UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

Espacios Clasificantes y Teorías de Cohomología

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

BERNARDO VILLARREAL HERRERA

DIRECTOR DE LA TESINA: Dr. Marcelo Alberto Aguilar González de la Vega

MÉXICO, D.F. JULIO, 2012

ESPACIOS CLASIFICANTES Y TEORÍAS DE COHOMOLOGÍA

Bernardo Villarreal Herrera

julio de 2012

Índice General

Introducción

Un resultado muy conocido en topología algebraica es la clasificación de haces G-principales sobre complejos CW. Hay dos maneras maneras de hacerla, una homotópica y otra "cohomológica", esta última en general es no-abeliana. La primera se da tomando las clases de homotopía $[X, BG]$, donde BG es el espacio clasificante del grupo topológico G y usando la existencia de una haz universal $EG \to BG$, de manera que la función que asocia a cada clase de homotopía $[f \colon X \to BG]$ la clase de isomorfismo del pullback $f^*(EG) \to X$ es biyectiva. La otra clasificación se hace sobre cualquier espacio topológico, usando que los haces G-principales inducen una familia de funciones que forman un cociclo. Los cociclos sobre una cubierta abierta $\mathcal{U}$ fija se agrupan de manera natural en un conjunto $\check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{G})$ donde $\mathcal{G}$ es la pregavilla de funciones continuas con valores en G. Esta relación da una biyección entre las clases de isomorfismo de haces G-principales sobre la cubierta $\mathcal{U}$, $k_G^{\mathcal{U}}(X) \cong \check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{G})$ y se obtiene una biyección "global" $k_G(X) \cong \check{H}^1(X; \mathcal{G})$ tomando colímites sobre las cubiertas. Si restringimos lo anterior a complejos CW, obtenemos una biyección $\check{H}^1(X; \mathcal{G}) \cong [X, BG]$. Sin embargo la primera biyección $k_G(X) \cong [X, BG]$ está dada por la existencia de extensiones de secciones y no hay una correspondencia específica de cociclos en funciones continuas.

En el primer capítulo vamos a dar algunos conceptos básicos sobre *espacios simpliciales* y *categorías topológicas* que relacionaremos mediante el *nervio de una categoría*. Usando esto, daremos la construcción del espacio BG de P. May ([15]) que se obtiene a partir de la realización geométrica del nervio de una categoría topológica asociada al grupo topológico G y veremos que en efecto es un espacio clasificante en el sentido usual, es decir, hay un haz G-principal $p \colon EG \to BG$ con EG un espacio contraible.

Siguiendo las ideas del inicio del artículo de P. Gainza [8] basadas en [7], se puede dar una función entre cociclos y clases de homotopía, $\check{H}^1(X; \mathcal{G}) \to [X, BG]$ cuando el espacio es paracompacto. Esta regla de correspondencia está hecha con la realización geométrica "gorda" de espacios simpliciales que está bien desarrollada en [7]. En el segundo capítulo de este trabajo, daremos la correspondencia con la realización geometrica usual siguiendo [3] y veremos que es biyectiva.

Terminaremos dando una prueba de Huber ([10]) de un resultado clásico que es el isomorfismo entre la cohomología homotópica de espacios paracompactos con coeficientes en un grupo abeliano L y la cohomología de Čech con coeficientes en la gavilla de funciones localmente constantes con valores en L.

Este isomorfismo se da entre cohomología de gavillas y cohomología homotópica, pero la cohomología de Čech sobre espacios paracompactos es isomorfa a la cohomología de gavillas. Para construir este isomorfismo daremos algunos conceptos básicos de ambas teorías sin entrar en muchos detalles.

Capítulo 1

Espacio Clasificante

Vamos a construir un modelo del espacio clasificante de un grupo topológico G (en una categoría adecuada). Para esto, veremos a G como una categoría y veremos cómo asociarle a una categoría arbitraria un espacio clasificante.

1.1 Conjuntos Simpliciales y la Realización Geométrica

Definición 1.1.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un *objeto simplicial* en $\mathcal{C}$ es un funtor contravariante $K\colon \Delta \to \mathcal{C}$, donde Δ es la categoría cuyos objetos son los conjuntos finitos ordenados $\overline{n} = \{0, 1, ..., n\}$ y sus morfismos son funciones f que preservan el orden no estrictamente, es decir, si $i < j$ entonces $f(i) \leq f(j)$.

Para entender mejor cómo es un objeto simplicial, analicemos la categoría Δ. Consideremos los siguientes morfismos en Δ: $\bar{d}_i\colon \overline{n-1} \to \overline{n}$ y $\bar{s}_i\colon \overline{n+1} \to \overline{n}$ que están dados para cada $0 \leq i \leq n$ por

$$\bar{d}_i(k) = \begin{cases} k & si \;\; k < i \\ k+1 & si \;\; k \geq i \end{cases} \qquad \bar{s}_i(k) = \begin{cases} k & si \;\; k \leq i \\ k-1 & si \;\; k > i. \end{cases}$$

Cada morfismo en Δ se puede factorizar mediante las funciones $\bar{d}_i$ y $\bar{s}_i$, de manera que si $K\colon \Delta \to \mathcal{C}$ es un objeto simplicial, entonces K está determinado por K_n y por los morfismos

$$d_i\colon K_n \to K_{n-1} \qquad s_i\colon K_n \to K_{n+1}$$

en $\mathcal{C}$, donde $K_n \equiv K(\overline{n})$ para cada $n \geq 0$, $K(\bar{d}_i) = d_i$ y $K(\bar{s}_i) = s_i$ para cada $0 \leq i \leq n$. Llamamos a los morfismos d_i *operadores cara* y a los morfismos s_i *operadores degenerados*. Un elemento $x \in K_n$ es *degenerado* si $x = s_i(y)$ para algún $y \in K_{n-1}$. De las propiedades heredadas por $\bar{d}_i$ y $\bar{s}_i$, se sigue que d_i y s_i satisfacen las siguientes igualdades:

$$d_i \circ d_j = d_{j-1} \circ d_i \;\; si \;\; i < j$$

$$d_i \circ s_j = \begin{cases} s_{j-1} \circ d_i & si \;\; i < j \\ Id & si \;\; i = j \text{ ó } i = j+1 \\ s_j \circ d_{i-1} & si \;\; i > j+1 \end{cases}$$

$$s_i \circ s_j = s_{j+1} \circ s_i \;\; si \;\; i \leq j.$$

Sean $K, L \colon \Delta \to \mathcal{C}$ objetos simpliciales y tomemos una transformación natural entre ellos, digamos $\varphi \colon K \Rightarrow L$. Entonces para cada $n \geq 0$ tenemos que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} K_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "d_i"'] & L_n \arrow[d, "d_i"] \\ K_{n-1} \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] & L_{n-1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "s_i"'] & L_n \arrow[d, "s_i"] \\ K_{n+1} \arrow[r, "\varphi_{n+1}"] & L_{n+1} \end{tikzcd} .$$

En este caso, decimos que $\varphi \colon K \to L$ es un *morfismo simplicial*. De esta manera, podemos organizar objetos y morfismos simpliciales en categorías que se denotan $\mathcal{C}_\Delta$, $Func(\Delta, \mathcal{C})$ ó $\mathcal{C}^{\Delta^{op}}$. Un caso ya muy conocido es cuando $K \colon \Delta \to Set$, que llamamos *conjunto simplicial*. Una manera de caracterizar a los conjuntos simpliciales es con los funtores contravariantes $\Delta\overline{n} \colon \Delta \to Set$, que denotan al funtor $Hom_\Delta(\_, \overline{n})$ para cada $n \geq 0$. Como $\Delta\overline{n}$ es representable, por el Lema de Yoneda hay una biyección $K_n \cong Hom_{Set_\Delta}(\Delta\overline{n}, K)$ para cada $n \geq 0$ y cada conjunto simplicial K. Una ventaja de los conjuntos simpliciales es que podemos asociarles espacios topológicos con propiedades muy buenas, por ejemplo complejos CW.

Definición 1.1.2. Sea K un conjunto simplicial y $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ el n-simplejo estándar, es decir, $\Delta^n = \{(t_0, ..., t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq t_i \leq 1 \; y \; \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$. Definimos la *resolución geométrica* de K como

$$|K| = (\bigsqcup_{n \geq 0} K_n \times \Delta^n)/ \sim$$

donde la relación $\sim$ está dada como sigue. Consideremos $\delta_i \colon \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ y $\sigma_i \colon \Delta^{n+1} \to \Delta^n$ las funciones definidas en los generadores e_j de $\mathbb{R}^k$ como

$$\delta_i(e_j) = \begin{cases} e_j & j < i \\ e_{j+1} & j \geq i \end{cases} \quad y \quad \sigma_i(e_j) = \begin{cases} e_j & j \leq i \\ e_{j-1} & j > i \end{cases}$$

con $0 \leq i \leq n$. Entonces $\sim$ es la relación generada por

$$K_n \times \Delta^n \ni (a, \delta_i(t)) \sim (d_i(a), t) \in K_{n-1} \times \Delta^{n-1}$$

$$K_{n+1} \times \Delta^{n+1} \ni (s_i(a), t) \sim (a, \sigma_i(t)) \in K_n \times \Delta^n$$

donde d_i y s_i son los operadores cara y degenerados de K.

La topología de $|K|$ es la inducida por la filtración

$$F_k|K| = \pi(\bigsqcup_{n=0}^{k} K_n \times \Delta^n),$$

donde K_n tiene la topología discreta, Δ^n la de subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$ y

$$\pi\colon \bigsqcup_{n\geq 0} K_n \times \Delta^n \to |K|$$

es la aplicación cociente. $|K|$ tiene una estructura de complejo CW con una n-celda por cada n-simplejo no degenerado. Dado un punto (a,t), se puede probar que existe un único punto no-degenerado (b,s), es decir, b es no-degenerado y s es un punto interior, de manera que $[a,t]=[b,s]$ en $|K|$.

Ejemplo 1.1.3. Sea S un conjunto y consideremos a S como conjunto simplicial, es decir, $S_n = S$ para cada $n \geq 0$, donde los operadores cara y degenerados son identidades. Entonces $|S| \cong S$ ya que cada punto (s,t) es degenerado salvo $S_0 \times \Delta^0 = S \times \{*\}$ y por lo tanto $|S| \cong S \times \{*\} \cong S$.

Ejemplo 1.1.4. Sea X un espacio topológico. Podemos asociarle un complejo CW a X de la siguiente manera: definimos un conjunto simplicial $\mathcal{S}X$ como $(\mathcal{S}X)_n = \{\sigma\colon \Delta^n \to X \mid \sigma \text{ es continua}\}$, donde $d_i\colon (\mathcal{S}X)_n \to (\mathcal{S}X)_{n-1}$ y $s_i\colon (\mathcal{S}X)_n \to (\mathcal{S}X)_{n+1}$ están dados por $d_i(\sigma) = \sigma \circ \delta_i$ y $s_i(\sigma) = \sigma \circ \sigma_i$. Milnor probó que la función $\rho_X\colon |\mathcal{S}X| \to X$ dada por $\rho_X(\sigma,t) = \sigma(t)$ es una equivalencia homotópica débil.

Si $f\colon K \to L$ es una función simplicial, definimos $|f|\colon |K| \to |L|$ como $|f|([a,t]) = [f(a),t]$, la cual resulta continua ya que f conmuta con los operadores cara y degenerados de manera que la función $f \times Id$ pasa al cociente y define $|f|$. Esto nos da un funtor

$$|\_|\colon Set_\Delta \to CW.$$

Por otro lado, si $f\colon X \to Y$ es una función continua, definimos $\mathcal{S}f\colon \mathcal{S}X \to \mathcal{S}Y$ como $(\mathcal{S}f)_n\colon (\mathcal{S}X)_n \to (\mathcal{S}Y)_n$, $\sigma \mapsto f \circ \sigma$ para cada $n \geq 0$ que claramente conmuta con los operadores cara y degenerados. Así, tenemos un funtor

$$\mathcal{S}(\_)\colon Top \to Set_\Delta.$$

Se puede probar que $\mathcal{S}(\_)$ y $|\_|$ son funtores adjuntos, es decir, hay una biyección

$$Hom_{Top}(|K|, X) \cong Hom_{Set_\Delta}(K, \mathcal{S}X)$$

para cada espacio X y cada conjunto simplicial K.

Recordemos que una categoría $\mathcal{C}$ es *pequeña* si los objetos de $\mathcal{C}$, $Obj(\mathcal{C})$ y los morfismos $Mor_{\mathcal{C}}$ son conjuntos.

Definición 1.1.5. Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña. Definimos el *nervio* de $\mathcal{C}$ que denotamos por $N\mathcal{C}$ como sigue: consideremos sucesiones finitas de morfismos

$$X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \xrightarrow{f_n} X_n\ ,$$

definimos el conjunto simplicial $N\mathcal{C}$ como

$$(N\mathcal{C})_n = \{(f_1, ..., f_n) \in \underbrace{Mor_{\mathcal{C}} \times \cdots \times Mor_{\mathcal{C}}}_{n\ veces} \mid f_{i+1} \circ f_i \text{ está definida}\}.$$

Definimos $d_i \colon (N\mathcal{C})_n \to (N\mathcal{C})_{n-1}$ y $s_i \colon (N\mathcal{C})_n \to (N\mathcal{C})_{n+1}$ como

$$d_i(f_1, ..., f_n) = \begin{cases} (f_2, ..., f_n) & si\ \ i = 0 \\ (f_1, ..., f_{i+1} \circ f_i, ..., f_n) & si\ \ 0 < i < n \\ (f_1, ..., f_{n-1}) & si\ \ i = n \end{cases}$$

$$\text{y } s_i(f_1, ..., f_n) = (f_1, ..., f_i, Id_{C_i}, f_{i+1}, ..., f_n),$$

donde $f_i \colon C_{i-1} \to C_i$ con $0 \leq i \leq n$.

Así, obtenemos un conjunto simplicial $N\mathcal{C} \colon \Delta \to Set$ dado por $N\mathcal{C}(\overline{n}) = (N\mathcal{C})_n$, $N\mathcal{C}(\bar{d}_i) = d_i$ y $N\mathcal{C}(\bar{s}_i) = s_i$.

Nota 1.1.6. Dada una categoría pequeña, podemos asociarle un espacio topológico (complejo CW) $|N\mathcal{C}|$. Este espacio es de interés cuando $\mathcal{C}$ tiene estructura de monoide, es decir, $\mathcal{C}$ tiene un sólo objeto y hay una operación (bifuntor) $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ junto con un morfismo I que actúa trivialmente tanto por la izquierda como por la derecha.

Ahora, consideremos $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor entre categorías pequeñas, entonces tenemos una función simplicial $NF \colon N\mathcal{C} \to N\mathcal{D}$ que para cada $n \geq 0$, $(NF)_n \colon (N\mathcal{C})_n \to (N\mathcal{D})_n$ está definida por $(NF)_n(f_1, ..., f_n) = (F(f_1), ..., F(f_n))$. En efecto, como F es funtor, $(NF)_n$ está bien definida y además,

$$d_i \circ (NF)_n(f_1, ..., f_n) = (F(f_1), ..., F(f_{i+1}) \circ F(f_i), ..., F(f_n)) =$$

$$(F(f_1), ..., F(f_{i+1} \circ f_i), ..., F(f_n)) = (NF)_{n-1} \circ d_i(f_1, ..., f_n) \text{ y}$$

$$s_i \circ (NF)_n(f_1, ...f_n) = (F(f_1), ..., Id_{F(C_i)}, ..., F(f_n)) =$$

$$F(f_1), ..., F(Id_{C_i}), ..., F(f_n)) = (NF)_{n+1} \circ s_i(f_1, ..., f_n).$$

Sea *cat* la categoría cuyos objeto son categorías pequeñas y morfismos funtores entre ellas. Hemos construido un funtor (el *funtor nervio*)

$$N \colon cat \to Set_{\Delta}.$$

1.2 Categorías Topológicas y Espacios Simpliciales

Quremos estudiar el caso de objetos simpliciales en Top, es decir, funtores contravariantes $K \colon \Delta \to Top$. Dado un conjunto simplicial K, podemos dotar a cada conjunto K_n con la topología discreta y obtenemos un espacio simplicial discreto. Análogamente al ejemplo 1.1.3, dado un espacio X podemos verlo como espacio simplicial de manera que $|X| \cong X$ como espacios topológicos. En particular nos interesan los nervios de categorías $N\mathcal{C} \colon \Delta \to Top$ y para esto necesitamos que los operadores cara y degenerados de 1.1.5 sean continuos.

Definición 1.2.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña. Decimos que $\mathcal{C}$ es una *categoría topológica* si $obj(\mathcal{C})$ y $Mor_{\mathcal{C}}$ son espacios topológicos y además, pedimos que las siguientes funciones sean continuas:

1. $Mor_{\mathcal{C}} \to Obj(\mathcal{C}) \times Obj(\mathcal{C})$ dada por $f \mapsto (C, C')$, donde f es un morfismo en $Mor_{\mathcal{C}}(C, C')$.
2. La composición de morfismos $Mor_{\mathcal{C}} * Mor_{\mathcal{C}} \to Mor_{\mathcal{C}}$, $(f, g) \mapsto (g \circ f)$ donde $Mor_{\mathcal{C}} * Mor_{\mathcal{C}} = \{(f, g) \mid g \circ f \text{ está definida}\} \subset Mor_{\mathcal{C}} \times Mor_{\mathcal{C}}$.
3. $Obj(\mathcal{C}) \to Mor_{\mathcal{C}}$ dada por $C \mapsto Id_C$.

Estas funciones se les llama *funciones estructurales*.

Ejemplo 1.2.2. Podemos asociarle a un grupo topológico G la categoría que tiene un solo objeto $*$ y los morfismos son los elementos de G cuya composición está dada por la operación en el grupo, es decir, $g_2 \circ g_1 = g_1 g_2$. En este caso $Id_* = e$ y tenemos que la composición de morfismos es asociativa ya que G es grupo. En efecto,

$$g_3 \circ (g_2 \circ g_1) = (g_2 \circ g_1) g_3 = (g_1 g_2) g_3 \text{ y}$$

$$(g_3 \circ g_2) \circ g_1 = (g_2 g_3) \circ g_1 = g_1 (g_2 g_3).$$

De esta manera, si denotamos por G a esta categoría tenemos que $Obj(G) = \{*\}$ y $Mor_G = G$ son espacios topológicos. Para ver que G es una categoría topológica falta verificar que las tres funciones de la definición 1.2.1 son continuas.

1. La función $G \to \{e, e\}$ es constante y por lo tanto continua.
2. Dados morfismos $g_1, g_2 \in G$ tenemos que $g_1 g_2 \in G$, entonces la función $G * G = G \times G \to G$ está dada por $(g_1, g_2) \mapsto g_2 \circ g_1 = g_1 g_2$ que es continua ya que la multiplicación $G \times G \to G$ es continua.
3. Finalmente $\{*\} \to G$ dada por $* \mapsto Id_*$ es claramente continua.

Ejemplo 1.2.3. Otra categoría que se le puede asociar a un grupo topológico G es $\bar{G}$, donde $Obj(\bar{G}) = G$ y dados $g_1, g_2 \in G$ el único morfismo $g_1 \to g_2$ es (g_1, g_2) y por lo tanto $Mor_{\bar{G}} = G \times G$. Esto es en efecto una categoría ya que si $g \in G$, $Id_g = (g, g)$ y tenemos la composición $(g_1, g_2)(g_2, g_3) = (g_1, g_3)$ que es asociativa pues $(g_1, g_2)((g_2, g_3)(g_3, g_4)) = (g_1, g_2)(g_2, g_4) = (g_1, g_4)$ y por otro lado $((g_1, g_2)(g_2, g_3))(g_3, g_4) = (g_1, g_3)(g_3, g_4) = (g_1, g_4)$. Los objetos y morfismos de $\bar{G}$ son espacios topológicos. En este caso $Hom_{\bar{G}}(g_1, g_2)$ es un punto. Veamos que $\bar{G}$ es una categoría topológica:

1. La función $Mor_{\bar{G}} = G \times G \to Obj(\bar{G}) \times Obj(\bar{G}) = G \times G$ está dada por $(g_1, g_2) \mapsto (g_1, g_2)$ que es la identidad.
2. La composición $(G \times G) * (G \times G) \to G \times G$, $((g_1, g_2), (g_2, g_3)) \mapsto (g_1, g_3)$ es la restricción de la proyección $G \times G \times G \times G \to G \times G$, $(g_1, g_2, g_3, g_4) \mapsto (g_1, g_4)$ y por lo tanto es continua.
3. La función $G \to G \times G$ dada por $g \mapsto (g, g)$ es la función diagonal que es continua.

Ejemplo 1.2.4. Sea X un espacio topológico y consideremos una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de X. Definimos la categoría $X_\mathcal{U}$ de la siguiente manera: los objetos de $X_\mathcal{U}$ son de la forma (x, α) donde $x \in U_\alpha$ para alguna $\alpha \in \Lambda$. Dados (x, α) y (y, β) existe un morfismo $(x, \alpha) \to (y, \beta)$ si y sólo si $y = x$ y lo denotamos $(x, (\alpha, \beta))$. Esto quiere decir que existe un morfismo si y sólo si $x \in U_\alpha \cap U_\beta$. De esta manera tenemos que

$$Obj(X_\mathcal{U}) = \bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \;\; y \;\; Mor_{X_\mathcal{U}} = \bigsqcup_{\alpha,\beta\in\Lambda} U_\alpha \cap U_\beta$$

1. La función $\bigsqcup_{\alpha,\beta\in\Lambda} U_\alpha \cap U_\beta \to (\bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha) \times (\bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha)$ es continua ya que está dada por las inclusiones $U_\alpha \cap U_\beta \hookrightarrow U_\alpha$ y $U_\alpha \cap U_\beta \hookrightarrow U_\beta$.

2. Notemos que la composición de dos morfismos $(y, (\delta, \gamma)) \circ (x, (\alpha, \beta))$ está definida si y sólo si $x = y$ y $\beta = \delta$, lo que implica que x está en $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Así, podemos escribir $Mor_{X_\mathcal{U}} * Mor_{X_\mathcal{U}} = \bigsqcup_{\alpha,\beta,\gamma\in\Lambda} U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ y la función $Mor_{X_\mathcal{U}} * Mor_{X_\mathcal{U}} \to Mor_{X_\mathcal{U}}$ está dada por las inclusiones $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \hookrightarrow U_\alpha \cap U_\gamma$.

3. La función $Obj_{X_\mathcal{U}} \to Mor_{X_\mathcal{U}}$ está inducida por la identidad $U_\alpha \to U_\alpha$ y por lo tanto es continua.

Nota 1.2.5. En el contexto de ∞-*categorías* el nombre de categoría topológica tiene otro significado, ya que en este caso los espacios simpliciales no son de interés, y se define como una categoría enriquecida sobre la categoría de espacios compactamente generados, es decir, para cada par de objetos, el conjunto de morfismos entre ellos son un espacio compactamente generado, y además se pide que la composición de morfismos sea una función continua.

Proposición 1.2.6. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría topológica, entonces el nervio $N\mathcal{C} \colon \Delta \to Top$ es un espacio simplicial.*

Demostración. Para los operadores cara, si $i = 1$ ó n, d_i es una proyección y por lo tanto es continua. Para ver que d_i es continua si $0 < i < n$ consideremos la función composición $c \colon Mor_\mathcal{C} * Mor_\mathcal{C} \to Mor_\mathcal{C}$, $(f, g) \mapsto (g \circ f)$. Entonces

$$d_i = \underbrace{Id_{Mor_\mathcal{C}} \times \cdots \times Id_{Mor_\mathcal{C}}}_{i\ veces} \times c \times \underbrace{Id_{Mor_\mathcal{C}} \times \cdots \times Id_{Mor_\mathcal{C}}}_{n-i-1\ veces})$$

y como $\mathcal{C}$ es una categoría topológica, c es continua, lo que implica que d_i es continua. Para ver que s_i es continua, considremos h dada por la composición

$$Mor_\mathcal{C} \longrightarrow Obj(\mathcal{C}) \times Obj(\mathcal{C}) \xrightarrow{proy_2} Obj(\mathcal{C}) \longrightarrow Mor_\mathcal{C}$$

donde las funciones $Mor_\mathcal{C} \to Obj(\mathcal{C}) \times Obj(\mathcal{C})$ y $Obj(\mathcal{C}) \to Mor_\mathcal{C}$ están dadas por $f \mapsto (C, C')$ con $f \in Mor_\mathcal{C}(C, C')$ y $C \mapsto Id_C$ respectivamente. Ahora, h es continua pues $\mathcal{C}$ es una categoría topológica y como

$$s_i = \underbrace{Id_{Mor_\mathcal{C}} \times \cdots \times Id_{Mor_\mathcal{C}}}_{i\ veces} \times (Id_{Mor_\mathcal{C}}, h) \times \underbrace{Id_{Mor_\mathcal{C}}, ..., Id_{Mor_\mathcal{C}}}_{n-i\ veces})$$

se sigue que s_i es continua para $0 \le i \le n$. Así, tenemos que $N\mathcal{C} \colon \Delta \to Top$. $\square$

Definición 1.2.7. Sea X un espacio topológico, decimos que X es un *k-espacio*, si se satisface lo siguiente: $C \subset X$ es cerrado si y sólo si para cada $f\colon K \to X$ donde f es continua y K es compacto y Hausdorff, se tiene que $f^{-1}(C)$ es cerrado en K.

Nota 1.2.8. Dado un espacio topológico arbitrario Y, podemos modificar su topología para que sea un k-espacio, que denotamos por $k(Y)$. Esta construcción define un funtor $k\colon Top \to k\text{-}Top$, donde k-Top es la categoría de k-espacios. En k-Top definimos el producto $X \times_k Y \equiv k(X \times Y)$. También tenemos:

1. $Id\colon k(X) \to X$ es continua.

2. Id induce isomorfismos en los grupos de homotopía y de homología en espacios arbitrarios.

Los k-espacios satisfacen lo siguiente:

1. Si X es un k-espacio y $p\colon X \to Y$ es una identificación, entonces Y es un k-espacio.

2. Si $p\colon X \to Y$ y $q\colon X' \to Y'$ son identificaciones entre k-espacios, entonces $p \times q\colon X \times_k X' \to Y \times_k Y'$ es identificación.

Proposición 1.2.9. *Sean K y L espacios simpliciales. Consideremos las proyecciones (simpliciales) $\pi_1\colon K \times L \to K$ y $\pi_2\colon K \times L \to L$. Entonces*

$$(|\pi_1|, |\pi_2|)\colon |K \times L| \to |K| \times |L|$$

es un homeomorfismo donde $|K| \times |L|$ es el producto de k-espacios.

Demostración. Sea $(u, v) \in \Delta^p \times \Delta^q$ y denotemos $u = (t_0, ..., t_p)$ en Δ^p y $v = (t'_0, ..., t'_q)$ en Δ^q. Consideremos

$$u^m = \textstyle\sum_{i=0}^m t_i \quad \text{con} \quad 0 \leq m < p \quad \text{y} \quad v^n = \sum_{j=0}^n t'_j \quad \text{con} \quad 0 \leq n < q$$

y ordenemos al conjunto $\{u^0, ..., u^{p-1}, v^0, ..., v^{q-1}\}$ de menor a mayor, digamos $w^0 \leq w^1 \leq \cdots \leq w^{p+q-1}$. Definimos $w \in \Delta^{p+q}$ como $w = (t''_0, ..., t''_{p+q})$, donde $t''_k = w^k - w^{k-1}$ tomando $w^{-1} = 0$ y $w^{p+q} = 1$. w está bien definido ya que la suma

$$\sum_{k=0}^{p+q} t''_k = \sum_{k=0}^{p+q} (w^k - w^{k-1}) = -w^{-1} + w^{p+q} = 1.$$

Consideremos sucesiones de numeros ajenas $i_1 < \cdots < i_q$ y $j_1 < \cdots < j_p$ (que no son necesariamente únicas) tales que

$$w^{j_s} \in \{u^0, ..., u^{p-1}\} \text{ y } w^{i_r} \in \{v^0, ..., v^{q-1}\} \quad (*)$$

para cada $1 \leq s \leq p$ y $1 \leq r \leq q$. Entonces

$$\sigma_{i_1} \circ \cdots \circ \sigma_{i_q}(w) = \sigma_{i_1} \circ \cdots \sigma_{i_{q-1}}(t''_0, ..., t''_{i_q - 1}, t''_{i_q} + t''_{i_q+1}, t''_{i_q+2}, ..., t''_{q+p}),$$

donde $(t''_{i_q+2}, ..., t''_{q+p}) = (w^{j_k} - w^{j_{k-1}}, ..., w^{p+q} - w^{j_p}) = (t_k, ..., t_p)$ para alguna $0 \leq k \leq p$. Desarrollando

$$\sigma_{i_1} \circ \cdots \circ \sigma_{i_q}(w) = (t''_0, ..., t''_{i_1} + t''_{i_1+1}, t''_{i_1+2}, ..., t''_{i_q-1}, t''_{i_q} + t''_{i_q+1}, t_k, ..., t_p)$$

y cada suma anula a todos los $w^{i_r} \in \{v^0, ..., v^{p-1}\}$. Por lo tanto

$$\sigma_{i_1} \circ \cdots \circ \sigma_{i_q}(w) = (w^{j_1} - w^{-1}, ..., w^{j_{k-1}} - w^{j_{k-2}}, t_k, ..., t_p) = (t_0, ..., t_p) = u.$$

De manera similar $\sigma_{j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{j_p}(w) = v$. Definimos $\zeta \colon |K| \times |L| \to| K \times L|$ como

$$\zeta([x, u], [y, v]) = [(s_{i_q} \circ \cdots \circ s_{i_1}(x), s_{j_p} \circ \cdots \circ s_{j_1}(y)), w],$$

donde $x \in K_p$ y $y \in L_q$. Para ver que ζ está bien definida, hay que probar que no depende de los representantes de $[x, u]$, $[y, v]$ ni de las suceciones $I = \{i_1, ..., i_q\}$, $J = \{j_1, ..., j_p\}$. La primera se sigue de que cada punto en la realización tiene un único punto no-degenerado como representante. Para ver que no depende de I, J supongamos sin pérdida de generalidad que $(x, u), (y, v)$ son puntos no-degenrades y observemos que las sucesiones dependen del orden $w^0 \leq \cdots \leq w^{p+q-1}$, de manera que las sucesiones no son únicas si tenemos $w^k = w^{k+1}$, donde necesariamente $w^k \in \{u^0, ..., u^{p-1}\}$ y $w^{k+1} \in \{v^0, ..., v^{q-1}\}$ o viceversa, ya que u, v son puntos interiores. Supongamos que $I' = \{i'_0, ..., i'_q\}$ y $J' = \{j'_0, ..., j'_q\}$ son otras sucesiones que satisfacen $(*)$. Por lo anterior, I, I' y J, J' coinciden en todos los números salvo en un número k tal que $k \in I \cap J'$ y $k + 1 \in I' \cap J$. Usando que $d_k \circ s_k = d_k \circ s_{k+1} = Id$ obtenemos que

$$d_k(s_{i_q} \circ \cdots \circ s_{i_1}(x), s_{j_p} \circ \cdots \circ s_{j_1}(y)) =$$

$$(s_{i_q-1} \circ \cdots \circ \widehat{s}_k \circ \cdots \circ s_{i_1}(x), s_{j_p} \circ \cdots \circ \widehat{s}_{k+1} \circ \cdots \circ s_{j_1}(y)).$$

Finalmente, $w = (t''_0, ..., t''_{k-1}, 0, t''_{k+1}, ..., t''_{p+q})$, lo que implica que

$$\delta_k(t''_0, ..., t''_{k-1}, t''_{k+1}, ..., t''_{p+q}) = w.$$

Veamos que ζ es la inversa de $(|\pi_1|, |\pi_2|)$. Sean $x \in K_p$ y $y \in L_q$, entonces

$$(|\pi_1|, |\pi_2|) \circ \zeta([x, u], [y, v]) = (|\pi_1|, |\pi_2|)[(s_{i_q} \circ \cdots \circ s_{i_1}(x), s_{j_p} \circ \cdots \circ s_{j_1}(y)), w] =$$

$$([s_{i_q} \circ \cdots \circ s_{i_1}(x), w], [s_{j_p} \circ \cdots \circ s_{j_1}(y), w])$$

por lo anterior $\sigma_{i_1} \circ \cdots \circ \sigma_{i_q}(w) = u$ y $\sigma_{j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{j_p}(w) = v$, lo que implica que $(|\pi_1|, |\pi_2|) \circ \zeta([x, u], [y, v]) = ([x, u], [y, v])$. Por otro lado, sea $((x, y), u)$ en $K_p \times L_p \times \Delta^p$, entonces

$$\zeta \circ (|\pi_1|, |\pi_2|)[(x, y), u] = \zeta([x, u], [y, u]) =$$

$$([s_{i_p} \circ \cdots \circ s_{i_1}(x), \alpha(u, u)], [s_{i_p} \circ \cdots \circ s_{i_1}(y), w]),$$

donde $\sigma_{i_1} \circ \cdots \circ \sigma_{i_p}(w) = u$ lo que implica que $\zeta \circ (|\pi_1|, |\pi_2|)[(x, y), u] = [(x, y), u]$.

Para ver que ζ es continua primero veamos lo siguiente. Denotemos por $K(I, J) \subset \Delta^p \times \Delta^q$ al subespacio que consta de los puntos (u, v) que están determinados por las sucesiones I y J, es decir, $\sigma_{i_1} \circ \cdots \circ \sigma_{i_q}(w) = u$ y $\sigma_{j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{j_p}(w) = v$ con $w \in \Delta^{p+q}$. Consideremos la función $(\theta_I, \theta_J) \colon \Delta^{p+q} \to \Delta^p \times \Delta^q$ donde $\theta_I = \sigma_{i_1} \circ \cdots \circ \sigma_{i_q}$ y $\theta_J = \sigma_{j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{j_p}$. La función (θ_I, θ_J) es continua (ya que cada σ_k es continua). Tenemos que $K(I,J) = (\theta_i, \theta_j)(\Delta^{p+q})$ y como Δ^n es compacto y Hausdorff para cada $n \geq 0$, se tiene que $K(I,J)$ es cerrado en $\Delta^p \times \Delta^q$. Ahora, $\alpha(I,J) \colon K(I,J) \to \Delta^{p+q}$ dada por $\alpha(i,j)(u,v) = w$ es una composición de sumas y proyecciones, lo que implica que es continua. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
K_p \times L_q \times \Delta^p \times \Delta^q \arrow[r, "\cong"] & (K_p \times \Delta^p) \times (L_q \times \Delta^q) \arrow[r, "\pi \times \pi"] & F_p|K| \times F_q|L| \arrow[d, "\zeta|"] \\
K_p \times L_q \times K(I,J) \arrow[u, hook] \arrow[r, "s^I \times s^J \times \alpha(I,J)"'] & K_{p+q} \times L_{p+q} \times \Delta^{p+q} \arrow[r, "\pi"'] & F_{p+q}|K \times L|
\end{tikzcd}$$

donde $s^I = s_{i_q} \circ \cdots \circ s_{i_1}$ y $s^J = s_{j_q} \circ \cdots \circ s_{j_1}$. Claramente el diagrama conmuta. Por lo anterior $s^I \times s^J \times \alpha(I,J)$ es continua para cada par de sucesiones de números I, J. Ahora, $\Delta^p \times \Delta^q$ es la unión de un número finito de $K(I,J)$ que son cerrados y las composiciones $\pi \circ s^i \times s^j \times \alpha(I,J)$ coniciden en las intersecciones por lo anterior, de manera que se pueden pegar a una función continua $\alpha \colon K_p \times L_q \times \Delta^p \times \Delta^q \to F_{p+q}|K \times L|$. Como π es identificación y $(X_p \times \Delta^p) \times (Y_q \times \Delta^q)$ es el producto de k-espacio, $\pi \times \pi$ también es identificación, lo que implica que $\zeta|$ es continua. Por lo tanto ζ es contina y $(|\pi_1|, |\pi_2|)$ es un homeomorfismo. $\square$

Nota 1.2.10. El producto usual de dos complejos CW numerables es homeomorfo al producto en k-*Top*. La referencia de esto es [13].

Convención: En adelante vamos a necesitar que $|K| \times |L| \cong |K \times L|$ para cualesquiera espacios simpliciales. Para asegurar esto es necesario que el producto sea el de k-espacios, y por esto vamos a trabajar en la subcategoría plena de *Top*, k-*Top* cuyos objetos son k-espacios (más detalles en [16]). Tomando espacios simpliciales $K \colon \Delta \to Top$, la realización geométrica satisface

$$|\ \_\ | \colon Top_\Delta \to k\text{-}Top.$$

En efecto, cada $K_n \times \Delta^n$ es un k-espacio ya que Δ^n es compacto y como $\pi \colon \coprod_{n \geq 0} K_n \times \Delta^n \to |K|$ es identificación se tiene que $|K|$ es un k-espacio. Como vamos a seguir [17], entonces también pediremos que los espacios X sean *débilmente Hausdorff*, es decir, si para cualquier función continua $f \colon K \to X$ con K compacto y Hausdorff, $f(K)$ es cerrado en X.

Definición 1.2.11. Sea $\mathcal{C}$ una categoría topológica y consideremos el espacio simplicial $N\mathcal{C}$. Definimos el *espacio clasificante* de $\mathcal{C}$ como

$$B\mathcal{C} = |N\mathcal{C}|.$$

Consideremos G como categoría topológica y tomemos el espacio simplicial asociado NG que esta dado por $(NG)_n = G^n = \underbrace{G \times \cdots \times G}_{n}$, junto con operadores $d_i\colon (NG)_n \to (NG)_{n-1}$ dados por

$$d_i(g_1, ..., g_n) = \begin{cases} (g_2, ..., g_n) & i = 0 \\ (g_1, ..., g_{i-1}, g_i g_{i+1}, ..., g_n) & 0 < i < n \\ (g_1, ..., g_{n-1}) & i = n, \end{cases}$$

y $s_i\colon (NG)_n \to (NG)_{n+1}$ dados por $s_i(g_1, ..., g_n) = (g_1, ..., g_i, e, g_{i+1}, ..., g_{n+1})$. Entonces tenemos

$$BG = |NG| = \bigsqcup_{n \geq 0} (NG)_n \times \Delta^n / \sim .$$

Denotemos $(BG)_n = (NG)_n$. BG está filtrado por

$$(BG)^n = \bigsqcup_{k=0}^{n} (BG)_k \times \Delta^k / \sim .$$

A cada elemento de la filtración le damos la topología cociente y BG tiene la topología coherente con la filtración.

Ejemplo 1.2.12. Consideremos $\mathbb{Z}_2$ como categoría topológica. Entonces $B\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{RP}^\infty$.

Proposición 1.2.13. *Sea G un grupo topológico abeliano, entonces BG es un grupo topológico.*

Demostración. Consideremos los espacios simpliciales NG y $NG \times NG$. Como G es abeliano, el producto $G \times G \to G$ es un homomorfismo que induce una función simplicial $NG \times NG \to NG$ de manera que al pasar a la realización geométrica obtenemos

$$BG \times BG = |NG| \times |NG| \xrightarrow[\cong]{\zeta} |NG \times NG| \longrightarrow |NG| = BG$$

que es el producto en BG. □

Para ver que BG es en efecto un espacio clasificante del grupo G, tenemos que probar la existencia de un haz G-principal, $P \to BG$, con P un espacio contraible.

1.3 Una Construcción del Haz G-principal Universal

Tomemos G un grupo topológico (trabajamos en k-Top). Vamos a construir un espacio simplicial $(EG)_*$ de la siguiente manera: definimos

$$(EG)_n = G^{n+1} = \underbrace{G \times \cdots \times G}_{n+1},$$

y $d_i\colon (EG)_n \to (EG)_{n-1}$ como

$$d_i(g_0,...,g_n) = \begin{cases} (g_2,...,g_{n+1}) & i=0 \\ (g_1,...,g_{i-1},g_ig_{i+1},...,g_{n+1}) & 0<i\leq n \end{cases}$$

y $s_i\colon (EG)_n \to (EG)_{n+1}$ como $s_i(g_1,...,g_n) = (g_1,...,g_i,e,g_{i+1},...,g_{n+1})$. Definimos EG como la realización geométrica

$$|(EG)_*| = \bigsqcup_{n\geq 0} (EG)_n \times \Delta^n / \sim .$$

Denotemos $(BG)_* = NG$. Para cada n tenemos la proyección $p_n\colon (EG)_n \to (BG)_n$ dada por

$$p_n(g_1,...,g_n,g_{n+1}) = (g_1,...,g_n)$$

que inducen la función simplicial $p_*\colon (EG)_* \to (BG)_*$ ya que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} (EG)_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "d_i"'] & (BG)_n \arrow[d, "d_i"] \\ (EG)_{n-1} \arrow[r, "p_{n-1}"] & (BG)_{n-1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (EG)_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "s_i"'] & (BG)_n \arrow[d, "s_i"] \\ (EG)_{n+1} \arrow[r, "p_{n+1}"] & (BG)_{n+1}. \end{tikzcd}$$

Para cada n, tenemos una acción derecha $(EG)_n \times G \to (EG)_n$ dada por $(g_1,...,g_n,g_{n+1})\cdot g = (g_1,...,g_n,g_{n+1}g)$. Además

$$d_0((g_1,...,g_{n+1})\cdot g) = (g_2,...,g_{n+1}g) = (g_2,...,g_{n+1})\cdot g = d_0(g_1,...,g_{n+1})\cdot g,$$

$$d_i((g_1,...,g_{n+1})\cdot g) = (g_1,...,g_ig_{i+1},...,g_{n+1}g) = (g_1,...,g_ig_{i+1},...,g_{n+1})\cdot g = \\ d_i(g_1,...,g_{n+1})\cdot g \quad \text{si} \;\; 0<i<n,$$

$$d_n((g_1,...,g_{n+1})g) = (g_1,...,g_ng_{n+1}g) = (g_1,...,g_ng_{n+1})\cdot g = d_n(g_1,...,g_{n+1})\cdot g$$

$$\text{y } s_i((g_1,...,g_{n+1})\cdot g) = (g_1,...,e,...,g_{n+1}g) = (g_1,...,e,...,g_{n+1})\cdot g = \\ s_i(g_1,...,g_{n+1})\cdot g.$$

Por lo tanto $(EG)_*$ es un G-espacio simplicial y EG es un G-espacio. Ahora, para cada n, tenemos que $(EG)_n/G \cong (BG)_n$, y por lo anterior, este homeomorfismo pasa a la realización, es decir, el siguiente triángulo conmuta

$$\begin{tikzcd} EG \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & EG/G \\ BG. \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

donde el homeomorfismo es inducido por p. EG está filtrado por

$$(EG)^n = \bigsqcup_{k=0}^{n} (EG)_k \times \Delta^k / \sim .$$

A cada elemento de la filtración le damos la topología cociente y EG tiene la topología coherente con la filtración.

Definición 1.3.1. Una pareja de espacios (X, A) con $A \subset X$ es una *pareja NDR*, si existe una representación (u, h) donde u es una función continua $u\colon X \to I$ tal que $u^{-1}(0) = A$, y h es una homotopía $h\colon X \times I \to X$ que satisface $h(x, 0) = x$ para cada $x \in X$, $h(a, t) = a$ para cada (a, t) en $A \times I$ y $h(x, 1) \in A$ para cada $x \in u^{-1}[0, 1)$.

Queremos ver que las parejas $((EG)^n, (EG)^{n-1})$ son NDR. Para esto, usamos los siguientes lemas.

Lema 1.3.2. *Sean (X, A) y (Y, B) parejas NDR con representaciones (u, h) y (j, v) respectivamente. Entonces la pareja*

$$(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$$

es NDR, donde $w(x, y) =$mín$\{u(x), v(y)\}$ y

$$k(x, y, t) = \begin{cases} (h(x, t), j(y, \frac{u(x)}{v(y)} t)) & v(y) \geq u(x) \\ \\ (h(x, \frac{v(y)}{u(x)} t), j(y, t)) & u(x) \geq v(y). \end{cases}$$

□

Lema 1.3.3. *Sea (X, A) una pareja NDR con representación (u, h). Entonces*

$$(X, A)^n = (X^n, \bigcup_{i=1}^{n} X^{i-1} \times A \times X^{n-i})$$

es una pareja NDR con representación (h_n, u_n) dada por

$$u_n(x_1, ..., x_n) = \text{mín}(u(x_1), ..., u(x_n)) \text{ y}$$

$$h_n(x_1, ..., x_n, t) = (h(x_1, t_1), ..., h(t_n, x_n))$$

donde

$$t_i = \begin{cases} t\ min\{\frac{u(x_n)}{u(x_i)}\} & si\ existe\ u(x_n) < u(x_i),\ i \neq n \\ t & si\ todo\ u(x_n) \geq u(x_i),\ i \neq n. \end{cases}$$

□

Por el Lema 1.3.3, si (G, e) es una pareja NDR, entonces

$$(G, e)^n = (G^n, \bigcup_{i=1}^{n} G^{i-1} \times \{e\} \times G^{n-i})$$

es una pareja NDR. Ahora, la pareja $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ es una pareja cofibrada (pues Δ^n es un complejo CW y su frontera es un subcomplejo) y usando un resultado de Steenrod ([21]) que afirma que (X, A) es NDR si (X, A) es cofibrada, obtenemos que $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ es NDR. Sea $R_n = \bigcup_{i=1}^{n} G^{i-1} \times \{e\} \times G^{n-i}$, usando el Lema 1.3.2 obtenemos que

$$(G, e)^n \times (\Delta^n, \partial\Delta^n) = (G^n \times \Delta^n, G^n \times \partial\Delta^n \cup R_n \times \Delta^n)$$

es NDR. R_n es el subespacio donde al menos una entrada es el idéntico $e \in G$. Finalmente consideremos la pareja NDR $(G, \emptyset)$ y obtenemos que

$$(G^n \times G \times \Delta^n, G^n \times G \times \partial\Delta^n \cup R_n \times G \times \Delta^n)$$

también es NDR. Notemos que $(EG)^{n-1} \subset (EG)^n$ se identifica con todos lo puntos del subespacio $G^n \times G \times \partial\Delta^n \cup R_n \times G \times \Delta^n$ de $G^n \times G \times \Delta^n$, es decir,

$$(EG)^n - (EG)^{n-1} \cong (G^n - R_n) \times G \times (\Delta^n - \partial\Delta^n)$$

y análogamente $(BG)^n - (BG)^{n-1} \cong (G^n - R_n) \times (\Delta^n - \partial\Delta^n)$. Con lo anterior, cada pareja $((EG)^n, (EG)^{n-1})$ es NDR y en [21] y [22] se prueba que $(EG, (EG)^n)$ es una pareja NDR . Más aún, la representación (h, u) es G-equivariante, donde la acción en I es la acción trivial.

Definición 1.3.4. Sea X un espacio y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cubierta abierta. Decimos que $\mathcal{U}$ es *numérica* si es localmente finita y existe una partición de la unidad $\{\lambda_\alpha\}_\alpha \in \Lambda$ tal que $\lambda_\alpha^{-1}(0,1] = U_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Decimos que un haz G-principal es *numérico* si existe una cubierta trivializadora numérica.

Proposición 1.3.5. *Sea G un grupo topológico bien basado, es decir, $\{e\} \hookrightarrow G$ es cofibración. Entonces la función inducida $p = |p_*|: EG \to BG$ es un haz G-principal numérico.*

Demostración. Primero vamos a construir una cubierta abierta de BG numérica. Denotemos por $u_n: EG \to I$ y $h_n: EG \times I \to EG$ a la representación G-equivariante de $(EG, (EG)^n)$. Para cada $n > 0$, definimos la función G-equivariante $\rho_n: EG \to I$ como

$$\rho_n(y) = \begin{cases} 1 - u_0(y) & n = 0 \\ (1 - u_n(y))u_{n-1}(h_n(y,1)) & n > 0 \end{cases}$$

que son continuas. Consideremos la función G-equivariente $r_i: EG \to EG$ dada por $r_i(y) = h_i(y,1)$. Ahora, si $y \in (EG)^0$, entonces $\rho_0(y) = 1$. Sea $y \in EG$ y supongamos que $\rho_0(y) \neq 0$, entonces $u_0(y) < 1$ y por lo tanto $r_0(y) = h_0(y,1) \in (EG)_0$. Así,

$$(EG)^0 \subset \rho_0^{-1}(0,1] \subset r_0^{-1}((EG)^0).$$

Sea $n > 0$ y $y \in (EG)^n - (EG)^{n-1}$, entonces $u_n(y) = 0$ y $h_n(y,1) = y$ que no está en $(EG)^{n-1}$ y por lo tanto $\rho_n(y) \neq 0$. Sea $y \in EG$ y supongamos que $\rho_n(y) \neq 0$, entonces $u_n(y) < 1$ y $u_{n-1}(h_n(y,1)) \neq 0$. La primera implica que $r_n(y) \in (EG)^n$ y la segunda implica que $r_n(y) = h_n(y,1) \notin (EG)^{n-1}$. Por lo tanto

$$(EG)^n - (EG)^{n-1} \subset \rho_n^{-1}(0,1] \subset r_n^{-1}((EG)^n - (EG)^{n-1}).$$

Para cada $n \geq 0$ definimos $\pi_n: EG \to I$ como

$$\pi_n(y) = máy\{0, \rho_n(y) - n\sum_{i=0}^{n-1} \rho_i(y)\}$$

que está bien definida ya que si $\rho_n(y) > n\sum_{i=0}^{n-1}\rho_i(y)$ entonces la resta es menor o igual a 1 ya que $\rho_n(y) \leq 1$.

$$\begin{tikzcd} EG \arrow[r, "\rho_n"] \arrow[d] & I \\ EG/G \cong BG \arrow[ur, dashed, "\tilde{\rho}_n"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} EG \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d] & I \\ EG/G \cong BG \arrow[ur, dashed, "\tilde{\pi}_n"'] & \end{tikzcd}$$

Como cada ρ_i es G-equivariente y la acción en I es la trivial, tenemos que para cada $n \geq 0$, $\rho_n(y \cdot g) = \rho_n(y)$ y $\pi_n(y \cdot g) = \pi_n(y)$ para cada $y \in EG$ y $g \in G$. Por lo tanto ρ_n y π_n pasan al cociente y definen $\tilde{\rho}_n, \tilde{\pi}_n \colon BG \to I$. Denotamos $W_n = \pi_n^{-1}(0,1]$ y $V_n = p(W_n) \subset BG$, que por lo anterior $V_n = \tilde{\pi}_n^{-1}(0,1]$. Para ver que $\{V_n\}_{n\geq 0}$ es una cubierta abierta numérica de BG, fijemos $x_0 \in BG$ y sea n_0 el mínimo tal que $\tilde{\rho}_{n_0}(x_0) > 0$ y m_0 el máximo tal que $\tilde{\rho}_{m_0}(x_0) > 0$. Como $\tilde{\rho}_i(x_0) = 0$ para cada $i < n_0$, entonces $\tilde{\rho}_{n_0}(x_0) = \tilde{\pi}_{n_0}(x_0)$, lo que implica que $x_0 \in V_{n_0}$. Ahora, sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_0 \geq m_0$ y

$$\frac{1}{k_0} < \sum_{i=0}^{m_0} \tilde{\rho}_i(x_0).$$

Consideremos $N_{x_0} = \{x \in BG \mid \sum_{i=0}^{m_0-1}\tilde{\rho}_i(x) > \frac{1}{k_0}\}$ que es un abierto ya que la función $\sum_{i=0}^{m_0-1}\tilde{\rho}_i \colon BG \to [0, m_0]$ es continua y N_{x_0} es la preimágen del abierto $(\frac{1}{k}, m_0]$, y es no vacío pues $x_0 \in N_{x_0}$. Así, para cada $n \geq k_0$ y $x \in N_{y_0}$,

$$\tilde{\rho}_n(x) - n\sum_{i=0}^{n-1}\tilde{\rho}_i(x) < \tilde{\rho}_n(x) - 1 \leq 0$$

y por lo tanto $\tilde{\pi}_n(x) = 0$, lo que implica que $N_{x_0} \cap V_n = \emptyset$ para cada $n \geq k_0$. Finalmente definimos $\lambda_n = \pi_n / \sum_{k\geq 0}\pi_k$.

Ahora vamos a construir secciones locales $s_n \colon V_n \to EG$ de la función $p \colon EG \to BG$. Para cada $n > 0$ consideremos los homeomorfismos

$$j_n = (p, proy_{n+1}) \colon (EG)^n - (EG)^{n-1} \to (BG)^n - (BG)^{n-1} \times G.$$

Para $n = 0$ definimos $\gamma_0 \colon W_0 \to G$ como la composición

$$W_0 \xrightarrow{r_0|} (EG)^0 \xrightarrow{j_0} (BG)^0 \times G \longrightarrow G,$$

donde la última flecha es la proyección en la segunda coordenada. Para $n > 0$ definimos $\gamma_n \colon W_n \to G$ como

$$W_n \xrightarrow{r_n|} (EG)^n - (EG)^{n-1} \xrightarrow{j_n} (BG)^n - (BG)^{n-1} \times G \longrightarrow G.$$

γ_n está bien definida ya que $W_n \subset \rho^{-1}(0,1]$ y claramente es continua. Definimos $\xi_n \colon W_n \times G \to W_n$ como $\xi_n(y, g) = y \cdot (\gamma_n(y)^{-1} g)$. Para ver que está bien definida tomemos $y \in W_n$ y consideremos

$$\rho_n(y\cdot(\gamma_n(y)^{-1}g)) - n\sum_{i=0}^{n-1}\rho_i(y\cdot(\gamma_n(y)^{-1}g)) = (\rho_n(y) - n\sum_{i=0}^{n-1}\rho_i(y))\cdot(\gamma_n(y)^{-1}g) =$$

$$\rho_n(y) - n\sum_{i=0}^{n-1}\rho_i(y) > 0$$

ya que ρ_n es G-equivariente y la acción en I es trivial. Queremos ver que ξ_n induce una función

$$\begin{tikzcd} W_n \times G \arrow[r, "\xi_n"] \arrow[d, "p\times Id"'] & W_n \\ V_n \times G. \arrow[ur, dashed, "\bar{\xi}_n"'] & \end{tikzcd}$$

Sean $y, y' \in W_n$ tales que $p(y) = p(y') = [(g_1, ..., g_{n+i}), t]$ en BG, que es de esta forma ya que $(EG)^k \cap W_n = \emptyset$ para cada $k < n$. Entonces y, y' son de la forma

$$y = [(g_1, ..., g_{n+i}, a), t] = [(g_1, ..., g_{n+i}, e), t]\cdot a$$
$$y' = [(g_1, ..., g_{n+i}, b), t] = [(g_1, ..., g_{n+i}, e), t]\cdot b.$$

Entonces $r_n(y) = r_n([(g_1, ..., g_{n+i}, e), t]\cdot a) = r_n([(g_1, ..., g_{n+i}, e), t])\cdot a$ y $r_n(y') = r_n([(g_1, ..., g_{n+i}, e), t]\cdot b) = r_n([(g_1, ..., g_{n+i}, e), t])\cdot b$ ya que h_n es G-equivariente. Ahora, $r_n([(g_1, ..., g_{n+i}, e), t] = [(g'_1, ..., g'_{n+1}), t'] \in (EG)^n$, y entonces $r_n(y) = [(g'_1, ..., g'_{n+1}a), t']$ y $r_n(y') = [(g'_1, ..., g'_{n+1}b), t']$ y por lo tanto $\gamma_n(y) = g'_{n+1}a$ y $\gamma_n(y') = g'_{n+1}b$. Así,

$$\xi_n(y, g) = [(g_1, ..., g_{n+i}, a), t]\cdot(a^{-1}(g'_{n+1})^{-1}g) = [g_1, ..., g_{n+i}, (g'_{n+1})^{-1}g]$$

$$\xi_n(y', g) = [(g_1, ..., g_{n+i}, b), t]\cdot(b^{-1}(g'_{n+1})^{-1}g) = [g_1, ..., g_{n+i}, (g'_{n+1})^{-1}g].$$

Por lo tanto existe $\bar{\xi}_n\colon V_n \times G \to W_n$ continua. Más aún, $\bar{\xi}$ es un homeomorfismo cuyo inverso es (p, γ_n). En efecto, usando la notación anterior, tenemos que

$$(p, \gamma_n)\circ\bar{\xi}(p(y), g) = (p, \gamma_n)(y\cdot(\gamma_n(y))^{-1}g) =$$
$$(p(y\cdot(\gamma_n(y)^{-1}g)), \gamma_n(y\cdot(\gamma_n(y)^{-1}g)) = (p(y), \gamma_n(y\cdot(a^{-1}(g'_{n+1})^{-1}g))) =$$
$$(p(y), \gamma_n([(g_1, ..., g_{n+i}, a), t]\cdot(a^{-1}(g'_{n+1})^{-1}g))) =$$
$$(p(y), \gamma_n([(g_1, ..., g_{n+i}, (g'_{n+1})^{-1}g), t]) = (p(y), g'_{n+1}(g'_{n+1})^{-1}g) = (p(y), g).$$

Por otro lado, $\bar{\xi}_n\circ(p, \gamma_n)(y) = \bar{\xi}_n(p(y), \gamma_n(y)) = y\cdot(\gamma_n(y)^{-1}\gamma_n(y)) = y$. Finalmente, para cada $n \geq 0$ definimos $s_n\colon V_n \to EG$ como la composición

$$V_n \xrightarrow{\iota_n} V_n \times G \xrightarrow{\bar{\xi}_n} W_n \subset EG$$

donde $\iota_n(p(y)) = (p(y), e)$. La composición $p\circ s_n(p(y)) = p(\bar{\xi}_n(p(y), e)) = p(y\cdot\gamma_n(y)^{-1}) = p(y)$ y por lo tanto s_n es una sección local de p.

Para ver que p es un haz G-principal falta ver que la función $\tau\colon (EG)^* \to G$ es continua, donde $(EG)^* = \{(y, y') \in EG \times EG \mid p(y) = p(y')\}$ y τ satisface $y \cdot \tau(y, y') = y'$. Para esto, consideremos los abiertos

$$Q_n = (EG)^* \cap (W_n \times W_n).$$

Por lo hecho anteriormente, tenemos que si $p(y) = p(y')$ y $y, y' \in W_n$, entonces $y \cdot (\gamma_n(y)^{-1}\gamma(y')) = y'$. Así, $\tau|_{Q_n}$ es la composición

$$Q_n \xrightarrow{(\gamma_n,\gamma_n)|} G \times G \longrightarrow G$$

donde la última flecha es el producto $(a, b) \mapsto a^{-1}b$ que es continua. Por lo tanto p es un haz G-principal. $\square$

Ahora, necesitamos la noción de homotopía en objetos simpliciales. Recordemos que $f\colon K \to L$ es un *morfismo simplicial*, si para cada n, $f_n\colon K_n \to L_n$, $d_i \circ f_n = f_{n-1} \circ d_i$ y $s_i \circ f_n = f_{n+1} \circ s_i$.

Definición 1.3.6. Sean L y K objetos simpliciales y $f, g\colon K \to L$ morfismos simpliciales. Una *homotopía* h entre f y g consiste de una familia de morfismos $h_i\colon K_q \to L_{q+1}$, con $0 \le i \le q$, tales que

$$d_0 \circ h_0 = f_0 \text{ y } d_{q+1} \circ h_q = g_q$$

$$d_i \circ h_j = \begin{cases} h_{j-1} \circ d_i & i < j \\ d_j \circ h_{j-1} & i = j > 0 \\ h_j \circ d_{i-1} & i > j+1 \end{cases}$$

$$s_i \circ h_j = \begin{cases} h_{j+1} \circ s_i & i \le j \\ h_j \circ s_{i-1} & i > j. \end{cases}$$

Proposición 1.3.7. *Sean X, Y espacios simpliciales y $f, g\colon X \to Y$ morfismos simpliciales homotópicos en el sentido de la definición* 1.3.6. *Entonces $|f| \simeq |g|$.*

Demostración. Sea $h_i\colon X_q \to Y_{q+1}$ la homotopía (simplicial) entre f y g. Sea $\Delta\bar{1}$ el 1-simplejo estándar considerado como espacio simplicial discreto ($\Delta\bar{1}\colon \Delta \to Set$). Entonces $|\Delta\bar{1}| = \Delta^1 \cong I$. Sea i_1 el punto no degenrado en $\Delta\bar{1}$. Definimos la función simplicial $H\colon \Delta\bar{1} \times X \to Y$ como

$$H_q(s_{q-1} \circ \cdots \circ s_{i+1} \circ s_{i-1} \circ \cdots s_0(i_1), x) = d_{i+1}h_i(x)$$

para cada $x \in X_q$. H_q es continua ya que cada d_{i+1} y h_i es continua. Entonces la composición

$$I \times |X| \xrightarrow{\cong} |\Delta\bar{1}| \times |X| \xrightarrow{\zeta} |\Delta\bar{1} \times X| \xrightarrow{|H|} |Y|$$

es la homotopiá deseada. $\square$

Corolario 1.3.8. *Sea G un grupo topológico bien basado. Entonces*

$$p\colon EG \to BG$$

es un haz G-principal universal.

Demostración. Para ver que $p\colon EG \to BG$ es un haz universal, falta probar que EG es contraible. Consideremos el espacio simplicial inducido por el punto $\{e\}$. Tenemos funciones simpliciales naturales $i\colon \{e\} \to (EG)_*$ y $r\colon (EG)_* \to \{e\}$ dadas por $i_n\colon \{e\} \to (EG)_n$, $* \mapsto (\underbrace{e, ..., e}_{n+1})$ y $r_n\colon (EG)_n \to \{e\}$ es la constante. Entonces $r \circ i = Id_{\{e\}}$. Vamos a dar una homotopía simplicial entre $i \circ r$ y $Id_{(EG)_*}$. Para esto definimos $h_i\colon (EG)_n \to (EG)_{n+1}$ como la composición $s_n \circ \cdots \circ s_i \circ d_{i+1} \circ \cdots \circ d_n$ que es continua. Ahora,

$$d_0 \circ h_0(g_1, ..., g_{n+1}) = d_0(g_1 g_2 \cdots g_{n+1}, e, ..., e) = (e, ..., e) = i \circ r(g_1, ..., g_{n+1})$$

$$\begin{gathered} d_{n+1} \circ h_n(g_1, ..., g_{n+1}) = d_{n+1}(s_n(g_1, ..., g_{n+1})) = \\ d_{n+1}(g_1, ..., g_{n+1}, e) = (g_1, ..., g_{n+1}). \end{gathered}$$

Las otras igualdades se siguen de las igualdades que satisfacen los operadores en $(EG)_*$. Por la proposición 1.3.7 obtenemos que $|i| \circ | r| \simeq Id_{EG}$ y como $|r| \circ | i| = cte_e$ se tiene el resultado. □

Corolario 1.3.9. *Sea G un grupo discreto, entonces BG es un espacio Eilenberg MacLane de tipo $K(G, 1)$.*

Demostración. Consideremos la sucesión larga de homotopía del haz $p\colon EG \to BG$,

$$\longrightarrow \pi_q(EG) \longrightarrow \pi_q(BG) \xrightarrow{\cong} \pi_{q-1}(G) \longrightarrow \pi_{q-1}(EG) \longrightarrow \cdot$$

Como EG es contriable, $\pi_q(EG) = 0$ para cada $q \geq 0$ y como G es discreto, $\pi_q(G) = 0$ para cada $q > 0$. Por lo tanto

$$\pi_q(BG) \cong \begin{cases} 0 & si \;\; q \neq 1 \\ G & si \;\; q = 1. \end{cases}$$

□

Capítulo 2

Cohomología

En las primeras 2 secciones vamos a dar una manera de relacionar 1-cociclos en la cohomología no abeliana de un espacio paracompacto X con clases de homotopía de funciones $X \to BG$. En la última sección vamos a dar un isomorfismo entre la cohomología homotópica de un espacio paracompacto X y la cohomología de Čech con coeficientes en una gavilla con valores en un grupo abeliano (discreto), este es el resultado principal de [10].

2.1 1-cociclos

En esta sección vamos a seguir las ideas de Bott en [3] que están basadas en el artículo de Segal [19], pero trabajaremos con la categoría $X_{\mathcal{U}}$ que definimos en 1.2.4.

Definición 2.1.1. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías topológicas. Decimos que $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un *funtor continuo* si F es un funtor y

$$F\colon Obj(\mathcal{C}) \to Obj(\mathcal{D}) \qquad F\colon Mor_{\mathcal{C}} \to Mor_{\mathcal{D}}$$

son continuas.

Ejemplo 2.1.2. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cubierta abierta de un espacio X. Recordemos que un conjunto de funciones continuas

$$\{g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to G\},$$

donde G es un grupo topológico son *funciones de transición* para la cubierta $\mathcal{U}$, si cumplen la *condición de cociclo*, es decir, $g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\gamma}(x) = g_{\alpha\gamma}(x)$ para cada $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$ y cada $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Consideremos la categoría $X_{\mathcal{U}}$. Las funciones de transición definen un funtor $g\colon X_{\mathcal{U}} \to G$, que en los objetos es la función constante $g(x, \alpha) = *$ y en los morfismos está dado por

$$g(x, (\alpha, \beta)) = g_{\alpha\beta}(x) \in G.$$

En efecto, g es un funtor ya que $g(x, (\alpha, \alpha)) = g_{\alpha\alpha}(x) = e \in G$,

$$g((x, (\beta, \gamma)) \circ (x, (\alpha, \beta))) = g(x, (\alpha, \gamma)) = g_{\alpha\gamma}(x) \text{ y}$$

$$g(x, (\beta, \gamma)) \circ g(x, (\alpha, \beta)) = g_{\beta\gamma}(x) \circ g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\gamma}(x) = g_{\alpha\gamma}(x).$$

Más aún, la continuidad de cada $g_{\alpha\beta}$ implica que la función

$$\bigsqcup_{\alpha,\beta\in\Lambda} U_\alpha \cap U_\beta \to G$$

es continua y por lo tanto g es un funtor continuo.

Sea X un espacio y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cubierta abierta. Podemos asociarle a $\mathcal{U}$ un complejo simplicial $N\mathcal{U}$ (*nervio de la cubierta*), con vértices $V_{N\mathcal{U}} = \Lambda$ y un q-simplejo es un elemento $\sigma = \{\alpha_0, ..., \alpha_q \mid U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q} \neq \emptyset\}$. Sea

$$N\mathcal{U}_q = \{(\alpha_0, ..., \alpha_q) \mid \{\alpha_0, ..., \alpha_q\} \text{ es un simplejo de } N\mathcal{U}\}.$$

Entonces tenemos un complejo de cadenas $(C_*(N\mathcal{U}), \partial_*)$, donde $C_q(N\mathcal{U})$ es el grupo libre abeliano generado por $N\mathcal{U}_q$ y cuyos operadores $\partial_q \colon C_q(N\mathcal{U}) \to C_{q-1}(N\mathcal{U})$ están dados por

$$\partial_q(\alpha_0, ..., \alpha_q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (\alpha_0, ..., \widehat{\alpha}_i, ..., \alpha_q)$$

que están bien definidos ya que

$$\emptyset \neq U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q} \subset U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap \widehat{U_{\alpha_i}} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q}.$$

La cohomología simplicial de $N\mathcal{U}$ con coeficientes en un grupo abeliano L, $H^*(N\mathcal{U}; L)$, se define con el complejo de cocadenas

$$C^q(N\mathcal{U}; L) = Hom_{\mathbb{Z}}(C_q(N\mathcal{U}), L)$$

y con el operador cofrontera $\partial^q \equiv \partial_q^\dagger$ que es el dual de ∂_q. Denotemos al grupo abeliano de funciones de $N\mathcal{U}_q$ en L como $\check{C}^q(\mathcal{U})$. Claramente se tiene que $C^q(N\mathcal{U}; L) \cong \check{C}^q(\mathcal{U})$ y que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \check{C}^q(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\cong} & C^q(N\mathcal{U}; L) \\ \downarrow{\scriptstyle \delta^q} & & \downarrow{\scriptstyle \partial^q} \\ \check{C}^{q+1}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\cong} & C^{q+1}(N\mathcal{U}; L) \end{array}$$

donde $\delta^q(\varphi)(\alpha_0, ..., \alpha_{q+1}) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \varphi(\alpha_0, ..., \widehat{\alpha}_i, ..., \alpha_{q+1})$, de manera que

$$\check{H}^q(\mathcal{U}; L) \equiv ker\ \delta^q / im\ \delta^{q+1} \cong H^q(N\mathcal{U}; L)$$

DEFINICIÓN 2.1.3. Una *pregavilla* de grupos abelianos $\mathcal{P}$ en X es un funtor contravariante $\mathcal{P} \colon \tau_X \to Ab$, donde τ_X es la categoría cuyos objetos son los abiertos de X y los morfismos $Mor_{\tau_X}(U, V)$ tiene un único elemento $\iota \colon U \hookrightarrow V$ si $U \subset V$ y en otro caso es el vacío. Si $U \subset V$, entonces denotamos al morfismo $\mathcal{P}(\iota) \colon \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(U)$ como $\varphi \mapsto \varphi|_U$.

Ejemplo 2.1.4. Sea L un grupo abeliano. La pregavilla constante $\underline{L}\colon \tau_X \to Ab$ asocia a cada abierto U, el grupo L.

Ejemplo 2.1.5. Sea G un grupo topológico abeliano, entonces $G_c\colon \tau_X \to Ab$ dada por $G_c(U) = C(U,G)$ que es el conjunto de funciones continuas $U \to G$, es una pregavilla de grupos abelianos.

Ahora vamos a generalizar los grupos de cohomología $\check{H}^*(\mathcal{U};L)$ para el caso en que los coeficientes sean en una pregavilla de grupos abelianos.

Definición 2.1.6. Sea $\mathcal{P}$ una pregavilla de grupos abelianos en X, entonces definimos las q-cocadenas

$$\check{C}^q(\mathcal{U};\mathcal{P}) = \{\varphi\colon N\mathcal{U}_q \to \bigcup_{U\ abierto} \mathcal{P}(U) \mid \varphi(\alpha_0,...,\alpha_q) \in \mathcal{P}(U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_q})\}$$

y siguiendo la notación de 2.1.3 definimos $\delta^q_{\mathcal{U}}\colon \check{C}^q(\mathcal{U};\mathcal{P}) \to \check{C}^{q+1}(\mathcal{U};\mathcal{P})$ como

$$\delta^q_{\mathcal{U}}(\varphi)(\alpha_0,...,\alpha_{q+1}) = \sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i\varphi(\alpha_0,...,\widehat{\alpha}_i,...,\alpha_{q+1})|_{U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap\, U_{\alpha_{q+1}}},$$

donde $\varphi(\alpha_0,...,\widehat{\alpha}_i,...,\alpha_{q+1}) \in \mathcal{P}(U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap\widehat{U}_{\alpha_i}\cap\cdots\cap U_{\alpha_q})$ y

$$\varphi(\alpha_0,...,\widehat{\alpha}_i,...,\alpha_{q+1})|_{U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap\, U_{\alpha_{q+1}}} \in \mathcal{P}(U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_q}).$$

Definimos la *q-cohomología de $\mathcal{U}$ con coeficientes en una pregavilla $\mathcal{P}$* como

$$\check{H}^q(\mathcal{U};\mathcal{P}) = ker\ \delta^q_{\mathcal{U}}/im\ \delta^{q-1}_{\mathcal{U}}.$$

Veamos cómo son los 0-cociclos y 1-cociclos. Tomemos una 0-cocadena f en $\check{C}^0(\mathcal{U};\mathcal{P})$, es decir, $f\colon \Lambda \to \bigcup_{U\ abierto}\mathcal{P}(U)$ con $f(\alpha)\in\mathcal{P}(U_\alpha)$. Entonces

$$\delta^0_{\mathcal{U}}(f)(\alpha,\beta) = f(\beta)|_{U_\alpha\cap U_\beta} - f(\alpha)|_{U_\alpha\cap U_\beta}.$$

Por lo tanto f es un 0-cociclo si y sólo si $f(\beta)|_{U_\alpha\cap U_\beta} = f(\alpha)|_{U_\alpha\cap U_\beta}$. Ahora, tomemos una 1-cocadena $\varphi\colon N\mathcal{U}_1 \to \bigcup_{U\ abierto}\mathcal{P}(U)$, donde $\varphi(\alpha,\beta)$ está en $\mathcal{P}(U_\alpha\cap U_\beta)$. Entoces

$$\delta^1_{\mathcal{U}}(\varphi)(\alpha,\beta,\gamma) = \varphi(\beta,\gamma)|_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma} - \varphi(\alpha,\gamma)|_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma} + \varphi(\alpha,\beta)|_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma}$$

y por lo tanto φ es un 1-cociclo si y sólo si

$$\varphi(\beta,\gamma)|_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma} + \varphi(\alpha,\beta)|_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma} = \varphi(\alpha,\gamma)|_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma}.$$

Dos 1-cocadenas φ y ψ son cohomólogas si existe una 0-cocadena f tal que su cofrontera es $\delta^0_{\mathcal{U}}(f)(\alpha,\beta) = f(\beta)|_{U_\alpha\cap U_\beta} - f(\alpha)|_{U_\alpha\cap U_\beta} = \psi(\alpha,\beta) + \varphi(\alpha,\beta)$ y obtenemos

$$\psi(\alpha,\beta) = f(\alpha)|_{U_\alpha\cap U_\beta} + \varphi(\alpha,\beta) - f(\beta)|_{U_\alpha\cap U_\beta}.$$

DEFINICIÓN 2.1.7. Basándonos en el caso abeliano, podemos definir *cohomología no-abeliana* tomando una pregavilla de grupos $\mathcal{P}\colon \tau_X \to Gr$ y modificando los operadores, aunque en este caso sólamente se puede definir $\check{H}^0(\mathcal{U};\mathcal{P})$ y $\check{H}^1(\mathcal{U};\mathcal{P})$ que son conjuntos basados. Definimos

$$\check{H}^0(\mathcal{U};\mathcal{P}) = \{\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \mid f_\alpha \in \mathcal{P}(U_\alpha) \text{ y } f_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}\}$$

que es el conjunto de familias de funciones $\mathcal{U}$-compatibles. $\check{H}^0(\mathcal{U};\mathcal{P})$ es grupo con el producto $\{f'_\alpha\}\cdot\{f_\alpha\} = \{f_\alpha \cdot f'_\alpha\}$, donde $f_\alpha \cdot f'_\alpha$ es el producto en $\mathcal{P}(U_\alpha)$. Una 1-cocadena es una familia de funciones $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ tales que $\varphi_{\alpha\beta} \in \mathcal{P}(U_\alpha \cap U_\beta)$ para cada $\alpha, \beta \in \Lambda$. $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ es un 1-cociclo si

$$\varphi_{\alpha\beta}|_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\beta} \cdot \varphi_{\beta\gamma}|_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\beta} = \varphi_{\alpha\gamma}|_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\beta}$$

en $\mathcal{P}(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)$. Dos 1-cocadenas $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ y $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ son cohomólogas si existe una 0-cocadena $\{f_\alpha\}$ tal que

$$\psi_{\alpha\beta} = f_\alpha|^{-1}_{U_\alpha\cap U_\beta} \cdot \varphi_{\alpha\beta} \cdot f_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}$$

en $\mathcal{P}(U_\alpha \cap U_\beta)$. Al conjunto de clases de 1-cociclos lo denotamos $\check{H}^1(\mathcal{U};\mathcal{P})$ y a las clases las denotamos por $[\varphi_{\alpha\beta}]$.

DEFINICIÓN 2.1.8. Sean $F, F'\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores continuos. Una *transformación natural entre funtores continuos* es una transformación natural $\varphi\colon F \to F'$ en el sentido usual, donde además la función $\varphi\colon Obj(\mathcal{C}) \to Mor_{\mathcal{D}}$ es continua. Decimos que F y F' son isomorfos si existe otra transformación natural $\psi\colon F' \to F$ tal que $\varphi_C \circ \psi_C = Id_{F'(C)}$ y $\psi_C \circ \varphi_C = Id_{F(C)}$. Denotamos al conjunto de clases de isomorfismo de funtores continuos como $\pi[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$.

EJEMPLO 2.1.9. Consideremos la pregavilla (de grupos) G_c, con G un grupo topológico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta. Sean $\{\varphi_{\alpha\beta}\}_{\alpha\beta\in\Lambda}$ y $\{\psi_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ 1-cociclos cohomólogos, es decir, existe una 0-cocadena $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tal que $\psi_{\alpha\beta} = f_\alpha^{-1}\varphi_{\alpha\beta}f_\beta$. En este caso, los 1-cociclos forman un conjunto de funciones de transición y podemos considerar los funtores continuos inducidos del ejemplo 2.1.2, $\varphi\colon X_{\mathcal{U}} \to G$ y $\psi\colon X_{\mathcal{U}} \to G$. Entonces $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ induce una transformación natural entre estos funtores. En efecto, definimos $f\colon Obj(X_{\mathcal{U}}) = \bigsqcup U_\alpha \to Mor_G = G$ como $f(x,\alpha) = f_\alpha(x)$. f es continua ya que cada $f_\alpha\colon U_\alpha \to G$ es continua. Sea $(x, (\alpha, \beta))$ un morfismo en $X_{\mathcal{U}}$. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\varphi(x,\alpha) = * \arrow[r, "f_\alpha(x)"] \arrow[d, "\varphi_{\alpha\beta}(x)"'] & * = \psi(x,\alpha) \arrow[d, "\psi_{\alpha\beta}(x)"] \\
\varphi(x,\beta) = * \arrow[r, "f_\beta(x)"'] & * = \psi(x,\beta)
\end{tikzcd}$$

que claramente conmuta por hipótesis, lo que implica que $f\colon \varphi \to \psi$ es una transformación natural de funtores continuos. Más aún, como la función $\bar{f}_\alpha\colon U_\alpha \to G$

dada por $\bar{f}_\alpha(x) = f_\alpha(x)^{-1}$ es continua (pues G es un grupo topológico), podemos definir $\bar{f}\colon Obj(X_\mathcal{U}) \to Mor_G$ como $\bar{f}(x,\alpha) = f_\alpha(x)^{-1}$ que es continua y además, $\psi_{\alpha\beta}(x)f_\beta(x)^{-1} = f_\alpha(x)^{-1}\varphi_{\alpha\beta}(x)$ para cada $x \in U_\alpha \cap U_\beta$. De manera similar a lo anterior, se tiene que $\bar{f}\colon \psi \to \varphi$ es una transformación natural que satisface $f_\alpha(x)f_\alpha(x)^{-1} = f_\alpha(x)^{-1}f_\alpha(x) = e \in G$. Por lo tanto φ y ψ son isomorfos.

Proposición 2.1.10. *Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de una espacio X y G un grupo topológico. Entonces hay una biyección*

$$\check{H}^1(\mathcal{U}; G_c) \cong \pi[X_\mathcal{U}, G].$$

Demostración. Como vimos en el ejemplo 2.1.9, tenemos una función bien definida $\check{H}^1(\mathcal{U}; G_c) \to \pi[X_\mathcal{U}, G]$ dada por $[\varphi_{\alpha\beta}] \mapsto [\varphi\colon X_\mathcal{U} \to G]$. Para ver que la función es suprayectiva, tomemos un funtor continuo $F\colon X_\mathcal{U} \to G$. Entonces tenemos una función continua $F\colon \bigsqcup U_\alpha \cap U_\beta \to G$ y definimos

$$g_{\alpha\beta} = F|_{U_\alpha \cap U_\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to G,$$

donde cada $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ representa el morfismo $(x, (\alpha, \beta))$. Veamos que la familia $\{g_{\alpha\beta}\}$ cumple la condición de cocíclo: sea $x \in U_\alpha$, entonces $g_{\alpha\alpha}(x) = F(x, (\alpha, \alpha)) = Id_{F(x,\alpha)} = Id_e = e \in G$. Sea $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, entonces

$$g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\gamma}(x) = F(x, (\beta, \gamma)) \circ F(x, (\alpha, \beta)) =$$

$$F((x, (\beta, \gamma)) \circ (x, (\alpha, \beta))) = F(x, (\alpha, \gamma)) = g_{\alpha\gamma}(x).$$

Por construcción, tenemos que el funtor inducido por $\{g_{\alpha\beta}\}$ es F, lo que implica que la función es suprayectiva. Veamos que es inyectiva. Sean $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ y $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ 1-cocíclos, y supongamos que los funtores inducidos φ y ψ son isomorfos, es decir, existen transformaciones naturales $\gamma_1\colon \psi \to \varphi$ y $\gamma_2\colon \varphi \to \psi$ tales que

$$\gamma_1(x,\alpha)\gamma_2(x,\alpha) = \gamma_2(x,\alpha)\gamma_1(x,\alpha) = e.$$

para cada objeto (x, α) en $X_\mathcal{U}$. Esto implica que $\gamma_2(x,\alpha) = \gamma_1(x,\alpha)^{-1}$ en G. Además, γ_1 y γ_2 satisfacen

$$\varphi_{\alpha\beta}(x)\gamma_1(x,\beta) = \gamma_1(x,\alpha)\psi_{\alpha\beta}(x)$$

$$\gamma_2(x,\alpha)\varphi_{\alpha\beta}(x) = \psi_{\alpha\beta}(x)\gamma_2(x,\beta)$$

para cada $x \in U_\alpha \cap U_\beta$. Definimos $f_\alpha\colon U_\alpha \to G$ como $f_\alpha(x) = \gamma_1(x,\alpha)$. f_α es continua ya que es la restricción $\gamma_1|\colon U_\alpha \to G$. Por otro lado, $f_\alpha(x)^{-1} = \gamma_2(x,\alpha)$ y obtenemos que $f_\alpha^{-1} = \gamma_2|\colon U_\alpha \to G$ también es continua (donde f_α^{-1} denota el inverso de $f_\alpha \in G_c(U_\alpha)$). Así, $\psi_{\alpha\beta} = f_\alpha^{-1}\varphi_{\alpha\beta}f_\beta$ en $G_c(U_\alpha \cap U_\beta)$ y por lo tanto tenemos la biyección deseada. $\square$

2.2 Funciones Clasificantes

En la sección 1.1, vimos que un funtor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ induce una función simplicial $NF\colon N\mathcal{C} \to N\mathcal{D}$. En el caso de categorías topológicas, si F es un funtor continuo entonces cada $(NF)_n\colon (N\mathcal{C})_n \to (N\mathcal{D})_n$ es claramente continua, es decir, NF es una función simplicial continua y en particular obtenemos $BF = |NF|\colon B\mathcal{C} \to B\mathcal{D}$ continua. Así, para una cubierta abierta $\mathcal{U}$, cada conjunto de funciones de transición $\{g_{\alpha\beta}\}$ para un grupo topológico G, determina una función continua $Bg\colon BX_{\mathcal{U}} \to BG$. Vamos a extender este resultado par 1-cocíclos en $\check{H}^1(\mathcal{U}; G_c)$.

Proposición 2.2.1. *Sean $F_0, F_1\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores continuos y $\varphi\colon F_0 \to F_1$ una transformación natural. Entonces las funciones inducidas BF_0 y BF_1 son homotópicas.*

Demostración. Consideremos el conjunto ordenado $J = \{0, 1\}$ como categoría topológica (discreta). Definimos $F\colon \mathcal{C} \times J \to \mathcal{D}$ como $F|\mathcal{C} \times \{0\} = F_0$ y $F|\mathcal{C} \times \{1\} = F_1$. Como J es discreta, F es un funtor continuo. Así, obtenemos una función continua $BF\colon B(\mathcal{C} \times J) \to B\mathcal{D}$. Por la proposición 1.2.9 tenemos

$$B\mathcal{D} \times BJ \xrightarrow[\cong]{\zeta} B(\mathcal{C} \times J) \xrightarrow{BF} B\mathcal{D}$$

donde $BJ = [0, 1]$, que por construcción es la homotopía deseada. □

Corolario 2.2.2. *Sean G un grupo topológico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de un espacio X. Entonces la función*

$$\check{H}^1(\mathcal{U}; G_c) \to [BX_{\mathcal{U}}, BG]$$

dada por $[\varphi_{\alpha\beta}] \to [B\varphi\colon BX_{\mathcal{U}} \to BG]$ está bien definida.

Demostración. Por la proposición 2.1.10, dos 1-cociclos $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ y $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ son cohomólogos si y sólo si los funtores inducidos son isomorfos. En particar, hay una transformación natural $F\colon \varphi \to \psi$ que por la proposición 2.2.1 induce una homotopía $B\varphi \simeq B\psi$. □

Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cubierta abierta de X. Escojamos un buen orden $(\leq, \Lambda)$ y definamos una subcategoría de $X_{\mathcal{U}}$ que denotamos $X^o_{\mathcal{U}}$ cuyos objetos son los mismos que los de $X_{\mathcal{U}}$ y $Mor_{X^o_{\mathcal{U}}}((x, \alpha), (y, \beta))$ tiene un sólo morfismo si $x = y$ y $\alpha \leq \beta$, y en otro caso es el vacío. Así,

$$Obj(X^o_{\mathcal{U}}) = \textstyle\bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \text{ y } Mor_{X^o_{\mathcal{U}}} = \bigsqcup_{\alpha\leq\beta} U_\alpha \cap U_\beta.$$

Claramente tenemos un funtor continuo $X^o_{\mathcal{U}} \to X_{\mathcal{U}}$ que es el inducido por la inclusión

$$\bigsqcup_{\alpha\leq\beta} U_\alpha \cap U_\beta \hookrightarrow \bigsqcup_{\alpha,\beta} U_\alpha \cap U_\beta$$

y por lo tanto una función continua $BX^o_{\mathcal{U}} \to BX_{\mathcal{U}}$. Más aún, tenemos el siguiente resultado que se prueba en [6].

Proposición 2.2.3. *La función $BX^o_{\mathcal{U}} \to BX_{\mathcal{U}}$ es una equivalencia homotópica.*

Nota 2.2.4. En el articulo de Segal [19], él utiliza otro espacio simplicial que en general es distinto de $NX_{\mathcal{U}}$ y $NX^o_{\mathcal{U}}$. Este espacio simplicial es el nervio de la categoría $\widetilde{X}_{\mathcal{U}}$, donde los objetos son parejas (x,σ) con $x \in U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q}$ y $\sigma = \{\alpha_0, ..., \alpha_q\}$. En este caso los indices σ están parcialmente ordenados por la contensión, de manera que se definen los morfismos $Mor_{\widetilde{X}_{\mathcal{U}}}((x,\sigma),(y,\tau))$ como un sólo elemento si $x = y$ y $\sigma \subset \tau$, y en otro caso el vacío. Una ventaja de $N\widetilde{X}_{\mathcal{U}}$ es que ya está ordenado, es decir, cada elemento es de la forma $(x,(\sigma_1,...,\sigma_q))$ con $\sigma_1 \subset \cdots \subset \sigma_n$. En [6] se prueba que $B\widetilde{X}_{\mathcal{U}} \cong BX^o_{\mathcal{U}}$.

Si tomamos como cubierta de un espacio X a $\{X\}$, tenemos que $NX_{\{X\}} = X$ visto como espacio simplicial. Las familias de inclusiones $\{U_\alpha \hookrightarrow X\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $\{U_\alpha \cap U_\beta \hookrightarrow X\}_{\alpha\leq\beta}$ inducen un funtor continuo $i\colon X^o_{\mathcal{U}} \to X_{\{X\}}$ y por lo tanto una función continua $Bi\colon BX^o_{\mathcal{U}} \to BX_{\{X\}}$. Ahora, $BX_{\{X\}} \equiv |NX_{\{X\}}| \cong X$ donde el homeomorfismo está dado por $[x,t] \mapsto x$. A la composición del homeomorfismo anterior con Bi lo denotamos por $\iota\colon BX_{\mathcal{U}} \to X$.

Proposición 2.2.5. *Sea X un espacio y $\mathcal{U}$ una cubierta numérica. Entonces la función $\iota\colon BX^o_{\mathcal{U}} \to X$ es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Como $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es numérica, entonces es localmente finita y hay una partición de la unidad $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tal que $\lambda_\alpha^{-1}(0,1] = U_\alpha$. El inverso homotópico de Bi está inducido por la partición de la unidad, definimos $\lambda\colon X \to BX^o_{\mathcal{U}}$ como

$$\lambda(x) = [(x,(\alpha_0,...,\alpha_q)),(\lambda_{\alpha_0}(x),...,\lambda_{\alpha_q}(x))]$$

donde $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_q$ son todos los índices en los que $x \in U_{\alpha_i}$. λ está bien definida ya que $x \in U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q}$ y $\sum_{k=0}^q \lambda_{\alpha_k}(x) = 1$, y obtenemos que

$$((x,(\alpha_0,...,\alpha_q)),(\lambda_{\alpha_0}(x),...,\lambda_{\alpha_q}(x))) \in (NX^o_{\mathcal{U}})_q \times \Delta^q.$$

Para ver que λ es continua, vamos a usar que la cubierta es localmente finita. Fijemos $x_0 \in X$ y tomemos un abierto $\widetilde{W} \subset BX^o_{\mathcal{U}}$ tal que $\lambda(x_0) \in \widetilde{W}$. Como $\lambda(x_0) = ((x_0,(\alpha_0,...,\alpha_q)),(\lambda_{\alpha_0}(x_0),...,\lambda_{\alpha_q}(x_0)))$ es un punto no degenerado, existe

$$U \times V \subset U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q} \times \Delta^q$$

vecindad abierta de $\lambda(x_0)$ tal que $\pi(U \times V) = \widetilde{W}$, donde

$$\pi\colon \bigsqcup_{n\geq 0} (NX^o_{\mathcal{U}})_n \times \Delta^n \to BX^o_{\mathcal{U}}$$

es la aplicación cociente. Como $\mathcal{U}$ es localmente finita existe U_{x_0} vecindad abierta de x_0 tal que para cada $x \in U_{x_0}$, x no es cero en a lo más $\lambda_{\alpha_0},...,\lambda_{\alpha_q}$. Ahora, como la función $\gamma\colon U_{x_0} \to \Delta^q$ dada por $x \mapsto (\lambda_{\alpha_0}(x),...,\lambda_{\alpha_q}(x))$ es continua, existe $V_{x_0} \subset U_{x_0}$ vecindad abierta de x_0 tal que $\gamma(V_{x_0}) \subset V \subset \Delta^q$. Definimos $W = V_{x_0} \cap U$. Así, $\lambda(W) \subset \widetilde{W}$.

Ahora, $\iota \circ \lambda(x) = \iota[(x, (\alpha_0, ..., \alpha_q)), (\lambda_{\alpha_0}(x), ..., \lambda_{\alpha_q}(x))] = x$ y tenemos que $\iota \circ \lambda = Id_X$. Por otro lado,

$$\lambda \circ \iota[(x, (\beta_0, ..., \beta_n)), (t_0, ..., t_n)] = [(x, (\alpha_0, ..., \alpha_q)), (\lambda_{\alpha_0}(x), ..., \lambda_{\alpha_q}(x))]$$

y como $\{\beta_0, ..., \beta_n\} \subset \{\alpha_0, ..., \alpha_q\}$ existe

$$(x, (\beta_0, ..., \beta_n), (t_0, ..., t_n)) \sim ((x, (\alpha_0, ..., \alpha_q)), (0, .., t_0, ..., 0, ..., t_n, ..., 0))$$

en $(NX^o_{\mathcal{U}})_q \times \Delta^q$ y para ver que $\lambda \circ \iota \simeq Id_{BX^o_{\mathcal{U}}}$ basta dar una homotopía lineal entre $(0, ..., t_0, ..., t_n, ..., 0)$ y $(\lambda_{\alpha_0}(x), ..., \lambda_{\alpha_q}(x))$. Por lo tanto ι es una equivalencia homotópica. $\square$

Nota 2.2.6. Si consideramos dos particiones de la unidad $\{\lambda_\alpha\}$ y $\{\lambda'_\alpha\}$ subordinadas a $\mathcal{U}$, entonces las funciones inducidas $\lambda, \lambda' \colon X \to BX^o_{\mathcal{U}}$ son homotópicas, ya que cada $x \in X$ está en a lo más un número finito de U_α, y basta dar una homotopía lineal entre $[(x, (\alpha_0, ..., \alpha_q)), (\lambda_{\alpha_0}(x), ..., \lambda_{\alpha_q}(x))]$ y $[(x, (\alpha_0, ..., \alpha_q)), (\lambda'_{\alpha_0}(x), ..., \lambda'_{\alpha_q}(x))]$.

Dado un cociclo $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ asociado a la pregavilla G_c, con G un grupo topológico, tenemos un funtor continuo $\varphi\colon X_{\mathcal{U}} \to G$. Ahora, también tenemos un funtor continuo $\varphi\colon X^o_{\mathcal{U}} \to G$ tomando la composición

$$X^o_{\mathcal{U}} \longrightarrow X_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\varphi} G$$

que es restringir φ a los morfismo en $X^o_{\mathcal{U}}$. De la misma manera en que dos cociclos cohomólogos $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$, $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ inducen una transformación natural entre $\varphi\colon X_{\mathcal{U}} \to G$ y $\psi\colon X_{\mathcal{U}} \to G$, obtenemos una transformación natural entre $\varphi\colon X^o_{\mathcal{U}} \to G$ y $\psi\colon X^o_{\mathcal{U}} \to G$. Aplicando la proposición 2.2.1 obtenemos una función bien definida

$$\check{H}^1(\mathcal{U}; G_c) \to [BX^o_{\mathcal{U}}, BG]$$

dada por $[\varphi_{\alpha\beta}] \mapsto [B\varphi]$. Sea X un espacio paracompacto. La proposición 2.2.5 nos dice que hay una biyección

$$[X, BG] \cong [BX^o_{\mathcal{U}}, BG]$$

para cualquier cubierta abierta de X. En particular, tenemos una función bien definida

$$\check{H}^1(\mathcal{U}; G_c) \to [X, BG]$$

dada por $[\varphi_{\alpha\beta}] \mapsto [\, X \xrightarrow{\lambda} BX^o_{\mathcal{U}} \xrightarrow{B\varphi} BG \,]$ donde λ es la función inducida por la cubierta $\mathcal{U}$ de la proposición 2.2.5.

Definición 2.2.7. Sea $Pot(X)$ el conjunto potencia de X. Consideremos cubiertas abiertas de X de la forma

$$\mathcal{U}\colon X \to Pot(X)$$

tales que $x \in \mathcal{U}(x) = U_x$ a las que llamaremos *cubiertas buenas*.

Cualquier cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de un espacio X, tiene un refinamiento a una cubierta abierta buena, que se define de la siguiente manera. Sea $x \in X$, entonces existe U_α tal que $x \in U_\alpha$ y definimos $U_x = U_\alpha$. Las cubiertas abiertas buenas son un conjunto dirigido, pues tenemos un orden parcial $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ si y sólo si para cada $x \in X$, $V_x \subset U_x$. Está dirigido ya que dados $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ existe $\mathcal{W}$ tal que $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{W}$ y $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{W}$, donde $W_x = V_x \cap U_x$.

Definición 2.2.8. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ cubiertas abiertas buenas de un espacio X. Las cubiertas abiertas buenas son un conjunto dirigido, de manera que inducen una familia de funciones $\rho_{\mathcal{U}\mathcal{V}}\colon \check{H}^1(\mathcal{U};\mathcal{P}) \to \check{H}^1(\mathcal{V};\mathcal{P})$ con $\mathcal{P}$ una pregavilla, dadas por $[\varphi_{\alpha\beta}] \mapsto [\varphi_{\alpha\beta}]_{\mathcal{V}}$, donde un representante $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ en $[\varphi_{\alpha\beta}]_{\mathcal{V}}$ está definido como

$$\psi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta}|_{V_\alpha\cap V_\beta} \in \mathcal{P}(V_\alpha \cap V_\beta).$$

Los conjuntos $\check{H}^1(\mathcal{U};\mathcal{P})$ junto con las funciones $\rho_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ forman un sistema dirigido. Definimos

$$\check{H}^1(X;\mathcal{P}) \equiv colim_{\mathcal{U}}\check{H}^1(\mathcal{U};\mathcal{P}).$$

Proposición 2.2.9. *Sea X un espacio paracompacto y G un grupo topológico. Entonces la función*

$$\check{H}^1(X;G_c) \to [X, BG]$$

dada por $[\varphi_{\alpha\beta}] \mapsto [B\varphi \circ \lambda]$, donde $[\varphi_{\alpha\beta}]$ es un representante en $\check{H}^1(\mathcal{U};G_c)$ y $\lambda\colon X \to BX^o_{\mathcal{U}}$ es la función inducida por una partición de la unidad $\{\lambda_\alpha\}$ subordinada a $\mathcal{U}$, está bien definida.

Demostración. Sean $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ cubiertas abiertas de X tales que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Sean $\{\lambda_\alpha\}$, $\{\lambda'_\alpha\}$ particiones de la unidad subordinadas a $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ respectivamente. Sean $[\varphi_{\alpha\beta}] \in \check{H}^1(\mathcal{U};G_c)$ y $[\psi_{\alpha\beta}] \equiv [\varphi_{\alpha\beta}]_{\mathcal{V}} \in \check{H}^1(\mathcal{V};G_c)$. Para ver que la función está bien definida, hay que probar $B\varphi \circ \lambda \simeq B\psi \circ \lambda'$. Para esto consideremos los funtores continuos $j_{\mathcal{U}\mathcal{V}}\colon X^o_{\mathcal{V}} \to X^o_{\mathcal{U}}$ inducidos por las inclusiones $V_\alpha \hookrightarrow U_\alpha$ y $V_\alpha \cap V_\beta \hookrightarrow U_\alpha \cap U_\beta$. Entonces el funtor continuo $\psi\colon X^o_{\mathcal{V}} \to G$ inducido por el cociclo $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ es la composición

$$X^o_{\mathcal{V}} \xrightarrow{j_{\mathcal{U}\mathcal{V}}} X^o_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\varphi} G$$

donde φ es el funtor continuo inducido por $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$. Así, $B\psi = B(\varphi \circ j_{\mathcal{U},\mathcal{V}}) = B\varphi \circ Bj_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ ya que $B(\_)$ es funtorial. Ahora, como $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, $\{\lambda'_\alpha\}$ es una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$ y por lo tanto induce $\tilde{\lambda}'\colon X \to BX^o_{\mathcal{U}}$ tal que $B\varphi \circ \lambda \simeq B\varphi \circ \tilde{\lambda}'$. Además, $\tilde{\lambda}'$ es la composición

$$X \xrightarrow{\lambda'} BX^o_{\mathcal{V}} \xrightarrow{Bj_{\mathcal{U}\mathcal{V}}} BX^o_{\mathcal{U}}\ .$$

Por lo tanto $B\varphi \circ \lambda \simeq B\varphi \circ \tilde{\lambda}' = B\varphi \circ Bj_{\mathcal{U}\mathcal{V}} \circ \lambda' = B\psi \circ \lambda'$. □

2.3 Haces G-principales, Homotopía y 1-cociclos

Sea G un grupo topológico. Vamos a relacionar haces G-principales y 1-cociclos. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cubierta abierta de un espacio X y $\{\varphi_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to G\}$ un 1-cociclo asociado a la pregavilla G_c. Definimos una relación $\sim$ en

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \times G \times \{\alpha\}$$

como $(x', g', \alpha) \sim (x, g, \beta)$ si y sólo si $x' = x$ y $g' = \varphi_{\alpha\beta}(x)g$. Esto lo podemos expresar como $(x, g, \beta) \sim (x, \varphi_{\alpha\beta}(x)g, \alpha)$. Esta relación es de equivalencia y podemos definir el espacio

$$P(\varphi_{\alpha\beta}) \equiv \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \times G \times \{\alpha\}/\sim$$

junto con la acción $P(\varphi_{\alpha\beta}) \times G \to P(\varphi_{\alpha\beta})$ dada por $[x, g, \alpha] \cdot g' = [x, gg', \alpha]$. La proyección $q\colon P(\varphi_{\alpha\beta}) \to X$, $q[x, g, \alpha] = x$ resulta ser un haz G-principal, donde las trivializaciones locales $\psi_\alpha\colon U_\alpha \times G \to q^{-1}(U_\alpha)$ están dadas por $\psi_\alpha(x, g) = [x, g, \alpha]$. Si $\varphi_{\alpha\beta}$, $\varphi'_{\alpha\beta}$ son cociclos cohomólogos, entonces la familia de funciones $\{f_\alpha\}$ tales que

$$\varphi'_{\alpha\beta}(x) = f_\alpha(x)^{-1}\varphi_{\alpha\beta}(x)f_\beta(x)$$

para cada $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, define un isomorfismo de haces $\bar{f}\colon P(\varphi'_{\alpha\beta}) \to P(\varphi_{\alpha\beta})$ dado por $\bar{f}[x, g, \alpha] = [x, f_\alpha(x)g, \alpha]$. Así, obtenemos una función bien definida

$$\check{H}^1(\mathcal{U}; G_c) \to k_G^{\mathcal{U}}(X)$$

dada por $[\varphi_{\alpha\beta}] \mapsto [q\colon P(\varphi_{\alpha\beta}) \to X]$, donde $k_G^{\mathcal{U}}(X)$ denota al conjunto de clases de isomorfismo de haces G-principales que son localmente triviales sobre $\mathcal{U}$. Además, esta función pasa al colímite y define

$$\check{H}^1(X; G_c) \equiv colim_{\mathcal{U}}\check{H}^1(\mathcal{U}; G_c) \to colim_{\mathcal{U}} k_G^{\mathcal{U}}(X) \cong k_G(X)$$

donde $k_G(X)$ es el conjunto de clases de isomorfismo de haces G-principales sobre X.

Sea G un grupo topológico bien basado y consideremos el haz G-principal universal $p\colon EG \to BG$. Para cualquier función continua $f\colon X \to BG$ podemos tomar el pullback de p inducido por f

$$\begin{tikzcd} f^*EG \arrow[r] \arrow[d] & EG \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & BG \end{tikzcd}$$

de manera que $f^*EG \to X$ es un haz G-principal. En [1] se prueba que si $f, g\colon X \to BG$ son homotópicas y X es un espacio paracompacto, entonces los haces inducidos son isomorfos. En otras palabras, si X es paracompacto tenemos una función bien definida

$$[X, BG] \to k_G(X)$$

dada por $[f] \mapsto [f^*EG \to X]$.

Teorema 2.3.1. *Sea X un espacio paracompacto y G un grupo topológico bien basado. Entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & k_G(X) & \\ \check{H}^1(X, G_c) \arrow[ur] \arrow[rr, "{[\varphi_{\alpha\beta}] \mapsto [B\varphi \circ \lambda\colon X \to BG]}"'] & & {[X, BG]} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

conmuta, donde las flechas diagonales son las definidas anteriormente.

Demostración. Consideremos el pullback del haz universal inducido por $B\varphi \circ \lambda$ y el haz asociado a $[\varphi_{\alpha\beta}]$, $P(\varphi_{\alpha\beta})$

$$\begin{tikzcd} P(\varphi_{\alpha\beta}) \arrow[dr, dashed, "\tilde{\gamma}"] \arrow[drr, dashed, "\gamma"] \arrow[ddr, bend right, "q"'] & & \\ & (B\varphi \circ \psi)^*(EG) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{p}"] & EG \arrow[d, "p"] \\ & X \arrow[r, "B\varphi \circ \lambda"'] & BG. \end{tikzcd}$$

Para ver que $\bar{p}$ y q son isomorfos basta dar un morfismo de haces G-principales, es decir, una función continua G-equivariente $\tilde{\gamma}$ tal que $\bar{p} \circ \tilde{\gamma} = q$. Esto es equivalente a tener una función continua equivariante γ tal que $\gamma \circ p = B\varphi \circ \psi \circ q$. Definimos $\gamma_\alpha\colon U_\alpha \times G \times \{\alpha\} \to EG$ como

$$(x, g, \alpha) \mapsto [(\varphi_{\alpha_0\alpha_1}(x), ..., \varphi_{\alpha_{n-1}\alpha_n}(x), \varphi_{\alpha_n,\alpha}(x)g), (\lambda_{\alpha_0}(x), ..., \lambda_{\alpha_n}(x))]$$

donde $x \in U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n}$ y $\alpha_0 < \cdots < \alpha_n$ son todos los índices de los abiertos tales que $\lambda_{\alpha_i}(x) \neq 0$. Para ver que es continua fijemos $x_0 \in U_\alpha$ y sea $\widetilde{W} \subset EG$ un abierto tal que $\gamma_\alpha(x, g, \alpha) \in \widetilde{W}$. Sea $U_0 \times \cdots \times U_n \times V$ una vecindad de $(\varphi_{\alpha_0\alpha_1}(x_0), ..., \varphi_{\alpha_{n-1}\alpha_n}(x_0), \varphi_{\alpha_n,\alpha}(x_0)g), (\lambda_{\alpha_0}(x_0), ..., \lambda_{\alpha_n}(x_0))$ tal que

$$\pi(U_0 \times \cdots \times U_n \times V) \subset \widetilde{W}$$

donde $\pi\colon \bigsqcup_{n\geq 0}(EG)_n \times \Delta^n \to EG$ es la aplicacón cociente. Sea $U_{x_0} \subset U_\alpha$ una vecindad de x_0 donde a lo más $\lambda_{\alpha_i}(x) \neq 0$ para cada $0 \leq i \leq n$ y cada $x \in U_{x_0}$. Entonces $\lambda_2\colon U_{x_0} \to \Delta^n$ dada por $x \mapsto (\lambda_{\alpha_0}(x), ..., \lambda_{\alpha_n}(x))$ es continua y existe $N \subset U_{x_0}$ vecindad abierta de x_0 tal que $\lambda_2(N) \subset V$. Como cada $\varphi_{\alpha_i\alpha_{i+1}}$ es continua, existen $N_0, ..., N_n$ vecindades abiertas de x_0 tales que $\varphi_{\alpha_i\alpha_{i+1}}(N_i) \subset U_i$ con $0 \le i \le n-1$ y $\varphi_{\alpha_n\alpha}(N_n)S \subset U_n$ con $S \subset G$ abierto, donde esto último pasa ya que el producto en G es continuo. Definimos

$$W = U_\alpha \cap N_0 \cap \cdots \cap N_n \cap N \times S \times \{\alpha\}.$$

Así, $\gamma_\alpha(W) \subset \widetilde{W}$ y por lo tanto γ_α es continua. Ahora, la función

$$\begin{tikzcd} \bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \times G \times \{\alpha\} \arrow[r, "\sqcup_\alpha \gamma_\alpha"] \arrow[d] & EG \\ P(\varphi_{\alpha\beta}) \arrow[ur, dashed, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

pasa al cociente y define la función continua γ ya que

$$(x, \varphi_{\beta\alpha}(x)g, \beta) \mapsto$$
$$[(\varphi_{\alpha_0\alpha_1}(x), ..., \varphi_{\alpha_{n-1}\alpha_n}(x), \varphi_{\alpha_n,\beta}(x)\varphi_{\beta\alpha}(x)g), (\lambda_{\alpha_0}(x), ..., \lambda_{\alpha_n}(x))] =$$
$$(\varphi_{\alpha_0\alpha_1}(x), ..., \varphi_{\alpha_{n-1}\alpha_n}(x), \varphi_{\alpha_n,\alpha}(x)g), (\lambda_{\alpha_0}(x), ..., \lambda_{\alpha_n}(x))].$$

γ es G-equivariante ya que

$$\gamma[x, g, \alpha] \cdot g' =$$
$$[(\varphi_{\alpha_0\alpha_1}(x), ..., \varphi_{\alpha_{n-1}\alpha_n}(x), \varphi_{\alpha_n,\alpha}(x)g), (\lambda_{\alpha_0}(x), ..., \lambda_{\alpha_n}(x))] \cdot g' =$$
$$[(\varphi_{\alpha_0\alpha_1}(x), ..., \varphi_{\alpha_{n-1}\alpha_n}(x), \varphi_{\alpha_n,\alpha}(x)gg'), (\lambda_{\alpha_0}(x), ..., \lambda_{\alpha_n}(x))] =$$
$$\gamma[x, gg', \alpha].$$

Finalmente, por construcción γ satisface $p \circ \gamma = B\varphi \circ \lambda \circ q$ y obtenemos el isomorfismo de haces G-principales $\tilde{\gamma}$. □

Para probar que $\check{H}^1(X, G_c) \to [X, BG]$ es biyectiva cuando X es paracompacto necesitamos que las flechas diagonales del triángulo del teorema 2.3.1 sean biyectivas. El siguiente resultado se puede consultar en [9].

Proposición 2.3.2. *Sea X un espacio topológico, entonces la función*

$$\check{H}^1(X, G_c) \to k_G(X)$$

dada por $[\varphi_{\alpha\beta}] \mapsto [P(\varphi_{\alpha\beta}) \to X]$ es biyectiva.

Para ver que la otra flecha es biyectiva, primero recordemos que el haz universal $p\colon EG \to BG$ es numérico, entonces el haz inducido por una función continua $f\colon X \to BG$, también es numérico, ya que una cubierta trivializadora de $f^*EG \to X$ es $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$, donde $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una cubierta trivializadora de p, lo que implica que la familia de funciones

$$\left\{ \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\lambda_\alpha"] & BG \arrow[r, "\pi_\alpha"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \right\}_{\alpha\in\Lambda}$$

es una partición de la unidad subordinada a $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ que además es localmente finita, donde π_α es la partición de la unidad subordinada a $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Ahora, la prueba de que funciones homotópicas inducen haces isomorfos se basa en que hay una cubierta trivializadora con una partición de la unidad (localmente finita) subordinada a ella. Podemos generalizar esto a haces numéricos, de manera que si $k_G^{\#}(X)$ denota el conjunto de clases de isomorfismo de haces G-principales numéricos, entonces también tenemos una función bien definida $[X, BG] \to k_G^{\#}(X)$ para cualquier espacio topológico. El siguiente resultado se puede consultar en [11].

Proposición 2.3.3. *Sea X un espacio topológico, entonces la función*

$$[X, BG] \to k_G^{\#}(X)$$

dada por $[f] \mapsto [f^*EG \to X]$ es biyectiva.

Las cubiertas abiertas buenas numéricas son un conjunto dirigido, de manera que podemos definir

$$\check{H}^1_{\#}(X; G_c) \equiv colim_{\mathcal{U}} \check{H}^1(\mathcal{U}; G_c)$$

donde el colímite se toma sobre cubiertas abiertas buenas numéricas. Claramente la restricción de la función de la proposición 2.3.2 a $\check{H}^1_{\#}(X; G_c)$ induce una biyección $\check{H}^1_{\#}(X; G_c) \to k_G^{\#}(X)$. Ahora, por la proposición 2.2.5 y un argumento similar a la prueba de la proposición 2.2.9, tenemos una función bien definida $\check{H}^1_{\#}(X; G_c) \to [X, BG]$. De manera análoga a la prueba de 2.3.1, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.3.4. *Sea X un espacio topológico y G un grupo topológico bien basado. Entonces el siguiente triángulo conmuta*

$$\begin{tikzcd} & k_G^{\#}(X) & \\ \check{H}^1_{\#}(X, G_c) \arrow[ur] \arrow[rr, "{[\varphi_{\alpha\beta}] \mapsto [B\varphi\circ\lambda\colon X \to BG]}"'] & & {[X, BG].} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

y por lo tanto $\check{H}^1_{\#}(X; G_c) \to [X, BG]$ es biyectiva.

Corolario 2.3.5. *Sea X un espacio paracompacto y G un grupo topológico bien basado. Entonces la función*

$$\check{H}^1(X; G_c) \to [X, BG]$$

es biyectiva.

Demostración. Si X es un espacio paracompacto, entonces cualquier cubierta abierta de X es numérica, lo que implica que $\check{H}^1(X; G_c) \cong \check{H}^1_{\#}(X; G_c)$ y $k_G(X) \cong k_G^{\#}(X)$. Así, la función $[X, BG] \to k_G(X)$ es biyectiva y por el teorema 2.3.1 se tiene el resultado. $\square$

2.4 Cohomología Homotópica

La cohomología homotópica de un espacio X se define usando espacios Eilenberg MacLane de la siguiente manera:

Definición 2.4.1. Sea L un grupo abeliano. Definimos la *q-cohomología homotópica* de un espacio X con coeficientes en L como

$$\mathcal{H}^q(X; L) = [X, K(L, q)].$$

Si trabajamos en k-Top, por el corolario 1.3.9 y la proposición 1.2.13 dado un grupo abeliano G con la topología discreta, tenemos un espacio Eilenberg Maclane BG de tipo $K(G, 1)$, donde BG es un grupo topológico abeliano. Si G es numerable, entonces BG es un complejo CW numerable y $BG \times BG$ es un complejo CW con la topología producto usual, de manera que BG es un grupo topológico abeliano en Top.

Podemos iterar la construcción $B(\_)$ y obtenemos espacios Eilenberg Maclane $K(G, n) = B^n G = B(\cdots BG)$ ya que

$$\pi_q(B^n G) \cong \pi_{q-1}(B^{n-1}G) \cong \cdots \cong \pi_{q-(n-1)}(BG) \cong \begin{cases} G & si \;\; q = n \\ 0 & si \;\; q \neq n \end{cases}$$

y podemos definir $\mathcal{H}^q(X, G) = [X, B^q G]$. Vamos a dar otra construcción de espacios $K(G, q)$ que es más clara y más adecuada para el isomorfismo entre la cohomología homotópica y la cohomología de Čech ([2]).

Definición 2.4.2. Sea (S, s_0) un conjunto basado y L un grupo abeliano. Definimos $F(S, L) = \{\varphi\colon S \to L \mid \varphi$ es cero salvo en un número finito y $\varphi(s_0) = 0\}$.

Cada $\varphi \in F(S, L)$ se puede escribir de la siguiente manera: sea $l \in L$ y $s \in S$, definimos $ls \in F(S, L)$ como

$$ls(s') = \begin{cases} l & s' = s \\ 0 & s' \neq s \end{cases}$$

con $s \neq s_0$ y definimos $ls_0 \equiv 0$ para cada $l \in L$. Dada $\varphi \in F(S, L)$ y $s_1, ..., s_k$ los puntos donde φ no es cero, entonces ésta es de la forma $\varphi = \sum_{i=1}^k l_i s_i$, donde $\varphi(s_i) = l_i$. Así, escribiremos

$$\varphi = \sum_{s \in S} l_s s,$$

con l_s no cero en un número finito de $s \in S$. Cuando S es un espacio topológico le damos una topología a $F(S; L)$ de la siguiente manera. Denotemos por $F_n(S, L) = \{\varphi \in F(S, L) \mid \varphi$ es no cero en a lo más n puntos$\}$. Ahora, para cada n, $F_n(S, L) \subset F_{n+1}(S, L)$ y tenemos que

$$F(S, L) = \bigcup_{n \geq 0} F_n(S, L).$$

Consideremos $(L \times S)^n$ que es un espacio con la topología producto, y la función $\mu_n\colon (L \times S)^n \to F_n(S,L)$, dada por

$$\mu_n((l_1,s_1),...,(l_n,s_n)) = \sum_{i=1}^{n} l_i s_s$$

que es suprayectiva. Para cada n, le damos la topología cociente a $F_n(S,L)$ y a $F(S,L)$ la topología coherente, es decir, $C \subset F(S,L)$ es cerrado si y sólo si $C \cap F_n(S,L)$ es cerrado en $F_n(S,L)$ para cada n. Veamos que $F(S,L)$ es un grupo topológico. Considremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(L \times S)^n \arrow[r, "h"] \arrow[d, two heads, "\mu_n"'] & (L \times S)^n \arrow[d, two heads, "\mu_n"] \\
F_n(S,L) \arrow[d, hook] \arrow[dr, dashed] & F_n(S,L) \arrow[d, hook] \\
F(S,L) \arrow[r, "inverso"'] & F(S,L)
\end{tikzcd}$$

donde $h((l_1,s_1),...,(l_n,s_n)) = ((-l_1,s_1),...,(-l_n,s_n))$ que es continua ya que L es un grupo discreto. Por lo tanto la composición es continua y la función *inverso* es continua. Ahora, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(L \times S)^n \times (L \times S)^m \arrow[r] \arrow[d, "\mu_n \times \mu_m"'] & (L \times S)^{n+m} \arrow[d, "\mu_{n+m}"] \\
F_n(S,L) \times F_m(S,L) \arrow[r, "producto"] & F_{n+m}(S,L)
\end{tikzcd}$$

donde la composición está dada por

$$((l_1s_1 + \cdots + l_ns_n),(l'_1s'_1 + \cdots + l'_ms'_m)) \mapsto l_1s_1 + \cdots + l_ns_n + l'_1s'_1 + \cdots + l'_ms'_m$$

Para que la función *producto* sea continua, necesitamos que $\mu_n \times \mu_n$ sea identificación. Vamos a considerar $S = |K|$, donde K es un complejo simplicial. Se puede probar que $F(|K|,L)$ es un complejo CW ([2]) y además, si L es numerable, $F(S,L)$ es un complejo CW numerable y por lo tanto $F(S;L) \times F(S;L)$ es un complejo CW con la topología usual. Si L no es numerable, hay que trabajar en la categoría k-Top. En esta categoría, $\mu_n \times \mu_n$ resulta ser una identificación y entonces si S es un k-espacio, $F(S,L)$ es un grupo topológico abeliano (como k-espacio).

Consideremos el cono de S (reducido), CS, y la suspensión ΣS (reducida), junto con las funciones $i\colon S \to CS$ y $q\colon CS \to \Sigma S$. Se puede probar que

$$F(S,L) \overset{i_*}{\hookrightarrow} F(CS,L) \xrightarrow{q_*} F(\Sigma S,L)$$

es una fibración (basada) y que $F(CS,L)$ es contraible. Usando esto, la holonomía $\theta_\Gamma\colon \Omega F(\Sigma S,L) \to F(S,L)$ para una función de levantamiento Γ, resulta ser una equivalencia homotópica ([2]). Tomando $S = S^n$ (que es un espacio triangulado), obtenemos que $\Omega F(S^n,L) \simeq F(S^{n-1},L)$ y en particular, $\Omega F(S^n,L)$ es del mismo tipo de homotopía que un complejo CW.

Lema 2.4.3. *Si (X,x_0) es conectable por trayectorias entonces $F(X,L)$ es conectable por trayectorias.*

Demostración. Sea lx un generador de $F(X,L)$. Vamos a dar una trayectoria de lx a $lx_0 = 0$ en $F(X,L)$. Para esto, sea $\sigma\colon I \to X$ tal que $\sigma(0) = x_0$ y $\sigma(1) = x$. Definimos $\tilde{\sigma}\colon I \to F(X,L)$ como $\tilde{\sigma}(t) = l\sigma(t)$. Entonces $\tilde{\sigma}(0) = l\sigma(0) = lx_0$ y $\tilde{\sigma}(1) = l\sigma(1) = lx$. Falta ver que $\tilde{\sigma}$ es continua. Consideremos la función continua $\alpha\colon I \to L \times X$ dada por $t \mapsto (l,\sigma(t))$. Así, el siguiente diagrama cunmuta

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\tilde{\sigma}"'] & L \times X \arrow[d, "\mu_1"] \\ F(X,L) & F_1(X,L) \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

y como μ_1 es continua, se tiene que $\tilde{\sigma}$ es continua. Ahora, sea $\sum_{i=1}^n l_i x_i$ en $F(X,L)$ y $\tilde{\sigma}_i$ la trayectoria que empieza en $l_i x_0$ y termina en $l_i x_i$. Consideremos la trayectoria $\omega\colon I \to F(X,L)$ dada por $\omega(t) = \tilde{\sigma}_1(t)+\cdots+\tilde{\sigma}_n(t)$. Entonces $\omega(0) = \tilde{\sigma}_1(0)+\cdots+\tilde{\sigma}_n(0) = l_1x_0+\cdots+l_nx_0 = 0$ y $\omega(1) = \tilde{\sigma}_1(1)+\cdots+\tilde{\sigma}_n(1) = l_1x_1+\cdots+l_nx_n$. Ahora, ω es continua ya que es la composición

$$I \xrightarrow{\beta} \underbrace{F(X,L) \times_K \cdots \times_K F(X,L)}_{n} \xrightarrow{suma} F(X,L)$$

donde β está dada por $t \mapsto (\tilde{\sigma}_1(t),\cdots,\tilde{\sigma}_n(t))$. □

Proposición 2.4.4. *$F(S^n;L)$ es un espacio Eilenberg Maclane de tipo $K(n,L)$.*

Demostración. $\pi_q(F(S^n,L)) \cong \pi_q(\Omega F(S^{n+1},L)) \cong \pi_{q+1}(F(S^{n+1},L))$. Si $q \geq n$,

$$\pi_q(F(S^n,L)) \cong \cdots \cong \pi_{q-n}(F(S^0,L)) \cong \pi_{q-n}(L) \cong \begin{cases} L & si\ \ q = n \\ 0 & si\ \ q \neq n. \end{cases}$$

Si $q < n$, $\pi_q(F(S^n,L)) \cong \cdots \cong \pi_0(F(S^{n-q},L))$ y como $n-q > 0$, S^{n-q} es conexo por trayectorias, lo que implica que $F(S^{n-q},L)$ también lo es. Por lo tanto, para cada $n \geq 0$, $F(S^n,L) = K(L,n)$. □

Definición 2.4.5. Vamos a definir

$$\mathcal{H}^q(X,L) = [X,F(S^n,L)]$$

donde la operación de grupo es la inducida por $F(S^n,L)$, es decir, $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$ y pasando a homotopía $[f]\cdot[g] = [f\cdot g]$.

2.5 Cohomología de Gavillas

Vamos a mencionar los conceptos necesarios para poder probar 2.6.10, los cuales no probaremos, pero que se pueden consultar en [18].

Definición 2.5.1. Sea $\mathcal{G}\colon \tau_X \to Ab$ una pregavilla de grupos abelianos. Decimos que $\mathcal{G}$ es una *gavilla*, si se cumple lo siguiente: Sea $U = \bigcup_{i\in J} U_i$ y consideremos una familia compatible $\{s_i \mid s_i \in \mathcal{G}(U_i)\}_{i\in J}$, es decir, $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ para cada $i, j \in J$. Entonces existe una única $s \in \mathcal{G}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para cada $i \in J$.

Ejemplo 2.5.2. Sea G un grupo topológico abeliano. Entonces la pregavilla $G_c\colon \tau_x \to Ab$ es una gavilla, ya que la existencia de la función continua global asociada a una familia compatible de funciones, está garantizada por el lema del pegado.

En general, una pregavilla no es una gavilla, por ejemplo, dado un grupo abeliano L, la pregavilla constante $\underline{L}$ no es una gavilla si L no es el grupo trivial. Pero podemos “gavillanizar” a las pregavillas de la siguiente manera.

Definición 2.5.3. Sea $\mathcal{G}\colon \tau_X \to Ab$ una pregavilla y $x \in X$, definimos

$$\mathcal{G}_x = colim_{U\ni x}\mathcal{G}(U)$$

donde el colímite se toma sobre los abiertos U que contienen a x. Definimos

$$\pi\colon S = \coprod_{x\in X} \mathcal{G}_x \to X$$

como $\pi([s,U]_x) = x$, donde $s \in \mathcal{G}(U)$ y $[s,U]_x \in \mathcal{G}_x$. A la clase $[s,U]_x$ se le llama *germen* de s en x. Los gérmenes satisfacen $[s,U]_x = [s',U']_x$ si y sólo si existe $W \subset U \cap U'$ vecindad de x tal que $s|_W = s'|_W$. Una base para la topología de S son los conjuntos $\{[s,U]_x \mid x \in U \text{ y } U \text{ es un abierto de } X\}$ y con esta topología π satisface lo siguiente:

1. π es continua y suprayectiva.
2. π es un homeomorfismo local, es decir, para cada $a \in S$, existe una vecindad abierta N tal que $\pi|_N$ es un homeomorfismo y $\pi(N)$ es abierto.
3. Cada tallo $\pi^{-1}(x) = \mathcal{G}_x$ tiene estructura de grupo abeliano, de manera que la diferencia $a-b \in \pi^{-1}(x)$ depende continuamente de a y b, es decir, si $S^* = \{(a,b) \in S \times S \mid \pi(a) = \pi(b)\}$ entonces la función $S^* \to S$ dada por $(a,b) \mapsto a-b$ es continua.

A π se le llama la *gavilla étalé* asociada a $\mathcal{G}$.

Definición 2.5.4. Considermos la gavilla étalé $\pi\colon S \to X$ asociada a una pregavilla $\mathcal{G}$, tenemos las secciones locales

$$\Gamma(U, S) = \{s\colon U \to S \mid s \text{ es continua y } \pi \circ s = Id_U\}$$

para cada abierto $U \subset X$. $\Gamma(U, S)$ es un grupo abeliano con la operación $(s + s')(x) = s(x) + s'(x) \in \mathcal{G}_x$. El idéntico en este grupo es la sección cero $s_0\colon U \to S$, $x \to 0_x \in \mathcal{G}_x$ (que siempre es continua). Si $U \subset V$, tenemos un homomorfismo $\Gamma(V, S) \to \Gamma(U, S)$ que está dado por restringir las secciones a U. Así, obtenemos una pregavilla $\Gamma(\_, S)\colon \tau_X \to Ab$ y además, el lema del pegado nos dice que es gavilla. Denotamos a esta gavilla como $\widetilde{\mathcal{G}}$.

Ejemplo 2.5.5. Sea L un grupo abeliano y consideremos la pregavilla constante $\underline{L}$. La gavilla étalé asociada a $\underline{L}$ es la proyección $\pi\colon X \times L \to X$, donde L tiene la topología discreta. Entonces la gavillanización de $\underline{L}$ es la gavilla

$$\Gamma(\_, X \times L)\colon \tau_X \to Ab.$$

Además, $\Gamma(U, X \times L) \cong C(U, L)$, es decir, la gavillanización de la pregavilla consatente es L_c, donde L tiene la topología discreta y por lo tanto $L_c(U)$ son las funciones localmente constantes $f\colon U \to L$.

Consideremos la categoría de pregavillas $Ab^{(\tau_X)^{op}}$, donde los morfismos entre pregavillas $h\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ son transformaciones natural entre $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, es decir, para cada abierto $U \subset X$ se tiene un homomorfismo de grupos abelianos h_U tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(V) \arrow[r, "h_V"] \arrow[d, "\rho_{U,V}"'] & \mathcal{Q}(V) \arrow[d, "\rho_{U,V}"] \\ \mathcal{P}(U) \arrow[r, "h_U"] & \mathcal{Q}(U) \end{tikzcd}$$

para cada $U \subset V$. Sea $Gav(X)$ la categoría de gavillas que es una subcategoría plena de $Ab^{(\tau_X)^{op}}$, es decir, $Mor_{Gav(X)}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) = Mor_{Ab^{(\tau_X)^{op}}}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ para cualesquiera gavillas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$. Sea $GE(X)$ la categoría de gavillas étalé sobre X, es decir, cada obejeto $p\colon S \to X$ satisface 1, 2, y 3 de 2.5.3 y los morfismos son de la forma

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & S' \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

donde h es continua, el triángulo conmuta y la restricción a las fibras que se denota $h_x\colon p^{-1}(x) \to q^{-1}(x)$ es un homomorfismo de grupos abelianos para cada $x \in X$. Se puede probar que

$$\begin{tikzcd} Gav(X) \arrow[r, shift left, "\mathfrak{G}"] & GE(X) \arrow[l, shift left, "\Gamma"] \end{tikzcd}$$

es una equivalencia de categorías, donde $\mathfrak{G}$ es el funtor que a cada gavilla le asocia su gavilla étalé. Así, una gavilla es equivalente a su gavilla étalé. En particular, dada una gavilla $\mathcal{G}$, el grupo $\mathcal{G}(U)$ es isomorfo a $\Gamma(U, S)$.

Definición 2.5.6. Sea $h\colon \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ un morfimo de pregavillas. Definimos la pregavilla $ker\ h\colon \tau_X \to Ab$ como $(ker\ h)(U) = ker\ h_U \subset \mathcal{G}(U)$ y para $i\colon U \hookrightarrow V$, definimos $(ker\ h)(i)\colon (ker\ h)(V) \to (ker\ h)(U)$ como $\rho_{U,V}|_{ker\ h_V}\colon ker\ h_V \to ker\ h_U$ que está bien definido pues h es natural. De manera similar, definimos la pregavilla $im\ h\colon \tau_X \to Ab$ como $(im\ h)(U) = im\ h_U \subset \mathcal{F}(U)$ y la pregavilla $coker\ h\colon \tau_X \to Ab$ como $(coker\ h)(U) = coker\ h_U = \mathcal{F}(U)/im\ h_u$.

Con estas pregavillas, la categoría $Ab^{(\tau_x)^{op}}$ es abeliana, es decir, hay una operación aditiva en los morfismos y existen núcleos y conúcleos. Se puede probar que la pregavilla $ker\ h$ es gavilla, pero en general, las pregavillas $im\ h$ y $coker\ h$ no son gavillas, sin embargo, podemos tomar la gavillanización $\widetilde{im\ h}$ y $\widetilde{coker\ h}$. Con estas gavillas, la categoría $Gav(X)$ también es abeliana. En una categoría abeliana tenemos sucesiones exactas de manera similar a las categorías Ab o R-mod. El siguiente resultado se puede consultar en [12].

Proposición 2.5.7. *Sean $h\colon \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ y $g\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ morfismos de gavillas. Entonces la sucesión*

$$\underline{0} \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{h} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \longrightarrow \underline{0}$$

es exacta corta (donde la pregavilla $\underline{0}$ sí es una gavilla) si y sólo si la sucesión en los tallos

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'_x \xrightarrow{h_x} \mathcal{F}_x \xrightarrow{g_x} \mathcal{F}''_x \longrightarrow 0$$

es exacta corta para cada $x \in X$.

Definición 2.5.8. Definimos $\Gamma(X, \_)\colon Gav(X) \to Ab$ como $\Gamma(X, \mathcal{G}) = \mathcal{G}(X)$. A $\Gamma(X, \_)$ se le llama funtor de secciones globales.

Recordemos que un funtor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre categorías abelianas es exacto izquierdo si dada una sucesión exacta $0 \to A \to B \to C \to 0$, la sucesión $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ es exacta. El siguiente resultado se puede consultar en [18].

Proposición 2.5.9. *El funtor $\Gamma(X, \_)\colon Gav(X) \to Ab$ es un funtor exacto izquierdo.*

Nota 2.5.10. También tenemos un funtor exacto izquierdo de $Ab^{(\tau_X)^{op}} \to Ab$, pero este funtor no será interesante ya que resulta exacto.

De manera similar a la categoría Ab, tenemos objetos inyectivos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$, es decir, si I es un objeto de $\mathcal{C}$, entonces I es inyectivo si para cualesquiera morfismos

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd}$$

existe el morfismo punteado tal que el diagrama conmuta. Dado un objeto A en una categoría abeliana, decimos que la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I_0 \xrightarrow{d^0} I_1 \xrightarrow{d^1} I_2 \longrightarrow \cdots$$

es una resolución inyectiva si cada I_i es un objeto inyectivo. Si $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor exacto izquierdo, obtenemos un complejo de cocadenas

$$F(I_0) \xrightarrow{F(d^0)} F(I_1) \xrightarrow{F(d^1)} F(I_2) \longrightarrow \cdots$$

Dadas dos resoluciones inyectivas $0 \to A \to I^*$ y $0 \to A \to J^*$ de un objeto A se puede probar que los complejos de cocadenas I^* y J^* son homotópicamente equivalentes y por lo tanto también los complejos $F(I^*)$ y $F(J^*)$. De esta manera tenemos isomorfismos canónicos en cohomología

$$H^i(F(I^*)) \cong H^i(F(J^*))$$

para cada $i \geq 0$. Una categoría abeliana tiene suficientes inyectivos si cualquier objeto A se puede encajar en un objeto inyectivo lo cual es equivalente a que todo objeto tenga una resolución inyectiva.

Definición 2.5.11. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías abelianas y $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor exacto izquierdo, donde $\mathcal{C}$ tiene suficientes inyectivos. Definimos el i-ésimo *funtor derivado derecho* de F, $R^iF\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ como $R^iF(A) \equiv H^i((F(I^*), F(d^*))$.

El siguiente resultado se puede consultar en [18].

Proposición 2.5.12. *$R^iF\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor aditivo que satisface $R^0F \cong F$ y para cualquier sucesión exacta corta $0 \to A \to B \to C \to 0$ hay una sucesión exacta larga*

$$0 \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to R^1F(A) \to R^1F(B) \to R^1F(C) \to \cdots$$

Vamos definir la q-cohomología de un espacio X con coeficientes en una gavilla como el q-ésimo funtor derivado de $\Gamma(X, \_)\colon Gav(X) \to Ab$. Para esto necesitamos que cualquier gavilla $\mathcal{G}$ tenga una resolución inyectiva

$$\underline{0} \to \mathcal{G} \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \cdots$$

En Ab cualquier grupo abeliano L se puede encajar en un cociente de $\mathbb{Q}^{(L)}$. Usando que Ab tiene suficientes inyectivos se prueba que $Gav(X)$ tiene suficientes inyectivos.

Definición 2.5.13. Sea $\mathcal{G}$ en $Gav(X)$. Definimos

$$H^q(X; \mathcal{G}) \equiv R^q\Gamma(X, \mathcal{G}).$$

En particular, por la proposición 2.5.12 obtenemos un isomorfismo

$$H^0(X; \mathcal{G}) \cong \Gamma(X, \mathcal{G}).$$

Hay otra definición de cohomología de gavillas usando otro tipo de resoluciones.

Definición 2.5.14. Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías abelianas y $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor exacto izquierdo. Decimos que un objeto C en $\mathcal{C}$ es *F-acíclico* si $R^iF(C) = 0$ para cada $i > 0$. Decimos que una resolución $0 \to A \to C^*$ es F-acíclica si cada objeto de C^* es F-acíclico.

El siguiente resultado se puede consultar en [5].

Proposición 2.5.15. *Sea $0 \to A \to C^*$ una resolución F-acíclica de A. Entonces $R^iF(A) \cong H^i(F(C^*))$.*

Con esto podemos calcular la cohomología con resoluciones acíclicas. Algunas gavillas acíclicas ($\Gamma(X, \_)$-acíclicas) en la categoría $Gav(X)$ se obtienen de la siguiente manera.

Definición 2.5.16. Decimos que una gavilla $\mathcal{G}$ en $Gav(X)$ es *flácida* ("flasque" o "flabby") si para cualquier abierto y cualquier $s \in \mathcal{G}(U)$ existe $\tilde{s} \in \mathcal{G}(X)$ tal que $\tilde{s}|_U = s$.

El siguiente resultado se puede consultar en [18]

Proposición 2.5.17. *Sea $\mathcal{G}$ una gavilla flácida. Entonces $H^q(X;\mathcal{G}) = 0$ para cada $q > 0$.*

De esta manera las gavillas flácidas son acíclicas. Usando que cualquier gavilla inyectiva es flácida y que $Gav(X)$ tiene suficientes inyectivos tenemos que cualquier gavilla tiene una resolución flácida. Otra manera de ver esto es con la *gavilla de Godement* asociada a una gavilla $\mathcal{G}$ que se define como

$$(G\mathcal{G})(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{G}_x$$

Se puede probar que $G\mathcal{G}$ es flácida y que hay un encaje $\mathcal{G} \hookrightarrow G\mathcal{G}$. Con esta gavilla se puede construir la una resolución flácida de $\mathcal{G}$.

Definición 2.5.18. Sea $\mathcal{G}$ una gavilla en $Gav(X)$ y $\underline{0} \to \mathcal{G} \to \mathcal{F}^*$ una resolución flácida de $\mathcal{G}$. Definimos

$$H^q(X;\mathcal{G}) \equiv H^q(\Gamma(X, \mathcal{F}^*)),$$

que coincide (salvo isomorfismo canónico) con la definición 2.5.13, ya que por las proposiciones 2.5.15 y 2.5.17 tenemos $R^q\Gamma(X, \mathcal{G}) \cong H^q(\Gamma(X, \mathcal{F}^*))$.

De manera similar a como se definió $\check{H}^1(X;\mathcal{G})$ para una pregavilla de grupos, definimos la cohomología de Čech de un espacio con coeficientes en una pregavilla de grupos abelianos.

Definición 2.5.19. Sea $\mathcal{P}$ en $Ab^{(\tau_X)^{op}}$. Definimos

$$\check{H}^q(X;\mathcal{P}) \equiv colim_{\mathcal{U}} \check{H}^q(\mathcal{U};\mathcal{P})$$

donde el colímite de los grupos $\check{H}^q(\mathcal{U};\mathcal{P})$ se toma sobre cubiertas abiertas buenas de X.

En este caso también se tiene un isomorfismo $\check{H}^0(X;\mathcal{G}) \cong \Gamma(X,\mathcal{G})$, cuando $\mathcal{G}$ es gavilla ya que como vimos antes un 0-cociclo $\{f_\alpha\}$ es una familia de funciones compatibles y como $\mathcal{G}$ es gavilla tienen una única extensión.

Vamos a relacionar la cohomología de gavillas con la cohomología de Čech en dimensiones mayores que cero. Para esto primero se prueba lo siguiente que se puede consultar en [23].

Proposición 2.5.20. *Sea $\mathcal{I}$ una gavilla inyectiva, entonces $\check{H}^q(X,\mathcal{I}) = 0$ para cada $q > 0$.*

La comología de Čech es para pregavillas y en general una sucesión exacta de gavillas no implica que la sucesión de pregavillas subyacentes sea exacta. Entonces no siempre tenemos la sucesión exacta larga en cohomología de Čech, asociada a una sucesión exacta corta de gavillas. Para asegurar que tengamos sucesiones exactas en cohomología hay que pedir otra hipótesis al espacio X. El siguiente resultado se puede consultar en [20]

Proposición 2.5.21. *Sea X un espacio paracompacto y*

$$\underline{0} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to \underline{0}$$

una sucesión exacta en $Gav(X)$. Entonces hay una sucesión exacta larga

$$\cdots \to \check{H}^q(X;\mathcal{F}') \to \check{H}^q(X;\mathcal{F}) \to \check{H}^q(X;\mathcal{F}'') \to \check{H}^{q+1}(X;\mathcal{F}') \to \cdots$$

El siguiente resultado se puede consultar en [18].

Proposición 2.5.22. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías abelianas y $F^q, H^q\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ con $q \geq 0$ una familia de funtores aditivos contravariantes. Supongamos que*

1. *Para cada sucesión exacta corta $0 \to A \to B \to C \to 0$ en $\mathcal{C}$ hay sucesiones exactas largas en $\mathcal{D}$*

$$\cdots \to F^q(A) \to F^q(B) \to F^q(C) \to F^{q+1}(A) \to \cdots$$

$$\cdots \to H^q(A) \to H^q(B) \to H^q(C) \to H^{q+1}(A) \to \cdots$$

2. *F^0 es naturalmente isomorfo a H^0*

3. *$F^q(I) = 0 = H^q(I)$ para cada objeto inyectivo I en $\mathcal{C}$ y para cada $q \geq 1$.*

Entonces F^q es naturalmente isomorfo a H^q para cada $q \geq 0$.

Aplicando la proposición anterior a $\check{H}^q(X;\_), H^q(X;\_)\colon Gav(X) \to Ab$ que son funtores aditivos contravariantes y usando que $\check{H}^0(X;\mathcal{G}) \cong \Gamma(X,\mathcal{G}) \cong H^0(X;\mathcal{G})$ para cualquier gavilla, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.5.23. *Sea X un espacio paracompacto y $\mathcal{G}$ en $Gav(X)$. Entonces hay isomorfismos*

$$\check{H}^q(X;\mathcal{G}) \cong H^q(X;\mathcal{G})$$

para cada $q \geq 0$.

2.6 El Teorema de Huber

Recordemos que un espacio X es débilmente localmente contraible (dlc) si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subset X$ que contiene a x y una homotopía $U \times I \to X$ entre la identidad en U y la constante c_x.

Lema 2.6.1. *Sea X un espacio débilmente localmente contraible. Si Y es es del mismo tipo de homotopía de X entonces Y es débilmente localmente contraible.*

Demostración. Sea $\psi\colon X \to Y$ una equivalencia homotópica y $\phi\colon Y \to X$ su inverso homotópico. Tomemos $y_0 \in Y$ y denotemos $x_0 = \phi(y_0)$. Sea $U \subset X$ un abierto que contiene a x_0 y $H\colon U \times I \to X$ una homotopía tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = x_0$ para cada $x \in U$. Sea $F\colon Y \times I \to Y$ una homotopía tal que $F(y, 0) = y$ y $F(y, 1) = \psi \circ \phi(y)$ para cada $y \in Y$. Consideremos el abierto $V = \phi^{-1}(U)$ que es una vecindad de y_0 y definimos $H'\colon V \times I \to Y$ como

$$H'(y,t) = \begin{cases} F(y,2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ \psi(H(\phi(y), 2t-1)) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

que está bien definida y es continua pues $\phi(y) \in U$, $F(y, 1) = \psi(\phi(y))$ y $\psi(H(\phi(y), 0)) = \psi(\phi(y))$ para cada $y \in V$. Ahora, $H'(y, 0) = F(y, 0) = y$ y $H'(y, 1) = \psi(H(\phi(y), 1)) = \psi(x_0) = \psi(\phi(y_0))$ para cada y en V. Finalmente definimos $\overline{H}\colon V \times I \to Y$ como

$$\overline{H}(y,t) = \begin{cases} H'(y,2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ F(y_0, 2-2t) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

que está bien definida y es continua ya que $H'(y, 1) = \psi(\phi(y_0))$ y $F(y_0, 1) = \psi(\phi(y_0))$. Así, $\overline{H}(y, 0) = H'(y, 0) = y$ y $\overline{H}(y, 1) = F(y_0, 0) = y_0$ para cada $y \in V$. □

Lema 2.6.2. *Sea Y un espacio que tiene el mismo tipo de homotopía de un complejo CW. Entonces Y es débilmente localmente contraible.*

Demostración. Por hipótesis tenemos una equivalencia homotópica $Y \simeq X$ con X un complejo CW. Como X localmente contraible ([13]) en particular es dlc y por el lema 2.6.1 obtenemos que Y es dlc. □

Sea Y un espacio y $P(Y, y)$ el espacio de trayectorias que comienzan en $y \in Y$ (con la topología compacto abierta). Entonces la función $p\colon P(Y, y) \to Y$ dada por $\alpha \mapsto \alpha(1) \in Y$ es una fibración con fibra $p^{-1}(y) = \Omega(Y, y)$ y además $P(Y, y)$ es contraible ([1]).

Lema 2.6.3. *Sea Y un espacio conexo por trayectorias. Entonces la fibración $p\colon P(Y, y_0) \to Y$ admite secciones locales si y sólo si Y es débilmente localmente contraible.*

Demostración. Supongamos que Y es dlc. Sean $y \in Y$ y $H\colon U_y \times I \to Y$ la contracción débil $H(x,0) = y$ y $H(x,1) = x$. Sea $\alpha\colon I \to Y$ una trayectoria tal que $\alpha(0) = y_0$ y $\alpha(1) = y$. Definimos $H_y\colon U \times I \to Y$ como

$$H_y(x,t) = \begin{cases} \alpha(2t) & si \;\; 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(x, 2t-1) & si \;\; \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

que es continua ya que $H(x,0) = y = \alpha(1)$ para cada $x \in U$. Así, H_y es un contracción débil entre Id_{U_y} y c_{y_0}. Definimos $\overline{H}_y\colon U_y \to P(Y, y_0)$ como $\overline{H}_y(x)(t) = H_y(x,t)$ que está bien definida pues $\overline{H_y}(x)(0) = H_y(x,0) = y_0$ y es continua ya que $\overline{H}_y\colon U_y \to C(I,Y)$ es la función adjunta de H_y (que por la ley exponencial es continua). Sea $x \in U_y$, entonces

$$p \circ \overline{H}_y(x) = \overline{H}_y(x)(1) = H_y(x,1) = x.$$

Por lo tanto la familia $\{\overline{H}_y\}_{y\in Y}$ es una familia de de secciones locales para p ya que $\{U_y\}_{y\in Y}$ es una cubierta abierta de Y. Supongamos que p admite secciones locales. Sea $y \in Y$ y $s\colon U \to P(Y, y_0)$ una sección local tal que $y \in U$. Definimos $H\colon U \times I \to Y$ como $H(x,t) = s(x)(t)$ que es continua por el argumento de arriba. Entonces $H(x,0) = s(x)(0) = y_0$ ya que $s(x) \in P(Y, y_0)$ y $H(x,1) = s(x)(1) = p \circ s(x) = x$. Por lo tanto H es una contracción débil. $\square$

Sea L un grupo abeliano. Vamos a considerar los grupos topológicos $F(S^n, L)$ y los espacios de lazos $G_k = \Omega^{n-k}F(S^n, L)$ los cuales tienen una estructura de grupo topológico heredada por $F(S^n, L)$. Para cada $0 \leq k \leq n$, G_k es del mismo tipo de homotopía de un complejo CW ya que

$$\Omega^{n-k}F(S^n, L) \simeq F(S^k, L).$$

Además, son espacios Eilenberg MacLane de tipo $K(L,k)$ pues

$$\pi_q(\Omega^{n-k}F(S^n, L)) \cong \pi_q(F(S^k, L)) \cong \begin{cases} L & si \;\; q = k \\ 0 & si \;\; q \neq k. \end{cases}$$

Consideremos el espacio $P(G_k, *)$ (que también hereda una estructura de grupo topológico). Tenemos la fibración

$$G_{k-1} \overset{i}{\hookrightarrow} P(G_k, *) \xrightarrow{p} G_k \qquad (1)$$

ya que la fibra de p es $\Omega G_k = G_{k-1}$. Consideremos las gavillas $(G_k)_c$ y $P(G_k, *)_c$ sobre un espacio X. Tenemos el siguiente resultado:

Lema 2.6.4. *La sucesión* (1) *induce una sucesión exacta de gavillas*

$$\underline{0} \longrightarrow (G_{k-1})_c \xrightarrow{i_\#} P(G_k, *)_c \xrightarrow{p_\#} (G_k)_c \longrightarrow \underline{0}.$$

Demostración. Por la proposición 2.5.7 basta probar que la sucesión

$$0 \longrightarrow ((G_{k-1})_c)_x \xrightarrow{i_\#} (P(G_k,*)_c)_x \xrightarrow{p_\#} ((G_k)_c)_x \longrightarrow 0$$

es exacta corta para cada $x \in X$. El morfismo $i_\#$ está dado por $i_\#[f,U]_x = [i \circ f, U]_x$. Supongamos que $[i \circ f, U]_x = [f_0, V]_x$ en $(P(G_k,*)_c)_x$ con $f_0 = cte_{c_*}$, entonces existe $W \subset U \cap V$ vecindad de x tal que $(i \circ f)|_W = f_0|_W$. Como i es una inclusión, claremente $f|_W = cte_{c_*}$ y por lo tanto $i_\#$ es inyectivo.

Ahora, $p_\# \circ i_\#[f,U]_x = [p \circ i \circ f, U]_x = [c_*, U]_x$ en $((G_k)_c)_x$ y por lo tanto $im\ i_\# \subset ker\ p_\#$. Supongamos que $p_\#[f,U]_x = [p \circ f, U]_x = [c_*, V]_x$, con $f\colon U \to P(G_k,*)$. Entonces, de manera similar a lo anterior, $(p \circ f)|_W = c_*$, es decir, $f(y)(1) = *$, lo que implica que $f(y) \in \Omega(G_k,*) = G_{k-1}$ para cada $y \in W$ y así $f|_W\colon W \subset U \cap V \to G_{k-1}$. Por lo tanto $im\ i_\# = ker\ p_\#$.

Falta ver que $p_\#$ es suprayectivo, para esto tomemos un germen $[f,U]_x$ en $((G_k)_c)_x$. Por el lema 2.6.2, G_k es dlc y como G_k es conexo por trayectorias si $k \geq 1$, podemos aplicar el lema 2.6.3 y obtenemos secciones locales de $p\colon P(G_k,*) \to G_k$. Ahora, $f(x) \in G_k$, entonces existe $V \subset G_k$ vecindad abierta de $f(x)$, junto con una sección local $s\colon V \to P(G_k,*)$. Sea $W = U \cap f^{-1}(V)$ y definimos $f'\colon W \to P(G_k,*)$ como $s \circ f|_W$. Así, $p \circ f' = p \circ s \circ f|_W = f|_W$. Por lo tanto $p_\#[f',W]_x = [f,U]_x$. □

DEFINICIÓN 2.6.5. Una gavilla $\mathcal{G}$ sobre un espacio X es una gavilla *suave* si cualquier sección $s \in \mathcal{G}(A)$ con $A \subset X$ cerrado, se extiende a una sección global $\tilde{s} \in \mathcal{G}(X)$, es decir, $\tilde{s}|_A = s$, donde $\mathcal{G}(A) \equiv \Gamma(A,S)$ y $\pi\colon S \to X$ es la gavilla étalé asociada a $\mathcal{G}$.

La cohomología con coeficientes en una gavilla suave $\mathcal{G}$ satisface que

$$\check{H}^q(X,\mathcal{G}) = 0$$

para cada $q > 0$ ([4]). En [4] también se prueba que cuando $\mathcal{G}$ es una gavilla sobre un espacio paracompacto X entonces cualquier sección $s \in \mathcal{G}(A)$ con $A \subset X$ cerrado, se puede extender a una sección $s' \in \mathcal{G}(U)$ donde U es una abierto que contiene a A.

Lema 2.6.6. *Sea X un espacio paracompacto y E un grupo topológico contraible. Entonces la gavilla E_c sobre X es suave.*

Demostración. Sea $A \subset X$ un subespacio cerrado y $s\colon A \to S$ una sección en $E_c(A)$. s se puede extender a una función continua $s'\colon U \to E$ con $A \subset U$ vecindad abierta de A. Como X es paracompacto, entonces es normal y podemos encontrar abiertos V, W tales que $A \subset W \subset \overline{W} \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Por el Lema de Urysohn existe una función continua $f\colon X \to I$ tal que $f(\overline{W}) = 0$ y $f(X - V) = 1$ Sea $H\colon E \times I \to E$ una contracción de E tal que $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = *$. Definimos $\tilde{s}\colon X \to E$ como

$$\tilde{s}(x) = \begin{cases} H(s'(x), f(x)) & si\ \ x \in U \\ * & si\ \ x \notin U \end{cases}.$$

Tomemos $x \in U \cap (X - \overline{V})$, entonces $f(x) = 1$ y $H(s'(x), f(x)) = *$. Por lo tanto $\tilde{s}$ está bien definida y es continua. Además, $\tilde{s}(x) = H(s'(x), f(x)) = H(s'(x), 0) = s'(x)$ para cada $x \in \overline{W}$ y en particular para $x \in U$. Por lo tanto $\tilde{s}$ es la extensión deseada. □

Proposición 2.6.7. *Sean X un espacio paracompacto, G un grupo topológico abeliano y $Q \subset G$ un subgrupo abierto y cerrado. Si Q es contraible, entonces para $q > 0$*

$$H^q(X; G_c) \cong H^q(X; (G/Q)_c).$$

Demostración. $(G/Q)_c$ es la gavilla de funciones localmente constantes ya que G/Q es un grupo discreto. Ahora, $[e] \in G/Q$ es abierto, entonces la función $[e] \to e \in G$ es una sección local, lo que implica que $G \to G/Q$ admite secciones locales. De manera similar a la prueba del lema 2.6.4 la sucesión $Q \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G/Q$ induce una sucesión exacta corta de gavillas

$$\underline{0} \to Q_c \to G_c \to (G/Q)_c \to \underline{0}.$$

Por el Lema 2.6.6 Q_c es suave y por lo tanto $H^q(X; Q_c) = 0$ para $q > 0$. Como X es paracompacto tenemos una sucesión exacta larga

$$\cdots \to H^{q-1}(X; (G/Q)_c) \to H^q(X; Q_c) \to H^q(X; G_c) \to H^q(X; (G/Q)_c) \to \cdots$$

y por lo anterior tenemos isomorfismos

$$H^q(X; G_c) \cong H^q(X; (G/Q)_c)$$

para $q > 0$. □

Proposición 2.6.8. *Sea X un espacio paracompacto. Entonces para $n > 0$*

$$H^n(X; (G_0)_c) \cong \mathcal{H}^n(X; L)$$

donde $G_0 = \Omega^n F(S^n, L)$ y L es un grupo abeliano discreto.

Demostración. Consideremos la sucesión exacta

$$\underline{0} \longrightarrow (G_{k-1})_c \xrightarrow{i_\#} P(G_k, *)_c \xrightarrow{p_\#} (G_k)_c \longrightarrow \underline{0}.$$

Por el lema 2.6.4, $(P(G_k, *))_c$ es suave, entonces si X es paracompacto y pasamos a cohomología, la sucesión

$$\cdots \to H^{q-1}(X; (G_k)_c) \to H^q(X; (G_{k-1})_c) \to H^q(X; P(G_k, *)_c) \to$$

$$H^q(X; (G_k)_c) \to H^{q+1}(X; (G_{k-1})_c) \to H^q(X; P(G_k, *)_c) \to \cdots$$

es exacta y por lo tanto $H^q(X; (G_k)_c) \cong H^{q+1}(X; (G_{k-1})_c)$ para $q > 0$ y

$$H^0(X; (G_k)_c)/im\ H^0(X; (P(G_k, *))_c) \cong H^1(X; (G_{k-1})_c).$$

Tomando $k = n$ e iterando el primer isomorfismo obtenemos

$$H^0(X;(G_n)_c)/im\ H^0(X;P(G_n,*)_c) \cong H^1(X;(G_{n-1})_c) \cong H^n(X;(G_0)_c).$$

El grupo $H^0(X;(G_n)_c) \cong \Gamma(X,(G_n)_c)$ donde $G_n = F(S^n, L)$, es decir, son las funciones continuas $X \to F(S^n, L)$. El subgrupo $im\ H^0(X;P(G_n,*)_c)$ denota a las funciones f que se pueden factorizar mediante una función continua

$$\begin{tikzcd}
 & P(F(S^n,L),*) \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[r, "f"] & F(S^n,L)
\end{tikzcd}$$

y dado que $P(F(S^n,L),*)$ es contraible, $\bar{f} \simeq cte_{c_*}$ y obtenemos que $f = p \circ \bar{f} \simeq c_*$. En otras palabras, $[f] = [g]$ en

$$H^0(X;(G_n)_c)/im\ H^0(X;P(G_n,*)_c)$$

si y sólo si $f \cdot g^{-1} = p \circ h \simeq c_*$ lo que implica $f \simeq c_* \cdot g = g$. Por otro lado, si tomamos una función $f\colon X \to F(S^n, L)$ homotópica a una constante y consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "cte_{c_*}"] \arrow[d, hook] & P(F(S^n,L),*) \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\overline{H}"] & F(S^n,L)
\end{tikzcd}$$

donde $H(x,0) = c_*$ y $H(x,1) = f(x)$, usando que p es fibración obtenemos una homotopía $\overline{H}$ tal que $p \circ \overline{H}(x,1) = f(x)$. De esto se sigue que si $[f] = [g]$ en $[X, F(S^n,L)]$, entontonces existe h tal que $p \circ h = f \cdot g^{-1}$. Por lo tanto

$$H^0(X;(G_n)_c)/im\ H^0(X;(P(G_n,*))_c) \cong [X, F(S^n,L)] \equiv \mathcal{H}^n(X,L)$$

para $n > 0$. $\square$

Proposición 2.6.9. *Sea L un grupo abeliano. Entonces*

$$H^0(X;L_c) \cong \mathcal{H}^0(X,L).$$

Demostración. Tenemos que $H^0(X;L_c) \cong \Gamma(X,L_c) = C(X,L)$ y $H^0(X,L) = [X, F(S^0,L)]$ donde $F(S^0,L) = L$. Consideremos la función $C(X,L) \to [X,L]$ dada por $\varphi \mapsto [\varphi]$, que claramente es suprayectiva. Veamos que es inyectiva. Sean $\varphi, \psi\colon X \to L$ tales que $[\varphi] = [\psi]$. Entonces existe $H\colon X \times I \to L$ tal que $H(x,0) = \varphi(x)$ y $H(x,1) = \psi(x)$. Sea $x \in X$ fijo, entonces tenemos $\sigma_x\colon I \to L$ dada por $\sigma_x(t) = H(x,t)$, y como L es discreto, σ_x es constante. Por lo tanto $\varphi(x) = \sigma_x(0) = \sigma_x(1) = \psi(x)$ para cada $x \in X$. Como $[\varphi \cdot \psi] = [\varphi] \cdot [\psi]$ la función preserva el producto y por lo tanto es isomorfismo. $\square$

Teorema 2.6.10. *Sea X un espacio paracompacto y L un grupo abeliano. Entonces*

$$H^q(X, L_c) \cong \mathcal{H}^q(X, L).$$

para cada $q \geq 0$.

Demostración. Sea $G_0 = \Omega^n F(S^n, L)$. Tenemos que $G_0 \simeq L$ ya que

$$\Omega^n F(S^n, L) \simeq F(S^0, L) = L.$$

Sea $\phi\colon G_0 \to L$ una equivalencia homotópica, entonces el morfismo inducido $\phi_{\#}\colon \pi_0(G_0) \to \pi_0(L) \cong L$ es biyectivo, es decir, $\psi_{\#}$ es una biyección entre las componentes por trayectorias, lo que implica que ϕ es suprayectiva pues L es discreto. Así, $\phi^{-1}(l) \subset G_0$ es abierto para cada $l \in L$ que son todas las componentes por trayectorias de G_0. Consideremos la componente por trayectorias del cero en G_0 que denotamos C_0. Como C_0 es un subgrupo abierto y cerrado obtenemos una sucesión exacta larga en homotopía

$$\cdots \to \pi_q(C_0) \to \pi_q(G_0) \to \pi_q(G_0/C_0) \to \pi_{q-1}(C_0) \to \cdots.$$

Ahora, G_0/C_0 es un espacio discreto y además, G_0 es un espacio Eilenberg MacLane de tipo $K(L, 0)$ lo que implica $\pi_q(G_0) \cong 0 \cong \pi_q(G_0/C_0)$ para $q > 1$. Así, $\pi_q(C_0) = 0$ para cada q (pues C_0 es conexo por trayectorias). Por el teorema de Whitehead C_0 es contraible ya que es del mismo tipo de homotopía que un CW. Así, podemos aplicar la proposición 2.6.7 tomando $Q = C_0$ y obtenemos para $q > 0$ el isomorfismo

$$H^q(X; (G_0)_c) \cong H^q(X; (G_0/C_0)_c).$$

Finalmente tenemos los isomorfismos $L \cong \pi_0(G_0) \cong \pi_0(G_0/C_0) \cong G_0/C_0$ y por lo tanto $(G_0/C_0)_c \cong L_c$. Aplicando la proposición 2.6.8,

$$H^q(X; L_c) \cong H^q(X; (G_0)_c) \cong \mathcal{H}^q(X; L)$$

para $q > 0$. El caso $q = 0$ es la proposición 2.6.9. □

Nota 2.6.11. En el artículo de Huber [10], no se trabaja en k-*Top*, de manera que en general el producto en $F(S^n, L)$ no es continuo si L no es numerable. Pero si X es un k-espacio entonces el producto de funciones $f \cdot g\colon X \to F(S^n, L)$ es una función continua pues el producto en $F(S^n, L)$ restringido a espacios compactos sí es continuo y obtenemos que $(G_0)_c$ es pregavilla. Para los grupos $G_k = \Omega^{n-k} F(S^n, L)$ el espacio $C(U, G_k)$ se identifica de manera canónica mediante la ley exponencial con el subespacio de

$$C(X \times S^{n-k}, F(S^n, L))$$

que consiste de las funciones que satisfacen $f(U \times \{pt\}) = \{pt\}$. Como S^{n-k} es compacto, $X \times S^{n-k}$ es un k-espacio, de lo cual se sigue que el producto es continuo.

Corolario 2.6.12. *Sea X un espacio paracompacto y L un grupo abeliano. Entonces hay un isomorfismo*

$$\check{H}^q(X; L_c) \cong \mathcal{H}^q(X; L).$$

Demostración. Por la proposición 2.5.23 y el teorema 2.6.10 tenemos isomorfismos $\check{H}^q(X; L_c) \cong H^q(X; L_c) \cong \mathcal{H}^q(X; L)$. □

Usando que la cohomología de Čech de espacios paracompactos calculada en una pregavilla $\mathcal{G}$ es isomorfa a la cohomología de Čech calculada en la gavilla asociada $\widetilde{\mathcal{G}}$ (se puede consultar en [9]) obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.6.13. *Sea X un espacio paracompacto y L un grupo abeliano. Entonces hay un isomorfismo*

$$\check{H}^q(X; \underline{L}) \cong \mathcal{H}^q(X; L).$$

Demostración. Tenemos que la gavilla asociada a $\underline{L}$ es L_c. Por el corolario 2.6.12, $\check{H}^q(X; \underline{L}) \cong \check{H}^q(X; L_c) \cong \mathcal{H}^q(X; L)$. □

Bibliografía

[1] M. Aguilar, C. Prieto, S. Gitler, "Algebraic topology from a homotopical viewpoint", Springer - Verlag, New York, 2002.

[2] M. Aguilar, C. Prieto. "Homotopical homology", por aparecer.

[3] R. Bott. "Lecture notes on characteristic classes and foliations" (Notes by Lawrence Conlon) Springer - Verlag, New York, 1972.

[4] G. E. Bredon. "Sheaf Theory", second edition, Springer - Verlag, New York, 1997.

[5] G. Chênevert, P. Kassaei. "Sheaf Cohomology", Lecture notes, 2003.

[6] D. Dugger, D. C. Isaksen. "Topological hypercovers and $\mathbb{A}^1$-realizations", Mathematische Zeitschrift, 246, 667-689 (2004).

[7] J. L. Dupont. "Curvature and characteristic classes", Springer - Verlag, New York, 1978.

[8] P. P. Gainza. "Cohomology of Lie groups made discrete", Publicacions Matemàtics, Vol 34 (1990), 151-174.

[9] F. Hirzebruch. "Topological methods in algebraic geometry", Springer - Verlag, Berlin Heidelberg, 1978.

[10] P. J. Huber. "Homotopical cohomology and Čech cohomology", Math. Annals 144 (1961) 73-76.

[11] D. Husemöller. "Fiber Bundles", Springer Verlag New York, 1994.

[12] Q. Liu. "Algebraic geometry and arithmetic curves", Oxford university press Inc, New York, 2002.

[13] A. T. Lundell, S. Weingram. "The topology of CW complexes", Springer, 1968.

[14] J. P. May. "A concise course in algebraic topology", The University of Chicago Press, Chicago, 1999.

[15] J. P. May. "Classifying spaces and fibrations", American Mathematical Society 1975.

[16] J. P. May, J. Sigurdsson “Parametrized homotopy theory”, American Mathematical Society, Mathematical surveys and monographs, volume 132, 2000.

[17] J. P. May. “The geometry of iterated loop spaces”, Springer - Verlag, Berlin Heidelberg - New York 1972.

[18] J. J. Rotman. “ An introduction to homological algebra”, second edition, Springer Science + Buisness Media, New York, 2009.

[19] G. Segal. “Classifying spaces and spectral sequences”, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 34 (1968), 105-112.

[20] J. P. Serre. “Faisceaux algèbriques cohèrents”. Annals Math. 61 (1955), 197-278.

[21] N. E. Steenrod. “A convenient category of topological spaces” , Michigan Math. J. 14 (1967), 133-152.

[22] N. E. Steenrod. “Milgram’s classifying space of a topological group”, Topology 7 (1968), 349-368.

[23] B. R. Tennison. “ Sheaf Theory”, Cambridge university press, New York, 1975.