\Lambda}{3H^2}$. El parámetro Ω se le conoce como parámetro de densidad total, el cual está compuesto de materia y un término de constante cosmológica $\Omega = \Omega_m + \Omega_\Lambda$. Estos parámetros pueden ser calculados. Para ello, se utilizará la expresión de la magnitud aparente:

$$m = M + 25 - 5\log_{10}H_0 + 5\log_{10}(d_L(z; \Omega_\Lambda y), \Omega_m), \quad (1.28)$$

donde $d_L \equiv \frac{L_s}{4\pi F}$ es la distancia lumínica, que se explicará en el capítulo 3. Al ajustar nuevamente la curva según los valores obtenidos, se encuentran los valores apropiados para Ω_m y Ω_Λ . Los valores actuales de estos parámetros son:

$$\Omega_m^{(0)} = 0.23 \quad y \quad \Omega_\Lambda^{(0)} = 0.72. \quad (1.29)$$

Esto implica que $\Omega_k \equiv \frac{-kc^2}{a^2H^2}$ es prácticamente cero, ya que $\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$ por lo que el Universo es prácticamente plano. Los grupos SCP y HZT⁴ hicieron las primeras mediciones con supernovas y también mostraron que para valores grandes de z , las galaxias que albergan a las supernovas se expanden mucho más rápido que lo predicho por la ley de Hubble estándar. La conclusión es que tal aceleración puede ser causada debido a la presencia de una constante cosmológica Λ cuyo valor es $\Lambda = 10^{-120} M_{pl}^4$, donde $M_{pl} = 10^{19} GeV/c^2$ es la masa de Planck. Otra posibilidad es que se halle una nueva esencia cósmica, conocida como quintaesencia, consistente de campos escalares. Esta quintaesencia será completamente diferente a las cuatro anteriores conocidas: fotones, bariones, neutrinos, y materia oscura, ya que no se ve ni se siente y sólo actúa gravitacionalmente a distancias cosmológicas. Sin embargo, ya que sólo actúa como un medio óptico que desvía la luz según su energía asociada, debería llamarse energía transparente [6].

⁴Supernova Cosmology Project y High-Z Supernova Search Team.

1.6. Catálogos de galaxias

En los últimos diez años se han hecho numerosos estudios sobre mapas galácticos bidimensionales y tridimensionales a escalas del Universo cercano a $z < 1$ y cada vez más lejano $z > 1$. Se puede mencionar, por ejemplo a los catálogos *2dF* (2 degree Field, en idioma Inglés), *6df*, y *SDSS* (Sloan Digital Sky Survey, en idioma Inglés).

Con estos catálogos se han predicho aspectos diferentes de la formación de estructura, por ejemplo, se ha estudiado la distribución espacial de objetos como función de diferentes tipos de espectros o corrimientos al rojo [11].

El catálogo de corrimiento al rojo de galaxias *2dF* es un proyecto que empleó un telescopio de cuatro metros con un campo visual de 2 grados. El proyecto terminó en junio de 2003, y durante el tiempo de su observación, se examinaron 245,591 objetos, incluyendo quásares y galaxias. Se registraron datos relevantes tales como espectros, corrimientos, entre otros. Haciendo uso de los datos obtenidos, se midió nuevamente la constante de Hubble y también se obtuvieron las funciones de luminosidad de galaxias con variados tipos espectrales. Este proyecto proporcionó además, mucha información sobre la distribución de materia en el Universo. El equipo realizador del experimento *2dF* realizó también el catálogo *6dF*, pero esta vez utilizó un telescopio con un campo visual de 6 grados, pudiendo así medir más de 8 veces el área que cubría el *2dF*, esta vez correspondiente al hemisferio sur. Mediante el catálogo *2df*, fue posible predecir diferentes aspectos de la formación de estructura del Universo. Por ejemplo, el estudio observó la distribución espacial de objetos como función de los tipos de espectros o distorsiones en el espacio del corrimiento al rojo, del espectro de potencias como función de la longitud de onda del objeto cósmico y finalmente, la determinación de los parámetros cosmológicos antes mencionados. Los parámetros obtenidos de los datos finales arrojados por el catálogo *2dF* y la medición de la *RCFM* fueron: el parámetro de densidad total de materia es $\Omega_m = 0.237 \pm 0.020$ y el de densidad bariónica $\Omega_b = 0.041 \pm 0.002$ con una constante de Hubble de $H_0 = 74 \pm 2 \text{ km/s/Mpc}$, un índice espectral escalar $n_s = 0.954 \pm 0.023$ y la constante de la ecuación de estado igual a $\omega = -0.85 \pm_{0.17}^{0.18}$. Con más datos espectrales se obtendrán resultados más precisos [6].

Los parámetros cosmológicos obtenidos de los datos finales de *6dF* y los datos parciales arrojados por *SDSS*, al igual que las mediciones de *RCFM* arrojan resultados similares a los ya mencionados. Para el caso de *SDSS* que midió más de una cuarta parte del cielo, y determinó la distancia y brillos de más de un millón de galaxias y quásares, arrojó los parámetros cosmológicos $\Omega_m h^2 = 0.213 \pm 0.023$, $\Omega_b/\Omega_m = 0.17$ y el parámetro de Hubble $h = 0.72$ [6]. Se puede sintetizar que las componentes oscuras del universo ocupan alrededor del 96 % de la totalidad del Universo. Sólo un 4 % es representado por los bariones, y de éstos sólo un 10 % forma estrellas, el resto queda en gas diluido por el espacio interestelar e intergaláctico. Por otro lado, la edad estimada es de 13800 millones de años la cual concuerda con la edad de los objetos más

antiguos del Universo, como los cúmulos globulares.

Otra cuestión importante de este tipo de mediciones son las oscilaciones acústicas de bariones (*BAO* por sus siglas en Inglés), las cuales se explicarán en el capítulo 5. Las oscilaciones acústicas medidas en la *RCFM* ver figura 1.4, también imprimen oscilaciones en la distribución de H y H_e . A escalas de aproximadamente 150 Mpc se observan variaciones sinusoidales en el espectro de potencias de la materia observada. Esta característica, del mismo modo, nos ayuda a determinar los parámetros cosmológicos que ya se habían mencionado mediante la distancia de diámetro angular de la escala de *BAO*, ya que depende también de la cantidad de materia y energía presentes en el Universo [11].

Capítulo 2

Modelo estándar de cosmología

2.1. El principio cosmológico

Uno espera que entre más grandes sean los volúmenes del Universo que se observen, sus propiedades promedio serán más simples y bien definidas. En la figura 2.1 se muestra una distribución de galaxias en dos dimensiones. Conforme el círculo que rodea al observador O se vuelve cada vez más grande, la densidad media dentro del círculo se vuelve prácticamente independiente de su tamaño. Este mismo comportamiento parece ocurrir en el Universo real. A pesar de su posición del centro O a cortas distancias la densidad varía aleatoriamente, ver figura 2.2. Sin embargo, en un volumen suficientemente grande, la densidad promedio es más uniforme y resulta igual desde cualquier punto que se mida. Este es un ejemplo del principio cosmológico: dejando a un lado las irregularidades locales, el Universo se ve igual desde todas las posiciones en el espacio, lo cual implica homogeneidad e isotropía.

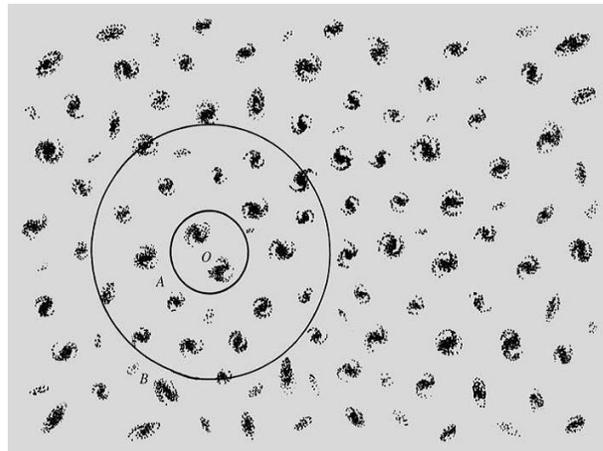


Figura 2.1: El principio cosmológico. En el círculo pequeño (A) muy cerca del observador, (O), la distribución de galaxias no representa a gran escala la distribución. En el círculo (B), la distribución ya casi está uniforme en promedio [1].

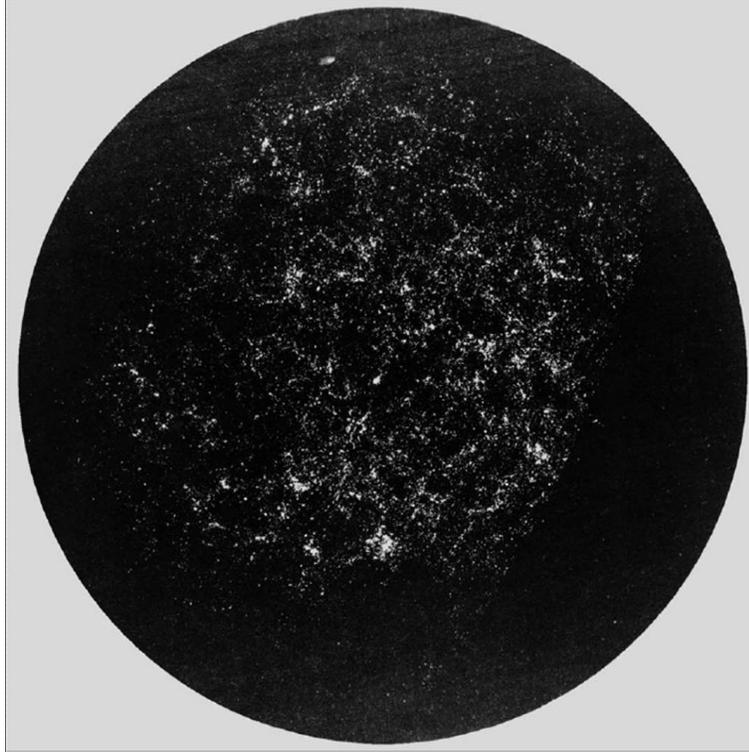


Figura 2.2: Las galaxias parecen estar distribuidas de manera aleatoria con grandes cantidades de espacio vacío [1].

El principio cosmológico se asume para poner una serie de restricciones a diversas teorías cosmológicas e implica que el flujo cósmico es una expansión global. En este caso, la velocidad entre dos objetos cercanos es proporcional a su separación, $V = Hd$ (ley de Hubble).

Los modelos geométricos mostrados en figura 2.3 son homogéneos e isotrópicos, despreciando irregularidades locales. Hemos visto que las observaciones astronómicas apoyan la homogeneidad e isotropía del vecindario observable, la metagalaxia. En las bases del principio cosmológico, estas propiedades pueden ser extendidas al Universo completo.

El principio cosmológico está muy relacionado con el principio Copernicano, en el cual nuestra posición en el Universo no es especial de ninguna manera. Con este principio, podemos asumir que en una escala suficientemente grande, las propiedades locales de la metagalaxia no varían en el Universo.

Homogeneidad e isotropía deben ser asumidas al momento de construir modelos cosmológicos fiables que vayan de la mano con las recientes observaciones, y de ser así, pueden ser adoptadas como hipótesis preliminares [1] ya que se espera un comportamiento similar en cualquier parte del Universo.

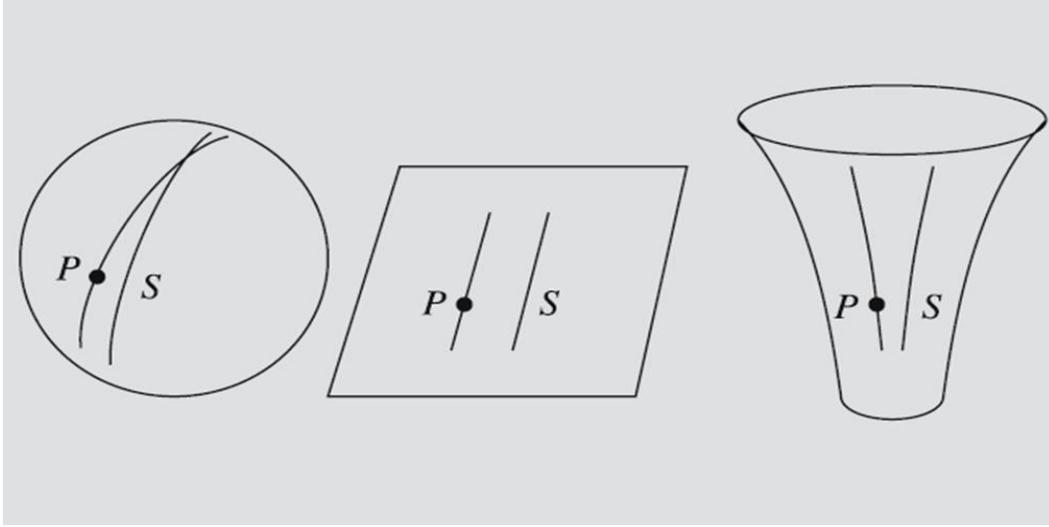


Figura 2.3: Analogías bidimensionales de los modelos de Friedmann: una esfera, un plano y una silla de montar [1].

2.2. Universos homogéneos e isotrópicos

Bajo condiciones generales, las coordenadas espaciotemporales pueden ser escogidas de tal manera que los valores espaciales de las coordenadas de los observadores junto con la materia son constantes. Asumiendo homogeneidad e isotropía se tiene:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{(1 - kr^2)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \quad (2.1)$$

este es el elemento de línea que describe un espacio 4-dimensional homogéneo e isotrópico el cual es llamado espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), cuyas ecuaciones de Einstein se explicarán más adelante. $a(t)$ es una cantidad con dimensiones de distancia representando el factor de escala del Universo y t es el tiempo cósmico. Si a se incrementa con el tiempo, todas las distancias, incluyendo aquellas entre las galaxias, crecerán también. El coeficiente k puede tener el valor $+1, 0$ o -1 , correspondiente a tres posibles geometrías del espacio: el elíptico o cerrado, el plano y el hiperbólico o abierto, mostrados en la figura 2.3. El Universo descrito por estos modelos no necesariamente tiene que ser euclidiano en su parte espacial, sino que puede tener curvaturas negativas o positivas. Dependiendo de la curvatura, el volumen del Universo puede o no ser finito. De igual modo, puede o no, haber una frontera visible. La analogía bidimensional de la geometría elíptica ($k = 1$) es la superficie de una esfera. Su superficie es finita pero no tiene frontera. En este caso, el factor de escala representa el tamaño de la esfera. Conforme el factor de escala aumenta, la distancia entre dos puntos también lo hace, y al igual que en la geometría elíptica, hay un volumen finito pero no hay frontera. Si comenzáramos a recorrer el espacio en una dirección arbitraria durante suficiente tiempo, al final, regresaríamos al punto de partida. Cuando $k = 0$, se

trata de un espacio plano o euclidiano, y la expresión de (2.1), es casi la misma que en el espacio de Minkowski. La única diferencia es el factor de escala $a(t)$. Todas las distancias en el espacio euclidiano cambian con el tiempo. La analogía bidimensional de este espacio es simplemente un plano. El volumen del espacio en un geometría hiperbólica cuando $k = -1$, es también infinita. La idea en dos dimensiones de este espacio es una superficie en forma de silla de montar a caballo [1].

2.3. Relatividad General y Modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

En 1917 Albert Einstein presentó un modelo del Universo basado en su teoría de la Relatividad General. En él describía un espacio geoméricamente simétrico con un volumen finito y sin frontera (una esfera) en concordancia con el principio cosmológico, su modelo era homogéneo e isotrópico. Además, era un modelo estático, ya que en aquel tiempo se creía que el volumen de expansión no cambiaba con el tiempo. Para poderle dar la característica de estático a su modelo, Einstein introdujo una nueva fuerza repulsiva que contrarrestaba perfectamente a la atracción de la gravedad, *la constante cosmológica* Λ de la cual se hablará más adelante.

El modelo más simple que cumple con las restricciones impuestas por el principio cosmológico explicado en la sección 2.1 es el de FLRW (sección 2.2). Tal modelo asume que la materia del Universo se comporta como un fluido perfecto, dando con esto la forma para el tensor de energía-momento, al tomar $c = 1$:

$$T_{\nu}^{\mu} = (\rho + p)u^{\mu}u_{\nu} + p\delta_{\nu}^{\mu}, \quad (2.2)$$

donde $u^{\mu} = (-1, 0, 0, 0)$ es la quadri-velocidad del fluido en coordenadas comóviles, ρ y p son la densidad y presión del fluido, respectivamente. El tensor T_{ν}^{μ} se conoce como tensor de energía-momento, e involucra la materia, la presión, y todos los tipos de energía asociadas al fluido. De esta manera, todos estos tipos de energía, no sólo la materia, pueden modificar la geometría del espacio tiempo dentro de la teoría de la Relatividad General.

El espacio y el tiempo, al mismo nivel geométrico, son representados por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Con el tensor métrico se construye el tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$ que a su vez se construye contrayendo ($\alpha = \beta$) en el tensor de Riemann, $R_{\mu\beta\nu}^{\alpha}$, que es proporcional al cambio de los vectores que se transportan paralelamente en un circuito cerrado del espacio-tiempo, es decir, contiene información de la curvatura del espacio-tiempo [6].

Las ecuaciones dinámicas del Universo en expansión se pueden derivar de las ecuaciones de Einstein. Para ello se parte de la métrica $g_{\mu\nu}$ y se obtienen los símbolos de Christoffel [4]:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha} [g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}]. \quad (2.3)$$

El tensor de Ricci está definido como:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}. \quad (2.4)$$

La contracción del tensor de Ricci nos lleva al escalar de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Se puede evaluar el tensor de Einstein como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (2.6)$$

La dinámica cosmológica se puede obtener al resolver las ecuaciones de Einstein:

$$G_{\nu}^{\mu} = 8\pi G T_{\nu}^{\mu}, \quad (2.7)$$

donde $G \equiv 6.67 \times 10^{-8} \text{cm}^3/\text{gs}^2$ es la constante de gravitación universal de Newton. Así, el lado izquierdo de la ecuación corresponde a la geometría del espacio-tiempo mientras el lado derecho de la ecuación está determinado por el contenido energético del fluido o materia a considerar como sistema. Esta ecuación tensorial representa diez ecuaciones diferenciales parciales acopladas más sus respectivas simplificaciones. Se trata de una ecuación complicada de resolver, pero haciendo uso de condiciones de simetría, se puede llegar a una solución más sencilla. Algo importante de la teoría es que la gravedad no está considerada como una fuerza, sino que es un efecto de la curvatura del espacio-tiempo producida por la materia, esto último en términos matemáticos de variedad ¹ [6].

Para la métrica de *FLRW*, las componentes no cero de los símbolos de Christoffel son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= a^2(t)H, & \Gamma_{22}^0 &= a^2(t)H, & \Gamma_{33}^0 &= a^2(t)H, \\ \Gamma_{01}^1 &= H, & \Gamma_{02}^2 &= H, & \Gamma_{03}^3 &= H, \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1-kr^2}, & \Gamma_{22}^1 &= -r(1-kr^2), & \Gamma_{33}^1 &= -r(1-kr^2)\text{sen}^2\theta, \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde se ha definido:

$$H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (2.9)$$

¹Una variedad es el objeto geométrico estándar en matemáticas, que generaliza la noción intuitiva de curva (1-variedad) o superficie (2-variedad) a cualquier dimensión y sobre cuerpos variados (no forzosamente el de los reales); Un poco más formalmente, podemos decir que una variedad de dimensión n es un espacio que se parece localmente a R^n [12, 13]

el punto representa la derivada con respecto al tiempo cósmico t , con H el parámetro de Hubble antes mencionado. Con unas cuantas operaciones se puede llegar a que las componentes no cero del tensor y el escalar de Ricci son respectivamente:

$$R_{00} = -3(H^2 + \dot{H}),$$

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} = a^2(t)(3H^2 + \dot{H} + 2k/a^2(t)), \quad (2.10)$$

$$R = 6(2H^2 + \dot{H} + k/a^2(t)), \quad (2.11)$$

con los resultados anteriores se puede llegar a que las componentes no cero del tensor de Einstein son:

$$G_0^0 = -3(H^2 + k/a^2(t)),$$

$$G_1^1 = G_2^2 = G_3^3 = (-3H^2 + 2\dot{H} + k/a^2(t)). \quad (2.12)$$

Usando entonces la ec. (2.2) con la ec. (2.7) obtenemos de las componentes (00) y (ii):

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} (\rho c^2) - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (2.13)$$

y

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho c^2 + 3p). \quad (2.14)$$

Es importante mencionar que hay una tercera ecuación que se puede derivar de las ecuaciones (2.13) y (2.14):

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p/c^2) = 0, \quad (2.15)$$

esta ecuación es la ley de la conservación del tensor energía-momento y representa la continuidad de la materia y energía del fluido. Cabe señalar que esta ecuación puede deducirse al tomar la derivada covariante del tensor de energía-momento igual a cero $T^{\mu\nu};_{\nu} = 0$ [6].

El sistema de ecuaciones (2.13), (2.14) y (2.15) consiste en tres ecuaciones diferenciales ordinarias. Debido a que el principio cosmológico sólo nos impone dependencia del tiempo, así mismo, el factor de escala $a(t)$ sólo depende del tiempo, por lo que las variables del sistema son tres $a(t)$, $\rho(t)$ y $p(t)$, y sólo dos ecuaciones del sistema son linealmente independientes. Para poder resolver el sistema, por lo tanto, necesitamos encontrar una tercera ecuación que nos relacione p y ρ , la ecuación de estado. Típicamente, se asume un fluido barotrópico, dado por la condición:

$$p/c^2 = w\rho, \quad (2.16)$$

donde w es una constante adimensional que se determina mediante la información del fluido. Si w es constante, entonces se puede integrar la ecuación de continuidad para obtener:

$$\rho = \frac{M_w}{a^{3(1+w)}}, \quad (2.17)$$

donde M_w es la constante de integración que resulta de la integral y se relaciona con la masa-energía del fluido. El valor de w depende del tipo de fluido que representa. Por ejemplo, para un fluido sin presión, conocido como polvo en cosmología, $w = 0$, y por lo tanto, $\rho = \frac{M_0}{a^3}$. Y en este caso es de esperarse que la densidad sea igual a la masa total dividida entre el volumen total. Al reemplazar en (2.13) la solución dada por (2.17) se obtienen las soluciones para el factor de escala. Las cuales son más sencillas cuando la curvatura es nula ($k=0$), a saber:

$$\begin{aligned} a(t) &= [6\pi G M_w (1+w)^2]^{\frac{1}{3(1+w)}} (t - t_o)^{\frac{2}{3(1+w)}} \\ &= \begin{cases} \left(\frac{32}{3}\pi G M_{\frac{1}{3}}\right)^{1/4} (t - t_o)^{1/2} & \text{para } w = \frac{1}{3} \text{ radiación} \\ (6\pi G M_0)^{1/3} (t - t_o)^{2/3} & \text{para } w = 0 \text{ polvo} \\ (24\pi G M_1)^{1/6} (t - t_o)^{1/3} & \text{para } w = 1 \text{ fluido rígido.} \end{cases} \quad (2.18) \end{aligned}$$

En estas ecuaciones se puede ver que el Universo se expande y que $a_0 = 0$ en $t = t_0$ y que a su vez, $\rho_0 = \infty$ por lo que hay una singularidad en $t = t_0$. Es común tomar $t_0 = 0$ ya que se le toma como el tiempo del origen del Universo hace aproximadamente 13,800 millones de años. De hecho, el modelo *FLRW* es útil hasta el tiempo de Planck $t_{pl} = 10^{-43}$ s, escala determinada por al constante de Newton $t_{pl} = l_{pl}/c$ con $l_{pl} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 10^{-33} \text{ cm}$ [6]. Además, cuando $w = -1$, entonces $P = -\rho$ y tenemos de la ec. (2.15) que ρ es una constante. Este es el caso que corresponde a la constante cosmológica que se abordará en la siguiente sección. El modelo que considera a la energía oscura como la constante cosmológica, Λ CDM es el más simple que concuerda a muy buena aproximación con las observaciones, sin embargo, como se verá en la sección de los modelos de quintaesencia, la ecuación de estado de la energía oscura puede ser más complicada [4]. Incluso existen teorías que incorporan la termodinámica y la geometría diferencial, *geometrotermodinámica* (GTD) de la cual puede surgir, de manera natural, la ecuación de estado para el fluido oscuro que concuerda con el modelo Λ CDM [14].

Los parámetros de densidad $\Omega = 1 - \Omega_k$ pueden escribirse de la forma:

$$\Omega \equiv \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_k, \quad (2.19)$$

donde se han definido las siguientes cantidades:

$$\Omega_r \equiv \frac{8\pi G \rho_r}{3H^2}, \quad \Omega_m \equiv \frac{8\pi G \rho_m}{3H^2}, \quad \Omega_\Lambda \equiv \frac{8\pi G \rho_{EO}}{3H^2}, \quad \Omega_k \equiv -\frac{k}{(aH)^2}.$$

De esta manera, diversos valores de la densidad impondrían valores distintos en la curvatura del espacio. Por ejemplo, para $\Omega > 1$, $\Omega_k < 0$ es decir una curvatura correspondiente un Universo cerrado. Si $\Omega < 1$, entonces $\Omega_k > 0$ lo

cual es una curvatura negativa o sea, la correspondiente a un Universo abierto. Un valor especial, conocido como valor crítico se obtiene cuando $\Omega = 1$ es decir que no hay curvatura, o sea un Universo plano $\Omega_k = 0$. Este valor especial de la densidad de energía para el cual $\Omega = (\rho + \Lambda)/\rho_c = 1$ se conoce como densidad crítica, donde $\rho_c \equiv 3H^2/8\pi G$.

Como ya hemos visto, las observaciones apoyan un factor de 0.3 y 0.7 para Ω_m y Ω_Λ hoy en día, respectivamente, por lo que el parámetro de curvatura $\Omega_k \approx 0$. Esto indica que el Universo se expandirá indefinidamente según las ecuaciones (2.18). Además, parece ser que la expansión que se experimenta en estos momentos y desde hace pocos miles de millones de años, es una expansión acelerada, como si hubiera una energía actuando en contra de la gravedad. La ec. (2.14) se puede escribir en función del parámetro de desaceleración $q \equiv -\ddot{a}a/\dot{a}^2$ como:

$$q = \frac{1}{2}(1 + 3w)\Omega_m - \Omega_\Lambda, \quad (2.20)$$

donde se observa que el valor de la constante cosmológica Ω_Λ positiva, actúa como un medio propicio para que haya una aceleración, $q < 0$, es decir, cumple con las observaciones donde parece haber una energía que actúa como una presión negativa en el Universo [6].

2.4. La constante cosmológica

Como ya se había planteado en la sección anterior, Einstein, en sus ecuaciones descubrió que el Universo se encontraba, y se encuentra, en expansión. Sin embargo, para mantener el modelo estático de acuerdo con la época, decidió introducir un término que hiciera nulos los cambios con respecto al tiempo. Debido a esto, Einstein introdujo la constante cosmológica Λ , tal que la ec. (2.7) se modifica como:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}), \quad (2.21)$$

esta constante, Λ , no afecta la invariancia ante transformaciones de coordenadas lo cual es algo fundamental de mantener. Las ecuaciones (2.13) y (2.14) se midifican como sigue:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + \Lambda) - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (2.22)$$

y

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3p - 2\Lambda). \quad (2.23)$$

con $\Lambda \neq 0$ muestran que la constante cosmológica hace que la densidad efectiva aumente y que la presión disminuya, lo cual permite soluciones para $\ddot{a} = \dot{a} = 0$ donde a es el tamaño del Universo de curvatura cerrada.

Debido a los descubrimientos de Edwin Hubble en la década de 1920, la constante cosmológica perdió sentido para la comunidad científica debido a que

el factor de escala era una cantidad variante con el tiempo, ya que el Universo se encontraba en expansión. Tuvieron que transcurrir casi ochenta años para que la constante cosmológica diera la cara una vez más. Ya que en 1998, el telescopio espacial Hubble, logró captar a grandes distancias explosiones de supernovas, las cuales han sido explicadas en la sección 1.5, que indicaban para los astrónomos, que el Universo no sólo se expandía, sino que lo hacía de una manera acelerada; es decir, hay algo allá afuera que interactúa con todo el espacio y produce una presión negativa en todas direcciones, se trata de la constante cosmológica. Los mecanismos físicos que hacen que dentro del espacio haya algo repeliendo todo a su alrededor, aún no son conocidos del todo, sin embargo se le adjudica un nombre un poco extravagante, este es el de *energía oscura*, debido a que abarca todo el espacio y no interactúa con partícula alguna más que a nivel cosmológico, es decir, gravitacionalmente.

Por estas razones, la constante cosmológica está nuevamente de moda, por así decirlo. A las ecuaciones cosmológicas se le añade la misma constante pero ahora de una manera tal que en vez de mantener un Universo estático, este se encuentre en expansión acelerada. Actualmente, se ha propuesto un valor teórico a la constante cosmológica, $\Lambda_{teo} = M_{pl}^4$, con M_{pl} la masa de Planck pero el valor que va de acuerdo a las observaciones corresponde a una cantidad muchísimo más pequeña $\Lambda_{obs} = 10^{-120} M_{pl}^4$ es esto, precisamente lo que se conoce como el problema de la constante cosmológica. Bajo la suposición de que nos encontramos en un Universo plano, vacío y sin densidad de energía, las soluciones de las ecuaciones (2.22) y (2.23) son conocidas como las solución de Sitter:

$$a = a_0 e^{Ht}, \quad (2.24)$$

donde H es una constante, que es el parámetro de Hubble evaluado en algún momento. Esta solución exponencial se cree que ocurrió durante épocas muy tempranas del cosmos donde Λ dominaba la dinámica del Universo temprano. A este período se le conoce como inflación y explica entre otras cosas, el porqué del tamaño del Universo actual, ya que sin este período de máxima expansión, el Universo sería muchísimo más pequeño de lo que es ahora. Actualmente, esta solución se pretende aplicar a los modelos cosmológicos para explicar el nuevo periodo de expansión acelerada. De ser válida esta expresión, tenemos entonces que en la época actual, $p = -\rho = -\Lambda_{obs}$, es decir, $w = -1$ justo como se había planteado en la sección anterior. Lo cual es compatible con las observaciones recientes [6].

2.5. Inflación

El modelo de la gran explosión es muy eficaz para explicar el inicio del Universo. Sin embargo, posee ciertos problemas que no se podrían resolver a menos que se recurra a la física de partículas y campos a temperaturas muy altas. Para explicar tales anomalías, se recurre al término que Alan Guth, a

principios de 1980, denominó Inflación. En un principio, el Universo contaba con las condiciones necesarias para que el fenómeno de inflación se presentara. Durante este período, de breve tiempo, el Universo fue dominado por una densidad de energía de campo escalar, cuyos valores casi no cambian en el tiempo (*slow roll*). Con estas condiciones se genera una presión efectiva negativa necesaria para inflar al Universo. Durante este período, el Universo no sólo se expande aceleradamente, sino que se infla, tal y como su nombre lo indica, como si de un globo se tratara.

Una vez que el Universo disminuye su temperatura a cierto valor, éste deja de expandirse inflacionariamente y la gravedad comienza a desacelerarlo súbitamente, y el *hot big bang* toma su curso.

No obstante, la idea de que el Universo se expandiera de esa manera durante un breve período de tiempo tuvo implicaciones importantes en los problemas que contenía el modelo del big bang, las anomalías que aparecían, ahora tenían solución. Uno de ellos fue el problema del horizonte y otro de ellos fue el problema de la planitud del Universo [15].

2.5.1. El problema del horizonte

Para explicar la manera en que la inflación termina con el problema del horizonte primeramente hay que considerar que dos regiones del espacio no están en contacto causal a menos que la luz pase de una región a otra del espacio. Entonces se puede suponer que en un principio, el Universo tendría un tamaño igual al que le tomó la luz viajar durante cierto tiempo, por ejemplo durante un año, el tamaño del Universo debería ser de un año luz. Sin embargo no lo es ya que el espacio que la luz está recorriendo, se encuentra en expansión, por lo que el tamaño del Universo adquiere un valor determinado por la teoría cosmológica.

De esta manera, el tamaño del horizonte es mucho mayor al esperado. Además, se puede demostrar que su tamaño aumenta con el tiempo de manera lineal. De esta manera, podemos concluir que cada vez que observamos objetos lejanos, los vemos tal y como fueron en el pasado remoto cuando el tamaño del horizonte era más pequeño. De esta manera, podemos encontrarnos o no fuera del horizonte de otra región del espacio. Por esa razón, no hay forma de explicar la homogeneidad del Universo.

No obstante, esto se presenta cuando se habla de una expansión constante, más no así cuando se plantea una expansión inflacionaria o acelerada, ya que en este caso la distancia recorrida por la luz crece exponencialmente. La expansión es tan tremenda que su efecto de estirar la distancia recorrida supera el movimiento de la luz. Por esta razón algunas veces se dice que la expansión inflacionaria es hiperlumínica. Sin embargo no es tanto eso, sino que más bien la distancia recorrida por la luz es finita, pero la expansión del espacio es lo que supera la velocidad de la luz y estira el punto de origen de la luz con su destino.

Por esta razón, la inflación abre los horizontes. Antes de la inflación, to-

das las regiones se encontraban en un pedacito de espacio en contacto causal. Así mismo, partes distantes del Universo hoy estuvieron en contacto en el pasado y así pudieron alcanzar una temperatura homogénea. Después de la inflación, esa pequeña porción de espacio se infló poseyendo las mismas características que en un principio, abarcando regiones enormes tales como el horizonte presente observado de 45 mil millones de años luz. El problema del horizonte queda resuelto de esta manera [15].

2.5.2. El problema de la planitud

El siguiente problema por resolver es el de la planitud, el cual consiste en explicar por qué la curvatura del Universo, Ω_k , es tan cercana a cero hoy en día.

Como ya hemos dicho, las propiedades de la constante cosmológica son muy extrañas. Tal es el caso de su densidad de energía, la cual permanece constante sin importar cuánto crezca o se expanda el Universo. Esta propiedad se debe a que Λ es un material muy tenso, de modo que la energía de Λ se incrementa conforme el espacio se estira, tal y como un resorte lo hace. Debido a que la tensión de Λ es tan grande, esto compensa la dilución que sufriría la densidad al momento de que el Universo se expanda. Por lo que la densidad de energía se mantiene sin cambio alguno como en un principio.

Tomando en cuenta Ω , cociente entre la energía gravitacional y cinética durante la expansión, se puede decir que cuando predominaba Λ , el valor de Ω igual a uno deja de ser inestable y se convierte en lo que en matemáticas se denomina atractor², como por ejemplo el mostrado en la figura 2.4 [16]. Todo depende del hecho de que Λ tiene una tensión elevadísima, y por consiguiente no se reduce con la expansión.

Se cree que una constante cosmológica al inicio del Universo actuó como atractor e infló el Universo haciéndolo plano. De esta manera, el Universo primigenio de un segundo de edad sólo pudo haber sobrevivido hasta nuestros días si Ω estaba comprendido entre 0.9999999999999999 y 1.0000000000000001. Después de estas estimaciones, se calculó que una inflación bastante modesta reduciría la curvatura de tal modo que el Universo de un segundo de edad podría exhibir un valor de Ω comprendido entre 0. (varias páginas cubiertas de nueves) y 1. (varias páginas cubiertas de ceros) y un uno al final. Por lo tanto, la inflación consiste en un método muy útil para resolver el problema de la planitud [15].

²Un atractor es un punto cuántico al que el sistema evoluciona después de un tiempo suficientemente largo. Para que el conjunto sea un atractor, las trayectorias que le sean suficientemente próximas han de permanecer próximas incluso si son ligeramente perturbadas. Geométricamente, un atractor puede ser un punto, una curva, una variedad o incluso un conjunto complicado de estructura fractal conocido como atractor extraño. La descripción de atractores de sistemas dinámicos caóticos ha sido uno de los grandes logros de la teoría del caos. La trayectoria del sistema dinámico en el atractor no tiene que satisfacer ninguna propiedad especial excepto la de permanecer en el atractor; puede ser periódica, caótica o de cualquier otro tipo [16, 17].

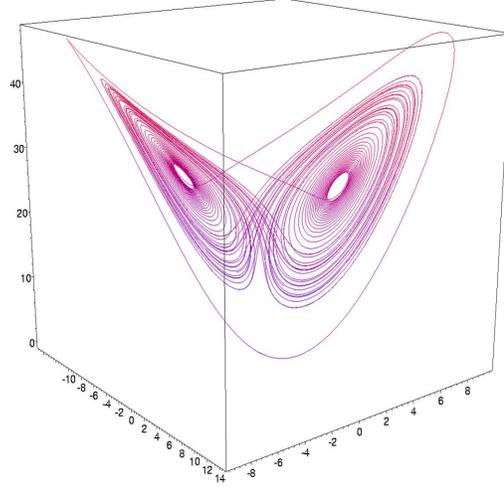


Figura 2.4: El caótico atractor de Lorenz.

2.6. Modelos de quintaesencia

El Universo está compuesto por materia bariónica, fotones, neutrinos, materia oscura y además, algo extra por así decirlo, algo que abarca todo el espacio, un campo o esencia diferente de todas las anteriores. Genéricamente se le denota como energía oscura, y si se trata de un campo escalar, se le llama quintaesencia cuya dinámica genera una expansión acelerada del Universo. Se puede pensar la quintaesencia como una especie de modelo inflacionario actuando en la época actual.

Esta nueva teoría propone que la causante de la expansión acelerada en el Universo es un campo escalar φ mínimamente acoplado a la gravedad que modifica a la ec. (2.7) en su parte energética de la siguiente manera:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}(\varphi)), \quad (2.25)$$

donde el tensor de energía-momento de la quintaesencia está dado por:

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.26)$$

donde S es la acción del campo para la quintaesencia, y posteriormente, después de realizar los cambios pertinentes, queda:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi + V(\varphi) \right]. \quad (2.27)$$

Para la métrica de *FLRW*, las ecuaciones quedan como:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{\text{ef}}, \quad (2.28)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} [\rho_{\text{ef}} + 3p_{\text{ef}}], \quad (2.29)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} = 0, \quad (2.30)$$

donde

$$\rho_{\text{ef}} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad (2.31)$$

$$p_{\text{ef}} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi). \quad (2.32)$$

y la ec. (2.29) implica:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3} [\dot{\varphi}^2 - V(\varphi)], \quad (2.33)$$

y puesto que estamos buscando soluciones de expansión acelerada se impone la condición:

$$V(\varphi) > \dot{\varphi}^2. \quad (2.34)$$

La ecuación de estado del campo está dada por:

$$w_\varphi = \frac{p_{\text{ef}}}{\rho_{\text{ef}}} = \frac{\dot{\varphi}^2 - 2V(\varphi)}{\dot{\varphi}^2 + 2V(\varphi)}, \quad (2.35)$$

de la cual podemos obtener dos límites: a) $2V(\varphi) \gg \dot{\varphi}^2$ y b) $2V(\varphi) \ll \dot{\varphi}^2$ que la restringen al intervalo $-1 \leq w_\varphi \leq 1$.

Dado que se quieren encontrar soluciones de acuerdo con la ec. (2.34), el límite b) no es de utilidad en este análisis. Pero la ec. (2.33) impone una cota superior a esa ecuación de estado para un Universo acelerado como el que se está buscando: $w < -1/3$, y así se obtiene una w más adecuada a los propósitos:

$$-1 \leq w_\varphi \leq -1/3. \quad (2.36)$$

La ecuación de continuidad en su forma (2.15) (no en la forma (2.30)) se puede resolver y escribir como:

$$\rho = \rho_0 e^{-\int 3(1+w_\varphi) \frac{da}{a}}, \quad (2.37)$$

siendo ρ_0 una constante de integración. Otra manera de escribir la solución (2.37) es, después de resolver la integral,

$$\rho = \rho_0 a^{-m}, \quad (2.38)$$

donde $m = 3(1 + w_\varphi)$ cumple con $0 \leq m \leq 2$ de acuerdo con la restricción (2.36).

Vemos que cuando se toma el límite $V(\varphi) \gg \dot{\varphi}^2$, $\rho = \rho_0$ y de las ecuaciones (2.31) y (2.32) se obtiene $\rho = V(\varphi) = cte$. En realidad $V(\varphi)$ es cuasi-constante pues el valor constante se alcanza en un límite, el inciso a). Como por ejemplo, tomemos el potencial $V(\varphi) = \lambda(\varphi^2 - \nu^2)^2$, con λ y ν parámetros. Una gráfica de ese potencial se muestra en la figura 2.5 [18].

Definamos a continuación dos *parámetros de rodamiento lento* (*slow roll*):

$$\varepsilon \equiv \frac{m_{pl}^2}{16\pi} \left(\frac{1}{V} \frac{dV}{d\varphi} \right)^2, \quad \eta \equiv \frac{m_{pl}^2}{8\pi} \frac{1}{V} \frac{d^2V}{d\varphi^2}. \quad (2.39)$$

Si $\varepsilon \ll 1$ y $|\eta| \ll 1$ tenemos la condición de rodamiento lento que da una solución inflacionaria. Si escribimos los parámetros de rodamiento lento en términos de las derivadas parciales de H , como por ejemplo $\varepsilon = -\dot{H}/H^2$, podemos comprobar la existencia de soluciones aceleradas directamente con el valor de H . Esta redefinición de los parámetros toma en cuenta tanto la energía como la materia oscura.

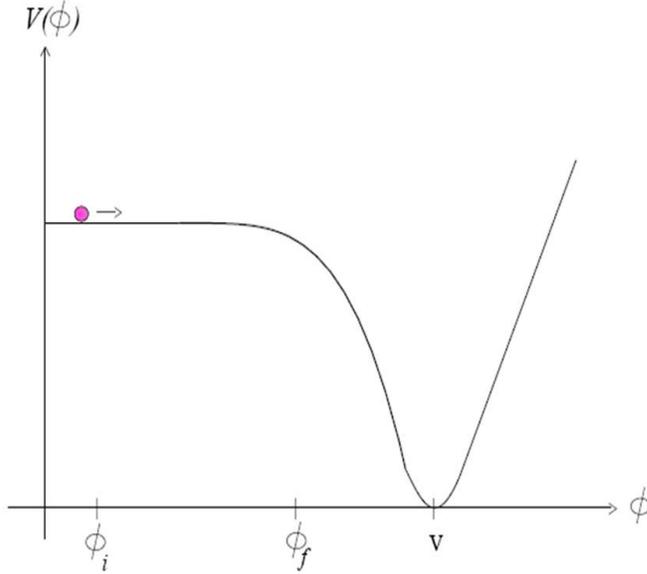


Figura 2.5: Potencial en función del campo escalar.

Supongamos un Universo que se expande según la ley de potencias:

$$a(t) = a_0 t^p, \quad p \in R^+, \quad (2.40)$$

que es acelerada si $p > 1$. De (2.14) reescrita en términos de H queda como $\dot{H} = -4\pi G(\rho + p)$ y de la ec. (2.28) obtenemos:

$$V = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (2.41)$$

$$\varphi = \int \left(\frac{-\dot{H}}{4\pi G} \right)^{1/2} dt, \quad (2.42)$$

respectivamente y donde se ha escogido la raíz positiva de $\dot{\varphi}$. Ahora se puede encontrar el potencial $V(\varphi)$ correspondiente a la ley de potencias (2.40) mediante una combinación de estas últimas ecuaciones.

Resolviendo la ec. (2.42) obtenemos:

$$\varphi = \sqrt{p/4\pi G} \ln t, \quad (2.43)$$

y si se invierte y sustituye en la ec. (2.41) se obtiene:

$$V(\phi) = V_0 e^{\sqrt{16\pi/p} \phi}, \quad (2.44)$$

con V_0 una constante. Este potencial es típico en modelos de quintaesencia.

Los modelos originales de quintaesencia están descritos por un potencial que va como la ley de potencias del potencial:

$$V(\varphi) = \frac{M^{4+\alpha}}{\varphi^\alpha}, \quad \alpha \in R^+, \quad (2.45)$$

aquí M es una constante que escala la masa. Actualmente la densidad de energía del campo escalar es del orden de $\rho_{\varphi_0} \approx V(\varphi_0) \approx m_{pl}^2 H_0^2 \approx 10^{-47} GeV^4$ y $\varphi_0 \sim m_{pl}$ y de la ec. (2.45) se puede demostrar que:

$$M = \left(\rho_{\varphi_0} m_{pl}^\alpha \right)^{\frac{1}{4+\alpha}}. \quad (2.46)$$

Por ejemplo, si $\alpha = 2$, $M = 1 GeV$.

La figura 2.6 muestra esquemáticamente las densidades de los diferentes componentes. Se muestra la época en la que la quintaesencia domina la evolución del Universo [18].

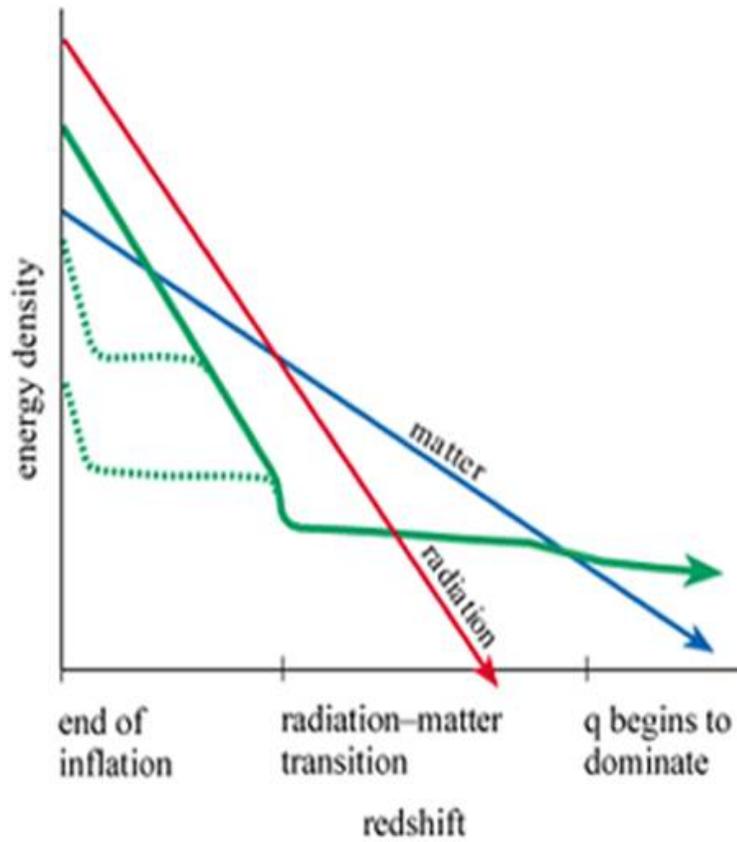


Figura 2.6: Evolución esquemática de la quintaesencia, se puede observar como sin importar de donde haya partido, ésta comienza a dominar en la actualidad en comparación con la materia y la radiación [18].

Capítulo 3

Evidencias observacionales de energía oscura

Las observaciones del cosmos de los últimos 14 años, hechas originalmente a supernovas tipo Ia, muestran que el Universo se expande a una tasa acelerada, por lo que debe haber una especie de energía que influya a escalas cósmicas para que el espacio que ocupan los cúmulos galácticos en el Universo se expanda a una razón cada vez mayor, pasando de una época de expansión desacelerada por la gravedad a una época de inflación, figura 3.1 [19].

A continuación, se hará hincapié en las evidencias de energía oscura, las cuales aunque fueron antes mencionadas vagamente, ahora se fundamentarán con más rigor.

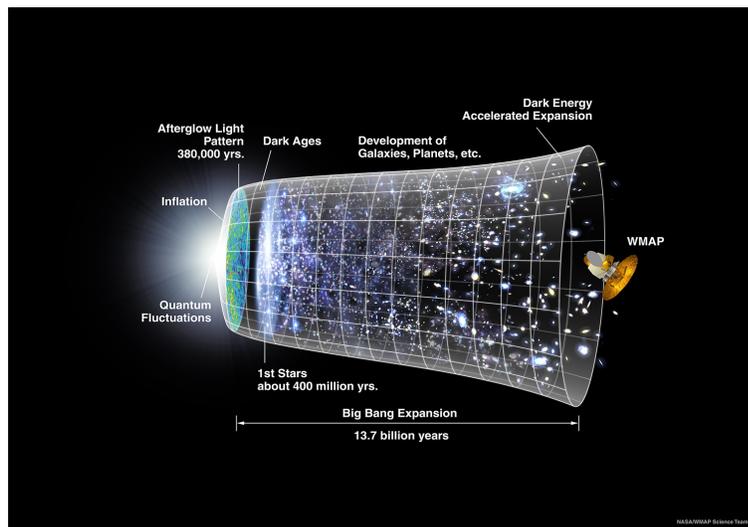


Figura 3.1: Actualmente las observaciones muestran que el Universo se expande a una tasa acelerada, evidenciando con ello que debe haber una energía actuando en todo el espacio, capaz de producir tal expansión.

3.1. Distancia lumínica

Para poder discutir las constricciones observacionales de la energía oscura, es importante introducir las distancias cósmicas que se relacionen con las observaciones en el espacio-tiempo de *FLRW*. Teniendo en cuenta que $r = \text{sen}\chi$ ($k = +1$), $r = \chi$ ($k = 0$) y $r = \text{senh}\chi$ ($k = -1$), entonces la parte 3-dimensional de la ec. (2.1) para una curvatura k constante es:

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + (f_k(\chi))^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2), \quad (3.1)$$

donde

$$f_k(\chi) = \text{sen}\chi \quad (k = +1), \quad \chi \quad (k = 0), \quad \text{senh}\chi \quad (k = -1), \quad (3.2)$$

la cual puede ser escrita de una manera unificada como:

$$f_k(\chi) = \frac{1}{\sqrt{-k}} \text{senh}(\sqrt{-k}\chi), \quad (3.3)$$

y se recupera el caso para un Universo plano tomando el límite $k \rightarrow 0$ [4].

Como se mencionó en la sección 1 de observaciones cosmológicas, hacemos uso del corrimiento al rojo producto de Supernovas tipo Ia, previamente explicadas, para medir distancias. Aquí la longitud de onda λ se incrementa de una manera proporcional al factor de escala a , cuyo efecto puede ser cuantificado según la ec. (1.3).

Otro concepto relacionado con la expansión del Universo es el de distancia. De hecho hay diversas maneras de medir distancias en el Universo en expansión. Por ejemplo, una de ellas tiene que ver con la distancia dada en coordenadas comóviles, es decir, aquellas que se mantienen sin cambio alguno durante la expansión del Universo, de esta manera, la escala de la distancia física es proporcional al factor de escala del Universo. Otra manera de definir distancias es mediante el uso de la luminosidad de los objetos estelares. De esta manera, la distancia d_L conocida como distancia lumínica, juega un papel muy importante en astronomía incluyendo las observaciones de supernovas [20].

En el espacio-tiempo de Minkowski, la luminosidad absoluta L_s de la fuente y el flujo de energía F a una distancia d está relacionada a través de $F = L_s/(4\pi d^2)$. Al generalizar esto en un Universo en expansión, la distancia lumínica, d_L , está definida como

$$d_L^2 = \frac{L_s}{4\pi F}. \quad (3.4)$$

Consideremos un objeto con luminosidad absoluta L_s localizado en cierta coordenada de distancia X_s de un observador en $X = 0$. La energía luminosa emitida desde el objeto con un intervalo de tiempo Δt_1 está denotada como ΔE_1 mientras que la energía que alcanza a la esfera con radio X_s es escrita como ΔE_0 . Notamos que ΔE_1 y ΔE_0 son proporcionales a las frecuencias de

la luz en $X = X_s$ y $X = 0$, respectivamente. De esta manera, $\Delta E_1 \propto \nu_1$ y $\Delta E_0 \propto \nu_0$. Las luminosidades L_s y L_0 están dadas por

$$L_s = \frac{\Delta E_1}{\Delta t_1}, \quad L_0 = \frac{\Delta E_0}{\Delta t_0}. \quad (3.5)$$

La velocidad de la luz está dada por $c = \nu_1 \lambda_1 = \nu_0 \lambda_0$, donde λ_1 y λ_0 son las longitudes de onda en $x = x_s$ y $x = 0$. Entonces, de ec. (1.3) encontramos

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} = \frac{\Delta E_1}{\Delta E_0} = 1 + z, \quad (3.6)$$

donde también hemos usado $\nu_0 \Delta t_0 = \nu_1 \Delta t_1$. Combinando ec. (3.5) con ec. (3.6) obtenemos:

$$L_s = L_0(1 + z)^2. \quad (3.7)$$

La luz viajando a través de la dirección x satisface la ecuación geodésica $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2 = 0$. Obtenemos:

$$x_s = \int_0^{x_s} dx = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{1}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{h(z')}, \quad (3.8)$$

donde $h(z) = H(z)/H_0$. Nótese que se ha utilizado la relación $\dot{z} = -H(1 - z)$ la cual proviene de ec. (1.3). De la métrica de *FLRW* encontramos que el área de la esfera en $t = t_0$ está dada por $S = 4\pi(a_0 f_k(x_s))^2$. Por lo tanto el flujo observado de energía es

$$F = \frac{L_0}{4\pi(a_0 f_k(\chi))^2}. \quad (3.9)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.8) y (3.9) en (3.4), obtenemos la distancia lumínica para un Universo en expansión:

$$d_L = a_0 f_k(\chi)(1 + z). \quad (3.10)$$

En el esquema plano de *FLRW* con $f_k(\chi) = \chi$ ec. (3.2) encontramos

$$d_L = \frac{1 + z}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{h(z')}, \quad (3.11)$$

donde se ha utilizado ec. (3.8), por lo que la razón de Hubble $H(z)$ puede ser expresada en términos de $d_L(z)$:

$$H(z) = \left\{ \frac{d}{dz} \left(\frac{d_L(z)}{1 + z} \right) \right\}^{-1}. \quad (3.12)$$

Si se mide la distancia lumínica observacionalmente, se puede determinar la razón de expansión del Universo.

La densidad de energía ρ incluye todas las componentes en el Universo, tanto partículas relativistas como no relativistas, energía oscura o constante cosmológica, entre otras.

$$\rho = \sum_i \rho_i^{(0)} (a/a_0)^{-3(1+w_i)} = \sum_i \rho_i^{(0)} (1+z)^{-3(1+w_i)}, \quad (3.13)$$

donde se ha usado la ec. (1.3). Aquí w_i y $\rho_i^{(0)}$ corresponden a la ecuación de estado y la densidad de energía de cada tipo respectivamente. Por lo tanto, el parámetro de Hubble ec. (2.13), toma la forma de:

$$H^2 = H_0^2 \sum_i \Omega_i^{(0)} (1+z)^{3(1+w_i)}, \quad (3.14)$$

donde $\Omega_i^{(0)} \equiv 8\pi G_{\rho_i}^{(0)} / (3H_0^2) = \rho_i^{(0)} / \rho_c^{(0)}$ es el parámetro de densidad para una componente individual en la época presente. De esta manera, la distancia lumínica en una geometría plana está dada por [20]:

$$d_L = \frac{(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\sum_i \Omega_i^{(0)} (1+z')^{3(1+w_i)}}}. \quad (3.15)$$

En la figura 3.2 vemos que al aumentar Ω_Λ , d_L crece, lo cual fue demostrado para los datos de supernovas tipo Ia, como veremos más adelante.

3.2. Distancia diametral angular

La distancia diametral angular d_A está definida como:

$$d_A \equiv \frac{\Delta x}{\Delta \theta}, \quad (3.16)$$

con $\Delta \theta$ el ángulo que subtiende un objeto de tamaño Δx ortonormal a la línea de visión. Esta distancia es usada para las observaciones de las anisotropías de la *RCFM*, en donde la fuente está en la superficie de una esfera con radio χ con el observador al centro, el tamaño Δx a un tiempo t_1 en el espacio-tiempo de *FLRW* está dado por:

$$\Delta x = a(t_1) f_k(\chi) \Delta \theta, \quad (3.17)$$

por lo tanto

$$d_A = a(t_1) f_k(\chi) = \frac{a_0 f_k(\chi)}{1+z} = \frac{1}{1+z} \frac{c}{H_0 \sqrt{\Omega_k^{(0)}}} \sinh \left(\sqrt{\Omega_k^{(0)}} \int_0^z \frac{d\tilde{z}}{E(\tilde{z})} \right), \quad (3.18)$$

donde se ha usado $f_k = c/a_0 H_0 \sqrt{\Omega_k^{(0)}} \sinh \left(\sqrt{\Omega_k^{(0)}} \int_0^z d\tilde{z}/E(\tilde{z}) \right)$ y $z = a_0/a(t_1) - 1$ y $E(z) = H^2/H_0^2$. Haciendo una comparación con la distancia lumínica d_L ec. (3.15) tenemos [4]:

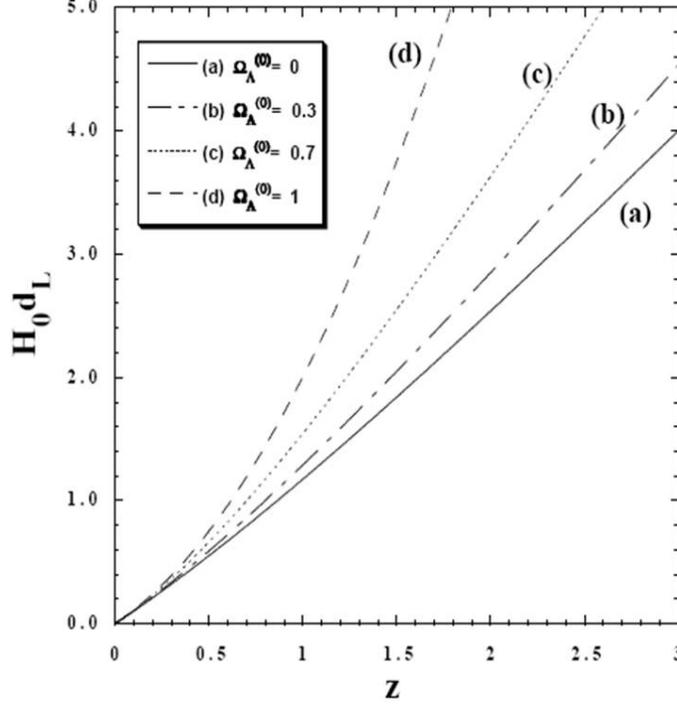


Figura 3.2: Distancia lumínica d_L en unidades de H_0^{-1} para dos componentes del Universo plano con un fluido no relativista ($w_m = 0$) y constante cosmológica ($w_\Lambda = -1$), para varios valores de $\Omega_\Lambda^{(0)}$ [20].

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}. \quad (3.19)$$

3.3. Restricciones provenientes de las supernovas Ia

La reciente evidencia acerca de la aceleración del Universo está relacionada con las observaciones de la distancia lumínica previamente explicada, aplicada a corrimientos al rojo de supernovas. La magnitud aparente m de la fuente con magnitud absoluta M está relacionada con la distancia lumínica d_L , ver ec. (1.28), por medio de la relación:

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{Mpc} \right) + 25, \quad (3.20)$$

esto viene de tomar el logaritmo de ec. (3.4) debido a que m y M están relacionados con los logaritmos de F y L_s respectivamente. Los factores numéricos se incrementan a causa de las definiciones de m y M en astronomía.

Como ya se había mencionado en el capítulo 1, las supernovas tipo Ia son observadas cuando una estrella tipo enana blanca excede la masa del límite de Chandrasekhar y explota. Se sabe que las supernovas tipo Ia son formadas de la misma manera independientemente del lugar donde se encuentren en el Universo, lo cual significa que tienen una magnitud absoluta M independiente del corrimiento al rojo z . De esta manera, ellas pueden ser tratadas como fuentes o candelas estándar. La magnitud aparente, m , puede ser medida, al igual que el corrimiento al rojo, de manera observacional.

Para poder hacernos una idea del fenómeno, consideremos dos supernovas, la 1992P con un corrimiento al rojo pequeño de $z = 0.026$ con $m = 16.08$ y la 1997ap con un gran corrimiento al rojo de $z = 0.83$ con $m = 24.32$. Como ya lo hemos mencionado, la distancia lumínica está dada aproximadamente por $d_L \simeq z/H_0$ para $z \ll 1$. Usando la magnitud aparente $m = 16.08$ de 1992P con $z = 0.026$, encontramos que la magnitud absoluta está estimada por $M = -19.09$ de ec. (3.20). Aquí utilizaremos el valor $H_0^{-1} = 2998h^{-1}Mpc$ con $h = 0.72$. Por lo tanto, la distancia lumínica de 1997ap es obtenida al sustituir $m = 24.32$ y $M = -19.09$ en la ec. (3.20):

$$H_0 d_L \simeq 1.16, z = 0.83. \quad (3.21)$$

De la ec. (3.15) el valor teórico estimado para la distancia lumínica en dos componentes del Universo plano es:

$$H_0 d_L \simeq 0.95, \quad \Omega_m^{(0)} \simeq 1, \quad (3.22)$$

$$H_0 d_L \simeq 1.23, \quad \Omega_m^{(0)} \simeq 0.3, \quad \Omega_\Lambda^{(0)} = 0.7. \quad (3.23)$$

Los resultados de la ec. (3.21) se parecen más a los de (3.23) lo cual es claramente consistente con lo requerido para energía oscura dominando el Universo como puede verse en la figura 3.2.

Por supuesto, desde el punto de vista estadístico, no se puede pretender que nuestro Universo se está acelerando al tomar en cuenta sólo un grupo de datos. Por ejemplo, en 1998 Perlmutter [Supernova Cosmology Project(SCP)] descubrió 42 supernovas tipo Ia en el rango de corrimiento al rojo del orden de $z = 0.18 - 0.83$ mientras Riess [hight-z Supernova team (HSST)] encontró 14 supernovas tipo Ia en el rango de $z = 0.16 - 0.62$ y 34 cercanas a supernovas tipo Ia. Asumiendo un Universo plano ($\Omega_m^{(0)} + \Omega_\Lambda^{(0)} = 1$) Perlmutter encontró $\Omega_m^{(0)} = 0.28_{-0.03}^{+0.09}$ ($1/\sigma$ estadístico) $_{-0.04}^{+0.05}$ (sistemas identificados), así mostró que cerca del 70 % de la densidad de energía del presente Universo consiste de energía oscura.

En 2004, Riess reportó la medición de 16 supernovas con alto corrimiento al rojo del orden de $z > 1.25$ mediante el uso del Telescopio Espacial Hubble (*HTS*, por sus siglas en Inglés). Al incluir 170 Supernovas Ia previamente conocidas, ellos mostraron que el Universo exhibía un comportamiento que va de la desaceleración a la aceleración con un nivel de confianza mayor al 99 %. La figura 3.3 ilustra los valores observacionales de la distancia lumínica d_L contra el corrimiento al rojo z junto con las curvas teóricas derivadas de la ec. (3.15). Esto muestra que un Universo dominado por pura densidad de materia

sin constante cosmológica ($\Omega_m^{(0)} = 1$) no encaja con los datos. Un valor más preciso de $\Omega_m^{(0)}$ obtenido de un análisis conjunto es $\Omega_m^{(0)} = 0.31_{-0.08}^{+0.08}$ el cual es consistente con el resultado de Riess, como consecuencia de esto, $\Omega_\Lambda^{(0)} \approx 0.69$, implicando la existencia de energía oscura.

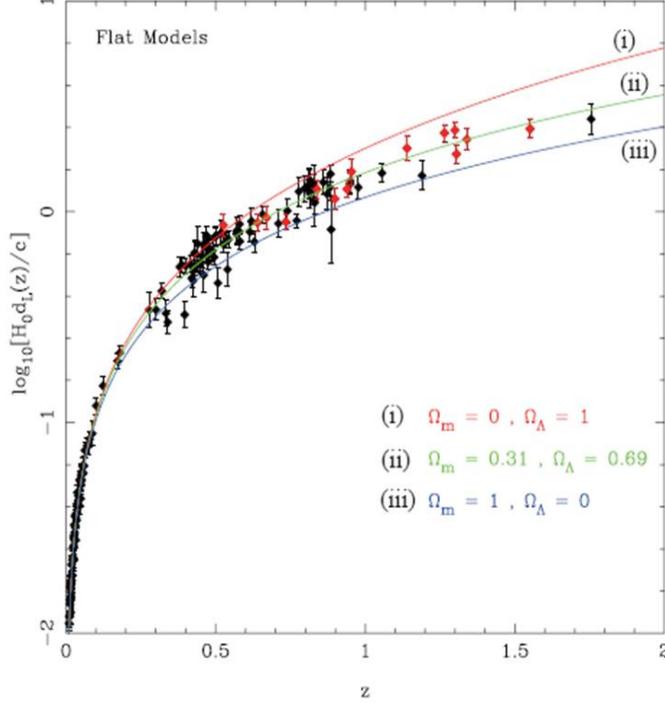


Figura 3.3: La distancia lumínica $H_0 d_L$ (el logaritmo) contra el corrimiento al rojo z para el modelo cosmológico de un Universo plano. Los puntos negros vienen de los datos de Riess arrojados por “Gold” mientras que los puntos rojos muestran los datos recientes de HST. Las tres curvas muestran los valores teóricos de $H_0 d_L$ para (i) $\Omega_m^{(0)} = 0$, $\Omega_\Lambda^{(0)} = 1$, (ii) $\Omega_m^{(0)} = 0.31$, $\Omega_\Lambda^{(0)} = 0.69$, y (iii) $\Omega_m^{(0)} = 1$, $\Omega_\Lambda^{(0)} = 0$ [20].

Se pueden comparar y analizar las limitaciones de los modelos de energía oscura de las supernovas tipo Ia y las observaciones del fondo cósmico de microondas. Algunos autores plantean que modelos preferidos por estas observaciones recaen en distintas partes del espacio, sin embargo, no sobrepasan los límites de confiabilidad permitidos del 68%. Ellos sugerían que esto pudiera indicar errores sistemáticos aún sin solución en alguna de las observaciones, siendo las de las supernovas aquellas que más tienden a caer en este tipo de errores debido a la naturaleza mayormente heterogénea de los grupos de datos disponibles hasta la fecha. Recientemente, han sido reveladas nuevas observaciones de corrimiento al rojo muy elevado de supernovas del *SNLS* (Supernova Legacy Survey, en idioma Inglés). Este estudio pretende reducir los errores sistemáticos al usar sólo observaciones de alta calidad basados en la utilización de un sólo instrumento para observar los campos. La finalidad es que a través

de una técnica de búsqueda continua, las fuentes no se pierdan y los datos sean de mayor calidad. Jassal [20] pretende que los grupos de datos estén en mayor concordancia con WMAP. En otras palabras, los datos de supernovas con alto corrimiento al rojo de el proyecto SNLS concuerdan con las observaciones de la *RCFM*.

Se debe hacer énfasis en el hecho de que la expansión acelerada es debida a fenómenos cosmológicos no muy antiguos, comenzando con un corrimiento al rojo $z \sim 1$. De la ec. (3.12), el parámetro de desaceleración, $q \equiv -\ddot{a}/\dot{a}^2$ está dado por:

$$q(z) = \frac{3 \sum_i \Omega_i^{(0)} (1 + w_i) (1 + z)^{3(1+w_i)}}{2 \sum_i \Omega_i^{(0)} (1 + z)^{3(1+w_i)}} - 1. \quad (3.24)$$

Tomando en cuenta las dos componentes de la cosmología plana, el Universo entra en una fase de aceleración ($q < 0$) en:

$$z < z_c \equiv \left(\frac{2\Omega_\Lambda^{(0)}}{\Omega_m^{(0)}} \right)^{1/3} - 1. \quad (3.25)$$

Cuando $\Omega_m^{(0)} = 0.3$ y $w_\Lambda^{(0)} = 0.7$ tenemos $z_c = 0.67$. El problema de porqué una expansión acelerada debe ocurrir ahora en la larga historia del Universo es llamado *el problema de la coincidencia* [20].

3.4. La edad del Universo y la constante cosmológica

Como se había mencionado, el inverso de la constante de Hubble H_0 es una buena medida de la edad t_0 del Universo. Es así, que se puede calcular t_0 y comparar la edad del Universo con el de los cuerpos celestes más antiguos t_s . Para obtener concordancia forzosamente requerimos que $t_0 > t_s$, pero es difícil satisfacer tal condición si consideramos un Universo lleno sólo de materia como se explicará más abajo. Sin duda, la presencia de una constante cosmológica Λ o *Energía Oscura* puede resolver esta cuestión.

Primeramente se hará mención de la edad de algunos cúmulos estelares. Por ejemplo, Jimenez [20] determinó la edad del cúmulo globular en la vía Láctea correspondiente a $t_1 = 13.5 \pm 2$ giga años al utilizar un método independiente de la distancia. Usando el método de la secuencia de enfriamiento de enanas blancas, Richer y Hansen [20] calcularon que la edad del cúmulo globular *M4* debía ser de $t_1 = 12.7 \pm 0.7$ giga años. Por lo tanto, la edad del Universo queda restringida a una frontera tal que $t_0 > 11 - 12$ giga años.

Se hizo un cálculo para estimar la edad del Universo de las ecuaciones de Friedmann ec. (2.13) con ρ dada por la ec. (3.13). Consideraremos tres contribuciones: radiación ($w_r = 1/3$), polvo ($w_m = 0$) y constante cosmológica ($w_\Lambda = -1$). Por consiguiente, la ec. (3.14) es escrita como:

$$H^2 = H_0^2[\Omega_r^{(0)}(a/a_0)^{-4} + \Omega_m^{(0)}(a/a_0)^{-3} + \Omega_\Lambda^{(0)} + \Omega_K^{(0)}(a/a_0)^{-2}], \quad (3.26)$$

donde $\Omega_K^{(0)} \equiv -k/(a_0^2 H_0^2)$. Entonces, al usar la ec. (1.3), se puede expresar H en términos de z . La edad del Universo está dada por:

$$t_0 = \int_0^\infty dt = \int_0^\infty \frac{dz}{H(1+z)} = \int_0^\infty \frac{dx}{H_0 x [\Omega_r^{(0)} x^4 + \Omega_m^{(0)} x^3 + \Omega_\Lambda^{(0)} + \Omega_K^{(0)} x^2]^{1/2}}, \quad (3.27)$$

donde $x(z) \equiv 1 + z$. Es una buena aproximación el evitar el término de la radiación dentro de la ec. (3.27) ya que el período dominado por la radiación es mucho muy pequeño comparado con la edad del Universo. En otras palabras, la integral proviene de una región donde $z > 1000$ afecta muy poco el resultado de la integral completa ec. (3.27). De este modo, proponemos $\Omega_r^{(0)} = 0$ al momento de evaluar t_0 .

Ahora consideremos el caso en el cual la constante cosmológica no se encuentra ($\Omega_\Lambda^{(0)} = 0$). Ya que $\Omega_K^{(0)} = 1 - \Omega_m^{(0)}$ de la ec. (3.26), la edad del Universo está dada por:

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)\sqrt{1 + \Omega_m^{(0)} z}}. \quad (3.28)$$

Para un Universo plano ($\Omega_K^{(0)} = 0$ y $\Omega_m^{(0)} = 1$) obtenemos:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}. \quad (3.29)$$

De observaciones del proyecto Clave del *HST* el parámetro de Hubble está limitado a ser:

$$H_0^{-1} = 9.77h^{-1}Ga, \quad 0.64 < h < 0.80, \quad (3.30)$$

esto es consistente con las conclusiones tomadas de la *RCFM* y estructuras a gran escala. Entonces la ec. (3.29) refleja un resultado del orden de $t_0 = 8 - 10$ giga años, lo cual no satisface las condiciones impuestas por los cúmulos globulares antes mencionados, lo cual debería ser del orden de $t_0 > 11 - 12$ giga años. Por ende, un Universo plano carente de constante cosmológica posee un serio problema.

En el modelo de un Universo abierto ($\Omega_m^{(0)} < 1$), por otro lado, la ec. (3.28) muestra que la edad del Universo es más grande que en el Universo plano explicado arriba. Esto es difícil de entender, ya que la cantidad de materia decrece, esto haría que le tomara a las interacciones gravitacionales mucho más tiempo el frenar la razón de expansión hasta el valor actual. En este caso, ec. (3.28) al momento de integrarla nos da:

$$H_0 t_0 = \frac{1}{1 - \Omega_m^{(0)}} - \frac{\Omega_m^{(0)}}{2(1 - \Omega_m^{(0)})^{3/2}} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \Omega_m^{(0)}}}{1 + \sqrt{1 - \Omega_m^{(0)}}} \right), \quad (3.31)$$

de la cual tenemos $H_0 t_0 \rightarrow 1$ por $\Omega_m^{(0)} \rightarrow 0$ y $H_0 t_0 \rightarrow 2/3$ por $\Omega_m^{(0)} \rightarrow 1$. Como se ilustra en la figura 3.4, t_0 se incrementa hasta que $t_0 = H_0^{-1}$ con el decrecimiento de $\Omega_m^{(0)}$. Las observaciones de la *RCFM*, restringen la curvatura del Universo a ser muy cercana a la planitud $|\Omega_K^{(0)}| = |1 - \Omega_m^{(0)}| \ll 1$. Sin embargo, ya que $\Omega_m^{(0)} \simeq 1$ en este caso, la edad del Universo no se vuelve más grande que las estrellas más antiguas. El problema de la edad puede

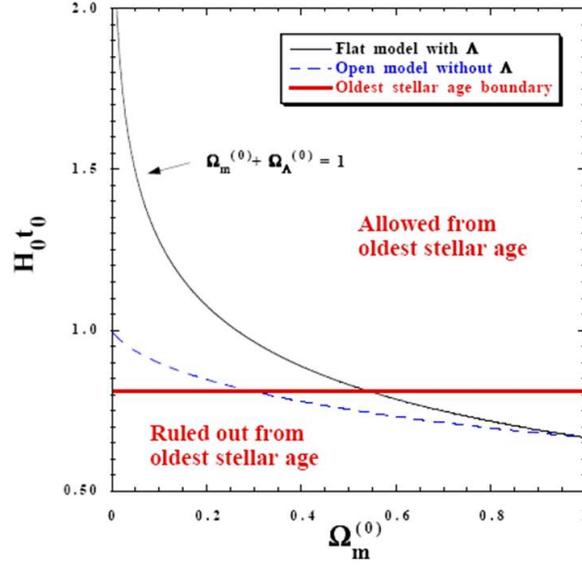


Figura 3.4: La edad del Universo (en unidades de H_0^{-1}) está graficada contra $\Omega_m^{(0)}$ para (i) un modelo plano con $\Omega_m^{(0)} + \Omega_\Lambda^{(0)} = 1$ (la curva sólida) y (ii) un modelo abierto (curva punteada). También se muestra la frontera $t_0 = 11$ Ga, lo cual proviene de la frontera impuesta por las estrellas más antiguas. La región sobre esta frontera está permitida consistentemente. Estas restricciones apoyan fuertemente la evidencia de energía oscura [20].

ser resuelto fácilmente en un Universo plano ($\Omega_K = 0$) con una constante cosmológica ($\Omega_\Lambda^{(0)} \neq 0$). En este caso ec. (3.27) nos da:

$$H_0 t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)\sqrt{\Omega_m^{(0)}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda^{(0)}}} = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda^{(0)}}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\Omega_\Lambda^{(0)}}}{\sqrt{\Omega_m^{(0)}}} \right), \quad (3.32)$$

donde $\Omega_m^{(0)} + \Omega_\Lambda^{(0)} = 1$. Los valores asintóticos son $H_0 t_0 \rightarrow \infty$ ya que $\Omega_m^{(0)} \rightarrow 0$ y $H_0 t_0 \rightarrow 2/3$ porque $\Omega_m^{(0)} \rightarrow 1$. En la figura 3.4, está graficada la edad t_0 contra $\Omega_m^{(0)}$. La edad del Universo se incrementa conforme $\Omega_m^{(0)}$ decrece. Cuando $\Omega_m^{(0)} =$

0.3 y $\Omega_{\Lambda}^{(0)} = 0.7$ tenemos $t_0 = 0.964H_0^{-1}$, el cual corresponde a $t_0 = 13.1$ giga años para $h = 0.72$. De esta forma, esto satisface la restricción de $t_0 > 11 - 12$ giga años la cual proviene de los cúmulos estelares más antiguos. Así, la presencia de Λ resuelve de manera muy elegante el problema de la edad del Universo [20].

3.5. Restricciones impuestas por la radiación cósmica de fondo y las estructuras a gran escala

Las observaciones relacionadas con la *RCFM* y las Estructuras a Gran Escala (*EGE* o *LSS* por sus siglas en Inglés) apoyan independientemente la idea de un Universo dominado por energía oscura. Las anisotropías de *RCFM* observadas por COBE en 1992 y por WMAP en 2003 y subsecuentes exhibieron perturbaciones primordiales casi invariables en el espectro, las cuales van de acuerdo con las predicciones de la cosmología inflacionaria. La posición del primer pico acústico alrededor de $l = 200$ restringe la curvatura del Universo a ser $|1 - \Omega_{total}| = 0.030_{-0.025}^{+0.026} \ll 1$ como fue predicho por el paradigma inflacionario. Es muy conveniente el darse cuenta que Weinberg [20] proporciona una expresión analítica para la posición del primer pico mostrando como éste depende de la distribución de densidades de energía entre materia y constante cosmológica en el fondo cósmico de microondas. Hay que tener cuidado, ya que la *RCFM* sola no restringe completamente a $\Omega_{\Lambda}^{(0)}$ sin asumir otros parámetros cosmológicos. Sin embargo, si asumimos un Universo plano y predefinimos la constante de Hubble como $h = 0.71 \pm 0.076$, las restricciones de los datos de la *RCFM* arrojan un parámetro de densidad de la constante cosmológica igual a $\Omega_{\Lambda}^{(0)} = 0.69_{-0.06}^{+0.03}$.

En la figura 3.5 están graficadas las regiones de confianza provenientes de supernovas tipo Ia, *RCFM*, y cúmulos galácticos a gran escala. Claramente el Universo plano sin constante cosmológica carece de sentido. La compilación de tres conjuntos de datos cosmológicos necesariamente apunta a la existencia de la energía oscura para darle sentido a las observaciones. Tal energía del orden de $\Omega_{\Lambda}^{(0)} \simeq 0.7$ y $\Omega_m^{(0)} \simeq 0.3$ para la energía oscura y el resto de la materia respectivamente. De entre toda la materia que constituye el Universo, la materia bariónica abarca sólo el 4%. El resto de la materia (27%) se cree que se encuentra en la forma de un componente que no interacciona con la luz y que además es de naturaleza no bariónica con una ecuación de estado similar al polvo ($\omega = 0$) conocida como materia oscura fría (*CDM* por sus siglas Inglés). La energía oscura se distingue de la materia oscura fría en el sentido de que su ecuación de estado es diferente ($\omega < -1/3$) permitiéndole con ello acelerar la expansión del Universo.

Hoy en día, las observaciones del *WMAP* son perfectamente consistentes con una contribución de la constante cosmológica a la energía oscura, que no

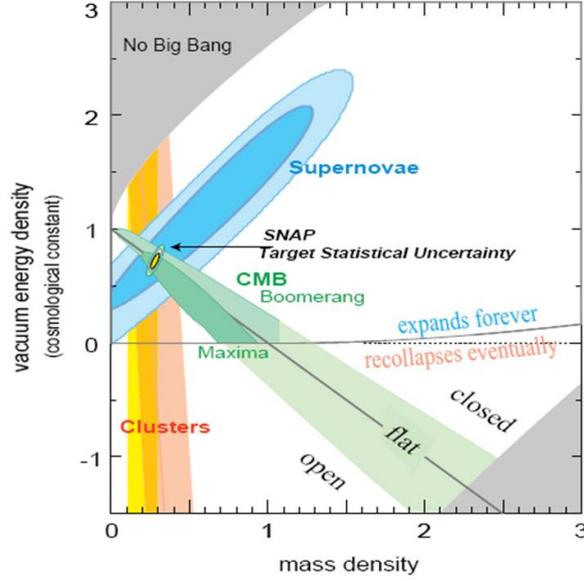


Figura 3.5: Las regiones de confianza $\Omega_m^{(0)} - \Omega_\Lambda^{(0)}$ de las observaciones provenientes de supernovas Ia, *RCFM* y cúmulos galácticos. También se muestra la región de confianza para lo que se estima medirá el satélite SNAP para un Universo plano con $\Omega_m^{(0)} = 0.28$ [20].

cambia con el tiempo. Sin embargo, hay también muchos modelos de energía oscura dinámica [20].

Al igual que las observaciones de supernovas Ia, edad de los cúmulos estelares más antiguos, la *RCFM* y estructuras a gran escala, las oscilaciones acústicas de bariones, *BAO*, también proporcionan restricciones a la energía oscura, así como a diversos parámetros cosmológicos, las cuales serán explicadas a detalle en el capítulo 5.

Capítulo 4

Historia térmica del Universo temprano

Poco después del big bang, debido a lo compacto que se encontraba el Universo, había una interacción energética muy grande entre las partículas que lo formaban. De este modo, podemos decir que el Universo estaba muy *caliente*. Como resultado, se puede hablar de equilibrio térmico entre las partículas. Sin embargo, conforme el Universo se fue expandiendo, se enfrió de igual manera. Si el Universo se estaba enfriando, implicó que el plasma estaba disminuyendo su energía debido a la expansión. Por otro lado, las condiciones a altas energías permitieron que partículas y antipartículas pudieran aniquilarse, combinarse o incluso desacoplarse (para el caso de las partículas como los neutrinos o los fotones). Como consecuencia de esto, tenemos algunas *reliquias* relacionadas con el pasado *caliente* del big Bang. Para analizar este entorno se pueden hacer suposiciones íntimamente relacionadas con la física de estas partículas. Las propiedades del sistema estaban completamente determinadas por la densidad de energía, la temperatura, el volumen y la presión, entonces el análisis de la cosmología estará explicado haciendo uso de la termodinámica.

4.1. Termodinámica cosmológica

Debido a las condiciones en las que se encontraba el Universo primigenio, se puede entonces partir a primera aproximación de un gas ideal con densidad de número n_i de partículas, de tipo i con un momento q tal que tenemos la distribución de Fermi o Bose [21] tomando en consideración que $\hbar = k_B = c = 1$:

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int \frac{q^2 dq}{e^{(E_i - \mu_i)/T} \pm 1}, \quad (4.1)$$

donde $E_i = \sqrt{m_i^2 + q^2}$ es la energía de la partícula, μ_i es el potencial químico, el signo (+) aplica para fermiones y el (-) para bosones, y g_i es la degeneración del estado cuántico. Tenemos entonces que $g_i = 2$ para fotones, quarks, bario-

nes, electrones, muones, tauones y sus antipartículas¹ y $g_i = 1$ para neutrinos ya que sólo los estados izquierdos participan en las interacciones. Se considerará $\mu_i = 0$ ya que primera aproximación, $|\mu| \ll T$ [2] y del hecho de que en las primeras etapas del Universo cualquier tipo de reacción conserva μ_i al igual que la energía, la carga, el espín y el número de leptones y fermiones [21, 22]. μ_i siempre es conservado en todas las interacciones, en particular [22]:

- Los fotones pueden ser emitidos y absorbidos, además su densidad de número n_γ no se conserva y su distribución con $\mu_\gamma = 0$, $E = q = h\omega$ se reduce a la distribución de Planck.
- Los pares partículas-antipartículas se pueden aniquilar produciendo fotones, por lo que los potenciales químicos de las partículas y antipartículas son iguales y opuestos.
- Los electrones y muones pueden ser convertidos en sus respectivos neutrinos asociados, mediante colisiones con ellos mismos o con nucleones, tales que:

$$e^- + \mu^+ \rightarrow \nu_e + \bar{\nu}_\mu, \quad e^- + p \rightarrow \nu_e + n, \quad \mu^- + p \rightarrow \nu_\mu + n. \quad (4.2)$$

Por otro lado, de la nucleosíntesis sabemos que [23]:

$$\eta \equiv \frac{n_B}{n_\gamma} \equiv \frac{n_{\text{bariones}} - n_{\text{anti-bariones}}}{n_\gamma} \approx 6 \times 10^{-10}, \quad (4.3)$$

lo pequeño de la densidad de número de bariones n_B , en comparación con el de los fotones, sugiere que n_{leptones} debe de ser también pequeño en comparación con n_γ . Por lo tanto, podemos considerar que $\mu_i = 0$ para todas las partículas. Sin embargo, el hecho de que la razón n_B/n_γ , también denominada $\eta \equiv n_B/n_\gamma$, sea tan pequeña, sigue siendo un problema del modelo estándar de cosmología.

Como se había planteado, bajo la consideración de la conservación de los números cuánticos, se puede llegar a que el potencial químico para cada clase de partículas es:

$$\mu_i = 0, \quad (4.4)$$

bajo esta suposición, se puede escribir la conservación de la energía, de tal manera que tanto la densidad de energía como la presión de todas las partículas se encuentran en equilibrio térmico, así que sólo son funciones de la temperatura [22]:

$$\rho_{eq}(T) \equiv \sum_{i(eq)} \int E_i(q) n_i(q; T) dq, \quad (4.5)$$

¹Las partículas con masa y espín s tienen $2s + 1$ estados del espín, por ejemplo, los electrones de espín 1/2 tienen dos estados de espín, mientras las partículas sin masa como los fotones de espín 1 tienen sólo dos estados de espín [2].

$$p_{eq}(T) \equiv \sum_{i(eq)} \int \left(\frac{q^2}{3E_i(q)} \right) n_i(q; T) dq. \quad (4.6)$$

Por otro lado, de acuerdo a la segunda ley de la termodinámica, tenemos que la ecuación para la entropía de partículas en equilibrio a una temperatura T dentro de un volumen V es una función $S(T, V)$ que puede escribirse como [22]:

$$dS(V, T) = \frac{1}{T} \{d(\rho_{eq}(T)V) + p_{eq}(T)dV\}, \quad (4.7)$$

de tal manera que:

$$\frac{\partial S(V, T)}{\partial V} = \frac{1}{T} \{\rho_{eq}(T) + p_{eq}(T)\}, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial S(V, T)}{\partial T} = \frac{V}{T} \frac{d\rho_{eq}(T)}{dT}, \quad (4.9)$$

donde S es la entropía en cierto volumen V dado por $a^3(t)$ con $\rho = \rho(T)$, $p = p(T)$ funciones que sólo dependen de T en el equilibrio. Aplicando la condición de integrabilidad $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$ que implica que:

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{T} \{\rho_{eq}(T) + p_{eq}(T)\} \right] = \frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{V}{T} \frac{d\rho_{eq}(T)}{dT} \right], \quad (4.10)$$

entonces, con unos cuantos cambios:

$$\frac{dp_{eq}(T)}{dT} = \frac{1}{T} \{\rho_{eq}(T) + p_{eq}(T)\}. \quad (4.11)$$

Por otro lado, la ecuación de conservación del tensor de energía momento nos lleva a la ley de conservación de la energía que puede ser reescrita en términos de $a(t)^3$ como:

$$a^3(t) \frac{d\rho_{eq}(T)}{dt} = \frac{d\rho_{eq}(T)}{dt} \left[a^3(t) \{\rho_{eq}(T) + p_{eq}(T)\} \right], \quad (4.12)$$

junto con la ec (4.11) toma la forma:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{a^3(t)}{T} \{\rho_{eq}(T) + p_{eq}(T)\} \right] = 0, \quad (4.13)$$

usando la ec. (4.11) y la ec. (4.7) se puede escribir como:

$$dS(V, T) = \frac{1}{T} d[\{\rho_{eq}(T) + p_{eq}(T)\}V] - \frac{V}{T^2} d\{\rho_{eq}(T) + p_{eq}(T)\}dT. \quad (4.14)$$

La ec. (4.13) junto con (4.14) Implican que la entropía:

$$S(V, T) = \frac{V}{T} \{\rho_{eq}(T) + p_{eq}(T)\}, \quad (4.15)$$

es una constante [22]:

$$S(V, T) = \frac{a^3(t)}{T} \{ \rho_{eq}(T) + p_{eq}(T) \} = cte. \quad (4.16)$$

Por otro lado, tenemos que para partículas ultra-relativistas, se puede considerar que toda su energía es cinética, es decir $E = q$, tal que:

$$p_{eq}(T) = \frac{1}{3} \rho_{eq}(T), \quad (4.17)$$

por lo que de ec. (4.11)

$$\rho_{eq}(T) = bT^4. \quad (4.18)$$

Teniendo en cuenta que tanto p como ρ sólo dependen de T , donde b es una constante real de integración. Se puede demostrar, asumiendo que hay muchas partículas relativistas presentes, $p_{eq} = \sum_i p_i$ y $\rho_{eq} = \sum_i \rho_i$, que el valor que adquiere b es

$$b(T) = \frac{\pi^2}{30} (N_B + \frac{7}{8} N_F), \quad (4.19)$$

lo cual depende de los grados efectivos de libertad de los bosones (N_B) y fermiones (N_F); por lo tanto, esta cantidad varía con la temperatura; es decir, diferentes especies i se mantienen *relativistas* hasta cierta temperatura cuando $T \approx m_i$. Cabe destacar que eso implica que tanto N_{Fi} como N_{Bi} ya no contribuyen a $b(T)$ después de ese límite relativista. Por otro lado, el factor de $7/8$ proviene de la ec. (4.1). De acuerdo al modelo estándar de partículas, $b \approx 1$ para $T \ll 1$ MeV y $b \approx 35$ para $T > 300$ GeV.

De (4.1) se puede obtener para partículas relativistas que:

$$n = cT^3, \quad c = \frac{\zeta(3)}{\pi^3} (N_B + \frac{3}{4} N_F), \quad (4.20)$$

donde $\zeta(3) \approx 1.2$ es la función zeta de Riemann de 3. En la actualidad $n_\gamma \approx \frac{422}{cm^3} T_{2.75}^3$ donde $T_{2.75} \equiv \frac{T_{\gamma n}}{2.75^\circ K}$ [21].

De la ec. (4.16) y usando ec. (4.17) y (4.18) tenemos que $T \approx 1/a(t)$ y de $\omega = 1/3$ para radiación ec. (2.18) se tiene que:

$$T = \sqrt[4]{\frac{M_{1/3}}{b} \frac{1}{a(t)}} = \sqrt[4]{\frac{3}{32\pi G b} \frac{1}{(t - t_0)^{1/2}}}, \quad (4.21)$$

de aquí se puede ver claramente que la temperatura decrece en función de que el Universo se expande y que en $t = t_0$ tenemos que $T = \infty$. Un big bang muy caliente.

Las ecuaciones (4.17) y (4.18) así como el hecho de que la entropía es una constante, nos lleva a:

$$S = \frac{4}{3} b (aT)^3 = cte, \quad (4.22)$$

que combinado con la ec. (4.21) se puede obtener el valor de la constante $M_{1/3}$ tal que $M_{1/3} = (\frac{3}{4}S)^{4/3}/b^{1/3} \approx 10^{116}$ ya que $b \approx 35$ y la entropía del fotón es $S_n = \frac{4}{3}b(a_n T_n)^3 \approx 10^{88}$ para las cantidades evaluadas hoy en día $a_n = d_H(t_n) = 10^{28} \text{cm}$ y $T_{\gamma n} = 2.7^\circ K$. Definiendo la *densidad de entropía* o entropía por unidad de volumen como $s \equiv S/V = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{30} (N_B + \frac{7}{8} N_F) T^3$ lo que se traduce a actualmente un valor para $s \approx 7n_\gamma$ [21]. La cota impuesta por la nucleosíntesis en η de ec. (4.3), implica que $n_B/s \approx 9 \times 10^{-11}$ [23].

Mientras tanto, al considerar a las partículas en su límite no relativista ($m \gg T$). De la ec. (4.1) se obtiene que para bosones y fermiones:

$$n = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m/T}. \quad (4.23)$$

La abundancia de partículas masivas en equilibrio decrece exponencialmente una vez que ellas se vuelven no relativistas, lo cual se refiere a la *aniquilación en equilibrio* [21].

Para ver esto, consideremos n_i cuando la temperatura del Universo es tal que a) $T \gg m_i$ cuando las partículas i eran ultra relativistas, y b) con $T \ll m_i$ para partículas i no relativistas, ambos casos en equilibrio térmico. Para a) de (4.20) se puede ver que $n_i \sim T^3$, el número de partículas $\sim n_i a^3$ se mantiene constante. Mientras que para b) de la ec. (4.23) tenemos que $n_i \sim T^{3/2} e^{-m_i/T}$, cuando la temperatura va por debajo de m_i , la densidad de número de las especies i , disminuye exponencialmente [21].

Como un ejemplo de esto ocurre la aniquilación de los protones con neutrones, tales que su razón de cambio relativa es:

$$\frac{n_n}{n_p} \sim e^{\frac{m_p - m_n}{T}} = e^{-\frac{1.5 \times 10^{-10} K}{T}}, \quad (4.24)$$

el cual tiene una caída con la temperatura cercana de 1 a $T \geq 10^{12} K$, de $5/6$ a $T \approx 10^{11} K$, y de $3/5$ a $T \approx 3 \times 10^{10} K$. Si esto hubiera sido válido por siempre, tendríamos al final sólo componentes radiativos. Lo cual implica que la *aniquilación en equilibrio* debió haber parado en algún momento. La cuestión es que esta razón sea $n_n/n_p \approx 1/6$ (que después por decaimiento del neutrón llega a $1/7$ [21]) para que se puedan formar hadrones y así alcanzar la nucleosíntesis. Consideremos la razón de expansión del Universo H y la frecuencia con que ocurren interacciones entre las partículas Γ . De esta manera, si $H < \Gamma$ entonces, las partículas interactúan más rápido de lo que el Universo se expande, y el equilibrio entre ellas se cumple. Por el contrario, si $H > \Gamma$ entonces el equilibrio se rompe, pues las partículas ya no pueden interactuar como antes, por lo tanto, entre más interactuantes sean las partículas, mayor aniquilación en equilibrio y por ende, menores serán sus densidades de número después de cierto tiempo.

Es importante señalar que si el Universo se expande más rápido, entonces la temperatura de desacoplamiento cuando $H \sim \Gamma$ es más alta, y la razón n_n/n_p debe ser más grande también. Esto nos lleva a profundas implicaciones con respecto a la nucleosíntesis, como la abundancia de He, que debe ser mayor.

Esta es una de las razones por las que la expansión del Universo no puede ser tomada de manera arbitraria [21].

4.2. Conservación de la entropía, recalentamiento de los fotones y temperatura de los neutrinos.

Antes del desacoplamiento de los neutrinos, todas las componentes del Universo, los fotones, neutrinos, anti-neutrinos, electrones y positrones se encontraban en equilibrio térmico. De esta manera, tanto los fotones como los neutrinos y sus antineutrinos tenían la misma temperatura; $T_\gamma = T_\nu$. Primero, los neutrinos se desacoplan a $T \approx 3$ MeV, después los fotones se desacoplaron en la superficie de última dispersión a $T \approx O(\text{eV})$. Por otro lado, la temperatura de la radiación va como $T \propto a^{-1}$. Es por eso que se esperaría que tanto los fotones *reliquia* como los neutrinos, tengan la misma temperatura ahora [2, 24].

Sin embargo, se debe tener en cuenta el efecto de la desaparición del positrón, la cual ocurre a $T \approx O(\text{MeV})$ entre esas dos épocas, la del desacoplamiento tanto de los neutrinos como la de los fotones del plasma [2]. Los electrones y positrones (con $N_F = 4$) que contribuyen a la entropía mediante $b(T) = (\pi^2/30)(11/2)$ junto con los fotones ($N_B = 2$) se encontraban en equilibrio. Y cuando la temperatura cayó a $T \ll m_e$ las reacciones eran tales que $\Gamma < H$ y después de la aniquilación de pares electrón-positrón, sólo quedaron fotones en equilibrio con $b(T) = (\pi^2/30)(2)$. Es así que si la entropía total es $S = (4/3)b(aT)^3$ es una cantidad constante, entonces la disminución en $b(T)$ sólo se puede deber a un incremento en la temperatura de la radiación [21], es decir, recalentando a los fotones existentes (*recalentamiento de los fotones*) lo cual ocasionó un alza de la temperatura sobre la de los neutrinos, que ya estaban desacoplados. Se puede calcular el aumento de la temperatura del fotón $T'_\gamma > T_\gamma$ usando la condición de la conservación de la entropía que ya se había discutido anteriormente [2]:

$$S_\gamma + S_{e^-} + S_{e^+} = S'_\gamma, \quad (4.25)$$

mediante $b(T)$, ec. (4.19), se puede calcular para los neutrinos:

$$\frac{T_\gamma}{T_\nu} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3}, \quad (4.26)$$

que debe permanecer hasta nuestros días, evidenciando la existencia de un fondo cósmico de neutrinos con una temperatura actual $T_{\nu A} = 1.96^\circ\text{K}$ [21].

4.3. Abundancias cósmicas

Como ya se ha mencionado anteriormente, el modelo del *Big Bang caliente* implica que después de la época de desacoplamiento de la materia-radiación, durante la recombinación, se empezaron a formar átomos neutros como el Hidrógeno, H . Sin embargo, también aparecieron junto con el H , el Helio He el Litio Li , el Deuterio D , todos estos con diferentes niveles de abundancia. El mecanismo de su formación se describirá a grandes rasgos enseguida.

A una temperatura por arriba de los $10^{10} K$ encontramos varios tipos de núcleos compuestos cuya abundancia queda determinada por el equilibrio termodinámico. De esta manera, la densidad de número de distintos tipos i de núcleos con cierto potencial químico μ_i está dada por la distribución de Maxwell-Boltzmann [17]:

$$n_i = g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{\left(\frac{\mu_i - m_i}{T} \right)}, \quad (4.27)$$

como en la ec. (4.23). La condición de equilibrio para el potencial químico es:

$$\mu_i = Z_i \mu_p + (A_i - Z_i) \mu_n, \quad (4.28)$$

y mediante:

$$X_i \equiv \frac{n_i A_i}{n_N}; \quad X_n \equiv \frac{n_n}{n_N}; \quad X_p \equiv \frac{n_p}{n_N}, \quad (4.29)$$

con n_N el número total de nucleones por unidad de volumen y A_i el número de masa de núcleos i , de esta manera las ecuaciones (4.27), (4.28) y (4.29) dan como resultado:

$$X_i = \frac{g_i}{2} X_p^{Z_i} X_n^{A_i - Z_i} A_i^{1/2} \epsilon^{A_i - 1} e^{(B_i/T)}, \quad (4.30)$$

donde B la energía de enlace y ϵ un número adimensional. De la conservación de la densidad de partículas:

$$n_N = n_{N_0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 = \frac{\rho N_0}{m_N} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3, \quad (4.31)$$

se puede llegar [17] a:

$$T_i \simeq \frac{|B_i|}{(A_i - 1) |\ln \epsilon|}, \quad (4.32)$$

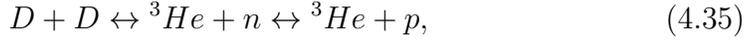
Así, se tiene que T_i tiene valores que van entre 1 y $3 \times 10^9 K$ [22]. Pero a tales temperaturas, las densidades son muy pequeñas para poder mantener el equilibrio mediante reacciones de muchos cuerpos como:



Cuadro 4.1: Abundancias c3smicas de H , D , 3He , 4He y 7Li como los predice la nucleos3ntesis del *Big Bang Caliente* para varios valores de la densidad de bariones. Ω_b es parametrizada por $\Omega_b \equiv 0.00353h_0^{-2}\Theta^{-3}\eta_{10}$ ($\Theta \equiv T_{\gamma 0}/2.7^\circ K$, $h_0 \equiv H_0/100$) Y_p proporciona la abundancia de 4He por unidad de masa, $X(H) \approx 1 - Y_p$ y ha sido calculado para 3 generaciones de neutrinos $N_\nu = 3$ y $\tau_n = 10.6$ min [17].

η_{10}	Y_p	$10^5(D/H)$	$10^5(D + {}^3He/H)$	$10^{10}({}^7Li/H)$
1	0.225	49	53	4.4
3	0.243	8.1	9.7	0.76
5	0.248	3.6	4.8	1.7
7	0.252	2.1	3.1	3.9
10	0.255	1.1	2.0	8.6
20	0.261	0.23	0.87	25

De esta manera, s3lo hay una forma de sintetizar los n3cleos complejos, es decir, mediante las *reacciones de dos cuerpos*, tales como la que usa al Deuterio D como enlace:



mediante algo de 3lgebra se puede llegar a que la abundancia de D [17] es:

$$X_D = \frac{3}{\sqrt{2}}X_pX_n\epsilon e^{\left(\frac{B_D}{T}\right)}. \quad (4.37)$$

Cuando la abundancia es suficientemente alta, los elementos m3s pesados se pueden formar r3pidamente. La temperatura para la cual $\epsilon \exp(B_D/T) \approx 1$ es de $T_d \approx 0.8 \times 10^9 K$ para D (con $B_D = 2.23$ MeV, esto es $T \approx B_d/32$). A temperaturas mayores, el Deuterio es inmediatamente fotodisociado por el caliente campo de radiaci3n.

Mientras $T_d > T$ el deuterio puede sobrevivir y dar lugar a reacciones en cadena para producir He r3pidamente, ecuaciones (4.34) a la (4.36). Los n3cleos m3s pesados no se producen en grandes cantidades debido a que los n3meros de masa $A = 5$ y $A = 8$ no producen n3cleos estables [17]. De esta manera, una peque1a cantidad de 7Li y 7Be se produce a trav3s de:





La abundancia de ${}^4\text{He}$ por unidad de masa es cerca del doble de la abundancia de los neutrones X_n al inicio de la nucleosíntesis [17]:

$$Y_P \equiv X({}^4\text{He}) = 2X_n(t_{ns}) \simeq 0.24, \quad (4.41)$$

este valor es fundamental para diversas constricciones cosmológicas como se verá en el capítulo 6, ver figura 4.1 [25]. En el cuadro 4.1 se presentan algunos resultados numéricos.

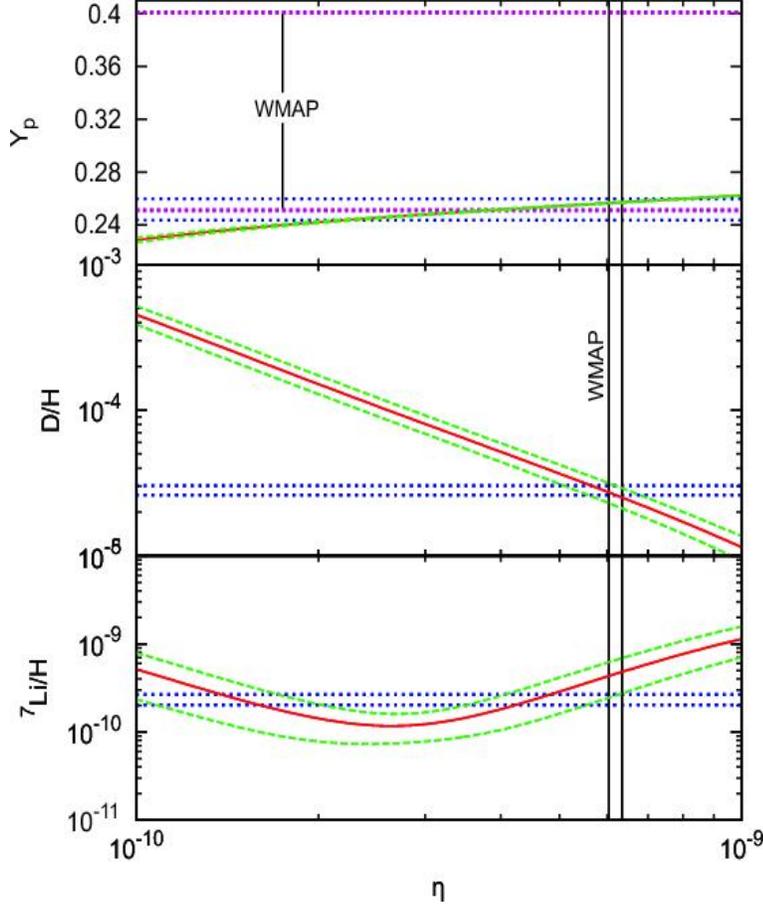


Figura 4.1: Abundancia de elementos ligeros ${}^4\text{He}$, D , and ${}^7\text{Li}$ vs. η para $B^* = 2$, $\mu = 0.6$, y $\omega = 10^4$. Las líneas discontinuas indican $\pm\sigma$ incertidumbres en la razón de las reacciones nucleares de cada abundancia. Las líneas punteadas horizontales indican las regiones de las abundancias observadas. Las líneas sólidas verticales indican las constricciones provenientes de *WMAP*.

Capítulo 5

Teoría de perturbaciones, Radiación Cósmica de Fondo de Microondas y Oscilaciones Acústicas de Bariones

5.1. Teoría básica de perturbaciones cosmológicas

Hemos visto que en general, el Universo se puede modelar de una manera elegante y hasta cierto punto precisa mediante el uso de la métrica de fondo de *FLRW*, la cual cumple con las condiciones de homogeneidad e isotropía. Sin embargo, esta visión del Universo es muy pobre. Para poder describir mejor el funcionamiento del Universo, tenemos que hacer uso de una métrica de fondo más una métrica perturbada. Hacer esto nos permite separar la métrica total en una parte de fondo y otra perturbada, que, si las perturbaciones son suficientemente pequeñas, podrían brindarnos resultados muy útiles.

Para poder perturbar las ecuaciones cosmológicas primero que nada se debe perturbar la métrica a primer orden como sigue:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}. \quad (5.1)$$

Definiendo el tiempo conforme como $\eta \equiv \int a^{-1} dt$ entonces:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^{(0)} dx^\mu dx^\nu = a^2(-d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j). \quad (5.2)$$

Y el parámetro de Hubble en términos del tiempo conforme:

$$H \equiv \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} = H a. \quad (5.3)$$

Es importante resaltar que las ecuaciones de campo de Relatividad General son invariantes ante cambios de coordenadas, y esto plantea la libertad de

norma, por lo que la separación entre la métrica de fondo y la métrica perturbada no es única. Un cambio de coordenadas implicaría que al momento de cambiar la métrica de fondo, cambiará a su vez la métrica perturbada y eso no resulta conveniente en el análisis, pues nos interesa que la métrica de fondo quede invariante. Para que esto pase, más allá de realizar una transformación de coordenadas, necesitamos hacer una transformación de norma, que nos permitiría dejar la métrica de fondo intacta y llevar todos los cambios necesarios a la métrica perturbada.

Bajo ese esquema, en la métrica de fondo, hemos definido coordenadas comóviles, donde una partícula de prueba se mueve conforme lo hace la expansión del Universo. Por otro lado cuando añadimos perturbaciones y escogemos una norma Newtoniana o longitudinal, esta permitirá a las partículas estar sometidas a campos de velocidades producidos por aglomeraciones de materia que causan un potencial gravitacional. De este modo, una transformación de norma va más allá de una transformación de coordenadas en el sentido de que no une diferentes observadores en el mismo espacio tiempo, sino que une dos diferentes espaciotiempos, el perturbado y el de fondo vistos por el mismo observador. Esta es la razón por la cual las cantidades escalares cambian bajo una transformación de norma pero no bajo una transformación de coordenadas [4].

5.1.1. La norma Newtoniana

La métrica perturbada más la métrica de fondo se puede escribir como $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}$, donde:

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -2\Psi & \omega_i \\ \omega_i & 2\Phi\delta_{ij} + h_{ij} \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

con Ψ y Φ escalares espaciales, ω_i un tri-vector y h_{ij} un tensor sin traza.

Por otra parte tenemos que h_{ij} se puede descomponer en su parte longitudinal y transversal, tal que su parte longitudinal puede ser derivada de un gradiente.

$$h_{ij}^{\parallel} = \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) B \equiv D_{ij} B, \quad (5.5)$$

lo mismo sucede para el caso de ω_i . Por lo tanto, sólo necesitamos tomar las partes de h_{ij} que sean derivadas de un escalar, es decir, las partes longitudinales. Esto se puede lograr al introducir dos nuevas funciones E y B que produzcan el vector $E_{,i}$ y el tensor $D_{ij} B$ en analogía con las fuerzas electromagnéticas. Entonces nuestra métrica perturbada es:

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -2\Psi & E_{,i} \\ E_{,i} & 2\Phi\delta_{ij} + D_{ij} B \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

De esta manera con estas funciones escalares se pueden construir cantidades invariantes de norma, esto es, que tengamos combinaciones que permanezcan invariantes a primer orden bajo transformaciones infinitesimales generales de coordenadas $\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu$. Como ya se ha mencionado, esto se hace más simple al trabajar con cierta norma. Esto puede ser hecho al imponer cuatro condiciones en la métrica, las cuales corresponden a las cuatro transformaciones de coordenadas de norma. De este modo podemos elegir $\omega_i = 0$ (y por ende $E = 0$) y $B = 0$ y así, finalmente obtenemos la métrica en la norma newtoniana:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-(1 + 2\Psi)d\eta^2 + (1 + 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j \right], \quad (5.7)$$

donde Ψ es el potencial que determina la aceleración gravitacional de los objetos en caída libre y Φ caracteriza las perturbaciones de la curvatura espacial en esta norma. Ahora bien, ya que tenemos esta métrica, para poder escribir las ecuaciones de Einstein, necesitamos descomponer el tensor de Einstein G_ν^μ y el tensor de energía momento, T_ν^μ en sus partes de fondo y perturbadas, es decir:

$$G_\nu^\mu = G_\nu^{\mu(0)} + \delta G_\nu^\mu, \quad (5.8)$$

$$T_\nu^\mu = T_\nu^{\mu(0)} + \delta T_\nu^\mu, \quad (5.9)$$

a orden cero, tenemos las ecuaciones de fondo $G_\nu^{\mu(0)} = 8\pi G T_\nu^{\mu(0)}$. Las ecuaciones de Einstein se pueden obtener a primer orden mediante:

$$\delta G_\nu^\mu = 8\pi G \delta T_\nu^\mu. \quad (5.10)$$

Ahora, para encontrar las ecuaciones de Einstein perturbadas necesitamos perturbar en primera instancia, los coeficientes de Christoffel como sigue:

$$\delta \Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} \delta g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}) + \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (\delta g_{\alpha\nu,\lambda} + \delta g_{\alpha\lambda,\nu} - \delta g_{\nu\lambda,\alpha}), \quad (5.11)$$

tales que los coeficientes que no desaparecen son:

$$\delta \Gamma_{ij}^0 = \delta_{ij} [2H(\Phi - \Psi) + \Phi'], \quad (5.12)$$

$$\delta \Gamma_{00}^0 = \Psi', \quad (5.13)$$

$$\delta \Gamma_{0i}^0 = \delta \Gamma_{00}^i = \Psi_{,i}, \quad (5.14)$$

$$\delta \Gamma_{j0}^i = \delta_j^i \Phi', \quad (5.15)$$

donde la tilde implica derivadas con respecto al tiempo conforme η . Ahora tenemos el tensor de Ricci y el escalar de Ricci bajo perturbaciones :

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \delta \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \delta \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \delta \Gamma_{\alpha\nu}^\beta, \quad (5.16)$$

$$\delta R = \delta g^{\mu\alpha} R_{\alpha\mu} + g^{\mu\alpha} \delta R_{\alpha\mu}. \quad (5.17)$$

Finalmente, los tensores de Einstein perturbados son:

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta g_{\mu\nu} R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta R, \quad (5.18)$$

$$\delta G_{\nu}^{\mu} = \delta g^{\mu\alpha} G_{\alpha\nu} + g^{\mu\alpha} \delta G_{\alpha\nu}, \quad (5.19)$$

que para la métrica de ec. (5.7) tenemos las componentes:

$$\delta G_0^0 = 2a^{-2} [3H(H\Psi - \Phi') + \nabla^2 \Phi], \quad (5.20)$$

$$\delta G_i^0 = 2a^{-2} [\Phi' - H\Psi]_{|i}, \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \delta G_j^i &= 2a^{-2} [(H^2 + 2H')\Psi + H\Psi' - \Phi'' - 2H\Phi'] \delta_j^i \\ &+ a^{-2} [\nabla^2 (\Psi + \Phi) \delta_j^i - (\Psi + \Phi)_{|j}^i], \end{aligned} \quad (5.22)$$

donde $|$ representa la derivada covariante con la métrica espacial.

Tomando en cuenta que el tensor de energía momento satisface la ecuación de continuidad $T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0$ esto se ve reflejado en el tensor de energía momento perturbado, tal que:

$$\delta T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0. \quad (5.23)$$

Para poder perturbar el tensor de energía momento, tenemos que perturbar la cuadrivelocidad $u^{\mu} \equiv dx^{\mu}/ds$, y a primer orden obtenemos:

$$u^{\mu} = \left[\frac{1}{a} (1 - \Psi), \frac{v^i}{a} \right], \quad (5.24)$$

$$u_{\mu} = g_{\mu\nu} u^{\nu} = [-a(1 + \Psi), av_i], \quad (5.25)$$

$$u_{\mu} u^{\mu} = -1, \quad (5.26)$$

donde $v^i = dx^i/d\eta = adx^i/dt$ es la velocidad peculiar de la partícula de materia con respecto a la expansión general. Ahora bien, podemos definir la distancia comóvil a cierto corrimiento al rojo (tomando $c = 1$ y $a_0 = 1$):

$$d_c(z) = \int_0^z \frac{d\tilde{z}}{H(\tilde{z})}. \quad (5.27)$$

Sin embargo, tenemos que el corrimiento al rojo depende ahora de la suma de la expansión cósmica así como del efecto Doppler de la velocidad peculiar:

$$z = z_c + z_p = z_c + \frac{v_p}{a} \quad (z_p \ll z_c), \quad (5.28)$$

donde $v_p = az_p$ es la proyección de la velocidad peculiar a lo largo de la línea de visión. Entonces:

$$d_{\hat{c}}(z) = \int_0^{z_c+z_p} \frac{d\tilde{z}}{H(\tilde{z})} \simeq \int_0^{z_c} \frac{d\tilde{z}}{H(\tilde{z})} + \frac{z_p}{H(z_c)} = \int_0^{z_c} \frac{d\tilde{z}}{H(\tilde{z})} + \frac{(1+z_c)v_p}{H(z_c)}, \quad (5.29)$$

el término extra es debido a la velocidad peculiar, pero este término siempre puede ser despreciado para fines prácticos. Cabe destacar que si se quiere profundizar en la teoría de perturbaciones cosmológicas se puede recurrir a los textos [4] y [26].

5.1.2. Modelo para un sólo fluido

Consideremos un fluido con tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ de la manera más general posible:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} + [q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu + \pi_{\mu\nu}], \quad (5.30)$$

donde ρ , p y u_μ son la densidad de energía, la presión y la cuadrivelocidad, mientras q_μ es el flujo de calor y $\pi_{\mu\nu}$ la viscosidad. Considerando $\pi_{\mu\nu} = q_\mu = 0$ para fluidos perfectos. De igual manera asumiremos que un fluido perfecto perturbado, sigue siendo perfecto.

La notación para las cantidades perturbadas será:

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho}, \quad (5.31)$$

$$\theta \equiv \nabla_i v^i, \quad (5.32)$$

donde $\delta\rho/\rho \equiv (\rho(x) - \bar{\rho})/\bar{\rho}$ es el contraste de densidad ($\rho(x)$ es el campo de densidades y $\bar{\rho}$ es el promedio espacial) y θ es la divergencia de las velocidades. Todas las cantidades perturbadas son funciones del espacio x y el tiempo t .

Por otro lado sabemos que $\delta(x)$ es en realidad una cantidad que crece o disminuye de manera aleatoria y cuyo valor medio $\langle\delta\rangle = 0$ es cero. Esto significa que podemos definir $\delta(x, t) = D(t)\delta(x, 0)$ donde $D(t)$ es la función de decaimiento o de crecimiento [4].

Usando $w = p/\rho$ para un fluido perfecto, podemos escribir de acuerdo a la ec. (5.30) el tensor de energía momento perturbado como:

$$\delta T_\nu^\mu = \rho \left[\delta \left(1 + c_s^2 \right) u_\nu u^\mu + (1 + w) (\delta u_\nu u^\mu + u_\nu \delta u^\mu) + c_s^2 \delta \delta_\nu^\mu \right], \quad (5.33)$$

aquí se ha introducido $c_s^2 \equiv \delta p/\delta\rho$, la velocidad del sonido. Si tenemos que p sólo depende de ρ , es decir un fluido barotrópico por definición, entonces:

$$c_s^2 \equiv \frac{\delta p}{\delta\rho} = \frac{dp}{d\rho} = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}}. \quad (5.34)$$

Esto es sólo válido en la métrica de FLRW donde a nivel de fondo, todo depende sólo del tiempo, entonces c_s es calculada a orden cero ya que siempre

aparecerá como un factor con variables a primer orden y las perturbaciones no introducen ninguna función nueva. En general la presión p , puede depender de grados internos de libertad del mismo fluido, como la entropía s . Entonces:

$$c_s^2 = \frac{\delta p(\rho, s)}{\delta \rho} = \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \rho} = c_{s(a)}^2 + c_{s(na)}^2, \quad (5.35)$$

donde $c_{s(a)}$ es llamada velocidad adiabática del sonido y $c_{s(na)}$ la velocidad del sonido no adiabática. Las ecuaciones gravitacionales a primer orden están completamente especificadas solamente con dar, para cada fluido, la ecuación de estado $w(a)$ y la velocidad total del sonido $c_s(a)$.

Las componentes del tensor de energía momento son entonces:

$$\delta T_0^0 = -\delta \rho, \quad (5.36)$$

$$\delta T_i^0 = -\delta T_0^i = (1+w) \rho v^i, \quad (5.37)$$

$$\delta T_1^1 = \delta T_2^2 = \delta T_3^3 = c_s^2 \delta \rho. \quad (5.38)$$

Y así, las ecuaciones de Einstein perturbadas nos llevan a:

$$3H(H\Psi - \Phi') + \nabla^2 \Phi = -4\pi G a^2 \delta \rho, \quad (5.39)$$

$$\nabla^2 (\Phi' - H\Psi) = 4\pi G a^2 (1+w) \rho \theta, \quad (5.40)$$

$$\Psi = -\Phi, \quad (5.41)$$

$$\Phi'' + 2H\Phi' - H\Psi' - (H^2 + 2H')\Psi = -4\pi G a^2 c_s^2 \delta \rho. \quad (5.42)$$

Teniendo en consideración que la divergencia covariante de un tensor T_ν^μ se puede escribir como:

$$T_{\nu;\mu}^\mu = T_{\nu,\mu}^\mu - \Gamma_{\nu\beta}^\alpha T_\alpha^\beta + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha T_\nu^\beta, \quad (5.43)$$

entonces la componente $\nu = 0$ de ec. (5.23) implica:

$$T_{0,\mu}^\mu - \delta \Gamma_{0\beta}^\alpha T_\alpha^\beta - \delta \Gamma_{0\beta}^\alpha \delta T_\alpha^\beta + \delta \Gamma_{0\alpha}^\alpha T_0^0 + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \delta T_0^\beta = 0, \quad (5.44)$$

la cual se reduce a:

$$(\delta \rho)' + 3H(\delta \rho + \delta p) = -(\rho + p)(\theta + 3\Phi'), \quad (5.45)$$

que es llamada *ecuación de continuidad perturbada*.

Mientras tanto, la ecuación $T_{\nu;\mu}^\mu = 0$ para $\nu = i$ nos lleva a:

$$\delta q' + 3H\delta q = -a\delta p - (\rho + p)a\Psi, \quad (5.46)$$

donde $\delta q = (\rho + p)av$ y v es el potencial de velocidad relacionado a v^i via $v^i = \nabla^i v$ y escribiendo ec. (5.46) en términos de v^i y tomando la divergencia ∇_i se obtiene:

$$\theta' + \left[H(1-3w) + \frac{w'}{1+w} \right] \theta = -\nabla^2 \left(\frac{c_s^2}{1+w} \delta + \Psi \right). \quad (5.47)$$

De las ecuaciones (5.39), (5.42), (5.45) y (5.47) obtenemos las ecuaciones para cada modo de Fourier [4]:

$$k^2\Phi + 3H(\Phi' - H\Psi) = 4\pi Ga^2\rho\delta, \quad (5.48)$$

$$k^2(\Phi' - H\Psi) = -4\pi Ga^2(1+w)\rho\theta, \quad (5.49)$$

$$\Psi = -\Phi, \quad (5.50)$$

$$\Phi'' + 2H\Phi' - H\Psi' - (H^2 + 2H')\Psi = -4\pi Ga^2c_s^2\delta\rho, \quad (5.51)$$

$$\delta' + 3H(c_s^2 - w)\delta = -(1+w)(\theta + 3\Phi'), \quad (5.52)$$

$$\theta' + \left[H(1-3w) + \frac{w'}{1+w} \right] \theta = k^2 \left(\frac{c_s^2}{1+w} \delta + \Psi \right), \quad (5.53)$$

donde ahora:

$$\theta = ik \cdot v. \quad (5.54)$$

5.1.3. Modelo de dos fluidos

Generalizando el caso para un solo fluido podemos llegar a un caso más realista donde tenemos tanto materia $w_m = c_s^2 = 0$ como radiación $w_r = c_s^2 = 1/3$ presentes en el análisis. Introducimos las variables de perturbación para la materia δ_m, θ_m y para radiación δ_r, θ_r .

En el espacio de Fourier para escalas tales que $k \gg H$ o de sub-horizonte, tenemos:

$$\delta'_m = -(\theta_m + 3\Phi'), \quad (5.55)$$

$$\theta'_m = -H\theta_m - k^2\Phi, \quad (5.56)$$

$$\delta'_r = -\frac{4}{3}(\theta_r + 3\Phi'), \quad (5.57)$$

$$\theta'_r = k^2 \left(\frac{4}{3}c_s^2\delta_r - \Phi \right), \quad (5.58)$$

$$k^2(\Phi' + H\Phi) = -4\pi G(1+w_{eff})a^2\rho_t\theta_t, \quad (5.59)$$

$$k^2\Phi + 3H(\Phi' + H\Psi) = 4\pi Ga^2\rho_t\delta_t, \quad (5.60)$$

aquí el subíndice t representa variables completamente perturbadas como sigue:

$$\rho_t = \rho_m + \rho_r, \quad (5.61)$$

$$w_{eff} = \Omega_r w_r + \Omega_m w_m = \frac{\rho_r/3}{\rho_m + \rho_r}, \quad (5.62)$$

$$\theta_t = \frac{(1+w_m)\Omega_m w_m + (1+w_r)\Omega_r w_r}{(1+w_{eff})}, \quad (5.63)$$

$$\delta_t = \Omega_m \delta_m + \Omega_r \delta_r, \quad (5.64)$$

y la ecuación de estado efectiva $w_{eff} = p_t/\rho_t$ está dada por:

$$w_{eff} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2}. \quad (5.65)$$

En el límite del sub-horizonte ec. (5.60) nos da:

$$k^2\Phi \simeq 4\pi G a^2 (\rho_m \delta_m + \rho_r \delta_r) = \frac{3}{2} H^2 (\Omega_m \delta_m + \Omega_r \delta_r), \quad (5.66)$$

y de una derivación similar, para el límite de sub-horizonte de la ec. (5.48):

$$\delta_m'' + H\delta_m' - \frac{3}{2} H^2 (\Omega_m \delta_m + \Omega_r \delta_r) = 0, \quad (5.67)$$

$$\delta_r'' + \frac{k^2}{3} \delta_r = 0. \quad (5.68)$$

Durante la época de radiación tenemos que ésta domina, por lo tanto $\Omega_m \simeq 0$ y $\Omega_r \simeq 1$. Mas aún, la segunda ecuación nos muestra que el contraste de la densidad de radiación oscila en torno a cero. Durante la era de materia tenemos que $|\Omega_m \delta_m| \gg |\Omega_r \delta_r|$ en la ec. (5.67). Entonces la evolución de las perturbaciones de materia son descritas por $\delta_m \propto a$.

Si consideramos materia oscura (perturbaciones δ_c) y materia bariónica (perturbaciones δ_b) en lugar de materia y radiación, la ec. (5.67) puede generalizarse a:

$$\delta_c'' + H\delta_c' - \frac{3}{2} H^2 (\Omega_c \delta_c + \Omega_b \delta_b) = 0, \quad (5.69)$$

$$\delta_b'' + H\delta_b' - \frac{3}{2} H^2 (\Omega_c \delta_c + \Omega_b \delta_b) = 0. \quad (5.70)$$

Como los bariones corresponden a sólo una pequeña fracción del total del fluido de materia, se asume que: $|\Omega_c \delta_c| \gg |\Omega_b \delta_b|$. Esto muestra que ec. (5.69) se desacopla de δ_b y se reduce al caso estándar de perturbaciones de materia. Análogamente, si consideramos materia sin presión y constante cosmológica Λ en lugar de materia y radiación, tenemos el término $\Omega_\Lambda \delta_\Lambda$ además de $\Omega_m \delta_m$. Sin embargo, ρ_Λ es constante por definición y $\delta_\Lambda = 0$, entonces lo que tenemos que se llega a:

$$\delta_m'' + H\delta_m' - \frac{3}{2} H^2 \Omega_m \delta_m = 0. \quad (5.71)$$

Si Ω_m es constante, entonces la solución está dada por $\delta_m \sim a^{\lambda_\pm}$ con [4]:

$$\lambda_\pm = \frac{1}{4} \left(-1 \pm \sqrt{1 + 24\Omega_m} \right), \quad (5.72)$$

δ_m crece más lento que δ_c , las perturbaciones de *CDM*.

5.2. Radiación C3smica de Fondo de Microondas

Dentro de las evidencias que existen de energa oscura, como son el caso de las supernovas Ia, la edad del Universo, as3 como las estructuras a gran escala (LSS por sus siglas en Ingl3s), la radiaci3n c3smica de fondo de microondas es considerada un gran pilar de las evidencias observacionales cosmol3gicas.

Las observaciones de las anisotrop3as de la temperatura de la *RCFM* proporcionan otra prueba independiente acerca de la existencia de energa oscura. Se sabe que los fotones se encontraban fuertemente acoplados a los electrones y bariones antes de la 3poca de desacoplamiento a $z \approx 1090$, y se han estado moviendo libremente desde entonces. Como ya se hab3a mencionado en el cap3tulo 1, en 1963, Penzias y Wilson detectaron por primera vez la *RCFM* que indicaba que se trataba de una radiaci3n homog3nea en todo el espacio. Posteriormente se realizaron experimentos para medirla con mayor precisi3n. El sat3elite COBE midi3 por primera vez las peque3as anisotrop3as de la temperatura en 1992. Posteriores experimentos como BOOMERANG, MAXIMA y WMAP han medido en los 3ltimos a3os las anisotrop3as con mayor precisi3n [6].

Cabe destacar que todas las componentes del Universo se acoplan a la gravedad mediante las ecuaciones de Einstein. La parte escalar de las perturbaciones es la fuente principal de las anisotrop3as del Universo.

Tomando en cuenta que los fluidos cosmol3gicos no son perfectos, es decir, cuando el tensor de energa momento depende completamente del momento P del fluido, se tiene que llevar un tratamiento algo m3s sofisticado que el que se realiza para el caso de fluidos perfectos. Bajo un desarrollo perturbativo similar pero algo m3s complejo se puede demostrar que la anisotrop3a de la temperatura Θ_0 en el r3gimen de acoplamiento fuerte es [4]:

$$\Theta_0'' + \frac{R_s}{1 + R_s} H \Theta_0' + k^2 c_s^2 \Theta_0 = -\frac{k^2}{3} \Psi - \frac{R_s}{1 + R_s} H \Phi_0' - \Phi'', \quad (5.73)$$

donde la velocidad del sonido al cuadrado est3 dada por $c_s^2 = \delta p_\gamma / (\delta \rho_\gamma + \delta \rho_b) = 1/3(1 + R_s)$ y con la raz3n de bariones-fotones dada por: $R_s \equiv (p_b + \rho_b)/(p_\gamma + \rho_\gamma) = 3\rho_b/4\rho_\gamma$, ya que la presi3n de los bariones es muy cercana a cero en esa 3poca. Esta raz3n implica:

$$R_s = \frac{3\omega_b}{4\omega_\gamma} \frac{1}{1 + z}, \quad (5.74)$$

donde se ha definido¹:

$$\omega_b \equiv \Omega_b h^2, \quad (5.75)$$

¹La densidad f3sica para cualquier componente i , ω_i , se define en t3rminos de la densidad cr3tica ρ_c y Ω_i definidos en la secci3n 2.3 como: $\omega_i \equiv \Omega_i h^2 = \rho_i h^2 / \rho_c = (\rho_i / (3H^2 / 8\pi G)) h^2$ y como $H = 100h \text{ km seg}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ implica que $\omega_i = cte\rho_i$ y este valor ya no depende de h^2 .

$$\omega_\gamma \equiv \Omega_\gamma h^2. \quad (5.76)$$

Derivando R_s con respecto a η y usando el hecho de que $z = \lambda_0/\lambda - 1 = a_0/a - 1$, ver ec. (1.3), obtenemos $R'_s = HR_s$, por lo tanto:

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{R'_s}{1 + R_s} \frac{d}{d\eta} + k^2 c_s^2 \right] (\Theta_0 + \Phi) = \frac{k^2}{3} \left(\frac{R_s}{1 + R_s} \Phi - \Psi \right), \quad (5.77)$$

el segundo término del lado izquierdo es del orden de $(R_s/\eta^2) (\Theta_0 + \Phi) \approx R_s H^2 (\Theta_0 + \Phi)$ mientras que el tercer término es del orden de $k^2 c_s^2 (\Theta_0 + \Phi)$, así, el segundo término puede ser despreciado bajo la condición $R_s \ll c_s^2 (k/H)^2$ en el régimen del acoplamiento fuerte ($R_s \ll 1$). Esta condición debe ser satisfecha para los modos dentro del radio de Hubble ($k > H$) y entonces la solución homogénea de ec. (5.77) puede ser descrita como la suma de soluciones:

$$e^{\pm i \int k c_s d\eta}, \quad (5.78)$$

tales que:

$$(\Theta_0 + \Phi)^{(\text{hom})} (k, \eta) = c_1 f_1 (k, \eta) + c_2 f_2 (k, \eta), \quad (5.79)$$

Con $f_1(\eta) = \text{sen}[kr_s(\eta)]$ y $f_2(\eta) = \text{cos}[kr_s(\eta)]$ y r_s el horizonte de sonido definido por:

$$r_s(\eta) \equiv \int_0^\eta d\tilde{\eta} c_s(\tilde{\eta}). \quad (5.80)$$

Es claro ver de ec. (5.79) que la solución homogénea nos presenta oscilaciones en las anisotropías de la *RCFM* con una frecuencia dependiente del tiempo $\omega_k(\eta) = kr_s(\eta)$.

La solución general de ec. (5.77) se obtiene usando la función de Green en el régimen de acoplamiento fuerte ($R_s \ll 1$) dada por:

$$\begin{aligned} (\Theta_0 + \Phi)(k, \eta) &= c_1 f_1(k, \eta) + c_2 f_2(k, \eta) \\ &+ \frac{k^2}{3} \int_0^\eta d\tilde{\eta} [\Phi(\tilde{\eta}) - \Psi(\tilde{\eta})] \frac{f_1(\tilde{\eta}) f_2(\eta) - f_1(\eta) f_2(\tilde{\eta})}{f_1(\tilde{\eta}) f_2'(\tilde{\eta}) - f_1'(\tilde{\eta}) f_2(\tilde{\eta})}, \end{aligned} \quad (5.81)$$

tomando la condición inicial $\Theta'_0 = 0$ y $\Phi' = 0$ en $\eta = 0$ que nos determina los coeficientes c_1 y c_2 . Entonces ec. (5.81) se reduce a:

$$\begin{aligned} (\Theta_0 + \Phi)(k, \eta) &= [\Theta_0(0) + \Phi(0)] \text{cos}(kr_s) \\ &+ \frac{k}{\sqrt{3}} \int_0^\eta d\tilde{\eta} [\Phi(\tilde{\eta}) - \Psi(\tilde{\eta})] \text{sen}[k(r_s(\eta) - r_s(\tilde{\eta}))], \end{aligned} \quad (5.82)$$

el primer término del lado derecho nos dice que hay un pico para la solución homogénea $\Theta_0 + \Phi$ en la posición que satisface:

$$kr_s = n\pi, \quad (5.83)$$

donde n son enteros. La posición del pico está sujeta a cambio según sea la presencia de el último término en ec. (5.82). Se debe considerar que estos resultados se obtienen al considerar el límite de acoplamiento fuerte. Una solución semi-analítica fue dada por Hu y Sugiyama para el campo de temperatura [4]:

$$\begin{aligned} \Theta_\ell(k, \eta_0) \simeq & [\Theta_0(k, \eta_*) + \Psi(k, \eta_*)] j_\ell[k(\eta_0 - \eta_*)] \\ & + 3\Theta_1(k, \eta_*) \left\{ j_{\ell-1}[k(\eta_0 - \eta_*)] - \frac{(\ell-1)j_\ell[k(\eta_0 - \eta_*)]}{k(\eta_0 - \eta_*)} \right\}, \quad (5.84) \\ & + \int_0^{\eta_0} d\tilde{\eta} e^{-\tau_{op}} [\Psi'(k, \eta) - \Phi'(k, \eta)] j_\ell[k(\eta_0 - \eta)] \end{aligned}$$

con $j_\ell(x)$ las funciones de Bessel esféricas y η_* es el tiempo al cual la función de visibilidad:

$$g(\eta) \equiv -\tau_{op} e^{-\tau_{op}}, \quad (5.85)$$

toma un valor en cierto pico. Mucho antes de la época de desacoplamiento, esta función tiene un pico en $z \approx 1000$.

El primer término del lado derecho de ec. (5.84) viene de la integral:

$$\int_0^{\eta_0} d\eta g(\eta) [\Theta_0(k, \eta) + \Psi(k, \eta)] j_\ell(k(\eta_0 - \eta)),$$

que tiene información acerca de la solución del monopolo. El segundo término de ec. (5.84) que tiene la contribución bipolar de Θ_1 , también nos brinda modificación a la *RCFM*.

Cuando se perciben las anisotropías de la temperatura predichas dentro de las observaciones de la *RCFM*, se expande la perturbación en términos de armónicos esféricos:

$$\Theta(x, \eta) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}(x, \eta) Y_{\ell m}(\hat{n}), \quad (5.86)$$

los coeficientes $a_{\ell m}$ en ec. (5.86) son asumidos como estadísticamente independientes. Esto significa que el valor medio de los $a_{\ell m}$ es cero ($\langle a_{\ell m} \rangle = 0$) con una varianza diferente de cero definida por:

$$C_l \equiv \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle. \quad (5.87)$$

La varianza C_l puede ser expresada en términos del campo de temperatura $\Theta_\ell(k)$ en el espacio de Fourier [4]:

$$C_l = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dk k^2 |\Theta_\ell(k)|^2. \quad (5.88)$$

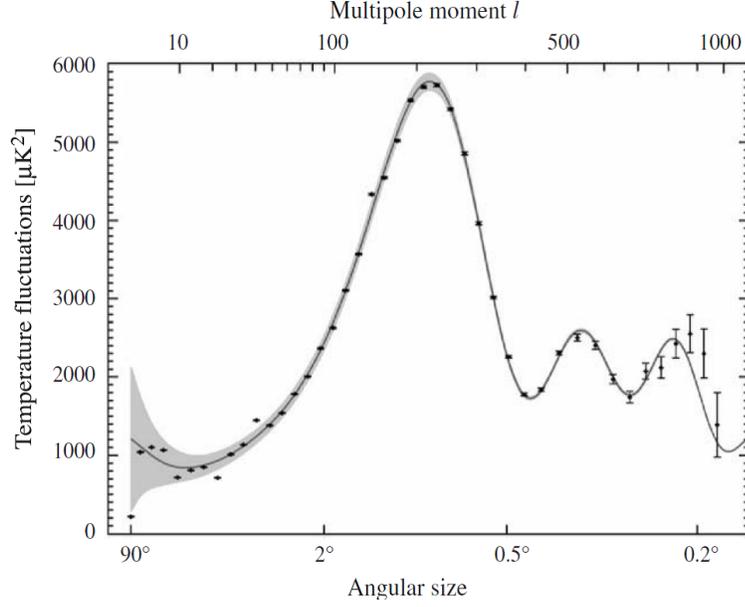


Figura 5.1: El espectro de potencias de la *RCFM* $\ell(\ell+1)C_\ell/2\pi$ contra el momento multipolar ℓ y el tamaño angular θ . Las curvas muestran la predicción teórica del espectro de potencias, mientras que los puntos negros representan los datos de 5 años de *WMAP* [4].

En la figura 5.1 se muestran las predicciones de las anisotropías en la temperatura de la *RCFM* $\ell(\ell+1)C_\ell/2\pi$ contra el momento multipolar ℓ junto con los datos de las mediciones de 5 años de *WMAP*. El espectro de potencias teórico concuerda con los datos observacionales. El ángulo medido θ tiene la relación $\theta = \pi/\ell[\text{rad}]$ con el multipolo ℓ . De esta manera, escalas grandes corresponden a valores menores de ℓ . La escala grande del espectro de potencias ($\ell \leq 10$) está dominada por el modo del monopolo Θ_0 [4].

La condición $kr_s = n\pi$ implica que los picos acústicos se pueden estimar aproximadamente por $\lambda_c = 2\pi/k = (2/n)r_s$ y entonces se define el ángulo característico de localización de los picos:

$$\theta_A \equiv \frac{r_s(z_{des})}{d_A^{(c)}(z_{des})}, \quad (5.89)$$

donde z_{des} es el corrimiento en la época de desacoplamiento y $d_A^{(c)}(z)$ es la distancia diametral angular comóvil definida como:

$$d_A^{(c)}(z) \equiv \frac{d_A(z)}{a} = (1+z)d_A(z) \quad (5.90)$$

Y de la ec. (3.19) se tiene que $d_A(z)$ es:

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}. \quad (5.91)$$

Ahora bien, el multipolo ℓ que correspondiente al ángulo en θ_A es:

$$\ell_A = \frac{\pi}{\theta_A} = \pi \frac{d_A^{(c)}(z_{des})}{r_s(z_{des})}, \quad (5.92)$$

Y se puede expresar en términos de la distancia diametral angular comóvil $d_A^{(c)}(z_{des})$ como:

$$d_A^{(c)}(z_{des}) = \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_k^{(0)}}} \mathfrak{R}, \quad (5.93)$$

con \mathfrak{R} el *parámetro de corrimiento* de la RCFM definido como:

$$\mathfrak{R} = \sqrt{\frac{\Omega_m^{(0)}}{\Omega_k^{(0)}}} \sinh \left(\sqrt{\Omega_k^{(0)}} \int_0^{z_{des}} \frac{dz}{E(z)} \right). \quad (5.94)$$

De las definiciones de c_s^2 y $r_s(\eta)$, el horizonte del sonido $r_s(z_{des})$ es:

$$r_s(z_{des}) = \frac{c}{\sqrt{3}a_0 H_0} \int_{z_{des}}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{1 + R_s E(z)}}, \quad (5.95)$$

para el corrimiento al rojo z_{des} tenemos de Hu y Sugiyama:

$$z_{des} = 1048 \left(1 + 0.00124\omega_b^{-0.738} \right) \left(1 + g_1\omega_m^{g_2} \right), \quad (5.96)$$

Con $\omega_m = \Omega_m^{(0)} h^2$ para materia oscura. Donde:

$$g_1 = 0.0783\omega_b^{-0.738} / \left(1 + 39.5\omega_b^{0.763} \right), \quad (5.97)$$

$$g_1 = 0.0783\omega_b^{-0.738} / \left(1 + 39.5\omega_b^{0.763} \right), \quad (5.98)$$

$$g_2 = 0.560 / \left(1 + 21.1\omega_b^{1.81} \right), \quad (5.99)$$

que de acuerdo a los datos de 5 años de WMAP $\omega_b = 0.02265 \pm 0.00059$ y $\omega_m = 0.1369 \pm 0.0037$ y $z_{des} = 1090.98$. Con la contribución de energía oscura a $E(z)$ despreciable para $z > z_{des}$ estimamos $E = \left(\sqrt{a + a_{eq}}/a^2 \right) \sqrt{\Omega_m^{(0)}}$ donde $a_{eq} = (1 + z_{eq})^{-1}$. Por lo tanto, la integral ec. (5.95) es:

$$r_s(z_{des}) \frac{c}{\sqrt{3}H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_m^{(0)}}} \int_0^{a_{des}} \frac{1}{\sqrt{1 + R_s(a)}} \frac{1}{\sqrt{a + a_{eq}}} da, \quad (5.100)$$

donde:

$$R_s(a) = (3\omega_b/4\omega_\gamma) a, \quad (5.101)$$

integrando:

$$r_s(z_{des}) = \frac{4}{3} \frac{ch}{H_0} \sqrt{\frac{\omega_\gamma}{\omega_b\omega_m}} \ln \left(\frac{\sqrt{R_s^{(des)} + R_s^{(eq)}} + \sqrt{1 + R_s^{(des)}}}{1 + \sqrt{R_s^{(eq)}}} \right), \quad (5.102)$$

donde $R_s^{(des)} \equiv R_s(a_{des})$ y $R_s^{(eq)} \equiv R_s(a_{eq})$ y $a_{eq} = (1 + z_{eq})^{-1}$ es la escala de igualdad de materia-radiación definida como $1 + z_{eq} \equiv \rho_m/\rho_{rad} = \Omega_m/\Omega_{rad}$ y el subíndice *rad* incluye a todas las componentes relativistas.

De las ec. (5.93) y (5.102), el multipolo ℓ_A es:

$$\ell_A = \frac{3\pi}{4} \sqrt{\frac{\omega_b}{\omega_\gamma}} \Re \left[\ln \left(\frac{\sqrt{R_s^{(des)} + R_s^{(eq)}} + \sqrt{1 + R_s^{(des)}}}{1 + \sqrt{R_s^{(eq)}}} \right) \right]^{-1}, \quad (5.103)$$

con $\Re = 1.710 \pm 0.019$, de acuerdo a WMAP. Se escribe la relación general para todos los picos y anisotropías de la *RCFM* como:

$$\ell_m = \ell_A (m - \Phi_m), \quad (5.104)$$

m representa los números de los picos y Φ_m es el corrimiento de los multipolos.

Para un Universo plano, el parámetro \Re de la *RCFM* se reduce a:

$$\Re = \sqrt{\Omega_m^{(0)}} \int_0^{z_{des}} \frac{dz}{E(z)}, \quad (5.105)$$

donde $E(z) = [\Omega_m^{(0)}(1+z)^3 + \Omega_r^{(0)}(1+z)^4 + \Omega_{EO}^{(0)}(1+z)^{3(1+w_{EO})}]^{\frac{1}{2}}$ [4], ver figura 5.2.

5.3. Oscilaciones Acústicas de Bariones

Las oscilaciones acústicas de bariones (*BAO* por sus siglas en Inglés) son reliquias que quedaron del Universo antes de la época de desacoplamiento. Éstas son *reglas estándar*² para la cosmología del siglo *XXI* ya que proveen estimaciones de la distancia que tienen, por primera vez, sus raíces bien comprendidas por la física lineal.

Mientras las *candelas estándar*, principalmente las supernovas Ia de las cuales ya se ha hablado, marcaron la revolución de la manera de medir distancias, es claro que las *Reglas Estadísticas Estándar* (*SSR* por sus siglas en Inglés)³ de las cuales las *BAO* son su principal exponente, jugarán un rol cada vez más importante.

5.3.1. Observables cosmológicas

Las *BAO* en la dirección radial y tangencial proporciona mediciones de la constante de Hubble H y la distancia diametral angular d_A respectivamente.

²Una regla estándar es un objeto de un tamaño conocido a determinado corrimiento al rojo, z , o una población de objetos a diferentes corrimientos al rojo cuyo tamaño cambia de una manera conocida (o que de hecho es constante) con el corrimiento al rojo [27].

³Las *SSR* explotan la idea de que los conjuntos de galaxias pueden tener una escala preferencial en la cual, cuando se observa a diferentes corrimientos al rojo, puede ser usada para constreñir la distancia diametral angular d_A [27]

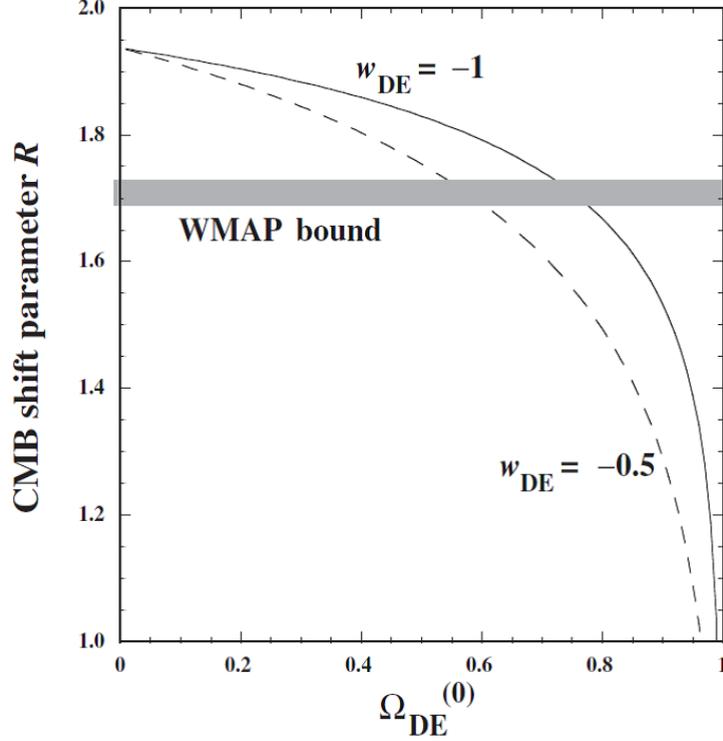


Figura 5.2: El parámetro de corrimiento de la *RCFM* \mathfrak{R} contra $\Omega_{EO}^{(0)}$ para $w_{EO} = -1$ y $w_{EO} = -0.5$ en un Universo plano. También se muestra la frontera impuesta por 5 años de datos observacionales de *WMAP*. Para la constante cosmológica $w_{EO} = -1$ tenemos que $0.72 < \Omega_{EO}^{(0)} < 0.77$ [4]

El parámetro de Hubble adimensional se puede escribir de acuerdo a la métrica de *FLRW* de manera general para energía oscura como:

$$E(z) \equiv \frac{H(z)}{H_0} = \sqrt{\Omega_m^{(0)}(1+z)^3 + \Omega_{EO}^{(0)}f(z) + \Omega_k^{(0)}(1+z)^2 + \Omega_{rad}^{(0)}(1+z)^4}, \quad (5.106)$$

la cual es una forma explícita de ec. (3.14). Ω_m , Ω_{rad} son la densidad de materia y radiación respectivamente con las correspondientes ecuaciones de estado $w_i \equiv p_i/\rho_i = 0, 1/3$ para $i = m, r$ respectivamente. $f(z)$ es la función de densidad de energía oscura adimensional y $\Omega_k = -k/H_0^2 a^2 = 1 - (\Omega_m + \Omega_{EO} + \Omega_{rad})$ que para un Universo plano $\Omega_k = 0$. Cabe destacar que:

$$f(z) = \exp \left[3 \int_0^z \frac{1 + w_{EO}(z')}{1 + z'} dz' \right], \quad (5.107)$$

entonces, de una manera más explícita y general de la ec. (3.14) se puede escribir como:

$$H^2(z) = H_0^2 \left\{ \begin{array}{l} \Omega_r^{(0)}(1+z)^4 + \Omega_m^{(0)}(1+z)^3 + \\ \Omega_{EO}^{(0)} \exp \left[3 \int_0^z \frac{1+w_{EO}(z')}{1+z'} dz' \right] + \Omega_k^{(0)}(1+z)^2 \end{array} \right\} \quad (5.108)$$

Las distancias tienen una desventaja significativa sobre las mediciones del parámetro de Hubble y esta es que requieren una integral sobre $f(z)$. De esta manera, si existían propiedades interesantes en $w_{EO}(z)$ éstas se perderán en las mediciones de distancia. También hay otros problemas, si vemos la distancia diametral angular, $d_A(z)$ se ve que si no se asume nada acerca de $f(z)$ entonces incluso mediciones perfectas de la distancia no pueden romper la degeneración entre $f(z)$ y Ω_k .

La degeneración puede ser rota para una $f(z)$ arbitraria si se tienen medidas simultáneas de H y la distancia. Esta es precisamente la belleza de las *BAO* ya que éstas proporcionan tanto $d_A(z)$ como $H(z)$ usando casi completamente pura física lineal [27].

5.3.2. La física de *BAO*

Antes de la época de recombinación, el plasma de bariones y fotones se encontraba fuertemente acoplado mediante la dispersión Thomson. La presión de radiación trataba de equilibrarse con las fuerzas gravitacionales, lo que finalmente produjo oscilaciones en el plasma. Si se considera que el fluido de plasma tiene una densidad única y esférica, entonces se propagará hacia afuera como una onda acústica cuya velocidad de propagación será $c_s = c/\sqrt{3(1+R_s)}$ donde $R_s \equiv 3\rho_b/4\rho_\gamma \propto \Omega_b/(1+z)$. Paulatinamente, el cosmos se enfrió lo suficiente como para dar paso a átomos neutros y la onda de bariones se estancó mientras los fotones se propagaban libremente y dieron lugar a la *RCFM*. El radio característico de la propagación esférica cuando la onda de bariones quedó estancada fue impreso en la distribución de los bariones como un exceso en la densidad. Posteriormente, debido a que los bariones y la materia oscura interactuaban mediante la gravedad, ésta última se acumuló de manera preferencial en esta escala. Hay entonces una mayor probabilidad de que las galaxias se formaran en las zonas de alta densidad donde la onda de bariones había quedado precisamente estancada [27]. Para visualizar esto consideramos una perturbación inicial, en la que una franja del espacio es más densa que el resto del Universo. Teniendo en cuenta que la perturbación es adiabática, implica que todas las componentes del Universo se encontraban igualmente perturbadas. Aquí el papel de la atracción gravitacional influencia a la materia, la cual es atraída desde regiones distantes hasta el origen. En la figura 5.3 [28] de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha podemos ver: a) En la época en que el Universo está ionizado, los electrones se acoplan fuertemente al campo de fotones. La sobre-densidad de los fotones crea un exceso de presión de radiación que viaja lejos del origen como una onda dentro del plasma de bariones-fotones.

Sin embargo, la materia oscura, al no interactuar directamente con el plasma de bariones-fotones, permanece quieta mientras los neutrinos se desacoplan y viajan libremente. b) La onda de sonido se extiende hacia afuera del plasma de bariones-fotones a una velocidad de $c/\sqrt{3}$. Mientras tanto, debido a que tanto neutrinos como fotones han disminuido el jalón gravitacional, la perturbación de la materia oscura comienza a esparcirse. c) A una $z = 1081$, el Universo está lo suficientemente frío como para empezar a formar átomos neutros (Recombinación). Es aquí cuando los fotones se desacoplan de la materia bariónica, y viajan libremente sin interactuar nuevamente. d) Una vez que la materia bariónica se desacopló completamente de los fotones, (recombinación está completa $z = 470$) el cascarón de materia que se había estado propagando con la onda de sonido se detiene a un radio de unos 150 Mpc, mientras la perturbación de la materia oscura permanece cerca del origen. e) Cuando la radiación se desacopló completamente, la ausencia de presión de radiación causó inestabilidades gravitacionales en la materia bariónica. La diferencia de densidades en el cascarón de materia bariónica atrajo a la materia oscura de tal manera que los pozos de potencial fueron equilibrados al homogeneizarse los contrastes de densidad. f) Finalmente, a un $z = 10$, cerca del tiempo cuando las galaxias se comenzaban a formar, tanto materia oscura como bariones se encontraban casi iguales [27, 28, 29].

Es por eso, que uno espera ver un exceso pequeño de galaxias separadas por una distancia de 150 Mpc. Y de hecho, este exceso predicho se ha observado en los grandes estudios del espectro de potencias de galaxias, ver figura 5.4.

El hecho de tener una galaxia formada en el centro de cierta perturbación de densidad inicial produciría un pico en la función de correlación de dos puntos, explicada previamente, a un radio del cascarón esférico, que refleja la más grande probabilidad de encontrar dos galaxias separadas por una distancia r_s . Cabe destacar que la escala r_s es cercana al horizonte de sonido, la distancia comóvil que una onda de sonido puede viajar en el fluido de bariones-fotones desde el tiempo de desacoplamiento, y depende de las densidades de bariones y materia mediante:

$$r_s = \int_{z_{rec}}^{\infty} \frac{c_s dz}{H(z)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Omega_m H^2}} \frac{2c}{\sqrt{3z_{eq} R_s^{(eq)}}} \ln \left[\frac{\sqrt{1 + R_s^{(rec)}} + \sqrt{R_s^{(rec)} + R_s^{(eq)}}}{1 + \sqrt{R_s^{(eq)}}} \right], \quad (5.109)$$

donde $R = 3\rho_b/4\rho_\gamma \propto \Omega_b/(1+z)$, $z_{eq} = \Omega_m/\Omega_{rad}$, es el corrimiento de la igualdad entre materia y radiación y *rec* se refiere a la época de recombinación. La *RCFM* constriñe fuertemente las densidades de la materia oscura y bariónica en el desacoplamiento y a su vez el horizonte de sonido en 146.8 ± 1.8 Mpc. De esta manera, esta escala es en sí misma una regla estándar muy eficaz siempre y cuando podamos medir Ω_b con precisión. Cabe destacar que el hecho de tener componentes extras de radiación modificará la época de la igualdad entre

la materia y la radiación, lo cual se puede ver modificado en las oscilaciones acústicas de bariones [27].

En la época de acoplamiento fuerte, en la cual los bariones se encontraban fuertemente acoplados a los fotones, las perturbaciones en los bariones $\delta_b \equiv \delta\rho_b/\rho_b$ satisfacen la siguiente ecuación de movimiento [4]:

$$\delta_b'' + \frac{R_s}{1 + R_s} H \delta_b' + k^2 c_s^2 \delta_b = -k^2 \Psi - \frac{3R_s}{1 + R_s} H \Phi' - 3\Phi''. \quad (5.110)$$

Si se sustituye $\delta_b = 3\Theta$ en ec. (5.110), se obtiene la misma ecuación que ec. (5.73) para el campo de temperatura Θ ya que $\Theta = (1/4)\delta_\gamma$ esto implica:

$$\delta_b = \frac{3}{4}\delta_\gamma, \quad (5.111)$$

que es la condición adiabática. Esto también se asocia al hecho de que la razón n_b/s del número de densidad de bariones (n_b) de la densidad de entropía $s = (p + \rho)/T$ no varía en el tiempo. Durante la época de radiación, la densidad de entropía es dominada por la contribución de partículas relativistas, las cuales se comportan tales que $s \propto T^3 \propto \rho_\gamma^{3/4}$. Usando la relación $\rho_\gamma \propto n_b$ encontramos:

$$\frac{\delta(n_b/s)}{n_b/s} = \frac{\delta n_b}{n_b} - \frac{\delta s}{s} = \delta_b - \frac{3}{4}\delta_\gamma, \quad (5.112)$$

que desaparece según ec. (5.111). El horizonte de sonido, para el cual los bariones son liberados del arrastre de Compton de los fotones, juega un rol crucial para determinar la localización de *BAO*. Esta época, llamada época de arrastre, ocurre en z_{arr} . El horizonte de sonido en $z = z_{arr}$ es:

$$r_s(z_{arr}) = \int_0^{\eta_{arr}} d\eta c_s(\eta). \quad (5.113)$$

Cabe destacar que la época de arrastre no coincide con la época de recombinación donde los fotones son liberados de los electrones. Para corrimientos al rojo z_{arr} tenemos la fórmula de Eisenstein y Hu [4]:

$$z_{arr} = \frac{1291\omega_m^{0.251}}{1 + 0.659\omega_m^{0.828}} \left(1 + b_1\omega_b^{b_2}\right), \quad (5.114)$$

donde

$$b_1 = 0.313\omega_m^{-0.419} \left(1 + 0.607\omega_m^{0.674}\right), \quad (5.115)$$

$$b_2 = 0.238\omega_m^{0.223}, \quad (5.116)$$

y de acuerdo a WMAP se constriñen los valores de z_{arr} y $r_s(z_{arr})$ a ser $z_{arr} = 1020.5 \pm 1.6$ y $r_s(z_{arr}) = 153.3 \pm 2.0 Mpc$. Tenemos entonces:

$$\theta_s(z) = \frac{r_s(z_{arr})}{(1+z)d_A(z)}, \quad (5.117)$$

$$\delta z_s(z) = \frac{r_s(z_{arr}) H(z)}{c}, \quad (5.118)$$

con $d_A(z)(1+z)$ la distancia diametral angular comóvil ec. (5.90). El ángulo $\theta_s(z)$ es completamente análogo al pico acústico de la *RCFM* introducido en ec. (5.89) y corresponde a observaciones ortogonales de la línea de visión. δz_s representa la identificación de las fluctuaciones en el espectro de oscilaciones a lo largo de la línea de visión.

Sin embargo, no hay suficiente acumulación de datos de *BAO* para poder medir $\theta_s(z)$ y $\delta z_s(z)$ de manera separada. No obstante, es posible obtener una distancia esferizada efectiva [4]:

$$D_V(z) \equiv \left[(1+z)^2 d_A^2(z) \frac{cz}{H(z)} \right]^{1/3}. \quad (5.119)$$

La restricción de los datos de *SDSS* es $D_V(z=0.35) = 1370 \pm 64$ Mpc a un corrimiento típico de $z=0.35$.

También podemos construir otro parámetro usado, la distancia relativa de *BAO*:

$$r_{BAO}(z) \equiv r_s(z_{arr}) / D_V(z), \quad (5.120)$$

tal que para corrimientos de $z=0.2$ y $z=0.35$ tenemos:

$$r_{BAO}(z=0.2) = 0.1980 \pm 0.0058, \quad (5.121)$$

$$r_{BAO}(z=0.35) = 0.1094 \pm 0.0033. \quad (5.122)$$

El horizonte de sonido $r_s(z_{arr})$ se puede obtener reemplazando $R_s^{(des)}$ en ec. (5.102) por $R_s^{(arr)} \equiv R_s(z_{arr})$ y usando la distancia diametral angular d_A nos da:

$$r_{BAO}(z) = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\omega_\gamma}{\Omega_m^{(0)} \omega_b}} \left[\frac{z}{E(z)} \right]^{-1/3} \left[\frac{1}{\sqrt{\Omega_k^{(0)}}} \sinh \left(\sqrt{\Omega_k^{(0)}} \int_0^z \frac{d\tilde{z}}{E(\tilde{z})} \right) \right] \\ \times \ln \left(\frac{\sqrt{R_s^{(arr)} + R_s^{(eq)}} + \sqrt{1 + R_s^{(arr)}}}{1 + \sqrt{R_s^{(eq)}}} \right). \quad (5.123)$$

En la figura 5.5. se observa una gráfica de $r_{BAO}(z)$ contra z para el modelo Λ CDM en un Universo plano ($w_{EO} = -1$ y $k=0$). Se muestra que un modelo para $\Omega_{EO}^{(0)} = 0.75$ favorece las observaciones para $z=0.2$ y $z=0.35$ [4].

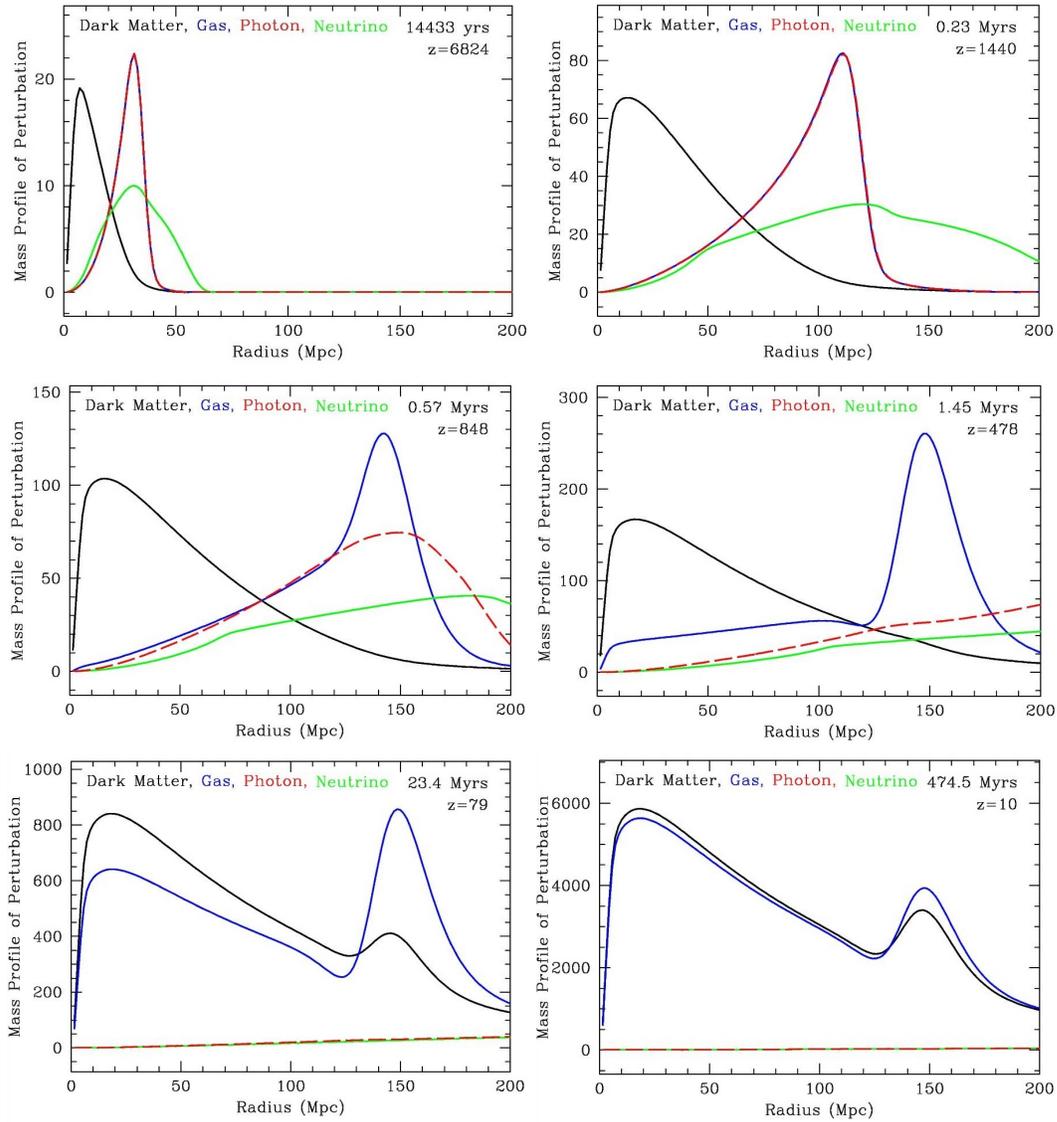


Figura 5.3: Vista esquemática de la evolución de las perturbaciones cosmológicas partiendo desde la época de acoplamiento fuerte, $z \approx 6824$, hasta un $z \approx 10$ cuando las galaxias se comienzan a formar.

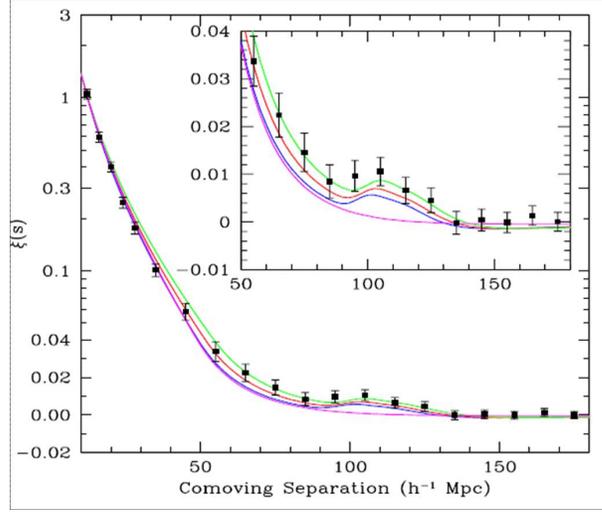


Figura 5.4: La función de correlación del corrimiento al rojo espacial a gran escala de las muestras de *SDSS*. El Pico Acústico Bariónico (*BAP* por sus siglas en Inglés) en la función de correlación de la muestra del *SDSS LRG*, el cual es sensible a las variaciones de la densidad de materia con modelos para: $\Omega_m h^2 = 0.12$ curva verde, $\Omega_m h^2 = 0.13$ curva roja y $\Omega_m h^2 = 0.14$ curva azul. La curva rosa sin presencia del *BAP* es la función de correlación del modelo *CDM*, con $\Omega_b = 0$, es decir, sin *BAO* [27].

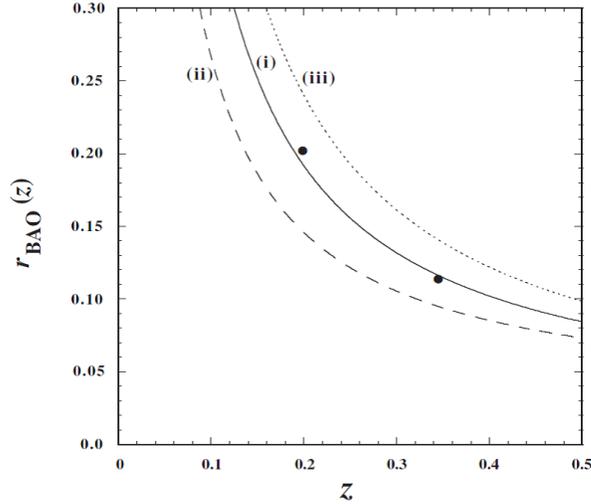


Figura 5.5: Gráfica de $r_{BAO}(z)$ contra z para el modelo Λ CDM en un Universo plano ($\omega_{EO} = -1$ y $k = 0$). Para diferentes casos (i) $\Omega_{EO}^{(0)} = 0.75$, (ii) $\Omega_{EO}^{(0)} = 0$, (iii) $\Omega_{EO}^{(0)} = 0.95$, para $z = 0.2$ y $z = 0.35$. Se encuentra que el valor más aproximado es para $\Omega_{EO}^{(0)} = 0.75$ [4].

Capítulo 6

Radiación Oscura

Como se explicó en capítulos anteriores, desde hace casi una década, las observaciones de la *RFCM*, así como los estudios del corrimiento al rojo de galaxias y mediciones de la distancia lumínica en supernovas Ia, confirman predicciones teóricas del modelo estándar de cosmología Λ CDM. Esto no sólo permite que se den lugar fuertes constricciones en los parámetros del modelo, sino que también, se puede constreñir la física no estándar a un nivel más fundamental. Tal es el caso de modelos de partículas elementales que predicen un contenido de radiación diferente en el Universo [30].

El modelo estándar de cosmología incorpora, en su contenido de partículas, la física del modelo estándar de partículas elementales. A parte de los componentes no relativistas, el escenario estándar predice la existencia de componentes de energía relativistas además de los fotones ($\omega_\gamma = \Omega_\gamma h^2$) de la *RFCM* con una densidad de energía dada por $\omega_{rad} = \Omega_{rad} h^2$:

$$\omega_{rad} = \omega_\gamma \left[1 + \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} N_{\text{eff}} \right], \quad (6.1)$$

donde ω_γ es la densidad de energía de los fotones de la *RFCM* con una temperatura $T_\gamma = 2.728^\circ\text{K}$ y N_{eff} es en principio un valor determinado por las familias de neutrinos, pero en general se puede considerar un parámetro libre, definido como el número efectivo de grados de libertad relativistas. Esta ecuación se puede deducir mediante la ec. (4.19) y (4.26). Asumiendo las interacciones electrodébiles estándar, así como las oscilaciones de los sabores de neutrinos, se tiene que $N_{\text{eff}} = 3.046$ que corresponde a las tres familias leptónicas del modelo estándar de partículas. Sin embargo, estudios recientes han mostrado que N_{eff} puede tener un valor mayor [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38], del orden de $N_{\text{eff}} \sim 4 - 5$.

El número de grados relativistas de libertad de los neutrinos depende del proceso de desacoplamiento del fondo de neutrinos del plasma primordial. La existencia de $N_{\text{eff}} = 4$ es un resultado difícil de explicar dentro del modelo estándar de partículas [30]. Sin embargo, observaciones de alta resolución de las anisotropías de la *RFCM* están proporcionando mediciones sobre la cola de amortiguamiento del espectro de potencias de la *RFCM*, arrojando luz

sobre las condiciones físicas durante la recombinación así como durante la época de dominación de la materia. Las mediciones han revelado fluctuaciones en el espectro de potencias a escalas angulares pequeñas, que subestiman las predicciones del modelo estándar de cosmología. Este déficit en el espectro de potencias es debido a una especie extra relativista, que podría tratarse de un cuarto o quinto neutrino estéril sin masa [39, 40, 41] que queda denotado dentro del valor de N_{eff} antes definido. Cabe destacar que investigaciones recientes [42] muestran que el número de familias de neutrinos ligeros que vienen de las mediciones del ancho de Z^0 en los experimentos de *LEP* en *CERN* es de $N_\nu = 2.9840 \pm 0.0082$ [43], por lo que las componentes de radiación extra no pueden provenir de una familia adicional de neutrinos a las 3 ya conocidas. Es por eso que $N_{\text{eff}} \sim 4$ puede provenir de una física completamente diferente, relacionada con axiones, ondas gravitacionales, partículas que decaen, dimensiones extra o energía oscura [30].

Por otro lado, el interés en el número de grados de libertad se debe principalmente a:

- Inferencias recientes de la abundancia primordial de Helio, la cual es más grande y con mayores incertidumbres que análisis previos [44, 45, 46].
- Evidencia de especies de neutrinos adicionales (estériles) producidos en laboratorios [47] y reactores [48].
- Una tensión entre la determinación de la distancia contra corrimiento al rojo a bajos corrimientos (mediciones de H_0) y aquellas a que van de los bajos a medianos corrimientos al rojo que usan las BAO y que se ven reflejadas en el espectro de potencias como una regla estándar de la *RCFM* [39].

Cualquier mecanismo que produzca un crecimiento en N_{eff} de su valor estándar puede denominarse *Radiación Oscura* y produce los mismos efectos en la expansión de fondo y en las perturbaciones que neutrinos adicionales.

6.1. Naturaleza de la Radiación Oscura

Tenemos que incluso en el caso estándar de los tres sabores de neutrinos, el número efectivo de especies de neutrinos no es necesariamente 3. El desacoplamiento de los neutrinos del resto del plasma primordial ocurre a una temperatura de 2 – 3 MeV, no muy lejos de la temperatura del orden de la masa del electrón a la cual la aniquilación del electrón-positrón transfiere su entropía para producir fotones, como se explicó en el capítulo 4, causando la bien conocida diferencia entre la temperatura de los fotones reliquia y los neutrinos reliquia, $T/T_\nu = (11/4)^{1/3}$. Algunos cálculos han mostrado que los neutrinos siguen interactuando con los e^\pm , compartiendo una pequeña parte de la entropía liberada. Esto causa una distorsión dependiente del momento en el espectro de los neutrinos que influye en el comportamiento del equilibrio

de Fermi-Dirac, el cual es un poco menor que la razón T/T_ν . Tal efecto lleva a un valor de $N_{\text{eff}} = 3.034$. Se induce además un efecto más pequeño en la razón T/T_ν debido a una corrección de la electrodinámica cuántica (*QED* por sus siglas en Inglés) de la temperatura finita del plasma electromagnético [37]. Un estudio reciente [49] tanto del desacoplamiento incompleto de los neutrinos como de las correcciones de la *QED* concluye que el efecto total nos lleva al conocido valor estándar para neutrinos de $N_{\text{eff}} = 3.0395 \simeq 3.04$. Por lo tanto se define la densidad extra de radiación:

$$\Delta N_{\text{eff}} \equiv N_{\text{eff}} - 3.04. \quad (6.2)$$

El valor estándar de N_{eff} corresponde al caso de neutrinos sin masa o muy ligeros; por ejemplo, aquellos neutrinos cuya masa sea menor que 1 eV. Neutrinos más masivos afectan la posterior evolución del Universo de tal manera que no puede ser parametrizada con ΔN_{eff} . Sin embargo, las recientes evidencias de las oscilaciones de neutrinos atmosféricos y solares, en particular los de los datos de KamLAND muestran que las masas de los neutrinos no son muy grandes, excepto en el caso de que los tres eigenestados de masas estén degenerados. No obstante se puede asumir $m_\nu \approx 0.05$ eV [37].

Extensiones del modelo estándar de la física de partículas predicen grados adicionales de libertad relativistas que contribuyen a ΔN_{eff} . Hay modelos con 4 neutrinos los cuales incluyen un neutrino estéril adicional para así poder explicar la tercera indicación experimental de las oscilaciones de neutrinos (los resultados de *LSND*). Estudios han mostrado que todos los modelos de cuatro neutrinos, tanto de $2 + 2$ como $3 + 1$ tipos, nos llevan a una completa termalización del sabor del neutrino estéril antes de la nucleosíntesis del Big Bang (*BBN* por sus siglas en Inglés) así a que $\Delta N_{\text{eff}} \approx 1$, ha sido un valor desfavorecido en el modelo estándar de *BBN* [23, 37].

6.2. Las ecuaciones perturbativas en la época de dominación de la radiación

Si la *Radiación Oscura* está formada de partículas relativistas como neutrinos estériles, éstos se deberían comportar como neutrinos desde el punto de vista de la teoría de perturbaciones cosmológicas [30].

La expansión de fondo en un $z \geq 1000$ se puede describir por un modelo plano de radiación-materia ya que a esas z las perturbaciones en la densidad de los neutrinos son muy pequeñas como para tener un impacto gravitacional en la evolución de la distribución de las especies que interactúan.

Las ecuaciones que conforman la base para el análisis de la dinámica perturbativa de un modelo con materia, un fluido de fotones, así como neutrinos son [50]:

$$\ddot{d}_c + H\dot{d}_c = \nabla^2\Psi, \quad \text{para materia oscura,} \quad (6.3)$$

$$\ddot{d}_\gamma - \frac{1}{3}\nabla^2 d_\gamma = \nabla^2(\Psi - \Phi), \quad \text{para fotones,} \quad (6.4)$$

$$\dot{D}_a + n_i \nabla_i D_a = -3n_i \nabla_i (\Psi - \Phi), \quad (6.5)$$

$$\nabla^2 \Phi - 3\gamma \Phi = -\gamma(d + 3Hu), \quad (6.6)$$

$$\Psi + \Phi = -3\gamma\pi. \quad (6.7)$$

Las ecuaciones (6.3) y (6.4) vienen de la simplificación cuando el potencial anisotrópico de esfuerzos y la velocidad del sonido son para materia oscura y fotones $\pi_c = c_c^2 = 0$ y $\pi_\gamma = 0$, $c_\gamma^2 = 1/3$ respectivamente, dentro de la ecuación general de segundo orden:

$$\ddot{d}_a + \chi_a \dot{d}_a - c_a^2 \nabla^2 d_a - \nabla^4 \pi_a = \nabla^2(\Psi - 3c_a^2 \Phi), \quad (6.8)$$

donde

$$d_a \equiv \delta_a + 3\Phi,$$

y

$$\delta_a \equiv \frac{\delta\rho_a}{\rho_a + p_a},$$

es el número de sobredensidad propia de la partícula y los subíndices a son para cada especie, ya sea materia oscura, plasma de bariones-fotones o neutrinos. La variable d_a , por otro lado, puede ser interpretada en la norma Newtoniana como las perturbaciones de las densidades de número de partículas con respecto al volumen diferencial coordenado d^3r más que con el volumen propio $a^3(1 + 3\Phi)d^3r$, de tal manera que el cambio en el tiempo de estas densidades es determinado por el flujo de partículas en cierto volumen coordenado, $\dot{d}_a = \nabla^2 u_a$. Ψ y Φ son los potenciales de la norma newtoniana vistos en la sección 5.1.1. Mientras tanto, en la ec. (6.5) la variable D_a está relacionada con la energía promedio en el espacio fase de distribución de perturbaciones y n_i representa una dirección espacial.

Mientras tanto, las ecuaciones (6.6) y (6.7) son ecuaciones no dinámicas de constricción, con $\gamma \equiv 4\pi G a^2(\rho + p)$ y

$$d = \sum_a x_a d_a, \quad u = \sum_a x_a u_a, \quad \pi = \sum_a x_a \pi_a,$$

donde $x_a \equiv (\rho_a + p_a)/(\rho + p)$ y u_a se relaciona con la velocidad del potencial mediante $v_{ia} = -\nabla u_a$.

Ahora bien, partiendo de las definiciones de las densidades de fondo de entalpía reducidas:

$$\gamma_a \equiv 4\pi G a^2(\rho_a + p_a),$$

$$\gamma \equiv 4\pi G a^2 (\rho + p) = \sum_a \gamma_a,$$

y de la definición de x_a se tiene:

$$\gamma_a = x_a \gamma, \quad \gamma = 3(1+w)(H+k)/2,$$

con $w \equiv p/\rho$. Entonces para bariones (b) y materia oscura (c) con $\rho_a = \rho_{a0}/a^3$ y presión despreciable tenemos:

$$\gamma_{b(c)} = \frac{4\pi G \rho_{b(c)0}}{a} = \frac{3H^2 \omega_{b(c)}}{2a}, \quad (6.9)$$

donde H es la constante de Hubble y $\omega_{b(c)} = \Omega_{b(c)} h^2$. Mientras que para los fotones tenemos que su entalpía reducida es $\gamma_\gamma = (16/3)\pi G a^2 \rho_\gamma$ y como su densidad va como $\rho_\gamma = \rho_{\gamma 0}/a^4$ tenemos entonces:

$$\gamma_{b(c)} = \frac{16\pi G \rho_{\gamma 0}}{3a^2} = \frac{2H^2 \omega_\gamma}{a^2}, \quad (6.10)$$

con $\omega_\gamma \equiv \Omega_\gamma h^2 \approx 2.47 \times 10^{-5} (T_{\gamma 0}/2.725^\circ K)^4$. Para neutrinos tenemos:

$$\gamma_\nu = \alpha_\nu \gamma_\gamma, \quad \alpha_\nu \equiv \frac{\rho_\nu}{\rho_\gamma} = \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} N_{\text{eff}} \simeq 0.23 N_{\text{eff}}, \quad (6.11)$$

donde N_{eff} es el parámetro de los grados de libertad de los neutrinos cuyo valor estándar es $N_{\text{eff}} \approx 3.04$, pero en principio puede ser un parámetro libre, como se verá más adelante. La ec. (6.11) indica la contribución de partículas tipo neutrino que se había planteado en la ec. (6.1).

Es conveniente usar la razón del tiempo comóvil η con un tiempo característico de la igualdad entre materia y radiación, y la razón del factor de escala a con su valor en la igualdad:

$$\bar{\eta} \equiv \frac{\eta}{\eta_e}, \quad \bar{a} \equiv \frac{a}{a_{eq}}, \quad (6.12)$$

con

$$a_{eq} = \frac{(1 + \alpha_\nu) \omega_\gamma}{\omega_m},$$

y

$$\eta_e \equiv \frac{\eta_{eq}}{2(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{a_{eq}}{\omega_m}}.$$

La ecuación de Friedmann para el Universo de materia-radiación en términos de las variables ec. (6.12) va como $(d\bar{a}/d\bar{\eta})^2 = 1 + \bar{a}$ lo que nos lleva a:

$$\bar{a} = \bar{\eta} + \frac{1}{4} \bar{\eta}^2. \quad (6.13)$$

Resulta útil introducir la variable:

$$r \equiv \frac{\bar{\eta}}{\bar{a}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\bar{\eta}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \bar{a}}}. \quad (6.14)$$

Nótese que $\eta = 4\eta_e(1-r)/r$, $d\eta = -4\eta_e dr/r^2$, y $a = 4a_{eq}(1-r)/r^2$. En términos de r ,

$$H = \frac{2-r}{\eta}, \quad \gamma_\nu = \frac{2R_\nu r^2}{\eta^2}, \quad (6.15)$$

donde

$$R_\nu \equiv \frac{\rho_\nu}{\rho_r} = \frac{\alpha_\nu}{1 + \alpha_\nu}, \quad (6.16)$$

es la fracción de neutrinos con respecto al total de la densidad de radiación $\rho_r = \rho_\gamma + \rho_\nu$; $R_\nu \approx 0.408$ para $N_{\text{eff}} \approx 3.04$. Los límites de la dominación radiación y materia se pueden ver fácilmente al poner $r = 1$ o $r = 0$, respectivamente.

Es entonces que cuando la densidad de energía del Universo se encuentra dominada por un gas de fotones y neutrinos ultrarelativistas, para todos los cuales $w_a = c_a^2 = 1/3$, entonces:

$$H^{(r)} = \frac{1}{\eta}, \quad \gamma^{(r)} = \frac{2}{\eta^2}. \quad (6.17)$$

En la época de la radiación $x_\gamma^{(r)} = 1 - R_\nu$, $x_\nu^{(r)} = R_\nu$ y las demás especies $x_a^{(r)}$ son despreciables. Entonces las ecuaciones de evolución en este régimen (6.4), (6.5), (6.6) y (6.7) son respectivamente:

$$\ddot{d}_\gamma - \frac{1}{3}\nabla^2 d_\gamma = \nabla^2(\Psi - \Phi), \quad (6.18)$$

$$\dot{D}_\nu + n_i \nabla_i D_\nu = -3n_i \nabla_i (\Psi - \Phi), \quad (6.19)$$

$$\eta^2 \nabla^2 \Phi - 6\Phi = -2d - \frac{6}{\eta}u, \quad (6.20)$$

$$\eta^2 \nabla^2 \Phi - 6\Phi = -2d - \frac{6}{\eta}u, \quad (6.21)$$

estas ecuaciones son las que finalmente contienen la contribución de N_{eff} de manera implícita y junto con las ecuaciones de perturbaciones para los demás fluidos explicados en el capítulo 5 vienen a modificar los resultados estándar al momento de considerar el régimen de dominación de la radiación con N_{eff} variable. De esta manera se ven los efectos de la *Radiación Oscura*. Cabe destacar que un análisis completamente detallado de las perturbaciones cosmológicas está dado por Bashinsky y Seljak [50], donde se explican a detalle todas las ecuaciones anteriores.

6.3. Sensibilidad de las diferentes componentes cosmológicas en la *RCFM*

La sensibilidad de N_{eff} en las observaciones de alta resolución de la *RCFM* es debida al impacto de la energía media relativista en la razón de expansión del Universo antes y durante la época del desacoplamiento de fotones-bariones.

Por otro lado, permitir que la abundancia de Helio, ${}^4\text{He}$, (Y_p) varíe libremente produce una degeneración que cambia completamente el mecanismo mediante el cual N_{eff} es constreñido por los datos de la *RCFM*.

6.3.1. Sensibilidad a las componentes no relativistas

La dependencia de la *RCFM* con ρ_b viene de la dependencia en la ecuación de estado del plasma antes de recombinación, es decir, en la fracción de la densidad de energía que proviene de los bariones. Incrementar el número de bariones por fotón hace que disminuya la presión del plasma en una fracción p/ρ . El corrimiento que resulta en el punto de equilibrio entre la gravitación y las fuerzas de presión altera la razón de los picos pares con los picos impares. Asumiendo que conocemos la densidad de fotones de los datos de la *RCFM*, entonces se puede inferir ρ_{b0} , de las razones de los picos pares e impares.

La dependencia en ρ_{m0} , con el subíndice m que contiene tanto a materia oscura ρ_c como bariónica ρ_b , viene de la sensibilidad de la evolución de la amplitud del modo de Fourier con la fracción de la densidad de energía que es contribuida por la materia no relativista cuando la longitud de onda del modo es igual al radio de Hubble. Esta razón depende de λ/r_{eq} con λ la longitud de onda comóvil y $r_{eq} \equiv H_{eq}^{-1}/a_{eq}$ definido como el radio comóvil de Hubble en el tiempo cuando la densidad de materia igualaba a la densidad de radiación, época denotada con el subíndice eq y a es el factor de escala explicado en el capítulo 2. La amplitud de un modo que se proyecta a una escala angular θ depende de θ/θ_{eq} donde $\theta_{eq} = r_{eq}/d_A^{(c)}$ debido a que $\theta/\theta_{eq} = \lambda/r_{eq}$. Ya que la amplitud es una función fuerte de esta razón, entonces hay una fuerte sensibilidad a θ_{eq} y por lo tanto a z_{eq} ($1 + z = 1/a$). Por lo tanto, el espectro de potencias de la *RCFM* es sensible a $1 + z_{eq} = (\rho_m/\rho_{rad})|_0$. Si se asume un contenido de radiación estándar ($N_{\text{eff}} = 3.046$, $\rho_{rad} = \rho_\gamma + \rho_\nu$), entonces la constricción en $1 + z_{eq}$ constriñe directamente a ρ_{m0} . Sin embargo, si se permite que N_{eff} varíe, se deben estudiar los efectos a un $1 + z_{eq}$ fijo, ya que esta cantidad está bien constreñida por los datos de la *RCFM*. Aunque existe una degeneración en esta constricción. En [51] explican que la cantidad bien determinada por la *RCFM* es $r_s \omega_m^{1/2} \sqrt{z_{eq}}$, ya que esta combinación de parámetros depende sólo de $R_s^{(des)}$ y $R_s^{(eq)}$, ver ec. (5.102).

Consideremos ahora $\rho_{\Lambda 0}$. Las escalas angulares de los picos acústicos son altamente sensibles al tamaño angular del horizonte de sonido, $\theta_s = r_s/d_A$. Así, θ_s es determinado con precisión por los datos. Dado r_s , se puede inferir d_A . En un Universo con curvatura igual a cero $k = 0$, $d_A^{(c)} = \int c dt/a$ (evaluada desde el tiempo de última dispersión hasta ahora) depende esencialmente de ρ_{m0} y $\rho_{\Lambda 0}$.

r_s es entonces conocida al determinar ρ_{b0} y ρ_{m0} . Estas densidades determinan la historia de la velocidad del sonido c_s y la razón de expansión, permitiéndonos calcular r_s ya que sólo depende de los seis parámetros del modelo estándar Λ CDM. Esta determinación de r_s permite constreñir $\rho_{\Lambda 0}$ [39].

6.3.2. El efecto de la Radiación oscura

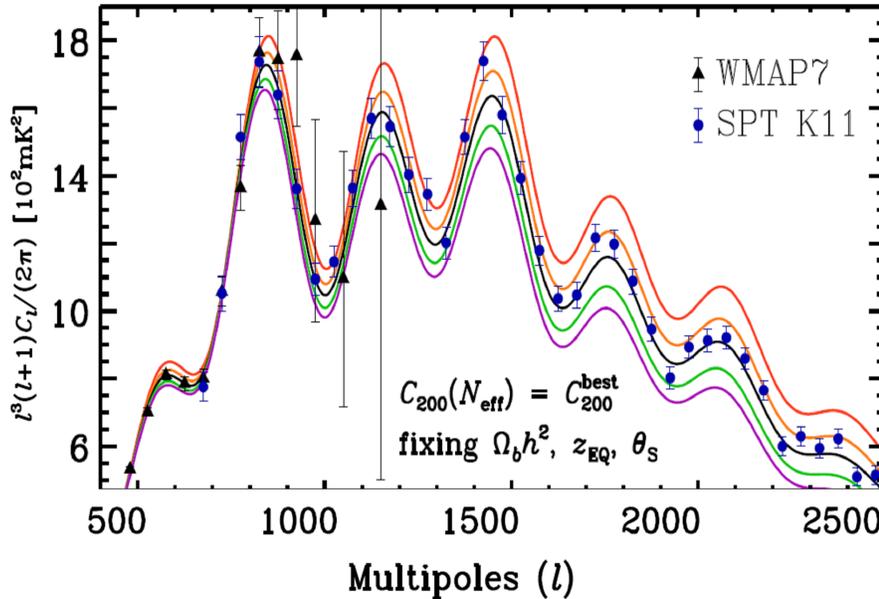


Figura 6.1: Mediciones del espectro de potencias de la *RCFM* por *WMAP7* y *SPT* (South Pole Telescope por sus siglas en Inglés) y el mejor ajuste normalizado a $\ell = 200$. La curva negra (central) corresponde al modelo Λ CDM + N_{eff} asumiendo consistencia en *BBN*. Las otras curvas del modelo corresponden a N_{eff} variando de 2 a 6 con ρ_b , θ_s y z_{eq} mantenidas fijas. Los N_{eff} más pequeños corresponden a una mayor amplitud en los picos del espectro [39].

El cambiar N_{eff} sólo cambia ligeramente lo ya analizado anteriormente que explica el origen de las constricciones en los parámetros. Es por ello que se espera que las inferencias acerca de ρ_b , $1 + z_{\text{eq}}$ y θ_s sufran cambios muy ligeros. Si fijamos estos parámetros y se varía N_{eff} se obtienen cambios en el espectro de potencias de la *RCFM*, como se observa en la figura 6.1. Incrementar N_{eff} produce diferencias muy pequeñas a multipolos, ℓ , pequeños y éstas se incrementan a ℓ grandes [39, 52, 53]. Hay estudios que sugieren que estas diferencias se deben a un efecto del post-desacoplamiento conocido como *efecto Sachs-Wolfe integrado tempranamente* (*ISW* por sus siglas en Inglés). Sin embargo, hay razones que permiten afirmar que las diferencias a ℓ grandes son producidas casi enteramente por el incremento del amortiguamiento de Silk (*Silk damping*¹ en Inglés) causado por el incremento de la razón de expansión

¹Fenómeno en el que las anisotropías de la temperatura a escalas más pequeñas que la

al incrementar N_{eff} . La difusión causa una caída en la potencia conforme se va a valores altos de ℓ y hace al espectro de potencias sensible a la escala angular de la longitud de difusión, θ_d [39]. Por lo tanto, conforme aumenta N_{eff} y no se hace inferencia alguna en los demás parámetros cosmológicos, se ve que aumenta la amplitud de los picos, se ensanchan y se corren de su posición estándar, como se muestra en la figura 6.2 desarrollada con el código libre CAMB (un programa que resuelve las ecuaciones cosmológicas perturbadas del capítulo 5, junto con las del inicio del capítulo 6). Cabe destacar que esta figura concuerda con los resultados obtenidos en [55] donde se explica que el aumento, o disminución, del primer pico acústico conforme aumenta, o disminuye, N_{eff} se debe a que la época de igualdad es alterada por N_{eff} ya que ésta ocurre más tarde, o más temprano. De esta manera, incrementar, o disminuir, N_{eff} implica que la densidad de materia disminuye, o aumenta, respectivamente. Debido al efecto *ISW*, las fluctuaciones a esta escala que cruzan el horizonte de sonido en la época de radiación, son aumentadas por el decaimiento de los potenciales gravitacionales. Es por ello que un aumento en las especies relativistas incrementa la amplitud del primer pico acústico. Por otro lado, el corrimiento de los picos de su posición estándar, se debe a que la época de igualdad ocurre antes o después según disminuya, o aumente, N_{eff} . La posición de los picos es bien conocida por el ángulo característico, $\theta_A = r_s(z_{\text{rec}})/d_A^{(c)}(z_{\text{rec}})$ ec. (5.89) evaluada en la recombinación. Aunque $d_A^{(c)}(z_{\text{rec}})$ no sufre grandes cambios al cambiar N_{eff} , $r_s(z_{\text{rec}})$ si cambia y este valor se hace pequeño conforme N_{eff} se incrementa. Esto se debe a que la parte logarítmica de la ec. (5.102) decrece conforme el parámetro $R_s^{(eq)}$ aumenta al hacer N_{eff} más grande. Es por eso que la posición de los picos se corre a multipolos, ℓ , grandes cuando N_{eff} aumenta, lo cual se ve de la ec. (5.103). Es importante mencionar que este comportamiento de corrimiento de los picos, como la amplitud de los mismos se puede obtener al variar el valor de Λ , así como la curvatura, k , sin embargo, no se consideraron esas variaciones en el presente análisis.

6.4. Efecto en BBN

La abundancia de Helio, ${}^4\text{He}$, expresado a través de la fracción Y_p , es muy sensible a la razón de expansión del Universo y de la misma forma a la cantidad de radiación presente, y ha sido reconocida como una prueba de la densidad de energía durante *BBN* [56] en el tiempo cuando $T \sim \text{MeV}$. En el Universo temprano, la razón de las densidades numéricas neutrón-protón (n_n/n_p) se mantiene en equilibrio térmico mediante interacciones débiles hasta que la razón de expansión se vuelve comparable a la razón de interacción a $T \sim 0.7 \text{ MeV}$. El incrementar la razón de expansión al introducir radiación relativista extra, por ejemplo, nos lleva a un valor más grande de la razón n_n/n_p en el

longitud de difusión del fotón son amortiguadas por la misma difusión [54].

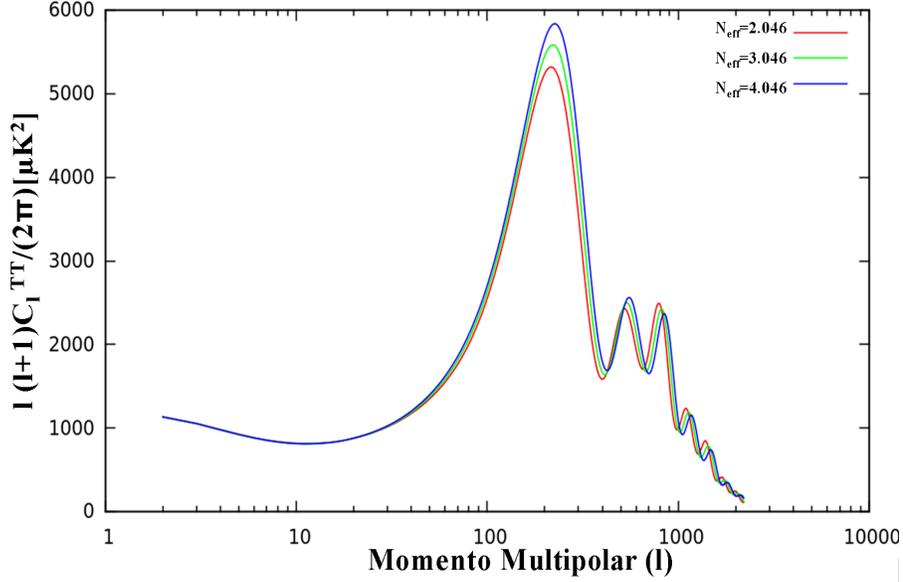


Figura 6.2: Comportamiento del espectro de potencias cuando únicamente se hace variar N_{eff} desde $N_{\text{eff}} = 2.046$ a $N_{\text{eff}} = 4.046$. Se observa que hay un incremento en la amplitud del primer pico directamente proporcional al incremento en N_{eff} , así como un corrimiento de los mismos hacia multipolos, ℓ , más grandes conforme el valor N_{eff} aumenta.

*freeze out*². Ya que esencialmente todos los neutrones presentes a $T \sim 0.1$ MeV son sintetizados en ${}^4\text{He}$ (ver capítulo 4, ec. (4.24)) [56], introducir *Radiación Oscura* nos lleva a una mayor abundancia de ${}^4\text{He}$, y esto impone restricciones en N_{eff} .

Lo que se asume de manera estándar acerca de la razón de fotones-bariones y N_{eff} es que éstas se mantienen sin cambio alguno desde *BBN* y hasta el desacoplamiento. Sin embargo, muchos procesos pueden cambiar esta situación, tal que la inyección de energía en el plasma después de *BBN* reduciría tanto ω_b como N_{eff} , o el decaimiento de especies oscuras hacia la radiación oscura después de *BBN*, lo cual incrementaría N_{eff} mientras ω_b permanece sin cambios, ver figura 6.3. Es importante señalar que existe una gran degeneración entre Y_p y N_{eff} y tal degeneración se puede romper mediante la determinación de la fracción de bariones ω_b/ω_c , donde los subíndices b y c para bariones y materia oscura, respectivamente [39].

Una fracción alta de bariones altera la dinámica acústica para los modos que entran al horizonte durante la época de dominación de la materia, debido a que una fracción de la fuente de materia produce un apoyo de presión. El apoyo de la presión hace que los potenciales decaigan, incrementando la amplitud de las fluctuaciones como ocurre con el flujo de radiación en la época de dominación de la radiación. A un ω_b fijo, incrementar ω_b/ω_m impulsa la altura del primer

²La época cuando las partículas se salen del equilibrio termodinámico y por ende sus densidades de número de partículas se congelan.

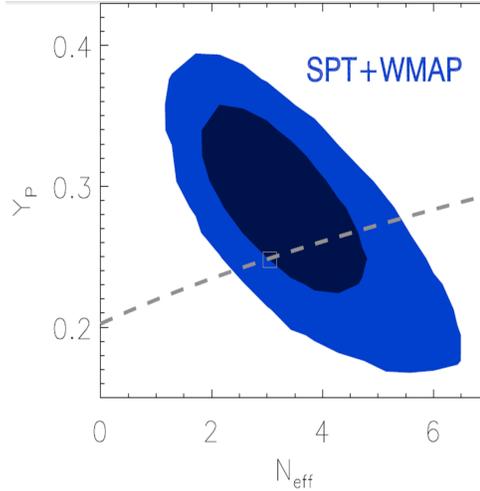


Figura 6.3: Degeneración de la proporción de Helio, Y_p , con la radiación oscura representada por N_{eff} para los datos de $WMAP+SPT$ cuando no se considera la consistencia de BBN . La línea punteada representa la curva de consistencia de BBN con el valor del recuadro para $N_{\text{eff}} = 3.046$ y $Y_p = 0.2478$ [52].

pico en comparación con el segundo [57].

Sin embargo, la evidencia de una radiación extra en los datos de BBN es ambigua. En algunos análisis se reporta que de alguna manera se puede añadir una componente extra de radiación [44], mientras que en otros trabajos se concluye que no hay necesidad de introducir una componente extra durante BBN [58]. Tales estudios reflejan $N_{\text{eff}}^{BBN} = 2.4 \pm 0.4$ [58]. Incluso se tiene que el incremento en N_{eff} posterior a la época de BBN se puede deber a un decaimiento de partículas de materia oscura antes de la época de la igualdad las cuales dan como resultado la denominada *Radiación Oscura*, dejando de lado las tensiones entre los valores de N_{eff} durante y después de BBN [59]. En general, varios análisis de datos muestran que el valor central de grados extra relativistas permitidos por la $RCFM$ es mayor que la de BBN [23, 59, 60, 61].

6.5. Degeneración de N_{eff}

Al momento de tomar en cuenta una densidad de radiación no estándar o *Radiación Oscura*, $N_{\text{eff}} > 3.046$, se tiene una importante degeneración para todas las escalas determinadas por la $RCFM$. Existe una gran degeneración entre ω_m y ω_{rad} en los ajustes de $RCFM$: los primeros tres picos en la $RCFM$ determinan muy bien el corrimiento al rojo de la igualdad entre materia y radiación z_{eq} , con $1 + z_{eq} = \omega_m/\omega_{rad} \approx 3200 \pm 140$ pero la conversión a la densidad de materia física ω_m , nos lleva a hacer suposiciones sobre la densidad total de radiación [62]. Will Sutherland (2012) explica muy bien la degeneración que implica tener grados extras relativistas:

La densidad de radiación se parametriza convencionalmente por un número

efectivo de especies de neutrinos N_{eff} antes mencionado, tal que:

$$\omega_{\text{rad}} = \omega_{\gamma} \left[1 + \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} N_{\text{eff}} \right], \quad (6.22)$$

la misma ecuación que (6.1). Cabe destacar que ω_{rad} no es la densidad de radiación actual, sino el valor que ésta tenía durante z_{eq} , que es $\omega_{\text{rad}0}$ reescalada mediante $(1 + z_{\text{eq}})^{-4}$, donde se ha usado $\omega_m = \omega_c + \omega_b$ y los subíndices c y b corresponden a materia oscura y bariones respectivamente, por lo que ω_m incluye a ambos tipos de materia. Para un N_{eff} en general, se puede llegar a:

$$\omega_m = 0.1339 \left(\frac{1 + z_{\text{eq}}}{3201} \right) [1 + 0.134 (N_{\text{eff}} - 3.046)]. \quad (6.23)$$

Dicha ecuación se obtiene mediante la ec. (6.1) y el valor de $1 + z_{\text{eq}} = \omega_m / \omega_{\text{rad}} \approx 3200$ así como el hecho de que para $N_{\text{eff}} = 3.046$ se tenga $\omega_{\text{rad}} = 1.6918 \omega_{\gamma}$ y que $\omega_{\gamma} = (40440)^{-1}$ en base a la temperatura de la *RCFM* $T_0 = 2.7255^\circ$ K. Se puede observar que se presenta una degeneración de los parámetros de N_{eff} y ω_m , los cuales se ven reflejados en todos los factores de escala, los cuales afectan las distancias cósmicas, tiempos y densidades, aunque tienen un efecto muy pequeño en las razones adimensionales [62]. Es decir también tenemos una degeneración entre N_{eff} y H_0 [63].

Es de gran ayuda el poder reacomodar la expresión para el horizonte de sonido en términos de z_{eq} , ω_{rad} y ω_b como los parámetros de entrada, lo cual nos lleva a:

$$r_s(z_{\text{des}}) = 2998 \text{Mpc} \frac{2}{\sqrt{3}} \omega_{\text{rad}}^{-1/2} (1 + z_{\text{eq}})^{-1} R_s^{(\text{eq})^{-1/2}} \times \ln \left(\frac{\sqrt{1 + R_s^{(\text{des})}} + \sqrt{R_s^{(\text{des})} + R_s^{(\text{eq})}}}{1 + \sqrt{R_s^{(\text{eq})}}} \right), \quad (6.24)$$

donde $R(z) \approx 30330 \omega_b / (1 + z)$ es la razón de las densidades de momento de bariones/fotones y R_{des} y R_{eq} son los valores a z de desacoplamiento y de igualdad, respectivamente. Esto implica que si se mantienen fijos los parámetros: z_{eq} , z_{des} y ω_b la expresión se vuelve $\propto \omega_{\text{rad}}^{-1/2}$, ver [51].

Para ilustrarlo consideremos dos modelos, el modelo *A* con $N_{\text{eff}} = 3.046$ cuyos parámetros encajan bien con las mediciones de *WMAP* y el modelo *B* con un grado extra relativista (*Radiación Oscura*), tal que $N_{\text{eff}} = 4.046$ pero el mismo z_{eq} . De esta manera, el modelo *B* tiene tanto ω_{rad} como ω_m más grandes en un 13.4%, mientras el horizonte de sonido en *B* es más pequeño por un factor de $(1.134)^{-1/2} = 0.939$. Esto discrepa mucho con la posición de los picos acústicos de la *RCFM* mediante la escala acústica ℓ_* , si la distancia a la última dispersión $d_A(z_*)$ o H_0 fueron fijadas.

Lo que pasa se puede entender ya que, aparte de ω_b , *WMAP* construye principalmente cantidades adimensionales: especialmente z_{eq} , la escala acústica ℓ_* en la última dispersión z_* , y el parámetro de corrimiento \mathfrak{R} , ec. (5.94).

Así mismo, las mediciones de *BAO* son intrínsecamente razones adimensionales, como $r_s/D_V(z)$, mientras que las mediciones de supernovas ancladas al flujo local de Hubble también dan razones adimensionales, esencialmente $H_0 d_L(z)/c$ [62], ver sección 5.3.2. Como ya se había mencionado, la *Radiación Oscura* introduce grandes degeneraciones en los parámetros que afectan las distancias cósmicas, pero las mediciones de *WMAP* y *BAO* introducen constricciones en parámetros adimensionales, las cuales no ayudan a romper las degeneraciones que introduce $N_{\text{eff}} \neq 3.046$.

No obstante, hay tres cantidades dimensionales (distancias, tiempos y densidades, o combinaciones de éstas) en la cosmología homogénea.

Es conveniente definir una densidad de radiación escalada:

$$X_{\text{rad}} \equiv \omega_{\text{rad}}/1.692\omega_\gamma = 1 + 0.134(N_{\text{eff}} - 3.046), \quad (6.25)$$

de tal manera que su valor estándar es 1; esta ecuación es otra forma de ver la ec. (6.1). Entonces se escoge un conjunto de parámetros fundamentales en base a esta nueva definición:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{rad}} &= X_{\text{rad}}/23904, \\ \omega_m &= (1 + z_{\text{eq}})X_{\text{rad}}/23904, \\ h &= \sqrt{(\omega_m/\Omega_m)}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Actualmente, la incertidumbre observacional de X_{rad} es sustancialmente más grande que la de los otros parámetros principales, pero hay acuerdo en que dicho valor se encuentra en $0.86 \leq X_{\text{rad}} \leq 1.27$ para $2 \leq N_{\text{eff}} \leq 5$ [62].

Para poder romper las degeneraciones impuestas por la *Radiación Oscura*, se deben tener mediciones que constriñan los parámetros completamente dimensionales, como son H_0 , t_0 , r_s o la distancia absoluta $d_L(z)$ a cualquier corrimiento al rojo. (Una medición local de ω_{rad} , ω_m o ω_{EO} debería ser suficiente, pero es casi imposible). Otras posibilidades incluyen mediciones del *damping tail*³ de la *RCFM* a $\ell > 1000$, la cual nos brinda la sección eficaz de Thomson σ_T como una constante relevante completamente dimensional.

H_0 es uno de los parámetros cosmológicos más conocidos y estudiados de la historia de la cosmología, pero para constreñir N_{eff} es preferible medir $r_s(X_{\text{rad}})^{1/2}$, ya que la ec. (6.24) implica que $r_s\omega_{\text{rad}}^{1/2}$ sólo depende de cantidades bien conocidas, como R_s evaluada en z_{eq} [51], y por lo tanto está bien constreñido por los datos de *RCFM*, independiente de la energía oscura posterior así como la curvatura. Por otro lado, $H_0/(X_{\text{rad}})^{1/2}$ está bien constreñida por los datos de *WMAP* + *BAO* si se asume planitud y $\omega = -1$ para energía oscura. Por lo tanto, las mediciones de la longitud absoluta r_s es la mejor ruta para probar el valor de N_{eff} en el Universo temprano, si usamos el hecho de que datos combinados de *RCFM* con mediciones precisas de H_0 pueden constreñir las degeneraciones que existen entre N_{eff} y ω .

³La cola amortiguada a ℓ grandes de las oscilaciones acústicas de la *RCFM*.

Para ilustrar esto se ve cómo los valores de $H_0 \approx 70.5 \text{ Kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ y $r_s \approx 153 \text{ Mpc}$ se corren a $\approx 75 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ y 144 Mpc , respectivamente, si se asume ΛCDM con $N_{\text{eff}} \approx 4.0$. Si ésta es la cosmología actual, una frontera más baja observada $H_0 \geq 73 \text{ Kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ puede ser ajustada tanto con $N_{\text{eff}} \approx 4$, como con $N_{\text{eff}} \approx 3$ para $\omega < -1$ y/o curvatura abierta; pero una frontera más alta $r_s \leq 148 \text{ Mpc}$ excluiría todo el intervalo actual permitido por $N_{\text{eff}} \approx 3$, y forzosamente requeriría radiación extra o una física nueva a $z > 1000$ [62].

Sin embargo, $H(z)$ y por lo tanto $d_A(z)$ escalan de la misma manera, en todos los z [39], si z_{arr} no tiene variaciones con N_{eff} , entonces el resultado neto es que las observables de *BAO*: $d_A(z)/r_s(z_{\text{arr}})$ y $H(z) * r_s(z_{\text{arr}})$ no dependen de N_{eff} , donde el subíndice *arr* denota la época de arrastre, ver sección 5.3.2.

En la práctica hay correcciones al análisis anterior, por ejemplo, la correlación entre z_{arr} y N_{eff} , pero son pequeñas y el resultado neto es una muy pequeña dependencia de las observables de *BAO* en N_{eff} .

Lo que resulta sensible a N_{eff} a un bajo corrimiento al rojo son las mediciones absolutas de la distancia que no están calibradas con r_s . Variar N_{eff} cambia las calibraciones de la *RCFM* para H_0 , sin muchos cambios para las predicciones de los datos de *BAO*, lo cual es consistente con el análisis de [51].

El hecho de incrementar N_{eff} tiene a su vez implicaciones para la formación de estructura. Incrementar N_{eff} nos lleva a un mayor ω_m (a z_{eq} fija) que se traduce en una disminución de ω_b/ω_m . Disminuir la fracción de bariones disminuye el apoyo de la presión sentido por la materia antes de la recombinación, impulsando de esta manera la formación de estructura en escalas más pequeñas que el horizonte de sonido en la recombinación; es decir, a escalas menores que 150 Mpc . Por lo tanto, incrementar N_{eff} aumenta las abundancias de cúmulos que son sensibles a la amplitud del espectro de potencias en escalas $\sim 10 \text{ Mpc}$.

Existe evidencia de que los datos de *BAO* no son sensibles a los cambios en N_{eff} debido a que D_V y r_s escalan de manera similar y las distancias de *BAO* dependen de la razón de estas dos cantidades, ver ec. (5.120). Aquí se cancela la contribución que puede ser medida por *BAO*, es decir el parámetro $r_s \omega_{\text{rad}}^{1/2}$, ya que los otros parámetros de la distancia del horizonte, r_s , no sufren grandes cambios al permitir que N_{eff} varíe de su valor estándar. La misma cancelación no ocurre para las mediciones de distancia que calibran de manera independiente de la *RCFM* como en el caso de la constante de Hubble [39]. Cabe mencionar que en [64] se desarrolla una discusión similar acerca de N_{eff} y su papel en el espectro de potencias, así como su restricción en función de diferentes tipos de parámetros observacionales.

6.6. Radiación Oscura y el efecto en los parámetros cosmológicos

Nuestro interés, después de ver en qué consiste la idea de la *Radiación Oscura*, es poder ver las implicaciones que tiene este tipo de radiación en la

cosmología cuando N_{eff} es un parámetro variable, en contraposición de los resultados obtenidos cuando se tiene el valor estándar, $N_{\text{eff}} = 3.046$. Para llevar a cabo este análisis se hizo uso del código libre CosmoMC Monte Carlo Markov Chain [65]. Este programa resuelve las ecuaciones cosmológicas perturbadas planteadas en el capítulo 5, donde se analiza el plasma acoplado de fotones, bariones y materia oscura, en conjunto con las ecuaciones explicadas al inicio del presente capítulo. Dicho programa encuentra mediante el método de Monte Carlo el mejor ajuste de los parámetros cosmológicos en las ecuaciones perturbadas usando datos cosmológicos observacionales recientes. Tales datos incluyen mediciones de la *RCFM: WMAP7* y *ACBAR*. Además, se incluyeron los datos del Telescopio espacial Hubble (*HST*) para incluir mediciones de $H(z)$, así como las mediciones de supernovas tipo Ia, (*SN*), y los datos de Wiggle-z y *SDSS* para *BAO*.

Se realizaron numerosas corridas del programa CosmoMC donde se incluyeron combinaciones de los conjuntos de datos observacionales antes mencionados tanto para el código estándar donde N_{eff} tiene un valor fijo a $N_{\text{eff}} = 3.046$, así como para una versión modificada del código, basada en las modificaciones hechas por R. Keisler et al. [66], donde se permite que este valor pueda variar. Una parte de las corridas, además, permite la variación de la proporción de ${}^4\text{He}$, Y_p .

En el siguiente análisis vemos cómo se modifican los parámetros: H_0 , es decir, la constante de Hubble en la actualidad, $\Omega_{MO}h^2 = \omega_{MO}$, la densidad de materia oscura (o $\Omega_{DM}h^2 = \omega_{DM}$, *Dark Matter* en Inglés), θ , el ángulo característico de los picos acústicos ec. (5.89), τ , la profundidad óptica, y Ω_Λ , la densidad de energía oscura, así como N_{eff} y Y_p . Es importante señalar que hay análisis que consideran el comportamiento de otros parámetros como la curvatura, Ω_k , la ecuación de estado de la energía oscura, w_Λ , así como el corrimiento del índice espectral, $dn_s/d\ln k$, entre otros [67, 68].

Cuadro 6.1: Valores de los parámetros cosmológicos a 1σ (68% c.l) para los datos de *WMAP7* y añadiendo *HST*, *BAO* y *SN*. Además se incluyen mediciones de *ACBAR* de multipolos ℓ grandes. Ambas corridas consideran el valor estándar de $N_{\text{eff}} = 3.046$.

Parámetro	WMAP + HST +SN + BAO	WMAP + ACBAR +HST + SN + BAO
N_{eff}	3.046	3.046
H_0	$69.94^{+1.23}_{-1.16}$	$70.17^{+1.20}_{-1.15}$
$\Omega_{\text{MO}}h^2$	0.113 ± 0.003	0.114 ± 0.003
θ	1.039 ± 0.002	1.04 ± 0.002
τ	0.086 ± 0.007	0.086 ± 0.006
Ω_{Λ}	$0.720^{+0.014}_{-0.020}$	$0.721^{+0.015}_{-0.020}$

6.6.1. Análisis de los resultados

A continuación presentamos los resultados que obtuvimos con el programa CosmoMC. En el cuadro 6.1 se presentan los resultados de las corridas del programa CosmoMC sin variar el parámetro de la radiación oscura, es decir $N_{\text{eff}} = 3.046$ para los conjuntos de datos *WMAP7*+*HST*+*SN*+*BAO* y para mediciones de multipolos altos, ℓ , se incluyó *ACBAR*. Estos resultados presentan incertidumbres a 1σ , es decir, a una desviación estándar y concuerdan con los valores conocidos dentro de la cosmología del modelo estándar, justo como se había analizado en las constricciones impuestas tanto por la *RCFM*, supernovas Ia, así como estructuras a gran escala en el capítulo 3. La figura 6.4 muestra algunos contornos de confianza a 1σ y a 2σ para los parámetros cosmológicos de densidad de materia oscura, $\Omega_{DM}h^2$, densidad de constante cosmológica, Ω_{Λ} y constante de Hubble, H_0 , todos evaluados en la actualidad.

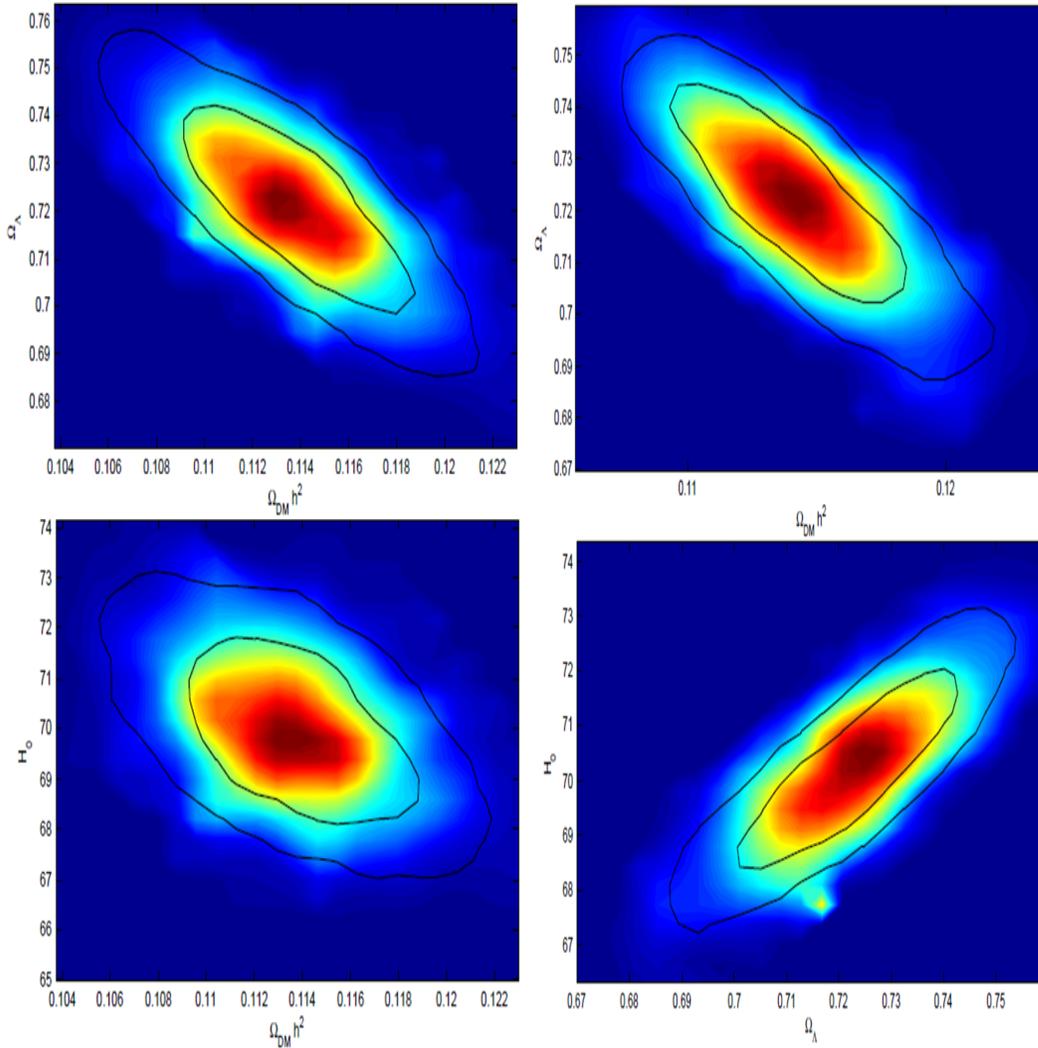


Figura 6.4: Contornos de confianza a 1σ y 2σ de los parámetros cosmológicos: $\Omega_{DM}h^2$, Ω_Λ y H_0 , considerando $N_{\text{eff}} = 3.046$ con los datos de *WMAP7* + *HST* + *SN* + *BAO* y *WMAP7* + *ACBAR* + *HST* + *SN* + *BAO* en la columna izquierda y derecha, respectivamente.

En el cuadro 6.2 se presentan los resultados a 1σ de las corridas del programa CosmoMC ahora tomando en cuenta el impacto de la radiación oscura en los parámetros cosmológicos al considerar N_{eff} un parámetro libre. De esta manera, se puede ver cómo los parámetros cosmológicos analizados en el cuadro 6.1 son ahora diferentes al comparar la primera columna del cuadro 6.1 con la última columna del cuadro 6.2. Al analizar estas dos columnas vemos que N_{eff} se ajusta a valores mayores. Al aumentar N_{eff} de 3.046 a 4.3, H_0 y Ω_{MO} aumentan y los demás parámetros permanecen casi igual.

El parámetro H_0 junto con N_{eff} , resultan ser los más degenerados durante el análisis, como se mencionó después de la ec. (6.23). H_0 se centra en valores más altos y con una desviación estándar mucho mayor para las mediciones que sólo incluyen a *WMAP7* dejando en claro una fuerte degeneración con

los grados extra relativistas. Lo mismo ocurre al introducir datos de *BAO*, *WMAP7 + BAO*, donde se muestra que tampoco se rompe la degeneración de N_{eff} con H_0 lo cual concuerda con el análisis de la sección 6.5. Se puede ver que aumenta el valor central de $N_{\text{eff}} = 5.53$ para *WMAP7* a $N_{\text{eff}} = 6.25$ para *WMAP7 + BAO*, aunque mantiene la desviación estándar del orden de 2. Por otro lado, el valor central de la constante de Hubble pasa a ser de $H_0 = 80.48$ a $H_0 = 82.01$, para los datos de *WMAP7* y *WMAP7 + BAO*, respectivamente, que resultan ser valores demasiado grandes para la constante de Hubble. Sin embargo, mediciones de $H(z)$ del *HST*, *WMAP7 + HST*, rompen la degeneración considerablemente, como se ve en [69], disminuyendo el valor de la desviación estándar en un factor de aproximadamente 2 en N_{eff} y H_0 , tanto para el caso de los datos de *WMAP7* como los de *WMAP7 + BAO* y centrando el valor de $N_{\text{eff}} = 4.23$, un valor mucho más bajo, y $H_0 = 75.06$, el cual resulta más congruente con las constricciones cosmológicas ya que este valor nos da una edad del universo de $t_0 = 12.89$ giga años. Una combinación de los 3 conjuntos de datos, *WMAP7 + BAO + HST*, disminuye aún más la desviación estándar y centra el valor de $N_{\text{eff}} = 4.41$ y $H_0 = 74.67$.

Una combinación de los datos de supernovas Ia, con los de *WMAP7*, *WMAP7 + SN*, muestra un comportamiento similar al de la combinación *WMAP7 + HST* ya que ambas son mediciones básicamente a z pequeñas y de la constante de Hubble, es decir, constriñen muy bien este valor, rompiendo la degeneración con N_{eff} de manera considerable. Se puede ver que los datos de *BAO* tienden a determinar valores más grandes tanto de N_{eff} como de H_0 . Sin embargo, la combinación de todos los datos observacionales *WMAP7 + BAO + HST + SN* constriñen estos parámetros dejándolos con el valor más bajo para la desviación estándar en $N_{\text{eff}} = 4.3^{+0.83}_{-0.82}$ y $H_0 = 74.55^{+3.24}_{-3.27}$. Cabe destacar que estos resultados concuerdan con los obtenidos por M. Archidiacono et al. [30], F. de Bernardis et al. [63] y A. Smith et al. [70]

En general, el valor de los parámetros restantes se ve modificado levemente, por lo que se puede considerar que no hay degeneración con esos parámetros y el valor no estándar de N_{eff} .

En las figuras 6.5, 6.6, 6.7, 6.8 y 6.9 se muestran los contornos de confianza a 1σ y 2σ para las combinaciones de datos de *WMAP7*, *BAO*, *HST* y *SN*. Se ve el comportamiento de los parámetros cosmológicos N_{eff} , $\Omega_{DM}h^2$, θ y H_0 y se puede observar cómo cambian los valores de estos parámetros al dejar libre N_{eff} con respecto a los estándar del cuadro 6.1 y la figura 6.1.

Cuadro 6.2: Valores de los parámetros cosmológicos a 1σ (68 % c.l) para los datos de *WMAP7* y añadiendo *BAO*, *HST* y *SN*, dejándolo libre la densidad de grados de libertad relativistas N_{eff} .

Parámetro	Sólo WMAP	WMAP +BAO	WMAP +HST	WMAP +BAO + HST
N_{eff}	$5.53^{+2.30}_{-2.22}$	$6.25^{+2.22}_{-2.18}$	$4.23^{+0.98}_{-0.99}$	4.41 ± 0.89
H_0	$80.48^{+8.74}_{-8.81}$	$82.01^{+8.56}_{-8.35}$	75.06 ± 3.39	$74.67^{+3.23}_{-3.43}$
$\Omega_{\text{MO}}h^2$	0.154 ± 0.04	$0.170^{+0.04}_{-0.039}$	$0.133^{+0.02}_{-0.021}$	0.138 ± 0.016
θ	$1.0337^{+0.0052}_{-0.0049}$	$1.0320^{+0.0045}_{-0.0040}$	$1.035^{+0.005}_{-0.004}$	$1.0348^{+0.0033}_{-0.0035}$
τ	0.087 ± 0.007	0.086 ± 0.007	$0.087^{+0.005}_{-0.007}$	0.085 ± 0.007
Ω_{Λ}	$0.728^{+0.029}_{-0.028}$	0.715 ± 0.017	$0.723^{+0.03}_{-0.028}$	$0.712^{+0.014}_{-0.015}$

Parámetro	WMAP +SN	WMAP +BAO + SN	WMAP HST + SN	WMAP BAO + HST + SN
N_{eff}	$4.02^{+0.87}_{-0.88}$	$5.71^{+2.04}_{-2.05}$	$4.13^{+0.96}_{-0.99}$	$4.3^{+0.83}_{-0.82}$
H_0	$74.7^{+3.2}_{-3.6}$	$80.14^{+8.06}_{-8.30}$	$74.71^{+3.21}_{-3.44}$	$74.55^{+3.24}_{-3.27}$
$\Omega_{\text{MO}}h^2$	$0.13^{+0.018}_{-0.019}$	$0.143^{+0.036}_{-0.034}$	$0.13^{+0.02}_{-0.018}$	0.135 ± 0.015
θ	$1.038^{+0.003}_{-0.004}$	$1.033^{+0.0043}_{-0.0049}$	1.036 ± 0.004	$1.035^{+0.0035}_{-0.0037}$
τ	0.087 ± 0.007	0.084 ± 0.013	0.086 ± 0.007	$0.086^{+0.006}_{-0.007}$
Ω_{Λ}	0.726 ± 0.027	$0.718^{+0.015}_{-0.016}$	$0.725^{+0.021}_{-0.022}$	$0.715^{+0.015}_{-0.014}$

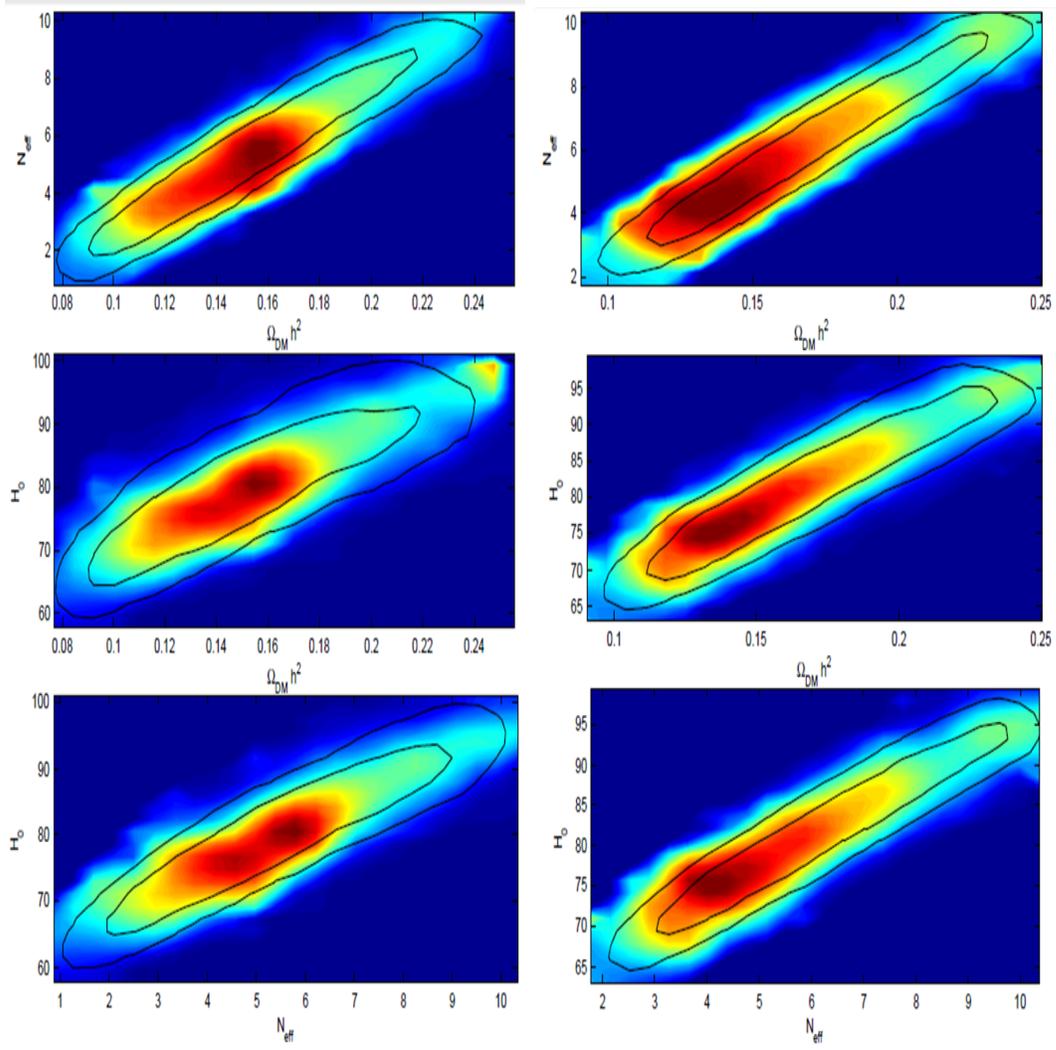


Figura 6.5: Contornos de confianza a 1σ y 2σ de los parámetros cosmológicos: N_{eff} , $\Omega_{\text{DM}} h^2$ y H_0 , considerando N_{eff} variable con los datos de *WMAP7* y *WMAP7 + BAO* del lado izquierdo y derecho, respectivamente.

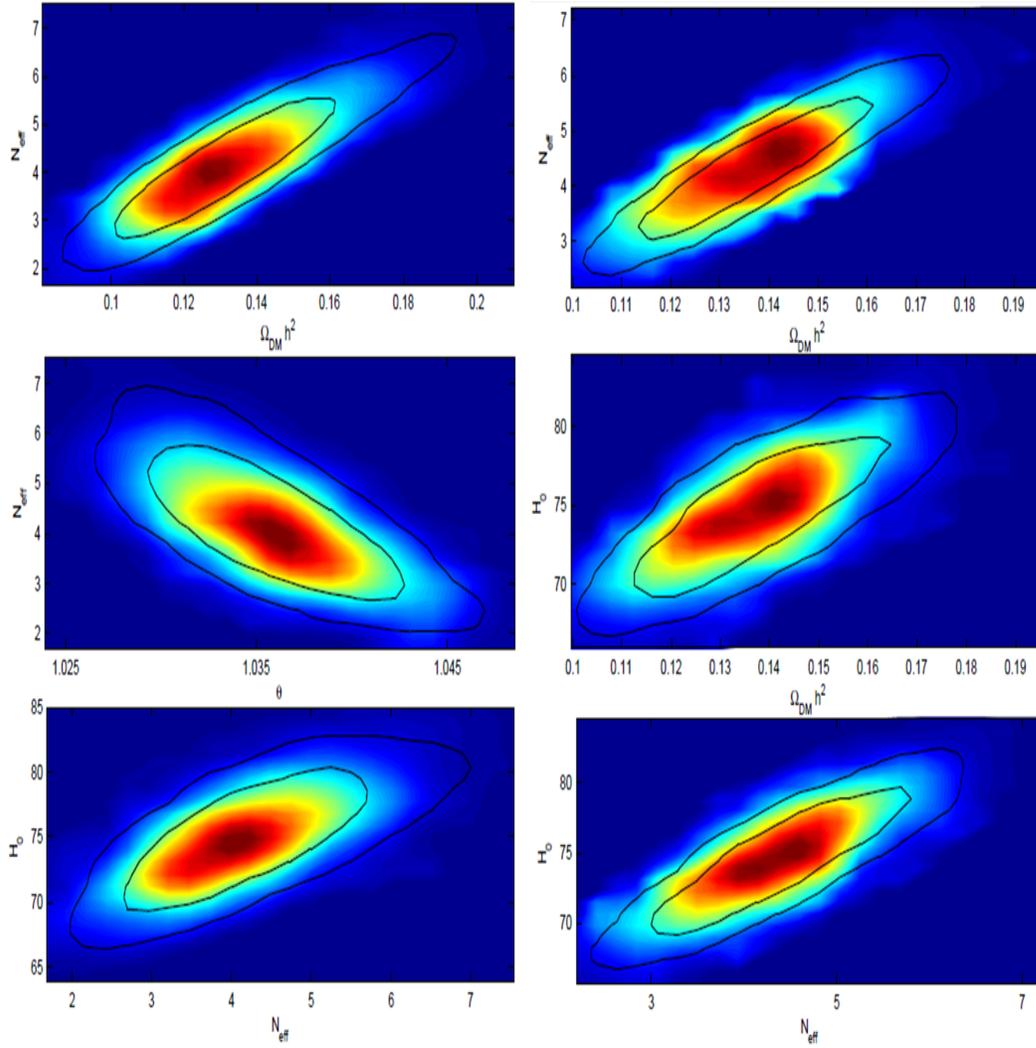


Figura 6.6: Contornos de confianza a 1σ y 2σ de los parámetros cosmológicos: N_{eff} , $\Omega_{\text{DM}} h^2$, θ y H_0 , considerando N_{eff} variable con los datos de *WMAP7* + *HST* y *WMAP7*+*HST*+*BAO* del lado izquierdo y derecho, respectivamente.

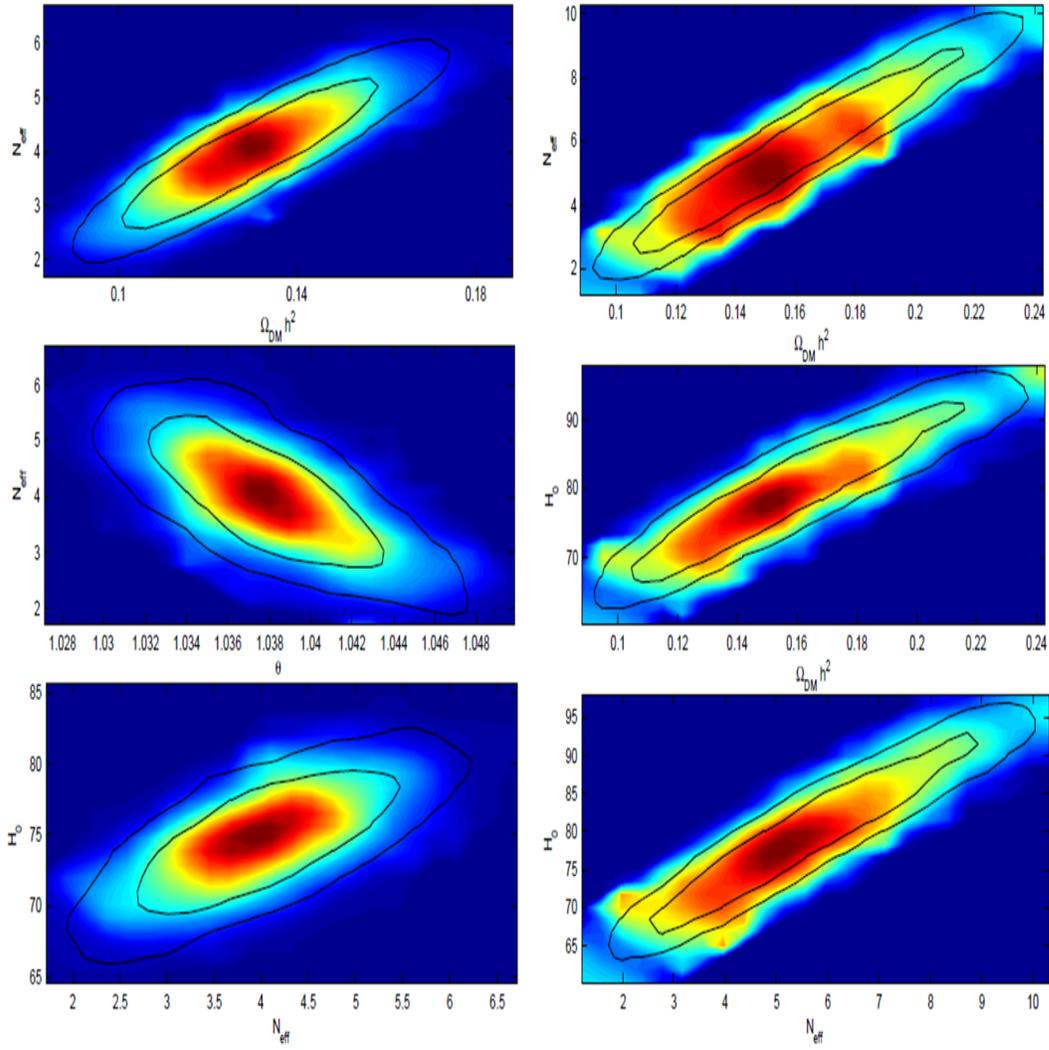


Figura 6.7: Contornos de confianza a 1σ y 2σ de los parámetros cosmológicos: N_{eff} , $\Omega_{\text{DM}} h^2$ y H_0 , considerando N_{eff} variable con los datos de *WMAP7* + *SN* y *WMAP7* + *BAO* + *SN* del lado izquierdo y derecho, respectivamente.

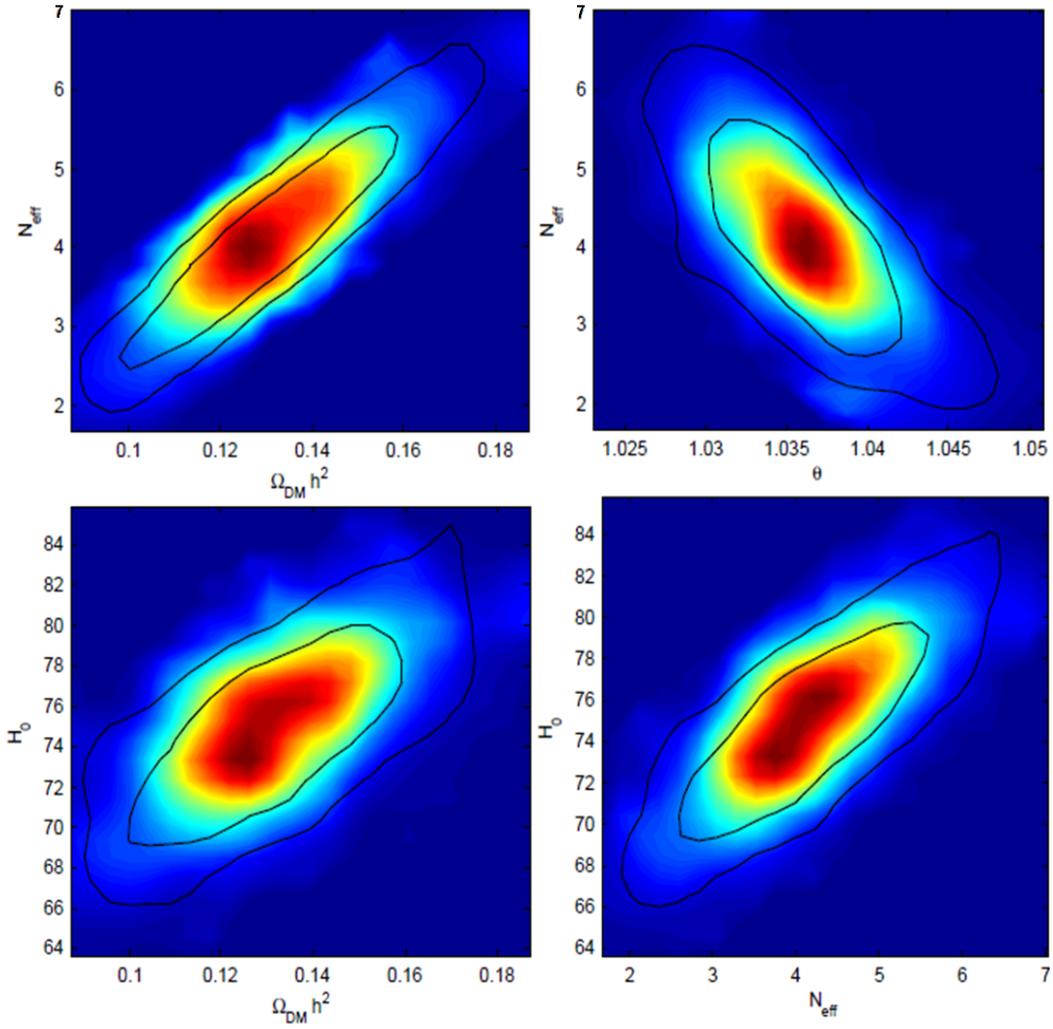


Figura 6.8: Contornos de confianza a 1σ y 2σ de los parámetros cosmológicos: N_{eff} , $\Omega_{\text{DM}} h^2$, θ y H_0 , considerando N_{eff} variable con los datos de *WMAP7* + *HST* + *SN*.

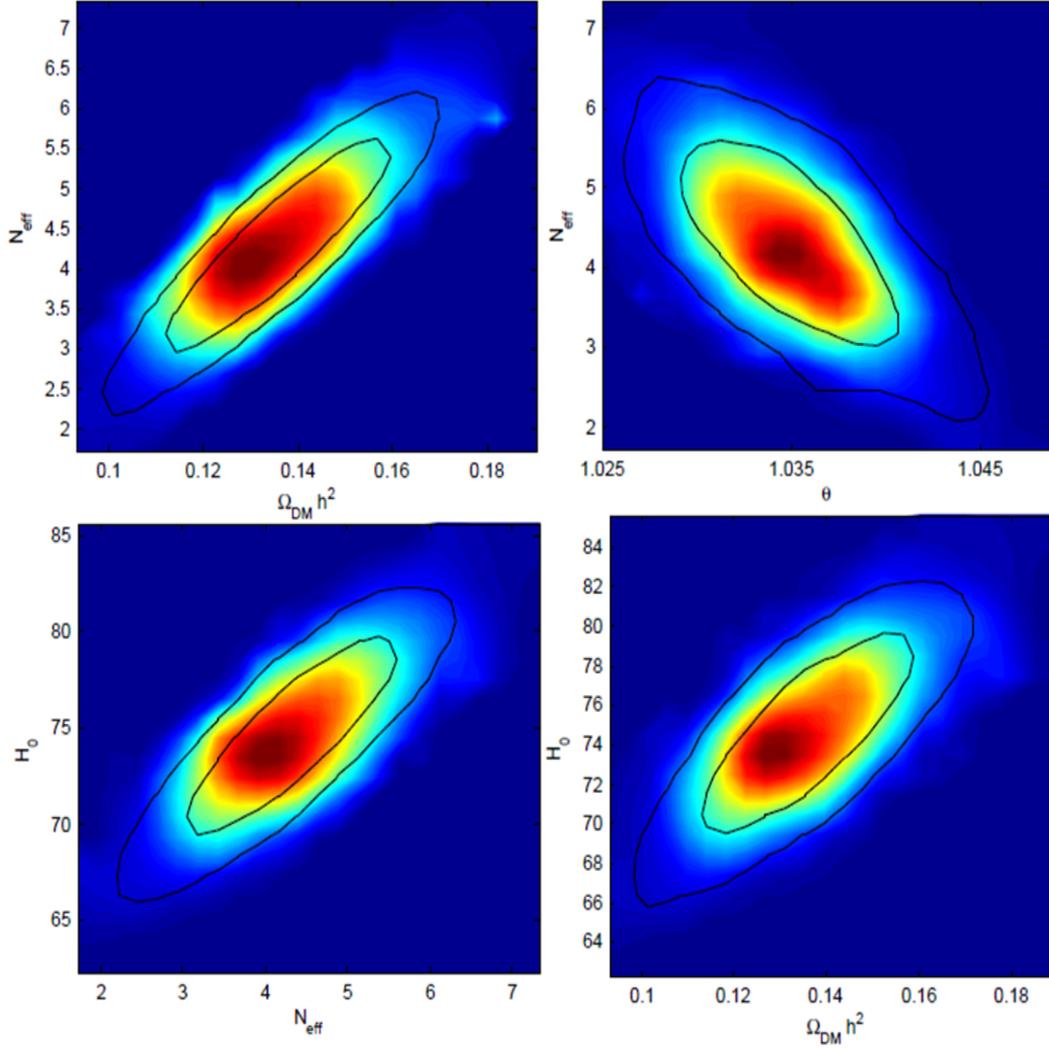


Figura 6.9: Contornos de confianza a 1σ y 2σ de los parámetros cosmológicos: N_{eff} , $\Omega_{DM}h^2$, θ y H_0 , considerando N_{eff} variable con los datos de *WMAP7* + *BAO* + *HST* + *SN*.

En el cuadro 6.3 se ven ahora los resultados a 1σ para la misma combinación de datos que en el análisis previo y de igual manera tomando a N_{eff} como un parámetro libre, pero esta vez añadiendo datos para multipolos grandes de las mediciones de *ACBAR*, $\ell > 1000$. Aquí se puede ver que el hecho de contener ℓ grandes, propicia una restricción mayor para los valores de N_{eff} y H_0 en todas las combinaciones de datos, incluso para *BAO*, aunque este último con las mayores incertidumbres en los valores centrales, siendo su desviación estándar la más grande tanto para N_{eff} como para H_0 . Como se vió en la sección 6.3.2 el fenómeno del amortiguamiento de Silk es el responsable de la mejora en las restricciones. El conjunto de datos que restringe más a estos parámetros resulta ser el de *WMAP7* + *ACBAR* + *HST* + *SN* con valores de $N_{\text{eff}} = 4.03^{+0.74}_{-0.76}$ y $H_0 = 74.86^{+2.98}_{-2.94}$ y produce una edad del Universo de $t_0 = 12.96 \pm 0.51$ giga años. Al igual que en el análisis previo sin tener en cuenta

Cuadro 6.3: Valores de los parámetros cosmológicos a 1σ (68 % c.l) para los datos de *WMAP7* + *ACBAR* y añadiendo *BAO*, *HST* y *SN*, dejando libre la densidad de grados de libertad relativistas N_{eff} .

Parámetro	WMAP +ACBAR	WMAP +ACBAR +BAO	WMAP +ACBAR +HST	WMAP +ACBAR + BAO +HST
N_{eff}	$4.68^{+1.5}_{-1.52}$	$4.67^{+1.69}_{-1.74}$	$4.02^{+0.88}_{-0.87}$	$4.28^{+0.82}_{-0.94}$
H_0	$77.9^{+6.8}_{-6.6}$	$76.33^{+7.35}_{-7.57}$	$74.7^{+3.2}_{-3.3}$	$74.72^{+3.35}_{-3.41}$
$\Omega_{\text{MO}}h^2$	0.14 ± 0.027	$0.143^{+0.031}_{-0.03}$	0.13 ± 0.02	$0.137^{+0.016}_{-0.015}$
θ	1.0367 ± 0.0041	$1.0367^{+0.0046}_{-0.0041}$	1.0378 ± 0.0035	$1.037^{+0.003}_{-0.001}$
τ	0.086 ± 0.007	$0.086^{+0.015}_{-0.016}$	0.087 ± 0.007	$0.087^{+0.006}_{-0.008}$
Ω_{Λ}	0.732 ± 0.029	$0.716^{+0.017}_{-0.016}$	0.726 ± 0.027	$0.714^{+0.015}_{-0.014}$

Parámetro	WMAP +ACBAR +SN	WMAP +ACBAR +BAO + SN	WMAP +ACBAR +HST + SN	WMAP +ACBAR + BAO +HST + SN
N_{eff}	$4.68^{+1.48}_{-1.52}$	$4.66^{+1.72}_{-1.7}$	$4.03^{+0.74}_{-0.76}$	$4.25^{+0.83}_{-0.81}$
H_0	$77.5^{+7.03}_{-6.9}$	$76.36^{+7.41}_{-7.03}$	$74.86^{+2.98}_{-2.94}$	$74.68^{+3.31}_{-3.24}$
$\Omega_{\text{MO}}h^2$	0.141 ± 0.027	$0.143^{+0.031}_{-0.03}$	0.129 ± 0.015	$0.136^{+0.015}_{-0.016}$
θ	1.037 ± 0.004	1.037 ± 0.0043	$1.0378^{+0.0035}_{-0.0033}$	$1.037^{+0.003}_{-0.0033}$
τ	$0.088^{+0.007}_{-0.006}$	0.084 ± 0.006	0.087 ± 0.007	$0.086^{+0.013}_{-0.014}$
Ω_{Λ}	$0.727^{+0.023}_{-0.021}$	$0.717^{+0.015}_{-0.016}$	$0.727^{+0.022}_{-0.02}$	0.716 ± 0.014

las ℓ grandes, estos resultados también concuerdan a buena aproximación con los obtenidos por M. Archidiacono et al. [30], F. de Bernardis et al. [63] y A. Smith et al. [70].

En las figuras 6.10, 6.11, 6.12, 6.13 y 6.14 se ven los contornos de confianza a 1σ y 2σ para las combinaciones de datos de $WMAP7 + ACBAR$, HST , SN y BAO . Se ve el comportamiento de los parámetros cosmológicos N_{eff} , $\Omega_{DM}h^2$, θ y H_0 y se puede observar cómo cambian los valores de estos parámetros con respecto a los estándar, a ℓ grandes del cuadro 6.1.

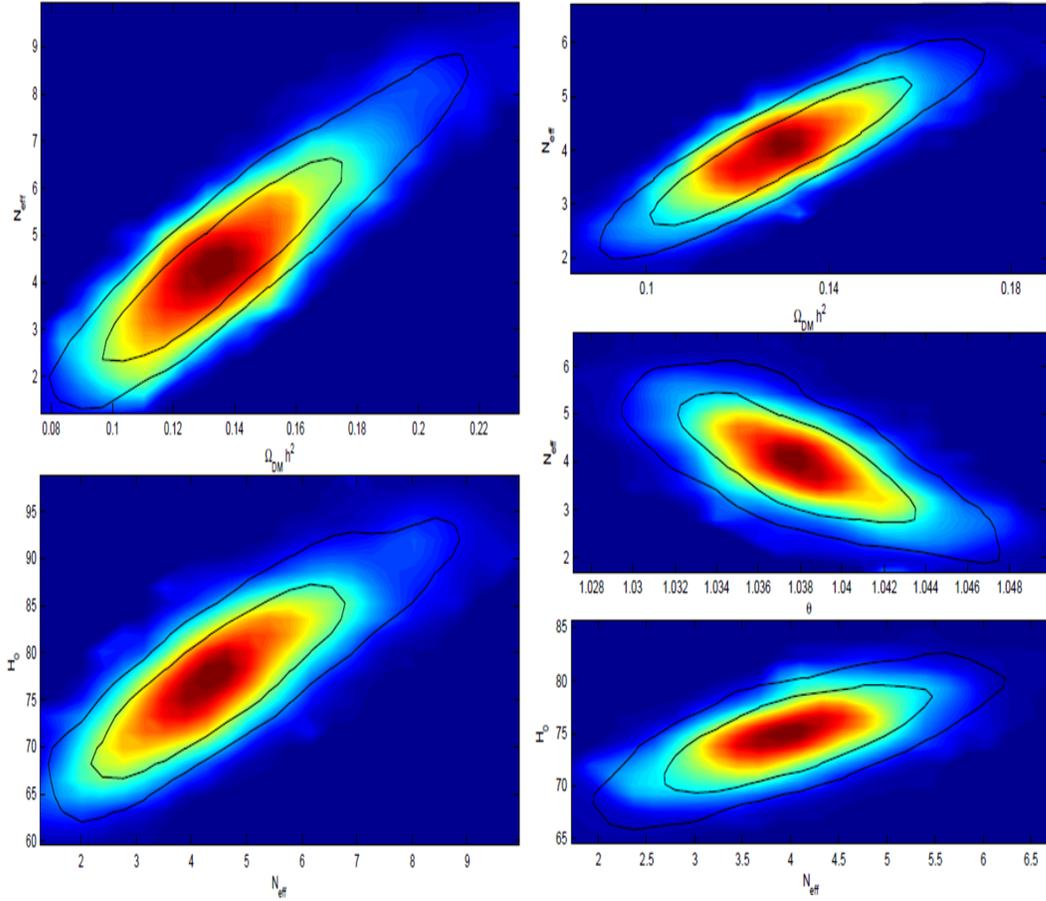


Figura 6.10: Contornos de confianza a 1σ y 2σ de los parámetros cosmológicos: N_{eff} , $\Omega_{DM}h^2$, θ y H_0 , considerando N_{eff} variable con los datos de $WMAP7 + ACBAR$ y $WMAP7 + ACBAR + HST$ del lado izquierdo y derecho, respectivamente.

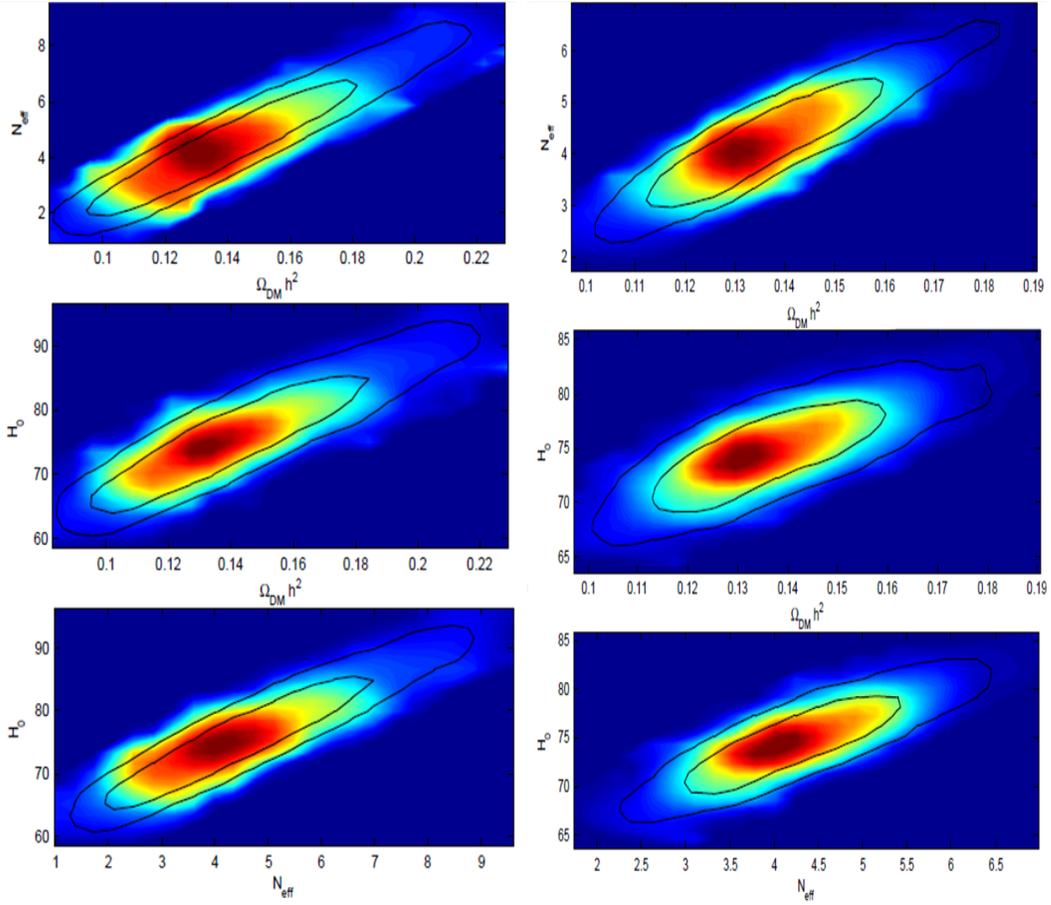


Figura 6.11: Contornos de confianza a 1σ y 2σ de los parámetros cosmológicos: N_{eff} , $\Omega_{DM}h^2$ y H_0 , considerando N_{eff} variable con los datos de *WMAP7* + *ACBAR* + *BAO* y *WMAP7* + *ACBAR* + *BAO* + *HST* del lado izquierdo y derecho, respectivamente.

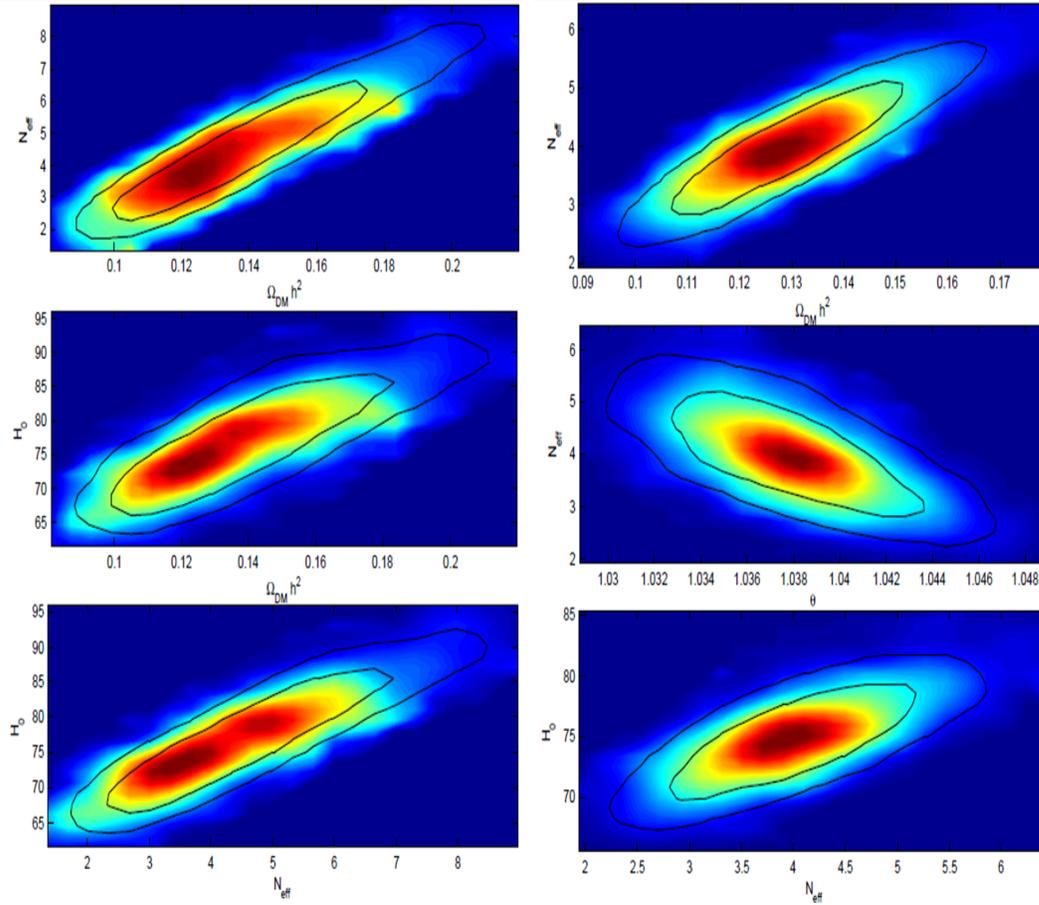


Figura 6.12: Contornos de confianza a 1σ y 2σ de los parámetros cosmológicos: N_{eff} , $\Omega_{DM} h^2$, θ y H_0 , considerando N_{eff} variable con los datos de *WMAP7* + *ACBAR* + *SN* Y *WMAP7* + *ACBAR* + *HST* + *SN* del lado izquierdo y derecho, respectivamente.

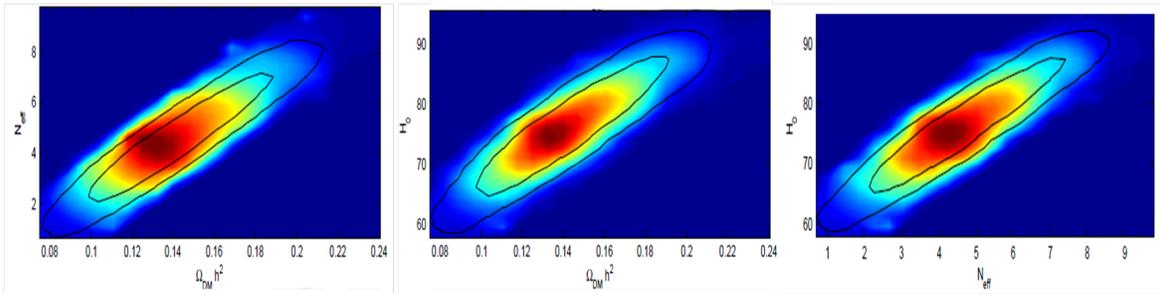


Figura 6.13: Contornos de confianza a 1σ y 2σ de los parámetros cosmológicos: N_{eff} , $\Omega_{DM} h^2$ y H_0 , considerando N_{eff} variable con los datos de *WMAP7* + *ACBAR* + *BAO* + *SN*.

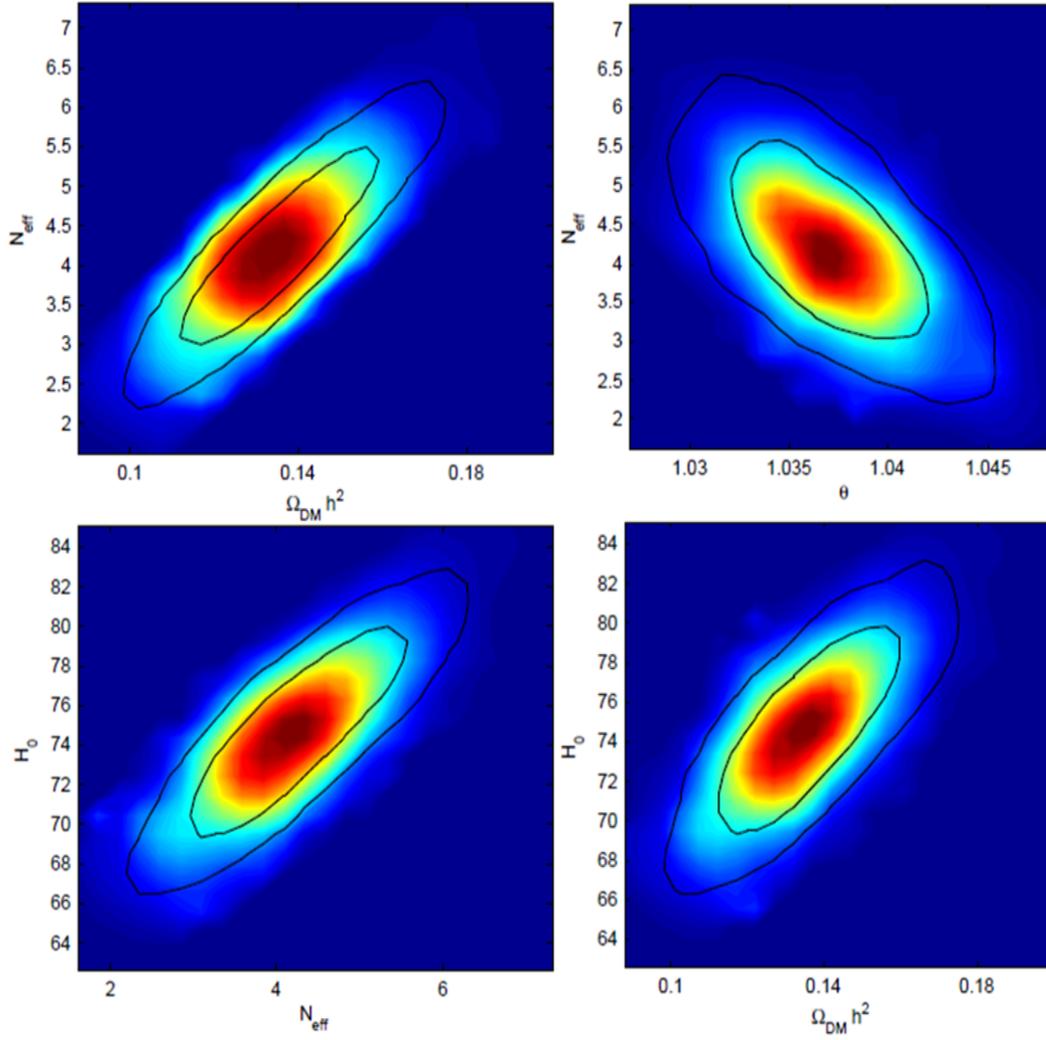


Figura 6.14: Contornos de confianza a 1σ y 2σ de los parámetros cosmológicos: N_{eff} , $\Omega_{\text{DM}}h^2$, θ y H_0 , considerando N_{eff} variable con los datos de *WMAP7* + *ACBAR* + *BAO* + *HST* + *SN*.

En el cuadro 6.4 se muestran los resultados para las corridas esta vez para las combinaciones de datos: *WMAP7*, *WMAP7* + *BAO*, *WMAP7* + *HST*, *WMAP7*+*BAO*+*HST* y *WMAP7*+*BAO*+*HST*+*SN* tomando en cuenta la variación tanto de los grados de libertad relativistas N_{eff} como de la proporción de Helio Y_p . En todos los resultados se ve que el valor de la proporción de Helio varía en cerca de un 10 % de su valor estándar $Y_p \approx 0.24$, el cual se discutió en el capítulo 4, es decir, del orden de $Y_p \sim 0.26 - 0.27$. Para el caso de N_{eff} se puede ver un comportamiento similar al que se presentó en los análisis anteriores, por lo que la variación de Helio no ocasionó muchos cambios ni en el valor central ni en la desviación estándar de la radiación oscura. Lo mismo ocurre para el caso del parámetro de Hubble, H_0 . Los mejores ajustes se obtienen para la combinación de datos de *WMAP7* + *HST* + *BAO* con $N_{\text{eff}} = 4.32 \pm 0.86$, $Y_p = 0.263^{+0.009}_{-0.010}$ y $H_0 = 74.6^{+3.22}_{-3.20}$, aunque el valor para $H_0 = 75.12^{+3.08}_{-3.03}$, que

Cuadro 6.4: Valores de los parámetros cosmológicos a 1σ (68 % c.l) para los datos de *WMAP7* y añadiendo *BAO*, *HST* y *SN*, dejándolo libre la densidad de grados de libertad relativistas N_{eff} y la proporción de Helio Y_p .

Parámetro	WMAP	WMAP +BAO	WMAP +HST	WMAP +BAO +HST	WMAP +BAO +HST +SN
N_{eff}	5.8 ± 2.2	$5.97^{+2.36}_{-2.19}$	$4.25^{+0.9}_{-0.88}$	4.32 ± 0.86	$4.45^{+0.96}_{-0.92}$
Y_p	$0.27^{+0.028}_{-0.015}$	$0.278^{+0.022}_{-0.021}$	0.262 ± 0.01	$0.263^{+0.009}_{-0.010}$	$0.264^{+0.011}_{-0.010}$
H_0	$81.27^{+8.08}_{-7.92}$	$81.05^{+9.29}_{-8.32}$	$75.12^{+3.08}_{-3.03}$	$74.6^{+3.22}_{-3.20}$	$75.16^{+3.39}_{-3.51}$
$\Omega_{\text{MO}}h^2$	$0.160^{+0.043}_{-0.041}$	$0.164^{+0.042}_{-0.038}$	$0.133^{+0.018}_{-0.019}$	$0.136^{+0.017}_{-0.016}$	$0.138^{+0.018}_{-0.017}$
θ	1.033 ± 0.005	1.032 ± 0.004	1.035 ± 0.004	1.035 ± 0.003	$1.035^{+0.003}_{-0.004}$
τ	0.087 ± 0.014	$0.085^{+0.012}_{-0.013}$	$0.086^{+0.006}_{-0.007}$	0.084 ± 0.006	$0.085^{+0.006}_{-0.007}$
Ω_Λ	0.725 ± 0.032	$0.716^{+0.017}_{-0.016}$	$0.723^{+0.028}_{-0.027}$	$0.714^{+0.016}_{-0.015}$	0.715 ± 0.015

tiene menos incertidumbre, se obtiene para la combinación *WMAP7* + *HST*.

Cabe destacar que durante las corridas se mantuvo la consistencia de *BBN* ya que consideramos que el valor de la proporción de Helio no debe cambiar mucho durante esa época, aunque presente degeneración con N_{eff} . En las figuras 6.15, 6.17, 6.16, 6.18 y 6.19 se muestran los contornos de confianza a 1σ y 2σ para los conjuntos de datos antes mencionados. Se observan ahí los parámetros N_{eff} , $\Omega_{DM}h^2$, H_0 , θ y Y_p . Además, se puede ver que la degeneración de Y_p con N_{eff} se mantiene alrededor de la línea de consistencia, tal como se muestra en la figura 6.3 donde se analiza el caso donde no hay consistencia en la época de *BBN* y por ende Y_p y N_{eff} tienen comportamientos completamente diferentes; compárese la figura 6.3 con el panel inferior izquierdo de la figura 6.15. Sin embargo, debido a las restricciones impuestas sobre esta época, concentramos nuestro análisis para el caso en el que dicha consistencia se mantiene.

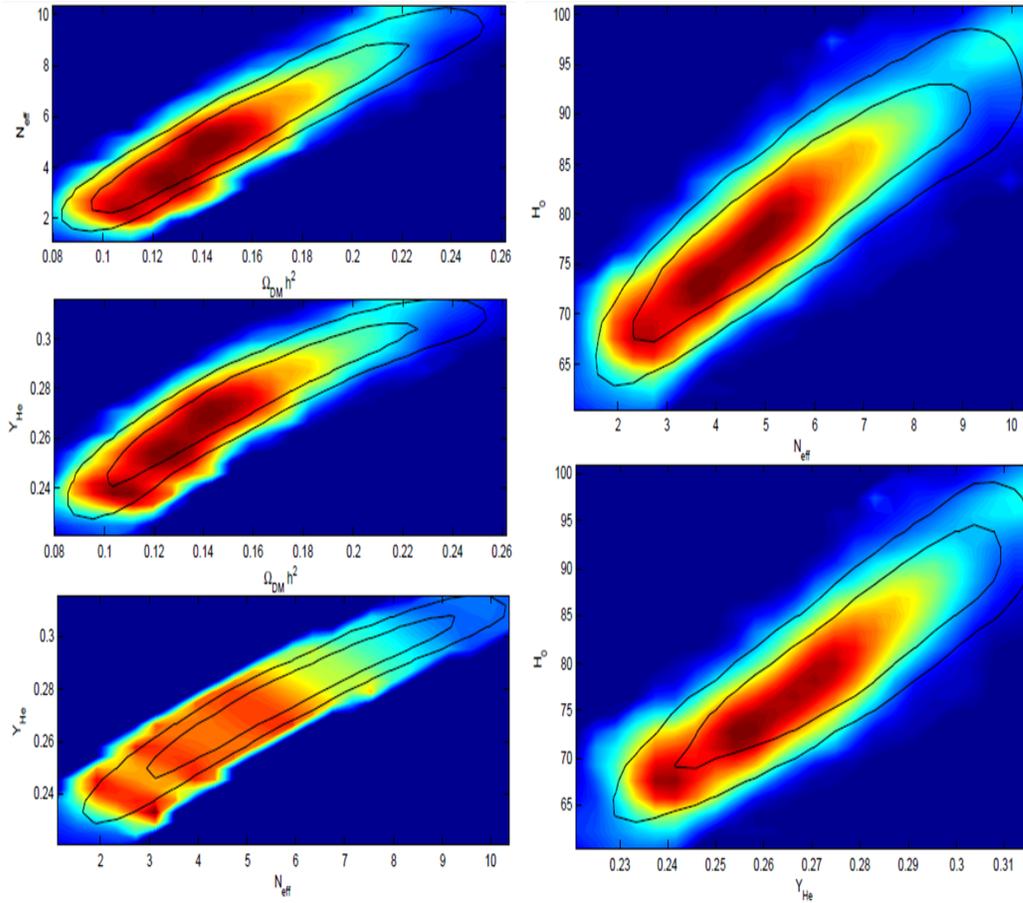


Figura 6.15: Contornos de confianza a 1σ y 2σ de los parámetros cosmológicos: N_{eff} , Y_p , $\Omega_{\text{DM}} h^2$ y H_0 , considerando N_{eff} y Y_p variables con los datos de *WMAP7*.

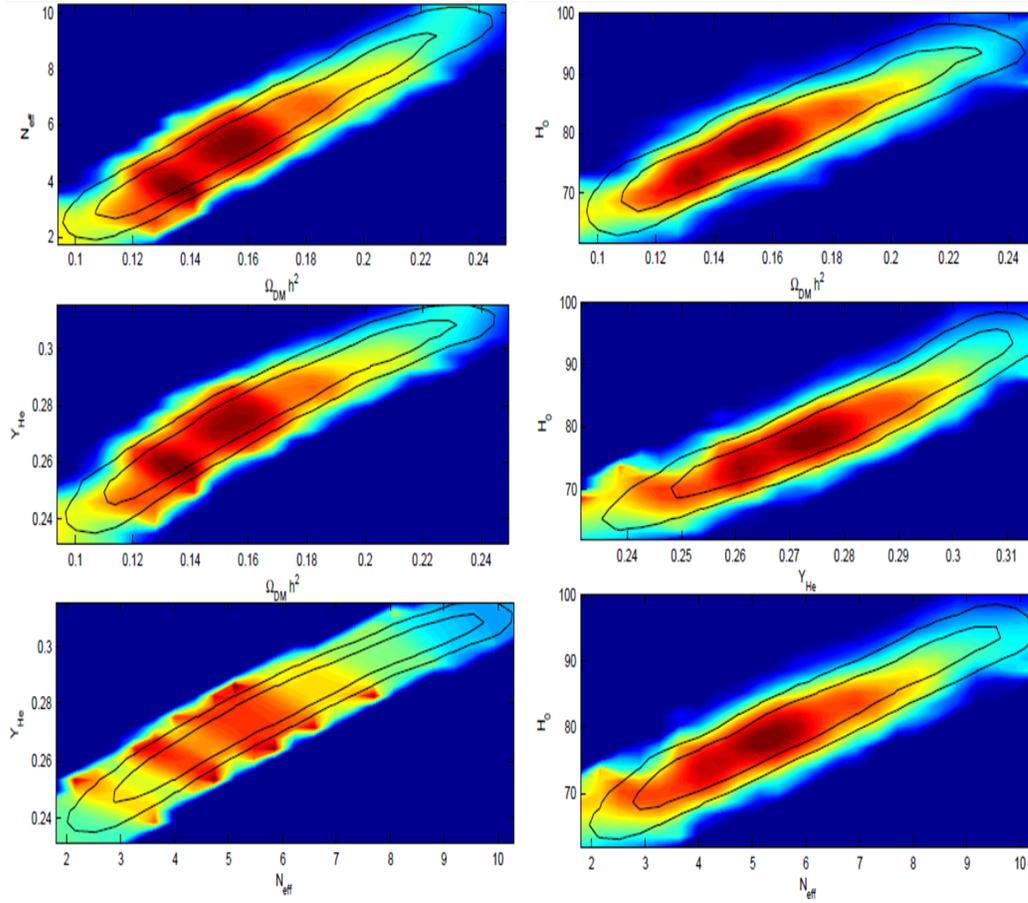


Figura 6.16: Contornos de confianza a 1σ y 2σ de los parámetros cosmológicos: N_{eff} , Y_p , $\Omega_{\text{DM}} h^2$ y H_0 , considerando N_{eff} y Y_p variables con los datos de *WMAP7* + *BAO*.

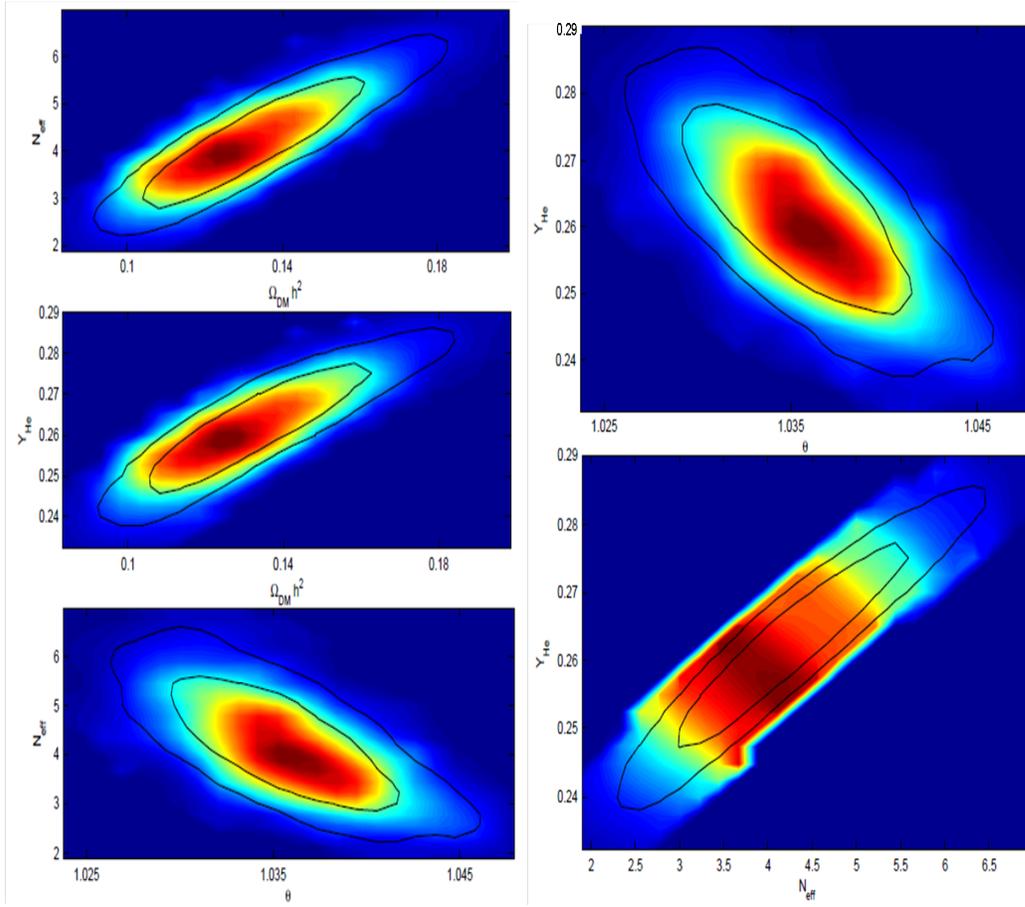


Figura 6.17: Contornos de confianza a 1σ y 2σ de los parámetros cosmológicos: N_{eff} , Y_p , $\Omega_{DM} h^2$ y θ , considerando N_{eff} y Y_p variables con los datos de *WMAP7 + HST*.

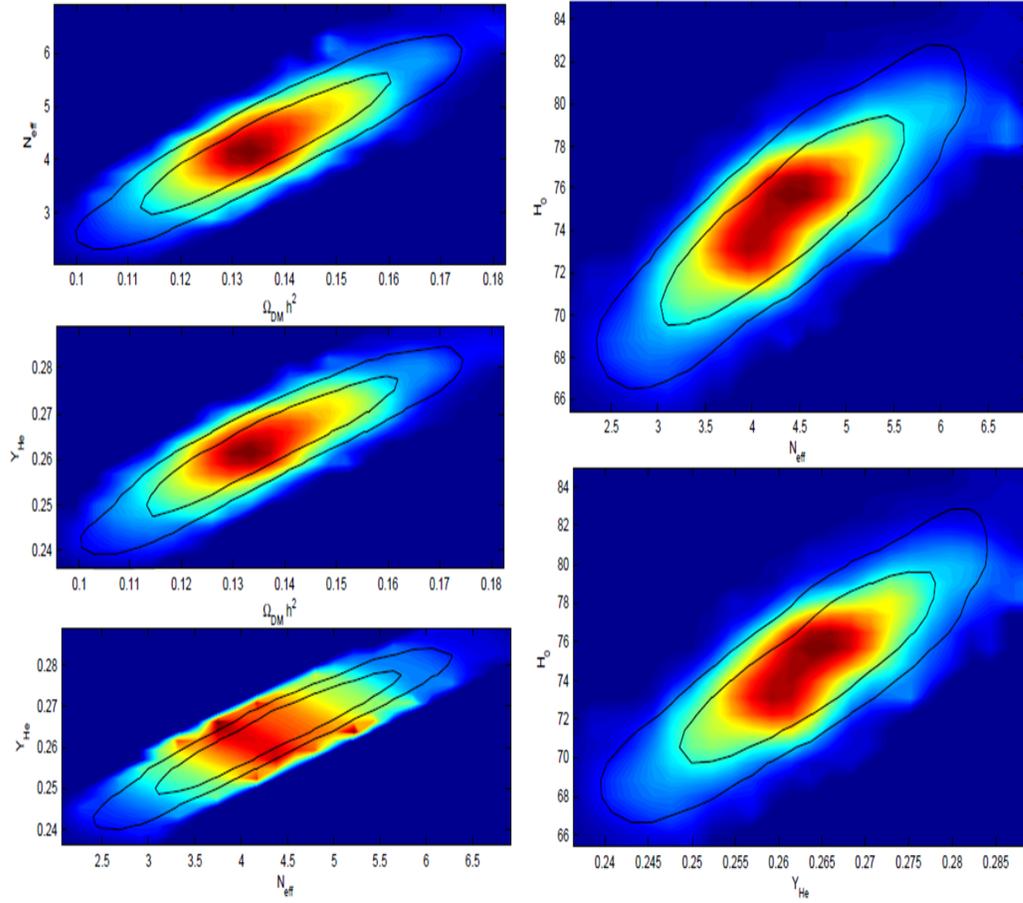


Figura 6.18: Contornos de confianza a 1σ y 2σ de los parámetros cosmológicos: N_{eff} , Y_p , $\Omega_{\text{DM}} h^2$ y H_0 , considerando N_{eff} y Y_p variables con los datos de *WMAP7* + *BAO* + *HST*.

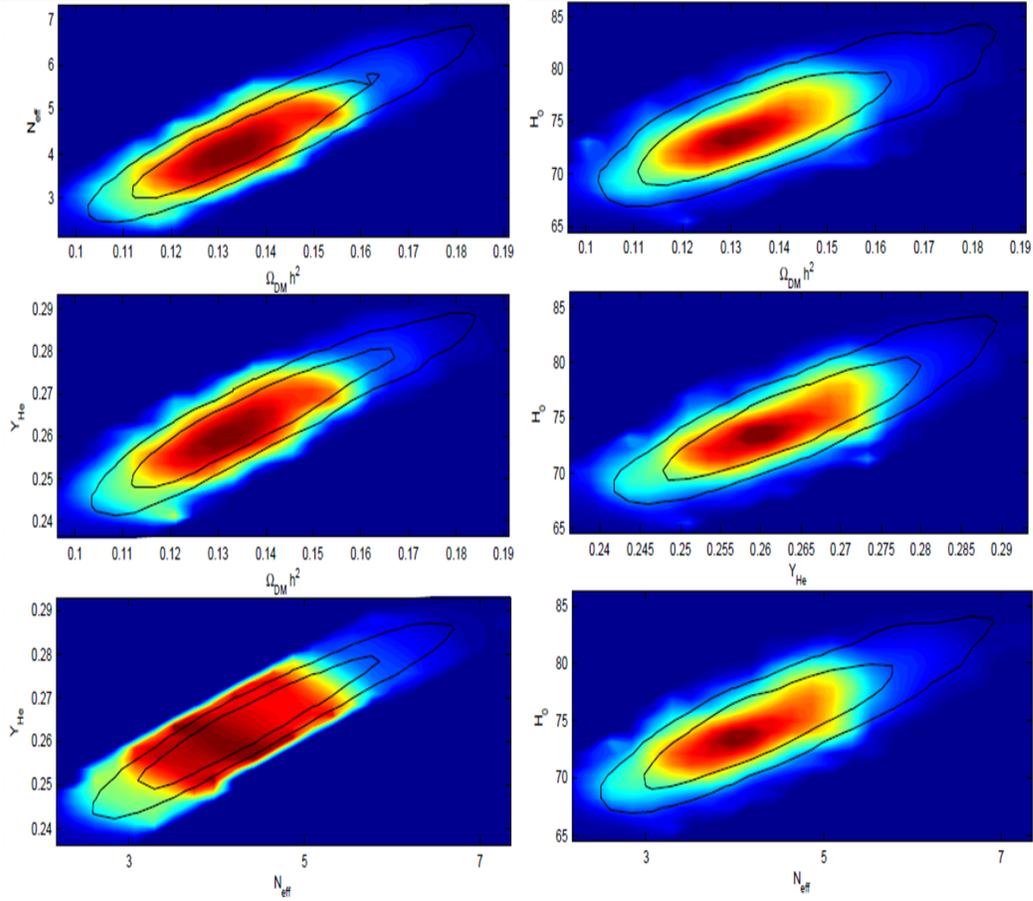


Figura 6.19: Contornos de confianza a 1σ y 2σ de los parámetros cosmológicos: N_{eff} , Y_p , $\Omega_{DM}h^2$ y H_0 , considerando N_{eff} y Y_p variables con los datos de *WMAP7* + *BAO* + *HST* + *SN*.

Conclusiones

El entendimiento del Universo en todo su conjunto puede ser complicado, aunque bajo ciertas aproximaciones resulta más sencillo. Es en ese sentido que se realizó el presente trabajo, tomando en cuenta ciertas consideraciones acerca del Universo actual, así como el primigenio y se llegó a entender a grandes rasgos las implicaciones de la existencia de la *Radiación Oscura* en los parámetros del modelo estándar de cosmología moderna Λ CDM.

Recapitulando brevemente, podemos decir que en el capítulo 1 se plantearon los resultados observacionales que nos introducen a los diversos parámetros que describen la dinámica en el Universo, el cual ha estado en expansión y desde hace algún tiempo, se encuentra en expansión acelerada.

En el capítulo 2 se explicó el formalismo teórico del cual parte el modelo estándar de cosmología moderna Λ CDM que se basa principalmente en la Relatividad General de Einstein, así como en la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Se hizo mención de la importancia de la homogeneidad e isotropía para poder describir de manera eficaz el comportamiento del Universo a gran escala. De igual manera se explicó brevemente el papel de la energía oscura dentro de la dinámica universal, haciendo énfasis en la constante cosmológica de Einstein Λ . De igual modo, se hizo una breve introducción a los modelos de quintaesencia como alternativa al modelo estándar para explicar la dinámica cosmológica.

En la sección correspondiente al capítulo 3 se trataron las observaciones que evidencian la existencia de la energía oscura, la cual es la encargada de la expansión acelerada del Universo en la época actual. Igualmente se hizo incapié en las restricciones que imponen tanto las supernovas Ia como las estructuras a gran escala, *EGE*, la radiación cósmica de fondo de microondas, *RCFM*, para los modelos que pretendan explicar la dinámica universal.

En el capítulo 4 se explicó, desde la termodinámica, el comportamiento del Universo primigenio. Además, se hizo mención de las abundancias cósmicas provenientes de la nucleosíntesis primordial, las cuales constituyen a su vez, una posible restricción para el valor de N_{eff} .

En el siguiente capítulo se hizo una breve introducción a la teoría de perturbaciones cosmológicas usando la norma newtoniana. Desde esta perspectiva, se explicó el comportamiento tanto de la *RCFM* como de las *BAO* y se mostró la física de tales fenómenos.

Finalmente se presentó en el capítulo 6 el concepto de *Radiación Oscura*, el cual se ve reflejado directamente mediante el parámetro N_{eff} y representa a los

grados efectivos de libertad relativistas. Dicho parámetro tiene una naturaleza aún desconocida, pues no se sabe que clase de partículas o campos puedan estarlo originando, siendo los neutrinos estériles uno de los posibles candidatos para explicarlo. De ser neutrinos estériles relativistas, éstos se deberían comportar como neutrinos desde el punto de vista de la teoría de perturbaciones cosmológicas. Es por ello que se hizo referencia a las ecuaciones perturbativas (6.18), (6.19), (6.20), (6.21) donde se encuentra implícitamente el parámetro de los grados de libertad de neutrinos N_{eff} el cual, si varía de su valor estándar $N_{\text{eff}} = 3.046$, durante la época de la radiación, modifica los parámetros cosmológicos, así como el espectro de potencias, como se explicó en la figura 6.2.

Sin embargo, no hay datos suficientes para saber si su origen viene directamente de los neutrinos estériles que obedecen las ecuaciones perturbativas a ese nivel, por lo que ésta sigue siendo hasta el momento una hipótesis. Es por ello que el presente análisis se enfocó en los efectos de la radiación oscura, ya que este tipo de radiación influye de manera considerable en los parámetros del modelo ΛCDM , en especial, existe una degeneración entre la densidad de radiación, ω_{rad} , ec. (6.1) con la densidad de materia total ω_m para una z_{eq} fija (ya que este valor está bien determinado por las mediciones) como se vio en la ec. (6.23), lo que conlleva a una degeneración directa entre N_{eff} y H_0 . Incrementar N_{eff} aumenta las abundancias de cúmulos que son sensibles a la amplitud del espectro de potencias en escalas ~ 10 Mpc, debido a que esto nos lleva a un mayor ω_m (a z_{eq} fija) que se traduce en una disminución de la razón ω_b/ω_m . La disminución en esta razón impulsa la formación de estructura a escalas más pequeñas que 150 Mpc, debido a la disminución del apoyo de presión sentido por la materia antes de la recombinación.

Así mismo, existe una degeneración entre N_{eff} y la proporción de Helio, Y_p , aunque todavía esta degeneración en la época de *BBN* se encuentra en discusión. Es en ese sentido eso que resulta importante ver cuáles mediciones cosmológicas son las que rompen tales degeneraciones y de esta manera constreñir el valor que adquiere la *Radiación Oscura*.

Posterior al análisis, se presentaron los resultados seleccionados provenientes de las múltiples corridas del programa CosmoMC. En esta parte se muestran las ya mencionadas degeneraciones que impone N_{eff} sobre los demás parámetros, en especial sobre H_0 . Se vió que debido a la manera en cómo escalan las observables de *BAO*, estas mediciones no constriñen los valores para la *Radiación Oscura* y por el contrario aumentan las degeneraciones e incertidumbre con los valores de H_0 . En cambio, mediciones del *HST* y *SN* son más eficaces al momento de romper esta degeneración, así como para constreñir los parámetros antes mencionados, con lo que se obtuvo un valor de $N_{\text{eff}} = 4.3_{-0.82}^{+0.83}$, es decir, con aproximadamente un grado extra relativista, tal como lo sugiere la literatura estudiada. Además, arrojan un valor para la constante de Hubble en la actualidad de $H_0 = 74.55_{-3.27}^{+3.24}$, el cual corresponde a una edad del Universo $t_0 = 12.86_{-0.57}^{+0.55}$ giga años, que aunque es un poco baja, su incertidumbre se encuentra en el intervalo permitido comparándolo con edades de cúmulos globulares que sugieren una edad del Universo $t_0 \geq 11 - 12$ giga

años. Dichos resultados se obtuvieron con la combinación de las mediciones de 7 años de *WMAP* más mediciones tanto del parámetro $H(z)$ del *HST*, como de supernovas Ia y mediciones de Wiggle-z y *SDSS* para *BAO*.

Por otro lado, se observó que incluir multipolos ℓ grandes para las mediciones de la *RCFM* tienen un efecto positivo al momento de constreñir los parámetros que presentan grandes desviaciones estándar. Incluso para las mediciones de *BAO*, los ℓ grandes propiciaron mejoría en las constricciones, que se puede deber al efecto Sachs-Wolfe integrado tempranamente o al fenómeno del amortiguamiento de Silk, aunque la causa aún se encuentra en discusión. Fue así que el valor de la radiación oscura se constriñó a $N_{\text{eff}} = 4.03_{-0.76}^{+0.74}$, el cual correspondió a la combinación *WMAP7* + *ACBAR* + *HST* + *SN*, es decir, las mediciones de 7 años de *WMAP* más datos de multipolos grandes de *ACBAR*, así como mediciones del parámetro $H(z)$ del telescopio espacial Hubble y de distancias lumínicas de supernovas Ia. De la misma forma, este conjunto de datos constriñó el valor para la constante de Hubble en $H_0 = 74.86_{-2.94}^{+2.98}$, el cual se traduce en una edad del Universo $t_0 = 12.96 \pm 0.51$ giga años la cual es aún mayor y más consistente con las cotas impuestas por los cúmulos globulares más antiguos.

Para el caso en que se permite que tanto la proporción de Helio, Y_p , como N_{eff} varíen, se observó que el valor de los parámetros obtenidos para el análisis donde sólo cambia N_{eff} no difiere de manera considerable cuando se varía Y_p . Sin embargo, cabe destacar que el introducir grados extra relativistas produce una mayor proporción de Helio, pasando de ser su valor estándar $Y_p \approx 0.24$ a $Y_p \sim 0.26 - 0.27$, tal como lo sugiere el análisis de la sección 6.4, por lo que hay concordancia con lo establecido en la literatura. A pesar de que durante la época de *BBN* es posible que Y_p y N_{eff} varíen, es una consideración que aún está en discusión por la comunidad científica, debido a las incertidumbres en las mediciones de Y_p . De manera estándar, se considera que el valor de estos parámetros durante *BBN* no debe cambiar mucho, por lo que en nuestro análisis se consideró siempre la consistencia en *BBN*.

Los datos de *BAO* no fueron de mucho beneficio para romper las degeneraciones que impone N_{eff} , a pesar de ser excelentes reglas estándar como se vio en la sección 5.3, debido a que los parámetros de *BAO* son variables de la razón de las distancias D_V y r_s y éstas cancelan la contribución que puede ser medida por *BAO*, es decir el parámetro $r_s \omega_{rad}^{1/2}$. La misma cancelación no ocurre para las mediciones de distancia que calibran de manera independiente de la *RCFM* como en el caso de la constante de Hubble. Esto ocasionó que con *BAO* aumentara la degeneración con N_{eff} , mientras que mediciones de $H(z)$ del *HST* y supernovas Ia si pudieron romper dichas degeneraciones. Futuras observaciones de $H(z)$ y distancias lumínicas de supernovas Ia, tendrán un efecto en romper aún más las incertidumbres en N_{eff} que introduce *BAO*. Confiamos en que los resultados del satélite Planck en 2013, los cuales incuyen mediciones de ℓ grandes, puedan brindar nuevas posibilidades para constreñir más el valor de N_{eff} así como la época de aparición de la *Radiación Oscura* y por medio de experimentos con neutrinos desentrañar su naturaleza y origen.

Apéndices

Apéndice A

Detalles de CAMB y CosmoMC

A.1. Los programas CAMB y CosmoMC

A.1.1. CAMB (Code for Anisotropies in the Microwave Background)

Código para modelar las anisotropías en la *RCFM* elaborado por Antony Lewis [71] y Anthony Challinor en lenguaje de Fortran90 y usando la norma asíncrona¹. Originalmente basado en CMBFAST, desarrollado por Uros Seljak y Matias Zaldarriaga, a su vez basado en el código Boltzman escrito por Edmund Bertschinger, Chung-Pei Ma y Paull Bode.

CAMB es a también usado como parte del paquete de estimación de parámetros CosmoMC.

Características

- Compatible con modelos cerrados, abiertos o planos.
- Modos escalares, vectoriales y tensoriales incluyendo polarización.
- C_ℓ , funciones de transferencia de materia, espectro de potencias de la materia y σ_8 como datos de salida.
- Cálculos rápidos con una precisión de $\sim 0.3 - 0.1\%$ con niveles controlables de precisión.
- Código en Fortran 90 estructurado y extendible con facilidad.
- Un apoyo eficiente para neutrinos masivos.

¹Una norma que permite al observador estar situado en el marco de referencia de la materia oscura, de tal manera que su velocidad con respecto a ella es cero. Esta norma es usada por los códigos CMBFAST y CAMB para resolver las ecuaciones perturbativas cosmológicas [72].

- Cálculos absolutos de un espectro de potencias inicialmente normalizado.
- Paralelizado internamente para una rápida ejecución en máquinas con multiprocesadores.
- CAMB se puede usar con CosmoMC para estimación de parámetros por el método de Monte Carlo.
- Ecuación de estado constante o variable.
- Cálculos de lentes del espectro de potencias de la RCFM.
- Permite las condiciones iniciales generales adiabáticas o de isocurvatura.
- Cálculos precisos de todo el espacio de las lentes del espectro de potencias.
- Interfaz integrada a HALOFIT para ajustes no lineales.
- Permite masas de neutrino arbitrariamente desdobladas.

A.1.2. CosmoMC (Cosmological Monte Carlo)

CosmoMC es un programa basado en Fortran90 y usa Cadenas de Markov con el método de Monte-Carlo (MCMC) que se encarga de explorar el espacio de parámetros cosmológicos, junto con un código para analizar las muestras de Monte-Carlo. Se basa en CAMB para brindar la parte teórica del espectro de potencias de la materia. El programa puede ser corrido en una máquina con múltiples procesadores y brindar buenos resultados en un par de horas. De igual manera se puede correr en un *cluster* [71].

Por defecto, CosmoMC usa un algoritmo simple de Metropolis, pero hay opción de explorar métodos más complicados de exploración del espacio de parámetros. El programa toma como entradas estimados de los valores centrales y las incertidumbres en los diversos parámetros a analizar. La densidad propuesta puede utilizar la información sobre las correlaciones de los parámetros a partir de una matriz de covarianza suministrada: el uso de una mejorará significativamente el rendimiento.

Hay dos programas suministrados, CosmoMC y Getdist. El primero realiza la parte de Monte-Carlo y produce un conjunto de archivos .txt que contiene cadenas y archivos de salida (los archivos binarios .data que contiene el espectro de potencias teórico de la RCFM). El programa Getdist analiza los archivos .txt calculando estadísticas y los archivos de salida requeridos para los gráficos en 1D, 2D y 3D.

Parametrizaciones

El rendimiento de MCMC puede ser mejorado al usar parámetros que tengan una distribución cercana a ser Gaussiana. Los parámetros por defecto son:

1. $\Omega_b h^2$: la densidad física de bariones.
2. $\Omega_{MO} h^2$: la densidad física de materia oscura (materia oscura + neutrinos masivos).
3. θ : 100* (la razón de (aprox.) el horizonte de sonido con la distancia diametral angular).
4. τ : la profundidad óptica de la reionización.
5. Ω_k : la densidad correspondiente a la curvatura.
6. f_ν : la fracción de densidad de materia oscura en forma de neutrinos masivos.
7. w : la ecuación de estado (asumida constante) de la energía oscura (también denominada quintaesencia).
8. n_s : la escala del índice espectral.
9. n_t : el tensor del índice espectral.
10. n_{run} : las corridas del índice escalar espectral.
11. $\log A$: $\ln[10^{10} A_s]$ donde A_s es la potencia del superhorizonte primordial en la perturbación de curvatura a una escala de $0.05 Mpc^{-1}$.
12. r : la razón A_t/A_s , donde A_t es la potencia primordial en la parte transversa del tensor métrico sin traza.
13. asz : A_{sz} , una normalización (asumida como independiente de otros parámetros)

Parámetros como H_0 y Ω_Λ son derivados de los parámetros antes mencionados. Usar θ en lugar de H_0 es más eficiente ya que está mucho menos correlacionado con otros parámetros. Hay una prioridad implícita $40 < H_0 < 100$. Los archivos .txt que contienen las listas de cadenas derivan los parámetros que surgen de los 13 parámetros base. Por defecto estos son: 14: Ω_Λ , 15: edad del universo, 16: Ω_m , 17: σ_8 , 18: z_{rec} , 19: r_{10} y 20: H_0 . r_{10} es la razón del tensor escalar C_ℓ a $\ell = 10$.

Las prioridades

Las prioridades que se encuentran por defecto en los parámetros son:

- $40 < H_0 < 100$
- $-0.3 < \Omega_k < 0.3$
- $10 \text{Gaños} < \text{edad} < 20 \text{Gaños}$

No hay prioridad en la positividad de Ω_Λ

Toda la información detallada sobre CAMB y CosmoMC se encuentra en la página oficial de A. Lewis [71] en la parte de cosmología.

A.2. Cadenas de Markov en el método de Monte-Carlo (MCMC).

El muestreo MCMC proporciona una forma muy eficiente de generar una lista de muestras de una distribución de probabilidad. Todo lo que se requiere es una función para calcular la probabilidad dado un conjunto de valores de parámetros. Una sola muestra es una coordenada en el $n - D$ espacio de parámetros, y el método de muestreo asegura que la densidad de número de las muestras sea asintóticamente proporcional a la densidad de probabilidad [65].

A.2.1. El algoritmo Metrópolis-Hastings

El algoritmo que se usa para generar las muestras para su posterior distribución usando Cadenas de Markov es el algoritmo de Matrópolis-Hastings. Una Cadena de Markov se mueve de su posición en el espacio de parámetros θ_1 a su siguiente posición θ_2 , con una probabilidad de transición $T(\theta_1, \theta_2)$, donde θ etiqueta a un vector con valores de parámetros. El kernel de transición Metrópolis-Hastings $T(\theta_1, \theta_2)$, es escogido de tal manera de que la Cadena de Markov tiene una distribución estacionaria y asintótica igual a $P(\theta)$, donde $P(\theta)$ es la distribución de la que deseamos muestrear. Esto es hecho usando una densidad de distribución arbitraria propuesta $q(\theta_n, \theta_{n+1})$ para proponer un nuevo punto θ_{n+1} dado, la cadena ya se encuentra en θ_n .

Si la cadena comienza en una posición aleatoria en el espacio de parámetros, le tomará algo de tiempo equilibrarse antes de que comience la muestra de la distribución posterior. Después de ese tiempo, cada posición de la cadena está en una muestra correlacionada de la posterior. La correlación es particularmente obvia si la propuesta no es aceptada, es decir que hay dos o más muestras exactamente en el mismo punto. Sin embargo, utilizando solamente posiciones ocasionales (adelgazando la cadena), se puede dar el tiempo a la cadena para moverse a una posición no correlacionada en el espacio de parámetros y es así que se obtienen muestras independientes. Las pequeñas correlaciones residuales entre las muestras no son de importancia en casi todos los cálculos, aunque producen un error de Monte-Carlo en los resultados más difíciles de evaluar.

Para saber más del método de MCMC se puede revisar el trabajo de A. Lewis y S. Bridle [65] donde explican a detalle su funcionamiento y su papel en el programa CosmoMC.

Bibliografía

- [1] H. Karttunen, P. Kroger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner, *Fundamental Astronomy*, (Springer-Verlag Berlin Heidelberg Editorial, 2007, 5. Edition).
- [2] Ta-Pei Cheng, *Relativity Gravitation and Cosmology*, (Oxford Master Series in Particle Physics, Astrophysics, and Cosmology, 2005, 1. Edition)
- [3] C. Marinoni, J. Bel and A. Buzzi, “The Scale of Cosmic Isotropy,” arXiv:1205.3309 [astro-ph.CO].
- [4] L. Amendola and S. Tsujikawa, *Dark Energy, Theory and Observations*, (Cambridge University Press , 2010, 1. Edition).
- [5] A. A. Penzias and R. W. Wilson, “A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s,” *Astrophys. J.* **142**, 419 (1965).
- [6] J. L. Cervantes-Cota, S. De Lope Amigo, *Cosmología hoy: una revisión*, (Revista Integración, vol 25, No 2 2007, pág. 99-129).
- [7] <http://fisicaacustica.blogia.com/2008/septiembre.php>, 2008
- [8] W. Hu and M. White, *La sinfonía cósmica*, (Scientific American Latinoamérica, La nueva cosmología, año 2 Num. 21).
- [9] E. Komatsu *et al.* [WMAP Collaboration], “Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation,” *Astrophys. J. Suppl.* **192**, 18 (2011) [arXiv:1001.4538 [astro-ph.CO]].
- [10] K. Krisciunas, “The Usefulness of Type Ia Supernovae for Cosmology - a Personal Review,” arXiv:1205.6835 [astro-ph.CO].
- [11] J. L. Cervantes-Cota, “Los más grandes misterios de la física contemporánea: materia y energía oscura en el universo,” Departamento de Física, Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares.
- [12] R. M. Wald, *General Relativity*, (The University of Chicago Press , 1984, 1. Edition).
- [13] S. Carroll, *Spacetime and Geometry*, (Addison Wesley , 2004, 1. Edition).

- [14] A. Aviles, A. Bastarrachea-Almodovar, L. Campuzano and H. Quevedo, “Extending the generalized Chaplygin gas model by using geometrothermodynamics,” *Phys. Rev. D* **86**, 063508 (2012) [arXiv:1203.4637 [gr-qc]].
- [15] J. Magueijo, *Más rápido que la velocidad de la luz*, (Fondo de cultura económica, 2006, 1. edición).
- [16] Araujo Vitor, Pacifico Maria Jose, “Lorenz-like chaotic attractors revisited,” arXiv:0804.3617v2 [math.DS].
- [17] G. Börner, *The Early Universe*, (Springer-Verlag, 2003, 4. Edition).
- [18] J. L. Cervantes-Cota, *Notas del curso Cosmología Física* (2009)
- [19] <http://map.gsfc.nasa.gov/media/060915/index.html>, 2012.
- [20] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, “Dynamics of dark energy,” *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1753 (2006) [hep-th/0603057].
- [21] J.L. Cervantes-Cota *Induced Gravity and Cosmology*, Tesis Doctoral, Konstanz University, (1996).
- [22] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, (Massachusetts Institute of Technology, 1972, 1. Edition).
- [23] G. Steigman, “Primordial Nucleosynthesis After WMAP,” arXiv:0909.3270 [astro-ph.CO].
- [24] J. L. Cervantes-Cota and G. Smoot, “Cosmology today-A brief review,” *AIP Conf. Proc.* **1396**, 28 (2011) [arXiv:1107.1789 [astro-ph.CO]].
- [25] E. P. B. A. Thushari, R. Nakamura, M. Hashimoto and K. Arai, “Brans-Dicke model constrained from Big Bang nucleosynthesis and magnitude redshift relations of Supernovae,” arXiv:1007.1060 [astro-ph.CO].
- [26] C.-P. Ma and E. Bertschinger, “Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal Newtonian gauges,” *Astrophys. J.* **455**, 7 (1995) [astro-ph/9506072].
- [27] B. A. Bassett and R. Hlozek, “Baryon Acoustic Oscillations,” *Dark Energy*, Ed. P. Ruiz-Lapuente (2010, ISBN-13: 9780521518888) [arXiv:0910.5224 [astro-ph.CO]].
- [28] D. J. Eisenstein, H.-j. Seo and M. J. White, 1, “On the Robustness of the Acoustic Scale in the Low-Redshift Clustering of Matter,” *Astrophys. J.* **664**, 660 (2007) [astro-ph/0604361].
- [29] D. J. Eisenstein and C. L. Bennett, “Cosmic sound waves rule,” *Phys. Today* **61N4**, 44 (2008).

- [30] M. Archidiacono, E. Calabrese and A. Melchiorri, “The Case for Dark Radiation,” *Phys. Rev. D* **84**, 123008 (2011) [arXiv:1109.2767 [astro-ph.CO]].
- [31] G. Mangano, A. Melchiorri, O. Mena, G. Miele and A. Slosar, “Present bounds on the relativistic energy density in the Universe from cosmological observables,” *JCAP* **0703**, 006 (2007) [astro-ph/0612150].
- [32] K. Ichikawa, M. Kawasaki, K. Nakayama, M. Senami and F. Takahashi, “Increasing effective number of neutrinos by decaying particles,” *JCAP* **0705**, 008 (2007) [hep-ph/0703034 [HEP-PH]].
- [33] M. Kaplinghat and M. S. Turner, “Precision cosmology and the density of baryons in the universe,” *Phys. Rev. Lett.* **86**, 385 (2001) [astro-ph/0007454].
- [34] S. H. Hansen, G. Mangano, A. Melchiorri, G. Miele and O. Pisanti, “Constraining neutrino physics with BBN and CMBR,” *Phys. Rev. D* **65**, 023511 (2002) [astro-ph/0105385].
- [35] J. A. Peacock, “Large scale structure and matter in the universe,” *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A* **361**, 2479 (2003) [astro-ph/0309238].
- [36] K. Ichikawa, M. Kawasaki and F. Takahashi, “Constraint on the Effective Number of Neutrino Species from the WMAP and SDSS LRG Power Spectra,” *JCAP* **0705**, 007 (2007) [astro-ph/0611784].
- [37] P. Crotty, J. Lesgourgues and S. Pastor, “Measuring the cosmological background of relativistic particles with WMAP,” *Phys. Rev. D* **67**, 123005 (2003) [astro-ph/0302337].
- [38] S. Bashinsky, “Mapping Cosmological Observables to the Dark Kinetics,” Submitted to: *Astrophys.J.* [arXiv:0707.0692 [astro-ph]].
- [39] Z. Hou, R. Keisler, L. Knox, M. Millea and C. Reichardt, “How Additional Massless Neutrinos Affect the Cosmic Microwave Background Damping Tail,” arXiv:1104.2333 [astro-ph.CO].
- [40] S. Dodelson, A. Melchiorri and A. Slosar, “Is cosmology compatible with sterile neutrinos?,” *Phys. Rev. Lett.* **97**, 041301 (2006) [astro-ph/0511500].
- [41] K. N. Abazajian, M. A. Acero, S. K. Agarwalla, A. A. Aguilar-Arevalo, C. H. Albright, S. Antusch, C. A. Argüelles and A. B. Balantekin *et al.*, “Light Sterile Neutrinos: A White Paper,” arXiv:1204.5379 [hep-ph].
- [42] A. Coc, “Primordial Nucleosynthesis,” arXiv:1208.4748 [nucl-ex].

- [43] [ALEPH and DELPHI and L3 and OPAL and SLD and LEP Electroweak Working Group and SLD Electroweak Group and SLD Heavy Flavour Group Collaborations], Phys. Rept. **427**, 257 (2006) [hep-ex/0509008].
- [44] Y. I. Izotov and T. X. Thuan, “The primordial abundance of 4He: evidence for non-standard big bang nucleosynthesis,” *Astrophys. J.* **710**, L67 (2010) [arXiv:1001.4440 [astro-ph.CO]].
- [45] E. Aver, K. A. Olive and E. D. Skillman, “A New Approach to Systematic Uncertainties and Self-Consistency in Helium Abundance Determinations,” *JCAP* **1005**, 003 (2010) [arXiv:1001.5218 [astro-ph.CO]].
- [46] E. Aver, K. A. Olive and E. D. Skillman, “Mapping systematic errors in helium abundance determinations using Markov Chain Monte Carlo,” *JCAP* **1103**, 043 (2011) [arXiv:1012.2385 [astro-ph.CO]].
- [47] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.* [MiniBooNE Collaboration], “Event Excess in the MiniBooNE Search for $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ Oscillations,” *Phys. Rev. Lett.* **105**, 181801 (2010) [arXiv:1007.1150 [hep-ex]].
- [48] G. Mention, M. Fechner, T. Lasserre, T. A. Mueller, D. Lhuillier, M. Cri-bier and A. Letourneau, “The Reactor Antineutrino Anomaly,” *Phys. Rev. D* **83**, 073006 (2011) [arXiv:1101.2755 [hep-ex]].
- [49] G. Mangano, G. Miele, S. Pastor, M. Peloso, “A precision calculation of the effective number of cosmological neutrinos,” *Phys. Rev. B* **534**, 8 (2002) [astro-ph/0111408].
- [50] S. Bashinsky and U. Seljak, “Signatures of relativistic neutrinos in CMB anisotropy and matter clustering,” *Phys. Rev. D* **69**, 083002 (2004) [astro-ph/0310198].
- [51] D. J. Eisenstein and M. J. White, “Theoretical uncertainty in baryon oscillations,” *Phys. Rev. D* **70**, 103523 (2004) [astro-ph/0407539].
- [52] R. Keisler, C. L. Reichardt, K. A. Aird, B. A. Benson, L. E. Bleem, J. E. Carlstrom, C. L. Chang and H. M. Cho *et al.*, “A Measurement of the Damping Tail of the Cosmic Microwave Background Power Spectrum with the South Pole Telescope,” *Astrophys. J.* **743**, 28 (2011) [arXiv:1105.3182 [astro-ph.CO]].
- [53] Z.-K. Guo and Y.-Z. Zhang, “Primordial power spectrum versus extension parameters beyond the standard model,” *Phys. Rev. D* **85**, 103519 (2012) [arXiv:1201.1538 [astro-ph.CO]].
- [54] R. Durrer, *The cosmic microwave background*, (Cambridge University Press, 2008, 1. Edition)

- [55] K. Ichikawa, T. Sekiguchi and T. Takahashi, “Probing the Effective Number of Neutrino Species with Cosmic Microwave Background,” *Phys. Rev. D* **78**, 083526 (2008) [arXiv:0803.0889 [astro-ph]].
- [56] C. Boehm, M. J. Dolan and C. McCabe, “Increasing N_{eff} with particles in thermal equilibrium with neutrinos,” [arXiv:1207.0497 [astro-ph.CO]].
- [57] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, (Academic Press, 2003, 1. edition).
- [58] V. Simha and G. Steigman, “Constraining The Early-Universe Baryon Density And Expansion Rate,” *JCAP* **0806**, 016 (2008) [arXiv:0803.3465 [astro-ph]].
- [59] O. E. Bjaelde, S. Das and A. Moss, “Origin of Delta N_{eff} as a Result of an Interaction between Dark Radiation and Dark Matter,” arXiv:1205.0553 [astro-ph.CO].
- [60] M. Peimbert, V. Luridiana and A. Peimbert, “Revised Primordial Helium Abundance Based on New Atomic Data,” *Astrophys. J.* **666** (2007) 636 [astro-ph/0701580].
- [61] G. Steigman, “Neutrinos And Big Bang Nucleosynthesis,” arXiv:1208.0032 [hep-ph].
- [62] W. Sutherland, “On measuring the absolute scale of baryon acoustic oscillations,” arXiv:1205.0715 [astro-ph.CO].
- [63] F. de Bernardis, A. Melchiorri, L. Verde and R. Jimenez, “The Cosmic Neutrino Background and the Age of the Universe,” *JCAP* **0803**, 020 (2008) [arXiv:0707.4170 [astro-ph]].
- [64] S. Riemer-Sorensen, D. Parkinson, T. Davis and C. Blake, “Simultaneous constraints on the number and mass of relativistic species,” arXiv:1210.2131 [astro-ph.CO].
- [65] A. Lewis and S. Bridle, “Cosmological parameters from CMB and other data: A Monte Carlo approach,” *Phys. Rev. D* **66**, 103511 (2002) [astro-ph/0205436].
- [66] <http://pole.uchicago.edu/public/data/keisler11/>, 2012.
- [67] S. Joudaki, “Constraints on Neutrino Mass and Light Degrees of Freedom in Extended Cosmological Parameter Spaces,” arXiv:1202.0005 [astro-ph.CO].
- [68] S. Joudaki, K. N. Abazajian and M. Kaplinghat, “Are Light Sterile Neutrinos Preferred or Disfavored by Cosmology?,” arXiv:1208.4354 [astro-ph.CO].

- [69] E. Calabrese, M. Archidiacono, A. Melchiorri and B. Ratra, “The impact of a new median statistics H_0 prior on the evidence for dark radiation,” arXiv:1205.6753 [astro-ph.CO].
- [70] A. Smith, M. Archidiacono, A. Cooray, F. De Bernardis, A. Melchiorri and J. Smidt, “The Impact of Assuming Flatness in the Determination of Neutrino Properties from Cosmological Data,” Phys. Rev. D **85**, 123521 (2012) [arXiv:1112.3006 [astro-ph.CO]].
- [71] <http://cosmologist.info/>, 2012.
- [72] <http://cosmologist.info/notes/CAMB.pdf>, 2012.
- [73] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, (Princeton Series in , 2008, 2. Edition).
- [74] B. F. Schutz, *A first course in general relativity* , (Cambridge University Press 1985, Sixteenth printing 2004).
- [75] A. Liddle, *An introduction to modern cosmology* , (Wiley Editorial 2003, 2. Edition).
- [76] L. Bergstrom and A. Goobar, *Cosmology and particle astrophysics* , (Springer Editorial 2006, 2. Edition).
- [77] U. Seljak, A. Slosar and P. McDonald, “Cosmological parameters from combining the Lyman-alpha forest with CMB, galaxy clustering and SN constraints,” JCAP **0610**, 014 (2006) [astro-ph/0604335].
- [78] L. J. Hall and S. J. Oliver, “Why are neutrinos light? - An Alternative,” Nucl. Phys. Proc. Suppl. **137**, 269 (2004) [hep-ph/0409276].
- [79] M. Moresco, L. Verde, L. Pozzetti, R. Jimenez and A. Cimatti, “New constraints on cosmological parameters and neutrino properties using the expansion rate of the Universe to z 1.75,” arXiv:1201.6658 [astro-ph.CO].
- [80] J.-Q. Xia, H. Li, G.-B. Zhao and X. Zhang, “Determining Cosmological Parameters with Latest Observational Data,” Phys. Rev. D **78**, 083524 (2008) [arXiv:0807.3878 [astro-ph]].

Agradecimientos

Agradezco en este trabajo a todas las personas que me apoyaron tanto en mi formación profesional como en el ámbito humano. Principalmente agradezco a mi director de tesis, el Dr. Jorge Luis Cervantes Cota por inspirarme a desarrollarme en esta rama de la ciencia, la cosmología, así como su apoyo y enseñanzas durante el posgrado. Así mismo agradezco a mis tutores el Dr. Lukas Nellen y el Dr. Octavio Valenzuela por sus consejos y correcciones y al sinodal, el Dr. Axel de la Macorra por sus preguntas y comentarios. De igual manera agradezco al Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares por brindarme sus instalaciones durante el desarrollo de este trabajo, así como a la Universidad Nacional Autónoma de México por permitir desarrollarme durante la maestría. Cabe destacar que sin el apoyo de Conacyt no hubiera podido concluir satisfactoriamente mis estudios, por lo que le agradezco de la misma forma.

A su vez en este trabajo están muchas experiencias y enseñanzas de los amigos que conocí durante estos dos años, a los cuales les agradezco su amistad. Muchas gracias a mis padres y hermana por brindarme siempre su apoyo y entusiasmo durante mi formación. Pero sobre todo dedico este trabajo a Patricia Osuna y le agradezco la paciencia y el amor que me tuvo durante dos años a pesar de soportar la distancia. Sin duda ella me mostró en estos años muchas cosas acerca de mí mismo que en un posgrado no sería capaz de aprender.