PRIMOS ENTRE INTERVALOS DEFINIDOS, EL CASO BERTRAND-CHEBYSHEV.

Perla Araceli Maldonado Cortez
Asesor: Julio César Guevara Bravo

15 de octubre de 2012

Índice general

Introducción

Cuando nos adentramos en el estudio de los números primos no es extraño que en ocasiones la incertidumbre se haga presente en nuestras reflexiones. Sabemos que las cuestiones donde los primos son el elemento central no son sencillas, en particular, su distribución es uno de los tópicos de interés permanente, y en parte se debe a la irregularidad con la que éstos se presentan.

Los primos muestran variaciones que podrían contradecir nuestra intuición, y un reflejo de ello es la existencia de grandes intervalos de números compuestos que además son consecutivos. Por ejemplo, dado un número natural n, los enteros

$$(n+1)!+2,\ (n+1)!+3,\ (n+1)!+4,\ \cdots,(n+1)!+(n+1)$$

son múltiplos de

$$2, 3, 4, \cdots, n+1$$

respectivamente, es decir, todos son números compuestos y en consecuencia tenemos un espacio de tamaño n donde no existe ningún primo. Lo interesante de este intervalo es que puede ser tan grande como queramos que n lo sea, y más aún, la cantidad de intervalos puede ser nuevamente tan grande como n pueda ser elegida entre los enteros positivos. Esto nos pone a la vista que se tiene una infinidad de intervalos, donde cada uno puede contener una enorme cantidad de enteros compuestos consecutivos.

Pero un contraste respecto a la presencia de estos grandes espacios donde no se hallan primos, es que sabemos que existen intervalos bien definidos donde sí hay primos. Y en esta dirección tenemos la conjetura de Legendre que nos enuncia que por lo menos existe un primo entre n^2 y $(n+1)^2$, para n entero positivo; por su parte Bertrand aseguró que entre n y $2n-2$ siempre existe por lo menos un primo; y una generalización de este resultado la propuso Sierpinski, y dice que para todo natural $n > 1$ y $k \leq n$, existe al menos un primo en el intervalo kn y $(k+1)n$. Con estos resultados tenemos que la existencia de los primos no es tan incierta, como nos lo indicaba la presencia de los grandes huecos que sólo contienen números compuestos, es más, con la propuesta de Bertrand cada uno de los grandes huecos queda contenido en uno de sus intervalos que sí contienen un primo.

De los intervalos que se enunciaron en el párrafo anterior sabemos que ya fue demostrado el que conocemos como postulado de Bertrand, y el caso $k = 2$ de la generalización de Sierpinski.

Este trabajo de tesis tiene como tema central el estudio de las demostraciones principales del postulado de Bertrand. Y se decidió así porque percibimos que en la mayoría de los trabajos donde se menciona el postulado y su demostración se refieren a Bertrand -quien lo propuso-, mencionan que la primera demostración fue la de Chebyshev, y algunos autores a veces mencionan a Ramanujan y Erdös como los otros personajes que aportaron algo a la demostración del postulado. Pero en la mayoría de los casos no se encuentra lo que escribieron los personajes antes mencionados, y esto es lo que motivó que nos adentráramos a estudiar los artículos originales de los cuatro matemáticos citados, y con esto poder dar una interpretación de cómo se dio un hilo conductor entre los trabajos.

La tesis se divide en cuatro capítulos y cada uno tendrá como eje central lo que aportaron al tema Bertrand, Chebyshev, Ramanujan y Erdös. Los capítulos contienen lo siguiente:

• Capítulo I. Es un análisis del artículo de Bertrand, *Mémoire sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu´ elle renferme* (1845), para conocer el contexto de su enunciado que dice **entre n y 2n-2 siempre existe por lo menos un primo**, y así tratar de entender por qué no lo demostró.

• Capítulo II. Es el más extenso de la tesis y en el se estudia el artículo de Chebyshev *Mémoire sur les nombres premiers* (1850), que es amplio ya que contiene la primera demostración del postulado de Bertrand. Cabe señalar que en este trabajo Chebyshev tiene como objetivo principal analizar propiedades correspondientes a la distribución de los primos, y el postulado de Bertrand quedó como una aplicación de éstas.

• Capítulo III. Se analiza el artículo de Ramanujan *A proof of Bertrand's Postulate* (1919), y vemos cómo tomó algunos de los elementos primordiales de la demostración de Chebyshev, pero él trazó un camino diferente para la demostración del postulado, y en el artículo nos deja ver su enorme capacidad para replantear el problema y llevarlo por una ruta más corta.

• Capítulo IV. Aquí se aborda el artículo de Paul Erdös *Beweis eines Satzes von Tschebyschef* (1931) y de él extraemos su razonamiento para acotar coeficientes binomiales, mismos que lo llevan a demostrar el postulado. Aquí es interesante ver cómo Erdös se fue por un camino diferente al de Ramanujan y Chebyshev, pero con esta forma de proceder dejó las bases para que otros abordarán la generalización de Sierpinski, también por la vía de los coeficientes binomiales.

Capítulo 1

Surgimiento del Postulado de Bertrand

Cada vez que abordamos uno de los problemas matemáticos de importancia es común que lo veamos fuera de un entorno multidisciplinario, es decir, con frecuencia empezamos el estudio de un tema matemático de manera directa, y no es que sea inapropiado, porque finalmente lo que queremos en ese momento es la solución a esa inquietud. Empero, si nos adentramos en el entorno matemático que influyó en el autor del problema a tratar, entonces, cabe la posibilidad que podamos comprender algunas de las vías que nos pueden conducir a la solución o a nuevas posibilidades vinculadas al problema que nos atañe.

En esta tesitura se abordará aquí lo que actualmente conocemos como el "postulado de Bertrand"[1], es decir, que entre n y $2n$, para n entero positivo, siempre existe por lo menos un número primo.

En los estudios presentes sobre teoría de los números no puede faltar el postulado de Bertrand, y lo común es que lo sitúen dentro del tema de números primos, y cabe mencionar que existen libros que lo han expuesto muy bien, desde la visión de la matemática actual. Pero cuando se acude a la fuente original, esto es, lo que escribió el mismo Bertrand en una memoria de la École Polytechnique en 1845, se encuentra que la finalidad de proponer esta

[1] En matemáticas es común escuchar o encontrar los términos "postulado y teorema". Un postulado es una proposición no demostrada, pero que es aceptado; por otro lado, un teorema es una afirmación que puede ser demostrada dentro de un sistema formal.

propiedad de un intervalo $[n, 2n]$, es totalmente ajena a la de los tópicos vinculados sólo a los números primos. A continuación se expone el contexto matemático en el que Bertrand enunció lo que conocemos como su 'postulado'.

En 1845 Bertrand publicó su **Mémoire sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu´ elle renferme**[2], donde aborda el tema de las permutaciones de n letras. En este punto exhibe que está retomando los resultados sobre permutaciones relacionados a las soluciones de ecuaciones, y en este sentido él tiene presente que fue Lagrange con su propuesta de que en cada ecuación algebraica de grado n

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0,$$

las raíces $x_1, x_2, \cdots, x_n$, se puede asociar a una función racional de ellas, denotada por $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. De esto se consideran las permutaciones de $x_1, x_2, \cdots, x_n$ que son $n!$, (y esta función puede llegar a tener hasta $n!$ valores diferentes, y estos pueden ser denotados como $f^1, f^2, \cdots, f^{n!}$).
Por otro lado, estos valores son las raíces de la resolvente de Lagrange

$$\left(t - f^1\right)\left(t - f^2\right)\cdots\left(t - f^{n!}\right) = 0.$$

De aquí se tiene que las raíces de $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$ son funciones racionales de las raíces de la resolvente. Así, Lagrange estableció que el número de valores siempre tiene que ser un divisor de $n!$, en términos modernos nos dice que el orden de un subgrupo de un grupo finito es siempre un divisor del orden de n.

Lo que tenemos es que Bertrand se encuentra inicialmente en un contexto de las soluciones de una ecuación algebraica, y aunque no navegará en esta dirección, sí se ubicará en el mismo tema de las permutaciones.

Otra vertiente en la que Bertrand también se situó es la que apareció en 1815 cuando Cauchy publicó su **Mémoire sur le nombre de valeurs qu´une fonction peut acquérir lorsqu´on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu´elle renferme**. Es importante señalar que éste es el primer estudio que se conoce sobre el grupo de las permutaciones, y que

[2] Bertrand [1845].

no está vinculado a las soluciones de ecuaciones, es decir, en este artículo el conjunto de las permutaciones ya es directamente el objeto de estudio. En su Mémoire Cauchy estudió el número de valores que toma una función racional $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sobre las permutaciones de $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, y de manera sobresaliente se adentró en la estructuración sistemática de lo que hoy conocemos como la teoría de grupos de permutaciones.

Entre 1844 y 1846 Cauchy nuevamente publicó trabajos sobre el grupo de permutaciones y demostró, entre otras cosas, que si el orden de un grupo de permutaciones es divisible por un primo p, entonces el grupo contiene un subgrupo de orden p.
Es en el contexto de lo antes expuesto que Bertrand escribió su artículo de 1845, pero si se ha mencionado que Bertrand estaba en la vía de las permutaciones, entonces cabe preguntarnos ¿en dónde entra el postulado?.
En la quinta sección de su Mémoire se encuentra el resultado que dice:

Si una función de n letras tiene más de dos valores, entonces ella tiene al menos n.

Esto es, si $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ adquiere más de dos valores respecto a su correspondencia con $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, entonces tendrá al menos $n - 2$ valores adicionales a los otros dos.
Para demostrar este teorema, Bertrand consideró una función

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

de n letras que tuviera menos de n valores, y de las n letras propuso extraer 2 grupos, uno de p letras y el otro de 2. Y aquí es donde establece la característica de que siempre podrá elegir a p que sea primo y que además se encuentre entre $\frac{n}{2}$ y $n-2$, enseguida mencionó que esto se cumple para toda $n > 6$ y que ya lo probó para todos los números inferiores a seis millones. Así es como aparece por primera vez lo que ahora conocemos como el 'postulado de Bertrand' y es muy importante notar que no se detiene más en ese resultado, él tenía el otro objetivo, que era demostrar el teorema antes citado, y así lo hizo. Inmediatamente después mencionó que sobre los dos grupos, el de dos y el de p letras, se operará una permutación circular, y dice que este proceso lo puede repetir p veces para el de p letras y dos veces en el de dos, con lo que puede obtener $2p$ arreglos diferentes de n letras para $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, y aquí es fundamental que como consideró que p está entre

$\frac{n}{2}$ y $n-2$, entonces $2p$ es mayor que n, y como $2p$ son los arreglos diferentes de las n letras, entonces se tienen más de n arreglos.
Lo que se puede ver es que si no toma a p con estas características, entonces se corre el riesgo de que los $2p$ arreglos extraídos de los dos grupos de dos y de p letras, respectivamente, no sean mayores que n.

Todos los detalles de la demostración de Bertrand se encuentran en su artículo de 1845, lo que aquí se quería mostrar es que el contexto en el que surgió el postulado es totalmente ajeno a un entorno de números primos, es más, podríamos decir que ni siquiera está inmerso en un tópico de teoría de números. Lo que aquí pasó es que Bertrand requería estos conjuntos de p letras para seguir adelante en su demostración, y resultó que no estaba errado en su propuesta, posteriormente otros demostrarían que existe por lo menos un primo entre n y $2n$. Bertrand no volvería a retomar este tema de los primos desde una perspectiva de querer demostrar que esto era cierto para toda n.
El artículo de Bertrand es rico en la información que proporciona para entender cómo se gestó la teoría de grupos de permutaciones, Bertrand conjuntó aportaciones de Abel, Cauchy, Rufinni, Galois y Lagrange, pero en este trabajo de tesis ya no se tratará más este perfil, porque aquí nos enfilaremos hacia el estudio del postulado de Bertrand.

Capítulo 2

Chebyshev demuestra por primera vez el postulado de Bertrand.

Como ya se mencionó, Bertrand enunció que "para todo entero $n > 3$ siempre existe un número primo entre n y $2n-2$",[1] y sabemos que no demostró nada al respecto. El primero en demostrar el postulado en cuestión fue el matemático ruso Pafnuty Chebyshev, en 1850 escribió la *"Mémoire sur les nombres premiers"* donde su propósito inicial era encontrar un criterio para definir la convergencia o divergencia de las series con índices primos; y por otro lado exhibe la demostración del postulado de Bertrand como una aplicación de uno de los pasos para construir las cotas superior e inferior del logaritmo del producto de números primos.

Pero antes de pasar al análisis de la demostración contenida en la *Mémoire* de 1850 es importante poner en contexto este trabajo, y para ello se tiene que recurrir al primer artículo que escribió Chebyshev sobre números primos, éste es la *"Mémoire sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers"*, que escribió en 1848. En esta *Mémoire* se encuentra una parte de los estudios de Chebyshev para tratar de conocer la cantidad de números primos menores a un determinado número x, y es lo que conocemos como $\pi(x)$.

[1] Actualmente lo podemos encontrar enunciado como "para todo número $n > 1$ siempre existe un número primo entre n y $2n$" que es más general, ya que involucra un intervalo más amplio y no nos limita sólo a números enteros.

En este artículo Chebyshev estudiará el límite de $\left(\frac{\pi(x)}{x} - logx\right)$ cuando x tiende a infinito, pero lo que más nos interesara es que también da un paso importante para tratar de acotar $\pi(x)$, y para esto propuso que

$$\int_2^x \frac{dx}{logx} - \frac{\alpha x}{log_n x} < \pi(x) < \int_2^x \frac{dx}{logx} + \frac{\alpha x}{log_n x}$$

para una infinidad de valores de x.

Para la segunda memoria, la de 1850, *"Mémoire sur les nombres premiers"* Chebyshev se adentrará nuevamente en la acotación de primos en intervalos definidos, y con esto se entenderá más a $\pi(x)$, esto es, la construcción de las cotas daría lugar a lo que hoy conocemos como *Teorema de Chebyshev*, que dice lo siguiente:

Existen números c_1 y c_2 tales que

$$c_1 \frac{x}{logx} < \pi(x) < c_2 \frac{x}{logx},$$

para todo $x \geq 2$.

Y aquí nos adelantamos a decir que las demostraciones modernas del teorema anterior suponen que el postulado de Bertrand es cierto, mientras que en la demostración directa de Chebyshev el postulado será una aplicación del proceso de construcción de las cotas para los primos contenidos en ciertos intervalos, y es aquí donde se considera que se presenta la primera demostración del postulado. Ahora pasamos al análisis de la memoria de Chebyshev de 1850.

2.1. Mémoire sur les nombres premiers, 1850

En la parte anteriot de este capítulo se indicó que el propósito inicial del artículo de Chebyshev era encontrar un criterio para definir la convergencia o divergencia de las series con índices primos; y después en el segundo punto -el más importante para nosotros- exhibe la demostración del postulado de Bertrand como una aplicación del proceso para construir las cotas del logaritmo del producto de números primos.

En el primer punto, el de las series, se tiene que comentar que Euler ya había probado que algunas de esas series divergían, por ejemplo,

$$\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{5^a}+\frac{1}{7^a}+\frac{1}{11^a}+\frac{1}{13^a}+\frac{1}{17^a}+\cdots$$

diverge para los mismos valores para los cuales la serie

$$\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{4^a}+\frac{1}{5^a}+\frac{1}{6^a}+\frac{1}{7^a}+\frac{1}{8^a}+\cdots$$

diverge, es decir, para las $a<1$. En ese caso coincide en que ambas series convergen, pero no siempre pasa que las series de la forma

$$u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+u_7+u_8+\cdots$$

convergen si

$$u_2+u_3+u_5+u_7+u_{11}+u_{13}+u_{17}+\cdots$$

converge.

Para conocer la convergencia o divergencia Chebyshev quiso formular un criterio que lo indicara y creía que podía hacerlo por aproximaciones. Y es en este contexto que él se adentro en el análisis de las series.

Ahora pasamos a la construcción de las cotas del logaritmo del producto de primos, que es lo que dará lugar a la demostración del postulado de Bertrand.

§ 1. Chebyshev inició con la definición de la función $\theta(x)$ como el logaritmo natural del producto de todos los números primos menores o iguales que x, es decir,

$$\theta(x)=ln\,(\prod_{2\leq p_i\leq x}p_i).$$

Podemos observar que si x es positiva y menor que 2, entonces $\theta(x)=0$, y esto sucede porque $ln\,(1)=0$, entonces, inicialmente sólo trabajaremos con $x\geq 2$ para que la función no se anule. Ya definida la función $\theta(x)$, ahora Chebyshev la usará para expresar el logaritmo del factorial de x, así

$$ln\,(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\lfloor x\rfloor)=\begin{cases}\theta(x)+\theta(\sqrt{x})+\theta(\sqrt[3]{x})+\theta(\sqrt[4]{x})+\cdots\\ +\theta(\frac{x}{2})+\theta(\sqrt{\frac{x}{2}})+\theta(\sqrt[3]{\frac{x}{2}})+\theta(\sqrt[4]{\frac{x}{2}})+\cdots\\ +\theta(\frac{x}{3})+\theta(\sqrt{\frac{x}{3}})+\theta(\sqrt[3]{\frac{x}{3}})+\theta(\sqrt[4]{\frac{x}{3}})+\cdots\\ +\theta(\frac{x}{4})+\theta(\sqrt{\frac{x}{4}})+\theta(\sqrt[3]{\frac{x}{4}})+\theta(\sqrt[4]{\frac{x}{4}})+\cdots\end{cases}$$

$\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero menor o igual que x, y se puede apreciar en la igualdad anterior que gran parte de los términos

$$\sqrt[i]{\frac{x}{j}},$$

con i, j naturales, son cero, y esto se debe a que sólo se cuentan los términos que superan o son iguales que el primer número primo, que es el 2.
Antes de pasar al análisis de esta igualdad, es conveniente mostrar un ejemplo para que se vea cómo se desarrolla el lado izquierdo de la igualdad. Sea x =13.5, entonces $\lfloor x \rfloor = 13$ y $13! = 6,227,020,800$ además tenemos que contabilizar cuantos términos son mayores o iguales que cada $p \leq 13$. De lo encontrado se forma la siguiente tabla

p $\leq$ 13	**términos $\geq$ p**	**cantidad de términos $\geq$ p**
2	$13 \cdot 5\ \frac{13\cdot5}{2},\ \frac{13,5}{3},\ \frac{13,5}{4},\ \frac{13\cdot5}{5},\ \frac{13\cdot5}{6},\ \sqrt{13,5},\ \sqrt{\frac{13\cdot5}{2}},\ \sqrt{\frac{13\cdot5}{3}}$ y $\sqrt[3]{13\cdot5}$	10
3	$13 \cdot 5,\ \frac{13\cdot5}{2},\ \frac{13\cdot5}{3},\ \frac{13\cdot5}{4},\ \sqrt{135}$	5
5	$13 \cdot 5,\ \frac{13\cdot5}{2}$	2
7	$13 \cdot 5$	1
11	13.5	1
13	13.5	1

de lo que se ve que

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 = 13! = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1,$$

y al aplicarle logaritmo natural a 13! tenemos $10\,ln\,(2), 3\,ln\,(5), 2\,ln\,(7), ln\,(11)$ y $ln\,(13)$

por otro lado

x =13.5 por lo que $\theta(13.5)= ln\,(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13)$,

$\frac{13,5}{2}$= 6.75 por lo que $\theta(\frac{13\cdot5}{2}) = ln\,(2 \cdot 3 \cdot 5)$

$\frac{13\cdot5}{3}$ =4.5, entonces $\theta(\frac{13\cdot5}{3}) = ln\,(2 \cdot 3)$

$\frac{13\cdot5}{4}$ =3.37 y $\theta(\frac{13\cdot5}{4}) = ln\,(2 \cdot 3)$

$\frac{13\cdot5}{5}$ =2.7 y $\theta(\frac{13\cdot5}{5}) = ln\,(2)$

$\frac{13\cdot 5}{6}$ =2.25 y $\theta(\frac{13\cdot 5}{6}) = ln\,(2)$

$\sqrt{13\cdot 5}$ =3.67 y $\theta(\sqrt{13\cdot 5}) = ln\,(2\cdot 3)$

$\sqrt{\frac{13\cdot 5}{2}}$ =2.5 y $\theta(\sqrt{\frac{13\cdot 5}{2}}) = ln\,(2)$

$\sqrt{\frac{13\cdot 5}{3}}$ =2.12 y $\theta(\sqrt{\frac{13\cdot 5}{3}}) = ln\,(2)$

$\sqrt[3]{13\cdot 5}$ =2.38 y $\theta(\sqrt[3]{13\cdot 5}) = ln\,(2)$.

Y así obtenemos $10\,ln\,(2)$, $3\,ln\,(5)$, $2\,ln\,(7)$, $ln\,(11)$ y $ln\,(13)$, y claramente las descomposiciones son las mismas.

El ejemplo ayuda a entender que cada sumando del lado derecho de la igualdad, que depende de $\theta(x)$, es parte de la factorización en potencias de primos del 13!. Pero surge la pregunta ¿cómo fue que Chebyshev visualizó esta igualdad?. Para darnos una idea, escribamos a ésta junto con las representaciones de las funciones $\theta(x)$, para obtener que

$$ln(1\cdot 2\cdot 3\cdots \lfloor x\rfloor) =$$
$$ln\left(\prod_{2<p_i\leq x} p_i\right) + ln\left(\prod_{2<p_i\leq \sqrt{x}} p_i\right) + ln\left(\prod_{2<p_i\leq \sqrt[3]{x}} p_i\right) + \cdots$$
$$ln\left(\prod_{2<p_i\leq \frac{x}{2}} p_i\right) + ln\left(\prod_{2<p_i\leq \sqrt{\frac{x}{2}}} p_i\right) + ln\left(\prod_{2<p_i\leq \sqrt[3]{\frac{x}{2}}} p_i\right) + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \cdots$$

Y si consideramos el caso de $x = 30$, entonces se tiene
$ln(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots 30) =$

$$
\begin{cases}
ln(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29) + ln(2\cdot 3\cdot 5) + ln(2\cdot 3) + ln(2)\\
ln(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13) \qquad\qquad + ln(2\cdot 3) \qquad + ln(2)\\
ln(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7) \qquad\qquad\qquad\qquad + ln(2\cdot 3) \qquad + ln(2)\\
ln(2\cdot 3\cdot 5) \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + ln(2)\\
ln(2\cdot 3\cdot 5) \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + ln(2)\\
ln(2\cdot 3)\\
ln(2\cdot 3)\\
ln(2\cdot 3)\\
ln(2\cdot 3)\\
ln(2)\\
ln(2)\\
ln(2)\\
ln(2)\\
ln(2)
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

De esto se obtiene

$ln(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots 30) = ln[(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29)\ (2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13)$ $(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7)\ (2\cdot 3\cdot 5)(2\cdot 3\cdot 5)(2\cdot 3)(2\cdot 3)(2\cdot 3)(2\cdot 3)(2)(2)(2)\ (2)(2)(2\cdot 3\cdot 5)$ $(2\cdot 3)(2\cdot 3)(2)(2)\ (2)(2\cdot 3)(2)(2)(2)]$,

y aquí es claro que si se aplica la función inversa al logaritmo se obtiene la descomposición en primos.

Entonces

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots 30 = (2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29)(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13)$, $(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7)(2\cdot 3\cdot 5)(2\cdot 3\cdot 5)(2\cdot 3)(2\cdot 3)(2\cdot 3)(2\cdot 3)(2)(2)(2)(2)(2)(2\cdot 3\cdot 5)$ $(2\cdot 3)(2\cdot 3)(2)(2)(2)(2\cdot 3)(2)(2)(2)$,

o lo que es lo mismo[2]

---

[2]Aquí se usará un resultado que para la época de Chebyshev ya era conocido, y dice: Si p es un número primo, entonces $\sum_{j=1}^{\infty}\left\lfloor \frac{n}{p^j}\right\rfloor$ es el exponente de p en la factorización de primos de $n!$.
Vease la demostración de este resultado en el apéndice C al final de la tesis.

$$1{\cdot}2{\cdot}3\cdots 30=\begin{cases} 2^{\lfloor\frac{30}{2}\rfloor}\cdot 3^{\lfloor\frac{30}{3}\rfloor}\cdot 5^{\lfloor\frac{30}{5}\rfloor}\cdot 7^{\lfloor\frac{30}{7}\rfloor}\cdot 11^{\lfloor\frac{30}{11}\rfloor}\cdot 13^{\lfloor\frac{30}{13}\rfloor}\cdot 17^{\lfloor\frac{30}{17}\rfloor}\cdots 29^{\lfloor\frac{30}{29}\rfloor}\times \\ 2^{\lfloor\frac{30}{2^2}\rfloor}\cdot 3^{\lfloor\frac{30}{3^2}\rfloor}\cdot 5^{\lfloor\frac{30}{5^2}\rfloor}\times \\ 2^{\lfloor\frac{30}{2^3}\rfloor}\cdot 3^{\lfloor\frac{30}{3^3}\rfloor}\times \\ 2^{\lfloor\frac{30}{2^4}\rfloor} \end{cases}.$$

La última igualdad relaciona directamente los renglones con las columnas de (2.1), esto es, todos los primos involucrados en el rengón

$$2^{\lfloor\frac{30}{2}\rfloor}\cdot 3^{\lfloor\frac{30}{3}\rfloor}\cdot 5^{\lfloor\frac{30}{5}\rfloor}\cdot 7^{\lfloor\frac{30}{7}\rfloor}\cdot 11^{\lfloor\frac{30}{11}\rfloor}\cdot 13^{\lfloor\frac{30}{13}\rfloor}\cdot 17^{\lfloor\frac{30}{17}\rfloor}\cdots 29^{\lfloor\frac{30}{29}\rfloor}$$

son los mismos que todos los primos existentes en todos los productos de la primer columna de (2.1),[3] y lo mismo para los renglones restantes y columnas de (2.1) respectivamente.
Aunque Chebyshev no dice cómo llegó a la expresión para $ln(1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4\cdots\lfloor x\rfloor)$, es posible que lo haya hecho a través de la última igualdad que acabamos de exponer.

Por otro lado, los comentarios de Chebyshev en su *Mémoire* se ubican en un sentido más cercano al de mostrar que se puede llegar a cumplir la igualdad, mientras que lo que se acaba de mostrar en una posible forma de cómo se llegó a deducir la igualdad. Lo que Chebyshev hizo para la justificación es señalar que el lado derecho se puede descomponer como suma de términos de la forma $K\,ln\,p$ con p primo y K un entero positivo.
Para justificar que el lado derecho de la igualdad se puede representar con

[3]Se puede ver que $2^{\lfloor\frac{30}{2}\rfloor}$ que es la cantidad de veces que aparece el primo 2, es la misma cantidad de sumandos que aparecen en la primera culumna de (2.1), y así para los otros primos.

términos de la forma $K\, ln\, p$ toma las series

$$\begin{array}{r} x, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{4}, \cdots \\ \sqrt{x}, \sqrt{\frac{x}{2}}, \sqrt{\frac{x}{3}}, \sqrt{\frac{x}{4}}, \cdots \\ \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{\frac{x}{2}}, \sqrt[3]{\frac{x}{3}}, \sqrt[3]{\frac{x}{4}}, \cdots \\ \sqrt[4]{x}, \sqrt[4]{\frac{x}{2}}, \sqrt[4]{\frac{x}{3}}, \sqrt[4]{\frac{x}{4}}, \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \tag{2.2}$$

y considera a K como el número de términos de la serie que son mayores o iguales a p, y en general, para los casos en que $x \leq p$, entonces $\theta(x)$ no genera al término $ln\, p$, y como busca todos los términos $ln\, p$ que aparezcan en el $ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 30)$, entonces requiere los términos de la serie (2.2) que son mayores o iguales que aquellos de la serie (2.2), que son mayores o iguales a p, para cada p primo, tal que $2 \leq p \leq \lfloor x \rfloor$, y al hacer esto se obtiene la cantidad K de veces que aparece el $ln\, p$, para cada p primo. Y con esto Chebyshev afirmó que el coeficiente K de $ln\, p$ es igual a la mayor potencia de p, tal que p^K divide a $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \lfloor x \rfloor$.[4] Sabemos que Chebyshev no demostró este resultado, pero parece que intuyó que esta potencia máxima es igual al número de términos de la serie (2.2), que son mayores o iguales que p y a su vez esto se debe a que el número de términos de la serie

$$x, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{4}, \cdots$$

que son mayores o iguales que p es igual al número de términos de la serie $1, 2, 3, 4, \cdots, \lfloor x \rfloor$ que son divisibles por p. Enseguida, el número de términos de la serie

$$\sqrt{x}, \sqrt{\frac{x}{2}}, \sqrt{\frac{x}{3}}, \sqrt{\frac{x}{4}}, \cdots$$

que son mayores o iguales que p es igual al número de términos de la serie $1, 2, 3, 4, \cdots, \lfloor x \rfloor$ que son divisibles por p^2. Y en general, el número de

[4]Este es el mismo resultado que se menciona en la nota 3.

términos de la serie

$$\sqrt[j]{x}, \sqrt[j]{\frac{x}{2}}, \sqrt[j]{\frac{x}{3}}, \sqrt[j]{\frac{x}{4}}, \cdots$$

que son mayores o iguales que p, es igual a la cantidad de términos de la serie $1, 2, 3, 4, \cdots, \lfloor x \rfloor$ que son divisibles por p^j, y K es la suma del número de términos de la serie (2.2) menores o iguales que $p, p^2, p^3, \cdots$, esto para cada primo $p \leq \lfloor x \rfloor$.

Con esto se visualiza que K es la mayor de las potencias, por lo que ambos lados de la igualdad se pueden descomponer en términos de la forma $K \, ln \, p$

Podemos darnos cuenta que está relacionando el número de términos de la forma $\sqrt[i]{\frac{x}{j}}$ que son mayores o iguales a p, para cada p primo, con la mayor potencia de p que divide a $\lfloor x \rfloor!$, pero hasta aquí aún no introduce el logaritmo natural, pero cuando lo hace se sigue conservando lo planteado por Chebyshev, y se debe a las propiedades del ln.
Se nota que implícitamente cuando busca una K_i que sea la máxima potencia de p, tal que p^{K_i} divide a $\lfloor x \rfloor!$, para cada primo, lo que está haciendo es factorizar a $\lfloor x \rfloor!$ en potencias de primos, y al aplicarle el logaritmo obtenemos una suma de logaritmos de primos con sus respectivas potencias K_i, pero recordemos que bajo las propiedades del logaritmo la potencia pasa a ser un coeficiente.
Con lo anterior ya se tiene una idea de cómo opera la propuesta de Chebyshev sobre el logaritmo de $\lfloor x \rfloor!$, es decir, la igualdad

$$ln\,(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \lfloor x \rfloor) = \begin{cases} \quad \theta(x) + \theta(\sqrt{x}) + \theta(\sqrt[3]{x}) + \theta(\sqrt[4]{x}) + \cdots \\ +\theta(\frac{x}{2}) + \theta(\sqrt{\frac{x}{2}}) + \theta(\sqrt[3]{\frac{x}{2}}) + \theta(\sqrt[4]{\frac{x}{2}}) + \cdots \\ +\theta(\frac{x}{3}) + \theta(\sqrt{\frac{x}{3}}) + \theta(\sqrt[3]{\frac{x}{3}}) + \theta(\sqrt[4]{\frac{x}{3}}) + \cdots \\ +\theta(\frac{x}{4}) + \theta(\sqrt{\frac{x}{4}}) + \theta(\sqrt[3]{\frac{x}{4}}) + \theta(\sqrt[4]{\frac{x}{4}}) + \cdots \end{cases}$$

§ 2. El siguiente paso que Chebyshev realizó fue plantear otras funciones que dependen de la función $\theta(x)$ antes definida, así

$$\theta(x) + \theta(\sqrt[2]{x}) + \theta(\sqrt[3]{x}) + \theta(\sqrt[4]{x}) + ... = \psi(x)$$

y

$$\psi(x) + \psi(\frac{x}{2}) + \psi(\frac{x}{3}) + \psi(\frac{x}{4}) + ... = T(x)$$

donde

$$ln\,(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \lfloor x \rfloor) = T(x).$$

Es importante señalar que uno de sus principales objetivos será acotar a $\theta(x)$, y como esta función es igual a $ln(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots \lfloor x \rfloor)$, entonces, al acotar a $\theta(x)$ se tendrían límites para el producto de los primos en el intervalo $[2, x]$.
Para llegar a este objetivo él requiere las siguientes desigualdades

$$\psi(x) > T(x) + T(\frac{x}{30}) - T(\frac{x}{2}) - T(\frac{x}{3}) - T(\frac{x}{5})$$

$$\psi(x) - \psi(\frac{x}{6}) < T(x) + T(\frac{x}{30}) - T(\frac{x}{2}) - T(\frac{x}{3}) - T(\frac{x}{5}).$$

Para justificar la existencia de éstas trabajaremos con $x \geq 30$, y es para no llegar a cero en ninguna de las funciones que dependen de $T(x)$.
El proceso para obtener las desigualdades requiere que se desarrolle cada una de las funciones $T(x)$, entonces

$$T(x) + T(\frac{x}{30}) - T(\frac{x}{2}) - T(\frac{x}{3}) - T(\frac{x}{5}) =$$

$$\left\{ \begin{array}{r} \psi(x) + \psi(\frac{x}{2}) + \psi(\frac{x}{3}) + \psi(\frac{x}{4}) + \cdots \\ +\psi(\frac{x}{30}) + \psi(\frac{x}{2{,}30}) + \psi(\frac{x}{3{,}30}) + \psi(\frac{x}{4{,}30}) + \cdots \\ -\psi(\frac{x}{2}) - \psi(\frac{x}{2{,}2}) - \psi(\frac{x}{3{,}2}) - \psi(\frac{x}{4{,}2}) - \cdots \\ -\psi(\frac{x}{3}) - \psi(\frac{x}{2{,}3}) - \psi(\frac{x}{3{,}3}) - \psi(\frac{x}{4{,}3}) - \cdots \\ -\psi(\frac{x}{5}) - \psi(\frac{x}{2{,}5}) - \psi(\frac{x}{3{,}5}) - \psi(\frac{x}{4{,}5}) - \cdots \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Y podemos observar que $T(x) + T(\frac{x}{30}) - T(\frac{x}{2}) - T(\frac{x}{3}) - T(\frac{x}{5})$ es de la forma

$$A_1\psi(x) + A_2\psi(\frac{x}{2}) + A_3\psi(\frac{x}{3}) + A_4\psi(\frac{x}{4}) + \cdots A_n\psi(\frac{x}{n}) + \cdots \tag{2.4}$$

Para saber cómo son los coeficientes $A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots A_n, \cdots$ analizaremos la multiplicidad de $2, 3, 5$ y 30, además nótese que $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ por lo que podemos trabajar con módulo 30. Entonces, podemos ver la sucesión de valores de n en A_n como

$n = 30m + 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \cdots\cdots\cdots, 28, 29$ o 30, y con esto obtendremos una sucesión de ceros y unos

$$1,0,0,0,0,-1,1,0,0,-1,1-1,1,0,-1,0,1-1,1,-1,0,0,1,-1,0,0,0,0,1,-1\cdots$$

para $A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots A_n, \cdots$, respectivamente. Y esto sucede al considerar a los múltiplos de 2, 3, y 5 en los denominadores de $\left(\frac{x}{n}\right)$ para $\psi\left(\frac{x}{n}\right)$, de la igualdad (2.3). Entonces la agrupación de las clases residuales módulo 30 que determinan los valores de A_n son:

$A_n = 1$ si $n = 30m + 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23$ o 29
$A_n = 0$ si $n = 30m + 2, 3, 4, 5, 8, 9, 14, 16, 21, 22, 25, 26, 27$ o 28
$A_n = -1$ si $n = 30m + 6, 10, 12, 15, 18, 20$ o 24
$A_n = 1$ si $n = 30m + 30$.

De las cuatro clasificaciones se puede decir que:

En el primer renglón se colocan los números que no son divisibles por 2, 3, y 5.
El segundo renglón se forma con las n que son divisibles por uno de los números $2, 3$ o 5 (solamente por uno de los tres).
El tercer renglón se forma con las n que son divisibles por dos de los números $2, 3$ y 5.
Y el cuarto renglón se forma por las n que son divisibles por $2, 3$ y 5, es decir, divisibles por 30.

Así, la sucesión de A_1 a A_{30} se presenta como una sucesión periodica de ceros y unos debido a que trabajamos con módulo 30. La sucesión es

$$1,0,0,0,0,-1,1,0,0,-1,1-1,1,0,-1,0,1-1,1,-1,0,0,1,-1,0,0,0,0,1,-1,$$

y si omitimos los ceros, entonces tenemos una sucesión con 1 y -1, que vista en (2.4) lleva a

$$\psi(x)-\psi(\tfrac{x}{6})+\psi(\tfrac{x}{7})-\psi(\tfrac{x}{10})+\psi(\tfrac{x}{11})-\psi(\tfrac{x}{12})+\cdots = T(x)+T(\tfrac{x}{30})-T(\tfrac{x}{2})-T(\tfrac{x}{3})-T(\tfrac{x}{5})$$

o de manera equivalente

$$\psi(x) - [\psi(\tfrac{x}{6}) - \psi(\tfrac{x}{7})] - [\psi(\tfrac{x}{10}) - \psi(\tfrac{x}{11})] - [\psi(\tfrac{x}{12}) - \psi(\tfrac{x}{13})] - \cdots = T(x) + T(\tfrac{x}{30}) - T(\tfrac{x}{2}) - T(\tfrac{x}{3}) - T(\tfrac{x}{5}).$$

De las dos igualdades se puede inferir que

$$\psi(x) \geq T(x) + T(\frac{x}{30}) - T(\frac{x}{2}) - T(\frac{x}{3}) - T(\frac{x}{5})$$

$$\psi(x) - \psi(\frac{x}{6}) \leq T(x) + T(\frac{x}{30}) - T(\frac{x}{2}) - T(\frac{x}{3}) - T(\frac{x}{5}).$$

Una pregunta que es oportuno formularnos, es ¿por qué Chebyshev tomó los términos

$$x, \frac{x}{30}, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{5}?$$

, o dicho de otra forma ¿por qué tomó a los enteros $2, 3, 5, 30$ en los denominadores?

Posiblemente lo hace porque al tomar $T(x)$, $T(\frac{x}{30})$, $-T(\frac{x}{2})$, $-T(\frac{x}{3})$, $-T(\frac{x}{5})$ se generan 5 renglones, 2 con signo positivo y 3 con signo negativo, lo que da lugar a que aparezcan términos negativos, es decir, que no se anulen o neutralicen con los positivos y se genere el signo negativo.
En general, conviene trabajar con un número impar de términos, para tener la posibilidad de obtener los renglones negativos, positivos y/o neutros.

Otra causa por la que toma a $T(x)$, $T(\frac{x}{30})$, $-T(\frac{x}{2})$, $-T(\frac{x}{3})$, $-T(\frac{x}{5})$ es porque $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, y trabajar módulo 30 parece que facilita los cálculos, pues nótese que 30 es el número más pequeño que es producto de 3 primos diferentes, y al utilizar la multiplicidad de estos números primos se genera a $-1, 0, 1$ que es lo que nos interesa.

Pero veamos por qué no nos conviene tomar otros productos con menos factores primos o con la misma cantidad de factores, pero con primos más grandes.
Si tomamos $2 \cdot 3 = 6$, que es el producto de los dos primeros números primos, entonces proponemos

$$T(x) + T(\frac{x}{6}) - T(\frac{x}{2}) - T(\frac{x}{3}),$$

y como en el caso anterior agrupamos las clases módulo seis de la forma
$A_n = 1$ si $n = 6m + 1$ o 5
$A_n = 0$ si $n = 6m + 2, 3, 4$ o 6

entonces obtenemos

$$\psi(x) + \psi(\frac{x}{5}) + \psi(\frac{x}{7}) + \psi(\frac{x}{11}) + \cdots = T(x) + T(\frac{x}{6}) - T(\frac{x}{2}) - T(\frac{x}{3}).$$

Con el producto de primos $2 \cdot 3 = 6$ y la igualdad anterior podemos proponer una cota inferior, esta es

$$\psi(x) < T(x) + T(\frac{x}{6}) - T(\frac{x}{2}) - T(\frac{x}{3}),$$

pero inferir una cota superior no es tan fácil, y es porque no se génera el -1, que es lo que hace evidente la cota.

En general no es conveniente tomar un número que es factorización de un número par de primos, lo más recomendado es un número impar.

Ahora, si tomamos $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$, entonces proponemos

$$T(x) + T(\frac{x}{42}) - T(\frac{x}{2}) - T(\frac{x}{3}) - T(\frac{x}{7}),$$

con la siguiente agrupación de las clases módulo 42

$A_n = -1$ si $n = 42m + 6, 12, 14, 18, 21, 24, 28, 30, 36$ o 42
$A_n = 1$ si $n = 42m + 1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37$ o 41
$A_n = 0$ si $n = 42m + 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 15, 16, 20, 22, 26, 27, 32, 33, 34, 35, 38, 39$ o 40

y la sucesión de A_1 a A_{42} queda así
$1, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 1, -1, 0, 0, 1, -1, 1, 0, -1, 0, 1, -1, 1, 0, 0, -1, 1, -1,$
$1, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, -1,$

y con esto obtenemos

$$\psi(x)+\psi(\tfrac{x}{5})-\psi(\tfrac{x}{6})+\psi(\tfrac{x}{11})-\psi(\tfrac{x}{12})+\psi(\tfrac{x}{13})-\cdots = T(x)+T(\tfrac{x}{42})-T(\tfrac{x}{2})-T(\tfrac{x}{3})-T(\tfrac{x}{7})$$

y de esto deducimos que

$$T(x) + T(\frac{x}{42}) - T(\frac{x}{2}) - T(\frac{x}{3}) - T(\frac{x}{7}) < \psi(x) + \psi(\frac{x}{5})$$

$$T(x) + T(\frac{x}{42}) - T(\frac{x}{2}) - T(\frac{x}{3}) - T(\frac{x}{7}) > \psi(x) + \psi(\frac{x}{5}) - \psi(\frac{x}{6}),$$

esta es una buena cota, pero como en los procesos matemáticos siempre se busca el camino óptimo, entonces trabajaremos con la factorización de 30, que es más pequeña y fácil de manejar, y es la asociada a

$$T(x) + T(\frac{x}{30}) - T(\frac{x}{2}) - T(\frac{x}{3}) - T(\frac{x}{5}).$$

Intrínsecamente nos fijamos en la factorización que más conviene, y no se trata de acotar a $\psi(x) - \psi(\frac{x}{6})$, más bien se trata de trabajar con los términos que nos hagan más claras y manejables ambas desigualdades.

De lo antes mencionado posiblemente podemos entender por qué Chebyshev trabajó con

$$\psi(x) \geq T(x) + T(\frac{x}{30}) - T(\frac{x}{2}) - T(\frac{x}{3}) - T(\frac{x}{5})$$

$$\psi(x)-\psi(\frac{x}{6})\leq T(x)+T(\frac{x}{30})-T(\frac{x}{2})-T(\frac{x}{3})-T(\frac{x}{5}) \tag{2.5}$$

Ya vimos que las combinaciones lineales de (2.4) se complican si usamos descomposiciones de 3 o menos de 3 números primos, es decir, éstas no funcionan para minimizar las cotas de Chebychev. Pero es importante mencionar que en 1881 y 1892 el matemático J.J Silvester planteó en dos artículos[5] otras cotas aptas para un buen manejo de los datos. Introdujo en lugar de

$$T(x)+T(\frac{x}{30})-T(\frac{x}{2})-T(\frac{x}{3})-T(\frac{x}{5})$$

otras combinaciones lineales de $T\left(\frac{x}{m}\right)$ considerablemente más complicadas, pero el beneficio es que las cotas mejoran.

§ 3. Chebyshev ahora construirá otra cota para

$$T(x)+T(\frac{x}{30})-T(\frac{x}{2})-T(\frac{x}{3})-T(\frac{x}{5}),$$

y las requiere para poder establecer otras desigualdades vinculadas con (2.5), pero éstas sólo dependerán de x.

Recordemos que

$$T(x)=ln\,(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\lfloor x\rfloor),$$

y denotemos a $\lfloor x\rfloor$ como n, donde $n\leq x$, además $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n=n!$ para $n>1$ y finalmente teniamos que $T(x)=log\,(n!)$.

Chebyshev fue muy cuidadoso con cada uno de los pasos que sustentan su demostración, pero en el proceso de la construcción de las cotas de esta sección, menciona la desigualdad

$$ln\,(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n)<ln\sqrt{2}\pi+n\,ln\,n+\frac{1}{2}\,ln\,n-n+\frac{1}{12n},$$

y aquí Chebyshev no hace referencia a porque la desigualdad se cumple o de dónde surge. Para conocer la procedencia de la desigualdad nos acercaremos a Stirling y a su aproximación de $n!$. A esta se le conoce como la fórmula de Stirling

$$n!\approx\sqrt{2\pi}\,\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n},$$

[5]On Tchebycheff´s theory of the totality of the prime numbers comprised within given limits, 1881, American Journal Mathematics, IV, pág. 230-247 y On Arithmetical Series, 1892, Messenger of Mathematics, XXI, pág. 1-19 y 87-120

y al aplicarle logaritmmo natural de ambos lados se obtiene

$$ln\,(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n) \approx ln\sqrt{2\pi} + n\,ln\,n + \frac{1}{2}\,ln\,n - n,$$

que es una buena aproximación a la de Chebyshev y con un error mínimo considerando las grandes magnitudes que alcanzan los valores de $n!$. Para tener una idea de la presición de la fórmula daremos unos ejemplos:

Sea $n = 50$, entonces
$ln(50!)$ =148.4778 y

$ln\sqrt{2\pi} + 50\,ln\,50 - 50 + \frac{1}{2}\,ln\,50$ =148.4761

Sea $n = 100$
calculamos $ln(100!)$ =363.7393 y por otro lado
$ln\sqrt{2\pi} + 100\,ln\,100 - 100 + \frac{1}{2}\,ln\,100$ =363.7385

Sea $n = 150$
calculamos $ln(150!)$= 605.0201 y
$ln\sqrt{2\pi} + 150\,ln\,150 - 150 + \frac{1}{2}\,ln\,150$= 605.0195

para finalizar

$ln(200!)$ =863.2319 y
$ln\sqrt{2\pi} + 200\,ln\,200 - 200 + \frac{1}{2}\,ln\,200$= 863.2315.

En el último ejemplo podemos ver que ya es una excelente aproximación y que el margen de error es mínimo.
En el primer ejemplo la diferencia es de 0.0016, en el segundo es 0.0008, en el tercero 0.0005, y en el cuarto 0.0004. Se nota que la diferencia es pequeña, pero en la medida que aumenta el número también disminuye el margen de error, esto es, el comportamiento de $ln(n!)$ y $ln\sqrt{2\pi}+n\,ln\,n-n+\frac{1}{2}\,ln\,n$ es asintótico cuando n crece.

La siguiente tabla compara las aproximaciones.

n	$ln(n!)$	$ln\sqrt{2\pi} + n\,ln\,n - n + \frac{1}{2}\,ln\,n$	**error**
50	148.4777669517	148.4761003073	0.001666644
100	363.7393755555	363.7385422250	0.000833331
150	605.0201058494	605.0195502946	0.000555555
200	863.2319871924	863.2315705260	0.000416666
250	1134.0452317908	1134.0448984576	0.000333333
300	1414.9058499450	1414.9055721673	0.000277778
350	1704.1247472748	1704.1245091796	0.000238095
400	2000.5006979832	2000.5004896499	0.000208333
450	2303.1351597537	2303.1349745685	0.000185185
500	2611.3304584601	2611.3302917935	0.000166667
1000	5912.1281784881	5912.1280951548	0.000083333
2000	13206.5243505138	13206.5243088471	0.000041667
10000	82108.9278368143	82108.9278284810	0.000008333
100000	1051299.2218991218	1051299.22189828853179594755265	0.0000008333

De Stirling tenemos que

$$ln\,(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n) \approx ln\sqrt{2\pi} + n\,ln\,n + \frac{1}{2}\,ln\,n - n,$$

y de la tabla podemos ver que

$$ln\,(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n) > ln\sqrt{2\pi} + n\,ln\,n + \frac{1}{2}\,ln\,n - n.$$

En la medida que n crece, más se acercan $ln\,(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n)$ y $ln\sqrt{2\pi} + n\,ln\,n + \frac{1}{2}\,ln\,n - n$, y el margen de error es cada vez más pequeño. Pero recordemos que Chebyshev usa la desigualdad

$$ln\,(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n) < ln\sqrt{2\pi} + n\,ln\,n + \frac{1}{2}\,ln\,n - n + \frac{1}{12n},$$

que no es la misma que obtuvimos a partir de la fórmula de Stirling.

Con la finalidad de llegar a la desigualdad de Chebyshev agregamos a la que obtuvimos a partir de la fórmula de Stirling el término $\frac{1}{12n}$, que es positivo, y entonces la desigualdad cambia de esta forma

$$ln\,(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n) < ln\sqrt{2\pi} + n\,ln\,n + \frac{1}{2}\,ln\,n - n + \frac{1}{12n}.$$

Ahora veamos la tabla donde ya se agrega el término $\frac{1}{12n}$ (trabajando con 20 decimales)

n	$ln(n!)$	$ln\sqrt{2\pi} + n\,ln\,n - n + \frac{1}{2}\,ln\,n + \frac{1}{12n}$	**error**
50	148.4777669517	148.4777669739	0.0000000222
100	363.7393755555	363.7393755583	0.0000000025
150	605.0201058494	605.0201058502	0.0000000008
200	863.2319871924	863.2319871925	0.0000000001
250	1134.0452317908	1134.0452317910	0.0000000002
300	1414.9058499450	1414.9058499451	0.0000000001
350	1704.1247472748	1704.1247472748	0
400	2000.5006979832	2000.5006979832	0
450	2303.1351597537	2303.1351597537	0
500	2611.3304584601	2611.3304584601	0
1000	5912.1281784881	5912.1281784881	0
2000	13206.5243505138	13206.5243505138	0
10000	82108.9278368143	82108.9278368143	0
100000	1051299.2218991218	1051299.2218991218	0

La aproximación es casi exacta, y también el error es muy pequeño, conforme crece la cifra el error disminuye mucho más hasta ser casi nulo, pero no llega a ser 0.

Ahora bien, sea x un número cualquiera, y tomaremos $n = \lfloor x \rfloor$, entonces

$$n \leq x < n + 1,$$

y como la función $T(x)$ es creciente, entonces

$$T(n) \leq T(x) < T(n+1).$$

Según definimos $T(x)$ en un inicio, teníamos algo de la forma

$$T(x) = ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \lfloor x \rfloor)$$

y en particular

$$T(n) = T(x) = ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n),$$

pero ya sabemos que

$$Ln(n!) > ln\sqrt{2\pi} + n\,ln\,n - n + \frac{1}{2}\,ln\,n$$

y

$$Ln(n!) < ln\sqrt{2\pi} + n\,ln\,n - n + \frac{1}{2}\,ln\,n + \frac{1}{12(n)},$$

y en particular tenemos las desigualdades

$$Ln((n+1)!) > ln\sqrt{2\pi} + (n+1)\,ln\,(n+1) - (n+1) + \frac{1}{2}\,ln\,(n+1)$$

$$Ln(n!) < ln\sqrt{2\pi} + n\,ln\,n - n + \frac{1}{2}\,ln\,n + \frac{1}{12(n)},$$

pero de la definición de $T(x)$ y de propiedades básicas de ln, tenemos que

$$T(x) = ln\,(1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n(n+1)) - ln\,(n+1),$$

entonces

$$T(n) = T(x) = T(n+1) - ln\,(n+1)$$

y si a la desigualdad

$$Ln((n+1)!) > ln\sqrt{2\pi} + (n+1)\,ln\,(n+1) - (n+1) + \frac{1}{2}\,ln\,(n+1)$$

le restamos $ln\,(n+1)$ de ambos lados, obtenemos

$$T(x) = T(n+1) - ln\,(n+1) > ln\sqrt{2\pi} + (n+1)\,ln\,(n+1) - (n+1) - \frac{1}{2}\,ln\,(n+1),$$

pero la función

$$ln\sqrt{2\pi} + (a)\,ln\,(a) - (a) - \frac{1}{2}\,ln\,(a)$$

es una función creciente, entonces

$$ln\sqrt{2\pi}+(n+1)\,ln\,(n+1)-(n+1)-\frac{1}{2}\,ln\,(n+1) > ln\sqrt{2\pi}+(x)\,ln\,(x)-(x)-\frac{1}{2}\,ln\,(x)$$

y por transitividad podemos concluir que

$$T(x) > ln\sqrt{2\pi} + (x)\,ln\,(x) - (x) - \frac{1}{2}\,ln\,(x),$$

y esta es la primera desigualdad que requeriamos. Para obtener la segunda sólo tomaremos

$$Ln(n!) < ln\sqrt{2\pi} + n\,ln\,n - n + \frac{1}{2}\,ln\,n + \frac{1}{12(n)}$$

en particular si en $\frac{1}{12(n)}$, n es igual a 1, la desigualdad se conserva, ya que $\frac{1}{12n} \leq \frac{1}{12}$ para toda n, por lo cual podemos ajustar la segunda desigualdad como

$$T(x) < ln\sqrt{2\pi} + x\,ln\,x + \frac{1}{2}\,ln\,x - x + \frac{1}{12}.$$

Veamos la tabla para la constante $\frac{1}{12}$

n	$ln(n!)$	$ln\sqrt{2\pi}+n\,ln\,n-n+\frac{1}{2}\,ln\,n+\frac{1}{12}$	**error**
50	148.4777669517	148.5594336406	0.0816666888
100	363.7393755555	363.8218755583	0.0825000027
150	605.0201058494	605.1028836280	0.0827777786
200	863.2319871924	863.3149038594	0.0829166670
250	1134.0452317908	1134.1282317910	0.0830000001
300	1414.9058499450	1414.9889055007	0.0830555556
350	1704.1247472748	1704.2078425129	0.0830952381
400	2000.5006979832	2000.5838229832	0.0831250000
450	2303.1351597537	2303.2183079018	0.0831481481
500	2611.3304584601	2611.4136251268	0.0831666666
1000	5912.1281784881	5912.2114284881	0.0832500000
2000	13206.5243505138	13206.6076421804	0.0832916666
10000	82108.9278368143	82109.0111618143	0.0833250000
100000	1051299.2218991218	1051299.3052316218	0.0833325000

Nótese que el error no varía mucho, tiende a ser una constante y se sigue cumpliendo que

$$T(x) < ln\sqrt{2\pi} + n\,ln\,n + \frac{1}{2}\,ln\,n - n + \frac{1}{12}.$$

Pero es importante mejorar en cada paso las cotas, haciendolas cada vez más precisas y manejables.

Ya tenemos un par de cotas para $T(x)$, es decir,

$$T(x) > ln\sqrt{2\pi} + x\,ln\,x - x - \frac{1}{2}\,ln\,x$$

y

$$T(x) < ln\sqrt{2\pi} + n\,ln\,n + \frac{1}{2}\,ln\,n - n + \frac{1}{12}.$$

Ahora que las conocemos el siguiente paso es acotar $T(x)+T(\frac{x}{30})-T(\frac{x}{2})-T(\frac{x}{3})-T(\frac{x}{5})$ en términos de la fórmula de Stirling, y la única observación previa para entender lo que Chebyshev hace es que si $a > b > c$ y $d > e > f$, entonces $a+d > b+e > c+f$ y $a-f > b-e > c-d$.

Para acotar $T(x)+T(\frac{x}{30})-T(\frac{x}{2})-T(\frac{x}{3})-T(\frac{x}{5})$ lo primero que se hace es encontrar la cota superior e inferior para $T(x)$ y $T(\frac{x}{30})$ en términos de Stirling, y tomamos esos dos términos ya que son los que se agrupan con signo positivo.

Para $T(x)$ tenemos

$$T(x) > ln\sqrt{2\pi} + x\,ln\,x - \frac{1}{2}\,ln\,x - x$$

$$T(x) < ln\sqrt{2\pi} + x\,ln\,x + \frac{1}{2}\,ln\,x - x + \frac{1}{12}$$

y para $T(\frac{x}{30})$

$$T(\frac{x}{30}) > ln\sqrt{2\pi} + \frac{x}{30}\,ln\,\frac{x}{30} - \frac{1}{2}\,ln\,\frac{x}{30} - \frac{x}{30}$$

$$T(\frac{x}{30}) < ln\sqrt{2\pi} + \frac{x}{30}\,ln\,\frac{x}{30} + \frac{1}{2}\,ln\,\frac{x}{30} - \frac{x}{30} + \frac{1}{12}$$

por lo tanto

$$T(x)+T(\tfrac{x}{30}) < ln\sqrt{2\pi}+x\,ln\,x+\tfrac{1}{2}\,ln\,x-x+\tfrac{1}{12}+ln\sqrt{2\pi}+\tfrac{x}{30}\,ln\,\tfrac{x}{30}-\tfrac{x}{30}+\tfrac{1}{2ln}\,\tfrac{x}{30}+\tfrac{1}{12}$$

$$y$$

$$T(x) + T(\tfrac{x}{30}) > ln\sqrt{2\pi} + x\,ln\,x - x - \tfrac{1}{2}\ \ln\ x + ln\sqrt{2\pi} + \tfrac{x}{30}\,ln\,\tfrac{x}{30} - \tfrac{x}{30} - \tfrac{1}{2}\,ln\,\tfrac{x}{30}$$

entonces

$$2\,ln\sqrt{2\pi} + \frac{2}{12} + \frac{31}{30}\,x\,ln\,x - x\,ln\,30^{\frac{1}{30}} - \frac{31}{31}\,x + ln\,x - \frac{1}{2}\,ln\,30 > T(x) + T(\frac{x}{30})$$

$$T(x) + T(\frac{x}{30}) > 2\,ln\sqrt{2\pi} - \frac{31}{30}\,x + \frac{31}{30}\,x\,ln\,x - ln\,x + \frac{1}{2}\,ln\,30 - x\,ln\,30^{\frac{1}{30}}.$$

Haciendo lo mismo para $T(\frac{x}{2}) + T(\frac{x}{3}) + T(\frac{x}{5})$, tenemos

$T(\frac{x}{2}) + T(\frac{x}{3}) + T(\frac{x}{5}) < ln\sqrt{2\pi} + ln\sqrt{2\pi} + ln\sqrt{2\pi} + \frac{x}{2}\,ln\,\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\,ln\,\frac{x}{3} + \frac{x}{5}\,ln\,\frac{x}{5} - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{5} + \frac{1}{2}\,ln\,\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\,ln\,\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\,ln\,\frac{x}{5} + \frac{3}{12}$

$$y$$

$T(\frac{x}{2}) + T(\frac{x}{3}) + T(\frac{x}{5}) > ln\sqrt{2\pi} + ln\sqrt{2\pi} + ln\sqrt{2\pi} + \frac{x}{2}\,ln\,\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\,ln\,\frac{x}{3} + \frac{x}{5}\,ln\,\frac{x}{5} - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{5} - \frac{1}{2}\,ln\,\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\,ln\,\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\,ln\,\frac{x}{5}$

Por lo tanto

$$3\,ln\sqrt{2\pi} + \frac{31}{30}\,x\,ln\,x - \frac{31}{30}\,x - x\,ln\,(2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{5}}) + \frac{3}{2}\,ln\,x - \frac{1}{2}\,ln\,(2 \cdot 3 \cdot 5) + \frac{3}{12} > T(\frac{x}{2}) + T(\frac{x}{3}) + T(\frac{x}{5})$$

$$T(\frac{x}{2})+T(\frac{x}{3})+T(\frac{x}{5})>3\,ln\sqrt{2\pi}+\frac{31}{30}\,x\,ln\,x-x\,ln\,(2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{5}})-\frac{31}{30}x+\frac{1}{2}\,ln\,30-\frac{3}{2}\,ln\,x$$

y al hacer la operación $T(x)+T(\frac{x}{30})-T(\frac{x}{2})-T(\frac{x}{3})-T(\frac{x}{5})$ obtenemos

$$T(x)+T(\frac{x}{30})-T(\frac{x}{2})-T(\frac{x}{3})-T(\frac{x}{5})<-ln\sqrt{2\pi}+\frac{2}{12}-ln\,30+\frac{5}{2}\,ln\,x+x\,ln\,(2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{5}})-x\,ln\,30^{\frac{1}{30}}$$

$$T(x)+T(\frac{x}{30})-T(\frac{x}{2})-T(\frac{x}{3})-T(\frac{x}{5})>-ln\sqrt{2\pi}-\frac{5}{2}\,ln\,x-x\,ln\,30^{\frac{1}{30}}+x\,ln\,(2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{5}})+ln\,30-\frac{3}{12}$$

y para reducir estas dos desigualdades haremos las siguientes observaciones

1) $x\,ln\,2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{5}}-x\,ln\,30^{\frac{1}{30}}=x\,ln\,\frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}}$
2) $-\,ln\sqrt{2\pi}-ln\,30=-\frac{1}{2}\,(1800\pi)$
3) $-\,ln\sqrt{2\pi}+ln\,30=\frac{1}{2}\,ln\,\frac{450}{\pi}$

por lo que podemos concluir que

$$x\,ln\,\frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}}+\frac{5}{2}\,ln\,x-\frac{1}{2}\,(1800\pi)+\frac{2}{12}>T(x)+T(\frac{x}{30})-T(\frac{x}{2})-T(\frac{x}{3})-T(\frac{x}{5})$$

$$T(x)+T(\frac{x}{30})-T(\frac{x}{2})-T(\frac{x}{3})-T(\frac{x}{5})>x\,ln\,\frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}}-\frac{5}{2}\,ln\,x+\frac{1}{2}\,ln\,\frac{450}{\pi}-\frac{3}{12}.$$

y si renombramos un factor del primer sumando como

$ln\,\frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}}=A{=}0.9212920\cdot\cdots\cdots$,

y como se tiene que

$$-\frac{1}{2}\,ln\,1800\pi+\frac{2}{12}<0$$
$$\frac{1}{2}\,ln\,\frac{450}{\pi}-\frac{3}{12}>1$$

entonces podemos llegar a

$$Ax+\frac{5}{2}\,ln\,x>T(x)+T(\frac{x}{30})-T(\frac{x}{2})-T(\frac{x}{3})-T(\frac{x}{5})>Ax-\frac{5}{2}\,ln\,x-1. \quad (2.6)$$

§ 4. Ahora queremos obtener las cotas finales para $\theta(x)$, y lo podemos ya tenemos las nuevas cotas para

$$T(x)+T(\frac{x}{30})-T(\frac{x}{2})-T(\frac{x}{3})-T(\frac{x}{5}).$$

regresar a § 2 con las dos desigualdades

$$\psi(x) > T(x) + T(\frac{x}{30}) - T(\frac{x}{2}) - T(\frac{x}{3}) - T(\frac{x}{5})$$

$$\psi(x) - \psi(\frac{x}{6}) < T(x) + T(\frac{x}{30}) - T(\frac{x}{2}) - T(\frac{x}{3}) - T(\frac{x}{5})$$

y aunado a las que obtuvimos en (2.5) podemos concluir que

$$\psi(x) > Ax - \frac{5}{2}\, ln\, x - 1$$

$$\psi(x) - \psi(\frac{x}{6}) < Ax + \frac{5}{2}\, ln\, x$$

para $x \geq 30$.

Y aquí Chebyshev dio un paso importante, pues logró acotar a $\psi(x)$, que es una función que depende de $\theta(x) = ln(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots)$, pero sólo en términos de x.

Ahora Chebyshev introducirá una función $f(x)$, que aparentemente no tiene un sentido directo, pero en realidad lo hace para simplificar las expresiones de los límites antes obtenidos, y para acotar en términos de algo diferente a lo que se ha venido manejando. Así, $f(x)$ es la función adecuada para cambiar los límites y expresarlos de la manera más sencilla con base en las desigualdades usadas hasta ahora.

En resumen, lo que se busca es una cota superior para $\psi(x)$, en términos de $f(x)$, ya que sólo tenemos una cota inferior y nos interesa cerrar el intervalo.

Así, Chebyshev define a $f(x)$ como

$$f(x) = \frac{6}{5}\, Ax + \frac{5}{4\, ln\, 6}\, ln^2\, x + \frac{5}{4}\, ln\, x$$

y para $\frac{x}{6}$ se tiene

$$f(\frac{x}{6}) = A \cdot \frac{x}{5} + \frac{5}{4\, ln\, 6}\, ln^2\, \frac{x}{6} + \frac{5}{4}\, ln\, \frac{x}{6},$$

y $f(x) - f\left(\frac{x}{6}\right) =$

$$\frac{6}{5}Ax - A \cdot \frac{x}{5} + \frac{5}{4\, ln\, 6}\, ln^2 x - \frac{5}{4\, ln\, 6}\, ln^2\, \frac{x}{6} + \frac{5}{4}\, ln\, x - \frac{5}{4}\, ln\, \frac{x}{6}$$

$= Ax + \frac{5}{4\,ln\,6}\,ln\,x \cdot ln\,x - \frac{5}{4\,ln\,6}\,ln\,x \cdot ln\,x + 2 \cdot \frac{5}{4\,ln\,6}\,ln\,x \cdot ln\,6 + \frac{5}{4\,ln\,6}\,ln\,6 \cdot ln\,6 + \frac{5}{4}\,ln\,x - \frac{5}{4}\,ln\,x + \frac{5}{4}\ln 6,$

que es lo mismo que

$$f(x) - f(\frac{x}{6}) = Ax + \frac{5}{2}\,ln\,x.$$

Pero ya se tenía

$$\psi(x) - \psi(\frac{x}{6}) < Ax + \frac{5}{2}\,ln\,x$$

por lo tanto podemos afirmar que

$$\psi(x) - \psi(\frac{x}{6}) < f(x) - f(\frac{x}{6})$$

$$\psi(x) - f(x) < \psi(\frac{x}{6}) - f(\frac{x}{6}).$$

De la segunda desigualdad y dada la sucesión decreciente

$$\frac{x}{6}, \frac{x}{6^2}, \cdots\cdots, \frac{x}{6^m},$$

es posible obtener la sucesión

$$\psi(x) - f(x) < \psi(\frac{x}{6}) - f(\frac{x}{6}) < \psi(\frac{x}{6^2}) - f(\frac{x}{6^2}) < \cdots\cdots < \psi(\frac{x}{6^{m+1}}) - f(\frac{x}{6^{m+1}}),$$

con m el número natural más grande tal que $\frac{x}{6^m} \geq 1$, y en consecuancia $\frac{x}{6^{m+1}} < 1$, y como $\frac{1}{6} < \frac{x}{6^{m+1}}$, por lo tanto

$$\frac{1}{6} < \frac{x}{6^{m+1}} < 1.$$

Con esto podemos considerar a $\frac{x}{6^{m+1}} = z$ y con $z \in [\frac{1}{6}, 1]$, entonces $\psi(z) = 0$ (por la definición de ψ) y como $f(z) > 0$, entonces $-f(z) < 1$, de lo que podemos concluir que $\psi(\frac{x}{6^{m+1}}) - f(\frac{x}{6^{m+1}}) < 1$ y por transitividad

$$\psi(x) - f(x) < 1$$

lo que nos indica que

$$\psi(x) < f(x) + 1$$

por lo tanto

$$\psi(x) < \frac{6}{5}\,Ax + \frac{5}{4\,ln\,6}\,ln^2\,x + \frac{5}{4}\,ln\,x + 1.$$

Con esta desigualdad Chebyshev logró acotar superiormente a ψ, y ahora ya se tienen ambas cotas para ψ, esto es,

$$\psi(x) < \frac{6}{5}Ax + \frac{5}{4\,ln\,6}\,ln^2 x + \frac{5}{4}\,ln\,x + 1$$

$$\psi(x) > Ax - \frac{5}{2}\,ln\,x - 1.$$

Las desigualdades para el caso de $\sqrt{x}$ son las siguientes

$$\psi(\sqrt{x}) < \frac{6}{5}A\sqrt{x} + \frac{5}{16\,ln\,6}\,ln^2 x + \frac{5}{8}\,ln\,x + 1$$

$$\psi(\sqrt{x}) > A\sqrt{x} - \frac{5}{4}\,ln\,x - 1$$

Ahora, de las dos parejas de desigualdades y de la propiedad que dice: si $a < b$ y $c < d$, entonces $a - d < b - c$, tenemos que

$$\psi(x) - \psi(\sqrt{x}) < \frac{6}{5}Ax - A\sqrt{x} + \frac{5}{4\,ln\,6}\,ln^2 x + \frac{5}{2}\,ln\,x + 2$$

y

$$\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) > Ax - \frac{12}{5}A\sqrt{x} - \frac{5}{8\,ln\,6}\,ln^2 x - \frac{15}{4}\,ln\,x - 3$$

Con los elementos que ya se tienen, entonces ya es posible acotar a $\theta(x)$. Recuérdese que

$$\theta(x) = ln\,(2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n),$$

y además

$$\theta(x) + \theta(\sqrt{x}) + \theta(\sqrt[3]{x}) + \theta(\sqrt[4]{x}) + \cdots = \psi(x)$$

$$\psi(\sqrt{x}) = \theta(\sqrt{x}) + \theta(\sqrt[4]{x}) + \theta(\sqrt[6]{x}) + \cdots + \theta(\sqrt[8]{x}) + \cdots,$$

entonces

$$\psi(x) - \psi(\sqrt{x}) = \theta(x) + \theta(\sqrt[3]{x}) + \theta(\sqrt[5]{x}) + \theta(\sqrt[7]{x}) \cdots\cdots.$$

Por otro lado tenemos que

$$2\psi(\sqrt{x}) = 2\theta(\sqrt[2]{x}) + 2\theta(\sqrt[4]{x}) + 2\theta(\sqrt[6]{x}) + 2\cdots + \theta(\sqrt[8]{x}) + \cdots$$

por lo tanto

$$\psi(x) - 2\,\psi(\sqrt{x}) = \theta(x) - [\theta(\sqrt{x}) - \theta(\sqrt[3]{x})] - [\theta(\sqrt[4]{x}) - \theta(\sqrt[5]{x})] - \cdots\cdots,$$

y con esto se llega a las desigualdades

$$\theta(x) < \psi(x) - \psi(\sqrt{x})$$

$$\theta(x) > \psi(x) - 2\,\psi(\sqrt{x}),$$

y con éstas podemos obtener las cotas adecuadas para $\theta(x) = ln(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots)$, que sólo dependen de x, éstas son

$$\theta(x) < \frac{6}{5}\,Ax - A\sqrt{x} + \frac{5}{4\,ln\,6}\,ln^2 x + \frac{5}{2}\,ln\,x + 2$$
$$\theta(x) > Ax - \frac{12}{5}\,A\sqrt{x} - \frac{5}{8\,ln\,6}\,ln^2 x - \frac{15}{4}\,ln\,x - 3.$$

Este es uno de los grandes resultados de la *Mémoire* de Chebyshev, poder acotar a $ln(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots\cdots)$ fue un gran paso para conocer más sobre la distribución de los primos menores a un entero x.

2.2. El postulado de Bertrand

Después de encontrar las cotas para $\theta(x)$, Chebyshev planteó que una aplicación de lo anterior sería la demostración del postulado de Bertrand. Y nuevamente Chebyshev nos sorprende en su artículo, porque un resultado tan importante como el de Bertrand quedó resuelto por una extensión de sus razonamientos sobre la distribución de los números primos.

La siguiente sección estará dedicada a ver cómo son los intervalos en los que existe por lo menos un número primo, es decir, los intervalos de Bertrand.

§ 5. En este punto Chebyshev propuso un intervalo con límites l y L, donde $l \neq L$ su objetivo era el estudio de la existencia, así como la cantidad de números primos entre tales límites.

Entonces, sean l y L dos límites tal que $L > l > 0$ y supongamos que existen m números primos diferentes en el intervalo $[l, L]$ que son $p_1, p_2, p_3 \cdots\cdots, p_m$, y se tiene que

$$l < p_1 < L$$
$$l < p_2 < L$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

$$l < p_m < L,$$

por lo tanto

$$l^m < \prod p_i < L^m.$$

Por otro lado, como $l < p_i < L$, entonces

$$ln\,(\prod p_i\,) = \theta(L) - \theta(l),$$

y esto aunado a la aplicación del *logaritmo natural* a la desigualdad, da como resultado

$$m\,ln\,(l) < \theta(L) - \theta(l) < m\,ln\,(L\,),$$

y de esto se obtiene

$$\frac{\theta(L) - \theta(l)}{ln\,L} < m < \frac{\theta(L) - \theta(l)}{ln\,l}.$$

Y este es otro de los grandes pasos de Chebyshev porque m es la cantidad de primos en un intervalo, y esto nos lleva a entender más sobre la distribución de los primos. Además esto nos va a guiar sobre cómo tiene que ser L y l para que $m \geq 1$, es decir, para que por lo menos exista un primo entre esos límites.

De § 4. tenemos que

$$\theta(x) < \frac{6}{5}\,Ax - A\sqrt{x} + \frac{5}{4\,ln\,6}\,ln^2\,x + \frac{5}{2}\,ln\,x + 2$$

$$\theta(x) > Ax - \frac{12}{5}\,A\sqrt{x} - \frac{5}{8\,ln\,6}\,ln^2\,x - \frac{15}{4}\,ln\,x - 3,$$

y estas desigualdades son útiles para acotar a $\theta(L) - \theta(l)$.[6]

Entonces

$$\theta(L) - \theta(l) < A\left(\tfrac{6}{5}L - l\right) - A\left(\sqrt{L} - \tfrac{12}{5}\sqrt{l}\right) + \tfrac{5}{8ln\,6}\left(2ln^2L + ln^2l\right) + \tfrac{5}{4}\left(2lnL + 3lnl\right) + 5$$

y

$$\theta(L) - \theta(l) > A\left(L - \tfrac{6}{5}l\right) - A\left(\tfrac{12}{5}\sqrt{L} - \sqrt{l}\right) - \tfrac{5}{8ln\,6}\left(ln^2L + 2ln^2l\right) - \tfrac{5}{4}\left(3lnL + 2lnl\right) - 5,$$

y como

$$\frac{\theta(L) - \theta(l)}{ln\,L} < m$$

[6]Usaremos la propiedad que dice: si $a < b < c$ y $d < e < f$ entonces, $c-d < b-e < a-f$

Esto significa que existen k números primos entre L y l, y no sabemos como es k, pero queremos garantizar que $0 \leq k < m$. Y recordemos que estas desigualdades están construidas con base en x y $\theta(x)$.

Como queremos garantizar que por lo menos $m = 1$, entonces para el caso particular tomemos $k = 0$ y así podemos afirmar que por lo menos existe un número primo comprendido entre l y L.

Así, con $k = 0$

$$l = \frac{5}{6}\,L - 2L^{\frac{1}{2}} - \frac{25\,ln^2\,L}{16\,A\,ln\,6} - \frac{125\,ln\,L}{24\,A} - \frac{25}{6A}$$

nos indica que hay por lo menos k números primos entre l y L, y con esta igualdad podemos saber de manera aproximada la distribución de los números primos en esos límites.

Y aún más, si se toma

$$k = \frac{A\left(L - \frac{6}{5}l\right) - \frac{12}{5}A\sqrt{L} - \frac{5}{8ln\,6}\left(ln^2 L + 2ln^2 L\right) - \frac{5}{4}\left(3lnL + 2lnL\right) - 5}{ln\,L},$$

podemos asegurar que por lo menos existan k primos entre l y L, y es así porque con esta igualdad podemos establecer una cantidad k mínima de números primos, y con la l dada de manera independiente se establece la otra, aunque parece que es más sencillo establecer L y encontrar la l por la naturaleza de nuestra igualdad.

La igualdad no es muy exacta respecto a cuantos primos hay en el intervalo $[l, L]$, pero nos garantiza que podemos encontrar k primos, donde k es una cantidad que nosotros podemos establecer.

Entonces, de la igualdad anterior despejaremos l (es más fácil que L) y se obtiene

$$l = \frac{-klnL + AL - \frac{12}{5}A\sqrt{L} - \frac{15}{8ln6}ln^2 L - \frac{25}{4}lnL - 5}{A\frac{6}{5}}.$$

Para que sea más clara esta igualdad mostraremos un ejemplo:

Sea $L = 365$, entonces

$$l = \frac{-176 \cdot 9969 + 366 \cdot 2716 - 42 \cdot 2430 - 36 \cdot 4259 - 36 \cdot 8743 - 5}{1 \cdot 056}$$

entonces

$$m > \frac{A\left(L-\frac{6}{5}l\right)-A\left(\frac{12}{5}\sqrt{L}-\sqrt{l}\right)-\frac{5}{8ln\,6}\left(ln^2L+2ln^2l\right)-\frac{5}{4}\left(3lnL+2lnl\right)-5}{ln\,L}$$

además, como

$$\frac{\theta(L)-\theta(l)}{ln\,l} > m$$

entonces

$$m < \frac{A\left(\frac{6}{5}L-l\right)-A\left(\sqrt{L}-\frac{12}{5}\sqrt{l}\right)+\frac{5}{8ln\,6}\left(2ln^2L+ln^2l\right)+\frac{5}{4}\left(2lnL+3lnl\right)+5}{ln\,l}.$$

Ahora tenemos otros límites para m, pero aún no sabemos cómo son L y l, y nos interesa conocerlos pero con la característica que $m > 0$.

Por nuestros intereses supongamos que existen k números primos, y que además k satisface las condiciones necesarias para que se cumpla la desigualdad, y con esto inicia la busqueda de L y l. Así

$$k < \frac{A\left(L-\frac{6}{5}l\right)-A\left(\frac{12}{5}\sqrt{L}-\sqrt{l}\right)-\frac{5}{8ln\,6}\left(ln^2L+2ln^2l\right)-\frac{5}{4}\left(3lnL+2lnl\right)-5}{ln\,L}$$
$$< m$$

como $l < L$ entonces podemos afirmar que

$$\frac{A\left(\frac{6}{5}L-l\right)-A\left(\sqrt{L}-\frac{12}{5}\sqrt{l}\right)+\frac{5}{8ln\,6}\left(2ln^2L+ln^2l\right)+\frac{5}{4}\left(2lnL+3lnl\right)+5}{lnl} > m$$

$$> \frac{A\left(L-\frac{6}{5}l\right)-A\left(\frac{12}{5}\sqrt{L}-\sqrt{l}\right)-\frac{5}{8ln\,6}\left(ln^2L+2ln^2l\right)-\frac{5}{4}\left(3lnL+2lnl\right)-5}{lnL},$$

y en particular podemos suponer que

$$k = \frac{A\left(L-\frac{6}{5}l\right)-\frac{12}{5}A\sqrt{L}-\frac{5}{8ln\,6}\left(ln^2L+2ln^2L\right)-\frac{5}{4}\left(3lnL+2lnL\right)-5}{ln\,L},$$

y con las cuentas requeridas tenemos que

$$l = \frac{5}{6}\,L-2L^{\frac{1}{2}}-\frac{25\,ln^2\,L}{16\,A\,ln\,6}-\frac{5}{6A}\left(\frac{25}{4}+k\right)\,ln\,L-\frac{25}{6A}.$$

$$l = \frac{38 \cdot 7314}{1 \cdot 1056} = 35 \cdot 0320,$$

lo que estamos diciendo es que en el intervalo [35.032, 365] hay por lo menos 30 primos.

Y aunque no es una buena aproximación de distribución de primos, en intervalos grandes puede ser muy útil y podemos encontrar en que intervalo, dado uno de los límites hay cierta cantidad de primos.

Otro ejemplo

sea $L = 5,000,000$
$k = 100$,
entonces l=4,160,482.3669

es decir, entre 5,000,000 y 4,160,482.3669 existen por lo menos 100 números primos;

y un último ejemplo

sea $L = 100,000,000$
$k = 300$
entonces l=83,299,583.2020,

y si bien no indica una buena distribución de los primos, si nos está garantizando la existencia de por lo menos 300 primos en ese intervalo que ya es bastante grande.

Cuando se consideró a $k = 0$ expresamos a l en términos de L, pero ahora sólo falta caracterizar a L dentro de nuestros intereses.

El siguiente paso de Chebyshev es establecer qué pasa con $k = 0$ y con una L vinculada directamente con un entero de la forma $(2a - 2)$, y especificamente Chebyshev toma $a > 160$, y veremos más adelante porque lo hace.

Chebyshev toma

$$a < l < L < 2a - 2,$$

es decir,

$$a < l = \frac{5}{6} L - 2L^{\frac{1}{2}} - \frac{25\, ln^2 L}{16\, A\, ln\, 6} - \frac{125\, ln\, L}{24\, A} - \frac{25}{6A} < L < 2a - 2$$

y como nos interesa que L sea entero, entonces basta que $L = 2a - 3$, ya que cumple $L < 2a - 2$.

Ahora, si sustituimos en

$$a < \frac{5}{6}\,L - 2L^{\frac{1}{2}} - \frac{25\,ln^2\,L}{16\,A\,ln\,6} - \frac{125\,ln\,L}{24\,A} - \frac{25}{6A}$$

tenemos

$$a < \frac{5}{6}\,(2a\text{-}3) - 2(2a\text{-}3)^{\frac{1}{2}} - \frac{25\,ln^2\,(2a-3)}{16\,A\,ln\,6} - \frac{125\,ln\,(2a-3)}{24\,A} - \frac{25}{6A}$$

y $a > 160$ satisface la desigualdad, ya que con la desigualdad anterior tenemos una raíz cuadrada, por lo que si

$$x = \frac{5}{6}\,(2x\text{-}3) - 2(2x\text{-}3)^{\frac{1}{2}} - \frac{25\,ln^2\,(2x-3)}{16\,A\,ln\,6} - \frac{125\,ln\,(2x-3)}{24\,A} - \frac{25}{6A},$$

entonces tenemos 2 raíces, y una es mayor que otra. La raíz más grande queda comprendida entre 159 y 160, y es importante aclarar que esto no quiere decir que sólo se cumpla para $a > 160$. Para el caso en que $a < 160$ Chebychev sugiere que se puede verificar con tablas.[7]

Esta ecuación no la resolveremos aquí, sólo mencionaremos que seguramente la resolvió por aproximaciones, que era la herramienta de la epoca para este tipo de problemas.

Entonces a tiene que ser mayor que 160 para que se satisfaga

$$a < l = \frac{5}{6}\,L - 2L^{\frac{1}{2}} - \frac{25\,ln^2\,L}{16\,A\,ln\,6} - \frac{125\,ln\,L}{24\,A} - \frac{25}{6A} < L = 2a - 3 < 2a - 2.$$

Ya teníamos

$$\begin{aligned} 0 = k = &\frac{A\left(L - \frac{6}{5}l\right) - \frac{12}{5}A\sqrt{L} - \frac{5}{8ln\,6}\left(ln^2L + 2ln^2L\right) - \frac{5}{4}\left(3lnL + 2lnL\right) - 5}{ln\,L} \\ &< m \\ < &\frac{A\left(L - \frac{6}{5}l\right) - A\left(\frac{12}{5}\sqrt{L} - \sqrt{l}\right) - \frac{5}{8ln\,6}\left(ln^2L + 2ln^2l\right) - \frac{5}{4}\left(3lnL + 2lnl\right) - 5}{ln\,L} \end{aligned}$$

donde m es la cantidad de números primos entre l y L, y como $m > k$, y $k = 0$ satisface lo que necesitabamos, entonces con esto queda demostrado el postulado de

[7]Ver apéndice.

Bertrand, ya que por lo menos hay un número primo comprendido entre l y L que se generaliza en otros dos nuevos límites a y $2a-2$, y esto es muy importante, ya que

$$a < l < L < 2a - 2,$$

y este es un intervalo más pequeño, del que enuncia en el postulado. Finalmente lo que se tiene es que Chebyshev con su demostración minimiza un poco el intervalo enunciado en el postulado de Bertrand

2.3. Regresamos a las series

Se mencionó que la *Mémoire* de Chebyshev tenía como punto de inicio el estudio de series definidas en términos de números primos, así como determinar los primos existentes en ciertos intervalos. Ya sabemos cual fue la dirección que tomó respecto a los primos en intervalos, y en lo que corresponde a las series, él pretendía conocer la convergencia o divergencia de éstas, pero con la propiedad de que sólo se desarrollan en los primos. A estas series las denotaremos como $F(x)$, y además se pide que para toda x mayor que un número fijo, $\frac{F(x)}{lnx}$ sea decreciente. Así bajo estas características tomaremos sumas de la forma

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + F(11) + \cdots .$$

Para avanzar en esta dirección retomemos las cotas de m (primos en el intervalo l a L)

$$\frac{\theta(L) - \theta(l)}{ln\,L} < m < \frac{\theta(L) - \theta(l)}{ln\,l}$$

que son la base para la convergencia de las series de la forma $F(2)+F(3)+F(5)+F(7) + F(11) + \cdots$. También recordemos que

$$\theta(x) = ln\,(\prod_{2 \leq p_i \leq x} p_i),$$

y consideremos a $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \cdots, \alpha_n$ como los números primos comprendidos entre los límites l y L.

Ahora nombremos a $F(\alpha_1) + F(\alpha_2) + F(\alpha_3) + F(\alpha_4) + F(\alpha_5) + \cdots + F(\alpha_n)$ como U, y notemos que en particular

$F(\alpha_1) + F(\alpha_2) + F(\alpha_3) + F(\alpha_4) + F(\alpha_5) + \cdots = \frac{\theta(l) - \theta(l-1)}{ln\,l} F(l) + \frac{\theta(l+1) - \theta(l)}{ln\,(l+1)} F(l+1) + \frac{\theta(l+2) - \theta(l+1)}{ln\,(l+2)} F(l+2) + \cdots + \frac{\theta(L) - \theta(L-1)}{ln\,L} F(L),$

es decir,

$$U = \frac{\theta(l)-\theta(l\text{-}1)}{ln\, l}F(l)+\frac{\theta(l\text{+}1)-\theta(l)}{ln\,(l\text{+}1)}F(l\text{+}1)+\frac{\theta(l\text{+}2)-\theta(l\text{+}1)}{ln\,(l\text{+}2)}F(l\text{+}2)+\cdots+\frac{\theta(L)-\theta(L-1)}{ln\, L}F(L)$$

y esto es posible porque al considerar intervalos de números consecutivos, se obtiene que

$$\frac{\theta(x)-\theta(x\text{-}1)}{ln\, x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \textit{ compuesto} \\ 1 & \text{si } x \textit{ primo} \end{cases}$$

$$U = -\theta(l-1)\frac{F(l)}{ln\, l} + \left[\frac{F(l)}{ln\, l} - \frac{F(l\text{+}1)}{ln\,(l\text{+}1)}\right]\theta(l) + \left[\frac{F(l\text{+}1)}{ln\,(l\text{+}1)} - \frac{F(l\text{+}2)}{ln\,(l\text{+}2)}\right]\theta(l+1) + \cdots + \left[\frac{F(L)}{ln\, L} - \frac{F(L\text{+}1)}{ln\,(L\text{+}1)}\right]\theta(L) + \frac{F(L\text{+}1)}{ln(L\text{+}1)}\theta(L), \tag{2.7}$$

y ahora U está expresada como suma de funciones de la forma $\frac{F(x)}{lnx}$.

Véase que se trabaja con los límites *l-1* y *L+1*, y como ya se mencionó antes podemos suponer que los términos $\frac{F(x)}{lnx}$ son positivos y decrecientes, es decir, debemos de tomar una x suficientemente grande tal que $\frac{F(x)}{lnx}$ sea positiva y decreciente en el intervalo [*l-1*, *L+1*], con el primer término $\theta(l-1)$ negativo y los otros positivos.

En la sección § 4 teníamos las desigualdades

$$\begin{cases} \theta(x) < \frac{6}{5}\,Ax - A\sqrt{x} + \frac{5}{4\,ln\,6}\,ln^2 x + \frac{5}{2}\,ln\,x + 2 \\ \\ \theta(x) > Ax - \frac{12}{5}\,A\sqrt{x} - \frac{5}{8\,ln\,6}\,ln^2 x - \frac{15}{4}\,ln\,x - 3, \end{cases}$$

y para un manejo más comodo denotemos a la cota superior como $\theta_I(x)$ y la cota inferior como $\theta_{II}(x)$,

por lo tanto

$$\theta_{II}(x) < \theta(x) < \theta_I(x)$$

y

$$-\theta_{II}(x) > -\theta(x) > -\theta_I(x).$$

Si cada uno de los términos $\theta(l)$, $\theta(l+1)$, $\cdots$, $\theta(L)$, de la igualdad de U, es construido con las desigualdades anteriores, entonces de

$U = -\theta(l-1)\frac{F(l)}{ln\, l} + \left[\frac{F(l)}{ln\, l} - \frac{F(l+1)}{ln\,(l+1)}\right]\theta(l) + \left[\frac{F(l+1)}{ln\,(l+1)} - \frac{F(l+2)}{ln\,(l+2)}\right]\theta(l+1) + \cdots + \left[\frac{F(L)}{ln\, L} - \frac{F(L+1)}{ln\,(L+1)}\right]\theta(L) + \frac{F(L+1)}{ln(L+1)}\theta(L),$

se obtiene que

$U > -\theta_I(l-1)\frac{F(l)}{ln\, l} + \left[\frac{F(l)}{ln\, l} - \frac{F(l+1)}{ln\,(l+1)}\right]\theta_{II}(l) + \left[\frac{F(l+1)}{ln\,(l+1)} - \frac{F(l+2)}{ln\,(l+2)}\right]\theta_{II}(l+1) + \cdots + \left[\frac{F(L)}{ln\, L} - \frac{F(L+1)}{ln\,(L+1)}\right]\theta_{II}(L) + \frac{F(L+1)}{ln(L+1)}\theta_{II}(L),$

y como

$\theta(x_i) > \theta_{II}(x_i)$, para toda $i = l, l+1, \cdots, L$,

y $-\theta_I(l-1) < -\theta(l-1)$, entonces

$U < -\theta_{II}(l-1)\frac{F(l)}{ln\, l} + \left[\frac{F(l)}{ln\, l} - \frac{F(l+1)}{ln\, l+1}\right]\theta_I(l) + \left[\frac{F(l+1)}{ln\, l+1} - \frac{F(l+2)}{ln\, l+2}\right]\theta_I(l+1) + \cdots + \left[\frac{F(L)}{ln\, L} - \frac{F(L+1)}{ln\,(L+1)}\right]\theta_I(L) + \frac{F(L+1)}{ln(L+1)}\theta_I(L),$

considerando que $\theta(x_i) < \theta_I(x_i)$, para toda $i = l, l+1, \cdots, L$, y $-\theta_{II}(l-1) > -\theta(l-1)$.

De la primera desigualdad obtenemos que

$U > -\theta_I(l-1)\frac{F(l)}{ln\, l} + \frac{F(l)}{ln\, l}\theta_{II}(l) - \frac{F(l+1)}{ln\,(l+1)}\theta_{II}(l) + \frac{F(l+1)}{ln\,(l+1)}\theta_{II}(l+1) - \frac{F(l+2)}{ln\,(l+2)}\theta_{II}(l+1) + \cdots + \frac{F(L)}{ln\, L}\theta_{II}(L) - \frac{F(L+1)}{ln\,(L+1}\theta_{II}(L) + \frac{F(L+1)}{ln(L+1)}\theta_{II}(L),$

y si agregamos del lado derecho a $\theta_{II}(l-1)\frac{F(l)}{ln\, l} - \frac{F(l)}{ln\, l}\theta_{II}(l-1)$, ésta se conserva y por lo tanto

$U > \theta_{II}(l-1)\frac{F(l)}{ln\, l} - \theta_I(l-1)\frac{F(l)}{ln\, l} - \frac{F(l)}{ln\, l}\theta_{II}(l-1) + \frac{F(l)}{ln\, l}\theta_{II}(l) - \frac{F(l+1)}{ln\,(l+1)}\theta_{II}(l) + \frac{F(l+1)}{ln\,(l+1)}\theta_{II}(l+1) - \frac{F(l+2)}{ln\,(l+2)}\theta_{II}(l+1) + \cdots + \frac{F(L)}{ln\, L}\theta_{II}(L) - \frac{F(L+1)}{ln\,(L+1}\theta_{II}(L) + \frac{F(L+1)}{ln(L+1)}\theta_{II}(L),$

y por consiguiente

$U > \theta_{II}(l-1)\frac{F(l)}{logl} - \theta_I(l-1)\frac{F(l)}{logl} + F(l)\frac{\theta_{II}(l)-\theta_{II}(l-1)}{ln\, l} + F(l+1)\frac{\theta_{II}(l+1)-\theta_{II}(l)}{ln\,(l+1)} + \cdots + F(L)\frac{\theta_{II}(L)-\theta_{II}(L-1)}{ln\, L}.$

Finalmente se obtienen cotas para $U = F(\alpha_1) + (\alpha_2) + (\alpha_3) + \cdots + (\alpha_n)$.
Esta construcción de U y sus cotas nos ayudarán a demostrar el siguiente teorema.

Teorema. Sea $F(x)$ una función que a partir de cierta x sigue siendo positiva. La convergencia de la serie

$$\frac{F(2)}{ln2} + \frac{F(3)}{ln3} + \frac{F(5)}{ln5} + \frac{F(7)}{ln7} + \frac{F(11)}{ln11} + \cdots$$

es una condición necesaria y suficiente para que la serie

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + F(11) + F(13) + F(17) + \cdots$$

sea también convergente

Demostración.

Supongamos que l es un límite inferior de x a partir del que $F(x)$ conserva el signo positivo, también tenemos que $\frac{F(x)}{lnx}$ es decreciente y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ son los números primos comprendidos entre l y L.

Ahora nombramos con S a la suma de $F(x)$ con $x \leq L$ y x primo, entonces

$$S = F(2)+F(3)+F(5)+F(7)+F(11)+\cdots+F(\alpha_1)+F(\alpha_2)+\cdots+F(\alpha_{n-1})+F(\alpha_n)$$

o de manera equivalente

$$S = S_0 + F(\alpha_1) + F(\alpha_2) + \cdots + F(\alpha_{n-1}) + F(\alpha_n)$$

donde $S_0 = F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + F(11) + \cdots$.

Recordemos que

$$U = F(\alpha_1) + F(\alpha_2) + F(\alpha_3) + F(\alpha_4) + F(\alpha_5) + \cdots + F(\alpha_n),$$

pero esta igualdad sólo incluye a los primos comprendidos entre l y L, y S contiene más o igual número de primos que contiene U, y se debe a que contiene a todos los primos menores que L, es decir, contiene a los del intervalo y también a los primos menores que l.

Sabemos que

$$U > \theta_{II}(l-1)\frac{F(l)}{lnl} - \theta_I(l-1)\frac{F(l)}{lnl} + \sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_{II}(x)-\theta_{II}(x-1)}{lnx}$$

$$U < \theta_I(l-1)\frac{F(l)}{lnl} - \theta_{II}(l-1)\frac{F(l)}{lnl} + \sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_I(x)-\theta_I(x-1)}{lnx},$$

y si sumamos en ambas desigualdades $S_0 = F(2)+F(3)+F(5)+F(7)+F(11)+\cdots$, de ambos lados, obtenemos

$$U + S_0 > S_0 + \theta_{II}(l-1)\frac{F(l)}{lnl} - \theta_I(l-1)\frac{F(l)}{lnl} + \sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_{II}(x)-\theta_{II}(x-1)}{lnx}$$

$$U + S_0 < S_0 + \theta_I(l-1)\frac{F(l)}{lnl} - \theta_{II}(l-1)\frac{F(l)}{lnl} + \sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_I(x)-\theta_I(x-1)}{lnx}$$

pero $U + S_0 = S$, por lo tanto

$$\begin{cases} S > S_0 + \theta_{II}(l-1)\frac{F(l)}{lnl} - \theta_I(l-1)\frac{F(l)}{lnl} + \sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_{II}(x)-\theta_{II}(x-1)}{lnx} \\ \\ S < S_0 + \theta_I(l-1)\frac{F(l)}{lnl} - \theta_{II}(l-1)\frac{F(l)}{lnl} + \sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_I(x)-\theta_I(x-1)}{lnx}. \end{cases}$$

Estas desigualdades se cumplen para el caso en que las sumas

$$\sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_{II}(x)-\theta_{II}(x-1)}{lnx},$$

y

$$\sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_I(x)-\theta_I(x-1)}{lnx}$$

se manejen con $L = \infty$, y nos interesa ver cómo es $F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + F(11) + \cdots$.

Cuando L tiende a infinito tenemos dos casos, que la serie $F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + F(11) + \cdots$ sea finita o infinita.

i) si $F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + F(11) + \cdots$ es finita, entonces será convergente.

ii) si $F(2)+F(3)+F(5)+F(7)+F(11)+\cdots$ es infinita, entonces será divergente.

Recordemos cómo son $\theta_I(x)$ y $\theta_{II}(x)$

$$\theta_I(x) = \frac{6}{5}\,Ax - A\sqrt{x} + \frac{5}{4\,ln\,6}\,ln^2\,x + \frac{5}{2}\,ln\,x + 2$$
$$\theta_{II}(x) = Ax - \frac{12}{5}\,A\sqrt{x} - \frac{5}{8\,ln\,6}\,ln^2\,x - \frac{15}{4}\,ln\,x - 3.$$

Si sustituimos en

$$\sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_{II}(x)-\theta_{II}(x-1)}{lnx},\ \sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_{I}(x)-\theta_{I}(x-1)}{lnx}$$

se obtiene

$$\sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_{I}(x)-\theta_{I}(x-1)}{lnx} =$$

$$\textstyle\sum_{x=l}^{L} \frac{F(x)}{ln\,x}\left[\frac{6}{5}\,A - A\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right) + \frac{5}{4\,ln\,6}\left(ln^2\,x - ln^2\,(x-1)\right) + \frac{5}{2}\,(\,ln\,x - ln\,(x-1))\right],$$

$$\sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_{II}(x)-\theta_{II}(x-1)}{lnx} =$$

$$\textstyle\sum_{x=l}^{L} \frac{F(x)}{lnx}\left[A - \frac{12}{5}\,A\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right) - \frac{5}{8\,ln\,6}\,\left(ln^2\,x - ln^2\,(x-1)\right) - \frac{15}{4}\,\left(ln\,x - ln\,(x-1)\right)\right].$$

Nótese que los valores de las funciones

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-1},\ ln^2\,x - ln^2\,(x-1),\ ln\,x - ln\,(x-1)$$

se hacen infinitamente pequeños para x muy grande.

Así, concluimos que si

$$\sum_{x=l}^{\infty} \frac{F(x)}{lnx}$$

tiene un valor finito, entonces, las expresiones

$$\sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_I(x)-\theta_I(x-1)}{lnx}, \sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_{II}(x)-\theta_{II}(x-1)}{lnx}$$

también son finitas. De la misma forma, si $\sum_{x=l}^{L} \frac{F(x)}{lnx}$ es infinita, entonces

$$\sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_I(x)-\theta_I(x-1)}{lnx}, \sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_{II}(x)-\theta_{II}(x-1)}{lnx}$$

son infinitas, aclarando que esto sólo para el caso $L=\infty$.

El primer caso siempre se produce si la serie

$$\frac{F(2)}{ln2}+\frac{F(3)}{ln3}+\frac{F(5)}{ln5}+\frac{F(7)}{ln7}+\frac{F(11)}{ln11}+\cdots$$

es convergente. El segundo caso se produce si la serie

$$\frac{F(2)}{ln2}+\frac{F(3)}{ln3}+\frac{F(5)}{ln5}+\frac{F(7)}{ln7}+\frac{F(11)}{ln11}+\cdots$$

diverge. Con esto queda demostrado el teorema y nosotros podemos concluir que las series

$$\frac{1}{2ln2}+\frac{1}{3log3}+\frac{1}{5ln5}+\frac{1}{7ln7}+\frac{1}{11ln11}+\cdots$$

$$\frac{1}{2ln^2(ln2)}+\frac{1}{3ln^2(ln3)}+\frac{1}{5ln^2(ln5)}+\frac{1}{7ln^2(ln7)}+\frac{1}{11ln^2(ln11)}+\cdots$$

convergen, mientras que las series

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots$$

$$\frac{1}{ln(ln2)}+\frac{1}{ln(ln3)}+\frac{1}{ln(ln5)}+\frac{1}{ln(ln7)}+\frac{1}{ln(ln11)}+\frac{1}{ln(ln13)}+\cdots$$

divergen.

Ahora nos enfocaremos en las series de la forma

$$F(2)+F(3)+F(5)+F(7)+F(11)+\cdots$$

que son convergentes. Chebyshev afirma que podemos hacer una excelente aproximación del valor al que converge, y que esto es posible calculando la suma de sus primeros términos.

Para ver más claramente lo anterior, considérese a l un número entero, y a partir de él todos los valores de $\frac{F(x)}{lnx}$ son decrecientes y positivos, además tómese a α_0 como el primer primo mayor o igual que l, y a_n el último primo comprendido entre 2 y $l-1$, tomando L que tiende a ∞.

Retomemos a

$$S = F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + F(11) + \cdots + F(a_n) + F(\alpha_0) + F(\alpha_1) + \cdots$$

donde

$$S_0 = F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + F(11) + \cdots + F(a_n),$$

por lo tanto

$$S = S_0 + F(\alpha_0) + F(\alpha_1) + F(\alpha_2) + F(\alpha_3) + \cdots ,$$

y con $F(\alpha_0) + F(\alpha_1) + F(\alpha_2) + F(\alpha_3) + \cdots = U$, entonces

$$S = S_0 + U$$

Lo que nos interesa es aproximar U, y para esto recordemos que las cotas de U son

$$\begin{cases} U > \theta_{II}(l-1)\frac{F(l)}{lnl} - \theta_I(l-1)\frac{F(l)}{lnl} + \sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_{II}(x)-\theta_{II}(x-1)}{lnx} \\ \\ U < \theta_I(l-1)\frac{F(l)}{lnl} - \theta_{II}(l-1)\frac{F(l)}{lnl} + \sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_I(x)-\theta_I(x-1)}{lnx}, \end{cases}$$

y lo que Chebychev planteó en el artículo es que

$$U \approx \frac{\sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_{II}(x)-\theta_{II}(x-1)}{lnx} + \sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_I(x)-\theta_I(x-1)}{lnx}}{2}$$

es decir, el promedio de las sumas de los lados derechos de las desigualdades es el valor aproximado a U, entonces, el promedio de la diferencia es el límite del valor del error de la aproximado de U, y este límite será aún más pequeño que l.

Para aclarar un poco lo anterior desarrollamos un ejemplo que calcula el valor aproximado de una serie.

Sea la serie

$$\frac{1}{2ln2} + \frac{1}{3log3} + \frac{1}{5ln5} + \frac{1}{7ln7} + \frac{1}{11ln11} + \cdots$$

y tomemos el límite $l = 100$, y para que se cumpla el criterio tomamos $L = \infty$,

así

$$S_0 = \frac{1}{2ln2} + \frac{1}{3log3} + \frac{1}{5ln5} + \frac{1}{7ln7} + \frac{1}{11ln11} + \cdots + \frac{1}{97ln97}$$

pero

$$S = S_0 + U,$$

entonces

$$U = \frac{1}{101ln101} + \frac{1}{103ln103} + \frac{1}{107ln107} + \frac{1}{109ln109} + \cdots,$$

y calculando los primeros términos hasta el primo anterior a 100 obtenemos

S_0 =1.42. De las desigualdades de U

$$\begin{cases} U > \theta_{II}(l-1)\frac{F(l)}{lnl} - \theta_I(l-1)\frac{F(l)}{lnl} + \sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_{II}(x)-\theta_{II}(x-1)}{lnx} \\ \\ U < \theta_I(l-1)\frac{F(l)}{lnl} - \theta_{II}(l-1)\frac{F(l)}{lnl} + \sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_I(x)-\theta_I(x-1)}{lnx}, \end{cases}$$

con $l = 100$ y como $F(x) = \frac{1}{xlnx}$, entonces podemos sustituir a $F(x)$ en las desigualdades anteriores, y así obtenemos

$$\begin{cases} U > \frac{\theta_{II}(99)}{100ln^2 100} - \frac{\theta_I(99)}{100ln^2 100} + \sum_{x=100}^{\infty} \frac{\theta_{II}(x)-\theta_{II}(x-1)}{xln^2 x} > 0 \cdot 14 \\ \\ U < \frac{\theta_I(99)}{100ln^2 l00} - \frac{\theta_{II}(99)}{100ln^2 100} + \sum_{x=100}^{\infty} \frac{\theta_I(x)-\theta_I(x-1)}{xln^2 x} < 0 \cdot 28, \end{cases}$$

entonces por lo planteado anteriormente

$$U \approx \frac{0 \cdot 14 + 0 \cdot 28}{2} = 0 \cdot 21$$

y el margen de error es

$$\frac{0 \cdot 28 - 0 \cdot 14}{2} = 0 \cdot 07$$

por lo que

$$1 \cdot 42 + 0 \cdot 21 = 1 \cdot 63$$

es el valor aproximado de la serie

$$\frac{1}{2ln2} + \frac{1}{3log3} + \frac{1}{5ln5} + \frac{1}{7ln7} + \frac{1}{11ln11} + \cdots.$$

La totalidad de los números primos dentro de los límites indicados l y L, se deduce como un caso particular del valor de la serie

$$F(\alpha_0) + F(\alpha_1) + F(\alpha_2) + F(\alpha_3) + \cdots + F(\alpha_n).$$

Si consideramos a la función constante

$$F(x) = 1,$$

entonces la suma

$$F(\alpha_0) + F(\alpha_1) + F(\alpha_2) + F(\alpha_3) + \cdots + F(\alpha_n)$$

se reducirá a tantas unidades como términos de la serie de números primos

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n,$$

donde las desigualdades

$$\begin{cases} U > \theta_{II}(l-1)\frac{F(l)}{lnl} - \theta_I(l-1)\frac{F(l)}{lnl} + \sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_{II}(x)-\theta_{II}(x-1)}{lnx} \\ \\ U < \theta_I(l-1)\frac{F(l)}{lnl} - \theta_{II}(l-1)\frac{F(l)}{lnl} + \sum_{x=l}^{L} F(x)\frac{\theta_I(x)-\theta_I(x-1)}{lnx} \end{cases}$$

determinarán los limites entre los cuales quedan comprendidos todos los números primos α_i, y estos nuevos límites se encuentran a su vez entre l y L.

Y para el caso particular de $l = 2$ y como $F(x) = 1$, entonces se tiene que

$$\frac{\theta_{II}(1)}{ln2} - \frac{\theta_I(1)}{ln2} + \sum_{x=2}^{L} \frac{\theta_{II}(x) - \theta_{II}(x-1)}{lnx}$$

$$\frac{\theta_I(1)}{ln2} - \frac{\theta_{II}(1)}{ln2} + \sum_{x=2}^{L} \frac{\theta_I(x) - \theta_I(x-1)}{lnx},$$

que son límites entre los cuales quedan todos los números primos comprendidos entre 2 y L, o dicho de otra manera, todos los números primos que no superan a L.

Al calcular el promedio de las expresiones anteriores, es decir,

$$\frac{\sum_{x=2}^{L} \frac{\theta_{II}(x)-\theta_{II}(x-1)}{lnx} + \sum_{x=2}^{L} \frac{\theta_I(x)-\theta_I(x-1)}{lnx}}{2}$$

tendremos el valor aproximado de todos los números primos que no superan a L, y el error de este valor no puede superar a

$$\frac{2\frac{\theta_I(1)}{ln2} - 2\frac{\theta_{II}(1)}{ln2} + \sum_{x=2}^{L}\frac{\theta_I(x)-\theta_I(x-1)}{lnx} - \sum_{x=2}^{L}\frac{\theta_{II}(x)-\theta_{II}(x-1)}{lnx}}{2}.$$

Chebyshev menciona que con una serie de cuentas se logra descubrir que la relación de la media respecto a la diferencia es $\frac{1}{11}$ en comparación con la media de la suma, y esto para $L = \infty$.
Para un valor muy grande de L esta relación será menor que $\frac{1}{10}$, y si se calcula con base en nuestras fórmulas, entonces la cantidad de los números primos que obtenemos que no excedan un límite determinado (y grande), tendrá un error inferior a una decima parte de la cantidad buscada.

La *Mémoire* de los números primos de Chebyshev es un gran paso significativo en la teoría de los números, esta contiene un resultado preciso sobre la distribución de los primos, y en la teoría de los números este tema presenta una especial dificultad.

En 1881 el matemático James Joseph Sylvester publicó en la revista American Journal of Mathematics,[8], el artículo *On Tchebycheff´s theory of the totality of the prime numbers comprised within given limits* en el demostró el postulado de Bertrand con base en la demostración del matemático Joseph Alfred Serret. Cuando plantea los objetivos de ese artículo señala que más que una demostración es un complemento del artículo de Serret, y en el mismo artículo Sylvester señala que su aportación consiste en una aproximación a traves de un número indefinido de pasos. Con esto Sylvester nos indica que no es un proceso corto.

Sylvester analizó a Chebyshev y pretendió hacer una mejor precisión de las cotas para calcular los primos en un intervalo y acotar a $\theta(x)$, (véase pág. 36) y para llegar a eso tenían que modificar algunos elementos del trabajo de Chebyshev.

Inició proponiendo que

$$V(x) = \Psi(x) - \Psi(\frac{x}{6}) + \Psi(\frac{x}{7}) - \Psi(\frac{x}{10}),$$

diferente a Chebyshev que uso las cotas

$$\psi(x) > T(x) + T(\frac{x}{30}) - T(\frac{x}{2}) - T(\frac{x}{3}) - T(\frac{x}{5})$$

[8]1881,American Journal of Mathematics, IV, Pág. 230-247, revista de la cual es el fundador

$$\psi(x) - \psi(\frac{x}{6}) < T(x) + T(\frac{x}{30}) - T(\frac{x}{2}) - T(\frac{x}{3}) - T(\frac{x}{5}).$$

El procedimiento de Sylvester sí logra mejorar la precisión de las cotas de Chebyshev, pero su demostración es menos clara y más larga. Recordemos que la precisión de las cotas de Chebyshev ya era bastante buena, pero con el trabajo de Sylvester, éstas mejoraron en la razón de la aproximación del error en cuatro centésimos menos que la original, y sin duda no era despresiable, aunque Sylvester al inicio del artículo señala que es una pequeña pero no importante contribución.

Algo que podemos tomar de Sylvester para esta tesis es que él proporciona un mejor argumento de por qué Chebyshev considera a

$$T(x) - T(\frac{1}{2}) - T(\frac{1}{3}) - T(\frac{1}{5}) + -T(\frac{1}{30}),$$

Sylvester simplemente expresa

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{30} = 0.$$

Capítulo 3

Demostración de Ramanujan del postulado de Bertrand

El gran matemático hindú Srinivasa Ramanujan murió en 1919, pero un año antes de este suceso publicó[1] una demostración sobresaliente del postulado de Bertrand. Esta demostración está llena de conexiones sorprendentes, él tomó elementos de otra demostración y los vinculó de una manera que sólo su genialidad podía hacer. La demostración es breve (sólo dos páginas), pero esta extensión tan corta se debe a que se sube a la maquinaria que previamente había construido Chebyshev.

Es importante señalar que sería injusto decir que la demostración de Ramanujan es mejor que la Chebyshev, y se debe a que el objetivo del segundo no era demostrar sólo el postulado, recordemos que su *Mémoire* nos lleva a temas de series, pero principalmente a encontrar cotas para

$$\theta(x) = Ln\left(\prod_{2\leq p_i\leq x} p_i\right),$$

que posteriormente serían de utilidad para acotar la cantidad de primos en un intervalo fijo, y después sucedio que el postulado de Bertrand quedó como una aplicación de lo anterior. Ahora, por el lado de Ramanujan demostrar el postulado sí es el objetivo de su artículo y por eso va directamente a construir los elementos que requiere, entonces esta puede ser una de las razones (además de su ingenio) por las que su demostración es más breve.

[1] "A proof of Bertrand's postulate". Journal of the Indian Mathematical Society, XI, 1919, pág 181-182.

3.1. La demostración

Ramanujan señala que una de sus fuentes es el trabajo de Georg Hermann Landau, pero a la vez menciona que ese trabajo es esencialmente el de Chebyshev. Además, Ramanujan modifica la versión anterior del postulado para enunciarlo de la forma que hoy lo conocemos, es decir, que si $x \geq 1$ entonces por lo menos hay un primo p tal que $x < p \leq 2x$.

Ramanujan inició la demostración retomando tres elementos fundamentales de la *Mémoire* de Chebyshev, estos son $\theta(x)$, $\psi(x)$ y $T(x)$, donde

$$\theta(x) = ln \prod_{2 \leq p_i \leq x} p_i \tag{3.1}$$

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta(\sqrt[2]{x}) + \theta(\sqrt[3]{x}) + \theta(\sqrt[4]{x}) + ... \tag{3.2}$$

y

$$T(x) = ln(\lfloor x \rfloor !) = \psi(x) + \psi(\frac{x}{2}) + \psi(\frac{x}{3}) + \psi(\frac{x}{4}) + ... \tag{3.3}$$

Y de (3.2) y (3.3) se deduce que[2]

$$\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) = \theta(x) - \left[\theta(\sqrt{x}) - \theta(\sqrt[3]{x})\right] - \left[\theta(\sqrt[4]{x}) - \theta(\sqrt[5]{x})\right] - \cdots$$

$$ln(\lfloor x \rfloor !) - 2ln(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor !) = \psi(x) - [\psi(\frac{x}{2}) - \psi(\frac{x}{3})] - [\psi(\frac{x}{4}) - \psi(\frac{x}{5})] - \cdots ,$$

y de esto propone directamente que

$$\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) \leq \theta(x) \leq \psi(x) \tag{3.4}$$

y

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \leq ln(\lfloor x \rfloor !) - 2ln\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor !\right) \leq \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right).$$

Tomemos el extremo derecho de la desigualdad

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right), \tag{3.5}$$

porque es importante detenernos en esta parte, y aunque es el inicio de la demostración sí queremos señalar que con estas desigualdades Ramanujan ya construyó el corazón de la prueba. Lo que hará es acotar (3.5), con una cota inferior, que expresa en términos de x; y también construir una cota superior, pero ésta quedará en términos de $\theta(x)$ y x. Con estos elementos llegará a que $\theta(2x) - \theta(x) > 0$, o lo

[2]Ver capítulo 2, parte de esta igualdad ya fue abordada por Chebyshev.

que es lo mismo, el logaritmo del producto de los primos en el intervalo x y $2x$ es mayor que cero, lo que nos lleva a que por lo menos hay un primo en el intervalo.

Ahora sigamos con la demostración y procedamos a usar la aproximación de Stirling, aquella para el $ln(n!)$

$$ln\,(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)\approx ln\sqrt{2\pi}+n\,ln\,n+\frac{1}{2}\,ln\,n-n$$

y la aplicaremos en

$$ln(\lfloor x\rfloor !)-2ln(\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor !)$$

para llegar a

$$ln(\lfloor x\rfloor !)-2ln(\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor !)\approx -ln\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2}lnx+(x+1)ln2,$$

pero como ya se mencionó que estamos usando a $x\geq 1$, entonces

$$-ln\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2}lnx+(x+1)ln2<\frac{3}{4}x\ si\ x\geq 1 \tag{3.6}$$

y además

$$-ln\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2}lnx+(x+1)ln2>\frac{2}{3}x\ si\ x>300. \tag{3.7}$$

Para ver de una manera más clara que las desigualdades anteriores se cumplen, tomemos $x=300$ y $x=301$ respectivamente, por lo tanto

$$-ln\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2}ln300+(301)ln2=204\cdot 8664<\frac{3}{4}(300)=225$$

y

$$-ln\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2}ln301+(302)ln2=205\cdot 5579>\frac{2}{3}301=200\cdot 6666.$$

Ahora, como

$$\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{2}\right)\leq ln(\lfloor x\rfloor !)-2ln\left(\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor !\right)$$

entonces, de (3.6) se tiene que

$\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{2}\right)<\frac{3}{4}x$ si $x\geq 1$,

y como

$$ln(\lfloor x\rfloor !)-2ln\left(\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor !\right)\leq\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{2}\right)+\psi\left(\frac{x}{3}\right)$$

entonces, de (3.7)

$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) > \frac{2}{3}x$ si $x > 300$.

Regresando a

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{3}{4}x,$$

y sustituyendo x por $\frac{1}{2}x,\ \frac{1}{4}x,\ \frac{1}{8}x,\ \frac{1}{16}x,\ \cdots$ obtenemos

$$\begin{gathered}
\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{3}{4}x \\
\psi(\frac{x}{2}) - \psi\left(\frac{x}{4}\right) < \frac{3}{8}x \\
\psi(\frac{x}{4}) - \psi\left(\frac{x}{8}\right) < \frac{3}{16}x \\
\psi(\frac{x}{8}) - \psi\left(\frac{x}{16}\right) < \frac{3}{32}x \\
\psi(\frac{x}{16}) - \psi\left(\frac{x}{32}\right) < \frac{3}{64}x \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\psi(\frac{x}{2^n}) - \psi\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) < \frac{3}{2^{n+2}}x, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}$$

y después de sumar estas desigualdades se obtiene

$$\psi(x) < \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}x + \frac{3}{16}x + \frac{3}{32}x + \frac{3}{64}x + \cdots + \frac{3}{2^{n+2}}x + \cdots .$$

Como la serie

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\frac{3}{32}+\frac{3}{64}+\cdots+\frac{3}{2^{n+2}}+\cdots &= \frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots\right) \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{3}{4}(2) = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

por lo tanto $\psi(x) < \frac{3}{2}x$, si $x \geq 1$.

Ahora regresemos a la desigualdad (3.4)

$$\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) \leq \theta(x) \leq \psi(x)$$

y sumemosle $2\psi(\sqrt{x}) - \psi(\frac{x}{2}) + \psi(\frac{x}{3})$ a la parte $\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) \leq \theta(x)$, obteniendo

$$\psi(x) - \psi(\frac{x}{2}) + \psi(\frac{x}{3}) \leq \theta(x) + 2\psi(\sqrt{x}) - \psi(\frac{x}{2}) + \psi(\frac{x}{3}),$$

y como $\theta(x) \leq \psi(x)$ entonces $-\theta(\frac{x}{2}) \geq -\psi(\frac{x}{2})$, por lo tanto podemos sustituir $-\psi(\frac{x}{2})$ por $-\theta(\frac{x}{2})$, la desigualdad se conserva y así se llega a que

$$\psi(x) - \psi(\frac{x}{2}) + \psi(\frac{x}{3}) \leq \theta(x) + 2\psi(\sqrt{x}) - \theta(\frac{x}{2}) + \psi(\frac{x}{3}).$$

Y como $\psi(x) < \frac{3}{2}x$ si $x \geq 1$, entonces

$$\theta(x) + 2\psi(\sqrt{x}) - \theta(\frac{x}{2}) + \psi(\frac{x}{3}) < \theta(x) - \theta(\frac{x}{2}) + \frac{2x}{9} + \frac{4}{3}\sqrt{x}$$

pero

$$\theta(x) - \theta(\frac{x}{2}) + \frac{2x}{9} + \frac{4}{3}\sqrt{x} < \theta(x) - \theta(\frac{x}{2}) + \frac{x}{2} + 3\sqrt{x},$$

entonces se puede afirmar que

$$\psi(x) - \psi(\frac{x}{2}) + \psi(\frac{x}{3}) < \theta(x) - \theta(\frac{x}{2}) + \frac{x}{2} + 3\sqrt{x}. \tag{3.8}$$

Esta parte es muy interesante porque aquí estamos llegando a la cota de $\psi(x) - \psi(\frac{x}{2}) + \psi(\frac{x}{3})$ que mencionamos al inicio, que tiene la caracteristica de que sólo depende de $\theta(x)$ y x. Por otro lado ya se tenía que para $x > 300$

$$\psi(x) - \psi(\frac{x}{2}) + \psi(\frac{x}{3}) > \frac{2}{3}x,$$

y de (3.8) se obtiene

$$\theta(x) - \theta(\frac{x}{2}) + \frac{x}{2} - 3\sqrt{x} > \frac{2}{3}x,$$

y si $x > 300$, entonces

$$\theta(x) - \theta(\frac{x}{2}) > \frac{1}{6}x - 3\sqrt{x}, \tag{3.9}$$

pero $\frac{1}{6}x - 3\sqrt{x} \geq 0$, si $x \geq 324$, y esto pasa ya que si $\frac{x}{6} \geq 3\sqrt{x}$, entonces $x \geq 18\sqrt{x}$ y $\sqrt{x} \geq 18$, es decir $x \geq 324$.

Ahora recordemos que Chebyshev definió a la función $\theta(x)$ como

$$\theta(x) = ln \prod_{2 \leq p_i \leq x} p_i$$

entonces

$$\theta(2x) = ln \prod_{2 \leq p_i \leq 2x} p_i,$$

por lo tanto, si

$$\theta(2x) - \theta(x) > 0$$

entonces por lo menos hay un primo entre x y $2x$. Por otro lado ya logramos ver de (3.9) que $\theta(x) - \theta(\frac{x}{2}) > \frac{x}{6} - 3\sqrt{x} \geq 0$ si $x \geq 324$, por lo tanto

$$\theta(2x) - \theta(x) > 0,$$

si $x \geq 162$,

es decir, si $x \geq 162$, entonces por lo menos hay un primo entre x y $2x$ y para los anteriores a 162 se pueden verificar en las tablas.

Es importante notar que Chebyshev concluyó que el postulado de Bertrand es válido para los valores $a > 160$, y que los otros se podían verificar en las tablas. Pero tomemos en cuenta que Chebyshev consideraba la existencia de un primo en el intervalo comprendido entre n y $2n - 4$ mientras que Ramanujan demuestra la existencia de por lo menos un primo en el intervalo n y $2n$ para $n \geq 162$, que es quivalente a lo de Chebyshev.

Otro detalle importante es que Chebyshev llegó a una enorme y abrumadora ecuación, con la que deduce que $a > 160$; por su parte Ramanujan encuentra la correspondiente de una manera impresionantemente directa, pero recordemos que toma parte del entramado de Chebyshev que fue creado para fines parecídos pero no iguales.

No podemos concluir sin antes mencionar que al principio de la demostración Ramanujan introduce la función Gamma que es denotada por $\Gamma(z)$, esta función es importante ya que extiende el concepto de factorial a los números complejos.

Si la parte real del número complejo z es positivo, entonces la función Gamma es

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

y esta integral converge absolutamente, por otro lado esta integral puede ser extendida a todo el plano complejo excepto a los enteros negativos y al cero.

Ahora bien si z es un entero positivo al que nombramos como n, entonces

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$

es decir, existe una relación de esta función con el factorial. Definida la función y junto con las igualdades y desigualdades anteriores, entonces podemos afirmar que

$$ln\,\Gamma(x) - 2ln\,\Gamma(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}) \leq ln(\lfloor x \rfloor !) - 2ln(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor !) \leq ln\,\Gamma(x+1) - 2ln\,\Gamma(\frac{x}{2}+\frac{3}{2})$$

y como

$$ln\,\Gamma(x) - 2ln\,\Gamma(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}) = ln((x-1)!) - 2ln((\frac{x}{2}-\frac{1}{2})!)$$

y

$$ln\,\Gamma(x+1) - 2ln\,\Gamma(\frac{x}{2}+\frac{3}{2}) = ln((x)!) - 2ln((\frac{x}{2}+\frac{1}{2})!)$$

entonces

$$ln(\lfloor x \rfloor !) - 2ln(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor !)$$

queda acotada por estas dos expresiones, por lo tanto la desigualdad se cumple. Esta función es importante, pero en la demostración de Ramanujan se omite.

Casi como un anexo a la demostración del postulado, Ramanujan trabajó la distribución de los números primos. Construyó una función que permite ver por lo menos cuantos primos hay entre n y $2n-2$.

Él denotó como $\pi(x)$ al número de primos menores o iguales que x, así

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right)$$

es el número de primos que hay entre x y $\frac{1}{2}x$. Por otro lado, se tenía que

$$\theta(x) - \theta(\frac{x}{2}) = ln \prod_{\frac{1}{2}x \leq p_i \leq x} p_i,$$

o de forma equivalente

$$\theta(x) - \theta(\frac{x}{2}) = ln(p_1) + ln(p_2) + \cdots + ln(p_r),$$

donde $\frac{1}{2}x \leq p_i \leq x$, para $i = 1, 2, \cdots, r$. Entonces podemos afirmar que

$$\theta(x) - \theta(\frac{x}{2}) \leq \left(\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right)\right) lnx,$$

y se debe al suponer que entre x y $\frac{x}{2}$ están los primos $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_r$, lo que significa que entre x y $\frac{x}{2}$ hay r números primos, y a su vez $r = \pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right)$, además como ln es una función creciente, entonces

$$ln(p_i) \leq ln(x)$$

para todo $\frac{1}{2}x \leq p_i \leq x$, $i = 1, 2, \cdots, r$.

Y de lo anterior

$$ln(p_1) + ln(p_2) + ln(p_3) + \cdots + (p_r) \leq r(ln(x))$$

lo cual prueba la afirmación.

Ahora, como $\theta(x) - \theta\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{1}{6}x - 3\sqrt{x}$ si $x > 324$, entonces por transitividad

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{1}{lnx}\left(\frac{1}{6}x - 3\sqrt{x}\right)$$

si $x > 324$.

Cabe señalar que Ramanujan dice que se cumple para $x > 300$, pero aún para $x = 301$ no pasa que $\frac{1}{6}x - 3\sqrt{x} > 0$, de hecho es mayor a algo negativo, y eso no nos muestra que por lo menos exista un número primo entre 150.5 y 301.
En los primeros pasos Ramanujan usaba $x > 164$ y como ahora nos interesa trabajar con x y $\frac{x}{2}$, entonces

$\frac{1}{6}x - 3\sqrt{x} > 0$ si y solo si $x > 324$.

Un ejemplo se muestra a continuación

sea $x = 500$, entonces

$$\pi(500) - \pi(250) > \frac{1}{ln500}\left(\frac{500}{6} - 3\sqrt{500}\right) = 2 \cdot 6177$$

es decir, por lo menos hay tres primos entre 500 y 250

Ahora bien si $x = 1000$, entonces

$$\pi(1000) - \pi(500) > \frac{1}{ln1000}\left(\frac{1000}{6} - 3\sqrt{1000}\right) = 10 \cdot 3939$$

que nos indica que por lo menos entre 1000 y 500 hay 11 primos.

Para terminar, podemos reflexionar en que Chebyshev tiene su gran mérito, ya que fue el primero en demostrar el postulado, y fue a través de definir y construir justamente lo que necesitaba de una manera increíble, pero Ramanujan captó la esencia de esos elementos matemáticos, que son los mismos que usó para su demostración.

Capítulo 4

Paul Erdös y su primera publicación.

En los capítulos anteriores nos centramos en el estudio de las demostraciones de Chebyshev y Ramanujan, y como ya se vio ambas conservan un hilo conductor que es el uso de las funciones $\theta(x)$, $\psi(x)$ y $T(x)$, y fue con éstas que Ramanujan configuró una demostración diferente a la del matemático ruso.

Lo usual sería que otros interesados en el tema retomaran lo que ellos hicieron, y a partir de ciertos elementos que ahí se emplearon para las demostraciones, ellos tratarán de proponer otras rutas menos complicadas para justificar el postulado. Empero, esta manera de proceder en diversas ocasiones no es la aceptada por las mentes más brillantes de las ciencias, pues sucede que si los elementos centrales de una teoría predeterminan un límite a la simplificación, entonces esto motiva a que se transite por otra ruta teórica. Quien adoptó otro camino y por lo mismo no puede faltar en este estudio es el gran matemático húngaro Paul Erdös.

Erdös nació en 1913 y desde su juventud mostró un gran interés por los números primos, al respecto se conocen anécdotas escolares[1] -que publicó Hoffman en su libro biográfico - que exhiben, en esos años, su preferencia por estos temas sobre casi cualquier otro. En 1931, durante su primer año en la universidad, sorprendió a los matemáticos húngaros cuando presentó otra demostración del postulado de Bertrand. Él consideraba que la de Chebyshev era demasiado extensa y fue que publicó la suya en la revista *Acta Scientiarum. Mathematicarum* (Szeged).[2]

[1] Véase [Hoffman 2000].

[2] Erdös, P. *Beweis eines Satzes von Tschebyschef.* Acta Scientiarum. Mathematicarum (Szeged) 5, 1930-32, 194-198.

Esta demostración tiene la característica de que no es de alguna manera una extensión de los trabajos presentados por Chebyshev y Ramanujan. Encontramos que en los tres casos usan el producto de los primos en ciertos intervalos, o recurren al cálculo de que el factor primo p aparece $\sum \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor$ veces en $n!$; pero estos elementos no indican que con ellos se tendió un puente de influencia hasta llegar a Erdös. Consideramos que los dos elementos matemáticos comunes en los tres no tienen la relevancia suficiente para pensar que Erdös retomó las demostraciones de ellos -como sí sucedió entre Ramanujan y Chebyshev-. Erdös tomó la ruta de trabajar con el coeficiente binomial $\binom{2n}{n}$ y exhibir que este no podía ser muy pequeño.

Haciendo referencia al título.[3]

4.1. La demostración del postulado.

Lo primero que distingue a Erdos es que enunció el postulado para los reales y ya no sólo para enteros.

Propuso lo siguiente:

Para todo real $x \geq 1$ existe un primo en el intervalo x y $2x$.

Para la demostración consideró al coeficiente binomial

$$\binom{2n}{n} \quad = \frac{2n!}{n!n!},$$

y lo que interesa es construir cotas para $\binom{2n}{n}$ que nos acerquen a su valor.

Para $n \geq 5$ podemos proponer que

$$\frac{1}{2n}(2^{2n}) < \binom{2n}{n} < \frac{1}{4}(2^{2n}),$$

y para justificar esto, primero veamos que

$$\frac{1}{2n}(2^{2n}) < \binom{2n}{n}.$$

[3]Consideramos que para el trabajo de tesis era adecuado exponer la demostración de Erdös, en primer lugar porque es casi inaccesible a menos que se lea directamente en el original, lo cual hicimos para la tesis, y por otro lado porque hacemos un análisis estructural de ella y de sus posibles semejanzas con las demostraciones anteriores.

Sabemos que

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!n!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n \cdot (n+1) \cdots 2n \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdots n \cdot n}$$

entonces

$$2n\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!n!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n \cdot (n+1) \cdots 2n \cdot 2n}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdots n \cdot n},$$

nótese que hay $2n$ factores, y el más pequeño es 2, por lo tanto

$$2n\binom{2n}{n} > 2^{2n}$$

entonces

$$\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n}}{2n}. \tag{4.1}$$

Falta demostrar que $\binom{2n}{n} < \frac{1}{4}2^{2n}$, y en este caso se trabajará con inducción.

Así, para $n = 5$

$$\binom{2n}{n} = 252 < 256 = \frac{1}{4}2^{10}.$$

Ahora, supongamos que se cumple para $n = k$, entonces

$$\binom{2k}{k} < \frac{1}{4}2^{2k},$$

y el paso siguiente es ver que se cumple para $n = k + 1$. Para llegar a esto se multiplica la desigualdad anterior por $\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)(k+1)}$, es decir,

$$\binom{2k}{k}\frac{(2k+1)}{(k+1)}\frac{(2k+2)}{(k+1)} < \frac{1}{4}2^{2k}\frac{(2k+1)}{(k+1)}\frac{(2k+2)}{(k+1)}$$

Nótese que el lado izquierdo es $\binom{2(k+1)}{k+1}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\binom{2(k+1)}{k+1} &< \frac{1}{4}2^{2k}\frac{(2k+1)}{(k+1)} \cdot 2 \\ &= \frac{1}{4}2^{2k+1}\frac{(2k+1)}{(k+1)} \\ &< \frac{1}{4}2^{2k+2}\end{aligned}$$

a esta desigualdad se llega si se considera que $\frac{(2k+1)}{(k+1)} = \frac{2+\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}}$ tiende a 2 cuando k es grande, por lo tanto

$$\binom{2(k+1)}{k+1} < \frac{1}{4}2^{2(k+1)}.$$

Ahora pasamos a construir más elementos que serán requeridos para tratar de proponer otra estimación de $\binom{2n}{n}$. Para esto haremos lo siguiente:

- Considérese un intervalo de la forma $(10, b] = A$, donde b es mayor o igual que 10; enseguida se construyen intervalos que cubran todo A, pero cada uno de estos inicia en una x y termina en $2x$: Los intervalos se determinan de la siguiente manera: sea

$$b \geq 10,\ a_1 = \left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil,\ a_2 = \left\lceil \frac{b}{2^2} \right\rceil, a_3 = \left\lceil \frac{b}{2^3} \right\rceil, \cdots, a_k = \left\lceil \frac{b}{2^k} \right\rceil, \cdots$$

donde

$$\left\lceil \frac{b}{2^i} \right\rceil$$

es el entero inmediato mayor que

$$\frac{b}{2^i},$$

por lo tanto

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \cdots \geq a_k \cdots$$

y de esto se tiene que

$$a_k < \frac{b}{2^k} + 1 = 2\left(\frac{b}{2^{k+1}}\right) + 1 \leq 2a_{k+1} + 1$$

entonces

$$a_k \leq a_{k+1}.$$

Acto seguido, considérese a m como el mayor entero (inmediato) tal que $a_m \geq 5$, y por lo tanto $a_{m+1} < 5$, y con esto $2a_{m+1} < 10$.

Por otro lado se sabe que $a_1 \geq \frac{b}{2}$ y en consecuencia $2a_1 \geq b$, entonces los intervalos

a_m a $2a_m$
a_{m-1} a $2a_{m-1}$
$\cdots\cdots$
$\cdots\cdots$

a_1 a $2a_1$

cubren totalmente al intervalo 10 a b.

Ahora pasamos a reconocer el producto de los primos entre 10 y b, con base en los intervalos a_i a $2a_i$, esto es

$$\prod_{10<p\leq b} p \leq \prod_{a_1<p\leq 2a_1} p \leq \prod_{a_2<p\leq 2a_2} p \leq \cdots \leq \prod_{a_m<p\leq 2a_m} p.$$

De manera general se tiene para cada uno de los factores de la derecha, usando (4.1), lo siguiente:

$$\prod_{n<p\leq 2n} p < \binom{2n}{n} < \frac{1}{2^2} 2^n = 2^{2(n-1)}.$$

Por lo tanto, el producto de los primos entre 10 y b queda acotado así:

$$\prod_{10<p\leq b} p < 2^{2(a_1-1)} \cdot 2^{2(a_2-1)} \cdot 2^{2(a_3-1)} \cdots 2^{2(a_m-1)}$$

$$= 2^{2(a_1-1+a_2-1+a_3-1+\cdots+a_m-1)}$$

pero $a_1 - 1 < \frac{b}{2}, a_2 - 1 < \frac{b}{2^2}, \cdots a_m - 1 < \frac{b}{2^m}$, entonces

$$\prod_{10<p\leq b} p < 2^{2(\frac{b}{2}+\frac{b}{2^2}+\cdots,+\frac{b}{2^m})}$$

pero $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^m}$ tiende a 1, entonces

$$\prod_{10<p\leq b} p < 4^b = 2^{2b} \tag{4.2}$$

• El siguiente paso es ubicar los intervalos entre 1 y $2n$, donde se encuentran los primos que dividen a $\binom{2n}{n}$, esto es necesario para la estimación del mismo coeficiente binomial. La ruta para ubicarlos inicia con el teorema de Lagrange[4] que nos lleva a que $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ contiene al factor primo p exactamente

$$\sum_{k\geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$

[4] Aquel que dice **El número $n!$ contiene al factor primo p exactamente $\sum \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ veces. Véase Apéndice C para ver el teorema junto con la demostración.**

veces, además cada sumando no puede ser mayor que uno, y se debe a que

$$\left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor\right) < \frac{2n}{p^k} - 2\left(\frac{n}{p^k} - 1\right) = 2,$$

y como el sumando es un entero, entonces es uno.
Además, los sumandos se anulan siempre que $p^k > 2n$, de aquí que si $p > \sqrt{2n}$, entonces $p^2 > 2n$, que nos indica que p^2 no divide a $\binom{2n}{n}$, y en particular los primos $p > \sqrt{2n}$ aparecen en $\binom{2n}{n}$ no más de una vez.
Por otro lado cuando $n \geq 3$, entonces los primos p en el intervalo

$$\frac{2}{3}n < p \leq n$$

no dividen a $\binom{2n}{n}$, y es porque si $2n < 3p \leq 3n$, entonces $3p > 2n$, y sólo p y $2p$, y ningún otro múltiplo de p pueden dividir a $(2n)!$

• De lo anterior, y con base en la descomposición en primos de $\binom{2n}{n}$ retomamos nuevamente el camino de acotar al coeficiente $\binom{2n}{n}$, que es el corazón de la demostración de Erdös. Así, se puede asumir que:

$$\binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} p^r \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p,$$

pero $p^r \leq 2n$, entonces

$$\binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} (2n) \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p$$

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}} \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p$$

y de (4.1) se tiene que

$$2^{2n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}+1} \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p \cdot$$

Ahora, para $n \geq 50$ se tiene que $2n \geq 100$, entonces $\sqrt{2n} \geq 10$, entonces usaremos (4.2) que dice: $\prod_{10 < p \leq b} p < 2^{2b}$, para obtener que

$$\prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p < 2^{2(\frac{2}{3}n)} = 2^{\frac{4}{3}n},$$

entonces

$$2^{2n} < (2n)^{\sqrt{2n}+1} \cdot 2^{\frac{4}{3}n} \cdot \prod_{n<p\leq 2n} p.$$

Y el paso importante es que si consideramos que no hay primos entre n y $2n$, entonces

$$2^{2n} < (2n)^{\sqrt{2n}+1} \cdot 2^{\frac{4}{3}n}$$

o lo que es lo mismo

$$2^{\frac{2}{3}n} < (2n)^{\sqrt{2n}+1} \tag{4.3}$$

y esta última desigualdad no es valida para n suficientemente grande, veamos por ejemplo que para $n = 5000$, entonces

$2^{\frac{2}{3}5000}$ =2.7121x$10^{1003} > (10000)^{\sqrt{10000}+1} =$ 1x10^{404},

lo cual es una contradicción, y ésta se dio al suponer que no hay primos entre n y $2n$, por lo que podemos concluir que por lo menos existe un número primo entre n y $2n$.

4.2. Otra vía

Con lo anterior se termina la demostración de Erdös, pero agregamos esta parte que muestra que se puede concluir la contradicción de Erdös por otra vía.
Desde el inicio se consideró el intervalo comprendido entre n y $2n$, pero si se ajusta el proceso de la demostración anterior al intervalo $\frac{n}{2}$ y n, en lugar de (4.3) obtendríamos

$$2^{\frac{2n}{3}} < (2n)^{\sqrt{\frac{n}{2}}},$$

y con esta desigualdad también podemos ver que se llega a una contradicción cuando suponemos que entre un número y su doble no existe un número primo, veamos porque.

Aplicando *Logaritmo natural* de ambos lados a la desigualdad $2^{\frac{2n}{3}} < (2n)^{\sqrt{\frac{n}{2}}}$ obtenemos

$$\frac{2n}{3}Ln(2) < \sqrt{\frac{n}{2}}Ln(2n),$$

y si multiplicamos por $\sqrt{\frac{n}{2}}\frac{3(2)}{n}$ de ambos lados entonces

$$\frac{3(2)}{n}\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{2n}{3}Ln(2) < \frac{3(2)}{n}\sqrt{\frac{n}{2}}\sqrt{\frac{n}{2}}Ln(2n)$$

por lo tanto,
$$\sqrt{8n}Ln2 - 3Ln(2n) < 0,$$

Ahora, consideramos la función
$$f(x) = \sqrt{8x}Ln2 - 3Ln(2x)$$
que está definida para $x > 0$, esta misma función la podemos ver como
$$f(x) = 2\sqrt{2}\sqrt{x}Ln2 - 3Ln(2x),$$
y su deriviada es
$$f'(x) = \frac{\sqrt{2x}Ln2 - 3}{x}.$$
Si x es un entero, entonces para $x \geq 10$ la derivada de $f(x)$ es positiva, ya que
$$\sqrt{2}\sqrt{x}ln(2) > 3$$
$$\sqrt{x} > \frac{3}{\sqrt{2}Ln(2)}$$
entonces
$$x > \frac{9}{2ln^2(2)} = 9 \cdot 36.$$
Lo que se tiene es que a partir determinada x la función $f(x)$ es creciente y que después de cierto valor $f(x) = \sqrt{8x}Ln2 - 3Ln(2x)$ ya no será menor que cero, lo que lleva a una contradicción, así, $\sqrt{8n}Ln2 - 3Ln(2n)$ no se cumple para todo $n \geq 128$, por lo tanto el postulado de Bertrand ha quedado demostrado para $n \geq 128$ y para los menores que 128 se puede ver cada caso usando tablas.

Ya pudimos ver que Paul Erdös visualizó un camino diferente y muy ingenioso, sólo pensó en extraer las características del coeficiente binomial $\binom{2n}{n}$, y mostrar que como éste es un entero, entonces si no existen primos entre n y $2n$, se llegaría a una contradicción respecto a la magnitud mínima que puede tener el coeficiente.

Conclusión

A través de los cuatro capítulos se expuso que los primos sí se pueden presentar en intervalos bien definidos, y así de esta manera desde el siglo XIX se logró dar un paso más para comprender cómo se da la distribución de los primos.

Se expuso que el objetivo de Bertrand al enunciar lo que hoy se conoce como postulado, nunca fue adentrarse en demostrar un resultado sobre primos, y por esta razón ahora ya sabemos que no podemos esperar que él nos presentara una demostración de su propuesta. Pero el que sí lo hizo fue Chebyshev en un extenso artículo donde pudimos comprender que su finalidad no era demostrar sólo la propuesta de Bertrand, es más, ésta quedó como una aplicación de un resultado importante que correspondía a construir cotas para la cantidad de primos que se encuentran en intervalos cualesquiera.

Del artículo de Ramanujan vimos cómo tomó las funciones logarítmicas de Chebyshev y se enfiló directamente a demostrar el postulado de Bertrand, y no como en el caso de Chebyshev que fue una aplicación. Aquí pudimos encontrar el hilo conductor entre ambos para llegar a una nueva demostración verdaderamente sorprendente.

Con Paul Erdös hallamos un camino diferente, él siguió la ruta de trabajar con las cotas de los coeficientes binomiales, posiblemente de la manera como lo propuso Catalán. Aquí podemos ver que las bases que dejó Erdös son las que actualmente se están usando para demostrar la generalización de Sierpinski, del postulado de Bertrand.

Apéndice A

Una demostración reciente

Tengamos en cuenta que lo expuesto son las principales y primeras demostraciones del postulado de Bertrand, pero no son las únicas, actualmente hay más demostraciones que usan otro tipo de herramientas matemáticas, y mencionaremos por lo menos una.

Primero mencionaremos el problema del matemático polaco W. Sierpinski, que asegura que: *Para todo natural* $n \geq 2$ *y* $k \leq n$ *por lo menos hay un primo en el intervalo* $[kn, (k+1)n]$.
Si $k = 1$, entonces tenemos el postulado de Bertrand.
Para $k = 2$, fue demostrado en 2006 por el matemático M. El Bachraoni, esta demostración no la presentamos en esta tesis, pero sí la usaremos para demostrar a Bertrand.[1]

Ahora se expondrá la demostración del postulado de Bertrand del matemático Rumano Neculai Stanciu. Esta demostración es posterior al 2006, es corta y muy sencilla y además presenta la demostración de dos maneras.
La demostración de Neculai toma como base el problema de Sierpinski, además usaremos otros teoremas, que son los siguientes

Teorema 1. Para todo natural $n \geq 2$ hay un primo entre $[2n, 3n]$

Teorema 2. si $n \geq 1$ entonces existe un primo p tal que $n < p < \frac{3(n+1)}{2}$.
Demostración

[1]La demostración completa se puede ver en [El Bachraoui 2006] y sin duda que su razonamiento esta inspirado en el estudio de los factores primos de los coeficientes binomiales que presenta Erdös en 1931.

si $n = 1$ pasa que $1 < p < 3$, tenemos al primo $p = 2$

si $n = 2$, entonces $p = 3$.

Ahora, si n es par, entonces es de la forma $2k$, y usando el teorema de M. El Bachraoni tenemos que $n = 2k < p < 3k < \frac{3(2k+1)}{2} = \frac{3(n+1)}{2}$, entonces existe un primo p entre n y $\frac{3(n+1)}{2}$.

Si n impar, n es de la forma $2k+1$, y podemos ver que $n = 2k+1 < 2k+2 = 2(k+1) < p < 3(k+1) = \frac{3(n+1)}{2}$, y también se cumple.

Teorema 3. Si se cumple el teorema 2, entonces se cumple el postulado de Bertrand.

tenemos que $n < p < \frac{3(n+1)}{2}$ para $n \geq 1$, pero $\frac{3(n+1)}{2} < 2n$ si y solo si $n > 3$ por lo cual

$$n < p < 2n$$

si $n > 3$

Teorema 4. Si se cumple el teorema 1, entonces se cumple el postulado de Bertrand.

Caso 1. si n par, entonces n es de la forma $n = 2k$, pero $n = 2k < p < 3k < 4k = 2n$

Caso 2. si n impar, entonces n es de la forma $n = 2k+1$, pero $n = 2k+1 < 2k+2 = 2(k+1) < p < 3(k+1) < 4k+2 = 2(2k+1) = 2n$.

Y así el postulado de Bertrand ha sido demostrado una vez más.

Por último hay que agregar que cuando M. El Bachraoni demostró que para todo natural $n \geq 2$ hay un primo entre $[2n, 3n]$, fue otro gran avance, y parecería que es equivalente al postulado de Bertrand, y cuando Neculai demostró el postulado parece que sólo está ajustando el caso de $k = 2$ a $k = 1$.

Apéndice B

Primos en intervalos n y $2n-2$

n	2n-2	primos entre n y 2n-2
4	6	5
5	8	7
6	10	7
7	12	11
8	14	11, 13
9	16	11, 13
10	18	11, 13, 17
11	20	13, 17, 19
12	22	13, 17, 19
13	24	17, 19, 23
14	26	17, 19, 23
15	28	17, 19, 23
16	30	17, 19, 23, 29
17	32	19, 23, 29, 31
18	34	19, 23, 29, 31
19	36	23, 29, 31
20	38	23, 29, 31, 37
21	40	23, 29, 31, 37
22	42	23, 29, 31, 37, 41
23	44	29, 31, 37, 41, 43
24	46	29, 31, 37, 41, 43
25	48	29, 31, 37, 41, 43, 47
26	50	29, 31, 37, 41, 43, 47
27	52	29, 31, 37, 41, 43, 47
28	54	29, 31, 37, 41, 43, 47, 53
29	56	31, 37, 41, 43, 47, 53
30	58	31, 37, 41, 43, 47, 53
31	60	37, 41, 43, 47, 53, 59
32	62	37, 41, 43, 47, 53, 59, 61
33	64	37, 41, 43, 47, 53, 59, 61
34	66	37, 41, 43, 47, 53, 59, 61
35	68	37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67

n	2n-2	primos entre n y 2n-2
36	70	37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67
37	72	41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71
38	74	41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73
39	76	41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73
40	78	41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73
41	80	43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79
42	82	43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79
43	84	47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83
44	86	47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83
45	88	47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83
46	90	47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89
47	92	53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89
48	94	53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89
49	96	53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89
50	98	53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97
51	100	53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97
52	102	53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101
53	104	59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103
54	106	59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101
55	108	59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107
56	110	59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109
57	112	59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109
58	114	59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113
59	116	61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113
60	118	59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113
61	120	67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113
62	122	67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113
63	124	67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113
64	126	67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113
65	128	67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127
66	130	67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127
67	132	71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131
68	134	71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131
69	136	71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131
70	138	71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137
71	140	73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139
72	142	73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139
73	144	79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139
74	146	79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139
75	148	79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139
76	150	79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149
77	152	79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151
78	154	79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151
79	156	83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151
80	158	83, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157
81	160	83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157
82	162	83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157
83	164	89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163
84	166	89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163
85	168	89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167
86	170	89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167
87	172	89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167
88	174	89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173
89	176	97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173
90	178	97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173

n	2n-2	primos entre n y 2n-2
91	180	97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179
92	182	97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181
93	184	97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181
94	186	97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181
95	188	97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181
96	190	97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181
97	192	101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191
98	194	101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193
99	196	101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193
100	198	101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197
101	200	103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199
102	202	103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199
103	204	107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199
104	206	107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199
105	208	107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199
106	210	107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199
107	212	109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211
108	214	109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211
109	216	113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211
110	218	113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211
111	220	113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157 ,163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211
112	222	113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211
113	224	127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223
114	226	127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223
115	228	127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227
116	230	127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229
117	232	127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229
118	234	127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233
119	236	127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233
120	238	127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233
121	240	127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239
122	242	127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241
123	244	127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241
124	246	127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241
125	248	127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241
126	250	127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241
127	252	131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251
128	254	131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241
129	256	131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251
130	258	131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257
131	260	137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257
132	262	137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257
133	264	137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263
134	266	137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263
135	268	137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263
136	270	137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269
137	272	139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271
138	274	139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271
139	276	149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271
140	278	149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277
141	280	149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277
142	282	149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281
143	284	149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283

n	2n-2	primos entre n y
144	286	149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 28
145	288	149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 28
146	290	149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 28
147	292	149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 28
148	294	149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 28
149	296	149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 28
150	298	151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 28
151	300	157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 28
152	302	157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 28
153	304	157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 28
154	306	157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 28
155	308	157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 28
156	310	157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 29
157	312	163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 30
158	314	163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 31
159	316	163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 31
160	318	163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 31

Apéndice C

Teorema

Si p es primo, entonces $\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n}{p^i}\right\rfloor$ es el exponente de p en la factorización en primos de $n!$.

Demostración
Si $p > n$, entonces p no aparece en la factorización de $n!$.
Si $p \leq n$, entonces se tiene $\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor$ enteros en el conjunto $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ que son divisibles por p, estos son

$$p, 2p, 3p, \cdots, \left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor p.$$

De estos enteros, $\left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor$ son a la vez divisibles por p, estos son

$$p^2, 2p^2, 3p^2, \cdots, \left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor p^2,$$

y así se tiene que de estos enteros $\left\lfloor\frac{n}{p^3}\right\rfloor$ son divisibles por p.

Después de un proceso finito se tiene que el total de veces que p divide a los números del conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$ en $\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n}{p^i}\right\rfloor$, y esta es la suma que da lugar al exponente de p en la factorización en primos de $n!$.

Bibliografía

[1] Aigner, Martin; Ziegler, Günter. 2009. Proofs from THE BOOK (4th ed.). Berlin, New York: Springer-Verlag.

[2] Bertrand, M. Joseph. Mémoire de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qué elle renferme. Journal de L'école Royale Polytechnique. Paris, 1844, p. 123-140.

[3] Chebyshev, Pafnuty. Mémoire sur les nombres premiers. 1852, p. 49-67. Poing, 2004.

[4] Erdös, P. Beweis eines Satzes von Tschebyschef. Acta Scientiarum. Mathematicarum (Szeged) 5 1930-32), 194-198.

[5] Hoffman, Paul. 2000. El hombre que sólo amaba los números. La historia de Paul Erdös y la búsqueda de lo verdad matemática. Barcelona, Editorial Granica.

[6] M. El Bachraoui. Primes in the interval [2n,3n], int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 1, 2006, no. 13, 617-621.

[7] Ramanujan, Srinivasa Aiyangar. A Proof of Bertrand´s Postulate. Journal of the Indian Mathematical Society, XI. 1919, p.181-182.

[8] Sylvester, James Joseph. On Tchebycheff´s theory of the totality of the prime numbers comprised within given limits. American Journal of Mathematics, IV. 1881, p. 230-247

[9] Sylvester, James Joseph. Messenger of Mathematics, XXI. 1892, p.1-19 y 87-120.