



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

# **POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

## **FACULTAD DE CIENCIAS**

### **ECUACIÓN DE FOKKER-PLANCK Y SISTEMAS DE REACCIÓN-DIFUSIÓN**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS**

**P R E S E N T A**

**GERARDO CAMACHO DE LA ROSA**

**DIRECTOR DE LA TESINA: DR. PABLO PADILLA LONGORIA**

**MÉXICO, D.F.**

**AGOSTO,2012**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice

1. Introducción .....	1
1.1. Ecuación de Fokker-Planck .....	2
Un enfoque desde la mecánica estadística .....	5
1.2. Sistemas de reacción-difusión .....	7
Patrones de Turing .....	7
Sistemas de reacción-difusión en dominios crecientes y con curvatura ....	11
2. Ecuación de Fokker-Planck: construcción del modelo .....	12
2.1. Dominio fijo .....	12
2.2. Dominio creciente y con curvatura .....	16
Una dimensión .....	16
3. Consideraciones finales .....	21
Bibliografía .....	22

# 1. Introducción

En la *Introducción a La Dialéctica de la Naturaleza* F. Engels (1875) realiza un esbozo de la historia de la ciencia hasta ese momento. Señala, de forma crítica, que las Ciencias Naturales en el periodo del Renacimiento a la primera mitad del siglo XVIII, elaboraron una *peculiar* concepción del mundo, en la que el punto de vista más importante es la idea de la *inmutabilidad absoluta de la naturaleza*. Según esta idea, *la naturaleza, independientemente de la forma en que hubiese nacido, una vez presente permanecía siempre inmutable [...] las especies vegetales y animales habían sido establecidas de una vez y para siempre, cada individuo siempre producía otros iguales a él*. Engels mantenía una opinión contraria a esta idea, sin dejar de reconocer el desarrollo científico en ese periodo. Fundamentó su crítica a la *inmutabilidad absoluta de la naturaleza* influenciado por los nuevos descubrimientos de la época, desde los estudios de Lamarck hasta la reciente (para ese momento) teoría de la evolución de Darwin. Apuntó que con la primera célula *se obtuvo la base para el desarrollo morfológico de todo el mundo orgánico; lo primero que se desarrolló, [...], fueron innumerables especies de protistas acelulares y celulares que fueron diferenciándose hasta formar las primeras plantas y los primeros animales [...]* También el hombre surge por la diferenciación, y no sólo como individuo desarrollándose a partir de un simple óvulo hasta formar el organismo más complejo que produce la naturaleza, sino también en el sentido histórico. En un lenguaje, hoy antiguo, Engels aborda el concepto de diferenciación celular. Durante ésta, las células, de ser todas iguales, se especializan y van a formar parte de los órganos y sistemas del individuo, teniendo entonces funciones tanto diferentes como específicas (véase [17]). El proceso de diferenciación es clave en algunos aspectos de la morfogénesis, que se ocupa del origen de las formas y patrones en la naturaleza, sean éstos en los seres vivos o en la materia inanimada.

La no *inmutabilidad absoluta* de la naturaleza es evidente cuando se aprecia la diversidad de formas y patrones que en ella se presentan. La dinamicidad de la naturaleza ha dado pauta a preguntas en la ciencia, algunas de ellas son: ¿Cómo y por qué surgen patrones en la naturaleza? ¿Cuáles son los mecanismos que hacen posible el surgimiento de estructuras espacialmente ordenadas en la naturaleza?

Los intentos por responder este tipo de preguntas han sido varios. Uno de los más novedosos fue el modelo planteado por Turing en 1952, sus resultados son considerados hoy como base para explicar algunos mecanismos de formación de patrones. Los patrones que surgen en sistemas de Turing, descritos por ecuaciones de reacción-difusión, son manchas o rayas. Sin embargo, dependiendo de las condiciones iniciales, de contorno, la forma y el crecimiento del dominio, otros tipos de patrones pueden ser generados (véanse [5],[20]). Existe además un gran interés en conocer cómo y cuándo se generan patrones específicos. Recientemente en [5] se ha establecido un criterio para determinar el tipo de estructuras espaciales (manchas o rayas) generadas en sistemas de reacción-difusión para un dominio plano y fijo. En la construcción del criterio es necesario considerar la naturaleza estocástica de los procesos de reacción-difusión, para esto se requiere un análisis de la ecuación Fokker-Planck asociada al sistema de reacción-difusión original (véase [31]).

Considerando la importancia que tiene la dinámica del dominio de los sistemas de reacción-difusión en el surgimiento de patrones (véanse [7],[8],[11],[20]), en el presente trabajo se hace un recuento del material teórico sobre los sistemas de reacción-difusión y las ecuaciones de Fokker-Planck, con el objetivo de construir una ecuación de Fokker-Planck en un dominio unidimensional con curvatura y creciente. Un propósito posterior es abonar en la investigación y generalización de criterios como el planteado en [5].

## 1.1. Ecuación de Fokker-Planck

Es posible estudiar algunos sistemas físicos de carácter estocástico<sup>1</sup> definiendo modelos discretos o continuos. Para la descripción macroscópica con modelos continuos es frecuente el uso de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que dirigen el comportamiento de dicho sistema. En algunos casos estas ecuaciones son del tipo Fokker-Planck, la aplicación más conocida de esta ecuación es la que le dieron Adriaan Fokker y Max Planck para describir el movimiento browniano (véanse [19],[20]).

El movimiento browniano (MB) debe su nombre al botánico inglés Robert Brown, quien en 1827, al suspender unos pequeños granos de polen en agua observó que éstos presentaban un movimiento irregular. Demostró además que el fenómeno estaba presente en cualquier suspensión de partículas finas de vidrio y minerales, por lo que descartó cualquier origen orgánico de este movimiento. La primera explicación satisfactoria del MB la dio Einstein en 1905, la cual se abordará con más detalle posteriormente, otra explicación alternativa fue aportada de manera independiente por Smoluchowski (véanse [9],[18],[21]). El estudio del MB revela las fluctuaciones estadísticas que ocurren dentro de un sistema en equilibrio térmico.

La descripción de la interacción de una partícula de masa  $m$ , inmersa en un líquido a temperatura absoluta  $T$ , con los grados de libertad del líquido que lo rodea, es muy complicada. Para observar lo anterior, consideremos que el centro de masa de dicha partícula al tiempo  $t$  está designado por  $x(t)$ , su velocidad por  $v = dx/dt$  y que el efecto de todos los grados de libertad se expresa mediante una fuerza neta efectiva  $F(t)$  que actúa sobre la partícula. Si además la partícula interactúa con otras fuerzas externas, tales como la gravedad o las de origen electromagnético, a través de una fuerza denotada por  $\mathcal{F}(t)$ , entonces la segunda ley de Newton puede ser escrita como

$$m \frac{dv}{dt} = F(t) + \mathcal{F}(t). \quad (1)$$

$F(t)$  es una función que fluctúa rápidamente en el tiempo y varía de forma irregular, de hecho no se puede especificar la dependencia explícita de  $F(t)$  en  $t$ . Al considerar un ensamble<sup>2</sup> de muchas partículas similares y el medio que las rodea, para cada dupla (partícula y medio que la rodea) resulta que  $F(t)$  es una función aleatoria de  $t$ . En este sentido la descripción completa de un sistema de partículas con MB requiere de la solución de todas las ecuaciones microscópicas del sistema. Como en general no es posible hacer esto, es necesario utilizar una descripción estocástica, es decir, describir el sistema por sus variables macroscópicas que fluctúan en un camino estocástico. Este tipo de análisis conduce a una ecuación de movimiento (tipo Fokker-Planck) para la función de distribución de las fluctuaciones en las variables macroscópicas que en el enfoque determinista se desprecian (véase [13],[21]).

El año de 1905 ha sido catalogado como el *annus marabilis* de Albert Einstein, que presenció la irrupción del joven físico de tan sólo 26 años en la ciencia. Ese año publicó cinco artículos en *Annalen der Physik*, la revista de física alemana más importante del momento. En uno de estos trabajos, de nombre “*Sobre el movimiento de pequeñas partículas suspendidas en líquidos estacionarios requerido por la teoría cinética molecular del calor*”, dio una explicación satisfactoria al problema del MB. La explicación de Einstein, en esencia, es una combinación de un proceso estocástico elemental (conocido como camino aleatorio) con la distribución de Maxwell-Boltzmann. Sus ideas pueden resumirse de

---

<sup>1</sup>Por ejemplo el comportamiento de un gas o los procesos de difusión

<sup>2</sup>Un ensamble, en física estadística, es un conjunto hipotético de sistemas termodinámicos de características similares que permite realizar un análisis estadístico de dicho conjunto. Este concepto fue propuesto por J. W. Gibbs en 1879. En el contexto del presente trabajo, es conveniente imaginar un ensamble como un conjunto muy grande de sistemas idénticos (por definir) y en equilibrio térmico (véanse [9],[21]).

la siguiente manera: si una partícula en un fluido sin fricción colisiona con una molécula del fluido, entonces la velocidad de la partícula cambia; sin embargo, si el líquido es muy viscoso, el cambio en la velocidad se disipa rápidamente y el resultado neto de un impacto es un cambio en el desplazamiento de la partícula. Así, Einstein asumió que el efecto acumulativo de colisiones produce saltos aleatorios en la posición de una partícula browniana, es decir, la partícula realiza una especie de camino aleatorio. Considerando los saltos en el camino, lo más pequeños posible, obtuvo una ecuación diferencial parcial para la distribución de densidad de probabilidad del desplazamiento en una dimensión. A partir de su solución, Einstein, fue capaz de demostrar que el desplazamiento cuadrático medio de una partícula browniana aumentaba de forma lineal con el tiempo, lo que fue verificado por Jean Perrin en 1908<sup>3</sup>.

El razonamiento de Einstein, es muy claro y elegante; conviene hacer un esbozo de su trabajo. Dos hipótesis destacan en el modelo de Einstein para el problema del movimiento browniano:

- i) El movimiento es resultado de los frecuentes impactos sobre los granos de polen de las moléculas del líquido.
- ii) El movimiento de estas moléculas es tan complicado que sus efectos sobre los granos de polen sólo puede ser descrito probabilísticamente en términos de la frecuencia estadística de impactos independientes.

Einstein supuso además que cada partícula presentaba un movimiento independiente del movimiento de otras partículas y que los movimientos entre una y otra partícula en diferentes intervalos de tiempo son procesos independientes cuando los intervalos de tiempo no son elegidos muy pequeños.

Antes de continuar ejemplifiquemos un camino aleatorio. Supongamos que una persona, lista para caminar, inicialmente se encuentra en la dirección norte-sur. Antes del primer paso y en los siguientes, arroja una moneda al aire. Si cada vez que sale cara da un paso en la dirección sureste y cada vez que sale cruz al suroeste, entonces una persona que observa el movimiento desde lo alto de un edificio observará una trayectoria compleja. En el presente ejemplo, un evento o suceso, está representado por el paso de la persona y el resultado del suceso es la posición final. Además existe cierta probabilidad de que ocurra uno u otro resultado. En general, cada suceso puede generar dos o más resultados. Si en lugar de considerar una moneda que defina la trayectoria, se utiliza un dado, tendremos seis direcciones en las que puede avanzar la persona. Haciendo la analogía del ejemplo con el MB, la persona jugaría el papel de la partícula browniana. Cuando Einstein supuso la independencia de los procesos, estaba considerando que los resultados observados (desplazamientos de las partículas) en cada suceso son independientes entre sí, es decir, al arrojar la moneda entre uno y otro paso, el resultado de uno no influye en el siguiente: son estadísticamente independientes.

Siguiendo con la reconstrucción del modelo matemático de Einstein, es necesario introducir un intervalo de tiempo  $\tau$  muy pequeño en comparación con los intervalos de tiempo observables, pero lo suficientemente grande para que el movimiento de una partícula al tiempo  $t$  sea independiente de su movimiento al tiempo  $t \pm \tau$ .

Consideremos un total de  $n$  partículas suspendidas en un líquido. En un intervalo de tiempo  $\tau$ , las  $X - \text{coordenadas}$  individuales de las partículas sufren un incremento  $\Delta$ , donde el valor de  $\Delta$  para cada partícula es diferente. En el lenguaje matemático moderno,  $\Delta$  sería una variable aleatoria. Esta cantidad puede tomar cualquier valor de un conjunto específico respetando cierta *ley de frecuencia*, dicho de otra forma, una frecuencia relativa específica o probabilidad; el número  $dn$  de partículas que

---

<sup>3</sup>El contenido expuesto en este párrafo y los posteriores tiene como principal fuente [18].

experimentan un cambio entre  $\Delta$  y  $\Delta + d\Delta$  puede ser expresado por una ecuación de la forma

$$dn = n\phi(\Delta)d\Delta,$$

donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta)d\Delta = 1$$

y  $\phi$  es diferente de cero sólo para valores muy pequeños de  $\Delta$ , es decir, la probabilidad de que una partícula dé un salto mayor es nula. Debido a que los saltos son resultado de las colisiones de las moléculas del fluido viscoso con la partícula, un desplazamiento mayor supondría que existió una colisión inicial que desplazó a la partícula de forma considerable, pero en el intervalo de tiempo  $\tau$ , la partícula no colisionó con más moléculas, lo cual le permitió recorrer mayor camino. Para que esto ocurra, la densidad de las moléculas debe ser baja, es decir, un fluido no viscoso, que no es el caso del MB.

La función  $\phi$  además debe satisfacer la condición  $\phi(\Delta) = \phi(-\Delta)$ , esto ya que un incremento positivo o negativo es equiprobable, en otras palabras, se trata de un camino aleatorio imparcial. Enseguida, se hace la suposición de que el número de partículas  $\nu$  por unidad de volumen depende sólo de  $x$  y  $t$ , es decir,  $\nu = f(x, t)$ . Es posible calcular la distribución de partículas al tiempo  $t + \tau$  a partir de la distribución al tiempo  $t$ . A partir de la definición de la función  $\phi$  es fácil encontrar el número de partículas que al tiempo  $t + \tau$  se encuentran entre dos planos perpendiculares al *eje*  $x$  y pasan a través de los puntos  $x$  y  $x + dx$  respectivamente, se obtiene

$$f(x, t + \tau)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \Delta, t)\phi(\Delta)d\Delta dx.$$

Si se considera que la función  $f$  es de clase  $C^2$ , como  $\tau$  es muy pequeño, entonces al desarrollar  $f(x, t + \tau)$  en su serie de Taylor de primer orden se tiene

$$f(x, t + \tau) = f(x, t) + \tau \frac{\partial}{\partial t} f + \theta_1(\tau^2),$$

y además, al desarrollar  $f(x + \Delta, t)$  en su serie de Taylor de orden 2 para  $\Delta$  se obtiene

$$f(x + \Delta, t) = f(x, t) + \Delta \frac{\partial}{\partial x} f + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \theta_2(|\Delta|^3)$$

Lo anterior es usado en la integral para obtener

$$f + \tau \frac{\partial}{\partial t} f = f \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta)d\Delta + \frac{\partial}{\partial x} f \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\phi(\Delta)d\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2} \phi(\Delta)d\Delta + \dots$$

Como  $\phi(\Delta) = \phi(-\Delta)$  el segundo, cuarto, etcétera, término del lado derecho de la expresión anterior desaparecen. Al considerar la siguiente igualdad

$$\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2} \phi(\Delta)d\Delta = D,$$

que nos dice cómo el coeficiente de difusión depende de la función  $\phi$  y pensando que los términos que no desaparecen en el desarrollo de la integral son al menos de orden  $\tau^2$ , entonces resulta la siguiente ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} f = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} f,$$

que es una ecuación de difusión en una dimensión donde  $D$  es la constante de difusión.

El fenómeno de difusión, presenta de forma intrínseca, eventos fluctuantes, esto llevó a Einstein a abordar el problema desde un punto de vista estadístico. Antes que él, Maxwell y Boltzmann habían aplicado ya la estadística a su famosa *teoría de los gases*. De hecho los antecedentes históricos, se remontan a 1812, cuando Laplace obtuvo una ecuación diferencial parcial similar a la de Fokker-Planck. Posteriormente Lord Rayleigh (1880,1894), consideró una descripción estadística con la intención de encontrar la función de distribución de probabilidad de una suma de  $n$  movimientos sinusoidales teniendo todos el mismo período y amplitud con una distribución aleatoria de las fases, pero, por alguna razón u otra, pocos conocen su trabajo. En 1900 Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier, matemático francés, en su tesis “*La teoría de la especulación*” planteó un modelo matemático de la bolsa francesa y obtuvo una ecuación de difusión similar a la de Einstein (véase [9]). Es por ello que se le atribuye haber sido el primero en modelar el movimiento browniano. Sin embargo, es a Einstein, al final, a quien se le reconoce más ampliamente la explicación estadística del MB, que además debe considerarse como el inicio de los modelos estocásticos para los fenómenos naturales.

### *Un enfoque desde la mecánica estadística*

El principal objetivo de la termodinámica clásica es conocer con precisión la evolución temporal de un sistema. Su enfoque desprecia la dinámica individual de cada uno de los componentes del sistema, lo cual resulta adecuado en algunos casos. Sin embargo, cuando se busca entender el comportamiento individual de cada componente del sistema, la termodinámica clásica, en el mejor de los casos, sólo proporciona una descripción global y por lo tanto, es necesario un enfoque distinto como el que proporciona la mecánica estadística. Aunque ésta sólo permite conocer de forma parcial el estado macroscópico del sistema, lo cual no es suficiente para dar una descripción completa, sí permite la explicación de numerosos fenómenos físicos que la mecánica clásica deja de lado (véase [29]).

En la mecánica estadística es necesario sustituir el sistema por una colección de subsistemas con la misma estructura y gobernados por las mismas ecuaciones de evolución, pero con diferentes microestados iniciales (véase [9]). Esto hace posible el estudio de numerosos fenómenos dependientes de forma extremadamente compleja del tiempo, prácticamente indescriptibles desde un enfoque clásico, por ejemplo el MB. Las consideraciones probabilísticas en física hacen posible observar regularidades en el comportamiento macroscópico del sistema, estas consideraciones toman en cuenta el comportamiento promedio de la colección de subsistemas. Por tanto, los valores específicos de las variables microscópicas resultan irrelevantes y el sistema puede ser descrito mediante los valores promedio de ciertas magnitudes microscópicas que están regidas por leyes relativamente simples (véase [12]).

Los valores promedio de las magnitudes microscópicas están distribuidos sobre un conjunto de diferentes valores o estados posibles llamado espacio de fases o estados.

En el contexto del presente trabajo y con la intención de investigar el comportamiento de un ensamble de partículas, es conveniente utilizar un lenguaje cuasi-geométrico (véase [9]) que puede ser usado para especificar el estado de cada subsistema en el ensamble y describir el estado del conjunto como un todo. Para hacer esto, asociado a cada sistema es necesario construir un espacio euclidiano  $\Phi$ , llamado espacio de fases o estados  $n$ -dimensional. El conjunto de coordenadas del espacio  $\hat{\mathbf{q}}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$  corresponderá a una variable de naturaleza puramente estocástica, donde cada punto en el espacio define una fase o estado accesible del sistema con una cierta probabilidad al instante  $t$ . La probabilidad de que  $\hat{\mathbf{q}}(t)$  se halle dentro de un elemento de volumen  $d\nu$  del espacio de estados  $\Phi$  es interpretada como el número de subsistemas “modelo” idénticos que hay dentro del elemento de volumen.

La descripción completa de cada ensamble o sistema macroscópico se lleva a cabo mediante la resolución de las ecuaciones en las  $n$  variables microscópicas características, en las que el comportamiento determinista se ve completado con una fuerza de carácter estocástico que sintetiza el efecto de las fluctuaciones. El conjunto de ecuaciones diferenciales estocásticas en cada variable microscópica  $q_i(t)$  queda bien definido con el conocimiento de la fuerza fluctuante por unidad de masa  $\Gamma(t)$ , denominada fuerza de Langevin. Dichas ecuaciones son de la forma

$$\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i(t) = A_i(\hat{\mathbf{q}}, t) + \sum_{j=1}^n B_{ij}(\hat{\mathbf{q}}, t)\Gamma_j(t), \quad (2)$$

para  $1 \leq i \leq n$ . Estas ecuaciones se denominan Ecuaciones no lineales de Langevin. En general,  $\Gamma_j(t)$  se considera como una variable aleatoria gaussiana de media temporal nula, con función de correlación proporcional a la  $\delta$  de Dirac, según

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_j(t) \rangle &= 0, \\ \langle \Gamma_j(t)\Gamma_i(t+\tau) \rangle &= 2D\delta_{ij}\delta(\tau).^4 \end{aligned}$$

El término  $B_{ij}$  se conoce como ruido y se encuentra relacionado con las fluctuaciones en torno a la trayectoria determinista. Las ecuaciones diferenciales (2) son estocásticas y describen la evolución temporal de las variables estocásticas  $q_i(t)$ . Un enfoque común consiste en describir la evolución de la función densidad de probabilidad  $\rho(\hat{\mathbf{q}}, t)$  de la que se desprende el número de partículas del ensamble contenidas en un elemento de volumen  $d\nu$ . Partiendo de la ecuación no lineal de Langevin se obtiene la ecuación de evolución temporal para la función  $\rho(\hat{\mathbf{q}}, t)$ , conocida como ecuación de Fokker-Planck, cuya expresión general es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} D_i(\hat{\mathbf{q}}, t) \rho(\hat{\mathbf{q}}, t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j} D_{ij}(\hat{\mathbf{q}}, t) \rho(\hat{\mathbf{q}}, t), \quad (3)$$

donde  $D_i$  y  $D_{ij}$  son los coeficientes de convección o deriva y difusión respectivamente. La relación entre los coeficientes  $A_i, B_{ij}$  y los de la ecuación de Fokker-Planck está dada por

$$D_i(\hat{\mathbf{q}}, t) = A_i(\hat{\mathbf{q}}, t) + \sum_{k=1}^n B_{kj}(\hat{\mathbf{q}}, t) \frac{\partial}{\partial q_k} B_{ij}(\hat{\mathbf{q}}, t), \quad (4)$$

$$D_{ij}(\hat{\mathbf{q}}, t) = \sum_{k=1}^n B_{ik}(\hat{\mathbf{q}}, t) B_{jk}(\hat{\mathbf{q}}, t), \quad (5)$$

para  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ . La ecuación de Fokker-Planck configura un problema bien planteado que establece una ley de evolución para la función de distribución de las variables macroscópicas asociada a la ecuación diferencial estocástica para las variables microscópicas (véanse [13],[14],[15]). El modelo retoma conjuntamente la trayectoria determinista del sistema en el vector de convección y las fluctuaciones en torno a la misma, reflejadas en los elementos del tensor de difusión. La deducción y tratamiento completo de la ecuación de Fokker-Planck desde el enfoque de la teoría de probabilidades y variables aleatorias se puede encontrar en [12].

---

<sup>4</sup> $\langle F(t)G(t+\tau) \rangle$  se refiere al promedio temporal del producto de dos funciones  $G$  y  $F$  en dos instantes distintos:

$$\langle F(t)G(t+\tau) \rangle = \lim_{T' \rightarrow +\infty} \frac{1}{T'} \int_0^{T'} F(t)G(t+\tau) d\tau$$

## 1.2. Sistemas de reacción-difusión

Los sistemas de reacción-difusión son modelos matemáticos que describen el comportamiento de una o más sustancias distribuidas en el espacio bajo la influencia de dos procesos.

El primer tipo de ellos corresponde a las reacciones químicas en las que algunas sustancias se transforman en otras. En estos procesos, las partículas de las sustancias pueden cambiar su estado, por ejemplo, debido a interacciones o de manera espontánea. En general se pueden distinguir tres tipos de reacciones de inhibición, activación y autocatálisis.

El segundo proceso es el de difusión, este es un mecanismo por el que las partículas son transportadas de una región de mayor concentración a una de menor. Lo anterior ocurre debido a las colisiones de las partículas con las moléculas del medio en el que se hallan, donde si bien cada una presenta una trayectoria irregular (MB), en grupo su movimiento es regular. A este fenómeno se le conoce como proceso de difusión.

Para un subconjunto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  (i.e. una región en el espacio) con frontera  $\partial\Omega$  suave, si  $u \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$  denota la concentración de partículas de una sustancia  $U$  en  $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega$  al instante  $t \geq 0$ , la ecuación de evolución temporal de  $u$  es de la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\hat{\mathbf{x}}, t) = D\Delta u(\hat{\mathbf{x}}, t), \quad (6)$$

donde  $D$  es el llamado coeficiente de difusión. El problema queda bien planteado al establecer una condición inicial  $u(\hat{\mathbf{x}}, 0) = u_0(\hat{\mathbf{x}})$  y las condiciones de frontera (véase [27]).

Si sumamos los dos procesos, reacción y difusión, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\hat{\mathbf{x}}, t) = D\Delta u(\hat{\mathbf{x}}, t) + f(u, \hat{\mathbf{x}}, t). \quad (7)$$

La última ecuación diferencial parcial parabólica, en general no lineal, junto con condiciones iniciales y de frontera apropiadas, es una ecuación de reacción-difusión. Los sistemas de reacción-difusión pueden dar lugar a un número importante de fenómenos interesantes con comportamiento asintótico, múltiples estados estacionarios, estructuras espaciales, pulsos o frentes móviles y oscilaciones (véase [10]).

Este tipo de sistemas no sólo sirve para modelar procesos químicos sino también encuentra aplicaciones en procesos dinámicos de diferente naturaleza en Biología, Geología, Finanzas, Física y Ecología (véase [19]).

### *Patrones de Turing*

Al observar a nuestro alrededor es posible encontrar fenómenos naturales que exhiben multitud de estructuras que forman patrones regulares. Las bandas en las dunas del desierto, las franjas de algunos peces, la piel moteada o con rayas de algunos mamíferos son algunos ejemplos en los que la Naturaleza busca un orden extremo de gran complejidad. Estos patrones pueden surgir en sistemas inanimados o en los sistemas biológicos, en ambos podrán formar estructuras autoorganizadas.

La formación de patrones espacio-temporales ha sido analizada mediante diversos tipos de modelos matemáticos. Se pueden citar algunos en el contexto biológico (véase [28]):

-En 1972 Gierer y Meinhardt propusieron varios modelos fenomenológicos de reacciones cinéticas. En esencia consideraron que una de las sustancias químicas, el activador, inicia la producción de la segunda sustancia, el inhibidor, que a su vez detiene la producción del activador.

-El modelo de Schnakenberg determina el comportamiento de un químico activador  $u$  en presencia de un químico inhibidor  $v$ .

-Otro modelo que predice la formación de patrones de origen biológico es el modelo de glucólisis.

-El cuarto modelo corresponde a uno de movimiento celular que describe la formación de una onda viajera en virtud de un químico o quimiotaxis.

-Además, varios autores han derivado esquemas de reacción para describir reacciones químicas hipotéticas. En el campo de la ecología, para la dinámica de poblaciones existen diversos modelos, como por ejemplo, un sistema huésped-parásito-hiperparásito donde la aparición de patrones espacio-temporales se da en las densidades de población en un medio natural (véase [6]).

En general, los modelos de formación de patrones describen tanto los mecanismos de motilidad<sup>5</sup> celular como la generación de patrones químicos.

El matemático británico Alan M. Turing en su artículo *The Chemical Basis of Morphogenesis*<sup>6</sup>, publicado en 1952 (véase [1]), fue el primero en observar y atribuir a las interacciones químicas entre sustancias la formación espontánea de patrones en la naturaleza. Turing sugirió que un sistema de sustancias químicas, que él llamó morfógenos, a los que no dio ningún significado biológico concreto<sup>7</sup>, mediante reacciones y difusión a través de la masa del tejido, formaría la base fundamental para la explicación de la morfogénesis. La parte difusiva del modelo presupone que cada morfógeno se moverá de la región de mayor concentración a la de menor concentración, respetando así la ley de conservación de la materia. Por otra parte, debido al término de reacción, la ley de acción de masas se deberá satisfacer de forma que la velocidad a la que la reacción tendrá lugar sea proporcional a la concentración de las sustancias reactivas.

En el caso biológico, la formación de patrones está relacionada con la distribución de sustancias que reaccionan y se difunden en cierta geometría. En el desarrollo tisular, por ejemplo, estas sustancias son consideradas como marcadores que contienen alguna información que el tejido necesita para su crecimiento, formación y maduración.

Aunque ya lo había sugerido Rashevsky (1938), fue Turing quien demostró que aún cuando los procesos de difusión y los de reacción, tomados independientemente, son homogeneizadores, al considerarlos juntos bajo determinadas circunstancias, pueden generar patrones estables en el espacio, conocidos ahora como estructuras o patrones de Turing. Conforme a esto, estableció que la difusión puede llevar un sistema químico a la inestabilidad, induciendo así la formación de un patrón espacial donde antes no existía. Este tipo de inestabilidad, estacionaria en el tiempo, es más conocida como inestabilidad de Turing (véase [4]).

---

<sup>5</sup>La motilidad es un término de la biología para expresar la habilidad de moverse espontánea e independientemente. Está referida tanto a organismos unicelulares como multicelulares.

<sup>6</sup>La morfogénesis (del griego morphê, forma, y génesis, creación) es el proceso por el cual se van desarrollando en un embrión los órganos diferenciados de un adulto a partir de estructuras indiferenciadas. Es junto con el control del crecimiento celular y de la diferenciación celular, uno de los aspectos fundamentales de la biología del desarrollo. La morfogénesis incluye la forma de los tejidos, de los órganos y de los organismos completos.

<sup>7</sup>En algunos casos, los morfógenos pueden interpretarse como genes, otras veces hormonas, otras los pigmentos de la piel, etcétera.

Concretamente, Turing estudió las soluciones de los modelos biológicos descritos por ecuaciones de reacción-difusión. En su análisis encontró que se pueden producir seis estados estacionarios, dependiendo de la dinámica del término de reacción y longitud de onda del patrón (véase [kondo,tesis]). En el caso *I* el sistema converge a un estado estable y uniforme. El caso *II* presenta una oscilación uniforme en la fase de la función de concentración del morfógeno (oscilación temporal). El *III* corresponde a ondas estacionarias con longitud de onda extremadamente corta. El *IV* presenta un comportamiento oscilatorio con longitud de onda muy corta. En el *V* se genera una onda viajera. Finalmente, en el caso *VI* se generan patrones estacionarios. El hallazgo de este tipo de ondas es el resultado principal del análisis de Turing y éstas son las que generalmente se conocen como patrones de Turing (véase la Figura 1.1).

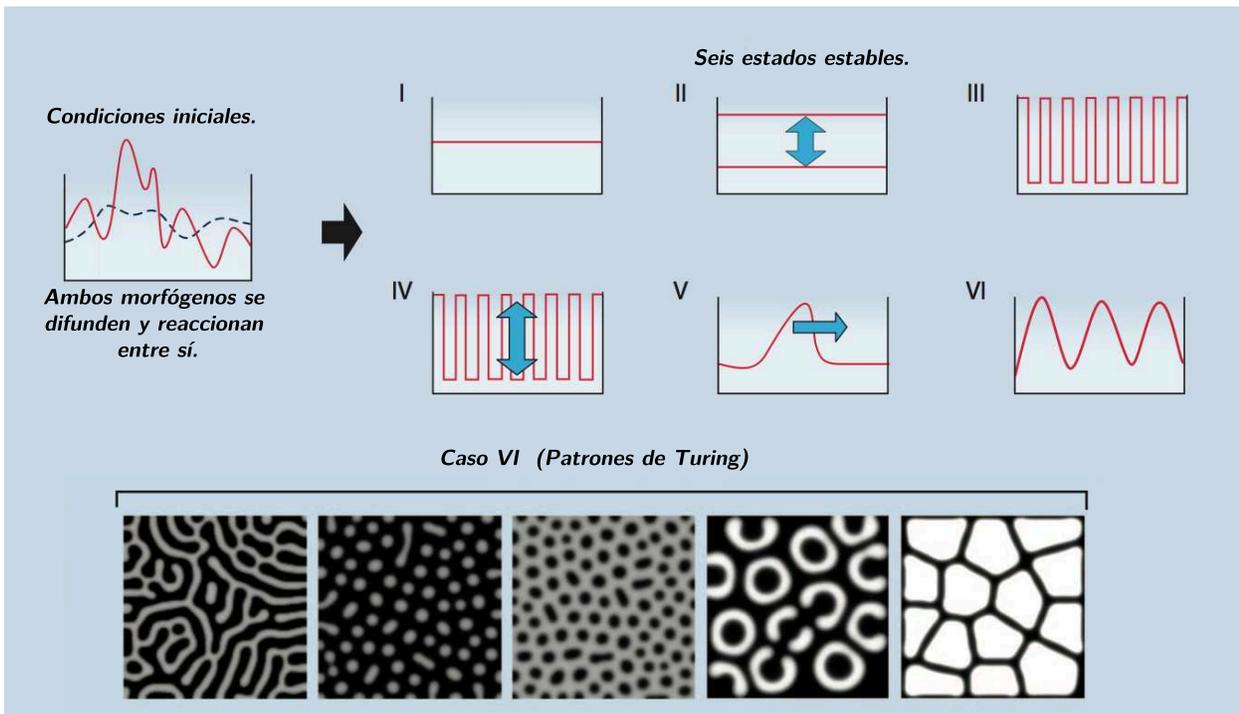


Figura 1.1

La figura muestra los seis estados estables a los que puede converger un sistema de reacción-difusión de dos sustancias. *I*) Uniforme y estacionario. *II*) Uniforme y oscilatorio. *III*) Ondas estacionarias con longitud de onda extremadamente corta. *IV*) Casos oscilatorios con longitud de onda muy corta. *V*) Casos oscilatorios con longitud de onda finita (onda viajera). *VI*) Ondas estacionarias con longitud de onda finita (Patrón de Turing). Figura tomada de [4].

Si se tienen dos sustancias, a diferencia de (7), el proceso de reacción-difusión está descrito por un sistema de ecuaciones, que en su forma adimensional se escribe como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(\hat{\mathbf{x}}, t) &= \Delta u(\hat{\mathbf{x}}, t) + \gamma f(u, v), \\ \frac{\partial}{\partial t} v(\hat{\mathbf{x}}, t) &= d\Delta v(\hat{\mathbf{x}}, t) + \gamma g(u, v). \end{aligned} \tag{8}$$

En (8)  $u(t, x)$  y  $v(t, x)$  son las concentraciones de las dos sustancias,  $f(u, v)$  y  $g(u, v)$  son los términos reactivos.  $d = D_u/D_v$  es el coeficiente de difusión dado por la adimensionalidad del sistema.  $D_u$  y  $D_v$  son los coeficientes de difusión de cada sustancia. En tanto,  $\gamma$  puede tener varias interpretaciones <sup>8</sup>.

Supongamos que en (8) los términos difusivos son cero y que existe un estado estacionario estable. Si al incluir nuevamente los términos difusivos, el sistema no alcanza dicho estado estacionario estable, se dice entonces que el sistema de ecuaciones (8) presenta inestabilidades por difusión o inestabilidades de Turing.

El primer paso para el análisis de la inestabilidad de Turing es desacoplar el término de variación espacial para garantizar la estabilidad temporal. Luego se incorpora el término difusivo y se determina el espacio de parámetros que producen la inestabilidad espacial. Así, en el primer paso de esta metodología reduce el sistema (8) a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(\hat{\mathbf{x}}, t) &= f(u, v), \\ \frac{d}{dt}v(\hat{\mathbf{x}}, t) &= g(u, v).\end{aligned}$$

El estado uniforme del sistema anterior es  $(u, v) = (u_0, v_0)$  tal que

$$f(u_0, v_0) = g(u_0, v_0) = 0.$$

La inestabilidad de Turing tiene lugar cuando el estado estacionario  $(u_0, v_0)$  es estable en ausencia de difusión y se hace inestable en presencia del término difusivo. Se puede demostrar que para que un sistema de reacción-difusión (como (8)) presente formación de patrones espacio-temporales es necesario restringir el espacio de parámetros. Estas restricciones dan lugar al denominado espacio de Turing, al interior del cual el sistema exhibe la formación de patrones espacio-temporales. Este espacio está descrito por el siguiente conjunto de desigualdades:

$$\begin{aligned}f_u + g_v &< 0, \\ f_u g_v - f_v g_u &> 0, \\ df_u + g_v &> 0, \\ (df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u) &> 0.\end{aligned}\tag{9}$$

Los términos  $f_u$ ,  $f_v$ ,  $g_u$  y  $g_v$  en las desigualdades anteriores representan las primeras derivadas de los términos de reacción respecto de las concentraciones  $u$  y  $v$ , evaluadas en el estado estacionario <sup>9</sup>.

---

8

i)  $\gamma^{1/2}$  es proporcional al tamaño lineal del dominio espacial en una dimensión. En dos dimensiones  $\gamma$  es proporcional al área.

ii)  $\gamma$  representa la fuerza relativa de los términos de reacción.

iii) Un aumento en  $\gamma$  puede ser considerado equivalente a una disminución en el coeficiente de difusión  $d$ .

Véase [26]

<sup>9</sup>Para un tratamiento completo de la Inestabilidad de Turing, entre otros, véanse [16],[26] y [28].

## *Sistemas de reacción difusión en dominios crecientes y con curvatura*

En el modelo original de Turing, las superficies sobre las que emergen los patrones son tales que su geometría y tamaño no cambian al aumentar el tiempo. Sin embargo, desde el punto de vista de la morfogénesis, es de vital importancia considerar los efectos que causan el crecimiento y la geometría de los organismos, ya que estos presentan un desarrollo a lo largo de su vida. Actualmente existen diferentes ejemplos donde la dinámica del dominio da lugar a cambios en los patrones que no son simplemente cuantitativos (véanse [3],[7],[11]). El pez ángel, del género *Pomacanthus*, presenta patrones que a lo largo de su vida no permanecen fijos. Algunas variedades de este pez exhiben franjas dorso-ventrales sobre un fondo azul oscuro. A medida que el pez crece, nuevas franjas más angostas se desarrollan y, gradualmente, se van insertando entre las franjas pre-existentes (véase [30]).

Varios modelos han sido propuestos para entender la relación en cuanto a la aparición de algunos patrones, así como su estabilidad (inestabilidad) y el crecimiento de los organismos. Recientemente en [8] se ha proporcionado un marco general para el estudio de la formación de patrones utilizando las ecuaciones de reacción-difusión en el que los efectos de crecimiento y la geometría se toman en cuenta. Este trabajo destaca de entre otros, ya que está basado en primeros principios (teorema de Reynolds, leyes de conservación y ley de Fick). Los resultados del trabajo constatan que, tanto el crecimiento como la curvatura son cruciales para la emergencia de patrones en esos dominios (véase [17]).

## 2. Ecuación de Fokker-Planck: construcción del modelo

### 2.1. Dominio fijo

Consideremos una sustancia  $U$  cuya concentración al tiempo  $t$  en  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es  $u$ . Supongamos que la sustancia lleva a cabo un proceso de difusión a lo largo del dominio físico y simultáneamente presenta una reacción mediante la cual se genera o se consume, de tal forma que la concentración total de  $U$  en  $\Omega$  varía en el tiempo. Si pensamos que no es posible especificar con exactitud la concentración de la sustancia en  $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega$  en el instante  $t$ , entonces es necesario introducir una densidad de probabilidad conjunta  $\rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t) = \rho(u(\hat{\mathbf{x}}, t), \hat{\mathbf{x}}, t)$  (véanse [2],[31]), que nos permita conocer la probabilidad para que la concentración  $u$ , de la sustancia  $U$ , tome valores dentro del intervalo comprendido entre  $u$  y  $u + du$ , esto para cada punto  $\hat{\mathbf{x}}$  en el espacio y en el instante  $t$ . En otras palabras, pensemos que el conjunto de partículas (de la sustancia) y su entorno (medio físico) definen un ensamble cuyo espacio de estados está dado por  $[0, u_{max}) \times \Omega$ , es decir, los estados del sistema son  $(u, \hat{\mathbf{x}})$ .

Al establecer la hipótesis de que se trata de procesos de un paso, podemos suponer que el estado  $(u, \hat{\mathbf{x}})$  puede ser alcanzado al instante  $t + \delta t$  como resultado de la combinación de los siguientes eventos (véase [2]):

- i)* El sistema se encontraba en el estado  $(u, \hat{\mathbf{x}})$  y tras el intervalo  $(t, t + \delta t)$  se mantuvo sin cambios.
- ii)* El sistema se encontraba en  $(u + \delta u, \hat{\mathbf{x}})$  y pasó a  $(u, \hat{\mathbf{x}})$  con probabilidad  $r^u = r^u(u, \hat{\mathbf{x}}, t)$ .
- iii)* El sistema se encontraba en  $(u - \delta u, \hat{\mathbf{x}})$  y pasó a  $(u, \hat{\mathbf{x}})$  con probabilidad  $p^u = p^u(u, \hat{\mathbf{x}}, t)$ .

Para  $\delta \hat{\mathbf{h}} = (\delta h_1, \dots, \delta h_n)$ ,

- iv)* El sistema se encontraba en el estado  $(u, \hat{\mathbf{x}} + \delta \hat{\mathbf{h}})$  y pasó a  $(u, \hat{\mathbf{x}})$  con probabilidad  $r^{\hat{\mathbf{x}}} = r^{\hat{\mathbf{x}}}(u, \hat{\mathbf{x}}, t)$ .
- v)* El sistema se encontraba en el estado  $(u, \hat{\mathbf{x}} - \delta \hat{\mathbf{h}})$  y pasó a  $(u, \hat{\mathbf{x}})$  con probabilidad  $p^{\hat{\mathbf{x}}} = p^{\hat{\mathbf{x}}}(u, \hat{\mathbf{x}}, t)$ .

La situación que se describe en cada uno de los eventos anteriores se muestra gráficamente en la Figura 2.1.

La probabilidad de que tras un paso  $\delta t$  no se presenten cambios está dada por la expresión

$$1 - (p^{\hat{\mathbf{x}}} + r^{\hat{\mathbf{x}}} + p^u + r^u),$$

de modo que la probabilidad del evento *i)* es

$$\rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t)(1 - (p^{\hat{\mathbf{x}}} + r^{\hat{\mathbf{x}}} + p^u + r^u)).$$

Así la probabilidad  $\rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t + \delta t)$  es la suma de las probabilidades de todos los eventos y estará dada por

$$\begin{aligned} \rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t + \delta t) = & \rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t)(1 - (p^{\hat{\mathbf{x}}} + r^{\hat{\mathbf{x}}} + p^u + r^u)) + \rho(u + \delta u, \hat{\mathbf{x}}, t)r^{u+\delta u} + \\ & (\rho(u - \delta u, \hat{\mathbf{x}}, t)p^{u-\delta u} + \rho(u, \hat{\mathbf{x}} + \delta \hat{\mathbf{h}}, t)r^{\hat{\mathbf{x}}+\delta \hat{\mathbf{h}}} + \rho(u, \hat{\mathbf{x}} - \delta \hat{\mathbf{h}}, t)p^{\hat{\mathbf{x}}-\delta \hat{\mathbf{h}}}). \end{aligned}$$

De donde obtenemos

$$\begin{aligned} \rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t + \delta t) - \rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t) = & -\rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t)(p^{\hat{\mathbf{x}}} + r^{\hat{\mathbf{x}}} + p^u + r^u) + \rho(u + \delta u, \hat{\mathbf{x}}, t)r^{u+\delta u} + \\ & \rho(u - \delta u, \hat{\mathbf{x}}, t)p^{u-\delta u} + \rho(u, \hat{\mathbf{x}} + \delta \hat{\mathbf{h}}, t)r^{\hat{\mathbf{x}}+\delta \hat{\mathbf{h}}} + \rho(u, \hat{\mathbf{x}} - \delta \hat{\mathbf{h}}, t)p^{\hat{\mathbf{x}}-\delta \hat{\mathbf{h}}}. \end{aligned} \quad (10)$$

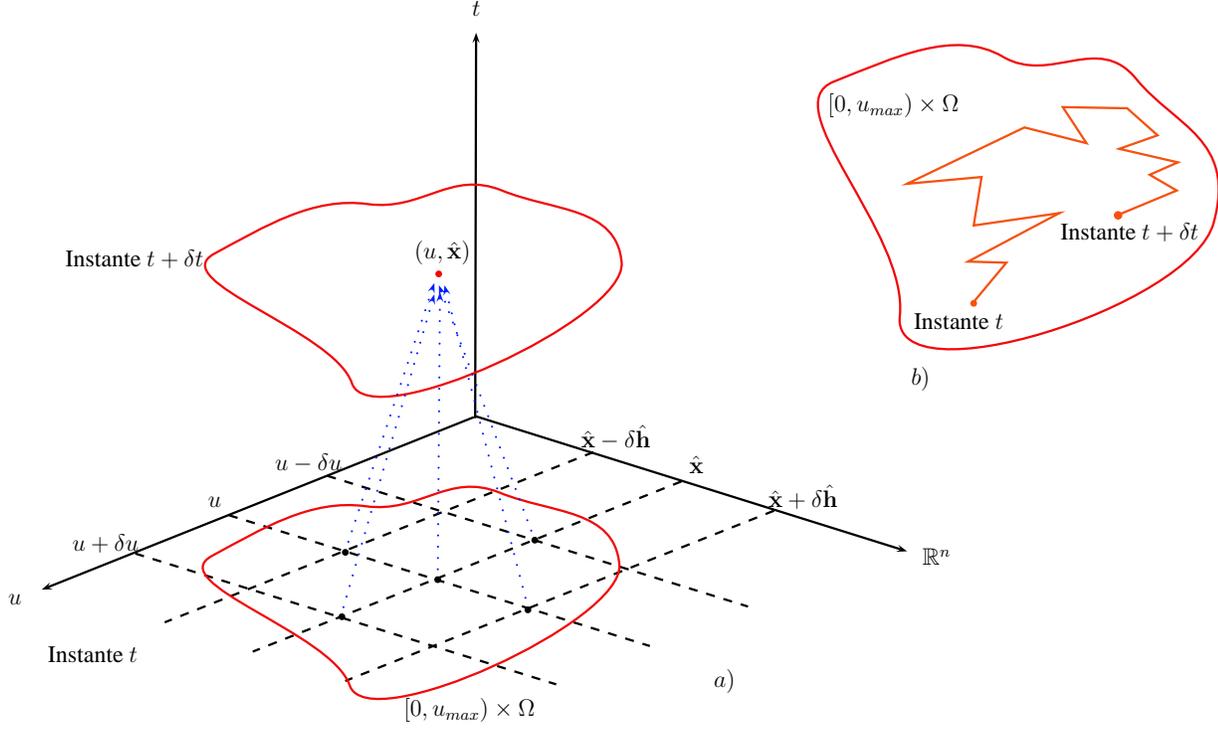


Figura 2.1

- a) Evolución temporal del espacio de estados  $[0, u_{max}) \times \Omega$ , donde se ejemplifican las posibilidades de transición de un estado del sistema al instante  $t$  a otro en el instante  $t + \delta t$ .
- b) Trayectoria del sistema en el espacio de estados  $[0, u_{max}) \times \Omega$ .

Si imponemos la condición a  $r^{\hat{\mathbf{x}}}, p^{\hat{\mathbf{x}}}, r^u, p^u$  y  $\rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t)$  de que sean funciones de clase  $C^2([0, u_{max}) \times \Omega \times [0, \infty))$ , entonces al utilizar el desarrollo en serie de Taylor de segundo orden obtenemos que

$$\rho(u + \delta u, \hat{\mathbf{x}}, t) r^{u+\delta u} = \rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t) r^u + \delta u \frac{\partial}{\partial u} \rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t) r^u + \frac{(\delta u)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t) r^u + R_1(\delta u), \quad (11)$$

$$\rho(u - \delta u, \hat{\mathbf{x}}, t) p^{u-\delta u} = \rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t) p^u - \delta u \frac{\partial}{\partial u} \rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t) p^u + \frac{(\delta u)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t) p^u + R_2(\delta u), \quad (12)$$

donde  $R_i(\delta u)/(\delta u)^2 \rightarrow 0$  cuando  $\delta u \rightarrow 0$  para  $i = 1, 2$  y además

$$\rho(u, \hat{\mathbf{x}} + \delta \hat{\mathbf{h}}, t) r^{\hat{\mathbf{x}}+\delta \hat{\mathbf{h}}} = \rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t) r^{\hat{\mathbf{x}}} + \sum_{i=1}^n \delta h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t) r^{\hat{\mathbf{x}}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta h_i \delta h_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t) r^{\hat{\mathbf{x}}} + R_3(\delta \hat{\mathbf{h}}), \quad (13)$$

$$\rho(u, \hat{\mathbf{x}} - \delta \hat{\mathbf{h}}, t) p^{\hat{\mathbf{x}}-\delta \hat{\mathbf{h}}} = \rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t) p^{\hat{\mathbf{x}}} - \sum_{i=1}^n \delta h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t) p^{\hat{\mathbf{x}}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta h_i \delta h_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t) p^{\hat{\mathbf{x}}} + R_4(\delta \hat{\mathbf{h}}), \quad (14)$$

donde  $R_i(\delta \hat{\mathbf{h}})/\|\delta \hat{\mathbf{h}}\|^2 \rightarrow 0$  cuando  $\delta \hat{\mathbf{h}} \rightarrow \hat{\mathbf{0}}$  para  $i = 3, 4$ . Al sustituir (11)-(14) en (10) y simplificar tenemos que

$$\begin{aligned}
\rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t + \delta t) - \rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t) &= -\delta u \frac{\partial}{\partial u} (p^u - r^u) \rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t) + \\
&+ \frac{(\delta u)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} (p^u + r^u) \rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t) - \sum_{i=1}^n \delta h_i \frac{\partial}{\partial x_i} (p^{\hat{\mathbf{x}}} - r^{\hat{\mathbf{x}}}) \rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta h_i \delta h_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (p^{\hat{\mathbf{x}}} + r^{\hat{\mathbf{x}}}) \rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t) + \\
&+ R_1(\delta u) + R_2(\delta u) + R_3(\delta \hat{\mathbf{h}}) + R_4(\delta \hat{\mathbf{h}}). \tag{15}
\end{aligned}$$

Al dividir la ecuación (15) por  $\delta t$  llegamos a un punto crucial, ya que encontraremos los términos  $\frac{\delta u}{\delta t}$ ,  $\frac{(\delta u)^2}{2\delta t}$ ,  $\frac{\delta h_i}{\delta t}$  y  $\frac{\delta h_i \delta h_j}{2\delta t}$ , para  $i, j = 1, \dots, n$ . Como la intención es pasar al caso continuo, será necesario tomar el límite  $\delta \hat{\mathbf{h}} \rightarrow \hat{\mathbf{0}}$ ,  $\delta u \rightarrow 0$  y  $\delta t \rightarrow 0$ . Pero si queremos encontrar algo que no sea trivial, entonces, será necesario que al menos los términos  $\frac{(\delta u)^2}{2\delta t}$  y  $\frac{\delta h_i \delta h_j}{2\delta t}$ 's tengan un límite positivo y finito (véase [24]). La opción más sencilla es mantener

$$K_{11} = \frac{(\delta u)^2}{2\delta t},$$

$$D_{ij} = \frac{\delta h_i \delta h_j}{2\delta t}, \text{ para } i, j = 1, \dots, n.$$

constantes, para  $D_{ij}$ 's y  $K_{11}$  mayores que cero, estos serán precisamente los coeficientes de difusión para el espacio de estados. Los  $D_{ij}$ 's son los coeficientes de difusión en el espacio físico y sus dimensiones son  $[distancia]^2/[tiempo]$ . Resulta que en cada dirección del espacio físico la partícula se difunde una distancia media de  $\sqrt{2D_{ij}}$  por unidad de tiempo (véanse [10],[24],[25]). Una situación similar ocurre en el *eje*  $u$  del espacio de estados, donde “distancia” no se refiere al concepto físico usual. Si se hacen estas consideraciones se puede deducir que

$$\frac{\delta h_i}{\delta t}, \frac{\delta u}{\delta t} \rightarrow +\infty.$$

Esto muestra que las velocidades medias (en el espacio de estados) en cada paso se hacen infinitas. Por tanto, el hecho de que el ensamble se difunda una “distancia” media finita, en el espacio de estados, se debe sólo a las rápidas fluctuaciones de su movimiento (véase [24]).

Es claro que el pedir que los  $D_{ij}$ 's y  $K_{11}$  sean finitos cuando se toma el límite no es suficiente para conseguir algo no trivial. Por tanto es necesario que

$$\frac{\delta h_i (p^{\hat{\mathbf{x}}} - r^{\hat{\mathbf{x}}})}{\delta t} \rightarrow D_i$$

para  $i = 1, \dots, n$  y

$$\frac{\delta u (p^u - r^u)}{\delta t} \rightarrow K_1,$$

con  $D_i$  para  $i = 1, \dots, n$  y  $K_1$  finitos, lo cual se puede hacer si escribimos

$$\begin{aligned}
\delta h_i \frac{(p^{\hat{\mathbf{x}}} - r^{\hat{\mathbf{x}}})}{\delta t} &= \frac{\delta h_i^2 (p^{\hat{\mathbf{x}}} - r^{\hat{\mathbf{x}}})}{\delta t \delta h_i}, \\
\delta u \frac{(p^u - r^u)}{\delta t} &= \frac{\delta u^2 (p^u - r^u)}{\delta t \delta u}
\end{aligned}$$

y consideramos que  $p^{\hat{x}}, r^{\hat{x}} \sim \delta h = \min\{\delta h_i | i = 1, \dots, n\}$  y  $p^u, r^u \sim \delta u$  (véase [24]). Lo anterior es una generalización del siguiente hecho. Pensemos por un momento que el espacio de estados es solo el físico y de una dimensión. Que las partículas de la sustancia no pueden permanecer en el mismo lugar, es decir  $p^x + r^x = 1$ , es equivalente a

$$p^x = \frac{1}{2} - \delta h \frac{\beta}{2} - \theta(h)$$

y

$$q^x = \frac{1}{2} + \delta h \frac{\beta}{2} + \theta(h).^{10}$$

Donde  $\beta$  es una función adecuada. En tal caso resulta que

$$\frac{\delta h^2}{\delta t} \frac{(p^x - r^x)}{\delta h}$$

tiende a  $D_1 \equiv 2D_{11}\beta$ . Profundicemos un poco más en este ejemplo. Como  $p^x - r^x$  es una diferencia de probabilidades, resulta adimensional, así que las dimensiones de  $D_1$  son las de  $\delta h/\delta t$ , por tanto son de velocidad. Por lo anterior, el coeficiente  $D_1$  representa la tendencia de las partículas de avanzar hacia una dirección privilegiada con rapidez  $|D_1|$ . En otras palabras, existe una corriente, de intensidad  $|D_1|$ , conduciendo las partículas de la sustancia en una dirección.

Si regresamos a la ecuación (15) y retomamos la discusión previa, al dividir por  $\delta t$  y tomar el límite  $\delta \hat{\mathbf{h}} \rightarrow \hat{\mathbf{0}}$ ,  $\delta u \rightarrow 0$ ,  $\delta t \rightarrow 0$  no obtendremos un resultado trivial o contradictorio. Luego entonces, resulta la siguiente ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -\frac{\partial}{\partial u} (K_1 \rho) + K_{11} \frac{\partial^2}{\partial u^2} ((p^u + r^u) \rho) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (D_i \rho) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} ((p^{\hat{x}} + r^{\hat{x}}) \rho), \quad (16)$$

con coeficientes de difusión dados por

$$K_{11} = \frac{(\delta u)^2}{2\delta t},$$

$$D_{ij} = \frac{\delta h_i \delta h_j}{2\delta t}, \text{ para } i, j = 1, \dots, n. \quad (17)$$

La ecuación (16) es una ecuación de Fokker-Planck para la densidad de probabilidad conjunta  $\rho(u, \hat{\mathbf{x}}, t)$ . Antes de profundizar en la ecuación (16) introduzcamos una sustancia más al modelo, de tal forma que ahora son dos sustancias, concretamente  $U$  y  $V$ , que reaccionan entre sí y se difunden en el espacio físico. Es necesario aumentarle una coordenada al espacio de estados y, con un desarrollo similar al previo a (16), se obtiene una ecuación de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho = & -\frac{\partial}{\partial u} (K_1 \rho) + K_{11} \frac{\partial^2}{\partial u^2} ((p^u + r^u) \rho) - \frac{\partial}{\partial v} (K_2 \rho) + K_{22} \frac{\partial^2}{\partial v^2} ((p^v + r^v) \rho) \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (D_i \rho) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} ((p^{\hat{x}} + r^{\hat{x}}) \rho). \end{aligned}$$

La ecuación anterior es nuevamente una ecuación de Fokker-Planck para la función de densidad de probabilidad conjunta.

<sup>10</sup>Para el caso general de difusión en principio  $q^x \neq p^x$ , es decir, la difusión no es simétrica o isotrópica. Así que las presentes ecuaciones pueden ser interpretadas como una simetría del movimiento en una escala microscópica (véase [24]).

Es posible observar que los términos  $K_1$  y  $K_2$  representan la tendencia de avanzar en una dirección privilegiada de los ejes  $u$  y  $v$  en el espacio de estados, son por tanto términos de transporte o convección en el conjunto de los valores de concentración de las sustancias. Olvidemos por un momento el espacio físico. Si el ensamble está en el estado  $u$  al instante  $t$ ,  $K_1$  marca la tendencia de que tras un paso el ensamble evolucione a los estados  $u$ ,  $u - \delta u$  o  $u + \delta u$ . En el primero de los casos la concentración de la sustancia al tiempo  $t + \delta t$  no cambia, en los otros disminuye o aumenta respectivamente. Por esta razón el término  $K_1$  (de transporte en el eje  $u$ ) es en realidad un término de reacción y, en general,  $K_1 = f(u, v)$ . De forma análoga  $K_2 = g(u, v)$ .

En tanto los términos  $D_i$ 's representan la tendencia de avanzar en una dirección privilegiada en el espacio físico, lo que corresponde a un fenómeno de transporte en el medio donde se hallan las sustancias. En general se considera el proceso de difusión espacial como direccionalmente independiente, lo que se traduce en que  $D = D_{ii}$  para  $i = 1, \dots, n$  y  $D_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ .

La probabilidad de que el ensamble en el estado  $(u, v, \hat{x})$  salte a uno distinto tras un paso es

$$p^u + r^u + p^v + r^v + p^{\hat{x}} + r^{\hat{x}} \leq 1.$$

No es posible por tanto hacer que  $p^u + r^u = p^v + r^v = p^{\hat{x}} + r^{\hat{x}} = 1$ , pero sí se puede pensar que los términos  $p^u + r^u, p^v + r^v$  y  $p^{\hat{x}} + r^{\hat{x}}$  toman valores constantes. Sin pérdida de generalidad se puede considerar que estos valores son absorbidos en las constantes  $K_{11}, K_{22}$  y  $D$  respectivamente.

El conjunto de observaciones de los tres párrafos anteriores nos lleva a la siguiente ecuación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla_{uv}(\rho \vec{F}) + K_{11} \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} + K_{22} \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} - \nabla_{\hat{x}}(\rho \vec{D}) + D \Delta_{\hat{x}}(\rho), \quad (18)$$

donde  $\vec{F} = (f(u, v), g(u, v))^T$  es el vector de reacción,  $K_{11}, K_{22}, D$  son las constantes de difusión y  $\vec{D} = (D_1, \dots, D_n)^T$  es el vector de deriva o transporte espacial que en general no es constante.

## 2.2. Dominio creciente y con curvatura

### *Una dimensión*

Ahora consideremos el caso en el que el dominio donde la sustancia  $U$  se difunde y reacciona es una curva  $\Omega(t)$  en  $\mathbb{R}^n$  que cambia su forma en el tiempo. Con la intención de derivar la forma apropiada de la ecuación de Fokker-Planck para la densidad de probabilidad conjunta sobre el espacio de estados accesibles  $[0, u_{max}) \times \Omega(t)$ , se hace necesario considerar una parametrización del dominio físico

$$\bar{\gamma}^* : [a, b] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \bar{\gamma}^*(s, t) = (\gamma_1(s, t), \dots, \gamma_n(s, t)).$$

(19)

Así para cada  $t$  fijo  $\bar{\gamma}^*$  es una parametrización de la curva  $\Omega(t)$  en el espacio  $\mathbb{R}^n$ , que supondremos de clase  $C^2([a, b])$ . Si además  $\bar{\gamma}_s^*(s, t) \neq \hat{\mathbf{0}}$  para todo  $t \geq 0$  entonces  $\Omega(t)$  es una curva regular encajada en  $\mathbb{R}^n$ . Sea

$$l(\bar{\gamma}^*)(t) = \int_a^b \|\bar{\gamma}_s^*(s, t)\| \, d\tau \quad (20)$$

y consideremos

$$w = \alpha(s, t) = \int_a^s \|\vec{\gamma}_s^*(s, t)\| d\tau, \quad (21)$$

la función longitud de arco. Luego entonces, para cada  $t$  podemos construir la reparametrización por longitud de arco de la curva  $\Omega(t)$  dada por

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}^* \circ \alpha(\cdot, t)^{-1} : [0, l(\vec{\gamma}^*)(t)] \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (22)$$

Antes de continuar cabe hacer una anotación respecto a la conveniencia de introducir la reparametrización por longitud de arco. Esto se hace ya que el problema  $n$ -dimensional se reduce a uno unidimensional. El cambio de la concentración de la sustancia, en algún punto sobre la curva, se debe en parte al flujo de partículas de ese punto a otros o de otros a ese punto. Si suponemos que la evolución temporal de la curva es suave, en intervalos de tiempo lo suficientemente pequeños, no cambiará demasiado su forma. Consideremos la Figura 2.2 bajo las hipótesis anteriores: la concentración de la sustancia en el punto  $A$  cambiará, en un intervalo de tiempo, debido a la cantidad de partículas en  $A$  que se quedan, las que se mueven de  $A$  a otros puntos de la curva y las que se mueven de puntos cercanos como  $B$  y  $C$ . Como la posición de las partículas sobre la curva puede especificarse por la longitud de arco de la curva, entonces la concentración de la sustancia sobre la curva y sus cambios se pueden especificar por la longitud de arco y los cambios en ella, que responde a una dinámica unidimensional.

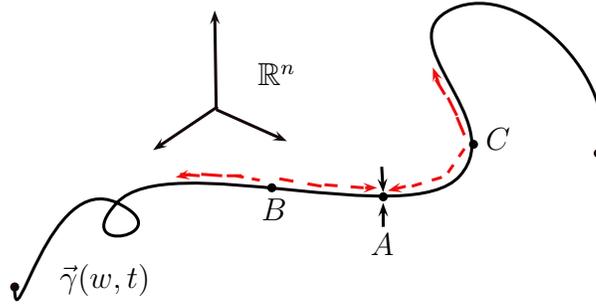


Figura 2.2

Como se hizo en la sección anterior, supongamos que se trata de procesos de un paso y que el estado  $(u, \vec{\gamma}(w(t + \delta t), t + \delta t))$  puede ser alcanzado como la combinación de los siguientes eventos:

- i) El sistema se encontraba en el estado  $(u, \vec{\gamma}(w(t), t))$  y tras  $\delta t$  pasó a  $(u, \vec{\gamma}(w(t + \delta t), t + \delta t))$ .
- ii) El sistema se encontraba en  $(u, \vec{\gamma}(w(t) + \delta w, t))$  y pasó a  $(u, \vec{\gamma}(w(t + \delta t), t + \delta t))$  con probabilidad  $r^w = r^w(u, \vec{\gamma}(w(t), t), t)$ .
- iii) El sistema se encontraba en  $(u, \vec{\gamma}(w(t) - \delta w, t))$  y pasó a  $(u, \vec{\gamma}(w(t + \delta t), t + \delta t))$  con probabilidad  $p^w = p^w(u, \vec{\gamma}(w(t), t), t)$ .

Las tres situaciones anteriores que representan un cambio en el espacio físico, se ejemplifican en la Figura 2.3.

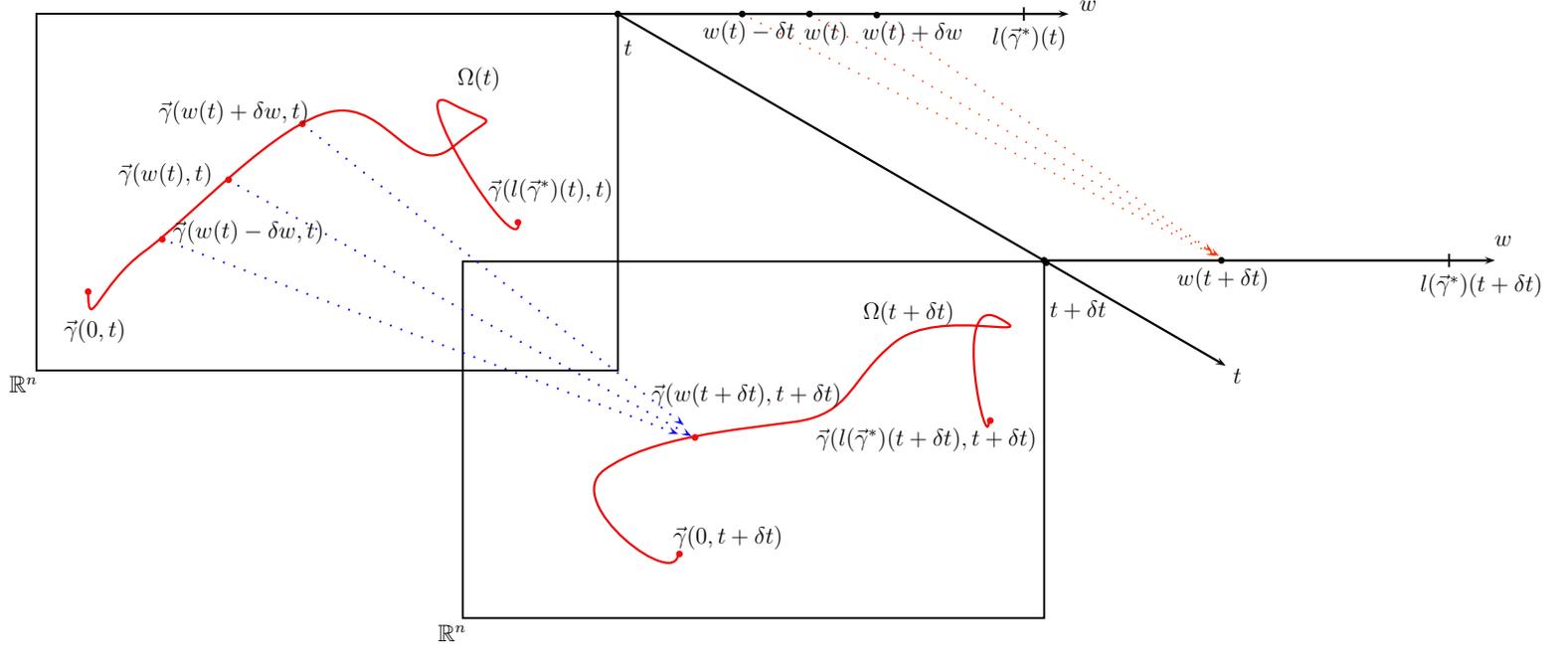


Figura 2.3

Evolución temporal de la curva en el espacio físico. Se ejemplifican las posibilidades de transición en el intervalo  $[t, t + \delta t]$  de una o varias partículas. Lo anterior se refleja en el cambio de concentración de la sustancia sobre los puntos de la curva.

Procediendo de manera semejante para la variable  $u$ , resulta que la probabilidad de que tras  $\delta t$  se pase de  $(u, \vec{\gamma}(w(t), t))$  a  $(u, \vec{\gamma}(w(t + \delta t), t + \delta t))$  es

$$1 - (p^w + r^w + p^u + r^u),$$

de modo que la probabilidad del evento  $i$ ) es

$$\rho(u, \vec{\gamma}(w(t), t), t)(1 - (p^w + r^w + p^u + r^u)).$$

Tenemos entonces que la probabilidad  $\rho(u, \vec{\gamma}(w(t + \delta t), t + \delta t), t + \delta t)$  será igual a la suma de todas las probabilidades

$$\begin{aligned} & \rho(u, \vec{\gamma}(w(t + \delta t), t + \delta t), t + \delta t) = \\ & \rho(u, \vec{\gamma}(w(t), t), t)(1 - (p^w + r^w + p^u + r^u)) + \rho(u, \vec{\gamma}(w(t) + \delta w, t), t)r^{w(t) + \delta w} + \rho(u, \vec{\gamma}(w(t) - \delta w, t), t)p^{w(t) - \delta w} \\ & + \rho(u + \delta u, \vec{\gamma}(w(t), t), t)r^{u + \delta u} + \rho(u - \delta u, \vec{\gamma}(w(t), t), t)p^{u - \delta u}. \end{aligned} \quad (23)$$

Si consideramos la definición  $\rho^*(u, w(t), t) = \rho(u, \vec{\gamma}(w(t), t), t)$  y hacemos lo mismo para  $p^u, p^w, r^u, r^w$ , al sustituir en la última ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} & \rho^*(u, w(t + \delta t), t + \delta t) = \\ & \rho^*(u, w(t), t)(1 - (p_*^w + r_*^w + p_*^u + r_*^u)) + \rho^*(u, w(t) + \delta w, t)r_*^{w(t) + \delta w} + \rho^*(u, w(t) - \delta w, t)p_*^{w(t) - \delta w} + \\ & \rho^*(u + \delta u, w(t), t)r_*^{u + \delta u} + \rho^*(u - \delta u, w(t), t)p_*^{u - \delta u}. \end{aligned} \quad (24)$$

Como  $\vec{\gamma}^*(s, t)$  es regular para todo  $t \geq 0$ , entonces  $w(t)$  cuenta con desarrollo de Taylor de orden uno, i.e.,  $w(t + \delta t) = w(t) + \delta t w_t(t) + \theta(\delta t)$ , tal que  $\theta(\delta t)/\delta t \rightarrow 0$  cuando  $\delta t \rightarrow 0$  y sustituyendo en el término izquierdo de (24) tenemos que

$$\rho^*(u, w(t + \delta t), t + \delta t) = \rho^*(u, w(t) + \delta t w_t(t) + \theta(\delta t), t + \delta t).$$

En tanto, al considerar una expansión de Taylor de orden uno para  $\rho^*$  obtenemos que

$$\rho^*(u, w(t) + \delta t w_t(t) + \theta(\delta t), t + \delta t) = \rho^*(u, w(t), t + \delta t) + \delta t w_t \frac{\partial}{\partial w} \rho^*(u, w(t), t + \delta t) + \theta_1(\delta t),$$

tal que  $\theta_1(\delta t)/\delta t \rightarrow 0$  cuando  $\delta t \rightarrow 0$ .

Si sustituimos las últimas dos ecuaciones en (24) y reordenamos términos obtenemos

$$\begin{aligned} & \rho^*(u, w(t), t + \delta t) - \rho^*(u, w(t), t) = \\ & -\delta t w_t \frac{\partial}{\partial w} \rho^*(u, w(t), t + \delta t) - \theta_1(\delta t) - (p_*^w + r_*^w + p_*^u + r_*^u) \rho^*(u, w(t), t) + \rho^*(u, w(t) + \delta w, t) r_*^{w(t) + \delta w} + \\ & \rho^*(u, w(t) - \delta w, t) p_*^{w(t) - \delta w} + \rho^*(u + \delta u, w(t), t) r_*^{u + \delta u} + \rho^*(u - \delta u, w(t), t) p_*^{u - \delta u}. \end{aligned} \quad (25)$$

Utilizando un desarrollo similar al que se presentó en la sección pasada, en (11)-(14), para los términos del lado derecho de la ecuación anterior y simplificamos, llegamos a la ecuación

$$\begin{aligned} & \rho^*(u, w(t), t + \delta t) - \rho^*(u, w(t), t) = \\ & -\delta t w_t \frac{\partial}{\partial w} \rho^*(u, w(t), t + \delta t) - \theta_1(\delta t) - \delta u \frac{\partial}{\partial u} ((p_*^u - r_*^u) \rho^*(u, w(t), t)) + \frac{(\delta u)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} ((p_*^u + r_*^u) \rho^*(u, w(t), t)) \\ & -\delta w \frac{\partial}{\partial w} ((p_*^w - r_*^w) \rho^*(u, w(t), t)) + \\ & \frac{(\delta w)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} ((p_*^w + r_*^w) \rho^*(u, w(t), t)) + R_1(\delta u) + R_2(\delta w), \end{aligned}$$

donde  $R_1(\delta u)/(\delta u)^2 \rightarrow 0, R_2(\delta w)/(\delta w)^2 \rightarrow 0$  cuando  $\delta u \rightarrow 0, \delta w \rightarrow 0$ .

Una vez más, como en la sección pasada, nos encontramos en un paso crucial. Al dividir la última ecuación por  $\delta t$  y tomar el límite  $\delta w \rightarrow 0, \delta u \rightarrow 0$  y  $\delta t \rightarrow 0$ , con la intención de no conseguir resultados triviales o contradictorios, es necesario hacer las mismas consideraciones que en la sección 2.1. Así se llega a la ecuación

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \rho^*(u, w(t), t) = w_t \frac{\partial}{\partial w} \rho^*(u, w(t), t) - \frac{\partial}{\partial u} (D_1 \rho^*(u, w(t), t)) \\ & + D_2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} ((p_*^u + r_*^u) \rho^*(u, w(t), t)) - \frac{\partial}{\partial w} (E_1 \rho^*(u, w(t), t)) + E_2 \frac{\partial^2}{\partial w^2} ((p_*^w + r_*^w) \rho^*(u, w(t), t)). \end{aligned} \quad (26)$$

Por otro lado, si recuperamos la función longitud de arco  $w = \alpha(s, t)$  donde se observa que

$$s = \alpha^{-1}(\cdot, t)(w),$$

obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\psi(u, s, t) &\equiv \rho(u, \bar{\gamma}^*(s, t), t) \\
&= \rho(u, \bar{\gamma}^*(\alpha^{-1}(\cdot, t)(w), t), t) \\
&= \rho(u, \bar{\gamma}(w, t), t) \\
&= \rho^*(u, w, t).
\end{aligned} \tag{27}$$

Luego entonces,  $\psi(u, \alpha^{-1}(\cdot, t)(w), t) = \rho^*(u, w, t)$ . De forma análoga se puede desglosar la composición para  $p_*^w, r_*^w, p_*^u$  y  $p_*^s$ . En general si se nos presenta  $\chi(u, \alpha^{-1}(\cdot, t)(w), t) = f(u, w, t)$  y  $s = \alpha^{-1}(\cdot, t)(w)$ , tras utilizar la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w} f &= (\alpha^{-1})_w \frac{\partial}{\partial s} \chi = \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial}{\partial s} \chi, \\
\frac{\partial^2}{\partial w^2} f &= ((\alpha^{-1})_w)^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \chi + (\alpha^{-1})_{ww} \frac{\partial}{\partial s} \chi = \frac{1}{(\alpha_s)^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \chi - \frac{\alpha_{ss}}{(\alpha_s)^3} \frac{\partial}{\partial s} \chi.
\end{aligned} \tag{28}$$

El siguiente paso es utilizar (28), olvidar las etiquetas para  $r_*^w = r^w = r^w(u, s, t), \dots, \rho^*(u, w, t) = \rho(u, s, t)$  y sustituir en (26) para obtener la ecuación

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \rho &= -\frac{\partial}{\partial u} (D_1 \rho) + D_2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} ((p^u + r^u) \rho) - \frac{\alpha_t}{\alpha_s} \frac{\partial}{\partial s} \rho + \\
\frac{E_2}{(\alpha_s)^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial s^2} ((p^s + r^s) \rho) - \frac{\alpha_{ss}}{\alpha_s} \frac{\partial}{\partial s} ((p^s + r^s) \rho) \right) &- \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial}{\partial s} (E_1 \rho).
\end{aligned} \tag{29}$$

Como se hizo en la sección anterior, podemos considerar dos sustancias, con concentraciones  $u$  y  $v$ , que se difunden e interaccionan en  $\Omega(t)$  (curva parametrizada por  $s$ ). Realizando observaciones e hipótesis similares a las de (18) la ecuación resultante es

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -\nabla_{uv}(\rho \vec{F}) + D_{11} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \rho + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \rho - D \frac{\alpha_{ss}}{\alpha_s} \frac{\partial}{\partial s} \rho - \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial}{\partial s} (E_1 \rho) + \frac{E_2}{(\alpha_s)^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \rho - \frac{\alpha_t}{\alpha_s} \frac{\partial}{\partial s} \rho, \tag{30}$$

donde  $\vec{F}(u, v) = (f(u, v), g(u, v))^T$  es el vector de los términos de reacción,  $D_{11}, D_{22}, E_2$  son los coeficientes constantes de difusión,  $\alpha(s, t)$  está determinada por la función de crecimiento de la curva y  $(u, v, s, t) \in [0, u_{max}) \times [0, v_{max}) \times [a, b] \times [0, \infty)$ . Observemos que los términos del lado derecho de (30) dependen del tiempo y el espacio. Su interpretación física (véase [8]) es la siguiente:

$-\nabla_{uv}(\cdot)$  = término de transporte en  $[0, u_{max}) \times [0, v_{max})$ , corresponde al fenómeno de reacción,

$D_{11} \frac{\partial^2}{\partial u^2}(\cdot), D_{22} \frac{\partial^2}{\partial v^2}(\cdot)$  = términos de difusión en  $[0, u_{max}) \times [0, v_{max})$ ,

$\frac{E_2}{(\alpha_s)^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2}(\cdot)$  = término de difusión en el espacio físico y

$-(D \frac{\alpha_{ss}}{\alpha_s} + \frac{\alpha_t}{\alpha_s}) \frac{\partial}{\partial s}(\cdot), -\frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial}{\partial s}(\cdot)$  = términos de transporte en el espacio físico.

### 3. Consideraciones finales

Para terminar, se pueden agregar algunos comentarios sobre el presente trabajo. Existen muchos ejemplos (véase [31]) sobre la sensibilidad que tienen los sistemas de reacción-difusión a los cambios de las condiciones iniciales, de la geometría del dominio, de los valores de los parámetros, etcétera. Debido a esta sensibilidad, se busca entender la naturaleza estocástica de los modelos.

En la primera parte del trabajo se hizo un esbozo teórico sobre las ecuaciones de Fokker-Planck y los sistemas de reacción-difusión. Dada la cantidad y diversidad de materiales existentes sobre estos temas, se retomaron principalmente las fuentes enfocadas al estudio de fenómenos físicos, químicos y biológicos, no tanto, aquellas de carácter puramente teórico.

En la segunda parte se lograron establecer, mediante un método directo de construcción, dos ecuaciones de Fokker-Planck, una para dominios fijos (18) y otra para dominios dinámicos (30). Otra alternativa para llegar a la ecuación (18) y tal vez a la (30), consiste en considerar (2) y (7) (con una modificación), pero esto acarrea la complejidad de las ecuaciones diferenciales estocásticas.

El camino planteado para llegar a (18) y (30) permite una comprensión física de los procesos de reacción-difusión no deterministas. Se puede mencionar, como ejemplo de ello, que al considerar un espacio de estados, compuesto por el espacio físico y el conjunto de valores de las concentraciones, aparece intrínsecamente el fenómeno de reacción.

Las ecuaciones resultantes integran, de forma promediada, la información de dos ecuaciones diferenciales estocásticas asociadas a un proceso de reacción-difusión de dos sustancias. En (30) se logra incorporar la dinámica del dominio. Un trabajo a futuro puede ser la generalización de (30) al caso de un dominio dos-dimensional creciente y con curvatura, para después ampliar el criterio presentado en [5].

## Bibliografía

- [1] A. M. Turing . *The Chemical Basis of Morphogenesis* . Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences. Vol. 237. No. 641. pp. 37-72. (1952)
- [2] A. Castellanos Moreno. *Un modelo estocástico para la evolución de tumores cancerosos*. Rev. Mex. Fis. Vol. 42. No. 2. pp. 236-249. (1995)
- [3] E.J. Crampin y P.K. Maini. *Modelling biological pattern formation: The role of domain growth*. Comments in Theoretical Biology. Vol. 6. No. 3. pp. 229-249. (2001)
- [4] Shigeru Kondo y Takashi Miura. *Reaction-Diffusion Model as a Framework for Understanding Biological Pattern Formation*. Science . Vol. 329. No. 5999. pp. 1616-1620. (2010)
- [5] T. Marquez-Lago y P. Padilla Longoria. *A selection criterion for patterns in Turing systems*. (Trabajo en proceso de publicación)
- [6] E.J. Crampin y P.K. Maini. *Reaction-diffusion models for biological pattern formation*. Methods and Applications of Analysis. Vol. 8. No. 3. pp. 415-428. (2001)
- [7] P.K. Maini, E.J. Crampin, A. Madzvamuse, A.J. Wathen y R.D.K. Thomas. *Implications of domain growth in morphogenesis*. In Mathematical Modelling Computing in Biology and Medicine. Proceedings 5th ECMTB Conference 2002 (ed. V. Cappasso). pp. 67-73. (2003)
- [8] R. Plaza, F. Sanchez-Garduño, P. Padilla, R.A. Barrio, P.K. Maini. *The effect of growth and curvature on pattern formation*. J. Dyn. Differ. Equ.. Vol. 16. No. 4. pp. 1093-1121. (2004)
- [9] W. Coffey, Yu. P. Kalmykov y J.T. Waldron. **The Langevin equation : with applications to stochastic problems in physics, chemistry, and electrical engineering**. 2nd ed., Singapore : World Scientific. 2004. 678 pp.
- [10] A. Okubo. **Diffusion and ecological problems: mathematical models**. 2nd ed., New York : Springer Verlag, 2001. 467 pp.
- [11] E.J Crampin. **Reaction-Diffusion Patterns on Growing Domains** (Tesis de Doctorado). Magdalen College. University of Oxford. 2000. 163 pp.
- [12] M. A. Muñoz-Martínez. **Ecuaciones de Fokker-Planck y teoría de campos fuera de equilibrio**(Tesis de Doctorado). Departamento de Física Aplicada. Universidad de Granada. 1994. 178 pp.
- [13] H. Risken. **The fokker-planck equation : Methods of solution and applications**. 2nd ed., Berlin : Springer Verlag, 1989. 472 pp.
- [14] T. D. Frank. **Nonlinear Fokker-Planck Equations**. Berlin : Springer Verlag. 2005. 404 pp.
- [15] José Manuel Donoso Vargas. **Métodos numéricos integrales para ecuaciones Fokker-Planck** (Tesis de Doctorado). Universidad Complutense de Madrid. Facultad de Ciencias Físicas. Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear . Madrid. 2002 . 184 pp.
- [16] V. F. Breña Medina. **Estructuras ordenadas en algunos sistemas de reacción-difusión-advención** (Tesis de Licenciatura). UNAM. Facultad de Ciencias. 2007. 149 pp.

- [17] Faustino Sánchez Garduño y Pablo Padilla Longoria. **Emergencia y formación de patrones en biología: un enfoque matemático**. En: *Biología Matemática, un enfoque desde los sistemas dinámicos* L. Esteva y M. Falconi (Editores). Coordinación de Servicios Editoriales, Facultad de Ciencias-UNAM. 2002. pp. 125-157.
- [18] C.W. Gardiner. **Handbook of stochastic methods : for physics, chemistry and the natural sciences**. 3rd ed., Berlin : Springer Verlag. 2004. 415 pp.
- [19] L. Edelstein-Keshet. **Mathematical Models in Biology Classics in Applied Mathematics**. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics(SIAM edition). 2005. 586 pp.
- [20] Rebecca B. Hoyle. **Pattern Formation An Introduction to Methods**. Cambridge : Cambridge University Press. 2006. 422 pp.
- [21] N. G. Van Kampen. **Stochastic processes in physics and chemistry**. 3rd ed., Amsterdam : Elsevier. 2007. 463 pp.
- [22] S.M. Ermakov, V. V. Nekrutkin y A. S. Sipin. **Random processes for classical equations of mathematical physics**. Dordrecht : Kluwer Academic.1989. 281 pp.
- [23] Zeev Schuss. **Theory and applications of stochastic differential equations**. New York : Wiley.1980. 321 pp.
- [24] S. Salsa. **Partial differential equations in action : from modelling to theory**. Milan : Springer Verlag. 2008. 556 pp.
- [25] J.D. Murray. **Mathematical biology I: An introduction**. 3rd ed., Berlin : Springer Verlag. 2002. 551 pp.
- [26] J.D. Murray. **Mathematical biology : Spatial models and biomedical applications**. ( v. 2.). 3rd ed., New York : Springer Verlag. 2003. 837 pp.
- [27] Lawrence C. Evans. **Partial differential equations**. 2nd ed., Providence, Rhode Island : American Mathematical Society. 2010 . 750 pp.
- [28] P.K. Maini. **Mathematical models in morphogenesis**. *Mathematics Inspired by Biology* (eds V. Capasso and O. Diekmann). Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1714. 1999. pp. 151-189.
- [29] Frederick Reif. **Física estadística** (Statistical physics; version española por J. Aguilar Peris). 2nd ed., Barcelona : Reverte. 1985. 411 pp.
- [30] Shigeru Kondo y Rihito Asai. *A reaction-diffusion wave on the skin of the marine angelfish Pomacanthus*. *Nature*. Vol. 376. pp. 765-768. (1995)
- [31] Thomas E. Woolley, Ruth E. Baker, Eamonn A. Gaffney y Philip K. Maini. *Stochastic reaction and diffusion on growing domains: Understanding the breakdown of robust pattern formation*. *Phys. Rev. E* 84, 046216. (2011)