



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROCESO SHOT-NOISE APLICADO A RIESGO DE CRÉDITO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

ACTUARIO

PRESENTA:

ALEJANDRO SANTOYO CANO

DIRECTOR DE TESIS:

M. EN C. MARÍA FERNANDA DEL CARMEN AGOITIA HURTADO



CIUDAD UNIVERSITARIA

AGOSTO, 2012

Proceso Shot-Noise aplicado a Riesgo de Crédito

por

Alejandro Santoyo Cano

Tesis presentada para obtener el grado de

Actuario

en el

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Ciudad Universitaria. Agosto, 2012

1.Datos del alumno

Santoyo Cano Alejandro

53063194

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Actuaría

305575816

2.Datos del tutor

M. en C.

María Fernanda del Carmen

Agoitia

Hurtado

3.Datos sinodal 1

Dr.

Pablo

Padilla

Longoria

4.Datos sinodal 2

Dr.

Mogens

Bladt

Petersen

5.Datos sinodal 3

Dr.

Fernando

Baltazar

Larios

6.Datos sinodal 4

M. en C.

Jorge Humberto

Del Castillo

Spíndola

7.Datos del trabajo escrito

Proceso Shot-Noise aplicado a Riesgo de Crédito

115p, 2012.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi tutora, M. en C. María Fernanda del Carmen Agoitia, por haberme guiado en la realización de este trabajo, y por haberme acercado a las finanzas, desde su clase en la licenciatura como al momento de escoger el tema y realizar la tesis. Gracias a todos los profesores que ayudaron a mi formación, en particular al Dr. Víctor Pérez-Abreu y al Dr. Gerónimo Uribe, por sus excelentes cursos, la motivación y el entusiasmo que me inspiraron.

Agradezco a mis sinodales por haberme dedicado tiempo para checar algunas dudas, y por sus valiosos comentarios, que no sólo me ayudaron para la culminación de este trabajo, si no también para enriquecer mi formación.

Muchas gracias a todos mis amigos, ya que cada uno ha influido de una u otra forma en el camino que he recorrido. También agradezco a mi novia, que con su paciencia y su manera de ser, me evitó muchas dificultades, y aclaro muchas decisiones importantes, gracias Moni.

Por último quiero agradecer a mi familia. A mis padres y a mi hermana por su gran amor, apoyo y comprensión. A mis tíos y tías gracias a su cariño y motivación. En general a toda mi familia, ya que he llegado hasta donde estoy gracias a ustedes, porque todo ese apoyo mutuo entre familia me ha inspirado y me ha hecho crecer como persona.

Índice general

Índice general	VI
1 Introducción	2
1.1 La piedra angular	2
1.2 Modelo de Black-Scholes	4
1.3 Algunas desventajas de Black-Scholes	6
1.4 Modelo de Merton	6
1.5 Modelo shot-noise	7
2 Herramientas Matemáticas	10
2.1 Medidas aleatorias	10
2.1.1 Medidas aleatorias Poisson	11
2.1.4 Construcción de procesos con saltos a partir de una medida aleatoria Poisson	12
2.1.5 Procesos puntuales marcados	13
2.2 Procesos de Lévy	15
2.2.7 Procesos de Lévy de actividad infinita	18
3 Arbitraje y Valuación Neutral al Riesgo	21
3.1 Arbitraje	21
3.2 Valuación neutral al riesgo	22
3.3 Equivalencia de medidas para procesos de Lévy	24
3.4 Valuación y cobertura en mercados incompletos	27
4 Riesgo de Crédito	32
4.1 Riesgo de crédito	32

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	VII
4.2 Probabilidades de default	34
4.3 Modelos para el riesgo de crédito	35
4.4 Derivados de crédito	36
4.5 Intensity based models	38
5 Aplicaciones del modelo Shot-Noise	42
5.1 Medida de martingala mínima	42
5.1.9 Cobertura	54
5.2 Valuación de derivados de crédito	56
5.2.4 Cálculos importantes	58
5.2.8 Aplicación a derivados de crédito	64
A Definiciones Básicas	74
A.1 Conceptos de medida y probabilidad	74
A.2 Probabilidad y esperanza condicional	75
B Procesos Estocásticos	78
B.1 Proceso Poisson	79
B.2 Movimiento Browniano	81
B.3 Martingalas	83
C Cálculo Estocástico	85
C.1 Integral estocástica respecto a una semimartingala	87
C.2 Teorema de Girsanov	88
D Programas	92
D.1 Proceso Poisson	92
D.2 Movimiento Browniano	93
D.3 Difusión con saltos	98
D.4 Shot-noise	101
Bibliografía	106

Estructura del trabajo

Este trabajo tiene como finalidad explicar qué es un proceso shot-noise dirigido por un proceso de Lévy, y dar ejemplos de como implementarlo en el riesgo de crédito, más concretamente en los llamados derivados de crédito.

El trabajo está dividido de la siguiente manera, en el capítulo 1 se menciona el rumbo que fueron tomando los modelos financieros hasta llegar al proceso shot-noise, se explica y se construye un proceso shot-noise de forma clara y sencilla. En el capítulo 2 se dan los resultados principales en cuanto a medidas aleatorias, procesos de Lévy, y cálculo estocástico enfocado en procesos de Lévy. En el capítulo 3 se da el marco teórico del mercado financiero, se dan los conceptos de arbitraje y valuación neutral al riesgo, se introduce el concepto de mercado incompleto, como valuar y realizar coberturas en dichos mercados. Posteriormente en el capítulo 4 se da el marco teórico del riesgo de crédito, así como los modelos comunes para modelar los defaults y por últimos los derivados de crédito que se valuarán después.

En el capítulo 5 se dan las aplicaciones del proceso shot-noise utilizando procesos de Lévy, donde la idea es demostrar que apesar que el modelo es teóricamente más complejo, se pueden seguir obteniendo resultados explícitos. Y para terminar, se muestran los códigos hechos en el programa R que se utilizan para generar los procesos estocásticos que se mencionan en este trabajo.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Capítulo 1

Introducción

A lo largo de los años, varios modelos matemáticos han sido creados y posteriormente utilizados en finanzas, la probabilidad ha sido la herramienta más utilizada para este fin, dando un sentido riguroso al comportamiento dinámico que presentan los instrumentos financieros. Muchas personas han colaborado con su genio y su intelecto a que la finanzas no sean simples especulaciones, sino todo un estudio teórico basado en la teoría de probabilidades, que gracias a A. N. Kolmogorov, quién dió una base axiomática a la probabilidad, se han podido usar herramientas matemáticas como el análisis matemático, gracias al cual K. Itô pudo establecer las bases del cálculo estocástico del que gran parte de los modelos financieros han hecho uso. Más adelante, se han implementado otros trabajos como los de P. Lévy, con lo que es posible incorporar saltos a la dinámica del precio simulado. Gracias a todos estos trabajos se han podido brindar un sin número de aplicaciones al rubro financiero.

Este trabajo se centra en una generalización de los modelos que incorporan procesos de Lévy, dándole la debida importancia no sólo al efecto de los saltos, sino al comportamiento que tiene el precio después del mismo. A dichos modelos se les conoce como shot-noise, y se darán los requerimientos teóricos necesarios para poder entenderlos y aplicarlos a la valuación de derivados de crédito.

1.1. La piedra angular

El reconocido físico Albert Einstein fue el primero en dar un sentido formal al movimiento Browniano, pero la primera aportación significativa al desarrollo teórico enfocado a las finanzas

se debe a L. Bachelier, quien en 1900 ofrece al Movimiento Browniano como primer modelo para simular la trayectoria de una acción del mercado financiero. Puesto que las gráficas que arroja, son muy similares a las del precio de un activo financiero.

Vamos a definir que es un movimiento Browniano, el entendimiento de éste es crucial, no sólo para el resto de este trabajo, sino para cualquier otro que quiera modelar instrumentos financieros. Por lo que lo vamos a introducir de una manera formal en la siguiente definición.

Definición 1.1.1. *Un movimiento Browniano estándar en un espacio de probabilidad¹ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, es un proceso estocástico $W = (W_t)_{t \geq 0}$ tal que:*

1. $W_0 = 0$ c.s.
2. Para $0 < s < t$ el incremento $W_t - W_s$ es Normal con media 0 y varianza $(t - s)$:
 $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$.
3. Para toda partición $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ las variables aleatorias
 $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son independientes.
4. Para toda ω en Ω la trayectoria
 $t \in [0, \infty) \mapsto W_t(\omega) \in \mathbb{R}$ es continua.

Sin duda fue un gran paso, el hecho de considerar que una difusión acercaba mucho las simulaciones a la realidad, pero había grandes defectos, el primero y quizá el peor de todos, es que el movimiento Browniano no sólo puede ser negativo, si no que su $\liminf W_t = -\infty$, y el precio de una acción lo mínimo que puede valer es cero, por lo que a pesar de su gran similitud gráfica, el movimiento Browniano no puede utilizarse de forma correcta como modelo financiero.

A partir de ese momento y hasta la actualidad se han venido presentando y mejorando los modelos financieros. El caso más conocido de todos es el modelo de Black-Scholes, donde se hace uso de un movimiento Browniano geométrico, y a partir del cual se han ido creando muchos modelos alterando ciertas hipótesis del mismo.

¹Ver apéndice A.

1.2. Modelo de Black-Scholes

Black y Scholes en 1973 crearon un modelo para valorar una opción del tipo europea, es decir que se paga un payoff bajo ciertas condiciones hasta la fecha de maduración, sobre un subyacente que no paga dividendos. El modelo sugerido por ellos para el precio de un subyacente tiene trayectorias continuas. Además es un modelo autofinanciable, lo que significa que un portafolio puede replicarse en cada $t \in [0, T]$.

Para este modelo se consideran sólo dos instrumentos, un bono y un subyacente que no paga dividendos. Denotemos por B_t y por S_t al precio del bono y del subyacente al tiempo t en $[0, T]$ respectivamente. Donde T es finito, y todas las transacciones se detienen en T . Las suposiciones que utiliza este modelo son:

1. Los instrumentos pueden comprarse y venderse en corto, en cantidades ilimitadas y son infinitamente divisibles, es decir que cualquier cantidad de instrumento puede comprarse o venderse en corto.
2. No hay costos de transacción.
3. Se considera un mercado completo.
4. El bono y el subyacente satisfacen:

$$\begin{aligned} dB_t &= r(t)B_t dt, & B_0 &= 1; \\ dS_t &= \mu(t)S_t dt + \sigma(t)S_t dW_t, & S_0 &= x. \end{aligned}$$

Donde $r, \sigma: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ y $\mu: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ son procesos deterministas y continuos, W es un movimiento Browniano en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ donde $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ es la filtración aumentada (que cumple las hipótesis habituales; ver apéndice B) generada por W .

Es evidente que $B_t = \exp(\int_0^t r(s) ds)$. Este modelo considera un bono determinista, y por ser no decreciente los inversionistas no están sujetos a ningún riesgo. Una inversión en el bono puede ser liquidada en cualquier momento sin pérdida alguna, por lo que a r se le conoce como la tasa libre de riesgo.

La ecuación del subyacente puede resolverse de forma muy sencilla, notemos que puede reescribirse como $dS_t - \mu(t)S_t dt = \sigma(t)S_t dW_t$ y que $\sigma(t)dW_t = d(\sigma \bullet W)_t$, con $\sigma \bullet W = \int_0^t \sigma(s)dW_s$, ahora multipliquemos nuestra ecuación diferencial por $m(t) = \exp(-\int_0^t \mu(s)ds)$, y sea $X_t = m(t)S_t$ y utilizamos la regla del producto estocástico para obtener $dX_t = X_t d(\sigma \bullet W)_t$, que es una exponencial de Doleans² y tiene solución única, $X_t = X_0 \mathcal{E}(\sigma \bullet W)$. Sea $X_0 = S_0$ y multipliquemos por $m(t)^{-1}$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp\left(\int_0^t \mu(s)ds\right) \mathcal{E}(\sigma \bullet W) \\ &= S_0 \exp\left(\int_0^t \left(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right) ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s\right). \end{aligned} \quad (1-1)$$

Como $\mathcal{E}(\sigma \bullet W)$ es una martingala con media constante igual a 1 y S_0 es constante, al calcular la esperanza, obtenemos que $\mathbb{E}(S_t) = S_0 \exp(\int_0^t \mu(s)ds)$, por lo que podemos considerar a $\mu(t)$ como la tasa de retorno esperada del precio S al tiempo t . Al calcular la diferencial $d\langle \log(S) \rangle_t = \sigma^2(t)dt$ ³, podemos ver a $\sigma(t)$ como la volatilidad instantánea de S al tiempo t .

Para simplificar el modelo, consideraremos que las funciones $\mu(t) = \mu$ y $\sigma(t) = \sigma$, con μ y $\sigma \in \mathbb{R}$ constantes, por lo que el precio al tiempo t es $S_t = S_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t)$. Al ser esta expresión para S_t un movimiento Browniano geométrico, se tiene que $\log S_t$ tiene distribución normal, es decir $\log S_t \sim N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$.

Como el modelo de Black-Scholes supone un mercado completo, existe una única medida martingala equivalente neutral al riesgo \mathbb{Q} . Gracias al teorema de Girsanov⁴, no es difícil mostrar que bajo \mathbb{Q} , el precio S_t también es un movimiento Browniano geométrico, donde σ sigue siendo el parámetro para la volatilidad instantánea, pero ahora la tasa de retorno libre de riesgo r , será utilizada en lugar del parámetro de tendencia μ . El precio al tiempo t es $S_t = S_0 \exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t)$, por lo que $dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$, y esta ecuación diferencial estocástica (EDE) nos dice que bajo la medida \mathbb{Q} , el crecimiento esperado en el precio del subyacente debe ser r .

²Para la notación del \bullet y la exponencial de Doleans, revisar apéndice de cálculo estocástico

³El símbolo $\langle \cdot \rangle$ significa variación cuadrática; ver apéndice C

⁴Se puede encontrar una demostración del Teorema de Girsanov en [29], y en el apéndice C, se puede ver una versión en tiempo discreto, C.2.5.

1.3. Algunas desventajas de Black-Scholes

El modelo de Black-Scholes resulta ser muy elegante, nos ofrece fórmulas cerradas, y nos permite replicar nuestro portafolio en cualquier momento $t \in [0, T]$. Pero, ¿qué tan real es este modelo?. Las suposiciones que se necesitan para este modelo son bastante fuertes e ideales, comenzando por el hecho de tener como base la hipótesis de un mercado completo, lo cual es claro que no se cumple en el mundo real, pues no se puede conocer toda la información que afecta el precio del subyacente, en el mercado muchas veces la información repentina, produce cambios abruptos en el precio de una acción. Además considera que no hay impuestos ni costos de transacción, ni costos por mantener el subyacente. Resulta que los datos empíricos muestran que el modelo de Black-Scholes no describe las propiedades estadísticas de las series de tiempo financieras del todo bien. Los datos tienen las siguientes características:

1. Los log-rendimientos no se comportan de acuerdo a una distribución normal.
2. Se ha observado que la volatilidad cambia estocásticamente en el tiempo.
3. La distribución del precio tiene colas pesadas.

1.4. Modelo de Merton

Las discrepancias que se mencionaron en la sección anterior, hicieron que se empezarán a ofrecer nuevos modelos para la dinámica del precio de una acción. En 1976 Robert C. Merton fue uno de los primeros en considerar un proceso discontinuo para modelar el precio de una acción. El modelo está basado en un proceso, dado por la siguiente ecuación:

$$L_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} Y_k, \quad (1-2)$$

donde $Y_k \sim Normal(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, $k = 1, 2, \dots, N_t$ es un proceso Poisson con intensidad λ e independiente de W y las Y_k también son independientes de W y de N para toda k , y por tanto la distribución de los saltos es:

$$f_Y = \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - \mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2} \right].$$

Este tipo de proceso estocástico es lo que se conoce como difusión con saltos de Lévy. Para este proceso, no existe una fórmula cerrada para L_1 , pero más adelante se explicará la naturaleza de este tipo de proceso, y se podrá ver que a pesar de que Merton no dió una fórmula del todo cerrada, es muy útil si se aproxima numéricamente. Este proceso de Lévy tiene tripleta $(\mu, \sigma^2, \lambda \cdot f_Y)^5$, por lo que el precio del subyacente está dado por

$$S_t = S_0 \exp \left(\mu t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} Y_k \right). \quad (1-3)$$

Este modelo mejora en varios aspectos al de Black-Scholes pues tiene cola pesada, considera saltos en el precio del subyacente, al haber saltos nos lleva a un mercado incompleto, no se puede replicar perfectamente, lo que nos dice que las opciones son inversiones riesgosas, la estrategia de cobertura se obtiene resolviendo un problema de optimización de portafolio.

1.5. Modelo shot-noise

Los modelos que incorporan saltos son muy utilizados en la actualidad, ya que una vez programados dan resultados más precisos que los de Black-Scholes, pero aún hace falta algo en el modelo, algo de lo que tal vez no se está consciente, sino hasta que se ve reflejado en los datos conforme van pasando los años. Los cambios repentinos que sufre el precio, no son "eternos" como el modelo de Merton sugiere, aquí es donde surge el llamado efecto "shot-noise", esto es que conforme pasa el tiempo el efecto del salto desaparece parcial o completamente. Dicho de otra manera, en el modelo de Merton, el precio sigue un proceso de difusión con saltos, pero como no hay un componente de desvanecimiento incluido, el efecto del salto persiste para siempre. Y como es evidente, esto no sucede en el mundo real, por lo que los modelos que incorporan efecto shot-noise son extensiones bastante útiles del proceso de difusión con saltos. Los modelos shot-noise constituyen un clase de modelos para estudiar las imperfecciones del mercado, como la sobrerreacción o el comportamiento irregular debido a la falta de liquidez.

Considerando la solvencia de una compañía, los efectos shot-noise surgen debido a que el mercado es incompleto. Un ejemplo sobresaliente es el colapso de Enron seguido por su bancarrota, puesto que los inversionistas no tenían la información de que la compañía "maquillaba" sus estados financieros

⁵Ver capítulo 2

debido a las grandes pérdidas financieras que afrontaba.

Para entender de manera más intuitiva lo que es un proceso shot-noise, construiremos un caso muy particular. Uno de los modelos shot-noise más sencillo consiste en tres factores principales, a saber:

- Una difusión continua
- Un proceso puntual marcado
- Un componente shot-noise

Vamos a suponer que en $t = 0$ el precio es S_0 . En el caso en que no hay saltos, tenemos al tiempo t que:

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right),$$

siguiendo un modelo Black-Scholes. Al tiempo $t = \tau_1$, tenemos el primer salto de un proceso Poisson N asociado, por lo que tenemos:

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right) (1 + U_1).$$

El tamaño del salto U_1 describe cambios abruptos en el precio. Se tiene que $U_1 > -1$. En teoría, U_1 puede tomar cualquier valor positivo, pero basados en datos reales no sobrepasa +1. Por último, para incorporar los efectos de "desvanecimiento", tomamos una función h definida en \mathbb{R}_+ . Por conveniencia tomamos $h(t) = 0$ para $t < 0$. Y si no han ocurrido más saltos, tenemos:

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right) (1 + U_1 h(t - \tau_1)).$$

Generalmente la función h es no negativa y no creciente en la recta real positiva. Un ejemplo clásico es $h(x) = \exp(-cx)$, $x \geq 0$, $c \geq 0$. Tomar $c = 0$ implica $h \equiv 1$, en cuyo caso no hay efectos de "desvanecimiento" y corresponde al caso de difusión con saltos puro. Por otro lado, tomando una c grande nos permite cancelar el efecto del salto de forma más rápida.

Ahora sólo basta hacer un razonamiento inductivo, y denotando por $\tau_1 < \tau_2 < \dots$ a los saltos

del proceso Poisson N , la expresión final queda de la siguiente manera:

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right) \prod_{i=1}^{N_t} (1 + U_i h(t - \tau_i)). \quad (1-4)$$

Como podemos notar, su construcción es sencilla, pero su aportación es grandiosa, puesto que podemos simular de una forma más precisa los cambios que sufre el precio de un subyacente en el mercado. Este caso es muy particular, sólo es una extensión del modelo de Black-Scholes, pero un proceso shot-noise puede ser totalmente diferente, como veremos en el último capítulo, donde se explicarán las bases teóricas que nos permiten trabajar con estos modelos.

El propósito de este capítulo introductorio es dar un panorama general del origen de los procesos shot-noise, y entender que es un componente que se puede agregar a los modelos que incluyen saltos. Como se ha mencionado, cada modelo que ha surgido ha sido una generalización de uno anterior, lo que se pretende es darle un sentido más "realista", incluyendo más hipótesis, y utilizando herramientas matemáticas más sofisticadas.

Capítulo 2

Herramientas Matemáticas

En este capítulo se mencionaran las propiedades de procesos de Levy que nos serán de ayuda para las demostraciones del último capítulo. Antes de poder estudiar los procesos de Lévy es muy importante conocer y entender las medidas aleatorias, en particular las medidas aleatorias Poisson y los procesos puntuales¹. El objetivo es poder caracterizarlos, y descomponerlos, de tal forma que sea más fácil generalizar los resultados.

2.1. Medidas aleatorias

Para dar una idea heurística de una medida aleatoria, recordemos que un proceso Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de conteo, si T_1, T_2, \dots es la sucesión de los tiempos en que ocurren los saltos de N , entonces N_t es el número de saltos que hay entre 0 y t :

$$N_t = \# \{i \geq 1, T_i \in [0, t]\}.$$

Con lo que podemos deducir que si $t > s$ entonces:

$$N_t - N_s = \# \{i \geq 1, T_i \in (s, t]\}.$$

Los tiempos de salto forman una configuración aleatoria de puntos en $[0, \infty)$ y el proceso Poisson N_t cuenta el número de puntos en el intervalo $[0, t]$. Este procedimiento define una medida M en

¹Para la definición de medida, ver apéndice B

$[0, \infty)$: para todo conjunto medible $A \subset \mathbb{R}_+$ sea:

$$M(\omega, A) = \# \{i \geq 1, T_i(\omega) \in A\}.$$

Entonces $M(\omega, \cdot)$ es una medida positiva en \mathbb{Z} y $M(A)$ es finita con probabilidad 1 si A es un conjunto acotado. Como podemos ver, esta medida depende también de ω , por lo que es una medida aleatoria. La intensidad λ del proceso Poisson determina el valor promedio de la medida aleatoria M , pues $\mathbb{E}[M(A)] = \lambda |A|$, donde $|A|$ es la medida de Lebesgue de A .

A M se le llama la medida de saltos asociada al proceso Poisson N . Y el proceso Poisson puede ser expresado en términos de su medida M de la siguiente manera:

$$N_t(\omega) = M(\omega, [0, t]) = \int_{[0, t]} M(\omega, ds). \quad (2-1)$$

Por lo que es claro que las propiedades del proceso Poisson son heredadas por su medida asociada M .

2.1.1. Medidas aleatorias Poisson

Se describió como se construye una medida $M(\omega, \cdot)$ asociada a un proceso Poisson, y esto puede generalizarse reemplazando \mathbb{R}_+ por $E \subset \mathbb{R}^d$ y la medida de Lebesgue por una medida de Radon μ en E^2 .

Definición 2.1.2 (Medida de Radon). *Sea $E \subset \mathbb{R}^d$. Una medida de Radon en (E, \mathcal{B}) es una medida μ tal que para cada conjunto compacto y medible $B \in \mathcal{B}$ se tiene que $\mu(B) < \infty$.*

Ahora podemos definir que es una medida aleatoria Poisson:

Definición 2.1.3 (Medida aleatoria Poisson). *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $E \subset \mathbb{R}^d$ y μ una medida de Radon en (E, \mathcal{E}) fija y positiva. Una medida aleatoria Poisson en E con medida de intensidad μ es una medida aleatoria en \mathbb{Z} :*

$$\begin{aligned} M &: \Omega \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{N} \\ &(\omega, A) \mapsto M(\omega, A). \end{aligned}$$

²Ver apéndice A para la definición de espacio medible y medida

con $A \in \mathcal{E}$ tal que:

1. Para casi toda $\omega \in \Omega$, $M(\omega, \cdot)$ es una medida de Radon entera en E , esto es para todo conjunto acotado y medible $A \subset E$, $M(A) < \infty$ es una variable aleatoria en \mathbb{Z} .
2. Para cada conjunto medible $A \subset E$, $M(\cdot, A) = M(A)$ es una variable aleatoria Poisson con parámetro $\mu(A)$.
3. Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ son conjuntos disjuntos y medibles, las variables $M(A_1), \dots, M(A_n)$ son independientes.

2.1.4. Construcción de procesos con saltos a partir de una medida aleatoria Poisson

Consideremos una medida Poisson M en $E = [0, T] \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, esta se puede referir como una medida de conteo asociada a una configuración aleatoria de puntos $(T_n, Y_n) \in E$:

$$M = \sum_{n \geq 1} \delta_{(T_n, Y_n)} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_A(T_n(\omega), Y_n(\omega)), \quad \forall A \in \mathcal{E}. \quad (2-2)$$

Intuitivamente, cada punto $(T_n(\omega), Y_n(\omega)) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ corresponde a una observación hecha al tiempo T_n y descrita por una variable aleatoria (no cero) $Y_n \in \mathbb{R}^d$.

Es claro que se parte de esta manera a E porque nos interesa interpretar la primera coordenada t como tiempo. Por lo que al utilizar filtraciones \mathcal{F}_t en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, diremos que M es una medida aleatoria Poisson \mathcal{F}_t -adaptada si:

- $(T_n)_{n \geq 1}$ son tiempos aleatorios \mathcal{F}_t -adaptados.
- Y_n es \mathcal{F}_{T_n} -medible.

Para cada ω , $M(\omega, \cdot)$ es una medida en $E = [0, T] \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ y se pueden definir integrales respecto a esta medida. Primero, para funciones simples $f = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{\{A_i\}}$ donde $c_i \geq 0$ y $A_i \subset E$ son conjuntos disjuntos y medibles, definimos $M(f) = \sum_{i=1}^n c_i M(A_i)$: $M(f)$ es una variable aleatoria con esperanza $\mathbb{E}[M(f)] = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i)$. Luego, para funciones medibles y positivas $f : E \rightarrow [0, \infty)$ definimos $M(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(f_n)$ donde $f_n \uparrow f$ es una sucesión creciente de funciones simples.

Por el teorema de convergencia monótona, $M(f)$ es una variable aleatoria con valores en $[0, \infty]$ y esperanza (que puede ser infinita) $\mathbb{E}[M(f)] = \mu(f)$. Y para funciones medibles y en los reales, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, f se puede descomponer en su parte positiva y en su parte negativa, $f = f^+ - f^-$. Si f cumple con:

$$\mu(|f|) = \int_{[0,T]} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} |f(s, y)| \mu(ds \times dy) < \infty \quad (2-3)$$

entonces las variables aleatorias positivas $M(f^+)$, $M(f^-)$ tienen esperanza finita: $\mathbb{E}[M(f^+)] = \mu(f^+) \leq \mu(|f|) < \infty$. Entonces podemos definir $M(f) := M(f^+) - M(f^-)$ y $M(f)$ es una variable aleatoria con esperanza

$$\mathbb{E}[M(f)] = \mu(f) = \int_{[0,T]} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} f(s, y) \mu(ds \times dy).$$

Integrando f respecto de M hasta el tiempo t , se tiene un proceso estocástico \mathcal{F}_t -adaptado:

$$X_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} f(s, y) M(ds dy) = \sum_{n, T_n \in [0, t]} f(T_n, Y_n). \quad (2-4)$$

La suma corre sobre los eventos (T_n, Y_n) que han ocurrido antes de t , i.e. $T_n \leq t$. $(X_t(f))_{t \in [0, T]}$ es un proceso con saltos, donde sus saltos ocurren en los tiempos aleatorios T_n y tienen amplitud dada por $f(T_n, Y_n)$.

2.1.5. Procesos puntuales marcados

Una medida aleatoria Poisson puede ser representada como una medida de conteo:

$$M(\omega, \cdot) = \sum_{n \geq 1} \delta_{(T_n(\omega), Y_n(\omega))} \quad (2-5)$$

para alguna sucesión aleatoria $(T_n, Y_n)_{n \geq 1}$ de puntos en $[0, T] \times \mathbb{R}^d$. Usando esta representación se pueden definir medidas aleatorias con propiedades de dependencia más complejas: dada una sucesión $(T_n, Y_n) \in [0, T] \times E$ donde $(T_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de tiempos aleatorios adaptados que describen la ocurrencia de ciertos eventos $Y_n \in E \subset \mathbb{R}^d$, donde Y_n es \mathcal{F}_{T_n} -medible. Entonces M es una medida aleatoria entera en $[0, T] \times E$ y la sucesión $(T_n, Y_n) \in [0, T] \times E$ es llamado un proceso

puntual marcado. Esto porque a las variables $(Y_n)_{n \geq 1}$ se les llama "marcas".

Definición 2.1.6 (Proceso puntual marcado). *Un proceso puntual marcado en $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ es una sucesión $(T_n, Y_n)_{n \geq 1}$ donde*

- $(T_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión creciente de tiempos aleatorios adaptados tal que $T_n \rightarrow \infty$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$.
- $(Y_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias que toman valores en E .
- Y_n es \mathcal{F}_{T_n} -medible.

Observación 2.1.7. *La condición $T_n \rightarrow \infty$ garantiza que el número de eventos que ocurren en $[0, T]$ es finito c.s..*

Los procesos puntuales marcados no tienen las propiedades de independencia de las medidas aleatorias Poisson, si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ entonces $M([0, t] \times A_1)$, $M([0, t] \times A_2)$ ya no son independientes, ni son v.a. Poisson. Es claro que no todas las medidas aleatorias Poisson son procesos puntuales marcados, puesto que no necesariamente sucede que $T_n \rightarrow \infty$, de hecho solo es válida la implicación cuando $\mu((0, T] \times \mathbb{R}^d) < \infty$.

De manera similar, para una función $f : [0, T] \times E \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que $\int_{[0, T] \times E} |f(t, y)| \mu(dt dy) < \infty$, se puede construir su integral respecto a la medida aleatoria M :

$$M(f) = \int_{[0, T] \times E} f(t, y) M(dt dy) = \sum_{n \geq 1} f(T_n, Y_n). \quad (2-6)$$

Y también se puede contruir un proceso de saltos a partir de f de manera análoga al caso Poisson:

$$X_t = \int_{[0, t] \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} f(s, y) M(ds dy) = \sum_{n, T_n \in [0, t]} f(T_n, Y_n). \quad (2-7)$$

$(X_t(f))_{t \in [0, T]}$ es un proceso con saltos adaptado, con trayectorias càdlàg³ donde sus saltos están descritos por un proceso puntual marcado M : los saltos se dan en los tiempos $(T_n)_{n \geq 1}$ y su amplitud está dada por $f(T_n, Y_n)$. Esta construcción nos da una forma de generar un procesos con saltos a partir de un proceso puntual marcado.

³Esto es continuas por la derecha con límites por la izquierda.

De manera contraria, a cada proceso càdlàg $(X_t)_{t \in [0, T]}$ con valores en \mathbb{R}^d se le puede asociar un medida aleatoria J_X en $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ llamada medida de saltos, de la siguiente manera, si X tiene a lo más una cantidad numerable de saltos: $\{t \in [0, T], \Delta X_t = X_t - X_{t-} \neq 0\}$ es numerable, sus elementos puede arreglarse como una sucesión $(T_n)_{n \geq 1}$ (no necesariamente creciente), que serán los tiempos asociados a los saltos de X . Al tiempo T_n , el proceso X tiene una discontinuidad de tamaño $Y_n = X_{T_n} - X_{T_n-} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Entonces, el proceso $(T_n, Y_n)_{n \geq 1}$ define un proceso puntual marcado en $[0, T] \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ que contiene toda la información sobre los saltos del proceso X . La medida aleatoria asociada, que denotaremos por J_X , es llamada la medida de saltos del proceso X :

$$J_X(\omega, \cdot) = \sum_{n \geq 1} \delta_{(T_n(\omega), Y_n(\omega))} = \sum_{t \in [0, T]}^{\Delta X_t \neq 0} \delta_{(t, \Delta X_t)}. \quad (2-8)$$

De manera intuitiva, para cualquier conjunto medible $A \subset \mathbb{R}^d$, $J_X([0, t] \times A)$ es el número de saltos de X ocurridos entre 0 y t , y tal que sus amplitudes pertenezcan al conjunto A .

La medida aleatoria J_X contiene toda la información sobre las discontinuidades del proceso X , pues nos dice en que momento salta y con que magnitud, sin embargo J_X no nos dice nada acerca de la parte continua de X . Es claro que X tiene trayectorias continuas si y sólo si $J_X = 0$ c.s., lo que significa que no tiene saltos.

2.2. Procesos de Lévy

Los procesos de Lévy son procesos estocásticos con propiedades muy particulares, como son los incrementos independientes y estacionarios, y en tiempo continuo son la base para construir modelos. Ejemplos sencillos son, el proceso Poisson compuesto y el movimiento Browniano, el primero presenta saltos, mientras que el segundo tiene trayectorias continuas. De hecho veremos que éstos dos procesos van a ser la base sobre la cual se construyen los procesos de Lévy.

Los procesos de Lévy nos ofrecen un clase de modelos con saltos que son suficientemente buenos para reproducir información empírica y nos permiten obtener muchos cálculos explícitos.

Para esto, se van a definir las distribuciones infinitamente divisibles, después podremos definir más claramente un proceso de Lévy, puesto que la relación entre esas dos definiciones está totalmente ligada. Las demostraciones de los resultados de esta sección pueden consultarse en [9].

Definición 2.2.1 (Distribuciones infinitamente divisibles). *Una distribución de probabilidad F en \mathbb{R}^d se le llama infinitamente divisible si para cualquier entero $n \geq 2$, existen n v.a.i.i.d. Y_1, \dots, Y_n tal que $Y_1 + \dots + Y_n$ tiene distribución F .*

Definición 2.2.2 (Proceso de Lévy). *Un proceso càdlàg $(X_t)_{t \geq 0}$ en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con valores en \mathbb{R}^d es llamado un proceso de Lévy si tiene las siguientes propiedades:*

1. $X_0 = 0$ c.s.
2. Incrementos independientes, para cada sucesión de tiempos t_0, \dots, t_n , las v.a. $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes.
3. Incrementos estacionarios, la distribución de $X_{t+h} - X_t$ no depende de t .
4. Continuidad estocástica, $\forall \epsilon > 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| \geq \epsilon) = 0$.

Ahora, se puede ver a partir de estas propiedades que si X es un proceso de Lévy, para toda $t > 0$ la distribución de X_t es infinitamente divisible. Esto pone una gran restricción en las posibles elecciones de la distribución de X_t . Los ejemplos más comunes de distribuciones infinitamente divisibles son: la Guassiana, la gamma, las α -estables y la Poisson. Otros ejemplos menos triviales son la log-normal, Pareto y la t de Student.

Proposición 2.2.3. *Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Lévy. Entonces para toda t , X_t tiene distribución infinitamente divisible. De manera inversa, si F es un distribución infinitamente divisible entonces existe un proceso de Lévy (X_t) tal que la distribución de X_1 está dada por F .*

Ahora definamos la función característica de X_t :

$$\phi_t(z) \equiv \phi_{X_t}(z) \equiv \mathbb{E} [e^{iz \cdot X_t}], \quad z \in \mathbb{R}^d.$$

Proposición 2.2.4. *Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Lévy en \mathbb{R}^d . Existe una función continua $\varphi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ llamado el exponente característico de X , tal que:*

$$\mathbb{E} [e^{iz \cdot X_t}] = e^{t\varphi(z)}, \quad z \in \mathbb{R}^d. \quad (2-9)$$

Esta proposición es muy importante, ya que la función característica determina de manera única a una distribución.

Por ejemplo si $(X_t)_{t \geq 0}$ es un proceso Poisson compuesto en \mathbb{R}^d . Su función característica tiene la siguiente representación:

$$\mathbb{E} [e^{iz \cdot X_t}] = \exp \left\{ t \lambda \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iu \cdot x} - 1) F(dx) \right\}, \quad \forall u \in \mathbb{R}^d, \quad (2-10)$$

donde λ denota la intensidad de saltos y F la distribución de los saltos.

El proceso de saltos $\Delta X = (\Delta X_t)_{0 \leq t \leq T}$ asociado al proceso de Lévy X está definido, para cada $0 \leq t \leq T$ como

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-},$$

donde L_{t-} es el límite por la izquierda de L_t . Es importante notar que un proceso de Lévy no tiene tiempos fijos de salto, pues $\Delta X_t = 0$ c.s. para todo $t > 0$ fijo, pues tiene continuidad estocástica. En general, la suma de los saltos de un proceso de Lévy no converge, es decir, es posible que

$$\sum_{s \leq t} |\Delta L_s| = \infty \quad c.s.$$

pero siempre tenemos que

$$\sum_{s \leq t} |\Delta L_s|^2 < \infty \quad c.s.$$

Lo que nos permite usar técnicas de martingalas para estos procesos.

Una forma de analizar los saltos de un proceso de Lévy es la *medida aleatoria de saltos* del proceso. Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, un conjunto tal que $0 \notin \bar{A}$ y sea $0 \leq t \leq T$; definimos la medida aleatoria de saltos del proceso X por

$$\begin{aligned} \mu^X(\omega; t, A) &= \# \{0 \leq s \leq t; \Delta X_s(\omega) \in A\} \\ &= \sum_{s \leq t} \mathbb{1}_A(\Delta X_s(\omega)); \end{aligned}$$

entonces, la medida $\mu^X(\omega; t, A)$ cuenta los saltos de proceso X de tamaño en A al tiempo t . Se puede probar que $\mu^X(\cdot, A)$ tiene incrementos independientes y estacionarios, y que de hecho la medida μ^X

es una medida aleatoria Poisson. Y la intensidad de este proceso Poisson es $\nu(A) = \mathbb{E}[\mu^X(1, A)]$.

Como ya se había mencionado, un factor importante para los procesos de Lévy es el proceso Poisson compuesto.

Proposición 2.2.5. *Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso Poisson compuesto con intensidad λ y distribución del tamaño de saltos F . Su medida de saltos asociada J_X es una medida aleatoria Poisson en $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ con medida de intensidad $\mu(dx \times dt) = \nu(dx)dt = \lambda F(dx)dt$.*

Por lo que es claro que la medida de Lévy de un proceso de Poisson compuesto es finita, es decir el proceso en sí mismo es de actividad finita. De esta manera vamos a definir la medida de Lévy para todos los procesos de Lévy en general, no sólo para el proceso Poisson compuesto, como sigue:

Definición 2.2.6 (Medida de Lévy). *La medida ν está definida por*

$$\nu(A) = \mathbb{E}[\mu^X(1, A)] = \mathbb{E}\left[\sum_{s \leq 1} \mathbb{1}_A(\Delta X_s(\omega))\right]$$

es la medida de Lévy del proceso de Lévy X .

$\nu(A)$ es el número esperado, por unidad de tiempo, de saltos que pertenecen al conjunto A .

2.2.7. Procesos de Lévy de actividad infinita

Si tenemos un proceso de Lévy constante a cachos X_t^0 , se puede representar como:

$$X_t^0 = \sum_{s \in [0, t]} \Delta X_s^0 = \int_{[0, t] \times \mathbb{R}^d} x J_{X^0}(ds \times dx), \quad (2-11)$$

donde J_{X^0} es una medida aleatoria Poisson con medida de intensidad $\nu(dx)dt$, donde ν es una medida finita, definida por

$$\nu(A) = \mathbb{E}[\#\{t \in [0, 1] : \Delta X_t^0 \neq 0, \Delta X_t^0 \in A\}], \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (2-12)$$

Dado un movimiento Browniano con deriva $\gamma t + W_t$ independiente de X^0 , la suma $X_t = X_t^0 + \gamma t + W_t$ define otro proceso de Lévy, que puede descomponerse de la siguiente manera:

$$X_t = \gamma t + W_t + \sum_{s \in [0, t]} \Delta X_s = \gamma t + W_t + \int_{[0, t] \times \mathbb{R}^d} x J_X(ds \times dx),$$

Esta descomposición nos lleva al siguiente resultado:

Proposición 2.2.8 (Descomposición de Lévy-Itô). *Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Lévy en \mathbb{R}^d y ν su medida de Lévy.*

- ν es una medida de Radon en $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ y cumple que:

$$\int_{|x| \leq 1} |x|^2 \nu(dx) < \infty \quad \int_{|x| \geq 1} \nu(dx) < \infty.$$

- La medida de saltos de X , J_X , es una medida aleatoria Poisson en $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ con medida de intensidad $\nu(dx)dt$.
- Existe un vector γ y un movimiento Browniano d -dimensional $(B_t)_{t \geq 0}$ con matriz de covarianza A tal que:

$$\begin{aligned} X_t &= \gamma t + B_t + X_t^l + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \tilde{X}_t^\epsilon, & \text{donde} & \quad (2-13) \\ X_t^l &= \int_{|x| \geq 1, s \in [0, t]} x J_X(ds \times dx) & y \\ \tilde{X}_t^\epsilon &= \int_{\epsilon \leq |x| < 1, s \in [0, t]} x \{J_X(ds \times dx) - \nu(dx)ds\} \\ &\equiv \int_{\epsilon \leq |x| < 1, s \in [0, t]} x \tilde{J}_X(ds \times dx). \end{aligned}$$

los sumandos son independientes y la convergencia en el último término es c.s. y uniforme en t , en $[0, T]$.

Lo que nos dice esta descomposición es que para todo proceso de Lévy, existe un vector γ , una matriz positiva definida A y una medida positiva ν tal que determinan unívocamente su distribución. La tripleta (A, ν, γ) se le conoce como tripleta característica o tripleta de Lévy del proceso X_t .

Una implicación importante es que todo proceso de Lévy es una combinación de un movimiento Browniano con deriva y una posible suma infinita de procesos Poisson compuestos. Esto significa que todo proceso de Lévy puede ser aproximado por un proceso de difusión con saltos (i.e. la suma de un movimiento Browniano con deriva y un proceso Poisson compuesto), algo que es muy útil tanto en la teoría como en la práctica.

Teniendo la tripleta característica (A, ν, γ) podemos identificar que proceso de Lévy es, de acuerdo a la siguiente caracterización.

Teorema 2.2.9 (Representación de Lévy-Khinchin). *Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Lévy en \mathbb{R}^d con tripleta característica (A, ν, γ) . Entonces*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{iz \cdot X_t}] &= e^{t\varphi(z)}, \quad z \in \mathbb{R}^d, \quad \text{donde} \\ \varphi(z) &= -\frac{1}{2}z \cdot Az + i\gamma \cdot z + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iz \cdot x} - 1 - iz \cdot x \mathbb{1}_{|x| \leq 1}) \nu(dx). \end{aligned} \quad (2-14)$$

En algunas ocasiones, y en particular en aplicaciones a finanzas, es importante saber si un proceso de Lévy o su exponencial es una martingala.

Proposición 2.2.10. *Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Lévy en \mathbb{R} con tripleta característica (A, ν, γ) ,*

1. (X_t) es una martingala si y sólo si $\int_{|x| \geq 1} |x| \nu(dx) < \infty$ y

$$\gamma + \int_{|x| \geq 1} x \nu(dx) = 0.$$

2. $\exp(X_t)$ es una martingala si y sólo si $\int_{|x| \geq 1} e^x \nu(dx) < \infty$ y

$$\frac{A}{2} + \gamma + \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1 - x \mathbb{1}_{|x| \leq 1}) \nu(dx) = 0.$$

Capítulo 3

Arbitraje y Valuación Neutral al Riesgo

En este capítulo se mencionan los resultados necesarios para valorar derivados de instrumentos financieros, que en particular nos servirán para valorar los derivados de crédito. Para poder valorar es necesario suponer ciertas condiciones sobre el mercado, que principalmente debe de tener estrategias libres de arbitraje, esto es que con inversión neta nula no se tenga probabilidad positiva de una ganancia. Y más adelante se hablará de los mercados incompletos, que son de gran importancia para este trabajo.

3.1. Arbitraje

Una estrategia está definida como el proceso $h = (h_t)_{0 \leq t \leq T} = (H_t^0, H_t)_{0 \leq t \leq T}$ con valores en \mathbb{R}^2 , adaptado a la filtración natural (\mathcal{F}_t) . Los componentes H_t^0 y H_t son las cantidades que se tienen del activo sin riesgo y del activo riesgoso respectivamente al tiempo t . El valor del portafolio al tiempo t está dado por:

$$V_t(h) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t.$$

La condición para que sea *autofinanciable* es que:

$$dV_t(h) = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t.$$

Y para darle sentido a esta ecuación, también imponemos la condición de que

$$\int_0^T |H_t^0| dt < \infty a.s. \quad y \quad \int_0^T H_t^2 < \infty a.s.$$

Definición 3.1.1. *Una posibilidad de arbitraje en un mercado financiero es un portafolio autofinanciable h tal que:*

$$\begin{aligned} V_0^h &= 0 \\ V_T^h &> 0, P - c.s. \end{aligned}$$

Decimos que un mercado es libre de arbitraje, si no hay oportunidades de arbitraje.

Es decir, una posibilidad de arbitraje es equivalente a obtener una ganancia con inversión neta nula con probabilidad positiva. Para valuar los instrumentos financieros, siempre se hace uso del hecho de que no haya arbitraje, así se obtiene el precio justo para ambas partes en un contrato financiero. De hecho se puede probar que en un mercado libre de arbitraje existe una y sólo una tasa libre de riesgo, con la cual se valuarán los instrumentos.

Definición 3.1.2. *Decimos que un payoff X puede ser replicado, si existe un portafolio h autofinanciable tal que:*

$$V_T^h = X, P - c.s.$$

En cuyo caso se dice que h es el portafolio de cobertura para X . Y si cada payoff puede replicarse entonces decimos que el mercado es completo.

Nuestro ejemplo primordial, es el caso de Black-Scholes, donde se trabaja en un mercado completo, y como acabamos de ver, lo que nos dice es que cualquier payoff donde se considere este modelo, se podrá valuar de tal manera que sólo haya un precio justo.

3.2. Valuación neutral al riesgo

Definición 3.2.1 (Equivalencia de Medidas). *Dos medidas \mathbb{P} y \mathbb{Q} son equivalentes ($\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$) si están definidas en el mismo espacio y concuerdan con los eventos que son posibles. Formalmente, si A es*

cualquier evento,

$$\mathbb{P}(A) > 0 \iff \mathbb{Q}(A) > 0.$$

En otras palabras, si A es posible bajo \mathbb{P} entonces es posible bajo \mathbb{Q} , y si A es imposible bajo \mathbb{P} entonces también es imposible bajo \mathbb{Q} .

Definición 3.2.2. *Una medida martingala equivalente es una medida \mathbb{Q} equivalente a \mathbb{P} , bajo la cual los subyacentes descontados sean todos \mathbb{Q} -martingalas.*

Teorema 3.2.3 (Primer Teorema Fundamental de Valuación para Mercados Finitos). *Un modelo de mercado finito es libre de arbitraje si y sólo si existe una medida martingala equivalente para S .*

Teorema 3.2.4 (Segundo Teorema Fundamental de Valuación para Mercados Finitos). *Un modelo de mercado finito libre de arbitraje es completo si y sólo si admite una única medida martingala equivalente.*

La demostración de ambos teoremas se puede encontrar en el capítulo 1 del libro de Lamberton y Lapeyre [23].

En un mercado descrito por la medida de probabilidad \mathbb{P} , cualquier portafolio libre de arbitraje puede representarse como:

$$\Pi_t(H) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H | \mathcal{F}_t], \quad (3-1)$$

donde \mathbb{Q} es una medida martingala equivalente a \mathbb{P} .

De estos teoremas importantes, para entenderlos mejor, podemos concluir la siguiente equivalencia:

1. Mercado completo: cualquier payoff H puede ser representado como el valor final de un estrategia autofinanciable

$$H = \mathbb{E}[H] + \int_0^T \phi_t dS_t.$$

2. Unicidad de la medida martingala equivalente: Existe una única medida de probabilidad $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ tal que los subyacentes descontados son \mathbb{Q} -martingalas.

Mientras que la mayor parte de los modelos usados para valorar son libres de arbitraje, sólo unos pocos de ellos son completos, por ejemplo modelos con volatilidad estocástica, modelos de exponenciales de Lévy y modelos de difusión con saltos, entran en los modelos incompletos. En comparación con los modelos de difusión uno dimensionales como Black-Scholes, que definen mercados completos.

Estos son los resultados y conceptos más importantes en cuanto a las hipótesis que se suelen hacer sobre el mercado. Como en este trabajo se valorarán instrumentos que siguen la dinámica dirigida por un proceso de Lévy, en la siguiente sección mencionaré los conceptos básicos pero orientados a dichos procesos.

3.3. Equivalencia de medidas para procesos de Lévy

Los cambios de medida juegan un papel importante al momento de definir modelos de valuación libres de arbitraje, por lo que se darán algunos resultados sobre estos cambios de medida en el ámbito de proceso de Lévy.

Si \mathbb{P} y \mathbb{Q} son medidas de probabilidad equivalentes, entonces existe una v.a. positiva, llamada densidad de \mathbb{Q} respecto de \mathbb{P} y se denota por $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ tal que para cualquier v.a. Z se tiene que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[Z \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right]. \quad (3-2)$$

Antes de dar un cambio de medida para un proceso de Lévy en general, se darán algunos casos particulares, cuya demostración se puede ver en el capítulo 9 del libro de Cont y Tankov [9].

Proposición 3.3.1 (Medida equivalente para un proceso Poisson). *Sea $(N, \mathbb{P}_{\lambda_1})$ y $(N, \mathbb{P}_{\lambda_2})$ sean procesos Poisson en (Ω, \mathcal{F}_T) con intensidades λ_1 y λ_2 y saltos de tamaño a_1 y a_2 .*

1. Si $a_1 = a_2$ entonces \mathbb{P}_{λ_1} es equivalente a \mathbb{P}_{λ_2} con derivada de Radon-Nikodym

$$\frac{d\mathbb{P}_{\lambda_1}}{d\mathbb{P}_{\lambda_2}} = \exp \left[(\lambda_2 - \lambda_1)T - N_T \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right]. \quad (3-3)$$

2. Si $a_1 \neq a_2$ entonces las medidas \mathbb{P}_{λ_1} y \mathbb{P}_{λ_2} no son equivalentes.

Este resultado significa que cambiando la intensidad de los saltos es como "ajustar" las probabilidades en las trayectorias, no se generan nuevas trayectorias simplemente cambiando la intensidad.

Sin embargo, cambiando el tamaño de los saltos genera diferentes trayectorias, y cambiar el tamaño de los saltos genera una nueva medida que asigna probabilidad 0 a eventos que si eran posibles, por lo que las medidas no serían equivalentes.

Proposición 3.3.2 (Medida equivalente para un proceso Poisson compuesto). Sean (X, \mathbb{P}) y (X, \mathbb{Q}) procesos Poisson compuestos en (Ω, \mathcal{F}_T) con medidas de Lévy $\nu^{\mathbb{P}}$ y $\nu^{\mathbb{Q}}$. \mathbb{P} y \mathbb{Q} son equivalentes si y sólo si $\nu^{\mathbb{P}}$ y $\nu^{\mathbb{Q}}$ son equivalentes. En este caso la derivada de Radon-Nikodym es:

$$D_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(T(\lambda^{\mathbb{P}} - \lambda^{\mathbb{Q}}) + \sum_{s \leq T} \phi(\Delta X_s) \right), \quad (3-4)$$

donde $\lambda^{\mathbb{P}} \equiv \nu^{\mathbb{P}}(\mathbb{R})$ y $\lambda^{\mathbb{Q}} \equiv \nu^{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ son las intensidades de salto de los dos procesos y $\phi \equiv \ln \left(\frac{d\nu^{\mathbb{Q}}}{d\nu^{\mathbb{P}}} \right)$.

Proposición 3.3.3 (Medida equivalente para un movimiento Browniano con deriva). Sean (X, \mathbb{P}) y (X, \mathbb{Q}) dos movimientos Brownianos en (Ω, \mathcal{F}_T) con volatilidades $\sigma^{\mathbb{P}} > 0$ y $\sigma^{\mathbb{Q}} > 0$ y derivas $\mu^{\mathbb{P}}$ y $\mu^{\mathbb{Q}}$. \mathbb{P} y \mathbb{Q} son equivalentes si $\sigma^{\mathbb{P}} = \sigma^{\mathbb{Q}}$. En ese caso la derivada de Radon-Nikodym equivalente es:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} &= \exp \left\{ \frac{\mu^{\mathbb{Q}} - \mu^{\mathbb{P}}}{\sigma^2} X_T - \frac{1}{2} \frac{(\mu^{\mathbb{Q}} - \mu^{\mathbb{P}})^2}{\sigma^2} T \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{\mu^{\mathbb{Q}} - \mu^{\mathbb{P}}}{\sigma} W_T - \frac{1}{2} \frac{(\mu^{\mathbb{Q}} - \mu^{\mathbb{P}})^2}{\sigma^2} T \right\} \end{aligned} \quad (3-5)$$

donde $W_t = \frac{X_t - \mu^{\mathbb{P}} t}{\sigma}$ es un movimiento Browniano bajo \mathbb{P} .

Este resultado es conocido como el teorema de Cameron-Martin, y muestra que la deriva y la volatilidad juegan papeles muy diferentes al especificar un modelo de difusión. Mientras que modificar la deriva es "ajustar" las trayectorias de X , cambiar la volatilidad genera un proceso totalmente distinto, que conllevan a escenarios que en un principio eran imposibles. La versión más general de estos resultados es el teorema de Girsanov.

El resultado general, que incluye los 3 casos anteriores se da en la siguiente proposición.

Proposición 3.3.4. Sean (X, \mathbb{P}) y (X, \mathbb{Q}) procesos de Lévy en \mathbb{R} con tripletas características (σ^2, ν, γ) y $(\sigma'^2, \nu', \gamma')$. Entonces $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$ y $\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t}$ son equivalentes para toda t si y sólo si satisfacen las siguientes tres propiedades:

1. $\sigma = \sigma'$

2. Las medidas de Lévy son equivalentes con

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{\phi(x)/2} - 1)^2 \nu(dx) < \infty, \quad (3-6)$$

donde $\phi(x) = \ln \left(\frac{d\nu'}{d\nu} \right)$.

3. Si $\sigma = 0$ entonces además se debe cumplir que

$$\gamma' - \gamma = \int_{-1}^1 x(\nu' - \nu)(dx). \quad (3-7)$$

Cuando \mathbb{P} y \mathbb{Q} son equivalentes, la derivada de Radon-Nikodym es

$$\frac{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t}} = e^{U_t} \quad (3-8)$$

donde

$$U_t = \eta X_t^c - \frac{\eta^2 \sigma^2 t}{2} - \eta \gamma t + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left(\sum_{s \leq t, |\Delta X_s| > \epsilon} \phi(\Delta X_s) - t \int_{|x| > \epsilon} (e^{\phi(x)} - 1) \nu(dx) \right).$$

Aquí X_t^c es la parte continua de (X_t) y η es tal que

$$\gamma' - \gamma - \int_{-1}^1 x(\nu' - \nu)(dx) = \sigma^2 \eta$$

si $\sigma > 0$ y cero si $\sigma = 0$.

U_t es un proceso de Lévy con tripleta característica (a_U, ν_U, γ_U) dadas por:

$$a_U = \sigma^2 \eta^2, \quad (3-9)$$

$$\nu_U = \nu \phi^{-1}, \quad (3-10)$$

$$\gamma_U = -\frac{1}{2} a \eta^2 - \int_{-\infty}^{\infty} (e^y - 1 - y \mathbb{1}_{|y| \leq 1}) (\nu \phi^{-1})(dy). \quad (3-11)$$

3.4. Valuación y cobertura en mercados incompletos

Mientras que la ausencia de arbitraje es una propiedad razonable y genérica de muchos modelos estocásticos, el hecho de que el mercado sea completo no es ni, financieramente hablando, realista ni una propiedad fuerte teóricamente hablando. Desde el punto de vista financiero, un mercado completo implica que las opciones son instrumentos redundantes y su propia existencia se vuelve un misterio, si no es que hasta una paradoja en dichos modelos. Esto es porque siempre debe haber riesgo cuando se adquiere el contrato de una opción.

En un mercado completo, sólo hay una manera de valorar una opción libre de arbitraje, el valor está dado por el costo de replicarlo. En los mercados reales no existen coberturas perfectas, no por el hecho de que se consideren transacciones continuas (lo cual es imposible en la realidad), sino porque hay riesgos que no se pueden cubrir aún haciendo los cambios al portafolio en tiempo continuo. Por lo que debemos de modificar la forma en que se realizan las coberturas en el mercado. Lo primero es reconocer que cubrir una opción es riesgoso en si mismo, después debemos especificar una forma de medir dicho riesgo y luego tratar de minimizarlo. Existen diferentes enfoques que han sido estudiados y que se utilizan en las aplicaciones prácticas, como son la supercobertura (superhedging), maximización de utilidad y la cobertura media-varianza (mean-variance hedging). Cada una de estas coberturas tiene un costo, que en algunos casos se puede obtener explícitamente, es decir, el valor de la opción consistirá en dos partes: el costo de la estrategia de cobertura mas una prima de riesgo, requerida por el vendedor de la opción para cubrir el riesgo residual (que no puede ser cubierto).

Consideremos un mercado con una cuenta libre de riesgo con tasa de interés r y d subyacentes riesgosos ($S^i, i = 1, \dots, d$). Denotaremos por $\pi_t S_t$ al dinero invertido en los subyacentes, es decir, $\pi_t S_t = \sum_{i=1}^d \pi_t^i S_t^i$, y sea $\tilde{S}_t = S_t e^{-rt}$ el precio descontado. Como el mercado es incompleto y libre de arbitraje, el conjunto de medidas martingala equivalentes, $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\tilde{S})$, es no vacío y no tiene sólo un elemento. Por definición de mercado incompleto, si H es una reclamación contingente, en general no es posible construir un estrategia de cobertura para H , esto es un portafolio autofinanciable con valor terminal H .

El conjunto

$$\left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(He^{-rT}), \mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\tilde{S}) \right\},$$

es el conjunto de los precios *viables*. Si se paga H al precio $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(He^{-rT})$ para $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\tilde{S})$, no induce a oportunidades de arbitraje. Se presenta una breve descripción de algunos métodos para evaluar reclamaciones contingentes en mercados incompletos.

Una forma es encontrar una estrategia de cobertura que replique lo mejor posible a la reclamación contingente. Otra podría ser encontrar una medida martingala equivalente en particular, como puede ser la medida de martingala mínima o la medida de menor entropía. Otro método es relacionar el precio de la reclamación contingente a una función de utilidad.

Super-replicación

El precio de **super-replicación** de H es el menor capital inicial v tal que existe una estrategia autofinanciable π que *super-replica* la reclamación contingente, esto es, el caso donde $r = 0$, v satisface

$$v = \inf \left\{ w : \exists \pi, w + \int_0^T \pi_s dS_s \geq H \right\}.$$

El precio de super-replicación v también se conoce como precio de venta. Se prueba en [11] que este precio de super-replicación es el supremo de los precios viables, es decir

$$\sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\tilde{S})} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-rT} H).$$

Ver también [22]. Sin embargo, desde el punto de vista del practicante, el precio es muy grande. En el caso de volatilidad estocástica, el precio de venta de una opción Europea es casi siempre infinito, excepto cuando la volatilidad es acotada.

Este método puede ser aplicado en modelos donde se consideran costos de transacción.

Cobertura cuadrática

En [17] se sugiere minimizar el error cuadrático bajo la medida de probabilidad histórica, esto es, encontrar v y π que minimice

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left((H - V_T^{v,\pi})^2 \right)$$

sobre el capital inicial v y las estrategias autofinanciables π , donde $V_T^{v,\pi} = x + \int_0^T \pi_s dS_s$ es el valor terminal asociado a la estrategia π (suponiendo que la tasa de interés es nula).

Se puede probar que existe, al menos en mercados con precios en tiempo continuo, una densidad de Radon-Nikodym L^q que no depende la elección de H tal que $v = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-rT} H L^q)$. A pesar de ser una solución explícita al problema, a muchos practicantes no les gusta este criterio, que da el mismo peso a las pérdidas y ganancias de V respecto de H . Para un estudio más completo puede ver el libro [16].

Elección de una medida de martingala equivalente

Este método consiste en elegir una medida de martingala equivalente de manera apropiada. Una posibilidad es minimizar $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(f(L_T))$ sobre el conjunto de densidades de Radon-Nikodym para una función convexa f dada. Por ejemplo:

Medida de mínima entropía: $f(x) = x \ln x$

Sea \mathbb{P} y \mathbb{Q} dos medidas de probabilidad equivalentes. La entropía relativa de \mathbb{Q} con respecto a \mathbb{P} corresponde a la elección $f(x) = x \ln x$ y es

$$H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\ln \left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right) \right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \ln \left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right) \right).$$

Sea S el valor del subyacente y $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\tilde{S})$ el conjunto de las medidas de martingala equivalentes. Cualquier probabilidad \mathbb{Q}^* tal que

- i) $\mathbb{Q}^* \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\tilde{S})$
- ii) $\forall \mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\tilde{S}), H(\mathbb{Q}^*|\mathbb{P}) \leq H(\mathbb{Q}|\mathbb{P})$

es llamada medida de mínima entropía. Se puede revisar [13] para un estudio más amplio.

Precios Indiferentes

Se explicará brevemente el método que fue iniciado por Hodges y Neuberger [14]. Sea x el fondo inicial de un agente y U su función de utilidad. El precio de la reclamación contingente H esta definida como el ínfimo de las h 's tal que

$$\sup_{\pi} \mathbb{E}[U(V_T^{x+h,\pi} - H)] \geq \sup_{\pi} \mathbb{E}[U(V_T^{x,\pi})],$$

donde el supremo se toma sobre todas las estrategias admisibles. El agente que vende la reclamación contingente empieza con un fondo inicial $x+h$. Usando la estrategia π , obtiene un portafolio con valor terminal $V_T^{x+h,\pi}$ y tiene que entregar la reclamación H , entonces su riqueza final es $V_T^{x+h,\pi} - H$. Él acepta vender la reclamación si su utilidad $\sup_{\pi} \mathbb{E}[U(V_T^{x+h,\pi} - H)]$ es mayor que su utilidad si no la vendiera. El caso particular donde U es una función exponencial se estudia a detalle en [12].

Como este trabajo está basado en modelos que incluyen saltos es importante mencionar que encontrar la medida de martingala sobre la cual el precio es neutral al riesgo (la cual ya mencionamos que no es única), no es tan sencillo además de que como pudimos notar cada enfoque tiene una prioridad, es decir, que se basan en encontrar un medida de martingala con ciertas propiedades.

Medida de Esscher

Sea S_t el precio al tiempo t de un activo que no paga dividendos. Y sea un proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ con incrementos independientes y estacionarios tal que

$$S_t = S_0 e^{X_t}, \quad t \geq 0.$$

Si la función generadora de momentos de X_t existe, está dada por

$$M(z, t) = \mathbb{E} [e^{zX_t}],$$

Suponiendo que $M(z, t)$ es continua en $t = 0$ se puede probar que $M(z, t) = [M(z, 1)]^t$. Y por simplicidad supongamos que X_t tiene densidad

$$f(x, t) = \frac{d}{dx} F(x, t), \quad t > 0,$$

entonces

$$M(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} f(x, t) dx.$$

Sea h un número real para el cual $M(h, t)$ existe. Vamos a definir la transformada de Esscher de parámetro h del proceso X_t . Este proceso también tiene incrementos independientes y estacionarios, donde la nueva función de densidad de X_t , $t > 0$, es

$$f(x, t; h) = \frac{e^{hx} f(x, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} f(y, t) dy} = \frac{e^{hx} f(x, t)}{M(h, t)}.$$

Esto es, la distribución modificada de X_t es la transformada de Esscher de la distribución original.

La correspondiente función generadora de momentos es

$$M(z, t; h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} f(x, t; h) dx = \frac{M(z + h, t)}{M(h, t)}.$$

La transformada de Esscher está bien definida para una variable aleatoria, pero en este caso se considera la transformada de Esscher de un proceso estocástico. En otras palabras la medida de probabilidad del proceso ha sido modificada. Como la función exponencial es una función positiva, la medida de probabilidad modificada es equivalente a la medida de probabilidad original. Entonces estamos buscando una $h = h^*$, tal que el proceso de precios descontados sea martingala respecto a la medida de probabilidad correspondiente a h^* .

Se puede demostrar que el parámetro h^* es único. Entonces la transformada de Esscher de parámetro h^* se le llama la transformada de Esscher neutral al riesgo y la correspondiente medida de martingala equivalente como medida de Esscher neutral al riesgo. Notemos que, a pesar de que la medida de Esscher es única, pueden existir otras medidas de martingala equivalentes. Para más detalles ver el artículo de Hans Gerber y Elias Shiu [20].

Capítulo 4

Riesgo de Crédito

Este capítulo es una breve introducción al riesgo de crédito, el objetivo es dar las definiciones que se utilizan en el último capítulo. Se da la definición de default, como verlo dependiendo del modelo que se escoge, la notación que se usa en este trabajo para los derivados de crédito y por último se da la notación que se tiene para un intensity-based model.

4.1. Riesgo de crédito

En el ámbito financiero, los procesos estocásticos nos sirven para la toma de decisiones, dando intervalos de confianza, arrojando estimaciones, tratando de minimizar riesgos o pérdidas. Podemos dividir estos riesgos en 3 tipos:

1. Riesgo de mercado, es el riesgo de que ocurra un cambio en la posición financiera, debido a cambios de los componentes que la forman, como las acciones, los bonos, divisas, tasas, etc.
2. Riesgo de crédito, es el riesgo de no recibir pagos por parte del deudor en un contrato tal como préstamos o bonos. A esto se le llama "default", lo que significa incumplimiento por alguna de las partes del contrato.
3. Riesgo operacional, es el riesgo de pérdidas debido a procesos inapropiados o inadecuados resultado de errores humanos o de sistemas. Así como otras posibles causas externas.

Se tiene que hacer incapié en el hecho de que algún riesgo puede entrar en 2 categorías distintas, esto no pretende dar una clasificación absoluta, más bien dar a entender que el concepto de riesgo

no es ajustable a todos los casos que se puedan presentar. Sin dejar a un lado el hecho de que lo más importante es cuantificarlo y poder hacer frente a sus consecuencias.

El riesgo de crédito es el riesgo de que una entidad de referencia no haga frente a sus obligaciones en un tiempo u horizonte finito T . Si esto pasa, diremos que ha ocurrido un default. Este riesgo es inherente a la vida cotidiana, tan sólo hay que pensar en las personas que piden préstamos a un banco para la compra de bienes raíces, por decir un ejemplo. Supongamos que el banco que expide el préstamo, establece los criterios y el tiempo en que la persona deberá pagar por el préstamo. De esta manera, el banco está expuesto al riesgo de que la persona no pueda pagar el préstamo de forma parcial, total o no de acuerdo a los criterios que habían establecido. Este tipo de riesgo es precisamente riesgo de crédito: la entidad de referencia es la persona que pide el préstamo, y el default ocurre cuando esta persona declara que no está en posición de cubrir la deuda.

Con este ejemplo tan sencillo podemos notar las características principales del riesgo de crédito. Podemos notar que hay 2 partes: por un lado el banco, que se expone al riesgo; y por el otro la entidad de referencia, que tiene que cumplir una serie de obligaciones. Además, se mencionan ciertos criterios, donde se establecen las obligaciones que se deben cumplir, es decir un conjunto de puntos que permiten identificar cuando se produce un default. Y por último este riesgo está presente en cada punto de un lapso $[0, T]$, donde T representa la fecha de término del contrato, llamado horizonte finito. Todo esto parece algo común, posiblemente alguno de nosotros hayamos sido los que piden el préstamo, pero algo menos probable es que nos hayamos detenido a pensar en la posición que tiene el banco. En principio, el banco no sabe con que probabilidad puede ocurrir un default. Es por eso que los bancos piden información sobre la persona a la que le van a otorgar el préstamo, sólo para darse una ligera idea de dicha probabilidad. Además aún suponiendo que el default ocurrirá, no se sabe en que fecha, y tampoco la severidad del default.

Haciendo un resumen de esto, podemos decir que el riesgo de crédito está determinado por el deudor, las condiciones que definen el default y el intervalo de tiempo en donde hay riesgo de que ocurra el default. Generalmente no se trabaja con personas y préstamos, si no con compañías y bonos. En donde el default puede ser definido de distintas maneras; que una compañía se declare en banca rota, que no pague cupones prometidos en bonos, una reestructuración o que se fusione con otra empresa. Para lo cual existen empresas "calificadoras" como Moody's o Standard and Poor's que evalúan la solvencia de muchas compañías en el mercado. Un cambio en esas calificaciones afecta

el precio de todos los subyacentes ligados a dicha compañía, así como los diferenciales de los bonos corporativos.

Pero aún falta un elemento por mencionar, cada día en los portafolios financieros de las compañías hay cierta probabilidad de que haya un default conjunto por parte de sus deudores. Por lo que es indispensable considerar también la probabilidad de default conjunta de los componentes del portafolio. Los default multiples no son tan comunes, como catástrofes naturales, eventos políticos, terrorismo, etc.

Por lo anterior en los Acuerdos de Basilea, se han obligado a los bancos a tener una cierta cantidad de capital para cubrir el riesgo inherente a los portafolios de crédito. Cumpliendo requisitos mínimos, se les permitió a las empresas usar sus propias estimaciones para los componentes del riesgo que determinan el requerimiento de capital que se necesita para cubrir el riesgo de crédito. Algunos de estos componentes son: determinar la probabilidad de default, la tasa de recuperación y la exposición al default. Esto es lo que ha aumentado el interés de los bancos por invertir en modelación del riesgo de crédito. Pero los bancos tienen otra opción, pueden cubrir el riesgo de crédito, comprando derivados de crédito, sobre los cuales hablaremos más adelante.

4.2. Probabilidades de default

Para valuar un instrumento de crédito es necesario conocer la probabilidad de que ocurra o no el default en un lapso $[0, t]$ donde $0 \leq t \leq T$ y T es el tiempo finito de maduración, esto para un deudor o un portafolio de deudores. Para valuar instrumentos, en finanzas siempre se mencionan dos medidas, la probabilidad en el "mundo real" y la probabilidad neutral al riesgo, con la que realmente se va a valuar un instrumento financiero. Y como lo que nos interesa son los derivados de crédito, utilizaremos la medida neutral al riesgo para nuestros cálculos. La valuación neutral al riesgo nos dice que el valor del derivado está dado al obtener la esperanza del precio descontado bajo la medida neutral al riesgo:

$$V_0 = E[\textit{payoff descontado}].$$

donde V_0 es el valor del derivado al tiempo cero.

Se denotan dos probabilidades, que a su vez están completamente ligadas, una es la probabilidad

de supervivencia, es decir, $P_{Sup}(t) = \text{Probabilidad de que NO haya default en } [0, T]$ y la otra es la probabilidad de default $P_{Def}(t) = \text{Probabilidad de que ocurra el default en } [0, T]$, y es claro que $P_{Def}(t) = 1 - P_{Sup}(t)$ para toda t en $[0, T]$. Estas probabilidades son respecto a la medida neutral al riesgo. Por supuesto que en la realidad no se considera sólo un deudor, si no grupos muy grandes, por lo cual es importante la estimación de ocurrencias de defaults conjuntos. Pero es difícil, ya que en los casos multivariados una de las hipótesis utilizadas con mayor frecuencia es la independencia, pero en el mercado es claro que prácticamente todo está correlacionado de alguna manera, por lo que se utilizan modelos más complicados como son las cópulas. Muchas veces se hacen calibraciones de las probabilidades de default con datos del mercado, el concepto de "frecuencias de default esperadas" de la corporación KMV, que de hecho se conoce como Modelo KMV, se puede utilizar para estimarlas. Y otra forma de obtenerlas sería, por ejemplo, con una calibración a partir de ratings, los cuales se obtienen, como ya habíamos mencionado, de empresas tales como Moody's Investors Services o Fitch, o también pueden ser ratings internos de un banco. Pero esto no es importante para el enfoque de este trabajo, por lo que omitiré el cálculo de estas probabilidades.

4.3. Modelos para el riesgo de crédito

En las últimas décadas ha ido aumentando el interés por crear nuevos modelos para el riesgo de crédito, esto es debido a que la cantidad de instrumentos financieros relacionados al riesgo de crédito han crecido en gran cantidad, además de la implementación del Acuerdo de Basilea II que ya habíamos mencionado anteriormente, que ha motivado a las instituciones financieras a crear modelos que permitan estimar su exposición a dicho riesgo. Para modelar el riesgo de crédito se hace uso principalmente de los siguientes 2 enfoques:

1. Modelos estructurales (structural models o firm-value models), los cuales ligan el evento de default al precio del instrumento financiero de una compañía, generalmente se considera conocida la dinámica del instrumento financiero y el default se define en término de las condiciones de tal dinámica. El modelo de Black-Scholes es el fundador de este tipo de modelos.
2. Modelos basados en la intensidad de default (intensity-based models, hazard rate o reduced-form models), se enfoca directamente en modelar la probabilidad de default. Es decir, se supone que en cualquier instante hay cierta probabilidad de que ocurra el default, que depende del

tiempo que ya haya pasado sin que ocurra dicho default. Es por esto que este tipo de modelos son los más usados para valorar derivados de crédito.

Por ejemplo tomando en cuenta un modelo estructural, podemos decir que si el precio de un activo V_t es un movimiento Browniano geométrico con t en $[0, T]$, con cierta μ y cierta σ , y definimos una contante B tal que si el precio baja de ese nivel se considera un default. Este ejemplo es muy sencillo pero es claro que el default no es de prioridad principal.

Por el otro lado, tomando en cuenta un intensity-based model, el default está modelado por el primer salto de un proceso de conteo $N = N_t$ con intensidad $\lambda = \lambda_t$, que puede ser determinista o estocástica. Y con esto se obtiene el precio del riesgo de crédito. La intensidad modela la tasa de default de la empresa. Supongamos que no ha ocurrido el default, i.e. $\tau \notin [0, t)$, entonces podemos ver a la intensidad de default como:

$$\lambda_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(t < \tau < t + h | \tau > t)}{h}.$$

Por ejemplo podríamos tomar N como un proceso Poisson con intensidad $\lambda > 0$, así que la probabilidad de que no haya default al tiempo t sería $P_{Sup}(t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = \exp(-\lambda t)$. Y haciendo uso de las propiedades de un proceso Poisson, ya que el tiempo entre los arribos es exponencial de parámetro λ , el tiempo esperado de default es $1/\lambda$.

Para ambos modelos, es importante adoptar saltos, ya que los cambios en la solvencia de una compañía generalmente son muy bruscos, y esto cambia también la probabilidad de que ocurra un default. Algunos ejemplos serían un ataque terrorista, que una compañía rival presentara un default, fraudes, etc. Para estos casos se habla de una tasa de recuperación, la cual nos dice que porcentaje se devuelve a los inversionistas en caso de que ocurra el default, y como es de esperarse va a depender del tipo de inversionista del que se trate, puesto que los inversionistas de mayor rango obtendrán una tasa de recuperación más alta que las de un inversionista de menor categoría.

4.4. Derivados de crédito

Los bancos y otras instituciones financieras han podido manejar el riesgo de crédito de manera más eficiente desde que los derivados de crédito fueron introducidos al mercado en 1993 en Londres y Nueva York. Los derivados de crédito son contratos financieros bilaterales en los que se transfiere el

riesgo de default de una parte a la otra. Con los derivados de crédito separan el riesgo de crédito de otros tipos de riesgo que se mencionaron, el de mercado y el operacional. Pueden pensarse como un seguro contra el default. La idea central es que el riesgo de crédito se transfiera pero no la propiedad del subyacente.

Los bancos utilizan estos derivados tanto para cobertura como para asumir el riesgo de crédito, diversificar sus portafolios o mejorar el manejo de sus portafolios.

Los derivados de crédito aseguran y protegen contra movimientos adversos en la calidad crediticia del deudor. Por ejemplo, en caso de que se de un default por parte del deudor, el inversionista sufre pérdidas, pero estas pérdidas se pueden evitar utilizando los derivados de crédito. La pregunta que surge con mayor frecuencia es por qué no usar el mercado de seguros que está bien establecido... Bueno, las razones principales son que los derivados de crédito ofrecen menos costos de transacción, pagos rápidos, y mayor liquidez.

En el caso de los derivados de crédito debemos tomar en cuenta dos cosas principalmente, lo primero es que en general los pagos predeterminados no están garantizados puesto que si ocurre el default los pagos pueden cancelarse, y lo segundo es que la mayoría de los productos de este tipo pagan cierta cantidad justo cuando ocurre el default, es decir al tiempo τ . Así que, con esto en mente, vamos a adoptar la siguiente representación general de derivados de crédito por su flujo de dividendos acumulados¹:

$$D_t = \sum_{t_i \leq t} d_1(t_i) \mathbb{1}_{\{\tau > t_i\}} + d_2(\tau) \mathbb{1}_{\{\tau \leq t_i\}} \quad t \geq 0.$$

Intuitivamente, $d_1(t_i)$ son los pagos que se hacen al tiempo t_i , $i = 1, \dots, N$, dado que no ha ocurrido el default hasta t_i y el pago $d_2(\tau)$ al tiempo que ocurre el default.

La mayoría de los derivados de crédito del tipo single-name² se pueden representar de esta forma, y los 3 que nos interesan son los siguientes:

1. Defaultable zero-bond. Un cupón como este paga 1 en T si $\tau > T$, y no hay tasa de recuperación. Es decir, $d_1(t) = \mathbb{1}_{\{t=T\}}$ y $d_2(\tau) = 0$.
2. Digital default payment. Este paga 1 en el default, si el default ocurre antes de T y cero en

¹Esta representación fue propuesto en [18]

²Son instrumentos donde sólo una entidad de referencia protege contra el evento de default.

otro caso. Por lo tanto tenemos que, $d_1(t) = 0$ y $d_2(\tau) = 1$.

3. Credit Default Swap (CDS). El que compra la protección en el CDS ofrece pagos regulares de tamaño δ en las fechas establecidas, $t_1 < \dots < t_N$, a cambio de un pago al tiempo de default τ , si $\tau \in (0, T]$. Los pagos δ sólo se realizan hasta la fecha en que ocurre el default, en τ recibe un pago L , mientras $\tau \leq T$. Y esto puede ser modelado de forma que $d_1(t) = -\delta$ y $d_2(\tau) = L$. En el mercado lo que se cita son los diferenciales (credit spread) que se obtienen al igualar el valor de CDS a cero y resolver la ecuación para δ .

Estos 3 derivados de crédito serán los que se valuarán en este trabajo, utilizando un proceso shot-noise dirigido por un proceso de Lévy. Para lo cual necesitaremos una serie de herramientas matemáticas muy fuertes e importantes, por lo que el siguiente capítulo está dedicado a mencionarlas.

Para fines del trabajo, se utilizarán los modelos basados en la intensidad de default mencionados anteriormente, y el siguiente capítulo está dedicado a este tipo de modelos.

4.5. Intensity based models

En esta sección se desarrollarán las herramientas que se ocuparán después para valorar los derivados de crédito. Consideramos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ donde \mathbb{Q} es la medida de riesgo neutral. La filtración (\mathcal{F}_t) representa la información total del mercado, y satisface las condiciones usuales. El tiempo de default τ es un \mathcal{F}_t -tiempo de paro, por lo que el proceso de default, $H(t) = \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$, es continuo por la derecha y es \mathcal{F}_t -adaptado. Y la probabilidad de default \mathcal{F}_t -condicional es

$$P_d(t, T) = \mathbb{E}[H(T)|\mathcal{F}_t], \quad t \in [0, T]. \quad (4-1)$$

Se puede probar que H es una submartingala uniformemente integrable³. Y por la descomposición de Doob-Meyer existe un único proceso no decreciente \mathcal{F}_t -predecible $A(t) = A(t \wedge \tau)$ con $A(0) = 0$ y tal que $M(t) = H(t) - A(t)$ es martingala. Entonces:

³Ver apéndice C.

$$P_d(t, T) = \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}} + \mathbb{E}[A(T) - A(t) | \mathcal{F}_t]. \quad (4-2)$$

Notemos que \mathcal{F}_t se puede decomponer de tal manera que:

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t,$$

donde $\mathcal{H}_t = \sigma(H(s) | s \leq t)$, (\mathcal{G}_t) es una familia de sub σ -álgebras de (\mathcal{F}_t) y $\mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t$ es la σ -álgebra más pequeña que contiene a \mathcal{G}_t y \mathcal{H}_t . De manera intuitiva, los eventos en \mathcal{F}_t son \mathcal{G}_t -observables dado que $\tau > t$.

Lema 4.5.1. *Sea $t \in \mathbb{R}_+$. Para toda $A \in \mathcal{F}_t$ existe $B \in \mathcal{G}_t$ tal que:*

$$A \cap \{\tau > t\} = B \cap \{\tau > t\} \quad (4-3)$$

Utilizaremos la siguiente suposición:

(S1) existe un proceso λ \mathcal{G}_t -progresivo tal que

$$\mathbb{Q}[\tau > t | \mathcal{G}_t] = e^{-\int_0^t \lambda_s ds}.$$

Por lo que $\mathbb{Q}[\tau \leq t | \mathcal{G}_t] < 1$. En particular, $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$ es estricta, un participante del mercado con acceso a la información parcial \mathcal{G} no puede observar si el default ha ocurrido o no al tiempo t . Es decir, τ no es un tiempo de paro para \mathcal{G}_t .

Lema 4.5.2. *Supongamos (S1), y sea Y una variable aleatoria no negativa. Entonces*

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{F}_t] = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} e^{\int_0^t \lambda_s ds} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{G}_t] \quad (4-4)$$

para toda t .

Demostración: Sea $A \in \mathcal{F}_t$. Utilizando el lema anterior se tiene que existe $B \in \mathcal{G}_t$ tal que $\mathbb{1}_{\{A\}} \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} = \mathbb{1}_{\{B\}} \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}$. Entonces utilizando la definición de esperanza condicional

$$\begin{aligned}
\int_A \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y \mathbb{Q}[\tau > t | \mathcal{G}_t] d\mathbb{Q} &= \int_B \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y \mathbb{Q}[\tau > t | \mathcal{G}_t] d\mathbb{Q} \\
&= \int_B \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{G}_t] \mathbb{Q}[\tau > t | \mathcal{G}_t] d\mathbb{Q} \\
&= \int_B \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{G}_t] d\mathbb{Q} \\
&= \int_A \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{G}_t] d\mathbb{Q}.
\end{aligned}$$

Y utilizando la definición de esperanza condicional, esto implica que

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y \mathbb{Q}[\tau > t | \mathcal{G}_t] | \mathcal{F}_t] = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{G}_t],$$

y recordemos que

$$\mathbb{Q}[\tau > t | \mathcal{G}_t] = e^{-\int_0^t \lambda_s ds}.$$

Con lo que concluye la prueba. ■

El siguiente lema es sobre las probabilidades de default condicionales:

Lema 4.5.3. *Supongamos (S1), para toda $t \leq T$ tenemos que*

$$\mathbb{Q}[\tau > T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T \lambda_s ds} | \mathcal{G}_t \right], \quad (4-5)$$

$$\mathbb{Q}[t < \tau \leq T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E} \left[1 - e^{-\int_t^T \lambda_s ds} | \mathcal{G}_t \right]. \quad (4-6)$$

Demostración: Sea $t \leq T$. Notemos que $\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{1}_{\{\tau > T\}}$. Utilizando el lema anterior tenemos

lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}[\tau > T | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} | \mathcal{F}_t] \\
&= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} e^{\int_0^t \lambda_s ds} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} | \mathcal{G}_t] \\
&= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} e^{\int_0^t \lambda_s ds} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} | \mathcal{G}_T] | \mathcal{G}_t] \\
&= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} e^{\int_0^t \lambda_s ds} \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^T \lambda_s ds} | \mathcal{G}_t\right] \\
&= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T \lambda_s ds} | \mathcal{G}_t\right].
\end{aligned}$$

Con lo que la primera ecuación queda demostrada, y para la segunda ecuación notemos que $\mathbb{1}_{\{t < \tau \leq T\}} = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} - \mathbb{1}_{\{\tau > T\}}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}[t < \tau \leq T | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} - \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} | \mathcal{F}_t] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} | \mathcal{F}_t] - \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T \lambda_s ds} | \mathcal{G}_t\right] \\
&= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \left(1 - \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T \lambda_s ds} | \mathcal{G}_t\right]\right) \\
&= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \left(\mathbb{E}\left[1 - e^{-\int_t^T \lambda_s ds} | \mathcal{G}_t\right]\right),
\end{aligned}$$

la esperanza $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} | \mathcal{F}_t]$ es igual a $\mathbb{1}_{\{\tau > t\}}$ por que es \mathcal{F}_t -medible, pues (\mathcal{F}_t) nos da la información completa del mercado al tiempo t . ■

Estos resultados serán de gran utilidad para simplificar las demostraciones en la parte de las aplicaciones.

Capítulo 5

Aplicaciones del modelo Shot-Noise

Antes de presentar los modelos shot-noise dirigidos por un proceso de Lévy, utilizaré el proceso shot-noise mencionado en la introducción para calcular su medida de martingala mínima. Esto lo hago con el fin de mostrar que los procesos del tipo shot-noise también permiten realizar cálculos no tan complicados para encontrar una medida sobre la cual valorar nuestros instrumentos financieros.

5.1. Medida de martingala mínima

Primero recordemos nuestro modelo para un proceso shot-noise

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right) \prod_{i=1}^{N_t} (1 + U_i h(t - \tau_i)), \quad (5-1)$$

en la introducción se mencionan sus características así como sus componentes.

Lo que se pretende es determinar la medida de martingala mínima asociada a este proceso. A esta medida la llamaremos \mathbb{Q} , y tendrá una densidad L_T con respecto a la medida original \mathbb{P} del proceso S :

$$d\mathbb{Q} = L_T d\mathbb{P}, \quad (5-2)$$

donde T es finito, y es considerado como el tiempo de maduración de un reclamo contingente asociado a $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$. Si H_T es el payoff al tiempo T , entonces el valor presente de H_T es igual a

$$H_0 = e^{-rT} \hat{\mathbb{E}}(H_T), \quad (5-3)$$

donde r es la tasa de interés en el mercado y $\hat{\mathbb{E}}$ es la esperanza con respecto de \mathbb{Q} .

Como nuestro modelo es incompleto, la medida de martingala no es única. La medida de martingala mínima es la medida de martingala equivalente \mathbb{Q} , tal que cualquier \mathbb{P} -martingala cuadrado integrable, ortogonal¹ a S bajo \mathbb{P} , también es ortogonal a S bajo \mathbb{Q} . Esta medida de martingala está relacionada a la estrategia de cobertura que minimiza el riesgo local inherente al hecho de no haber coberturas perfectas en el mercado, la llamada estrategia de minimización del riesgo local.

Por lo general no es fácil determinar L_T , en particular si el modelo de S es complicado. Por lo que empezaremos tomando a S evaluada en una partición de $[0, T]$. Sea $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, donde $t_i = \frac{iT}{n}$, $0 \leq i \leq n$.

Sea

$$r_j = \frac{S_j}{S_{j-1}} - 1, \quad 1 \leq j \leq n \quad (5-4)$$

y sea

$$r_j = M_j - M_{j-1} + \mu_j \equiv \Delta M_j + \mu_j, \quad (5-5)$$

con

$$\mu_j = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(r_j | \mathcal{F}_{j-1}), \quad (5-6)$$

la descomposición de Doob-Meyer de r_j , $1 \leq j \leq n$. \mathcal{F}_j denota la σ -álgebra generada por el proceso hasta el tiempo t_j . Entonces tenemos que

$$S_j = S_0 \prod_{i=1}^j [1 + \mu_i + \Delta M_i]. \quad (5-7)$$

Y la densidad mínima correspondiente que estamos buscando es

$$L_n = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} | \mathcal{F}_n \right],$$

¹Dos martingalas cuadrado integrables son ortogonales si su producto también es martingala.

y sea

$$V_n = M_n - \int_0^n \frac{d \langle M, L \rangle_{\mathbb{P}}}{L_-}.$$

En términos del proceso² $(V_n)_{n \geq 0}$, $(S_n)_{n \geq 0}$ tiene representación

$$S_n = S_0 \prod_{i=1}^n \left[1 + \mu_i + \Delta V_i - \frac{\langle M, L \rangle_i - \langle M, L \rangle_{i-1}}{L_{i-1}} \right].$$

$(S_n)_{n \geq 0}$ es una \mathbb{Q} -martingala si y sólo si

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[1 + \mu_n + \Delta V_n - \frac{\langle M, L \rangle_n - \langle M, L \rangle_{n-1}}{L_{n-1}} \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right] = 1.$$

El Teorema de Girsanov implica que $(V_n)_{n \geq 0}$ es una \mathbb{Q} -martingala. Entonces la última ecuación se cumple si y sólo si

$$1 + \mu_n - \frac{\langle M, L \rangle_n - \langle M, L \rangle_{n-1}}{L_{n-1}} = 1,$$

es decir

$$\begin{aligned} -\mu_n &= \frac{\langle M, L \rangle_n - \langle M, L \rangle_{n-1}}{L_{n-1}} \\ &= \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Delta M_n \Delta L_n | \mathcal{F}_{n-1}]}{L_{n-1}} \\ &= \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Delta M_n L_n | \mathcal{F}_{n-1}]}{L_{n-1}}. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Delta M_n L_n | \mathcal{F}_{n-1}] = -\mu_n L_{n-1}$. Y este sistema de ecuaciones tiene solución dada por

$$L_n = L_T = \prod_{i=1}^n \left[1 - \frac{\mu_i \Delta M_i}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\Delta^2 M_i | \mathcal{F}_{i-1})} \right]. \quad (5-8)$$

Ahora, consideremos un sólo período, con tasa de interés igual a cero. Sea $\Delta S = \Delta S_1 = S_1 - S_0$, y denotemos \mathbb{E} en lugar de $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$. El objetivo es valorar y hacer la cobertura de una reclamación contingente H al tiempo 1, la cual no puede ser replicada perfectamente. Por lo que al tiempo 1, podríamos tener una pérdida financiera y el punto es minimizar $\mathbb{E}[(H - c - \xi \Delta S)^2]$ con respecto a (c, ξ) , donde c es el precio de la reclamación al tiempo 0 y ξ es la cantidad de S que se tienen que

²Para la notación $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ver apéndice C

comprar de acuerdo a la estrategia escogida. Primero notemos que $\Delta S = S_0(\mu_1 + \Delta M)$. Y como queremos minimizar, derivamos e igualamos a cero, por lo que tenemos $0 = \mathbb{E}(H - c^* - \xi^* \Delta S)$ por parte de la c^* , y por parte de la ξ^* tenemos:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}((H - c^* - \xi^* \Delta S) \Delta S) = \mathbb{E}((H - c^* - \xi^* \Delta S) S_0(\mu_1 + \Delta M)) \\
&= \mathbb{E}((H - c^* - \xi^* \Delta S)(\mu_1)) + \mathbb{E}((H - c^* - \xi^* \Delta S)(\Delta M)) \\
&= \mathbb{E}((H - c^* - \xi^* \Delta S)(\Delta M)) = \mathbb{E}((H - c^* - S_0 \xi^* \Delta M - S_0 \xi^* \mu_1)(\Delta M)) \\
&= \mathbb{E}((H - c^* - S_0 \xi^* \Delta M)(\Delta M)) - \mathbb{E}(S_0 \xi^* \mu_1 \Delta M) \\
&= \mathbb{E}((H - c^* - S_0 \xi^* \Delta M) \Delta M).
\end{aligned}$$

Y así obtenemos dos expresiones para la ξ óptima,

$$\xi^* = \frac{\mathbb{E}((H - c) \Delta S)}{\mathbb{E}((\Delta S)^2)} = \frac{\mathbb{E}((H - c) \Delta M)}{S_0 \mathbb{E}((\Delta M)^2)}.$$

Y así tenemos que la c óptima es $c^* = \mathbb{E}(H - \xi^* \Delta S) = \mathbb{E}(H - S_0 \xi^* \mu_1)$. Al sustituir la segunda expresión para ξ^* tenemos que:

$$c^* = \mathbb{E}(H) - \mu_1 \frac{\mathbb{E}(H \Delta M)}{\mathbb{E}((\Delta M)^2)} = \mathbb{E} \left(\left(1 - \frac{\mu_1 \Delta M}{\mathbb{E}((\Delta M)^2)} \right) H \right) = \hat{\mathbb{E}}(H).$$

donde $\hat{\mathbb{E}}$ es la esperanza bajo la medida de martingala mínima, y notemos que es simplemente un cambio de medida, utilizando la densidad L_1 dada anteriormente.

Ahora, lo que sigue es dar una fórmula explícita para L_n cuando S sigue un proceso shot-noise como el que se describe al principio de este capítulo. Luego se presentará la versión continua, a través de un límite c.s. cuando $n \rightarrow \infty$. La versión discreta es de gran ayuda para las simulaciones de S y H_0 por el método de Monte Carlo.

Para esto vamos a usar cierta notacion, a saber:

$$\begin{aligned}
P_{j-1} &= \prod_{k=1}^{N_{t_{j-1}}} \frac{1 + U_k h(t_j - \tau_k)}{1 + U_k h(t_{j-1} - \tau_k)} \\
H_1(z) &= \mathbb{E}(U_1) \int_0^z h(x) dx, \\
H_2(z) &= \mathbb{E}(U_1^2) \int_0^z h^2(x) dx.
\end{aligned} \tag{5-9}$$

Para probar ambos teoremas, primero probaremos dos lemas que nos serán de gran ayuda.

Lema 5.1.1. *Para $n \in \mathbb{N}$ tenemos que*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}} \left(1 + U_{N_{t_{j-1}} + k} h(t_j - \tau_{N_{t_{j-1}} + k}) \right)^n \middle| \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right] \\
&= \exp \left\{ \lambda \frac{T}{q} [\mathbb{E}((1 + U_1 h(\eta))^n) - 1] \right\}.
\end{aligned} \tag{5-10}$$

donde η es independiente de U y tiene distribución uniforme en $[0, \delta]$.

Demostración. La parte izquierda de la ecuación (5-10) es igual a

$$\sum_{l, m \geq 0} \mathbb{1}_{\{N_{t_{j-1}} = l\}} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = m\}} \prod_{k=1}^m (1 + U_{l+k} h(t_j - \tau_{l+k}))^n \middle| \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right].$$

Para l y m fijas, las variables $\tau_{l+1} \leq \dots \leq \tau_{l+m}$ se distribuyen como m estadísticos de orden de una muestra de variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente en $[t_{j-1} - t_j]$. Como las U 's son independientes del proceso Poisson, se sigue que la esperanza es igual a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = m\}} \middle| \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right] \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^m (1 + U_{l+k} h(t_j - \tau_{l+k}))^n \middle| \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right] \\
&= e^{-\lambda \frac{T}{q}} \frac{\left(\lambda \frac{T}{q} \right)^m}{m!} \mathbb{E}^m [(1 + U_1 h(\eta))^n].
\end{aligned}$$

Ahora sumamos sobre las l y m y tenemos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{l,m \geq 0} \mathbb{1}_{\{N_{t_{j-1}}=l\}} e^{-\lambda \frac{T}{q}} \frac{\left(\lambda \frac{T}{q}\right)^m}{m!} \mathbb{E}^m[(1 + U_1 h(\eta))^n] \\
&= \sum_{l \geq 0} \mathbb{1}_{\{N_{t_{j-1}}=l\}} \sum_{m \geq 0} e^{-\lambda \frac{T}{q}} \frac{\left(\lambda \frac{T}{q}\right)^m}{m!} \mathbb{E}^m[(1 + U_1 h(\eta))^n] \\
&= (1) \cdot e^{-\lambda \frac{T}{q}} e^{\lambda \frac{T}{q} \mathbb{E}[(1 + U_1 h(\eta))^n]} \\
&= \exp \left\{ \lambda \frac{T}{q} [\mathbb{E}((1 + U_1 h(\eta))^n) - 1] \right\}
\end{aligned}$$

■

Lema 5.1.2. Con n y η como en el lema anterior y $\sigma > 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[e^{\sigma(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})} \prod_{k=1}^{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}} \left(1 + U_{N_{t_{j-1}+k}} h(t_j - \tau_{N_{t_{j-1}+k}})\right)^n \middle| \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right] \\
&= \exp \left\{ \frac{T}{q} \left(\frac{\sigma^2}{2} + \lambda [\mathbb{E}(1 + U_1 h(\eta))^n - 1] \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Demostración. Utilizamos el lema anterior y la independencia de W y N , U_1, U_2, \dots , y notemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(e^{\sigma(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})} \middle| \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) &= \mathbb{E} \left(e^{\sigma(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})} \right) \\
&= \exp \left(\frac{\sigma^2 T}{2q} \right)
\end{aligned}$$

Multiplicandolo por el resultado del lema anterior, concluimos la prueba. ■

Con estos lemas podremos demostrar los siguientes dos teoremas; para facilitar más la notación recordemos que $\delta = \frac{T}{q}$.

Teorema 5.1.3. Para el modelo shot-noise descontado, $e^{-rt} S_t$, la densidad de martingala mínima en tiempo discreto es:

$$L_n = \prod_{j=1}^n (1 - l_j). \quad (5-11)$$

con

$$l_j = \frac{1 - P_{j-1}^{-1} \exp[(r - \mu)\delta - \lambda H_1(\delta)]}{1 - \exp[\delta\sigma^2 + \lambda H_2(\delta)]} \times \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2}\delta + \sigma\Delta W_j - \lambda H_1(\delta) \right] \prod_{k=N_{t_{j-1}+1}}^{N_{t_j}} [1 + U_k h(t_j - \tau_k)] \right\}.$$

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $r = 0$. Para el resultado general sólo debemos sustituir μ por $\mu - r$. Entonces desarrollemos cada término de nuestra L_q . Primero tenemos que

$$\mu_{t_j} = \mathbb{E} \left(\frac{S_{t_j}}{S_{t_{j-1}}} \middle| \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) - 1.$$

Recordemos que $S_{t_j} = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_j + \sigma W_{t_j} \right) \prod_{k=1}^{N_{t_j}} (1 + U_k h(t_j - \tau_k))$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{S_{t_j}}{S_{t_{j-1}}} &= e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\delta + \sigma\Delta W_{t_j}} \frac{\prod_{k=1}^{N_{t_j}} [1 + U_k h(t_j - \tau_k)]}{\prod_{k=1}^{N_{t_{j-1}}} [1 + U_k h(t_{j-1} - \tau_k)]} \\ &= e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\delta + \sigma\Delta W_{t_j}} P_{j-1} \prod_{k=N_{t_{j-1}+1}}^{N_{t_j}} [1 + U_k h(t_j - \tau_k)] \end{aligned}$$

Ahora utilizamos el lemma 5.1.2 con $n = 1$, entonces

$$\begin{aligned} \mu_{t_j} &= \mathbb{E} \left(\frac{S_{t_j}}{S_{t_{j-1}}} \middle| \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) - 1 = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\delta} P_{j-1} \cdot e^{\delta \left(\frac{\sigma^2}{2} + \lambda \mathbb{E}(U_1 h(\eta)) \right)} - 1 \\ &= P_{j-1} \exp \left[\mu\delta + \lambda \mathbb{E}(U_1) \int_0^\delta h(x) dx \right] - 1. \end{aligned} \tag{5-12}$$

con η independiente de U_1 y uniformemente distribuida en $[0, \delta]$. Ahora calcularemos ΔM_j .

Entonces

$$\begin{aligned}
\Delta M_j &= \frac{S_{t_j}}{S_{t_{j-1}}} - \mathbb{E} \left(\frac{S_{t_j}}{S_{t_{j-1}}} \middle| \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right) \\
&= e^{\mu\delta} P_{j-1} \left[e^{-\delta\frac{\sigma^2}{2} + \sigma W_{t_j}} \prod_{k=N_{t_{j-1}+1}}^{N_{t_j}} [1 + U_k h(t_j - \tau_k)] - e^{\lambda H_1(\delta)} \right] \\
&= e^{\mu\delta} P_{j-1} [A_j - B].
\end{aligned} \tag{5-13}$$

Donde $B = \mathbb{E}(A_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}})$, y esto es por el lema 5.1.1, por lo que la variación cuadrática predecible toma la forma de

$$\mathbb{E}(\Delta^2 M_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}) = e^{2\mu\delta} P_{j-1}^2 [\mathbb{E}(A_j^2 | \mathcal{F}_{t_{j-1}}) - B^2].$$

con la ecuación (5-10) con $n = 2$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(A_j^2 | \mathcal{F}_{t_{j-1}}) &= e^{-\delta\sigma^2} \mathbb{E} \left[e^{2\sigma\Delta W_{t_j}} \prod_{k=N_{t_{j-1}+1}}^{N_{t_j}} [1 + U_k h(t_j - \tau_k)]^2 \middle| \mathcal{F}_{t_{j-1}} \right] \\
&= \exp \{ \delta(\sigma^2 + \lambda[\mathbb{E}((1 + U_1 h(\eta))^2) - 1]) \} \\
&= \exp \left\{ \delta\sigma^2 + 2\lambda H_1(\delta) + \lambda \mathbb{E}(U_1^2) \int_0^\delta h^2(x) dx \right\}.
\end{aligned}$$

Entonces podemos concluir que

$$\mathbb{E}(\Delta^2 M_j | \mathcal{F}_{t_{j-1}}) = \exp[2(\mu\delta + \lambda H_1(\delta))] P_{j-1}^2 [\exp(\delta\sigma^2 + \lambda H_2(\delta)) - 1]. \tag{5-14}$$

Ahora, sustituyendo las ecuaciones (5-12) - (5-14), con el cambio pertinente de μ a $\mu - r$, en l_j de la ecuación de nuestra L_q tenemos

$$\begin{aligned}
l_j &= \frac{1 - P_{j-1}^{-1} \exp[(r - \mu)\delta - \lambda H_1(\delta)]}{1 - \exp[\delta\sigma^2 + \lambda H_2(\delta)]} \\
&\times \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2}\delta + \sigma\Delta W_j - \lambda H_1(\delta) \right] \prod_{k=N_{t_{j-1}+1}}^{N_{t_j}} [1 + U_k h(t_j - \tau_k)] \right\}.
\end{aligned}$$

Con lo que concluye la prueba. ■

Teorema 5.1.4. *En tiempo continuo $0 \leq t \leq T$, la densidad mínima es:*

$$\begin{aligned}
L_T &= \prod_{i=1}^{N_T} (1 - U_i h(0) I_1(\tau_i)) \exp \left\{ \int_0^T \lambda h(0) \mathbb{E}(U_1) I_1(t) dt \right\} \\
&\times \exp \left\{ - \int_0^T \frac{\sigma^2 I_1^2(t)}{2} dt - \int_0^T \sigma I_1(t) dW_t \right\}.
\end{aligned} \tag{5-15}$$

donde

$$I_1(t) = \frac{\mu - r + \lambda \mathbb{E}(U_1) h(0) + \sum_{m=1}^{N_{t-}} \frac{U_m h'(t - \tau_m)}{1 + U_m h(t - \tau_m)}}{\sigma^2 + \lambda \mathbb{E}(U_1^2) h^2(0)},$$

Demostración. Tomemos una partición de T tal que para cada j haya, en caso de haber, a lo más un salto en $(t_{j-1}, t_j]$. Notemos que q depende de la trayectoria de N y por lo tanto es aleatoria. Entonces reescribamos L_q como

$$L_q = \exp \left[\sum_{j=1}^q \ln(1 - l_j) \mathbb{1}_{\{\tau_{N_{j-1}+1} \leq t_j\}} \right] \exp \left[\sum_{j=1}^q \ln(1 - l_j) \mathbb{1}_{\{\tau_{N_{j-1}+1} > t_j\}} \right].$$

Notemos que $\tau_{N_{j-1}+1} \leq t_j$ si y sólo si $(t_{j-1}, t_j]$ contiene exactamente un salto. Entonces el primer factor de L_q toma en cuenta todos los intervalos que tienen un salto mientras que el segundo factor cubre los intervalos vacíos. Si un intervalo es no vacío,

$$\prod_{k=N_{t_{j-1}+1}}^{N_{t_j}} (1 + U_k h(t_j - \tau_k)) = 1 + U_{N_{t_j}} h(t_j - \tau_{N_{t_j}}).$$

Utilizando la expresión para l_j que obtuvimos en el teorema 5.1.3, concluimos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^q \ln(1 - l_j) \mathbb{1}_{\{\tau_{N_{j-1}+1} \leq t_j\}} \\
&= \sum_{i=1}^{N_T} \ln \left\{ 1 - \frac{1 - \prod_{m=1}^{i-1} \frac{1 + U_m h(\tilde{t}_i - \delta - \tau_m)}{1 + U_m h(\tilde{t}_i - \tau_m)} \exp((r - \mu)\delta - \lambda H_1(\delta))}{1 - \exp(\delta \sigma^2 + \lambda H_2(\delta))} \right. \\
&\quad \left. \cdot \left[1 - (1 + U_i h(\tilde{t}_i - \tau_i)) \exp \left(-\frac{\sigma^2}{2} \delta + \sigma (W_{\tilde{t}_i} - W_{\tilde{t}_i - \delta}) - \lambda H_1(\delta) \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Donde \tilde{t}_i es el punto de la partición más cercano a τ_i por la derecha. Ahora, si q tiene a infinito, tenemos que $\delta \rightarrow 0$, así que para $1 \leq i \leq N_T < \infty$:

$$(1 + U_i h(\tilde{t}_i - \tau_i)) \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\delta + \sigma(W_{\tilde{t}_i} - W_{\tilde{t}_i - \delta}) - \lambda H_1(\delta)\right) \rightarrow 1 + U_i h(0),$$

con probabilidad uno.

Para el otro factor aplicamos la regla de l'Hospital y hacemos tender $\delta \rightarrow 0$, entonces

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \prod_{m=1}^{i-1} \frac{1+U_m H(\tilde{t}_i - \delta - \tau_m)}{1+U_m H(\tilde{t}_i - \tau_m)} \exp((r - \mu)\delta - \lambda H_1(\delta))}{1 - \exp(\delta\sigma^2 + \lambda H_2(\delta))} \\ \rightarrow & \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} \prod_{m=1, m \neq j}^{i-1} (1+U_m h(\tau_i - \tau_m)) U_j h'(\tau_i - \tau_j) (-1)}{\prod_{m=1}^{i-1} (1+U_m h(\tau_i - \tau_m))} - [(r - \mu) - \lambda \mathbb{E}U_1 h(0)] \\ & \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} \prod_{m=1, m \neq j}^{i-1} (1+U_m h(\tau_i - \tau_m)) U_j h'(\tau_i - \tau_j) (-1)}{-\sigma^2 + \lambda \mathbb{E}U_1^2 h^2(0)} \\ = & \frac{r - \mu - \lambda \mathbb{E}U_1 h(0) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{U_j h'(\tau_i - \tau_j)}{1+U_j h(\tau_i - \tau_j)}}{\sigma^2 + \lambda \mathbb{E}U_1^2 h^2(0)}. \end{aligned}$$

Recordando nuestra definición de I_1 , podemos concluir para el primer factor de L_q que

$$\exp\left[\sum_{j=1}^q \ln(1 - l_j) \mathbb{1}_{\{\tau_{N_{j-1}+1} \leq t_j\}}\right] \rightarrow \prod_{i=1}^{N_T} [1 - U_i h(0) I_1(\tau_i)]. \quad (5-16)$$

Para estudiar la contribución de los intervalos vacíos, para cada $1 \leq j \leq q$, definamos \tilde{l}_j como l_j , con $U_{N_{t_{j-1}+1}}$ reemplazado por $\tilde{U}_{N_{t_{j-1}+1}} \equiv 0$. Entonces \tilde{l}_j y l_j coinciden en los intervalos vacíos. Por lo que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q \ln(1 - l_j) \mathbb{1}_{\{\tau_{N_{j-1}+1} > t_j\}} &= \sum_{j=1}^q \ln(1 - \tilde{l}_j) \mathbb{1}_{\{\tau_{N_{j-1}+1} > t_j\}} \\ &= \sum_{j=1}^q \ln(1 - \tilde{l}_j) - \sum_{j=1}^q \ln(1 - \tilde{l}_j) \mathbb{1}_{\{\tau_{N_{j-1}+1} \leq t_j\}}. \end{aligned}$$

Así que utilizando la ecuación (5-16) en la última suma con $\tilde{U}_i = 0$ en lugar de U_i , obtenemos

$$\sum_{j=1}^q \ln(1 - \tilde{l}_j) \mathbb{1}_{\{\tau_{N_{j-1}+1} \leq t_j\}} \rightarrow 0, \quad (5-17)$$

con probabilidad uno.

Para checar la aportación de $\sum_{j=1}^q \ln(1 - \tilde{l}_j)$, utilizamos la expansión en series de taylor de $\ln(1 - x)$, por lo que

$$\ln(1 - \tilde{l}_j) = - \left[\tilde{l}_j + \frac{\tilde{l}_j^2}{2} + \frac{\tilde{l}_j^3}{3} + \dots \right]. \quad (5-18)$$

Como $\tilde{U}_{N_{t_{j-1}+1}} \equiv 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{l}_j &= \frac{1 - \prod_{k=1}^{N_{t_{j-1}}} \frac{1+U_k h(t_{j-1}-\tau_k)}{1+U_k h(t_j-\tau_k)} \exp((r-\mu)\delta - \lambda H_1(\delta))}{1 - \exp(\delta\sigma^2 + \lambda H_2(\delta))} \\ &\quad \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\delta + \sigma(W_{t_j} - W_{t_{j-\delta}}) - \lambda H_1(\delta)\right) \right] \end{aligned}$$

Como en la primera parte de la demostración, el primer factor, cuando $\delta \rightarrow 0$, es igual a

$$\frac{r - \mu - \lambda \mathbb{E}U_1 h(0) - \sum_{k=1}^{N_{t_{j-1}}} \frac{U_k h'(\tau_j - \tau_k)}{1 + U_k h(\tau_j - \tau_k)}}{\sigma^2 + \lambda \mathbb{E}U_1^2 h^2(0)} + o_{\mathbb{P}}(1) = -I_1(t_j) + o_{\mathbb{P}}(1).$$

Y el segundo factor puede ser aproximado, mediante la serie de Taylor para e^x , por

$$\frac{\sigma^2}{2}\delta - \sigma(W_{t_j} - W_{t_{j-\delta}}) + \lambda H_1(\delta) - \frac{\sigma^2}{2}(W_{t_j} - W_{t_{j-\delta}})^2 + O\left((\delta \ln \delta^{-1})^{3/2}\right)$$

uniformemente en $1 \leq j \leq q$, donde los términos de orden superior de ΔW_j están acotados por el módulo de continuidad de Lévy. Con esto podemos concluir que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^q \tilde{l}_j = \sigma \int_0^T I_1(t) dW_t - \lambda \mathbb{E}U_1 h(0) \int_0^T I_1(t) dt. \quad (5-19)$$

Y de manera similar, que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^q \tilde{l}_j^2 = \sigma^2 \int_0^T I_1^2(t) dt. \quad (5-20)$$

Y con eso es suficiente ya que los grados superiores de \tilde{l}_j son despreciables. Entonces el resultado se sigue de las ecuaciones (5-16) - (5-20). ■

Observación 5.1.5. *En el caso de un proceso de difusión con saltos puro, sin efectos shot-noise,*

la función h es igual a $h(0)$ en $t \geq 0$ y entonces $h' \equiv 0$ en ese intervalo. Entonces I_1 se simplifica mucho:

$$I_1(t) = \frac{\mu - r + \lambda \mathbb{E}(U_1)h(0)}{\sigma^2 + \lambda \mathbb{E}(U_1^2)h^2(0)},$$

Observación 5.1.6. Y si no hay saltos, entonces el modelo se reduce al de Black-Scholes con

$$I_1(t) = \frac{\mu - r}{\sigma^2} \quad y \quad \lambda = 0,$$

y entonces la densidad L_T quedaría

$$L_T = \exp \left\{ -\frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} T - \frac{(\mu - r)}{\sigma} W_T \right\},$$

bastante conocida del modelo de Black-Scholes.

Como podemos notar, la forma de L_T es bastante complicada. La densidad de martingala mínima puede tomar valores negativos si en el modelo se admiten saltos. Por lo que en la siguiente proposición se darán condiciones que aseguran que la medida de martingala mínima sea una medida de probabilidad.

Proposición 5.1.7. Supongamos que $h' \leq 0$ y que $h \geq 0$. Entonces la densidad L_T es positiva con probabilidad 1 si cualquiera de las siguientes condiciones se cumple:

1. $U_i \in [0, b)$ para toda i y

$$b \leq \frac{\sigma^2 + \lambda \mathbb{E}(U_1^2)h^2(0)}{h(0)[\mu - r + \lambda \mathbb{E}(U_1)h(0)]}. \quad (5-21)$$

2. $U_i \in (-h(0)^{-1}, 0]$ para toda i y

$$\mu - r + \lambda \mathbb{E}(U_1)h(0) \geq 0. \quad (5-22)$$

Y la siguiente proposición nos da las condiciones bajo las cuales un proceso de difusión con saltos puro nos da L_T 's no negativas.

Proposición 5.1.8. Supongamos que $U_1 \in (a, b)$ con $-1 \leq a < 0 < b$ y $h' = 0$. Si $\mu - r + \lambda \mathbb{E}(U_i)h(0) > 0$, entonces la densidad L_T es positiva con probabilidad 1 si y sólo si (5-21) se

cumple. Por otro lado, para $\mu - r + \lambda \mathbb{E}(U_i)h(0) < 0$, entonces se cumple si y sólo si

$$a \geq \frac{\sigma^2 + \lambda \mathbb{E}(U_1^2)h^2(0)}{h(0)[\mu - r + \lambda \mathbb{E}(U_1)h(0)]}. \quad (5-23)$$

y para $\mu - r + \lambda \mathbb{E}(U_i)h(0) = 0$ no hay condiciones adicionales para que L_T sea positiva.

En el apéndice de [1] se pueden ver las demostraciones de estas proposiciones.

Ambas demostraciones pueden encontrarse en el artículo [1].

5.1.9. Cobertura

La medida de martingala mínima es la contraparte de una estrategia de cobertura que minimiza el riesgo cuadrático local. A continuación se presenta en caso discreto la forma en que se lleva a cabo siguiendo el modelo shot-noise.

Una estrategia de mercado está dada por la sucesión $(\alpha_k, \beta_k)_{k \in \{0, \dots, T\}}$. α_k es la cantidad de dinero invertida a una tasa de interés libre de riesgo al tiempo k . Mientras que α_k es la variable adaptada a la filtración relevante, la variable β_k , que denota la cantidad de subyacente que se tienen al tiempo k , es un proceso predecible.

Consideremos una reclamación del tipo Europea con fecha de maduración T , representada por la v.a. H que es \mathcal{F}_T -medible. Definimos $V_k := \hat{\mathbb{E}}(H|\mathcal{F}_k)$, el valor de la reclamación al tiempo k bajo la medida de martingala mínima. La estrategia que minimiza el riesgo cuadrático local en nuestro contexto está dada por

$$\beta_k = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\Delta V_k \Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1})}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\Delta S_k^2 | \mathcal{F}_{k-1})} \quad (5-24)$$

y $\alpha_k = V_k - \beta_k S_k$, donde $t_k = k$ para facilitar la notación.

Recordemos las ecuaciones de (5-9) y sea μ_k otra vez definido por

$$1 + \mu_k = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} \middle| \mathcal{F}_{k-1} \right).$$

Utilizando la estructura de nuestro modelo, obtenemos la siguiente representación.

Teorema 5.1.10. *El cociente de cobertura para la estrategia de minimización del riesgo local es*

$$\beta_k = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[V_k B_k | \mathcal{F}_{k-1}] - \mu_k V_{k-1}}{S_{k-1} [(1 + \mu_k)^2 e^{\delta\sigma^2 + \lambda H_2(\delta)} - 1 - 2\mu_k]}. \quad (5-25)$$

con

$$B_k := P_{k-1} \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \delta + \sigma \Delta W_k \right] \prod_{j=N_{t_{k-1}}+1}^{N_{t_k}} (1 + U_j h(t_k - \tau_j)) - 1.$$

Demostración. Recordemos la descomposición $S_k = S_{k-1}(1 + \mu_k + \Delta M_k)$, donde μ_k es \mathcal{F}_{k-1} -medible y ΔM_k tiene esperanza condicional cero. Entonces $\Delta S_k = S_{k-1}(\mu_k + \Delta M_k)$. Entonces $\mathbb{E}(\Delta S_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}) = S_{k-1}^2 [\mu_k^2 + \mathbb{E}((\Delta M_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1})]$. Esta última esperanza es la que calculamos en la ecuación (5-14). Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta S_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}) &= S_{k-1}^2 \left(\mu_k^2 + e^{2(\mu\delta + \lambda H_1(\delta))} P_{j-1}^2 \left[e^{\delta\sigma^2 + \lambda H_2(\delta)} - 1 \right] \right) \\ &= S_{k-1}^2 \left(\mu_k^2 + (\mu_k + 1)^2 \left[e^{\delta\sigma^2 + \lambda H_2(\delta)} - 1 \right] \right) \\ &= S_{k-1}^2 \left((\mu_k + 1)^2 \exp(\delta\sigma^2 + \lambda H_2(\delta)) - 2\mu_k - 1 \right). \end{aligned}$$

Desarrollamos el numerador de la ecuación (5-24), entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta V_k \Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1}) &= \mathbb{E}(V_k \Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1}) - V_{k-1} \mathbb{E}(\Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1}) \\ &= S_{k-1} \mu_k \mathbb{E}(V_k | \mathcal{F}_{k-1}) + S_{k-1} \mathbb{E}(V_k \Delta M_k | \mathcal{F}_{k-1}) - S_{k-1} V_{k-1} \mu_k - 0 \\ &= S_{k-1} [\mu_k \mathbb{E}(V_k | \mathcal{F}_{k-1}) + \mathbb{E}(V_k \Delta M_k | \mathcal{F}_{k-1}) - V_{k-1} \mu_k] \\ &= S_{k-1} [\mathbb{E}(V_k (\mu_k + \Delta M_k) | \mathcal{F}_{k-1}) - V_{k-1} \mu_k]. \end{aligned}$$

De la ecuación (5-13) podemos ver que

$$\begin{aligned} \mu_k + \Delta M_k &= e^{\mu\delta} P_{k-1} e^{\lambda H_1(\delta)} - 1 + e^{\mu\delta} P_{k-1} (A_k - B) \\ &= A_k e^{\mu\delta} P_{k-1} - 1, \end{aligned}$$

ya que $B = e^{\lambda H_1(\delta)}$, así que juntando estas ecuaciones nuestra estrategia de cobertura nos queda

$$\beta_k^1 = \frac{\mathbb{E} [V_k(A_k e^{\mu\delta} P_{k-1} - 1) | \mathcal{F}_{k-1}] - \mu_k V_{k-1}}{S_{k-1} ((\mu_k + 1)^2 \exp(\delta\sigma^2 + \lambda H_2(\delta)) - 2\mu_k - 1)}.$$

Con lo que queda demostrado el teorema. ■

5.2. Valuación de derivados de crédito

En esta sección vamos a definir los procesos shot-noise dirigidos por un proceso de Lévy. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$ un espacio de probabilidad filtrado que satisface las condiciones habituales. \mathbb{Q} es la medida de riesgo neutral, que como ya mencionamos puede obtenerse, por ejemplo, como la medida mínima de martingala. Sea $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Lévy, su medida asociada de saltos valuada en los enteros es

$$\mu(\omega; dt, dx) := \sum_{s > 0} \mathbb{1}_{\{\Delta Z_s(\omega) \neq 0\}} \delta_{(s, \Delta Z_s(\omega))}(dt, dx) \quad (5-26)$$

donde escribimos δ_a como la medida de Dirac en el punto a . Denotamos por $\nu(dx)dt$ al compensador de $\mu(dt, dx)$, por $0 < T_1 < T_2 < \dots$ los puntos donde Z salta y por U_1, U_2, \dots el tamaño de los saltos. Como Z es un proceso de Lévy, U_1, U_2, \dots son independientes e idénticamente distribuidos y mutuamente independientes de T_1, T_2, \dots

Además definimos una función $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface el siguiente supuesto.

(A1): Supongamos que $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -medible, y que para toda $t \geq 0$,

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |h(t-s, x)| \nu(dx) ds < \infty. \quad (5-27)$$

Definición 5.2.1. Un proceso S para el que una función $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y un conjunto \mathbb{Q} -nulo $N \subset \mathcal{F}$ existen tal que

$$S_t(\omega) = \int_0^t h(t-s, x) \mu(\omega; ds, dx), \quad t \geq 0 \quad (5-28)$$

para toda $\omega \in \Omega \setminus N$ es llamado un proceso shot-noise.

La siguiente proposición muestra que para un proceso de Lévy dado, el supuesto **(A1)** asegura que el proceso shot-noise S_t , definido como en la ecuación (5-28), está bien definido.

Proposición 5.2.2. *Supongamos que se cumple (A1). Entonces, para toda $t \geq 0$, S_t como en la ecuación (5-28) está bien definido y $(S_t)_{t \geq 0}$ es un proceso shot-noise.*

Demostración: Recordemos que $0 < T_1 < T_2, \dots$ son los tiempos en que salta el proceso de Lévy Z y $\Delta Z_{T_n} = Z_{T_n} - Z_{T_n-} = U_n$. Para Z de actividad finita, la representación en (5-28) es equivalente a

$$S_t = \sum_{T_n \leq t} h(t - T_n, U_n),$$

y la convergencia de la suma es obvia.

Si Z es de actividad infinita, la convergencia de la suma necesita ser justificada, y (A1) garantiza que

$$\mathbb{E} \left(\sum_{T_n \leq t} |h(t - T_n, U_n)| \right) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |h(t - s, x)| \nu(dx) ds < \infty$$

mostrando que la suma converge absolutamente. ■

Notemos que el proceso definido por $\sum_{T_n \leq t} |h(t - T_n, U_n)|$ es creciente e integrable, y por lo tanto una submartingala. El teorema 9 en [28] muestra que tiene una única modificación càdlàg y por lo tanto también S . En el resto del capítulo trabajaremos con la modificación càdlàg de S .

Los procesos shot-noise ofrecen una estructura bastante flexible que permite incorporar diferentes escenarios de tiempos de saltos. Y para modelar el riesgo de crédito la importancia de incorporar saltos ha sido bastante aceptada tras la reciente crisis crediticia. Además, el análisis en [8] muestra que los saltos no necesariamente ocurren en los tiempos de default. También para el manejo de riesgos es muy importante capturar la dinámica después de los saltos, como se muestra en [21]. Por lo que en resumen, es muy importante dar al modelo suficiente libertad para incorporar diferentes maneras de como reacciona el precio ante eventos importantes, y los procesos shot-noise deben ser considerados de gran ayuda para la modelación del riesgo de crédito.

Ejemplo 5.2.3 (Tipos de saltos). *Escogiendo diferentes $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ podemos obtener distintos tipos de saltos:*

1. Salto a un nuevo nivel (con $d = 1$ y $h(t, x) = x$).

2. El decaimiento exponencial es el ejemplo clásico, y corresponde a tomar

$$h(t, x) = xe^{-bt}$$

con $b > 0$. Entonces S resuelve la ecuación diferencial estocástica (EDE)

$$dS_t = -bS_t dt + dZ_t, \quad (5-29)$$

es decir, S es un proceso de Markov con regresión a la media, un llamado proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

3. El decaimiento de tipo power-law, este se da cuando

$$h(t, x) = \frac{x}{1 + ct}$$

con $c > 0$. Y en este caso S no es Markoviano.

4. Saltos multiplicativos. Si es usado para modelar la intensidad, S debe ser no negativo. Una posibilidad para lograr esto es pedir que $h \geq 0$. Otra posibilidad es considerar el siguiente tipo de salto multiplicativo con saltos hacia arriba y hacia abajo: Sea S un proceso shot-noise con $h(t, x) = x + g(t)$. Entonces el proceso

$$e^{S_t} = \prod_{T_n \leq t} e^{U_n + g(t - T_n)}$$

es no negativo y puede ser utilizado para modelar la intensidad de default.

5.2.4. Cálculos importantes

Se mostrarán algunos resultados importantes que se utilizarán al valuar los derivados de crédito. Empecemos introduciendo la siguiente notación,

$$H(t, x) := \int_0^t h(s, x) ds, \forall 0 \leq t < T, \quad (5-30)$$

y definimos las siguientes dos esperanzas:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K1}) &= \mathbb{E} \left(e^{-\theta \int_t^T S_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right), \\ (\mathbf{K2}) &= \mathbb{E} \left(S_T e^{-\theta \int_t^T S_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right). \end{aligned}$$

Y en las siguientes dos proposiciones se darán expresiones explícitas para $(\mathbf{K1})$ y $(\mathbf{K2})$.

Proposición 5.2.5. *Supongamos que se cumple $(\mathbf{A1})$. Sea $H(t, x)$ como en la ecuación (5-30), $\theta \in \mathbb{R}$ y $T > 0$ tal que*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{|\theta| |H(s, x)|} - 1 \right) \nu(dx) ds < \infty. \quad (5-31)$$

Entonces, para toda $0 \leq t < T$,

$$\begin{aligned} (\mathbf{K1}) &= \mathbb{E} \left(e^{-\theta \int_t^T S_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= \exp \left(\int_0^{T-t} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{-\theta H(s, x)} - 1 \right) \nu(dx) ds - \theta \int_t^T \sum_{T_n \leq t} h(s - T_n, U_n) ds \right). \end{aligned} \quad (5-32)$$

Demostración: La prueba se realizará en tres pasos: primero se calculará la ecuación (5-32) para procesos Poisson, después se aproximarán procesos de Lévy por medio de procesos Poisson y por último extender el caso Poisson al de Lévy.

Primero notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{T_n \in (t, T]} \int_{T_n}^T h(s - T_n, U_n) ds &= \sum_{T_n \in (t, T]} \int_0^{T-T_n} h(s - T_n, U_n) ds \\ &= \sum_{T_n \in (t, T]} H(T - T_n, U_n). \end{aligned}$$

(i) Supongamos que $\nu(\mathbb{R}^d) < \infty$, i.e. Z es un proceso Poisson compuesto. Entonces podemos escribir su medida de Lévy como $\nu(dx) = lF(dx)$ con $l := \nu(\mathbb{R}^d)$. Supongamos que

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{-\theta H(s, x)} - 1 \right) F(dx) ds < \infty.$$

Lo que queremos probar es que para $0 \leq t < T$

$$\mathbb{E} \left(e^{-\theta \sum_{T_n \in (t, T]} H(T - T_n, U_n)} \right) = \exp \left(\int_0^{T-t} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{-\theta H(s, x)} - 1 \right) l F(dx) ds \right). \quad (5-33)$$

Empecemos considerando $t = 0$. La idea es condicionar en el número de saltos en el intervalo $(0, T]$. Entonces usamos el hecho de que, condicionado al número de saltos, los tiempos de salto de un proceso Poisson se distribuyen como los estadísticos de orden de v.a.i. uniformes. El proceso $N_t := \sum \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}$ es un proceso Poisson de intensidad l y

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(e^{-\theta \sum_{T_n \leq T} H(T - T_n, U_n)} \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{Q}(N_T = k) \mathbb{E} \left(e^{-\theta \sum_{n=1}^k H(T - \tilde{T}_n, U_n) | N_T = k} \right) \\ &= e^{-lT} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-lT} \frac{(lT)^k}{k!} \mathbb{E} \left(e^{-\theta \sum_{n=1}^k H(T - \tilde{T}_n, U_n) | N_T = k} \right), \end{aligned} \quad (5-34)$$

donde $\tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_n$ son los k saltos de N en $(0, T]$ condicionado a que $N_T = k$. Sean η_1, \dots, η_k i.i.d. con distribución uniforme en $[0, T]$. Entonces, condicionado a que $N_T = k$ el vector $(\tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_n)$ tiene la misma distribución que $(\eta_{1:k}, \dots, \eta_{k:k})$, donde $\eta_{i:k}$ es el i -ésimo estadístico de orden. Entonces, como las U_1, U_2, \dots son independientes de N ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(e^{-\theta \sum_{n=1}^k H(T - \tilde{T}_n, U_n) | N_T = k} \right) &= \mathbb{E} \left(e^{-\theta \sum_{n=1}^k H(T - \eta_{n:k}, U_n)} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(e^{-\theta \sum_{n=1}^k H(T - \eta_n, U_n)} \right), \end{aligned} \quad (5-35)$$

donde la última ecuación se sigue de la independencia de (U_1, U_2, \dots) y $(\eta_1, \eta_2), \dots$ y del hecho de que ambas sucesiones son i.i.d. Y así

$$(5-35) = \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\theta H(s, u)} F(du) T^{-1} ds \right)^k := D(\theta)^k.$$

Ahora, al utilizar (5-35) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\exp\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (e^{-\theta H(s,x)} - 1) lF(dx) ds\right) &= \exp\left\{\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\theta H(s,x)} lF(dx) ds\right)\right\} \\
&\times \exp\left\{-\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} lF(dx) ds\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\theta H(s,x)} lF(dx) ds - lT\right)\right\} \\
&= (e^{-lT}) \exp\left\{lT \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\theta H(s,x)} F(dx) T^{-1} ds\right\} \\
&= e^{-lT} \left(e^{lT D(\theta)}\right).
\end{aligned}$$

Y la generalización para $0 \leq t < T$, se sigue del hecho de que Z tiene incrementos estacionarios, es decir

$$\mathbb{E}\left(e^{-\theta \sum_{T_n \in (t,T]} H(T-T_n, U_n)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-\theta \sum_{T_n \in (0, T-t]} H(T-t-T_n, U_n)}\right),$$

con lo cual concluye la prueba para el caso Poisson.

(ii) El siguiente paso es desechar el supuesto de que $\nu(\mathbb{R}^d) < \infty$ y aproximar el proceso de Lévy Z por medio de procesos Poisson. Para empezar, notemos que para $t < s$,

$$S_s = \sum_{T_n \leq t} h(s - T_n, U_n) + \sum_{T_n \in (t,s]} h(s - T_n, U_n),$$

y podemos apreciar que el primer término es \mathcal{F}_t -medible y es justo la parte final de (5-32).

Además

$$\int_t^s \sum_{T_n \in (t,s]} h(s - T_n, U_n) ds = \sum_{T_n \in (t,T]} H(T - T_n, U_n).$$

Como Z tiene incrementos independientes, este término es independiente de \mathcal{F}_t . Ahora, sea $B^\epsilon = \{u \in \mathbb{R}^d : \min(|u_1|, \dots, |u_d|) > \epsilon\}$ y sea

$$I_\epsilon = \exp\left(-\theta \sum_{T_n \in (t,T]} \mathbb{1}_{\{U_n \in B^\epsilon\}} H(T - T_n, U_n)\right),$$

tal que I_ϵ converge a

$$I_0 = \exp \left(-\theta \sum_{T_n \in (t, T]} H(T - T_n, U_n) \right).$$

Se tiene que

$$I_\epsilon \leq \exp \left(\sum_{T_n \in (t, T]} \mathbb{1}_{\{U_n \in B^\epsilon\}} |\theta| |H(T - T_n, U_n)| \right) := J_\epsilon.$$

(iii) Con el resultado para los procesos Poisson y el teorema de convergencia monótona, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(J_0) = \mathbb{E}(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} J_\epsilon) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \exp \left(\int_{B^\epsilon} \int_0^{T-t} \left(e^{|\theta| |H(s, u)|} - 1 \right) ds \nu(du) \right) \\ &= \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{T-t} \left(e^{|\theta| |H(s, u)|} - 1 \right) ds \nu(du) \right), \end{aligned}$$

el cual es finito por hipótesis. Y por último del teorema de convergencia dominada se sigue que

$$\mathbb{E}(I_0) = \mathbb{E}(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon) = \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{T-t} \left(e^{-\theta H(s, u)} - 1 \right) ds \nu(du) \right),$$

con lo cual queda demostrada la proposición. ■

Ahora veamos la siguiente proposición.

Proposición 5.2.6. *Supongamos que se cumple (A1). Sea $0 \leq t < T$ y $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tal que para alguna $\epsilon > 0$*

$$\mathbb{E} \left(\sup_{T-\epsilon \leq u \leq T} \left(|S_u| e^{-\theta \int_t^u S_u ds} \right) \right) < \infty. \quad (5-36)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(K2) &= \mathbb{E} \left(S_T e^{-\theta \int_t^T S_s ds} | \mathcal{F}_t \right) \\
&= \mathbb{E} \left(e^{-\theta \int_t^T S_s ds} | \mathcal{F}_t \right) \left[\int_{\mathbb{R}^d} \theta^{-1} \left(1 - e^{-\theta H(T-t, x)} \right) \nu(dx) + \sum_{T_n \leq t} h(T - T_n, U_n) \right]. \quad (5-37)
\end{aligned}$$

Recordemos que $\mathbb{E} \left(e^{-\theta \int_t^T S_s ds} | \mathcal{F}_t \right) = (K1)$.

Demostración. Se puede ver claramente que

$$\frac{\partial}{\partial T} e^{-\theta \int_t^T S_s ds} = -\theta S_T e^{-\theta \int_t^T S_s ds}, \quad (5-38)$$

por lo que sólo falta sacar la esperanza de esta derivada. Para esto, sea $I(u) := e^{-\theta \int_t^u S_s ds}$. Entonces $I'(u) \leq |\theta| |S_u| e^{-\theta \int_t^u S_s ds}$. Utilizando la fórmula de Taylor, para alguna $u = u(\omega) \in [T - \epsilon, T]$, tenemos que

$$\frac{I(T) - I(T - \epsilon)}{\epsilon} = I'(u), \quad (5-39)$$

la cual es acotada por una v.a. integrable por hipótesis. Así que podemos intercambiar la derivada y la esperanza. Así que vamos a derivar (5-32).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(K1)}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial T} \exp \left(\int_0^{T-t} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{-\theta H(s, x)} - 1 \right) \nu(dx) ds - \theta \int_t^T \sum_{T_n \leq t} h(s - T_n, U_n) ds \right) \\
&= (K1) \frac{\partial}{\partial T} \left(\int_0^{T-t} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{-\theta H(s, x)} - 1 \right) \nu(dx) ds - \theta \int_t^T \sum_{T_n \leq t} h(s - T_n, U_n) ds \right).
\end{aligned}$$

Sea $\kappa = \left(\int_0^{T-t} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{-\theta H(s, x)} - 1 \right) \nu(dx) ds - \theta \int_t^T \sum_{T_n \leq t} h(s - T_n, U_n) ds \right)$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \kappa}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial T} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \int_t^T \left(e^{-\theta H(s-t, x)} - 1 \right) da \nu(dx) - \theta \int_t^T \sum_{T_n \leq t} h(s - T_n, U_n) ds \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial T} \left(\int_t^T \left(e^{-\theta H(s-t, x)} - 1 \right) ds \right) \nu(dx) - \frac{\partial}{\partial T} \left(\theta \int_t^T \sum_{T_n \leq t} h(s - T_n, U_n) ds \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{-\theta H(T-t, x)} - 1 \right) \nu(dx) - \theta \sum_{T_n \leq t} h(T - T_n, U_n),
\end{aligned}$$

multiplicamos por $-\theta$ esta igualdad y con eso concluye la prueba. ■

Observación 5.2.7. *La ecuación (5-37) no puede ser usada para calcular la esperanza de S_T , pues el caso $\theta = 0$ esta excluido. Pero esta esperanza puede hacerse directamente, si suponemos que (A1) se cumple. Entonces*

$$\mathbb{E}(S_T | \mathcal{F}_t) = \sum_{T_n \leq t} h(T - T_n, U_n) + \int_{\mathbb{R}^d} H(T - t, x) \nu(dx), \quad (5-40)$$

y esta suma converge absolutamente por la proposición 5.2.6. Y notemos que (5-40) es el límite de (5-37) cuando $\theta \rightarrow 0$.

5.2.8. Aplicación a derivados de crédito

Seguiremos usando la notación \mathbb{Q} , para denotar la medida neutral al riesgo usada para valuar los derivados, y $(r_t)_{t \geq 0}$ es la tasa libre de default. Suponemos que r está acotada inferiormente. En el espacio de probabilidad hay una filtración $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)$, $t \geq 0$, que satisface las condiciones habituales. \mathbb{G} contiene información general del mercado que excluye información sobre el default. Supongamos que r es progresivamente medible con respecto a \mathbb{G} , a lo que llamaremos \mathbb{G} -progresivo.

La *intensidad de default* λ es un proceso estocástico que es positivo y \mathbb{G} -progresivo. Sea E una v.a. exponencial de parámetro 1 e independiente de \mathbb{G}_∞ (Esto es para asegurar la independencia en cada $t \geq 0$). Donde

$$\mathbb{G}_\infty = \sigma(\mathbb{G}_t | t \in \mathbb{R}_+) \subset \mathcal{F}.$$

Supongamos que el proceso λ cumple que

$$\int_0^t \lambda_s ds < \infty.$$

El *tiempo de default* τ está definido por

$$\tau := \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \lambda_u du \geq E \right\}. \quad (5-41)$$

Y esto corresponde a los modelos basados en la intensidad, que ya se mencionaron anteriormente.

Sea $\mathcal{H}_t = \sigma(\mathbb{1}_{\{\tau \leq s\}})$ la información del default, y sea $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t$. $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ corresponde a la información completa disponible en el mercado.

Utilizando la valuación neutral al riesgo, si tenemos un payoff Φ_T que se paga al tiempo T , entonces su valor al tiempo t está dado por

$$\pi(t, \Phi_T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T r_u du} \Phi_T | \mathcal{F}_t \right). \quad (5-42)$$

De forma más general, consideramos productos que ofrecen una serie de pagos ϕ . Supongamos que esta serie de pagos ϕ_i está predeterminada en los tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$. Entonces llamamos flujo de dividendos acumulados al proceso estocástico $(D_t)_{t \geq 0}$ dado por

$$D_t := \sum_{t_i \leq t} \phi_i.$$

Por lo que el precio de D al tiempo t está dado por la esperanza de los pagos futuros descontados:

$$\pi(t, D) = \sum_{t_i \in (t, T]} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^{t_i} r_u du} \phi_i | \mathcal{F}_t \right).$$

La representación general de un derivado de crédito por su flujo de dividendos acumulados, dada en la sección de derivados de crédito 4.4 es

$$D_t = \sum_{t_i \leq t} d_1(t_i) \mathbb{1}_{\{\tau > t_i\}} + d_2(\tau) \mathbb{1}_{\{\tau \leq t_i\}} \quad t \geq 0. \quad (5-43)$$

Donde $d_1(t_i)$ son los pagos que se realizan al tiempo t_i , $i = 1, \dots, N$, dado que no ha ocurrido

el default hasta t_i y el pago $d_2(\tau)$ se da al tiempo que ocurre el default. Y las funciones d_1 y d_2 son acotadas, pero además necesitamos otros supuestos.

(A2): Supongamos que $d_1(t_1), d_1(t_2)$ son deterministas y que $d_2 : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ es medible.

1. *Defaultable zero-bond.* Un cupón como este paga 1 en T si $\tau > T$, sin tasa de recuperación. Es decir, $d_1(t) = \mathbb{1}_{\{t=T\}}$ y $d_2(\tau) = 0$.
2. *Digital default payment.* Este paga 1 en el default, si el default ocurre antes de T y cero en otro caso. Por lo tanto tenemos que, $d_1(t) = 0$ y $d_2(\tau) = 1$.
3. *Credit Default Swap (CDS).* El que compra la protección en el CDS ofrece pagos regulares de tamaño δ en las fechas establecidas, $t_1 < \dots < t_N$, a cambio de un pago al tiempo de default τ , si $\tau \in (0, T]$. Los pagos δ sólo se realizan hasta la fecha en que ocurre el default, en τ recibe un pago L , mientras $\tau \leq T$. Y esto puede ser modelado de forma que $d_1(t) = -\delta$ y $d_2(\tau) = L$. En el mercado lo que se cita son los diferenciales (credit spread) que se obtienen al igualar el valor de CDS a cero y resolver la ecuación para δ .

Sea

$$\bar{p}(t, T) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T (r_u + \lambda_u) du} \middle| \mathcal{G}_t \right), \quad (5-44)$$

$$\Gamma(t, T) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\lambda_T e^{-\int_t^T (r_u + \lambda_u) du} \middle| \mathcal{G}_t \right). \quad (5-45)$$

La siguiente proposición muestra que $\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \bar{p}(t, T)$ es el valor de un defaultable zero-bond y que $\Gamma(t, T)$ es el valor de un digital default payment si el default ocurre en $(t, T]$.

Proposición 5.2.9. *Supongamos que (A2) se cumple. Entonces el precio al tiempo t de un derivado de crédito con flujo de dividendos D como en (5-43) está dado por*

$$\pi(t, D) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \left(\sum_{t_i \in (t, T]} d_1(t_i) \bar{p}(t, t_i) + \int_t^T d_2(u) \Gamma(t, u) du \right).$$

Demostración: Por la ecuación (5-42), sabemos que al tiempo t de una unidad de dinero pagada al tiempo $T \geq t$ si no ha ocurrido el default es

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T r_u du} \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} | \mathcal{F}_t \right) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T (r_u + \lambda_u) du} | \mathcal{G}_t \right), \quad (5-46)$$

esto es consecuencia de los resultados vistos en la sección 4.5 sobre intensity based models. Ahora de la ecuación (5-46) tenemos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\sum_{t_i \in (t, T]} e^{-\int_t^{t_i} r_u du} d_1(t_i) \mathbb{1}_{\{\tau > t_i\}} | \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \sum_{t_i \in (t, T]} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^{t_i} (r_u + \lambda_u) du} d_1(t_i) | \mathcal{G}_t \right) \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \sum_{t_i \in (t, T]} d_1(t_i) \bar{p}(t, t_i). \end{aligned}$$

De igual forma en la sección 4.5 se mostró que la distribución condicional de τ dado \mathcal{F}_t es igual a

$$\mathbb{Q}(t < \tau \leq u | \mathcal{F}_t) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \left(1 - e^{-\int_t^u \lambda_s ds} \right).$$

Si la derivamos obtenemos la densidad $\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \lambda_u e^{-\int_t^u \lambda_s ds} \mathbb{1}_{\{t < u\}}$. Por lo que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^{\tau} r_u du} d_2(\tau) \mathbb{1}_{\{\tau \in (t, T)\}} | \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \int_t^T d_2(u) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^u (r_s + \lambda_s) ds} \lambda_u | \mathcal{G}_t \right) du \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \int_t^T d_2(u) \Gamma(t, u) du. \end{aligned} \quad (5-47)$$

■

Hasta aquí no hemos mencionado a los procesos shot-noise al valorar los derivados de crédito. Vamos a aumentar este modelo, incluyendo el componente shot-noise a la intensidad de default.

Sea η la intensidad de default del modelo original, y sea S un proceso shot-noise para aumentar el modelo. Formalmente esto es:

(A3:) Supongamos que $\eta = (\eta_t)_{t \geq 0}$ es no negativo y \mathbb{G} -progresivo. Además, sea S un proceso

shot-noise no negativo, \mathbb{G} -adaptado e independiente de η y r . La intensidad de default aumentada es

$$\lambda = \eta + S.$$

Al modelo con intensidad η se le llamará modelo original y al modelo con la intensidad $\lambda = \eta + S$ el modelo aumentado.

Todos los resultados que se han mostrado hasta ahora sirven de igual manera al aumentar el modelo, de hecho es bastante sencillo. Ya hemos calculado $\bar{p}(t, T)$ y $\Gamma(t, T)$. Suponiendo que **(A3)** se cumple, tenemos que si $\tau > t$ entonces

$$\begin{aligned} \bar{p}(t, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T (r_u + \lambda_u) du} \middle| \mathcal{G}_t \right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T (r_u + \eta_u) du} \middle| \mathcal{G}_t \right) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T S_u du} \middle| \mathcal{G}_t \right). \end{aligned} \quad (5-48)$$

El primer término no es más que el precio de un defaultable zero-bond en el modelo original, el cual denotaremos por

$$\bar{p}_\eta(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T (r_u + \eta_u) du} \middle| \mathcal{G}_t \right). \quad (5-49)$$

Y la parte del shot-noise también ya la calculamos anteriormente.

Corolario 5.2.10. *Supongamos que **(A1)** se cumple y sea $H(t, x) := \int_0^t h(s, x) ds$. Si (5-31) se cumple con $\theta = 1$, entonces para toda $0 \leq t \leq T$*

$$\begin{aligned} E(h, t, T) &:= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T S_u du} \middle| \mathcal{G}_t \right) \\ &= \exp \left(\int_0^{T-t} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{-H(s, x)} - 1 \right) \nu(dx) ds - \int_t^T \sum_{T_n \leq t} h(s - T_n, U_n) ds \right). \end{aligned} \quad (5-50)$$

Esto nos conduce a la siguiente proposición.

Proposición 5.2.11. *Supongamos que **(A1)**, **(A2)** y **(A3)** se cumplen. Sea $T > 0$ tal que la ecuación (5-31) es válida con $\theta = 1$, entonces para toda $0 \leq t \leq T$,*

$$\bar{p}(t, T) = \bar{p}_\eta(t, T)E(h, t, T), \quad (5-51)$$

$E(h, t, T)$ es como en la ecuación (5-50). Si además para alguna $\epsilon > 0$ se cumple la ecuación (5-36) con $\theta = 1$, entonces

$$\begin{aligned} \Gamma(t, T) &= \Gamma_\eta(t, T)E(h, t, T) \\ &+ \bar{p}_\eta(t, T)E(h, t, T) \left[\int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - e^{-H(T-t, x)}\right) \nu(dx) + \sum_{T_n \leq t} h(T - T_n, U_n) \right]. \end{aligned} \quad (5-52)$$

Demostración. La primera parte es evidente utilizando la ecuación (5-48) y el corolario anterior. Y para la segunda, si utilizamos la independencia entre S y η , junto con las ecuaciones (5-32) y (5-37) tenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} \Gamma(t, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\lambda_T e^{-\int_t^T (r_s + \lambda_s) ds} | \mathcal{G}_t \right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left((\eta_T + S_T) e^{-\int_t^T (r_s + \eta_s + S_s) ds} | \mathcal{G}_t \right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\eta_T e^{-\int_t^T (r_s + \eta_s + S_s) ds} | \mathcal{G}_t \right) + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(S_T e^{-\int_t^T (r_s + \eta_s + S_s) ds} | \mathcal{G}_t \right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\eta_T e^{-\int_t^T (r_s + \eta_s) ds} | \mathcal{G}_t \right) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T S_s ds} | \mathcal{G}_t \right) \\ &+ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T (r_s + \eta_s) ds} | \mathcal{G}_t \right) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(S_T e^{-\int_t^T S_s ds} | \mathcal{G}_t \right) \\ &= \Gamma_\eta(t, T)E(h, t, T) \\ &+ \bar{p}_\eta(t, T)E(h, t, T) \left[\int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - e^{-H(T-t, x)}\right) \nu(dx) + \sum_{T_n \leq t} h(T - T_n, U_n) \right]. \end{aligned}$$

■

Ejemplo 5.2.12. Utilizando la fórmula neutral al riesgo que obtuvimos para valuar los derivados de crédito, tenemos que para un CDS, su valor a tiempo t es:

$$\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \left(\delta \sum_{t_i \in (t, T]} \bar{p}(t, t_i) - L \int_t^T \Gamma(t, u) du \right). \quad (5-53)$$

Ya hemos calculado $\bar{p}(t, T)$ y $\Gamma(t, T)$. El credit spread al tiempo t se obtiene al igualar el precio a cero y luego resolver la ecuación para δ , dado que $\tau > t$ esto es:

$$\frac{L \int_t^T \Gamma(t, u) du}{\sum_{t_i \in (t, T]} \bar{p}(t, t_i)}. \quad (5-54)$$

Utilizando los resultados anteriores, calculemos el valor de un defaultable zero-bond, un digital default payment y usando ambos un CDS. Para este cálculo, usaremos un decaimiento del tipo power law, y nuestro proceso de Lévy será un proceso Poisson compuesto con intensidad l , y sus saltos U_1, U_2, \dots tienen distribución Gamma. Suponiendo esto tenemos que:

$$\begin{aligned} h(t, x) &= \frac{x}{1 + ct} \quad c > 0, \text{ entonces} \\ H(t, x) &= x \int_0^s \frac{1}{1 + ct} dt = \frac{x \ln(1 + cs)}{c}. \end{aligned}$$

Y con esto podemos calcular la siguiente expresión siempre que exista

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-kH(t, x)} F(dx) = \mathbb{E} \left(e^{\frac{-k}{c} \ln(1 + cs) U_1} \right). \quad (5-55)$$

Por lo que si suponemos que los saltos tienen distribución $Gamma(\alpha, \beta)$, entonces sabemos que

$$\mathbb{E}(e^{aU_1}) = \left(\frac{\beta}{\beta - a} \right)^\alpha, \quad a < \beta,$$

por lo tanto

$$(5-55) = \left(\frac{\beta}{\beta + \frac{k}{c} \ln(1 + cs)} \right)^\alpha.$$

Ya teniendo estos resultados es sencillo obtener una expresión para $\ln E(kh, 0, T)$, usando la ecuación (5-50) tenemos

$$\begin{aligned}
\ln E(kh, 0, T) &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-kH(s,x)} - 1 \right) \nu(dx) ds \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} e^{-kH(s,x)} lF(dx) ds - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} lF(dx) ds \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} e^{-kH(s,x)} lF(dx) ds - lT.
\end{aligned} \tag{5-56}$$

Desarrollamos la integral

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}} e^{-kH(s,x)} lF(dx) ds &= l \int_0^T \left(\frac{\beta}{\beta + \frac{k}{c} \ln(1+cs)} \right)^\alpha ds \\
&= l \int_0^T \frac{\left(\frac{\beta c}{k} \right)^\alpha ds}{\left(\frac{\beta c}{k} + \ln(1+cs) \right)^\alpha} \\
&= l \left(\frac{\beta c}{k} \right)^\alpha \int_0^T \frac{ds}{\left(\frac{\beta c}{k} + \ln(1+cs) \right)^\alpha}.
\end{aligned}$$

Ésta última integral no se ve fácil de aproximar, o al menos no nos es familiar, pero si hacemos el siguiente cambio de variable

$$t = -\frac{\beta c}{k} - \ln(1+cs),$$

al despejar la s , obtenemos su diferencial y vemos que

$$\begin{aligned}
s &= \frac{e^{-(t+\frac{\beta c}{k})} - 1}{c} \\
ds &= -\frac{e^{-(t+\frac{\beta c}{k})} dt}{c},
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\int_0^T \frac{ds}{\left(\frac{\beta c}{k} + \ln(1+cs) \right)^\alpha} = \frac{e^{-\frac{\beta c}{k}}}{c} (-1)^\alpha \int_{-\frac{\beta c}{k} - \ln(1+cT)}^{-\frac{\beta c}{k}} \frac{e^{-t} dt}{t^\alpha}.$$

Esta integral puede descomponerse en la resta de dos gammas incompletas, la gamma incompleta se define por $\Gamma(x, y) = \int_y^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ y para esta integral si existen varios métodos numéricos que pueden aproximar con mucha precisión.

Entonces nuestra ecuación (5-56) nos queda

$$\frac{le^{-\frac{c\beta}{k}}}{c} \left(-\frac{c\beta}{k}\right)^\alpha \left[\Gamma\left(1 - \alpha, -\frac{c\beta}{k} - \ln(a + cT)\right) - \Gamma\left(1 - \alpha, -\frac{c\beta}{k}\right) \right] - lT,$$

donde $\Gamma(x, y)$ es la función Gamma incompleta. Con esto podemos obtener el precio de un defaultable zero-bond,

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \bar{p}(t, T) &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \bar{p}_\eta(t, T) E(h, t, T) \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \bar{p}_\eta(t, T) E(h, 0, T - t) \exp\left(-\int_t^T \sum_{T_n \leq t} h(s - T_n, U_n) ds\right) \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \bar{p}_\eta(t, T) E(h, 0, T - t) \exp\left(-\int_t^T \sum_{T_n \leq t} \frac{U_n}{1 + c(s - T_n)} ds\right) \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \bar{p}_\eta(t, T) E(h, 0, T - t) \exp\left(-U_n \sum_{T_n \leq t} \int_t^T \frac{1}{1 + c(s - T_n)} ds\right) \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \bar{p}_\eta(t, T) E(h, 0, T - t) \exp\left(-\frac{U_n}{c} \sum_{T_n \leq t} \left(\ln \left[\frac{1 + c(T - T_n)}{1 + c(t - T_n)}\right]\right)\right) \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \bar{p}_\eta(t, T) E(h, 0, T - t) \exp\left(\sum_{T_n \leq t} \left(\ln \left[\frac{1 + c(T - T_n)}{1 + c(t - T_n)}\right]^{-\frac{U_n}{c}}\right)\right) \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \bar{p}_\eta(t, T) E(h, 0, T - t) \prod_{T_n \leq t} \left[\frac{1 + c(T - T_n)}{1 + c(t - T_n)}\right]^{-\frac{U_n}{c}}. \end{aligned}$$

Así mismo podemos obtener el valor de un digital default payment, pues

$$\begin{aligned} \Gamma(t, T) &= \Gamma_\eta(t, T) E(h, t, T) \\ &+ \bar{p}_\eta(t, T) E(h, t, T) \left[\int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - e^{-H(T-t, x)}\right) \nu(dx) + \sum_{T_n \leq t} h(T - T_n, U_n) \right]. \end{aligned}$$

Ya sabemos el valor de $\Gamma_\eta(t, T)$, el de $E(h, t, T)$ y con el cálculo anterior conocemos el de $\bar{p}_\eta(t, T) E(h, t, T)$, por lo que solo nos faltaría la integral,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - e^{-H(T-t,x)}\right) \nu(dx) + \sum_{T_n \leq t} h(T - T_n, U_n) \\
 = & \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - e^{-\frac{x}{c} \ln(1+c(T-t))}\right) lF(dx) + \sum_{T_n \leq t} \frac{U_n}{(1 + c(T - T_n))} \\
 = & l - l\mathbb{E} \left(e^{-\frac{1}{c} \ln(1+c(T-t))U_1} \right) + \sum_{T_n \leq t} \frac{U_n}{(1 + c(T - T_n))} \\
 = & l \left(1 - \left(\frac{\beta}{\beta + c^{-1} \ln(1 + c(T - t))} \right)^\alpha \right) + \sum_{T_n \leq t} \frac{U_n}{(1 + c(T - T_n))} \\
 = & l \left(\frac{\ln(1 + c(T - t))}{c\beta + \ln(1 + c(T - t))} \right)^\alpha + \sum_{T_n \leq t} \frac{U_n}{(1 + c(T - T_n))}.
 \end{aligned}$$

Por último, recordamos que el valor para un CDS, dependía de los dos anteriores, por lo que basta sustituirlos en la fórmula para el precio del CDS:

$$\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \left(\delta \sum_{t_i \in (t, T]} \bar{p}(t, t_i) - L \int_t^T \Gamma(t, u) du \right). \tag{5-57}$$

Con esto terminamos las aplicaciones del modelo shot-noise. Como podemos ver, los cálculos son explícitos aún trabajando con un modelo que no es Markoviano.

Apéndice A

Definiciones Básicas

A.1. Conceptos de medida y probabilidad

Definición A.1.1 (Medida). Sea \mathcal{E} una σ -álgebra de subconjuntos de E . (E, \mathcal{E}) es llamado un espacio medible. Una medida positiva en (E, \mathcal{E}) es una función definida como

$$\begin{aligned}\mu &: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty] \\ A &\mapsto \mu(A)\end{aligned}$$

tal que

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. Para toda sucesión de conjuntos disjuntos $A_n \in \mathcal{E}$

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$$

Un elemento $A \in \mathcal{E}$ se llama conjunto medible y $\mu(A)$ su medida.

Un espacio de probabilidad es una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donde:

1. Ω representa el conjunto de posibles resultados de un evento aleatorio
2. \mathcal{F} es una familia de subconjuntos de Ω , y es una σ -álgebra: esto es:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
 - Si $A \in \mathcal{F}$, entonces A^c también pertenece a \mathcal{F}
 - $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
3. La aplicación $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ cumple:
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\Omega) = 1$
 - Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ son conjuntos disjuntos dos a dos, entonces:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Como podemos ver \mathbb{P} es una medida de probabilidad, y los elementos de la familia \mathcal{F} son los conjuntos a los cuales se les va a asignar una probabilidad.

A.2. Probabilidad y esperanza condicional

La probabilidad condicional forma una parte muy importante de los procesos estocásticos, en particular en el área de martingalas, por lo que se hará un breve repaso, donde se darán las propiedades más importantes para el cálculo de esperanzas condicionales.

La probabilidad condicional de un evento A por un evento B , donde $\mathbb{P}(B) > 0$ se define como

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Se puede ver que A y B son independientes si y sólo si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$. La esperanza condicional nos da la esperanza de que ocurra un evento A , dado que ha ocurrido un evento B previamente.

La aplicación $A \rightarrow \mathbb{P}(A|B)$ define una nueva probabilidad en la σ -álgebra \mathcal{F} que se concentra en el conjunto B . Por lo que se puede calcular la esperanza condicional de una variable aleatoria integrable X dado un evento B

$$\mathbb{E}(X|B) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_B)$$

Algo más complicado es el condicionar respecto a una σ -álgebra de eventos. Sea una σ -álgebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ y una variable aleatoria integrable X . La variable aleatoria Z se denomina la *esperanza condicional* de X respecto de \mathcal{B} , $Z = \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ si cumple las siguientes dos propiedades:

- Z es medible respecto de \mathcal{B}
- Para todo evento $A \in \mathcal{B}$, $\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_A)$

Además se puede probar que en efecto existe y es única casi seguramente, de forma que si \tilde{Z} fuese otra variable con las mismas propiedades, entonces $Z = \tilde{Z}$, \mathbb{P} -casi seguramente.

Propiedades para el cálculo de esperanzas condicionales:

1. Es lineal

$$\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{B}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{B}) \tag{A-1}$$

2. La variable y su esperanza condicional tiene la misma esperanza

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(X) \tag{A-2}$$

3. Si X y la σ -álgebra \mathcal{B} son independientes, entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X)$

4. Si X es \mathcal{B} -medible, entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = X$

5. Si Z es una variable aleatoria acotada y \mathcal{B} -medible, entonces

$$\mathbb{E}(ZX|\mathcal{B}) = Z\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \tag{A-3}$$

6. Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, entonces

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})|\mathcal{C}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{C})|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{C}) \tag{A-4}$$

7. Propiedad de Monotonía:

$$X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{B}) \tag{A-5}$$

8. Cumple la desigualdad de Jensen, si φ es una función convexa tal que $\mathbb{E}(|\varphi(X)|) < \infty$ entonces

$$\varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{B}) \tag{A-6}$$

Antes de seguir con los Procesos Estocásticos, quiero mencionar un espacio muy importante, que será de gran utilidad más adelante. El conjunto de variables aleatorias Z que son medibles respecto

de una σ -álgebra \mathcal{B} y que son cuadrado integrables, esto es $\mathbb{E}(Z^2) < \infty$, será representado por $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Donde éste espacio es un Espacio de Hilbert con producto escalar $\langle Z, Y \rangle = \mathbb{E}(ZY)$ y que $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ es un subespacio cerrado de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Por lo que dicho de otra manera, si X es un variable tal que $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, la esperanza condicional $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ es la variable del espacio $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ más próxima a X en media cuadrática:

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))^2] = \min_{Z \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})} \mathbb{E}[(X - Z)^2]$$

Apéndice B

Procesos Estocásticos

Un proceso estocástico es simplemente una familia de variables aleatorias reales $\{X_t\}_{t \geq 0}$ definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. El índice t puede estar en los \mathbb{N} , \mathbb{R} o ser un intervalo acotado $[0, T]$. Para cada $\omega \in \Omega$, la aplicación $t \rightarrow X_t(\omega)$ se le llama trayectoria del proceso estocástico. Ahora, si tomamos un conjunto finito de tiempos $\{0 \leq t_1 < \dots < t_n\}$ podemos considerar el vector aleatorio:

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Las distribuciones de probabilidad $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n} = \mathbb{P} \circ (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^{-1}$ se donominan las distribuciones finito dimensionales del proceso.

Definición B.0.1. Sean dos procesos $X = \{X_t\}_{t \in T}$ y $Y = \{Y_t\}_{t \in T}$,

1. Son equivalentes si tienen las mismas distribuciones finito dimensionales.
2. Decimos que X es una modificación o una versión de Y si $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$ para cada $t \in T$.
3. Decimos que X y Y son indistinguibles si el conjunto $\{\omega \in \Omega : \text{existe } t \in T \text{ tal que } X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$ es insignificante, es decir que está contenido en un conunto de \mathbb{F} de probabilidad cero. Por lo tanto X y Y son indistinguibles si tienen las mismas trayectorias, excepto en un conjunto insignificante.

Observación B.0.2. Si X y Y son indistinguibles, entonces uno es modificación del otro y por lo tanto X y Y son equivalentes. Los recíprocos de éstas implicaciones son falsas.

B.1. Proceso Poisson

Definición B.1.1 (Proceso Poisson Homogéneo). *Una colección de variables aleatorias $\{N_t, t \geq 0\}$, definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se llama proceso Poisson homogéneo con intensidad $\lambda > 0$ si satisface las siguientes propiedades:*

1. $\mathbb{P}(N_0 = 0) = 1$, esto es que el proceso siempre inicia en cero
2. $\forall 0 < s < t$ se tiene que $N_t - N_s$ tiene distribución Poisson parámetro $\lambda(t - s)$
3. $\forall 0 \leq t_1 < \dots < t_n, n \geq 1$, las variables aleatorias $N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, \dots, N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_1}$ son independientes. Esta es la propiedad de incrementos independientes.

Observación B.1.2. *Por la propiedad 1 y 2 se tiene que $\forall t \geq 0$ N_t tiene distribución Poisson de parámetro λt . Por lo que $N_{t-s} \sim N_t - N_s \sim Po(\lambda(t - s))$. Y esta última propiedad es la de incrementos estacionarios.*

En un proceso Poisson nos interesan más variables aleatorias, por ejemplo los tiempos de arribo, es decir los puntos donde el proceso N_t salta. Por lo que podemos definir estos tiempos como:

$$T_m = \inf \{t \geq 0 : N_t = m\}$$

Se puede probar que $T_m \sim Gamma(m, 1/\lambda)$, y de ahí se puede ver también que los tiempos entre llegadas τ_i son independientes y tienen distribución exponencial de parámetro λ . Gracias a la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial, podemos saber que la distribución del siguiente arribo estando en un tiempo fijo t también es exponencial.

Sea $\{N_t\}_{t \geq 0}$ un proceso Poisson, entonces:

1. $\forall t > 0$, N_t es finito c.s.
2. $\forall \omega$, la trayectoria $t \rightarrow N_t(\omega)$ es constante a cachos y sus saltos son de tamaño 1.
3. Sus trayectorias son continuas por la derecha y con límites por la izquierda (càdlàg)
4. $\forall t > 0$ $N_{t-} = N_t$ con probabilidad 1
5. N_t es continuo en probabilidad, esto es $\forall t > 0$ $N_s \xrightarrow{\mathbb{P}} N_t$ cuando $s \rightarrow t$

6. La función característica de N_t está dada por:

$$\mathbb{E} [e^{iuN_t}] = \exp \{ \lambda t (e^{iu} - 1) \} \quad (\text{B-1})$$

para toda $u \in \mathbb{R}$

7. N_t tiene la propiedad de Markov:

$$\mathbb{E} [f(N_t) | N_u, u \leq s] = \mathbb{E} [f(N_t) | N_s] \quad (\text{B-2})$$

Definición B.1.3 (Proceso Poisson Compuesto). Sea $\{X_i\}_{i \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas e independientes de un proceso Poisson $\{N_t\}_{t \geq 0}$ de parámetro λ . Al proceso

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i \quad (\text{B-3})$$

se le llama proceso Poisson compuesto.

Simulación del Proceso Poisson

Proposición B.1.4. Sean $U \sim U(0, 1)$ y $\lambda > 0$. Entonces $-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \sim \text{Exp}(\lambda)$

Demostración:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \leq x \right) &= \mathbb{P} (\ln(1 - U) \geq -\lambda x) \\ &= \mathbb{P} (1 - U \geq e^{-\lambda x}) \\ &= \mathbb{P} (U \leq 1 - e^{-\lambda x}) \end{aligned}$$

Y recordemos que

$$F_U(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces

$$\mathbb{P}(U \leq 1 - e^{-\lambda x}) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto $-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \sim \text{Exp}(\lambda)$

■

B.2. Movimiento Browniano

En el capítulo 1, se introdujo el movimiento Browniano en la definición 1.1.1, por lo que ahora sólo mencionaré algunas de las propiedades más importantes:

1. Es un proceso Gaussiano. Su distribución finito dimensional $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ es normal pues este vector es una transformación lineal del vector $(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$ que tiene ley normal, ya que sus componentes son independientes y se distribuyen normal.
2. La media y la autocovarianza del movimiento Browniano son fáciles de obtener

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_t) &= 0, \text{ ya que se distribuye normal con media } 0 \text{ y varianza } t \\ \mathbb{E}(W_t W_s) &= \mathbb{E}(W_s(W_t - W_s + W_s)) \\ &= \mathbb{E}(W_s(W_t - W_s)) + \mathbb{E}(W_s^2) = s = \text{mín}(s, t) \end{aligned}$$

si $s \leq t$ y, por ser proceso Gaussiano, si existe un proceso que tenga esta media y esta autocovarianza entonces no puede ser otro proceso más que el movimiento Browniano.

Otro aspecto importante es la variación cuadrática del movimiento Browniano. Tomemos un intervalo de tiempo $[0, T]$ y una partición P de este intervalo, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$. La norma de una partición se define como $|P| = \text{máx}_k \Delta t_k$ donde $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. Y sea $\Delta W_{t_k} = W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$. Entonces si $t_j = \frac{jt}{n}$ se tiene que:

$$\sum_{k=1}^n |\Delta W_{t_k}| \approx n \left(\frac{t}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty,$$

mientras que

$$\sum_{k=1}^n (\Delta W_{t_k})^2 \approx n \left(\frac{t}{n} \right) = t \quad (\text{B-4})$$

Es decir, la variación cuadrática del movimiento Browniano es t , esto es más claro si hacemos notar que $\mathbb{E}(W_t^2) = t$.

Algunos procesos importantes, ligados al movimiento Browniano son los siguientes:

1. *El puente Browniano*: Consideremos el proceso

$$X_t = W_t - tW_1$$

$t \in [0, 1]$. Se trata de un proceso Gaussiano centrado con función de autocovarianza

$$\mathbb{E}(X_t X_s) = \min(s, t) - st$$

que satisface $X_0 = 0$, $X_1 = 0$

2. *El movimiento Browniano con deriva*: Consideremos el proceso

$$X_t = \sigma W_t + \mu t$$

$t \geq 0$, donde $\sigma > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$ son constantes. Este es un proceso Gaussiano con media y función de auto covarianza

$$\mathbb{E}(X_t) = \mu t \mathbb{E}(X_t X_s) = \sigma^2 \min(s, t)$$

3. *Movimiento Browniano geométrico*: Como se vió en el capítulo 1, fue propuesto por Black, Scholes y Merton como modelo para simular el precio de un activo financiero. Y se define como

$$X_t = e^{\sigma W_t + \mu t}$$

$t \geq 0$, donde $\sigma > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$ son constantes. Es decir, se trata de la exponencial de un movimiento Browniano con deriva lineal.

Simulación de un Movimiento Browniano

El Movimiento Browniano se puede considerar como el límite de una caminata aleatoria. Sea un intervalo de tiempo $[0, T]$, y consideremos n variables aleatorias ξ_1, \dots, ξ_n independientes, idénticamente distribuidas, centradas y de varianza $\frac{T}{n}$. Ahora consideremos las sumas parciales

$$S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k, \quad k = 1, \dots, n$$

Gracias al Teorema central del límite tenemos que cuando $n \rightarrow \infty$, la sucesión S_k converge en distribución a una normal $N(0, T)$. Ahora sea el proceso estocástico continuo $R_n(\frac{kT}{n}) = S_k, k = 0, \dots, n$. Esto es, ponemos las sumas parciales $S_1, S_2, S_3 \dots$ en los instantes $\frac{T}{n}, \frac{2T}{n}, \frac{3T}{n}, \dots$. Y al utilizar una versión funcional del Teorema central del límite, conocido como el *Principio de invarianza de Donsker*, llegamos a que la sucesión de procesos estocásticos $S_n(t)$ converge en distribución al Movimiento Browniano en $[0, T]$. A este principio de invarianza se le denomina así ya que es *invariante* respecto a las distribuciones de ξ_i que satisfacen ciertas condiciones, las cuales se discuten en el libro de Procesos Estocásticos de Tudor, [33].

B.3. Martingalas

Para ser más breve, sólo escribiré los resultados importantes de ésta sección en tiempo continuo.

Definición B.3.1. Una filtración es una familia $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ de sub- σ -álgebras de \mathcal{F} , tales que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ si $s < t$.

La *filtración canónica* asociada a un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ es por definición $\mathcal{F}_s^X = \mathcal{B}(X_s : s < t), t \in T$.

Definición B.3.2. Una filtración satisface las condiciones habituales si:

1. Es continua por la derecha, esto es si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ para cada $t \geq 0$
2. \mathcal{F}_0 contiene a los conjuntos insignificantes de \mathcal{F}

Definición B.3.3. Sea $\{X_t\}_{t \in T}$ un proceso estocástico

1. Se dice que $\{X_t\}_{t \in T}$ es \mathcal{F}_t -adaptado si para cada $t \in T$ la variable aleatoria X_t es \mathcal{F}_t -medible, esto es que $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$ para cada $t \in T$

2. Se dice que $\{X_t\}_{t \in T}$ es \mathcal{F}_t -progresivamente medible si para toda $t \in [0, T]$ la aplicación $(s, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$, definida en $[0, T] \times \Omega$ es medible respecto de la σ -álgebra producto $\mathcal{B}_{[0, T]} \otimes \mathcal{F}_t$

Observación B.3.4. A partir de esta definición es claro que todo proceso \mathcal{F}_t -progresivamente medible X es \mathcal{F}_t -adaptado. Ya que si una función es medible respecto de un espacio producto, al fijar una coordenada resulta medible como función de la segunda coordenada.

Recordemos que un \mathcal{F}_t -tiempo de paro es una aplicación $\tau : \Omega \rightarrow T$, tal que para cada $t \in T$, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Intuitivamente las filtraciones se pueden pensar como la información que se tiene al tiempo t , y un tiempo de paro nos permite decidir si nos detenemos o no a partir de la información hasta el tiempo t .

Definición B.3.5 (Martingala). *Un proceso estocástico $\{M_t\}_{t \geq 0}$ es una martingala respecto a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, si se cumplen las siguiente propiedades:*

1. M_t es \mathcal{F}_t -medible, para toda $t \geq 0$
2. $\mathbb{E}(|M_t|) \leq \infty$ para toda $t \geq 0$
3. $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$, si $s \leq t$

A consecuencia de la última propiedad se tiene que la esperanza de una martingala es constante, ya que $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0) \forall t \geq 0$. Las martingalas ofrecen un modelo para juegos justos, ya que es un proceso adaptado que no tiene tendencia. El hecho de que la ganancia esperada tenga esperanza cero, representa el carácter equitativo del juego.

Teorema B.3.6 (Desigualdad de Doob). *Sea $\{M_t\}_{t \in [0, T]}$ una martingala con trayectorias continuas. Entonces, para toda $p \geq 1$ y todo $\lambda > 0$ se cumple*

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t| > \lambda \right) \leq \frac{1}{\lambda^p} \mathbb{E}(|M_T|^p) \tag{B-5}$$

El estudio de las martingalas es bastante fuerte, y requiere de mucho tiempo y esfuerzo para entenderse a profundidad, y conforme se va adentrando más en el estudio se necesitan conceptos cada vez más abstractos. Más adelante volveremos al tema de las martingalas, pero una generalización conocida como martingala local. Así que los resultados que se necesiten se irán introduciendo a medida que se vaya utilizando.

Apéndice C

Cálculo Estocástico

Trataré de ser lo más breve posible en cuanto a la integral estocástica respecto al movimiento Browniano, pues la parte que nos interesa es una integral donde el integrador es una semimartingala. Lo cual se introducirá en esta sección.

Definición C.0.7. Una familia $\{X_i\}_{i \in I}$ de variables aleatorias se dice que es uniformemente integrable si

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{i \in I} \int_{\{|X_i| > c\}} |X_i| d\mathbb{P} = 0 \quad (\text{C-1})$$

Lo cual como había mencionado es una definición mucho más abstracta que cualquier otra que se haya mencionado, pero es muy importante a la hora de trabajar con martingalas locales, y a su vez para poder definir las semimartingalas.

Definición C.0.8. Si $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es \mathcal{F}_t -martingala càd y T es \mathcal{F}_t -tiempo de paro entonces al proceso $\{X_t^T\}_{t \geq 0} = \{X_{t \wedge T}\}_{t \geq 0}$ se le llamará proceso detenido.

Este proceso es una \mathcal{F}_t -martingala.

Definición C.0.9 (Martingala local). Un proceso estocástico $\{M_t\}_{t \geq 0}$ que es càdlàg y \mathcal{F}_t -adaptado se llama \mathcal{F}_t -martingala local si existe una sucesión creciente de \mathcal{F}_t -tiempos de paro $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ mayores que cero, tal que:

1. $\lim_n \tau_n = \infty$ c.s.
2. Para toda $n \geq 1$, el proceso $\{M_t^{\tau_n}\}_{t \geq 0}$ es \mathcal{F}_t -martingala.

Observación C.0.10. *Es evidente que toda martingala es martingala local, ya que con $\tau_n = n$ se satisfacen las propiedades, pero el recíproco no es cierto.*

Definición C.0.11 (Variación acotada). *Dada una función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y una partición $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$, definamos $V_g(P) = \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})|$. Diremos que g es de variación acotada si:*

$$V_g[a, b] = \sup \{V_g(P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\} < \infty$$

De hecho g es de variación acotada si y sólo si se puede expresar como la diferencia de dos funciones no decrecientes.

Definición C.0.12 (Martingala cuadrado integrable). *Una martingala $\{M_t\}$ se dice cuadrado integrable si $\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$, y se dice que $M_t \in L^2(\mathbb{P})$ para toda $t \geq 0$.*

Proposición C.0.13. *Sea M_t una martingala cuadrado integrable, entonces*

$$\mathbb{E} [(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_a] = \mathbb{E} [M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_a], \quad 0 \leq a \leq s \leq t. \quad (\text{C-2})$$

Definición C.0.14 (Proceso de variación cuadrática). *Sea X un proceso, si*

$\Delta = \{0 = t_0 < \dots < t_n < \dots\}$ *es una partición del intervalo $[0, \infty)$ que no tenga puntos de acumulación, se define el proceso de variación cuadrática $Q_t^\Delta(X)$ por*

$$Q_t^\Delta(X) = (X_t - X_{t_k})^2 + \sum_{j=1}^{k(t)} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^2, \quad t \geq 0 \quad (\text{C-3})$$

donde $k(t) = \max \{k \geq 0 | t_k \leq t\}$

Ahora mencionaré un teorema bastante fuerte, cuya demostración no es sencilla, pero que es de gran utilidad para poder entender las Semimartingalas.

Teorema C.0.15. *Sea X una martingala local continua y uniformemente acotada. Entonces existe un único proceso continuo de variación acotada A tal que $A_0 = 0$ y que $X^2 - A$ es una martingala local. Al proceso A se le llama variación cuadrática de X y se denota por $\langle X \rangle$. La varacion cuadrática $\langle X \rangle$ es un proceso adaptado y creciente.*

Ejemplo C.0.16. *El movimiento Browniano W_t es una martingala cuadrado integrable, y se puede probar fácilmente que $W_t^2 - t$ es una martingala, por lo que en este caso $\langle W \rangle_t = t$, el cual es creciente y adaptado como dice el Teorema.*

Sean X y Y martingalas locales. El producto XY en general no es una martingala local. Pero podemos ver que el proceso

$$\langle X, Y \rangle := \frac{1}{4}[\langle X + Y \rangle - \langle X - Y \rangle]$$

es continuo y de variación acotada, tal que $\langle X, Y \rangle_0 = 0$ y el proceso $XY - \langle X, Y \rangle$ es una martingala local. A este proceso se le conoce como Proceso de Covariación, y que es una generalización de la variación cuadrática, pues $\langle X, X \rangle = \langle X \rangle$.

Definición C.0.17 (Semimartingala). *Al proceso X se le llama semimartingala continua si puede ser representada como la suma $X_t = M_t + A_t$, $t \geq 0$. Donde M es una martingala local continua y A es un proceso continuo, adaptado y de variación acotada que satisface $A_0 = 0$.*

El hecho de que $A_0 = 0$ asegura que la descomposición $X = M + A$ sea única. Ya que A es el único proceso continuo de variación acotada tal que $A_0 = 0$ y $X - A$ es una martingala local.

C.1. Integral estocástica respecto a una semimartingala

Para definir esta integral estocástica, sólo hace falta utilizar el hecho de su descomposición $X = M + A$ y pedir que las funciones que se vayan a integrar cumplan lo siguiente

$$\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s + \int_0^t |H_s| |dA_s| < \infty, \quad P - c.s. \quad \forall t \geq 0.$$

Sea X una semimartingala y H una función que es un buen integrante, entonces la integral se define por $(H \bullet X) = \int_0^t H_s dX_s$. Donde:

$$\int_0^t H_s dX_s = \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t H_s dA_s, \quad t \geq 0. \tag{C-4}$$

Menionaré las propiedades más importantes que se deducen de la definición de semimartingala, y que son de utilidad al calcular integrales con este tipo de integrador.

Proposición C.1.1. *Sea X, Y semimartingalas, H y H' buenos integrantes de X , K buen integrante de Y , $S \leq T$ tiempos de paro. Entonces*

1. $H \bullet X$ es una semimartingala continua con $(H \bullet X)_0 = 0$.
2. $H \bullet X$ es bilineal en H y X .
3. $X^T = X_0 + \mathbb{1}_{[0,T]} \bullet X$, en particular $X = X_0 + \mathbb{1} \bullet X$.
4. $H^T \bullet X^T = H \bullet (X^T) = (H \bullet X)^T$.
5. $\langle H \bullet X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s d\langle X, Y \rangle_s$, $t \geq 0$.
6. $\langle H \bullet X, K \bullet Y \rangle_t = \int_0^t H_s K_s d\langle X, Y \rangle_s$, $t \geq 0$.
7. $\langle H \bullet X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 d\langle X \rangle_s$, $t \geq 0$.
8. Si H y H' son indistinguibles entonces también lo son $H \bullet X$ y $H' \bullet X$.

Definición C.1.2 (Martingala local exponencial). *Sea L una martingala local continua con $L_0 = 0$. La exponencial de Doleans $Z = \mathcal{E}(L)$ de L está definida como*

$$Z_t = \mathcal{E}_t(L) = \exp \left(L_t - \frac{1}{2} \langle L \rangle_t \right). \quad (\text{C-5})$$

C.2. Teorema de Girsanov

En el último capítulo, se mostró como obtener la medida de martingala mínima en tiempo discreto, por lo que en esta sección también consideraremos el caso discreto. El Teorema de Girsanov tiene que ver con el comportamiento de martingalas cuando se cambia una medida por otra.

Pero antes definamos dos procesos que se utilizarán en esta sección.

Definición C.2.1. *La sucesión*

$$[S]_n \equiv [S, S]_n := S_0^2 + \sum_{k=1}^n \Delta^2 S_k, \quad n \geq 0,$$

es llamado el proceso de variación cuadrática asociado con $(S_n)_n$. La sucesión

$$\langle S \rangle_n \equiv \langle S, S \rangle_n := S_0^2 + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\Delta^2 S_k | \mathcal{F}_{k-1}], \quad n \geq 0,$$

es llamado el proceso predecible de variación cuadrática asociado a $(S_n)_n$.

Consideremos dos medidas equivalentes \mathbb{P} y \mathbb{Q} , y denotemos por $\xi = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ a su derivada de Radon-Nikodym. Esto es tal que

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A \xi d\mathbb{P}, a \in \mathcal{F}.$$

En este contexto es importante definir el llamado *proceso de verosimilitud*

$$L_n = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\xi | \mathcal{F}_n),$$

Lema C.2.2. *Sea $(S_n)_n$ adaptado a $(\mathcal{F}_n)_n$ e integrable respecto de \mathbb{Q} . Entonces $S_n L_n$ es integrable respecto de \mathbb{P} , y se tiene la siguiente igualdad*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_m L_m | \mathcal{F}_n) = L_n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_m | \mathcal{F}_n), \quad n \leq m.$$

Demostración. Es claro que $(S_m L_m)_m$ es adaptado e integrable respecto de \mathbb{P} . Sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces con $n \leq m$

$$\begin{aligned} & \int_A L_n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_m | \mathcal{F}_n) d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\xi | \mathcal{F}_n) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_m | \mathcal{F}_n) d\mathbb{P} \\ &= \int_A \xi \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_m | \mathcal{F}_n) d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_m | \mathcal{F}_n) d\mathbb{Q} = \int_A S_m d\mathbb{Q} \\ &= \int_A \xi S_m d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\xi | \mathcal{F}_m) S_m d\mathbb{P} = \int_A L_m S_m d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L_m S_m | \mathcal{F}_n) d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

■

Corolario C.2.3. *Bajo la hipótesis del lema anterior, si $n \leq m$ tenemos que*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_m | \mathcal{F}_n) = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_m L_m | \mathcal{F}_n)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\xi | \mathcal{F}_n)}.$$

Corolario C.2.4. *Una sucesión $(S_n)_n$ adaptada a $(\mathcal{F}_n)_n$ es una \mathbb{Q} -martingala si y sólo si $(S_n L_n)_n$ es una \mathbb{P} -martingala.*

Demostración. Utilizando el lema, si $(S_n)_n$ es una \mathbb{Q} -martingala, entonces

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_m L_m | \mathcal{F}_n) = L_n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_m | \mathcal{F}_n) = L_n S_n.$$

El regreso de la implicación se prueba de manera similar. ■

Definamos tres integrales estocásticas que tiene que ver con el proceso $(L_n)_n$:

$$\int_0^n \frac{dL}{L_-}, \quad A_n = \int_0^n \frac{d[S, L]}{L}, \quad B_n = \int_0^n \frac{d \langle S, L \rangle_{\mathbb{P}}}{L_-}.$$

Cada uno tiene una representación explícita como una suma:

$$\begin{aligned} \int_0^n \frac{dL}{L_-} &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \sum_{k=1}^n \frac{L_k - L_{k-1}}{L_{k-1}} & \text{si } n \geq 1. \end{cases} \\ A_n &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \sum_{k=1}^n \frac{\Delta S_k \Delta L_k}{L_k} & \text{si } n \geq 1. \end{cases} \\ B_n &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Delta S_k \Delta L_k | \mathcal{F}_{k-1}]}{L_{k-1}} & \text{si } n \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Notemos que $(A_n)_n$ es adaptado y que $(B_n)_n$ es predecible.

Teorema C.2.5 (Girsanov). *Sea $(S_n)_n$ una \mathbb{P} -martingala. Entonces las dos sucesiones, $S_n - A_n$ y $S_n - B_n$, $n \geq 1$, son \mathbb{Q} -martingalas.*

Demostración. Para cada $n \geq 0$ tenemos que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_{n+1} - A_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) - A_n - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{(S_{n+1} - S_n)(L_{n+1} - L_n)}{L_{n+1}} | \mathcal{F}_n \right].$$

El corolario C.2.3 implica

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{(S_{n+1} - S_n)(L_{n+1} - L_n)}{L_{n+1}} | \mathcal{F}_n \right] = L_n^{-1} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(S_{n+1} - S_n)(L_{n+1} - L_n) | \mathcal{F}_n] \\ &= L_n^{-1} [\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_{n+1} L_{n+1} | \mathcal{F}_n) - S_n \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L_{n+1} | \mathcal{F}_n)] \\ &= L_n^{-1} [\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_{n+1} L_{n+1} | \mathcal{F}_n) - S_n L_n] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_{n+1} L_{n+1} | \mathcal{F}_n)}{L_n} - S_n \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) - S_n, \end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_{n+1} - A_{n+1} | \mathcal{F}_n) = S_n - A_n.$$

La prueba para B_n es similar. Tenemos que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_{n+1} - B_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) - B_n - \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\Delta S_{n+1} \Delta L_{n+1} | \mathcal{F}_n)}{L_n}.$$

De nuevo aplicando el corolario C.2.3 se obtiene que

$$\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\Delta S_{n+1} \Delta L_{n+1} | \mathcal{F}_n)}{L_n} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) - S_n,$$

con lo que termina la prueba.

El Teorema de Girsanov muestra como una \mathbb{P} -martingala necesita ser modificada para que ser una martingala bajo \mathbb{Q} . ■

Apéndice D

Programas

Para realizar las simulaciones de los procesos mencionados en el trabajo se utilizará el programa R.

D.1. Proceso Poisson

El siguiente código es de un proceso Poisson simple con intensidad lambda.

```
#Se crea una función que depende del horizonte finito y la intensidad lambda
PPoisson<-function(T,lambda){

#Se simula una v.a. Poisson, la cual será la cantidad de saltos
po=rpois(1,lambda*T)

#Usamos la propiedad de que dada la cantidad de saltos,
#estos se distribuyen uniforme en [0,T]
ta=runif(po,0,T)

#Se ordenan y se grafican contra los naturales
tau=sort(ta)
S=c(0,tau)
n=seq(0,po)
plot(S,n,xlab='tiempos de arribo',main='Proceso Poisson',col='1',type='s')
```

```
}  
#Le damos valores para ver la gráfica, por ejemplo  
a<-PPoisson(1,30)
```

En la figura D-1 podemos ver una trayectoria de un proceso Poisson.

El siguiente código es de un proceso Poisson compuesto, con intensidad λ y saltos con distribución exponencial.

```
#Se crea una función que depende del horizonte finito y la intensidad lambda  
PPCompuesto<-function(T,lambda){  
  
#Se genera un proceso Poisson simple  
po=rpois(1,lambda*T)  
ta=runif(po,0,T)  
tau=sort(ta)  
S=c(0,tau)  
  
#Se da la distribución de los saltos y se genera la suma acumulada  
saltos=rexp(po,4)  
poiscomp=c(0,cumsum(saltos))  
  
#Se grafica tiempos de los saltos contra la suma acumulada de sus tamaños  
plot(S,poiscomp,xlab='tiempos de arribo',ylab='tamaño acumulado de los saltos',  
main='Proceso Poisson Compuesto',col='1',type='s')  
}  
a<-PPCompuesto(1,30)
```

En la figura D-2 podemos ver una trayectoria de un proceso Poisson compuesto.

D.2. Movimiento Browniano

El siguiente programa es de un movimiento Browniano estándar.

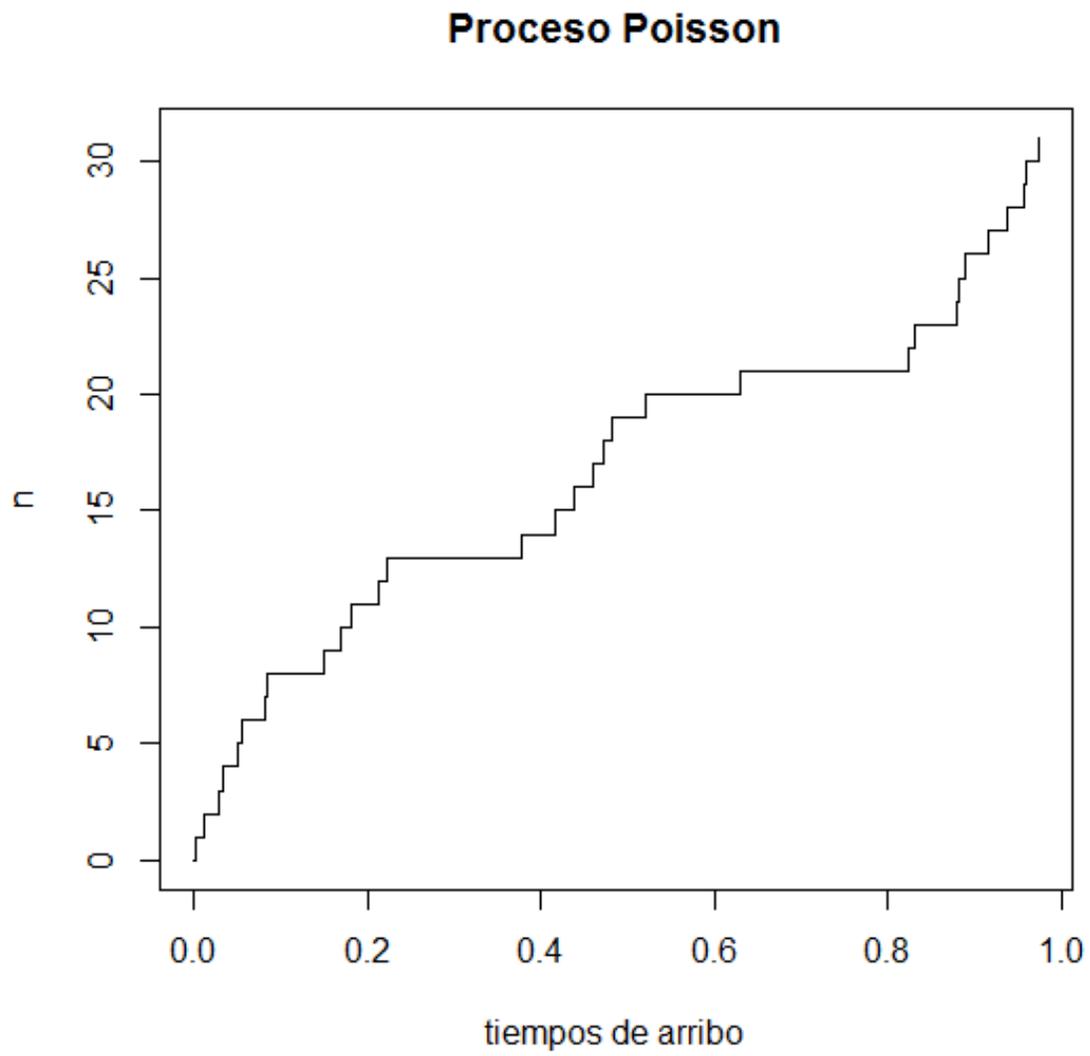


Figura D-1: Trayectoria de un proceso Poisson.

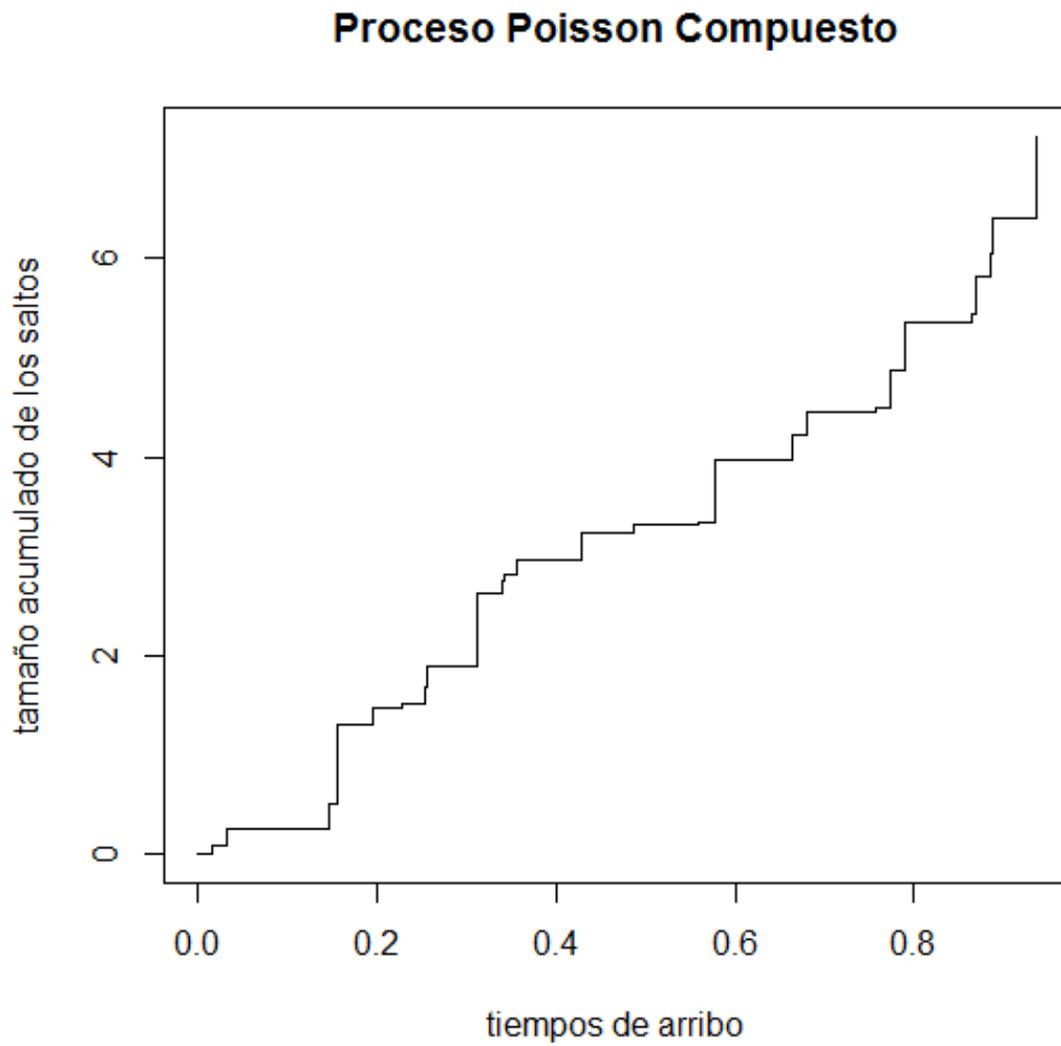


Figura D-2: Trayectoria de un proceso Poisson compuesto.

```
#Se crea una función que depende del horizonte finito
#y del tamaño de la partición del intervalo [0,T]
#Para obtener el movimiento Browniano
#debemos utilizar dt cercana a cero.
MB<-function(T,dt){

#Se obtiene el número de ptos de la partición,
#se genera una normal en cada pto y se van sumando
N=T/dt
nor=rnorm(N,0,1)
q=(nor)*sqrt(dt)
Z=c(0,cumsum(nor))

#Por último se crea un vector con los puntos de la partición
del=rep(dt,N)
deltat=c(0,cumsum(del))

#Se grafica la partición contra la suma acumulada de normales
plot(deltat,Z,type='l',col='1',axes=T,main='Movimiento Browniano',xlab='t')

}
a<-MB(1,0.0009)
```

En la figura D-3 podemos ver una trayectoria del movimiento Browniano.

El siguiente programa es de un movimiento Browniano geométrico.

```
#Se crea una función que depende de:
#T: horizonte finito
#N: número de puntos en la partición incluyendo a T
#Xo: valor inicial del MB geométrico
#mu: tendencia
#sig: volatilidad
```

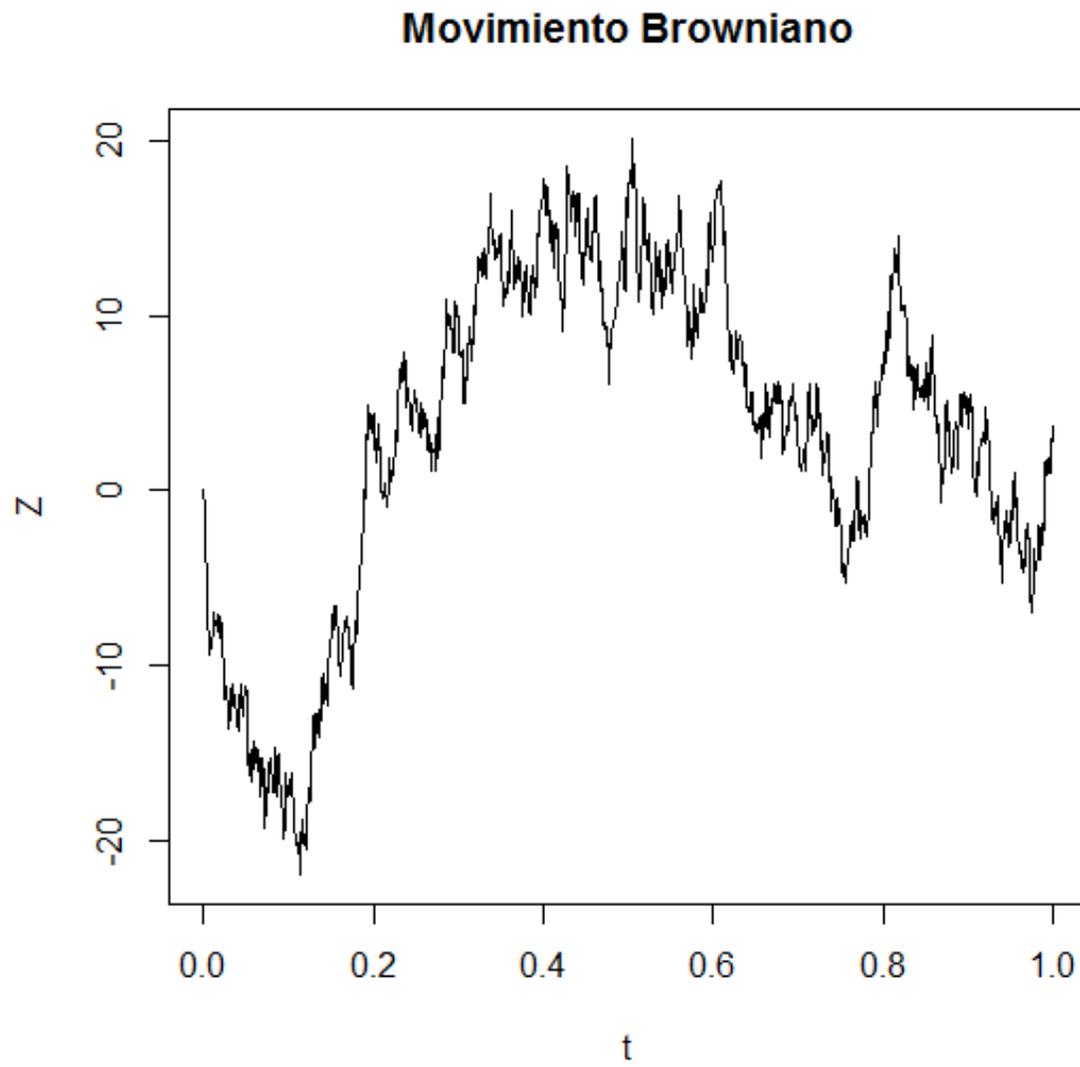


Figura D-3: Trayectoria de un movimiento Browniano.

```
MBG<-function(T,N,Xo,mu,sig){

dt=T/N

W<-numeric(N+1) #vector de N+1 entradas numéricas
t<-seq(0,T,length=N+1) #la partición
for(i in 2:(N+1)){

#Se genera iteradamente el mov. Brow.
W[i]= W[i-1] + rnorm(1)*sqrt(dt)
}

#Por último se crea el MB geom. y se grafica
S<- Xo*exp((r-(sig^2)/2)*t + sig*W)
plot(t,S,type='l',main='M. B. Geométrico')

}

b<-MBG(1,1000,50,0.6,1)
```

En la figura D-4 podemos ver una trayectoria del movimiento Browniano geométrico.

D.3. Difusión con saltos

El siguiente programa es de una difusión con saltos.

```
#Se crea una función que depende de:
#T: horizonte finito
#N: número de puntos en la partición incluyendo a T
#lambda: intensidad del proceso Poisson
#a,b: parámetros de la distribución de los saltos
#mu: tendencia
#sig: volatilidad
#x_ini: valor inicial de la difusión
```

M. B. Geométrico

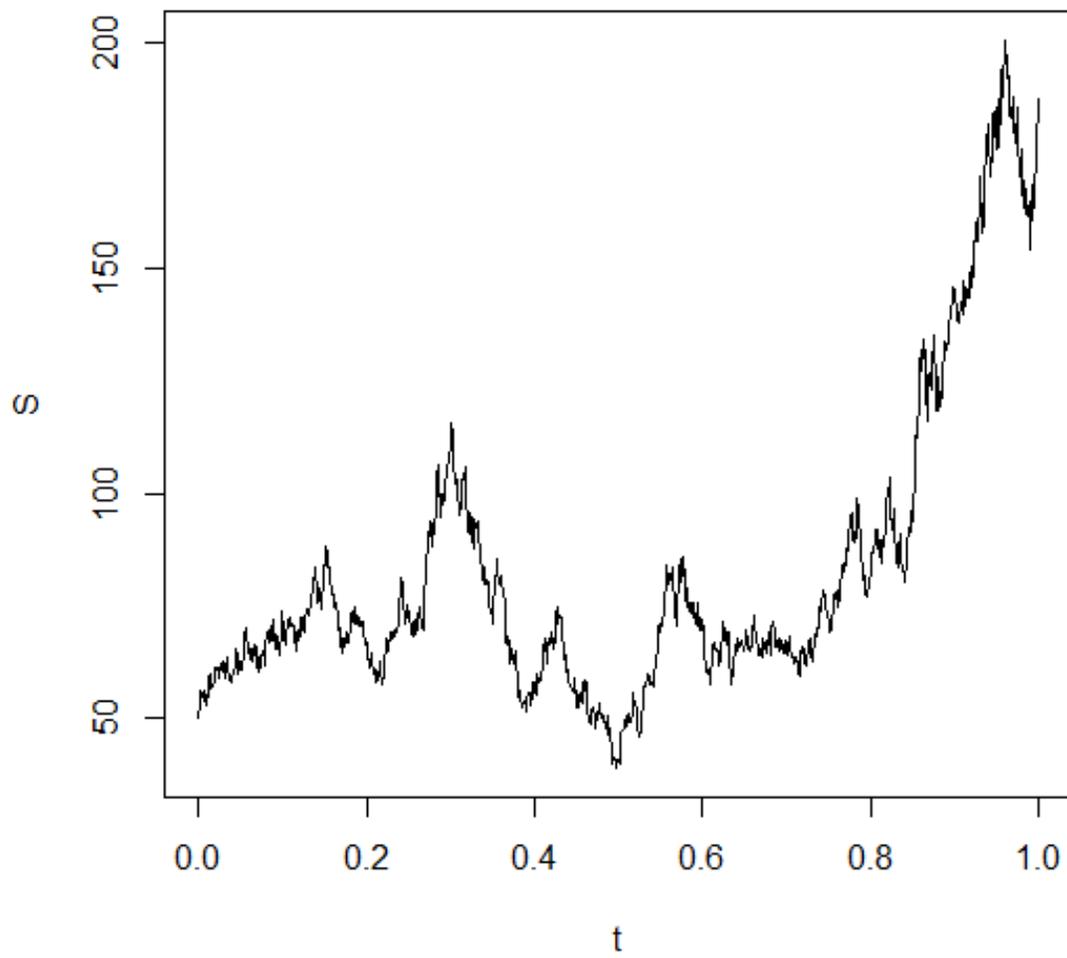


Figura D-4: Trayectoria de un movimiento Browniano geométrico.

```
difsaltos<-function(T,N,lambda,a,b,mu,sig,x_ini){

#se crean los incrementos de un mov. Browniano con w
dt<-T/N
w<-rnorm(N,0,sqrt(dt))
r=x_ini

cont1=1 #contador
numsaltos= rpois(1,lambda*T)
tiemposalto=runif(numsaltos,0,T)
tiemposalto=sort(tiemposalto)
saltos=rgamma(numsaltos,a,b)
x=0
for (i in 1:N){
  if (tiemposalto[cont1]>(dt*i)&tiemposalto[cont1]<(dt*(i+1))){
    r[i]=r[i]+saltos[cont1]
    cont1=cont1+1
  }

#se crea la difusión con r
r=c(r,r[i]+r[i]*(mu*dt+sig*w[i]))

x=c(x,i/N)
if (i>(T*N/4)){

#grafica la difusión r contra el tiempo, que almacenamos en x
plot(x,r,type="l", col='1', xlab="T", main='Difusión con Saltos')
}
}
return(w)
```

```
}  
a<-difsaltos(1,1000,4,10,2,.6,1,5)
```

En la figura D-5 podemos ver una trayectoria de una difusión con saltos, los saltos se dieron por 0.6 y casi llegando a 0.8.

D.4. Shot-noise

El siguiente programa es de una shot-noise como en (1-4).

```
#Empezamos creando la función h que aparece en la fórmula, para que  
h=function(t,tamsalto,tiempsalto,c){  
  cont1=NR0W(tamsalto) #regresa el número de filas del vector tamsalto  
  if(cont1==1){  
    return(1)  
  }  
  cont2=1  
  
  for (i in 1:cont1){  
    cont2=(1+tamsalto[i]*(exp(-c*(t-tiempsalto[i]))))*cont2  
  }  
  h=cont2  
}
```

```
#Se crea una función que depende de:  
#T: horizonte finito  
#N: número de puntos en la partición incluyendo a T  
#lambda: intensidad del proceso Poisson  
#a,b: parámetros de la distribución de los saltos  
#mu: tendencia  
#sig: volatilidad  
#x_ini: valor inicial de la difusión
```

Difusión con Saltos

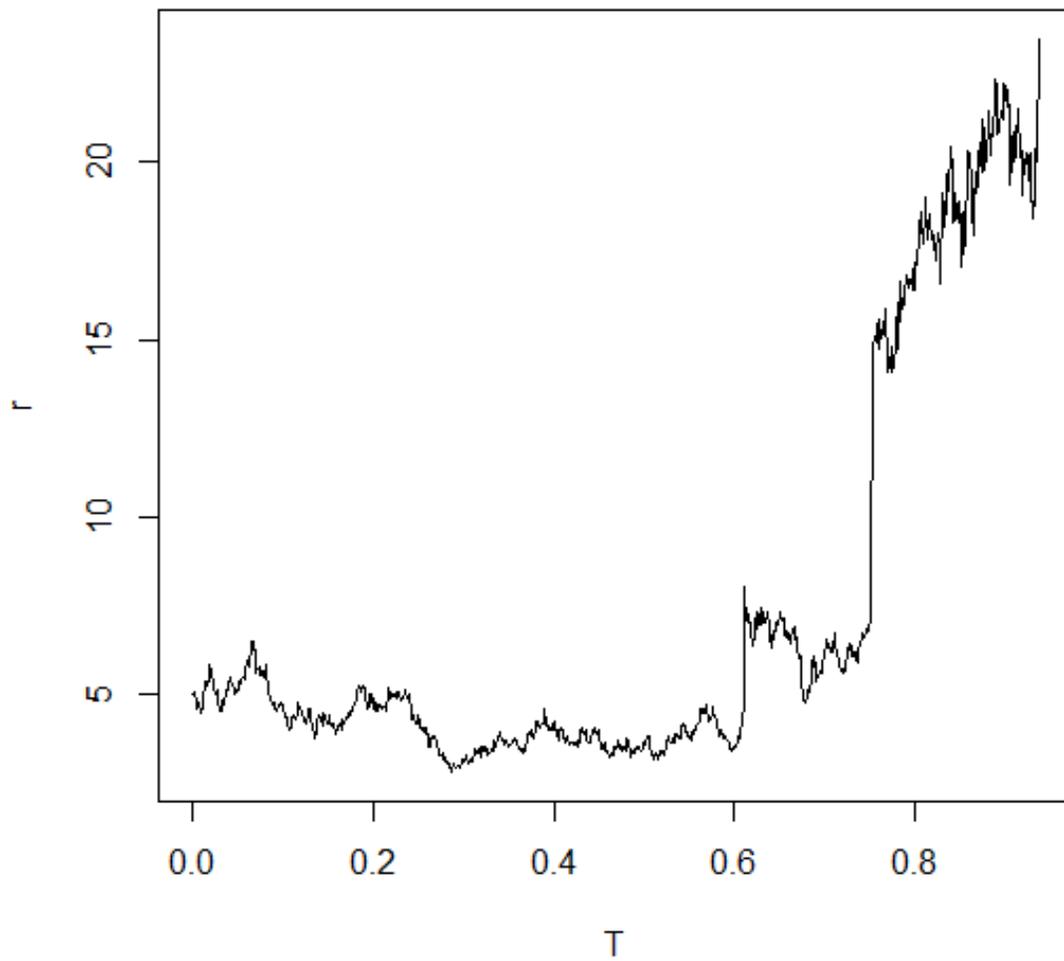


Figura D-5: Trayectoria de una difusión con saltos.

```
shotnoise<-function(T,N,lambda,a,b,mu,sig,x_ini){

  dt<-1/N
  w<-rnorm(T*N,0,sqrt(dt))
  r=x_ini
  #s va a contener los valores del shot-noise
  s=r
  cont1=1
  conteosalto=0
  tamasalto=0
  numsaltos= rpois(1,lambda*T)
  tiemposalto=runif(numsaltos,0,T)
  tiemposalto=c(sort(tiemposalto),101)
  saltos=rgamma(numsaltos,a,b)

  x=0
  tiesalto=0
  tasalto=0
  for (i in 1:(T*N)){
    if (tiemposalto[cont1]>(dt*i)&tiemposalto[cont1]<(dt*(i+1))){
      tiesalto=c(tiesalto,tiemposalto[cont1])
      tasalto=c(tasalto,saltos[cont1])
      cont1=cont1+1
    }

    #r es un Black-Scholes y utilizamos la función h que creamos para generar el shot-noise
    r=c(r,r[i]+r[i]*(mu*dt+sig*w[i]))
    s=c(s,r[i+1]*h((i+1)*dt,tasalto,tiesalto,2))
    x=c(x,i/N)
    if (i>((T*N-4))){
```

```
#grafica el shot-noise
plot(x,s,type="l", col='1', xlab="T", main='Shot-Noise')
}
}
return(w)
}
a<-shotnoise(5,1000,1,1,1,.6,1.15,5)
```

En la figura D-6 podemos ver una trayectoria de un shot-noise, donde la función de decaimiento es exponencial. Notemos que aún cuando salta mucho el proceso, vuelve a regresar por el efecto que produce la función h .

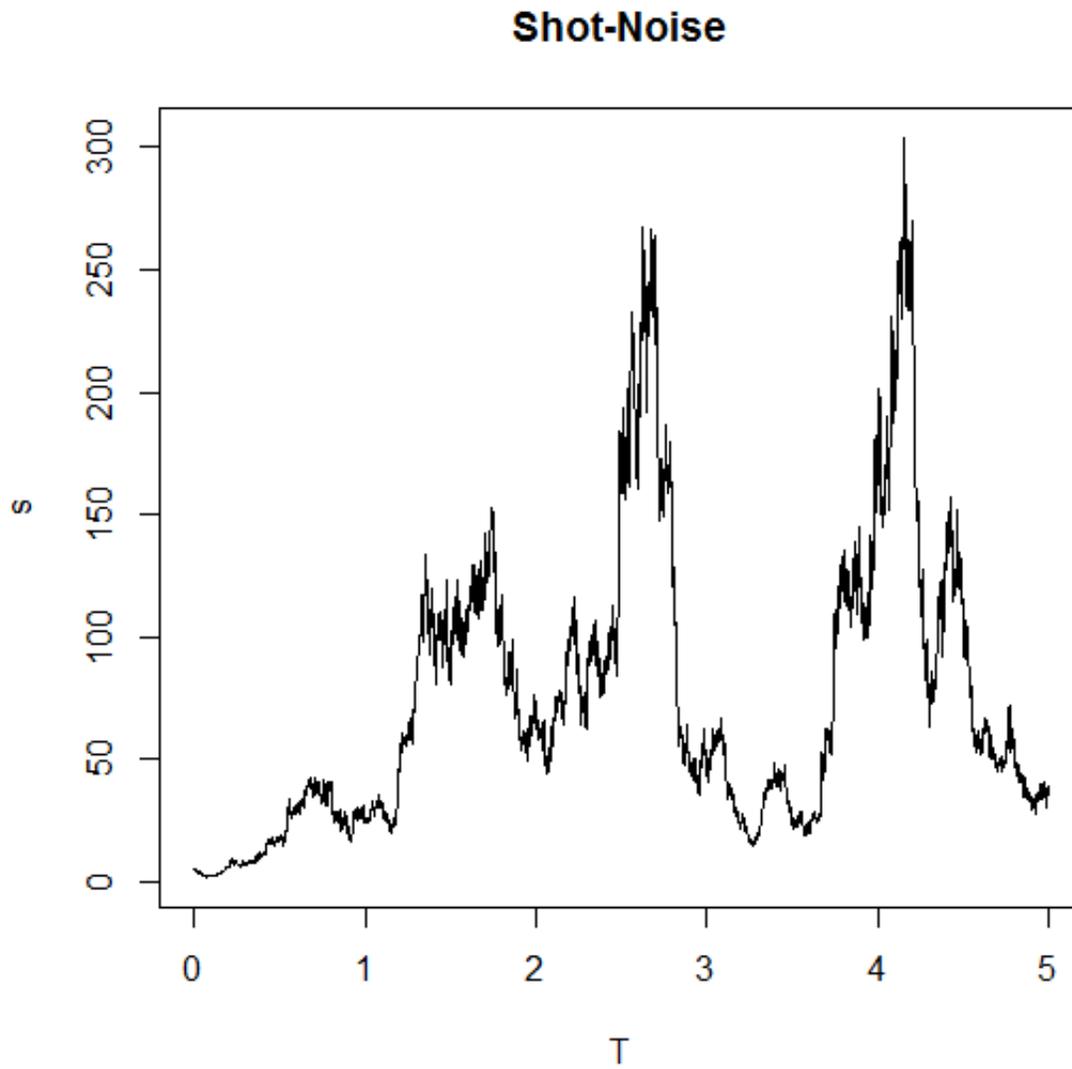


Figura D-6: Trayectoria de un proceso shot-noise con decaimiento exponencial.

Bibliografía

- [1] Altamann T., Schmidt T. y Stute W. *A Shot Noise Model For Financial Assets*. febrero, 2008.
- [2] Applebaum D. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge University Press, 2004.
- [3] Bertoin J. *Lévy Processes*. Cambridge University Press, 2007.
- [4] Bielecki T.R. y Rutkowski M., *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*. Springer, 2002.
- [5] Bielecki T.R., Jeanblanc M. y Rutkowski M., *Credit Risk*, Lecture of M. Jeanblanc, preliminary version, Lisbonn, Junio 2006.
- [6] Björk T., *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press Inc., New York, 1998.
- [7] Bluhm C., Overbeck L. y Wagner C., *An Introduction to Credit Risk Modelling*. Chapman and Hall/CRC Financial Mathematics Series, 2003.
- [8] Cont R., Deguest R. y Kan Y.H., *Default intensities implied by CDO spreads*. working paper, 2009.
- [9] Cont R. y Tankov P., *Financial Modelling With Jump Processes*. Chapman and Hall/CRC, 2004.
- [10] Dana R-A. y Jeanblanc M. *Financial Markets in Continuous Time*. Springer, 2007.
- [11] El Karoui N. y Quenez. M-Cl. *Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market*. SIAM J. Control and Optim., 1995.

-
- [12] El Karoui, N. and Rouge, R. *Pricing via utility maximization and entropy*. Math. Finance, 259 a276, 2000.
- [13] Frittelli M. *The minimal entropy martingale measure and the valuation problem in incomplete markets*. Math. Finance, 10,215 a 225, 2000.
- [14] Hodges, S. D. y Neuberger, A. *Optimal replication of contingent claims under transaction costs*. Rev. Future Markets, 222 a 239, 1989.
- [15] Filipovic D. *Term-Structure Models, A Graduate Course*. Springer, 2009.
- [16] Föllmer H. y Schied A., *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time* 2 ed., Walter de Gruyter, Berlin New York, 2004.
- [17] Föllmer H. y Sondermann, D. *Hedging of contingent claims under incomplete information*. W. Hildenbrand and A. MasCollé, editors, Contribution to Mathematical Economics, pag. 205 a 223, Amsterdam, 1986.
- [18] Frey R. y Schmidt T. *Pricing and hedging of credit derivatives via the innovations approach to nonlinear filtering* (2011)
- [19] Gaspar R.M. y Schmidt T. *Credit Risk Modelling with Shot-Noise Processes*. (14 de Junio, 2011)
- [20] Gerber, H. y Shiu E. *Option Pricing by Esscher Transforms*. Investment Section Monograph.
- [21] Giesecke, K., Schmidt T. y Weber S., *Credit crises, extreme events risk measurement*. Journal of Investment Management 6, 1 a 15, 2008.
- [22] Kramkov, D. *Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets*. Probability Theory and Related Fields, 1996.
- [23] Lamberton D. y Lapeyre B., *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman and Hall/CRC, 2000.
- [24] Lando D., *Credit Risk Modeling: Theory and Applications*. Princeton Series in Finance, 2004.

-
- [25] McNeil A.J., Frey R. y Embrechts P., *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, 2005.
- [26] Meyer M., *Calculus with Applications to Finance*. Chapman and Hall/CRC, 2001.
- [27] Papapantoleon, A. *An introduction to Lévy processes with applications in finance*. Lecture notes, 2005.
- [28] Protter P. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer Verlag, 2da ed.
- [29] Revuz D. y Yor M. *Continuous Martingales and Brownian motion*. Springer, 2da ed., 1994
- [30] K. I. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, 1999.
- [31] Schoutens W., *Lévy Processes in Finance, Pricing Financial Derivatives*. John Wiley & Sons Ltd., 2003.
- [32] Schoutens W. y Cariboni J., *Lévy Processes in Credit Risk*. John Wiley & Sons Ltd., 2009.
- [33] Tudor, Constantin. *Procesos Estocásticos*, Sociedad Matemática Mexicana, 1994.