UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

JUEGOS INFINITOS
CONJUNTOS DETERMINADOS E INDETERMINADOS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRA EN CIENCIAS

P R E S E N T A

CRISTINA VILLANUEVA SEGOVIA

DIRECTOR DE LA TESINA: DR. ÁNGEL TAMARIZ MASCARÚA

MÉXICO, D.F. OCTUBRE, 2012

Juegos Infinitos

Conjuntos Determinados e Indeterminados

Índice

Introducción

En este trabajo estudiaremos juegos que se llevan a cabo entre dos jugadores, el jugador I y el jugador II, antes de comenzar el juego deberá precisarse un conjunto X, conocido como el *conjunto de ajuste de cuentas*, cuyos elementos deberán ser sucesiones infinitas en un cierto conjunto A. A grandes rasgos, estos juegos consisten en que cada uno de los jugadores debe elegir, en cada *tirada*, un elemento del conjunto A; digamos que el jugador I, quien es el que tiene el primer turno, ha elegido el elemento $a_1 \in A$, entonces el jugador II debe elegir un elemto $a_2 \in A$, y así sucesivamente. En efecto, tal y como el título de este trabajo lo indica, los jugadores tendrán que jugar de esta forma eternamente, produciendo así una sucesión $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$; si esta sucesión pertenece al conjunto X entonces el jugador I será el ganador, en caso contrario es el jugador II quien gana el juego.

Lo que nos interesa es saber si existen condiciones sobre el conjunto X que nos permitan saber cuándo, en un juego de este tipo, alguno de los jugadores puede encontrar una forma estratégica de seleccionar sus tiradas que asegure su victoria, sin importar qué tiradas haga su oponente. Cuando esto ocurre decimos que el juego está determinado, o bien que el conjunto X es un conjunto determinado.

Caminando en esta dirección, este trabajo se centrará en dos resultados fundamentales; el primero, cuya demostración debemos a Donald A. Martin, establece que si el conjunto X es de Borel —bajo cierta topología en $A^{\mathbb{N}}$— entonces alguno de los dos jugadores tiene una forma de elegir sus tiradas que asegura su victoria. El segundo garantiza —bajo la hipótesis del axioma de elección— la existencia de conjuntos indeterminados, es decir, conjuntos en los que ninguno de los dos jugadores puede garantizar su victoria.

Por un lado, para probar el teorema de Martin, será necesario conocer un poco sobre jerarquías de Borel; por el otro, para poder probar la existencia de conjuntos indeterminados, necesitaremos trabajar en espacios polacos. Así que dedicamos el primer capítulo de este trabajo a introducir y desarrollar, de forma muy general, estos dos conceptos.

En el siguiente capítulo formalizaremos la definición de juego infinito, estrategias del juego y, obviamente, la de conjunto determinado; literalmente, este capítulo está dedicado a establecer las reglas del juego.

Habiendo dejado en claro cuáles son las reglas del juego, podemos dedicarnos a lo que nos interesa: el teorema de Martin, que probaremos en el tercer capítulo; y la existencia de conjuntos no determinados, que reservamos para el último capítulo.

Cabe mencionar que más allá del hecho concreto de que existen conjuntos no determinados, lo que nos interesa es estudiar la relación que existe entre las propiedades topológicas de un conjunto y el hecho de que el juego correspondiente esté determinado o no. En el caso del teorema de Martin: *Todo conjunto de Borel está determinado*; la relación es evidente. En el caso de los conjuntos no determinados, la propiedad topológica que conlleva a la indeterminación de dicho conjunto, estará relacionada con la propiedad del conjunto perfecto; por lo que en este último capítulo estudiaremos, de modo muy general, la relación entre los juegos infinitos, los conjuntos de Borel y la propiedad del conjunto perfecto.

1. Algunos Conceptos Previos

En esta sección introducimos algunos conceptos que serán de utilidad en el estudio de los juegos infinitos y en la construcción de conjuntos no determinados, como lo son el de espacio polaco y las jerarquías de Borel. Por un lado los conjuntos de Borel resultarán tener un buen comportamiento dentro del marco de los juegos infinitos, —más adelante quederá claro a qué nos referimos con "un buen comportamiento"— mientras que ciertas propiedades de los espacios polacos nos serán de gran ayuda en la última parte de este trabajo, para poder definir conjuntos que se comportan de "mala forma" dentro del contexto de estos juegos.

Cabe mencionar que aún cuando la teoría de las jerarquías de Borel y el estudio sobre espacios polacos son bastante extensos, en esta pequeña sección expondremos únicamente aquellos resultados y conceptos que nos serán de utilidad para estudiar los juegos infinitos.

1.1 Espacios Polacos

Recordemos que un espacio topológico (X, τ) es *completamente metrizable* si existe una métrica completa d sobre X, compatible con τ; es decir, tal que τ es la topología inducida por d.

Al trabajar con espacios metrizables suele resultar conveniente tomar métricas acotadas, lo cual, afortunadamente, podemos hacer siempre, como lo indica el siguiente lema.

Lema 1.1 *Dado un espacio metrizable (X, τ) existe una métrica $\tilde{d}$ sobre X que es compatible con τ y que toma valores unicamente en el $[0, 1)$. Si además X es completamente metrizable, podemos tomar $\tilde{d}$ completa.*

Demostración. Sea d una métrica completa compatible con τ y sea $\tilde{d}\colon X \times X \to [0, 1)$ definida como:

$$\tilde{d}\,(x, y) = \frac{d\,(x, y)}{1 + d\,(x, y)}$$

En efecto, $\tilde{d}$ es una métrica en X; la desigualdad del triángulo se sigue del hecho de que la función $h\,(t) = \frac{t}{1+t}$ es creciente para $t \geq 0$ por lo que, para $x, y, z \in X$:

$$\tilde{d}\,(x, y) = \frac{d\,(x, y)}{1 + d\,(x, y)} \leq \frac{d\,(x, z) + d\,(z, y)}{1 + d\,(x, z) + d\,(z, y)}$$

A su vez,

$$\frac{d\,(x, z) + d\,(z, y)}{1 + d\,(x, z) + d\,(z, y)} \leq \frac{d\,(x, z)}{1 + d\,(x, z)} + \frac{d\,(z, y)}{1 + d\,(z, y)}$$

Por lo que $\tilde{d}\,(x, y) \leq \tilde{d}\,(x, z) + \tilde{d}\,(z, y)$, y en consecuencia $\tilde{d}$ es una métrica en X. Ahora bien, nuevamente, del hecho de que la función h es creciente, se desprende que, para $\varepsilon > 0$,

$$B_d\,(x, y) = \{y \in X : d\,(x, y) < \varepsilon\} = \left\{y \in X : \tilde{d}\,(x, y) < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\right\} = B_{\tilde{d}}\,(x, y)$$

de modo que d y $\tilde{d}$ inducen la misma topología sobre X y si d es completa entonces $\tilde{d}$ también lo es. $\diamond$

Habiendo probado este lema, nos centraremos ahora sí en los espacios polacos.

Un espacio topológico (X, τ) es un *espacio polaco* si X es separable y completamente metrizable.

Nótese que esto es quivalente a que (X, τ) sea segundo numerable y completamente metrizable, pues si (X, τ) es un espacio metrizable y $D \subset X$ es un denso numerable, entonces las bolas de radio racional con centro en puntos de D forman una base numerable para (X, τ). Por otra parte si (X, τ) es segundo numerable, tomando un punto de cada abierto básico de una base numerable de τ, obtenemos un conjunto denso numerable.

Los espacios $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, el intervalo $[0, 1]$ y el espacio discreto numerable, son ejemplos de espacios polacos.

Ahora bien, usando el lema anterior podemos ver que el producto numerable de espacios polacos es polaco, donde, por producto entendemos el producto usual de espacios topológicos, es decir, si $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de espacios topológicos, entonces la topología en el espacio producto $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es la generada por los subconjuntos de la forma $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ donde cada A_α es abierto en X_α y $A_\alpha = X_\alpha$ excepto quizá para una cantidad finita de α's.

Recordemos que en espacios metrizables la topología del espacio queda determinada por la convergencia de sucesiones; más precisamente, si (X,τ) es metrizable, entonces $U \in \tau$ si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x$, para alguna $x \in U$, se tiene que, a partir de cierta n, $x_n \in U$. En este sentido la topología producto de espacios metrizables queda caracterizada por ser la topología de la convergencia puntual, es decir, una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de elemntos del producto, digamos $x_k = (x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$, converge a un punto $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ del producto si y sólo si para toda $n \in \mathbb{N}$ la sucesión $(x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a y_n.

Lema 1.2 *Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de espacios polacos, entonces el espacio $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ también es polaco.*

Demostración. Sea $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con X_n polaco para toda $n \in \mathbb{N}$. Por el lema anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una métrica completa d_n en X_n compatible con la topología de X_n tal que $d_n < 1$.

Definimos la función $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ como:

$$d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} d_n(x_n, y_n)$$

donde $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Es claro que d es una métrica en X. Para probar que d es completa y compatible con la topología producto, veremos primero que una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X si y sólo si, para toda $n \in \mathbb{N}$ la sucesión $(x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X_n; donde, nuevamente, $x_k = (x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$.

Si la sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X obtenemos inmediatamente que $(x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X_n para toda $n \in \mathbb{N}$, pues $d(x_i, x_j) \leq d_n(x_{n,i}, x_{n,j})$. Supongamos entonces que para toda $n \in \mathbb{N}$ la sucesión $(x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X_n. Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $M \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>M} 2^{-n} < \varepsilon/2$.

Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $N_n \in \mathbb{N}$, tal que si $i, j > N_n$ entonces $d_n(x_{n,i}, x_{n,j}) < \varepsilon/2(M+1)$. Tomemos $N = \text{máx}\{N_n : n \leq M\}$. Así, si $i, j > N$:

$$\begin{aligned} d(x_i, x_j) &= \sum_{n=0}^{M} 2^{-n} d_n(x_{n,i}, x_{n,j}) + \sum_{n=M+1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_{n,i}, x_{n,j)} \\ &\leq \sum_{n=0}^{M} 2^{-n} \frac{\varepsilon}{2(M+1)} + \sum_{n=M+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X.

Se sigue entonces que la topología inducida por d es la topología producto —puesto que d induce la convergencia puntual— y además, dado que cada métrica d_n es completa, concluimos que d también lo es. Por lo tanto X es completamente metrizable.

Finalmente, para ver que X es separable, basta notar que X es segundo numerable, pues cada X_n, siendo polaco, es segundo numerable, así que la base de la topología producto está generada por subcolecciones finitas de un conjunto numerable; por lo tanto X es también segundo numerable y en consecuencia separable.

Concluimos entonces que, en efecto, X es un espacio polaco. $\diamond$

A modo de ejemplo vemos que, del resultado anterior, se desprende que si A es un espacio discreto numerable entonces, el espacio $A^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$, donde $A_n = A$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es un espacio polaco, en particular, el conjunto de cantor $\mathfrak{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es un espacio polaco.

En secciones siguientes estaremos trabajando con este tipo de espacios topológicos, por lo que conviene dejar claros algunos aspectos relacionados con estos espacios.

Sea A un conjunto cualquiera, denotamos por A^n al conjunto formado por todas las sucesiones de elementos en A de longitud n, es decir, $s \in A$ si y sólo si $s = (s_0, \dots, s_{n-1})$ donde $s_i \in A$ para toda $i < n$. Así mismo, denotamos por $A^{<\mathbb{N}}$ al conjunto formado por todas las sucesiones finitas de elementos de A. Estaremos utilizando la notación $\mathrm{long}(s)$ para denotar a la longitud de la sucesión $s \in A^{<\mathbb{N}}$. Ahora bien, a cada sucesión $x \in A^{\mathbb{N}}$ y cada $n \in \mathbb{N}$, podemos asociarles la sucesión $x|n \in A^n$ dada por $x|n = (x_0 \dots x_{n-1})$, así, dado $x \in A^{\mathbb{N}}$ y $s \in A^{<\mathbb{N}}$ decimos que s es segmento inicial de x, en símbolos $s \subseteq x$, si $x|n = s$; lo mismo se puede hacer si en lugar de tomar $x \in A^{\mathbb{N}}$ tomamos $t \in A^{<\mathbb{N}}$, siempre y cuando $\mathrm{long}(s) \leq \mathrm{long}(t)$.

Con toda esta notación, podemos ahora describir fácilmente la topolgía del espacio $A^{\mathbb{N}}$, cuando A tiene la topolgía discreta, pues de esta manera, los conjuntos de la forma:

$$U_s = \left\{ x \in A^{\mathbb{N}} : s \subseteq x \right\}, \text{ con } s \in A^{<\mathbb{N}}$$

forman una base para la topología de $A^{\mathbb{N}}$.

Otros ejemplos de espacios polacos que resultan de este último lema son $\mathbb{R}^n$; $\mathbb{C}^n$; el cubo de Hilbert, $[0,1]^{\mathbb{N}}$, y el espacio de Baire, $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, que es homeomorfo al espacio de los irracionales con la topología euclidiana.

Es claro que este resultado acerca del producto de espacios polacos no puede extenderse a productos arbitrarios, por lo que, en cuanto a productos, es todo lo que podemos decir; ahora bien, en cuanto a los subespacios, en este momento podemos decir dos cosas; la primera es que no todo subespacio de un espacio polaco es polaco, por ejemplo $\mathbb{Q}$, como subespacio de $\mathbb{R}$, es un subespacio de un espacio polaco que no es polaco, pues $\mathbb{Q}$ no es completamente metrizable. La segunda observación que podemos hacer es la que establece el siguiente resultado.

***Proposición* 1.3** *Todo subespacio abierto o cerrado de un espacio polaco es polaco.*

Demostración. Sean X un espacio polaco y $A \subseteq X$. Nótese que entonces A es separable, pues X, siendo polaco, es segundo numerable, por lo que A también lo es, y en consecuencia A es separable.

Así, cuando A es cerrado la prueba es inmediata pues las métricas completas en X restringidas a A, resultan métricas completas para A.

En el caso en el que A es abierto habrá que definir una nueva métrica que resulte completa en A. Tomemos una métrica en X, $d < 1$, compatible con la topología de X y definamos la métrica $\tilde{d}$ en A como:

$$\tilde{d}(x,y) = d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x,A^c)} - \frac{1}{d(y,A^c)} \right|$$

donde $d(x,A^c) = \text{ínf}\{d(x,z) : z \in A^c\}$

Es fácil ver que, en efecto, $\tilde{d}$ es una métrica en A, además recordando que $d(x,A^c) > 0$ para $x \in A$ —pues A^c es cerrado— obtenemos que $\tilde{d}(x,y) \geq d(x,y)$, para toda $x, y \in A$. En consecuencia la topología inducida por d en A contiene a la inducida por $\tilde{d}$. La prueba de la contención contraria, así como la de la completez de $\tilde{d}$, recaen sobre el hecho de que la función "distancia a A^c" es continua sobre (X,d); pues así, por un lado, podemos asegurar que, para $r > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$ entonces:

$$\left|\frac{1}{d(x,A^c)} - \frac{1}{d(y,A^c)}\right| < \frac{r}{2}.$$

En consecuencia, si $r' < \text{mín}\{\delta, r/2\}$, tenemos que $B_{\tilde{d}}(x, r') \subseteq B_d(x, r)$. Por lo que la topología inducida por $\tilde{d}$ contiene a la inducida por d sobre A; concluimos entonces que ambas métricas inducen la misma topología.

Por otro lado, pra ver que $\tilde{d}$ es completa, tomemos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(A, \tilde{d})$, de modo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (X, d) contenida en A, por lo tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún punto $x \in \bar{A}$. Ahora bien, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(A, \tilde{d})$ entonces la sucesión $(1/d(x_n, A^c))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{d(x_n, A^c)} < \infty$$

y en consecuencia $\lim_{n\to\infty} 1/d(x_n, A^c) > 0$. Dado que d es continua en (X, d) y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ en (X, d), concluimos que $d(x, A^c) > 0$; siendo A^c cerrado, esto implica que $x \in A$. Además como ya hemos visto que d y $\tilde{d}$ inducen la misma topología y la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in A$ bajo la métrica d, entonces también lo hace bajo la métrica $\tilde{d}$.

Por lo tanto $\tilde{d}$ es una métrica completa sobre A y en consecuencia A es polaco. $\diamond$

Para los fines de la última parte de este trabajo será necesario un resultado más acerca de los subespacios de un espacio polaco, pero lo dejaremos para la siguiente sección, pues nuestro resultado estará relacionado con los conjuntos de Borel.

1.2 Un poco sobre Jerarquías de Borel

Recordemos que dado un espacio topológico X, la *σ-álgebra de Borel* es la generada por los conjuntos abiertos de X. Denotaremos por $\mathcal{B}_X$ a dicha σ-álgebra, o sólo por $\mathcal{B}$ cuando el espacio X esté claramente determinado. A los elementos de $\mathcal{B}_X$ les llamamamos *borelianos o conjuntos de Borel.*

En esta sección analizaremos dicha σ-álgebra, dando una descripción de sus elementos.

Decimos que *un conjunto es G_δ* si puede expresarse como intersección numerable de conjuntos abiertos en X y que *un conjunto es F_σ* si puede escribirse como unión numerable de conjuntos cerrados en X, es decir, si su complemento es G_δ. Es claro que ambas clases, tanto la de los conjuntos G_δ como la de los F_σ, están contenidas en la σ-álgebra de Borel. Esta notación se usa en general de la siguiente manera, dada una familia de subconjuntos de X, $\mathcal{A}$, definimos las familias $\mathcal{A}_\delta$ y $\mathcal{A}_\sigma$ como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\delta &= \left\{ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n : A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \right\} \\
\mathcal{A}_\sigma &= \left\{ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n : A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \right\}
\end{aligned}$$

De modo que si la familia $\mathcal{A}$ está contenida en la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A}_\delta$ y $\mathcal{A}_\sigma$ también se quedan contenidas en $\mathcal{B}$. Podemos repetir este proceso para obtener nuevas familias de subconjuntos

$$\mathcal{A}_{\delta\sigma} = \left\{ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n : A_n \in \mathcal{A}_\delta, n \in \mathbb{N} \right\} \text{ o bien, } \mathcal{A}_{\sigma\delta} = \left\{ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n : A_n \in \mathcal{A}_\sigma, n \in \mathbb{N} \right\}$$

y así sucesivamente podemos definir las familias $\mathcal{A}_{\delta\sigma\delta\sigma}$, o $\mathcal{A}_{\sigma\delta\sigma\delta\sigma}$. Ciertamente este proceso garantiza que las familias que resultan de éste, estarán nuevamente contenidas en $\mathcal{B}$, siempre que $\mathcal{A}$ lo esté. Aún más, si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, este proceso puede repetirse una cantidad numerable de veces, y la familia resultante seguirá contenida en $\mathcal{B}$. Para "simplificar" un poco la notación, utilizaremos las siguientes definiciones:

Sea X un espacio topológico y denotemos por ω_1 al primer ordinal no numerable, definimos para cada ordinal ξ con $1 \leq \xi < \omega_1$ las familias de subconjuntos de X, Σ_ξ y Π_ξ, por recursión de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll}
\Sigma_1 (X) = \{U : U \text{ es abierto en } X\} & \Pi_1 = \{X - U : U \in \Sigma_1 (X)\} \\
\Sigma_2 (X) = \{\cup A_n : A_n \in \Pi_1 (X)\} = F_\sigma & \Pi_2 = \{X - A : A \in \Sigma_2 (X)\} = G_\delta \\
\Sigma_3 (X) = \{\cup A_n : A_n \in \Pi_2 (X)\} = G_{\delta\sigma} & \Pi_3 (X) = \{X - A : A \in \Sigma_3 (X)\} = F_{\sigma\delta} \\
\vdots & \vdots \\
\Sigma_\xi (X) = \{\cup A_n : A_n \in \Pi_{\xi_n} (X), \xi_n < \xi\} & \Pi_\xi (X) = \{X - A : A \in \Sigma_\xi (X)\}
\end{array}$$

Observación. Nótese que si X es un espacio topológico metrizable, entonces todo conjunto cerrado es G_δ; pues dada una métrica d compatible con X y un subconjunto cerrado F, entonces:

$$F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{x \in F} B_n (x) \right)$$

donde $B_n (x) = \{y \in X : d (x, y) < 1/n\}$.

***Proposición* 1.4** *Sea X un espacio topológico metrizable y $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel en X, entonces:*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\xi < \omega_1} \Sigma_\xi (X) = \bigcup_{\xi < \omega_1} \Pi_\xi (X)$$

Demostración. Denotemos por Σ a la familia $\bigcup_{\xi<\omega_1} \Sigma_\xi (X)$ y por Π a la familia $\bigcap_{\xi<\omega_1} \Pi_\xi (X)$. Es claro que tanto Σ como Π están contenidas en $\mathcal{B}$. Para probar la otra contención basta probar que la famila τ formada por los abiertos de X está contenida en Σ y en Π, y que estas dos últimas son σ-álgebras de subconjuntos de X. La primera afirmación es evidentente pues $\tau = \Sigma_1 (X) \subseteq \Sigma$ y, gracias a la observación anterior, sabemos que:

$$\tau \subseteq \{X - A : A \in \Pi_2 = G_\delta\} \subseteq \Pi_3 \subseteq \Pi.$$

Para probar la otra afirmación notemos que si $A \in \Sigma_\xi (X)$ entonces $X - A \in \Sigma_{\xi+1}$, y si $A_n \in \Sigma_{\xi_n} (X)$ entonces $\cup_n A_n \in \Sigma_\eta (X)$ donde

$$\eta = \sup \{\xi_n : A_n \in \Sigma_{\xi_n}, n \in \mathbb{N}\} + 2 < \omega_1.$$

Por lo tanto Σ es una σ-álgebra que contiene a τ y en consecuencia $\mathcal{B} \subseteq \Sigma$. De forma similar se prueba que $\mathcal{B} \subseteq \Pi$. $\diamond$

Hemos probado entonces que todo conjunto de Borel puede obtenerse, a partir de conjuntos abiertos, haciendo uniones y sacando complementos en ω_1 pasos, de hecho puede probarse que, en efecto, es necesario considerar ω_1 pasos para generar la σ-álgebra de Borel por medio de estas operaciones.

Habíamos mencionado que daríamos un resultado acerca de los subespacios de un espacio polaco relacionado con los conjuntos de Borel. Después de haber probado que todo subespacio obierto o cerrado de un espacio polaco es polaco, podríamos pensar que dicho resultado sera "todo subespacio de Borel de un espacio polaco es polaco". Sin embargo, esto no es cierto; nuevamente $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ es el ejemplo. Nuestro resultado, bastante más débil que esto, establece simplemente que dado un subespacio de Borel, B, de un espacio polaco X podemos encontrar una topología para X, bajo la cual, X sigue siendo polaco y B es abierto y cerrado; de modo que B es polaco en X con esta nueva topología.

Proposición 1.5 *Sea (X, τ) un espacio polaco. Si $B \subseteq X$ es un conjunto de Borel en X, entonces existe una topología polaca τ' en X que contiene a τ y tal que B es abierto y cerrado en (X, τ').*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio polaco; consideremos la colección $\mathcal{B}'$ formada por todos los subconjuntos B de X para los cuales existe una topología polaca en X, τ', con $\tau \subseteq \tau'$, bajo la cual B es cerrado y abierto en X. Probaremos que todo conjunto de Borel en X pertenece a $\mathcal{B}'$, viendo que $\mathcal{B}'$ es una σ-álgebra que contiene a los conjuntos abiertos de (X, τ).

Es claro que $\mathcal{B}'$ es cerrado bajo complementos pues si τ' es una topología en X bajo la cual B es abierto y cerrado, entonces B^c también es abierto y cerrado bajo τ'.

Para probar que $\mathcal{B}'$ es cerrada bajo uniones numerables tomemos una familia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{B}'$; ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos una métrica completa $d_n < 1$ definida sobre X que induce una topología polaca τ_n en X, bajo la cual A_n es abierto y cerrado. Definimos la métrica d sobre X como:

$$d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} d_n(x,y)$$

De la misma forma en que lo hicimos para la métrica del producto de espacios polacos, podemos ver que d es una métrica completa que hace de X un espacio separable, en el que además, una sucesión es de Cauchy bajo la métrica d si y sólo si es de Cauchy bajo la métrica d'. De modo que la topología inducida por d contiene a cada una de las topologías τ_n, y por lo tanto contiene a τ.

De este modo la topología inducida por τ_d es una topología polaca sobre X más fuerte que τ, bajo la cual el conjunto $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es cerrado, pues cada A_n, siendo cerrado en (X, τ_n), es también cerrado en (X, τ_d). Así, τ_d cumple todo lo que necesitamos para que A pertenezca a $\mathcal{B}'$ excepto que A no es abierto bajo τ_d; tendremos entonces que definir una nueva métrica en X.

Como A es cerrado en el espacio polaco (X, τ_d) —y A^c es abierto— entonces, tanto A, como A^c son subespacios polacos de X, así que podemos tomar métricas completas d_1 y d_2 sobre A y A^c, respectivamente, que tomen valores en el $[0, 1)$ y que sean compatibles con la topología en A y A^c relativas a (X, τ_d). Definimos la métrica $\tilde{d}$ como:

$$\tilde{d}(x,y) = \begin{cases} d_1(x,y) & \text{si } x, y \in A \\ d_2(x,y) & \text{si } x, y \in A^c \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así, $\tilde{d}$ es una métrica completa en X y la topología $\tau_{\tilde{d}}$ inducida por $\tilde{d}$ contiene a A y a τ_d, por lo que A es abierto y cerrado en $\tau_{\tilde{d}}$. Además, es claro que $(X, \tau_{\tilde{d}})$ sigue siendo separable, por lo tanto $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}'$.

Falta ver que $\mathcal{B}'$ contiene a todos los abiertos de (X, τ), pero esto es precisamente lo que acabamos de hacer, pues repitiendo el razonamiento hecho para definir $\tilde{d}$ vemos que si A es abierto en (X, τ) entonces la métrica $\tilde{d}$, definida a partir de las métricas compatibles con las topologías polacas de A y A^c, induce una topología polaca en X que contiene a τ, bajo la cual A es abierto y cerrado.

Por lo tanto $\mathcal{B}'$ es una σ-álgebra que contiene a todos los abiertos de (X, τ), en consecuencia $\mathcal{B}'$ contiene a todos los elementos de la σ-álgebra de Borel. $\diamond$

2. Juegos Infinitos

Los juegos infinitos que consideraremos en este trabajo son juegos que se llevan a cabo entre dos jugadores, jugador I y jugador II, quienes juegan eternamente, es decir, las "tiradas" en el juego infinito están indizadas por los naturales. Más concretamente, dado un conjunto no vacío A y un subconjunto $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$. El juego infinito asociado a la pareja (A, X), que denotaremos por $G(A, X)$, se define de la siguiente manera:

El juego comienza con el jugador I eligiendo un elemento $a_0 \in A$, después el jugador II elige un elemento $a_1 \in A$, nuevamente el jugador I elige un elemento $a_2 \in A$ y así sucesivamente. El jugador I gana el juego si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un elemento de X, en caso contrario el jugador II es el ganador.

Lo que nos interesa investigar es si existen condiciones sobre el conjunto X que garanticen la existencia de una "estrategia" de juego para el jugador I —o bien para el jugador II— que asegure su victoria.

En este pequeño capítulo formalizaremos las ideas de estrategia y estrategia ganadora, así como el concepto de juego, o conjunto, determinado; en la segunda sección, daremos una definición más formal de juego infinito que la que recién acabamos de dar y desarrollaremos las herramientas necesarias para poder estudiar el comportamiento de las estrategias en estos juegos.

2.1 Conceptos Básicos

Consideremos un juego infinito $G(A, X)$, donde, como acabamos de decir, A es un conjunto no vacío y X es un subconjunto de $A^{\mathbb{N}}$. Una *estrategia* para un jugador es una regla que especifica qué tirada debe hacer el jugador en cualquier situación posible. En este caso, una estrategia para el jugador I es una función $\varphi : A^{<2\mathbb{N}} \to A$, donde $A^{<2\mathbb{N}}$ denota al conjunto formado por todas las suceciones finitas de elementos de A de longitud par, incluyendo al vacío. Así, la función φ determina qué tirada debe hacer el jugador I, que comienza tirando $a_0 = \varphi(\emptyset)$ y en su n-ésima tirada escoje el elemento $a_{2n} = \varphi(a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1})$, donde a_{2i} y a_{2i-1}, con $i \leq n$, son las tiradas anteriores de los jugadores I y II respectivamente.

Una estrategia para el jugador II es exactamente igual, simplemente hay que considerar las sucesiones finitas de longitud impar, en lugar de las de longitud par.

Así, una estrategia es una regla que nos indica cómo jugar, pero no necesariamente cómo ganar. Decimos que una estrategia es *ganadora* si siempre que un jugador siga dicha estrategia, ese jugador gana, sin importar cómo juegue el oponente. En este caso, una estrategia ganadora para el jugador I, sería una estrategia φ tal que para cualquier sucesión de elementos de A, $(a_1, a_3, a_5, \ldots,)$, la sucesión dada por:

$$(\varphi(\emptyset) = a_0, a_1, \varphi(a_0, a_1) = a_2, a_3, \ldots, a_{2n-1}, \varphi(a_0, \ldots, a_{2n-1}) = a_{2n}, \ldots)$$

pertenece al conjunto X.

Decimos que un juego está *determinado* si existe una estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores. Es claro que no pueden existir estrategias ganadoras para ambos jugadores en un mismo juego, pues en ese caso ambos jugadores podrían seguir sus estrategias ganadoras simultaneamente y obtendríamos una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que pertenece y no pertenece a X, lo cual, sobra decir, es imposible.

También podemos establecer una relación de equivalencia entre juegos, la cual será de utilidad más adelante: decimos que dos juegos son *equivalentes* si para ambos jugadores la posibilidad de ganar es la misma en cualquiera de los dos juegos, es decir, dados dos juegos $G(A, X)$ y $G'(B, Y)$ decimos que son equivalentes si: El jugador I tiene una estrategia ganadora en $G(A,X)$ si y sólo si el jugador I tiene una estrategia ganadora en $G'(B,Y)$; y lo mismo ocurre para el jugador II.

2.2 Juegos con Reglas

Con lo dicho hasta ahora queda perfectamente claro cuáles son las reglas del juego $G(A,X)$, pero será conveniente pensar en éstas con cierta estructura. Para esto utilizaremos el concepto de árbol.

Un *árbol* T sobre un conjunto A, es un subconjunto de $A^{<\mathbb{N}}$ tal que si $t \in T$ y s es un segmento inicial de t entonces $s \in T$. Decimos que un árbol T sobre un conjunto A es un *árbol podado* si para toda $t \in T$, existe $s \in T$ tal que t es un segmento inicial propio de s.

Así, dado un árbol podado T sobre un conjunto A, podemos considerar el conjunto $[T]$ formado por todas las suseciones infinitas cuyos segmentos iniciales —de cualquier longitud— pertenecen a T, a este conjunto se le conoce como el *cuerpo* de T. Para $x \in A^{\mathbb{N}}$ y $n \in \mathbb{N}$ denotaremos por $x|n$ al segmento inicial de longitud n de la sucesión x, es decir si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entonces $x|n = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$. Así, el cuerpo de un árbol T sobre A es el conjunto:

$$[F] = \left\{x \in A^{\mathbb{N}} : x|n \in T, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

En estos nuevos términos podemos definir ahora el juego $G(T,X)$ para cualquier $X \subseteq [T]$ de la siguiente forma: el jugador I elige un elemento a_0 de A tal que $(a_0) \in T$, el jugador II elige un elemento $a_1 \in A$, tal que $(a_0, a_1) \in T$, y así sucesivamente, los jugadores van eligiendo alternadamente elementos a_i del conjunto A de tal forma que la sucesión $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in T$ para cada $n \in \mathbb{N}$. El jugador I gana si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, en caso contrario el jugador II es el ganador.

Así, una estrategia para el jugador I en el juego $G(T,X)$ es una función φ definida sobre el conjunto T_{2n} formado por todos los elementos de T de longitud par, tal que $\varphi(\emptyset) \in T$ y para toda $k \geq 1$:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{2k-1}) \in T \Longrightarrow (a_0, a_1, \ldots, a_{2k-1}, \varphi(a_0, a_1, \ldots, a_{2k-1})) \in T$$

Nuevamente una estrategia para el jugador II se define de la misma forma, sólo que cambiando pares por impares.

Las nociones de estrategia ganadora, juego determinado y equivalencia entre juegos se definen como antes.

Habiendo definido el juego $G(T,X)$ de esta forma, se ve que T determina todas las posiciones permitidas para cada jugador, por lo que al conjunto T se le conoce como las reglas del juego $G(T,X)$, y a los juegos definidos de esta forma se les llama *juegos con reglas.*

Es claro que bajo esta nueva notación, si $T = A^{<\mathbb{N}}$ y $X \subseteq [T] = A^{\mathbb{N}}$ entonces $G(A,X) = G(T,X)$. Sin embargo, se puede ver que la clase de los conjuntos con reglas no es realmente más grande que la de los juegos de la forma $G(A,X)$; lo cual se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 2.1 *Dado un árbol podado T sobre un conjunto A y un conjunto $X \subseteq [T]$, siempre existe un conjunto X' tal que el juego $G(T,X)$ es equivalente al juego $G(A,X')$.*

Demostración. Consideremos el conjunto:

$$\Phi = \left\{x \in A^{\mathbb{N}} : \exists k\, (x|2k \notin T \;\&\; x|(2k-1) \in T)\right\}$$

Así si $X' = \Phi \cup X$, entonces $G(T,X)$ es equivalente a $G(A,X')$. Pues si $\varphi : T_{2n} \to A$ es una estrategia ganadora para el jugador I en el juego $G(T,X)$, podemos definir una estrategia

$\varphi' : A^{<2\mathbb{N}} \to A$ para el jugador I en el juego $G(A, X')$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \varphi'(\emptyset) &= \varphi(\emptyset) \\ \varphi'(a_0, \ldots, a_{2k+1}) &= \begin{cases} \varphi(a_0, \ldots, a_{2k+1}) & \text{si } (a_0, \ldots, a_{2k+1}) \in T \\ \alpha & \text{si } (a_0, \ldots, a_{2k+1}) \notin T \end{cases} \end{aligned}$$

Donde α es un elemento cualquiera de A. Tomemos una sucesión $(a_1, a_3, \ldots) \in A^{\mathbb{N}}$ y denotemos por (a_n) a la sucesión

$$(a_0 = \varphi'(\emptyset), a_1, \ldots, a_{2k} = \varphi'(a_0, \ldots, a_{2k-1}), a_{2k+1}, \ldots)$$

Tenemos dos casos:

1. Para toda $k \geq 1$ la sucesión finita $(a_0, a_{1,} \ldots, a_{2k}, a_{2k+1}) \in T$; en cuyo caso

   $$\varphi(a_0, \ldots, a_{2k+1}) = \varphi'(a_0, \ldots, a_{2k+1})$$

   para toda $k \in \mathbb{N}$ y en consecuencia $(a_n) \in X$, pues φ es una estrategia ganadora para el jugador I en $G(T, X)$.

2. Existe $k \geq 1$ tal que la sucesión finita $(a_0, a_{1,} \ldots, a_{2k+1}) \notin T$; en este caso, si k_0 denota a la mínima k tal que $(a_0, a_1, \ldots, a_k) \notin T$, debemos tener que k_0 es impar, en consecuencia, si $k_0 = 2k - 1$, tenemos que $(a_n) | 2k \notin T$, mientras que $(a_n) | (2k - 1) \in T$. Por lo que, ciertamente, $(a_n) \in \Phi$.

En cualquier caso la sucesión (a_n) pertenece al conjunto X' y por lo tanto φ' es una estrategia ganadora para el jugador I en el juego $G(A, X')$.

Ahora bien, si φ' es una estrategia ganadora para el jugador I en el juego $G(A, X')$ definimos φ como la restricción de φ' al conjunto $T_{2n+1} \subseteq A^{<2\mathbb{N}+1}$. De este modo φ es una estrategia ganadora para el jugador I en el juego $G(T, X)$, pues dada una sucesión $(a_1, a_3, \ldots) \in A^{\mathbb{N}}$ de tiradas permitidas para el jugador II en el juego $G(T, X)$, es decir, $(a_1, a_3, \ldots) \in A^{\mathbb{N}}$ es tal que $(x_0, a_1, \ldots, x_{2k+1}) \in T$ siempre que $(x_0, a_1, \ldots, x_{2k}) \in T$, y denotemos nuevamente por (a_n) a la sucesión

$$(a_0 = \varphi(\emptyset), a_{1,}, \ldots, a_{2k} = \varphi(a_0, \ldots, a_{2k-1}), a_{2k+1}, \ldots)$$

Notemos que entonces $(a_0, a_1, \ldots, a_{2k}) \in T$ para toda $k \in \mathbb{N}$, pues de lo contrario $(a_n) \notin [T]$, de modo que $(a_n) \in \Phi$ por lo que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(a_0, \ldots, a_{2k+1}) \in T$ y $(a_0, \ldots, a_{2k}) \notin T$; lo cual es imposible. Concluimos entonces que $(a_n) | k \in T$ para toda $k \in \mathbb{N}$ por lo que $(a_n) \in [T] \cap X' = X$. Por lo tanto φ es una estrategia ganadora para el jugador I en $G(T, X)$.

Bajo una idea similar podemos probar el sesultado análogo para las estrategias del jugador II. $\diamond$

Nuestra herramienta para estudiar las condiciones bajo las cuales un juego $G(T, X)$ está determinado a favor de alguno de los jugadores será la topología, por lo que daremos estructura de espacio topológico al conjunto $[T]$. Para eso es fundamental notar lo siguiente:

Proposición 2.2 *Sea A un espacio topológico discreto y consideremos al conjunto $A^{\mathbb{N}}$ con la topología producto. La asociación $T \mapsto [T]$ es una biyección entre los árboles podados sobre A y los subconjuntos cerrados de $A^{\mathbb{N}}$.*

Demostración. Sea T un árbol podado sobre A. Para ver que el conjunto $[T]$ es cerrado en $A^{\mathbb{N}}$ basta notar que:

$$A^{\mathbb{N}} - [F] = \left\{ x \in A^{\mathbb{N}} : \exists k (x | k \notin T) \right\}$$

Pues así, dada $x \in A^{\mathbb{N}} - [F]$ entonces, tomando $k \in \mathbb{N}$ tal que $x|\,k \notin T$, podemos definir para cada $i \in \mathbb{N}$ el conjunto U_i, como $U_i = \{x_i\}$ para $i \leq k$ y $U_i = A$ para $i > k$. De este modo $\Pi_{i \in \mathbb{N}} U_i$ es un abierto básico de $A^{\mathbb{N}}$ y es claro que $x \in \Pi_{i \in \mathbb{N}} U_i \subseteq \left(A^{\mathbb{N}} - [F]\right)$. Por lo que $[T]$ es cerrado en $A^{\mathbb{N}}$.

Por otro lado, dado cualquier cerrado F de $A^{\mathbb{N}}$ podemos tomar el árbol T_F dado por $T_F = \{\, x|\,n : x \in F, n \in \mathbb{N}\}$. Es evidente que, en efecto, T_F es un árbol podado sobre A y que $[T_F] = F$. Como además, la asociación $T \mapsto [T]$ es claramente inyectiva, concluimos que dicha asociación es una biyección entre los árboles podados sobre A y los subconjuntos cerrados de $A^{\mathbb{N}}$. Al árbol T_F dado por la inversa de esta asociación se le conoce como *el árbol de F*. $\diamond$

Así, la topología de $[T]$ será la inducida por la de $A^{\mathbb{N}}$, donde $A^{\mathbb{N}}$ tiene la topología producto y A la discreta. En estos términos decimos que *el juego $G(T, X)$ es abierto,* si X es abierto en $[T]$, lo mismo para conjuntos cerrados, borelianos, etcétera.

Como se mencionó en la sección 1.1, dado un conjunto A, una base para la topología de $A^{\mathbb{N}}$ es la dada por los conjuntos de la forma.

$$U_s = \left\{x \in A^{\mathbb{N}} : s \subseteq x\right\}$$

donde $s \in A^{<\mathbb{N}}$. A esta base le llamamos la base canónica de $A^{\mathbb{N}}$; consecuentemente, si T es un árbos sobre A la base canónica de $[T]$ es la dada por los conjuntos de la forma $V_s = U_s \cap [T]$ con $s \in T$.

3. Conjuntos Determinados

Podemos, ahora sí, comenzar nuestro estudio sobre la relación que hay entre la existencia de estrategias ganadoras en un juego $G(T, X)$ y la topología del conjunto $X \subseteq [T]$. Lo que haremos en la primera sección de este capítulo, que será bastante sencillo, será probar que todo juego cerrado está determinado; mientras que en la segunda sección daremos una generalización de ese resultado, a saber, probaremos que todo conjunto de Borel está determinado; la demostración de este hecho, que debemos a Martin, estará basada, como es de esperarse, en que todo conjunto cerrado está determinado; aún así, la demostración no es sencilla y necesitaremos nuevas herramientas.

3.1 Determinación en Conjuntos Cerrados

Dados dos elementos $s, t \in A^{<\mathbb{N}}$, digamos $s = (s_0, \ldots, s_n)$ y $t = (t_0, \ldots, t_m)$, definimos la *concatenación* de s con t, en símbolos $s\hat{\ }t$, como:

$$s\hat{\ }t = (s_0, \ldots, s_n, t_0, \ldots, t_m).$$

Consideremos un juego $G(T, X)$; para manejar las cosas de forma intuitiva algunas veces utilizaremos el siguiente lenguaje: una *partida del juego* es una sucesión cualquiera que pertenece a $[T]$ y una *posición del juego* es un elemento cualquiera de T, es decir, una sucesión finita que es segmento inical de alguna partida. Ahora bien, dada una posición $p = (a_0, \ldots, a_{2n-1})$ donde el jugador I tira en el siguiente turno, decimos que *la posición p es no perdedora* para el jugador I, si el jugador II no tiene una estrategia ganadora a partir de esa posición, esto es, que el jugador II no tiene una estrategia ganadora en el juego $G(T_p, X_p)$, donde $T_p = \{s : p\hat{\ }s \in T\}$ y $X_p = \{x : p\hat{\ }x \in X\}$. Una estrategia no perdedora para el jugador II se define de manera análoga.

Observación. Supongamos que en un juego $G(T, X)$ tenemos una posición p no perdedora para el jugador I, digamos $p = (a_0, \ldots, a_{2n-1})$, debe existir entonces un elemento $a_{2n} \in T_p$

tal que para todo a_{2n+1} con $(a_{2n}, a_{2n+1}) \in T$, la posición $p\hat{}\,(a_{2n}, a_{2n+1})$ es también no perdedora para I; pues de lo contrario, responda como responda el jugador I ante la posición p, resultaría que el jugador II tiene una estrategia ganadora a partir de $p\hat{}\,(a_{2n}, a_{2n+1})$, lo que querría decir que en realidad el jugador II tenía una estrategia gandara desde la posición p, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Vemos entonces que a partir de una posición no perdedora para el jugador I podemos definir inductivamente una estrategia para I en la cual el jugador siempre se mantiene en posiciones no perdedoras. Lo mismo puede hacerse para el jugador II. A esta estrategia le llamaremos la *estrategia mediocre*, o bien, diremos que el jugador juega a no perder.

De lo anterior se deduce fácilmente que todo juego finito está determinado, es decir, si definimos el juego finito de longitud n, $G_n(A, X)$, de la misma forma que el juego $G(A, X)$ pero considerando el conjunto $X \subseteq A^n$ entonces siempre existe una estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores; pues en caso de que el jugador II no tenga una estrategia ganadora entonces la posición $p = \{\emptyset\}$ es una posición no perdedora para I, así el jugador I puede jugar a no perder. Resulta entonces que, al final, si $(a_0, \ldots, a_n)$ denota a la partida del juego realizada de esta forma, $(a_0, \ldots, a_n) \in X$.

Es decir, que en este caso, para el jugador I toda estrategia mediocre es ganadora. Algo semejante ocurre con los juegos infinitos cerrados y con los abiertos:

Teorema 3.1 (Gale-Stewart) *Sea T un árbol podado sobre un conjunto A. Si $X \subseteq [T]$ es cerrado o abierto en $[T]$ entonces el juego $G(T, X)$ está determinado.*

Demostración. Supongamos primero que X es cerrado en $[T]$ y supongamos también que el jugador II no tiene una estrategia ganadora. Del mismo modo en que lo hicimos para los juegos finitos, vemos que existe una estrategia mediocre para el jugador I, pues la posición $p = \{\emptyset\}$ es no perdedora para I. Veremos que esta estrategia mediocre es ganadora para I. Tomemos (a_n) una partida del juego $G\,(T, X)$ en la que I sigue esta estrategia mediocre, si $(a_n) \notin X$ entonces, como $[T] - X$ es abierto, existe una vecindad básica de (a_n) que se queda contenida en $[T] - X$, es decir, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$U_{(a_0,\ldots,a_{2k-1})} \cap [T] \subseteq [T] - X$$

donde

$$U_{(a_0,\ldots,a_{2k-1})} = \left\{x \in A^{\mathbb{N}} : (a_0, \ldots, a_{2k-1}) \text{ es segmento inicial de } x\right\}.$$

De modo que la posisicón $p = (a_0, \ldots, a_{2k-1})$ no es una posición no perdedora para el jugador I, pues la condición $U_{(a_0,\ldots,a_{2k-1})} \cap [T] \subseteq [T] - X$ asegura que cualquier estrategia del jugador II a partir de posición p es ganadora para II, lo cual contradice el hecho de que el jugador I sigue una estrategia mediocre.

Concluimos entonces que $(a_n) \in X$ y en consecuencia el jugador I tiene una estrategia ganadora en $G\,(T, X)$.

Si suponemos ahora que el conjunto X es abierto en $[T]$, podemos hacer un razonamiento similar al anterior para probar que si el jugador I no tiene una estrategia ganadora en $G\,(T, X)$ entonces, toda estrategia mediocre para II es también ganadora, pues ahora, si (a_n) es una partida jugada bajo la estrategia mediocre de II y $(a_n) \in X$ entonces, como X es abierto, existe una vecindad básica de (a_n) que se queda contenida en X y así llegamos nuevamente a una contradicción. Por lo tanto todo juego abierto y todo juego cerrado está determinado. $\diamond$

3.2 Determinación en Conjuntos de Borel

Veremos ahora que todo conjunto de Borel está determinado, es decir que si X es un conjunto de Borel en $[T]$ entonces el juego $G(T, X)$ está determinado. Para probar esto, la idea será construir, a partir del juego $G(T,X)$, "juegos auxiliares" que simplifiquen al conjunto X. Necesitaremos algunas herramientas nuevas y ciertos resultados previos.

Primero, será conveniente pensar en las estrategias, más que como funciones, como árboles; concretamente dado el juego $G(T,X)$, una estrategia σ para el jugador I —en términos de árboles— en el juego $G(T,X)$ es un árbol sobre A que satisface las siguientes condiciones:

- σ es un árbol podado contenido en T
- Si $(a_0,\ldots,a_{2n}) \in \sigma$, y $a_{2n+1} \in A$, es tal que $(a_0,\ldots,a_{2n},a_{2n+1}) \in T$, entonces $(a_0,\ldots,a_{2n},a_{2n+1}) \in \sigma$.
- Si $(a_0,\ldots,a_{2n},a_{2n-1}) \in \sigma$, entonces existe un único elemento a_{2n} en A tal que $(a_0,\ldots,a_{2n-1},a_{2n}) \in \sigma$.

De igual forma definimos el concepto de estrategia para el jugador II, cambiando pares, por impares y viceversa.

Ahora bien, si Σ es un árbol que satisface las primeras dos condiciones, entonces diremos que Σ es una *cuasiestrategia* para el jugador I en el juego $G(T,X)$. Nótese que, en cuanto a la tercera condición, dado que Σ es un árbol podado, si $(a_0,\ldots,a_{2n},a_{2n-1}) \in \Sigma$, en efecto, existe $a_{2n} \in A$ tal que $(a_0,\ldots,a_{2n-1},a_{2n}) \in \Sigma$, sólo que éste no tiene por qué ser único. Así mismo decimos que una cuasiestrategia para I es ganadora en el juego $G(T,X)$, si $[\Sigma] \subseteq X$. Nuevamente, las cuasiestrategias para el jugador II se definen de forma análoga.

Por otro lado, si el conjunto X es cerrado en T y suponemos que el jugador I tiene una estrategia ganadora en el juego $G(T,X)$, podemos extender la definición de posición no perdedora para el jugador I a posiciones de longitud impar estableciendo que una posición $p=(a_0,\ldots,a_{2n})$ es no perdedora para I, si II no tiene estrategia ganadora en el juego $G(T_p,X_p)$, bajo la convención de que en el juego $G(T_p,X_p)$ es el jugador II quien tira primero. Así, si

$$\Sigma = \{p \in T : p \text{ es no perdedora para I}\}$$

podemos ver, recordando la definición de la estrategia mediocre, que Σ es una cuasiestrategia para I en $G(T,X)$ y que además $[\Sigma] \subseteq X$. A esta cuasiestrategia ganadora particular le llamaremos la *cuasiestrategia ganadora canónica* —o simplemente, cuasiestrategia canónica— para I, en el juego $G(T,X)$. La cuasiestrategia canónica para el jugador II en $G(T,X)$ se define de forma análoga.

Para hacer formal la idea de "juego auxiliar" utilizaremos el concepto de cubriente de un juego. Sea T un árbol podado sobre un conjunto A y $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$, un *cubriente del juego* $G(T,X)$ —o simplemente un cubriente de T, cuando el contexto esté claro— es una terna $(\tilde{T},\pi,\varphi)$ tal que:

1. $\tilde{T}$ es un árbol podado sobre algún conjunto $\tilde{A}$
2. $\pi : \tilde{T} \to T$, es tal que para toda $s,t \in \tilde{T}$, si s es segmento inicial de t entonces $\pi(s)$ es segmento inical de $\pi(t)$. Además debe satisfacer que $\mathrm{long}(\pi(s)) = \mathrm{long}(s)$ para toda $s \in \tilde{T}$. Esta función π induce una función $\pi_* : [\tilde{T}] \to [T]$ dada por $\pi_*(x)|n = \pi(x|n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$; nótese que, gracias a la monotonía de π, resulta que π_* es continua.
3. φ manda estrategias del juego en $\tilde{T}$ para el jugador I y II en estrategias del juego en T para el jugador I y II, respectivamente, y lo hace respetando las posiciones a lo largo de cada partida. De forma concreta, esto es que φ manda árboles $\tilde{\sigma} \subseteq \tilde{T}$ que satisfacen las condiciones de estrategia recién descritas, en árboles $\varphi(\tilde{\sigma}) \subseteq T$ que satisfacen las mismas condiciones; y que si $\sigma|n$ denota la conjunto $\{s \in \sigma : \mathrm{long}(s) \leq n\}$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(\tilde{\sigma})|n = \varphi(\tilde{\sigma}|n)$ y si $m \leq n$ entonces $\varphi(\tilde{\sigma}|m) = \varphi((\tilde{\sigma}|n)|m)$. A los árboles de la forma $\sigma|n$ donde σ es una estrategia y $n \in \mathbb{N}$ les llamaremos *estrategias parciales.*

4. El conjunto $[\tilde{T}]$ satisface que si $\tilde{\sigma}$ es una estrategia para el jugador I en $\tilde{T}$ y $x \in [T]$ es una partida del juego $G(T, X)$ en la que el jugador I utilizó la estrategia $\varphi(\tilde{\sigma})$ —es decir, si $x \in [\varphi(\tilde{\sigma})]$— entonces existe una única partida $\tilde{x}$ del juego en $\tilde{T}$, jugada bajo la estrategia $\tilde{\sigma}$, —es decir, existe una única $\tilde{x} \in [\tilde{\sigma}]$— tal que $\pi_*(\tilde{x}) = x$.

Nótese que si $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ es un cubriente de un juego $G(T, X)$ y $\tilde{X} = \pi_*^{-1}(X)$ entonces el juego $G(\tilde{T}, \tilde{X})$, satisface:

- Toda partida $\tilde{x} \in [\tilde{T}]$ del juego $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ da lugar a una partida $\pi_*(\tilde{x}) \in [T]$ del juego $G(T, X)$.
- Si $\tilde{\sigma}$ es una estrategia ganadora para el jugador I en $G(\tilde{T}, \tilde{X})$, entonces $\varphi(\tilde{\sigma})$ es una estrategia ganadora para el jugador I en $G(T, X)$. Pues si $\tilde{\sigma}$ es una estrategia ganadora para I en $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ y $x \in [\varphi(\tilde{\sigma})]$, entonces, por la propiedad 4 del cubriente, existe una única $\tilde{x} \in [\tilde{\sigma}]$ tal que $\pi_*(\tilde{x}) = x$, de modo que $\tilde{x} \in \tilde{X}$, pues $\tilde{\sigma}$ es ganadora, y en consecuencia $x = \pi_*(\tilde{x}) \in X$. Por lo que $\varphi(\tilde{\sigma})$ es una estrategia ganadora para I en $G(T, X)$.
- Si $\tilde{\sigma}$ es una estrategia ganadora para el jugador II en $G(\tilde{T}, \tilde{X})$, entonces $\varphi(\tilde{\sigma})$ es una estrategia ganadora para el jugador II en $G(T, X)$. Esto se prueba de la misma forma que el punto anterior.

En este caso decimos que el juego $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ es un *juego auxiliar* para el juego $G(T, X)$; así, si el juego auxiliar $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ está determinado, entonces el juego original, $G(T, X)$, también lo está. Por otro lado, decimos que un cubriente $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ del juego $G(T, X)$ *desenreda* a X si el conjunto $\tilde{X} = \pi_*^{-1}(X)$ es abierto y cerrado en $[\tilde{T}]$.

Nuestra intención será, dado un juego $G(T, X)$ con X de Borel en $[T]$, construir un cubriente $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ que desenrede a X. Así, gracias al teorema de Gale-Stewart, el juego auxiliar asociado al cubriente $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ estará determinado y, por tanto, el juego original también lo estará. Sin embargo, la situación no será tan sencilla, necesitaremos hacer la demostración por inducción utilizando las jerarquías de Borel, razón por la cual introducimos el concepto de k-cubriente de un juego:

Dados un juego $G(T, X)$ y $k \in \mathbb{N}$, decimos que una terna $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ es un *k-cubriente del juego $G(T, X)$*, si $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ es un cubriente tal que $\tilde{T}|2k = T|2k$ y $\pi(\tilde{T}|2k)$ es la identidad, donde, como antes, $T|2k = \{s \in T : \operatorname{long}(s) \leq 2k\}$. En efecto, debemos entender que si $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ es el juego auxiliar asociado a un k-cubriente, entonces las primeras k tiradas de cada uno de los jugadores en el juego $G(\tilde{T}, \tilde{X})$ son idénticas a las primeras k tiradas de los jugadores en el juego original.

Con todos estos conceptos en mano podemos empezar a trabajar sobre la demostración del resultado que nos concierne; la idea es, como habíamos mencionado, probar por inducción sobre $\xi < \omega_1$ que todo conjunto perteneciente a una jerarquía de Borel de orden ξ, puede desenredarse. Comenzamos con un resultado técnico que nos ayudará en el paso inductivo.

Lema 3.2 *Sea $k \in \mathbb{N}$ y sea $\{G(T_i, X_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de juegos. Supongamos que para cada $i \in \mathbb{N}$ existe un $(k+i)$-cubriente $(T_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$ del juego $G(T_i, X_i)$, entonces existe un árbol podado T_∞ y funciones $\pi_{\infty,i}$ y $\varphi_{\infty,i}$ tales que $(T_\infty, \pi_{\infty,i}, \varphi_{\infty,i})$ es un $(k+i)$-cubriente de $G(T_i, X_i)$ y además las funciones $\pi_{\infty,i}$, $\varphi_{\infty,i}$ satisfacen:*

$$\pi_{i+1} \circ \pi_{\infty,i+1} = \pi_{\infty,i} \text{ y } \varphi_{i+1} \circ \varphi_{\infty,i+1} = \varphi_{\infty i+1}.$$

Demostración. Notemos primero que para toda sucesión s se tiene que $s \in T_{j_0}$ para algún j_0 tal que $2(k + j_0) \geq \operatorname{long}(s)$, si y sólo si $s \in T_i$ para toda i con $2(k+i) \geqslant \operatorname{long}(s)$.

Esto se sigue de que si $s \in T_{j_0}$ entonces $s \in T_{j_0}|2(k+j_0)$ y, como T_{j_0+1} es el árbol de un $(k+j_0)$-cubriente del juego en T_{j_0}, tenemos que $T_{j_{0+1}}|2(k+j_0) = T_{j_0}|2(k+j_0)$ por lo que ciertamente $s \in T_{j_0+1}$. Repitiendo este razonamiento, mediante un proceso inductivo concluimos que $s \in T_i$ para toda $i > j_0$. Ahora bien, si suponemos que existe $j < j_0$ con $2(k+j) \geq \operatorname{long}(s)$ y tal que $s \notin T_j$, podemos concluir, de la misma forma, que $s \notin T_i$ para toda $i > j$, lo cual no es posible. Por lo tanto $s \in T_i$ para toda i con $2(k+i) \geqslant \operatorname{long}(s)$.

Habiendo hecho esta observación definimos el árbol T_∞ como:

$$T_\infty = \{s : \forall i \in \mathbb{N} \text{ con } 2\,(k+i) \geqslant \operatorname{long}(s))\,, s \in T_i\}$$

En efecto, de la observación anterior se sigue que T_∞ es un árbol, pues si $s \in T_\infty$ y $n < \operatorname{long}(s)$, entonces, dado que cada T_i es un árbol, debemos tener que $s|n \in T_i$ para toda i con $2(k+i) \geqslant \operatorname{long}(s) > n$, y en consecuencia $s|n \in T_\infty$. Es claro también que T_∞ es un árbol podado, pues dado $s \in T_\infty$ tomando i tal que $2(k+i) \geqslant \operatorname{long}(s)$, tenemos que $s \in T_{i+1}$ y como este último es un árbol podado, podemos tomar un elemento α tal que $s\hat{}(\alpha) \in T_{i+1}$; además como

$$\operatorname{long}(s\hat{}\,(\alpha)) = \operatorname{long}(s) + 1 < 2\,(k + (i+1))$$

concluimos que $s\hat{}\,(\alpha) \in T_\infty$.

Así mismo, notemos que dadas una sucesión s y una $j \in \mathbb{N}$ fija, tenemos que $s \in T_\infty|2(k+i)$ si y sólo si $\operatorname{long}(s) \leq 2(k+j)$ y $s \in T_i$ para toda i con $2(k+i) \geqslant \operatorname{long}(s)$; y a su vez esto es equivalente a que s pertenezca a $T_i|2(k+i)$. De modo que $T_\infty|2(k+i) = T_i|2(k+i)$.

Ahora definimos, para cada $i \in \mathbb{N}$, la función $\pi_{\infty,i}\colon T_\infty \to T_i$ de lasiguiente forma:

$$\pi_{\infty,i}(s) = \begin{cases} s & \text{si } \operatorname{long}(s) \leq 2(k+i) \\ (\pi_{i+1} \circ \pi_{i+2} \circ \ldots \circ \pi_j)(s) & \text{si } \operatorname{long}(s) > 2(k+i) \end{cases}$$

donde j es cualquier $j \in \mathbb{N}$ que satisface $2(k+j) \geq \operatorname{long}(s)$.

Para ver que la definición de $\pi_{\infty,i}$ no depende de la j que tomemos basta recordar que las funciones π_{i+1}, siendo funciones de un $(k+i)$-cubriente del juego en T_i, satisfacen que $\pi_i|(T_{i+1}|(2(k+i)))$ es la función identidad. De esta misma propiedad se desprende que la función $\pi_{\infty,i}$ satisface la condición 2 del cubriente.

Aclaramos, para no dar lugar a confusión, que estaremos utilizando indistintamente el símbolo "$\pi_{\infty,i}$" para denotar a la función $\pi_{\infty,i}$, recién descrita, y a la función $\pi_{*\infty,i}\colon [T_\infty] \to [T_i]$, inducida por $\pi_{\infty,i}$.

Finalmente definimos la función $\varphi_{\infty,i}$; que va del conjunto de estrategias en T_∞, en el conjunto de estrategias en T_i; estableciendo que, dada una estrategia σ_∞ del juego en T_∞, la función $\varphi_{\infty,i}\,(\sigma_\infty)$ es la estrategia en T_∞ dada por:

$$\begin{array}{rrcl} & \varphi_{\infty,i}\,(\sigma_\infty)|\,2\,(k+i) & = & \sigma_\infty|\,2\,(k+i) \\ \text{y para } j > i & \varphi_{\infty,i}\,(\sigma_\infty)|\,2\,(k+j) & = & (\varphi_{i+1} \circ \varphi_{i+2} \circ \ldots \circ \varphi_j)\,(\sigma_\infty|\,2\,(k+j)) \end{array}$$

Nótese que en efecto, $\sigma_\infty|2(k+i)$ es una estrategia parcial en T_i, pues $T_\infty|2(k+i) = T_i|2(k+i)$, del mismo modo $\sigma_\infty|2(k+j)$ es una estrategia parcial en T_j y como las funciones φ_k mandan estrategias parciales en T_k a estrategias parciales en T_{k-1}, el resultado de $(\varphi_{i+1} \circ \varphi_{i+2} \circ \ldots \circ \varphi_j)(\sigma_\infty|2(k+j))$ debe ser una estrategia parcial en T_i. Además, del hecho concreto de que cada φ_k satisface $\varphi_k(\tilde{\sigma})|n = \varphi_k(\tilde{\sigma}|n)$ y $\varphi_k(\tilde{\sigma}|m) = \varphi_k((\tilde{\sigma}|n)|m)$ para toda $m \leq n$, vemos que en efecto

$$((\varphi_{i+1} \circ \varphi_{i+2} \circ \ldots \circ \varphi_j)\,(\,\sigma_\infty|\,2\,(k+j)))|\,2\,(k+i) = \sigma_\infty|\,2\,(k+i)\,.$$

De modo que $\varphi_{\infty,i}$ satisface la condición 3 del cubriente.

Nos resta probar la cuarta condición; para esto tomemos una estrategia σ_∞ en T_∞ y sea $x_i \in [\varphi_{\infty,i}(\sigma_\infty)]$. Gracias a la definición de $\varphi_{\infty,i}$ es fácil ver que $\varphi_{i+1}(\varphi_{\infty,i+1}(\sigma_\infty)) = \varphi_{\infty,i}(\sigma_\infty)$ de modo que la estrategia $\varphi_{\infty,i}(\sigma_\infty)$ en T_i es la imágen bajo φ_{i+1} de la estrategia

$\varphi_{\infty,i+1}(\sigma_\infty)$ en T_{i+1}, por lo que sabemos que debe existir una sucesión $x_{i+1} \in [\varphi_{\infty,i+1}(\sigma_\infty)]$ tal que $\pi_{i+1}(x_{i+1}) = x_i$. De esta forma, podemos definir recursivamente una sucesión $(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots)$ tal que para toda $j \geq 1$, $x_{i+j} \in [\varphi_{\infty,i+j}(\sigma_\infty)]$ y $\pi_{*i+j}(x_{i+j}) = x_{i+j-1}$. Ahora bien, tomemos $j \geq i$; dado que la función π_{j+i} es la identidad para cualquier sucesión de longitud menor a $2(k+j)$ debemos tener que

$$\pi_{j+i}\left(x_{j+1}|\, 2\,(k+j)\right) = x_{j+1}|\, 2\,(k+j)\,,$$

pero también tenemos $\pi_{*j+i}(x_{j+1}) = x_j$, por lo que $x_{j+1}|2(k+j) = x_j|2(k+j)$. Siguiendo este razonamiento concluimos que si $i \leq j < l$ entonces $x_j|2(k+j) = x_l|2(k+j)$; es decir que si $i \leq j < l$, entonces las suceciones x_j y x_l "son iguales hasta orden $2(k+j)$" por lo que la sucesión $(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots)$ converge a la sucesión x_∞ dada por:

$$x_\infty|\, 2\,(k+j) = x_j|\, 2\,(k+j) \text{ para toda } j \geq i.$$

Es fácil ver ahora que esta sucesión x_∞ es la que buscamos, pues nuestra definición de $\varphi_{\infty,j}$ garantiza que $\varphi_{\infty,j}(\sigma_\infty)|2(k+j) = \sigma_\infty|2(k+j)$ y como $x_j \in [\varphi_{\infty,j}(\sigma_\infty)]$ para toda $j \geq i$ entonces

$$x_\infty|\, 2\,(k+j) = x_j|\, 2\,(k+j) \in \sigma_\infty|\, 2\,(k+j)$$

por lo que $x_\infty \in [\sigma_\infty]$. Finalmente notando que la definición de $\pi_{\infty,i}$ para $s \subseteq x_\infty$ se convierte en:

$$\pi_{\infty,i}(s) = \begin{cases} x_i|\mathrm{long}(s) & \text{si } \mathrm{long}(s) \leq 2(k+i) \\ (\pi_{i+1} \circ \pi_{i+2} \circ \ldots \circ \pi_j)(x_j|\mathrm{long}(s)) & \text{si } \mathrm{long}(s) > 2(k+i) \end{cases}$$

donde j es tal que $2(k+j) \geq \mathrm{long}(s)$. Fácilmente se ve, usando la relación $\pi_{*j}(x_j) = x_{j-1}$, que en efecto, $\pi_{\infty,i}(x_\infty) = x_i$.

Queda probado entonces que la terna $(T_\infty, \pi_{\infty,i}, \varphi_{\infty,i})$ es un $(k+i)$-cubriente del juego $G(T_i, X_i)$. $\diamond$

Contando con esta herramienta podemos concentrarnos, ahora sí, en nuestra pueba por inducción; la base de la inducción será, pues, probar que todo conjunto $X \in \Pi_1$, es decir, todo conjunto cerrado puede desenredarse. Este hecho queda establecido en el siguiente lema; sin embargo, aún cuando ya sabemos que los conjuntos cerrados están determinados, probar este resultado no es tan sencillo, por lo que dejaremos esta demostración para el final de la sección.

Lema 3.3 (Base de la inducción) *Sea T un árbol podado sobre un conjunto A y sea $X \subseteq [T]$ un conjunto cerrado. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un k-cubriente de $G(T, X)$ que desenreda a X.*

Vale la pena hacer una última observación, que aunque bastante evidente, convendrá tener presente para la demostración que nos atañe.

Observación. Si para un juego $G(T, X)$, donde T es un árbol podado sobre A existe un k-cubriente del juego que desenreda a X, dicho k-cubriente también desenreda al conjunto $A^{\mathbb{N}} - X$, pues si $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ es un k-cubriente del juego que desenreda a X, entonces, en vista de que la función π_*^{-1} es continua, resulta que $\pi_*^{-1}([T] - X)$ es también un conjunto abierto y cerrado en $[T]$ por lo que $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ es un k-cubriente del juego $G(T, [T] - X)$.

Teorema 3.4 (Martin) *Si T es un árbol podado, no vacío, sobre un conjunto A y $X \subseteq [T]$ es un conjunto de Borel, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un k-cubriente del juego $G(T, X)$ que desenreda a X.*

Demostración. Como dijimos, la prueba se hará por inducción sobre $1 \leq \xi \leq \omega_1$, probando que para cualquier árbol podado T, si $X \in [\Pi_\xi([T]) \cup \Sigma_\xi([T])]$ entonces para toda $k \in \mathbb{N}$ existe un k-cubriente de $G(T, X)$ que desenreda a X. Por el lema 3.3 y la observación que acabamos de hacer, sabemos que esto es cierto para $\xi = 1$.

Supongamos ahora que el enunciado es válido para toda $\eta < \xi$; esto es, que para todo árbol podado $T \subseteq A^{\mathbb{N}}$ y para todo conjunto $Y \in [\Pi_\eta([T]) \cup \Sigma_\eta([T])]$ con $\eta < \xi$ existe un k-cubriente del juego $G(T, Y)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Nótese que, en vista de la observación anterior, para dar el paso inductivo basta probar que dado un árbol podado T sobre A, $X \in \Pi_\xi([T])$ y $k \in \mathbb{N}$ fijos, existe un k-cubrinente del juego $G(T, X)$ que desenreda a X.

Ahora bien, como $X \in \Pi_\xi([T])$ entonces $X = \cup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ con $X_i \in \Pi_{\xi_i}([T])$, $\xi_i < \eta$. En particular, existe un k-cubriente (T_1, π_1, φ_1) del juego $G(T_0, X_0)$, donde $T_0 = T$ que desenreda a X_0. Dado que la función π_{*1} es continua, sus imágenes inversas respetan las jerarquías de Borel, por lo que para toda $i \geq 1$ tenemos que $\pi_{*1}^{-1}(X_i) \in \Pi_{\xi_i}([T])$; así que, por hipótesis de inducción, para el juego $(T_1, \pi_{*1}^{-1}(X_1))$ existe un $(k+1)$-cubriente, digamos, (T_2, π_2, φ_2), que desenreda a $\pi_{*1}^{-1}(X_1)$. Siguiendo este proceso, podemos definir de forma recursiva una familia de juegos $(T_i, \hat{X}_i), i \in \mathbb{N}$, donde $\hat{X}_i = \pi_{*i}^{-1} \circ \pi_{*i-1}^{-1} \circ \ldots \circ \pi_{*1}^{-1}(X_i)$, tal que para cada uno de estos juegos existe un $(k+i)$-cubriente $(T_{i+1}, \pi_{*i+1}, \varphi_{i+1})$ que desenreda a $\hat{X}_i$. Tomemos pues, el $(k+i)$-cubriente $(T_\infty, \pi_{\infty,i}, \varphi_{\infty,i})$ de $(T_i, \hat{X}_i)$, que nos otorga el lema 3.2. Recordando que estos $(k+i)$-cubrientes satisfacen $\pi_{*i+1} \circ \pi_{\infty,i+1} = \pi_{\infty,i}$ —y por tanto $\pi_{\infty,i}^{-1} = (\pi_{*i+1}^{-1}(\pi_{\infty,i+1}^{-1}))$— vemos que $(T_\infty, \pi_{\infty,0}, \varphi_{\infty,0})$ es un k-cubriente de T_0 tal que, para toda $i \in \mathbb{N}$:

$$\pi_{\infty,0}^{-1}(X_i) = \pi_{\infty,i}^{-1}\left(\pi_{*i}^{-1} \circ \pi_{*i-1}^{-1} \circ \ldots \circ \pi_{*1}^{-1}(X_i)\right).$$

Así, dado que $(T_{i+1}, \pi_{*i+1}, \varphi_{i+1})$ desenreda a $\hat{X}_i = \pi_{*i}^{-1} \circ \pi_{*i-1}^{-1} \circ \ldots \circ \pi_{*1}^{-1}(X_i)$ y $\pi_{\infty,i+1}$ es continua, conluimos que $(\pi_{\infty,0}^{-1}(X_i))$ es un conjunto abierto y cerrado en $[T]$.

Por lo que el cubriente $(T_\infty, \pi_{\infty,0}, \varphi_{\infty,0})$ desenreda a cualquier X_i. En consecuencia el conjunto $\pi_{\infty,0}^{-1}(X) = \cup_{i \in \mathbb{N}} \pi_{\infty,0}(X_i)$ es abierto en $[T_\infty]$.

Finalmente, usando nuevamente el lema 3.3, podemos tomar un k-cubriente de T_∞, digamos $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$, que desenreda a $\pi_{\infty,0}^{-1}(X)$, siendo así, vemos fácilmente que la terna $(\tilde{T}, \pi_{\infty,0} \circ \pi, \varphi_{\infty,0} \circ \varphi)$ es, en efecto, un cubriente de $G(T, X)$ que desenreda a X. $\diamond$

El resultado central de este capítulo —y quizá de todo el trabajo, pues, éste, junto con los resultados 4.6 y 4.7, que veremos en el siguiente capítulo, constituyen las piezas fundamentales de este texto— esteblace, como habíamos anticipado, que:

> Si T es un árbol podado sobre algún conjunto y X es un conjunto de Borel en $[T]$, entonces el juego $G(T, X)$ está determinado.

Es claro que esto se sigue de inmediato a partir del teorema anterior, pues, siendo X de Borel, podemos tomar un cubriente (T, π, φ) del juego $G(T, X)$ que desenreda a X. Así, por el teorema de Gale-Stewart, el juego $G(\tilde{T}, \pi^{-1}(X))$ está determinado y en consecuencia $G(T, X)$ también lo está.

Finalizamos este capítulo, tal y como lo habíamos prometido, con la demostración del lema 3.3, que por comodidad volvemos a enunciar:

Sea T un árbol podado sobre un conjunto A y sea $X \subseteq [T]$ un conjunto cerrado. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un k-cubriente de $G(T, X)$ que desenreda a X.

Demostración del Lema 3.3

Sean T y X como en las hipótesis y tomemos $k \in \mathbb{N}$ fija. Rcordemos la notación $T_p = \{s : p\hat{\ }s \in T\}$ para $p \in T$ y, de igual forma, para $Y \subseteq [T]$, $Y_u = \{x : u\hat{\ }x \in Y\}$. Así mismo, recordemos que T_X denota al árbol asociado al conjunto cerrado X, bajo la asociación $T \longmapsto [T]$, de modo que $T_X \subseteq T$.

Consideremos el juego $G(T, X)$; para costruir el k-cubriente $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ de $G(T, X)$ comenzaremos describiendo informalmente la forma de jugar en $\tilde{T}$:

Las primeras $2k-1$ tiradas en $\tilde{T}$ se juegan bajo las mismas reglas que en $G(T, X)$, es decir, el jugador I elige un elemento $(a_0) \in T$, luego, el jugador II elige un elemento $a_1 \in A$, tal que $(a_0, a_1) \in T$; y así sucesivamente, los jugadores van eligiendo elementos de A de tal forma que, para toda $i \leq 2k-1$, la sucesión $(a_0, \ldots, a_i) \in T$.

En el siguinte turno, el jugador I, además de elegir un elemento a_{2k} tal que $(a_0, \ldots, a_{2k}) \in T$, debe elegir un conjunto de reglas a las que tendrá que someterse, esto lo hace eligiendo una cuasietrategia Σ_1 para el jugador I en $T_{(a_0,\ldots,a_{2k})}$ —bajo la convención de que en $T_{(a_0,\ldots,a_{2k})}$ el jugador II es quien tira primero—. Por lo que en su k-ésima tirada el jugador I debe elegir una pareja (a_{2k}, Σ_1) donde $a_{2k} \in A$ es tal que $(a_0, \ldots, a_{2k}) \in T$ y Σ_1 es una cuasiestrategia para el jugador I en $T_{(a_0,\ldots,a_{2k})}$.

Habiendo hecho esto, el jugador II tiene ahora dos opciones en su siguinte tirada:

1. Imponer un juego temporal.

En este caso el jugador II debe elegir un elemento a_{2k+1} tal que $(a_0, \ldots, a_{2k+1}) \in T$ y una sucesión u de longitud par tal que $u \in T_{(a_o,\ldots,a_{2k+1})}$ y $u \in (\Sigma_1)_{(a_{2k+1})} - (T_X)_{(a_0,\ldots,a_{2k+1})}$.

Cuando esto ocurre los jugadores deben jugar temporalmente de acuerdo a u; en efecto esto quiere decir que si $l = \operatorname{long}(u)$, entonces las siguintes l tiradas, $(a_{2k+2}, \ldots, a_{2k+1+l})$, de ambos jugadores dan lugar a la sucesión u —en lo subsecuente nos referiremos a este hecho diciendo que u es compatible con la sucesión $(a_{2k+2}, .., a_j)$, donde $j \geqslant 2k+2$—. En el momento en el que u se termina, el jugador I queda liberado de Σ_1, es decir, que a partir de la tirada $2k+2+l$, los jugadores I y II eligen elementos $a_i \in A$, con $i \geqslant 2k+2+l$, con la única restricción de que $(a_0, \ldots, a_i) \in T$.

2. Someterse a "nuevas" reglas.

En este caso el jugador II nuevamente elige un a_{2k+1} tal que $(a_0, \ldots, a_{2k+1}) \in T$, pero ahora elige una cuasiestrategia Σ_2 para el jugador II en $(\Sigma_1)_{(a_{2k+1})}$ tal que $\Sigma_2 \subseteq (T_X)_{(a_0,\ldots,a_{2k+1})}$.

Cuando esto ocurre, los jugadores I y II eligen alternadamente elementos $a_{2k+2}, a_{2k+3}, \ldots$ de tal forma que $(a_0, \ldots, a_{2k+j}) \in \Sigma_2$ para toda $j \in \mathbb{N}$.

Siendo estas las reglas del juego, resulta que $\tilde{T}$ es, explícitamente, el árbol que consta de las sucesiones de la forma:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{2k-1}, (a_{2k}, \Sigma_1), (a_{2k+1}, \clubsuit), a_{2k+2}, \ldots, a_m)$$

donde:

- $(a_0, \ldots, a_i) \in T$ para toda $i \leq l$.
- Σ_1 es una cuasiestrategia para el jugador I en $T_{(a_0,\ldots,a_{2k})}$.
- O bien $\clubsuit = u$, donde u es una sucesión en $T_{(a_o,\ldots,a_{2k+1})}$ de longitud par tal que $u \in (\Sigma_1)_{(a_{2k+1})} - (T_X)_{(a_0,\ldots,a_{2k+1})}$ y u es compatible con la sucesión $(a_{2k+2}, \ldots, a_m)$; o bien $\clubsuit = \Sigma_2$, donde Σ_2 es una cuasiestrategia para el jugador II en $(\Sigma_1)_{(a_{2k+1})}$ tal que $\Sigma_2 \subseteq (T_X)_{(a_0,\ldots,a_{2k+1})}$ y $(a_{2k+2}, \ldots, a_m) \in \Sigma_2$.

Queda claro que $\tilde{T}$ es un árbol podado, pues dada cualquier posición siempre existe una siguiente tirada posible, el único momento en el que podríamos llegar a dudar de este hecho es cuando el jugador II debe elegir el elemento de la forma $(a_{2k+1}, \clubsuit)$, pero si no existe

$u \in (\Sigma_1)_{(a_{2k+1})} - (T_X)_{(a_0,\ldots,a_{2k+1})}$ de longitud par, entonces cualquier cuasiestrategia Σ_2 para el jugador II en $(\Sigma_1)_{(a_{2k+1})}$ se queda contenida en $(T_X)_{(a_0,\ldots,a_{2k+1})}$.

Ahora bien, si definimos la función $\pi : \tilde{T} \to T$ como:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{2k-1}, (a_{2k}, \Sigma_1), (a_{2k+1}, \clubsuit), a_{2k+2}, \ldots, a_m) \longmapsto (a_0, \ldots, a_m)$$

es claro que π satisface la condición 2 del cubriente de un juego.

Notemos que dada una sucesión

$$\tilde{x} = (a_0, a_1, \ldots, a_{2k-1}, (a_{2k}, \Sigma_1), (a_{2k+1}, \clubsuit), a_{2k+2}, \ldots) \in \tilde{T}$$

tenemos que $\tilde{x} \in \pi_*^{-1}(X)$ si y sólo si el jugador II eligió la opción de "someterse a nuevas reglas". Pues, por un lado, si el jugador II eligió esta opción entonces $(a_{2k+2}, \ldots) \in [\Sigma_2] \subseteq (T_X)_{(a_0,\ldots,a_{2k+1})}$, con lo que

$$\pi_*(\tilde{x}) = (a_0, \ldots, a_{2k+1,} a_{2k+2}, \ldots) \in X.$$

Por otro lado, si el jugador II no eligió esta opción, entonces eligió "imponer un juego temporal", por lo que existe una sucesión $u \in (\Sigma_1)_{(a_{2k+1})} - (T_X)_{(a_0,\ldots,a_{2k+1})}$ tal que u es segmento inicial de $(a_{2k+2}, \ldots)$, de modo que la sucesión $\pi_*(\tilde{x}) = (a_0, \ldots, a_{2k+1,} a_{2k+2}, \ldots) \notin X$.

Resulta entonces que para $\tilde{x} \in \pi_*^{-1}(X)$ el conjunto

$$V_{\tilde{x}|2k+1} = \{s : (a_0, a_1, \ldots, a_{2k-1}, (a_{2k}, \Sigma_1), (a_{2k+1}, \Sigma_2)) \subseteq s\}$$

está contenido en $\pi_*^{-1}(X)$, por lo que el conjunto $\tilde{X} = \pi_*^{-1}(X)$ es un conjunto abierto en $[\tilde{T}]$.

Además dado que X es cerrado y π_* es continua, debemos tener también que $\tilde{X} = \pi_*^{-1}(X)$ es cerrado; por lo tanto el conjunto X es abierto y también cerrado en $[\tilde{T}]$.

Resta definir la función φ que cumpla con las condiciones 3 y 4 del cubriente; para esto tomaremos una estrategia $\tilde{\sigma}$ para el jugador I (respectivamente para el jugador II) en $\tilde{T}$ y definiremos, a partir de ésta, una estrategia $\sigma = \varphi(\tilde{\sigma})$ para I (respectivamente para II) en $G(T, X)$. La cosntrucción que haremos dejará claro que, en efecto, φ satisface las propiedades 3 y 4 del cubriente.

Caso 1. $\tilde{\sigma}$ es una estrategia para el jugador I *en el juego auxiliar $G(\tilde{T}, \tilde{X})$.*

Definimos la estrategia σ de la siguiente manera:

Las primeras $2k$ tiradas del jugador I bajo $\sigma = \varphi(\tilde{\sigma})$ serán iguales a las dictadas por $\tilde{\sigma}$ en $G(\tilde{T}, \tilde{X})$. Después $\tilde{\sigma}$ le indica al jugador I elegir el elemento (a_{2k}, Σ_1), así, hacemos que σ indique elegir el elemento a_{2k}. Después de esto el jugador II tira un a_{2k+1} en el juego $G(T, X)$. En este punto tenemos dos subcasos:

Subcaso 1: El jugador I tiene una estrategia ganadora en el juego

$$G\left((\Sigma_1)_{a_{2k+1}}, \left[(\Sigma_1)_{(x_{2k+1})}\right] - X_{(x_0,\ldots,x_{2k+1})}\right).$$

Si η es esta estrategia ganadora, hacemos ahora que σ siga a η a partir de este momento, lo cual ciertamente arroja posiciones permitidas en el jugo $G(T, X)$, pues $\Sigma_1 \subseteq T_{(a_0,\ldots,a_{2k})}$. Ahora bien, después de un número finito de pasos, η debe dar lugar a una sucesión u, la más corta de longitud par, tal que $u \notin (T_X)_{(a_0,\ldots,a_{2k+1})}$, digamos $u = (a_{2k+2}, \ldots, a_{2l-1})$. Resulta entonces que la posición

$$p = (a_0, a_1, \ldots, a_{2k-1}, (a_{2k}, \Sigma_1), (a_{2k+1}, u), a_{2k+2}, \ldots, a_{2l-1})$$

es una posición permitida en $\tilde{T}$ aún más, es una posición que debe estar considerada por σ, —i.e, $p \in \tilde{\sigma}$ — así que a partir de este momento las siguientes tiradas del jugador I bajo σ serán las dictadas por $\tilde{\sigma}$ a partir de la posición p.

De este modo, si $(a_n) \in [\sigma] = [\varphi(\tilde{\sigma})]$ entonces $\pi_*(\tilde{a}_n) = (a_n)$ donde:

$$(\tilde{a}_n) = (a_0, a_1, \ldots, a_{2k-1}, (a_{2k}, \Sigma_1), (a_{2k+1}, u), a_{2k+2}, \ldots, a_{2l-1}, \ldots) \in [\tilde{\sigma}]$$

Subcaso 2: El jugador II tiene una estrategia ganadora en el juego

$$G\left((\Sigma_1)_{(a_{2k+1})}, \left[(\Sigma_1)_{(a_{2k+1})}\right] - X_{(a_0,\ldots,a_{2k+1})}\right).$$

Sea Σ_2 la cuasiestrategia canónica para II en este juego. En este momento σ le indica al jugador I jugar siguiendo la estrategia $\tilde{\sigma}$ suponiendo que el jugador II ha tirado (a_{2k+1}, Σ_2); esto es, independientemente de lo que halla tirado II, σ seguirá la estrategia $\tilde{\sigma}$ a partir de la posición

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{2k-1}, (a_{2k}, \Sigma_1), (a_{2k+1}, \Sigma_2)).$$

El jugador I podrá seguir esta estrategia siempre y cuando el jugador II haga sus tiradas posteriores de tal forma que $(a_{2k+2}, \ldots, a_{2l-1}) \in \Sigma_2$; pero si en algún momento II hace una tirada tal que $(a_{2k+2}, \ldots, a_{2l-1}) \notin \Sigma_2$ entonces, tomando en cuenta que la estrategia Σ_2 es la canónica para II, resulta que I tiene una estrategia ganadora en el juego

$$G\left((\Sigma_1)_{(a_{2k+1},\ldots,a_{2l-1})}, \left[(\Sigma_1)_{(a_{2k+1},\ldots,a_{2l-1})}\right] - X_{(a_0,\ldots,a_{2l-1})}\right).$$

Así, I puede seguir ahora esta estrategia ganadora y, de igual forma que en el subcaso 1, esto da lugar a una sucesión $u' = (a_{2l}, \ldots, a_{2j-1}) \notin (T_X)_{(a_0,\ldots,a_{2l-1})}$. De modo que si $u = (a_{2k+2}, \ldots, a_{2l-1})\hat{\ }\acute{u}$ entonces $u \notin (T_X)_{(a_0,\ldots,a_{2k+2})}$ y $u \in (\Sigma_1)_{(a_{2k+1})}$. Por lo que nos encontramos en la misma situación que en el subcaso 1. Sin embargo, si en la partida (a_n) el jugador II siempre jugó dentro de Σ_2, y I siguió la estrategia σ, entonces tomando

$$(\tilde{a}_n) = (a_0, a_1, \ldots, a_{2k-1}, (a_{2k}, \Sigma_1), (a_{2k+1}, \Sigma_2), a_{2k+2}, \ldots, a_{2l-1}, \ldots)$$

tenemos que $(\tilde{a}_n) \in [\tilde{\sigma}]$ y $\pi_*(\tilde{a}_n) = (a_n)$.

Notemos que no existe ningún otro subcaso posible, pues el conjunto $[(\Sigma_1)_{(a_{2k+1})}] - X_{(a_0,\ldots,a_{2k+1})}$ es abierto en $[(\Sigma_1)_{(a_{2k+1})}]$ y por tanto el juego correspondiente está determinado.

Caso 2. $\tilde{\sigma}$ es una estrategia para el jugador II *en el juego $G(\tilde{T}, \tilde{X})$.*

Nuevamente, las primeras $2k$ tiradas del jugador I bajo $\sigma = \varphi(\tilde{\sigma})$ serán iguales a las dadas por $\tilde{\sigma}$. Después el jugador I tira, en el juego $G(T, X)$, el elemento (a_{2k}). En este punto tendremos, otra vez, dos subcasos, pero primero tendremos que definir un juego más.

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{\Sigma_1 : \Sigma_1 \text{ es una cuasietrategia para I en } T_{(a_0,\ldots,a_{2k})}\right\}$$

para $u \in T_{(a_0,\ldots,a_{2k+1})}$ de longitud par y denotemos por $\mathcal{S}_u$ al conjunto de las cuasiestrategias $\Sigma_1 \in \mathcal{S}$ tales que cuando el jugador I tira (a_{2k}, Σ_1) entonces $\tilde{\sigma}$ indica al jugador II que debe tirar un elemento de la forma (a_{2k+1}, u). Finalmente, sean

$$U = \left\{(a_{2k+1})\hat{\ }u \in T_{(a_0,\ldots,a_{2k})} : S_u \neq \emptyset\right\} \quad \text{y}$$

$$\mathcal{U} = \left\{a \in \left[T_{(a_0,\ldots,a_{2k})}\right] : (a_{2k+1})\hat{\ }u \subseteq a \text{ para algún } (a_{2k+1})\hat{\ }u \in U\right\}$$

Así, definimos el juego $G^{\circlearrowleft}(T_{(a_0,\ldots,a_{2k})}, \mathcal{U})$, donde el símbolo $\circlearrowleft$ indica que el jugador II es quien tira primero, es decir, en el juego $G^{\circlearrowleft}\left(T_{(a_0,\ldots,a_{2k})}, \mathcal{U}\right)$, II comienza eligiendo un elemento a_{2k+1}, tal que $(a_{2k+1}) \in T_{(a_0,\ldots,a_{2k})}$, luego I elige un elemento a_{2k+2} tal que $(a_{2k+1}, a_{2k+2}) \in T_{(a_0,\ldots,a_{2k})}$ y así sucesivamente. El jugador II gana si $(a_n) \in \mathcal{U}$, en caso contrario I es el ganador.

Ahora bien, dado que $\mathcal{U}$ es abierto en $T_{(a_0,\ldots,a_{2k})}$, —pues dado cualquier $a \in \mathcal{U}$ tomando $(a_{2k+1})^\frown u \in U$ tal que $(a_{2k+1})^\frown u \subseteq a$ tenemos, recordando la notación dada en la sección 2.2, que $a \in V_{(a_{2k+1})^\frown u} \subseteq \mathcal{U}$— podemos considerar los siguientes dos subcasos.

Subcaso 1: El jugador II tiene una estrategia ganadora en $G^{\cup}\left(T_{(a_0,\ldots,a_{2k})}, \mathcal{U}\right)$.

Sea η esta estrategia ganadora. A partir de este momento la estrategia σ debrá seguir a η. Después de un número finito de pasos, la estrategia ganadora η debe producir una primera sucesión $(a_{2k+1}, \ldots, a_{2l-1})$ que pertenece a U, pues de lo contrario la partida resultante no pertenecería a $\mathcal{U}$. Así, si $u = (a_{2k+2}, \ldots, a_{2l-1})$, podemos tomar una cuasiestrategia $\Sigma_1 \in S_u$ y resulta entonces que la posición

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{2k-1}, (a_{2k}, \Sigma_1), (a_{2k+1}, u), a_{2k+2}, \ldots, a_{2l-1}) \in \tilde{\sigma}$$

A partir de este momento la estratagia σ vuelve entonces a seguir la estrategia $\tilde{\sigma}$.

Por lo que, en este caso, para $(a_n) \in \sigma = \varphi(\tilde{\sigma})$ resulta que la sucesión

$$\tilde{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{2k-1}, (a_{2k}, \Sigma_1), (a_{2k+1}, u), a_{2k+2}, \ldots, a_{2l-1}, \ldots) \in [\tilde{\sigma}]$$

satisface $\pi_* (\tilde{a}) = (a_n)$

Subcaso 2: El jugador I tiene una estrategia ganadora en $G^{\cup}(T_{(a_0,\ldots,a_{2k})}, \mathcal{U})$.

Sea Σ_1 la cuasiestrategia ganadora canónica de I en este juego. Notemos que, siendo este el caso, en el juego en $\tilde{T}$ la estrategia $\tilde{\sigma}$ no puede decirle al jugador II que tire algo de la forma (a_{2k+1}, u), pues de ser así, tendríamos, gracias a las reglas en $G(\tilde{T}, \tilde{X})$, que $(a_{2k+1})^\frown u \in \Sigma_1$, pero por otro lado $(a_{2k+1})^\frown u \in U$ y en consecuencia la partida resultante pertenecería a $\mathcal{U}$, lo cual contradice el hecho de que Σ_1 es la cuasietrategia ganadora canónica para I. Por lo tanto $\tilde{\sigma}$ debe indicarle a II que haga una tirada de la forma (a_{2k+1}, Σ_2).

Así, σ le indica al jugador II que tire a_{2k+1} y que en las siguientes tiradas siga la estrategia $\tilde{\sigma}$ siempre y cuando el jugador I haga sus tiradas de tal forma que $(a_{2k+2}, \ldots, a_{2l}) \in \Sigma_2$; si en algún momento I tira un elemento a_{2l} tal que $(a_{2k+2}, \ldots, a_{2l}) \notin \Sigma_2$, debe ser por que $(a_{2k+2}, \ldots, a_{2l}) \notin (\Sigma_1)_{(a_{2k+1})}$ ya que Σ_2 es una cuasiestrategia en $(\Sigma_1)_{(a_{2k+1})}$ para el jugador II —y por tanto sólo impone "nuevas" reglas a este jugador, sin restringir las posibles tiradas del otro—. Dado que Σ_1 es la cuasiestrategia ganadora canónica para I y $(a_{2k+1}, \ldots, a_{2l}) \notin \Sigma_1$, resulta que II tiene una estrategia ganadora en el juego $G^{\cup}\left(T_{(a_0,\ldots,a_{2l})}, \mathcal{U}_{(a_{2k+1},\ldots,a_{2l})}\right)$. Apartir de este momento, σ le ordena al jugador II seguir esta estrategia ganadora. Tal y como en el subcaso 1, en un número finito de pasos obtenemos una primera sucesión $(a_{2l+1}, \ldots, a_{2j-1})$ tal que $(a_{2k+1}, \ldots, a_{2l}, \ldots, a_{2j-1}) \in U$, y estamos de nuevo en la misma situación que en el subcaso 1, por lo que σ retoma, en la tirada $2j-1$ y en adelante, las instrucciones de $\tilde{\sigma}$.

Habiendo definido así la estrategia σ, para este subcaso, resulta que si la sucesión $(a_n) \in [\sigma] = [\varphi(\tilde{\sigma})]$ es tal que el jugador I hizo todas sus tiradas, a_{2l} con $l \geqslant 2k+2$, de tal forma que $(a_{2k+2}, \ldots, a_{2l}) \in \Sigma_2$, entonces la sucesión

$$\tilde{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{2k-1}, (a_{2k}, \Sigma_1), (a_{2k+1}, \Sigma_2), a_{2k+2}, \ldots, a_{2l-1}, \ldots) \in [\tilde{\sigma}]$$

satisface $\pi_* (\tilde{a}) = (a_n)$. En caso contrario, si en la partida (a_n) el jugador I hizo la tirada a_{2l} fuera de Σ_2, entonces tomando

$$\tilde{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{2k-1}, (a_{2k}, \Sigma_1), (a_{2k+1}, u), a_{2k+2}, \ldots, a_{2j-1}, \ldots) \in [\tilde{\sigma}],$$

donde $u = (a_{2k+2}, \ldots, a_{2l}, \ldots, a_{2j-1})$ obtenemos también $\pi_* (\tilde{a}) = (a_n)$.

Por lo tanto la función φ queda definida en todos los casos y satisface las condiciones 3 y 4 del cubriente.

Concluimos entonces que la terna (T, π, φ) es un cubriente de $G(T, X)$ que desenreda a X. $\diamondsuit$

4. Conjuntos no Determinados

En esta sección construiremos un conjunto no determinado, veremos que, dado un conjunto A podemos, bajo ciertas condiciones, construir un conjunto $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$ tal que en el juego $G(A, X)$ ningún jugador tiene estrategia ganadora.

El hecho de que ningún jugador tenga una estrategia ganadora resulta un poco extraño, pues quiere decir que sea cual sea la estrategia σ que el jugador I siga, el jugador II puede encontrar una estrategia que haga que él gane esa partida, es decir, existe una estrategia φ para el jugador II tal que la partida jugada bajo σ y φ no pertenece al conjunto X; pero, a su vez, el jugador I puede encontrar una estrategia $\tilde{\sigma}$ que haga que la partida que resulta de las estrategias φ y $\tilde{\sigma}$ pertenezca a X, y así sucesivamente. Dicho así, parece, en efecto, que el conjunto X debe ser bastante extraño, por otro lado, esta situación en la que el juego no está determinado en favor de ningún jugador es lo que uno espera de un verdadero juego.

Para construir estos conjuntos impondremos ciertas condiciones sobre el espacio $A^{\mathbb{N}}$, para empezar, necesitaremos que $A^{\mathbb{N}}$ sea polaco, así que ésa fue la razón por la que incluimos estos espacios en la primera sección de este trabajo. Sin embargo, requeriremos saber todavía un poco más sobre ciertos subconjuntos de los espacios polacos.

4.1 Conjuntos Perfectos en Espacios Polacos

Recordemos que, dado un espacio topológico X, un subconjunto $P \subseteq X$ es *perfecto* si P es cerrado y no tiene puntos aislados, es decir, $P = P'$, donde P' denota al conjunto de puntos de acumulación de P.

Tal vez el conjunto de Cantor,$\mathfrak{C}$, es el ejemplo más conocido de subconjunto perfecto de $\mathbb{R}$, obviamente, después de los intervalos cerrados.

Trataremos de ver qué relación existe entre los subconjuntos cerrados de un espacio polaco y los subconjuntos perfectos, dicho de otro modo, la pregunta que trataremos de responder es ¿qué tan "imperfecto" puede ser un subconjunto cerrado de un espacio polaco?, o bien, ¿cuántos puntos aislados puede tener un conjunto cerrado de un espacio polaco y cuándo podemos asegurar que dicho conjunto tiene puntos de acumulación?

Nuestro primer resultado arroja luz sobre esta última pregunta; pero antes de enunciarlo recordemos una sencilla propiedad de los espacios compactos, la cual formulamos a modo de observación.

Observación. Si X es un espacio compacto y Y es un espacio Hausdorff, entonces toda biyección continua $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, pues cualquier conjunto cerrado $C \subseteq Y$, siendo compacto, tiene imagen compacta bajo f, por lo que $f(C)$ es compacto en Y y, por tanto, cerrado, pues Y es Hausdorff. En consecuencia f^{-1} es continua y por lo tanto f^{-1} es un homemorfismo.

Dado que el conjunto de Cantor $\mathfrak{C}$ es compacto, esto se cumple para $X = \mathfrak{C}$, en particular, si $f\colon \mathfrak{C} \to Y$, con Y Hausdorff, es inyectiva y continua, entonces f es un encaje.

***Proposición* 4.1** *Sea X un espacio polaco. Si $P \subseteq X$ es perfecto, entonces P contiene un subespacio homeomorfo al conjunto de Cantor.*

Demostración. Sean X un espacio polaco y P un subconjunto perfecto de X, tomeos además una métrica completa d sobre P compatible con la topología en P inducida por la de X; la cual sabemos existe gracias a 1.3.

Lo que haremos será tratar de reproducir en P la construcción clásica del conjunto de Cantor en $\mathbb{R}$, es decir, trataremos de construir una familia de abiertos no vacíos de P, $(A_s)_{s\in 2^{<\mathbb{N}}}$ de tal forma que:

1. $A_{s\frown 0} \cap A_{s\frown 1} = \emptyset$, para $s \in 2^{<\mathbb{N}}$;
2. $\overline{A_{s\frown i}} \subseteq A_s$, para toda $s \in 2^{<\mathbb{N}}$, $i \in \{0,1\}$;
3. $\text{diám}(A_s) \leq 2^{-\,\text{long}(s)}$ para toda $s \in 2^{<\mathbb{N}}$; donde $\text{diám}(U) = \sup\{d(x,y) : x, y \in U\}$.

En efecto, esto es hacer, en P, algo semejante a la construcción del Cantor en el $[0,1]$, mediante el proceso de quitar sucesivamente las terceras partes de en medio de los intervalos; además ésa es una buena forma de imaginar a la familia $(A_s)_{s\in 2^{\mathbb{N}}}$: tomar los subconjuntos $A_{s\frown 0}$ y $A_{s\frown 1}$ de A_s es como tomar la primera y última terceras partes del intervalo I_s que correspondería en la construcción clásica del Cantor.

Notemos que de existir una familia $(A_s)_{s\in 2^{\mathbb{N}}}$ de subconjuntos de P con estas propiedades habremos terminado, pues si

$$\mathfrak{C}' = \left\{x \in P : x \in \cap_{\,n\in\mathbb{N}} A_{s|n}\right\}$$

entonces podemos definir la función $f\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ como $f(s) = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_{s|n}$; la cual, en efecto está bien definida, es decir, la intersección $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_{s|n}$ consta de un único punto, pues, por un lado, si para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $x_n \in A_{s|n}$, resulta, gracias a la propiedad 3 de la familia $(A_s)_{s\in 2^{\mathbb{N}}}$, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, por lo que existe $x \in P$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$, pero entonces $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} A_{s|n}$, ya que, por la propiedad 2 sabemos que:

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} A_{s|n} = \cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_{s|n}}$$

de modo que si $x \notin \cap_{n\in\mathbb{N}} A_{s|n}$, entonces $x \notin \overline{A_{s|m}}$ para alguna $m \in \mathbb{N}$ y entonces podríamos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (\overline{A_{s|m}})^c$ para toda $n > N$; lo cual es imposible, pues para cada $k > m, N$ tendríamos que $x_k \in (\overline{A_{s|m}})^c \subseteq (A_{s|k})^c$. Por lo tanto $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_{s|n} \neq \emptyset$.

Por otro lado, la propiedad 3 garantiza que la intersección no puede contener más de un punto.

Así la función f está bien definida y además, gracias a la propiedad (1), se ve claramente que es inyectiva. Ahora bien, para ver que f es continua, simplemente notemos que dado $s \in \mathfrak{C}$, la imagen bajo f de la vecindad canónica de s, $N_s = \{t \in \mathfrak{C} : t|n = s|n\}$, se queda contenida en $A_{s|n}$, cuyo diámetro es menor a 2^{-n}.

De la observación previa a esta proposición, se sigue que f es un encaje y por lo tanto $\mathfrak{C}' \subseteq P$ es homeomorfo al conjunto de Cantor.

Procedemos entonces a construir la familia $(A_s)_{s\in 2^{\mathbb{N}}}$. Dicha construcción se hará por inducción sobre $\text{long}(s)$.

Para $\text{long}(s) = 1$, es decir, para $s = \emptyset$, tomemos $A_\emptyset$ un abierto cualquiera no vacío de P, cuyo diámetro sea menor a $1/2$. Como P es perfecto y $A_\emptyset \neq \emptyset$ podemos tomar dos puntos distintos, $x, y \in A_\emptyset$. Sea $\delta < \text{mín}\{d(x, A_\emptyset^c), d(y, A_\emptyset^c), 2^{-1}d(x,y), 2^{-2}\}$ y sean $A_0 = B_\delta(x)$, $A_1 = B_\delta(y)$; así, es claro que A_0 y A_1 satifacen las tres propiedades que queremos. De igual forma, habiendo definido A_s definimos los conjuntos $A_{s\frown 0}$ y $A_{s\frown 1}$ tomando dos puntos $x, y \in A_s$ y haciendo $A_{s\frown 0} = B_\delta(x)$ y $A_{s\frown 1} = B_\delta(y)$, donde $\delta < \text{mín}\{d(x, A_s^c), d(y, A_s^c), 2^{-1}d(x,y), 2^{-(n+1)}\}$. Se ve claramante que la familia $(A_s)_{s\in 2^{\mathbb{N}}}$ construida de esta forma satisface las tres condiciones deseadas.

Por lo tanto P contiene un subespacio homemomorfo al conjunto de Cantor. $\diamond$

Como consecuencia inmediata de este resultado tenemos que la cardinalidad de cualquier subconjunto perfecto de un espacio polaco, es mayor o igual a la del continuo; de hecho, podemos concluir que es igual, pues todo espacio polaco, siendo separable, tiene cardinalidad menor o igual que $2^{\aleph_0}$, ya que todo punto puede ponerse como el límite de una sucesión de puntos de un conjunto denso numerable. Hemos probado entonces:

***Corolario* 4.2** *Todo subconjunto perfecto de un espacio polaco tiene la cardinalidad del continuo.* $\diamond$

Con este corolario en mano podemos, ahora sí, dar respuesta a la pregunta inicial de esta sección.

***Teorema* 4.3** (Cantor-Bendixon) *Sea X un espacio polaco. Si $F \subseteq X$ es un subconjunto cerrado de X entonces $X = P \cup N$ donde P es perfecto y N es numerable.*

Demostración. Recordemos que un punto $x \in X$ es un punto de condensación de $F \subseteq X$ si toda vecindad de x contiene una cantidad no numerable de puntos de F.

De este modo, si X es un espacio polaco y F es un subconjunto cerrado de X, definimos los conjuntos $P = \{x \in X : x \text{ es punto de condensación de } X\}$ y $N = F - P$. Siendo así, resulta que N es numerable, pues tomando una base numerable para X, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vemos que, para cada $x \in N$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in V_n$ y $|V_n \cap F| \leq \aleph_0$. Así que N está contenido en la unión —numerable— de estos conjuntos $V_n \cap F$ que son numerables; por lo que N es también numerable.

Veamos ahora que P es perfecto, es claro que P es cerrado pues si x es punto de acumulación de P, entonces cualquier vecindad de x tiene puntos de P, de modo que cualquier vecindad de x tiene una cantidad no numerable de puntos de F y en consecuencia $x \in P$. Ahora bien, notemos que $P \subseteq P'$, puesto que para $x \in P$, si V es una vecindad cualquiera de x, entonces $V \cap F$ es no numerable y $V \cap N = V \cap (F - P)$ es, según acabamos de ver, un conjunto numerable; por lo tanto $V \cap P$ debe ser no numerable. De modo que todo punto de P es punto de condensación de P, en particular, todo punto de P es punto de acumulación de P. Concluimos entonces que $F = P \cup N$ con P perfecto y N numerable. $\diamond$

Este último teorema, junto con la proposición 4.1 implican de inmediato lo siguiente

***Corolario* 4.4** *Todo subconjunto cerrado no numerable de un espacio polaco tiene la cardinalidad del continuo.* $\diamond$

De modo que no sólo hemos dado respuesta a nuestra pregunta inicial acerca de qué tan imperfecto puede ser un conjunto cerrado, pues hemos visto que la diferencia entre un conjunto cerrado y un conjunto perfecto consta unicamente de una cantidad numerable de puntos, sino que además hemos probado, según este último corolario, que los subconjuntos cerrados de un espacio polaco no pueden ser un contraejemplo para la hipótesis del continuo.

Habiendo resuelto nuestro cuestionamento, tenemos la información suficiente para adentrarnos en la construcción de un conjunto no determinado.

4.2 Conjuntos de Bernstein

El tipo de conjuntos no determinados que aquí mostramos son los llamados conjuntos de Bernstein. Un *conjunto de Bernstein* B en un espacio topológico X es un subconjunto B de X que intersecta a cualquier subconjunto perfecto de X, pero que no contiene a ninguno, esto es $B \subseteq X$ es un conjunto de Bernstein si y sólo si, para todo subconjunto perfecto P de X se tiene que:

$$P \cap B \neq \emptyset \quad \text{y} \quad P \cap B^c \neq \emptyset.$$

En la sección anterior estudiamos el comportamiento de los conjuntos perfectos en espacios polacos y estamos ahora en condiciones de probar la existencia de los conjuntos de Bernstein en espacios polacos, sólo hará falta un lema que se desprende de lo estudiado en la sección anterior.

Lema 4.5 *El conjunto formado por todos los subconjuntos perfectos de un espacio polaco no numerable tiene la cardinalidad del continuo.*

Demostración. Sea X un espacio polaco no numerable y sea $\mathcal{P}$ la familia formada por todos los subconjuntos perfectos de X. Como todo subconjunto perfecto de X es cerrado, debemos tener $|\mathcal{P}| \leq 2^{\aleph_0}$, pues en X hay tantos cerrados como abiertos, y estos últimos están generados por una cantidad numerable de subconjuntos de X.

Por otro lado, dado que X es no numerable, sabemos, por el teorema de Cantor-Bendixon, que X contiene un subconjunto perfecto y además por la proposición 4.1 dicho subconjunto contiene una copia del conjunto de Cantor. Así, si probamos que el conjunto de Cantor contiene al menos $2^{\aleph_0}$ subconjuntos perfectos habremos terminado.

Para esto, notemos que podemos partir el conjunto de Cantor $\mathfrak{C}$ en $2^{\aleph_0}$ subconjuntos perfectos de la siguiente manera:

Para $s, t \in \mathfrak{C}$, digamos, $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definimos un orden en $\mathfrak{C}$ como:

$$t < s \text{ si } t_k < s_k \text{ donde } k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : s_n \neq t_n\}$$

Ahora para cada $s \in \mathfrak{C}$ definimos el conjunto $\mathfrak{C}_t$ como $\mathfrak{C}_t = \{s \in \mathfrak{C} : t \leq s\}$. notemos que para cada $t \in \mathfrak{C}$, si t es una sucesión que no tiene cola de unos, entonces $\mathfrak{C}_t$ es perfecto, pues, por un lado, dado $s \in \mathfrak{C}_t$ con $s \neq t$ y $U_{s|n}$ una vecindad canónica de s, podemos tomar $M = \text{máx}\{n, k\}$ donde $k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : s_n \neq t_n\}$; de modo que cualquier sucesión $r \in \mathfrak{C}$ con $r|(M+1) = s|(M+1)$, pertenece a $\mathfrak{C}_t \cap U_{s|n}$.

Ahora falta ver que t es punto de acumulación de $\mathfrak{C}_t$. Tomemos una vecindad $U_{t|n}$ de t, como t no termina en unos, podemos tomar $k > n$ tal que $t_k = 0$, de modo que si r es la sucesión dada por $r_i = t_i$, para $i \neq k$, y $r_k = 1$, entonces $r \in U_{t|n} \cap \mathfrak{C}_t$. Por lo tanto todo punto de $\mathfrak{C}_t$ es punto de acumulación de $\mathfrak{C}_t$.

Además $\mathfrak{C}_t$ es cerrado pues, si $s \notin \mathfrak{C}_t$ entonces $s \neq t$ por lo que podemos tomar $k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : s_n \neq t_n\}$ y debemos tener $s_k < t_k$, en consecuencia $U_{s|(k+1)} \subseteq X - \mathfrak{C}_t$. Por lo tanto $\mathfrak{C}_t$ es un conjunto perfecto.

Hemos probado entonces que el conjunto $\mathfrak{C}_t$ es perfecto para toda $t \in \{t \in \mathfrak{C} : \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n(n > N \;\&\; t_n = 0)\}$ y dado que este conjunto es no numerable y ciertamente $\mathfrak{C}_t \neq \mathfrak{C}_s$ para $s \neq t$, concluimos que el conjunto de Cantor contiene una cantidad no numerable de subconjuntos perfectos. $\diamond$

Teorema 4.6 *Todo espacio polaco no numerable contiene un conjunto de Bernstein.*

Demostración. Sea X un espacio polaco no numerable y sea $\mathcal{P}$ la familia formada por todos los subconjuntos perfectos de X, dado que dicho conjunto tiene la cardinalidad del continuo, podemos indicar sus elementos con los ordinales α tales que $\alpha < 2^{\aleph_0}$. De este modo podemos escribir:

$$\mathcal{P} = \{P_\alpha \subseteq X : \alpha < 2^{\aleph_0}\}.$$

Con lo anterior construiremos dos colecciones de puntos en X, $\{a_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ y $\{b_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$, tales que para toda $\alpha < 2^{\aleph_0}$ se tiene que $a_\alpha \neq b_\alpha$ y $a_\alpha, b_\alpha \in P_\alpha$.

Para esto, supongamos que hemos bien ordenado a cada conjunto de cardinalidad $2^{\aleph_0}$, de modo que, en vista del resultado 4.2, hemos bien ordenado a cada subconjunto perfecto de X y podemos tomar los primeros dos elementos de P_1 a los cuales llamaremos a_1 y b_1, luego tomamos los primeros dos elementos de $P_2 - \{a_1, b_1\}$ y así sucesivamente.

Supongamos que de esta forma hemos definido los elementos a_α y b_α para toda $\alpha < \beta < 2^{\aleph_0}$; definimos a_β y b_β como los primeros dos elementos de $P_\beta - \cup_{\alpha<\beta}\{a_\alpha, b_\alpha\}$, el cual es un conjunto no vacío pues el conjunto P_β tiene la cardinalidad del continuo.

De este modo, si denotamos por B al conjunto $\{a_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$, entonces B no contiene a ningún subconjunto perfecto de X, pues todos los subconjuntos perfectos de X intersectan al conjunto $\{b_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$, el cual está contenido en el complemento de B. Del mismo modo B^c tampoco puede contener a ningún subconjunto perfecto de X.

Por lo tanto B es un conjunto de Bernstein. $\diamond$

Ahora que sabemos que existen los conjuntos de Bernstein, nos falta probar que este tipo de conjuntos no están determinados, lo cual resulta bastante sencillo.

***Proposición* 4.7** *Sea $G(A,X)$ un juego infinito con A polaco y compacto. Si X es un conjunto de Bernstein en $A^{\mathbb{N}}$ entonces $G(A,X)$ no está determinado.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que el juego $G(A,X)$ está determinado y que es el jugador I quien tiene una estrategia ganadora, digamos σ, de modo que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cualquier partida jugada bajo la estrategia σ, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$; es decir que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertence a X para cualquier sucesión $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$. Así, si $f\colon A^{\mathbb{N}} \to X$ se define por:

$$f(a) = (\sigma(\emptyset), a_0, \sigma(a_0), \ldots, a_n, \sigma(a_0, \ldots, a_n), \ldots)$$

resulta que f es inyectiva y continua, pues para $a \in A^{\mathbb{N}}$ tenemos $f^{-1}(U_{f(a)|n}) = U_{a|n}$. Como estamos suponiendo que A es compacto, gracias a la observación hecha en la sección anterior, concluimos que f es un homeomorfismo sobre su imagen.

Ahora bien, como $A^{\mathbb{N}}$ es polaco y no numerable, entonces, por el teorema de Cantor-Bendixon, $A^{\mathbb{N}}$ contiene un conjunto perfecto y en consecuencia X también, lo cual es imposible pues X es de Bernstein.

Si suponemos ahora que es el jugador II quien tiene una estrategia ganadora en $G(A,X)$ entonces, de manera análoga, podemos ver que $A^{\mathbb{N}} - X$ contiene un conjunto perfecto, lo cual es imposible. Por lo tanto si X es de Bernstein en $A^{\mathbb{N}}$, ninguno de los dos jugadores puede tener una estrategia ganadora. $\diamond$

Este resultado puede parecer, en un principio, más general de lo que en realidad es, pues en nuestras hipótesis estamos pidiendo que A sea discreto, completamente metrizable, separable y compacto, lo cual ciertamente implica que A sea finito y en consecuencia $A^{\mathbb{N}}$ debe ser homeomorfo al conjunto de Cantor.

Así que a final de cuentas podemos reescribir el enunciado de la proposición anterior de la forma: *Si $X \subseteq \mathfrak{C}$ es un conjunto de Bernstein en $\mathfrak{C}$ entonces el juego $G(\{0,1\},X)$ no está determinado.*

Por otro lado, nótese que hemos porobado que si el jugador I tiene una estrategia ganadora en el juego $G(\{0,1\},X)$ entonces X contiene un conjunto perfecto, mientras que si el jugador II es quien tiene una estrategia ganadora entonces $\mathfrak{C} - X$ contiene un conjunto perfecto. De modo que, por el teorema de Martin, podemos concluir que si B es un conjunto de Borel en $\mathfrak{C}$ entonces B o B^c contiene un conjunto perfecto.

De hecho, esto tiene un nombre; dado un espacio topológico X, se dice que un subconjunto A de X tiene *la propiedad del conjunto perfecto* si A es numerable o contiene un conjunto perfecto. Dicho así, lo que hemos probado, hasta el momento, es que si $B \subseteq X$ es un conjunto de Borel entonces, o bien B, o bien B^c tiene la propiedad del conjunto perfecto.

En realidad, este resultado se puede hacer mucho más general, si recordamos la proposición 1.5

Teorema 4.8 *Todo conjunto de Borel en un espacio polaco tiene la propiedad del conjunto perfecto.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio polaco y sea B un subconjunto de Borel no numerable de X, por 1.5, sabemos que existe una topología polaca τ' que contiene a τ tal que B es cerrado y abierto en (X, τ'). De modo que B, siendo cerrado y no numerable en el espacio polaco (X, τ'), contiene un conjunto P que es perfecto bajo la topología τ'; a su vez, por 4.1, P contiene un conjunto $\mathfrak{C}'$ homeomorfo al conjunto de Cantor.

Ahora bien, como la función identidad, $I\colon (X, \tau') \to (X, \tau)$ es continua, y la imagen continua de conjuntos perfectos es perfecta, resulta que $I(\mathfrak{C}) \subseteq B$ es un subconjunto perfecto de B. Por lo tanto B tiene la propiedad del conjunto perfecto. $\diamond$

Hemos visto entonces, a lo largo de este trabajo, que todo conjunto de Borel está determinado, mientras que todo subconjunto de Bernstein del conjunto de Cantor no lo está. Así mismo, hemos probado que todo conjunto de Borel en un espacio polaco tiene la propiedad del conjunto perfecto, mientras que ningún conjunto de Bernstein posee dicha propiedad. Esto nos lleva a concluir que la propiedad de estar determinado, así como la del conjunto perfecto hacen referencia a cierta “regularidad” o “buen comportamiento” del conjunto en cuestión. De hecho, toda propiedad sobre los subconjuntos de un espacio topológico que nos hable de un “buen comportamiento” del conjunto —y no sea demasiado restrictiva— debería ser satisfecha por los conjuntos de Borel, pues son éstos los que se pueden generar de una manera sencilla a partir de la topología del espacio, como vimos en la sección 2.2.

Por otro lado los conjuntos de Bernstein parecen ser la antítesis de los borelianos, pues, como hemos visto, son conjuntos no determinados y, por definición no poseen la propiedad del conjunto perfecto. Pero no sólo eso, existen otras “propiedades de regularidad” que todo conjunto de Borel satisface —como debe ser— y ningún conjunto de Bernstein cumple, a saber, la propiedad de Baire y la propiedad de ser medible —en caso de estar hablando de un espacio medible—. Desgraciadamente no es posible, por cuestiones de espacio, introducir estos conceptos y probar dichas afirmaciones en este trabajo, así que remitimos al lector a [9] y [7] de la bibliografía.

Pero aún sin conocimiento de estas últimas afirmaciones, parece pertinente decir que el hecho de que, en un juego infinito, un conjunto esté determinado o no, es un buen parámetro de regularidad. Aunque, a diferencia de la propiedad del conjunto perfecto, así como de la de ser medible, boreliano, o bien, la de tener la propiedad de Baire, los conjuntos determinados no forman una σ-álgebra, —de ser cierto, bien podría haber sido éste un camino para probar el teorema de Martin, pues si la familia de conjuntos determinados formara una σ-álgebra, por el teorema de Gale-Stewart, contendría a todos los conjuntos abiertos y por tanto a los borelianos— es más, ni siquiera es cerrada bajo uniones finitas, por ejemplo, si X es un conjunto de Bernstein en $\mathfrak{C}$, tomando $X_1 = \{(0,0)\hat{\ }x : x \in X\}$ y $X_2 = \{(0,1)\hat{\ }x : x \in X\}$, es claro que tanto X_1, como X_2 están determinados, pues el jugador II puede asegurar su victoria en X_1, tirando 1 en su primer turno, mientras que tirando 0 en su primer turno asegura su victoria en el juego $G(\{0,1\}, X_2)$. Sin embargo el juego en $X_1 \cup X_2$ no está determinado, ya que si el jugador I elige tirar 0 en el primer turno, entonces el juego $G(\{0,1\}, X_1 \cup X_2)$ es equivalente al juego $G(\{0,1\}, X)$. Algo parecido podemos hacer para ver que esta familia no es cerrada bajo complementos, simplemente hay que considerar el conjunto $X' = \{(0)\hat{\ }x : x \in X\}$ y el juego $G(\{0,1\}, X' \cup U_{(1)})$, donde $U_{(1)}$ es la vecindad canónica formada por todas las sucesiones en $\mathfrak{C}$ que comienzan con 1. Siendo así, resulta que el jugador I tiene una estrategia ganadora en el juego $G(\{0,1\}, X' \cup U_{(1)})$, mientras que el juego en $(X' \cup U_{(1)})^c = \{(0)\hat{\ }x : x \in X^c\}$ no está determinado.

De modo que en un sentido estricto, la propiedad de ser determinado no es, en todo derecho, una “propiedad de regularidad”, pues si bien nos habla de un buen comportamiento del conjunto en cuestión, la propiedad en sí no se comporta de forma regular.

Bibliografía

[1] Blackwell D. "Infinite Games and Analytic Sets", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America,* vol. 58, 1967, pp. 1836-1837.

[2] Cao Jiling y Warren B. Moors, "A survey on topological Games and their Applications in Analysis", *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Nucleares*, Serie A: Matemáticas, vol. 100, 2006, pp. 39-50.

[3] Martin, Donald A. ,"Borel Determinacy", *Annals of Mathematics*, núm. 102, 1975, pp. 363-371.

[4] Moschovakis, Yiannis, *Descriptive Set Theory*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 155, American Mathematical Society, vol. 155, 2009.

[5] Gale, David y F. M Stewart, "Infinite games with perfect information", *Contributions to the Theory of Games,* vol. 2, Annals of Mathematics Studies, núm 28, Princeton University Press, Princeston, N.J., 1953, pp. 245-266

[6] Jech, Thomas J., *Set Theory,* Springer, Berlín, 3a. ed. 2006.

[7] Kechris, Alexander S., *Classical Descriptive Set Theory,* Graduate Texts in Mathematics, vol. 156, Springer-Verlag, Nueva York.

[8] Oxtoby, John C., "The Banach-Mazur Game and the Banach Category Theorem", *Contributions to the theory of Games,* vol. 3, Annals of Mathematics Studies, no. 39, Princeton University Press, Princeston N.J., 1957, pp. 159-163.

[9] Oxtoby, John C., *Measure and Category: A Survey of the Analogies Between Topological and Measure Spaces,* Graduate Texts in Mathematics Springer, vol. 2, Springer, Nueva York, 1971.

[10] Srivastava, Sashi Mohan, *A Course on Borel sets,* Graduate Texts in Mathematics, vol.180, Springer, Nueva York, 1998.