



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**SOBRE EL MODELO COSMOLÓGICO ACTUAL Y LA  
MATERIA OSCURA: ENTRE LA FÍSICA NEWTONIANA Y LA  
TEORÍA DE LA RELATIVIDAD GENERAL.**

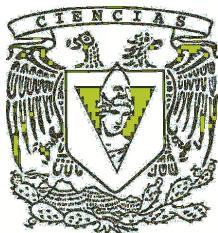
**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**FÍSICO**

**P R E S E N T A:**

**DANIELA HERNÁNDEZ MARÍN**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. DARÍO NÚÑEZ ZÚÑIGA  
2012**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

“Hay una teoría que afirma que si alguien descubriera lo que es exactamente el Universo y el por qué de su existencia, desaparecería al instante y sería sustituido por algo aún más extraño e inexplicable.

Hay otra teoría que afirma que eso ya ha ocurrido”.

*El restaurante del fin del mundo*, Douglas Adams.





*Questions of science and progress do not speak as loud as my heart...*

*Ciudad de México, Octubre 2012*



# Índice general

<b>Introducción.</b>	<b>1</b>
0.1. El Universo según Newton . . . . .	1
0.1.1. El universo de Newton y sus paradojas. . . . .	2
0.1.2. El Principio Cosmológico y el problema de la inestabilidad. . . . .	3
0.2. Modelo Estándar. . . . .	3
0.2.1. Bases experimentales. . . . .	4
<b>1. Modelo Estándar Cosmológico</b>	<b>5</b>
1.1. Teoría de la Relatividad General . . . . .	5
1.1.1. Ecuaciones de campo de Einstein y las ecuaciones de Friedmann- Robertson-Walker-Lemâitre . . . . .	8
1.1.2. Corrimiento al rojo y Ley de Hubble . . . . .	12
1.1.3. La métrica FRWL: Universos abiertos, cerrados y planos. . . . .	15
1.2. Nucleosíntesis Primordial. Formación de materia. . . . .	18
1.2.1. Termodinámica del equilibrio y la función de distribución. . . . .	19
1.2.2. Producción de Helio e Hidrógeno . . . . .	21
1.2.3. Nucleosíntesis de otros elementos . . . . .	23
<b>2. Observaciones recientes</b>	<b>25</b>
2.1. La radiación cósmica de fondo . . . . .	25
2.1.1. Inhomogeneidades y anisotropías . . . . .	26
2.1.2. COBE, WMAP . . . . .	32



<i>ÍNDICE GENERAL</i>	7
2.2. Formación de estructuras . . . . .	33
2.3. Curvas de rotación en discos de galaxias . . . . .	36
2.4. Lentes gravitacionales. . . . .	37
2.5. Supernovas tipo Ia . . . . .	39
<b>3. Componentes Oscuras del Universo.</b>	<b>43</b>
3.1. Modelo $\Lambda$ CDM (Lambda Cold Dark Matter) . . . . .	43
3.1.1. Constante Cosmológica $\Lambda$ . . . . .	43
3.1.2. Posibles finales del Universo . . . . .	46
3.2. ¿Cómo es la Materia Oscura? . . . . .	48
3.2.1. Materia oscura fría. . . . .	49
3.2.2. Materia oscura relativista (caliente). . . . .	50
<b>4. Física Newtoniana vs Relatividad General.</b>	<b>51</b>
4.1. Curvas de rotación . . . . .	51
4.1.1. Curvas de rotación en Relatividad General. . . . .	54
4.2. ¿Qué nos dicen la Física Newtoniana y la Relatividad General? . . . . .	58
<b>5. La cosmología moderna y sus perspectivas</b>	<b>67</b>
5.1. Teorías alternativas a las componentes oscuras . . . . .	67
5.1.1. Estado estacionario . . . . .	68
5.1.2. Teorías de gravedad modificada: MOND y $f(R)$ . . . . .	68
5.1.3. Quintaesencia . . . . .	70
5.2. Perspectivas. . . . .	72
5.2.1. Por buen rumbo. . . . .	72
5.2.2. Lo que está por venir. . . . .	72
<b>Referencias</b>	<b>75</b>

# Introducción.

La cosmología es, básicamente, la ciencia que se dedica a estudiar de manera objetiva y cuantificable al Universo como un todo. Un *todo* que se puede analizar casi por completo en *cualquier* momento. Su inicio, su evolución, y sus posibles finales.

Aunque la humanidad desde siempre se ha cuestionado sobre diversos aspectos del cosmos, es hasta que se hace la suposición de que las leyes físicas válidas en la Tierra lo sean para cualquier parte del Universo, que la cosmología deja de ser un asunto meramente filosófico para obtener un carácter científico. Por lo anterior, esta ciencia ha sufrido importantes cambios en su desarrollo, y la intención del presente trabajo, es precisamente el de dar un panorama global de los aspectos fundamentales que poco a poco fueron dando lugar a lo que hoy se conoce como *Cosmología moderna*.

Cabe destacar que, aunque parezca filosófico, todo lo que se hable en adelante, es respecto a observadores *dentro* del Universo, ya que carece de sentido siquiera imaginar algo fuera de él. Si hubiese algo que no estuviera en el Universo, estaría también causalmente desconectado de él, y no habría manera de saber su existencia. Así pues, bajo *nuestra* definición científica del Universo, no existe un *fuera*, sólo *dentro*.

## 0.1. El Universo según Newton

Según Newton, la distribución de objetos luminosos en el cielo debería ser uniforme para poder mantenerse en equilibrio gravitacional, de lo contrario, colapsaría debido a la atracción gravitatoria entre las masas. Sin embargo, de ser correcto lo anterior, y si el Universo no tuviera límites en extensión de espacio y tiempo, la densidad de radiación

luminosa sería muy grande.

Esto da lugar a una pregunta natural: *¿Por qué el cielo de noche es oscuro?*

### 0.1.1. El universo de Newton y sus paradojas.

Si se supone un universo infinito, estático y uniforme en la distribución de las estrellas, entonces el campo de visibilidad debería estar totalmente lleno, por lo que la noche no sería oscura. Así pues, la Tierra se encontraría a la temperatura superficial del Sol. Sin embargo, nada de lo anterior ocurre. Despreciando absorción, la luminosidad aparente de una estrella con luminosidad absoluta  $L$  a una distancia  $r$  del observador, está dada por

$$l = \frac{L}{4\pi r^2} \quad (1)$$

Si  $n$  es la densidad volumétrica de estrellas, entonces  $dN = 4\pi nr^2 dr$  corresponde al diferencial de volúmen de una esfera; así pues, la densidad total de energía radiante debido a la contribución de todas las estrellas sería:

$$\rho_l = \int_0^\infty l dN = \int_0^\infty \left( \frac{L}{4\pi r^2} \right) 4\pi nr^2 dr = Ln \int_0^\infty dr \quad (2)$$

La integral anterior diverge, por lo que el resultado extrañamente sería una densidad infinita de energía proveniente de la luz de las estrellas del Universo, lo cual no resulta de ninguna manera lógico, ya que la energía debe tener un valor finito.

Olbers propuso la existencia de un medio interestelar opaco capaz de absorber la luz de estrellas muy lejanas, con el fin de evitar la terrible paradoja mencionada anteriormente. Sin embargo, el hecho de que el Universo en su totalidad no tiene la misma temperatura que una estrella típica, constituyó uno de los principales contraejemplos para poder echar abajo la propuesta de Olbers.

La solución actual a esta paradoja, consiste en no visualizar al Universo según los ojos de Newton, sino darle cabida a la Teoría de la Relatividad, la cual fue necesaria para fundamentar la cosmología moderna por otros aspectos que se abordarán más adelante.

Resulta pues, que según la Teoría de la Relatividad, formulada por Albert Einstein, la interacción gravitacional se propaga a la velocidad de la luz. Partiendo de que el Universo tiene aproximadamente  $10^{10}$  años luz, no es posible observar todavía la luz proveniente más allá de esa distancia. Por otro lado, la radiación de los objetos astronómicos es finita, así como el volumen del Universo observable.

Otro argumento importante, que se explicará a detalle más adelante, es que la distancia entre los objetos en el universo aumenta con el paso del tiempo, es decir, el espacio se expande. Así pues, la luz que recibe cierto observador sufre un *corrimiento al rojo*, lo que hace que los fotones que se reciben, lleguen con menos energía que con la que fueron emitidos.

### 0.1.2. El Principio Cosmológico y el problema de la inestabilidad.

En el universo newtoniano, existe un problema importante cuando se introduce el *Principio Cosmológico*. Éste establece que no existen observadores privilegiados en el Universo, esto es, que el cosmos es homogéneo (se ve igual en todos los puntos) e isotrópico (se ve igual en todas las direcciones). Para que se tuviera un Universo estable, se necesitaría un alto grado de isotropías para que las fuerzas se igualaran, pero en el Universo newtoniano hay un centro del universo, (no hay nada que establezca que no lo hay) lo cual haría que hasta las fuerzas locales debidas a la cinemática de los planetas alterararan el equilibrio, y la materia sería rápidamente llevada al colapso.

## 0.2. Modelo Estándar.

El llamado *Modelo Cosmológico* explica con buena aproximación la evolución del universo, proponiendo la existencia de un primer momento, el **Big Bang**, hasta la época actual. Tiene sus bases teóricas en la Teoría de la Relatividad, y en el Principio Cosmológico. Sus bases experimentales, merecen un mayor detalle, y se explican a

continuación.

### 0.2.1. Bases experimentales.

- Radiación Cómica de Fondo. Descubierta en 1965 por Penzias y Wilson, e interpretada como remanente del Big Bang de acuerdo al modelo de Gamow. La radiación fue emitida cuando el Universo tenía una temperatura lo suficientemente baja como para ya haber formado átomos neutros, y que se desacoplaran los fotones de la materia. Fundamenta la isotropía y ayuda a determinar con buena aproximación ciertos parámetros del universo, como por ejemplo, su composición.
- Corrimiento al rojo de las galaxias. Como consecuencia de la expansión del Universo, la luz emitida por galaxias, estrellas y otros objetos astronómicos, pierde energía, lo cual se traduce en menores frecuencias. Es decir, se *corre al rojo*. Se trata de un efecto análogo al Doppler del sonido, pero asociado a la expansión del espacio.
- Abundancia relativa de Helio e Hidrógeno. He y H son los elementos primigenios formados en la época de Nucleosíntesis, cuando el Universo tenía aproximadamente 100 s de edad, y un poco más caliente que el núcleo del Sol. Resulta que la abundancia relativa entre Helio e Hidrógeno es de 1 a 4.

Fue necesario entonces, crear un modelo que fuera capaz de explicar las observaciones anteriores, fundamentado en la Teoría de la Relatividad General de Albert Einstein, y fue así como surgió el modelo de Friedmann-Robertson-Walker-Lemaitre.

# Capítulo 1

## Modelo Estándar Cosmológico

El modelo Friedmann-Robertson-Walker-Lemaitre (FRWL) es una solución exacta a las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General. Describe un Universo en expansión (o contracción), homogéneo e isotrópico. Es capaz de explicar las 3 observaciones fundamentales descritas anteriormente, y da un panorama que describe con buena aproximación la naturaleza del Universo.

### 1.1. Teoría de la Relatividad General

La Teoría de la Relatividad, descubierta en 1905 por Albert Einstein, establece que existe un espacio 4-dimensional cuya geometría está descrita por la materia; descrito, en el caso plano, por la métrica

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (1.1)$$

lo cual significa que los puntos en el espacio tiempo de 4 dimensiones son eventos, y la posición y el tiempo son relativos al marco de referencia elegido. Tanto el intervalo temporal como el espacial pierden significado físico, y se tiene que  $ds^2$  es la cantidad bien definida cuyo valor no cambia para cualquier sistema de referencia inercial. Es importante hacer énfasis en que espacio y tiempo por separados no tienen sentido y no son invariantes, pues en Relatividad se considera el espacio-tiempo como una entidad,

que sí tiene sentido físico invariante. Se define, el tiempo propio como

$$-c^2 d\tau^2 = ds^2, \quad (1.2)$$

éste es el tiempo medido por un observador desde su sistema de referencia. En adelante, por conveniencia, se utilizarán unidades del Sistema Internacional.

Como se mencionó previamente, las observaciones habían señalado que el universo es isotrópico y homogéneo, por lo que era necesario construir un modelo matemático que describiera a un universo así.

La métrica de FRWL resultó ser ese modelo buscado. Tiene la siguiente forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\}, \quad (1.3)$$

donde  $(t, r, \theta, \phi)$  son coordenadas comóviles,  $a(t)$  es el factor de escala cosmológico y  $k$  puede tomar valores 1, -1, 0 dependiendo, como se verá más adelante, de si se trata de un universo con curvatura positiva, negativa o cero, respectivamente.

Ahora bien, por otro lado, se conoce la ecuación geodésica, la cual es el análogo de la segunda Ley del Movimiento de Newton  $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ ,

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (1.4)$$

donde los símbolos de Christoffel,  $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$ , están definidos por

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\nu = \frac{g^{\mu\nu}}{2} (g_{\alpha\mu,\beta} + g_{\beta\mu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\mu}). \quad (1.5)$$

La conexión entre el parámetro afín  $\lambda$  y la energía para fotones, viene dado por el cuadrimomento  $P^\mu = (E, \vec{P})$ . Se define

$$P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (1.6)$$

Debido a que por definición

$$E = \frac{dx^0}{d\lambda}, \quad (1.7)$$

y de acuerdo a la ecuación geodésica,

$$\frac{d(E)}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^0 P^\nu P^\lambda = 0 \quad (1.8)$$

se tiene, para el espacio FRWL

$$\frac{dE}{d\lambda} + \Gamma_{rr}^0 P^r P^r + \Gamma_{\theta\theta}^0 P^\theta P^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^0 P^\phi P^\phi = 0 \quad (1.9)$$

Y como  $\Gamma_{ii}^0 = \frac{\dot{a}}{a} g_{ii}$ , entonces:

$$\frac{dE}{d\lambda} + \frac{\dot{a}}{a} (g_{rr} P^r P^r + g_{\theta\theta} P^\theta P^\theta + g_{\phi\phi} P^\phi P^\phi) = 0. \quad (1.10)$$

Como se sabe que

$$g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = 0 \text{ para el fotón por definición}$$

$$g_{00} P^0 P^0 + g_{ii} P^i P^i = 0$$

$$g_{ii} P^i P^i = -g_{00} P^0 P^0 = -g_{00} E^2 = E^2 \text{ pues } g_{00} = -1,$$

se llega a

$$\frac{dE}{d\lambda} + \frac{\dot{a}}{a} E^2 = 0 \quad (1.11)$$

y como el parámetro  $\lambda$  puede ser eliminado mediante

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dt}{d\lambda} \frac{d}{dt} \equiv E \frac{d}{dt}$$

se llega a la ecuación:

$$E \frac{dE}{dt} + \frac{\dot{a}}{a} E^2 = 0 \quad (1.12)$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{\dot{E}}{E} = -\frac{\dot{a}}{a} \quad (1.13)$$

que resulta en

$$\frac{d}{dt} \ln E = -\frac{d}{dt} \ln a \Rightarrow \ln\left(\frac{E}{E_0}\right) = -\ln\left(\frac{a}{a_0}\right) \Rightarrow E = E_0 \frac{a_0}{a}$$

Por lo tanto,

$$E \propto \frac{1}{a}. \quad (1.14)$$

Esta última expresión manifiesta la idea de que la energía de la luz en un Universo que se expande decrece. Por ejemplo, si  $E = h\nu$  con  $\nu$  la frecuencia del fotón, tal  $\nu$  debe correrse al rojo con la expansión. Esto corresponde también a las observaciones del corrimiento al rojo proveniente de galaxias.



### 1.1.1. Ecuaciones de campo de Einstein y las ecuaciones de Friedmann-Robertson-Walker-Lemâitre

Las ecuaciones de campo de Einstein, son el fundamento de la descripción relativista de la gravitación. Relacionan la presencia de materia con la curvatura del espacio-tiempo. Su forma matemática es:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.15)$$

donde  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci,  $R$  es el escalar de Ricci (obtenido al contraer la métrica con el tensor de Ricci  $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ ) y  $T_{\mu\nu}$  el tensor de energía-momento. Para los modelos aquí utilizados, se considera el tratamiento de un fluido perfecto, es decir, un fluido sin viscosidad.

$$T_{\mu\nu} = \rho_0 h u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu},$$

donde  $h = (c^2 + \epsilon) + \frac{P}{\rho_0}$  es la entalpía. Definimos también el flujo  $J^\mu = \rho_0 u^\mu$  el cual se conserva  $J^\mu_{;\mu}$ . Trabajando en un espacio homogéneo e isótropo, para mayor simplicidad, la forma de dicho tensor de energía momento es

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (1.16)$$

Se puede demostrar que el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  tiene divergencia nula, por lo tanto, el tensor de energía momento también debe cumplir dicha condición. Esta ecuación de divergencias es una *ecuación de conservación*

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0. \quad (1.17)$$

Así pues, utilizando el  $T^{\mu\nu}$  correspondiente a fluido perfecto, y usando la anterior ecuación, se obtienen dos importantes resultados. He aquí su derivación:

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = \partial_\mu(T^{\mu\nu}) + \Gamma^\mu_{\mu\lambda}T^{\lambda\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}T^{\mu\lambda}, \quad (1.18)$$

sustituyendo la forma de  $T_{\mu\nu}$  (1.16),

$$\begin{aligned}
 T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 &= (\rho_0 h)_{,\nu} \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} + p_{,\nu} g^{\mu\nu} + \rho_0 h (u^\mu{}_{;\nu} u^\nu + u^\mu u^\nu{}_{;\nu}) \\
 &= ((\rho_0 h)_{,\nu} u^\nu + \rho_0 h u^\nu{}_{;\nu}) \frac{u^\mu}{c^2} + p_{,\nu} g^{\mu\nu} + \frac{\rho_0 h u^\mu{}_{;\nu} u^\nu}{c^2} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Contrayendo con  $u_\mu$  y usando  $u_\mu u^\mu = -c^2$

$$\begin{aligned}
 u_\mu T^{\mu\nu}{}_{;\mu} &= - \left( (\rho_0 h)_{,\nu} \frac{u^\nu}{c^2} + \rho_0 h \frac{u^\nu{}_{;\nu}}{c^2} \right) + p_{,\nu} \frac{u^\nu}{c^2} \\
 &= (- (\rho_0 h)_{,\nu} + p_{,\nu}) \frac{u^\nu}{c^2} - \rho_0 h \frac{u^\nu{}_{;\nu}}{c^2} \\
 &= - (\rho_0 (c^2 + \epsilon))_{,\nu} \frac{u^\nu}{c^2} + \rho_0 h u^\nu{}_{;\nu} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

El último paso se debe a que  $c^2 \rho_0 h = c^2 \rho_0 (1 + \epsilon) + p$

Ahora bien, de la expresión final al utilizar la ecuación de continuidad, se tiene:

$$\begin{aligned}
 ((\rho_0 h)_{,\nu} u^\nu + \rho_0 h u^\nu{}_{;\nu}) \frac{u^\mu}{c^2} &= ((\rho_0 (c^2 + \epsilon))_{,\nu} + p_{,\nu}) u^\nu + \rho_0 h u^\nu{}_{;\nu} \frac{u^\mu}{c^2} \\
 &= p_{,\nu} \frac{u^\nu u^\mu}{c^2}
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Así pues, usando ambos resultados, de la Ley de Conservación y de su contracción con  $u_\mu$  se llega a:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho_0 h \frac{u^\mu{}_{;\nu}}{c^2} + p_{,\nu} \left( g^{\mu\nu} + \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \right) = 0 \text{ Euler.} \\ (\rho_0 (c^2 + \epsilon))_{,\nu} u^\nu + \rho_0 h u^\nu{}_{;\nu} = 0 \text{ Primera Ley de la Termodinámica.} \end{array} \right\}. \tag{1.22}$$

Se puede demostrar que las ecuaciones anteriores tienen forma similar a sus expresiones en física clásica<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>La ecuación de Euler en física clásica es:  $\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{-\vec{\nabla} P}{\rho} + \vec{g}$  mientras que la Primera Ley de la Termodinámica en física clásica es  $dU = dQ - pdV$

Por ahora, se elegirá el sistema comóvil, esto es, aquél que se mueve junto con la expansión del Universo, así que su cuadrivector es  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . Su tensor de energía momento asociado es

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c^2\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones de Einstein permiten, entre otras cosas, obtener dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, no lineales. Para ello, a partir de la métrica de FRWL (ec. 1.3) se calculan los símbolos de Christoffel (ec. 1.5).

Ahora bien, es necesario calcular el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  (simétrico y covariante de orden dos, son 10 componentes independientes en 4 dimensiones) y el escalar de Ricci  $R$  (curvatura escalar obtenida con la contracción del escalar de Ricci).

Donde

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$$

y  $R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$  es el tensor de Riemann o de curvatura (20 componentes independientes en 4 dimensiones), definido por

$$R^\alpha_{\mu\lambda\sigma} = \Gamma^\alpha_{\sigma\mu,\lambda} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda,\sigma} + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}\Gamma^\nu_{\mu\sigma} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\Gamma^\nu_{\mu\lambda}.$$

Y

$$R = g^{\lambda\alpha}R_{\lambda\alpha}.$$

Así pues, para el caso de la métrica FRWL, se obtiene (directamente de la ec. (1.3):

$$R^0_0 = 3\frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(2\dot{a}^2 + 2k)}{a^2} \quad (1.23)$$

$$R_\mu^\nu = 0, \forall \mu \neq \nu$$

$$R = 6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(\dot{a}^2 + k)}{a^2} \right)$$

Usando ahora el tensor de energía momento de fluido perfecto (ec. 1.16), se pueden aplicar las ecuaciones de Einstein (ec. 1.15) obteniendo así:

$$\rho = \frac{1}{8\pi G} \left[ 3 \frac{(\dot{a}^2 + k)}{a^2} \right] \quad (1.24)$$

$$p = -\frac{1}{8\pi G} \left[ 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(\dot{a}^2 + k)}{a^2} \right]. \quad (1.25)$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que al ser,  $a(t)$ , entonces  $p = p(t)$  y  $\rho = \rho(t)$ . Esto implica que siempre existirá una ecuación de estado  $p = p(\rho)$ .

Mediante la suma del triple de la ec. (1.25) a la ec. (1.24), se llega a lo que se conoce como *Ecuaciones de Friedmann*:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi(\rho + 3p) \quad (1.26)$$

y,

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (1.27)$$

haciendo  $G=1$ .

A partir de la ecuación de estado, es posible encontrar la forma del factor de escala  $a$ .

Derivando la ec. (1.24) con respecto al tiempo, se obtiene

$$\dot{\rho} = \frac{1}{8\pi} \frac{6\dot{a}}{a} \left( \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{(\dot{a}^2 + k)}{a^2} \right) \quad (1.28)$$

y comparando con la suma de (1.24) y (1.25):

$$p + \rho = \frac{1}{8\pi} \left( -2\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{(\dot{a}^2 + k)}{a^2} \right) \quad (1.29)$$

se llega a:

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\dot{a}}{a}[3\rho + 3P] = 0, \quad (1.30)$$

Reacomodando términos se tiene

$$a^{-3}\frac{d(\rho a^3)}{dt} = -3\frac{\dot{a}}{a}P \quad (1.31)$$

Y como el polvo, que es un caso particular de fluido perfecto, tiene presión cero, entonces la ecuación anterior es

$$\frac{\partial(\rho a^3)}{\partial t} = 0, \quad (1.32)$$

Lo anterior implica que la densidad de materia debe cumplir  $\rho_m \propto a^{-3}$

Para el caso de la radiación,  $P = \frac{\rho}{3}$ , y usando de nuevo la ecuación (1.30)

$$\frac{\partial\rho_r}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}4\rho_r = a^{-4}\frac{\partial[\rho_r a^4]}{\partial t} = 0 \quad (1.33)$$

Lo cual implica que la densidad de energía para la radiación cumple  $\rho_r \propto a^{-4}$ .

La ecuación (1.27) rige la evolución del factor de escala como función de la densidad de energía.

### 1.1.2. Corrimiento al rojo y Ley de Hubble

Se observa que la energía emitida por galaxias lejanas está desplazada hacia longitudes de onda más grandes que la de aquellas que se encuentran a menor distancia, es decir, se corren al rojo. Esto se cuantifica mediante la medición del desplazamiento de las líneas de emisión o absorción de las galaxias, con respecto a la posición de tales líneas en un laboratorio. A este fenómeno se le llama *Corrimiento al Rojo*. Está descrito por la siguiente ecuación:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda}, \quad (1.34)$$

donde  $z$  es el corrimiento al rojo,  $\lambda_0$  es la longitud de onda recibida y  $\lambda$  es la longitud de onda emitida.

Existen diferentes interpretaciones del corrimiento al rojo<sup>2</sup>, sin embargo, todas deben considerar las siguientes propiedades observadas:

- El corrimiento de las galaxias, salvo en el caso de objetos del Grupo Local<sup>3</sup>, es siempre hacia el rojo.
- Los desplazamientos son isótropos, esto es, sólo dependen de la distancia a la que se encuentra el objeto, no de su dirección.
- El desplazamiento es independiente de la frecuencia.

Es importante hacer énfasis en que las características mencionadas son independientes del lugar en el Universo en el que se midan, de lo contrario, se llegaría a la conclusión de que existen zonas privilegiadas, lo cual contradice el Principio Cosmológico.

En el año de 1929, Hubble encontró una relación de tipo lineal entre la distancia y el corrimiento al rojo. Tal relación, es conocida como *Ley de Hubble*.

$$cz = H_0 D, \quad (1.35)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz,  $H_0$  es la denominada *Constante de Hubble* y  $D$  es la distancia a la que se encuentra el objeto observado, ver Fig. 1.1.

En la actualidad, dicha ley se ha verificado con objetos astrofísicos con corrimiento al rojo moderado. Un ejemplo de tales corroboraciones a la Ley de Hubble se muestra a continuación.

Se define el parámetro de Hubble como

---

<sup>2</sup>Hay quienes afirman que el corrimiento al rojo se debe a que la luz pierde energía al viajar por el espacio, por eso la observamos con una longitud de onda mayor, no como consecuencia de una evolución de la métrica. A esto se le llama *Modelo de Luz Cansada*.

<sup>3</sup>El Grupo Local está compuesto por aproximadamente 30 galaxias, situadas a no más de 1Mpc de la Vía Láctea. Se encuentra en proceso de colapso y Andrómeda y nuestra galaxia se acercan una a la otra a una velocidad de 119 km/s.

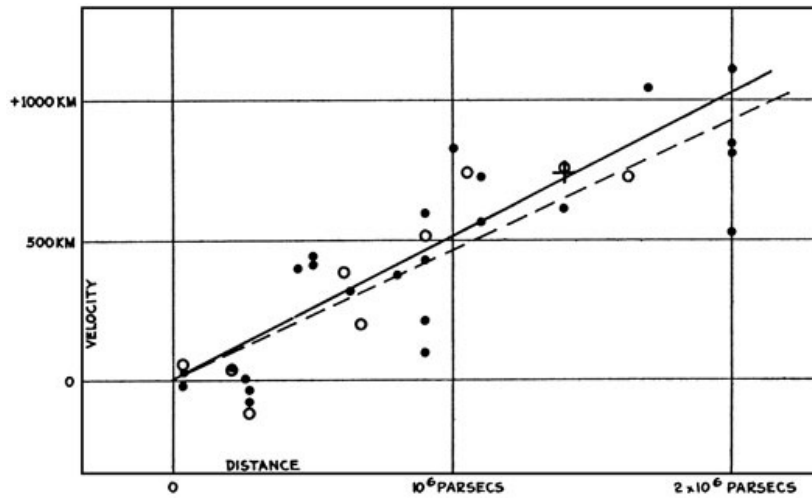


Figura 1.1: Gráfica donde se muestra la relación lineal que existe entre la distancia y la velocidad de recesión de las galaxias. Crédito: The Huntington Library. (Se trata de la gráfica original hecha por Hubble.)

$$H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (1.36)$$

El parámetro de Hubble  $H$  es función del tiempo, pero independiente de la posición. Así pues, es posible definir el valor de  $H$  al tiempo  $t_0$  de la siguiente manera

$$H_0 = H(t_0).$$

$H$  es una de las cantidades más valiosas en cosmología, pues es justamente la descripción de la tasa a la que se está expandiendo el Universo.

Ahora bien,  $H_0$  es un valor que se debe obtener mediante observaciones, la manera de hacerlo es la siguiente: Se grafica el corrimiento al rojo  $z$  contra la distancia de galaxias con  $z \sim 0,2$ . Es conveniente expresar el valor de la constante de Hubble,  $H_0$ , en términos es una cantidad adimensional:

$$H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (1.37)$$

donde  $h$  es un factor que se ajusta de acuerdo a la incertidumbre que se tenga en la medición al calcular las distancias.

Así pues, a pesar de que el corrimiento al rojo podría interpretarse de diferentes formas, la más viable es la de la evolución de la métrica. Esto da lugar a la observada expansión del Universo, la cual consiste, básicamente, en una variación de las distancias propias (distancias radiales que nos separan de objetos del Universo) en función del tiempo. Extrapolando al pasado, se sugiere que existió un origen definido en el tiempo para el espacio. A este origen, se le llama **Big Bang** o **La Gran Explosión**.

Sin embargo, y desde mi particular punto de vista, el término *Big Bang* no es precisamente el más acertado, pues la intuición dicta que una explosión tiene un centro, y que además observadores externos al evento pueden presenciarlo mientras sucede, lo cual no describe lo que en realidad es. Como ya se mencionó previamente, no existe un centro del Universo ni espectadores externos del primer instante, pues el Big Bang existió en todos lados al mismo tiempo.

Quizás un nombre más adecuado sería *Primer instante*, pero esto es una simple cuestión literaria que para nuestros fines no tiene mayor trascendencia.

### 1.1.3. La métrica FRWL: Universos abiertos, cerrados y planos.

Como se mencionó anteriormente (ec. 1.3), la métrica de FRWL, está dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\}, \quad (1.38)$$

donde,  $k$  determina el tipo de universo según la curvatura. Este último parámetro está íntimamente ligado a la densidad de materia existente en el espacio, pero también se sabe que la densidad de materia no es constante en el tiempo, pues existe expansión en el universo.

Considerando  $\Omega_U = \frac{\rho_U}{\rho_{cr}}$  es posible relacionar, usando la ec. (1.27), la curvatura y la



densidad de energía vía la siguiente ecuación:

$$k = H^2(t_0)[\Omega_U - 1], \quad (1.39)$$

Para poder describir la expansión del Universo según las densidades de energía que lo componen, se introducen las siguientes definiciones, empezando por la de *densidad crítica*:

$$\rho_{cr} = \frac{3H_0^2 c^2}{8\pi G} \quad (1.40)$$

la densidad adimensional de radiación:

$$\Omega_\gamma = \frac{\rho_\gamma}{\rho_{cr}} \quad (1.41)$$

y la densidad adimensional de materia:

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_{cr}} \quad (1.42)$$

donde la densidad de energía total del Universo es  $\rho_U = \rho_m + \rho_\gamma$ .

Asímismo, usando ec. (1.27), se llega a

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\rho}{\rho_{cr}}, \quad (1.43)$$

donde  $\rho$  contiene todas las aportaciones de densidad de energía, tales como materia, radiación, materia oscura, etc. Se observa que en la última ecuación no existe un término correspondiente a la curvatura, debido a que en toda la derivación se supuso un Universo plano. Retomando la ecuación (1.27), se puede expresar a partir de la nueva variable  $k$ , la forma o geometría del Universo. Es plana cuando  $\Omega_0 = 1$ , es cerrado si  $\Omega_0 > 1$  o abierto si  $\Omega_0 < 1$ , ver Fig. 1.2.

Utilizando las ecuaciones (1.27) y (1.39), se llega a la expresión que conecta el factor de escala y la razón entre las densidades de energía y la densidad crítica.

$$\left( \frac{1}{H(t_0)} \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \Omega_m(t_0) \frac{1-a}{a^3} + \Omega_\gamma(t_0) \frac{1-a^2}{a^4}, \quad (1.44)$$

y despejando  $\dot{a}$ , se llega a la ecuación diferencial

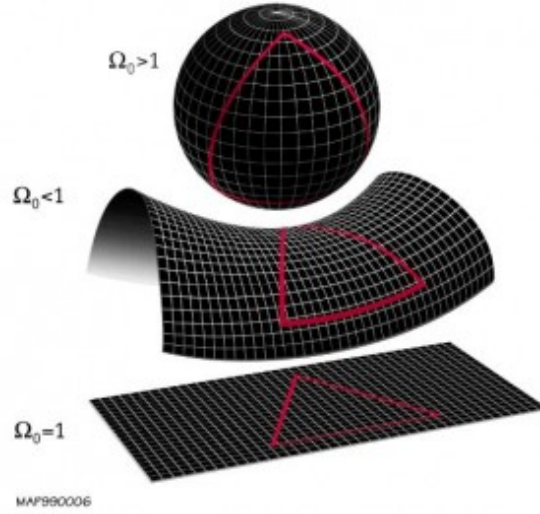


Figura 1.2: La geometría del Universo depende de la densidad total

$$\dot{a} = H(t_0) \sqrt{1 - \Omega_U(t_0) + \frac{\Omega_m(t_0)}{a} + \frac{\Omega_\gamma(t_0)}{a^2}}, \quad (1.45)$$

la cual puede ser integrada si se conocen  $\Omega_U, \Omega_\gamma, \Omega_m$ . El factor de escala está normalizado a 1 para hoy<sup>4</sup>.

Ahora bien, como  $k = H^2(t_0)[\Omega_U - 1]$ , se tiene  $\dot{a} = H(t_0) \sqrt{k + \frac{\Omega_m(t_0)}{a}}$ . De aquí, se puede obtener la gráfica para los diferentes universos dependiendo de su curvatura (Fig. 1.3).

De acuerdo a la ecuación anterior (1.45), y cambiando el valor del factor de escala, se tiene lo siguiente: Cuando  $a \ll 1$ , el término dominante es el que corresponde a la radiación. A medida que el Universo se fue expandiendo, y  $a < 1$ , la materia fue dominando sobre la radiación.

A partir de las componentes temporales de las ecuaciones de Einstein, se puede obtener una relación entre la evolución del factor de escala y la densidad de energía del Universo. Sin embargo, de la ecuación (1.45) se tiene que en un Universo joven dominaba la energía en forma de radiación, y conforme se fue incrementando la expansión, la

<sup>4</sup>El *hoy* se refiere a la época actual.

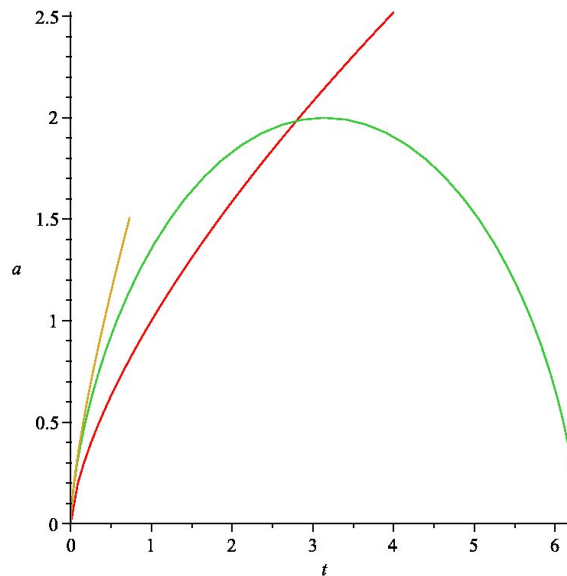


Figura 1.3: La geometría del Universo y su relación con el factor de escala. Amarillo: universo abierto  $k=-1$ , rojo: universo plano  $k=0$ , verde: universo cerrado,  $k=1$ .

materia no relativista empezó a contribuir de forma determinante en la evolución del factor de escala. El cambio sucede para aproximadamente  $a = 0,003$ .

## 1.2. Nucleosíntesis Primordial. Formación de materia.

Al principio, el Universo era muy denso, y presentaba una alta temperatura, y los elementos químicos presentes el día de hoy, no se formaron al mismo tiempo. Esto se llevó a cabo mediante dos procesos diferentes. Los elementos más ligeros, se formaron en lo que se conoce como *Nucleosíntesis primordial*, y más tarde, cuando la temperatura descendió más, se llevó a cabo la etapa llamada *Nucleosíntesis secundaria*, en la cual se formaron elementos más pesados, y esto sucedió en el interior de las estrellas.

Para efectos de el presente trabajo de tesis, se hará énfasis en la primera etapa, la cual también es llamada *Nucleosíntesis del Big Bang*. Este proceso, duró menos

de 4 minutos. Después, tanto la temperatura como la densidad total del Universo, descendieron de tal forma, que ya no existían las condiciones necesarias para la fusión nuclear, lo que impidió que se formaran elementos más pesados en dicha etapa.

Se pretende explicar más a detalle el proceso de Nucleosíntesis primordial en las siguientes subsecciones. Por pragmatismo, en adelante, se hará referencia a tal proceso con la palabra *nucleosíntesis*.

En la época de nucleosíntesis primordial se llevaron a cabo las siguientes reacciones:



Las dos últimas reacciones también se llevaron a cabo con protones como producto de reacción.

### 1.2.1. Termodinámica del equilibrio y la función de distribución.

La función de distribución normalizada de un conjunto de partículas de la especie  $i$  en el espacio fase es:

$$f_i(\bar{r}, \bar{p}, t) = \frac{(2\pi\hbar)^3}{g_i} \frac{dN_i}{d^3r d^3p}, \quad (1.49)$$

donde  $g_i$  son los grados de libertad de las partículas<sup>5</sup>. Sin embargo, como estamos considerando un Universo homogéneo, la función anterior no depende de la posición. La física estadística establece que un conjunto de partículas de la especie  $i$  uniformemente distribuidas, con interacción débil entre ellas y en equilibrio, siguen una función de tipo:

---

<sup>5</sup>Los fotones tienen dos grados de libertad, correspondientes a sus dos estados de polarización, mientras que protones, neutrones y electrones poseen dos grados de libertad pero a causa de los estados del espín.

$$f_i(\bar{p}_i) = \frac{1}{e^{E_i - \mu_i/T_i} \pm 1}, \quad (1.50)$$

donde  $T_i$  es la temperatura, y  $\mu_i$  el potencial químico de la partícula. La constante de boltzmann se ha tomado igual a 1 por simplicidad, y el signo + se toma para fermiones, mientras que el - se aplica a bosones. La energía de la partícula  $i$   $E_i$  se calcula vía (considerando  $c=1$ ):

$$E_i = \sqrt{\bar{p}_i^2 + m_i^2} \quad (1.51)$$

Entonces, integrando (1.50) sobre todo el espacio de momentos determinará la densidad de partículas. Considerando (1.49), se tiene

$$n_i = \frac{g_i}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty f_i(\bar{p}) d^3p \quad (1.52)$$

de manera análoga, es posible obtener la densidad de energía

$$\rho_i = \frac{g_i}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty E_i f_i(\bar{p}) d^3p \quad (1.53)$$

De la teoría cinética, se tiene que la presión ejercida por las partículas de tipo  $i$  es (y considerando que  $|\bar{p}_i| = v_i E_i$ ):

$$p_i = \frac{1}{3} n_i \langle |\bar{p}_i| v_i \rangle = \frac{1}{3} n_i \left\langle \frac{|\bar{p}_i|^2}{E_i} \right\rangle, \quad (1.54)$$

donde  $v$  es la velocidad de la partícula  $i$ .

Así pues, la presión parcial ejercida por las partículas de la especie  $i$  será

$$p_i = \frac{g_i}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{|\bar{p}|^2}{3E_i} f_i(\bar{p}) d^3p. \quad (1.55)$$

Considerando  $\hbar = 1$ , y tomando el hecho de un universo isotrópico, la función de distribución solamente dependerá del módulo del momento, o sea  $d^3p = p^2 dp d\Omega$ , por lo que las integrales anteriores se efectúan sobre el módulo de la presión y todas las direcciones. Entonces, de la expresión (1.51) y de su diferencial ( $p_i dp_i = E_i$ ) se llega a

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E dE, \quad (1.56)$$

$$\rho_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty f_i(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E dE, \quad (1.57)$$

$$p_i = \frac{g_i}{6\pi^2} \int_0^\infty f_i(E) (E^2 - m_i^2)^{3/2} E dE, \quad (1.58)$$

donde  $E$  es la variable muda de integración.

Ahora bien, en el límite no relativista, es decir, la energía de la masa en reposo es mayor a la energía cinética ( $E_i \approx m_i$ ,  $T_i/m_i \ll 1$ ), se tiene:

$$n_{iNR} = g_i \left( \frac{m_i T_i}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_i - m_i)/T_i}, \quad (1.59)$$

$$\rho_{iNR} = m_i n_{iNR}, \quad (1.60)$$

$$p_{iNR} = T_i n_{iNR} \quad (1.61)$$

### 1.2.2. Producción de Helio e Hidrógeno

La nucleosíntesis del helio se inició con la formación de deuterio:



El equilibrio implicado por la reacción anterior permite que sean expresadas las densidades de protones, neutrones y deuterio, en el límite no relativista, según la ecuación (1.59):

$$n_i = g_i \left( \frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{\frac{\mu_i - m_i}{T}} \quad (1.63)$$

donde  $i = p, n, {}^2H$ ,  $g_i$  son los grados de libertad.

Como la reacción de formación de deuterio implica que

$$\mu_{2H} = \mu_p + \mu_n \quad (1.64)$$

y

$$m_{2H} = m_p + m_n - L, \quad (1.65)$$

donde  $L$  es la energía de ligadura, que en este caso es de 2.225 MeV, entonces, las ecuaciones anteriores permiten expresar la densidad de deuterio de la siguiente manera:

$$n_{2H} = n_p n_n \left( \frac{2\pi(m_p + m_n - L)}{m_p m_n T} \right)^{3/2} e^{L/T} \quad (1.66)$$

tomando en cuenta que los grados de libertad del deuterio son el producto de grados de libertad de protones y neutrones.

Así, es posible determinar la fracción de deuterio producido por barión, en unidades físicas,

$$\frac{n_{2H}}{n_b} = \frac{n_p}{n_b} \frac{n_n}{n_b} n_b \left( \frac{2\pi(m_p + m_n - L)}{m_p m_n T} \right)^{3/2} e^{L/T} (\hbar c)^3 \quad (1.67)$$

donde  $n_b$  es la densidad de bariones, y  $n_p$  y  $n_n$  son densidades de protones y neutrones libres.

La ecuación anterior implica una transición rápida al disminuir la temperatura. Se puede, a partir de las siguientes consideraciones, determinar la temperatura a la que empezó la producción de deuterio:

$$n_b = \frac{3m_p^2 H_0}{8\pi m_p \hbar c^3} \left( \frac{T}{T_0} \right)^3 \Omega_{b0} \quad (1.68)$$

De las expresiones (1.67) y (1.68), se deriva la ecuación

$$\frac{n_{2H}}{n_b} = 5,0 \times 10^{-13} \Omega_{b0} \left( \frac{T}{1 \text{ MeV}} \right)^{3/2} e^{L/T}, \quad (1.69)$$

donde la temperatura (medida en MeV) indica que la fracción de deuterio será significativa hasta que  $T < 0,07 \text{ MeV}$ , lo cual implica que la síntesis de deuterio empezó cuando la edad del Universo era de aproximadamente 200s, lo que corresponde a los famosos *primeros tres minutos*. A esta edad, los neutrones se desintegraron según la siguiente reacción:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (1.70)$$

con vida media de aproximadamente 890s. Aplicando la ecuación<sup>6</sup>

$$n = me^{(-t/\tau)}, \quad (1.71)$$

se obtiene una fracción de neutrones,

$$\frac{n_n}{n_p} \approx 0,13 \quad (1.72)$$

Una vez iniciada la producción de deuterio, las reacciones que dan lugar a la formación de helio ya se pueden llevar a cabo. La abundancia estimada de helio primordial en fracción de masa  $Y_p$  será,

$$Y_p \equiv \frac{4n_{He}}{n_b} \cong \frac{4(n_n/2)}{n_p + n_n} = \frac{2(n_n/n_p)}{1 + (n_n/n_p)} = 0,23 \quad (1.73)$$

Las observaciones más recientes indican  $Y_p = 0,241 \pm 0,002$ , lo cual coincide con el valor obtenido teóricamente.

### 1.2.3. Nucleosíntesis de otros elementos

El resto de los elementos ligeros se sintetizaron con menores abundancias a las del Helio y el Hidrógeno. El  ${}^7Li$ , por ejemplo, se produjo en cantidades inferiores según:



y,




---

<sup>6</sup>donde n es el número de núcleos que se desintegra, m es el número de núcleos inicial y  $\tau$  es la vida media del elemento que decae.



Según la entropía por barión  $\eta^{-1} = n_\gamma/n_b$  es que se dan las abundancias de estos elementos ligeros, y las observaciones constituyen pruebas fundamentales para sustentar el modelo del Big Bang, además de que es posible determinar el parámetro de densidad de bariones. Esto se logra mediante la consideración de que los fotones son relativistas<sup>7</sup>, y repitiendo el procedimiento para obtener  $n_b$  se tiene:

$$\eta = \frac{n_b}{n_\gamma} = \frac{3\pi m_p^2 \hbar^2}{8\xi(3)g_\gamma m_p} \frac{\Omega_{b0} H_0^2}{T_0^3} = 1,15 \times 10^{-8} \Omega_{b0} \quad (1.76)$$

Debido a que a partir de que se desacoplen los fotones de la materia, ya no existirán más reacciones en equilibrio, la evolución de la densidad de bariones únicamente será consecuencia de la expansión, además de que la distribución de fotones se conservará. Por lo tanto, el inverso de la ecuación anterior, es decir, la entropía por barión, permanece constante desde la época de la recombinación hasta la actualidad.

La ecuación (1.76), para  $\eta = \frac{\text{no. Bariones}}{\text{no. Fotones}} \approx 5,5 \pm 0,510^{-10}$  determinado por Burles, Nollet, y Turner (2001), y según observaciones recientes además de la consideración de que  $H_0 = 65 \text{ km/s/Mpc}$ , se tiene:

$$\Omega_{b0} = 0,048 \pm 0,004 \quad (1.77)$$

Esto significa que la cantidad de materia bariónica corresponde únicamente al 4.8 % de nuestro Universo.

---

<sup>7</sup>Para la distribución de Fermi-Dirac el número de partículas, la densidad de energía y la presión parcial que ejercen las partículas de tipo  $i$  está dado en el límite relativista ( $E_i \approx p_i, T_i/m_i \gg 1$ ) por:

$$n_{iR} = \frac{3}{4} \left( \frac{\xi(3)}{\pi^2} g_i T_i^3 \right)$$

$$\rho_{iR} = \frac{7}{8} \left( \frac{\pi^2}{30} g_i T_i^4 \right)$$

$$p_{iR} = \frac{1}{3} \rho_{iR}$$

donde  $\xi(x)$  es la función zeta de Riemann:  $\xi(3) = 1,20206$

# Capítulo 2

## Observaciones recientes

Como vimos, las observaciones mencionadas, son explicadas a orden cero por el modelo FRWL de manera correcta. Sin embargo han surgido a últimas fechas, nuevas y más precisas observaciones que, para un completo entendimiento de ellas, es necesario usar mayor precisión en el modelo de FRWL, el cual es:  $\Lambda$ CDM (Lambda Cold Dark Matter) que incluye un tipo de materia llamada *materia oscura fría*, la cual no se ve, pero sí interactúa gravitacionalmente con la materia bariónica y con la luz. A continuación se presentan algunos fenómenos cuya interpretación requiere de la existencia de esos nuevos tipos de energías.

### 2.1. La radiación cósmica de fondo

Cuando Penzias y Wilson en 1964 percibieron el ruido de fondo en sus antenas en los laboratorios Bell, otros colegas sugirieron que tal ruido en realidad podrá ser rastro del Big Bang. Se suscitó entonces la complicada tarea de entender y estudiar la llamada *radiación cósmica de fondo* (RCF). Este fenómeno es el vestigio de que el Universo fue más caliente en épocas pasadas, y los fotones producto de esa radiación aún pueden ser observados. Tales fotones alguna vez estuvieron en equilibrio térmico con el resto de los componentes del Universo, sin embargo, como su temperatura fue descendiendo por acción de la misma expansión y el camino libre medio aumentó, se

formaron átomos neutros (época de recombinación) a partir del plasma ionizado que comprendía la totalidad del cosmos. Aproximadamente a partir de 380,000 años después del Big Bang, los fotones de la RCF han visto un universo prácticamente transparente, pues al bajar la temperatura global, bajó su energía y ya no fueron capaces de ionizar la materia. Aunque su densidad sigue siendo importante en la actualidad, ya no son la fracción dominante del Universo como en la época en la que la radiación dominó. Así, se puede entender, en términos coloquiales, que la RCF es una fotografía al Universo cuando aún tenía una temperatura alta, y sus anisotropías dan la información necesaria para conocer el tamaño de las fluctuaciones de densidad en el Universo al momento de la última dispersión (aproximadamente 380,000 años después del Big Bang).

### 2.1.1. Inhomogeneidades y anisotropías

Como ya se ha mencionado previamente, el Universo a grandes escalas (cosmológicas) es homogéneo e isótropo, sin embargo hay inhomogeneidades a pequeñas escalas en donde la distribución de materia y energía tienen pequeñas variaciones. Tales diferencias dan lugar a fenómenos importantes como la formación de estructuras. Para poder estudiar con mayor precisión esas concentraciones de materia y energía, es necesario hacer ligeras modificaciones al modelo de FRWL. Esto se logra introduciendo funciones escalares  $\Psi$  y  $\Phi$  que dependen de la posición y del tiempo:

$$\begin{aligned} g_{00}(\vec{x}, t) &= -(1 - 2\Phi(\vec{x}, t)), \\ g_{oi}(\vec{x}, t) &= 0, \\ g_{ij}(\vec{x}, t) &= a^2\delta_{ij}(1 + 2\Psi(\vec{x}, t)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

A estas perturbaciones se les conoce como escalares debido a que  $\Psi$  y  $\Phi$  son funciones escalares. Por conveniencia, se sigue trabajando con un sistema de coordenadas con métrica diagonal y elemento de línea para un Universo plano, el cual ahora se ve así:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Psi)a^2[dx^2 + dy^2 + dz^2] \tag{2.2}$$

### Picos Acústicos

Cuando la temperatura del Universo descendió hasta los 3000 K aproximadamente, se formaron los primeros átomos neutros. Previamente el Universo estaba constituido por un plasma de fotones y bariones cuya métrica de fondo era la de FRWL. La ecuación de continuidad para tal plasma es:

$$\nabla_{\mu}(n^{\mu}) = \partial_{\mu}n^{\mu} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu}n^{\alpha} = 0, \quad (2.3)$$

resolviendo los símbolos de Christoffel se tiene

$$3T^2\partial_t(T) + 3T^3\frac{\dot{a}}{a} + \partial_i(T^3v^i) = 0, \quad (2.4)$$

Es posible relacionar las perturbaciones a la temperatura con la velocidad del fluido por medio de la siguiente ecuación:

$$3\partial_t(a^3\Theta) + \partial_i(v^ia^3) = 0 \quad (2.5)$$

que llevada al espacio de Fourier se escribe como

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{3}kv_b, \quad (2.6)$$

considerando que para el Universo joven la componente de la velocidad que dominaba, era la paralela al vector de onda  $\vec{k}$ .

Por otro lado, sin gravedad y para un fluido perfecto

$$\nabla P = \nabla \frac{\rho}{3}, \quad (2.7)$$

y la ecuación de Euler

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1-v^2}{\rho+P}[\nabla P + \vec{v}\frac{\partial P}{\partial t}], \quad (2.8)$$

que usando la ecuación (2.7) para el caso no relativista y el hecho de que  $\rho_{\gamma} = \sigma T^4$ , la ecuación de Euler en el espacio de Fourier es

$$\dot{\nu} = k\Theta, \quad (2.9)$$

Derivando (2.6) y sustituyendo en la ecuación de Euler, se llega a

$$\ddot{\Theta} + c_s^2 k^2 \Theta = 0, \quad (2.10)$$

que es precisamente la ecuación de un oscilador armónico, en donde  $c_s = \sqrt{\dot{p}/\dot{\rho}} = 1/\sqrt{3}$  es la velocidad del sonido del fluido. Lo anterior significa que gradientes de presión actúan a manera de fuerzas restaurantes a una perturbación inicial en la temperatura. Así pues, la perturbación en la época de la recombinación es

$$\Theta(\eta_{rec}) = \Theta(0) \cos(k s_{rec}), \quad (2.11)$$

donde

$$s = \int c_s d\eta, \quad (2.12)$$

corresponde a la distancia que pudo haber viajado el sonido, con un horizonte  $\tau$  denominado *horizonte de sonido*. El efecto de la gravedad a las oscilaciones se traduce en un término  $k\Psi$  a la ecuación de Euler, y como tal término es una perturbación al factor de escala, también hay modificaciones por ende en el corrimiento al rojo  $\delta\Theta = -\delta\Phi$ . Entonces, también a la ecuación de continuidad se le debe agregar el término  $-\Phi$  para que sea consistente con los demás cambios. Así pues, la ecuación del oscilador armónico obtenida previamente se traduce en:

$$\ddot{\Theta} + c_s^2 k^2 \Theta = -\frac{k^2}{3} \Psi - \ddot{\Psi} \quad (2.13)$$

Para un Universo plano en la época de dominación de la materia, la solución es

$$[\Theta + \Psi](\eta) = [\Theta + \Psi](\eta_{md}) \cos(ks) = \frac{1}{3} \Psi(\eta_{md}) \cos(ks) \quad (2.14)$$

donde  $_{md}$  indica la época de dominación de la materia. El término  $\Theta + \Psi$  se refiere a una temperatura efectiva, que oscila. Esto significa que después de la recombinación,

los fotones se corren al rojo al caer en un pozo de potencial, o bien, se *enfrian*. Para introducir la dinámica de los bariones en las oscilaciones acústicas, se considera la siguiente razón fotón barión  $R$ :

$$R = \frac{p_b + \rho_b}{p_\gamma + \rho_\gamma} \approx 30\Omega_b h^2 \frac{10^3}{z}, \quad (2.15)$$

durante la recombinación, este cociente es cercano a 1.

Dicho de una manera más sencilla: cuando la temperatura del Universo descendió hasta los 3000 K aproximadamente, se formaron los primeros átomos neutros. Previamente el Universo estaba constituido por un plasma de fotones y bariones. Las oscilaciones de los componentes de tal fluido pueden darse en diferentes modos. Aquellos modos que se encuentren en un máximo o mínimo de densidad en el momento de la combinación, generarán un máximo en el espectro de anisotropías, o también llamados *Picos acústicos*. Cuando se generan las fluctuaciones primordiales al finalizar la época llamada *inflación*,  $t \sim 0$ , se da la compresión que origina las fluctuaciones. Así pues, el modo fundamental, que es el de mayor escala espacial denominado **primer pico acústico**, es aquel que se encuentre en su primer máximo al momento exacto de la recombinación. Debido a que la propagación de las compresiones es a la velocidad del sonido, la escala espacial  $H_A$  llamada *horizonte acústico* del modo fundamental estará determinada por la distancia recorrida entre  $t=0$  y el momento de la recombinación, por una onda de presión que se propaga en un Universo en expansión.

$$H_A = a_{rec} \int_0^{t_{rec}} \frac{c_s}{a} dt \quad (2.16)$$

donde  $c_s$  la velocidad del sonido en el plasma de fotones y bariones, de la siguiente manera:

$$c_s^2 = \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{adiab} = \frac{c^2}{3(1+R)} \quad (2.17)$$

con

$$R = \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma} \quad (2.18)$$

Es decir, el horizonte acústico define las zonas conectadas causalmente por sonido, u ondas de presión, en lugar del cono de luz que conocemos.

Según la ecuación anterior, entonces la velocidad del sonido cuando la densidad de fotones es dominante, es

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3}} \approx 0,57c \quad (2.19)$$

Y para el momento del desacoplamiento, según la misma definición,

$$c_s = 0,5c \quad (2.20)$$

Como puede verse, no cambia significativamente el valor de  $c_s$  en el intervalo de tiempo tomado en cuenta. En un Universo plano con materia no relativista,  $H_A$  es aproximadamente igual al radio de Hubble.<sup>1</sup> Por esta razón, el horizonte acústico determina una escala angular  $\Delta\Theta_A$  igual al ángulo subtendido por el radio de Hubble.

$$\Delta\Theta_A \approx \Delta\Theta_H \quad (2.21)$$

Así pues, a escalas angulares  $\Delta\Theta < \Delta\Theta_H$ , hay que tomar en consideración la fuerza restauradora debida a la presión del plasma de fotones y bariones, mientras que para escalas angulares  $\Delta\Theta > \Delta\Theta_H$  no es importante. La escala angular del modo fundamental estará determinada por el ángulo subtendido por el horizonte acústico, y corresponde a la escala acústica  $l_A$ , la cual determina la posición del primer pico acústico  $l_1$ .

Ahora bien, el segundo pico acústico surge como consecuencia de un mínimo de densidad. Representa un ciclo completo de compresión y descompresión cuando llega la recombinación. Como tanto su escala espacial como angular son la mitad que las del

---

<sup>1</sup>El radio de Hubble es la distancia generada por la velocidad de recesión de las galaxias en el tiempo cósmico. Es por consiguiente, una distancia propia.

primer pico, su posición  $l_2$  será del doble que la del primero. El tercer pico corresponderá a un máximo de densidad, representando el ciclo de compresión-descompresión-compresión, y así sucesivamente. Por lo tanto, la escala acústica para el  $n$ -ésimo pico está dada por

$$l_n \approx nl_A, \quad (2.22)$$

con  $n=1, 2, 3, \dots$

Por lo anterior, aquellos modos que no sean múltiplos enteros de la escala acústica no generarán picos, pues no corresponden ni a máximos ni a mínimos de densidad, ver Fig. 2.1.

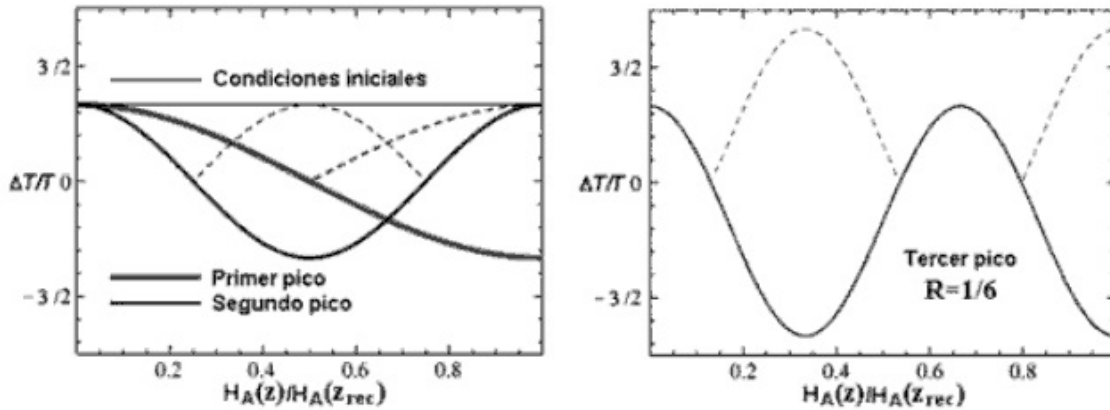


Figura 2.1: En la imagen izquierda se observa que el modo que completa media oscilación cuando sucede la recombinación determina la escala del primer pico. El que completa una oscilación entera, constituye el segundo pico. En la imagen de la derecha se tiene que un aumento en la densidad de bariones amplifica las oscilaciones. Crédito: Hu y Dodelson.



### 2.1.2. COBE, WMAP

Al cartografiar la radiación cósmica de fondo en el año de 1992, el satélite COBE mostró la presencia de vestigios de lo que pudieran ser perturbaciones a dicha radiación. El hallazgo consistió en lo siguiente: A aproximadamente 30 microkelvin de temperatura, sobre un espectro de cuerpo negro a 2.725 K, se detectaron pequeñas anisotropías. COBE logró definir el espectro de las fluctuaciones a escalas cosmológicas. La presencia de tales isotropías, son la base para la comprensión de la posterior formación de estructuras<sup>2</sup>.

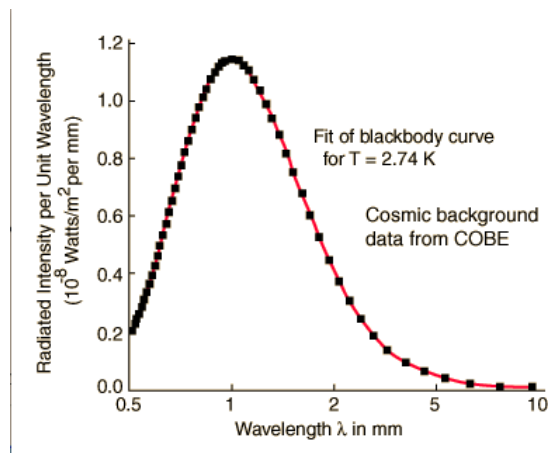


Figura 2.2: El espectro de energía de los datos obtenidos por el satélite COBE. Los valores ajustan a la curva teórica de espectro de cuerpo negro. Crédito: Eberhardt, Science News.

Esas anisotropías en la radiación, son producidas por el hecho de que cuando la densidad del Universo bajó, aún quedaron pequeños cúmulos de materia. Los fotones que salían de regiones muy densas tenían poca energía. Esto se ve como un valle en la curva (sobre la curva homogénea teórica). El caso contrario se traduce en crestas. La RFM no es la misma en todo el Universo, pero sus anisotropías son pequeñas. En la Figura 2.2 se muestra el espectro de energía d cuerpo negro que midió COBE y que

<sup>2</sup>Debido a la existencia de pozos de potencial mayores. Ver sección 2.2.

refleja que el Universo se encuentra en equilibrio.

WMAP(2001) fue diseñada para conocer a fondo las diferencias de temperatura detectadas por la sonda COBE, las cuales subyacen en la radiación cósmica de fondo. WMAP detectó la señal que llega del brillo remanente del Universo joven, lo cuál sería el análogo a una fotografía de cuando el cosmos tenía apenas aproximadamente 380,000 años. A medida que el universo fue expandiéndose, la luz perdió energía, lo cual se tradujo en un aumento en la longitud de onda que se detecta en forma de microondas en la actualidad, ver Figura 2.3. WMAP confirmó que la materia bariónica ocupa tan sólo el 4.6 por ciento del universo. Esto es debido a que si las inhomogeneidades detectadas en la curva de la radiación obtenida por COBE fueran únicamente de materia bariónica, no se hubieran formado estructuras. Se necesitan pozos de potencial más profundos pero que no produjeran cambios en la temperatura. La materia que produciría esto es la denominada *materia oscura* la cual conformaría el 23 por ciento del Universo, mientras que otra entidad gravitacional conocida como *energía oscura* de naturaleza repulsiva ocuparía el 72 por ciento restante.

## 2.2. Formación de estructuras

Las mediciones de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo sugieren una cosmología en donde los fotones interactuaron de una modo inhomogéneo con la materia al salir de los cúmulos con gran densidad. Sin embargo, para poder explicar la formación de estructuras, es necesario considerar la existencia de pozos de potencial gravitacional lo suficientemente profundos. Las inhomogeneidades de materia bariónica solas no podrían dar lugar a estos pozos tan hondos, por lo que se debe tomar en cuenta la existencia de otro tipo de materia que no altere el espectro de temperatura, pero sus efectos gravitacionales sean mayores, y este efecto es logrado por la materia oscura.

Nuevas observaciones indican que la formación de estructuras en el Universo tuvo un orden particular, jerárquico, esto es, que las estructuras más pequeñas se formaron

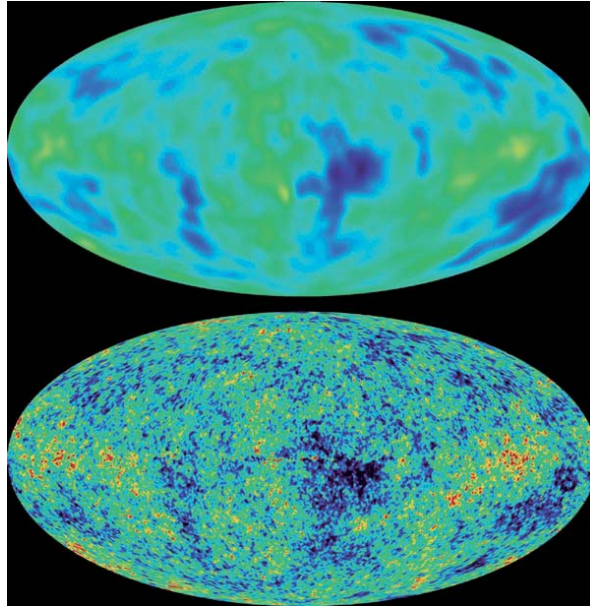


Figura 2.3: Anisotropías en la RCF medidas por WMAP. Las regiones azules son las de menor temperatura, y mayor densidad, y en rojo las zonas más calientes y con densidad menor, ya que los pozos de potencial gravitacional produce un corrimiento al rojo en la longitud de onda de los fotones. Crédito: NASA/WMAP team.

primero y luego galaxias y cúmulos.

Conforme el Universo ha evolucionado, como era de esperarse, la distribución de sus componentes ha cambiado, pues al paso del tiempo la materia formó galaxias, las cuales formaron cúmulos, los cuales forman a su vez estructuras más complejas a gran escala. Sin embargo, la formación de las estructuras en el Universo no fue casualidad. Aunque la gravedad, como dicta la intuición, jugó un papel clave, la *receta* incluye un ingrediente sin el cual ninguna galaxia existiría: la materia oscura.

La forma de los filamentos mostrados en la figura 2.4, es debida en gran medida a fuerzas gravitatorias, sin embargo, hay procesos aparte que determinan tal distribución de materia. Dichos procesos, son la acción de la gravedad en las pequeñas fluctuaciones existentes en la distribución de materia en el Universo primordial, como se explicó en la sección de *Picos Acústicos*.

La tecnología actual permite medir corrimientos al rojo de varias decenas de galaxias a la vez. Con esto, se ha mapeado una buena parte del Universo a una escala en la que es posible ver su inhomogeneidad. Dos de los experimentos que más importantes que han contribuido a esto son *Anglo-Australian Two-Degree Field Galaxy Redshift Survey* (2dFGRS) y *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS), el cual ya ha medido casi la cuarta parte del Universo, creando mapas de estructuras cósmicas, ver Figura 2.4.

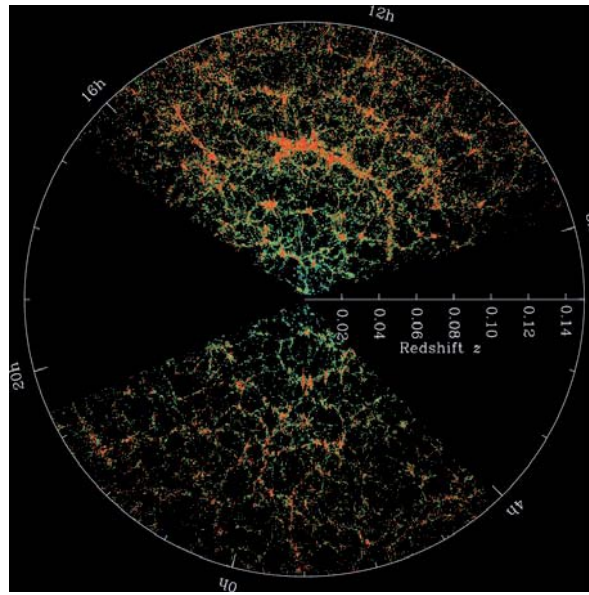


Figura 2.4: Imagen bidimensional de la distribución 3D de galaxias producida por el experimento *Sloan Digital Sky Survey*. Cada punto es una galaxia y el color indica su edad, eligiendo el rojo para las más viejas. Crédito: M. Blanton, the Sloan Digital Sky Survey Collaboration.

Al comparar las oscilaciones acústicas de bariones en  $z \approx 0,30$  y  $z \approx 1100$  se observa que las pequeñas fluctuaciones de WMAP no habrían tenido el suficiente tiempo de crecer para dar lugar a las estructuras que hoy se conocen. Para que esto se llevara a cabo, fue necesaria la existencia de pozos de potencial mucho mayores, creados por materia que no fuera luminosa, que no fuera relativista, y que su desacoplamiento del

Universo y el resto de sus componentes hubiera sido antes de la radiación de tal forma que los pozos de potencial fueran mayores<sup>3</sup> a los mostrados en las fluctuaciones de la radiación cósmica de fondo. Además, esta materia no podía ser bariónica, pues alteraría la nucleosíntesis conocida. Lo anterior es una de las evidencias de la existencia de la materia oscura *fría*. (Se le denominan *frías* a las partículas no relativistas, debido a su baja energía cinética)

El proceso de formación de estructuras tiene que ver con que al inicio, cuando se originaron las fluctuaciones primordiales en la densidad de materia-energía, cuando existía una expansión inflacionaria que transformó fluctuaciones cuánticas en pequeñas inhomogeneidades, las cuales, junto con la existencia de la materia oscura fría, dieron lugar a los pozos de potencial antes mencionados para crear las estructuras.

La evolución de las pequeñas fluctuaciones en la materia dio lugar a la formación de estructuras en tiempos más recientes, ver figura 2.5.

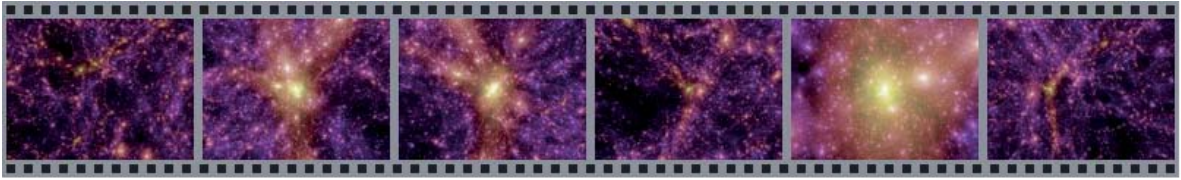


Figura 2.5: Fotogramas de la *Simulación del Milenio*. Muestra la distribución de materia oscura en el Universo actual. Crédito: Springel *et al.*

### 2.3. Curvas de rotación en discos de galaxias

Existe una clasificación de las galaxias de acuerdo a la forma en la que está distribuida la materia luminosa. Pueden ser: espirales, elípticas, e irregulares. La Vía Láctea corresponde a galaxias de tipo espiral, las cuales poseen un disco de diámetro mucho

<sup>3</sup>Al no interactuar los fotones, entonces  $\delta T$  no hay cotas directas sobre  $\delta\rho_{MO}$ , a diferencia de la materia bariónica, pues por Efecto Compton,  $\delta\rho_0 \sim \delta T$ .

mayor al espesor, en donde hay estrellas, gas y polvo que describen un movimiento aproximadamente circular. Su velocidad puede calcularse con gran precisión si para cada posición en el disco se mide su distancia al centro (denominado *radio galactocéntrico*) y se calcula el desplazamiento Doppler de las líneas espectrales de los componentes de dicho disco. Tal curva obtenida al relacionar la velocidad con respecto al radio galactocéntrico se denomina *curva de rotación*.

Esa gráfica permite conocer qué relación existe entre la masa como función del radio. Intuitivamente, esa idea es fácil de concebir. Existe mayor cantidad de materia en el centro de la galaxia, donde viven agujeros negros, estrellas viejas, y abundante gas, así que para radios chicos, masas grandes. De esta forma, es de esperarse que en los puntos más externos de las galaxias espirales, la velocidad de rotación sea menor, debido a la poca masa existente para radios cada vez mayores. Sin embargo, el estudio de la galaxia de Andrómeda (Babcock, 1939) arrojó que sus partes más externas tenían una velocidad mayor a la que se podía esperar. Más tarde, y a partir de análisis de la galaxia vista de canto y su brillo, se concluyó que la razón masa/luminosidad para tener tal velocidad de rotación era muy grande comparada con el valor que arrojaba esa misma razón si sólo se consideraba la masa luminosa de las galaxias. Cabe mencionar, que hasta antes de los estudios de Babcock, se creía que la materia luminosa en los brazos espirales marcaban sus límites, sin embargo, a raíz del sorprendente resultado de la razón masa/luminosidad para las velocidades de rotación galácticas, se conoce que la materia oscura es responsable de tal diferencia en los valores obtenidos. En el capítulo 4 se profundizará más en esta evidencia.

## 2.4. Lentes gravitacionales.

Gracias a la Teoría de la Relatividad General se conoce que la gravedad curva al espacio y que la luz sigue la trayectoria de mínima energía, por lo que en consecuencia, la gravedad desvía la luz. La materia oscura, como ya se mencionó al inicio de este capítulo, interacciona gravitacionalmente tanto con luz como con la materia bariónica,

y su forma de detectarla puede ser mediante su influencia en la trayectoria de la luz de objetos que se encuentran detrás de un halo de dicha materia. Esto es, la gravedad puede ser usada a nuestro favor como un gran telescopio capaz de mostrar objetos que de otra manera no serían vistos.

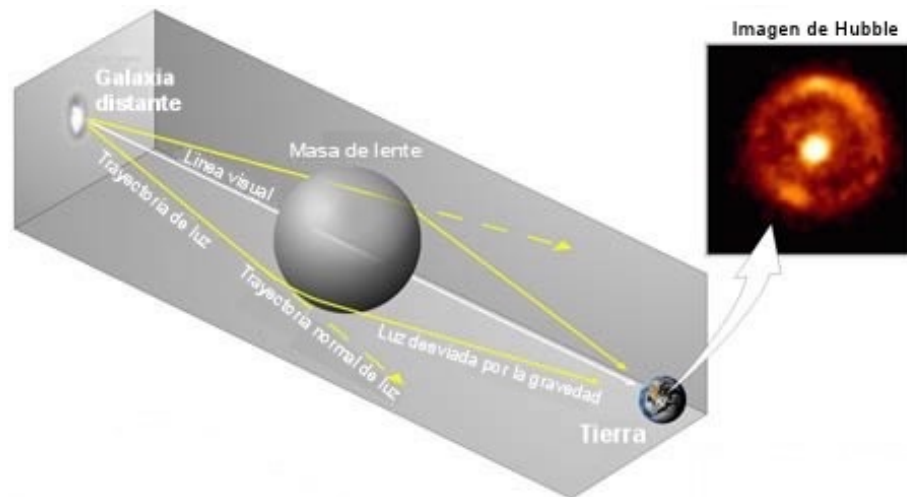


Figura 2.6: Esquema de una lente gravitacional. La luz de una galaxia distante forma un halo alrededor del masivo objeto que sirve como lente. Crédito: Agencia Espacial Europea

En la figura 2.6, se observa que como se forman dos imágenes provenientes del mismo objeto, se esperan características idénticas. Asimismo, como cualquier otra lente, el objeto puede ser magnificado, por lo que se vería un tamaño distorsionado del objeto estudiado. Se han utilizado lentes gravitacionales para estudiar a detalle las imágenes producidas. Esto permite entender diversos aspectos del fenómeno, como por ejemplo, la cantidad de masa que intervino para curvar el espacio de tal forma que se produjeran las imágenes observadas.

Al modelar teóricamente el efecto de lente gravitacional de algún objeto astronómico, se concluye que la cantidad de materia bariónica que produce la curvatura del espacio responsable de la deflexión, no es suficiente para obtener las imágenes observa-

das. Esto significa, que interviene materia que no es visible, pero que sí tiene efectos gravitacionales importantes, de tal forma que se produzcan los patrones obtenidos. La culpable: la materia oscura.

Recientemente, las lentes gravitacionales también han servido para estudiar objetos que se encuentren en el halo galáctico, tales como agujeros negros, estrellas muertas, vestigios de planetas, etc. Como estos objetos no son visibles pero poseen gravedad, la intención es la de poder conocer con detalle la cantidad de materia que aportan al halo. Se acuñó para ellos entonces el término de MACHOs (*Massive Compact Halo Objects*), los cuales pueden ser detectados vía su actividad como lente gravitacional de la siguiente manera: el brillo aparente de un objeto lenteado cambia cuando un MACHO lo obstruye, de modo que conociendo el cambio en el brillo, se puede entender más sobre la naturaleza de la lente. Sin embargo, el fenómeno del lenteo por medio de un MACHO es improbable, además de que es complicado conocer el valor preciso del brillo de una estrella, pues ellas tienen cambios intrínsecos que no son asociados a una posible aberración producida por la lente. Los mejores resultados han arrojado que en promedio, un 10/100 de la materia oscura de los halos, podrá estar en forma de MACHOs. Del resto no se sabe con certeza. Queda mucho por conocer.

## 2.5. Supernovas tipo Ia

Las Supernovas Ia, han sido en la actualidad utilizadas como candelas estándar, esto es, una fuente luminosa cuyo brillo intrínseco se conoce y se usa para medir distancias. Estas supernovas son el resultado de explosiones de enanas blancas que se encuentran en sistemas binarios. La acreción de materia producida desde la estrella compañera, hace que la enana blanca llegue a su límite superior de masa (límite de Chandrasekhar, aproximadamente 1,44 masas solares) y como consecuencia, pierde estabilidad. Como resultado de este proceso, la estrella colapsa y se produce la combustión del carbono que destruye por completo la estrella en forma de explosión. La radiación emitida es procedente de la descomposición de níquel y cobalto.



Suponiendo un universo en expansión, existen tres factores importantes a considerar al estudiar el movimiento de las SNIa:

1. La expansión como tal, la cual está caracterizada por la constante de Hubble.
2. Atracción gravitatoria que va en contra de la expansión al formar cúmulos.
3. Y un efecto inesperado de aceleración en la expansión que puede ser asociado a la constante cosmológica.

El punto 3, en síntesis, se puede decir que es análogo a lanzar una piedra verticalmente hacia arriba bajo los efectos del campo gravitacional terrestre y que ésta piedra no sólo no se vaya frenando, sino que además se acelere hacia arriba. Esto es:

Considerando un universo con poca densidad de materia, de tal forma que la atracción gravitacional no sea tan grande como para dominar sobre los efectos repulsivos, y la tasa de expansión sea constante, si se mira un objeto con  $z=1$ , se miraría a hacia el pasado, a una época donde los objetos en el universo estaban la mitad de separados que ahora. Esto es debido a que si el desplazamiento al rojo medio en una galaxia es  $z=1$ , entonces  $a(t)=1/2$  por la relación ya conocida:

$$1 + z = a(t_0)/a(t), \quad (2.23)$$

En un universo con tasa de expansión constante, lo anterior significa que una supernova con  $z=1$ , emitió su luz cuando el universo tenía la mitad de su edad actual.

Ahora bien, si se supone ahora un universo con una densidad de materia mayor al considerado anteriormente y se observara la misma supernova, la desaceleración de la expansión por efecto de la atracción gravitacional, implicaría que el universo se expandía más rápido en épocas anteriores que en la actualidad. Entonces, los objetos estaban a la mitad de separados a  $z=1$  que ahora. Sin embargo, el universo ya no tendría la mitad de su edad, sino menos. Si se hubiesen expandido con mayor rapidez en el pasado que en la actualidad, significaría que se requiere menos tiempo que si se tuviera tasa de expansión

constante para poder lograr la separación actual, por lo que la luz hubría viajado menos tiempo desde la supernova hasta los observadores. La distancia, entonces, aparecería menor, y el objeto sería más brillante que en el caso del universo con menor densidad.

Sin embargo, los resultados de investigaciones recientes en este ámbito (Premio Nobel de Física, 2011), arrojan que la realidad no corresponde a ninguno de los casos anteriores. Las supernovas son todavía menos brillantes que lo que se esperaría en el caso de un universo con baja densidad. La interpretación más aceptada de este hecho, es que el universo se encuentra en *expansión acelerada*. Así pues, era más lenta antes que en la actualidad, lo que implica que el universo requirió de más tiempo para poder alcanzar la separación actual de los objetos, y así, la luz de la supernova tarda más tiempo también a llegar hasta los observadores en la Tierra, y como consecuencia se observa una mayor distancia aparente, y por lo tanto, un menor brillo aparente.

En la figura 2.7, la línea superior roja corresponde al modelo  $\Lambda$ CDM, el cual se explicará más adelante. Es el resultado que un universo con materia oscura fría y densidad de energía dominada por la constante cosmológica  $\Lambda$ . La línea azul es para un universo de baja densidad con materia oscura fría y la verde corresponde a un universo de densidad total igual a la crítica incluyendo materia oscura fría.

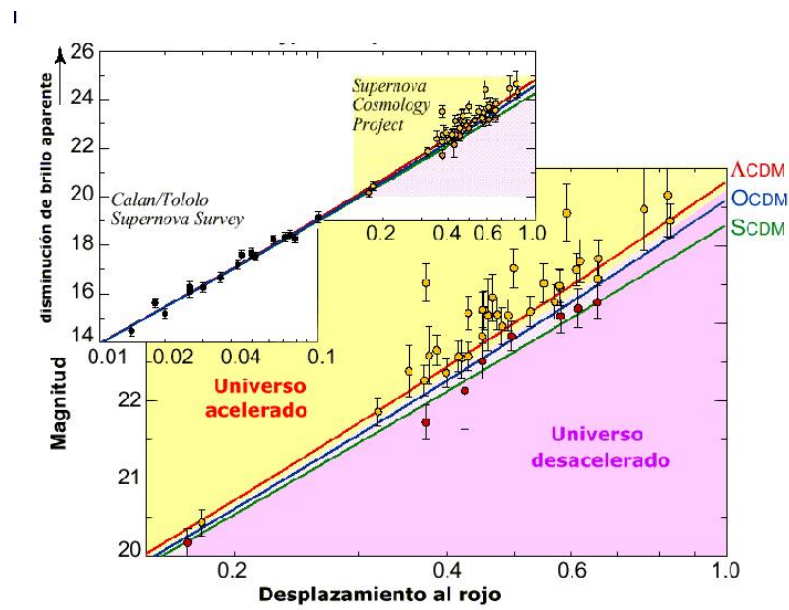


Figura 2.7: Magnitud de supernovas para diferentes corrimientos al rojo

# Capítulo 3

## Componentes Oscuras del Universo.

### 3.1. Modelo $\Lambda$ CDM (Lambda Cold Dark Matter)

#### 3.1.1. Constante Cosmológica $\Lambda$

Debido a que Einstein creía que el Universo era estático, introdujo la llamada *Constante Cosmológica* para poder obtener soluciones estáticas a las ecuaciones de la Relatividad General. La ecuación propuesta es

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

o bien,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda \quad (3.2)$$

donde  $g_{\mu\nu}\Lambda$  se puede interpretar como un tensor de energía momento de un fluido perfecto. En la ecuación anterior,  $g_{\mu\nu}\Lambda$  es considerado como el  $T_{\mu\nu}$  algún tipo de materia.

Así pues, si se define

$$T_{\Lambda\mu\nu} = \frac{-c^4}{8\pi G}\Lambda g_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

donde  $\Lambda$  tiene unidades de curvatura ( $\frac{1}{L^2}$ ), el tensor de energía momento para un fluido perfecto es

$$T_{\Lambda\mu\nu} = (\rho_\Lambda c^2 + p_\Lambda)u_\mu u_\nu + p_\Lambda g_{\mu\nu} \quad (3.4)$$

Comparando las ecuaciones (3.3) y (3.4), se llega a que, en este caso, la ecuación de estado es

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2, \quad (3.5)$$

quedando así la presión del fluido en términos de la constante cosmológica

$$p_\Lambda = \frac{-c^4}{8\pi G} \Lambda. \quad (3.6)$$

Se tiene pues, que puede interpretarse que  $\Lambda$  tiene presión negativa, y sustituyendo esto en la ecuación de conservación (1.17), se tiene que la densidad de la constante cosmológica se mantiene constante a través de la expansión. Es por esta razón que a  $\Lambda$  se le suele denominar también *densidad de materia-energía o densidad de energía del vacío*<sup>1</sup>. La ecuación de Friedmann con constante cosmológica es

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} \quad (3.7)$$

La densidad de vacío tiene un efecto inverso a la gravedad, por lo que produce que el Universo se expanda de manera acelerada. Dicha aceleración está dada por

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (3.8)$$

Ahora, se define

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{cr}},$$

y agregando también el término de materia oscura de forma análoga a la materia bariónica, se reescribe la ecuación de Friedmann de la siguiente manera

$$\dot{a} = H(0) \sqrt{1 - \Omega_U(t_0) + \frac{\Omega_{mb}(t_0)}{a} + \frac{\Omega_{mo}(t_0)}{a} + \frac{\Omega_r(t_0)}{a^2} + \Omega_\Lambda a^2} \quad (3.9)$$

La ecuación anterior establece que si la constante cosmológica es positiva, el Universo se expande de manera acelerada, mientras que si es negativa, el Universo se expande hasta alcanzar un máximo, para después contraerse. También puede observarse que de

---

<sup>1</sup>ver capítulo 5

acuerdo al valor del factor de escala  $a$ , diferentes componentes son las que dominan al Universo. Por ejemplo, cuando  $a \ll 1$ , domina el término  $\frac{\Omega_r}{a^2}$  es decir, la radiación, cuando  $a < 1$ , el término dominante resulta ser  $\frac{\Omega_m}{a}$ , lo cual corresponde a la materia (oscura y bariónica), mientras que en la época actual, es decir,  $a \approx 1$ , el término que domina es el asociado a la constante cosmológica,  $\Omega_\Lambda a^2$ .

Las observaciones cosmológicas indican  $\Omega_U \propto 1$ ,  $\Omega_{mo} \propto 0,26$ ,  $\Omega_{bar} \propto 0,04$  y  $\Omega_\Lambda \propto 0,7$ .

Este modelo describe consistentemente las observaciones y predice la existencia de componentes oscuras en el Universo.

De las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica, se llega a la ecuación de Friedmann siguiente:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.10)$$

y definiendo los parámetros cosmológicos por las siguientes ecuaciones:

$$\Omega_m = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}, \quad (3.11)$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad (3.12)$$

$$\Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2}. \quad (3.13)$$

Y así,

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1,$$

lo cual corresponde a la llamada *suma cósmica*.

En la figura 3.1 es posible apreciar que según la evolución del factor de escala con las componentes oscuras del Universo, la gráfica de la dependencia de tipo de universo con respecto a la materia es diferente. Existen zonas bien limitadas las que definen si se trata de un Universo plano, abierto o cerrado. Como es un plano definido por  $\Omega_\Lambda$  y  $\Omega_m$ , se pueden estimar las cotas para los parámetros  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_m$  y  $\Omega_k$ . La contribución al parámetro de curvatura es nulo, y  $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$ .

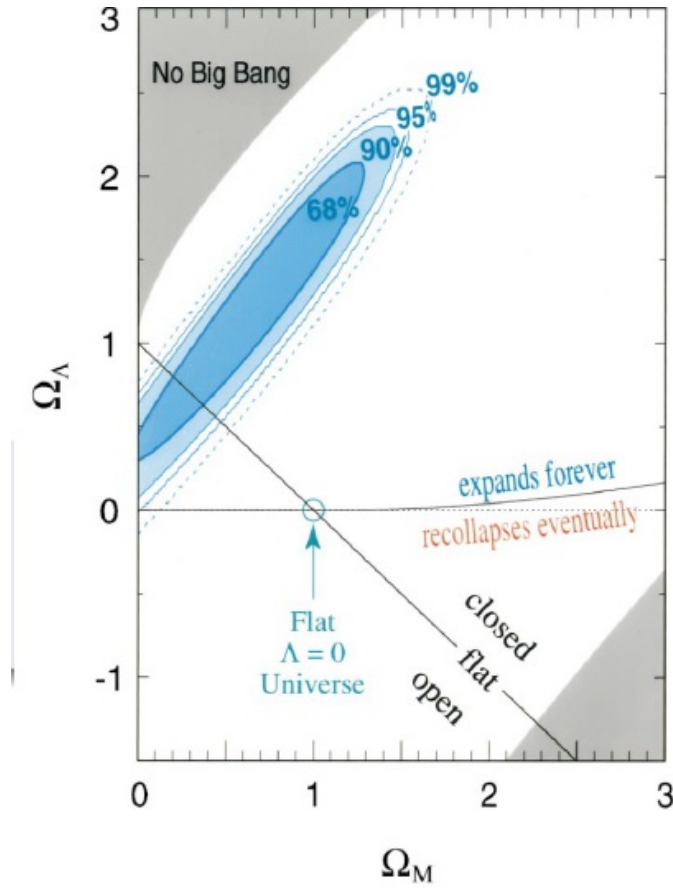


Figura 3.1: Con la incorporación de nuevas componentes del Universo, la diferencia entre universos planos, abiertos o cerrados, está bien diferenciada en zonas. Crédito: Perlmutter *et al.* 1999

### 3.1.2. Posibles finales del Universo

Recordando la ecuación de Friedmann con los términos de materia y energía oscuras:

$$\dot{a} = H(0) \sqrt{1 - \Omega_U(0) + \frac{\Omega_{mb}(0)}{a} + \frac{\Omega_{mo}(0)}{a} + \frac{\Omega_r(0)}{a^2} + \Omega_\Lambda a^2}, \quad (3.14)$$

como se mencionó en la sección anterior se pueden observar al menos 3 casos según el valor de  $a$ .

1. Si  $a \ll 1$  es decir, al inicio del Universo,  $\Rightarrow \Omega_\Lambda a^2 \approx 0$  y domina  $\Omega_r$  es decir, la

radiación. Así pues,

$$\dot{a}_{t \sim 0} \approx \sqrt{\frac{\Omega_r}{a}} \Rightarrow a\dot{a} = \sqrt{\Omega_r} \Rightarrow \left(\frac{a^2}{2}\right)' = \sqrt{\Omega_r} \Rightarrow \frac{d(a^2)}{dt} = 2\sqrt{\Omega_r} \Rightarrow a^2 = 2\sqrt{\Omega_r}t \Rightarrow a \sim t^{1/2}. \quad (3.15)$$

esto último representa la tasa de expansión del Universo en sus inicios, cuando el factor de escala  $a$  era cercano a cero.

2. Si  $a \approx 0,1$  y considerando también que  $\Omega_\Lambda a^2 \approx 0 \Rightarrow a^{1/2}\dot{a} = \frac{3}{2}a^{1/2}\dot{a}$ . Resolviendo esa ecuación, se llega a que  $a \sim t^{2/3}$ , que es una tasa de expansión mayor a la que tenía el Universo al principio.
3. Si  $a \approx 1$ , entonces  $\dot{a} = \sqrt{\Omega_\Lambda}a \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\Omega_\Lambda} \Rightarrow \frac{d \ln(a)}{dt} = \sqrt{\Omega_\Lambda} \Rightarrow d \ln(a) = \sqrt{\Omega_\Lambda} dt$ . Esto que significa que  $a = e^{\sqrt{\Omega_\Lambda}t}$ , lo que implicaría un universo que se expande exponencialmente y sin límite. A esto se le conoce como *Big Rip*.

La idea intuitiva del final del Universo es la de que la energía oscura provocará una expansión acelerada que hará que todo se expanda para siempre. Esto tiene como consecuencia lógica una *muerte térmica*, pues alcanzará un máximo de entropía que impedirá extraer más trabajo del Universo. Sin embargo, estudios sobre teoría de cuerdas y mecánica cuántica señalan que lo anterior es poco probable. De hecho más bien le apuestan a un final un tanto diferente, que podría dar lugar al nacimiento de un nuevo Universo. Esto, sin conocer la naturaleza de la materia y energía oscuras, queda en un terreno muy especulativo.

La estrellas seguirán formándose a pesar de la expansión acelerada del Universo, pues la materia frena la expansión de manera local, así que a partir de las nubes de gas, se podrá dar lugar a nacimiento de nuevas galaxias. La mayor parte de la materia bariónica del Universo estará en forma de estrellas de masa media o baja. Dependiendo de qué tan masivas sean, evolucionarán hasta convertirse en enanas blancas, estrellas de neutrones o agujeros negros. Las primeras se enfriarán hasta convertirse en enanas negras, y los planetas de sistemas solares escapan hacia el espacio o colapsarán a sus soles. Así pues, en un lapso de  $10^{23}$  años, el Universo estará formado únicamente por



enanas negras, estrellas de neutrones y agujeros negros. Estos últimos se evaporarán mediante la radiación de Hawking<sup>2</sup>. Los demás objetos se convertirán en hierro<sup>3</sup>. Por efecto túnel, dichos objetos de hierro se convertirán en agujeros negros que se evaporarán de la misma manera que los demás, por radiación de Hawking. De esta forma, el Universo al cabo de  $10^{250}$  años estará compuesto por partículas estables. La densidad del Universo tendería a cero y la interacción entre ellas, nula.

Si en este momento se llevaran a cabo las mismas fluctuaciones cuánticas que las que sucedieron previas al Big Bang, podría nacer un nuevo Universo. Sin embargo en este punto, como ya se ha dicho, ya se entra a meras especulaciones, pues el mismo vacío que existe entre la Mecánica Cuántica y la Relatividad General, impide determinar con certeza cuál será el final del Universo.

## 3.2. ¿Cómo es la Materia Oscura?

En el Capítulo 2 se mencionaron y comentaron las observaciones recientes cuya explicación requiere de una componente extra en el Universo: la materia oscura. Sin embargo, hasta el momento no se ha explicado de qué está constituida tal materia, únicamente se ha dicho que es materia no luminosa y sin carga, pero que sí tiene efectos gravitatorios. A continuación se presenta un esbozo de lo que intuitivamente constituye a la materia oscura, dejando para el próximo capítulo los desarrollos matemáticos que sustentan las características conocidas de esta componente misteriosa del Universo. Es importante mencionar que el tratamiento que se le debe dar a la materia oscura aun es polémico. Hay quienes argumentan que no puede ser vista como un fluido, y que más bien debe ser tratada con la ecuación de Boltzmann. La equivalencia de ambos tratamientos es explicada en el Apéndice A.

---

<sup>2</sup>Radiación producida en el horizonte de los eventos de un agujero negro y debida en su totalidad a efectos cuánticos. Los agujeros de masas solares tardan  $10^{66}$  años en evaporarse, mientras que aquellos con masa similar a la de una galaxia pueden tardar hasta  $10^{100}$  años.

<sup>3</sup>El hierro es el elemento con menor energía de ligadura.

### ¿Podría tratarse de algún tipo de materia bariónica?

La materia bariónica (hadrones tales como neutrones, protones. Poseen masa en reposo de 1 GeV aprox), constituye fundamentalmente todo lo que vemos. Desde planetas, estrellas, polvo, gas, etcétera. Nosotros mismos estamos constituidos por tal. Si la materia oscura estuviera formada por gas, tendría que ser fácilmente detectada al ser ionizada, cosa que no ocurre, pues la cantidad de emisión electromagnética detectada en las nubes de gas galácticas es proporcional a la materia visible que la emite. Por otro lado, la nucleosíntesis limita la cantidad de bariones hoy en día a sólo 4.8% del total del contenido del universo, y la materia oscura representa el 23%.

A este y otros absurdos se llega si se supone que la materia oscura está formada por una clase de bariones, pero debido a que en el modelo estándar de partículas aún no se ha encontrado un tipo de partícula con las anteriores características y que sí interactúe gravitacionalmente, de momento sigue siendo un tema de investigación. Por ahora, existe una clasificación para la materia oscura según su *temperatura*. En capítulos previos ya se mencionó que se requiere de una materia oscura *fría* para que se llevara a cabo la formación de estructuras. Sus principales características son que no debe tener interacción electromagnética, no debe poseer carga eléctrica, y debe ser estable. La diferenciación entre ambas clases de materia oscura se da a continuación.

#### 3.2.1. Materia oscura fría.

El candidato más popular de materia oscura fría es el WIMP<sup>4</sup>. No corresponden al Modelo Estndar de Partículas, pero el candidato más prometedor es la partícula supersimétrica neutralino. Dicha partícula no posee carga y tendría una masa entre 30 y 5000 GeV, sin embargo, hasta la fecha aun no se han detectado partículas responsables de la materia oscura fría, aunque se cree que es debido a que la materia oscura, por

---

<sup>4</sup>Weakly Interacting Massive Particle. WIMP y MACHO son antónimos.

definición, es débilmente interactiva. Mejorar los instrumentos de detección ampliaría la posibilidad de su pronto descubrimiento.

### **3.2.2. Materia oscura relativista (caliente).**

En la actualidad el único candidato a materia oscura lo constituyen los neutrinos, cuya existencia se ha comprobado experimentalmente, sin embargo, es muy poco masivo.

La materia oscura fría es, sin embargo, la que mejor se acopla a los modelos cosmológicos cuando se compara con las mediciones antes mencionadas.

# Capítulo 4

## Física Newtoniana vs Relatividad General.

Es bien sabido que para poner un cohete en la Luna no hace falta utilizar las ecuaciones de campo de Einstein, ya que la Física Newtoniana funciona correctamente. También sabemos que la Relatividad General se usa, en la mayoría de los casos, como corrección a física de Newton, salvo para las Lentes Gravitacionales, las cuales no tienen análogo newtoniano. Sin embargo, si lo que queremos obtener es mayor información sobre la naturaleza de la materia oscura, pareciera que lo correcto es hacer un análisis vía Relatividad General.

En este capítulo se pretende mostrar con claridad tanto el enfoque newtoniano como el relativista de la cosmología, así como la información sobre la materia oscura que aportan ambas teorías.

### 4.1. Curvas de rotación

Para que un cuerpo que describe una órbita circular con radio  $r$  permanezca en ella, se debe cumplir que la fuerza de atracción gravitacional debe estar equilibrada con la

fuerza centrífuga, esto es:

$$F_g = G \frac{mM(r)}{r^2} = m \frac{v_t^2}{r} = F_c \quad (4.1)$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo que describe la órbita,  $M(r)$  la distribución de materia y  $v_t$  la velocidad angular tangencial de rotación. Como se debe cumplir, newtonianamente hablando, la igualdad entre fuerzas, al simplificar se tiene:

$$G \frac{M(r)}{r} = v_t^2. \quad (4.2)$$

Si el sistema en cuestión es una galaxia, se observa que en el centro se encuentra la mayor cantidad de materia, y conforme la distancia al origen aumenta, se diluye. La densidad de Plummer describe con buena aproximación esta distribución:  $\rho_{Plummer} = \frac{3M_0}{4\pi b^3} (1 + (\frac{r}{b})^2)^{-5/2}$ , donde  $M_0$  es una constante con unidades de masa, y  $b$  otra constante con unidades de distancia.

Ahora bien, dada la densidad, se puede determinar la distribución esférica de masa de la siguiente forma:

$$M = 4\pi \int \rho r^2 dr, \quad (4.3)$$

En el caso de la densidad de Plummer, se obtiene lo siguiente:

$$M_{Pl} = M_0 \frac{(\frac{r}{b})^3}{(1 + \frac{r}{b})^{3/2}} \quad (4.4)$$

cuya gráfica se muestra en la Fig. 4.1.

Así, se puede determinar el perfil de velocidades de rotación:

$$v_{tPl} = \sqrt{\frac{GM_0}{b^3} \frac{r}{(1 + (\frac{r}{b})^2)^{3/4}}} \quad (4.5)$$

Al graficar tal perfil de velocidades, junto con el perfil observado de una galaxia típica, se obtiene la Fig. 4.2.

De acuerdo al gráfico anterior, se tiene que el modelo teórico no coincide con la observación. Si se considera a la Ley de la Gravitación Universal como correcta, la explicación a este problema es que hay una materia faltante que no se logra ver, pero que

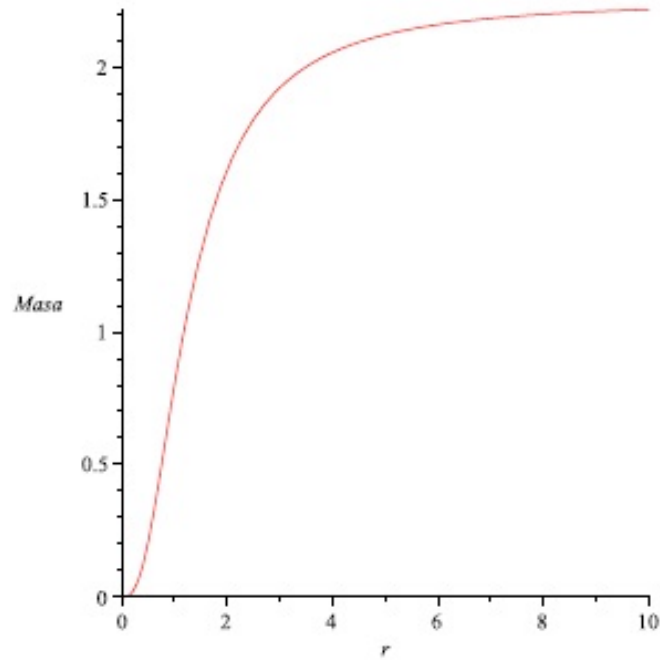


Figura 4.1: Gráfica de la masa asociada con la densidad de Plummer.  $M_0 = 2,25$ ,  $b=1$ ,  $G=1$

sí tiene efectos gravitacionales. El perfil de velocidades observado puede ser representado por:

$$v^2 = v_{lim}^2 \frac{r^2}{(r_c + \sqrt{r_c^2 + r^2})^2} \quad (4.6)$$

donde  $v_{lim}$  es la velocidad a la que tiende tal perfil cuando los radios son grandes, y  $r_c$  es un radio característico de cada galaxia.

Así, la masa necesaria para determinar ese perfil de velocidades observado, sería:

$$M = \frac{v_{lim}^2}{G} \frac{r^3}{(r_c + \sqrt{r_c^2 + r^2})^2} \quad (4.7)$$

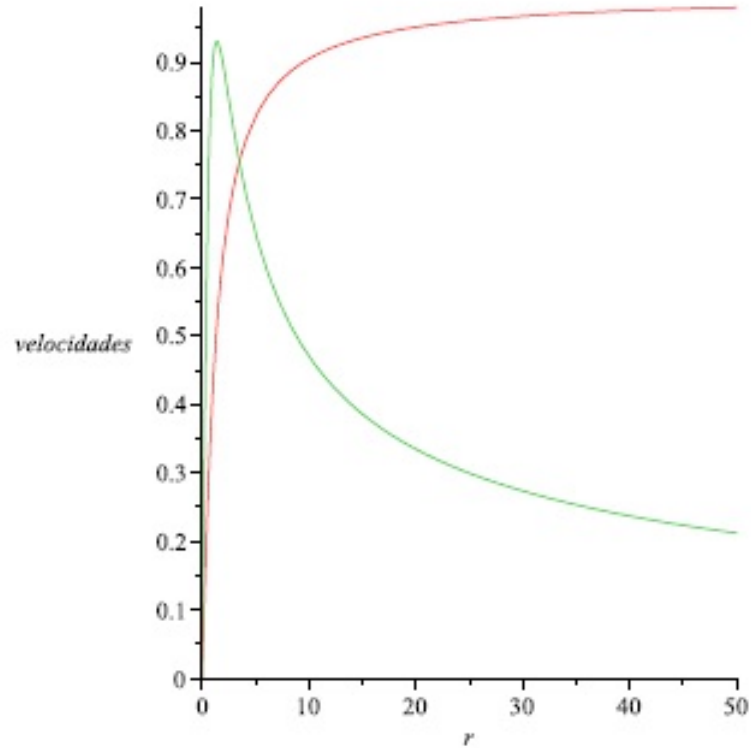


Figura 4.2: Perfil de las velocidades de rotación, asociado a la distribución de materia en el modelo de Plummer (verde), como el observado (rojo).  $M_0 = 2,25$ ,  $b=1$ ,  $G=1$ .

Cuya gráfica es muy distinta de la de la distribución de masa asociada a la materia visible.

La diferencia entre esta masa total y la masa que se observa, es lo que se conoce como *materia oscura*.

#### 4.1.1. Curvas de rotación en Relatividad General.

En un espacio tiempo esféricamente simétrico y estático,

$$ds^2 = -e^{2\phi/c^2} c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2Gm}{c^2 r}} + r^2 d\Omega^2, \quad (4.8)$$

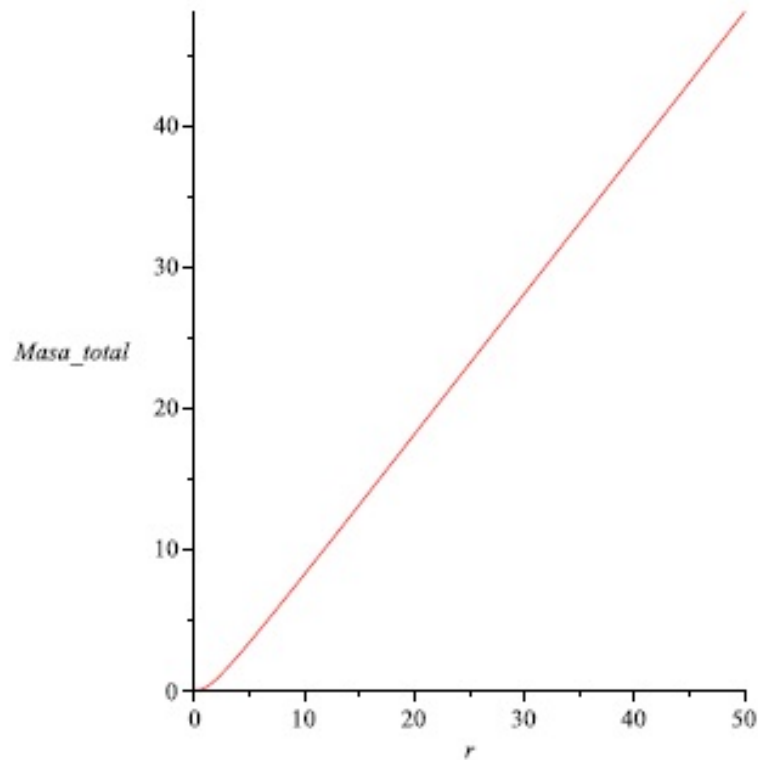


Figura 4.3: Perfil de Masa para la velocidad de rotación observada, con  $M_0 = 2,25$ ,  $b = 1$ ,  $G = 1$

si consideramos partículas de prueba que se mueven en órbitas circulares, en física newtoniana basta con igualar la fuerza centrípeta y la gravitatoria (como se ha demostrado previamente). Sin embargo, tomando en cuenta las correcciones relativistas, la situación es ligeramente más complicada.

Para describir tales órbitas, en principio se tendría que usar la ecuación geodésica<sup>1</sup>:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{d\lambda^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0. \quad (4.9)$$

Sin embargo, es posible usar el Lagrangiano ( $\mathcal{L}=-1$  para partículas tipo tiempo en

<sup>1</sup>Ecuación usada en relatividad general para describir trayectorias.



Relatividad General) y obtener la ecuación de movimiento de una manera más sencilla.

$$\mathcal{L} = \frac{-ds}{d\tau} = - \left( \frac{ds}{d\tau} \right)^2 = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu dx^\nu}{d\tau d\tau} = -g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu. \quad (4.10)$$

Para el elemento de línea correspondiente a un volumen esférico (por simplicidad), el Lagrangiano sería así<sup>2</sup>:

$$\mathcal{L} = -e^{\frac{2\phi}{c^2}} \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2mG}{c^2}} + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\varphi}^2) \quad (4.11)$$

Aquí es importante notar que  $t$  y  $\varphi$  son cíclicas porque no aparecen explícitamente en  $\mathcal{L}$ . También, por conveniencia, se dividirá entre 2 la expresión anterior, con el fin de simplificar los términos que aparezcan en el manejo algebraico posterior.

Ahora bien, por las ecuaciones de Euler Lagrange:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (4.12)$$

tenemos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -E = -e^{\frac{2\phi}{c^2}} \dot{t}. \quad (4.13)$$

Así es como se tiene integrada una de las ecuaciones geodésica.

Despejando  $\dot{t}$ , se tiene:

$$\dot{t} = E e^{-\frac{2\phi}{c^2}} \quad (4.14)$$

Se sabe que  $L_{tot}^2$  es una cantidad conservada:

$$L_{tot}^2 = L_\theta^2 + \frac{L_\varphi^2}{\sin^2\theta} \quad (4.15)$$

al igual que

---

<sup>2</sup>Se puede demostrar que para cuando el Lagrangiano es una constante, es equivalente utilizar  $\mathcal{L}$  o  $\mathcal{L}^2$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = L_\phi = L_z = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \quad (4.16)$$

con  $L_z$  la proyección del momento angular en el eje axial.

Y resolviendo para  $\dot{\theta}$

$$L_\theta = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right)^2 = (r^2 \dot{\theta}), \quad (4.17)$$

Sustituyendo en (4.11) las cantidades conservadas y recordando que  $\mathcal{L}=-1$ , se llega a la ecuación de la componente radial de la integral:

$$\dot{r}^2 + V_{eff}(r, E, L_t) = 0 \quad (4.18)$$

Cualquier partícula que se mueva en el espacio tiempo, debe satisfacer esta ecuación. Es importante notar la simplicidad con la que se obtuvo la última expresión, pues se evitó usar los símbolos de Christoffel para resolver la ecuación geodésica.

Ahora bien, como lo que interesan son las órbitas circulares estables, es necesario imponer las siguientes condiciones sobre el potencial:

1.  $\dot{r} = 0$  para trayectorias circulares,
2.  $\partial V(r)/\partial r = 0$  para encontrar los extremos,
3.  $\partial^2 V(r)/\partial r^2 |_{extr} > 0$ , y estables, donde  $V(r) = [1 + L_{tot}^2/r^2 - E^2/B]/A$ ,

donde A y B son los coeficientes de las componentes temporales y radiales respectivamente en el elemento de línea que estamos usando, es decir,  $A = \frac{1}{1 - \frac{2Gm}{c^2 r}}$  y  $B = e^{\frac{2\phi}{c^2}}$ . Al resolver las ecuaciones 1, 2, y 3 se encuentra que la condición para que una partícula describa una geodésica circular y estable es  $\phi' = \frac{v_t^2}{r}$ , exactamente la misma condición que en el modelo newtoniano.

## 4.2. ¿Qué nos dicen la Física Newtoniana y la Relatividad General?

La Ley de la Gravitación Universal de Isaac Newton<sup>3</sup>

$$\vec{F}_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad (4.19)$$

describe la interacción gravitatoria entre dos cuerpos con masa.

Suponemos una fuerza por unidad de masa,

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{GM}{r^2} \quad (4.20)$$

Considerando por simplicidad un volumen esférico e integrando sobre una esfera de radio  $r_0$ ,

$$\int \int_{\Sigma} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\frac{GM}{r_0^2} r_0^2 \int \int_{\Sigma} d\Omega = -4\pi GM \quad (4.21)$$

Por otro lado, de acuerdo al Teorema de la Divergencia<sup>4</sup>:

$$\int \int_{\Sigma} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV \quad (4.22)$$

entonces,

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV = -4\pi GM \quad (4.23)$$

pero,

$$M = \int_V dm = \int_V \rho dV \quad (4.24)$$

por lo tanto

<sup>3</sup>Publicada en 1687 en su libro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

<sup>4</sup>También llamado teorema de Gauss o teorema de Gauss-Ostrogradsky, relaciona el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada con la integral de su divergencia en el volumen delimitado por dicha superficie.

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV = -4\pi G \int_V \rho dV \quad (4.25)$$

Como la anterior expresión es válida para todo volumen, se resuelve la integral, obteniendo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = -4\pi G \rho \quad (4.26)$$

Y como  $\vec{f}$  es una fuerza conservativa, entonces  $\vec{f} = -\nabla\phi$ , llegando a la **Ecuación de Poisson**

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad (4.27)$$

donde  $\rho$  es la distribución de materia oscura, y  $\Phi$  es el potencial gravitacional por unidad de masa, generado por la distribución de masa.

En Física Newtoniana contamos además con la ecuación de Euler, que, en un sistema de referencia donde el fluido está en reposo con el observador

$$p' + \rho\phi' = 0$$

y junto con la definición de masa (ec. 4.24) forma el sistema de ecuaciones con el cual se caracteriza a la materia e inclusive es posible obtener una relación entre la densidad y la presión de la materia oscura.

Consideramos la siguiente parametrización:  $m = M_0 n$  y  $r = R_0 x$ , donde  $M_0, R_0$  son las escalas características para la masa la distancia,  $n$  es una función adimensional relacionada con la masa y  $x$  es una cantidad adimensional relacionada con la distancia. Una vez que las escalas características sean elegidas,  $M_0 G/c^2 R_0 = q$  podrá determinarse.

Sabiendo que en coordenadas esféricas:

$$\nabla^2\phi = \phi'' + \frac{2\phi'}{r} = \frac{4\pi}{G} c^2 \rho$$

Usando los nuevos parámetros, y el resultante de ellos, la densidad característica  $\rho_0 = \frac{M_0}{\frac{4}{3}\pi R_0^3}$  y  $\rho = \rho_0 \bar{\rho}$  donde  $\bar{\rho}$  es adimensional, se llega a que la ecuación de Poisson toma la forma:

$$\left(\frac{\phi}{c^2}\right)_{,xx} + \frac{2}{x} \left(\frac{\phi}{c^2}\right)_{,x} = 3q\bar{\rho} \quad (4.28)$$

Ahora, la ecuación de continuidad se transforma con un procedimiento análogo al de la ecuación de Poisson pero usando  $p = p_0\bar{p}$  con  $\bar{p}$  adimensional, obteniendo:

$$\bar{p}_{,x} + \left(\frac{\phi}{c^2}\right)_{,x} \bar{\rho} = 0. \quad (4.29)$$

Para la masa, se repite el procedimiento con la transformación de los parámetros característicos, y se tiene:

$$n = 3 \int x^2 \bar{\rho} dx. \quad (4.30)$$

Ahora bien, retomando el hecho de que  $\phi' = \beta^2/x$  (donde  $\beta$  es la velocidad de rotación) es válida, como vimos, tanto para Relatividad General como para física newtoniana, se puede hacer tal sustitución en la nueva ecuación de Poisson que incluye las variables adimensionales.

$$\left(\frac{\phi}{c^2}\right)_{,xx} = \frac{\beta^2_{,x}}{x} - \frac{\beta^2}{x^2}$$

Aspues, si consideramos un perfil de velocidad constante del fluido  $\beta = \beta_0$ <sup>5</sup>.

Se tiene:

$$\bar{\rho} = \frac{\beta_0^2}{3qx^2}, \quad (4.31)$$

$$\bar{p} = \frac{\beta_0^4}{6qx^2}, \quad (4.32)$$

$$n = \frac{3\beta_0^2}{3q} \int dx = \beta_0^2 x. \quad (4.33)$$

Por lo que es posible obtener la relación presión-densidad (a veces llamado ecuación de estado) de la materia oscura (newtonianamente hablando):

---

<sup>5</sup>En general, casi todos los perfiles de velocidades muestran un comportamiento similar: suben y tienden a constante. Ciertamente, cerca del origen este perfil no es muy aproximado, por eso se recomienda tener cuidado en las interpretaciones de los resultados si estos divergen

$$\bar{p} = \frac{\beta_0^2}{2} \bar{\rho}. \quad (4.34)$$

Veamos lo que sucede usando Relatividad General (aunque primero es necesario obtener una generalización de la ecuación de Poisson):

Recordando las ecuaciones de campo de Einstein (para este caso consideramos la constante cosmológica como despreciable):

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \frac{G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

y el elemento de línea (simetría esférica) para los halos de materia oscura se puede considerar como:

$$ds^2 = -e^{2\phi/c^2} c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2Gm}{c^2 r}} + r^2 d\Omega^2, \quad (4.35)$$

donde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ . Tanto el potencial gravitacional  $\phi(r)$  como la función de masa  $m(r)$  son funciones de la coordenada radial, y de hecho, debido a la simetría esférica, todas las cantidades físicas involucradas dependen sólo de  $r$ .

A partir de la métrica anterior se obtiene que el tensor de Einstein, es de la forma:  $G^\mu{}_\nu = \text{diag}(G^t_t, G^r_r, G^\theta_\theta, G^\phi_\phi)$ . Entonces el tensor de energía esfuerzo  $T^\mu{}_\nu$ , para que satisfaga las ecuaciones de Einstein, debe ser diagonal, y adicionalmente,  $T^\theta_\theta = T^\phi_\phi$ . Además, por la misma geometría, debe satisfacer la ecuación de conservación  $T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$ . Se suele identificar a las componentes del tensor energía momento de la siguiente manera:

$$T^t_t = -\rho c^2 \text{ (densidad de energía),}$$

$$T^r_r \equiv \text{presión,}$$

$$T^\theta_\theta \equiv \text{presión angular.}$$

Así pues, por las ecuaciones de Einstein tenemos que

$$G^t_t = \frac{m'}{r^2} = -4\pi\rho, \quad (4.36)$$

$$G_r^r = \frac{2}{r} \left( \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) \phi' - \frac{m'}{r^2} \right) = 8\pi T_r^r = 8\pi p. \quad (4.37)$$

La componente angular no se utiliza por conveniencia, pero en su lugar, puede usarse la ecuación de conservación  $T_\nu^\mu{}_{;\mu} = 0$ , pues sabemos que cualquier tensor de energía momento que satisfaga las ecuaciones de Einstein, satisface, de acuerdo a las identidades de Bianchi, las ecuaciones de continuidad.

Usamos que  $T_\nu^\mu{}_{;\mu} = 0$  que para el elemento de línea (4.35) y el tensor de fluido perfecto, en el que las presiones radial y angular son iguales se obtiene:

$$p' + (\rho c^2 + p) \frac{\phi'}{c^2} = 0 \quad (4.38)$$

Así pues, se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} m' &= 4\pi r^2 \rho, \\ \left( 1 - 2 \frac{mG}{c^2 r} \right) \frac{\phi'}{c^2} - \frac{mG}{c^2 r^2} &= \frac{4\pi G r}{c^4} p, \\ p' + (\rho c^2 + p) \frac{\phi'}{c^2} &= 0. \end{aligned}$$

Observamos que en la Física Newtoniana sólo existe un potencial gravitacional, mientras que en Relatividad General hay dos coeficientes métricos no necesariamente iguales sino independientes. Como se ve, en la teoría de Einstein, no sólo la función de masa es importante para determinar el potencial gravitatorio  $\phi$ , también interviene la presión.

De la ecuación de continuidad, es posible ver que  $p=0$  es inconsistente. Esto es porque  $p = 0$  implica que o el potencial es nulo (lo cual no tendría sentido), o la densidad de energía  $\rho$  es cero, lo cual no es una solución física, pues tampoco tiene sentido hablar de energías nulas.

Gracias a esto, obtenemos una importante conclusión: **la materia oscura no puede ser polvo. Es decir, su presión debe ser distinta de cero.** Este resultado se ve incluso en física newtoniana, además es intuitivamente claro que no es posible tener

una distribución estable de materia con presión nula. Sin embargo, ¿qué sucede con la ecuación de estado de la materia oscura en Relatividad General?

Por otro lado, es interesante encontrar una analogía a la ecuación de Poisson pero en Relatividad General. Para ello, se puede partir de la expresión para  $G_r^r = 8\pi T_r^r$  y sustituyendo en tal operación los siguientes términos:

$$m' = 4\pi r^2 T_t^t \quad (4.39)$$

y  $(T_r^r)'$  con la ecuación de conservación antes mencionada.

Así pues, la ecuación,

$$\left(1 - 2 \frac{mG}{c^2 r}\right) \frac{\Phi'}{c^2} - \frac{mG}{c^2 r^2} = \frac{4\pi G r}{c^4} T_r^r \quad (4.40)$$

implica, al usar las otras dos ecuaciones de Relatividad General,

$$\left(1 - 2 \frac{Gm}{c^2 r}\right) \left(\nabla^2 \frac{\Phi}{c^2} + 2 \frac{\phi'^2}{c^4}\right) = 4\pi \frac{G}{c^4} \left((T_r^r - T_t^t) \left(1 + r \frac{\phi'}{c^2}\right) + 2 T_\theta^\theta\right), \quad (4.41)$$

con  $\nabla^2$  el operador laplaciano en coordenadas esféricas.

La expresión anterior corresponde a la **generalización de la ecuación de Poisson en Relatividad General**. Para verificar su veracidad, se considera el límite Newtoniano:

$$v \ll c$$

$$p \ll c^2 \rho$$

$$\frac{mG}{rc^2} \ll 1$$

Recordando que  $\phi' = \frac{v_t^2}{r}$  que implica  $r\phi' = v_t^2 \ll c^2$  o bien,  $\frac{r\phi'}{c^2} \ll 1$  que corresponde al límite newtoniano. Entonces,

$$\frac{\phi'^2}{c^4} \approx \left(\frac{v_t^4}{c^4}\right) \frac{1}{r^2}$$

debe ser un término pequeño.

Por lo tanto, sólo queda



$$\nabla^2 \frac{\phi}{c^2} = \frac{4\pi G}{c^4} (p + \rho c^2 + 2p)$$

expresión que en el límite newtoniano  $p \ll \rho c^2$  es de la siguiente forma

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$$

que corresponde a la ecuación de Poisson en física newtoniana.

Así pues, se obtuvo una generalización de la bien conocida ecuación de Poisson, la cual es recuperada en los límites newtonianos.

Utilizando los mismos parámetros característicos que para el procedimiento newtoniano anterior, se reescriben las ecuaciones de Einstein y la ecuación de conservación de la siguiente manera:

$$n' = 3x^2 \bar{\rho} \quad (4.42)$$

$$\left(1 - q \frac{2n}{x}\right) \frac{\beta^2}{x} - q \frac{n}{x^2} = 3qx\bar{p}, \quad (4.43)$$

$$\bar{p}' + (\bar{p} + \bar{\rho}) \frac{\beta^2}{x} = 0, \quad (4.44)$$

donde hemos utilizado la relación entre el potencial gravitacional,  $\phi/c^2$  y las observaciones.<sup>6</sup>

Tras sustituir  $\frac{\phi'}{c^2} = \frac{\beta^2}{r}$  en las ecuaciones de la gravedad, ecs. (4.42, 4.44), se puede obtener la ecuación para la función de masa. Después de manipular las ecuaciones de campo ecs. (4.42-4.44), se obtiene la siguiente ecuación para la presión  $\bar{p}$ :

$$\bar{p}' + S(x)\bar{p} = T(x), \quad (4.45)$$

con

$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{2\beta^2(1 + \beta^2 - 2\beta^4 - x\beta^{2'})}{(1 + \beta^2)(1 + 2\beta^2)x}, \\ T(x) &= -\frac{\beta^2(\beta^2 + 2\beta^4 + x\beta^{2'})}{3(1 + \beta^2)(1 + 2\beta^2)x^3 q}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

---

<sup>6</sup>La prima corresponde a la derivada respecto a la coordenada  $x$ .

Esta solución general para la presión, expresada en términos de la velocidad de rotación  $\beta$ , tiene la forma:

$$\bar{p} = \frac{\int e^{\int^x S(x') dx'} T(x) dx + C}{e^{\int^x S(x') dx'}}. \quad (4.47)$$

donde el valor de la constante de integración  $C$  está determinada por las condiciones a la frontera.

La densidad del fluido oscuro perfecto, puede ser calculado de la ec. (4.44), toda vez que la presión sea determinada:

$$\bar{\rho} = \frac{\beta^2 + 2\beta^4 + x\beta^{2'}}{3(1+\beta^2)(1+2\beta^2)x^2q} - \frac{3+5\beta^2-2\beta^4-2x\beta^{2'}}{(1+\beta^2)(1+2\beta^2)} p. \quad (4.48)$$

La función de masa,  $n$ , puede ser determinada vía la ec. (4.43):

$$n = \frac{\beta^2}{(1+2\beta^2)q} x - 3 \frac{x^3}{(1+2\beta^2)} p. \quad (4.49)$$

Para el caso de un perfil de velocidades constante, las ecuaciones toman la siguiente forma:

$$m = \frac{M_0}{R_0} \frac{\beta_0^2 (2-\beta_0^2)}{2(1+2\beta_0^2-\beta_0^4)} r, \\ \rho = \frac{M_0}{8\pi R_0} \frac{\beta_0^2 (2-\beta_0^2)}{(1+2\beta_0^2-\beta_0^4) r^2}, \quad p = c^2 \frac{M_0}{8\pi R_0} \frac{\beta_0^4}{(1+2\beta_0^2-\beta_0^4) r^2},$$

A partir de lo anterior, se obtiene pues, una relación entre la presión y la densidad del fluido oscuro:

$$p = \frac{\beta_0^2}{2-\beta_0^2} c^2 \rho, \quad (4.50)$$

Que en parámetros característicos sería:

$$\bar{p} = \frac{\beta_0^2}{2-\beta_0^2} \bar{\rho}. \quad (4.51)$$

Se sabe que  $\beta_0 \approx 100 \frac{km}{s}$ , por lo que la diferencia entre el resultado obtenido vía física newtoniana y el que se acaba de obtener por medio de Relatividad General, difieren en un orden de  $10^{-8}$ .

Si bien este último es el tratamiento correcto que debe darse a la materia oscura, se puede concluir que el tratamiento newtoniano es una muy buena aproximación al resultado exacto. Queda como una tarea interesante repetir el procedimiento para un perfil de velocidades diferente.

# Capítulo 5

## La cosmología moderna y sus perspectivas

Como se mostró en los capítulos anteriores, las ecuaciones de campo de la Teoría de la Relatividad General, de ser correctas, nos podrían predecir muchas cosas que con física newtoniana hubieran sido imposibles de conocer<sup>1</sup>. Sin embargo, a pesar de que el modelo  $\Lambda$ CDM describe correctamente las observaciones mencionadas en el capítulo 2, aún existen muchas interrogantes en torno a las componentes oscuras del Universo. Al parecer de la autora del presente trabajo de tesis, no existe mejor teoría para explicar dichos fenómenos, por ello, se presentará de forma muy breve un resumen de las teorías alternativas a los modelos de energía y materia oscuras.

### 5.1. Teorías alternativas a las componentes oscuras

Los modelos cosmológicos alternativos al estándar, resultan de modificaciones a este último. Dichos cambios van desde imponer una inhomogeneidad en el tiempo (estado estacionario), alterar el Lagrangiano de la teoría de la Relatividad General (teorías

---

<sup>1</sup>Como las lentes gravitacionales.

$f(R)$ ), modificar la segunda ley de Newton (teorías MOND<sup>2</sup>) o definir ecuaciones de estado distintas a la constante cosmológica (mantiene la existencia de las componentes oscuras pero redefine a la constante cosmológica).

### 5.1.1. Estado estacionario

Propuesto por Bondi y Gold en 1948, y pretendió ser una alternativa al *Big Bang*. Está basado en el llamado **Principio Copernicano Perfecto**, el cual implica la extensión de la homogeneidad e isotropías espaciales a la dimensión temporal. Esto implica que el universo siempre ha tenido las mismas propiedades físicas que en la actualidad, es decir, el Universo a gran escala no ha variado con el tiempo, aunque sus componentes (galaxias, estrellas, etc.) sí. De forma geométrica, podría decirse que según este modelo, *las propiedades físicas y geométricas de las hipersuperficies  $t = cte$  no varían con el tiempo cosmológico*. La métrica estacionaria sería un caso particular de la de FRWL, por ser ésta la más general que incluya homogeneidad e isotropía. Sin embargo, la hipótesis de que el Universo no ha evolucionado a gran escala, impediría la evolución de la temperatura global, lo cual implicaría que no se hubiera llevado a cabo la nucleosíntesis primordial ni existiría explicación para la radiación cósmica de fondo y su espectro de cuerpo negro. Por las razones anteriores, el modelo de estado estacionario, ha sido descartado.

### 5.1.2. Teorías de gravedad modificada: MOND y $f(R)$

#### $f(R)$

Las teorías  $f(R)$  son extensiones de la Relatividad General con funciones arbitrarias del escalar de Ricci. Su argumento principal radica en que el faltante de materia visible (atribuida a materia oscura) se debe a una incomprensión nuestra de la gravedad, eliminando así el concepto de materia oscura, y en su lugar, se propone modificar las

---

<sup>2</sup>Acrónimo de MODified Newtonian Dynamics. Corresponde a una física newtoniana llevada a otro nivel, pues está contenida en Relatividad General.

leyes de la gravedad. Sin embargo, Fabian Schmidt de California Institute of Technology en Pasadena (2012) y sus colaboradores, estudiaron 49 agrupaciones de galaxias en el universo local de las observaciones del Observatorio Chandra X-Ray de NASA y las compararon con predicciones de modelos teóricos y otras observaciones y estudios de la RCF y supernovas, y no hallaron ninguna evidencia de que la gravedad se comporta de manera diferente a como la describe la Teoría de la Relatividad General de Einstein en escalas mayores a 130 millones de años luz<sup>3</sup>.

## MOND

Propuesta en 1983, intenta modificar la segunda ley de Newton, introduciendo un término dominante a aceleraciones muy bajas. En esta teoría, la segunda ley de Newton como la conocemos, es válida únicamente a aceleraciones relativamente altas. Esto es,

$$F = mf(x)a, \quad (5.1)$$

donde  $x = a/a_0$  con  $a_0 = 2 \times 10^{-10} m/s^2$ ,  $f(x) = 1$  cuando  $x \gg 1$ , y  $f(x) \approx x$  cuando  $x \leq 1$ . Esto significa que bajo la teoría MOND, la masa tiene más poder para curvar el espacio-tiempo, por lo que se necesitaría menos materia para explicar la gravedad que medimos.

Esta alternativa parece fiable si sólo se estudian galaxias, pues aunque MOND modifica la dinámica, las leyes de la cinemática siguen siendo las mismas. Sin embargo, la mayor falla de esta teoría radica en que no es capaz de explicar la masa perdida en los cúmulos de galaxias sin tener que recurrir al concepto de materia oscura, que era justamente el que se quería evitar. Por esta razón, la materia oscura en la teoría MOND es necesaria a escalas cosmológicas, para explicar la dinámica de los cúmulos y supercúmulos galácticos. Así pues, MOND únicamente sirve para explicar las curvas de rotación de galaxias sin tener que recurrir a la existencia de materia oscura. La principal crítica a esta teoría es lo complicado de su Lagrangiano comparado con el de

---

<sup>3</sup>Texto original de *Einstein's Theory Fights Off Challengers* via ScienceDaily.

Relatividad General:

Einstein	MOND (TeVeS)
$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} R.$	$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \tilde{R} - \frac{1}{2} K F^{ab} F_{ab} + \lambda (A_a A^a + 1) - \mu (\tilde{g}^{ab} - A^a A^b) \nabla_a \phi \nabla_b \phi - V(\mu) \right]$ <p style="margin-left: 20px;">where <math>g^{ab} = e^{2\phi} \tilde{g}^{ab} + 2 \sinh(2\phi) A^a A^b</math>.</p> <p style="margin-left: 20px;">and <math>\frac{dV}{d\mu} = -\frac{3}{32\pi l_B^2 \mu_0^2} \frac{\mu^2 (\mu - 2\mu_0)^2}{\mu_0 - \mu}</math>.</p>

Figura 5.1: Lagrangianos (acciones) de ambas teorías. Crédito: EmuleneWS.

MOND no explica materia faltante en cúmulos y su versión lagrangiana más popular posee una matemática mucho más compleja que Relatividad General, por lo que difícilmente puede ser el candidato ideal para sustituir la teoría de Einstein, razón por la cual pocos científicos en el mundo se han dedicado a estudiarla y a defenderla a profundidad.

### 5.1.3. Quintaesencia

La interpretación de  $\Lambda$  ha sido, desde su aparición en las ecuaciones de campo de Einstein, muy polémica. Hay quienes defendemos que se trata simplemente de una constante más de la naturaleza, tal como  $G$ , que no se derivan de ningún principio físico, ni como explicación directa de algún fenómeno. Sin embargo, hay quienes se oponen a percibirla como un número más, y buscan otras explicaciones.

Se puede interpretar como un fluido, recordando que:

$$p_\Lambda = \frac{-c^2 \Lambda}{8\pi G} \quad (5.2)$$

y,

$$\rho_\Lambda = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G} \quad (5.3)$$

además de

$$\Omega_{\Lambda} = \frac{\rho_{\Lambda}}{\rho_{cr}} = 0,71 \quad (5.4)$$

Como  $\rho_{\Lambda} = \text{masa}/\text{volumen}$ ,  $\rho_{\Lambda} = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G} = \text{cte}$ , y el volumen no es constante por tratarse de un universo en expansión, significaría que se está generando materia.

Como la creación de materia no es una salida viable, entonces se utiliza el concepto de *energía del vacío*. Como el Universo se expande, el vacío aumenta. En resumen, la materia no se genera, lo que aumenta, es *la energía del vacío debido a la expansión del Universo*.

La energía del vacío variable es llamada *quintaesencia*, y es considerada por algunos de sus críticos como el éter moderno. A diferencia de la constante cosmológica, esta alternativa sí varía con el tiempo, y aunque también predice una expansión del Universo, sería de una manera más lenta a la planteada por  $\Lambda\text{CDM}$ .

Ahora bien, el concepto de *energía del vacío* es complejo, y resulta un misterio no sólo para la cosmología, sino para la física entera, pues pareciera no tener lógica que la *nada* tuviera energía<sup>4</sup>. Hay quienes aseguran que el puente para entender esta extraña aseveración radica en la aún en ciernes *gravedad cuántica*<sup>5</sup>. Por el momento, es posible únicamente, medir la magnitud de la constante cosmológica, y compararla con la predicción de la teoría cuántica de campos para el valor de la llamada energía del vacío. El resultado no sólo es desalentador, sino inédito. La diferencia entre teoría y observación, es de la cantidad de 120 órdenes de magnitud. Es mucho mayor el valor que la teoría indica. No hay evidencia más grande de que nuestro concepto de éter moderno, quintaesencia, o constante cosmológica interpretada como fluido debe revisarse y replantearse.

---

<sup>4</sup>En física clásica.

<sup>5</sup>Siempre es posible crear pares virtuales partícula-antipartícula del vacío, que vuelven a desaparecer en un intervalo de tiempo infinitesimal, de acuerdo con el principio de incertidumbre, lo cual contribuye a la energía del supuesto vacío.



## 5.2. Perspectivas.

En los capítulos pasados, se pretendió explicar los pilares de la cosmología junto con sus bases matemáticas, sin dejar de lado las observaciones cosmológicas que han sustentado teorías y modelos desarrollados en las últimas décadas. Ahora en esta sección, se busca abordar las preguntas que hasta hoy se encuentran todavía abiertas y que serán el tema de investigación para los cosmólogos en los próximos años.

Afortunadamente para los que apenas incursionamos en esta ciencia, la cosmología no es una disciplina en donde sólo hay puntos finales; quedan un montón de cuestiones por resolver, y es fascinante ver el camino que aún falta por recorrer.

### 5.2.1. Por buen rumbo.

A lo largo de este trabajo de tesis hemos demostrado que el Modelo  $\Lambda$ CDM es el que explica con gran aproximación tanto las tres observaciones fundamentales de la cosmología (Radiación Cómica de Fondo, Abundancia de Helio e Hidrógeno y Corrimiento al Rojo), como otros fenómenos observados recientemente (curvas de rotación de galaxias, lentes gravitatorias, supernovas Ia). A pesar de que existen otros modelos alternativos para evitar la aparición de las componentes oscuras del Universo, ninguna de ellas logra explicar y describir mejor tales observaciones. Además, es un modelo simple y elegante para comprender *a grandes rasgos* nuestro Universo. Incluso, en el 2011, el Premio Nobel de Física fue otorgado a Saul Perlmutter por sus trabajos sobre la energía oscura y la expansión acelerada del Universo, lo que nos hace pensar que vamos por buen camino en cuanto a cosmología se refiere.

### 5.2.2. Lo que está por venir.

Si bien pareciera que el Modelo  $\Lambda$ CDM pareciera resolver casi cualquier incógnita sobre el Universo, aún hay algunos detalles que no logra explicar. Por ejemplo, no se sabe exactamente la composición de la materia oscura. Somos capaces de describir

sus efectos sobre la materia y la luz, pero su naturaleza todavía es desconocida. Otra de las preguntas abiertas de la cosmología es el origen y la ecuación de estado de la energía oscura. Como se mencionó previamente, entender la naturaleza de la constante cosmológica como una consecuencia de la energía del vacío conduce a un error de 120 órdenes de magnitud, lo cual suena bastante alejado de la realidad, pero por otra parte, no convence a muchos la idea de que se asuma como una constante más de la naturaleza. Incluso la discusión sobre si la física de Newton es una generalización a la Relatividad General o ésta última es mucho más que eso, sigue estando vigente. Es muy interesante ver cómo aún existen posturas diferentes a la teoría de la gravedad de Einstein.

Por otra parte, nuestras limitantes tecnológicas impiden conocer más sobre el corrimiento al rojo de las primeras estructuras, con lo que se completaría la teoría de formación de estructuras. Para esto, se espera poder construir, en los próximos años, observatorios que permitan estudiar el infrarrojo lejano, aún más avanzados que el proyecto *Herschel*<sup>6</sup>. También, es necesario seguir uniendo esfuerzos para lograr encontrar la tan buscada *Teoría de Unificación*, pues el eslabón perdido entre la mecánica cuántica, la Relatividad y la teoría de partículas elementales sigue siendo un obstáculo para entender qué sucedió con exactitud durante los primeros instantes del Universo. Nuestra comprensión sobre los fenómenos cuánticos que suponemos que acontecieron en los inicios del Universo, nos impide avanzar en la solución de este rompecabezas.

También quedan por determinar con mayor precisión los valores de la constante de Hubble  $H_0$  y de los parámetros de densidad. Y cosa curiosa es que el valor actual de la constante cosmológica ( $10^{-43} \frac{1}{\text{km}^2}$ ) es compatible con la vida, es decir, si su valor fuese mucho más grande sería imposible que la vida como la conocemos se pudiera llevar a cabo. Cuestiones filosóficas tal vez, pues la ciencia busca explicar *cómo* y no *por qué* o *para qué*, pero no podemos negar que es fascinante conocer que una variable *aleatoria* haya tomado justo los valores precisos para dar lugar a nuestra existencia. No obstante, es notable y esperanzador que la cosmología poco a poco va ganando más terreno, al grado de que, como se mencionó previamente, en el año 2011, la expansión acelerada del

---

<sup>6</sup>Misión de la Agencia Espacial Europea. El lanzamiento se llevó a cabo el 14 de mayo de 2009

Universo fue motivo de la entrega de un Premio Nobel de Física. No debemos olvidar tampoco, que es de suma importancia la docencia y buenas prácticas de pedagogía en esta rama de la física. Muchos de los conceptos de la cosmología son difíciles de explicar y de entender, es por eso que a la par de las nuevas investigaciones sobre las aun muchas interrogantes sobre el Universo, es imperante establecer modelos eficientes de educación en ciencia, de lo contrario, corremos el riesgo de cada vez ser menos los que decidamos pertenecer al camino de la investigación básica. Tener libros de texto claros, profesores capacitados y alumnos motivados son parte de la misión. Es por eso que la historia del presente trabajo de tesis no termina aquí, sino que es apenas la base y el inicio de lo que en breve será un texto de apoyo a aquellos que quieran conocer más sobre Cosmología y no tengan a su alcance un libro claro, preciso, y en español. También se pretende que sea una guía enriquecedora y complementaria al curso de Cosmología impartido en la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Sin embargo, más allá del estudio de los orígenes, la evolución y la posible muerte del cosmos, no podemos negar que es más cercano el final de nuestra civilización o de nuestro propio planeta que el del Universo, y apremia más encontrar y emprender una urgente labor de rescate al planeta Tierra, sólo entonces estarán plenamente justificadas nuestras ansias por conocer lo que hay afuera. Eso sí sería prueba irrefutable de que en este mundo hay vida inteligente.

# Referencias

- [1] Barrow, et al, *The Anthropic Cosmological Principle*, Oxford University Press, 1986.
- [2] Bennett Jeffrey, et al, *The Cosmic Perspective*, 2da Ed., Addison Wesley, 2002.
- [3] Blandford R D, et al, *Gravitational Lens Optics*, Science 245, Agosto25, 1989, p824.
- [4] Carroll Bradley W., et al, *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2da Ed., Pearson Education, Inc. , 2007.
- [5] Chaisson Eric, et al, *Astronomy Today*, 3ra Ed., Prentice-Hall, 1999.
- [6] Conselice Christopher J., *The Universe's Invisible Hand*, Scientific American 296, Febrero 2007, p34
- [7] Kolb y Turner, *The early Universe*, Addison-Wesley, 1990.
- [8] Levi Barbara, *COBE Measures Anisotropy in Cosmic Microwave Background Radiation*, Physics Today 45, Junio 1992 p17.
- [9] Linder Eric. *First Principles of Cosmology*, Addison-Wesley, 1997.
- [10] Narlikar Jayant, *Introduction to Cosmology*, Cambridge University Press, 2002.
- [11] Peacock John, *Cosmological Physics*, Cambridge University Press, 1999.
- [12] Perlmutter Saul, Supernovae, *Dark Energy and the Accelerating Universe*, Physics Today 56, No. 4, 53, 2003.
- [13] Schramm David, *The Big Bang Creation of the Universe*, en Quarks, Quasars and Quandries, Ed. Gordon Aubrecht, Amer. Assoc of Physics Teachers, 1987.
- [14] Shu Frank, *The Physical Universe, An Introduction to Astronomy*, University Science Books, 1982.
- [15] Smith *New Eyes on the Universe*, National Geographic 185, p 2, Enero 1994.

- [16] Weinberg Steven, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley and sons, 1972.
- [17] Weinberg Steven, *The First Three Minutes*, Bantam Books, 1977.
- [18] Zeilik Michael, *Astronomy: The Evolving Universe*, 3ra Ed., Harper y Row, 1982.