Universidad Nacional Autónoma de México
y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

Clasificación De Las Gavillas Casi Coherentes Sobre Esquemas Afines Y De Los Subesquemas Cerrados De Esquemas

T E S I S

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Juan Bosco Frías Medina
boscof@ifm.umich.mx

Director: Dr. Mustapha Lahyane
Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
lahyane@ifm.umich.mx

Morelia, Michoacán - Agosto de 2012.

Agradecimientos

Mi total agradecimiento a mi madre Guillermina Medina, a mi esposa Naila Angelina y a mis hermanos por el apoyo que me han brindado. Quiero dar gracias especialmente a mi asesor, el Dr. Mustapha Lahyane, por todo el apoyo que me brindó para que esta tesis de maestría pudiera llevarse a cabo.

Un agradecimiento a los miembros de mi comité sinodal: Dr. Abel Castorena, Dr. Pedro Luis del Ángel, Dr. Israel Moreno y Dr. Jorge Olivares, por sus observaciones y recomendaciones.

Mis agradecimientos a mis compañeros del grupo: Adrián, Brenda y Oscar, por esas charlas y discusiones donde aprendí muchas cosas.

Quiero agradecer al Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y al Centro de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México por su ardua labor en la formación de recursos humanos y por haberme brindado los medios para continuar con mi formación académica.

Igualmente, quiero agradecer al Conacyt por el apoyo económico brindado durante mis estudios de maestría y a la Coordinación de la Investigación Científica de la Universidad Michoacana por los apoyos recibidos de los proyectos CIC-UMSHN 2011 y 2012.

Índice general

Introducción

A finales de los años 50's, Alexander Grothendieck y sus colaboradores formularon la Teoría de Esquemas que es la base de la Geometría Algebraica Moderna. La experiencia de los últimos años ha mostrado que, a pesar de ser necesarias muchas técnicas provenientes del Álgebra Conmutativa, dicha teoría es el contexto en el cual los problemas de la Geometría Algebraica se entienden mejor y pueden ser atacados, además, no sólo unifica la Geometría Algebraica Clásica, el Álgebra Conmutativa y la Teoría de Números, sino que sus ideas pueden extenderse a otras áreas de las matemáticas como son la Geometría Diferencial, el Análisis Complejo y la Teoría de Códigos por citar algunas. Por estas razones, actualmente la Teoría de Esquemas tiene un gran interés de estudio a nivel internacional.

La Teoría de Esquemas se encuentra fundamentada en lenguaje del Álgebra Conmutativa y las herramientas provenientes de la Teoría de Gavillas. La noción de *gavilla* fue introducida por Jean Leray alrededor de 1945 y su importancia radica en el hecho que dicho objeto nos permite pasar de situaciones locales a globales, es decir, a partir de información local podemos obtener información global. Fue Jean-Pierre Serre quien introdujo la Teoría de Gavillas a la Geometría Algebraica y posteriormente Grothendieck generalizó el trabajo de Serre para establecer la Teoría de Esquemas. A partir de un anillo A, Grothendieck definió el espacio topológico $\mathrm{Spec}(A)$ y lo equipó con una gavilla de anillos $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$, de esta forma se construyó el par $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ que es el modelo de un *esquema afín*. Después, a través un proceso de pegado de esquemas afines fue posible construir un *esquema*.

En este trabajo de tesis desarrollaremos algunos tópicos de la Teoría de Esquemas y tiene dos propósitos, el primero de ellos es realizar la clasificación de las gavillas casi coherentes sobre esquemas afines y el segundo es clasificar a los subesquemas cerrados de un esquema.

Este texto iniciará con una revisión de las herramientas necesarias para estudiar y desarrollar la Teoría de Esquemas en el Capítulo 1. Dicho capítulo está integrado por cuatro secciones: en la Sección 1.1 realizaremos un repaso rápido de las nociones elementales de la Teoría de Gavillas que necesitaremos como son pregavilla, gavilla, grupo de gérmenes, morfismo, entre otros. Los contenidos aquí expuestos serán tratados con detalle en el Apéndice C. Aunque breve, la Sección

1.2 estudiará las nociones de espacio anillado, espacio localmente anillado y morfismo de espacio anillado, dichas nociones serán esenciales para el desarrollo de este trabajo. La localización de un módulo y de un anillo en un conjunto multiplicativo, herramienta proveniente del Álgebra Conmutativa, será tratada a detalle en la Sección 1.3. Hemos de enfatizar que dicha herramienta será utilizada prácticamente en todos los capítulos posteriores. Finalmente, en la Sección 1.4 introduciremos y estudiaremos a los esquemas afines, para ello, dado un anillo A construiremos el espacio topológico $\mathrm{Spec}(A)$ y posteriormente construiremos una gavilla de anillos $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ sobre dicho espacio para de esta forma definir y estudiar el espectro $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ del anillo A. Para conocer las herramientas básicas de la Teoría de Esquemas se sugiere al lector consultar [**3**], [**5**], [**9**] y [**10**]. Algunos de los resultados sobre esquemas afines que se encuentran en este capítulo pueden consultarse con más detalle en la segunda referencia. El Capítulo 1 de [**7**] es una buena referencia para tener un panorama global de la Teoría de Esquemas.

En el Capítulo 2 nos daremos a la tarea de estudiar a los $\mathcal{O}_X$-módulos de manera detallada donde $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio anillado. En la Sección 2.1 definiremos a los $\mathcal{O}_X$-módulos, sus morfismos y posteriormente vamos a traducir algunos resultados de la Teoría de Módulos a la Teoría de Gavillas: mostraremos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ tiene una estructura de $\mathcal{O}_X(X)$-módulo para cualesquiera gavillas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos, construiremos el producto y la suma directa de $\mathcal{O}_X$-módulos, definiremos a las gavillas libres y estudiaremos algunas de sus propiedades. La segunda sección se encargará de revisar una clase especial de $\mathcal{O}_X$-módulos: los generados por una familia de secciones globales. En la Sección 2.3 realizaremos la construcción y estudio de una gavilla que será crucial para nuestras construcciones posteriores, hablamos de la gavilla imagen inversa. En la cuarta y última sección de este capítulo retomaremos la noción del producto tensorial de módulos para construir el producto tensorial de $\mathcal{O}_X$-módulos y revisar algunas de sus propiedades principales. Una de las mejores referencias para estudiar con más profundidad las gavillas de módulos es [**6**], otra referencia que sugerimos es [**10**].

Los esquemas, objetos que son de gran importancia dentro de la Geometría Algebraica Moderna, serán estudiados en el Capítulo 3. Como una motivación al mundo de los esquemas, en la primera sección estudiaremos al espectro proyectivo $(\mathrm{Proj}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)})$ de un anillo graduado A, para ello, realizaremos un recordatorio de los ideales homogéneos e ideales primos homogéneos de un anillo graduado. Luego, de manera análoga a lo realizado en el inicio de la Sección 1.4, construiremos el espacio topológico $\mathrm{Proj}(A)$ y posteriormente construiremos una gavilla de anillos $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}$ sobre dicho espacio, en ambos casos revisaremos algunas de las propiedades de estos objetos. En la Sección 3.2 definiremos de manera concreta a los esquemas, veremos algunas de sus propiedades básicas y fijaremos algunas terminologías que utilizaremos libremente en los capítulos posteriores. Para concluir con este capítulo, estudiaremos una clase especial de esquemas: los esquemas noetherianos y localmente noetherianos. La referencia que más recomendamos para profundizar en el estudio de la Teoría de Esquemas es [**6**]. Otras buenas referencias son [**7**] y [**8**] y para iniciar un estudio de los esquemas se recomiendan [**9**] y [**10**].

Las Secciones 4.1 y 4.2 del Capítulo 4 se encargarán de darnos una motivación a las gavillas casi coherentes: dado un módulo M (respectivamente, un módulo graduado M) sobre un anillo A (respectivamente, sobre un anillo graduado A) vamos a construir una gavilla sobre $\operatorname{Spec}(A)$ (respectivamente, sobre $\operatorname{Proj}(A)$) que denotaremos por $\widetilde{M}$, dicha gavilla tendrá una estructura natural de $O_{\operatorname{Spec}(A)}$-módulo (respectivamente, una estructura natural de $O_{\operatorname{Proj}(A)}$-módulo). En cada una de las secciones citadas estudiaremos algunas de las propiedades principales de las gavillas mencionadas. Finalmente, después de definir a las gavillas casi coherentes en la Sección 4.3 y de revisar algunas de sus propiedades, realizaremos la clasificación de dichas gavillas sobre un esquema afín. Una de las consecuencias inmediatas a este hecho será la clasificación de las gavillas casi coherentes sobre un esquema arbitrario. Además, cuando el esquema afín o esquema en el que nos encontremos sea noetheriano, también podremos clasificar una clase especial de gavillas casi coherentes: la de las gavillas coherentes. Como referencia a dónde pueden encontrarse tópicos en gavillas casi coherentes y coherentes sugerimos consultar [**6**], [**8**] y [**10**], en especial, la última de ellas es muy recomendable.

En el Capítulo 5 con el que finalizaremos esta tesis, vamos a estudiar a los subesquemas cerrados de un esquema. En la primera sección realizaremos una construcción que nos servirá de motivación al estudio de las inmersiones cerradas entre espacios anillados. En la Sección 5.2 definiremos a las inmersiones abiertas y cerradas entre espacios anillados, además, puesto que las inmersiones cerradas son una pieza clave para lograr nuestro objetivo, mostraremos que una inmersión cerrada está determinada por un ideal del codominio. Aunque breve, en la tercera sección definiremos las inmersiones abiertas y cerradas entre esquemas y mostraremos un resultado de gran importancia para una inmersión cerrada entre esquemas cuando el codominio es un esquema afín. Por último, en la Sección 5.4 definiremos un subesquema cerrado de un esquema y realizaremos el segundo objetivo de este trabajo: la clasificación de los subesquemas cerrados de un esquema. Algunas referencias donde se pueden estudiar las inmersiones y subesquemas son [**6**], [**7**], [**8**] y [**10**].

Además, hemos de mencionar también que este trabajo cuenta con tres apéndices. El primero de ellos está dedicado a la Teoría de Módulos: haremos un repaso de las nociones básicas de la Teoría de Módulos, además, estudiaremos y revisaremos algunos resultados de las sucesiones exactas, de los módulos finitamente generados, del producto tensorial de módulos y de los anillos y módulos graduados. En el segundo apéndice realizaremos un tratamiento de algunas propiedades de los módulos, anillos y espacios topológicos noetherianos. Los textos que recomendamos para profundizar en la Teoría de Módulos y el Álgebra Conmutativa son [**1**], [**2**] y [**11**]. Algunas referencias para los espacios topológicos noetherianos son [**2**] y [**6**], la primera de ellas dedica una sección a estos objetos. Como habíamos mencionado, en el tercer y último apéndice realizaremos un estudio detallado de los conceptos y resultados provenientes de la Teoría de Gavillas que necesitaremos. Cabe señalar que la mayor parte de las construcciones y resultados que son tratados en este apéndice se utilizarán de manera frecuente y libremente en el desarrollo de este trabajo, así que se recomienda al lector que no está familiarizado con la Teoría de Gavillas consultar dicho apéndice. Para aprender suavemente la Teoría de Gavillas los textos [**3**], [**9**] y [**10**] pueden resultar de gran utilidad.

Como último comentario, una gran referencia para aquellos interesados en conocer la historia de cómo se ha ido desarrollando la Geometría Algebraica es [**4**].

Notación y terminología

En el contexto de este trabajo únicamente consideraremos anillos conmutativos con uno, de este modo, la palabra *anillo* significará anillo conmutativo con uno. El neutro aditivo de un anillo A será denotado por 0_A, de igual forma, al neutro multiplicativo lo denotaremos por 1_A. Un homomorfismo de anillos $\varphi : A \to B$ satisface que $\varphi(1_A) = 1_B$. Además, utilizaremos las siguientes notaciones:

$\mathcal{U}(A)$ - Conjunto de las unidades de A.
$\mathrm{Nil}(A)$ - Conjunto de los elementos nilpotentes de A.
$\sqrt{I}$ - Radical de un ideal I de A.
$\mathrm{Rad}(A)$ - Radical de Jacobson de A.
∂A - Conjunto de los ideales de A.
$\mathrm{Spec}(A)$ - Conjunto de los ideales primos de A.
$\mathrm{Max}(A)$ - Conjunto de los ideales maximales de A.

Si M es un módulo sobre un anillo A, el aniquilador de M será denotado por $\mathrm{Ann}_A(M)$.

Diremos que una asignación entre conjuntos $f : E \to F$ es una *aplicación bien definida* si $f(e) \in F$ para cada $e \in E$ y si para cualesquier elementos e_1 y e_2 de E tales que $e_1 = e_2$ se tiene que $f(e_1) = f(e_2)$. Además, si M es un grupo abeliano y A es un anillo, entonces una aplicación bien definida entre $A \times M$ y M que otorga a M una estructura de A-módulo será llamada *producto externo*.

Los conjuntos de índices que consideraremos en todo momento serán conjuntos no vacíos. Las letras $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ representarán a los números naturales y a los números enteros respectivamente. Para referirnos a los números enteros positivos junto con el cero utilizaremos el símbolo $\mathbb{Z}_+$.

En ocasiones, a los elementos de un espacio topológico los llamaremos *puntos*.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo estudiaremos el lenguaje y las herramientas necesarias que utilizaremos para desarrollar el contenido de los capítulos posteriores. En la primera sección, haremos un repaso rápido a los conceptos de la Teoría de Gavillas que necesitaremos a lo largo de los siguientes capítulos. La segunda sección estudia a los espacios anillados y sus propiedades, dichos objetos tendrán una gran relevancia para nuestro estudio. La localización, una herramienta proveniente del Álgebra Conmutativa será tratada en la tercera sección. Para concluir con este capítulo, la cuarta sección se encargará del estudio de los esquemas afines y algunas de sus propiedades. Es importante enfatizar que cuando nos referimos a un anillo nos referimos a un anillo conmutativo con uno.

1. Teoría de Gavillas

En esta sección realizaremos una revisión rápida de los conceptos básicos y resultados de la Teoría de Gavillas que necesitaremos para desarrollar el contenido de los siguientes capítulos, las nociones de pregavilla, gavilla, grupos de gérmenes y morfismos serán revisadas en esta sección. Para profundizar en los conceptos y ver las pruebas de los resultados presentados aquí puede consultarse el Apéndice C donde se da un tratamiento más profundo a la Teoría de Gavillas. Comenzaremos definiendo el objeto en cuestión que otorga el nombre a esta sección.

Definición 1.1. Sea X un espacio topológico. Una *pregavilla de grupos abelianos* sobre X es un par $(\mathcal{F}, \rho_{\mathcal{F}})$ donde $\mathcal{F}$ es una aplicación que a cada abierto U de X le asigna un grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$, $\rho_{\mathcal{F}}$ es una aplicación que a cada par de abiertos U y V de X tales que $V \subseteq U$ les asigna un homomorfismo de grupos abelianos ${\rho_{\mathcal{F}}}_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ y además, dichas aplicaciones satisfacen los siguientes tres enunciados:

PG1. $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$.

PG2. Para cada abierto U de X se tiene que ${\rho_{\mathcal{F}}}_U^U$ es la identidad de $\mathcal{F}(U)$.

PG3. Para cualesquier abiertos U, V y W de X tales que $W \subseteq V \subseteq U$ se satisface la igualdad ${\rho_{\mathcal{F}}}_W^V \circ {\rho_{\mathcal{F}}}_V^U = {\rho_{\mathcal{F}}}_W^U$.

La pregavilla de grupos abelianos $(\mathcal{F}, \rho_{\mathcal{F}})$ será una *gavilla de grupos abelianos* si además, para cada abierto U de X y para cada cubierta abierta $(U_i)_{i \in I}$ de U se cumplen los siguientes dos enunciados:

G1. Si $f \in \mathcal{F}(U)$ es tal que ${\rho_{\mathcal{F}}}^{U}_{U_i}(f) = 0_{\mathcal{F}(U_i)}$ para todo $i \in I$, entonces se tiene que $f = 0_{\mathcal{F}(U)}$.

G2. Para cada familia $(f_i)_{i\in I}$ de secciones de $\mathcal{F}$ donde $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ para todo $i \in I$ y de modo que ${\rho_{\mathcal{F}}}^{U_i}_{U_i\cap U_j}(f_i) = {\rho_{\mathcal{F}}}^{U_j}_{U_i\cap U_j}(f_j)$ para cualesquier $i, j \in I$, existe $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que ${\rho_{\mathcal{F}}}^{U}_{U_i}(f) = f_i$ para cualquier $i \in I$.

Si $(\mathcal{F}, \rho_{\mathcal{F}})$ es una pregavilla sobre un espacio topológico X, vamos a fijar algunas notaciones y terminologías que utilizaremos de aquí en adelante:

- Para referirnos a la pregavilla $(\mathcal{F}, \rho_{\mathcal{F}})$ simplemente diremos que $\mathcal{F}$ es una pregavilla sobre X y omitiremos la aplicación $\rho_{\mathcal{F}}$.
- Si U es un abierto de X y $f \in \mathcal{F}(U)$, entonces diremos que f es una *sección de $\mathcal{F}$ sobre U*.
- Si $g \in \mathcal{F}(X)$, entonces diremos que g es una *sección global de $\mathcal{F}$*.
- Si U y V son abiertos de X tales que $V \subseteq U$, entonces diremos que el homomorfismo ${\rho_{\mathcal{F}}}^{U}_{V}$ es la *restricción de U a V*.
- Si U y V son abiertos de X tales que $V \subseteq U$ y $h \in \mathcal{F}(U)$, siempre y cuando no exista confusión escribiremos ${\rho_{\mathcal{F}}}^{U}_{V}(h) = h|_V$.

Observación 1.2. Sea $\mathcal{F}$ una pregavilla de grupos abelianos sobre un espacio topológico X. Obsérvese que si U es un abierto de X se puede escoger a $\mathcal{F}(U)$ como un anillo, un módulo, etcétera y las restricciones a considerar respectivamente serán homomorfismos de anillos, morfismos de módulos, etc. En cada caso, decimos que tenemos una pregavilla de anillos, una pregavilla de módulos, etc. Las pregavillas y gavillas de módulos serán estudiadas con más detenimiento en el Capítulo 2.

El concepto definido a continuación es de suma importancia en la Teoría de Gavillas pues permite estudiar una gavilla desde un punto de vista local. Para mayores detalles se puede consultar el Apéndice C.

Definición 1.3. Sean $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre un espacio topológico X y $p \in X$. El *grupo de gérmenes de secciones de $\mathcal{F}$ en p* o *grupo de gérmenes de $\mathcal{F}$ en p* es el conjunto de clases de equivalencia

$$\mathcal{F}_p = \left\{[(U, f)] \,\middle|\, U \text{ es abierto } X \text{ tal que } p \in U \text{ y } f \in \mathcal{F}(U)\right\},$$

donde si U y V son abiertos de X que contienen a p, $f \in \mathcal{F}(U)$ y $g \in \mathcal{F}(V)$, se tiene que $(U, f) \sim (V, g)$ si y sólo si existe un abierto W de X tal que $p \in W$, $W \subseteq U \cap V$ y $f|_W = g|_W$, y donde la operación de grupo está dada por

$$[(U, f)] + [(V, g)] = [(U \cap V, f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V})].$$

Consideremos una pregavilla $\mathcal{F}$ de grupos abelianos sobre un espacio topológico X y tomemos un punto p de X. Vamos a fijar algunas notaciones, terminologías y realizaremos algunas observaciones:

- Si U es un abierto de X que contiene a p y $f \in \mathcal{F}(U)$, denotaremos $[(U, f)] = f_p$ y diremos que f_p es un *germen* de $\mathcal{F}_p$.
- Si U es un abierto de X que contiene a p, entonces existe un homomorfismo natural entre los grupos abelianos $\mathcal{F}(U)$ y $\mathcal{F}_p$ dado por

$$\begin{array}{rcl} \gamma_p^U : \mathcal{F}(U) & \to & \mathcal{F}_p \\ f & \mapsto & f_p \end{array}$$

- Si $\mathcal{F}$ es una pregavilla de anillos, entonces $\mathcal{F}_p$ tiene una estructura de anillo donde la operación producto está definida de la siguiente manera: si U y V son abiertos de X que contienen a p, $f \in \mathcal{F}(U)$ y $g \in \mathcal{F}(V)$, entonces

$$[(U, f)] \cdot [(V, g)] = [(U \cap V, f|_{U \cap V} \cdot g|_{U \cap V})].$$

  Aquí, $1_{\mathcal{F}_p}$ es igual a $[(X, 1_{\mathcal{F}(X)})]$. Además, se verifica sin dificultad que γ_p^U es un homomorfismo de anillos.

Como mencionamos antes, los grupos de gérmenes de secciones juegan un papel importante en la Teoría de Gavillas, la siguiente proposición empieza dar evidencias de la importancia de dichos grupos al darnos condiciones para tener igualdad entre secciones de una gavilla sobre un abierto dado.

Proposición 1.4. *Sean $\mathcal{F}$ una gavilla sobre un espacio topológico X y U un abierto de X. Si f y g son secciones de $\mathcal{F}$ sobre U, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $f = g$.
2. $f_p = g_p$ *para todo* $p \in U$.

Una vez que hemos definido las pregavillas y gavillas, una pregunta natural es si podemos definir alguna aplicación entre ellas. La respuesta es afirmativa y ese es el siguiente concepto a tratar.

Definición 1.5. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ pregavillas de grupos abelianos sobre un espacio topológico X. Un *morfismo de pregavillas* $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es una aplicación que a cada abierto U de X le asigna un homomorfismo de grupos $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ de modo que si U y V son abiertos de X tales que

$V \subseteq U$, entonces se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}}{}^U_V"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{G}}{}^U_V"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"'] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

Notemos que si X es un espacio topológico y si $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de pregavillas de grupos abelianos sobre X, entonces para cada $p \in X$ el morfismo φ induce de una manera natural y explícita un homomorfismo entre los grupos de gérmenes $\mathcal{F}_p$ y $\mathcal{G}_p$ dado de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_p : & \mathcal{F}_p & \to & \mathcal{G}_p \\ & [(U, f)] & \mapsto & [(U, \varphi_U(f))] \end{array}$$

Luego, podemos preguntarnos acerca de un concepto adecuado de sucesiones exactas de gavillas, dicho concepto será dado a continuación.

Definición 1.6. Sea X un espacio topológico y sean $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ y $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ morfismos de pregavillas de grupos abelianos sobre X.

1. El *morfismo composición $\psi \circ \varphi$ de φ y ψ* es el morfismo entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ dado de la siguiente manera: para cada abierto U de X asignamos $(\psi \circ \varphi)_U = \psi_U \circ \varphi_U$.
2. φ es un *isomorfismo* si existe un morfismo de pregavillas $\xi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ tal que $\varphi \circ \xi = \mathrm{id}_{\mathcal{G}}$ y $\xi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$, en tal caso, decimos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son *isomorfas* y denotamos este hecho por $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$. Aquí, si $\mathcal{E}$ es una pregavilla sobre X, el morfismo $\mathrm{id}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ está dado por $\mathrm{id}_{\mathcal{E}(U)} : \mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U)$ para cada abierto U de X.
3. Suponiendo que $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ son gavillas, la sucesión $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$ es una *sucesión exacta de gavillas* si la sucesión $0 \to \mathcal{F}_p \xrightarrow{\varphi_p} \mathcal{G}_p \xrightarrow{\psi_p} \mathcal{H}_p \to 0$ es exacta de $\mathbb{Z}$-módulos para todo $p \in X$.

Observación 1.7. Sean $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ y $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ morfismos de pregavillas sobre un espacio topológico X y sea p un punto en X. Como vimos anteriormente, φ y ψ inducen de manera natural los homomorfismos φ_p y ψ_p en los respectivos grupos de gérmenes; ahora bien, el morfismo $\psi \circ \varphi$ también induce de manera natural un homomorfismo $(\psi \circ \varphi)_p$ en los respectivos grupos de gérmenes. La relación entre dichos homomorfismos es la siguiente igualdad: $(\psi \circ \varphi)_p = \psi_p \circ \varphi_p$.

El siguiente teorema nos muestra como caracterizar un isomorfismo de pregavillas, más aún, en el caso en que tenemos una gavilla es posible dar una caracterización utilizando los grupos de gérmenes con lo que queda mostrada la importancia de este concepto.

Teorema 1.8. *Sean X un espacio topológico y $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de pregavillas sobre X. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *φ es un isomorfismo.*
2. *$\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ es un isomorfismo para cada abierto U de X.*

Si además $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son gavillas, los enunciados anteriores también son equivalentes al siguiente enunciado:

3. *$\varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ es un isomorfismo para cada $p \in X$.*

Ahora que tenemos la noción de isomorfismo de gavillas uno podría preguntarse si también existe la noción de morfismo inyectivo y sobreyectivo, la respuesta es afirmativa y ese concepto será el próximo que definiremos.

Definición 1.9. Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de gavillas sobre un espacio topológico X. φ es *inyectivo* (respectivamente, *sobreyectivo*) si para todo $p \in X$ se cumple que el homomorfismo φ_p es inyectivo (respectivamente, sobreyectivo).

El siguiente resultado nos muestra algunas propiedades de morfismos de gavillas:

Proposición 1.10. *Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de gavillas sobre un espacio topológico X.*

1. *φ es inyectivo si y sólo si φ_U es inyectivo para todo abierto U de X.*
2. *Si φ_U es sobreyectivo para cada abierto U de X, entonces φ es sobreyectivo.*
3. *φ es un isomorfismo si y sólo si φ es inyectivo y sobreyectivo.*

Para concluir con esta sección, presentamos las definiciones de algunas pregavillas y gavillas importantes que utilizaremos en el desarrollo de los capítulos posteriores. Como se mencionó al principio de la sección, para profundizar en las propiedades de las pregavillas y gavillas aquí expuestas puede consultarse el Apéndice C.

Definición 1.11. Sean $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre un espacio topológico X y U un abierto de X. La *restricción de $\mathcal{F}$ a U* es la pregavilla denotada por $\mathcal{F}|_U$ que a cada abierto V de U asigna $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$ y de modo que sus restricciones son las correspondientes restricciones en $\mathcal{F}$.

Teorema 1.12. *Si $\mathcal{F}$ es una pregavilla sobre un espacio topológico X, entonces existen una gavilla $\mathcal{F}^+$ sobre X y un morfismo $\theta^{\mathcal{F}^+} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ de modo que, si $\mathcal{G}$ es una gavilla sobre X y $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de pregavillas, entonces existe un único morfismo de gavillas $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ tal que $\varphi = \varphi^+ \circ \theta^{\mathcal{F}^+}$, es decir, tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta^{\mathcal{F}^+}"'] & \mathcal{G} \\
\mathcal{F}^+ \arrow[ur, "\varphi^+"'] &
\end{tikzcd}$$

Además, para cualquier $p \in X$ se tiene que $\theta_p^{\mathcal{F}^+} : \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_p^+$ es un isomorfismo. La gavilla $\mathcal{F}^+$ se llama la gavilla asociada a $\mathcal{F}$.

Definición 1.13. Sea $\mathcal{F}$ una pregavilla de grupos abelianos sobre un espacio topológico X. Una *subpregavilla* de $\mathcal{F}$ es una pregavilla $\mathcal{G}$ sobre X tal que para todo abierto U de X se cumple que $\mathcal{G}(U)$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(U)$ y de modo que las restricciones de $\mathcal{G}$ son las correspondientes restricciones en $\mathcal{F}$.

Definición 1.14. Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de pregavillas sobre un espacio topológico X. El *kernel del morfismo* φ denotado por $\operatorname{Ker}\varphi$ es la subpregavilla de $\mathcal{F}$ definida de la siguiente forma: para cada abierto U de X se tiene la asignación $\operatorname{Ker}\varphi(U) = \operatorname{Ker}\varphi_U$ y las restricciones son consideradas como las restricciones inducidas de $\mathcal{F}$.

Definición 1.15. Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de pregavillas sobre un espacio topológico X. La *imagen del morfismo* φ denotada por $\operatorname{Im}\varphi$ es la gavilla asociada a la subpregavilla $\operatorname{Im}^- \varphi$ de $\mathcal{G}$ dada de la siguiente manera: para cada abierto U de X se tiene la asignación $\operatorname{Im}^- \varphi(U) = \operatorname{Im}\varphi_U$ y las restricciones son consideradas como las restricciones inducidas de $\mathcal{G}$.

Definición 1.16. Sean $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre un espacio topológico X y $\mathcal{G}$ una subpregavilla de $\mathcal{F}$. La *gavilla cociente de $\mathcal{F}$ por $\mathcal{G}$* denotada por $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}$ es la gavilla asociada a la pregavilla $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-$ sobre X definida de la siguiente forma: para cada abierto U de X se tiene la asignación $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-(U) = \dfrac{\mathcal{F}(U)}{\mathcal{G}(U)}$ y las restricciones son consideradas como las restricciones inducidas de $\mathcal{F}$.

Definición 1.17. Sean $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre un espacio topológico X y $f : X \to Y$ una aplicación continua. La *pregavilla imagen directa de $\mathcal{F}$ bajo f* denotada por $f_*(\mathcal{F})$ es la pregavilla sobre Y definida de la siguiente manera: para cada abierto U de Y asignamos $f_*(\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ y para cualesquier abiertos U y V de Y tales que $V \subseteq U$ asignamos ${\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_V^U = {\rho_{\mathcal{F}}}_{f^{-1}(V)}^{f^{-1}(U)}$.

2. Espacios Anillados y Localmente Anillados

En esta sección definiremos la noción de espacio anillado, de espacio localmente anillado y de morfismos entre estos objetos. Las nociones aquí tratadas serán utilizadas para definir gran parte de los resultados expuestos en los capítulos posteriores y que además serán necesarios para realizar la definición de esquema afín, de esquema y de los morfismos existentes entre estos objetos. Iniciaremos la sección con la definición de espacio anillado.

Definición 1.18. Un *espacio anillado* es un par $(X, \mathcal{O}_X)$ donde X es un espacio topológico y $\mathcal{O}_X$ es una gavilla de anillos sobre X. La gavilla $\mathcal{O}_X$ es la *gavilla estructural de X*.

Como nos dice la definición de espacio anillado este consta de dos elementos, un espacio topológico y una gavilla de anillos sobre dicho espacio. Algo que es natural preguntarse sabiendo que existen aplicaciones continuas entre espacios topológicos y morfismos entre gavillas es si es posible definir una aplicación entre espacios anillados. La respuesta es sí y esa será nuestra próxima definición.

Definición 1.19. Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ espacios anillados. Un *morfismo de espacios anillados* entre $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es un par $(\varphi, \varphi^\#)$ donde $\varphi : X \to Y$ es una aplicación continua y donde $\varphi^\# : \mathcal{O}_Y \to \varphi_*(\mathcal{O}_X)$ es un morfismo de gavillas.

Siguiendo las mismas ideas desarrolladas al definir un morfismo de gavillas, lo que se presenta a continuación es la composición de morfismos de espacios anillados y los isomorfismos.

Definición 1.20. Sean $(\varphi, \varphi^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ y $(\psi, \psi^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ morfismos de espacios anillados.

1. El *morfismo composición* $(\psi, \psi^\#) \circ (\varphi, \varphi^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ es la pareja $(\psi \circ \varphi, (\psi \circ \varphi)^\#)$, donde para cada abierto W de Z se tiene la asignación $(\psi \circ \varphi)^\#_W = \varphi^\#_{\psi^{-1}(W)} \circ \psi^\#_W$.
2. $(\varphi, \varphi^\#)$ es un *isomorfismo* si existe un morfismo de espacios anillados $(\xi, \xi^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ tal que $(\varphi, \varphi^\#) \circ (\xi, \xi^\#) = (\mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_{\mathcal{O}_Y})$ y $(\xi, \xi^\#) \circ (\varphi, \varphi^\#) = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X})$.

Ahora, vamos a dar una caracterización de los isomorfismos de espacios anillados.

Proposición 1.21. *Sea* $(\varphi, \varphi^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *un morfismo de espacios anillados. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $(\varphi, \varphi^\#)$ *es un isomorfismo.*
2. φ *es un homeomorfismo y* $\varphi^\#$ *es un isomorfismo de gavillas.*

Demostración.

1. $\Rightarrow$ 2. Supongamos que $(\varphi, \varphi^\#) : (X, O_X) \to (Y, O_Y)$ es un isomorfismo. Así, se tiene la existencia de un morfismo de espacios anillados $(\psi, \psi^\#) : (Y, O_Y) \to (X, O_X)$ de modo que $(\psi, \psi^\#) \circ (\varphi, \varphi^\#) = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{O_X})$ y $(\varphi, \varphi^\#) \circ (\psi, \psi^\#) = (\mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_{O_Y})$, de esta forma tenemos que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$, $(\psi \circ \varphi)^\# = \mathrm{id}_{O_X}$, $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$ y $(\varphi \circ \psi)^\# = \mathrm{id}_{O_Y}$.

Como ψ es la aplicación inversa de φ y además es continua, se sigue que φ es un homeomorfismo. Ahora, mostraremos que $\varphi^\#$ es un isomorfismo de gavillas, para ello definiremos un morfismo $\zeta : \varphi_*(O_X) \to O_Y$ que satisfaga las igualdades $\zeta \circ \varphi^\# = \mathrm{id}_{O_Y}$ y $\varphi^\# \circ \zeta = \mathrm{id}_{\varphi_*(O_X)}$. Sea V un abierto de Y. Definimos el homomorfismo de anillos $\zeta_V : O_X(\varphi^{-1}(V)) \to O_Y(V)$ como $\zeta_V = \psi^\#_{\varphi^{-1}(V)}$. Puesto que $\psi^\#$ es un morfismo se sigue de manera inmediata que ζ es un morfismo. Por otro lado, la hipótesis $(\psi \circ \varphi)^\# = \mathrm{id}_{O_X}$ implica que para cualquier abierto U de X se tiene que $\varphi^\#_{\psi^{-1}(U)} \circ \psi^\#_U = \mathrm{id}_{O_X(U)}$; asimismo, la hipótesis $(\varphi \circ \psi)^\# = \mathrm{id}_{O_Y}$ implica que para cualquier abierto V de Y se tiene que $\psi^\#_{\varphi^{-1}(V)} \circ \varphi^\#_V = \mathrm{id}_{O_Y(V)}$. Con esto, vamos a probar que ζ satisface las igualdades deseadas: sea W un abierto de Y,

$$(\varphi^\# \circ \zeta)_W = \varphi^\#_W \circ \zeta_W = \varphi^\#_W \circ \psi^\#_{\varphi^{-1}(W)} = \mathrm{id}_{O_X(\varphi^{-1}(W))} = \mathrm{id}_{\varphi_*(O_X)(W)}.$$
$$(\zeta \circ \varphi^\#)_W = \zeta_W \circ \varphi^\#_W = \psi^\#_{\varphi^{-1}(W)} \circ \varphi^\#_W = \mathrm{id}_{O_Y(W)}.$$

De esta manera, como tenemos las igualdades $\zeta \circ \varphi^\# = \mathrm{id}_{O_Y}$ y $\varphi^\# \circ \zeta = \mathrm{id}_{\varphi_*(O_X)}$ concluimos que $\varphi^\#$ es un isomorfismo.

2. $\Rightarrow$ 1. Supongamos que φ es un homeomorfismo y que $\varphi^\#$ es un isomorfismo de gavillas. Lo que queremos es construir un morfismo de espacios anillados $(\psi, \psi^\#) : (Y, O_Y) \to (X, O_X)$ tal que $(\psi, \psi^\#) \circ (\varphi, \varphi^\#) = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{O_X})$ y $(\varphi, \varphi^\#) \circ (\psi, \psi^\#) = (\mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_{O_Y})$, es decir, queremos construir una aplicación continua $\psi : Y \to X$ y un morfismo de gavillas $\psi^\# : O_X \to \psi_*(O_Y)$ de modo que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$, $(\psi \circ \varphi)^\# = \mathrm{id}_{O_X}$, $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$ y $(\varphi \circ \psi)^\# = \mathrm{id}_{O_Y}$.

Como φ es un homeomorfismo entonces φ^{-1} es una aplicación continua. Luego, considerando $\psi = \varphi^{-1}$ se tiene de manera inmediata que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$ y que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$.

Ahora bien, del hecho de que φ es un isomorfismo se sigue que existe un morfismo $\xi : \varphi_*(O_X) \to O_Y$ tal que $\xi \circ \varphi^\# = \mathrm{id}_{O_X}$ y $\varphi^\# \circ \xi = \mathrm{id}_{\varphi_*(O_X)}$. A partir de ξ vamos a construir al morfismo $\psi^\# : O_X \to \psi_*(O_Y)$ de la siguiente manera: para cada abierto U de X definimos el homomorfismo $\psi^\#_U : O_X(U) \to O_Y(\psi^{-1}(U))$ como $\psi^\#_U = \xi_{\psi^{-1}(U)}$. Usando el hecho de que ξ es un morfismo de gavillas se sigue de manera inmediata que $\psi^\#$ es un morfismo de gavillas, más aún, cumple con las propiedades deseadas: en efecto, en primer lugar, sea U un abierto de X,

$$(\psi \circ \varphi)^\#_U = \varphi^\#_{\psi^{-1}(U)} \circ \psi^\#_U = \varphi^\#_{\psi^{-1}(U)} \circ \xi_{\psi^{-1}(U)} = \mathrm{id}_{\varphi_*(O_X)(\psi^{-1}(U))} = \mathrm{id}_{O_X(U)}.$$

Por lo tanto, tenemos que $(\psi \circ \varphi)^{\#} = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X}$. En segundo lugar, sea V un abierto de Y,

$$(\varphi \circ \psi)^{\#}_V = \psi^{\#}_{\varphi^{-1}(V)} \circ \varphi^{\#}_V = \xi_{\psi^{-1}(\varphi^{-1}(V))} \circ \varphi^{\#}_V = \xi_V \circ \varphi^{\#}_V = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_Y(V)}.$$

Con esto, se sigue que $(\varphi \circ \psi)^{\#} = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_Y}$. Por lo tanto, concluimos que $(\varphi, \varphi^{\#})$ es un isomorfismo de espacios anillados. ❑

Notación 1.22. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Para cada $p \in X$ denotaremos al anillo de gérmenes de la gavilla estructural de X en p por $\mathcal{O}_{X,p}$.

Recordemos que un anillo es *local* si tiene un único ideal maximal. Lo que realizaremos a continuación es definir una clase especial de espacios anillados que juegan un papel esencial en la construcción de los esquemas afines y de los esquemas.

Definición 1.23. Un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es *localmente anillado* si para cada $p \in X$ se tiene que $\mathcal{O}_{X,p}$ es un anillo local.

Al hablar de anillos locales, será importante saber cuándo un anillo es local o no lo es. El siguiente resultado nos proporcionará un criterio que nos será de gran ayuda para identificar si un anillo es local.

Proposición 1.24. *Un anillo A es local si y sólo si el conjunto de elementos de A que no son unidades forman un ideal en A.*

Demostración. Supongamos que A es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}$. Sea $a \in A \backslash \mathcal{U}(A)$. Como Aa es un ideal propio de A se sigue que $Aa \subseteq \mathfrak{m}$ y así tenemos que $A \backslash \mathcal{U}(A) \subseteq \mathfrak{m}$. Por otro lado, sea $x \in \mathfrak{m}$. Si x fuese una unidad de A, entonces $\mathfrak{m} = A$ lo cual contradice el hecho que $\mathfrak{m}$ es un ideal propio de A, de esta forma se sigue que $x \in A \backslash \mathcal{U}(A)$ y consecuentemente tenemos que $\mathfrak{m} \subseteq A \backslash \mathcal{U}(A)$. Por lo tanto, $\mathfrak{m} = A \backslash \mathcal{U}(A)$ y se concluye que $A \backslash \mathcal{U}(A)$ es un ideal de A, más aún, es igual a $\mathfrak{m}$.

Recíprocamente, supongamos que $A \backslash \mathcal{U}(A)$ es un ideal en A. Sea J un ideal maximal de A. Consideremos un elemento z de J. Como J es un ideal maximal se tiene que z no es una unidad, así, $z \in A \backslash \mathcal{U}(A)$. Luego, como $J \subseteq A \backslash \mathcal{U}(A) \subset A$ y $A \backslash \mathcal{U}(A)$ es un ideal se sigue que $J = A \backslash \mathcal{U}(A)$. Como J fue un ideal maximal arbitrario de A, concluimos que A es un anillo local. ❑

Lo siguiente que uno podría preguntarse es cómo definir una aplicación entre espacios localmente anillados. Puesto que los espacios localmente anillados son espacios anillados, de una manera natural se presenta ante nosotros la noción de morfismo de espacios anillados; sin embargo, para definir un morfismo entre espacios localmente anillados la condición local en los anillos de gérmenes juega un papel importante. La siguiente definición nos habla de los morfismos de espacios localmente anillados, luego, las nociones de composición e isomorfismo de espacios localmente anillados se extienden de manera natural.

Definición 1.25. Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ espacios localmente anillados. Un *morfismo de espacios localmente anillados* entre $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es un morfismo de espacios anillados $(\varphi, \varphi^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ de modo que para cada $p \in X$ la aplicación inducida de anillos locales $\varphi_p^\# : \mathcal{O}_{Y,\varphi(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ es un homomorfismo local de anillos, es decir, ${\varphi_p^\#}^{-1}(\mathfrak{m}_{X,p}) = \mathfrak{m}_{Y,\varphi(p)}$ donde $\mathfrak{m}_{X,p}$ y $\mathfrak{m}_{Y,\varphi(p)}$ son los ideales maximales de $\mathcal{O}_{X,p}$ y $\mathcal{O}_{Y,\varphi(p)}$ respectivamente.

Lo que haremos a continuación será dar una caracterización para los isomorfismos de espacios localmente anillados de una manera análoga a la realizada para espacios anillados.

Proposición 1.26. *Sea $(\varphi, \varphi^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfismo de espacios localmente anillados. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$(\varphi, \varphi^\#)$ es un isomorfismo.*
2. *φ es un homeomorfismo y $\varphi^\#$ es un isomorfismo de gavillas.*

Demostración.

1. $\Rightarrow$ 2. Puesto que un morfismo de espacios localmente anillados es un morfismo de espacios anillados con una condición extra, por la Proposición 1.21 tenemos la conclusión deseada.

2. $\Rightarrow$ 1. Asumamos que φ es un homeomorfismo y que $\varphi^\#$ es un isomorfismo de gavillas donde $\xi : \varphi_*(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_Y$ es su inverso. Por la Proposición 1.21, al considerar $\psi = \varphi^{-1}$ y $\psi^\# : \mathcal{O}_X \to \psi_*(\mathcal{O}_Y)$ como el morfismo de modo que $\psi_U^\# = \xi_{\psi^{-1}(U)}$ para cada abierto U de X, tenemos que el morfismo de espacios anillados $(\psi, \psi^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ es tal que $(\psi, \psi^\#) \circ (\varphi, \varphi^\#) = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X})$ y $(\varphi, \varphi^\#) \circ (\psi, \psi^\#) = (\mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_{\mathcal{O}_Y})$. De esta forma, lo único que nos resta a mostrar es que para cada $q \in Y$ se tiene que $\psi_q^\# : \mathcal{O}_{X,\psi(q)} \to \mathcal{O}_{Y,q}$ es un homomorfismo local.

Sea $q \in Y$. Como $(\varphi, \varphi^\#)$ es un morfismo de espacios localmente anillados se sigue que el homomorfismo de anillos $\varphi_{\psi(q)}^\# : \mathcal{O}_{Y,q} \to \mathcal{O}_{X,\psi(q)}$ es local, en particular, $(\varphi_{\psi(q)}^\#)^{-1}(\mathfrak{m}_{X,\psi(q)}) = \mathfrak{m}_{Y,q}$ donde $\mathfrak{m}_{X,\psi(q)}$ y $\mathfrak{m}_{Y,q}$ son los ideales maximales de $\mathcal{O}_{X,\psi(q)}$ y $\mathcal{O}_{Y,q}$ respectivamente. Lo que vamos a probar es que $\varphi_{\psi(q)}^\#$ y $\psi_q^\#$ son aplicaciones inversas, de este modo, la igualdad $(\varphi_{\psi(q)}^\#)^{-1}(\mathfrak{m}_{X,\psi(q)}) = \mathfrak{m}_{Y,q}$ implicará que $\mathfrak{m}_{X,\psi(q)} = (\psi_q^\#)^{-1}(\mathfrak{m}_{Y,q})$ y así concluiremos que $(\psi, \psi^\#)$ es un morfismo de espacios localmente anillados. En primer lugar mostraremos que $\psi_q^\# \circ \varphi_{\psi(q)}^\# = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{Y,q}}$: sean V un abierto de Y que contiene a q y $t \in \mathcal{O}_Y(V)$,

$$\psi_q^\# \circ \varphi_{\psi(q)}^\#([(V,t)]) = [(\psi^{-1} \circ \varphi^{-1}(V), \psi_{\varphi^{-1}(V)}^\# \circ \varphi_V^\#(t))] = [(V, \xi_V \circ \varphi_V^\#(t))] = [(V,t)].$$

En segundo lugar, mostraremos que $\varphi^\#_{\psi(q)} \circ \psi^\#_q = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{X,\psi(q)}}$: sean U un abierto de X que contiene a $\psi(q)$ y $s \in \mathcal{O}_X(U)$,

$$\varphi^\#_{\psi(q)} \circ \psi^\#_q([(U,s)]) = [(\varphi^{-1} \circ \psi^{-1}(U), \varphi^\#_{\psi^{-1}(U)} \circ \psi^\#_U(s))] = [(U, \varphi^\#_{\psi^{-1}(U)} \circ \xi_{\psi^{-1}(U)}(s))] = [(U,s)].$$

De esta forma, por lo argumentado anteriormente tenemos que $(\psi, \psi^\#)$ es un morfismo de espacios localmente anillados y con ello concluimos que $(\varphi, \varphi^\#)$ es un isomorfismo de espacios localmente anillados. ❏

Recordemos que un espacio topológico puede restringirse a un abierto y que una gavilla también puede restringirse a un abierto, estas ideas motivan al cuestionamiento de si es posible definir la noción de restricción a un espacio anillado y localmente anillado. Consideremos un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ y un abierto U no vacío de X. Sabemos que U es un espacio topológico con la topología inducida, además, como U es un abierto de X podemos considerar la gavilla $\mathcal{O}_X|_U$ la cual es una gavilla de anillos sobre U. De esta forma, tenemos que $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ es un espacio anillado. Más aún, si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio localmente anillado, puesto que para cada $p \in U$ se tiene el isomorfismo de anillos $(\mathcal{O}_X|_U)_p \cong \mathcal{O}_{X,p}$ (véase Proposición C.13), entonces se sigue que $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ es un espacio localmente anillado. De esta discusión se deriva la siguiente definición con la cual daremos por terminada esta sección.

Definición 1.27. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado (respectivamente, localmente anillado). Para cada abierto U no vacío de X, el *espacio anillado restringido al abierto U* (respectivamente, *localmente anillado restringido al abierto U*) es el par $(U, \mathcal{O}_U)$, donde $\mathcal{O}_U$ es la gavilla $\mathcal{O}_X$ restringida al abierto U, es decir, $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|_U$.

3. Localización

En esta sección nos daremos a la tarea de estudiar una poderosa herramienta proveniente del Álgebra Conmutativa: la localización de un módulo sobre un conjunto multiplicativo de un anillo. Después de definir la noción de conjunto multiplicativo de un anillo y realizar la construcción de la localización en un módulo arbitrario sobre dicho anillo, estudiaremos algunas propiedades en el caso general y en el caso en que el módulo resulte ser el anillo del cual proviene el conjunto multiplicativo. Comenzaremos con la siguiente definición.

Definición 1.28. Sea A un anillo. Un subconjunto S de A es un *conjunto multiplicativo* si $1_A \in S$ y si para cualesquier $x, y \in S$ se tiene que $xy \in S$.

Los siguientes ejemplos de conjuntos multiplicativos serán los que tendrán relevancia para nosotros y los estaremos utilizando constantemente a lo largo de los siguientes capítulos.

EJEMPLO 1.29. Sea A un anillo.

1. Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A, entonces $A\backslash\mathfrak{p}$ es un conjunto multiplicativo.
2. Si f es un elemento de A que no es nilpotente, entonces $S = \left\{f^n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}_+\right\}$ es un conjunto multiplicativo.

Ahora vamos a proceder con la construcción de la localización de un módulo en un subconjunto multiplicativo de algún anillo dado. Vamos a fijar un módulo M sobre un anillo A y a S un conjunto multiplicativo de A. Vamos a considerar al conjunto $S \times M = \left\{(s,m) \,\middle|\, s \in S,\ m \in M\right\}$ y vamos a definir una relación $\sim$ sobre $S \times M$ dada de la siguiente manera: si $s, s' \in S$ y $m, m' \in M$, entonces se tiene que $(s,m) \sim (s',m')$ si y sólo si existe $\tau \in S$ tal que $\tau(s'm - sm') = 0_M$. De hecho, el siguiente lema muestra que $\sim$ es una relación de equivalencia.

LEMA 1.30. *Con las notaciones anteriores, la relación $\sim$ es de equivalencia sobre $S \times M$.*

DEMOSTRACIÓN.

• *Reflexividad.* Sean $s \in S$ y $m \in M$. Tenemos que $(s,m) \sim (s,m)$ ya que $1_A(sm - sm) = sm - sm = 0_M$ y $1_A \in S$.

• *Simetría.* Sean $s, s' \in S$ y $m, m' \in M$ tales que $(s,m) \sim (s',m')$. Así, existe $\tau \in S$ tal que $\tau(s'm - sm') = 0_M$, esta igualdad podemos reescribirla como $\tau(sm' - s'm) = 0_M$ y esto implica que $(s',m') \sim (s,m)$.

• *Transitividad.* Sean $s, s', \tilde{s} \in S$ y $m, m', \tilde{m} \in M$ tales que $(s,m) \sim (s',m')$ y $(s',m') \sim (\tilde{s},\tilde{m})$. Así, existen $\tau_1, \tau_2 \in S$ de modo que $\tau_1(s'm - sm') = 0_M$ y $\tau_2(\tilde{s}m' - s'\tilde{m}) = 0_M$. De esto se sigue que $\tau_2\tilde{s}\tau_1(s'm - sm') = 0_M$ y $\tau_1 s\tau_2(\tilde{s}m' - s'\tilde{m}) = 0_M$, es decir, tenemos que $\tau_1\tau_2 s'\tilde{s}m = \tau_1\tau_2 s\tilde{s}m'$ y $\tau_1\tau_2 s\tilde{s}m' = \tau_1\tau_2 ss'\tilde{m}$. Lo anterior implica que $\tau_1\tau_2 s'\tilde{s}m = \tau_1\tau_2 ss'\tilde{m}$, o sea que $\tau_1\tau_2 s'(\tilde{s}m - s\tilde{m}) = 0_M$ y como $\tau_1\tau_2 s' \in S$ concluimos que $(s,m) \sim (\tilde{s},\tilde{m})$. ❏

Como $\sim$ es una relación de equivalencia, podemos considerar el cociente de $S \times M$ sobre $\sim$. De esta forma, definimos la *localización de M en el conjunto multiplicativo S* como el cociente $\dfrac{S \times M}{\sim}$ y lo denotaremos por $S^{-1}M$. Así, un elemento de $S^{-1}M$ es de la forma $[(s,m)]$ para algunos $s \in S$ y $m \in M$ y luego, de una manera cómoda vamos a definir $\dfrac{m}{s} = [(s,m)]$ para cualesquier $s \in S$ y $m \in M$. Lo que haremos a continuación es dotar a $S^{-1}M$ con una estructura de grupo abeliano con la operación $+$ definida de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{rcl}
+ : S^{-1}M \times S^{-1}M & \rightarrow & S^{-1}M \\
\left(\dfrac{m}{s}, \dfrac{m'}{s'}\right) & \mapsto & \dfrac{s'm + sm'}{ss'}
\end{array}
$$

Lema 1.31. *Con las notaciones anteriores, $(S^{-1}M, +)$ es un grupo abeliano.*

Demostración. Comenzaremos mostrando que la operación + está bien definida: consideremos $m, m', n, n' \in M$ y $s, s', t, t' \in S$ tales que $\left(\frac{m}{s}, \frac{n}{t}\right) = \left(\frac{m'}{s'}, \frac{n'}{t'}\right)$. Vamos a probar que $\frac{m}{s} + \frac{n}{t} = \frac{m'}{s'} + \frac{n'}{t'}$, es decir, mostraremos que $\frac{tm + sn}{st} = \frac{t'm' + s'n'}{s't'}$. Por hipótesis sabemos que existen $\tau_1, \tau_2 \in S$ tales que $\tau_1(s'm - sm') = 0_M$ y $\tau_2(t'n - tn') = 0_M$. Ahora, observemos que

$$\begin{aligned}
\tau_1\tau_2(s't'(tm + sn) - st(t'm' + s'n')) &= \tau_1\tau_2(s't'tm + s't'sn - stt'm' - sts'n') \\
&= \tau_1\tau_2 s't'tm + \tau_1\tau_2 s't'sn - \tau_1\tau_2 stt'm' - \tau_1\tau_2 sts'n' \\
&= \tau_2 tt'\tau_1(s'm - sm') + \tau_1 ss'\tau_2(t'n - tn') \\
&= 0_M.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{m}{s} + \frac{n}{t} = \frac{m'}{s'} + \frac{n'}{t'}$ y así la operación + está bien definida. Ahora, probaremos que la operación + cumple los requisitos para dotar a $S^{-1}M$ de una estructura de grupo abeliano. Sean $m, m', \tilde{m} \in M$ y $s, s', \tilde{s} \in S$.

- *Asociatividad.*

$$\begin{aligned}
\left(\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'}\right) + \frac{\tilde{m}}{\tilde{s}} &= \frac{s'm + sm'}{ss'} + \frac{\tilde{m}}{\tilde{s}} \\
&= \frac{\tilde{s}(s'm + sm') + ss'(\tilde{m})}{(ss')\tilde{s}} \\
&= \frac{\tilde{s}s'm + \tilde{s}sm' + ss'\tilde{m}}{ss'\tilde{s}} \\
&= \frac{s'\tilde{s}(m) + s(\tilde{s}m' + s'\tilde{m})}{s(s'\tilde{s})} \\
&= \frac{m}{s} + \frac{\tilde{s}m' + s'\tilde{m}}{s'\tilde{s}} \\
&= \frac{m}{s} + \left(\frac{m'}{s'} + \frac{\tilde{m}}{\tilde{s}}\right).
\end{aligned}$$

- *Conmutatividad.*

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{s'm + sm'}{ss'} = \frac{sm' + s'm}{s's} = \frac{m'}{s'} + \frac{m}{s}.$$

- *Neutro.* Afirmamos que el elemento $\frac{0_M}{1_A}$ es el neutro de nuestra operación, en efecto:

$$\frac{m}{s} + \frac{0_M}{1_A} = \frac{1_A \cdot m + s \cdot 0_M}{s \cdot 1_A} = \frac{m}{s}.$$

- *Inverso.* Afirmamos que el inverso del elemento $\dfrac{m}{s}$ bajo nuestra operación es el elemento $\dfrac{-m}{s}$, en efecto:

$$\frac{m}{s}+\frac{-m}{s}=\frac{sm+s(-m)}{ss}=\frac{sm-sm}{ss}=\frac{0_M}{ss}=\frac{0_M}{1_A}.$$

❏

Luego, de una manera natural vamos a definir un homomorfismo de grupos abelianos entre M y $S^{-1}M$. Definimos la asignación

$$\begin{array}{rcl} i_S^M : M & \to & S^{-1}M \\ m & \mapsto & \dfrac{m}{1_A} \end{array}$$

Observemos que i_S^M es una aplicación bien definida: en efecto, sean $m, m' \in M$ tales que $m = m'$. De la igualdad $m = m'$ se sigue que $1_A(1_A \cdot m - 1_A \cdot m') = 0_M$ lo cual implica que $\dfrac{m}{1_A} = \dfrac{m'}{1_A}$, es decir que $i_S^M(m) = i_S^M(m')$. Ahora, consideremos $m, m' \in M$ elementos arbitrarios,

$$i_S^M(m+m')=\frac{m+m'}{1_A}=\frac{m}{1_A}+\frac{m'}{1_A}=i_S^M(m)+i_S^M(m').$$

Por lo tanto, concluimos que i_S^M es un homomorfismo de grupos. Obsérvese que en general i_S^M no es un homomorfismo inyectivo, de hecho $\operatorname{Ker} i_S^M = \left\{m \in M \,\middle|\, \exists\ s \in S\ :\ sm = 0_M\right\}$.

Lo que haremos a continuación es estudiar el caso particular en que M es igual a A. Sabemos que $S^{-1}A$ tiene una estructura de grupo abeliano, sin embargo, en este caso podemos definir una estructura de anillo en $S^{-1}A$ con la operación producto dada de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} \cdot : S^{-1}A \times S^{-1}A & \to & S^{-1}A \\ \left(\dfrac{a}{s}, \dfrac{a'}{s'}\right) & \mapsto & \dfrac{aa'}{ss'} \end{array}$$

Lema 1.32. *Con las notaciones anteriores,* $(S^{-1}A, +, \cdot)$ *es un anillo.*

Demostración. En primer lugar, vamos a mostrar que $\cdot$ es operación bien definida: sean $a, a', b, b' \in A$ y $s, s', t, t' \in S$ tales que $\left(\dfrac{a}{s}, \dfrac{b}{t}\right) = \left(\dfrac{a'}{s'}, \dfrac{b'}{t'}\right)$. Vamos a probar que $\dfrac{a}{s} \cdot \dfrac{b}{t} = \dfrac{a'}{s'} \cdot \dfrac{b'}{t'}$, es decir que $\dfrac{ab}{st} = \dfrac{a'b'}{s't'}$. Por hipótesis existen $\tau_1, \tau_2 \in S$ tales que $\tau_1(s'a - sa') = 0_A$ y $\tau_2(t'b - tb') = 0_A$. Luego, observemos que

$$\begin{aligned} \tau_1\tau_2(s't'ab - sta'b') &= \tau_1\tau_2(s't'ab - t'bsa' + t'bsa' - sta'b') \\ &= \tau_1\tau_2(t'b(s'a - sa') + sa'(t'b - tb')) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \tau_2 t' b \tau_1 (s'a - sa') + \tau_1 s a' \tau_2 (t'b - tb') \\ &= 0_A. \end{aligned}$$

De este modo tenemos que $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{a'}{s'} \cdot \frac{b'}{t'}$ y por lo tanto la operación $\cdot$ está bien definida. Sabemos que $(S^{-1}A, +)$ es un grupo abeliano, así que lo que probaremos ahora es que la operación $\cdot$ otorga una estructura de anillo a $S^{-1}A$. Sean $a, a', \tilde{a} \in A$ y $s, s, \tilde{s} \in S$.

- *Asociatividad.*

$$\left(\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'}\right) \cdot \frac{\tilde{a}}{\tilde{s}} = \frac{aa'}{ss'} \cdot \frac{\tilde{a}}{\tilde{s}} = \frac{(aa')\tilde{a}}{(ss')\tilde{s}} = \frac{a(a'\tilde{a})}{s(s'\tilde{s})} = \frac{a}{s} \cdot \frac{a'\tilde{a}}{s'\tilde{s}} = \frac{a}{s} \cdot \left(\frac{a'}{s'} \cdot \frac{\tilde{a}}{\tilde{s}}\right).$$

- *Conmutatividad.*

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'} = \frac{a'a}{s's} = \frac{a'}{s'} \cdot \frac{a}{s}.$$

- *Uno.* Afirmamos que el elemento $\frac{1_A}{1_A}$ es el uno de nuestro anillo, en efecto:

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{1_A}{1_A} = \frac{a \cdot 1_A}{s \cdot 1_A} = \frac{a}{s}.$$

- *Distributividad.*

$$\frac{a}{s} \cdot \left(\frac{a'}{s'} + \frac{\tilde{a}}{\tilde{s}}\right) = \frac{a}{s} \cdot \frac{\tilde{s}a' + s'\tilde{a}}{s'\tilde{s}} = \frac{a(\tilde{s}a' + s'\tilde{a})}{s(s'\tilde{s})} = \frac{a\tilde{s}a'}{ss'\tilde{s}} + \frac{as'\tilde{a}}{ss'\tilde{s}} = \frac{aa'}{ss'} + \frac{a\tilde{a}}{s\tilde{s}} = \frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} + \frac{a}{s} \cdot \frac{\tilde{a}}{\tilde{s}}.$$

❏

Recordando que este es un caso particular de la construcción de módulos, tenemos la existencia del homomorfismo de grupos abelianos $i_S^A : A \to S^{-1}A$, en nuestro caso no sólo tenemos que este es un homomorfismo de grupos sino que es un homomorfismo de anillos: en efecto, sean $a, a' \in A$,

$$i_S^A(aa') = \frac{aa'}{1_A} = \frac{a}{1_A} \cdot \frac{a'}{1_A} = i_S^A(a) i_S^A(a').$$

$$i_S^A(1_A) = \frac{1_A}{1_A} = 1_{S^{-1}A}.$$

Ahora, realizaremos algunas observaciones de este homomorfismo de anillos:

- Para cualquier $s \in S$ se tiene que $i_S^A(s)$ es una unidad de $S^{-1}A$, en efecto,

$$i_S^A(s) \cdot \frac{1_A}{s} = \frac{s}{1_A} \cdot \frac{1_A}{s} = \frac{s}{s} = \frac{1_A}{1_A} = 1_{S^{-1}A}.$$

- Al igual que en el caso de módulos, en general i_S^A no es inyectivo, de manera análoga al caso general se tiene que $\operatorname{Ker} i_S^A = \left\{a \in A \,\middle|\, \exists\, s \in S : sa = 0_A\right\}$.

Hasta el momento hemos construido al grupo abeliano $S^{-1}M$ y al anillo $S^{-1}A$. Lo siguiente que haremos será dotar a $S^{-1}M$ con una estructura de módulo sobre el anillo $S^{-1}A$: definimos la operación producto externo de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} \cdot : S^{-1}A \times S^{-1}M & \to & S^{-1}M \\ \left(\frac{a}{s}, \frac{m}{t}\right) & \mapsto & \frac{am}{st} \end{array}$$

Lema 1.33. *Con las notaciones anteriores, $S^{-1}M$ es un módulo sobre $S^{-1}A$.*

Demostración. En primer lugar, vamos a mostrar que el producto externo $\cdot$ es una operación bien definida: sean $a, a' \in A$, $m, m' \in M$ y $s, s', t, t' \in S$ tales que $\left(\frac{a}{s}, \frac{m}{t}\right) = \left(\frac{a'}{s'}, \frac{m'}{t'}\right)$. Vamos a probar que $\frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} = \frac{a'}{s'} \cdot \frac{m'}{t'}$, es decir, mostraremos que $\frac{am}{st} = \frac{a'm'}{s't'}$. Por hipótesis se sigue que existen $\tau_1, \tau_2 \in S$ tales que $\tau_1(s'a - sa') = 0_A$ y $\tau_2(t'm - tm') = 0_M$. Ahora, obsérvese que

$$\begin{aligned} \tau_1\tau_2(s't'am - sta'm') &= \tau_1\tau_2(s't'am - t'msa' + t'msa' - sta'm') \\ &= \tau_1\tau_2(t'm(s'a - sa') + sa'(t'm - tm')) \\ &= \tau_2 t'm\tau_1(s'a - sa') + \tau_1 sa'\tau_2(t'm - tm') \\ &= 0_M. \end{aligned}$$

De esta forma, tenemos que $\frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} = \frac{a'}{s'} \cdot \frac{m'}{t'}$ y por lo tanto que la operación $\cdot$ está bien definida. Por último, vamos a comprobar que $\cdot$ cumple con los requisitos para ser un producto externo. Sean $m, m' \in M$, $a, a' \in A$, y $s, s', t, t' \in S$.

$$\frac{a}{s} \cdot \left(\frac{m}{t} + \frac{m'}{t'}\right) = \frac{a}{s} \cdot \frac{t'm + tm'}{tt'} = \frac{a(t'm + tm')}{s(tt')} = \frac{t'(am)}{t'(st)} + \frac{t(am')}{t(st')} = \frac{am}{st} + \frac{am'}{st'} = \frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} + \frac{a}{s} \cdot \frac{m'}{t'}.$$

$$\left(\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'}\right) \cdot \frac{m}{t} = \frac{s'a + sa'}{ss'} \cdot \frac{m}{t} = \frac{(s'a + sa')m}{(ss')t} = \frac{s'(am)}{s'(st)} + \frac{s(a'm)}{s(s't)} = \frac{am}{st} + \frac{a'm}{s't} = \frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} + \frac{a'}{s'} \cdot \frac{m}{t}.$$

$$\left(\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'}\right) \cdot \frac{m}{t} = \frac{aa'}{ss'} \cdot \frac{m}{t} = \frac{(aa')m}{(ss')t} = \frac{a(a'm)}{s(s't)} = \frac{a}{s} \cdot \frac{a'm}{s't} = \frac{a}{s} \cdot \left(\frac{a'}{s'} \cdot \frac{m}{t}\right).$$

$$1_{S^{-1}A} \cdot \frac{m}{t} = \frac{1_A}{1_A} \cdot \frac{m}{t} = \frac{1_A \cdot m}{1_A \cdot t} = \frac{m}{t}.$$

❏

Ahora bien, como $S^{-1}M$ tiene una estructura de $S^{-1}A$-módulo y $S^{-1}A$ es una A-álgebra, se sigue que podemos ver a $S^{-1}M$ como un módulo sobre el anillo A. Una vez que sabemos esto, ya podemos comprobar que realmente la aplicación $i_S^M : M \to S^{-1}M$ es una aplicación A-lineal: en efecto, sean $m \in M$ y $\lambda \in A$:

$$i_S^M(\lambda m) = \frac{\lambda m}{1_A} = \frac{\lambda}{1_A} \cdot \frac{m}{1_A} = \lambda \cdot \frac{m}{1_A} = \lambda \cdot i_S^M(m).$$

Las localizaciones de módulos y anillos que utilizaremos serán aquellas obtenidas de localizar en los conjuntos multiplicativos del Ejemplo 1.29:

Ejemplo 1.34. Sea M un módulo sobre un anillo A.

1. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, denotaremos a las localizaciones de A y de M en $A \backslash \mathfrak{p}$ por $A_{\mathfrak{p}}$ y $M_{\mathfrak{p}}$ respectivamente.
2. Si f es un elemento de A que no es nilpotente, las localizaciones de A y M en $S = \left\{ f^n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}_+ \right\}$ serán denotadas por A_f y M_f respectivamente.

Es probable que llegado a este punto nos preguntemos por qué consideramos un elemento del anillo que no es nilpotente para realizar la localización, la razón que si el elemento fuese nilpotente entonces la localización sería el módulo o el anillo nulo según sea el caso. De manera general, el siguiente resultado nos dice bajo qué condiciones cuando localizamos un módulo en un conjunto multiplicativo obtendremos el módulo nulo, y como caso particular se derivará el caso en que el conjunto multiplicativo contiene un elemento nilpotente.

Lema 1.35. *Sean M un módulo sobre un anillo A y S un conjunto multiplicativo de A. Si* $\operatorname{Ann}_A(M) \cap S \neq \emptyset$*, entonces* $S^{-1}M = \{0\}$*. Además, si M es finitamente generado sobre A y* $S^{-1}M = \{0\}$*, entonces* $\operatorname{Ann}_A(M) \cap S \neq \emptyset$*.*

Demostración. Supongamos que $\operatorname{Ann}_A(M) \cap S \neq \emptyset$, así sea $\tau \in A$ de modo que $\tau \in S \cap \operatorname{Ann}_A(M)$. Luego, para cualesquier $m \in M$ y $s \in S$ se tiene que

$$\frac{m}{s} = \frac{\tau m}{\tau s} = \frac{0_M}{\tau s} = \frac{0_M}{1_A} = 0_{S^{-1}M}.$$

De esta forma se concluye que $S^{-1}M = \{0_{S^{-1}M}\}$.

Ahora, supongamos que M es finitamente generado y que $S^{-1}M = \{0_{S^{-1}M}\}$. Como M es finitamente generado, existen $r \in \mathbb{N}$ y $m_1, m_2, \ldots, m_r \in M$ tales que $M = Am_1 + \cdots + Am_r$. Luego, por hipótesis se sigue que

$$\frac{m_1}{1_A} = \frac{m_2}{1_A} = \cdots = \frac{m_r}{1_A} = \frac{0_M}{1_A}$$

y consecuentemente se tiene la existencia de $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r \in S$ tales que

$$\tau_1 m_1 = \tau_2 m_2 = \cdots = \tau_r m_r = 0_M.$$

Consideramos $\tau = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_r$. Observemos que $\tau \in S$ pues S es un conjunto multiplicativo y además, como τ anula a los generadores de M se sigue que $\tau m = 0_M$ para todo $m \in M$. Por lo tanto, $\tau \in \operatorname{Ann}_A(M) \cap S$. ❑

De este lema en particular se tiene que si $0_A \in S$, entonces $S^{-1}M = \{0_{S^{-1}M}\}$. Además, en el caso en que M es igual al anillo A tenemos que $0_A \in S$ si y sólo si $S^{-1}A = \{0_{S^{-1}A}\}$. Por esta razón, de aquí en adelante supondremos que $0_A \notin S$.

Lo siguiente que haremos es probar que la localización cumple con una propiedad universal. Esta herramienta será de gran importancia durante los capítulos posteriores.

Teorema 1.36. *Sean M un módulo sobre un anillo A y S un conjunto multiplicativo de A. Para cada A-módulo N y para cada aplicación A-lineal $\varphi : M \to N$ que satisfacen que la homotecia*

$$\begin{array}{rcl} h_s : N & \to & N \\ n & \mapsto & sn \end{array}$$

es una biyección para cualquier $s \in S$, existe una única aplicación A-lineal $\widetilde{\varphi} : S^{-1}M \to N$ de modo que para cualesquier $m \in M$ y $s \in S$ se satisface la igualdad $s \cdot \widetilde{\varphi}\left(\frac{m}{s}\right) = \varphi(m)$. En particular, se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_S^M"'] & N \\ S^{-1}M \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Consideramos la asignación

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi} : S^{-1}M & \to & N \\ \dfrac{m}{s} & \mapsto & h_s^{-1} \circ \varphi(m) \end{array}$$

En primer lugar, mostraremos que $\widetilde{\varphi}$ es una aplicación bien definida: sean $m, m' \in M$ y $s, s' \in S$ tales que $\dfrac{m}{s} = \dfrac{m'}{s'}$. De este modo, existe $u \in S$ tal que $u(s'm - sm') = 0_M$ y esta igualdad implica que $\varphi(us'm) = \varphi(usm')$. Luego, como φ es una aplicación A-lineal tenemos que $us'\varphi(m) = us\varphi(m')$, es decir $h_u(s'\varphi(m)) = h_u(s\varphi(m'))$. Usando el hecho de que la aplicación h_u es invertible, de la igualdad $h_u(s'\varphi(m)) = h_u(s\varphi(m'))$ se obtiene la igualdad $h_{s'}(\varphi(m)) = s\varphi(m')$. Ahora, usando el hecho de que $h_{s'}$ es una aplicación invertible, de la igualdad $h_{s'}(\varphi(m)) = s\varphi(m')$ obtenemos que $\varphi(m) = h_s(h_{s'}^{-1}(\varphi(m')))$. Finalmente, usando el hecho de que h_s también es una aplicación invertible, de la igualdad $\varphi(m) = h_s(h_{s'}^{-1}(\varphi(m')))$ se sigue la igualdad $h_s^{-1}(\varphi(m)) = h_{s'}^{-1}(\varphi(m'))$ y con esto concluimos que $\widetilde{\varphi}$ es una aplicación bien definida.

En segundo lugar, probaremos que $\widetilde{\varphi}$ es una aplicación A-lineal: sean $m, m' \in M$, $s, s' \in S$ y $a, a' \in A$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}\left(a \cdot \frac{m}{s} + a' \cdot \frac{m'}{s'}\right) &= \widetilde{\varphi}\left(\frac{s'am + sa'm'}{ss'}\right) \\
&= h_{ss'}^{-1} \circ \varphi(s'am + sa'm') \\
&= a(h_{s'} \circ h_{s'}^{-1} \circ h_s^{-1} \circ \varphi(m)) + a'(h_s \circ h_s^{-1} \circ h_{s'}^{-1} \circ \varphi(m')) \\
&= a(h_s^{-1} \circ \varphi(m)) + a'(h_{s'}^{-1} \circ \varphi(m')) \\
&= a \cdot \widetilde{\varphi}\left(\frac{m}{s}\right) + a' \cdot \widetilde{\varphi}\left(\frac{m'}{s'}\right).
\end{aligned}$$

En tercer lugar, vamos a verificar que $\widetilde{\varphi}$ cumple con las condiciones requeridas: sean $m \in M$ y $s \in S$:

$$s \cdot \widetilde{\varphi}\left(\frac{m}{s}\right) = h_s \circ h_s^{-1} \circ \varphi(m) = \varphi(m).$$

Como caso particular de lo anterior, considerando $s = 1_A$ tenemos que $\widetilde{\varphi} \circ i_S^M = \varphi$.

En cuarto y último lugar, vamos a probar que la aplicación $\widetilde{\varphi}$ es única. Supongamos que existe otra aplicación A-lineal $\psi : S^{-1}M \to N$ que satisface las mismas propiedades que $\widetilde{\varphi}$. Como ambas aplicaciones tienen el mismo dominio y codominio, para mostrar la igualdad basta comprobar que tienen la misma regla de asignación. Sean $m \in M$ y $s \in S$. Utilizando el hecho de que $s \cdot \psi\left(\frac{m}{s}\right) = \varphi(m)$ se sigue que

$$\psi\left(\frac{m}{s}\right) = h_s^{-1} \circ h_s \circ \psi\left(\frac{m}{s}\right) = h_s^{-1} \circ \varphi(m) = \widetilde{\varphi}\left(\frac{m}{s}\right).$$

Por lo tanto, $\widetilde{\varphi}$ es única. $\square$

En el caso particular en que el módulo en el que localizamos sea el propio anillo del que se considera el conjunto multiplicativo, podemos enunciar la propiedad universal de la localización de la siguiente manera:

Teorema 1.37. *Sea S un conjunto multiplicativo de un anillo A. Para cada anillo B y cada homomorfismo de anillos $\varphi : A \to B$ que satisfacen que $\varphi(s) \in \mathcal{U}(B)$ para cualquier $s \in S$, existe un único homomorfismo de anillos $\widetilde{\varphi} : S^{-1}A \to B$ de modo que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_S^A"'] & B \\
S^{-1}A \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora estudiaremos el comportamiento de morfismos de módulos bajo la localización.

Proposición 1.38. *Sean S un conjunto multiplicativo de un anillo A y $\varphi : M \to N$ una aplicación A-lineal. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *La asignación*
$$\begin{array}{rcl} S^{-1}\varphi : S^{-1}M & \to & S^{-1}N \\ \dfrac{m}{t} & \mapsto & \dfrac{\varphi(m)}{t} \end{array}$$
es una aplicación $S^{-1}A$-lineal.
2. *Si φ es inyectiva, entonces $S^{-1}\varphi$ es inyectiva.*
3. *Si φ es sobreyectiva, entonces $S^{-1}\varphi$ es sobreyectiva.*

Demostración.

1. En primer lugar, mostraremos que $S^{-1}\varphi$ es una aplicación bien definida: sean $m, m' \in M$ y $s, s' \in S$ tales que $\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}$. Así, se sigue que existe $t \in S$ tal que $t(s'm - sm') = 0_M$ y esto implica que $\varphi(t(s'm - sm')) = 0_N$. Luego, como φ es una aplicación A-lineal la igualdad anterior implica que $t(s'\varphi(m) - s\varphi(m')) = 0_N$ y de este modo tenemos que $\frac{\varphi(m)}{s} = \frac{\varphi(m')}{s'}$. Ahora, mostraremos que $S^{-1}\varphi$ es una aplicación $S^{-1}A$-lineal: sean $m, m' \in M$, $a, a' \in A$ y $s, s', t, t' \in S$:

$$\begin{aligned} S^{-1}\varphi\left(\frac{a}{t} \cdot \frac{m}{s} + \frac{a'}{t'} \cdot \frac{m'}{s'}\right) &= S^{-1}\varphi\left(\frac{t's'am + tsa'm'}{tst's'}\right) \\ &= \frac{\varphi(t's'am + tsa'm')}{tst's'} \\ &= \frac{t's'a\varphi(m)}{tst's'} + \frac{tsa'\varphi(m')}{tst's'} \\ &= \frac{a}{t} \cdot \frac{\varphi(m)}{s} + \frac{a'}{t'} \cdot \frac{\varphi(m')}{s'} \\ &= \frac{a}{t} \cdot S^{-1}\varphi\left(\frac{m}{s}\right) + \frac{a'}{t'} \cdot S^{-1}\varphi\left(\frac{m'}{s'}\right). \end{aligned}$$

2. Supongamos que φ es una aplicación inyectiva. Sean $m \in M$ y $s \in S$ tales que $\frac{m}{s} \in \operatorname{Ker}(S^{-1}\varphi)$. Puesto que $\frac{\varphi(m)}{s} = 0_{S^{-1}N}$ se sigue que existe $t \in S$ tal que $t\varphi(m) = 0_N$. Así, como tenemos que $\varphi(tm) = 0_M$, por la inyectividad de φ se sigue que $tm = 0_M$ y con ello que $\frac{m}{s} = \frac{tm}{ts} = \frac{0_M}{ts} = 0_{S^{-1}M}$. Por lo tanto $S^{-1}\varphi$ es inyectiva.

3. Supongamos que φ es un aplicación sobreyectiva. Sean $n \in N$ y $s \in S$. Como φ es sobreyectiva, se sigue que existe $m \in M$ tal que $\varphi(m) = n$. Claramente se tiene que $S^{-1}\varphi\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{n}{s}$ y con ello se concluye que $S^{-1}\varphi$ es sobreyectiva. ❑

Nuestro siguiente objetivo será el de comprobar que la localización conmuta con las sucesiones exactas de módulos.

Teorema 1.39. *Sea S un conjunto multiplicativo de un anillo A. Si $0 \to N \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} P \to 0$ es una sucesión exacta de A-módulos, entonces la sucesión $0 \to S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}\varphi} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}\psi} S^{-1}P \to 0$ es exacta de $S^{-1}A$-módulos.*

Demostración. Sea $0 \to N \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} P \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos. Por la proposición anterior se tiene que la sucesión $0 \to S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}\varphi} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}\psi} S^{-1}P \to 0$ es exacta a la izquierda y a la derecha así que sólo nos resta mostrar que se tiene exactitud en el centro, es decir que $\mathrm{Ker}(S^{-1}\psi) = \mathrm{Im}(S^{-1}\varphi)$:

- $\mathrm{Ker}(S^{-1}\psi) \subseteq \mathrm{Im}(S^{-1}\varphi)$. Sean $m \in M$ y $t \in S$ tales que $S^{-1}\psi\left(\frac{m}{t}\right) = 0_{S^{-1}P}$. Puesto que $\frac{\psi(m)}{t} = 0_{S^{-1}P}$, se sigue que existe $u \in S$ tal que $u\psi(m) = 0_P$. De este modo, se sigue que $um \in \mathrm{Ker}\,\psi$ y por la exactitud de la sucesión original se sigue que existe $n \in N$ tal que $\varphi(n) = um$. De esta forma, como $\frac{m}{t} = \frac{um}{ut} = \frac{\varphi(n)}{ut} = S^{-1}\varphi\left(\frac{n}{ut}\right)$ se sigue que $\frac{m}{t} \in \mathrm{Im}(S^{-1}\varphi)$.
- $\mathrm{Im}(S^{-1}\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(S^{-1}\psi)$. Sean $m \in M$ y $t \in S$ tales que $\frac{m}{t} \in \mathrm{Im}(S^{-1}\varphi)$. De esta forma, existen $n \in N$ y $u \in S$ tales que $\frac{m}{t} = S^{-1}\varphi\left(\frac{n}{u}\right)$. Utilizando el hecho de que $\psi \circ \varphi$ es la aplicación nula tenemos que $\frac{m}{t} \in \mathrm{Ker}(S^{-1}\psi)$, en efecto:
$$S^{-1}\psi\left(\frac{m}{t}\right) = S^{-1}\psi\left(\frac{\varphi(n)}{u}\right) = \frac{\psi(\varphi(n))}{u} = \frac{0_P}{u} = 0_{S^{-1}P}.$$

De esta forma, concluimos que la sucesión $0 \to S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}\varphi} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}\psi} S^{-1}P \to 0$ es exacta de $S^{-1}A$-módulos. ❑

A continuación presentaremos algunos resultados de la localización cuando trabajamos con álgebras.

Proposición 1.40. *Sean $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos y S un conjunto multiplicativo de A. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *$\varphi(S)$ es un conjunto multiplicativo de B.*

2. *Existe un homomorfismo de anillos entre $S^{-1}A$ y $\varphi(S)^{-1}B$.*
3. *Si φ es inyectivo y para cada $b \in B$ existe $s \in S$ de modo que $\varphi(s)b \in \varphi(A)$, entonces existe un isomorfismo de anillos entre $S^{-1}A$ y $\varphi(S)^{-1}B$.*
4. *Si N es un B-módulo, entonces existe un $S^{-1}B$-isomorfismo entre $S^{-1}N$ y $\varphi(S)^{-1}N$.*

Demostración.

1. Como $1_B = \varphi(1_A)$ se tiene que $1_B \in \varphi(S)$. Ahora, sean $z, w \in \varphi(S)$. Así, existen $s, t \in S$ tales que $z = \varphi(s)$ y $w = \varphi(t)$. Luego, como $zw = \varphi(s)\varphi(t) = \varphi(st)$ y como $st \in S$ se sigue que $zw \in \varphi(S)$. Por lo tanto, $\varphi(S)$ es un conjunto multiplicativo de B.

2. Al realizar la composición de los homomorfismos de anillos $\varphi : A \to B$ y $i^B_{\varphi(S)} : B \to \varphi(S)^{-1}B$ obtenemos el homomorfismo de anillos

$$\begin{array}{rcc} \zeta : A & \to & \varphi(S)^{-1}B \\ a & \mapsto & \dfrac{\varphi(a)}{1_B} \end{array}$$

Ahora, sea $s \in S$. Puesto que

$$\zeta(s) \cdot \frac{1_B}{\varphi(s)} = \frac{\varphi(s)}{1_B} \cdot \frac{1_B}{\varphi(s)} = \frac{\varphi(s)}{\varphi(s)} = 1_{\varphi(S)^{-1}B}$$

se sigue que $\varphi(s) \in \mathcal{U}(\varphi(S)^{-1}B)$. De esta forma, por la propiedad universal de la localización para anillos tenemos que existe el homomorfismo de anillos

$$\begin{array}{rcc} \widetilde{\zeta} : S^{-1}A & \to & \varphi(S)^{-1}B \\ \dfrac{a}{s} & \mapsto & \dfrac{\varphi(a)}{\varphi(s)} \end{array}$$

3. Asumimos que φ es inyectivo y que para cada $b \in B$ existe $s \in S$ de modo que $\varphi(s)b \in \varphi(A)$. Vamos a mostrar que el homomorfismo de anillos $\widetilde{\zeta} : S^{-1}A \to \varphi(S)^{-1}B$ construido en el enunciado anterior es un isomorfismo.

Comenzaremos mostrando la inyectividad de $\widetilde{\zeta}$. Sean $a \in A$ y $s \in S$ de modo que $\dfrac{a}{s} \in \operatorname{Ker}\widetilde{\zeta}$. Puesto que tenemos la igualdad $\dfrac{\varphi(a)}{\varphi(s)} = \dfrac{0_B}{1_B}$ se sigue que existe $t \in S$ de modo que $\varphi(t)\varphi(a) = 0_B$, luego, como φ es inyectiva la igualdad anterior implica que $ta = 0_A$. Consecuentemente, como $\dfrac{a}{s} = \dfrac{ta}{ts} = \dfrac{0_A}{ts} = 0_{S^{-1}A}$ se tiene que $\widetilde{\zeta}$ es inyectivo.

Para concluir con este enunciado, vamos a mostrar que $\widetilde{\zeta}$ es sobreyectivo. Sean $b \in B$ y $t \in S$. Por hipótesis sabemos que existe $s \in S$ de modo que $\varphi(s)b \in \varphi(A)$, consecuentemente tenemos que existe $a \in A$ de modo que $\varphi(s)b = \varphi(a)$. Afirmamos que la imagen del elemento $\dfrac{a}{st}$ bajo $\widetilde{\zeta}$ es igual a $\dfrac{b}{\varphi(t)}$, en efecto:

$$\widetilde{\zeta}\left(\frac{a}{st}\right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(st)} = \frac{\varphi(s)b}{\varphi(s)\varphi(t)} = \frac{b}{\varphi(t)}.$$

De esta forma, concluimos que $\widetilde{\zeta}$ es sobreyectivo.

Por lo tanto, de manera definitiva se concluye que el anillo $S^{-1}A$ es isomorfo al anillo $\varphi(S)^{-1}B$.

4. Sea N un B-módulo. Sabemos que la aplicación $i^N_{\varphi(S)} : N \to \varphi(S)^{-1}N$ es una aplicación B-lineal, luego, como B es un módulo sobre A se sigue que $i^N_{\varphi(S)}$ también es A-lineal. Vamos a usar la propiedad universal de la localización para módulos para construir una aplicación A-lineal entre $S^{-1}N$ y $\varphi(S)^{-1}N$. Sea $t \in S$. Mostraremos que la homotecia

$$\begin{array}{rcl} h_t : \varphi(S)^{-1}N & \to & \varphi(S)^{-1}N \\ \dfrac{n}{\varphi(s)} & \mapsto & t \cdot \dfrac{n}{\varphi(s)} \end{array}$$

es una biyección. Observemos que para cada $n \in N$ y $s \in S$ se tiene que

$$h_t\left(\frac{n}{\varphi(s)}\right) = t \cdot \frac{n}{\varphi(s)} = \frac{\varphi(t)}{1_B} \cdot \frac{n}{\varphi(s)} = \frac{\varphi(t)n}{\varphi(s)}.$$

De este modo, definimos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} l_t : \varphi(S)^{-1}N & \to & \varphi(S)^{-1}N \\ \dfrac{n}{\varphi(s)} & \mapsto & \dfrac{n}{\varphi(s)\varphi(t)} \end{array}$$

Luego, es claro que h_t y l_t son aplicaciones inversas una de la otra y de este modo, por la propiedad universal de la localización para módulos existe una aplicación A-lineal $\xi : S^{-1}N \to \varphi(S)^{-1}N$ y es la única aplicación que satisface la siguiente condición: para cualesquier $n \in N$ y $s \in S$ se tiene que $s \cdot \xi\left(\dfrac{n}{s}\right) = \dfrac{n}{1_B}$. Luego, utilizando el hecho de que los elementos de S son invertibles en $\varphi(S)^{-1}B$, podemos reescribir a la aplicación ξ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} \xi : S^{-1}N & \to & \varphi(S)^{-1}N \\ \dfrac{n}{s} & \mapsto & \dfrac{n}{\varphi(s)} \end{array}$$

A continuación vamos a probar que ξ es un isomorfismo. Claramente ξ es sobreyectiva, así que sólo resta probar la inyectividad. Sean $n \in N$ y $s \in S$ tales que $\dfrac{n}{s} \in \operatorname{Ker}\xi$. Así, como $\dfrac{n}{\varphi(s)} = 0_{\varphi(S)^{-1}N}$ se tiene que existe $t \in S$ tal que $\varphi(t)n = 0_N$, ahora bien, utilizando la estructura de A-módulo se sigue que $tn = 0_N$ y consecuentemente $\dfrac{n}{s} = \dfrac{tn}{ts} = \dfrac{0_N}{ts} = 0_{S^{-1}N}$. Por lo tanto, ξ es inyectiva y así concluimos que ξ es un isomorfismo.

Por otro lado, observemos que podemos dotar a $S^{-1}N$ y a $\varphi(S)^{-1}N$ de una estructura de $S^{-1}B$-módulo definiendo las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{rcl} \cdot : S^{-1}B\times S^{-1}N & \to & S^{-1}N \\ \left(\dfrac{b}{t},\dfrac{n}{s}\right) & \mapsto & \dfrac{bn}{ts} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \cdot : S^{-1}B\times \varphi(S)^{-1}N & \to & \varphi(S)^{-1}N \\ \left(\dfrac{b}{t},\dfrac{n}{\varphi(s)}\right) & \mapsto & \dfrac{bn}{\varphi(t)\varphi(s)} \end{array}$$

La prueba de que estas operaciones son productos externos es análoga a lo que hemos venido realizando. Ahora, observemos que ξ es una aplicación $S^{-1}B$-lineal: sean $b\in B$, $n\in N$ y $s,t\in S$:

$$\xi\left(\frac{b}{t}\cdot\frac{n}{s}\right)=\xi\left(\frac{bn}{ts}\right)=\frac{bn}{\varphi(ts)}=\frac{bn}{\varphi(t)\varphi(s)}=\frac{b}{t}\cdot\frac{n}{\varphi(s)}=\frac{b}{t}\cdot\xi\left(\frac{n}{s}\right).$$

De esta manera, concluimos que ξ es una aplicación $S^{-1}B$-lineal y por lo tanto concluimos que $S^{-1}N$ y $\varphi(S)^{-1}N$ son $S^{-1}B$-isomorfos. ❑

La siguiente cosa que realizaremos será determinar los submódulos y los subanillos de la localización de un módulo y de un anillo respectivamente. Fijemos a S conjunto multiplicativo de un anillo A y a un módulo M sobre A. Sea N un A-submódulo de M. Consideramos el subconjunto $S^{-1}N$ de $S^{-1}M$ definido de la siguiente forma:

$$S^{-1}N=\left\{\frac{n}{s}\,\middle|\, n\in N \text{ y } s\in S\right\}.$$

Dicho subconjunto es un $S^{-1}A$-submódulo de $S^{-1}M$: en efecto, sean $n,n'\in N$, $s,s',t\in S$ y $a\in A$. Sabemos que

$$\frac{n}{s}-\frac{n'}{s'}=\frac{s'n-sn'}{ss'} \quad \text{y} \quad \frac{a}{t}\cdot\frac{n}{s}=\frac{an}{ts}.$$

Luego, como N es un submódulo de M se sigue que $s'n-sn'$ y an son elementos de N. Esto implica que $\dfrac{s'n-sn'}{ss'}$ y $\dfrac{an}{ts}$ están en $S^{-1}N$ y por lo tanto concluimos que $S^{-1}N$ es un $S^{-1}A$-submódulo de $S^{-1}M$.

Gracias a la construcción anterior tenemos definida una clase de submódulos de $S^{-1}M$, ahora bien, ¿existen submódulos de $S^{-1}M$ que no sean de esta forma? Como podrá verse en el siguiente resultado, la respuesta es negativa.

Proposición 1.41. *Con las notaciones anteriores, los submódulos de $S^{-1}M$ son de la forma $S^{-1}N$ para algún A-submódulo N de M.*

Demostración. Por lo hecho anteriormente sabemos que a partir de un submódulo de M podemos construir un submódulo de $S^{-1}M$, así que lo único que resta probar es que los submódulos de $S^{-1}M$ son de la forma $S^{-1}N$ para cierto A-submódulo N de M. Sea P un submódulo de $S^{-1}M$.

Como $i_S^M : M \to S^{-1}M$ es una aplicación A-lineal se sigue que $(i_S^M)^{-1}(P)$ es un A-submódulo de M. Ahora, vamos a probar que $P = S^{-1}(i_S^M)^{-1}(P)$.

Sean $m \in (i_S^M)^{-1}(P)$ y $s \in S$ tales que $\dfrac{m}{s} \in S^{-1}(i_S^M)^{-1}(P)$. Como m es un elemento de $(i_S^M)^{-1}(P)$ se sigue que $i_S^M(m) \in P$, es decir, tenemos que $\dfrac{m}{1_A} \in P$. De este modo, como P es un $S^{-1}A$-submódulo de $S^{-1}M$ y $\dfrac{m}{s} = \dfrac{1_A}{s} \cdot \dfrac{m}{1_A}$, se sigue que $\dfrac{m}{s} \in P$.

Recíprocamente, sean $m \in M$ y $s \in S$ tales que $\dfrac{m}{s} \in P$. Como P es un submódulo de $S^{-1}M$ se sigue que $\dfrac{s}{1_A} \cdot \dfrac{m}{s} = \dfrac{m}{1_A}$ es un elemento de P, esto implica que $i_S^M(m)$ está en P y con ello que $m \in (i_S^M)^{-1}(P)$. Por lo tanto, se tiene que $\dfrac{m}{s} \in S^{-1}(i_S^M)^{-1}(P)$. ❐

Una vez que sabemos cuáles son los submódulos de la localización de un módulo nos será posible probar que la localización conmuta con el cociente de módulos.

Corolario 1.42. *Sean S un conjunto multiplicativo de un anillo A y M un módulo sobre A. Si N es un A-submódulo de M, entonces se tiene que existe un $S^{-1}A$-isomorfismo entre $S^{-1}\left(\dfrac{M}{N}\right)$ y $\dfrac{S^{-1}M}{S^{-1}N}$.*

Demostración. Basta considerar la sucesión exacta de A-módulos $0 \to N \to M \to \dfrac{M}{N} \to 0$ y aplicar el Teorema 1.39. ❐

Otra de las consecuencias inmediatas de la proposición anterior es la determinación de los ideales del anillo $S^{-1}A$.

Corolario 1.43. *Con las notaciones anteriores, los ideales de $S^{-1}A$ son de la forma $S^{-1}I$ para algún ideal I de A.*

De manera particular vamos a estar interesados en determinar a los ideales primos de $S^{-1}A$. Así, en primer lugar debemos descartar aquellos ideales que sean iguales a $S^{-1}A$. El siguiente resultado nos da condiciones necesarias y suficientes para identificar a este tipo de ideales.

Lema 1.44. *Con las notaciones anteriores, sea I un ideal de A. Se tiene que $S^{-1}I = S^{-1}A$ si y sólo si $I \cap S \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea I un ideal de A. El hecho de que $S^{-1}I = S^{-1}A$ es equivalente a que $\dfrac{1_A}{1_A} \in S^{-1}I$, a su vez, este hecho es equivalente a que existan $b \in I$ y $s \in S$ de modo que $\dfrac{1_A}{1_A} = \dfrac{b}{s}$, en otras palabras, deben existir $b \in I$ y $s, t \in S$ de modo que $ts = tb$, este hecho es equivalente a que $I \cap S \neq \emptyset$. ❏

Proposición 1.45. *Con las notaciones anteriores, los elementos del conjunto* $\operatorname{Spec}(S^{-1}A)$ *son de la forma* $S^{-1}\mathfrak{p}$ *para algún ideal primo* $\mathfrak{p}$ *de A de modo que* $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.

Demostración. Sea J un elemento de $\operatorname{Spec}(S^{-1}A)$. En particular, como J es un ideal de $S^{-1}A$ se sigue que $J = S^{-1}(i_S^A)^{-1}(J)$; además, el hecho de que J es un ideal primo y que i_S^A es un homomorfismo de anillos implican que $(i_S^A)^{-1}(J)$ es un ideal primo de A. Lo único que nos resta a probar es que $(i_S^A)^{-1}(J) \cap S = \emptyset$. Supongamos que $(i_S^A)^{-1}(J) \cap S \neq \emptyset$, así existe $a \in A$ de modo que $a \in S$ y $i_S^A(a) \in J$, este hecho implica que $J \cap \mathcal{U}(S^{-1}A) \neq \emptyset$ y así $J = S^{-1}A$ lo cual contradice que J es un ideal primo. Por lo tanto, $J = S^{-1}(i_S^A)^{-1}(J)$ y $i_S^{-1}(J)$ es un ideal primo de A tal que $(i_S^A)^{-1}(J) \cap S = \emptyset$.

Recíprocamente, sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A tal que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Vamos a mostrar que $S^{-1}\mathfrak{p}$ es un ideal primo de $S^{-1}A$. En primer lugar, por el lema anterior tenemos que $S^{-1}\mathfrak{p} \neq S^{-1}A$. Ahora, sean $a, b \in A$ y $s, t \in S$ tales que $\frac{ab}{st} \in S^{-1}\mathfrak{p}$. De este modo, existen $k \in \mathfrak{p}$ y $r \in S$ tales que $\frac{ab}{st} = \frac{k}{r}$, así, se sigue que existe $z \in S$ tal que que $zrab = zstk$, dicha igualdad implica que $zrab \in \mathfrak{p}$. Ahora bien, como $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ se sigue que $ab \in \mathfrak{p}$ y como $\mathfrak{p}$ es primo se tiene que $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$. De esta forma, se tiene que $\frac{a}{s} \in S^{-1}\mathfrak{p}$ o $\frac{b}{t} \in S^{-1}\mathfrak{p}$. Por lo tanto, $S^{-1}\mathfrak{p}$ es un elemento de $\operatorname{Spec}(S^{-1}A)$. ❏

Para finalizar con esta sección, vamos a mostrar algunas propiedades de la localización de un anillo en los conjuntos multiplicativos que son de nuestro interés. Los detalles completos de la prueba pueden ser encontrados en [**5**].

Proposición 1.46. *Sea A anillo. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Si* $f \in A$ *y no es nilpotente, entonces los elementos de* $\operatorname{Spec}(A_f)$ *son de la forma* $\mathfrak{p}_f$ *donde* $\mathfrak{p}$ *es un ideal primo de A tal que* $f \notin \mathfrak{p}$.
2. *Si* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, *entonces los elementos de* $\operatorname{Spec}(A_\mathfrak{p})$ *son de la forma* $\mathfrak{q}_\mathfrak{p}$ *donde* $\mathfrak{q}$ *es un ideal primo de A tal que* $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$.
3. *Si* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, *entonces el anillo* $A_\mathfrak{p}$ *es local con ideal maximal* $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$.

Demostración. Los enunciados 1 y 2 son una consecuencia directa de la proposición anterior. Para 3, con argumentos análogos a los que hemos venido utilizando en esta sección se muestra que $\mathcal{U}(A_\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p} \backslash \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$, esto implica que $A \backslash \mathcal{U}(A_\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ y por la Proposición 1.24 se concluye que $A_\mathfrak{p}$ es local de ideal maximal $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$. ❏

4. Esquemas Afines

Esta sección está dedicada a una clase de objetos que tendrán una gran importancia en el desarrollo de este trabajo, hablamos de los esquemas afines. En primer lugar, a partir de un anillo construiremos un espacio topológico y estudiaremos algunas de sus propiedades. En segundo lugar, construiremos una gavilla de anillos sobre dicho espacio y de igual forma vamos a estudiar algunas de sus propiedades. En tercer y último lugar, definiremos a los esquemas afines, sus morfismos y revisaremos algunas de sus propiedades principales.

4.1. El Espacio Topológico Spec(A). Recordemos que si A es un anillo, entonces $\operatorname{Spec}(A)$ es el conjunto de todos los ideales primos de A. En esta subsección nos daremos a la tarea de dotar a $\operatorname{Spec}(A)$ con una topología y de estudiar algunas de sus propiedades. Para cada ideal I de A, vamos a definir el conjunto

$$V(I) = \left\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \,\middle|\, I \subseteq \mathfrak{p}\right\}.$$

A continuación vamos a comprobar algunas propiedades de los conjuntos que tienen la forma anterior.

Proposición 1.47. *Sea A un anillo. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. $V(\{0_A\}) = \operatorname{Spec}(A)$ *y* $V(A) = \emptyset$.
2. *Si I y J son ideales de A tales que $J \subseteq I$, entonces $V(I) \subseteq V(J)$.*
3. *Si I y J son ideales de A, entonces $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.*
4. *Si $(I_i)_{i\in\Gamma}$ es una familia de ideales de A, entonces $V(\sum_{i\in\Gamma} I_i) = \bigcap_{i\in\Gamma} V(I_i)$.*
5. *Si I y J son ideales de A, se tiene que $V(I) \subseteq V(J)$ si y sólo si $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$.*

Demostración. Los enunciados 1 y 2 son claros, así que sólo resta probar los tres enunciados restantes.

3. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ es tal que $\mathfrak{p} \in V(IJ)$, entonces se tiene que $IJ \subseteq \mathfrak{p}$ y como $\mathfrak{p}$ es un ideal primo se sigue que $I \subseteq \mathfrak{p}$ o $J \subseteq \mathfrak{p}$, es decir que $\mathfrak{p} \in V(I)$ o $\mathfrak{p} \in V(J)$ lo cual implica que $V(IJ) \subseteq V(I) \cup V(J)$. Recíprocamente, como $IJ \subseteq I$ y $IJ \subseteq J$ por el inciso anterior se sigue que $V(I) \subseteq V(IJ)$ y $V(J) \subseteq V(IJ)$ y consecuentemente se tiene que $V(I) \cup V(J) \subseteq V(IJ)$.

4. Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. El hecho de que $\mathfrak{p} \in V(\sum_{i\in\Gamma} I_i)$ es equivalente a que $\sum_{i\in\Gamma} I_i \subseteq \mathfrak{p}$; luego, como $\sum_{i\in\Gamma} I_i$ es el ideal más pequeño de A que contiene a cada ideal I_j, se sigue que $\sum_{i\in\Gamma} I_i \subseteq \mathfrak{p}$ si y sólo si $I_i \subseteq \mathfrak{p}$ para todo $i \in I$. De esta forma, tenemos que $\mathfrak{p} \in V(I_i)$ para cada $i \in \Gamma$, en otras palabras, $\mathfrak{p} \in \bigcap_{i\in\Gamma} V(I_i)$.

5. Supongamos que $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$. Sea $\mathfrak{p} \in V(I)$. Como $I \subseteq \mathfrak{p}$ se sigue que $\sqrt{I} \subseteq \mathfrak{p}$, luego, nuestra hipótesis implica que $\sqrt{J} \subseteq \mathfrak{p}$ y como $J \subseteq \sqrt{J}$ se sigue que $J \subseteq \mathfrak{p}$. Por lo tanto $\mathfrak{p} \in V(J)$ y de este modo se tiene que $V(I) \subseteq V(J)$.

Recíprocamente, supongamos que $V(I) \subseteq V(J)$. Sea $a \in A$ tal que $a \in \sqrt{J}$. Observemos que $a \in \sqrt{J}$ si y sólo si $a \in \mathfrak{p}$ para cualquier $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ tal que $J \subseteq \mathfrak{p}$. Esto implica que $a \in \mathfrak{q}$ para cualquier $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$ tal que $I \subseteq \mathfrak{q}$, pues por hipótesis $V(I) \subseteq V(J)$. Con esto, tenemos que $a \in \sqrt{I}$ y por lo tanto concluimos que $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$. ❏

Observemos que para cualquier anillo A los enunciados 1, 3 y 4 de la proposición anterior nos dicen que los conjuntos de la forma $V(I)$, donde I es algún ideal de A, cumplen con los axiomas de un sistema de cerrados de un espacio topológico. De este modo, considerando a los conjuntos $V(I)$ como cerrados dotamos a $\mathrm{Spec}(A)$ con una topología, dicha topología se llama la *topología de Zariski*. Así, por construcción se tiene que los abiertos de $\mathrm{Spec}(A)$ son de la forma $\mathrm{Spec}(A)\backslash V(I)$ donde I es un ideal de A. Ahora, para cada elemento $f \in A$ vamos a definir el siguiente conjunto:

$$D(f) = \left\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \,\middle|\, f \notin \mathfrak{p}\right\}.$$

Dicho conjunto resulta ser un abierto de $\mathrm{Spec}(A)$: en efecto, sea $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)\backslash V(Af) &\iff \mathfrak{q} \notin V(Af) \\ &\iff Af \nsubseteq \mathfrak{q} \\ &\iff f \notin \mathfrak{q} \\ &\iff \mathfrak{q} \in D(f). \end{aligned}$$

Más aún, la familia formada por los conjuntos de la forma anterior constituye una base para la topología de Zariski de $\mathrm{Spec}(A)$.

Proposición 1.48. *Sea A un anillo. La familia $(D(f))_{f \in A}$ forma una base para la topología de Zariski de* $\mathrm{Spec}(A)$.

Demostración. Sea U un abierto de $\mathrm{Spec}(A)$. Si $U = \emptyset$, puesto que $D(0_A) = \emptyset$ tenemos que $U = D(0_A)$. De este modo, podemos suponer que U es un abierto no vacío. Por construcción existe un ideal I de A tal que $U = \mathrm{Spec}(A)\backslash V(I)$. Ahora, sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in U &\iff \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)\backslash V(I) \\ &\iff \mathfrak{p} \notin V(I) \\ &\iff I \nsubseteq \mathfrak{p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \exists\, f \in I : f \notin \mathfrak{p}\\
&\iff \exists\, f \in I : \mathfrak{p} \in D(f)\\
&\iff \mathfrak{p} \in \bigcup_{f\in A} D(f).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que la familia $(D(f))_{f\in A}$ es una base para la topología de $\operatorname{Spec}(A)$. ❏

Los abiertos de la forma $D(f)$ para algún $f \in A$ se llaman *abiertos básicos*. La siguiente proposición nos muestra algunas propiedades de dichos abiertos que nos serán de gran utilidad.

Proposición 1.49. *Sea A un anillo. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Si $f, g \in A$, entonces $D(f) \cap D(g) = D(fg)$.*
2. *Si $s \in \mathbb{N}$ y $f_1, \dots, f_s \in A$, entonces $D(f_1) \cap \cdots \cap D(f_s) = D(f_1 \cdots f_s)$.*
3. *Si $f \in A$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $D(f^n) = D(f)$.*
4. *Para cualquier $f \in A$, $D(f) = \emptyset$ si y sólo si f es un elemento nilpotente.*
5. *Para cualquier $f \in A$, $D(f) = \operatorname{Spec}(A)$ si y sólo si f es una unidad.*
6. *Para cualquier $f \in A$ el abierto $D(f)$ es casi compacto. En particular,* $\operatorname{Spec}(A)$ *lo es.*

Demostración.

1. Sean f y g elementos de A. Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p} \in D(f) \cap D(g) &\iff \mathfrak{p} \in D(f) \text{ y } \mathfrak{p} \in D(g)\\
&\iff f \notin \mathfrak{p} \text{ y } g \notin \mathfrak{p}\\
&\iff fg \notin \mathfrak{p}\\
&\iff \mathfrak{p} \in D(fg).
\end{aligned}$$

Los enunciados 2 y 3 se derivan rápidamente del enunciado 1.

4. Sea f un elemento de A.

$$\begin{aligned}
D(f) = \emptyset &\iff \operatorname{Spec}(A)\backslash V(Af) = \emptyset\\
&\iff V(Af) = \operatorname{Spec}(A)\\
&\iff Af \subseteq \mathfrak{p} \ \ \forall\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)\\
&\iff f \in \mathfrak{p} \ \ \forall\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)\\
&\iff f \in \operatorname{Nil}(A).
\end{aligned}$$

5. Sea f un elemento de A.

$$\begin{aligned}
D(f) = \operatorname{Spec}(A) &\iff \operatorname{Spec}(A)\backslash V(Af) = \operatorname{Spec}(A)\\
&\iff V(Af) = \emptyset\\
&\iff V(Af) = V(A)\\
&\iff \sqrt{Af} = \sqrt{A}\\
&\iff Af = A\\
&\iff f \in \mathcal{U}(A).
\end{aligned}$$

6. Sean $f \in A$ y $(U_i)_{i\in I}$ una cubierta abierta de $D(f)$ en $\operatorname{Spec}(A)$. Como $(D(x))_{x\in A}$ es una base para la topología de Zariski, podemos suponer que para cada $i \in I$ se tiene que $U_i = D(g_i)$ para algún $g_i \in A$. De este modo $D(f) \subseteq \bigcup_{i\in I} D(g_i)$. Luego,

$$\begin{aligned}
D(f) \subseteq \bigcup_{i\in I} D(g_i) &\implies V(\sum_{i\in I} Ag_i) \subseteq V(Af)\\
&\implies \sqrt{Af} \subseteq \sqrt{\sum_{i\in I} Ag_i}\\
&\implies \exists\, m \in \mathbb{Z}_+,\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ \exists\, \mu_j \in A\ \forall\, j \in \{1,\dots,k\} : f^m = \mu_1 g_1 + \cdots + \mu_k g_k\\
&\implies \exists\, k \in \mathbb{N} : \sqrt{Af} \subseteq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} Ag_i}\\
&\implies \exists\, k \in \mathbb{N} : V(\sum_{i=1}^{k} Ag_i) \subseteq V(Af)\\
&\implies \exists\, k \in \mathbb{N} : D(f) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} D(g_i).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $D(f)$ es casi compacto. ❏

Ahora, supongamos que tenemos un homomorfismo de anillos $\varphi : A \to B$. Recordemos que la imagen inversa de un ideal primo bajo cualquier homomorfismo de anillos es un ideal primo, de esta forma, si $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$, entonces se tiene que $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Spec}(A)$. Con esto, de una manera natural podemos definir una aplicación entre los espacios topológicos $\operatorname{Spec}(B)$ y $\operatorname{Spec}(A)$. Ahora bien, ¿dicha aplicación está bien definida? Más aún, ¿es continua? La siguiente proposición nos brindará respuestas a estas interrogantes.

PROPOSICIÓN 1.50. *Sea $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos. La aplicación*

$$\begin{array}{rcl} \varphi^* : \mathrm{Spec}(B) & \to & \mathrm{Spec}(A) \\ \mathfrak{q} & \mapsto & \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{array}$$

es una aplicación continua entre espacios topológicos.

DEMOSTRACIÓN. Comenzaremos comprobando que la aplicación φ^* está bien definida: sean $\mathfrak{q}$ y $\mathfrak{r}$ elementos de $\mathrm{Spec}(B)$ tales que $\mathfrak{q} = \mathfrak{r}$. Sea $x \in A$,

$$\begin{aligned} x \in \varphi^*(\mathfrak{q}) &\iff x \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \\ &\iff \varphi(x) \in \mathfrak{q} \\ &\iff \varphi(x) \in \mathfrak{r} \\ &\iff x \in \varphi^{-1}(\mathfrak{r}) \\ &\iff x \in \varphi^*(\mathfrak{r}). \end{aligned}$$

De esta manera, tenemos que φ^* es una aplicación bien definida. Lo que vamos a mostrar a continuación es que esta aplicación es continua; puesto que $\mathrm{Spec}(A)$ tiene a la familia $(D(f))_{f \in A}$ como una base de abiertos para su topología de Zariski bastará probar que $\varphi^{*-1}(D(f))$ es un abierto de $\mathrm{Spec}(B)$ para todo $f \in A$. Sean $f \in A$ y $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{q} \in \varphi^{*-1}(D(f)) &\iff \varphi^*(\mathfrak{q}) \in D(f) \\ &\iff \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in D(f) \\ &\iff f \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \\ &\iff \varphi(f) \notin \mathfrak{q} \\ &\iff \mathfrak{q} \in D(\varphi(f)). \end{aligned}$$

Así, como tenemos que la igualdad $\varphi^{*-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$ se satisface para cualquier $f \in A$, concluimos que φ^* es una aplicación continua. ❏

Lo que haremos a continuación será estudiar algunas propiedades de la aplicación continua construida en la proposición anterior. Como se podrá observar, existe un carácter algebraico en el comportamiento de dicha aplicación continua.

PROPOSICIÓN 1.51. *Sea $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Si I es un ideal de A, entonces $\varphi^{*-1}(V(I)) = V(\varphi(I)B)$.*
2. *Si J es un ideal de B, entonces $\overline{\varphi^*(V(J))} = V(\varphi^{-1}(J))$.*

3. *Si φ es sobreyectivo, entonces φ^* es un homeomorfismo entre* $\operatorname{Spec}(B)$ *y el conjunto cerrado* $V(\operatorname{Ker}\varphi)$ *de* $\operatorname{Spec}(A)$.
4. *Si φ es inyectivo, entonces* $\varphi^*(\operatorname{Spec}(B))$ *es denso en* $\operatorname{Spec}(A)$. *Más aún,* $\varphi^*(\operatorname{Spec}(B))$ *es denso en* $\operatorname{Spec}(A)$ *si y sólo si* $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Rad}(A)$.
5. *Si $\psi : B \to C$ es un homomorfismo de anillos, entonces $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.*

Demostración.

1. Sean I un ideal de A y $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{q} \in \varphi^{*-1}(V(I)) &\iff \varphi^*(\mathfrak{q}) \in V(I)\\
&\iff I \subseteq \varphi^*(\mathfrak{q})\\
&\iff I \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q})\\
&\iff \varphi(I) \subseteq \mathfrak{q}\\
&\iff \mathfrak{q} \in V(\varphi(I)B).
\end{aligned}$$

2. Sea J un ideal de B. En primer lugar probaremos que $\overline{\varphi^*(V(J))} \subseteq V(\varphi^{-1}(J))$. Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p} \in \varphi^*(V(J)) &\iff \exists\, \mathfrak{q} \in V(J) : \mathfrak{p} = \varphi^*(\mathfrak{q})\\
&\iff \exists\, \mathfrak{q} \in V(J) : \mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})\\
&\iff \exists\, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) : J \subseteq \mathfrak{q} \text{ y } \mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})\\
&\implies \exists\, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) : \varphi^{-1}(J) \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \text{ y } \mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})\\
&\implies \varphi^{-1}(J) \subseteq \mathfrak{p}\\
&\iff \mathfrak{p} \in V(\varphi^{-1}(J)).
\end{aligned}$$

De este modo, la contención $\varphi^*(V(J)) \subseteq V(\varphi^{-1}(J))$ implica que $\overline{\varphi^*(V(J))} \subseteq \overline{V(\varphi^{-1}(J))} = V(\varphi^{-1}(J))$ y así concluimos que $\overline{\varphi^*(V(J))} \subseteq V(\varphi^{-1}(J))$.

En segundo lugar, vamos a probar la contención $V(\varphi^{-1}(J)) \subseteq \overline{\varphi^*(V(J))}$. Si $V(\varphi^{-1}(J)) = \emptyset$ hemos terminado. Así, podemos suponer que $V(\varphi^{-1}(J)) \neq \emptyset$ y considerar a $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ de modo que $\mathfrak{p} \in V(\varphi^{-1}(J))$. Para mostrar que $\mathfrak{p} \in \overline{\varphi^*(V(J))}$ será suficiente probar que para cada $f \in A$ de modo que $\mathfrak{p} \in D(f)$ se tiene que $D(f) \cap \varphi^*(V(J)) \neq \emptyset$. Sea $f \in A$ tal que $\mathfrak{p} \in D(f)$. Por hipótesis tenemos que $\varphi^{-1}(J) \subseteq \mathfrak{p}$ con lo cual se sigue que $\sqrt{\varphi^{-1}(J)} \subseteq \mathfrak{p}$, además, recordemos que $\sqrt{\varphi^{-1}(J)} = \varphi^{-1}(\sqrt{J})$. Como $f \notin \mathfrak{p}$ se tiene que $f \notin \varphi^{-1}(\sqrt{J})$, esto implica que $\varphi(f) \notin \sqrt{J}$. Luego, como $\sqrt{J} = \bigcap_{\mathfrak{r} \in V(J)} \mathfrak{r}$, se sigue la existencia de $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ tal que $J \subseteq \mathfrak{q}$ y $\varphi(f) \notin \mathfrak{q}$, consecuentemente tenemos que $\varphi^{-1}(\sqrt{J}) \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ y $f \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. De esta forma tenemos que $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in D(f)$ y además, el hecho de que $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \varphi^*(\mathfrak{q}) \in \varphi^*(V(J))$ implica que $D(f) \cap \varphi^*(V(J)) \neq \emptyset$. Luego, como f

fue un elemento arbitrario de modo que $\mathfrak{p} \in D(f)$, se sigue que $\mathfrak{p} \in \overline{\varphi^*(V(J))}$ y esto implica que $V(\varphi^{-1}(J)) \subseteq \overline{\varphi^*(V(J))}$.

3. Supongamos que φ es un homomorfismo sobreyectivo. En primer lugar, vamos a probar que $\varphi^*(\mathrm{Spec}(B)) = V(\mathrm{Ker}\,\varphi)$, para ello, realizaremos dos observaciones:

a) Si $J \in \partial B$, entonces $\mathrm{Ker}\,\varphi \subseteq \varphi^{-1}(J)$. En efecto, sea $J \in \partial B$. Si $a \in A$ es tal que $a \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, se sigue que $\varphi(a) = 0_B \in J$ y con esto tenemos que $a \in \varphi^{-1}(J)$. Por lo tanto, $\mathrm{Ker}\,\varphi \subseteq \varphi^{-1}(J)$.

b) Si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ y es tal que $\mathrm{Ker}\,\varphi \subseteq \mathfrak{p}$, entonces existe $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ tal que $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. Sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ tal que $\mathrm{Ker}\,\varphi \subseteq \mathfrak{p}$. Como $\varphi : A \to B$ es un homomorfismo sobreyectivo, por el primer teorema de isomorfismos se sigue que la aplicación inducida $\widetilde{\varphi} : \dfrac{A}{\mathrm{Ker}\,\varphi} \to B$ es un isomorfismo de anillos. Luego, como $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A que contiene a $\mathrm{Ker}\,\varphi$ se sigue que $\dfrac{\mathfrak{p}}{\mathrm{Ker}\,\varphi}$ es un ideal primo de $\dfrac{A}{\mathrm{Ker}\,\varphi}$ y por tanto se tiene que existe $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ tal que $\widetilde{\varphi}\left(\dfrac{\mathfrak{p}}{\mathrm{Ker}\,\varphi}\right) = \mathfrak{q}$. Afirmamos que $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$: en efecto, sea $a \in A$,

$$\begin{aligned} a \in \mathfrak{p} &\iff a + \mathrm{Ker}\,\varphi \in \frac{\mathfrak{p}}{\mathrm{Ker}\,\varphi} \\ &\iff \widetilde{\varphi}(a + \mathrm{Ker}\,\varphi) \in \mathfrak{q} \\ &\iff \varphi(a) \in \mathfrak{q} \\ &\iff a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q}). \end{aligned}$$

Sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Utilizando las observaciones anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in \varphi^*(\mathrm{Spec}(B)) &\iff \exists\, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B) : \mathfrak{p} = \varphi^*(\mathfrak{q}) \\ &\iff \exists\, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B) : \mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \\ &\iff \mathrm{Ker}\,\varphi \subseteq \mathfrak{p} \\ &\iff \mathfrak{p} \in V(\mathrm{Ker}\,\varphi). \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $\varphi^*(\mathrm{Spec}(B)) = V(\mathrm{Ker}\,\varphi)$. De esta forma, vamos a considerar la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi^*} : \mathrm{Spec}(B) & \to & V(\mathrm{Ker}\,\varphi) \\ \mathfrak{q} & \mapsto & \varphi^*(\mathfrak{q}) \end{array}$$

Obsérvese que la aplicación $\widetilde{\varphi^*}$ es continua pues φ^* lo es y además, tenemos que $\widetilde{\varphi^*}$ es sobreyectiva pues $\widetilde{\varphi^*}(\mathrm{Spec}(B)) = \varphi^*(\mathrm{Spec}(B)) = V(\mathrm{Ker}\,\varphi)$.

Ahora, mostraremos que $\widetilde{\varphi^*}$ es inyectiva: sean $\mathfrak{q}$ y $\mathfrak{r}$ elementos de $\mathrm{Spec}(B)$ tales que $\varphi^*(\mathfrak{q}) = \varphi^*(\mathfrak{r})$, es decir tales que $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{r})$. Sea $b \in B$ tal que $b \in \mathfrak{q}$. Como φ es sobreyectivo se sigue que existe $a \in A$ tal que $\varphi(a) = b$, esto implica que $\varphi(a) \in \mathfrak{q}$ y consecuentemente que $a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{r})$.

De esta forma, como $b = \varphi(a) \in \mathfrak{r}$ se sigue que $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{r}$. De manera análoga se muestra que $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{q}$ y así tenemos que $\mathfrak{q} = \mathfrak{r}$. Por lo tanto $\widetilde{\varphi^*}$ es inyectiva.

Lo único que nos resta probar para mostrar que $\widetilde{\varphi^*}$ es un homeomorfismo es que $\widetilde{\varphi^*}^{-1}$ es una aplicación continua, para ello, es suficiente mostrar que $\widetilde{\varphi^*}$ es una aplicación cerrada. Sea $J \in \partial B$, mostraremos que $\widetilde{\varphi^*}(V(J)) = \varphi^*(V(J))$ es un cerrado de $\operatorname{Spec}(A)$. Por el enunciado 2 sabemos que $\overline{\varphi^*(V(J))} = V(\varphi^{-1}(J))$, de esta forma tenemos que $\varphi^*(V(J)) \subseteq V(\varphi^{-1}(J))$. Recíprocamente, sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ tal que $\mathfrak{p} \in V(\varphi^{-1}(J))$. Como J es un ideal de B por la observación a) tenemos que $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \varphi^{-1}(J)$ y como $\varphi^{-1}(J) \subseteq \mathfrak{p}$ se sigue que $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \mathfrak{p}$; de esta forma, por b) existe $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ tal que $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. Luego, como φ es sobreyectivo se tiene que $\varphi(\varphi^{-1}(\mathfrak{q})) = \mathfrak{q}$, esto implica que $\varphi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$ y con ello tenemos que $\varphi(\mathfrak{p})$ es un ideal primo de B; además, se tiene que $\varphi^*(\varphi(\mathfrak{p})) = \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{p})) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. Por último, nuevamente utilizando la sobreyectividad de φ se tiene que $J \subseteq \varphi(\mathfrak{p})$. De esta forma, como $\mathfrak{p} = \varphi^*(\varphi(\mathfrak{p}))$ y como $\varphi(\mathfrak{p})$ es un ideal primo de B que contiene a J se sigue que $\mathfrak{p} \in \varphi^*(V(J))$ y con ello que $V(\varphi^{-1}(J)) \subseteq \varphi^*(V(J))$. Por lo tanto, tenemos que $\varphi^*(V(J)) = V(\varphi^{-1}(J)) = \overline{\varphi^*(V(J))}$ y así concluimos que $\widetilde{\varphi^*}$ es una aplicación cerrada.

4.

$$\begin{aligned}
\varphi^*(\operatorname{Spec}(B)) \text{ es denso en } \operatorname{Spec}(A) \quad &\Longleftrightarrow \quad \overline{\varphi^*(\operatorname{Spec}(B))} = \operatorname{Spec}(A) \\
&\Longleftrightarrow \quad \overline{\varphi^*(V(\{0_B\}))} = \operatorname{Spec}(A) \\
&\Longleftrightarrow \quad V(\varphi^{-1}(\{0_B\})) = \operatorname{Spec}(A) \\
&\Longleftrightarrow \quad V(\operatorname{Ker}\varphi) = V(\{0_A\}) \\
&\Longleftrightarrow \quad \sqrt{\operatorname{Ker}\varphi} = \sqrt{\{0_A\}} \\
&\Longleftrightarrow \quad \operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Nil}(A).
\end{aligned}$$

5. Sea $\psi : B \to C$ un homomorfismo de anillos. Puesto que $(\psi \circ \varphi)^*$ y $\varphi^* \circ \psi^*$ tienen por dominio a $\operatorname{Spec}(C)$ y por codominio a $\operatorname{Spec}(A)$, para mostrar la igualdad de dichas aplicaciones sólo resta probar que tienen la misma regla de asignación. Sea $\mathfrak{r} \in \operatorname{Spec}(C)$,

$$(\psi \circ \varphi)^*(\mathfrak{r}) = (\psi \circ \varphi)^{-1}(\mathfrak{r}) = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}(\mathfrak{r}) = \varphi^* \circ \psi^*(\mathfrak{r}).$$

Por lo tanto, concluimos que $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$. ❏

4.2. El Espectro Afín de un Anillo. Fijemos un anillo A. En la sección anterior hemos construido al espacio topológico $\operatorname{Spec}(A)$, ahora bien, utilizando dicho espacio topológico nuestro siguiente objetivo será el de construir un espacio anillado, de esta forma, lo único que necesitamos es tener en nuestras manos una gavilla de anillos sobre $\operatorname{Spec}(A)$. En este apartado nos dedicaremos a construir dicha gavilla y a estudiar algunas de sus propiedades.

Vamos a comenzar la construcción una gavilla de anillos sobre $\operatorname{Spec}(A)$ a la cual denotaremos por $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}$. Sea U un abierto de $\operatorname{Spec}(A)$. Vamos a asignar un anillo $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(U)$ al abierto U de la siguiente forma: si $U = \emptyset$, entonces asignamos $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(U) = \{0\}$, de otro modo definimos a $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(U)$ como el conjunto de aplicaciones $s : U \to \prod_{\mathfrak{p}\in U} A_{\mathfrak{p}}$ que satisfagan las siguientes dos condiciones:

1. Para cada $\mathfrak{p} \in U$ se tiene que $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$.
2. Se cumple que s es localmente un cociente de elementos de A, es decir, para todo $\mathfrak{p} \in U$ existe una vecindad abierta V de $\mathfrak{p}$ contenida en U y existen elementos $a, f \in A$ tales que para cada $\mathfrak{q} \in V$ se satisface que $f \notin \mathfrak{q}$ y $s(\mathfrak{q}) = \dfrac{a}{f}$ en $A_{\mathfrak{q}}$.

Observemos que la segunda condición puede reescribirse en función de los abiertos básicos de $\operatorname{Spec}(A)$ de la siguiente manera: para todo $\mathfrak{p} \in U$ existe un abierto V de $\operatorname{Spec}(A)$ que contiene $\mathfrak{p}$, está contenido en U y existen elementos $a, f \in A$ tales que para cada $\mathfrak{q} \in V$ se cumple que $\mathfrak{q} \in D(f)$ y $s(\mathfrak{q}) = \dfrac{a}{f}$ en $A_{\mathfrak{q}}$.

Luego, observemos que $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(U)$ tiene una estructura de anillo con la suma y el producto definidos puntualmente como funciones. En efecto:

$\ast$ *Suma y producto.* Sean $s, t \in \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(U)$ y $\mathfrak{p} \in U$. Como s es una sección de $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}$ sobre U existe un abierto V^s de $\operatorname{Spec}(A)$ que contiene a $\mathfrak{p}$, está contenido en U y existen elementos $a_s, f_s \in A$ tales que para todo $\mathfrak{q} \in V^s$ se cumple $\mathfrak{q} \in D(f_s)$ y $s(\mathfrak{q}) = \dfrac{a_s}{f_s}$ en $A_{\mathfrak{q}}$; asimismo, como t es una sección de $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}$ sobre U existe un abierto V^t de $\operatorname{Spec}(A)$ que contiene a $\mathfrak{p}$, está contenido en U y existen $a_t, f_t \in A$ tales que para todo $\mathfrak{q} \in V^t$ se tiene que $\mathfrak{q} \in D(f_t)$ y $t(\mathfrak{q}) = \dfrac{a_t}{f_t}$ en $A_{\mathfrak{q}}$. Observemos que la suma $s + t$ y el producto st también son funciones de U a $\prod_{\mathfrak{p}\in U} A_{\mathfrak{p}}$ y que de manera clara satisfacen la primera condición requerida, de este modo, sólo resta comprobar que satisfacen la segunda condición. En ambos casos el abierto de $\operatorname{Spec}(A)$ que consideramos es $V^s \cap V^t$, los elementos que tomamos de A para la suma son $(f_t a_s + f_s a_t)$ y $(f_s f_t)$ y para el producto son $(a_s a_t)$ y $(f_s f_t)$; de este modo, para cada $\mathfrak{q} \in V^s \cap V^t$ se cumple que $(s + t)(\mathfrak{q}) = s(\mathfrak{q}) + t(\mathfrak{q})$ y que $(st)(\mathfrak{q}) = s(\mathfrak{q})t(\mathfrak{q})$. Por lo tanto, tenemos que $s + t$ y que st son secciones de $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}$ sobre U.

$\ast$ *Conmutatividad y asociatividad.* La conmutatividad y asociatividad se siguen del hecho que la conmutatividad y asociatividad existe en los elementos de $A_{\mathfrak{q}}$ para cualquier $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A)$.

$\ast$ *Neutro aditivo y multiplicativo.* Definimos el neutro aditivo como la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rcl} 0_{\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(U)} : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(U) & \to & \displaystyle\prod_{\mathfrak{r}\in U} A_{\mathfrak{r}} \\ \mathfrak{q} & \mapsto & 0_{A_{\mathfrak{q}}} \end{array}$$

Claramente tenemos que $0_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)}$ está bien definida y satisface la primera condición de la definición de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$. Para comprobar la segunda condición, para cada punto de U consideramos a U como el abierto requerido y los elementos 0_A y 1_A también son los adecuados pues recordemos que $\mathfrak{p} \in D(1_A)$ para cada $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Luego, es inmediato de la construcción que $s + 0_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)} = s$ para cualquier $s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$. El neutro multiplicativo será definido como la siguiente asignación:

$$\begin{aligned} 1_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)} : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U) &\to \prod_{\mathfrak{r}\in U} A_{\mathfrak{r}} \\ \mathfrak{q} &\mapsto 1_{A_{\mathfrak{q}}} \end{aligned}$$

En este caso también es claro que $1_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)}$ está bien definida y que satisface la primera condición de la definición de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$. Para comprobar la segunda condición, para cada punto de U también consideramos a U como el abierto requerido y los elementos adecuados de A que consideramos son 1_A y 1_A. Además, por la construcción de manera inmediata se tiene que $s1_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)} = s$ para cualquier $s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$.

$*$ *Inverso aditivo.* Dado $s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$, definimos la asignación

$$\begin{aligned} -s : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U) &\to \prod_{\mathfrak{r}\in U} A_{\mathfrak{r}} \\ \mathfrak{q} &\mapsto -s(\mathfrak{q}) \end{aligned}$$

Es claro que $-s$ es una aplicación bien definida y que satisface la primera condición en la definición de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$; ahora, comprobaremos que también satisface la segunda condición: dado $\mathfrak{p} \in U$ se tiene que existe un abierto V de $\mathrm{Spec}(A)$ que contiene a $\mathfrak{p}$, está contenido en U y existen elementos $a, f \in A$ tales que $V \subseteq D(f)$ y para cada $\mathfrak{q} \in V$ se tiene que $s(\mathfrak{q}) = \dfrac{a}{f}$ en $A_{\mathfrak{q}}$. Para la aplicación $-s$ y el punto $\mathfrak{p}$, considerar al abierto V y a los elementos $-a$ y f de A asegura que $-s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$. De este modo, de la construcción de $-s$ se sigue de manera inmediata que $s + (-s) = 0_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)}$.

El siguiente paso para construir una gavilla es definir los homomorfismos de restricción. Dados U y V abiertos de $\mathrm{Spec}(A)$ tales que $V \subseteq U$, definimos la restricción ${\rho_{\mathrm{Spec}(A)}}^U_V : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U) \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(V)$ como la restricción natural de funciones; además, observemos que claramente ${\rho_{\mathrm{Spec}(A)}}^U_V$ es un homomorfismo de anillos.

Bajo las condiciones dadas anteriormente vamos a mostrar que $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ es una gavilla de anillos sobre $\mathrm{Spec}(A)$. Por construcción claramente se satisfacen **PG1**, **PG2** y **PG3**, así, sólo resta mostrar que se satisfacen **G1** y **G2**. Sean U un abierto de $\mathrm{Spec}(A)$ y $(U_i)_{i\in I}$ una cubierta abierta de U.

G1. Sea $s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$ tal que $s|_{U_i} = 0_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U_i)}$ para todo $i \in I$. Sea $\mathfrak{p} \in U$, así, existe $j \in I$ de modo que U_j contiene a $\mathfrak{p}$. Por otro lado, por hipótesis se tiene que $s|_{U_j} = 0_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U_j)}$ y esto implica que $s(\mathfrak{q}) = s|_{U_j}(\mathfrak{q}) = 0_{A_\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in U_j$. Particularmente tenemos que $s(\mathfrak{p}) = 0_{A_\mathfrak{p}}$ y por tanto, como $\mathfrak{p}$ fue un punto arbitrario en U se concluye que $s = 0_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)}$.

G2. Sea $(s_i)_{i\in I}$ una familia de secciones de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ modo que $s_i \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U_i)$ para cada $i \in I$ y de modo que $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ para cualesquier $i, j \in I$. Recordemos que si $\mathfrak{p} \in U$ se tiene que existe $j \in I$ tal que $\mathfrak{p} \in U_j$, tomando esto en cuenta vamos a definir la aplicación $s : U \to \prod_{\mathfrak{r}\in U} A_\mathfrak{r}$ como $s(\mathfrak{q}) = s_k(\mathfrak{q})$ donde k es un índice en I de modo que $\mathfrak{q} \in U_k$. Ahora, vamos a mostrar que s está bien definida: sean $i, j \in I$ y $\mathfrak{q} \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$ tales que $\mathfrak{q} \in U_i \cap U_j$, puesto que

$$s_i(\mathfrak{q}) = s_i|_{U_i\cap U_j}(\mathfrak{q}) = s_j|_{U_i\cap U_j}(\mathfrak{q}) = s_j(\mathfrak{q})$$

se sigue que s está bien definida. Además, por construcción se tiene que $s|_{U_i} = s_i$ para cada $i \in I$. Lo único que resta a mostrar es que s es un elemento de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$: claramente s satisface la primera condición de la definición de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$ así que sólo resta mostrar que satisface la segunda condición. Dado $\mathfrak{p}$ en U sabemos que existe $j \in I$ de modo que $\mathfrak{p} \in U_j$ y esto implica que $s(\mathfrak{p}) = s_j(\mathfrak{p})$. Luego, como $s_j \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U_j)$ sabemos que existe un abierto V_j de $\mathrm{Spec}(A)$ que contiene a $\mathfrak{p}$, está contenido en U_j y existen $a_j, f_j \in A$ de modo que para cualquier $\mathfrak{q} \in V_j$ se tiene que $\mathfrak{q} \in D(f_j)$ y $s_j(\mathfrak{q}) = \dfrac{a_j}{f_j}$ en $A_\mathfrak{q}$. El abierto V_j y los elementos $a_j, f_j \in A$ aseguran que s satisface la segunda condición y de esta forma tenemos que $s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$.

Por lo tanto, concluimos que $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ es una gavilla de anillos sobre $\mathrm{Spec}(A)$. Una vez con este hecho, ya podemos realizar la siguiente definición:

Definición 1.52. Sea A un anillo. El *espectro del anillo A* es el par $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ donde $\mathrm{Spec}(A)$ es un espacio topológico con la topología de Zariski y $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ es la gavilla de anillos definida arriba.

En el siguiente resultado se enuncian algunas propiedades de la gavilla estructural del espacio de Zariski de un anillo. Solamente realizaremos un bosquejo rápido de la demostración, para ver los detalles completos de esta prueba puede consultarse [**5**].

Proposición 1.53. *Sea A un anillo. Se satisfacen los siguientes enunciados:*

1. *Para cada $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ existe un isomorfismo de anillos entre $A_\mathfrak{p}$ y $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A),\mathfrak{p}}$.*
2. *Para cualquier $f \in A$ existe un isomorfismo de anillos entre A_f y $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(f))$. En particular, $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(A)) \cong A$.*

Demostración.

1. Sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. En primer lugar, construimos el homomorfismo de anillos

$$\begin{array}{rcl} \varphi : A & \to & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A),\,\mathfrak{p}} \\ a & \mapsto & [(U, \tilde{a})] \end{array}$$

donde $\tilde{a} : \mathrm{Spec}(A) \to \prod_{\mathfrak{q}\,\in \mathrm{Spec}(A)} A_{\mathfrak{q}}$ es la aplicación tal que $\tilde{a}(\mathfrak{q}) = \dfrac{a}{1_A}{}_{A_{\mathfrak{q}}}$ para cada $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$. En segundo lugar, utilizando la propiedad universal de la localización se construye el siguiente homomorfismo de anillos:

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi} : A_{\mathfrak{p}} & \to & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A),\,\mathfrak{p}} \\ \dfrac{a}{s} & \to & [(D(s), \widetilde{\left(\dfrac{a}{s}\right)})] \end{array}$$

donde $\widetilde{\left(\dfrac{a}{s}\right)} : D(s) \to \prod_{\mathfrak{q}\in D(s)} A_{\mathfrak{q}}$ es la aplicación de modo que $\widetilde{\left(\dfrac{a}{s}\right)}(\mathfrak{q}) = \dfrac{a}{s}{}_{A_{\mathfrak{q}}}$ para cualquier $\mathfrak{q} \in D(s)$. El homomorfismo $\widetilde{\varphi}$ es el isomorfismo buscado.

2. Sea $f \in A$. Comenzamos construyendo el homomorfismo de anillos

$$\begin{array}{rcl} \psi : A & \to & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(f)) \\ a & \mapsto & \begin{array}{rcl} \psi(a) & : D(f) \to & \displaystyle\prod_{\mathfrak{q}\,\in\, D(f)} A_{\mathfrak{q}} \\ & \mathfrak{r} \quad \mapsto & \dfrac{a}{1_A}{}_{A_{\mathfrak{r}}} \end{array} \end{array}$$

Luego, utilizando la propiedad universal de la localización para anillos se construye el siguiente homomorfismo de anillos:

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\psi} : A_f & \to & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(f)) \\ \dfrac{a}{f^n} & \mapsto & \begin{array}{rcl} \psi(a)\psi(f^n)^{-1} & : D(f) \to & \displaystyle\prod_{\mathfrak{q}\,\in\, D(f)} A_{\mathfrak{q}} \\ & \mathfrak{r} \quad \mapsto & \dfrac{a}{f^n}{}_{A_{\mathfrak{r}}} \end{array} \end{array}$$

El homomorfismo $\widetilde{\psi}$ es el isomorfismo buscado. ❏

Para concluir con este apartado, como una consecuencia directa a la proposición anterior tenemos el siguiente resultado que confirma la estructura anillada del espectro de un anillo.

COROLARIO 1.54. *El espectro de un anillo es un espacio localmente anillado.*

4.3. Nociones Básicas de Esquemas Afines. Finalmente, para concluir con esta sección y con este capítulo, vamos a definir a los esquemas afines, sus morfismos y a estudiar algunas de sus propiedades. Los resultados aquí expuestos serán utilizados frecuentemente en los capítulos posteriores así que es importante tenerlos presentes.

Al concluir la sección anterior, mostramos que el espectro de un anillo es un espacio localmente anillado. De hecho, el espectro de un anillo es el modelo del cual construiremos a los esquema afines.

Definición 1.55. Un *esquema afín* es un espacio localmente anillado el cual es isomorfo como espacio localmente anillado al espectro de algún anillo.

Así, si consideramos cualquier anillo y su espectro, entonces tenemos definido de manera automática un esquema afín.

La siguiente definición que realizaremos es la de morfismo de esquemas afines. Puesto que en particular un esquema afín es un espacio localmente anillado, no debemos de sorprendernos de la siguiente definición.

Definición 1.56. Un *morfismo de esquemas afines* es un morfismo de espacios localmente anillados.

De esta manera, puesto que un morfismo de esquemas afines es sólo un morfismo de espacios localmente anillados, las definiciones correspondientes a composición de morfismos e isomorfismos se extienden de una manera natural.

El siguiente resultado que presentamos nos muestra que los morfismos de esquemas afines tienen un carácter completamente algebraico. Nuevamente, sólo realizaremos un bosquejo de la demostración, para ver todos los detalles de la prueba puede consultarse [**5**].

Teorema 1.57. *Sean A y B anillos. Se satisface las siguientes propiedades:*

1. *Si $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos, entonces φ induce un morfismo de esquemas afines* $(\varphi^*, \varphi^\#) : (\mathrm{Spec}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}) \to (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$.
2. *Cualquier morfismo de esquemas afines entre* $(\mathrm{Spec}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)})$ *y* $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ *es inducido por un homomorfismo de anillos entre A y B como en el enunciado anterior.*

Demostración.

1. Sea $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Por la Proposición 1.50 sabemos que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \varphi^* : \mathrm{Spec}(B) & \to & \mathrm{Spec}(A) \\ \mathfrak{q} & \mapsto & \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{array}$$

es una aplicación continua. Ahora bien, definimos el morfismo $\varphi^\# : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)} \to {\varphi^*}_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)})$ de la siguiente manera: para cada abierto U de $\mathrm{Spec}(A)$ asignamos el siguiente homomorfismo de anillos:

$$\begin{array}{rcl} \varphi^\#_U : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U) & \to & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}(\varphi^{*-1}(U)) \\ s & \mapsto & \begin{array}{rcl} \varphi^\#_U(s) \ : \varphi^{*-1}(U) & \to & \displaystyle\prod_{\mathfrak{r} \in \varphi^{*-1}(U)} B_{\mathfrak{r}} \\ \mathfrak{q} & \mapsto & g_{\mathfrak{q}}(s \circ \varphi^*|_{\varphi^{*-1}(U)}(\mathfrak{q})) \end{array} \end{array}$$

donde para todo $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ se define el homomorfismo local de anillos

$$\begin{array}{rcl} g_{\mathfrak{q}} : A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})} & \to & B_{\mathfrak{q}} \\ \dfrac{a}{s} & \mapsto & \dfrac{\varphi(a)}{\varphi(s)} \end{array}$$

2. Sea $(f, f^\#) : (\mathrm{Spec}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}) \to (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ un morfismo de esquemas afines. Al considerar el homomorfismo asociado al abierto $\mathrm{Spec}(A)$ obtenemos el homomorfismo de anillos $f^\#_{\mathrm{Spec}(A)} : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(A)) \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}(\mathrm{Spec}(B))$. Luego, al considerar los isomorfismos de anillos $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(A)) \cong A$ y $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}(\mathrm{Spec}(B)) \cong B$ podemos construir un homomorfismo de anillos φ entre A y B. El morfismo de esquemas afines $(\varphi^*, \varphi^\#)$ construido como en el enunciado 1 coincide con $(f, f^\#)$. ❏

El siguiente resultado nos muestra que los abiertos básicos de la topología del espacio de Zariski de un anillo tienen de una manera natural una estructura de esquema afín.

Proposición 1.58. *Sean A un anillo y f un elemento de A. El espacio localmente anillado $(D(f), \mathcal{O}_{D(f)})$ es isomorfo a $(\mathrm{Spec}(A_f), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_f)})$ y de este modo, tenemos que $(D(f), \mathcal{O}_{D(f)})$ es un esquema afín.*

Demostración. Para comenzar, recordemos que tenemos definido el homomorfismo natural de anillos $i^A_f : A \to A_f$. De este modo, por el teorema anterior se sigue la existencia de un morfismo de esquemas afines $(\varphi, \varphi^\#) : (\mathrm{Spec}(A_f), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_f)}) \to (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$, donde

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathrm{Spec}(A_f) & \to & \mathrm{Spec}(A) \\ \mathfrak{r} & \mapsto & (i^A_f)^{-1}(\mathfrak{r}) \end{array}$$

es una aplicación continua y para cada abierto U de $\mathrm{Spec}(A)$ se tiene definido el homomorfismo de anillos

$$\begin{array}{rcl} \varphi_U^{\#} : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U) & \to & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_f)}(\varphi^{-1}(U)) \\ s & \mapsto & \begin{array}{rcl} \varphi_U^{\#}(s) : \varphi^{-1}(U) & \to & \displaystyle\prod_{\mathfrak{r} \in \varphi^{-1}(U)} (A_f)_{\mathfrak{r}} \\ \mathfrak{t} & \mapsto & g_{\mathfrak{t}}(s \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U)}(\mathfrak{t})) \end{array} \end{array}$$

donde para cada $\mathfrak{t} \in \mathrm{Spec}(A_f)$ se tiene el siguiente homomorfismo local de anillos:

$$\begin{array}{rcl} g_{\mathfrak{t}} : A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{t})} & \to & (A_f)_{\mathfrak{t}} \\ \dfrac{a}{s} & \mapsto & \dfrac{\frac{a}{1_A}}{\frac{s}{1_A}} \end{array}$$

En primer lugar, vamos a estudiar a la aplicación continua φ. Por la Proposición 1.46 sabemos que los ideales primos de A_f son de la forma $\mathfrak{p}_f$ para algún $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ de modo que $f \notin \mathfrak{p}$. Así, como $\varphi(\mathfrak{p}_f) = \mathfrak{p}$ para cualquier $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ tal que $f \notin \mathfrak{p}$, se sigue de manera inmediata que $\varphi(\mathrm{Spec}(A)) = D(f)$. Luego, podemos considerar la aplicación continua

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi} : \mathrm{Spec}(A_f) & \to & D(f) \\ \mathfrak{r}_f & \mapsto & \mathfrak{r} \end{array}$$

Por construcción se tiene que $\widetilde{\varphi}$ es una biyección. Lo que mostraremos a continuación es que $\widetilde{\varphi}$ es una aplicación cerrada y con ello tendremos que $\widetilde{\varphi}$ es un homeomorfismo. Sea J un ideal de A, vamos a probar que $\widetilde{\varphi}(V(J_f)) = V(J) \cap D(f)$. Puesto que $V(J_f) \subseteq \mathrm{Spec}(A_f)$ se sigue que $\widetilde{\varphi}(V(J_f)) \subseteq \widetilde{\varphi}(\mathrm{Spec}(A_f)) = D(f)$; además, por la Proposición 1.51 sabemos que $\overline{\widetilde{\varphi}(V(J_f))} = V(J)$ lo cual implica que $\widetilde{\varphi}(V(J_f)) \subseteq V(J)$. Consecuentemente tenemos que $\widetilde{\varphi}(V(J_f)) \subseteq V(J) \cap D(f)$. Recíprocamente, sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ de modo que $\mathfrak{p} \in V(J) \cap D(f)$. Las condiciones $J \subseteq \mathfrak{p}$ y $f \notin \mathfrak{p}$ implican que $J_f \subseteq \mathfrak{p}_f$. Así, como $\mathfrak{p}_f \in V(J_f)$ y $\widetilde{\varphi}(\mathfrak{p}_f) = \mathfrak{p}$ se sigue que $\mathfrak{p} \in \widetilde{\varphi}(V(J_f))$ y de esta forma tenemos que $V(I) \cap D(f) \subseteq \widetilde{\varphi}(V(J_f))$. Por lo tanto, se concluye que $\widetilde{\varphi}$ es un homeomorfismo entre $\mathrm{Spec}(A_f)$ y $D(f)$.

Nuestro siguiente objetivo es el de construir un isomorfismo entre las gavillas $\mathcal{O}_{D(f)}$ y $\widetilde{\varphi}_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_f)})$, sin embargo, antes de realizar dicha construcción vamos a mostrar que el homomorfismo de anillos $g_{\mathfrak{p}_f} : A_{\mathfrak{p}} \to (A_f)_{\mathfrak{p}_f}$ es un isomorfismo para cada $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ tal que $f \notin \mathfrak{p}$. Sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ tal que $f \notin \mathfrak{p}$:

- $g_{\mathfrak{p}_f}$ es inyectivo: sean $a \in A$ y $u \in A\backslash\mathfrak{p}$ tales que $\dfrac{a}{u} \in \mathrm{Ker}\, g_{\mathfrak{p}_f}$. De esta forma, como $g_{\mathfrak{p}_f}(\dfrac{a}{u}) = 0_{(A_f)_{\mathfrak{p}_f}}$ se sigue que existen $v \in A\backslash\mathfrak{p}$ y $n \in \mathbb{Z}_+$ de modo que $\dfrac{v}{f^n} \cdot \dfrac{a}{1_A} = \dfrac{0_A}{1_A}$, consecuentemente tenemos que existe $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^m va = 0_A$. Luego, como v y f están en $A\backslash\mathfrak{p}$ se sigue que $f^m v \in A\backslash\mathfrak{p}$ y esto implica que

$$\frac{a}{u} = \frac{f^m va}{f^m vu} = \frac{0_A}{f^m vu} = 0_{A_\mathfrak{p}}.$$

Por lo tanto, concluimos que $g_{\mathfrak{p}_f}$ es inyectivo.

• $g_{\mathfrak{p}_f}$ es sobreyectivo: sean $a \in A$, $u \in A\backslash\mathfrak{p}$ y $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Afirmamos que la imagen del elemento $\dfrac{af^m}{uf^n}$ bajo $g_{\mathfrak{p}_f}$ es igual a $\dfrac{\frac{a}{f^n}}{\frac{u}{f^m}}$: en efecto,

$$g_{\mathfrak{p}_f}\left(\frac{af^m}{uf^n}\right) = \frac{\frac{af^m}{1_A}}{\frac{uf^n}{1_A}} = \frac{\frac{a}{f^n}}{\frac{u}{f^m}}$$

donde la última igualdad se satisface pues $\dfrac{u}{f^m} \cdot \dfrac{af^m}{1_A} = \dfrac{ua}{1_A} = \dfrac{uf^n}{1_A} \cdot \dfrac{a}{f^n}$. De esta forma, concluimos que $g_{\mathfrak{p}_f}$ es sobreyectivo.

Por lo tanto, tenemos que $g_{\mathfrak{p}_f}$ es un isomorfismo de anillos.

A continuación construiremos el morfismo de gavillas $\widetilde{\varphi}^\# : \mathcal{O}_{D(f)} \to \widetilde{\varphi}_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_f)})$. Sea U un abierto de $D(f)$. Puesto que U es un abierto de $D(f)$ que a su vez es un abierto de $\mathrm{Spec}(A)$ y puesto que $\mathcal{O}_{D(f)} = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}|_{D(f)}$, definimos el homomorfismo $\widetilde{\varphi}^\#_U : \mathcal{O}_{D(f)}(U) \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_f)}(\widetilde{\varphi}^{-1}(U))$ como $\widetilde{\varphi}^\#_U = \varphi^\#_U$. De una manera inmediata se sigue que $\widetilde{\varphi}^\#$ es un morfismo de gavillas. Ahora, para probar que $\widetilde{\varphi}^\#$ es un isomorfismo será suficiente mostrar que para cada $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ tal que $f \notin \mathfrak{p}$ la aplicación inducida a los anillos de gérmenes $\widetilde{\varphi}^\#_{\mathfrak{p}_f} : \mathcal{O}_{D(f),\mathfrak{p}} \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_f),\,\mathfrak{p}_f}$ es un isomorfismo. Sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ tal que $f \notin \mathfrak{p}$. Observemos que el siguiente diagrama es un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{D(f),\mathfrak{p}} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}^\#_{\mathfrak{p}_f}"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_f),\mathfrak{p}_f} \arrow[d, "\cong"] \\
A_\mathfrak{p} \arrow[r, "g_{\mathfrak{p}_f}"'] & (A_f)_{\mathfrak{p}_f}
\end{tikzcd}$$

De la conmutatividad de dicho diagrama se sigue de manera inmediata que $\widetilde{\varphi}^\#_{\mathfrak{p}_f}$ es un isomorfismo. Además, como $g_{\mathfrak{p}_f}$ es un homomorfismo local también tenemos que $\widetilde{\varphi}^\#_{\mathfrak{p}_f}$ es un homomorfismo local de anillos.

De esta manera, concluimos que $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\varphi}^{\#})$ es un isomorfismo entre los espacios localmente anillados $(\mathrm{Spec}(A_f), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_f)})$ y $(D(f), \mathcal{O}_{D(f)})$. ❑

Para concluir con este capítulo, en el siguiente resultado vamos a mostrar que cuando tenemos que un abierto básico que está contenido en otro abierto básico podemos ver al primero de ellos como un abierto básico en el segundo.

Lema 1.59. *Sean f y g elementos de un anillo A. Si $D(f) \subseteq D(g)$, entonces $D(f)$ es homeomorfo al abierto básico $D(\frac{f}{1_A})$ de* $\mathrm{Spec}(A_g)$ *y de esta forma, podemos considerar a $D(f)$ como un abierto básico de $D(g)$.*

Demostración. En primer lugar, la hipótesis $D(f) \subseteq D(g)$ es equivalente a los siguientes enunciados:

$$\begin{aligned} D(f) \subseteq D(g) &\iff \mathrm{Spec}(A)\backslash V(Af) \subseteq \mathrm{Spec}(A)\backslash V(Ag) \\ &\iff V(Ag) \subseteq V(Af) \\ &\iff \sqrt{Af} \subseteq \sqrt{Ag} \\ &\iff \exists\, m \in \mathbb{N},\ \exists\, \lambda \in A : f^m = \lambda g. \end{aligned}$$

Ahora bien, realizando la composición de las aplicaciones naturales $A \to A_g$ y $A_g \to (A_g)_{\frac{f}{1_A}}$ obtenemos el siguiente homomorfismo de anillos:

$$\begin{aligned} \psi : A &\to (A_g)_{\frac{f}{1_A}} \\ a &\mapsto \frac{\frac{a}{1_A}}{\frac{1_A}{1_A}} \end{aligned}$$

Luego, observemos que la imagen de f bajo ψ es una unidad en $(A_g)_{\frac{f}{1_A}}$: en efecto,

$$\psi(f) \cdot \frac{\frac{1_A}{1_A}}{\frac{f}{1_A}} = \frac{\frac{f}{1_A}}{\frac{1_A}{1_A}} \cdot \frac{\frac{1_A}{1_A}}{\frac{f}{1_A}} = \frac{\frac{f}{1_A}}{\frac{f}{1_A}} = \frac{\frac{1_A}{1_A}}{\frac{1_A}{1_A}} = 1_{(A_g)_{\frac{f}{1_A}}},$$

donde la última igualdad es verdadera ya que $\frac{1_A}{1_A} \cdot \frac{f}{1_A} = \frac{f}{1_A} = \frac{1_A}{1_A} \cdot \frac{f}{1_A}$ en A_g. De esta forma, por la propiedad universal de la localización para anillos se tiene la existencia del homomorfismo de anillos

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}: A_f &\to (A_g)_{\frac{f}{1_A}}\\ \frac{a}{f^n} &\mapsto \frac{\frac{a}{1_A}}{\frac{f^n}{1_A}}\end{aligned}$$

Vamos a probar que $\widetilde{\psi}$ es un isomorfismo de anillos. Comenzaremos mostrando la inyectividad: sean $a \in A$ y $n \in \mathbb{Z}_+$ tales que $\frac{a}{f^n} \in \operatorname{Ker}\widetilde{\psi}$. Así, como $\widetilde{\psi}(\frac{a}{f^n}) = 0_{(A_g)_{\frac{f}{1_A}}}$ tenemos que existe $z \in \mathbb{Z}_+$ de modo que $\frac{f^z}{1_A} \cdot \frac{a}{1_A} = \frac{0_A}{1_A}$ en A_g, consecuentemente existe $w \in \mathbb{Z}_+$ de modo que $g^w f^z a = 0_A$. Luego, la última igualdad implica que $\lambda^w g^w f^z a = 0_A$ y como $f^m = \lambda g$ se sigue que $f^{mw+z}a = 0_A$. De este modo, como $\frac{a}{f^n} = \frac{f^{mw+z}a}{f^{mw+z}f^n} = \frac{0_A}{f^{mw+z+n}} = 0_{A_f}$ concluimos que $\widetilde{\psi}$ es inyectiva.

Ahora, probaremos que $\widetilde{\psi}$ es sobreyectiva. Sean $a \in A$ y $r, s \in \mathbb{Z}_+$. Afirmamos que la imagen del elemento $\frac{\lambda^r a}{f^{mr+s}}$ bajo $\widetilde{\psi}$ es igual a $\frac{\frac{a}{g^r}}{\frac{f^s}{1_A}}$, en efecto:

$$\widetilde{\psi}(\frac{\lambda^r a}{f^{mr+s}}) = \frac{\frac{\lambda^r a}{1_A}}{\frac{f^{mr+s}}{1_A}} = \frac{\frac{\lambda^r}{1_A}}{\frac{1_A}{1_A}} \cdot \frac{\frac{a}{1_A}}{\frac{f^{mr}f^s}{1_A}} = \frac{\frac{f^{mr}}{g^r}}{\frac{1_A}{1_A}} \cdot \frac{\frac{a}{1_A}}{\frac{f^{mr}f^s}{1_A}} = \frac{\frac{a}{g^r}}{\frac{f^s}{1_A}}.$$

Así, concluimos que $\widetilde{\psi}$ es un isomorfismo de anillos.

De este modo, como $\widetilde{\psi} : A_f \to (A_g)_{\frac{f}{1_A}}$ es un isomorfismo, por la Proposición 1.51 se sigue que $\operatorname{Spec}((A_g)_{\frac{f}{1_A}})$ es homeomorfo a $V(\operatorname{Ker}\widetilde{\psi}) = V(\{0_{A_f}\}) = \operatorname{Spec}(A_f)$. Por último, por la proposición anterior tenemos los homeomorfismos $\operatorname{Spec}((A_g)_{\frac{f}{1_A}}) \cong D(\frac{f}{1_A})$ y $\operatorname{Spec}(A_f) \cong D(f)$ de los cuales se concluye que $D(f)$ es homeomorfo a $D(\frac{f}{1_A})$. ❑

Capítulo 2

Gavillas de Módulos

En este capítulo vamos a estudiar una clase especial de gavillas: las gavillas de módulos. En la primera sección definiremos las gavillas de módulos y estudiaremos algunas de sus propiedades, no será una sorpresa que en esta sección y en las posteriores aparezcan algunos resultados análogos a los de la Teoría de Módulos. En la segunda sección nos enfocaremos en una clase especial de gavillas de módulos, las generadas por una familia de sus secciones globales. Motivados por la construcción de la gavilla imagen directa, en la tercera sección construiremos una gavilla a partir de una aplicación continua entre espacios topológicos y una gavilla sobre el codominio: la gavilla imagen inversa. Para finalizar con este capítulo, en la cuarta y última sección realizaremos la construcción de una gavilla de módulos a partir de una pareja de gavillas de módulos, nos referimos al producto tensorial de gavillas de módulos.

1. Nociones Básicas

En esta sección introduciremos el concepto de gavilla de módulos sobre un espacio anillado. Después de definir las gavillas de módulos estudiaremos algunas de sus propiedades, además, motivados por algunos resultados de la Teoría de Módulos obtendremos resultados análogos para gavillas. Comenzaremos definiendo al objeto que da nombre a este capítulo.

Definición 2.1. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Una *gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos* (respectivamente, *pregavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos*) es una gavilla (respectivamente, pregavilla) de grupos abelianos $\mathcal{F}$ sobre X tal que para cada abierto U de X el grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$ tiene una estructura de $\mathcal{O}_X(U)$-módulo, y tal que para cualesquier abiertos U y V de X de modo que $V \subseteq U$ se tiene que el homomorfismo ${\rho_{\mathcal{F}}}_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ es compatible con el homomorfismo de anillos ${\rho_{\mathcal{O}_X}}_V^U : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$, es decir, se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d, "{\rho_{\mathcal{O}_X}}_V^U \times {\rho_{\mathcal{F}}}_V^U"'] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "{\rho_{\mathcal{F}}}_V^U"] \\
\mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{F}(V) \arrow[r] & \mathcal{F}(V)
\end{tikzcd}$$

Vamos a fijar terminología y realizaremos una observación para un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$:

- Cuando no existan diferencias o confusión en tomar una gavilla o pregavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos, simplemente diremos que tenemos un $\mathcal{O}_X$-módulo o un módulo sobre $(X, \mathcal{O}_X)$.
- Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, para cada $p \in X$ el grupo de gérmenes $\mathcal{F}_p$ hereda una estructura de $\mathcal{O}_{X,p}$-módulo dada de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathcal{O}_{X,p} \times \mathcal{F}_p & \to & \mathcal{F}_p \\ & ([(V,\lambda)],[(U,s)]) & \mapsto & [(V \cap U, \rho_{\mathcal{O}_X}{}^{V}_{V\cap U}(\lambda) \cdot \rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{V\cap U}(s))] \end{array}$$

Para definir un morfismo entre gavillas de módulos, vamos a necesitar una condición más a las ya establecidas en los morfismos de pregavillas de grupos abelianos.

Definición 2.2. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ módulos sobre $\mathcal{O}_X$ donde $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio anillado. Un *morfismo* φ entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ es un morfismo entre las gavillas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ tal que para cada abierto U de X el homomorfismo φ_U es una aplicación $\mathcal{O}_X(U)$-lineal.

Al igual que en la Teoría de Módulos, dados $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ módulos sobre $\mathcal{O}_X$ donde $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio anillado, podemos considerar el conjunto de todos los morfismos entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ que denotaremos por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Dicho conjunto no sólo es un conjunto, también tiene una estructura algebraica. En efecto, la siguiente proposición nos hablará de este hecho.

Proposición 2.3. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ módulos sobre $\mathcal{O}_X$ donde $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio anillado. De manera natural, el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ tiene una estructura de $\mathcal{O}_X(X)$-módulo.*

Demostración. Es claro que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un grupo abeliano, así que sólo resta definir un producto de elementos de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ por elementos de $\mathcal{O}_X(X)$. Definimos la siguiente operación:

$$\begin{array}{rcl} \cdot: \mathcal{O}_X(X) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \\ (\lambda, \varphi) & \mapsto & \lambda\varphi \end{array}$$

donde para cada abierto U de X se define la aplicación

$$\begin{array}{rcl} (\lambda\varphi)_U : \mathcal{F}(U) & \to & \mathcal{G}(U) \\ a & \mapsto & \rho_{\mathcal{O}_X}{}^{X}_{U}(\lambda) \cdot \varphi_U(a) \end{array}$$

Comencemos verificando que el producto anterior está bien definido. Sean $\lambda \in \mathcal{O}_X(X)$ y $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Observemos que para cada abierto U de X por construcción se tiene que $(\lambda\varphi)_U$ es una aplicación $\mathcal{O}_X(U)$-lineal (véase Lema A.1). Sólo resta probar la compatibilidad con las restricciones para mostrar que $\lambda\varphi$ es un morfismo. Sean U y V abiertos de X tales que $V \subseteq U$, vamos a mostrar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "(\lambda\varphi)_U"] \arrow[d, "{\rho_{\mathcal{F}}}_V^U"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "{\rho_{\mathcal{G}}}_V^U"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "(\lambda\varphi)_V"'] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

Sea $a \in \mathcal{F}(U)$,

$$\begin{aligned}
{\rho_{\mathcal{G}}}_V^U \circ (\lambda\varphi)_U(a) &= {\rho_{\mathcal{G}}}_V^U({\rho_{\mathcal{O}_X}}_U^X(\lambda) \cdot \varphi_U(a)) \\
&= {\rho_{\mathcal{O}_X}}_V^U({\rho_{\mathcal{O}_X}}_U^X(\lambda)) \cdot {\rho_{\mathcal{G}}}_V^U(\varphi_U(a)) \\
&= {\rho_{\mathcal{O}_X}}_V^X(\lambda) \cdot \varphi_V({\rho_{\mathcal{F}}}_V^U(a)) \\
&= (\lambda\varphi)_V \circ {\rho_{\mathcal{F}}}_V^U(a).
\end{aligned}$$

Así, tenemos que $\lambda\varphi$ es un morfismo. Ahora, sean $\lambda, \mu \in \mathcal{O}_X(X)$ y $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ tales que $(\lambda, \varphi) = (\mu, \psi)$. Vamos a mostrar que $\lambda\varphi = \mu\psi$, para ello, mostraremos que para cada abierto U de X se tiene que $(\lambda\varphi)_U = (\mu\psi)_U$. Sea U un abierto de X. La igualdad $(\lambda, \varphi) = (\mu, \psi)$ implica que $\lambda = \mu$ y que $\varphi = \psi$, a su vez este hecho implica que ${\rho_{\mathcal{O}_X}}_U^X(\lambda) = {\rho_{\mathcal{O}_X}}_U^X(\mu)$ y que $\varphi_U = \psi_U$. Sea $a \in \mathcal{F}(U)$, observemos que

$$(\lambda\varphi)_U(a) = {\rho_{\mathcal{O}_X}}_U^X(\lambda) \cdot \varphi_U(a) = {\rho_{\mathcal{O}_X}}_U^X(\mu) \cdot \psi_U(a) = (\mu\psi)_U(a).$$

De esta forma, como tenemos que las aplicaciones $(\lambda\varphi)_U$ y $(\mu\psi)_U$ tienen el mismo dominio, codominio y regla de asignación se sigue que son iguales y como U fue un abierto arbitrario de X concluimos que $\lambda\varphi = \mu\psi$. Por lo tanto, tenemos que el producto $\cdot$ está bien definido.

Ahora, lo que resta a probar es que el producto $\cdot$ cumple con los requerimientos de un producto externo. Sean $\lambda, \mu \in \mathcal{O}_X(X)$ y $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Para mostrar las siguientes igualdades $\lambda(\varphi+\psi) = \lambda\varphi + \lambda\psi$, $(\lambda+\mu)\varphi = \lambda\varphi + \mu\varphi$, $(\lambda\mu)\varphi = \lambda(\mu\varphi)$ y $1_{\mathcal{O}_X(X)}\varphi = \varphi$ vamos a mostrar que para cada abierto U de X las correspondientes aplicaciones $\mathcal{O}_X(U)$-lineales son iguales. Sea U un abierto de X. Puesto que todas las aplicaciones $\mathcal{O}_X(U)$-lineales tienen por dominio a $\mathcal{F}(U)$ y por codominio a $\mathcal{G}(U)$, sólo resta probar que tenemos la misma regla de asignación. Sea $a \in \mathcal{F}(U)$,

$$\begin{aligned}
(\lambda(\varphi + \psi))_U(a) &= {\rho_{\mathcal{O}_X}}_U^X(\lambda) \cdot ((\varphi + \psi)_U(a)) \\
&= {\rho_{\mathcal{O}_X}}_U^X(\lambda) \cdot (\varphi_U(a) + \psi_U(a)) \\
&= {\rho_{\mathcal{O}_X}}_U^X(\lambda) \cdot \varphi_U(a) + {\rho_{\mathcal{O}_X}}_U^X(\lambda) \cdot \psi_U(a) \\
&= (\lambda\varphi + \lambda\psi)_U(a).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((\lambda+\mu)\varphi)_U(a) &= \rho_{\mathcal{O}_X}{}^X_U(\lambda+\mu)\cdot\varphi_U(a)\\
&= \left(\rho_{\mathcal{O}_X}{}^X_U(\lambda)+\rho_{\mathcal{O}_X}{}^X_U(\mu)\right)\cdot\varphi_U(a)\\
&= \rho_{\mathcal{O}_X}{}^X_U(\lambda)\cdot\varphi_U(a)+\rho_{\mathcal{O}_X}{}^X_U(\mu)\cdot\varphi_U(a)\\
&= (\lambda\varphi+\mu\varphi)_U(a).\\
((\lambda\mu)\varphi)_U(a) &= \rho_{\mathcal{O}_X}{}^X_U(\lambda\mu)\cdot\varphi_U(a)\\
&= \left(\rho_{\mathcal{O}_X}{}^X_U(\lambda)\rho_{\mathcal{O}_X}{}^X_U(\mu)\right)\cdot\varphi_U(a)\\
&= \rho_{\mathcal{O}_X}{}^X_U(\lambda)\cdot\left(\rho_{\mathcal{O}_X}{}^X_U(\mu)\cdot\varphi_U(a)\right)\\
&= (\lambda(\mu\varphi))_U(a).
\end{aligned}$$

$$(1_{\mathcal{O}_X(X)}\varphi)_U(a)=\rho_{\mathcal{O}_X}{}^X_U(1_{\mathcal{O}_X(X)})\cdot\varphi_U(a)=1_{\mathcal{O}_X(U)}\cdot\varphi_U(a)=\varphi_U(a).$$

De esta forma, hemos comprobado que $\cdot$ es un producto externo y así concluimos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ es un $\mathcal{O}_X(X)$-módulo. ❑

Particularmente vamos a estar interesados en determinar al $\mathcal{O}_X(X)$-módulo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{F})$ donde $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo sobre un espacio anillado $(X,\mathcal{O}_X)$. El siguiente resultado nos brindará una caracterización de este módulo, el lector podrá notar la similitud con el Lema A.2.

Proposición 2.4. *Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo sobre un espacio anillado $(X,\mathcal{O}_X)$. Existe un $\mathcal{O}_X(X)$-isomorfismo entre* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{F})$ *y* $\mathcal{F}(X)$.

Demostración. En primer lugar, consideramos la siguiente asignación entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{F})$ y $\mathcal{F}(X)$:

$$\begin{aligned}
\Phi:\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{F}) &\to \mathcal{F}(X)\\
\varphi &\mapsto \varphi_X(1_{\mathcal{O}_X(X)})
\end{aligned}$$

Vamos a mostrar que Φ es una aplicación bien definida: consideremos a φ y φ' elementos de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{F})$ tales que $\varphi=\varphi'$, así, para todo abierto U de X se tiene la igualdad $\varphi_U=\varphi'_U$. De manera particular, cuando $U=X$ tenemos que $\varphi_X=\varphi'_X$ y esto implica que $\varphi_X(1_{\mathcal{O}_X(X)})=\varphi'_X(1_{\mathcal{O}_X(X)})$. Por lo tanto, concluimos que Φ es una aplicación bien definida.

Ahora, observemos que Φ es una aplicación $\mathcal{O}_X(X)$-lineal: en efecto, sean $\lambda,\mu\in\mathcal{O}_X(X)$ y $\varphi,\psi\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{F})$,

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda\varphi+\mu\psi) &= (\lambda\varphi+\mu\psi)_X(1_{\mathcal{O}_X(X)})\\
&= (\lambda\varphi)_X(1_{\mathcal{O}_X(X)})+(\mu\psi)_X(1_{\mathcal{O}_X(X)})\\
&= \rho_{\mathcal{O}_X}{}^X_X(\lambda)\cdot\varphi_X(1_{\mathcal{O}_X(X)})+\rho_{\mathcal{O}_X}{}^X_X(\mu)\cdot\psi_X(1_{\mathcal{O}_X(X)})\\
&= \lambda\Phi(\varphi)+\mu\Phi(\psi).
\end{aligned}$$

En segundo lugar, vamos a definir una aplicación entre $\mathcal{F}(X)$ y $\mathrm{Hom}_{O_X}(O_X, \mathcal{F})$. Para poder realizar dicha construcción, dada una sección global de $\mathcal{F}$ debemos construir un morfismo O_X-lineal entre O_X y $\mathcal{F}$. Sean $s \in \mathcal{F}(X)$ y U un abierto de X. Consideramos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rcl} f_U^s : O_X(U) & \to & \mathcal{F}(U) \\ a & \mapsto & a \cdot \rho_{\mathcal{F}}{}_U^X(s) \end{array}$$

Por construcción tenemos que f_U^s es una aplicación $O_X(U)$-lineal entre $O_X(U)$ y $\mathcal{F}(U)$ (véase Lema A.2). Ahora, consideramos a f^s como la familia $(f_U^s)_{\{U \text{ abierto de } X\}}$. Afirmamos que f^s es un morfismo: en efecto, sean U y V abiertos de X tales que $V \subseteq U$. Vamos a mostrar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} O_X(U) \arrow[r, "f_U^s"] \arrow[d, "\rho_{O_X}{}_V^U"'] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}}{}_V^U"] \\ O_X(V) \arrow[r, "f_V^s"'] & \mathcal{F}(V) \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo. Sea $a \in O_X(U)$,

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{F}}{}_V^U \circ f_U^s(a) &= \rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(a \cdot \rho_{\mathcal{F}}{}_U^X(s)) \\ &= \rho_{O_X}{}_V^U(a) \cdot \rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(\rho_{\mathcal{F}}{}_U^X(s)) \\ &= \rho_{O_X}{}_V^U(a) \cdot \rho_{\mathcal{F}}{}_V^X(s) \\ &= f_V^s(\rho_{O_X}{}_V^U(a)) \\ &= f_V^s \circ \rho_{O_X}{}_V^U(a). \end{aligned}$$

Por lo tanto, f^s define un morfismo entre los O_X-módulos O_X y $\mathcal{F}$. De este modo, definimos la siguiente asignación entre $\mathcal{F}(X)$ y $\mathrm{Hom}_{O_X}(O_X, \mathcal{F})$:

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathcal{F}(X) & \to & \mathrm{Hom}_{O_X}(O_X, \mathcal{F}) \\ s & \mapsto & f^s \end{array}$$

Comenzaremos mostrando que Ψ es una aplicación bien definida: sean s y t secciones de $\mathcal{F}$ sobre X tales que $s = t$ y sea U un abierto de X. Del hecho que $s = t$ se sigue que $\rho_{\mathcal{F}}{}_U^X(s) = \rho_{\mathcal{F}}{}_U^X(t)$, esto implica que $\lambda \cdot \rho_{\mathcal{F}}{}_U^X(s) = \lambda \cdot \rho_{\mathcal{F}}{}_U^X$ para todo $\lambda \in O_X(U)$, es decir que $f_U^s(\lambda) = f_U^t(\lambda)$ para todo $\lambda \in O_X(U)$ y de esto se sigue que $f_U^s = f_U^t$. De esta forma, como $f_U^s = f_U^t$ para cualquier abierto U de X se sigue que $f^s = f^t$. Así, tenemos que Ψ es una aplicación bien definida.

En seguida, mostraremos que Ψ es una aplicación $O_X(X)$-lineal. Sean $\lambda, \mu \in O_X(X)$ y $s, t \in \mathcal{F}(X)$. Queremos mostrar que $\Psi(\lambda s + \mu t)$ es igual a $\lambda\Psi(s) + \mu\Psi(t)$, es decir, queremos mostrar la igualdad entre los morfismos $f^{\lambda s+\mu t}$ y $\lambda f^s + \mu f^t$. De este modo, para probar la igualdad entre los morfismos deseados vamos a probar que para todo abierto U de X se tiene que $(f^{\lambda s+\mu t})_U = (\lambda f^s + \mu f^t)_U$. Sea U un abierto de X. Como las aplicaciones $(f^{\lambda s+\mu t})_U$ y $(\lambda f^s + \mu f^t)_U$ tienen el mismo dominio y codominio sólo resta verificar que tienen la misma regla de asignación. Sea $a \in O_X(X)$,

$$\begin{aligned}
(f^{\lambda s+\mu t})_U(a) &= a \cdot \rho_{\mathcal{F}}{}^X_U(\lambda s + \mu t) \\
&= a \cdot \left(\rho_{O_X}{}^X_U(\lambda) \cdot \rho_{\mathcal{F}}{}^X_U(s) + \rho_{O_X}{}^X_U(\mu) \cdot \rho_{\mathcal{F}}{}^X_U(t)\right) \\
&= \rho_{O_X}{}^X_U(\lambda) \cdot \left(a \cdot \rho_{\mathcal{F}}{}^X_U(s)\right) + \rho_{O_X}{}^X_U(\mu)\left(a \cdot \rho_{\mathcal{F}}{}^X_U(t)\right) \\
&= \rho_{O_X}{}^X_U(\lambda) \cdot f^s_U(a) + \rho_{O_X}{}^X_U(\mu) \cdot f^t_U(a) \\
&= (\lambda f^s + \mu f^t)_U(a).
\end{aligned}$$

Así, como tenemos que la igualdad $(f^{\lambda s+\mu t})_U = (\lambda f^s + \mu f^t)_U$ se cumple para cualquier abierto U de X, se sigue que los morfismos $f^{\lambda s+\mu t}$ y $\lambda f^s + \mu f^t$ son iguales y por consiguiente se tiene que $\Psi(\lambda s + \mu t) = \lambda\Psi(s) + \mu\Psi(t)$. Por lo tanto, Ψ es una aplicación $O_X(X)$-lineal.

Finalmente, vamos a mostrar que Φ y Ψ son aplicaciones inversas, es decir, que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(X)}$ y que $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{O_X}(O_X,\mathcal{F})}$. Sea $s \in \mathcal{F}(X)$, como

$$\Phi \circ \Psi(s) = \Phi(\Psi(s)) = \Phi(f^s) = f^s_X(1_{O_X(X)}) = 1_{O_X(X)} \cdot \rho_{\mathcal{F}}{}^X_X(s) = s$$

concluimos que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(X)}$. Ahora, sea $\varphi \in \mathrm{Hom}_{O_X}(O_X, \mathcal{F})$. Para mostrar que $\Psi \circ \Phi(\varphi)$ es igual a φ vamos a mostrar que para todo abierto U de X se tiene que $(\Psi \circ \Phi(\varphi))_U = \varphi_U$. Sean U un abierto de X y $t \in O_X(U)$. Observemos que $\Psi \circ \Phi(\varphi) = \Psi(\Phi(\varphi)) = \Psi(\varphi_X(1_{O_X(X)})) = f^{\varphi_X(1_{O_X(X)})}$, esto implica que

$$(\Psi \circ \Phi(\varphi))_U(t) = f_U^{\varphi_X(1_{O_X(X)})}(t) = t \cdot \rho_{\mathcal{F}}{}^X_U(\varphi_X(1_{O_X(X)})) = t \cdot \varphi_U(\rho_{O_X}{}^X_U(1_{O_X(X)})) = \varphi_U(t).$$

De esta forma, como $(\Psi \circ \Phi(\varphi))_U$ y φ_U tienen el mismo dominio, codominio y regla de asignación se sigue que dichas aplicaciones son iguales. Además, como U fue un abierto arbitrario de X tenemos que los morfismos $\Psi \circ \Phi(\varphi)$ y φ son iguales y consecuentemente tenemos que $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{O_X}(O_X,\mathcal{F})}$.

Por lo tanto, como tenemos que Φ y Ψ son aplicaciones inversas concluimos que existe un $O_X(X)$-isomorfismo entre $\mathrm{Hom}_{O_X}(O_X, \mathcal{F})$ y $\mathcal{F}(X)$. ❑

Recordemos que a partir de una familia de módulos podemos construir el producto y la suma directa que tienen una estructura de módulo (véase la Sección 1 del Apéndice A). Basados en esta idea vamos a realizar una construcción análoga para el caso de una familia de gavillas de módulos.

Teorema 2.5. *Sea $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ una familia de gavillas de O_X-módulos sobre un espacio anillado (X, O_X). El* producto de gavillas *denotado por $\prod_{i\in I} \mathcal{F}_i$ es la gavilla de O_X-módulos definida de la* *siguiente manera: para cada abierto U de X asignamos $\left(\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)(U) = \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i(U)$, y si U y V son abiertos de X tales que $V \subseteq U$ la restricción ${\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}}^U_V$ está dada por*

$$\begin{array}{rccc} {\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}}^U_V : & \left(\prod\limits_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)(U) & \to & \left(\prod\limits_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)(V) \\ & (s_i)_{i\in I} & \mapsto & ({\rho_{\mathcal{F}_i}}^U_V(s_i))_{i\in I} \end{array}$$

Además, de manera natural para cada $j \in I$ tenemos definido un morfismo $\pi_j : \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_j$ donde para cada abierto U de X se tiene que

$$\begin{array}{rccc} {\pi_j}_U : & \left(\prod\limits_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)(U) & \to & \mathcal{F}_j(U) \\ & (s_i)_{i\in I} & \mapsto & s_j \end{array}$$

Demostración. En primer lugar, mostraremos que $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$ es una gavilla de grupos abelianos. Sea U un abierto de X. Puesto que cada miembro de la familia $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ es en particular una gavilla de grupos abelianos se sigue que $\mathcal{F}_i(U)$ es un grupo abeliano para todo $i \in I$ y esto implica que $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i(U)$ tiene una estructura de grupo abeliano. Así, para cada abierto U de X se tiene que $(\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i)(U)$ es un grupo abeliano. A continuación mostraremos que $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$ satisface los axiomas de una gavilla:

PG1. Como $\mathcal{F}_i$ es una gavilla, entonces para cada $i \in I$ se tiene que $\mathcal{F}_i(\emptyset) = \{0\}$, de esto se sigue que $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i(\emptyset) = \{0\}$ y por lo tanto tenemos que $(\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i)(\emptyset) = \{0\}$.

PG2. Sean U un abierto de X y $s_i \in \mathcal{F}_i(U)$ para cada $i \in I$. Como tenemos que ${\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}}^U_U((s_i)_{i\in I}) = ({\rho_{\mathcal{F}_i}}^U_U(s_i))_{i\in I} = (s_i)_{i\in I}$ se concluye que ${\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}}^U_U = \mathrm{id}_{(\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i)(U)}$.

PG3. Sean U, V y W abiertos de X tales que $W \subseteq V \subseteq U$. Sea s_i una sección de $\mathcal{F}_i$ sobre U para cada $i \in I$. Puesto que

$$\begin{aligned} {\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}}^V_W \circ {\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}}^U_V((s_i)_{i\in I}) &= {\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}}^V_W(({\rho_{\mathcal{F}_i}}^U_V(s_i))_{i\in I}) \\ &= ({\rho_{\mathcal{F}_i}}^V_W({\rho_{\mathcal{F}_i}}^U_V(s_i)))_{i\in I} \\ &= ({\rho_{\mathcal{F}_i}}^U_W(s_i))_{i\in I} \\ &= {\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}}^U_W((s_i)_{i\in I}), \end{aligned}$$

se tiene la igualdad ${\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}}^V_W \circ {\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}}^U_V = {\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}}^U_W$.

Ahora, sean U un abierto de X y $(U_n)_{n\in L}$ una cubierta abierta de U.

G1. Sea $s_i \in \mathcal{F}_i(U)$ para cada $i \in I$ de modo que ${\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}}^U_{U_n}((s_i)_{i\in I}) = 0_{(\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i)(U_n)}$ para todo $n \in L$. De este modo, para todo $n \in L$ se sigue que $({\rho_{\mathcal{F}_i}}^U_{U_n}(s_i))_{i\in I} = {\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}}^U_{U_n}((s_i)_{i\in I}) = 0_{(\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i)(U_n)}$. Sea $i \in I$. La ecuación anterior implica que ${\rho_{\mathcal{F}_i}}^U_{U_n}(s_i) = 0_{\mathcal{F}_i(U_n)}$ para todo $n \in L$, luego, el hecho que $(U_n)_{n\in L}$ es una cubierta abierta de U y que $\mathcal{F}_i$ es una gavilla implican que

$s_i = 0_{\mathcal{F}_i(U)}$. Así, como tenemos que $s_i = 0_{\mathcal{F}_i(U)}$ para todo $i \in I$ se concluye que $(s_i)_{i\in I} = 0_{(\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i)(U)}$.

G2. Sea $((s_i^n)_{i\in I})_{n\in L}$ una familia de secciones de $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$ tal que $(s_i^n)_{i\in I} \in (\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i)(U_n)$ para todo $n \in L$ y tal que $\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}{}^{U_n}_{U_n\cap U_m}((s_i^n)_{i\in I}) = \rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}{}^{U_m}_{U_n\cap U_m}((s_i^m)_{i\in I})$ para cualesquier $n, m \in L$. Luego, para cada $n, m \in L$ se sigue que

$$\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}{}^{U_n}_{U_n\cap U_m}((s_i^n)_{i\in I}) = \big(\rho_{\mathcal{F}_i}{}^{U_n}_{U_n\cap U_m}(s_i^n)\big)_{i\in I} = \big(\rho_{\mathcal{F}_i}{}^{U_m}_{U_n\cap U_m}(s_i^m)\big)_{i\in I} = \rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}{}^{U_m}_{U_n\cap U_m}((s_i^m)_{i\in I}).$$

Sea $i \in I$. La igualdad anterior implica que $\rho_{\mathcal{F}_i}{}^{U_n}_{U_n\cap U_m}(s_i^n) = \rho_{\mathcal{F}_i}{}^{U_m}_{U_n\cap U_m}(s_i^m)$ para cualesquier $n, m \in L$, además, como $(U_n)_{n\in L}$ es una cubierta abierta de U y $\mathcal{F}_i$ es una gavilla se sigue que existe $s_i \in \mathcal{F}_i(U)$ tal que $\rho_{\mathcal{F}_i}{}^{U}_{U_n}(s_i) = s_i^n$ para cada $n \in L$. De este modo, $(s_i)_{i\in I}$ es la sección que buscamos: en efecto, por construcción se tiene que $(s_i)_{i\in I}$ es una sección de $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$ sobre U y para cada $n \in L$ tenemos que $\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}{}^{U}_{U_n}((s_i)_{i\in I}) = \big(\rho_{\mathcal{F}_i}{}^{U}_{U_n}(s_i)\big)_{i\in I} = (s_i^n)_{i\in I}$.

De esta manera, concluimos que $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$ es una gavilla de grupos abelianos sobre X. Ahora bien, puesto que cada miembro de la familia $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, para cualquier abierto U de X se tiene que $\mathcal{F}_i(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo para cada $i \in I$ y esto implica que $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i(U)$ tiene una estructura de $\mathcal{O}_X(U)$-módulo. Lo único que resta por verificar para concluir que $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo es la compatibilidad de las restricciones con el producto externo: sean U y V abiertos de X tales que $V \subseteq U$. Vamos a mostrar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U)\times\left(\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)(U) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{O}_X}{}^U_V\times\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}{}^U_V"'] & \left(\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)(U) \arrow[d, "\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}{}^U_V"] \\
\mathcal{O}_X(V)\times\left(\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)(V) \arrow[r] & \left(\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)(V)
\end{tikzcd}$$

Sean $s_i \in \mathcal{F}_i(U)$ para cada $i \in I$ y $\lambda \in \mathcal{O}_X(U)$,

$$\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}{}^U_V(\lambda\cdot(s_i)_{i\in I}) = \rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}{}^U_V((\lambda s_i)_{i\in I}) = \big(\rho_{\mathcal{O}_X}{}^U_V(\lambda)\cdot\rho_{\mathcal{F}_i}{}^U_V(s_i)\big)_{i\in I} = \rho_{\mathcal{O}_X}{}^U_V(\lambda)\cdot\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}{}^U_V((s_i)_{i\in I}).$$

Por lo tanto, concluimos que $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$ es una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre $(X, \mathcal{O}_X)$.

En segundo lugar, vamos a mostrar que la aplicación $\pi_j : \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_j$ es un morfismo para cada $j \in I$, donde recordemos que para cada abierto U de X se define

$$\begin{array}{rccc}
\pi_{j_U} : & \left(\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)(U) & \to & \mathcal{F}_j(U) \\
& (s_i)_{i\in I} & \mapsto & s_j
\end{array}$$

Sea $j \in I$. Obsérvese que para cada abierto U de X la aplicación π_{j_U} es la proyección de un producto de módulos a uno de los factores por lo cual π_{j_U} es una aplicación $O_X(U)$-lineal. Ahora, sean V y W abiertos de X tales que $W \subseteq V$. Vamos a probar que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \left(\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)(V) \arrow[r, "\pi_{j_V}"] \arrow[d, "\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}{}^V_W"'] & \mathcal{F}_j(V) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}_j}{}^V_W"] \\ \left(\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)(W) \arrow[r, "\pi_{j_W}"'] & \mathcal{F}_j(W) \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo. Sea s_i una sección de $\mathcal{F}_i$ sobre V para cada $i \in I$,

$$\rho_{\mathcal{F}_j}{}^V_W \circ \pi_{j_V}((s_i)_{i\in I}) = \rho_{\mathcal{F}_j}{}^V_W(s_j) = \pi_{j_W}((\rho_{\mathcal{F}_i}{}^V_W(s_i))_{i\in I}) = \pi_{j_W} \circ \rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}{}^V_W((s_i)_{i\in I}).$$

Por lo tanto, tenemos que $\rho_{\mathcal{F}_j}{}^V_W \circ \pi_{j_V} = \pi_{j_W} \circ \rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}{}^V_W$ y de esto se sigue que π_j es un morfismo. Como j fue un índice arbitrario en I, concluimos que π_j es un morfismo para todo $j \in I$. ❏

Teorema 2.6. *Sea $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ una familia de gavillas de O_X-módulos sobre un espacio anillado (X, O_X). La* suma directa de gavillas *denotada por $\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i$ es la gavilla de O_X-módulos definida de la siguiente manera: para cada abierto U de X asignamos $\left(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)(U) = \bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i(U)$, y si U y V son abiertos de X tales que $V \subseteq U$ la restricción $\rho_{\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i}{}^U_V$ está dada por*

$$\begin{array}{rcl} \rho_{\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i}{}^U_V : \left(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)(U) & \to & \left(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)(V) \\ (s_i)_{i\in I} & \mapsto & (\rho_{\mathcal{F}_i}{}^U_V(s_i))_{i\in I} \end{array}$$

Además, de manera natural para cada $j \in I$ tenemos definido el morfismo $\sigma_j : \mathcal{F}_j \to \bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i$ donde si U es un abierto de X se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{j_U} : \mathcal{F}_j(U) & \to & \left(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)(U) \\ s & \mapsto & (s_i)_{i\in I} = \begin{cases} s_j = s \\ s_i = 0_{\mathcal{F}_i(U)} & si\ i \in I\backslash\{j\} \end{cases} \end{array}$$

Demostración. La prueba de que $\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i$ es una gavilla de O_X-módulos es prácticamente la misma demostración usada para mostrar que el producto de gavillas de O_X-módulos es una gavilla de O_X-módulos. Así, sólo nos resta mostrar que la aplicación $\sigma_j : \mathcal{F}_j \to \bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i$ es un morfismo para todo $j \in I$.

Sea $j \in I$. Observemos que para cada abierto U de X la aplicación ${\sigma_j}_U$ es exactamente el encaje de un módulo una suma directa de módulos por lo cual se tiene que ${\sigma_j}_U$ es una aplicación $\mathcal{O}_X(U)$-lineal. Ahora, sean V y W abiertos de X tales que $W \subseteq V$. Vamos a mostrar que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_j(V) \arrow[r, "{\sigma_j}_V"] \arrow[d, "{\rho_{\mathcal{F}_j}}_W^V"'] & \left(\bigoplus\limits_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)(V) \arrow[d, "{\rho_{\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i}}_W^V"] \\
\mathcal{F}_j(W) \arrow[r, "{\sigma_j}_W"'] & \left(\bigoplus\limits_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)(W)
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo. Sea s una sección de $\mathcal{F}_j$ sobre V. Por un lado se tiene que

$$ {\rho_{\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i}}_W^V \circ {\sigma_j}_V(s) = {\rho_{\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i}}_W^V({\sigma_j}_V(s)) = {\rho_{\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i}}_W^V((s_i)_{i\in I}) = ({\rho_{\mathcal{F}_i}}_W^V(s_i))_{i\in I} $$

y de esto se sigue que

$$ {\rho_{\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i}}_W^V \circ {\sigma_j}_V(s) = \begin{cases} {\rho_{\mathcal{F}_j}}_W^V(s_j) = {\rho_{\mathcal{F}_j}}_W^V(s) & \\ {\rho_{\mathcal{F}_i}}_W^V(s_i) = 0_{\mathcal{F}_i(W)} & \text{si } i \in I\backslash\{j\} \end{cases} $$

Por otro lado tenemos que

$$ {\sigma_j}_W \circ {\rho_{\mathcal{F}_j}}_W^V(s) = {\sigma_j}_W({\rho_{\mathcal{F}_j}}_W^V(s)) = (({\rho_{\mathcal{F}_j}}_W^V(s))_i)_{i\in I} $$

y esto implica que

$$ {\sigma_j}_W \circ {\rho_{\mathcal{F}_j}}_W^V(s) = \begin{cases} ({\rho_{\mathcal{F}_j}}_W^V(s))_j = {\rho_{\mathcal{F}_j}}_W^V(s) & \\ ({\rho_{\mathcal{F}_j}}_W^V(s))_i = 0_{\mathcal{F}_i(W)} & \text{si } i \in I\backslash\{j\} \end{cases} $$

De esta forma, tenemos que ${\rho_{\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i}}_W^V \circ {\sigma_j}_V = {\sigma_j}_W \circ {\rho_{\mathcal{F}_j}}_W^V$ y de esto se sigue que σ_j es un morfismo. Puesto que j fue un índice arbitrario en I, concluimos que π_j es un morfismo para todo $j \in I$. ❑

En resumen, a partir de una familia $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ de gavillas de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ hemos construido su producto $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$ y su suma directa $\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i$ que cuentan con una estructura de gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos. Ahora que hemos construido estas nuevas gavillas, una pregunta natural es cómo son sus módulos de gérmenes. Los siguientes resultados nos darán respuestas a esta pregunta, en el caso del producto tendremos una respuesta parcial y en el caso de la suma directa tendremos una respuesta definitiva.

Proposición 2.7. *Sea $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ una familia de gavillas de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$. Para cada $p \in X$ se tiene definida una aplicación $\mathcal{O}_{X,p}$-lineal entre $(\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i)_p$ y $\prod_{i\in I}(\mathcal{F}_i)_p$.*

Demostración. Sea $p \in X$. Definimos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rccc} f: & \left(\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)_p & \to & \prod_{i\in I}(\mathcal{F}_i)_p \\ & [(U,(s_i)_{i\in I})] & \mapsto & \big([(U,s_i)]\big)_{i\in I} \end{array}$$

Comenzaremos mostrando que f es una aplicación bien definida. Sean U y V abiertos de X que contienen a p y para cada $i \in I$ sean s_i y t_i secciones de $\mathcal{F}_i$ sobre U y V respectivamente de modo que $[(U,(s_i)_{i\in I})] = [(V,(t_i)_{i\in I})]$. Así, existe W un abierto de X que contiene a p y que está contenido en $U \cap V$ tal que $\rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}{}^U_W((s_i)_{i\in I}) = \rho_{\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i}{}^V_W((t_i)_{i\in I})$, es decir, tal que $(\rho_{\mathcal{F}_i}{}^U_W(s_i))_{i\in I} = (\rho_{\mathcal{F}_i}{}^V_W(t_i))_{i\in I}$; luego, este hecho implica que $\rho_{\mathcal{F}_i}{}^U_W(s_i) = \rho_{\mathcal{F}_i}{}^V_W(t_i)$ para cualquier $i \in I$. Gracias al abierto W se sigue que $[(U,s_i)] = [(V,t_i)]$ para cualquier $i \in I$ y consecuentemente se tiene que $\big([(U,s_i)]\big)_{i\in I} = \big([V,t_i)]\big)_{i\in I}$. Por lo tanto, concluimos que f está bien definida.

Ahora, vamos a probar que f es una aplicación $\mathcal{O}_{X,p}$-lineal. Sea U un abierto de X que contiene a p, sean λ y μ elementos de $\mathcal{O}_X(U)$ y para cada $i \in I$ sean s_i y t_i secciones de $\mathcal{F}_i$ sobre U. Nótese que podemos suponer que todas nuestras secciones se encuentran sobre el mismo abierto.

$$\begin{aligned} f\big([(U,\lambda)][(U,(s_i)_{i\in I})] + [(U,\mu)][(U,(t_i)_{i\in I})]\big) &= f\big([(U,(\lambda s_i + \mu t_i)_{i\in I})]\big) \\ &= \big([(U,\lambda s_i + \mu t_i)]\big)_{i\in I} \\ &= \big([(U,\lambda s_i)]\big)_{i\in I} + \big([(U,\mu t_i)]\big)_{i\in I} \\ &= \big([(U,\lambda)][(U,s_i)]\big)_{i\in I} + \big([(U,\mu)][(U,t_i)]\big)_{i\in I} \\ &= [(U,\lambda)]\cdot\big([(U,s_i)]\big)_{i\in I} + [(U,\mu)]\cdot\big([(U,t_i)]\big)_{i\in I} \\ &= [(U,\lambda)]\cdot f\big([(U,(s_i)_{i\in I})]\big) + \\ &\quad\; [(U,\mu)]\cdot f\big([(U,(t_i)_{i\in I})]\big). \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que f es una aplicación $\mathcal{O}_{X,p}$-lineal. ❑

Proposición 2.8. *Sea $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ una familia de gavillas de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre un espacio anillado $(X,\mathcal{O}_X)$. Para cada $p \in X$ existe un $\mathcal{O}_{X,p}$-isomorfismo entre $\left(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)_p$ y $\bigoplus_{i\in I}(\mathcal{F}_i)_p$.*

Demostración. Sea $p \in X$. Vamos a considerar la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rccc} f: & \left(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)_p & \to & \bigoplus_{i\in I}(\mathcal{F}_i)_p \\ & [(U,(s_i)_{i\in I})] & \mapsto & \big([(U,s_i)]\big)_{i\in I} \end{array}$$

La demostración de que f es una aplicación $\mathcal{O}_{X,p}$-lineal es prácticamente la demostración realizada en la proposición anterior así que omitiremos los detalles. Por otro lado, vamos a definir la asignación

$$\begin{array}{rccc} g: & \bigoplus_{i\in I}(\mathcal{F}_i)_p & \to & \left(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)_p \\ & ([(U_i,s_i)])_{i\in I} & \mapsto & [(\bigcap_{k\in I} U_k, (\rho_{\mathcal{F}_i}{}^{U_i}_{\bigcap_{k\in I} U_k}(s_i))_{i\in I})] \end{array}$$

Comenzaremos mostrando que g es una aplicación bien definida. Para cada $i \in I$ consideramos un abierto U_i de X que contiene a p y $s_i \in \mathcal{F}_i(U_i)$. Por hipótesis tenemos que todos los elementos de $([(U_i, s_i)])_{i\in I}$ son iguales a cero excepto un número finito de ellos, es decir, se tiene que $[(U_i, s_i)] = [(X, 0_{\mathcal{F}_i(X)})]$ para todo $i \in I$ a excepción de un número finito de índices, así, sin pérdida de generalidad podemos suponer desde el inicio que $U_i = X$ y que $s_i = 0_{\mathcal{F}_i(X)}$ para todo $i \in I$ a excepción de un número finito de índices. Con esto se sigue que $\bigcap_{k\in I} U_k$ es una intersección finita de abiertos de X y por lo tanto es un abierto de X, además, dicho abierto contiene a p. Por otro lado, para cada $i \in I$ tenemos que $\rho_{\mathcal{F}_i}{}^{U_i}_{\bigcap_{k\in I} U_k}(s_i)$ es una sección de $\mathcal{F}_i$ sobre $\bigcap_{k\in I} U_k$, esto implica que $(\rho_{\mathcal{F}_i}{}^{U_i}_{\bigcap_{k\in I} U_k}(s_i))_{i\in I}$ es una sección de $\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i$ sobre $\bigcap_{k\in I} U_k$ y por lo tanto concluimos que $[(\bigcap_{k\in I} U_k, (\rho_{\mathcal{F}_i}{}^{U_i}_{\bigcap_{k\in I} U_k}(s_i))_{i\in I})]$ es un elemento de $(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i)_p$.

Ahora, para cada $i \in I$ consideramos a U_i y V_i abiertos de X que contienen a p, $s_i \in \mathcal{F}_i(U_i)$ y $t_i \in \mathcal{F}_i(V_i)$ de modo que $([(U_i, s_i)])_{i\in I} = ([(V_i, t_i)])_{i\in I}$, vamos a mostrar que $g(([(U_i, s_i)])_{i\in I}) = g(([(V_i, t_i)])_{i\in I})$. Sea $j \in I$. Puesto que $[(U_j, s_j)] = [(V_j, t_j)]$ se sigue que existe un abierto W_j de X que contiene a p de modo que $W_j \subseteq U_j \cap V_j$ y de modo que $\rho_{\mathcal{F}_j}{}^{U_j}_{W_j}(s_j) = \rho_{\mathcal{F}_j}{}^{V_j}_{W_j}(t_j)$. Ahora bien, como $([(U_i, s_i)])_{i\in I}$ y $([(V_i, t_i)])_{i\in I}$ son elementos de la suma directa, se sigue que $[(U_i, s_i)] = [(V_i, t_i)] = [(X, 0_{\mathcal{F}_i(X)})]$ para todo $i \in I$ a excepción de un número finito de índices; para los índices $i \in I$ que cumplen con la igualdad anterior podemos considerar al abierto W_i como el abierto X. Así, el abierto $\bigcap_{k\in I} W_k$ asegura la igualdad $[(\bigcap_{k\in I} U_k, (\rho_{\mathcal{F}_i}{}^{U_i}_{\bigcap_{k\in I} U_k}(s_i))_{i\in I})] = [(\bigcap_{k\in I} V_k, (\rho_{\mathcal{F}_i}{}^{V_i}_{\bigcap_{k\in I} V_k}(t_i))_{i\in I})]$: en efecto, claramente $\bigcap_{k\in I} W_k$ es un abierto de X que contiene a p, está contenido en $(\bigcap_{k\in I} U_k) \cap (\bigcap_{k\in I} V_k)$ y además se satisface que

$$\begin{aligned}
\rho_{\bigoplus_{j\in I}\mathcal{F}_j}{}^{\bigcap_{k\in I} U_k}_{\bigcap_{k\in I} W_k}\left((\rho_{\mathcal{F}_i}{}^{U_i}_{\bigcap_{k\in I} U_k}(s_i))_{i\in I}\right) &= \left(\rho_{\mathcal{F}_i}{}^{\bigcap_{k\in I} U_k}_{\bigcap_{k\in I} W_k} \circ \rho_{\mathcal{F}_i}{}^{U_i}_{\bigcap_{k\in I} U_k}(s_i)\right)_{i\in I} \\
&= \left(\rho_{\mathcal{F}_i}{}^{U_i}_{\bigcap_{k\in I} W_k}(s_i)\right)_{i\in I} \\
&= \left(\rho_{\mathcal{F}_i}{}^{W_i}_{\bigcap_{k\in I} W_k} \circ \rho_{\mathcal{F}_i}{}^{U_i}_{W_i}(s_i)\right)_{i\in I} \\
&= \left(\rho_{\mathcal{F}_i}{}^{W_i}_{\bigcap_{k\in I} W_k} \circ \rho_{\mathcal{F}_i}{}^{V_i}_{W_i}(t_i)\right)_{i\in I} \\
&= \left(\rho_{\mathcal{F}_i}{}^{V_i}_{\bigcap_{k\in I} W_k}(t_i)\right)_{i\in I} \\
&= \left(\rho_{\mathcal{F}_i}{}^{\bigcap_{k\in I} V_k}_{\bigcap_{k\in I} W_k} \circ \rho_{\mathcal{F}_i}{}^{V_i}_{\bigcap_{k\in I} V_k}(t_i)\right)_{i\in I} \\
&= \rho_{\bigoplus_{j\in I}\mathcal{F}_j}{}^{\bigcap_{k\in I} V_k}_{\bigcap_{k\in I} W_k}\left((\rho_{\mathcal{F}_i}{}^{V_i}_{\bigcap_{k\in I} V_k}(t_i))_{i\in I}\right).
\end{aligned}$$

De esta forma, comprobamos que g es una aplicación bien definida.

En seguida, vamos a mostrar que g es una aplicación $\mathcal{O}_{X,p}$-lineal. Sea U un abierto de X que contiene a p, sean λ y μ elementos de $\mathcal{O}_X(U)$ y sean s_i y t_i secciones de $\mathcal{F}_i$ sobre U para cada $i \in I$. Nótese que podemos suponer que todas las secciones involucradas se encuentran sobre el mismo abierto.

$$\begin{aligned}
g\Big([(U,\lambda)]\cdot([(U,s_i)])_{i\in I} + [(U,\mu)]\cdot([(U,t_i)])_{i\in I}\Big) &= g\Big(([(U,\lambda s_i+\mu t_i)])_{i\in I}\Big)\\
&= [(U,(\lambda s_i+\mu t_i)_{i\in I})]\\
&= [(U,(\lambda s_i)_{i\in I})] + [(U,(\mu t_i)_{i\in I})]\\
&= [(U,\lambda)]\cdot[(U,(s_i)_{i\in I})] + [(U,\mu)]\cdot[(U,(t_i)_{i\in I})]\\
&= [(U,\lambda)]\cdot g\Big(([(U,s_i)])_{i\in I}\Big) +\\
&\quad\ [(U,\mu)]\cdot g\Big(([(U,t_i)])_{i\in I}\Big).
\end{aligned}$$

Con esto, hemos comprobado que g es una aplicación $\mathcal{O}_{X,p}$-lineal.

A continuación, vamos a mostrar que f y g son aplicaciones inversas, es decir, vamos a probar que $g\circ f = \mathrm{id}_{\left(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)_p}$ y que $f\circ g = \mathrm{id}_{\bigoplus_{i\in I}(\mathcal{F}_i)_p}$. En primer lugar mostraremos que $g\circ f = \mathrm{id}_{\left(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)_p}$: sean U un abierto de X que contiene a p y s_i una sección de $\mathcal{F}_i$ sobre U para cada $i\in I$,

$$g\circ f([(U,(s_i)_{i\in I})]) = g\Big(([(U,s_i)])_{i\in I}\Big) = [(U,(s_i)_{i\in I})].$$

Ahora probaremos que $f\circ g = \mathrm{id}_{\bigoplus_{i\in I}(\mathcal{F}_i)_p}$: para cada $i\in I$ sean U_i un abierto de X que contiene a p y s_i una sección de $\mathcal{F}_i$ sobre U_i,

$$f\circ g\Big(([(U_i,s_i)])_{i\in I}\Big) = f([(\bigcap_{k\in I}U_k,(\rho^{U_i}_{\mathcal{F}_i\,\bigcap_{k\in I}U_k}(s_i))_{i\in I})]) = ([(\bigcap_{k\in I}U_k,\rho^{U_i}_{\mathcal{F}_i\,\bigcap_{k\in I}U_k}(s_i))])_{i\in I} = ([(U_i,s_i)])_{i\in I}.$$

Con esto, hemos mostrado que f y g son aplicaciones inversas y de esta forma concluimos que existe un $\mathcal{O}_{X,p}$-isomorfismo entre $(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i)_p$ y $\bigoplus_{i\in I}(\mathcal{F}_i)_p$. ☐

El próximo resultado nos dice cuál es la relación entre la restricción de una suma directa de gavillas y la suma directa de restricciones de gavillas.

Lema 2.9. *Sea $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ una familia de gavillas de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre un espacio anillado $(X,\mathcal{O}_X)$. Para todo abierto U de X se tiene un isomorfismo entre las gavillas $(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i)\big|_U$ y $\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i|_U$.*

Demostración. Para mostrar el isomorfismo entre las gavillas deseadas mostraremos que para cada punto de X se tiene un isomorfismo entre sus módulos de gérmenes. Sea $p\in U$.

$$\left(\left(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)\Big|_U\right)_p \cong \left(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)_p \cong \bigoplus_{i\in I}(\mathcal{F}_i)_p \cong \bigoplus_{i\in I}(\mathcal{F}_i|_U)_p \cong \left(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i|_U\right)_p.$$

Por lo tanto, concluimos que $\left(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i\right)\Big|_U \cong \bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i|_U$. $\square$

En el caso particular en que para una familia de gavillas de O_X-módulos $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ sobre un espacio anillado (X, O_X) se tiene que $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}$ para todo $i \in I$, denotaremos

$$\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i = \mathcal{F}^I \quad \text{y} \quad \bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i = \mathcal{F}^{(I)}.$$

Es probable que esta notación nos recuerde a una clase de módulos que tienen una gran importancia en el Álgebra Conmutativa: los módulos libres. Nuestro siguiente objetivo será el de definir la noción de libre en la Teoría de Gavillas.

Definición 2.10. Sea $\mathcal{F}$ un O_X-módulo sobre un espacio anillado (X, O_X).

1. $\mathcal{F}$ es *libre* si existe un conjunto no vacío I tal que $\mathcal{F} \cong O_X^{(I)}$.
2. $\mathcal{F}$ es *libre de rango r* si existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{F} \cong O_X^r$.
3. $\mathcal{F}$ es *localmente libre* si existe una cubierta abierta $(U_i)_{i\in I}$ de X tal que $\mathcal{F}|_{U_i}$ es libre para todo $i \in I$.
4. $\mathcal{F}$ es *localmente libre de rango finito* si existe una cubierta abierta $(U_i)_{i\in I}$ de X tal que $\mathcal{F}|_{U_i}$ es libre de rango finito para todo $i \in I$.
5. $\mathcal{F}$ es *localmente libre de rango r* si existen una cubierta abierta $(U_i)_{i\in I}$ de X y $r \in \mathbb{N}$ tales que $\mathcal{F}|_{U_i}$ es libre de rango r para todo $i \in I$.
6. $\mathcal{F}$ es *invertible* si $\mathcal{F}$ es una gavilla localmente libre de rango 1.

Consideremos a $\mathcal{F}$ un O_X-módulo sobre un espacio anillado (X, O_X). Recordemos que en la Proposición 2.4 hemos determinado al $O_X(X)$-módulo $\mathrm{Hom}_{O_X}(O_X, \mathcal{F})$. Utilizando nuestra nueva terminología, dicha proposición nos dice que hemos determinado al $O_X(X)$-módulo de morfismos entre un O_X-módulo de rango 1 y un O_X-módulo. Lo anterior nos sirve de motivación para preguntarnos si es posible determinar al $O_X(X)$-módulo de morfismos entre un O_X-módulo libre y un O_X-módulo cualquiera. El siguiente lema nos será de gran ayuda para determinar dicho módulo. Nuevamente, el resultado obtenido será similar a uno que se tiene en Teoría de Módulos, en concreto, al Lema A.4.

Lema 2.11. *Sean (X, O_X) un espacio anillado y $\mathcal{F}$ un O_X-módulo. Si $f \in \mathrm{Hom}_{O_X}(O_X^{(I)}, \mathcal{F})$, entonces f está completamente determinado por f_X.*

Demostración. Sea U un abierto de X. Si $U = \emptyset$, nada a probar. Supongamos que U es no vacío. Como f es un morfismo y U es un abierto que está contenido en X, se sigue que $\rho_{\mathcal{F}}{}^X_U \circ f_X = f_U \circ \rho_{O_X^{(I)}}{}^X_U$. De manera particular, si consideramos la base estándar $(e_i^X)_{i\in I}$ de $O_X(X)^{(I)}$ se tiene que

${\rho_{\mathcal{F}}}^X_U \circ f_X(e_i^X) = f_U \circ {\rho_{\mathcal{O}_X^{(I)}}}^X_U(e_i^X)$ para cada $i \in I$. Por otro lado, sabemos que f_U está completamente determinado por la base de $\mathcal{O}_X(U)^{(I)}$: la familia linealmente independiente $(e_i^U)_{i\in I}$. Sea $i \in I$. Recordemos que ${\rho_{\mathcal{O}_X^{(I)}}}^X_U$ actúa coordenada a coordenada, de esta forma, tenemos que ${\rho_{\mathcal{O}_X^{(I)}}}^X_U(e_i^X) = e_i^U$ y consecuentemente que $f_U(e_i^U) = f_U \circ {\rho_{\mathcal{O}_X^{(I)}}}^X_U(e_i^X) = {\rho_{\mathcal{F}}}^X_U \circ f_X(e_i^X)$. Por lo tanto, f_U está determinada por f_X. ❑

Proposición 2.12. *Sean* $(X, \mathcal{O}_X)$ *un espacio anillado y* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-módulo. Existe un* $\mathcal{O}_X(X)$*-isomorfismo entre* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{(I)}, \mathcal{F})$ *y* $\mathcal{F}(X)^I$.

Demostración. Considerando la base estándar $(e_i^X)_{i\in I}$ de $\mathcal{O}_X^{(I)}(X)$, definimos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{(I)}, \mathcal{F}) & \to & \mathcal{F}(X)^I \\ & f & \mapsto & (f_X(e_i^X))_{i\in I} \end{array}$$

En primer lugar, mostraremos que φ está bien definida: sean $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{(I)}, \mathcal{F})$ tales que $f = g$. Como $f = g$ se tiene la igualdad $f_U = g_U$ para cualquier abierto U de X, de manera particular tenemos que $f_X = g_X$. Consecuentemente se tiene que $f_X(e_i^X) = g_X(e_i^X)$ para cada $i \in I$ y de esta forma tenemos que $(f_X(e_i^X))_{i\in I} = (g_X(e_i^X))_{i\in I}$. Por lo tanto, φ está bien definida.

Ahora, vamos a probar que φ es una aplicación $\mathcal{O}_X(X)$-lineal. Sean λ y μ elementos de $\mathcal{O}_X(X)$ y sean f y g elementos de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{(I)}, \mathcal{F})$,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f + \mu g) &= \Big((\lambda f + \mu g)_X(e_i^X)\Big)_{i\in I} \\ &= \Big(((\lambda f)_X + (\mu g)_X)(e_i^X)\Big)_{i\in I} \\ &= \Big((\lambda f)_X(e_i^X) + (\mu g)_X(e_i^X)\Big)_{i\in I} \\ &= \Big({\rho_{\mathcal{O}_X}}^X_X(\lambda) \cdot f_X(e_i^X) + {\rho_{\mathcal{O}_X}}^X_X(\mu) \cdot g_X(e_i^X)\Big)_{i\in I} \\ &= \lambda \cdot \Big(f_X(e_i^X)\Big) + \mu \cdot \Big(g_X(e_i^X)\Big)_{i\in I} \\ &= \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g). \end{aligned}$$

De esta forma, tenemos que φ es una aplicación $\mathcal{O}_X(X)$-lineal.

A continuación probaremos que φ es inyectiva: sea f un elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{(I)}, \mathcal{F})$ tal que $f \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. Como $(f_X(e_i^X))_{i\in I} = 0_{\mathcal{F}(X)^I}$ tenemos que $f_X(e_i^X) = 0_{\mathcal{F}(X)}$ para cada $i \in I$. De esta forma, como f_X es una aplicación que anula a cada elemento de la base estándar de $\mathcal{O}_X^{(I)}$ se sigue que f_X es la aplicación nula. Ahora bien, por el lema anterior sabemos que f está completamente determinada por f_X, consecuentemente se tiene que para cada abierto U de X la aplicación f_U es la aplicación nula y esto implica que f es el morfismo nulo entre $\mathcal{O}_X^{(I)}$ y $\mathcal{F}$. Por lo tanto, φ es inyectiva.

Por último, mostraremos que φ es sobreyectiva. Sean $(s_i)_{i\in I}$ una familia de secciones de $\mathcal{F}$ donde $s_i \in \mathcal{F}(X)$ para cada $i \in I$ y U un abierto X. Definimos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f_U : \mathcal{O}_X^{(I)}(U) & \to & \mathcal{F}(U) \\ (m_i)_{i\in I} & \mapsto & \displaystyle\sum_{i\in I} m_i \cdot \rho_{\mathcal{F}}{}^{X}_{U}(s_i) \end{array}$$

Por construcción f_U es una aplicación $\mathcal{O}_X(U)$-lineal entre $\mathcal{O}_X^{(I)}(U)$ y $\mathcal{F}(U)$ (véase Lema A.4). Ahora, sean V y W abiertos de X tales que $W \subseteq V$. Vamos a mostrar que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X^{(I)}(V) \arrow[r, "f_V"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{O}_X^{(I)}}{}^{V}_{W}"'] & \mathcal{F}(V) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{W}"] \\
\mathcal{O}_X^{(I)}(W) \arrow[r, "f_W"'] & \mathcal{F}(W)
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo. Sea n_i una sección de $\mathcal{O}_X$ sobre V para cada $i \in I$. Observemos que

$$\rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{W} \circ f_V((n_i)_{i\in I}) = \rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{W}\Big(\sum_{i\in I} n_i \cdot \rho_{\mathcal{F}}{}^{X}_{V}(s_i)\Big) = \sum_{i\in I} \rho_{\mathcal{O}_X}{}^{V}_{W}(n_i) \cdot \rho_{\mathcal{F}}{}^{X}_{W}(s_i) = f_V \circ \rho_{\mathcal{O}_X^{(I)}}{}^{V}_{W}((n_i)_{i\in I}).$$

De esta forma, la familia $(f_U)_{\{U \text{ es abierto de } X\}}$ es un morfismo el cual denotaremos por f. Para finalizar, vamos a verificar que $\varphi(f) = (s_i)_{i\in I}$: observemos que para cada $j \in I$ se tiene que

$$f_X(e_j^X) = 1_{\mathcal{O}_X(X)} \cdot s_j + \sum_{i\in I\setminus\{j\}} 0_{\mathcal{O}_X(X)} \cdot s_i = s_j,$$

consecuentemente tenemos que $\varphi(f) = \big(f_X(e_i^X)\big)_{i\in I} = (s_i)_{i\in I}$ y así tenemos que φ es una aplicación sobreyectiva.

Por lo tanto, como φ es una aplicación inyectiva y sobreyectiva concluimos que tenemos un $\mathcal{O}_X(X)$-isomorfismo entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{(I)}, \mathcal{F})$ y $\mathcal{F}(X)^I$. ❏

También podemos preguntarnos acerca de los módulos de gérmenes de una gavilla libre y una localmente libre. Con lo que hemos desarrollado hasta el momento podemos dar una caracterización acerca de dichos módulos de manera inmediata.

Proposición 2.13. *Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$. Si $\mathcal{F}$ es libre, entonces $\mathcal{F}_p$ es un $\mathcal{O}_{X,p}$-módulo libre para cada $p \in X$. En particular, si $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo libre de rango n para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{F}_p$ es un $\mathcal{O}_{X,p}$-módulo libre de rango n.*

Demostración. Sea $p \in X$. Como $\mathcal{F}$ es libre existe un conjunto no vacío I tal que $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^{(I)}$. Por otro lado, por la Proposición 2.8 sabemos que $\left(\mathcal{O}_X^{(I)}\right)_p \cong \mathcal{O}_{X,p}^{(I)}$. De esta manera, tenemos que $\mathcal{F}_p \cong \left(\mathcal{O}_X^{(I)}\right)_p \cong \mathcal{O}_{X,p}^{(I)}$ y por lo tanto concluimos que $\mathcal{F}_p$ es un $\mathcal{O}_{X,p}$-módulo libre. ❑

Proposición 2.14. *Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre de rango t para algún $t \in \mathbb{N}$ sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$. Para todo $p \in X$ se tiene que $\mathcal{F}_p$ es un $\mathcal{O}_{X,p}$-módulo de rango t.*

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre de rango t, existe una cubierta abierta $(U_i)_{i\in I}$ de X tal que $\mathcal{F}|_{U_i}$ es un $\mathcal{O}_{U_i}$-módulo libre de rango t. Sea $p \in X$. Como $(U_i)_{i\in I}$ es una cubierta abierta de X existe $i \in I$ tal que $p \in U_i$. De este modo, por la proposición anterior se tiene que $(\mathcal{F}|_{U_i})_p$ es un $\mathcal{O}_{U_i,p}$-módulo libre de rango t y por lo tanto, concluimos que $\mathcal{F}_p$ es un $\mathcal{O}_{X,p}$-módulo libre de rango t. ❑

La proposición anterior realmente fija una condición muy estricta para módulos de gérmenes de una gavilla localmente libre de rango finito r para algún $r \in \mathbb{N}$, pues nos dice que todos sus módulos de gérmenes tendrán el mismo rango que el que tiene la gavilla. Por ejemplo, si tenemos una gavilla invertible sobre un espacio anillado, entonces no puede existir un punto tal que su módulo de gérmenes sea de rango 99 pues por el lema anterior todos los módulos de gérmenes deben ser libres de rango 1.

Para concluir con esta sección, vamos a presentar un resultado que establece una relación entre el rango de una gavilla libre con el número de generadores de sus módulos de gérmenes.

Proposición 2.15. *Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$. Supongamos que existe $p \in X$ tal que $\mathcal{F}_p$ está generado por s elementos. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Si $\mathcal{F}$ es libre de rango r, entonces $r \leq s$.*
2. *Si $\mathcal{F}$ es localmente libre de rango finito, entonces existe un abierto V de X que contiene a p tal que $\mathcal{F}|_V$ es libre de rango finito menor o igual a s.*

Demostración.

1. Como $\mathcal{F}$ es libre de rango r, para cualquier $q \in X$ se tiene que $\mathcal{F}_q \cong \mathcal{O}_{X,q}^r$, en particular tenemos que $\mathcal{F}_p \cong \mathcal{O}_{X,p}^r$. Luego, como $\mathcal{F}_p$ es isomorfo a $\mathcal{O}_{X,p}^r$ y $\mathcal{F}_p$ está generado por s elementos concluimos que $r \leq s$ (véase Proposición A.23).

2. Como $\mathcal{F}$ es localmente libre de rango finito tenemos que existe un abierto V de X que contiene a p tal que $\mathcal{F}|_V$ es libre de rango finito, digamos rango r. De esta forma, por el enunciado anterior de esta proposición se concluye que $r \leq s$. ❑

2. $\mathcal{O}_X$-Módulos Generados por sus Secciones Globales

En la Teoría de Módulos es bien conocida y muy importante la noción de módulo finitamente generado. En esta sección estudiaremos una noción similar para gavillas de módulos: las gavillas generadas por sus secciones globales. Una vez definida esta clase especial de gavillas estudiaremos algunas de sus propiedades, el lector podrá percatarse que obtendremos algunos resultados análogos a los que se tienen en la Teoría de Módulos para módulos finitamente generados. Es importante señalar que durante todo el desarrollo de la sección únicamente consideraremos gavillas de módulos y no pregavillas. Iniciaremos con una definición:

Definición 2.16. Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo e I un conjunto no vacío.

1. Una familia $(s_i)_{i\in I}$ de secciones globales de $\mathcal{F}$ *genera a* $\mathcal{F}$ si la sucesión de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{O}_X^{(I)} \to \mathcal{F} \to 0$ es una sucesión exacta, donde el morfismo $\mathcal{O}_X^{(I)} \to \mathcal{F}$ es el morfismo inducido por la familia de secciones $(s_i)_{i\in I}$ (véase la demostración de la Proposición 2.12). En este caso, decimos que $\mathcal{F}$ *es generado por sus secciones globales*.
2. $\mathcal{F}$ *es finitamente generado* si existe una familia finita de secciones globales que lo generan.
3. $\mathcal{F}$ *es localmente finitamente generado* si para cada $p \in X$ existe un abierto U de X que contiene a p tal que $\mathcal{F}|_U$ es finitamente generado.

Ejemplo 2.17. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Sabemos que $\mathcal{O}_X$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, más aún, es un $\mathcal{O}_X$-módulo finitamente generado. En efecto, consideremos la sección $1_{\mathcal{O}_X(X)}$ de $\mathcal{O}_X(X)$. Luego, el morfismo que induce esta sección entre $\mathcal{O}_X$ y $\mathcal{O}_X$ es el morfismo identidad y consecuentemente tenemos que la sucesión de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X \to 0$ es exacta.

A continuación presentaremos una caracterización de las gavillas de módulos generadas por sus secciones globales. Dicha caracterización será de gran utilidad cuando trabajemos con gavillas de módulos finitamente generadas y la utilizaremos con frecuencia en adelante.

Proposición 2.18. *Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ es generado por sus secciones globales.*
2. *Existe una familia $(s_i)_{i\in I}$ de secciones globales de $\mathcal{F}$ de modo que $((s_i)_p)_{i\in I}$ es una familia generadora de $\mathcal{F}_p$ para cada $p \in X$.*

Demostración.

1. $\Rightarrow$ 2. Supongamos que existe una familia $(s_i)_{i\in I}$ de secciones globales de $\mathcal{F}$ tales que $\mathcal{O}_X^{(I)} \xrightarrow{f} \mathcal{F} \to 0$ es una sucesión exacta donde f es el morfismo asociado a la familia $(s_i)_{i\in I}$, es decir, f

está definido de la siguiente forma: para cada abierto U de X se asigna la aplicación $O_X(U)$-lineal

$$\begin{array}{rcl} f_U : O_X^{(I)}(U) & \to & \mathcal{F}(U) \\ (m_i)_{i\in I} & \mapsto & \sum_{i\in I} m_i \cdot \rho_{\mathcal{F}}{}^X_U(s_i) \end{array}$$

Sea $p \in X$. Recordemos que por construcción la aplicación $O_{X,p}$-lineal f_p está dada por

$$\begin{array}{rcl} f_p : \quad (O_X^{(I)})_p & \to & \mathcal{F}_p \\ [(U,(m_i)_{i\in I})] & \mapsto & \sum_{i\in I} (m_i)_p \cdot (s_i)_p \end{array}$$

además, por hipótesis se tiene que f_p es una aplicación sobreyectiva. Sea V un abierto de X que contiene a p y sea $t \in \mathcal{F}(V)$. Como t_p es un elemento de $\mathcal{F}_p$, por hipótesis se sigue que existe un abierto U de X que contiene a p y existe una familia $(\lambda_i)_{i\in I}$ de secciones de $\mathcal{F}$ sobre U de modo que $f_p([(U,(\lambda_i)_{i\in I})]) = t_p$, es decir, $t_p = \sum_{i\in I}(\lambda_i)_p \cdot (s_i)_p$. Por lo tanto, como $\mathcal{F}_p \subseteq \left\langle (s_i)_p \,\middle|\, i \in I \right\rangle_{O_{X,p}} \subseteq \mathcal{F}_p$, concluimos que $\mathcal{F}_p = \left\langle (s_i)_p \,\middle|\, i \in I \right\rangle_{O_{X,p}}$.

2. $\Rightarrow$ 1. Supongamos que existe una familia $(s_i)_{i\in I}$ de secciones globales de $\mathcal{F}$ de modo que $\mathcal{F}_p = \left\langle (s_i)_p \,\middle|\, i \in I \right\rangle_{O_{X,p}}$. Consideremos el morfismo $f : O_X^{(I)} \to \mathcal{F}$ que está asociado a la familia $(s_i)_{i\in I}$ como se describió en la implicación anterior. Vamos a mostrar que f es sobreyectivo. Sea $p \in X$. Puesto que $\mathcal{F}_p = \left\langle (s_i)_p \,\middle|\, i \in I \right\rangle_{O_{X,p}}$, de manera inmediata se tiene que la aplicación $O_{X,p}$-lineal $f_p : (O_X^{(I)})_p \to \mathcal{F}_p$ es sobreyectiva. ❑

El siguiente lema y su posterior corolario nos darán una manera de construir gavillas de módulos finitamente generadas a partir de un número finito de gavillas de módulos finitamente generadas.

Lema 2.19. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ módulos sobre O_X donde (X, O_X) es un espacio anillado. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son finitamente generados, entonces $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ es finitamente generado.*

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es finitamente generado existen $r \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{F}(X)$ tales que la sucesión $O_X^r \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \to 0$ es exacta, donde φ es el morfismo inducido por las secciones $f_1, \ldots, f_r$; asimismo, como $\mathcal{G}$ es finitamente generado existen $s \in \mathbb{N}$ y $g_1, \ldots, g_s \in \mathcal{G}(X)$ tales que la sucesión $O_X^s \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \to 0$ es exacta, donde ψ es el morfismo inducido por las secciones $g_1, \ldots, g_s$.

Consideramos las secciones $h_1, h_2, \ldots, h_r, h_{r+1}, \ldots, h_{r+s}$ de $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ sobre X donde $h_i = (f_i, 0_{\mathcal{G}(X)})$ para $i = 1, \ldots, r$ y donde $h_{r+j} = (0_{\mathcal{F}(X)}, g_i)$ para $j = 1, \ldots, s$. De este modo, vamos a mostrar que la sucesión de O_X-módulos $O_X^{r+s} \xrightarrow{\varphi\oplus\psi} \mathcal{F} \oplus \mathcal{G} \to 0$ es una sucesión exacta, así, vamos a mostrar que para todo $p \in X$ se tiene que la sucesión de $O_{X,p}$-módulos $O_{X,p}^{r+s} \xrightarrow{\varphi_p\oplus\psi_p} \mathcal{F}_p \oplus \mathcal{G}_p \to 0$ es exacta.

Sea $p \in X$. Como la sucesión de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{O}_X^r \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \to 0$ es exacta se tiene que la sucesión de $\mathcal{O}_{X,p}$-módulos $\mathcal{O}_{X,p}^r \xrightarrow{\varphi_p} \mathcal{F}_p \to 0$ es exacta; del mismo modo, como la sucesión de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{O}_X^s \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \to 0$ es exacta se tiene que la sucesión de $\mathcal{O}_{X,p}$-módulos $\mathcal{O}_{X,p}^s \xrightarrow{\psi_p} \mathcal{G}_p \to 0$ es exacta. De esta forma, por el Lema A.10 se sigue que $\mathcal{O}_{X,p}^{r+s} \xrightarrow{\varphi_p \oplus \psi_p} \mathcal{F}_p \oplus \mathcal{G}_p \to 0$ es una sucesión exacta de $\mathcal{O}_{X,p}$-módulos y como p fue un punto arbitrario de X se sigue que $\mathcal{O}_X^{r+s} \xrightarrow{\varphi \oplus \psi} \mathcal{F} \oplus \mathcal{G} \to 0$ es una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos. Por lo tanto, concluimos que $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ es finitamente generado. ❑

Corolario 2.20. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ módulos sobre $\mathcal{O}_X$ donde $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio anillado. Si $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ son finitamente generados, entonces $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ es finitamente generado. Más aún, si $\mathcal{F}_i$ es generado por r_i secciones globales para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{F}_i$ está generado por $\sum_{i=1}^n r_i$ secciones globales.*

Sabemos que las gavillas de módulos finitamente generadas son localmente finitamente generadas, de esta manera, una pregunta natural que se presenta es la siguiente: ¿la suma directa finita de $\mathcal{O}_X$-módulos localmente finitamente generados es localmente finitamente generado? La respuesta es afirmativa, sin embargo, para mostrar este hecho primero necesitaremos la ayuda dos lemas, la demostración del primero de ellos puede encontrase en el Apéndice C.

Lema 2.21. *Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de gavillas sobre un espacio topológico X. φ es sobreyectivo si y sólo si para cualquier abierto U de X se tiene que el morfismo $\varphi|_U : \mathcal{F}|_U \to \mathcal{G}|_U$ es sobreyectivo.*

Lema 2.22. *Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo finitamente generado sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$. Para cualquier abierto U de X se tiene que $\mathcal{F}|_U$ es finitamente generado.*

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es finitamente generado existen $n \in \mathbb{N}$ y $(f_i)_{i=1,\ldots,n}$ una familia de secciones globales de $\mathcal{F}$ tales que la sucesión de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{O}_X^n \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \to 0$ es exacta, donde φ es el morfismo inducido por las secciones $f_1, \ldots, f_n$. Sea U un abierto de X. Puesto que φ es un morfismo sobreyectivo y U es un abierto de X, por el lema anterior se sigue que el morfismo $\varphi|_U : \mathcal{O}_U^n \to \mathcal{F}|_U$ es sobreyectivo. Ahora, consideramos al morfismo $\psi : \mathcal{O}_U^n \to \mathcal{F}|_U$ inducido por las secciones $f_1|_U, \ldots, f_n|_U$. Vamos a probar la igualdad entre los morfismos $\varphi|_U$ y ψ, con esto habremos mostrado que las secciones $f_1|_U, \ldots, f_n|_U$ generan a $\mathcal{F}|_U$. Sean W un abierto de U y $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{O}_X(W)^n$, observemos que

$$(\varphi|_U)_W(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f_i|_W = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot (f_i|_U)|_W = \psi_W(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

De esta forma, como las aplicaciones $(\varphi|_U)_W$ y ψ_W tienen el mismo dominio, codominio y regla de asignación se sigue que $(\varphi|_U)_W = \psi_W$ y como W fue un abierto arbitrario de U este hecho implica que los morfismos $\varphi|_U$ y ψ son iguales. Así, puesto que la sucesión de $\mathcal{O}_U$-módulos $\mathcal{O}_U^n \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}|_U \to 0$ es exacta concluimos que $\mathcal{F}|_U$ es finitamente generado. ❏

Proposición 2.23. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ módulos sobre $\mathcal{O}_X$ donde $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio anillado. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son localmente finitamente generados, entonces $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ es localmente finitamente generado.*

Demostración. Sea $p \in X$. Como $\mathcal{F}$ es localmente finitamente generado existe un abierto U de X tal que $p \in U$ y $\mathcal{F}|_U$ es finitamente generado; asimismo, como $\mathcal{G}$ es localmente finitamente generado existe un abierto V de X tal que $p \in V$ y $\mathcal{G}|_V$ es finitamente generado. Para mostrar que $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ es localmente finitamente generado vamos a encontrar un abierto W de X que contiene a p tal que $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})|_W$ es finitamente generado. Consideramos dicho abierto como $U \cap V$: sabemos que $U \cap V$ es un abierto de X que contiene al punto p y además sabemos que $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})|_{U\cap V} \cong \mathcal{F}|_{U\cap V} \oplus \mathcal{G}|_{U\cap V}$. Luego, como $\mathcal{F}|_U$ es finitamente generado y $U \cap V$ es un abierto de U, por el lema anterior se sigue que $\mathcal{F}|_{U\cap V}$ es finitamente generado; asimismo, como $\mathcal{G}|_V$ es finitamente generado y $U \cap V$ es un abierto de V, por el lema anterior se tiene que $\mathcal{G}|_{U\cap V}$ es finitamente generado. De esta forma, el Lema 2.19 implica que $\mathcal{F}|_{U\cap V} \oplus \mathcal{G}|_{U\cap V}$ es finitamente generado y consecuentemente $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})|_{U\cap V}$ es finitamente generado. ❏

El siguiente resultado nos dirá algunas de las propiedades que tienen los módulos de gérmenes de una gavilla de módulos que es localmente finitamente generada.

Teorema 2.24. *Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente finitamente generado sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Para todo $q \in X$ el $\mathcal{O}_{X,q}$-módulo $\mathcal{F}_q$ es finitamente generado.*
2. *Si $p \in X$ es tal que existen $r \in \mathbb{N}$, un abierto U de X que contiene a p y $s_1, \ldots, s_r$ secciones de $\mathcal{F}$ sobre U tales que*

$$\mathcal{F}_p = \mathcal{O}_{X,p}(s_1)_p + \cdots + \mathcal{O}_{X,p}(s_r)_p,$$

entonces existe un abierto V de X que contiene a p tal que $V \subseteq U$ y tal que $\mathcal{F}|_V$ es generado por $s_1|_V, \ldots, s_r|_V$.

Demostración.

1. Sea $q \in X$. Como $\mathcal{F}$ es localmente finitamente generado se sigue que existe un abierto U de X que contiene a q tal que $\mathcal{F}|_U$ es finitamente generado. Así, existen $n \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}(U)$

tales que $\mathcal{O}_U^n \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \to 0$ es una sucesión exacta, donde φ es el morfismo inducido por las secciones $f_1, \ldots, f_n$. Por consiguiente, para cualquier $p \in U$ se tiene que la sucesión $\mathcal{O}_{U,p}^n \xrightarrow{\varphi_p} \mathcal{F}_p \to 0$ es exacta lo cual implica que $\mathcal{F}_p$ es un $\mathcal{O}_{X,p}$-módulo finitamente generado, en particular, como $q \in U$ se sigue que $\mathcal{F}_q$ es un $\mathcal{O}_{X,q}$-módulo finitamente generado.

2. Sea $p \in X$. Por hipótesis existen $r \in \mathbb{N}$, un abierto U de X que contiene a p y $s_1, \ldots, s_r$ secciones de $\mathcal{F}$ sobre U tales que

$$\mathcal{F}_p = \mathcal{O}_{X,p}(s_1)_p + \cdots + \mathcal{O}_{X,p}(s_r)_p.$$

Como $\mathcal{F}$ es localmente finitamente generado existe un abierto W de X que contiene a p tal que $\mathcal{F}|_W$ es finitamente generado. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $W \subseteq U$. Así, existen $n \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}(W)$ tales que

$$\mathcal{F}_q = \mathcal{O}_{X,q}(f_1)_q + \cdots + \mathcal{O}_{X,q}(f_n)_q.$$

para cualquier $q \in W$. De manera particular, como $p \in W$ tenemos que

$$\mathcal{F}_p = \mathcal{O}_{X,p}(f_1)_p + \cdots + \mathcal{O}_{X,p}(f_n)_p.$$

Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Puesto que $(f_i)_p \in \mathcal{F}_p$ y $\mathcal{F}_p$ está generado por $(s_1)_p, \ldots, (s_r)_p$ se sigue que existen $\lambda_1^i, \ldots, \lambda_r^i \in \mathcal{O}_{X,p}$ tales que

$$(f_i)_p = \lambda_1^i (s_1)_p + \cdots + \lambda_r^i (s_r)_p,$$

con $\lambda_j^i = (\mu_j^i)_p$ donde $\mu_j^i \in \mathcal{O}_X(Z)$ para cada $j = 1, \ldots, r$ y donde Z es un abierto de X contenido en W tal que $p \in Z$. Nótese que podemos suponer que $\mu_1^i, \ldots, \mu_r^i$ son secciones del mismo abierto. Luego, se sigue que

$$(\rho_{\mathcal{F}}{}_Z^W(f_i))_p = (\mu_1^i \rho_{\mathcal{F}}{}_Z^U(s_1) + \cdots + \mu_r^i \rho_{\mathcal{F}}{}_Z^U(s_r))_p$$

y por lo tanto existe un abierto V_i de X que contiene a p tal que $V_i \subseteq Z$ y de modo que $\rho_{\mathcal{F}}{}_{V_i}^W(f_i) = \rho_{\mathcal{O}_X}{}_{V_i}^Z(\mu_1^i)\rho_{\mathcal{F}}{}_{V_i}^U(s_1) + \cdots + \rho_{\mathcal{O}_X}{}_{V_i}^Z(\mu_r^i)\rho_{\mathcal{F}}{}_{V_i}^U(s_r)$. Además, como tenemos un conjunto finito de índices podemos considerar al abierto $V = \bigcap_{k=1}^n V_k$ y de este modo tenemos que para cualquier $i = 1, \ldots, n$ se satisface la igualdad

$$\rho_{\mathcal{F}}{}_V^W(f_i) = \rho_{\mathcal{O}_X}{}_V^Z(\mu_1^i)\rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(s_1) + \cdots + \rho_{\mathcal{O}_X}{}_V^Z(\mu_r^i)\rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(s_r).$$

De esta igualdad, para cada $q \in V$ se tiene que

$$(f_i)_q = (\mu_1^i)_q(\rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(s_1))_q + \cdots + (\mu_r^i)(\rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(s_r))_q,$$

lo cual implica que $(f_i)_q \in \mathcal{O}_{X,q}(\rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(s_1))_q + \cdots + \mathcal{O}_{X,q}(\rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(s_r))_q$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Con esto, finalmente concluimos que

$$\mathcal{F}_q = \mathcal{O}_{X,q}(\rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(s_1))_q + \cdots + \mathcal{O}_{X,q}(\rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(s_r))_q.$$

❑

COROLARIO 2.25. *Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo finitamente generado sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$. Si existe $p \in X$ tal que $\mathcal{F}_p$ es libre de rango s, entonces existe un abierto U no vacío de X tal que $\mathcal{F}|_U$ está generado por s secciones de $\mathcal{F}$ sobre U.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo finitamente generado, de manera particular $\mathcal{F}$ es localmente finitamente generado. Así, como existe $p \in X$ tal que $\mathcal{F}_p$ es generado por s elementos, por el teorema anterior se sigue que existe un abierto U de X que contiene a p tal que $\mathcal{F}|_U$ es generado por s elementos. ❑

Lo siguiente que realizaremos es estudiar el soporte de una gavilla de módulos localmente finitamente generada.

DEFINICIÓN 2.26. Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$. El *soporte* $\operatorname{Supp}(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ es el conjunto definido de la siguiente manera:

$$\operatorname{Supp}(\mathcal{F}) = \left\{ p \in X \,\middle|\, |\mathcal{F}_p| \geq 2 \right\}.$$

COROLARIO 2.27. *Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente finitamente generado sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$. El soporte de $\mathcal{F}$ es un cerrado de X.*

DEMOSTRACIÓN. Para probar que $\operatorname{Supp}(\mathcal{F})$ es un cerrado de X vamos a probar que $X \backslash \operatorname{Supp}(\mathcal{F})$ es un abierto. Si $X \backslash \operatorname{Supp}(\mathcal{F}) = \emptyset$, entonces es obvio que $X \backslash \operatorname{Supp}(\mathcal{F})$ es un abierto de X. De este modo, podemos suponer que $X \backslash \operatorname{Supp}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. Sea $p \in X$ tal que $p \notin \operatorname{Supp}(\mathcal{F})$, así, el $\mathcal{O}_{X,p}$-módulo $\mathcal{F}_p$ es nulo, más aún, tenemos que $\mathcal{F}_p = \mathcal{O}_{X,p} \cdot (0_{\mathcal{F}(X)})_p$. Luego, como $p \in X$, $0_{\mathcal{F}(X)} \in \mathcal{F}(X)$ y $\mathcal{F}_p$ está generado por $(0_{\mathcal{F}(X)})_p$ como $\mathcal{O}_{X,p}$-módulo, por el Teorema 2.24 existe un abierto U de X que contiene a p tal que $\mathcal{F}|_U$ está generado por $0_{\mathcal{F}(X)}|_U = 0_{\mathcal{F}(U)}$, por consiguiente, se tiene $\mathcal{F}_q = \{0_{\mathcal{F}_q}\}$ para todo $q \in U$. Consecuentemente para todo $q \in U$ tenemos que $q \notin \operatorname{Supp}(\mathcal{F})$ y este hecho implica que $U \subseteq X \backslash \operatorname{Supp}(\mathcal{F})$. Así, como U es un abierto que contiene a p y está contenido en $X \backslash \operatorname{Supp}(\mathcal{F})$ concluimos que $X \backslash \operatorname{Supp}(\mathcal{F})$ es un abierto de X. ❑

Como toda gavilla de módulos finitamente generada es localmente finitamente generada, el resultado anterior también es válido para gavillas de módulos que son finitamente generadas. Ahora bien, si el espacio anillado en el que trabajamos es localmente anillado, entonces podemos dar una caracterización del soporte de una gavilla de módulos como nos muestra el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.28. *Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente finitamente generado sobre un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{O}_X)$. Se tiene la igualdad*

$$\operatorname{Supp}(\mathcal{F}) = \left\{ q \in X \,\middle|\, \frac{\mathcal{F}_q}{\mathfrak{m}_{X,q}\mathcal{F}_q} \neq \{0\} \right\},$$

donde $\mathfrak{m}_{X,q}$ es el ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,q}$ para cada $q \in X$.

Demostración. Si $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}) = \emptyset$, entonces para todo $p \in X$ se tiene que $\mathcal{F}_p = \{0_{\mathcal{F}_p}\}$ y esto implica que $\mathcal{F}$ es la gavilla nula, consecuentemente $\left\{ q \in X \,\middle|\, \dfrac{\mathcal{F}_q}{\mathfrak{m}_{X,q}\mathcal{F}_q} \neq \{0\} \right\} = \emptyset$ y con esto obtenemos la igualdad deseada. Así, podemos suponer que $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ y de esta forma consideramos $p \in X$ tal que $p \in \mathrm{Supp}(\mathcal{F})$. Luego, utilizando el lema de Nakayama se sigue que

$$\begin{aligned} p \in \mathrm{Supp}(\mathcal{F}) &\iff \mathcal{F}_p \neq \{0_{\mathcal{F}_p}\} \\ &\iff \mathcal{F}_p \neq \mathfrak{m}_{X,p}\mathcal{F}_p \\ &\iff \frac{\mathcal{F}_p}{\mathfrak{m}_{X,p}\mathcal{F}_p} \neq \{0\} \\ &\iff p \in \left\{ q \in X \,\middle|\, \frac{\mathcal{F}_q}{\mathfrak{m}_{X,q}\mathcal{F}_q} \neq \{0\} \right\}. \end{aligned}$$

❏

Para concluir con esta sección presentaremos resultados que nos hablarán del comportamiento del cociente y de las sucesiones exactas de gavillas de módulos finitamente generadas y localmente finitamente generadas.

Proposición 2.29. *Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_X$-submódulo de un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Si $\mathcal{F}$ es finitamente generado, entonces $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}$ es finitamente generado.*
2. *Si $\mathcal{F}$ es localmente finitamente generado, entonces $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}$ es localmente finitamente generado.*

Demostración.

1. Sea $p \in X$. Como $\mathcal{F}$ es finitamente generado existen $r \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{F}(X)$ tales que $\mathcal{F}_p = \mathcal{O}_{X,p}(f_1)_p + \cdots + \mathcal{O}_{X,p}(f_r)_p$. De lo anterior, de manera inmediata se sigue que

$$\left(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^{-}\right)_p = \mathcal{O}_{X,p}(f_1 + \mathcal{G}(X))_p + \cdots + \mathcal{O}_{X,p}(f_r + \mathcal{G}(X))_p.$$

Luego, recordemos que tenemos definido al morfismo de pregavillas $\theta^{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}} : \dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^{-} \to \dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}$ y dicho morfismo satisface que $\theta_p^{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}} : \left(\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^{-}\right)_p \to \left(\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}\right)_p$ es un isomorfismo (véase Teorema 1.12). De este modo, se sigue que $\left(\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}\right)_p$ esta generado por la familia $((\theta_X^{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}}(f_i + \mathcal{G}(X)))_p)_{i \in \{1,\ldots,r\}}$ y además tenemos que $\theta_X^{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}}(f_i+\mathcal{G}(X))$ es una sección global de $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}$ para cada $i\in\{1,\dots,r\}$. Por lo tanto, concluimos que $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}$ es finitamente generado.

2. Sea $p\in X$. Como $\mathcal{F}$ es localmente finitamente generado se sigue que existe un abierto U de X que contiene a p de modo que $\mathcal{F}|_U$ es finitamente generado. Luego, como $\mathcal{G}|_U$ es un $\mathcal{O}_U$-submódulo de $\mathcal{F}|_U$, por el enunciado anterior se sigue que $\dfrac{\mathcal{F}|_U}{\mathcal{G}|_U}$ es finitamente generado. Además, gracias a la igualdad $\dfrac{\mathcal{F}|_U}{\mathcal{G}|_U}^{-}=\left.\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^{-}\right|_U$ tenemos que $\dfrac{\mathcal{F}|_U}{\mathcal{G}|_U}=\left(\left.\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^{-}\right|_U\right)^{+}$ y el hecho de que $\left(\left.\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^{-}\right|_U\right)^{+}\cong\left.\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}\right|_U$ implica que $\left.\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}\right|_U$ es finitamente generado. Por lo tanto, concluimos que $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}$ es localmente finitamente generado. ❏

Teorema 2.30. *Sea* $0\to\mathcal{G}\xrightarrow{\varphi}\mathcal{F}\xrightarrow{\psi}\mathcal{H}\to 0$ *una sucesión exacta de* $\mathcal{O}_X$*-módulos sobre un espacio anillado* $(X,\mathcal{O}_X)$*. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Si* $\mathcal{G}$ *y* $\mathcal{H}$ *son finitamente generados, entonces* $\mathcal{F}$ *es localmente finitamente generado.*
2. *Si* $\mathcal{G}$ *y* $\mathcal{H}$ *son localmente finitamente generados, entonces* $\mathcal{F}$ *es localmente finitamente generado.*

Demostración.

1. Sea $p\in X$. Como $\mathcal{G}$ es finitamente generado existen $n\in\mathbb{N}$ y $g_1,\dots,g_n\in\mathcal{G}(X)$ tales que

$$\mathcal{G}_p=\mathcal{O}_{X,p}(g_1)_p+\mathcal{O}_{X,p}(g_2)_p+\cdots+\mathcal{O}_{X,p}(g_n)_p;$$

de la misma manera, como $\mathcal{H}$ es finitamente generado existen $m\in\mathbb{N}$ y $h_1,\dots,h_m\in\mathcal{H}(X)$ tales que

$$\mathcal{H}_p=\mathcal{O}_{X,p}(h_1)_p+\mathcal{O}_{X,p}(h_2)_p+\cdots+\mathcal{O}_{X,p}(h_m)_p.$$

Como la sucesión $0\to\mathcal{G}\xrightarrow{\varphi}\mathcal{F}\xrightarrow{\psi}\mathcal{H}\to 0$ es una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos tenemos que $0\to\mathcal{G}_p\xrightarrow{\varphi_p}\mathcal{F}_p\xrightarrow{\psi_p}\mathcal{H}_p\to 0$ es una sucesión exacta de $\mathcal{O}_{X,p}$-módulos. De manera particular, vamos a considerar a la aplicación $\mathcal{O}_{X,p}$-lineal sobreyectiva

$$\begin{array}{rccc}\psi_p: & \mathcal{F}_p & \to & \mathcal{H}_p\\ & [(U,f)] & \mapsto & [(U,\psi_U(f)]\end{array}$$

Sea $i\in\{1,\dots,m\}$. Como $(h_i)_p\in\mathcal{H}_p$ y φ_p es sobreyectiva se sigue que existen un abierto U_i de X que contiene a p y $f_i\in\mathcal{F}(U_i)$ tales que $\psi_p([(U_i,f_i)])=(h_i)_p$. Así, la igualdad $[(U_i,\psi_{U_i}(f_i))]=[(X,h_i)]$ implica que existe un abierto W_i de X que contiene a p, está contenido en U_i y es tal que $\rho_{\mathcal{H}}{}^{U_i}_{W_i}(\psi_{U_i}(f_i))=\rho_{\mathcal{H}}{}^{X}_{W_i}(h_i)$, es decir tal que $\psi_{W_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{U_i}_{W_i}(f_i))=\rho_{\mathcal{H}}{}^{X}_{W_i}(h_i)$. Consideramos a $W=\bigcap_{j=1}^{m}W_j$.

Observemos que W es un abierto de X que contiene a p, está contenido en U_i y además es tal que $\psi_W(\rho_{\mathcal{F}}{}_W^{U_i}(f_i)) = \rho_{\mathcal{H}}{}_W^X(h_i)$, esto implica que para todo $q \in W$ se tiene que $(\psi_W(\rho_{\mathcal{F}}{}_W^{U_i}(f_i)))_q = (\rho_{\mathcal{H}}{}_W^X(h_i))_q$, es decir que para todo $q \in W$ se cumple que $\psi_q((\rho_{\mathcal{F}}{}_W^{U_i}(f_i))_q) = (\rho_{\mathcal{H}}{}_W^X(h_i))_q$. En conclusión, tenemos que para cualquier $q \in W$ y para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$ se tiene la igualdad $\psi_q((\rho_{\mathcal{F}}{}_W^{U_i}(f_i))_q) = (\rho_{\mathcal{H}}{}_W^X(h_i))_q$, en particular, tenemos que $\psi_p((\rho_{\mathcal{F}}{}_W^{U_i}(f_i))_p) = (\rho_{\mathcal{H}}{}_W^X(h_i))_p$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Luego, como tenemos que la familia $\left\{(\rho_{\mathcal{G}}{}_W^X(g_1))_p, (\rho_{\mathcal{G}}{}_W^X(g_2))_p, \ldots, (\rho_{\mathcal{G}}{}_W^X(g_n))_p\right\}$ genera a $\mathcal{G}_p$, que la familia $\left\{(\rho_{\mathcal{H}}{}_W^X(h_1))_p, (\rho_{\mathcal{H}}{}_W^X(h_2))_p, \ldots, (\rho_{\mathcal{H}}{}_W^X(h_m))_p\right\}$ genera a $\mathcal{H}_p$ y que la sucesión de $\mathcal{O}_{X,p}$-módulos $0 \to \mathcal{G}_p \xrightarrow{\varphi_p} \mathcal{F}_p \xrightarrow{\psi_p} \mathcal{H}_p \to 0$ es exacta, se sigue que $\mathcal{F}_p$ es finitamente generado (véase Lema A.15), más aún, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_p &= \mathcal{O}_{X,p}(\varphi_W(\rho_{\mathcal{G}}{}_W^X(g_1)))_p + \mathcal{O}_{X,p}(\varphi_W(\rho_{\mathcal{G}}{}_W^X(g_2)))_p + \cdots + \mathcal{O}_{X,p}(\varphi_W(\rho_{\mathcal{G}}{}_W^X(g_n)))_p + \\
&\quad \mathcal{O}_{X,p}(\rho_{\mathcal{F}}{}_W^{U_1}(f_1))_p + \mathcal{O}_{X,p}(\rho_{\mathcal{F}}{}_W^{U_2}(f_2))_p + \cdots + \mathcal{O}_{X,p}(\rho_{\mathcal{F}}{}_W^{U_m}(f_m))_p.
\end{aligned}$$

Así, la igualdad anterior nos dice que existe una familia finita de secciones de $\mathcal{F}$ sobre W que genera a $\mathcal{F}|_W$. Por lo tanto, concluimos que $\mathcal{F}$ es localmente finitamente generado.

2. Sea $p \in X$. Como $\mathcal{G}$ es localmente finitamente generado se sigue que existe un abierto U de X que contiene a p tal que $\mathcal{G}|_U$ es finitamente generado; asimismo, como $\mathcal{H}$ es localmente finitamente generado se tiene que existe un abierto V de X que contiene a p tal que $\mathcal{H}|_V$ es finitamente generado. Consideramos al abierto $U \cap V$. Por el Lema 2.22 tenemos que $\mathcal{G}|_{U\cap V}$ y $\mathcal{H}|_{U\cap V}$ son finitamente generados, de esta manera, la exactitud de la sucesión $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{F} \to \mathcal{H} \to 0$ implica que la sucesión $0 \to \mathcal{G}|_{U\cap V} \to \mathcal{F}|_{U\cap V} \to \mathcal{H}|_{U\cap V} \to 0$ es exacta y por el enunciado 1 de este teorema tenemos que existe un abierto W de X contenido en $U \cap V$ que contiene a p y de modo que $\mathcal{F}|_W$ es finitamente generado. De esta forma, se concluye que $\mathcal{F}$ es localmente finitamente generado. ❑

3. La Gavilla Imagen Inversa

Sabemos que si tenemos una aplicación continua entre espacios topológicos y una gavilla sobre el dominio de dicha aplicación, siempre podemos construir su gavilla imagen directa. Ahora bien, si tuviésemos una aplicación continua entre espacios topológicos y una gavilla sobre el codominio de esta, ¿es posible a partir de estos objetos construir una gavilla sobre el dominio? En esta sección daremos una respuesta a esta interrogante.

Vamos a fijar a $f : X \to Y$ una aplicación continua entre los espacios topológicos X y Y y a $\mathcal{G}$ una pregavilla de grupos abelianos sobre Y. Consideremos un abierto U de X no vacío. Vamos a definir el siguiente conjunto

$$\Gamma_U = \Big\{(V, s) \;\Big|\; V \text{ es un abierto de } Y,\ f(U) \subseteq V \text{ y } s \in \mathcal{G}(V)\Big\}$$

y vamos a considerar la siguiente relación $\sim$ sobre Γ_U: dados V_1 y V_2 abiertos de Y que contienen a $f(U)$ y dados $s_1 \in \mathcal{G}(V_1)$ y $s_2 \in \mathcal{G}(V_2)$, se tiene que $(V_1, s_1) \sim (V_2, s_2)$ si y sólo si existe un abierto W de Y tal que $f(U) \subseteq W \subseteq V_1 \cap V_2$ y $s_1|_W = s_2|_W$.

Lema 2.31. *Con las notaciones anteriores, la relación $\sim$ es de equivalencia sobre Γ_U.*

Demostración. Sean V_1, V_2 y V_3 abiertos de Y que contienen a $f(U)$ y sean $s_1 \in \mathcal{G}(V_1)$, $s_2 \in \mathcal{G}(V_2)$ y $s_3 \in \mathcal{G}(V_3)$.

• *Reflexividad.* El abierto V_1 de Y implica de manera inmediata que $(V_1, s_1) \sim (V_1, s_1)$.

• *Simetría.* Supongamos que $(V_1, s_1) \sim (V_2, s_2)$, así, existe un abierto W de Y tal que $f(U) \subseteq W \subseteq V_1 \cap V_2$ y $s_1|_W = s_2|_W$, es decir, existe un abierto W de Y tal que $f(U) \subseteq W \subseteq V_2 \cap V_1$ y $s_2|_W = s_1|_W$. Por lo tanto $(V_2, s_2) \sim (V_1, s_1)$.

• *Transitividad.* Supongamos que $(V_1, s_1) \sim (V_2, s_2)$ y que $(V_2, s_2) \sim (V_3, s_3)$. De este modo, existe un abierto W_1 de Y tal que $f(U) \subseteq W_1 \subseteq V_1 \cap V_2$ y $s_1|_{W_1} = s_2|_{W_1}$; asimismo, existe un abierto W_2 de Y tal que $f(U) \subseteq W_2 \subseteq V_2 \cap V_3$ y $s_2|_{W_2} = s_3|_{W_2}$. Consideramos $W = W_1 \cap W_2$. Observemos que W es un abierto de Y que contiene a $f(U)$, está contenido en $V_1 \cap V_2 \cap V_3$ que a su vez está contenido en $V_1 \cap V_3$ y además

$$s_1|_W = (s_1|_{W_1})|_W = (s_2|_{W_1})|_W = s_2|_W = (s_2|_{W_2})|_W = (s_3|_{W_2})|_W = s_3|_W.$$

Así, el abierto W implica que $(V_1, s_1) \sim (V_3, s_3)$.

Por lo tanto, concluimos que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre Γ_U. ❑

Una vez mostrado que $\sim$ define una relación de equivalencia sobre Γ_U podemos considerar el conjunto cociente $\dfrac{\Gamma_U}{\sim}$ el cual denotaremos por $f^{-1}(\mathcal{G})^-(U)$. Si V es un abierto de Y que contiene a $f(U)$ y $s \in \mathcal{G}(V)$, vamos a denotar por $[(V, s)]$ a la clase del elemento (V, s). Nuestro siguiente objetivo será el de definir una estructura de grupo abeliano sobre $f^{-1}(\mathcal{G})^-(U)$. Definimos la siguiente operación:

$$\begin{array}{rcl} + : f^{-1}(\mathcal{G})^-(U) \times f^{-1}(\mathcal{G})^-(U) & \to & f^{-1}(\mathcal{G})^-(U) \\ ([(V_1, s_1)], [(V_2, s_2)]) & \mapsto & [(V_1 \cap V_2, s_1|_{V_1 \cap V_2} + s_2|_{V_1 \cap V_2})] \end{array}$$

Lema 2.32. *Con las notaciones anteriores,* $(f^{-1}(\mathcal{G})^-(U), +)$ *es un grupo abeliano.*

Demostración. En primer lugar, vamos a verificar que + es una operación bien definida. Sean V_1, V_2, T_1 y T_2 abiertos de Y tales que $f(U) \subseteq V_1 \cap V_2 \cap T_1 \cap T_2$ y sean $s_1 \in \mathcal{G}(V_1)$, $s_2 \in \mathcal{G}(V_2)$, $t_1 \in \mathcal{G}(T_1)$ y $t_2 \in \mathcal{G}(V_2)$ de modo que $[(V_1, s_1)] = [(T_1, t_1)]$ y $[(V_2, s_2)] = [(T_2, t_2)]$. Vamos a mostrar que $[(V_1, s_1)] + [(V_2, s_2)] = [(T_1, t_1)] + [(T_2, t_2)]$, es decir, mostraremos que la igualdad $[(V_1 \cap V_2, s_1|_{V_1\cap V_2} + s_2|_{V_1\cap V_2})] = [(T_1 \cap T_2, t_1|_{T_1\cap T_2} + t_2|_{T_1\cap T_2})]$ es verdadera. Como $[(V_1, s_1)] = [(T_1, t_1)]$ existe un abierto W_1 de Y tal que $f(U) \subseteq W_1 \subseteq V_1 \cap T_1$ y $s_1|_{W_1} = t_1|_{W_1}$; asimismo, como $[(V_2, s_2)] = [(T_2, t_2)]$ existe un abierto W_2 de Y tal que $f(U) \subseteq W_2 \subseteq V_2 \cap T_2$ y $s_2|_{W_2} = t_2|_{W_2}$. Consideramos $W = W_1 \cap W_2$. Obsérvese que W es un abierto de Y que contiene a $f(U)$, está contenido en $(V_1 \cap V_2) \cap (T_1 \cap T_2)$ y además satisface que

$$\begin{aligned}
(s_1|_{V_1\cap V_2} + s_2|_{V_1\cap V_2})|_W &= s_1|_W + s_2|_W \\
&= (s_1|_{W_1})|_W + (s_2|_{W_2})|_W \\
&= (t_1|_{W_1})|_W + (t_2|_{W_2})|_W \\
&= t_1|_W + t_2|_W \\
&= (t_1|_{T_1\cap T_2} + t_2|_{T_1\cap T_2})|_W.
\end{aligned}$$

Así, el abierto W asegura la igualdad deseada y esto implica que + es una operación bien definida. En segundo lugar, mostraremos que + define una estructura de grupo abeliano sobre $f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U)$: sean V_1, V_2 y V_3 abiertos de Y con $f(U) \subseteq V_1 \cap V_2 \cap V_3$ y sean $s_1 \in \mathcal{G}(V_1)$, $s_2 \in \mathcal{G}(V_2)$ y $s_3 \in \mathcal{G}(V_3)$.

- *Asociatividad.*

$$\begin{aligned}
([(V_1, s_1)] + [(V_2, s_2)]) + [(V_3, s_3)] &= [(V_1 \cap V_2, s_1|_{V_1\cap V_2} + s_2|_{V_1\cap V_2})] + [(V_3, s_3)] \\
&= [((V_1 \cap V_2) \cap V_3, (s_1|_{(V_1\cap V_2)\cap V_3} + s_2|_{(V_1\cap V_2)\cap V_3}) + s_3|_{(V_1\cap V_2)\cap V_3})] \\
&= [(V_1 \cap (V_2 \cap V_3), s_1|_{V_1\cap(V_2\cap V_3)} + (s_2|_{V_1\cap(V_2\cap V_3)} + s_3|_{V_1\cap(V_2\cap V_3)}))] \\
&= [(V_1, s_1)] + [(V_2 \cap V_3, s_2|_{V_2\cap V_3} + s_3|_{V_2\cap V_3})] \\
&= [(V_1, s_1)] + ([(V_2, s_2)] + [(V_3, s_3)]).
\end{aligned}$$

- *Conmutatividad.*

$$\begin{aligned}
[(V_1, s_1)] + [(V_2, s_2)] &= [(V_1 \cap V_2, s_1|_{V_1\cap V_2} + s_2|_{V_1\cap V_2})] \\
&= [(V_2 \cap V_1, s_2|_{V_2\cap V_1} + s_1|_{V_2\cap V_1})] \\
&= [(V_2, s_2)] + [(V_1, s_1)].
\end{aligned}$$

- *Neutro.* Afirmamos que el elemento $[(Y, 0_{\mathcal{G}(Y)})]$ es el neutro de nuestra operación, en efecto:

$$[(V_1, s_1)] + [(Y, 0_{\mathcal{G}(Y)})] = [(V_1 \cap Y, s_1|_{V_1\cap Y} + 0_{\mathcal{G}(Y)}|_{V_1\cap Y})] = [(V_1, s_1 + 0_{\mathcal{G}(V_1)})] = [(V_1, s_1)].$$

• *Inverso.* Afirmamos que el inverso del elemento $[(V_1, s_1)]$ es $[(V_1, -s_1)]$, en efecto:

$$[(V_1, s_1)] + [(V_1, -s_1)] = [(V_1, s_1 + (-s_1))] = [(V_1, 0_{\mathcal{G}(V_1)})] = [(Y, 0_{\mathcal{G}(Y)})].$$

Por lo tanto, concluimos que $(f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U), +)$ es un grupo abeliano. ❏

De esta forma, a cada abierto U no vacío de X le hemos asociado el grupo abeliano $f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U)$. Para el conjunto vacío consideramos $f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(\emptyset) = \{0\}$. Ahora, para abiertos U_1 y U_2 de X que cumplan la condición $U_2 \subseteq U_1$, vamos a definir un homomorfismo $\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^{-}}{}^{U_1}_{U_2}$ entre los grupos abelianos $f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U_1)$ y $f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U_2)$. Sean U_1 y U_2 abiertos de X tales que $U_2 \subseteq U_1$. Si $U_2 = \emptyset$, entonces consideramos a $\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^{-}}{}^{U_1}_{U_2}$ como la aplicación nula, de otro modo, definimos

$$\begin{array}{rcl} \rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^{-}}{}^{U_1}_{U_2} : f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U_1) & \to & f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U_2) \\ {[(V, s)]} & \mapsto & [(V, s)] \end{array}$$

Lema 2.33. *Con las notaciones anteriores, $\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^{-}}{}^{U_1}_{U_2}$ es un homomorfismo de grupos abelianos.*

Demostración. Comenzaremos por mostrar que $\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^{-}}{}^{U_1}_{U_2}$ está bien definida. Sean V un abierto de Y de modo que $f(U_1) \subseteq V$ y $s \in \mathcal{G}(V)$. Puesto que $U_2 \subseteq U_1$ se sigue que $f(U_2) \subseteq f(U_1)$, además, el hecho de que $f(U_1) \subseteq V$ implica que $f(U_2) \subseteq V$. De este modo, tenemos que $[(V, s)] \in f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U_2)$. Ahora, sean V_1 y V_2 abiertos de Y tales que $f(U_1) \subseteq V_1 \cap V_2$ y sean $s_1 \in \mathcal{G}(V_1)$ y $s_2 \in \mathcal{G}(V_2)$ de modo que $[(V_1, s_1)] = [(V_2, s_2)]$ (en $f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U_1)$). Vamos a mostrar que $\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^{-}}{}^{U_1}_{U_2}([(V_1, s_1)]) = \rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^{-}}{}^{U_1}_{U_2}([(V_2, s_2)])$, es decir que $[(V_1, s_1)] = [(V_2, s_2)]$ en $f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U_2)$. Como $[(V_1, s_1)] = [(V_2, s_2)]$ existe un abierto W de Y tal que $f(U_1) \subseteq W \subseteq V_1 \cap V_2$ y $s_1|_W = s_2|_W$. Luego, como $U_2 \subseteq U_1$ se sigue que $f(U_2) \subseteq W$ y así, tenemos que W es un abierto de Y tal que $f(U_2) \subseteq W \subseteq V_1 \cap V_2$ y $s_1|_W = s_2|_W$. Con esto se tiene que $[(V_1, s_1)] = [(V_2, s_2)]$ en $f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U_2)$ y por lo tanto concluimos que $\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^{-}}{}^{U_1}_{U_2}$ está bien definida.

A continuación probaremos que $\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^{-}}{}^{U_1}_{U_2}$ es un homomorfismo de grupos abelianos. Sean V_1 y V_2 abiertos de Y tales que $f(U_1) \subseteq V_1 \cap V_2$ y sean $s_1 \in \mathcal{G}(V_1)$ y $s_2 \in \mathcal{G}(V_2)$.

$$\begin{aligned} \rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^{-}}{}^{U_1}_{U_2}([(V_1, s_1)] + [(V_2, s_2)]) &= \rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^{-}}{}^{U_1}_{U_2}([(V_1 \cap V_2, s_1|_{V_1\cap V_2} + s_2|_{V_1\cap V_2})]) \\ &= [(V_1 \cap V_2, s_1|_{V_1\cap V_2} + s_2|_{V_1\cap V_2})] \\ &= [(V_1, s_1)] + [(V_2, s_2)] \\ &= \rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^{-}}{}^{U_1}_{U_2}([(V_1, s_1)]) + \rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^{-}}{}^{U_1}_{U_2}([(V_2, s_2)]). \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que $\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^{-}}{}^{U_1}_{U_2}$ es un homomorfismo de grupos abelianos. ❏

Una vez realizadas todas estas construcciones, lo que vamos a hacer es a definir una pregavilla sobre X a partir de la aplicación continua f y la pregavilla $\mathcal{G}$.

Proposición 2.34. *Con las notaciones anteriores, la* pregavilla imagen inversa de $\mathcal{G}$ bajo f *denotada por $f^{-1}(\mathcal{G})^-$ es la pregavilla sobre X definida de la siguiente manera: $f^{-1}(\mathcal{G})^-(\emptyset) = \{0\}$, para cualquier abierto U no vacío de X tomamos a $f^{-1}(\mathcal{G})^-(U)$ como el grupo abeliano del Lema 2.32 y para cualesquier abiertos U_1 y U_2 no vacíos de X tales que $U_2 \subseteq U_1$ la restricción ${\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^-}}_{U_2}^{U_1}$ es el homomorfismo de grupos del Lema 2.33.*

Demostración.

PG1. Por construcción se tiene que $f^{-1}(\mathcal{G})^-(\emptyset) = \{0\}$.

PG2. Sea U un abierto de X. Por construcción tenemos que

$$\begin{array}{rcl} {\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^-}}_{U}^{U} : f^{-1}(\mathcal{G})^-(U) & \to & f^{-1}(\mathcal{G})^-(U) \\ [(V, s)] & \mapsto & [(V, s)] \end{array}$$

y de esto claramente se sigue que ${\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^-}}_{U}^{U} = \mathrm{id}_{f^{-1}(\mathcal{G})^-(U)}$.

PG3. Sean U_1, U_2 y U_3 abiertos de X tales que $U_3 \subseteq U_2 \subseteq U_1$. Vamos a mostrar la igualdad ${\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^-}}_{U_3}^{U_2} \circ {\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^-}}_{U_2}^{U_1} = {\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^-}}_{U_3}^{U_1}$. Sean V un abierto de Y que contiene a $f(U_1)$ y $s \in \mathcal{G}(V)$.

$$\begin{aligned} {\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^-}}_{U_3}^{U_2} \circ {\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^-}}_{U_2}^{U_1}([(V, s)]) &= {\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^-}}_{U_3}^{U_2}([(V, s)]) \\ &= [(V, s)] \\ &= {\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^-}}_{U_3}^{U_1}([(V, s)]). \end{aligned}$$

Así, puesto que ambas aplicaciones tienen el mismo dominio, codominio y regla de asignación se sigue que son iguales.

Por lo tanto, concluimos que $f^{-1}(\mathcal{G})^-$ es una pregavilla. ❏

Ahora que tenemos definida una nueva pregavilla, una pregunta que es muy natural es si podemos caracterizar a los grupos de gérmenes. El siguiente resultado nos brindará una respuesta a esta interrogante.

Proposición 2.35. *Con las notaciones anteriores, para todo $p \in X$ existe un isomorfismo entre los grupos abelianos $f^{-1}(\mathcal{G})^-_p$ y $\mathcal{G}_{f(p)}$.*

Demostración. Sea $p \in X$. Vamos a considerar la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : f^{-1}(\mathcal{G})^-_p & \to & \mathcal{G}_{f(p)} \\ [(U, s)] & \mapsto & s \end{array}$$

Comenzaremos mostrando que φ está bien definida: sean U un abierto de X que contiene a p y $s \in f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U)$, así, $s = [(V, t)]$ para algún abierto V de Y que contiene a $f(U)$ y para algún $t \in \mathcal{G}(V)$. Como $f(U) \subseteq V$ se sigue que $f(p) \in V$, además, como V es un abierto de Y y $t \in \mathcal{G}(V)$, tenemos de manera inmediata que $[(V, t)]$ es un elemento de $\mathcal{G}_{f(p)}$.

Ahora, sean U_1 y U_2 abiertos de X que contienen a p y sean $s_1 \in f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U_1)$ y $s_2 \in f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U_2)$ tales que tenemos la igualdad $[(U_1, s_1)] = [(U_2, s_2)]$ en $f^{-1}(\mathcal{G})^{-}_p$, además, $s_1 = [(V_1, t_1)]$ donde V_1 es un abierto de Y que contiene a $f(U_1)$ y $t_1 \in \mathcal{G}(V_1)$, y $s_2 = [(V_2, t_2)]$ donde V_2 es un abierto de Y que contiene a $f(U_2)$ y $t_2 \in \mathcal{G}(V_2)$. Vamos a probar que $\varphi([(U_1, s_1)]) = \varphi([(U_2, s_2)])$, es decir, que $s_1 = s_2$ en $\mathcal{G}_{f(p)}$. Como $[(U_1, s_1)] = [(U_2, s_2)]$ (igualdad en $f^{-1}(\mathcal{G})^{-}_p$) existe un abierto Z de X que contiene a p tal que $Z \subseteq U_1 \cap U_2$ y $\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^{-}}{}^{U_1}_{Z}(s_1) = \rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^{-}}{}^{U_2}_{Z}(s_2)$. Luego, por la definición de las restricciones de la pregavilla $f^{-1}(\mathcal{G})^{-}$ se tiene la igualdad $[(V_1, t_1)] = [(V_2, t_2)]$ en $f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(Z)$, esto implica que existe un abierto W de Y tal que $f(Z) \subseteq W \subseteq V_1 \cap V_2$ y $\rho_{\mathcal{G}}{}^{V_1}_{W}(t_1) = \rho_{\mathcal{G}}{}^{V_2}_{W}(t_2)$. Como $f(Z) \subseteq W$ y $p \in Z$ se sigue que $f(p) \in W$, además, W es un abierto de Y que está contenido en $V_1 \cap V_2$ y $\rho_{\mathcal{G}}{}^{V_1}_{W}(t_1) = \rho_{\mathcal{G}}{}^{V_2}_{W}(t_2)$. De esta forma, el abierto W asegura la igualdad $[(V_1, t_1)] = [(V_2, t_2)]$ en $\mathcal{G}_{f(p)}$ y así concluimos que φ está bien definida.

A continuación probaremos que φ es un homomorfismo de grupos abelianos. Sean U_1 y U_2 abiertos de X que contienen a p y sean $s_1 \in f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U_1)$ y $s_2 \in f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U_2)$,

$$\varphi([(U_1, s_1)] + [(U_2, s_2)]) = \varphi([(U_1 \cap U_2, s_1 + s_2)] = s_1 + s_2 = \varphi([(U_1, s_1)]) + \varphi([(U_2, s_2)]).$$

De esta forma, concluimos que φ es un homomorfismo de grupos.

Lo siguiente que haremos es probar que φ es inyectivo. Sean U un abierto de X que contiene a p y $s \in f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U)$ tales que $[(U, s)] \in \operatorname{Ker}\varphi$, además, $s = [(V, t)]$ para cierto abierto V de Y que contiene a $f(U)$ y cierto $t \in \mathcal{G}(V)$. Vamos a mostrar que $[(U, s)] = 0_{f^{-1}(\mathcal{G})^{-}_p}$, es decir, que existe un abierto Z de X que contiene a p tal que $Z \subseteq U$ y $s = 0_{f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(Z)}$, en otras palabras, vamos a mostrar que existe un abierto Z de X que contiene a p tal que $Z \subseteq U$ y que existe un abierto T de Y tal que $f(Z) \subseteq T \subseteq V$ y $\rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{T}(t) = 0_{\mathcal{G}(T)}$. Por hipótesis, como $[(U, s)] \in \operatorname{Ker}\varphi$ se sigue que $[(V, t)] = [(Y, 0_{\mathcal{G}(Y)})]$ (igualdad en $\mathcal{G}_{f(p)}$), así, existe un abierto W de Y que contiene a $f(p)$ tal que $W \subseteq V$ y $\rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{W}(t) = 0_{\mathcal{G}(W)}$. Vamos a considerar $Z = U \cap f^{-1}(W)$ y $T = W$. Observemos que tanto U como $f^{-1}(W)$ son abiertos de X por lo cual $U \cap f^{-1}(W)$ es un abierto de X, además, como $f(p) \in W$ se tiene que $p \in f^{-1}(W)$ lo cual implica que $p \in U \cap f^{-1}(W)$ y también se cumple que $U \cap f^{-1}(W) \subseteq U$. Por otro lado, observemos que

$$f(U \cap f^{-1}(W)) \subseteq f(U) \cap f(f^{-1}(W)) \subseteq f(U) \cap W \subseteq W \subseteq V$$

y recordemos que $\rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{W}(t) = 0_{\mathcal{G}(W)}$. Así, gracias a los abiertos $U \cap f^{-1}(W)$ y W concluimos que φ es inyectivo.

Por último, vamos a probar que φ es sobreyectivo. Sean V es un abierto de Y que contiene a $f(p)$ y $t \in \mathcal{G}(V)$. Consideremos al elemento $s = [(V, t)]$ de $\mathcal{G}_{f(p)}$. Vamos a mostrar que existen un abierto U de X que contiene a p y $r \in f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U)$ tales que $\varphi([(U, r)]) = [(V, t)]$. Consideramos $U = f^{-1}(V)$ y $r = s$: como V es un abierto de Y que contiene a $f(p)$ y f es un aplicación continua se tiene que $f^{-1}(V)$ es un abierto de X que contiene a p, además, como $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ tenemos que $[(V, t)] \in f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(f^{-1}(V))$. De esta forma tenemos que $\varphi([(f^{-1}(V), s)]) = s$ y de esto se sigue que φ es sobreyectivo.

Por lo tanto, para todo $p \in X$ concluimos que el grupo abeliano $f^{-1}(\mathcal{G})^{-}_{p}$ es isomorfo al grupo abeliano $\mathcal{G}_{f(p)}$. ❑

Ahora que tenemos a la pregavilla $f^{-1}(\mathcal{G})^{-}$ en nuestras manos, una pregunta natural es si dicha pregavilla es una gavilla. La respuesta es que en general no, el siguiente ejemplo es una muestra de ello.

Ejemplo 2.36. Sean $X = \{a, b\}$ y $Y = \{p, q, r\}$ espacios topológicos con la topología discreta y sea A un grupo abeliano de cardinalidad diferente de uno. Consideramos la gavilla rascacielos A^{p}_{Y} sobre Y definida de la siguiente manera: si V es un abierto de Y asignamos

$$A^{p}_{Y}(V) = \begin{cases} A & \text{si } p \in V \\ \{0\} & \text{si } p \notin V \end{cases}$$

Además, si V_1 y V_2 son abiertos de Y de modo que $V_2 \subseteq V_1$ asignamos

$$\rho_{A^{p}_{Y}}{}^{V_1}_{V_2} = \begin{cases} \mathrm{id}_A & \text{si } p \in V_2 \\ 0_A & \text{si } p \notin V_2 \end{cases}$$

Consideramos la aplicación constante $f : X \to Y$ que a cada elemento de X lo envía a p. Vamos a mostrar que $f^{-1}(A^{p}_{Y})^{-}$ no es una gavilla. Fijamos $U_1 = \{a\}$, $U_2 = \{b\}$ y $V = \{p\}$. Puesto que $f(U_1) = f(U_2) = f(X) = V$ se sigue de manera inmediata que

$$f^{-1}(A^{p}_{Y})^{-}(U_1) = f^{-1}(A^{p}_{Y})^{-}(U_2) = f^{-1}(A^{p}_{Y})^{-}(X).$$

Luego, como $A^{p}_{Y}(V) = A$ y tiene al menos dos elementos, podemos considerar $x, y \in A$ de modo que $x \neq y$. Así, como V es la imagen de U_1 y U_2 bajo f y además es un abierto no vacío de Y, de manera inmediata se sigue que $[(V, x)]$ y $[(V, y)]$ son elementos de $f^{-1}(A^{p}_{Y})^{-}(U_1)$ y $f^{-1}(A^{p}_{Y})^{-}(U_2)$ respectivamente. Ahora bien, pensando a los elementos anteriores como elementos de $f^{-1}(A^{p}_{Y})^{-}(U_1)$ se tiene que dichos elementos son diferentes: en efecto, si $[(V, x)] = [(V, y)]$ tendríamos que existiría un abierto Z de Y tal que $V \subseteq Z \subseteq V$ de modo que $\rho_{A^{p}_{Y}}{}^{V}_{Z}(x) = \rho_{A^{p}_{Y}}{}^{V}_{Z}(y)$ lo cual implicaría que $x = y$ y esto contradiría la elección de x y y.

Por otro lado, el hecho de que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ implica que

$$\rho_{f^{-1}(A_Y^p)^-\,U_1\cap U_2}^{\;U_1}([(V,x)]) = [(Y,0_A)] = \rho_{f^{-1}(A_Y^p)^-\,U_1\cap U_2}^{\;U_2}([(V,y)]).$$

Si $f^{-1}(A_Y^p)^-$ fuese una gavilla, entonces deben existir un abierto W de Y que contiene a V y $z \in A_Y^p(W) = A$ de modo el elemento $[(W,z)]$ de $f^{-1}(A_Y^p)^-(X)$ satisface que $\rho_{f^{-1}(A_Y^p)^-\,U_1}^{\;X}([(W,z)]) = [(V,x)]$ y $\rho_{f^{-1}(A_Y^p)^-\,U_2}^{\;X}([(W,z)]) = [(V,y)]$. De esta forma, dicho elemento satisface las igualdades $[(W,z)] = [(V,x)]$ y $[(W,z)] = [(V,y)]$ en $f^{-1}(A_Y^p)^-(U_1)$ lo cual implica que $[(V,x)] = [(V,y)]$, sin embargo, hemos visto que esto no puede suceder. Por lo tanto, concluimos que $f^{-1}(A_Y^p)^-$ es una pregavilla pero no una gavilla.

De esta manera, para tener definida una gavilla sobre X utilizando la construcción anterior vamos a considerar la gavilla asociada a la pregavilla $f^{-1}(\mathcal{G})^-$, esta gavilla será la gavilla imagen inversa de $\mathcal{G}$ bajo f.

Definición 2.37. Sean $f : X \to Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos y $\mathcal{G}$ una pregavilla sobre Y. La *gavilla imagen inversa de $\mathcal{G}$ bajo f* es la gavilla asociada a la pregavilla $f^{-1}(\mathcal{G})^-$ y es denotada por $f^{-1}(\mathcal{G})$.

Ejemplo 2.38. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una gavilla de grupos abelianos sobre X. Consideremos a Z un subconjunto de X y pensemos en Z como un espacio topológico con la topología inducida. Sabemos que tenemos la aplicación inclusión $\iota : Z \to X$ que es una aplicación continua. De esta manera, podemos considerar la gavilla $\iota^{-1}(\mathcal{F})$ sobre Z. Enfaticemos que esta construcción puede realizarse para cualquier subconjunto de X.

De una manera particular, vamos a estudiar el caso en que Z es un abierto no vacío de X. En este caso, vamos a mostrar que la gavilla $\iota^{-1}(\mathcal{F})$ es isomorfa a la gavilla $\mathcal{F}|_Z$. Para mostrar este hecho, en primer lugar construiremos un morfismo entre las pregavillas $\iota^{-1}(\mathcal{F})^-$ y $\mathcal{F}|_Z$. Sea U un abierto de X. Definimos la siguiente asignación:

$$\begin{aligned} \zeta_{U\cap Z} : \iota^{-1}(\mathcal{F})^-(U\cap Z) &\to \mathcal{F}|_Z(U\cap Z) \\ [(V,t)] &\mapsto t|_{U\cap Z} \end{aligned}$$

Observemos que $\zeta_{U\cap Z}$ es una aplicación bien definida: si V_1 y V_2 son abiertos de X que contienen a $U\cap Z$ y si t_1 y t_2 son secciones de $\mathcal{F}$ sobre V_1 y V_2 respectivamente tales que $[(V_1,t_1)] = [(V_2,t_2)]$, entonces tenemos que existe un abierto W de X tal que $U\cap Z \subseteq W \subseteq V_1 \cap V_2$ y $t_1|_W = t_2|_W$ y de esta forma tenemos que $t_1|_{U\cap Z} = (t_1|_W)|_{U\cap Z} = (t_2|_W)|_{U\cap Z} = t_2|_{U\cap Z}$.

Luego, observemos que $\zeta_{U\cap Z}$ es un homomorfismo de grupos: en efecto, sean V_1 y V_2 abiertos de X que contienen a $U\cap Z$ y sean $t_1 \in \mathcal{F}(V_1)$ y $t_2 \in \mathcal{F}(V_2)$,

$$\zeta_{U\cap Z}([(V_1,t_1)] + [(V_2,t_2)]) \;=\; \zeta_{U\cap Z}([(V_1\cap V_2, t_1|_{V_1\cap V_2} + t_2|_{V_1\cap V_2})])$$

$$\begin{aligned}
&= (t_1|_{V_1\cap V_2} + t_2|_{V_1\cap V_2})|_{U\cap Z}\\
&= (t_1|_{V_1\cap V_2})|_{U\cap Z} + (t_2|_{V_1\cap V_2})|_{U\cap Z}\\
&= t_1|_{U\cap Z} + t_2|_{U\cap Z}\\
&= \zeta_{U\cap Z}([(V_1,t_1)]) + \zeta_{U\cap Z}([(V_2,t_2)]).
\end{aligned}$$

A continuación, vamos a mostrar que la familia $(\zeta_{U\cap Z})_{\{U \text{ es un abierto de } X\}}$ define un morfismo al que denotaremos por ζ. Sean U_1 y U_2 abiertos de X tales que $U_2 \subseteq U_1$. Vamos a mostrar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\iota^{-1}(\mathcal{F})^-(U_1\cap Z) \arrow[r, "\zeta_{U_1\cap Z}"] \arrow[d, "\rho_{\iota^{-1}(\mathcal{F})^-}{}^{U_1\cap Z}_{U_2\cap Z}"'] & \mathcal{F}|_Z(U_1\cap Z) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}|_Z}{}^{U_1\cap Z}_{U_2\cap Z}"] \\
\iota^{-1}(\mathcal{F})^-(U_2\cap Z) \arrow[r, "\zeta_{U_2\cap Z}"'] & \mathcal{F}|_Z(U_2\cap Z)
\end{tikzcd}$$

Sean V un abierto de X que contiene a U_1 y $t\in\mathcal{F}(V)$.

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathcal{F}|_Z}{}^{U_1\cap Z}_{U_2\cap Z}\circ\zeta_{U_1\cap Z}([(V,t)]) &= \rho_{\mathcal{F}}{}^{U_1\cap Z}_{U_2\cap Z}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{U_1\cap Z}(t))\\
&= \rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{U_2\cap Z}(t)\\
&= \zeta_{U_2\cap Z}([(V,t)])\\
&= \zeta_{U_2\cap Z}\circ\rho_{\iota^{-1}(\mathcal{F})^-}{}^{U_1\cap Z}_{U_2\cap Z}([(V,t)]).
\end{aligned}$$

De esta forma, concluimos que ζ es un morfismo entre $\iota^{-1}(\mathcal{F})^-$ y $\mathcal{F}|_Z$.

Lo siguiente que haremos será construir un morfismo entre $\mathcal{F}|_Z$ y $\iota^{-1}(\mathcal{F})^-$. Sea U un abierto de X. Definimos la asignación

$$\begin{aligned}
\xi_{U\cap Z} : \mathcal{F}|_Z(U\cap Z) &\to \iota^{-1}(\mathcal{F})^-(U\cap Z)\\
s &\mapsto [(U\cap Z, s)]
\end{aligned}$$

Comenzaremos mostrando que $\xi_{U\cap Z}$ es una aplicación bien definida. Si $s\in\mathcal{F}|_Z(U\cap Z)$, entonces como $U\cap Z$ es un abierto de X, $\iota(U\cap Z) = U\cap Z$ y $s\in\mathcal{F}|_Z(U\cap Z) = \mathcal{F}(U\cap Z)$ se sigue que $[(U\cap Z, s)]$ es un elemento de $\iota^{-1}(\mathcal{F})^-(U\cap Z)$. Ahora, sean $s_1, s_2\in\mathcal{F}|_Z(U\cap Z)$ tales que $s_1 = s_2$, vamos a probar que $\xi_{U\cap Z}(s_1) = \xi_{U\cap Z}(s_2)$, es decir que $[(U\cap Z, s_1)] = [(U\cap Z, s_2)]$, en otras palabras, que existe un abierto W de X tal que $U\cap Z\subseteq W\subseteq U\cap Z$ y $s_1|_W = s_2|_W$. Consideramos $W = U\cap Z$: claramente $U\cap Z$ es un abierto de X que satisface la condición deseada y además, la igualdad $s_1 = s_2$ implica que $s_1|_{U\cap Z} = s_2|_{U\cap Z}$. Por lo tanto, tenemos que $[(U\cap Z, s_1)] = [(U\cap Z, s_2)]$ y así concluimos que $\xi_{U\cap Z}$ está bien definida.

Ahora, probaremos que $\xi_{U\cap Z}$ es un homomorfismo de grupos abelianos. Sean $s_1, s_2 \in \mathcal{F}|_Z(U\cap Z)$.

$$\xi_{U\cap Z}(s_1+s_2) = [(U\cap Z, s_1+s_2)] = [(U\cap Z, s_1)] + [(U\cap Z, s_2)] = \xi_{U\cap Z}(s_1) + \xi_{U\cap Z}(s_2).$$

Con esto, tenemos que $\xi_{U\cap Z}$ es un homomorfismo de grupos. Luego, consideramos a ξ como la familia $(\xi_{U\cap Z})_{\{U \text{ es un abierto de } X\}}$. De esta forma, para probar que ξ es un morfismo sólo nos resta probar la compatibilidad con las restricciones de pregavilla. Sean U_1 y U_2 abiertos de X tales que $U_2 \subseteq U_1$, mostraremos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}|_Z(U_1\cap Z) \arrow[r, "\xi_{U_1\cap Z}"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}|_Z}{}^{U_1\cap Z}_{U_2\cap Z}"'] & \iota^{-1}(\mathcal{F})^-(U_1\cap Z) \arrow[d, "\rho_{\iota^{-1}(\mathcal{F})^-}{}^{U_1\cap Z}_{U_2\cap Z}"] \\
\mathcal{F}|_Z(U_2\cap Z) \arrow[r, "\xi_{U_2\cap Z}"'] & \iota^{-1}(\mathcal{F})^-(U_2\cap Z)
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo. Sea $s \in \mathcal{F}|_Z(U_1\cap Z)$.

$$\begin{aligned}
\rho_{\iota^{-1}(\mathcal{F})^-}{}^{U_1\cap Z}_{U_2\cap Z} \circ \xi_{U_1\cap Z}(s) &= \rho_{\iota^{-1}(\mathcal{F})^-}{}^{U_1\cap Z}_{U_2\cap Z}\big([(U_1\cap Z, s)]\big) \\
&= [(U_1\cap Z, s)] \\
&= [(U_2\cap Z, s|_{U_2\cap Z})] \\
&= \xi_{U_2\cap Z}(s|_{U_2\cap Z}) \\
&= \xi_{U_2\cap Z} \circ \rho_{\mathcal{F}|_Z}{}^{U_1\cap Z}_{U_2\cap Z}(s).
\end{aligned}$$

De esta forma, concluimos que ξ es un morfismo entre $\mathcal{F}|_Z$ y $\iota^{-1}(\mathcal{F})^-$.

Por último vamos a mostrar que ζ y ξ son morfismos inversos, es decir que $\xi\circ\zeta = \mathrm{id}_{\iota^{-1}(\mathcal{F})^-}$ y que $\zeta\circ\xi = \mathrm{id}_{\mathcal{F}|_Z}$, así, para cada abierto de X debemos mostrar que se cumplen las respectivas igualdades en los homomorfismos asociados a dicho abierto. Consideramos un abierto U de X y sean V un abierto de X que contiene a $U\cap Z$ y $t \in \mathcal{F}(V)$. Puesto que

$$(\xi\circ\zeta)_{U\cap Z}\big([(V,t)]\big) = \xi_{U\cap Z}\circ\zeta_{U\cap Z}\big([(V,t)]\big) = \xi_{U\cap Z}(t|_{U\cap Z}) = [(U\cap Z, t|_{U\cap Z})] = [(V,t)],$$

se sigue que $(\xi\circ\zeta)_{U\cap Z} = \mathrm{id}_{\iota^{-1}(\mathcal{F})^-(U\cap Z)}$. Ahora, sea $s \in \mathcal{F}|_Z(U\cap Z)$. Como

$$(\zeta\circ\xi)_{U\cap Z}(s) = \zeta_{U\cap Z}\circ\xi_{U\cap Z}(s) = \zeta_{U\cap Z}\big([(U\cap Z, s)]\big) = s|_{U\cap Z} = s,$$

tenemos que $(\zeta\circ\xi)_{U\cap Z} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}|_Z(U\cap Z)}$. De este modo, como U fue un abierto arbitrario de X se sigue que $\xi\circ\zeta = \mathrm{id}_{\iota^{-1}(\mathcal{F})^-}$ y $\zeta\circ\xi = \mathrm{id}_{\mathcal{F}|_Z}$. De manera particular, este hecho implica que el homomorfismo inducido $\zeta_p : \iota^{-1}(\mathcal{F})^-_p \to (\mathcal{F}|_Z)_p$ es un isomorfismo para cualquier $p \in Z$.

Ahora bien, por la propiedad universal de la gavilla asociada existe un morfismo de gavillas $\widetilde{\zeta}$: $\iota^{-1}(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}|_Z$ de modo que $\zeta = \widetilde{\zeta} \circ \theta^{\iota^{-1}(\mathcal{F})}$. De esta forma, como para todo $p \in Z$ se tiene que $\theta_p^{\iota^{-1}(\mathcal{F})}$ y ζ_p son isomorfismos se sigue que $\widetilde{\zeta}_p$ es un isomorfismo. Por lo tanto, tenemos que $\widetilde{\zeta}$ es un isomorfismo y así concluimos que $\iota^{-1}(\mathcal{F})$ y $\mathcal{F}|_Z$ son gavillas isomorfas.

Como puede apreciarse, cuando consideramos cualquier subconjunto abierto Z de X la gavilla $\iota^{-1}(\mathcal{F})$ resulta ser sólo la restricción de la gavilla $\mathcal{F}$ a dicho abierto. De esta forma, cuando trabajamos sobre cualquier subconjunto de X, no necesariamente un abierto, la gavilla $\iota^{-1}(\mathcal{F})$ es una generalización del concepto de gavilla restringida a un abierto y precisamente este hecho motiva la siguiente definición:

Definición 2.39. Sean Z un subconjunto de un espacio topológico X y $\mathcal{F}$ una gavilla sobre X. La gavilla $\iota^{-1}(\mathcal{F})$ es la *restricción de $\mathcal{F}$ a Z* y es denotada por $\mathcal{F}|_Z$.

En el Capítulo 5 retomaremos el concepto de la restricción de gavillas en el sentido de la definición anterior y estudiaremos su aplicación a las inmersiones cerradas entre espacios anillados y esquemas.

Para finalizar esta sección vamos a estudiar un caso especial de la gavilla imagen inversa. Sean $f : X \to Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos, $\mathcal{O}_Y$ una gavilla de anillos sobre Y y $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_Y$-módulo. En primer lugar, vamos a mostrar que $f^{-1}(\mathcal{G})^-$ tiene una estructura de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^-$-módulo. Sea U un abierto de X. Definimos la operación

$$\begin{array}{rcl} \cdot : f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^-(U) \times f^{-1}(\mathcal{G})^-(U) & \to & f^{-1}(\mathcal{G})^-(U) \\ ([(V,\lambda)],[(W,s)]) & \mapsto & [(V\cap W, \rho_{\mathcal{O}_Y}{}^V_{V\cap W}(\lambda)\cdot \rho_{\mathcal{G}}{}^W_{V\cap W}(s))] \end{array}$$

Comenzaremos probando que la operación anterior está bien definida: sean V, V', W y W' abiertos de Y que contienen a $f(U)$ y sean $\lambda \in \mathcal{O}_Y(V)$, $\lambda' \in \mathcal{O}_Y(V')$, $s \in \mathcal{G}(W)$ y $s' \in \mathcal{G}(W')$ tales que $([(V,\lambda)],[(W,s)]) = ([(V',\lambda')],[(W',s')])$. Como $[(V,\lambda)] = [(V',\lambda')]$ existe un abierto Z de Y de modo que $f(U) \subseteq Z \subseteq V \cap V'$ y $\rho_{\mathcal{O}_Y}{}^V_Z(\lambda) = \rho_{\mathcal{O}_Y}{}^{V'}_Z(\lambda')$; asimismo, como $[(W,s)] = [(W',s')]$ existe un abierto T de Y tal que $f(U) \subseteq T \subseteq W \cap W'$ y $\rho_{\mathcal{G}}{}^W_T(s) = \rho_{\mathcal{G}}{}^{W'}_T(s')$. Luego, el abierto $Z\cap T$ de Y asegura que $[(V\cap W, \rho_{\mathcal{O}_Y}{}^V_{V\cap W}(\lambda)\cdot\rho_{\mathcal{G}}{}^W_{V\cap W}(s))] = [(V'\cap W', \rho_{\mathcal{O}_Y}{}^{V'}_{V'\cap W'}(\lambda')\cdot\rho_{\mathcal{G}}{}^{W'}_{V'\cap W'}(s'))]$: en efecto, $Z\cap T$ es un abierto de Y tal que $f(U) \subseteq Z\cap T \subseteq (V\cap W)\cap(V'\cap W')$ y además satisface que

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{G}}{}^{V\cap W}_{Z\cap T}\left(\rho_{\mathcal{O}_Y}{}^V_{V\cap W}(\lambda)\cdot\rho_{\mathcal{G}}{}^W_{V\cap W}(s)\right) &= \rho_{\mathcal{O}_Y}{}^V_{Z\cap T}(\lambda)\cdot\rho_{\mathcal{G}}{}^W_{Z\cap T}(s) \\ &= (\rho_{\mathcal{O}_Y}{}^Z_{Z\cap T}\circ\rho_{\mathcal{O}_Y}{}^V_Z(\lambda))\cdot(\rho_{\mathcal{G}}{}^T_{Z\cap T}\circ\rho_{\mathcal{G}}{}^W_T(s)) \\ &= (\rho_{\mathcal{O}_Y}{}^Z_{Z\cap T}\circ\rho_{\mathcal{O}_Y}{}^{V'}_Z(\lambda'))\cdot(\rho_{\mathcal{G}}{}^T_{Z\cap T}\circ\rho_{\mathcal{G}}{}^{W'}_T(s')) \\ &= \rho_{\mathcal{O}_Y}{}^{V'}_{Z\cap T}(\lambda')\cdot\rho_{\mathcal{G}}{}^{W'}_{Z\cap T}(s') \\ &= \rho_{\mathcal{G}}{}^{V'\cap W'}_{Z\cap T}\left(\rho_{\mathcal{O}_Y}{}^{V'}_{V'\cap W'}(\lambda')\cdot\rho_{\mathcal{G}}{}^{W'}_{V'\cap W'}(s')\right). \end{aligned}$$

Ahora, probaremos que la operación definida anteriormente dota a $f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U)$ con una estructura de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^{-}(U)$-módulo: sea V un abierto de Y que contiene a $f(U)$, sean λ y λ' elementos de $\mathcal{O}_Y(V)$ y sean s y s' elementos de $\mathcal{G}(V)$. Nótese que podemos suponer que todas las secciones involucradas se encuentran sobre el mismo abierto.

$$\begin{aligned}
[(V,\lambda)]\cdot\big([(V,s)]+[(V,s')]\big) &= [(V,\lambda(s+s'))]\\
&= [(V,\lambda s+\lambda s')]\\
&= [(V,\lambda s)]+[(V,\lambda s')]\\
&= [(V,\lambda)]\cdot[(V,s)]+[(V,\lambda)]\cdot[(V,s')].\\
\big([(V,\lambda)]+[(V,\lambda')]\big)\cdot[(V,s)] &= [(V,(\lambda+\lambda')s)]\\
&= [(V,\lambda s+\lambda' s)]\\
&= [(V,\lambda s)]+[(V,\lambda' s)]\\
&= [(V,\lambda)]\cdot[(V,s)]+[(V,\lambda')]\cdot[(V,s)].\\
\big([(V,\lambda)][(V,\lambda')]\big)\cdot[(V,s)] &= [(V,(\lambda\lambda')s)]\\
&= [(V,\lambda(\lambda' s))]\\
&= [(V,\lambda)]\cdot[(V,\lambda' s)]\\
&= [(V,\lambda)]\cdot\big([(V,\lambda')]\cdot[(V,s)]\big).
\end{aligned}$$

$$[(Y,1_{\mathcal{O}_Y(Y)})]\cdot[(V,s)] = [(V,1_{\mathcal{O}_Y(V)}s)] = [(V,s)].$$

Así, tenemos que $f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U)$ tiene una estructura de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^{-}(U)$-módulo.

Lo único que resta a probar para tener que $f^{-1}(\mathcal{G})^{-}$ es un $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^{-}$-módulo es la compatibilidad del producto externo con las restricciones de pregavillas. Sean U y V abiertos de X tales que $V \subseteq U$. Vamos a probar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^{-}(U)\times f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^{-}}{}^{U}_{V}\times\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^{-}}{}^{U}_{V}"'] & f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(U) \arrow[d, "\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^{-}}{}^{U}_{V}"] \\
f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^{-}(V)\times f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(V) \arrow[r] & f^{-1}(\mathcal{G})^{-}(V)
\end{tikzcd}$$

Sea W un abierto de Y que contiene a $f(U)$ y sean $\lambda \in \mathcal{O}_Y(W)$ y $s \in \mathcal{G}(W)$.

$$\begin{aligned}
\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^{-}}{}^{U}_{V}([(W,\lambda)]\cdot[(W,s)]) &= \rho_{f^{-1}(\mathcal{G})}{}^{U}_{V}([(W,\lambda s)])\\
&= [(W,\lambda s)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [(W,\lambda)]\cdot[(W,s)] \\ &= \rho_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^-}{}^U_V([(W,\lambda)])\cdot\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})^-}{}^U_V([(W,s)]). \end{aligned}$$

De esta forma, concluimos que $f^{-1}(\mathcal{G})^-$ es un $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^-$-módulo.

Lo siguiente que haremos será probar que $f^{-1}(\mathcal{G})$ tiene una estructura de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-módulo. Recordemos que el hecho que $f^{-1}(\mathcal{G})^-$ tiene una estructura de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^-$-módulo implica que $f^{-1}(\mathcal{G})^-_p$ es un $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^-_p$-módulo para cada $p\in X$. Sea U un abierto de X. Definimos la operación

$$\begin{aligned} \cdot : f^{-1}(\mathcal{O}_Y)(U)\times f^{-1}(\mathcal{G})(U) &\to f^{-1}(\mathcal{G})(U) \\ (\lambda,s) &\mapsto \lambda s\ : U\to\prod_{q\in U} f^{-1}(\mathcal{G})^-_q \\ &\qquad\qquad p\mapsto \lambda(p)\cdot s(p) \end{aligned}$$

Comenzaremos mostrando que la operación anterior está bien definida:

- Sean $\lambda\in f^{-1}(\mathcal{G})(U)$ y $s\in f^{-1}(\mathcal{G})(U)$. Vamos a mostrar que λs cumple con las condiciones requeridas de un elemento de $f^{-1}(\mathcal{G})(U)$. Sea $p\in X$. Sabemos que $\lambda(p)\in f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^-_p$ y que $s(p)\in f^{-1}(\mathcal{G})^-_p$. Luego, como $f^{-1}(\mathcal{G})^-_p$ tiene una estructura de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^-_p$-módulo se sigue de manera inmediata que $\lambda(p)\cdot s(p)\in f^{-1}(\mathcal{G})^-_p$.
  Por otro lado, como $\lambda\in f^{-1}(\mathcal{G})(U)$ se sigue que existe un abierto V de X que contiene a p, está contenido en U y existe $\mu\in f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^-(V)$ tales que para todo $q\in V$ se tiene que $\lambda(q)=\mu_q$; asimismo, como $s\in f^{-1}(\mathcal{G})(U)$ se sigue que existe un abierto W de X que contiene a p, está contenido en U y existe $t\in f^{-1}(\mathcal{G})^-(W)$ tal que para todo $q\in W$ se tiene que $s(q)=t_q$. Afirmamos que el abierto $V\cap W$ y la sección μt de $f^{-1}(\mathcal{G})^-(V\cap W)$ son los elementos indicados: en efecto, $V\cap W$ es un abierto de X que contiene a p, claramente μt es una sección de $f^{-1}(\mathcal{G})^-(V\cap W)$ (pues $f^{-1}(\mathcal{G})^-$ tiene una estructura de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^-$-módulo) y además para cada $q\in V\cap W$ tenemos que $(\lambda s)(q)=\lambda(q)\cdot s(q)=\mu_q\cdot t_q=(\mu t)_q$.
  De esta forma, tenemos que $\lambda s\in f^{-1}(\mathcal{G})(U)$.
- Sean $\lambda,\lambda'\in f^{-1}(\mathcal{O}_Y)(U)$ y $s,s'\in f^{-1}(\mathcal{G})(U)$ tales que $(\lambda,s)=(\lambda',s')$. Sea $p\in U$. Como $\lambda=\lambda'$ y $s=s'$ se sigue que $\lambda(p)=\lambda'(p)$ y que $s(p)=s'(p)$. Así, como $(\lambda(p),s(p))=(\lambda'(p),s'(p))$ se sigue que $\lambda(p)\cdot s(p)=\lambda'(p)\cdot s'(p)$ y esto implica que $\lambda s=\lambda's'$.

Por lo tanto, concluimos que la operación anterior está bien definida. Ahora, mostraremos que dicha operación otorga a $f^{-1}(\mathcal{G})(U)$ con una estructura de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)(U)$-módulo: sean $\lambda,\lambda'\in f^{-1}(\mathcal{O}_Y)(U)$, $s,s'\in f^{-1}(\mathcal{G})(U)$ y $p\in X$.

$$(\lambda(s+s'))(p)=\lambda(p)\cdot(s+s')(p)=\lambda(p)\cdot s(p)+\lambda(p)\cdot s'(p)=(\lambda s+\lambda s')(p).$$

$$((\lambda+\lambda')s)(p)=(\lambda+\lambda')(p)\cdot s(p)=\lambda(p)\cdot s(p)+\lambda'(p)\cdot s(p)=(\lambda s+\lambda' s)(p).$$

$$((\lambda\lambda')s)(p) = (\lambda\lambda')(p) \cdot s(p) = \big(\lambda(p) \cdot \lambda'(p)\big) \cdot s(p) = \lambda(p) \cdot (\lambda'(p) \cdot s(p)) = \big(\lambda(\lambda' s)\big)(p).$$

$$(1_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)(U)} s)(p) = 1_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)(U)}(p) \cdot s(p) = 1_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^-_p} \cdot s(p) = s(p).$$

Las igualdades anteriores implican que $f^{-1}(\mathcal{G})(U)$ tiene una estructura de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)(U)$-módulo. Lo único que nos resta a probar para concluir que $f^{-1}(\mathcal{G})$ es un $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-módulo es probar la compatibilidad del producto externo con las restricciones de gavilla. Sean U y V abiertos de X tales que $V \subseteq U$. Vamos a probar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(\mathcal{O}_Y)(U) \times f^{-1}(\mathcal{G})(U) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)}{}^U_V \times \rho_{f^{-1}(\mathcal{G})}{}^U_V"'] & f^{-1}(\mathcal{G})(U) \arrow[d, "\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})}{}^U_V"] \\
f^{-1}(\mathcal{O}_Y)(V) \times f^{-1}(\mathcal{G})(V) \arrow[r] & f^{-1}(\mathcal{G})(V)
\end{tikzcd}$$

Sean $\lambda \in f^{-1}(\mathcal{O}_Y)(U)$ y $s \in f^{-1}(\mathcal{G})(U)$. Vamos a probar la igualdad $\rho_{\mathcal{G}}{}^U_V(\lambda s) = \rho_{\mathcal{O}_Y}{}^U_V(\lambda)\rho_{\mathcal{G}}{}^U_V(s)$. Como ambas aplicaciones tienen el mismo dominio y codominio, sólo resta probar que tienen la misma regla de asignación. Sea $p \in X$,

$$\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})}{}^U_V(\lambda s)(p) = (\lambda s)(p) = \lambda(p) \cdot s(p) = \rho_{\mathcal{O}_Y}{}^U_V(\lambda)(p) \cdot \rho_{f^{-1}(\mathcal{G})}{}^U_V(s)(p) = \big(\rho_{\mathcal{O}_Y}{}^U_V(\lambda)\rho_{f^{-1}(\mathcal{G})}{}^U_V(s)\big)(p).$$

De esta forma, concluimos que $f^{-1}(\mathcal{G})$ tiene estructura de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-módulo. Todo esto que hemos realizado culmina en el siguiente resultado:

Proposición 2.40. *Sean $f : X \to Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos, $\mathcal{O}_Y$ una gavilla de anillos sobre Y y $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_Y$-módulo. La gavilla $f^{-1}(\mathcal{G})$ (respectivamente, la pregavilla $f^{-1}(\mathcal{G})^-$) tiene una estructura de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-módulo (respectivamente, tiene una estructura de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^-$-módulo).*

4. El Producto Tensorial de $\mathcal{O}_X$-Módulos

Recordemos que en la Teoría de Módulos a partir de una pareja de módulos sobre un anillo siempre es posible construir su producto tensorial sobre dicho anillo. En la Teoría de Gavillas podemos hablar de una noción análoga: el producto tensorial de gavillas de módulos. En esta sección nos daremos a la tarea de construir el producto tensorial de una pareja de gavillas de módulos y estudiaremos algunas de sus propiedades.

Vamos a fijar una pareja $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$. A partir de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ definiremos una pregavilla que denotaremos por $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-$ de la siguiente manera: para cada abierto U de X asignamos $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-(U) = \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ y para cualesquier abiertos U

y V de X de modo que $V \subseteq U$ asignamos $\rho_{(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-}{}^{U}_{V} = \rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{V} \otimes \rho_{\mathcal{G}}{}^{U}_{V}$. Bajo estas condiciones vamos a mostrar que $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-$ es una pregavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre $(X, \mathcal{O}_X)$:

En primer lugar, para cada abierto U de X, como $\mathcal{F}(U)$ y $\mathcal{G}(U)$ son $\mathcal{O}_X(U)$-módulos podemos considerar el producto tensorial $\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ que tiene una estructura natural de $\mathcal{O}_X(U)$-módulo. Por lo tanto, para cada abierto U de X se tiene que $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo. Ahora, probaremos que $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-$ satisface las condiciones de pregavilla:

PG1. Puesto que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son pregavillas y $\mathcal{O}_X$ es una gavilla, tenemos que $\mathcal{F}(\emptyset) = \mathcal{G}(\emptyset) = \mathcal{O}_X(\emptyset) = \{0\}$, esto implica que $\mathcal{F}(\emptyset) \otimes_{\mathcal{O}_X(\emptyset)} \mathcal{G}(\emptyset) = \{0\}$ y por lo tanto $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-(\emptyset) = \{0\}$.

PG2. Sea U un abierto de X.

$$\rho_{(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-}{}^{U}_{U} = \rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{U} \otimes \rho_{\mathcal{G}}{}^{U}_{U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{G}(U)} = \mathrm{id}_{(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-(U)}.$$

PG3. Sean U, V y W abiertos de X tales que $W \subseteq V \subseteq U$.

$$\begin{aligned}
\rho_{(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-}{}^{U}_{W} &= \rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{W} \otimes \rho_{\mathcal{G}}{}^{U}_{W} \\
&= (\rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{W} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{V}) \otimes (\rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{W} \circ \rho_{\mathcal{G}}{}^{U}_{V}) \\
&= (\rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{W} \otimes \rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{W}) \circ (\rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{V} \otimes \rho_{\mathcal{G}}{}^{U}_{V}) \\
&= \rho_{(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-}{}^{V}_{W} \circ \rho_{(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-}{}^{U}_{V}.
\end{aligned}$$

Lo único que nos resta probar para mostrar que $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-$ es una pregavilla de módulos es comprobar la compatibilidad del producto externo con las restricciones de pregavilla. Sean U y V abiertos de X tales que $V \subseteq U$. Vamos a probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) \times (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-(U) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{O}_X}{}^{U}_{V} \times \rho_{(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-}{}^{U}_{V}"'] & (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-(U) \arrow[d, "\rho_{(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-}{}^{U}_{V}"] \\
\mathcal{O}_X(V) \times (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-(V) \arrow[r] & (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-(V)
\end{tikzcd}$$

Para mostrar que el diagrama anterior conmuta, será suficiente con mostrar que la conmutatividad se satisface cuando consideramos un generador de $\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$. Sean $s \in \mathcal{F}(U)$, $t \in \mathcal{G}(U)$ y $\lambda \in \mathcal{O}_X(U)$.

$$\begin{aligned}
\rho_{(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-}{}^{U}_{V}(\lambda \cdot (s \otimes t)) &= \rho_{(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-}{}^{U}_{V}(\lambda s \otimes t) \\
&= \rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{V}(\lambda s) \otimes \rho_{\mathcal{G}}{}^{U}_{V}(t) \\
&= \rho_{\mathcal{O}_X}{}^{U}_{V}(\lambda) \rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{V}(s) \otimes \rho_{\mathcal{G}}{}^{U}_{V}(t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho_{O_X}{}^U_V(\lambda) \cdot \left(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_V(s) \otimes \rho_{\mathcal{G}}{}^U_V(t)\right) \\
&= \rho_{O_X}{}^U_V(\lambda) \cdot \rho_{(\mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G})^-}{}^U_V(s \otimes t).
\end{aligned}
$$

De esta forma, concluimos que $(\mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G})^-$ es una pregavilla de O_X-módulos.

Ahora que hemos construido una nueva pregavilla de módulos, una de las preguntas naturales que puede surgir es qué sucede con sus módulos de gérmenes. El siguiente resultado nos brindará una respuesta a esta interrogante.

Proposición 2.41. *Con las notaciones anteriores, para cada $p \in X$ existe un $O_{X,p}$-isomorfismo entre $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})^-_p$ y $\mathcal{F}_p \otimes_{O_{X,p}} \mathcal{G}_p$.*

Demostración. Sean $p \in X$ y U un abierto de X que contiene a p. Consideramos la siguiente asignación:

$$
\begin{aligned}
\varphi_U : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{G}(U) &\to \mathcal{F}_p \otimes_{O_{X,p}} \mathcal{G}_p \\
(s,t) &\mapsto s_p \otimes t_p
\end{aligned}
$$

Observemos que φ_U es una aplicación bien definida: sean $s, s' \in \mathcal{F}(U)$ y $t, t' \in \mathcal{G}(U)$ tales que $(s,t) = (s',t')$. Como $s = s'$ y $t = t'$ se sigue que $s_p = s'_p$ y que $t_p = t'_p$. Luego, la igualdad $(s_p, t_p) = (s'_p, t'_p)$ implica que $s_p \otimes t_p = s'_p \otimes t'_p$ y por lo tanto concluimos que φ_U está bien definida. Ahora, mostraremos que φ_U es una aplicación $O_X(U)$-bilineal. Sean $s, s' \in \mathcal{F}(U)$, $t, t' \in \mathcal{G}(U)$ y $\lambda, \mu \in O_X(U)$.

$$\varphi_U(\lambda s + \mu s', t) = (\lambda s + \mu s')_p \otimes t_p = \lambda_p(s_p \otimes t_p) + \mu_p(s'_p \otimes t_p) = \lambda \cdot \varphi_U(s,t) + \mu \cdot \varphi_U(s',t).$$

$$\varphi_U(s, \lambda t + \mu t') = s_p \otimes (\lambda t + \mu t')_p = \lambda_p(s_p \otimes t_p) + \mu_p(s_p \otimes t'_p) = \lambda \cdot \varphi_U(s,t) + \mu \cdot \varphi_U(s,t').$$

Por lo tanto, por la propiedad universal del producto tensorial existe una única aplicación $O_X(U)$-lineal $\widetilde{\varphi_U}$ definida en los generadores de $\mathcal{F}(U) \otimes_{O_X(U)} \mathcal{G}(U)$ de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\varphi_U} : \mathcal{F}(U) \otimes_{O_X(U)} \mathcal{G}(U) &\to \mathcal{F}_p \otimes_{O_{X,p}} \mathcal{G}_p \\
s \otimes t &\mapsto s_p \otimes t_p
\end{aligned}
$$

Con la ayuda de la aplicación anterior vamos a definir una aplicación $O_{X,p}$-lineal entre $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})^-_p$ y $\mathcal{F}_p \otimes_{O_{X,p}} \mathcal{G}_p$. Bastará definir dicha aplicación para los gérmenes de los elementos generadores de $(\mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G})^-(U)$ para cualquier abierto U de X que contenga a p. Consideramos la siguiente asignación:

$$
\begin{aligned}
\zeta : (\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})^-_p &\to \mathcal{F}_p \otimes_{O_{X,p}} \mathcal{G}_p \\
[(U, s \otimes t)] &\mapsto \widetilde{\varphi_U}(s \otimes t)
\end{aligned}
$$

En primer lugar, mostraremos que ζ es una aplicación bien definida: sean U y U' abiertos de X que contienen a p y sean $s \in \mathcal{F}(U)$, $s' \in \mathcal{F}(U')$, $t \in \mathcal{G}(U)$ y $t' \in \mathcal{G}(U')$ tales que $[(U, s \otimes t)] = [(U', s' \otimes t')]$. La igualdad anterior nos asegura la existencia de un abierto V de X que contiene a p, está contenido en $U \cap U'$ y es tal que $\rho_{(\mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G})^-}{}^{U}_{V}(s \otimes t) = \rho_{(\mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G})^-}{}^{U'}_{V}(s' \otimes t')$, es decir, $\rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{V}(s) \otimes \rho_{\mathcal{G}}{}^{U}_{V}(t) = \rho_{\mathcal{F}}{}^{U'}_{V}(s') \otimes \rho_{\mathcal{G}}{}^{U'}_{V}(t')$. Ahora bien, de la igualdad anterior y del hecho de que la aplicación $\widetilde{\varphi_V}$ está bien definida se sigue que $\left(\rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{V}(s)\right)_p \otimes \left(\rho_{\mathcal{G}}{}^{U}_{V}(t)\right)_p = \left(\rho_{\mathcal{F}}{}^{U'}_{V}(s')\right)_p \otimes \left(\rho_{\mathcal{G}}{}^{U'}_{V}(t')\right)_p$, es decir, $s_p \otimes t_p = s'_p \otimes t'_p$. Por lo tanto, concluimos que ζ es una aplicación bien definida.

Ahora, vamos a mostrar que ζ es una aplicación $O_{X,p}$-lineal: sea U un abierto de X que contiene a p y sean $s, s' \in \mathcal{F}(U)$, $t, t' \in \mathcal{G}(U)$ y $\lambda, \mu \in O_X(U)$. Nótese que podemos suponer que todas las secciones se encuentran sobre el mismo abierto.

$$\begin{aligned}
\zeta\big([(U,\lambda)] \cdot [(U, s \otimes t)] + [(U,\mu)] \cdot [(U, s' \otimes t')]\big) &= \zeta\big([(U, (\lambda s) \otimes t + (\mu s') \otimes t')]\big) \\
&= \widetilde{\varphi_U}((\lambda s) \otimes t + (\mu s') \otimes t') \\
&= \widetilde{\varphi_U}((\lambda s) \otimes t) + \widetilde{\varphi_U}((\mu s') \otimes t') \\
&= \lambda \cdot \widetilde{\varphi_U}(s \otimes t) + \mu \cdot \widetilde{\varphi_U}(s' \otimes t') \\
&= \lambda_p \cdot \zeta([(U, s \otimes t)]) + \mu_p \cdot \zeta([(U, s' \otimes t')]).
\end{aligned}$$

Lo siguiente que haremos será definir una aplicación $O_{X,p}$-lineal entre $\mathcal{F}_p \otimes_{O_{X,p}} \mathcal{G}_p$ y $(\mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G})^-_p$. Consideramos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rccc}
\xi : & \mathcal{F}_p \times \mathcal{G}_p & \to & (\mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G})^-_p \\
& ([(U,s)], [(V,t)]) & \mapsto & [(U \cap V, \rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{U\cap V}(s) \otimes \rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{U \cap V}(t))]
\end{array}$$

Comenzaremos probando que ξ es una aplicación bien definida: sean U, U', V y V' abiertos de X que contienen a p y sean $s \in \mathcal{F}(U)$, $s' \in \mathcal{F}(U')$, $t \in \mathcal{G}(V)$ y $t' \in \mathcal{G}(V')$ tales que $([(U,s)], [(V,t)]) = ([(U',s')], [(V',t')])$. Como $[(U,s)] = [(U',s')]$ y $[(V,t)] = [(V',t')]$ se sigue que existen abiertos W_1 y W_2 de X que contienen a p tales que $W_1 \subseteq U \cap U'$, $W_2 \subseteq V \cap V'$, $\rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{W_1}(s) = \rho_{\mathcal{F}}{}^{U'}_{W_1}(s')$ y $\rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{W_2}(t) = \rho_{\mathcal{G}}{}^{V'}_{W_2}(t')$. Observemos que $W_1 \cap W_2$ es un abierto de X que contiene a p, está contenido en $(U \cap V) \cap (U' \cap V')$ y además satisface que

$$\begin{aligned}
\rho_{(\mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G})^-}{}^{U\cap V}_{W_1 \cap W_2}\big(\rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{U\cap V}(s) \otimes \rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{U\cap V}(t)\big) &= \big(\rho_{\mathcal{F}}{}^{U\cap V}_{W_1\cap W_2} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{U\cap V}(s)\big) \otimes \big(\rho_{\mathcal{G}}{}^{U\cap V}_{W_1\cap W_2} \circ \rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{U\cap V}(t)\big) \\
&= \rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{W_1\cap W_2}(s) \otimes \rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{W_1\cap W_2}(t) \\
&= \rho_{\mathcal{F}}{}^{U'}_{W_1\cap W_2}(s') \otimes \rho_{\mathcal{G}}{}^{V'}_{W_1\cap W_2}(t') \\
&= \big(\rho_{\mathcal{F}}{}^{U'\cap V'}_{W_1\cap W_2} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^{U'}_{U'\cap V'}(s')\big) \otimes \big(\rho_{\mathcal{G}}{}^{U'\cap V'}_{W_1\cap W_2} \circ \rho_{\mathcal{G}}{}^{V'}_{U'\cap V'}(t')\big) \\
&= \rho_{(\mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G})^-}{}^{U'\cap V'}_{W_1\cap W_2}\big(\rho_{\mathcal{F}}{}^{U'}_{U'\cap V'}(s') \otimes \rho_{\mathcal{G}}{}^{V'}_{U'\cap V'}(t')\big).
\end{aligned}$$

De este modo, tenemos que $[(U\cap V, \rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{U\cap V}(s)\otimes\rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{U\cap V}(t))] = [(U'\cap V', \rho_{\mathcal{F}}{}^{U'}_{U'\cap V'}(s')\otimes\rho_{\mathcal{G}}{}^{V'}_{U'\cap V'}(t'))]$ y así concluimos que ξ es una aplicación bien definida.

Ahora, probaremos que ξ es una aplicación $\mathcal{O}_{X,p}$-bilineal. Sea U un abierto de X que contiene a p y sean $s, s' \in \mathcal{F}(U)$, $t, t' \in \mathcal{G}(U)$ y $\lambda, \mu \in \mathcal{O}_X(U)$. Nótese que podemos suponer que todas las secciones se encuentran sobre el mismo abierto.

$$
\begin{aligned}
\xi([(U,\lambda)]\cdot[(U,s)]+[(U,\mu)]\cdot[(U,s')],[(U,t)]) &= \xi([(U,\lambda s+\mu s')],[(U,t)])\\
&= [(U,(\lambda s+\mu s')\otimes t)]\\
&= \lambda_p\cdot[(U,s\otimes t)]+\mu_p\cdot[(U,s'\otimes t)]\\
&= \lambda_p\cdot\xi([(U,s)],[(U,t)])+\\
&\quad\ \mu_p\cdot\xi([(U,s')],[(U,t)]).\\
\xi([(U,s)],[(U,\lambda)]\cdot[(U,t)]+[(U,\mu)]\cdot[(U,t')]) &= \xi([(U,s)],[(U,\lambda t+\mu t')])\\
&= [(U,s\otimes(\lambda t+\mu t'))]\\
&= \lambda_p\cdot[(U,s\otimes t)]+\mu_p\cdot[(U,s\otimes t')]\\
&= \lambda_p\cdot\xi([(U,s)],[(U,t)])+\\
&\quad\ \mu_p\cdot\xi([(U,s)],[(U,t')]).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, por la propiedad universal del producto tensorial existe una única aplicación $\mathcal{O}_{X,p}$-lineal $\widetilde{\xi}$ definida en los generadores de $\mathcal{F}_p\otimes_{\mathcal{O}_{X,p}}\mathcal{G}_p$ de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\xi}:\quad \mathcal{F}_p\otimes_{\mathcal{O}_{X,p}}\mathcal{G}_p &\quad\to\quad (\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{G})^-_p\\
[(U,s)]\otimes[(V,t)] &\quad\mapsto\quad [(U\cap V,\rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{U\cap V}(s)\otimes\rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{U\cap V}(t))]
\end{aligned}
$$

Lo único que nos resta a probar es que ζ y $\widetilde{\xi}$ son aplicaciones inversas. Comenzaremos mostrando que $\widetilde{\xi}\circ\zeta = \mathrm{id}_{(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{G})^-_p}$: sean U un abierto de X que contiene a p, $s\in\mathcal{F}(U)$ y $t\in\mathcal{G}(U)$,

$$
\widetilde{\xi}\circ\zeta([(U,s\otimes t)]) = \widetilde{\xi}(\widetilde{\varphi_U}(s\otimes t)) = \widetilde{\xi}([(U,s)]\otimes[(U,t)]) = [(U,s\otimes t)].
$$

Consecuentemente, tenemos que $\widetilde{\xi}\circ\zeta = \mathrm{id}_{(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{G})^-_p}$. Ahora, probaremos que $\zeta\circ\widetilde{\xi} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_p\otimes_{\mathcal{O}_{X,p}}\mathcal{G}_p}$: sean U y V abiertos de X que contienen a p y sean $s\in\mathcal{F}(U)$ y $t\in\mathcal{G}(V)$,

$$
\begin{aligned}
\zeta\circ\widetilde{\xi}([(U,s)]\otimes[(V,t)]) &= \zeta([(U\cap V,\rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{U\cap V}(s)\otimes\rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{U\cap V}(t))])\\
&= [(U\cap V,\rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{U\cap V}(s))]\otimes[(U\cap V,\rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{U\cap V}(t))]\\
&= [(U,s)]\otimes[(V,t)].
\end{aligned}
$$

De esta forma se tiene que $\zeta\circ\widetilde{\xi} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_p\otimes_{\mathcal{O}_{X,p}}\mathcal{G}_p}$. Por lo tanto, concluimos que existe un $\mathcal{O}_{X,p}$-isomorfismo entre $(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{G})^-_p$ y $\mathcal{F}_p\otimes_{\mathcal{O}_{X,p}}\mathcal{G}_p$. ❑

Ahora bien, en general la construcción anterior no siempre da como resultado una gavilla, el siguiente ejemplo es una muestra de ello.

Ejemplo 2.42. Consideremos a $X = \{p, q\}$ dotado con la topología discreta y a K un campo. Vamos a tomar a las gavillas rascacielos K_X^p y K_X^q y a la gavilla constante K_X (esta es la gavilla asociada a la pregavilla constante K_X^-) sobre X. Observemos que para $r \in \{p, q\}$ podemos definir un morfismo de pregavillas $\varphi : K_X^- \to K_X^r$ dado de la siguiente forma: para cada abierto U de X asignamos

$$\varphi_U = \begin{cases} \mathrm{id}_K & \text{si } r \in U \\ 0_K & \text{si } r \notin U \text{ y } U \neq \emptyset, \text{ o si } U = \emptyset \end{cases}$$

Luego, por la propiedad universal de la gavilla asociada podemos definir un morfismo $K_X \to K_X^r$. Gracias a este morfismo podemos dotar a K_X^r con una estructura de módulo sobre K_X. Ahora bien, recordemos que por construcción se tiene que $K_X(\{r\})$ es el conjunto de todas las aplicaciones con dominio en $\{r\}$ y codominio K que son localmente constantes, de este modo, de manera inmediata tenemos que $K_X(\{r\}) \cong K$. Así, como X esta dotado con la topología discreta se tiene que $K_X(U) \cong K$ para cualquier abierto U de X.

Lo que mostraremos a continuación es que $(K_X^p \otimes_{K_X} K_X^q)^-$ no es una gavilla. Consideremos a los abiertos $\{p\}$ y $\{q\}$ de X. De la definición de la pregavilla $(K_X^p \otimes_{K_X} K_X^q)^-$ se sigue que

$$(K_X^p \otimes_{K_X} K_X^q)^-(\{p\}) = \{0\} = (K_X^p \otimes_{K_X} K_X^q)^-(\{q\}).$$
$$(K_X^p \otimes_{K_X} K_X^q)^-(X) \cong K.$$

Por otro lado, consideremos al elemento $1_K \otimes 1_K$ de $(K_X^p \otimes_{K_X} K_X^q)^-(X)$. Observemos que dicho elemento satisface las siguientes igualdades:

$$\rho_{(K_X^p \otimes_{K_X} K_X^q)^-}{}^{X}_{\{p\}}(1_K \otimes 1_K) = 0_{(K_X^p \otimes_{K_X} K_X^q)^-(\{p\})}.$$
$$\rho_{(K_X^p \otimes_{K_X} K_X^q)^-}{}^{X}_{\{q\}}(1_K \otimes 1_K) = 0_{(K_X^p \otimes_{K_X} K_X^q)^-(\{q\})}.$$

Si $(K_X^p \otimes_{K_X} K_X^q)^-$ fuese una gavilla, entonces las igualdades anteriores junto con el hecho de que X tiene por topología a la discreta implicarían que $1_K \otimes 1_K = 0_{(K_X^p \otimes_{K_X} K_X^q)^-(X)}$ y con ello tendríamos que $(K_X^p \otimes_{K_X} K_X^q)^-(X) = \{0\}$ lo cual es absurdo. De esta forma, concluimos que $(K_X^p \otimes_{K_X} K_X^q)^-$ es una pregavilla pero no una gavilla.

Para obtener una gavilla de módulos a través de la construcción realizada anteriormente vamos a considerar la gavilla asociada a dicha pregavilla.

Definición 2.43. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ módulos sobre $\mathcal{O}_X$ donde $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio anillado. El *producto tensorial de* $\mathcal{F}$ *y* $\mathcal{G}$ denotado por $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ es la gavilla asociada a la pregavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-$.

El siguiente resultado nos muestra la relación que existe entre la restricción del producto tensorial de gavillas con el producto tensorial de las correspondientes restricciones de gavillas.

Lema 2.44. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ módulos sobre $\mathcal{O}_X$ donde $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio anillado. Para todo abierto U de X existe un isomorfismo entre las gavillas $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})\big|_U$ y $\mathcal{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{G}|_U$.*

Demostración. Para mostrar el isomorfismo entre las gavillas deseadas mostraremos que existe un isomorfismo entre sus módulos de gérmenes para cada punto de X. Sea $p \in X$.

$$\left((\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})\big|_U\right)_p \cong (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_p \cong \mathcal{F}_p \otimes_{\mathcal{O}_{X,p}} \mathcal{G}_p \cong (\mathcal{F}|_U)_p \otimes_{\mathcal{O}_{U,p}} (\mathcal{G}|_U)_p \cong (\mathcal{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{G}|_U)_p.$$

Por lo tanto, concluimos que $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})\big|_U \cong \mathcal{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{G}|_U$. ❏

Recordemos que en la Proposición 2.28 obtuvimos una caracterización del soporte de una gavilla de módulos finitamente generada en el caso en que trabajamos con un espacio localmente anillado. Utilizando este resultado podemos dar una caracterización muy agradable del soporte del producto tensorial de gavillas finitamente generadas sobre un espacio localmente anillado.

Proposición 2.45. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ módulos finitamente generados sobre $\mathcal{O}_X$ donde $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio localmente anillado. Se tiene que*

$$\operatorname{Supp}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}) = \operatorname{Supp}(\mathcal{F}) \cap \operatorname{Supp}(\mathcal{G}).$$

Demostración. Sea $p \in X$. Como $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son $\mathcal{O}_X$-módulos finitamente generados se sigue que $\mathcal{F}_p$ y $\mathcal{G}_p$ son finitamente generados sobre el anillo local $(\mathcal{O}_{X,p}, \mathfrak{m}_{X,p})$. Luego, utilizando las Proposiciones 2.28 y A.24 se tiene que

$$\begin{aligned}
p \in \operatorname{Supp}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}) &\iff \frac{(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_p}{\mathfrak{m}_{X,p}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_p} \neq \{0\} \\
&\iff \frac{\mathcal{F}_p \otimes_{\mathcal{O}_{X,p}} \mathcal{G}_p}{\mathfrak{m}_{X,p}(\mathcal{F}_p \otimes_{\mathcal{O}_{X,p}} \mathcal{G}_p)} \neq \{0\} \\
&\iff \mathcal{F}_p \neq \{0_{\mathcal{F}_p}\} \text{ y } \mathcal{G}_p \neq \{0_{\mathcal{G}_p}\} \\
&\iff p \in \operatorname{Supp}(\mathcal{F}) \text{ y } p \in \operatorname{Supp}(\mathcal{G}) \\
&\iff p \in \operatorname{Supp}(\mathcal{F}) \cap \operatorname{Supp}(\mathcal{G}).
\end{aligned}$$

❏

Para concluir con esta sección, utilizando el producto tensorial de gavillas vamos a construir una gavilla a partir de un morfismo de espacios anillados y una pregavilla de módulos sobre el codominio. Vamos a fijar un morfismo de espacios anillados $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ y una pregavilla $\mathcal{G}$ de $\mathcal{O}_Y$-módulos. Comenzaremos mostrando que existe un morfismo entre $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$ y $\mathcal{O}_X$, para ello, es suficiente construir un morfismo entre $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^-$ y $\mathcal{O}_X$. Sea U un abierto de X, definimos la asignación

$$\begin{array}{rcl} h^{\#-}_U : f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^-(U) & \to & \mathcal{O}_X(U) \\ {[(W,s)]} & \mapsto & \rho_{\mathcal{O}_X}{}_U^{f^{-1}(W)}(f^{\#}_W(s)) \end{array}$$

Vamos a mostrar que $h^{\#-}_U$ es una aplicación bien definida. Sean W un abierto de Y que contiene a $f(U)$ y $s \in \mathcal{O}_Y(W)$. Como W es un abierto de Y podemos considerar el homomorfismo $f^{\#}_W : \mathcal{O}_Y(W) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(W))$ y como s es una sección de $\mathcal{O}_Y$ sobre W se sigue que $f^{\#}_W(s) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(W))$. Además, como $f(U) \subseteq W$ se sigue que $U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(W)$ y de esta manera podemos tomar la restricción de $f^{\#}_W(s)$ al abierto U. Con esto, hemos comprobado que $h^{\#-}_U([(W,s)]) \in \mathcal{O}_X(U)$.

Ahora, sean W_1 y W_2 abiertos de Y que contienen a $f(U)$ y sean $s_1 \in \mathcal{O}_Y(W_1)$ y $s_2 \in \mathcal{O}_Y(W_2)$ de modo que $[(W_1,s_1)] = [(W_2,s_2)]$. Vamos a mostrar que $h^{\#-}_U([W_1,s_1)]) = h^{\#-}_U([W_2,s_2)])$, es decir, mostraremos que $\rho_{\mathcal{O}_X}{}_U^{f^{-1}(W_1)}(f^{\#}_{W_1}(s_1)) = \rho_{\mathcal{O}_X}{}_U^{f^{-1}(W_2)}(f^{\#}_{W_2}(s_2))$. Como $\mathcal{O}_X$ es una gavilla, para mostrar la igualdad deseada mostraremos que para cualquier punto de U se tiene igualdad en los gérmenes de dichas secciones. Sea $p \in U$. Como $[(W_1,s_1)] = [(W_2,s_2)]$ existe un abierto Z de Y tal que $f(U) \subseteq Z \subseteq W_1 \cap W_2$ y tal que $\rho_{\mathcal{O}_Y}{}_Z^{W_1}(s_1) = \rho_{\mathcal{O}_Y}{}_Z^{W_2}(s_2)$. Por otro lado, para $i \in \{1,2\}$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Y(W_i) \arrow[r, "f^{\#}_{W_i}"] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(W_i)) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{Y,f(p)} \arrow[r, "f^{\#}_p"'] & \mathcal{O}_{X,p} \end{tikzcd}$$

del cual se obtienen las siguientes igualdades:

$$\big(\rho_{\mathcal{O}_X}{}_U^{f^{-1}(W_1)}(f^{\#}_{W_1}(s_1))\big)_p = f^{\#}_p((s_1)_{f(p)}) \quad \text{y} \quad \big(\rho_{\mathcal{O}_X}{}_U^{f^{-1}(W_2)}(f^{\#}_{W_2}(s_2))\big)_p = f^{\#}_p((s_2)_{f(p)}).$$

Además, el hecho que $\rho_{\mathcal{O}_Y}{}_Z^{W_1}(s_1) = \rho_{\mathcal{O}_Y}{}_Z^{W_2}(s_2)$ implica que $(s_1)_r = (s_2)_r$ para cualquier $r \in Z$, en particular, como $f(p) \in Z$ tenemos que $(s_1)_{f(p)} = (s_2)_{f(p)}$. Luego, como $f^{\#}_p$ es una aplicación bien definida se sigue que $f^{\#}_p((s_1)_{f(p)}) = f^{\#}_p((s_2)_{f(p)})$ y consecuentemente

$$\big(\rho_{\mathcal{O}_X}{}_U^{f^{-1}(W_1)}(f^{\#}_{W_1}(s_1))\big)_p = f^{\#}_p((s_1)_{f(p)}) = f^{\#}_p((s_2)_{f(p)}) = \big(\rho_{\mathcal{O}_X}{}_U^{f^{-1}(W_2)}(f^{\#}_{W_2}(s_2))\big)_p.$$

Así, como $\big(\rho_{\mathcal{O}_X}{}_U^{f^{-1}(W_1)}(f^{\#}_{W_1}(s_1))\big)_p = \big(\rho_{\mathcal{O}_X}{}_U^{f^{-1}(W_2)}(f^{\#}_{W_2}(s_2))\big)_p$ para cualquier $p \in U$ y $\mathcal{O}_X$ es una gavilla se sigue que $\rho_{\mathcal{O}_X}{}_U^{f^{-1}(W_1)}(f^{\#}_{W_1}(s_1)) = \rho_{\mathcal{O}_X}{}_U^{f^{-1}(W_2)}(f^{\#}_{W_2}(s_2))$. Por lo tanto, concluimos que $h^{\#-}_U$ es una aplicación bien definida.

En seguida, probaremos que $h^{\#-}_U$ es un homomorfismo de anillos. Sea W un abierto de Y que contiene a $f(U)$ y sean s y t secciones de $\mathcal{O}_Y$ sobre W. Nótese que podemos suponer que las secciones se encuentran sobre el mismo abierto.

$$\begin{aligned}
h^{\#-}_U([(W,s)]+[(W,t)]) &= h^{\#-}_U([(W,s+t))]) \\
&= \rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(W)}_{U}(f^{\#}_W(s+t)) \\
&= \rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(W)}_{U}(f^{\#}_W(s)) + \rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(W)}_{U}(f^{\#}_W(t)) \\
&= h^{\#-}_U([(W,s)]) + h^{\#-}_U([(W,t)]). \\
h^{\#-}_U([(W,s)]\cdot[(W,t)]) &= h^{\#-}_U([(W,st))]) \\
&= \rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(W)}_{U}(f^{\#}_W(st)) \\
&= \rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(W)}_{U}(f^{\#}_W(s)) \cdot \rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(W)}_{U}(f^{\#}_W(t)) \\
&= h^{\#-}_U([(W,s)]) \cdot h^{\#-}_U([(W,t)]).
\end{aligned}$$

$$h^{\#-}_U([(Y,1_{\mathcal{O}_Y(Y)})]) = \rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(Y)}_{U}(f^{\#}_Y(1_{\mathcal{O}_Y(Y)})) = \rho_{\mathcal{O}_X}{}^{X}_{U}(1_{\mathcal{O}_X(X)}) = 1_{\mathcal{O}_X(U)}.$$

De esta forma, hemos mostrado que $h^{\#-}_U$ es un homomorfismo de anillos. Lo único restante para comprobar que $h^{\#-}$ es un morfismo es mostrar que se satisface la compatibilidad con las restricciones de gavilla. Sean U_1 y U_2 abiertos de X tales que $U_2 \subseteq U_1$. Vamos a probar que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^-(U_1) \arrow[r, "h^{\#-}_{U_1}"] \arrow[d, "\rho_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^-}{}^{U_1}_{U_2}"'] & \mathcal{O}_X(U_1) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{O}_X}{}^{U_1}_{U_2}"] \\
f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^-(U_2) \arrow[r, "h^{\#-}_{U_2}"'] & \mathcal{O}_X(U_2)
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo. Sea W un abierto de Y que contiene a $f(U_1)$ y sea s una sección de $\mathcal{O}_Y$ sobre W.

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathcal{O}_X}{}^{U_1}_{U_2} \circ h^{\#-}_{U_1}([(W,s)]) &= \rho_{\mathcal{O}_X}{}^{U_1}_{U_2}(\rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(W)}_{U_1}(f^{\#}_W(s))) \\
&= \rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(W)}_{U_2}(f^{\#}_W(s)) \\
&= h^{\#-}_{U_2}([W,s)]) \\
&= h^{\#-}_{U_2} \circ \rho_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^-}{}^{U_1}_{U_2}([(W,s)]).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que $h^{\#-} : f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^- \to \mathcal{O}_X$ es un morfismo de gavillas. Así, por la propiedad universal de la gavilla asociada tenemos que existe un morfismo de gavillas $h^{\#} : f^{-1}(\mathcal{O}_Y) \to \mathcal{O}_X$.

Luego, como $\mathcal{O}_X$ y $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$ son gavillas de anillos, el morfismo $h^\#$ otorga de manera natural a $\mathcal{O}_X$ de una estructura de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-módulo.

Por otro lado, recordemos que la Proposición 2.40 nos dice que $f^{-1}(\mathcal{G})$ tiene una estructura de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-módulo, de esta manera, podemos considerar el producto tensorial $f^{-1}(\mathcal{G}) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{O}_X$. De estos hechos se deriva la siguiente definición:

Definición 2.46. Con las notaciones anteriores, el *pullback de $\mathcal{G}$ bajo f* denotado por $f^*(\mathcal{G})$ es la gavilla dada por $f^{-1}(\mathcal{G}) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{O}_X$.

Para concluir con este capítulo vamos a determinar a los módulos de gérmenes del pullback de $\mathcal{G}$ bajo f: como $f^*(\mathcal{G})$ es un producto tensorial de gavillas, si $p \in X$, entonces por la Proposición 2.41 se tiene que

$$f^*(\mathcal{G})_p = \left(f^{-1}(\mathcal{G}) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{O}_X\right)_p \cong f^{-1}(\mathcal{G})_p \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)_p} \mathcal{O}_{X,p} \cong \mathcal{G}_{f(p)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(p)}} \mathcal{O}_{X,p}.$$

Capítulo 3

Esquemas

Los esquemas, objetos que tienen una gran importancia para la Geometría Algebraica Moderna serán estudiados en este capítulo. La primera sección se encargará de construir una clase especial de esquemas para motivar nuestro estudio, para ello, realizaremos un repaso sobre ideales homogéneos de anillos graduados. En la segunda sección definiremos de manera formal a los esquemas y revisaremos algunas de sus propiedades principales. Para concluir con este capítulo, en la tercera sección nos centraremos en una clase especial de esquemas: los noetherianos y localmente noetherianos.

1. El Espectro Proyectivo de un Anillo Graduado

En esta sección construiremos un ejemplo que servirá de motivación para el estudio de los esquemas: el espectro proyectivo de un anillo graduado. Después de revisar las nociones necesarias sobre ideales homogéneos de un anillo graduado, construiremos un espacio topológico sobre un anillo graduado y estudiaremos algunas de sus propiedades. Por último, definiremos una gavilla de anillos sobre dicho espacio topológico y finalizaremos esta sección mostrando algunas de sus propiedades.

1.1. Ideales Homogéneos de un Anillo Graduado. En este apartado definiremos los ideales homogéneos de un anillo graduado y estudiaremos algunas de sus propiedades, en particular, vamos a estar interesados en estudiar los ideales primos homogéneos. Comenzaremos realizando un recordatorio rápido sobre anillos graduados, sin embargo, se sugiere al lector consultar la Sección 5.1 del Apéndice A para tener mayores detalles.

Recordemos que un anillo A es *graduado* si existe una familia $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de subgrupos A de modo $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$ y de modo que para cualesquier $n, m \in \mathbb{Z}_+$ se tiene que $A_n \times A_m \subseteq A_{n+m}$. Además, tenemos las siguientes terminologías y propiedades:

- A_n es la *componente homogénea de grado* n para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.
- Dado $n \in \mathbb{Z}_+$, cada elemento a_n de A_n es un *elemento homogéneo de grado* n.
- A^h denota al conjunto de todos los elementos homogéneos de A.
- Cada elemento de A tiene una descomposición única como suma de elementos homogéneos.
- A_0 es un subanillo de A.

- $A_+ = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es un ideal de A y se llama el *ideal irrelevante*.
- A_+^h denota al conjunto de todos los elementos homogéneos de A de grado positivo.

A continuación iniciaremos con el estudio de los ideales homogéneos de un anillo graduado. Antes de definir el concepto de ideal homogéneo presentaremos un resultado que es de gran utilidad para saber cuándo un ideal contiene al ideal irrelevante.

LEMA 3.1. *Sea I un ideal de un anillo graduado A. Se tiene que $A_+ \subseteq I$ si y sólo si para todo $d \in \mathbb{N}$ se cumple que $A_d \subseteq I$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $A_+ \subseteq I$. Sea $d \in \mathbb{N}$. Puesto que $A_d \subseteq A_+$ se sigue de manera inmediata que $A_d \subseteq I$.

Recíprocamente, supongamos que $A_d \subseteq I$ para todo $d \in \mathbb{N}$. Sea $a \in A_+$. Como A es un anillo graduado, existen $s \in \mathbb{N}$ y $a_1, \dots, a_s \in A$ tales que $a_i \in A_i$ para todo $i \in \{1, \dots, s\}$ y de modo que $a = a_1 + \cdots + a_s$. De la hipótesis se sigue que $A_1, \dots, A_s$ están contenidas en I y por tanto $a_1, \dots, a_s$ son elementos de I. Así, se sigue que $a \in I$ y de esta forma concluimos que $A_+ \subseteq I$. ❏

DEFINICIÓN 3.2. Un ideal I de un anillo graduado A es *homogéneo* si está generado por elementos homogéneos de A.

Para cualquier anillo graduado A vamos a denotar al conjunto de los ideales homogéneos de A por $\partial^h A$. La siguiente cosa que realizaremos es dar una caracterización de esta clase de ideales.

PROPOSICIÓN 3.3. *Sea I un ideal de un anillo graduado $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *I es homogéneo.*
2. *I contiene todas las componentes homogéneas de cada uno de sus elementos.*
3. *$\dfrac{A}{I}$ es un anillo graduado donde $\dfrac{A}{I} = \displaystyle\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} \dfrac{A_k + I}{I}$.*

DEMOSTRACIÓN.

1. $\Rightarrow$ 2. Sea $a \in I$. Como I es homogéneo se sigue que existe $H \subseteq I$ tal que cada elemento de H es homogéneo y $\langle H\rangle = I$. Así, existen $r \in \mathbb{N}$, $h_1, \dots, h_r \in H$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in A$ tales que $a = \lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_r h_r$. Luego, como A es un anillo graduado, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ se tiene que $\lambda_i = \lambda_{i_0} + \lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_{t_i}}$ para cierto $t_i \in \mathbb{Z}_+$ y con $\lambda_{i_j} \in A_j$ para cada $j \in \{0, \dots, t_i\}$. De este modo,

$$a = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i h_i = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{t_i} \lambda_{i_j} h_i.$$

Además, como $\lambda_{i_j}h_i$ está en I y es un elemento homogéneo para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ y $j \in \{0, \ldots, t_i\}$, concluimos que I contiene cada componente homogénea de a.

2. $\Rightarrow$ 1. Consideramos a H como el conjunto de todas las componentes homogéneas de cada uno de los elementos de I. De esta forma, $I = \langle H \rangle$.

3. $\Rightarrow$ 2. Sea $y \in I$. Como A es un anillo graduado existen $n \in \mathbb{Z}_+$ y $y_0, \ldots, y_n \in A$ tales que $y_i \in A_i$ para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$ y de modo que $y = y_0 + \cdots + y_n$. Luego, como $y \in I$ se sigue que $y + I = I$ y esto implica que $\sum_{i=0}^{n} (y_i + I) = I$. Así, por hipótesis se tiene que $y_i + I = I$ para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$ y consecuentemente tenemos que $y_i \in I$ para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$. Por lo tanto, I contiene cada componente homogénea de y.

2. $\Rightarrow$ 3. Sea $x \in \dfrac{A}{I}$, así, existe $\lambda \in A$ tal que $x = \lambda + I$. Como A es un anillo graduado se sigue que existen $s \in \mathbb{Z}_+$ y $\lambda_0, \ldots, \lambda_s \in A$ de modo que $\lambda_i \in A_i$ para cada $i \in \{0, \ldots, s\}$ y tal que $\lambda = \lambda_0 + \cdots + \lambda_s$. Luego, se sigue que

$$x = \lambda + I = (\lambda_0 + \cdots + \lambda_s) + I = (\lambda_0 + I) + \cdots + (\lambda_s + I)$$

y esto implica que $x \in \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{A_k + I}{I}$. Por tanto, puesto que $\dfrac{A}{I} \subseteq \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{A_k + I}{I} \subseteq \frac{A}{I}$ concluimos que $\dfrac{A}{I} = \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{A_k + I}{I}$. Lo que nos resta a mostrar es que la descomposición de cada elemento es única, para ello, es suficiente con mostrar el siguiente enunciado: si $r \in \mathbb{Z}_+$ y $\mu_0, \ldots, \mu_r \in A$ son tales que $\mu_i \in A_i$ para cada $i \in \{0, \ldots, r\}$ y $(\mu_0 + I) + \cdots + (\mu_r + I) = I$, entonces $\mu_j \in I$ para todo $j \in \{0, \ldots, r\}$. Sean $r \in \mathbb{Z}_+$ y $\mu_0, \ldots, \mu_r \in A$ tales que $\mu_i \in A_i$ para cada $i \in \{0, \ldots, r\}$ y de modo que $(\mu_0 + I) + \cdots + (\mu_r + I) = I$. La igualdad

$$I = (\mu_0 + I) + \cdots + (\mu_r + I) = (\mu_0 + \cdots + \mu_r) + I$$

implica que $\mu_0 + \cdots + \mu_r \in I$. Luego, como μ_i es un elemento homogéneo para cada $i \in \{0, \ldots, r\}$, por hipótesis se sigue que $\mu_i \in I$ para todo $i \in \{0, \ldots, r\}$. Con esto, queda mostrada la unicidad en la descomposición de cada elemento y por lo tanto concluimos que el anillo $\dfrac{A}{I}$ es graduado con la graduación natural dada por $\left(\dfrac{A_k + I}{I}\right)_{k \in \mathbb{Z}_+}$. ❑

Algunas consecuencias inmediatas a la proposición anterior se muestran en el siguiente resultado:

Corolario 3.4. *Sea A un anillo graduado. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Si I y J son ideales homogéneos de A, entonces $I \cap J$ es un ideal homogéneo de A.*
2. *Si I es un ideal homogéneo de A, entonces $\sqrt{I}$ es un ideal homogéneo de A.*

Demostración.

1. Sean I y J ideales homogéneos de A. Así se sigue que existen $H_1 \subseteq I$ y $H_2 \subseteq J$ de modo que los elementos de H_1 y H_2 son homogéneos y además $I = \langle H_1 \rangle$ y $J = \langle H_2 \rangle$. Luego, como $I \cap J = \langle H_1 \cap H_2 \rangle$ la proposición anterior asegura que $I \cap J$ es homogéneo.

2. Sea I un ideal homogéneo de A. Sea $x \in \sqrt{I}$, en particular, como $x \in A$ se sigue que existen $r \in \mathbb{Z}_+$ y $a_i \in A_i$ para cada $i \in \{0, \ldots, r\}$ de modo que $x = a_0 + \cdots + a_r$. Por otro lado, como x es un elemento de $\sqrt{I}$ tenemos la existencia de $n \in \mathbb{N}$ de modo que $x^n \in I$, esto implica que a_0^n + (Otros términos) es un elemento de I. Posteriormente, como I es homogéneo se sigue que $a_0^n \in I$, es decir, tenemos que $a_0 \in \sqrt{I}$. Luego, como $x - a_0 = a_1 + \cdots + a_r$ es un elemento de $\sqrt{I}$, aplicando el razonamiento anterior tenemos que $a_1 \in \sqrt{I}$. Continuando de esta manera se tiene que cada componente homogénea del elemento x está en $\sqrt{I}$ con lo cual concluimos que $\sqrt{I}$ es un ideal homogéneo. ❑

Para nuestro estudio, vamos a estar interesados en aquellos ideales homogéneos de un anillo graduado que sean ideales primos. El siguiente resultado nos brindará una caracterización para identificar ideales primos homogéneos.

Teorema 3.5. *Sea I un ideal homogéneo de un anillo graduado A tal que $I \neq A$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $I \in \operatorname{Spec}(A)$.
2. *Para cualesquier elementos homogéneos a y b de A tales que $ab \in I$ se tiene que $a \in I$ o $b \in I$.*

Demostración. Claramente el enunciado 1 implica al enunciado 2 así que sólo resta probar que el enunciado 2 implica al enunciado 1. Procederemos por contradicción: supongamos que existen $a, b \in A$ tales que $a \notin I$, $b \notin I$ y $ab \in I$. Sea $s \in \mathbb{Z}_+$ el mínimo grado de la componente homogénea de a que no está en I y de igual manera, sea $t \in \mathbb{Z}_+$ el mínimo grado de la componente homogénea de b que no está en I. Como $ab \in I$, por el enunciado 2 del Teorema 3.3 se sigue que la componente homogénea $(ab)_{s+t}$ de grado $s + t$ de ab es un elemento de I. Luego, puesto que

$$\begin{aligned}(ab)_{s+t} &= \sum_{i=0}^{s+t} a_i b_{s+t-i} \\ &= \underbrace{a_0 b_{s+t} + a_1 b_{s+t-1} + \cdots + a_{s-1} b_{t+1}}_{\in I} + a_s b_t + \underbrace{a_{s+1} b_{t-1} + \cdots + a_{s+t} b_0}_{\in I}\end{aligned}$$

se sigue que $a_s b_t \in I$ y por hipótesis se tiene que $a_s \in I$ o $b_t \in I$ lo cual es una contradicción con la elección de s y t. ❑

Vamos a denotar al conjunto de ideales primos homogéneos de un anillo graduado A por $\mathrm{Spec}^h(A)$. Dado un ideal primo $\mathfrak{p}$ de A, vamos a denotar por $\mathfrak{p}^h$ al ideal generado por los elementos homogéneos de $\mathfrak{p}$. Uno puede preguntarse de manera natural si el ideal que acabamos de construir es un ideal primo, más aún, si es un ideal primo homogéneo, el siguiente resultado nos brindará respuestas a dichos cuestionamientos.

Lema 3.6. *Sean A un anillo graduado y $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. El ideal $\mathfrak{p}^h$ es un ideal primo homogéneo de A y satisface que $\mathfrak{p}^h \subseteq \mathfrak{p}$.*

Demostración. Es claro que $\mathfrak{p}^h$ es un ideal homogéneo contenido en $\mathfrak{p}$, así que sólo resta mostrar que $\mathfrak{p}^h$ es primo. Observemos que $\mathfrak{p}^h \neq A$ pues $\mathfrak{p}^h \subseteq \mathfrak{p} \subset A$. Ahora, sean $a, b \in A^h$ tales que $ab \in \mathfrak{p}^h$. Luego, como $ab \in \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p}$ es primo se tiene que $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$. Además, como a y b son elementos homogéneos se sigue que alguno de ellos está en la familia que genera a $\mathfrak{p}^h$, esto implica que $a \in \mathfrak{p}^h$ o $b \in \mathfrak{p}^h$. Por lo tanto, $\mathfrak{p}^h$ es un ideal primo homogéneo de A. ❏

Para concluir con esta sección, el siguiente resultado nos dirá cuál es el comportamiento de los ideales primos minimales respecto a un ideal homogéneo.

Teorema 3.7. *Sea I un ideal homogéneo de un anillo graduado A tal que $I \neq A$. Los ideales primos minimales con respecto a I son homogéneos.*

Demostración. Sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ tal que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal con respecto a I. Consideramos al ideal $\mathfrak{p}^h$. Por el lema anterior sabemos que $\mathfrak{p}^h \in \mathrm{Spec}^h(A)$ y además que $\mathfrak{p}^h \subseteq \mathfrak{p}$, más aún, puesto que las componentes homogéneas de los elementos de I están en $\mathfrak{p}$, necesariamente estas deben de estar en la familia generadora de $\mathfrak{p}^h$ lo cual implica que $I \subseteq \mathfrak{p}^h$. De este forma, puesto que $I \subseteq \mathfrak{p}^h \subseteq \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p}$ es un primo minimal respecto de I se sigue que $\mathfrak{p}^h = \mathfrak{p}$. Por lo tanto, concluimos que $\mathfrak{p}$ es un ideal homogéneo. ❏

1.2. El Espacio Topológico Proj(A). Una vez realizado el estudio de los ideales primos homogéneos de un anillo graduado vamos a centrar nuestra atención en un conjunto particular de ellos. Después, siguiendo las ideas de la construcción del espectro afín de un anillo construiremos un espacio topológico y posteriormente estudiaremos algunas de sus propiedades. Como el lector podrá percatarse, obtendremos resultados análogos a los que se tienen para espectros afines. Comenzaremos este apartado definiendo el conjunto de nuestro interés.

Definición 3.8. Dado un anillo graduado A, $\mathrm{Proj}(A)$ es el conjunto de todos los ideales primos homogéneos de A que no contienen al ideal irrelevante, es decir,

$$\mathrm{Proj}(A) = \left\{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}^h(A) \,\middle|\, A_+ \not\subseteq \mathfrak{p} \right\}.$$

Retomando las ideas utilizadas en la construcción del espectro afín de un anillo, dado un anillo graduado A y un ideal homogéneo I vamos a considerar el siguiente conjunto:

$$V_+(I) = \left\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(A) \,\middle|\, I \subseteq \mathfrak{p}\right\}.$$

El siguiente resultado enlista algunas propiedades de estos conjuntos. Como podrá notarse, dichas propiedades son análogas a las que se tienen en los espectros afines.

Proposición 3.9. *Sea A un anillo graduado. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. $V_+(\{0_A\}) = \operatorname{Proj}(A)$ *y* $V_+(A) = \emptyset$.
2. *Si I y J son ideales homogéneos tales que $J \subseteq I$, entonces $V_+(I) \subseteq V_+(J)$.*
3. *Si I y J son ideales homogéneos de A, entonces $V_+(IJ) = V_+(I) \cup V_+(J)$.*
4. *Si $(I_i)_{i\in\Gamma}$ es una familia de ideales homogéneos de A, entonces $V_+(\sum_{i\in\Gamma} I_i) = \bigcap_{i\in\Gamma} V_+(I_i)$.*
5. *Si I y J son ideales homogéneos de A, se tiene que $V_+(I) \subseteq V_+(J)$ si y sólo si $J \cap A_+ \subseteq \sqrt{I}$.*
6. *Si I es un ideal homogéneo de A, entonces $V_+(I) = V_+(I \cap A_+)$.*

Demostración. La demostración de los enunciados 1, 2, 3 y 4 es análoga al caso afín (véase Proposición 1.47) así que omitiremos los detalles. De este modo, sólo resta mostrar los enunciados 5 y 6.

5. Sean I y J ideales homogéneos de A. Supongamos que $J \cap A_+ \subseteq \sqrt{I}$. Sea $\mathfrak{p} \in V_+(I)$. Puesto que $\sqrt{I} \subseteq I \subseteq \mathfrak{p}$ se sigue que $JA_+ \subseteq J \cap A_+ \subseteq \mathfrak{p}$, luego, el hecho de que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo y no contiene a A_+ implica que $J \subseteq \mathfrak{p}$. De este modo tenemos que $\mathfrak{p} \in V_+(J)$ y por tanto $V_+(I) \subseteq V_+(J)$.

Recíprocamente, supongamos que $V_+(I) \subseteq V_+(J)$. Sea $\mathfrak{p} \in V_A(I)$. Como I es un ideal homogéneo se sigue que el ideal primo homogéneo $\mathfrak{p}^h$ contiene a I. Si $A_+ \nsubseteq \mathfrak{p}^h$, entonces $\mathfrak{p}^h \in V_+(I)$ y consecuentemente $\mathfrak{p}^h \in V_+(J)$, de esta forma, se tiene que $J \cap A_+ \subseteq \mathfrak{p}^h \subseteq \mathfrak{p}$. Si $A_+ \subseteq \mathfrak{p}^h$, se sigue de manera inmediata que $J \cap A_+ \subseteq A_+ \subseteq \mathfrak{p}^h \subseteq \mathfrak{p}$. Así, como $J \cap A_+$ está contenido en cada ideal primo que contiene a I concluimos que $J \cap A_+ \subseteq \sqrt{I}$.

6. Como $I \cap A_+ \subseteq I$ el enunciado 2 implica que $V_+(I) \subseteq V_+(I \cap A_+)$. Recíprocamente, sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(A)$ tal que $\mathfrak{p} \in V_+(I \cap A_+)$, así, tenemos que $I \cap A_+ \subseteq \mathfrak{p}$. Luego, el hecho que $IA_+ \subseteq I \cap A_+ \subseteq \mathfrak{p}$ y que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo que no contiene a A_+ implican que $I \subseteq \mathfrak{p}$. Consecuentemente tenemos que $\mathfrak{p} \in V_+(I)$ y por tanto concluimos que $V_+(I \cap A_+) \subseteq V_+(I)$. ❏

Consideremos un anillo graduado A. Gracias a los enunciados 1, 3 y 4 de la proposición anterior, tomando los cerrados de $\operatorname{Proj}(A)$ como los conjuntos de la forma $V_+(I)$, con I un ideal homogéneo de A, se tiene que $\operatorname{Proj}(A)$ es un espacio topológico. Al igual que en el caso afín, dicha topología se llama la *topología de Zariski*. De este modo, por la elección de los cerrados de la topología se tiene que los abiertos de $\operatorname{Proj}(A)$ son de la forma $\operatorname{Proj}(A)\backslash V_+(I)$ para algún $I \in \partial^h A$. Ahora, vamos a centrar nuestra atención en un conjunto particular: si $f \in A_+^h$ definimos el conjunto

$$D_+(f) = \left\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(A) \,\middle|\, f \notin \mathfrak{p}\right\}.$$

Además, observemos que el conjunto $D_+(f)$ es un abierto de la topología de $\operatorname{Proj}(A)$: en efecto, como f es un elemento homogéneo se sigue que $Af \in \partial^h A$, luego, si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(A)$,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(A)\backslash V_+(Af) &\iff \mathfrak{p} \notin V_+(Af)\\
&\iff Af \not\subseteq \mathfrak{p}\\
&\iff f \notin \mathfrak{p}\\
&\iff \mathfrak{p} \in D_+(f).
\end{aligned}$$

A los abiertos de la forma anterior se les llama *abiertos básicos* y en la siguiente proposición se muestra una importante propiedad de dichos abiertos.

Proposición 3.10. *Sea A un anillo graduado. La familia $(D_+(f))_{f\in A_+^h}$ es una base para la topología de* $\operatorname{Proj}(A)$.

Demostración. Sea U un abierto de $\operatorname{Proj}(A)$. Así, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe un ideal homogéneo I de A tal que $I \subseteq A_+$ y $U = \operatorname{Proj}(A)\backslash V_+(I)$. Luego, como I es un ideal homogéneo que está contenido en A_+ se sigue la existencia de un subconjunto H de I formado por elementos homogéneos de grado positivo de A tal que $I = \langle H\rangle$. De este modo,

$$U = \operatorname{Proj}(A)\backslash V_+(I) = \operatorname{Proj}(A)\backslash V_+(\sum_{h\in H} Ah) = \bigcup_{h\in H}(\operatorname{Proj}(A)\backslash V_+(Ah)) = \bigcup_{h\in H} D_+(h).$$

Por lo tanto, concluimos que la familia $(D_+(f))_{f\in A_+^h}$ es una base para la topología de $\operatorname{Proj}(A)$. $\square$

Cuando consideramos un anillo graduado $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$ y estudiamos al espacio topológico $\operatorname{Proj}(A)$, muchas veces es común encontrarse con la hipótesis de que A es generado por A_1 como una A_0-álgebra. Para este caso podemos construir una cubierta abierta especial para $\operatorname{Proj}(A)$.

Proposición 3.11. *Sea $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$ un anillo graduado. Si A es generado por A_1 como A_0-álgebra, entonces la familia $(D_+(f))_{f\in A_1}$ es una cubierta abierta de* $\operatorname{Proj}(A)$.

Demostración. Es claro que $\bigcup_{f\in A_1} D_+(f) \subseteq \operatorname{Proj}(A)$ así que sólo resta probar la otra inclusión. Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(A)$. Supongamos que $A_1 \subseteq \mathfrak{p}$. Como A_1 genera a A_+ se sigue que $A_+ \subseteq \mathfrak{p}$ lo cual contradice el hecho de que $\mathfrak{p}$ es un elemento de $\operatorname{Proj}(A)$. Así, como $A_1 \not\subseteq \mathfrak{p}$ se sigue que existe $f \in A_1$ tal que $f \notin \mathfrak{p}$, es decir, tal que $\mathfrak{p} \in D_+(f)$. Por lo tanto, concluimos que $\operatorname{Proj}(A) \subseteq \bigcup_{f\in A_1} D_+(f)$. $\square$

1.3. El Espectro Proyectivo de un Anillo Graduado. Ahora que hemos construido un espacio topológico a partir de un anillo graduado vamos a proceder como en su momento procedimos en el caso afín, es decir, vamos a construir una gavilla de anillos sobre nuestro nuevo espacio. En este apartado estaremos utilizando las propiedades de la localización en anillos y módulos graduados así que se recomienda al lector revisar la Sección 5.2 del Apéndice A para tener en mente dichas nociones.

Vamos a fijar un anillo graduado A. Lo que haremos a continuación es construir una gavilla de anillos sobre $\mathrm{Proj}(A)$ la cual denotaremos por $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}$. Sea U un abierto de $\mathrm{Proj}(A)$. Vamos a asignarle un anillo $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}(U)$ al abierto U de la siguiente manera: si $U = \emptyset$ entonces $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}(U) = \{0\}$, de otro modo, definimos $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}(U)$ como el conjunto de aplicaciones $s : U \to \prod_{\mathfrak{q}\in U} A_{(\mathfrak{q})}$ que satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. Para cada $\mathfrak{p} \in U$ se tiene que $s(\mathfrak{p}) \in A_{(\mathfrak{p})}$.
2. Para todo $\mathfrak{p} \in U$ existe una vecindad abierta V de $\mathfrak{p}$ contenida en U y existen elementos homogéneos $a \in A^h$ y $f \in (A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h$ del mismo grado tales que para cada $\mathfrak{q} \in V$ se tiene que $f \notin \mathfrak{q}$ y $s(\mathfrak{q}) = \dfrac{a}{f}$ en $A_{(\mathfrak{q})}$.

Con argumentos análogos a los usados en la Sección 4.2 del Capítulo 1 se verifica que $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}(U)$ es un anillo, lo único con lo que se debe de tener precaución es la verificación de que los grados de los elementos de los cocientes que aparezcan sean los correctos.

Por otro lado, si U y V son abiertos de $\mathrm{Proj}(A)$ tales que $V \subseteq U$, vamos a considerar la restricción ${\rho_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}}}_V^U : \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}(U) \to \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}(V)$ como la restricción usual de funciones.

Bajo estas condiciones se tiene que $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}$ es una gavilla sobre $\mathrm{Proj}(A)$. La demostración de este hecho es prácticamente la misma demostración de que $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ es una gavilla sobre $\mathrm{Spec}(A)$ así que omitiremos dicha prueba. Una vez con esto, podemos realizar la siguiente definición:

Definición 3.12. Sea A un anillo graduado. El par $(\mathrm{Proj(A)}, \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)})$ es el *espectro proyectivo de A*, donde $\mathrm{Proj}(A)$ es un espacio topológico con la topología de Zariski y $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}$ es la gavilla de anillos definida arriba.

Lo próximo que haremos será estudiar algunas de las propiedades fundamentales del espectro proyectivo de un anillo graduado, para ello, necesitaremos la ayuda de los siguientes lemas:

Lema 3.13. *Sean* $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$ *un anillo graduado,* $f \in A_+^h$ *donde* $\mathrm{grad}(f) = e$ *y* $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A_{(f)})$. *El conjunto*

$$\mathfrak{p} = \sqrt{\left\langle b \;\middle|\; \frac{b}{f^r} \in \mathfrak{q},\ r \in \mathbb{Z}_+ \text{ y } b \in A_{re} \right\rangle}$$

es un ideal primo homogéneo de A. Además, para cualesquier $d \in \mathbb{Z}_+$ y $a \in A_d$ se tiene que $a \in \mathfrak{p}$ si y sólo si $\dfrac{a^e}{f^d} \in \mathfrak{q}$.

Demostración. Por construcción tenemos que $\mathfrak{p}$ es un ideal de A, más aún, como $\mathfrak{p}$ es el radical de un ideal homogéneo se sigue que $\mathfrak{p}$ es un ideal homogéneo de A. Antes de mostrar que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo, mostraremos que dicho ideal cumple con la otra condición deseada. Sean $d \in \mathbb{Z}_+$ y $a \in A_d$.

Supongamos que $\dfrac{a^e}{f^d} \in \mathfrak{q}$. De esta forma, como $a^e \in \left\langle b \,\middle|\, \dfrac{b}{f^r} \in \mathfrak{q}, r \in \mathbb{Z}_+ \text{ y } b \in A_{re} \right\rangle$ se sigue que $a \in \sqrt{\left\langle b \,\middle|\, \dfrac{b}{f^r} \in \mathfrak{q}, r \in \mathbb{Z}_+ \text{ y } b \in A_{re} \right\rangle}$, es decir, $a \in \mathfrak{p}$.

Recíprocamente, supongamos que $a \in \mathfrak{p}$. De este modo, tenemos que $a^e \in \mathfrak{p}$ y esto implica que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^{en} \in \left\langle b \,\middle|\, \dfrac{b}{f^r} \in \mathfrak{q}, r \in \mathbb{Z}_+ \text{ y } b \in A_{re} \right\rangle$. Consecuentemente, se sigue que existen $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in A$ y $b_1, \ldots, b_k \in \left\{ b \,\middle|\, \dfrac{b}{f^r} \in \mathfrak{q}, r \in \mathbb{Z}_+ \text{ y } b \in A_{re} \right\}$ tales que $a^{en} = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_k b_k$. Sea $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por la elección del elemento b_i se sigue que existe $s_i \in \mathbb{Z}_+$ de modo que $\dfrac{b_i}{f^{s_i}} \in \mathfrak{q}$ y además $b_i \in A_{s_i e}$. Ahora bien, como $a^{en} \in A_{den}$ sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\lambda_i \in A_{den - s_i e}$. Luego, observemos que

$$\left(\frac{a^e}{f^d}\right)^n = \frac{a^{en}}{f^{dn}} = \frac{\lambda_1 b_1}{f^{dn}} + \cdots + \frac{\lambda_k b_k}{f^{dn}} = \frac{f^{s_1}}{f^{s_1}} \cdot \frac{\lambda_1 b_1}{f^{dn}} + \cdots + \frac{f^{s_k}}{f^{s_k}} \cdot \frac{\lambda_k b_k}{f^{dn}} = \frac{\lambda_1 f^{s_1}}{f^{dn}} \cdot \frac{b_1}{f^{s_1}} + \cdots + \frac{\lambda_k f^{s_k}}{f^{dn}} \cdot \frac{b_k}{f^{s_k}}.$$

Así, tenemos que $\left(\dfrac{a^e}{f^d}\right)^n$ es un elemento de $\mathfrak{q}$ y como $\mathfrak{q}$ es un ideal primo de $A_{(f)}$ se sigue que $\dfrac{a^e}{f^d} \in \mathfrak{q}$.

Para concluir con la prueba mostraremos que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo:

- $\mathfrak{p} \neq A$: supongamos que $\mathfrak{p} = A$, esto es equivalente a que $1_A \in \mathfrak{p}$. Por lo que acabamos de mostrar este hecho es equivalente a tener que $\dfrac{1_A^e}{f^0} = \dfrac{1_A}{1_A} \in \mathfrak{q}$, en otras palabras, es equivalente a tener que $\mathfrak{q} = A_{(f)}$ lo cual es absurdo.
- Sean $a, b \in A_+^h$ tales que $a \in A_d$, $b \in A_c$ y de modo que $ab \in \mathfrak{p}$. Mostraremos que $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$:

$$\begin{aligned} ab \in \mathfrak{p} &\iff \frac{(ab)^e}{f^{d+c}} \in \mathfrak{q} \\ &\iff \frac{a^e}{f^d} \cdot \frac{b^e}{f^c} \in \mathfrak{q} \\ &\iff \frac{a^e}{f^d} \in \mathfrak{q} \text{ o } \frac{b^e}{f^c} \in \mathfrak{q} \\ &\iff a \in \mathfrak{p} \text{ o } b \in \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

De esta manera, concluimos que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo homogéneo de A. ❑

LEMA 3.14. *Sean $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$ un anillo graduado, I un ideal de A y $f \in A_+^h$ donde* $\mathrm{grad}(f) =$ *e. Para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ de A se tiene que $I \subseteq \mathfrak{p}$ si y sólo si $I_f \cap A_{(f)} \subseteq \mathfrak{p}_f \cap A_{(f)}$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $I \subseteq \mathfrak{p}$. De esta manera, tenemos que $I_f \subseteq \mathfrak{p}_f$ y esto implica que $I_f \cap A_{(f)} \subseteq \mathfrak{p}_f \cap A_{(f)}$. Recíprocamente, supongamos que $I_f \cap A_{(f)} \subseteq \mathfrak{p}_f \cap A_{(f)}$. Sea $a \in I$ de modo que $a \in A_d$ para algún $d \in \mathbb{Z}_+$. Como $\dfrac{a^e}{f^d}$ es un elemento de $I_f \cap A_{(f)}$ por hipótesis se sigue que $\dfrac{a^e}{f^d} \in \mathfrak{p}_f \cap A_{(f)}$, particularmente se tiene que $\dfrac{a^e}{f^d} \in \mathfrak{p}_f$. Luego, como $\mathfrak{p}$ es primo se sigue que $a^e \in \mathfrak{p}$ y esto implica que $a \in \mathfrak{p}$. Por lo tanto, $I \subseteq \mathfrak{p}$. ❑

PROPOSICIÓN 3.15. *Sea A un anillo graduado. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(A)$ existe un isomorfismo de anillos entre $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A),\mathfrak{p}}$ y $A_{(\mathfrak{p})}$.*
2. *Para todo $f \in A_+^h$ se tiene que el espacio localmente anillado $(D_+(f), \mathcal{O}_{D_+(f)})$ es isomorfo a $(\mathrm{Spec}(A_{(f)}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})})$, y este modo se sigue que $(D_+(f), \mathcal{O}_{D_+(f)})$ es un esquema afín.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(A)$. Consideramos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A),\mathfrak{p}} & \to & A_{(\mathfrak{p})} \\ [(U,s)] & \mapsto & s(\mathfrak{p}) \end{array}$$

Vamos a mostrar que ϕ es una aplicación bien definida: sean U y V abiertos de $\mathrm{Proj}(A)$ que contienen a $\mathfrak{p}$ y sean $s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}(U)$ y $t \in \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}(V)$ tales que $[(U,s)] = [(V,t)]$. De este modo, se sigue que existe un abierto W de $\mathrm{Proj}(A)$ que contiene a $\mathfrak{p}$ tal que $W \subseteq U \cap V$ y $\rho_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}}{}^U_W(s) = \rho_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}}{}^V_W(t)$. Dicha igualdad nos dice que $s(\mathfrak{q}) = t(\mathfrak{q})$ para cualquier $\mathfrak{q} \in W$, en particular, como $\mathfrak{p} \in W$ se sigue que $s(\mathfrak{p}) = t(\mathfrak{p})$. Así, tenemos que ϕ está bien definida.

A continuación probaremos que ϕ es un homomorfismo de anillos. Sean U un abierto de $\mathrm{Proj}(A)$ que contiene a $\mathfrak{p}$ y $s, t \in \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}(U)$. Nótese que podemos suponer que las secciones se encuentran sobre el mismo abierto.

$$\phi([(U,s)] + [(U,t)]) = \phi([(U, s+t)]) = (s+t)(\mathfrak{p}) = s(\mathfrak{p}) + t(\mathfrak{p}) = \phi([(U,s)]) + \phi([(U,t)]).$$

$$\phi([(U,s)] \cdot [(U,t)]) = \phi([(U, st)]) = (st)(\mathfrak{p}) = s(\mathfrak{p})t(\mathfrak{p}) = \phi([(U,s)]) \cdot \phi([(U,t)]).$$

$$\phi([(\mathrm{Proj}(A), 1_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}(\mathrm{Proj}(A))})]) = 1_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}(\mathrm{Proj}(A))}(\mathfrak{p}) = 1_{A_{(\mathfrak{p})}}.$$

De este modo, tenemos que ϕ es un homomorfismo de anillos.

Ahora, probaremos que ϕ es inyectivo: sean U un abierto de $\operatorname{Proj}(A)$ que contiene a $\mathfrak{p}$ y $s \in \mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(A)}(U)$ de modo que $[(U,s)] \in \operatorname{Ker}\phi$. Por definición de s sabemos que existe un abierto V de $\operatorname{Proj}(A)$ que contiene $\mathfrak{p}$ y que está contenido en U, y existen $a \in A^h$ y $u \in (A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h$ elementos homogéneos del mismo grado tales que $V \subseteq D_+(u)$ y de modo $s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{u}{}_{A_{(\mathfrak{q})}}$ para cada $\mathfrak{q} \in V$. Por hipótesis tenemos que $\frac{a}{u} = s(\mathfrak{p}) = 0_{A_{(\mathfrak{p})}}$, consecuentemente existe $w \in (A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h$ de modo que $wa = 0_A$. Ahora bien, observemos que $\rho_{\mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(A)}}{}^{U}_{V\cap D_+(w)}(s)$ es la aplicación nula: en efecto, sea $\mathfrak{r} \in V \cap D_+(w)$,

$$\rho_{\mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(A)}}{}^{U}_{V\cap D_+(w)}(s)(\mathfrak{r}) = s(\mathfrak{r}) = \frac{a}{u} = \frac{wa}{wu} = \frac{0_A}{wu} = 0_{A_{(\mathfrak{r})}}.$$

De esta manera, como

$$[(U,s)] = [(V\cap D_+(w), \rho_{\mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(A)}}{}^{U}_{V\cap D_+(w)}(s))] = [(V\cap D_+(w), 0_{\mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(A)}(V\cap D_+(w))})] = 0_{\mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(A),\mathfrak{p}}}$$

se concluye que ϕ es inyectiva.

Por último, mostraremos que ϕ es sobreyectiva. Sean $a \in A^h$ y $u \in (A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h$ elementos homogéneos del mismo grado. Consideramos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\left(\frac{a}{u}\right)} : D_+(u) & \to & \prod_{\mathfrak{q}\in D_+(u)} A_{(\mathfrak{q})} \\ \mathfrak{r} & \mapsto & \frac{a}{u}{}_{A_{(\mathfrak{r})}} \end{array}$$

Observemos que $\widetilde{\left(\frac{a}{u}\right)}$ es una sección de $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(A)}$ sobre $D_+(u)$: en efecto, de manera inmediata se tiene que dicha asignación está bien definida, claramente satisface la primera condición requerida y para comprobar la segunda condición el abierto a considerar es el propio abierto $D_+(u)$ y los elementos adecuados son a y u. Luego, afirmamos que la imagen de $\widetilde{\left(\frac{a}{u}\right)}_{\mathfrak{p}}$ bajo ϕ es igual a $\frac{a}{u}$, en efecto:

$$\phi([(D_+(u), \widetilde{\left(\frac{a}{u}\right)})]) = \widetilde{\left(\frac{a}{u}\right)}(\mathfrak{p}) = \frac{a}{u}{}_{A_{(\mathfrak{p})}}.$$

De este modo se tiene que ϕ es sobreyectiva.

De manera definitiva, concluimos que ϕ es un isomorfismo entre los anillos $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(A),\mathfrak{p}}$ y $A_{(\mathfrak{p})}$.

2. Sea $f \in A^h_+$ y supongamos que $\operatorname{grad}(f) = e$. Como consecuencia del Teorema A.30 sabemos que $A_{(f)}$ es un subanillo de A_f, de este modo, podemos considerar el homomorfismo natural $i : A_{(f)} \to A_f$. Además, recordemos que los ideales de A_f son de la forma I_f para algún ideal I de A y que los ideales primos de A_f son de la forma $\mathfrak{p}_f$ donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A de modo que $f \notin \mathfrak{p}$. Luego, a partir del homomorfismo i, por la Proposición 1.50 podemos considerar la siguiente aplicación

continua:

$$\begin{array}{rcl} i^* : \mathrm{Spec}(A_f) & \to & \mathrm{Spec}(A_{(f)}) \\ \mathfrak{p}_f & \mapsto & \mathfrak{p}_f \cap A_{(f)} \end{array}$$

Ahora bien, por la Proposición 1.58 sabemos que la siguiente aplicación es un homeomorfismo:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : D_A(f) & \to & \mathrm{Spec}(A_f) \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \mathfrak{p}_f \end{array}$$

Recordemos que por construcción tenemos que $\mathrm{Proj}(A) \subseteq \mathrm{Spec}(A)$, más aún, tenemos que $D_+(f) = \mathrm{Proj}(A) \cap D_A(f)$. De esta forma, podemos considerar la restricción de φ al abierto $D_+(f)$ y después podemos realizar la composición de dicha aplicación con i^*. Así, hemos construido la aplicación continua

$$\begin{array}{rcl} \zeta : D_+(f) & \mapsto & \mathrm{Spec}(A_{(f)}) \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \mathfrak{p}_f \cap A_{(f)} \end{array}$$

Lo siguiente que haremos es probar que ζ es una aplicación inyectiva: sean $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in D_+(f)$ tales que $\zeta(\mathfrak{p}) = \zeta(\mathfrak{p}')$, es decir, tales que $\mathfrak{p}_f \cap A_{(f)} = \mathfrak{p}'_f \cap A_{(f)}$. Como consecuencia directa del Lema 3.14 tenemos que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ con lo cual concluimos que ζ es una aplicación inyectiva.

Ahora probaremos que ζ es sobreyectiva: sea $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A_{(f)})$. Consideramos el siguiente conjunto:

$$\mathfrak{p} = \sqrt{\left\langle a \;\middle|\; \frac{a}{f^r} \in \mathfrak{q},\, r \in \mathbb{Z}_+ \text{ y } a \in A_{re} \right\rangle}.$$

Por el Lema 3.13 sabemos que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo homogéneo de A y satisface el siguiente enunciado: para cualesquier $d \in \mathbb{Z}_+$ y $a \in A_d$ se tiene que $a \in \mathfrak{p}$ si y sólo si $\dfrac{a^e}{f^d} \in \mathfrak{q}$. Además, observemos que $f \notin \mathfrak{p}$: si $f \in \mathfrak{p}$, entonces por la condición en $\mathfrak{p}$ tendríamos que $\dfrac{f^e}{f^e} = \dfrac{1_A}{1_A} \in \mathfrak{q}$ y esto implicaría que $\mathfrak{q} = A_{(f)}$ lo cual es absurdo. Por lo tanto, como $f \notin \mathfrak{p}$ se sigue que $A_+ \not\subseteq \mathfrak{p}$ y de esta forma tenemos que $\mathfrak{p} \in D_+(f)$. Finalmente, vamos a probar que $\zeta(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$, es decir, que $\mathfrak{p}_f \cap A_{(f)} = \mathfrak{q}$:

- $\mathfrak{p}_f \cap A_{(f)} \subseteq \mathfrak{q}$: sean $r \in \mathbb{Z}_+$ y $a \in A_{re}$ tales que $\dfrac{a}{f^r} \in \mathfrak{p}_f \cap A_{(f)}$. De manera particular tenemos que $\dfrac{a}{f^r} \in \mathfrak{p}_f$, luego, como $\mathfrak{p}$ es un ideal primo se sigue que $a \in \mathfrak{p}$. Así, por la condición en $\mathfrak{p}$ se sigue que $\dfrac{a^e}{f^{re}} = \left(\dfrac{a}{f^r}\right)^e \in \mathfrak{q}$ y como $\mathfrak{q}$ es un ideal primo se sigue que $\dfrac{a}{f^r} \in \mathfrak{q}$.
- $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}_f \cap A_{(f)}$: Sea $x \in \mathfrak{q}$. En particular, como x es un elemento de $A_{(f)}$ existen $r \in \mathbb{Z}_+$ y $a \in A_{re}$ tales que $x = \dfrac{a}{f^r}$. Puesto que $x \in \mathfrak{q}$ se sigue que $x^e \in \mathfrak{q}$, luego, el hecho de que

$\dfrac{a^e}{f^{re}} \in \mathfrak{q}$ y la condición en $\mathfrak{p}$ aseguran que $a \in \mathfrak{p}$. De este manera, tenemos que $\dfrac{a}{f^r} \in \mathfrak{p}_f$ y consecuentemente concluimos que $x \in \mathfrak{p}_f \cap A_{(f)}$.

Por lo tanto, tenemos que ζ es una aplicación sobreyectiva. De esta forma, se concluye que ζ es una biyección entre $D_+(f)$ y $\operatorname{Spec}(A_{(f)})$.

Como consecuencia directa al hecho que ζ es una biyección tenemos que i^* es una aplicación sobreyectiva: en efecto, por construcción tenemos que $\zeta = i^* \circ \varphi|_{D_+(f)}$. Sea $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A_{(f)})$. Como ζ es en particular sobreyectiva, se sigue que existe $\mathfrak{p} \in D_+(f)$ tal que $\zeta(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$, de este modo tenemos que $i^*(\varphi|_{D_+(f)}(\mathfrak{p})) = i^*(\mathfrak{p}_f) = \mathfrak{q}$.

Para mostrar que ζ es un homeomorfismo, como $\zeta = i^* \circ \varphi|_{D_+(f)}$ y φ es en particular una aplicación cerrada, será suficiente con mostrar que la aplicación i^* es cerrada. En primer lugar, enfaticemos que si I es un ideal de A, entonces $I_f \cap A_{(f)}$ es un ideal de $A_{(f)}$: en efecto, como I_f es la extensión del ideal I bajo el homomorfismo $i_f^A : A \to A_f$ se sigue que es un ideal de A_f; luego, como $I_f \cap A_{(f)}$ es la contracción del ideal I_f bajo el homomorfismo $i : A_{(f)} \to A_f$ se sigue que es un ideal de $A_{(f)}$. En segundo lugar, usando el hecho anterior, que i^* es sobreyectiva y el Lema 3.14 vamos a probar que i^* es una aplicación cerrada. Sea I un ideal de A.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{q} \in i^*(V_A(I_f)) &\iff \exists\, \mathfrak{p}_f \in V_A(I_f) : \mathfrak{q} = i^*(\mathfrak{p}_f)\\
&\iff \exists\, \mathfrak{p} \in D_A(f) : I_f \subseteq \mathfrak{p}_f \text{ y } \mathfrak{q} = i^*(\mathfrak{p}_f)\\
&\iff \exists\, \mathfrak{p} \in D_A(f) : I_f \cap A_{(f)} \subseteq \mathfrak{p}_f \cap A_{(f)} \text{ y } \mathfrak{q} = i^*(\mathfrak{p}_f)\\
&\iff I_f \cap A_{(f)} \subseteq \mathfrak{q}\\
&\iff \mathfrak{q} \in V_A(I_f \cap A_{(f)}).
\end{aligned}$$

De esta forma, tenemos que i^* es una aplicación cerrada. Por lo tanto, ζ es un homeomorfismo.

Por otro lado, sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ tal que $f \notin \mathfrak{p}$. Considerando a $\mathfrak{p}$ como un A-módulo podemos construir el $A_{(f)}$-submódulo $\mathfrak{p}_{(f)}$ de $\mathfrak{p}_f$, más aún, es inmediato que $\mathfrak{p}_{(f)} = \mathfrak{p}_f \cap A_{(f)}$ y por tanto que $\mathfrak{p}_{(f)}$ es un ideal primo de $\operatorname{Spec}(A_{(f)})$. Ahora bien, recordemos que en la Proposición 1.58 definimos el siguiente isomorfismo local de anillos:

$$\begin{aligned}
g_{\mathfrak{p}_f} : A_{\mathfrak{p}} &\to (A_f)_{\mathfrak{p}_f}\\
\frac{a}{u} &\mapsto \frac{\frac{a}{1_A}}{\frac{u}{1_A}}
\end{aligned}$$

Luego, como $A_{(\mathfrak{p})}$ es un subanillo de $A_{\mathfrak{p}}$ vamos a considerar la restricción del homomorfismo anterior a dicho subanillo. Denotaremos la restricción de $g_{\mathfrak{p}_f}$ a $A_{(\mathfrak{p})}$ por $g_{\mathfrak{p}_{(f)}}$. A continuación vamos a mostrar que la imagen de $A_{(\mathfrak{p})}$ bajo $g_{\mathfrak{p}_{(f)}}$ es el anillo $(A_{(f)})_{\mathfrak{p}_{(f)}}$. Sean $a \in A^h$ y $u \in (A \backslash \mathfrak{p}) \cap A^h$ tales que $\operatorname{grad}(a) = \operatorname{grad}(u) = \alpha$. Luego, como tenemos que

$$g_{\mathfrak{p}_{(f)}}\left(\frac{a}{u}\right) = \frac{\frac{a}{1_A}}{\frac{u}{1_A}} = \frac{\frac{a}{1_A}}{\frac{u}{1_A}} \cdot \frac{\frac{u^{e-1}}{f^\alpha}}{\frac{u^{e-1}}{f^\alpha}} = \frac{\frac{au^{e-1}}{f^\alpha}}{\frac{u^e}{f^\alpha}} \in (A_{(f)})_{\mathfrak{p}_{(f)}}$$

se sigue que $g_{\mathfrak{p}_{(f)}}(A_{(\mathfrak{p})}) \subseteq (A_{(f)})_{\mathfrak{p}_{(f)}}$. Recíprocamente, sean $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $a \in A_{en}$ y $u \in (A \backslash \mathfrak{p}) \cap A_{em}$. Observemos que $\dfrac{af^m}{uf^n}$ es un elemento de $A_{(\mathfrak{p})}$, además, la construcción de $g_{\mathfrak{p}_f}$ implica que

$$\frac{\frac{a}{f^n}}{\frac{u}{f^m}} = g_{\mathfrak{p}_f}\left(\frac{af^m}{uf^n}\right) = g_{\mathfrak{p}_{(f)}}\left(\frac{af^m}{uf^n}\right) \in g_{\mathfrak{p}_{(f)}}(A_{(\mathfrak{p})})$$

con lo cual se sigue que $(A_{(f)})_{\mathfrak{p}_{(f)}} \subseteq g_{\mathfrak{p}_{(f)}}(A_{(\mathfrak{p})})$. Por lo tanto tenemos que $g_{\mathfrak{p}_{(f)}}(A_{(\mathfrak{p})}) = (A_{(f)})_{\mathfrak{p}_{(f)}}$ y consecuentemente tenemos que $g_{\mathfrak{p}_{(f)}}$ es un isomorfismo entre los anillos $A_{(\mathfrak{p})}$ y $(A_{(f)})_{\mathfrak{p}_{(f)}}$, más aún, es un isomorfismo local: en efecto, sabemos que $g^{-1}_{\mathfrak{p}_{(f)}}((\mathfrak{p}_{(f)})_{\mathfrak{p}_{(f)}}) \subseteq \mathfrak{m}_{A_{(\mathfrak{p})}}$, así que sólo resta probar la otra contención. Sean $a \in \mathfrak{p} \cap A^h$ y $u \in (A \backslash \mathfrak{p}) \cap A^h$ tales que $\operatorname{grad}(a) = \operatorname{grad}(u) = \alpha$. Puesto que

$$g_{\mathfrak{p}_{(f)}}\left(\frac{a}{u}\right) = \frac{\frac{au^{e-1}}{f^\alpha}}{\frac{u^e}{f^\alpha}} \in (\mathfrak{p}_{(f)})_{\mathfrak{p}_{(f)}},$$

se sigue que $\dfrac{a}{u} \in g^{-1}_{\mathfrak{p}_{(f)}}((\mathfrak{p}_{(f)})_{\mathfrak{p}_{(f)}})$ y esto implica que $\mathfrak{m}_{A_{(\mathfrak{p})}} \subseteq g^{-1}_{\mathfrak{p}_{(f)}}((\mathfrak{p}_{(f)})_{\mathfrak{p}_{(f)}})$. De esta forma, concluimos que $g_{\mathfrak{p}_{(f)}}$ es un isomorfismo local entre los anillos $A_{(\mathfrak{p})}$ y $(A_{(f)})_{\mathfrak{p}_{(f)}}$. Vamos a considerar al homomorfismo inverso de $g_{\mathfrak{p}_{(f)}}$ que está dado por

$$\begin{array}{rcl} h_{\mathfrak{p}_{(f)}} : (A_{(f)})_{\mathfrak{p}_{(f)}} & \to & A_{(\mathfrak{p})} \\ \dfrac{\frac{a}{f^n}}{\frac{u}{f^m}} & \mapsto & \dfrac{af^m}{uf^n} \end{array}$$

Una vez con el isomorfismo anterior, vamos a construir el morfismo de gavillas $\zeta^\# : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A_{(f)})} \to \zeta_*(\mathcal{O}_{D_+(f)})$. Sea U un abierto de $\operatorname{Spec}(A_{(f)})$. Consideramos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rcl} \zeta^\#_U : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A_{(f)})}(U) & \to & \mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(A)}(\zeta^{-1}(U)) \\ s & \mapsto & \begin{array}{rcl} \zeta^\#_U(s) : \zeta^{-1}(U) & \to & \displaystyle\prod_{\mathfrak{r} \in \zeta^{-1}(U)} A_{(\mathfrak{r})} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & h_{\mathfrak{p}_{(f)}}(s \circ \zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{p})) \end{array} \end{array}$$

Comenzaremos comprobando que la asignación anterior está bien definida. Sea $s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})}(U)$. Claramente $\zeta_U^{\#}(s)$ satisface el primer requisito de los elementos de $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}(\zeta^{-1}(U))$, ahora mostraremos que también satisface el segundo requisito: sea $\mathfrak{p} \in \zeta^{-1}(U)$. Como $\zeta(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}_{(f)} \in U$ se sigue que existe un abierto V de $\mathrm{Spec}(A_{(f)})$ que contiene a $\zeta(\mathfrak{p})$, está contenido en U y existen $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $a \in A_{en}$ y $u \in (A \backslash \mathfrak{p}) \cap A_{em}$ tales que $V \subseteq D(\frac{u}{f^m})$ y para cada $\mathfrak{q}_{(f)} \in V$ se satisface que

$$s(\mathfrak{q}_{(f)}) = \frac{\frac{a}{f^n}}{\frac{u}{f^m}} (A_{(f)})_{\mathfrak{q}_{(f)}}.$$

Afirmamos que $\zeta^{-1}(V)$, af^m y uf^n son los elementos indicados que nos aseguran que $\zeta_U^{\#}(s)$ satisface la segunda condición de una sección de $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}$ sobre $\zeta^{-1}(U)$:

* Como V es un abierto de $\mathrm{Spec}(A_{(f)})$ que contiene a $\zeta(\mathfrak{p})$ y que está contenido en U, se sigue que $\zeta^{-1}(V)$ es un abierto de $\mathrm{Proj}(A)$ que contiene a $\mathfrak{p}$ y que está contenido en $\zeta^{-1}(U)$.
* Se tiene que $af^m \in A_{e(n+m)}$ y $uf^n \in (A \backslash \mathfrak{p}) \cap A_{e(n+m)}$.
* Se satisface que $\zeta^{-1}(V) \subseteq D_+(uf^n)$: supongamos que dicha contención es falsa, de este modo existe $\mathfrak{q} \in \zeta^{-1}(V)$ tal que $uf^n \in \mathfrak{q}$. De esto se sigue que $\frac{uf^n}{f^{m+n}} = \frac{u}{f^m}$ es un elemento de $\mathfrak{q}_{(f)}$. Luego, el hecho que $\mathfrak{q} \in \zeta^{-1}(V)$ implica que $\mathfrak{q}_{(f)} \in V$ y además tenemos que $\frac{u}{f^m} \in \mathfrak{q}_{(f)}$ lo cual es absurdo.
* Para cada $\mathfrak{r} \in \zeta^{-1}(V)$ se satisface que

$$\zeta_U^{\#}(s)(\mathfrak{r}) = h_{\mathfrak{r}_{(f)}}(s \circ \zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{r})) = h_{\mathfrak{r}_{(f)}}(s(\mathfrak{r}_{(f)})) = h_{\mathfrak{r}_{(f)}}(\frac{\frac{a}{f^n}}{\frac{u}{f^m}}) = \frac{af^m}{uf^n} A_{(\mathfrak{r})}.$$

Por lo tanto, tenemos que $\zeta_U^{\#}(s)$ es una sección de $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}$ sobre $\zeta^{-1}(U)$. Ahora, sean s y t secciones de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})}$ sobre U tales que $s = t$. Para mostrar que $\zeta_U^{\#}(s) = \zeta_U^{\#}(t)$ sólo nos resta probar que dichas aplicaciones tienen la misma regla de asignación. Sea $\mathfrak{p} \in \zeta^{-1}(U)$,

$$\zeta_U^{\#}(s)(\mathfrak{p}) = h_{\mathfrak{p}_{(f)}}(s \circ \zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{p})) = h_{\mathfrak{p}_{(f)}}(s(\zeta(\mathfrak{p}))) = h_{\mathfrak{p}_{(f)}}(t(\zeta(\mathfrak{p}))) = h_{\mathfrak{p}_{(f)}}(t \circ \zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{p})) = \zeta_U^{\#}(t)(\mathfrak{p}).$$

De esta forma, tenemos que $\zeta_U^{\#}$ está bien definida. Lo siguiente que haremos será mostrar que $\zeta_U^{\#}$ es un homomorfismo de anillos: sean s y t secciones de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})}$ sobre U. Nuevamente, para probar las igualdades deseadas sólo resta probar que las respectivas aplicaciones tienen la misma regla de asignación. Sea $\mathfrak{p} \in \zeta^{-1}(U)$,

$$\begin{aligned} \zeta_U^{\#}(s+t)(\mathfrak{p}) &= h_{\mathfrak{p}_{(f)}}((s+t) \circ \zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{p})) \\ &= h_{\mathfrak{p}_{(f)}}(s \circ \zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{p}) + t \circ \zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{p})) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= h_{\mathfrak{p}_{(f)}}(s \circ \zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{p})) + h_{\mathfrak{p}_{(f)}}(t \circ \zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{p}))\\
&= \zeta_U^{\#}(s)(\mathfrak{p}) + \zeta_U^{\#}(t)(\mathfrak{p})\\
&= (\zeta_U^{\#}(s) + \zeta_U^{\#}(t))(\mathfrak{p}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\zeta_U^{\#}(st)(\mathfrak{p}) &= h_{\mathfrak{p}_{(f)}}((st) \circ \zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{p}))\\
&= h_{\mathfrak{p}_{(f)}}(s \circ \zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{p}) \cdot t \circ \zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{p}))\\
&= h_{\mathfrak{p}_{(f)}}(s \circ \zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{p})) \cdot h_{\mathfrak{p}_{(f)}}(t \circ \zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{p}))\\
&= \zeta_U^{\#}(s)(\mathfrak{p}) \cdot \zeta_U^{\#}(t)(\mathfrak{p})\\
&= (\zeta_U^{\#}(s) \cdot \zeta_U^{\#}(t))(\mathfrak{p}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\zeta_U^{\#}(1_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})}(U)})(\mathfrak{p}) &= h_{\mathfrak{p}_{(f)}}(1_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})}(U)} \circ \zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{p}))\\
&= h_{\mathfrak{p}_{(f)}}\Big(\frac{\frac{1_A}{1_A}}{\frac{1_A}{1_A}}\Big)\\
&= \frac{1_A}{1_A}{}_{A_{(\mathfrak{p})}}\\
&= 1_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}(U)}(\mathfrak{p}).
\end{aligned}
$$

De esta manera, hemos comprobado que $\zeta_U^{\#}$ es un homomorfismo de anillos. El siguiente paso a dar es comprobar que $\zeta^{\#}$ es un morfismo: sean U y V abiertos de $\mathrm{Spec}(A_{(f)})$ tales que $V \subseteq U$. Vamos a probar que el siguiente diagrama es conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})}(U) \arrow[r, "\zeta_U^{\#}"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})}}{}^U_V"'] & \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}(\zeta^{-1}(U)) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}}{}^{\zeta^{-1}(U)}_{\zeta^{-1}(V)}"] \\
\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})}(V) \arrow[r, "\zeta_V^{\#}"'] & \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}(\zeta^{-1}(V))
\end{tikzcd}
$$

Sean $s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})}(U)$ y $\mathfrak{p} \in \zeta^{-1}(V)$,

$$
\begin{aligned}
\rho_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}}{}^{\zeta^{-1}(U)}_{\zeta^{-1}(V)} \circ \zeta_U^{\#}(s)(\mathfrak{p}) &= \zeta_U^{\#}(s)(\mathfrak{p})\\
&= h_{\mathfrak{p}_{(f)}}(s \circ \zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{p}))\\
&= h_{\mathfrak{p}_{(f)}}(\rho_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})}}{}^U_V(s) \circ \zeta|_{\zeta^{-1}(V)}(\mathfrak{p}))\\
&= \zeta_V^{\#} \circ \rho_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})}}{}^U_V(s)(\mathfrak{p}).
\end{aligned}
$$

Así, puesto que $\rho_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}}{}^{\zeta^{-1}(U)}_{\zeta^{-1}(V)} \circ \zeta^{\#}_U(s) = \zeta^{\#}_V \circ \rho_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})}}{}^{U}_{V}(s)$, concluimos que $\zeta^{\#}$ es un morfismo de gavillas.

Lo que mostraremos a continuación es que $\zeta^{\#}$ es un isomorfismo de gavillas, para ello, es suficiente mostrar que para cada $\mathfrak{p} \in D_+(f)$ el homomorfismo inducido $\zeta^{\#}_{\mathfrak{p}} : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)}),\ \mathfrak{p}_{(f)}} \to \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A),\ \mathfrak{p}}$ es un isomorfismo de anillos. Sea $\mathfrak{p} \in D_+(f)$. Claramente el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)}),\ \mathfrak{p}_{(f)}} \arrow[r, "\zeta^{\#}_{\mathfrak{p}}"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A),\mathfrak{p}} \arrow[d, "\cong"] \\
(A_{(f)})_{\mathfrak{p}_{(f)}} \arrow[r, "\cong", "h_{\mathfrak{p}_{(f)}}"'] & A_{(\mathfrak{p})}
\end{tikzcd}$$

con lo cual se sigue de manera inmediata que $\zeta^{\#}_{\mathfrak{p}}$ es un isomorfismo. Más aún, como $h_{\mathfrak{p}_{(f)}}$ es un isomorfismo local de anillos, se sigue que $\zeta^{\#}_{\mathfrak{p}}$ también lo es.

Finalmente, con todo lo realizado concluimos que $(D_+(f), \mathcal{O}_{D_+(f)})$ es isomorfo como espacio localmente anillado a $(\mathrm{Spec}(A_{(f)}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})})$. ❑

2. Propiedades Básicas de Esquemas

En esta sección finalmente definiremos de manera concreta a los esquemas, posteriormente revisaremos algunos ejemplos, las propiedades básicas de estos objetos y definiremos sus morfismos. Antes de definir un esquema, en la siguiente definición vamos a fijar terminología que usaremos en adelante.

Definición 3.16. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio localmente anillado. Un abierto U de X es un *abierto afín* si con la estructura inducida de espacio localmente anillado es un esquema afín. Una cubierta abierta formada por abiertos afines es una *cubierta afín*.

Definición 3.17. Un *esquema* es un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ de modo que X tiene una cubierta afín. X es el *espacio topológico subyacente* del esquema $(X, \mathcal{O}_X)$.

El siguiente resultado obvio nos dará una caracterización de los esquemas.

Proposición 3.18. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio localmente anillado. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema.*

2. *Para cada $p \in X$ existe un abierto afín U de X tal que $p \in U$.*

Ejemplo 3.19. Para cualquier anillo A, el esquema afín $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ es un esquema. En efecto, para cualquier punto $\mathfrak{p}$ de $\mathrm{Spec}(A)$ consideramos a $\mathrm{Spec}(A)$ como el abierto afín que contiene a $\mathfrak{p}$.

Ejemplo 3.20. Para cualquier anillo graduado A, el espectro proyectivo $(\mathrm{Proj}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)})$ es un esquema. En efecto, consideremos a $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(A)$. Como $(D_+(f))_{f \in A_+^h}$ es una base para la topología de $\mathrm{Proj}(A)$ existe $g \in A_+^h$ tal que $\mathfrak{p} \in D_+(g)$. Además, el enunciado 2 de la Proposición 3.15 nos asegura que $D_+(g)$ es un abierto afín de $\mathrm{Proj}(A)$.

La propiedad de que un espacio localmente anillado sea un esquema es hereditaria a los abiertos del espacio subyacente con la estructura inducida de espacio localmente anillado. El siguiente resultado nos hablará de este hecho.

Proposición 3.21. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema. Para cualquier abierto U de X se tiene que $(U, \mathcal{O}_U)$ es un esquema.*

Demostración. Como $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema se tiene que existe una cubierta afín $(U_i)_{i \in I}$ de X. Sea U un abierto de X. Observemos que $(U \cap U_i)_{i \in I}$ es una cubierta abierta de U. Sea $p \in U$. Como $(U \cap U_i)_{i \in I}$ es una cubierta abierta de U se sigue que existe $j \in I$ tal que $p \in U \cap U_j$. Ahora bien, como $U \cap U_j$ es un abierto de U_j que es afín existe $f \in \mathcal{O}_X(U_j)$ tal que $\mathfrak{p} \in D(f)$ y $D(f) \subseteq U \cap U_j$. Puesto que $D(f)$ es un abierto de U_j que a su vez es un abierto de X, se sigue que $D(f)$ es un abierto de X. Además, el hecho de que $D(f) \subseteq U \cap U_j \subseteq U$ y de que U es un abierto de X implican que $D(f)$ es un abierto de U, más aún, es un abierto afín. De esta forma, concluimos que $(U, \mathcal{O}_U)$ es un esquema. ❑

La siguiente noción que definiremos es la de morfismo de esquemas. Una vez que tengamos dicha definición las nociones de composición e isomorfismo se obtienen de manera natural.

Definición 3.22. Un *morfismo de esquemas* es un morfismo de espacios localmente anillados.

Lo que haremos a continuación es definir algunos tipos de esquemas que son dados gracias a propiedades topológicas del espacio subyacente del esquema.

Definición 3.23. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema.

1. $(X, \mathcal{O}_X)$ es *casi compacto* si X es casi compacto.
2. $(X, \mathcal{O}_X)$ es *irreducible* si X es irreducible.
3. $(X, \mathcal{O}_X)$ es *conexo* si X es conexo.

Los siguientes tipos de esquemas que definiremos provendrán de propiedades de los anillos de secciones de la gavilla estructural del esquema.

Definición 3.24. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema.

1. $(X, \mathcal{O}_X)$ es *reducido* si $\mathcal{O}_X(U)$ no tiene elementos nilpotentes para cada abierto U de X.
2. $(X, \mathcal{O}_X)$ es *entero* si $\mathcal{O}_X(U)$ es un dominio entero para cada abierto U de X.

Aún nos resta definir a los esquemas noetherianos y localmente noetherianos, estas clases de esquemas serán definidas y estudiadas en la sección posterior.

Lo siguiente que realizaremos es definir dos clases de subconjuntos del espacio topológico subyacente de un esquema, una clase estará formada por subconjuntos que tendrán una estructura de cerrado y la otra estará formada por subconjuntos que tendrán una estructura de abierto. Como veremos, dichos conjuntos generalizan en cierto sentido a los cerrados y los abiertos básicos de la topología de Zariski del espectro de un anillo. Comenzaremos construyendo los conjuntos cerrados, para ello, necesitaremos la siguiente definición.

Definición 3.25. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Un *ideal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_X$* es un $\mathcal{O}_X$-submódulo de $\mathcal{O}_X$.

Proposición 3.26. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal de $\mathcal{O}_X$ de un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$. El conjunto*

$$V(\mathcal{I}) = \left\{p \in X \,\middle|\, \mathcal{I}_p \neq \mathcal{O}_{X,p}\right\}$$

es un cerrado de X.

Demostración. Para probar que $V(\mathcal{I})$ es un cerrado de X probaremos que $X \setminus V(\mathcal{I})$ es un abierto de X. Si $X \setminus V(\mathcal{I})$ es igual al vacío, nada a probar. Supongamos que $X \setminus V(\mathcal{I})$ es diferente del vacío, así, podemos considerar un elemento p de X de modo que $p \in X \setminus V(\mathcal{I})$. El hecho que $\mathcal{I}_p = \mathcal{O}_{X,p}$ es equivalente a tener que $1_{\mathcal{O}_{X,p}} \in \mathcal{I}_p$, consecuentemente existen un abierto U de X que contiene a p y $s \in \mathcal{I}(U)$ tales que $[(X, 1_{\mathcal{O}_X(X)})] = [(U, s)]$, esto implica que existe un abierto V de X que contiene a p, está contenido en U y tal que $s|_V = 1_{\mathcal{O}_X(V)}$. Por consiguiente, si $q \in V$, entonces se tiene que $s_q = 1_{\mathcal{O}_{X,q}}$ y como $s_q \in \mathcal{I}_q$ se sigue que $\mathcal{I}_q = \mathcal{O}_{X,q}$, de este hecho obtenemos que $q \notin V(\mathcal{I})$. De este modo, como V es un abierto de X que contiene a p y está contenido en $X \setminus V(\mathcal{I})$ se concluye que $X \setminus V(\mathcal{I})$ es un abierto de X. ❑

La razón por la cual estos conjuntos generalizan a los cerrados de la topología de Zariski será explicada en la Sección 1 del Capítulo 4. Ahora, procederemos con la construcción de los conjuntos abiertos.

Proposición 3.27. *Sean* $(X, \mathcal{O}_X)$ *un esquema y* f *una sección global de* $\mathcal{O}_X$*. El conjunto*

$$X_f = \left\{ p \in X \,\middle|\, f_p \in \mathcal{O}_{X,p} \backslash \mathfrak{m}_{X,p} \right\}$$

es un abierto de X*.*

Demostración. Si X_f es vacío entonces nada a probar. De esta forma, podemos suponer que X_f es no vacío y considerar un elemento p de X tal que $p \in X_f$, así, existe $y \in \mathcal{O}_{X,p}$ tal que $f_p \cdot y = 1_{\mathcal{O}_{X,p}}$. Puesto que y es un elemento de $\mathcal{O}_{X,p}$ se sigue que existen un abierto U de X que contiene a p y una sección g de $\mathcal{O}_X$ sobre U tales que $y = [(U, g)]$. Ahora bien, de la igualdad $f_p \cdot y = 1_{\mathcal{O}_{X,p}}$ se sigue que $[(X, f)] \cdot [(U, g)] = [(X, 1_{\mathcal{O}_X(X)})]$ y esto implica que existe un abierto W de X que contiene a p y que está contenido en U tal que $f|_W \cdot g|_W = 1_{\mathcal{O}_X(W)}$. Consideramos $h = g|_W$. Sea $q \in W$. La igualdad $f|_W \cdot h = 1_{\mathcal{O}_X(W)}$ induce la igualdad $f_q \cdot h_q = 1_{\mathcal{O}_{X,q}}$, con esto tenemos que $f_q \in \mathcal{O}_{X,q} \backslash \mathfrak{m}_{X,q}$ y consecuentemente que $q \in X_f$. De esta forma, como W es un abierto de X que contiene a p y está contenido en X_f concluimos que X_f es un abierto de X. ❑

Observación 3.28. Sea A un anillo. Cuando consideramos el esquema afín $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ tenemos que $\mathrm{Spec}(A)_f = D(f)$ para cualquier $f \in A$. En efecto, sea $f \in A$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)_f &\iff f_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{U}(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A),\mathfrak{p}}) \\ &\iff \frac{f}{1_A} \in \mathcal{U}(A_{\mathfrak{p}}) \\ &\iff \frac{f}{1_A} \notin \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \\ &\iff f \notin \mathfrak{p} \\ &\iff \mathfrak{p} \in D(f). \end{aligned}$$

Vamos a fijar a un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ y a una sección global f de $\mathcal{O}_X$. Lo que haremos será definir un homomorfismo natural entre $\mathcal{O}_X(X)_f$ y $\mathcal{O}_X(X_f)$. Consideramos el homomorfismo restricción $\rho_{\mathcal{O}_X}{}^X_{X_f} : \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X_f)$. Vamos probar que $f|_{X_f}$ es una unidad en $\mathcal{O}_X(X_f)$ y de esta forma, por la propiedad universal de la localización para anillos tendremos el homomorfismo deseado. Supongamos que X_f es no vacío. Por lo realizado en la proposición anterior se tiene que para todo $p \in X_f$ existen un abierto U_p de X que contiene a p y una sección h^p de $\mathcal{O}_X$ sobre U_p tales que $f|_{U_p} \cdot h^p = 1_{\mathcal{O}_X(U_p)}$. Luego, observemos que $(U_p)_{p \in X_f}$ es una cubierta abierta de X_f y que $(h^p)_{p \in X_f}$ es una familia de secciones de $\mathcal{O}_X$ de modo que $h^p \in \mathcal{O}_X(U_p)$ para cada $p \in X_f$. Probaremos que dicha familia se extiende a una sección de $\mathcal{O}_X$ sobre X_f. Sean $p, q \in X_f$, vamos a mostrar que $h^p|_{U_p \cap U_q} = h^q|_{U_p \cap U_q}$. De las igualdades $f|_{U_p} \cdot h^p = 1_{\mathcal{O}_X(U_p)}$ y $f|_{U_q} \cdot h^q = 1_{\mathcal{O}_X(U_q)}$ se sigue que $f|_{U_p \cap U_q} \cdot h^p|_{U_p \cap U_q} = 1_{\mathcal{O}_X(U_p \cap U_q)} = f|_{U_p \cap U_q} \cdot h^q|_{U_p \cap U_q}$. Luego, si $r \in U_p \cap U_q$ entonces se tiene que

$(f|_{U_p\cap U_q})_r \cdot (h^p|_{U_p\cap U_q})_r = (f|_{U_p\cap U_q})_r \cdot (h^q|_{U_p\cap U_q})_r$ y como $r \in X_f$ se sigue que $(h^p|_{U_p\cap U_q})_r = (h^q|_{U_p\cap U_q})_r$. Consecuentemente, como $\mathcal{O}_X$ es una gavilla se sigue que $h^p|_{U_p\cap U_q} = h^q|_{U_p\cap U_q}$. De este modo, utilizando el hecho de que $(U_p)_{p\in U}$ es una cubierta abierta de X_f y de que $\mathcal{O}_X$ es una gavilla se sigue la existencia de una sección h de $\mathcal{O}_X$ sobre X_f de modo que $h|_{U_p} = h^p$ para cualquier $p \in X_f$. Además, tenemos que $h \cdot f|_{X_f} = 1_{\mathcal{O}_X(X_f)}$ pues $(h \cdot f|_{X_f})|_{U_p} = 1_{\mathcal{O}_X(U_p)}$ para cualquier $p \in X_f$. De esta forma, como $f|_{X_f}$ es una unidad de $\mathcal{O}_X(X_f)$, por la propiedad universal de la localización para anillos existe un homomorfismo de anillos $\varphi : \mathcal{O}_X(X_f)_f \to \mathcal{O}_X(X_f)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(X) \arrow[r, "\rho_{\mathcal{O}_X}{}^{X}_{X_f}"] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(X_f) \\
\mathcal{O}_X(X)_f \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Siguiendo con esta idea, sea W un abierto no vacío de X. Al tomar al elemento $f|_W$ de $\mathcal{O}_X(W)$ y al considerar el homomorfismo restricción $\rho_{\mathcal{O}_X}{}^{W}_{W\cap X_f} : \mathcal{O}_X(W) \to \mathcal{O}_X(W \cap X_f)$, con un procedimiento análogo al anterior se construye un homomorfismo de anillos entre $\mathcal{O}_X(W)_{f|_W}$ y $\mathcal{O}_X(W \cap X_f)$. Más aún, al pensar en $\mathcal{O}_X(W)$ como un $\mathcal{O}_X(X)$-módulo podemos considerar al $\mathcal{O}_X(X)$-módulo $\mathcal{O}_X(W)_f$ y además, por la Proposición 1.40 tenemos que existe un $\mathcal{O}_X(X)$-isomorfismo entre $\mathcal{O}_X(W)_f$ y $\mathcal{O}_X(W)_{f|_W}$. Dicho isomorfismo junto con el hecho de que tenemos la aplicación $\mathcal{O}_X(W)_{f|_W} \to \mathcal{O}_X(W \cap X_f)$ implican la existencia de una aplicación $\mathcal{O}_X(X)$-lineal entre $\mathcal{O}_X(W)_f$ y $\mathcal{O}_X(W \cap X_f)$.

Lo siguiente que haremos es dar una condición para que el homomorfismo natural entre $\mathcal{O}_X(X)_f$ y $\mathcal{O}_X(X_f)$ que acabamos de construir sea un isomorfismo. Para ello, debemos de definir la noción de buena cubierta.

Definición 3.29. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema. Una *buena cubierta* de X es una cubierta afín finita de X tal que la intersección de cualesquier dos abiertos de dicha cubierta es una unión finita de abiertos afines.

Claramente tenemos que si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema afín, entonces (X) es una buena cubierta de X. Además, como veremos en la próxima sección, el espacio topológico subyacente de un esquema noetheriano también tiene una buena cubierta.

Teorema 3.30. *Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema y f una sección global de $\mathcal{O}_X$. Si X tiene una buena cubierta, entonces el homomorfismo natural entre $\mathcal{O}_X(X)_f$ y $\mathcal{O}_X(X_f)$ es un isomorfismo de anillos.*

Demostración. Sean $r \in \mathbb{N}$ y $(U_i)_{i\in\{1,\ldots,r\}}$ una buena cubierta de X. Sea $i \in \{1,\ldots,r\}$. Mostraremos que el hecho de que U_i es un abierto afín implica que $U_i \cap X_f = D(f|_{U_i})$. Sea $p \in U_i$.

$$\begin{aligned} p \in U_i \cap X_f &\iff p \in X_f \\ &\iff f_p \in \mathcal{U}(\mathcal{O}_{X,p}) \\ &\iff (f|_{U_i})_p \in \mathcal{U}(\mathcal{O}_{U_i,p}) \\ &\iff \frac{f|_{U_i}}{1_{\mathcal{O}_X(U_i)}} \in \mathcal{O}_X(U_i)_p \backslash p_p \\ &\iff f|_{U_i} \notin p \\ &\iff p \in D(f|_{U_i}). \end{aligned}$$

De esta forma, se tiene que $U_i \cap X_f = D(f|_{U_i})$ y consecuentemente tenemos que

$$\mathcal{O}_X(U_i \cap X_f) = \mathcal{O}_X(D(f|_{U_i})) = \mathcal{O}_{U_i}(D(f|_{U_i})) \cong \mathcal{O}_{U_i}(U_i)_{f|_{U_i}} = \mathcal{O}_X(U_i)_{f|_{U_i}} \cong \mathcal{O}_X(U_i)_f.$$

Por lo tanto, tenemos que existe un $\mathcal{O}_X(X)$-isomorfismo entre $\mathcal{O}_X(U_i)_f$ y $\mathcal{O}_X(U_i \cap X_f)$ el cual denotaremos por ψ_i para cada $i \in \{1,\ldots,r\}$. Por otro lado, recordemos que para cada abierto W de X existe una aplicación $\mathcal{O}_X(X)$-lineal entre $\mathcal{O}_X(W)_f$ y $\mathcal{O}_X(W \cap X_f)$, de esta forma, para cualesquier $i, j \in \{1,\ldots,r\}$ vamos a denotar por ξ_{ij} a la aplicación $\mathcal{O}_X(X)$-lineal entre $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)_f$ y $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j \cap X_f)$.

Ahora bien, de la definición de gavilla tenemos que la siguiente sucesión de $\mathcal{O}_X(X)$-módulos es exacta:

(2.1)
$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(X) &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X(U_i) \longrightarrow \bigoplus_{i,j\in\{1,\ldots,r\}^2} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) \\ s &\longmapsto (s|_{U_i})_{i\in\{1,\ldots,r\}} \\ & (s_i)_{i\in\{1,\ldots,r\}} \longmapsto (s_i|_{U_i\cap U_j} - s_j|_{U_i\cap U_j})_{i,j\in\{1,\ldots,r\}^2} \end{aligned}$$

Luego, utilizando la localización y la sucesión exacta anterior obtenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)_f \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X(U_i)_f \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{i,j\in\{1,\ldots,r\}^2} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)_f$$

Ahora bien, considerando la sucesión 2.1 con el abierto X_f y con la cubierta abierta $(U_i \cap X_f)_{i\in\{1,\dots,r\}}$ de X_f se tiene que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_f) \xrightarrow{\alpha'} \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X(U_i \cap X_f) \xrightarrow{\beta'} \bigoplus_{i,j\in\{1,\dots,r\}^2} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j \cap X_f).$$

De esta manera podemos construir el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(X)_f \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X(U_i)_f \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\psi"', "\cong"] & \bigoplus_{i,j\in\{1,\dots,r\}^2} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)_f \arrow[d, "\xi"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(X_f) \arrow[r, "\alpha'"'] & \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X(U_i \cap X_f) \arrow[r, "\beta'"'] & \bigoplus_{i,j\in\{1,\dots,r\}^2} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j \cap X_f)
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

donde ψ es el $\mathcal{O}_X(X)$-isomorfismo inducido por la familia de $\mathcal{O}_X(X)$-isomorfismos $(\psi_i)_{i\in\{1,\dots,r\}}$ y donde ξ es la aplicación inducida por las aplicaciones $\mathcal{O}_X(X)$-lineales $(\xi_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,r\}^2}$. Del diagrama anterior se sigue que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\varphi \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\psi \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\xi \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(X)_f \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X(U_i)_f \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\psi"', "\cong"] & \bigoplus_{i,j\in\{1,\dots,r\}^2} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)_f \arrow[d, "\xi"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(X_f) \arrow[r, "\alpha'"'] & \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X(U_i \cap X_f) \arrow[r, "\beta'"'] & \bigoplus_{i,j\in\{1,\dots,r\}^2} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j \cap X_f)
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo con filas exactas. Como ψ es una aplicación inyectiva y como la primera fila del diagrama anterior es exacta se sigue que φ es inyectiva. Observemos que para obtener este hecho la única hipótesis que hemos usado es que X tiene una cubierta afín finita, es decir, que X es una unión finita de abiertos afines. Ahora, sean $j, k \in \{1, \dots, r\}$. Como $(U_i)_{i\in\{1,\dots,r\}}$ es una buena cubierta se sigue que $U_j \cap U_k$ es una unión finita de abiertos afines, por lo tanto, podemos realizar un procedimiento análogo al realizado para mostrar que φ es inyectiva para obtener que ξ_{jk} también es una aplicación inyectiva. Con esto, obtenemos que ξ es una aplicación inyectiva.

Una vez que sabemos que ξ es una aplicación inyectiva, regresamos al diagrama 2.2 para mostrar que φ es una aplicación sobreyectiva. Sea $y \in \mathcal{O}_X(X_f)$. Considerando al elemento $\alpha'(y)$, como ψ es sobreyectiva se tiene la existencia de un elemento $z \in \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X(U_i)_f$ tal que $\alpha'(y) = \psi(z)$. Por otro lado, como $\beta'(\alpha'(y)) = 0_{\bigoplus_{i,j\in\{1,\dots,r\}^2} O_X(U_i\cap U_j\cap X_f)}$ se sigue que $\beta'(\psi(z)) = 0_{\bigoplus_{i,j\in\{1,\dots,r\}^2} O_X(U_i\cap U_j\cap X_f)}$. Luego, por la conmutatividad del diagrama tenemos que $\xi(\beta(z)) = 0_{\bigoplus_{i,j\in\{1,\dots,r\}^2} O_X(U_i\cap U_j\cap X_f)}$ y la inyectividad de ξ implica que $z \in \operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Im}\alpha$, así, existe $x \in O_X(X)_f$ tal que $\alpha(x) = z$. Utilizando nuevamente la conmutatividad del diagrama se sigue que $\alpha'(\varphi(x)) = \psi(\alpha(x))$ y consecuentemente tenemos que

$$\alpha'(\varphi(x)) = \psi(\alpha(x)) = \psi(z) = \alpha'(y).$$

Finalmente, por la inyectividad de α' se tiene que $\varphi(x) = y$ y con esto tenemos que φ es una aplicación sobreyectiva.

De esta forma, como φ es una aplicación inyectiva y sobreyectiva se sigue que φ es un isomorfismo. Por lo tanto, concluimos que los anillos $O_X(X)_f$ y $O_X(X_f)$ son isomorfos. ❏

En la Sección 3 del Capítulo 5 retomaremos el concepto de buena cubierta y utilizaremos los abiertos definidos en la Proposición 3.27.

3. Esquemas Noetherianos y Localmente Noetherianos

Para concluir con este capítulo, en esta sección estudiaremos un tipo especial de esquemas, hablamos de los esquemas noetherianos y localmente noetherianos. Puesto que estaremos utilizando anillos y espacios noetherianos vamos a realizar un recordatorio rápido sobre ellos, sin embargo, se recomienda al lector revisar el Apéndice B para obtener mayores detalles.

Recordemos que un anillo A es *noetheriano* si cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. Cada sucesión creciente de ideales de A se estaciona.
2. Cada conjunto no vacío de ideales de A tiene un elemento maximal.

Además, tenemos las siguientes propiedades:

- Para cualquier conjunto multiplicativo S de A se tiene que $S^{-1}A$ es un anillo noetheriano.
- Si $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \dots, x_n$ son variables sobre A, entonces $A[x_1, \dots, x_n]$ es un anillo noetheriano.

Asimismo, un espacio topológico X es *noetheriano* si cada sucesión decreciente de cerrados de X es estable. Además, tenemos las siguientes propiedades:

- X es casi compacto.
- Cada subespacio de X es noetheriano.
- Cada subconjunto de X es casi compacto.

A continuación vamos a definir a los objetos centrales de esta sección: los esquemas noetherianos y localmente noetherianos.

Definición 3.31. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema.

1. $(X, \mathcal{O}_X)$ es *noetheriano* si X tiene una cubierta abierta finita construida por abiertos afines cuyos anillos de secciones globales de sus gavillas estructurales son de Noether.
2. $(X, \mathcal{O}_X)$ es *localmente noetheriano* si X tiene una cubierta afín $(U_i)_{i\in I}$ tal que $\mathcal{O}_X(U_i)$ es un anillo de Noether para todo $i \in I$.

Ejemplo 3.32. Si A es un anillo de Noether, entonces $(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)})$ es un esquema noetheriano. De manera particular, el espacio afín $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = (\operatorname{Spec}(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n])})$ de dimensión n es un esquema noetheriano.

Observación 3.33. Si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema noetheriano, entonces X tiene una buena cubierta. En efecto, por definición existen $r \in \mathbb{N}$ y una cubierta afín $(U_i)_{i\in\{1,\ldots,r\}}$ de X de modo que $\mathcal{O}_X(U_i)$ es noetheriano para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. Sean $i, j \in \{1, \ldots, r\}$. El hecho de que $\mathcal{O}_X(U_i)$ es noetheriano implica que el esquema afín $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ es noetheriano, además, recordemos que una base para la topología de U_i está dada por $(D(f))_{f\in\mathcal{O}_X(U_i)}$. Como $U_i \cap U_j$ es un abierto de U_i se sigue que $U_i \cap U_j$ es una unión de abiertos afines. Además, el hecho de que $\mathcal{O}_X(U_i)$ es un anillo noetheriano implica que U_i es un espacio noetheriano (véase Proposición B.20) y consecuentemente cada subconjunto de U_i es casi compacto (véase Proposición B.23). De este modo, se concluye que $U_i \cap U_j$ es una unión finita de abiertos afines.

Observación 3.34. Si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema noetheriano, entonces X es un espacio topológico noetheriano. En efecto, sabemos que existen $r \in \mathbb{N}$ y una cubierta afín $(U_i)_{i\in\{1,\ldots,r\}}$ de X tales que $\mathcal{O}_X(U_i)$ es noetheriano para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. El hecho de de que $\mathcal{O}_X(U_i)$ es noetheriano implica que U_i es un espacio noetheriano (véase Proposición B.20) para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. De este modo, como $X = \bigcup_{i=1}^r U_i$, la Proposición B.24 implica que X es un espacio noetheriano.

El siguiente resultado establece condiciones necesarias y suficientes para determinar cuándo un esquema es noetheriano.

Proposición 3.35. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema. $(X, \mathcal{O}_X)$ es noetheriano si y sólo si es localmente noetheriano y casi compacto.*

Demostración. Supongamos que $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema noetheriano, así, existen $r \in \mathbb{N}$ y una cubierta afín $(U_i)_{i\in\{1,\ldots,r\}}$ de X tales que $\mathcal{O}_X(U_i)$ es un anillo noetheriano para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Dicha cubierta implica que $(X, \mathcal{O}_X)$ es localmente noetheriano. Además, como $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema noetheriano, por la observación anterior sabemos que X es un espacio noetheriano y por lo tanto X es casi compacto.

Recíprocamente, supongamos que $(X, \mathcal{O}_X)$ es localmente noetheriano y casi compacto, así, existe una cubierta afín $(U_i)_{i\in I}$ de X tal que $\mathcal{O}_X(U_i)$ es noetheriano para todo $i \in I$. Luego, el hecho de que X es casi compacto implica que $(U_i)_{i\in I}$ tiene una subcubierta finita que cubre a X. Dicha subcubierta otorga a $(X, \mathcal{O}_X)$ una estructura de esquema noetheriano. ❏

Cuando nos encontramos trabajando con un esquema localmente noetheriano siempre es posible seleccionar una base muy particular para su espacio topológico. En efecto, el próximo resultado nos dirá cómo es dicha base.

Lema 3.36. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema localmente noetheriano. X tiene una base para su topología formada por abiertos afines cuyos anillos son de Noether.*

Demostración. Como $(X, \mathcal{O}_X)$ es localmente noetheriano existe una cubierta afín $(U_i)_{i\in I}$ de X tal que $\mathcal{O}_X(U_i)$ es noetheriano para todo $i \in I$. Sea $i \in I$. Como U_i es un abierto afín sabemos que $(D(f))_{f\in\mathcal{O}_X(U_i)}$ es una base para la topología de U_i, esto implica que $\bigcup_{i\in I}(D(f))_{f\in\mathcal{O}_X(U_i)}$ es una base para la topología de X. Además, para cada $i \in I$ al considerar un elemento f de $\mathcal{O}_X(U_i)$, como $D(f) \cong \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_X(U_i)_f)$ y como $\mathcal{O}_X(U_i)$ es un anillo de Noether se sigue que $\mathcal{O}_X(U_i)_f$ es un anillo de Noether. ❏

En el caso particular en que nuestro esquema sea un esquema afín podemos enunciar el lema anterior de la siguiente manera

Corolario 3.37. *Si A es un anillo noetheriano, entonces $(D(f))_{f\in A}$ es una base para la topología de* $\operatorname{Spec}(A)$ *construida por abiertos afines cuyos anillos son noetherianos.*

Para concluir con este capítulo presentaremos un resultado que estable condiciones necesarias y suficientes para determinar cuándo un esquema es localmente noetheriano. Antes de pasar a dicho resultado necesitaremos la ayuda del siguiente lema:

Lema 3.38. *Sean A un anillo y $(B_i)_{i\in I}$ una familia de anillos noetherianos. Si para todo $i \in I$ se tiene que* $\operatorname{Spec}(B_i)$ *es un abierto de* $\operatorname{Spec}(A)$ *y* $\operatorname{Spec}(A) = \bigcup_{i\in I} \operatorname{Spec}(B_i)$*, entonces A es un anillo noetheriano.*

Demostración. Sea $i \in I$. Como $\operatorname{Spec}(B_i)$ es un abierto de $\operatorname{Spec}(A)$ se sigue que existe $f_i \in A$ tal que $D(f_i) \subseteq \operatorname{Spec}(B_i)$, ahora bien, como $\operatorname{Spec}(B_i)$ es un abierto afín de $\operatorname{Spec}(A)$ se sigue que $B_{i\overline{f_i}} \cong A_{f_i}$ donde $\overline{f_i}$ es la imagen de f_i bajo el homomorfismo de anillos que induce la inclusión entre $\operatorname{Spec}(B)$ y $\operatorname{Spec}(A)$. De este modo, sin pérdida de generalidad podemos suponer desde el inicio que $\operatorname{Spec}(A) = \bigcup_{i\in I} \operatorname{Spec}(A_{f_i})$ donde $f_i \in A$ y que A_{f_i} es un anillo noetheriano para cada $i \in I$.

Luego, como $\mathrm{Spec}(A)$ es casi compacto se sigue que existe $r \in \mathbb{N}$ y existen $f_{i_1}, \ldots, f_{i_r} \in A$ tales que $\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_{j=1}^{r} \mathrm{Spec}(A_{f_{i_j}})$ y donde $A_{f_{i_j}}$ es noetheriano para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$. Consecuentemente tenemos que

$$\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_{j=1}^{r} \mathrm{Spec}(A_{f_{i_j}}) = \bigcup_{j=1}^{r} D(f_{i_j}) = \bigcup_{j=1}^{r} \mathrm{Spec}(A) \backslash V(Af_{i_j}) = \mathrm{Spec}(A) \backslash \bigcap_{j=1}^{r} V(Af_{i_j})$$

y este hecho implica que

$$\bigcap_{j=1}^{r} V(Af_{i_j}) = V(\sum_{j=1}^{r} Af_{i_j}) = \emptyset.$$

La igualdad anterior es equivalente a decir que $\sum_{j=1}^{r} Af_{i_j} = A$, además, como $A_{f_{i_j}}$ es noetheriano para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$ por la Proposición B.15 se concluye que A es noetheriano. ❏

Teorema 3.39. *Un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ es localmente noetheriano si y sólo si para todo abierto afín U de X se tiene que $\mathcal{O}_X(U)$ es noetheriano.*

Demostración. Supongamos que para cada abierto afín U de X se satisface que $\mathcal{O}_X(U)$ es noetheriano. Como $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema, se sigue de una manera inmediata que $(X, \mathcal{O}_X)$ es localmente noetheriano.

Recíprocamente, supongamos que $(X, \mathcal{O}_X)$ es localmente noetheriano. Sea U un abierto afín de X. Como $(X, \mathcal{O}_X)$ es localmente noetheriano por el Lema 3.36 tenemos que X tiene una base para su topología formada por abiertos afines cuyos anillos son de Noether, de esta forma, tenemos que $U = \bigcup_{i \in I} W_i$ donde W_i es un abierto de la base en cuestión para cada $i \in I$. Luego, como U es un abierto afín, $U = \bigcup_{i \in I} W_i$ donde W_i es un abierto afín de U y $\mathcal{O}_X(W_i)$ es noetheriano para cada $i \in I$, el lema anterior implica que $\mathcal{O}_X(U)$ es noetheriano. ❏

Corolario 3.40. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema afín. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$(X, \mathcal{O}_X)$ es localmente noetheriano.*
2. *$\mathcal{O}_X(X)$ es noetheriano.*
3. *$(X, \mathcal{O}_X)$ es noetheriano.*

Demostración.

1. $\Rightarrow$ 2. Como $(X, \mathcal{O}_X)$ es localmente noetheriano se tiene que $\mathcal{O}_X(U)$ es noetheriano para todo abierto afín U de X. En particular, como X es un abierto afín se concluye que $\mathcal{O}_X(X)$ es un anillo noetheriano.

2. $\Rightarrow$ 3. Obvio, pues tenemos que $\mathcal{O}_X(X)$ es noetheriano y $(X, \mathcal{O}_X) \cong (\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X)), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X))})$.

3. $\Rightarrow$ 1. Obvio, pues tenemos que $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema noetheriano y por lo tanto es localmente noetheriano. ❏

Capítulo 4

Gavillas Casi Coherentes

En este capítulo realizaremos uno de los objetivos de este trabajo: la clasificación de las gavillas casi coherentes sobre esquemas afines. En las primeras dos secciones construiremos una familia de gavillas de módulos sobre espectros afines y espectros proyectivos y nos daremos a la tarea de estudiar algunas de sus propiedades, dichas gavillas serán nuestros modelos de gavillas casi coherentes. Finalmente, en la tercera sección definiremos a las gavillas casi coherentes y coherentes, estudiaremos algunas de sus propiedades principales y realizaremos su clasificación cuando se encuentran sobre esquemas afines. Para concluir con este capítulo, revisaremos algunas consecuencias de dicha clasificación.

1. Gavillas de Módulos sobre el Espectro Afín de un Anillo

Recordemos que en la Sección 4.2 del Capítulo 1 realizamos la construcción de la gavilla estructural del espacio de Zariski asociado a un anillo. Siguiendo con las ideas usadas en dicha construcción, en esta sección vamos definir una clase de gavillas de módulos sobre el espectro afín de un anillo. Posteriormente estudiaremos algunas de sus propiedades.

Vamos a fijar un anillo A y un módulo M sobre dicho anillo. A partir de M construiremos una gavilla de módulos sobre el esquema afín $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ que denotaremos por $\widetilde{M}$. Sea U un abierto de $\mathrm{Spec}(A)$. Vamos a asignar un $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{U})$-módulo $\widetilde{M}(U)$ al abierto U de la siguiente manera: si $U = \emptyset$ entonces asignamos $\widetilde{M}(U) = \{0\}$, de otro modo definimos a $\widetilde{M}(U)$ como el conjunto de aplicaciones $s : U \to \prod_{\mathfrak{q} \in U} M_{\mathfrak{q}}$ que satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. Para todo $\mathfrak{p} \in U$ se tiene que $s(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}$.
2. Para todo $\mathfrak{p} \in U$ existe una vecindad abierta V de $\mathfrak{p}$ contenida en U y existen $m \in M$ y $f \in A$ tales que $V \subseteq D(f)$ y para todo $\mathfrak{q} \in V$ se tiene que $s(\mathfrak{q}) = \dfrac{m}{f}$ en $M_{\mathfrak{q}}$.

Utilizando argumentos análogos a los usados en la Sección 4.2 del Capítulo 1 se muestra que $\widetilde{M}(U)$ es un grupo abeliano para cada abierto U de $\mathrm{Spec}(A)$, así que omitiremos los detalles.

Por otro lado, para abiertos U y V de $\mathrm{Spec}(A)$ tales que $V \subseteq U$ vamos a considerar a la restricción $\rho_{\widetilde{M}V}^{\ U} : \widetilde{M}(U) \to \widetilde{M}(V)$ como la restricción natural de funciones.

Con las condiciones consideradas anteriormente y utilizando argumentos análogos a los de la Sección 4.2 del Capítulo 1 se tiene que $\widetilde{M}$ es una gavilla de grupos abelianos sobre Spec(A). Más aún, la gavilla $\widetilde{M}$ es un $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$-módulo. Para mostrar este hecho, en primer lugar debemos mostrar que $\widetilde{M}(U)$ tiene una estructura de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$-módulo para cualquier abierto U de Spec(A). Sea U un abierto de Spec(A). Consideramos la siguiente operación:

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U) \times \widetilde{M}(U) & \to & \widetilde{M}(U) \\ (\lambda, s) & \mapsto & \lambda s \ : U \to \displaystyle\prod_{\mathfrak{q} \in U} M_{\mathfrak{q}} \\ & & \qquad \mathfrak{p} \mapsto \lambda(\mathfrak{p}) s(\mathfrak{p}) \end{array}$$

En primer lugar, vamos a mostrar que la operación anterior está bien definida:

- Sean $\lambda \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$ y $s \in \widetilde{M}(U)$. Vamos a mostrar que λs satisface los requisitos de un elemento de $\widetilde{M}(U)$. Sea $\mathfrak{p} \in U$. Sabemos que $\lambda(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$ y que $s(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}$, luego, como $M_{\mathfrak{p}}$ tiene estructura de $A_{\mathfrak{p}}$-módulo se sigue que $\lambda(\mathfrak{p})s(\mathfrak{p})$ es un elemento de $M_{\mathfrak{p}}$.
  Por otro lado, como $\lambda \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$ se sigue que existe un abierto V de Spec(A) que contiene a $\mathfrak{p}$, está contenido en U y existen $a, r \in A$ tales que $V \subseteq D(r)$ y para cada $\mathfrak{q} \in V$ se tiene que $\lambda(\mathfrak{q}) = \dfrac{a}{r}$ en $A_{\mathfrak{q}}$; asimismo, como $s \in \widetilde{M}(U)$ se sigue que existe un abierto W de Spec(A) que contiene a $\mathfrak{p}$, está contenido en U y existen $m \in M$ y $t \in A$ tales que $W \subseteq D(t)$ y para cada $\mathfrak{q} \in W$ se tiene que $s(\mathfrak{q}) = \dfrac{m}{t}$ en $M_{\mathfrak{q}}$. Es inmediato que $V \cap W$, am y rt son los elementos indicados para que λs satisfaga la segunda condición requerida.
  De esta forma, tenemos que λs es una sección de $\widetilde{M}$ sobre U.
- Sean $\lambda, \lambda' \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$ y $s, s' \in \widetilde{M}(U)$ tales que $(\lambda, s) = (\lambda', s')$. Vamos a mostrar que $\lambda s = \lambda' s'$, para ello, como ambas aplicaciones tienen el mismo dominio y codominio sólo nos resta mostrar que tienen la misma regla de asignación. Sea $\mathfrak{p} \in U$. Como $\lambda = \lambda'$ se sigue que $\lambda(\mathfrak{p}) = \lambda'(\mathfrak{p})$; de igual forma, como $s = s'$ se sigue que $s(\mathfrak{p}) = s'(\mathfrak{p})$. Luego, como $(\lambda(\mathfrak{p}), s(\mathfrak{p})) = (\lambda'(\mathfrak{p}), s'(\mathfrak{p}))$ se sigue que $\lambda(\mathfrak{p})s(\mathfrak{p}) = \lambda'(\mathfrak{p})s'(\mathfrak{p})$ y esto implica que $(\lambda s)(\mathfrak{p}) = (\lambda' s')(\mathfrak{p})$.

Por lo tanto, concluimos que $\cdot$ es una operación bien definida. En segundo lugar, vamos a verificar que $\cdot$ cumple los requisitos de un producto externo. Sean $\lambda, \lambda' \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$ y $s, s' \in \widetilde{M}(U)$. Para probar las igualdades $\lambda(s + s') = \lambda s + \lambda s'$, $(\lambda + \lambda')s = \lambda s + \lambda' s$, $(\lambda\lambda')s = \lambda(\lambda' s)$ y $1_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)} s = s$ lo único que nos resta a mostrar es que se tiene igualdad en la regla de asignación en las correspondientes aplicaciones. Sea $\mathfrak{p} \in U$,

$$(\lambda(s + s'))(\mathfrak{p}) = \lambda(\mathfrak{p})\big((s + s')(\mathfrak{p})\big) = \lambda(\mathfrak{p})s(\mathfrak{p}) + \lambda(\mathfrak{p})s'(\mathfrak{p}) = (\lambda s + \lambda s')(\mathfrak{p}).$$

$$((\lambda + \lambda')s)(\mathfrak{p}) = ((\lambda + \lambda')(\mathfrak{p}))s(\mathfrak{p}) = \lambda(\mathfrak{p})s(\mathfrak{p}) + \lambda'(\mathfrak{p})s(\mathfrak{p}) = (\lambda s + \lambda' s)(\mathfrak{p}).$$

$$((\lambda\lambda')s)(\mathfrak{p}) = ((\lambda\lambda')(\mathfrak{p}))s(\mathfrak{p}) = (\lambda(\mathfrak{p})\lambda'(\mathfrak{p}))s(\mathfrak{p}) = \lambda(\mathfrak{p})(\lambda'(\mathfrak{p})s(\mathfrak{p})) = (\lambda(\lambda's))(\mathfrak{p}).$$

$$(1_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)}s)(\mathfrak{p}) = 1_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)}(\mathfrak{p})s(\mathfrak{p}) = 1_{A_\mathfrak{p}}s(\mathfrak{p}) = s(\mathfrak{p}).$$

De este modo, tenemos que $\widetilde{M}(U)$ tiene una estructura de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$-módulo. Lo único que nos falta a comprobar es que el producto exterior que hemos definido es compatible con las restricciones de gavilla de $\widetilde{M}$. Sean U y V abiertos de $\mathrm{Spec}(A)$ tales que $V \subseteq U$, vamos a verificar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U) \times \widetilde{M}(U) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}}{}^U_V \times \rho_{\widetilde{M}}{}^U_V"'] & \widetilde{M}(U) \arrow[d, "\rho_{\widetilde{M}}{}^U_V"] \\
\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(V) \times \widetilde{M}(V) \arrow[r] & \widetilde{M}(V)
\end{tikzcd}$$

Sean $\lambda \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$ y $s \in \widetilde{M}(U)$. Vamos a mostrar la igualdad $\rho_{\widetilde{M}}{}^U_V(\lambda s) = \rho_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}}{}^U_V(\lambda)\rho_{\widetilde{M}}{}^U_V(s)$. Como ambas aplicaciones tienen el mismo dominio y codominio, sólo basta mostrar que tienen la misma regla de asignación. Sea $\mathfrak{p} \in U$,

$$\rho_{\widetilde{M}}{}^U_V(\lambda s)(\mathfrak{p}) = (\lambda s)(\mathfrak{p}) = \lambda(\mathfrak{p})s(\mathfrak{p}) = \rho_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}}{}^U_V(\lambda)(\mathfrak{p})\rho_{\widetilde{M}}{}^U_V(s)(\mathfrak{p}) = (\rho_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}}{}^U_V(\lambda)\rho_{\widetilde{M}}{}^U_V(s))(\mathfrak{p}).$$

De esta manera, concluimos que $\widetilde{M}$ es un $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$-módulo.

Observación 4.1. Sea A un anillo. Sabemos que A tiene una estructura de módulo sobre sí mismo, así que podemos construir la gavilla $\widetilde{A}$. Puesto que $\widetilde{A}(U) = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$ para cualquier abierto U de $\mathrm{Spec}(A)$, concluimos que $\widetilde{A} = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$.

El siguiente resultado nos muestra propiedades importantes de una gavilla construida a partir de un módulo. Como el lector podrá notar, dichas propiedades son análogas a las de la gavilla estructural del espectro de un anillo, de hecho, puesto que la demostración del siguiente resultado es análoga a la de la Proposición 1.53 sólo realizaremos un bosquejo de la prueba.

Proposición 4.2. *Sea M un módulo sobre un anillo A. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ existe un $A_\mathfrak{p}$-isomorfismo entre $\widetilde{M}_\mathfrak{p}$ y $M_\mathfrak{p}$.*
2. *Para todo $f \in A$ existe un A_f-isomorfismo entre $\widetilde{M}(D(f))$ y M_f. De manera particular, se tiene que $\widetilde{M}(\mathrm{Spec}(A)) \cong M$.*

Demostración.

1. Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Como $M_\mathfrak{p}$ tiene estructura de $A_\mathfrak{p}$-módulo se sigue que $M_\mathfrak{p}$ es un A-módulo; asimismo, como $\widetilde{M}_\mathfrak{p}$ es un $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A),\,\mathfrak{p}}$-módulo y $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A),\,\mathfrak{p}} \cong A_\mathfrak{p}$ se sigue que $\widetilde{M}_\mathfrak{p}$ es un $A_\mathfrak{p}$-módulo y por tanto también tiene estructura de A-módulo. Luego, la siguiente aplicación es A-lineal:

$$\begin{aligned} \zeta : M &\to \widetilde{M}_\mathfrak{p} \\ m &\mapsto [(U, \tilde{m})] \end{aligned}$$

donde $\tilde{m} : \operatorname{Spec}(A) \to \prod_{\mathfrak{q}\,\in \operatorname{Spec}(A)} M_\mathfrak{q}$ es la aplicación tal que $\tilde{m}(\mathfrak{q}) = \dfrac{m}{1_A}{}_{M_\mathfrak{q}}$ para cualquier $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A)$. Ahora bien, sea $t \in A\backslash\mathfrak{p}$. Consideremos la homotecia

$$\begin{aligned} h_t : \quad \widetilde{M}_\mathfrak{p} &\to \widetilde{M}_\mathfrak{p} \\ [(U, s)] &\mapsto t \cdot [(U, s)] \end{aligned}$$

Observemos que para cualesquier abierto U de $\operatorname{Spec}(A)$ que contiene a $\mathfrak{p}$ y $s \in \widetilde{M}(U)$ se tiene que

$$h_t([(U, s)]) = t \cdot [(U, s)] = [(\operatorname{Spec}(A), \tilde{t})] \cdot [(U, s)],$$

además, recordemos que $[(\operatorname{Spec}(A), \tilde{t})]$ es invertible en $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A),\mathfrak{p}}$. Así, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} l_t : \quad \widetilde{M}_\mathfrak{p} &\to \widetilde{M}_\mathfrak{p} \\ [(U, s)] &\mapsto [(D(t), \widetilde{\left(\frac{1_A}{t}\right)})] \cdot [(U, s)] \end{aligned}$$

Puesto que h_t y l_t son aplicaciones inversas, por la propiedad universal de la localización para módulos existe una aplicación A-lineal $\widetilde{\zeta} : M_\mathfrak{p} \to \widetilde{M}_\mathfrak{p}$ y es la única aplicación que satisface la siguiente condición: para cualesquier $m \in M$ y $t \in A\backslash\mathfrak{p}$ se cumple que $t \cdot \widetilde{\zeta}\left(\frac{m}{t}\right) = [(\operatorname{Spec}(A), \tilde{m})]$. Luego, como la igualdad anterior se encuentra en $\widetilde{M}_\mathfrak{p}$ y $[(\operatorname{Spec}(A), t)]$ es invertible en $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A),\mathfrak{p}}$, podemos escribir a $\widetilde{\zeta}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \widetilde{\zeta} : M_\mathfrak{p} &\to \widetilde{M}_\mathfrak{p} \\ \frac{m}{t} &\to [(D(t), \widetilde{\left(\frac{m}{t}\right)})] \end{aligned}$$

donde $\widetilde{\left(\frac{m}{t}\right)} : D(t) \to \prod_{\mathfrak{q}\in D(t)} M_\mathfrak{q}$ es la aplicación tal que $\widetilde{\left(\frac{m}{t}\right)}(\mathfrak{q}) = \dfrac{m}{t}{}_{M_\mathfrak{q}}$ para cualquier $\mathfrak{q} \in D(t)$. La aplicación $\widetilde{\zeta}$ es una aplicación $A_\mathfrak{p}$-lineal y es el isomorfismo buscado.

2. Sea $f \in A$. Como $\widetilde{M}(D(f))$ es un $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(D(f))$-módulo y $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(D(f)) \cong A_f$ se sigue que $\widetilde{M}(D(f))$ es un A_f-módulo y consecuentemente es un A-módulo. Luego, la siguiente aplicación es

una aplicación A-lineal:

$$\begin{array}{rcl} \xi : M & \to & \widetilde{M}(D(f)) \\ m & \mapsto & \xi(m) \quad : D(f) \to \displaystyle\prod_{\mathfrak{q}\,\in\, D(f)} M_{\mathfrak{q}} \\ & & \qquad\qquad \mathfrak{r} \quad \mapsto \quad \dfrac{m}{1_A}{}_{M_{\mathfrak{r}}} \end{array}$$

Ahora, consideramos la homotecia

$$\begin{array}{rcl} h_f : \widetilde{M}(D(f)) & \to & \widetilde{M}(D(f)) \\ s & \mapsto & f \cdot s \end{array}$$

Observemos que para cualquier $s \in \widetilde{M}(D(f))$ se tiene que

$$h_t(s) = f \cdot s = \tilde{f}s,$$

además, recordemos que $\tilde{f}$ es invertible en $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(f))$. De este modo, definimos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} l_f : \widetilde{M}(D(f)) & \to & \widetilde{M}(D(f)) \\ s & \mapsto & \widetilde{\left(\dfrac{1_A}{f}\right)}s \end{array}$$

Como h_t y l_t son aplicaciones inversas, por la propiedad universal de la localización para módulos se sigue que existe la aplicación $\widetilde{\xi} : M_f \to \widetilde{M}(D(f))$ y es la única aplicación que satisface el siguiente enunciado: para cualesquier $m \in M$ y $n \in \mathbb{Z}_+$ se cumple que $f^n \cdot \widetilde{\xi}\left(\dfrac{m}{f^n}\right) = \xi(m)$. Luego, como la igualdad anterior está en $\widetilde{M}(D(f))$ y $\tilde{f}$ es un elemento invertible en $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(f))$, podemos escribir la aplicación $\widetilde{\xi}$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\xi} : M_f & \to & \widetilde{M}(D(f)) \\ \dfrac{m}{f^n} & \mapsto & \widetilde{\left(\dfrac{1_A}{f^n}\right)}\xi(m) \quad : D(f) \to \displaystyle\prod_{\mathfrak{q}\,\in\, D(f)} M_{\mathfrak{q}} \\ & & \qquad\qquad \mathfrak{r} \quad \mapsto \quad \dfrac{m}{f^n}{}_{M_{\mathfrak{r}}} \end{array}$$

La aplicación $\widetilde{\xi}$ es una aplicación A_f-lineal y es el isomorfismo buscado. ❑

Una vez que tenemos estas propiedades ya podemos dar la razón por la cual los conjuntos cerrados construidos en la Proposición 3.26 generalizan a los cerrados de la topología de Zariski.

Observación 4.3. Sea I un ideal de un anillo A. Consideremos al espectro $(\mathrm{Spec(A)}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ de A. Como I es un ideal de A, entonces I es un A-módulo y por tanto, podemos considerar la gavilla

$\widetilde{I}$ que es un $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$-módulo. Más aún, como $\widetilde{I}$ es un $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$-submódulo tenemos que $\widetilde{I}$ es un ideal de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$. Ahora, vamos determinar al conjunto $V(\widetilde{I})$:

$$\begin{aligned} V(\widetilde{I}) &= \left\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \,\middle|\, \widetilde{I}_{\mathfrak{p}} \neq \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A),\mathfrak{p}}\right\} \\ &= \left\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \,\middle|\, I_{\mathfrak{p}} \neq A_{\mathfrak{p}}\right\} \\ &= \left\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \,\middle|\, (A \backslash \mathfrak{p}) \cap I = \emptyset\right\} \\ &= \left\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \,\middle|\, I \subseteq \mathfrak{p}\right\} \\ &= V(I). \end{aligned}$$

Los próximos resultados nos presentan algunas propiedades de las gavillas obtenidas a partir de módulos.

Teorema 4.4. *Sean M y N módulos sobre un anillo A. Se tiene el siguiente isomorfismo de gavillas:*

$$\widetilde{M \otimes_A N} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}} \widetilde{N}.$$

Si además, $(M_i)_{i \in I}$ es una familia de A-módulos, entonces se tiene el siguiente isomorfismo de gavillas:

$$\widetilde{\bigoplus_{i \in I} M_i} \cong \bigoplus_{i \in I} \widetilde{M}_i.$$

Demostración. Para mostrar los isomorfismos deseados vamos a mostrar que para todo punto de $\mathrm{Spec}(A)$ los correspondientes módulos de gérmenes son isomorfos. Sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$.

$$(\widetilde{M \otimes_A N})_{\mathfrak{p}} \cong (M \otimes_A N)_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \cong \widetilde{M}_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A),\mathfrak{p}}} \widetilde{N}_{\mathfrak{p}} \cong (\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}} \widetilde{N})_{\mathfrak{p}}.$$

De esta manera tenemos que $\widetilde{M \otimes_A N} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}} \widetilde{N}$. Por otro lado,

$$\left(\widetilde{\bigoplus_{i \in I} M_i}\right)_{\mathfrak{p}} \cong \left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right)_{\mathfrak{p}} \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i)_{\mathfrak{p}} \cong \bigoplus_{i \in I} (\widetilde{M}_i)_{\mathfrak{p}} \cong \left(\bigoplus_{i \in I} \widetilde{M}_i\right)_{\mathfrak{p}}.$$

Así, concluimos que $\widetilde{\bigoplus_{i \in I} M_i} \cong \bigoplus_{i \in I} \widetilde{M}_i$. ∎

Ejemplo 4.5. Sean A un anillo y x una variable sobre A. Consideremos al anillo de polinomios $A[x]$. Vamos a determinar a la gavilla $\widetilde{A[x]}$. Observemos que

$$A[x] = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_+} Ax^i \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_+} A = A^{(\mathbb{Z}_+)}.$$

De esta forma, por el teorema anterior se tiene que

$$\widetilde{A[x]} \cong \widetilde{A^{(\mathbb{Z}_+)}} \cong \widetilde{A}^{(\mathbb{Z}_+)} = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}^{(\mathbb{Z}_+)}.$$

PROPOSICIÓN 4.6. *Sean* $(f, f^{\#}) : (\mathrm{Spec}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}) \to (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ *un morfismo de esquemas afines y* M *un* B*-módulo. Existe un isomorfismo entre las gavillas* $f_*(\widetilde{M})$ *y* $\widetilde{{}_AM}$*, donde* ${}_AM$ *es* M *considerado con estructura de* A*-módulo.*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que el morfismo de esquemas afines $(f, f^{\#})$ induce un homomorfismo de anillos $\varphi : A \to B$, además, recordemos que la familia $(D(h))_{h \in A}$ es una base para la topología de Zariski de $\mathrm{Spec}(A)$. Para mostrar que existe el isomorfismo entre las gavillas deseadas vamos a probar que para todo $h \in A$ se tiene que $\widetilde{{}_AM}(D(h)) \cong f_*(\widetilde{M})(D(h))$. Sea $h \in A$. Por un lado se tiene que

$$\widetilde{{}_AM}(D(g)) \cong M_g \cong M_{\varphi(g)}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$f_*(\widetilde{M})(D(g)) = \widetilde{M}(f^{-1}(D(g))) = \widetilde{M}(D(\varphi(g))) \cong M_{\varphi(g)}.$$

De esta forma, concluimos que las gavillas $f_*(\widetilde{M})$ y $\widetilde{{}_AM}$ son isomorfas. ❏

PROPOSICIÓN 4.7. *Sean* M*,* N *y* P *módulos sobre un anillo* A*. La sucesión* $0 \to M \to N \to P \to 0$ *es exacta de* A*-módulos si y sólo si la sucesión* $0 \to \widetilde{M} \to \widetilde{N} \to \widetilde{P} \to 0$ *es exacta de* $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$*-módulos.*

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} 0 \to M \to N \to P \to 0 \\ \text{es exacta de } A\text{-módulos} \end{array} & \iff & \begin{array}{c} \text{Para todo } \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A),\ 0 \to M_{\mathfrak{q}} \to N_{\mathfrak{q}} \to P_{\mathfrak{q}} \to 0 \\ \text{es exacta de } A_{\mathfrak{q}}\text{-módulos} \end{array} \\
& \iff & \begin{array}{c} \text{Para todo } \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A),\ 0 \to \widetilde{M}_{\mathfrak{q}} \to \widetilde{N}_{\mathfrak{q}} \to \widetilde{P}_{\mathfrak{q}} \to 0 \\ \text{es exacta de } \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A),\mathfrak{q}}\text{-módulos} \end{array} \\
& \iff & \begin{array}{c} 0 \to \widetilde{M} \to \widetilde{N} \to \widetilde{P} \to 0 \\ \text{es exacta de } \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}\text{-módulos.} \end{array}
\end{array}$$

❏

COROLARIO 4.8. *Sea* M *un módulo sobre un anillo* A*. Si* N *es un* A*-submódulo de* M*, entonces existe un isomorfismo entre las gavillas* $\widetilde{\left(\frac{M}{N}\right)}$ *y* $\frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}}$*.*

DEMOSTRACIÓN. Consideramos la sucesión exacta de A-módulos $0 \to N \to M \to \frac{M}{N} \to 0$. Por la proposición anterior se sigue que $0 \to \widetilde{N} \to \widetilde{M} \to \widetilde{\left(\frac{M}{N}\right)} \to 0$ es exacta de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$-módulos y por la Proposición C.32 concluimos que $\widetilde{\left(\frac{M}{N}\right)} \cong \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}}$. ❏

Proposición 4.9. *Sean* $(f, f^{\#}) : (\mathrm{Spec}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}) \to (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ *un morfismo de esquemas afines y* P *un* A*-módulo. Existe un isomorfismo entre las gavillas* $f^*(\widetilde{P})$ *y* $\widetilde{P \otimes_A B}$.

Demostración. Para mostrar que las gavillas deseadas son isomorfas mostraremos que para cada punto de $\mathrm{Spec}(B)$ se tiene que existe un isomorfismo en sus módulos de gérmenes. Sea $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$.

$$(\widetilde{P \otimes_A B})_{\mathfrak{q}} \cong (P \otimes_A B)_{\mathfrak{q}} \cong P_{f(\mathfrak{q})} \otimes_{A_{f(\mathfrak{q})}} B_{\mathfrak{q}} \cong \widetilde{P}_{f(\mathfrak{q})} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A), f(\mathfrak{q})}} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B), \mathfrak{q}} \cong f^*(\widetilde{P})_{\mathfrak{q}}.$$

Por lo tanto, concluimos que $f^*(\widetilde{P}) \cong \widetilde{P \otimes_A B}$. ❑

2. Gavillas de Módulos sobre el Espectro Proyectivo de un Anillo Graduado

Motivados por la construcción del espectro afín de un anillo, en la Sección 1 del Capítulo 3 construimos el espectro proyectivo de un anillo graduado. Ahora que hemos construido gavillas de módulos sobre el espectro afín de un anillo, ¿podremos construir de manera análoga gavillas de módulos sobre el espectro proyectivo de un anillo graduado? En esta sección daremos respuesta a dicha interrogante. Como estaremos trabajando con módulos y anillos graduados se recomienda al lector consultar las Secciones 5.1 y 5.2 del Apéndice A.

Vamos a fijar un anillo graduado A y un módulo graduado M sobre dicho anillo. A partir del módulo M construiremos una gavilla de módulos sobre $(\mathrm{Proj}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)})$ que denotaremos por $\widetilde{M}$. Sea U un abierto de $\mathrm{Proj}(A)$. Vamos a asignar un $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}(\mathrm{U})$-módulo $\widetilde{M}(U)$ al abierto U de la siguiente manera: si $U = \emptyset$ entonces $\widetilde{M}(U) = \{0\}$, de otra forma definimos a $\widetilde{M}(U)$ como el conjunto de las aplicaciones $s : U \to \prod_{\mathfrak{q} \in U} M_{(\mathfrak{q})}$ que satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. Para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(A)$ se tiene que $s(\mathfrak{p}) \in M_{(\mathfrak{p})}$.
2. Para todo $\mathfrak{p} \in U$ existe una vecindad abierta V de $\mathfrak{p}$ contenida U y existen elementos homogéneos $m \in M^h$ y $f \in A^h$ del mismo grado tales que para todo $\mathfrak{q} \in V$ se tiene que $f \notin \mathfrak{q}$ y $s(\mathfrak{q}) = \dfrac{m}{f}$ en $M_{(\mathfrak{q})}$.

De una manera análoga a lo realizado en la sección anterior para el caso de un espectro afín, se muestra que $\widetilde{M}$ es una gavilla de $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}$-módulos sobre el espacio topológico $\mathrm{Proj}(A)$ por lo que omitiremos los detalles.

Observación 4.10. Sea A un anillo graduado. Sabemos que A tiene una estructura de módulo graduado sobre sí mismo así que podemos construir la gavilla $\widetilde{A}$. Puesto que $\widetilde{A}(U) = \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}(U)$ para cualquier abierto U de $\mathrm{Proj}(A)$, concluimos que $\widetilde{A} = \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}$.

El siguiente resultado nos habla de dos de las propiedades más importantes de las gavillas de módulos construidas a partir de módulos graduados y como el lector podrá notar, dichas propiedades son análogas a las que se tienen en el caso afín (véase Proposición 4.2).

Proposición 4.11. *Sea M un módulo graduado sobre un anillo graduado A.*

1. *Para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(A)$ existe un $A_{(\mathfrak{p})}$-isomorfismo entre $\widetilde{M}_{\mathfrak{p}}$ y $M_{(\mathfrak{p})}$.*
2. *Para todo $f \in A_+^h$ existe un $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})}$-isomorfismo entre $\widetilde{M}|_{D_+(f)}$ y $\widetilde{M_{(f)}}$ vía el isomorfismo entre $(D_+(f), \mathcal{O}_{D_+(f)})$ y $(\mathrm{Spec}(A_{(f)}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})})$ (véase Proposición 3.15).*

Demostración.

1. Sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(A)$. Definimos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & \widetilde{M}_{\mathfrak{p}} & \to & M_{(\mathfrak{p})} \\ & [(U,s)] & \mapsto & s(\mathfrak{p}) \end{array}$$

Observemos que σ es una aplicación bien definida: sean U y V abiertos de $\mathrm{Proj}(A)$ que contienen a $\mathfrak{p}$ y sean $s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}(U)$ y $t \in \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}(V)$ tales que $[(U,s)] = [(V,t)]$. De este modo, se sigue que existe un abierto W de $\mathrm{Proj}(A)$ que contiene a $\mathfrak{p}$ tal que $W \subseteq U \cap V$ y $\rho_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}}{}^{U}_{W}(s) = \rho_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}}{}^{V}_{W}(t)$. Dicha igualdad nos dice que $s(\mathfrak{q}) = t(\mathfrak{q})$ para cualquier $\mathfrak{q} \in W$, en particular, como $\mathfrak{p} \in W$ se sigue que $s(\mathfrak{p}) = t(\mathfrak{p})$.

Ahora, mostraremos que σ es una aplicación $A_{(\mathfrak{p})}$-lineal. Sea U un abierto de $\mathrm{Proj}(A)$ que contiene a $\mathfrak{p}$ y sean $s, t \in \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}(U)$, $a, b \in A^h$ y $u, v \in (A \backslash \mathfrak{p}) \cap A^h$ de modo que $\mathrm{grad}(a) = \mathrm{grad}(u)$ y $\mathrm{grad}(b) = \mathrm{grad}(v)$. Nótese que podemos suponer que las secciones se encuentran sobre el mismo abierto.

$$\begin{aligned} \sigma(\frac{a}{u} \cdot [(U,s)] + \frac{b}{v} \cdot [(U,t)]) &= \sigma([(D_+(u), \widetilde{\left(\frac{a}{u}\right)})] \cdot [(U,s)] + [(D_+(v), \widetilde{\left(\frac{b}{v}\right)})] \cdot [(U,t)]) \\ &= \sigma([(D_+(u) \cap D_+(v) \cap U, \\ &\qquad \widetilde{\left(\frac{a}{u}\right)}\Big|_{D_+(u)\cap D_+(v)\cap U} s|_{D_+(u)\cap D_+(v)\cap U} + \widetilde{\left(\frac{b}{v}\right)}\Big|_{D_+(u)\cap D_+(v)\cap U} t|_{D_+(u)\cap D_+(v)\cap U})]) \\ &= (\widetilde{\left(\frac{a}{u}\right)}\Big|_{D_+(u)\cap D_+(v)\cap U} s|_{D_+(u)\cap D_+(v)\cap U} + \widetilde{\left(\frac{b}{v}\right)}\Big|_{D_+(u)\cap D_+(v)\cap U} t|_{D_+(u)\cap D_+(v)\cap U})(\mathfrak{p}) \\ &= \frac{a}{u} \cdot s(\mathfrak{p}) + \frac{b}{v} \cdot t(\mathfrak{p}) \\ &= \frac{a}{u} \cdot \sigma([(U,s)]) + \frac{b}{v} \cdot \sigma([(U,t)]). \end{aligned}$$

De este modo, tenemos que σ es una aplicación $A_{(\mathfrak{p})}$-lineal. La demostración de que σ es un isomorfismo es análoga a la demostración de que la aplicación ϕ en el enunciado 1 de la Proposición 3.15 lo es, así que omitiremos los detalles.

2. Sea $f \in A_+^h$ tal que $\mathrm{grad}(f) = e$. Recordemos que en el enunciado 2 de la Proposición 3.15 realizamos la construcción del isomorfismo de espacios localmente anillados $(\zeta, \zeta^\#) : (D_+(f), \mathcal{O}_{D_+(f)}) \to (\mathrm{Spec}(A_{(f)}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})})$. La construcción del isomorfismo deseado $\xi^\# : \widetilde{M_{(f)}} \to \zeta_*(\widetilde{M}|_{D_+(f)})$ es en esencia la construcción del isomorfismo $\zeta^\# : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})} \to \zeta_*(\mathcal{O}_{D_+(f)})$ que realizamos en la proposición citada, sólo debemos cambiar al anillo A por el módulo M en los lugares adecuados, por ello, realizaremos la prueba de este enunciado sin entrar en todos los detalles. Es importante recordar que $\zeta : D_+(f) \to \mathrm{Spec}(A_{(f)})$ es un homeomorfismo donde $\zeta(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}_{(f)}$ para cualquier $\mathfrak{p} \in D_+(f)$.

Sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(A)$ tal que $f \notin \mathfrak{p}$. Recordemos que en la Proposición 1.58 se construyó el isomorfismos de anillos $g_{\mathfrak{p}_f} : A_{\mathfrak{p}} \to (A_f)_{\mathfrak{p}_f}$. Luego, utilizando argumentos análogos a los usados en dicha proposición podemos construir el siguiente $(A_f)_{\mathfrak{p}_f}$-isomorfismo:

$$\begin{array}{rcl} l_{\mathfrak{p}_f} : M_{\mathfrak{p}} & \to & (M_f)_{\mathfrak{p}_f} \\ \dfrac{m}{u} & \mapsto & \dfrac{\frac{m}{1_A}}{\frac{u}{1_A}} \end{array}$$

Ahora bien, en el enunciado 2 de la Proposición 3.15 mostramos que el homomorfismo de anillos $g_{\mathfrak{p}_f}$ induce un isomorfismo de anillos $g_{\mathfrak{p}_{(f)}} : A_{(\mathfrak{p})} \to (A_{(f)})_{\mathfrak{p}_{(f)}}$, así, utilizando argumentos análogos a los usados en dicha proposición tenemos que el isomorfismo $l_{\mathfrak{p}_f}$ induce el siguiente $(A_{(f)})_{\mathfrak{p}_{(f)}}$-isomorfismo:

$$\begin{array}{rcl} l_{\mathfrak{p}_{(f)}} : M_{(\mathfrak{p})} & \to & (M_{(f)})_{\mathfrak{p}_{(f)}} \\ \dfrac{m}{u} & \mapsto & \dfrac{\frac{u^{e-1}m}{f^{\mathrm{grad}(m)}}}{\frac{u^e}{f^{\mathrm{grad}(m)}}} \end{array}$$

donde de manera análoga a la proposición citada, la aplicación inversa de $l_{\mathfrak{p}_{(f)}}$ es la siguiente aplicación $(A_{(f)})_{\mathfrak{p}_{(f)}}$-lineal:

$$\begin{array}{rcl} k_{\mathfrak{p}_{(f)}} : (M_{(f)})_{\mathfrak{p}_{(f)}} & \to & M_{(\mathfrak{p})} \\ \dfrac{\frac{m}{f^s}}{\frac{u}{f^t}} & \mapsto & \dfrac{f^t m}{f^s u} \end{array}$$

Con el isomorfismo anterior nos será posible definir el morfismo $\xi : \widetilde{M_{(f)}} \to \zeta_*(\widetilde{M}|_{D_+(f)})$. Sea U un abierto de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})}$. Consideramos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rcl} \xi^\#_U : \widetilde{M_{(f)}}(U) & \to & \widetilde{M}(\zeta^{-1}(U)) \\ s & \mapsto & \xi^\#_U(s) \;:\; \zeta^{-1}(U) \;\to\; \displaystyle\prod_{\mathfrak{r}\in\zeta^{-1}(U)} M_{(\mathfrak{r})} \\ & & \qquad\qquad \mathfrak{p} \quad\mapsto\; k_{\mathfrak{p}_{(f)}}(s\circ\zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{p})) \end{array}$$

Utilizando argumentos análogos a los de la proposición citada se muestra que $\xi^\#_U$ es una aplicación bien definida, ahora, mostraremos que es una aplicación $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})}(U)$-lineal: sean $s, t \in \widetilde{M_{(f)}}(U)$, $\lambda, \mu \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})}(U)$ y $\mathfrak{p} \in \zeta^{-1}(U)$.

$$\begin{aligned} \xi^\#_U(\lambda s + \mu t)(\mathfrak{p}) &= k_{\mathfrak{p}_{(f)}}((\lambda s + \mu t)\circ\zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{p})) \\ &= k_{\mathfrak{p}_{(f)}}((\lambda s + \mu t)(\mathfrak{p}_{(f)})) \\ &= k_{\mathfrak{p}_{(f)}}(\lambda(\mathfrak{p}_{(f)})s(\mathfrak{p}_{(f)})) + k_{\mathfrak{p}_{(f)}}(\mu(\mathfrak{p}_{(f)})t(\mathfrak{p}_{(f)})) \\ &= h_{\mathfrak{p}_{(f)}}(\lambda(\mathfrak{p}_{(f)}))\cdot k_{\mathfrak{p}_{(f)}}(s(\mathfrak{p}_{(f)})) + h_{\mathfrak{p}_{(f)}}(\mu(\mathfrak{p}_{(f)}))\cdot k_{\mathfrak{p}_{(f)}}(t(\mathfrak{p}_{(f)})) \\ &= h_{\mathfrak{p}_{(f)}}(\lambda\circ\zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{p}))\cdot k_{\mathfrak{p}_{(f)}}(s\circ\zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{p})) + \\ &\quad\; h_{\mathfrak{p}_{(f)}}(\mu\circ\zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{p}))\cdot k_{\mathfrak{p}_{(f)}}(t\circ\zeta|_{\zeta^{-1}(U)}(\mathfrak{p})) \\ &= (\lambda\cdot\xi^\#_U(s) + \mu\cdot\xi^\#_U(t))(\mathfrak{p}). \end{aligned}$$

Así, como las aplicaciones $\xi^\#_U(\lambda s + \mu t)$ y $\lambda \cdot \xi^\#_U(s) + \mu \cdot \xi^\#_U(t)$ tienen el mismo dominio, codominio y regla de asignación se sigue que son iguales y esto implica que $\xi^\#_U$ es una aplicación $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_{(f)})}$-lineal. Por último, de manera análoga a lo realizado para $\zeta^\#$ se muestra que $\xi^\#$ es un morfismo y posteriormente que es un isomorfismo de gavillas. ❑

Los próximos resultados nos mostrarán algunas de las propiedades de las gavillas obtenidas a partir de módulos graduados.

Proposición 4.12. *Sea $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$ un anillo graduado finitamente generado por A_1 como A_0-álgebra. Si M y N son módulos graduados sobre A, entonces*

$$\widetilde{M\otimes_A N} \cong \widetilde{M}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}}\widetilde{N}.$$

Demostración. Sea $f \in A^h_+$ donde $\mathrm{grad}(f) = e$. Vamos a definir una aplicación $A_{(f)}$-lineal entre $(\widetilde{M}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}}\widetilde{N})^-(D_+(f))$ y $\widetilde{M\otimes_A N}(D_+(f))$, para ello, realizaremos las siguientes observaciones: a) Del enunciado 2 de la proposición anterior obtenemos los $A_{(f)}$-isomorfismos $\widetilde{M}(D_+(f)) \cong M_{(f)}$ y $\widetilde{N}(D_+(f)) \cong N_{(f)}$ y b) En la Proposición A.34 construimos una aplicación $A_{(f)}$-lineal $\omega_f : M_{(f)}\otimes_{A_{(f)}} N_{(f)} \to (M\otimes_A N)_{(f)}$. De esta manera, vamos a definir la aplicación $\psi^-_{D_+(f)} : (\widetilde{M}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}}\widetilde{N})^-(D_+(f)) \to$

$\widetilde{M \otimes_A N}(D_+(f))$ como la aplicación obtenida de la composición de las aplicaciones que aparecen en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}} \widetilde{N})^{-}(D_+(f)) \arrow[r, "\psi^{-}_{D_+(f)}"] \arrow[d, "\cong"'] & \widetilde{M \otimes_A N}(D_+(f)) \\
M_{(f)} \otimes_{A_{(f)}} N_{(f)} \arrow[r, "\omega_f"'] & (M \otimes_A N)_{(f)} \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, sean $f_1, f_2 \in A^h_+$ tales que $\mathrm{grad}(f_1) = e_1$ y $D_+(f_2) \subseteq D_+(f_1)$. De la contención anterior se sigue que existen $t \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{Z}_+$ y $\lambda \in A_u$ tales que $f_2^t = \lambda f_1$. Para probar la igualdad

$$\rho^{D_+(f_1)}_{\widetilde{M \otimes_A N}\, D_+(f_2)} \circ \psi^{-}_{D_+(f_1)} = \psi^{-}_{D_+(f_2)} \circ \rho^{D_+(f_1)}_{(\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}} \widetilde{N})^{-}\, D_+(f_2)} \tag{2.1}$$

será suficiente probar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M_{(f_1)} \otimes_{A_{(f_1)}} N_{(f_1)} \arrow[r, "\omega_{f_1}"] \arrow[d, "H_1"'] & (M \otimes_A N)_{(f_1)} \arrow[d, "H_2"] \\
M_{(f_2)} \otimes_{A_{(f_2)}} N_{(f_2)} \arrow[r, "\omega_{f_2}"'] & (M \otimes_A N)_{(f_2)}
\end{tikzcd}$$

donde H_1 y H_2 son las aplicaciones naturales obtenidas del hecho que $f_2^t = \lambda f_1$. Bastará con probar que la conmutatividad se satisface para los elementos generadores: sean $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $m \in M_{re_1}$ y $n \in N_{se_1}$,

$$\begin{aligned}
H_2 \circ \omega_{f_1}\left(\frac{m}{f_1^r} \otimes \frac{n}{f_1^s}\right) &= H_2\left(\frac{m \otimes n}{f_1^{r+s}}\right) \\
&= \frac{\lambda^{r+s}(m \otimes n)}{f_2^{t(r+s)}} \\
&= \frac{(\lambda^r m) \otimes (\lambda^s n)}{f_2^{tr+ts}} \\
&= \omega_{f_2}\left(\frac{\lambda^r m}{f_2^{tr}} \otimes \frac{\lambda^s n}{f_2^{ts}}\right) \\
&= \omega_{f_2} \circ H_1\left(\frac{m}{f_1^r} \otimes \frac{n}{f_1^s}\right).
\end{aligned}$$

De esta forma, como las aplicaciones $H_2 \circ \omega_{f_1}$ y $\omega_{f_2} \circ H_1$ tienen el mismo dominio, codominio y regla de asignación se sigue que son iguales y consecuentemente la igualdad 2.1 es verdadera.

Así, como $(D_+(f))_{f\in A_+^h}$ es una base para la topología de Proj(A) tenemos definido un morfismo $\psi^- : (\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}} \widetilde{N})^- \to \widetilde{M \otimes_A N}$. Ahora bien, para cualquier $f \in A_1$ tenemos que la aplicación ω_f es un isomorfismo (véase Proposición A.36), esto implica que $\psi^-|_{D_+(f)}$ es un isomorfismo. Luego, como $(D_+(f))_{f\in A_1}$ es una cubierta abierta de Proj(A) y utilizando la propiedad universal de la gavilla asociada obtenemos el isomorfismo de gavillas deseado. ❏

Proposición 4.13. *Sean M, N, y P módulos graduados sobre un anillo graduado A. Si la sucesión* $0 \to M \to N \to P \to 0$ *es exacta de A-módulos graduados, entonces la sucesión* $0 \to \widetilde{M} \to \widetilde{N} \to \widetilde{P} \to 0$ *es exacta de* $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}$*-módulos.*

Demostración. Sea $f \in A_+^h$. Como la sucesión $0 \to M \to N \to P \to 0$ es exacta de A-módulos graduados se sigue que la sucesión $0 \to M_f \to N_f \to P_f \to 0$ es exacta de A_f-módulos. La exactitud de la sucesión anterior implica que la sucesión de las componentes homogéneas también es exacta, en particular, la sucesión de las componentes homogéneas de grado cero $0 \to M_{(f)} \to N_{(f)} \to P_{(f)} \to 0$ es exacta de $A_{(f)}$-módulos. De este modo, la sucesión $0 \to \widetilde{M}|_{D_+(f)} \to \widetilde{N}|_{D_+(f)} \to \widetilde{P}|_{D_+(f)} \to 0$ es exacta de $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}|_{D_+(f)}$-módulos. Luego, como la exactitud de la sucesión anterior se cumple para cualquier abierto básico de Proj(A) se concluye que la sucesión $0 \to \widetilde{M} \to \widetilde{N} \to \widetilde{P} \to 0$ es exacta de $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}$-módulos. ❏

Corolario 4.14. *Sea M un módulo graduado sobre un anillo graduado A. Para cada A-submódulo graduado N de M se tiene que existe un isomorfismo entre las gavillas* $\widetilde{\left(\dfrac{M}{N}\right)}$ *y* $\dfrac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}}$.

Demostración. Sea N un A-submódulo graduado de M. Consideramos la sucesión exacta $0 \to N \to M \to \dfrac{M}{N} \to 0$ y aplicamos la Proposición 4.13. ❏

Comparando el resultado de la proposición anterior con el análogo que tenemos para gavillas de módulos sobre espectros afines, nos daremos cuenta que sólo tenemos una implicación. En efecto, la proposición anterior lo que realmente nos dice es que la gavilla construida a partir de un módulo graduado no está determinada por el módulo, es decir, si M y N son módulos graduados sobre un anillo graduado y no son isomorfos, entonces es posible que $\widetilde{M} \cong \widetilde{N}$. El siguiente ejemplo es una muestra de este hecho.

Ejemplo 4.15. Consideremos a $M = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}_+} M_s$ un módulo graduado sobre un anillo graduado $A = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}_+} A_s$. Sea $d \geq 1$. Definimos

$$M(d) = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}_+} (M(d))_s$$

donde $(M(d))_s = M_{d+s}$ para cada $s \in \mathbb{Z}_+$. Tenemos las siguientes observaciones sobre $M(d)$:

- $M(d)$ es un módulo sobre A con la estructura inducida por M.
- Por construcción tenemos que $((M(d))_s)_{s\in\mathbb{Z}_+}$ es una familia subgrupos de $M(d)$ tales que $M(d) = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}_+}(M(d))_s$.
- Para cualesquier $s, r \in \mathbb{Z}_+$ se satisface que

$$A_r \times (M(d))_s \subseteq A_r \times M_{d+s} \subseteq M_{d+r+s} = (M(d))_{r+s}.$$

De lo anterior se sigue que $M(d)$ es un módulo graduado sobre A.

Sea $f \in A_1$. Vamos a considerar el A_f-módulo $M(d)_f$ donde recordemos que $M(d)_f$ es un módulo graduado con la graduación $((M(d)_f)_s)_{s\in\mathbb{Z}}$ donde para cualquier $s \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$(M(d)_f)_s = \left\{ \frac{m}{f^t} \,\middle|\, t \in \mathbb{Z}_+, m \in M^h \text{ y } \operatorname{grad}(m) = d + s + t \right\}.$$

Consideremos la componente homogénea de grado cero $M(d)_{(f)}$. Vamos a mostrar que existe un $A_{(f)}$-isomorfismo entre $M_{(f)}$ y $M(d)_{(f)}$. Consideremos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rcl} \psi : M_{(f)} & \to & M(d)_{(f)} \\ \dfrac{m}{f^t} & \mapsto & \dfrac{f^d m}{f^t} \end{array}$$

Comenzaremos mostrando que ψ está bien definida: sean $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_+$, $m_1 \in M_{t_1}$ y $m_2 \in M_{t_2}$ de modo que $\dfrac{m_1}{f^{t_1}} = \dfrac{m_2}{f^{t_2}}$. Así, se sigue que existe $v \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^v f^{t_2} m_1 = f^v f^{t_1} m_2$. La igualdad anterior implica que $f^v f^{t_2} f^d m_1 = f^v f^{t_1} f^d m_2$, además, el hecho de que $\operatorname{grad}(f^d m_1) = d + t_1$ y $\operatorname{grad}(f^d m_2) = d + t_2$ implican la igualdad $\dfrac{f^d m_1}{f^{t_1}} = \dfrac{f^d m_2}{f^{t_2}}$ en $M(d)_{(f)}$. Por lo tanto, ψ está bien definida.

A continuación probaremos que ψ es una aplicación $A_{(f)}$-lineal: sean $t_1, t_2, u_1, u_2 \in \mathbb{Z}_+$, $m_1 \in M_{t_1}$, $m_2 \in M_{t_2}$, $a_1 \in A_{u_1}$ y $a_2 \in A_{u_2}$,

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{a_1}{f^{u_1}} \cdot \frac{m_1}{f^{t_1}} + \frac{a_2}{f^{u_2}} \cdot \frac{m_2}{f^{t_2}}\right) &= \psi\left(\frac{f^{t_2+u_2}a_1m_1 + f^{t_1+u_1}a_2m_2}{f^{t_1+u_1+t_2+u_2}}\right) \\ &= \frac{f^d(f^{t_2+u_2}a_1m_1 + f^{t_1+u_1}a_2m_2)}{f^{t_1+u_1+t_2+u_2}} \\ &= \frac{a_1}{f^{u_1}} \cdot \frac{f^d m_1}{f^{t_1}} + \frac{a_2}{f^{u_2}} \cdot \frac{f^d m_2}{f^{t_2}} \\ &= \frac{a_1}{f^{u_1}} \cdot \psi\left(\frac{m_1}{f^{t_1}}\right) + \frac{a_2}{f^{u_2}} \cdot \psi\left(\frac{m_2}{f^{t_2}}\right). \end{aligned}$$

Ahora, probaremos que ψ es una aplicación inyectiva: sean $t \in \mathbb{Z}_+$ y $m \in M_t$ tales que $\dfrac{m}{f^t} \in \operatorname{Ker}\psi$. Como $\dfrac{f^d m}{f^t} = \dfrac{0_M}{1_A}$, se sigue que existe $u \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^{u+d}m = 0_M$. De este modo, como $\dfrac{m}{f^t} = \dfrac{f^{u+d}m}{f^{u+d}f^t} = \dfrac{0_M}{f^{u+d+t}} = 0_{M_{(f)}}$ se concluye que ψ es inyectiva.

Por último, mostraremos que ψ es sobreyectiva: sean $t \in \mathbb{Z}_+$ y $m \in (M(d))_t = M_{d+t}$. Afirmamos que la imagen del elemento $\dfrac{m}{f^{d+t}}$ bajo ψ es $\dfrac{m}{f^t}$, en efecto:

$$\psi\left(\frac{m}{f^{d+t}}\right) = \frac{f^d m}{f^{d+t}} = \frac{m}{f^t}.$$

Así, tenemos que ψ es una aplicación sobreyectiva.

De este modo, tenemos que ψ es un $A_{(f)}$-isomorfismo entre $M_{(f)}$ y $M(d)_{(f)}$. Consecuentemente se tiene que

$$\widetilde{M}|_{D_+(f)} \cong \widetilde{M_{(f)}} \cong \widetilde{M(d)_{(f)}} \cong \widetilde{M(d)}|_{D_+(f)}$$

y por lo tanto tenemos un isomorfismo entre las gavillas $\widetilde{M}$ y $\widetilde{M(d)}$. Sin embargo, en general el módulo graduado M no es isomorfo al módulo graduado $M(d)$.

3. Clasificación de las Gavillas Casi Coherentes y Coherentes

En esta sección, después de definir a las gavillas casi coherentes y coherentes y estudiar algunas de sus propiedades, realizaremos de manera definitiva la clasificación de estos objetos cuando se encuentran sobre un esquema afín y como consecuencia también los clasificaremos cuando se encuentren sobre un esquema arbitrario. Para concluir con esta sección y con este capítulo, estudiaremos algunas aplicaciones de esta clase de gavillas. Comenzaremos definiendo a los objetos de nuestro interés.

Definición 4.16. Sea $\mathcal{F}$ una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$. $\mathcal{F}$ es *casi coherente* (respectivamente, *coherente*) si existe una cubierta afín $(U_i)_{i\in I}$ de X tal que para todo $i \in I$ existe un $\mathcal{O}_X(U_i)$-módulo M_i (respectivamente, $\mathcal{O}_X(U_i)$-módulo finitamente generado M_i) de modo que $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \widetilde{M_i}$.

Los siguientes resultados nos presentan algunas propiedades de las gavillas casi coherentes que se encuentran sobre un esquema afín.

Lema 4.17. *Sean A un anillo y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}$-módulo casi coherente (respectivamente, coherente). Existen $r \in \mathbb{N}$ y $g_1, \ldots, g_r \in A$ tales que* $\operatorname{Spec}(A) = \bigcup_{i=1}^r D(g_i)$ *y $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{N_i}$ donde N_i*

es un módulo sobre A_{g_i} (respectivamente, un módulo finitamente generado sobre A_{g_i}) para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es una gavilla casi coherente (respectivamente, coherente) existe una cubierta afín $(U_i)_{i\in I}$ de $\operatorname{Spec}(A)$ tal que $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \widetilde{M_i}$ donde M_i es un $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(U_i)$-módulo (respectivamente, $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(U_i)$-módulo finitamente generado) para cada $i \in I$. Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Como $(U_i)_{i\in I}$ es una cubierta abierta de $\operatorname{Spec}(A)$ existe $j \in I$ tal que $\mathfrak{p} \in U_j$; por otro lado, como $(D(g))_{g\in A}$ es una base para la topología de $\operatorname{Spec}(A)$ existe $g_j \in A$ tal que $\mathfrak{p} \in D(g_j)$ y $D(g_j) \subseteq U_j$, además, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $D(g_i)$ es un abierto básico de U_j. Luego, observemos que

$$\mathcal{F}|_{D(g_j)} = (\mathcal{F}|_{U_j})|_{D(g_j)} \cong \widetilde{M_j}|_{D(g_j)} \cong \widetilde{(M_j)_{g_j}},$$

donde tenemos que $(M_j)_{g_j}$ es un A_{g_j}-módulo (respectivamente, A_{g_j}-módulo finitamente generado). Además, como $(D(g_i))_{i\in I}$ es una cubierta abierta de $\operatorname{Spec}(A)$ y como $\operatorname{Spec}(A)$ es casi compacto, podemos considerar un número finito de abiertos de dicha cubierta. ❑

Proposición 4.18. *Sean A un anillo, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}$-módulo casi coherente y f un elemento de A. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Si $s \in \mathcal{F}(\operatorname{Spec}(A))$ es tal que $s|_{D(f)} = 0_{\mathcal{F}(D(f))}$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}_+$ de modo que $f^n s = 0_{\mathcal{F}(\operatorname{Spec}(A))}$.*
2. *Si $t \in \mathcal{F}(D(f))$, entonces existen $n \in \mathbb{Z}_+$ y $s \in \mathcal{F}(\operatorname{Spec}(A))$ tales que $s|_{D(f)} = f^n t$.*

Demostración.

1. Sea $s \in \mathcal{F}(\operatorname{Spec}(A))$ tal que $s|_{D(f)} = 0_{\mathcal{F}(D(f))}$. Como $\mathcal{F}$ es una gavilla casi coherente sobre $\operatorname{Spec}(A)$ por el lema anterior existen $r \in \mathbb{N}$ y $g_1, \ldots, g_r \in A$ tales que $\operatorname{Spec}(A) = \bigcup_{i=1}^r D(g_i)$ y $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$ donde M_i es un módulo sobre A_{g_i} para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Sea $i \in \{1, \ldots, r\}$. Vamos a denotar por s_i a la restricción de s en $D(g_i)$, es decir, denotamos $s_i = s|_{D(g_i)}$. Puesto que $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$ se sigue que $\mathcal{F}(D(g_i)) \cong M_i$. Ahora bien, veamos qué sucede con la sección s_i cuando la restringimos al abierto principal $D(f) \cap D(g_i) = D(fg_i)$:

$$s_i|_{D(f)\cap D(g_i)} = (s|_{D(g_i)})|_{D(f)\cap D(g_i)} = s|_{D(f)\cap D(g_i)} = (s|_{D(f)})|_{D(f)\cap D(g)} = 0_{\mathcal{F}(D(fg_i))},$$

así, tenemos que $s_i|_{D(fg_i)} = 0_{\mathcal{F}(D(fg_i))}$. Además, como $D(fg_i) \subseteq D(g_i)$ y $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$ se sigue que $\mathcal{F}(D(fg_i)) \cong (M_i)_f$. De esta forma, como la imagen de $s_i|_{D(fg_i)}$ en $(M_i)_f$ es igual a cero existe $n_i \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^{n_i} s_i = 0_{M_i}$ y como sólo tenemos un número finito de índices involucrados podemos suponer que existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^n s_j = 0_{M_j}$ para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$, es decir, tenemos que $f^n s|_{D(g_j)} = 0_{M_j}$ para cualquier $j \in \{1, \ldots, r\}$. De este modo, $f^n s$ es una sección global de $\mathcal{F}$ que se anula en la restricción de cada abierto de una cubierta abierta de $\mathrm{Spec}(A)$, por lo tanto, como $\mathcal{F}$ es una gavilla se concluye que $f^n s = 0_{\mathcal{F}(\mathrm{Spec}(A))}$.

2. Sea $t \in \mathcal{F}(D(f))$. Nuevamente, como $\mathcal{F}$ es una gavilla casi coherente por el lema anterior existen $r \in \mathbb{N}$ y $g_1, \ldots, g_r \in A$ tales que $\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_{i=1}^{r} D(g_i)$ y $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$ donde M_i es un módulo sobre A_{g_i} para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Sea $i \in \{1, \ldots, r\}$. Tomamos al abierto principal $D(f) \cap D(g_i) = D(fg_i)$ y vamos a considerar la restricción de la sección t a este abierto, es decir, consideramos a la sección $t|_{D(fg_i)}$. Recordemos que el hecho de que $D(fg_i) \subseteq D(g_i)$ y de que $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$ implican que $\mathcal{F}(D(fg_i)) \cong (M_i)_f$. De esta forma, se sigue que existen $n_i \in \mathbb{Z}_+$ y una sección t_i de $\mathcal{F}$ sobre $D(g_i)$ que se restringe a $f^{n_i} t|_{D(fgi)}$ en $D(fg_i)$, es decir, tenemos que $t_i|_{D(fg_i)} = f^{n_i} t|_{D(fg_i)}$. Puesto que sólo tenemos un número finito de índices involucrados podemos considerar $n \in \mathbb{Z}_+$ de modo que exista $t_j \in \mathcal{F}(D(g_j))$ y que satisfaga que $t_j|_{D(fg_j)} = f^n t|_{D(fg_j)}$ para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$. Por otro lado, para cualesquier $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ se tiene que las secciones t_i y t_j coinciden en el abierto $D(f) \cap D(g_i) \cap D(g_j)$, en efecto:

$$\begin{aligned}
t_i|_{D(fg_ig_j)} &= (t_i|_{D(fg_i)})|_{D(fg_ig_j)} \\
&= (f^n t|_{D(fg_i)})|_{D(fg_ig_j)} \\
&= f^n t|_{D(fg_ig_j)} \\
&= (f^n t|_{D(fg_j)})|_{D(fg_ig_j)} \\
&= (t_j|_{D(fg_j)})|_{D(fg_ig_j)} \\
&= t_j|_{D(fg_ig_j)}.
\end{aligned}$$

De esta igualdad de secciones se sigue que

$$(t_i|_{D(g_ig_j)} - t_j|_{D(g_ig_j)})|_{D(fg_ig_j)} = 0_{\mathcal{F}(D(fg_ig_j))}$$

y aplicando el enunciado 1 de esta proposición tenemos que existe $m_{ij} \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$f^{m_{ij}}(t_i|_{D(g_i)\cap D(g_j)} - t_j|_{D(g_i)\cap D(g_j)}) = 0_{\mathcal{F}(D(g_ig_j))}.$$

Como sólo tenemos un número finito de índices involucrados podemos considerar $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$f^{m}(t_i|_{D(g_i)\cap D(g_j)} - t_j|_{D(g_i)\cap D(g_j)}) = 0_{\mathcal{F}(D(g_ig_j))}$$

para cualesquier $i, j \in \{1, \ldots, r\}$. De este modo, tenemos que la siguiente igualdad se satisface para cualesquier $i, j \in \{1, \ldots, r\}$:

$$f^m t_i|_{D(g_i)\cap D(g_j)} = f^m t_j|_{D(g_i)\cap D(g_j)},$$

además, como $(D(g_i))_{i\in\{1,\ldots,r\}}$ es una cubierta abierta de $\mathrm{Spec}(A)$ y $\mathcal{F}$ es una gavilla tenemos asegurada la existencia de una sección s de $\mathcal{F}$ sobre $\mathrm{Spec}(A)$ de modo que $s|_{D(g_i)} = f^m t_i$ para cualquier

$i \in \{1, \ldots, r\}$. Vamos a mostrar que la sección global s es la sección buscada. Para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ observemos el comportamiento de la sección s en el abierto $D(f) \cap D(g_i)$:

$$s|_{D(fg_i)} = (s|_{D(g_i)})|_{D(fg_i)} = f^m t_i|_{D(fg_i)} = f^m f^n t|_{D(fg_i)} = f^{m+n} t|_{D(fg_i)},$$

luego, la igualdad anterior implica que

$$(s|_{D(f)} - f^{m+n}t)|_{D(f)\cap D(g_i)} = 0_{\mathcal{F}(D(fg_i))}.$$

De este modo, puesto que la ecuación anterior se cumple para cualquier $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\mathcal{F}$ es una gavilla y $(D(f) \cap D(g_i))_{i\in\{1,\ldots,r\}}$ es una cubierta abierta de $D(f)$ se sigue que $s|_{D(f)} - f^{m+n}t = 0_{\mathcal{F}(D(f))}$. Por lo tanto, concluimos que $s|_{D(f)} = f^{m+n}t$. ❏

El siguiente resultado que mostraremos es uno de los objetivos de este trabajo: la clasificación de las gavillas casi coherentes sobre esquemas afines. Además, utilizando dicha clasificación y agregando la hipótesis de que el esquema afín en que nos encontramos sea noetheriano, realizaremos la clasificación de las gavillas coherentes sobre esquemas afines noetherianos.

Teorema 4.19. *Sean A un anillo (respectivamente, anillo noetheriano) y $\mathcal{F}$ una gavilla de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$-módulos. $\mathcal{F}$ es casi coherente (respectivamente, coherente) si y sólo si existe un A-módulo M (respectivamente, un A-módulo finitamente generado M) tal que $\mathcal{F} \cong \widetilde{M}$.*

Demostración. Supongamos que existe M un A-módulo (respectivamente, A-módulo finitamente generado) tal que $\mathcal{F} \cong \widetilde{M}$. Tomando a $(\mathrm{Spec}(A))$ como la cubierta afín de $\mathrm{Spec}(A)$ requerida se sigue de manera inmediata que $\mathcal{F}$ es una gavilla casi coherente (respectivamente, coherente).

Recíprocamente, sea $\mathcal{F}$ una gavilla casi coherente sobre $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ donde A es cualquier anillo. Vamos a fijar $M = \mathcal{F}(\mathrm{Spec}(A))$. Nuestro objetivo será el de construir un isomorfismo de gavillas $\xi : \widetilde{M} \to \mathcal{F}$. Puesto que $(D(f))_{f\in A}$ es una base para la topología de $\mathrm{Spec}(A)$, para construir el morfismo deseado será suficiente con construir las aplicaciones $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(f))$-lineales $\xi_{D(f)} : \widetilde{M}(D(f)) \to \mathcal{F}(D(f))$ para cada $f \in A$ y comprobar la compatibilidad con las restricciones de gavilla. Sea $f \in A$. Para construir la aplicación $\xi_{D(f)}$ observemos que es suficiente con construir una aplicación A_f-lineal $\zeta_f : M_f \to \mathcal{F}(D(f))$, para ello, utilizaremos la propiedad universal de la localización para módulos. Como aplicación a considerar entre M y $\mathcal{F}(D(f))$ tomamos la restricción en la gavilla $\mathcal{F}$, luego, vamos a probar que la homotecia

$$\begin{aligned} h_f : \mathcal{F}(D(f)) &\to \mathcal{F}(D(f)) \\ s &\mapsto f|_{D(f)} s \end{aligned}$$

es una biyección. Observemos que precisamente $f|_{D(f)}$ es un elemento invertible en $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(f))$, de este modo, podemos definir la aplicación

$$\begin{array}{rcl} l_f : \mathcal{F}(D(f)) & \to & \mathcal{F}(D(f)) \\ s & \mapsto & f|_{D(f)}^{-1} s \end{array}$$

Así, puesto que claramente tenemos que h_f y l_f son aplicaciones inversas, por la propiedad universal de la localización para módulos tenemos que existe una aplicación A-lineal $\zeta_f : M_f \to \mathcal{F}(D(f))$ y es la única aplicación que satisface el siguiente enunciado: para cualesquier $m \in M$ y $u \in \mathbb{Z}_+$ se tiene que $f^u|_{D(f)} \cdot \zeta_f\left(\dfrac{m}{f^u}\right) = m|_{D(f)}$. Luego, del hecho que $f|_{D(f)}$ es invertible en $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(f))$ se sigue que podemos escribir a la aplicación ζ_f de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} \zeta_f : M_f & \to & \mathcal{F}(D(f)) \\ \dfrac{m}{f^u} & \mapsto & f^u|_{D(f)}^{-1} m|_{D(f)} \end{array}$$

Lo que haremos a continuación es probar que ζ_f es una aplicación A_f-lineal: sean $m, n \in M$, $a, b \in A$ y $u, v, w, z \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned} \zeta_f\left(\frac{a}{f^w} \cdot \frac{m}{f^u} + \frac{b}{f^z} \cdot \frac{n}{f^v}\right) &= \zeta_f\left(\frac{f^{z+v}am + f^{w+u}bn}{f^{w+u+z+v}}\right) \\ &= f^{w+u+z+v}|_{D(f)}^{-1}(f^{z+v}am + f^{w+u}bn)|_{D(f)} \\ &= f^{w+u+z+v}|_{D(f)}^{-1} f^{z+v}|_{D(f)} a|_{D(f)} m|_{D(f)} + f^{w+u+z+v}|_{D(f)}^{-1} f^{w+u}|_{D(f)} b|_{D(f)} n|_{D(f)} \\ &= f^w|_{D(f)}^{-1} a|_{D(f)} f^u|_{D(f)}^{-1} m|_{D(f)} + f^z|_{D(f)}^{-1} b|_{D(f)} f^v|_{D(f)} n|_{D(f)} \\ &= \frac{a}{f^w} \cdot \zeta_f\left(\frac{m}{f^u}\right) + \frac{b}{f^z} \cdot \zeta_f\left(\frac{n}{f^v}\right). \end{aligned}$$

De esta forma, tenemos que ζ_f es una aplicación A_f-lineal. Más aún, vamos a mostrar que ζ_f es un isomorfismo:

- ζ_f es inyectiva: sean $m \in M$ y $u \in \mathbb{Z}_+$ tales que $\dfrac{m}{f^u} \in \operatorname{Ker} \zeta_f$. Como $f|_{D(f)}$ es invertible en $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(f))$, la igualdad $f^u|_{D(f)}^{-1} m|_{D(f)} = 0_{\mathcal{F}(D(f))}$ implica que $m|_{D(f)} = 0_{\mathcal{F}(D(f))}$. Luego, el enunciado 1 de la proposición anterior implica que existe $t \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^t m = 0_M$. De esta forma, como
$$\frac{m}{f^u} = \frac{f^t}{f^t} \cdot \frac{m}{f^u} = \frac{f^t m}{f^{tu}} = \frac{0_M}{f^{tu}} = 0_{M_f}$$
concluimos que ζ_f es inyectiva.

- ζ_f es sobreyectiva: sea $t \in \mathcal{F}(D(f))$. Por el enunciado 2 de la proposición anterior tenemos que existen $u \in \mathbb{Z}_+$ y $m \in M$ tales que $m|_{D(f)} = f^u t$. Afirmamos que la imagen del elemento $\dfrac{m}{f^u}$ bajo ζ_f es igual a t, en efecto:

$$\zeta_f\left(\frac{m}{f^u}\right) = f^u|_{D(f)}^{-1} m|_{D(f)} = f^u|_{D(f)}^{-1} f^u|_{D(f)} t = t.$$

  Así, se tiene que ζ_f es una aplicación sobreyectiva.

De esta forma, tenemos que ζ_f es un A_f-isomorfismo. Ahora, consideremos $f, g \in A$ tales que $D(g) \subseteq D(f)$, vamos a probar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M_f \arrow[r, "\zeta_f"] \arrow[d, "H"'] & \mathcal{F}(D(f)) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}}{}^{D(f)}_{D(g)}"] \\
M_g \arrow[r, "\zeta_g"'] & \mathcal{F}(D(g))
\end{tikzcd}$$

donde la aplicación $H : M_f \to M_g$ es la natural dada por el hecho de que existen $t \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in A$ tales que $g^t = \lambda f$. Sean $m \in M$ y $u \in \mathbb{Z}_+$.

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathcal{F}}{}^{D(f)}_{D(g)} \circ \zeta_f\left(\frac{m}{f^u}\right) &= \rho_{\mathcal{F}}{}^{D(f)}_{D(g)}(f^u|_{D(f)}^{-1} m|_{D(f)}) \\
&= f^u|_{D(g)}^{-1} m|_{D(g)} \\
&= \lambda^u|_{D(g)} \lambda^u|_{D(g)}^{-1} f^u|_{D(g)}^{-1} m|_{D(g)} \\
&= g^{tu}|_{D(g)}^{-1} (\lambda^u m)|_{D(g)} \\
&= \zeta_g\left(\frac{\lambda^u m}{g^{tu}}\right) \\
&= \zeta_g \circ H\left(\frac{m}{f^u}\right).
\end{aligned}$$

De esta forma, concluimos que la gavilla $\widetilde{M}$ es isomorfa a $\mathcal{F}$.

Ahora, supongamos que A es un anillo noetheriano y que $\mathcal{F}$ es una gavilla coherente. Como $\mathcal{F}$ es en particular una gavilla casi coherente, preservando la notación anterior tenemos que $\mathcal{F} \cong \widetilde{M}$, de esta forma, sólo nos resta a probar que M es finitamente generado. Por el Lema 4.17 se sigue que existen $r \in \mathbb{N}$ y $g_1, \ldots, g_r \in A$ tales que $\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_{i=1}^r D(g_i)$ y de modo que para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ se tiene que $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$ donde M_i es un A_{g_i}-módulo finitamente generado. Sea $i \in \{1, \ldots, r\}$. De los hechos anteriores se sigue que M_{g_i} es un A_{g_i}-módulo finitamente generado y esto implica que existen $t_i \in \mathbb{N}$, $m_{i_j} \in M$ y $s_{i_j} \in \mathbb{Z}_+$ para cada $j \in \{1, \ldots, t_i\}$ tales que

$$M_{g_i} = A_{g_i}\frac{m_{i_1}}{g_i^{s_{i_1}}} + A_{g_i}\frac{m_{i_2}}{g_i^{s_{i_2}}} + \cdots + A_{g_i}\frac{m_{i_{t_i}}}{g_i^{s_{i_{t_i}}}}.$$

Sea $n \in M$. Como $\dfrac{n}{1_A}$ es un elemento de M_{g_i} se sigue que existen $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{t_i}}$ elementos de A_{g_i} tales que

$$\frac{n}{1_A} = \sum_{j=1}^{t_i} a_{i_j}\frac{m_{i_j}}{g_i^{s_{i_j}}}.$$

De esta igualdad se sigue que existe $u_i \in \mathbb{Z}_+$ de modo que

$$g_i^{u_i} n = \sum_{j=1}^{t_i} b_{i_j} m_{i_j}$$

para ciertos $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_{t_i}}$ elementos de A. Observemos que $g^{u_i} n \in M$ y que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u_i > 0$. Por otro lado, puesto que $\operatorname{Spec}(A) = \bigcup_{i=1}^r D(g_i) = \bigcup_{i=1}^r D(g_i^{u_i})$ se sigue que $A = Ag_1^{u_1} + Ag_2^{u_2} + \cdots + Ag_r^{u_r}$ y consecuentemente existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in A$ tales que

$$1_A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i g_i^{u_i}.$$

De esta forma, tenemos que

$$n = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i g_i^{u_i} n = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{t_i} \lambda_i b_{i_j} m_{i_j}.$$

Por lo tanto, tenemos que $M = \left\langle m_{i_j} \,\middle|\, i \in \{1, \ldots, r\},\ j \in \{1, \ldots, t_i\} \right\rangle_A$ y de esta forma concluimos que M es finitamente generado. ❑

Como el lector ya podrá haber notado, en el proceso para realizar la clasificación de las gavillas casi coherentes sobre esquemas afines mostramos que hay una equivalencia entre el Lema 4.17, la Proposición 4.18 y el Teorema 4.19. De hecho, algunos autores muestran en un sólo resultado su equivalencia (ver por ejemplo [**7**], Teorema 1.11, página 45).

Uno de los corolarios a la clasificación de las gavillas casi coherentes sobre esquemas afines es su clasificación sobre cualquier esquema. De manera análoga al caso afín, también realizaremos la clasificación de dichos objetos cuando el esquema en que nos encontremos sea noetheriano. Antes de realizar dicha clasificación necesitaremos la ayuda del siguiente lema que es una de las consecuencias de la clasificación de las gavillas casi coherentes sobre esquemas afines:

Lema 4.20. *Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo casi coherente (respectivamente, coherente) sobre un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ (respectivamente, esquema noetheriano $(X, \mathcal{O}_X)$). Si U es un abierto afín de X, entonces $\mathcal{F}|_U$ es una gavilla casi coherente (respectivamente, coherente) sobre $(U, \mathcal{O}_U)$.*

Demostración. Sea U un abierto afín de X. Como $\mathcal{F}$ es casi coherente (respectivamente, coherente) existe una cubierta afín $(V_i)_{i\in I}$ de X tal que $\mathcal{F}|_{V_i} \cong \widetilde{M_i}$ donde M_i es un $O_X(V_i)$-módulo, (respectivamente, $O_X(V_i)$-módulo finitamente generado) para cada $i \in I$.

Sea $i \in I$. Puesto que $\mathcal{F}|_{V_i}$ es una gavilla de O_{V_i}-módulos sobre el esquema afín (V_i, O_{V_i}) (respectivamente, esquema afín noetheriano (V_i, O_{V_i})) y $\mathcal{F}|_{V_i} \cong \widetilde{M_i}$ con M_i un $O_X(V_i)$-módulo (respectivamente, $O_X(V_i)$-módulo finitamente generado) por el teorema anterior se sigue que $\mathcal{F}|_{V_i}$ es una gavilla casi coherente (respectivamente, coherente).

Ahora bien, observemos que $(U \cap V_i)_{i\in I}$ es una cubierta abierta de U, además, sin pérdida de generalidad, para cada $i \in I$ podemos suponer que $U \cap V_i$ es un abierto básico de U. Sea $i \in I$. Como $U \cap V_i$ es un abierto de V_i que es un abierto afín, se sigue que $\mathcal{F}|_{U\cap V_i}$ es una gavilla casi coherente (respectivamente, coherente). De esta forma, la cubierta afín $(U \cap V_i)_{i\in I}$ de U implica que $\mathcal{F}|_U$ es una gavilla casi coherente (respectivamente, coherente). ❑

Corolario 4.21. *Sea $\mathcal{F}$ un O_X-módulo sobre un esquema (X, O_X) (respectivamente, esquema noetheriano (X, O_X)). $\mathcal{F}$ es casi coherente (respectivamente, coherente) si y sólo si para todo abierto afín U de X se tiene que $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$ donde M es un $O_X(U)$-módulo (respectivamente, $O_X(U)$-módulo finitamente generado).*

Demostración. Supongamos que para todo abierto afín U de X tenemos que $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$ donde M es un $O_X(U)$-módulo (respectivamente, $O_X(U)$-módulo finitamente generado). El hecho de que (X, O_X) es un esquema implica de manera inmediata que $\mathcal{F}$ es casi coherente (respectivamente, coherente).

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{F}$ es una gavilla casi coherente (respectivamente, coherente) y que (X, O_X) es cualquier esquema (respectivamente, esquema noetheriano). Sea U un abierto afín de X. Como $\mathcal{F}$ es casi coherente (respectivamente, coherente) por el lema anterior tenemos que $\mathcal{F}|_U$ es casi coherente (respectivamente, coherente) sobre (U, O_U) que es un esquema afín (respectivamente, esquema afín noetheriano), así, por el Teorema 4.19 concluimos que $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$ donde M es $O_X(U)$-módulo (respectivamente, $O_X(U)$-módulo finitamente generado). ❑

Con la clasificación de gavillas casi coherentes que hemos realizado, de una manera inmediata podemos obtener resultados sobre las sucesiones exactas de gavillas casi coherentes y del cociente de gavillas casi coherentes sobre esquemas afines.

Corolario 4.22. *Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ gavillas casi coherentes de O_X-módulos sobre un esquema afín (X, O_X). La sucesión de gavillas $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ es exacta si y sólo si la sucesión $0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}(X) \to 0$ es exacta de $O_X(X)$-módulos.*

Corolario 4.23. *Sea $(X,\mathcal{O}_X)$ un esquema afín. Si $\mathcal{G}$ es un $\mathcal{O}_X$-submódulo casi coherente de un $\mathcal{O}_X$-módulo casi coherente $\mathcal{F}$, entonces $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}} \cong \left(\widetilde{\dfrac{\mathcal{F}(X)}{\mathcal{G}(X)}}\right)$. En otras palabras, $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}$ es casi coherente y $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}(X) \cong \dfrac{\mathcal{F}(X)}{\mathcal{G}(X)}$.*

Otra de las consecuencias de la clasificación de las gavillas casi coherentes sobre esquemas afines nos es dada por la demostración: en efecto, la técnica usada para construir el morfismo en dicha prueba puede generalizarse para obtener de manera inmediata el siguiente resultado del cual omitiremos su demostración.

Proposición 4.24. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ gavillas de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre un esquema afín $(X,\mathcal{O}_X)$. Si $\mathcal{G}$ es una gavilla casi coherente, entonces existe un $\mathcal{O}_X(X)$-isomorfismo entre* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G},\mathcal{F})$ *y* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(X)}(\mathcal{G}(X),\mathcal{F}(X))$. *Además, si $\mathcal{H}$ es una gavilla casi coherente sobre $(X,\mathcal{O}_X)$, entonces de manera particular tenemos que*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{\mathcal{G}(X)},\widetilde{\mathcal{H}(X)}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(X)}(\mathcal{G}(X),\mathcal{H}(X)).$$

Con todo lo que hemos hecho hasta ahora, una pregunta natural es si es posible construir gavillas casi coherentes a partir de gavillas casi coherentes conocidas. Para concluir con este capítulo, los siguientes resultados contestarán a esta interrogante.

Proposición 4.25. *Si $(X,\mathcal{O}_X)$ es un esquema, entonces $\mathcal{O}_X$ es una gavilla casi coherente.*

Demostración. En primer lugar, vamos a considerar el caso especial en que $(X,\mathcal{O}_X)$ es un esquema afín. Como $(X,\mathcal{O}_X)$ es afín, existe un anillo A de modo que $(X,\mathcal{O}_X) \cong (\mathrm{Spec}(A),\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$. Así, se tiene que $\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)} = \widetilde{A}$ y de este modo se sigue que $\mathcal{O}_X$ es una gavilla casi coherente. Más aún, puesto que A es finitamente generado tenemos que $\mathcal{O}_X$ es coherente.

Ahora, consideremos el caso general en que $(X,\mathcal{O}_X)$ es un esquema. Como $(X,\mathcal{O}_X)$ es un esquema existe una cubierta afín $(U_i)_{i\in I}$ de X. Sea $i \in I$. Puesto que U_i es un abierto afín, por la primera parte tenemos que $\mathcal{O}_{U_i} = \mathcal{O}_X|_{U_i}$ es una gavilla casi coherente. Por lo tanto, concluimos que $\mathcal{O}_X$ es una gavilla casi coherente, más aún, $\mathcal{O}_X$ es una gavilla coherente. ❑

Proposición 4.26. *Sea $(X,\mathcal{O}_X)$ un esquema. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son $\mathcal{O}_X$-módulos casi coherentes, entonces $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo casi coherente.*

Demostración. Comencemos considerando el caso en que $(X,\mathcal{O}_X)$ es un esquema afín. Como $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son gavillas casi coherentes sobre un esquema afín tenemos que $\mathcal{F} \cong \widetilde{\mathcal{F}(X)}$ y $\mathcal{G} \cong \widetilde{\mathcal{G}(X)}$. Luego, utilizando el Teorema 4.4 se tiene que

$$\mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G} \cong \widetilde{\mathcal{F}(X)} \otimes_{\widetilde{O_X(X)}} \widetilde{\mathcal{G}(X)} \cong \mathcal{F}(X) \widetilde{\otimes_{O_X(X)}} \mathcal{G}(X).$$

Por lo tanto, concluimos que $\mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G}$ es una gavilla casi coherente.

Ahora, consideremos el caso general en que (X, O_X) es un esquema. Sea U un abierto afín de X, mostraremos que $(\mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G})\big|_U$ es una gavilla casi coherente sobre (U, O_U). Por el Lema 2.44 sabemos que $(\mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G})|_U \cong \mathcal{F}|_U \otimes_{O_X|_U} \mathcal{G}|_U$. Luego, como $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son casi coherentes sobre X, por el Lema 4.20 se tiene que $\mathcal{F}|_U$ y $\mathcal{G}|_U$ son casi coherentes sobre el esquema afín (U, O_U). De este modo, por la primera parte tenemos que $\mathcal{F}|_U \otimes_{O_U} \mathcal{G}|_U$ es una gavilla casi coherente. Por lo tanto, concluimos que $\mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G}$ es una gavilla casi coherente. ❑

Observemos que de una manera natural podemos extender el resultado anterior cuando consideramos el producto tensorial de un número finito de gavillas casi coherentes sobre un esquema.

Proposición 4.27. *Sea (X, O_X) un esquema. Si $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ es una familia de O_X-módulos casi coherentes, entonces $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i$ es un O_X-módulo casi coherente.*

Demostración. En primer lugar, supongamos que (X, O_X) es un esquema afín. Como (X, O_X) es un esquema afín y $\mathcal{F}_i$ es una gavilla casi coherente para todo $i \in I$, se sigue que $\mathcal{F}_i = \widetilde{\mathcal{F}_i(X)}$ para todo $i \in I$. De esta forma, por el Teorema 4.4 tenemos que

$$\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i \cong \bigoplus_{i \in I} \widetilde{\mathcal{F}_i(X)} \cong \widetilde{\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i(X)}.$$

Consecuentemente tenemos que $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i$ es una gavilla casi coherente.

Ahora, consideremos el caso general en que (X, O_X) es un esquema. Sea U un abierto afín de X, vamos a mostrar que $\left(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i\right)\big|_U$ es una gavilla casi coherente sobre (U, O_U). Por el Lema 2.9 sabemos que $\left(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i\right)\big|_U \cong \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i|_U$. Luego, como $\mathcal{F}_i$ es una gavilla casi coherente, por el Lema 4.20 se tiene que $\mathcal{F}_i|_U$ es una gavilla casi coherente para cada $i \in I$. Además, como (U, O_U) es un esquema afín, por la primera parte concluimos que $\left(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i\right)\big|_U$ es una gavilla casi coherente. Por lo tanto, concluimos que $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i$ es una gavilla casi coherente. ❑

Gracias a las proposiciones anteriores ya sabemos una manera de construir gavillas casi coherentes sobre esquemas dados. De esta forma, si consideramos al esquema (X, O_X), puesto que O_X es una gavilla casi coherente podemos considerar el producto tensorial finito y la suma directa de gavillas O_X para obtener gavillas casi coherentes. Sin embargo, el considerar el producto tensorial no nos dará como resultado alguna nueva gavilla: en efecto, consideremos un elemento $p \in X$ y observemos que

$$(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X)_p \cong \mathcal{O}_{X,p} \otimes_{\mathcal{O}_{X,p}} \mathcal{O}_{X,p} \cong \mathcal{O}_{X,p},$$

lo cual implica que $\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X$. Sin embargo, el considerar $\mathcal{O}_X^{(I)}$ para algún conjunto I no vacío sí nos dará nuevas gavillas casi coherentes pues en general $\mathcal{O}_X^{(I)} \ncong \mathcal{O}_X$. Estos son los modelos por excelencia de las gavillas casi coherentes.

Proposición 4.28. *Sea $\mathcal{F}$ una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$. Si $\mathcal{F}$ es libre, entonces $\mathcal{F}$ es casi coherente. Si además $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema afín, entonces $\mathcal{F}(X)$ es un $\mathcal{O}_X(X)$-módulo libre.*

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es libre, existe un conjunto no vacío I tal que $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^{(I)}$. Puesto que $\mathcal{O}_X^{(I)}$ es una gavilla casi coherente, se concluye que $\mathcal{F}$ es casi coherente.

Ahora, supongamos que $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema afín. Por la parte anterior sabemos que $\mathcal{F}$ es casi coherente y como $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema afín tenemos que $\mathcal{F} \cong \widetilde{\mathcal{F}(X)}$. Por otro lado, el hecho de que $(X, \mathcal{O}_X)$ es afín implica que $\mathcal{O}_X \cong \widetilde{\mathcal{O}_X(X)}$ y consecuentemente que $\mathcal{O}_X^{(I)} \cong \widetilde{\mathcal{O}_X(X)^{(I)}}$. Finalmente, puesto que $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^{(I)}$ se sigue que $\widetilde{\mathcal{F}(X)} \cong \widetilde{\mathcal{O}_X(X)^{(I)}}$ y así tenemos que $\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{O}_X(X)^{(I)}$. Por lo tanto, concluimos que $\mathcal{F}(X)$ es un $\mathcal{O}_X(X)$-módulo libre. $\square$

Capítulo 5

Inmersiones entre Esquemas

En este capítulo llevaremos a cabo el segundo objetivo de este trabajo: la clasificación de los subesquemas cerrados de esquemas. Para llevar a cabo este objetivo, serán cruciales para nosotros las nociones de inmersión cerrada entre espacios anillados y entre esquemas así como algunas de sus propiedades, es por esta razón que gran parte de este capítulo nos encargaremos de estudiar dichos objetos. Lo que haremos en la primera sección será la construcción de una inmersión cerrada entre espacios anillados para motivar nuestro estudio. En la segunda sección definiremos las inmersiones abiertas y cerradas entre espacios anillados, revisaremos algunos ejemplos y realizaremos la clasificación de las inmersiones cerradas entre espacios anillados. La tercera sección se encargará de definir y de estudiar algunas de las propiedades de las inmersiones cerradas entre esquemas que necesitaremos para realizar nuestro objetivo. Finalmente, en la cuarta y última sección realizaremos de una manera definitiva la clasificación de los subesquemas cerrados de un esquema.

1. Una Motivación a las Inmersiones Cerradas

Antes de definir de manera concreta las inmersiones cerradas entre espacios anillados y esquemas, en esta sección vamos a realizar las construcciones de un espacio anillado y de un morfismo de espacios anillados que satisfacen propiedades muy particulares. Como podrá verse en la siguiente sección, realmente construiremos una inmersión cerrada entre espacios anillados.

Durante el resto de la sección vamos a fijar un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ y un ideal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_X$. Recordemos que a partir del ideal $\mathcal{I}$ podemos considerar el siguiente conjunto

$$V(\mathcal{I}) = \left\{ p \in X \,\middle|\, \mathcal{I}_p \neq \mathcal{O}_{X,p} \right\}$$

que tiene una estructura de cerrado en X (véase Proposición 3.26). Sabemos que $\mathcal{I}$ es una gavilla de ideales sobre X, además, como $\mathcal{I}$ es una subgavilla de la gavilla de anillos $\mathcal{O}_X$ vamos a considerar la gavilla cociente $\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}$ la cual es una gavilla de anillos sobre X. Ahora, vamos a considerar la restricción de la gavilla $\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}$ a $V(\mathcal{I})$ para obtener una gavilla de anillos sobre $V(\mathcal{I})$, es decir, consideramos la gavilla $\iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)$ sobre $V(\mathcal{I})$ que denotaremos por $\mathcal{O}_{V(\mathcal{I})}$. De este modo, a partir de un ideal $\mathcal{I}$ de

$\mathcal{O}_X$ y considerando al cerrado $V(\mathcal{I})$ como un espacio topológico con la topología inducida por X, hemos construido un espacio anillado $(V(\mathcal{I}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{I})})$.

Ahora bien, una vez que tenemos los espacios anillados $(V(\mathcal{I}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{I})})$ y $(X, \mathcal{O}_X)$ vamos a definir un morfismo de espacios anillados entre ellos. En primer lugar, necesitamos una aplicación continua entre $V(\mathcal{I})$ y X, así que podemos considerar de manera natural la aplicación inclusión $\iota : V(\mathcal{I}) \to X$. En segundo lugar, necesitamos un morfismo de gavillas $\iota^{\#} : \mathcal{O}_X \to \iota_*(\mathcal{O}_{V(\mathcal{I})})$. Nuestra siguiente tarea será la de construir dicho morfismo.

Para comenzar, vamos a construir un morfismo entre las gavillas $\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}$ e $\iota_*(\mathcal{O}_{V(\mathcal{I})})$, luego, puesto que tenemos definido el morfismo proyección entre $\mathcal{O}_X$ y $\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}$, realizando la composición de dichos morfismos tendremos definido al morfismo $\iota^{\#}$. De esta forma, nuestro siguiente objetivo será el de construir de manera explícita un morfismo $\Lambda : \dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}} \to \iota_*(\mathcal{O}_{V(\mathcal{I})})$. Ahora bien, es conveniente recordar que por construcción $\mathcal{O}_{V(\mathcal{I})} = \iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)$ y que $\iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)$ es la gavilla asociada a la pregavilla $\iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}$ (véase la Sección 3 del Capítulo 2). Para construir el morfismo Λ deseado vamos a proceder de la siguiente manera: en primer lugar vamos a construir un morfismo de pregavillas entre $\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}$ y $\iota_*\left(\iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}\right)$ y en segundo lugar construiremos un morfismo entre las pregavillas $\iota_*\left(\iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}\right)$ y $\iota_*\left(\iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)\right)$. Así, al realizar la composición de dichos morfismos obtendremos al morfismo Λ.

Iniciaremos con la construcción del morfismo $\zeta : \dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}} \to \iota_*\left(\iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}\right)$. Sea U un abierto de X. Consideramos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rcl} \zeta_U : \dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(U) & \to & \iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}(U \cap V(\mathcal{I})) \\ s & \mapsto & [(U, s)] \end{array}$$

Comenzaremos por mostrar que ζ_U es una aplicación bien definida. Si $s \in \dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(U)$, entonces tenemos que $[(U, s)]$ es un elemento de $\iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}(U \cap V(\mathcal{I}))$ pues U es un abierto de X que contiene a $U \cap V(\mathcal{I})$ y sabemos que $s \in \dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(U)$, de esta manera hemos comprobado que $\zeta_U(s)$ es un elemento de $\iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}(U \cap V(\mathcal{I}))$. Ahora, sean $s_1, s_2 \in \dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(U)$ tales que $s_1 = s_2$, vamos a mostrar que $\zeta_U(s_1) = \zeta_U(s_2)$, es decir que $[(U, s_1)] = [(U, s_2)]$, en otras palabras, mostraremos que existe un abierto W de X tal que $U \cap V(\mathcal{I}) \subseteq W \subseteq U$ y $\rho_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}}{}^{U}_{W}(s_1) = \rho_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}}{}^{U}_{W}(s_2)$. Considerando a W como el propio abierto U se concluye de manera inmediata que ζ_U es una aplicación bien definida.

Luego, tenemos que ζ_U es un homomorfismo de anillos: en efecto, sean s_1 y s_2 elementos de $\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(U)$,

$$\zeta_U(s_1+s_2) = [(U, s_1+s_2)] = [(U,s_1)] + [(U,s_2)] = \zeta_U(s_1) + \zeta_U(s_2).$$
$$\zeta_U(s_1\cdot s_2) = [(U, s_1\cdot s_2)] = [(U,s_1)] \cdot [(U,s_2)] = \zeta_U(s_1) \cdot \zeta_U(s_2).$$
$$\zeta_U(1_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(U)}) = [(U, 1_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(U)})] = [(X, 1_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(X)})] = 1_{\iota^{-1}(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}})^{-}(U\cap V(\mathcal{I}))}.$$

Lo siguiente que haremos es probar la compatibilidad con las restricciones de pregavilla. Sean U y W abiertos de X tales que $W \subseteq U$. Vamos a probar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(U) \arrow[r, "\zeta_U"] \arrow[d, "\rho_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}}{}^{U}_{W}"'] & \iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}(U\cap V(\mathcal{I})) \arrow[d, "\rho_{\iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}}{}^{U\cap V(\mathcal{I})}_{W\cap V(\mathcal{I})}"] \\
\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(W) \arrow[r, "\zeta_W"'] & \iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}(W\cap V(\mathcal{I}))
\end{tikzcd}$$

Sea $s \in \dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(U)$,

$$\begin{aligned}
\rho_{\iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}}{}^{U\cap V(\mathcal{I})}_{W\cap V(\mathcal{I})} \circ \zeta_U(s) &= \rho_{\iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}}{}^{U\cap V(\mathcal{I})}_{W\cap V(\mathcal{I})}([(U,s)]) \\
&= [(U,s)] \\
&= [(W, \rho_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}}{}^{U}_{W}(s)] \\
&= \zeta_W(\rho_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}}{}^{U}_{W}(s)) \\
&= \zeta_W \circ \rho_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}}{}^{U}_{W}(s).
\end{aligned}$$

De esta manera, tenemos que ζ es un morfismo de pregavillas.

Ahora, realizaremos la construcción del morfismo $\xi : \iota_*\left(\iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}\right) \to \iota_*\left(\iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)\right)$. Sea U un abierto de X. Observemos que el homomorfismo ξ_U que queremos definir tiene como dominio a $\iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}(U\cap V(\mathcal{I}))$ y como codominio a $\iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)(U\cap V(\mathcal{I}))$, de esta forma, de una manera natural vamos a definir $\xi_U = \theta^{\iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)}_{U\cap V(\mathcal{I})}$, donde $\theta^{\iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)}_{U\cap V(\mathcal{I})}$ es el homomorfismo de anillos proveniente del morfismo de pregavillas $\theta^{\iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)} : \iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-} \to \iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)$ (véase Teorema 1.12). Luego, como $\theta^{\iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)}$ es un morfismo se sigue de manera inmediata que ξ es un morfismo de pregavillas.

Por lo tanto, al definir $\Lambda = \xi \circ \zeta$ tenemos que $\Lambda : \dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}} \to \iota_*(\mathcal{O}_{V(\mathcal{I})})$ es un morfismo. Posteriormente, al considerar al morfismo proyección $\pi : \mathcal{O}_X \to \dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}$ se sigue que $\Lambda \circ \pi : \mathcal{O}_X \to \iota_*(\mathcal{O}_{V(\mathcal{I})})$ es un morfismo. De esta forma, tomando $\iota^\# = \Lambda \circ \pi$ obtenemos el morfismo deseado.

Lo siguiente que haremos será realizar algunas observaciones sobre los objetos que acabamos de construir:

• La primera observación que realizaremos es sobre la aplicación entre espacios topológicos que elegimos: aplicación continua $\iota : V(\mathcal{I}) \to X$ es un homeomorfismo entre $V(\mathcal{I})$ y el cerrado $V(\mathcal{I})$ de X.

• Como segunda observación tenemos que Λ es un isomorfismo de gavillas: en efecto, vamos a mostrar que para todo $p \in X$ se tiene que $\Lambda_p : \left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)_p \to \iota_*(\mathcal{O}_{V(\mathcal{I})})_p$ es un isomorfismo. Sea $p \in X$. Puesto que $\Lambda_p = \xi_p \circ \zeta_p$, para mostrar que Λ_p es un isomorfismo basta mostrar que $\zeta_p : \left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)_p \to \iota_*\left(\iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^-\right)_p$ y $\xi_p : \iota_*\left(\iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^-\right)_p \to \iota_*\left(\iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)\right)_p$ son isomorfismos. Observemos que si $p \notin V(\mathcal{I})$, puesto que

$$\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)_p = \iota_*\left(\iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^-\right)_p = \iota_*\left(\iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)\right)_p = \{0\}$$

se sigue que ζ_p y ξ_p son la función nula y el resultado es claro. Así, podemos suponer que $p \in V(\mathcal{I})$.

$*$ ζ_p es inyectiva: sean U un abierto de X que contiene a p y $s \in \dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(U)$ tales que $[(U,s)] \in \operatorname{Ker}\zeta_p$. Como $\zeta_p([(U,s)]) = 0_{\iota_*\left(\iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^-\right)_p}$ se sigue que $[(U,\zeta_U(s))] = [(X, 0_{\iota_*\left(\iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^-\right)(X)})]$, así, existe un abierto W de X que contiene a p, está contenido en U y tal que $\rho_{\iota_*\left(\iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^-\right)}{}^U_W(\zeta_U(s)) = 0_{\iota_*\left(\iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^-\right)(W)}$, dicha igualdad implica que $[(U,s)] = 0_{\iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^-(W\cap V(\mathcal{I}))} = [(X, 0_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(X)})]$. De este modo, se tiene la existencia de un abierto Z de X tal que $W \cap V(\mathcal{I}) \subseteq Z \subseteq U$ y $\rho_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}}{}^U_Z(s) = 0_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(Z)}$. Además, como $p \in W \cap V(\mathcal{I})$ se sigue que $p \in Z$. De este modo, se sigue que

$$[(U,s)] = [(Z, \rho_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}}{}^U_Z(s))] = [(Z, 0_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(Z)})] = [(X, 0_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(X)})] = 0_{(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}})_p}$$

y esto implica que ζ_p es inyectiva.

$*$ ζ_p es sobreyectiva: sean U un abierto de X que contiene a p, W un abierto de X tal que $U \cap V(\mathcal{I}) \subseteq W$ y $s \in \dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(W)$. Tomando $t = [(W,s)] \in \iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^-(U \cap V(\mathcal{I}))$, vamos a encontrar una preimagen para el elemento $[(U,t)]$ bajo ζ_p. Obsérvese que $U \cap W$ es un abierto de X que contiene a p pues $p \in U \cap V(\mathcal{I})$ y $U \cap V(\mathcal{I}) \subseteq W$. Nuestro candidato a preimagen es el elemento $[(U \cap W, \rho_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}}{}^W_{U\cap W}(s))]$, en efecto,

$$\zeta_p([(U\cap W, \rho_{\frac{O_X}{I}}{}^{W}_{U\cap W}(s))]) = [(U\cap W, \zeta_{U\cap W}(\rho_{\frac{O_X}{I}}{}^{W}_{U\cap W}(s)))] = [(U,t)]$$

pues

$$\rho_{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^{-}}{}^{U}_{U\cap W}(t) = \rho_{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^{-}}{}^{U}_{U\cap W}([(W,s)]) = [(W,s)] = [(U\cap W, \rho_{\frac{O_X}{I}}{}^{W}_{U\cap W}(s))] = \zeta_{U\cap W}(\rho_{\frac{O_X}{I}}{}^{W}_{U\cap W}(s)).$$

Así, se concluye que ζ_p es sobreyectiva.

$*$ ξ_p es inyectiva: sean U un abierto de X que contiene a p, T un abierto de X tal que $U\cap V(I)\subseteq T$ y $s\in \dfrac{O_X}{I}(T)$. Tomamos $t=[(T,s)]\in \iota^{-1}\left(\dfrac{O_X}{I}\right)^{-}(U\cap V(I))$ y supongamos que $[(U,t)]\in \operatorname{Ker}\xi_p$. Así, como $\xi_p([(U,t)]) = 0_{\iota_*\left(\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)\right)_p}$ tenemos que $[(U, \theta^{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)}_{U\cap V(I)}(t))] = [(X, 0_{\iota_*\left(\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)\right)(X)})]$ y por tanto que existe un abierto W de X que contiene a p, está contenido en U y tal que

$$0_{\iota_*\left(\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)\right)(W)} = \rho_{\iota_*\left(\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)\right)}{}^{U}_{W}\circ \theta^{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)}_{U\cap V(I)}(t) = \theta^{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)}_{W\cap V(I)}\circ \rho_{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^{-}}{}^{U\cap V(I)}_{W\cap V(I)}(t) = \theta^{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)}_{W\cap V(I)}(t).$$

Luego, consideramos a $[(W\cap V(I),t)]$: este es un elemento de $\iota^{-1}\left(\dfrac{O_X}{I}\right)^{-}_{p}$ y además satisface la siguiente igualdad:

$$\theta^{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)}_{p}([(W\cap V(I),t)]) = [(W\cap V(I), \theta^{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)}_{W\cap V(I)}(t))] = [(W\cap V(I), 0_{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)(W\cap V(I))})] = 0_{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)_p}.$$

De este modo, como $\theta^{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)}_{p}$ es un isomorfismo se sigue que $[(W\cap V(I),t)] = 0_{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^{-}_{p}}$ y consecuentemente existe un abierto Z de X que contiene a p de modo que $Z\cap V(I)\subseteq W\cap V(I)$ y de modo que $\rho_{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^{-}}{}^{W\cap V(I)}_{Z\cap V(I)}(t) = 0_{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^{-}(Z\cap V(I))}$, así, se tiene que $t = 0_{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^{-}(Z\cap V(I))}$ y esto implica que $\rho_{\iota_*\left(\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^{-}\right)}{}^{Z}_{U\cap Z}(t) = 0_{\iota_*\left(\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^{-}\right)(U\cap Z)}$. Por último, como $U\cap Z$ es un abierto de X que contiene a p se tiene que

$$[(U,t)] = [(U\cap Z, \rho_{\iota_*\left(\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^{-}\right)}{}^{U}_{U\cap Z}(t))] = [(U\cap Z, 0_{\iota_*\left(\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^{-}\right)(U\cap Z)})] = 0_{\iota_*\left(\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^{-}\right)_p}.$$

Por lo tanto, concluimos que ξ_p es inyectiva.

$*$ ξ_p es sobreyectiva: sean U un abierto de X que contiene a p y $s\in \iota_*\left(\iota^{-1}\left(\dfrac{O_X}{I}\right)\right)(U)$. Vamos a encontrar una preimagen del elemento $[(U,s)]$ bajo ξ_p. Del hecho que s es un elemento de $\iota^{-1}\left(\dfrac{O_X}{I}\right)(U\cap V(I))$ y $\theta^{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)}_{p}$ es un isomorfismo se sigue que existen un abierto T de X que contiene a p y $t\in \iota^{-1}\left(\dfrac{O_X}{I}\right)^{-}(T\cap V(I))$ de modo que $\theta^{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)}_{p}([(T\cap V(I),t)]) = [(U\cap V(I),s)]$, es decir, tal que $[(T\cap V(I), \theta^{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)}_{T\cap V(I)}(t))] = [(U\cap V(I),s)]$. Así, existe un abierto W de X que contiene a p

tal que $W \cap V(\mathcal{I}) \subseteq U \cap T \cap V(\mathcal{I})$ y $\rho_{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{\mathcal{I}}\right)}{}^{T\cap V(\mathcal{I})}_{W\cap V(\mathcal{I})} \circ \theta^{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{\mathcal{I}}\right)}_{T\cap V(\mathcal{I})}(t) = \rho_{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{\mathcal{I}}\right)}{}^{U\cap V(\mathcal{I})}_{W\cap V(\mathcal{I})}(s)$. De este modo, nuestro candidato a preimagen es el elemento $[(U \cap W \cap T, \rho_{\iota_*\left(\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{\mathcal{I}}\right)^-\right)}{}^{T}_{U\cap W\cap T}(t))]$, en efecto:

$$\begin{aligned}
\xi_p([(U \cap W \cap T, \rho_{\iota_*\left(\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{\mathcal{I}}\right)^-\right)}{}^{T}_{U\cap W\cap T}(t))]) &= [(U \cap W \cap T, \theta^{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{\mathcal{I}}\right)}_{(U\cap W\cap T)\cap V(\mathcal{I})} \circ \rho_{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{\mathcal{I}}\right)^-}{}^{T\cap V(\mathcal{I})}_{(U\cap W\cap T)\cap V(\mathcal{I})}(t))] \\
&= [(U, s)]
\end{aligned}$$

pues tenemos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
\theta^{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{\mathcal{I}}\right)}_{(U\cap W\cap T)\cap V(\mathcal{I})} \circ \rho_{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{\mathcal{I}}\right)^-}{}^{T\cap V(\mathcal{I})}_{(U\cap W\cap T)\cap V(\mathcal{I})}(t) &= \rho_{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{\mathcal{I}}\right)}{}^{T\cap V(\mathcal{I})}_{(U\cap W\cap T)\cap V(\mathcal{I})} \circ \theta^{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{\mathcal{I}}\right)}_{T\cap V(\mathcal{I})}(t) \\
&= \rho_{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{\mathcal{I}}\right)}{}^{W\cap V(\mathcal{I})}_{(U\cap W\cap T)\cap V(\mathcal{I})} \circ \rho_{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{\mathcal{I}}\right)}{}^{T\cap V(\mathcal{I})}_{W\cap V(\mathcal{I})} \circ \theta^{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{\mathcal{I}}\right)}_{T\cap V(\mathcal{I})}(t) \\
&= \rho_{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{\mathcal{I}}\right)}{}^{W\cap V(\mathcal{I})}_{(U\cap W\cap T)\cap V(\mathcal{I})} \circ \rho_{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{\mathcal{I}}\right)}{}^{U\cap V(\mathcal{I})}_{W\cap V(\mathcal{I})}(s) \\
&= \rho_{\iota^{-1}\left(\frac{O_X}{\mathcal{I}}\right)}{}^{U\cap V(\mathcal{I})}_{(U\cap W\cap T)\cap V(\mathcal{I})}(s).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que ξ_p es una aplicación sobreyectiva.

De esta forma, como ζ_p y ξ_p son isomorfismos se sigue que Λ_p es un isomorfismo y como p fue un punto arbitrario de X concluimos que el morfismo Λ es un isomorfismo.

• Nuestra última observación es que el morfismo $\iota^\# : O_X \to \iota_*(O_{V(\mathcal{I})})$ es sobreyectivo: en efecto, vamos a probar que para cada $p \in X$ el homomorfismo $\iota^\#_p : O_{X,\iota(p)} \to \iota_*(O_{V(\mathcal{I})})_p$ es sobreyectivo. Sea $p \in X$. Si $p \notin V(\mathcal{I})$, entonces por el Lema C.16 se sigue que $\iota_*(O_{V(\mathcal{I})})_p = \{0\}$ y claramente $\iota^\#_p$ es sobreyectivo. Ahora, supongamos que $p \in V(\mathcal{I})$. Por construcción tenemos que $\iota^\#_p = (\Lambda \circ \pi)_p = \Lambda_p \circ \pi_p$, de este modo, como π_p y Λ_p son sobreyectivos se sigue que el homomorfismo $\iota^\#_p$ es sobreyectivo.

Todo el trabajo realizado en este apartado culmina en el siguiente resultado con el cual daremos por concluida esta sección.

Proposición 5.1. *Con las notaciones anteriores, se tiene que $V(\mathcal{I})$ es un cerrado de X y además existe un morfismo natural $(\iota, \iota^\#)$ entre los espacios anillados $(V(\mathcal{I}), O_{V(\mathcal{I})})$ y (X, O_X) donde $\iota^\#$ es un morfismo sobreyectivo.*

2. Inmersiones Abiertas y Cerradas entre Espacios Anillados

En esta sección vamos a definir a las inmersiones abiertas y cerradas entre espacios anillos. El resultado principal que presentaremos en este apartado es la clasificación de las inmersiones cerradas entre espacios anillados, cabe señalar que dicho resultado será esencial para el desarrollo de las siguientes secciones. Para concluir con la sección construiremos de manera concreta una inmersión cerrada de espacios anillados a partir de un ideal de un anillo. A continuación iniciaremos con el estudio de estos objetos.

Definición 5.2. Sea $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfismo de espacios anillados.

1. $(f, f^{\#})$ es una *inmersión abierta* si
   a) f es un homeomorfismo entre X y un abierto de Y.
   b) Para todo $p \in X$ se tiene que el homomorfismo $f^{\#}_p : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ es un isomorfismo.
2. $(f, f^{\#})$ es una *inmersión cerrada* si
   a) f es un homeomorfismo entre X y un cerrado de Y.
   b) Para todo $p \in X$ se tiene que el homomorfismo $f^{\#}_p : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ es sobreyectivo.

Ejemplo 5.3. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Consideramos el morfismo identidad $(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}^{\#}_X) : (X, \mathcal{O}_X) \to (X, \mathcal{O}_X)$, donde $\mathrm{id}_X : X \to X$ es la aplicación identidad y donde $\mathrm{id}^{\#}_X : \mathcal{O}_X \to \mathrm{id}_*(\mathcal{O}_X)$ es el morfismo identidad. Observemos que id_X es un homeomorfismo entre X y el cerrado X de X (respectivamente, el abierto X de X). Además, para cada $p \in X$ tenemos que el homomorfismo $\mathrm{id}^{\#}_{X\,p} : \mathcal{O}_{X,p} \to \mathcal{O}_{X,p}$ es sobreyectivo (respectivamente, es un isomorfismo). Por lo tanto, $(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}^{\#}_X)$ es una inmersión cerrada (respectivamente, una inmersión abierta).

Ejemplo 5.4. Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado e $\mathcal{I}$ un ideal de $\mathcal{O}_X$. La Proposición 5.1 nos dice que existe $(\iota, \iota^{\#}) : (V(\mathcal{I}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{I})}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ un morfismo de espacio anillados que satisface los requisitos de una inmersión cerrada.

Ejemplo 5.5. Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y U un abierto no vacío de X. Sabemos que podemos construir el espacio anillado $(U, \mathcal{O}_U)$. Ahora bien, vamos a considerar el morfismo de espacios anillado $(i, i^{\#}) : (U, \mathcal{O}_U) \to (X, \mathcal{O}_X)$ donde $i : U \to X$ es la inclusión y el morfismo $i^{\#} : \mathcal{O}_X \to i_*(\mathcal{O}_U)$ está dado de la siguiente manera: para cualquier abierto V de X,

$$\begin{array}{rcl} i^{\#}_V : \mathcal{O}_X(V) & \to & \mathcal{O}_U(V \cap U) \\ s & \mapsto & s|_{V \cap U} \end{array}$$

Observemos que i es un homeomorfismo entre U y el abierto U de X. Por otro lado, vamos a estudiar el comportamiento del homomorfismo de anillos $i^{\#}_p : \mathcal{O}_{X,p} \to \mathcal{O}_{U,p}$ para todo $p \in U$. Sea $p \in U$. Recordemos la definición de la aplicación en cuestión

$$\begin{array}{rcl} i^{\#}_p : \mathcal{O}_{X,p} & \to & \mathcal{O}_{U,p} \\ [(V, s)] & \mapsto & [(V \cap U, s|_{V \cap U})] \end{array}$$

Luego, notemos que esta aplicación es exactamente la aplicación que nos da la existencia de un isomorfismo entre $\mathcal{O}_{U,p}$ y $\mathcal{O}_{X,p}$ (véase Proposición C.13) por lo cual tenemos que $i_p^{\#}$ es un isomorfismo. Por lo tanto, concluimos que $(i, i^{\#})$ es una inmersión abierta entre los espacio anillados $(U, \mathcal{O}_U)$ y $(X, \mathcal{O}_X)$.

El siguiente resultado que presentaremos es la clasificación de las inmersiones cerradas entre espacios anillados. Es importante señalar que dicho resultado será fundamental para poder realizar la clasificación de los subesquemas cerrados de un esquema.

Teorema 5.6. *Sea $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ una inmersión cerrada entre espacios anillados. Existe un ideal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} (X, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "(f,f^{\#})"] \arrow[d, "(h,h^{\#})"'] & (Y, \mathcal{O}_Y) \\ (V(\mathcal{I}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{I})}) \arrow[ur, "(\iota,\iota^{\#})"'] & \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

donde $(\iota, \iota^{\#})$ es la inmersión cerrada asociada al ideal $\mathcal{I}$ y donde $(h, h^{\#})$ es un isomorfismo de espacios anillados.

Demostración. Realizaremos la demostración de este teorema en cinco partes:

1. El morfismo $f^{\#}$ es sobreyectivo.
2. La sucesión $0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^{\#}} f_*(\mathcal{O}_X) \to 0$ es exacta de $\mathcal{O}_Y$-módulos, donde $\mathcal{I} = \operatorname{Ker} f^{\#}$.
3. $f(X) = V(\mathcal{I})$.
4. Existe un isomorfismo de espacios anillados $(h, h^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (V(\mathcal{I}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{I})})$.
5. El diagrama 2.1 es conmutativo.

1. Para mostrar que el morfismo $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*(\mathcal{O}_X)$ es sobreyectivo vamos a mostrar que para todo $q \in Y$ se tiene que el homomorfismo $f_q^{\#} : \mathcal{O}_{Y,q} \to f_*(\mathcal{O}_X)_q$ es sobreyectivo. Sea $q \in Y$. Vamos a distinguir entre dos casos:

- Caso I: $q \notin f(X)$. En este caso, por el Lema C.16 tenemos que $f_*(\mathcal{O}_X)_q = \{0\}$ y así, el homomorfismo $f_q^{\#} : \mathcal{O}_{Y,q} \to \{0\}$ claramente es sobreyectivo.
- Caso II: $q \in f(X)$. Sea $p \in X$ tal que $f(p) = q$. En este caso, por el Lema C.16 tenemos que existe un isomorfismo $\psi_p : f_*(\mathcal{O}_X)_q \to \mathcal{O}_{X,p}$. Por otro lado, como $(f, f^{\#})$ es una inmersión cerrada se sigue que para cualquier $r \in X$ el homomorfismo $f_r^{\#} : \mathcal{O}_{Y,f(r)} \to \mathcal{O}_{X,r}$ es sobreyectivo, en particular tenemos que $f_p^{\#} : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ es sobreyectivo. Además, recordemos

que por construcción tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{Y,q} \arrow[r, "f_q^\#"] \arrow[rr, bend right, "f_p^\#"'] & f_*(\mathcal{O}_X)_q \arrow[r, "\psi_p"] & \mathcal{O}_{X,p} \end{tikzcd}$$

es decir que $f_p^\# = \psi_p \circ f_q^\#$. De esto se sigue que $f_q^\# = \psi_p^{-1} \circ f_p^\#$ y como $f_p^\#$ y ψ_p^{-1} son sobreyectivos, se sigue que $f_q^\#$ es sobreyectivo.

De esta manera, se concluye que el morfismo $f^\#$ es sobreyectivo.

2. Sea $\mathcal{I} = \operatorname{Ker} f^\#$. Consideremos la siguiente sucesión de $\mathcal{O}_Y$-módulos:

$$0 \to \mathcal{I} \xrightarrow{j^\#} \mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^\#} f_*(\mathcal{O}_X) \to 0$$

donde $j^\# : \mathcal{I} \to \mathcal{O}_Y$ es el morfismo natural entre la gavillas $\operatorname{Ker} f^\#$ y $\mathcal{O}_Y$. Dicha sucesión es una sucesión exacta de $\mathcal{O}_Y$-módulos, en efecto:

- Por construcción del morfismo $j^\#$ se tiene que este es inyectivo.
- Para todo $q \in Y$ se tiene que $\operatorname{Ker} f_p^\# = (\operatorname{Ker} f^\#)_q = \mathcal{I}_q = \operatorname{Im} j_q^\#$.
- Por el enunciado 1 tenemos que $f^\#$ es un morfismo sobreyectivo.

De esta manera, concluimos que la sucesión $0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^\#} f_*(\mathcal{O}_X) \to 0$ es exacta de $\mathcal{O}_Y$-módulos.

Como consecuencia de la exactitud de la sucesión $0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^\#} f_*(\mathcal{O}_X) \to 0$ tenemos que existe un isomorfismo de gavillas $\widetilde{f^\#} : \dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}} \to f_*(\mathcal{O}_X)$ (véase Proposición C.32) y de esta forma para cualquier $r \in Y$ se tiene que $f_*(\mathcal{O}_X)_r \cong \left(\dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}\right)_r \cong \dfrac{\mathcal{O}_{Y,r}}{\mathcal{I}_r}$.

3. Vamos a mostrar que $V(\mathcal{I}) = f(X)$. Sea $q \in Y$. Teniendo en cuenta que $\dfrac{\mathcal{O}_{Y,q}}{\mathcal{I}_q} \cong f_*(\mathcal{O}_X)_q$ se tiene que

$$\begin{aligned} q \notin V(\mathcal{I}) &\iff \mathcal{I}_q = \mathcal{O}_{Y,q} \\ &\iff \frac{\mathcal{O}_{Y,q}}{\mathcal{I}_q} = \{0\} \\ &\iff f_*(\mathcal{O}_X)_q = \{0\} \\ &\iff q \notin f(X). \end{aligned}$$

De esta forma, se sigue que q es un elemento de $V(\mathcal{I})$ si y sólo si q es un elemento de $f(X)$ y esto implica que $f(X) = V(\mathcal{I})$.

4. Ahora, nuestro primer objetivo será el de construir un morfismo de espacios anillados $(h, h^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (V(\mathcal{I}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{I})})$ y como segundo objetivo tendremos el de mostrar que $(h, h^{\#})$ es un isomorfismo. Para comenzar necesitamos definir una aplicación continua h entre X y $V(\mathcal{I})$, consideramos

$$\begin{aligned} h : X &\to V(\mathcal{I}) \\ p &\mapsto f(p) \end{aligned}$$

Observemos que h es una aplicación continua pues f lo es, más aún, como $V(\mathcal{I}) = f(X)$ y f es un homeomorfismo entre X y $f(X)$, se tiene que h es un homeomorfismo entre X y $V(\mathcal{I})$.

A continuación, vamos a definir un morfismo $h^{\#}$ entre las gavillas $\mathcal{O}_{V(\mathcal{I})}$ y $h_*(\mathcal{O}_X)$. En este punto, es importante recordar que $\mathcal{O}_{V(\mathcal{I})} = \iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}\right)$ y que $\iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}\right)$ es la gavilla asociada a la pregavilla $\iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}\right)^{-}$. De esta forma, para construir el morfismo $h^{\#} : \iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}\right) \to h_*(\mathcal{O}_X)$ basta con definir un morfismo $h^{\#^-} : \iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}\right)^{-} \to h_*(\mathcal{O}_X)$ y después aplicar la propiedad universal de la gavilla asociada. Sea U un abierto de Y. Observemos que

$$h_*(\mathcal{O}_X)(U \cap V(\mathcal{I})) = \mathcal{O}_X(h^{-1}(U \cap V(\mathcal{I})) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U \cap V(\mathcal{I})) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)),$$

de esta manera, consideramos la asignación

$$\begin{aligned} {h^{\#^-}}_{U \cap V(\mathcal{I})} : \iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}\right)^{-}(U \cap V(\mathcal{I})) &\to \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \\ [(W, s)] &\mapsto {\rho_{\mathcal{O}_X}}^{f^{-1}(W)}_{f^{-1}(U)} \circ \widetilde{f^{\#}}_W(s) \end{aligned}$$

La demostración de que este es un homomorfismo de anillos y que de esta manera definimos un morfismo de gavillas es análoga a lo realizado para poder definir el pullback de una gavilla bajo una aplicación continua (véase Definición 2.46) por lo cual omitiremos los detalles. Así, como $h^{\#^-} : \iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}\right)^{-} \to h_*(\mathcal{O}_X)$ es un morfismo, por la propiedad universal de la gavilla asociada existe el morfismo $h^{\#} : \iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}\right) \to h_*(\mathcal{O}_X)$ de modo que el siguiente diagrama conmuta:

(2.2)
$$\begin{tikzcd} \iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}\right)^{-} \arrow[r, "h^{\#^-}"] \arrow[d, "\theta^{\iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}\right)}"'] & h_*(\mathcal{O}_X) \\ \iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}\right) \arrow[ur, "h^{\#}"'] & \end{tikzcd}$$

Ahora probaremos que $h^{\#}$ es un isomorfismo, para ello, mostraremos que para todo abierto U de Y el homomorfismo $h^{\#}_{U\cap V(\mathcal{I})}$ es un isomorfismo. Sea U un abierto de Y. Recordemos que en la sección anterior construimos al isomorfismo de gavillas $\Lambda : \dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}} \to \iota_*\left(\iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}\right)\right)$ donde para cualquier abierto W de Y se tiene definido el homomorfismo de anillos

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_W : \dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}(W) & \to & \iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}\right)(W\cap V(\mathcal{I})) \\ t & \mapsto & \theta^{\iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}\right)}_{W\cap V(\mathcal{I})} \circ \zeta_W(t) \end{array}$$

y donde

$$\begin{array}{rcl} \zeta_W : \dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}(W) & \to & \iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}\right)^{-}(W\cap V(\mathcal{I})) \\ r & \mapsto & [(W, r)] \end{array}$$

es un homomorfismo de anillos. Además, recordemos que tenemos el isomorfismo de gavillas $\widetilde{f^{\#}} : \dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}} \to f_*(\mathcal{O}_X)$. De esta manera, podemos considerar el siguiente diagrama:

(2.3)
$$\begin{tikzcd} \dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}(U) \arrow[r, "\widetilde{f^{\#}}_U"] \arrow[d, "\Lambda_U"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \\ \iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}\right)(U\cap V(\mathcal{I})) \arrow[ur, "h^{\#}_{U\cap V(\mathcal{I})}"'] & \end{tikzcd}$$

que es un diagrama conmutativo: en efecto, considerando una sección s de $\dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}$ sobre U y recordando la conmutatividad del diagrama 2.2 se tiene que

$$h^{\#}_{U\cap V(\mathcal{I})} \circ \Lambda_U(s) = h^{\#}_{U\cap V(\mathcal{I})} \circ \theta^{\iota^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}\right)}_{U\cap V(\mathcal{I})} \circ \zeta_U(s) = h^{\#-}_{U\cap V(\mathcal{I})}([(U, s)]) = \rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(U)}_{f^{-1}(U)}(\widetilde{f^{\#}}_U(s)) = \widetilde{f^{\#}}_U(s).$$

Así, de la igualdad $\widetilde{f^{\#}}_U = h^{\#}_{U\cap V(\mathcal{I})} \circ \Lambda_U$ se sigue que $h^{\#}_{U\cap V(\mathcal{I})} = \widetilde{f^{\#}}_U \circ {\Lambda_U}^{-1}$, además, el hecho de que $\widetilde{f^{\#}}_U$ y ${\Lambda_U}^{-1}$ son isomorfismos implican que $h^{\#}_{U\cap V(\mathcal{I})}$ es un isomorfismo. De esta forma, concluimos que $h^{\#}$ es un isomorfismo de gavillas.

Por lo tanto, como h es un homeomorfismo y $h^{\#}$ es un isomorfismo se concluye que $(h, h^{\#})$ es un isomorfismo de espacios anillados entre $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(V(\mathcal{I}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{I})})$.

5. Para concluir con la demostración de este teorema vamos a mostrar que el diagrama 2.1 es un diagrama conmutativo, es decir, que $(f, f^\#) = (\iota, \iota^\#) \circ (h, h^\#)$. Así, debemos comprobar que $f = \iota \circ h$ y que para cualquier abierto U de Y se verifica que $f^\#_U = h^\#_{\iota^{-1}(U)} \circ \iota^\#_U$.

Comenzaremos por mostrar la igualdad entre las aplicaciones f y $\iota \circ h$. Puesto que dichas aplicaciones tienen como dominio a X y como codominio a Y, sólo resta mostrar la igualdad en la regla de asignación. Sea $p \in X$,

$$\iota \circ h(p) = \iota(h(p)) = \iota(f(p)) = f(p).$$

De esta forma, concluimos que $f = \iota \circ h$. Por último, probaremos la igualdad $f^\#_U = h^\#_{\iota^{-1}(U)} \circ \iota^\#_U$ para cualquier abierto U de Y. Sea U un abierto de Y. Vamos a considerar el siguiente diagrama:

(2.4)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Y(U) \arrow[d, "\pi_U"] \arrow[dr, "f^\#_U"] \arrow[dd, bend right=60, "\iota^\#_U"'] & \\
\dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}(U) \arrow[r, "\widetilde{f^\#}_U"'] \arrow[d, "\Lambda_U"] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \\
\iota^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}\right)(U \cap V(\mathcal{I})) \arrow[ur, "h^\#_{U\cap V(\mathcal{I})}"'] &
\end{tikzcd}$$

y vamos a mostrar que es un diagrama conmutativo. Para mostrar la conmutatividad de dicho diagrama, es suficiente con mostrar que cada diagrama que lo conforma es conmutativo. Observemos que tenemos la igualdad $\iota^\#_U = \Lambda_U \circ \pi_U$ pues precisamente esta es la forma en cómo se definió $\iota^\#_U$ (véase la sección anterior). Luego, cuando mostramos que $h^\#$ es un isomorfismo mostramos que el diagrama 2.3 es conmutativo, dicho diagrama nos dice que $\widetilde{f^\#}_U = h^\#_{U\cap V(\mathcal{I})} \circ \Lambda_U$. De esta forma, sólo nos resta mostrar que $f^\#_U = \widetilde{f^\#}_U \circ \pi_U$. Para mostrar dicha igualdad debemos recordar cómo se definen los homomorfismos π_U y $\widetilde{f^\#}_U$. Por construcción del morfismo π (véase Proposición C.27) se satisface la igualdad $\pi_U = \theta_U^{\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}} \circ \pi^-_U$, donde $\theta_U^{\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}}$ es el homomorfismo proveniente del morfismo $\theta^{\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}} : \dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}^- \to \dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}$ y donde

$$\begin{array}{rcl}
\pi^-_U : \mathcal{O}_Y(U) & \to & \dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}^-(U) \\
t & \mapsto & t + \mathcal{I}(U)
\end{array}$$

es un homomorfismo de anillos. Por otro lado, de la construcción del morfismo $\widetilde{f^\#}$ (véase Proposición C.32) se define el homomorfismo de anillos

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{f^\#}^{-}_{U} : \dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}^{-}(U) & \to & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \\ s + \mathcal{I}(U) & \mapsto & f^\#_U(s) \end{array}$$

y se satisface la igualdad $\widetilde{f^\#}^{-}_{U} = \widetilde{f^\#}_{U} \circ \theta_U^{\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}}$. De esta forma, para probar que $f^\#_U = \widetilde{f^\#}_U \circ \pi_U$ vamos a mostrar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Y(U) \arrow[d, "\pi^-_U"'] \arrow[dr, "f^\#_U"] \arrow[dd, bend right=60, "\pi_U"'] & \\ \dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}^{-}(U) \arrow[r, "\widetilde{f^\#}^{-}_{U}"'] \arrow[d, "\theta_U^{\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}}"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \\ \dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}(U) \arrow[ur, "\widetilde{f^\#}_U"'] & \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

es un diagrama conmutativo. Puesto que $\pi_U = \theta_U^{\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}} \circ \pi^-_U$ y $\widetilde{f^\#}^{-}_{U} = \widetilde{f^\#}_U \circ \theta_U^{\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}}$ se tienen por construcción, sólo resta mostrar la igualdad $f^\#_U = \widetilde{f^\#}^{-}_{U} \circ \pi^-_U$. Sea $s \in \mathcal{O}_Y(U)$,

$$\widetilde{f^\#}^{-}_{U} \circ \pi^-_U(s) = \widetilde{f^\#}^{-}_{U}(s + \mathcal{I}(U)) = f^\#_U(s).$$

Por lo tanto, el diagrama 2.5 es conmutativo y esto implica que $f^\#_U = \widetilde{f^\#}_U \circ \pi_U$, consecuentemente el diagrama 2.4 es un diagrama conmutativo y con ello tenemos la igualdad $f^\#_U = h^\#_{U \cap V(\mathcal{I})} \circ \iota^\#_U$. De esta forma, finalmente concluimos que el diagrama 2.1 es conmutativo. ❏

Lo que realizaremos a continuación es la construcción de una familia de inmersiones cerradas a partir de una anillo, además, como veremos en las siguientes secciones dicha construcción será de gran importancia para nuestro objetivo.

Teorema 5.7. *Sea I un ideal de un anillo A.*

1. *La proyección $\pi : A \to \dfrac{A}{I}$ induce una inmersión cerrada entre* $(\mathrm{Spec}(\frac{A}{I}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\frac{A}{I})})$ *y* $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$.

2. *El espacio localmente anillado* $(V(I), \mathcal{O}_{V(I)})$ *es isomorfo a* $(\mathrm{Spec}(\frac{A}{I}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\frac{A}{I})})$*, y de este modo* $(V(I), \mathcal{O}_{V(I)})$ *es un esquema afín.*

Demostración.

1. Por el Teorema 1.57 sabemos que el homomorfismo de anillos $\pi : A \to \frac{A}{I}$ induce un morfismo de esquemas afines $(\pi^*, \pi^\#) : (\mathrm{Spec}(\frac{A}{I}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\frac{A}{I})}) \to (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ donde

$$\begin{array}{rcl} \pi^* : \mathrm{Spec}(\frac{A}{I}) & \to & \mathrm{Spec}(A) \\ \mathfrak{q} & \mapsto & \pi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{array}$$

es una aplicación continua y donde para cada abierto U de $\mathrm{Spec}(A)$ se tiene el homomorfismo de anillos

$$\begin{array}{rcl} \pi^\#_U : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U) & \to & {\pi^*}_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\frac{A}{I})})(U) \\ s & \mapsto & \begin{array}{rcl} \pi^\#_U(s) \ : \pi^{*-1}(U) & \to & \displaystyle\prod_{\mathfrak{r} \in \pi^{*-1}(U)} \left(\frac{A}{I}\right)_{\mathfrak{r}} \\ \mathfrak{r} & \mapsto & f_{\mathfrak{r}}(s \circ \pi^*|_{\pi^{*-1}(U)}(\mathfrak{r})) \end{array} \end{array}$$

además, para cada $\mathfrak{r} \in \mathrm{Spec}(\frac{A}{I})$ el homomorfismo local de anillos $f_{\mathfrak{r}}$ se define de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} f_{\mathfrak{r}} : A_{\pi^{-1}(\mathfrak{r})} & \to & \left(\frac{A}{I}\right)_{\mathfrak{r}} \\ \frac{a}{t} & \mapsto & \frac{a+I}{t+I} \end{array}$$

Como π es una aplicación sobreyectiva, por el enunciado 3 de la Proposición 1.51 se sigue que π^* es un homeomorfismo entre $\mathrm{Spec}(\frac{A}{I})$ y el cerrado $V(\mathrm{Ker}\,\pi)$ de $\mathrm{Spec}(A)$. Además, puesto que $\mathrm{Ker}\,\pi = I$, tenemos que $\mathrm{Spec}(\frac{A}{I})$ es homeomorfo a $V(I)$.

Sea $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(\frac{A}{I})$. Vamos a mostrar que el homomorfismo $\pi^\#_{\mathfrak{q}} : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A), \pi^*(\mathfrak{q})} \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\frac{A}{I}), \mathfrak{q}}$ es sobreyectivo. Como $\mathfrak{q}$ es un elemento de $\mathrm{Spec}(\frac{A}{I})$ existe $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ que contiene a I tal que $\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{p}}{I}$ y esto implica que $\pi^*(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. Por otro lado, recordemos que para cada anillo B y para $\mathfrak{r} \in \mathrm{Spec}(B)$ la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B), \mathfrak{r}} & \to & B_{\mathfrak{r}} \\ [(U, s)] & \mapsto & s(\mathfrak{r}) \end{array}$$

es un isomorfismo de anillos. Luego, a partir del homomorfismo $\pi_{\mathfrak{q}}^{\#}$ podemos construir el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A),\,\mathfrak{p}} \arrow[r, "\pi_{\mathfrak{q}}^{\#}"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\frac{A}{I}),\,\mathfrak{q}} \arrow[d, "\cong"] \\ A_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "f_{\mathfrak{q}}"'] & \left(\dfrac{A}{I}\right)_{\mathfrak{q}} \end{tikzcd}$$

Claramente $f_{\mathfrak{q}}$ es una aplicación sobreyectiva y así, por la conmutatividad del diagrama anterior se sigue que $\pi_{\mathfrak{q}}^{\#}$ es un homomorfismo sobreyectivo.

De esta forma, concluimos que la proyección natural $\pi : A \to \dfrac{A}{I}$ induce una inmersión cerrada $(\pi^*, \pi^{\#})$ entre los esquemas afines $(\mathrm{Spec}(\dfrac{A}{I}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\frac{A}{I})})$ y $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$.

2. Consideremos la aplicación inclusión $\iota : V(I) \to \mathrm{Spec}(A)$ y recordemos que $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)} = \widetilde{A}$. Luego, a partir de la gavilla de anillos $\dfrac{\widetilde{A}}{\widetilde{I}}$ sobre $\mathrm{Spec}(A)$ construimos la gavilla de anillos $\iota^{-1}\left(\dfrac{\widetilde{A}}{\widetilde{I}}\right)$ sobre $V(I)$ que denotaremos por $\mathcal{O}_{V(I)}$. Obsérvese que $(V(I), \mathcal{O}_{V(I)})$ es un espacio localmente anillado.

Por otro lado, como $(\pi^*, \pi^{\#}) : (\mathrm{Spec}(\dfrac{A}{I}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\frac{A}{I})}) \to (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ es una inmersión cerrada, aplicando el teorema anterior sabemos que $(V(\mathrm{Ker}\,\pi^{\#}), \mathcal{O}_{V(\mathrm{Ker}\,\pi^{\#})})$ es isomorfo como espacio localmente anillado a $(\mathrm{Spec}(\dfrac{A}{I}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\frac{A}{I})})$. Sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Si $\mathfrak{p} \notin V(I)$, entonces se tiene que $I_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Ker}\,\pi_{\mathfrak{p}}^{\#}$. Ahora bien, si $\mathfrak{p} \in V(I)$, entonces observemos que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,\pi_{\mathfrak{p}}^{\#} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A),\,\mathfrak{p}} \arrow[r, "\pi_{\mathfrak{p}}^{\#}"] \arrow[d, "\cong"'] & \pi^*{}_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\frac{A}{I})})_{\mathfrak{p}} \arrow[d, "\cong"] \\ 0 \arrow[r] & I_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & A_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & \dfrac{A_{\mathfrak{p}}}{I_{\mathfrak{p}}} \end{tikzcd}$$

De dicho diagrama se sigue que $\mathrm{Ker}\,\pi_{\mathfrak{p}}^{\#} \cong I_{\mathfrak{p}}$ y esto implica que $(\mathrm{Ker}\,\pi^{\#})_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Ker}\,\pi_{\mathfrak{p}}^{\#} \cong I_{\mathfrak{p}} \cong \widetilde{I}_{\mathfrak{p}}$. Consecuentemente tenemos $\mathrm{Ker}\,\pi^{\#} \cong \widetilde{I}$ y de esto se sigue que $(V(\mathrm{Ker}\,\pi^{\#}), \mathcal{O}_{V(\mathrm{Ker}\,\pi^{\#})})$ es isomorfo a $(V(\widetilde{I}), \mathcal{O}_{V(\widetilde{I})})$, además, observemos que $(V(\widetilde{I}), \mathcal{O}_{V(\widetilde{I})}) = (V(I), \mathcal{O}_{V(I)})$. De esta manera, concluimos que $(V(I), \mathcal{O}_{V(I)})$ es isomorfo como espacio localmente anillado a $(\mathrm{Spec}(\dfrac{A}{I}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\frac{A}{I})})$. ❑

Observación 5.8. Sea I un ideal de un anillo A. Por el enunciado 2 del teorema anterior sabemos que si equipamos a $V(I)$ son la gavilla $\iota^{-1}\left(\widetilde{\dfrac{A}{I}}\right)$, entonces $(V(I), \mathcal{O}_{V(I)})$ es un esquema afín. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $V(I) = V(I^n)$, de esta forma, podemos equipar a $V(I)$ con la gavilla $\iota^{-1}\left(\widetilde{\dfrac{A}{I^n}}\right)$ y utilizando de nueva cuenta el resultado mencionado tendremos que $(V(I), \mathcal{O}_{V(I^n)})$ tiene una estructura de esquema afín, además, nótese que en general dicha estructura es diferente a la estructura de $(V(I), \mathcal{O}_{V(I)})$. Por lo tanto, es posible dotar al conjunto cerrado $V(I)$ de diferentes estructuras de esquema afín.

3. Inmersiones Abiertas y Cerradas entre Esquemas

Una vez que hemos definido las inmersiones abiertas y cerradas entre espacios anillados, de una manera natural podemos pensar cuál es la manera correcta de definir una inmersión entre esquemas. En esta sección definiremos las inmersiones abiertas y cerradas entre esquemas, luego, estudiaremos algunos resultados de inmersiones cerradas entre esquemas que serán de gran importancia en la siguiente sección. Comenzaremos nuestro estudio con una definición.

Definición 5.9. Sea $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfismo de esquemas. $(f, f^{\#})$ es una *inmersión cerrada* (respectivamente, es una *inmersión abierta*) si es una inmersión cerrada (respectivamente, inmersión abierta) de espacios anillados.

Puesto que los esquemas son en particular espacios anillados, la clasificación de las inmersiones cerradas entre espacios anillados sigue siendo válida para esquemas.

Recordemos que si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema una *buena cubierta* de X es una cubierta afín finita de X tal que la intersección de cualesquier dos abiertos de dicha cubierta es una unión finita de abiertos afines. El siguiente resultado que presentamos nos da una condición para que un esquema tenga una buena cubierta.

Lema 5.10. *Sea $(f, f^{\#}) : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$ una inmersión cerrada de esquemas. Si $(X, \mathcal{O}_X)$ es afín, entonces Z tiene una buena cubierta.*

Demostración. Como $(Z, \mathcal{O}_Z)$ es un esquema sabemos que existe una cubierta afín $(Z_i)_{i\in I}$ de Z. Luego, puesto que $Z = \bigcup_{i\in I} Z_i$ se sigue que $f(Z) = \bigcup_{i\in I} f(Z_i)$ y de la hipótesis se tiene que $f(Z_i)$ es un abierto de $f(Z)$ para cada $i \in I$. Sea $i \in I$. Puesto que $f(Z_i)$ es un abierto de $f(Z)$ existe un abierto X_i de X tal que $f(Z_i) = X_i \cap f(Z)$. Además, $f^{-1}(X_i)$ es un abierto afín de Z, en efecto:

$$\begin{aligned} f^{-1}(X_i) &= f^{-1}(X_i \cap X) \\ &= f^{-1}(X_i \cap [f(Z) \cup (X \backslash f(Z))]) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f^{-1}([X_i \cap f(Z)] \cup [X_i \cap (X \backslash f(Z))]) \\
&= f^{-1}(X_i \cap f(Z)) \cup f^{-1}(X_i \cap (X \backslash f(Z))) \\
&= f^{-1}(X_i \cap f(Z)) \\
&= f^{-1}(f(Z_i)) \\
&= Z_i.
\end{aligned}
$$

Además, de manera inmediata tenemos que la familia $(f^{-1}(X_i))_{i \in I}$ es una cubierta abierta de Z pues

$$\bigcup_{i \in I} f^{-1}(X_i) = \bigcup_{i \in I} Z_i = Z.$$

Con esto, tenemos que la familia $(X_i)_{i \in I}$ es una familia de abiertos de X tal que $(f^{-1}(X_i))_{i \in I}$ es una cubierta afín de Z.

A continuación vamos a probar que la cubierta $(f^{-1}(X_i))_{i \in I}$ es finita, para ello probaremos que $(\bigcup_{i \in I} X_i) \cup (X \backslash f(Z)) = X$. Para mostrar la igualdad anterior será suficiente con mostrar que $f(Z) \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i$. Observemos que se cumplen las siguientes igualdades:

$$f(Z) = f(\bigcup_{i \in I} Z_i) = \bigcup_{i \in I} f(Z_i) = \bigcup_{i \in I} (X_i \cap f(Z)) = \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \cap f(Z).$$

De esta forma, se sigue que $f(Z) \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i$ y por lo tanto tenemos que $X = (\bigcup_{i \in I} X_i) \cup (X \backslash f(Z))$. Luego, como X es casi compacto se sigue I es un conjunto finito. Consecuentemente tenemos que la cubierta $(f^{-1}(X_i))_{i \in I}$ de Z es una cubierta afín finita.

Lo único que nos resta a probar es la condición de intersección sobre los elementos de la cubierta. Puesto que la topología de X tiene a los abiertos básicos como una base, sin pérdida de generalidad podemos suponer que X_i es un abierto básico para cada $i \in I$. Sean $i, j \in I$. Consideremos al abierto $f^{-1}(X_i) \cap f^{-1}(X_j) = f^{-1}(X_i \cap X_j)$ que está contenido en $f^{-1}(X_i)$ y además recordemos que $f^{-1}(X_i) = Z_i$ es un abierto afín de Z. Ahora bien, como $X_i \cap X_j$ es un abierto básico de X que está contenido en el abierto básico X_i de X, por el Lema 1.59 se sigue que $X_i \cap X_j$ es un abierto básico de X_i. Luego, puesto que la aplicación $f|_{f^{-1}(X_i)} : f^{-1}(X_i) \to X_i$ es una aplicación continua entre espacios topológicos subyacentes de esquemas afines y $X_i \cap X_j$ es un abierto básico de X_i, se sigue que $f^{-1}(X_i \cap X_j)$ es un abierto básico de $f^{-1}(X_i)$.

Por lo tanto, concluimos que $(f^{-1}(X_i))_{i \in I}$ es una buena cubierta de Z. ❑

El siguiente resultado nos mostrará qué sucede con una inmersión cerrada entre esquemas cuando el codominio es un esquema afín. Cabe señalar que este será un resultado fundamental para lograr nuestro objetivo.

Teorema 5.11. *Sea $(f, f^{\#}) : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$ una inmersión cerrada de esquemas. Si $(X, \mathcal{O}_X)$ es afín, entonces $(Z, \mathcal{O}_Z)$ es afín y existen un único ideal I del anillo $A = \mathcal{O}_X(X)$ y un isomorfismo $\overline{f}$ entre $(Z, \mathcal{O}_Z)$ y $(\operatorname{Spec}(\frac{A}{I}), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(\frac{A}{I})})$ tales que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
(Z, \mathcal{O}_Z) \arrow[r, "(f,f^{\#})"] \arrow[d, "\overline{f}"'] & (X, \mathcal{O}_X) \\
(\operatorname{Spec}(\frac{A}{I}), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(\frac{A}{I})}) \arrow[ur, "(\pi^*,\pi^{\#})"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

donde $(\pi^*, \pi^{\#})$ es la inmersión cerrada asociada al ideal I.

Demostración. Puesto que $(f, f^{\#})$ es una inmersión cerrada entre el esquema $(Z, \mathcal{O}_Z)$ y el esquema afín $(X, \mathcal{O}_X)$, en particular es una inmersión cerrada entre espacios anillados y así, por el Teorema 5.6 sabemos que al considerar $\mathcal{I} = \operatorname{Ker} f^{\#}$ se tiene que la sucesión $0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{f^{\#}} f_*(\mathcal{O}_Z) \to 0$ es exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos y además tenemos que existe un isomorfismo de espacios localmente anillados $(h, h^{\#}) : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (V(\mathcal{I}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{I})})$ de modo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
(Z, \mathcal{O}_Z) \arrow[r, "(f,f^{\#})"] \arrow[d, "(h,h^{\#})"'] & (X, \mathcal{O}_X) \\
(V(\mathcal{I}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{I})}) \arrow[ur, "(\iota,\iota^{\#})"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Por otro lado, como $(f, f^{\#})$ es una inmersión cerrada y $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema afín, por el lema anterior tenemos que Z tiene una buena cubierta.

Sea $g \in \mathcal{O}_X(X)$. Como $f^{\#} : \mathcal{O}_X \to f_*(\mathcal{O}_Z)$ es un morfismo se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(X) \arrow[r, "f^{\#}_X"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{O}_X}{}^X_{D(g)}"'] & f_*(\mathcal{O}_Z)(X) \arrow[d, "\rho_{f_*(\mathcal{O}_Z)}{}^X_{D(g)}"] \\
\mathcal{O}_X(D(g)) \arrow[r, "f^{\#}_{D(g)}"'] & f_*(\mathcal{O}_Z)(D(g))
\end{tikzcd}$$

Lo que probaremos a continuación es que $f^{-1}(D(g)) = Z_{f_X^{\#}(g)}$ donde $Z_{f_X^{\#}(g)}$ es el abierto asociado a la sección global $f_X^{\#}(g)$ de $\mathcal{O}_Z$ (véase Proposición 3.27). Sea $q \in Z$. Recordando que $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema afín se tiene que

$$\begin{aligned}
q \notin Z_{f_X^{\#}(g)} &\iff (f_X^{\#}(g))_q \notin \mathcal{U}(\mathcal{O}_{Z,q}) \\
&\iff f_q^{\#}(g_{f(q)}) \notin \mathcal{U}(\mathcal{O}_{Z,q}) \\
&\iff f_q^{\#}(g_{f(q)}) \in \mathfrak{m}_{Z,q} \\
&\iff g_{f(q)} \in (f_q^{\#})^{-1}(\mathfrak{m}_{Z,q}) \\
&\iff g_{f(q)} \in \mathfrak{m}_{X,f(q)} \\
&\iff g_{f(q)} \notin \mathcal{U}(\mathcal{O}_{X,f(q)}) \\
&\iff f(q) \notin X_g \\
&\iff f(q) \notin D(g) \\
&\iff q \notin f^{-1}(D(g)).
\end{aligned}$$

De esta forma, como $f^{-1}(D(g)) = Z_{f_X^{\#}(g)}$ se sigue que $\mathcal{O}_Z(f^{-1}(D(g))) = \mathcal{O}_Z(Z_{f_X^{\#}(g)})$. Además, como $f_*(\mathcal{O}_Z)(X) = \mathcal{O}_Z(Z)$ y $f_*(\mathcal{O}_Z)(D(g)) = \mathcal{O}_Z(f^{-1}(D(g)))$ se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(X) \arrow[r, "f_X^{\#}"] \arrow[d, "{\rho_{\mathcal{O}_X}}^{X}_{D(g)}"'] & \mathcal{O}_Z(Z) \arrow[d, "{\rho_{\mathcal{O}_Z}}^{Z}_{Z_{f_X^{\#}(g)}}"] \\
\mathcal{O}_X(D(g)) \arrow[r, "f_{D(g)}^{\#}"'] & \mathcal{O}_Z(Z_{f_X^{\#}(g)})
\end{tikzcd}$$

Ahora, vamos a extender el diagrama anterior de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{O}_X(X) \arrow[rr, "f_X^{\#}"] \arrow[dl] \arrow[dd, "{\rho_{\mathcal{O}_X}}^{X}_{D(g)}"] & & \mathcal{O}_Z(Z) \arrow[dr] \arrow[dd, "{\rho_{\mathcal{O}_Z}}^{Z}_{Z_{f_X^{\#}(g)}}"'] & \\
\mathcal{O}_X(X)_g \arrow[rrrr, "(f_X^{\#})_g"'] \arrow[dr, "\cong"'] & & & & \mathcal{O}_Z(Z)_g \arrow[dl, "\cong"] \\
& \mathcal{O}_X(D(g)) \arrow[rr, "f_{D(g)}^{\#}"'] & & \mathcal{O}_Z(Z_{f_X^{\#}(g)}) &
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

y vamos a mostrar que este nuevo diagrama es un diagrama conmutativo. Observemos que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_X(X) \arrow[dl] \arrow[dd, "\rho^{X}_{\mathcal{O}_X D(g)}"] \\
\mathcal{O}_X(X)_g \arrow[dr, "\cong"'] & \\
 & \mathcal{O}_X(D(g))
\end{tikzcd}
$$

claramente es conmutativo pues el isomorfismo entre $\mathcal{O}_X(X)_g$ y $\mathcal{O}_X(D(g))$ se construye precisamente utilizando la restricción de $\mathcal{O}_X(X)$ a $\mathcal{O}_X(D(g))$ (véase Proposición 1.53). Ahora bien, como $\mathcal{O}_Z(Z)$ es un $\mathcal{O}_X(X)$-módulo y $\left\{g^n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}_+\right\}$ es un conjunto multiplicativo de $\mathcal{O}_X(X)$, podemos localizar a $\mathcal{O}_Z(Z)$ en dicho conjunto. Luego, puesto que $(f_X^\#)_g$ es la aplicación inducida en las localizaciones, se tiene asegurada de manera inmediata la conmutatividad del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_X(X) \arrow[r, "f_X^\#"] \arrow[dl] & \mathcal{O}_Z(Z) \arrow[dr] & \\
\mathcal{O}_X(X)_g \arrow[rrr, "(f_X^\#)_g"'] & & & \mathcal{O}_Z(Z)_g
\end{tikzcd}
$$

Sólo nos resta mostrar la conmutatividad de la parte derecha del diagrama 3.3. Recordando que Z tiene una buena cubierta podemos considerar el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Z(Z) \arrow[r] \arrow[d, "\rho^{Z}_{\mathcal{O}_Z Z_{f_X^\#(g)}}"'] \arrow[dr] & \mathcal{O}_Z(Z)_g \arrow[d, "\cong"] \\
\mathcal{O}_Z(Z_{f_X^\#(g)}) & \mathcal{O}_Z(Z)_{f_X^\#(g)} \arrow[l, "\cong"]
\end{tikzcd}
$$

que es un diagrama conmutativo: en efecto, observemos que la parte inferior de este diagrama es exactamente el diagrama usado para construir el isomorfismo del Teorema 3.30 y la parte superior es el diagrama usado en la demostración de la Proposición 1.40. Por lo tanto, tomando la composición de los dos isomorfismos que aparecen en el diagrama anterior obtenemos un isomorfismo entre $\mathcal{O}_Z(Z)_g$ y $\mathcal{O}_Z(Z_{f_X^\#(g)})$ y utilizando la conmutatividad de dicho diagrama se sigue que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Z(Z) \arrow[dd, "\rho^{\mathcal{O}_Z\,Z}_{Z_{f_X^\#(g)}}"'] \arrow[dr] & \\
& \mathcal{O}_Z(Z)_g \arrow[dl, "\cong"] \\
\mathcal{O}_Z(Z_{f_X^\#(g)}) &
\end{tikzcd}$$

Consecuentemente, tenemos que el diagrama 3.3 conmuta y esto implica que el siguiente diagrama también es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}((f_X^\#)_g) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(X)_g \arrow[r, "(f_X^\#)_g"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathcal{O}_Z(Z)_g \arrow[d, "\cong"'] \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f_{D(g)}^\# \arrow[r] & \mathcal{O}_X(D(g)) \arrow[r, "f_{D(g)}^\#"'] & \mathcal{O}_Z(Z_{f_X^\#(g)})
\end{tikzcd}$$

Además, como las aplicaciones del centro y de la derecha son isomorfismos se sigue que la aplicación de la izquierda es un isomorfismo y por lo tanto se tiene que $\operatorname{Ker}((f_X^\#)_g) \cong \operatorname{Ker} f_{D(g)}^\#$ (véase Proposición A.8).

Ahora bien, puesto que $\mathcal{I} = \operatorname{Ker} f^\#$ se sigue que $\mathcal{I}(X) = \operatorname{Ker} f_X^\#$. Por otro lado, la exactitud de la sucesión $0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{f^\#} f_*(\mathcal{O}_Z) \to 0$ implica que la sucesión $0 \to \mathcal{I}(X) \to \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{f_X^\#} \mathcal{O}_Z(Z)$ es exacta de $\mathcal{O}_X(X)$-módulos (véase Proposición C.30). De este modo, al realizar la localización de dicha sucesión en el conjunto multiplicativo $\left\{g^n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}_+\right\}$ se sigue que $\mathcal{I}(X)_g = \operatorname{Ker}((f_X^\#)_g)$. Consecuentemente tenemos que

$$\mathcal{I}(D(g)) = \operatorname{Ker} f_{D(g)}^\# \cong \operatorname{Ker}((f_X^\#)_g) = \mathcal{I}(X)_g \cong \widetilde{\mathcal{I}(X)}(D(g)).$$

Así, como $\mathcal{I}$ e $\widetilde{\mathcal{I}(X)}$ son gavillas sobre el esquema afín $(X, \mathcal{O}_X)$ y como $\mathcal{I}(D(g)) \cong \widetilde{\mathcal{I}(X)}(D(g))$ para cualquier $g \in \mathcal{O}_X(X)$ se sigue que $\mathcal{I} \cong \widetilde{\mathcal{I}(X)}$. De esta forma, considerando $I = \mathcal{I}(X)$ tenemos que $\mathcal{I}$ es isomorfo a $\tilde{I}$.

Ahora bien, puesto que $\mathcal{I} \cong \tilde{I}$ se sigue que $V(\mathcal{I}) = V(\tilde{I})$, más aún, tenemos que $(V(\mathcal{I}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{I})}) \cong (V(\tilde{I}), \mathcal{O}_{V(\tilde{I})})$. Por otro lado, de la Observación 4.3 y del Teorema 5.7 se sigue que $(V(\tilde{I}), \mathcal{O}_{V(\tilde{I})}) =$

$(V(I), \mathcal{O}_{V(I)})$ y consecuentemente tenemos que $(V(\mathcal{I}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{I})}) \cong (V(I), \mathcal{O}_{V(I)})$. De este modo, la conmutatividad del diagrama 3.2 implica que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} (Z, \mathcal{O}_Z) \arrow[r, "(f,f^{\#})"] \arrow[d, "\cong"'] & (X, \mathcal{O}_X) \\ (V(I), \mathcal{O}_{V(I)}) \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Luego, aplicando el Teorema 5.7 tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} (\mathrm{Spec}(\frac{A}{I}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\frac{A}{I})}) \arrow[r, "(\pi^{*},\pi^{\#})"] \arrow[d, "\cong"'] & (X, \mathcal{O}_X) \\ (V(I), \mathcal{O}_{V(I)}) \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

De este modo, puesto que $(Z, \mathcal{O}_Z) \cong (V(I), \mathcal{O}_{V(I)}) \cong (\mathrm{Spec}(\frac{A}{I}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\frac{A}{I})})$ se sigue la existencia de un isomorfismo de espacios localmente anillados $\overline{f} : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (\mathrm{Spec}(\frac{A}{I}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\frac{A}{I})})$. Por último, la conmutatividad de los diagramas 3.4 y 3.5 implican que el diagrama 3.1 conmuta.

Lo único que nos resta a probar es la unicidad del ideal I. Supongamos que existe otro ideal J de A que satisface todas las propiedades deseadas, en particular, tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} (Z, \mathcal{O}_Z) \arrow[r, "(f,f^{\#})"] \arrow[d, "\overline{f'}"'] & (X, \mathcal{O}_X) \\ (\mathrm{Spec}(\frac{A}{J}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\frac{A}{J})}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

De esta forma, se sigue que $(\mathrm{Spec}(\dfrac{A}{I}), O_{\mathrm{Spec}(\frac{A}{I})})$ es isomorfo a $(\mathrm{Spec}(\dfrac{A}{J}), O_{\mathrm{Spec}(\frac{A}{J})})$ y además tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Spec}(\frac{A}{J}), O_{\mathrm{Spec}(\frac{A}{J})}) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr] & & (\mathrm{Spec}(\frac{A}{I}), O_{\mathrm{Spec}(\frac{A}{I})}) \arrow[dl] \\
& (\mathrm{Spec}(A), O_{\mathrm{Spec}(A)}) &
\end{tikzcd}$$

De esta manera, el diagrama anterior induce el siguiente diagrama conmutativo de anillos:

$$\begin{tikzcd}
\frac{A}{J} & & \frac{A}{I} \arrow[ll, "\varphi"', "\cong"] \\
& A \arrow[ul, "\pi_J"] \arrow[ur, "\pi_I"'] &
\end{tikzcd}$$

Bajo estas condiciones vamos a mostrar que $I = J$. Sea $a \in A$.

$$\begin{aligned}
a \in I &\iff a + I = I \\
&\iff \varphi(a + I) = J \\
&\iff \varphi \circ \pi_I(a) = J \\
&\iff \pi_J(a) = J \\
&\iff a + J = J \\
&\iff a \in J.
\end{aligned}$$

De esta manera, concluimos que el ideal I es único. ❏

4. Clasificación de los Subesquemas Cerrados de Esquemas

Finalmente, con todas las herramientas que hemos desarrollado y estudiado, en esta sección vamos a definir a los subesquemas cerrados de un esquema y realizaremos el segundo objetivo de este trabajo: la clasificación de los subesquemas cerrados de esquemas. Comenzaremos definiendo el objeto principal de este trabajo:

Definición 5.12. Sea (X, O_X) un esquema. (Z, O_Z) es un *subesquema cerrado* de (X, O_X) si

1. $(Z, \mathcal{O}_Z)$ es un esquema.
2. Z es un cerrado de X.
3. La aplicación inclusión $\iota : Z \to X$ induce una inmersión cerrada de esquemas entre $(Z, \mathcal{O}_Z)$ y $(X, \mathcal{O}_X)$.

Recordemos que si $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo sobre un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$, entonces $\mathcal{F}$ es *casi coherente* si para cada abierto afín U de X existe un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo M tal que $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$ (véase la Sección 3 del Capítulo 4). Una vez recordado esto, ya estamos listos para clasificar a los subesquemas cerrados de un esquema.

Teorema 5.13. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema. Cualquier subesquema cerrado de $(X, \mathcal{O}_X)$ está determinado por un ideal casi coherente.*

Demostración. Sea $(Z, \mathcal{O}_Z)$ un subesquema cerrado de $(X, \mathcal{O}_X)$. Así, se tiene que $(\iota, \iota^\#)$ es una inmersión cerrada entre $(Z, \mathcal{O}_Z)$ y $(X, \mathcal{O}_X)$ y considerando $\mathcal{J} = \operatorname{Ker} \iota^\#$, por el Teorema 5.6 se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(Z, \mathcal{O}_Z) \arrow[r, "(\iota,\iota^\#)"] \arrow[d, "\cong"'] & (X, \mathcal{O}_X) \\
(V(\mathcal{J}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{J})}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Vamos a mostrar que $\mathcal{J}$ es un ideal casi coherente. Sea U un abierto afín de X. Puesto $U \cap Z$ es un abierto de Z y $(Z, \mathcal{O}_Z)$ es un esquema se sigue que $(U \cap Z, \mathcal{O}_{U \cap Z})$ es un esquema. Luego, el morfismo $(\iota, \iota^\#)$ induce un morfismo de esquemas $(\iota|_{U\cap Z}, \iota|^\#_{U \cap Z}) : (U \cap Z, \mathcal{O}_{U\cap Z}) \to (U, \mathcal{O}_U)$ donde $\iota|_{U \cap Z}$ es la restricción de ι a $U \cap Z$ y donde para cada abierto W de U se tiene que $(\iota|^\#_{U\cap Z})_W = \iota^\#_W$. Lo que probaremos a continuación es que $(\iota|_{U\cap Z}, \iota|^\#_{U\cap Z})$ es una inmersión cerrada entre esquemas.

En primer lugar, como la aplicación $\iota|_{U\cap Z} : U \cap Z \to U$ es la restricción de la aplicación ι se sigue que $\iota|_{U \cap Z}$ es una aplicación continua, más aún, es un homeomorfismo entre $U \cap Z$ y el cerrado $U \cap Z$ de U.

En segundo lugar, vamos a mostrar que para cada $p \in U \cap Z$ se tiene que el homomorfismo $(\iota^\#|_{U\cap Z})_p : \mathcal{O}_{U,p} \to \mathcal{O}_{U\cap Z,p}$ es sobreyectivo. Sea $p \in U \cap Z$. Como U es un abierto de X se sigue que $\mathcal{O}_{U,p} \cong \mathcal{O}_{X,p}$; asimismo, el hecho que $U \cap Z$ es un abierto de Z implica que $\mathcal{O}_{U\cap Z,p} \cong \mathcal{O}_{Z,p}$. De esta forma, tenemos que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{U,p} \arrow[r, "(\iota|^{\#}_{U\cap Z})_p"] \arrow[d, "f"', "\cong"] & \mathcal{O}_{U\cap Z,p} \arrow[d, "\cong"', "g"] \\ \mathcal{O}_{X,p} \arrow[r, "\iota^{\#}_p"'] & \mathcal{O}_{Z,p} \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo: en efecto, sea W un abierto de X que contiene a p y sea $s \in \mathcal{O}_U(W \cap U)$,

$$\begin{aligned} \iota^{\#}_p \circ f([(W \cap U, s)]) &= \iota^{\#}_p([(W \cap U, s)]) \\ &= [(W \cap U \cap Z, \iota^{\#}_{W\cap U}(s))] \\ &= g([(W \cap U \cap Z, \iota^{\#}_{W\cap U}(s))]) \\ &= g([(W \cap U \cap Z, (\iota|^{\#}_{U\cap Z})_{W\cap U}(s))]) \\ &= g \circ (\iota|^{\#}_{U\cap Z})_p([(W \cap U, s)]). \end{aligned}$$

De esta forma, tenemos que $(\iota|^{\#}_{U\cap Z})_p = g^{-1} \circ \iota^{\#}_p \circ f$ y como cada uno de los homomorfismos de la composición anterior es sobreyectivo se sigue que $(\iota|^{\#}_{U\cap Z})_p$ también lo es.

Por lo tanto, tenemos que $(\iota|_{U\cap Z}, \iota|^{\#}_{U\cap Z})$ es una inmersión cerrada de esquemas. Además, como $(U, \mathcal{O}_U)$ es un esquema afín, por el Teorema 5.11 se sigue que $\operatorname{Ker} \iota^{\#}(U)$ es el único ideal de $\mathcal{O}_U(U)$ de modo que $\mathcal{J}|_U \cong \widetilde{\operatorname{Ker} \iota^{\#}(U)}$. Por lo tanto, tenemos que $\mathcal{J}$ es un ideal casi coherente.

Recíprocamente, tomemos un ideal casi coherente $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_X$. Consideramos el espacio localmente anillado $(V(\mathcal{J}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{J})})$. Vamos a mostrar que $(V(\mathcal{J}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{J})})$ es un subesquema cerrado de $(X, \mathcal{O}_X)$. Por construcción sabemos que $V(\mathcal{J})$ es un cerrado de X, además, la aplicación inclusión $\iota : V(\mathcal{J}) \to X$ induce la inmersión cerrada de espacios localmente anillados $(\iota, \iota^{\#}) : (V(\mathcal{J}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{J})}) \to (X, \mathcal{O}_X)$. De este modo, lo único que nos resta probar es que $(V(\mathcal{J}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{J})})$ es un esquema. Distinguimos entre dos casos:

- Caso I: $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema afín. Fijamos $A = \mathcal{O}_X(X)$. Como $\mathcal{J}$ es un ideal casi coherente de $\mathcal{O}_X$ y como $(X, \mathcal{O}_X)$ es afín, por el Teorema 4.19 tenemos que $\mathcal{J} \cong \widetilde{J}$ donde $J = \mathcal{J}(X)$. Luego, por el Teorema 5.7 sabemos que tenemos un isomorfismo de esquemas afines entre $(\operatorname{Spec}(\frac{A}{J}), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(\frac{A}{J})})$ y $(V(J), \mathcal{O}_{V(J)})$ y puesto que $(V(J), \mathcal{O}_{V(J)}) \cong (V(\mathcal{J}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{J})})$, concluimos que $(V(\mathcal{J}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{J})})$ es un esquema afín.
- Caso II: $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema arbitrario. Sea $p \in V(\mathcal{J})$. Mostraremos la existencia de un abierto afín de $V(\mathcal{J})$ que contiene a p. Como $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema se sigue que existe un

abierto afín U de X tal que $p \in U$, luego, $U \cap V(\mathcal{J})$ es un abierto de $V(\mathcal{J})$ que contiene a p. Ahora bien, por los argumentos usados en la primera parte de la prueba sabemos que la inmersión cerrada $(\iota, \iota^\#) : (V(\mathcal{J}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{J})}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ induce la inmersión cerrada de espacios localmente anillados $(\iota|_{U \cap V(\mathcal{J})}, \iota|^\#_{U \cap V(\mathcal{J})}) : (U \cap V(\mathcal{J}), \mathcal{O}_{U \cap V(\mathcal{J})}) \to (U, \mathcal{O}_U)$. Luego, puesto que el ideal que determina dicha inmersión es $\mathcal{J}|_U$ y es casi coherente, por el caso I se tiene que $(V(\mathcal{J}|_U), \mathcal{O}_{V(\mathcal{J}|_U)})$ es un esquema afín y consecuentemente tenemos que $(U \cap V(\mathcal{J}), \mathcal{O}_{U \cap V(\mathcal{J})})$ es un esquema afín. De esta manera, $U \cap V(\mathcal{J})$ es un abierto afín de $V(\mathcal{J})$ que contiene a p.

Por lo tanto, concluimos que $(V(\mathcal{J}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{J})})$ es un subesquema cerrado de $(X, \mathcal{O}_X)$. $\square$

Apéndice A

Teoría de Módulos

En este apéndice revisaremos algunas definiciones y resultados provenientes de la Teoría de Módulos. La primera sección se encargará de revisar algunas propiedades del conjunto de morfismos entre una pareja de módulos, además, recordaremos la construcción del producto y la suma directa de módulos y revisaremos algunas de sus propiedades. La noción de sucesión exacta y algunos resultados que la involucran serán estudiados en la segunda sección. En la tercera sección definiremos y estudiaremos las propiedades de una clase especial de módulos que tienen una gran importancia: hablamos de los módulos finitamente generados. Una herramienta poderosa del Álgebra Conmutativa será discutida en la cuarta sección: el producto tensorial de módulos. Para concluir con el apéndice, en la quinta sección hablaremos de anillos y módulos graduados y revisaremos algunas de sus propiedades.

1. Nociones Básicas

En esta sección nos encargaremos de recordar que el conjunto de todos los morfismos entre una pareja de módulos tiene una estructura algebraica de módulo y revisaremos algunas de sus propiedades. También recordaremos la construcciones del producto y la suma directa de módulos y realizaremos algunas observaciones de dichos módulos.

Consideremos un par módulos M y N sobre un anillo A. Vamos a denotar al conjunto de todas las aplicaciones A-lineales entre M y N por $\mathrm{Hom}_A(M,N)$. Dicho conjunto cuenta con una estructura algebraica, el siguiente resultado se encargará de comprobar este hecho.

Lema A.1. *Con las notaciones anteriores,* $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ *tiene una estructura de* A*-módulo.*

Demostración. Es claro que $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ tiene una estructura de grupo abeliano, así que sólo resta definir un producto externo por elementos de A. Consideramos la operación

$$\begin{array}{rcl} \cdot : A \times \mathrm{Hom}_A(M,N) & \to & \mathrm{Hom}_A(M,N) \\ (a,\varphi) & \mapsto & a\varphi \quad : M \to N \\ & & \qquad\quad m \mapsto a\varphi(m) \end{array}$$

Vamos a mostrar que la operación anterior está bien definida. Claramente para cualesquier $a \in A$ y $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ se tiene que $a\varphi$ es una aplicación A-lineal. Ahora, sean $a, b \in A$ y $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ tales que $(a,\varphi) = (b,\psi)$. Como $\varphi = \psi$ se sigue que $\varphi(m) = \psi(m)$ para cualquier $m \in M$, además, como $a = b$ se sigue que $a\varphi(m) = b\psi(m)$ para cualquier $m \in M$. De esta forma, como las aplicaciones $a\varphi$ y $b\psi$ tienen el mismo dominio, codominio y regla de asignación se sigue que son iguales y consecuentemente tenemos que la operación anterior está bien definida.

Ahora, probaremos que dicha operación satisface los requisitos de un producto externo. Sean $a, b \in A$ y $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$. Queremos mostrar las igualdades $a(\varphi+\psi) = a\varphi + a\psi$, $(a+b)\varphi = a\varphi + b\varphi$, $(ab)\varphi = a(b\varphi)$ y $1_A\varphi = \varphi$, puesto que las respectivas aplicaciones tienen el mismo dominio y codominio sólo nos resta mostrar que tienen la misma regla de asignación. Sea $m \in M$.

$$(a(\varphi+\psi))(m) = a(\varphi+\psi)(m) = a\big(\varphi(m)+\psi(m)\big) = a\varphi(m) + a\psi(m) = (a\varphi + a\psi)(m).$$
$$((a+b)\varphi)(m) = (a+b)\varphi(m) = a\varphi(m) + b\varphi(m) = (a\varphi + b\varphi)(m).$$
$$((ab)\varphi)(m) = (ab)\varphi(m) = a\big(b\varphi(m)\big) = \big(a(b\varphi)\big)(m).$$
$$(1_A\varphi)(m) = 1_A\varphi(m) = \varphi(m).$$

De esta manera, tenemos las igualdades deseadas y con esto concluimos que $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ tiene una estructura de A-módulo. ❏

Ahora que sabemos que el conjunto de morfismo entre una pareja de módulos tiene una estructura de módulo, vamos a estar interesados en un caso particular: si M es un módulo sobre un anillo A, vamos a estar interesados en determinar al A-módulo $\mathrm{Hom}_A(A,M)$. El siguiente resultado se encargará del estudio de este módulo.

Lema A.2. *Sea M un módulo sobre un anillo A. Existe un A-isomorfismo entre los A-módulos $\mathrm{Hom}_A(A,M)$ y M.*

Demostración. Consideramos la asignación

$$\begin{array}{rcl} \Phi : M & \to & \mathrm{Hom}_A(A,M) \\ m & \mapsto & \Phi(m) \quad : A \to M \\ & & \qquad\qquad \lambda \mapsto \lambda m \end{array}$$

Comenzaremos mostrando que Φ está bien definida. Claramente $\Phi(m)$ es un aplicación A-lineal para cada $m \in M$. Ahora, sean $m, m' \in M$ tales que $m = m'$ y sea $\lambda \in A$. Vamos a probar que $\Phi(m)(\lambda) = \Phi(m')(\lambda)$. Como $m = m'$ se sigue que $(\lambda, m) = (\lambda, m')$ y esto implica que $\lambda m = \lambda m'$, es decir que $\Phi(m)(\lambda) = \Phi(m')(\lambda)$. De esta forma, como las aplicaciones A-lineales $\Phi(m)$ y $\Phi(m')$

tienen el mismo dominio, codominio y regla de asignación se sigue que son iguales. De esto concluimos que Φ es una aplicación bien definida.

A continuación vamos a mostrar que Φ es una aplicación A-lineal, es decir, que para cualesquier $\lambda, \lambda' \in A$ y $m, m' \in M$ se tiene que $\Phi(\lambda m + \lambda' m') = \lambda\Phi(m) + \lambda'\Phi(m')$. Sean $\lambda, \lambda' \in A$ y sean $m, m' \in M$. Como las aplicaciones deseadas tienen el mismo dominio y codominio, sólo resta probar la igualdad en la regla de asignación. Sea $a \in A$,

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda m + \lambda' m)(a) &= a(\lambda m + \lambda' m') \\
&= a(\lambda m) + a(\lambda' m') \\
&= \lambda(am) + \lambda'(am') \\
&= \lambda\Phi(m)(a) + \lambda'\Phi(m')(a) \\
&= (\lambda\Phi(m) + \lambda'\Phi(m'))(a).
\end{aligned}$$

De esta forma, se sigue que $\Phi(\lambda m + \lambda' m') = \lambda\Phi(m) + \lambda'\Phi(m')$ y por lo tanto concluimos que Φ es una aplicación A-lineal entre M y $\mathrm{Hom}_A(A, M)$.

Ahora, vamos a considerar la aplicación

$$\begin{aligned}
\Psi : \mathrm{Hom}_A(A, M) &\to M \\
\varphi &\mapsto \varphi(1_A)
\end{aligned}$$

Claramente Ψ es una aplicación bien definida. Ahora, vamos a mostrar que Ψ es una aplicación A-lineal: sean $\lambda, \lambda' \in A$ y $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$.

$$\Psi(\lambda\varphi + \lambda'\varphi') = (\lambda\varphi + \lambda'\varphi')(1_A) = (\lambda\varphi)(1_A) + (\lambda'\varphi')(1_A) = \lambda\varphi(1_A) + \lambda'\varphi'(1_A) = \lambda\Psi(\varphi) + \lambda'\Psi(\varphi').$$

De esta forma, concluimos que Ψ es una aplicación A-lineal entre $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ y M.

Por último, vamos a probar que Φ y Ψ son aplicaciones inversas, es decir que $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_M$ y $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_A(A,M)}$. Sea $m \in M$, puesto que

$$\Psi \circ \Phi(m) = \Psi(\Phi(m)) = \Phi(m)(1_A) = 1_A m = m,$$

concluimos que $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_M$. Ahora, sea $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$. Para mostrar que $\Phi \circ \Psi(\varphi)$ es igual a φ, como estas aplicaciones tienen el mismo dominio y codominio, mostraremos que tienen la misma regla de asignación. Sea $\lambda \in A$. Siguiendo las construcciones de Φ y Ψ tenemos que

$$\Phi \circ \Psi(\varphi) = \Phi(\Psi(\varphi)) = \Phi(\varphi(1_A)),$$

donde $\Phi(\varphi(1_A))$ es la aplicación A-lineal entre A y M tal que $\Phi(\varphi(1_A))(\mu) = \mu\varphi(1_A) = \varphi(\mu)$ para todo $\mu \in A$, en particular, tenemos que $\Phi(\varphi(1_A))(\lambda) = \varphi(\lambda)$. De esta forma, se tiene que $\Phi \circ \Psi(\varphi) = \varphi$ y consecuentemente tenemos que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_A(A,M)}$.

Por lo tanto, concluimos que existe un A-isomorfismo entre $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ y M. ❏

A partir de una familia de módulos siempre es posible construir nuevos módulos, a continuación recordaremos dichas construcciones. Sea $(M_i)_{i\in I}$ una familia de módulos sobre un anillo A. Definimos el conjunto

$$\prod_{i\in I} M_i = \left\{(m_i)_{i\in I} \,\middle|\, m_i \in M_i \text{ para cada } i \in I\right\}.$$

Dicho conjunto equipado con la operación natural suma dada por

$$\begin{array}{rcl} + : \prod_{i\in I} M_i \times \prod_{i\in I} M_i & \to & \prod_{i\in I} M_i \\ ((m_i)_{i\in I}, (n_j)_{j\in I}) & \mapsto & (m_k + n_k)_{k\in I} \end{array}$$

y con la operación producto externo dada por

$$\begin{array}{rcl} \cdot : A \times \prod_{i\in I} M_i & \to & \prod_{i\in I} M_i \\ (\lambda, (m_i)_{i\in I}) & \mapsto & (\lambda m_i)_{i\in I} \end{array}$$

tiene una estructura de A-módulo, dicho módulo se llama el *producto de módulos*. Además, para cada $j \in I$ la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \pi_j : \prod_{i\in I} M_i & \to & M_j \\ (m_i)_{i\in I} & \mapsto & m_j \end{array}$$

claramente es una aplicación A-lineal y se llama la *proyección*. Luego, consideramos el siguiente subconjunto de $\prod_{i\in I} M_i$:

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \left\{(m_i)_{i\in I} \,\middle|\, \begin{array}{c} m_i \in M_i \text{ para cada } i \in I \text{ y el} \\ \text{conjunto } \left\{j \,\middle|\, m_j \neq 0_{M_j}\right\} \text{ es finito} \end{array}\right\}.$$

Dicho subconjunto es un A-submódulo del producto y se llama la *suma directa de módulos*. Además, para cada $j \in I$ la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \sigma_j : M_j & \to & \bigoplus_{i\in I} M_i \\ m & \mapsto & (m_i)_{i\in I} = \begin{cases} m_j = m & \\ m_i = 0_{M_i} & \text{si } i \in I\backslash\{j\} \end{cases} \end{array}$$

es una aplicación A-lineal y se llama el *encaje*. Ahora, realizaremos algunas observaciones de estos módulos:

- En caso que el conjunto I es un conjunto finito se tiene que $\prod_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} M_i$.

- Si tenemos que M_i es un anillo A_i para cualquier $i \in I$, entonces $\prod_{i\in I} A_i$ no solamente es un A-módulo sino que también tiene estructura de anillo. En efecto, además de la operación suma, se define la operación producto de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \prod_{i\in I} A_i \times \prod_{i\in I} A_i & \to & \prod_{i\in I} A_i \\ ((a_i)_{i\in I}, (b_j)_{j\in I}) & \mapsto & (a_k b_k)_{k\in I} \end{array}$$

  Aquí, $1_{\prod_{i\in I} A_i}$ es la familia donde cada elemento es el uno de su correspondiente anillo.
- Suponiendo de nueva cuenta que M_i es un anillo A_i para cada $i \in I$, se tiene que el módulo $\bigoplus_{i\in I} A_i$ también tiene estructura de anillo definiendo el producto de dos elementos de manera análoga como el definido en el punto anterior. Aquí, $1_{\bigoplus_{i\in I} A_i}$ es la familia donde cada entrada no nula es el uno de su correspondiente anillo. Obsérvese que $\bigoplus_{i\in I} A_i$ no es un subanillo de $\prod_{i\in I} A_i$.
- Si $M_i = M$ para todo $i \in I$, denotamos $\prod_{i\in I} M_i = M^I$ y $\bigoplus_{i\in I} M_i = M^{(I)}$. Si además I es finito con r elementos, denotamos $\bigoplus_{i\in I} M_i = M^r$.

El siguiente resultado nos permitirá determinar el módulo de morfismos entre una suma directa de módulos y cualquier otro módulo.

Lema A.3. *Sea $(M_i)_{i\in I}$ una familia de módulos sobre un anillo A. Para cualquier A-módulo N existe un A-isomorfismo entre $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(M_i, N)$ y $\mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{i\in I} M_i, N)$.*

Demostración. Sea N un A-módulo. Consideramos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{i\in I} M_i, N) & \to & \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(M_i, N) \\ \varphi & \mapsto & (\varphi \circ \sigma_j)_{j\in I} \end{array}$$

Claramente f es una aplicación bien definida. Ahora, vamos a mostrar que f es una aplicación A-lineal: sean $\lambda, \mu \in A$ y $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{i\in I} M_i, N)$,

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda\varphi + \mu\psi) & = & ((\lambda\varphi + \mu\psi) \circ \sigma_j)_{j\in I} \\ & = & ((\lambda\varphi \circ \sigma_j) + (\mu\psi \circ \sigma_j))_{j\in I} \\ & = & (\lambda\varphi \circ \sigma_j)_{j\in I} + (\mu\psi \circ \sigma_j)_{j\in I} \\ & = & \lambda(\varphi \circ \sigma_j)_{j\in I} + \mu(\psi \circ \sigma_j)_{j\in I} \\ & = & \lambda f(\varphi) + \mu f(\psi). \end{array}$$

De esta forma, concluimos que f es una aplicación A-lineal.

Ahora, consideramos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rcl} g : \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(M_i, N) & \to & \mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{i\in I} M_i, N) \\ (\varphi_i)_{i\in I} & \mapsto & g((\varphi_i)_{i\in I}) \quad : \bigoplus_{i\in I} M_i \to \quad N \\ & & \qquad (m_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{j\in I} \varphi_j(m_j) \end{array}$$

Sea $\varphi_i \in \mathrm{Hom}_A(M_i, N)$ para cada $i \in I$. Es claro que $g((\varphi_i)_{i\in I})$ es una aplicación bien definida, así que sólo nos resta probar que es A-lineal. Sean $\lambda, \mu \in A$ y $m_i, k_i \in M_i$ para cada $i \in I$.

$$\begin{aligned} g((\varphi_i)_{i\in I})(\lambda(m_j)_{j\in I} + \mu(k_j)_{j\in I}) &= g((\varphi_i)_{i\in I})((\lambda m_j + \mu k_j)_{j\in I}) \\ &= \sum_{j\in I} \varphi_j(\lambda m_j + \mu k_j) \\ &= \lambda \sum_{j\in I} \varphi_j(m_j) + \mu \sum_{j\in I} \varphi_j(k_j) \\ &= \lambda g((\varphi_i)_{i\in I})((m_j)_{j\in I}) + \mu g((\varphi_i)_{i\in I})((k_j)_{j\in I}). \end{aligned}$$

De esta forma, concluimos que $g((\varphi_i)_{i\in I})$ es una aplicación A-lineal. Con esto, claramente se sigue que g es una aplicación bien definida, así que sólo nos resta probar que es una aplicación A-lineal. Sean $\lambda, \mu \in A$ y $\varphi_i, \psi_i \in \mathrm{Hom}_A(M_i, N)$ para cada $i \in I$. Queremos mostrar la igualdad entre las aplicaciones $g(\lambda(\varphi_i)_{i\in I} + \mu(\psi_i)_{i\in I})$ y $\lambda g((\varphi_i)_{i\in I}) + \mu g((\psi_i)_{i\in I})$, como dichas aplicaciones tienen el mismo dominio y codominio sólo resta mostrar que tienen la misma regla de asignación. Sea $m_i \in M_i$ para cada $i \in I$,

$$\begin{aligned} g(\lambda(\varphi_i)_{i\in I} + \mu(\psi_i)_{i\in I})((m_j)_{j\in I}) &= g((\lambda\varphi_i + \mu\psi_i)_{i\in I})((m_j)_{j\in I}) \\ &= \sum_{j\in I} (\lambda\varphi_j + \mu\psi_j)(m_j) \\ &= \lambda \sum_{j\in I} \varphi_j(m_j) + \mu \sum_{j\in I} \psi_j(m_j) \\ &= \lambda g((\varphi_i)_{i\in I})((m_j)_{j\in I}) + \mu g((\psi_i)_{i\in I})((m_j)_{j\in I}) \\ &= (\lambda g((\varphi_i)_{i\in I}) + \mu g((\psi_i)_{i\in I}))((m_j)_{j\in I}). \end{aligned}$$

Consecuentemente se tiene que g es una aplicación A-lineal.

Por último, vamos a probar que f y g son aplicaciones inversas. Comenzaremos mostrando que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{i\in I} M_i, N)}$. Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{i\in I} M_i, N)$. Puesto que las aplicaciones $g \circ f(\varphi)$ y φ tienen el mismo dominio y codominio, para mostrar que son iguales sólo debemos comprobar que tienen la misma regla de asignación. Sea $m_i \in M_i$ para cada $i \in I$,

$$\begin{aligned} g \circ f(\varphi)((m_j)_{j\in I}) &= g((\varphi \circ \sigma_i)_{i\in I})((m_j)_{j\in I}) \\ &= \sum_{j\in I} (\varphi \circ \sigma_j)(m_j) \\ &= \sum_{j\in I} \varphi(\sigma_j(m_j)) \\ &= \varphi(\sum_{j\in I} \sigma_j(m_j)) \\ &= \varphi((m_j)_{j\in I}). \end{aligned}$$

Así, tenemos que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{i\in I} M_i, N)}$. Ahora, vamos a mostrar que $f \circ g = \mathrm{id}_{\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(M_i, N)}$. Sea $\varphi_i \in \mathrm{Hom}_A(M_i, N)$ para cada $i \in I$. Puesto que $f \circ g((\varphi_i)_{i\in I}) = (g((\varphi_i)_{i\in I}) \circ \sigma_j)_{j\in I}$, para mostrar la igualdad $f \circ g((\varphi_i)_{i\in I}) = (\varphi_i)_{i\in I}$ es suficiente mostrar que $g((\varphi_i)_{i\in I}) \circ \sigma_j = \varphi_j$ para cada $j \in I$. Sea $j \in I$. Puesto que las aplicaciones deseadas tienen el mismo dominio y codominio, sólo resta comprobar la igualdad en la regla de asignación. Sea $m \in M_j$,

$$\begin{aligned} g((\varphi_i)_{i\in I}) \circ \sigma_j(m) &= g((\varphi_i)_{i\in I})((m_i)_{i\in I}) \\ &= \sum_{i\in I} \varphi_i(m_i) \\ &= \varphi_j(m_j) \\ &= \varphi_j(m). \end{aligned}$$

De esta forma obtenemos la igualdad deseada y por lo tanto tenemos que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{i\in I} M_i, N)}$.

Por lo tanto, concluimos que existe un A-isomorfismo entre los módulos $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(M_i, N)$ y $\mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{i\in I} M_i, N)$. ❑

Como consecuencia directa del lema anterior, tenemos el siguiente resultado que determina por completo al módulo $\mathrm{Hom}_A(A^{(I)}, M)$ para cualquier módulo M sobre un anillo A.

Lema A.4. *Sea M un módulo sobre un anillo A. Existe un A-isomorfismo entre* $\mathrm{Hom}_A(A^{(I)}, M)$ *y M^I.*

Demostración. Utilizando los lemas A.2 y A.3 se sigue que

$$\mathrm{Hom}_A(A^{(I)}, M) = \mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{i\in I} A, M) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(A, M) \cong \prod_{i\in I} M = M^I.$$

❑

2. Sucesiones Exactas

A partir de una pareja de morfismos de módulos de manera que el codominio de uno de ellos es el dominio del otro, nace la noción de una sucesión exacta. En esta sección nos encargaremos de estudiar dichas sucesiones y algunas de sus propiedades. Comenzaremos por definir al objeto que da nombre a esta sección.

Definición A.5. Sean $\varphi : N \to M$ y $\psi : M \to P$ aplicaciones A-lineales donde A es un anillo. La sucesión $N \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} P$ es *exacta en M* si $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\varphi$.

Partiendo de la definición se deriva claramente el siguiente resultado.

Lema A.6. *Sean M y N módulos sobre un anillo A. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *La sucesión* $0 \to N \xrightarrow{\varphi} M$ *es exacta si y sólo si φ es inyectiva.*
2. *La sucesión* $N \xrightarrow{\psi} M \to 0$ *es exacta si y sólo si ψ es sobreyectiva.*

Para nuestro estudio vamos a estar interesados en las sucesiones exactas de A-módulos de la forma $0 \to N \to M \to P \to 0$, dichas sucesiones se llaman *sucesiones exactas cortas*.

A través de un módulo M sobre un anillo A siempre es posible construir de manera natural sucesiones exactas cortas. En efecto, si N es un A-submódulo de M, entonces considerando las aplicaciones inclusión $i : N \to M$ y proyección $\pi : M \to \dfrac{M}{N}$ de manera inmediata se tiene que la sucesión $0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} \dfrac{M}{N} \to 0$ es una sucesión exacta de A-módulos.

En el párrafo anterior, a partir de un módulo hemos construido una sucesión exacta corta gracias a las relaciones existentes entre los módulos elegidos. Ahora bien, si comenzamos con una sucesión exacta corta, ¿podemos establecer alguna relación entre los módulos que la conforman? El siguiente resultado responde a esta interrogante.

Proposición A.7. *Sean M, N y P módulos sobre un anillo A. Si la sucesión* $0 \to N \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} P \to 0$ *es exacta, entonces existe un isomorfismo natural* $\widetilde{\psi} : \dfrac{M}{\varphi(N)} \to P$.

Demostración. Como la aplicación $\psi : M \to P$ es sobreyectiva, por el primer teorema de isomorfismos se tiene que la siguiente aplicación A-lineal es un isomorfismo:

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\psi} : & \dfrac{M}{\operatorname{Ker}\psi} & \to & P \\ & m + \operatorname{Ker}\psi & \mapsto & \psi(m) \end{array}$$

Luego, de la exactitud de la sucesión se tiene que $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\varphi$. De esta forma, concluimos que existe un isomorfismo natural entre $\dfrac{M}{\varphi(N)}$ y P. ❑

A continuación presentamos algunos resultados acerca de sucesiones exactas.

Proposición A.8. *Sean M, M', N y N' módulos sobre un anillo A. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"'] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & N \arrow[d, "\psi"] \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} g \arrow[r] & M' \arrow[r, "g"'] & N'
\end{tikzcd}$$

Si φ y ψ son isomorfismos, entonces $\widetilde{\varphi}$ lo es.

Demostración. Comenzaremos mostrando que $\widetilde{\varphi}$ es inyectiva. Sea $m \in M$ tal que $m \in \operatorname{Ker} f$ y de modo que $m \in \operatorname{Ker}\widetilde{\varphi}$. Por definición de la aplicación $\widetilde{\varphi}$ se tiene que $\widetilde{\varphi}(m) = \varphi(m) = 0_N$. Luego, como φ es en particular inyectiva se sigue que $m = 0_M$ y esto implica que $\operatorname{Ker}\widetilde{\varphi} = \{0_M\}$, es decir, $\widetilde{\varphi}$ es inyectiva.

Ahora, probaremos que $\widetilde{\varphi}$ es sobreyectiva. Sea $m' \in M'$ de modo que $m' \in \operatorname{Ker} g$. Como φ es en particular sobreyectiva se sigue que existe $m \in M$ tal que $\varphi(m) = m'$. Ahora bien, de la conmutatividad del diagrama anterior sabemos que $\psi \circ f = g \circ \varphi$, esto implica que $\psi \circ f(m) = g \circ \varphi(m) = 0_{N'}$. Luego, utilizando del hecho de que ψ es particularmente inyectiva se sigue que $f(m) = 0_N$ y por lo tanto $m \in \operatorname{Ker} f$. Así, se tiene que $\widetilde{\varphi}(m) = m'$ y por lo tanto concluimos que $\widetilde{\varphi}$ es sobreyectiva. ❑

Proposición A.9. *Sean M, N, P, M', N' y P' módulos sobre un anillo A. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "\zeta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "f'"'] & M' \arrow[r, "g'"'] & P' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde ψ, φ y ζ son isomorfismos. Si la primera fila es exacta, entonces la segunda también lo es.

DEMOSTRACIÓN. Comenzaremos mostrando que f' es inyectiva. Sea $n' \in N'$ tal que $n' \in \operatorname{Ker} f'$. Como ψ es sobreyectiva existe $n \in N$ de modo que $\psi(n) = n'$. Por otro lado, por la conmutatividad del diagrama tenemos que $\varphi \circ f = f' \circ \psi$, esto implica que $\varphi \circ f(n) = f' \circ \psi(n) = 0_{M'}$, Luego, como φ es inyectiva se sigue que $f(n) = 0_M$ y por la inyectividad de f se sigue que $n = 0_N$. De este modo, tenemos que $0_{N'} = \psi(n) = n'$, es decir, $n' = 0_{N'}$. Por lo tanto, concluimos que f' es inyectiva.

Ahora probaremos que g' es sobreyectiva. Sea $p' \in P'$. Como ζ es sobreyectiva se sigue que existe $p \in P$ tal que $\zeta(p) = p'$. Luego, como g es sobreyectiva se sigue que existe $m \in M$ de modo que $g(m) = p$. Por la conmutatividad del diagrama tenemos que $g' \circ \varphi = \zeta \circ g$, esto implica que $g' \circ \varphi(m) = \zeta \circ g(m) = p'$. De esta forma, como $g'(\varphi(m)) = p'$ concluimos que g' es una aplicación sobreyectiva.

A continuación comprobaremos que $\operatorname{Im} f' \subseteq \operatorname{Ker} g'$. Sea $m' \in M'$ tal que $m' \in \operatorname{Im} f'$. Así, existe $n' \in N'$ de modo que $f'(n') = m'$. Luego, como ψ es sobreyectiva se sigue que existe $n \in N$ de modo que $\psi(n) = n'$. Por otro lado, de la conmutatividad del diagrama tenemos que $\varphi \circ f = f' \circ \psi$ y que $\zeta \circ g = g' \circ \varphi$. De esta forma se sigue que

$$g'(m') = g'(f'(n')) = g'(f'(\psi(n))) = g'(\varphi(f(n))) = \zeta(g(f(n))) = 0_{P'}.$$

Así, concluimos que $m' \in \operatorname{Ker} g'$.

Por último, mostraremos que $\operatorname{Ker} g' \subseteq \operatorname{Im} f'$. Sea $m' \in M'$ tal que $m' \in \operatorname{Ker} g'$. Como φ es sobreyectiva existe $m \in M$ de modo que $\varphi(m) = m'$. Por la conmutatividad del diagrama tenemos que $\zeta \circ g = g' \circ \varphi$, esto implica que $\zeta \circ g(m) = g' \circ \varphi(m) = 0_{P'}$. Luego, como ζ es inyectiva se sigue que $g(m) = 0_P$, es decir que $m \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$, consecuentemente existe $n \in N$ de modo que $f(n) = m$. De la conmutatividad del diagrama también sabemos que $\varphi \circ f = f' \circ \psi$, esto implica que $f' \circ \psi(n) = \varphi \circ f(n) = m'$. Así, como $f'(\psi(n)) = m'$ se concluye que $m' \in \operatorname{Im} f'$. ❑

La técnica usada para la demostración de la proposición anterior se conoce como *persecución del diagrama*. El siguiente resultado general muestra que la exactitud se preserva bajo la suma directa de módulos. Puesto que la demostración en su mayoría es una persecución del diagrama, sólo realizaremos algunos comentarios sobre dicha prueba.

LEMA A.10. *Sean $(M_i)_{i\in I}$, $(N_i)_{i\in I}$ y $(P_i)_{i\in I}$ familias de módulos sobre un anillo A. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *La sucesión $0 \to N_i \xrightarrow{\varphi_i} M_i \xrightarrow{\psi_i} P_i \to 0$ es exacta para cada $i \in I$.*
2. *La sucesión $0 \to \bigoplus_{i\in I} N_i \xrightarrow{\oplus_{i\in I}\varphi_i} \bigoplus_{i\in I} M_i \xrightarrow{\oplus_{i\in I}\psi_i} \bigoplus_{i\in I} P_i \to 0$ es exacta.*

DEMOSTRACIÓN.

1. $\Rightarrow$ 2. La exactitud de la sucesión $0 \to \bigoplus_{i\in I} N_i \xrightarrow{\oplus_{i\in I}\varphi_i} \bigoplus_{i\in I} M_i \xrightarrow{\oplus_{i\in I}\psi_i} \bigoplus_{i\in I} P_i \to 0$ se deriva del hecho de que las aplicaciones $\oplus_{i\in I}\varphi_i$ y $\oplus_{i\in I}\psi_i$ actúan elemento por elemento.

2. $\Rightarrow$ 1. Sea $j \in I$. La exactitud de la sucesión $0 \to N_j \xrightarrow{\varphi_j} M_j \xrightarrow{\psi_j} P_j \to 0$ se obtiene del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N_j \arrow[r, "\varphi_j"] \arrow[d, "\sigma_{N_j}"'] & M_j \arrow[r, "\psi_j"] \arrow[d, "\sigma_{M_j}"'] & P_j \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_{P_j}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{i\in I} N_i \arrow[r, "\oplus_{i\in I}\varphi_i"'] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[r, "\oplus_{i\in I}\psi_i"'] & \bigoplus_{i\in I} P_i \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

❏

3. Módulos Finitamente Generados

En esta sección estudiaremos brevemente un tipo especial de módulos que tienen una gran importancia en el Álgebra Conmutativa, hablamos de los módulos finitamente generados. Después de definir otra clase importante de módulos, los módulos libres, definiremos a los módulos finitamente generados, daremos algunas caracterizaciones de esta clase de módulos y estudiaremos algunas de sus propiedades. Concluiremos la sección con uno de los resultados más importantes del Álgebra Conmutativa: el lema de Nakayama.

Definición A.11. Sea M un módulo sobre un anillo A.

1. M es *libre* si existe un conjunto no vacío I de modo que M es A-isomorfo a $A^{(I)}$.
2. M es *libre de rango finito* si existe $r \in \mathbb{N}$ de modo que M es A-isomorfo a A^r, en tal caso, M es *libre de rango* r.
3. M es *finitamente generado sobre* A si existen $r \in \mathbb{N}$ y $m_1, \ldots, m_r \in M$ de modo que $M = Am_1 + \cdots + Am_r$.

Ejemplo A.12. Todo módulo libre de rango finito es finitamente generado. De manera particular, cualquier anillo visto como módulo sobre sí mismo es finitamente generado.

Como veremos en el siguiente resultado, la propiedad de que un módulo sea finitamente generado se hereda cuando consideramos cocientes de dicho submódulo.

Proposición A.13. *Sea M un módulo finitamente generado sobre un anillo A. Para cada A-submódulo N de M se tiene que $\dfrac{M}{N}$ es finitamente generado sobre A.*

Demostración. Como M es finitamente generado existen $r \in \mathbb{N}$ y $m_1, m_2, \ldots, m_r \in M$ tales que $M = Am_1 + \cdots + Am_r$. Se sigue claramente que los elementos $m_1 + N, m_2 + N, \ldots, m_r + N$ generan a $\dfrac{M}{N}$. ❏

En el siguiente resultado presentaremos algunas caracterizaciones de los módulos finitamente generados.

Proposición A.14. *Sea M un módulo sobre un anillo A. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *M es finitamente generado.*
2. *M es isomorfo al cociente de un módulo libre de rango finito.*
3. *Existen $r \in \mathbb{N}$ y $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(A^r, M)$ de modo que φ es sobreyectiva.*

Demostración.

1. $\Rightarrow$ 2. Supongamos que M es finitamente generado sobre A. De esta forma existen $r \in \mathbb{N}$ y $m_1, \ldots, m_r \in M$ de modo que $M = Am_1 + \cdots + Am_r$. Consideramos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & A^r & \to & M \\ & (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) & \mapsto & \lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_r m_r \end{array}$$

Por la Proposición A.3 tenemos que φ es A-lineal, además, es una aplicación sobreyectiva: en efecto, si $m \in M$, entonces existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in A$ de modo que $m = \lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_r m_r = \varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$. De esta forma, por el primer teorema de isomorfismos concluimos que $\dfrac{A^r}{\mathrm{Ker}\,\varphi} \cong M$.

2. $\Rightarrow$ 3. Supongamos que $M \cong \dfrac{A^s}{N}$ para cierto $s \in \mathbb{N}$ y cierto A-submódulo N de A^s. Luego, consideramos la sucesión $A^s \xrightarrow{\pi} \dfrac{A^s}{N} \xrightarrow{\cong} M \to 0$. Realizando la composición de las aplicaciones se obtiene la aplicación sobreyectiva deseada.

3. $\Rightarrow$ 1. Supongamos que existen $r \in \mathbb{N}$ y $\varphi : A^r \to M$ una aplicación A-lineal sobreyectiva. Por el primer teorema de isomorfismos se tiene que $\dfrac{A^s}{\mathrm{Ker}\,\varphi} \cong M$. Como A^r es finitamente generado, por la Proposición A.13 se sigue que $\dfrac{A^s}{N}$ es finitamente generado y esto implica que M es finitamente generado. ❏

El próximo resultado que estudiaremos establecerá una relación entre los módulos finitamente generados y las sucesiones exactas.

PROPOSICIÓN A.15. *Sea* $0 \to N \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} P \to 0$ *una sucesión exacta de módulos sobre un anillo* A. *Si* N *y* P *son finitamente generados sobre* A*, entonces* M *también lo es.*

DEMOSTRACIÓN. Como N es finitamente generado sobre A existen $r \in \mathbb{N}$ y $n_1, \ldots, n_r \in N$ tales que $N = An_1 + \cdots + An_r$; asimismo, como P es finitamente generado sobre A existen $s \in \mathbb{N}$ y $p_1, \ldots, p_s \in P$ tales que $P = Ap_1 + \cdots + Ap_s$. Luego, como ψ es sobreyectiva existen $m_1, \ldots, m_s \in M$ tales que $\psi(m_i) = p_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$. Vamos a mostrar que la familia $\{\varphi(n_1), \ldots, \varphi(n_r), m_1, \ldots, m_s\}$ genera a M. Puesto que $\varphi(n_1), \ldots, \varphi(n_r), m_1, \ldots, m_s$ son elementos de M, se sigue que

$$A\varphi(n_1) + \cdots + A\varphi(n_r) + Am_1 + \cdots + Am_s \subseteq M.$$

Recíprocamente, sea $m \in M$. Como $\psi(m)$ es un elemento de P se sigue que existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in A$ tales que $\psi(m) = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_s p_s$. Luego, tenemos que $\psi(m) = \lambda_1\psi(m_1) + \cdots + \lambda_S\psi(m_s)$ y por lo tanto que $\psi(m - (\lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_s m_s)) = 0_P$. Así, como $m - (\lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_s m_s) \in \operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\varphi$ existe $n \in N$ tal que $\varphi(n) = m - (\lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_s m_s)$. Además, como N es finitamente generado existen $\mu_1, \ldots, \mu_r \in A$ tales que $n = \mu_1 n_1 + \cdots + \mu_r n_r$. Consecuentemente tenemos que

$$m = \mu_1\varphi(n_1) + \cdots + \mu_r\varphi(n_r) + \lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_s m_s$$

y esto implica que $M \subseteq A\varphi(n_1) + \cdots + A\varphi(n_r) + Am_1 + \cdots + Am_s$. Por lo tanto, concluimos que M es finitamente generado. ❑

Para concluir con esta sección vamos a mostrar un poderoso resultado del Álgebra Conmutativa, hablamos del lema de Nakayama. Antes de pasar a la prueba necesitaremos del siguiente resultado:

LEMA A.16. *Sea* A *un anillo. Para cada* $a \in A$ *se tiene que* $a \in \operatorname{Rad}(A)$ *si y sólo si para cualquier* $\lambda \in A$ *se satisface que* $1_A + \lambda a \in \mathcal{U}(A)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $a \in A$. Asumamos que $a \in \operatorname{Rad}(A)$. Vamos a proceder por contradicción: supongamos que existe $\lambda \in A$ de modo que $1_A + \lambda a$ no es una unidad de A. Luego, como $\langle 1_A + \lambda a\rangle \neq A$ se sigue que existe $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A)$ tal que $\langle 1_A + \lambda a\rangle \subseteq \mathfrak{m}$. De esta forma, el hecho que $a \in \mathfrak{m}$ y de que $1_A + \lambda a \in \mathfrak{m}$ implican que $1_A \in \mathfrak{m}$ lo cual es absurdo.

Recíprocamente, asumamos que para todo $\lambda \in A$ se tiene que $1_A + \lambda a \in \mathcal{U}(A)$. Procederemos por contradicción: supongamos que existe $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A)$ de modo que $a \notin \mathfrak{m}$. Así, como $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{m} + \langle a\rangle$ y $\mathfrak{m}$ es maximal se sigue que $\mathfrak{m} + \langle a\rangle = A$. Luego, como $1_A \in \mathfrak{m} + \langle a\rangle$ se sigue que existen $m \in \mathfrak{m}$ y $\lambda \in A$ tales que $1_A = m + \lambda a$. De este modo, tenemos que $m = 1_A - \lambda a$ y por nuestra hipótesis se sigue que $\mathfrak{m}$ contiene una unidad lo cual es absurdo. ❑

TEOREMA A.17 (Lema de Nakayama). *Sean M un módulo finitamente generado sobre un anillo A e I un ideal de A tal que $I \subseteq \mathrm{Rad}(A)$. Se tiene que $IM = M$ si y sólo si $M = \{0_M\}$. En particular, si $\mathrm{Rad}(A)M = M$, entonces $M = \{0_M\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $M = \{0_M\}$ es claro que $IM = M$. Recíprocamente, supongamos que $IM = M$, mostraremos que M es el módulo nulo por contradicción. Supongamos que $M \neq \{0_M\}$. Distinguimos entre dos casos:

- Caso I: M tiene sólo un generador. Supongamos que $M = Am$ para cierto $m \in M$. De la hipótesis $M = IM$ se sigue que existe $\lambda \in I$ de modo que $m = \lambda m$, esto implica que $(1_A - \lambda)m = 0_M$. Además, como λ es un elemento de $\mathrm{Rad}(A)$, por el lema anterior se sigue que $(1_A - \lambda) \in \mathcal{U}(A)$ y así, la igualdad $(1_A - \lambda)m = 0_M$ implica que $m = 0_M$ lo cual es absurdo.
- Caso II: M tiene al menos dos generadores. Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \geq 2$ y es el mínimo entero positivo para el cual existe una familia generadora de M con dicha cardinalidad, de este modo, sean $m_1, \ldots, m_r \in M$ de modo que $M = Am_1 + \cdots + Am_r$. De la hipótesis $M = IM$ se sigue que existe $\lambda_i \in I$ para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ de modo que $m_1 = \lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_r m_r$, así, tenemos que $(1_A - \lambda_1)m_1 = \lambda_2 m_2 + \cdots + \lambda_r m_r$. Puesto que λ_1 es un elemento de $\mathrm{Rad}(A)$, por el lema anterior se sigue que $\mu = (1_A - \lambda) \in \mathcal{U}(A)$ y consecuentemente la igualdad $(1_A - \lambda_1)m_1 = \lambda_2 m_2 + \cdots + \lambda_r m_r$ implica que $m_1 = \mu^{-1}\lambda_2 m_2 + \cdots + \mu^{-1}\lambda_r m_r$. Por lo tanto, hemos construido una familia generadora de M con $r - 1$ elementos lo cual contradice nuestra hipótesis.

De esta forma, concluimos que $M = \{0_M\}$. ❑

COROLARIO A.18. *Sea M un módulo finitamente generado sobre un anillo local $(A, \mathfrak{m})$. Si $\mathfrak{m}M = M$, entonces $M = \{0_M\}$.*

4. Producto Tensorial de Módulos

En esta sección estudiaremos una de las construcciones de mayor relevancia dentro del Álgebra Conmutativa: el producto tensorial de módulos. El siguiente resultado nos hablará del producto tensorial de módulos y de la propiedad universal que satisface. Para nuestros fines prácticos, sólo necesitaremos de algunas propiedades del producto tensorial así que presentaremos el siguiente resultado sin una demostración del mismo. Para mayores detalles acerca de la prueba puede consultarse el Capítulo 2 de [**1**].

Teorema A.19. *Sean M y N módulos sobre un anillo A. Existe un par (T, θ) formado por un A-módulo T y una aplicación A-bilineal $\theta : M \times N \to T$ que satisface la siguiente propiedad universal: para cada A-módulo P y para cada aplicación A-bilineal $\varphi : M \times N \to P$ existe una única aplicación A-lineal $\widetilde{\varphi} : T \to P$ de modo que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta"'] & P \\ T \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Consideremos a M y N módulos sobre un anillo A. Vamos a realizar algunos comentarios sobre el teorema anterior:

- El módulo T se llama el *producto tensorial de M y N sobre A* y se denota por $M \otimes_A N$.
- El módulo $M \otimes_A N$ está generado por el siguiente conjunto:
$$M \otimes_A N = \left\langle \left\{ m \otimes n \,\middle|\, m \in M \text{ y } n \in N \right\} \right\rangle_A .$$
De esta forma, cada elemento de $M \otimes_A N$ es una combinación lineal de elementos generadores de $M \otimes_A N$. Además, utilizando la bilinealidad del producto tensorial, sin pérdida de generalidad siempre se puede suponer que un elemento de $M \otimes_A N$ es sólo una suma finita de generadores de $M \otimes_A N$.
- Si M y N son finitamente generados, entonces $M \otimes_A N$ es finitamente generado. De hecho si $\{m_1, \ldots, m_r\}$ y $\{n_1, \ldots, n_s\}$ son familias generadoras de M y N respectivamente para ciertos $r, s \in \mathbb{N}$, entonces
$$M \otimes_A N = \left\langle \left\{ m_i \otimes n_j \,\middle|\, i \in \{1, \ldots, r\} \text{ y } j \in \{1, \ldots, s\} \right\} \right\rangle_A .$$
- Si M o N es nulo, entonces $M \otimes_A N$ también lo es.

Los siguientes resultados nos muestran algunas de las propiedades principales del producto tensorial. Sólo enunciaremos los resultados sin demostración. Como mencionamos anteriormente, el lector interesado en profundizar en estos tópicos puede consultar [**1**].

Proposición A.20. *Sean M y N módulos sobre un anillo A.*

1. *Para cualquier A-módulo P existe un A-isomorfismo entre los módulos* $\operatorname{Hom}_A(M \otimes_A N, P)$ *y* $\operatorname{Bil}_A(M \times N, P)$.
2. *Para cualquier A-módulo P existe un A-isomorfismo entre los módulos* $\operatorname{Hom}_A(M \otimes_A N, P)$ *y* $\operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Hom}_A(N, P))$.

Teorema A.21. *Sea A un anillo.*

1. *Si M es un A-módulo, entonces $A \otimes_A M \cong M$.*
2. *Si M y N son A-módulos, entonces $M \otimes_A N \cong N \otimes_A M$.*
3. *Si M, N y P son A-módulos, entonces $(M \otimes_A N) \otimes_A P \cong M \otimes_A (N \otimes_A P)$.*
4. *Si $(M_i)_{i\in I}$ es una familia de A-módulos y N es un A-módulo, entonces $\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_A N \cong \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_A N)$. En particular, para cualquier $r \in \mathbb{N}$ se tiene que $A^r \otimes_A N \cong N^r$.*
5. *Si M es un A-módulo y J es un ideal de A, entonces $\dfrac{A}{J} \otimes_A M \cong \dfrac{M}{JM}$.*

Proposición A.22. *Sea $0 \to M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$ una sucesión exacta de módulos sobre un anillo A. Para cualquier A-módulo N se tiene que la sucesión $M' \otimes_A N \xrightarrow{\varphi\otimes \mathrm{id}_N} M \otimes_A N \xrightarrow{\psi\otimes \mathrm{id}_N} M'' \otimes_A N \to 0$ es exacta de A-módulos.*

Para concluir con esta sección presentaremos algunas aplicaciones directas de las propiedades del producto tensorial.

Proposición A.23. *Sea M un módulo sobre un anillo A que está generado por s elementos para cierto $s \in \mathbb{N}$. Si existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $M \cong A^r$, entonces $r \leq s$.*

Demostración. Como M está generado por s elementos, por la Proposición A.14 se sigue que existe una aplicación A-lineal sobreyectiva $\varphi : A^s \to M$. Puesto que $M \cong A^r$, realizando la composición de esta aplicación con φ obtenemos la siguiente sucesión exacta $A^s \to A^r \to 0$. Consideramos un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A, así, por la proposición anterior se tiene que la sucesión $A^s \otimes_A \dfrac{A}{\mathfrak{m}} \to A^r \otimes_A \dfrac{A}{\mathfrak{m}} \to 0$ es exacta. Luego, por el enunciado 4 del Teorema A.21 tenemos los isomorfismos $A^s \otimes_A \dfrac{A}{\mathfrak{m}} \cong \left(\dfrac{A}{\mathfrak{m}}\right)^s$ y $A^r \otimes_A \dfrac{A}{\mathfrak{m}} \cong \left(\dfrac{A}{\mathfrak{m}}\right)^r$, de esta manera, la exactitud de la sucesión anterior implica que la sucesión $\left(\dfrac{A}{\mathfrak{m}}\right)^s \to \left(\dfrac{A}{\mathfrak{m}}\right)^r \to 0$ es exacta. Ahora bien, como tenemos que $\left(\dfrac{A}{\mathfrak{m}}\right)^s$ y $\left(\dfrac{A}{\mathfrak{m}}\right)^r$ son $\dfrac{A}{\mathfrak{m}}$-espacios vectoriales, la sobreyectividad de la aplicación $\left(\dfrac{A}{\mathfrak{m}}\right)^s \to \left(\dfrac{A}{\mathfrak{m}}\right)^r$ implica que $r \leq s$. ❏

Proposición A.24. *Sean M y N módulos finitamente generados sobre un anillo local $(A, \mathfrak{m})$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$M \otimes_A N = \{0_{M\otimes_A N}\}$.*
2. *$M = \{0_M\}$ o $N = \{0_N\}$.*
3. *$\dfrac{M \otimes_A N}{\mathfrak{m}(M \otimes_A N)} = \{0\}$.*

Demostración.

1. $\Rightarrow$ 2. Supongamos que $M \otimes_A N = \{0_{M\otimes_A N}\}$. Vamos a distinguir entre dos casos:

- Caso I: A es un campo. En este caso, M y N son A-espacios vectoriales de dimensión finita. Luego, como
$$0 = \dim_A(M \otimes_A N) = \dim_A(M) \cdot \dim_A(N),$$
se sigue que $\dim_A(M) = 0$ o $\dim_A(N) = 0$, esto implica que $M = \{0_M\}$ o $N = \{0_N\}$.
- Caso II: A es cualquier anillo. A partir de la igualdad $M \otimes_A N = \{0\}$ obtenemos la igualdad $(\frac{A}{\mathfrak{m}} \otimes_A M) \otimes_A (N \otimes_A \frac{A}{\mathfrak{m}}) = \{0\}$. Por el enunciado 5 del Teorema A.21 sabemos que $\frac{A}{\mathfrak{m}} \otimes_A M \cong \frac{M}{\mathfrak{m}M}$ y que $N \otimes_A \frac{A}{\mathfrak{m}} \cong \frac{N}{\mathfrak{m}N}$, de esta forma se sigue que $\frac{M}{\mathfrak{m}M} \otimes_A \frac{N}{\mathfrak{m}N} = \{0\}$. Luego, como el producto externo de A no cambia respecto a $\frac{A}{\mathfrak{m}}$, la igualdad anterior implica la igualdad $\frac{M}{\mathfrak{m}M} \otimes_{\frac{A}{\mathfrak{m}}} \frac{N}{\mathfrak{m}N} = \{0\}$ y consecuentemente, como $\frac{A}{\mathfrak{m}}$ es un campo, por el caso I tenemos que $\frac{M}{\mathfrak{m}M} = \{0\}$ o $\frac{N}{\mathfrak{m}N} = \{0\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\frac{M}{\mathfrak{m}M} = \{0\}$, es decir que $M = \mathfrak{m}M$. Como M es finitamente generado y $\mathfrak{m} = \mathrm{Rad}(A)$, por el lema de Nakayama se concluye que $M = \{0_M\}$.

De esta forma, concluimos que $M = \{0_M\}$ o $N = \{0_N\}$.

2. $\Rightarrow$ 3. Obvio.

3. $\Rightarrow$ 1. Supongamos que $\frac{M \otimes_A N}{\mathfrak{m}(M \otimes_A N)} = \{0\}$, es decir, que $M \otimes_A N = \mathfrak{m}(M \otimes_A N)$. Como M y N son finitamente generados se sigue que $M \otimes_A N$ es finitamente generado, además, como A es local se sigue que $\mathfrak{m} = \mathrm{Rad}(A)$. Así, por el lema de Nakayama se concluye que $M \otimes_A N = \{0\}$. ❏

5. Anillos y Módulos Graduados

En esta sección nos encargaremos de estudiar a los anillos y los módulos graduados. Después de definir estos objetos y de estudiar sus propiedades principales, en el segundo apartado realizaremos un estudio de la localización en anillos y módulos graduados, en especial, estaremos interesados en aquellos conjuntos multiplicativos formados por elementos homogéneos. Para concluir con esta sección, estudiaremos el producto tensorial de módulos graduados sobre un anillo graduado.

5.1. Nociones Básicas. En este apartado vamos a definir a los anillos graduados, a los módulos graduados y estudiaremos sus propiedades principales. Comenzaremos definiendo a los anillos graduados.

Definición A.25. Un anillo A es *graduado* si existe una familia $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ de subgrupos abelianos de A tal que

1. $A = \displaystyle\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$.
2. Para cualesquier $r, s \in \mathbb{Z}_+$ se cumple que $A_r \times A_s \subseteq A_{r+s}$.

Para cualquier $n \in \mathbb{Z}_+$, A_n es la *componente homogénea de grado n* y cada elemento de A_n es un *elemento homogéneo de grado n*.

De acuerdo con la definición anterior, una de las condiciones necesarias para que un anillo A sea graduado es que exista una familia $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de subgrupos abelianos de A tal que $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$. Dicha igualdad es en el sentido de que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \displaystyle\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n & \to & A \\ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}_+} & \mapsto & x_0 + x_1 + \cdots + x_n \end{array}$$

es un isomorfismo. Gracias a este hecho, se tiene que cada elemento de A tiene una descomposición única en elementos homogéneos.

Ejemplo A.26. Sean A un anillo, $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_n$ variables sobre A. El anillo de polinomios $A[x_1, \ldots, x_n]$ en n variables sobre A es un anillo graduado considerando a A_r como el conjunto de todos los polinomios homogéneos de grado r para cada $r \in \mathbb{Z}_+$.

El siguiente resultado enlista las propiedades principales de un anillo graduado.

Proposición A.27. *Sea $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$ un anillo graduado. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Ningún elemento de A tiene dos grados diferentes a la vez salvo 0_A.*
2. *0_A es el único elemento que tiene todos los grados.*
3. *La componente homogénea de grado cero A_0 es un anillo.*
4. *A_n es un A_0-módulo para todo $n \in \mathbb{N}$.*
5. *$A_+ = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es un ideal de A y se llama el* ideal irrelevante.

Demostración.

1. Supongamos que existe $x \in A$ tal que $x \in A_i \cap A_j$ para ciertos $i, j \in \mathbb{Z}_+$ y sin pérdida de generalidad supongamos que $i < j$. Al escribir a x en su descomposición de elementos homogéneos tenemos que

$$x = \underbrace{0_A}_{\in A_i} + \underbrace{x}_{\in A_j} = \underbrace{x}_{\in A_i} + \underbrace{0_A}_{\in A_j}.$$

Luego, por la unicidad en la descomposición de los elementos de A podemos igualar componente a componente, así, tenemos que $0_A = x \in A_i$ y $x = 0_A \in A_j$. Por lo tanto, $x = 0_A$.

2. Puesto que A_n es un subgrupo abeliano de A para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ se tiene que $0_A \in A_n$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}_+$. Además, por el enunciado anterior sabemos que ningún elemento de A salvo 0_A tiene dos grados distintos a la vez.

3. Observemos que A_0 hereda las operaciones de suma y producto definidas en el anillo A y por hipótesis sabemos que $(A_0, +)$ es un grupo abeliano. La cerradura del producto de elementos de A_0 se da gracias a la hipótesis de que $A_0 \times A_0 \subseteq A_0$, además, puesto que el producto que consideramos es el heredado por A tenemos de manera inmediata que es asociativo y que es distributivo con respecto a la suma. Lo único que nos resta por verificar es que 1_A está en A_0. Puesto que 1_A es un elemento de A, dicho elemento tiene una descomposición en elementos homogéneos

$$1_A = x_0 + x_1 + \cdots + x_r$$

para algún $r \in \mathbb{Z}_+$ y para algunos $x_0, \ldots, x_r \in A$ de modo que $x_j \in A_j$ para todo $j \in \{0, \ldots, r\}$. Sea $k \in \{0, \ldots, r\}$. Obsérvese que tenemos la siguiente igualdad:

$$x_k = 1_A x_k = (x_0 + x_1 + \cdots + x_r)x_k = \underbrace{x_0 x_k}_{\in A_k} + \underbrace{x_1 x_k}_{\in A_{k+1}} + \cdots + \underbrace{x_r x_k}_{\in A_{k+r}}.$$

Puesto que la descomposición en elementos homogéneos es única se sigue que $x_0 x_k = x_k$ y que $x_j x_k = 0_A$ para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$. De este modo, se sigue que

$$1_A = x_0 + x_1 + \cdots + x_r = x_0 x_0 + x_0 x_1 + \cdots + x_0 x_r = x_0(x_0 + x_1 + \cdots + x_r) = x_0.$$

La ecuación anterior nos dice que $x_0 = 1_A$ y esto implica que $1_A \in A_0$. Por lo tanto, la componente homogénea de grado cero A_0 es un anillo.

4. Sea $s \in \mathbb{N}$. Puesto que A es un anillo graduado, para todo $r \in \mathbb{Z}_+$ se cumple que $A_r \times A_s \subseteq A_{r+s}$. Particularmente lo anterior se satisface para $r = 0$, es decir, tenemos que $A_0 \times A_s \subseteq A_s$. Luego, como A_0 es un anillo se concluye que A_s es un A_0-módulo.

5. Comenzaremos por mostrar que $(A_+, +)$ es un subgrupo abeliano de $(A, +)$. Es claro que 0_A es un elemento de A_+ ya que $A_1 \subseteq A_+$ y $0_A \in A_1$.

Sean $\alpha, \beta \in A_+$. Vamos a mostrar que $\alpha - \beta \in A_+$. Como α y β en particular son elementos de A, consideramos las descomposiciones en elementos homogéneos de α y β:

$$\alpha = a_1 + \cdots + a_r \quad \text{y} \quad \beta = b_1 + \cdots + b_r,$$

donde $r \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r \in A$ y además $a_i, b_i \in A_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. Obsérvese que sin pérdida de generalidad podemos suponer α y β tienen el mismo número de elementos en su descomposición. Luego,

$$\begin{aligned}\alpha-\beta &= (a_1+\cdots+a_r)-(b_1+\cdots+b_r)\\ &= a_1+\cdots+a_r-b_1-\cdots-b_r\\ &= \underbrace{(a_1-b_1)}_{A_1}+\cdots+\underbrace{(a_r-b_r)}_{A_r}.\end{aligned}$$

De este modo, tenemos que $\alpha-\beta\in A_+$. Por otro lado, sea $\lambda\in A$. Vamos a mostrar que $\lambda\alpha\in A_+$. Como λ es un elemento de A podemos considerar su descomposición en elementos homogéneos:

$$\lambda=c_0+c_1+\cdots+c_s$$

donde $s\in\mathbb{Z}_+$, $c_0,\ldots,c_s\in A$ y además $c_j\in A_j$ para todo $j\in\{0,\ldots,s\}$. Luego,

$$\begin{aligned}\lambda\alpha &= (c_0+c_1+\cdots+c_s)(a_1+\cdots+a_r)\\ &= (c_0+c_1+\cdots+c_s)a_1+\cdots+(c_0+c_1+\cdots+c_s)a_r\\ &= \underbrace{c_0a_1}_{\in A_1}+\underbrace{c_1a_1}_{\in A_2}+\cdots+\underbrace{c_sa_1}_{\in A_{s+1}}+\cdots+\underbrace{c_0a_r}_{\in A_r}+\underbrace{c_1a_r}_{\in A_{r+1}}+\cdots+\underbrace{c_sa_r}_{\in A_{r+s}}.\end{aligned}$$

De este modo tenemos que $\lambda\alpha\in A_+$. Por lo tanto, concluimos que A_+ es un ideal de A. ❑

Ahora vamos a dar paso a la definición de módulo graduado sobre un anillo graduado.

Definición A.28. Sea M un módulo sobre un anillo graduado $A=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}A_n$. M es *graduado sobre A* si existe una familia $(M_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ de subgrupos abelianos de M tales que

1. $M=\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}_+}M_k$.
2. Para cualesquier $r,s\in\mathbb{Z}_+$ se cumple que $A_r\times M_s\subseteq M_{r+s}$.

Para cualquier $n\in\mathbb{Z}_+$, M_n es la *componente homogénea de grado n* y cada elemento de M_n es un *elemento homogéneo de grado n*.

Por argumentos similares a los usados en anillos graduados, cada elemento de un módulo graduado $M=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}M_n$ tiene una descomposición única como suma de elementos homogéneos.

El siguiente resultado enuncia las propiedades principales de módulos graduados. Por la similitud en la demostración de estas propiedades con las de anillos graduados omitiremos su demostración.

Proposición A.29. *Sea $M=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}M_n$ un módulo graduado sobre un anillo graduado $A=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}A_n$. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Ningún elemento de M tiene dos grados diferentes a la vez salvo 0_M.*

2. 0_M *es el único elemento que tiene todos los grados.*
3. M_n *es un* A_0*-módulo para cada* $n \in \mathbb{Z}_+$.

5.2. Localización de Anillos y Módulos Graduados. Puesto que un módulo graduado sobre un anillo graduado sigue siendo un módulo, podemos realizar la localización en algún conjunto multiplicativo del anillo sobre el que se encuentra. Ahora bien, una pregunta interesante es cuándo al módulo obtenido de localizar se le puede dotar con una graduación. En esta sección nos daremos a la tarea de dar una respuesta esta interrogante.

Comenzaremos por dar una respuesta a la interrogante planteada en el caso en que realizamos la localización en un anillo graduado.

Teorema A.30. *Sea* $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$ *un anillo graduado. Si* S *es un conjunto multiplicativo de* A *de modo que cada elemento de* S *es homogéneo, entonces* $S^{-1}A$ *es un anillo graduado con la graduación* $((S^{-1}A)_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ *donde para cada* $m \in \mathbb{Z}$ *se define*

$$(S^{-1}A)_m = \left\{ \frac{a}{s} \,\middle|\, a \in A^h,\ s \in S \text{ y } \mathrm{grad}(a) - \mathrm{grad}(s) = m \right\}.$$

Demostración. En primer lugar, vamos a mostrar que $(S^{-1}A)_m$ es un subgrupo abeliano de $S^{-1}A$ para cada $m \in \mathbb{Z}$. Sea $m \in \mathbb{Z}$.

- Claramente $0_{S^{-1}A}$ es un elemento de $(S^{-1}A)_m$ pues $0_{S^{-1}A} = \dfrac{0_A}{1_A}$ y 0_A tiene cualquier grado.
- Sean $a, b \in A^h$ y $s, t \in S$ tales que $\mathrm{grad}(a) - \mathrm{grad}(s) = m$ y $\mathrm{grad}(b) - \mathrm{grad}(t) = m$. Sabemos que $\dfrac{a}{s} - \dfrac{b}{t} = \dfrac{ta - sb}{st}$, además, observemos que $ta - sb$ es un elemento homogéneo de grado $\mathrm{grad}(s) + \mathrm{grad}(t) + m$ y st es un elemento homogéneo de grado $\mathrm{grad}(s) + \mathrm{grad}(t)$. De esta forma, como

$$\mathrm{grad}(ta - sb) - \mathrm{grad}(st) = \mathrm{grad}(s) + \mathrm{grad}(t) + m - \mathrm{grad}(s) - \mathrm{grad}(t) = m,$$

  se sigue que $\dfrac{ta - sb}{st}$ es un elemento de $(S^{-1}A)_m$.

De este modo, concluimos que $(S^{-1}A)_m$ es un subgrupo abeliano de $S^{-1}A$.

Ahora, consideremos $m, n \in \mathbb{Z}$. Vamos a probar que $(S^{-1}A)_m \times (S^{-1}A)_n \subseteq (S^{-1}A)_{m+n}$. Sean $a, b \in A^h$ y $s, t \in S$ de modo que $\mathrm{grad}(a) - \mathrm{grad}(s) = m$ y $\mathrm{grad}(b) - \mathrm{grad}(t) = n$. Sabemos que $\dfrac{a}{s} \cdot \dfrac{b}{t} = \dfrac{ab}{st}$, además, ab es un elemento homogéneo de grado $m + \mathrm{grad}(s) + n + \mathrm{grad}(t)$ y st es un elemento homogéneo de grado $\mathrm{grad}(s) + \mathrm{grad}(t)$. Luego, como

$$\mathrm{grad}(ab) - \mathrm{grad}(st) = m + \mathrm{grad}(s) + n + \mathrm{grad}(t) - \mathrm{grad}(s) - \mathrm{grad}(t) = m + n,$$

se sigue que $\dfrac{ab}{st}$ es un elemento de $(S^{-1}A)_{m+n}$ y esto implica que $(S^{-1}A)_m \times (S^{-1}A)_n \subseteq (S^{-1}A)_{m+n}$.

Lo siguiente que haremos será mostrar que $S^{-1}A = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(S^{-1}A)_n$. La contención $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(S^{-1}A)_n \subseteq S^{-1}A$ es clara así que sólo resta mostrar la otra contención. Sean $a \in A$ y $s \in S$, consideremos al elemento $\frac{a}{s}$ de $S^{-1}A$. Como $a \in A$, se sigue que existen $m \in \mathbb{Z}_+$ y $a_0, a_1, \ldots, a_m \in A$ tales que $a = a_0 + a_1 + \cdots + a_m$ de modo que $a_i \in A_i$ para cada $i \in \{0, \ldots, m\}$. De esta forma, se sigue que

$$\frac{a}{s} = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_m}{s} = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s} + \cdots + \frac{a_m}{s}.$$

Luego, como tenemos que $\frac{a_j}{s}$ es un elemento de $(S^{-1}A)_{j-\operatorname{grad}(s)}$ para cada $j \in \{0, \ldots, m\}$, se sigue que $\frac{a}{s} \in \sum_{n\in\mathbb{Z}}(S^{-1}A)_n$. Así, concluimos que $S^{-1}A = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(S^{-1}A)_n$.

Lo único que nos falta probar es que la descomposición de cualquier elemento es única. Sea $z \in S^{-1}A$. Sin pérdida de generalidad supongamos que existen elementos $s, t \in S$ del mismo grado, $m \in \mathbb{Z}_+$ y $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_m \in A$ con $a_j, b_j \in A_j$ para cada $j \in \{0, \ldots, m\}$ tales que

$$z = \frac{a_0}{s} + \cdots + \frac{a_m}{s} = \frac{b_0}{t} + \cdots + \frac{b_m}{t}.$$

De la igualdad anterior se sigue que

$$\frac{ta_0 + \cdots + ta_m}{1_A} = \frac{sb_0 + \cdots + sb_m}{1_A}$$

y consecuentemente existe $u \in S$ de modo que $u(ta_0 + \cdots + ta_m) = u(sb_0 + \cdots + sb_m)$. Sea $i \in \{0, \ldots, m\}$. Como la descomposición en A es única se sigue que $uta_i = usb_i$, esto implica que $\frac{ta_i}{1_A} = \frac{sb_i}{1_A}$ y de esta forma se tiene que

$$\frac{a_i}{s} = \frac{1_A}{st} \cdot \frac{ta_i}{1_A} = \frac{1_A}{st} \cdot \frac{sb_i}{1_A} = \frac{b_i}{t}.$$

Así, como $\frac{a_i}{s} = \frac{b_i}{t}$ y el índice i fue arbitrario en el conjunto $\{0, \ldots, m\}$, se concluye que la descomposición de z en $S^{-1}A$ es única.

Por lo tanto, de manera definitiva concluimos que $S^{-1}A$ es un anillo graduado con la graduación $((S^{-1}A)_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. ❏

Lo que realizaremos a continuación es aplicar el teorema anterior a los conjuntos multiplicativos que son de nuestro interés. Sea $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$ un anillo graduado.

Consideremos un ideal primo $\mathfrak{p}$ de A. Observemos que el conjunto $(A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h$ es un conjunto multiplicativo de A:

- Sabemos que 1_A es un elemento de grado cero, así que $1_A \in A^h$. Por otro lado, como $A\backslash\mathfrak{p}$ es un conjunto multiplicativo se tiene que $1_A \in A\backslash\mathfrak{p}$. De esta forma se tiene que $1_A \in (A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h$.

- Sean $s, t \in (A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h$. Como s y t son elementos del conjunto multiplicativo $A\backslash\mathfrak{p}$ se sigue que $st \in A\backslash\mathfrak{p}$. Luego, como s y t son elementos homogéneos se tiene que st también es un elemento homogéneo y con ello concluimos que $st \in (A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h$.

Por lo tanto, tenemos que $(A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h$ es un conjunto multiplicativo de A que está formado por elementos homogéneos. Del teorema anterior se tiene de manera inmediata que $((A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h)^{-1}A$ es un anillo graduado y consecuentemente su componente homogénea de grado cero que denotaremos por $A_{(\mathfrak{p})}$ es un subanillo de dicho anillo, es decir, el conjunto

$$A_{(\mathfrak{p})} = \left\{\frac{a}{t} \;\Big|\; a \in A^h,\, t \in (A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h \text{ y } \mathrm{grad}(a) = \mathrm{grad}(t)\right\}$$

es un subanillo de $((A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h)^{-1}A$. Más aún, dicho anillo es un anillo local: en efecto, vamos a mostrar que el conjunto de los elementos que no son unidades en $A_{(\mathfrak{p})}$ es un ideal de $A_{(\mathfrak{p})}$. En primer lugar vamos a determinar a las unidades de $A_{(\mathfrak{p})}$. Afirmamos que

$$\mathcal{U}(A_{(\mathfrak{p})}) = \left\{\frac{a}{s} \;\middle|\; a, s \in (A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h \text{ y } \mathrm{grad}(a)\text{=}\mathrm{grad}(s)\right\}. \tag{5.1}$$

Si a y s son elementos de $(A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h$ del mismo grado, entonces $\frac{a}{s}$ es una unidad de $A_{(\mathfrak{p})}$: en efecto, claramente el inverso del elemento $\frac{a}{s}$ es $\frac{s}{a}$ y está en $A_{(\mathfrak{p})}$. Recíprocamente, sean $a \in A^h$ y $s \in (A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h$ elementos homogéneos del mismo grado de modo que $\frac{a}{s} \in \mathcal{U}(A_{(\mathfrak{p})})$. Así, existen $b \in A^h$ y $t \in (A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h$ elementos homogéneos del mismo grado tales que $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = 1_{A_{(\mathfrak{p})}}$. De esta forma, como $\frac{ab}{st} = \frac{1_A}{1_A}$ se sigue la existencia de $z \in (A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h$ de modo que $zab = zst$. Luego, la igualdad anterior junto con el hecho que $zst \notin \mathfrak{p}$ implican que $a \notin \mathfrak{p}$ y con ello concluimos que $\frac{a}{s}$ está en el conjunto deseado. Consecuentemente tenemos se satisface la igualdad 5.1 y por lo tanto tenemos que

$$A_{(\mathfrak{p})}\backslash\mathcal{U}(A_{(\mathfrak{p})}) = \left\{\frac{a}{s} \;\middle|\; a \in \mathfrak{p} \cap A^h,\, s \in (A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h \text{ y } \mathrm{grad}(a)\text{=}\mathrm{grad}(s)\right\}.$$

Por último, mostraremos que el conjunto anterior es un ideal de $A_{(\mathfrak{p})}$. Sean $a, b \in \mathfrak{p} \cap A^h$, $c \in A^h$ y $s, t, r \in (A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h$ de modo que $\mathrm{grad}(a) = \mathrm{grad}(s)$, $\mathrm{grad}(b) = \mathrm{grad}(t)$ y $\mathrm{grad}(c) = \mathrm{grad}(r)$. Puesto que

$$\frac{a}{s} - \frac{b}{t} = \frac{ta - sb}{st},$$
$$\frac{c}{r} \cdot \frac{a}{s} = \frac{ca}{rs},$$

y puesto que $ta - sb$ y ca son elementos de $\mathfrak{p}$ de modo que sus grados son iguales al grado de st y rs respectivamente, se sigue que $\frac{ta - sb}{st}$ y $\frac{ca}{rs}$ están en $A_{(\mathfrak{p})}\backslash\mathcal{U}(A_{(\mathfrak{p})})$. De esta forma, tenemos que $A_{(\mathfrak{p})}\backslash\mathcal{U}(A_{(\mathfrak{p})})$ es un ideal y por lo tanto concluimos que $A_{(\mathfrak{p})}$ es un anillo local. Lo que hemos realizado se puede resumir en el siguiente resultado:

Proposición A.31. *Con las notaciones anteriores, el anillo $A_{(\mathfrak{p})}$ es local de ideal maximal*

$$\mathfrak{m}_{A_{(\mathfrak{p})}} = \left\{\frac{a}{s}\,\middle|\, a \in \mathfrak{p} \cap A^h,\ s \in (A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h \text{ y } \mathrm{grad}(a){=}\mathrm{grad}(s)\right\}.$$

Por otro lado, consideremos un elemento f de A que no es nilpotente. De este modo, como el conjunto multiplicativo $\left\{f^n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}_+\right\}$ es un conjunto multiplicativo de A donde cada elemento es homogéneo, por el teorema anterior se sigue que A_f es un anillo graduado y con ello, tenemos que su componente homogénea de grado cero que denotaremos por $A_{(f)}$ es un subanillo de A_f, es decir, el conjunto

$$A_{(f)} = \left\{\frac{a}{f^s}\,\middle|\, a \in A^h,\ s \in \mathbb{Z}_+ \text{ y } \mathrm{grad}(a){=}s{\cdot}\mathrm{grad}(f)\right\}.$$

es un subanillo de A_f.

Lo que haremos a continuación es contestar nuestra interrogante en el caso en que trabajamos con módulos graduados. Si asumimos las mismas hipótesis asumidas en el caso de anillos graduados, entonces podemos obtener una respuesta análoga a la obtenida en dicho caso. El siguiente resultado nos hablará de este hecho de manera concreta y por la similitud de su demostración con la del Teorema A.30 omitiremos los detalles.

Teorema A.32. *Sea $M = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+} M_d$ un módulo graduado sobre un anillo graduado $A = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+} A_d$. Si S es un conjunto multiplicativo de A de modo que cada elemento de S es homogéneo, entonces $S^{-1}M$ es un módulo graduado sobre $S^{-1}A$ con la graduación $((S^{-1}M)_d)_{d\in\mathbb{Z}}$ donde para cada $d \in \mathbb{Z}$ se define*

$$(S^{-1}M)_d = \left\{\frac{m}{s}\,\middle|\, m \in M^h,\ s \in S \text{ y } \mathrm{grad}(m){-}\mathrm{grad}(s){=}d\right\}.$$

De nueva cuenta, lo que estudiaremos a continuación son los módulos que podemos obtener a partir de los conjuntos multiplicativos que son de nuestro interés. Sea $M = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+} M_d$ un módulo graduado sobre un anillo graduado $A = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+} A_d$.

Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. Sabemos que $(A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h$ es un conjunto multiplicativo de A que está formado por elementos homogéneos, de esta manera podemos construir el módulo graduado $((A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h)^{-1}M$ sobre el anillo graduado $((A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h)^{-1}A$. Así, como $((A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h)^{-1}M$ es un módulo graduado sobre $((A\backslash\mathfrak{p}) \cap A^h)^{-1}A$ se sigue que la componente homogénea de grado cero de dicho módulo que denotaremos por $M_{(\mathfrak{p})}$ es un $A_{(\mathfrak{p})}$-módulo.

Ahora consideremos un elemento homogéneo f de A que no es nilpotente. Como $\left\{f^n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}_+\right\}$ es un conjunto multiplicativo de A que está formado por elementos homogéneos, podemos construir el módulo graduado M_f sobre el anillo graduado A_f. De esta manera, como M_f es un módulo graduado sobre A_f se tiene que la componente homogénea de grado cero de dicho módulo que denotaremos por $M_{(f)}$ es un $A_{(f)}$-módulo.

5.3. Producto Tensorial de Módulos Graduados. Si consideramos una pareja de módulos graduados sobre un anillo graduado, puesto que en particular dichos módulos graduados son módulos, entonces podemos realizar su producto tensorial. Ahora bien, ¿el módulo obtenido al realizar el producto tensorial es un módulo graduado? Para concluir con este apéndice mostraremos que la respuesta a esta interrogante es afirmativa.

Vamos a fijar módulos graduados $M = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+} M_d$ y $N = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+} N_d$ sobre un anillo graduado $A = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+} A_d$. Vamos a dotar a $M \otimes_A N$ con una estructura de módulo graduado. Para cada $d \in \mathbb{Z}_+$ consideramos el siguiente subconjunto de $M \otimes_A N$:

$$(M \otimes_A N)_d = \left\langle \left\{ m \otimes n \,\middle|\, m \in M^h, n \in N^h \text{ y } \mathrm{grad}(m) + \mathrm{grad}(n) = d \right\} \right\rangle_A .$$

Claramente se tiene que $(M \otimes_A N)_d$ es un subgrupo de $M \otimes_A N$ para cualquier $d \in \mathbb{Z}_+$.

Ahora, observemos que para cualesquier $d, e \in \mathbb{Z}_+$ se tiene que $A_e \times (M \otimes_A N)_d \subseteq (M \otimes_A N)_{d+e}$: en efecto, sean $d, e \in \mathbb{Z}_+$, $a \in A_e$, $m \in M^h$ y $n \in N^h$ tales que $\mathrm{grad}(m) + \mathrm{grad}(n) = d$. Sabemos que $a(m \otimes n) = (am) \otimes n$, luego, como $\mathrm{grad}(am) = \mathrm{grad}(m) + e$ se sigue que $(am) \otimes n$ es un elemento de $(M \otimes_A N)_{d+e}$. Por lo tanto, tenemos que $A_e \times (M \otimes_A N)_d \subseteq (M \otimes_A N)_{d+e}$.

De esta forma, tenemos que $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+}(M \otimes_A N)_d$ es un módulo graduado sobre A. Lo que haremos a continuación es construir un A-isomorfismo entre $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+}(M \otimes_A N)_d$ y $M \otimes_A N$, de esta manera, podremos dotar a $M \otimes_A N$ con la estructura de módulo graduado que posee $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+}(M \otimes_A N)_d$. Consideramos la siguiente asignación:

$$\begin{aligned} \varphi : \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+}(M \otimes_A N)_d &\rightarrow M \otimes_A N \\ \sum_{i\in\mathbb{Z}_+} x_i &\mapsto \sum_{i\in\mathbb{Z}_+} x_i \end{aligned}$$

Es claro que esta es una aplicación bien definida pues dos elementos de la suma directa son iguales si y sólo si son iguales coordenada a coordenada. Ahora, probaremos que φ es una aplicación A-lineal: sean $\sum_{i\in\mathbb{Z}_+} x_i$ y $\sum_{i\in\mathbb{Z}_+} y_i$ elementos de $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+}(M \otimes_A N)_d$ y sin pérdida de generalidad sean λ y μ elementos homogéneos de A,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda \cdot \sum_{i\in\mathbb{Z}_+} x_i + \mu \cdot \sum_{i\in\mathbb{Z}_+} y_i) &= \varphi(\sum_{i\in\mathbb{Z}_+} \lambda x_i + \mu y_i) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}_+} \lambda x_i + \mu y_i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda \cdot \sum_{i\in\mathbb{Z}_+} x_i + \mu \cdot \sum_{i\in\mathbb{Z}_+} y_i \\
&= \lambda \cdot \varphi(\sum_{i\in\mathbb{Z}_+} x_i) + \mu \cdot \varphi(\sum_{i\in\mathbb{Z}_+} y_i).
\end{aligned}
$$

Ahora bien, sabemos que un elemento de $M \otimes_A N$ es una suma finita de generadores, además, puesto que cada elemento de M y N tiene una descomposición en elementos homogéneos, de manera general tenemos que un elemento de $M \otimes_A N$ es de la forma

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} m_{i_j} \otimes n_{i_k}$$

donde cada una de las sumas anteriores es una suma finita. De esta forma, vamos a definir la siguiente asignación:

$$
\begin{array}{rccc}
\psi : & M \otimes_A N & \to & \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+} (M \otimes_A N)_d \\
& \sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} m_{i_j} \otimes n_{i_k} & \mapsto & \sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} m_{i_j} \otimes n_{i_k}
\end{array}
$$

Lo que mostraremos a continuación es que φ y ψ son inversas, comenzaremos mostrando que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+}(M\otimes_A N)_d}$: sea $\sum_{i\in\mathbb{Z}_+} x_i$ un elemento de $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+}(M \otimes_A N)_d$:

$$\psi \circ \varphi(\sum_{i\in\mathbb{Z}_+} x_i) = \psi(\sum_{i\in\mathbb{Z}_+} x_i) = \sum_{i\in\mathbb{Z}_+} x_i.$$

Recíprocamente, mostraremos que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{M\otimes_A N}$: sea $\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} m_{i_j} \otimes n_{i_k}$ un elemento de $M \otimes_A N$:

$$\varphi \circ \psi(\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} m_{i_j} \otimes n_{i_k}) = \varphi(\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} m_{i_j} \otimes n_{i_k}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} m_{i_j} \otimes n_{i_k}.$$

De esta forma, se sigue que ψ es una aplicación A-lineal, más aún, es un A-isomorfismo. Consecuentemente, tenemos $M \otimes_A N$ es un módulo graduado sobre el anillo A. De esto que hemos realizado se obtiene la siguiente proposición:

Proposición A.33. *Con las notaciones anteriores, $M \otimes_A N$ es un módulo graduado sobre A con la graduación $((M \otimes_A N)_d)_{d\in\mathbb{Z}_+}$.*

De manera particular, vamos a estar interesados en el siguiente caso: consideremos a f un elemento homogéneo de A de grado positivo, digamos $\mathrm{grad}(f) = e$. Consideramos al módulo graduado $M \otimes_A N$ sobre A y vamos a realizar la localización de dicho módulo en el conjunto multiplicativo $\left\{f^n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}_+\right\}$ para obtener al módulo graduado $(M \otimes_A N)_f$; luego, vamos a considerar la componente homogénea de grado cero $(M \otimes_A N)_{(f)}$ de dicho módulo graduado. Por otro lado, podemos considerar las componentes homogéneas de grado cero $M_{(f)}$ y $N_{(f)}$ de M_f y N_f respectivamente y después podemos construir al $A_{(f)}$-módulo $M_{(f)} \otimes_{A_{(f)}} N_{(f)}$. Lo que haremos a continuación es construir una aplicación natural $A_{(f)}$-lineal entre los módulos $M_{(f)} \otimes_{A_{(f)}} N_{(f)}$ y $(M \otimes_A N)_{(f)}$. Comenzaremos definiendo la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rcl} \omega_f^- : M_{(f)} \times N_{(f)} & \to & (M \otimes_A N)_{(f)} \\ \left(\dfrac{m}{f^s}, \dfrac{n}{f^t}\right) & \mapsto & \dfrac{m \otimes n}{f^{s+t}} \end{array}$$

Vamos a mostrar que ω_f^- es una aplicación bien definida: sean $s, t \in \mathbb{Z}_+$, $m \in M_{es}$ y $n \in N_{et}$. Puesto que

$$\mathrm{grad}(m \otimes n) = \mathrm{grad}(m) + \mathrm{grad}(n) = es + et = e(s + t) = \mathrm{grad}(f^{s+t})$$

tenemos que $\dfrac{m \otimes n}{f^{s+t}}$ es un elemento de $(M \otimes_A N)_{(f)}$. Ahora, sean $s', t' \in \mathbb{Z}_+$, $m' \in M_{es'}$ y $n' \in N_{et'}$ tales que $\left(\dfrac{m}{f^s}, \dfrac{n}{f^t}\right) = \left(\dfrac{m'}{f^{s'}}, \dfrac{n'}{f^{t'}}\right)$. Las igualdades $\dfrac{m}{f^s} = \dfrac{m'}{f^{s'}}$ y $\dfrac{n}{f^t} = \dfrac{n'}{f^{t'}}$ implican que existen $u, v \in \mathbb{Z}_+$ de modo que $f^u f^{s'} m = f^u f^s m'$ y $f^v f^{t'} n = f^v f^t n'$. De esta forma, tenemos la igualdad

$$(f^u f^{s'} m) \otimes (f^v f^{t'} n) = (f^u f^s m') \otimes (f^v f^t n'),$$

es decir, obtenemos que

$$f^{u+v} f^{s'+t'}(m \otimes n) = f^{u+v} f^{s+t}(m' \otimes n').$$

Consecuentemente se satisface la igualdad $\dfrac{m \otimes n}{f^{s+t}} = \dfrac{m' \otimes n'}{f^{s'+t'}}$ en $(M \otimes_A N)_{(f)}$ y por lo tanto la aplicación ω_f^- está bien definida.

A continuación mostraremos que la aplicación ω_f^- es una aplicación $A_{(f)}$-bilineal. Consideremos $s, s', t, u, v \in \mathbb{Z}_+$, $m \in M_{es}$, $m' \in M_{es'}$, $n \in N_{et}$, $a \in A_{eu}$ y $b \in A_{ev}$.

$$\begin{aligned} \omega_f^-\left(\frac{a}{f^u} \cdot \frac{m}{f^s} + \frac{b}{f^v} \cdot \frac{m'}{f^{s'}}, \frac{n}{f^t}\right) &= \omega_f^-\left(\frac{f^{v+s'} am + f^{u+s} bm'}{f^{u+s+v+s'}}, \frac{n}{f^t}\right) \\ &= \frac{(f^{v+s'} am + f^{u+s} bm') \otimes n}{f^{u+s+v+s'+t}} \\ &= \frac{(f^{v+s'} am) \otimes n}{f^{u+s+v+s'+t}} + \frac{(f^{u+s} bm') \otimes n}{f^{u+s+v+s'+t}} \\ &= \frac{a}{f^u} \cdot \frac{m \otimes n}{f^{s+t}} + \frac{b}{f^v} \cdot \frac{m' \otimes n}{f^{s'+t}} \\ &= \frac{a}{f^u} \cdot \omega_f^-\left(\frac{m}{f^s}, \frac{n}{f^t}\right) + \frac{b}{f^v} \cdot \omega_f^-\left(\frac{m'}{f^{s'}}, \frac{n}{f^t}\right). \end{aligned}$$

La linealidad en la segunda coordenada se muestra de manera análoga. Por lo tanto, por la propiedad universal del producto tensorial existe una aplicación $A_{(f)}$-lineal entre $M_{(f)} \otimes_{A_{(f)}} N_{(f)}$ y $(M \otimes_A N)_{(f)}$

definida en los generadores de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} \omega_f : M_{(f)} \otimes_{A_{(f)}} N_{(f)} & \to & (M \otimes_A N)_{(f)} \\ \dfrac{m}{f^s} \otimes \dfrac{n}{f^t} & \mapsto & \dfrac{m \otimes n}{f^{s+t}} \end{array}$$

De esta forma tenemos el siguiente resultado:

Proposición A.34. *Con las notaciones anteriores, existe una aplicación natural $A_{(f)}$-lineal ω_f entre $M_{(f)} \otimes_{A_{(f)}} N_{(f)}$ y $(M \otimes_A N)_{(f)}$.*

En general la aplicación anterior no es un isomorfismo, sin embargo, vamos a mostrar si f es de grado 1 entonces ω_f sí lo es. Supongamos que $f \in A_1$. Necesitaremos la ayuda del siguiente lema para mostrar este hecho.

Lema A.35. *Sea $P = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+} P_d$ un módulo graduado sobre un anillo graduado $B = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+} B_d$. Si $h \in B_1$, entonces existe un homomorfismo de anillos entre B y $B_{(h)}$ y existe una aplicación B-lineal entre P y $P_{(h)}$.*

Demostración. En primer lugar mostraremos la existencia del homomorfismo de anillos entre B y $B_{(h)}$. Consideramos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rcl} \varsigma_{B_{(h)}} : B & \to & B_{(h)} \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} b_i & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{b_i}{h^i} \end{array}$$

Es claro que $\varsigma_{B_{(h)}}$ es una aplicación bien definida pues la descomposición de cada elemento de B es única. A continuación probaremos que $\varsigma_{B_{(h)}}$ es un homomorfismo de anillos: sea $n \in \mathbb{Z}_+$ y sean a_i y b_i elementos de B_i para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$.

$$\begin{aligned} \varsigma_{B_{(h)}}(\sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} b_i) &= \varsigma_{B_{(h)}}(\sum_{i=0}^{n} a_i + b_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i + b_i}{h^i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{h^i} + \sum_{i=0}^{n} \frac{b_i}{h^i} \\ &= \varsigma_{B_{(h)}}(\sum_{i=0}^{n} a_i) + \varsigma_{B_{(h)}}(\sum_{i=0}^{n} b_i). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varsigma_{B_{(h)}}(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \sum_{j=0}^{n} b_j) &= \varsigma_{B_{(h)}}(\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} a_i b_j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i b_j}{h^{i+j}} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i b_j}{h^{i+j}} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{h^i} \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{b_j}{h^j} \\
&= \varsigma_{B_{(h)}}(\sum_{i=0}^{n} a_i) \cdot \varsigma_{B_{(h)}}(\sum_{j=0}^{n} b_j).
\end{aligned}
$$

$$
\varsigma_{B_{(h)}}(1_B) = \frac{1_B}{1_B} = 1_{B_{(h)}}.
$$

De esta forma, concluimos que $\varsigma_{B_{(h)}}$ es un homomorfismo de anillos entre B y $B_{(h)}$. Obsérvese que dicho homomorfismo otorga a $P_{(h)}$ una estructura de B-módulo.

En segundo lugar procederemos con la construcción de la aplicación B-lineal entre P y $P_{(h)}$. Consideramos la siguiente asignación:

$$
\begin{aligned}
\varsigma_{P_{(h)}} : \quad P \quad &\to \quad P_{(h)} \\
\sum_{i=0}^{n} x_i \quad &\mapsto \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{h^i}
\end{aligned}
$$

De nueva cuenta es claro que $\varsigma_{P_{(h)}}$ es una aplicación bien definida pues la descomposición de cada elemento de P es única. Ahora, probaremos que $\varsigma_{P_{(h)}}$ es una aplicación B-lineal: sea $n \in \mathbb{Z}_+$ y sean $x_i, y_i \in P_i$ y $a_i, b_i \in B_i$ para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$.

$$
\begin{aligned}
\varsigma_{P_{(h)}}(\sum_{j=0}^{n} a_j \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{n} b_j \cdot \sum_{i=0}^{n} y_i) &= \varsigma_{P_{(h)}}(\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} a_j x_i + b_j y_i) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{n} a_j x_i + b_j y_i}{h^{i+j}} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} \frac{a_j x_i + b_j y_i}{h^{i+j}} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} \frac{a_j}{h^j} \cdot \frac{x_i}{h^i} + \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} \frac{b_j}{h^j} \cdot \frac{y_i}{h^i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{h^j} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{h^i} + \sum_{j=0}^{n} \frac{b_j}{h^j} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{h^i} \\
&= a \cdot \varsigma_{P_{(h)}}(\sum_{i=0}^{n} x_i) + b \cdot \varsigma_{P_{(h)}}(\sum_{i=0}^{n} y_i).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, concluimos que $\varsigma_{P_{(h)}}$ es una aplicación B-lineal. ❏

Una vez con el lema anterior, de manera inmediata podemos construir una aplicación A-lineal entre $M \otimes_A N$ y $M_{(f)} \otimes_{A_{(f)}} N_{(f)}$ definida en los generadores de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\vartheta : M \otimes_A N &\rightarrow M_{(f)} \otimes_{A_{(f)}} N_{(f)} \\
m \otimes n &\mapsto \varsigma_{M_{(f)}}(m) \otimes \varsigma_{N_{(f)}}(n)
\end{aligned}
$$

Con lo que acabamos de realizar ya estamos listos para mostrar que ω_f es un $A_{(f)}$-isomorfismo. Comenzaremos mostrando que ω_f es una aplicación inyectiva, para ello, será suficiente con mostrar que la inyectividad se satisface en los generadores. Sean $s, t \in \mathbb{Z}_+$, $m \in M_s$ y $n \in N_t$ tales que $\omega_f\left(\frac{m}{f^s} \otimes \frac{n}{f^t}\right) = 0_{(M \otimes_A N)_{(f)}}$. De esta forma, como $\frac{m \otimes n}{f^{s+t}} = \frac{0_{M \otimes_A N}}{1_A}$ se sigue que existe $r \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^r(m \otimes n) = 0_{M \otimes_A N}$, es decir, tal que $(f^r m) \otimes n = 0_{M \otimes_A N}$. De esta forma, se sigue que $\vartheta((f^r m) \otimes n) = 0_{M_{(f)} \otimes_{A_{(f)}} N_{(f)}}$, es decir que $\frac{f^r m}{f^{r+s}} \otimes \frac{n}{f^t} = 0_{M_{(f)} \otimes_{A_{(f)}} N_{(f)}}$. Por lo tanto, concluimos que ω_f es inyectiva.

A continuación mostraremos que ω_f es sobreyectiva, para ello, será suficiente con mostrar la sobreyectividad para los generadores de las componentes homogéneas de $M \otimes_A N$ sobre una potencia de f. Sean $k, s \in \mathbb{Z}_+$ con $k \geq s$, $m \in M_s$ y $n \in N_{k-s}$. Consideremos al elemento $\frac{m \otimes n}{f^k}$ de $(M \otimes_A N)_{(f)}$. Observemos que $\frac{m}{f^s}$ y $\frac{n}{f^{k-s}}$ son elementos de $M_{(f)}$ y $N_{(f)}$ respectivamente, además, tenemos que se satisface la siguiente igualdad:

$$
\omega_f\left(\frac{m}{f^s} \otimes \frac{n}{f^{k-s}}\right) = \frac{m \otimes n}{f^k}.
$$

Por lo tanto, concluimos que ω_f es una aplicación sobreyectiva.

Todo esto que hemos realizado culmina en el siguiente resultado con el cual daremos por concluido este apéndice.

PROPOSICIÓN A.36. *Con las notaciones anteriores, si f es un elemento homogéneo de grado 1, entonces ω_f es un $A_{(f)}$-isomorfismo entre los módulos $M_{(f)} \otimes_{A_{(f)}} N_{(f)}$ y $(M \otimes_A N)_{(f)}$.*

Apéndice B

Módulos, Anillos y Espacios Noetherianos

En este apéndice nos daremos a la tarea de estudiar objetos del Álgebra y de la Topología que tienen el adjetivo "noetheriano". La primera sección de encarga de definir y de estudiar las propiedades de los módulos noetherianos. Luego, en la segunda sección definiremos los anillos noetherianos y además de los resultados de la sección anterior obtendremos resultados que son propios de anillos noetherianos. En la tercera y última sección llevaremos nuestro estudio hacia la Topología para definir a los espacios topológicos noetherianos y revisar sus propiedades principales, en particular, veremos una relación entre los anillos noetherianos y los espacios noetherianos.

1. Módulos Noetherianos

En esta sección vamos a definir y a estudiar las propiedades de una clase especial de módulos: los módulos noetherianos. Antes de definir la noción de módulo noetheriano vamos a mostrar el siguiente resultado general:

LEMA B.1. *Sea* $(\Sigma, \leq)$ *un conjunto ordenado. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Cada sucesión creciente de elementos de* Σ *es estable.*
2. *Cada subconjunto no vacío de elementos de* Σ *tiene un elemento maximal.*

DEMOSTRACIÓN.

1. $\Rightarrow$ 2. Sea Γ un subconjunto no vacío de elementos de Σ. Mostraremos que Γ tiene un elemento maximal por contradicción. Supongamos que Γ no tiene elementos maximales. Como Γ no es vacío existe $x_0 \in \Gamma$. Puesto que x_0 no es un elemento maximal existe $x_1 \in \Gamma$ tal que $x_0 < x_1$. Luego, como x_1 no es un elemento maximal se sigue que existe $x_2 \in \Gamma$ tal que $x_1 < x_2$. Continuando de esta manera, construimos la sucesión $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ de elementos de Σ que no es estable lo cual contradice la hipótesis.

2. $\Rightarrow$ 1. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de elementos de Σ. Luego, como el conjunto $\Lambda = \left\{x_n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ es un subconjunto de Σ que no es vacío, por hipótesis dicho conjunto tiene un elemento maximal, así, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $y \in \Lambda$ con $x_m \leq y$ se tiene que $y = x_m$. Sea $r \in \mathbb{N}$ de modo que $r \geq m$. Puesto que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente se tiene que $x_m \leq x_r$, luego, como

$x_r \in \Lambda$, por la maximalidad de x_m se sigue que $x_r = x_m$. Por lo tanto, concluimos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estable. ❑

Definición B.2. Sea M un módulo sobre un anillo A. M es *noetheriano* si satisface una de las siguientes dos condiciones:

1. Cada sucesión creciente de submódulos de M es estable.
2. Cada subconjunto no vacío de submódulos de M tiene un elemento maximal.

El siguiente teorema nos dará una caracterización de los módulos noetherianos en función de sus submódulos.

Teorema B.3. *Sea M un módulo sobre un anillo A. M es noetheriano si y sólo si cada submódulo de M es finitamente generado.*

Demostración. Supongamos que M es noetheriano. Sea N un A-submódulo de M. Consideramos el conjunto

$$\Gamma = \left\{ L \leq_A N \,\middle|\, L \text{ es finitamente generado} \right\}.$$

Observemos que Γ no vacío: en efecto, $\{0_M\}$ es un submódulo de N y además es finitamente generado. Luego, puesto que cada A-submódulo de N es también un A-submódulo de M, como M es noetheriano se sigue que Γ tiene un elemento maximal, así, existe P un A-submódulo de N finitamente generado que es elemento maximal de Γ. Vamos a mostrar que $P = N$. Sabemos que $P \subseteq N$, así que sólo resta probar la otra contención. Sea $n \in N$. Consideremos el A-módulo $P + An$: como $P + An$ es un A-submódulo de N y además es finitamente generado se sigue que $P + An \in \Gamma$, luego, como $P \leq_A P + An$, por la maximalidad de P se sigue que $P = P + An$ y por lo tanto $n \in P$. Consecuentemente, tenemos que $N \subseteq P$.

Recíprocamente, supongamos que cada submódulo de M es finitamente generado. Sea $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de submódulos de M. Como $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente se sigue que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ es un A-submódulo de M y por hipótesis se tiene que es finitamente generado. De este modo, existen $r, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ y existen $m_1 \in M_{n_1}, \ldots, m_r \in M_{n_r}$ tales que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n = Am_1 + \cdots + Am_r.$$

Sea $k = \max\{n_1, \ldots, n_r\}$. Como $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente se sigue que

$$M_k \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n = Am_1 + \cdots + Am_r \subseteq M_k$$

y esto implica que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n = M_k$. Sea $t \in \mathbb{N}$ tal que $t \geq k$. Puesto que

$$M_k \subseteq M_t \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n = M_k$$

se sigue que $M_t = M_k$ y de esta forma tenemos que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estable. Por lo tanto, concluimos que M es un módulo noetheriano. ❑

A continuación estudiaremos la manera en que se relacionan los módulos noetherianos y las sucesiones exactas.

Teorema B.4. *Sea* $0 \to N \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} P \to 0$ *una sucesión exacta de módulos sobre un anillo* A. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. M *es noetheriano.*
2. N *y* P *son noetherianos.*

Demostración.

1. $\Rightarrow$ 2. Comenzaremos mostrando que N es noetheriano. Sea $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de A-submódulos de N. Como $(\varphi(N_i))_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de A-submódulos de M que es noetheriano, se sigue que existe $r \in \mathbb{N}$ de modo que si $t \in \mathbb{N}$ con $t \geq r$ se tiene que $\varphi(N_t) = \varphi(N_r)$. Así, para cada $t \in \mathbb{N}$ con $t \geq r$ se sigue que $N_t = N_r$ pues φ es una aplicación inyectiva. Por lo tanto, concluimos que N es noetheriano.

Ahora, probaremos que P es noetheriano. Sea $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de A-submódulos de P. Como $(\psi^{-1}(P_i))_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de A-submódulos de M que es noetheriano, se sigue que existe $r \in \mathbb{N}$ de modo que si $t \in \mathbb{N}$ con $t \geq r$ se tiene que $\psi^{-1}(P_t) = \psi^{-1}(P_r)$. De esta forma, para cada $t \in \mathbb{N}$ con $t \geq r$ se sigue que $P_t = P_r$ pues ψ es una aplicación sobreyectiva. Por lo tanto, concluimos que P es noetheriano.

2. $\Rightarrow$ 1. Sea $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de A-submódulos de M. Como $(\varphi^{-1}(M_i))_{i\in\mathbb{N}}$ y $(\psi(M_i))_{i\in\mathbb{N}}$ son sucesiones crecientes de A-submódulos de N y P respectivamente que son noetherianos, se sigue que existen $r, s \in \mathbb{N}$ de modo que $\varphi^{-1}(M_j) = \varphi^{-1}(M_r)$ y $\psi(M_k) = \psi(M_s)$ para cualesquier $j, k \in \mathbb{N}$ con $j \geq r$ y $k \geq s$. Sea $t = \max\{r, s\}$. Así, $\varphi^{-1}(M_j) = \varphi^{-1}(M_t)$ y $\psi(M_k) = \psi(M_t)$ para cualesquier $j, k \in \mathbb{N}$ con $j \geq t$ y $k \geq t$.

Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq t$, vamos a mostrar que $M_j = M_t$. Puesto que $M_t \subseteq M_j$ sólo resta probar la otra contención. Sea $x \in M_j$. Como $\psi(x) \in \psi(M_j) = \psi(M_t)$ existe $y \in M_t$ tal que $\psi(x) = \psi(y)$. La igualdad anterior implica que $x - y \in \operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\varphi$, de esta forma, existe $z \in N$ tal que $\varphi(z) = x - y$. Como $x \in M_j$ y $y \in M_t$ se sigue que $x - y \in M_j$. Luego, el hecho de que $\varphi(z) \in M_j$ implica que $z \in \varphi^{-1}(M_j) = \varphi^{-1}(M_t)$ y así $\varphi(z) \in M_t$. De este modo, como $x = y + \varphi(z)$ y $\varphi(z), y \in M_t$ se sigue que $x \in M_t$ y consecuentemente tenemos que $M_j \subseteq M_t$. De esta forma, concluimos que M es noetheriano. $\square$

Como consecuencias directas al teorema anterior tenemos los siguientes corolarios.

Corolario B.5. *Sean A un anillo y N un A-submódulo de un A-módulo M. M es noetheriano si y sólo si N es noetheriano y $\frac{M}{N}$ es noetheriano.*

Corolario B.6. *Sean M_1 y M_2 módulos sobre un anillo A. M_1 y M_2 son noetherianos si y sólo si $M_1 \oplus M_2$ es noetheriano.*

Demostración. Considérese la sucesión exacta $0 \to M_1 \to M_1 \oplus M_2 \to \frac{M_1 \oplus M_2}{M_1} \to 0$ y aplíquese el teorema anterior. $\square$

Corolario B.7. *Sean $r \in \mathbb{N}$ y $M_1, \ldots, M_r$ módulos sobre un anillo A. M_i es noetheriano para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ si y sólo si $\bigoplus_{i=1}^{r} M_i$ es noetheriano.*

2. Anillos Noetherianos

En la sección anterior realizamos el estudio de los módulos noetherianos, de manera particular, como un anillo es módulo sobre sí mismo también podemos pensar en la noción de anillo noetheriano. En esta sección nos encargaremos de estudiar algunas propiedades propias de los anillos noetherianos. Comenzaremos definiendo dicho objeto, la definición realmente no será una sorpresa.

Definición B.8. Un anillo A es *noetheriano* si lo es como A-módulo.

El siguiente resultado nos dará un caracterización para un módulo noetheriano siempre y cuando dicho módulo se encuentre sobre un anillo noetheriano y cumpla con una condición extra.

Proposición B.9. *Sea M un módulo sobre un anillo noetheriano A. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *M es finitamente generado.*
2. *M es noetheriano.*

Demostración. Es obvio que el enunciado 2 implica al enunciado 1, así que sólo resta mostrar la otra implicación. Supongamos que M es finitamente generado. De esta forma, existe $r \in \mathbb{N}$ de modo que la sucesión $A^r \xrightarrow{\varphi} M \to 0$ es exacta. A partir de la sucesión anterior construimos la sucesión exacta $0 \to \operatorname{Ker}\varphi \to A^r \to M \to 0$. Luego, como A es un anillo noetheriano, por el Corolario B.7 se sigue que A^r es noetheriano y por el Teorema B.4 concluimos que M es noetheriano. ❑

Si A es un anillo noetheriano, entonces por el Teorema B.3 tenemos que cualquier ideal de A es finitamente generado. Ahora bien, si I es un ideal de A, entonces por el Corolario B.5 sabemos que $\dfrac{A}{I}$ es un A-módulo noetheriano. La pregunta natural que surge de este hecho es si $\dfrac{A}{I}$ es noetheriano como anillo. El siguiente resultado nos brindará una respuesta a esta interrogante.

Proposición B.10. *Sea A un anillo noetheriano. Para cualquier ideal I de A el anillo $\dfrac{A}{I}$ es noetheriano.*

Demostración. Sea I un ideal de A. Consideramos un ideal K de $\dfrac{A}{I}$, así, existe $J \in \partial A$ tal que $I \subseteq J$ y $K = \dfrac{J}{I}$. Luego, como A es noetheriano y J es un ideal de A se sigue que J es finitamente generado, es decir, existen $r \in \mathbb{N}$ y $x_1, \dots, x_r \in J$ tales que $J = Ax_1 + \cdots + Ax_r$. Además, como el producto externo por elementos de A no cambia respecto de $\dfrac{A}{I}$ se sigue que

$$K = \frac{J}{I} = \frac{A}{I}(x_1 + I) + \cdots + \frac{A}{I}(x_r + I).$$

Así, K es finitamente generado. Por lo tanto, concluimos que $\dfrac{A}{I}$ es un anillo noetheriano. ❑

Corolario B.11. *Sea $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de anillos sobreyectivo. Si A es noetheriano, entonces B es noetheriano.*

Lo siguiente que haremos será comprobar que la propiedad de ser noetheriano se preserva bajo la localización.

Teorema B.12. *Sea S un conjunto multiplicativo de un anillo A. Si A es noetheriano, entonces $S^{-1}A$ es noetheriano.*

Demostración. Sea J un ideal de $S^{-1}A$. Por la Proposición 1.41 sabemos que existe $I \in \partial A$ tal que $J = S^{-1}I$. Luego, como I es un ideal de un anillo noetheriano se sigue que existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \dots, x_n \in I$ tales que $I = Ax_1 + \cdots + Ax_n$. Vamos a mostrar que la familia $\left\{\dfrac{x_1}{1_A}, \dots, \dfrac{x_n}{1_A}\right\}$ es una familia generadora de $S^{-1}I$. Es claro que $\left\langle\dfrac{x_1}{1_A}, \dots, \dfrac{x_n}{1_A}\right\rangle \subseteq S^{-1}I$ así que sólo resta probar la otra contención. Sean $y \in I$ y $s \in S$. Como $y \in I$ se sigue que existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in A$ tales que $y = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$. De esta forma, se sigue que

$$\frac{y}{s} = \frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n}{s} = \frac{\lambda_1}{s} \cdot \frac{x_1}{1_A} + \cdots + \frac{\lambda_n}{s} \cdot \frac{x_n}{1_A}$$

y esto implica que $\dfrac{y}{s} \in \left\langle \dfrac{x_1}{1_A}, \ldots, \dfrac{x_n}{1_A} \right\rangle$. Así, tenemos que J es finitamente generado y por lo tanto concluimos que $S^{-1}A$ es un anillo noetheriano. ❑

Recordemos que si $\varphi : A \to B$ es un homomorfismo de anillos y J es un ideal de A, en general $\varphi(J)$ no es un ideal de B (esto sí ocurre si φ es sobreyectivo). Sin embargo, de la manera más natural podemos construir un ideal en B a partir de $\varphi(J)$: la *extensión del ideal* J es el ideal generado por $\varphi(J)$ en B y es denotado por $\varphi(J)B$. De manera análoga, podemos considerar a H un ideal de B y considerar a $\varphi^{-1}(H)$, en este caso, siempre se cumple que $\varphi^{-1}(H)$ es un ideal de A: la *contracción del ideal* H es el ideal $\varphi^{-1}(H)$ de A.

Los siguientes dos lemas nos ayudarán a mostrar una caracterización para anillos noetherianos en función de la localización.

Lema B.13. *Sean $r \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_r$ elementos de un anillo A tales que $\langle f_1, \ldots, f_r \rangle = A$. Para cualesquier $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}_+$ se tiene que $\langle f_1^{n_1}, \ldots, f_r^{n_r} \rangle = A$.*

Demostración. Sean $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}_+$. Si $n_i = 0$ para algún $i \in \{1, \ldots, r\}$, entonces el resultado es claro. Supongamos que $n_i > 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, observemos que

$$\begin{aligned}
\sqrt{Af_1^{n_1} + \cdots + Af_r^{n_r}} &= \sqrt{\sqrt{Af_1^{n_1}} + \cdots + \sqrt{Af_r^{n_r}}} \\
&= \sqrt{\sqrt{Af_1} + \cdots + \sqrt{Af_r}} \\
&= \sqrt{Af_1 + \cdots + Af_r} \\
&= \sqrt{A} \\
&= A.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que $\langle f_1^{n_1}, \ldots, f_r^{n_r} \rangle = A$. ❑

Lema B.14. *Sean A un anillo, $r \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_r \in A$ tales que $\langle f_1, \ldots, f_r \rangle = A$. Para cada $J \in \partial A$ se tiene que*

$$J = \bigcap_{k=1}^{r} \varphi_k^{-1}(\varphi_k(J)A_{f_k}),$$

donde $\varphi_k : A \to A_{f_k}$ es la aplicación natural entre A y A_{f_k} para todo $k = 1, \ldots, r$.

Demostración. Mostraremos la igualdad deseada probando la doble inclusión. Comenzaremos mostrando que $J \subseteq \bigcap_{k=1}^{r} \varphi_k^{-1}(\varphi_k(J)A_{f_k})$: sea $a \in A$,

$$\begin{aligned} a \in J &\Longrightarrow \varphi_k(a) \in \varphi_k(J) \ \ \forall\, k \in \{1,\ldots,r\} \\ &\Longrightarrow \varphi_k(a) \in \varphi_k(J)A_{f_k} \ \ \forall\, k \in \{1,\ldots,r\} \\ &\Longrightarrow a \in \varphi_k^{-1}(\varphi_k(J)A_{f_k}) \ \ \forall\, k \in \{1,\ldots,r\} \\ &\Longrightarrow a \in \bigcap_{k=1}^{r} \varphi_k^{-1}(\varphi_k(J)A_{f_k}). \end{aligned}$$

De este modo, tenemos que $J \subseteq \bigcap_{k=1}^{r} \varphi_k^{-1}(\varphi_k(J)A_{f_k})$.

Recíprocamente, sea $a \in A$ tal que $a \in \bigcap_{k=1}^{r} \varphi_k^{-1}(\varphi_k(J)A_{f_k})$. Sea $k \in \{1,\ldots,r\}$. Puesto que $a \in \varphi_k^{-1}(\varphi_k(J)A_{f_k})$ se sigue que $\varphi_k(a) \in \varphi_k(J)A_{f_k}$. Como los elementos de $\varphi_k(J)A_{f_k}$ son sumas finitas de productos de elementos de A_{f_k} y $\varphi_k(J)$, podemos suponer que $\dfrac{a}{1_A}$ es de la forma $\dfrac{a_k}{f_k^{n_k}}$ para algún $a_k \in J$ y algún $n_k \in \mathbb{Z}_+$, más aún, podemos suponer que $n_k \in \mathbb{N}$ (si $n_k = 0$ podemos multiplicar y dividir por la misma potencia de f_k y como el numerador es un elemento del ideal J dicho producto quedará en J). De este modo, como $\dfrac{a}{1_A} = \dfrac{a_k}{f_k^{n_k}}$ se sigue que existe $m_k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f_k^{m_k} f_k^{n_k} a = f_k^{m_k} a_k$, además, como $a_k \in J$ tenemos que $f_k^{m_k+n_k} a \in J$. Por otro lado, por hipótesis tenemos que $\langle f_1,\ldots,f_r\rangle = A$, de este modo, el lema anterior implica que $\langle f_1^{m_1+n_1},\ldots,f_r^{m_r+n_r}\rangle = A$ y consecuentemente tenemos que $1_A = \lambda_1 f_1^{m_1+n_1} + \cdots + \lambda_r f_r^{m_r+n_r}$ para ciertos $\lambda_1,\ldots,\lambda_r \in A$. De esto se sigue que $a = \lambda_1 f_1^{m_1+n_1} a + \cdots + \lambda_r f_r^{m_r+n_r} a$ y puesto que cada término está en J se sigue que $a \in J$. Por lo tanto, tenemos que $\bigcap_{k=1}^{r} \varphi_k^{-1}(\varphi_k(J)A_{f_k}) \subseteq J$. ❑

Proposición B.15. *Sea A un anillo. A es de Noether si y sólo si existe $r \in \mathbb{N}$ y existen $f_1,\ldots,f_r \in A$ tales que $\langle f_1,\ldots,f_r\rangle = A$ y A_{f_i} es un anillo de Noether para todo $i \in \{1,\ldots,r\}$.*

Demostración. Supongamos que A es un anillo noetheriano. Podemos considerar $r = 1$ y $f_1 = 1_A$, además, tengamos en cuenta el hecho que la localización de un anillo noetheriano para cualquier conjunto multiplicativo es un anillo noetheriano.

Recíprocamente, supongamos que existen $r \in \mathbb{N}$ y $f_1,\ldots,f_r \in A$ tales que $\langle f_1,\ldots f_r\rangle = A$ y donde A_{f_k} es un anillo noetheriano para todo $k \in \{1,\ldots,r\}$. Para mostrar que A es un anillo de Noether mostraremos que toda sucesión creciente de ideales de A es estable. Sea $(I_t)_{t\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de ideales de A:

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \cdots$$

Por otro lado, sea $k \in \{1,\ldots,r\}$. Consideremos el homomorfismo natural de anillos $\varphi_k : A \to A_{f_k}$. Usando este homomorfismo de anillos podemos considerar la extensión de los ideales de la sucesión anterior y así, tenemos la siguiente sucesión creciente de ideales en A_{f_k}:

$$\varphi_k(I_1)A_{f_k} \subseteq \cdots \subseteq \varphi_k(I_n)A_{f_k} \subseteq \varphi_k(I_{n+1})A_{f_k} \subseteq \cdots$$

Como A_{f_k} es un anillo de Noether tenemos que la sucesión anterior es estable, es decir, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que si $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq n_k$ se tiene que $\varphi_k(I_m)A_{f_k} = \varphi_k(I_{n_k})A_{f_k}$. Puesto que sólo tenemos un número finito de índices involucrados, siempre podemos suponer que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión anterior es estable en N para todo $k \in \{1, \ldots, r\}$. Además, si $m \in \mathbb{N}$ y es tal que $m \geq N$, entonces al tomar la contracción del ideal $\varphi_k(I_m)A_{f_k}$ obtenemos que

$$\varphi_k^{-1}(\varphi_k(I_m)A_{f_k}) = \varphi_k^{-1}(\varphi_k(I_N)A_{f_k})$$

y esta igualdad se cumple para todo $k \in \{1, \ldots, r\}$. De esta forma, como $\langle f_1, \ldots, f_r \rangle = A$, por el lema anterior tenemos que si $m \geq N$, entonces se satisface la igualdad

$$I_m = \bigcap_{k=1}^{r} \varphi_k^{-1}(\varphi_k(I_m)A_{f_k}) = \bigcap_{k=1}^{r} \varphi_k^{-1}(\varphi_k(I_N)A_{f_k}) = I_N.$$

De esto se sigue que la sucesión $(I_t)_{t \in \mathbb{N}}$ es estable y por lo tanto concluimos que A es un anillo de Noether. ❏

Consideremos un anillo A y una variable x sobre dicho anillo. Si $A[x]$ es un anillo noetheriano es claro que A es noetheriano: en efecto, consideramos el homomorfismo de anillos

$$\begin{array}{rccc} \zeta : & A[x] & \to & A \\ & x & \mapsto & 0_A \\ & A \ni \lambda & \mapsto & \lambda \end{array}$$

Luego, como $A[x]$ es noetheriano aplicamos el Corolario B.11. Ahora bien, ¿el recíproco de la afirmación anterior es verdadero? Para concluir con esta sección, presentamos un importante resultado sobre anillos noetherianos que contesta la interrogante anterior: el teorema de la base de Hilbert.

Teorema B.16 (Teorema de la base de Hilbert). *Sean A un anillo y x una variable sobre A. Si A es noetheriano, entonces el anillo $A[x]$ es noetheriano.*

Demostración. Sea I un ideal de $A[x]$. Consideramos el siguiente conjunto:

$$\Gamma = \{0_A\} \cup \left\{ \lambda \in A \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Existe } p(x) \in I \text{ de modo que } \lambda \\ \text{es el coeficiente principal de } p(x) \end{array} \right\}.$$

Vamos a mostrar que Γ es un ideal de A:

• 0_A es un elemento de Γ por construcción.

• Sean $\lambda, \mu \in \Gamma$, vamos a mostrar que $\lambda - \mu \in \Gamma$. Si $\lambda = 0_A$ o $\mu = 0_A$, entonces el resultado es claro. Supongamos que $\lambda \neq 0_A$ y $\mu \neq 0_A$. De esta manera, se sigue que existen polinomios $p(x), q(x) \in I$ tales que

$$p(x) = \lambda x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$q(x) = \mu x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

para ciertos $n, m \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{m-1} \in A$. Sin pérdida de generalidad asumimos que $m \leq n$. Consideremos al polinomio $x^{n-m}q(x)$: dicho polinomio está en I pues $q(x)$ está en I y además tenemos que

$$\begin{aligned} p(x) - x^{n-m}q(x) &= \lambda x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 - (\mu x^n + b_{m-1}x^{n-1} + \cdots + b_0 x^{n-m}) \\ &= (\lambda - \mu)x^n + (a_{n-1} - b_{m-1})x^{n-1} + \cdots + a_0. \end{aligned}$$

De este modo, como $p(x) - x^{n-m}q(x)$ es un elemento de I cuyo coeficiente principal es $\lambda - \mu$, concluimos que $\lambda - \mu \in \Gamma$.

• Sean $a \in A$ y $\lambda \in \Gamma$. Vamos a mostrar que $a\lambda \in \Gamma$. Si $a = 0_A$ o $\lambda = 0_A$, entonces el resultado es claro. Supongamos que $a \neq 0_A$ y $\lambda \neq 0_A$. De este modo, existe un polinomio $p(x) \in I$ de modo que

$$p(x) = \lambda x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

para cierto $n \in \mathbb{N}$ y ciertos $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in A$. Como I es un ideal de A, se sigue que $ap(x) \in I$ y además tenemos que

$$ap(x) = a\lambda x^n + aa_{n-1}x^{n-1} + \cdots + aa_1 x + aa_0.$$

De este modo, como $ap(x) \in I$ y su coeficiente principal es $a\lambda$ se sigue que $a\lambda \in \Gamma$.

Con esto, hemos comprobado que Γ es un ideal de A. Luego, como A es noetheriano se sigue que Γ es finitamente generado, así, existen $r \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \Gamma$ tales que $\Gamma = \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_r \rangle_A$. Sea $i \in \{1, \ldots, r\}$. Como λ_i es un elemento de Γ no nulo, existe $\varphi_i(x) \in I$ tal que

$$\varphi_i(x) = \lambda_i x^{n_i} + a^i_{n_i-1}x^{n_i-1} + \cdots + a^i_0$$

para ciertos $n_i \in \mathbb{N}$ y $a^i_0, \ldots, a^i_{n_i-1} \in A$. Sea $n = \max\{n_1, \ldots, n_r\}$.

Por otro lado, sea $M = \langle 1_A, x, \ldots, x^{n-1} \rangle_A$. Lo que vamos a mostrar a continuación es que $I = \langle \varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x) \rangle_{A[x]} + (M \cap I)$. Claramente tenemos que $\langle \varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x) \rangle_{A[x]} + (M \cap I) \subseteq I$, así que sólo resta probar la otra inclusión. Sea $p(x) \in I$. Si $p(x) = 0_{A[x]}$, entonces es claro que $p(x) \in \langle \varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x) \rangle_{A[x]} + (M \cap I)$. Si $\mathrm{grad}(p(x)) < n$, entonces $p(x) \in M \cap I$ y por tanto $p(x) \in \langle \varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x) \rangle_{A[x]} + (M \cap I)$. Por último, supongamos que $\mathrm{grad}(p(x)) \geq n$. Como $p(x) \in I \backslash \{0_{A[x]}\}$ se sigue que

$$p(x) = b_t x^t + b_{t-1}x^{t-1} + \cdots + b_0$$

para ciertos $t \in \mathbb{N}$ y $b_0, \ldots, b_{t-1}, b_t \in A$. Como b_t es el coeficiente principal de un polinomio de I se sigue que $b_t \in \Gamma$ y esto implica que existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in A$ tales que $b_t = \alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_r\lambda_r$. Sea $i \in \{1, \ldots, r\}$. A partir del polinomio $\varphi_i(x)$ consideramos el siguiente polinomio:

$$\alpha_i x^{t-n_i}\varphi_i(x) = \alpha_i\lambda_i x^t + \alpha_i a^i_{n_i-1}x^{t-1} + \cdots + \alpha_i a^i_0 x^{t-n_i}.$$

Consecuentemente obtenemos al polinomio

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^{t-n_i}\varphi_i(x) = (\sum_{i=1}^{r} \alpha_i\lambda_i)x^t + (\sum_{i=1}^{r} \alpha_i a^i_{n_i-1})x^{t-1} + (\text{Otros términos}).$$

Así, se sigue que

$$\begin{aligned} p(x) - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^{t-n_i}\varphi_i(x) &= b_t x^t + b_{t-1}x^{t-1} + \cdots + b_0 - \\ &\quad \left(b_t x^t + (\sum_{i=1}^{r} \alpha_i a^i_{n_i-1})x^{t-1} + (\text{Otros términos}) \right) \\ &= (b_{t-1} - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a^i_{n_i-1})x^{t-1} + (\text{Otros términos}). \qquad (2.1) \end{aligned}$$

De manera general, el proceso anterior nos dice que dado un polinomio $q(x)$ del ideal I podemos restarle un elemento de $\langle \varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)\rangle_{A[x]}$ de manera que la diferencia tiene un grado menor al de $q(x)$. Ahora bien, si el grado del polinomio 2.1 es mayor a n, como dicho polinomio es un elemento de I podemos repetir el proceso descrito para obtener un polinomio de menor grado. Repetimos el proceso anterior con el polinomio $p(x)$ las veces que sea necesario hasta obtener un polinomio de grado menor o igual $n-1$, así, se sigue que existe un polinomio $f(x) \in \langle \varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)\rangle_{A[x]}$ de modo que

$$p(x) - f(x) = c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_0$$

para ciertos $c_0, \ldots, c_{n-2}, c_{n-1} \in A$. Como $p(x) - f(x) \in I$, se sigue que $c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_0$ es un elemento de $M \cap I$. Luego, como tenemos que

$$p(x) = f(x) + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_0$$

se sigue que $p(x)$ es un elemento de $\langle \varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)\rangle_{A[x]} + (M \cap I)$ y con ello se sigue que $I \subseteq \langle \varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)\rangle_{A[x]} + (M \cap I)$. De esta forma, como tenemos la doble inclusión concluimos que $I = \langle \varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)\rangle_{A[x]} + (M \cap I)$.

Por otro lado, como M es un módulo finitamente generado sobre el anillo noetheriano A, por la Proposición B.9 se sigue que M es noetheriano. Así, como $M \cap I$ es un A-submódulo de M se sigue que es finitamente generado sobre A, es decir, existen $s \in \mathbb{N}$ y $h_1(x), \ldots, h_s(x) \in M \cap I$ tales que

$M \cap I = \langle h_1(x), \ldots, h_s(x)\rangle_A$. Luego, como $A \subseteq A[x]$ se sigue que $M \cap I = \langle h_1(x), \ldots, h_s(x)\rangle_{A[x]}$. De este forma, como tenemos que

$$I = \langle \varphi_1(x), \ldots \varphi_r(x)\rangle_{A[x]} + \langle h_1(x), \ldots, h_s(x)\rangle_{A[x]}$$

se sigue que I es finitamente generado sobre $A[x]$. Por lo tanto, como I fue un ideal arbitrario de $A[x]$ concluimos que $A[x]$ es un anillo noetheriano. ❑

Corolario B.17. *Sean A un anillo, $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_n$ variables sobre A. Si A es noetheriano, entonces el anillo $A[x_1, \ldots, x_n]$ es noetheriano.*

Una buena referencia para los interesados en estudiar anillos noetherianos es [**11**].

3. Espacios Topológicos Noetherianos

La noción de "noetheriano" no solamente existe en objetos provenientes del Álgebra, también podemos encontrar esta noción en la Topología. Para concluir con este apéndice, en esta sección vamos a definir a los espacios topológicos noetherianos y estudiar algunas de sus propiedades. Comenzaremos definiendo al objeto que da el título de esta sección.

Definición B.18. Un espacio topológico X es *noetheriano* si cada sucesión decreciente de subconjuntos cerrados de X es estable.

El siguiente resultado nos presenta algunas caracterizaciones para espacios noetherianos.

Lema B.19. *Sea X un espacio topológico. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X es noetheriano.*
2. *Todo conjunto no vacío de cerrados de X tiene un elemento minimal.*
3. *Toda sucesión creciente de abiertos de X es estable.*
4. *Todo conjunto no vacío de abiertos de X tiene un elemento maximal.*

Demostración. Por el Lema B.1 tenemos que 3 y 4 son equivalentes. La equivalencia entre los enunciados 1 y 2 se realiza utilizando argumentos análogos a los del lema citado.

1. $\Rightarrow$ 3. Supongamos que cada sucesión decreciente de cerrados de X es estable. Sea $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de abiertos de X. A partir de $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ se construye la sucesión decreciente $(X \backslash U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de cerrados de X. De esta forma, por hipótesis tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $r \in \mathbb{N}$ con $r \geq m$ se tiene que $X \backslash U_r = X \backslash U_m$. De este modo, tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $r \in \mathbb{N}$ con $r \geq m$ se satisface que $U_r = U_m$. Por lo tanto, la sucesión $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es estable.

La implicación 3. ⇒ 1. se prueba de manera análoga a 1. ⇒ 3. □

Una pregunta que puede surgir de manera natural es si existe alguna relación entre los anillos noetherianos y los espacios noetherianos. La respuesta es que sí y el próximo resultado nos hablará de dicha relación.

Proposición B.20. *Si A es un anillo noetheriano, entonces* $\mathrm{Spec}(A)$ *es un espacio noetheriano.*

Demostración. Sea $(V(I_n))_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de cerrados de $\mathrm{Spec}(A)$:

$$V(I_1) \supseteq V(I_2) \supseteq \cdots \supseteq V(I_n) \supseteq V(I_{n+1}) \supseteq \cdots$$

Dicha sucesión induce la siguiente sucesión creciente de ideales de A:

$$\sqrt{I_1} \subseteq \sqrt{I_2} \subseteq \cdots \subseteq \sqrt{I_n} \subseteq \sqrt{I_{n+1}} \subseteq \cdots$$

Así, como A es un anillo noetheriano se sigue que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $t \in \mathbb{N}$ de modo que $r \leq t$ se tiene que $\sqrt{I_r} = \sqrt{I_t}$. Consecuentemente, si $t \in \mathbb{N}$ de modo que $r \leq t$, entonces tenemos que

$$V(I_t) = V(\sqrt{I_t}) = V(\sqrt{I_r}) = V(I_r).$$

Por lo tanto, como la sucesión $(V(I_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es estable concluimos que $\mathrm{Spec}(A)$ es un espacio noetheriano. □

Para concluir con este apéndice, lo siguiente que haremos será estudiar algunas propiedades de los espacios noetherianos. En primer lugar, necesitaremos la ayuda del siguiente lema:

Lema B.21. *Sea Y un subconjunto de un espacio topológico X. Si C un cerrado de Y, entonces se tiene que $C = \overline{C} \cap Y$, donde $\overline{C}$ es la cerradura de C en X.*

Demostración. Sea C un cerrado de Y. Es claro que $C \subseteq \overline{C} \cap Y$ así que sólo nos falta probar la otra contención. Puesto que C es un cerrado de la topología inducida sobre Y existe un cerrado Z de X tal que $C = Z \cap Y$. El hecho que $C \subseteq Z$ implica que $\overline{C} \subseteq \overline{Z}$ y como Z es un cerrado de X se tiene que $\overline{C} \subseteq Z$, consecuentemente tenemos que $\overline{C} \cap Y \subseteq Z \cap Y = C$. Por lo tanto, concluimos que $C = \overline{C} \cap Y$. □

Proposición B.22. *Sea X un espacio noetheriano. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *X es casi compacto.*
2. *Cada subespacio de X es noetheriano.*

Demostración.

1. Sea $(U_i)_{i\in I}$ una cubierta abierta de X. Definimos el conjunto

$$\Gamma = \left\{ \bigcup_{i\in J} U_i \;\middle|\; J \subseteq I \text{ y } J \text{ es finito} \right\}.$$

Como Γ es un conjunto no vacío de abiertos de X que es un espacio noetheriano se sigue que Γ tiene un elemento maximal $V = \bigcup_{i\in H} U_i$ donde $H \subseteq I$ y es finito. Ahora, sea $i \in I$. Puesto que $V \subseteq V \cup U_i$ y $V \cup U_i$ es un elemento de Γ, por la maximalidad de V se sigue que $V = V \cup U_i$. De esta forma, concluimos que $V = X$ y con ello que X es casi compacto.

2. Sean Y un subconjunto de X y $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de cerrados de Y. Para cada $i \in \mathbb{N}$ consideramos la cerradura de C_i en X que denotaremos por $\overline{C_i}$. Luego, la sucesión $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ induce la sucesión decreciente $(\overline{C_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de cerrados de X y como X es noetheriano se sigue que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $r \in \mathbb{N}$ con $r \geq m$ se cumple que $\overline{C_r} = \overline{C_m}$. Utilizando este hecho y el lema anterior, para cada $r \in \mathbb{N}$ de modo que $r \geq m$ se tiene que

$$C_r = \overline{C_r} \cap Y = \overline{C_m} \cap Y = C_m.$$

Por lo tanto, concluimos que Y es noetheriano. ❑

Proposición B.23. *Sea X un espacio topológico. X es noetheriano si y sólo si cada subespacio de X es casi compacto.*

Demostración. La proposición anterior nos dice que si X es noetheriano, entonces cada subespacio es noetheriano y consecuentemente es casi compacto, así que sólo resta mostrar la otra implicación. Sea $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de abiertos de X. Sea $V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$. Como V es un abierto de X, por hipótesis es casi compacto, así, como $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de V se sigue que existe una subcubierta finita de dicha cubierta que cubre a V. Luego, como la sucesión $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es creciente, lo anterior implica que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $V = U_m$. Ahora, sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \geq m$. Puesto que $U_m \subseteq U_r \subseteq V = U_m$, se sigue que $U_r = U_m$ y con ello que la sucesión $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ se estaciona. De esta forma, concluimos que X es noetheriano. ❑

Proposición B.24. *Sean $r \in \mathbb{N}$ y $X_1, \ldots, X_r$ subconjuntos de un espacio topológico X. Si X_i es un espacio noetheriano para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ y $X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i$, entonces X es noetheriano.*

Demostración. Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de cerrados de X. Sea $i \in \{1, \ldots, r\}$. A partir de la sucesión decreciente $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podemos construir la sucesión decreciente $(F_n \cap X_i)_{n\in\mathbb{N}}$ de cerrados de X_i. Luego, como X_i es un espacio noetheriano tenemos que existe $s_i \in \mathbb{N}$ tal que que para cualquier $t \in \mathbb{N}$ de modo que $s_i \leq t$ se tiene que $F_t \cap X_i = F_{s_i} \cap X_i$. Sea $s = \max\{s_1, \ldots, s_r\}$. Claramente se tiene que $F_t \cap X_i = F_s \cap X_i$ para cualesquier $i \in \{1, \ldots, r\}$ y $t \in \mathbb{N}$ de modo que $s \leq t$. Ahora bien, si $t \in \mathbb{N}$ de modo que $s \leq t$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
F_t &= F_t \cap X \\
&= F_t \cap (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_r) \\
&= (F_t \cap X_1) \cup (F_t \cap X_2) \cup \cdots \cup (F_t \cap X_r) \\
&= (F_s \cap X_1) \cup (F_s \cap X_2) \cup \cdots \cup (F_s \cap X_r) \\
&= F_s \cap (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_r) \\
&= F_s \cap X \\
&= F_s.
\end{aligned}$$

De esta forma, la sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estable y así concluimos que X es un espacio noetheriano. $\square$

Apéndice C

Teoría de Gavillas

Este apéndice está dedicado al estudio de una de las principales herramientas de la Geometría Algebraica Moderna: la Teoría de Gavillas. Las nociones básicas de la Teoría de Gavillas tales como pregavilla, gavilla y grupos de gérmenes son tratadas en la primera sección. La segunda sección se encargará de revisar las propiedades principales de los morfismos de pregavillas y gavillas. En la tercera sección realizamos un recordatorio de algunas pregavillas y gavillas importantes y de sus propiedades principales. Para concluir con este apéndice, las sucesiones exactas de gavillas serán estudiadas en la cuarta y última sección.

1. Pregavillas y Gavillas

En esta sección estudiaremos los objetos básicos y necesarios en la Teoría de Gavillas, hablamos de las pregavillas y gavillas. Como se verá más adelante, los grupos de gérmenes de una gavilla nos darán la posibilidad de tratarla desde un punto de vista local. Iniciaremos nuestro estudio definiendo los objetos que dan nombre a esta sección.

Definición C.1. Sea X un espacio topológico. Una *pregavilla de grupos abelianos* sobre X es un par $(\mathcal{F}, \rho_{\mathcal{F}})$ donde $\mathcal{F}$ es una aplicación que a cada abierto U de X le asigna un grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$, $\rho_{\mathcal{F}}$ es una aplicación que a cada par de abiertos U y V de X tales que $V \subseteq U$ les asigna un homomorfismo de grupos abelianos ${\rho_{\mathcal{F}}}_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ y además, dichas aplicaciones satisfacen los siguientes tres enunciados:

PG1. $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$.
PG2. Para cada abierto U de X se tiene que ${\rho_{\mathcal{F}}}_U^U$ es la identidad en $\mathcal{F}(U)$.
PG3. Para cualesquier abiertos U, V y W de X tales que $W \subseteq V \subseteq U$ se satisface la igualdad ${\rho_{\mathcal{F}}}_W^V \circ {\rho_{\mathcal{F}}}_V^U = {\rho_{\mathcal{F}}}_W^U$.

La pregavilla de grupos abelianos $(\mathcal{F}, \rho_{\mathcal{F}})$ será una *gavilla de grupos abelianos* si además, para cada abierto U de X y para cada cubierta abierta $(U_i)_{i\in I}$ de U se cumplen los siguientes dos enunciados:

G1. Si $f \in \mathcal{F}(U)$ es tal que ${\rho_{\mathcal{F}}}_{U_i}^U(f) = 0_{\mathcal{F}(U_i)}$ para todo $i \in I$, entonces se tiene que $f = 0_{\mathcal{F}(U)}$.

G2. Para cada familia $(f_i)_{i\in I}$ de secciones de $\mathcal{F}$ donde $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ para todo $i \in I$ y de modo que ${\rho_{\mathcal{F}}}^{U_i}_{U_i\cap U_j}(f_i) = {\rho_{\mathcal{F}}}^{U_j}_{U_i\cap U_j}(f_j)$ para cualesquier $i, j \in I$, existe $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que ${\rho_{\mathcal{F}}}^{U}_{U_i}(f) = f_i$ para cualquier $i \in I$.

Si $(\mathcal{F}, \rho_{\mathcal{F}})$ es una pregavilla sobre un espacio topológico X, vamos a fijar las siguientes notaciones y terminologías:

- Para referirnos a la pregavilla $(\mathcal{F}, \rho_{\mathcal{F}})$ simplemente diremos que $\mathcal{F}$ es una pregavilla sobre X y omitiremos la aplicación $\rho_{\mathcal{F}}$.
- Si U es un abierto de X y $f \in \mathcal{F}(U)$, entonces diremos que f es una *sección de $\mathcal{F}$ sobre U*.
- Si $g \in \mathcal{F}(X)$, entonces diremos que g es una *sección global de $\mathcal{F}$*.
- Si U y V son abiertos de X tales que $V \subseteq U$, entonces diremos que el homomorfismo ${\rho_{\mathcal{F}}}^{U}_{V}$ es la *restricción de U a V*.
- Si U y V son abiertos de X tales que $V \subseteq U$ y $h \in \mathcal{F}(U)$, siempre y cuando no exista confusión escribiremos ${\rho_{\mathcal{F}}}^{U}_{V}(h) = h|_V$.

Observación C.2. Sea $\mathcal{F}$ una pregavilla de grupos abelianos sobre un espacio topológico X. Obsérvese que si U es un abierto de X se puede escoger a $\mathcal{F}(U)$ como un anillo, un módulo, etcétera y las restricciones a considerar respectivamente serán homomorfismos de anillos, morfismos de módulos, etc. En cada caso, decimos que tenemos una pregavilla de anillos, una pregavilla de módulos, etc.

Consideremos una pregavilla $\mathcal{F}$ de grupos abelianos sobre un espacio topológico X y consideremos un punto p de X. Vamos a definir el siguiente conjunto:

$$\Gamma_p = \Big\{(U, s) \,\Big|\, U \text{ es un abierto de } X \text{ que contiene a } p \text{ y } s \in \mathcal{F}(U)\Big\}.$$

Además, vamos a definir una relación $\sim$ sobre Γ_p de la siguiente manera: si U y V son abiertos de X que contienen a p y $s \in \mathcal{F}(U)$ y $t \in \mathcal{F}(V)$, se tiene que $(U, s) \sim (V, t)$ si y sólo si existe un abierto W de X que contiene a p tal que $W \subseteq U \cap V$ y $s|_W = t|_W$. Obsérvese que dicha relación es una relación de equivalencia, en efecto, sean U, V y Z abiertos de X que contienen a p y sean $s \in \mathcal{F}(U)$, $t \in \mathcal{F}(V)$ y $r \in \mathcal{F}(Z)$:

- *Reflexividad.* El abierto U de X asegura de manera inmediata que $(U, s) \sim (U, s)$.
- *Simetría.* Supongamos que $(U, s) \sim (V, t)$, así, existe un abierto W de X que contiene a p tal que $W \subseteq U \cap V$ y $s|_W = t|_W$. El abierto W asegura que $(V, t) \sim (U, s)$.
- *Transitividad.* Supongamos que $(U, s) \sim (V, t)$ y $(V, t) \sim (Z, r)$. De esta forma, existen abiertos W_1 y W_2 de X que contienen a p tales que $W_1 \subseteq U \cap V$, $W_2 \subseteq V \cap Z$, $s|_{W_1} = t|_{W_1}$ y

$t|_{W_2} = r|_{W_2}$. Luego, el abierto $W_1 \cap W_2$ asegura que $(U, s) \sim (Z, r)$: en efecto, $W_1 \cap W_2$ es un abierto de X que contiene a p, está contenido $U \cap Z$ y además

$$s|_{W_1 \cap W_2} = (s|_{W_1})|_{W_1 \cap W_2} = (t|_{W_1})|_{W_1 \cap W_2} = t|_{W_1 \cap W_2} = (t|_{W_2})|_{W_1 \cap W_2} = (r|_{W_2})|_{W_1 \cap W_2} = r|_{W_1 \cap W_2}.$$

De esta forma, como $\sim$ es una relación de equivalencia podemos considerar el conjunto cociente $\mathcal{F}_p = \dfrac{\Gamma_p}{\sim}$. Si U es un abierto de X que contiene a p y $s \in \mathcal{F}(U)$, vamos a denotar a la clase del elemento (U, s) por $[(U, s)]$. Lo que haremos a continuación es a equipar al conjunto anterior con una estructura de grupo abeliano. Consideramos la operación

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathcal{F}_p \times \mathcal{F}_p & \to & \mathcal{F}_p \\ & ([(U, s)], [(V, t)]) & \mapsto & [(U \cap V, s|_{U \cap V} + t|_{U \cap V})] \end{array}$$

Vamos a mostrar que dicha operación está bien definida: sean U, $\tilde{U}$, V y $\tilde{V}$ abiertos de X que contienen a p y sean $s \in \mathcal{F}(U)$, $\tilde{s} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$), $t \in \mathcal{F}(V)$ y $\tilde{t} \in \mathcal{F}(\tilde{V})$ tales que $[(U, s)] = [(\tilde{U}, \tilde{s})]$ y $[(V, t)] = [(\tilde{V}, \tilde{t})]$. Probaremos la igualdad $[(U, s)] + [(V, t)] = [(\tilde{U}, \tilde{s})] + [(\tilde{V}, \tilde{t})]$, es decir, que $[(U \cap V, s|_{U \cap V} + t|_{U \cap V})] = [(\tilde{U} \cap \tilde{V}, \tilde{s}|_{\tilde{U} \cap \tilde{V}} + \tilde{t}|_{\tilde{U} \cap \tilde{V}})]$. Como $[(U, s)] = [(\tilde{U}, \tilde{s})]$ se sigue que existe un abierto W_1 de X que contiene a p tal que $W_1 \subseteq U \cap \tilde{U}$ y $s|_{W_1} = \tilde{s}|_{W_1}$; asimismo, como $[(V, t)] = [(\tilde{V}, \tilde{t})]$ se sigue que existe un abierto W_2 de X que contiene p tal que $W_2 \subseteq V \cap \tilde{V}$ y $t|_{W_2} = \tilde{t}|_{W_2}$. Consideramos $W_3 = W_1 \cap W_2$: W_3 es un abierto de X que contiene a p y es tal que $W_3 \subseteq (U \cap V) \cap (\tilde{U} \cap \tilde{V})$. Además, como $W_3 \subseteq W_1$ se sigue que $s|_{W_3} = \tilde{s}|_{W_3}$ y de igual manera, como $W_3 \subseteq W_2$ se sigue que $t|_{W_3} = \tilde{t}|_{W_3}$. De esta forma, como $s|_{W_3} + t|_{W_3} = \tilde{s}|_{W_3} + \tilde{t}|_{W_3}$ tenemos que el abierto W_3 asegura la igualdad $[(U \cap V, s|_{U \cap V} + t|_{U \cap V})] = [(\tilde{U} \cap \tilde{V}, \tilde{s}|_{\tilde{U} \cap \tilde{V}} + \tilde{t}|_{\tilde{U} \cap \tilde{V}})]$.

Ahora probaremos que $+$ cumple con los requisitos de una operación de grupo abeliano. Sean U, V y Z abiertos de X que contienen a p y sean $s \in \mathcal{F}(U)$, $t \in \mathcal{F}(V)$ y $r \in \mathcal{F}(Z)$.

- *Asociatividad.*

$$\begin{aligned} ([(U, s)] + [(V, t)]) + [(Z, r)] &= [(U \cap V, s|_{U \cap V} + t|_{U \cap V})] + [(Z, r)] \\ &= [((U \cap V) \cap Z, (s|_{(U \cap V) \cap Z} + t|_{(U \cap V) \cap Z}) + r|_{(U \cap V) \cap Z})] \\ &= [(U \cap (V \cap Z), s|_{U \cap (V \cap Z)} + (t|_{U \cap (V \cap Z)} + r|_{U \cap (V \cap Z)}))] \\ &= [(U, s)] + ([(V \cap Z, t|_{V \cap Z} + r|_{V \cap Z})]) \\ &= [(U, s)] + ([(V, t)] + [(Z, r)]). \end{aligned}$$

- *Conmutatividad.*

$$[(U, s)] + [(V, t)] = [(U \cap V, s|_{U \cap V} + t|_{U \cap V})] = [(V \cap U, t|_{V \cap U} + s|_{V \cap U})] = [(V, t)] + [(U, s)].$$

- *Neutro*. El elemento neutro de nuestro grupo es el elemento $[(X, 0_{\mathcal{F}(X)})]$: en efecto,

$$[(U, s)] + [(X, 0_{\mathcal{F}(X)})] = [(U \cap X, s|_{U\cap X} + 0_{\mathcal{F}(X)}|_{U\cap X})] = [(U, s|_U)] = [(U, s)].$$

- *Inverso*. El inverso del elemento $[(U, s)]$ es el elemento $[(U, -s)]$: en efecto,

$$[(U, s)] + [(U, -s)] = [(U \cap U, s|_{U\cap U} + (-s)|_{U\cap U})] = [(U, s - s)] = [(U, 0_{\mathcal{F}(U)})] = [(X, 0_{\mathcal{F}(X)})].$$

De esta forma, concluimos que $\mathcal{F}_p$ es un grupo abeliano. Todo lo que hemos hecho hasta el momento culmina en la siguiente definición:

Definición C.3. Con las notaciones anteriores, $\mathcal{F}_p$ es el *grupo de gérmenes de secciones de* $\mathcal{F}$ *en* p.

Si U es un abierto de X que contiene a p y $s \in \mathcal{F}(U)$, denotaremos $[(U, s)] = s_p$ y diremos que s_p es un *germen* de $\mathcal{F}_p$. Además, existe un homomorfismo natural entre los grupos abelianos $\mathcal{F}(U)$ y $\mathcal{F}_p$: en efecto, consideremos la asignación dada por

$$\begin{array}{rcl} \gamma_p^U : \mathcal{F}(U) & \to & \mathcal{F}_p \\ s & \mapsto & s_p \end{array}$$

Claramente γ_p^U es una aplicación bien definida y además es un homomorfismo de grupos: en efecto, si $s, t \in \mathcal{F}(U)$, entonces se tiene que

$$\gamma_p^U(s + t) = [(U, s + t)] = [(U, s)] + [(U, t)] = \gamma_p^U(s) + \gamma_p^U(t).$$

El siguiente resultado empieza a dar muestras de que a través de los grupos de gérmenes se puede estudiar una gavilla de manera local.

Proposición C.4. *Sean $\mathcal{F}$ una gavilla sobre un espacio topológico X y U un abierto de X. Si s y t son secciones de $\mathcal{F}$ sobre U, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $s = t$.
2. $s_p = t_p$ *para cualquier* $p \in U$.

Demostración. Claramente el enunciado 1 implica al enunciado 2, así que sólo resta probar la otra implicación. Si U es el conjunto vacío, entonces el resultado es claro. Supongamos que $U \neq \emptyset$ y así, consideremos un punto $p \in U$. Como $[(U, s)] = [(U, t)]$ se sigue que existe un abierto W_p de X que contiene a p tal que $W_p \subseteq U$ y $s|_{W_p} = t|_{W_p}$, es decir, $(s - t)|_{W_p} = 0_{\mathcal{F}(W_p)}$. Luego, como $(W_p)_{p\in U}$ es una cubierta abierta de U y como $\mathcal{F}$ es una gavilla se sigue que $s - t = 0_{\mathcal{F}(U)}$, es decir, $s = t$. ❑

Para concluir con esta sección, vamos a definir la noción de subpregavilla de una pregavilla.

Definición C.5. Sea $\mathcal{F}$ una pregavilla de grupos abelianos sobre un espacio topológico X. Una *subpregavilla* $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ es una pregavilla de grupos abelianos sobre X de modo que para cada abierto U de X se tiene que $\mathcal{G}(U)$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(U)$ y de modo que las restricciones de $\mathcal{G}$ son las correspondientes restricciones de $\mathcal{F}$.

2. Morfismos de Gavillas

Una vez construidas las pregavillas y gavillas, una pregunta que surge naturalmente es cómo definir una aplicación entre dichos objetos. En esta sección nos encargaremos de definir y estudiar los morfismos entre pregavillas y gavillas. Como lo hemos venido anticipando, en esta sección se mostrará la importancia de los grupos de gérmenes para el estudio de las gavillas. Comenzaremos definiendo al objeto que da nombre a esta sección.

Definición C.6. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ pregavillas de grupos abelianos sobre un espacio topológico X. Un *morfismo de pregavillas* $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es una aplicación que a cada abierto U de X le asigna un homomorfismo de grupos $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ de modo que si U y V son abiertos de X tales que $V \subseteq U$, entonces se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "{\rho_{\mathcal{F}}}^U_V"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "{\rho_{\mathcal{G}}}^U_V"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"'] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

Consideremos un morfismo de pregavillas $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sobre un espacio topológico X. Para cada punto p de X es posible definir de una manera natural un homomorfismo entre los grupos $\mathcal{F}_p$ y $\mathcal{G}_p$. Consideremos un elemento p de X. Definimos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rccc}
\varphi_p : & \mathcal{F}_p & \mapsto & \mathcal{G}_p \\
 & [(U,s)] & \mapsto & [(U,\varphi_U(s))]
\end{array}$$

Vamos a verificar que dicha asignación está bien definida: sean U y V abiertos de X que contienen a p y sean $s \in \mathcal{F}(U)$ y $t \in \mathcal{F}(V)$ tales que $[(U,s)] = [(V,t)]$. Mostraremos que $\varphi_p([(U,s)]) = \varphi_p([(V,t)])$, es decir, que $[(U,\varphi_U(s))] = [(U,\varphi_U(t))]$. Por hipótesis existe un abierto W de X que contiene a p tal que $W \subseteq U \cap V$ y ${\rho_{\mathcal{F}}}^U_W(s) = {\rho_{\mathcal{F}}}^V_W(t)$. Como φ es un morfismo, para cualquier abierto

Z de X tal que $W \subseteq Z$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(Z) \arrow[r, "\varphi_Z"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}}{}^{Z}_{W}"'] & \mathcal{G}(Z) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{G}}{}^{Z}_{W}"] \\ \mathcal{F}(W) \arrow[r, "\varphi_W"'] & \mathcal{G}(W) \end{tikzcd}$$

Ahora bien, como U es un abierto de X que contiene a W se sigue que $\rho_{\mathcal{G}}{}^{U}_{W} \circ \varphi_U = \varphi_W \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{W}$; asimismo, como V es un abierto de X que contiene a W se sigue que $\rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{W} \circ \varphi_V = \varphi_W \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{W}$. De esta forma tenemos que

$$\rho_{\mathcal{G}}{}^{U}_{W} \circ \varphi_U(s) = \varphi_W \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{W}(s) = \varphi_W \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{W}(t) = \rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{W} \circ \varphi_V(t).$$

Así, el abierto W asegura la igualdad $[(U, \varphi_U(s))] = [(V, \varphi_V(t))]$ y con esto concluimos que φ_p es una aplicación bien definida. A continuación verificaremos que φ_p es un homomorfismo de grupos. Sea U un abierto de X que contiene a p y sean $s, t \in \mathcal{F}(U)$. Nótese que sin pérdida de generalidad podemos suponer que las secciones se encuentran sobre el mismo abierto.

$$\begin{aligned} \varphi_p([(U, s)] + [(U, t)]) &= \varphi_p([(U, s + t)]) \\ &= [(U, \varphi_U(s + t))] \\ &= [(U, \varphi_U(s))] + [(U, \varphi_U(t))] \\ &= \varphi_p([(U, s)]) + \varphi_p([(U, t)]). \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que φ_p es un homomorfismo de grupos. Luego, observemos que por la construcción que hemos realizado, si U es un abierto de X que contiene a p, entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{F}}{}^{U}_{p}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{G}}{}^{U}_{p}"] \\ \mathcal{F}_p \arrow[r, "\varphi_p"'] & \mathcal{G}_p \end{tikzcd}$$

Obsérvese que si $\mathcal{G}$ es una subpregavilla de una pregavilla $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X, de manera natural podemos definir un morfismo $j^{\#} : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ dado de la siguiente manera: para cada abierto U de X consideramos al homomorfismo $j^{\#}_U : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(U)$ como la inclusión. Además, para cada $p \in X$ se sigue que el homomorfismo inducido $j^{\#}_p : \mathcal{G}_p \to \mathcal{F}_p$ es inyectivo y de esta forma podemos identificar a $\mathcal{G}_p$ con un subgrupo de $\mathcal{F}_p$.

La siguiente definición nos presenta las nociones de composición de morfismo, isomorfismo, morfismo inyectivo y sobreyectivo.

DEFINICIÓN C.7. Sean $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ y $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ morfismos de pregavillas sobre un espacio topológico X.

1. El *morfismo composición* $\psi \circ \varphi$ *de* φ *y* ψ es el morfismo entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ dado de la siguiente manera: para cada abierto U de X asignamos $(\psi \circ \varphi)_U = \psi_U \circ \varphi_U$.
2. φ es un *isomorfismo* si existe un morfismo de pregavillas $\xi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ tal que $\varphi \circ \xi = \mathrm{id}_{\mathcal{G}}$ y $\xi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$, en tal caso, decimos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son *isomorfas* y denotamos este hecho por $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$. Aquí, si $\mathcal{E}$ es una pregavilla sobre X, el morfismo $\mathrm{id}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ está dado por $\mathrm{id}_{\mathcal{E}(U)} : \mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U)$ para cada abierto U de X.
3. Asumiendo que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son gavillas, φ es *inyectivo* (respectivamente, *sobreyectivo*) si para todo $p \in X$ se cumple que el homomorfismo inducido φ_p es inyectivo (respectivamente, sobreyectivo).

Consideremos morfismos de pregavillas $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ y $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ sobre un espacio topológico X y tomemos un punto p de X. Sabemos que podemos construir los homomorfismos de grupos φ_p y ψ_p, luego, podemos realizar la composición para obtener el homomorfismo $\psi_p \circ \varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{H}_p$. Ahora bien, podemos considerar al morfismo $\psi \circ \varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ y después considerar el homomorfismo $(\psi \circ \varphi)_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{H}_p$. Como uno podría imaginarse, tenemos que los homomorfismos $\psi_p \circ \varphi_p$ y $(\psi \circ \varphi)_p$ son iguales: en efecto, como ambos homomorfismos tienen el mismo dominio y codominio sólo resta probar que sus reglas de asignación son iguales. Sean U un abierto de X que contiene a p y s una sección de $\mathcal{F}$ sobre U.

$$\psi_p \circ \varphi_p([(U, s)]) = \psi_p([(U, \varphi_U(s))]) = [(U, \psi_U \circ \varphi_U(s))] = [(U, (\psi \circ \varphi)_U(s))] = (\psi \circ \varphi)_p([(U, s)]).$$

El siguiente resultado nos dará a conocer caracterizaciones para isomorfismos de gavillas. Dicho resultado confirma la importancia de los grupos de gérmenes para el estudio de las propiedades de una gavilla.

TEOREMA C.8. *Sea* $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *un morfismo de pregavillas sobre un espacio topológico* X*. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. φ *es un isomorfismo.*
2. $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ *es un isomorfismo para cada abierto* U *de* X*.*

Si además $\mathcal{F}$ *y* $\mathcal{G}$ *son gavillas, los enunciados anteriores también son equivalentes al siguiente enunciado:*

3. *$\varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ es un isomorfismo para cada $p \in X$.*

Demostración. Los enunciados 1 y 2 claramente son equivalentes siguiendo la definición de composición de morfismos. Asumimos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son gavillas. Vamos a mostrar la equivalencia del enunciado 2 con el enunciado 3.

2. $\Rightarrow$ 3. Sea $p \in X$. En primer lugar, mostraremos que φ_p es inyectivo. Sean U un abierto de X que contiene a p y $s \in \mathcal{F}(U)$ de modo que $[(U, s)] \in \operatorname{Ker}\varphi_p$. Así, puesto que $[(U, \varphi_U(s))] = [(X, 0_{\mathcal{G}(X)})]$ se sigue que existe un abierto W de X que contiene a p tal que $W \subseteq U$ y $\rho_{\mathcal{G}}{}^U_W \circ \varphi_U(s) = 0_{\mathcal{G}(W)}$. Por otro lado, como φ es un morfismo tenemos que $\varphi_W \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^U_W = \rho_{\mathcal{G}}{}^U_W \circ \varphi_U$ lo cual implica que $\varphi_W \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^U_W(s) = \rho_{\mathcal{G}}{}^U_W \circ \varphi_U(s) = 0_{\mathcal{G}(W)}$. Luego, como φ_W es inyectivo se sigue que $\rho_{\mathcal{F}}{}^U_W(s) = 0_{\mathcal{F}(W)}$. De esta forma, tenemos que $[(U, s)] = [(W, \rho_{\mathcal{F}}{}^U_W(s))] = [(W, 0_{\mathcal{F}(W)})] = [(X, 0_{\mathcal{F}(X)})]$ y consecuentemente tenemos que φ_p es inyectivo.

En segundo lugar, mostraremos que φ_p es sobreyectivo. Sean U un abierto de X que contiene a p y $t \in \mathcal{G}(U)$. Como φ_U es sobreyectivo se sigue que existe $s \in \mathcal{F}(U)$ de modo que $\varphi_U(s) = t$. Luego, claramente se tiene que $\varphi_p([(U, s)]) = [(U, t)]$. Por lo tanto, concluimos que φ_p es sobreyectivo.

3. $\Rightarrow$ 2. Sea U un abierto no vacío de X. En primer lugar, mostraremos que φ_U es inyectivo. Sea $s \in \mathcal{F}(U)$ de modo que $s \in \operatorname{Ker}\varphi_U$. Sea $p \in U$. Puesto que $\varphi_U(s) = 0_{\mathcal{G}(U)}$ se sigue que $(\varphi_U(s))_p = [(U, \varphi_U(s))] = 0_{\mathcal{G}_p}$, luego, como $0_{\mathcal{G}_p} = [(U, \varphi_U(s))] = \varphi_p(s_p)$ y φ_p es en particular inyectivo se sigue que $s_p = 0_{\mathcal{F}_p}$. De esta forma, como $s_p = 0_{\mathcal{F}_p}$ para cualquier $p \in U$, por la Proposición C.4 tenemos que $s = 0_{\mathcal{F}(U)}$. Por lo tanto, φ_U es inyectivo.

En segundo lugar, mostraremos que φ_U es sobreyectivo. Sea $t \in \mathcal{G}(U)$, mostraremos que t tiene una preimagen bajo φ_U. Sea $p \in U$. Como φ_p es en particular sobreyectivo existe un abierto U_p de X que contiene a p y que sin pérdida de generalidad está contenido en U y existe $s(p) \in \mathcal{F}(U_p)$ de modo que $\varphi_p([(U_p, s(p))]) = t_p$. De este modo, como $[(U_p, \varphi_{U_p}(s(p)))] = [(U, t)]$ se sigue que existe un abierto W_p de X que contiene a p de modo que $W_p \subseteq U_p$ y $\rho_{\mathcal{G}}{}^{U_p}_{W_p} \circ \varphi_{U_p}(s(p)) = \rho_{\mathcal{G}}{}^U_{W_p}(t)$. Luego, como φ es un morfismo tenemos que $\varphi_{W_p} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^{U_p}_{W_p}(s(p)) = \rho_{\mathcal{G}}{}^{U_p}_{W_p} \circ \varphi_{U_p}(s(p)) = \rho_{\mathcal{G}}{}^U_{W_p}(t)$. Obsérvese que $(W_p)_{p\in U}$ es una cubierta abierta de U, además, $(\rho_{\mathcal{F}}{}^{U_p}_{W_p}(s(p)))_{p\in U}$ es una familia de secciones de $\mathcal{F}$ de modo que $\rho_{\mathcal{F}}{}^{U_p}_{W_p}(s(p)) \in \mathcal{F}(W_p)$ para cada $p \in U$. Probaremos que dicha familia de secciones se extiende a una sección de $\mathcal{F}$ sobre U. Sean p y q elementos de U. Vamos a mostrar que la igualdad $\rho_{\mathcal{F}}{}^{W_p}_{W_p\cap W_q}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{U_p}_{W_p}(s(p))) = \rho_{\mathcal{F}}{}^{W_q}_{W_p\cap W_q}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{U_q}_{W_q}(s(q)))$ es verdadera. Observemos que

$$\begin{aligned}
\varphi_{W_p\cap W_q}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{W_p}_{W_p\cap W_q}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{U_p}_{W_p}(s(p)))) &= \varphi_{W_p\cap W_q}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{U_p}_{W_p\cap W_q}(s(p))) \\
&= \rho_{\mathcal{G}}{}^{U}_{W_p\cap W_q}(t) \\
&= \varphi_{W_p\cap W_q}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{U_q}_{W_p\cap W_q}(s(q)))
\end{aligned}$$

$$= \varphi_{W_p\cap W_q}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{W_q}_{W_p\cap W_q}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{U_q}_{W_q}(s(q)))),$$

así, como consecuencia de que $\varphi_{W_p\cap W_q}$ es inyectivo obtenemos la igualdad $\rho_{\mathcal{F}}{}^{W_p}_{W_p\cap W_q}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{U_p}_{W_p}(s(p))) = \rho_{\mathcal{F}}{}^{W_q}_{W_p\cap W_q}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{U_q}_{W_q}(s(q)))$. De esta forma, como $\mathcal{F}$ es una gavilla se sigue que existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{W_p}(s) = \rho_{\mathcal{F}}{}^{U_p}_{W_p}(s(p))$ para cada $p \in U$. Por último, vamos a mostrar que $\varphi_U(s) = t$. Como φ es un morfismo tenemos que $\rho_{\mathcal{G}}{}^{U}_{W_p} \circ \varphi_U(s) = \varphi_{W_p} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{W_p}(s) = \rho_{\mathcal{G}}{}^{U}_{W_p}(t)$ para cada $p \in U$, es decir, $\rho_{\mathcal{G}}{}^{U}_{W_p}(\varphi_U(s)-t) = 0_{\mathcal{G}(W_p)}$. Luego, usando el hecho de que $U = \bigcup_{p\in U} W_p$ y de que $\mathcal{G}$ es una gavilla se sigue que $\varphi_U(s) - t = 0_{\mathcal{G}(U)}$ y consecuentemente tenemos que $\varphi_U(s) = t$. De este modo, concluimos que φ_U es sobreyectivo. ❑

De la demostración del teorema anterior se pueden obtener las pruebas del siguiente resultado que muestra algunas propiedades de morfismos.

Proposición C.9. *Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de gavillas sobre un espacio topológico X.*

1. *φ es inyectivo si y sólo si φ_U es inyectivo para cada abierto U de X.*
2. *Si φ_U es sobreyectivo para cada abierto U de X, entonces φ es sobreyectivo.*
3. *φ es un isomorfismo si y sólo si φ es inyectivo y sobreyectivo.*

El siguiente resultado nos mostrará una manera de construir morfismos de gavillas.

Proposición C.10. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ gavillas de grupos abelianos sobre un espacio topológico X y sea $\mathcal{B}$ una base para la topología de X. Si para cada $B \in \mathcal{B}$ se tiene que $\varphi_B : \mathcal{F}(B) \to \mathcal{G}(B)$ es un homomorfismo de grupos de modo que para cualesquier $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ con $B_2 \subseteq B_1$ se tiene que el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(B_1) \arrow[r, "\varphi_{B_1}"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}}{}^{B_1}_{B_2}"'] & \mathcal{G}(B_1) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{G}}{}^{B_1}_{B_2}"] \\
\mathcal{F}(B_2) \arrow[r, "\varphi_{B_2}"'] & \mathcal{G}(B_2)
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo, entonces existe un único morfismo $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tal que para todo $B \in \mathcal{B}$ se tiene que $\psi_B = \varphi_B$.

Demostración. Sea U un abierto no vacío de X. Como $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X se sigue que existe un conjunto I_U de modo que $U = \bigcup_{i\in I_U} B_i$ donde $B_i \in \mathcal{B}$ para cada $i \in I_U$. Sean $s \in \mathcal{F}(U)$ e $i \in I_U$. Puesto que $\rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{B_i}(s)$ es un elemento de $\mathcal{F}(B_i)$ se sigue que $\varphi_{B_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{B_i}(s))$ es un elemento de $\mathcal{G}(B_i)$. De este modo, tenemos $(\varphi_{B_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{B_i}(s)))_{i\in I_U}$ es una familia de secciones de $\mathcal{G}$ tal que $\varphi_{B_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_i}(s)) \in \mathcal{G}(B_i)$ para cada $i \in I_U$. Mostraremos que dicha familia se extiende a una sección de $\mathcal{G}$ sobre U. Sean $i, j \in I_U$. Vamos a mostrar que $\rho_{\mathcal{G}}{}^{B_i}_{B_i\cap B_j}(\varphi_{B_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_i}(s))) = \rho_{\mathcal{G}}{}^{B_j}_{B_i\cap B_j}(\varphi_{B_j}(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_j}(s)))$. Si $B_i \cap B_j = \emptyset$ nada a probar. Supongamos que $B_i \cap B_j \neq \emptyset$, así, podemos considerar $p \in B_i \cap B_j$ y por consiguiente existe $B_{k_p} \in \mathcal{B}$ de modo que $p \in B_{k_p}$ y $B_{k_p} \subseteq B_i \cap B_j$. Utilizando la hipótesis sobre los homomorfismos de los abiertos de la base se sigue que

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathcal{G}}{}^{B_i\cap B_j}_{B_{k_p}} \circ \rho_{\mathcal{G}}{}^{B_i}_{B_i\cap B_j} \circ \varphi_{B_i} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_i}(s) &= \rho_{\mathcal{G}}{}^{B_i}_{B_{k_p}} \circ \varphi_{B_i} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_i}(s) \\
&= \varphi_{B_{k_p}} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^{B_i}_{B_{k_p}} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_i}(s) \\
&= \varphi_{B_{k_p}} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_{k_p}}(s) \\
&= \varphi_{B_{k_p}} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^{B_j}_{B_{k_p}} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_j}(s) \\
&= \rho_{\mathcal{G}}{}^{B_j}_{B_{k_p}} \circ \varphi_{B_j} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_j}(s) \\
&= \rho_{\mathcal{G}}{}^{B_i\cap B_j}_{B_{k_p}} \circ \rho_{\mathcal{G}}{}^{B_j}_{B_i\cap B_j} \circ \varphi_{B_j} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_j}(s),
\end{aligned}$$

de este modo, la igualdad anterior implica que

$$\rho_{\mathcal{G}}{}^{B_i\cap B_j}_{B_{k_p}}(\rho_{\mathcal{G}}{}^{B_i}_{B_i\cap B_j}(\varphi_{B_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_i}(s))) - \rho_{\mathcal{G}}{}^{B_j}_{B_i\cap B_j}(\varphi_{B_j}(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_j}(s)))) = 0_{\mathcal{G}(B_{k_p})}.$$

Luego, como $B_i \cap B_j = \bigcup_{p\in B_i\cap B_j} B_{k_p}$ y $\mathcal{G}$ es una gavilla, la ecuación anterior nos brinda la igualdad deseada. Además, como $U = \bigcup_{i\in I_U} B_i$ y $\mathcal{G}$ es una gavilla tenemos que existe una sección de $\mathcal{G}$ sobre U que denotaremos por $\psi_U(s)$ de modo que $\rho_{\mathcal{G}}{}^U_{B_i}(\psi_U(s)) = \varphi_{B_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_i}(s))$ para cada $i \in I_U$. De esta forma, vamos a definir la asignación ψ_U de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\psi_U : \mathcal{F}(U) &\to \mathcal{G}(U) \\
s &\mapsto \psi_U(s)
\end{aligned}$$

donde para cada $s \in \mathcal{F}(U)$ se tiene que $\psi_U(s)$ es la sección descrita arriba. Vamos a mostrar que dicha asignación está bien definida. Sean $s, t \in \mathcal{F}(U)$ de modo que $s = t$, es decir de modo que $s - t = 0_{\mathcal{F}(U)}$. Observemos que para cada $i \in I_U$ se tiene que

$$\rho_{\mathcal{G}}{}^U_{B_i}(\psi_U(s) - \psi_U(t)) = \varphi_{B_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_i}(s)) - \varphi_{B_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_i}(t)) = \varphi_{B_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_i}(s - t)) = 0_{\mathcal{G}(B_i)}.$$

Así, como $U = \bigcup_{i\in I_U} B_i$ y $\mathcal{G}$ es una gavilla se sigue que $\psi_U(s) - \psi_U(t) = 0_{\mathcal{G}(U)}$, es decir que $\psi_U(s) = \psi_U(t)$. De este modo, tenemos que ψ_U está bien definida.

Ahora, probaremos que ψ_U es un homomorfismo de grupos. Sean $s, t \in \mathcal{F}(U)$. Para cada $i \in I_U$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathcal{G}}{}^U_{B_i}(\psi_U(s+t) - \psi_U(s) - \psi_U(t)) &= \varphi_{B_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_i}(s+t)) - \varphi_{B_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_i}(s)) - \varphi_{B_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_i}(t)) \\
&= \varphi_{B_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_i}(s + t - s - t)) \\
&= 0_{\mathcal{G}(B_i)}.
\end{aligned}$$

De este modo, puesto que $U = \bigcup_{i\in I_U} B_i$ y $\mathcal{G}$ es una gavilla se sigue que $\psi_U(s+t) - \psi_U(s) - \psi_U(t) = 0_{\mathcal{G}(U)}$ y esto implica que $\psi_U(s+t) = \psi_U(s) + \psi_U(t)$. Con esto hemos comprobado que ψ_U es un homomorfismo de grupos.

A continuación probaremos que la familia $(\psi_U)_{\{U \text{ es abierto de } X\}}$ es un morfismo el cual denotaremos por ψ. Sean U y V abiertos de X tales que $V \subseteq U$. Vamos a probar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\psi_U"] \arrow[d, "{\rho_{\mathcal{F}}}_V^U"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "{\rho_{\mathcal{G}}}_V^U"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\psi_V"'] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

es decir, vamos a mostrar que ${\rho_{\mathcal{G}}}_V^U \circ \psi_U = \psi_V \circ {\rho_{\mathcal{F}}}_V^U$. Sea $s \in \mathcal{F}(U)$. Observemos que para cada $i \in I_V$ se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
{\rho_{\mathcal{G}}}_{B_i}^V({\rho_{\mathcal{G}}}_V^U \circ \psi_U(s) - \psi_V \circ {\rho_{\mathcal{F}}}_V^U(s)) &= {\rho_{\mathcal{G}}}_{B_i}^V \circ {\rho_{\mathcal{G}}}_V^U \circ \psi_U(s) - {\rho_{\mathcal{G}}}_{B_i}^V \circ \psi_V \circ {\rho_{\mathcal{F}}}_V^U(s) \\
&= \varphi_{B_i}({\rho_{\mathcal{F}}}_{B_i}^U(s)) - \varphi_{B_i}({\rho_{\mathcal{F}}}_{B_i}^V \circ {\rho_{\mathcal{F}}}_V^U(s)) \\
&= 0_{\mathcal{G}(B_i)}.
\end{aligned}$$

Usando el hecho de que $V = \bigcup_{i\in I_V} B_i$ y $\mathcal{G}$ es una gavilla se sigue que ${\rho_{\mathcal{G}}}_V^U \circ \psi_U(s) - \psi_V \circ {\rho_{\mathcal{F}}}_V^U(s) = 0_{\mathcal{G}(U)}$, es decir que ${\rho_{\mathcal{G}}}_V^U \circ \psi_U(s) = \psi_V \circ {\rho_{\mathcal{F}}}_V^U(s)$. De esta manera, se concluye que ψ es un morfismo.

Por último, vamos a comprobar que para cada $B \in \mathcal{B}$ se tiene que $\psi_B = \varphi_B$. Sea $B \in \mathcal{B}$. Puesto que las aplicaciones en cuestión tienen el mismo dominio y codominio, sólo resta probar que tienen la misma regla de asignación. Sea $s \in \mathcal{F}(B)$. Por construcción de la aplicación ψ_B se tiene que

$$\psi_B(s) = {\rho_{\mathcal{G}}}_B^B(\psi_B(s)) = \varphi_B({\rho_{\mathcal{F}}}_B^B(s)) = \varphi_B(s).$$

De esta forma, concluimos que $\psi_B = \varphi_B$. A partir de este hecho, la unicidad de ψ es inmediata. ❏

Corolario C.11. *Con las condiciones de la proposición anterior, si φ_B es un isomorfismo para cada $B \in \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$.*

Demostración. Por la proposición anterior sabemos que existe el morfismo de gavillas $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Para probar que ψ es un isomorfismo probaremos que para todo $p \in X$ el morfismo inducido a los grupos de gérmenes $\psi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ es un isomorfismo. Sea $p \in X$.

En primer lugar probaremos la inyectividad de ψ_p: sean U un abierto de X que contiene a p y $s \in \mathcal{F}(U)$ tales que $[(U, s)] \in \operatorname{Ker} \psi_p$. Como $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X existe $B_1 \in \mathcal{B}$ tal que $p \in B_1$ y $B_1 \subseteq U$. Puesto que $[(B_1, \psi_{B_1}(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_1}(s)))] = [(X, 0_{\mathcal{G}(X)})]$ se sigue que existe un abierto W de X que contiene a p, está contenido en B_1 y es tal que $\rho_{\mathcal{G}}{}^{B_1}_W(\psi_{B_1}(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_1}(s))) = 0_{\mathcal{G}(W)}$. Usando nuevamente el hecho de que $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X tenemos que existe $B_2 \in \mathcal{B}$ tal que $p \in B_2$ y $B_2 \subseteq W$. Luego, la igualdad $\rho_{\mathcal{G}}{}^{B_1}_W(\psi_{B_1}(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_1}(s))) = 0_{\mathcal{G}(W)}$ implica que $\rho_{\mathcal{G}}{}^{B_1}_{B_2}(\psi_{B_1}(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_1}(s))) = 0_{\mathcal{G}(B_2)}$ y usando el hecho de que ψ es un morfismo tenemos que $\psi_{B_2}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{B_1}_{B_2} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_1}(s)) = 0_{\mathcal{G}(B_2)}$. Así, como ψ_{B_2} es inyectivo se sigue que $\rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_2}(s) = 0_{\mathcal{F}(B_2)}$ y consecuentemente tenemos que

$$[(U, s)] = [(B_2, \rho_{\mathcal{F}}{}^U_{B_2}(s))] = [(B_2, 0_{\mathcal{F}(B_2)})] = 0_{\mathcal{F}_p}.$$

Por lo tanto, concluimos que ψ_p es inyectivo.

En segundo lugar, probaremos que ψ_p es sobreyectivo: sean U un abierto de X que contiene a p y $t \in \mathcal{G}(U)$. Consideremos al elemento $[(U, t)]$ de $\mathcal{G}_p$. Como $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X se sigue que existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $p \in B$ y $B \subseteq U$. Luego, como ψ_B es sobreyectivo se sigue que existe $s \in \mathcal{F}(B)$ tal que $\psi_B(s) = \rho_{\mathcal{G}}{}^U_B(t)$. Luego, como tenemos que

$$\psi_p([(B, s)]) = [(B, \psi_B(s))] = [(B, \rho_{\mathcal{G}}{}^U_B(t))] = [(U, t)],$$

concluimos que ψ_p es sobreyectivo.

De esta forma, como ψ_p es un isomorfismo para cada $p \in X$ concluimos que ψ es un isomorfismo de gavillas. ❏

3. Algunas Pregavillas y Gavillas Importantes

En esta sección definiremos y estudiaremos propiedades de algunas gavillas importantes. Las gavillas aquí estudiadas son: la gavilla restringida, la gavilla imagen directa, la gavilla asociada, el kernel de un morfismo, la imagen de un morfismo y la gavilla cociente.

3.1. La Gavilla Restringida. Supongamos que tenemos una gavilla sobre un espacio topológico, luego, consideramos un abierto de dicho espacio y lo dotamos con la topología inducida. Sabiendo que tenemos una gavilla sobre el espacio original, ¿existe una manera natural de asociarle a dicho subespacio una gavilla? La respuesta es sí y en esta sección veremos cómo es posible realizar esto.

Sean $\mathcal{F}$ una pregavilla de grupos abelianos sobre un espacio topológico X y U un abierto no vacío de X. Podemos dotar a U con la topología inducida por X y de este modo tenemos que U es un espacio topológico. Ahora, vamos a definir la pregavilla $\mathcal{F}|_U$ de la siguiente forma: para cada abierto V de U asignamos $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$ y para abiertos V y Z de U de modo que $Z \subseteq V$ asignamos $\rho_{\mathcal{F}|_U}{}^V_Z = \rho_{\mathcal{F}}{}^V_Z$. Puesto que U es un abierto de X y $\mathcal{F}$ es una pregavilla, por la construcción se sigue de manera inmediata que $\mathcal{F}|_U$ es una pregavilla sobre U. Más aún, si $\mathcal{F}$ es una gavilla, entonces también es inmediato que $\mathcal{F}|_U$ es una gavilla. Dicha gavilla tiene un nombre concreto:

Definición C.12. Con las notaciones anteriores, $\mathcal{F}|_U$ es la *restricción de la gavilla $\mathcal{F}$ al abierto U*.

Ahora, vamos a determinar a los grupos de gérmenes de esta gavilla. Sea p un punto de U. Consideramos la siguiente asignación:

$$\begin{aligned} \varphi_p : (\mathcal{F}|_U)_p &\to \mathcal{F}_p \\ [(V,s)] &\mapsto [(V,s)] \end{aligned}$$

De manera inmediata tenemos que φ_p es un homomorfismo de grupos abelianos. Más aún, es un isomorfismo:

- φ_p es inyectivo: consideremos un abierto V de U que contiene a p y a $s \in \mathcal{F}|_U(V)$ tales que $[(V,s)] \in \operatorname{Ker}\varphi_p$. Puesto que $[(V,s)] = [(X, 0_{\mathcal{F}(X)})]$ se sigue que existe Z un abierto de X que contiene a p de modo que $Z \subseteq V$ y $\rho_{\mathcal{F}}{}^V_Z(s) = 0_{\mathcal{F}(Z)}$. Luego, como $Z \cap U$ es un abierto de U que contiene a p y que está contenido en V se sigue que $[(V,s)] = [(Z\cap U, \rho_{\mathcal{F}|_U}{}^V_{Z\cap U}(s))] = [(Z\cap U, 0_{\mathcal{F}|_U(Z\cap U)})] = [(U, 0_{\mathcal{F}|_U(U)})]$. Así, concluimos que φ_p es inyectivo.
- φ_p es sobreyectivo: sea V un abierto de X que contiene a p y sea $s \in \mathcal{F}(V)$. Puesto que $V \cap U$ es un abierto de U que contiene a p podemos considerar al elemento $[(V\cap U, \rho_{\mathcal{F}|_U}{}^V_{V\cap U}(s))]$ de $(\mathcal{F}|_U)_p$. Luego, claramente se tiene que $\varphi_p([(V\cap U, \rho_{\mathcal{F}|_U}{}^V_{V\cap U}(s))] = [(V,s)]$ y con esto concluimos que φ_p es sobreyectivo.

Podemos resumir esto que hemos realizado en el siguiente resultado:

Proposición C.13. *Con las notaciones anteriores, para cada $p \in U$ se tiene que $(\mathcal{F}|_p)$ es isomorfo a $\mathcal{F}_p$.*

El siguiente resultado nos presenta una manera de saber si un morfismo de gavillas es sobreyectivo utilizando la restricción de gavillas.

Lema C.14. *Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de gavillas sobre un espacio topológico X. φ es sobreyectivo si y sólo si para cualquier abierto U de X se tiene que el morfismo $\varphi|_U : \mathcal{F}|_U \to \mathcal{G}|_U$ es sobreyectivo.*

Demostración. Supongamos que para cualquier abierto U de X se tiene que $\varphi|_U : \mathcal{F}|_U \to \mathcal{G}|_U$ es un morfismo sobreyectivo. Particularmente, considerando al abierto X tenemos que el morfismo

$\varphi|_X : \mathcal{F}|_X \to \mathcal{G}|_X$ es sobreyectivo y puesto que $\varphi|_X = \varphi$, $\mathcal{F}|_X = \mathcal{F}$ y $\mathcal{G}|_X = \mathcal{G}$ concluimos que $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es sobreyectivo.

Recíprocamente, supongamos que el morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es sobreyectivo. Sea U un abierto de X. Si $U = \emptyset$, entonces $\varphi|_\emptyset$ es el morfismo entre las gavillas nulas y claramente es sobreyectivo. De esta forma, podemos suponer que U es un abierto no vacío y así consideramos $p \in X$. Observemos que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}|_U)_p \arrow[r, "(\varphi|_U)_p"] \arrow[d, "\cong"'] & (\mathcal{G}|_U)_p \arrow[d, "\cong"] \\
\mathcal{F}_p \arrow[r, "\varphi_p"'] & \mathcal{G}_p
\end{tikzcd}$$

De este diagrama, se sigue que $(\varphi|_U)_p$ es la composición de tres homomorfismos que son sobreyectivos lo cual implica que $(\varphi|_U)_p$ es sobreyectivo. Como p fue un punto arbitrario en U concluimos que $\varphi|_U$ es sobreyectivo. ❑

3.2. La Gavilla Imagen Directa. En esta sección veremos cómo es posible transportar una gavilla de un espacio topológico a otro a través de una aplicación continua y estudiaremos algunas de sus propiedades.

Consideremos una aplicación continua $f : X \to Y$ entre espacios topológicos y tomemos una pregavilla $\mathcal{F}$ sobre X. A través de f y $\mathcal{F}$ vamos a definir la pregavilla $f_*(\mathcal{F})$ sobre Y de la siguiente manera: para cada abierto V de Y asignamos $f_*(\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ y para cualesquier abiertos Z y W de Y de modo que $W \subseteq Z$ asignamos ${\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_W^Z = {\rho_{\mathcal{F}}}_{f^{-1}(W)}^{f^{-1}(Z)}$. Bajo estas condiciones, vamos a mostrar que $f_*(\mathcal{F})$ es una pregavilla sobre Y:

PG1. Por construcción se tiene que $f_*(\mathcal{F})(\emptyset) = \mathcal{F}(f^{-1}(\emptyset)) = \mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$.
PG2. Para cada abierto V de Y tenemos que ${\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_V^V = {\rho_{\mathcal{F}}}_{f^{-1}(V)}^{f^{-1}(V)} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(f^{-1}(V))} = \mathrm{id}_{f_*(\mathcal{F})(V)}$.
PG3. Para cualesquier abiertos V, Z y W de Y de modo que $W \subseteq Z \subseteq V$ tenemos que

$$ {\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_W^Z \circ {\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_Z^V = {\rho_{\mathcal{F}}}_{f^{-1}(W)}^{f^{-1}(Z)} \circ {\rho_{\mathcal{F}}}_{f^{-1}(Z)}^{f^{-1}(V)} = {\rho_{\mathcal{F}}}_{f^{-1}(W)}^{f^{-1}(V)} = {\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_W^V. $$

Así, hemos comprobado que $f_*(\mathcal{F})$ es una pregavilla sobre Y. Más aún, si $\mathcal{F}$ es una gavilla, entonces también lo es $f_*(\mathcal{F})$: en efecto, sean V un abierto de Y y $(V_i)_{i\in I}$ una cubierta abierta de V.

G1. Sea $s \in f_*(\mathcal{F})(V)$ tal que ${\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_{V_i}^V(s) = 0_{f_*(\mathcal{F})(V_i)}$ para todo $i \in I$. De esta forma, para cada $i \in I$ se tiene que ${\rho_{\mathcal{F}}}_{f^{-1}(V_i)}^{f^{-1}(V)}(s) = {\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_{V_i}^V(s) = 0_{f_*(\mathcal{F})(V_i)} = 0_{\mathcal{F}(f^{-1}(V_i))}$. Además, como $(V_i)_{i\in I}$

es una cubierta abierta de V se sigue que $(f^{-1}(V_i))_{i\in I}$ es una cubierta abierta de $f^{-1}(V)$. De esta forma, como $\mathcal{F}$ es una gavilla se tiene que $s = 0_{\mathcal{F}(f^{-1}(V))}$, es decir, $s = 0_{f_*(\mathcal{F})(V)}$.

G2. Sea $(s_i)_{i\in I}$ una familia de secciones de $f_*(\mathcal{F})$ de modo que $s_i \in f_*(\mathcal{F})(V_i)$ para cada $i \in I$ y tal que $\rho_{f_*(\mathcal{F})}{}^{V_i}_{V_i\cap V_j}(s_i) = \rho_{f_*(\mathcal{F})}{}^{V_j}_{V_i\cap V_j}(s_j)$ para cualesquier $i, j \in I$. De este modo, para cualesquier $i, j \in I$ se sigue que $\rho_{\mathcal{F}}{}^{f^{-1}(V_i)}_{f^{-1}(V_i)\cap f^{-1}(V_j)}(s_i) = \rho_{\mathcal{F}}{}^{f^{-1}(V_j)}_{f^{-1}(V_i)\cap f^{-1}(V_j)}(s_j)$. De esta forma, como $(f^{-1}(V_i))_{i\in I}$ es una cubierta abierta de $f^{-1}(V)$ y como $\mathcal{F}$ es una gavilla se sigue que existe $s \in \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ tal que $\rho_{\mathcal{F}}{}^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V_i)}(s) = s_i$ para todo $i \in I$. Así, concluimos que existe $s \in f_*(\mathcal{F})(V)$ de modo que $\rho_{f_*(\mathcal{F})}{}^{V}_{V_i}(s) = s_i$ para cualquier $i \in I$.

De este forma, hemos comprobado que $f_*(\mathcal{F})$ es una gavilla sobre Y. Esta construcción nos brinda la siguiente definición:

Definición C.15. Con las notaciones anteriores, $f_*(\mathcal{F})$ es la *gavilla imagen directa de $\mathcal{F}$ bajo f*.

El siguiente resultado nos dará una respuesta satisfactoria para nuestros fines acerca de los grupos de gérmenes de la gavilla imagen directa.

Proposición C.16. *Sean $f : X \to Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos y $\mathcal{F}$ una gavilla de grupos abelianos sobre X. Si f es un homeomorfismo entre X y un cerrado de Y, entonces para cada $q \in Y$ se tiene que*

$$f_*(\mathcal{F})_q \cong \begin{cases} \{0\} & \text{si } q \in Y\backslash f(X) \\ \mathcal{F}_p & \text{si } q = f(p) \text{ para algún } p \in X \end{cases}$$

Demostración. Sea $q \in Y$. Vamos a distinguir entre dos casos:

• Caso I: $q \notin f(X)$. Sean U un abierto de Y que contiene a q y $s \in f_*(\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$. Consideremos al elemento $[(U, s)]$ de $f_*(\mathcal{F})_q$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $U \subseteq Y\backslash f(X)$ (pues $Y\backslash f(X)$ es un abierto). Puesto que $U \subseteq Y\backslash f(X)$ se sigue que $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(Y\backslash f(X))$ y además tenemos que $f^{-1}(Y\backslash f(X)) = \emptyset$: en efecto, si $f^{-1}(Y\backslash f(X)) \neq \emptyset$, entonces considerando $r \in f^{-1}(Y\backslash f(X))$ tendríamos que $f(r) \in (Y\backslash f(X)) \cap f(X)$ lo cual es absurdo. De esto se sigue que $f^{-1}(U) = \emptyset$ y consecuentemente $s = 0_{f_*(\mathcal{F})(U)}$. Así, tenemos que $[(U, s)] = [(U, 0_{f_*(\mathcal{F})(U)})] = [(Y, 0_{f_*(\mathcal{F})(Y)})]$ y por lo tanto concluimos que $f_*(\mathcal{F})_q = \{0\}$.

• Caso II: $q \in f(X)$. Como $q \in f(X)$ existe $p \in X$ tal que $f(p) = q$. Para mostrar que $f_*(\mathcal{F})_q$ es isomorfo a $\mathcal{F}_p$ vamos a considerar la siguiente asignación:

$$\begin{aligned} \psi : f_*(\mathcal{F})_q &\to \mathcal{F}_p \\ [(U, s)] &\mapsto [(f^{-1}(U), s)] \end{aligned}$$

En primer lugar, vamos a mostrar que ψ es una aplicación bien definida. Sean U un abierto de Y que contiene a q y $s \in f_*(\mathcal{F})(U)$. Consideramos al elemento $[(U, s)]$ de $f_*(\mathcal{F})_q$. Como $f(p) \in U$ se sigue que $p \in f^{-1}(U)$, además, tenemos que $s \in f_*(\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$. De esto se sigue que $[(f^{-1}(U), s)] \in \mathcal{F}_p$. Ahora, sean U_1 y U_2 abiertos de Y que contienen a $f(p)$ y sean $s_1 \in f_*(\mathcal{F})(U_1)$ y $s_2 \in f_*(\mathcal{F})(U_2)$ tales que $[(U_1, s_1)] = [(U_2, s_2)]$. Vamos a mostrar que $\psi([(U_1, s_1)]) = \psi([(U_2, s_2)])$, es decir que $[(f^{-1}(U_1), s_1)] = [(f^{-1}(U_2), s_2)]$. Por hipótesis tenemos que $[(U_1, s_1)] = [(U_2, s_2)]$, esto implica que existe un abierto W de Y que contiene a $f(p)$ tal que $W \subseteq U_1 \cap U_2$ y ${\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_W^{U_1}(s_1) = {\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_W^{U_2}(s_2)$. Observemos que $f^{-1}(W)$ es un abierto de X que contiene p, se encuentra contenido en $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)$ y además satisface que

$$ {\rho_{\mathcal{F}}}_{f^{-1}(W)}^{f^{-1}(U_1)}(s_1) = {\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_W^{U_1}(s_1) = {\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_W^{U_2}(s_2) = {\rho_{\mathcal{F}}}_{f^{-1}(W)}^{f^{-1}(U_2)}(s_2). $$

De esta forma, el abierto $f^{-1}(W)$ asegura la igualdad $[(f^{-1}(U_1), s_1)] = [(f^{-1}(U_2), s_2)]$ y por lo tanto concluimos que ψ es una aplicación bien definida.

En segundo lugar, vamos a probar que ψ es un homomorfismo de grupos abelianos. Sean U_1 y U_2 abiertos de Y que contienen a $f(p)$ y sean $s_1 \in f_*(\mathcal{F})(U_1)$ y $s_2 \in f_*(\mathcal{F})(U_2)$.

$$ \begin{aligned} \psi([(U_1, s_1)] + [(U_2, s_2)]) &= \psi([(U_1 \cap U_2, {\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_{U_1\cap U_2}^{U_1}(s_1) + {\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_{U_1\cap U_2}^{U_2}(s_2))]) \\ &= [(f^{-1}(U_1 \cap U_2), {\rho_{\mathcal{F}}}_{f^{-1}(U_1\cap U_2)}^{f^{-1}(U_1)}(s_1) + {\rho_{\mathcal{F}}}_{f^{-1}(U_1\cap U_2)}^{f^{-1}(U_2)}(s_2))] \\ &= [(f^{-1}(U_1), s_1)] + [(f^{-1}(U_2), s_2)] \\ &= \psi([(U_1, s_1)]) + \psi([(U_2, s_2)]). \end{aligned} $$

Por lo tanto, tenemos que ψ es un homomorfismo de grupos.

En tercer lugar, vamos a probar que ψ es inyectivo. Sean U un abierto de Y que contiene a $f(p)$ y $s \in f_*(\mathcal{F})(U)$ tales que $[(U, s)] \in \operatorname{Ker}\psi$. Vamos a mostrar que $[(U, s)] = 0_{f_*(\mathcal{F})_{f(p)}}$, es decir, mostraremos que existe un abierto W de Y que contiene a $f(p)$ tal que $W \subseteq U$ y ${\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_W^U(s) = 0_{f_*(\mathcal{F})(W)}$. Como $[(f^{-1}(U), s)] = [(X, 0_{\mathcal{F}(X)})]$ existe un abierto V de X que contiene a p tal que $V \subseteq f^{-1}(U)$ y ${\rho_{\mathcal{F}}}_V^{f^{-1}(U)}(s) = 0_{\mathcal{F}(V)}$. Por la hipótesis sobre f se sigue que $f(V)$ es un abierto de $f(X)$, consecuentemente se tiene la existencia de un abierto Z de Y tal que $f(V) = Z \cap f(X)$. Observemos que el hecho de que $q \in f(V)$ implica que $q \in Z$ y además observemos que

$$ \begin{aligned} f^{-1}(Z) &= f^{-1}(Z \cap Y) \\ &= f^{-1}(Z \cap [f(X) \cup (Y \backslash f(X))]) \\ &= f^{-1}([Z \cap f(X)] \cup [Z \cap (Y \backslash f(X))]) \\ &= f^{-1}(Z \cap f(X)) \cup f^{-1}(Z \cap (Y \backslash f(X))) \end{aligned} $$

$$\begin{aligned} &= f^{-1}(Z \cap f(X)) \\ &= f^{-1}(f(V)) \\ &= V, \end{aligned}$$

Así, como tenemos que $V = f^{-1}(Z)$ se sigue que $f^{-1}(Z) \subseteq f^{-1}(U)$. De esta forma, vamos a considerar $W = U \cap Z$: observemos que $U \cap Z$ es un abierto de Y que contiene a q, está contenido en U y además satisface que

$$\begin{aligned} \rho_{f_*(\mathcal{F})}{}^{U}_{U\cap Z}(s) &= \rho_{\mathcal{F}}{}^{f^{-1}(U)}_{f^{-1}(U\cap Z)}(s) \\ &= \rho_{\mathcal{F}}{}^{f^{-1}(Z)}_{f^{-1}(U\cap Z)} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^{f^{-1}(U)}_{f^{-1}(Z)}(s) \\ &= \rho_{\mathcal{F}}{}^{f^{-1}(Z)}_{f^{-1}(U\cap Z)}(0_{\mathcal{F}(f^{-1}(Z))}) \\ &= 0_{\mathcal{F}(f^{-1}(U\cap Z))} \\ &= 0_{f_*(\mathcal{F})(U\cap Z)}. \end{aligned}$$

Con esto, concluimos que ψ es una aplicación inyectiva.

Por último, vamos a probar que ψ es una aplicación sobreyectiva. Sean U un abierto de X que contiene a p y $s \in \mathcal{F}(U)$. Queremos mostrar que existen un abierto V de Y que contiene a q y $t \in f_*(\mathcal{F})(V)$ tales que $\psi([(V,t)]) = [(U,s)]$, es decir, que $[(f^{-1}(V),t)] = [(U,s)]$. Por la hipótesis sobre f se sigue que $f(U)$ es un abierto de $f(X)$, así, existe Z un abierto de Y tal que $f(U) = Z \cap f(X)$. Por la observaciones hechas cuando mostramos la inyectividad de ψ se tiene que $q \in Z$ y que $f^{-1}(Z) = U$. Además, como $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(Z)) = f_*(\mathcal{F})(Z)$ se tiene que $s \in f_*(\mathcal{F})(Z)$. Luego, afirmamos que el elemento buscado es $[(Z,s)]$: en efecto, claramente $[(Z,s)]$ es un elemento de $f_*(\mathcal{F})_q$ y satisface que

$$\psi([(Z,s)]) = [(f^{-1}(Z),s)] = [(U,s)].$$

Así, tenemos que ψ es una aplicación sobreyectiva. De esta manera, como ψ es una aplicación inyectiva y sobreyectiva se tiene que $f_*(\mathcal{F})_q$ es isomorfo a $\mathcal{F}_p$.

Por lo tanto, para todo $q \in Y$ concluimos que

$$f_*(\mathcal{F})_q \cong \begin{cases} \{0\} & \text{si } q \in Y \backslash f(X) \\ \mathcal{F}_p & q = f(p) \text{ para algún } p \in X \end{cases}$$

❑

3.3. La Gavilla Asociada. Sabemos que toda gavilla es una pregavilla, ¿será cierto el recíproco de este enunciado? En general la respuesta es no y una muestra de ello es el siguiente ejemplo.

Ejemplo C.17. Sean X un espacio topológico Hausdorff con al menos dos puntos y A un grupo abeliano de cardinalidad diferente de uno. Consideramos la *pregavilla constante* A_X^- sobre X definida de la siguiente manera: para cada abierto U de X asignamos

$$A_X^-(U) = \begin{cases} A & \text{si } U \neq \emptyset \\ \{0\} & \text{si } U = \emptyset \end{cases}$$

Además, para cualesquier abiertos U y V de X de modo que $V \subseteq U$ asignamos

$$\rho_{A_X^-}{}_V^U = \begin{cases} \mathrm{id}_A & \text{si } V \neq \emptyset \\ 0_A & \text{si } V = \emptyset \end{cases}$$

Vamos a mostrar que esta pregavilla no es una gavilla. Sean x y y puntos distintos de X. Como X es de Hausdorff existen abiertos U y V tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Sean a y b elementos diferentes de A de modo que $a \in A_X^-(U)$ y $b \in A_X^-(V)$. Luego, se sigue que $\rho_{A_X^-}{}_{U\cap V}^U(a) = 0_A = \rho_{A_X^-}{}_{U\cap V}^V(b)$. Si A_X^- fuese una gavilla, entonces existiría $c \in A_X^-(U \cup V)$ tal que $\rho_{A_X^-}{}_U^{U\cup V}(c) = a$ y $\rho_{A_X^-}{}_V^{U\cup V}(c) = b$, de esta forma tendríamos que $a = \rho_{A_X^-}{}_U^{U\cup V}(c) = c = \rho_{A_X^-}{}_V^{U\cup V}(c) = b$ y con ello que $a = b$ lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, A_X^- es una pregavilla pero no una gavilla.

Como pudo apreciarse en el ejemplo anterior, en general una pregavilla no es una gavilla. Sin embargo, a cada pregavilla es posible asociarle una gavilla de manera única salvo isomorfismo. En este apartado veremos cómo es posible construir dicha gavilla y además, mostraremos que dicha gavilla satisface una propiedad universal.

Consideremos a $\mathcal{F}$ una pregavilla de grupos abelianos sobre un espacio topológico X. A partir de $\mathcal{F}$ vamos a construir la gavilla $\mathcal{F}^+$ sobre X de la siguiente manera: $\mathcal{F}^+(\emptyset) = \{0\}$ y para cada abierto U no vacío de X asignamos a $\mathcal{F}^+(U)$ como el conjunto de todas las aplicaciones $f : U \to \prod_{p\in U} \mathcal{F}_p$ que satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. Para cualquier $p \in U$ se tiene que $f(p) \in \mathcal{F}_p$.
2. Para cualquier $p \in U$ existen una vecindad abierta V de p contenida en U y una sección $s \in \mathcal{F}(V)$ de modo que para todo $q \in V$ se cumple que $f(q) = s_q$.

Además, consideramos las restricciones de $\mathcal{F}^+$ como las usuales de funciones. Bajo estas condiciones vamos a mostrar que $\mathcal{F}^+$ es una gavilla de grupos abelianos sobre X. Observemos que para cada abierto U de X se tiene que $\mathcal{F}^+(U)$ es un grupo abeliano con la suma definida puntualmente. Luego, claramente de la construcción se satisfacen **PG1**, **PG2** y **PG3**, así que sólo resta mostrar que se satisfacen **G1** y **G2**. Sean U un abierto de X y $(U_i)_{i\in I}$ una cubierta abierta de U.

G1. Sea $f \in \mathcal{F}^+(U)$ tal que $f|_{U_i} = 0_{\mathcal{F}^+(U_i)}$ para todo $i \in I$. Consideremos un punto p de U. Como $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ existe un $j \in I$ tal que $p \in U_j$, luego, por hipótesis se sigue que $f(p) = f|_{U_j}(p) = 0_{\mathcal{F}_p}$. Por lo tanto, concluimos que $f = 0_{\mathcal{F}^+(U)}$.

G2. Sea $(f_i)_{i\in I}$ una familia de secciones de $\mathcal{F}^+$ con $f_i \in \mathcal{F}^+(U_i)$ para todo $i \in I$ y tal que $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$ para cualesquier $i, j \in I$. Observemos que si $p \in U$, como $(U_i)_{i\in I}$ es una cubierta abierta de U, entonces existe $k \in I$ tal que $p \in U_k$. De esta manera, definimos $f : U \to \prod_{p\in U} \mathcal{F}_p$ dada por $f(q) = f_k(q)$ donde $k \in I$ de modo que $q \in U_k$. Ahora probaremos que f está bien definida. Sea $p \in U$ y supongamos que existen $i, j \in I$ de modo que $p \in U_i \cap U_j$. Por hipótesis, se sigue que $f_i(p) = f_i|_{U_i\cap U_j}(p) = f_j|_{U_i\cap U_j}(p) = f_j(p)$ y esto implica que f está bien definida.

Para concluir, debemos mostrar que f es en efecto es una sección de $\mathcal{F}^+(U)$. Por construcción f satisface la primera condición requerida así que sólo resta mostrar que satisface la segunda condición. Si $p \in U$, entonces existe $k \in I$ de modo que $p \in U_k$, luego, como $f_k \in \mathcal{F}^+(U_k)$ se sigue que existe un abierto V_k de X que contiene a p y está contenido en U y existe $s \in \mathcal{F}(U_k)$ de modo que para cada $q \in V_k$ se satisface que $f_k(q) = s_q$. Luego, como $f(p) = f_k(p)$, el abierto y la sección anteriores funcionan como los elementos adecuados. De esta manera, se tiene que $f \in \mathcal{F}^+(U)$.

De este modo, concluimos que $\mathcal{F}^+$ es una gavilla de grupos abelianos sobre X. La gavilla $\mathcal{F}^+$ se llama la *gavilla asociada a la pregavilla* $\mathcal{F}$.

Ahora bien, vamos a definir un morfismo de pregavillas entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^+$ que denotaremos por $\theta^{\mathcal{F}^+}$. Sea U un abierto de X. Consideramos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rcl} \theta_U^{\mathcal{F}^+} : \mathcal{F}(U) & \to & \mathcal{F}^+(U) \\ s & \mapsto & \theta_U^{\mathcal{F}^+}(s) : U \to \displaystyle\prod_{q\in U} \mathcal{F}_q \\ & & \qquad\qquad p \mapsto \quad s_p \end{array}$$

Lo primero que mostraremos es que para cualquier $s \in \mathcal{F}(U)$ se tiene que $\theta_U^{\mathcal{F}^+}(s)$ es un elemento de $\mathcal{F}^+(U)$. Sea $s \in \mathcal{F}(U)$. Por construcción tenemos que $\theta_U^{\mathcal{F}^+}(s)$ satisface la primera condición requerida; luego, para la segunda condición, el propio abierto U y la propia sección s son los elementos adecuados. De esta manera, tenemos que $\theta_U^{\mathcal{F}^+}(s) \in \mathcal{F}^+(U)$. Ahora, sean $s, t \in \mathcal{F}(U)$ tales que $s = t$. Puesto que $s = t$ se sigue que $s_p = t_p$ para cualquier $p \in U$, esto implica de manera inmediata $\theta_U^{\mathcal{F}^+}(s) = \theta_U^{\mathcal{F}^+}(t)$ y con esto concluimos que $\theta^{\mathcal{F}^+}$ es una aplicación bien definida.

Ahora, vamos a mostrar que $\theta_U^{\mathcal{F}^+}$ es un homomorfismo de grupos abelianos. Sean $s, t \in \mathcal{F}(U)$. Para mostrar la igualdad $\theta_U^{\mathcal{F}^+}(s+t) = \theta_U^{\mathcal{F}^+}(s)+\theta_U^{\mathcal{F}^+}(t)$, como las aplicaciones involucradas tienen el mismo dominio y codominio, únicamente debemos de mostrar que tienen la misma regla de asignación.

Sea $p \in U$,

$$\theta_U^{\mathcal{F}^+}(s+t)(p) = (s+t)_p = s_p + t_p = \theta_U^{\mathcal{F}^+}(s)(p) + \theta_U^{\mathcal{F}^+}(t)(p) = (\theta_U^{\mathcal{F}^+}(s) + \theta_U^{\mathcal{F}^+}(t))(p).$$

De este modo, se sigue que $\theta_U^{\mathcal{F}^+}(s+t) = \theta_U^{\mathcal{F}^+}(s) + \theta_U^{\mathcal{F}^+}(t)$ y por lo tanto tenemos que $\theta_U^{\mathcal{F}^+}$ es un homomorfismo de grupos.

Por último, vamos a mostrar que $\theta^{\mathcal{F}^+}$ es compatible con las restricciones de pregavilla. Sean U y V abiertos de X tales que $V \subseteq U$. Vamos a probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\theta_U^{\mathcal{F}^+}"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}}{}_V^U"'] & \mathcal{F}^+(U) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}^+}{}_V^U"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\theta_V^{\mathcal{F}^+}"'] & \mathcal{F}^+(V)
\end{tikzcd}$$

es decir, mostraremos que $\rho_{\mathcal{F}^+}{}_V^U \circ \theta_U^{\mathcal{F}^+} = \theta_V^{\mathcal{F}^+} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}_V^U$. Sea $s \in \mathcal{F}(U)$. Puesto que las aplicaciones $\rho_{\mathcal{F}^+}{}_V^U \circ \theta_U^{\mathcal{F}^+}(s)$ y $\theta_V^{\mathcal{F}^+} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(s)$ tienen el mismo dominio y codominio, sólo resta probar que tienen la misma regla de asignación. Sea $q \in V$,

$$\rho_{\mathcal{F}^+}{}_V^U \circ \theta_U^{\mathcal{F}^+}(s)(q) = \theta_U^{\mathcal{F}^+}(s)(q) = s_q = (\rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(s))_q = \theta_V^{\mathcal{F}^+}(\rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(s))(q) = \theta_V^{\mathcal{F}^+} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(s)(q).$$

De esta manera, como s fue un elemento arbitrario de $\mathcal{F}(U)$ se tiene que $\rho_{\mathcal{F}^+}{}_V^U \circ \theta_U^{\mathcal{F}^+} = \theta_V^{\mathcal{F}^+} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}_V^U$. Por lo tanto, concluimos que $\theta^{\mathcal{F}^+}$ es un morfismo de pregavillas.

Una propiedad importante de $\theta^{\mathcal{F}^+}$ que utilizaremos constantemente es que $\theta_p^{\mathcal{F}^+}$ es un isomorfismo para cada $p \in X$. En efecto, sea $p \in X$:

- $\theta_p^{\mathcal{F}^+}$ es inyectivo: sean U un abierto de X que contiene a p y $s \in \mathcal{F}(U)$ de modo que $s_p \in \operatorname{Ker} \theta_p^{\mathcal{F}^+}$. Como $[(U, \theta_U^{\mathcal{F}^+}(s))] = [(X, 0_{\mathcal{F}^+(X)})]$ se sigue que existe un abierto W de X que contiene a p tal que $W \subseteq U$ y $\rho_{\mathcal{F}^+}{}_W^U(\theta_U^{\mathcal{F}^+}(s)) = 0_{\mathcal{F}^+(W)}$. La última igualdad implica que para cualquier $q \in W$ se tiene que $\rho_{\mathcal{F}^+}{}_W^U(\theta_U^{\mathcal{F}^+}(s))(q) = 0_{\mathcal{F}_q}$. Como $\theta^{\mathcal{F}^+}$ es un morfismo tenemos que $\theta_W^{\mathcal{F}^+} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}_W^U = \rho_{\mathcal{F}^+}{}_W^U \circ \theta_U^{\mathcal{F}^+}$, esto implica que $\theta_W^{\mathcal{F}^+} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}_W^U(s) = \rho_{\mathcal{F}^+}{}_W^U \circ \theta_U^{\mathcal{F}^+}(s)$. De esta manera, para todo $q \in W$ se tiene que $(\rho_{\mathcal{F}}{}_W^U(s))_q = \theta_W^{\mathcal{F}^+}(\rho_{\mathcal{F}}{}_W^U(s))(q) = \rho_{\mathcal{F}^+}{}_W^U(\theta_U^{\mathcal{F}^+}(s))(q) = 0_{\mathcal{F}_q}$, en particular, como $p \in W$ se tiene que $(\rho_{\mathcal{F}}{}_W^U(s))_p = 0_{\mathcal{F}_p}$. De este modo, como $s_p = (\rho_{\mathcal{F}}{}_W^U(s))_p = 0_{\mathcal{F}_p}$ se concluye que $\theta_p^{\mathcal{F}^+}$ es inyectivo.
- $\theta_p^{\mathcal{F}^+}$ es sobreyectivo: sean U un abierto de X que contiene a p y $f \in \mathcal{F}^+(U)$. Como f es una sección de $\mathcal{F}^+$ sobre U se tiene que existe un abierto V_p de X que contiene a p tal que $V_p \subseteq U$ y existe $s_{V_p} \in \mathcal{F}(V_p)$ tal que para todo $q \in V_p$ tenemos que $f(q) = (s_{V_p})_q$. Afirmamos que $\theta_p^{\mathcal{F}^+}((s_{V_p})_p) = [(V_p, \theta_{V_p}^{\mathcal{F}^+}(s_{V_p}))] = [(U, f)]$: en efecto, V_p es un abierto de X

que contiene a p, $V_p \subseteq U$ y además, para cualquier $q \in V_p$ tenemos que $\theta_{V_p}^{\mathcal{F}^+}(s_{V_p})(q) = (s_{V_p})_q = f(q) = f|_{V_p}(q)$, así, como $\theta_{V_p}^{\mathcal{F}^+}(s_{V_p})$ y $f|_{V_p}$ tienen el mismo dominio, codominio y regla de asignación, se sigue que son iguales. Por lo tanto, $\theta_p^{\mathcal{F}^+}$ es sobreyectivo.

De esta manera concluimos que $\theta_p^{\mathcal{F}^+}$ es un isomorfismo. Una de las consecuencias de este hecho es la siguiente: si la pregavilla de la que construimos su gavilla asociada es una gavilla, entonces la gavilla asociada es isomorfa a dicha gavilla.

Al comienzo de este apartado mencionamos que la gavilla asociada satisface una propiedad universal, para concluir con este apartado, a continuación vamos a mostrar este hecho.

Teorema C.18. *Con las notaciones anteriores, el par* $(\mathcal{F}^+, \theta^{\mathcal{F}^+})$ *satisface la siguiente propiedad universal: para cada gavilla* $\mathcal{G}$ *sobre* X *y para cada morfismo de pregavillas* $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *existe un único morfismo de gavillas* $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ *tal que* $\varphi = \varphi^+ \circ \theta^{\mathcal{F}^+}$*, es decir, tal que el siguiente diagrama conmuta:*

(3.1)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta^{\mathcal{F}^+}"'] & \mathcal{G} \\ \mathcal{F}^+ \arrow[ur, "\varphi^+"'] & \end{tikzcd}$$

Además, el par $(\mathcal{F}^+, \theta^{\mathcal{F}^+})$ *es único salvo isomorfismo.*

Demostración. Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de pregavillas. A partir de φ vamos a definir un morfismo $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$, así, para cada abierto U de X queremos definir el homomorfismo de grupos $\varphi_U^+ : \mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{G}(U)$ y después probar la compatibilidad con las restricciones de gavilla. Sean U un abierto de X y $f \in \mathcal{F}^+(U)$. Por la segunda condición que satisfacen los elementos de $\mathcal{F}^+(U)$, para cada $p \in X$ vamos a considerar un abierto V_p de X que contiene p tal que $V_p \subseteq U$ y también consideramos una sección $s_{V_p} \in \mathcal{F}(V_p)$ de modo que para cualquier $q \in V_p$ se satisfaga que $f(q) = (s_{V_p})_q$. Así, tenemos que $(V_p)_{p\in U}$ es una cubierta abierta de U y que $(\varphi_{V_p}(s_{V_p}))_{p\in U}$ es una familia de secciones de $\mathcal{G}$ con $\varphi_{V_p}(s_{V_p}) \in \mathcal{G}(V_p)$ para cada $p \in U$. Vamos a probar que los elementos de esta familia de secciones se extienden a un elemento de $\mathcal{G}(U)$, para ello, probaremos que $\rho_{\mathcal{G}\,V_p\cap V_q}^{\;V_p} \circ \varphi_{V_p}(s_{V_p}) = \rho_{\mathcal{G}\,V_p\cap V_q}^{\;V_q} \circ \varphi_{V_q}(s_{V_q})$ para cualesquier $p, q \in U$. Sean $p, q \in U$. Si $V_p \cap V_q = \emptyset$, nada a probar. Supongamos que $V_p \cap V_q \neq \emptyset$, así, sea r un punto de $V_p \cap V_q$. Puesto que $f(r) = (s_{V_p})_r = (s_{V_q})_r$ se sigue que $(\rho_{\mathcal{F}\,V_p\cap V_q}^{\;V_p}(s_{V_p}))_r = (\rho_{\mathcal{F}\,V_p\cap V_q}^{\;V_q}(s_{V_q}))_r$, esto implica que $\varphi_r((\rho_{\mathcal{F}\,V_p\cap V_q}^{\;V_p}(s_{V_p}))_r) = \varphi_r((\rho_{\mathcal{F}\,V_p\cap V_q}^{\;V_q}(s_{V_q}))_r)$, es decir, $(\varphi_{V_p\cap V_q}(\rho_{\mathcal{F}\,V_p\cap V_q}^{\;V_p}(s_{V_p})))_r = (\varphi_{V_p\cap V_q}(\rho_{\mathcal{F}\,V_p\cap V_q}^{\;V_q}(s_{V_q})))_r$. De esta forma, como $\mathcal{G}$ es una gavilla, por la Proposición C.4 tenemos que $\varphi_{V_p\cap V_q}(\rho_{\mathcal{F}\,V_p\cap V_q}^{\;V_p}(s_{V_p})) = \varphi_{V_p\cap V_q}(\rho_{\mathcal{F}\,V_p\cap V_q}^{\;V_q}(s_{V_q}))$.

Por lo tanto, tenemos que existe una sección de $\mathcal{G}$ sobre U que denotaremos por $\varphi_U^+(f)$ de modo que $\rho_{\mathcal{G}}{}_{V_p}^U(\varphi_U^+(f)) = \varphi_{V_p}(s_{V_p})$ para cada $p \in U$. Obsérvese que una de manera de caracterizar a este elemento es a través de su germen: para todo $p \in U$ se tiene que $(\varphi_U^+(f))_p = (\rho_{\mathcal{G}}{}_{V_p}^U(\varphi^+(f)))_p = (\varphi_{V_p}(s_{V_p}))_p = \varphi_p((s_{V_p})_p) = \varphi_p(f(p))$. De esta forma, consideramos la asignación

$$\begin{array}{rcl} \varphi_U^+ : \mathcal{F}^+(U) & \to & \mathcal{G}(U) \\ f & \mapsto & \varphi_U^+(f) \end{array}$$

donde para cada $f \in \mathcal{F}^+(U)$ la sección $\varphi_U^+(f)$ es la construida arriba. En seguida vamos a mostrar que φ_U^+ está bien definida. Sean $f, g \in \mathcal{F}^+(U)$ tales que $f = g$. Como estas secciones son iguales, se sigue que $f(p) = g(p)$ para todo $p \in U$, luego, $\varphi_p(f(p)) = \varphi_p(g(p))$ para todo $p \in U$ y esto implica que $(\varphi_U^+(f))_p = (\varphi_U^+(g))_p$ para cada $p \in U$. Así, como $\mathcal{G}$ es una gavilla, por la Proposición C.4 tenemos que $\varphi_U^+(f) = \varphi_U^+(g)$ y con ello concluimos que φ_U^+ está bien definida. En seguida mostraremos que φ_U^+ es un homomorfismo de grupos abelianos. Sean $f, g \in \mathcal{F}^+(U)$ y $p \in U$.

$$\begin{aligned} (\varphi_U^+(f+g))_p &= \varphi_p((f+g)(p)) \\ &= \varphi_p(f(p)+g(p)) \\ &= \varphi_p(f(p)) + \varphi_p(g(p)) \\ &= (\varphi_U^+(f))_p + (\varphi_U^+(g))_p \\ &= (\varphi_U^+(f) + \varphi_U^+(g))_p. \end{aligned}$$

Nuevamente, usando el hecho de que $\mathcal{G}$ es una gavilla y la Proposición C.4 se sigue que $\varphi_U^+(f+g) = \varphi_U^+(f) + \varphi_U^+(g)$. Así, tenemos que φ_U^+ es un homomorfismo de grupos abelianos.

Ahora, vamos a probar que φ^+ es compatible con las restricciones de gavilla. Sean U y V abiertos de X tales que $V \subseteq U$. Vamos a mostrar que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}^+(U) \arrow[r, "\varphi_U^+"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}^+}{}_V^U"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{G}}{}_V^U"] \\ \mathcal{F}^+(V) \arrow[r, "\varphi_V^+"'] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir que $\rho_{\mathcal{G}}{}_V^U \circ \varphi_U^+ = \varphi_V^+ \circ \rho_{\mathcal{F}^+}{}_V^U$. Sean $f \in \mathcal{F}^+(U)$ y $p \in V$. Recordando que las restricciones de $\mathcal{F}^+$ son las usuales para funciones, tenemos que

$$(\rho_{\mathcal{G}}{}_V^U \circ \varphi_U^+(f))_p = (\varphi_U^+(f))_p = \varphi_p(f(p)) = \varphi_p(\rho_{\mathcal{F}^+}{}_V^U(f)(p)) = (\varphi_V^+ \circ \rho_{\mathcal{F}^+}{}_V^U(f))_p.$$

De esta forma, utilizando de nueva cuenta el hecho de que $\mathcal{G}$ es gavilla y la Proposición C.4 se sigue que $\rho_{\mathcal{G}}{}^U_V \circ \varphi^+_U(f) = \varphi^+_V \circ \rho_{\mathcal{F}^+}{}^U_V(f)$, consecuentemente, como f fue una sección de $\mathcal{F}^+$ sobre U arbitraria obtenemos la igualdad $\rho_{\mathcal{G}}{}^U_V \circ \varphi^+_U = \varphi^+_V \circ \rho_{\mathcal{F}^+}{}^U_V$. Por lo tanto, concluimos que φ^+ es un morfismo.

Para finalizar la parte de existencia, vamos a mostrar que el diagrama 3.1 es conmutativo, es decir, que $\varphi = \varphi^+ \circ \theta^{\mathcal{F}^+}$, para ello, mostraremos que $\varphi_U = \varphi^+_U \circ \theta^{\mathcal{F}^+}_U$ para cada abierto U de X. Sean U un abierto de X, $s \in \mathcal{F}(U)$ y $p \in U$. Observemos que

$$\big(\varphi_U(s)\big)_p = \varphi_p(s_p) = \varphi_p(\theta^{\mathcal{F}^+}_U(s)(p)) = \big(\varphi^+_U(\theta^{\mathcal{F}^+}_U(s))\big)_p.$$

Luego, el hecho de que $\mathcal{G}$ es gavilla y la Proposición C.4 implican que $\varphi^+_U \circ \theta^{\mathcal{F}^+}_U(s) = \varphi_U(s)$. Así, tenemos que $\varphi = \varphi^+ \circ \theta^{\mathcal{F}^+}$ y con ello concluimos que el diagrama 3.1 es conmutativo.

Ahora, probaremos la unicidad del morfismo φ^+. Supongamos que existe otro morfismo $\psi^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ de modo que $\varphi = \psi^+ \circ \theta^{\mathcal{F}^+}$. Vamos a probar que $\varphi^+_U = \psi^+_U$ para cada abierto U de X. Sea U un abierto de X. Si $U = \emptyset$ nada a probar. Si $U \neq \emptyset$, sea $p \in U$. Las igualdades $\varphi_p = \varphi^+_p \circ \theta^{\mathcal{F}^+}_p$ y $\varphi_p = \psi^+_p \circ \theta^{\mathcal{F}^+}_p$ implican que $\varphi^+_p \circ \theta^{\mathcal{F}^+}_p = \psi^+_p \circ \theta^{\mathcal{F}^+}_p$ y como $\theta^{\mathcal{F}^+}_p$ es un isomorfismo se sigue que $\varphi^+_p = \psi^+_p$. Ahora bien, consideremos una sección f de $\mathcal{F}^+$ sobre U. Puesto que

$$\big(\varphi^+_U(f)\big)_p = [(U, \varphi^+_U(f))] = \varphi^+_p([(U, f)]) = \psi^+_p([(U, f)]) = [(U, \psi^+_U(f))] = \big(\psi^+_U(f)\big)_p,$$

p es un punto arbitrario de U y $\mathcal{G}$ es una gavilla, por la Proposición C.4 se sigue que $\varphi^+_U(f) = \psi^+_U(f)$. De esta forma, como las aplicaciones φ^+_U y ψ^+_U tienen el mismo dominio, codominio y regla de asignación se sigue que son iguales. Por lo tanto, concluimos que φ^+ es único.

Por último, probaremos la unicidad de $\mathcal{F}^+$ y de $\theta^{\mathcal{F}^+}$ salvo isomorfismo. Supongamos que existen otra gavilla $\mathcal{H}^+$ y otro morfismo $\delta^{\mathcal{H}^+}$ con las propiedades deseadas. Como $\mathcal{F}^+$ y $\mathcal{H}^+$ son gavillas, podemos considerar los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\delta^{\mathcal{H}^+}"] \arrow[d, "\theta^{\mathcal{F}^+}"'] & \mathcal{H}^+ \\ \mathcal{F}^+ \arrow[ur, "\delta^{\mathcal{H}^{+^+}}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\theta^{\mathcal{F}^+}"] \arrow[d, "\delta^{\mathcal{H}^+}"'] & \mathcal{F}^+ \\ \mathcal{H}^+ \arrow[ur, "\theta^{\mathcal{F}^{+^+}}"'] & \end{tikzcd}$$

los cuales nos dicen que $\delta^{\mathcal{H}^+} = \delta^{\mathcal{H}^{+^+}} \circ \theta^{\mathcal{F}^+}$ y que $\theta^{\mathcal{F}^+} = \theta^{\mathcal{F}^{+^+}} \circ \delta^{\mathcal{H}^+}$ respectivamente. De este modo, tenemos que $\theta^{\mathcal{F}^+} = \theta^{\mathcal{F}^{+^+}} \circ \delta^{\mathcal{H}^{+^+}} \circ \theta^{\mathcal{F}^+}$. Sea $p \in X$. La última igualdad que escribimos implica que $\theta^{\mathcal{F}^+}_p = \theta^{\mathcal{F}^{+^+}}{}_p \circ \delta^{\mathcal{H}^{+^+}}{}_p \circ \theta^{\mathcal{F}^+}_p$, además, como $\theta^{\mathcal{F}^+}_p$ es un isomorfismo se sigue que $\theta^{\mathcal{F}^{+^+}}{}_p \circ \delta^{\mathcal{H}^{+^+}}{}_p = \mathrm{id}_{\mathcal{F}^+_p}$. De manera similar, puesto que $\delta^{\mathcal{H}^+} = \delta^{\mathcal{H}^{+^+}} \circ \theta^{\mathcal{F}^{+^+}} \circ \delta^{\mathcal{H}^+}$, con argumentos análogos obtenemos que $\delta^{\mathcal{H}^{+^+}}{}_p \circ \theta^{\mathcal{F}^{+^+}}{}_p = \mathrm{id}_{\mathcal{H}^+_p}$. Por lo tanto, concluimos que $\mathcal{F}^+$ y $\theta^{\mathcal{F}^+}$ son únicos salvo isomorfismo. $\square$

3.4. El Kernel de un Morfismo. Si tenemos un homomorfismo de grupos abelianos, sabemos que su kernel siempre es un subgrupo del dominio de dicho homomorfismo. Ahora bien, si tenemos un morfismo entre gavillas de grupos abelianos, ¿podemos definir la noción del kernel de dicho morfismo? En este apartado nos encargaremos de responder a esta interrogante.

Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de pregavillas. A partir de φ vamos a definir la subpregavilla $\operatorname{Ker}\varphi$ de $\mathcal{F}$ de la siguiente manera: para cualquier abierto U de X asignamos $\operatorname{Ker}\varphi(U) = \operatorname{Ker}\varphi_U$ y consideramos las restricciones como las correspondientes restricciones de $\mathcal{F}$. En primer lugar, para cada abierto U de X se tiene que $\operatorname{Ker}\varphi(U)$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(U)$; en segundo lugar, si U y V son abiertos de X de modo que $V \subseteq U$, tenemos que la restricción $\rho_{\operatorname{Ker}\varphi}{}_V^U$ tiene por dominio a $\operatorname{Ker}\varphi(U)$ y por codominio a $\operatorname{Ker}\varphi(V)$: en efecto, sean U y V abiertos de X tales que $V \subseteq U$ y sea $s \in \mathcal{F}(U)$ de modo que $s \in \operatorname{Ker}\varphi(U)$. Luego, como φ es un morfismo tenemos que $\varphi_V \circ \rho_{\mathcal{F}}{}_V^U = \rho_{\mathcal{G}}{}_V^U \circ \varphi_U$ y esto implica que

$$\varphi_V(\rho_{\operatorname{Ker}\varphi}{}_V^U(s)) = \varphi_V(\rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(s)) = \rho_{\mathcal{G}}{}_V^U(\varphi_U(s)) = \rho_{\mathcal{G}}{}_V^U(0_{\mathcal{G}(U)}) = 0_{\mathcal{G}(V)}.$$

Luego, por construcción se sigue de manera inmediata que $\operatorname{Ker}\varphi$ es una pregavilla de grupos abelianos sobre X. Más aún, si φ es un morfismo entre gavillas tenemos que $\operatorname{Ker}\varphi$ es una gavilla. En efecto, sean U un abierto de X y $(U_i)_{i\in I}$ una cubierta abierta de U.

G1. Sea $s \in \mathcal{F}(U)$ de modo que $s \in \operatorname{Ker}\varphi(U)$ y tal que $\rho_{\operatorname{Ker}\varphi}{}_{U_i}^U(s) = 0_{\operatorname{Ker}\varphi(U_i)}$ para todo $i \in I$. Por construcción, la condición $\rho_{\operatorname{Ker}\varphi}{}_{U_i}^U(s) = 0_{\operatorname{Ker}\varphi(U_i)}$ implica que $\rho_{\mathcal{F}}{}_{U_i}^U(s) = 0_{\mathcal{F}(U_i)}$ para cada $i \in I$. De esta forma, como $(U_i)_{i\in I}$ es una cubierta abierta de U y $\mathcal{F}$ es una gavilla se sigue que $s = 0_{\mathcal{F}(U)} = 0_{\operatorname{Ker}\varphi(U)}$.

G2. Sea $(s_i)_{i\in I}$ una familia de secciones $\operatorname{Ker}\varphi$ de modo que $s_i \in \operatorname{Ker}\varphi(U_i)$ para cualquier $i \in I$ y tal que $\rho_{\operatorname{Ker}\varphi}{}_{U_i\cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{\operatorname{Ker}\varphi}{}_{U_i\cap U_j}^{U_j}(s_j)$ para cualesquier $i, j \in I$. La igualdad anterior implica que $\rho_{\mathcal{F}}{}_{U_i\cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{\mathcal{F}}{}_{U_i\cap U_j}^{U_j}(s_j)$ para cualesquier $i, j \in I$, así, como $(U_i)_{i\in I}$ es una cubierta abierta de U y $\mathcal{F}$ es una gavilla se sigue que existe $s \in \mathcal{F}(U)$ de manera que $\rho_{\mathcal{F}}{}_{U_i}^U(s) = s_i$ para cada $i \in I$. Vamos a probar que $s \in \operatorname{Ker}\varphi(U)$. Sea $i \in I$. Como φ es un morfismo tenemos que $\varphi_{U_i} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}_{U_i}^U = \rho_{\mathcal{G}}{}_{U_i}^U \circ \varphi_U$ y consecuentemente que

$$\rho_{\mathcal{G}}{}_{U_i}^U \circ \varphi_U(s) = \varphi_{U_i} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}_{U_i}^U(s) = \varphi_{U_i}(s_i) = 0_{\mathcal{G}(U_i)}.$$

Así, como $\rho_{\mathcal{G}}{}_{U_i}^U \circ \varphi_U(s) = 0_{\mathcal{G}(U_i)}$ para cada $i \in I$, $(U_i)_{i\in I}$ es una cubierta abierta de U y $\mathcal{G}$ es una gavilla, se sigue que $\varphi_U(s) = 0_{\mathcal{G}(U)}$. Por lo tanto, $s \in \operatorname{Ker}\varphi(U)$.

De esta forma, hemos comprobado que $\operatorname{Ker}\varphi$ es una gavilla de grupos abelianos sobre X. Todo esto culmina en la siguiente definición:

Definición C.19. Con las notaciones anteriores, el *kernel del morfismo* φ es la gavilla dada por $\operatorname{Ker}\varphi$.

Lo que haremos a continuación es determinar a los grupos de gérmenes de la gavilla $\operatorname{Ker}\varphi$. El siguiente resultado nos dará una respuesta definitiva.

Proposición C.20. *Con las notaciones anteriores, para cada $p \in X$ se tiene que* $(\operatorname{Ker}\varphi)_p = \operatorname{Ker}\varphi_p$*, donde $\varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ es el homomorfismo natural inducido por φ.*

Demostración. Sea $p \in X$. En primer lugar, mostraremos que $(\operatorname{Ker}\varphi)_p \subseteq \operatorname{Ker}\varphi_p$. En efecto, sean U un abierto de X que contiene a p y $s \in \mathcal{F}(U)$ de modo que $s \in \operatorname{Ker}\varphi(U)$. Luego, puesto que

$$\varphi_p(s_p) = [(U, \varphi_U(s))] = [(U, 0_{\mathcal{G}(U)})] = [(X, 0_{\mathcal{G}(X)})] = 0_{\mathcal{G}_p},$$

se sigue que $s_p \in \operatorname{Ker}\varphi_p$.

Recíprocamente, vamos a mostrar que $\operatorname{Ker}\varphi_p \subseteq (\operatorname{Ker}\varphi)_p$. Sean U un abierto de X que contiene a p y $s \in \mathcal{F}(U)$ de modo que $s_p \in \operatorname{Ker}\varphi_p$. Como $[(U, \varphi_U(s))] = [(X, 0_{\mathcal{G}(X)})]$ se sigue que existe un abierto W_p de X que contiene a p tal que $W_p \subseteq U$ y $\rho_{\mathcal{G}}{}^U_{W_p}(\varphi_U(s)) = 0_{\mathcal{G}(W_p)}$. Luego, como $(W_p)_{p\in U}$ es una cubierta abierta de U y $\mathcal{G}$ es una gavilla se tiene que $\varphi_U(s) = 0_{\mathcal{G}(U)}$, esto implica que $s \in \operatorname{Ker}\varphi(U)$ y con ello se sigue que $s_p \in (\operatorname{Ker}\varphi)_p$. ❑

Para concluir con este apartado recordemos el siguiente hecho: como $\operatorname{Ker}\varphi$ es una subgavilla de $\mathcal{F}$ tenemos definido el morfismo natural inyectivo $j^{\#} : \operatorname{Ker}\varphi \to \mathcal{F}$ donde $j^{\#}_U : \operatorname{Ker}\varphi(U) \to \mathcal{F}(U)$ es el homomorfismo inclusión para cualquier abierto U de X.

3.5. La Imagen de un Morfismo. Siguiendo las mismas ideas de la sección anterior, a partir de un morfismo entre pregavillas vamos a definir una gavilla a través de las imágenes de los homomorfismos asociados a dicho morfismo.

Consideremos un morfismo de pregavillas $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sobre un espacio topológico X. Vamos a definir la subpregavilla $\operatorname{Im}^- \varphi$ de $\mathcal{G}$ de la siguiente manera: para cada abierto U de X asignamos $\operatorname{Im}^- \varphi(U) = \operatorname{Im}\varphi_U$ y las restricciones las tomaremos como las correspondientes restricciones de $\mathcal{G}$. Primero observemos que $\operatorname{Im}^- \varphi(U)$ es un subgrupo de $\mathcal{G}(U)$ para cada abierto U de X. Luego, vamos a comprobar que si U y V son abiertos de X, entonces la restricción $\rho_{\operatorname{Im}^- \varphi}{}^U_V$ tiene por dominio a $\operatorname{Im}^- \varphi(U)$ y por codominio a $\operatorname{Im}^- \varphi(V)$: sean U y V abiertos de X tales que $V \subseteq U$ y sea $t \in \mathcal{G}(U)$ de modo que $t \in \operatorname{Im}^- \varphi(U)$. Así, existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\varphi_U(s) = t$. Como φ es un morfismo, tenemos que $\varphi_V \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^U_V = \rho_{\mathcal{G}}{}^U_V \circ \varphi_U$ y consecuentemente se sigue que

$$\varphi_V(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_V(s)) = \rho_{\mathcal{G}}{}^U_V(\varphi_U(s)) = \rho_{\mathcal{G}}{}^U_V(t) = \rho_{\operatorname{Im}^- \varphi}{}^U_V(t).$$

De esta forma, tenemos que las restricciones son las adecuadas. Después, por construcción se verifica de manera inmediata que $\operatorname{Im}^- \varphi$ es una pregavilla de grupos abelianos. Uno podría pensar que lo siguiente es asumir que tanto $\mathcal{F}$ como $\mathcal{G}$ son gavillas y luego mostrar que $\mathrm{Im}^- \varphi$ es una gavilla sobre X. Esto en general no sucede, el siguiente ejemplo es una muestra de ello.

Ejemplo C.21. Fijamos como nuestro espacio topológico a $\mathbb{C}\backslash\{0\} = \mathbb{C}^*$ con la topología usual. Consideramos a la gavilla de funciones holomorfas $\mathcal{O}^h$ sobre $\mathbb{C}^*$ definida de la siguiente manera: $\mathcal{O}^h(\emptyset) = \{0\}$; para cada abierto no vacío U de $\mathbb{C}^*$ asignamos $\mathcal{O}^h(U)$ como el conjunto de todas las funciones $f : U \to \mathbb{C}$ de modo que f es holomorfa (nótese que este es un grupo con la suma definida puntualmente) y como restricciones consideramos las usuales de funciones. Del mismo modo, consideramos la gavilla de funciones holomorfas invertibles $\mathcal{O}^{h^*}$ que sobre $\mathbb{C}^*$ definida de la siguiente forma: $\mathcal{O}^{h^*}(\emptyset) = \{0\}$; para cada abierto no vacío U de $\mathbb{C}^*$ asignamos $\mathcal{O}^{h^*}(U)$ como el conjunto de todas las funciones $f : U \to \mathbb{C}^*$ de modo que f es holomorfa e invertible (nótese que este es un grupo con la multiplicación definida puntualmente) y como restricciones consideramos las usuales de funciones.

Ahora, vamos a definir un morfismo $\alpha : \mathcal{O}^h \to \mathcal{O}^{h^*}$ de la siguiente manera: $\alpha_\emptyset$ es la aplicación nula y para cada abierto no vacío U de X asignamos

$$\begin{array}{rcl} \alpha_U : \mathcal{O}^h(U) & \to & \mathcal{O}^{h^*}(U) \\ f & \mapsto & \exp(f) \end{array}$$

De manera inmediata se sigue que este es un morfismo. Consideremos $U = \mathbb{C}^*$. Observemos que podemos cubrir a U por los abiertos U_1 y U_2 donde $U_1 = \mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}^+$ y $U_2 = \mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}^-$. Como U_1 es simplemente conexo se sigue que existe una rama del logaritmo $f_1 = \log_{U_1}$ tal que f_1 es holomorfa y $\exp(f_1) = \mathrm{id}_{U_1}$; asimismo, como U_2 es simplemente conexo se sigue que existe una rama del logaritmo $f_2 = \log_{U_2}$ tal que f_2 es holomorfa y $\exp(f_2) = \mathrm{id}_{U_2}$. De este modo, tenemos que $\alpha_{U_1}(f_1) = \mathrm{id}_{U_1}$ y $\alpha_{U_2}(f_2) = \mathrm{id}_{U_2}$ y esto implica que $\mathrm{id}_{U_1} \in \mathrm{Im}^- \alpha(U_1)$ y que $\mathrm{id}_{U_2} \in \mathrm{Im}^- \alpha(U_2)$; además, claramente tenemos que $\rho_{\mathcal{O}^{h^*}}{}^{U_1}_{U_1\cap U_2}(\alpha_{U_1}(f_1)) = \rho_{\mathcal{O}^{h^*}}{}^{U_2}_{U_1\cap U_2}(\alpha_{U_2}(f_2))$. Si $\mathrm{Im}^-\alpha$ fuese una gavilla, entonces debería existir $f \in \mathrm{Im}^-\alpha(U)$ de modo que $\rho_{\mathcal{O}^{h^*}}{}^{U}_{U_k}(f) = \mathrm{id}_{U_k}$ para cada $k \in \{1, 2\}$, luego, dicha condición implicaría que $f = \mathrm{id}_U$. Sin embargo, sobre U no podemos definir una rama del logaritmo ya que no es simplemente conexo, así que id_U no está en la imagen del morfismo α_U para cualquier función holomorfa definida en U. Por lo tanto, $\mathrm{Im}^-\alpha$ no es una gavilla.

Puesto que en general con la construcción anterior no obtenemos una gavilla, vamos a considerar la gavilla asociada de $\mathrm{Im}^- \varphi$ para obtener una gavilla sobre X.

Definición C.22. Con las notaciones anteriores, la *imagen del morfismo* φ denotada por $\mathrm{Im}\,\varphi$ es la gavilla asociada a la pregavilla $\mathrm{Im}^- \varphi$.

Ahora, vamos a estar interesados en determinar los grupos de gérmenes de la imagen de un morfismo. Por las propiedades de la gavilla asociada, es suficiente con determinar los grupos de gérmenes de la pregavilla de la que proviene.

Proposición C.23. *Con las notaciones anteriores, para cada $p \in X$ se tiene que* $(\mathrm{Im}^- \varphi)_p = \mathrm{Im}\,\varphi_p$*, donde $\varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ es el homomorfismo natural inducido por φ.*

Demostración. Sea $p \in X$. En primer lugar, mostraremos que $(\mathrm{Im}^- \varphi)_p \subseteq \mathrm{Im}\,\varphi_p$. Sea V un abierto de X que contiene a p y sea $t \in \mathcal{G}(V)$ de modo que $t \in \mathrm{Im}^- \varphi(V)$. De este modo, existe $s \in \mathcal{F}(V)$ tal que $\varphi_V(s) = t$. Al considerar al elemento $[(V, s)]$ de $\mathcal{F}_p$ se tiene que $\varphi_p([(V, s)]) = [(V, \varphi_V(s))] = [(V, t)]$ y esto implica que $[(V, t)] \in \mathrm{Im}\,\varphi_p$

Recíprocamente, mostraremos $\mathrm{Im}\,\varphi_p \subseteq (\mathrm{Im}^- \varphi)_p$. Sea V un abierto de X que contiene a p y sea $t \in \mathcal{G}(V)$ de modo que $[(V, t)] \in \mathrm{Im}\,\varphi_p$. De esta forma, se sigue que existen un abierto U de X que contiene a p y $s \in \mathcal{F}(U)$ de modo que $\varphi_p([(U, s)]) = [(V, t)]$. Así, como $[(U, \varphi_U(s))] = [(V, t)]$ sabemos que existe un abierto W de X que contiene a p tal que $W \subseteq U \cap V$ y $\rho_{\mathcal{G}}{}^U_W(\varphi_U(s)) = \rho_{\mathcal{G}}{}^V_W(t)$. Utilizando el hecho de que φ es un morfismo, la igualdad anterior implica que $\varphi_W(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_W(s)) = \rho_{\mathcal{G}}{}^V_W(t)$. De este modo, tenemos que $\rho_{\mathcal{G}}{}^V_W(t)$ es un elemento de $\mathrm{Im}\,\varphi_W$ y con ello que $[(V, t)] = [(W, \rho_{\mathcal{G}}{}^V_W(t))]$ está en $(\mathrm{Im}^- \varphi)_p$. ❏

Para concluir con esta subsección vamos a realizar algunos comentarios acerca de morfismos inyectivos entre $\mathrm{Im}^- \varphi$ y $\mathcal{G}$ y entre $\mathrm{Im}\,\varphi$ y $\mathcal{G}$. Puesto que $\mathrm{Im}^- \varphi$ es una subpregavilla de $\mathcal{G}$ sabemos que existe un morfismo natural inyectivo de pregavillas $j^{\#^-} : \mathrm{Im}^- \varphi \to \mathcal{G}$ donde $j^{\#^-}_U : \mathrm{Im}^- \varphi(U) \to \mathcal{G}(U)$ es la inclusión para cada abierto U de X. Además, si $\mathcal{G}$ es una gavilla, entonces por la propiedad universal de la gavilla asociada se sigue que existe el morfismo $j^\# : \mathrm{Im}\,\varphi \to \mathcal{G}$ de modo que $j^{\#^-} = j^\# \circ \theta^{\mathrm{Im}\,\varphi}$. Más aún, dicho morfismo es inyectivo: en efecto, sea $p \in X$. La igualdad $j^{\#^-}_p = j^\#_p \circ \theta^{\mathrm{Im}\,\varphi}_p$ implica que $j^\#_p = j^{\#^-}_p \circ (\theta^{\mathrm{Im}\,\varphi}_p)^{-1}$ y consecuentemente que $j^\#_p$ es un homomorfismo inyectivo. Así, como $j^\#$ es inyectivo podemos identificar a $\mathrm{Im}\,\varphi$ con una subgavilla de $\mathcal{G}$.

3.6. La Gavilla Cociente. Continuando con el recordatorio de ideas provenientes del Álgebra, ahora podemos pensar la noción del grupo cociente, ¿en la Teoría de Gavillas podemos definir una idea basada en este concepto? La respuesta es que sí y eso es lo que realizaremos en este apartado.

Consideremos una pregavilla $\mathcal{F}$ de grupos abelianos sobre un espacio topológico X y una subpregavilla $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$. Vamos a definir la pregavilla $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-$ de grupos abelianos sobre X de la siguiente manera manera: para cada abierto U de X asignamos $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-(U) = \dfrac{\mathcal{F}(U)}{\mathcal{G}(U)}$; además, las restricciones las consideramos como las inducidas por las restricciones de $\mathcal{F}$ en los respectivos cocientes: si U y V son abiertos de X de modo que $V \subseteq U$, sabemos que tenemos definida la restricción ${\rho_{\mathcal{F}}}_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, luego, como ${\rho_{\mathcal{F}}}_V^U(\mathcal{G}(U)) = {\rho_{\mathcal{G}}}_V^U(\mathcal{G}(U)) \subseteq \mathcal{G}(V)$, del homomorfismo anterior podemos considerar el homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} {\rho_{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-}}_V^U : & \dfrac{\mathcal{F}(U)}{\mathcal{G}(U)} & \to & \dfrac{\mathcal{F}(V)}{\mathcal{G}(V)} \\ & s + \mathcal{G}(U) & \mapsto & {\rho_{\mathcal{F}}}_V^U(s) + \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Por construcción, de manera inmediata se sigue que $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-$ es una pregavilla de grupos abelianos.

Podríamos pensar que lo siguiente a realizar es considerar a $\mathcal{F}$ como una gavilla y a $\mathcal{G}$ como una subgavilla y mostrar que $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-$ es una gavilla, con la construcción anterior en general no obtenemos una gavilla, el siguiente ejemplo es una muestra de ello:

Ejemplo C.24. Consideramos el morfismo $\alpha : \mathcal{O}^h \to \mathcal{O}^{h^*}$ de gavillas sobre $\mathbb{C}^*$ que fue definido en el Ejemplo C.21. Para cada abierto U de $\mathbb{C}^*$, por el primer teorema de isomorfismos tenemos que $\dfrac{\mathcal{O}^h(U)}{\operatorname{Ker}\alpha(U)} \cong \operatorname{Im}^- \alpha(U)$, en otras palabras, para cada abierto U de $\mathbb{C}^*$ tenemos que $\dfrac{\mathcal{O}^h}{\operatorname{Ker}\alpha}^-(U) \cong \operatorname{Im}^-\alpha(U)$. Sin embargo, como $\operatorname{Im}^-\alpha$ no es una gavilla se sigue que $\dfrac{\mathcal{O}^h}{\operatorname{Ker}\alpha}^-$ tampoco lo es a pesar de que $\mathcal{O}^h$ y $\operatorname{Ker}\alpha$ sí lo son.

De este modo, para obtener una gavilla de la construcción que hemos realizado vamos a considerar la gavilla asociada.

Definición C.25. Con las notaciones anteriores, la *gavilla cociente de* $\mathcal{F}$ *por* $\mathcal{G}$ denotada por $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}$ es la gavilla asociada a la pregavilla $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-$.

Lo que haremos a continuación es determinar los grupos de gérmenes de la gavilla $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}$. Puesto que esta es una gavilla asociada, es suficiente con determinar los grupos de gérmenes de la pregavilla que le da origen.

Proposición C.26. *Con las notaciones anteriores, para cada* $p \in X$ *se tiene que* $\left(\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-\right)_p \cong \dfrac{\mathcal{F}_p}{\mathcal{G}_p}$.

Demostración. Sea $p \in X$. Consideramos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rccc} \pi_p^- : & \mathcal{F}_p & \to & \left(\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-\right)_p \\ & [(U, s)] & \mapsto & [(U, s + \mathcal{G}(U))] \end{array}$$

Comencemos comprobando que dicha asignación está bien definida: sean U y V abiertos de X que contienen a p y sean $s \in \mathcal{F}(U)$ y $t \in \mathcal{F}(V)$ de modo que $[(U,s)] = [(V,t)]$. Vamos a mostrar que $\pi_p^-([(U,s)]) = \pi_p^-([(V,t)])$, es decir, que $[(U, s + \mathcal{G}(U))] = [(V, t + \mathcal{G}(V))]$. Por hipótesis se sigue que existe un abierto W de X que contiene a p tal que $W \subseteq U \cap V$ y $\rho_{\mathcal{F}}{}^U_W(s) = \rho_{\mathcal{F}}{}^V_W(t)$. De este modo, puesto que $\rho_{\mathcal{F}}{}^U_W(s) + \mathcal{G}(W) = \rho_{\mathcal{F}}{}^V_W(t) + \mathcal{G}(W)$, el abierto W asegura la igualdad $[(U, s + \mathcal{G}(U))] = [(V, t + \mathcal{G}(V))]$. Por lo tanto, π_p^- está bien definida.

Ahora, probaremos que π_p^- es un homomorfismo de grupos. Sea U un abierto de X que contiene a p y sean $s, t \in \mathcal{F}(U)$. Obsérvese que podemos suponer que las secciones se encuentran sobre el mismo abierto.

$$
\begin{aligned}
\pi_p^-([(U,s)] + [(U,t)]) &= \pi_p^-([(U, s+t)]) \\
&= [(U, (s+t) + \mathcal{G}(U))] \\
&= [(U, (s + \mathcal{G}(U)) + (t + \mathcal{G}(U)))] \\
&= [(U, s + \mathcal{G}(U))] + [(U, t + \mathcal{G}(U))] \\
&= \pi_p^-([(U,s)]) + \pi_p^-([(U,t)]).
\end{aligned}
$$

De este modo, tenemos que π_p^- es un homomorfismo de grupos. Luego, claramente π_p^- es un homomorfismo sobreyectivo. Lo que probaremos a continuación es que $\operatorname{Ker} \pi_p^- = \mathcal{G}_p$. Claramente se tiene que $\mathcal{G}_p \subseteq \operatorname{Ker} \pi_p^-$ así que sólo resta probar la otra inclusión. Sean U un abierto de X que contiene a p y $s \in \mathcal{F}(U)$ de modo que $[(U,s)] \in \operatorname{Ker} \pi_p^-$. Como $[(U, s + \mathcal{G}(U))] = [(X, 0_{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-(X)})]$ se sigue que existe un abierto W de X que contiene a p, está contenido en U y de modo que $\rho_{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-}{}^U_W(s + \mathcal{G}(U)) = \mathcal{G}(W)$, es decir, de modo que $\rho_{\mathcal{F}}{}^U_W(s) + \mathcal{G}(W) = \mathcal{G}(W)$. La igualdad anterior implica que $\rho_{\mathcal{F}}{}^U_W(s) \in \mathcal{G}(W)$ y consecuentemente tenemos que $[(U,s)] = [(W, \rho_{\mathcal{F}}{}^U_W(s))] \in \mathcal{G}_p$.

Por lo tanto, por el primer teorema de isomorfismos concluimos que el homomorfismo inducido

$$
\begin{array}{cccc}
\widetilde{\pi_p^-}: & \dfrac{\mathcal{F}_p}{\mathcal{G}_p} & \to & \left(\dfrac{\mathcal{F}^-}{\mathcal{G}}\right)_p \\
 & [(U,s)] + \mathcal{G}_p & \mapsto & [(U, s + \mathcal{G}(U))]
\end{array}
$$

es un isomorfismo. ❏

En la Teoría de Grupos sabemos que tenemos el homomorfismo proyección entre un grupo y alguno de sus cocientes, además, sabemos que dicho homomorfismo es sobreyectivo. Ahora bien, ¿en la Teoría de Gavillas tenemos un resultado similar cuando trabajamos con la gavilla cociente? La respuesta se encuentra en el siguiente resultado.

Proposición C.27. *Con las notaciones anteriores, existe un morfismo natural sobreyectivo entre* $\mathcal{F}$ *y* $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}$.

Demostración. Como $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}$ es la gavilla asociada a la pregavilla $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-$, para construir el morfismo natural $\pi : \mathcal{F} \to \dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}$ es suficiente con construir un morfismo $\pi^- : \mathcal{F} \to \dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-$ y después realizar la composición de dicho morfismo con el morfismo $\theta^{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}} : \dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^- \to \dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}$.

Para cada abierto U de X consideramos a $\pi_U^- : \mathcal{F}(U) \to \dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-(U)$ como la proyección natural. Así, por construcción tenemos que π_U^- es un homomorfismo de grupos abelianos para cada abierto U de X. Ahora, vamos a probar la compatibilidad con las restricciones de pregavilla: sean U y V abiertos de X tales que $V \subseteq U$. Mostraremos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\pi_U^-"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}}{}_V^U"'] & \dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-(U) \arrow[d, "\rho_{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-}{}_V^U"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\pi_V^-"'] & \dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-(V)
\end{tikzcd}$$

Sea $s \in \mathcal{F}(U)$,

$$\rho_{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-}{}_V^U \circ \pi_U^-(s) = \rho_{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-}{}_V^U(s + \mathcal{G}(U)) = \rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(s) + \mathcal{G}(V) = \pi_V^-(\rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(s)) = \pi_V^- \circ \rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(s).$$

Consecuentemente tenemos que π^- es un morfismo. Además, π^- es sobreyectivo: en efecto, en la proposición anterior mostramos que π_p^- es un homomorfismo sobreyectivo.

De esta manera, consideramos $\pi = \theta^{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}} \circ \pi^-$. Por último, obsérvese que π es sobreyectivo: en efecto, para cada $p \in X$ tenemos que π_p^- es sobreyectivo y que $\theta_p^{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}}$ en particular lo es. ❑

4. Sucesiones Exactas de Gavillas

Una de las nociones importantes dentro del Álgebra Conmutativa es la de sucesión exacta de módulos, en la Teoría de Gavillas también resulta de gran importancia la noción de sucesión exacta de gavillas. Para concluir con este apéndice, en esta sección vamos a definir y a estudiar las sucesiones exactas de gavillas. Iniciaremos nuestro estudio definiendo el objeto en cuestión.

DEFINICIÓN C.28. Sean $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ y $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ morfismos de gavillas de grupos abelianos sobre un espacio topológico X. La sucesión $\mathcal{G} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$ es una *sucesión exacta de gavillas* si la sucesión $\mathcal{G}_p \xrightarrow{\varphi_p} \mathcal{F}_p \xrightarrow{\psi_p} \mathcal{H}_p$ es exacta de $\mathbb{Z}$-módulos para todo $p \in X$.

Luego, siguiendo la definición se obtiene de manera inmediata el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN C.29. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ gavillas sobre un espacio topológico X. Se satisfacen los siguientes enunciados:*

1. *La sucesión $0 \to \mathcal{G} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}$ es exacta si y sólo si φ es inyectivo.*
2. *La sucesión $\mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F} \to 0$ es exacta si y sólo si ψ es sobreyectivo.*

Nosotros estaremos interesados en sucesiones exactas de gavillas de la forma $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{F} \to \mathcal{H} \to 0$, dichas sucesiones se llaman *sucesiones exactas cortas*. El siguiente resultado estudia la sucesión de secciones sobre un abierto proveniente de una sucesión exacta corta de gavillas.

PROPOSICIÓN C.30. *Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ gavillas de grupos abelianos sobre un espacio topológico X. Si la sucesión de gavillas $0 \to \mathcal{G} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$ es exacta, entonces la sucesión $0 \to \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{H}(U)$ es exacta de $\mathbb{Z}$-módulos para cualquier abierto U de X.*

DEMOSTRACIÓN. Sea U un abierto de X. Como φ es un morfismo inyectivo, por la Proposición C.9 se sigue que φ_U es un homomorfismo inyectivo. Lo único que nos resta a probar es la igualdad entre $\operatorname{Im}\varphi_U$ y $\operatorname{Ker}\psi_U$.

En primer lugar mostraremos que $\operatorname{Im}\varphi_U \subseteq \operatorname{Ker}\psi_U$. Sea $t \in \mathcal{F}(U)$ tal que $t \in \operatorname{Im}\varphi_U$. Así, existe $s \in \mathcal{G}(U)$ tal que $\varphi_U(s) = t$. Sea $p \in U$. La igualdad anterior implica que $t_p = (\varphi_U(s))_p = \varphi_p(s_p)$, luego, como $t_p \in \operatorname{Im}\varphi_p = \operatorname{Ker}\psi_p$ tenemos que $\psi_p(t_p) = 0_{\mathcal{H}_p}$. La igualdad $[(U, \psi_U(t))] = [(X, 0_{\mathcal{H}(X)})]$ implica que existe un abierto W_p de X que contiene a p, está contenido en U y de modo que $\rho_{\mathcal{H}}{}^U_{W_p}(\psi_U(t)) = 0_{\mathcal{H}(W_p)}$. De esta forma, como $(W_p)_{p\in U}$ es una cubierta abierta de U y $\mathcal{H}$ es una gavilla se sigue que $\psi_U(t) = 0_{\mathcal{H}(U)}$. Por lo tanto, tenemos que $t \in \operatorname{Ker}\psi_U$.

En segundo lugar mostraremos que $\operatorname{Ker}\psi_U \subseteq \operatorname{Im}\varphi_U$. Sea $t \in \mathcal{F}(U)$ de modo que $t \in \operatorname{Ker}\psi_U$. Consideremos un punto p de U. El hecho de que $t \in \operatorname{Ker}\psi_U$ implica que $\psi_p(t_p) = 0_{\mathcal{H}_p}$, así, como $t_p \in \operatorname{Ker}\psi_p = \operatorname{Im}\varphi_p$ se sigue que existen un abierto V_p de X que contiene a p y $s(p) \in \mathcal{G}(V_p)$ tales que $\varphi_p((s(p))_p) = t_p$. Ahora bien, la igualdad $[(V_p, \varphi_{V_p}(s(p)))] = [(U, t)]$ implica que existe un abierto W_p de X que contiene a p tal que $W_p \subseteq U \cap V_p$ y $\rho_{\mathcal{F}}{}^{V_p}_{W_p}(\varphi_{V_p}(s(p))) = \rho_{\mathcal{F}}{}^U_{W_p}(t)$. Luego, observemos que $(W_p)_{p\in U}$ es una cubierta abierta de U y recordemos que φ es un morfismo inyectivo. De esta forma, al considerar la familia $(\rho_{\mathcal{G}}{}^{V_p}_{W_p}(s(p)))_{p\in U}$ de secciones de $\mathcal{G}$ y utilizar argumentos análogos a los usados en la implicación 3. ⇒ 2. del Teorema C.8 tenemos que existe una sección s de $\mathcal{G}$ sobre U de modo que $\varphi_U(s) = t$. Consecuentemente tenemos que $t \in \operatorname{Im}\varphi_U$.

Por lo tanto, la sucesión $0 \to \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{H}(U)$ es una sucesión exacta de $\mathbb{Z}$-módulos. ❑

El próximo resultado establece una manera de comprobar cuándo una sucesión de gavillas es exacta utilizando la restricción de gavillas.

Proposición C.31. *Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ gavillas sobre un espacio topológico X y sea $\mathcal{B}$ una base para la topología de X. La sucesión de gavillas $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{F} \to \mathcal{H} \to 0$ es exacta si y sólo si la sucesión de gavillas $0 \to \mathcal{G}|_B \to \mathcal{F}|_B \to \mathcal{H}|_B \to 0$ es exacta para cada $B \in \mathcal{B}$.*

Demostración. El resultado es inmediato por dos razones: la primera es que si $B \in \mathcal{B}$, entonces para cualquier $p \in B$ se tiene que $\mathcal{G}_p \cong (\mathcal{G}|_B)_p$, $\mathcal{F}_p \cong (\mathcal{F}|_B)_p$ y $\mathcal{H}_p \cong (\mathcal{H}|_B)_p$; y la segunda es que para cualquier $p \in X$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $p \in B$. ❑

En la Teoría de Módulos sabemos que a partir de un módulo y un submódulo siempre es posible construir una sucesión exacta corta, en la Teoría de Gavillas podemos hacer lo mismo: consideremos una gavilla $\mathcal{F}$ de grupos abelianos sobre un espacio topológico X y una subgavilla $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$. Como $\mathcal{G}$ es una subgavilla de $\mathcal{F}$ sabemos que el morfismo natural $j^\# : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ es inyectivo. Luego, consideramos al morfismo sobreyectivo $\pi : \mathcal{F} \to \dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}$ que construimos en la subsección anterior. Lo único que nos resta a probar para tener que la sucesión $0 \to \mathcal{G} \xrightarrow{j^\#} \mathcal{F} \xrightarrow{\pi} \dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}} \to 0$ es exacta es que para todo $p \in X$ se tiene que $\operatorname{Im} j^\#_p = \operatorname{Ker}\pi_p$. Sea $p \in X$. De la construcción del morfismo π (véase Proposición C.27) se sigue que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_p \arrow[r, "j^\#_p"] & \mathcal{F}_p \arrow[r, "\pi^-_p"] \arrow[dr, "\pi_p"'] & \left(\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-\right)_p \arrow[d, "\theta_p^{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}}"] \\
 & & \left(\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}\right)_p
\end{tikzcd}$$

Utilizando dicho diagrama vamos a mostrar que $\operatorname{Im} j^\#_p = \operatorname{Ker}\pi_p$. En primer lugar mostraremos que $\operatorname{Im} j^\#_p \subseteq \operatorname{Ker}\pi_p$: sea $y \in \mathcal{F}_p$ tal que $y \in \operatorname{Im} j^\#_p$, así, existe $x \in \mathcal{G}_p$ tal que $j^\#_p(x) = y$. Luego, puesto que

$$\pi_p(y) = \theta_p^{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}} \circ \pi^-_p \circ j^\#_p(x) = \theta_p^{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}}(0_{(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-)_p})$$

se sigue que $y \in \operatorname{Ker}\pi_p$. Ahora, mostraremos que $\operatorname{Ker}\pi_p \subseteq \operatorname{Im} j_p^\#$: sea $x \in \mathcal{F}_p$ tal que $x \in \operatorname{Ker}\pi_p$. Puesto que

$$0_{(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}})_p} = \pi_p(x) = \theta_p^{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}} \circ \pi_p^-(x)$$

y $\theta_p^{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}}$ es en particular inyectiva se sigue que $\pi_p^-(x) = 0_{(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-)_p}$. Luego, puesto que $\operatorname{Ker}\pi_p^- = \mathcal{G}_p = \operatorname{Im} j_p^\#$ tenemos que $x \in \operatorname{Im} j_p^\#$. Por lo tanto, tenemos $\operatorname{Im} j_p^\# = \operatorname{Ker}\pi_p$. De esta manera, concluimos que la sucesión $0 \to \mathcal{G} \xrightarrow{j^\#} \mathcal{F} \xrightarrow{\pi} \dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}} \to 0$ es exacta de gavillas.

El siguiente resultado con el que concluiremos este apéndice tiene como consecuencia un análogo al primer teorema de isomorfismos en la Teoría de Gavillas.

Proposición C.32. *Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ gavillas sobre un espacio topológico X tal que $\mathcal{G}$ es una subgavilla de $\mathcal{F}$. Si la sucesión de gavillas* $0 \to \mathcal{G} \xrightarrow{\iota} \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{H} \to 0$ *es exacta, entonces existe un isomorfismo natural* $\widetilde{\varphi} : \dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}} \to \mathcal{H}$.

Demostración. Para construir el morfismo deseado es suficiente con construir un morfismo $\tilde{\varphi}^-$ entre $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-$ y $\mathcal{H}$. Sea U un abierto de X. Por la Proposición C.30 sabemos que la sucesión $0 \to \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\iota_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{H}(U)$ es exacta de $\mathbb{Z}$-módulos. De este modo, tenemos que la siguiente aplicación es un homomorfismo inyectivo de grupos:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\varphi}_U^- : & \dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-(U) & \to & \mathcal{H}(U) \\ & s + \mathcal{G}(U) & \mapsto & \varphi_U(s) \end{array}$$

Ahora, vamos a probar la compatibilidad con las restricciones de pregavilla. Sean U y V abiertos de X de modo que $V \subseteq U$. Mostraremos que el siguiente diagrama es un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-(U) \arrow[r, "\tilde{\varphi}_U^-"] \arrow[d, "\rho_{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-}{}^U_V"'] & \mathcal{H}(U) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{H}}{}^U_V"] \\ \dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-(V) \arrow[r, "\tilde{\varphi}_V^-"'] & \mathcal{H}(V) \end{tikzcd}$$

Sea $s \in \mathcal{F}(U)$,

$$\rho_{\mathcal{H}}{}^U_V \circ \tilde{\varphi}_U^-(s + \mathcal{G}(U)) = \rho_{\mathcal{H}}{}^U_V \circ \varphi_U(s) = \varphi_V \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^U_V(s) = \tilde{\varphi}_V^-(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_V(s) + \mathcal{G}(V)) = \tilde{\varphi}_V^- \circ \rho_{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-}{}^U_V(s + \mathcal{G}(U)).$$

De esta manera, concluimos que $\tilde{\varphi}^- : \dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^- \to \mathcal{H}$ es un morfismo.

Por otro lado, consideremos un punto p de X. Puesto que $\tilde{\varphi}_U^-$ es un homomorfismo inyectivo para cada abierto U de X, como consecuencia al Teorema C.8 se sigue que $\tilde{\varphi}_p^-$ es un homomorfismo inyectivo. A continuación vamos a probar que dicho homomorfismo también es sobreyectivo. Sean V un abierto de X que contiene a p y $t \in \mathcal{H}(V)$, mostraremos que existe $z \in \left(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}^-\right)_p$ de modo que $\tilde{\varphi}_p^-(z) = [(V,t)]$. Puesto que el homomorfismo $\varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{H}_p$ es sobreyectivo se sigue que existen un abierto U de X que contiene a p y $s \in \mathcal{F}(U)$ de modo que $\varphi_p([(U,s)]) = [(V,t)]$, es decir, de modo que $[(U,\varphi_U(s))] = [(V,t)]$. Luego, afirmamos que el elemento buscado es $[(U, s + \mathcal{G}(U))]$: en efecto,

$$\tilde{\varphi}_p^-([(U, s + \mathcal{G}(U))]) = [(U, \tilde{\varphi}_U^-(s + \mathcal{G}(U)))] = [(U, \varphi_U(s))] = [(V,t)].$$

Así, tenemos que $\tilde{\varphi}_p^-$ es un homomorfismo sobreyectivo. Por lo tanto, concluimos que $\tilde{\varphi}_p^-$ es un isomorfismo para cualquier $p \in X$.

Ahora bien, por la propiedad universal de la gavilla asociada sabemos que existe el morfismo $\widetilde{\varphi} : \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}} \to \mathcal{H}$ y es tal que satisface la igualdad $\tilde{\varphi}^- = \widetilde{\varphi} \circ \theta^{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}}$. Sea $p \in X$. Puesto que $\tilde{\varphi}_p^- = \widetilde{\varphi}_p \circ \theta_p^{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}}$ y $\theta_p^{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}}$ es un isomorfismo se sigue que $\widetilde{\varphi}_p = \tilde{\varphi}_p^- \circ (\theta_p^{\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}})^{-1}$, además, el hecho de que $\tilde{\varphi}_p^-$ es un isomorfismo implica que $\widetilde{\varphi}_p$ también lo es. De este modo, como p fue un punto arbitrario de X concluimos que $\widetilde{\varphi}$ es un isomorfismo. ❏

Bibliografía

[1] Atiyah, M. and Macdonald I., *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969, ix+128 pp.

[2] Bourbaki, N., *Elements of mathematics. Commutative algebra*. Translated from the French. Hermann, Paris; Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1972, xxiv+625 pp.

[3] Cerda Rodríguez J. A., De La Rosa Navarro B. L. y Lahyane M., *Una introducción suave al estudio de la teoría de gavillas*. Prepublicación, 2012.

[4] Dieudonné, J., *The historical development of algebraic geometry*. Amer. Math. Monthly 79: 827-866, 1972.

[5] Frías Medina, J. B., *Sobre el carácter algebraico de los morfismos de esquemas afines*. Tesis de Licenciatura, Universidad de Colima, Colima, Col., Julio 2010.

[6] Hartshorne, R., *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heildelberg, 1977, xvi+496 pp.

[7] Iitaka, S., *Algebraic geometry. An introduction to birational geometry of algebraic varieties*. Graduate Texts in Mathematics, 76. North-Holland Mathematical Library, 24. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982, x+357 pp.

[8] Lui, Q., *Algebraic geometry and arithmetic curves* (English summary). Translated from French by Reine Erné. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 6. Oxford Science Publications. Oxford University Press, Oxford, 2002, xvi+576 pp.

[9] Ueno, K., *Algebraic geometry 1. From algebraic varieties to schemes*. Translated from the 1997 Japanese original by Goro Kato. Translation of Mathematical Monographs, 185. Iwanami Series in Modern Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, xx+154 pp.

[10] Ueno, K., *Algebraic geometry 2. Sheaves and cohomology*. Translated from the 1997 Japanese original by Goro Kato. Translation of Mathematical Monographs, 197. Iwanami Series in Modern Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, xx+184 pp.

[11] Zariski, O. and Samuel, P., *Commutative Algebra, Volume I*. With the cooperation of I.S. Cohen. The University Series in Higher Mathematics. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1958, xi+329 pp.

Índice alfabético