UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Métodos de Integración para Funciones Irracionales e Integrales Impropias

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

P R E S E N T A:

Ana Gabriela Galván García

DIRECTOR DE TESIS:
M. en C. Elena de Oteyza de Oteyza
2012

Índice

Métodos de integración

Ana Gabriela Galván García

Capítulo 1

Método por sustitución trigonométrica

Las sustituciones trigonométricas se emplean en integrales donde aparecen los siguientes radicales:

$$\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\,dx, \qquad \int \sqrt{a^2 + b^2x^2}dx, \qquad \int \sqrt{b^2x^2 - a^2}\,dx,$$

con a, y b constantes. Los cambios que deben hacerse son los siguientes:

- Para integrales que contienen $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$, hacemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{b}\operatorname{sen} t \\ dx &= \frac{a}{b}\cos t\,dt, \end{aligned}$$

  entonces

$$\sqrt{a^2 - b^2x^2} = |a\cos t|\,.$$

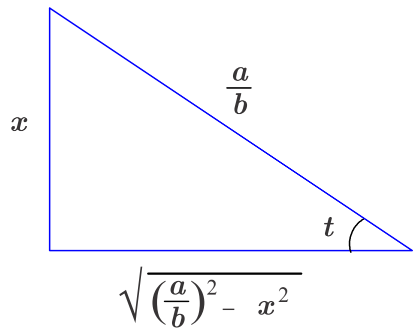

Figura 1-1

- Para integrales que contienen $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$, hacemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{b}\tan t \\ dx &= \frac{a}{b}\sec^2 t\,dt, \end{aligned}$$

  entonces

$$\sqrt{a^2 + b^2x^2} = |a\sec t|\,.$$

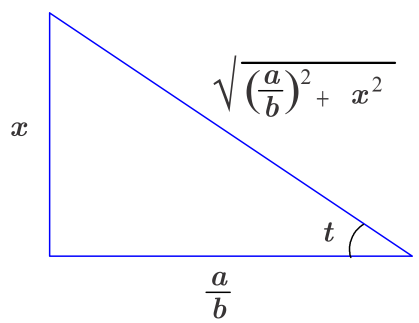

Figura 1-2

- Para integrales que contienen $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$, hacemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{b}\sec t \\ dx &= \frac{a}{b}\sec t \tan t\, dt, \end{aligned}$$

entonces

$$\sqrt{b^2x^2 - a^2} = |a\tan t|\,.$$

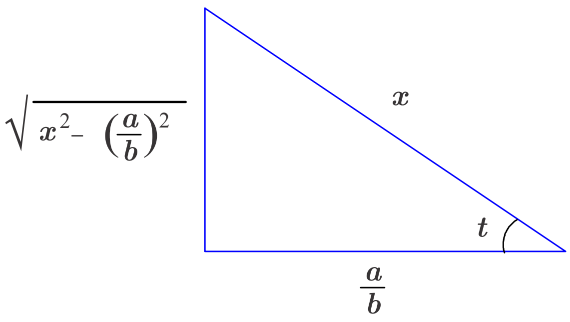

Figura 1-3

Observación:

Si la integral que tenemos que calcular no tiene límites de integración y es de alguno de los tres casos anteriores quitaremos el valor absoluto ya que consideraremos que lo que aparece dentro del él es positivo.

Ejemplos:

1. $\displaystyle\int \frac{3x + x^2}{1 + x^2}dx.$

Solución:

Hagamos

$$x = \tan z,$$

entonces

$$1 + x^2 = \sec^2 z.$$

Calculando dx tenemos:

$$dx = \sec^2 z\ \ dz,$$

sustituyendo en la integral, tenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + x^2}{1 + x^2}dx &= \int \frac{3\tan z + \tan^2 z}{\sec^2 z}\sec^2 z\, dz \\ &= \int 3\tan z + \tan^2 z\ dz \\ &= \int 3\tan z + \sec^2 z - 1\ dz \\ &= -3\ln\cos z + \tan z - z + c. \end{aligned}$$

Utilizando la figura 1-2 tenemos

$$\cos z = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+x^2}{1+x^2}dx &= -3\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + x - \arctan x + c \\ &= \ln\left|x^2+1\right|^{\frac{3}{2}} + x - \arctan x + c.\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x}{\sqrt{9-x^2}}dx.$

Solución:

Tomamos

$$x = 3\operatorname{sen} t,$$

calculando dx:

$$dx = 3\cos t\, dt.$$

Observamos que

$$\sqrt{9-x^2} = 3\cos t,$$

sustituyendo en la integral dada,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+x^2+2x}{\sqrt{9-x^2}}dx &= \int \frac{27\operatorname{sen}^3 t + 9\operatorname{sen}^2 t + 6\operatorname{sen} t}{3\cos t} 3\cos t\ dt \\ &= \int 27\operatorname{sen}^3 t + 9\operatorname{sen}^2 t + 6\operatorname{sen} t\ dt \\ &= 27\int \operatorname{sen}^3 t\ dt + \frac{9}{2}\int (1-\cos 2t)\ dt + 6\int \operatorname{sen} t\ dt,\end{aligned}$$

donde,

$$\int \operatorname{sen}^3 t\ dt,$$

la resolveremos por el metodo por partes,

$$\begin{pmatrix} u = \operatorname{sen}^2 t & du = 2\operatorname{sen} t\cos t \\ dv = \operatorname{sen} t & v = -\cos t \end{pmatrix}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 t\ dt &= -\cos t \operatorname{sen}^2 t + 2\int \cos^2 t \operatorname{sen} t\ dt \\
&= -\cos t \operatorname{sen}^2 t + 2\int \left(1-\operatorname{sen}^2 t\right) \operatorname{sen} t\ dt \\
&= -\cos t \operatorname{sen}^2 t + 2\int \left(\operatorname{sen} t-\operatorname{sen}^3 t\right)\ dt \\
&= -\cos t \operatorname{sen}^2 t - 2\cos t - 2\int \operatorname{sen}^3 t\ dt \\
&= \frac{1}{3}\left(-\cos t \operatorname{sen}^2 t - 2\cos t\right).
\end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+x^2+2x}{\sqrt{9-x^2}}dx &= 27\int \operatorname{sen}^3 t\ dt + \frac{9}{2}\int (1-\cos 2t)\ dt + 6\int \operatorname{sen} t\ dt. \\
&= 9\left(-\cos t \operatorname{sen}^2 t - 2\cos t\right) + \frac{9}{2}t - \frac{9}{4}\operatorname{sen} 2t - 6\cos t \\
&= -9\cos t \operatorname{sen}^2 t - 24\cos t + \frac{9}{2}t - \frac{9}{4}\operatorname{sen} 2t \\
&= -9\cos t \operatorname{sen}^2 t - 24\cos t + \frac{9}{2}t - \frac{9}{2}\operatorname{sen} t\cos t.
\end{aligned}$$

Utilizando la figura 1-1 tenemos

$$\int \frac{x^3+x^2+2x}{\sqrt{9-x^2}}dx = -\frac{x^2\sqrt{9-x^2}}{3} - 8\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{3} - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + c.$$

3. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4x^2-25}}dx$

Solución:

Hagamos

$$x = \frac{5}{2}\sec t,$$

calculando dx:

$$dx = \frac{5}{2}\sec t \tan t\, dt,$$

así

$$\sqrt{4x^2-25} = 5\tan t.$$

Volviendo a la integral inicial, tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{4x^2-25}}dx &= \frac{5}{2}\int \frac{\frac{5}{2}\sec t}{5\tan t}\sec t\tan t\,dt\\ &= \frac{5}{4}\int \sec^2 t\,dt\\ &= \frac{5}{4}\tan t.\end{aligned}$$

Utilizando la figura 1-3 tenemos

$$\begin{aligned}\tan t &= \frac{\sqrt{x^2-\frac{25}{4}}}{\frac{5}{2}}\\ &= \frac{\sqrt{4x^2-25}}{5},\end{aligned}$$

entonces,

$$\int \frac{x}{\sqrt{4x^2-25}}dx = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2-25}+c.$$

4. $\displaystyle\int \frac{x^2}{4+x^2}dt.$

Solución:

Sea

$$x = 2\tan t,$$

calculando dx:

$$dx = 2\sec^2 t\,dt,$$

por consiguiente,

$$4+x^2 = 4\sec^2 t.$$

Sustituyendo en la integral,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{4+x^2}dx &= \int \frac{\left(2\sec^2 t\right)\left(4\tan^2 t\right)}{4\sec^2 t}dt\\ &= 2\int \tan^2 t\,dt\\ &= 2\int \sec^2 t-1\,dt\\ &= 2\left(\tan t - t\right).\end{aligned}$$

Utilizando la figura 1-2 tenemos

$$t = \arctan\frac{x}{2},$$

entonces

$$\int \frac{x^2}{4+x^2}dx = 2\left(\frac{x}{2} - \arctan\frac{x}{2}\right) + c.$$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}$

Solución:

Hagamos

$$x = \sqrt{2}\operatorname{sen} t,$$

calculando dx:

$$dx = \sqrt{2}\cos t\, dt,$$

donde

$$2 - x^2 = 2\cos^2 t.$$

Y sustituyendo en la integral dada,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{8}\cos^3 t}dt.\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\cos^2 t}\\ &= \frac{1}{2}\tan t.\end{aligned}$$

Utilizando la figura 1-1 tenemos

$$\tan t = \frac{x}{\sqrt{2-x^2}},$$

por lo tanto

$$\int \frac{dx}{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{2\sqrt{2-x^2}} + c.$$

6. $\displaystyle\int \sqrt{7-x^2}dx.$

Solución:

Hagamos

$$x = \sqrt{7}\operatorname{sen} t,$$

calculando dx:

$$dx = \sqrt{7}\cos t\; dt,$$

así,

$$\sqrt{7-x^2} = \sqrt{7}\cos t,$$

sustituyendo en la integral,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{7-x^2}dx &= 7\int \cos^2 t \; dt \\
&= \frac{7}{2}\int (1+\cos 2t)\, dt \\
&= \frac{7}{2}t + \frac{7}{4}\operatorname{sen} 2t \\
&= \frac{7}{2}t + \frac{7}{2}\operatorname{sen} t \cos t.
\end{aligned}$$

Utilizando la figura 1-1 tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} t &= \frac{x}{\sqrt{7}} \\
\cos t &= \frac{\sqrt{7-x^2}}{\sqrt{7}},
\end{aligned}$$

finalmente,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{7-x^2}dx &= \frac{7}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + \frac{7}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)\left(\frac{\sqrt{7-x^2}}{\sqrt{7}}\right) + c \\
&= \frac{7}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + \frac{x\sqrt{7-x^2}}{2} + c.
\end{aligned}$$

Capítulo 2

Integración mediante Fracciones Parciales

Definición:
Una función racional es del tipo

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios con coeficientes reales y el grado de $q(x)$ es mayor o igual a 1.

Ahora, para integrar

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx,$$

si la fracción dada es impropia (es decir el grado de $p(x)$ es mayor o igual al de $q(x)$), entonces por el algortimo de la división existen polinomios unicos $g(x)$ y $r(x)$, con $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ menor que el grado de $q(x)$ tal que,

$$p(x) = q(x)\, g(x) + r(x)$$

entonces

$$\frac{p(x)}{q(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

donde $g(x)$ es un polinomio de grado menor que el de $p(x)$ y $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ es una función racional propia.

Si $q(x) = (x+a)^k \ldots. (x^2+bx+c)^m$ entonces la función racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ se puede expresar como suma finita de funciones de la forma

$$\frac{A}{(x+a)^k} \qquad \text{y} \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^m}$$

donde k y m son enteros positivos, A, B, C, a, b, c son constantes con la condición de que x^2+bx+c sea un polinomio irreducible.

De este modo, la integración de una función racional consiste fundamentalmente en la integración de un polinomio y de varias fracciones. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. Factores lineales distintos

Si $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una fracción propia y $x - a_i$ es una factorizacion de $q(x)$, entonces

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{p(x)}{q(x)} dx &= \int \frac{A_1}{x-a_1} dx + \int \frac{A_2}{x-a_2} dx + \ldots + \int \frac{A_n}{x-a_n} dx \\ &= A_1 \ln|x-a_1| + A_2 \ln|x-a_2| + \ldots + A_n \ln|x-a_n| + k. \end{aligned}$$

Ejemplo

- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}$

  Solución:

  Expresamos
$$x^2-4=(x-2)(x+2),$$
  entonces
$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2},$$
  multiplicando por x^2-4 ambos lados de la igualdad,
$$\begin{aligned} 1 &= A(x+2)+B(x-2)\\ &= (A+B)x+2(A-B). \end{aligned}$$
  Igualando los coeficientes llegamos a
$$\begin{aligned} A+B &= 0\\ 2(A-B) &= 1, \end{aligned}$$
  en donde, la solucion al sistema de ecuaciones es:
$$A=\frac{1}{4},\ B=-\frac{1}{4}.$$
  Por lo que
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-4} &= \int \frac{A}{x-2}dx+\int \frac{B}{x+2}dx\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-2}-\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2}\\ &= \frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x+2|+k\\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+k. \end{aligned}$$

Caso 2. Factores lineales iguales.

Si $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una fracción propia y $x-a_i$ es una factor de $q(x)$ que se repite n veces, entonces
$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_1}{x-a_i}+\frac{A_2}{(x-a_i)^2}+...+\frac{A_n}{(x-a_i)^n}.$$
Por lo tanto
$$\begin{aligned} \int \frac{p(x)}{q(x)}dx &= \int \frac{A_1}{x-a_i}dx+\int \frac{A_2}{(x-a_i)^2}dx+...+\int \frac{A_n}{(x-a_i)^n}dx\\ &= A_1\ln|x-a_i|-\frac{A_2}{(x-a_i)}+...+\frac{A_n}{(-n+1)(x-a_i)^{n-1}}+k. \end{aligned}$$

Ejemplo

- $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx.$

  Solución:

  Como
  $$x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2,$$
  tenemos
  $$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2},$$
  multiplicando por x^3-x^2-x+1 ambos lados de la igualdad,
  $$\begin{aligned} 3x+5 &= A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1) \\ &= (A+B)x^2+(C-2A)x+A-B+C. \end{aligned}$$
  Igualando los coeficientes,
  $$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ C-2A &= 3 \\ A-B+C &= 5, \end{aligned}$$
  la solución es,
  $$A=\frac{1}{2},\qquad B=-\frac{1}{2},\qquad C=4,$$
  entonces
  $$\begin{aligned} \int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx &= \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx+\int \frac{-\frac{1}{2}}{x-1}dx+\int \frac{4}{(x-1)^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{4}{x-1}+k \\ &= \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{x-1}+k. \end{aligned}$$

Caso 3. Factores cuadráticos distintos
Si $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una fracción propia y x^2+bx+c es una factor cuadrático de $q(x)$, entonces
$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$$
siendo los valores de A y B constantes reales a determinar.

Entonces para integrar

$$\begin{aligned}
\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx &= \int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}dx \\
&= \frac{A}{2}\int \frac{2x+\frac{2B}{A}}{x^2+bx+c}dx \\
&= \frac{A}{2}\int \frac{2x+b+\frac{2B}{A}-b}{x^2+bx+c}dx \\
&= \frac{A}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}+\frac{2B-Ab}{2}\int \frac{dx}{x^2+bx+c} \\
&= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+bx+c\right|+\frac{2B-Ab}{2}\int \frac{dx}{x^2+bx+c}.
\end{aligned}$$

Para resolver

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c},$$

completemos el binomio,

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c}=\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4c-b^2}{4}}.$$

Donde obtenemos algo de la forma

$$\int \frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}, \tag{2.1}$$

entonces

$$\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4c-b^2}{4}}=\frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}},$$

por lo tanto,

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}dx=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+bx+c\right|+\frac{2B-Ab}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}+k.$$

Ejemplo

- $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx.$

  Solución:

  Como

  $$x^4+3x^2+2=\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right),$$

  entonces

  $$\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2},$$

multiplicando por x^4+3x^2+2, tenemos,

$$\begin{aligned} x^3+x^2+x+2 &= (Ax+B)\left(x^2+2\right)+(Cx+D)\left(x^2+1\right) \\ &= (A+C)\,x^3+(B+D)\,x^2+(2A+C)\,x+2B+D. \end{aligned}$$

Igualando coeficientes:

$$\begin{aligned} A+C &= 1 \\ B+D &= 1 \\ 2A+C &= 1 \\ 2B+D &= 2, \end{aligned}$$

la solución es:

$$A=0,\ B=1,\ C=1,\ D=0.$$

Entonces la integral es

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx &= \int \frac{Ax+B}{x^2+1}dx+\int \frac{Cx+D}{x^2+2}dx \\ &= \int \frac{1}{x^2+1}dx+\int \frac{x}{x^2+2}dx \\ &= \arctan|x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+k. \end{aligned}$$

Caso 4. Factores cuadráticos iguales
Si $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una fracción propia y x^2+bx+c es una factor de $q(x)$ que se repite n veces, entonces

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+bx+c\right)^2}+...+\frac{A_nx+B_n}{\left(x^2+bx+c\right)^n}$$

siendo los valores de A_i y B_i constantes reales, con $i=1,\ldots,n$.
Entonces para integrar

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx=\int\left(\frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+bx+c\right)^2}+...+\frac{A_nx+B_n}{\left(x^2+bx+c\right)^n}\right)dx$$

nos fijaremos en

$$\int \frac{A_nx+B_n}{\left(x^2+bx+c\right)^n}dx,$$

para $n>1$, pues para $n=1$ se sigue como el caso 3, entonces

$$\int \frac{A_nx+B_n}{\left(x^2+bx+c\right)^n}dx=A_n\int \frac{x}{\left(x^2+bx+c\right)^n}dx+B_n\int \frac{dx}{\left(x^2+bx+c\right)^n}$$

Resolveremos $A_n \int \frac{x}{(x^2+bx+c)^n}dx$, pues $B_n \int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^n}$ está contenido en este caso. Completemos el binomio

$$x^2+bx+c = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c-b^2}{4}.$$

Hagamos

$$\begin{aligned} x+\frac{b}{2} &= t \\ dx &= dt, \end{aligned}$$

entonces en

$$\begin{aligned} A_n \int \frac{x}{(x^2+bx+c)^n}\,dx &= A_n \int \frac{x}{\left(\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4c-b^2}{4}\right)^n}\,dx \\ &= A_n \int \frac{t-\frac{b}{2}}{\left(t^2+\frac{4c-b^2}{4}\right)^n}dt \\ &= A_n \int \frac{t}{\left(t^2+\frac{4c-b^2}{4}\right)^n}dt - \frac{bA_n}{2}\int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{4c-b^2}{4}\right)^n}. \end{aligned}$$

Haciendo

$$\alpha^2 = \frac{4c-b^2}{4},$$

tenemos

$$A_n \int \frac{x}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = A_n \int \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^n}dt - \frac{bA_n}{2}\int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^n}.$$

Así

$$A_n \int \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^n}dt = \frac{A_n\,(t^2+\alpha^2)^{-n+1}}{2\,(-n+1)}.$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^n} &= \int \frac{\alpha^2 t}{\alpha^2 t\,(t^2+\alpha^2)^n}\,dt \\ &= \int \frac{\alpha^2 t}{\alpha^2 t\,(t^2+\alpha^2)^{n-2}\,(t^2+\alpha^2)^2}\,dt, \end{aligned}$$

utilizando el método de integración por partes:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\alpha^2 t\,(t^2+\alpha^2)^{n-2}} & dv &= \frac{\alpha^2 t}{(t^2+\alpha^2)^2}\,dt \\ & & v &= \frac{\alpha^2}{2}\frac{(t^2+\alpha^2)^{-1}}{-1} = \frac{-\alpha^2}{2\,(t^2+\alpha^2)} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} du &= \frac{-\left(\alpha^2\left(t^2+\alpha^2\right)^{n-2}+\alpha^2 t\left(n-2\right)\left(t^2+\alpha^2\right)^{n-3}2t\right)}{\left(\alpha^2 t\left(t^2+\alpha^2\right)^{n-2}\right)^2}\,dt \\ &= \frac{-\alpha^2\left(t^2+\alpha^2\right)^{n-3}\left(\left(t^2+\alpha^2\right)+2t^2\left(n-2\right)\right)}{\alpha^4 t^2\left(t^2+\alpha^2\right)^{2n-4}}\,dt \\ &= \frac{-\left(t^2+\alpha^2+2t^2n-4t^2\right)}{\alpha^2 t^2\left(t^2+\alpha^2\right)^{2n-4-n+3}}\,dt \\ &= \frac{-\left(\left(2n-3\right)t^2+\alpha^2\right)}{\alpha^2 t^2\left(t^2+\alpha^2\right)^{n-1}}\,dt. \end{aligned}$$

Proponemos que

$$v = \frac{t^2}{2\left(t^2+\alpha^2\right)},$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{2t\left(2\left(t^2+\alpha^2\right)\right)-4t\left(t^2\right)}{\left(2\left(t^2+\alpha^2\right)\right)^2} \\ &= \frac{4t^3+4\alpha^2t-4t^3}{4\left(t^2+\alpha^2\right)^2} \\ &= \frac{\alpha^2 t}{\left(t^2+\alpha^2\right)^2}. \end{aligned}$$

Como dos primitivas de la misma función difieren en una constante, entonces tenemos que

$$\frac{t^2}{2\left(t^2+\alpha^2\right)} = \frac{-\alpha^2}{2\left(t^2+\alpha^2\right)}+k$$

de donde

$$\begin{aligned} k &= \frac{t^2}{2\left(t^2+\alpha^2\right)}+\frac{\alpha^2}{2\left(t^2+\alpha^2\right)} \\ &= \frac{t^2+\alpha^2}{2\left(t^2+\alpha^2\right)} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\alpha^2 t\left(t^2+\alpha^2\right)^{n-2}} & dv &= \frac{\alpha^2 t}{\left(t^2+\alpha^2\right)^2}\,dt \\ du &= \frac{-\left(\left(2n-3\right)t^2+\alpha^2\right)}{\alpha^2 t^2\left(t^2+\alpha^2\right)^{n-1}}\,dt & v &= \frac{t^2}{2\left(t^2+\alpha^2\right)} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
uv-\int vdu &= \frac{1}{\alpha^2 t\left(t^2+\alpha^2\right)^{n-2}}\frac{t^2}{2\left(t^2+\alpha^2\right)}-\int\frac{t^2}{2\left(t^2+\alpha^2\right)}\frac{-\left(\left(2n-3\right)t^2+\alpha^2\right)}{\alpha^2 t^2\left(t^2+\alpha^2\right)^{n-1}}\,dt\\
&= \frac{t}{2\alpha^2\left(t^2+\alpha^2\right)^{n-1}}+\int\frac{\left(2n-3\right)t^2+\alpha^2}{2\alpha^2\left(t^2+\alpha^2\right)^{n}}\,dt\\
&= \frac{t}{2\alpha^2\left(t^2+\alpha^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{2\alpha^2}\int\frac{\left(2n-3\right)t^2+\left(2n-3\right)\alpha^2-\left(2n-3\right)\alpha^2+\alpha^2}{\left(t^2+\alpha^2\right)^{n}}\,dt\\
&= \frac{t}{2\alpha^2\left(t^2+\alpha^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{2\alpha^2}\left(\int\frac{\left(2n-3\right)\left(t^2+\alpha^2\right)}{\left(t^2+\alpha^2\right)^{n}}\,dx+\int\frac{\left(-2n+3+1\right)\alpha^2}{\left(t^2+\alpha^2\right)^{n}}\,dt\right)\\
&= \frac{t}{2\alpha^2\left(t^2+\alpha^2\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2\alpha^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+\alpha^2\right)^{n-1}}-\left(n-2\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+\alpha^2\right)^{n}}
\end{aligned}$$

de donde

$$\int\frac{dt}{\left(t^2+\alpha^2\right)^{n}}+\left(n-2\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+\alpha^2\right)^{n}}=\frac{t}{2\alpha^2\left(t^2+\alpha^2\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2\alpha^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+\alpha^2\right)^{n-1}},$$

así

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{\left(t^2+a^2\right)^{n}} &= \frac{1}{n-1}\left(\frac{t}{2a^2\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2a^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}\right)\\
&= \frac{t}{2a^2\left(n-1\right)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2a^2\left(n-1\right)}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$A_n\int\frac{x}{\left(x^2+bx+c\right)^{n}}dx=A_n\int\frac{t}{\left(t^2+\alpha^2\right)^{n}}dt-\frac{bA_n}{2}\int\frac{dt}{\left(t^2+\alpha^2\right)^{n}},$$

que es igual a

$$\frac{A_n\left(t^2+\alpha^2\right)^{-n+1}}{2\left(-n+1\right)}-\frac{bA_n}{2}\left(\frac{t}{2\alpha^2\left(n-1\right)\left(t^2+\alpha^2\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2\alpha^2\left(n-1\right)}\int\frac{dt}{\left(t^2+\alpha^2\right)^{n-1}}\right).$$

Ejemplo

- $\displaystyle\int\frac{2x^2+3}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$

  Solución:

  Tenemos que

  $$\frac{2x^2+3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2},$$

  multiplicando por $\left(x^2+1\right)^2$, tenemos

  $$\begin{aligned}
  2x^2+3 &= \left(Ax+B\right)\left(x^2+1\right)+Cx+D\\
  &= Ax^3+Bx^2+\left(A+C\right)x+B+D.
  \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes del sistema,

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 2 \\ A+C &= 0 \\ B+D &= 3, \end{aligned}$$

la solución es:

$$A = 0,\ B = 2,\ C = 0,\ D = 1.$$

Volviendo a la integral inicial,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx &= \int \frac{Ax+B}{x^2+1}dx + \int \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}dx \\ &= \int \frac{2}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx. \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned} x &= \tan z \\ dx &= \sec^2 z\ dz, \end{aligned}$$

entonces

$$\int \frac{2}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = 2\int \frac{\sec^2 z}{\sec^2 z}dz + \int \frac{\sec^2 z}{\sec^4 z\ dz}dz,$$

donde

$$\begin{aligned} \int \frac{\sec^2 z}{\sec^4 z\ dz}dz &= \int \cos^2 z\ dz \\ &= \frac{z}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2z}{4} \\ &= \frac{z}{2} + \frac{\operatorname{sen} z \cos z}{2}, \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx &= 2z + \frac{z}{2} + \frac{\operatorname{sen} z \cos z}{2} \\ &= \frac{5}{2}z + \frac{\operatorname{sen} z \cos z}{2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ \cos z &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx &= \frac{5}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + k \\ &= \frac{5}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} + k.\end{aligned}$$

Veamos otros ejemplos de integración por el método de fracciones parciales.

Ejemplos

1. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx.$

   Solución:

   Factorizando el denominador se obtiene

   $$x^3+x^2-6x = x(x-2)(x+3),$$

   entonces,

   $$\frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}.$$

   Multiplicando por el denominador $x(x-2)(x+3)$,

   $$\begin{aligned} x+1 &= A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2) \\ &= Ax^2 + Ax - 6A + Bx^2 + 3Bx + Cx^2 - 2Cx \\ &= (A+B+C)x^2 + (A+3B-2C)x - 6A.\end{aligned}$$

   Igualando los coeficientes,

   $$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ A+3B-2C &= 1 \\ -6A &= 1,\end{aligned}$$

   la solución a este sistema es,

   $$A = -\frac{1}{6}, \qquad B = \frac{3}{10}, \qquad C = -\frac{2}{15},$$

   entonces,

   $$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx &= -\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x} + \frac{3}{10}\int\frac{dx}{x-2} - \frac{2}{15}\int\frac{dx}{x+3} \\ &= -\frac{1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x-2| - \frac{2}{15}\ln|x+3| + k. \\ &= \ln\left|\frac{(x-2)^{\frac{3}{10}}}{x^{\frac{1}{6}}(x+3)^{\frac{2}{15}}}\right| + k.\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx.$

Solución:

Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} &= x - \frac{x+1}{x^3 - x^2} \\ &= x - \frac{x+1}{x^2(x-1)},\end{aligned}$$

escribimos

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}.$$

Multiplicando por el denominador $x^2(x-1)$,

$$\begin{aligned}x + 1 &= Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2 \\ &= (A+C)x^2 + (B-A)x - B,\end{aligned}$$

igualando coeficientes,

$$\begin{aligned}A + C &= 0 \\ B - A &= 1 \\ -B &= 1,\end{aligned}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones,

$$A = -2, \qquad B = -1, \qquad C = 2,$$

así

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx &= \int x - \frac{x+1}{x^2(x-1)} dx \\ &= \int x\ dx - \int \frac{-2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{(x-1)} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{1}{x} - 2\ln|x-1| + k \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + 2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + k.\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 4x^2 + 3}\ dx.$

Solución:

Notemos que

$$x^4 + 4x^2 + 3 = \left(x^2 + 1\right)\left(x^2 + 3\right),$$

entonces,

$$\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+4x^2+3}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+3},$$

Multiplicando por el denominador x^4+4x^2+3, tenemos

$$\begin{aligned} x^3+x^2+x+2 &= (Ax+B)\left(x^2+3\right)+(Cx+D)\left(x^2+1\right) \\ &= (A+C)\,x^3+(B+D)\,x^2+(3A+C)\,x+(3B+D)\,, \end{aligned}$$

igualando coeficientes,

$$\begin{aligned} A+C &= 1 \\ B+D &= 1 \\ 3A+C &= 1 \\ 3B+D &= 2, \end{aligned}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones,

$$A=0,\ B=\frac{1}{2},\ C=1,\ D=\frac{1}{2},$$

entonces,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+4x^2+3}dx &= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+3}dx \\ &= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{x}{x^2+3}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+3}\,dx \end{aligned}$$

por (2.1), donde $\displaystyle\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}$, tenemos que

$$\int\frac{1}{x^2+3}\,dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}},$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+4x^2+3}dx=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+3\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}+k.$$

4. $\displaystyle\int\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{\left(x^2+2\right)^3}dx.$

Solución:

Hagamos,

$$\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{\left(x^2+2\right)^3}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+2\right)^2}+\frac{Ex+F}{\left(x^2+2\right)^3},$$

multiplicando por el denominador $(x^2+2)^3$,

$$x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = (Ax+B)\left(x^2+2\right)^2 + (Cx+D)\left(x^2+2\right) + Ex + F,$$

y desarrollando tenemos que el lado izquierdo de la igualdad es:

$$Ax^5 + Bx^4 + (4A+C)\,x^3 + (4B+D)\,x^2 + (4A+2C+E)\,x + (4B+F+2D)\,.$$

Igualando los coeficientes,

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -1 \\ 4A+C &= 4 \\ 4B+D &= -4 \\ 4A+2C+E &= 8 \\ 4B+F+2D &= -4, \end{aligned}$$

resolviendo tenemos,

$$A=1,\ B=-1,\ C=0,\ D=0,\ E=4,\ F=0,$$

así que la integral dada es igual a

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}dx &= \int \frac{x-1}{x^2+2}dx + \int \frac{4x}{(x^2+2)^3}dx \\ &= \int \frac{x}{x^2+2}dx - \int \frac{1}{x^2+2}dx + 2\int \frac{2x}{(x^2+2)^3}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right| - \int \frac{1}{x^2+2}dx + 2\frac{(x^2+2)^{-2}}{-2} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right| - \int \frac{1}{x^2+2}dx - \frac{1}{(x^2+2)^2}, \end{aligned}$$

por (2.1),

$$\int \frac{1}{x^2+2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{(x^2+2)^2} + k.$$

5. $\displaystyle\int \frac{7x^2+6}{(x^2+3x+1)^2}dx.$

Solución:

Escribimos

$$\frac{7x^2+6}{\left(x^2+3x+1\right)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+3x+1} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+3x+1\right)^2},$$

multiplicando por el denominador $\left(x^2+3x+1\right)^2$,

$$\begin{aligned} 7x^2+6 &= (Ax+B)\left(x^2+3x+1\right) + Cx + D \\ &= Ax^3 + (3A+B)\,x^2 + (A+3B+C)\,x + B + D, \end{aligned}$$

igualando los coeficientes, tenemos

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ 3A+B &= 7 \\ A+3B+C &= 0 \\ B+D &= 6 \end{aligned}$$

donde la solución es:

$$A=0, B=7, C=-21, D=-1,$$

sustituyendo en la integral dada,

$$\begin{aligned} \int \frac{7x^2+6}{\left(x^2+3x+1\right)^2}dx &= \int \frac{Ax+B}{x^2+3x+1} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+3x+1\right)^2}dx \\ &= \int \frac{7}{x^2+3x+1} + \frac{-21x-1}{\left(x^2+3x+1\right)^2}dx \end{aligned}$$

veamos

$$\int \frac{7}{x^2+3x+1}dx = 7\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}},$$

hacemos,

$$\begin{aligned} x+\frac{3}{2} &= \frac{\sqrt{5}}{2}\sec z \\ dx &= \frac{\sqrt{5}}{2}\sec z \tan z \; dz, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
7\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}} &= 7\frac{\sqrt{5}}{2}\int \frac{\sec z\tan z}{\frac{5}{4}\tan^2 z}dz\\
&= \frac{14}{\sqrt{5}}\int \frac{\sec z}{\tan z}dz\\
&= \frac{14}{\sqrt{5}}\int \frac{dz}{\operatorname{sen} z}\\
&= \frac{14}{\sqrt{5}}\ln|\csc z-\cot z|\\
&= \frac{14}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}\right|
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\int \frac{-21x-1}{\left(x^2+3x+1\right)^2}dx &= \int \frac{-21x-1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}dx\\
&= -21\int \frac{x}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}dx-\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}\\
&= -21\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\int \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}\sec z-\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}\tan^2 z}\sec z\tan z\; dz-\frac{\sqrt{5}}{2}\int \frac{\sec z\tan z}{\frac{5}{4}\tan^2 z}dz\\
&= -21\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\int \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}\sec^2 z-\frac{3}{2}\sec z}{\frac{5}{4}\tan z}\; dz-\frac{2\sqrt{5}}{5}\int \frac{\sec z}{\tan z}dz\\
&= -21\int \frac{\sec^2 z}{\tan z}dz+21\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)\int \frac{\sec z}{\tan z}dz-\frac{2\sqrt{5}}{5}\int \frac{\sec z}{\tan z}dz\\
&= -21\int \frac{\sec^2 z}{\tan z}dz+\frac{61\sqrt{5}}{5}\int \frac{\sec z}{\tan z}dz\\
&= -21\ln|\tan z|+\frac{61\sqrt{5}}{5}\ln|\csc z-\cot z|\\
&= -21\ln\left|\frac{2\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}{\sqrt{5}}\right|+\frac{61\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{x+\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}\right|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{7x^2+6}{\left(x^2+3x+1\right)^2}dx$$

es igual a,

$$\frac{14}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}\right|-21\ln\left|\frac{2\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}{\sqrt{5}}\right|+\frac{61\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{x+\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}\right|+k,$$

es decir,

$$\int \frac{7x^2+6}{(x^2+3x+1)^2}dx = 15\sqrt{5}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2\sqrt{x^2+3x+1}}\right| - 21\ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+3x+1}}{\sqrt{5}}\right| + k.$$

Capítulo 3

Método de Ostrogradski

Para calcular la integral de una función racional cuando el denominador tiene raíces múltiples se puede separar mediante este método la parte racional de la integral sin necesidad de descomponer la fracción en elementos simples, y después integrar una fracción racional cuyo denominador tiene solamente raíces simples. Este método se basa en lo siguiente:

Para encontrar $\int \frac{F(x)}{f(x)}dx$ donde $\frac{F(x)}{f(x)}$ es una fracción racional propia,

$$f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}...\left(x^2+px+q\right)^{\mu}.$$

Consideramos

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}dx = \frac{Y(x)}{Q(x)} + \int \frac{X(x)}{P(x)}dx, \tag{3.1}$$

donde el grado del polinomio $Y(x)$ es inferior en una unidad al del polinomio $Q(x)$ y el grado del polinomio $X(x)$ es inferior en una unidad al del polinomio $P(x)$. Además

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}...\left(x^2+px+q\right)^{\mu-1} \\ P(x) &= (x-a)(x-b)...\left(x^2+px+q\right). \end{aligned}$$

Determinemos ahora los coeficientes de los polinomios $X(x)$ y $Y(x)$. Para ello derivamos los dos miembros de la igualdad (3.1),

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Q(x)Y'(x) - Y(x)Q'(x)}{Q^2(x)} + \frac{X(x)}{P(x)}$$

multiplicando por $f(x)$ la igualdad,

$$F(x) = \frac{f(x)Y'(x)}{Q(x)} - \frac{f(x)Y(x)Q'(x)}{Q^2(x)} + \frac{f(x)X(x)}{P(x)}$$

Observemos que $f(x) = P(x)Q(x)$, por lo tanto,

$$F(x) = P(x)Y'(x) - \frac{P(x)Y(x)Q'(x)}{Q(x)} + Q(x)X(x) \tag{3.2}$$

Falta demostrar que $-\frac{PYQ'}{Q}$ es un polinomio, o bien que PQ', es divisible entre Q. Para ello observemos que

$$\begin{aligned} \frac{Q'}{Q} &= [\ln(Q)]' \\ &= \left[(\alpha-1)\ln(x-a) + (\beta-1)\ln(x-b) + ... + (\upsilon-1)\ln\left(x^2+lx+s\right)\right]' \\ &= \frac{\alpha-1}{x-a} + \frac{\beta-1}{x-b} + ... + \frac{(\upsilon-1)(2x+l)}{x^2+lx+s}. \end{aligned}$$

Así, como P es el común denominador de las fracciones del segundo miembro, el numerador será un polinomio T, entonces

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{T}{P}$$

Por consiguiente, la expresión

$$\frac{PYQ'}{Q} = \frac{PYT}{P} = YT$$

es un polinomio. La igualdad (3.2) tomará la forma

$$F(x) = P(x)Y'(x) - Y(x)T(x) + Q(x)X(x) \tag{3.3}$$

Igualando los coeficientes de las potencias del mismo grado en (3.3), obtendremos un sistema de ecuaciones que nos permitirá encontrar los coeficientes desconocidos de los polinomios X e Y.

Ejemplos

1. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^3-1)^2}dx.$

   Solución:

   En este caso

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^2\left(x^2+x+1\right)^2 \\ P(x) &= (x-1)\left(x^2+x+1\right) = x^3-1 \\ Q(x) &= x^3-1, \end{aligned}$$

   entonces

$$\int \frac{1}{(x^3-1)^2}dx = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1} + \int \frac{Ex^2+Fx+G}{x^3-1}dx,$$

   derivando los miembros de la igualdad, tenemos

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{(2Ax+B)(x^3-1) - 3x^2(Ax^2+Bx+C)}{(x^3-1)^2} + \frac{Ex^2+Fx+G}{x^3-1},$$

   multiplicando por $(x^3-1)^2$,

$$\begin{aligned} 1 &= (2Ax+B)\left(x^3-1\right) - 3x^2\left(Ax^2+Bx+C\right) + \left(Ex^2+Fx+G\right)\left(x^3-1\right) \\ &= 2Ax^4 + Bx^3 - 2Ax - B - 3Ax^4 - 3Bx^3 - 3Cx^2 + Ex^5 + Fx^4 + Gx^3 - Ex^2 - Fx - G \\ &= Ex^5 + (-A+F)x^4 + (G-2B)x^3 + (-3C-E)x^2 + (-2A-F)x - G - B. \end{aligned}$$

   Igualando los coeficientes, tenemos

$$\begin{aligned} E &= 0 \\ -A+F &= 0 \\ G-2B &= 0 \\ -3C-E &= 0 \\ -2A-F &= 0 \\ -G-B &= 1. \end{aligned}$$

La solución de este sistema da,

$$E=0,\quad A=0,\quad C=0,\quad B=-\frac{1}{3},\quad F=0,\quad G=-\frac{2}{3},$$

sustituyendo los valores de los coeficientes en la integral, se sigue

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\left(x^3-1\right)^2}dx &= \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1}+\int\frac{Ex^2+Fx+G}{x^3-1}dx\\ &= \frac{-\frac{1}{3}x}{x^3-1}+\int\frac{-\frac{2}{3}}{x^3-1}dx.\end{aligned}$$

Veamos,

$$\int\frac{-\frac{2}{3}}{x^3-1}dx,$$

la cual resolveremos por el metodo de fracciones parciales

$$\begin{aligned}\frac{-\frac{2}{3}}{x^3-1} &= \frac{H}{x-1}+\frac{Ix+J}{x^2+x+1}\\ -\frac{2}{3} &= H\left(x^2+x+1\right)+(Ix+J)(x-1)\\ &= (H+I)\,x^2+(H-I+J)\,x+H-J\end{aligned}$$

Igualando coeficientes tenemos:

$$\begin{aligned}H+I &= 0\\ H-I+J &= 0\\ H-J &= -\frac{2}{3},\end{aligned}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones,

$$H=-\frac{2}{9},\quad I=\frac{2}{9},\quad J=\frac{4}{9},$$

entonces

$$\begin{aligned}\int\frac{-\frac{2}{3}}{x^3-1}dx &= \int\frac{H}{x-1}+\frac{Ix+J}{x^2+x+1}dx\\ &= \int\frac{-\frac{2}{9}}{x-1}+\frac{\frac{2}{9}x+\frac{4}{9}}{x^2+x+1}dx\\ &= \int\frac{-\frac{2}{9}}{x-1}dx+\int\frac{\frac{2}{9}x+\frac{4}{9}}{x^2+x+1}dx,\end{aligned}$$

notemos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{\frac{2}{9}x+\frac{4}{9}}{x^2+x+1}dx &= \int \frac{\frac{2}{18}(2x+1)+\frac{4}{9}-\frac{2}{18}}{x^2+x+1}dx \\
&= \int \frac{\frac{2}{18}(2x+1)+\frac{1}{3}}{x^2+x+1}dx \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+x+1} \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{9}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(x+\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{-\frac{2}{3}}{x^3-1}dx &= \int \frac{-\frac{2}{9}}{x-1}dx+\int \frac{\frac{2}{9}x+\frac{4}{9}}{x^2+x+1}dx \\
&= -\frac{2}{9}\ln|x-1|+\frac{1}{9}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

Asi pues, retomando la integral inicial, tenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\left(x^3-1\right)^2}dx &= \frac{-\frac{1}{3}x}{x^3-1}+\int \frac{-\frac{2}{3}}{x^3-1}dx \\
&= \frac{-\frac{1}{3}x}{x^3-1}-\frac{2}{9}\ln|x-1|+\frac{1}{9}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+k.
\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \frac{x^4+2}{\left(x^2-1\right)^4}dx.$

Solución:

Hagamos,

$$\int \frac{x^4+2}{\left(x^2-1\right)^4}dx=\frac{Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F}{\left(x^2-1\right)^3}+\int \frac{Gx+H}{x^2-1}dx.$$

Derivando cada término, tenemos

$$\frac{x^4+2}{\left(x^2-1\right)^4}$$

y

$$\frac{\left(5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx+E\right)\left(x^2-1\right)-6x\left(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F\right)}{\left(x^2-1\right)^4}$$

y

$$\frac{Gx+H}{x^2-1}.$$

De donde $\dfrac{x^4+2}{\left(x^2-1\right)^4}$ es igual a

$$\frac{\left(5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx+E\right)\left(x^2-1\right)-6x\left(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F\right)}{\left(x^2-1\right)^4}$$
$$+\frac{Gx+H}{x^2-1}.$$

Multiplicando por $\left(x^2-1\right)^4$, tenemos que x^4+2 es igual a

$$\left(5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx+E\right)\left(x^2-1\right)-6x\left(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F\right)$$
$$+\left(Gx+H\right)\left(x^2-1\right)^3,$$

y desarrollando tenemos

$$Gx^7+\left(H-A\right)x^6+\left(-2B-3G\right)x^5+\left(-5A-3C-3H\right)x^4+\left(3G-4B-4D\right)x^3$$
$$+\left(3H-3C-5E\right)x^2+\left(-6F-G-2D\right)x-\left(H+E\right).$$

Igualando los coeficientes, tenemos

$$\begin{aligned}
G &= 0\\
H-A &= 0\\
-2B-3G &= 0\\
-5A-3C-3H &= 1\\
3G-4B-4D &= 0\\
3H-3C-5E &= 0\\
-6F-G-2D &= 0\\
-H-E &= 2,
\end{aligned}$$

la solución del sistema de ecuaciones es:

$$A=-\frac{11}{16},\quad B=0,\quad C=\frac{3}{2},\quad D=0,\quad E=-\frac{21}{16},\quad F=0,\quad G=0,\quad H=-\frac{11}{16},$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int\frac{x^4+2}{\left(x^2-1\right)^4}dx &= \frac{Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F}{\left(x^2-1\right)^3}+\int\frac{Gx+H}{x^2-1}dx\\
&= \frac{-\frac{11}{16}x^5+\frac{3}{2}x^3-\frac{21}{16}x}{\left(x^2-1\right)^3}-\frac{11}{16}\int\frac{dx}{x^2-1}.
\end{aligned}$$

Ahora, para resolver

$$\int \frac{dx}{x^2-1},$$

tomamos

$$x = \sec z,$$

calculamos dx:

$$dx = \sec z \tan z \; dz.$$

Entonces

$$x^2 - 1 = \tan^2 z,$$

sustituyendo en la integral,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2-1} &= \int \frac{\sec z \tan z}{\tan^2 z} dz \\
&= \int \frac{\sec z}{\tan z} dz \\
&= \int \frac{dz}{\operatorname{sen} z} \\
&= \int \csc z \; dz \\
&= \ln |\csc z - \cot z| \\
&= \ln \left| \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} \right|.
\end{aligned}$$

Volviendo a la integral inicial, tenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4+2}{(x^2-1)^4} dx &= \frac{-\frac{11}{16}x^5 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{21}{16}x}{(x^2-1)^3} - \frac{11}{16} \int \frac{dx}{x^2-1} \\
&= \frac{-\frac{11}{16}x^5 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{21}{16}x}{(x^2-1)^3} - \frac{11}{16} \ln \left| \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} \right| + k.
\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \frac{x+7}{(1-x^2)^3} dx.$

Solución:

Hagamos,

$$\int \frac{x+7}{(1-x^2)^3} dx = \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{(1-x^2)^2} + \int \frac{Ex+F}{1-x^2} dx,$$

derivando tenemos,

$$\frac{x+7}{(1-x^2)^3} = \frac{(3Ax^2 + 2Bx + C)(1-x^2)^2 + 4x(1-x^2)(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)}{(1-x^2)^4} + \frac{Ex+F}{1-x^2}.$$

Multiplicando por $(1-x^2)^3$ tenemos,

$$\begin{aligned}
x+7 &= \left(3Ax^2+2Bx+C\right)\left(1-x^2\right)+4x\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)+(Ex+F)\left(1-x^2\right)^2 \\
&= Ex^5+(A+F)\,x^4+(2B-2E)\,x^3+(3A+3C-2F)\,x^2+(2B+4D+E)\,x \\
&\quad +(C+F)\,.
\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes,

$$\begin{aligned}
E &= 0 \\
A+F &= 0 \\
2B-2E &= 0 \\
3A+3C-2F &= 0 \\
2B+4D+E &= 1 \\
C+F &= 7,
\end{aligned}$$

la solución del sistema de ecuaciones es,

$$A=-\frac{21}{8},\ B=0,\ C=\frac{35}{8},\ D=\frac{1}{4},\ E=0,\ F=\frac{21}{8}.$$

Así,

$$\int\frac{x+7}{(1-x^2)^3}dx=\frac{-\frac{21}{8}x^3+\frac{35}{8}x+\frac{1}{4}}{(1-x^2)^2}+\int\frac{\frac{21}{8}}{1-x^2}dx.$$

Para resolver

$$\int\frac{\frac{21}{8}}{1-x^2}dx,$$

tomamos,

$$x=\operatorname{sen} z.$$

calculamos dx:

$$dx=\cos z\ dz.$$

Entonces

$$1-x^2=\cos^2 z,$$

de manera que,

$$\begin{aligned}
\frac{21}{8}\int\frac{dx}{1-x^2} &= \frac{21}{8}\int\frac{\cos z}{\cos^2 z}dz \\
&= \frac{21}{8}\int \sec z\ dz \\
&= \frac{21}{8}\ln\left|\sec z+\tan z\right| \\
&= \frac{21}{8}\ln\left|\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\right| \\
&= \frac{21}{8}\ln\sqrt{\frac{(1+x)^2}{1-x^2}} \\
&= \frac{21}{16}\ln\left|\frac{(1+x)^2}{1-x}\right|.
\end{aligned}$$

Volviendo a la integral inicial,

$$\begin{aligned}
\int\frac{x+7}{(1-x^2)^3}dx &= \frac{-\frac{21}{8}x^3+\frac{35}{8}x+\frac{1}{4}}{(1-x^2)^2}+\int\frac{\frac{21}{8}}{1-x^2}dx. \\
&= \frac{-\frac{21}{8}x^3+\frac{35}{8}x+\frac{1}{4}}{(1-x^2)^2}+\frac{21}{16}\ln\left|\frac{(1+x)^2}{1-x}\right|+k.
\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int\frac{2x^3+5x^2+x}{(x^2+3)^2(x^2+1)^2}dx.$

Solución:

Hagamos,

$$\int\frac{2x^3+5x^2+x}{(x^2+3)^2(x^2+1)^2}dx=\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+3)(x^2+1)}+\int\frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{(x^2+3)(x^2+1)}dx.$$

Derivando tenemos,

$$\frac{2x^3+5x^2+x}{(x^2+3)^2(x^2+1)^2}$$

y

$$\frac{(3Ax^2+2Bx+C)(x^2+3)(x^2+1)-(2x(x^2+1)+2x(x^2+3))(Ax^3+Bx^2+Cx+D)}{(x^2+3)^2(x^2+1)^2}$$

y

$$\frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{(x^2+3)(x^2+1)}$$

Multiplicando por el denominador del primer miembro, tenemos que el segundo miembro es:

$$\left(3Ax^2+2Bx+C\right)\left(x^2+3\right)\left(x^2+1\right)-\left(2x\left(x^2+1\right)+2x\left(x^2+3\right)\right)\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)$$
$$+\left(Ex^3+Fx^2+Gx+H\right)\left(x^2+3\right)\left(x^2+1\right),$$

desarrollando los productos y agrupando

$$Ex^7+(F-A)\,x^6+(G-2B+4E)\,x^5+(4A-3C+4F+H)\,x^4+(4G-4D+3E)\,x^3$$
$$+(9A-4C+3F+4H)\,x^2+(6B+3G-8D)\,x++(3C+3H)\,. \tag{3.4}$$

Igualando coeficientes de $2x^3+5x^2+x$ con los de la expresión (3.4),

$$\begin{aligned}
E &= 0\\
F-A &= 0\\
G-2B+4E &= 0\\
4A-3C+4F+H &= 0\\
4G-4D+3E &= 2\\
9A-4C+3F+4H &= 5\\
6B+3G-8D &= 1\\
3C+3H &= 0,
\end{aligned}$$

la solución es:

$$A=-\frac{5}{4},\ B=\frac{3}{4},\ C=-\frac{5}{2},\ D=1,\ E=0,\ F=-\frac{5}{4},\ G=\frac{3}{2},\ H=\frac{5}{2},$$

de manera que,

$$\int\frac{2x^3+5x^2+x}{\left(x^2+3\right)^2\left(x^2+1\right)^2}dx=\frac{-\frac{5}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{2}x+1}{\left(x^2+3\right)\left(x^2+1\right)}+\int\frac{-\frac{5}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}}{\left(x^2+3\right)\left(x^2+1\right)}dx.$$

Resolveremos

$$\int\frac{-\frac{5}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}}{\left(x^2+3\right)\left(x^2+1\right)}dx$$

por el método por fracciones parciales,

$$\frac{-\frac{5}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}}{\left(x^2+3\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{Ix+J}{x^2+3}+\frac{Kx+L}{x^2+1}$$

Multiplicando por $\left(x^2+3\right)\left(x^2+1\right)$ tenemos,

$$\begin{aligned}
-\frac{5}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{5}{2} &= (Ix+J)\left(x^2+1\right)+(Kx+L)\left(x^2+3\right)\\
&= (I+K)\,x^3+(J+L)\,x^2+(I+3K)\,x+J+3L,
\end{aligned}$$

igualando los coeficientes, llegamos al siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} I+K &= 0 \\ J+L &= -\frac{5}{4} \\ I+3K &= \frac{3}{2} \\ J+3L &= \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

la solución, es

$$I=-\frac{3}{4}, \quad J=-\frac{25}{8}, \quad K=\frac{3}{4}, \quad L=\frac{15}{8},$$

de manera que,

$$\int \frac{-\frac{5}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}}{(x^2+3)(x^2+1)}dx = \int \frac{-\frac{3}{4}x-\frac{25}{8}}{x^2+3}dx + \int \frac{\frac{3}{4}x+\frac{15}{8}}{x^2+1}dx,$$

tomamos

$$\begin{aligned} x &= \tan z \\ x &= \sqrt{3}\tan y, \end{aligned}$$

calculamos dx y dy:

$$\begin{aligned} dx &= \sec^2 z \ dz \\ dx &= \sqrt{3}\sec^2 y dy. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} x^2+1 &= \sec^2 z \\ x^2+3 &= 3\sec^2 y. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\displaystyle\int \frac{-\frac{3}{4}x - \frac{25}{8}}{x^2+3}dx + \int \frac{\frac{3}{4}x + \frac{15}{8}}{x^2+1}dx$ es igual a:

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{-\frac{3}{4}\sqrt{3}\tan y - \frac{25}{8}}{3\sec^2 y}\sqrt{3}\sec^2 y\ dy + \int \frac{\frac{3}{4}\tan z + \frac{15}{8}}{\sec^2 z}\sec^2 z\ dz \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\int -\frac{3}{4}\sqrt{3}\tan y - \frac{25}{8}\ dy + \int \frac{3}{4}\tan z + \frac{15}{8}\ dz \\
&= -\frac{3}{4}\int \tan y\, dy - \frac{25\sqrt{3}}{24}\int\ dy + \frac{3}{4}\int \tan z\, dz + \frac{15}{8}\int dz \\
&= \frac{3}{4}\ln|\cos y| - \frac{25\sqrt{3}}{24}y - \frac{3}{4}\ln|\cos z| + \frac{15}{8}z \\
&= \frac{3}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3}}\right| - \frac{25\sqrt{3}}{24}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{3}{4}\ln\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right| + \frac{15}{8}\arctan x \\
&= \frac{3}{8}\ln\left|\frac{3}{x^2+3}\right| - \frac{25\sqrt{3}}{24}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{3}{8}\ln\left|\frac{1}{x^2+1}\right| + \frac{15}{8}\arctan x \\
&= \frac{3}{8}\ln\left|\frac{\frac{3}{x^2+3}}{\frac{1}{x^2+1}}\right| - \frac{25\sqrt{3}}{24}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{15}{8}\arctan x \\
&= \frac{3}{8}\ln\left|\frac{3\left(x^2+1\right)}{x^2+3}\right| - \frac{25\sqrt{3}}{24}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{15}{8}\arctan x.
\end{aligned}
$$

Volviendo a la integral $\displaystyle\int \frac{2x^3+5x^2+x}{\left(x^2+3\right)^2\left(x^2+1\right)^2}dx$ tenemos que es igual a:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-\frac{5}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 1}{\left(x^2+3\right)\left(x^2+1\right)} + \int \frac{-\frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}}{\left(x^2+3\right)\left(x^2+1\right)}dx \\
&= \frac{-\frac{5}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 1}{\left(x^2+3\right)\left(x^2+1\right)} + \int \frac{-\frac{3}{4}x - \frac{25}{8}}{x^2+3}dx + \int \frac{\frac{3}{4}x + \frac{15}{8}}{x^2+1}dx \\
&= \frac{-\frac{5}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 1}{\left(x^2+3\right)\left(x^2+1\right)} + \frac{3}{8}\ln\left|\frac{3\left(x^2+1\right)}{x^2+3}\right| - \frac{25\sqrt{3}}{24}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{15}{8}\arctan x + k.
\end{aligned}
$$

5. $\displaystyle\int \frac{x^5+x+7}{(1-x)^3}dx.$

Solución:

Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, primero efectuamos la división

$$\int \frac{x^5+x+7}{(1-x)^3}dx = \int -x^2 - 3x - 6 + \frac{10x^2-14x+13}{(1-x)^3}dx,$$

ahora calculamos,

$$\int \frac{10x^2 - 14x + 13}{(1-x)^3} dx = \frac{Ax + B}{(1-x)^2} + \int \frac{C}{1-x} dx,$$

derivando tenemos,

$$\frac{10x^2 - 14x + 13}{(1-x)^3} = \frac{A(1-x)^2 + 2(1-x)(Ax+B)}{(1-x)^4} + \frac{C}{1-x}.$$

Multiplicando por $(1-x)^3$ tenemos,

$$\begin{aligned} 10x^2 - 14x + 13 &= \frac{A(1-x)^2 + 2(Ax+B)(1-x)}{(1-x)} + C(1-x)^2 \\ &= A(1-x) + 2(Ax+B) + C(1-x)^2 \\ &= Cx^2 + (A - 2C)x + (A + 2B + C). \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes,

$$\begin{aligned} C &= 10 \\ A - 2C &= -14 \\ A + 2B + C &= 13, \end{aligned}$$

la solución del sistema de ecuaciones es,

$$A = 6, \quad B = -\frac{3}{2}, \quad C = 10,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{10x^2 - 14x + 13}{(1-x)^3} dx &= \frac{6x - \frac{3}{2}}{(1-x)^2} + \int \frac{10}{1-x} dx \\ &= \frac{12x - 3}{2(1-x)^2} - 10 \ln|1-x|. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + x + 7}{(1-x)^3} dx &= \int -x^2 - 3x - 6 + \frac{10x^2 - 14x + 13}{(1-x)^3} dx \\ &= -\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 6x\right) + \frac{12x - 3}{2(1-x)^2} - 10 \ln|1-x| + k. \end{aligned}$$

Capítulo 4

Método de Euler

Consideremos la integral

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx. \tag{4.1}$$

Esta integral se reduce a la de una función racional mediante las siguientes sustituciones de Euler:

1. Primera sustitución, si $a > 0$,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t.$$

Tomemos el signo $+$ delante de $\sqrt{a}$. Entonces,

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= \left(\sqrt{a}x+t\right)^2 \\ &= ax^2 + 2\sqrt{a}xt + t^2. \end{aligned}$$

Despejemos x como función de t

$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}$$

de donde

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2+bx+c} &= \sqrt{a}x+t \\ &= \sqrt{a}\left(\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}\right)+t \\ &= \frac{\sqrt{a}t^2-\sqrt{a}c+t\left(b-2t\sqrt{a}\right)}{b-2t\sqrt{a}} \\ &= \frac{-\sqrt{a}t^2+bt-\sqrt{a}c}{b-2t\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Ahora calculemos dx:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{2t\left(b-2\sqrt{a}t\right)+2\sqrt{a}\left(t^2-c\right)}{\left(b-2\sqrt{a}t\right)^2}\,dt \\ &= \frac{-2\sqrt{a}t^2+2tb-2\sqrt{a}c}{\left(b-2\sqrt{a}t\right)^2}dt. \end{aligned}$$

Análogamente si consideramos el signo $-$ delante de $\sqrt{a}$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t,$$

entonces

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= \left(-\sqrt{a}x+t\right)^2 \\ &= ax^2 - 2\sqrt{a}xt + t^2, \end{aligned}$$

donde

$$x = \frac{t^2 - c}{b + 2t\sqrt{a}}.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
\sqrt{ax^2 + bx + c} &= -\sqrt{a}x + t \\
&= -\sqrt{a}\left(\frac{t^2 - c}{b + 2t\sqrt{a}}\right) + t \\
&= \frac{-\sqrt{a}t^2 + \sqrt{a}c + bt + 2t^2\sqrt{a}}{b + 2t\sqrt{a}} \\
&= \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + \sqrt{a}c}{b + 2t\sqrt{a}}.
\end{aligned}$$

Calculemos dx:

$$\begin{aligned}
dx &= \frac{2t\,(b + 2t\sqrt{a}) - 2\sqrt{a}\,(t^2 - c)}{\left(b + 2\sqrt{a}t\right)^2}dt \\
&= \frac{2\sqrt{a}t^2 + 2bt + 2\sqrt{a}c}{\left(b + 2\sqrt{a}t\right)^2}dt.
\end{aligned}$$

Puesto que $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, x y dx, se expresan mediante funciones racionales de t, la integral (4.1) se transforma en la integral de una función racional de t.

$$\int R\left(\frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}, \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + \sqrt{a}c}{b + 2t\sqrt{a}}\right)\left(\frac{-2\sqrt{a}t^2 + 2tb - 2\sqrt{a}c}{\left(b - 2\sqrt{a}t\right)^2}\right)dt.$$

Ejemplo

- Calcular la integral $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

  Solución:

  Puesto que $a = 1 > 0$, consideremos

$$\sqrt{x^2 + 1} = x + t. \tag{4.2}$$

  Entonces

$$\begin{aligned}
x^2 + 1 &= (x + t)^2 \\
&= x^2 + 2xt + t^2,
\end{aligned}$$

  de donde

$$x = \frac{1 - t^2}{2t}.$$

Por consiguiente

$$dx = \frac{-(t^2+1)}{2t^2}dt,$$

entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+1} &= x+t \\ &= \frac{1-t^2}{2t}+t \\ &= \frac{t^2+1}{2t}.\end{aligned}$$

Volviendo a la integral inicial, tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \int \frac{\frac{-(t^2+1)}{2t^2}}{\frac{t^2+1}{2t}}dt \\ &= -\int \frac{dt}{t} \\ &= -\ln(t).\end{aligned}$$

Despejando t de (4.2) obtenemos $t = \sqrt{x^2+1}-x$. Por lo tanto

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = -\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+c.$$

2. Segunda sustitución, si $c > 0$, hagamos

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}.$$

Consideremos el signo $+$ delante de $\sqrt{c}$, (de manera análoga se sigue si tomamos el signo $-$). Entonces

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c &= \left(xt+\sqrt{c}\right)^2 \\ &= x^2t^2+2xt\sqrt{c}+c.\end{aligned}$$

De aquí x se puede despejar como función racional de t.

$$x = \frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},$$

entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c} &= xt+\sqrt{c} \\ &= \left(\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}\right)t+\sqrt{c} \\ &= \frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}.\end{aligned}$$

Calculando dx,

$$\begin{aligned} dx &= \frac{(2\sqrt{c}t-b)\,(a-t^2)+2t\,(\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c})}{(a-t^2)^2}dt \\ &= \frac{4a\sqrt{c}t-ab-bt^2}{(a-t^2)^2}dt. \end{aligned}$$

Puesto que dx y $\sqrt{ax^2+bx+c}$ también se expresan mediante funciones racionales de t, entonces sustituyendo los valores de x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ y dx en la integral (4.1), se reducirá en una integral de una función racional de t.

$$\int R\left(\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},\frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}\right)\left(\frac{4a\sqrt{c}t-ab-bt^2}{(a-t^2)^2}\right)dt.$$

Ejemplo

- Calcular la integral $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

  Solución:

  Como $c=4>0$ entonces

$$\begin{aligned} \sqrt{4-x^2} &= xt+2 \qquad (4.3)\\ 4-x^2 &= (xt+2)^2 \\ &= x^2t^2+4xt+4. \end{aligned}$$

  Despejando x tenemos,

$$x=\frac{-4t}{t^2+1}.$$

  Calculando dx:

$$dx=\frac{4\,(t^2-1)}{(t^2+1)^2}dt.$$

  Por consiguiente

$$\begin{aligned} \sqrt{4-x^2} &= xt+2 \\ &= \frac{-4t}{t^2+1}t+2 \\ &= \frac{-2(t^2-1)}{(t^2+1)}. \end{aligned}$$

  Sustituyendo en la integral dada

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx &= \int \left(\frac{\frac{-4t}{t^2+1}}{\frac{-2(t^2-1)}{(t^2+1)}}\right)\frac{4\,(t^2-1)}{(t^2+1)^2}dt \\ &= 4\int \frac{2t}{(t^2+1)^2}dt \\ &= -\frac{4}{t^2+1}. \end{aligned}$$

Por (4.3)

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx &= -\frac{4x^2}{\left(\sqrt{4-x^2}-2\right)^2+x^2}+k \\ &= -\sqrt{4-x^2}+k.\end{aligned}$$

3. Tercera sustitución. Supongamos que α, β son raíces reales del trinomio ax^2+bx+c, es decir,

$$ax^2+bx+c = a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)\,.$$

Hagamos

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)\,t. \tag{4.4}$$

O bien, es análogo si :

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\beta)\,t.$$

Tomando (4.4), tenemos

$$\begin{aligned}\sqrt{a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)} &= (x-\alpha)\,t \\ a\,(x-\alpha)\,(x-\beta) &= (x-\alpha)^2\,t^2 \\ a\,(x-\beta) &= (x-\alpha)\,t^2.\end{aligned}$$

De donde x se despeja como función racional de t

$$x = \frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c} &= (x-\alpha)\,t \\ &= \frac{a\beta t-\alpha t^3}{a-t^2}-\alpha t \\ &= at\frac{\beta-\alpha}{a-t^2}.\end{aligned}$$

Calculando dx:

$$\begin{aligned}dx &= \frac{-2\alpha t\,(a-t^2)+2t\,(a\beta-\alpha t^2)}{(a-t^2)^2}dt \\ &= \frac{-2at\,(\alpha-\beta)}{(a-t^2)^2}dt.\end{aligned}$$

Puesto que dx y $\sqrt{ax^2+bx+c}$ son también funciones racionales de t, la integral (4.1) se transformará en la integral de una función racional de t.

$$\int R\left(\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2},\left(\frac{-a\,(\alpha-\beta)}{a-t^2}\right)t\right)\left(\frac{-2at\,(\alpha-\beta)}{(a-t^2)^2}\right)dt.$$

Nota: la única condición que se le pide a esta sustitución es que el polinomio ax^2+bx+c tenga raíces reales.

Ejemplo

- Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$.

  Solución:

  Puesto que $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$, hagamos
  $$\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{(x+4)(x-1)}=(x+4)\,t. \tag{4.5}$$
  Entonces
  $$\begin{aligned}(x+4)(x-1) &= (x+4)^2t^2\\ x-1 &= (x+4)\,t^2.\end{aligned}$$
  Despejando x tenemos,
  $$x=\frac{4t^2+1}{1-t^2}.$$
  Calculando dx:
  $$dx=\frac{10t}{(1-t^2)^2}dt.$$
  De donde
  $$\begin{aligned}\sqrt{(x+4)(x-1)} &= (x+4)\,t\\ &= \left(\frac{4t^2+1}{1-t^2}+4\right)t\\ &= \frac{5t}{1-t^2}.\end{aligned}$$
  Regresando a la integral inicial, tenemos
  $$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}} &= \int\frac{10t\,(1-t^2)}{5t\,(1-t^2)^2}dt\\ &= \int\frac{2}{1-t^2}dt\\ &= 2\int\frac{1}{(1-t)(1+t)}dt.\end{aligned}$$
  Resolviendo por el método de fracciones parciales
  $$\begin{aligned}\frac{1}{(1-t)(1+t)} &= \frac{A}{(1-t)}+\frac{B}{(1+t)}\\ 1 &= A(1+t)+B(1-t)\\ 1 &= (A-B)\,t+A+B.\end{aligned}$$

Igualando coeficientes

$$\begin{aligned} A-B &= 0 \\ A+B &= 1, \end{aligned}$$

la solución de este sistema es

$$A=\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}} &= 2\int \frac{1}{(1-t)(1+t)}dt \\ &= 2\int \frac{\frac{1}{2}}{(1-t)}+\frac{\frac{1}{2}}{(1+t)}dt \\ &= \ln(1+t)-\ln(1-t) \\ &= \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right). \end{aligned}$$

De (4.5) se observa

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}} &= \ln\left(\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}\right)+k \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right)+k. \end{aligned}$$

Veamos ahora más ejemplos de los tres casos del método de Euler.
Ejemplos

1. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}dx.$

   Solución:

   Dado que $a=1>0$, hacemos

   $$\sqrt{x^2-4}=x+t,$$

   entonces

   $$\begin{aligned} x^2-4 &= (x+t)^2 \\ &= x^2+2xt+t^2. \end{aligned}$$

   Por lo que,

   $$x=\frac{-\left(t^2+4\right)}{2t},$$

calculando dx:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{-4t^2 + 2\left(t^2+4\right)}{4t^2} dt \\ &= \frac{-(t^2-4)}{2t^2} dt. \end{aligned}$$

entonces

$$x^2 = \frac{\left(t^2+4\right)^2}{4t^2},$$

y

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-4} &= x+t \\ &= \frac{-\left(t^2+4\right)}{2t} + t \\ &= \frac{\left(t^2-4\right)}{2t}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la integral,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} dx &= \int \frac{\frac{\left(t^2+4\right)^2}{4t^2}}{\frac{\left(t^2-4\right)}{2t}} \left(\frac{-(t^2-4)}{2t^2}\right) dt \\ &= -\frac{1}{4} \int \frac{\left(t^2+4\right)^2}{t^3} dt. \\ &= -\frac{1}{4} \left(\int t + \frac{8}{t} + \frac{16}{t^3} \right) dt. \\ &= -\frac{t^2}{8} - 2\ln|t| + \frac{2}{t^2} \\ &= .-\frac{1}{8t^2}\left(t^4-16\right) - 2\ln|t| \end{aligned}$$

Volviendo a la integral inicial, y sustituyendo $t = \sqrt{x^2-4} - x$, obtenemos

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} dx = -\frac{\left(\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)^4 - 16\right)}{8\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)^2} - 2\ln\left|\sqrt{x^2-4}-x\right| + k.$$

2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+6x+8}}{x^3} dx.$

Solución:

Dado que

$$x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4),$$

hacemos

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+2)(x+4)} &= (x+2)\,t \\ (x+2)(x+4) &= (x+2)^2\,t^2 \\ (x+4) &= (x+2)\,t^2,\end{aligned}$$

entonces

$$x = \frac{2t^2-4}{1-t^2}.$$

Calculando dx:

$$\begin{aligned}dx &= \frac{4t\,(1-t^2)+2t\,(2t^2-4)}{(1-t^2)^2}dt \\ &= -\frac{4t}{(1-t^2)^2}dt.\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+2)(x+4)} &= (x+2)\,t \\ &= \left(\frac{2t^2-4}{1-t^2}+2\right)t \\ &= \frac{-2t}{1-t^2}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Sustituyendo en la integral,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2+6x+8}}{x^3}dx &= \int \frac{\frac{-2t}{1-t^2}}{\left(\frac{2t^2-4}{1-t^2}\right)^3}\left(-\frac{4t}{(1-t^2)^2}\right)dt \\ &= \int \frac{t^2}{(t^2-2)^3}dt,\end{aligned}$$

hacemos

$$\begin{aligned}t &= \sqrt{2}\sec z \\ dt &= \sqrt{2}\sec z\tan z\ dz,\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\int \frac{t^2}{\left(t^2-2\right)^3}dt &= \int \frac{2\sec^2 z}{8\tan^6 z}\sqrt{2}\sec z\tan z\ dz \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{\sec^3 z}{\tan^5 z}dz \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{\cos^2 z}{\operatorname{sen}^5 z}dz \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\int \frac{1}{\operatorname{sen}^5 z}-\frac{1}{\operatorname{sen}^3 z}\right)dz \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \csc^5 z dz-\frac{\sqrt{2}}{4}\int \csc^3 z dz.
\end{aligned}$$

Veamos

$$\int \csc^5 z dz$$

aplicando el método de integración por partes,

$$\begin{aligned}
u &= \csc^3 z & du &= -3\csc^3 z\cot z\, dz \\
dv &= \csc^2 z & v &= -\cot z
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\int \csc^5 z dz &= -\cot z\csc^3 z-3\int \csc^3 z\cot^2 z\ dz \\
&= -\cot z\csc^3 z-3\int \csc^3 z\left(\csc^2 z-1\right)\ dz \\
&= -\cot z\csc^3 z-3\int \csc^5 z-\csc^3 z\ dz
\end{aligned}$$

ahora tomemos la integral,

$$\int \csc^3 z\ dz$$

sea,

$$\begin{aligned}
u &= \csc z & du &= -\csc z\cot z dz \\
dv &= \csc^2 z & v &= -\cot z
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\int \csc^3 z\ dz &= -\cot z \csc z - \int \csc z \cot^2 z\ dz \\
&= -\cot z \csc z - \int \csc z \left(\csc^2 z - 1\right)\ dz \\
&= -\cot z \csc z - \int \csc^3 z dz + \int \csc z\ dz \\
&= \frac{1}{2}\left(-\cot z \csc z - \ln\left|\csc z + \cot z\right|\right),
\end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned}
\int \csc^5 z dz &= -\cot z \csc^3 z + 3\int \csc^3 z\ dz - 3\int \csc^5 z dz \\
&= -\cot z \csc^3 z + \frac{3}{2}\left(-\cot z \csc z - \ln\left|\csc z + \cot z\right|\right) - 3\int \csc^5 z \\
&= \frac{1}{4}\left(-\cot z \csc^3 z + \frac{3}{2}\left(-\cot z \csc z - \ln\left|\csc z + \cot z\right|\right)\right)
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int \frac{t^2}{\left(t^2-2\right)^3} dt = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \csc^5 z dz - \frac{\sqrt{2}}{4}\int \csc^3 z dz$$

es igual a,

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2}}{16}\left(-\cot z \csc^3 z + \frac{3}{2}\left(-\cot z \csc z - \ln\left|\csc z + \cot z\right|\right)\right) \\
&\quad -\frac{\sqrt{2}}{8}\left(-\cot z \csc z - \ln\left|\csc z + \cot z\right|\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{16}\left(-\frac{\sqrt{2}t^3}{\left(t^2-2\right)^2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}t}{t^2-2} - \ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{t^2-2}}\right|\right)\right) - \frac{\sqrt{2}}{8}\left(-\frac{\sqrt{2}t}{t^2-2} - \ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{t^2-2}}\right|\right) \\
&= -\left(\frac{1}{8}\right)\frac{t^3}{\left(t^2-2\right)^2} + -\left(\frac{3}{16}\right)\frac{t}{t^2-2} - \frac{3\sqrt{2}}{32}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{t^2-2}}\right| + \left(\frac{1}{4}\right)\frac{t}{t^2-2} + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{t^2-2}}\right| \\
&= -\frac{t^3}{8\left(t^2-2\right)^2} + \frac{t}{16\left(t^2-2\right)} - \frac{\sqrt{2}}{32}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{t^2-2}}\right|
\end{aligned}$$

De (4.6) tenemos,

$$\sqrt{\frac{x+4}{x+2}} = t.$$

Finalmente

$$\int \frac{\sqrt{x^2+6x+8}}{x^3} dx = -\frac{\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^{\frac{3}{2}}}{8\left(\frac{x+4}{x+2}-2\right)^2} + \frac{\sqrt{\frac{x+4}{x+2}}}{16\left(\frac{x+4}{x+2}-2\right)} - \frac{\sqrt{2}}{32}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{x+4}{x+2}}}{\sqrt{\frac{x+4}{x+2}-2}}\right| + k.$$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+81}}$.

Solución:

Dado que $a<0$, y $c=81>0$, hagamos

$$\sqrt{-x^2+x+81}=xt+9, \tag{4.7}$$

entonces

$$\begin{aligned}
-x^2+x+81 &= (xt+9)^2 \\
&= t^2x^2+18tx+81,
\end{aligned}$$

de ahí

$$x=\frac{1-18t}{t^2+1},$$

calculando dx:

$$\begin{aligned}
dx &= \frac{-18\left(t^2+1\right)-2t\left(1-18t\right)}{\left(t^2+1\right)^2}dt \\
&= \frac{-2\left(-9t^2+t+9\right)}{\left(t^2+1\right)^2}dt.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
xt+9 &= \frac{t-18t^2}{t^2+1}+9 \\
&= \frac{-9t^2+t+9}{t^2+1}.
\end{aligned}$$

Volviendo a la integral tenemos,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+81}} &= \int \frac{\frac{-2\left(-9t^2+t+9\right)}{\left(t^2+1\right)^2}}{\frac{-9t^2+t+9}{t^2+1}}dt \\
&= -2\int \frac{dt}{t^2+1} \\
&= -2\arctan t.
\end{aligned}$$

De (4.7),

$$t=\frac{\sqrt{-x^2+x+81}}{x}-9.$$

Sustituyendo t se sigue,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+81}}=-2\arctan\left(\frac{\sqrt{-x^2+x+81}}{x}-9\right)+k.$$

Capítulo 5

Método Alemán

Este método se utiliza para calcular las integrales de la forma

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado n. Expresaremos

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

donde $Q(x)$, es un polinomio, cuyo grado es inferior, en una unidad al del polinomio $P(x)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Derivando la expresión anterior y simplificando, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} &= Q'(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + Q(x)\left(\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}\right) + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \\ P(x) &= Q'(x)\left(ax^2+bx+c\right) + Q(x)\left(ax+\frac{b}{2}\right) + \lambda. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Igualando los coeficientes de las potencias del mismo grado en la igualdad (5.1), obtendremos un sistema de ecuaciones que nos permitirá encontrar los coeficientes desconocidos de $Q(x)$ y λ.

Ejemplos

1. $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

Solución:

Por el método Alemán tenemos que

$$\int \frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \left(Ax^2+Bx+C\right)\sqrt{x^2+1} + \int \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Derivamos

$$\frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+1}} = (2Ax+B)\sqrt{x^2+1} + \frac{x\left(Ax^2+Bx+C\right)}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}},$$

multiplicamos por el denominador $\sqrt{x^2+1}$,

$$\begin{aligned} x^3-1 &= (2Ax+B)\left(x^2+1\right) + x\left(Ax^2+Bx+C\right) + \lambda \\ &= 3Ax^3 + 2Bx^2 + (2A+C)x + B + \lambda. \end{aligned}$$

Igualamos coeficientes

$$\begin{aligned} 3A &= 1 \\ 2B &= 0 \\ 2A+C &= 0 \\ B+\lambda &= -1. \end{aligned}$$

Así encontramos
$$A=\frac{1}{3},\quad B=0,\quad C=-\frac{2}{3},\quad \lambda=-1.$$

Por consiguiente
$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \left(Ax^2+Bx+C\right)\sqrt{x^2+1}+\int \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}}dx\\ &= \left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}\right)\sqrt{x^2+1}-\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx.\end{aligned}$$

La integral
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx,$$

es igual, utilizando el método de Euler, visto en el capítulo 4, a:
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=-\ln\left|\sqrt{x^2+1}-x\right|.$$

Por lo tanto,
$$\int \frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{x^2}{3}\sqrt{x^2+1}-\frac{2}{3}\sqrt{x^2+1}+\ln\left|\sqrt{x^2+1}-x\right|+c.$$

2. $\displaystyle\int \frac{x^4+x}{\sqrt{x^2+x}}dx.$

Solución:

Hagamos,
$$\int \frac{x^4+x}{\sqrt{x^2+x}}dx=\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)\sqrt{x^2+x}+\int \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x}}dx.$$

Derivamos para encontrar los coeficientes,
$$\begin{aligned}\frac{x^4+x}{\sqrt{x^2+x}} &= \left(3Ax^2+2Bx+C\right)\sqrt{x^2+x}+\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x}}\\ x^4+x &= \left(3Ax^2+2Bx+C\right)\left(x^2+x\right)+\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)+\lambda\\ &= 3Ax^4+3Ax^3+2Bx^3+2Bx^2+Cx^2+Cx+\frac{1}{2}Ax^3+Ax^4+Bx^2+Bx^3\\ &\quad +\frac{1}{2}D+Dx\frac{1}{2}+Cx^2+\frac{1}{2}Cx+\lambda\\ &= 4Ax^4+\left(\frac{7}{2}A+3B\right)x^3+\left(\frac{5}{2}B+2C\right)x^2+\left(\frac{3}{2}C+D\right)x+\frac{1}{2}D+\lambda.\end{aligned}$$

Igualando coeficientes,

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ \frac{7}{2}A + 3B &= 0 \\ \frac{5}{2}B + 2C &= 0 \\ \frac{3}{2}C + D &= 1 \\ \frac{1}{2}D + \lambda &= 0. \end{aligned}$$

La solución del sistema de ecuaciones es,

$$A = 1, B = -\frac{7}{6}, C = \frac{35}{24}, D = -\frac{19}{16}, \lambda = \frac{19}{32},$$

entonces,

$$\int \frac{x^4 + x}{\sqrt{x^2 + x}} dx = \left(x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{35}{24}x - \frac{19}{16} \right) \sqrt{x^2 + x} + \int \frac{\frac{19}{32}}{\sqrt{x^2 + x}} dx.$$

Para resolver

$$\int \frac{\frac{19}{32}}{\sqrt{x^2 + x}} dx,$$

hagamos,

$$\begin{aligned} x &= \frac{t-1}{2} \\ dx &= \frac{1}{2}\ dt \end{aligned}$$

Así, sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned} \frac{19}{32} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x}} &= \frac{19}{32} \int \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + \frac{t-1}{2}}} dt \\ &= \frac{19}{32} \int \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{t^2-1}{4}}} dt \\ &= \frac{19}{32} \int \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} dt. \end{aligned}$$

Tomamos

$$t = \sec z,$$

calculamos dt:

$$dt = \sec z \tan z\ dz.$$

Entonces,

$$\sqrt{t^2-1} = \tan z.$$

Volviendo a la integral,

$$\begin{aligned}\frac{19}{32}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} &= \frac{19}{32}\int \frac{\sec z \tan z}{\tan z}dz \\ &= \frac{19}{32}\ln|\sec z + \tan z|.\end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned}\sec z &= t \\ \tan z &= \sqrt{t^2-1},\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{19}{32}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{19}{32}\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|.$$

Además como $x = \dfrac{t-1}{2}$, entonces

$$t = 2x+1,$$

de manera que

$$\begin{aligned}\frac{19}{32}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}} &= \frac{19}{32}\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right| \\ &= \frac{19}{32}\ln\left|2x+1+\sqrt{(2x+1)^2-1}\right|.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+x}{\sqrt{x^2+x}}dx &= \left(x^3-\frac{7}{6}x^2+\frac{35}{24}x-\frac{19}{16}\right)\sqrt{x^2+x}+\int \frac{\frac{19}{32}}{\sqrt{x^2+x}}dx \\ &= \left(x^3-\frac{7}{6}x^2+\frac{35}{24}x-\frac{19}{16}\right)\sqrt{x^2+x}+\frac{19}{32}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x}\right|+k.\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}dx.$

Solución:

Hagamos

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}dx = A\sqrt{x^2+x+2}+\int \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+2}}dx.$$

Derivamos para obtener,

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}} = \frac{2Ax+A}{2\sqrt{x^2+x+2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+2}}.$$

Multiplicamos por el denominador $\sqrt{x^2+x+2}$,

$$\begin{aligned} x &= \frac{2Ax+A}{2}+\lambda \\ &= \frac{1}{2}A+\lambda+Ax. \end{aligned}$$

Igualamos los coeficientes, de donde

$$A=1,\ \lambda=-\frac{1}{2}.$$

De manera que,

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}dx=\sqrt{x^2+x+2}-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}},$$

donde

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}}$$

Sea

$$x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{7}}{2}\tan z,$$

y

$$dx=\frac{\sqrt{7}}{2}\sec^2 z\ dz,$$

entonces,

$$\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}\sec z.$$

Sustituyendo, tenemos,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}} &= \int \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}\sec^2 z\ dz}{\frac{\sqrt{7}}{2}\sec z} \\ &= \int \sec z dz \\ &= \ln\left|\sec z+\tan z\right|. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{2x+1}{\sqrt{7}} \\ \sec z &= \frac{2\sqrt{x^2+x+2}}{\sqrt{7}}, \end{aligned}$$

entonces

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}} = \ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+x+2}+2x+7}{\sqrt{7}}\right|.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}dx &= \sqrt{x^2+x+2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}\\ &= \sqrt{x^2+x+2}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+x+2}+2x+7}{\sqrt{7}}\right|+k.\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^2+5}{\sqrt{x^2-2}}dx.$

Solución:

Tomamos

$$\int \frac{x^4+2x^2+5}{\sqrt{x^2-2}}dx = \left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)\sqrt{x^2-2}+\int\frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2}}dx.$$

Derivamos

$$\frac{x^4+2x^2+5}{\sqrt{x^2-2}} = \left(3Ax^2+2Bx+C\right)\sqrt{x^2-2}+\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2}}.$$

Multiplicamos por $\sqrt{x^2-2}$,

$$\begin{aligned}x^4+2x^2+5 &= \left(3Ax^2+2Bx+C\right)\left(x^2-2\right)+x\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)+\lambda\\ &= 4Ax^4+3Bx^3+(2C-6A)\,x^2+(D-4B)\,x+\lambda-2C.\end{aligned}$$

Igualamos los coeficientes,

$$\begin{aligned}4A &= 1\\ 3B &= 0\\ 2C-6A &= 2\\ D-4B &= 0\\ \lambda-2C &= 5.\end{aligned}$$

La solución del sistema anterior es:

$$A=\frac{1}{4},\ B=0,\ C=\frac{7}{4},\ D=0,\ \lambda=\frac{17}{2}.$$

De donde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4+2x^2+5}{\sqrt{x^2-2}}dx &= \left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)\sqrt{x^2-2}+\int \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2}}dx \\
&= \left(\frac{1}{4}x^3+\frac{7}{4}x\right)\sqrt{x^2-2}+\int \frac{\frac{17}{2}}{\sqrt{x^2-2}}dx.
\end{aligned}$$

Para resolver

$$\int \frac{\frac{17}{2}}{\sqrt{x^2-2}}dx,$$

hagamos

$$x=\sqrt{2}\sec z,$$

calculando dx:

$$dx=\sqrt{2}\sec z\tan z\ dz.$$

Entonces

$$\sqrt{x^2-2}=\sqrt{2}\tan z.$$

De manera que,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\frac{17}{2}}{\sqrt{x^2-2}}dx &= \frac{17}{2}\int \frac{\sqrt{2}\sec z\tan z}{2\tan z}dz. \\
&= \frac{17\sqrt{2}}{4}\ln\left|\sec z+\tan z\right|.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\sec z &= \frac{x}{\sqrt{2}} \\
\tan z &= \frac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

entonces

$$\int \frac{\frac{17}{2}}{\sqrt{x^2-2}}dx=\frac{17\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}\right|.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4+2x^2+5}{\sqrt{x^2-2}}dx &= \left(\frac{1}{4}x^3+\frac{7}{4}x\right)\sqrt{x^2-2}+\int \frac{\frac{17}{2}}{\sqrt{x^2-2}}dx \\
&= \left(\frac{1}{4}x^3+\frac{7}{4}x\right)\sqrt{x^2-2}+\frac{17\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}\right|+k.
\end{aligned}$$

Capítulo 6

Funciones con Raíces Cuadradas

Las integrales inmediatas con términos irracionales son:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}} &= \operatorname{arcsen}\frac{x}{k} \\
\int \frac{dx}{\sqrt{k^2+x^2}} &= \ln\left(\frac{\sqrt{k^2+x^2}}{k}+\frac{x}{k}\right) \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-k^2}} &= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{k}+\frac{x}{k}\right).
\end{aligned}$$

A partir de éstas podemos resolver fácilmente cualquier integral del tipo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Veamos ahora las integrales del tipo

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$,

   en este caso, el cambio de variable es

$$t=\frac{1}{(mx+n)}, \tag{6.1}$$

   es decir,

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1-nt}{tm} \\
dx &= \frac{-dt}{t^2m},
\end{aligned}$$

   entonces

$$\begin{aligned}
\sqrt{a\left(\frac{1-nt}{tm}\right)^2+b\left(\frac{1-nt}{tm}\right)+c} &= \sqrt{a\left(\frac{1}{m^2}n^2+\frac{1}{m^2t^2}-\frac{2}{m^2}\frac{n}{t}\right)+b\left(\frac{1-nt}{tm}\right)+c} \\
&= \frac{\sqrt{(cm^2-bmn+an^2)\,t^2+(bm-2an)\,t+a}}{mt} \qquad (6.2)
\end{aligned}$$

   Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}} &= -\int \frac{dt}{tm\frac{1}{mt}\sqrt{((cm^2-bmn+an^2)\,t^2+(bm-2an)\,t+a)}} \\
&= -\int \frac{dt}{\sqrt{((cm^2-bmn+an^2)\,t^2+(bm-2an)\,t+a)}}.
\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \frac{P(x)}{(x+n)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Con el grad $(P(x)) < k$.

Hacemos el cambio de variable

$$t = \frac{1}{x+n} \tag{6.3}$$

es decir

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-nt}{t} \\ dx &= \frac{-dt}{t^2}. \end{aligned}$$

por ref (6.2)

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{1}{mt}\sqrt{((cm^2-bmn+an^2)\,t^2+(bm-2an)\,t+a)}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \int \frac{P(x)}{(x+n)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}dx &= \int \frac{A_{k-1}x^{k-1}+...+A}{(x+n)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \\ &= \int t^k \frac{A_{k-1}\left(\frac{1-nt}{t}\right)^{k-1}+...+A_0}{\frac{1}{mt}\sqrt{((cm^2-bmn+an^2)\,t^2+(bm-2an)\,t+a)}}\frac{-dt}{t^2} \\ &= -\int mt^{k-1}\frac{A_{k-1}\left(\frac{1-nt}{t}\right)^{k-1}+...+A_0}{\sqrt{((cm^2-bmn+an^2)\,t^2+(bm-2an)\,t+a)}}dt. \end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+\beta x+\gamma)^m\sqrt{x^2+bx+c}}dx$

Caso 1. Si $\beta \neq b$, entonces sustituimos

$$\begin{aligned} x &= \frac{c-\gamma}{\beta b}+\frac{t-1}{t+1}\frac{\sqrt{(c-\gamma)^2-(\gamma b-c\beta)(\beta-b)}}{\beta-b} \\ dx &= \frac{2}{(t+1)^2}\left(\frac{\sqrt{(c-\gamma)^2-(\gamma b-c\beta)(\beta-b)}}{\beta-b}\right)dt \end{aligned} \tag{6.4}$$

como,

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+\beta x+\gamma)^m\sqrt{x^2+bx+c}}dx = \int \frac{Mx+N}{\left(\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2+\frac{4\gamma-\beta}{4}\right)^m\sqrt{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4c-b}{4}}}dx, \tag{6.5}$$

es decir,sustituyendo (6.4) en (6.5)se reduce a la forma:

$$\int \frac{P(t)}{(t^2+p)^m \sqrt{t^2+q}} dt,$$

y esta integral puede ser resuelta sustituyendo

$$\frac{1}{t^2+q} = u^2 \tag{6.6}$$

Caso 2. Si $\beta = b$, sutituimos

$$\begin{aligned} x &= 2t - b \\ dx &= 2dt, \end{aligned} \tag{6.7}$$

entonces

$$\begin{aligned} & \int \frac{Mx+N}{\left(\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4\gamma - b}{4}\right)^m \sqrt{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c-b}{4}}} dx \\ = \; & 2\int \frac{M(2t-b)+N}{\left(\left((2t-b)+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4\gamma - b}{4}\right)^m \sqrt{\left((2t-b)+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c-b}{4}}} dt \end{aligned}$$

es decir puede ser reducida a la forma

$$\int \frac{P(t)}{(t^2+p)^m \sqrt{t^2+q}} dt,$$

Ejemplos:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{5x-x^2-4}}$

   Solución:

   Por (6.1), sea

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{x-2} \\ x &= \frac{1+2t}{t} \\ dx &= -\frac{1}{t^2} dt \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\sqrt{5x-x^2-4} &= \sqrt{5\left(\frac{1+2t}{t}\right)-\left(\frac{1+2t}{t}\right)^2-4}\\
&= \sqrt{\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+2}\\
&= \sqrt{\frac{1}{t^2}\left(2t^2+t-1\right)},
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{5x-x^2-4}} &= \int \frac{t\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{t^2}\left(2t^2+t-1\right)}}dt\\
&= -\int \frac{dt}{\sqrt{2t^2+t-1}}\\
&= -\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{16}}},
\end{aligned}$$

sea

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}\sec z &= t-\frac{1}{4}\\
t &= \frac{3}{4}\sec z+\frac{1}{4}\\
dt &= \frac{3}{4}\sec z\tan z dz,
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
-\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{16}}} &= -\int \frac{\frac{3}{4}\sec z\tan z}{\frac{3}{4}\tan z}dz\\
&= -\int \sec z dz\\
&= -\ln\left|\sec z+\tan z\right|\\
&= -\ln\left|\frac{4t-1}{3}+\frac{4\sqrt{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{16}}}{3}\right|,
\end{aligned}$$

y $t=\dfrac{1}{x-2}$, entonces,

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{5x-x^2-4}} = -\ln\left|\frac{6-x}{3(x-2)}+\frac{\sqrt{\left(\frac{6-x}{x-2}\right)^2-9}}{3}\right|+c.$$

2. $\displaystyle\int \frac{x+1}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$

Solución:

Por (6.7), como $b=\beta=0$. Haciendo la sustitución:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= t \\ x &= 2t \\ dx &= 2dt \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx &= \int \frac{(2t+1)\,2}{(2+4t^2)\sqrt{1+4t^2}}\,dt \\ &= \int \frac{4t}{(2+4t^2)\sqrt{1+4t^2}}dt + \int \frac{2}{(2+4t^2)\sqrt{1+4t^2}}dt, \end{aligned}$$

sea

$$\begin{aligned} \sqrt{1+4t^2} &= z \\ t &= \frac{\sqrt{z^2-1}}{2} \\ dt &= \frac{z}{2\sqrt{z^2-1}}dz, \end{aligned}$$

entonces,

$$\int \frac{4t}{(2+4t^2)\sqrt{1+4t^2}}dt + \int \frac{2}{(2+4t^2)\sqrt{1+4t^2}}dt$$

es igual a:

$$\begin{aligned} &\int \frac{4\frac{\sqrt{z^2-1}}{2}}{\left(2+4\left(\frac{\sqrt{z^2-1}}{2}\right)^2\right)z}\frac{z}{2\sqrt{z^2-1}}dz + \int \frac{2}{\left(2+4\left(\frac{\sqrt{z^2-1}}{2}\right)^2\right)z}\frac{z}{2\sqrt{z^2-1}}dz \\ = &\int \frac{1}{z^2+1}dz + \int \frac{1}{(z^2+1)\sqrt{z^2-1}}dz. \end{aligned}$$

Haciendo

$$\begin{aligned} z &= \tan u \\ dz &= \sec^2 u\ du, \end{aligned}$$

tenemos,

$$\int \frac{1}{z^2+1}dz = \int \frac{\sec^2 u}{\sec^2 u}du = u$$

y

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(z^2+1)\sqrt{z^2-1}}dz &= \int \frac{1}{\sec^2 u\sqrt{\tan^2 u-1}}\sec^2 u du\\ &= \int \frac{1}{\sqrt{\tan^2 u-1}}du\\ &= \int \frac{\cos u}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 u-\cos^2 u}}du,\end{aligned}$$

sea

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} u &= w\\ u &= \operatorname{arcsen} w\\ du &= \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}dw.\end{aligned}$$

y

$$\cos u = \sqrt{1-w^2}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos u}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 u-\cos^2 u}}du &= \int \frac{\sqrt{1-w^2}}{\sqrt{2w^2-1}}\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}dw\\ &= \int \frac{1}{\sqrt{2w^2-1}}dw\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{w^2-\frac{1}{2}}}dw.\end{aligned}$$

Si,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}\sec q &= w\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sec q\tan q\ dq &= dw\end{aligned}$$

se tiene que,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{w^2-\frac{1}{2}}}dw &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\tan q}\frac{1}{\sqrt{2}}\sec q\tan q\ dq\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sec q\, dq\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sec q+\tan q|\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}w+\sqrt{2w^2-1}\right|.\end{aligned}$$

Además,

$$\operatorname{sen} u = w,$$

entonces,

$$\int \frac{\cos u}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 u - \cos^2 u}} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \sqrt{2} \operatorname{sen} u + \sqrt{2 \operatorname{sen}^2 u - 1} \right|$$

donde, $z = \tan u$, por lo que tenemos,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(z^2+1)\sqrt{z^2-1}} dz &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{z\sqrt{2}}{\sqrt{1+z^2}} + \sqrt{2\left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2 - 1} \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{z\sqrt{2}}{\sqrt{1+z^2}} + \sqrt{\frac{2z^2}{1+z^2} - 1} \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{z\sqrt{2}}{\sqrt{1+z^2}} + \sqrt{\frac{z^2-1}{z^2+1}} \right|
\end{aligned}$$

y como

$$\sqrt{1+4t^2} = z$$

tenemos, que

$$\int \frac{4t}{(2+4t^2)\sqrt{1+4t^2}} dt + \int \frac{2}{(2+4t^2)\sqrt{1+4t^2}} dt$$

es igual,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+4t^2}\sqrt{2}}{\sqrt{1+1+4t^2}} + \sqrt{\frac{1+4t^2-1}{1+4t^2+1}} \right| + \arctan \sqrt{1+4t^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+4t^2}\sqrt{2}+2t}{\sqrt{2+4t^2}} \right| + \arctan \sqrt{1+4t^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2+8t^2}+2t}{\sqrt{2+4t^2}} \right| + \arctan \sqrt{1+4t^2}
\end{aligned}$$

finalmente,

$$t = \frac{x}{2},$$

por lo tanto

$$\int \frac{x+1}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2+2x^2}+x}{\sqrt{2+x^2}} \right| + \arctan \sqrt{1+x^2} + c.$$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+5x+6}}$.

Solución:
Por (6.3) hacemos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+1} &= t \\
x &= \frac{1-t}{t} \\
dx &= -\frac{1}{t^2}dt,
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+5x+6}} &= \int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{(x+3)(x+2)}} \\
&= \int \frac{t^3\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1+2t}{t}\right)\left(\frac{1+t}{t}\right)}}dt \\
&= \int \frac{-t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}\left(2t^2+3t+1\right)}}dt \\
&= -\int \frac{t^2}{\sqrt{2t^2+3t+1}}dt
\end{aligned}$$

Utilizando el método Alemán, tenemos

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{2t^2+3t+1}}dt = (At+B)\sqrt{2t^2+3t+1} + \int \frac{k}{\sqrt{2t^2+3t+1}}dt,$$

derivando de ambos lados,

$$\frac{t^2}{\sqrt{2t^2+3t+1}} = A\sqrt{2t^2+3t+1} + \frac{(At+B)(4t+3)}{2\sqrt{2t^2+3t+1}} + \frac{k}{\sqrt{2t^2+3t+1}},$$

multiplicando por $\sqrt{2t^2+3t+1}$,

$$\begin{aligned}
t^2 &= A\left(2t^2+3t+1\right) + \frac{(At+B)(4t+3)}{2} + k \\
t^2 &= 4At^2 + \left(\frac{9}{2}A+2B\right)t + A + \frac{3}{2}B + k.
\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes, tenemos

$$\begin{aligned}
4A &= 1 \\
\frac{9}{2}A+2B &= 0 \\
A+\frac{3}{2}B+k &= 0,
\end{aligned}$$

la solución al sistema de ecuaciones es:

$$A=\frac{1}{4}, B=-\frac{9}{16}, k=\frac{19}{32}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int \frac{t^2}{\sqrt{(2t^2+3t+1)}}dt &= (At+B)\sqrt{2t^2+3t+1}+\int \frac{k}{\sqrt{(2t^2+3t+1)}}dt\\
&= \left(\frac{1}{4}t-\frac{9}{16}\right)\sqrt{2t^2+3t+1}+\frac{19}{32}\int \frac{1}{\sqrt{2\left(t^2+\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}\right)}}dt.
\end{aligned}$$

Donde,

$$\int \frac{1}{\sqrt{2\left(t^2+\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}\right)}}dt=\int \frac{1}{\sqrt{2\left(\left(t+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right)}}dt.$$

Tomando

$$\begin{aligned}
t+\frac{3}{4} &= \frac{1}{4}\sec z\\
dt &= \frac{1}{4}\sec z\tan z\,dz,
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{2\left(\left(t+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right)}}dt &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\frac{1}{4}\tan z}\frac{1}{4}\sec z\tan z\,dz\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sec z\,dz\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sec z+\tan z|\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|4t+3+4\sqrt{\left(t+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}}\right|.
\end{aligned}$$

De manera que,

$$\begin{aligned}
\int \frac{t^2}{\sqrt{(2t^2+3t+1)}}dt &= \left(\frac{1}{4}t-\frac{9}{16}\right)\sqrt{2t^2+3t+1}+\frac{19}{32}\int \frac{1}{\sqrt{2\left(t^2+\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}\right)}}dt\\
&= \left(\frac{1}{4}t-\frac{9}{16}\right)\sqrt{2t^2+3t+1}+\frac{19}{32\sqrt{2}}\ln\left|4t+3+4\sqrt{t^2+\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}}\right|,
\end{aligned}$$

finalmente, como
$$\frac{1}{x+1}=t$$

por lo tanto $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+5x+6}}$, es igual a:

$$\begin{aligned}
&-\left(\frac{1}{4(x+1)}-\frac{9}{16}\right)\sqrt{\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{3}{x+1}+1}\\
&-\frac{19}{32\sqrt{2}}\ln\left|\frac{4}{x+1}+3+4\sqrt{\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{3}{2(x+1)}+\frac{1}{2}}\right|+c\\
=\;&\frac{9x+5}{16(x+1)^2}\sqrt{x^2+5x+6}-\frac{19}{32\sqrt{2}}\ln\left|\frac{3x+7}{x+1}+\frac{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+5x+6}}{(x+1)}\right|+c.
\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{(x^3+3x^2+2x+6)\sqrt{x^2+1}}dx.$

Solución:

Notemos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2-3}{(x^3+3x^2+2x+6)\sqrt{x^2+1}}dx &= \int \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}dx\\
&= \int \frac{x-3}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}dx,
\end{aligned}$$

por (6.6) hacemos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} &= t\\
x &= \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\\
dx &= \frac{-1}{t^2\sqrt{1-t^2}}dt,
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
x+3 &= \frac{\sqrt{1-t^2}+3t}{t}\\
x^2+2 &= \frac{1+t^2}{t^2}
\end{aligned}$$

sustituyendo, tenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-3}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}dx &= \int \frac{t\left(\frac{\sqrt{1-t^2}+3t}{t}\right)}{\frac{1+t^2}{t^2}} \frac{-1}{t^2\sqrt{1-t^2}}dt \\
&= -\int \frac{dt}{1+t^2} - \int \frac{3t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}dt \\
&= -\int \frac{dt}{1+t^2} - \int \frac{3t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt.
\end{aligned}$$

Haciendo

$$\begin{aligned}
\tan z &= t \\
\sec^2 z\, dz &= dt,
\end{aligned}$$

de manera que,

$$\begin{aligned}
-\int \frac{dt}{1+t^2} - \int \frac{3t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt &= -\int \frac{\sec^2 z}{\sec^2 z}dz - \int \frac{3\tan z}{\sec z}dz \\
&= -z - 3\int \operatorname{sen} z dz \\
&= -z + 3\cos z \\
&= -\arctan t + \frac{3}{\sqrt{1+t^2}},
\end{aligned}$$

y además,

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = t,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-3}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}dx &= -\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2+1}}} + c \\
&= -\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + 3\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}} + c.
\end{aligned}$$

Capítulo 7

Método de Chebychev

Teorema de Laplace

La integral de una función racional es siempre una función elemental. De hecho, dicha integral es racional o es suma de funciones racionales más un número finito de constantes multiplicadas por logaritmos de funciones racionales (Marchisotto E; Zakeri G. An Invitation to Integration in Finite Terms. The College Mathematics Journal, Vol 25. No. 4 (Sep. 1994), pp. 295-308).

La integral de la forma

$$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, ..., x^{\frac{m_r}{nr}}\right) dx,$$

donde R es una función racional de variables x, $x^{\frac{m_1}{n_1}}$,...,$x^{\frac{m_r}{nr}}$ la podemos racionalizar mediante la sustitución

$$\begin{aligned} x &= t^{\beta} \\ dx &= \beta t^{\beta-1}dt \end{aligned}$$

de manera que β es el mínimo común multiplo de los denominadores $n_{1,}n_2, ..., n_r$.Así cada potencia fraccionaria de x se puede expresar mediante una potencia entera de t y por consiguiente, el integrando se transformará en una función racional de t.

Teorema de Chebychev
(integrales de funciones binomiales)

La integral binomial

$$\int R\left(x, x^m \left(a + bx^n\right)^p\right) dx$$

puede reducirse, si m, n, p, son números racionales, a la integral de una función racional y, por consiguiente, puede expresarse mediante funciones elementales en los tres casos siguientes:

- p es un número entero.
- $\dfrac{m+1}{n}$ es un número entero.
- $\dfrac{m+1}{n} + p$ es un número entero.

Nota: el matemático ruso Chebychev demostró que las integrales binomiales de exponentes racionales pueden expresarse mediante funciones elementales solamente en los tres casos. Si ninguno de los números $p, \dfrac{m+1}{n}, \dfrac{m+1}{n} + p$, la integral no puede expresarse mediante funciones elementales.

Demostración:

Transformando la integral $\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$, mediante la sustitución

$$\begin{aligned} x &= z^{\frac{1}{n}} \\ dx &= \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz, \end{aligned}$$

tenemos que,

$$\begin{aligned}\int x^m (a+bx^n)^p \, dx &= \int z^{\frac{m}{n}} (a+bz)^p \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz \\ &= \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1} (a+bz)^p \, dz \\ &= \frac{1}{n} \int z^q (a+bz)^p \, dz,\end{aligned}$$

donde

$$q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

1. Sean p un número entero y q un número racional, entonces $q = \dfrac{r}{s}$. Escribimos la integral como

$$\int x^m (a+bx^n)^p \, dx = \frac{1}{n} \int z^{\frac{r}{s}} (a+bz)^p \, dz.$$

   Haciendo

$$\begin{aligned} z &= t^s \\ dz &= st^{s-1}dt,\end{aligned}$$

   sustituyendo tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \int z^{\frac{r}{s}} (a+bz)^p \, dz &= \frac{1}{n} \int t^r (a+bt^s)^p \, st^{s-1} dt \\ &= \frac{s}{n} \int (a+bt^s)^p \, t^{r+s-1} dt.\end{aligned}$$

   Así, obtenemos en el integrando una función racional, aplicando el teorema de Laplace, llegamos a que

$$\frac{s}{n} \int (a+bt^s)^p \, t^{r+s-1} dt$$

   es una función elemental.

2. Sea $\dfrac{m+1}{n}$ un número entero. Entonces $q = \dfrac{m+1}{n} - 1$ también es entero. Si el número p es racional, $p = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Entonces la integral se reduce a una del tipo

$$\int x^m (a+bx^n)^p \, dx = \frac{1}{n} \int z^q (a+bz)^{\frac{\lambda}{\mu}} \, dz.$$

   Hacemos

$$\begin{aligned} a+bz &= t^\mu \\ z &= \frac{t^\mu - a}{b} \\ dz &= \frac{\mu}{b} t^{\mu-1} dt.\end{aligned}$$

Sutituyendo, llegamos a

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\int z^{q}\left(a+bz\right)^{\frac{\lambda}{\mu}}dz &= \frac{1}{n}\int\left(\frac{t^{\mu}-a}{b}\right)^{q}t^{\mu}\,\mu\frac{t^{\mu-1}}{b}dt\\ &= \frac{\mu}{nb}\int\left(\frac{t^{\mu}-a}{b}\right)^{q}t^{2\mu-1}\,dt.\end{aligned}$$

Así, obtenemos en el integrando una función racional, aplicando el teorema de Laplace, llegamos a que

$$\frac{\mu}{nb}\int\left(\frac{t^{\mu}-a}{b}\right)^{q}t^{2\mu-1}\,dt.$$

es una función elemental.

3. Sea $\dfrac{m+1}{n}+p$ un número entero, entonces $\dfrac{m+1}{n}-1+p=q+p$ también es un número entero.

   Transformando

$$\frac{1}{n}\int z^{q}\left(a+bz\right)^{p}dz=\int z^{q+p}\left(\frac{a+bz}{z}\right)^{p}dz.$$

donde $q+p$ es un número entero y $p=\dfrac{k}{l}$ es un número racional y haciendo

$$\begin{aligned}\frac{a+bz}{z} &= u^{l}\\ z &= \frac{a}{u^{l}-b}\\ dz &= -\frac{alu^{l-1}}{\left(u^{l}-b\right)^{2}}du,\end{aligned}$$

entonces

$$\int z^{q+p}\left(\frac{a+bz}{z}\right)^{p}dz=-\int\left(\frac{a}{u^{l}-b}\right)^{p+q}u^{k}\frac{alu^{l-1}}{\left(u^{l}-b\right)^{2}}du$$

Así, obtenemos en el integrando una función racional y aplicando el teorema de Laplace, llegamos a que

$$-\int\left(\frac{a}{u^{l}-b}\right)^{p+q}u^{k}\frac{alu^{l-1}}{\left(u^{l}-b\right)^{2}}du.$$

es una función elemental.

Ejemplos

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}$.

Solución:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})} = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} dx.$$

Aquí $p=-1$ (número entero). Haciendo

$$x^{\frac{1}{2}} = z,$$

tenemos que

$$x = z^2.$$

Calculando dx:

$$dx = 2z\,dz.$$

De tal manera que obtenemos en el paréntesis una expresión lineal en z

$$\begin{aligned}\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} dx &= \int z^{-1}(1+z)^{-1}\,2z\,dz\\ &= \int \frac{2}{1+z}dz\\ &= 2\ln|1+z|\\ &= 2\ln\left|1+x^{\frac{1}{2}}\right|+c.\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Solución:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int x^3\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx$$

En este caso $m=3$, $n=2$, $p=-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{m+1}{n}=2$ (número entero). Realizando la sustitución

$$x^2 = z,$$

entonces

$$x = z^{\frac{1}{2}}.$$

Calculando dx:

$$dx = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz.$$

Así,

$$\begin{aligned}\int x^3\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx &= \int z^{\frac{3}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz\\ &= \frac{1}{2}\int z\,(1-z)^{-\frac{1}{2}}\,dz\end{aligned}$$

Para transformar la expresión del paréntesis en racional, hacemos

$$(1-z)^{\frac{1}{2}} = t,$$

entonces

$$\begin{aligned} 1-z &= t^2 \\ z &= 1-t^2. \end{aligned}$$

Calculando dz:

$$dz = -2t\,dt.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \frac{1}{2}\int z\,(1-z)^{-\frac{1}{2}}\,dz \\ &= \frac{1}{2}\int \left(1-t^2\right)t^{-1}\,(-2t)\,dt \\ &= -\int \left(1-t^2\right)\,dt \\ &= -t+\frac{1}{3}t^3. \end{aligned}$$

Sustituyendo $t = (1-z)^{\frac{1}{2}}$ tenemos

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\,(1-z)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\,(1-z)^{\frac{3}{2}}\,.$$

Finalmente, como $x^2 = z$,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + c.$$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}.$

Solución:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} = \int x^{-2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\,dx$$

Como $m=-2$, $n=2$, $p=-\dfrac{3}{2}$, y $\dfrac{m+1}{n}+p=-2$ (número entero), hacemos

$$x^2 = z,$$

entonces

$$x = z^{\frac{1}{2}}.$$

Calculando dx:

$$dx = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz,$$

y sustituyendo en la integral dada, tenemos

$$\begin{aligned}
\int x^{-2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} dx &= \int z^{-1}(1+z)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz \\
&= \frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}(1+z)^{-\frac{3}{2}} dz \\
&= \frac{1}{2}\int z^{-3}\left(\frac{1+z}{z}\right)^{-\frac{3}{2}} dz.
\end{aligned}$$

Para que el segundo factor sea racional, hacemos la sustitución

$$\left(\frac{1+z}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = t,$$

entonces

$$\frac{1+z}{z} = t^2,$$

de ahí que

$$z = \frac{1}{t^2-1}.$$

Calculando dz:

$$dz = \frac{-2t}{\left(t^2-1\right)^2} dt,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int z^{-3}\left(\frac{1+z}{z}\right)^{-\frac{3}{2}} dz &= \frac{1}{2}\int \left(t^2-1\right)^3 t^{-3}\left(\frac{-2t}{\left(t^2-1\right)^2}\right) dt \\
&= -\int \left(t^2-1\right) t^{-2} dt \\
&= -t - \frac{1}{t}.
\end{aligned}$$

Dado que $t = \left(\frac{1+z}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$, tenemos

$$\frac{1}{2}\int z^{-3}\left(\frac{1+z}{z}\right)^{-\frac{3}{2}} dz = -\left(\frac{1+z}{z}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{z}{1+z}\right)^{\frac{1}{2}},$$

y como $z = x^2$, se obtiene finalmente que

$$\begin{aligned}\int x^{-2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx &= -\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} + c \\ &= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c.\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^3}$.

Solución:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^3} = \int \left(x^2+9\right)^{-3}dx.$$

Como $p = -3$, tomamos

$$x = 3z.$$

Calculando dx:

$$dx = 3\ dz,$$

entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^3} &= \int \frac{3}{\left(9z^2+9\right)^3}dz \\ &= \int \frac{3}{9^3\left(z^2+1\right)^3}dz \\ &= \frac{1}{3^5}\int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^3}.\end{aligned}$$

Haciendo,

$$z = \tan t,$$

tenemos

$$z^2+1 = \sec^2 t.$$

Calculando dz:

$$dz = \sec^2 t\ dt.$$

Sustituyendo en la integral, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3^5}\int\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^3} &= \frac{1}{3^5}\int\frac{\sec^2 t}{\left(\sec^2 t\right)^3}dt \\
&= \frac{1}{3^5}\int\frac{dt}{\sec^4 t} \\
&= \frac{1}{3^5}\int\cos^4 t\ dt \\
&= \frac{1}{3^5}\int\cos^2 t\left(1-\operatorname{sen}^2 t\ \right)\ dt \\
&= \frac{1}{3^5}\left(\int\cos^2 t\ dt-\int\cos^2 t\operatorname{sen}^2 t\ dt\right).
\end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned}
\cos^2 t &= \frac{1}{2}\left(1+\cos 2t\right) \\
\operatorname{sen}^2 t &= \frac{1}{2}\left(1-\cos 2t\right),
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3^5}\left(\int\cos^2 t\ dt-\int\cos^2 t\operatorname{sen}^2 t\ dt\right) &= \frac{1}{3^5}\left(\frac{1}{2}\right)\int\left(1+\cos 2t\right)\ dt \\
&\quad -\frac{1}{3^5}\left(\frac{1}{4}\right)\int\left(1+\cos 2t\right)\left(1-\cos 2t\right)\ dt \\
&= \frac{1}{3^5}\left(\frac{1}{2}\int\left(1+\cos 2t\right)\ dt-\frac{1}{4}\int\left(1-\cos^2 2t\right)\ dt\right) \\
&= \frac{1}{2\left(3^5\right)}\left(t+\frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right)-\frac{1}{4\left(3^5\right)}\left(t-\frac{t}{2}-\frac{\operatorname{sen} 4t}{4}\right) \\
&= \frac{t}{2\left(3^5\right)}+\frac{\operatorname{sen} 2t}{2^2\left(3^5\right)}+\frac{\operatorname{sen} 4t}{4^2\left(3^5\right)} \\
&= \frac{t}{2\left(3^5\right)}+\frac{2\operatorname{sen} t\cos t}{2^2\left(3^5\right)}+\frac{2\operatorname{sen} 2t\cos 2t}{4^2\left(3^5\right)} \\
&= \frac{t}{2\left(3^5\right)}+\frac{\operatorname{sen} t\cos t}{2\left(3^5\right)}+\frac{\operatorname{sen} t\cos t\left(\cos^2 t-\operatorname{sen}^2 t\right)}{4\left(3^5\right)}.
\end{aligned}$$

Como $z=\tan t$, entonces $t=\arctan z$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3^5}\int\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^3} &= \frac{t}{2\left(3^5\right)}+\frac{\operatorname{sen} t\cos t}{2\left(3^5\right)}+\frac{\operatorname{sen} t\cos t\left(\cos^2 t-\operatorname{sen}^2 t\right)}{4\left(3^5\right)} \\
&= \frac{\arctan z}{2\left(3^5\right)}+\frac{z}{2\left(3^5\right)\left(z^2+1\right)}+\frac{z\left(\dfrac{1-z^2}{z^2+1}\right)}{4\left(3^5\right)\left(z^2+1\right)} \\
&= \frac{\arctan z}{2\left(3^5\right)}+\frac{z}{2\left(3^5\right)\left(z^2+1\right)}+\frac{z\left(1-z^2\right)}{4\left(3^5\right)\left(z^2+1\right)^2}.
\end{aligned}$$

Además, $x = 3z$, entonces
$$z = \frac{x}{3}$$
Finalmente
$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^3} &= \frac{\arctan z}{2\left(3^5\right)} + \frac{z}{2\left(3^5\right)\left(z^2+1\right)} + \frac{z\left(1-z^2\right)}{4\left(3^5\right)\left(z^2+1\right)^2} \\
&= \frac{\arctan \frac{x}{3}}{2\left(3^5\right)} + \frac{\frac{x}{3}}{2\left(3^5\right)\left(\frac{x^2}{9}+1\right)} + \frac{\frac{x}{3}\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}{4\left(3^5\right)\left(\frac{x^2}{9}+1\right)^2} \\
&= \frac{\arctan \frac{x}{3}}{648} + \frac{x}{162\left(x^2+9\right)} + \frac{x\left(9-x^2\right)}{324\left(x^2+9\right)} + c.
\end{aligned}$$

5. $\displaystyle\int \sqrt{\tan x}\, dx.$

Solución:

Haciendo
$$\tan x = t^2$$
Calculando dx:
$$\begin{aligned}
\sec^2 x\, dx &= 2t\, dt \\
dx &= \frac{2t}{\sec^2 x}\, dt,
\end{aligned}$$
como
$$\begin{aligned}
\sec^2 x &= \tan^2 x + 1 \\
&= t^4 + 1,
\end{aligned}$$
tenemos que
$$dx = \frac{2t}{t^4+1}\, dt.$$
De manera que
$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\tan x}\, dx &= \int t\left(\frac{2t}{t^4+1}\right) dt \\
&= \int \frac{2t^2}{t^4+1}\, dt \\
&= \int 2t^2\left(t^4+1\right)^{-1}\, dt,
\end{aligned}$$
donde $m = 2$, $n = 4$, $p = -1$, como
$$p = -1$$

entonces $\int \sqrt{\tan x}\, dx$ tiene una primitiva expresada por funciones elementales. Así

$$\int \sqrt{\tan x}\, dx = \int \frac{2t^2}{t^4+1}\, dt.$$

Como

$$\begin{aligned} t^4+1 &= t^4+2t^2+1-2t^2 \\ &= \left(t^2+1\right)^2-2t^2 \\ &= \left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\tan x}\, dx &= \int \frac{2t^2}{t^4+1}\, dt \\ &= \int \frac{2t^2}{\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)}\, dt. \end{aligned}$$

Aplicando el método por fracciones parciales:

$$\begin{aligned} \frac{2t^2}{\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)} &= \frac{At+B}{t^2-\sqrt{2}t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+\sqrt{2}t+1} \\ 2t^2 &= (At+B)\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)+(Ct+D)\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right), \end{aligned}$$

multiplicando por el denominador,

$$\begin{aligned} 2t^2 &= At^3+At^2\sqrt{2}+At+Bt^2+Bt\sqrt{2}+B+Ct^3-Ct^2\sqrt{2}+Ct+Dt^2-Dt\sqrt{2}+D \\ 2t^2 &= (A+C)\,t^3+\left(A\sqrt{2}+B+D-C\sqrt{2}\right)t^2+\left(B\sqrt{2}+A+C-D\sqrt{2}\right)t+B+D. \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes, tenemos

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ A\sqrt{2}+B+D-C\sqrt{2} &= 2 \\ B\sqrt{2}+A+C-D\sqrt{2} &= 0 \\ B+D &= 0 \end{aligned}$$

la solución del sistema de ecuaciones es:

$$A=\frac{1}{2}\sqrt{2},\quad B=0,\quad C=-\frac{1}{2}\sqrt{2},\quad D=0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{2t^2}{t^4+1}\, dt &= \int \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}t}{t^2-\sqrt{2}t+1}\, dt+\int \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}t}{t^2+\sqrt{2}t+1}\, dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}\, dt-\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{t}{t^2+\sqrt{2}t+1}\, dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{t-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\, dt-\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{t+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\, dt \qquad (7.1) \end{aligned}$$

Calculando la primera integral de (7.1)

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,dt &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{t-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,dt + \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|t^2-\sqrt{2}t+1\right| + \int \frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,dt
\end{aligned}$$

Para calcular la integral

$$\int \frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,dt,$$

completamos cuadrados en el denominador

$$\begin{aligned}
t^2-\sqrt{2}t+1 &= t^2-\sqrt{2}t+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
&= \left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

de donde

$$\int \frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,dt = \int \frac{dt}{\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}.$$

Hacemos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}}u &= t-\frac{\sqrt{2}}{2} \\
\frac{1}{\sqrt{2}}\,du &= dt,
\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,dt &= \int \frac{dt}{\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} \\
&= \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}}\,du \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{u^2+1}\,du \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}\arctan u \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}t-1\right).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,dt &= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|t^2-\sqrt{2}t+1\right| + \frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}t-1\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|t^2-\sqrt{2}t+1\right| + \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}t-1\right).\end{aligned}$$

Ahora calculando la segunda integral de (7.1)

$$\begin{aligned}-\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{t+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt + \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt + \int \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|t^2+\sqrt{2}t+1\right| + \int \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt.\end{aligned}$$

Para calcular la integral

$$\int \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt,$$

completamos cuadrados en el denominador

$$\begin{aligned}t^2+\sqrt{2}t+1 &= t^2+\sqrt{2}t+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\\ &= \left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2},\end{aligned}$$

de donde

$$\int \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}.$$

Hacemos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}u &= t+\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,du &= dt,\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt &= \int \frac{dt}{\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} \\
&= \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}}\,du \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{u^2+1}\,du \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}\arctan u \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}t+1\right).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
-\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{t+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|t^2+\sqrt{2}t+1\right|+\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}t+1\right) \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|t^2+\sqrt{2}t+1\right|+\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}t+1\right).
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\int \frac{2t^2}{t^4+1}\,dt &= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|t^2-\sqrt{2}t+1\right|+\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}t-1\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|t^2+\sqrt{2}t+1\right| \\
&\quad +\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}t+1\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right|+\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}t-1\right)+\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}t+1\right).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\tan x}\,dx &= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}\right|+\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2\tan x}-1\right) \\
&\quad +\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2\tan x}+1\right)+k.
\end{aligned}$$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

Considerando la sustitución,

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right)=t,$$

entonces,

$$x=2\arctan t.$$

Calculando dx,

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Expresando a $\operatorname{sen} x$ en función de t.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)}{\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \\
&= \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{2t}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} &= \int \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{2t}}\left(\frac{2}{1+t^2}\right)dt \\
&= \int \frac{2}{\sqrt{2t}\,(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}dt \\
&= 2\int (2t)^{-\frac{1}{2}}\left(1+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}dt,
\end{aligned}$$

donde

$$m = -\frac{1}{2},\ n = 2,\ p = -\frac{1}{2}.$$

Como

$$\begin{aligned}
p &= -\frac{1}{2} \\
\frac{m+1}{n} &= \frac{1}{4} \\
\frac{m+1}{n} + p &= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

No existe una primitiva elemental.

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

solución:

Como

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int \left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}dx.$$

Donde

$$m = 0,\ \ n = 4,\ \ p = -\frac{1}{2}.$$

Cumpliendo que

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{2} \\ \frac{m+1}{n} &= \frac{1}{4} \\ \frac{m+1}{n} + p &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

es decir ninguno es un número entero, por lo tanto no existe una primitiva elemental.

Capítulo 8

Integración de Funciones Trigonométricas

Las funciones que veremos a continuación son del tipo

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x).$$

Dependiendo de la paridad de esta función aplicaremos una de las siguientes sustituciones:

1. Si $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, sustituimos

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{sen} x \\ dt &= \cos x\, dx \end{aligned}$$

2. Si $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, sustituimos

$$\begin{aligned} t &= \cos x \\ dt &= -\operatorname{sen} x\, dx \end{aligned}$$

3. Si $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, sustituimos

$$\begin{aligned} t &= \tan x \\ dt &= \sec^2 x\, dx \end{aligned}$$

En cualquier otro caso, usaremos la sustitución

$$\begin{aligned} t &= \tan \frac{x}{2} \\ dt &= \sec^2 \frac{x}{2}\, dx \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{x}{2} &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos \frac{x}{2} &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned} \tag{8.1}$$

que reducirá el problema a integrar una función.

Ejemplos:

1. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{4-\operatorname{sen}^2 x}}dx.$

   Solución:

   Sustituimos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= t, \\ x &= \operatorname{arcsen} t, \end{aligned} \tag{8.2}$$

   calculando dx:

$$dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

   y además por (8.2)

$$\cos x = \sqrt{1-t^2},$$

   entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{\sqrt{4-\operatorname{sen}^2 x}}dx &= \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{4-t^2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}. \end{aligned}$$

   Resolviendo por el método de sustitución trigonométrica, tenemos

$$\begin{aligned} t &= 2\operatorname{sen} z \\ dt &= 2\cos z, \end{aligned}$$

   donde

$$\sqrt{4-t^2} = 2\cos z,$$

   de manera que

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} &= \int \frac{2\cos z}{2\cos z}dz \\ &= z \\ &= \operatorname{arcsen}\frac{t}{2}. \end{aligned}$$

   Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{\sqrt{4-\operatorname{sen}^2 x}}dx &= \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} \\ &= \operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{2}\right) + c. \end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}.$

   Solución:

Sustituimos

$$\begin{aligned}\tan\frac{x}{2} &= t\\ x &= 2\arctan t.\end{aligned}$$

Por (8.1), tenemos

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2},$$

calculando dx:

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt,$$

entonces

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}} &= \int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\sqrt{1+\frac{2t}{1+t^2}}}dt\\ &= \int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{t+1}{\sqrt{1+t^2}}}dt\\ &= \int\frac{2}{(t+1)\sqrt{1+t^2}}dt.\end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned}z &= \frac{1}{t+1}\\ t &= \frac{1-z}{z}\end{aligned}$$

Calculando dt:

$$dt = -\frac{1}{z^2}dz$$

entonces,

$$\begin{aligned}\int\frac{2}{(t+1)\sqrt{1+t^2}}dt &= -2\int\frac{z\,dz}{z^2\sqrt{\frac{1-z+z^2}{z^2}}}\\ &= -2\int\frac{dz}{\sqrt{1-z+z^2}}\\ &= -2\int\frac{dz}{\sqrt{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}.\end{aligned}$$

Hagamos

$$\begin{aligned}z-\frac{1}{2} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\tan u\\ z &= \frac{\sqrt{3}}{2}\tan u+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Calculando dz:

$$dz = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 u \ du,$$

sustituyendo en la integral,

$$\begin{aligned}
-2\int \frac{dz}{\sqrt{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} &= -2\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 u}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec u}du \\
&= -2\int \sec u \ du \\
&= -2\ln|\sec u+\tan u| \\
&= -2\ln\left|\frac{2\sqrt{1-z+z^2}}{\sqrt{3}}+\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right| \\
&= -2\ln\left|\frac{2\sqrt{1-z+z^2}+2z+1}{\sqrt{3}}\right|,
\end{aligned}$$

como

$$z = \frac{1}{t+1}$$

tenemos,

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{(t+1)\sqrt{1+t^2}}dt &= -2\ln\left|\frac{2\sqrt{1-\frac{1}{t+1}+\left(\frac{1}{t+1}\right)^2}+2\left(\frac{1}{t+1}\right)+1}{\sqrt{3}}\right| \\
&= -2\ln\left|\frac{2\sqrt{(t+1)^2-t-1+1}+2+t+1}{\sqrt{3}\,(t+1)}\right| \\
&= -2\ln\left|\frac{2\sqrt{t^2+t+1}+t+3}{\sqrt{3}\,(t+1)}\right|
\end{aligned}$$

y

$$\tan\frac{x}{2} = t$$

por lo tanto

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}} = -2\ln\left|\frac{2\sqrt{\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+1}+\tan\frac{x}{2}+3}{\sqrt{3}\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)}\right| + c.$$

3. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x}dx.$

Solución:

Sea

$$\begin{aligned} t &= \cos x \\ x &= \arccos t \\ dx &= \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\sqrt{1-t^2} = \operatorname{sen} x,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x} dx &= \int \frac{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{1+t^2} \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= -\int \frac{1-t^2}{1+t^2} dt \\ &= \int 1 - \frac{2}{1+t^2}\, dt \\ &= t - 2\arctan t \\ &= \cos x - 2\arctan(\cos x), \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos^2 x} dx = \cos x - 2\arctan(\cos x) + c.$$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$.

Solución:

Sea

$$\begin{aligned} \tan\frac{x}{2} &= t \\ x &= 2\arctan t \\ dx &= \frac{2}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

De (8.1) tenemos,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \frac{2t}{t^2+1} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t-t^2+1}{t^2+1}} dt \\ &= \int \frac{2}{2t - t^2 + 1} dt \\ &= \int \frac{2}{-(t-1)^2 + 2} dt.\end{aligned}$$

sea

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \operatorname{sen} z &= t - 1 \\ t &= \sqrt{2} \operatorname{sen} z + 1 \\ dt &= \sqrt{2} \cos z \ dz.\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{\left(-(t-1)^2 + 2\right)} dt &= \int \frac{2}{2\cos^2 z} \sqrt{2} \cos z \ dz \\ &= \sqrt{2} \int \sec z \ dz \\ &= \sqrt{2} \ln |\sec z + \tan z| \\ &= \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + t - 1}{\sqrt{2 - (t-1)^2}} \right|.\end{aligned}$$

Como $t = \tan \dfrac{x}{2}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x} &= \int \frac{2}{\left(-(t-1)^2 + 2\right)} dt \\ &= \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{2 - \left(\tan \frac{x}{2} - 1\right)^2}} \right| + c.\end{aligned}$$

5. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \ dx.$

Solución:

Sea

$$\begin{aligned}\cos x &= t \qquad (8.3) \\ x &= \arccos t \\ dx &= \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} dt.\end{aligned}$$

por (8.3)

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1-t^2},$$

de manera que,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx &= \int \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx \\
&= \int \frac{2t\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1+t^2}}\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt \\
&= -\int \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}dt \\
&= -2\sqrt{1+t^2},
\end{aligned}$$

como

$$\cos x = t$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx &= -2\sqrt{1+t^2} \\
&= -2\sqrt{1+\cos^2 x} + c.
\end{aligned}$$

6. $\displaystyle\int \sqrt{1-\operatorname{sen} x}dx.$

Solución:

Sea

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= t \\
x &= \operatorname{arcsen} t \\
dx &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt,
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-\operatorname{sen} x}dx &= \int \sqrt{1-t}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \\
&= \int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{(1-t)(1+t)}}dt \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{1+t}}dt \\
&= 2\sqrt{1+t},
\end{aligned}$$

como

$$\operatorname{sen} x = t$$

por lo tanto,

$$\int \sqrt{1-\operatorname{sen} x}\,dx = 2\sqrt{1+\operatorname{sen} x} + c.$$

7. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{\sec^2 x + \tan^2 x}}dx.$

Solución:

Hagamos,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= t \\ x &= \operatorname{arcsen} t \\ dx &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt, \end{aligned} \tag{8.4}$$

entonces por (8.4),

$$\begin{aligned} \cos x &= \sqrt{1-t^2} \\ \tan x &= \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\ \sec x &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \end{aligned}$$

de manera que,

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{\sec^2 x + \tan^2 x}}dx &= \int \frac{t^2}{\sqrt{\frac{1+t^2}{1-t^2}}}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ &= \int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt, \end{aligned}$$

hacemos el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} t &= \tan z \\ dt &= \sec^2 z\ dz \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt &= \int \frac{\tan^2 z}{\sec z}\sec^2 z\ dz \\ &= \int \tan^2 z \sec z\ dz \\ &= \int \left(\sec^2 z - 1\right)\sec z\ dz \\ &= \int \sec^3 z - \sec z\ dz \\ &= \frac{1}{2}\sec z \tan z - \frac{1}{2}\ln\left|\sec z + \tan z\right|, \end{aligned}$$

como

$$t = \tan z,$$

entonces,

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt = \frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+t^2}+t\right|,$$

además,

$$\operatorname{sen} x = t$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{\sec^2 x + \tan^2 x}}dx &= \frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+t^2}+t\right| \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}+\operatorname{sen} x\right| + c.\end{aligned}$$

Capítulo 9

Integrales impropias

Integral definida

Si $F(x)$ es cualquier función primitiva de la función continua $f(x)$, la integral definida de $f(x)$ entre los limites a y b es,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Propiedades:

- Si c es cualquier número y f integrable en $[a,b]$, entonces la función $cf(x)$ es integrable en $[a,b]$ y
$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$
- Si $f(x)$ y $g(x)$ son integrables en $[a,b]$, entonces $f(x)+g(x)$ es integrable en $[a,b]$ y
$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$
- Si $f(x)$ es integrable en un intervalo $[a,b]$, y si m y M son números tales que $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$ entonces
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$
- Si f y g son integrables en $[a,b]$ y si $f(x) \leq g(x)$ para todo x en $[a,b]$, entonces
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$
- Si $f(x)$ es integrable en $[a,b]$ y si c es cualquier número en $[a,b]$, entonces
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$
- Si $f(x)$ es integrable en un intervalo $[a,b]$, entonces
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Ejemplos:

1. $\int_0^1 x^2dx$.
   Solución:
$$\int_0^1 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \; dx$

Solución:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x dx &= [-\cos x]_0^{\pi/2}\\ &= -\cos\pi/2+\cos 0\\ &= 1\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos 2x \; dx.$

Solución:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} x^3\cos 2x\; dx &= \frac{x^3}{2}\operatorname{sen} 2x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{3}{2}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} 2x dx\\ &= \frac{x^3}{2}\operatorname{sen} 2x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{3}{2}\left[-\frac{x^2}{2}\cos 2x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} x\cos 2x dx\right]\\ &= \frac{x^3}{2}\operatorname{sen} 2x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{3}{2}\left[-\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{x}{2}\operatorname{sen} 2x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} 2x dx.\right]\\ &= \frac{x^3}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{3x^2}{4}\cos 2x - \frac{3x}{4}\operatorname{sen} 2x - \frac{3}{8}\cos 2x\Big|_{-\pi}^{\pi}.\\ &= \frac{\pi^3}{2}\operatorname{sen}(2\pi) + \frac{3\pi^2}{4}\cos(2\pi) - \frac{3\pi}{4}\operatorname{sen}(2\pi) - \frac{3}{8}\cos(2\pi)\\ &\quad -\frac{\pi^3}{2}\operatorname{sen}(-2\pi) - \frac{3\pi^2}{4}\cos(-2\pi) + \frac{3\pi}{4}\operatorname{sen}(-2\pi) + \frac{3}{8}\cos(-2\pi)\\ &= \frac{3\pi^2}{4} - \frac{3}{8} - \frac{3\pi^2}{4} + \frac{3}{8}\\ &= 0.\end{aligned}$$

4. $\int_{-2}^{2} \dfrac{dx}{x^2+4}.$

Solución:

Mediante el método de sustitución trigonométrica,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4} &= \left[\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right]_{-2}^{2}\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

5. $\int_{-1}^{1} \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx.$

Solución:

Utilizando el método de Euler, tenemos que

$$\begin{aligned}\sqrt{4-x^2} &= xt+2 \qquad (9.1)\\ 4-x^2 &= (xt+2)^2\\ &= x^2t^2+4xt+4,\end{aligned}$$

despejando x se tiene

$$x=\frac{-4t}{t^2+1}.$$

Calculando dx

$$dx=\frac{4\left(t^2-1\right)}{\left(t^2+1\right)^2}dt,$$

entonces,

$$\begin{aligned}\sqrt{4-x^2} &= xt+2\\ &= \frac{-4t^2}{t^2+1}+2\\ &=\\ &= \frac{-2(t^2-1)}{(t^2+1)}.\end{aligned}$$

Sustituyendo en la integral dada

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx &= \int\left(\frac{\frac{-4t}{t^2+1}}{\frac{-2(t^2-1)}{(t^2+1)}}\right)\frac{4\left(t^2-1\right)}{\left(t^2+1\right)^2}dt\\ &= 4\int\frac{2t}{\left(t^2+1\right)^2}dt\\ &= -\frac{4}{t^2+1}.\end{aligned}$$

Por (9.1)

$$\int\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx=-\frac{4}{\left(\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}\right)^2+1}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx &= \left[-\frac{4}{\left(\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}\right)^2+1}\right]_{-1}^{1}\\ &= -\frac{4}{\left(\sqrt{3}-2\right)^2+1}+\frac{4}{\left(-\sqrt{3}+2\right)^2+1}\\ &= 0.\end{aligned}$$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{dx}{1-\operatorname{sen} x}$.

Solución:

Hagamos

$$\begin{aligned} x &= 2\arctan z \\ dx &= \frac{2}{1+z^2}\,dz. \end{aligned}$$

Si $x = 0$,

$$\arctan z = 0,$$

es decir

$$z = 0,$$

y cuando $x = \dfrac{\pi}{3}$

$$\arctan z = \frac{\pi}{6},$$

entonces

$$z = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Sustituyendo tenemos,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x} &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\frac{2}{1+z^2}}{1-\frac{2z}{1+z^2}} dz \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{(z-1)^2} dz \\ &= \left[\frac{2}{1-z}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \\ &= \frac{2}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} - 2 \\ &= \sqrt{3}+1. \end{aligned}$$

7. $\int_2^4 x^{-\frac{1}{2}} \left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} dx$

Mediante el método de Chebychev, hagamos

$$x^{\frac{1}{2}} = z,$$

entonces

$$x = z^2,$$

calculando dx

$$dx = 2z\ dz.$$

Transformamos la igualdad para obtener en el paréntesis una expresión lineal en z

$$\begin{aligned}\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}dx &= \int z^{-1}(1+z)^{-1}\,2z\,dz\\ &= \int \frac{2}{1+z}dz\\ &= 2\ln|1+z|.\end{aligned}$$

Sustituyendo $z = x^{\frac{1}{2}}$, tenemos

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}dx = 2\ln\left|1+x^{\frac{1}{2}}\right|.$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_2^4 x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}dx &= \left[2\ln\left|1+x^{\frac{1}{2}}\right|\right]_2^4\\ &= 2\ln\left|1+4^{\frac{1}{2}}\right| - 2\ln\left|1+2^{\frac{1}{2}}\right|\\ &= 2\ln\left|\frac{3}{1+\sqrt{2}}\right|.\end{aligned}$$

8. $\int_{-1}^{3}\frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

Solución:

Por medio del método alemán, tenemos

$$\int \frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \left(Ax^2+Bx+C\right)\sqrt{x^2+1} + \int \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Derivando

$$\frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+1}} = (2Ax+B)\sqrt{x^2+1} + \frac{x\left(Ax^2+Bx+C\right)}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}},$$

entonces

$$\begin{aligned}x^3-1 &= (2Ax+B)\left(x^2+1\right) + x\left(Ax^2+Bx+C\right) + \lambda\\ &= 3Ax^3 + 2Bx^2 + (2A+C)\,x + B + \lambda\end{aligned}$$

Igualando coeficientes y resolviendo el sistema de ecuaciones, encontramos

$$A = \frac{1}{3},\ B = 0,\ C = -\frac{2}{3},\ \lambda = -1.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \left(Ax^2+Bx+C\right)\sqrt{x^2+1} + \int \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}}dx \\ &= \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}\right)\sqrt{x^2+1} - \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx.\end{aligned}$$

Donde por Euler (ejemplo pág. 43) se tiene,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = -\ln\left|\sqrt{x^2+1}-x\right|.$$

Por lo tanto

$$\int \frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{x^2}{3}\sqrt{x^2+1} - \frac{2}{3}\sqrt{x^2+1} + \ln\left|\sqrt{x^2+1}-x\right|.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} \frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \left[\frac{x^2}{3}\sqrt{x^2+1} - \frac{2}{3}\sqrt{x^2+1} + \ln\left|\sqrt{x^2+1}-x\right|\right]_{-1}^{3} \\ &= \frac{3^2}{3}\sqrt{3^2+1} - \frac{2}{3}\sqrt{3^2+1} + \ln\left|\sqrt{3^2+1}-3\right| - \left(\frac{1}{3}\sqrt{1+1} - \frac{2}{3}\sqrt{1+1}\right) \\ &\quad - \ln\left|\sqrt{1+1}+1\right| \\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{2}+1}\right| + \frac{\sqrt{2}+7\sqrt{10}}{3}.\end{aligned}$$

9. $\int_2^5 \frac{1}{\left(x^3-1\right)^2}dx.$

Solución:

Utilizando el método de Ostrogradski, tenemos

$$\int \frac{1}{\left(x^3-1\right)^2}dx = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1} + \int \frac{Ex^2+Fx+G}{x^3-1}dx.$$

Derivando los miembros de la igualdad, tenemos

$$\frac{1}{\left(x^3-1\right)^2}=\frac{(2Ax+B)\left(x^3-1\right)-3x^2\left(Ax^2+Bx+C\right)}{\left(x^3-1\right)^2}+\frac{Ex^2+Fx+G}{x^3-1},$$

multiplicando por $\left(x^3-1\right)^2$,

$$\begin{aligned}1 &= (2Ax+B)\left(x^3-1\right)-3x^2\left(Ax^2+Bx+C\right)+\left(Ex^2+Fx+G\right)\left(x^3-1\right)\\ &= 2Ax^4+Bx^3-2Ax-B-3Ax^4-3Bx^3-3Cx^2+Ex^5+Fx^4+Gx^3-Ex^2-Fx-G\\ &= Ex^5\,(-A+F)\,x^4+(G-2B)\,x^3+(-3C-E)\,x^2+(-2A-F)\,x-G-B.\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes, y resolviendo el sistema de ecuaciones, llegamos a,

$$E=0, A=0, C=0, B=-\frac{1}{3}, F=0, G=-\frac{2}{3}.$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes en la integral, se sigue

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\left(x^3-1\right)^2}dx &= \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1}+\int\frac{Ex^2+Fx+G}{x^3-1}dx\\ &= \frac{-\frac{1}{3}x}{x^3-1}+\int\frac{-\frac{2}{3}}{x^3-1}dx.\end{aligned}$$

Donde,

$$\int\frac{-\frac{2}{3}}{x^3-1}dx=-\frac{2}{9}\ln(x-1)+\frac{1}{9}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Así pues la integral inicial,

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\left(x^3-1\right)^2}dx &= \frac{-\frac{1}{3}x}{x^3-1}+\int\frac{-\frac{2}{3}}{x^3-1}dx\\ &= \frac{-\frac{1}{3}x}{x^3-1}-\frac{2}{9}\ln(x-1)+\frac{1}{9}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_2^5\frac{1}{\left(x^3-1\right)^2}dx &= \left[\frac{-\frac{1}{3}x}{x^3-1}-\frac{2}{9}\ln(x-1)+\frac{1}{9}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_2^5\\ &= \frac{-\frac{5}{3}}{5^3-1}-\frac{2}{9}\ln(5-1)+\frac{1}{9}\ln\left(5^2+5+1\right)+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{10+1}{\sqrt{3}}\right)\\ &\quad-\left(\frac{-\frac{2}{3}}{2^3-1}-\frac{2}{9}\ln(2-1)+\frac{1}{9}\ln\left(2^2+2+1\right)+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{4+1}{\sqrt{3}}\right)\right)\\ &= \frac{1}{9}\ln\frac{31}{112}+\frac{2}{9}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{5}\sqrt{3}\right)-\frac{2}{9}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{11}\sqrt{3}\right)+\frac{71}{868}.\end{aligned}$$

Integrales Impropias

Las integrales impropias se clasifican en:

Integrales impropias de primera especie.

Son aquellas con límites de integración infinitos.

- Si $f(x)$ es integrable en el intervalo $a \leq x < \infty$, definimos

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

- Si $f(x)$ es integrable en $-\infty < x \leq b$, definimos

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

- Si $f(x)$ es integrable en $-\infty < x < \infty$, definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)\,dx,$$

donde c es cualquier numero real.

En cada caso la integral impropia converge si el límite existe y es finito, y el límite es el valor de la integral impropia. Si el límite no existe la integral impropia diverge. En el último caso la integral impropia converge si ambas integrales del lado derecho convergen, de lo contrario diverge.

Ejemplos:

1. $\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+4}$.

   Solución:

   El límite superior de integración es infinito. Consideremos

$$\begin{aligned} \lim_{u\to+\infty} \int_0^u \frac{dx}{x^2+4} &= \lim_{u\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right]_0^u \\ &= \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2} - \frac{1}{2}\arctan 0 \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

   Por lo tanto

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{\pi}{4}.$$

2. $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2x}\, dx$

   Solución:

   El límite inferior de integración es infinito. Consideremos

$$\begin{aligned} \lim_{u\to-\infty} \int_u^0 \mathrm{e}^{2x}\, dx &= \lim_{u\to-\infty} \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_u^0 \\ &= \lim_{u\to-\infty} \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2u}}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

   Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2x}\, dx = \frac{1}{2}.$$

3. $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$.

   Solución:

   El límite superior de integración es infinito. Consideremos

$$\begin{aligned} \lim_{u\to+\infty} \int_1^u \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{u\to+\infty} \left[2\sqrt{x}\right]_1^u \\ &= \lim_{u\to+\infty} 2\sqrt{u} - 2 \\ &= \infty. \end{aligned}$$

   Por lo tanto la integral diverge.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

   Solución:

   Notemos que,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + 1} dx.$$

   Ambos límites de integración son infinitos. Consideremos,

$$\begin{aligned} \lim_{u\to-\infty} \int_u^0 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1} dx + \lim_{u\to+\infty} \int_0^u \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1} dx &= \lim_{u\to-\infty} \left[\arctan \mathrm{e}^x\right]_u^0 + \lim_{u\to+\infty} \left[\arctan \mathrm{e}^x\right]_0^u \\ &= \lim_{u\to-\infty} \frac{\pi}{4} - \arctan \mathrm{e}^u + \lim_{u\to+\infty} \arctan \mathrm{e}^u - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{\pi}{2}.$$

5. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x \; dx.$

Solución:

El límite superior de integración es infinito. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x dx &= \lim_{u \to +\infty} \int_0^u e^{-x} \operatorname{sen} x dx \\
&= \lim_{u \to +\infty} \left[-\frac{e^{-x}}{2} (\operatorname{sen} x + \cos x) \right]_0^u \\
&= \lim_{u \to +\infty} -\frac{e^{-u}}{2} (\operatorname{sen} u + \cos u) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x dx = \frac{1}{2}.$$

6. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}.$

Solución:

Si $p \neq 1$

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} &= \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} \\
&= \lim_{b \to \infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^b \\
&= \lim_{b \to \infty} \frac{b^{-p+1} - 1}{-p+1} \\
&= \lim_{b \to \infty} \frac{1}{-p+1} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right),
\end{aligned}$$

como

$$\lim_{b \to \infty} \frac{1}{b^{p-1}} = \begin{cases} 0 & \text{si } p > 1 \\ \infty & \text{si } p < 1, \end{cases}$$

entonces,

$$\lim_{b \to \infty} \frac{1}{-p+1} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right) = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{si } p > 1 \\ \\ \infty & \text{si } p < 1. \end{cases} \tag{9.2}$$

Por lo tanto, la integral converge al valor $\dfrac{1}{p-1}$ si $p>1$ y diverge si $p<1$.

Si $p=1$

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} &= \lim_{b\to\infty}\left[\ln x\right]_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\ln b-\ln 1 \\ &= \lim_{b\to\infty}\ln b \\ &= \infty.\end{aligned}$$

La integral también diverge.

7. $\displaystyle\int_1^{\infty}x^3\ln x^4dx$

Solución:

Tenemos,

$$\begin{aligned}\int x^3\ln x^4dx &= \frac{1}{4}\left(x^4\ln x^4-x^4\right) \\ &= \frac{1}{4}x^4\ln\left|x^4-1\right|,\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}x^3\ln x^4dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^3\ln x^4dx \\ &= \frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}x^4\left(\ln x^4-1\right)\Big|_1^b \\ &= \frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}b^4\left(\ln b^4-1\right)+1 \\ &= \infty,\end{aligned}$$

por lo tanto la integral diverge.

Integrales impropias de segunda especie

Son integrales de funciones que no están acotadas en un punto dentro del intervalo de integración.

- Si $f(x)$ es integrable en $a<x\leq b$, pero no esta acotada en $x=a$, definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to a^+}\int_{\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

- Si $f(x)$ es integrable en $a \leq x < b$, pero no esta acotada en $x = b$, definimos
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to b^-} \int_a^{\varepsilon} f(x)\,dx.$$
- Si $f(x)$ es integrable en $a \leq x \leq b$, pero no acotada en $x = c$, donde $a < c < b$, definimos
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to c^-} \int_a^{\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to c^+} \int_{\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

En cada caso si el límite es finito decimos que la integral impropia converge, y el límite es el valor de la integral impropia. Si el límite no existe la integral impropia diverge. En el tercer caso la integral impropia converge si ambas integrales del lado derecho convergen, de lo contrario diverge.

Ejemplos:

1. $\int_0^3 \dfrac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

   Solución:

   El integrando no está acotado en $x = 3$. Consideremos
$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 3^-} \int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \to 3^-} \left[\operatorname{arcsen} \frac{x}{3}\right]_0^{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 3^-} \left(\operatorname{arcsen} \frac{\varepsilon}{3} - \operatorname{arcsen} 0\right) \\
&= \operatorname{arcsen} 1 \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

   Por lo tanto,
$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

2. $\int_0^2 \dfrac{dx}{2-x}$.

   Solución:

   El integrando no está acotado en $x = 2$, consideremos
$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 2^-} \int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{2-x} &= \lim_{\varepsilon \to 2^-} \left(-\ln(2-x)\right]_0^{\varepsilon}) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 2^-} \left(-\ln(2-\varepsilon) + \ln(2)\right)
\end{aligned}$$

   Así
$$\lim_{\varepsilon \to 2^-} -\ln(2-\varepsilon) = \infty$$

   Por lo tanto, la integral diverge.

3. $\int_0^4 \dfrac{dx}{(x-1)^2}$.

Solución:

El integrando no está acotado en $x = 1$, un valor que está entre los limites de integración 0 y 4. Consideremos

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{\varepsilon\to 1^-} \int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon\to 1^+} \int_{\varepsilon}^4 \frac{dx}{(x-1)^2} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 1^-} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 1^+} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_{\varepsilon}^4 \\
&= \lim_{\varepsilon\to 1^-} \left(\frac{-1}{\varepsilon-1} - 1\right) + \lim_{\varepsilon\to 1^+} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{\varepsilon-1}\right) \\
&= \infty + \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la integral diverge.

4. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \tan^2 3x \; dx$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 3x dx &= \int \sec^2 3x - 1 \; dx \\
&= \frac{\tan 3x}{3} - x.
\end{aligned}$$

La tangente no está acotada en $-\frac{\pi}{2}$, entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \tan^2 3x dx &= \lim_{\varepsilon\to -\frac{\pi}{2}^+} \int_{\varepsilon}^0 \tan^2 3x dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan 3x}{3} - x \Big|_{\varepsilon}^0 \\
&= \lim_{\varepsilon\to -\frac{\pi}{2}^+} -\frac{\tan 3\varepsilon}{3} + \varepsilon \\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

por lo tanto la integral diverge.

5. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sec x \; dx.$

Solución:

La función $\sec x$ no está acotada en $\frac{1}{2}\pi$, entonces,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sec x dx &= \lim_{\varepsilon\to\frac{\pi}{2}^-} \int_0^{\varepsilon} \sec x dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to\frac{\pi}{2}^-} \ln|\sec x + \tan x|\big|_0^{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to\frac{\pi}{2}^-} \ln|\sec\varepsilon + \tan\varepsilon| - \ln|1| \\
&= \infty,
\end{aligned}
$$

por lo tanto la integral propuesta diverge.

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x \cot x} dx$.

Solución:

Tenemos que,

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{\cos x \cot x} dx &= \int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} dx \\
&= 2\sqrt{\operatorname{sen} x}
\end{aligned}
$$

La función $\sqrt{\cos x \cot x}$, no está acotada en 0, entonces,

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x \cot x} dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x \cot x}\ dx
$$

por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x \cot x}\ dx &= 2 \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sqrt{\operatorname{sen} x}\Big|_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2 \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sqrt{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\operatorname{sen}\varepsilon} \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

es decir la integral converge.

7. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \cos x}$.

Solución:

Hagamos,

$$
\begin{aligned}
t &= \tan\frac{x}{2} \\
x &= 2\arctan t \\
dx &= \frac{2}{t^2+1} dt,
\end{aligned}
$$

por el Capítulo 8, tenemos,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x &= \frac{2t}{t^2+1}\\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2},\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \cos x} &= \int \frac{\frac{2}{t^2+1}}{\frac{2t+t^2-1}{t^2+1}} dt\\ &= \int \frac{2}{t^2+2t-1} dt\\ &= \int \frac{2}{(t+1)^2-2} dt,\end{aligned}$$

sea

$$\begin{aligned}t+1 &= \sqrt{2}\sec z\\ dt &= \sqrt{2}\sec z \tan z\, dz,\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{(t+1)^2-2} dt &= 2\int \frac{\sqrt{2}\sec z \tan z}{2\tan^2 z} dz\\ &= \sqrt{2}\int \frac{\sec z}{\tan z} dz\\ &= \sqrt{2}\int \frac{1}{\operatorname{sen} z} dz\\ &= -\sqrt{2}\ln|\csc z + \cot z|\\ &= -\sqrt{2}\ln\left|\frac{t+1+\sqrt{2}}{\sqrt{(t+1)^2-2}}\right|\end{aligned}$$

Como $t = \tan\frac{x}{2}$,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \cos x} &= -\sqrt{2}\ln\left|\frac{t+1+\sqrt{2}}{\sqrt{(t+1)^2-2}}\right|\\ &= -\sqrt{2}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^2-2}}\right|\\ &= -\sqrt{2}\left(\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^2-2\right|\right).\end{aligned}$$

La función $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x - \cos x}$ no está acotada en $\dfrac{\pi}{4}$, entonces,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \cos x} = \lim_{\varepsilon \to \frac{\pi}{4}^-} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\varepsilon} \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \cos x},$$

entonces, $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to \frac{\pi}{4}^-} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\varepsilon} \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \cos x}$ es igual a

$$\begin{aligned}
&= -\sqrt{2} \lim_{\varepsilon \to \frac{\pi}{4}^-} \ln\left|\tan\frac{x}{2} + 1 + \sqrt{2}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\left(\tan\frac{x}{2} + 1\right)^2 - 2\right|\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\varepsilon} \\
&= -\sqrt{2}\left(\begin{array}{c} \lim_{\varepsilon \to \frac{\pi}{4}^-} \ln\left|\tan\frac{\varepsilon}{2} + 1 + \sqrt{2}\right| - \dfrac{1}{2}\ln\left|\left(\tan\frac{\varepsilon}{2} + 1\right)^2 - 2\right| \\ -\ln\left|-\tan\frac{\pi}{8} + 1 + \sqrt{2}\right| - \dfrac{1}{2}\ln\left|\left(-\tan\frac{\pi}{8} + 1\right)^2 - 2\right| \end{array}\right) \\
&= -\sqrt{2}\left(\lim_{\varepsilon \to \frac{\pi}{4}^-} \ln\left|\tan\frac{\varepsilon}{2} + 1 + \sqrt{2}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\left(\tan\frac{\varepsilon}{2} + 1\right)^2 - 2\right| - \ln|2| - \frac{1}{2}\ln\left|4 - 4\sqrt{2}\right|\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\ln|2| + \frac{1}{2}\ln\left|4 - 4\sqrt{2}\right|\right) - \sqrt{2}\left(\lim_{\varepsilon \to \frac{\pi}{4}^-} \ln\left|\tan\frac{\varepsilon}{2} + 1 + \sqrt{2}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\left(\tan\frac{\varepsilon}{2} + 1\right)^2 - 2\right|\right).
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\varepsilon \to \frac{\pi}{4}^-} \ln\left|\tan\frac{\varepsilon}{2} + 1 + \sqrt{2}\right| = \frac{3}{2}\ln 2$$

y

$$\lim_{\varepsilon \to \frac{\pi}{4}^-} \left(-\frac{1}{2}\ln\left|\left(\tan\frac{\varepsilon}{2} + 1\right)^2 - 2\right|\right) = \infty$$

entonces

$$-\sqrt{2}\left(\lim_{\varepsilon \to \frac{\pi}{4}^-} \ln\left|\tan\frac{\varepsilon}{2} + 1 + \sqrt{2}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\left(\tan\frac{\varepsilon}{2} + 1\right)^2 - 2\right|\right) = -\infty.$$

Por lo tanto la integral propuesta diverge.

8. $\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}$

Solución:

Haciendo

$$\begin{aligned}
t &= \tan\frac{x}{2} \\
x &= 2\arctan t \\
dx &= \frac{2}{t^2 + 1}dt,
\end{aligned}$$

por el capítulo 8; tenemos

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} &= \int \frac{\frac{2}{t^2+1}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} dt \\
&= \int \frac{2}{1+2t+t^2} dt \\
&= 2\int \frac{dt}{(t+1)^2} \\
&= -\frac{2}{t+1} \\
&= -\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}
\end{aligned}$$

Como la función $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x}$ no esta acotada en $\frac{3}{2}\pi$, lo podemos ver,

$$\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} = \lim_{\varepsilon \to \frac{3}{2}\pi^-} \int_{\pi}^{\varepsilon} \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x},$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to \frac{3}{2}\pi^-} \int_{\pi}^{\varepsilon} \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} &= 2 \lim_{\varepsilon \to \frac{3}{2}\pi^-} -\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1}\Bigg|_{\pi}^{\varepsilon} \\
&= 2 \lim_{\varepsilon \to \frac{3}{2}\pi^-} \left(-\frac{1}{\tan\frac{\varepsilon}{2}+1} + \frac{1}{\tan\pi+1}\right) \\
&= 2 - 2 \lim_{\varepsilon \to \frac{3}{2}\pi^-} \frac{1}{\tan\frac{\varepsilon}{2}+1},
\end{aligned}$$

como

$$\lim_{\varepsilon \to \frac{3}{2}\pi^-} \frac{1}{\tan\frac{\varepsilon}{2}+1} = -\infty$$

de donde

$$-2 \lim_{\varepsilon \to \frac{3}{2}\pi^-} \frac{1}{\tan\frac{\varepsilon}{2}+1} = \infty,$$

así

$$\lim_{\varepsilon \to \frac{3}{2}\pi^-} \int_{\pi}^{\varepsilon} \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} = \infty.$$

Por lo tanto, la integral diverge.

9. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x+1}$.

Solución:

El integrando no esta acotado en $x=-1$, consideramos

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x+1} = \lim_{c\to -1^+} \int_{c}^{0} \frac{dx}{x+1}$$

Donde

$$\begin{aligned} \lim_{c\to -1^+} \int_{c}^{0} \frac{dx}{x+1} &= \lim_{c\to -1^+} \left[\ln|x+1|\right]_c^0 \\ &= \lim_{c\to -1^+} \ln|1| - \ln|c+1| \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral diverge.

Criterios de convergencia

Proposición- Si la integral propia $\int_a^b f(x)\,dx$ existe para cada $b \geq a$ y $f(x)$ es no negativa para todo $x \geq 0$, entonces la $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge si y solo si, existe una constante $M \geq 0$, tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

para cada $b \geq a$.

Demostración:

$\Longrightarrow$) Supongamos que $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\ dx$ converge a L, es decir,

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\ dx = L.$$

de donde, dada $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que si $b > N$ entonces

$$\left| \int_a^b f(x) - L \right| < \varepsilon$$

así, si $b > N$ entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx < \varepsilon + L$.

Como $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq a$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$ en particular $\displaystyle\int_a^N f(x)\ dx \geq 0$.

Sea $M = \varepsilon + L + \displaystyle\int_a^N f(x)\ dx$.

Si $b > N$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx < \varepsilon + L \leq M$.

Si $b \leq N$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^N f(x)\ dx \leq M.$

$\Longleftarrow$) Supongamos que existe una constante $M \geq 0$, tal que

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq M \qquad \text{para todo } b \geq a.$$

Sea

$$I(b) = \int_a^b f(x)\ dx$$

y consideremos $X = \{I(b) \mid b \geq a\}$ de donde $X \neq \varnothing$ y está acotado superiormente, entonces tiene supremo. Sea $L = \sup X$.

P.D. $\lim_{b\to\infty} \displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = L.$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $b \geq a$ tal que

$$L - \varepsilon < I(b)$$

de donde

$$L - I(b) < \varepsilon.$$

Si $b' > b$ entonces

$$I(b) \leq I(b')$$

ya que $f(x) \geq 0$ entonces

$$L - I(b') \leq L - I(b) < \varepsilon$$

esto implica que

$$L - I(b') < \varepsilon \qquad \text{para todo } b' \geq b,$$

o sea

$$|I(b') - L| = L - I(b') < \varepsilon \qquad \text{si } b' \geq b,$$

es decir

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\ dx = L.$$

Teorema

Si la integral propia $\int_a^b f(x)\, dx$ existe y $f(x)$ es no negativa para cada $b \geq a$, y si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$, donde $\int_a^\infty g(x)\, dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x)\, dx$ también converge y

$$\int_a^\infty f(x)\, dx \leq \int_a^\infty g(x)\, dx$$

Demostración:

Como la integral $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\ dx$ converge, por el teorema anterior existe $M > 0$ tal que

$$\int_a^b g(x)\ dx \leq M \qquad \text{para todo } b \geq a.$$

Además sabemos que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$,entonces

$$\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx \leq M \qquad \text{para todo } b \geq a$$

y aplicando nuevamente el teorema anterior tenemos que $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\ dx$ converge.

Por otro lado, como

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\ dx &\leq \int_a^b g(x)\ dx \\
\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\ dx &\leq \lim_{b\to\infty}\int_a^b g(x)\ dx \\
\int_a^\infty f(x)\ dx &\leq \int_a^\infty g(x)\ dx.
\end{aligned}$$

Teorema (criterio de comparación del limite)

Si dos integrales propias $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_a^b g(x)\,dx$ existen para cada $b \geq a$, siendo $0 \leq f(x)$ y $0 < g(x)$ para todo $x \geq a$ y si

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = c$$

donde $0 < c < \infty$, entonces las integrales $\int_a^\infty f(x)\,dx$, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ o convergen ambas o divergen ambas.

Demostración:

Como

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = c$$

entonces $\forall\, \varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $x > N$ entonces $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - c\right| < \varepsilon$,es decir

$$\begin{aligned}
-\varepsilon &< \frac{f(x)}{g(x)} - c < \varepsilon \\
c-\varepsilon &< \frac{f(x)}{g(x)} < c+\varepsilon.
\end{aligned}$$

Observación: Como $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ entonces $c \geq 0$ esto implica que $c+\varepsilon > 0$.

Si tomamos $\varepsilon < c$ entonces $c-\varepsilon > 0$ de donde

$$\begin{aligned}
0 &< c-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < c+\varepsilon \\
0 &< (c-\varepsilon)\,g(x) < f(x) < (c+\varepsilon)\,g(x).
\end{aligned}$$

Si $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\ dx$ converge, entonces $(c+\varepsilon)\displaystyle\int_a^\infty g(x)\ dx$ también converge y por el teorema anterior como

$$0 < f(x) < (c+\varepsilon)\,g(x)$$

tenemos que $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ converge.

Ahora si $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ converge como

$$0 < (c-\varepsilon)\, g(x) < f(x)$$

entonces

$$0 < g(x) < \left(\frac{1}{c-\varepsilon}\right) f(x)$$

de donde $\displaystyle\frac{1}{c-\varepsilon}\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ converge y por el teorema anterior $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\, dx$ converge.

Por lo tanto

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx \text{ converge} \Longleftrightarrow \int_a^{\infty} g(x)\, dx \text{ converge.}$$

De donde, si una de las dos diverge, la otra diverge.

Nota: si el límite es 0, sólo se puede concluir que la convergencia de $\int_a^{\infty} g(x)\, dx$ implica la convergencia de $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$.

Ejemplos:

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx.$

   Por definición tenemos,

   $$\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$$

   No podemos evaluar de forma directa la última integral, ya que no es elemental. Pero podemos mostrar que su limite es finito cuando $b \to +\infty$.

   Tenemos que

   $$\mathrm{e}^{-x^2} < \mathrm{e}^{-x}$$

   para todo $x \geq 1$, de modo que

   $$\int_1^{b} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx < \int_1^{b} \mathrm{e}^{-x}\, dx$$

   pero

   $$\begin{aligned}\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b} \mathrm{e}^{-x}\, dx &= \lim_{b\to+\infty}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^{b} \\ &= \lim_{b\to+\infty} -\mathrm{e}^{-b} + \mathrm{e}^{-1} \\ &= \mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$

   De modo que

   $$\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx \tag{9.3}$$

converge a algún valor finito definido. aunque no sabemos cual es ese valor, sabemos que es positivo y menor que e^{-1}.

2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx$

Solución:

Como
$$0 \le \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$$
en $1 \le x < \infty$ y
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$
converge por (9.2), de modo que
$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx$$
converge.

3. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} dx.$

Solución:

Como
$$\frac{1}{\sqrt{x^2-2}} \ge \frac{1}{x}$$
en $1 \le x < \infty$ y
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$
diverge por (9.2), entonces
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} dx$$
diverge.

4. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$

Solución:

Sean $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, ambas positivas y continuas en $1 \le x < \infty$. Además,
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{1+x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + 1 \\
&= 1,
\end{aligned}$$

un límite positivo. Por lo tanto $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge, ya que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge por (9.2).

5. $\int_1^{\infty} \dfrac{3}{\mathrm{e}^x + 5} dx$.

Solución:

Sea $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\mathrm{e}^x}}{\frac{3}{\mathrm{e}^x + 5}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3} + \frac{5}{3\,\mathrm{e}^x} \\
&= \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

es un límite positivo y finito, y como $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x}\, dx$ converge por (9.3), entonces $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{3}{\mathrm{e}^x + 5} dx$, también.

6. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^5 \ln(x+1)} dx$.

Solución:

Sea $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^5 \ln(x+1)}}{\frac{1}{x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^5 \ln(x+1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3 \ln(x+1)} + \frac{1}{x^5 \ln(x+1)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

como $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$ converge ya que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge por (9.2) y

$$\frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{x^2},$$

entonces $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^5 \ln(x+1)} dx$ también converge .

7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.

Solución:

Veamos que $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ diverge ya que

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{x-1}$$

y $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}$ es divergente por (9.2), y además

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x\ln x}}{\frac{1}{x-1}} &= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x\ln x} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x + \frac{x}{x}} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x + 1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$ diverge.

8. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+x^3}$.

Solución:

Como

$$\begin{aligned}
x^3 &< \sqrt[3]{x}+x^3 \\
\frac{1}{x^3} &> \frac{1}{\sqrt[3]{x}+x^3}
\end{aligned}$$

y por (9.2), $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$, converge, entonces

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+x^3}$$

también converge.

9. $\displaystyle\int_1^\infty - x\cos^2 x$.

Solución:

Como para $1 < x < \infty$,

$$\begin{aligned} -1 &\leq -\cos^2 x \\ -x &\leq -x\cos^2 x \end{aligned}$$

y $\displaystyle\int_1^{\infty} -x dx$ diverge, entonces la integral propuesta también diverge.

10. Hallar el área entre la curva $y^2 = \dfrac{x^2}{1-x^2}$. El área requerida es $A = 4\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, como el integrando es discontinuo en $x = 1$, consideremos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^{1-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} -\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}+1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donde el área deseada es

$$\begin{aligned} A &= 4\,(1) \\ &= 4. \end{aligned}$$

11. Calcular el área a la derecha de $x = 3$, entre la curva $y = \dfrac{1}{x^2-1}$ y el eje X.

$$\begin{aligned} A &= \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}dx \\ &= \lim_{u\to+\infty} \int_3^{u} \frac{1}{x^2-1}dx \\ &= \frac{1}{2}\lim_{u\to+\infty} \left[\ln\frac{x-1}{x+1}\right]_3^{u} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{u\to+\infty} \ln\frac{u-1}{u+1} - \ln\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{u\to+\infty} \ln\frac{1-\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}} - \ln\frac{1}{2} \\ &= -\ln\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$