



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**“INVARIANCIA DE ESCALA EN SISTEMAS
CLASICOS Y CUANTICOS CON DINAMICA
CAOTICA”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

Emmanuel Landa Hernández

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ALEJANDRO FRANK HOEFLICH

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: **DR. ALFRED B. U'REN CORTES**
MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: **DR. VICTOR M. VELAZQUEZ AGUILAR**



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

Septiembre 2012



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A todo aquel que de alguna manera ha contribuido en mi formación profesional.
GRACIAS

Este trabajo está dedicado a la memoria de Cecilia Ceballos Arriaga que a pesar de que no tuvo la oportunidad de estudio, no deja ser una de las personas más interesantes y sensatas que he conocido.

Índice general

1. Invariancia de Escala en Series de tiempo	1
1.1. Series de tiempo	2
1.2. Leyes de Potencias	2
1.3. Fractales en el espacio	4
1.4. Fractales en el tiempo: Ruido $1/f$	5
1.4.1. Espectro de Potencias de las Señales	6
1.5. Correlaciones lineales en las señales	8
1.5.1. Método DFA	11
1.6. Invariancia de Escala en una señal $1/f$	14
1.7. Leyes de Potencia en la Física: Transiciones de Fase y Universalidad	15
1.7.1. Sistemas críticos, exponentes críticos y fractales	16
1.7.2. Universalidad	19
2. Caos Clásico	21
2.1. Sistemas hamiltonianos; comportamiento regular y caótico	23
2.2. Caos hamiltoniano y teorema de KAM	24
2.3. Péndulo extensible	26
2.3.1. Comportamiento regular y caótico en el péndulo extensible	28
2.4. Mapeos iterativos: Caos en sistemas dinámicos discretos	29
2.4.1. Grifo Goteante	30
2.4.2. Mapeo Logístico	32
2.5. Mapeo Módulo 1	34
3. Caos Cuántico & Teoría de Matrices Aleatorias	39
3.1. Aplicación de la teoría de matrices aleatorias al caos cuántico	42
3.2. Elementos básicos de la teoría de matrices aleatorias (RMT)	43
3.2.1. Ensamblados Gaussianos	43
3.2.2. Ensamble Ortogonal Gaussiano GOE	45
3.3. Correlaciones Espectrales	46
3.3.1. Distribución de espaciamentos de primeros vecinos: correlaciones de corto alcance	48
3.3.2. Las Estadísticas \sum^2 y $\Delta_3(L)$: correlaciones de largo alcance	48

4. Caos cuántico, espectro nuclear del ^{48}Ca	51
4.1. Análisis del espectro nuclear ^{48}Ca como serie de tiempo	52
4.2. Análisis para el espectro nuclear de ^{48}Ca	56
4.2.1. Cálculos con el Modelo de Capas Realista	56
4.2.2. Ensamble aleatorio con interacción a dos cuerpos (TBRE)	58
4.2.3. Ensamble Ortogonal Gaussiano, GOE	60
4.2.4. Ensamble Diagonal Gaussiano, GDE	60
4.3. Fluctuaciones de un hamiltoniano nuclear esquemático	62
5. Descomposición de modos empíricos, EMD	65
5.1. Introducción	65
5.2. Estructura fractal en los IMFs	75
5.3. Implementación del EMD para el reescalado en espectros nucleares	77
5.4. Medidas del caos cuántico	80
5.5. Estudio de las fluctuaciones espectrales usando el EMD	86
5.5.1. EMD & Invariancia de escala RMT	89
6. Introducción de anti-correlaciones entre eventos de una serie de tiempo: Gotero Cuántico	93
6.1. Correlaciones y anticorrelaciones entre eventos de una serie de tiempo	94
6.2. Modelo para la construcción de Procesos puntuales de Poisson	95
6.2.1. Construcción del modelo	97
6.3. Introducción de anti-correlaciones	99
6.3.1. Nueva propuesta: Introducción de anti-correlaciones	104
6.3.2. Segunda propuesta: Anti-correlaciones de largo alcance	106
7. Conclusiones	113
Apéndice	117
A. Tópicos del primer capítulo	119
A.1. Definición de la transformada de Fourier	119
A.2. Invariancia de escala de una señal $1/f$	120
B. Aspectos básicos de RMT	123
B.1. Simetrías Espacio-Tiempo	123
B.2. Distribución de Probabilidad Conjunta para los Eigenvalores	125
B.3. Funciones de correlaciones a n-puntos	125
C. Modelo de capas	127
C.1. Espacio de Fock	127
C.2. Core inerte y espacio de valencia	128

D. Transformada de Hilbert	129
E. Modelo Teórico del Gotero Cuántico	131
E.1. Propagación de un Campo Cuantizado en el Espacio Libre	131
E.2. Propagación del Campo Cuantizado en un medio paramétrico no lineal . . .	133
E.3. Conversión Paramétrica Descendente	136
E.4. Modelo General de un Amplificador Paramétrico Óptico	137
F. Código de EMD en C.	141
G. Artículos personales	159

Índice de figuras

1.1.	Diferentes señales de $x(t)$. a) Ruido $1/f$. b) Ruido blanco obtenido de ordenar aleatoriamente la señal $1/f$. c) Ruido Browniano obtenido al sumar los incrementos del ruido blanco.	6
1.2.	Espectro de potencia para diferentes señales $x(t)$. a) Ruido $1/f$, nuestro ajuste a la pendiente es $\beta = 1.01$, b) Ruido blanco cuyo exponente corresponde a $\beta = 0.004$ y c) Ruido Browniano cuyo exponente corresponde a $\beta = 1.95$	7
1.3.	Ejemplo de como funciona el DFA, la línea gruesa es el perfil de la serie de tiempo. El perfil se divide en ventanas de tamaño n (en el panel superior se muestra el caso de $n = 100$, y en el inferior para $n = 250$) y en cada ventana se busca la tendencia lineal, definida como la recta que mejor ajusta al perfil en cada ventana. Posteriormente se hace la resta entre el perfil y las tendencias dando una serie de tiempo todavía fluctuante, pero sin tendencias.	12
1.4.	DFA para diferentes tipos de señales $x(t)$. a) Ruido $1/f$ cuyo exponente $\alpha = 1.03$, b) Ruido blanco con $\alpha = 0.5$ y c) Ruido Browniano cuyo exponente obtenido $\alpha = 1.48$	13
1.5.	Ilustración de una muestra 2-dimensional del material en la fase de magnetización ($T < T_c$): el campo magnético del espín \mathbf{m} debido a los átomos, se encuentra representado por pequeñas flechas, están todas alineadas y producen una magnetización neta no nula $\mathbf{M} \propto \sum_{muestra} \mathbf{m}$ para la muestra.	17
1.6.	Arreglo de espines de una muestra simulada por el modelo de Ising [26]. Cada cuadrado negro representa un espín apuntando hacia arriba y los blancos hacia abajo. a) $T < T_c$: casi todos los espines apuntan en la misma dirección, como resultado la muestra tiene una de magnetización no nula (fase magnetizada). b) $T = T_c$: en la transición de fase, la magnetización neta $\mathbf{M} = 0$, pero los espines se han arreglado en las islas dentro de islas de espines que apuntan en direcciones opuestas, el cual es un patrón fractal. c) $T > T_c$: el sistema tiene nula magnetización y sólo existen correlaciones de corto alcance entre los espines.	18
2.1.	Diagrama del péndulo extensible. Sistema de referencia para las ecuaciones que se muestran en 2.10 y 2.11.	27

2.2.	Secciones de Poincaré para el péndulo extensible, se puede ver el caso integrable y el caso caótico, también se observa la estructura fractal cuando ocurre una transición de orden-caos-orden.	29
2.3.	Diagrama de bifurcación del grifo goteante para ciertos valores de los parámetros (simulación numerica).	31
2.4.	Diferentes comportamientos dinámicos observados en el Mapeo Logístico. Diagrama de bifurcación del mapeo, para valores de k en el intervalo $[2.7, 4]$	33
2.5.	Serie de tiempo fractal del mapeo logístico módulo 1 para $k = 1$, consiste de paquetes de picos que contienen más paquetes en una escala menor.	35
2.6.	La fuerza de la correlación medida por el exponente β en las series de tiempo $x_n(k)$ en función de k para el mapeo de la ecuación 2.22. La línea azul (círculos) es el exponente de la densidad espectral β (β_{PS} del análisis espectral de Fourier), mientras que la línea roja (cuadros) $\beta = 2\alpha_{DFA} - 1$ (β_{DFA} del DFA).	36
3.1.	En esta figura se muestra la distribución de probabilidad de los vecinos más cercanos, para ambos casos GDE y GOE , respectivamente	49
3.2.	En esta figura se muestra la $\Delta_3(L)$, para los casos GDE y GOE , respectivamente. Los puntos que siguen la línea recta (resultado teórico de GDE) son los valores correspondientes para la matriz de GDE . Los puntos que siguen el comportamiento logarítmico corresponden a GOE	50
4.1.	Series de tiempo $\delta(n)$ de las fluctuaciones de energía para los subespacios del modelo de capas del núcleo ^{48}Ca (estados $J^\pi = 0^+$) con (a) interacción realista, (b) interacciones aleatorias TBRE. $\delta(n)$ para ensambles de RMT (c) GOE y (d) GDE . Para los casos de RMT la dimensión del espacio es la misma que para $J^\pi = 0^+$. El eje horizontal representa el índice del orden de la energías reescaladas (eje temporal), y el eje vertical representa las fluctuaciones de la energía δ_n . Notamos que las fluctuaciones para GDE son alrededor de 4 veces más grandes que para los cálculos del modelo de capas. El reescalado se llevo a cabo a través un ajuste polinomial de orden 7.	55
4.2.	Series de tiempo integrada $\psi(n)$ (Ecuación 1.17) para las fluctuaciones de la energía en los cálculos del modelo de capas correspondientes del ^{48}Ca (estados $J^\pi = 0^+$) con (a) una interacción realista, (b) con interacciones aleatorias (TBRE), y de ensambles de RMT (c) GOE y (d) GDE . Para los casos de RMT la dimensión del espacio es la misma que para $J^\pi = 0^+$. El eje horizontal representa el índice del orden de la energías reescaladas (eje temporal), y el eje vertical representa las fluctuaciones de la energía integrada ψ_n . Notamos que las fluctuaciones para GDE son alrededor de 6 veces más grandes que para los cálculos del modelo de capas.	57

4.3.	Cálculo del parámetro de autosimilitud α en las fluctuaciones de la energía correspondientes a la serie de tiempo integrada de $\delta(n)$ para el ^{48}Ca (estados $J^\pi = 0^+$) con (a) una interacción realista, (b) con interacciones aleatorias (TBRE), y de ensambles de RMT (c) <i>GOE</i> y (d) <i>GDE</i>	59
4.4.	Ajuste lineal del espectro de potencias para las fluctuaciones espectrales de ^{48}Ca (estados $J^\pi = 0^+$) con (a) interacción realista, (b) interacciones aleatorias (TBRE), y para (c) <i>GOE</i> y (d) <i>GDE</i> . Ver los exponentes de escalamiento para cada caso en la Tabla 4.2.	61
4.5.	Los valores de β calculados a partir del ajuste lineal a la pendiente de la densidad espectral de potencia (círculos azules), para cada una de las δ_n obtenidas en función del valor χ en el hamiltoniano de la ecuación 4.9. Los cuadrados rojos son los valores de β que se obtuvieron usando la relación con el α_{DFA}	63
5.1.	Serie de tiempo, $x(t)$, generada con Mathematica 8 para mostrar los pasos del proceso de <i>sifting</i> que necesita la descomposición de modos empíricos para definir las escalas características de los procesos que componen al fenómeno en estudio.	69
5.2.	Ilustración del proceso de <i>sifting</i> : Envolvente superior e inferior definida a partir de los extremos de la serie de tiempo. Las envolventes deben cubrir todos los datos.	70
5.3.	Procedimiento gráfico para obtener $h^{(1)}$, (a) <i>sifting</i> . Después de un <i>sifting</i> se muestra el resultado en (b). Idealmente $h^{(1)}$ debería ser un IMF, por construcción $h^{(1)}$ debería satisfacer todos los requisitos para ser un IMF. Sin embargo, en la realidad el procedimiento numérico puede generar nuevos extremos. . . .	71
5.4.	En (a) el procedimiento de <i>sifting</i> es llevado a cabo por segunda ocasión, (b) muestra el resultado mejorado después del segundo <i>sifting</i> pero todavía no tiene un perfil simétrico alrededor del cero. Después de $k + 1$ <i>siftings</i> , el resultado se da en (c). Ahora todos los máximos locales son positivos y todos los mínimos locales son negativos, con un perfil simétrico.	72
5.5.	Serie de tiempo $r^1(t)$ generada después de haber restado el primer IMF. Éste todavía contiene información de los componentes con períodos más largos, por lo que se trata como la nueva serie y se somete al mismo proceso de <i>sifting</i> , como se describió anteriormente.	73
5.6.	El resultado de la descomposición de modo empírico por componentes de los datos mostrados en la Fig. 5.1: los componentes de $C^{(1)} - C^{(5)}$. Debe notarse que el último componente, r^5 , no es un IMF, sino la tendencia de nuestra serie de tiempo.	74
5.7.	Espectro promedio de los primeros 8 IMFs y el espectro teórico (línea punteada) para ruidos gaussianos fraccionarios.	76

5.8.	Estadística δ_n para un espectro GOE reescalado con polinomios de orden 5 (abajo, línea roja), 9 (en medio, línea azul) y 13 (arriba, línea verde). Las líneas punteadas muestran la media en cada caso y la línea de color negro sólido muestra la tendencia obtenida a través del EMD. Cada gráfica se desplaza a lo largo del eje vertical para evitar la superposición.	78
5.9.	La estadística sin tendencia δ'_n para un espectro GOE, definida concretamente como $\delta'_n = \delta_n - r^{(m)}$, donde $r^{(m)}$ es la tendencia obtenida a través del EMD. El espectro fue reescalado con polinomios de orden 5 (abajo, en línea roja), 9 (medio, en línea azul) y 13 (parte superior, en línea verde). Las líneas punteadas muestran la media en cada caso. Cada gráfica se desplazó a lo largo del eje vertical para evitar la superposición.	80
5.10.	Valor del exponente β , para el comportamiento que sigue el espectro de potencias promedio de las fluctuaciones como función del grado del polinomio utilizado para reescalar el espectro. Se muestra para dos casos los valores del exponente β : para las fluctuaciones δ_n (superior, en línea roja) y el caso de las fluctuaciones δ'_n , obtenidas al eliminar la tendencia a la anterior (inferior, en línea azul). La línea punteada muestra el resultado teórico para GOE. Las barras de error muestran la desviación estándar como resultado del ensamble.	81
5.11.	Valor de la $\Delta_3(L)$ promedio sobre el ensamble de datos. La parte superior muestra el Δ_3 calculado utilizando polinomios de distinto orden para reescalar los espectros. Las gráficas han sido desplazadas para evitar la superposición. La parte inferior muestra la Δ_3 calculada a partir de los espectros obtenidos sin la tendencia extraída con el EMD, la δ'_n . Las gráficas para diferentes grados del polinomio se muestran en ambos casos. La línea discontinua muestra el resultado teórico para GOE.	83
5.12.	Valor de la varianza del DFA, $\text{Log}(F(\ell))$, promediada sobre el ensamble. La parte superior muestra $\text{Log}(F(\ell))$ calculada utilizando DFA en la δ_n . Estas gráficas han sido desplazadas para evitar la superposición de los datos. La parte inferior muestra los valores de $\text{Log}(F(\ell))$ del DFA para la δ'_n sin tendencia. Gráficas para diferentes grados del polinomio utilizado en el ajuste del reescalado al espectro cuántico se muestran en ambos casos. La línea punteada muestra el resultado teórico para el ensamble GOE.	85
5.13.	Valor del exponente α_{dfa} promedio para el comportamiento de ley de potencia, para los ensambles en el análisis del DFA en función del grado del polinomio utilizado para el reescalado del espectro cuántico. Dos casos se muestran, el exponente α_{dfa} para los valores de las fluctuaciones definidas por la estadística δ_n (rojo) y en el caso de las fluctuaciones δ'_n obtenidas al eliminar la tendencia a la anterior estadística (azul). La línea punteada muestra el resultado teórico para GOE. Las barras de error muestran la desviación estándar calculada a partir de los elementos del ensamble.	86

5.14. Resultados numéricos para la estadística Δ_3 obtenida con un modelo de matrices aleatorias para describir la estadística espectral en situaciones intermedias entre los límites de GDE y GOE, respectivamente. La línea punteada de negro y la línea negra son los límites, mientras que los valores de σ son los casos intermedios.	88
5.15. Resultados superpuestos de las relaciones energía-periodo de los primeros 6 IMFs de la descomposición dada por el EMD, para GOE, GDE y casos intermedios, caracterizados por diferentes valores de σ (ver Tabla. 5.2). Cada punto corresponde a un IMF sobre cada línea. Las pendientes ajustadas η_{emd} a cada caso particular se muestran en la leyenda.	91
6.1. Realización típica de un proceso puntual aleatorio sobre la semi-recta positiva.	96
6.2. Realización típica de un proceso puntual aleatorio sobre la semi-recta positiva, usando la plataforma NetLogo para la realización numérica. El bloque verde representa una pistola hipotética de proyectiles de Poisson, que están representados por los círculos amarillos y son detectados por el bloque rojo. .	97
6.3. (a) Hipotética pistola de proyectiles que se dispara al azar, para generar una corriente de eventos que tienen una distribución de Poisson. Las anticorrelaciones pueden ser introducidas por cualquiera de los tres procesos siguientes: el proceso de excitación inicial (de activación), el proceso de emisión (mecanismo de disparo) o un proceso de retroalimentación derivado de las proyectiles emitidos que controla los otros dos procesos. El flujo se transforma en sub-Poisson (filas inferiores del proceso de Poisson) y series de tiempo anticorrelacionadas (anti-agrupamiento), implementando las técnicas; (b) eliminación de tiempo muerto, (c) destrucción de coincidencias y (d) destrucción.	98
6.4. Hipotética pistola de proyectiles que se dispara al azar para generar un flujo de eventos con una distribución de Poisson (a) por eliminación de tiempo muerto, (b) por destrucción de coincidencias y (c) por destrucción. Cada panel corresponde a un intervalo de tiempo de la realización numérica con Netlogo, donde el bloque verde es la pistola de proyectiles, las bolas amarillas (balas) son los proyectiles y el bloque rojo es el detector. Los bloques azules son también detectores.	101
6.5. $g^2(\tau)$ como función de los tiempos de retraso τ , para medir la tasa de coincidencia entre eventos en cada serie temporal obtenida a través del método de eliminación de tiempo muerto. (a) $g^2(\tau)$ para una serie temporal de eventos obtenida por eliminación de tiempo muerto con τ_d igual a 2, (b) $g^2(\tau)$ de una serie temporal de eventos obtenida por eliminación de tiempo muerto con τ_d igual a 10, y (c) $g^2(\tau)$ para una serie temporal de eventos obtenida por eliminación de tiempo muerto con τ_d igual a 50.	102

6.6.	Espectro de potencias $P(f)$ para (a) serie temporal de eventos obtenida con el método de eliminación de tiempo muerto con τ_d igual a 2, (b) τ_d igual a 10, y (c) τ_d igual a 50.	103
6.7.	Esquema de probabilidad de emisión en el proceso puntual de Poisson. Escalón para las técnicas previamente mencionadas y la función exponencial para la primera propuesta.	104
6.8.	(a) La función de correlación de segundo orden $g^2(\tau)$, como función de los valores del tiempo de retraso τ , utilizada para medir la tasa de coincidencia entre los eventos de las series de tiempo obtenidas a través del método de control por eliminación de tiempo exponencial. Se muestran las gráficas para diferentes valores de γ , que representan el promedio de un ensamble. La notoria diferencia entre las funciones de correlación de segundo orden, se manifiesta en las pendientes con que suben a la unidad. (b) Espectro de potencias $P(f)$ de la serie temporal de eventos obtenida con el método de eliminación de tiempo exponencial con $\gamma=0.0030$	105
6.9.	Hipotética pistola de proyectiles (bloque verde) dispara al azar generando una corriente de eventos (círculos grises). Las rebanadas del material se muestran como líneas punteadas de color negro. La intensidad de excitación se refleja como una degradación que va del color blanco al negro a través del verde claro, siendo el blanco el color que indica una mayor excitación. Los pequeños círculos rojos son los pares nuevos de eventos creados debido a la propiedad del material que hemos incorporado al cálculo. La gráfica del panel inferior es un ejemplo de la variación de excitación del material.	106
6.10.	$g^2(\tau)$ como función de los tiempos de retraso τ , para medir la tasa de coincidencia entre eventos de las series de tiempo, para diferentes valores de Λ_d (ξ_e y ξ_r están fijos).	108
6.11.	Espectro de potencias $P(f)$ para las series de tiempo generadas con el nuevo método. Los espectros corresponden a diferentes valores de Λ_d , que se muestran en la Tabla 6.1.	109
6.12.	La función de correlación de segundo orden $g^2(\tau)$, como función de los tiempos de retraso τ , para medir la tasa de coincidencia entre eventos para cada serie temporal con diferentes valores de ξ_r (Λ_d y ξ_d están fijos como se muestra en la leyenda de la figura).	110
6.13.	Espectro de potencias $P(f)$ para las series de tiempo que corresponden a diferentes valores mostrados en la leyenda de la Fig. 6.12.	111
E.1.	Proceso espontáneo de conversión paramétrica descendente.	137
E.2.	Representación pictórica del Teorema de Bloch-Messiah	140

Índice de tablas

3.1. Agrupando los sistemas cuánticos por sus simetrías y valor de momento angular, se muestra la estructura de la matriz hamiltoniana y su correspondiente ensamble gaussiano.	44
4.1. Parámetros de autosimilitud α_{dfa} , obtenidos utilizando un método lineal de DFA, y los exponentes β de la regresión lineal al espectro de potencias para las fluctuaciones de energía, en los cálculos del modelo de capas de ^{48}Ca con interacciones realistas en diferentes subespacios de J^π . También se muestra la dimensión N de cada subespacio.	58
4.2. Comparación entre los cálculos del modelo de capas con (a) interacciones realistas, (b) las interacciones aleatorias (TBRE) en el subespacio del espectro para $J^\pi = 0^+$ de ^{48}Ca y (c) los cálculos de GOE y GDE. Para cada caso se adjunta la dimensión de la matriz.	60
5.1. El exponente α_{dfa} DFA y el parámetro α_{emd} obtenidos mediante análisis de las fluctuaciones sin tendencia δ'_n y usando la relación de η del EMD, respectivamente. Añadimos en la tabla las referencias GDE y GOE como los límites de referencia.	87
5.2. El exponente β_{ps} y el parámetro β_{emd} obtenidos a partir de los ensambles calculados para diferentes valores de σ . Agregamos en la tabla los valores para GDE y GOE como límites, respectivamente.	89
6.1. El factor de Fano y el exponente β_{ps} para las series de tiempo, para distintos valores del parámetro Λ_d con $\xi_e = 5$ y $\xi_r = 0.3$	107

Resumen

Los datos experimentales son el principal vínculo entre los fenómenos naturales que constituyen el universo que habitamos y los modelos matemáticos que utilizamos para describirlos y explicarlos. De particular importancia es entender el comportamiento que siguen las fluctuaciones presentes en los datos, ya que ello nos permite dar un indicio del estado dinámico que rige al sistema y la posible tendencia. El estudio de las fluctuaciones en los modelos presentados a lo largo de la tesis se hace a través del enfoque tradicional de series de tiempo, analizando la fractalidad temporal con el objetivo de revelar patrones.

Estudiamos las fluctuaciones presentes en la dinámica de sistemas clásicos y cuánticos que siguen un comportamiento regular pero que pueden cambiar a un régimen caótico o aleatorio a través de un parámetro ajustable, se pone especial énfasis en el estado donde ocurre la transición, estado que carece de una escala característica. Usualmente se usa el concepto de criticalidad para explicar los fenómenos libres de escala, en el escrito presentamos ciertos modelos en ambos regímenes con el objetivo de entender en qué medida esta idea se puede aplicar para establecer una conexión usando dicha simetría. En el régimen clásico es un hecho notable que sistemas que presentan una transición del orden al caos muestran propiedades comunes, independientemente de su forma funcional exacta. En el escrito nos enfocamos en el mapeo logístico modulo 1, para el cual encontramos un comportamiento del tipo $1/f$ en el análisis espectral de Fourier calculado directamente a las series de tiempo que corresponden al estado donde ocurre la transición en su comportamiento dinámico.

En lo que respecta al régimen cuántico analizamos el caos cuántico principalmente en sistemas de muchos cuerpos, mediante dos enfoques diferentes. El primero parte de analizar las fluctuaciones presentes en los sistemas con aquellas obtenidas por la teoría de matrices aleatorias (RMT), y el segundo se basa en el estudio del espectro de potencias calculado directamente a las fluctuaciones espectrales de los sistemas. Ambos enfoques fueron investigados en el ensamble ortogonal gaussiano (GOE) y el ensamble diagonal gaussiano (GDE) de la teoría de matrices aleatorias (RMT), límites conocidos para los sistemas caóticos e integrables, respectivamente. El primer estudio en el régimen cuántico fue caracterizar el comportamiento de las fluctuaciones espectrales del ^{48}Ca para diferentes estados J^π obtenidos con el modelo de capas usando interacciones realistas (KB3). En particular, para el subespacio $J^\pi = 0^+$ también se analizó un ensamble de 25 espectros con interacciones aleatorias (TBRE). Se mostró que las fluctuaciones espectrales exhiben una invariancia de escala del tipo ley de potencias $1/f$, no así para las fluctuaciones espectrales obtenidas con GDE

cuya ley de potencia es del tipo $1/f^2$. Los modelos de capas utilizados con interacciones realistas y aleatorias son muy complicados e involucran muchos grados de libertad. Para estudiar un sistema cuántico que muestre una transición entre diferentes regímenes de forma análoga al mapeo logístico modulo 1 planteamos un hamiltoniano esquemático (versión simplificada del modelo de capas) del ^{48}Ca . El hamiltoniano tiene esencialmente dos términos acoplados a través de un parámetro ajustable que regula la competencia entre ambos. El parámetro de control permite una transición entre los dos regímenes extremos que representan sistemas integrables y corresponden a una ley de potencia $1/f^2$ en el análisis espectral de Fourier, mientras que para un valor particular del parámetro el sistema genera fluctuaciones invariantes de escala asociadas al tipo $1/f$ en el espectro de potencias.

Uno de los pasos más importantes para estudiar las fluctuaciones estadísticas de los espectros cuánticos es el reescalado, que consiste en dividir el espectro en dos partes, una global y otra fluctuante. En este trabajo se demuestra que las medidas habituales de caos cuántico pueden depender fuertemente del procedimiento de reescalado, es decir, una separación incorrecta puede llevar a conclusiones erróneas sobre la caoticidad del sistema. Con la finalidad de disminuir esta dependencia removemos la tendencia global que permanece después de un reescalado incorrecto a través del uso del método de descomposición de modos empíricos (EMD) desarrollado para el estudio de series de tiempo no estacionarias y que surgen de procesos no lineales. Por otra parte se muestra como el EMD permite obtener una nueva cuantificación de las propiedades de invariancia de escala en las fluctuaciones de sistemas cuánticos caóticos representados por RMT.

Por último se plantea la construcción de un modelo cuántico que permita construir series de tiempo de eventos que corresponden a mediciones de fotones y se discute una simulación numérica que permite construir series de tiempo que representan luz cuántica apropiadamente. Simultáneamente la simulación permitió abordar la interrogante de cómo ciertos sistemas introducen correlaciones o anticorrelaciones entre sus variables para optimizar su estado dinámico. Finalmente se discuten ambos modelos.

The main link between the natural phenomena that constitute the universe we inhabit and the mathematical models we use to describe and explain are the experimental data. Of particular importance is the understanding of the fluctuations which are present in the data, because give an indication of the dominant dynamic state governing the system and the possible trend. The analysis of the fluctuations in the models presented throughout the thesis is done through the traditional approach of time series, using the temporal fractality in order to reveal patterns.

We study the fluctuations in classical and quantum systems that follow a regular behavior but can switch to a chaotic or random regime through an adjustable parameter, special emphasis is placed in the state where the transition occurs, a state which lacks a characteristic scale. A recently presented hypothesis to explain the scale-free phenomena is criticality, a notion introduced by physicists in the study of phase transitions in materials where the systems spontaneously organize themselves into an unstable state. With this in mind, the models discussed along the work could help us to understand to what extent this idea can be applied in our cases. In classical mechanics is a remarkable fact that systems with a transition from order to chaos show common properties, regardless of their exact functional form. Important aspects of chaotic behavior appears in low dimensional systems as is illustrated by the logistic map module 1 for which we found a $1/f$ power law type for the Fourier spectral analysis for the nonperiodic correlated time series in the state where the transition occurs.

Regarding to the quantum regime we define the concept of quantum chaos detailing the existing controversies on the subject. We focus in many body quantum systems to analyze it through two different approaches. The first is based on the relationship between fluctuations of quantum systems with those of random matrix theory (RMT) and the properties of classical analogues. The second approach uses the power law behavior of the power spectrum associated directly to the calculus of the spectral fluctuations in order to discern between quantum chaotic systems and those who are integrable. Both approaches were investigated in the Gaussian orthogonal ensemble (GOE) and Gaussian diagonal ensemble (GDE) of random matrix theory (RMT), which represent chaotic and integrable systems, respectively.

The first study in the quantum regime was to characterize the spectral fluctuations of ^{48}Ca for different states J^π obtained using the shell model with realistic interactions (KB3). In particular, for the subspace $J^\pi = 0^+$ we also analyzed an ensemble of 25 spectra with random interactions (TBRE). It was shown that fluctuations in the spectrum of ^{48}Ca exhibit nontrivial scale invariance property of type $1/f$. This scaling behavior was observed in the spectral fluctuations in the TBRE sets as well as realistic calculations. $1/f$ power law was also observed in the case of GOE while in the case of GDE the observed behavior was of the type $1/f^2$. Shell model calculations with realistic and random interactions used to perform the analysis of the spectral fluctuations are very complicated and involve many degrees of freedom. We proposed a schematic hamiltonian (simplified version of the shell model) of ^{48}Ca in order to study different regimens as the logistic map module 1. The Hamiltonian has essentially two terms coupled through an adjustable parameter that regulates competition between the terms. The control parameter allows a transition between the two extreme

regimes which both represent integrable systems and correspond to a power law $1/f^2$ in the power spectrum, while for a particular value of the adjustable parameter the system has an excitation spectrum corresponding to a state whose fluctuations exhibit $1/f$ behavior in the power spectrum.

One of the most important procedures to study the statistical fluctuations of quantum spectra is the unfolding which consists of remove the global behavior in the energy spectrum in order to analyze the fluctuating part which corresponds to the chaotic dynamic. We show that the usual measures of quantum chaos can depend strongly in the unfolding procedure, i.e., incorrect separation of the fluctuating part from the global can lead to erroneous conclusions about the chaoticity of the system. In order to reduce this dependence we remove the trend which remains after an incorrect unfolding using the method Empirical Mode Decomposition (EMD) developed for the study of nonstationary and nonlinear time series. Also we show how the EMD allows to obtain a new quantification of the properties of scale invariance in fluctuations of chaotic quantum systems represented by RMT.

Finally we propose the construction of a quantum model with the aim of obtaining time series which represent photons. We addressed the idea from a theoretical point of view and through a numerical simulation. Much of the motivation for building this model came from the study of the dripping faucet, a system which displays periodic and chaotic behavior depending on the value of certain parameters. On the other hand, the simulation allowed us to address the question of how certain systems introduce correlations (anticorrelations) in order to optimize their dynamic state. Finally, we present the progress of both models.

Introducción

La construcción de la mecánica clásica en sus inicios asociaba las leyes de Newton referidas a la naturaleza a una descripción determinista y reversible en el tiempo. Pero posteriormente, al surgir la teoría del caos, su noción se generalizó e introdujo en ella conceptos de la teoría de la probabilidad. El caos clásico posee una definición precisa y sus propiedades son perfectamente conocidas: siempre es consecuencia de inestabilidades. Es decir, en sistemas con dinámica caótica una pequeña perturbación se amplifica, trayectorias inicialmente cercanas se separan y en general la inestabilidad introduce aspectos esenciales nuevos.

El caos cuántico [1] opera de manera diferente al clásico ya que se define a partir de una teoría unitaria y probabilística que no es sensible a las condiciones iniciales y, por lo tanto, no se puede definir con el estudio de las inestabilidades del sistema. La teoría cuántica, para el caso de sistemas ligados, produce un conjunto de niveles de energía discretos, que permite que el conjunto contenga más información y características específicas, comparado con el intervalo continuo de posibles energías en el régimen clásico. A pesar de lo anterior se carece de una definición clara del caos cuántico, aunque se ha hecho intentos de establecer una definición precisa, que se han basado principalmente en dos tipos de estudio: a) el caos cuántico en sistemas sencillos (generalmente de un sólo cuerpo), cuyos cimientos teóricos se fundamentan en la teoría semiclásica; y b) el de sistemas de muchos cuerpos. En este último no suele existir comparación con la dinámica clásica, debido al comportamiento de los componentes del sistema en donde el límite clásico no está bien definido. En este caso su estudio se fundamenta en la comparación de las fluctuaciones espectrales con la teoría de matrices aleatorias (RMT).

Al respecto, Wigner [2] introdujo una propuesta novedosa cuya idea consiste en que al no conocerse por completo la interacción entre los componentes del sistema, se puede sustituir por una interacción aleatoria en el hamiltoniano, respetando, sin embargo, las simetrías que debe obedecer el sistema. De este análisis se deduce que las correlaciones en el ensamble gaussiano ortogonal (GOE) de la teoría de matrices aleatorias se igualan muy estrechamente a las correlaciones empíricas entre los niveles de energía del sistema, que son caóticos en su límite clásico, aunque este límite todavía no ha sido explicado satisfactoriamente. El caos cuántico se basa principalmente en el análisis del espectro de energía, el cual cambia de un sistema a otro, aunque ciertas propiedades son bastante generales y algunas parecieran estar directamente correlacionadas con la naturaleza del caos en el sistema clásico correspondiente.

El modo más habitual de discernir entre un sistema cuántico integrable o regular y un

sistema cuántico caótico, consiste en analizar las fluctuaciones del espectro de energía y compararlas con las correspondientes a la teoría de matrices aleatorias (RMT). Esta afirmación se basa en la conjetura de Bohigas-Giannoni-Schmit [3], que relaciona las propiedades de las fluctuaciones cuánticas con la dinámica caótica de su análogo clásico. A pesar de la existencia de algunos contra ejemplos, este método se ha mostrado muy eficaz, además de que ha devenido en paradigma, por lo que la conjetura se aplica tanto a sistemas de un solo cuerpo como a los de muchos cuerpos. De hecho, es interesante encontrar que sistemas tan dispares como un billar cuántico y un núcleo atómico pueden poseer propiedades similares.

Otra posible alternativa para comprobar si un sistema cuántico es caótico o no, fue propuesta por A. Relaño, J. M. G. Gómez, R. A. Molina, J. Retamosa, y E. Faleiro [4], quienes han demostrado que las fluctuaciones en el espectro de energía de un sistema cuántico puede ser formalmente consideradas como una serie de tiempo discreta, y que el comportamiento del espectro de potencias de tal señal obedece una ley de potencias de la forma $1/f$, mientras que para sistemas cuánticos no caóticos el espectro de potencias muestra otro tipo de ley. Señales que obedecen a una ley de potencias son invariantes de escala, en tanto que los procesos en la naturaleza que muestran transiciones de fase, tienen asociado un comportamiento de ley de potencia en las variables características, alrededor del punto crítico.

La presente tesis tiene esencialmente dos objetivos. El primero está dirigido al estudio de sistemas tanto clásicos como cuánticos, que muestran una transición en su comportamiento dinámico, a través de un parámetro ajustable que permite pasar suavemente de un régimen integrable a uno caótico. El estudio se lleva a cabo mediante el análisis de las fluctuaciones en los diferentes estados del sistema. Gran parte del cuerpo de la tesis se centra en el desarrollo y la aplicación de técnicas alternativas a las de Fourier para el análisis de las fluctuaciones, desde el enfoque de series de tiempo. Se plantea una conexión del caos clásico con el cuántico mediante la propiedad de invariancia de escala. Este concepto es común a las dos teorías, ya que puede caracterizar al caos clásico y a las fluctuaciones cuánticas de sistemas caóticos.

El segundo objetivo es el estudio detallado de los modelos clásicos y cuánticos que poseen esta invariancia. Se utiliza una metodología apropiada para tratar las series de tiempo no estacionarias y no lineales, a través de una novedosa técnica introducida recientemente en la literatura. Esta técnica permite dar un paso crucial para poder realizar un adecuado análisis de las fluctuaciones de sistemas cuánticos y proponer una nueva cuantificación de las propiedades de invariancia de escala en las fluctuaciones espectrales obtenidas de ensambles, dentro de la teoría de matrices aleatorias.

En el capítulo 1 introducimos los conceptos de invariancia de escala y fractalidad en las series de tiempo, que son parte fundamental para el entendimiento de los resultados a lo largo de la tesis. Se esbozan también las técnicas de análisis de series de tiempo necesarias para comprender los cálculos posteriores, para un análisis más detallado de cada una de las técnicas mencionadas en el capítulo y otras complementarias ver la referencia [5]. Presentamos un breve resumen de la formulación y la fenomenología del caos en la mecánica clásica, en el capítulo 2. Se pone énfasis en sistemas discretos unidimensionales que, a pesar de su sencillez, muestran comportamientos no regulares y ejemplifican las propiedades básicas del

caos clásico. Se introduce el mapeo logístico modulo 1 para estudiar las fluctuaciones presentes en el estado crítico, en donde el sistema muestra una transición en su comportamiento dinámico, un análisis detallado puede verse en la referencia [6]. Por otra lado, también se realiza un análisis exhaustivo sobre el mapeo logístico reportado en la tesis de forma breve y extendido en la referencia [7].

Los conceptos de caos cuántico y matrices aleatorias que vamos a utilizar en el resto del trabajo se abordan en el capítulo 3. Un paso importante para el estudio de las fluctuaciones en espectros cuánticos es la eliminación del comportamiento global en la densidad de los niveles de energía particular de cada sistema. Este proceso es llamado reescalado (traducción de la palabra inglesa *unfolding*). En el capítulo 4, estudiamos en detalle este procedimiento en los resultados relacionados con la estadística del espectro nuclear en la capa pf , asociada al núcleo ^{48}Ca y desarrollamos un análisis completo sobre la invariancia de escala de las fluctuaciones espectrales reportadas en el escrito y tratadas en la referencia [8]. Usando como base el modelo de capas del núcleo atómico, introducimos un modelo que incorpora una interacción esquemática tipo cuadrupolo-cuadrupolo, para estudiar la estadística de los niveles de energía como función de la intensidad de la interacción. Ello nos permite transitar desde un régimen integrable a uno caótico y estudiar así las fluctuaciones cuánticas asociadas. En particular, analizamos el sistema para el valor del parámetro crítico para el que las correlaciones del sistema se maximizan, este trabajo fue reportado en la literatura [6] junto con el análisis del mapeo logístico modulo 1 analizado en el capítulo 2. Por otra parte, en la referencia [9] se presenta un análisis sobre caos cuántico en otros modelos nucleares. En el capítulo 5 se introduce un nuevo método para el estudio de series de tiempo no lineales y no estacionarias. Se demuestra que el conocimiento de una función suave de la densidad media de los niveles de energía en el caso cuántico, es indispensable para la caracterización del espectro como caótico o regular y de este modo hacemos notar las limitaciones de los métodos estándar de reescalado. El trabajo elaborado en gran parte de este capítulo se encuentra reportado en la referencia [10]. Finalmente, se presenta una nueva forma de cuantificación del caos cuántico, mediante el uso de este nuevo enfoque de estudio para las series de tiempo, y se enfatizan las ventajas que se logran con tal método. Con respecto al último análisis se encuentra un trabajo en proceso de refereo en la revista *Physical Review E* [11]. El capítulo 6 está dedicado a la construcción de un modelo cuántico para la creación de series de tiempo de fotones a partir de un modelo no lineal en óptica cuántica, usando dos enfoques diferentes. El primero es un análisis teórico que se encuentra en proceso de desarrollo y para el cual se incluye un breve resumen de los conceptos teóricos necesarios para el desarrollo del modelo mediante el modelo conocido como conversión paramétrica descendente. El segundo enfoque es a través de una simulación numérica para la generación de series de tiempo que representen apropiadamente luz cuántica, se discute ampliamente la interrogante de como introducir correlaciones o anticorrelaciones de largo alcance. Por último, en el capítulo 7 exponemos las conclusiones fundamentales del trabajo.

Capítulo 1

Invariancia de Escala en Series de tiempo

Una de las más prominentes propiedades de la naturaleza es la gran diversidad de tamaños o escalas de longitud en la estructura de los sistemas físicos. En general, los sucesos que se diferencian por una gran disparidad de escala tienen poca influencia mutua, lo que parece indicar que no hay nada en común entre ellos. Por lo tanto, los fenómenos asociados con cada escala pueden usualmente considerarse independientes. No obstante lo anterior, existe una clase de fenómenos en cuya explicación concurren con igual importancia sucesos de muchas escalas de longitud. Como ejemplo de ello tenemos el comportamiento del agua en el punto crítico, donde desaparece la distinción entre líquido y gas. Cerca de ese punto el agua genera fluctuaciones de su densidad en todas las escalas posibles, alcanzando las escalas de mayor tamaño en el punto crítico. De hecho, para fines prácticos las fluctuaciones pueden considerarse infinitas, sin que disminuyan las fluctuaciones menores. Así, las teorías que se utilizan para describir el agua en la proximidad de un punto crítico deben considerar la totalidad del espectro de escalas. Tal es el caso del Grupo de Renormalización de Wilson [12].

El trabajo realizado en gran parte de la tesis que presentamos consiste en estudiar los sistemas físicos que muestran una transición en su comportamiento dinámico. Nos enfocaremos en describir las fluctuaciones que caracterizan al estado crítico. La intención es hacer un breve repaso de las técnicas habituales mediante el análisis de series de tiempo, conceptos que se utilizarán en los capítulos posteriores. Se pretende que el lector disponga de la información suficiente para comprender y apreciar todos los resultados, así como su interpretación. Se evitan algunos de los detalles matemáticos que dificultan la exposición. Quien esté interesado en ellos puede consultar la bibliografía que se incluye al final. Como ya se ha mencionado, uno de los objetivos fundamentales de esta tesis es comprender bajo qué condiciones un sistema se auto-organiza y tiende a un estado crítico, así como definir una serie de características o propiedades generales típicas de dicho estado. Para este objetivo es de suma importancia el estudio del llamado ruido $1/f$, que ha sido identificado como indicador del estado del sistema. El espectro de potencias de una serie de tiempo refleja propiedades inherentes a éste, tales como la autosimilitud (invariancia de escala). Es, por ello, necesario un análisis sistemático y preciso de cómo las series de tiempo reflejan la dinámica cambiante y las características que dan lugar a señales cuyas fluctuaciones siguen una ley de potencia.

1.1. Series de tiempo

Una serie temporal ¹ es una secuencia de observaciones que se ordenan en función de los resultados obtenidos en el tiempo. En consecuencia, consideremos la cantidad x de cierto sistema como una variable que puede representar cualquier observable, desde la temperatura máxima o mínima diaria, la intensidad de sonido, el número de especies en un ecosistema, las tasas de interés anual, la velocidad horaria del viento, el latido del corazón, etcétera. La serie de tiempo se obtiene midiendo x a tiempos discretos t_1, t_2, \dots, t_N ², que da una serie de datos $\{t_i, x(t_i)\}$, $i = 1, \dots, N$. Esta serie de tiempo, también llamada señal o ruido, puede ser visualizada mediante una gráfica de $x(t)$ como función de t . La propiedad característica de una serie de tiempo es el hecho de que los datos no necesariamente se generan de forma independiente. Su dispersión varía en el tiempo y a menudo se rigen por una tendencia, además de que algunas veces existen componentes cíclicas.

Hay, por supuesto, muchas razones para registrar y analizar los datos de una serie de tiempo. Entre ellas, el deseo de obtener una mejor comprensión del mecanismo que genera los datos, la predicción de valores futuros o el control óptimo de un sistema. Un ejemplo de ello es el registro de los latidos cardíacos en función del tiempo, que es una práctica habitual para diagnosticar enfermedades del corazón. Durante los últimos años se ha demostrado también que el análisis matemático de la señal resultante puede ser de gran utilidad. Por ejemplo, el latido de un corazón sano tiene propiedades estadísticas diferentes que las procedentes de un corazón enfermo [13]. Es importante mencionar que existe una literatura bastante amplia sobre series de tiempo, que se centra en las propiedades de autosimilitud y en las autocorrelaciones que muestran las series temporales. En otras palabras, se analiza las propiedades fractales presentes. Encontramos también metodologías para estudiar la propiedad mencionada, pero en la mayoría de los casos se imponen condiciones y limitantes para poder llevar a cabo dicho estudio. En respuesta a ello, presentamos en el capítulo 5 una nueva técnica para el análisis de series de tiempo no estacionarias y no lineales, sin imponer restricciones de esta índole.

1.2. Leyes de Potencias

La autosimilitud es una de las propiedades más ubicuas dentro de la teoría del caos. Este fenómeno consiste en la invariancia frente a un cambio de escala, ya que los sistemas caó-

¹El nombre "serie de tiempo" no es del todo apropiado para denotar un conjunto de datos registrados de manera ordenada en función del tiempo, pues en particular el término serie se utiliza en matemáticas para denotar a una suma finita o infinita de valores para una variable. Quizá una terminología más apropiada para referirse a nuestros conjuntos de datos podría ser el de *sucesiones cronológicas*. Sin embargo, aquí se continuará utilizando el término -series de tiempo-, debido simplemente a que ésta es la terminología más usual y conocida.

²En ocasiones, los tiempos t_1, t_2, \dots, t_N se consideran como igualmente espaciados, lo que correspondería a una restricción importante, ya que muchos fenómenos en la naturaleza no muestran ese patrón de ocurrencia. En otros casos, sin embargo, se toman intervalos entre sucesos, lo que no sufre de esta limitación

ticos presentan un comportamiento similar a escalas grandes y pequeñas: el grado y tipo de desorden es el mismo. Expresado de otra manera: la autosimilitud significa que un objeto esta compuesto de unidades, sub-unidades y sub-sub-unidades en múltiples niveles, que estadísticamente se parecen a la estructura del objeto completo. Podemos expresar la autosimilitud mediante leyes de potencias. Consideremos la siguiente función:

$$g(x) = Ax^\alpha, \quad (1.1)$$

donde A y α son reales y constantes y x es una variable en los reales. Por ejemplo, $g(x)$ podría representar la distribución $D(s)$ del tamaño s de eventos en un experimento o el espectro de potencias $P(f)$ de una señal como función de su frecuencia f . Si tomamos el logaritmo de ambos lados de la ecuación anterior, se obtiene:

$$\log g(x) = \log A + \alpha \log x. \quad (1.2)$$

En una gráfica con escala logarítmica este tipo de funciones corresponden a una línea recta con pendiente α , la cual intercepta al eje ordenado en $\log A$. Las leyes de potencias son interesantes porque son invariantes de escala. Podemos demostrar este hecho si cambiamos x por una nueva variable x' definida como $x = ax'$, donde a es alguna constante numérica. Al reemplazarla en la ecuación anterior uno obtiene:

$$g(ax') = A(ax')^\alpha = (Aa^\alpha)x'^\alpha. \quad (1.3)$$

La forma general de la nueva ecuación es entonces la misma que la ecuación 1.1, i.e., una ley de potencia con exponente α , solamente que la constante de proporcionalidad ha cambiado de A a Aa^α . Por lo tanto, la función cambia con respecto al valor de a pero su forma general permanece igual. Esto es, en parte, porque ningún valor particular de $g(x)$ ha sido escogido, contrario a la exponencial e^{-bx} ó a la distribución Gaussiana $e^{-(x-x_0)^2}$, las cuales están localizadas cerca de $x = 0$ y $x = x_0$, respectivamente (donde b y x_0 son constantes positivas arbitrarias).

La ley de potencia $g(x)$ decrece lentamente desde infinito a cero cuando x va de cero a infinito. Todas estas características le dan la propiedad de poder ser observada por igual, sin importar la escala que haya sido escogida. Esto es lo que significa la propiedad de invariancia de escala en una relación de ley de potencia. En adelante estaremos más interesados en el exponente α que en la constante A , por lo que frecuentemente escribiremos a $g(x)$ como

$$g(x) \propto x^\alpha \quad (1.4)$$

donde \propto significa “ es proporcional a”.

Es importante mencionar que una de las primeras leyes de escalamiento conocidas en la física se dio en la mecánica de los cuerpos celestes y probablemente una de las más famosas es la Ley de la Gravitación que obtuvo Newton. En el caso particular de la física, la autosimilaridad se presenta en un rango finito de escalas. Más adelante se dará un ejemplo de estas leyes de potencias en el comportamiento de sistemas que se encuentran cerca de una transición de fase y que involucran exponentes críticos.

1.3. Fractales en el espacio

En uno de sus libros, Mandelbrot se pregunta "¿qué tan larga es la costa de Gran Bretaña? [14]. La manera intuitiva de responder a esa interrogante consiste en tomar un mapa de Gran Bretaña, una vara de medición como punto de referencia de una longitud dada d ; y ver cuántas veces, $n(d)$, puede ajustarse la vara alrededor del perímetro. La estimación de la longitud $L(d)$ es entonces $d \times n(d)$. Si repetimos este procedimiento con una vara más pequeña se espera que la longitud aumente un poco; y finalmente cuando la vara sea lo suficientemente pequeña converja en un valor fijo: la longitud real de la costa. El criterio para elegir este método, que en realidad sólo es la triangulación ordinaria, funciona bien con formas regulares o euclidianas: un polígono o un círculo. Sin embargo, como Mandelbrot hizo notar, la triangulación no produce los resultados esperados cuando se aplica al cálculo de la longitud de las costas y fronteras terrestres. A medida que reducimos el tamaño d de la norma, hay que tomar en cuenta más detalles de la orilla del mar o de la frontera, por lo que $n(d)$ aumenta rápidamente y lo hace tan rápido que la longitud $L(d) = d \times n(d)$ sigue aumentando a medida que disminuye d . Además, con el fin de hacer una mejor estimación se debe utilizar un mapa de mayor resolución, donde aparecen bahías que no existían, sub-bahías, penínsulas y sub-penínsulas. Al tener en cuenta estas nuevas características se incrementará aún más la longitud $L(d)$. En lugar de utilizar triangulación se puede confiar en un método similar y equivalente llamado Conteo de cajas [15], el cual es más práctico y sencillo de implementar en una computadora. Se superpone una cuadrícula de tamaño D en la curva que se investiga y se cuenta el número mínimo $N(d)$ de cuadrados necesarios para cubrirla. Entonces, la longitud de la curva $L(d)$ es aproximada por $d \times N(d)$. Sin embargo, conforme d se hace más pequeño, rápidamente ésto es tomado en cuenta en la nueva formulación, por lo que la longitud medida converge hacia el verdadero valor de L . La aplicación de este método a la costa de Gran Bretaña da un resultado diferente y convergente. Esto sugiere la parametrización en forma de Ley de Potencia para $L(d)$ (Mandelbrot, 1977, 1983):

$$L(d) \propto d^{1-D} \quad (1.5)$$

donde D es un parámetro real para ser ajustado mediante los datos. Mandelbrot (1977, 1983) definió D como la dimensionalidad (o dimensión de la caja cuando se utiliza el método de conteo por cajas) de la curva. En el caso particular de la costa de la Gran Bretaña, D es un número no entero ($D \simeq 1.25$), lo cual indica que la curva no es Euclidea. Mandelbrot acuñó el término fractal para designar a objetos con un número fraccional de dimensiones. De este análisis se sigue que Gran Bretaña posee una costa con una longitud enorme, que se describe mejor como casi infinita: $L(d) \propto d^{-0.25}$ tiende a infinito cuando d tiende a cero. Lo anterior se debe al hecho de que no importa lo cerca que la miremos, la costa posee estructuras tales como bahías, penínsulas, sub-bahías y sub-penínsulas, que constantemente se añaden a su longitud. También significa que no importa qué escala usemos, seguimos viendo más o menos lo mismo: las bahías y penínsulas con sub-bahías y sub-penínsulas, y así sucesivamente. La costa es por lo tanto, efectivamente invariante de escala. Por supuesto,

esta invariancia de escala tiene límites: no hay características en la costa más grandes que la propia Gran Bretaña, y no hay sub-bahías más pequeñas que un átomo.

El concepto de fractal se puede aplicar no sólo a las formas geométricas irregulares que carecen de una sola escala característica de longitud, sino también a los procesos complejos que carecen de una sola escala temporal. Los procesos invariantes de escala generan fluctuaciones irregulares en múltiples escalas de tiempo, de forma análoga a los objetos fractales que tienen una estructura irregular en diferentes escalas de longitud.

1.4. Fractales en el tiempo: Ruido $1/f$

En esta sección introduciremos el significado de Ruido $1/f$, el cual es considerado como una de las huellas o señales de los sistemas complejos. Veremos cómo difiere del ruido blanco y del café (ruido browniano). Para ello usaremos el método de análisis espectral y el DFA (Detrended Fluctuation Analysis), que trataremos en secciones posteriores. La Fig. 1.1 muestra tres tipos de señales $x(t)$ los cuales serán de interés para nosotros: Ruido $1/f$, ruido blanco y ruido café.

La Fig. 1.1 b) muestra lo que usualmente es llamado ruido blanco: una superposición aleatoria de amplitudes sobre un rango extenso de frecuencias. Puede ser interpretada como una señal completamente no correlacionada y estrictamente estacionaria: el valor de $x(t)$ en algún instante de tiempo t es totalmente independiente de su valor en cualquier otro instante. Un ejemplo es el resultado de lanzar una moneda N veces consecutivas registrando los resultados en cada evento. En nuestro caso la figura muestra un ejemplo de ruido blanco que se obtuvo al ordenar aleatoriamente una señal de tipo $1/f$. La Fig. 1.1 c) representa ruido café (Brownian noise), también llamado así porque asemeja el movimiento Browniano de una partícula en una dimensión: $x(t)$ es entonces la posición de la partícula como función del tiempo. El movimiento Browniano de una partícula en un fluido es originado por el impacto aleatorio de las moléculas del líquido sobre la partícula inmersa, el cual le da un desplazamiento errático. Este tipo de señal se puede reproducir por lo que usualmente es llamado caminata aleatoria, es decir, la posición x de la partícula en algún tiempo $t + 1$ se obtiene sumando a la posición previa (al tiempo t) un número aleatorio (usualmente se extrae usando una distribución Gaussiana o una distribución uniforme) que representa el efecto térmico del fluido sobre la partícula. La señal obtenida está por lo tanto fuertemente correlacionada en el tiempo de tal manera que la posición de la partícula depende fuertemente de donde estuvo en los pasos anteriores.

La serie de tiempo que se muestra en la Fig. 1.1 a) es diferente de las dos primeras, pero comparte algunas de sus características. Tiene tendencia hacia variaciones grandes como el movimiento Browniano pero también exhibe frecuencias grandes, como el ruido blanco. Este tipo de señal parece estar entre las dos anteriores y es llamado ruido $1/f$. Es este el tipo de señal que nos interesa enfatizar en el presente escrito, debido a que exhiben una marcada tendencia que puede ser interpretada como la presencia de memoria, una característica in-

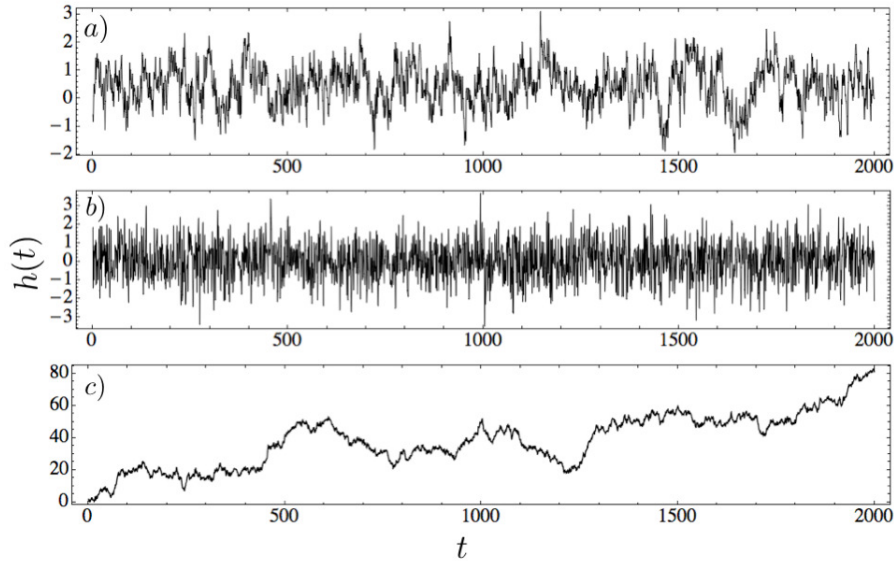


Figura 1.1: Diferentes señales de $x(t)$. a) Ruido $1/f$. b) Ruido blanco obtenido de ordenar aleatoriamente la señal $1/f$. c) Ruido Browniano obtenido al sumar los incrementos del ruido blanco.

interesante en los sistemas físicos, biológicos, económicos, etcétera. Como los fractales en el espacio fase, el ruido $1/f$ puede ser generado matemáticamente de muchas formas, pero a pesar de estos algoritmos no se entiende con claridad como surge en la naturaleza [16].

En las siguientes secciones describiremos los métodos matemáticos con los cuales podemos distinguir el ruido $1/f$ del ruido aleatorio o Browniano. El interés por las señales con memoria se debe a que este tipo de señal muestra invariancia de escala en la función de autocorrelación, como lo mostraremos más adelante. Un comportamiento $1/f$ implica entonces correlaciones entre los diferentes elementos, que se extiende en todas las escalas.

1.4.1. Espectro de Potencias de las Señales

En lugar de describir las propiedades estadísticas de una señal en el espacio real, se podría preguntar acerca de sus propiedades en el espacio de Fourier. La transformada de Fourier establece una correspondencia uno-a-uno entre la señal en ciertos momentos (dominio del tiempo) y la forma en que ciertas frecuencias contribuyen a la señal (ver apéndice A.1 para el tratamiento discreto de la transformada de Fourier). También se puede estudiar la forma en que las fases de las oscilaciones están relacionadas con otras fases de éstas (dominio de la frecuencia). Una serie de tiempo (por ejemplo, cualquiera de las mostradas en la figura 1.1) puede descomponerse en varias señales simples. Cada una de ellas caracterizada por un periodo T o por una frecuencia f . La expresión matemática de esta descomposición es

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(f) e^{ift} df, \quad (1.6)$$

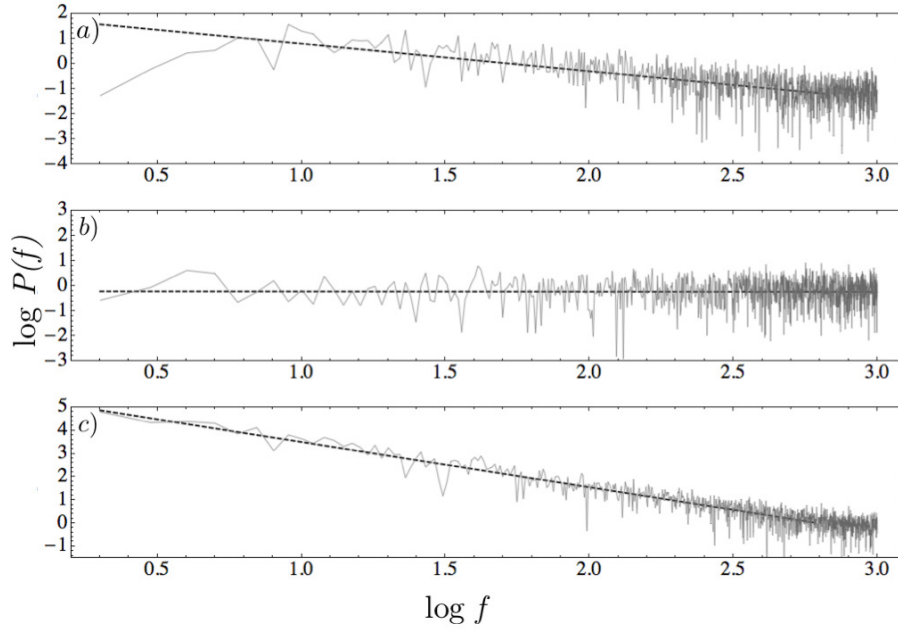


Figura 1.2: Espectro de potencia para diferentes señales $x(t)$. a) Ruido $1/f$, nuestro ajuste a la pendiente es $\beta = 1.01$, b) Ruido blanco cuyo exponente corresponde a $\beta = 0.004$ y c) Ruido Browniano cuyo exponente corresponde a $\beta = 1.95$.

$$\hat{X}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-ift} dt, \quad (1.7)$$

donde $X(t)$ es la señal original y $\hat{X}(f)$ la señal transformada. En general, la función $\hat{X}(f)$ es compleja, de modo que no resulta de gran utilidad a la hora de describir una serie de tiempo real. Por ello en la literatura se utiliza el *espectro de potencias*, que se define como el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier en el espacio continuo (que también se puede definir para el caso discreto)

$$P(f) = |\hat{X}(f)|^2, \quad (1.8)$$

La ecuación anterior define la contribución de cada frecuencia f a la señal $X(t)$, de forma que es una buena medida del peso que tiene cada señal de frecuencia f en la señal original. El espectro de potencias es el equivalente matemático del análisis del espectrómetro, el cual descompone un haz de luz en sus componentes para evaluar la importancia relativa de cada una de las frecuencias. Presentamos en la Fig. 1.2 el espectro de potencia de las señales de la Fig. 1.1. Por analogía con la luz blanca, la cual es una superposición homogénea de diferentes longitud de onda, el ruido blanco debe tener un espectro de potencias $P(f)$ que refleje de igual manera la contribución de todas las frecuencias f , ver figura 1.2 b). El concepto de autosimilitud presentado anteriormente puede trasladarse fácilmente a la transformada de Fourier de la señal. Se dice que la señal es autosimilar si $P(f)$ puede expresarse como:

$$P(f) \propto 1/f^\beta \quad (1.9)$$

donde β es el valor dado por el ajuste lineal al espectro de potencias. En nuestro ejemplo $\beta=0.004$ para el ruido blanco, consistente con $P(f) \propto f^0$ que corresponde al ruido blanco (respecto a la analogía de la luz blanca, el espectro contiene la misma energía para todas las longitudes de onda). El espectro de potencias de una señal Browniana también sigue una línea recta con pendiente igual a 2 (el ajuste en nuestro datos da el valor $\beta = 1.95$, que de manera razonable se aproxima con $P(f) \propto 1/f^2$). Para el movimiento Browniano, $P(f)$ va relativamente rápido a cero, cuando f va a infinito, lo que muestra que $x(t)$ oscila poco debido a que la señal tiene un contenido pequeño de altas frecuencias. En cambio las oscilaciones grandes, que corresponden a frecuencias pequeñas, constituyen una parte dominante de la señal. El ruido $1/f$, está definido por un espectro de potencias;

$$P(f) \propto 1/f. \quad (1.10)$$

El ajuste de la recta que se muestra en la Fig. 1.2 a) da $\beta = 1.01$, uno de los intereses del ruido $1/f$ está motivado por su contenido balanceado de frecuencias pequeñas y grandes. El comportamiento cercano a $1/f$, $P(f)$ diverge cuando f tiende a cero, lo cual sugiere, como en el caso del movimiento browniano, correlaciones de largo alcance (o memoria) en la señal. Pero además, $P(f)$ tiende a cero más lentamente que el ruido Browniano a medida que f se vuelve grande, y la densidad de energía almacenada en las frecuencias altas sería infinito, si no hubiera una frecuencia mínima. Cualquier espectro con β aproximadamente igual a 1 tiene esas dos características.

Los ruidos $1/f^\beta$ son, por tanto, señales con un espectro de potencia sin ningún tipo de frecuencia característica (o escala de tiempo): se trata de una reminiscencia de la noción de los fractales pero en el espacio-tiempo, en lugar de sólo en el espacio. Entre todos los ruidos, el $1/f$ es el más importante, ya que aparece de forma casi ubicua en la naturaleza (una buena colección de referencias se pueden encontrar en [17]) y no se conoce ningún mecanismo físico sencillo que pueda explicar esta ubicuidad. Además, el ruido $1/f$ puede considerarse un límite, ya que separa las señales autosimilares estacionarias y las no estacionarias. Explicaremos más adelante cómo el ruido $1/f$ corresponde, en ocasiones, a procesos críticos.

1.5. Correlaciones lineales en las señales

Con frecuencia la naturaleza nos provee de señales temporales cuyo comportamiento es sumamente errático y sin ningún orden o estructura aparentes, como es el caso de la serie temporal $x(t_i)$ graficada en la Fig. 1.1 a). La apariencia de esta señal induce a pensar que la variable medida es aleatoria, generada por algún tipo de proceso estocástico. Una vez aceptado ésto como hipótesis, la serie temporal $x(t_i)$ se interpreta como N muestras de una variable aleatoria. El primer paso hacia la caracterización de esta variable aleatoria y del proceso que la genera es realizar un estudio estadístico tradicional, es decir, calcular la media, desviación estándar, momentos de orden superior, etcétera, con el objeto de obtener información sobre su función de distribución de probabilidades. En consecuencia, la pregunta natural es si el

orden temporal de los datos en la serie es relevante. Al respecto, la primera hipótesis que puede someterse a prueba es que la serie sea una sucesión de muestras independientes de una variable aleatoria. Dicho de otro modo, que el valor que la variable toma en el instante t_i no tiene influencia alguna sobre el que toma en el instante t_j siempre que $i \neq j$. Si este fuera el caso, al reordenar aleatoriamente los datos de la serie, la nueva serie de tiempo que se genera debería verse cualitativamente similar a la de la Fig. 1.1 a), pero en la Fig. 1.1 b) se muestra la serie de tiempo obtenida de este modo y se aprecia claramente que las series de las Fig. 1.1 a) y Fig. 1.1 b) son diferentes. Esto indica que en la serie $x(t_i)$ existen correlaciones temporales, las que al reordenarse aleatoriamente son destruidas.

La siguiente posibilidad de análisis está en que la señal sea el resultado de la acumulación de incrementos independientes. A una serie de tiempo así construida se la llama ruido Browniano. Para estudiar esta posibilidad se calculan los incrementos $x(t_{i+1}) - x(t_i)$, se reordenan aleatoriamente para romper las posibles correlaciones entre ellos, y se realiza la suma acumulada obteniendo una nueva serie. El resultado de esta operación se muestra en la Fig. 1.1 c), donde se puede apreciar que esta nueva serie es cualitativamente diferente a la original (graficada en la Fig. 1.1 a)), de modo que la serie $x(t_i)$ no es el resultado de una acumulación de incrementos independientes. De esta manera se descartan las dos posibilidades más simples respecto a la existencia de correlaciones temporales: que no existan, o que sean el resultado de la independencia de los incrementos. Por lo tanto, en la serie $x(t_i)$ existen correlaciones temporales que no son triviales y merecen un estudio más cuidadoso. Para ello definimos la función de autocorrelación como

$$C(n) = \langle [x(t_{i+n}) - \mu][x(t_i) - \mu] \rangle \quad (1.11)$$

donde $\langle \rangle$ indica el valor promedio y μ es el valor esperado de $x(t_i)$. Para ruido blanco, $C(n) = 0$ siempre que n sea distinto de cero, lo que señala que el valor de la serie en t_i no tiene influencia sobre el valor en t_{i+n} para ninguna n . Cuando una serie es tal que $C(n) \approx \exp(-n/n_s)$ se dice que la serie tiene correlaciones de corto alcance, ya que el valor de la serie en t_i sólo tiene efecto sobre los valores de la serie hasta t_{i+n_s} y la intensidad de estos efectos decae exponencialmente. Cuando las correlaciones decaen asintóticamente (es decir para n grande) como una ley de potencia

$$C(n) \sim n^{-\gamma}, \quad \text{para } 0 < \gamma < 1 \quad (1.12)$$

se dice que la serie posee correlaciones a largo plazo [13, 17]. Esto significa que la influencia del valor de la señal en t_i se extiende sobre todos los valores $t_j > t_i$ y que esta influencia decae muy lentamente, tan lentamente que las correlaciones no se pueden sumar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C(n) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} \sim \int_1^{\infty} n^{-\gamma} dn, \quad (1.13)$$

La integral anterior no converge y la detección de este tipo de correlaciones es el tema que concierne a esta sección. Si en la ecuación 1.12 se toma $\gamma > 1$, a pesar de que las correlaciones

decaen como una ley de potencia, no se considera que las correlaciones sean a largo plazo, dado que son sumables. Es sabido que la estimación directa de la función de autocorrelación $C(n)$ de una serie de tiempo es limitada a n pequeños por efectos de ruido. Esto es un problema grave si la serie de tiempo tiene correlaciones a largo plazo, dado que en este caso lo característico está dado por el comportamiento asintótico (es decir para n grande) de $C(n)$. Si la serie $x(i)$ es estacionaria, se pueden aplicar técnicas de análisis espectral y calcular el espectro de potencia $P(f)$ de la serie $x(t_i)$ como una función de la frecuencia f . Para series con correlaciones a largo plazo se tiene

$$P(f) \sim f^{-\beta} \quad (1.14)$$

donde β está relacionado con el exponente γ de las correlaciones por medio de la siguiente expresión [18]

$$\beta = 1 - \gamma. \quad (1.15)$$

En la Fig. 1.2 se muestra un gráfico en escala logarítmica del espectro de potencias $P(f)$ de las serie $x(t_i)$ como función de f . Si la serie $x(t_i)$ posee correlaciones a largo plazo, de acuerdo con la ecuación 1.14 el gráfico de la Fig. 1.2 a) debería ser una recta con pendiente $-\beta$, la que podría determinarse realizando una regresión lineal y partir del valor de β obtenido se podría conocer el valor de γ por medio de la relación 1.15. Como se aprecia en la Fig. 1.2 a), el espectro de potencia no está libre de ruido [8]. En resumen, la utilidad de la estimación directa de la función correlación es limitada a valores de n pequeños y también la determinación del espectro de potencia está afectada por grandes incertezas estadísticas cuando no se tiene la ayuda de un ensamble. Por otra parte, las series de tiempo que provienen de algún sistema complejo suelen ser no estacionarias, es decir que la media, la desviación estándar y los momentos de orden superior (e inclusive la función de autocorrelación), no son invariantes bajo translación temporal. La propiedades no estacionarias de las series temporales pueden estar asociadas con la existencia de tendencias en la señal causadas por efectos externos al sistema que genera la serie de tiempo y pueden llevar a la falsa detección de correlaciones a largo plazo. Los dos métodos antes mencionados para determinar las correlaciones son adecuados sólo si la señal es estacionaria [19].

Vamos ahora a presentar un método que puede detectar correlaciones a largo plazo en series no estacionarias conocido como Detrended Fluctuation Analysis o *DFA* [20] (Peng 1994). Este método provee un único parámetro cuantitativo, el exponente de escala α , para cuantificar el comportamiento de las correlaciones en una serie de tiempo. La ventaja del *DFA* reside en que puede eliminar sistemáticamente tendencias de diferentes órdenes y así detectar correlaciones a largo plazo en series de tiempo contaminadas con tendencias polinomiales que pueden enmascarar la verdadera naturaleza de las correlaciones. El *DFA* ha sido aplicado con éxito en áreas muy diversas, tales como en la biología del ADN (Peng 1994), la dinámica cardíaca, la duración del paso al caminar en humanos, las fluctuaciones de la temperatura climática, los flujos y descargas en ríos, los receptores neurales en sistemas biológicos, en la economía, etcétera. El *DFA* puede ayudar a identificar distintos estados del mismo sistema con diferentes comportamientos de escala. Por ejemplo, el exponente de escala α para las

fluctuaciones en la duración del latido cardíaco puede ser diferente para individuos sanos y enfermos [13].

1.5.1. Método DFA

DFA (*Detrended Fluctuation Analysis: Análisis de la fluctuación sin tendencia*) es un método que permite la investigación de correlaciones de largo alcance y el estudio de las propiedades de escalamiento en series de tiempo aleatorias. Fue introducido por primera vez en estudios de cadenas de ADN [20] como fue mencionado anteriormente. Haré una breve descripción del método a continuación.

Una serie de tiempo $x(t)$ es autosimilar, si las propiedades estadísticas de la serie de tiempo completa y las propiedades estadísticas de cualquier subintervalo temporal satisfacen la siguiente relación de escalamiento

$$x(t) \stackrel{\text{FDP}}{=} a^\alpha x\left(\frac{t}{a}\right), \quad (1.16)$$

donde a es el factor de escalamiento en el eje del *tiempo* (a^α es el factor de escalamiento correspondiente al eje vertical). El exponente α en 1.16 está definido como el parámetro de autosimilitud. Se debe enfatizar que la igualdad en la ecuación anterior debe entenderse como aquella que indica la misma distribución de probabilidad. A continuación, de forma breve se explican los pasos que involucra el análisis del DFA.

Sea $\delta(i)$, $i = 1 \dots N$, una serie de tiempo, el primer paso del análisis empieza definiendo una serie de tiempo integrada

$$\psi(i) = \sum_{k=1}^i [\delta(k) - \langle \delta \rangle], \quad (1.17)$$

con $\langle \delta \rangle$ el promedio de la serie de tiempo δ . El perfil $\psi(i)$ se puede considerar como la posición de un caminante al azar sobre una cadena lineal después de i etapas. El caminante al azar comienza en el origen y realiza en la etapa i -ésima un paso de longitud $\delta(i) - \langle \delta \rangle$ a la derecha, si $\delta(i) - \langle \delta \rangle$ es positivo o hacia la izquierda si $\delta(i) - \langle \delta \rangle$ es negativo. Las fluctuaciones del perfil en una ventana de tamaño n están vinculadas a la función de autocorrelación $C(n)$ como veremos más adelante. En el segundo paso el perfil $\psi(i)$ se divide en $N_n = N/n$ series de tiempo no solapadas $\psi_\ell(i)$ de igual tamaño n . En el tercero, para cada $\psi_\ell(i)$, $\ell = 1, \dots, N$, se calcula la tendencia local $\hat{\psi}_\ell(i)$ con una regresión lineal (ver Fig. 1.3) y se calcula la varianza

$$F_n^2(\ell) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\psi_\ell(i) - \hat{\psi}_\ell(i)]^2. \quad (1.18)$$

Finalmente, se promedian todas estas varianzas y se toma la raíz cuadrada, obteniendo así la función de fluctuación del DFA (n debe ser como máximo $N/4$ para asegurar una buena

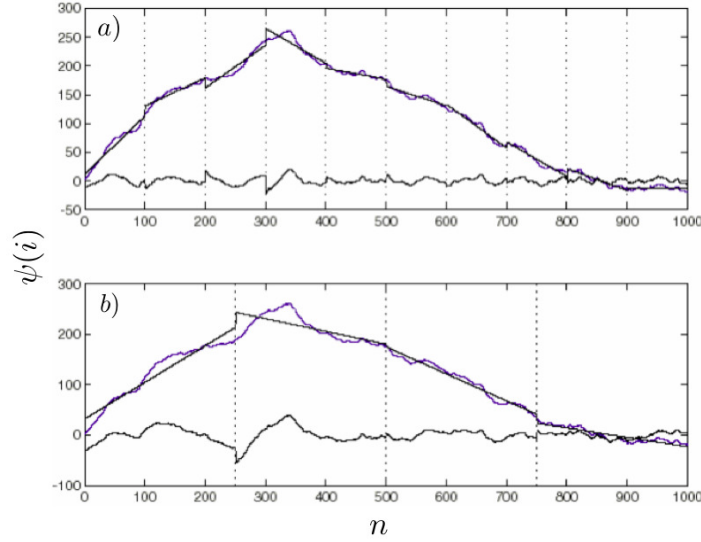


Figura 1.3: Ejemplo de como funciona el DFA, la línea gruesa es el perfil de la serie de tiempo. El perfil se divide en ventanas de tamaño n (en el panel superior se muestra el caso de $n = 100$, y en el inferior para $n = 250$) y en cada ventana se busca la tendencia lineal, definida como la recta que mejor ajusta al perfil en cada ventana. Posteriormente se hace la resta entre el perfil y las tendencias dando una serie de tiempo todavía fluctuante, pero sin tendencias.

estadística [20]):

$$F(n) \equiv \sqrt{\frac{1}{N_n} \sum_{\ell=1}^{N_n} F_n^2(\ell)}. \quad (1.19)$$

Esta fluctuación puede ser calculada para todos los factores de escala (o tamaños de las cajas). En una gráfica con escala logarítmica una relación lineal entre la fluctuación y el tamaño de las cajas indicará un comportamiento de escalamiento (ley de potencias). En este caso la pendiente α_{DFA} en la gráfica $\log F(n)$ vs $\log n$ puede ser usada para caracterizar las propiedades de escalamiento en la ecuación 1.16 de la serie de tiempo original, dado que $\alpha = \alpha_{DFA}$ en la ecuación 1.16.

Si la serie de tiempo $\delta(i)$ tiene correlaciones a largo plazo, entonces $F(n)$ es una función de n del tipo ley de potencia

$$F(n) \sim n^\alpha, \quad (1.20)$$

Si no hay correlación entre los puntos de la serie de tiempo original $\delta(i)$ entonces la función de autocorrelación ³ $\mathcal{C}(\tau) \equiv 0$ para cualquier $\tau \neq 0$, lo cual indica que la serie de tiempo se comporta como ruido blanco y la serie de tiempo integrada $\psi(i)$ corresponde a una caminata aleatoria caracterizada por una $\alpha_{DFA} = 0.5$ (ver Fig. 1.4). Series de tiempo con una función

³Para una serie de tiempo $\delta(i), i = 1, \dots, N$, la función de autocorrelación esta definida como $\mathcal{C}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta(k)\delta(k+\tau)$.

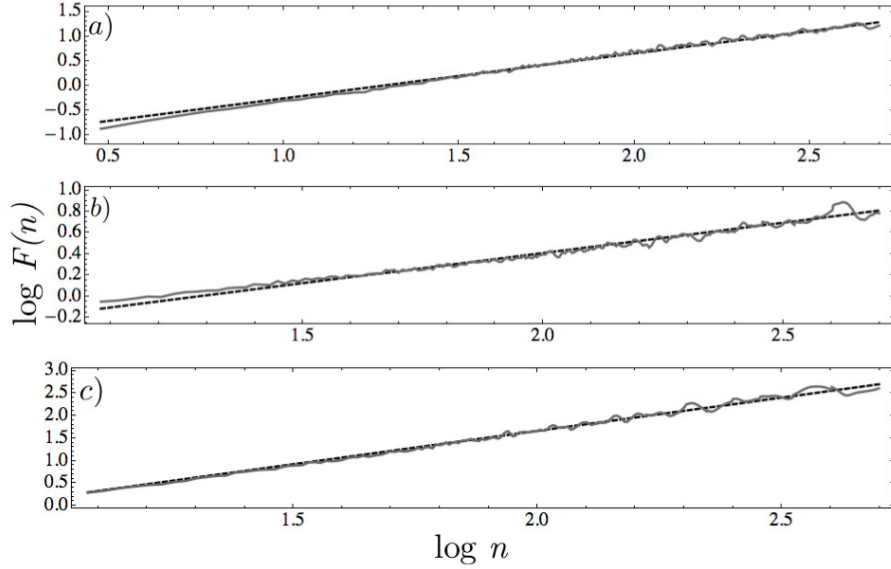


Figura 1.4: DFA para diferentes tipos de señales $x(t)$. a) Ruido $1/f$ cuyo exponente $\alpha = 1.03$, b) Ruido blanco con $\alpha = 0.5$ y c) Ruido Browniano cuyo exponente obtenido $\alpha = 1.48$.

de autocorrelación de corto alcance decaen exponencialmente $\mathcal{C}(\tau) \sim e^{-\tau/\tau_0}$, siendo τ_0 el tiempo característico de escala. También están caracterizadas por un $\alpha_{DFA} = 0.5$.

En la Fig. 1.4 se muestra en un gráfico el análisis obtenido con el DFA para las tres señales de la Fig. 1.1. En los tres casos se observa una relación lineal. Para la serie original $x(i)$ se obtiene un $\alpha = 1.03$, lo que sugiere que en $x(i)$ existen correlaciones temporales a largo plazo. El exponente α , llamado exponente de escala, se vincula con el exponente de las correlaciones γ y con el exponente β del espectro de potencia por medio de las relaciones:

$$\alpha = 1 - \frac{\gamma}{2}, \quad \alpha = \frac{1 + \beta}{2}, \quad (1.21)$$

Debe tenerse presente que estas dos ecuaciones son exactas en el límite $N \rightarrow \infty$ y que sólo puede esperarse una concordancia limitada entre los tres exponentes por efecto de la finitud de la serie temporal bajo estudio. Una demostración más rigurosa y detallada del conjunto de ecuaciones en 1.21 se puede ver en [20, 21]. La demostración que presentamos aquí es más sencilla. Suponiendo que $\delta(i)$ no posee tendencias y que se ha removido su valor promedio, la fluctuación cuadrática media para cada n se puede calcular:

$$\begin{aligned} F^2(n) &= \langle \psi^2(n) \rangle = \left\langle \left[\sum_{i=1}^n \delta(i) \right]^2 \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \delta^2(i) \right\rangle + \left\langle \sum_{\substack{i,j \leq n \\ i \neq j}} \delta(i)\delta(j) \right\rangle \\ &= n \langle \delta^2(i) \rangle + \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j \leq n}} C(|i-j|) = n \langle \delta^2(i) \rangle + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)C(i). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Si la serie $\delta(i)$ tiene correlaciones a largo plazo, entonces para n grande el segundo término se puede aproximar del siguiente modo

$$\sum_{i=1}^{n-1} = nC(i) \sim n \sum_{i=1}^n i^{-\gamma} \sim n \int_1^n i^{-\gamma} \sim n^{2-\gamma}, \quad y \quad \sum_{i=1}^{n-1} iC(i) \sim n^{2-\gamma}. \quad (1.23)$$

Si la serie tiene correlaciones a largo plazo con $0 < \gamma < 1$, entonces el segundo término en 1.22 predomina sobre el primero y se tiene $F(n) \sim n^{1-\gamma/2}$, y por lo tanto $\alpha = 1 - \gamma/2$. Si $\gamma > 1$ o las correlaciones decaen exponencialmente, el primer término predomina y entonces $\alpha = 1/2$.

En este trabajo tenemos especial interés en las series de tiempo que poseen memoria de largo alcance, para las cuales la función de autocorrelación tiene un comportamiento de ley de potencias. Este tipo de serie están caracterizadas por los valores $0.5 < \alpha_{DFA} < 1.0$, la relación entre γ y α_{DFA} , como hemos visto, es $\gamma = 2 - 2\alpha_{DFA}$. El espectro de potencias correspondiente a series de tiempo con memoria de largo alcance muestra también un comportamiento de ley de potencias: $S(f) \sim 1/f^\beta$ con $\beta = 1 - \gamma = 2\alpha_{DFA} - 1$, una de las relaciones que más vamos a utilizar a lo largo de la tesis. En particular, para las series de tiempo con $1/f$ -noise ($\beta = 1$) $\alpha_{DFA} = 1$ (ver e.g. [8]).

1.6. Invariancia de Escala en una señal $1/f$

Las series de tiempo fractales temporalmente, con un espectro de potencias de la forma [23],

$$P(f) \propto 1/f^\beta, \quad (1.24)$$

muestran correlaciones de largo alcance que se caracterizan por un valor específico del exponente β . Esto puede apreciarse a través del decaimiento lento de la correspondiente función de autocorrelación, que está dada por la ecuación 1.11 [24, 25]. Es bien conocido que la función de autocorrelación de una serie aleatoria es una función delta y que, por tanto, no tiene memoria. Los procesos de memoria corta, tales como los ruidos autoregresivos o las cadenas de Markov, tienen una función de autocorrelación que decae de forma exponencial. Por otro lado, los ruidos que corresponden a la ecuación 1.24 tienen funciones de autocorrelación que decaen muy lentamente debido a su naturaleza autosimilar. En particular, la función de autocorrelación de estos ruidos generalmente se comporta como una ley de potencias que decae más lentamente que el decaimiento exponencial.

La siguiente demostración para el caso continuo muestra que si el espectro de potencias de una serie de tiempo se comporta como una ley de potencias, entonces su función de autocorrelación será invariante de escala. Esto puede entenderse de la siguiente manera. De acuerdo al teorema de Wiener-Khinchin, la función de autocorrelación es la transformada inversa del espectro de potencias,

$$C(\tau) = F^{-1}(S(f)). \quad (1.25)$$

Si el espectro de potencias obedece la relación 1.24 y aplicamos una transformación de escala en el dominio temporal, $\tau \rightarrow \tau' = a\tau$, entonces

$$C(a\tau) = F^{-1} \left(\frac{1}{a} S\left(\frac{f}{a}\right) \right) = a^{\beta-1} F^{-1} (1/f^\beta) = a^{\beta-1} C(\tau), \quad (1.26)$$

Por lo tanto, la función de autocorrelación conserva su comportamiento después de la transformación temporal hasta un factor de escala $a^{\beta-1}$. La solución general a la ecuación anterior es que la función de autocorrelación $C(\tau)$ es también una ley de potencias. El ruido blanco es un caso particular, donde la función de autocorrelación es una delta. El ruido $1/f$, en cambio, posee la propiedad de invariancia

$$C(a\tau) = C(\tau), \quad (1.27)$$

con las soluciones $C(\tau)$ constante, o el caso físicamente más significativo $C(\tau) = -\log(\tau)$. Se puede ver que reescalando una función logarítmica $\log(a\tau) = \log(\tau) + \log(a)$, donde $\log(a)$ es una constante que no contribuye a la evolución temporal. La relación de escala de la ecuación 1.27 satisface en forma aproximada la relación $C(a\tau) \cong C(\tau)$ [5].

En la deducción anterior, hemos usado la propiedad de escalamiento de la Transformada de Fourier, la cual es estrictamente válida sólo en el caso continuo. Para series de tiempo discretas hay otras herramientas que permiten estudiar las propiedades de invariancia de escala. Un ejemplo es el método de DFA. El principal resultado es que un comportamiento $1/f$ implica invariancia de escala en la función de autocorrelación. Una breve demostración para el ruido $1/f$ se muestra en el Apéndice A.2.

1.7. Leyes de Potencia en la Física: Transiciones de Fase y Universalidad

Por último, en esta sección, en forma breve, discutimos la importancia de las leyes de potencia en la física. Se introduce la noción de fenómeno crítico para sistemas en, o cerca de, sus puntos críticos, donde exhiben leyes de potencia y estructuras fractales. Estos sistemas también ilustran la noción de *universalidad*, la cual es de gran interés para el estudio de sistemas complejos en la física y la biología. Los sistemas críticos son un campo vasto y activo en investigación, por lo que no es mi objetivo dar una introducción completa del tema sino enfatizar algunos puntos:

1. Los sistemas cerca de una transición de fase llegan a ser críticos: no exhiben ninguna escala de longitud característica y espontáneamente se auto-organizan en forma fractal.
2. Los sistemas críticos se comportan de una manera muy simple: obedecen una serie de leyes de potencia con varios exponentes llamados *exponentes críticos*, los cuales pueden ser medidos experimentalmente y en algunos casos, derivados de manera exacta.

3. Experimentos durante los años setenta y ochenta mostraron que los exponentes críticos de los materiales que presentan transiciones de fase toman ciertos valores específicos. Por lo tanto, una clasificación de materiales se puede realizar, donde aquellos con exponentes idénticos pueden ser agrupados en clases. Así, todos los sistemas que tienen una transición de fase pueden clasificarse dentro de alguno de estos conjuntos, conocidos como clases universales.

1.7.1. Sistemas críticos, exponentes críticos y fractales

Estamos familiarizados con las transiciones que presenta el agua. Una de ellas es el cambio de fase líquida a hielo, que es un ejemplo de una transición de fase discontinua (primer orden): la materia se transforma súbitamente de un estado desordenado a un estado organizado. El cambio súbito en el arreglo de las moléculas está acompañado por la liberación de calor latente del sistema. En el presente trabajo estamos principalmente interesados en sistemas donde la transición entre dos diferentes fases se hace de una manera suave y continua (segundo orden), es decir, sin la liberación de calor latente.

El ejemplo clásico de un sistema que exhibe una transición de fase continua es un material ferromagnético. El agua también puede ser llevada a un punto donde pasa a través de una transición de fase continua: conocido como el *punto crítico* del agua, caracterizado por la temperatura crítica $T_c = 647K$ y la densidad crítica $\rho_c = 0.323gcm^{-3}$, en este punto el estado líquido y el estado de vapor coexisten y de hecho lucen idénticos. Esto hace que la dinámica del sistema sea difícil de describir. En lo que sigue usamos el paradigma del material ferromagnético para ejemplificar un sistema crítico, i.e., un sistema cerca de una transición de fase continua (o transición de segundo orden). Al finales del siglo pasado fue mostrado por P. Curie que una pieza magnetizada de hierro pierde su magnetización cuando es calentada por encima de la temperatura crítica $T_c = 1043K$. De manera similar, si la pieza se enfría por debajo de la T_c se magnetiza espontáneamente. La transición de fase continua se presenta debido a la magnetización del sistema, la cual representamos por el vector \mathbf{M} , que varía suavemente como función de la temperatura: $\mathbf{M} = 0$ en la fase no magnetizada y \mathbf{M} diferente de cero en la fase magnetizada.

La magnetización \mathbf{M} de una muestra es relativamente fácil de medir usando una brújula, o de forma más precisa, mediante un magnetómetro, lo que permite determinar en que fase se encuentra la pieza de hierro en un instante dado. Para entender mejor la física que presenta el sistema, debemos estudiarlo a nivel microscópico. Se trata del fenómeno del ferromagnetismo. La muestra está conformada por átomos de hierro arreglados en una red (lattice) regular, donde en cada átomo hay electrones moviéndose alrededor del núcleo. Cada electrón posee un dipolo magnético debido al espín electrónico, el cual puede ser visualizado como un pequeño imán (ver Fig. 1.5). La magnetización total del material es proporcional a la suma del campo de los espines:

$$\mathbf{M} \propto \sum_{muestra} \mathbf{m} \quad (1.28)$$

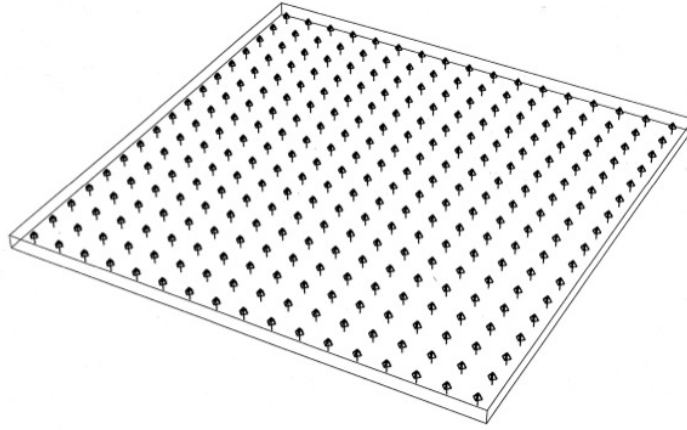


Figura 1.5: Ilustración de una muestra 2-dimensional del material en la fase de magnetización ($T < T_c$): el campo magnético del espín \mathbf{m} debido a los átomos, se encuentra representado por pequeñas flechas, están todas alineadas y producen una magnetización neta no nula $\mathbf{M} \propto \sum_{muestra} \mathbf{m}$ para la muestra.

sobre todos los átomos de la muestra. En los sistemas ferromagnéticos, la interacción electrónica repulsiva favorece que los espines se alíen (en otras condiciones, dos imanes tienden a situarse en direcciones opuestas, para minimizar la energía magnética). Por lo tanto, si una mayoría de los átomos de la muestra apuntan en la misma dirección, su efecto magnético sumado da una \mathbf{M} no nula. Si apuntan en direcciones aleatorias, se cancelan unos con otros y la muestra tiene como resultado $\mathbf{M} = 0$. El esquema microscópico puede ser usado para explicar lo que pasa durante la transición de fase, si empezamos con un bloque magnetizado de hierro, por ejemplo, y lo calentamos de modo que la agitación térmica en el sólido destruya la alineación de los espines. Entonces habremos logrado reducir la magnetización de la muestra. Cuando T se aproxima a la temperatura crítica, la agitación es lo suficientemente grande como para sistemáticamente destruir la alineación. Como veremos más adelante, se forman *islas de magnetización* de todas las escalas hasta que, finalmente, la magnetización total es cero, manteniéndose así para cualquier temperatura por arriba de T_c , aunque en este caso se destruyen las correlaciones de largo alcance. Análogamente, cuando la muestra esta caliente y se enfría por debajo de la temperatura crítica, los espines se alinean unos con otros. Puede mostrarse que para T ligeramente más pequeña que T_c , la magnetización \mathbf{M} sigue una función de ley de potencias en la temperatura:

$$|\mathbf{M}| \propto |T_c - T|^{-\omega}, \quad (1.29)$$

donde ω puede ser medida. El exponente ω cuantifica el comportamiento de la magnetización de la muestra como función de la temperatura y es llamado *exponente crítico*. Se puede mostrar que otras cantidades medibles del sistema tal como la longitud de correlación ξ (definida en la ecuación 1.30) obedece de manera similar una ley de potencias cerca del

punto crítico.

Consideremos la muestra en una temperatura dada y veamos cuál es el efecto que tiene el movimiento de un espín sobre otros espines del sistema. Si $T < T_c$, la mayoría de los espines estarán alineados en una sola dirección. El movimiento aleatorio de un espín particular no influenciará a los otros, debido a que estarán sujetos a un campo magnético intenso, que es el generado por el resto de la muestra. Si $T > T_c$, el cambio de orientación de un espín modificará solamente al de su vecino, puesto que la interacción es de corto alcance y la magnetización neta del material es cero. Sin embargo, cerca de la transición de fase ($T \approx T_c$), la reorientación de un espín puede cambiar la orientación de todos los otros. Esto es debido a que cuando nos acercamos al punto crítico, el rango de interacciones entre los espines tiende a infinito: con esto, se puede pensar que cada espín interactúa con todos los otros. Esto puede ser formalizado por la longitud de correlación, ξ , definida como la distancia con la cual cada espín tiene interacción con todos los demás. Cerca de la transición de fase sigue una ley de potencias de la forma:

$$\xi \propto |T_c - T|^{-\nu}, \quad (1.30)$$

con $\nu = 0.69$ para el hierro, por lo que diverge si T va a T_c : no hay una longitud de escala característica del sistema.

Otra manera de entender este fenómeno es la siguiente, conforme T se va modificando para alcanzar T_c , los espines de la muestra se comportan como una fila de fichas de domino donde la caída de una ficha trae consigo la caída de todas las otras. Aquí también, la interacción de una ficha de domino se extiende efectivamente a todo el sistema. Esto parece ocurrir también con los espines, se organizan en una escala libre, i.e. de manera fractal. En este ejemplo en particular, la estructura fractal ha sido comprobada teórica y experimentalmente en $T \sim T_c$ donde los espines se organizan en islas de todos los tamaños, ver Fig. 1.6.

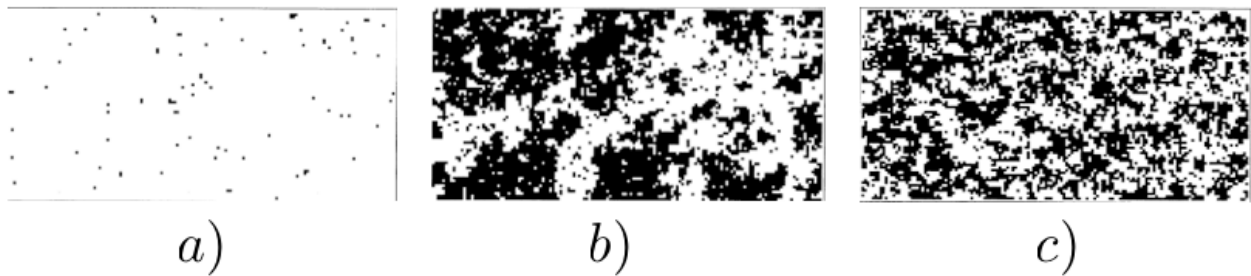


Figura 1.6: Arreglo de espines de una muestra simulada por el modelo de Ising [26]. Cada cuadrado negro representa un espín apuntando hacia arriba y los blancos hacia abajo. a) $T < T_c$: casi todos los espines apuntan en la misma dirección, como resultado la muestra tiene una de magnetización no nula (fase magnetizada). b) $T = T_c$: en la transición de fase, la magnetización neta $\mathbf{M} = 0$, pero los espines se han arreglado en las islas dentro de islas de espines que apuntan en direcciones opuestas, el cual es un patrón fractal. c) $T > T_c$: el sistema tiene nula magnetización y sólo existen correlaciones de corto alcance entre los espines.

1.7.2. Universalidad

Durante los años ochenta, se hizo mucho trabajo experimental desarrollado para medir los exponentes críticos de los materiales: polímeros, metales, aleaciones, fluidos, gases, etc. Se esperaba que a cada uno de los materiales le correspondiera un conjunto diferente de exponentes. Sin embargo, se encontró que esta suposición era equivocada. De hecho, materiales sin semejanzas obvias parecían agruparse en clases caracterizadas por un solo conjunto de exponentes críticos. Por ejemplo, puede ser demostrado que cuando se toma en cuenta los errores experimentales, muestras unidimensionales de gas Xe y la aleación β -latón tienen los mismos valores para los exponentes críticos (ver Maris & Kadanoff, 1978; Le Bellac, 1988; Biney *et al.*, 1992) [27]. También es el caso para la mezcla de fluidos binarios de metanol-hexano, trimetil-pentano y nitroetano. El gas, aleación y mezcla líquida, todos caen por lo tanto en una clase de sustancias etiquetadas por un solo conjunto de exponentes críticos. Por el contrario, una muestra tridimensional de Fe no pertenece a esta clase. Sin embargo tiene el mismo exponente crítico que el Ni, por lo que pertenecen a una clase diferente.

Los exponentes críticos describen completamente la dinámica de un sistema cerca de una transición de fase continua. El hecho de que la clasificación mencionada arriba exista, prueba que no es posible un comportamiento crítico arbitrario. Existe un número limitado de estos comportamientos en la naturaleza, los cuales son universales y definen clases de universalidad. El principio que establece esta clasificación, es por lo tanto llamado *Universalidad*.

El análogo a establecer exponentes críticos en las series de tiempo, se liga con el exponente de la ley de potencia en el espectro de potencias calculado a partir de las fluctuaciones del sistema. Ello caracteriza el tipo de alcance existente en las auto-correlaciones. En particular, nos interesa saber que exponente crítico caracteriza a los estados donde se presenta un cambio dinámico en sistemas que tienen un comportamiento caótico o regular.

Capítulo 2

Caos Clásico

La mecánica clásica es determinista: las leyes de Newton son tales que el movimiento de una partícula queda perfectamente determinado en todo momento si se conoce su posición y velocidad en un instante cualquiera. Esta visión de la mecánica newtoniana se ha modificado a lo largo de la historia, debido a que resulta complicado estudiar sistemas complejos con muchos grados de libertad usando este enfoque. En ese caso se recurre a una descripción probabilística que dio origen a la mecánica estadística. La primera crisis conceptual de la mecánica newtoniana llegó con la mecánica cuántica, una teoría intrínsecamente probabilística que describe con precisión el movimiento de las partículas microscópicas. Sin embargo, el cambio más radical del paradigma newtoniano llegó inopinadamente desde la propia mecánica clásica, y surgió en sistemas con pocos grados de libertad que mostraban trayectorias con susceptibilidad esencial a las condiciones iniciales. Este comportamiento surge del carácter no lineal de las ecuaciones diferenciales que rigen su dinámica. Las propiedades que surgen de la no-linealidad están presentes en un gran número de sistemas clásicos y pueden incluso imitar los resultados calculados a partir de un proceso estocástico ¹. Esto se manifiesta particularmente en la falta de previsibilidad, ejemplificada por el lanzamiento de una moneda (que es casi el paradigma universal de la aleatoriedad), o el giro de una ruleta. Puesto que la predicción es imposible a pesar del determinismo de las reglas básicas, a este tipo de comportamiento se le ha llamado caos determinista.

El comportamiento estocástico puede también ocurrir en sistemas hamiltonianos, como se muestra en los sistemas con caos disipativo. Las propiedades estocásticas del movimiento fueron descubiertas en los sistemas hamiltonianos a través del trabajo de Poincaré (1892), aunque su redescubrimiento para la mayoría de la comunidad científica fue hace 47 años atrás, en un artículo de Hénon y Heiles (1964) [28]. Lorenz (1963) descubrió que un simple conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales (que había ideado como modelo de juguete para la previsión meteorológica) exhibían un comportamiento desconocido [29], pues la solución de

¹Un proceso estocástico es un concepto matemático que sirve para caracterizar una sucesión de variables aleatorias que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo. Cada una de las variables aleatorias del proceso tiene su propia función de distribución de probabilidad y, entre ellas, pueden estar correlacionadas o no.

estas ecuaciones recorren trayectorias no periódicas e inusuales. Lorenz acuñó el término de *atractor extraño* para designar este tipo de trayectorias. Cuando existe un atractor extraño las trayectorias son extremadamente sensibles a cambios en las condiciones iniciales y cualquier cambio pequeño δ_0 crecerá en el tiempo t como $e^{\lambda t}$, donde λ es el llamado exponente de Lyapunov. A partir de los estudios mencionados, se definieron dos tipos de movimiento radicalmente distintos en la mecánica clásica: el movimiento regular de los sistemas integrables y el movimiento caótico de los sistemas no integrables. Para el movimiento regular, el ritmo de separación entre dos trayectorias contiguas puede crecer como una potencia pero no de forma exponencial. En lo que sigue se presentan y discuten las características que definen el caos determinista:

1. Las leyes de evolución del sistema son deterministas.
2. Comportamiento aperiódico. El espectro de potencias del movimiento del sistema es continuo.
3. Sensibilidad extrema a las condiciones iniciales producida por la separación exponencial de las trayectorias en el espacio de fases. El exponente de Lyapunov es el parámetro que mide este efecto de forma cuantitativa y viene definido por:

$$\lambda(\mathbf{x}_o) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{d(\mathbf{x}_o, t)}{d(\mathbf{x}_o, 0)}, \quad (2.1)$$

donde $d(\mathbf{x}_o, t)$ es la separación entre dos trayectorias al tiempo t y donde, para las condiciones iniciales en un entorno de \mathbf{x}_o , el resultado debe promediarse sobre todos los \mathbf{x}_o posibles. El exponente de Lyapunov nos provee de un límite práctico para el tiempo máximo para el que las predicciones sobre la evolución de un sistema son razonablemente válidas, dependiendo de la precisión con la que se midan las condiciones iniciales.

4. Si el sistema está confinado, con un exponente de Lyapunov positivo los sistemas no son necesariamente caóticos. Es también imprescindible que se cumpla la propiedad matemática de mixing. Las trayectorias cercanas se separan localmente pero debido a que la dinámica del sistema está confinada globalmente a una región finita del espacio fase las trayectorias necesariamente se reaproximan arbitrariamente cerca unas a otras infinitas veces, pero nunca se cruzan o encuentran. Es necesario que la entropía topológica, que mide el ritmo de crecimiento del número de trayectorias topológicamente distintas, sea positiva [30].

La principal sorpresa que nos reserva el caos determinista es que puede aparecer en sistemas muy simples con pocos grados de libertad. En física, los sistemas hamiltonianos con un número finito de grados de libertad han sido divididos tradicionalmente en dos tipos: aquellos con pocos grados de libertad que se suponía que debían exhibir algún tipo de movimiento ordenado que fuera aproximadamente soluble mediante la teoría de perturbaciones y aquellos con un gran número de grados de libertad, para los que se debía aplicar los métodos de

la mecánica estadística. Sin embargo, el descubrimiento del caos determinista ha cambiado este punto de vista. La dinámica de los sistemas con pocos grados de libertad puede ser extremadamente compleja. A continuación se presenta un breve resumen de los conceptos básicos del caos clásico en general.

2.1. Sistemas hamiltonianos; comportamiento regular y caótico

Un sistema hamiltoniano independiente del tiempo con N grados de libertad se caracteriza por su función hamiltoniana

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (2.2)$$

donde p y q son la abreviatura de las N coordenadas canónicas y los momentos conjugados correspondientes y $V(q)$ es la energía potencial del sistema. Las ecuaciones de movimiento son $2N$ ecuaciones de primer orden

$$\dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a}, \quad a = 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

que rigen la dinámica en el espacio fase $2N$ -dimensional. Las soluciones a las ecuaciones canónicas tienen propiedades muy interesantes. Por ejemplo, de acuerdo al teorema de Liouville (Landau y Lifshitz, 1977) [31], conservan el volumen del espacio fase. Esto significa que si se toma un conjunto de puntos con V_0 como condición inicial, el volumen ocupado por estos puntos en cualquier momento posterior, a medida que el sistema evoluciona de acuerdo a 2.3, es siempre el mismo. Un sistema hamiltoniano se dice que es integrable cuando hay al menos N funciones $I_a(p, q)$ con $a = 1, \dots, N$, definidas globalmente e independientes, que son constantes de movimiento aisladas en involución². Es decir, sus paréntesis de Poisson se anulan, $\{I_a, I_b\} = 0$, $a, b = 1, \dots, N$. El teorema de integrabilidad de Liouville nos garantiza que bajo esas condiciones las ecuaciones de movimiento son resolubles por cuadraturas; cuando esto ocurre la trayectoria del sistema esta confinada a un toro N -dimensional y al no depender el hamiltoniano explícitamente del tiempo, es por tanto una de esas constantes de movimiento. Si un sistema hamiltoniano es integrable, su ecuación asociada de Hamilton-Jacobi es separable en al menos un sistema de coordenadas.

Gran parte de la intuición sobre el posible comportamiento de un sistema mecánico se basa en la experiencia con el estudio de sistemas integrables, que en muchos aspectos se comportan como un oscilador armónico N -dimensional, con frecuencia dependiente de la energía. Dado que en los sistemas integrables la ecuación de Hamilton-Jacobi es separable, entonces debe existir una transformación canónica que cambie al sistema de coordenadas originales a nuevas coordenadas de ángulo-acción θ_i y J_i , respectivamente. En estas nuevas coordenadas,

²Se dice que dos funciones A y B están en involución si su corchete de Poisson es nulo $\{A, B\} = 0$, donde $\{A, B\} = \sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i}$.

un sistema integrable sólo admite movimientos periódicos o periódicos condicionales. Las trayectorias del espacio fase están confinadas a la superficie de un toro N -dimensional que llena completamente el espacio fase disponible. Un resultado evidente es que no hay ningún comportamiento estocástico o caos en los sistemas integrables; en el toro, el movimiento puede ser periódico o periódico condicional, dependiendo de si las frecuencias con las que se atraviesa el toro son racionalmente dependientes (conmensurables) o no.

Una pregunta interesante es la siguiente: ¿qué pasa si tenemos un sistema hamiltoniano arbitrario donde la única constante evidente es el propio hamiltoniano?. Si, de hecho, no hay más constantes de movimiento, el comportamiento del sistema no estará más restringido. No hay un toro definido globalmente en todo el espacio fase, por lo que los movimientos posibles pueden vagar por todo el espacio fase disponible. La región del espacio fase que con estos movimientos se llena es $(2N - 1)$ -dimensional y el movimiento parece tener características estocásticas. El punto importante es que, en ausencia de al menos N constantes de movimiento el sistema empieza a mostrar una gran sensibilidad a las condiciones iniciales. Cuando el sistema desarrolla esta sensibilidad extrema, incluso perturbaciones pequeñas inicialmente (producidas, por ejemplo, por el entorno externo) son amplificadas por la dinámica, lo que lleva inexorablemente al crecimiento catastrófico en la incertidumbre y a las propiedades estocásticas aparentemente típicas del caos. Debemos tomar en cuenta que, para que esto suceda, es necesario (aunque no suficiente) tener una ecuación de evolución no lineal. La mayoría de los sistemas no lineales tienen ecuaciones de movimiento que no son exactamente solubles. Por lo tanto, para estudiar su comportamiento es necesario su estudio con métodos numéricos.

Por otra parte, la exactitud de los números extraídos del computo es finita, por lo que la precisión de las condiciones iniciales también es finita. De este modo, cualquier error inicial se ve magnificado por la evolución dinámica y las predicciones a largo plazo son imposibles, incluso con la ayuda de una super computadora.

2.2. Caos hamiltoniano y teorema de KAM

Dependiendo de si el sistema conserva la energía o no, el caos determinista se puede dividir en dos clases con características y propiedades muy distintas. En los sistemas disipativos el volumen ocupado por las trayectorias en el espacio de fases decrece con el tiempo. En el límite $t \rightarrow \infty$ el conjunto de las trayectorias se convierte en un atractor extraño. Normalmente su dimensión es menor que la del espacio de fases original y es fraccionaria (es un fractal). Para los sistemas conservativos el volumen del espacio de fases ocupado por las trayectorias es constante en el tiempo. La conservación del volumen en el espacio de fases impide el colapso del movimiento del sistema y, por lo tanto, no existen los atractores en este tipo de sistemas. El caos en sistemas conservativos viene caracterizado por el teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) [32].

Para entender el teorema KAM, imaginemos un hamiltoniano que consiste de dos partes

$$H = H_0 + \epsilon H_1, \quad (2.4)$$

donde ϵ es un coeficiente numérico. Supongamos que H_0 es integrable pero, debido a H_1 , el hamiltoniano completo H no lo es. Cuando $\epsilon = 0$ hay N constantes de movimiento F_α , donde N es la dimensión del espacio de configuraciones. Para un sistema hamiltoniano, una de esas constantes de movimiento debe ser la energía,

$$F_\alpha(q_i, p_i) = cte. \quad \alpha, i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.5)$$

Estas N ecuaciones definen un toro N -dimensional en el espacio de fases $2N$ -dimensional. Por lo tanto, la trayectoria permanece en este toro para todo t . El movimiento es equivalente a N movimientos en una dimensión, cada uno con su propia frecuencia, y si además las razones entre las diferentes frecuencias son fracciones racionales, todas las trayectorias son periódicas. Si la relación entre las distintas frecuencias es irracional, el toro tiene una única trayectoria que nunca se cierra y que recorre completamente. Ese movimiento se denomina cuasiperiódico. En cualquiera de los dos casos el movimiento es regular.

Podemos dividir el movimiento en el toro N -dimensional en movimientos en toros bidimensionales que corresponden a cada una de las relaciones entre las distintas constantes de movimiento. Llamaremos a estos toros racionales o irracionales, según sea la relación de frecuencias correspondiente sea racional o no. El caso interesante es cuando ϵ es distinto de cero, el sistema deja de ser completamente integrable, pero la energía sigue siendo una constante de movimiento (mientras H_1 no sea disipativo). Por lo tanto, todas las trayectorias permanecen en la capa de energía constante. Pero, ¿qué es lo que ocurre con los toros?. Los teoremas KAM y de Birkhoff- Poincaré nos dan la respuesta adecuada a esta pregunta, según el toro sea racional o no. Todos los toros racionales desaparecen pero algunos toros irracionales permanecen. Los toros cuya relación entre frecuencias sea suficientemente irracional en el sentido de las fracciones continuas, de tal forma que se cumpla la relación

$$\left\| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{m}{n} \right\| > \frac{k(\epsilon)}{n^{2.5}} \quad (2.6)$$

donde $k(\epsilon) \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ y m y n son enteros primos entre si, son estables bajo la perturbación ϵH_1 , cuando $\epsilon \ll 1$ (ver libro de M. Gutzwiller [30]). Cuando esto se cumple, el movimiento, originalmente en ese toro, se perturba ligeramente dando lugar a un toro un poco deformado. Para un ϵ suficientemente grande, la perturbación destruye todos los toros. El último toro que será destruido será aquel con la razón de frecuencia $\omega_1/\omega_2 = (\sqrt{5} - 1)/2$, la razón áurea de los griegos. Los toros racionales, por el contrario, son inestables bajo la perturbación y se destruyen siempre. Sin embargo, un número finito de sus trayectorias periódicas permanece. La mitad son estables y la otra mitad inestables. En la vecindad de cada una de las trayectorias estables, aparece un nuevo conjunto de toros más largos y delgados. Una vez más, de este conjunto de toros están ausentes los racionales, con la excepción

de unas pocas trayectorias periódicas, y así sucesivamente. En la vecindad de cada una de las trayectorias inestables pertenecientes a los toros racionales originales, el movimiento es extraño y complicado, pero no aleatorio. Ha aparecido el caos en el sistema. La estructura muestra propiedades de autosimilitud y también confiere propiedades fractales a la frontera entre el movimiento regular de los toros y el movimiento caótico de los espacios intermedios. Al aumentar ϵ , aumenta a su vez el tamaño del espacio de fases completamente caótico, alrededor de los toros racionales destruidos. Los nuevos toros creados disminuyen de tamaño hasta que, para un ϵ suficientemente grande, desaparecen completamente. En síntesis, para un ϵ pequeño una fracción finita del espacio de fases está ocupada por movimiento regular, una fracción finita está ocupada por movimiento caótico y la frontera entre ambas regiones es un fractal. Esta es la situación en un sistema hamiltoniano genérico. Este tipo de sistemas se dice que presentan un espacio de fases mezclado y conforme aumentamos la perturbación, llega un momento en que los residuos del movimiento regular desaparecen y todas las trayectorias periódicas se vuelven inestables. El espacio fase es completamente caótico y a esto es lo que se denomina un sistema K (de Kolmogorov).

Existen tres clases básicas de sistemas, cada una más caótica que la anterior. A continuación se enunciarán de forma breve las diferentes clases, sin entrar en los detalles matemáticos.

- a) Sistemas ergódicos: Un sistema es ergódico si su promedio espacial es igual a su promedio temporal. Esta es la definición que se corresponde con la idea original de Boltzmann para explicar la segunda ley de la termodinámica.
- b) Sistemas mezclados: Un sistema es mezclado si cada subconjunto del espacio de fases se dispersa de forma homogénea bajo la acción del sistema. Se trata de una propiedad fundamental de los sistemas caóticos, como ya hemos explicado.
- c) Sistemas K: Los sistemas K son los sistemas cuyo espacio de fases es completamente caótico. A ellos no se les aplica el teorema KAM, ya que cualquier posible perturbación ya ha destruido por completo los toros invariantes. Las órbitas periódicas son todas inestables.

2.3. Péndulo extensible

El propósito de incluir esta sección es discutir y ejemplificar algunas de las propiedades básicas del caos hamiltoniano utilizando un sistema aparentemente simple llamado péndulo extensible, ver Fig. 2.1. El sistema tiene sólo dos grados de libertad, pero exhibe un comportamiento dinámico extremadamente rico, que vamos a exponer con la ayuda de las secciones de Poincaré (ver más adelante) para mostrar la coexistencia del movimiento caótico y regular. Este problema se presentó a la comunidad hace mucho tiempo por Witt y Gorelik (1933) y ha sido estudiado por diversos autores (Núñez-Yépez et al 1990) [33] como una especie de paradigma de los sistemas no lineales. Su interés proviene de varias fuentes, tanto matemáticas como físicas.

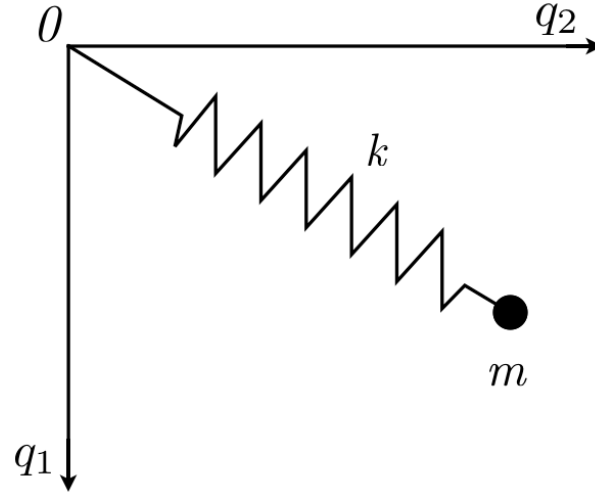


Figura 2.1: Diagrama del péndulo extensible. Sistema de referencia para las ecuaciones que se muestran en 2.10 y 2.11.

Una de las propuestas más interesantes es que puede servir como un análogo clásico del fenómeno de resonancias cuánticas observadas en algunas moléculas compuestas por tres átomos [34]. Por el momento sólo nos interesa el sistema para ejemplificar las propiedades mencionadas previamente. Para ello, definimos el Hamiltoniano del sistema a partir de la energía cinética y potencial

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad V = \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + y^2} - \ell)^2 - mgx \quad (2.7)$$

donde la longitud del resorte en reposo es $\ell = \ell_0 + mg/k$, ℓ_0 es la longitud del resorte sin estirar, m es la masa del cuerpo atado en el borde del resorte, g es la aceleración de la gravedad y k es la constante del resorte. Para expresar el Hamiltoniano en términos de coordenadas generalizadas, introducimos las siguientes coordenadas reescaladas: $q_1 = x/\ell$, $q_2 = y/\ell$ y el tiempo $\tau = \sqrt{k/mt}$ (unidades de ω_s). Por lo tanto, tenemos

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{k}{m}}\ell\dot{q}_1 \quad \& \quad \dot{y} = \sqrt{\frac{k}{m}}\ell\dot{q}_2, \quad (2.8)$$

Sustituyendo las nuevas transformaciones en la ecuación 2.7 y dividiendo el Hamiltoniano por $k\ell^2$ obtenemos

$$H_\epsilon = \frac{H}{k\ell^2} = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}(\sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2} - 1) - \mu^2 q_1, \quad (2.9)$$

donde el parámetro dimensional $\mu^2 = \frac{mg}{k\ell}$ nos permite variar, en lugar de los cuatro parámetros originales del sistema (m, g, k, ℓ), variar uno solo e incluir todos los posibles casos dinámicos. Este parámetro está limitado a tomar los valores $0 \leq \mu \leq 1$, ya que $\ell > \ell_0$. Las ecuaciones de movimiento se obtienen de la ecuación 2.9 para H_ϵ , a partir de las relaciones 2.3

$$\dot{q}_1 = p_1 \quad \dot{p}_1 = \mu^2 - q_1 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}\right), \quad (2.10)$$

y

$$\dot{q}_2 = p_2 \quad \dot{p}_1 = -q_2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}\right). \quad (2.11)$$

No analizaré en detalle todos los casos que puede exhibir el sistema, ya que no es éste el interés central de este escrito. Se podrá estudiar, por ejemplo, cómo el sistema muestra transiciones del tipo orden-caos-orden (las estructuras fractales que se mencionaron en la sección anterior podrán verse gráficamente), es decir, de segundo orden. En general, la solución de las ecuaciones 2.10 y 2.11, con sólo un par de excepciones para el valor de μ , no se pueden resolver exactamente. Por lo tanto, se utiliza un método numérico para integrar las ecuaciones de movimiento (Runge-Kutta es el método que hemos utilizado, del paquete Mathematica 8). Se debe enfatizar que no existe un método para predecir si un sistema hamiltoniano no lineal dado, con dos o más grados de libertad, se comportará caóticamente o no. Con esto en mente, la utilización de las secciones de Poincaré adquiere suma importancia.

2.3.1. Comportamiento regular y caótico en el péndulo extensible

Para analizar de forma visual lo que establece el teorema de KAM para el péndulo extensible, es necesario introducir lo que se conoce como sección de Poincaré. En la mecánica clásica uno de los métodos más ilustrativos para exhibir la dinámica de un sistema hamiltoniano son precisamente las secciones de Poincaré, estas secciones se construyen con los puntos que las trayectorias en una dirección dada atraviesan el espacio fase de un plano previamente seleccionado, nuestro caso el plano queda definido con la restricción de que $p_2 > 0$. El plano, llamado plano de Poincaré, tiene que ser escogido de tal manera que la trayectoria lo cruce varias veces. De esta manera, aunque las trayectorias de un sistema conservativo de N grados de libertad viven en un espacio $2N - 1$ dimensional, podemos reducir la dimensión a $2N - 2$ con el objeto de graficar el comportamiento de las trayectorias.

Con este método somos capaces de reducir la trayectoria del espacio fase a un mapeo discreto. Es evidente que esta técnica es muy útil en sistemas como el péndulo extensible, con solamente dos grados de libertad. Como la energía es una constante de movimiento, el número de variables del sistema se reduce de cuatro a tres (q_1, q_2, p_1) . En este caso, no existe ninguna constante de movimiento adicional, de modo que la trayectoria está en una hipersuperficie tridimensional de energía constante y su intersección con el plano de Poincaré tendería a llenar una cierta región bidimensional del plano. Cuando existe otra constante de movimiento independiente, entonces la trayectoria yace sobre una superficie de dos dimensiones (es decir, en la intersección de la superficie de energía constante y de la superficie asociada con la segunda cantidad) y, por lo tanto, los puntos que interseccionan la sección de Poincaré yacen en una curva suave. Esto corresponde al caso de una trayectoria regular. Pero, ¿qué pasa en el caso de una trayectoria irregular? En este caso en las secciones de Poincaré las órbitas regulares aparecen como puntos sobre una curva suave, mientras que cualquier trayectoria caótica aparece como una mancha de puntos llenando una cierta área (ver figura 2.2), para las secciones de Poincaré del péndulo extensible.

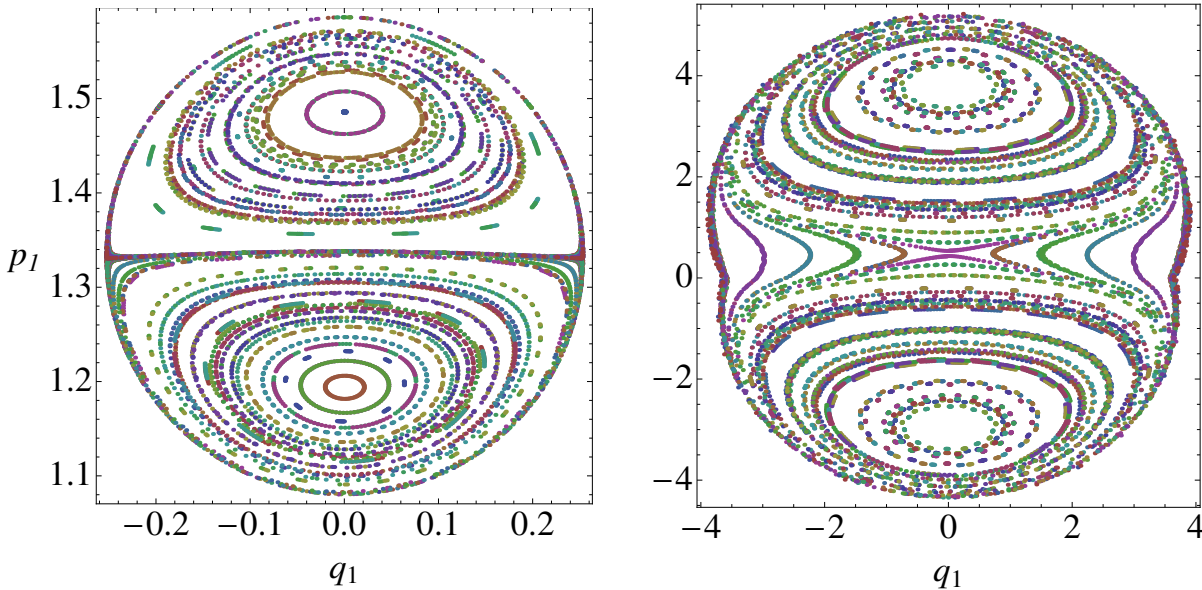


Figura 2.2: Secciones de Poincaré para el péndulo extensible, se puede ver el caso integrable y el caso caótico, también se observa la estructura fractal cuando ocurre una transición de orden-caos-orden.

2.4. Mapeos iterativos: Caos en sistemas dinámicos discretos

Además de en la mecánica Newtoniana, el caos aparece en muchos otros sistemas, entre los que destacan algunos algoritmos matemáticos sencillos como los sistemas dinámicos discretos, que consisten en una secuencia de números $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ generada a partir de la relación

$$\frac{dx}{dt} = F_r(x_n), \quad (2.12)$$

que describe a la mayoría de los sistemas físicos. Hemos visto que la palabra caos se refiere a la dinámica de sistemas que no exhiben ninguna periodicidad en sus comportamientos y son exponencialmente sensibles al cambio en sus condiciones iniciales. Este comportamiento para el caso de los sistemas discretos fue puesto en un contexto más amplio en el trabajo de Feigenbaum (1978, 1979) [35], quién mostró que para ciertos modelos no lineales discretos, puede transitarse de un régimen no caótico a un estado caótico, simplemente ajustando parámetros del modelo. La transición se da a través de una sucesión de cambios discretos en la dinámica del sistema, los cuales llamó bifurcaciones. Cambios en los valores de parámetros en modelos no lineales, comportamientos periódicos o estables, pueden cambiar a un régimen caótico donde los sistemas trazan trayectorias complicadas. Estas aparentemente no tienen periodos, son algunas veces fractales y son además muy sensibles a cambios en sus condiciones iniciales. En esta sección, para ejemplificar la fenomenología del caos en sistemas dinámicos

discretos, presento en forma breve los resultados del estudio, con el enfoque de series de tiempo, para el grifo goteante, el mapeo logístico y el mapeo logístico módulo 1, que ilustran la ruta al caos a través del doblamiento de periodos.

2.4.1. Grifo Goteante

En años recientes se ha incrementado el interés por estudiar la dinámica del grifo goteante. La sugerencia de que las gotas que caen de la boquilla del grifo podrían exhibir transiciones caóticas conforme el flujo es modificado, fue propuesta en Rössler [36] y verificada experimentalmente después por Shaw [37]. El grifo goteante exhibe un amplio rango de comportamientos dinámicos, incluyendo el doblamiento de período y la histéresis. Estos son característicos de un oscilador en relajación, cuando las oscilaciones internas se simulan durante la rápida transición que ocurre después de que se alcanza un umbral. Este comportamiento se puede encontrar en muchos sistemas físicos. Un ejemplo en concreto que muestra la universalidad del fenómeno es el grifo goteante con hormigas donde la formación de gotas de hormigas es observado bajo ciertas condiciones experimentales, lo que se tiene son agregados de hormigas al final de una varilla, el tamaño de estos agregados fluctúa de forma análoga a la dinámica del grifo goteante [38].

Una breve explicación del sistema físico original es la siguiente: en la boquilla del grifo el flujo continuo de agua se acumula hasta formar una gota que esta sujeta al peso y a la fuerza atractiva de las moléculas, pero alcanza un umbral donde la gota se separa y cae, estimulando vibraciones mecánicas que afectan el tiempo de formación de la siguiente gota. Por lo tanto, la gota que cae tiene influencia en el movimiento de la siguiente. Los intervalos de tiempo T_i entre las separaciones sucesivas de las gotas llegan a mostrar comportamientos regulares o caóticos para ciertos valores del flujo y esto se refleja básicamente haciendo un análisis de los mapeos de retorno T_i vs T_{i+1} , es decir, estudiando el comportamiento de la trayectoria que sigue el sistema.

Nos planteamos estudiar este sistema debido a que presenta caos a través de la ruta del doblamiento del periodo y ejemplifica las transiciones de un régimen regular a uno caótico. Una de las principales motivaciones para analizar al grifo fue caracterizar el comportamiento de las fluctuaciones para ciertos valores del flujo, y para ello usaremos un modelo que reproduce muchas de las características cualitativas del sistema real y exhibe atractores muy similares a aquéllos encontrados en experimentos reportados en la literatura [39, 40].

Simulación del Modelo

La dinámica es modelada por un movimiento unidimensional de una masa variable M , atada en una cuerda de constante elástica k , sujeta a la fuerza gravitacional Mg y a una fuerza de fricción que es proporcional a la velocidad v de la masa. El conjunto de ecuaciones diferenciales es

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{d(Mv)}{dt} = Mg - kx - bv, \quad \frac{dM}{dt} = R. \quad (2.13)$$

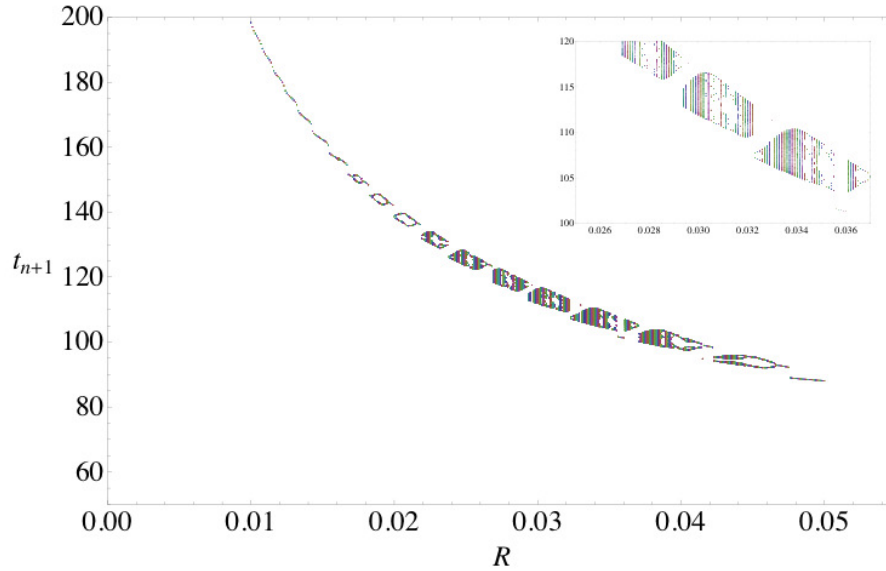


Figura 2.3: Diagrama de bifurcación del grifo goteante para ciertos valores de los parámetros (simulación numerica).

donde x es el centro de masa de la gota que se esta formando y R es el flujo. La constante k de la cuerda representa la tensión superficial y b la fricción entre el fluido y el grifo.

Cuando la posición de la gota excede un umbral x_c , la masa M se reduce por una cantidad proporcional a la velocidad de la gota. De esta forma se simula el goteo. La figura 2.3 es resultado de la integración numérica del modelo para ciertas condiciones iniciales. En la misma figura se muestra una parte del diagrama de bifurcación y una sección aumentada de la figura para ver la estructura fractal. Es importante mencionar que en la literatura hay un par de trabajos por parte de Penna [39], donde se reporta que para ciertos valores del flujo las fluctuaciones del sistemas muestran autocorrelaciones que decaen como $1/f$ en el espectro de potencias de la señal. Sin embargo, el modelo que utilizamos para obtener los datos no arrojó ninguna serie de tiempo con invariancia de escala del tipo $1/f$, a pesar de reproducir el diagrama de bifurcación reportado en la literatura. En nuestro caso las series de tiempo que representan los intervalos de goteo obtenidas con diferentes valores del parámetro R e inclusive para los mismos parámetros que reporta Penna, siguen teniendo un comportamiento periódico que no permite hacer un estudio significativo del espectro de Fourier.

Se realizaron varios intentos por reproducir las series de tiempo reportadas por Penna, pero estos no tuvieron éxito. Penna nos proporcionó uno de sus códigos, pero a pesar de ello se encontraron *ambigüedades* que no permitieron reproducir las series reportadas en su trabajo. Nuestros esfuerzos por medir directamente series de goteo mediante un láser también encontraron dificultades. Finalmente, optamos por estudiar un mapeo discreto que muestra la misma ruta al caos. Dicho mapeo está ampliamente estudiado en la literatura y es conocido como el mapeo logístico.

2.4.2. Mapeo Logístico

El mapeo logístico es un modelo discreto no lineal e iterativo, que describe la evolución de la población x_t de un ecosistema como función del tiempo t . Una breve demostración de como obtener este tipo de mapeo se describe en los siguientes párrafos.

Imaginemos que tenemos una población de conejos en un área limitada y que queremos saber en todo momento cuántos conejos se tiene. Vamos a suponer que el tiempo avanza en pasos, generaciones por ejemplo. Denotamos el número de conejos en la generación t como P_t , para cualquier valor de t . Por supuesto, el número de conejos que habrá en la generación t depende del número de conejos que ya estaban en la población antes de esa generación y que serán padres de los que se integrarán a la población en la generación t . Es decir, el número de conejos en la generación es una función del número de conejos en la generación $t - 1$. Esto podemos escribirlo como:

$$P_t = f(P_{t-1}) \quad (2.14)$$

donde f es una función. Lo primero que se nos ocurre es una tasa de crecimiento constante de la población, que denotamos por j , para que entonces ocurra:

$$P_t = jP_{t-1}. \quad (2.15)$$

Siguiendo esta regla de correspondencia podemos decir que al principio hay j conejos; luego, en la segunda generación, hay j^2 conejos; j^3 en la tercera generación y así sucesivamente. Pero esta regla de correspondencia no funciona correctamente porque la población de conejos no puede crecer indefinidamente, la naturaleza tiene límites y seguramente luego de un tiempo los conejos ya no tendrían alimento suficiente y la población disminuiría. Es decir, nuestra tasa j no puede tener un valor fijo debe depender del número de conejos de alguna manera, o sea que j debe ser función de P_t . Una opción simple es proponer:

$$j_t = k - \ell P_{t-1} \quad (2.16)$$

donde k y ℓ son constantes. Así, la tasa de crecimiento de la población se hace menor cuanto mayor sea la población. Reemplazando la j de la expresión 2.15 por esta nueva j_t tenemos:

$$P_t = kP_{t-1} - \ell P_{t-1}^2. \quad (2.17)$$

Si definimos $x_t = (\ell/k)P_t$, entonces podemos la expresión 2.17 como:

$$\frac{k}{\ell}x_t = k\frac{k}{\ell}x_{t-1} - \ell\frac{k^2}{\ell^2}x_{t-1}^2 = \frac{k^2}{\ell}x_{t-1}(1 - x_{t-1}) \quad (2.18)$$

lo que equivale a:

$$x_t = k x_{t-1}(1 - x_{t-1}), \quad (2.19)$$

expresión conocida como *ecuación logística*. De forma análoga podemos expresar la ecuación anterior de la siguiente forma

$$x_{n+1} = kx_n(1 - x_n), \quad (2.20)$$

donde el valor de x_{n+1} solamente depende del paso anterior x_n y su dominio es el conjunto de todos los números reales en el intervalo $x \in [0, 1]$. Además, el valor del parámetro está restringido al intervalo $0 < k \leq 4$, con k el parámetro de control.

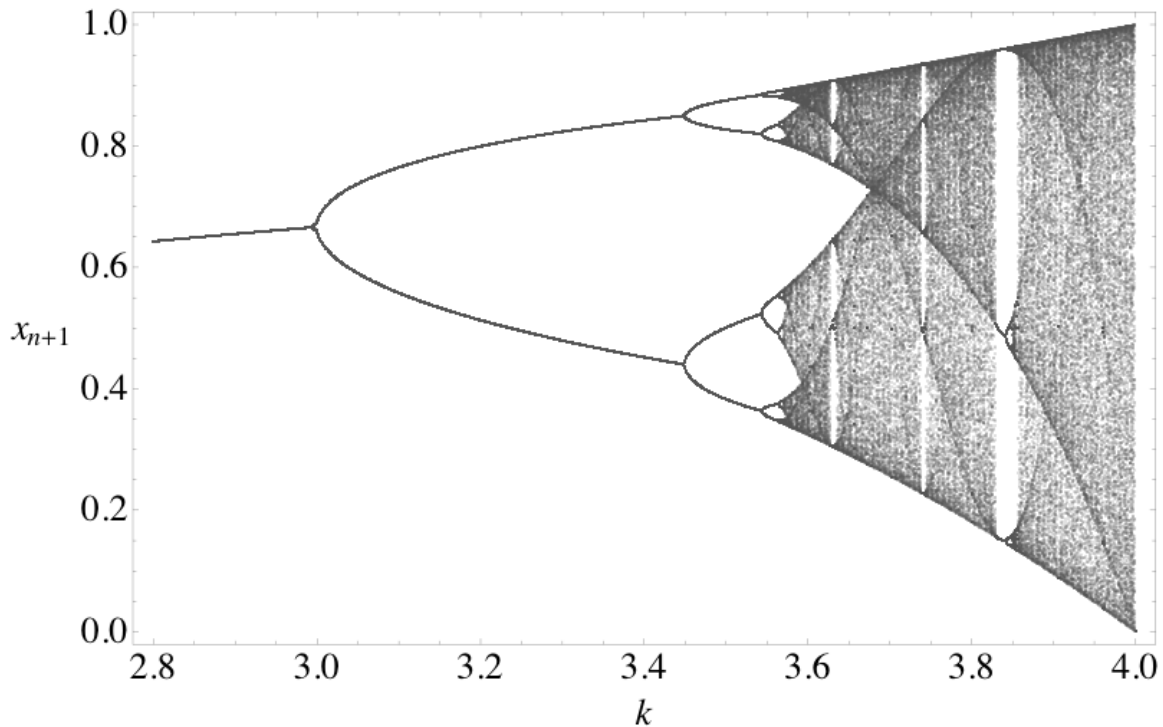


Figura 2.4: Diferentes comportamientos dinámicos observados en el Mapeo Logístico. Diagrama de bifurcación del mapeo, para valores de k en el intervalo $[2.7, 4]$.

El parámetro k juega un papel determinante en el comportamiento que x_n tiene conforme n se incrementa. En el modelo biológico cuantifica las capacidades reproductivas de los organismos. Este modelo es capaz de producir series de tiempo x_1, x_2, \dots, x_N con estructuras cada vez más complicadas a medida que k crece a partir de valores pequeños a los más grandes. Robert May [40] mostró que este tipo de mapeo exhibe un intervalo asombroso de comportamientos conforme se varía k (ver la Fig. 2.4). Para valores de k en el intervalo $[0, 3]$, la dinámica de x_n tiene un atractor de punto fijo, es decir, la población del ecosistema tiende a estabilizarse con el tiempo a un valor constante. Para valores intermedios en $3 < k < 3.569$ la dinámica es periódica, la población oscila entre dos o más valores. En el intervalo $3.569 < k < 4$ la dinámica es caótica, pero hay subsistemas valores de k para los cuales en este intervalo existe comportamiento periódico.

Nuestro objetivo de analizar el mapeo logístico es caracterizar el comportamiento dinámico del mapeo en los diferentes regímenes que se presentan al variar el parámetro k , con especial atención en los valores de k para los cuales ocurre una transición en el comportamiento dinámico. El estudio puede hacerse con la ayuda de los diagramas de bifurcación o

con los exponentes de Lyapunov. Ambos métodos son herramientas comúnmente usadas en la dinámica no lineal. Los diagramas de bifurcación visualizan algunas propiedades características de la solución asintótica de un sistema dinámico, en función del parámetro de control, permitiendo localizar dónde ocurren los cambios cualitativos en la solución asintótica. Por otra parte, el exponente de Lyapunov mide la sensibilidad que muestra el sistema a las condiciones iniciales.

El estudio de las fluctuaciones presentes en las series de tiempo del mapeo logístico, tanto para las regiones regulares como caóticas, reproducen lo reportado en la literatura. Sin embargo, para series de tiempo obtenidas a partir de valores de k donde de acuerdo al análisis del diagrama de bifurcación y los exponentes de Lyapunov se tiene una transición de un régimen regular a uno caótico, no se obtienen resultados concluyentes. Esencialmente, el problema con las series de tiempo obtenidas del mapeo es que continúan teniendo un parte regular predominante que no permite hacer un ajuste lineal significativo al espectro de Fourier (para ver detalles técnicos del análisis se puede consultar el artículo [7]).

A pesar de que tanto el grifo como el mapeo logístico muestran la misma ruta al caos (doblamiento del periodo), sus fluctuaciones tienen propiedades diferentes. Por una parte, las fluctuaciones presentes en el goteo para ciertos valores iniciales del experimento, muestran un comportamiento de ley de potencias $1/f$. Esto implica una invariancia de escala no trivial (ver estudio de Penna). Para las fluctuaciones en la series obtenidas con el mapeo, la invariancia de escala no está presente, al menos en el análisis reportado por el grupo. No obstante, ambos estudios proporcionan las herramientas necesarias para estudiar el mapeo presentado en la siguiente sección.

2.5. Mapeo Módulo 1

Los mapeos discretos pueden comportarse de una manera muy compleja, como se ha visto con el grifo y el mapeo logístico. En esta sección consideramos un mapeo iterativo muy sencillo, llamado mapeo módulo 1, consistente en mapear el intervalo $[0, 1]$ en si mismo. El mapeo logístico dado por la ecuación 2.20 produce series de tiempo periódicas o caóticas dependiendo del valor del parámetro k . Sin embargo, encontrar una región en la frontera del caos y el régimen periódico ha sido muy complicado [7]. El mapeo módulo 1 (Map Mod 1), también llamado *Manneville iteration map*

$$x_{n+1} = x_n + kx_n^2(\text{Mod}1), \quad (2.21)$$

por otro lado, produce series con propiedades de autosimilitud y ha sido usado como un modelo para ilustrar el fenómeno de intermitencia que muestran los sistemas caóticos (ver Fig. 5.15). Además, también ha sido utilizado para modelar ciertos sistemas físicos [41]. En este caso, las series de tiempo exhiben un comportamiento en el espectro de potencias del tipo $1/f$ para diferentes valores de su parámetro de control k [41, 42, 43, 44], a diferencia del mapeo logístico.

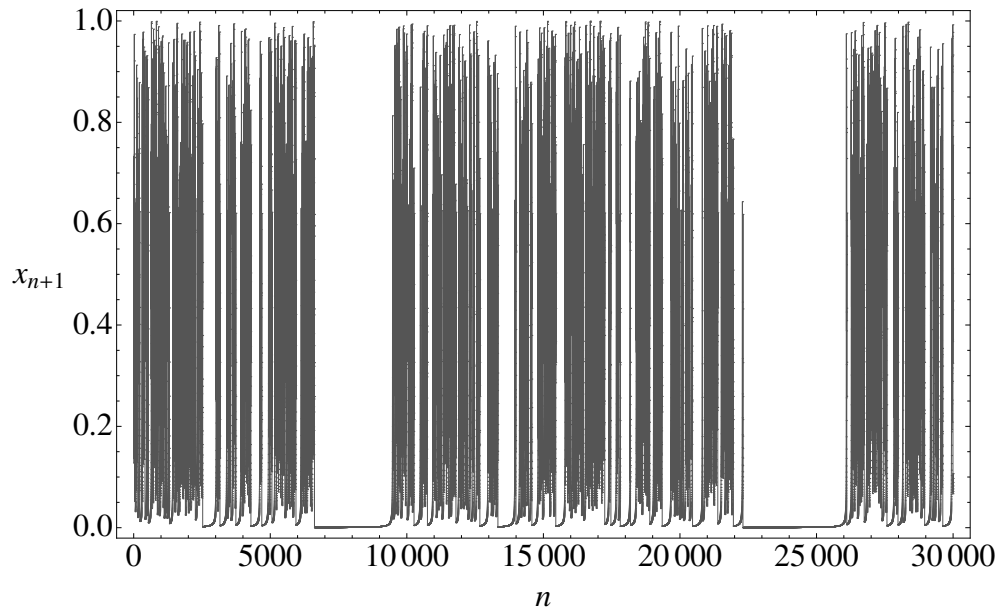


Figura 2.5: Serie de tiempo fractal del mapeo logístico módulo 1 para $k = 1$, consiste de paquetes de picos que contienen más paquetes en una escala menor.

Ambos mapeos discretos unidimensionales pertenecen a la clase de sistemas dinámicos deterministas que están limitados a un intervalo específico, los cuales a pesar de que son modelos muy simples muestran una alta sensibilidad a las condiciones iniciales. Definimos ahora el mapeo logístico módulo 1 (*mod-1 logistic map*)

$$x_{n+1} = k(x_n + x_n^2)(\text{mod } 1), \quad (2.22)$$

donde, de nuevo, el comportamiento dinámico de la serie de tiempo resultante depende del valor del parámetro de control k .

En particular, analizamos las series de tiempo cerca del estado (estado crítico) donde el sistema experimenta una transición repentina del orden al caos, a través de un cambio mínimo del parámetro de control. Estudiamos la dependencia de las condiciones iniciales con la iteración del mapeo, dado por la ecuación. 2.22, que produce una secuencia de valores en la que el valor de x_{n+1} en el paso $n+1$ depende solamente de forma explícita de el valor de x_n de la etapa anterior n y mapea el intervalo $[0, 1]$ en sí mismo. Los cambios en las correlaciones de largo alcance de las series de tiempo con este mapeo, son analizadas conforme el parámetro de control k es variado en pasos de 0,0125. En lo que sigue, vamos a considerar ensambles para diferentes valores de k con 10 diferentes condiciones iniciales y series de tiempo de 3000 elementos. Se presentarán los resultados relativos a cada conjunto.

Para $k < 1$, la serie de tiempo x_n es una función monótona decreciente que tiende a cero después de unos pocos cientos de iteraciones. Para $k = 1$, la serie de tiempo corresponde al mapeo original mod-1, es fractal e intermitente. Para $k > 1$, las serie de tiempo pierden su comportamiento intermitente conforme aumenta k .

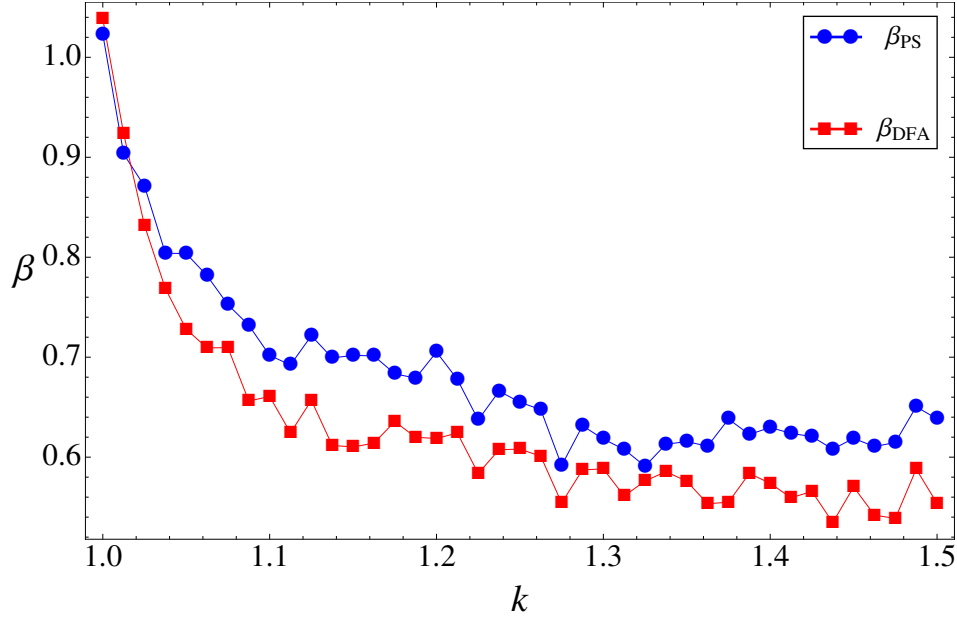


Figura 2.6: La fuerza de la correlación medida por el exponente β en las series de tiempo $x_n(k)$ en función de k para el mapeo de la ecuación 2.22. La línea azul (círculos) es el exponente de la densidad espectral β (β_{PS} del análisis espectral de Fourier), mientras que la línea roja (cuadros) $\beta = 2\alpha_{DFA} - 1$ (β_{DFA} del DFA).

Para cuantificar el comportamiento regular o caótico se calculó el valor estimado de el exponente de Lyapunov λ para la serie de tiempo $x_n(k)$ en función de k ,

$$\lambda(k) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \log |x'_{n+1}(k)|, \quad (2.23)$$

donde $x'_{n+1} = k(1 + 2x_n)$ es la derivada de x_{n+1} de la ecuación 2.22, con respecto al valor anterior x_n . Obtenemos $\lambda < 0$ para $k < 1$, lo que confirma que series de tiempo correspondientes a $x_n(k)$ son regulares, mientras que $\lambda > 0$ para $k > 1$ lo cual indica que las series de tiempo correspondientes a $x_n(k)$ son cada vez más caóticas conforme k es mayor. El borde del caos, $\lambda = 0$, se obtiene para $k = 1$. Estudiamos ahora la evolución de la correlación en las series de tiempo $x_n(k)$ en función del parámetro de control, mediante el análisis espectral y el método de DFA, con el exponente β de la ecuación 1.24 y el $\beta = 2\alpha_{DFA} - 1$ de la ecuación 1.21, respectivamente.

Para $k \neq 1$ ($k > 1$), la densidad espectral de potencia se aplana para las frecuencias pequeñas, y esta parte plana tiende a ser más grande conforme k se aleja de uno, lo que indica que una parte de la gran gama de correlaciones se ha perdido. Por otra parte, analizamos la parte de la densidad espectral donde las correlaciones se conservan. El análisis espectral y el DFA ofrecen resultados comparables, ver fig. 2.6.

Es importante señalar que antes de que k adquiriera el valor de uno, no tiene sentido calcular la densidad espectral de potencia, pues es un régimen periódico. Por otro lado, en lo que se

refiere a las series de tiempo caóticas ($k > 1$), la parte no plana de la densidad espectral a frecuencias más altas indica que se pierde gradualmente la intensidad de las correlaciones, $\beta \rightarrow 0$ (ruido blanco), para valores grandes de k . En la transición al caos, para $k = 1$, se observa un comportamiento $1/f$ ($\beta = 1$) que se extiende por toda la gama de las frecuencias. En conclusión, en el valor $k = 1$ de este sencillo sistema, se muestra que el punto de transición entre la regularidad y el caos está caracterizado por correlaciones de largo alcance del tipo $1/f$, mientras que sus regímenes límite se caracterizan por correlaciones fuertes y débiles, respectivamente, pero con un alcance menor.

Capítulo 3

Caos Cuántico & Teoría de Matrices Aleatorias

El término caos cuántico ha sido motivo de controversia en la literatura, ya que la ecuación de Schrödinger es lineal, lo que implica que la evolución del sistema es unitario y no se tiene sensibilidad a las condiciones iniciales en las soluciones del sistema. Lo anterior se ejemplifica considerando un sistema cuántico cualquiera, por ejemplo uno cuyo análogo clásico sea no integrable. La evolución temporal de dicho sistema queda determinada por su función de onda $\Psi(t)$, que está regida por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(t) = H(t) \Psi(t). \quad (3.1)$$

En general, el hamiltoniano $H(t)$ puede depender explícitamente del tiempo. En el caso de que esto no sea así, el sistema se denomina conservativo y su evolución temporal queda determinada por

$$\Psi(t) = \exp(-iH(t - t_0)/\hbar) \Psi(t_0), \quad (3.2)$$

donde t_0 representa el instante inicial y $\Psi(t_0)$ el estado del sistema en dicho instante. Toda la información disponible sobre la trayectoria $x(t)$ está codificada en la función de onda $\Psi(t)$. Una vez determinadas las ecuaciones de evolución del sistema, el siguiente paso para estudiar el comportamiento consiste en comparar dos trayectorias que se encuentran infinitamente próximas en el instante inicial x_0 , $y_0 = x_0 + \epsilon$. Sin embargo, la propia estructura de la mecánica cuántica descarta la posibilidad de un comportamiento caótico: el principio de incertidumbre $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ impide medir con precisión el momento y la posición de las partículas en todo instante del tiempo, de modo que no es posible definir un límite $\epsilon \rightarrow 0$ como se hace en la mecánica clásica. Así pues, la definición del caos a partir de la separación exponencial de las trayectorias no es posible en la mecánica cuántica, pues carece de sentido físico el concepto de trayectoria tal como se entiende en la mecánica clásica.

Otra posibilidad pasa por estudiar la sensibilidad a las condiciones iniciales, directamente a partir de la función de onda. Sin embargo, de nuevo las leyes de la mecánica cuántica imposibilitan la definición del caos; el operador de evolución temporal es unitario, de manera

que si $\Psi(t_0)$ y $\Phi(t_0)$ son dos condiciones iniciales cualquiera, su grado de solapamiento (es decir, su proximidad o su nivel de coincidencia) se mantiene constante a través del tiempo

$$\langle \Psi(t_0) | \Phi(t_0) \rangle = \langle \Psi(t) | \Phi(t) \rangle \quad \forall t, \quad (3.3)$$

con independencia de cuál sea el hamiltoniano del sistema. Por lo tanto, no se puede definir el caos en la mecánica cuántica a partir de su sensibilidad a las condiciones iniciales.

A pesar de lo mencionado en los párrafos anteriores, existen alternativas para definir el caos en la mecánica cuántica a partir de una fenomenología semejante a la que existe en mecánica clásica. En particular, es posible estudiar la estabilidad del movimiento en función de una pequeña perturbación en el hamiltoniano [45]. La validez de esta alternativa a la definición clásica en función de la sensibilidad a las condiciones iniciales está justificada porque en la mecánica clásica la estabilidad de las trayectorias frente a perturbaciones en el hamiltoniano es equivalente a la sensibilidad sobre las condiciones iniciales: los sistemas integrables son estables frente a este tipo de perturbaciones; los sistemas caóticos presentan una inestabilidad exponencial. En mecánica cuántica, la sensibilidad frente a perturbaciones se mide mediante la fidelidad del movimiento, pero esta no se abordará en este escrito. Se puede leer un estudio detallado de esto en la referencia [46]. A pesar de los intentos en esta línea de investigación, la posibilidad de definir el caos cuántico de forma rigurosa utilizando la sensibilidad a pequeños cambios del hamiltoniano no está suficientemente desarrollada todavía. En la literatura científica sobre el tema, solamente existen ejemplos de sistemas concretos pero no una teoría general sobre la inestabilidad del hamiltoniano ante pequeñas perturbaciones. Una definición rigurosa presenta el problema de cómo definir la perturbación de manera apropiada, ya que cada hamiltoniano tiene propiedades distintas ante la misma perturbación y ante perturbaciones de la misma intensidad. Otra característica importante del caos hamiltoniano son las propiedades del espacio fase de un sistema que cumple el teorema KAM. En mecánica cuántica, debido al principio de indeterminación de Heisenberg, nuestro espacio fase está discretizado en celdas de volumen h^N , por lo que la frontera fractal entre el movimiento regular y caótico, que hemos visto en la sección 2.2 y que es esencial para caracterizar el caso hamiltoniano, desaparece.

Estas y otras dificultades provocan que no exista todavía ninguna definición de caos cuántico universalmente aceptada. En buena parte de la literatura simplemente se define el caos cuántico cuando hablamos de lo que sucede con los sistemas cuánticos cuyo análogo clásico es caótico [3]. Esta definición no incluye a sistemas sin límite clásico preciso, como los sistemas de muchas partículas en los que la estadística cuántica juega un papel fundamental. Gran parte de la investigación en caos cuántico se ha efectuado en el límite semiclásico y en este contexto Berry [47] propuso una de las definiciones más aceptadas de caos cuántico, al que denominó *caología cuántica*. La caología cuántica es el estudio del comportamiento semiclásico característico de los sistemas cuyo movimiento clásico exhibe caos [48].

La principal herramienta del caos semiclásico es la fórmula de la traza de Gutzwiller [30]. Ya en 1917, en un artículo pionero en el campo y que fue ignorado durante muchos años [49], Einstein advertía que la teoría de cuantización semiclásica no tenía sentido para sistemas no

integrables. La formula de Gutzwiller resuelve este problema mediante el cálculo de un observable puramente cuántico, como es la densidad de niveles, a partir de cantidades puramente clásicas, como son las órbitas periódicas del sistema clásico igualándolos en el límite $\hbar \rightarrow 0$.

El principio de correspondencia indica que la mecánica clásica debe de aparecer como límite de la mecánica cuántica para escalas grandes comparadas con la longitud de onda de De Broglie. Debido a que en el caso cuántico las trayectorias dejan de tener sentido, se debe encontrar una forma alterna de medir la inestabilidad del sistema como lo hace el coeficiente de Lyapunov para el caso clásico. Como hemos visto, no se puede caracterizar el caos en mecánica cuántica a base de una fenomenología análoga a la clásica. Por otra parte también se ha estudiado en la literatura trazas (o evidencias) del caos en algunos observables cuánticos, como el módulo al cuadrado de la función de onda o el espectro de energía. En lo que resta de la tesis nos centraremos básicamente en el estudio del caos cuántico basado en el análisis del espectro de energías.

Caos en el espectro de energías

La magnitud quizá más representativa y más fácil de medir de un sistema cuántico es el espectro de energías. Al contrario de lo que sucede con la función de onda [50], a primera vista no parece posible encontrar una correspondencia entre el espectro de energías de un sistema cuántico y la dinámica de su análogo clásico; en la mecánica clásica el sistema puede tener cualquier energía, cuya magnitud no es más que un simple parámetro. Sin embargo, la característica más conocida y universal de lo que se conoce como *caos cuántico*¹, es precisamente el comportamiento estadístico del espectro (discreto) de energías en función de si el análogo clásico del sistema cuántico es integrable o caótico. No detallaremos aquí el estudio de las trazas del caos en el espectro de energías, para estudiar las propiedades universales de los sistemas cuánticos cuyo análogo clásico es integrable [47] y lo mismo para los sistemas clásicamente caóticos [3]. La conclusión importante de ambos estudios para el desarrollo y el entendimiento de los resultados presentados en esta tesis, es que las propiedades estadísticas del espectro de energías son universales y diferentes según la dinámica del análogo clásico.

En 1973, Percival [53] conjeturó que existen dos tipos de espectro de energías para un sistema ligado con más de un grado de libertad. El espectro regular, que aparece cuando el movimiento clásico es integrable y el espectro irregular, que sucede cuando no existen suficientes constantes de movimiento. La principal diferencia entre el comportamiento del espectro entre sistemas integrables y aquellos que no lo son es la posibilidad de que los niveles se crucen cuando variamos cierto parámetro del sistema. Si el sistema es integrable, cada nivel viene caracterizado por tantos números cuánticos como grados de libertad tiene

¹Esta terminología es aún objeto de controversias. En 1989 los científicos más destacados del campo se reunieron para debatir sus características y su terminología. La reunión se hizo bajo el título de caos y física cuántica [51]. Al final, el nombre de caos cuántico acabó por aceptarse de manera casi universal, descartándose otras alternativas, como *caología cuántica* [52], quizá más significativas.

el sistema. En sistemas integrables genéricos, los niveles se comportan como si no estuvieran correlacionados y se pueden producir cruces entre ellos. La excepción a esta regla son los sistemas de osciladores. En sistemas no integrables los niveles de energía están muy correlacionados si los estados poseen las mismas propiedades de simetría y los cruces no se pueden producir al variar algún parámetro del sistema. En lugar de ellos tenemos los denominados cruces evitados, que producen repulsión entre los niveles del espectro. Esta repulsión de niveles se enlaza directamente con la teoría de matrices aleatorias, de la que hablaremos en el próximo apartado. El espectro de energías constituye un observable puramente cuántico, cuyas propiedades estadísticas nos permiten distinguir entre movimiento regular y caótico.

La universalidad de las propiedades estadísticas de las fluctuaciones espectrales nos lleva a buscar modelos genéricos que describan los sistemas caóticos y los sistemas integrables. Desde el trabajo de Bohigas, Giannoni y Schmit [3], la teoría de matrices aleatorias (RMT)² es el modelo por antonomasia en la descripción del caos cuántico. A continuación repasamos su base conceptual y presentamos sus resultados más importantes. Aspectos más técnicos se describen en el Apéndice B.1.

3.1. Aplicación de la teoría de matrices aleatorias al caos cuántico

La teoría de matrices aleatorias nació entre finales de los años cincuenta y principios de los sesenta, gracias a los trabajos de Wigner y Dyson [54]. Su objetivo consiste en formular una teoría estadística para los niveles excitados de los núcleos pesados donde el modelo de capas (ver apéndice C) y sus refinamientos no son aplicables; se pretende así sacrificar el conocimiento exacto de cada uno de los niveles por una descripción de sus propiedades estadísticas. La forma de llevar adelante este objetivo es renunciando al conocimiento exacto, no sólo del sistema concreto bajo estudio, sino también de su naturaleza. El núcleo complejo se modela como una caja negra en la que sus partículas interactúan de forma desconocida. La idea principal es reemplazar el hamiltoniano del sistema que estamos investigando, por una colectividad de hamiltonianos aleatorios con las mismas propiedades de simetría. Esta base conceptual conduce a escribir el hamiltoniano del núcleo como una matriz cuyos componentes son elegidos al azar, a partir de una cierta distribución de probabilidad, considerando como única restricción las simetrías generales. Es importante resaltar que no se presupone ningún detalle de la dinámica del sistema. Un ejemplo sencillo es considerar la matriz del hamiltoniano para un sistema cuántico invariante ante inversión temporal, en cuyo caso la matriz del hamiltoniano es en general hermiteana, pero como consecuencia de la simetría es además una matriz real.

Las primeras aplicaciones de la teoría consistieron en explicar resultados de la física nuclear, que en ese momento era la única parte de la física cuyos resultados experimentales tenían la suficiente resolución a energías apropiadas [55]. Muy recientemente se ha puesto en duda

²RMT por sus siglas en inglés; Random matrix theory.

algunas de las predicciones de RMT a la distribución de resonancias nucleares por captura de neutrones [56].

Más tarde la teoría ha sido aplicada con éxito a las propiedades de las fluctuaciones espectrales en átomos y moléculas complejas [57]. Dependiendo de la simetría del sistema debemos considerar una colectividad de matrices aleatorias distintas, la colectividad de matrices ortogonales gaussianas (Gaussian Orthogonal Ensemble o GOE), la colectividad de matrices unitarias gaussianas (Gaussian Unitary Ensemble o GUE) o la colectividad de matrices simplécticas gaussianas (Gaussian Symplectic Ensemble o GSE). Una observación importante es que los resultados de RMT se aplican no sólo a sistemas complejos con muchos grados de libertad, sino también a sistemas con pocos grados de libertad.

El interés en la teoría resurgió cuando Bohigas, Giannoni y Schmit [3] propusieron su famosa conjetura: "Las fluctuaciones del espectro de sistemas cuánticos invariantes bajo inversión temporal, cuyos análogos clásicos son sistemas caóticos, son iguales a las predichas por GOE ". A pesar de existir algunos contraejemplos, la teoría ha sido ampliamente utilizada con éxito. En lo que resta de este capítulo nos enfocaremos solamente a algunos conceptos básicos de la teoría de matrices aleatorias que utilizamos más adelante.

3.2. Elementos básicos de la teoría de matrices aleatorias (RMT)

En esta sección se introduce algunos principios básicos de la teoría de matrices aleatorias y algunas de las técnicas matemáticas más usadas para calcular funciones de correlación espectral. Discutimos los ensambles Gaussianos de la teoría de matrices aleatorias, así como algunas medidas de las fluctuaciones del espectro que usaremos para describir los datos numéricos. Para ilustrar la diferencia entre una secuencia de niveles no correlacionados y un espectro rígido con repulsión de niveles, comparamos las medidas para las correlaciones de corto alcance y largo alcance para los ensambles Gaussianos. En particular, se muestran los resultados para GOE y GDE. Cada uno de los ensambles Gaussianos describen sistemas cuánticos que obedecen propiedades de simetría específicas. Algunas propiedades importantes de la simetría espacial y temporal en la física cuántica se tratan en el Apéndice B.

3.2.1. Ensamblés Gaussianos

En esta sección definimos los ensambles Gaussianos de matrices aleatorias y se bosqueja la manera como se obtiene la distribución de probabilidad conjunta para los eigenvalores de las matrices aleatorias. De la discusión anterior, se sigue que las simetrías de un sistema cuántico están reflejadas en la estructura de la matriz de su hamiltoniano. La entrada de información en los ensambles de matrices aleatorias Gaussianas son de este tipo.

Hay tres Ensamblés Gaussianos: El ensamble ortogonal gaussiano (*GOE*) de matrices reales simétricas, el ensamble unitario gaussiano (*GUE*) de matrices hermiteanas y el en-

Simetrías	Momento Angular	Hamiltoniano	Ensamble	γ
Inversión Temporal	Entero	Simétrica Real	GOE	1
Inversión Temporal, Simetría Rotacional	Semi-Entero	Simétrica Real	GOE	1
Inversión Temporal, No Simetría Rota- cional	Semi-Entero	Cuaterniona Real	GSE	4
Ninguna	Cualquiera	Hermiteana	GUE	2

Tabla 3.1: Agrupando los sistemas cuánticos por sus simetrías y valor de momento angular, se muestra la estructura de la matriz hamiltoniana y su correspondiente ensamble gaussiano.

samble simpléctico gaussiano (*GSE*) de matrices hermiteanas reales cuaternionas, ver tabla 3.1 [2] donde se resumen las propiedades de los ensambles mencionados.

Los ensambles gaussianos de matrices aleatorias $N \times N$ están definidos por los siguientes requisitos:

1. La probabilidad $P(H)dH$ es invariante bajo cualquier transformación $H \rightarrow U^{-1}HU$, donde U es cualquier matriz ortogonal ($\gamma = 1$), unitaria ($\gamma = 2$) o simpléctica ($\gamma = 4$). Esto significa que si $H' \rightarrow U^{-1}HU$ donde U pertenece al grupo unitario $U(N; \gamma)$, entonces $P(H)dH = P(H')dH'$.
2. Los elementos de matriz que no están relacionados por la simetría de la matriz son estadísticamente independientes.

Para las matrices Hermiteanas el elemento de volumen dH esta dado como

$$dH = \prod_i dH_{ii} \prod_{i < j} d(\text{Re}H_{ij})d(\text{Im}H_{ij}). \quad (3.4)$$

Productos similares de variables independientes dan los elementos de volumen para matrices simétricas y matrices Hermiteanas reales cuaternionas, *GOE* y *GSE* respectivamente. La invariancia unitaria implica que ningún estado juega un rol especial en el problema y el requisito de independencia estadística de los elementos de matriz es conveniente para hacer el problema tratable matemáticamente. Los dos requisitos en la definición anterior restringen la distribución de probabilidad $P_{N\gamma}(H)$ para que tenga la siguiente forma:

$$P_{N\gamma}(H) = \tilde{C}_{N\gamma} \exp\left[-\frac{\gamma}{2} \text{Tr}(H^2)\right], \quad (3.5)$$

lo que significa que los elementos de matriz independientes son distribuidos de forma gaussiana.

3.2.2. Ensamble Ortogonal Gaussiano GOE

Presentamos la estructura de la distribución de probabilidad conjunta de los eigenvalores de *GOE* y mostramos resultados del espectro para este tipo de ensamble, ya que más adelante se presentan resultados utilizando *GOE*. En el Apéndice B.1 una demostración breve, descrita en pocos pasos, se muestra para el caso general.

La distribución de Wigner ³ para el espaciamiento entre vecinos más cercanos se observa en una gran variedad de sistemas físicos, desde un núcleo atómico hasta un billar de microondas, lo que sugiere que los detalles de la interacción no son relevantes para determinarla. En la teoría de matrices aleatorias este hecho es tomado en cuenta remplazando el hamiltoniano del sistema por una matriz cuyos elementos han sido escogidos aleatoriamente, lo que es, sin duda, la más grande simplificación posible. No somos libres de fijar los elementos de matriz, ya que se debe cumplir con pertenecer a las clases de universalidad discutidas anteriormente. Para la clase ortogonal, el hamiltoniano puede ser representado por una matriz simétrica real con $N(N + 1)/2$ elementos de matriz independientes. En un sistema totalmente caótico, un conjunto de funciones base es a priori tan adecuado como cualquier otro. La probabilidad de correlación $P(H_{11}, \dots, H_{NN})$ para los elementos de matriz debe, por lo tanto, no depender del conjunto de funciones base aplicadas, lo que nos guía a la propiedad de invariancia

$$P(H_{11}, \dots, H_{NN}) = P(H'_{11}, \dots, H'_{NN}) \quad (3.6)$$

donde H' se obtiene de H por una transformación ortogonal $H = OHO^T$ con $OO^T = 1$. Las funciones de H_{nm} que son invariantes bajo transformaciones ortogonales pueden depender solamente de potencias de la traza de H . Lo anterior es una consecuencia de la propiedad de conmutatividad

$$Tr(OAO^T) = Tr(AO^TO) = Tr(A) \quad (3.7)$$

de la traza. Así $P(H_{11}, \dots, H_{NN})$ puede ser expresada como

$$P(H_{11}, \dots, H_{NN}) = f [Tr(H), Tr(H^2), \dots]. \quad (3.8)$$

Por otra parte, pedimos que los elementos de matriz no estén correlacionados

$$P(H_{11}, \dots, H_{NN}) = P(H_{11})P(H_{12})\dots P(H_{NN}). \quad (3.9)$$

La única forma funcional posible para $P(H_{11}, \dots, H_{NN})$ que obedece ambas ecuaciones 3.8 y 3.9, esta dada por

$$P(H_{11}, \dots, H_{NN}) = C \exp[-BTr(H) - ATr(H^2)]. \quad (3.10)$$

Sin pérdida de generalidad, uno puede tomar $B = 0$, puesto que siempre es posible desplazar la energía promedio, $1/N Tr(H)$, a cero. El factor C se fija con la condición de normalización

$$\int P(H_{11}, \dots, H_{NN}) dH_{11} \dots dH_{NN} = 1 \quad (3.11)$$

³La distribución de referencia en RMT para caracterizar los sistemas cuánticos que tiene un análogo clásico, cuya dinámica es caótica.

Para el caso ortogonal, los elementos de matriz fuera de la diagonal ocurren dos veces en la función exponencial, cada uno contribuyendo con un prefactor de normalización $\sqrt{2A/\pi}$, mientras que el factor de normalización de los elementos de la diagonal esta dado por $\sqrt{A/\pi}$. Finalmente tenemos

$$P(H_{11}, \dots, H_{NN}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}} \exp\left(-A \sum_{n,m} H_{nm}^2\right), \quad (3.12)$$

donde la constante A puede ser expresada en términos de la variancia tanto para los elementos de matriz diagonal

$$\langle H_{nn}^2 \rangle = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \int H_{nn}^2 \exp(-AH_{nn}^2) dH_{nn} = \frac{1}{2A}, \quad (3.13)$$

o en base de los elementos no diagonales

$$\langle H_{nm}^2 \rangle = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \int H_{nm}^2 \exp(-AH_{nm}^2) dH_{nm} = \frac{1}{4A}. \quad (3.14)$$

El conjunto de todas las matrices aleatorias reales con elementos de matriz que obedecen la función distribución 3.12 definen el *Ensamble Ortogonal Gaussiano* (GOE).

3.3. Correlaciones Espectrales

La teoría de matrices aleatorias se enfoca en estudiar las fluctuaciones espectrales para dar resultados universales. El nivel de las fluctuaciones está descrito por las funciones de correlación. El libro de Mehta [2] es la referencia básica en la materia. Antes de abordar algunas estadísticas de la RMT, haré una breve descripción del método de reescalado (*unfolding*), pues para poder comparar nuestros resultados con los resultados generales de RMT se debe realizar este paso para poder obtener las fluctuaciones espectrales. Las siguientes secciones de este capítulo se basan especialmente en medidas estadísticas que aplicaremos en el análisis del espectro nuclear del ^{48}Ca .

Para realizar cualquier tipo de análisis estadístico en las fluctuaciones espectrales de sistemas cuánticos, es necesario efectuar una transformación al espectro con el objetivo de adquirir un carácter universal, y esto se logra a través del método de reescalado. La idea principal consiste en descomponer la densidad de niveles de energía $\rho(E) = \sum_{n=1}^N \delta(E - E_n)$ en una parte suave y una parte fluctuante. La parte suave nos indica la escala de energía apropiada localmente para el espectro que estamos analizando. Es necesario eliminar ésta, para quedarnos con la parte fluctuante normalizada que es la que podemos estudiar y comparar con la teoría de RMT.

Una descripción general del método es la siguiente; para eliminar el comportamiento promedio de la densidad de niveles de energía, primero debemos caracterizar la densidad de niveles promedio $\bar{\rho}(E)$, es decir, dependiendo el caso que se esté estudiando, se tiene una propiedad específica del sistema cuántico y debe ser sustraída para comparar resultados en diferentes

sistemas. En la elección de esta densidad promedio radican las principales dificultades del reescalado; un error en este paso puede llevar a una caracterización equivocada de las propiedades estadísticas de las fluctuaciones espectrales. Nosotros hemos podido verificar este paso con el análisis del espectro nuclear del ^{48}Ca , ver capítulo 4. Después del paso anterior, debemos reescalar el espectro con el espaciamiento promedio, transformando las energías del sistema E_i en las variables adimensionales ϵ_i con una densidad promedio unitaria. Así, se resta la parte suave del espectro y se consideran sólo las fluctuaciones. En la siguiente sección se abordará con más detalle el procedimiento de reescalado y en la sección 5.3 del capítulo 5 se propondrá una nueva metodología para llevar a cabo dicho procedimiento. Todas las medidas estadísticas utilizadas para comparar con la teoría de matrices aleatorias se calculan a partir de estas nuevas energías obtenidas después de haber hecho el reescalado.

Las fluctuaciones del espectro se miden mediante estadísticos. Siguiendo a Mehta, definiremos un estadístico espectral como un número W que puede calcularse utilizando solamente una secuencia de niveles sin más información. Su valor medio $\langle W \rangle$ y su varianza $V_W = \langle (W - \langle W \rangle)^2 \rangle$, deben conocerse a partir de un modelo teórico. Para que un estadístico sea adecuado, la desviación media entre el valor de W observado y el esperado debe ser pequeña, si el modelo teórico es apropiado. Los estadísticos más importantes que se utilizan en el estudio del caos cuántico son la $P(s)$ y la Δ_3 . La $P(s)$ se define como la distribución de espaciamientos de primeros vecinos s_i , siendo $s_i = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i$, que mide las correlaciones de corto alcance en el espectro y la repulsión de los niveles. Como hemos dicho antes, los sistemas no integrables presentan repulsión entre los niveles mientras que los sistemas integrables no, a menos que los niveles correspondan a los mismos números cuánticos. Una buena aproximación a la $P(s)$ correspondiente al GOE es la distribución de Wigner

$$P(s) = \frac{\pi}{2} s e^{\frac{\pi}{4} s^2}. \quad (3.15)$$

Según la conjetura BGS, la distribución de Wigner se corresponde con el caso caótico. En este caso, $P(0) = 0$ y tenemos una repulsión entre niveles lineal $P(s) \sim s$ cuando $s \rightarrow 0$. En el caso regular, por el contrario, los niveles se comportan como si no estuvieran correlacionados y la $P(s)$ sigue la ley de Poisson e^{-s} , similar a ley de desintegración de núcleos radiactivos. La estadística de Poisson se corresponde con el caso regular y no se presenta repulsión, $P(0) = 1$. La repulsión caracteriza a las distintas colectividades de matrices aleatorias. Si en lugar del GOE se calcula la distribución de Wigner, para GUE obtenemos una repulsión cuadrática $P(s) \sim s^2$ y para GSE el resultado es una repulsión cuártica $P(s) \sim s^4$.

Para estadísticos intermedios, que se corresponderían a sistemas KAM con el espacio de fases mezclado con partes regulares y partes caóticas, la repulsión de los niveles es intermedia entre Wigner y Poisson. Se han desarrollado numerosas distribuciones que interpolan entre los dos casos extremos, aunque ninguna es completamente satisfactoria. Teóricamente sirven para estimar cuantitativamente el grado de caos de un sistema cuántico. La más utilizada es la distribución de Brody (físico mexicano) [58].

$$p(s, \omega) = \alpha(\omega + 1) s^\omega \exp(-\alpha s^{\omega+1}), \quad \alpha = \left(\Gamma \left[\frac{\omega + 2}{\omega + 1} \right] \right)^{\omega+1}. \quad (3.16)$$

Esta distribución interpola entre el caso Poisson, que corresponde a $\omega = 0$ y el caso Wigner, que se corresponde con $\omega = 1$. En realidad, es conveniente remarcar que la $P(s)$ exacta para el GOE se puede ajustar a la distribución de Brody con una $\omega = 0.957$ [59]. La distribución de Wigner es solamente una buena aproximación analítica. El parámetro ω se denomina parámetro de repulsión, debido a que mide el comportamiento de la distribución de espaciamientos de primeros vecinos a cortas distancias. Otras fórmulas han sido propuestas en la literatura de interpolación, como la fórmula de Izrailev [60] y Chau [61]. En esta dirección, en nuestro trabajo con P. Stránský [9] se muestra la relación del parámetro de Brody con la fracción de llenado, la cual es una medida ampliamente usada en mecánica clásica para determinar si el sistema es regular o caótico. P. Stránský y sus colaboradores mostraron por primera vez esta relación, que se puede estudiar en detalle en las referencias [62, 63].

En el capítulo 5 se mostrará otra manera de cuantificar el caos cuántico dado por RMT, modificando correlaciones de los eigenvalores de una matriz tipo GOE, utilizando un factor de corte para los términos fuera de la diagonal y explotando la propiedad de autosimilitud.

3.3.1. Distribución de espaciamientos de primeros vecinos: correlaciones de corto alcance

La distribución de espaciamientos de primeros vecinos $P(s)$, se define como la distribución de las diferencias de las energías contiguas $s_j = \epsilon_{j+1} - \epsilon_j$. Utilizando GOE con dimensión $N = 2$, Wigner derivó una aproximación a la distribución $P(s)$ para las colectividades gaussianas, cuando $N \rightarrow \infty$. La distribución de Wigner para GOE es

$$P(s) = \frac{\pi}{2} s e^{\frac{\pi}{4} s^2}. \quad (3.17)$$

Cuando los eigenvalores no están correlacionados, se tiene que $P(s)$ sigue la distribución de Poisson

$$P(s) = e^{-s}. \quad (3.18)$$

Las distribuciones $P(s)$ para los tres tipos de clases de universalidad se puede derivar de forma completamente rigurosa. El resultado, sin embargo, sólo se puede expresar en forma de serie de potencias y la derivación es muy compleja (ver libro de Metha). La Fig. 3.1 muestra la $P(s)$ de matrices GDE y GOE para caracterizar la distribución de primeros vecinos.

3.3.2. Las Estadísticas \sum^2 y $\Delta_3(L)$: correlaciones de largo alcance

Consideremos ahora el número de niveles en un intervalo de longitud L , $n(\epsilon, L)$. Si definimos después de realizar el reescalado la densidad media, esta estará normalizada a la unidad. Por lo tanto, $\bar{n}(\epsilon, L) = L$, la varianza del número de niveles en un intervalo de longitud L está definida como

$$\sum^2(L) = \langle n(\epsilon, L)^2 \rangle - L^2, \quad (3.19)$$

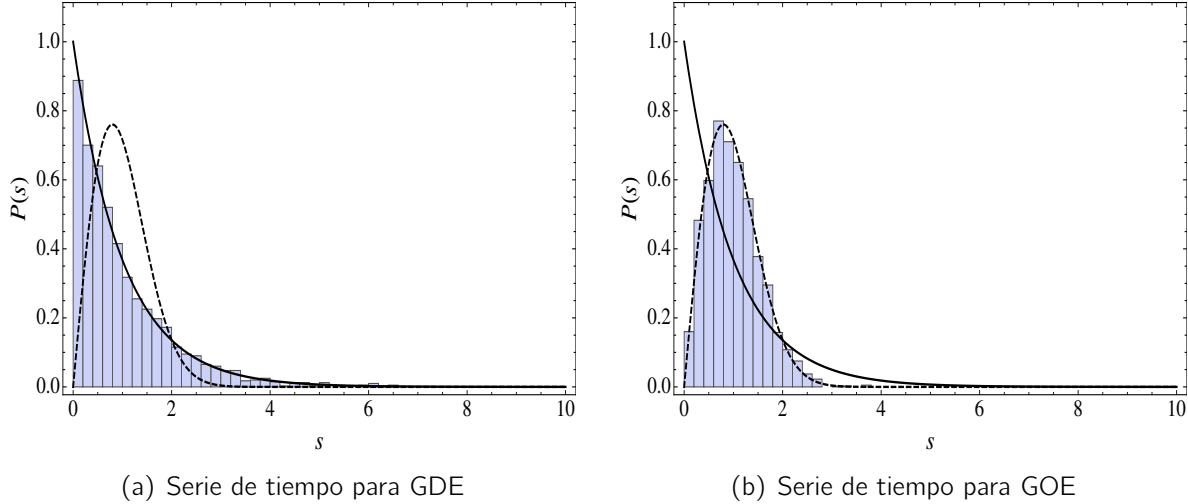


Figura 3.1: En esta figura se muestra la distribución de probabilidad de los vecinos más cercanos, para ambos casos *GDE* y *GOE*, respectivamente

podemos expresar $n(E, L)$ como

$$n(\epsilon, L)^2 = \int_{\epsilon-L/2}^{\epsilon+L/2} d\epsilon_1 \int_{\epsilon-L/2}^{\epsilon+L/2} d\epsilon_2 \langle \rho(\epsilon_1)\rho(\epsilon_2) \rangle \quad (3.20)$$

cuando $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ entonces $\langle \rho(\epsilon_1)\rho(\epsilon_2) \rangle$ es la probabilidad promedio de encontrar a dos eigenvalores en las energías ϵ_1 y ϵ_2 , independientemente de donde estén los demás.

Para las distribuciones gaussianas, la repulsión de niveles tiende a igualar las distancias entre los eigenvalores vecinos. La varianza en el número de niveles crece solamente en forma logarítmica en lugar de hacerlo en forma lineal.

Otra cantidad basada en la función de correlación a 2 puntos (ver forma general en el apéndice B.3), que nos proporciona información similar a la $\Sigma^2(L)$, es la $\Delta_3(L)$, que se denomina rigidez espectral. Se define utilizando la densidad integrada de estados de una forma peculiar. $N(\epsilon)$ es una función escalón con pendiente promedio uno. Ajustamos una línea recta a $N(\epsilon)$ en el intervalo $[\epsilon - L/2, \epsilon + L/2]$ y definimos la $\Delta_3(L)$ como

$$\Delta_3(L;) = \frac{1}{L} \text{Min}_{A,B} \int_{\epsilon-L/2}^{\epsilon+L/2} [N(\epsilon) - A\epsilon - B]^2 d\epsilon. \quad (3.21)$$

Resolviendo el ajuste de A y B por mínimos cuadrados, obtenemos un resultado independiente de ϵ y podemos escribir el resultado en términos de la función $Y_2(\epsilon)$ (ver Apéndice B.3) .

$$\Delta_3(L;) = \frac{L}{15} - \frac{1}{15L^4} \int_L^0 (L - \epsilon)^3 (2L^2 - 9L\epsilon - 3\epsilon^2) Y_2(\epsilon) d\epsilon. \quad (3.22)$$

Para sistemas integrables, donde $Y_2(\epsilon) = 0$, la $\Delta_3(L) = L/15$.

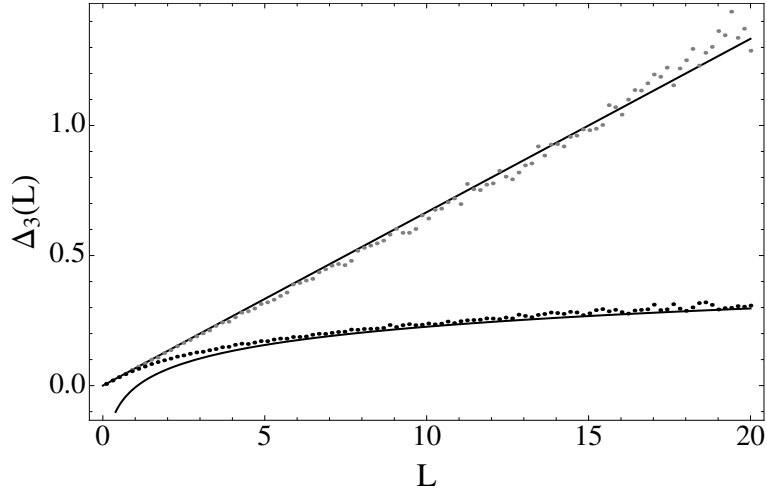


Figura 3.2: En esta figura se muestra la $\Delta_3(L)$, para los casos *GDE* y *GOE*, respectivamente. Los puntos que siguen la línea recta (resultado teórico de *GDE*) son los valores correspondientes para la matriz de *GDE*. Los puntos que siguen el comportamiento logarítmico corresponden a *GOE*.

También podemos expresar $\Delta_3(L)$ en función de la variancia del número de niveles. La rigidez espectral es una versión suavizada de la variancia, pues ambas dan información parecida pero la $\Delta_3(L)$ es más popular en la literatura. Su comportamiento asintótico para el *GOE* viene dado por

$$\Delta_3(L;) = \frac{1}{\pi^2}(\ln(L) - 0.0687). \quad (3.23)$$

No he demostrado la forma para obtener los resultados, pues mi intención es establecer, por el momento, los valores que toman los casos de *GDE* y *GOE*. La Fig. 3.2 muestra el resultado de una sola matriz para *GDE* y *GOE*, en la Fig. 5.14 de la sección 5.5 se muestran los resultados para ensambles de matrices RMT.

Capítulo 4

Caos cuántico, espectro nuclear del ^{48}Ca

En sistemas de muchos cuerpos no tenemos un límite clásico claro, ya que el principio de exclusión de Pauli y las estadísticas cuánticas juegan un papel preponderante. Por ello, para el análisis del caos cuántico no podemos basarnos en el estudio previo de su análogo clásico. Sin embargo, la estadística de las fluctuaciones de los niveles de energía nos proveen de herramientas apropiadas para estudiar el grado de caos y complejidad del sistema. N. Bohr [64] introdujo conceptos estadísticos para explicar el comportamiento del núcleo a energías de excitación de varios MeV. Inspirado por esas ideas, Wigner desarrolló la teoría de matrices aleatorias.

La nueva física estadística de Wigner difiere de modo fundamental de la aplicación normal de los conceptos estadísticos. En la mecánica estadística estándar se considera una colectividad de sistemas físicos idénticos, todos gobernados por el mismo hamiltoniano pero con condiciones iniciales distintas. Por lo tanto, se calculan los valores de las funciones termodinámicas haciendo el promedio sobre la colectividad. Wigner consideró colectividades de sistemas dinámicos gobernados por hamiltonianos distintos pero con una propiedad de simetría común. En ese caso se buscan propiedades genéricas comunes a la mayoría o la totalidad de los miembros de la colectividad y que estén determinadas únicamente por sus propiedades de simetría. Los resultados obtenidos se aplican a sistemas físicos individuales, siempre que exista un teorema ergódico adecuado. Es decir, la hipótesis ergódica utilizada es que el promedio sobre la colectividad es igual a un promedio sobre una sección suficientemente grande del espectro de (casi) cualquier miembro de la colectividad. En algunos casos específicos esta hipótesis ha podido ser probada [59].

Cuando un sistema tiene números cuánticos conservados como el espín o la paridad, el hamiltoniano se puede transformar a una forma diagonal por bloques. Cada bloque se caracteriza por el valor fijo de un conjunto de números cuánticos. En todos los casos supondremos que esa operación ya se ha realizado y que tratamos con un solo bloque. La teoría de matrices aleatorias se aplica a cada uno de estos bloques por separado. En general, en sistemas de muchos cuerpos solamente tenemos clara una imagen semiclásica en la aproximación del campo medio. Cada una de las partículas que componen el sistema se mueven en el campo medio autoconsistente que crea el resto. Dependiendo de la simetría o ausencia de ésta, el

campo medio determina el movimiento regular o caótico de las partículas individuales. El campo medio nuclear esférico, consiste esencialmente en un oscilador más términos de superficie y el término espín-órbita, y los nucleones se mueven en órbitas de forma regular. Al añadir la interacción residual es cuando introducimos el caos en el sistema. La representación del campo medio, por tanto, permite el análisis de la transición del movimiento de partícula independiente y regular al movimiento muchas veces complicado de los estados complejos (existen excepciones, cuando el Hamiltoniano posee simetrías particulares, lo que conduce a movimientos colectivos regulares).

El núcleo atómico es el paradigma de sistema cuántico complejo. Un núcleo se compone de A nucleones con N neutrones y Z protones, $A = N + Z$. Todos ellos interactúan fuertemente a distancias del orden de fm y energías del orden de MeV. El núcleo se puede ver como una pieza de materia densa pero elástica con forma esférica o elipsoidal. Este objeto puede vibrar y, si está deformado, rotar. Muchos núcleos poseen modos colectivos, manifestaciones cuánticas de las vibraciones y las rotaciones. Por lo tanto, el movimiento del núcleo se compone de movimiento de partícula independiente acoplado a través de la interacción residual, modos colectivos debidos a la deformación y una componente estocástica. Estos elementos tienen importancia relativa distinta, dependiendo de la energía de excitación y el número atómico.

El modelo que mejor ha logrado integrar estos componentes de forma satisfactoria ha sido el modelo de capas. Una teoría que tenemos para describir el núcleo atómico y sus excitaciones a baja energía (ver apéndice C). La investigación de los efectos que el caos cuántico tiene sobre los eigenvalores y eigenvectores de las matrices del modelo de capas, es fundamental para entender qué efectos tiene el caos en la física nuclear. Al ser el modelo de capas una teoría realista sobre un sistema de muchos cuerpos con interacciones fuertes entre los componentes, es un laboratorio teórico ideal para investigar el caos cuántico en este tipo de sistemas.

4.1. Análisis del espectro nuclear ^{48}Ca como serie de tiempo

Para analizar las fluctuaciones espectrales de los niveles experimentales, es crucial que las secuencias de niveles del mismo espín y paridad sean completas (no falten niveles) y puras (no haya niveles con asignaciones incorrectas de sus números cuánticos). Un espectro que contenga niveles con distintos números cuánticos producirá una distribución de espaciamientos de tipo Poisson, debido a que los niveles en distintas cajas (o sectores) del hamiltoniano no están correlacionados.

Considérese el espectro de un sistema cuántico $E_i, i = 1, \dots, N$. Las magnitudes que se pueden calcular a partir de él (la densidad de estados, por ejemplo) presentan una parte suave y una parte fluctuante. El comportamiento universal, sin embargo, sólo puede aparecer en la parte fluctuante, que es la que caracteriza a la mecánica cuántica¹.

¹Esta afirmación (ver las referencias [50, 65]), se debe al hecho de que en la cuantización, la parte suave de

El objetivo del análisis estadístico se basa en estudiar las fluctuaciones del espectro nuclear, caracterizando propiedades en la función de autocorrelación. El método que seguimos fue reportado originalmente en la literatura por Relaño [4]. Como hemos visto, antes de aplicar un estadístico espectral, es necesario separar la parte suave de la parte fluctuante. Para abordar esta tarea, suponemos que la densidad de estados $\rho(E)$ puede separarse en una parte suave y una que contenga las fluctuaciones del espectro,

$$\rho(E) = \bar{\rho}(E) + \tilde{\rho}(E), \quad (4.1)$$

donde $\bar{\rho}(E)$ es la parte suave de la densidad de niveles y $\tilde{\rho}(E)$ es la correspondiente a las fluctuaciones. La misma separación puede ser definida en la densidad de niveles acumulados $N(E)$, la cual mide el número de niveles hasta cierto valor de la energía E en el sistema

$$N(E) = \int_{-\infty}^E dE' \rho(E'). \quad (4.2)$$

Por lo tanto, podemos distinguir entre la parte suave y la que fluctúa,

$$N(E) = \bar{N}(E) + \tilde{N}(E). \quad (4.3)$$

El procedimiento para estimar una forma funcional de la forma correspondiente a la parte suave de la densidad espectral o para la parte suave de la densidad de niveles acumulados, es el método llamado reescalado, que consiste en mapear el espectro real en otro con una densidad de niveles promedio igual a uno. Con lo anterior, podemos comparar la densidad de niveles promedio $\bar{\rho}(E)$ para diferentes sistemas, lo que puede lograrse transformando el espectro inicial $\{E_i\}$ en uno adimensional $\{\epsilon_i\}$. Los niveles de energía $\{E_i\}$ son mapeados a niveles adimensionales $\{\epsilon_i\}$,

$$E_i \rightarrow \epsilon_i = \bar{N}(E_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.4)$$

donde N es la dimensión del espectro y $\bar{N}(E)$ está dada por

$$\bar{N}(E) = \int_{-\infty}^E dE' \bar{\rho}(E'), \quad (4.5)$$

esta función es una aproximación suave a la función escalón $N(E)$ que proporciona el número real de niveles hasta la energía E . La forma de la función $\bar{\rho}(E)$ la determinamos por un ajuste de $\bar{N}(E)$ a $N(E)$. El problema principal es encontrar una estimación apropiada para suavizar la parte secular de la densidad de niveles. Resulta relativamente sencillo hacerlo cuando la densidad espectral se obtiene teóricamente, usando el conocimiento de los momentos más bajos en orden de energía, los cuales están relacionados con la traza en la matriz hamiltoniana del sistema [66]. Si esto no es posible, entonces es necesario obtener esa parte del espectro,

la densidad de niveles contiene básicamente información clásica, de modo que no puede servir para caracterizar la universalidad del caos en la mecánica cuántica.

usando alguno de los diversos procedimientos que se han propuesto con el objetivo de reescalar los espectros de energía. El enfoque más sencillo para realizar el reescalado es suponer una dependencia polinomial para la densidad de niveles acumulada [67]. Con este enfoque se toma una interpolación polinomial para $N(E)$, siendo el único parámetro de control el orden del polinomio. Sin embargo, esta estimación puede ser muy inexacta ya que la función polinómica podría no tener relación con las propiedades físicas del sistema.

Es posible considerar un ajuste lineal de $N(E)$ en un intervalo que contiene ν niveles alrededor del nivel E_i y entonces tomar a través de todo el espectro un promedio móvil. El valor ν es entonces usado como un parámetro libre [68]. Métodos más sofisticados para el reescalado involucran ajustes con funciones específicas. Un ejemplo usual de ello es escribir la densidad de niveles de energía como una suma de funciones delta para cada nivel que la compone. Con el método mencionado las funciones delta son sustituidas por una densidad gaussiana. También es posible incluir efectos locales para llevar a cabo el reescalado [69]. Independientemente del método que se utilice para separar las fluctuaciones del espectro, y aún si la estimación de la densidad de niveles acumulada refleja en gran detalle el comportamiento global, esta aproximación suele no ser lo suficientemente buena. Si éste es el caso, el reescalado no captura el comportamiento completo de la parte suave del espectro, por lo que el efecto neto es que se introducen correlaciones espurias de largo-alcance, que son responsables de señales engañosas de que el caos cuántico podría estar presente [70].

Considerando los niveles de energía reescalados definimos la secuencia del espaciamiento de primeros vecinos como

$$s_i = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.6)$$

Para los niveles de energía reescalados, la densidad promedio de niveles es igual a 1, es decir, $\langle s \rangle = 1$. Generalmente hay estadísticas para el estudio de las propiedades en las fluctuación del espectro suavizado. Nosotros, por el momento, caracterizaremos estas fluctuaciones del espectro por la estadística δ_n definida por

$$\delta_n = \sum_{i=1}^n (s_i - \langle s \rangle) = \sum_{i=1}^n w_i, \quad (4.7)$$

donde el índice n corre de 1 hasta $N - 1$. La cantidad w_i da la fluctuación del i -ésimo espaciamiento del de su valor promedio. Podemos realizar la suma de la ecuación anterior y obtener el siguiente resultado

$$\delta_n = \epsilon_{n+1} - \epsilon_1 - n. \quad (4.8)$$

La expresión anterior representa la desviación de la energía de excitación del nivel $(n+1)$ reescalado, con respecto a su valor promedio. Si desplazamos apropiadamente la energía del estado base del sistema, entonces representa las fluctuaciones en la densidad de niveles acumulados en la energía E_{n+1} .

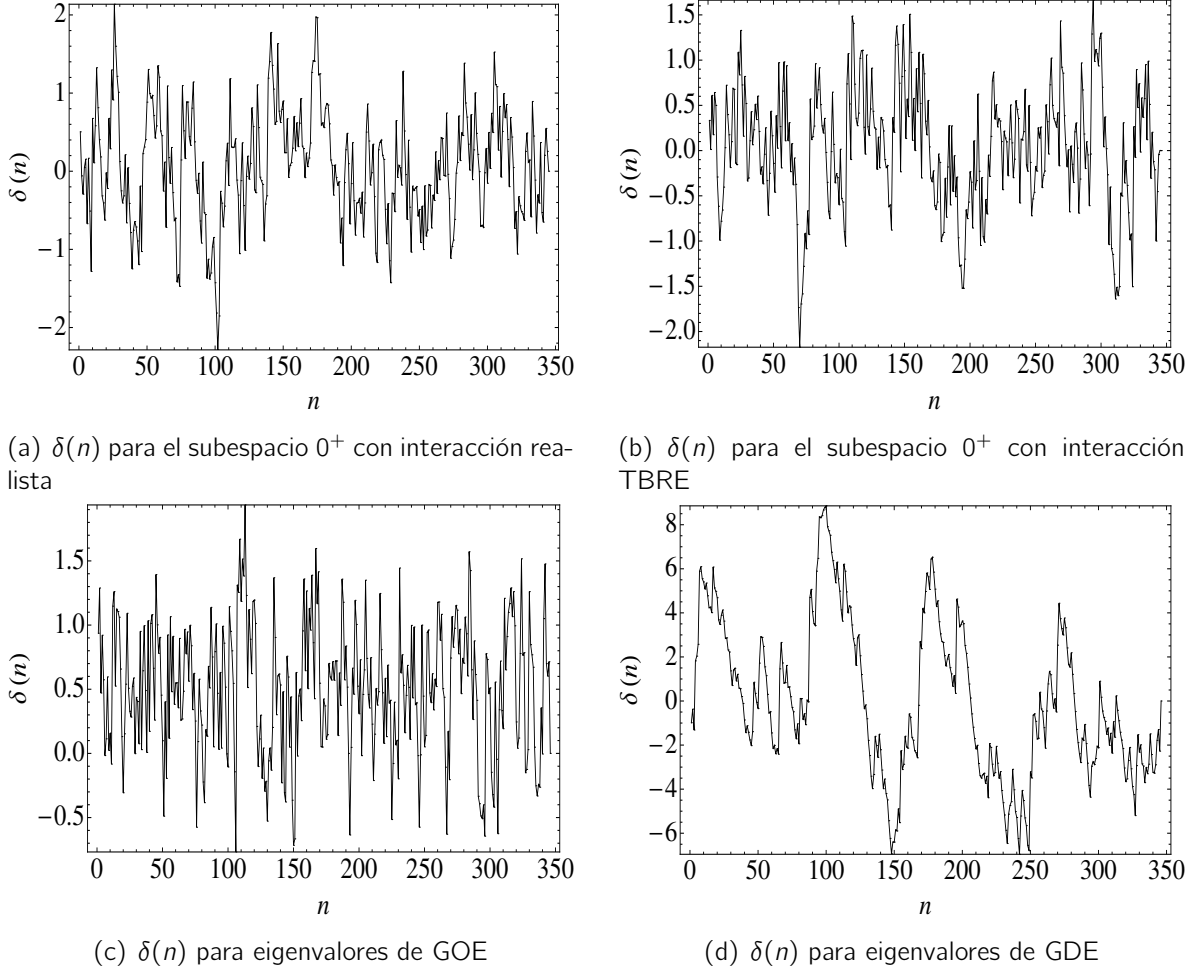


Figura 4.1: Series de tiempo $\delta(n)$ de las fluctuaciones de energía para los subespacios del modelo de capas del núcleo ^{48}Ca (estados $J^\pi = 0^+$) con (a) interacción realista, (b) interacciones aleatorias TBRE. $\delta(n)$ para ensambles de RMT (c) *GOE* y (d) *GDE*. Para los casos de RMT la dimensión del espacio es la misma que para $J^\pi = 0^+$. El eje horizontal representa el índice del orden de la energías reescaladas (eje temporal), y el eje vertical representa las fluctuaciones de la energía δ_n . Notamos que las fluctuaciones para *GDE* son alrededor de 4 veces más grandes que para los cálculos del modelo de capas. El reescalado se llevo a cabo a través un ajuste polinomial de orden 7.

La estadística $\delta(n)$ se ve como una serie de tiempo [4], si establecemos una analogía entre el índice n , el cual representa el orden en la energía, y el tiempo. Una de las maneras más simples para estudiar las propiedades estadísticas de esta serie de tiempo, es mediante el espectro de potencias. Nuestro principal objetivo es estudiar la señal δ_n de un sistema cuántico caótico, a través de las técnicas numéricas antes mencionadas: el espectro de potencias, DFA y EMD (ver capítulo 5) con el objetivo de estudiar las propiedades fractales de las series de tiempo obtenidas. En la Fig. 4.1, se pueden ver diferentes δ_n y claramente se pueden apreciar

diferentes tendencias y oscilaciones en las fluctuaciones.

4.2. Análisis para el espectro nuclear de ^{48}Ca

Se estudia las correlaciones presentes en los espectros de excitación del sistema cuántico asociado al núcleo ^{48}Ca para diferentes subespacios de J^π , que corresponde a una serie monótona y creciente de niveles de energía E_1, E_2, \dots . Se analiza las fluctuaciones con respecto a un espectro de energía equidistante (tipo oscilador armónico). Como ha sido ya mencionado, el procedimiento para separar la parte oscilante de la densidad de niveles, llamado reescalado, es muy delicado. Por ejemplo, en el caso del ensamble de GOE, cuando el tamaño de las matrices $N \rightarrow \infty$, la parte suave de la densidad de niveles es bien conocida, pues da lugar a la ley semicircular de Wigner [59]. Sin embargo, para cuando se tienen N finitas hay pequeñas desviaciones de la ley, de tal manera que no se puede expresar analíticamente. En tales casos, la densidad de niveles se aproxima con una función suave (*e.g.* una función polinómica), que puede ser, como se mencionó antes, un procedimiento que afecte los resultados, especialmente la sensibilidad de las correlaciones de largo alcance [8]. Hemos aplicado el método DFA y desarrollado un análisis espectral a las fluctuaciones de energía. Para propósitos de comparación, hemos también aplicado el análisis a los ensambles de RMT, en particular para GOE y GDE. En todos los casos el reescalado fue hecho ajustando un polinomio a la densidad de niveles acumulada. Después de un análisis cuidadoso para cada caso, se usó un polinomio de grado 7. En los presentes cálculos hemos usado el código de DFA programado por el grupo del ICN, a diferencia de los resultados mostrados en la referencia [8] donde se usó el código de C (traducción del código en fortran de Peng).

4.2.1. Cálculos con el Modelo de Capas Realista

Los cálculos del modelo de capas con interacción realista (KB3) [71] fueron desarrollados en la capa fp para el ^{48}Ca en los subespacios $J^\pi = 0^+, 1^+, \dots, 8^+$, con el código ANTOINE [72]. Dentro de cada subespacio calculamos las fluctuaciones de la energía siguiendo la definición de la ecuación 4.8 y aplicamos un análisis de las fluctuaciones sin tendencia. Los valores del parámetro de autosimilitud α_{dfa} que son encontrados están muy cerca de 1 (las desviaciones más grandes son del $\sim 10\%$). Las fluctuaciones de la energía representadas por la serie de tiempo $\delta(n)$ y su forma integrada ψ_n , para el caso del subespacio $J^\pi = 0^+$, se muestran en las Figs. 4.1(a) y 4.2(a), respectivamente. El comportamiento mostrado en estas figuras es típico de todos los casos estudiados con los cálculos del modelo de capas con interacciones realistas.

La figura 4.3(a) muestra el resultado del análisis de DFA para el caso del subespacio $J^\pi = 0^+$. Este espacio es particularmente interesante pues contiene solamente 347 niveles. Es notable que incluso en este caso, la tendencia de las fluctuaciones se aproximan bien por una relación lineal en escala logarítmica en todo el dominio del tamaño de las cajas, dando un parámetro de autosimilitud de $\alpha_{\text{dfa}} = 0.97$ a pesar de la dimensión.

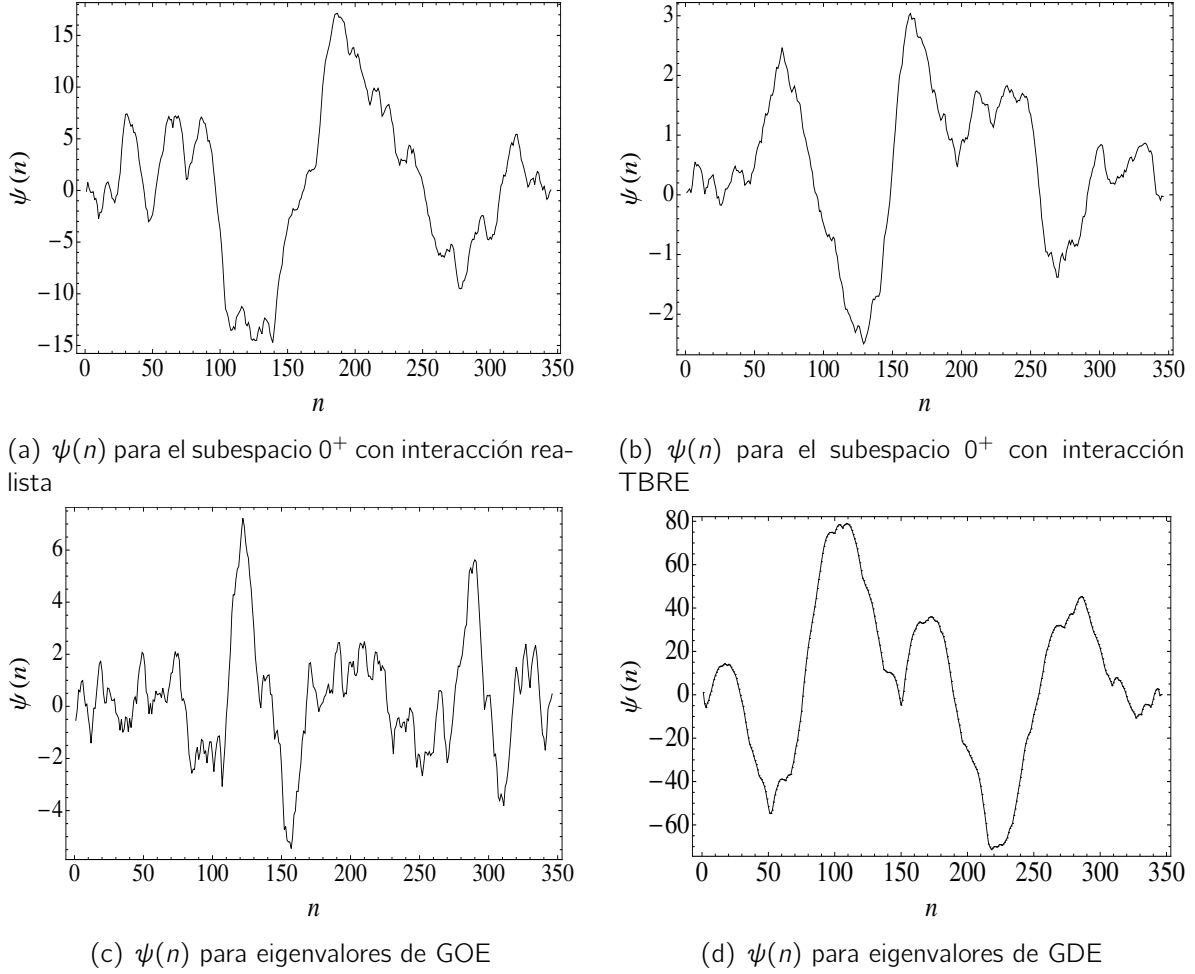


Figura 4.2: Series de tiempo integrada $\psi(n)$ (Ecuación 1.17) para las fluctuaciones de la energía en los cálculos del modelo de capas correspondientes del ^{48}Ca (estados $J^\pi = 0^+$) con (a) una interacción realista, (b) con interacciones aleatorias (TBRE), y de ensambles de RMT (c) *GOE* y (d) *GDE*. Para los casos de RMT la dimensión del espacio es la misma que para $J^\pi = 0^+$. El eje horizontal representa el índice del orden de la energías reescaladas (eje temporal), y el eje vertical representa las fluctuaciones de la energía integrada ψ_n . Notamos que las fluctuaciones para *GDE* son alrededor de 6 veces más grandes que para los cálculos del modelo de capas.

Cálculos en subespacios más grandes muestran un mejor escalamiento lineal. Los resultados del DFA para esos subespacios se muestran en la Tabla 4.1. Un valor de α cercano a 1 indica una invariancia de escala no trivial perfecta, usando la relación $\beta = \alpha_{\text{dfa}} - 1$, concluimos que el espectro de potencias exhibe un comportamiento muy aproximado a $1/f$. Esto se confirma con los cálculos correspondientes al espectro de potencias mostrado en la Fig. 4.4(a), donde obtuvimos un exponente $\beta = 1.008$. El espectro de potencias de la Fig. 4.4(a) muestra el comportamiento típico en los cálculos del modelo de capas con interacciones realistas, con

^{48}Ca			
J^π	α	β	N
0^+	0.969	1.008	347
1^+	0.998	1.090	880
2^+	1.013	1.046	1390
3^+	1.020	1.183	1627
4^+	0.985	1.127	1755
5^+	0.916	1.198	1617
6^+	1.077	1.137	1426
7^+	1.095	1.180	1095
8^+	0.964	1.031	808

Tabla 4.1: Parámetros de autosimilitud α_{dfa} , obtenidos utilizando un método lineal de DFA, y los exponentes β de la regresión lineal al espectro de potencias para las fluctuaciones de energía, en los cálculos del modelo de capas de ^{48}Ca con interacciones realistas en diferentes subespacios de J^π . También se muestra la dimensión N de cada subespacio.

una amplia dispersión en las amplitudes de Fourier. La dispersión que muestra se observa independientemente del tamaño del subespacio. En este caso no podemos promediar porque el ensamble consta de un solo evento. Para los casos con interacciones realistas, encontramos que el método de DFA es un procedimiento más robusto que el cálculo directo del espectro de potencias cuando analizamos los datos experimentales reales, aunque también se puede apreciar fluctuaciones cuando el tamaño de las cajas es grande (ver Fig. 4.3).

4.2.2. Ensamble aleatorio con interacción a dos cuerpos (TBRE)

En esta sección hemos aplicado el método DFA a las fluctuaciones espectrales para un ensamble de 25 conjuntos de niveles de energía, obtenidos con el modelo de capas con interacciones aleatorias de dos cuerpos, para el subespacio $J^\pi = 0^+$ del ^{48}Ca con dimensión de 347 niveles. La serie de tiempo δ_n y ψ_n se muestran en las Figs. 4.1(b) y 4.2(b) respectivamente. El parámetro de autosimilitud fue calculado promediando los resultados del DFA obteniendo $\alpha_{\text{dfa}} = 1.01$. Este valor es muy similar al valor del parámetro de autosimilitud del caso realista (ver Tabla 4.1). La Fig. 4.3(b) muestra el resultado promedio para el análisis del DFA. El comportamiento lineal de estos resultados es muy llamativo. Solamente para ventanas muy grandes ($n \simeq N/4 \simeq 87$) podemos ver una ligera desviación del ajuste lineal. El presente análisis fue hecho para el subespacio con menor dimensión; es natural esperar un comportamiento similar al de la Fig. 4.3(b) para subespacios más grandes. En Relaño *et al.* [4] desarrollaron el primer estudio del comportamiento del espectro de potencias en las fluctuaciones espectrales con cálculos del modelo de capas, usando TBRE para ^{24}Mg y ^{32}Na , encontrando que obedece un escalamiento $1/f$.

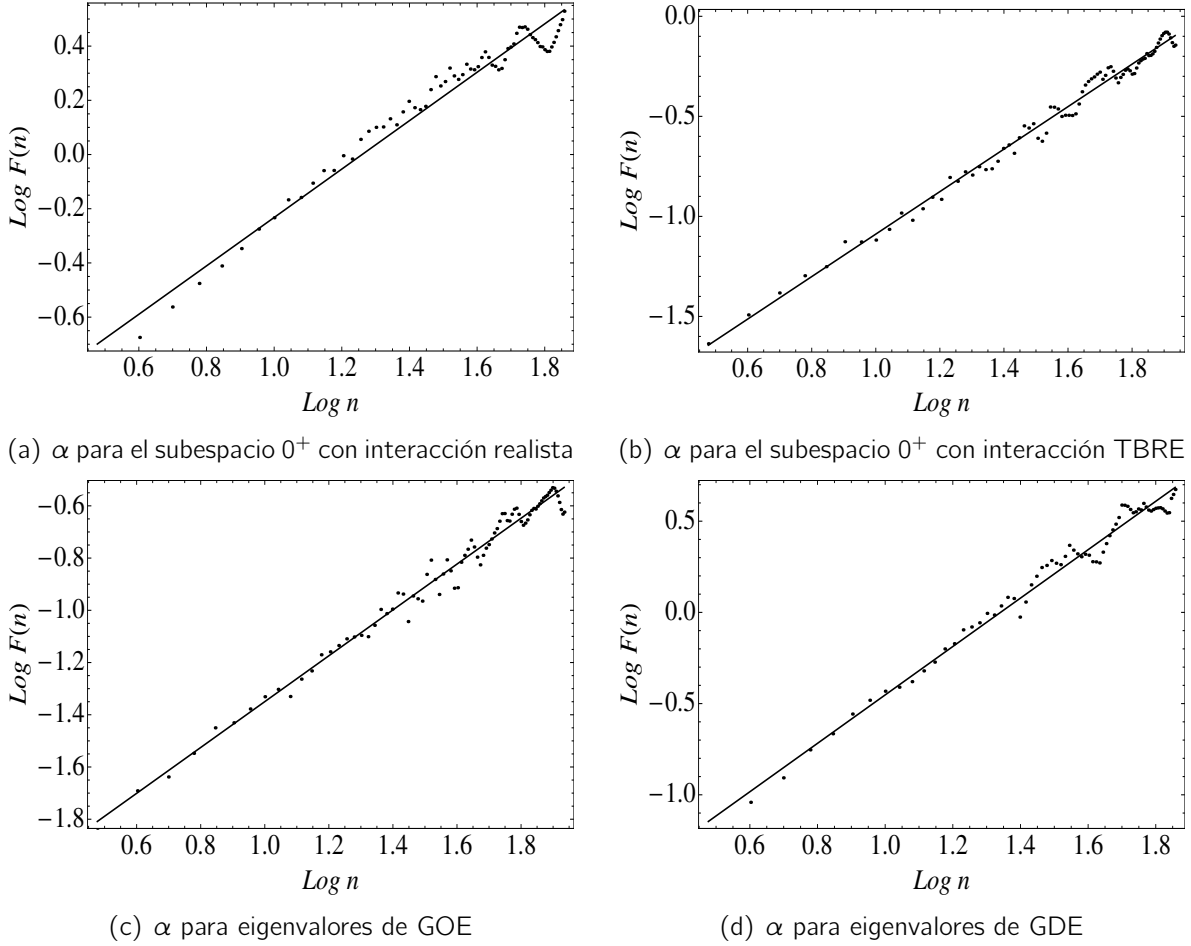


Figura 4.3: Cálculo del parámetro de autosimilitud α en las fluctuaciones de la energía correspondientes a la serie de tiempo integrada de $\delta(n)$ para el ^{48}Ca (estados $J^\pi = 0^+$) con (a) una interacción realista, (b) con interacciones aleatorias (TBRE), y de ensambles de RMT (c) *GOE* y (d) *GDE*.

Nuestros resultados para el espectro de potencias en el subespacio de $J^\pi = 0^+$ del espectro de ^{48}Ca (Fig. 4.4(b)), muestran un comportamiento similar al que obtuvo Relaño. Las fluctuaciones en la energía para cálculos de TBRE, están caracterizados por una reducción en la dispersión de las amplitudes de Fourier en el espectro de potencias. Esto es una ventaja del procedimiento, consistente en promediar varios conjuntos. El ajuste al espectro de potencias en este caso se muestra en la Fig. 4.4(b), donde se puede ver que en este caso el ajuste lineal describe adecuadamente un comportamiento $1/f^\beta$ del espectro de potencias. Una situación diferente se puede observar en el cálculo del modelo de capas con interacción realista en el mismo subespacio mostrado en la Fig. 4.4(a). El resultado de β para este caso está reportado en la Tabla 4.2, e implica una invariancia de escala en las fluctuaciones espectrales.

		α	β
^{48}Ca , $J^\pi = 0^+$	(Shell Model)	0.969	1.008
	(TBRE)	1.003	0.987
GOE	$N = 347$	0.951	0.998
	$N = 1000$	0.942	1.069
GDE	$N = 347$	1.338	1.604
	$N = 1000$	1.398	1.786

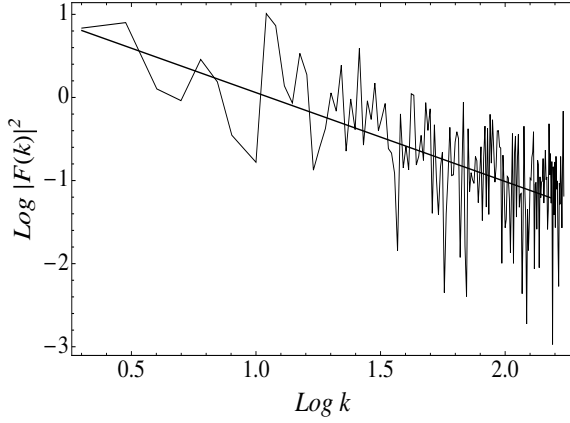
Tabla 4.2: Comparación entre los cálculos del modelo de capas con (a) interacciones realistas, (b) las interacciones aleatorias (TBRE) en el subespacio del espectro para $J^\pi = 0^+$ de ^{48}Ca y (c) los cálculos de GOE y GDE. Para cada caso se adjunta la dimensión de la matriz.

4.2.3. Ensamble Ortogonal Gaussiano, GOE

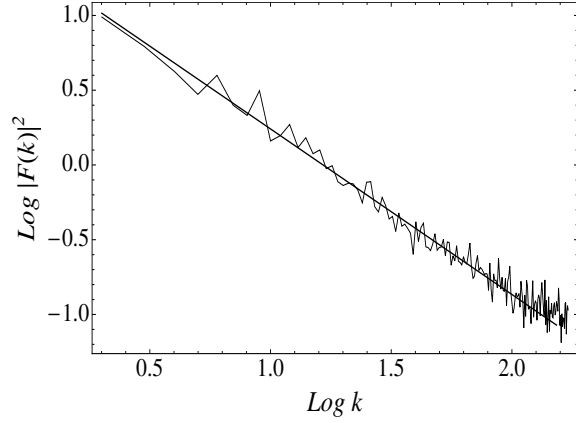
Para propósitos de comparación, aplicamos el método de DFA, así como el estudio del espectro de potencias, para las fluctuaciones espectrales en el caso del ensamble ortogonal gaussiano *GOE*. Para hacer una comparación justa consideramos *GOE* con la misma dimensión que la del subespacio $J^\pi = 0^+$ (esta dimensión se utilizó en el caso de los cálculos del modelo de capas con interacción realista y aleatorios). El ensamble está formado por un conjunto de 25 matrices que fueron construidas con las propiedades de simetría estudiadas en el capítulo 4 (también se estudió un ensamble donde la dimensión de las matrices es de 1000×1000). Las fluctuaciones de la energía representadas por $\delta(n)$ y su forma integrada ψ_n se muestran en las Figs. 4.1(c) y 4.2 (c), respectivamente. Con los resultados del análisis del DFA, se obtiene un valor para el parámetro de autosimilitud de $\alpha_{\text{dfa}} = 0.95$ (ver Tabla 4.2), consistente con el valor esperado. Este 5% en la desviación del valor esperado $\alpha_{\text{dfa}} = 1$, se debe al procedimiento de reescalado que se utilizó en el análisis. Esto también se refleja en la desviación de $\alpha_{\text{dfa}} = 1$ en los cálculos de *GOE* con dimensión $N = 1000$. Es importante recordar que en el límite $N \rightarrow \infty$, la función comulativa $N(E)$ sigue un ley de semicírculo (ley de semicírculo de Wigner), pero aún para $N = 1000$ observamos desviaciones significativas. El correspondiente espectro de potencias, por otro lado, da lugar a un exponente $\beta = 0.998$ (ver Tabla 4.2). Parece ser que en este caso el espectro de potencias se acerca más al valor de 1, que mediante el cálculo del DFA para el parámetro de autosimilitud. Debe verificarse que esto también ocurra para matrices con una mayor dimensión. En las Figs. 4.3(c) y 4.4(c) se muestra los resultados promedio para el método de DFA y el espectro de potencias, respectivamente.

4.2.4. Ensamble Diagonal Gaussiano, GDE

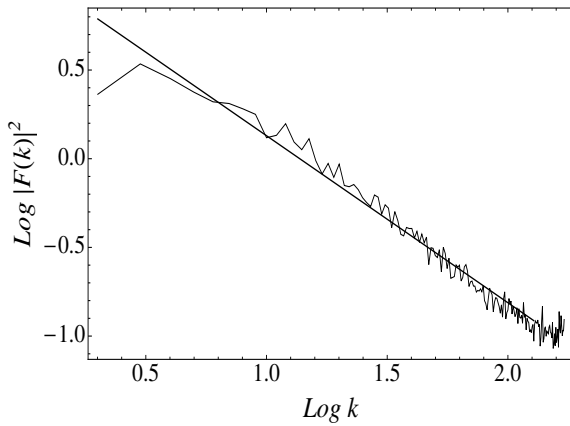
Finalmente, también aplicamos el análisis anterior a sistemas integrables, representados por el ensamble diagonal gaussiano, y de nuevo usamos las mismas dimensiones que para las



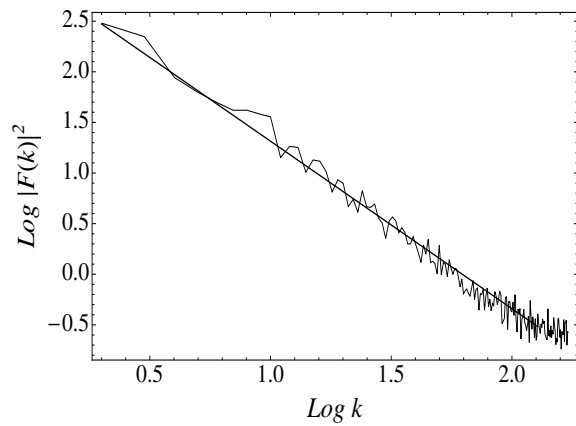
(a) Espectro de potencias para δ_n del subespacio 0^+ con interacción realista



(b) Espectro de potencias para δ_n del subespacio 0^+ con interacción TBRE



(c) Espectro de potencias para δ_n para eigenvalores de GOE



(d) Espectro de potencias para δ_n para eigenvalores de GDE

Figura 4.4: Ajuste lineal del espectro de potencias para las fluctuaciones espectrales de ^{48}Ca (estados $J^\pi = 0^+$) con (a) interacción realista, (b) interacciones aleatorias (TBRE), y para (c) GOE y (d) GDE. Ver los exponentes de escalamiento para cada caso en la Tabla 4.2.

del caso de ^{48}Ca en el subespacio de $J^\pi = 0^+$. La $\delta(n)$ y su serie integrada correspondiente se muestran en las Figs. 4.1(d) y 4.2(d), respectivamente. El parámetro de autosimilitud fue calculado usando el valor promedio del ensamble (ver Fig. 4.3(d)) y se encontró un valor de $\alpha_{\text{dfa}} = 1.39$, el cual tiene una desviación aproximadamente del 7% del valor esperado $\alpha_{\text{dfa}} = 3/2$ (valor que corresponde a una serie de tiempo no correlacionada). A pesar de que se aumentó la dimensión e.g, para $N = 1000$, el parámetro α_{dfa} solo alcanza el valor de 1.40. Por otro lado, el exponente de escalamiento en el espectro de potencias es $\beta = 1.60$, que se desvía un $\sim 20\%$ del valor esperado para el caso de la distribución de Poisson, $\beta = 2$. Para una dimensión más grande $N = 1000$, el valor del parámetro $\beta = 1.80$, que se acerca más al valor esperado. La razón de este comportamiento parece estar relacionado con el método de reescalado usado en el presente estudio.

Es importante notar que el método de DFA se aplicó al espectro nuclear del ^{48}Ca para diferentes subespacios de estados J^π , obtenidos con cálculos del Modelo de Capas con interacción realista y aleatoria y se mostró que fluctuaciones en el espectro de ^{48}Ca exhiben una invariancia de escala no trivial (fractal), que corresponde a una función de autocorrelación invariante de escala. Este comportamiento de invariancia de escala fue observado en las fluctuaciones de la energía en cálculos del modelo de capas con interacciones realistas y aleatorias (TBRE). Los resultados del análisis del DFA parecen ser más robustos que los obtenidos por el espectro de potencias, la Fig. 4.3. Los resultados (a)-(d) manifiestan este hecho. En contraste a los cálculos del espectro de potencias mostrado en la Fig. 4.4, (a)-(d) que muestran una mayor dispersión en las amplitudes de Fourier, especialmente en los cálculos con interacción realista. En el caso particular donde se tiene un ensamble se tiene un mejor ajuste lineal debido a que la dispersión disminuye. El método de DFA confirma la invariancia de escala estadística no trivial en las fluctuaciones en el espectro de ^{48}Ca . Una invariancia de escala no trivial en la función de autocorrelación también fue observada en el caso de *GOE*.

4.3. Fluctuaciones de un hamiltoniano nuclear esquemático

Se llevaron a cabo cálculos del modelo de capas con interacción realista y TBRE, para describir la estadística de las fluctuaciones en el núcleo (ver sección 4.2). Los resultados muestran que las correlaciones en las series de tiempo δ_n siguen una ley de potencia $1/f$. Para los casos mencionados, están involucrados numerosos grados de libertad, requeridos para describir la interacción que existe entre los nucleones en el núcleo. Por lo tanto, se trata de un modelo muy complejo. En esta sección se utiliza un hamiltoniano esquemático, que es una versión simplificada del modelo de capas, mediante el cual podemos dar seguimiento a la transición entre diferentes regímenes. Nuestro propósito es estudiar cómo el espectro de potencias evoluciona, con especial énfasis en la región donde ocurre un cambio en las propiedades de la autocorrelación (punto de transición). Para ello, utilizamos el hamiltoniano

$$H = H_0 + \chi \hat{Q} \cdot \hat{Q} , \quad (4.9)$$

con un parámetro externo ajustable χ . Este hamiltoniano esquemático es análogo a los hamiltonianos bosónicos utilizados recientemente para estudiar las transiciones de fase cuánticas [73]. El hamiltoniano H_0 de partícula independiente no perturbado, describe a los fermiones sin interacción en el campo promedio de un núcleo esférico. Éste corresponde a un sistema integrable [74]. El segundo término $\chi \hat{Q} \cdot \hat{Q}$ describe una interacción residual de dos cuerpos cuadrupolo-cuadrupolo, la cual en nuestro caso actúa sobre ocho neutrones de valencia en la capa fp y esta parte por si misma también es integrable. Nos limitamos a realizar cálculos en el subespacio $J^\pi = 3^+$ del ^{48}Ca , principalmente.

El coeficiente χ en la ecuación 4.9 modula la intensidad de la interacción cuadrupolo-cuadrupolo y da lugar a la repulsión de los niveles del espectro nuclear. Variando la intensidad de este parámetro de control en el rango $0.01 < \chi < 0.40$, encontramos que el espectro de

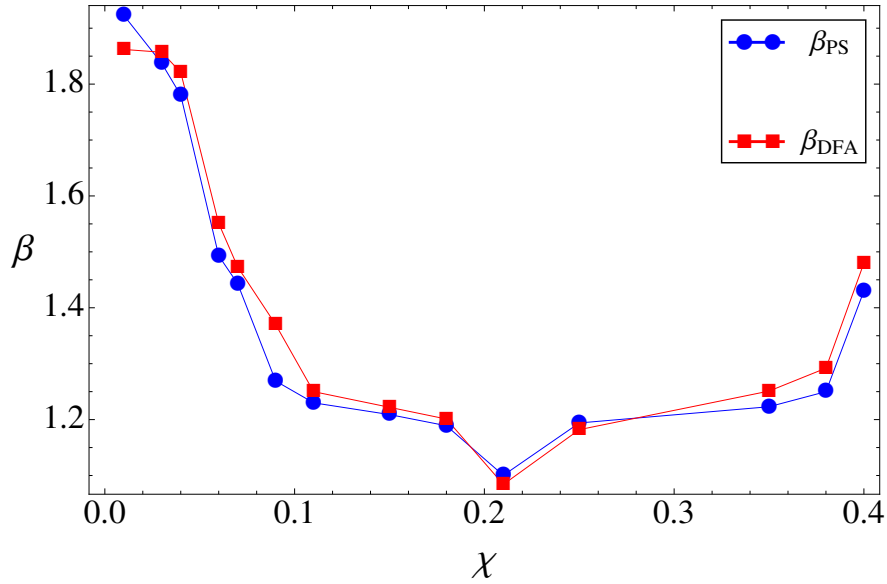


Figura 4.5: Los valores de β calculados a partir del ajuste lineal a la pendiente de la densidad espectral de potencia (círculos azules), para cada una de las δ_n obtenidas en función del valor χ en el hamiltoniano de la ecuación 4.9. Los cuadrados rojos son los valores de β que se obtuvieron usando la relación con el α_{DFA} .

potencias de la serie de tiempo δ_n se comporta como una ley de potencias de la forma $P(f) \sim 1/f^\beta$ con $\beta=1.92$ (para $\chi = 0.01$), $\beta = 1.10$ (para $\chi = 0.21$) y $\beta = 1.43$ (para $\chi = 0.40$), valores que también están confirmados por un análisis de DFA, ver Fig. 4.5. Las fluctuaciones cuánticas en el espectro nuclear para el ^{48}Ca con la interacción realista $KB3$, están en buen acuerdo con las fluctuaciones espectrales obtenidas con el hamiltoniano esquemático, cuando el parámetro χ toma el valor cercano a 0.21. Por lo tanto, encontramos que las fluctuaciones de ambos límites integrales tienden a acercarse a la densidad espectral de potencias $1/f^2$, como el movimiento Browniano, mientras que cerca del punto de transición, se encuentra una densidad cercana a $1/f$. Parte de los resultados mostrados en la sección 2.5 sobre el mapeo modulo 1 y los resultados mostrados en esta sección se reportan en la referencia [6].

Nota Importante

Llegado a este punto del escrito es importante mencionar que se han abordado dos modelos muy sencillos para estudiar la dinámica de sistemas clásicos y cuánticos, que permiten una transición en su comportamiento dinámico a través de un parámetro ajustable. En ambos regímenes de la mecánica se ha mostrado invariancia de escala en las fluctuaciones que caracterizan el estado de transición dinámico de los modelos empleados. Es importante remarcar que ambos casos se han llevado a cabo a través del estudio de series de tiempo desde un enfoque tradicional. Estos métodos, sin embargo, no permiten el estudio de una gama más

amplia de sistemas físicos, que producen series de tiempo no estacionarias y no lineales. Tal restricción nos motivó a buscar alternativas para el análisis de series de tiempo con métodos más generales.

Por otro parte, se ha tenido que lidiar con el proceso de reescalado en los espectros cuánticos, un problema ampliamente conocido en la literatura, que a pesar de su importancia, no se describe en detalle [59]. Nos planteamos, por tanto, el objetivo de buscar un procedimiento que disminuya la dependencia de los resultados en el método utilizado en el reescalado.

Afortunadamente, el estudio de un nuevo método para el análisis de series de tiempo no estacionarias y no lineales, llamado descomposición de modos empíricos (EMD), que presentamos en el siguiente capítulo, nos permitió hacer una propuesta que ha resultado de gran utilidad para el caso del caos cuántico. Además, nos proporcionó nuevas herramientas para proponer una nueva cuantificación de las propiedades fractales en las fluctuaciones espectrales de matrices pertenecientes a RMT, que representan a los sistemas cuánticos caóticos. En el siguiente capítulo se tratan los puntos mencionados, primero con la introducción del EMD y después con las aplicaciones que hemos llevado a cabo.

Capítulo 5

Descomposición de modos empíricos, EMD

5.1. Introducción

Los datos experimentales son el principal vínculo entre los fenómenos naturales que constituyen el universo que habitamos y los modelos matemáticos que utilizamos para describir y explicar estos fenómenos. Casi todo lo que nos rodea puede ser representado y comprendido a través de números. El análisis metódico de estos números revela patrones y sirve para dos propósitos: a) determinar los parámetros necesarios para construir el modelo y b) evaluar la valía del modelo que se construyó para representar el fenómeno. Lamentablemente, muchas veces la obtención de datos, ya sea a partir de mediciones físicas o de modelos numéricos, presenta uno o más de los siguientes problemas: (a) la duración total o el número de datos no es suficiente, (b) los datos no son estacionarios, y (c) los datos representan procesos no lineales. Aunque cada uno de éstos problemas puede ser importante por sí mismo, los dos primeros están relacionados. Por ejemplo, una muestra de datos menor que la escala de tiempo más grande de un proceso estacionario, puede parecer no estacionaria. Frente a estos datos, tenemos pocas opciones para realizar un análisis completo.

Históricamente, el espectro de potencias que surge del análisis de Fourier ha proporcionado un método general para examinar la distribución global de frecuencia-energía. Como resultado, el término *espectro* se ha convertido casi en sinónimo de la transformada de Fourier de los datos. En parte debido a su indudable valía y a su simplicidad, el análisis de Fourier ha dominado los esfuerzos de análisis de datos y muy pronto después de su introducción, se ha aplicado a todo tipo de datos. A pesar de que la transformada de Fourier es válida en condiciones bastante generales (véase [75]), las dos restricciones cruciales del análisis espectral de Fourier son: el sistema debe ser lineal y los datos deben ser estrictamente periódicos o estacionarios. De lo contrario, el espectro resultante tendrá poco sentido físico.

Existen todo tipo de datos que pueden ser obtenidos a partir de los fenómenos naturales a través del experimento. De gran importancia son los datos que representan el estado del

sistema en función del tiempo y cuando estos datos están dados en tiempos sucesivos o no uniformes, conforman lo que definimos como una serie de tiempo (ver sección 1.1).

Uno de los principales objetivos del análisis de series de tiempo es la obtención de propiedades estadísticamente significativas de los datos, que pueden ser asociadas con las propiedades físicas y dinámicas de los fenómenos naturales. De acuerdo con la definición anterior, una serie de tiempo puede ser expresada como $\{j, x_j\}$, $j = 0, \dots, N$, donde x_j es el dato para tiempos discretos $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$. Para dejar más en claro los problemas que tiene el hacer el análisis de Fourier, regresamos al concepto de serie de tiempo estacionaria.

De acuerdo con la definición tradicional, una serie de tiempo, $x_j(t)$, es estacionaria en sentido amplio, si para todo t se cumple

$$\begin{aligned} E(|x(t)|^2) &< \infty \\ E(x(t)) &= m \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$C(x(t_1), x(t_2)) = C(x(t_1 + \tau), x(t_2 + \tau)) = C(t_1 - t_2). \quad (5.2)$$

Aquí $E(\cdot)$ representa el valor esperado, definido como el promedio del conjunto de datos (el valor que toma m) y $C(\cdot)$ es la función de covarianza. Estacionariedad en sentido amplio, también se conoce como estacionariedad débil, estacionariedad de covarianza o estacionariedad de segundo orden [76]. Una serie de tiempo, $x_j(t)$, es estrictamente estacionaria si la distribución conjunta de

$$[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)] \quad y \quad [x(t_1 + \tau), x(t_2 + \tau), \dots, x(t_n + \tau)] \quad (5.3)$$

es la misma para todo t_i y τ . En la práctica, sólo podemos disponer de datos durante períodos de tiempo finitos, por lo que tenemos que hacer aproximaciones para cumplir con los supuestos de estacionariedad.

Aparte de la estacionariedad, el análisis espectral de Fourier también requiere linealidad. A pesar de que existen fenómenos naturales que pueden aproximarse por sistemas lineales, un gran número de ellos tienen la tendencia a ser no lineales, sobre todo si muestran variaciones en su amplitud y frecuencia. La imperfección de nuestros sondeos o esquemas numéricos para el análisis de los fenómenos naturales, implica que es necesario lidiar con esta clase de complicaciones. Bajo estas condiciones, el análisis espectral de Fourier es de uso limitado. Sin embargo, por falta de alternativas sigue siendo utilizado para procesar toda clase de datos. El uso no crítico del análisis de Fourier y la adopción despreocupada de los supuestos de estacionariedad y linealidad pueden dar resultados imprecisos. Dos de los más importantes se describen a continuación.

En primer lugar, el espectro de Fourier define componentes armónicos uniformes globalmente, por lo que necesita de muchos componentes armónicos espurios para simular la no estacionariedad y no linealidad de los datos. Como resultado de ello, la energía se extiende sobre una amplia gama de frecuencias. Por ejemplo, si usamos una función delta para representar a un destello de luz, el análisis de Fourier dará un espectro blanco con un ancho de

fases restringido. Aquí, muchos componentes de Fourier se añaden para simular la naturaleza no estacionaria de los datos en el dominio del tiempo, pero su existencia desvía la energía a un dominio de frecuencias mucho más amplio. Limitados por la conservación de energía y el amplio espectro en las frecuencias, estos armónicos espurios no pueden fielmente representar la verdadera densidad de energía en el espacio de frecuencias. De manera más seria en este caso, la representación de Fourier también requiere de la existencia de intensidad de luz negativa para que los componentes se anulan entre si y con ello representar la función delta final. Por lo tanto, en este caso los componentes de Fourier podrían tener sentido matemático, pero no tienen sentido físico justificable.

En segundo lugar, el análisis espectral de Fourier utiliza la superposición lineal de funciones trigonométricas, por lo que necesita de componentes armónicos adicionales para simular los perfiles de onda deformados. Sin embargo, tales deformaciones son la consecuencia directa de los efectos no lineales [77]. Si la forma de los datos se desvía de una función sinusoidal pura, el espectro de Fourier contendrá armónicos espurios. Como se explicó anteriormente, tanto la no estacionariedad como la no linealidad pueden inducir falsas componentes armónicas, que hacen que la energía se propague. Como consecuencia de ello, la distribución de energía-frecuencia resulta ser engañosa para datos no lineales y no estacionarios.

En esta tesis presentamos un nuevo método de análisis de datos basado en el método de descomposición de modos empíricos (EMD), el cual generará una colección de funciones de modo intrínseco (IMFs). La descomposición se basa en la extracción directa de la energía asociada con diversas escalas de tiempo intrínsecas, que son los parámetros más importantes del sistema. De este modo, podemos localizar cualquier evento en el tiempo, así como en el eje de las frecuencias. La descomposición también puede ser vista como una expansión (o desarrollo) de los datos en términos de los IMFs. Por lo tanto, estos IMFs, se derivan de los datos y pueden servir como base, que puede ser lineal o no lineal, según lo dictado por los datos. La base es completa y casi ortogonal (ver la demostración en el caso numérico [77]).

Introducción al método de descomposición de modos empíricos (EMD)

La representación en el dominio de frecuencias de una serie de tiempo es una herramienta útil que proporciona información sobre las propiedades dinámicas y estadísticas del sistema en estudio. Esta representación se obtiene generalmente a través de una descomposición de la serie de tiempo en términos de la base de Fourier

$$X_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-2\pi i j k / N}. \quad (5.4)$$

Como discutimos anteriormente, el análisis de Fourier se ha aplicado a todo tipo de datos, a pesar que se deben cumplir ciertas condiciones para tener un análisis estadísticamente significativo. Se ha propuesto diferentes metodologías con el fin de analizar series de tiempo

que se obtienen de los fenómenos no lineales y no estacionarios. La mayoría de ellos consiste en la descomposición de los datos en una base más apropiada. Nosotros nos centramos en la descomposición en modos empíricos (EMD) [77], que propone la descomposición de los datos en términos de las funciones de modo intrínseco (IMF), que a su vez se derivan de los datos y conforma una base no lineal y adaptativa localmente, completa y casi ortogonal. Esta base se construye utilizando las diferentes escalas temporales de procesos físicos que caracterizan a los fenómenos.

La descomposición en modos empíricos supone que la serie de tiempo bajo análisis está compuesta por la superposición de varios procesos no estacionarios que tienen lugar en diferentes escalas de tiempo. La esencia del método consiste en identificar los modos de oscilación de los datos en la escala de tiempo característica y luego descomponer los datos en estos modos de oscilación.

La escala de tiempo local de una oscilación puede ser identificada por el lapso entre las sucesivas alternancias de máximos y mínimos locales. En este sentido, la serie temporal se compone de varias oscilaciones montadas en oscilaciones, correspondientes a escalas de tiempo más grandes, que a su vez también están montadas en oscilaciones aún mayores (de mayor periodo), y así sucesivamente. El proceso involucrado en el EMD para realizar la tarea anterior, es llamado *sifting* y ha sido diseñado para desenredar estas oscilaciones y extraerlas de la serie de tiempo. Las funciones de oscilación que componen a la serie de tiempo, se llaman modos intrínsecos.

Si se quiere analizar series de tiempo no estacionarias en el dominio de la frecuencias, debe ser posible definir una frecuencia instantánea en función del tiempo. Físicamente las condiciones necesarias para obtener una frecuencia instantánea significativa son, primero, que las funciones deben ser localmente simétricas con respecto a la media cero y, segundo, que la función debe tener el mismo número de puntos de cruzamiento con el cero que de extremos (tanto de máximos como de mínimos). Es importante tener en cuenta que la segunda condición asegura que no hay ondas en una escala de tiempo más corto montadas en la función oscilante. En base a estas condiciones, las funciones de modo intrínseco se definen como aquellas funciones que cumplen con que el número de extremos y el número de cruces alrededor del cero son iguales o difieren a lo más en uno, y en cualquier momento el valor promedio de la envolvente definida por los máximos locales y de la envolvente definida por los mínimos locales es igual a cero. Con estas funciones es posible definir una frecuencia instantánea a través de la transformada de Hilbert (ver Apéndice D).

El nombre *función de modo intrínseco* es adoptado porque representa el modo de oscilación inherente a los datos. Con esta definición, el IMF en cada ciclo definido por los cruces alrededor de la abscisa implica un sólo modo de oscilación y no se permite ninguna onda compleja montada en dicha oscilación. Por lo tanto, un IMF no está restringido a un ancho de banda y puede ser modulado tanto en amplitud como frecuencia. De hecho, el modo puede ser no estacionario. Desafortunadamente, la mayoría de las series de tiempo no son IMFs. En general, las oscilaciones en los datos implican muchas escalas de tiempo. Debido a ello, es necesario descomponer la serie de tiempo en IMFs. La descomposición está basada en los siguientes

supuestos: (1) la señal tiene al menos dos extremos, un máximo y un mínimo, (2) la escala de tiempo característica esta definida por el intervalo de tiempo entre los extremos y (3) si los datos fueran totalmente desprovistos de extremos y contienen sólo puntos de inflexión, entonces, pueden derivarse una o más veces para revelar los extremos y los resultados finales se pueden obtener por la integración de los componentes. El EMD es un método intuitivo, directo, a posteriori y adaptativo.

La esencia del método consiste en identificar empíricamente los modos de oscilación intrínsecos por sus escalas temporales características y entonces descomponer los datos en términos de éstos. De acuerdo con Drazin (1992), el primer paso para el análisis de datos consiste en examinarlos a ojo, y a partir de esta inspección identificar las diferentes escalas a través de dos procedimientos: por el lapso de tiempo entre la alternancia sucesiva de máximos y mínimos locales y por el lapso de tiempo entre los sucesivos cruces alrededor de la abscisa.

Los extremos locales entrelazados y los cruces, arrojan datos complicados de estudiar a simple vista: una oscilación está montada en otra, que a su vez está montada en otras oscilaciones de diferentes escalas, y así sucesivamente. Cada una de estas oscilaciones define una escala característica, que es intrínseca al proceso. Hemos decidido adoptar el intervalo de tiempo entre los sucesivos extremos, como la definición de la escala de tiempo para el modo de oscilación intrínseca, ya que no sólo ofrece una resolución mucho más fina de los modos de oscilación, sino también se puede aplicar a los datos con media distinta de cero o bien todos los valores positivos o negativos sin cruces alrededor de cero. Una manera sistemática para extraerlos (*sifting*) se describe en las siguientes líneas.

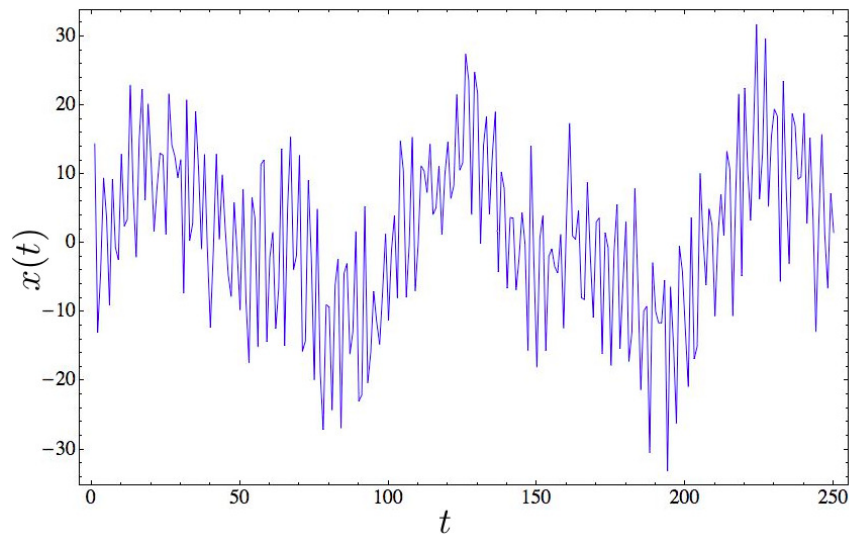


Figura 5.1: Serie de tiempo, $x(t)$, generada con Mathematica 8 para mostrar los pasos del proceso de *sifting* que necesita la descomposición de modos empíricos para definir las escalas características de los procesos ue componen al fenómeno en estudio.

El proceso de *sifting* para descomponer los datos en IMFs se describe a continuación, ejemplificando cada una de los pasos requeridos:

1. Localizar todos los máximos locales de la serie de tiempo y conectarlos con un spline cúbico ¹, esto define la envolvente superior. Repetir el procedimiento con los mínimos locales para definir de la envolvente inferior (ver Fig. 5.2), donde se ha aplicado este paso a la serie de tiempo que se muestra en la gráfica de la Fig. 5.1.

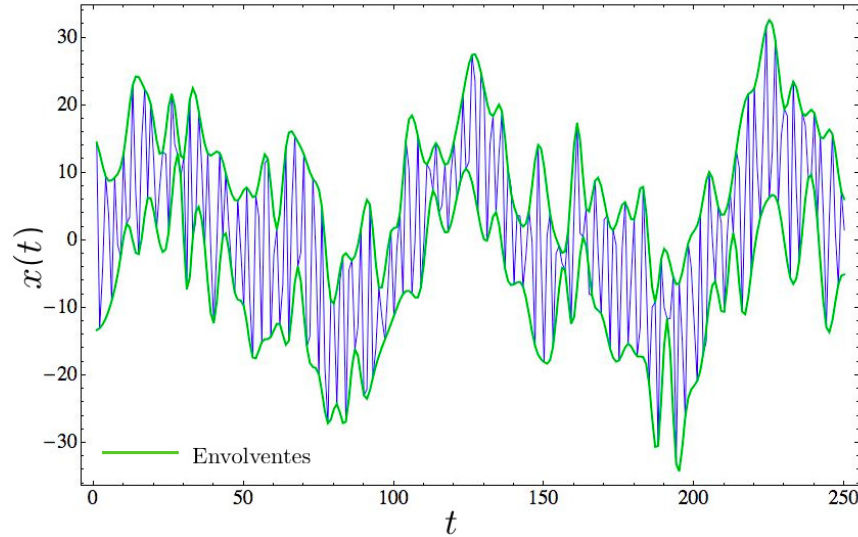


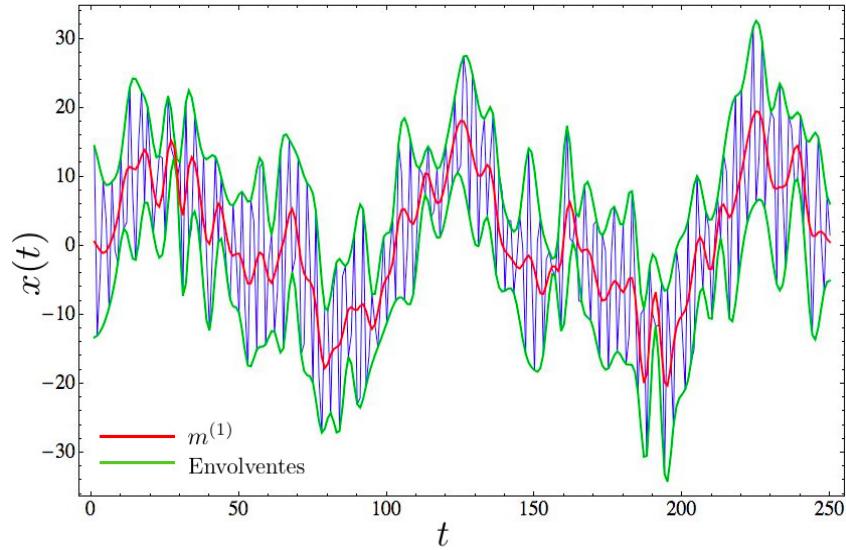
Figura 5.2: Ilustración del proceso de *sifting*: Envolvente superior e inferior definida a partir de los extremos de la serie de tiempo. Las envolventes deben cubrir todos los datos.

2. Calcular la media a partir de las envolventes superior e inferior $m^{(1)}$ y la diferencia con los datos. Así se define la primera componente

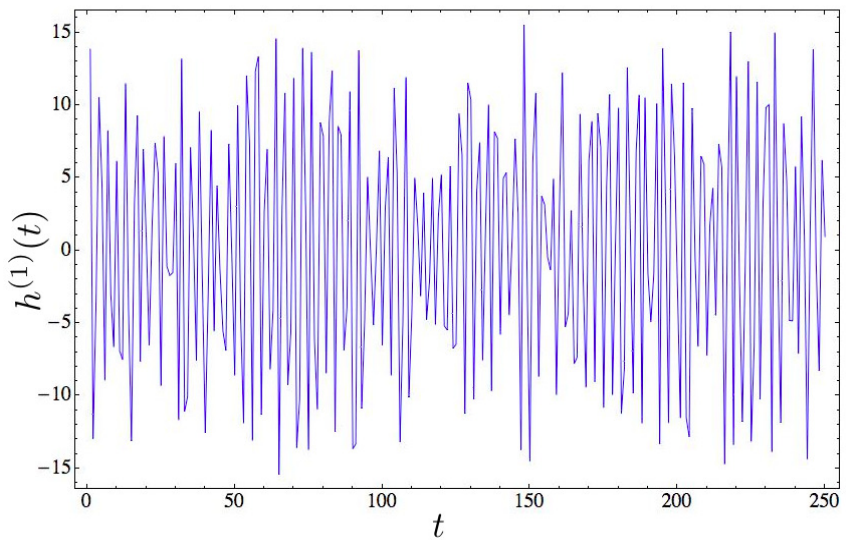
$$x_j - m_j^{(1)} = h_j^{(1)}. \quad (5.5)$$

Ya que las envolventes incluyen a todos los extremos, la oscilación entre ellos $h^{(1)}$, es la oscilación de los datos en una escala de tiempo más fina (ver Fig. 5.3). Lo ideal sería que esta oscilación fuera un IMF, pero en la práctica el proceso produce nuevos extremos, por lo que más iteraciones son requeridas para extraer el IMF. En estas nuevas iteraciones la componente obtenida se utiliza como los nuevos datos. El procedimiento se ilustra para obtener $h^{(1)}$ en las figuras 5.4 a-b.

¹Un spline es una curva diferenciable definida en porciones mediante polinomios.

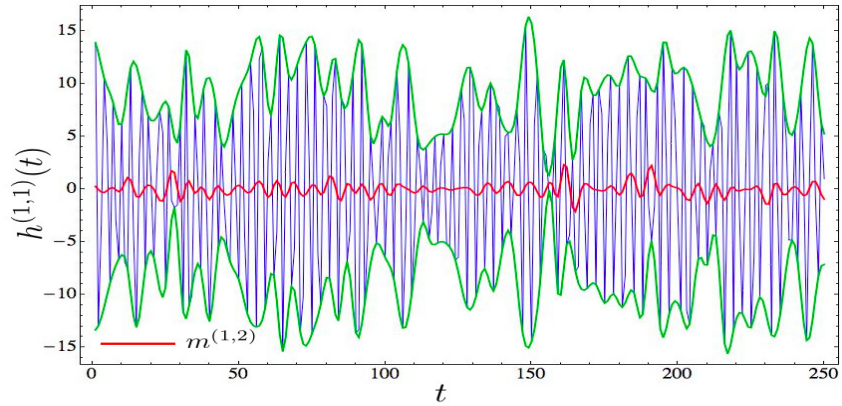


(a) Procedimiento de *sifting*

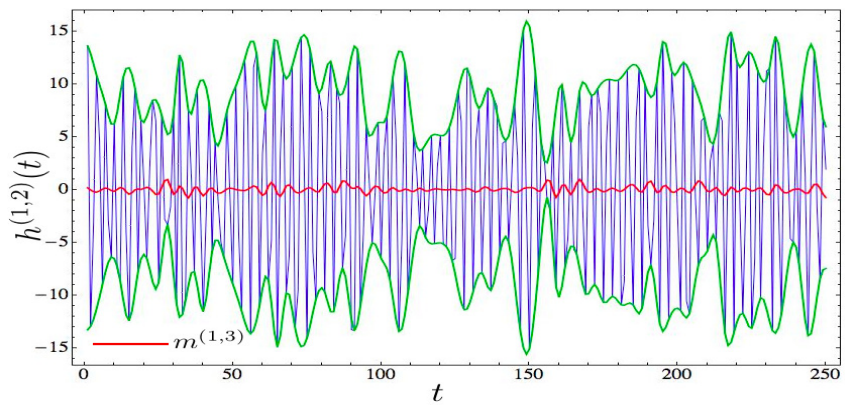


(b) Serie de tiempo $h^{(1)}$

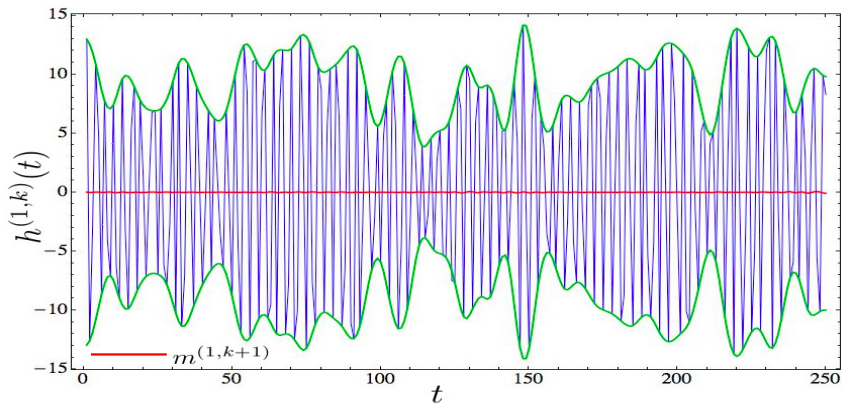
Figura 5.3: Procedimiento gráfico para obtener $h^{(1)}$, (a) *sifting*. Después de un *sifting* se muestra el resultado en (b). Idealmente $h^{(1)}$ debería ser un IMF, por construcción $h^{(1)}$ debería satisfacer todos los requisitos para ser un IMF. Sin embargo, en la realidad el procedimiento numérico puede generar nuevos extremos.



(a) Segundo *sifting*



(b) Tercer *sifting*



(c) Primer IMF

Figura 5.4: En (a) el procedimiento de *sifting* es llevado a cabo por segunda ocasión, (b) muestra el resultado mejorado después del segundo *sifting* pero todavía no tiene un perfil simétrico alrededor del cero. Después de $k + 1$ *siftings*, el resultado se da en (c). Ahora todos los máximos locales son positivos y todos los mínimos locales son negativos, con un perfil simétrico.

3. Repetir los pasos 1 y 2 al componente obtenido con los nuevos datos

$$h_j^{(1)} - m_j^{(1,1)} = h_j^{(1,1)} \quad (5.6)$$

y se detendrá cuando el componente resultante sea un IMF, es decir, cuando todos los máximos locales son positivos, todos los mínimos locales son negativos y la media de las envolventes es localmente cero, lo que garantiza que la componente es simétrica. Se obtiene el IMF después de k iteraciones

$$h_j^{(1,k-1)} - m_j^{(1,k)} = h_j^{(1,k)} \quad (5.7)$$

Entonces $h^{(1,k)}$ se designa como un modo intrínseco de los datos y como un componente de nuestra nueva base (ver Fig. 5.4)

$$c^{(1)} = h^{(1,k)}. \quad (5.8)$$

4. Sustraer el primer IMF obtenido de los datos originales

$$x_j - c_j^{(1)} = r_j^{(1)} \quad (5.9)$$

El residuo $r^{(1)}$ es una nueva versión de los datos (ver Fig. 5.5), donde las oscilaciones más finas (las componentes con los periodos más cortos) se han eliminado. Sin embargo, todavía contiene información de los componentes con periodo más largo, por lo que aún es necesario eliminar los componentes de éste otro.

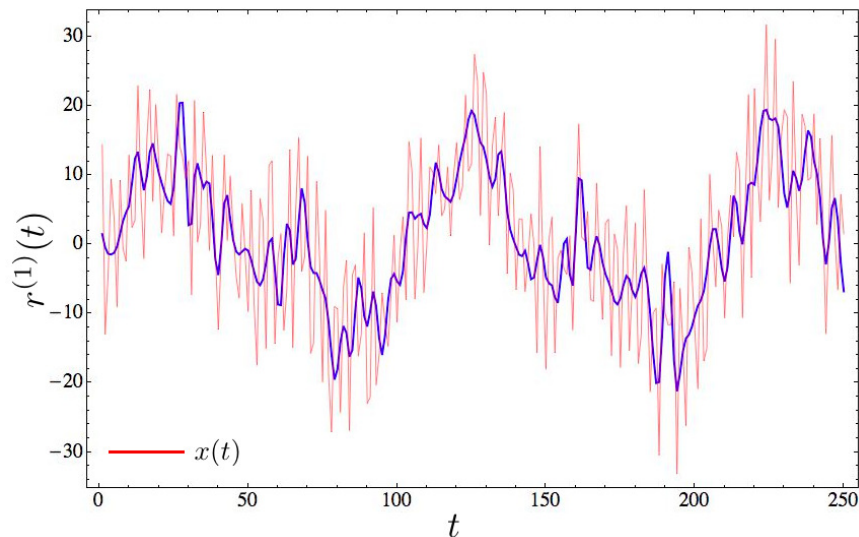


Figura 5.5: Serie de tiempo $r^1(t)$ generada después de haber restado el primer IMF. Éste todavía contiene información de los componentes con períodos más largos, por lo que se trata como la nueva serie y se somete al mismo proceso de *sifting*, como se describió anteriormente.

5. Repetir los pasos 1 a 4, con el fin de extraer todos los componentes IMFs de los datos originales, utilizando los nuevos datos en cada iteración del residuo obtenido en el paso anterior

$$r^{(1)} - c^{(2)} = r^{(2)}, \dots, r^{(n-1)} - c^{(n)} = r^{(n)}, \quad (5.10)$$

donde n es el número de IMFs en los datos. Este proceso se puede detener cuando el residuo n -ésimo es una función monótona que no presenta extremos, por lo que no existen más IMFs que puedan ser extraídos. A este último residuo se le llama la tendencia de los datos. Es importante notar que cualquier residuo constituye una tendencia para a la oscilación previamente extraída, es decir, $r^{(i)}$ es la tendencia seguida por la oscilación $c^{(i)}$.

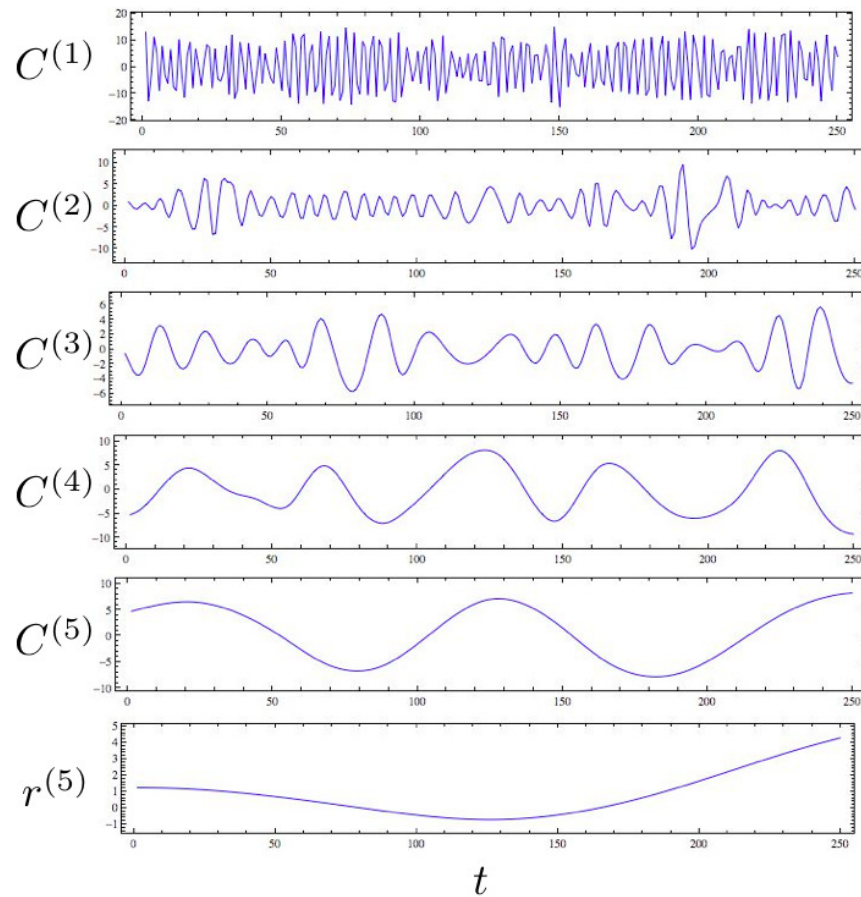


Figura 5.6: El resultado de la descomposición de modo empírico por componentes de los datos mostrados en la Fig. 5.1: los componentes de $C^{(1)} - C^{(5)}$. Debe notarse que el último componente, $r^{(5)}$, no es un IMF, sino la tendencia de nuestra serie de tiempo.

Después de haber realizado la descomposición, es posible expresar los datos originales en términos de los IMFs obtenidos

$$x_j = \sum_{i=1}^n c^{(i)} + r^{(n)} . \quad (5.11)$$

Una descomposición en términos de los n IMFs y el residuo se consigue después de haber completado el procedimiento anterior. El residuo se comporta como una tendencia general para la serie original y, en principio, contiene sólo las oscilaciones que pertenece a periodos mayores que la duración de los datos (ver Fig. 5.6). Los IMFs suelen tener un significado físico, porque las escalas características de la serie de tiempo son físicas. Sin embargo, relacionar los IMFs con los procesos físicos que tienen lugar en el sistema no es trivial. Una herramienta útil para lograr establecer esta relación es el espectro de Hilbert-Huang [77]. A través de la transformada de Hilbert es posible obtener una frecuencia instantánea dependiente del tiempo para cada IMF y se puede entonces tener una representación energía-frecuencia-amplitud dependiente del tiempo.

Es necesario mencionar algunas cosas sobre la base formada por los IMFs. La completitud de la base puede ser demostrada, ver, e.g., 5.11. La ortogonalidad no está garantizada teóricamente, pero se cumple en forma aproximada en la práctica. La ortogonalidad depende del proceso de descomposición, pues, por definición, los IMFs corresponden a diferentes frecuencias, pero es posible para parte de los datos que algunas oscilaciones con cierta frecuencia aparezcan en diferentes IMFs, pero en instantes diferentes. En este sentido, el proceso solamente asegura la ortogonalidad localizada temporalmente (es decir, en cada momento determinado).

5.2. Estructura fractal en los IMFs

Básicamente, la descomposición en modos empíricos representa una señal en la escala de sus oscilaciones locales. La idea central del método EMD es formalizar la idea de que, a nivel local, la señal es igual a un conjunto de oscilaciones rápidas superpuestas en oscilaciones más lentas. A pesar de que el EMD es bastante simple de aplicar, aún carece de un fundamento teórico. De hecho, actualmente se define sólo como el resultado de un algoritmo iterativo, sin una definición analítica que podría ser utilizada para la evaluación de su desempeño. La mejor manera de comprender esta técnica es recurrir a extensas simulaciones numéricas en situaciones bien controladas. En esa dirección ha habido diversas aplicaciones en diferentes áreas de la ciencia donde se han obtenido resultados prometedores [78].

En esta sección nos concentramos en la información que se puede obtener del conocimiento estadístico de los IMFs obtenidos con el EMD, tal como lo podría hacer algún filtro en el procesamiento de señales. Esta caracterización se lleva a cabo en el dominio de las frecuencias desde una perspectiva estocástica [79].

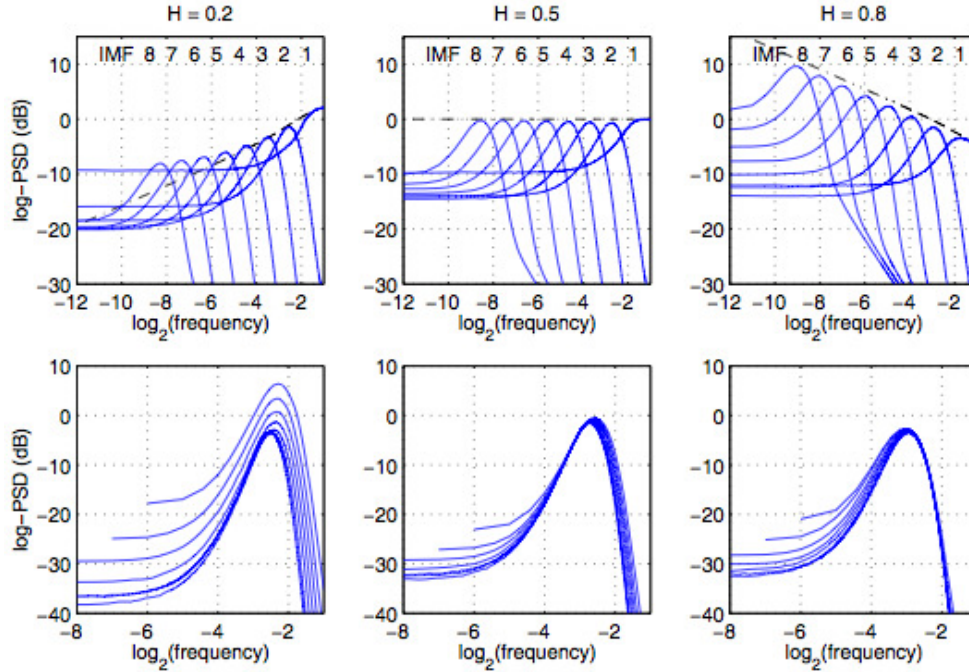


Figura 5.7: Espectro promedio de los primeros 8 IMFs y el espectro teórico (línea punteada) para ruidos gaussianos fraccionarios.

La idea que seguiremos ahora es aplicar el EMD a algunos ruidos de banda ancha, con el fin de entender cómo un proceso de amplio espectro se divide en sus funciones de modo intrínseco (IMFs). El experimento numérico consiste en analizar ensambles de ruido gaussiano fraccionario (fGn) con diferentes propiedades en su secuencia de autocorrelaciones, que está dada por

$$r_H[k] = \frac{\sigma^2}{2} (|k-1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k+1|^{2H}). \quad (5.12)$$

La expresión anterior mide la autosimilitud de las autocorrelaciones, dependiendo del valor del parámetro H (exponente de Hurst ²). Con el objetivo de estudiar cómo se dividen los IMFs, para cada caso de H , se calcula el espectro de Fourier de cada uno de los IMFs, obtenidos a través del EMD. Los resultados se pueden ver en la Fig. 5.7. En el resultado mostrado en la figura anterior, se aprecia que el EMD está actuando como un filtro, donde cada IMF tiene un ancho de banda correspondiente. Una de las principales observaciones obtenidas en el análisis, que es de importancia para nosotros, es que para los IMFs (excepto por el primero), todos los espectros de Fourier son muy parecidos, con algunos cambios en la abscisa y la ordenada. En cuanto a esto último, podemos comprobar la autosimilitud en la estructura de los espectros que conduce a una relación de escala

$$S_{k',H}(f) = \rho_H^{\alpha_H(k'-k)} S_{k,H}(\rho_H^{k'-k} f), \quad (5.13)$$

²El exponente de Hurst mide también la fractalidad en las series de tiempo.

para $2 \leq k, k' \leq 8$ (en su caso) y ciertos valores de los parámetros α_H y ρ_H . Como consecuencia de ello, los espectros de los IMFs deben colapsar sobre una sola curva, cuando están debidamente renormalizados. Esto se puede observar en la parte inferior de la Fig. 5.7, con la elección específica de $\rho_H = 2$ y $\alpha_H = 2H - 1$. El estudio mencionado fue llevado a cabo originalmente por P. Flandrin y sus colaboradores.

Regresaremos a este tipo de estudio en la sección 5.5, para espectros obtenidos con RMT y visualizados como series de tiempo pero, por el momento, la primera aplicación del método en este capítulo se refiere a un método para mejorar el procedimiento de reescalado, tratado anteriormente, en el caso de los espectros nucleares (ver sección 4.1).

5.3. Implementación del EMD para el reescalado en espectros nucleares

En esta sección nos centramos en el estudio de series de tiempo en sistemas que oscilan o fluctúan alrededor de un comportamiento promedio. Esta propiedad, en un sentido amplio, implica que el sistema consiste de uno o varios procesos que se repiten en el tiempo en una escala de tiempo específico o en un rango de escalas de tiempo. La técnica que proponemos aquí no depende de la selección a priori de las funciones para el desarrollo del reescalado, como veremos, mejora significativamente la estimación de la parte suave. A lo largo de este trabajo llevamos a cabo un reescalado inicial con polinomios de diferentes grados como ejemplo, pero los resultados no dependen de esta elección y es posible mejorar la estimación a partir de cualquiera de los procedimientos mencionados en la sección 4.1.

Una vez reescalado el espectro, se puede calcular la separación de los niveles vecinos más cercanos usando la ecuación 4.6. Es importante conocer la distribución que siguen estas separaciones, para poder conocer también la forma en que se comportan las correlaciones de corto alcance. Ésto da una señal de las propiedades estadísticas que siguen las correlaciones de largo alcance. Anteriormente se calculó la función discreta δ_n , que mide las desviaciones en la energía del $(n + 1)$ -ésimo estado reescalado y la correspondiente energía de una secuencia de energías equidistantes. Como se mencionó antes, el resultado de un reescalado defectuoso tiene como consecuencia la introducción de correlaciones espurias en las fluctuaciones del espectro. En un espectro reescalado apropiadamente, en principio todos los rastros de la componente secular de la señal han sido eliminados. En términos de la serie de tiempo, estas correlaciones están representadas como tendencias globales en la estadística δ_n , es decir, por un comportamiento suavemente variable. Si el espectro de energía ha sido reescalado correctamente, entonces la δ_n debe consistir sólo de las fluctuaciones alrededor de su valor promedio constante.

Nuestro ejemplo se basa en el estudio de un espectro obtenido a partir de una matriz perteneciente a un ensamble ortogonal gaussiano (GOE), un sistema que es considerado paradigma para el estudio del caos cuántico [80]. El espectro de energía se reescala con tres diferentes polinomios. La resultante δ_n , para cada caso, se muestra en la figura 5.8. En el

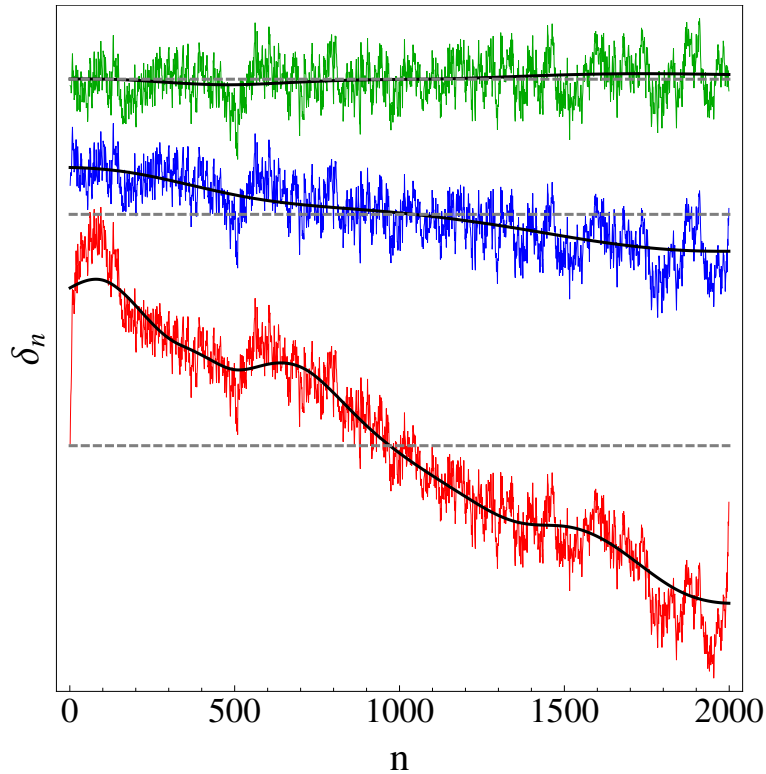


Figura 5.8: Estadística δ_n para un espectro GOE reescalado con polinomios de orden 5 (abajo, línea roja), 9 (en medio, línea azul) y 13 (arriba, línea verde). Las líneas punteadas muestran la media en cada caso y la línea de color negro sólido muestra la tendencia obtenida a través del EMD. Cada gráfica se desplaza a lo largo del eje vertical para evitar la superposición.

fondo (línea roja) se muestra una señal de δ_n obtenida con un ajuste de quinto orden. En medio (línea azul), se muestra la δ_n correspondiente a un ajuste de orden nueve, mientras que la señal que está en la parte alta (línea verde), muestra la δ_n para un ajuste con un polinomio de orden 13.

Las gráficas fueron desplazadas a lo largo del eje vertical para evitar la superposición de los datos. Las líneas punteadas muestran la media para cada caso mencionado. Si el procedimiento de reescalado fuera correcto, la serie de tiempo debería fluctuar alrededor de esta media. Sin embargo, se aprecia que una tendencia global todavía está presente de forma clara. Ésta tendencia se muestra como una línea de color negro sólido para cada caso. Con el fin de resolver los problemas resultantes de un reescalado incorrecto, proponemos quitar la tendencia de las series de tiempo δ_n , utilizando la técnica de EMD. Antes de simplemente quitar el residuo $r^{(n)}$ a las series de tiempo correspondientes, abordaremos con mayor cuidado el concepto de tendencia.

La tendencia (trend) es un concepto importante para una gran cantidad de temas en la física, la economía, la estadística, la sociología, etcétera. Se utiliza específicamente en el

análisis de conjuntos o series de datos. Mientras que puede utilizarse una idea intuitiva de la tendencia, no existe una definición precisa de la misma. En la mayoría de las aplicaciones de análisis de datos la tendencia domina el comportamiento global de los datos y para un análisis más preciso de los fenómenos es necesario restar la tendencia con el fin de revelar los detalles o efectos pertinentes. Desafortunadamente, no existe un algoritmo general para quitar la tendencia de una serie de tiempo, especialmente en el caso de que las series de tiempo sean no lineales y no estacionarias. Un ejemplo que hemos mencionado, es el procedimiento de reescalado, donde suele evitarse una descripción precisa y detallada del procedimiento para eliminar la tendencia global. Recientemente se ha propuesto un intento de definir matemáticamente la tendencia [81]. Los autores ponen especial énfasis en el hecho de que la tendencia es parte de los datos, una propiedad intrínseca de los mismos. Por lo tanto, con el fin de abstraer la tendencia, es necesario utilizar un método adaptativo, es decir, la tendencia debe ser extraída directamente de los datos. La técnica propuesta en el EMD es especialmente adecuada para llevar a cabo un proceso sistemático para eliminar la tendencia, basado totalmente en los datos. El desarrollo numérico ha sido mencionado anteriormente, por lo que ahora nos limitaremos a aplicar el procedimiento a la δ_n . La tendencia debe ser una constante para una δ_n obtenida a partir de un espectro reescalado correctamente. La figura 5.8 muestra con líneas sólidas negras las tendencias obtenidas a través del EMD, para espectros previamente reescalados con polinomios de orden 5, 9 y 13. Dos efectos indeseables son evidentes en esta gráfica, el primero relacionado con la tendencia global, que sigue siendo visible después del procedimiento de reescalado. En cada caso es evidente que la técnica de EMD captura el comportamiento global, por lo que es posible que se reste a los datos. El segundo efecto es más sutil y tiene que ver con el hecho de que los valores de la δ_n en los bordes del espectro cambian bruscamente, sobre todo cuando el orden del polinomio original para ajustar el espectro es bajo. Si este es el caso, la descomposición del EMD no es muy adecuada para estas áreas, debido a las condiciones de borde de las interpolaciones de los splines cúbicos. Con el fin de evitar este efecto, eliminamos el 5% de los valores propios al inicio y al final del espectro.

Con el fin de disminuir la dependencia del método polinomial sobre el procedimiento de reescalado, se propone la construcción de una nueva fluctuación sin tendencia, restando la tendencia obtenida con el EMD, $\delta'_n = \delta_n - r^{(n)}$. La figura 5.9 muestra el resultado de la exclusión de 5% de los valores propios en los bordes y la resta de la tendencia residual de la estadística original δ_n (Figura 5.8). Es notable la forma en que, en un examen cualitativo de las características principales de las fluctuaciones, éstas están presentes en cada gráfica y aparentemente muestran las mismas características. Una diferencia sutil se aprecia en la última parte de la δ'_n obtenida con un polinomio de quinto orden. Esta gráfica tiene una oscilación adicional alrededor de $n = 1200$, que está presente debido al efecto que se mencionó antes, i.e., el cambio brusco de la δ_n para los valores en los bordes del espectro. En este caso, dejar 5% de los valores propios no resulta ser suficiente. Sin embargo, este caso es útil para apreciar cómo la parte afectada se limita al final de la estadística δ'_n , es decir, es un fenómeno local que se puede eliminar. Para demostrar cuantitativamente que la nueva estadística δ'_n es

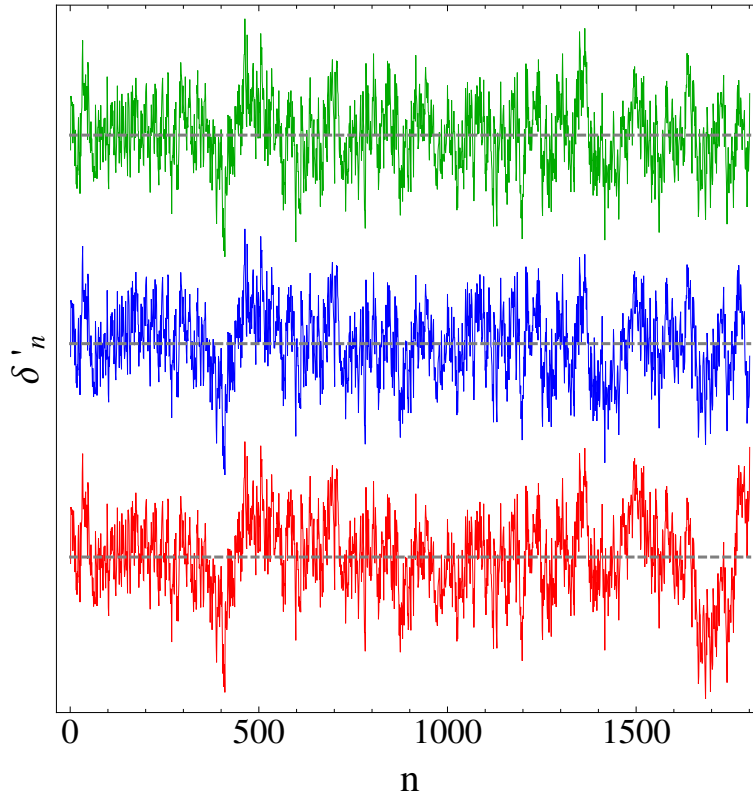


Figura 5.9: La estadística sin tendencia δ'_n para un espectro GOE, definida concretamente como $\delta'_n = \delta_n - r^{(m)}$, donde $r^{(m)}$ es la tendencia obtenida a través del EMD. El espectro fue reescalado con polinomios de orden 5 (abajo, en línea roja), 9 (medio, en línea azul) y 13 (parte superior, en línea verde). Las líneas punteadas muestran la media en cada caso. Cada gráfica se desplazó a lo largo del eje vertical para evitar la superposición.

independiente del reescalado, se aplican distintas medidas para cuantificar las correlaciones de la nueva serie de tiempo.

5.4. Medidas del caos cuántico

Con el fin de demostrar que la estadística δ'_n conduce a mediciones del caos independientes del procedimiento de reescalado, se realizó un experimento numérico detallado. Hemos construido y diagonalizado 100 matrices GOE con 2000 valores propios para cada matriz. Las estadísticas δ_n y δ'_n fueron calculadas para cada espectro. Teniendo en cuenta estas dos estadísticas, se estudia el comportamiento del ensamble para las medidas habituales de caos cuántico y se comparan para diferentes órdenes del grado del polinomio utilizado. Fue elegido el sistema de GOE, ya que es el ejemplo más conocido de un sistema que presenta caos cuántico y además el resultado teórico de las mediciones habituales del caos cuántico

se conocen muy bien [4, 80]. Como primera prueba, elegimos una medida del caos cuántico que se calcula usando la estadística δ_n . La ley de potencia se obtiene del análisis espectral de Fourier para estas fluctuaciones. Se ha demostrado que el espectro de potencia para las fluctuaciones del espectro cuántico sigue una dependencia de ley de potencia de la forma $\langle P(f) \rangle \sim 1/f^\beta$, donde esta relación es sólo una aproximación válida cuando no se tienen en cuenta las frecuencias más altas del espectro. Por lo tanto, en el análisis numérico mostramos sólo la región de las frecuencias que sigue un comportamiento de ley de potencia [82, 83]. En el caso de un sistema integrable el valor del exponente se acerca a $\beta = 2$, ya que las distancias entre los niveles se comportan como variables aleatorias independientes. Para el ensamble GOE el valor de $\beta = 1$ se corresponde con el hecho de que las correlaciones existen en todas las escalas disponibles. De acuerdo con esto, el espectro de potencia de un espectro GOE correctamente reescalado debe seguir una ley de potencia $\langle P(f) \rangle \sim 1/f$.

El experimento numérico compara la eficacia en la detección de la presencia de caos cuántico, utilizando las fluctuaciones de las estadísticas δ_n obtenidas con el reescalado tradicional del espectro y, por otro lado, las fluctuaciones sin tendencia δ'_n . Con el propósito de comparar el comportamiento del ensamble, un espectro de potencias promedio es calculado utilizando los espectros de potencias de 100 series individuales, lo que reduce la dispersión y pone de manifiesto con mayor claridad el comportamiento de la ley de potencia del sistema.

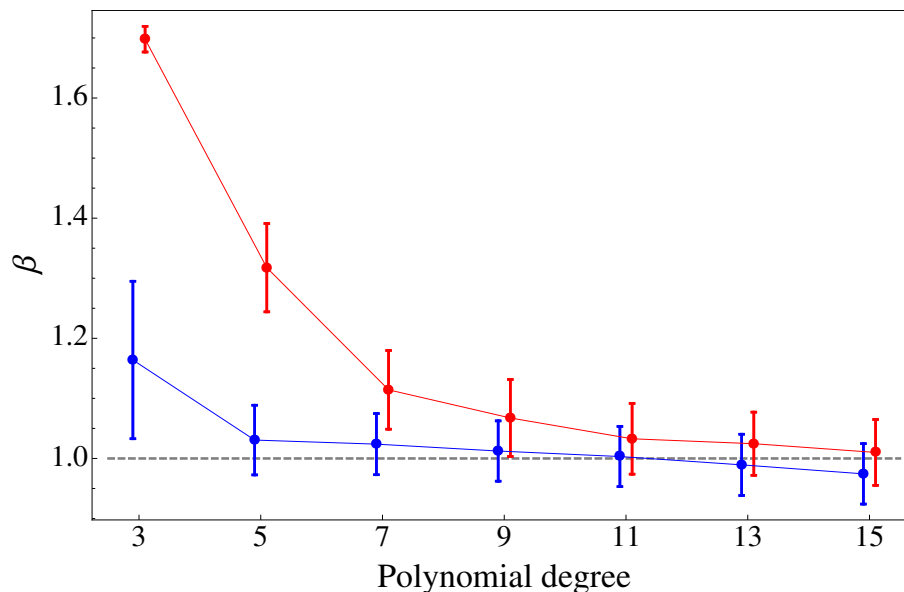


Figura 5.10: Valor del exponente β , para el comportamiento que sigue el espectro de potencias promedio de las fluctuaciones como función del grado del polinomio utilizado para reescalar el espectro. Se muestra para dos casos los valores del exponente β : para las fluctuaciones δ_n (superior, en línea roja) y el caso de las fluctuaciones δ'_n , obtenidas al eliminar la tendencia a la anterior (inferior, en línea azul). La línea punteada muestra el resultado teórico para GOE. Las barras de error muestran la desviación estándar como resultado del ensamble.

Los resultados del experimento numérico se comparan en la figura 5.10, que muestra los valores del exponente β obtenidos para los diferentes órdenes del polinomio utilizados para desarrollar el reescalado. La parte superior (en línea roja) se corresponde con el caso del espectro de potencia promedio de las fluctuaciones δ_n y la inferior (línea en azul) muestra el caso del espectro de potencia de la fluctuación sin tendencia δ'_n . Las barras de error muestran la desviación estándar obtenida de las regresiones lineales individuales a los espectros de potencia pertenecientes a cada miembro del ensamble y la línea gris punteada indica el valor teórico del exponente β para GOE. Es evidente que el valor de β depende del orden del polinomio utilizado para reescalar el espectro cuántico. Si el orden del polinomio es demasiado bajo entonces se observan correlaciones de largo alcance espurias y la parte de bajas frecuencias del espectro produce exponentes más grandes que $\beta = 1$. Sin embargo, el uso del EMD para eliminar la tendencia residual, elimina estas correlaciones espurias y mejora el valor del exponente, que se acerca al valor teórico. Cuando la tendencia es eliminada en los casos donde el grado del polinomio utilizado es menor a 15, el valor de β coincide con el valor teórico, salvo el ejemplo correspondiente al polinomio de tercer orden que es un caso extremo. A medida que el orden del polinomio aumenta, el valor del β se aproxima al valor teórico, pero si el orden del polinomio es lo suficientemente grande entonces el reescalado destruye las correlaciones y el β tiende a valores inferiores a $\beta = 1$. Esta situación no puede ser mejorada mediante el uso del EMD porque las correlaciones importantes se han perdido y no se pueden recuperar.

Usando la fluctuación sin tendencia δ'_n es posible obtener un espectro adimensional ϵ'_i , definido como

$$\epsilon'_{i+1} = \delta'_i + \epsilon_1 + i\langle s \rangle, \quad (5.14)$$

donde δ'_i son las fluctuaciones o la diferencia entre el espectro cuántico del sistema ϵ' y una versión regular del mismo, $\epsilon_1 + i\langle s \rangle$. Dado este espectro, es posible explorar la dependencia de otras medidas del caos en función del orden del polinomio utilizado. Las correlaciones de corto alcance son analizadas por medio de la distribución de las diferencias de los vecinos más cercanos $P(s)$. Esta distribución no es sensible a los detalles del reescalado [70] y solamente hacemos mención que la distribución de Wigner se conserva después de remover la tendencia de las fluctuaciones.

De mayor importancia para nosotros es el estudio de las correlaciones de largo alcance en el espectro cuántico que se estudian tradicionalmente a través de la rigidez del espectro, representada por el estadístico $\Delta_3(L)$. Teóricamente, los valores de la $\Delta_3(L)$ para un sistema integrable y para GOE son bien conocidos, ver sección 3.3.2. Para el caso de GOE se tiene una $\Delta_3(L) = (\text{Log}(L) - 0.0687)/\pi^2$, mientras que para el caso de un sistema integrable se tiene $\Delta_3(L) = 1/15$. Es posible calcular la estadística $\Delta_3(L)$ para el espectro sin tendencia y comparar el cálculo con la $\Delta_3(L)$, obtenida a partir del espectro reescalado de manera tradicional. La figura 5.11 muestra esta comparación. La parte superior de la gráfica muestra el promedio del ensamble para la $\Delta_3(L)$ obtenida para el espectro reescalado con diferentes grados del polinomio. La línea punteada gris muestra el comportamiento teórico derivado para GOE. Se observa que para todos los grados del polinomio el resultado esperado se sigue hasta $L = 200$, a excepción del polinomio de tercer orden que muestra algunas desviacio-

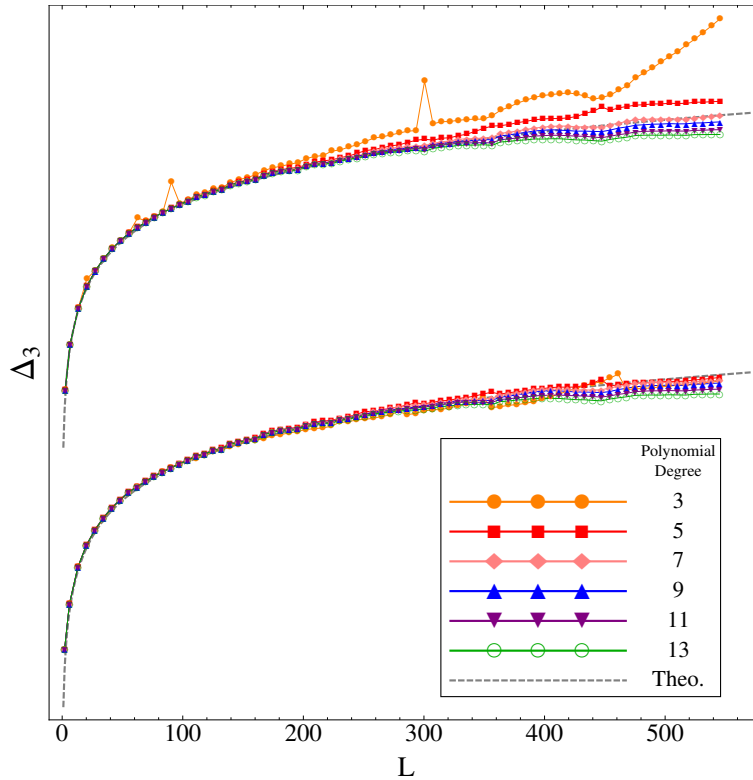


Figura 5.11: Valor de la $\Delta_3(L)$ promedio sobre el ensamble de datos. La parte superior muestra el Δ_3 calculado utilizando polinomios de distinto orden para reescalar los espectros. Las gráficas han sido desplazadas para evitar la superposición. La parte inferior muestra la Δ_3 calculada a partir de los espectros obtenidos sin la tendencia extraída con el EMD, la δ'_n . Las gráficas para diferentes grados del polinomio se muestran en ambos casos. La línea discontinua muestra el resultado teórico para GOE.

nes pequeñas. Para valores mayores de L , los espectros reescalados con polinomios de orden bajo se desvían sistemáticamente del comportamiento teórico debido a las correlaciones espurias, las cuales corresponden a la tendencia residual. Puesto que la tendencia puede ser representada como oscilaciones de baja frecuencia, se espera que el efecto se refleje en la región de correlaciones de largo alcance. El espectro reescalado con polinomios de orden más alto muestra desviaciones por el efecto mencionado anteriormente en el análisis espectral de Fourier, es decir, el reescalado destruye correlaciones importantes. La parte inferior de la figura 5.11 muestra el promedio del ensamble para la estadística $\Delta_3(L)$, calculada utilizando el espectro sin tendencia de la ecuación (5.14). El efecto de restar la tendencia residual de las fluctuaciones es evidente. En la región de valores pequeños de L las desviaciones para el polinomio de tercer orden han desaparecido, mientras que en la región de valores de L mayores, el comportamiento para el polinomio de orden bajo mejora y sigue el comportamiento teórico esperado. El caso de los polinomios de orden superior no mejora, puesto que las correlaciones

importantes una vez que son destruidas con el ajuste no se pueden recuperar. Es importante remarcar que gran parte de los estudios de la rigidez en la literatura se limitan a L pequeñas y muchas veces no se logra apreciar el efecto del reescalado en sus cálculos.

La estadística $\Delta_3(L)$ es una buena medida de las correlaciones de largo alcance presentes en un espectro cuántico, pero es difícil obtener una evaluación cuantitativa del comportamiento teórico, como se hizo en el ejemplo anterior, para el espectro de potencia con el análisis de Fourier, por medio del valor del exponente β . Recientemente, se ha propuesto una medida alternativa de la magnitud del caos de un sistema cuántico [84]. Este método utiliza una técnica basada en el análisis de fluctuaciones sin tendencia (DFA), que ha sido directamente relacionado con la $\Delta_3(L)$. Los detalles del desarrollo matemático pueden verse en la siguiente referencia [84]. La técnica de DFA fue propuesta, en el contexto del análisis de series de tiempo, como un método para investigar las correlaciones de largo alcance en series no estacionarias. No abordaré nuevamente dicho método, sino simplemente menciono la idea principal. La pendiente α_{dfa} obtenida con el DFA en la gráfica $\text{Log}F(\ell)$ vs $\text{Log}(\ell)$, caracteriza las propiedades de escalamiento de la serie de tiempo, ya que refleja una ley de potencias de la forma $F(\ell) \sim \ell^{\alpha_{\text{dfa}}}$. En el caso de un sistema regular no correlacionado, el valor teórico de la pendiente es de $\alpha_{\text{dfa}} = 1/2$. Para el caso de GOE, mientras tanto, el valor esperado es de $\alpha_{\text{dfa}} = 1$ [84]. La técnica de DFA nos permite comparar la fluctuación de la estadística de las fluctuaciones δ_n con respecto a las δ'_n como lo hace el análisis espectral de Fourier, pero éste último presenta una ventaja, porque está diseñado para no tener problemas con las propiedades no estacionarias de las señales.

Una comparación cualitativa de la relación entre la pendiente que se obtiene del DFA para las fluctuaciones δ_n y δ'_n se muestra en la figura 5.12. Una vez más, la mejora debido al proceso de haber quitado la tendencia es notable. La parte superior de la figura muestra la pendiente α_{DFA} obtenida de un cálculo de DFA sobre las fluctuaciones δ_n que provienen de un reescalado con diferentes grados en el polinomio utilizado. El valor teórico para GOE ($\alpha_{\text{dfa}} = 1$) se muestra como referencia en una línea punteada gris de la gráfica. Es evidente la forma en que para los polinomios de orden bajo el resultado se aleja del comportamiento teórico esperado, cuando aumenta ℓ (tamaño de la caja). Valores grandes de ℓ corresponden a correlaciones de largo alcance en la serie de tiempo. Este gráfico muestra cómo, si el grado del polinomio es demasiado bajo, el reescalado sólo es capaz de representar correctamente las correlaciones hasta un cierto rango. Por otro lado, si el grado del polinomio es muy grande, entonces el procedimiento de reescado destruye importantes correlaciones de largo alcance. Este efecto también se observa en la parte superior de la figura 5.12, pero es más sutil. La parte inferior de la misma figura muestra el resultado del DFA en las fluctuaciones sin tendencia δ'_n . Está claro la forma en que la divergencia observada para los polinomios de orden bajo se ha reducido. Todos los casos tienen un comportamiento lineal, que corresponde al caso teórico para valores muy grandes de ℓ . El caso del polinomio de tercer orden comienza a separarse, lo que significa que algunas correlaciones a muy largo plazo todavía no aparecen. Sin embargo, el rango para el cual la varianza del DFA sigue una relación lineal se ha mejorado sustancialmente.

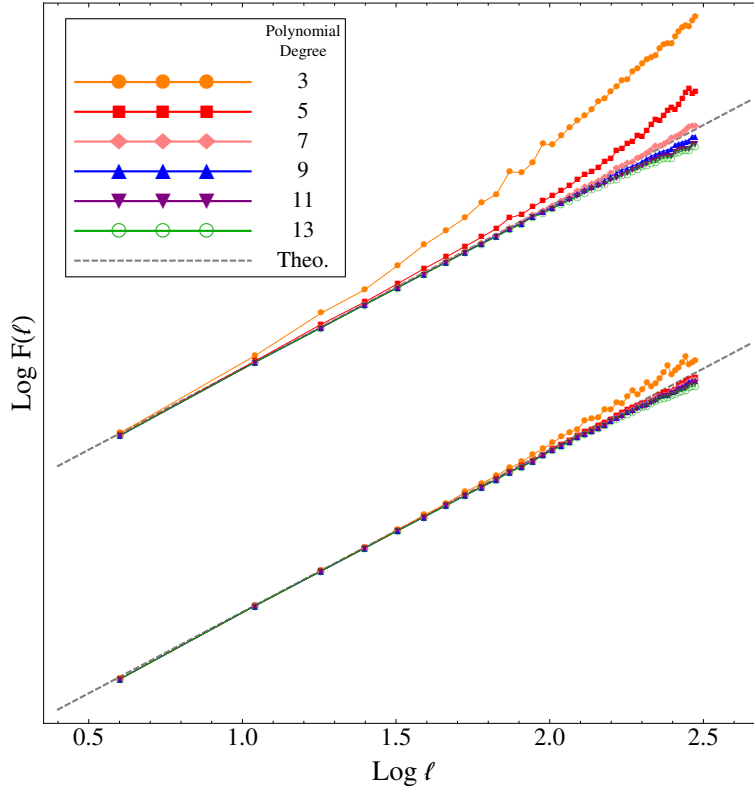


Figura 5.12: Valor de la varianza del DFA, $\text{Log}(F(\ell))$, promediada sobre el ensamble. La parte superior muestra $\text{Log}(F(\ell))$ calculada utilizando DFA en la δ_n . Estas gráficas han sido desplazadas para evitar la superposición de los datos. La parte inferior muestra los valores de $\text{Log}(F(\ell))$ del DFA para la δ'_n sin tendencia. Gráficas para diferentes grados del polinomio utilizado en el ajuste del reescalado al espectro cuántico se muestran en ambos casos. La línea punteada muestra el resultado teórico para el ensamble GOE.

Los resultados mostrados en la figura 5.12 demuestran que, cualitativamente eliminando la tendencia de la fluctuación, se mejora el rango para el cual las correlaciones de largo alcance del sistema pueden ser detectadas. Sin embargo, el análisis del DFA nos permite observar esta mejora de forma cuantitativa mediante el cálculo del exponente α_{dfa} . La figura 5.13 compara los valores obtenidos para el exponente α_{dfa} como función del orden del polinomio utilizado en el reescalado del espectro, para obtener la estadística δ_n (en línea roja) y las fluctuaciones sin tendencia δ'_n (en línea azul). El comportamiento teórico se muestra con una línea gris discontinua. La mejora para los valores pequeños del grado del polinomio es evidente, pues después de eliminar la tendencia el exponente α_{dfa} coincide con la predicción analítica. Esta mejoría se observa hasta el polinomio de orden nueve. Para los casos con valores más grandes en el grado del polinomio no hay mejoría, una vez más por el efecto mencionado anteriormente, es decir, un polinomio de orden grande destruye correlaciones importantes que no se pueden recuperar al eliminar la tendencia de las fluctuaciones.

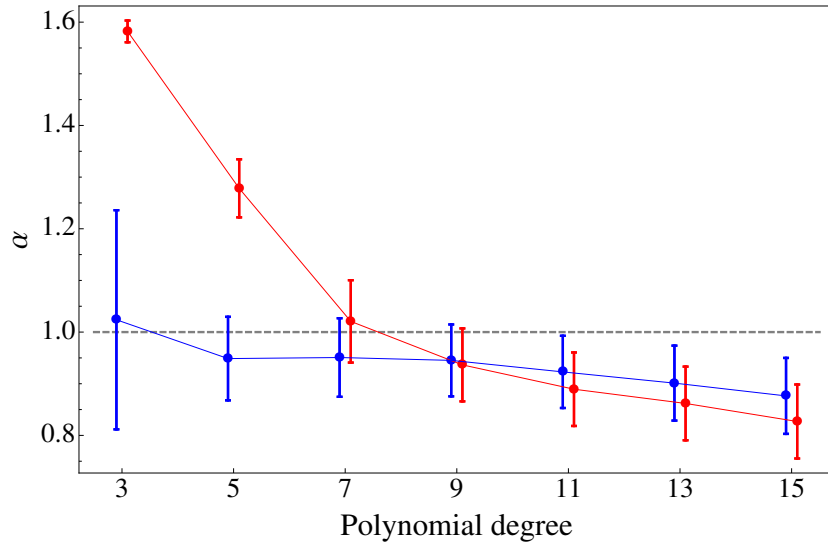


Figura 5.13: Valor del exponente α_{dfa} promedio para el comportamiento de ley de potencia, para los ensambles en el análisis del DFA en función del grado del polinomio utilizado para el reescalado del espectro cuántico. Dos casos se muestran, el exponente α_{dfa} para los valores de las fluctuaciones definidas por la estadística δ_n (rojo) y en el caso de las fluctuaciones δ'_n obtenidas al eliminar la tendencia a la anterior estadística (azul). La línea punteada muestra el resultado teórico para GOE. Las barras de error muestran la desviación estándar calculada a partir de los elementos del ensamble.

5.5. Estudio de las fluctuaciones espectrales usando el EMD

En esta sección se utilizan las propiedades de autosimilitud e invariancia de escala, presentes en los sistemas cuánticos caracterizados por la estadística de RMT, con el fin de dar una nueva cuantificación del caos cuántico, caracterizado por esta teoría. La invariancia de escala, como se ha mencionado en repetidas ocasiones, es una propiedad importante en diferentes sistemas físicos, dando origen a leyes de potencia que los hace realmente interesantes. Estas relaciones caracterizan a un gran número de fenómenos naturales y algunos de ellos tienen la particularidad de que, a pesar de la complejidad y la diferencia entre sus componentes, una gran parte de sus procesos dinámicos se describen por el exponente obtenido a través de una relación de ley de potencias que se mantiene constante a pesar de que hay una dinámica muy complicada entre los elementos conectados a través de patrones de interacción no trivial.

Bak et al. [85] propusieron que muchos sistemas complejos disipativos naturalmente se auto-organizan en un estado crítico, con las consecuentes fluctuaciones libres de escala que dan lugar a las leyes de potencia, independientemente de las condiciones iniciales. La idea de que muchos sistemas complejos se encuentran en un estado crítico auto-organizado es intuitivamente atractiva, ya que es natural asociar complejidad a un estado que está equilibrado en el borde entre el orden y el desorden.

Relación para α							
σ	GDE	6	16	36	76	156	GOE
α_{dfa}	1.49	1.34	1.29	1.24	1.21	1.18	0.99
α_{emd}	1.51	1.42	1.31	1.29	1.26	1.18	1.02

Tabla 5.1: El exponente α_{dfa} DFA y el parámetro α_{emd} obtenidos mediante análisis de las fluctuaciones sin tendencia δ'_n y usando la relación de η del EMD, respectivamente. Añadimos en la tabla las referencias GDE y GOE como los límites de referencia.

Las fluctuaciones espectrales de sistemas cuánticos caóticos se caracterizan por ruido invariante de escala del tipo $1/f$. Esta propiedad es universal para todo tipo de sistemas cuánticos caóticos ya sean invariantes ante inversión temporal o no. Por otra parte, la caracterización del ruido $1/f$ en el caos cuántico incluye a estos sistemas físicos en un rango más amplio de sistemas que aparecen en muchos campos de la ciencia y que muestran fluctuaciones con el mismo comportamiento [16]. La principal característica de este tipo de ruido es que implica correlaciones entre los diferentes elementos que se extienden sobre todas las escalas posibles y que están caracterizadas por una función de correlación que decae en forma logarítmica [86], ver Apéndice A.2.

Por otra parte, las propiedades de las fluctuaciones espectrales de los sistemas cuánticos genéricos, los cuales en el límite clásico son totalmente caóticos, coinciden con los de la teoría de matrices aleatorias (RMT), en concreto con el ensamble ortogonal gaussiano (GOE) para un sistema completamente caótico. Si por el contrario, la dinámica subyacente es integrable, es decir, no caótica, los niveles de energía se comportan como variables aleatorias independientes de un proceso estocástico de Poisson, descritas formalmente por el ensamble diagonal gaussiano (GDE) [87]. Con el fin de estudiar el comportamiento de invariancia de escala en la transición de sistemas GOE a sistemas GDE, suprimimos suavemente los elementos de matriz no diagonales de una matriz GOE por un factor de corte de la forma $\exp[-(i-j)^2/\sigma]$, donde σ es el parámetro que nos permite interpolar entre Poisson ($\sigma = 0$) y la estadística de GOE ($\sigma \rightarrow \infty$) [88]. Las fluctuaciones pueden caracterizar la dinámica de los sistemas debido a que pueden inferir las características del procesos estocástico generador de la serie.

En esta sección, nos centraremos específicamente en las propiedades de invariancia de escala correspondientes a las fluctuaciones de los espectros para RMT. Las simetrías involucradas en la estructura de las matrices aleatorias nos permiten representar una amplia variedad de sistemas físicos. Debido a ello, no tomamos un modelo físico específico, sino que explotamos el carácter universal de las fluctuaciones, obtenidas de los ensambles de RMT que caracterizan a los sistemas cuánticos, cuyos análogos clásicos son caóticos.

Los casos que se analizan a través del estudio de la estadística δ_n son los sistemas completamente caóticos (GOE), integrables (GDE) y casos intermedios entre estos dos límites. Para cada valor diferente de σ nuestros datos se compone de un ensamble de 500 matrices generadas numéricamente, cada una de tamaño 5000×5000 . Para cada caso realizamos el

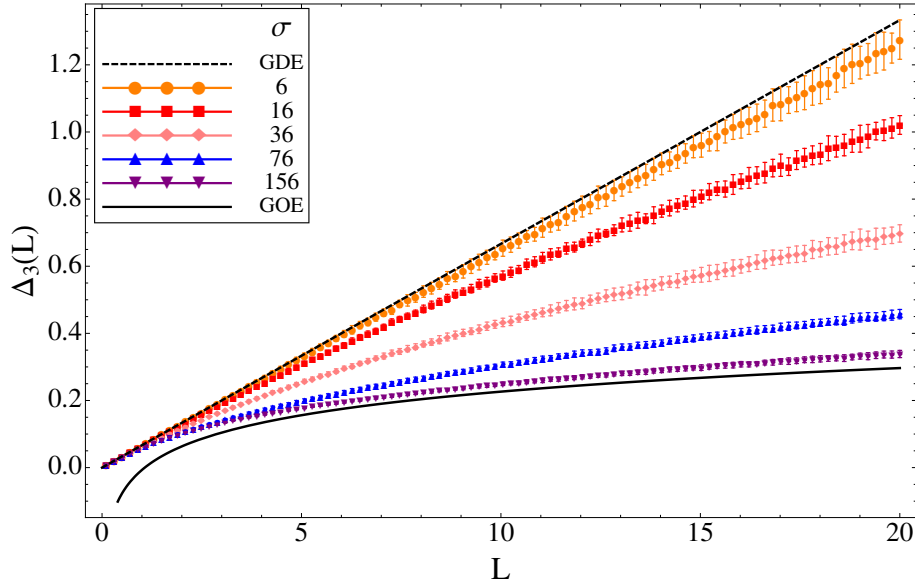


Figura 5.14: Resultados numéricos para la estadística Δ_3 obtenida con un modelo de matrices aleatorias para describir la estadística espectral en situaciones intermedias entre los límites de GDE y GOE, respectivamente. La línea punteada de negro y la línea negra son los límites, mientras que los valores de σ son los casos intermedios.

procedimiento de reescalado propuesto en la tesis y reportado en la referencia [10].

A fin de comparar las correlaciones de largo alcance y las propiedades de autosimilitud presentes en las fluctuaciones obtenidas para diferentes valores de σ , nos centramos principalmente en el exponente α_{dfa} del DFA, el exponente β_{ps} que se obtiene mediante el análisis espectral de Fourier y la medida estándar en RMT para medir la desviación con respecto a un espectro equidistante, conocida como la función de rigidez Dyson-Metha, $\Delta_3(L)$. El estadístico $\Delta_3(L)$ hace posible el estudio de las correlaciones de longitud L , pues conforme se cambia L se obtiene información sobre el nivel de las correlaciones en todas las escalas posibles del sistema. En la figura 5.14 se muestran los resultados numéricos de la $\Delta_3(L)$, para cada ensamble correspondiente al parámetro σ . Es notable como el comportamiento de la $\Delta_3(L)$ cambia suavemente conforme σ cambia del caso límite GOE a GDE. La figura también muestra los valores esperados teóricamente para los casos de GOE y GDE.

Los resultados muestran la evolución de la pérdida de las correlaciones, a diferentes escalas de longitud de los sistemas cuánticos que se caracterizan por el ruido $1/f$, conforme σ disminuye hasta obtener las fluctuaciones espectrales que caracterizan a los sistemas regulares, que siguen un ruido $1/f^2$. Los resultados obtenidos con DFA están basados en un análisis lineal, que básicamente compara la tendencia a diferentes escalas de tiempo con un modelo de regresión lineal. Por lo tanto, sólo cuantifica las correlaciones de largo alcance en un rango limitado de escalas de tiempo. Esta comparación muestra las propiedades fractales

Relación para β							
σ	GDE	6	16	36	76	156	GOE
β_{ps}	1.99	1.8	1.66	1.54	1.48	1.3	1.04
β_{emd}	2.01	1.83	1.61	1.57	1.51	1.36	1.03

Tabla 5.2: El exponente β_{ps} y el parámetro β_{emd} obtenidos a partir de los ensambles calculados para diferentes valores de σ . Agregamos en la tabla los valores para GDE y GOE como límites, respectivamente.

del sistema, que pueden ser caracterizadas por el exponente α_{dfa} . Los resultados numéricos de los exponentes α_{dfa} se reportan en la Tabla 5.1, donde se puede ver la evolución de los valores de este parámetro de autosimilitud.

Analizamos ahora la estadística espectral de Fourier, para las fluctuaciones espectrales, en forma numérica. El exponente β_{ps} obtenido del análisis de Fourier, se muestra en la Tabla 5.2, donde al igual que en el análisis de DFA, se muestra que conforme σ toma valores más pequeños, las correlaciones de largo alcance empiezan a desaparecer. Ambos resultados indican la pérdida de correlaciones en las series de tiempo obtenidas con el modelo propuesto.

5.5.1. EMD & Invariancia de escala RMT

Proponemos en esta sección una nueva cuantificación de las propiedades de invariancia de escala de sistemas cuánticos caóticos, representados por la teoría de matrices aleatorias (RMT). La propuesta se basa en un nuevo exponente que refleja las propiedades fractales en las series de tiempo, que se obtiene aplicando el método de descomposición en modos empíricos. La ley de potencia $1/f$ se obtiene generalmente por la descomposición de la serie de tiempo en términos de la base de Fourier (funciones trigonométricas) y se basa en el supuesto de que la señal es estacionaria y no lineal. Sin embargo y como se mencionó antes, para una amplia gama de procesos no lineales y no estacionarios, la descomposición de Fourier no es adecuada para describir las propiedades del sistema.

En el presente estudio se utiliza la descomposición EMD que discutimos líneas arriba, en términos de funciones obtenidas directamente de los datos, es decir, de forma adaptativa y que permite ofrecer una representación físicamente significativa de los procesos subyacentes. La ventaja principal es que el método no requiere funciones de una base predeterminada, sino que se basa en el supuesto de que las series de tiempo están compuestas por la superposición de varios procesos no lineales y no estacionarios, que tienen lugar a diferentes escalas de tiempo. El método también es capaz de identificar los modos de oscilación de los datos en una escala de tiempo característica y llevar a cabo una descomposición de éstos en los modos de oscilación intrínsecos. Numéricamente, la descomposición EMD se lleva a cabo a través de un proceso de *sifting*, que hemos explicado en la primera sección del capítulo 5.

Para conocer los detalles específicos sobre el algoritmo numérico, se puede ver el código que hemos utilizado para la realización de los cálculos, al final del Apéndice. Después de aplicar este procedimiento, es posible expresar los datos originales en términos de los IMFs como

$$x(n) = \sum_{j=1}^k c_j(n) + r_k(n) \quad (5.15)$$

donde $c_j(n)$ es el j -ésimo IMF (*i.e.*, oscilaciones locales), k es el número de IMFs y r_k es el residuo k -ésimo (*i.e.*, la tendencia local). Dada esta descomposición adaptativa y usando la propiedad de que los espectros de potencia asociados a los IMFs muestran una estructura fractal, se ha demostrado que, en el caso de que el sistema presente estas propiedades de autosimilitud, es posible obtener una ley de potencia entre la relación de la energía contenida en los IMFs y el periodo promedio de sus oscilaciones, evidente cuando se utiliza una escala logarítmica [79]. El exponente que caracteriza a esta ley de potencia está relacionado con las propiedades fractales del sistema, como se ha demostrado previamente en sistemas tales como el ruido fraccional gaussiano [79] y la dinámica entre latidos del corazón [78].

Utilizamos este factor de escala para cuantificar la propiedad fractal de las fluctuaciones en los sistemas cuánticos caracterizados por RMT, que se basa en la jerarquía de los IMFs extraídos. Para lograr este propósito, realizamos una extensa simulación numérica. El procedimiento para definir este nuevo exponente de escala, se basa en considerar las propiedades generales de la densidad de energía de los IMFs, expresada como una función del periodo promedio de las oscilaciones presentes. El procedimiento es el siguiente: después de aplicar el EMD a las fluctuaciones δ_n , estas se pueden expresar en términos de los IMFs obtenidos, como se indica en la ecuación 5.15. Por lo tanto, podemos definir la densidad de energía del j -ésimo IMF como

$$E_j^\sigma = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [c_j^\sigma(i)]^2, \quad (5.16)$$

donde N es el número de elementos en el ensamble y σ indica el correspondiente parámetro que cuantifica los casos de RMT, como se explicó antes. Del mismo modo, podemos determinar el periodo promedio T para el IMF, al dividir el número total de puntos por el número de picos (máximos o mínimos locales) en el respectivo IMF.

Observamos que la gráfica de las densidades de energía, versus sus periodos promedio $\ln E$ vs $\ln T$, refleja una ley de potencia que caracteriza la correlación entre la energía y la escala de tiempo de los procesos internos del sistema [78]. La estructura autosimilar de los IMFs en dicha representación, conduce a una invariancia de escala característica para cada caso. Esto se muestra para seis diferentes valores de σ y los casos límite (GOE y GDE), en la figura 5.15, en escala logarítmica. Cada línea se corresponde con un conjunto de matrices con el mismo valor de sigma y cada punto se corresponde con un IMF de la descomposición. En cada caso la línea discontinua muestra un ajuste lineal para la relación entre la energía y el periodo promedio de los IMFs. La jerarquía de los IMFs se incrementa de izquierda a derecha, es decir, los puntos más a la izquierda corresponden con las oscilaciones de frecuencias más

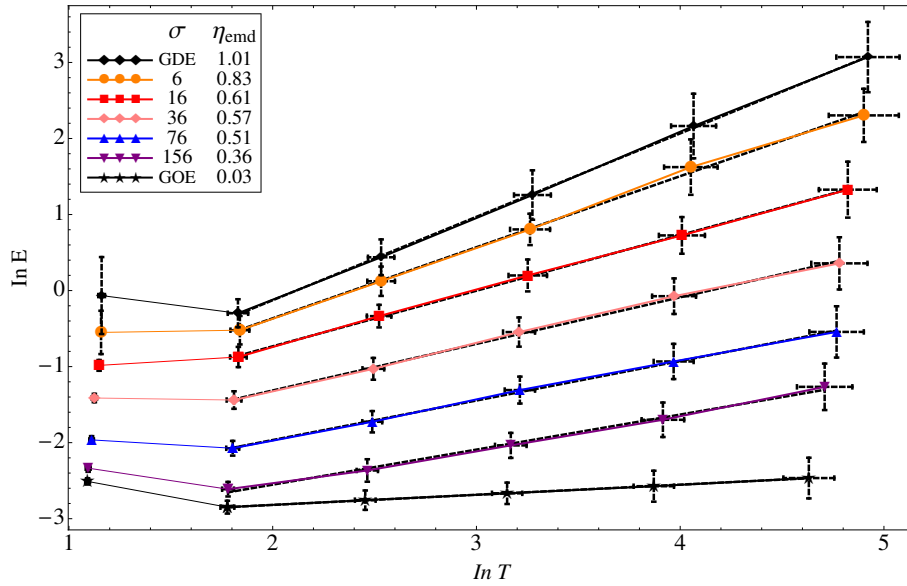


Figura 5.15: Resultados superpuestos de las relaciones energía-periodo de los primeros 6 IMFs de la descomposición dada por el EMD, para GOE, GDE y casos intermedios, caracterizados por diferentes valores de σ (ver Tabla. 5.2). Cada punto corresponde a un IMF sobre cada línea. Las pendientes ajustadas η_{emd} a cada caso particular se muestran en la leyenda.

altas. Después de haber aplicado el EMD a las fluctuaciones, y a pesar de que la diferencia de los IMFs obtenidos en cada caso para nuestros ensambles es a lo sumo de uno, ninguna de las realizaciones generadas tiene menos de 6 modos. Por ello se ha escogido el valor $j = 6$ en este estudio, siendo el número de modos común para todas las realizaciones.

Es importante señalar que la relación de ley de potencia es válida sólo para los IMFs cuyos índices son $j > 1$ [79]. La anterior afirmación es consecuencia de que el primer IMF tiene una forma diferente en el espectro de potencias, es decir, no muestra una estructura fractal como los restantes. Esto, a su vez, se debe a que su distribución de probabilidad correspondiente es esencialmente una distribución bimodal de los máximos positivos y mínimos negativos. Por construcción, el primer IMF contiene las oscilaciones de mayor frecuencia en la señal de entrada. En la figura. 5.15, GOE y GDE están representados por las líneas sólidas de color negro (parte más baja y más alta), respectivamente. La pendiente η_{emd} se obtiene con el ajuste lineal (en todos los casos, el error de la regresión lineal es de aproximadamente 10%) a las rectas mostradas en la Fig. 5.15 y sirve como un factor de escala que exhibe la existencia de correlaciones no triviales entre los IMFs. La relación entre $\ln E$ y $\ln T$ se obtiene mediante los resultados obtenidos de los ensambles para las fluctuaciones δ_n , y le da significado estadístico al contenido de información entre los IMFs, para cada caso tratado. La principal diferencia en la distribución de escalas de tiempo intrínsecas de los IMFs, se refleja entre GOE y las fluctuaciones de GDE. El EMD demuestra así su potencial como método

adaptativo para separar las diferentes escalas temporales en la señal δ_n y a su vez refleja las características de autosimilitud mediante las líneas rectas en la relación de energía versus período promedio. Esta ley de potencia se puede relacionar con el exponente obtenido a través del DFA, usando la relación $\alpha_{dfa} = 1 + \eta_{emd}/2$ [78] (ver valores de η_{emd} en la figura. 5.15). La Tabla 5.1 muestra la comparación entre α_{dfa} y α_{emd} , para las series de tiempo previamente analizadas. El resultado reportado es el promedio sobre el ensamble para cada caso tratado, siendo notable que los exponentes sean muy similares.

Por último, también es posible relacionar los exponentes η_{emd} con el exponente de la ley de potencia obtenida a partir de un análisis espectral de Fourier. Dicha relación está dada por la expresión $\beta_{ps} = \eta_{emd} + 1$ [78]. Una comparación entre los β_{ps} y el exponente análogo, calculado a partir de la relación anterior, se muestra en la Tabla 5.2, donde también es evidente que los resultados de ambas técnicas son muy similares. A pesar de que los resultados obtenidos con el EMD, DFA y el espectro de potencia son comparables, es importante insistir que la técnica de EMD es menos restrictiva en el sentido de que está diseñada para analizar series de tiempo no lineales y no estacionarias (series tratadas en este estudio). Otra ventaja notable es que la regresión lineal puede realizarse sobre pocos datos, a diferencia del ajuste del espectro de potencias que frecuentemente esta contaminado por una mayor dispersión, debido a los armónicos espurios que introduce el método de Fourier. La correlación de ley de potencia entre la energía y la escala de tiempo, implica una invariancia de escala en todos los casos tratados. La máxima correlación (de largo alcance) es para GOE, mientras que dichas correlaciones se van perdiendo conforme el parámetro σ va disminuyendo, hasta que la invariancia de escala es trivial (ruido blanco) para GDE. El haber caracterizado con esta metodología las propiedades fractales de las series de tiempo obtenidas con RMT, nos permite poder describir una amplia variedad de sistemas cuánticos caóticos, a través de la conjetura de Bohigas, M.-J. Giannoni y C. Schmit.

Capítulo 6

Introducción de anti-correlaciones entre eventos de una serie de tiempo: Gotero Cuántico

Una manera relativamente sencilla de entender las propiedades del caos clásico es a través de mapeos discretos, como se ejemplificó en la sección 2.4. La idea de un *gotero cuántico* surgió precisamente analizando modelos discretos cuyas dinámicas muestran un comportamiento caótico. La analogía directa que establecimos fue con el grifo goteante, sistema que permite obtener series de tiempo de los intervalos entre gotas, y cuyo dinámica es altamente sensible a las condiciones iniciales, manifestando comportamientos regulares o caóticos dependiendo del valor del parámetro que controla la intensidad del flujo. Para el caso cuántico, la idea es tener una serie de tiempo de llegada de fotones provenientes de un láser que atraviesan un cristal no lineal, donde la intensidad del haz de bombeo y la propiedad no lineal del cristal pueden modificar las correlaciones entre los fotones, como lo hace la intensidad del flujo en el sistema clásico. Básicamente, en el presente escrito el problema se trata a través de dos enfoques. El primero consiste en generar una serie de tiempo proveniente de un proceso puntual de eventos que siguen una distribución de Poisson. La señal se modifica entonces, introduciendo anticorrelaciones entre los elementos que componen la serie. Se utiliza el contexto de la teoría cuántica de la radiación electromagnética, para hacer un símil con diferentes tipos de luz, a través de las propiedades presentes en las series generadas. Por otro lado, este enfoque nos permite tratar con mucho detalle el procedimiento de introducir correlaciones o anticorrelaciones en las series de tiempo. Ya hemos visto que hacerlo de manera incorrecta puede llevar a conclusiones erróneas. Por ejemplo, las correlaciones espúrias que se introducen al aplicar un reescalado incorrecto para llevar a cabo el análisis de caos cuántico en los núcleos.

El segundo enfoque es teórico e involucra construir series de tiempo usando el fenómeno de conversión paramétrica descendente, ampliamente estudiado en la óptica cuántica [89]. El modelo tiene dos parámetros importantes que pueden jugar el rol del flujo en el grifo clásico, la no linealidad del cristal y la intensidad del haz de bombeo. En este contexto se ha estudiado ampliamente las distribuciones de los fotones generados, pero no la serie de tiempo de los

fotones o de intervalos de llegada de los fotones a los detectores. Una ventaja de estudiar este modelo es que permite pasar de una generación de fotones completamente aleatorios, que corresponde al caso de generación espontánea, a una con mayor ganancia paramétrica.

En las secciones restantes se estudia la forma de introducir correlaciones o anti-correlaciones en series de tiempo, a través de simulación numérica, lo que podría ser de ayuda para construir el modelo teórico, lo que abarca el primer enfoque. La derivación del modelo teórico y los avances en el segundo enfoque se pueden ver en detalle en el Apéndice E.

6.1. Correlaciones y anticorrelaciones entre eventos de una serie de tiempo

Un gran número de sistemas en la naturaleza pueden coexistir en dos o más estados estables. Obviamente, un *estado estable* es una simplificación, debido a que la dinámica generada internamente y los procesos estocásticos generados por el ambiente siempre causan fluctuaciones [90]. Estos sistemas pueden ser impulsados fuera del equilibrio a un estado completamente diferente, por la acción de una fuerza externa. Por ejemplo, es posible que el sistema evolucione hacia un estado crítico (estado intermedio, altamente correlacionado). Un ejemplo ampliamente estudiado de este tipo de sistemas es el modelo de Ising, tratado en el primer capítulo. Recientemente, diversos estudios sobre los puntos de inflexión (estados críticos), donde los sistemas pueden cambiar abruptamente de un estado a otro, muestran que son notoriamente difíciles de pronosticar. Sin embargo, se propone en ellos estudiar señales de alerta temprana, que podrían indicar si un estado crítico se encuentra próximo [91]. Uno de los indicadores genéricos más importantes de alerta temprana se basa en evaluar que tan fuertemente correlacionadas (o anticorrelacionadas) son las fluctuaciones, tanto espacial como temporalmente. Ello con el objetivo de estimar el comportamiento y evolución del sistema. Por otra parte, hemos analizado la invariancia de escala de las autocorrelaciones, a través de leyes de potencia, con el propósito de medir la forma en que decae la intensidad de las correlaciones existentes. En este capítulo nuestro principal interés es analizar *cómo* los sistemas generan o introducen correlaciones (anticorrelaciones) para maximizar aquellas variables que juegan los roles primordiales en la dinámica. Buscamos de esta manera extender el análisis, para entender *cómo* los sistemas se retroalimentan (o poseen memoria) que los mantiene en un estado óptimo, como en el caso del corazón.

En lo que sigue se presenta un análisis, desde el enfoque tradicional de series de tiempo, en modelos sencillos que pueden dar pistas para el entendimiento de sistemas más complejos. Algunas propiedades estadísticas de una serie de tiempo se reflejan en el proceso aleatorio que rige la ocurrencia de eventos. Una serie de tiempo para la cual los eventos llegan en intervalos de tiempo de forma perfectamente regular, tiene fluctuaciones muy pequeñas en el número de eventos comparadas con las fluctuaciones de series de tiempo cuyos eventos llegan en tiempos estadísticamente independientes. En el primer caso, el número de eventos registrados en cualquier tiempo T es fijo, por lo que el segundo momento de su distribución

$\sigma_n = 0$, mientras que en el último caso el número de eventos tiene una distribución de Poisson, de modo que $\sigma_n = \langle n \rangle$ para todo T . Otra característica importante para el análisis de procesos aleatorios es la tasa de coincidencia de eventos en tiempos separados por un intervalo τ (ver más adelante la formulación matemática). El índice de coincidencia normalizado es igual a 1 para todos los tiempos de retardo τ , si los eventos temporales están asociados a procesos puntuales tipo Poisson, debido a que llegan de forma independiente. Sin embargo, si el índice de coincidencia es menor a la unidad esto indica que los pares de eventos retardados por un tiempo τ son menos probables, por lo que sus ocurrencias están anticorrelacionadas. Las series de tiempo asociadas a este caso particular muestran lo que se conoce como la propiedad de anti-agrupamiento. Por otro lado, si el índice es mayor a la unidad, se presenta el caso opuesto. Las series de tiempo muestran correlaciones entre los eventos temporales con la propiedad de agrupamiento entre eventos. El agrupamiento es la tendencia de los eventos a que se distribuyan preferentemente en grupos en lugar de hacerlo aleatoriamente, de modo que cuando se registra los eventos de una serie de tiempo hay mayor probabilidad a tener parejas de eventos en intervalos de tiempo cercanos. El anti-agrupamiento es el efecto contrario, en el que menos parejas de eventos se detectan juntos. Por último es importante remarcar que el proceso puntual tipo Poisson sirve como límite entre las series de tiempo con eventos correlacionados y aquellas donde los eventos presentan la propiedad de estar anticorrelacionados. En la siguiente sección abordaremos más a fondo los conceptos mencionados, para posteriormente enfocarnos en series de tiempo anti-correlacionadas, por tener propiedades equivalentes a las señales obtenidas en la óptica cuántica.

6.2. Modelo para la construcción de Procesos puntuales de Poisson

Antes de la descripción del modelo se abordará brevemente lo que es un proceso puntual tipo Poisson. Informalmente, un proceso puntual aleatorio es un conjunto enumerable de puntos aleatorios ubicados sobre la recta real. En la mayoría de las aplicaciones, un punto en un proceso puntual es el instante en que ocurre algún evento, motivo por el cual los puntos también se llaman eventos. Por ejemplo, los tiempos de arribo de clientes a la caja de un supermercado o los tiempos de llegada de fotones a un detector en un experimento en óptica cuántica, son ambos procesos puntuales. El ejemplo básico de este tipo de procesos es el proceso de Poisson, ya que es uno de los procesos puntuales más importantes, que juega un rol equivalente al de la distribución normal dentro de las distribuciones estadísticas (por el teorema del límite central obtenemos una distribución normal cuando sumamos variables aleatorias. De manera similar, obtenemos una distribución exponencial cuando superponemos procesos estocásticos puntuales).

Un proceso puntual aleatorio sobre la semi-recta positiva, es una sucesión $\{t_n : n \geq 0\}$ de variables aleatorias no negativas tales que, casi seguramente,

(a). $t_0 \equiv 0$

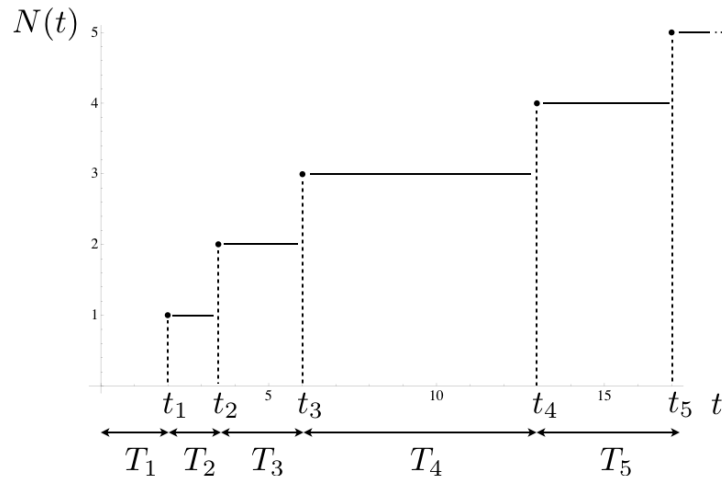


Figura 6.1: Realización típica de un proceso puntual aleatorio sobre la semi-recta positiva.

(b). $0 < t_1 < t_2 < \dots$

(c). $\lim_{n \rightarrow \infty} = +\infty$

La condición (b) significa que no hay arribos simultáneos. La condición (c) significa que no hay explosiones, esto es, no hay una acumulación de arribos en tiempos finitos. La sucesión de variables aleatorias $\{T_n : n \geq 1\}$ definida por: $T_n = t_n - t_{n-1}$ se llama la sucesión de tiempos de espera entre eventos. La Fig. 6.1 muestra una realización típica de un proceso puntual aleatorio. Además, se puede apreciar una familia de nuevas variables aleatorias $N(t), t \geq 0$, conocida como la estadística de conteo para los procesos puntuales, es decir, la cantidad de arribos ocurridos durante el intervalo de tiempo $(0, t]$, que también es un proceso estocástico puntual. Por el momento sólo nos interesa el proceso puntual de Poisson, cuya definición es la siguiente: *Un proceso puntual $\{t_n : n \geq 0\}$ sobre la semi-recta positiva, es un proceso de Poisson de intensidad $\lambda > 0$ si satisface las siguientes condiciones*

(i). *El proceso tiene incrementos independientes: para cada colección finita de tiempos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, los incrementos $N(t_{i-1}, t_i] = N(t_i) - N(t_{i-1}), i = 1, \dots, n$ son independientes.*

(ii). *Los incrementos individuales $N(s, t] = N(t) - N(s)$ tienen la distribución de Poisson:*

$$P(N(s, t] = n) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!}, \text{ con } n = 0, 1, \dots, 0 \leq s < t.$$

Nota: La condición (ii) de la definición se puede descomponer en dos partes. (a) Los incrementos son temporalmente homogéneos (i.e., la distribución de los incrementos depende



Figura 6.2: Realización típica de un proceso puntual aleatorio sobre la semi-recta positiva, usando la plataforma NetLogo para la realización numérica. El bloque verde representa una pistola hipotética de proyectiles de Poisson, que están representados por los círculos amarillos y son detectados por el bloque rojo.

solamente de la longitud del intervalo de tiempo pero no de su posición) y (b) la distribución de cada incremento individual es también de Poisson, de media proporcional a la cantidad de tiempo considerado.

Que un proceso puntual sea temporalmente homogéneo y que tenga incrementos independientes, significa que si se reinicia desde cualquier instante de tiempo t , el proceso así obtenido es independiente de lo ocurrido previamente (por tener incrementos independientes) y tiene la misma distribución que el proceso original (por ser temporalmente homogéneo). En otras palabras, **el proceso no tiene memoria**. Es de suponer que, bajo esas condiciones, los tiempos de espera entre arribos tienen que ser variables aleatorias independientes, cada una con *distribución exponencial* del mismo parámetro. Ésto último es consistente con la condición sobre la distribución que tienen los incrementos individuales.

6.2.1. Construcción del modelo

Para la construcción de señales con las propiedades mencionadas anteriormente, utilizamos la plataforma de Netlogo [92] (experimento numérico). En lo que sigue, mostramos la metodología que hemos utilizado para construir un proceso puntual de Poisson $\{t_n : n \geq 0\}$ de intensidad λ . Hemos tomado la analogía existente entre un proceso de eventos que siguen una distribución de Poisson, con el de una arma que dispara una corriente de proyectiles aleatoriamente [93]. Esquemáticamente, en la Fig. 6.2 se puede apreciar el proceso puntual de Poisson generado en la plataforma NetLogo a través de una imagen instantánea de la simulación. El bloque verde representa la pistola hipotética de Poisson y los círculos amarillos representan los proyectiles disparados en tiempos previos. Los arribos de los proyectiles, t_n , detectados por el bloque rojo (que representa el detector) se construyen utilizando una sucesión de variables aleatorias con valores positivos $\{T_n : n \geq 1\}$:

$$t_0 = 0, \quad t_n = \sum_{i=1}^n T_i, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1)$$

donde $\{T_n : n \geq 1\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes, cada una con distribución exponencial de intensidad λ . El proceso de arribos $\{t_n : n \geq 0\}$, definido en la ecuación 6.1, es un proceso puntual de Poisson de intensidad λ de acuerdo a la condición (ii) de la definición de la sección anterior. Una restricción importante del modelo está relacionada con el movimiento de los proyectiles, debido a que tienen una velocidad constante durante la simulación. Para los resultados presentados más adelante en cuanto al proceso puntual de Poisson, siempre se utiliza un media igual a 5 en la distribución exponencial. Por último, es importante mencionar que un ejemplo de este tipo de proceso en la naturaleza ha sido ampliamente estudiado por la óptica cuántica y se basa en el comportamiento de la luz (y de la distribución de fotones) que produce un *láser*.

Usando la pistola de Poisson, la producción de series de tiempo con eventos anticorrelacionados se puede lograr de tres maneras: a) mediante la regulación de los tiempos en que se aprieta el gatillo, b) mediante la introducción de restricciones en el mecanismo de disparo y c) mediante la supresión de forma selectiva de algunos de los proyectiles, después de haber sido disparados. Cada una de estas técnicas consiste en la introducción de anticorrelaciones, lo que resulta en un número menos previsible de eventos. En este modelo las anticorrelaciones se introducen por medio de un proceso de retroalimentación de un tipo u otro, como los ya mencionados. Nos interesa entender cómo introducir anticorrelaciones entre eventos y cuantificar el alcance de las anticorrelaciones introducidas. Para ello, se proponen diferentes medidas, una de las cuales es el espectro de potencias. Los procesos para introducir anticorrelaciones, conocidos en la literatura, se presentan esquemáticamente en la Fig. 6.3 y serán discutidos ampliamente en la siguiente sección.

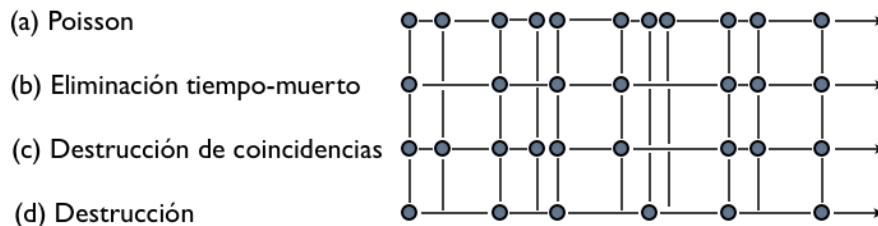


Figura 6.3: (a) Hipotética pistola de proyectiles que se dispara al azar, para generar una corriente de eventos que tienen una distribución de Poisson. Las anticorrelaciones pueden ser introducidas por cualquiera de los tres procesos siguientes: el proceso de excitación inicial (de activación), el proceso de emisión (mecanismo de disparo) o un proceso de retroalimentación derivado de las proyectiles emitidos que controla los otros dos procesos. El flujo se transforma en sub-Poisson (filas inferiores del proceso de Poisson) y series de tiempo anticorrelacionadas (anti-agrupamiento), implementando las técnicas; (b) eliminación de tiempo muerto, (c) destrucción de coincidencias y (d) destrucción.

6.3. Introducción de anti-correlaciones

Existen diferentes mecanismos que pueden utilizarse para regularizar una secuencia de eventos aleatoria, que han sido ampliamente discutidos en la literatura [89]. En concreto, aquí discutimos cómo introducir anticorrelaciones, mediante las metodologías presentadas más adelante, que han podido ser llevadas a cabo experimentalmente en el contexto de la teoría cuántica de la luz, a través de diversos arreglos. La presencia de anticorrelaciones se traduce en un flujo más regular de los eventos, exhibiendo un comportamiento tipo sub-Poisson. Antes de describir cada uno de los métodos, es importante hacer una breve pausa para discutir las medidas estándar usadas para cuantificar la intensidad y el alcance de las correlaciones o anti-correlaciones introducidas. Estos procesos están descritos generalmente por medidas tales como la razón de coincidencia entre eventos y las estadísticas del número de conteo en intervalos prescritos. La explicación de las medidas mencionadas se hará en el contexto de la óptica cuántica, con el objetivo de ir estableciendo la relación entre el modelo de juguete propuesto y las series de fotones que motivaron en parte este estudio. Además, no existe pérdida de generalidad al usar este contexto.

La teoría semiclásica de la luz trata el campo de radiación clásicamente, mientras que utiliza la teoría cuántica para describir la interacción de la luz con los átomos del detector. Por lo tanto, la luz está representada por una señal compleja $V(\vec{x})$ (donde \vec{x} es un punto en el espacio-tiempo (\vec{r}, t)) cuyo valor absoluto al cuadrado, $I(\vec{x})$, es la intensidad óptica. Las fluctuaciones de la luz están completamente caracterizadas por los estadísticos del proceso estocástico $V(\vec{x})$. En un punto del espacio-tiempo la cantidad más importante es la densidad de probabilidad de la intensidad óptica $P(I(\vec{x}))$, la media $\langle I(\vec{x}) \rangle$ y su varianza $Var(I(\vec{x}))$. En particular, nos interesan las fluctuaciones en dos puntos del espacio-tiempo \vec{x}_1 y \vec{x}_2 , que están caracterizadas por la intensidad de la función de correlación (también llamada función de correlación de segundo orden)

$$G^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle I(\mathbf{x}_1)I(\mathbf{x}_2) \rangle, \quad (6.2)$$

así como su versión normalizada

$$g^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = G^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) / [\langle I(\mathbf{x}_1) \rangle \langle I(\mathbf{x}_2) \rangle]. \quad (6.3)$$

La cantidad $G^{(2)}$ también es conocida como coherencia de segundo orden. Cuando la luz es detectada por un fotodetector (por ejemplo, un tubo fotomultiplicador), las llegadas de fotoelectrones en diferentes lugares y tiempos son descriptibles mediante un *procesos estocástico de tipo Poisson*, cuya razón es la función estocástica $\eta I(\vec{x})$, donde η es la eficiencia cuántica del detector. La probabilidad de coincidencia de dos eventos, dentro de los incrementos de área ΔA e intervalos de tiempo ΔT alrededor de los puntos del espacio-tiempo \vec{x}_1 y \vec{x}_2 , está dada por $\eta^2 G^{(2)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) (\Delta A \Delta T)^2$. La intensidad normalizada de la función de correlación $g^{(2)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, representa la probabilidad conjunta de ocurrencia de un evento detectado en \vec{x}_1 y otro en \vec{x}_2 , normalizada por el producto de las probabilidades marginales que ocurra un evento en \vec{x}_1 y otro que ocurre en \vec{x}_2 .

En 1963, Glauber desarrolló una teoría completa de la mecánica cuántica de la luz que abarca la teoría semiclásica [94]. Ésta, que por si misma, podía explicar dos tipos diferentes de luz: aquella que comprende la correlación entre los fotones observados a partir de fuentes convencionales de luz, así como la que se produce en los láseres. Sin embargo, un aspecto intrigante de la óptica cuántica fue que admite la posibilidad de fotones anticorrelacionados, así como la correlación entre fotones. Dentro de este marco extendido, se hizo posible concebir nuevas formas de la luz que no habían sido estudiadas antes: luz sub-Poisson, la luz anti-agrupada (antibunched light) y la luz comprimida en cuadraturas (quadrature-squeezed light). Estas diferentes clases de luz tienen asociadas diferentes valores para la función de correlación $g^{(2)}$. La luz coherente se caracteriza por una intensidad determinista $I(\vec{x})$ y por ordenes de coherencia cuyos valores absolutos dan la unidad, lo que significa que la probabilidad conjunta de coincidencia de un evento en \vec{x}_1 y otro en \vec{x}_2 es igual al producto de las probabilidades marginales de un evento en cada punto. Dicho de otra manera, los eventos ocurren de forma independiente, en la aleatoriedad total. Por otro lado, se dice que los eventos están agrupados, si cumplen con $g^{(2)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) > 1$, de modo que la ocurrencia de eventos en dos puntos está correlacionada positivamente, es decir, cuando se produce uno, es más probable que ocurra el otro. Este tipo de comportamiento se encuentra al analizar luz térmica. Por otra parte, cuando $g^{(2)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) < 1$, los eventos están anticorrelacionados, es decir, cuando se produce un evento, es menos probable que ocurra el siguiente y ello puede observarse en los fenómenos estudiados por la óptica cuántica. En el límite cuando los dos puntos en el espacio-tiempo están muy cerca uno de otro, es decir, cuando $\vec{x}_1 \sim \vec{x}_2 = \vec{x}$, la tasa normalizada de coincidencia se mide por la función $g^{(2)}(\vec{x}, \vec{x})$. Si $g^{(2)}(\vec{x}, \vec{x}) > 1$, se dice que los eventos (en este punto \vec{x}) están *agrupados*. De lo contrario, si $g^{(2)}(\vec{x}, \vec{x}) < 1$, se dice que los eventos están *anti-agrupados*, es decir, tienden a estar separados.

Otra cantidad importante que podemos utilizar para caracterizar las correlaciones o anticorrelaciones introducidas, es el factor de *Fano*, que es una referencia importante de la estadística de conteo de fotones y que es la relación entre la varianza y la media para el conteo de fotones n [95],

$$F_n(\mathbf{D}) = \frac{\text{Var}(n)}{\langle n \rangle}. \quad (6.4)$$

El factor de Fano depende de la zona de conteo (representado por \mathbf{D}). Para luz coherente, la estadística de conteo n sigue una distribución de Poisson y $F_n(\mathbf{D}) = 1$, con independencia de \mathbf{D} . Si $F_n(\mathbf{D}) > 1$, se dice que la luz muestra un comportamiento en la estadística de conteo n del tipo super-Poisson, en el dominio \mathbf{D} . Es decir, existen fluctuaciones mayores que las dadas por la distribución de Poisson. Cuando $F_n(\mathbf{D}) < 1$, la estadística n se dice que presenta un comportamiento sub-Poisson.

Una vez introducidos brevemente los conceptos que vamos a utilizar más adelante en nuestro análisis, resta pasar a la discusión de como introducir anticorrelaciones. La discusión que se plantea aquí se limita en general a los procesos que generan series de tiempo con la propiedad de anti-agrupamiento a partir de procesos puntuales. Algunas de las reglas de control que han sido sugeridas en la literatura para la conversión de emisiones aleatorias de

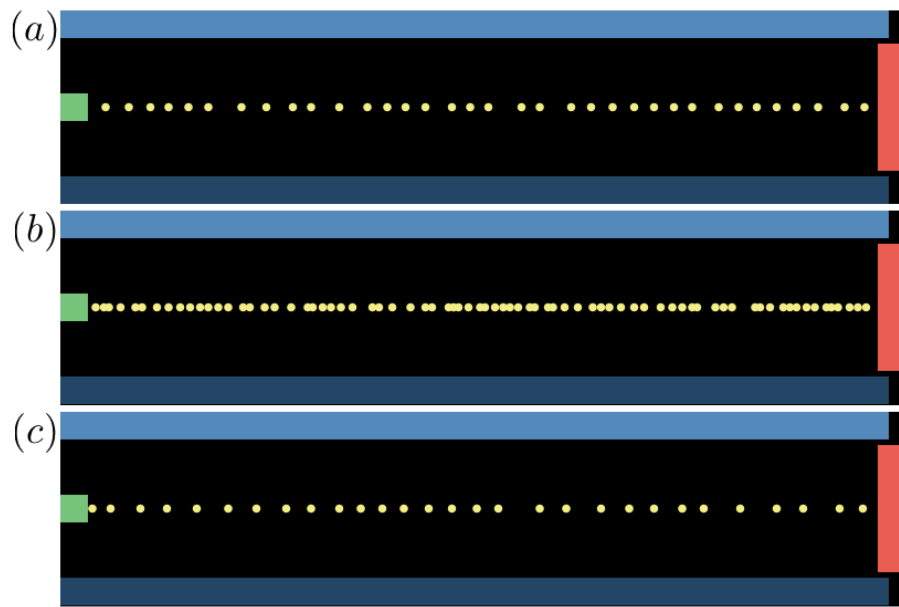


Figura 6.4: Hipotética pistola de proyectiles que se dispara al azar para generar un flujo de eventos con una distribución de Poisson (a) por eliminación de tiempo muerto, (b) por destrucción de coincidencias y (c) por destrucción. Cada panel corresponde a un intervalo de tiempo de la realización numérica con Netlogo, donde el bloque verde es la pistola de proyectiles, las bolas amarillas (balas) son los proyectiles y el bloque rojo es el detector. Los bloques azules son también detectores.

eventos en emisiones que sigan una distribución sub-Poisson, están ilustradas en la Fig. 6.4 y discutidas en los siguientes párrafos. Se supone por simplicidad (pero sin pérdida de generalidad), que la conversión se puede lograr de una manera ideal para los distintos procedimientos. Se enfatiza que los métodos descritos a continuación se discuten en un contexto bastante general, es decir, los agentes en la simulación numérica, bajo ciertas circunstancias, podrían representar diversos entes y ello hace que puedan aplicarse a una gama muy amplia de situaciones. Por ejemplo, usando el hecho de haber tratado el contexto de la teoría cuántica de la luz, podría pensarse en un modelo donde el fotón es el agente principal. A continuación se presentan las técnicas utilizadas para la generación de series de tiempo anti-correlacionadas.

Eliminación de tiempo muerto, puede hacer la secuencia más regular mediante la supresión de todos los eventos que siguen a otro dentro de un tiempo prescrito, siempre fijo, τ_d . Es decir, durante el tiempo muerto se suprimen los eventos que ocurren dentro de dicho intervalo de tiempo fijo. Por tanto, se evita que los eventos estén arbitrariamente cercanos unos de otros y los regulariza, como es aparente en la Fig. 6.4 (a) de la simulación numérica. Una consecuencia de implementar este tiempo muerto es que reduce la aleatoriedad del número de eventos registrados en el tiempo de conteo fijo T . La presencia de tales anticorrelaciones

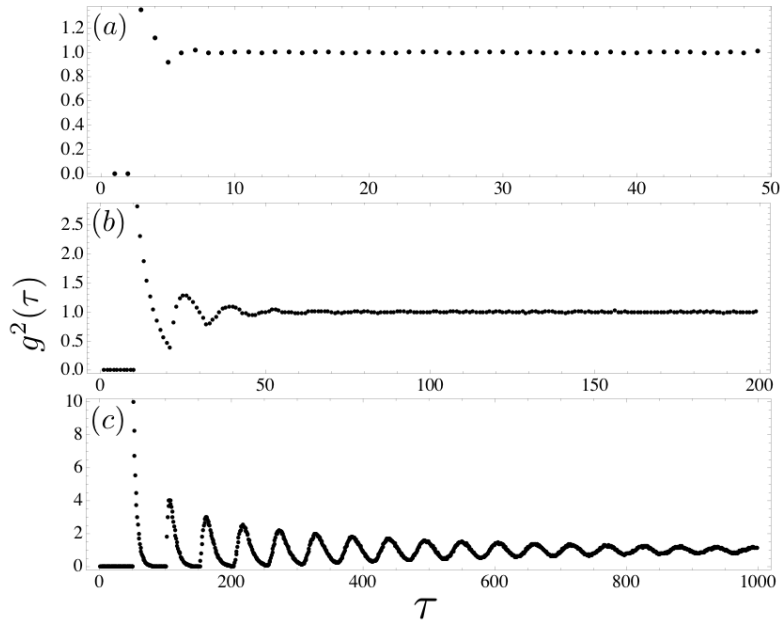


Figura 6.5: $g^2(\tau)$ como función de los tiempos de retraso τ , para medir la tasa de coincidencia entre eventos en cada serie temporal obtenida a través del método de eliminación de tiempo muerto. (a) $g^2(\tau)$ para una serie temporal de eventos obtenida por eliminación de tiempo muerto con τ_d igual a 2, (b) $g^2(\tau)$ de una serie temporal de eventos obtenida por eliminación de tiempo muerto con τ_d igual a 10, y (c) $g^2(\tau)$ para una serie temporal de eventos obtenida por eliminación de tiempo muerto con τ_d igual a 50.

resulta en un flujo de eventos más predecible.

Destrucción de coincidencias, es un proceso en el cual pares de eventos muy próximos entre sí se eliminan si están separados por un tiempo más corto que el intervalo de tiempo prescrito τ_{cd} . Este procedimiento se muestra en la Fig. 6.4 (b).

Destrucción, es un proceso que selecciona cada n -ésimo evento ($n = 2, 3, \dots$) de un proceso cuyos eventos inicialmente tienen una distribución de Poisson, eliminando todos los eventos intermedios. El paso de los otros eventos es explícitamente ilustrado en la figura 6.4 (c). El efecto de la regularización en el flujo de eventos es similar a la impuesta por el mecanismo de *eliminación de tiempo muerto*. Hay por lo menos dos maneras más de producir series de tiempo con la propiedad de anti-agrupamiento, ampliamente discutidas en las referencias [96, 97], que no se tratarán en este escrito pero básicamente se basan en ideas análogas.

En lo que sigue se presentan los resultados obtenidos a partir de las simulaciones numéricas. La primera corrida se compone de tres ensambles de 100 realizaciones cada uno, obtenidos a través del método de control por eliminación de tiempo muerto.

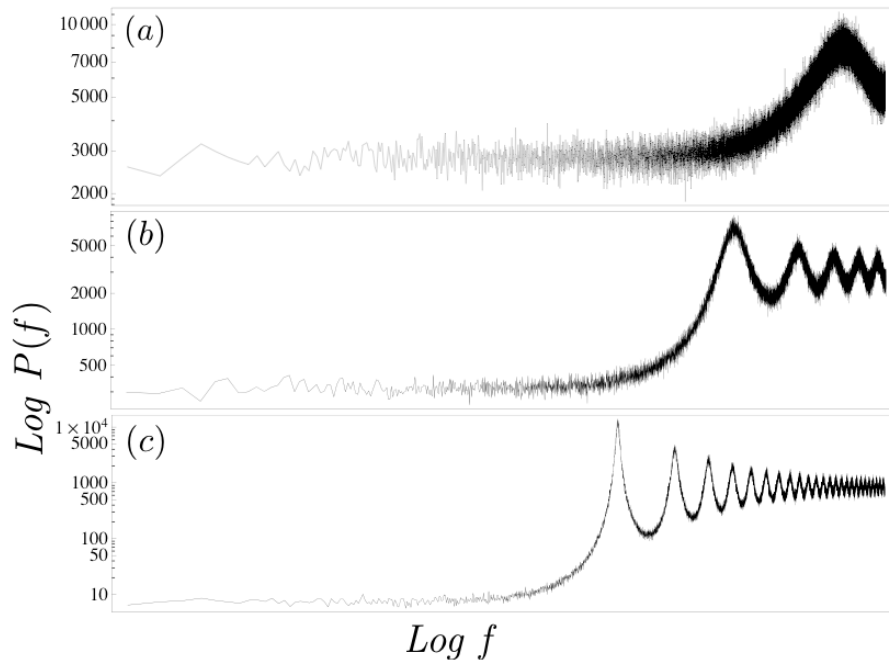


Figura 6.6: Espectro de potencias $P(f)$ para (a) serie temporal de eventos obtenida con el método de eliminación de tiempo muerto con τ_d igual a 2, (b) τ_d igual a 10, y (c) τ_d igual a 50.

Los tres casos corresponden a los tiempos muertos τ_d de 2, 10 y 50, con el objetivo de reducir la aleatoriedad de las series de tiempo. En cada paso numérico, un proyectil es creado a través de un proceso estocástico puntual de Poisson. Se crean proyectiles, en promedio, cada 5 unidades temporales, con una desviación estándar igual a 1. Cada proyectil tiene la propiedad de viajar a velocidad constante, que es la misma para todos los proyectiles lanzados. La primera estadística calculada es el factor de Fano, encontrando que el valor promedio de este factor para cada uno de los ensambles es de 0,11, 0,019 y 0,02, respectivamente. Por lo tanto, se trata de fluctuaciones menores a las que caracterizan a los procesos puntuales del tipo Poisson. La segunda estadística reportada es la función de correlación de segundo orden $g^2(\tau)$. En la figura 6.4, puede verse el comportamiento que sigue la función para cada caso. Es evidente de las gráficas que las series están altamente anticorrelacionadas durante el intervalo de tiempo τ_d , lo que sucede en forma súbita y se puede apreciar gráficamente. Para todo los casos se aprecia que las coincidencias decaen de forma periódica y este hecho se refleja en el comportamiento de $g^2(\tau)$. Por otra parte, el mayor valor de esta función ocurre justo después del tiempo τ , cuando es más probable su ocurrencia. Eventualmente $g^2(\tau)$ tiende al valor de 1, lo que indica que los eventos empiezan a ocurrir de manera independiente, y su coincidencia es totalmente al azar.

En conclusión, las series obtenidas a través del método de eliminación de tiempo muerto

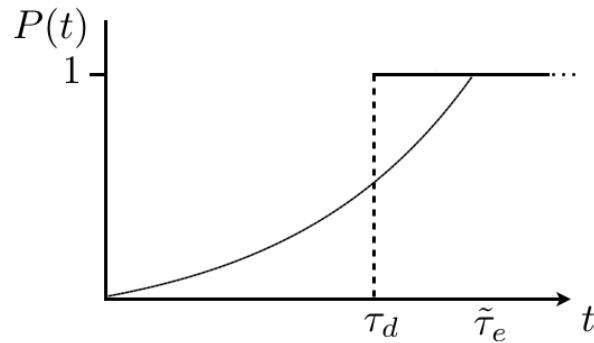


Figura 6.7: Esquema de probabilidad de emisión en el proceso puntual de Poisson. Escalón para las técnicas previamente mencionadas y la función exponencial para la primera propuesta.

no está anticorrelacionada en escalas mayores que aquellas fijadas por τ . A pesar de que el factor de Fano es inferior a la unidad, el método no es lo suficientemente efectivo como para introducir anticorrelaciones temporales a largo plazo. El espectro de potencias en escala logarítmica correspondiente a cada caso se muestra en la Fig. 6.6. Cada uno evidencia la periodicidad impuesta por el tiempo muerto y no es evidente la ocurrencia de una ley de potencias. Resultados equivalentes se obtienen con la implementación de los métodos restantes que se muestran en la Fig. 6.3 (c) y (d), por lo que omitimos las gráficas correspondientes. Concluimos que con estos métodos sólo se logra introducir anticorrelaciones entre eventos en una sola escala temporal que está dada por el tiempo muerto prescrito. En vista de los resultados obtenidos se presenta en la siguiente sección una nueva propuesta para introducir anti-correlaciones en diferentes escalas temporales.

6.3.1. Nueva propuesta: Introducción de anti-correlaciones

El esquema gráfico para la obtención de las series de tiempo con las técnicas previamente mencionadas, en términos de la probabilidad de emisión de los proyectiles está representado en la Fig. 6.7. La restricción de imponer un sólo valor para τ_d da lugar a una sola escala temporal para las anti-correlaciones encontradas. La probabilidad de emisión es nula hasta el valor de τ_d , a partir de donde de inmediato toma el valor máximo. Este tipo de restricción es responsable de la obtención de una función $g^2(\tau)$ con un comportamiento periódico alrededor de dicho valor. La nueva propuesta se basa en un método que no es tan restrictivo en la selección del valor del tiempo muerto, pudiendo ahora tomar valores en el rango $[0, \tilde{\tau}_e]$. Utilizamos una función de probabilidad exponencial, como se muestra en la Fig. 6.7 (línea punteada delgada), cuya forma explícita ($e^{-\gamma \tilde{\tau}_e}$) está determinada por un único parámetro, que etiquetamos como γ . La idea es sólo una modificación del método de eliminación de tiempo muerto, por lo que nos referimos al método como **eliminación de tiempo exponencial**. Los valores del parámetro

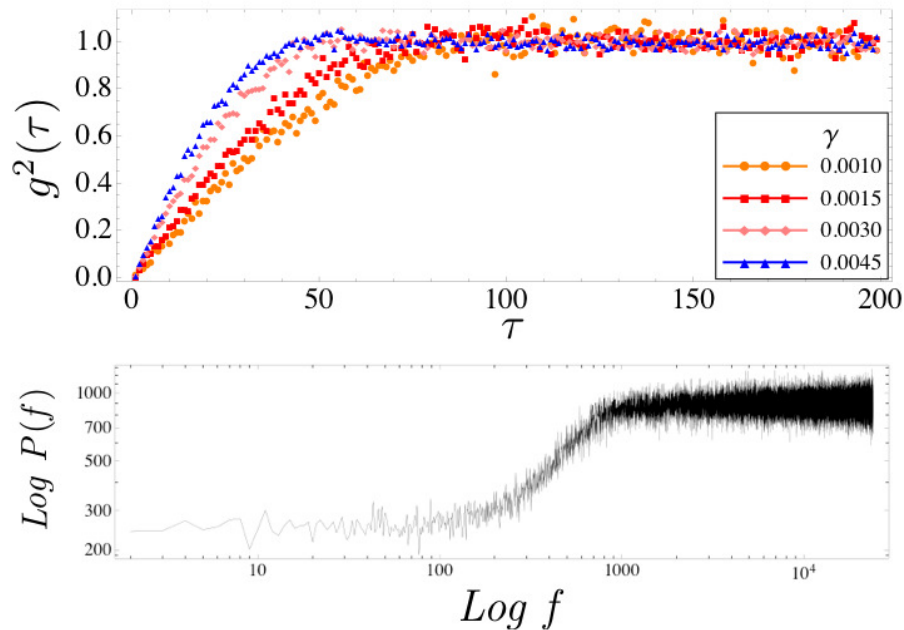


Figura 6.8: (a) La función de correlación de segundo orden $g^2(\tau)$, como función de los valores del tiempo de retraso τ , utilizada para medir la tasa de coincidencia entre los eventos de las series de tiempo obtenidas a través del método de control por eliminación de tiempo exponencial. Se muestran las gráficas para diferentes valores de γ , que representan el promedio de un ensamble. La notoria diferencia entre las funciones de correlación de segundo orden, se manifiesta en las pendientes con que suben a la unidad. (b) Espectro de potencias $P(f)$ de la serie temporal de eventos obtenida con el método de eliminación de tiempo exponencial con $\gamma=0.0030$.

γ en la simulación numérica son 0,0010, 0,0015, 0,0030 y 0,0045. Las funciones $g^2(\tau)$, para cada caso particular de γ , se muestran en la Fig. 6.8. (a) Se aprecia un comportamiento muy diferente a los casos tratados anteriormente, la principal diferencia es que las funciones $g^2(\tau)$ decaen suavemente al valor cero, lo que implica que existen correlaciones en más de una escala de tiempo. Series de tiempo generadas con este método tiene asociado un factor de Fano menor que la unidad y un espectro de potencias de la forma mostrada en la Fig. 6.8. (b) Claramente se observa una diferencia con los espectros de potencias obtenidos con los métodos discutidos en la sección 6.3. La diferencia es una tendencia lineal para un rango específico en el dominio de las frecuencias. El mismo comportamiento se encuentra para los otros valores de γ .

Este método propuesto mejora por mucho la introducción de anticorrelaciones entre los eventos de las series de tiempo generadas con Netlogo. Es importante recalcar que el método sólo permite anticorrelaciones entre eventos inmediatos, es decir, aquellos a un sólo paso

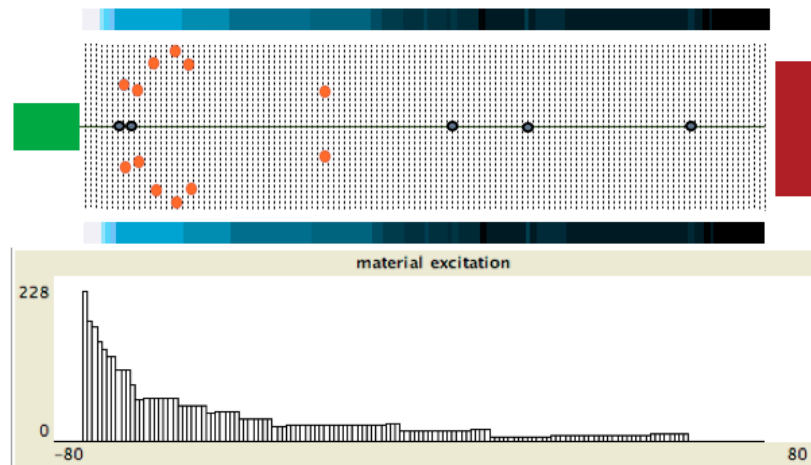


Figura 6.9: Hipotética pistola de proyectiles (bloque verde) dispara al azar generando una corriente de eventos (círculos grises). Las rebanadas del material se muestran como líneas punteadas de color negro. La intensidad de excitación se refleja como una degradación que va del color blanco al negro a través del verde claro, siendo el blanco el color que indica una mayor excitación. Los pequeños círculos rojos son los pares nuevos de eventos creados debido a la propiedad del material que hemos incorporado al cálculo. La gráfica del panel inferior es un ejemplo de la variación de excitación del material.

temporal. Los eventos, por lo tanto, no poseen información de emisiones más allá de sus primeros vecinos. En la siguiente sección se propone un nuevo método para poder controlar la intensidad y longitud de las anticorrelaciones introducidas en las series de tiempo, desde un enfoque diferente.

6.3.2. Segunda propuesta: Anti-correlaciones de largo alcance

Para poder introducir anti-correlaciones de largo alcance, debe mantenerse la información temporal del sistema. A diferencia de las propuestas anteriores donde la eliminación de eventos está determinada por la condición de un intervalo de tiempo como criterio de eliminación, ahora el sistema debe guardar información temporal de los eventos intermedios, lo cual resulta un proceso costoso e ineficiente. Si queremos introducir anti-correlaciones de largo alcance, es necesario hacer un cambio de paradigma. La propuesta que ahora presentamos se basa en considerar un medio hipotético que sea capaz de guardar información espacial, de tal manera que deje registro de los eventos en pasos anteriores. La propuesta presentada en esta sección se basa en la eliminación de eventos que no dependen del evento inmediato anterior sino en el modelo que consideramos a continuación.

Fano factor (F_{ps}) & β_{PS} , $\xi_e = 5$, $\xi_r = 0.3$								
Λ_d	50	100	200	300	500	1000	5000	10000
F_{ps}	0.24	0.27	0.30	0.31	0.35	0.41	0.95	1.04
β_{ps}	0.97	0.66	0.46	0.39	0.32	0.21	0.05	0.01

Tabla 6.1: El factor de Fano y el exponente β_{ps} para las series de tiempo, para distintos valores del parámetro Λ_d con $\xi_e = 5$ y $\xi_r = 0.3$.

Simulamos ahora a un conjunto de proyectiles que siguen un proceso puntual de Poisson y que atraviesan un medio material hipotético que se encuentra dividido en secciones (rodajas), como puede apreciarse en el panel superior de la Fig. 6.9. Cada sección que compone al medio tiene la propiedad de excitarse por una cantidad etiquetada como ξ_e , cada vez que un proyectil la atraviesa. Aunado a la propiedad anterior, otra característica importante es que el medio material que se asocia tiene una tasa natural de relajación, que actúa a lo largo de toda la simulación disminuyendo el grado de excitación. Es decir, en cada paso discreto de tiempo, la excitación disminuye por una cantidad etiquetada como ξ_r . La principal característica del medio material hipotético es la posibilidad de que los proyectiles puedan dividirse en un nuevo par de proyectiles, cuando pasan a través de cada rebanada (que se representan esquemáticamente como bolas rojas en el panel superior de la Fig. 6.9. También se pueden apreciar fuera del camino recto de la serie temporal de eventos de nuestro interés). Esto permite eliminar proyectiles de la serie de tiempo resultante, que se mide mediante un detector en el extremo del material (bloque rojo rectangular en la Fig. 6.9). Este proceso juega un papel análogo a los controles de eliminación de tiempo muerto mencionados en las anteriores secciones, pero ahora no es el único proceso implicado para eliminar eventos, como veremos más adelante.

Para llevar a cabo el proceso estocástico mencionado, es necesario definir un parámetro de control cuya función sea básicamente similar a la de un dado con el número de caras igual al valor etiquetado como λ_d , que establezca el límite probabilístico para determinar si el proyectil puede dividirse o no. La longitud del medio material utilizado durante la simulación es $\acute{x} = 150$, donde cada sección corresponde a una unidad de tiempo discreto. La probabilidad de partición asociada a cada evento está dada por el parámetro λ_d y el valor acumulado del parámetro de excitación etiquetado como $G_{\acute{x},t_i}(\xi_e)$, en el instante t_i y la posición \acute{x} , es decir, $G_{\acute{x},t_i}(\xi_e) = \sum_{t=1}^{t_i} \delta(x - \acute{x})\xi_e$, que es un valor particular de cada rebanada y está dada por la evolución de la simulación. Numéricamente, en un principio el parámetro de excitación acumulada $G_{\acute{x},t_i}(\xi_e)$, que como ya hemos mencionado determina el grado de excitación en cada componente del material, toma el valor cero. Conforme el tiempo aumenta $G_{\acute{x},t_i}(\xi_e)$ crece por la cantidad asociada al parámetro ξ_e , de modo que durante la simulación cada sector tendrá asociado un valor específico. El efecto mencionado se refleja en el panel inferior de la Fig. 6.9, donde es posible notar la intensidad del nivel de excitación a lo largo del eje horizontal (espacial).

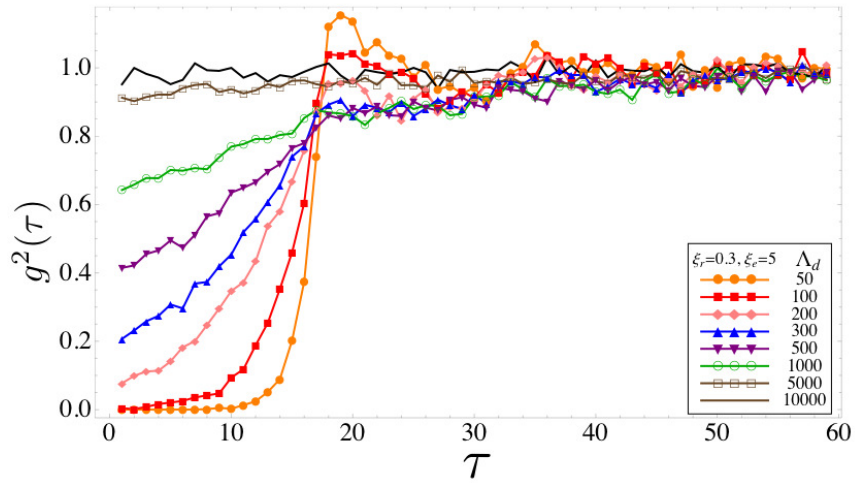


Figura 6.10: $g^2(\tau)$ como función de los tiempos de retraso τ , para medir la tasa de coincidencia entre eventos de las series de tiempo, para diferentes valores de Λ_d (ξ_e y ξ_r están fijos).

El parámetro λ_d permanece fijo durante toda la simulación y determina junto con $G_{\vec{x},t_i}(\xi_e)$ la razón $P_p = G_{\vec{x},t_i}(\xi_e)/\Lambda_d$, que define si el proyectil se divide o no. Con P_p más grande que la unidad, el proyectil siempre se divide en un nuevo par de proyectiles que emergen a un ángulo determinado, para que no se tomen en cuenta en la serie de tiempo final, pero si $P_p < 1$ el proyectil continúa su camino recto a la sección siguiente, donde se repite el mismo proceso estocástico hasta que el proyectil llega al detector o se divide finalmente. La propiedad de relajación se mantiene fija durante la simulación, con el objetivo de reducir la probabilidad de conversión y así permitir que los proyectiles puedan llegar a la posición del detector. Los parámetros ξ_e y ξ_r están, por tanto, modificando constantemente las propiedades del medio. La Fig. 6.9 muestra una imagen de la simulación, donde se puede observar claramente cómo las propiedades del medio permiten la conversión de los proyectiles. $G_{\vec{x},t_i}(\xi_e)$ cambia en cada paso discreto de tiempo para algunas secciones en el material, jugando un rol similar al rol del intervalo de tiempo muerto τ_d , en el método de eliminación exponencial. A su vez, el medio guarda información espacial, lo que implica memoria temporal. Los dos grados de libertad generan anti-correlaciones en diferentes escalas temporales entre los eventos de las series de tiempo registradas. Nuestro experimento numérico está dado por series de tiempo obtenidas para diferentes valores de los parámetros del modelo. Los únicos valores que permanecen constantes en la simulación corresponden a los involucrados en el proceso puntual inicial de tipo Poisson. Después de haber analizado a fondo las diferentes combinaciones de los parámetros, presentamos los resultados. Los ensambles de series de tiempo que se obtienen con este nuevo enfoque, constan cada uno de 50 realizaciones. La longitud de cada serie de tiempo es de 4 000 eventos. El primer resultado que presentamos está constituido por

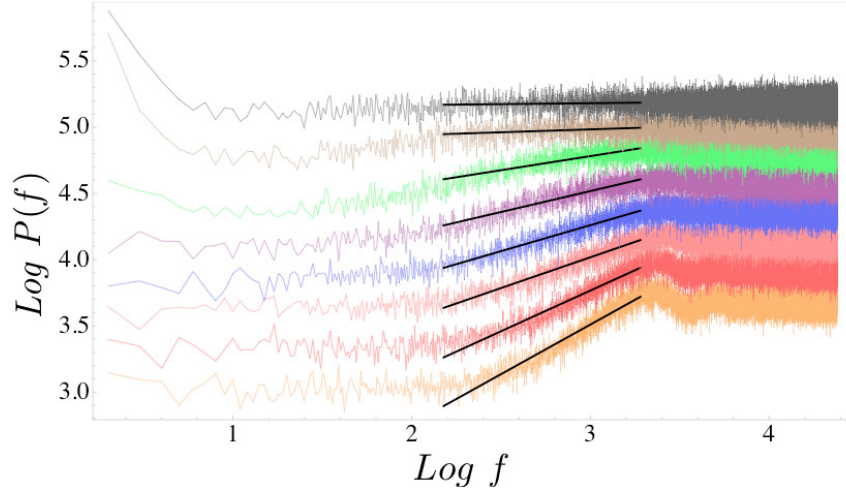


Figura 6.11: Espectro de potencias $P(f)$ para las series de tiempo generadas con el nuevo método. Los espectros corresponden a diferentes valores de λ_d , que se muestran en la Tabla 6.1.

ensambles de acuerdo a los parámetros específicos que se muestran en la Tabla 6.1. La figura 6.9 muestra las funciones $g^2(\tau)$ para cada uno de los valores del parámetro λ_d , con los demás parámetros fijos. La intensidad de las funciones $g^2(\tau)$ decae con diferentes pendientes de acuerdo con la magnitud de λ_d y conforme τ se acerca a cero. Prácticamente la función de correlación es menor que la unidad hasta $\tau \simeq 30$, donde empieza a fluctuar alrededor de 1, a excepción de λ_d igual a 10,000, donde las auto-correlaciones prácticamente corresponden a las mostradas por los procesos de Poisson, lo que nos sirve como límite extremo de la simulación. También es evidente que las anti-correlaciones decrecen en intensidad conforme λ_d aumenta. Con esta combinación de parámetros, λ_d se puede utilizar como parámetro de control para medir la magnitud de las anti-correlaciones introducidas. Para valores más altos de $\tau \simeq 60$ el valor de $g^2(\tau)$ tiende a uno y las fluctuaciones del sistema empiezan a ser aleatorias entre los eventos. Para los valores de λ_d igual a 50 y 100, la magnitud de $g^2(\tau)$ toma el valor cero cuando $\tau \simeq 0$, y aumenta hasta 1 conforme τ toma valores mayores. Para los otros valores de λ_d que se muestran en la Tabla 6.1, la magnitud de la función de correlación en $\tau \simeq 0$, no es cero, lo que indica anti-correlaciones más débiles entre los eventos para valores de τ cercanos a cero. Para valores de λ_d inferiores a 50, la intensidad de la función de correlación comienza a tener un comportamiento similar al descrito en la sección 6.3 para la eliminación de tiempo muerto, donde los anti-correlaciones introducidas son drásticas y en una sola escala de tiempo. La magnitud de las fluctuaciones en comparación con las obtenidas por una distribución de Poisson se aprecia en la Tabla 6.1, donde el factor de Fano se calcula como función de λ_d . Los valores mostrados para el factor de Fano evidencian una clara

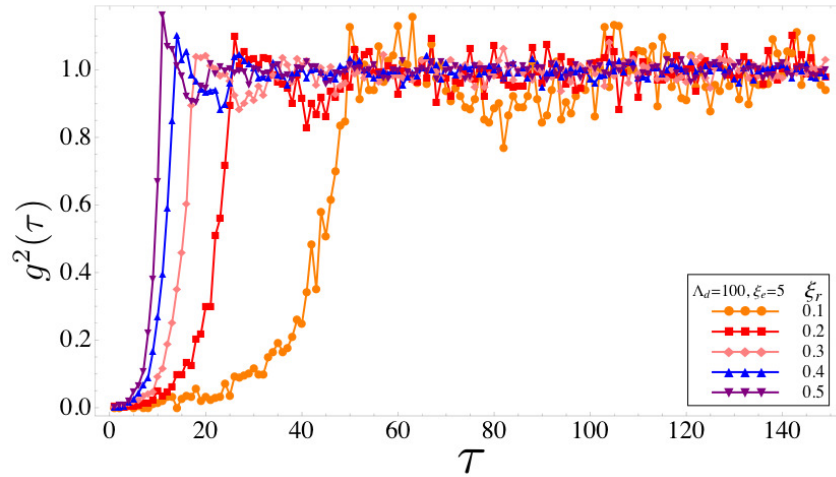


Figura 6.12: La función de correlación de segundo orden $g^2(\tau)$, como función de los tiempos de retraso τ , para medir la tasa de coincidencia entre eventos para cada serie temporal con diferentes valores de ξ_r (Λ_d y ξ_e están fijos como se muestra en la leyenda de la figura).

tendencia de aumento, de manera contraria a la evolución de los valores relacionados con los exponentes β_{PS} , obtenidos a través de una regresión lineal del espectro de potencia calculado a partir del análisis de Fourier. La Fig. 6.11 muestra el espectro de potencias para cada valor del parámetro λ_d . El ajuste a la tendencia lineal del espectro de potencias ($P(f) \sim f^{\beta_{ps}}$) se obtiene para todos los ensambles y la evolución del exponente β_{ps} se muestra en la Tabla 6.1. El valor del exponente β_{ps} es aproximadamente igual a 1 para $\lambda_d = 50$ y empieza a disminuir a medida que λ_d aumenta. Esto se puede ver claramente en la Fig. 6.11, donde el espectro de potencia para $\lambda_d = 50$ se encuentra en la parte más baja de la figura. Los espectros de potencia subsiguientes se representan en dirección hacia arriba siguiendo el orden dado en la Tabla 6.1. El último espectro de potencia mostrado es el de $\lambda_d = 10000$, asociado a un exponente β_{ps} obtenido con valor aproximado de cero, lo que corresponde a una señal puramente aleatoria, i.e., un proceso puntual de Poisson.

El segundo resultado interesante que ofrece el modelo se muestra en la Fig. 6.12 y consta de ensambles con 50 realizaciones cada uno. Los parámetros que permanecen fijos en este caso son $\lambda_d = 100$ y $\xi_e = 5$ y el único parámetro que cambia entonces es ξ_r , que toma valores desde 0.1 hasta 0.5, en pasos de 0.1, como se muestra en la leyenda de la figura mencionada. Lo más notable que se puede mencionar con esta variante de los parámetros, está relacionado con el rango de escala temporal de las anti-correlaciones introducidas. Gráficamente esto es evidente analizando la Fig. 6.12, donde se muestra la función $g^2(\tau)$ para cada uno de los casos tratados. De esta manera, somos capaces de controlar la escala temporal de las anti-correlaciones entre diferentes eventos, a diferencia de los métodos anteriores con anti-correlaciones entre eventos vecinos.

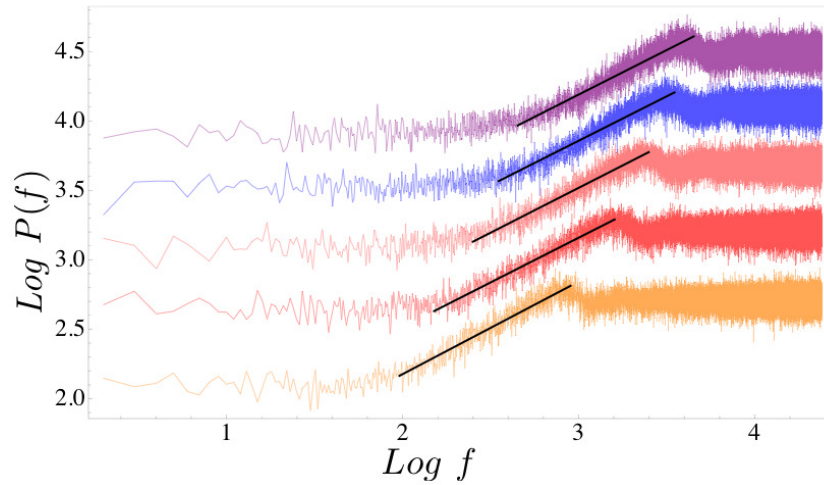


Figura 6.13: Espectro de potencias $P(f)$ para las series de tiempo que corresponden a diferentes valores mostrados en la leyenda de la Fig. 6.12.

El análisis de espectro de potencia se presenta en la Fig. 6.13. Los espectros han sido desplazados verticalmente para evitar la superposición de los datos. El espectro de potencias relacionado con las anti-correlaciones de mayor alcance se representa en la parte más baja de la figura, y sucesivamente hasta el rango más corto, que se representa en la parte superior de la figura. Claramente puede verse en la Fig. 6.13 cómo el espectro de potencias se desplaza horizontalmente de acuerdo al valor creciente de ξ_r . Es decir, la parte lineal del espectro de potencia toma un intervalo cada vez más grande en el dominio de las frecuencias, que indica escalas de tiempo más cortas, a diferencia de los espectros de potencia mostrados en la Fig. 6.11, donde el único cambio aparece en la densidad espectral. También, al igual que en la Fig. 6.11, se muestra la regresión lineal con pendiente positiva para cada caso, con la diferencia de que el valor numérico del exponente β_{ps} es de 0.66 para todos los ajustes (salvo pequeñas desviaciones en cada uno de ellos). Esto último se debe a que la forma del espectro no cambia, sólo se desplaza en el dominio de la frecuencia. Una conducta similar para $g^2(\tau)$ y el espectro de potencias $P(f)$ se observa cuando los parámetros λ_d y ξ_r se mantienen fijos y se varía solamente ξ_e , debido a que los parámetros ξ_r y ξ_e están vinculados, es decir, no son independientes.

Con esta nueva propuesta se puede controlar tanto el alcance como la magnitud de las anti-correlaciones introducidas, lo cual es una ventaja significativa con respecto al método de eliminación exponencial, el cual, si bien puede controlar el rango temporal, no tiene control sobre la magnitud de las anti-correlaciones introducidas. Como conclusión, para que verdaderamente se logren introducir anti-correlaciones temporales de largo alcance, es necesario introducir información espacial en el modelo. Esto, sin duda, es un factor que está presente en muchos sistemas complejos en la naturaleza. En particular, por mencionar un ejemplo,

hacemos referencia al comportamiento de agrupamiento presentado por ciertas aves que se mueven con una coordinación absoluta, en lugar de ser dictada por un líder o en respuesta a un estímulo común. Los patrones colectivos de la dinámica de las parvadas tienden a estar auto-organizadas y surgen de las interacciones locales (espaciales) entre individuos que propagan información a través de todo el grupo, ya que una memoria temporal sería muy costosa. Por último, regresando a la conexión con el gotero cuántico, ésta se basa en las propiedades introducidas en los procesos puntuales de Poisson que se comparan con las propiedades mostradas por las coincidencias de la luz cuántica medidas experimentalmente. El modelo esquemático ayuda a dar una visión más amplia de por donde atacar el modelo teórico.

Capítulo 7

Conclusiones

Una de las principales aportaciones de este trabajo es proporcionar nuevos elementos para mejorar la comprensión de las propiedades de invariancia de escala presente en la dinámica de sistemas caóticos, tanto en el régimen clásico como el cuántico, a través del análisis de series de tiempo. Series de tiempo cuya densidad espectral de potencias se comporta como una ley del tipo $P(f) \sim 1/f^\beta$ son invariantes de escala. El ruido $1/f$ puede ser visto como un tipo particular de ruido fractal que corresponde a las señales que maximizan el rango de sus correlaciones. En este escrito investigamos la hipótesis de que series de tiempo de sistemas clásicos y cuánticos que experimentan una transición entre dos regímenes cuya dinámica es diferente, exhiben un comportamiento $1/f$ en el punto de transición. Reportamos en detalle dos ejemplos concretos: el mapeo logístico modulo 1 (en la sección 2.5 para el caso clásico) y un hamiltoniano esquemático para el caso nuclear (presentado en la sección 4.3). Analizamos las autocorrelaciones presentes en las series de tiempo a través del espectro de potencias y del análisis de las fluctuaciones sin tendencia usando el método de análisis de fluctuaciones sin tendencia (DFA).

En el caso particular del mapeo logístico modulo 1, el parámetro k controla la propiedad de autosimilitud presente en las series de tiempo. Cuando k es menor que la unidad, encontramos series de tiempo regulares (con un exponente de Lyapunov $\lambda_k < 0$); para el parámetro de control $k = 1$ se encuentran series de tiempo no periódicas correlacionadas (con un exponente de Lyapunov $\lambda_k = 0$) y cuando el parámetro de control k es mayor a 1 encontramos series de tiempo caóticas (con un exponente de Lyapunov $\lambda_k > 0$). Una propiedad importante de las series de tiempo caóticas es que la intensidad de las frecuencias pequeñas va disminuyendo conforme k va en aumento. Reportamos un comportamiento $1/f$ para las series de tiempo no periódicas correlacionadas en el punto de transición, mientras que series de tiempo caóticas corresponden a un espectro de potencias $1/f^\beta$ con $\beta \neq 1$, en tanto que las series de tiempo regulares (periódicas) muestran frecuencias características bien definidas. En cuanto al grifo goteante y el mapeo logístico, no muestran un comportamiento de ley de potencias en el análisis espectral de Fourier, en los resultados presentados en este escrito.

Con respecto al análisis de sistemas cuánticos, utilizamos un modelo muy apropiado para estudiar teóricamente el caos cuántico en sistemas realistas de muchos cuerpos, conocido

como el modelo de capas, ampliamente estudiado en la física nuclear. Se trata de un modelo que permite considerar un número considerable de partículas interaccionando fuertemente entre sí, en un espacio de valencia reducido y donde se pueden investigar los efectos del campo medio y la interacción residual. En el límite de campo medio, el sistema es integrable debido a que posee suficientes simetrías para caracterizar todos sus autoestados mediante un conjunto completo de números cuánticos conservados. La interacción residual rompe las simetrías del campo medio y, por tanto, sólo se siguen conservando los números cuánticos de momento angular y paridad. Debido a estas propiedades el campo medio se identifica con el movimiento regular, mientras que la interacción residual es la que induce el caos en el sistema. La mayoría de los estudios teóricos con el modelo de capas concluyen que, incluso a muy baja energía, la estadística de las fluctuaciones espectrales en los núcleos se corresponde con aquellas de la teoría de matrices aleatorias, a saber, con el ensamble ortogonal gaussiano, GOE. Con base a lo anterior, se estudió el espectro nuclear del ^{48}Ca calculado a través del modelo de capas.

En el presente escrito se analizaron las fluctuaciones espectrales del ^{48}Ca con el objetivo de identificar las propiedades estadísticas y revelar el carácter caótico del sistema. Los casos analizados fueron los espectros nucleares del ^{48}Ca para diferentes subespecies, calculados con el modelo de capas usando interacciones realistas (KB3) e interacciones aleatorias de dos cuerpos (TBRE). Para llevar a cabo dicho análisis es necesario separar el comportamiento global de la densidad de niveles de energía a través del método de reescalado. Un problema importante en el estudio es que el procedimiento de reescalado influía de manera sustancial en las medidas utilizadas para caracterizar al caos del sistema. Por ejemplo, los resultados de nuestros cálculos dependían del grado del polinomio utilizado para ajustar la densidad de niveles acumulada. Finalmente, después de haber utilizado varios grados en el polinomio, se concluyó que el polinomio de grado 7 es el que menos afecta el análisis. Las medidas del caos cuántico para caracterizar correlaciones, tanto de corto como largo alcance, fueron entonces calculadas. En conclusión, se mostró que las fluctuaciones espectrales del ^{48}Ca están caracterizadas por una invariancia de escala no trivial en el análisis espectral de Fourier, que sigue una ley de potencia tipo $1/f$. Desafortunadamente el ^{48}Ca es un sistema muy complejo que involucra muchos grados de libertad, lo que hace muy complicado poder comparar el resultado de esta ley de potencias con el resultado obtenido en el sistema clásico del mapeo logístico mod 1. Por lo tanto, para tratar de establecer una comparación más clara, se utilizó el espectro de excitación nuclear genérico calculado usando un hamiltoniano esquemático. La estructura del hamiltoniano permite tener dos términos en competencia controlados a través de un parámetro de control: Se tiene un término de partícula independiente y un término de interacción residual cuadrupolo-cuadrupolo. Ambos términos son integrables por separado pero el parámetro de control etiquetado como χ permite una transición suave entre los dos regímenes límite (regular-caos-regular). El análisis de las fluctuaciones espectrales para ambos extremos integrables corresponde a espectros cuyas fluctuaciones siguen una ley de potencias $1/f^2$, mientras que el espectro de excitación para el punto (o el intervalo) donde ocurre la transición, corresponde a una densidad espectral de potencias $1/f$.

El análisis de las fluctuaciones en el estado donde ocurre la transición en el comportamiento dinámico, tanto para el mapeo logístico modulo 1 y para el hamiltoniano esquemático del ^{48}Ca puede servir como punto de partida para hacer algunas conexiones entre los sistemas clásicos y las propiedades de los estados cuánticos excitados para sistemas de muchos cuerpos. Para ambos sistemas específicos, se encuentra un comportamiento genérico $1/f$ en los espectros de potencias de las correspondientes series de tiempo asociadas al estado donde ocurre la transición. Además, como consecuencia del tipo de ley de potencias, se maximizan las correlaciones de largo alcance. La sugerencia planteada parece estar en la dirección correcta, pues recientemente en la literatura de sistemas dinámicos complejos, que van desde los ecosistemas a los mercados financieros y al clima, muestran que estos sistemas pueden tener puntos críticos en los cuales un cambio repentino a un régimen dinámico diferente puede ocurrir. Aunque la predicción de estos puntos críticos antes de que se alcancen es extremadamente difícil, trabajos en diferentes campos de la ciencia sugieren la existencia de señales tempranas que podrían indicar si un umbral crítico se está acercando [98, 99], lo que es válido para una amplia gama de sistemas.

El análisis del método de descomposición de modos empíricos (EMD), utilizado principalmente para el estudio de series de tiempo no estacionarias y no lineales, permitió regresar al problema de reescalado en los espectros nucleares. Existen varias metodologías para reescalar los espectros cuánticos pero, sin embargo, no es un procedimiento trivial. El procedimiento es muy complicado de llevar a cabo cuando no se puede aplicar la densidad teórica de los niveles de energía, debido a la finitud de los datos numéricos. Por lo tanto, se utiliza una aproximación suave a la densidad de los niveles de energía mediante diferentes técnicas. En este trabajo se muestra que las medidas habituales del caos tiene una gran dependencia en este proceso, porque el hacer mal el reescalado implica introducir correlaciones espurias o destruir correlaciones físicas presentes en los datos y esto provoca desviaciones en los resultados que puede llevar a conclusiones erróneas sobre el grado de caoticidad del sistema cuántico.

Una solución a este problema propuesta en el presente escrito, es a través de la utilización de método de descomposición de modos empíricos. Para ilustrar la propuesta se utiliza la teoría de matrices aleatorias, en particular GOE, y se realiza el mismo tipo de análisis propuesto por Relaño et al. [4], pero usando diferentes polinomios en el procedimiento de reescalado. El estudio de las correlaciones de corto alcance no permite apreciar desviaciones con respecto a las distribuciones de referencia (distribución de Wigner). Sin embargo, un estudio más a fondo sobre el tema es necesario. En cambio, para los estadísticos que miden correlaciones de largo alcance se aprecian desviaciones significativas, por ejemplo, los estadísticos $\Delta_3(L)$ difieren completamente a partir de un cierto valor de L y se ha mostrado que para analizar adecuadamente el grado de regularidad o caoticidad del sistema cuántico es muy importante analizar también las correlaciones para valores de L medianos o grandes. A fin de disminuir la dependencia que introduce el procedimiento de reescalado, se propuso eliminar la tendencia global de las fluctuaciones después de un procedimiento de reescalado incorrecto, a través de la nueva metodología EMD. Detectar la tendencia global de las fluctuaciones después del reescalado es la parte esencial de nuestra propuesta. Finalmente, se demuestra que la

operación de eliminar la tendencia de las fluctuaciones suprime en gran medida la dependencia del procedimiento de reescalado en las mediciones habituales para medir la presencia del caos cuántico.

La implementación del EMD al análisis de series de tiempo no sólo mejora el significado estadístico de las medidas habituales del caos cuántico, sino que permite dar una propuesta alternativa para la cuantificación de las propiedades de invariancia de escala en las fluctuaciones espectrales de sistemas cuánticos representados por RMT. Se utilizó la jerarquía de las funciones de modo intrínseco (IMFs) para la obtención de una ley de potencia entre la energía y la escala de tiempo de señales que representan fluctuaciones espectrales pertenecientes a los ensambles GOE, GDE y casos intermedios siguiendo la prescripción de Seligman que simulan una transición del movimiento regular al caótico. Se encontró una relación lineal entre la energía de los IMFs y su periodo promedio en escala logarítmica, que permite cuantificar las propiedades de invariancia de escala. En el caso de GOE, la densidad de energía se distribuye equitativamente entre todos los modos intrínsecos que es típico de los fenómenos $1/f$. También se muestra una evolución suave de los exponentes que caracterizan la fractalidad de las series de tiempo. A pesar del hecho de que el EMD no requiere ninguna base predeterminada, el método es capaz de revelar las correlaciones no triviales de los espectros cuánticos. Dado que el EMD es capaz de analizar series de tiempo no estacionarias, es más adecuado que el análisis de Fourier, cuyos supuestos limitan el significado físico de los resultados. El EMD demostró su potencial como método adaptativo a los datos en estudio.

Por último, la idea de simular un gotero cuántico permitió construir dos modelos con enfoques diferentes. Por un lado, un desarrollo teórico presentado en el Apéndice E que se encuentra en proceso de investigación, y que está basado principalmente en el fenómeno de conversión paramétrica descendente. Y el segundo enfoque, que se basó principalmente en entender cómo introducir anti-correlaciones entre eventos aleatorios y se realizó a través de una simulación numérica que permite establecer una analogía, bajo ciertas circunstancias, entre series de tiempo anti-correlacionadas y series de tiempo de fotones pertenecientes a luz cuántica. Para este último análisis se propusieron dos métodos para introducir anti-correlaciones en series de tiempo aleatorias, que representan procesos puntuales de Poisson; a) la eliminación del tiempo exponencial que introduce anticorrelaciones entre primeros vecinos y b) el modelo de juguete que simula un material hipotético que está siendo bombardeado por proyectiles creados por eventos de acuerdo a un proceso puntual de Poisson. El último modelo mencionado permite controlar la intensidad y el alcance de las anticorrelaciones introducidas entre los eventos. La propiedad más importante del medio hipotético consiste en proveer memoria a un proceso puntual que inicialmente carece de ella, a través de un grado de libertad espacial. El efecto que tiene la memoria es permitir la existencia de anti-correlaciones de largo alcance con diferentes grados de intensidad. El modelo permite también controlar las anti-correlaciones introducidas en las series de tiempo generadas con procesos puntuales de Poisson y esto es muy importante porque si no se tiene un control adecuado conlleva a concluir erróneamente sobre el estado del sistema.

El hilo conductor de este trabajo ha sido el análisis de series de tiempo, tanto desde el

enfoque tradicional como mediante el nuevo método EMD. Los diversos análisis nos han permitido realizar un recorrido por las propiedades generales de la dinámica de los sistemas cuánticos de muchos cuerpos, sistemas clásicos con dinámica regular o caótica. Lo anterior se ha hecho examinando las propiedades estadísticas de los niveles de energía de núcleos concretos, de modelos generales basados en la teoría de matrices aleatorias, de modelos discretos relativamente simples en la mecánica clásica, de modelos con dinámica caótica en sistemas hamiltonianos, modelos de juguete y hasta sistemas biológicos.

Con respecto a proyectos futuros, en el campo de caos cuántico, recientemente encontramos una definición en la literatura del caos cuántico crítico que tiene asociado una distribución de primeros vecinos en el espectro de energía del tipo sub-poisson, sin embargo hasta el momento sólo se ha hecho un estudio sobre correlaciones de corto alcance como he mencionado y no existe un análisis detallado de las correlaciones de largo alcance sobre todo porque se enfatiza que el mayor problema que se tiene es el proceso de reescalado, en esa dirección se está trabajando. Con respecto al análisis teórico del gotero cuántico se continuará en la dirección establecida para obtener series de tiempo de fotones si es posible. En general también nos encontramos analizando diferentes sistemas complejos en otras áreas, un ejemplo es el estudio que nos encontramos realizando sobre series de tiempo de latidos del corazón, en particular intervalos $r-r$, a través del método de descomposición de modos empíricos con el objetivo de caracterizar los procesos involucrados en corazones sanos y en aquellos que presentan ciertas anomalías (reflejadas en la pérdida de fractalidad en las series de tiempo) usando las propiedades de los IMFs. Por otra parte, estamos analizando modelos teóricos o de juguete para introducir correlaciones en series de tiempo, ello nos permitiría entender el funcionamiento de muchos sistemas a partir del enfoque utilizado.

Apéndice A

Tópicos del primer capítulo

A.1. Definición de la transformada de Fourier

La transformada de Fourier es una de las herramientas de cálculo más utilizadas a lo largo de la presente tesis. En este apéndice resumimos su base conceptual. Dada una función $f(x)$ con valores reales o complejos, se define su transformada de Fourier como

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \exp(-i\omega x), \quad (\text{A.1})$$

de modo que $F(\omega)$ está bien definida si la función original $f(x)$ cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)| < \infty. \quad (\text{A.2})$$

La transformación inversa, que permite recuperar $f(x)$ a partir de $F(\omega)$, es ¹

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega) \exp(i\omega x). \quad (\text{A.3})$$

En la tesis, la transformada de Fourier no se aplica a funciones $f(x)$ continuas, sino a series de tiempo $\{x_i\}$ discretas y finitas. Par este tipos de casos existe una versión discreta de la transformada de Fourier definida según

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q=0}^{N-1} x_q \exp\left(\frac{-2\pi i k q}{N}\right), \quad (\text{A.4})$$

donde N es el tamaño de la serie y $k \in \{0, \dots, N-1\}$ ($k = N$ produce el mismo resultado que $k = 0$); se está suponiendo, además, que $q \in \{0, \dots, N-1\}$, es decir que la serie de longitud

¹El factor $\frac{1}{2\pi}$ se incluye a veces en la definición de $F(\omega)$ o se reparte entre la transformada directa y la inversa mediante sendos factores $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Estas tres definiciones son básicamente equivalentes.

N tiene N valores. La transformada inversa se define

$$x_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \exp\left(\frac{2\pi i k q}{N}\right), \quad (\text{A.5})$$

donde $q \in \{0, \dots, N-1\}$.

A.2. Invariancia de escala de una señal $1/f$

Como vimos en la sección 1.5, una manera alternativa de caracterizar matemáticamente las series de tiempo autosimilares es mediante el uso de funciones de correlación. Si la señal es estacionaria [100], es posible definir una función de correlación

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)X(t+\tau)dt, \quad (\text{A.6})$$

que se relaciona de forma sencilla con el espectro de potencias

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cos(f\tau) d\tau. \quad (\text{A.7})$$

La relación entre la función de correlación y el espectro de potencias tiene como consecuencia que la propiedad de autosimilitud de la primera implica la autosimilitud del segundo y viceversa; en concreto, si $P(f) \propto f^{-\beta}$, entonces $C(\tau) \propto \tau^{\beta-1}$, siempre y cuando $0 < \beta < 1$; para $\beta \geq 1$ las integrales divergen. Para generalizar esta conclusión a una serie $f(t)$ no estacionaria conviene redefinir la función de correlación y evitar así las divergencias. Si tomamos la función

$$C(\tau) = 2[R(0) - R(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [X(t+\tau) - X(t)]^2 dt, \quad (\text{A.8})$$

el espectro de potencias queda determinado por

$$C(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(f) [1 - \cos(f\tau)] df, \quad (\text{A.9})$$

de este modo, si $P(f) \propto f^{-\beta}$ entonces $R(\tau) \propto \tau^{\beta-1}$, siempre y cuando $1 < \beta < 3$. A raíz de todo lo anterior se concluye que el ruido $1/f$ es un caso patológico, pues su función de correlación siempre diverge; no es posible considerarlo ni como un proceso estacionario ni como un proceso no estacionario. No obstante esta divergencia puede eliminarse considerando una serie de tiempo discreta². Si en la ecuación A.9 consideramos un ruido $1/f$ discreto (con un tiempo de muestreo t_{min}) y finito (con una longitud T), la función de correlación es

$$C(\tau) \propto \int_{2\pi/T}^{2\pi/t_{min}} \frac{1 - \cos(f\tau)}{f} df, \quad (\text{A.10})$$

²Desde un punto de vista experimental todas las series de tiempo son discretas, ya que se obtienen mediante un muestreo Δt

que converge $\forall \tau$. Además, esta expresión admite el límite para series de longitud $T \rightarrow \infty$, de modo que

$$C(\tau) \propto \int_{2\pi/T}^{2\pi/t_{min}} \frac{1 - \cos(f\tau)}{f} df = \int_0^{\tau/\tau_{min}} \frac{1 - \cos(x)}{x} dx, \quad (\text{A.11})$$

donde $\tau_{min} = 2\pi/t_{min}$. El resultado que se obtiene para la función de correlación así definida es

$$C(\tau) \propto \log(\tau), \quad \frac{\tau}{\tau_{min}} \gg 1. \quad (\text{A.12})$$

Con el resultado anterior se puede concluir que el ruido $1/f$ sólo puede existir en series discretas, ya que se necesita una cota superior en frecuencia para que no se produzca una divergencia en la función de correlación. También se reafirma que esta forma es invariante de escala más una constante que fija el nivel (véase [50] para una discusión más detallada de este análisis).

Apéndice B

Aspectos básicos de RMT

B.1. Simetrías Espacio-Tiempo

En los modelos matemáticos nuestros sistemas están caracterizados por sus hamiltonianos, los cuales a su vez están representados por matrices hermitianas. Empecemos recapitulando las nociones básicas de la invariancia de inversión temporal, de consideraciones físicas, se requiere que el operador de inversión temporal sea anti-unitario (Wigner, 1959). Existe una base en la cual la matriz del hamiltoniano para un sistema cuántico que es invariante ante inversión temporal es una matriz simétrica real, sí el momento angular total del sistema es entero, o sí el sistema es invariante ante rotaciones con momento angular semi-entero. Si un sistema cuántico es invariante ante inversión temporal y tiene momento angular total semi-entero entonces sus niveles de energía están doblemente degenerados. Esta característica será discutida brevemente más adelante, primero voy a describir algunas propiedades generales de los operadores anti-unitarios. Un operador anti-unitario T , puede ser escrito como el producto de un operador unitario k y un operador de conjugación compleja C :

$$T = KC. \quad (\text{B.1})$$

Un operador anti-unitario es anti-lineal

$$T(c\phi + b\psi) = c^*T\phi + b^*T\psi, \quad (\text{B.2})$$

y satisface la condición

$$(T\phi, T\psi) = (\phi, \psi)^*. \quad (\text{B.3})$$

Ahora, consideremos un sistema cuántico y supondremos que el hamiltoniano, H , para el sistema conmuta con T y que existe una base T -invariante $\{\psi_m\}$:

$$T\psi_m = \psi_m. \quad (\text{B.4})$$

En esta base los elementos de H son reales:

$$(\psi_m, H\psi_n) = (T\psi_m, TH\psi_n)^* = (T\psi_m, HT\psi_n)^* = (\psi_m, H\psi_n)^*. \quad (\text{B.5})$$

Esto significa que si el hamiltoniano de un sistema cuántico es invariante ante alguna transformación anti-unitaria, T , y existe una base T -invariante, entonces los elementos del hamiltoniano son reales en esta base. Si $|j, m\rangle$ es un estado para un sistema cuántico con números cuánticos de momento angular total j y m , uno encuentra que

$$T^2|j, m\rangle = (-1)^{2j}|j, m\rangle. \quad (\text{B.6})$$

Lo que significa que $T^2 = +1$ si el momento angular es entero y $T^2 = -1$ si el momento angular es semi-entero [2]. Cuando $T^2 = +1$ es posible construir una base T -invariante, $\{\psi_m\}$, usando el siguiente procedimiento. Sea ϕ_1 un vector de estado y sea a un número complejo. Se sigue que el vector de estado

$$\psi_1 = a\phi_1 + Ta\phi_1 \quad (\text{B.7})$$

satisface la condición $T\psi_1 = \psi_1$. Ahora, escogemos un vector de estado ϕ_2 el cual es ortogonal a ψ_1 , entonces el vector de estado

$$\psi_2 = a\phi_2 + Ta\phi_2 \quad (\text{B.8})$$

satisface $T\psi_2 = \psi_2$ y es ortogonal a ψ_1 puesto que

$$(\psi_1, \psi_2) = a^*(\psi_1, T\phi_2) = a^*(T\psi_1, T^2\phi_2)^* = 0. \quad (\text{B.9})$$

Continuando de esta manera, la base $\{\psi_m\}$ puede ser construida. Si el hamiltoniano H , de un sistema cuántico con momento angular total entero e invariante ante inversión temporal, se sigue que el H es una matriz simétrica real en la base $\{\psi_m\}$ de acuerdo a B.5.

Los niveles de energía de un sistema cuántico invariante ante inversión temporal con momento angular semi-entero están doblemente degenerados. Esta propiedad conocida como la degeneración de Kramers puede ser mostrada de la siguiente forma. Si $H\psi_n = E_n\psi_n$ entonces

$$HT\psi_n = TH\psi_n = TE_n\psi_n = E_nT\psi_n. \quad (\text{B.10})$$

Suponemos que ψ_n y $T\psi_n$ representan el mismo estado, i.e., $T\psi_n = e^{i\delta}\psi_n$, donde δ es un número real. Dado que $T^2 = -1$, esto guía a la siguiente contradicción

$$T^2\psi_n = Te^{i\delta}\psi_n = e^{-i\delta}T\psi_n = +\psi_n, \quad (\text{B.11})$$

por lo tanto, los niveles de energía están doblemente degenerados. La matriz del Hamiltoniano para un sistema cuántico como este, es una matriz real cuaternionica [2]. Ahora si consideramos un sistema cuántico con momento angular semi-entero y suponemos que la matriz del Hamiltoniano, H , es invariante ante rotaciones:

$$[H, J] = 0. \quad (\text{B.12})$$

En este caso, es posible construir una base la cual es invariante ante la transformación

$$A = e^{-i\pi J_y}T. \quad (\text{B.13})$$

la transformación es anti-unitario, y $A^2 = +1$. Puesto que el Hamiltoniano, H , es invariante bajo rotaciones, se sigue que H es también invariante bajo la transformación A , dado que es una transformación invariante ante inversión temporal. El hamiltoniano, H , es por lo tanto real en este caso también.

B.2. Distribución de Probabilidad Conjunta para los Eigenvalores

Ahora consideremos el Ensamble Unitario Gaussiano GUE , en la siguiente sección se realizará con más detalle el caso de GOE . El elemento de volumen (4.14) para las matrices Hermitianas puede expresarse en términos de los N eigenvalores, x_i , y $N(N-1)$ eigenvectores, θ_i , relacionados a la matrix unitaria que diagonaliza a H . Uno obtiene

$$d[H] = J \prod_{i=1}^N dx_i \prod_{i=1}^{N(N-1)} d\theta_i, \quad (\text{B.14})$$

donde el determinante del Jacobiano, J , esta definido por

$$J \equiv \frac{\partial(H_{11}, \dots, H_{NN}, \text{Re}H_{12}, \dots, \text{Re}H_{N-1,N}, \text{Im}H_{12}, \dots, \text{Im}H_{N-1,N})}{\partial(x_1, \dots, x_N, \theta_1, \dots, \theta_{N(N-1)})}. \quad (\text{B.15})$$

La estructura del Jacobiano implica que el lado derecho de B.14 se parte en dos términos, uno que involucra los eigenvalores y otro término relacionado a los eigenvectores. La medida es

$$d[H] = J \prod_{i < j} |x_i - x_j|^2 \prod_{i=1}^N dx_i d\mu(U), \quad (\text{B.16})$$

donde $d\mu(U)$ es la medida del grupo unitario $U(N; 2)$. Para obtener la distribución de probabilidad conjunta para los eigenvalores de GUE , la integración sobre el grupo unitario debe ser realizado, la integración da un factor constante. Argumentos similares aplican para los otros dos ensambles Gaussianos. La expresión general para los ensambles Gaussianos es

$$P_{N\beta}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \tilde{C}_{N\beta} \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\beta \exp\left(-\frac{\beta}{2} \sum_{k=1}^N x_k^2\right). \quad (\text{B.17})$$

Toda la información acerca del espectro de las matrices aleatorias esta contenido en la distribución de probabilidad, hay que notar que en la expresión anterior la diferencia entre los eigenvalores esta elevado a la potencia β , es decir, se abarcan los tres ensambles.

B.3. Funciones de correlaciones a n-puntos

Las estadísticas que miden las correlaciones de largo alcance del espectro dependen de la función de correlación de dos puntos. Esta es la densidad de probabilidad de encontrar dos

autoenergías E_1 y E_2 a dos energías dadas independientemente de la posición del resto de autoenergías. La función más general de correlación a n-puntos es

$$R_n(E_1, \dots, E_n) = \frac{N!}{(N-n)!} \int P(E_1, \dots, E_n) dE_{n+1} \dots dE_N. \quad (\text{B.18})$$

En el libro de Mehta se realiza el cálculo de las funciones de correlación utilizando la forma de $P(E_1, \dots, E_n)$ para las colectividades de matrices aleatorias *GOE*, *GUE* y *GSE*. La correlación a dos puntos sólo depende de la diferencia de energías. $R_2(E_1, E_2) = R_2(r)$ donde $r = E_2 - E_1$. Podemos observar en las gráficas que

$$R_2(E_1, E_2) \sim r \text{ para } GOE \text{ y } \sim r^2 \text{ para } GUE. \quad (\text{B.19})$$

Otras funciones importantes relacionadas con la función de correlación a dos puntos son la función de agrupamiento, definida como $Y_2(r) = 1 - R_2(r)$ y su transformada de Fourier.

Apéndice C

Modelo de capas

Supondremos al núcleo atómico compuesto de Z protones y N neutrones que interactúan mediante fuerzas a dos cuerpos y obedecen la ecuación de Schrödinger. La energía, el momento angular total y la paridad se conservan en el núcleo atómico. Un autoestado viene caracterizado por los tres números cuánticos E_n , J^π , donde J es el momento angular total y $\pi = +0$ es la paridad.

$$H\Psi(1, \dots, A) = \sum_{k=1}^A [T(k) + \sum_{k<\ell}^A W(k, \ell)] \Psi(1, \dots, A) = E\Psi(1, \dots, A), \quad (\text{C.1})$$

siendo $A = N + Z$ el número total de nucleones.

En una primera aproximación consideraremos que cada nucleón se mueve independientemente en un potencial que representa la interacción media del resto de nucleones.

$$H = \sum_{k=1}^A [T(k) + U(k)] + \left[\sum_{k<\ell}^A W(k, \ell) - \sum_{k=1}^A U(k) \right] = H^0 + H^1. \quad (\text{C.2})$$

H^0 representa el movimiento de partículas independientes y H^1 la interacción residual debido a que las partículas no se mueven de forma completamente independiente. En el núcleo atómico esta interacción residual es muy fuerte, de intensidad comparable al campo medio. La imagen del modelo de capas en el núcleo parece incompatible con la intensidad de la interacción residual. Sin embargo, existe gran cantidad de información experimental indicando la existencia de un comportamiento de este tipo, por ejemplo, los números mágicos y los momentos magnéticos. Dos referencias adecuadas para una presentación más extensa del modelo de capas son los libros de Brussaard y Glaudemans [101] y el libro de Heyde [102].

C.1. Espacio de Fock

La aproximación de orden cero al problema nuclear viene dada por el campo medio esférico. Sus órbitas se utilizan como base para el espacio de números de ocupación, el espacio de

Fock. Tenemos unos estados de partícula independiente i, j, \dots con energías $\epsilon_i, \epsilon_j, \dots$, cada estado tiene asociado un momento angular que además indica su degeneración. Los estados de la base del espacio de Fock son los determinantes de Slater, funciones de onda de A partículas normalizadas y antisimetrizadas. Cualquier estado del espacio de Hilbert se puede expresar como combinación de determinantes de Slater.

C.2. Core inerte y espacio de valencia

En el modelo de capas la base que utilizamos para diagonalizar el problema del núcleo atómico es la del campo medio. Para realizar los cálculos del modelo de capas dividimos las infinitas órbitas del campo medio en tres conjuntos:

- a El core inerte: Se compone de las órbitas más bajas en energía que se suponen siempre llenas en el modelo. Los nucleones que ocupan estas órbitas no se tienen en cuenta en el cálculo excepto para renormalizar la interacción efectiva.
- b El espacio de valencia: Lo constituyen las órbitas en las que se pueden mover los nucleones de valencia, que son los que no están en el core. Los nucleones de valencia se mueven de acuerdo con la interacción efectiva ocupando parcialmente las órbitas en este espacio.
- c El espacio externo: Compuesto por las órbitas más altas en energía que suponemos que están siempre vacías en el problema que nos interesa estudiar.

Debemos encontrar el espacio de valencia apropiado para resolver el núcleo en cuestión. Los espacios de valencia suelen estar comprendidos entre dos números mágicos. Las órbitas en esos casos tienen una separación muy grande en energía y podemos considerarlas desocupadas para energías de excitación bajas.

Apéndice D

Transformada de Hilbert

Para una serie de tiempo arbitraria, $x(t)$, siempre se puede tener su transformada de Hilbert, $y(t)$, como

$$y(t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t')}{t - t'} dt', \quad (\text{D.1})$$

donde P indica el valor principal de Cauchy. Con esta definición, $x(t)$ y $y(t)$ forman el par complejo conjugado, para que podamos tener una señal analítica $z(t)$ como

$$z(t) = x(t) + iy(t) = a(t)e^{i\theta(t)}, \quad (\text{D.2})$$

en la cual

$$a(t) = [x^2(t) + y^2(t)]^{1/2}, \quad \theta(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right). \quad (\text{D.3})$$

Teóricamente, hay una infinidad de maneras de definir la parte imaginaria, pero la transformada de Hilbert ofrece una forma única para definir de la parte imaginaria tal que el resultado sea una función analítica. Un breve tutorial sobre la transformada de Hilbert con énfasis en la interpretación física se puede encontrar en Bendat y Piersol (1986). En esencia la ecuación D.1 define la transformada de Hilbert como la convolución de $x(t)$ con $1/t$, por lo tanto, hace hincapié en las propiedades locales de $x(t)$.

Para un tratamiento más riguroso ver [77] donde incluso se muestran aplicaciones directas a las series de tiempo para ciertos fenómenos naturales.

Apéndice E

Modelo Teórico del Gotero Cuántico

Para la construcción del modelo teórico del gotero cuántico es necesario entender cómo se propaga el campo electromagnético en diferentes medios. Por lo tanto, abordamos sin demasiado rigor matemático la propagación del campo en el espacio libre (sin cristal) y la propagación en un medio paramétrico no lineal, con el fin de poner de forma sencilla la idea general del modelo, para derivaciones más rigurosas consultar las referencias [103].

E.1. Propagación de un Campo Cuantizado en el Espacio Libre

Las dificultades asociadas con la descripción cuántica de la propagación del campo electromagnético en el espacio libre o en un medio no lineal están en el procedimiento usual de la cuantización del campo [89]. Podemos escribir el operador de campo en la forma de descomposición modal

$$E^+(\vec{r}, t) = i \frac{\hbar}{2\epsilon_0} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \omega^{1/2}(k) \mathbf{a}(\vec{k}) \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega(k)t)]. \quad (\text{E.1})$$

Aquí $\mathbf{a}(\vec{k})$ y $\mathbf{a}^\dagger(\vec{k})$ son los operadores de creación y aniquilación de un fotón para un modo espacial con vector de onda \vec{k} , la frecuencia $\omega(k)$ en este caso esta dada por la relación de dispersión en el espacio libre y los operadores de creación y aniquilación obedecen las siguientes relaciones de conmutación

$$[\mathbf{a}(\vec{k}), \mathbf{a}^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad [\mathbf{a}(\vec{k}), \mathbf{a}(\vec{k}')] = 0. \quad (\text{E.2})$$

La ecuación E.1 determina el operador de campo en el esquema de Heisenberg en todos los puntos \vec{r} y t del espacio-tiempo como una solución al problema de valor inicial, es decir, a través de los operadores $\mathbf{a}(\vec{k})$ y $\mathbf{a}^\dagger(\vec{k})$ dados al $t = 0$ como operadores de Schrodinger. A pesar que la ecuación E.1 nos permite determinar el campo en cualquier punto del espacio-tiempo es inapropiada para el problema de la propagación libre. Para una onda que viaja

en la dirección $+z$, nos gustaría tener una formula que determine el operador de campo en cualquier punto $\vec{\rho}$ del plano transversal a la coordenada z dado el operador de campo sobre el plano $z = 0$. Para lograr lo anterior introducimos operadores de aniquilación y creación $\mathbf{a}(\vec{\rho}, z, t)$ y $\mathbf{a}^\dagger(\vec{\rho}, z, t)$ de acuerdo a

$$E^+(z, \vec{\rho}, t) = i \left(\frac{\hbar \omega_0}{2\epsilon_0} \right)^{1/2} \exp[i(k_0 z - \omega_0 t)] \mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t), \quad (\text{E.3})$$

donde ω_0 es la frecuencia de la onda que viaja en la dirección $+z$ y $k_0 = \omega_0/c$ es su vector de onda. El operador $\mathbf{a}(\vec{\rho}, z, t)$ esta dado por

$$\mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t) = \int \frac{dk_z}{2\pi} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{\omega(k)}{k_0}} \mathbf{a}(\vec{k}) \exp[i(\vec{q} \cdot \vec{\rho} + (k_z - k_0)z - (\omega(k) - \omega_0)t)], \quad (\text{E.4})$$

donde $\vec{\rho}$ es el vector de coordenadas 2-dimensional en el plano transversal de la onda y $\vec{q} = (k_x, k_y)$. Consideremos una región finita del espacio de volumen V , el hamiltoniano del campo electromagnético en esta región puede ser escrito como

$$H_0 = \frac{\hbar \omega_0}{c} \int_V d\vec{r} \mathbf{a}^\dagger(z, \vec{\rho}, t) \mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t). \quad (\text{E.5})$$

El factor de c^{-1} aparece debido a la normalización de los operadores $\mathbf{a}(\vec{\rho}, z, t)$ y $\mathbf{a}^\dagger(\vec{\rho}, z, t)$. La evolución temporal del operador que varia lentamente $\mathbf{a}(\vec{\rho}, z, t)$ esta descrita entonces por la siguiente ecuación

$$\dot{\mathbf{a}}(z, \vec{\rho}, t) = i\omega_0 \mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t) + \frac{i}{\hbar} [H_0, \mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t)], \quad (\text{E.6})$$

donde el primer termino viene de la dependencia explícita temporal $\exp[i\omega_0 t]$ incluida en la definición E.4. Para evaluar el conmutador del lado derecho de la ecuación anterior, necesitamos saber la relación de conmutación de $\mathbf{a}(\vec{\rho}, z, t)$ y $\mathbf{a}^\dagger(\vec{\rho}, z, t)$ al mismo tiempo pero en dos diferentes puntos espaciales dentro del medio. Usando la ecuación E.4 podemos escribir esta relación de conmutación como

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t), \mathbf{a}^\dagger(z', \vec{\rho}', t')] &= c^2 \int \frac{dk_z}{2\pi} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} \int \frac{dk'_z}{2\pi} \int \frac{d\vec{q}'}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{\omega(k)}{k_0}} \sqrt{\frac{\omega(k')}{k_0}} [\mathbf{a}(\vec{k}), \mathbf{a}^\dagger(\vec{k}')] \\ &\quad \exp[i(\vec{q} \cdot \vec{\rho} + (k_z - k_0)z - (\omega(k) - \omega_0)t)] \\ &\quad \exp[-i(\vec{q}' \cdot \vec{\rho}' + (k'_z - k_0)z' - (\omega(k') - \omega_0)t)] \\ &= c^2 \int \frac{dk_z}{2\pi} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} \int \frac{dk'_z}{2\pi} \int \frac{d\vec{q}'}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{\omega(k)}{k_0}} \sqrt{\frac{\omega(k')}{k_0}} (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ &\quad \exp[i(\vec{q} \cdot \vec{\rho} + (k_z - k_0)z - (\omega(k) - \omega_0)t)] \\ &\quad \exp[-i(\vec{q}' \cdot \vec{\rho}' + (k'_z - k_0)z' - (\omega(k') - \omega_0)t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c \int \frac{dk_z}{2\pi} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} \frac{\omega(k)}{\omega_0} \exp[i(k_z - k_0)(z - z') + i\vec{q} \cdot (\vec{\rho} + \vec{\rho}')] \\
&= c\tilde{\delta}(\vec{r} - \vec{r}')
\end{aligned}$$

donde se ha usado la relación de dispersión $\omega(k) = kc$, la $\tilde{\delta}(\vec{r} - \vec{r}')$ es una función tipo- δ que llega ser la función real $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ si despreciáramos la dependencia del integrando en $\omega(k)$. Por último usando la relación de conmutación anterior obtenemos la ecuación de evolución

$$\dot{\mathbf{a}}(z, \vec{\rho}, t) = i\omega_0 \mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t) - i\omega_0 \int_V d\vec{r}' \tilde{\delta}(\vec{r} - \vec{r}') \mathbf{a}(z', \vec{\rho}', t). \quad (\text{E.7})$$

E.2. Propagación del Campo Cuantizado en un medio paramétrico no lineal

Ahora abordemos la derivación de la ecuación de propagación del campo cuantizado en un medio paramétrico no lineal [103]. En este caso el operador del campo eléctrico debe de escribirse de la siguiente forma

$$E^+(\vec{r}, t) = i\left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0}\right)^{1/2} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \xi(k) \omega^{1/2}(k) \mathbf{a}(\vec{k}) \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega(k)t)]. \quad (\text{E.8})$$

La ecuación anterior difiere con la de la sección anterior E.1 en el factor $\xi(k)$, esta constante esta dada por la siguiente expresión

$$\xi^2(k) = \frac{u(k)v(k)}{c^2 \cos \rho(k)} \quad (\text{E.9})$$

donde $v(k) = c/n(k)$ es la velocidad de fase de la luz en el medio, $u(k) = \partial\omega(k)/\partial k$ es la velocidad de grupo, y $\rho(k)$ es el ángulo generalizado de anisotropía, esto es, el ángulo entre el campo eléctrico y la inducción. Bajo ciertas suposiciones podemos introducir el operador $\mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t)$ en la ecuación del campo cuantizado en un medio

$$E^+(z, \vec{\rho}, t) = i\xi\left(\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0}\right)^{1/2} \exp[i(k_l z - \omega_0 t)] \mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t). \quad (\text{E.10})$$

Donde hemos denotado por k_l el numero de onda en el medio, para distinguirlo del correspondiente k_0 en el vacío. Entonces el operador de aniquilación en el medio esta dado por la siguiente expresión

$$\mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t) = \int \frac{dk_z}{2\pi} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{\omega(k)}{k_0}} \mathbf{a}(\vec{k}) \exp[i(\vec{q} \cdot \vec{\rho} + (k_z - k_0)z - (\omega(k) - \omega_0)t)], \quad (\text{E.11})$$

pero ahora con una relación de dispersión de $\omega(k)$ para el medio. Describiremos la interacción paramétrica en el medio en términos de un hamiltoniano efectivo. Supondremos que un medio paramétrico no lineal con una χ^2 llena un volumen V . Este medio se ilumina con una onda plana monocromática que juega el rol del haz de bombeo, el haz de bombeo se propaga en la dirección $+z$ y tiene frecuencia ω_p y numero de onda k_p :

$$E_p^+(z, \vec{\rho}, t) = E_p \exp[i(k_p z - \omega_p t)]. \quad (\text{E.12})$$

Escogemos que la frecuencia del haz sea $\omega_p = 2\omega_0$. Bajo estas suposiciones la interacción paramétrica puede estar descrita por el siguiente hamiltoniano efectivo

$$H_{int} = i\hbar \frac{n_0 g}{c} \int_V d\vec{r} \exp[i(k_p - 2k_l)z] (\mathbf{a}^\dagger(z, \vec{\rho}, t))^2 + H.c. \quad (\text{E.13})$$

Aquí n_0 da la densidad de átomos en el medio paramétrico, y g la constante de fuerza de la interacción paramétrica proporcional a la amplitud del haz de bombeo E_p y la constante de susceptibilidad χ^2 del medio. La evolución de $\mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t)$ en el medio paramétrico esta descrita por la siguiente ecuación

$$\dot{\mathbf{a}}(z, \vec{\rho}, t) = i\omega_0 \mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t) + \frac{i}{\hbar} [H_0 + H_{int}, \mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t)], \quad (\text{E.14})$$

donde H_0 es el hamiltoniano para la propagación libre en el medio. Necesitamos evaluar el conmutador del lado derecho de la ecuación, para el H_0 usamos el resultado anterior salvo que ahora tenemos una relación de dispersión $\omega(k)$ para el medio, por lo que resta calcular el siguiente conmutador

$$[H_{int}, \mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t)]. \quad (\text{E.15})$$

El resultado es el siguiente

$$\begin{aligned} [H_{int}, \mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t)] &= i\hbar \frac{n_0 g}{c} \int_V d\vec{r} \exp[i(k_p - 2k_l)z] [\mathbf{a}^\dagger(z, \vec{\rho}, t) \mathbf{a}^\dagger(z, \vec{\rho}, t), \mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t)] \\ &= i\hbar \frac{n_0 g}{c} \int_V d\vec{r} \exp[i(k_p - 2k_l)z] \{ \mathbf{a}^\dagger(z, \vec{\rho}, t) [\mathbf{a}^\dagger(z, \vec{\rho}, t), \mathbf{a}(z', \vec{\rho}', t)] \\ &\quad + [\mathbf{a}^\dagger(z, \vec{\rho}, t), \mathbf{a}(z', \vec{\rho}', t)] \mathbf{a}^\dagger(z, \vec{\rho}, t) \} \\ &= -2i\hbar \frac{n_0 g}{c} \int_V d\vec{r} \exp[i(k_p - 2k_l)z] \mathbf{a}^\dagger(z, \vec{\rho}, t) [\mathbf{a}(z', \vec{\rho}', t), \mathbf{a}^\dagger(z, \vec{\rho}, t)] \end{aligned}$$

usando el resultado anterior del conmutador $[\mathbf{a}(z', \vec{\rho}', t), \mathbf{a}^\dagger(z, \vec{\rho}, t)]$ obtenemos

$$\begin{aligned} [H_{int}, \mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t)] &= i\hbar \frac{n_0 g}{c} \int_V d\vec{r} \exp[i(k_p - 2k_l)z] [\mathbf{a}^\dagger(z, \vec{\rho}, t) \mathbf{a}^\dagger(z, \vec{\rho}, t), \mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t)] \\ &= -2i\hbar \frac{n_0 g}{c} \int_V d\vec{r} \exp[i(k_p - 2k_l)z] \mathbf{a}^\dagger(z, \vec{\rho}, t) c \tilde{\delta}(\vec{r} - \vec{r}') \\ &= -2i\hbar n_0 g \int_V d\vec{r} \exp[i(k_p - 2k_l)z] \mathbf{a}^\dagger(z, \vec{\rho}, t) \tilde{\delta}(\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned}$$

por lo tanto de la ecuación E.14 obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{a}}(z, \vec{\rho}, t) &= i\omega_0 \mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t) - i\omega_0 \int_V d\vec{r} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \mathbf{a}(z', \vec{\rho}', t) \\ &+ 2n_0 g \int_V d\vec{r} \exp[i(k_p - 2k_l)z'] \delta(\vec{r} - \vec{r}') \mathbf{a}^\dagger(z', \vec{\rho}', t).\end{aligned}$$

Podemos transformar la ecuación anterior en una ecuación para la propagación de $\mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t)$ a lo largo del eje z y para ello desarrollamos la siguiente transformada de Fourier

$$\mathbf{a}(s, \vec{q}, \Omega) = \int dz e^{-isz} \int d\vec{\rho} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{\rho}} \int dt e^{i\Omega t} \mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t). \quad (\text{E.16})$$

Aquí s es la variable de Fourier correspondiente a la coordenada longitudinal z , de la ecuación E.14 obtenemos la siguiente ecuación para $\mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t)$

$$-i\Omega \mathbf{a}(s, \vec{q}, \Omega) = -i(\omega(k) - \omega_0) \mathbf{a}(s, \vec{q}, \Omega) + 2n_0 g \mathbf{a}^\dagger(-s + \Delta, -\vec{q}, -\Omega) \quad (\text{E.17})$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t)}{dt} &= \int ds e^{isz} \int d\vec{q} e^{i\vec{q}\cdot\vec{\rho}} \frac{d}{dt} \int d\Omega e^{-i\Omega t} \mathbf{a}(s, \vec{q}, \Omega). \\ &= -i\Omega \mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t)\end{aligned}$$

Donde $\omega(k)$ corresponde al vector de onda $\vec{k} = (\vec{q}, k_l + s)$ y donde hemos denotado $\Delta = k_p - 2k_l$. Debemos separar la evolución de la amplitud de Fourier $\mathbf{a}(z, \vec{\rho}, t)$ debido a la propagación libre en el medio del efecto de interacción paramétrica introduciendo una nueva amplitud de Fourier $\epsilon(z, \vec{q}, \Omega)$ como

$$\mathbf{a}(z, \vec{q}, \Omega) = \epsilon(z, \vec{q}, \Omega) \exp[(k_z(\vec{q}, \Omega) - k_l)z], \quad (\text{E.18})$$

donde

$$k_z(\vec{q}, \Omega) = \sqrt{k^2(\omega_0 + \Omega) - q^2}, \quad (\text{E.19})$$

es una componente z del vector de onda con frecuencia $\omega_0 + \Omega$ y frecuencia espacial \vec{q} . De la ecuación E.18 se sigue que

$$\epsilon(s, \vec{q}, \Omega) = \mathbf{a}(s + k_z(\vec{q}, \Omega) - k_l, \vec{q}, \Omega), \quad (\text{E.20})$$

de la ecuación E.17 obtenemos la siguiente ecuación para la nueva amplitud de Fourier $\epsilon(s, \vec{q}, \Omega)$

$$-i\Omega \epsilon(s, \vec{q}, \Omega) = -i(\omega(k_+) - \omega_0) \epsilon(s, \vec{q}, \Omega) + 2n_0 g \epsilon^\dagger(-s - \Delta(\vec{q}, \Omega), -\vec{q}, -\Omega). \quad (\text{E.21})$$

Donde el vector de onda \vec{k}_+ esta definido como

$$\vec{k}_+ = (s + k_z(\vec{q}, \Omega) - k_l, \vec{q}). \quad (\text{E.22})$$

En la ecuación E.21 hemos introducido

$$\Delta(\vec{q}, \Omega) = k_z(\vec{q}, \Omega) + k_z(-\vec{q}, -\Omega) - k_p. \quad (\text{E.23})$$

Usandola aproximación paraxial y cuasimonocromática tenemos

$$\omega(k_+) \approx \omega_0 + \Omega + us, \quad (\text{E.24})$$

donde $\partial\omega(k_l) \setminus \partial k_l$ es la velocidad de grupo de la onda en el cristal y sustituyendo la ecuación anterior en E.21 obtenemos

$$\begin{aligned} -i\Omega\epsilon(s, \vec{q}, \Omega) &= -i(\omega_0 + \Omega + us - \omega_0)\epsilon(s, \vec{q}, \Omega) + 2n_0g\epsilon^\dagger(-s - \Delta(\vec{q}, \Omega), -\vec{q}, -\Omega) \\ -i\Omega\epsilon(s, \vec{q}, \Omega) &= -i\Omega\epsilon(s, \vec{q}, \Omega) - iuse\epsilon(s, \vec{q}, \Omega) + 2n_0g\epsilon^\dagger(-s - \Delta(\vec{q}, \Omega), -\vec{q}, -\Omega) \\ i\epsilon(s, \vec{q}, \Omega) &= \frac{2n_0g}{u}\epsilon^\dagger(-s - \Delta(\vec{q}, \Omega), -\vec{q}, -\Omega). \end{aligned}$$

Finalmente desarrollando la transformada inversa de Fourier sobre s , obtenemos la ecuación deseada de propagación para la amplitud de Fourier $\epsilon(z, \vec{q}, \Omega)$:

$$\frac{\partial}{\partial z}\epsilon(z, \vec{q}, \Omega) = \sigma\epsilon^\dagger(z, -\vec{q}, -\Omega)\exp[i\Delta(\vec{q}, \Omega)z], \quad (\text{E.25})$$

donde $\sigma = 2n_0g/u$ es la constante de acoplamiento de la interacción paramétrica. En nuestro siguiente análisis usaremos esta ecuación para describir la generación de estados comprimidos multimodales a través de un amplificador paramétrico óptico

E.3. Conversión Paramétrica Descendente

La rama de la física que estudia la interacción de un campo incidente con un medio no lineal es usualmente conocida como *óptica no lineal*. Como ejemplo de este tipo de interacción, consideramos el proceso de conversión paramétrica descendente, en este proceso un fotón incidente sobre un dieléctrico que tiene una no linealidad χ^2 , se convierte en dos nuevos fotones de frecuencia más baja (ver Fig. E.1). Si los dos nuevos fotones son indistinguibles, es posible describir el proceso por el mismo hamiltoniano.

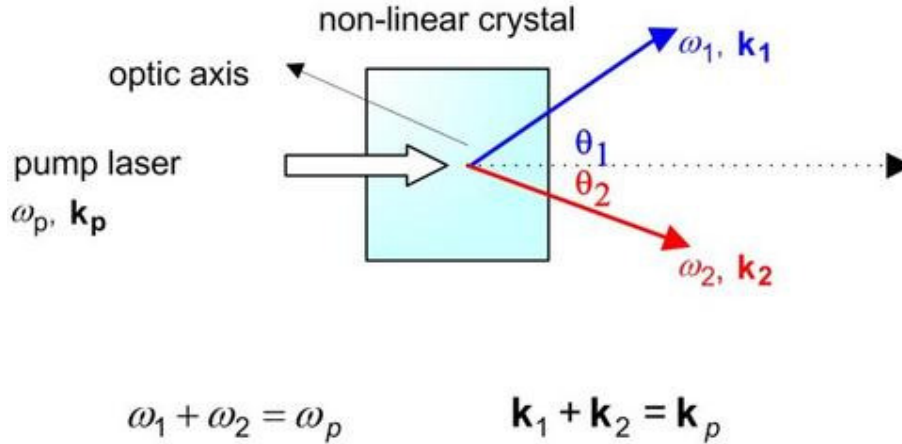


Figura E.1: Proceso espontáneo de conversión paramétrica descendente.

El caso ligeramente más general, el fotón incidente de frecuencia ω_p se parte en dos fotones de frecuencias más bajas que difieren tanto en la dirección o en la magnitud de sus vectores de onda $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$, o en ambos. En el caso de bombeo constante siempre tenemos

$$\omega_p = \omega_1 + \omega_2, \quad (\text{E.26})$$

donde ω_p es la frecuencia del haz de bombeo del proceso paramétrico, y ω_1, ω_2 son conocidas con la frecuencia de la señal y el acompañante. El proceso espontáneo de conversión paramétrico descendente muestra que los fotones de señal y acompañante aparecen *simultáneamente* dentro del tiempo de resolución de los detectores. Cuando la condición en el arreglo de fases se satisface, los vectores de onda $\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$, cumplen con la relación

$$k_p = k_1 + k_2, \quad (\text{E.27})$$

la cual reconocemos como la condición de conservación de momento.

E.4. Modelo General de un Amplificador Paramétrico Óptico

Con base en las secciones anteriores podemos resumir la idea general con la que se pretende construir el modelo teórico del gotero cuántico. Los estados comprimidos de los campos de radiación son aquellos en los cuales las fluctuaciones del campo en una de las cuadraturas son reducidas por debajo del nivel de ruido del vacío. En el *siguiente análisis* estudiaremos el método para producir optical-squeezing, a saber un amplificador paramétrico óptico (OPA), implementando conversión paramétrica descendente [104]. Esto es, un pulso fuerte de bombeo que se propaga a través de un cristal no lineal genera un par de fotones convertidos de forma descendente. La combinación de la energía del pulso con una no linealidad del material lleva

a eventos de creación de pares múltiples, los cuales pueden ser descritos en el esquema de Heisenberg como una transformación entre los operadores de campo, en la entrada \hat{a}_{in} y la salida \hat{a}_{out} del amplificador

$$\hat{a}_{out} = \hat{a}_{in} \cosh \zeta + \hat{a}_{in}^\dagger \sinh \zeta. \quad (\text{E.28})$$

Siendo el estado inicial el vacío, la ecuación anterior define un estado con grado de squeezing ζ . Una suposición crucial en la ecuación E.28 es que todos los fotones generados de forma descendente, son emitidos en un solo modo descritos por el operador de aniquilación \hat{a}_{out} .

Las herramientas teóricas básicas en el análisis serán la reducción de Bloch-Messiah de una transformación de Bogoliubov arbitraria para un operador de campo bosónico [105]. Este procedimiento nos permite identificar un conjunto de modos comprimidos independientes, cuya evolución toma una simple forma análoga a la ecuación E.28. Como veremos tal descomposición resulta directamente de que se cumplen las relaciones de conmutación entre los operadores de campo en el curso de la evolución paramétrica. Este hecho nos permitirá aplicar técnicas numéricas de descomposición de valor-singular para integrar los kernels que describen la transformación del operador de campo.

El siguiente análisis es la propagación multimodal unidimensional de un campo óptico a través de un medio no lineal (guía de onda no lineal). Las ecuaciones de propagación en el esquema de Heisenberg que hemos discutido en E.2, llegan a ser lineales en los campo de la señal. En este caso adoptamos la descomposición modal del operador de campo eléctrico en la siguiente forma

$$\hat{E}(z, t) = i \int d\omega \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{n(\omega)}}} e^{-i\omega t} \hat{a}(\omega; z) + H.C., \quad (\text{E.29})$$

donde ϵ_0 es la permitividad del vacío, $n(\omega)$ es el índice de refracción del medio a una frecuencia y polarización dada, y $\hat{a}(\omega; z)$ es el operador de aniquilación de un modo monocromático en una etapa dada de la propagación indicada por z . La cuantización de las ecuaciones de propagación producen una ecuación diferencial de primer orden para los operadores de aniquilación de la forma:

$$\frac{\partial \hat{a}(\omega; z)}{\partial z} = ik(\omega) \hat{a}(\omega; z) + \frac{1}{L_{NL} E_0} \int d\omega' e^{ik_p(\omega'+\omega)z} \times E_p(\omega' + \omega) \hat{a}^\dagger(\omega'; z). \quad (\text{E.30})$$

donde el primer término del lado derecho representa la propagación lineal del campo en el medio, mientras la segunda representa la interacción no lineal, L_{NL} es la longitud característica de la interacción no lineal y $E_p(\omega)$ es la amplitud espectral del campo de bombeo en el punto $z = 0$. Podemos escribir la ecuación anterior en una forma estándar que nos permita comparar diferentes esquemas cuánticos de la evolución de un sistema.

$$\frac{\partial \hat{a}(\omega; z)}{\partial z} = i[\hat{H}, \hat{a}], \quad (\text{E.31})$$

donde \hat{H} es el operador hamiltoniano dado por la suma de dos términos, $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(z)$. El primer término genera la propagación libre

$$\hat{H}_0 = - \int d\omega k(\omega) \hat{a}^\dagger \hat{a}(\omega) \quad (\text{E.32})$$

mientras el segundo término corresponde a la interacción no lineal

$$\hat{V}(z) = \frac{1}{2L_{NL}E_0} \int d\omega d\omega' \times [ie^{ik_p(\omega'+\omega)z} E_p(\omega'+\omega) \hat{a}^\dagger(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega') + H.c]. \quad (\text{E.33})$$

Como la ecuación de propagación de la ecuación E.30 es lineal en los operadores de campo, para cualquier guía de onda con longitud L , podemos encontrar funciones de Green $C(\omega, \omega')$ y $S(\omega, \omega')$, tal que transformen el operador de campo entrante $\hat{a}^{in}(\omega) \equiv \hat{a}(\omega; -L/2)$ en el operador de campo saliente $\hat{a}^{out}(\omega) \equiv \hat{a}(\omega; L/2)$ de acuerdo a

$$\hat{a}^{out}(\omega) = \int d\omega' \{C(\omega, \omega') \hat{a}^{in}(\omega') + S(\omega, \omega') [\hat{a}^{in}(\omega')]^\dagger\}. \quad (\text{E.34})$$

La transformación de Bogoliubov anterior puede ser llevada a una forma canónica aplicando la reducción de Block-Messiah [105], explicaré brevemente en que consiste, la herramienta matemática relevante, como ya lo hemos mencionado, es la descomposición de valor singular aplicada a las funciones de Green $C(\omega, \omega')$ y $S(\omega, \omega')$. Debido a que los operadores de aniquilación salientes deben satisfacer las relaciones de conmutación, las funciones $C(\omega, \omega')$ y $S(\omega, \omega')$ están conectadas a través de un número de relaciones. En particular, la descomposición de valor singular de ambas $C(\omega, \omega')$ y $S(\omega, \omega')$ puede representarse usando un conjunto compartido de parámetros y funciones. Las formulas explícitas tienen la siguiente formula

$$C(\omega, \omega') = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^*(\omega) \cosh \zeta_n \phi_n(\omega'), \quad (\text{E.35})$$

$$S(\omega, \omega') = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^*(\omega) \sinh \zeta_n \phi_n^*(\omega'), \quad (\text{E.36})$$

donde $\phi_n(\omega)$ y $\psi_n(\omega)$ son dos bases ortonormales y ζ_n parámetros reales no negativos. La existencia de tal descomposición conjunta, nos permite introducir dos conjuntos para los modos entrantes y salientes, definidos como

$$\hat{b}_n^{in} = \int d\omega \phi_n(\omega) \hat{a}^{in}(\omega). \quad (\text{E.37})$$

$$\hat{b}_n^{out} = \int d\omega \psi_n(\omega) \hat{a}^{in}(\omega), \quad (\text{E.38})$$

donde \hat{b}_n^{in} y \hat{b}_n^{out} , son los correspondientes operadores de aniquilación, los cuales satisfacen las relaciones de conmutación estándar. Por lo tanto podemos escribir la transformación general

dada por la ecuación E.34 en una forma simple de una transformación de un solo modo comprimido que actúa en paralelo sobre los modos ortogonales:

$$\hat{b}_n^{out} = \cosh \zeta_n \hat{b}_n^{in} + \sinh \zeta_n (\hat{b}_n^{in})^\dagger. \quad (E.39)$$

y hemos regresado a la expresión elemental dada por la ecuación E.28.

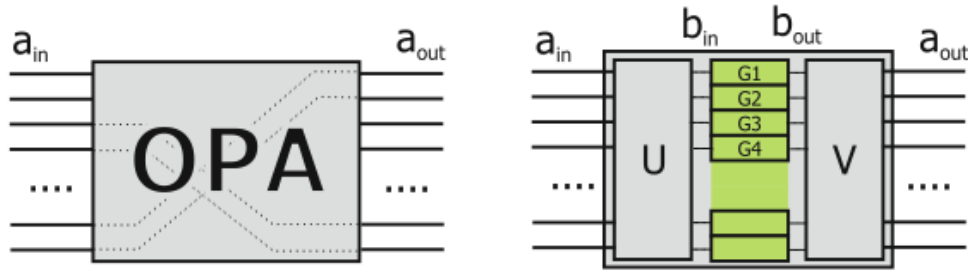


Figura E.2: Representación pictórica del Teorema de Bloch-Messiah .

Dado que cualquier transformación de la forma dada por la ecuación E.34 puede ser descompuesta en modos ortogonales los cuales experimentan una evolución independiente, el procedimiento anterior, esta gráficamente representado en la Fig. E.2.

Donde observamos que cualquier transformación de Bogoliubov de modos entrantes $\hat{a}^{in}(\omega)$ en modos salientes $\hat{a}^{out}(\omega)$, puede descomponerse en una transformación pasiva dada por las funciones de modo $\{\phi_n(\omega)\}$ de los modos monocromáticos $\hat{a}^{in}(\omega)$ en modos discretos \hat{b}_n^{in} , seguido de modos comprimidos independientes con parámetro ζ_n , y otra transformación pasiva $\{\psi_n^*(\omega)\}$ de \hat{b}_n^{out} en $\hat{a}^{out}(\omega)$.

La idea principal es enfocarnos en el caso para un sólo modo, el siguiente paso consiste en simular el fenómeno numéricamente tomando como parámetros externos la no linealidad del cristal y la intensidad del bombeo para ver los diferentes comportamientos de la luz cuántica.

Apéndice F

Código de EMD en C.

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <stdbool.h>
3 #include <stdlib.h>
4 #include <math.h>
5 #include <complex.h>
6 #include <fftw3.h>
7
8 int maximos(double** mdata, int ndata, double** maxdata, int* relen);
9 int minimos(double** mdata, int ndata, double** maxdata, int* relen);
10 int splinecond(double** mdata, int lmdata, double** coefd);
11 int evalpol(double** mdata, int lmdata, double** cofl, double** polev);
12 int sifting(double** mdata, int lmdata, double** mxdata, double** mndata, double** coefd,
13             double** splmax, double** splmin, double** sifted, int* condts,
14             float cond1);
15 int preemd(double** mdata, int lmdata, double** premd, double** mxdata, double** mndata,
16            double** coefd, double** splmax, double** splmin, double** sifted, int* condts,
17            float cond1, int cond2, int ctimf, int eupto, int peupto);
18 int EMD(double** mdata, int lmdata, double** imf, double** resid, double** premd,
19          double** mxdata, double** mndata, double** coefd, double** splmax,
20          double** splmin, double** sifted, int* condts, float cond1, int cond2,
21          int eupto, int peupto);
22
23 int main()
24 {
25     char inpfl[100];
26     char outfl[100];
27     char foutfl[100];
28     char aoutfl[100];
29     char woutfl[100];
30     int ndata,m,j,i,k,cts,nfiles;
31     int eupto,peupto;
32     float cond1;
33     int cond2;
34     int tval;
35     double** data;
36     double** mxdata;
37     double** mndata;
38     double** coefd;
39     double** splmax;
40     double** splmin;
41     double** sifted;
42     double** premd;
43     double** imf;
44     double** fimf;
45     double** aimf;
46     double** wimf;
47     double** resid;
48     double tempvls;
49     double tspan;
50     int* condts;
51     int* hkernel;
52     double* derx;
53     double* dery;
54     FILE* file;
55     FILE* inpfle;
56     FILE* foufle;
57     FILE* ampfile;
58     FILE* frefle;
59     fftw_complex* b1;
60     fftw_complex* b2;
61     fftw_plan p1;
62     fftw_plan p2;
63
64     scanf("%d",&nfiles);
```

```
65     printf("%d \n",nfiles);
66
67     for (m=0; m < nfiles; m++) {
68
69         scanf("%s",inpfl);
70         scanf("%s",outfl);
71         scanf("%s",foutfl);
72         scanf("%s",aoutfl);
73         scanf("%s",woutfl);
74         scanf("%d %d %d %f %d",&eupto,&peupto,&ndata,&cond1,&cond2);
75         //printf("%s\n",inpfl);
76         //printf("%s\n",outfl);
77         //printf("%d %d %d %f %d \n",eupto,peupto,ndata,cond1,cond2);
78
79         inpfile=fopen(inpfl,"r");
80         if(inpfile == NULL)
81         {
82             fprintf(stderr, "file doesn't exist\n");
83             exit(EXIT_FAILURE);
84         }
85
86         file=fopen(outfl,"w");
87         foufile=fopen(foutfl,"w");
88         ampfile=fopen(aoutfl,"w");
89         frefile=fopen(woutfl,"w");
90
91         printf("%d %d %f %d\n",m,ndata,cond1,cond2);
92
93 //-----
94
95         //creates the array for the data
96         data = malloc(ndata * sizeof(double *));
97         if(data == NULL)
98         {
99             fprintf(stderr, "out of memory (data)\n");
100             exit;
101         }
102         for(j=0; j < ndata; j++)
103         {
104             data[j] = malloc(2 * sizeof(double));
105             if(data[j] == NULL)
106             {
107                 fprintf(stderr, "out of memory (data)\n");
108                 exit;
109             }
110         }
111
112         //creates the array for the maxima
113         mxdata = malloc((ndata+2) * sizeof(double *));
114         if(mxdata == NULL)
115         {
116             fprintf(stderr, "out of memory (maxima)\n");
117             exit;
118         }
119         for(j=0; j < (ndata+2); j++)
120         {
121             mxdata[j] = malloc(2 * sizeof(double));
122             if(mxdata[j] == NULL)
123             {
124                 fprintf(stderr, "out of memory (maxima)\n");
125                 exit;
126             }
127         }
128
```

```
129 //creates the array for the minima
130 mndata = malloc((ndata+2) * sizeof(double *));
131 if(mndata == NULL)
132 {
133     fprintf(stderr, "out of memory (minima)\n");
134     exit;
135 }
136 for(j=0; j < (ndata+2); j++)
137 {
138     mndata[j] = malloc(2 * sizeof(double));
139     if(mndata[j] == NULL)
140     {
141         fprintf(stderr, "out of memory (minima)\n");
142         exit;
143     }
144 }
145
146 //creates the array for the spline coefficients
147 coefd = malloc((ndata+2-1) * sizeof(double *));
148 if(coefd == NULL)
149 {
150     fprintf(stderr, "out of memory (coefd)\n");
151     exit;
152 }
153 for(j=0; j < (ndata+2-1); j++)
154 {
155     coefd[j] = malloc(6 * sizeof(double));
156     if(coefd[j] == NULL)
157     {
158         fprintf(stderr, "out of memory (coefd)\n");
159         exit;
160     }
161 }
162
163 //creates the array for the evaluated maxima spline
164 splmax = malloc((ndata) * sizeof(double *));
165 if(splmax == NULL)
166 {
167     fprintf(stderr, "out of memory (splmax)\n");
168     exit;
169 }
170 for(j=0; j < (ndata); j++)
171 {
172     splmax[j] = malloc(2 * sizeof(double));
173     if(splmax[j] == NULL)
174     {
175         fprintf(stderr, "out of memory (splmax)\n");
176         exit;
177     }
178 }
179
180 //creates the array for the evaluated minima spline
181 splmin = malloc((ndata) * sizeof(double *));
182 if(splmin == NULL)
183 {
184     fprintf(stderr, "out of memory (splmin)\n");
185     exit;
186 }
187 for(j=0; j < (ndata); j++)
188 {
189     splmin[j] = malloc(2 * sizeof(double));
190     if(splmin[j] == NULL)
191     {
192         fprintf(stderr, "out of memory (splmin)\n");
```

```
193     exit;
194   }
195 }
196
197 //creates the array for the sifted function
198 sifted = malloc((ndata) * sizeof(double *));
199 if(sifted == NULL)
200 {
201     fprintf(stderr, "out of memory (sifted)\n");
202     exit;
203 }
204 for(j=0; j < (ndata); j++)
205 {
206     sifted[j] = malloc(2 * sizeof(double));
207     if(sifted[j] == NULL)
208     {
209         fprintf(stderr, "out of memory (sifted)\n");
210         exit;
211     }
212 }
213
214 //creates the array of the conditions
215 condts = malloc(7 * sizeof(int));
216 if(condts == NULL)
217 {
218     fprintf(stderr, "out of memory (condts)\n");
219     exit;
220 }
221
222 //creates the array of the Hilbert Kernel
223 hkernel = malloc(ndata * sizeof(int));
224 if(hkernel == NULL)
225 {
226     fprintf(stderr, "out of memory (condts)\n");
227     exit;
228 }
229
230 //creates the array of the derivative of the real part
231 derx = malloc((ndata-1) * sizeof(double));
232 if(derx == NULL)
233 {
234     fprintf(stderr, "out of memory (condts)\n");
235     exit;
236 }
237
238 //creates the array of the derivative of the imaginary part
239 dery = malloc((ndata-1) * sizeof(double));
240 if(dery == NULL)
241 {
242     fprintf(stderr, "out of memory (condts)\n");
243     exit;
244 }
245
246
247
248 //creates the array for the preemd function
249 preemd = malloc((ndata) * sizeof(double *));
250 if(premd == NULL)
251 {
252     fprintf(stderr, "out of memory (sifted)\n");
253     exit;
254 }
255 for(j=0; j < (ndata); j++)
256 {
```

```
257     premd[j] = malloc(2 * sizeof(double));
258     if(premd[j] == NULL)
259     {
260         fprintf(stderr, "out of memory (sifted)\n");
261         exit;
262     }
263 }
264
265 //creates the array for the imfs
266 imf = malloc((ndata) * sizeof(double *));
267 if(imf == NULL)
268 {
269     fprintf(stderr, "out of memory (sifted)\n");
270     exit;
271 }
272 for(j=0; j < (ndata); j++)
273 {
274     imf[j] = malloc(2 * sizeof(double));
275     if(imf[j] == NULL)
276     {
277         fprintf(stderr, "out of memory (sifted)\n");
278         exit;
279     }
280 }
281
282 //creates the array for the residues
283 resid = malloc((ndata) * sizeof(double *));
284 if(resid == NULL)
285 {
286     fprintf(stderr, "out of memory (sifted)\n");
287     exit;
288 }
289 for(j=0; j < (ndata); j++)
290 {
291     resid[j] = malloc(2 * sizeof(double));
292     if(resid[j] == NULL)
293     {
294         fprintf(stderr, "out of memory (sifted)\n");
295         exit;
296     }
297 }
298
299
300 //-----
301
302 for (j=0; j<ndata; j++) {
303     fscanf(inpfile,"%lf %lf",&data[j][0],&data[j][1]);
304 }
305
306
307 tspan=data[ndata-1][0]-data[0][0];
308
309
310 cts=EMD(data, ndata, imf, resid, premd, mxdata, mndata, coefd, splmax, splmin,
311     sifted, condts, cond1, cond2, eupto, peupto);
312
313 printf("%d imfs were found\n",cts);
314
315 fimf = malloc((ndata) * sizeof(double *));
316 if(fimf == NULL)
317 {
318     fprintf(stderr, "out of memory (sifted)\n");
319     exit;
320 }
```

```
321     for(j=0; j < (ndata); j++)
322     {
323         fimf[j] = malloc((cts+2) * sizeof(double));
324         if(fimf[j] == NULL)
325         {
326             fprintf(stderr, "out of memory (sifted)\n");
327             exit;
328         }
329     }
330
331     aimf = malloc((ndata) * sizeof(double *));
332     if(aimf == NULL)
333     {
334         fprintf(stderr, "out of memory (sifted)\n");
335         exit;
336     }
337     for(j=0; j < (ndata); j++)
338     {
339         aimf[j] = malloc((cts+2) * sizeof(double));
340         if(aimf[j] == NULL)
341         {
342             fprintf(stderr, "out of memory (sifted)\n");
343             exit;
344         }
345     }
346
347     wimf = malloc((ndata) * sizeof(double *));
348     if(wimf == NULL)
349     {
350         fprintf(stderr, "out of memory (sifted)\n");
351         exit;
352     }
353     for(j=0; j < (ndata); j++)
354     {
355         wimf[j] = malloc((cts+2) * sizeof(double));
356         if(wimf[j] == NULL)
357         {
358             fprintf(stderr, "out of memory (sifted)\n");
359             exit;
360         }
361     }
362
363     b1=fftw_malloc(sizeof(fftw_complex)*ndata);
364     b2=fftw_malloc(sizeof(fftw_complex)*ndata);
365
366     p1=fftw_plan_dft_1d(ndata, b1, b2, FFTW_FORWARD, FFTW_ESTIMATE);
367     p2=fftw_plan_dft_1d(ndata, b2, b1, FFTW_BACKWARD, FFTW_ESTIMATE);
368
369
370     hkernel[0]=1;
371     if (ndata % 2 == 0) {
372         tval=ndata/2;
373         hkernel[tval]=1;
374         for (j=1; j<tval; j++) {
375             hkernel[j]=2;
376         }
377         tval=(ndata/2)+1;
378         for (j=tval; j<ndata; j++) {
379             hkernel[j]=0;
380         }
381     } else {
382         tval=((ndata-1)/2)+1;
383         for (j=1; j<tval; j++) {
384             hkernel[j]=2;
```

```
385     }
386     tval=((ndata-1)/2)+1;
387     for (j=tval; j<ndata; j++) {
388         hkernel[j]=0;
389     }
390 }
391
392
393
394 for (j=0; j<ndata; j++) {
395     fimf[j][0]=(imf[j][0]/ndata)*(ndata/tspan);
396     aimf[j][0]=imf[j][0];
397     wimf[j][0]=imf[j][0];
398 }
399
400 for (k=1; k<cts+2; k++) {
401     for (j=0; j<ndata; j++) {
402         b1[j]=imf[j][k];
403     }
404
405     fftw_execute(p1);
406
407     for (j=0; j<ndata; j++) {
408         tempvls=(creal(b2[j])*creal(b2[j])+cimag(b2[j])*cimag(b2[j]));
409         fimf[j][k]=sqrt(tempvls);
410         b2[j]=b2[j]*hkernel[j]/ndata;
411     }
412
413     fftw_execute(p2);
414
415     for (j=0; j<ndata-1; j++) {
416         derx[j]=creal(b1[j+1])-creal(b1[j]);
417         dery[j]=cimag(b1[j+1])-cimag(b1[j]);
418     }
419
420     for (j=0; j<ndata-1; j++) {
421         wimf[j][k]=0;
422         aimf[j][k]=0;
423         tempvls=-((derx[j]*cimag(b1[j]))/(creal(b1[j])*creal(b1[j])));
424         tempvls=tempvls+(dery[j]/creal(b1[j]));
425         tempvls=tempvls/(1+((cimag(b1[j])*cimag(b1[j]))/(creal(b1[j])*creal(b1[j]))));
426         wimf[j][k]=(tempvls/(2*M_PI))*(ndata/tspan);
427         tempvls=(creal(b1[j])*creal(b1[j])+cimag(b1[j])*cimag(b1[j]));
428         aimf[j][k]=sqrt(tempvls);
429     }
430
431 }
432
433 fftw_destroy_plan(p1);
434 fftw_destroy_plan(p2);
435
436 if (ndata % 2 == 0) {
437     tval=ndata/2;
438 } else {
439     tval=((ndata-1)/2)+1;
440 }
441
442 j=0;
443 while (j<=(ndata-1)) {
444     k=0;
445     while (k<=cts+2-1) {
446         fprintf(file, " %8.10lf ",imf[j][k]);
447         if (j<tval) {
448             fprintf(foufile, " %8.10lf ",fimf[j][k]);
```



```
449     }
450     fprintf(ampfile, " %8.10lf ", aimf[j][k]);
451     fprintf(frefile, " %8.10lf ", wimf[j][k]);
452     k=k+1;
453 }
454 fprintf(file, "\n");
455 if (j<tval) {
456     fprintf(foufile, "\n");
457 }
458 fprintf(ampfile, "\n");
459 fprintf(frefile, "\n");
460 j=j+1;
461 }
462
463 //-----
464
465     for(i = 0; i < ndata; i++)
466         free((void *)data[i]);
467     free((void *)data);
468
469     for(i = 0; i < (ndata+2); i++)
470         free((void *)mxdata[i]);
471     free((void *)mxdata);
472
473     for(i = 0; i < (ndata+2); i++)
474         free((void *)mndata[i]);
475     free((void *)mndata);
476
477     for(i = 0; i < (ndata+2-1); i++)
478         free((void *)coefd[i]);
479     free((void *)coefd);
480
481     for(i = 0; i < (ndata); i++)
482         free((void *)splmax[i]);
483     free((void *)splmax);
484
485     for(i = 0; i < (ndata); i++)
486         free((void *)splmin[i]);
487     free((void *)splmin);
488
489     for(i = 0; i < (ndata); i++)
490         free((void *)sifted[i]);
491     free((void *)sifted);
492
493     free(condts);
494
495     free(hkernel);
496
497     free(derx);
498
499     free(dery);
500
501     for(i = 0; i < (ndata); i++)
502         free((void *)premd[i]);
503     free((void *)premd);
504
505     for(i = 0; i < (ndata); i++)
506         free((void *)imf[i]);
507     free((void *)imf);
508
509     for(i = 0; i < (ndata); i++)
510         free((void *)fimf[i]);
511     free((void *)fimf);
512
```

```

513     for(i = 0; i < (ndata); i++)
514         free((void *)wimf[i]);
515     free((void *)wimf);
516
517     for(i = 0; i < (ndata); i++)
518         free((void *)aimf[i]);
519     free((void *)aimf);
520
521     for(i = 0; i < (ndata); i++)
522         free((void *)resid[i]);
523     free((void *)resid);
524
525     fclose(inpfile);
526     fclose(file);
527     fclose(foufile);
528     fclose(ampfile);
529     fclose(frefile);
530
531 }
532
533 fftw_free(b1);
534 fftw_free(b2);
535 return 0;
536
537 }
538
539 //*****
540
541
542 //writes in the maxima array up to *relen where *relen is the number of found maxima
543 //taking into account if the first and the last points are maxima and adding two
544 //maxima on the extrema of the series.
545 //returns the number of maxima found without corrections.
546 int maximos(double** mdata, int ndata, double** maxdata, int* relen)
547 {
548     int i,j,c,count;
549     double dfmax,drmax,lfmax,lrmax;
550
551     c=0;
552     count=0;
553
554     j=0;
555     while (j<=ndata-1) {
556         maxdata[j][0]=0;
557         maxdata[j][1]=0;
558         j=j+1;
559     }
560
561     //compare the element n with n-1 and n+1 to obtain the maxima
562     for (i=1; i<ndata-1; i++) {
563         if ((mdata[i-1][1]<=mdata[i][1])&&(mdata[i][1]>=mdata[i+1][1])&&
564             (!(mdata[i-1][1]==mdata[i][1])&&(mdata[i][1]==mdata[i+1][1]))) {
565             c=c+1;
566             count=count+1;
567             //check if the first element is a maximum
568             if (c==1&&mdata[i][1]<mdata[0][1]) {
569                 maxdata[c][0]=mdata[0][0];
570                 maxdata[c][1]=mdata[0][1];
571                 c=c+1;
572             }
573             maxdata[c][0]=mdata[i][0];
574             maxdata[c][1]=mdata[i][1];
575         }
576     }

```

```

577 //check if the last element is a maximum
578 if (maxdata[c][1]<mdata[ndata-1][1]&& c!=0) {
579     c=c+1;
580     maxdata[c][0]=mdata[ndata-1][0];
581     maxdata[c][1]=mdata[ndata-1][1];
582 }
583 if (count>=2) {
584
585     //adds two additional maxima at the beginnig and at the end to ensure
586     //good behavior of the spline in the frontiers
587     dfmax=maxdata[2][0]-maxdata[1][0];
588     drmax=maxdata[c][0]-maxdata[c-1][0];
589     lfmax=maxdata[1][0]-mdata[0][0];
590     lrmax=mdata[ndata-1][0]-maxdata[c][0];
591
592     if (dfmax>lfmax) {
593         maxdata[0][0]=maxdata[1][0]-dfmax;
594         maxdata[0][1]=maxdata[1][1];
595     }
596     else {
597         maxdata[0][0]=mdata[0][0]-lfmax;
598         maxdata[0][1]=maxdata[1][1];
599     }
600
601     if (drmax>lrmax) {
602         maxdata[c+1][0]=maxdata[c][0]+drmax;
603         maxdata[c+1][1]=maxdata[c][1];
604     }
605     else {
606         maxdata[c+1][0]=mdata[ndata-1][0]+lrmax;
607         maxdata[c+1][1]=maxdata[c][1];
608     }
609
610     *relen=c+2;
611 }
612 else *relen=c;
613
614 return count;
615 }
616
617 //writes in the minima array up to *relen where *relen is the number of found minima
618 //taking into account if the first and the last points are minima and adding two
619 //minima on the extrema of the series.
620 //returns the number of minima found without corrections.
621 int minimos(double** mdata, int ndata, double** maxdata, int* relen)
622 {
623     int i,j,c,count;
624     double dfmax,drmax,lfmax,lrmax;
625
626     c=0;
627     count=0;
628
629     j=0;
630     while (j<=ndata-1) {
631         maxdata[j][0]=0;
632         maxdata[j][1]=0;
633         j=j+1;
634     }
635
636     //compare the element n with n-1 and n+1 to obtain the minima
637     for (i=1; i<ndata-1; i++) {
638         if ((mdata[i-1][1]>=mdata[i][1])&&(mdata[i][1]<=mdata[i+1][1])&&
639             (!(mdata[i-1][1]==mdata[i][1])&&(mdata[i][1]==mdata[i+1][1]))) {
640             c=c+1;

```

```

641         count=count+1;
642         //check if the first element is a minimum
643         if (c==1&&mdata[i][1]>mdata[0][1]) {
644             maxdata[c][0]=mdata[0][0];
645             maxdata[c][1]=mdata[0][1];
646             c=c+1;
647         }
648         maxdata[c][0]=mdata[i][0];
649         maxdata[c][1]=mdata[i][1];
650     }
651 }
652 //check if the last element is a minimum
653 if (maxdata[c][1]>mdata[ndata-1][1]&&c!=0) {
654     c=c+1;
655     maxdata[c][0]=mdata[ndata-1][0];
656     maxdata[c][1]=mdata[ndata-1][1];
657 }
658 if (count>=2) {
659
660     //adds two additional minima at the beginnig and at the end to ensure
661     //good behavior of the spline in the frontiers
662     dfmax=maxdata[2][0]-maxdata[1][0];
663     drmax=maxdata[c][0]-maxdata[c-1][0];
664     lfmax=maxdata[1][0]-mdata[0][0];
665     lrmax=mdata[ndata-1][0]-maxdata[c][0];
666
667     if (dfmax>lfmax) {
668         maxdata[0][0]=maxdata[1][0]-dfmax;
669         maxdata[0][1]=maxdata[1][1];
670     }
671     else {
672         maxdata[0][0]=mdata[0][0]-lfmax;
673         maxdata[0][1]=maxdata[1][1];
674     }
675
676     if (drmax>lrmax) {
677         maxdata[c+1][0]=maxdata[c][0]+drmax;
678         maxdata[c+1][1]=maxdata[c][1];
679     }
680     else {
681         maxdata[c+1][0]=mdata[ndata-1][0]+lrmax;
682         maxdata[c+1][1]=maxdata[c][1];
683     }
684
685     *relen=c+2;
686 }
687 else *relen=c;
688
689 return count;
690 }
691
692 //writes the array coefd with the spline coeficients on each interval
693 int splinecond(double** mdata, int lmdata, double** coefd)
694 {
695     double *htab,*btab,*utab,*vtab,*ztab;
696     int nl;
697     int j=0;
698
699     nl=lmdata-1;
700     // printf("nl %d\n",nl);
701
702     j=0;
703     while (j<=nl-1) {
704         coefd[j][0]=0;

```

```
705     coefd[j][1]=0;
706     j=j+1;
707 }
708
709 htab=calloc(nl, sizeof(double));
710 if(htab == NULL){fprintf(stderr, "out of memory (htab)\n");
711     exit;
712 }
713
714 btab=calloc(nl, sizeof(double));
715 if(btab == NULL){fprintf(stderr, "out of memory (btab)\n");
716     exit;
717 }
718 utab=calloc((nl-1), sizeof(double));
719 if(utab == NULL){fprintf(stderr, "out of memory (utab)\n");
720     exit;
721 }
722 vtab=calloc((nl-1), sizeof(double));
723 if(vtab == NULL){fprintf(stderr, "out of memory (vtab)\n");
724     exit;
725 }
726 ztab=calloc((nl+1), sizeof(double));
727 if(ztab == NULL){fprintf(stderr, "out of memory (ztab)\n");
728     exit;
729 }
730
731 j=0;
732 while (j<=nl-1) {
733     htab[j]=mdata[j+1][0]-mdata[j][0];
734     btab[j]=6.0*(mdata[j+1][1]-mdata[j][1])/htab[j];
735     j=j+1;
736 }
737
738 utab[0]=2*(htab[0]+htab[1]);
739 vtab[0]=btab[1]-btab[0];
740
741 j=2;
742 while (j<=nl-1) {
743     utab[j-1]=2.0*(htab[j]+htab[j-1])-(htab[j-1]*htab[j-1]/utab[j-2]);
744     vtab[j-1]=btab[j]-btab[j-1]-(htab[j-1]*vtab[j-2]/utab[j-2]);
745     j=j+1;
746 }
747 ztab[nl]=0;
748
749 j=nl-1;
750 while (j>=1) {
751     ztab[j]=(vtab[j-1]-htab[j]*ztab[j+1])/utab[j-1];
752     j=j-1;
753 }
754 ztab[0]=0;
755
756 j=0;
757 while (j<=nl-1) {
758     coefd[j][0]=mdata[j][0];
759     coefd[j][1]=mdata[j+1][0];
760     coefd[j][2]=mdata[j][1];
761     coefd[j][3]=(ztab[j+1]-ztab[j])/(6.0*htab[j]);
762     coefd[j][4]=ztab[j]/2.0;
763     coefd[j][5]=-(htab[j]*ztab[j+1]/6.0)-(htab[j]*ztab[j]/3.0)+
764         ((mdata[j+1][1]-mdata[j][1])/htab[j]);
765     j=j+1;
766 }
767
768 free((void *)htab);
```

```

769     free((void *)btab);
770     free((void *)utab);
771     free((void *)vtab);
772     free((void *)ztab);
773
774     return nl;
775 }
776
777 //writes the array polev with the values of the cubic spline evaluated
778 //at each position of the data
779 int evalpol(double** mdata, int lmdata, double** cofl, double** polev)
780 {
781     int j,k;
782
783     j=0;
784     while (j<=lmdata-1) {
785         polev[j][0]=0;
786         polev[j][1]=0;
787         j=j+1;
788     }
789
790     j=0;
791     k=0;
792     while (j<=lmdata-1) {
793         if ((mdata[j][0]>=cofl[k][0])&&(mdata[j][0]<=cofl[k][1])) {
794             polev[j][0]=mdata[j][0];
795             polev[j][1]=cofl[k][2]+(mdata[j][0]-cofl[k][0])*
796                 (cofl[k][5]+(mdata[j][0]-cofl[k][0])*
797                 (cofl[k][4]+(mdata[j][0]-cofl[k][0])*cofl[k][3]));
798             j=j+1;
799         }
800         else {
801             k=k+1;
802         }
803     }
804     return k;
805 }
806
807 }
808
809 //writes the sifted array with the data sifted once
810 int sifting(double** mdata, int lmdata, double** mxdata, double** mndata, double** coefd,
811     double** splmax, double** splmin, double** sifted, int* condts,
812     float cond1)
813 {
814     int lmxt=0;
815     int lmnt=0;
816     int lmax=0;
817     int lmin=0;
818     int j,s1,s2;
819     double fcondi;
820
821     lmxt=maximos(mdata,lmdata,mxdata,&lmax);
822     condts[1]=lmxt;
823     // printf("max %d %d\n",lmxt,lmax);
824     splinecond(mxdata,lmax,coefd);
825     evalpol(mdata, lmdata, coefd, splmax);
826
827
828     lmnt=minimos(mdata,lmdata,mndata,&lmin);
829     condts[2]=lmnt;
830     // printf("min %d %d\n",lmnt,lmin);
831     splinecond(mndata,lmin,coefd);
832     evalpol(mdata, lmdata, coefd, splmin);

```

```

833
834     j=0;
835     s1=0;
836     s2=0;
837     while (j<=lmdata-1) {
838         //calculates the sifted value
839         sifted[j][0]=mdata[j][0];
840         sifted[j][1]=mdata[j][1]-(splmax[j][1]+splmin[j][1])/2.0;
841         //check the number of values violating the stop criteria number 2
842         fcondi=fabsf((splmax[j][1]+splmin[j][1])/2.0)/fabsf(splmax[j][1]);
843         if (fcondi>cond1) {
844             s1=s1+1;
845         }
846         //check the number of values violating the stop criteria number 2
847         fcondi=fabsf((splmax[j][1]+splmin[j][1])/2.0)/fabsf(splmin[j][1]);
848         if (fcondi>cond1) {
849             s2=s2+1;
850         }
851         j=j+1;
852     }
853
854     condts[3]=s1;
855     condts[4]=s2;
856
857     lmxt=maximos(sifted,lmdata,mxdata,&lmax);
858     condts[1]=lmxt;
859     lmnt=minimos(sifted,lmdata,mndata,&lmin);
860     condts[2]=lmnt;
861
862     j=1;
863     s1=0;
864     while (j<=lmax-2) {
865         if (mxdata[j][1]<0.0) {
866             s1=s1+1;
867         }
868         j=j+1;
869     }
870
871     j=1;
872     s2=0;
873     while (j<=lmin-2) {
874         if (mndata[j][1]>0.0) {
875             s2=s2+1;
876         }
877         j=j+1;
878     }
879
880     condts[5]=s1;
881     condts[6]=s2;
882
883     return 0;
884 }
885
886 int preemd(double** mdata, int lmdata, double** premd, double** mxdata, double** mndata,
887           double** coefd, double** splmax, double** splmin, double** sifted, int* condts,
888           float cond1, int cond2, int ctimf, int eupto, int peupto)
889 {
890     int j,ctr,ctr2;
891     int lmax=0,lmin=0;
892     int lmxt=0;
893     int lmnt=0;
894
895     j=0;
896     while (j<=lmdata-1) {

```

```
897     premd[j][0]=mdata[j][0];
898     premd[j][1]=mdata[j][1];
899     j=j+1;
900 }
901
902 lmxt=maximos(premd,lmdata,mxdata,&lmxt);
903 lmnt=minimos(premd,lmdata,mxdata,&lmnt);
904
905 if ((lmdata-2)>lmxt&&lmxt>1&&(lmdata-2)>lmnt&&lmnt>1) {
906     condts[1]=lmxt;
907     condts[2]=lmnt;
908     condts[3]=1;
909     condts[4]=1;
910     condts[5]=1;
911     condts[6]=1;
912     condts[7]=0;
913 }
914 else {
915     condts[1]=lmxt;
916     condts[2]=lmnt;
917     condts[3]=0;
918     condts[4]=0;
919     condts[5]=0;
920     condts[6]=0;
921     condts[7]=cond2+1;
922 }
923
924 ctr=0;
925 ctr2=0;
926 while (condts[3]!=0 || condts[4]!=0 ||
927        condts[5]!=0 || condts[6]!=0 ||
928        condts[7]<cond2) {
929     ctr=ctr+1;
930     sifting(premd, lmdata, mxdata, mndata, coefd, splmax, splmin, sifted, condts, cc
931     if (condts[5]!=0 || condts[6]!=0) {
932         condts[7]=0;
933     }
934     else {condts[7]=condts[7]+1;ctr2=ctr2+1;}
935
936 //     printf("%d %d %d %d %d %d %d %d %d\n",ctr,condts[1],condts[2],condts[3],condts[4]
937 //           condts[5],condts[6],condts[7],ctr2);
938
939 //     j=0;
940 //     while (j<=4) {
941 //         printf("%f %f\n",premd[j][1],sifted[j][1]);
942 //         j=j+1;
943 //     }
944
945     j=0;
946     while (j<=lmdata-1) {
947         premd[j][0]=sifted[j][0];
948         premd[j][1]=sifted[j][1];
949         j=j+1;
950     }
951     if (condts[1]<=1 || condts[2]<=1) {
952         condts[3]=0;
953         condts[4]=0;
954         condts[5]=0;
955         condts[6]=0;
956         condts[7]=cond2+1;
957     }
958     if (peupto!=0 && ctr>=peupto) {
959 //     if (ctimf==eupto&&ctr==peupto) {
960         condts[3]=0;
```



```

961         condts[4]=0;
962         condts[5]=0;
963         condts[6]=0;
964         condts[7]=cond2+1;
965     }
966 }
967
968 if (ctr==0) {
969     ctr=-1;
970 }
971
972 return ctr;
973 }
974
975 int EMD(double** mdata, int lmdata, double** imf, double** resid, double** premd,
976 double** mxdata, double** mndata, double** coefd, double** splmax,
977 double** splmin, double** sifted, int* condts, float cond1, int cond2,
978 int euppto, int peupto)
979 {
980     int j,ctimf,cts,k;
981     int lmax=0,lmin=0;
982     int lmxt=0;
983     int lmnt=0;
984     int cflag;
985
986     j=0;
987     while (j<=lmdata-1) {
988         resid[j][0]=mdata[j][0];
989         resid[j][1]=mdata[j][1];
990         j=j+1;
991     }
992
993     lmxt=maximos(resid,lmdata,mxdata,&lmax);
994     lmnt=minimos(resid,lmdata,mxdata,&lmin);
995
996     // printf("%d %d\n",lmxt,lmnt);
997
998     ctimf=0;
999     k=1;
1000    cflag=0;
1001    while (lmxt<(lmdata-2)&&lmxt>1&&lmnt<(lmdata-2)&&lmnt>1&&cflag!=1) {
1002
1003        cts=preemd(resid, lmdata, premd, mxdata, mndata, coefd, splmax, splmin,
1004            sifted, condts, cond1, cond2, ctimf, euppto, peupto);
1005
1006        //printf("%d %d\n",k,cts);
1007
1008        j=0;
1009        while (j<=lmdata-1) {
1010            resid[j][0]=premd[j][0];
1011            resid[j][1]=resid[j][1]-premd[j][1];
1012            j=j+1;
1013        }
1014
1015        // lmxt=maximos(premd,lmdata,mxdata,&lmax);
1016        // lmnt=minimos(premd,lmdata,mxdata,&lmin);
1017        // printf("ext emd %d %d\n",lmxt,lmnt);
1018
1019        lmxt=maximos(resid,lmdata,mxdata,&lmax);
1020        lmnt=minimos(resid,lmdata,mxdata,&lmin);
1021        // printf("ext res %d %d\n",lmxt,lmnt);
1022
1023        j=0;
1024        while (j<=lmdata-1) {

```

```
1025         imf[j][k]=premd[j][1];
1026         j=j+1;
1027     }
1028
1029     //reallocates the array for the emd functions
1030     for(j=0; j < (lmdata); j++)
1031     {
1032         imf[j] = realloc(imf[j],(2+k) * sizeof(double));
1033         if(imf[j] == NULL)
1034         {
1035             fprintf(stderr, "out of memory (sifted)\n");
1036             exit;
1037         }
1038     }
1039
1040     ctimf=ctimf+1;
1041
1042     if (eupto!=0 && ctimf>=eupto) {
1043 // if (ctimf==eupto&&cts==peupto) {
1044         cflag=1;
1045         // printf("the limit of the iteration was reached\n");
1046         // printf("EMD:%d and iteration:%d\n",ctimf,cts);
1047     }
1048
1049     if (cflag!=1) {
1050         // printf("the imf number %d was extracted after %d iterations\n",ctimf,cts);
1051     }
1052
1053     k=k+1;
1054 }
1055
1056 j=0;
1057 while (j<=lmdata-1) {
1058     imf[j][0]=resid[j][0];
1059     imf[j][k]=resid[j][1];
1060     j=j+1;
1061 }
1062
1063 return ctimf;
1064
1065 }
1066
1067
1068
1069
1070
1071
1072
```

Apéndice G

Artículos personales

Scale invariance and criticality in nuclear spectra

E. Landa, I. Morales, C. Hernández, J.C. López Vieyra, and A. Frank
*Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México,
 Apartado Postal 70-543, México, D.F. 04510 México.*

V. Velázquez
*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México,
 México, D.F. 04510 México.*

Recibido el 15 de abril de 2008; aceptado el 9 de mayo de 2008

A Detrended Fluctuation Analysis (DFA) method is applied to investigate the scaling properties of the energy fluctuations in the spectrum of ^{48}Ca obtained with (a) a large realistic shell model calculation (ANTOINE code) and (b) with a random shell model (TBRE) calculation. We compare the scale invariant properties of the energy fluctuations with similar analyses applied to the RMT ensembles GOE and GDE. A comparison with the related power spectra calculations is made. The possible consequences of these results are discussed.

Keywords: Quantum chaos; scale invariance; TBRE; DFA.

Se aplica el método DFA (Detrended Fluctuation Analysis) para investigar las propiedades de escalamiento de las fluctuaciones de la energía en el espectro del ^{48}Ca obtenido con (a) un cálculo del modelo de capas realista (codigo ANTOINE) y con (b) un cálculo del modelo de capas aleatorio (TBRE). Comparamos las propiedades invariantes de escala de las fluctuaciones de energía con análisis similares aplicados a ensembles GOE y GDE de la teoría de matrices aleatorias (RMT). Se hace una comparación con cálculos relacionados de espectro de potencias. Se discute las posibles consecuencias de esos resultados.

Descriptores: Caos cuántico; invariancia de escala; TBRE; DFA.

PACS: 05.45.Mt;24.60.Lz;52.25.Gj;74.40.+k;89.75.Da

1. Introduction

Our present knowledge of highly excited states in heavy nuclei is based on the connection with the eigenvalues of random (chaotic) hamiltonians. On the scale of the mean level spacing, the spectra of complex nuclei are statistically described by Random Matrix Theory (RMT) [1]. This notion was introduced by E. Wigner in the 1950s [2]. In particular, the probability distribution $P(s)$ of the nearest-neighbor spacing s agrees with the Wigner surmiseⁱ

$$P(s) = \pi/2 s e^{-\pi s^2/4}$$

of RMT. Furthermore, the Bohigas-Giannoni-Schmit-conjecture [3] establishes that quantum systems whose classical analogs are chaotic, have a nearest-neighbor spacing probability distribution given by RMT, whereas for systems whose classical counterparts are integrable, the nearest-neighbor spacings are described by a Poisson distribution [4] $P(s) = e^{-s}$. Thus, a widely accepted criterion for a signature of quantum chaos is usually made in terms of the form of $P(s)$. Intermediate situations are analyzed by means of interpolated distributions (see *e.g.* Refs 5 and 6).

Classical chaos, on the other hand, is a better understood non-linear phenomenon, which gives rise to an *unpredictable* time-evolution of the corresponding dynamical systems. In particular, it is characterized by an intrinsic instability in the orbits due to a high sensitivity to initial conditions. So, instead of trying to make a precise prediction of individual trajectories the aim of the theory of chaos is a description of the space of possible trajectories and the evaluation of aver-

age quantities on this space. In general, the dynamical instability of the orbits in a chaotic system is accompanied by the occurrence of strange attractors with a fractal structure in phase space (*e.g.* in the Lorenz model -see Fig. 1). The origin of this fractal structure is related to the existence of a rigid *tree* of periodic orbits (*cycles*) of increasing lengths and self-similar structure [7]. The relation between the structure of periodic orbits in phase space and RMT is established by Gutzwiller trace formula [8]. Thus, at the quantum level we would hope to find a signature of the fractality in the phase space in the form of a scale invariance, or, in other words, to identify the same kind of signature (or symmetry) in the quantum regimeⁱⁱ

The notion of scale invariance appears in many different phenomena. For example, in second order phase transitions, it appears near the so called *critical points* where some physical quantities obey a power law behavior. In particular, the correlation lengthⁱⁱⁱ ξ behaves like $\xi \sim |T - T_{crit}|^{-\nu}$, with ν being the corresponding *critical exponent*. At the critical temperature the correlation length ξ diverges and the system has no characteristic scale, *i.e.* the system becomes scale invariant, and the correlation function behaves as $\Gamma(r) \sim r^{-p}$.

Power law behavior has been observed in the study of chaotic time series, for example in the problem of a dripping faucet [9], in heartbeat dynamics [10] and in many other phenomena. Recently, it was found that the power spectrum of the fluctuations of the eigenvalues of RMT ensembles and nuclear shell (TBRE) model calculations exhibit a power law behavior $\sim 1/f$ (with f being the frequency), whereas, for the case of integrable systems it was found that the corre-

sponding power spectrum behaves as $\sim 1/f^2$ (see Ref. 11). Thus, in the case of a system with a (parameter-dependent) transition from a regular to a chaotic regime, like the hydrogen atom in an external magnetic field, we would expect to have a power spectrum $\sim 1/f^2$ associated with the energy fluctuations at small magnetic fields, and $\sim 1/f$ for magnetic fields $B \gtrsim 1$ (in atomic units). To our knowledge, the dependence of this transition on the external magnetic field intensity has not been well understood so far. This problem will be studied elsewhere.

The purpose of the present paper is to begin a study of the self-similar (or fractal) properties of the energy fluctuations in the spectrum of quantum chaotic systems. As a concrete system we study the energy fluctuations in the spectrum of ^{48}Ca , obtained with (a) shell model calculations with a *realistic* interaction, and (b) with random shell model calculations (TBRE) both in the full fp shell. Large shell calculations are considered to exhibit the chaotic behavior found in actual experimental spectra (see *e.g.* Ref. 23 and references therein). We also carry out a comparison with the corresponding behavior of the energy fluctuations in the RMT ensembles GOE and GDE. We shall also use a recently introduced notion based on the analogy between energy fluctuations of chaotic hamiltonians and chaotic time-series, and apply the method of *detrended fluctuation analysis* (DFA) [15], which is designed to study the hidden fractal properties of time series found in many natural phenomena.

2. Fractality and $1/f$ scale invariance

The concept of a fractal is associated with geometrical objects satisfying two criteria: self similarity and fractional dimensionality. Self similarity means that an object is composed of sub-units and sub-sub-units on multiple levels that (statistically) resemble the structure of the whole object. A

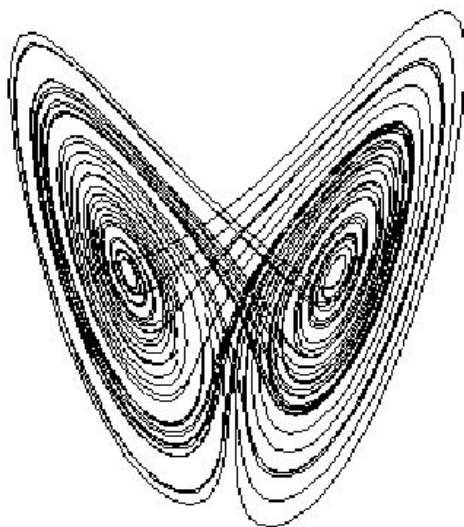


FIGURE 1. Lorenz strange attractor having a fractal (Hausdorff) dimension ~ 2.06 .

related property is scale invariance which can be thought of as self-similarity on all scales. Thus, a fractal structure lacks any characteristic length scale. This fractal structure is seen, *e.g.*, in the Lorenz attractor Fig. 1.

The $1/f$ behavior of the power spectrum found in quantum fluctuations of the spectra of random hamiltonians [11,17] suggests that full quantum chaos can be associated with a particular class of scale invariance. Namely, a scale invariance for which the auto-correlation function becomes (approximately) scale independent. Such situation occurs for a power spectrum with a power-law (scale invariant) behavior $\sim 1/f^\beta$ at the *critical* value $\beta = 1$. A demonstration in the continuum case is the following: suppose that the power spectrum^{*iv*} of a given time series has a $1/f$ behavior, *i.e.*

$$\mathcal{S}(f) = 1/f. \quad (1)$$

Since the Fourier Transform of the power spectrum is identical to the autocorrelation function $\mathcal{C}(\tau)$ (Wiener-Khinchin Theorem^{*v*}) we have:

$$\mathcal{C}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{S}(f)) = \mathcal{F}^{-1}(1/f). \quad (2)$$

Now, if we make an arbitrary scale transformation in the *time* domain (*i.e.* $\tau \rightarrow a\tau$, $a \in \mathbb{R}^+$) we have

$$\mathcal{C}(a\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{a}(\mathcal{S}(f/a))\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{a} \times \frac{a}{f}\right). \quad (3)$$

Thus

$$\mathcal{C}(a\tau) = \mathcal{C}(\tau). \quad (4)$$

Here, we have used the scaling property of Fourier Transforms, which is strictly valid only in the continuum case. For discrete time series, there are other tools for studying their scale invariant properties, including the DFA method [15] (see below). In fact, $1/f$ behavior (referred to as flicker or $1/f$ noise) occurs in many physical, biological and economic systems, meteorological data series, the electromagnetic radiation output of some astronomical bodies, and in almost all electronic devices. In biological systems, it is present in heart beat rhythms and the statistics of DNA sequences. In financial systems it is often referred to as a long memory effect. There are even claims that almost all musical melodies, when each successive note is plotted on a scale of pitches, will tend towards a $1/f$ noise spectrum.

3. Spectrum fluctuations as time-series

The fluctuations in a quantum spectrum are obtained by an unfolding procedure, *i.e.*, by subtracting the gross features of the spectrum which can be modeled by a smooth function. In essence, this procedure consists in mapping the spectrum^{*vi*} E_i into a dimensionless spectrum ϵ_i , having a mean level density of 1:

$$E_i \rightarrow \epsilon_i \equiv \bar{N}(E_i), \quad (i = 1, \dots, N). \quad (5)$$

where $\tilde{N}(E_i)$ is a smooth function fit^{viii} of the staircase-like cumulative density function $N(E_i)$ (see *e.g.* Ref. 8). In particular, the nearest neighbor spacing (NNS) is calculated as $s_i = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i$, $i = 1, \dots, N - 1$, and $\langle s \rangle = 1$. The spectrum fluctuations can be defined by the quantity

$$\delta_n = \sum_{i=1}^n (s_i - \langle s \rangle) = [\epsilon_{n+1} - \epsilon_1] - n\langle s \rangle. \quad (6)$$

The stochastic discrete function δ_n measures the deviations of the distance between the first and the $(n + 1)$ -th unfolded states, with respect to the corresponding distance in a uniform (equally spaced) sequence having a unit level distance $\langle s \rangle = 1$. The sequence (6) can be formally interpreted as a discrete “time series” (see *e.g.* Ref. 11). In order to understand the scaling properties of the fluctuations (6), we use the detrended fluctuation analysis (see below).

A standard measure for the deviation from equal spacing is the Dyson-Metha *rigidity* function [16]

$$\Delta_3(L; \alpha) = \frac{1}{L} \text{Min}_{A,B} \int_{\alpha}^{\alpha+L} [N(E) - AE - B]^2 dE, \quad (7)$$

where A, B give the best local fit to $N(E)$ in the observation window $\alpha \leq E \leq \alpha + L$. The harmonic oscillator corresponds to the minimum value $\Delta_3 = 1/12$ (maximum rigidity), while a completely random (uncorrelated) spectrum with a Poisson distribution has an average (over α) $\bar{\Delta}_3(L) = L/15$ (see *e.g.* Ref. 8). The case of a GOE spectrum with a Wigner-like NNS probability distribution is an intermediate case and the rigidity function has the form $\bar{\Delta}_3(L) = 1/\pi^2(\log L - 0.0687)$. It has been shown in Ref. 17 that the rigidity function (7) is related to the DFA method. In particular, Santhanam *et al.* [17] have applied the DFA method to RMT ensembles as well as to the spectra of heavy atoms.

4. Detrended fluctuation analysis (DFA)

DFA is a method which allows the investigation of long range correlations and scaling properties in a random time series. It was first introduced in studies of DNA chains [15]. In the following we make a brief description of the DFA method (for more details we refer the reader to the original paper [15]).

A time series $\delta(t)$ is self similar if the statistical properties of the full time series and the statistical properties of any rescaled subinterval of it, satisfy the scaling relation

$$\delta(t) \stackrel{\text{PDF}}{=} a^\alpha \delta\left(\frac{t}{a}\right), \quad (8)$$

where a is the scale factor in the *time* axis (a^α is the corresponding vertical scaling factor). The exponent α in Ref. 8 is defined as the self-similarity parameter. We emphasize that the equality in Ref. 8 is understood as indicating the *same* probability distributions (PDF).

Let $\delta(i)$, $i = 1 \dots N$ be a time series. The DFA analysis of $\delta(i)$ begins by defining an integrated time series

$$\psi(n) = \sum_{i=1}^n [\delta(i) - \langle \delta \rangle], \quad (9)$$

with $\langle \delta \rangle$ being the average (expectation value) of δ . Then the integrated time series is divided into boxes of equal length ℓ , where a linear^{viii} least-squares fit $\psi_\ell(n)$ (trend) is made. The difference (r.m.s.) between the integrated time series and the fit is measured by the *detrended fluctuation*

$$F(\ell) \equiv \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\psi(n) - \psi_\ell(n)]^2}. \quad (10)$$

This fluctuation can be calculated for all scale factors (or box sizes). In a log-log plot, a linear relationship between the fluctuation and the box size will indicate a scaling (power law) behavior. In this case the slope α_{DFA} in the $\log[F(\ell)]$ vs $\log[\ell]$ plot can be used to characterize the scaling properties (8) of the original time series since $\alpha = \alpha_{DFA}$ in Ref. 8. As an example, if there is no correlation among the points in the original time series $\delta(i)$, *i.e.* the autocorrelation function^{ix} $\mathcal{C}(\tau) \equiv 0$, for any time-lag $\tau \neq 0$, the time series behaves as white noise and the integrated time series $\psi(n)$ corresponds to a random walk characterized by $\alpha_{DFA} = 0.5$ (see [18]). Time series with short range (exponentially decaying) correlations $\mathcal{C}(\tau) \sim e^{-\tau/\tau_0}$, τ_0 being the characteristic scale, are also characterized by $\alpha_{DFA} \simeq 0.5$ although some deviations from $\alpha_{DFA} \simeq 0.5$ may occur for small window sizes. Of special interest are the so called *persistent* (long time memory) time series for which the autocorrelation function has a power-law behavior $\mathcal{C}(\tau) \sim \tau^{-\gamma}$. They are characterized by values $0.5 < \alpha_{DFA} < 1.0$, the relationship between γ and α_{DFA} being $\gamma = 2 - 2\alpha_{DFA}$. The power spectrum of the corresponding time-series also displays a power-law (scale invariant) behavior $S(f) \sim 1/f^\beta$ with $\beta = 1 - \gamma = 2\alpha_{DFA} - 1$. In particular, for time series with $1/f$ -noise ($\beta = 1$) $\alpha_{DFA} = 1$ (see *e.g.* Ref. 19).

5. Results

We have applied the DFA method and performed a spectral analysis to the energy fluctuations in the spectrum of ^{48}Ca . For comparison purposes we have also applied the analysis to the case of RMT ensembles GOE and GDE. In all cases the unfolding (5) to the spectrum was done (for simplicity) with a polynomial fit. After a careful analysis, a degree-7 polynomial fit was used in each case^x However, the unfolding is a delicate procedure when defining the energy fluctuations [11]. It can lead to wrong conclusions when not properly done. In particular, the results are rather sensitive to the degree of the polynomial in a polynomial fit to $\tilde{N}(E_i)$ Eq. (5). This fact has been discussed in TBRE calculations in Ref. 13. In our analysis we have suitably removed the tails of

the spectrum to avoid a strong dependencies of the results in the polynomial fit.

In the present calculations we have used the *dfa* C-code (translation of Peng's original fortran code [20]) with a linear detrending option. The minimal box size used was 4, and the maximal box size was $N/4$, with N the number of points in the time series. The results of the analysis are presented in the following paragraphs.

5.1. Realistic shell model calculations

Large shell model calculations with realistic interactions (KB3) [21] were performed in the full fp shell for ^{48}Ca in the subspaces $J^\pi = 0^+, 1^+, \dots, 8^+$ by means of the ANTOINE code [24]. Within each subspace we calculated the energy fluctuations following the definition (6) and applied a linear DFA analysis. The value of the self-similarity parameter α are found to be very close to 1, the largest deviations being $\sim 10\%$). The energy fluctuations represented by the time series δ_n and its integrated form ψ_n , are shown in Figs. 2a and 3a, respectively, for the case of the subspace $J^\pi = 0^+$. The behavior shown in these figures is typical of all cases studied with shell model calculations with realistic interactions.

Figure 4a shows the results of the DFA analysis for the case of the $J^\pi = 0^+$ subspace. This case is particularly interesting since this subspace contains only 347 energy levels. It is quite remarkable that, even in this case, the trend of the fluctuations is well approximated by a linear scaling in the log-log plot in the whole domain of window sizes giving a self-similarity parameter $\alpha = 0.97$. Larger calculations show even better linear scalings. The results of the DFA analysis are summarized in Table I.

An α parameter close to 1 indicates an almost perfect non-trivial scale invariance. Using the relation $\beta = 2\alpha_{DFA} - 1$, we conclude that the power spectrum exhibits a very approximate $1/f$ behavior. This is confirmed

TABLE I. Self similarity parameter α obtained using a linear DFA method and the β exponent in the power spectrum of the energy fluctuations in the shell model calculations of ^{48}Ca with realistic interactions in different subspaces J^π . The dimension N of each subspace is also shown.

^{48}Ca			
J^π	α	β	N
0^+	0.969	1.008	347
1^+	0.998	1.090	880
2^+	1.013	1.046	1390
3^+	1.020	1.183	1627
4^+	0.985	1.127	1755
5^+	0.916	1.198	1617
6^+	1.077	1.137	1426
7^+	1.095	1.180	1095
8^+	0.964	1.031	808

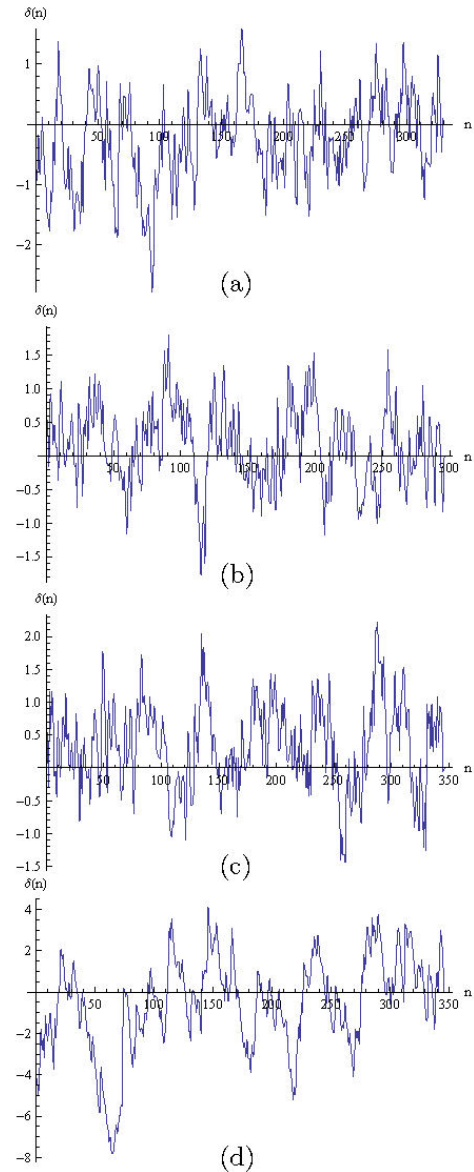


FIGURE 2. Time series δ_n of the energy fluctuations in a shell model calculation of the spectrum of ^{48}Ca ($J^\pi = 0^+$ states) with (a) realistic interactions, (b) with random interactions (TBRE), and with RMT ensembles (c) GOE and (d) GDE. For the later the same dimension as for the $J^\pi = 0^+$ subspace was used. The time (horizontal) axis represents the index of the ordered unfolded (dimensionless) energy ϵ_n and the vertical axis represents the corresponding energy fluctuation δ_n *i.e.* the difference of the n -th unfolded energy ϵ_n with respect to the n -th energy level in an equally spaced spectrum with unit energy distance. Notice that the scale for the fluctuations in GDE is about 4 times larger than for the shell model calculations.

by the corresponding power spectrum calculations, shown in Fig. 5a, where we find an exponent $\beta = 1.008$. The power spectrum depicted in Fig. 5a shows the typical behavior in all shell model calculations with realistic interactions: there is a rather large spread in the Fourier amplitudes from a linear scaling.

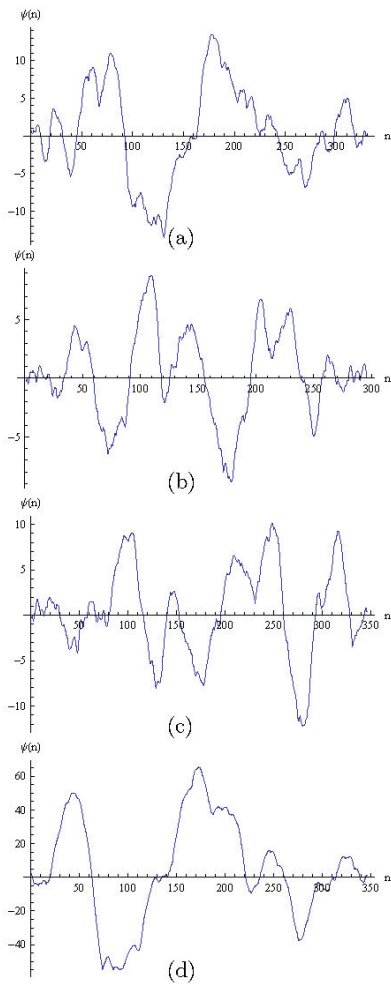


FIGURE 3. Integrated time series ψ_n (Eq. (9)) for the energy fluctuations in shell model calculation of the spectrum corresponding to ^{48}Ca ($J^\pi = 0^+$ states) with (a) a realistic interaction, (b) with random interactions (TBRE), and with RMT ensembles (c) GOE and (d) GDE. For the cases of GOE and GDE the same dimension as for the $J^\pi = 0^+$ subspace was used. The time (horizontal) axis represents the index of the ordered unfolded (dimensionless) energy ϵ_n and the vertical one the corresponding integrated energy fluctuation ψ_n . Notice that the scale for the fluctuations in GDE is about 6 times larger than for the shell model calculations.

The observed spreading is seen independently of the size of the spectrum subspace. We find in all cases that the DFA method is a more robust procedure than the direct calculation of spectral power when analyzing actual experimental data.

5.2. TBRE shell calculations

In the present study we have also applied the DFA method to the energy fluctuations of the Two Body Random Ensemble (TBRE) [22] shell model calculations for ^{48}Ca in the subspace $J^\pi = 0^+$. For this calculations we have used 25 sets of energy levels.

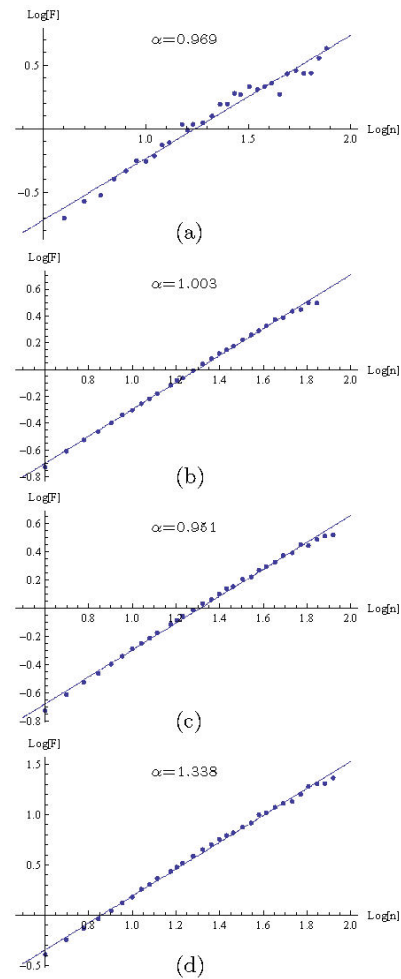


FIGURE 4. Integrated time series ψ_n (Eq. (9)) for the energy fluctuations in shell model calculation corresponding to the spectrum of ^{48}Ca ($J^\pi = 0^+$ states) with (a) a realistic interaction, (b) with random interactions (TBRE), and with RMT ensembles (c) GOE and (d) GDE. For the later the same dimension as for the $J^\pi = 0^+$ subspace was used. The time (horizontal) axis represents the index of the ordered unfolded (dimensionless) energy ϵ_n and the vertical one the corresponding integrated energy fluctuation ψ_n .

The energy fluctuations represented by the time series δ_n and its integrated form ψ_n are shown in Figs. 2b and 3b, respectively. The self similarity parameter was calculated by an averaging procedure over the DFA results, and it was found to be $\alpha = 1.01$. This value is very similar to the value of the self similarity parameter obtained in the case of realistic calculations (see Table I). Figure 4b shows the averaged results of the DFA analysis. The linear behavior of these results is very striking. Only for very large window sizes ($n \simeq N/4 \simeq 87$) we can see a slight deviation from linearity. Since the present analysis was done for the case $J^\pi = 0^+$ which has the smallest dimensionality in the fp shell model calculations, it is

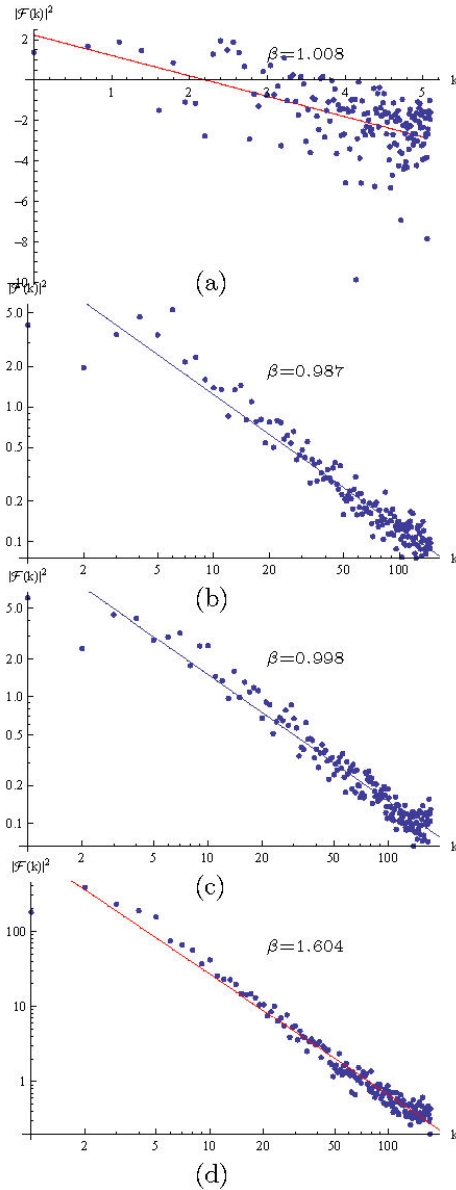


FIGURE 5. Linear fit of the Power Spectrum ($\log |\mathcal{F}_k|^2$ vs $\log k$) of the energy fluctuations in ^{48}Ca ($J^\pi = 0^+$ subspace) obtained with (a) a realistic interaction, (b) with angular momentum-preserving random interactions (TBRE), and with RMT ensembles (c) GOE and (d) GDE. Here $|\mathcal{F}_k|$ is the Fourier amplitude corresponding to the frequency k in the discrete Fourier transform of the time series.

natural to expect a similar behavior as in Fig. 4b for larger subspaces.

In Ref 11 Relaño *et al.* performed the first study of the behavior of the power spectrum of the energy fluctuations of TBRE random shell model calculations for ^{24}Mg and ^{32}Na and found that they obey a $1/f$ scaling. Our own power spectrum calculations of the energy fluctuations in the subspace $J^\pi = 0^+$ of the spectrum of ^{48}Ca Fig. 5b shows a behavior similar to the one obtained by Relaño *et al.* Ref. 11. Energy fluctuations in TBRE calculations are characterized by a reduction of the spreading of the Fourier amplitudes in the

TABLE II. Comparison between shell model calculations with (a) realistic interactions, (b) random interactions (TBRE) and (c) GOE calculations in the spectrum subspace $J^\pi = 0^+$ of ^{48}Ca .

		α	β
$^{48}\text{Ca}, J^\pi = 0^+$	(Shell Model)	0.969	1.008
	(TBRE)	1.003	0.987
GOE	$N = 347$	0.951	0.998
	$N = 1000$	0.942	1.069
GDE	$N = 347$	1.338	1.604
	$N = 1000$	1.398	1.786

power spectrum. This is an advantage of the averaging procedure. The power spectrum fit is shown in Fig. 5b where it can be seen that in this case the linear fit in the log-log plot adequately describes the $1/f^\beta$ behavior of the power spectrum. A different situation was observed in the case of the corresponding shell model calculations with realistic interactions depicted in Fig 5a. The value obtained for the scaling exponent was $\beta = 0.99$ (see Table II) which implies a scale invariance of the energy fluctuations in the TBRE calculations.

5.3. GOE

For comparison purposes we applied the DFA method to the energy fluctuations in the case of GOE. In order to make a fair comparison we considered a GOE with the same dimension as the case of the subspace $J^\pi = 0^+$, where both types of shell model calculations (with realistic and random interactions) were used. A set of 25 matrices in the ensemble was used. The energy fluctuations represented by the time series δ_n and its integrated form ψ_n are shown in Fig. 2c and Fig. 3c respectively. With the results of the DFA analysis we obtained a value for the self similarity parameter $\alpha = 0.95$ (see Table II), consistent with $\alpha = 1$. This 5% deviation from the expected value $\alpha = 1$ is probably due to the unfolding procedure used in the analysis. This is also suggested by the fact that in larger GOE calculations with a dimension $N = 1000$ a similar deviation from the value $\alpha = 1$ is observed. It is important to recall that in the limit $N \rightarrow \infty$, the cumulative function $N(E)$ follows a semicircular law. However, even for the case $N = 1000$ we observe significant deviations. For the time being appropriate unfolding will be discussed elsewhere [14].

The corresponding power spectrum calculations, on the other hand, give a scaling exponent $\beta = 0.998$ (see Table II). It seems that in this case the power spectrum approaches the value 1 more than the DFA method, although we should verify this for a more ample choice of matrix dimensions. In Fig. 4c and 5c we show the averaged results for the DFA and the averaged power spectrum calculations, respectively, for the energy fluctuations in the GOE spectrum with 347 levels using an ensemble with 25 sets.

5.4. GDE

Finally, and for the sake of completeness, we applied the DFA method to the case of the integrable GDE random ensemble. Again we used the same dimension as the case of the subspace $J^\pi = 0^+$. The energy fluctuations represented by the time series δ_n and its integrated form ψ_n are shown in Fig. 2d and 3d, respectively. In this case, the uncorrelated nature of the energy fluctuations is noticeable in those figures. The self similarity parameter was calculated by an averaging procedure over the DFA results (Fig. 4d), and it was found to be $\alpha = 1.34$. This value has a deviation of $\sim 20\%$ from the expected value of $\alpha = 3/2$ (corresponding to uncorrelated time series), although for larger dimensions, *e.g.*, for $N = 1000$, the value for the α parameter was $\alpha = 1.40$, which is closer to the expected value. On the other hand, the scaling exponent in the power spectrum was found to be $\beta = 1.60$, which also deviates $\sim 20\%$ from the expected value of $\beta = 2$ for the case of Poisson distributed data. For a larger dimensionality $N = 1000$, the value for the β parameter was $\beta = 1.80$, approaching the expected value. The reason for the above mentioned seems to be due to the polynomial unfolding used in the present study. We must stress the fact that present calculations should be considered as preliminary.

6. Conclusions

The DFA technique has been applied to the nuclear spectrum of ^{48}Ca for different J^π states obtained with realistic, and random Shell Model calculations, to study the scaling properties of the energy fluctuations around the regular (equally spaced) spectrum. It was shown that the energy fluctua-

tions in the spectrum of ^{48}Ca defined by the stochastic sequence (6) exhibit non-trivial scale invariance corresponding to a *critical* value of the self similarity parameter $\alpha \simeq 1$, for which the associated autocorrelation function is statistically scale independent. This result is in agreement with the corresponding power spectrum calculations for which a statistical power-law behavior $\sim 1/f$ is observed. This scaling of the energy fluctuations was observed in both, random shell model (TBRE) calculations, as well as in shell model calculations with realistic interactions. However, the DFA results appear to be more robust than the power spectrum calculations. The linear scaling showed in Figs. 4a-4d manifest this fact. In contrast, the power spectrum calculations depicted in Figs. 5a-5d display a rather large spread in the Fourier amplitudes, specially in the case of shell model calculations with a realistic interaction, giving rise to results which are less transparent. In other cases we require further manipulation of the data, such as averaging over several calculations. The DFA method confirms almost perfect non-trivial statistical scale invariance for high-energy fluctuations in ^{48}Ca . Critical scale invariance was also observed in the case of GOE. Since this class of scale invariance is observed in several classical chaotic phenomena, as well as in phase transitional critical points (logistic maps, geometrical fractals, dripping faucet experiments, etc.), this result suggests a possible underlying connection between classical and quantum chaos. This is an open question which we shall continue to investigate.

Acknowledgments

We are grateful to Jose Barea for his many suggestions. We thank H. Larralde for his valuable comments. This work was supported in part by PAPIIT-UNAM and Conacyt-Mexico.

-
- i. Here, a *regularized* spectrum having $\langle s \rangle = \int_0^\infty s P(s) ds = 1$, is assumed.
 - ii. One of the signatures of fractal structure is associated to the appearance of energy level repulsion in the quantum spectrum, which leads to the Wigner surmise of RMT.
 - iii. The correlation length ξ is related to the behavior of the correlation function $\Gamma(r)$. Near a critical point the correlation function has the Ornstein-Zernike form $\Gamma(r) \sim r^{-p} e^{-r/\xi}$ when $T \rightarrow T_{crit}$ (see *e.g.* Ref. 12).
 - iv. For a given time series δ_n , the power spectrum is defined as $S(f) = |\mathcal{F}_f\{\delta\}|^2$, where $\mathcal{F}_f\{\delta\}$ denotes the component of the discrete Fourier transform of δ , having frequency f .
 - v. The Wiener-Khinchin theorem establishes that the power spectral density of a random process is the Fourier transform of the corresponding autocorrelation function. For a power spectrum with a power law behavior, the Wiener-Khinchin theorem implies also a power law behavior of the corresponding auto-correlation function.

- vi. For the time being we assume a finite spectrum with N energy levels.
 - vii. Equivalently, we can make a fit of the density of states function $\rho(E)$, since $\bar{N}(E) \equiv \int_{-\infty}^E dE' \rho(E')$.
 - viii. First order DFA.
 - ix. For a time series $\delta(i)$, $i = 1, \dots, N$, the autocorrelation function is defined as $\mathcal{C}(\tau) = \sum_{k=1}^N \delta(k) \delta(k + \tau)$.
 - x. The criterion used to choose the degree of the polynomial fit was based on the properties of the resulting δ_n -time series, being better for the minimal polynomial degree leading to a time series oscillating around $\delta = 0$ (when not properly done, a straightforward high-degree polynomial fit can even lead to a time series with residual linear tendencies, *i.e.* oscillating around a non-horizontal straight line).
1. M.L. Mehta, *Random Matrices*, 2nd ed. (Academic Press, New York London, 1991).
 2. E.P. Wigner, *Results and theory of resonance absorption*, Conference on Neutron Physics by Time-of-Flight, Gatlinburg, Tennessee, 1956.

3. O. Bohigas, M.-J. Giannoni, and C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984) 1.
4. M.V. Berry and M. Tabor, *Level clustering in the regular spectrum*, *Proc. R. Soc. London A.* **356** (1977) 375.
5. T.A. Brody *Lett. Nuovo Cimento* **7** (1973) 482.
6. P. Chau, Hsu-Tai, N.A. Smirnova, and P. Van Isacker, *Generalized Wigner surmise for (2×2) random matrices*, *J. Phys.* **A35** (2002) L199.
7. P. Cvitanovic, *et al.*, *Classical and Quantum Chaos*, e-book (2002).
8. M.C. Gutzwiller, *Periodic orbits and classical quantization conditions*, *Jour. Math. Phys.* **12** (1971) 343; M.C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer, New York, 1990).
9. T.P.J. Penna, P.M.C. De Oliveira, J.C. Sartorelli, W.M. Goncalves, and R.D. Pinto, *Long-range anticorrelations and non-Gaussian behavior of a leaky faucet* *Phys. Rev. E* **52** (1995) R2168.
10. A.L. Goldberger, D.R. Rigney, and B.J. West, *Chaos and fractals in human physiology*. *Sci Am* **262** (1990) 42.
11. A. Relaño, J.M.G. Gómez, R.A. Molina, J. Retamosa, and E. Faleiro, *Phys. Rev. Lett* **89** (2002) 244102; *Phys. Rev. E* **66** (2002) 036209; E. Faleiro, J.M.G. Gómez, R.A. Molina, L. Muñoz, A. Relaño, and J. Retamosa, *Phys. Rev. Lett* **93** (2004) 244101.
12. K. Huang, *Statistical Mechanics*, Second Edition (John-Wiley and Sons, 1987).
13. J. Flores, M. Horoi, M. Muller, and T.H. Seligman, *Phys. Rev. E.* **63** (2001) 026204.
14. E. Landa *et al.* (to be published).
15. C.-K. Peng, *et. al.*, *Mosaic organization of DNA nucleotides*, *Phys. Rev. E* **49** (1994) 1685; C-K Peng, S. Havlin, H.E. Stanley, and A.L. Goldberger, *Chaos* **5** (1995) 82.
16. F.J. Dyson, *J. Math. Phys.* **V. 3** (1962) 140; 157; 166; 1199.
17. M.S. Santhanam, N. Jayendra, Bandyopadhyay, and Dilip An- gom, *Phys. Rev. E* **73** (2006) 015201.
18. C. Heneghan and G. McDarby, *Phys. Rev. E* **62** (2000) 6103.
19. E.W. Montroll, and M.F. Shlesinger, *The wonderful world of random walks*. In: Nonequilibrium Phenomena II. From Stochastics to Hydrodynamics. Lebowitz JL, Montroll EW, eds. (Amsterdam: North-Holland, 1984) p. 1.
20. A.L. Goldberger, *et al.* *Physionet: Components of a New Research Resource for Complex Physiologic Signals*. *Circulation* 101(23):e215-e220 [Circulation Electronic Pages; <http://circ.ahajournals.org/cgi/content/full/101/23/e215>]; 2000 (June 13).
21. T.T.S. Kuo and G.E. Brown, *Nucl. Phys. A* **114** (1968) 241.
22. J.B. French and S.S.M. Wong, *Phys. Lett. B* **23** (1970) 449; S.S.M. Wong and J.B. French, *Nucl. Phys. A* **198** (1972) 188; O. Bohigas and Flores, *J. Phys. Lett. B* **34** (1971) 261.
23. T. Papenbrock and H.A. Weidenmüller, *Rev. Mod. Phys.* **79** (2007) 997.
24. E. Caurier, *computer code ANTOINE*, CRN, Strasbourg (2000); E.Caurier, A.P. Zuker, and A. Poves: in *Nuclear Structure of Light Nuclei far from Stability. Experiment ad Theory*, Proceedings of the Workshop, Obrnai, Ed. G. Klotz (CRN, Strasbourg, 1989).

Fractal scale invariance in chaotic time series: classical and quantum examples

E. Landa^a, R. Fossion^a, I. Morales^a, C. Hernández^a, V. Velázquez^b, J.C. López Vieyra^a, and A. Frank^a

^a*Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México.*

^b*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México,
México, D.F., 04510, México.*

Recibido el 14 de junio de 2009; aceptado el 16 de junio de 2009

Important aspects of chaotic behaviour appear in systems of low dimension, as illustrated by the Logistic Map. It is indeed a remarkable fact that all systems that make a transition from order to disorder by the period-doubling route, display common properties, irrespective of their exact functional form. We discuss preliminary evidence for $1/f$ power spectra in the chaotic time series associated with the Logistic Map, as a mathematical model for the dripping faucet that can be seen as a paradigm for classical chaos. In the same context, we also consider a new experiment with photons that constitutes what we call a “dripping laser”. We discuss the possible consequences of these preliminary analyses.

Keywords: Time-Series Analysis; fluctuation phenomena; random processes and Brownian motion; noise; nonlinear dynamics and chaos; photon statistics and coherence theory; dynamics of nonlinear optical systems; optical chaos and complexity; optical spatio-temporal dynamics; Fourier analysis.

Aspectos importantes del comportamiento caótico aparecen en sistemas de dimensión baja, según lo ilustrado por el mapeo logístico. Es un hecho notable de que todos los sistemas que hagan una transición de orden al desorden por la ruta de duplicación de período, muestran propiedades comunes, independientemente de su forma funcional exacta. Discutimos evidencia preliminar para espectros de potencias $1/f$ en las series de tiempo caóticas asociadas al mapeo logístico, como modelo matemático para el grifo goteante que se puede ver como paradigma para el caos clásico. En el mismo contexto, consideramos un nuevo experimento con fotones que constituye lo que llamamos un “laser goteante”. Discutimos las posibles consecuencias de estos análisis preliminares.

Descriptores: Análisis de series de tiempo; fenómenos de fluctuaciones procesos aleatorios y movimiento Browniano; ruido; dinámica no-lineal y caos; estadística de fotones y teoría de coherencia; dinámica de sistemas ópticos no-lineales; caos óptico y complejidad; dinámica óptica espacial-temporal; análisis de Fourier.

PACS: 05.45.Tp; 05.40.-a; 02.50.-r; 05.40.Ca; 05.45.-a; 42.50.Ar; 42.50.Md; 42.65.Sf; 02.30.Nw

1. Introduction

Classical chaos, is understood as a non-linear phenomenon, which gives rise to an *unpredictable* time-evolution of the corresponding dynamical systems. In particular, it is characterized by an intrinsic instability in the orbits due to a high sensitivity to initial conditions. This is not to say that the physics describing the system is wrong, in fact, the physics predicts this chaotic motion, it is just extremely sensitive to the initial state of the system. In general, the dynamical instability of the orbits in a chaotic system is accompanied by the occurrence of strange attractors with a fractal structure in phase space.

The concept of *quantum chaos* [1] has no unique or precise definition as yet. Quantum chaos is often understood as the study of quantum manifestations of classical chaos. One of the characteristics of classical chaos is the sensitivity to the initial conditions, something which is not observed in quantum mechanics because it is a linear theory. However, both in classical and in quantum chaos “patterns of order in disorder” can be found: in classical chaos in terms of (strange) attractors in the dynamics, in quantum chaos universal laws have been proposed for the behaviour of fluctuations in excitation spectra [2]. More in particular, it has been established that there is a relationship between energy-level fluctuation-properties of a quantum system and the dynam-

ics of its classical analog [2]. Quantum systems that have a classical analog that is chaotic, have spectral fluctuation that show a strong repulsion between energy levels and follow the predictions of Random-Matrix Theory (RMT) [3] (there are some counterexamples, such as arithmetic billiards [4]). On the other hand, quantum systems that have a classical counterpart that is integrable, give rise to an energy spectrum, in which the fluctuations are uncorrelated, and that have a nearest-neighbour spacing distribution that is well described by Poisson statistics [5].

The notion of *scale invariance* appears in many different phenomena. For example, in second-order phase-transitions, it appears near the so-called *critical points* where some physical quantities obey a power-law behaviour. In particular, the correlation length ξ behaves like $\xi \sim |T - T_{crit}|^{-\nu}$, with ν being the corresponding *critical exponent*. At the critical temperature, the correlation length ξ diverges and the system has no characteristic scale, *i.e.* the system becomes scale invariant. In particular, the correlation function behaves as $\Gamma(r) \sim r^{-p}$. The analog for T_{crit} in the case of a quadratic map is the control parameter $k \rightarrow k_{\infty}$, where k_{∞} is the period-doubling critical point and where all cycles of period 2^n with $n = 0, 1, 2, \dots$, are unstable. The instability of cycles of arbitrarily long period is superficially analogous to the role played by divergent fluctuation in critical phenomena.

Power-law behaviour has been observed in the study of many different chaotic time series, for example in the problem of a dripping faucet [7], in heartbeat dynamics [8] and in a large variety of other phenomena.

Recently, it was found that the power spectrum of the fluctuation of the eigenvalues of RMT ensembles and nuclear shell-model Two-Body Random Ensemble (TBRE) calculations exhibit a power-law behaviour $\sim 1/f$ (with f being the frequency) [9], whereas, for the case of integrable systems the corresponding power spectrum behaves as $\sim 1/f^2$ [9]. This also implies a power-law behaviour of the auto-correlation function (Wiener-Khinchin theorem).

In this contribution, we present preliminary results that aim at a deeper understanding of the physical meaning of the exponent β in power spectra that behave like the power law $1/f^\beta$. To do so, in this contribution, we study the power spectra of the fluctuation of time series of two systems in transition between an uncorrelated and a correlated regime,

- (i) the classical system of the Logistic Map, and
- (ii) the quantum system of the “dripping laser”, where a ground glass disc rotating in a laser beam permits us to realise a phase transition between the regime of uncorrelated laser light, and the regime of pseudothermal light where photons travel in drops or bunches.

This paper is organized as follows. In Sec. 2, we discuss the fractal and scale-invariance consequences of $1/f$ -type power spectra. In Sec. 3, we study the classical example of the Logistic Map. In Sec. 4, we study the quantum example of the “dripping laser”. In Sec. 5, we present our preliminary conclusions.

2. Fractality and scale invariance

The concept of a fractal is associated with geometrical objects satisfying two criteria: self similarity and fractional dimensionality. Self similarity means that an object is composed of units, sub-units and sub-sub-units on multiple levels that (statistically) resemble the structure of the whole object. A related property is scale invariance which can be thought of as self-similarity on all scales [10]. Thus, a fractal structure lacks any characteristic length scale. This fractal structure is seen, *e.g.*, in the bifurcation diagram of the logistic map, see Fig. 1. In particular, the auto-correlation function of a $1/f$ signal is scale independent, *i.e.* the auto-correlation function is fractal. A demonstration in the continuum case is the following: suppose that the power spectrumⁱⁱ of a given time series has a $1/f$ behaviour, *i.e.*

$$S(f) = 1/f. \quad (1)$$

Since the Fourier Transform of the power spectrum is identical to the autocorrelation function $\mathcal{C}(\tau)$ (Wiener-Khinchin Theorem) we have:

$$\mathcal{C}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(S(f)) = \mathcal{F}^{-1}(1/f). \quad (2)$$

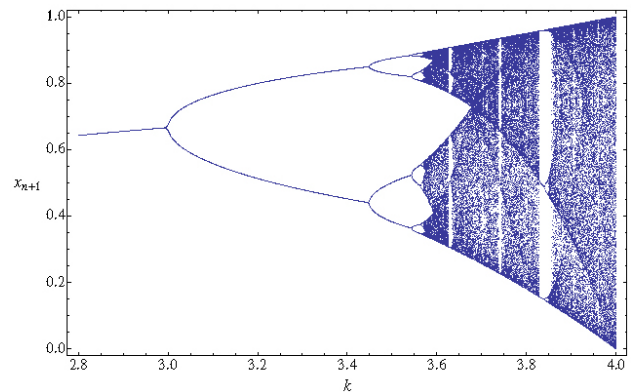


FIGURE 1. Bifurcation Diagram of the Logistic Map with control parameter $2.8 \leq k \leq 4.0$ [see Eq. (5)].

Now, if we make a scale transformation in the time domain we have

$$\mathcal{C}(a\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{a}(S(f/a))\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{a} \times \frac{a}{f}\right). \quad (3)$$

Thus

$$\mathcal{C}(a\tau) = \mathcal{C}(\tau). \quad (4)$$

We have used the scaling property of Fourier Transforms, which is strictly valid only in the continuum case. For discrete time series, there are other tools for studying the scale invariant properties, including the Detrended Fluctuation Analysis (DFA) method [11]. The main result is then that a $1/f$ behaviour suggests scale invariance. In fact, $1/f$ behaviour (referred to as flicker or $1/f$ noise) occurs in many physical, biological and economic systems, meteorological data series, the electromagnetic radiation output of some astronomical bodies, and in almost all electronic devices. In biological systems, it is present in heart-beat rhythms and the statistics of DNA sequences. In financial systems, it is often referred to as a long-memory effect. In quantum systems, $1/f$ behaviour is found in quantum fluctuation of the spectra of random hamiltonians and of atomic nuclei [9, 12, 13]. There are even claims that almost all musical melodies, when each successive note is plotted on a scale of pitches, will tend towards a $1/f$ noise spectrum.

3. Logistic map

Our study of the logistic map was motivated by the study of a system that shows complex dynamical behaviour, namely the *dripping faucet*. The dripping faucet exhibits chaotic behaviour as the flow rate is varied, first conjectured by Rössler [14], and experimentally confirmed afterwards by Shaw [15]. $1/f$ behaviour has also been suggested in the dripping faucet [7]. We have focused on the logistic map because it shows similar properties to the dripping faucet, such as period doubling, multiperiodicity, Hopf bifurcation, multiple stability, strange attractors and so forth. The Logistic Map is a one-dimensional map where the value x_{n+1} at step

$n+1$ depends explicitly only on the value x_n of the previous step n , with a relationship given by the equation,

$$x_{n+1} = kx_n(1 - x_n). \quad (5)$$

We will use the range $x \in [0, 1]$ and $0 < k \leq 4$, where k is called the control parameter, which plays a critical role to determine the dynamical behaviour of x_n vs. the discrete time steps n . In many applications, the map is a model for the dynamics of a population, where x_n is the size of the population of the n th generation. Robert May and others have shown that this map exhibits an astonishing range of behaviours, as the growth rate k is varied [16]. The logistic map was studied by the mathematical physicist M. Feigenbaum in the 1970's. His discoveries include scaling laws for subsequent bifurcations: the ratio $(k_\ell - k_{\ell-1}) / (k_{\ell+1} - k_\ell)$ approaches a constant δ for $\ell \rightarrow \infty$ (here k_ℓ is a value between $[0, 4]$ corresponding to the value of k where the ℓ -th bifurcation occurs), this constant is analogous to a critical exponent in the theory of phase transitions [17].

We study the dynamical behaviour of the Logistic Map analyzing a global representation on the various regimes that are encountered as the control parameter k is varied. This can be done with the help of bifurcation diagrams and also with Lyapunov exponents, which are tools commonly used in non-linear dynamics. Bifurcation diagrams display some characteristic properties of the asymptotic solution of a dynamical system as a function of a control parameter, allowing one to see at a glance where qualitative changes in the asymptotic solution occur. Such changes are termed bifurcations. In our case we have a single dynamical variable, the bifurcation diagram is readily obtained by plotting a sample set of values of the sequence x_n as a function of the parameter k , as shown in Fig. 1.

If $0 < k < 3$, then the dynamics of x_n has a stable fixed-point attractor, while for intermediate values, $3 < k < 3.569$ the dynamics of the x_n is periodic. Going on, for $3.569 < k < 4$, the dynamics of x_n is mostly chaotic, and it is in this range that we are mostly interested for our analysis. There are however, values of the control parameter in this range that lead to periodic behaviour of x_n . To exclude these periodic series $x_n(k)$, we calculate for each value of k the value of the Lyapunov exponent λ_k ,

$$\lambda_k = \lim_{m \gg 1} \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \log |x'_{n+1}|, \quad (6)$$

where $x'_{n+1} = k(1 - 2x_n)$ is the derivative of x_{n+1} of Eq. (5) with respect to the previous value x_n . Periodic series give rise to a negative Lyapunov exponent, whereas chaotic series have a positive exponent. In what follows, we will thus concentrate only on series $x_{n+1}(k)$ with $\lambda_k > 0$. A similar approach has been followed in Ref. 18. The variety of behaviour displayed by the Logistic Map is easily explored, as illustrated in Fig. 2. One finds quickly that two main types of dynamical behaviour can be observed: (i) stationary or periodic regimes on the one hand that we will exclude from our study (see upper panels), and (ii) chaotic regimes on the other hand (see lower panels). In the latter case, the state of the system never repeats itself exactly and seemingly evolves in a disordered way. We are interested in a study on how chaos evolves over the Logistic Map as a function of k , in particular, we want to investigate whether we can find a specific behaviour of the exponent β of the power spectrum of the time series associated to the Logistic Map.

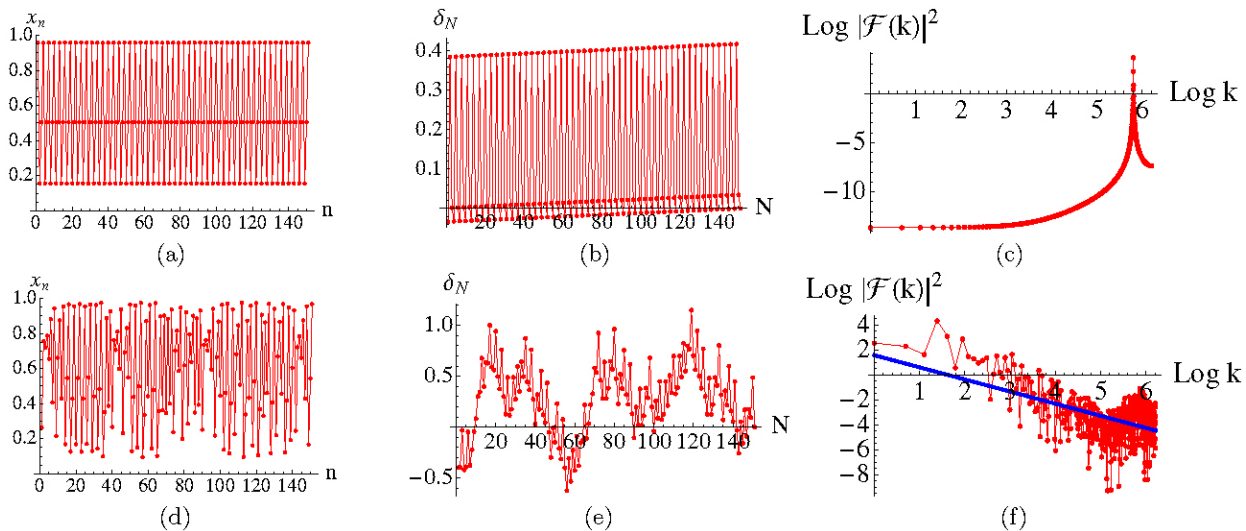


FIGURE 2. (Upper row) Dynamical regular behaviour in the Logistic Map with period 3 for $k = 3.83$ for (a) first 150 values of the series of Eq. (5), (b) the fluctuation δ_N , and (c) the power spectrum in log-log scale with a linear fit that gives the exponent β as its slope. (Lower row) Dynamical chaotic behaviour for $k = 3.9$ for (d) first 150 values of the series of Eq. (5), (e) the fluctuation δ_N , and (f) the power spectrum in log-log scale with a linear fit that gives the exponent β as its slope.

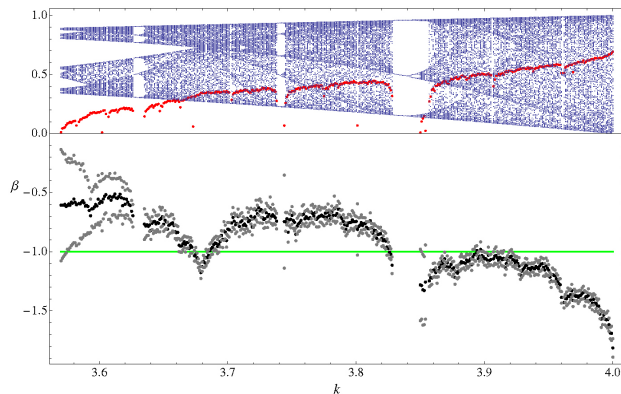


FIGURE 3. (Upper panel) Enlarged view of the chaotic zone of the bifurcation diagram of Fig. 2 with $3.5 \leq k \leq 4.0$ (small dots). Also shown are the Lyapunov exponents (large dots) for the series $x_n(k)$ for each k . (Lower panel) Slope β of a linear fit to the power spectrum of the statistical measure δ_N of the series $x_n(k)$ that have a positive (chaotic) Lyapunov exponent in the range $3.5 \leq k \leq 4.0$ (black dots). Also shown is the standard deviation for β for each k (grey dots).

3.1. Fluctuations in the Logistic-map time-series

In Ref. 18, a statistical study of the Logistic Map has been carried out, applying the Detrended Fluctuation Analysis (DFA) [11] technique on the *series of values* $x_n(k)$ [see Eq. (5)]. The conclusion of this study was that *series obtained from stochastic (noise-driven) and deterministic systems might be indistinguishable using the DFA method*. In literature, when *time series* are studied both in the classical (e.g. heart beats [8] or the dripping faucet [7]) as in the quantum world (e.g. the nuclear excitation spectrum [9]), what appears to be important are the *fluctuations* in the series and not the series itself. In these studies, there are indications that a system carrying out a phase transition between an ordered and a disordered regime, the power spectrum of the fluctuations in the corresponding time series behaves like $1/f$ near the critical point where chaos is setting in. In the following, we want to test this idea on the Logistic Map, using k as a control parameter. To do so, the series of values x_n of the Logistic Map must be “translated” into a time series, of which the fluctuation can then be studied statistically. In our calculations; we used series of values x_{n+1} of dimension 1000 ($1 \leq n \leq 1000$) [see Fig. 2, panel (d)]. We define a new series,

$$T_i = \sum_{n=1}^i x_n, \quad (7)$$

interpreting the value x_n as the analogue of the time interval between the n th and the $(n + 1)$ th drop of the dripping faucet. In the following analysis, we will treat T_i as a generalized discrete time. To obtain the fluctuation of this time series, we need to subtract the smooth global behaviour, a process coined *unfolding*. In this case, the smooth behaviour is a straight line, \bar{T}_i . The fluctuation of the time series of the

Logistic Map can thus be define as,

$$\delta_N = \sum_{i=1}^N [T_i - \bar{T}_i]. \quad (8)$$

The discrete function δ_N measures the fluctuation in the time series of the Logistic Map with respect to the corresponding uniform (equally spaced) time series \bar{T}_i [see Fig. 2, panel (e)]. The statistical measure δ_N was first proposed by Relaño and collaborators [9], and has been applied by some of us [12], to translate the series of energies in a nuclear excitation spectrum into a time series and to obtain its fluctuation with respect to a uniform (equally spaced) spectrum.

3.2. Conclusions

In our calculations, we used series of values $x_n(k)$ of dimension 1000, for which we calculated the power spectrum for the fluctuation in the associated time series $\delta_N(k)$ [see Fig. 2, panel (f)]. We found that the exponent $\beta(k)$ of the power spectrum does not change much with the dimension of the original series of values. Also, the dispersion in the power spectrum of a time series can be diminished calculating a mean power spectrum averaging over many power spectra of parts of the original time series, but the value of the exponent β does not change significantly. In Fig. 3, we show the evolution of the exponent $\beta(k)$ (lower panel) for values of the control parameter k where the Lyapunov exponent is positive (upper panel), see Eq. (6). It can be seen that the requirement $\lambda_k > 0$ indeed removed the periodic windows from the bifurcation diagram. The value of the exponent β can be seen as a measure of the correlations that are present in the dynamical system. The limiting values of the exponent are $\beta = 0$ when no correlations are present in the system (white noise), and $\beta = -2$ when the correlations are maximum (brown noise). In between these limiting values, $\beta = -1$ or $1/f$ noise, has been proposed as a particularly behaving system showing a fractal scale-invariant autocorrelation function (see Sec. 2). In Fig. 3, $\beta(k)$ would seem to have a particular behaviour with control parameter k , oscillating around the value -1. There must be a connection between the behaviour of $\beta(k)$ and the strange attractors of the Logistic Map, that we can recognize in the bifurcation diagram of Fig. 3 (upper panel) as “boundaries” or high-density lines [20, 21]. For the particular value of the control parameter $k = 4.0$, as stated in Ref. 21, *there are no remaining boundaries to confine the dynamics of the map, so the attractor becomes infinite, and is destroyed*. This results in a random series of values x_{n+1} . The cumulative statistics δ_N (see Eq. 8) translates a random series in a highly-correlated series. Thus in the case for $k \rightarrow 4.0$ we can understand that $\beta(k) \rightarrow -2$. The behaviour of $\beta(k)$ with k clearly deserves a more thorough study, see Ref. 19. A problem in this study is that the power spectra do not always behave perfectly like a $1/f^\beta$ power-law [see Fig. 3 (f)], so that it is not always possible to define the power spectrum by one single value, *i.e.* the value of its exponent β . In a future study [19], we want to

check our results for the Logistic Map with the more correct but more tedious formulation for the Lyapunov exponent,

$$\lambda_k = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, n \gg} \frac{\Delta x_n}{\Delta x_0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, n \gg} \frac{x_n^k(x_0 + \epsilon) - x_n^k(x_0)}{\epsilon}. \quad (9)$$

In particular, we want to understand the relation between $\lambda(k)$ and $\beta(k)$, that is not clear yet.

4. Phase transition in light

4.1. Different types of light

Light from different sources can have different properties. Lasers emit *coherent* light, in which the time intervals between the successive photons are uncorrelated and fluctuate around a mean time interval, but in which all photons travel in phase. Also the number of photons n that is detected per fixed time interval T will fluctuate around a mean number \bar{n} , resulting in a histogram that obeys the Poisson distribution [22],

$$P_P(\bar{n}, n) = \frac{\bar{n}^n e^{-\bar{n}}}{n!}. \quad (10)$$

Light from thermal sources is called *thermal* light, and has the property that photons are grouped or *bunched* in packages with very small time intervals between the constituent photons, separated from the other packages or bunches by much larger time intervals. Because of the bunching effect, a time series of time intervals between photons of bunched light will show correlations. A histogram of the photon count n per fixed time interval T will now obey the Bose-Einstein distribution [22],

$$P_{BE}(\bar{n}, n) = \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n} + 1)^{n+1}}. \quad (11)$$

When photons are produced individually in non-linear crystals by descending or ascending parametric conversion [23, 24], the resulting light is called *quantum light*, and shows *antibunching*, which means that photons will avoid to form groups.

Thermal light has the property that its *coherence time* (the duration in time of a package or bunch of photons) is very small, shorter than 10ns, and thus the properties of thermal light are very hard to study experimentally. It is possible to simulate thermal light, called *pseudothermal* light, with a ground glass disc that is rotating with an adjustable speed in the light beam of a laser [22, 25]. The dispersion of the laser light from the irregularities of the ground glass disc will create packages or bunches of photons with larger coherence times, up to the microsecond or millisecond regime, depending on the velocity of the glass disc, making pseudothermal light available for experimental study. The irregularities should be uniformly distributed over the surface of the disc, to avoid spurious effects that the rotation of non-uniform regions of the disc could introduce in the light passing through it. The light produced by this experimental setup is called pseudothermal because it has photons of only one wavelength

(the wavelength at which the laser emits), whereas a thermal source emits black-body radiation with a continuous distribution of wavelengths.

4.2. Phase transition in light

In literature, one distinguished usually between coherent and (pseudo)thermal light calculating photon-count histograms that behave like the Poisson or the Bose-Einstein distribution, respectively. When the ground glass disc is standing still, the laser light passing through it will still be coherent. The statistics will not change, and only the intensity of the beam will be attenuated. We checked the photon counting statistics for several fixed time intervals T , and the histogram obeys the Poisson statistics typical for coherent light. Experimentally, we calculated the mean photon count \bar{n} per counting interval T , and used this number to calculate the Poisson and Bose-Einstein distributions of Eq. (10) and Eq. (11). In Fig. 4 (upper panel) we show the results for a fixed counting

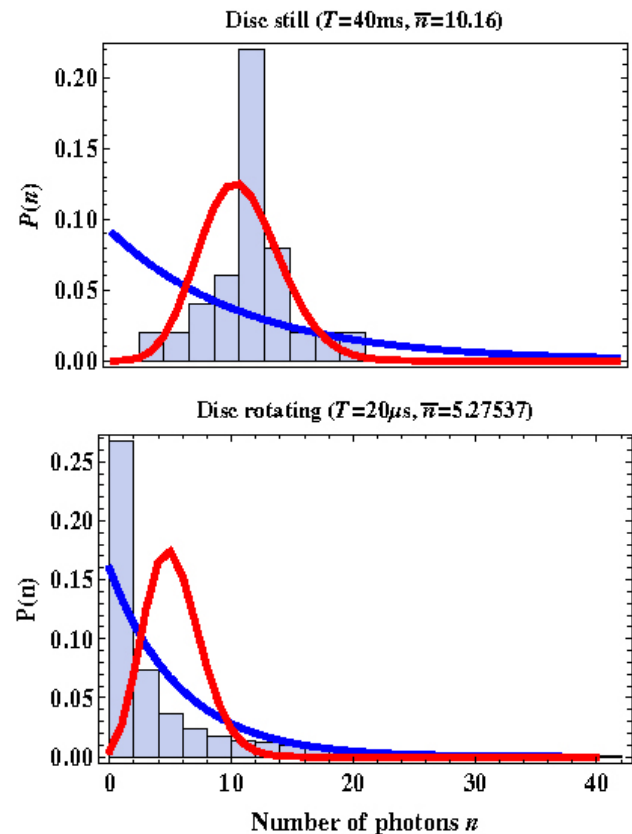


FIGURE 4. Histogram of the number of photons n detected per fixed counting interval T , compared with the Poisson (continuous line) and the Bose-Einstein (dashed line) distributions. (Upper panel) The case of the glass disc standing still and for a fixed counting interval $T = 40\text{ms}$, the mean number of photons arriving per interval T is $\bar{n} = 10.16$. (Bottom panel) The case of the glass disc rotating with a frequency of $\nu = 38.46\text{Hz}$, and for a fixed counting interval of $T = 20\mu\text{s}$, the mean number of photons arriving per interval $\bar{n} = 5.28$.

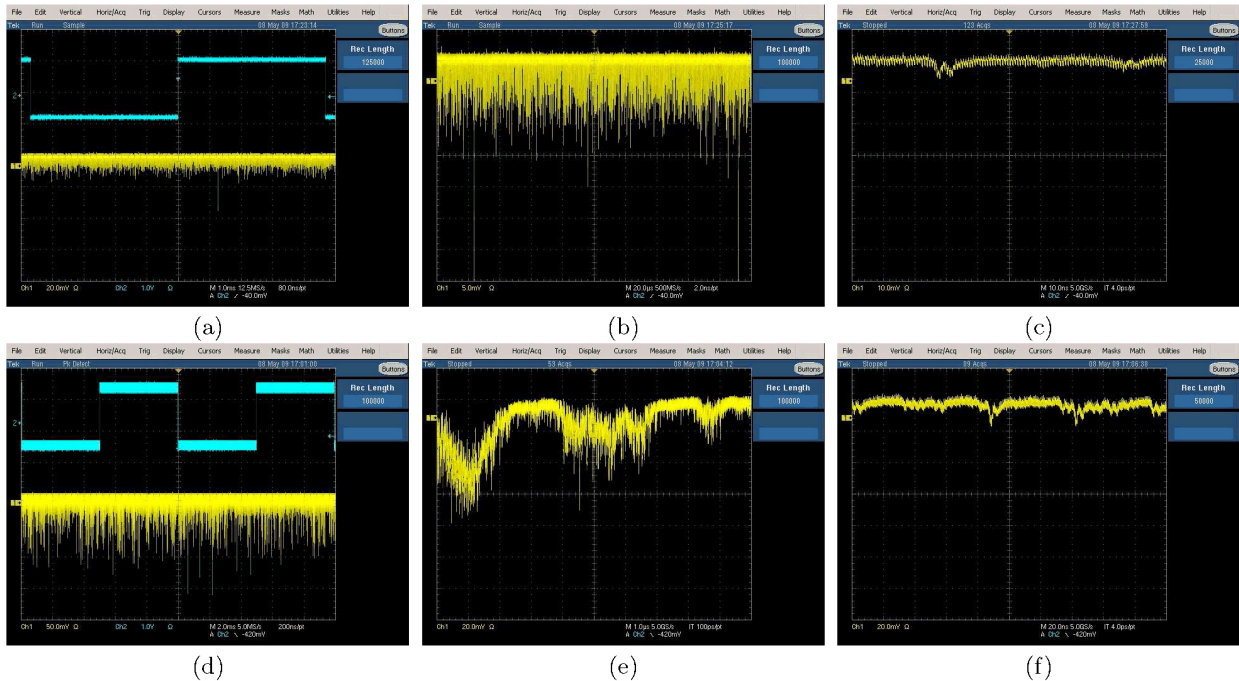


FIGURE 5. A photomultiplier tube produces a voltage drop V_i when it detects a photon. This time signal (t_i, V_i) can be observed with an oscilloscope. (Upper row) For coherent laser light, the time series is random at all resolutions. (a) Random time series for a screen width of 10ms, (b) random time series for a screen width of $200\mu\text{s}$, and (c) the typical signal for a single photon or simultaneous photons for a screen width of 100ns. (Lower row) Pseudothermal light at poor resolutions is observed as random coherent light. At appropriate resolutions, photon bunches can be observed. (d) Random time series for a screen width of 20ms, (e) photon bunch with a width of a few μs observed for a screen width of $10\mu\text{s}$, and (f) the typical signal for a single photon or simultaneous photons for a screen width of 200ns. An external quadratic function [see panels (a) and (d)] was used to help the oscilloscope to write the data (V_i, t_i) to file after equal time intervals.

interval of $T = 40\text{ms}$. When the disc is rotating, bunches will be formed, and the counting statistics will obey the Bose-Einstein statistics. In fig 4 (bottom panel), we show the results for a rotating speed of our disc of $\nu = 38.5\text{Hz}$ and for a counting interval of $T = 20\mu\text{s}$. The agreement between the experimental histograms and the theoretical distributions could be improved using longer experimental time series. It must be possible to realise a phase transition in light, from the coherent regime to the pseudothermal regime, using the rotation speed of the disc as an (external) control parameter. The study of this phase transition will be the subject of a forthcoming publication [26]. In the present study we will use a single specific and constant speed for our disc (in this case $\nu = 38.5\text{Hz}$). We want to understand better the statistics of the series of photons counts, now interpreted as a *time series*, using a power-spectrum analysis.

4.3. Series of photon counts per time interval T as a time series

In our experiment, we use a photomultiplier tube to detect the photons of the coherent or pseudothermal light beams. When the photomultiplier detects a photon, it produces a voltage drop. This time signal can be observed with an oscilloscope. The oscilloscope shows a new data point, voltage vs. time (V_i, t_i) , every 80ns. Coherent light observed with the oscilloscope is random at all time scales, see Fig. 5 (upper

panels). Pseudothermal light, on the other hand, at poor resolutions looks like random coherent light, but shows bunches of photons at the correct resolutions (see bottom panels). The width of a photon bunch gives an empirical measure for the coherence time τ_{coh} of the observed pseudothermal light. In this experiment, we found that the bunches had a typical width of a few microseconds. By constructing histograms of photon counts, as one does traditionally in literature to distinguish between coherent and pseudothermal light (see Fig. 4), one loses information on how the system behaves in time (see Fig. 5). In the following, we will consider the series of photon counts n per fixed counting interval T as a time series. How the series of photon counts per time interval T looks, also strongly depends on the resolution (the size of the counting interval T relative to the mean time interval $\overline{\Delta t}$ between the successive photons). In this experiment, we found $\overline{\Delta t} = 3.79\mu\text{s}$. This corresponds to the coherence time τ_{coh} we observed empirically with the oscilloscope. For a large counting interval, e.g. $T = 10\text{ms}$, no bunches will be observed, and the photon count number n will be found fluctuating around a certain mean \bar{n} , see Fig. 6 (upper panel). Using smaller time intervals, but still orders of magnitude larger than $\overline{\Delta t}$, e.g. $T = 1\text{ms}$ (middle panel), we observed peaks in the counting time series, but they were most probably produced artificially by the rotation of the disc $\nu = 38.46\text{Hz}$ and the periodic motion of a small number N of regions of

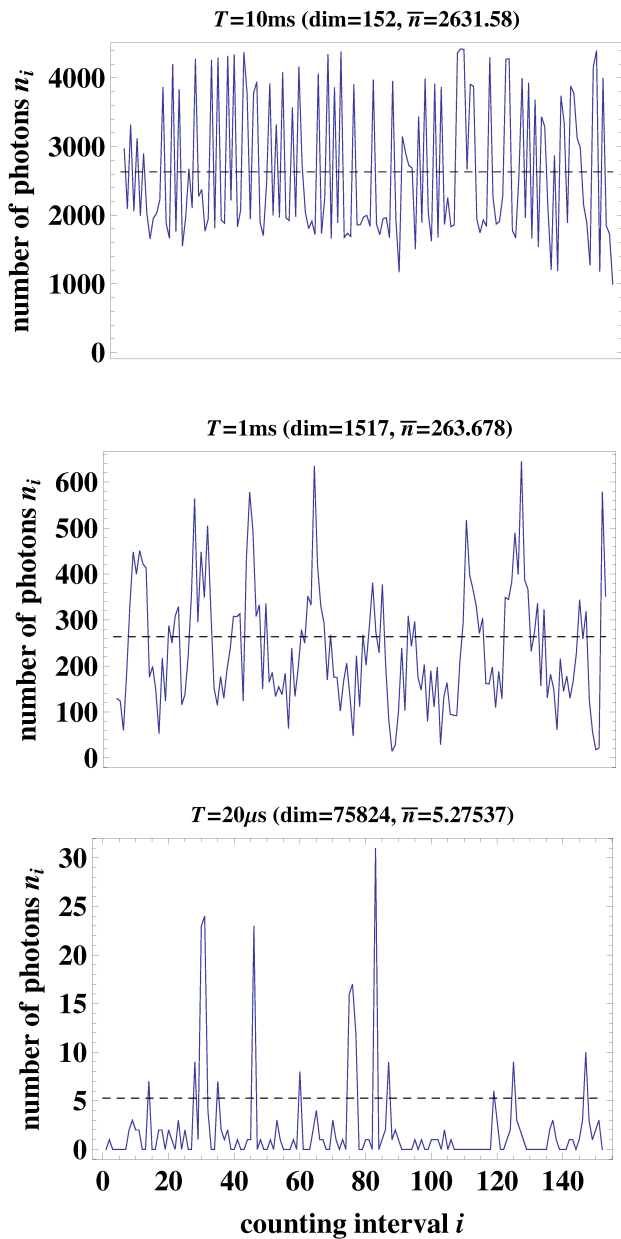


FIGURE 6. Listplots of the time series of photon counts n_i per successive equal time intervals of $T = 10\text{ms}$ (upper panel), $T = 1\text{ms}$ (middle panel) and $T = 20\mu\text{s}$ (lower panel). It can be appreciated that series of photon counts evolves from fluctuation around the mean count (left panel) to a peaked behaviour (middle and right panel). In this experiment, the mean time interval between successive photons was $3.79\mu\text{s}$.

non-uniformities, that will pass every time interval $t=1/N \times 1/38.46\text{Hz}=26/N\text{ms}$ in front of the pinhole of the photomultiplier. When plotting the data points (t_i, V_i) of a number of file saved by the oscilloscope, see Fig. 7, we find structures with a width of about 10ms for pseudothermal light (bottom panel), whereas a similar plot for coherent light looks completely random (upper panel). When the counting interval T becomes of the order of the mean photon time-interval Δt or the coherence time of the bunch τ_{coh} ,

the bunches of the pseudothermal light pop up in the series of photon counts as large peaks in between much smaller photons counts (see Fig. 6, lower panel). The resolution, or the relative size of the counting time interval T can be seen as some sort of internal control parameter that lets us see a phase transition within the same time series, in between coherent light (with a photon count fluctuating around the mean count) and pseudothermal light (with bunches of high counts in between much smaller counts).

4.4. Power spectrum

We can use the discrete Fourier Transform to study the behaviour of the power spectrum of the series of photon counts interpreted as a time series, using the resolution power of the count time-interval T to see how the power spectrum will

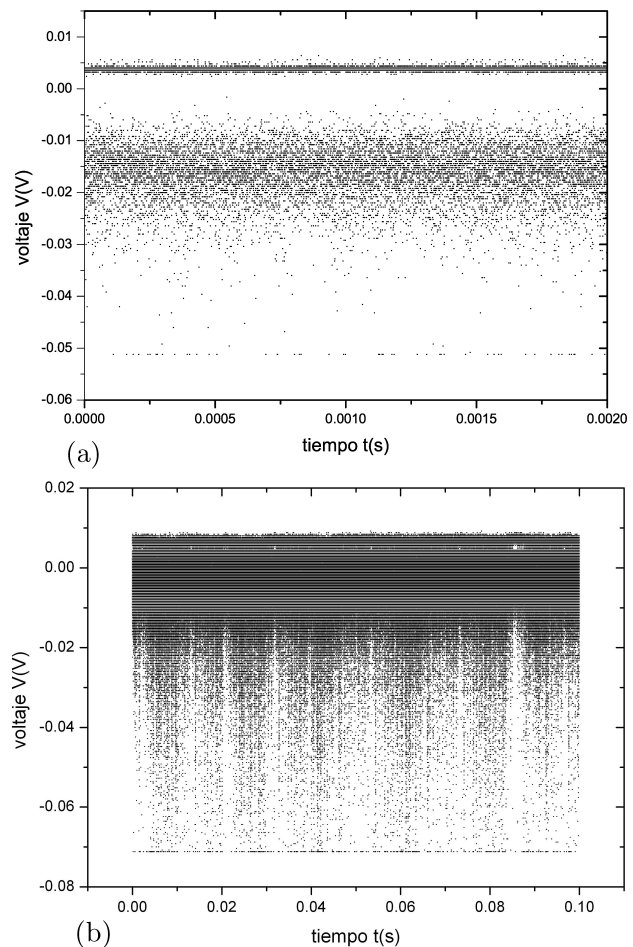


FIGURE 7. The oscilloscope writes a data point (t_i, V_i) every 80ns, *i.e.* the voltage observed in the fotomultiplier tube vs. time. In total, we recorded 340 data file for coherent light and 500 data file for pseudothermal light. Each data file contains 125000 data points. A representation of this time series shows that (a) for laser light it is random, and that (b) for pseudothermal light coming from the rotating disc it is organised in structures of some 10ms in width. Only a part of the data is represented (1% in the case of the coherent light and 2% in the case of pseudothermal light), we made sure that the figure are representative for the totality of the data.

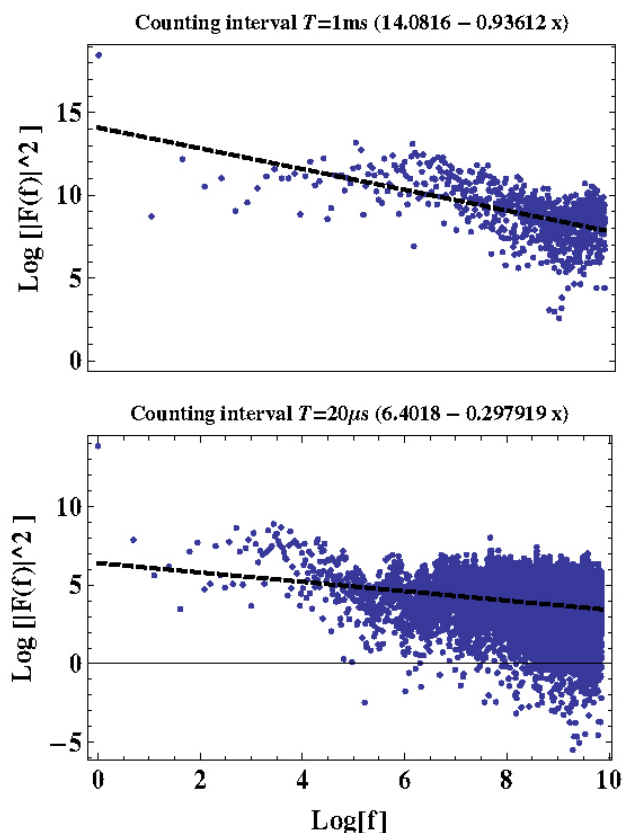


FIGURE 8. Power spectrum $|F(f)|^2$ vs. frequency f in a log-log representation for the series of photon counts per fixed counting interval T . (Upper panel) For counting interval $T = 1\text{ms}$, giving a linear fit with slope $\beta = -0.936$. (Bottom panel) For counting interval $T = 20\mu\text{s}$, giving a linear fit with slope $\beta = -0.298$.

change. The power spectra for two specific cases are shown in Fig. 8, for $T = 1\text{ms}$ (upper panel) and $T = 20\mu\text{s}$ (bottom panel), together with a linear fit that gives us slopes $\beta = -0.936$ and $\beta = -0.298$, respectively. Similar to the analysis in Sec. 3B, the dispersion in the power spectra could be diminished calculating a mean power spectrum averaging over power spectra of smaller parts of the time series. We checked however that the value of β does not change significantly. It can be interesting to study the behaviour of the slope of the linear fit to the power spectrum of the series of photons counts per fixed counting interval T as a function of this counting interval, in between the maximal values of the slope of $\beta = 0$ (no correlations or completely random behaviour), $\beta = -1$ (the conjectured fingerprint of classical and/or quantum chaos) and $\beta = -2$ (maximal correlation such as in the case of the brownian motion of the drunkard). This is shown in Fig. 9, in which we follow the behaviour of slope β with resolution T (the internal control parameter),

- (i) for the disc standing still (connected crosses), and
- (ii) the disc rotating with the constant speed $\nu = 38.46\text{Hz}$.

In this plot, the value of the exponent β will be constrained in between the limiting values $\beta = 0$ of a non-correlated time

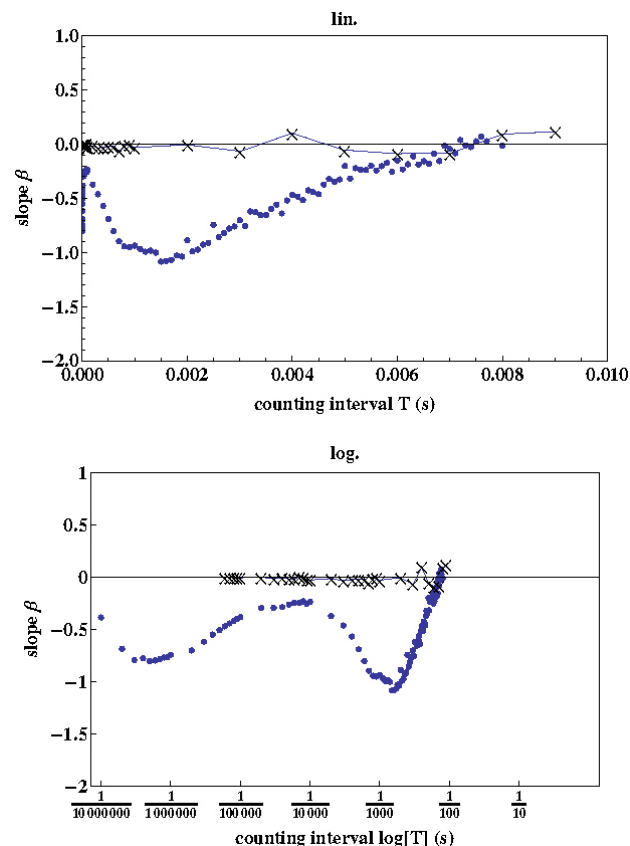


FIGURE 9. Dependence of the slope β of a linear fit to the power spectrum of series of photons counts per fixed counting interval T , as a function of this counting interval, in the case of the glass disc standing still (connected crosses) and the disc rotating with a frequency $\nu = 38.46\text{Hz}$ (connected). The counting interval T is represented in linear scale (upper panel) and in logarithmic scale (bottom panel). The function $\beta(T)$ for coherent light is not followed down to as small counting intervals T as for pseudothermal light because of the more tedious calculations. Coherent light is trivially scale invariant, $\beta(T) = 0$, whereas the pseudothermal light in this experiment shows specific $1/f$ correlations in the time scale $T \sim \text{ms}$, and close-to $\beta = -1$ correlations in the time scale $T \sim \mu\text{s}$.

series, and $\beta = -2$ of a maximum-correlated time series. It is instructive to present both experimental cases of coherent light and pseudothermal light in the same figure because in this way the different nature of the two systems is put into evidence. The coherent light from the laser is uncorrelated, and gives $\beta = 0$ at all time scales T . Coherent light is thus trivially scale independent. For pseudothermal light, the case is different. For large counting intervals $T > 6\text{ms}$, we find a slope $\beta = 0$, which means that at these poor resolutions T we observe the pseudothermal light as uncorrelated coherent light. When one counts per fixed counting intervals T that are too large, the time series of photon counts will be very small and it makes no sense to calculate a power spectrum. Then, for $T < 6\text{ms}$, the slope β becomes more and more negative, obtaining the minimum value $\beta = -1$ in a broad plateau $0.8\text{ms} < T < 2\text{ms}$. This might be the effect of a small number

N of regions with non-uniformities in the disc that is rotating in the laser light at the specific frequency of $\nu = 38.46\text{Hz}$. The regions with non-uniformities might create artificial patterns that have a period of $t = 1/N \times 1/38.46\text{Hz} = 26/N$ ms, and probably correspond to the structures that we already saw in the case of pseudothermal light in Fig. 7 (bottom panel). These structures are of the scale of ms and thus of the same time scale as the $\beta = -1$ plateau in the $T \sim \text{ms}$ region. The disc has a constant rotation speed, but the number of photons that passes the disc per unit of time is random. If it is the interplay between the constant disc speed and the random number of photons that produces this plateau in the function $\beta(T)$, then it deserves more investigation why the power spectrum behaves like $1/f$ [26]. For counting intervals $T < 0.8\text{ms}$, the slope β become less negative (loss of correlation) up to $\beta = -0.3$: we are looking beyond the artificial correlations introduced by the rotating non-uniformities of the disc. The slope $\beta = -0.3$ persists down to $T = 100\mu\text{s}$, indicating minimal correlations. Then, when the counting interval becomes finally of the order of the coherence time of the photon bunches of the order of μs , the slope β becomes more negative again. The maximally negative value that we calculated in this region was $\beta = -0.8037$ for $T = 0.5\mu\text{s}$, very close to the $\beta = -1$ value of $1/f$ noise that gives rise to time series that have a fractal scale-invariant autocorrelation function. The time scale $T = 0.5\mu\text{s}$ is indeed in correspondence with the coherence time we already found for the photon bunches, $\tau_{coh} \sim \mu\text{s}$ [see Fig. 5, panel(e)]. For such small counting intervals T , the time series of photon counts becomes extremely large and, as a consequence, the calculation of the power spectrum becomes prohibitively tedious. The calculation of the value of β in the region of $T < 3\mu\text{s}$, was based on only a few percent of the available data. It is possible that the precise value of the β minimum in this region shifts somewhat if more data is included. Then, for even smaller counting intervals T , the slope β rises again and goes towards zero, indicating that the time scale goes beyond the correlation time inside a photon bunch.

4.5. Conclusions

We used a setup with a ground glass disc rotating in a beam of coherent laser light, with the goal to realise a phase transition in light between the coherent and the pseudothermal regime. When the disc stands still ($\nu = 0\text{Hz}$), coherent light is observed with photons that are not correlated in time between each other. When the disc is rotating ($\nu > 0\text{Hz}$), pseudothermal light is observed with photons that are grouped together or bunched. This experiment might be considered as a quantum equivalent for the dripping faucet, and thus we have it nicknamed as the *dripping laser*. The coherence time of the bunches is related to the rotation speed of the disc. In the phase transition between these two regimes of light, coherent and pseudothermal, the rotation speed of the disc can serve as an (external) control parameter. A thorough study of this phase transition as a function of the speed of the disc will be

the subject of a future study [26]. In the second part of this contribution, we analyzed and compared the power spectra of the time series of photon counts per fixed counting interval T , (n_1, n_2, n_3, \dots) , for two cases:

- (i) in the coherent regime with the disc standing still, and
- (ii) in the pseudothermal regime with the disc rotating at the constant speed of $\nu = 38.46\text{Hz}$.

We found that the counting interval T could serve as an (internal) control parameter. In the case of pseudothermal light, the $1/f^\beta$ power-law behaviour of the power spectrum depends on the resolution of the counting interval T with the mean time-interval between the successive photons $\overline{\Delta t}$. More in particular, for low resolutions ($T \gg \overline{\Delta t}$), pseudothermal light is observed as coherent light without correlations ($\beta = 0$). Non-zero, negative values of β however, reveal at what time scales correlations between the photons show up. In particular, we found minima for β , close to $1/f$, both in the ms and in the μs time scale. We interpret the minimum for $T \sim \mu\text{s}$ as *intrinsic*, that is to say, coming from the irregularities in the ground glass disc that disperse that light and that are responsible for the bunching effect. We interpret the minimum for $T \sim \text{ms}$ as *artificial*, meaning that it comes from the periodic motion of the disc. A future study [26], where we will study the angular velocity of the disc as an external control parameter, will make it probably possible to confirm these interpretations. For coherent light, $\beta(T) = 0$ and its time series is uncorrelated at all time scales. We want to understand better the physical meaning of the parameter β , in between its limiting values $\beta = 0$ (uncorrelated time series) and $\beta = -2$ (maximally correlated time series), and whether the specific value of $\beta = -1$ can be considered as the signature of a critical point at which chaos starts to set in. We expect that the study of a system in transition between a random and a correlated regime, such as the dripping laser, might offer us more insight.

5. Conclusions on fractal scale invariance in chaotic time series

It was shown that the fluctuation in the spectrum generated by the logistic map exhibit non-trivial scale invariance (fractal or self similar). This scaling behaviour of the energy fluctuation has been observed in random shell model (TBRE) calculations as well as in shell model calculations with realistic interactions in the spectrum of 48Ca , also in RMT [9, 12]. Since scale invariance is observed in several classical chaotic phenomena, as well as in phase transitional critical points (geometrical fractals, dripping faucet experiments, etc.), this result suggests a possible underlying connection between classical and quantum chaos. This is an open question which we shall continue to investigate.

We produced experimentally pseudothermal light using the setup with a rotating ground glass disc of Refs. 22 and 25, with a coherence time of some microseconds, to compare

its statistical properties with those of coherent laser light. Usually, histograms of the photon counts per fixed counting time-interval are used to distinguish between both types of light: histograms of photon counts (pseudo)thermal light follow the Bose-Einstein distribution, whereas histograms of photon counts of coherent light follow the Poisson distribution. We interpret the series of photon counts per fixed time interval T however as a time series, and use their power spectra as a statistical tool to analyse them. We use the counting time interval T as an internal control parameter (the resolution with which the time series is studied), and find that the slope of a linear fit to the power spectra behaves very differently with T in the two cases. More in particular, $\beta(T) = 0$ independently of the time resolution T in the case of coherent

laser light, indicating that it is uncorrelated at all time scales (trivially time-scale independent). For (pseudo)thermal light however, $\beta(T)$ starts at 0 for poor resolutions, but develops clear minima that indicate time scales with maximal correlation. A more thorough study is underway [26].

Acknowledgments

This work was supported in part by PAPIIT-UNAM and Conacyt-Mexico. We wish to thank M. Procopio, M. Grether, E. López-Moreno, E. Patiño, O. Rosas, and Alfred U'Ren for practical help and valuable discussions. We are also grateful to L. Benet for his most useful comments.

-
- i.* The correlation length ξ is related to the behaviour of the correlation function $\Gamma(r)$. Near a critical point, the correlation function has the Ornstein-Zernike form $\Gamma(r) \sim r^{-p} e^{-r/\xi}$ when $T \rightarrow T_{crit}$ (see e.g. Ref. 6).
- ii.* For a given time series δ_n , the power spectrum is defined as $S(f) = |\mathcal{F}_f\{\delta\}|^2$, where $\mathcal{F}_f\{\delta\}$ denotes the component of the discrete Fourier transform of δ , having frequency f .
1. H.-J. Stoeckman, *Quantum Chaos*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999).
 2. O. Bohigas, M.-J. Giannoni, and C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984) 1.
 3. Mehta M.L., *Random Matrices*, 2nd ed. (Academic Press, New York London, 1991).
 4. R. Aurich, M. Sieber, and F. Steiner, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 483; Bogomolny *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1477.
 5. M.V. Berry and M. Tabor, *Proc. R. Soc. London A.* **356** (1977) 375.
 6. K. Huang, *Statistical Mechanics*, Second Edition (John-Wiley and Sons 1987).
 7. T.P.J. Penna, P.M.C. De Oliveira, J.C. Sartorelli, W.M. Goncalves, and R.D. Pinto, *Phys. Rev. E* **52** (1995) R2168.
 8. A.L. Goldberger, D.R. Rigney, and B.J. West, *Chaos and fractals in human physiology. Sci. Am.* **262** (1990) 42.
 9. A. Relaño, J.M.G. Gómez, R.A. Molina, J. Retamosa, and E. Faleiro, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 244102; *Phys. Rev. E* **66** (2002) 036209; E. Faleiro *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 244101.
 10. R.J. Creswick, H.A. Farach, and C.P. Poole Jr. *Introduction to renormalization group methods in physics.*, First Edition (John-Wiley and Sons 1992).
 11. C.-K. Peng *et al.*, *Phys. Rev. E* **49** (1994) 1685; C-K. Peng, S. Havlin, H.E. Stanley, and A.L. Goldberger, *Chaos* **5** (1995) 82.
 12. E. Landa *et al.*, *Rev. Mex. Fís. S* **54** (2008) 48.
 13. M.S. Santhanam, N.J. Bandyopadhyay, and D. Angom, *Phys. Rev. E* **73** (2006) 015201.
 14. O.E. RöSSLer, in *Synergetics: A Workshop*, edited by H. Haken (Springer, Berlin, 1977), p. 174.
 15. R.S. Shaw, *The Dripping Faucet as a Model Chaotic System* (Aerial, Santa Cruz, 1984).
 16. R.M. May, *Nature* **261** (1976) 459.
 17. J.L. McCauley, *Chaos, Dynamics and Fractals* (Cambridge University Press 1993).
 18. M. Sozanski and J. Zebrowsky, *Acta Physica Polonica B* **36** (2005) 1803.
 19. E. Landa *et al.*, in preparation.
 20. Peitgen, Jörgens and Saupe, *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*, 2nd Edition (Springer, 2004); C. Grebogi, E. Ott, and J.A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1507; J. Vandermeer and P. Yodzis, *Ecology* **80** (1999) 1817.
 21. R.V. Jensen and C.R. Myers, *Phys. Rev. A* **32** (1985) 1222.
 22. P. Koczyk, P. Wiewiór, and C. Radzewicz, *Am. J. Phys.* **64** (1996) 240.
 23. A. Zavatta, S. Viciani, and M. Bellini, *Phys. Rev. A.* **70** (2004) 053821
 24. A. Hayat, P. Ginzburg, and M. Orenstein, *Nature Photon.* **2** (2008) 238.
 25. W. Martienssen and E. Spiller, *Am. J. Phys.* **32** (1964) 919.
 26. R. Fossion *et al.*, to be published.

Chaotic dynamics in collective models of nuclei

This article has been downloaded from IOPscience. Please scroll down to see the full text article.

2010 J. Phys.: Conf. Ser. 239 012002

(<http://iopscience.iop.org/1742-6596/239/1/012002>)

View [the table of contents for this issue](#), or go to the [journal homepage](#) for more

Download details:

IP Address: 132.248.29.219

The article was downloaded on 15/12/2010 at 19:42

Please note that [terms and conditions apply](#).

Chaotic dynamics in collective models of nuclei

P Stránský^{1,2}, M Macek¹, P Cejnar¹, A Frank², R Fossion² and E Landa²

¹ Institute of Particle and Nuclear Physics, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, V Holešovičkách 2, 180 00 Prague, Czech Republic

² Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 70-543, 04510 México, D.F., Mexico

E-mail: pavel.stransky@nucleares.unam.mx

Abstract. We present results of an extensive analysis of classical and quantum signatures of chaos in the geometric collective model (GCM) and the interacting boson model (IBM) of nuclei. Apart from comparing the regular fraction of the classical phase space and the Brody parameter for the nearest neighbor spacing distribution in the quantum case, we also adopt (i) the Peres lattices allowing one to distinguish ordered and disordered parts of spectra and to reveal main ordering principles of quantum states, (ii) the geometrical method to determine the position where the transition from order to chaos occurs, and (iii) we look for the $1/f^\alpha$ power law in the power spectrum of energy level fluctuations. The Peres method demonstrates the adiabatic separation of collective rotations in the IBM.

1. Introduction

It has been shown in recent years that simple models of nuclear collective dynamics—the geometric collective model (GCM) and the interacting boson model (IBM)—exhibit a high degree of variability in regular and chaotic features with energy and control parameters [1, 2, 3]. The complex dynamics encoded in relatively simple Hamiltonians well position these systems to be laboratories for detailed investigation into classical-quantum correspondence and for testing different approaches of measuring and visualizing chaos. In addition, it appears that the study of chaos can help in understanding the dynamical structure of the systems and allows for observation of new phenomena, such as the quantum phase transitions [4] and the quasi-dynamical symmetry (QDS) [5].

Classical chaos is commonly studied by means of the visual method of Poincaré sections and numerically characterized by quantities derived from Lyapunov exponents. This approach requires the tedious solution of differential equations of motion for a large set of trajectories in order to obtain an overall image of the degree of regularity. To bypass these difficulties, Horwitz *et al* [6] have proposed recently another way to distinguish between regular and chaotic dynamics. When the system, evolving in a flat Cartesian space with some potential, is transformed to be in a free motion on a special curved manifold, the Riemannian geometry gives a very simple condition of stability: a negative eigenvalue of a matrix obtained from the curvature tensor appearing inside the kinematically accessible area of the system implies instability, and thus chaoticity of the motion.

Quantum measures of chaos are based on certain statistical properties of the energy levels, for example on the nearest-neighbor-spacing distribution (and the related Brody parameter ω) [7].

It is clear that the statistics describe only some bulk features of a sufficiently large portion of the spectrum. The method introduced by Peres [8], however, makes it possible to assign regular, chaotic, or a mixed type of dynamics to *individual states*. It uses lattices formed from the expectation values $A_i = \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle$ of an arbitrary operator A plotted against the energies $E_i = \langle \psi_i | H | \psi_i \rangle$. Due to arguments based on the semiclassical EBK quantization, the lattices of points (E_i, A_i) show regular patterns in integrable systems, whereas in the chaotic case the resulting images are formed by a combination of ordered and disordered patterns, whose relative size depends on the degree of chaoticity. Note that the Peres method is entirely visual and can be considered as a quantum analogue of the classical Poincaré sections.

Long-range correlations of eigenlevels are usually studied by the spectral rigidity Δ_3 or the number variance Σ^2 , from which, however, it is difficult to quantify the degree of regularity of a system. Incorporating long-range correlations into quantitative studies has been done by Relaño *et al* [9] considering spectral fluctuation of a time series of deviations between the unfolded eigenenergies and uniformly distributed levels. The ensemble average of the power spectrum obeys the power law $\langle S(f) \rangle = 1/f^\alpha$ where α , bounded between 1 and 2 (for a totally chaotic and an integrable system, respectively), can serve as a measure of regularity.

The aim of this contribution is to establish the standard methods of classical and quantum chaos in the GCM and IBM and then make a step beyond; we use Peres lattices to present the manifestation of QDS by well-pronounced rotational bands for *high-energy* states in the IBM with symmetry breaking interaction switched on.

2. Geometric collective model

We use the GCM in the nonrotating regime, i.e. considering only the vibrations with zero angular momentum \mathbf{J} . The Hamiltonian $H = T + V$ describes quadrupole motions of nuclei. Quantizing the system and separating the vibrational and rotational degrees of freedom by moving into the intrinsic frame we obtain the kinetic term in the form

$$T^{5D} = -\frac{\hbar^2}{2K} \left(\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) + T_{\text{rot}}. \quad (1)$$

The system has in total 5 degrees of freedom which is indicated by the label 5D. K is a mass parameter and (β, γ) are the well-known Bohr (shape) coordinates. For states with $J = 0$ the rotational part T_{rot} vanishes. The potential (with adjustable parameters A, B, C) reads as

$$V = A\beta^2 + B\beta^3 \cos 3\gamma + C\beta^4. \quad (2)$$

There is another way how to deal with the kinetic term in the case of the principal frame at rest. If the 3 rotational degrees of freedom are frozen *before* the quantization is carried out, we get the familiar 2D kinetic term in polar coordinates (β, γ) :

$$T^{2D} = -\frac{\hbar^2}{2K} \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \right). \quad (3)$$

Both expressions (1) and (3) have the same classical limit and offer a possibility to study the influence of the quantization method on the quantum chaotic features of the spectrum. Let us emphasize that only the 5D case represents the standard (nuclear) GCM.

We diagonalize both types of the GCM Hamiltonian in the respective 2D or 5D oscillator bases. Due to scaling properties, only one of the parameters (A, B, C, K) in the classical case, or two in the quantum case, determine the qualitative features of the system. We fix $C = 1$ and move along the path of three connected lines (each described by only one principal control parameter), passing all possible configurations of the system: (i) $B \in (0, 1)$ with $A = -1$,

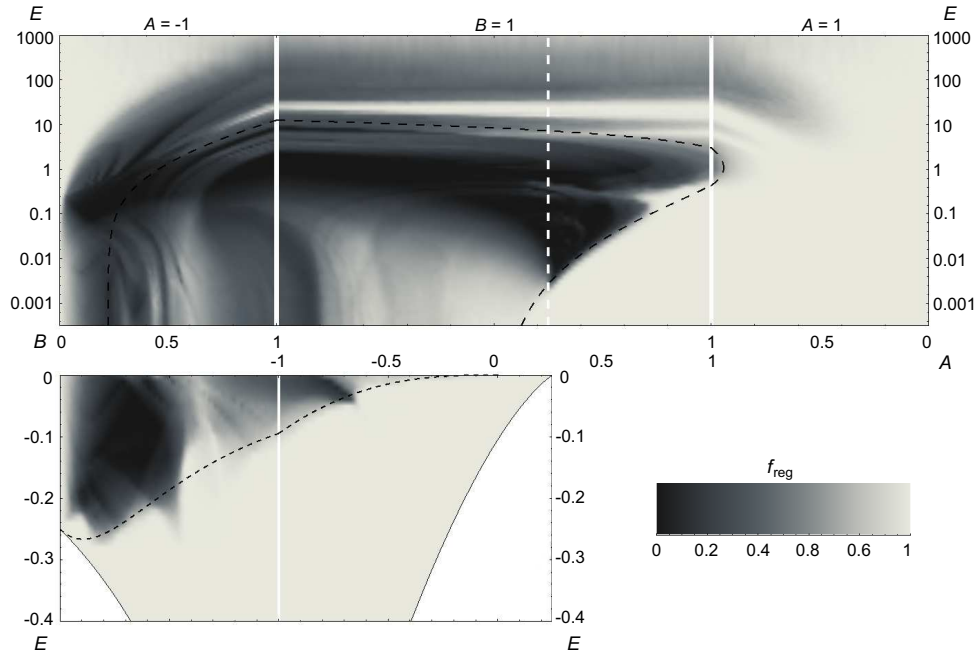


Figure 1. Complete map of the classical regular fraction f_{reg} as a function of control parameters and energy E . The degree of chaos is coded in shades of gray, with light gray (black) corresponding to complete order (chaos). The plot is divided by the thick white lines into three regions of different scaling ($A = -1$, $B = 1$, and $A = 1$, respectively) with free parameters being varied along the horizontal axis. The white dashed line indicates the deformed-spherical shape phase transition. The black dashed line corresponds to the convex-concave transition of the border of kinematically accessible area.

(ii) $A \in (-1, 1)$ with $B = 1$ where the deformed-spherical ground-state shape phase transition is crossed at $(A, B) = (1/4, 1)$, and (iii) $B \in (1, 0)$ with $A = 1$. In the quantum case we consider the classicality constant $\kappa = \hbar/K$ as the second fundamental parameter, which influences only the density of energy levels [10]. We choose two independent Peres operators identified with (i) the square of the angular momentum operator L^2 connected with rotations about angle γ , which is the $J = 0$ projected $O(5)$ invariant (the seniority operator) in the 5D case or the $O(2)$ invariant in the 2D case, and (ii) the nonintegrable perturbation $H' = \beta^3 \cos 3\gamma$ (the Hamiltonian is integrable for $B = 0$ with L^2 being the second integral of motion).

Figure 1 presents the complete map of the classical regularity quantified by the regular fraction of the classical phase space f_{reg} . Leaving the leftmost and the rightmost $B = 0$ integrable limits, we observe a progressive retreat of regularity with increase of the perturbation B . In the intermediate domain the structure is extremely complex, forming sharp branching valleys and curved edges. At $B \approx 0.6$ the regularity achieves a well-pronounced maximum, which has been shown to be tightly connected with the IBM semiregular arc [11]. The shape-phase transition region (the white vertical dashed line) is characterized by accentuated chaoticity. The dashed black line encircles the region where the kinematically accessible region in the $(x \equiv \beta \cos \gamma, y \equiv \beta \sin \gamma)$ plane has concave shape. The lower part of the line corresponds exactly with the curve obtained by the Horwitz's geometrical method, which should separate regions with regular and chaotic dynamics. However, it is evident from the figure that this criterion provides only an estimation.

The decay of regular pattern in the quantum Peres lattices when introducing nonintegrability is demonstrated in Figure 2. Starting from a totally ordered case (panel a), small nonintegrable

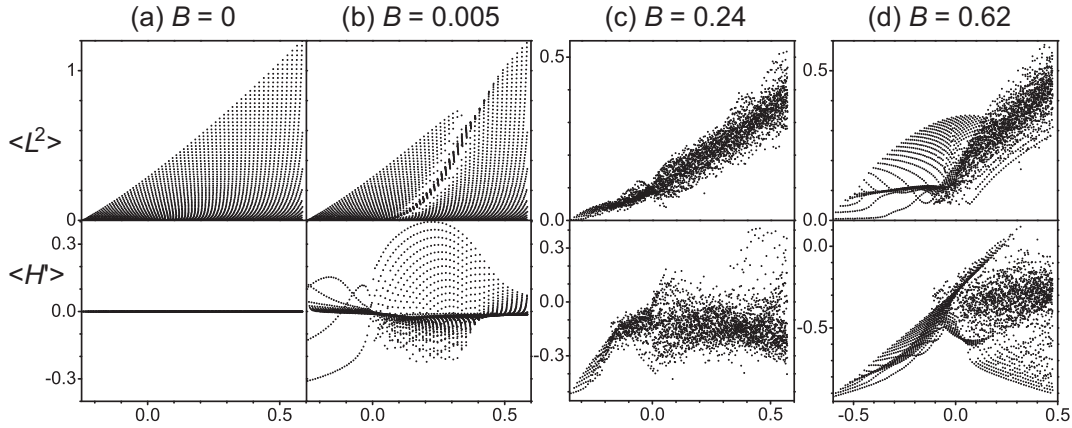


Figure 2. Peres lattices of the 2D GCM for $\kappa = 2.5 \cdot 10^{-5}$ and $A = -1$ with 3000 levels plotted. The transition between integrable (panel a) and nonintegrable (panels b–d) regimes are observed.

perturbation causes disturbances only in a part of a lattice (panel b). Maximal disorder is reached at $B = 0.24$. For higher B the progression reverses and new regular structures start to appear, which is observed in both $\langle L^2 \rangle$ and $\langle H \rangle$ lattices. The regular islands can be identified with remnants of classical tori.

Figure 3 (a) presents the power spectrum for the method of the $1/f^\alpha$ noise in an integrable case of the model. The value of the exponent $\alpha = 2$ is in full agreement with the prediction of the theory [9].

In the quantum case we use two measures of regularity: (i) the adjunct $1 - \omega$ of the Brody parameter, which is estimated by the χ^2 fit applied to the nearest-neighbor spacing distribution of the unfolded levels, and (ii) the quantity $\alpha - 1$ of the $1/f^\alpha$ noise in the averaged power spectrum of energy level fluctuation. In order to obtain the energetic dependence of the regularity, we divide the calculated spectra (usually 30 000 well-converging levels) into windows of 1000 levels. Both quantum measures can then be directly compared with f_{reg} [see Figure 3(b)]. The

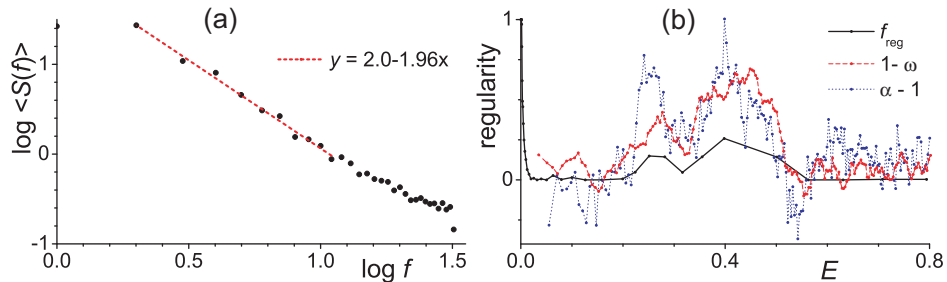


Figure 3. (a) Average power spectrum of the $1/f^\alpha$ noise method in the integrable γ -soft case ($A = -1, B = 0$) of the 2D GCM with $\kappa = 4 \cdot 10^{-6}$, using 500 sets of 64 levels, starting from level 8000. We use the simplified notation $x \equiv \log f$ and $y \equiv \log \langle S(f) \rangle$. (b) Comparison of the classical f_{reg} and quantum measures of regularity $1 - \omega$ and $\alpha - 1$ for the 2D GCM in the mixed dynamics configuration with $A = 0.25, B = 1$ and $\kappa = 1 \cdot 10^{-6}$. The standard errors of the measures are 3%, 5% and 20%, respectively.

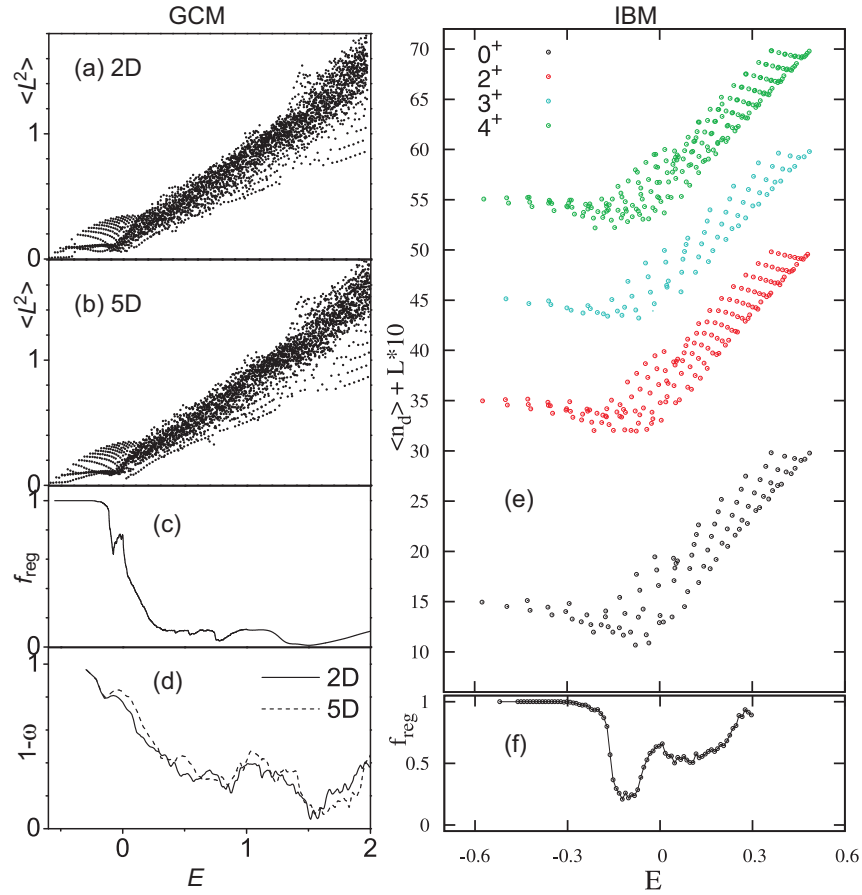


Figure 4. First column: Classical and quantum chaos of the GCM for $B = 0.62$. Peres lattices for $\kappa = 1 \cdot 10^{-4}$ are compared for 2D (a) and 5D (b) quantization. (c) Classical regular fraction of the phase space f_{reg} and (d) corresponding quantum counterpart—Brody parameter ω calculated for $\kappa = 2.5 \cdot 10^{-5}$. Second column: IBM dynamics at $\chi = -0.9$ and $\eta = 0.5$. (e) Peres lattices of the n_d operator for different angular momenta ($N = 30$ bosons), and (f) corresponding fraction of regularity f_{reg} .

correspondence is apparent, though the quantum measures tend to overemphasize the regularity.

Figure 4 confronts the Peres lattices and the measures of chaos for both 2D and 5D quantization schemes. The lattices are displayed in panels (a) and (b), showing small differences in structure, but the distribution of regular and chaotic areas is equal. This is in agreement with the negligible difference between the 2D and 5D cases of $\omega(E)$ (panel d), which remains within the limits of the standard error in our calculations. Finally, observe the influence of the classicality parameter κ on the level density by comparing panel (a) with Figure 2 (d).

3. Interacting Boson Model

To demonstrate a different application of the Peres method we consider the Hamiltonian [1]

$$H = a \left[\frac{\eta}{N} n_d - \frac{1-\eta}{N^2} Q_x \cdot Q_x \right] \quad (4)$$

with n_d the d -boson number operator (N is a conserved total number of bosons), Q_χ the quadrupole operator, and (η, χ) two external parameters defining the Casten triangle. Its vertices $(\eta, \chi) = (0, 0)$, $(1, 0)$, and $(0, -\sqrt{7}/2)$ correspond to the $O(6)$, $U(5)$, and $SU(3)$ dynamical symmetries, respectively. The system is integrable in the triangle vertices and along the side with $\chi = 0$. The Peres operator we can take any of the Casimir invariants connected with the symmetry groups, but our results are best demonstrated by the choice the $U(5)$ operator n_d .

Recently, some low-energy rotational bands populating the spectrum below the saddle point energy in the axially-deformed part of the Casten triangle were explained analytically using specific $SU(3)$ -like boson condensates [12]. In this contribution we turn to the highly excited states. Figure 4(e) shows the eigenstates of IBM in the arc of regularity in the interior of the Casten triangle, distributed into 4 Peres lattices according to their angular momentum. Apart from a few ordered low-lying states (present also in other parts of the parametric triangle), we may observe two distinct regular regions: one at $E \approx 0$ and the second reaching the highest accessible energy. Surprisingly, the lattices for different angular momentum L form the same pattern there. The analyses based on wave function correlation, $E2$ transitions and moments of inertia reveal that these “regular” energies associate into bands, showing signatures of $SU(3)$ QDS in the $L(L+1)$ excitation energy pattern [13]. This behavior is strongly accentuated along the regular arc. While the low-energy dynamics are almost completely regular in the entire Casten triangle, the partially increased regularity of the arc (relative to the neighboring regions) is brought about essentially by the regular high-lying modes, which has already been shown [1] [this is also supported by the classical fraction of regularity f_{reg} for states with $L = 0$, drawn in the panel (f)]. It suggests a connection between quasi-dynamical symmetry and regularity.

4. Concluding remarks

We have calculated some measures of chaos for the classical and quantum versions of the geometric collective model (we dispose of two different quantum GCM with the same classical limit) and the interacting boson models in the wide range of external parameters and energy, observing good correspondence between the classical fraction of regularity and the Brody parameter that quantifies chaos in the quantum case. This correspondence is supported by the visual observation of the regular and chaotic structures in the Peres lattices.

In addition, we adopted the geometric method by Horwitz *et al* that estimates the position of regular-chaotic transition and follows the convex-concave shape change of the kinematically accessible area border in the GCM, which has been proven analytically [14]. We also adopted the method of $1/f^\alpha$ noise by Relaño *et al*, obtaining expected $\alpha = 2$ exponent in an integrable configuration and a correspondence in the energetic dependence of the measures $1 - \omega$ and $\alpha - 1$ in a configuration with mixed dynamics.

In IBM we have observed a strong correlation between the variation of classical and quantum degrees of regularity and the occurrence rate of the rotational bands. This suggests that the separation of rotational motion from intrinsic vibrational dynamics is enhanced by the intrinsic regularity, while on the other hand, the chaotic intrinsic states are more prone to mixing, if the rotation comes into play; the regular states seem to be protected by their symmetry, in contrast. Different methods of rotational band identification are described in [13], being in full agreement with the results obtained by Peres method.

Acknowledgments

This work was supported by the Czech Science Foundation (202/09/0084), by the Czech Ministry of Education (MSM 0021620859), PAPIIT-UNAM (grant IN113808) and Conacyt, Mexico.

Scale invariance as a symmetry in physical and biological systems: listening to photons, bubbles and heartbeats

R. Fossion^{*,†}, E. Landa^{*}, P. Stránský^{*}, V. Velázquez^{**}, J.C. López Vieyra^{*},
I. Garduño^{**}, D. García[‡] and A. Frank^{*,†}

^{*}*Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México*

[†]*Centro de Ciencias de la Complejidad, Universidad Nacional Autónoma de México*

^{**}*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México*

[‡]*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México,
04510 México, D.F., Mexico*

Abstract. Many dynamical systems from different areas of knowledge can be studied within the theoretical framework of *time series*, where the system can be considered as a *black box*, that only needs to be "listened" to. In this framework, non-correlated series (white noise) and strongly correlated series (brownian noise or periodic series) constitute two extremes. Certain dynamical systems *auto-organize* in a critical state that is characterized by $1/f$ or *flicker* noise. The family of f^β noises ($\beta \leq 0$) is *fractal* because fragments of the series are statistically identical to the original time series. $1/f$ noise ($\beta = -1$) is *critical* because it maximizes important *complexity*-related quantities as *memory*, *information content*, *efficiency* and *fractality*. $1/f$ noise has been observed in classical systems, but also in quantum systems, and could possibly offer a unifying bridge of understanding between the macroscopic and the quantum world. In the present article, we will discuss some examples from both worlds.

Keywords: Time-Series Analysis, Fluctuation Phenomena, Random Processes and Brownian Motion, Noise, Nonlinear Dynamics and Chaos, Quantum Chaos

PACS: 05.45.Tp, 05.40.-a, 02.50.-r, 05.40.Ca, 05.45.-a

*The authors dedicate this work to the memory of Marcos Moshinsky,
Master of Symmetry and Teacher of Teachers*

1. AN APPROACH WITH TIME SERIES

1.1. Time series and power spectra

A *dynamical system* [1] can be any real or hypothetical system that evolves over time. Its mathematical description consists of a *state vector* (a set of real numbers) that describes the system's position and state in ambient and phase space, and a *function* or *rule* that governs in a deterministic way the evolution of the state vector in time. Many dynamical systems are composite systems, and consist of locally interacting parts. A *complex system* [2] is a special type of dynamical composite system, where

under critical circumstances new collective behaviour emerges from the short-range interactions between the constituent parts.

It is not always possible to fully determine all the components of the state vector of the dynamical system. An elegant way to study a great variety of dynamical systems is through the use of *time series*, that follow the evolution of a specific observable as a sequence of data points, measured typically at successive times spaced at uniform time intervals. Not only do time series offer valuable information on the internal dynamics of the system that produces them, but the same theoretical methods can be used to analyze time series of very different systems. In this contribution we will study time series of both classical and quantum systems.

Time series can be (i) *periodic*, (ii) *random*, or (iii) *non-periodic but correlated* [3]. One way to distinguish between these three classes of time series is with the corresponding *power spectrum*, which is the square of the Fourier transform of the time series. The power spectrum of a periodic series has one or a discrete number of peaks, that indicate the dominant frequencies. The power spectrum of a random series is continuous and flat because no dominant frequencies are present. By analogy with white light that is composed of equal amounts of all frequencies, a random time series is also called *white noise* [4, 5]. The power spectrum of a non-periodic but correlated time series is also continuous, but because of the correlations some frequency scales will contribute more to the series than others. If the spectral density at low frequencies is greater than that at high frequencies, the overall effect of low frequency (rare) events has a greater influence than that of high frequency (common) events per unit frequency. Noise that contains an excess of low-frequency components is said to have a *reddened* noise spectrum.

1.2. Scale invariance as a symmetry

Coastlines and natural frontiers have been found to be *fractal*. A coastline is a *scale invariant*, it looks self-similar at any scale and does not have a characteristic length. More in particular, the length of a coastline \mathcal{L} depends on the length of the ruler l as a *power law* [6, 7],

$$\mathcal{L} = l^{1-D}, \quad (1)$$

where D is the fractal dimension. A coastline with $D = 1$ would appear straight the map, whereas a coastline with $D = 2$ would consist of an infinite self-similar sequence of bays within bays without upper or lower limit. Natural coastlines have a fractal dimension $1 < D < 2$. Also time series can be fractal, when the fragments of the time series are self-similar to the original time series. An impressive example is the heartbeat time series that is self-similar for time scales ranging from 10 seconds up to several hours [8, 9]. If the time series is fractal, then the power spectrum $S(f)$ must also be a scale invariant and behaves as a power law,

$$S(f) \sim f^\beta, \quad (2)$$

where β is the *spectral density exponent*, with $\beta = 0$ for white noise and $\beta < 0$ for reddened noise. In a log-log representation, the power law translates into a straight line, with β as the slope. Such broadband power spectra, without a characteristic frequency, have indeed been observed for time series of the healthy heart [10].

Also the autocorrelation function $C(\tau)$ must be a scale invariant. This can be understood in the following way. According to the Wiener-Khinchin theorem, the autocorrelation function is the inverse Fourier transform of the power spectrum,

$$C(\tau) = F^{-1}(S(f)). \quad (3)$$

If the power spectrum obeys the power law of eq. (2), and we apply a scale transformation in the time domain, $\tau \rightarrow \tau' = a\tau$, then,

$$C(a\tau) = F^{-1}\left(\frac{1}{a} S\left(\frac{f}{a}\right)\right) = a^{-\beta-1} F^{-1}(f^\beta) = a^{-\beta-1} C(\tau), \quad (4)$$

and the autocorrelation function thus conserves its behaviour after time transformations (up to the scaling factor $a^{-\beta-1}$). The general solution of this equation is that the autocorrelation function $C(\tau)$ itself is also a power law. White noise ($\beta = 0$) is a particular case, where

$$C(a\tau) = \frac{1}{a} C(\tau), \quad (5)$$

so that the autocorrelation function for white noise is a delta function, $C(\tau) = \delta(\tau)$, since delta functions obey the scaling law $\delta(a\tau) = |a|^{-1} \delta(\tau)$. Flicker noise or $1/f$ noise ($\beta = -1$) is another particular case, where

$$C(a\tau) = C(\tau), \quad (6)$$

with as solutions $C(\tau) = \text{constant}$, or the physically more significant case $C(\tau) = -\log(\tau)$. Rescaling a logarithmic function gives $\log(a\tau) = \log(\tau) + \log(a)$, where $\log(a)$ is a constant that does not contribute to the time evolution of the autocorrelation function, so that the scaling relation of eq. (6) is approximately satisfied, $C(a\tau) \cong C(\tau)$.

2. PHASE TRANSITION AND CRITICAL BEHAVIOUR IN TIME SERIES

2.1. Correlations driving a phase transition

The spectral density exponent β is a measure for the amount of correlations present in the time series. The correlations are zero for white noise ($\beta = 0$), large for brownian noise ($\beta = -2$), and infinite for a periodic series ($\beta = -\infty$). If the correlation strength β is used as a *control parameter*, and some complexity-related observable as an *order parameter*, the time series can be observed to undergo a phase transition with $1/f$ noise as the critical point.

What the complexity-related order parameter is concerned, there is no unifying consensus definition of complexity. In a series of papers [11], the meaning of complexity has been investigated in the context of general and biological time series. For practical applications, several entropy-based measures have been proposed. These traditional algorithms may lead to misleading results because an increase in the entropy of a system is usually but not always associated with an increase of complexity. For example, these algorithms may indicate higher entropy/complexity values for randomized surrogate time series compared to original time series even when the original series represent the output of complex systems and incorporate correlations over multiple spatio-temporal scales. However, the processes of generating surrogate data are designed to destroy correlations and degrade the information content of a signal. In these cases, a higher entropy value only reflects an increase in the degree of randomness and not an increase in the complexity of the time series. Intuitively, complexity is inversely related to understanding, i.e., the more we are able to provide a short and simple description of a phenomenon, the less complex it is. Uncorrelated random signals (white noise) may be highly unpredictable even in cases where the past history is fully known but, at a global level, they admit a very simple description and, therefore, are not really “complex”. From a complex-systems approach, random uncorrelated series are among the least complex signals, and those with long-range correlations are among the most complex.

What the correlation-strength control parameter is concerned, it is possible to produce time series with different spectral exponents β within a certain range ($0 \geq \beta \geq -3$) by *FFT filtering* of white noise [12, 13]. More specifically, one starts with a white-noise signal $F_0(t)$, and one calculates the Fourier transform to obtain the amplitude spectrum. This amplitude spectrum is multiplied by a factor $\omega^{\beta/2}$ (the filter). The power spectrum is obtained by taking the square of the amplitude spectrum (see Fig. 1). The corresponding time series $F_\beta(t_0)$ is obtained by taking the inverse Fourier transform of the amplitude spectrum (see Fig. 2(a)),

$$F_\beta(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t_0} \omega^{\beta/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dt F_0(t) e^{-i\omega t} \right). \quad (7)$$

This formula is valid for the continuous case. For the practical purposes of this contribution, we will use the discrete form which uses sums instead of integrals. The correlation in the time series rises from white noise towards reddened noise, translating into power spectra with steeper slopes in double-logarithmic scale. The most correlated noise is a periodic series that would appear as a single peak (vertical slope) in the power spectrum. The less correlated noises (lower β) evolve more rapidly and have many more zero crossings than the more correlated noises (higher β). The mean-weighted frequency, $\bar{f}_\beta = \sum_f f P(f) / \sum_f P(f)$ (indicated with arrows in Fig. 1 for different β) is proportional to the total number of zero crossings for each time series, and is a measure for the relative speed with which each time series evolves. To be able to compare time series with different β , fragments of the time series should be taken that are equally dense. This can be achieved by taking from every time series the same number of mean-weighted periods, $\bar{t}_\beta = 1/\bar{f}_\beta$ (see Fig. 2(b)).

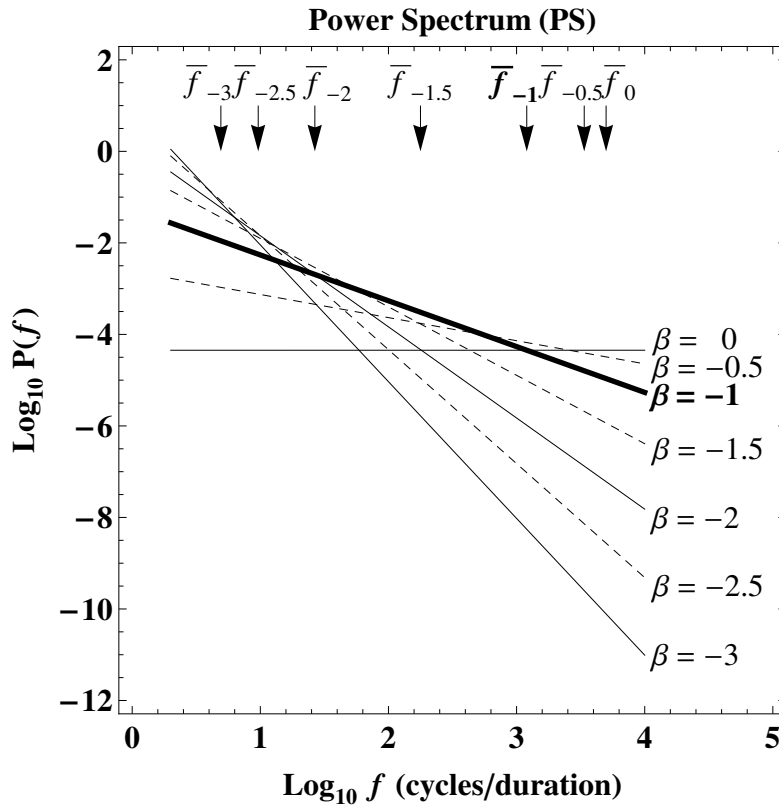


FIGURE 1. Power spectra with spectral density exponents $\beta = 0$, $\beta = -1$, $\beta = -2$, $\beta = -3$ (full lines), and $\beta = -0.5$, $\beta = -1.5$, $\beta = -2.5$ (dashed lines), generated with the FFT filtering of eq. (7). All power spectra have the same frequency range $1 \leq f \leq 10^4$ (cycles/duration), and the same integrated power $P_{it} = \sum_f P(f)$. The mean-weighted frequency $\bar{f}_\beta = \sum_f f P(f) / \sum_f P(f)$, is indicated with an arrow for each spectrum, $\bar{f}_0 = 4995.1$, $\bar{f}_{-0.5} = 3371.96$, $\bar{f}_{-1} = 1200.59$, $\bar{f}_{-1.5} = 177.794$, $\bar{f}_{-2} = 26.6421$, $\bar{f}_{-2.5} = 9.62837$ and $\bar{f}_{-3} = 4.921$.

2.2. $1/f$ as a fingerprint of critical behaviour

In a phase transition, the dynamical system goes from one regimes to another when passing the critical point. In the power spectrum of Fig. 1, one can observe two competing degrees of freedom. On the one hand, the flat white-noise power spectrum ($\beta = 0$) corresponds to a large range of frequency scales but does not allow correlations. On the other hand, a single-peaked vertical power spectrum of a periodic series ($\beta = -\infty$) will be maximally correlated but is confined in one single dominant frequency. Both white noise and a periodic series can be mathematically described in a rather simple way and are not really “complex”. Somewhere in the middle of the two extremes, both degrees of freedom of frequency scales and correlations can contribute to a very rich and complex noise. Let us have a look at how some complexity-related observables vary with control parameter β , see Fig. 4.

One possible complexity measure is the *memory* of the time series, as expressed by

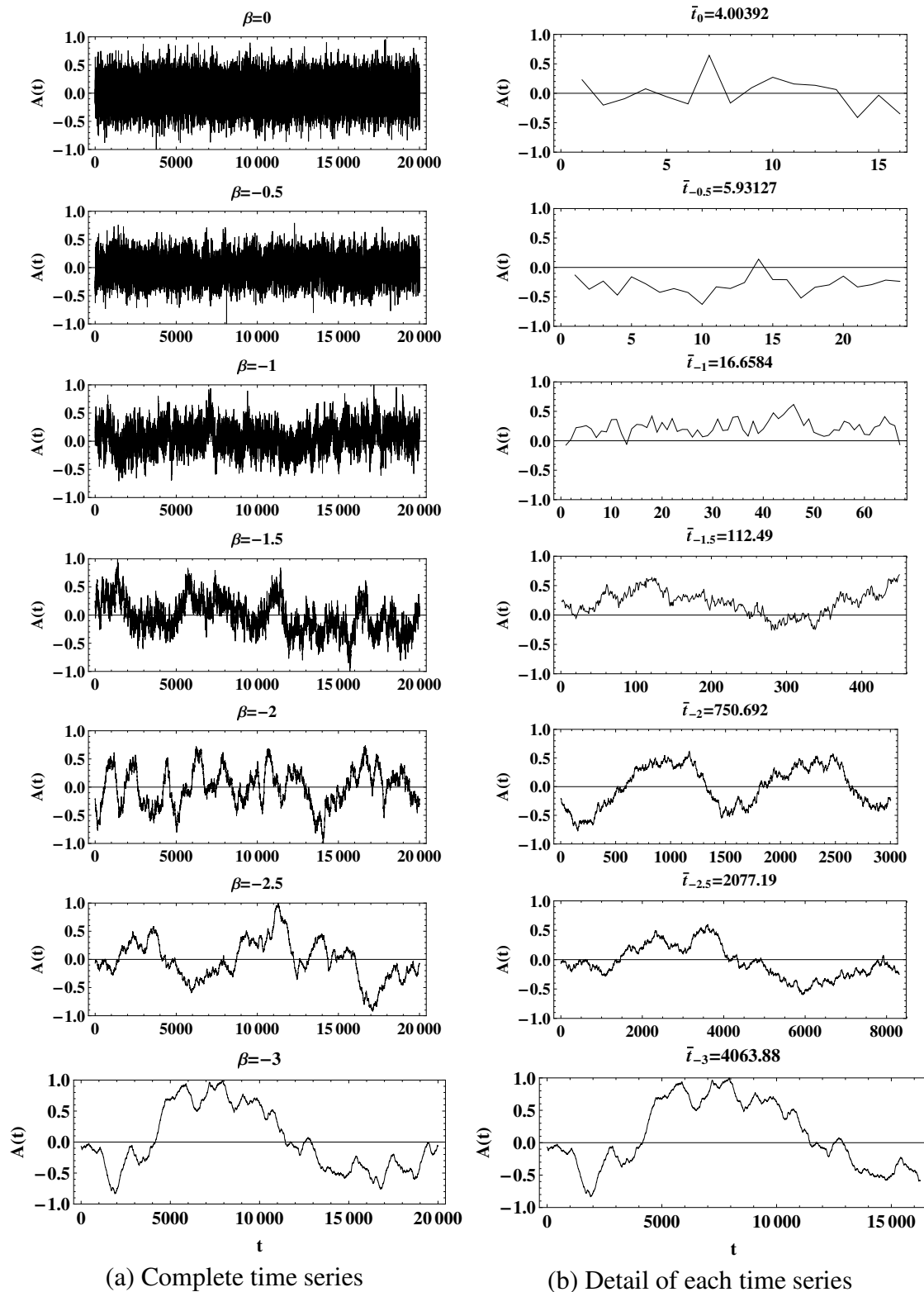


FIGURE 2. Time series corresponding to the power spectra of Fig. 1. The higher correlated time series (larger β) evolve more slowly and have less zero crossings per unit time than the less correlated time series (lower β). (a) Complete time series. (b) Details of the previous time series corresponding to four weighted periods $\bar{t}_\beta = 1/\bar{f}_\beta$. The mean-weighted periods for each time series are $\bar{t}_0 = 4.00392$, $\bar{t}_{-0.5} = 5.93127$, $\bar{t}_{-1} = 16.6584$, $\bar{t}_{-1.5} = 112.49$, $\bar{t}_{-2} = 750.692$, $\bar{t}_{-2.5} = 2077.19$, $\bar{t}_{-3} = 4063.88$

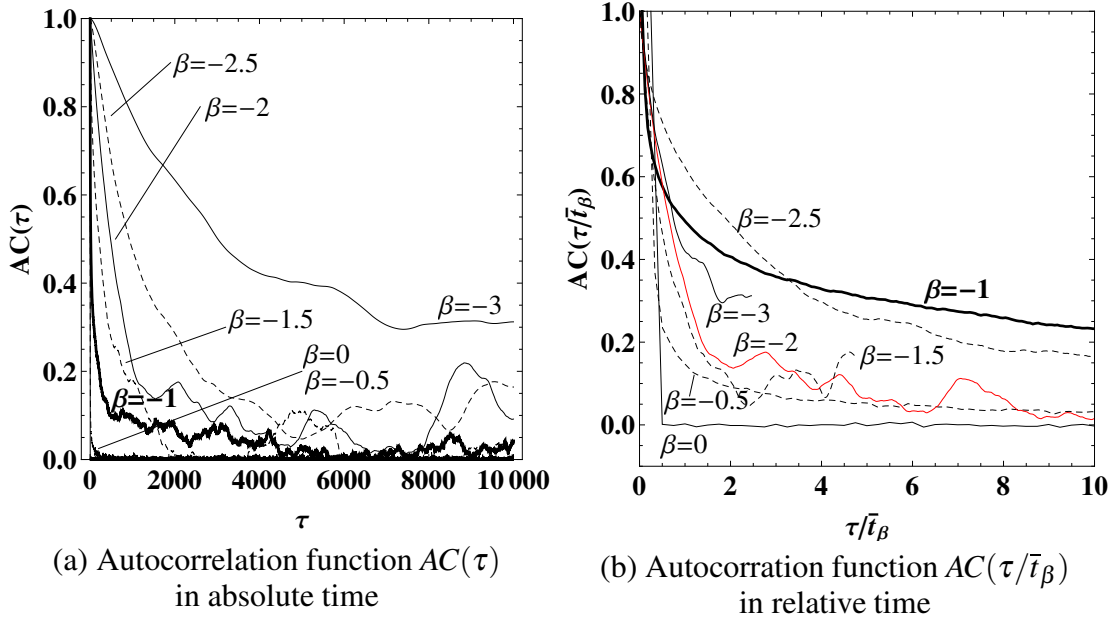


FIGURE 3. (a) The autocorrelation functions of the different time series cannot mutually be compared in absolute time t . (b) If the autocorrelation functions of the different time series are compared in relative time $(\tau/\bar{\tau}_\beta)$, then it can be seen that noises with lower spectral exponents ($|\beta| < 1$) decay more rapidly than noises with higher spectral exponents ($|\beta| > 1$). Of all possible noises, flicker noise ($\beta = -1$) has the slowest decaying autocorrelation function.

the autocorrelation function $C(\tau)$, that expresses how quickly the time series loses similarity with a copy of itself displaced with some delay time τ . In a previous section, basing on the Wiener-Khinchin theorem and symmetry scaling considerations, we derived specific solutions for the autocorrelation functions of time series with different β . The autocorrelation function of white noise decays as a delta function and does not have any memory. The general solution for the autocorrelation function is a power law. Auto-regressive or Markov processes are characterized by exponentially-decaying memory, and any power law decays more slowly than any exponential [5]. The autocorrelation function for $1/f$ noise is a logarithmic function, which decays more slowly than any power law. $1/f$ noise thus has the largest possible memory. The closer β is to -1 , the greater the influence of the distant past when compared with the influence of the recent past. When $\beta = -1$, present events are approximately equally correlated with events from the recent and the very distant past [14]. In Fig. 3, the autocorrelation functions for the f^β time series of Fig. 2 have been calculated as the inverse Fourier transforms of the spectra of Fig. 1. In panel (a), where the autocorrelation functions are compared in an absolute time, it would seem that for the stronger the correlations (larger β), the longer the memory effect lasts. Instead, in panel (b), where the autocorrelation functions are compared in a time relative to the mean-weighted period $\bar{\tau}_\beta$, it can be seen that $1/f$ noise has the longest memory. More in particular, the strongly correlated Brownian noise ($\beta = -2$), although composed in majority out of low-frequency and thus large-period waves, has only local, short-term correlations between neighbouring points [15].

A system for which present events are influenced by the systems past history must have some mechanism for information storage [14]. What is the *information content* of f^β noises? $1/f$ noise requires approximately 1 memory element (1 state variable) per decade of frequency. Slightly fewer are required to describe $1/f^{1/2}$ and $1/f^{3/2}$ noise, with the value decreasing towards zero per decade as the power spectrum $P(f)$ approaches white noise ($\beta = 0$) or Brownian noise ($\beta = -2$). Brownian noise requires a total of 1 state variable.

The power-law behaviour of the power spectrum $P(f) \sim f^\beta$ of eq. (2) implies that the power spectrum of f^β noises is a *scale invariant*. In white noise ($\beta = 0$), if one integrates the power of the power spectrum per frequency decade, then one finds that the contribution increases a factor ten per decade. White noise is thus divergent at high frequencies, while being convergent at low frequencies. This translates into the fact that the mean value of a specific white-noise time-series converges as the value is averaged over longer and longer time intervals, but that its instantaneous value is undefined. On the other hand, in the power spectrum of brownian noise ($\beta = -2$), the power contribution decreases a factor ten per decade. Brownian noise is convergent towards higher frequencies but diverges towards lower frequencies. A specific brownian time series is thus perfectly well defined at every single time, but it does not have a well defined mean value for large time intervals, as the random-walk function wanders farther and farther away from the initial value. In the power spectrum of $1/f$ noise, every frequency decade contributes with exactly the same amount of power (proportional to $\log 10$) [4, 5], a perfect scaling property that we already recognized in the time scaling of the autocorrelation function, see eq. (6). $1/f$ noise thus constitutes a “golden mean” in between white noise and brownian noise. The spectrum is divergent both towards low and high frequencies, and as a consequence a specific $1/f$ time series does not have a well-defined long-term mean nor a well-defined value at a single point. However, as the divergence is slow (logarithmic), frequency cutoffs can be applied to the power spectrum at unnecessary low or high frequencies without the time series changing its appearance [12].

A similar observation is made in electronics, where electrical pulses are studied in the time domain and in the frequency domain. A fast pulse rise in time corresponds with a fast decaying amplitude spectrum, and a fast decaying pulse in time corresponds with a fast raising amplitude spectrum. As a consequence, there must be a point in between where time and frequency have the same response. This point corresponds with a pulse decaying as $t^{-0.5}$ in time, and an amplitude spectrum decaying with the same power $f^{-0.5}$. Obviously, the power spectrum, being the square of the amplitude spectrum, behaves as $1/f$. At least in a limited sense, *1/f noise is thus its own Fourier transform*, a property it only shares with the Gaussian function [16].

$1/f$ can be seen as the fingerprint of a system that has *maximized its efficiency* within its own limits. This statement is based on the assumption that a biosystem operates so as to maximize its efficiency [5, 17], and on the empirical observation that many (if not

all) biological time series that are involuntary or autonomous behave like $1/f$ when they are healthy (see the following Section on Biological Time Series). In contrast, with age, disease or bad habits a deviation from $1/f$ is observed towards either more random or more regular (read: rigid) regimes. Healthy biological systems are thought to function in a critical regime, characterized by $1/f$ biological signals.

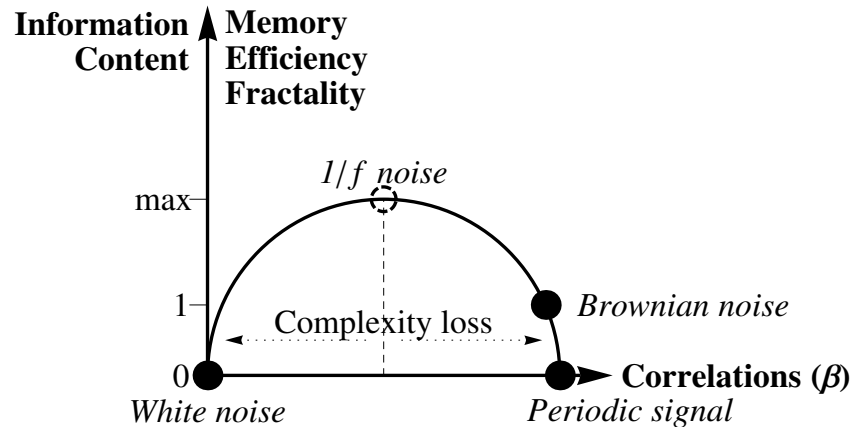


FIGURE 4. A schematic phase diagram for f^β noises, with the correlation strength β as a control parameter and some complexity-related observable as the order parameter. $1/f$ noise can be seen as a critical point, that maximizes memory, efficiency, fractality and information content ($1/f$ noise represents at least 1 unit of information per frequency decade, whereas brownian noise 1 unit in total and white noise 0 [14]). Complexity can be lost either by a loss of correlations when the time series degenerates towards a more random (white) noise, or by an increase of the correlations when the time series becomes more regular (rigid). Figure adapted from [18].

3. EXAMPLES OF $1/f$ FROM THE CLASSICAL AND QUANTUM WORLDS

3.1. Music

3.1.1. Music as an artistic expression of a dynamical world

Plato and Aristotle agreed that in some fashion all the fine arts “imitate” Nature. However, music is the least imitative of the arts, and a question that has long troubled philosophers is *what does music exactly imitate* [13, 19]? Music, or at least its more slowly varying quantities such as loudness and instantaneous frequency, have been found to follow $1/f$ behaviour, a property that appears to be largely independent of the musical style or the composer [20]. On the other hand, $1/f$ is also commonly found in the soundscapes of natural and urban settings, at least in the frequency range [0.2Hz,5Hz] [22]. For lower frequencies, the power spectrum of rural soundscapes appears somewhat steeper, corresponding with more regular and predictable noise, whereas for the urban landscapes it appears more flat, corresponding with more random noise. Furthermore, whereas a still image of the world, e.g. the curve of a mountain range, can be approximated by a random walk (Brownian behaviour), the dynamical world, made up of quantities constantly

changing in time, display a wealth of fractal-like fluctuations that have $1/f$ spectral densities ([23] as cited in [19]). Music may thus mirror the subtle statistical property of the world of how it evolves in time [19, 13]. The scaling properties of the power spectrum and of the autocorrelation function that we saw before, eq. (2) and eq. (4), can be understood in a more intuitive way in this musical context ([23] as cited in [19]) by playing the tape of a f^β sound-recording faster or slower than normal. A violin would no longer sound like a violin, but in the case of *scaling noises*, as the f^β noises can be called, only the volume should be adjusted to make it sound exactly as before ([23] as cited in [19]). $1/f$ noise, again, is a special case because no volume adjustment is needed to make it sound as before [13]. Now that composers have started experimenting with stochastic music [21], it has been suggested to use scaling-noise generators are used. Where white-noise melodies are found to sound too random, and brownian-noise melodies too boring and too predictable, $1/f$ melodies sound just like the right mixture of order and surprise as found in real music [19, 20].

3.1.2. *The fractal song of boiling water*

In a time-series approach, the dynamical system does not need to be manipulated in any way, but only needs to be “listened” to. Recently, this idea of listening to Nature has been taken seriously by Nobel-prize laureate Smooth and others when they suggested to study the acoustics of magnetic-field waves of the sun and gravitational waves of black holes [24]. In a more down-to-earth approach, we suggest to listen to the sound of a system in a phase transition to illustrate the relation between $1/f$ noise and criticality, and we expect the corresponding time series to switch to $1/f$ noise right at the critical point. One of the most familiar phase transitions is probably the boiling of water. The sound emitted in the process of heating water to a boil is a good and reliable indicator of the water temperature: probably everybody who is heating water in a kettle to make a cup of coffee or a cup of tea relies on the sound to identify when the water has reached full boil. Actually, the sound of boiling water is quite pleasing, and often the expression “the singing of a kettle” is used to describe this sound [25].

The acoustics of the boiling process has been studied, and the change of the sound has been interpreted with the implosion of vapor bubbles of different sizes in the water column [25, 26]. Complex power spectra have been found, with an array of dominant peaks in the range $200 < f < 5000$ Hz, that can be appreciated best with the spectrum in a linear scale [25]. The frequency of the dominant peaks tends to decrease as the water is heated. At boiling, the acoustic spectrum becomes flat and almost featureless. On the other hand, the power spectrum in a double-logarithmic scale behaves linearly, indicating the power-law behaviour of eq. (2) [26]. The evolution of the complexity of the boiling process was studied using an approach with fractal dimensions D . The fractal dimension of a time series can be related to the spectral density exponent β through the relation [13, 26],

$$\beta = 2D - 5 \quad (8)$$

TABLE 1. Evolution of the fractal dimension D and the spectral density exponent β with the temperature T for acoustic time series during the boiling process of water [26]. The β values have been derived from D through eq. (8).

T	20 - 55 °C	55 - 65 °C	65 - 92 °C	92 - 100 °C
D	1.4	1.4 - 1.9	1.9 - 1.85	1.85
$-\beta$	2.2	2.2 - 1.2	1.2 - 1.3	1.3

and in this way we deduce here the evolution of the exponent β of the boiling sound through the four different temperature regimes mentioned in [26], see Table 1. In the temperature range 20 - 55 °C, relatively few bubbles form and all have a similar size, so in this range the emitted sound almost does not change with rising temperature (constant fractal dimension). In the range 55 - 65 °C, the number of bubbles of different sizes increases rapidly causing a fluctuating acoustic signal (rising fractal dimension D). In the range 65 - 92 °C, bubbles start to burst at the surface muffling the sound of the imploding bubbles in the water column (fractal dimension D diminishes slightly). In the regime 92 - 100°C, the water boils and the number of bubbles bursting at the surface becomes constant (constant fractal dimension D). The acoustics of the boiling process moves from a brownian noise ($\beta \sim -2$) to a $1/f$ noise ($\beta \sim -1$) for higher temperatures. The bursting of bubbles at the surface of the water shields the sound of the bubbles imploding in the liquid and appears to lower the complexity of the global sound (lower fractal dimension D). That is probably the reason that no exact $1/f$ behaviour has been obtained in the experiment of [26]. The subject remains under study [27].

3.2. Biological time series

3.2.1. *More than romance: the human heart has memory!*

Not only have many organs of the human body a fractal structure [8], but also many (if not all) of the *autonomous (involuntary) time series* exhibit fractal dynamics, as observed e.g. in blood pressure dynamics, electroencephalographic potentials, stride intervals, center-of-pressure displacements, body temperature, respiration and human cognition [15, 28, 29, 30, 31]. Since the heart dynamics is the simplest physiological observable, it is also the best studied time series. $1/f$ has been found in the form of the QRS-complex of the heartbeat [32, 33], in the heart rate on a per minute basis [10, 9, 34], and in the R-R interbeat-interval series [33, 35]. The $1/f$ behaviour of the autonomous biological time series of an organ has been interpreted as the organ having maximized its efficiency within its own limits [5, 17]. The $1/f$ behaviour of the healthy heart is observed over more than three orders of magnitude, in the frequency range $10^{-4} < f < 10^{-1}$ Hz, which means that the corresponding time series is self-similar and fractal over a time range of $10s < t < 3$ hours. The human heart thus exhibits the long-range memory effect that we discussed in Fig. 3. Deviations from $1/f$ in heart dynamics [36] and in biological time series in general [3, 37] occur with disease, bad habits and ageing. The corresponding

time series degenerates towards more white (more random) behaviour, or towards the more regular (rigid) behaviour of the brownian random walk, see Fig. 4. Interestingly, minor deviations from $1/f$ dynamics in healthy and young subjects have been observed to converge towards a $1/f$ behaviour after an active physical training [38]. This might perhaps also point towards a most effective and critical state connected with $1/f$.

3.2.2. Complexity and sentinel biomarkers

In the context of ageing populations in countries all over the world, the new geriatric concept of *fragility* is rapidly gaining importance. Fragility is a *biomarker* that measures and predicts the probability for negative health outcomes in elderly, and has been interpreted as the accumulation of random defects with age that the body is not able any more to repair [39]. Physicians often take frailty as the ratio of the number of complaints and symptoms of a patient in relation with a total number of deficits agreed upon in literature [40]. There are some problems with this medical definition of fragility, that is based on symptoms and on the (lost) functionality of the patient. First of all, as the index is only applicable to patients that already show symptoms, it does not satisfy completely the predictive demand for a sentinel biomarker. Secondly, as the frailty index is based (at least partially) on the self-report of the patient, the results of the index are not necessarily completely objective. Thirdly, no consensus has been reached yet in the medical world on how to define or measure fragility exactly, more in particular, on how many and what symptoms to include in the index. As an increase of fragility appears to go hand in hand with a loss of complexity in space and time of the organs and their signals, the application of the concept of complexity could open the door for a non-functional and non-symptomatic way to define and to measure fragility [18, 41].

Recently, a high resting heart rate and a low beat-to-beat heart-rate *variability* (HRV) have clinically been found to lead to an increased risk of developing kidney disease [42]. The findings suggest that indeed the behavior of the autonomic nervous system as assessed by the heart dynamics may be a sentinel biomarker for late development of certain cases of kidney and other diseases. However, it is important to recognize the difference between *complexity* and *variability* (when studied in a non-fractal way as with the *variance* σ^2) [15]. As shown in Fig. 5, the variance minimizes near the $1/f$ time series, which is the most complex one, and is larger for both white noise ($\beta = 0$) and brownian noise ($\beta = -2$), which are less complex noises.

3.2.3. Fragile but elegant worms

The long life expectancy in man makes longitudinal studies of ageing and fragility difficult. In part because of the short life cycle of only three weeks, and its easy reproducibility, the nematode *C. elegans* has become one of the most important animal models of ageing. Recently, the mean pump rhythm of the pharynx of the worm has been found

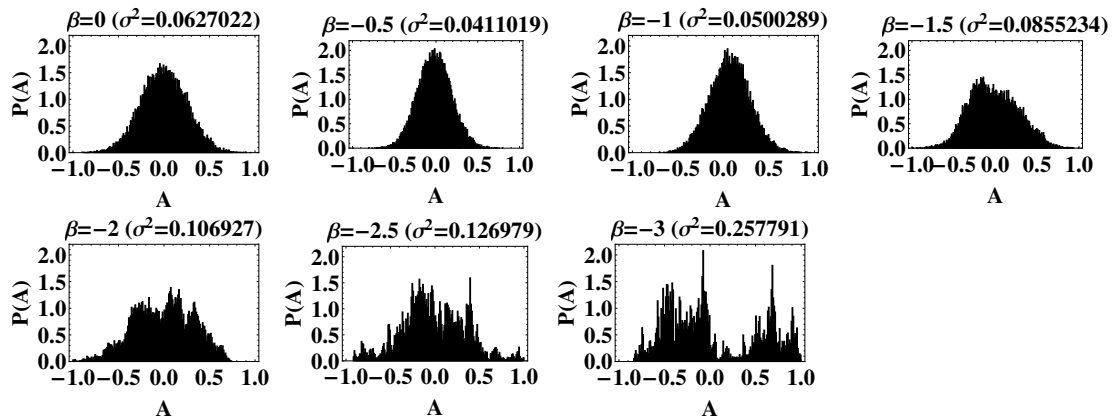


FIGURE 5. Histograms of the time-series values of Fig. 2 with the corresponding variance σ^2 . The variance is smallest near the critical point $1/f$ where the time series is most complex, illustrating that complexity should not be confused with variability [15].

to be indicative for its age [43]. For the specific worm type studied, the mean pump rhythm develops a maximum for worms of two days old (which corresponds to the peak of the reproductive age), after which the rhythm rapidly drops. The curve of the evolution of the pump rhythm resembles the curve of the *Gompertz law of mortality*, which shows that mortality minimizes near the reproductive age and then rises exponentially [44]. We expect the pumping time series of *C. elegans* to lose complexity with age after its reproductive peak, and propose to establish a model in which the fragility of the worm can be defined and measured in terms of the complexity of the time series [45]. In a second step, we suggest to base on the results found in *C. elegans* to construct a complexity-based model of fragility in man.

3.3. The dripping laser

The *dripping faucet* is a classical paradigm of chaos where strange attractors have been found in the dripping dynamics [46]. With as a control parameter the water flow, the system exhibits a phase transition from a periodic dripping regime, over a chaotic regime, towards a continuous water flow. Both the periodic regime and the continuous flow can be considered as regular, but the chaotic regime implies non-periodic but correlated drops. Scaling behaviour has been found in the dripping dynamics of the faucet [47], and indications have been found that point in the direction of $1/f$ behaviour [48].

We suggest a “*dripping laser*” as a (semi-) quantum realization of the classical dripping faucet. Light exists in three states or phases [49]. (i) Laser light is *coherent*. All photons have the same wave length and travel with the same phase in space. On the other hand, the photon detection times are uncorrelated, and thus constitute a random time series. (ii) All thermal sources radiate *thermal light* (also called *chaotic light*), of a variety of wavelengths, in which the photons come in correlated packages or bunches. The

characteristic width of the bunches is called the *coherence time* τ_{coh} . (iii) *Quantum light* of individual-photon sources is anti-correlated and the photons exhibit an anti-bunching effect. It is possible to realize a phase transition between these three different phases of light. The statistical properties of natural thermal light are very hard to study, as it has a coherence time that is shorter than 10^{-8} s. Laser light passing through a revolving ground glass disc creates a fluctuating speckle pattern [50] that simulates the bunching effect of thermal light [51]. When a speckle is detected by the detector, it creates a bunch of photons, as if the laser were “dripping” photons. It is possible to obtain large coherence times up to the ms regime, adjusting the rotation speed of the glass disc. Fractal properties have been discovered in the light-intensity sequence of the scattered light in function of the spectral bandwidth [52]. We observe a fractal bunching pattern in function of time resolution, with bunches of photons inside of bunches without any characteristic coherence time, $1\text{ms} < \tau_{coh} < 100\text{ms}$, see Fig. 6. The corresponding power spectrum behaves like $1/f$ in the corresponding frequency range, $10 < f < 1000\text{Hz}$. Preliminary results have been reported in [53], and final results will be published in a forthcoming paper [54]. In another forthcoming experiment, we also plan to study the phase transition from laser light to quantum light, using non-linear crystals [55].

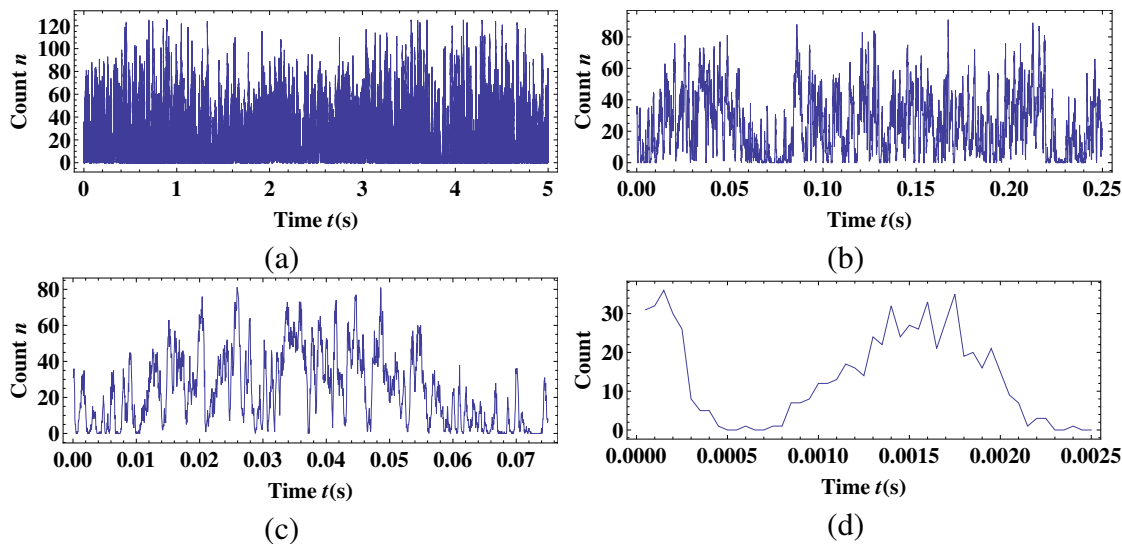


FIGURE 6. Fractal photon-count time series in the “dripping-laser” experiment that simulates thermal light. Bunches of photons consist of smaller bunches, without a characteristic coherence time. (a) With low time resolution, the time series looks random. (b) With a better resolution, bunches of photons can be seen. (c) Close-up of a photon bunch with a width of $\tau_{coh} \simeq 75\text{ms}$ that consists of smaller bunches. (d) Close-up of a smaller bunch with a width of $\tau_{coh} \simeq 1\text{ms}$ [53, 54].

3.4. Chaos in the atomic nucleus

Correlations in the excitation spectrum of quantum systems are traditionally studied with Random Matrix Theory (RMT) [56], and are interpreted as *quantum chaos*. The Bohigas-Giannoni-Schmidt conjecture [57] states that quantum systems that have a

classical analog that is chaotic, have spectral fluctuations that show a strong repulsion between energy levels and that follow the predictions of RMT; on the other hand, quantum systems that have a classical counterpart that is integrable, give rise to an energy spectrum, in which the fluctuations are uncorrelated, and that have a nearest-neighbour spacing distribution that is well described by Poisson statistics.

Recently, interpreting the sequence of quantum excitation states as a generalized time series, $1/f$ has been found in the atomic nucleus [58, 59], in an experimental microwave-rononator Sinai billiard [60], and in theoretical schematic phase transitions in series of atomic nuclei [61]. $1/f$ behaviour in these quantum systems has been interpreted as an alternative definition for quantum chaos, but perhaps instead it can be seen as the signature of critical behaviour just as in the classical systems.

4. CONCLUSIONS

The power spectra of fractal noise or scaling noise obeys a power law, $P(f) \sim f^\beta$. The corresponding autocorrelation function $C(t)$ in general as well follows a power law, with white noise ($\beta = 0$) and $1/f$ noise ($\beta = -1$) as special cases where the autocorrelation function behaves as a delta function, and a logarithmic function, respectively. $1/f$ noise is the time series with the largest memory (slowest decaying autocorrelation function) and maximizes also other complexity-related observables. $1/f$ noise is the fingerprint of many systems, of both classical and quantum worlds, that function in a critical state. In the present text, we revised music, the acoustics of the process of boiling water, biological time series, photon time series and the energy spectrum of the atomic nucleus. $1/f$ noise could offer a way to study critical phenomena in both classical and quantum systems from a within a single theoretical framework. Final results on the explicit classical and quantum examples of $1/f$ noise mentioned in this contribution will be published in forthcoming publications [18, 27, 41, 45, 54, 55, 61].

ACKNOWLEDGMENTS

The authors wish to thank Dr. López-Moreno and Dr. M. D. Grether-González for fruitful discussions and hospitality in the Laboratories for Quantum Optics (Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México). The authors wish to thank A. Bendesky (Rockefeller University) for sharing with us his experimental data on the nematode *C. elegans*. The authors thank the Centro de Ciencias de la Complejidad (C3, Universidad Nacional Autónoma de México) for hospitality and R.F. acknowledges financial support of the C3 from the proyect Red Conacyt Complejidad Ciencia y Sociedad. Financial support is also acknowledged from the grants PAPIIT-DGAPA IN113808, PAPIIT *IN-121809* and FONCICYT 94142.

REFERENCES

1. E. R. Scheinerman, *Invitation to Dynamical Systems*, Prentice Hall College Div, 1 edition, New Jersey, 1995, pp. 1–4 [<http://www.ams.jhu.edu/ers/book.pdf>].
2. P. Bak, and M. Paczuski, *Physics World*, 39–43 (december 1993).
3. A. L. Goldberger, *Lancet* **347**, 1312–1314 (1996).
4. J. M. Halley, *TREE* **11**, 33–37 (1996).
5. J. M. Halley, and P. Inchausti, *Fluct. Noise Lett.* **4**, R1–R26 (1996).
6. L. F. Richardson, *General Systems Yearbook* **6**, 139–187 (1961).
7. B. Mandelbrot, *Science* **156**, 636–638 (1967).
8. A. L. goldberger, D. R. Rigney, and B. J. West, *Sci. Am.* **262**, 34–41 (1990).
9. D. T. Kaplan, and M. Talajic, *Chaos* **1**(3), 251–256 (1991).
10. A. L. Goldberger et al., *Experientia* **44**, 983–987 (1988).
11. A. L. Goldberger, C.-K. Peng, and L. A. Lipsitz, *Neurobiology of Aging* **23**, 23–26 (2002); M. Costa, A. L. Goldberger, and C.-K. Peng, *Phys. Rev. Lett* **89**(6), 068102 (4 pages) (2002); *ibid.*, **91**(11) 119802 (1 page) (2003); *ibid.*, **92**(8) 089804 (1 page) (2004); M. Costa, et al., *Physica A* **330**, 53–60 (2003); M. Costa, and J. A. Healy, *Computers in Cardiology*, 705–708 (2003); R. A. Thuraingham, and G. A. Gottwald, *Physica A* **366**, 323–332 (2006); M. D. Costa, C.-K. Peng, and A. L. Goldberger, *Cardiovasc. Eng.* **8**(2), 88–93 (2008).
12. W. H. Press, *Comments Astrophys.* **7**(4), 103–119 (1978).
13. R. F. Voss, *Physica D* **38**, 362–371 (1989).
14. M. S. Keshner, *Proc. IEEE* **70**(3), 212–218 (1982).
15. L. A. Lipsitz, *J. Gerontol. A Biol. Sci. Med. Sci* **57**(3), B115–B125 (2002).
16. S. Smith, *An Interesting Fourier Transform - 1/f Noise*, DSP Blogs, Academia/Research, November 23rd (2007) [<http://www.dsprelated.com/showarticle/40.php>].
17. W. Deering, and B. J. West, *IEEE Eng. Med. Biol.* **11**, 40–46 (1992).
18. R. Fossion, “Una definición compleja de la fragilidad: caos, fractales y complejidad en series de tiempo biológicas”, in *Envejecimiento humano: una visión transdisciplinaria*, edited by L. M. Gutiérrez Robledo et al., Instituto de Geriatria, Secretaría de Salud, Mexico City, 2010, pp. 171–183.
19. M. Gardner, *Sci. Am.* **238**(4), 16–32 (1978).
20. R. F. Voss, and J. Clarke, *Nature* **258**, 317–318 (1975); R. F. Voss, and J. Clarke, *J. Acoust. Soc. Am.* **63**(1), 258–263 (1978).
21. P. Campbell, *Nature* **324**, 523–528 (1986); M. S. Schroeder, *Nature* **325**, 765–766 (1987).
22. B. De Coensel, D. Botteldooren, and T. De Muer, *Acta Acustica United with Acustica* **89**, 287–295 (2003).
23. B. Mandelbrot; *Fractals: Form, Chance and Dimension*, W. H. Freeman and Co., New York, 1977.
24. A. Frank, “La música del cosmos: escuchando a nuestro universo”, Nota de opinión in *La Jornada*, (2010, July 14) [<http://www.jornada.unam.mx/2010/07/14/index.php?section=opinion&article=a03alcie>]; National Science Foundation (2007, May 29). “Magnetic Field Uses Sound Waves To Ignite Sun’s Ring Of Fire”. *ScienceDaily*. Retrieved September 26, 2010 [<http://www.sciencedaily.com/releases/2007/05/070529113245.htm>]; Royal Astronomical Society (2007, April 21). “Giant Pipe Organ In The Solar Atmosphere”. *ScienceDaily*. Retrieved September 26, 2010 [<http://www.sciencedaily.com/releases/2007/04/070419115551.htm>]; University of Sheffield (2010, June 22). “Scientists discover heavenly solar music”. *ScienceDaily*. Retrieved July 7, 2010 [<http://www.sciencedaily.com/releases/2010/06/100621101420.htm>]
25. S. Aljishi, and J. Tatarkiewicz, *Am. J. Phys.* **59**(7), 628–632 (2003).
26. E. Le Tavernier, P. Simard, M. Buló, and D. Boichu, “Fractal study of the boiling of water,” in *Safeprocess’97*, edited by R. J. Patton, and J. Chen, Fault detection, supervision and safety for technical processes 1997, Vols. 1-3, 1998, pp. 1213–1217.
27. D. García, R. Fossion, V. Velázquez, and A. Frank, in preparation.
28. P. J. Fadel, et al., *J. Appl. Physiol.*, **97** 2056–2064, (2004).
29. G. Stern, *PLoS*, **4**(7) e6431 (9 pages), (2002).
30. D. L. Gilden, *Psychological Review* **108**(1), 33–56 (2010).
31. D. L. Gilden, T. Thornton, and M. W. Mallon, *Science* **267**(5205), 1837–1839 (2003).
32. A. L. Goldberger et al., *Biophys. J.* **48**, 525–528 (1985).

33. A. L. Goldberger et al., *The Yale Journal of Biology and Medicine* **60**, 421–435 (1987).
34. L. A. Lipsitz, et al., *Circulation* **81**, 1803–1810 (1990).
35. M. Kobayashi, and T. Musha, *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **29**(6), 456–457 (1988).
36. S. M. Pikkujämsä, et al., *Circulation*, **100** 393–3991, (1999).
37. A. L. Goldberger, et al., *PNAS* **99**(1), 2466–2472 (2002).
38. K. S. Heffernan et al., *J. Appl. Physio.* **105**, 109–113 (2008).
39. A. B. Mitniski et al., *BMC Geriatrics*, **2** 1–8, (2002).
40. J. J. García González et al., *BMC Geriatrics*, **9**, 47 (8 pages), (2009).
41. A. Tavera Vázquez, R. Fossion, and A. Frank, in preparation.
42. D. J. Brotman, et al., *J. Am. Soc. Nephrol.*, **21** 1560–1570, (2010).
43. C. Huang, C. Xiong, and Kerry Kornfeld, *PNAS*, **101**(21) 8084–8089, (2004).
44. S. A. Frank, *BMC Biology*, **2** 16 (8 pages), (2004).
45. I. Garduño, R. Fossion, and A. Frank, in preparation.
46. R. F. Cahalan, H. Leidecker, and G. D. Cahalan, *Computers in Physics*, **4**(4) 368–383, (1990).
47. J. G. Marques da Silva, et al., *Physics Letters A*, **226** 269–274, (1997).
48. T. J. P. Penna et al., *Phys. Rev. E*, **52**(3) R2168–R2171, (1995).
49. Degree of coherence, *Wikipedia* [http://en.wikipedia.org/wiki/Degree_of_coherence].
50. J. W. Goodman, *J. Opt. Soc. Am.*, **66**(11) 1145–1150, (1976).
51. W. Martienssen, and E. Spiller, *Am. J. Phys.*, **32**(12) 919–926, (1964); *ibid.*, *Phys. Rev. Lett.*, **16**(12) 531–533, (1966); *ibid.*, *Phys. Rev.*, **145**(1) 285–287, (1966); R. P. Wolf, and P. P. Crooker, *Am. J. Phys.*, **50**(5) 406–409, (1982); P. Koczyk, P. Wiewiór, and C. Radzewicz, *Am. J. Phys.*, **64**(3) 240–245, (1996); M. L. Martínez Ricci et al., *Am. J. Phys.*, **75**(8) 707–712, (2007).
52. G. N. Pearson, M. Harris, E. Jakeman, and D. Letalick, *J. Mod. Optics*, **41**(11) 2067–2077, (1994); M. Harris, G. N. Pearson, C. A. Hill, and J. M. Vaughan, *Opt. Comm.*, **116** 15–19, (1995); M. Harris, *Contemp. Phys.*, **36**(4) 215–233, (1995).
53. E. Landa, R. Fossion, et al., *Rev. Mex. Fís.*, **S-55**(2) 50–59, (2009).
54. R. Fossion, et al., to be published.
55. E. Landa, et al., in preparation.
56. M. L. Mehta, *Random Matrices*, 2nd ed., Academic Press, New York London, 1991.
57. O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1–4 (1984).
58. A. Relaño et al., *Phys. Rev. Lett.* **89**, 244102 (4 pages) (2002).
59. E. Landa et al., *Rev. Mex. Fís.* **54**, 48–55 (2008).
60. E. Faleiro, U. Kuhl, R.A. Molina, A. Relano, J. Retamosa and H.-J. Stockmann, *Phys. Lett. A* **358**, 251–255 (2006).
61. A. Ibáñez-Sandoval, V. Velázquez et al., to be published.

Criticality and long-range correlations in time series in classical and quantum systemsE. Landa,¹ Irving O. Morales,^{1,2} R. Fossion,^{3,4} P. Stránský,^{1,5} V. Velázquez,⁶ J. C. López Vieyra,¹ and A. Frank^{1,4}¹*Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 México, D.F., Mexico*²*Grand Accélérateur National d'Ions Lourds, BP F-55027, Caen Cedex 5, France*³*Instituto de Geriatria, Periférico Sur No. 2767, Col. San Jerónimo Lídice, Del. Magdalena Contreras, 10200 México D.F., Mexico*⁴*Centro de Ciencias de la Complejidad, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 México, D.F., Mexico*⁵*Institute of Particle and Nuclear Physics, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, V Holešovičkách 2, 180 00 Prague, Czech Republic*⁶*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 México, D.F., Mexico*

(Received 9 November 2010; revised manuscript received 13 May 2011; published 26 July 2011)

We present arguments which indicate that a transitional state in between two different regimes implies the occurrence of $1/f$ time series and that this property is generic in both classical and quantum systems. Our study focuses on two particular examples: the one-dimensional module-1 logistic map and nuclear excitation spectra obtained with a schematic shell-model Hamiltonian. We suggest that a transitional point is characterized by the long-range correlations implied by $1/f$ time series. We apply a Fourier spectral analysis and the detrended fluctuation analysis method to study the fluctuations to each system.

DOI: [10.1103/PhysRevE.84.016224](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.84.016224)

PACS number(s): 05.45.Tp, 02.50.-r, 05.40.Ca

I. INTRODUCTION

The Bohigas-Giannoni-Schmit (BGS) conjecture [1] establishes a connection between random matrix theory (RMT) [2] and the statistical properties of excitation spectra of quantum systems. More in particular, quantum systems that have a classical analog that is chaotic are said to exhibit *quantum chaos* and follow the predictions of the Gaussian orthogonal ensemble (GOE). On the other hand, quantum systems whose classical analog is regular follow the predictions of the Gaussian diagonal ensemble (GDE). The conjecture is based on the particular example of the quantum Sinai billiard, where one observes that the symmetrical billiard behaves according to GDE, and the desymmetrized billiard according to GOE. Then, the universality of quantum-level fluctuation laws is proposed, which includes systems as molecules, atoms, nuclei, and hadrons. Apart from a limited number of specific counter examples [3], the conjecture has empirically been found to be true.

In recent years, various quantum signatures of chaos have been studied intensively, especially in atomic nuclei, using models such as the interacting boson model (IBM) [4–6] and the geometric collective model [7,8]. These works focus on the study of the interplay between chaos and regularity and show extremely complex behavior. Ordered and disordered patterns have been visualized using, e.g., Peres lattices [9], which can be interpreted as a quantum analog of the classical Poincaré sections. There are other studies related to quantum chaos in nuclear physics, e.g., the emergence of band structure in the IBM equipped with random interactions [10,11] or the fluctuations in the nuclear masses [12].

Recently, Relaño *et al.* proposed to interpret fluctuations in quantum excitation spectra as generalized time series and to study the corresponding power spectral density. Specific calculations have been carried out for RMT ensembles and for nuclear shell-model (TBRE) energy spectra. It has been found that quantum excitation spectra that are chaotic result in power spectral density that behave as $P(f) \sim 1/f$ (f being the frequency), whereas integrable excitation spectra follow

$P(f) \sim 1/f^2$ [13]. In classical physics, $1/f$ noise was first observed in the '60s in vacuum tubes and has since then been found to be a rather ubiquitous phenomenon [14], but its origins and the connection between the different systems where it is observed are still poorly understood.

In physiology, autonomous (nonvoluntary) time series are found to correspond with $P(f) \sim 1/f^\beta$ power spectral density. Moreover, time series from healthy subjects are found to be $1/f$ ($\beta = 1$), and results have been reported for the heartbeat, gait, temperature, respiration, etc. [15]. On the other hand, time series from aging subjects tend toward $1/f^2$ ($\beta = 2$) [16], and particular diseases tend to flatten out the power spectral density ($\beta = 0$) [17]. It has been suggested that the $1/f$ in healthy physiological systems indicates a *critical state*, and that deviations indicate aging or disease.

In the present paper, we focus on two simple physical systems, a classical one and a quantum one, in transition between two different regimes. More in particular, we study time series related to (i) the module-1 logistic map, and (ii) shell-model calculations with a schematic Hamiltonian, including a single-particle part and a quadrupole-quadrupole interaction, in a full f_7p shell. The power spectral density of the corresponding time series behave as $P(f) \sim 1/f^\beta$, with $\beta = 0$, or $\beta = 2$ at the extremes where the system is mostly random and integrable respectively, but we observe $1/f$ behavior at the transitional point. Apart from a spectral analysis, we apply a detrended fluctuation analysis (DFA), which is designed to study the fractal properties of time series. We suggest that $1/f$ behavior, and the long-range correlations implied, might be a common characteristic of classical and quantum systems in transition between different regimes.

This paper is organized as follows. In Sec. II, we discuss the long-range correlations that are implicit in time series with $1/f$ -type power spectra. In Sec. III, we study the classical example of the module-1 logistic map, while in Sec. IV, we study the energy spectrum of ^{48}Ca as a quantum example. Finally, in Sec. V, we present our conclusions.

II. MEMORY EFFECT: LONG-RANGE CORRELATIONS

We are interested in time series which are self-affine and for which the power spectral density follows a power law [18],

$$P(f) \sim 1/f^\beta. \quad (1)$$

Well known series of this type are white noise ($\beta = 0$), which is not correlated, $1/f$ noise ($\beta = 1$), which is intermediately correlated, and the strongly correlated brownian noise ($\beta = 2$). The exponent β is a measure for the *strength* of the correlations present in the time series. Typical for $1/f^\beta$ time series is the *long range* of their correlations or the *memory* effect that arises for specific values of β , and that can be appreciated through the particularly slow decay of the corresponding autocorrelation function $C(\tau)$ [19,20]. As a matter of fact, the autocorrelation function of a random series is a delta function and has no memory. Short-memory processes, such as autoregressive noise or Markov chains, have an autocorrelation function that decays exponentially. On the other hand, noises that correspond to Eq. (1) have autocorrelation functions that can decay very slowly because of their self-affine nature. More in particular, the autocorrelation function of these noises generally behaves as a power law, $C(\tau) \sim \tau^{-\gamma}$, which decays more slowly than any exponential. $1/f$ noise ($\beta = 1$), that plays a central role in this paper, corresponds to $C(\tau) \sim -\ln(\tau)$, which decays more slowly than any power law [20]. The particular long-memory properties of $1/f$ noise can be derived analytically based on symmetry principles [21] or through a variational approach [22] or can be derived numerically. Defining *complexity* as the amount of long-range correlations present in a time series, Goldberger *et al.* state that—at least in a physiological context—complexity maximizes in $1/f$ time series [23].

For discrete time series, apart from a spectral analysis, there are other tools to study the scale invariant properties, including the DFA method [24]. The DFA method is used to estimate long-range power-law correlation exponents in diverse kinds of signals [25]. The parameter α_{DFA} , obtained by means of the DFA, which in this case is related to the self-similarity properties, can be related with the exponent β of the spectral analysis through the simple relation

$$\beta = 2\alpha_{\text{DFA}} - 1, \quad (2)$$

valid in the range $0.5 < \alpha_{\text{DFA}} < 1.0$. The relationship between the exponent of the autocorrelation function γ and α_{DFA} is given by $\gamma = 2 - 2\alpha_{\text{DFA}}$ [26]. In particular, for time series with $1/f$ -noise ($\beta = 1$), $\alpha_{\text{DFA}} = 1$ and $\gamma \rightarrow 0$ (see, e.g., Ref. [27]).

III. MODULE-1 LOGISTIC MAP

Simple functions sometimes can behave in a very complex way. In this section, we will discuss a simple map that maps the unit interval $[0,1]$ onto itself. The *logistic map*, $x_{n+1} = kx_n(1 - x_n)$, is a map of this type, which produces time series that are periodic or chaotic depending on the value of the control parameter $k \in [0,4]$ [28]. Complex behavior, such as $1/f$, can only be expected at the *edge of chaos* at the border line between two different regimes [29]. The *mod-1 map*, also called the *Mannville iteration map*, $x_{n+1} = x_n + kx_n^2(\text{mod}1)$, on the other hand, produces self-affine time series and has

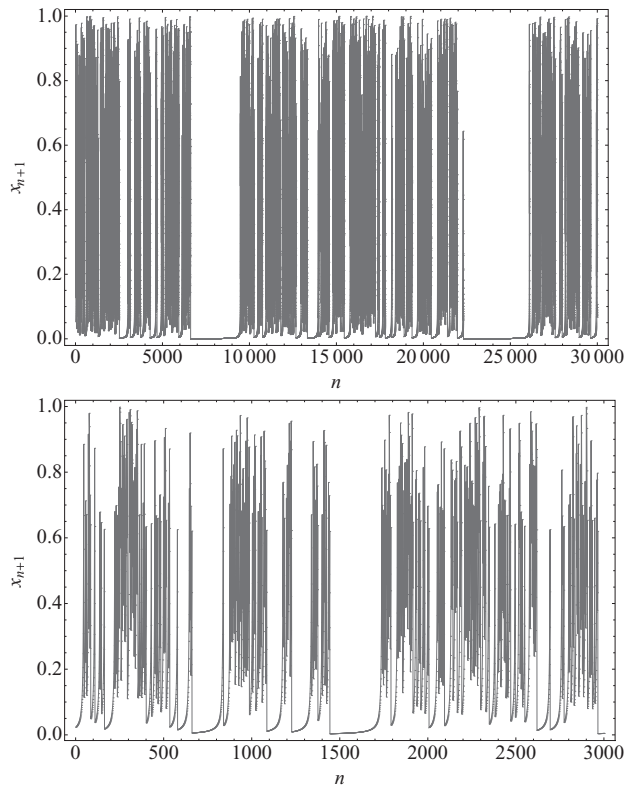


FIG. 1. The self-affine time series of the Module-1 Logistic Map of Eq. (3) with $k = 1$, consists of bunches of peaks (upper panel) that contain more bunches on a smaller scale (bottom panel).

been used as a model for intermittency (see Fig. 1). Moreover, the time series exhibit $1/f$ power spectral density for many values of its control parameter k [30–33]. Both discrete maps belong to the class of discrete-time dynamical deterministic systems, corresponding to one-dimensional maps of a given interval, which are perhaps the simplest models displaying a sensitive dependence on initial data. We construct a new map, the *mod-1 logistic map*,

$$x_{n+1} = k(x_n + x_n^2)(\text{mod}1), \quad (3)$$

where the dynamic behavior of the resulting time series depends on the value of the control parameter k . We focus on the behavior of the time series close to a particular point, where the system undergoes a sudden order to chaos transition for a minimal change of the control parameter. We study the dependence on initial conditions by repeated iteration of the map, Eq. (3), which yields a sequence where the value x_{n+1} at step $n + 1$ depends explicitly only on the value x_n of the previous step n , and maps the $[0, 1]$ interval onto itself. The changes in long-range correlations of the time series with this map are analyzed as the control parameter k is varied with steps of 0.0125. In the following, we will consider ensembles for different values of k with 10 different initial conditions and time series of length 3000, we will present the results concerning to each ensemble. For $k < 1$, the time series x_n is a monotonic decreasing function that tends to zero after a few hundred iterations. For $k = 1$, the map corresponds to the original mod-1 map and the time series is thus self-affine and

intermittent. For $k > 1$, the time series loses its intermittent behavior for increasing k . To quantify regular and chaotic behavior, we calculate an estimated value for the Lyapunov exponent λ for the $x_n(k)$ time series in function of k ,

$$\lambda(k) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \log |x'_{n+1}(k)|, \quad (4)$$

where $x'_{n+1} = k(1 + 2x_n)$ is the derivative of x_{n+1} of Eq. (3) with respect to the previous value x_n .

We obtain $\lambda < 0$ for $k < 1$, which confirms that the corresponding time series $x_n(k)$ are regular, whereas $\lambda(k) > 0$ for $k > 1$ as an indication that the corresponding time series $x_n(k)$ are increasingly chaotic with larger k . The edge of chaos, $\lambda_k = 0$, is obtained for $k = 1$. We study the evolution of the correlation strength of the time series $x_n(k)$ in function of the control parameter, using spectral analysis and the DFA method, with the exponent β of Eq. (1) and $\beta = 2\alpha_{\text{DFA}} - 1$ of Eq. (2), respectively. For $k \neq 1$ ($k > 1$), the power spectral density flattens out at the smallest frequencies, and this flat part tends to be larger as k moves further away from 1, indicating that a portion of the large-range correlations are lost. We study the part of the spectral density where the correlations are conserved. The spectral analysis and the DFA give comparable results, see Fig. 2. We point out that before k acquires the value one, it does not make sense to fit the power spectral density for a periodic regime. On the other hand, what the chaotic time series for $k > 1$ are concerned, the nonflat part of the spectral density at higher frequencies loses gradually its correlation strength, $\beta \rightarrow 0$ (white-noise like), for larger k . At the edge of chaos, for $k = 1$, a $1/f$ behavior ($\beta = 1$) is observed that extends through the whole range of the frequencies. In conclusion, the transitional point $k = 1$ in this simple classical system in between regularity and chaos is characterized by long-range correlations of the $1/f$ type, whereas its limiting regimes are characterized by strong and weak correlation strengths, respectively, but with a shorter range.

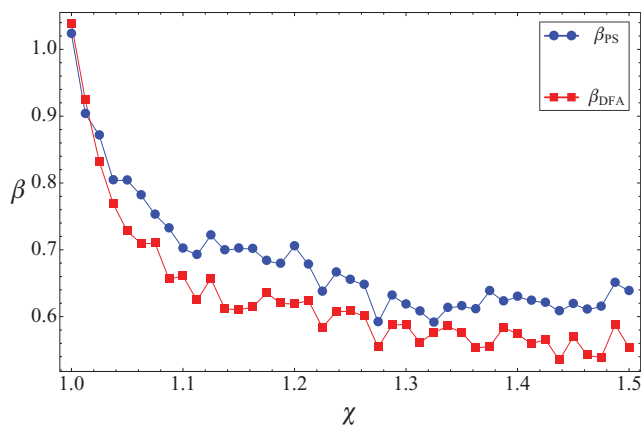


FIG. 2. (Color online) The correlation strength β of time series $x_n(k)$ as a function of k in the map of Eq. (3). The blue line is the spectral density exponent β (in the figure as β_{PS}) from Eq. (1), whereas the red line is $\beta = 2\alpha_{\text{DFA}} - 1$ (in the figure as β_{DFA}) from Eq. (2).

IV. QUANTUM EXCITATION SPECTRA AS A TIME SERIES

A. Unfolding and fluctuations in the quantum spectra

Quantum chaos studies the correlations present in the excitation spectra of quantum systems, and corresponds to a monotonic series of levels at increasing energies, E_1, E_2, E_3, \dots and one studies their *fluctuations* with respect to an equidistant (harmonic oscillator) energy spectrum. The procedure used to extract the information of the fluctuating part of the quantum spectrum is called *unfolding*: the global features of the energy level density is usually modeled by a smooth function, which is subtracted from the total level density to leave only the oscillating part. The unfolding is a delicate procedure [13,34]. For example, in the case of the GOE ensemble, when the sizes of matrices $N \rightarrow \infty$, the smooth part of the level density is the well-known Wigner's RMT semicircular law [34]. There are, however, deviations for finite N that cannot be expressed analytically. In such cases, the level density is approximated by a smooth function (e.g., polynomial function), which can be, however, a procedure affecting the results, especially the sensitive long-range correlations [35]. Instead, in this paper we employ the empirical mode decomposition (EMD) method to perform the unfolding procedure in quantum excitation spectra, originating in the theory of signal analysis where the determination of the trend and carrying out an appropriate detrending is a fundamental task. Following Ref. [36], we use a simple definition of the global trend for arbitrary nonlinear and nonstationary time series. One of the important properties of the method is its adaptability to a given time series. It can reveal natural time scales of the signal and is able to extract various trends at different time scales [36]. In this sense, EMD interprets the trend as an integral part of the data; i.e., it is driven by the same mechanisms that give rise to the rest of the signal. Our unfolding procedure combines a small degree polynomial fit (fifth-order) to remove the basic trend of the data around their average, followed by the empirical mode decomposition, which subtracts the rest of the trend in a very accurate way. We have found that this procedure is independent of the degree of the original polynomial. A detailed analysis of the EMD method to determine the fluctuations in the quantum spectra will be published elsewhere [37].

The fluctuations in the quantum spectra can be formally interpreted as a discrete time series [13] by using the quantity

$$\delta_n = \sum_{i=1}^n (s_i - \langle s \rangle) = [\epsilon_{n+1} - \epsilon_1] - n \langle s \rangle, \quad (5)$$

where $s_i = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i$. The stochastic discrete function δ_n measures the deviations of the distance between the $(n+1)$ th unfolded state, with respect to the corresponding state in a uniform (equally spaced) sequence.

B. Energy fluctuations in shell model nuclear calculations

Following Relaño *et al.* [13], we use a spectral analysis to study the long-range correlations. We also applied the DFA method to the quantum spectral fluctuations, in a similar way as in reference [38]. We performed calculations for large-scale shell-model calculations with realistic interactions (KB3) [39] in the full fp shell for ^{48}Ca in the subspaces

TABLE I. Self-similarity parameter α_{DFA} obtained using a linear DFA method and the β exponent in the power spectral density of the energy fluctuations in the shell-model calculations of ^{48}Ca with realistic interactions in different subspaces J^π . The dimension N of each subspace is also shown. The unfolding was done using EMD.

^{48}Ca			
J^π	α_{DFA}	β	N
0^+	1.03	1.09	347
1^+	0.99	1.10	880
2^+	1.02	1.03	1390
3^+	1.04	1.13	1627
4^+	1.01	1.09	1755
5^+	1.10	1.13	1617
6^+	1.06	1.08	1426
7^+	1.03	1.05	1095
8^+	1.05	1.07	808

$J^\pi = 0^+, 1^+, \dots, 8^+$ by means of the ANTOINE code [40]. In the present study we repeated the DFA and spectral analysis of the time series but using EMD to improve the unfolding, we obtained a nearly $1/f$ power-law behavior, confirmed by results with $\alpha_{\text{DFA}} = 1$ with the DFA, the largest deviation being of $\sim 10\%$ (see Table I). These results are in correspondence with the results of Relaño *et al.* and our previous results [35]. We also studied the energy fluctuations of the two-body random-ensemble (TBRE) [41] shell-model calculations for ^{48}Ca in the subspace $J^\pi = 0^+$. We found $\beta = 1.01$ and $\alpha_{\text{DFA}} = 1.02$. This value is very similar to the case of realistic calculations that is shown in Table I. Relaño *et al.* [13] performed the first study of the behavior of the power spectral density of the energy fluctuations of TBRE random shell-model calculations for ^{24}Mg and ^{32}Na and found that they obey a $1/f$ scaling.

C. Energy fluctuations in a phase-transitional model

Large-scale shell-model calculations and TBRE calculations carried out to describe real nuclei are found to produce $1/f$ time series, but these calculations are very complicated and involve many degrees of freedom. In this section, we use a schematic Hamiltonian in a simplified version of the shell model, with which we can follow a transition in between different regimes to study how the power spectral density evolves, with particular emphasis on what happens at the transitional point.

We use the Hamiltonian

$$H = H_0 + \chi \hat{Q} \cdot \hat{Q}, \quad (6)$$

with an external adjustable parameter χ . This schematic Hamiltonian is analogous to simple boson Hamiltonians used recently to study quantum phase transitions [42]. The unperturbed single-particle (s.p.) Hamiltonian H_0 describes noninteracting fermions in the mean field of an appropriate spherical core which is known to be integrable [43]. The second term, $\chi \hat{Q} \cdot \hat{Q}$, describes a residual quadrupole-quadrupole two-body interaction, which in this case acts on eight valence neutrons in the fp shell, and this part by itself is also integrable. We carry out calculations in the subspace $J^\pi = 3^+$ of ^{48}Ca .

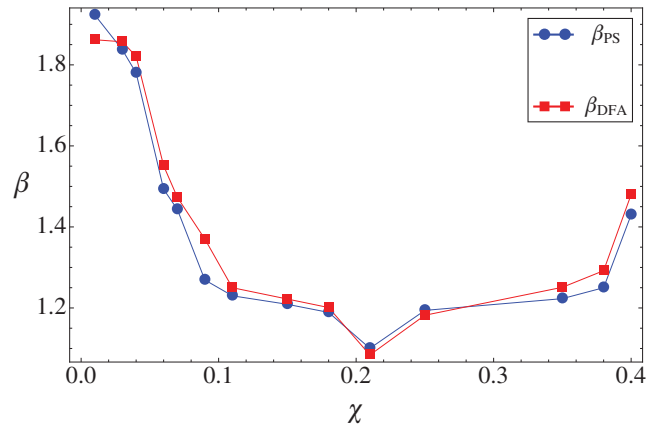


FIG. 3. (Color online) The values of β calculated directly from the fit to the slope of the power spectral density (blue dots) to each δ_n in function of χ in the Hamiltonian of Eq. (6). The red squares are the β 's obtained using the relation with α_{DFA} .

The coefficient χ in Eq. (6) modulates the intensity of the quadrupole-quadrupole interaction and gives rise to the level repulsion in the nuclear spectrum. Varying the intensity of this control parameter in the range $0.01 < \chi < 0.40$, we find that the power spectral density of the δ_n time series behaves as $P(f) \sim 1/f^\beta$ with $\beta = 1.92$ (for $\chi = 0.01$), $\beta = 1.10$ (for $\chi = 0.21$), and $\beta = 1.43$ (for $\chi = 0.40$), values that are confirmed by an analysis with DFA, see Fig. 3.

The fluctuations in the quantum spectra with the realistic KB3 interaction are in good agreement with the spectral fluctuations obtained with the schematic Hamiltonian when the intensity parameter χ takes values close to 0.21. Thus, we find that the fluctuations of both integrable limits tend to approach a brownian-like $1/f^2$ power spectral density, whereas a density close to $1/f$ is found at the transitional point.

V. CONCLUSIONS

Time series that are self-affine and whose power spectral density behaves as a power law $P(f) \sim 1/f^\beta$ are scale invariant. $1/f$ noise ($\beta = 1$) can be seen as a particular type of self-similar noise. It corresponds to signals that maximize the range of their correlations. In this paper, we investigate the hypothesis that time series of both classical and quantum dynamical systems that undergo a transition in between two regimes (a regular one and a chaotic one, or two different integrable regimes), exhibit $1/f$ behavior near the transitional point. We report in detail on two specific examples: the module-1 logistic map for the classical case, and a schematic nuclear shell-model Hamiltonian for the quantum case. We studied the corresponding time series by spectral analysis and with the DFA method.

In the case of the module-1 logistic map, for control parameter $k < 0$, we found regular time series (with Lyapunov exponent $\lambda_k < 0$), for control parameter $k = 1$ a correlated nonperiodic time series (with Lyapunov exponent $\lambda_k = 0$), and for control parameter $k > 1$ chaotic time series (with Lyapunov exponent $\lambda_k > 0$). We find $1/f$ behavior for the correlated nonperiodic time series at the transitional point, whereas the regular and chaotic time series correspond to

$1/f^\beta$ ($\beta \neq 1$) power spectral density. We describe a generic nuclear excitation spectrum, using a schematic Hamiltonian. The Hamiltonian has two competing terms: a single-particle term and a residual quadrupole-quadrupole term. Each term individually is integrable. A control parameter allows for a smooth transition between the two extreme regimes. Both extreme integrable excitation spectra correspond to $1/f^2$ (brownian) power law, whereas the transitional excitation spectrum corresponds with a $1/f$ power spectral density.

This analysis may provide a starting point for making some connections between classical systems and the properties of quantum many-body states at high-level density, where a transition from one regime to another occurs. For two specific systems, we found a generic $1/f$ behavior of the corresponding

time series, where the long-range correlations are maximized, exactly at the point where the transition occurs.

ACKNOWLEDGMENTS

We are grateful to Jose Barea and Rafael Molina for their many suggestions. This work was supported in part by PAPIIT-UNAM, FONCICYT Project No. 94142 and Conacyt-Mexico. R. Fossion acknowledges financial support from the Centro de Ciencias de la Complejidad, UNAM, from the project Red Conacyt Complejidad Ciencia y Sociedad. P. Stránský acknowledges financial support from the Czech Science Foundation (202/09/0084) and the Czech Ministry of Education (MSM 0021620859).

-
- [1] O. Bohigas, M.-J. Giannoni, and C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1 (1984).
 - [2] M. L. Mehta, *Random Matrices* (Academic Press, New York/London, 1991).
 - [3] T. D. Cohen and G. Goon, e-print [arXiv:0905.1040v1](https://arxiv.org/abs/0905.1040v1) (2009).
 - [4] Y. Alhassid and N. Whelan, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 816 (1991).
 - [5] M. Macek, P. Stránský, P. Cejnar, S. Heinze, J. Jolie, and J. Dobeš, *Phys. Rev. C* **75**, 064318 (2007).
 - [6] M. Macek, J. Dobeš, and P. Cejnar, *Phys. Rev. C* **82**, 014308 (2010).
 - [7] P. Stránský, P. Hruška, and P. Cejnar, *Phys. Rev. E* **79**, 046202 (2009).
 - [8] P. Stránský, P. Hruška, and P. Cejnar, *Phys. Rev. E* **79**, 066201 (2009).
 - [9] A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1711 (1984).
 - [10] R. Bijker and A. Frank, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 420 (2000).
 - [11] R. Bijker and A. Frank, *Phys. Rev. C* **64**, 061303(R) (2001).
 - [12] J. Barea, A. Frank, J. G. Hirsch, and P. Van Isacker, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 102501 (2005).
 - [13] A. Relaño, J. M. G. Gómez, R. A. Molina, J. Retamosa, and E. Faleiro, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 244102 (2002); E. Faleiro, J. M. G. Gómez, R. A. Molina, L. Muñoz, A. Relaño, and J. Retamosa, *ibid.* **93**, 244101 (2004).
 - [14] W. H. Press, *Comments Astrophys.* **7**, 103 (1978).
 - [15] A. L. Goldberger, *Lancet* **347**, 1312 (1996); A. L. Goldberger, C.-K. Peng, and L. A. Lipsitz, *Neurobiol. Aging* **23**, 23 (2002); A. L. Goldberger *et al.* *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **99**, 2466 (2002); L. A. Lipsitz, *J. Gerontol.* **57**, B115 (2002).
 - [16] S. M. Pikkujämsä *et al.* *Circ.* **100**, 393 (1999).
 - [17] J. Hayano *et al.* *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.* **273**, 2811 (1997); T. Hennig, *et al. J. Biol. Phys.* **32**, 383 (2006).
 - [18] R. F. Voss, *Physica D* **38**, 362 (1989).
 - [19] J. M. Halley and P. Inchausti, *Fluct. Noise Lett.* **4**, R1 (2004).
 - [20] M. S. Keshner, *Proc. IEEE* **70**, 212 (1982).
 - [21] R. Fossion *et al.*, *AIP Conf. Proc.* **1323**, 74 (2010).
 - [22] Y.-Ch. Zhang, *J. Phys. I* **1** (France), 971 (1991); H. C. Fogedby, *J. Stat. Phys.* **69**, 411 (1992).
 - [23] A. L. Goldberger, C.-K. Peng, and L. A. Lipsitz, *Neurobiol. Aging* **23**, 23 (2002).
 - [24] C.-K. Peng, S. Havlin, H. E. Stanley, and A. L. Goldberger, *Chaos* **5**, 82 (1995).
 - [25] P. Talkner and R. O. Weber, *Phys. Rev. E* **62**, 150 (2000).
 - [26] J. Beran, *Statistic for Long-Memory Processes* (Chapman and Hall, New York, 1994).
 - [27] E. W. Montroll and M. F. Shlesinger, “The wonderful world of random walks,” in *Nonequilibrium Phenomena II: From Stochastics to Hydrodynamics* (North-Holland, Amsterdam, 1984), pp. 1–121.
 - [28] R. M. May, *Nature (London)* **261**, 459 (1976).
 - [29] P. Bak, *How Nature Works* (Springer-Verlag, New York, 1996).
 - [30] E. Milotti, e-print [arXiv:physics/0204033](https://arxiv.org/abs/physics/0204033) (2002).
 - [31] P. Manneville, *J. Physique.* **41**, 1235 (1980).
 - [32] A. Ben-Mizrachi, I. Procaccia, N. Rosenberg, A. Schmidt, and H. G. Schuster, *Phys. Rev. A* **31**, 1830 (1985).
 - [33] I. Procaccia and H. Schuster, *Phys. Rev. A* **28**, 1210 (1983).
 - [34] T. A. Brody, J. Flores, J. B. French, P. A. Mello, A. Pandey, and S. S. M. Wong, *Rev. Mod. Phys.* **53**, 385 (1981).
 - [35] E. Landa *et al.*, *Rev. Mex. Fis.*, **S-54**(3), 48 (2008).
 - [36] N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M. C. Wu, E. H. Shih, Q. Zheng, C. C. Tung, and H. H. Liu, *Proc. R. Soc. London A* **454**, 903 (1998).
 - [37] I. O. Morales, E. Landa, P. Stránský, and A. Frank, *Phys. Rev. E* **84**, 016203 (2011).
 - [38] M. S. Santhanam, J. N. Bandyopadhyay, and D. Angom, *Phys. Rev. E* **73**, 015201(R) (2006).
 - [39] T. T. S. Kuo and G. E. Brown, *Nucl. Phys. A* **114**, 241 (1968).
 - [40] E. Caurier, computer code ANTOINE, CRN, Strasbourg (2000); E. Caurier, A. P. Zuker, and A. Poves, in *Nuclear Structure of Light Nuclei Far from Stability*. Experiment and Theory, Proceedings of the Workshop, Obrnai, Ed. G. Klotz (CRN, Strasbourg, 1989).
 - [41] J. B. French and S. S. M. Wong, *Phys. Lett. B* **33**, 449 (1970); S. S. M. Wong and J. B. French, *Nucl. Phys. A* **198**, 188 (1972).
 - [42] P. Cejnar, J. Jolie, and R. F. Casten, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 2155 (2010).
 - [43] E. Caurier, G. Martínez-Pinedo, F. Nowacki, A. Poves, and A. P. Zuker, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 427 (2005).

Improved unfolding by detrending of statistical fluctuations in quantum spectraIrving O. Morales,¹ E. Landa,² P. Stránský,^{2,3} and A. Frank²¹*Grand Accélérateur National d'Ions Lourds, GANIL, CEA/DSM — CNRS/IN2P3, Bd. Henri Becquerel, BP 55027, F-14076, Caen Cedex 5, France*²*Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 70-543, 04510 México, D.F., Mexico*³*Institute of Particle and Nuclear Physics, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, V Holešovičkách 2, CZ-180 00 Prague, Czech Republic*

(Received 5 May 2011; published 6 July 2011)

A fundamental relation exists between the statistical properties of the fluctuations of the energy-level spectrum of a Hamiltonian and the chaotic properties of the physical system it describes. This relationship has been addressed previously as a signature of chaos in quantum dynamical systems. In order to properly analyze these fluctuations, however, it is necessary to separate them from the general tendency, namely, its secular part. Unfortunately this process, called unfolding, is not trivial and can lead to erroneous conclusions about the chaoticity of a system. In this paper we propose a technique to improve the unfolding procedure for the purpose of minimizing the dependence on the particular procedure. This technique is based on detrending the fluctuations of the unfolded spectra through the empirical mode decomposition method.

DOI: [10.1103/PhysRevE.84.016203](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.84.016203)

PACS number(s): 05.45.Tp, 05.40.—a

I. INTRODUCTION

The relation between classical dynamical systems and their quantum counterparts is an important aspect of contemporary research. Of particular relevance is the study of the so-called quantum chaos, the relation between classical chaos and quantum mechanical systems. One of the fundamental signatures of quantum chaos is the conjectured link between the statistical fluctuations of the energy spectrum and the integrability or chaotic properties of the Hamiltonian [1–3]. This relation has been studied in a large diversity of systems, including microwave cavities, atoms, molecules, and nuclei. This kind of spectral analysis has become one of the main tools for the study of quantum chaos, whose fundamental objective is to characterize the properties of these fluctuations [4]. To tackle this problem it is assumed that the density of states $\rho(E)$ can be separated into a secular and a fluctuating part,

$$\rho(E) = \overline{\rho(E)} + \widetilde{\rho(E)}. \quad (1)$$

While the secular part $\overline{\rho(E)}$ usually indicates particular characteristics of the system under consideration, the fluctuating part reflects universal properties of physical systems. However, to separate these two components of the spectral density is a major problem. The procedure used to extract the information of the fluctuating part in the spectra is called unfolding. In essence, this procedure consists of mapping the spectrum of the excited states E_i into a dimensionless spectrum ϵ_i , whose main characteristic is a mean-level density normalized to 1. It has been widely appreciated that this process is not trivial [4], but the unfolding details are usually omitted in the literature. Of special importance to the present work is the analysis reported in Ref. [5], which demonstrates that the statistics that measure long-range correlations strongly depend on the unfolding procedure and in the end, this dependence can give rise to misleading results with regard to the chaoticity of quantum systems. The main goal of the present paper is to propose an unfolding technique which leads to reliable signatures of chaos. This is achieved by subtracting the residual trend which remains after the initial unfolding

process, which is achieved by means of the empirical mode decomposition technique.

II. UNFOLDING PROCEDURE

Given a spectral density ρ it is possible to define an accumulated level density $N(E)$, which measures the number of levels up to a certain energy E in the system:

$$N(E) = \int_{-\infty}^E dE' \rho(E'). \quad (2)$$

In this way we can distinguish between a smooth and a fluctuating part:

$$N(E) = \overline{N(E)} + \widetilde{N(E)}. \quad (3)$$

The unfolding procedures usually involve an estimation of a functional shape for the smooth part of the spectral density $\overline{\rho(E)}$ or for the smooth part of the accumulated level density $\overline{N(E)}$. Once the estimated accumulated density is known, a new dimensionless spectrum ϵ_i is obtained where the levels are given by

$$\epsilon_i = \overline{N(E_i)}. \quad (4)$$

The problem is how to find an appropriate smooth estimation for the secular part of the level density. When possible, the spectral density is obtained theoretically using the knowledge of the low-order energy moments, which are related to the trace of powers of the Hamiltonian matrix [6]. If this is not possible, then it is necessary to obtain it from the spectrum itself. Several procedures have been proposed in order to unfold this kind of spectra. The easiest unfolding approach is to assume a polynomial dependence for the accumulated level density [7]. In this approach a high-order polynomial interpolation for $N(E)$ is taken, the only parameter being the order of the polynomial approximation. However, this estimation can be quite inaccurate, since the polynomial function may have no relation with the physical properties of the system. It is also possible to consider a linear fit of $N(E)$ on an interval containing ν levels around the level E_i ,

and a moving average then taken through the whole spectrum. The ν value is used as a free parameter [8]. More sophisticated approaches for the unfolding involve Fourier broadening of the step functions, which reflect the accumulated density or a Gaussian broadening of the level density. While usually this density is conformed by a summation of δ functions for every level, under this approach the δ functions are substituted by an average Gaussian level density. It is also possible to include local effects in this procedure [9].

Regardless of which method is used to unfold the fluctuating part of the spectra and even if a good estimation for the accumulated level density is obtained, this approximation may not be good enough. If this is the case, the unfolding does not capture the full behavior of the smooth part of the spectrum. The net effect is that spurious long-range correlations are introduced. These spurious correlations are responsible for the misleading signatures of quantum chaos that may occur [5]. The technique that we propose here does not depend on *a priori* selection of unfolding functions and, as we shall show, significantly improves the estimation for the smooth part. Throughout this work we carry out an initial unfolding with polynomial approximations as an example, but the results do not depend on this choice and it is possible to improve the estimation starting with any of the previously mentioned procedures.

Once a dimensionless spectrum is obtained, we can calculate the nearest-neighbor level spacings defined by

$$s_i = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, N - 1. \quad (5)$$

Recently, a proposal was made to study the fluctuating part of a quantum spectrum as a time series, which gives rise to an alternative signature of quantum chaos [10]. This approach characterizes the spectral fluctuations with the δ_n statistic [11] defined by

$$\delta_n = \sum_{i=1}^n (s_i - \langle s \rangle). \quad (6)$$

The discrete function δ_n measures the deviations between the energy of the $(n + 1)$ -th unfolded state and the corresponding energy of an equally spaced energy sequence. The main objective of the analysis is to propose a correspondence between the δ_n statistic and time series by equating time to the index n , which represents the ordering number of the energy levels. It is then possible to apply the usual techniques of time series analysis.

As we mentioned above, the result of a defective unfolding is the introduction of spurious correlations in the spectrum fluctuations. In a properly unfolded spectrum all traces of the secular component of the signal should in principle be removed. In terms of time series, these correlations are represented as global trends on the δ_n statistic, i.e., a smoothly varying behavior is present. If the energy spectrum is correctly unfolded, then the δ_n should consist only of fluctuations around its constant mean value. Figure 1 shows the effect of unfolding with polynomials of different order on the same energy spectrum. The spectrum was obtained from a Gaussian orthogonal ensemble (GOE) matrix, a system which is regarded as a paradigm for the study of quantum chaos [3]. The energy spectrum was unfolded with three different

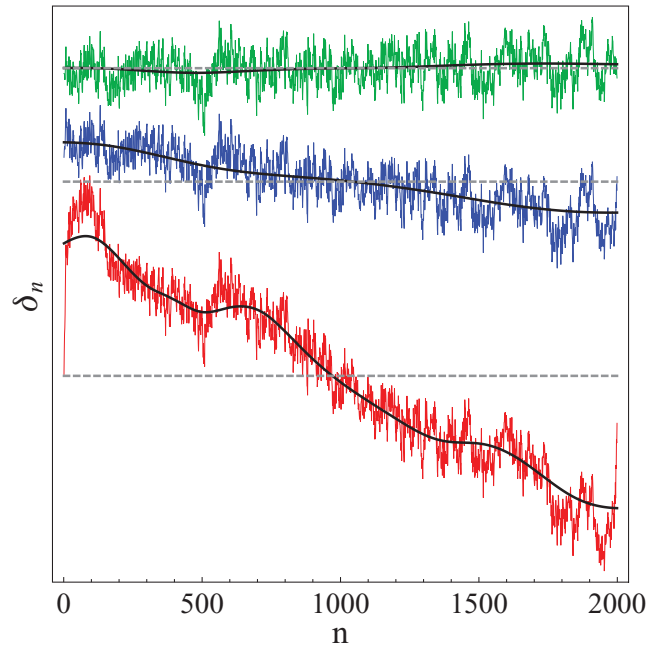


FIG. 1. (Color online) δ_n statistic for a GOE spectrum unfolded with polynomials of order 5 (bottom, red online), 9 (middle, blue online), and 13 (top, green online). The dashed lines show the mean on each case, and the black solid line shows the trend obtained through the EMD. Each plot was moved along the vertical axis to avoid overlapping.

polynomials, and the resulting δ_n for each case is shown in Fig. 1. The bottom (red online) signal shows a δ_n obtained with a fifth-order fit, the middle (blue online) one shows the one obtained with a ninth-order fit, and the top (green online) signal shows the δ_n obtained for a fit with a polynomial of order 13. The plots were displaced along the vertical axis to avoid overlapping. The dashed lines show the mean for each case. If the unfolding procedure were correct, the time series should fluctuate around this mean, but a clear global trend is still present. This trend is shown as a black solid line on each case. In order to solve the problem of an incorrect unfolding, we propose to detrend the δ_n time series using the empirical mode decomposition (EMD) technique.

III. TRENDS AND EMPIRICAL MODE DECOMPOSITION

The trend is a basic concept in a large amount of subjects in physics, economics, statistics, sociology, etc. The concept is used specifically in the analysis of data sets. While an intuitive idea of the trend can be used, there is no precise definition of it. In most of the data analysis applications, the trend dominates the global behavior of the data. If a more precise analysis of the phenomena involved is required, then the trend must be subtracted in order to reveal the relevant details. Unfortunately, a general algorithm to detrend a time series does not exist, especially in the case where the time series is nonlinear and nonstationary. As in the case of the unfolding procedure, an accurate and detailed description of the detrending procedure is usually avoided in the literature. Recently an attempt to mathematically define the trend has been proposed [12] where the authors put special emphasis on the fact that the trend is

part of the data, an intrinsic property of it. Therefore, in order to extract the trend an adaptive method is required, namely, the trend must be derived directly from the data. The empirical mode decomposition technique [13] is especially suited to accomplish a detrending process fully based on the data.

The empirical mode decomposition (EMD) proposes the expansion and decomposition of the data in terms of intrinsic mode functions (IMFs) which are derived from the data and conforms an adaptive local and nonlinear basis. This basis is constructed using the physical time scales that characterize the oscillations of the phenomena. The EMD assumes that the time series under analysis is composed of the superposition of several nonstationary processes that take place in different time scales. The essence of the method is to identify the oscillation modes of the data in a characteristic time scale and then decompose the data into these modes of oscillation. The local time scale of an oscillation is identified by the time lapse between the successive alternations of local maxima and minima. The time series is composed of several oscillations mounted on oscillations corresponding to longer time scales, which in turn are also riding bigger oscillations, and so on. The process of sifting, described below, has been designed in order to untangle these oscillations and extract them from the time series. The oscillating functions in which the time series is decomposed are called intrinsic mode functions. These intrinsic mode functions are defined as functions in which (a) the number of extrema and the number of zero crossings are the same or differ at most by one, and (b) at any point the mean value of the envelope defined by the local maxima and the envelope defined by the local minima is zero. In general the data oscillations involve many time scales and it is necessary to decompose the time series in its IMFs. The process of sifting to decompose the data into IMFs is as follows:

(1) Localize all the local maxima in the time series and connect them with a cubic spline, which defines the upper envelope. Repeat the procedure with the local minima defining the lower envelope.

(2) Calculate the mean value of the upper and lower envelopes $m^{(1)}$, as well as the difference, with the data points

$$x_j - m_j^{(1)} = h_j^{(1)}. \quad (7)$$

Since the envelopes include all the extrema, the oscillation between them $h^{(1)}$ is the oscillation of the data with the finest time scale. Ideally this oscillation should be an IMF, but in practice the process produces new extrema and more iterations are needed to extract an IMF. In this new iteration the obtained component is used as the new data set.

(3) Repeat steps 1 and 2 using the newly obtained component as data,

$$h_j^{(1)} - m_j^{(1,1)} = h_j^{(1,1)}. \quad (8)$$

Stop when the last component is an IMF, i.e., when all local maxima are positive and all local minima are negative, and the mean of the envelopes is locally zero, which ensures that the wave is symmetric. The IMF is obtained after k iterations,

$$h_j^{(1,k-1)} - m_j^{(1,k)} = h_j^{(1,k)}. \quad (9)$$

The function $h^{(1,k)}$ is then designated as an intrinsic mode function of the data and as a component of our new basis,

$$c^{(1)} = h^{(1,k)}. \quad (10)$$

(4) Subtract the obtained IMF from the original data,

$$x_j - c_j^{(1)} = r_j^{(1)}. \quad (11)$$

The residue $r^{(1)}$ is a new version of the data where the finest oscillations have been removed. However, it still contains information for longer period components, so it is necessary to remove these additional components.

(5) Repeat steps 1–4 in order to extract all the IMF components in the original data, using as new data on each iteration the residue obtained in the previous one,

$$r^{(1)} - c^{(2)} = r^{(2)}, \dots, r^{(m-1)} - c^{(m)} = r^{(m)}, \quad (12)$$

where m is the number of IMFs in the data. This process can be stopped when the m th residue is a monotonic function and no more IMFs can be extracted. The last residue is called the trend of the data. It is important to notice that any residue constitutes a trend for the previously extracted oscillation, i.e., $r^{(i)}$ is the trend followed by the $c^{(i)}$ intrinsic mode function. For a discussion about the specific details of the algorithm and details about its convergence see [13–15].

After following this procedure, it is possible to express the original data in terms of the IMFs as

$$x_j = \sum_{i=1}^m c^{(i)} + r^{(m)}. \quad (13)$$

We are interested in the last residue $r^{(m)}$, which is the global trend.

The trend should be a constant for a δ_n obtained from a correctly unfolded spectrum. Figure 1 shows as solid black lines the trends obtained through the EMD for the same spectrum, previously unfolded with polynomials of order 5, 9, and 13. Two undesired effects are apparent in this plot, the first one related to the global trend, which is still visible after the unfolding procedure. In each case it is evident that the EMD technique captures the global behavior, so it is possible to subtract it. The second effect is more subtle and has to do with the fact that the values for the δ_n on the edges of the spectrum change abruptly, especially when the order of the original polynomial fit is low. If this is the case, the EMD decomposition is not well suited for these areas due to the border conditions of the cubic spline interpolations. In order to avoid this effect we drop 5% of the eigenvalues at the beginning and at the end of the spectrum.

In order to decrease the dependence on the unfolding procedure, we propose to construct a new detrended fluctuation, subtracting the trend obtained with the EMD, $\delta'_n = \delta_n - r^{(m)}$. Figure 2 shows the result of excluding 5% of the eigenvalues on the edges of the spectrum and subtracting the residual trend from the original δ_n statistic (Fig. 1). It is remarkable how in a qualitative examination the main features of the fluctuations are present on each plot and apparently display the same features. A subtle difference is appreciated at the last part of the δ'_n obtained with a fifth-order polynomial. This plot has an extra oscillation around $n = 1200$ which is present due to the effect mentioned before, the abrupt change of δ_n

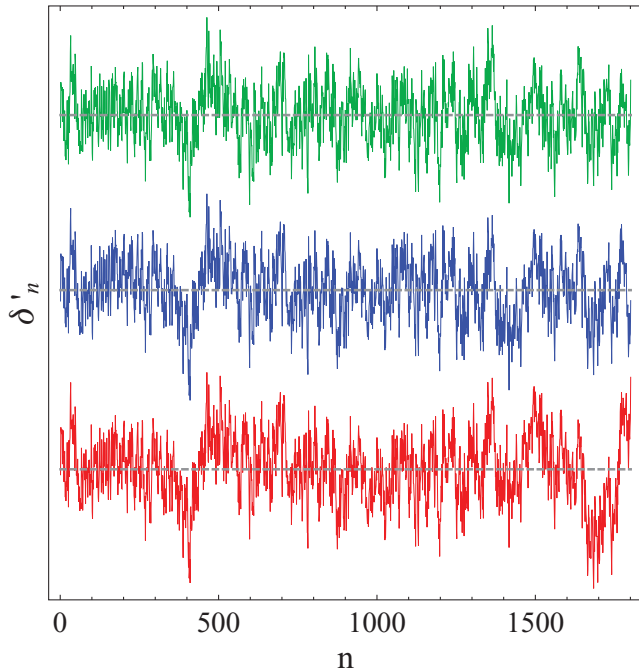


FIG. 2. (Color online) Detrended δ_n statistic for a GOE spectrum, defined as $\delta'_n = \delta_n - r^{(m)}$, where $r^{(m)}$ is the trend obtained through EMD. The spectrum was unfolded with polynomials of order 5 (bottom, red online), 9 (middle, blue online), and 13 (top, green online). The dashed lines show the mean on each case. Each plot was moved along the vertical axis to avoid overlapping.

values on the edges of the spectrum. In this case dropping 5% of the eigenvalues may not be enough. However, this case is useful to appreciate how the affected part is restricted to the end of the δ'_n statistic, i.e., it is a local phenomenon which can be removed. To quantitatively show that the new δ'_n statistics are independent of the unfolding is the main goal of the next section.

IV. MEASUREMENTS OF QUANTUM CHAOS

In order to demonstrate that the δ'_n statistic, obtained by subtracting the EMD trend, leads to chaos measurements independent of the unfolding procedure, we performed a numerical experiment. We constructed and diagonalized 100 GOE matrices with 2000 eigenvalues per matrix. Then the δ_n and δ'_n statistics were computed for each spectrum. Given these two statistics, the ensemble behavior of the usual measurements of quantum chaos is compared for different orders of the polynomial fit. The GOE system was chosen because it is a well-known example of a system presenting quantum chaos and, in addition, the theoretical result for the usual measurements of chaos are known [3,10,11].

As a first test we choose a quantum chaos measure which is computed using the δ_n statistic, the power-law behavior of the power spectrum of the fluctuation time series [10]. The power spectrum of a given time series x_n is defined as

$$S(k) = |\hat{X}_k|^2 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n x_n \exp\left(\frac{-2\pi i k n}{N}\right), \quad (14)$$

where \hat{X}_k is the Fourier transform of x_n and N is the number of elements in the series. It has been demonstrated that the power spectrum of the fluctuations of quantum spectra follows a power-law dependence $\langle S(k) \rangle \sim 1/k^\beta$; this relation is only an approximation, valid without taking into account the highest frequencies of the spectrum. Therefore in the numerical analysis, we take only the region of frequencies which follows a power-law behavior [10,16–18]. In the case of an integrable system the value of the exponent approaches $\beta = 2$, because the interlevel spacings behave as random independent variables [2]. For the GOE system the value $\beta = 1$ corresponds to the fact that correlations exist on all available scales. According to this, the power spectrum of a correctly unfolded GOE spectrum must follow the power law $\langle S(k) \rangle \sim 1/k$. The numerical experiment compares the effectiveness of detecting the presence of quantum chaos using both statistics, the δ_n fluctuation obtained by the traditional unfolding of the spectrum and the one without trend, the δ'_n . In order to compare the ensemble behavior of the system, an ensemble average power spectrum is computed using the 100 individual power spectra, which lowers dispersion and brings out the power-law behavior of the system.

The results of the numerical experiment are compared in Fig. 3. This figure shows the values of the exponent β obtained for different orders of the unfolding polynomial fit. The filled squares (red online) correspond to the case of the average power spectrum of the δ_n fluctuation, and the empty circles (blue online) show the case of the power spectrum of the detrended fluctuation δ'_n . The error bars show the standard deviation using individual fits to the power spectra of each member of the ensemble. The gray dashed line indicates the theoretical value of the β exponent for the GOE system. It is evident that the value of β depends on the order of the polynomial used to unfold the quantum spectra. If the order of the polynomial is too low, then spurious long-range correlations are introduced and the low-frequency part of the

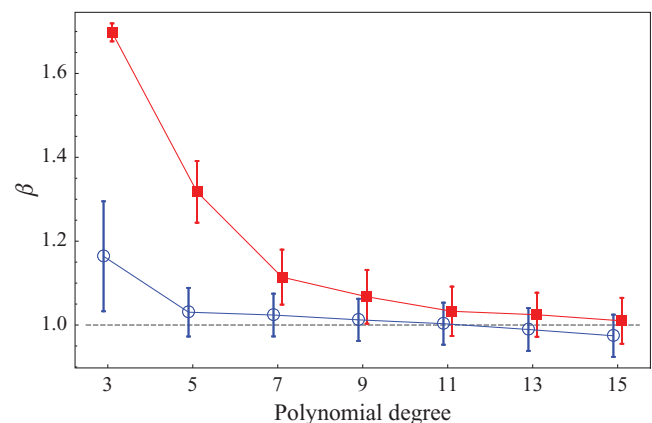


FIG. 3. (Color online) Value of the β exponent of the power-law behavior in the average power spectrum of the fluctuations as a function of the degree of the polynomial fit used to unfold the quantum spectra. Two cases are shown, the β exponent values for the δ_n fluctuation (filled squares, red online) and the case for the δ'_n fluctuation obtained by detrending the previous one (empty circles, blue online). The dashed line shows the theoretical result for the GOE. The error bars show the standard deviation of the ensemble.

power spectrum is enhanced, producing power-law exponents larger than $\beta = 1$. However, the use of the EMD to remove the residual trend eliminates these spurious correlations and improves the value of the exponent, which gets closer to the theoretical value. When the trend is removed, for all the degrees of the polynomial fit lower than 15, the β value agrees with the theoretical value, except for the example corresponding to the third-order polynomial, which is an extreme case.

As the order of the polynomial increases, the β value approaches the theoretical one. If the order of the polynomial is big enough, then the polynomial unfolding destroys correlations and the β value tends toward values lower than $\beta = 1$. This situation cannot be improved by use of the EMD because important correlations are missing and cannot be recovered.

Using the detrended fluctuation δ'_n , it is possible to obtain a detrended dimensionless spectrum ϵ'_i as

$$\epsilon'_{i+1} = \delta'_i + \epsilon_1 + i \langle s \rangle, \quad (15)$$

where δ'_n are the fluctuations or the difference between the dimensionless quantum spectrum of the system ϵ' and a regular version of it, $\epsilon_1 + n \langle s \rangle$. Given this detrended spectrum, it is possible to explore the dependence of other measurements of chaos as a function of the order of the polynomial used in the unfolding. The short-range correlations are usually analyzed by means of the nearest-neighbor spacing distribution $P(s)$. It is known that the spectra from GOE follow the Wigner surmise. This distribution is not sensitive to the unfolding details [5], and we mention here only that the Wigner distribution is conserved after removing the trend of the fluctuations.

The study of the long-range correlations in quantum spectra is traditionally done by means of the rigidity of the spectrum, which is represented by the Δ_3 statistic. The $\Delta_3(L)$ is defined as the average over γ of the function

$$\Delta_3(L; \gamma) = \frac{1}{L} \min_{a,b} \int_{\gamma}^{\gamma+L} [N(E) - aE - b] dE, \quad (16)$$

where $N(E)$ is the integrated level density of the unfolded spectrum, and a and b are parameters of a linear model which fits $N(E)$ in the energy range $(\gamma, \gamma + L)$. Theoretically the values of the $\Delta_3(L)$ for the integrable system and for the GOE are well known [19]—in the case of GOE, $\Delta_3(L) = [\log(L) - 0.0687]/\pi^2$, while in the case of an integrable system, $\Delta_3(L) = 1/15$.

It is possible to compute the Δ_3 statistic for the detrended spectrum and compare it with the Δ_3 obtained from the traditionally unfolded spectrum. Figure 4 shows this comparison. The upper part shows the ensemble average of the Δ_3 obtained for the unfolded spectrum using different degrees for the polynomial fit. The dashed gray line shows the predicted theoretical behavior for GOE. We observe that for all polynomial degrees the expected result is followed up to $L = 200$, except for the third-order polynomial which shows some small deviations. For greater values of L , the low-order polynomial spectra deviate systematically from the theoretical behavior due to the spurious correlations, which correspond to the residual trend. Since the trend can be represented as low-frequency oscillations, it is expected that the effect will be reflected in the long-range correlations region. The high-order polynomial spectrum also deviates because of the

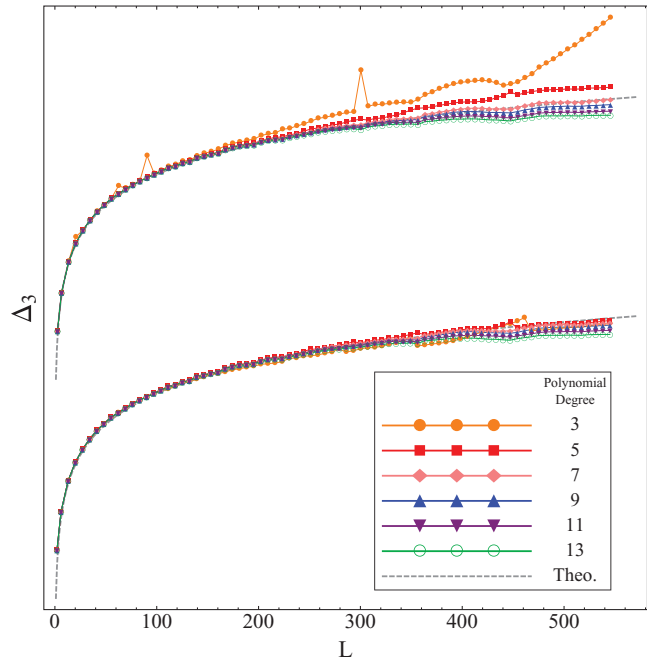


FIG. 4. (Color online) Value of $\Delta_3(L)$ averaged over the ensemble. The upper part shows the Δ_3 computed using polynomials of different order to unfold the spectra, where the plots have been displaced to avoid overlap. The lower part shows Δ_3 calculated from detrended spectra obtained from the detrended fluctuation δ'_n . Plots for different degrees of the polynomial fit used to unfold the quantum spectra are shown in both cases. The dashed line shows the theoretical result for the GOE.

effect mentioned before for the case of the Fourier spectrum analysis, i.e., the polynomial unfolding destroys important correlations. The lower part shows the ensemble average of the Δ_3 computed using the detrended spectra from Eq. (15). The effect of subtracting the residual trend of the fluctuations is evident. In the region of small L the deviations for the third-order polynomial are gone, while in the region of larger L the low-order polynomial behavior improves and follows the expected theoretical behavior. The case for the high-order polynomials does not improve, because once important correlations are destroyed they cannot be recovered.

The Δ_3 statistic is a good measure of the long-range correlations of a quantum spectrum, but it is difficult to obtain a quantitative deviation from the theoretical behavior, as done in the previous example of the Fourier power spectrum by means of the value of the exponent β . Recently another measurement of the chaoticity of a quantum system has been proposed [20]. This method uses a detrended fluctuation analysis technique [21] (DFA) which has been directly related to the Δ_3 [20]. The DFA technique was proposed in the context of time series analysis as a method to investigate the long-range correlation properties of nonlinear time series. In order to apply the DFA, the time series is integrated and then divided into nonoverlapping N/l boxes of equal length containing l data points. Then a local trend is defined for each box, i.e., a linear fit to the integrated time series. Then the variance between the integrated time series and the local fit is computed for each box and averaged over all the boxes of size l . The

average variance $F(l)$ depends on the box size. The analysis of this dependence allows study of the scaling properties of the system and the presence of long-range correlations. A linear relationship between $\log[F(l)]$ and $\log(l)$ will indicate a scaling behavior. The slope α in the $\log[F(l)]$ vs $\log(l)$ plot characterizes the scaling properties of the time series because it reflects a power law of the form $F(l) \sim l^\alpha$. In the case of a regular uncorrelated system, the theoretical value of the slope is $\alpha = 1/2$. In the case of GOE the expected value is $\alpha = 1$ [20]. The DFA technique allows us to compare the δ_n fluctuation with the detrended one, δ'_n .

A qualitative comparison of the DFA relation between $\log[F(l)]$ and $\log[l]$ for the δ_n and δ'_n fluctuations is shown in Fig. 5. Once again, the improvement due to the detrended process is noticeable. The upper part shows $\log[F(l)]$ as a function of $\log(l)$ obtained from a DFA calculation on the unfolded fluctuations δ_n for different degrees of the polynomial. The theoretical value for GOE ($\alpha = 1$) is shown as a dashed gray line. It is evident how for low-order polynomials the result diverges from the expected theoretical behavior when l increases. Large values of l correspond with long-range correlations on the time series. This plot shows that if the degree of the polynomial is too low, the unfolding is capable of representing the correlations correctly, up to a certain range. On the other hand, if the polynomial degree is too big, then the unfolding procedure destroys important long-range correlations. This effect is also observable on the upper part of Fig. 5 but is more subtle. The lower part of the same figure shows the result of the DFA on the detrended δ'_n fluctuation.

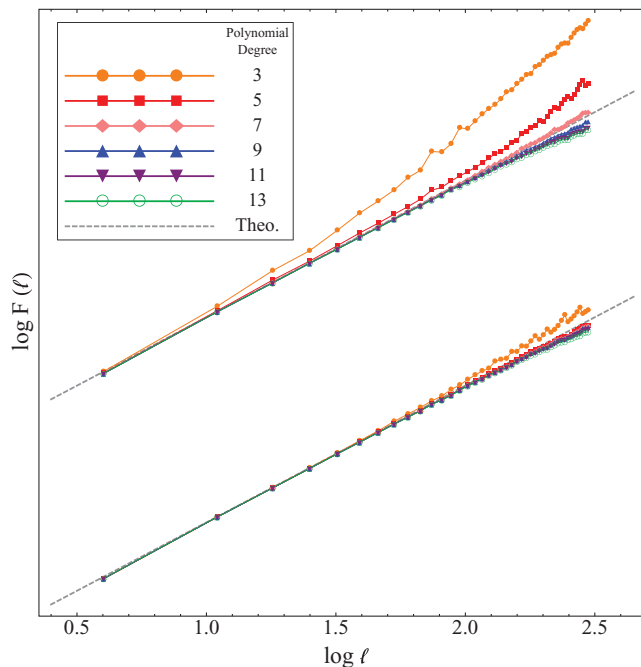


FIG. 5. (Color online) Value of DFA variance $\log[F(l)]$ averaged over the ensemble. The upper part shows $\log[F(l)]$ computed using the DFA on δ_n . The plots have been displaced to avoid overlap. The lower part shows $\log[F(l)]$ from the DFA on the detrended δ'_n . Plots for different degrees of the polynomial fit used to unfold the quantum spectra are shown in both cases. The dashed line shows the theoretical result for the GOE.

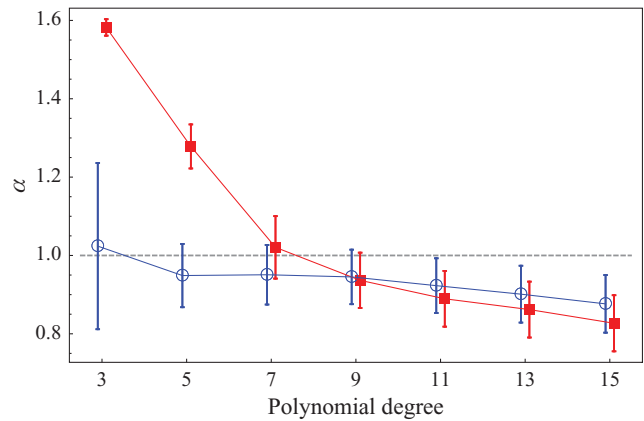


FIG. 6. (Color online) Value of the α exponent of the power-law behavior in the ensemble average calculation of the DFA for fluctuation as a function of the degree of polynomial fit used to unfold the quantum spectra. Two cases are shown, the α exponent values for the δ_n fluctuation (filled squares, red online) and the case for δ'_n fluctuation obtained detrending the previous one (empty circles, blue online). The dashed line shows the theoretical result for the GOE. The error bars show the standard deviation of the ensemble.

It is clear how the divergence observed for the low-order polynomials has decreased. All the cases have a linear behavior which corresponds to the theoretical case. For very large values of l , the third-order polynomial case begins to diverge, which means that some very long-range correlations are still missing. However, the range for which the DFA variance $\log[F(l)]$ follows a linear relation has been substantially improved.

The results shown in Fig. 5 demonstrate qualitatively how detrending the fluctuation improves the range for which the long-range correlations of the system can be detected. However, the DFA allows us to observe this improvement in a quantitative way through the calculation of the value of the α exponent. Figure 6 compares the values obtained for α as a function of the order of the unfolding polynomial using the fluctuation δ_n (filled squares, red online) and the values obtained using the detrended fluctuation δ'_n (empty circles, blue online). The theoretical behavior is shown as a gray dashed line. The improvement for small values of the polynomial degree is evident, after detrending the α exponent coincides with the predicted one. This improvement is observed up to the ninth-order polynomial. For cases with larger values of the polynomial degree there is no improvement, again due to the effect mentioned before, i.e., a high-order polynomial unfolding destroys important correlations which cannot be recovered detrending the fluctuations.

V. CONCLUSIONS

In order to study the statistical fluctuations of quantum spectra it is necessary to split the spectrum into two parts, a secular and a fluctuating one. This separation is done by means of an unfolding procedure. Several methodologies exist to unfold quantum spectra, but this procedure is not trivial. In this work we demonstrate that the usual measurements of quantum chaos can strongly depend on the unfolding procedure, i.e., an incorrect separation of the fluctuating part from the regular

one can lead to erroneous conclusions about the chaoticity of a quantum system. In order to decrease this dependence, we propose to remove the global trend which remains after an incorrect unfolding procedure. The detection of this global trend is the essential part of our proposal, which makes use of the empirical mode decomposition (EMD) technique. Finally, we show that the detrending operation on the fluctuations removes, to a large extent, the dependence on the unfolding procedure for the usual measurements of the presence of quantum chaos. The effect of an incorrect unfolding is either

to introduce spurious long-range correlations or to destroy important ones. In the first case the use of the EMD to detrend the fluctuations improves the range in which the correlations are correctly represented.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported in part by grants from CONACyT, the Czech Science Foundation (202/09/0084), and the Czech Ministry of Education (MSM 0021620859).

-
- [1] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1 (1984).
 - [2] M. V. Berry and M. Tabor, *Proc. R. Soc. London A* **356**, 375 (1977).
 - [3] H. J. Stöckmann, *Quantum Chaos* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1999).
 - [4] T. A. Brody, J. Flores, J. B. French, P. A. Mello, A. Pandey, and S. S. M. Wong, *Rev. Mod. Phys.* **53**, 385 (1981).
 - [5] J. M. G. Gómez, R. A. Molina, A. Relaño, and J. Retamosa, *Phys. Rev. E* **66**, 036209 (2002).
 - [6] K. F. Ratcliff, *Phys. Rev. C* **3**, 117 (1971).
 - [7] J. Flores, M. Horoi, M. Müller, and T. H. Seligman, *Phys. Rev. E* **63**, 026204 (2001).
 - [8] J. B. French and S. S. M. Wong, *Phys. Lett. B* **35**, 5 (1971).
 - [9] H. Bruus and J.-C. Anglès d'Auriac, *Phys. Rev. B* **55**, 9142 (1997).
 - [10] A. Relaño, J. M. G. Gómez, R. A. Molina, J. Retamosa, and E. Faleiro, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 244102 (2002).
 - [11] M. L. Mehta, *Random Matrices* (Academic, New York, 1991).
 - [12] Z. Wu, N. E. Huang, S. R. Long, and C.-K. Peng, *PNAS* **104**, 14889 (2007).
 - [13] N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M. C. Wu, H. H. Shih, Q. Zheng, N.-C. Yen, C. Chao Tung, and H. H. Liu, *Proc. R. Soc. London A* **454**, 903 (1998).
 - [14] N. E. Huang and S. P. Shen, *Hilbert-Huang Transform and its Applications*, Interdisciplinary Mathematical Sciences (World Scientific, Singapore, 2005), Vol. 5.
 - [15] N. E. Huang, M.-L. C. Wu, S. R. Long, S. S. P. Shen, W. Qu, P. Gloersen, and K. L. Fan, *Proc. R. Soc. London A* **459**, 2317 (2003).
 - [16] E. Faleiro, J. M. G. Gómez, R. A. Molina, L. Muñoz, A. Relaño, and J. Retamosa, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 244101 (2004).
 - [17] J. M. G. Gómez, A. Relaño, J. Retamosa, E. Faleiro, L. Salasnich, M. Vraničar, and M. Robnik, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 084101 (2005).
 - [18] E. Landa, I. Morales, C. Hernández, J. C. López Vieyra, and A. Frank, *Rev. Mex. Fis. S* **54**, 48 (2008).
 - [19] M. C. Gutzwiller, *J. Math. Phys.* **12**, 343 (1971); *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer, New York, 1990).
 - [20] M. S. Santhanam, J. N. Bandyopadhyay, and D. Angom, *Phys. Rev. E* **73**, 015201(R) (2006).
 - [21] C.-K. Peng, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H. E. Stanley, and A. L. Goldberger, *Phys. Rev. E* **49**, 2 (1994).

A New Quantification of Quantum Chaos based on Scale Invariance

E. Landa,¹ Irving O. Morales,¹ P. Stránský,^{1,2} and A. Frank^{1,3}

¹*Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 México, D.F., Mexico*

²*Institute of Particle and Nuclear Physics, Faculty of Mathematics and Physics,*

Charles University, V Holešovičkách 2, 180 00 Prague, Czech Republic

³*Centro de Ciencias de la Complejidad, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 México, D.F., Mexico*

We apply the Empirical Mode Decomposition (EMD) method to extract intrinsic modes in the fluctuations of the spectra of random matrices. The hierarchy of the modes follows a power law with an exponent that changes smoothly in the whole range of the transition from the Gaussian orthogonal to the Gaussian diagonal ensemble. This property of scale invariance represents a new quantification of quantum chaos.

Keywords: Time series, RMT, EMD, Quantum Chaos

PACS numbers: 05.45.Tp, 02.50.-r, 05.45.Ca

The present Letter aims to use the self-similarity and the scale invariance properties of quantum chaotic systems in order to give a new quantification of quantum chaos entirely based on these properties. Scale invariance is an important property of power laws, it makes them quite interesting. These relations characterize a large number of naturally occurring phenomena and some of them have the peculiarity that, despite the complexity and the difference between their components, a large part of their pattern dynamics is described by a power law exponent which remains constant even though there are complex dynamics going on within or between the components connected through nontrivial patterns of interaction. The equivalence of power laws with a particular scaling exponent can have a deeper origin in the dynamical processes that generate the power-law relation. Bak and collaborators [1] proposed that many dissipative complex systems naturally self-organize to a critical state, with the consequent scale-free fluctuations giving rise to power laws, independently of the initial conditions. It is only at the critical state that one has large correlations among the different parts of a large system. The idea that many complex systems are in a self-organized critical state is intuitively appealing because it is natural to associate complexity with a state that is balanced at the edge between order and disorder.

Recently Relaño *et al.* [2] based on traditional methods of time series analysis conjectured that the fluctuations of the energy spectra of chaotic quantum systems are characterized by a scale invariant $1/f$ noise. This property is universal for all kinds of chaotic quantum systems, either time-reversal invariant or not. Furthermore, the $1/f$ noise characterization of quantum chaos includes these physical systems into a widely range of systems appearing in many fields of science, which display $1/f$ fluctuations. An outstanding feature of $1/f$ noise is that it reflects fractal invariance, and for this reason it has been considered a prominent manifestation of many natural phenomena [3]. The term fractal is a geometric concept

related to chaos. A fractal is an object composed of sub-units and sub-subunits that resemble (statistically) the larger scale structure, a property known as self-similarity. The fractal concept can be applied not only to irregular geometric forms that lack a characteristic (single) scale of length, but also to complex processes that lack a single time scale. Thus $1/f$ behavior implies correlations among different elements, extending over all scales. These correlations are characterized by the correlation function, which decays in a logarithmic fashion [4].

Bohigas *et al.* conjectured that the fluctuation properties of generic quantum systems, which in the classical limit are fully chaotic, coincide with those of random matrix theory (RMT) [5], specifically the Gaussian orthogonal ensemble (GOE) for a fully chaotic system. If, in contrast, the underlying dynamics is integrable, *i.e.*, non-chaotic, the energy levels will behave rather like independent random variables from a Poisson process, formally described by the Gaussian diagonal ensemble (GDE) [6]. In order to study fractal behavior on the transition from GOE to GDE systems, we smoothly suppress the non-diagonal matrix elements of a GOE matrix by a cutoff factor $\exp[-(i-j)^2/\sigma]$, where σ acts as parameter which allows us to interpolate between Poisson ($\sigma = 0$) and GOE statistics ($\sigma \rightarrow \infty$) [7]. The eigenvalues of random matrices provide a fundamental model for sequences of correlated random numbers with a wide range of possible applications (see Ref. [8] for a survey).

Since the fluctuations can describe the characteristics of the stochastic process that generates the time series of the system. In this Letter, we focus specifically on the scale invariance properties in the spectral fluctuations of RMT. The fluctuations in a quantum spectrum are obtained by subtracting the secular part of the spectrum through an unfolding procedure [9]. In essence, this procedure consists in mapping the spectrum of the excited states E_i into a dimensionless spectrum ϵ_i , having a mean level density of 1:

$$E_i \rightarrow \epsilon_i \equiv \tilde{N}(E_i), \quad (i = 1, \dots, N), \quad (1)$$

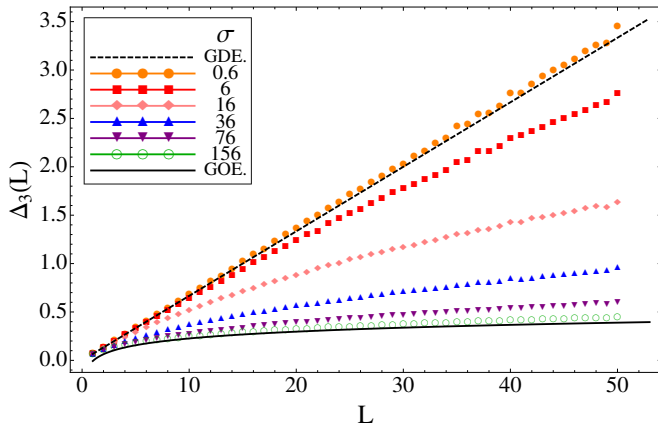


FIG. 1: Numerical results for Δ_3 statistic obtained with a random-matrix model to describe the spectral statistic in intermediate situations between the limits GDE and GOE, respectively. The dashed black line and the black line are the limits while the σ values are the intermediate cases.

where $\bar{N}(E_i)$ is a smooth function fit of the staircase-like cumulative density function $N(E_i)$ (see *e.g.*, [10]). The spectrum fluctuations can be defined as

$$\delta_n = \sum_{i=1}^n (s_i - \langle s \rangle) = [\epsilon_{n+1} - \epsilon_1] - n\langle s \rangle, \quad (2)$$

where the index n runs from 1 to $N - 1$ and s_i are the nearest-neighbor spacing $s_i = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i$. The stochastic discrete function δ_n measures the deviations of the distance between the first and the $(n+1)$ -th unfolded states, with respect to the corresponding distance in a uniform (equally spaced) sequence. The sequence (2) can be formally interpreted as a discrete time series (see *e.g.* [2]).

The symmetries embedded in the structure of the random matrices allow us to represent a wide variety of physical systems. Because of this we will not take a specific physical model, instead we use the universality character of the fluctuations of RMT, that characterize quantum systems whose classical analogues are chaotic. We analyze the fully chaotic system (GOE), the integrable one (GDE) and cases between these two limits. For each different value of σ , our data consists of an ensemble with 500 numerically generated matrices, each one with a dimension of 2000. For each case we perform unfolding procedure [14] and analyze the fluctuations δ_n . In order to compare the long-range correlations and self-similarity properties of the δ_n obtained with different σ , we focus on the exponent α_{dfa} from the detrended fluctuation analysis (DFA) [15], the exponent β_{ps} which is obtained using Fourier spectral analysis [2], and the standard measure for the deviation from an equally spaced spectrum, known as the Dyson-Metha rigidity function [16], defined

TABLE I: The exponent α_{dfa} and the parameter α_{emd} obtained using detrended fluctuation analysis and empirical mode decomposition, respectively. We add in the Table the references GDE and GOE as the limits, respectively.

σ	GDE	0.6	6	16	36	76	156	GOE
α_{dfa}	1.50	1.49	1.35	1.27	1.24	1.23	1.18	1.04
α_{emd}	1.52	1.51	1.38	1.29	1.26	1.23	1.16	1.05

as

$$\Delta_3(L; \lambda) = \frac{1}{L} \text{Min}_{A,B} \int_{\lambda}^{\lambda+L} [N(E) - AE - B]^2 dE, \quad (3)$$

where A, B give the best local fit to $N(E)$ in the observation window $\lambda \leq E \leq \lambda + L$. A completely random (uncorrelated) spectrum has an average value (over λ) $\bar{\Delta}_3(L) = L/15$. In the case of a GOE spectrum, the rigidity function has the form $\bar{\Delta}_3(L) \simeq \frac{1}{\pi^2} (\log L - 0.0687)$. The $\Delta_3(L)$ statistic makes it possible to study correlations of length L , as we change the L value, we obtain information on the level correlations at all scales. We show in Fig. 1 the numerical results of the Δ_3 for each σ ensemble. It is noticeable how the Δ_3 behavior changes smoothly as σ changes from the GOE limit case to GDE. These results show the evolution of the loss of correlations on different length scales from chaotic quantum systems that are characterized by $1/f$ noise in the spectral fluctuations to regular systems who follow a $1/f^2$ noise. The results obtained with DFA are based on a linear analysis in which the trend on different time scales is compared with a linear model, it quantifies the long-range correlations only in a limited range of time scales. This comparison exhibits the fractal properties of the system, which can be characterized by the exponent α_{dfa} [15]. The numerical results for the α_{dfa} exponent are reported in Table I. The exponent β_{ps} obtained from de Fourier analysis is shown in Table II.

TABLE II: The exponent β_{ps} and the parameter β_{emd} obtained using empirical mode decomposition, We add in the Table the references GDE and GOE as the limits, respectively.

σ	GDE	0.6	6	16	36	76	156	GOE
β_{ps}	1.99	1.98	1.75	1.56	1.48	1.38	1.23	1.10
β_{emd}	2.03	2.02	1.76	1.58	1.52	1.45	1.31	1.09

We propose a new quantification of quantum chaos based in a new scaling exponent which reflects the fractal properties of a time series. The $1/f$ power law is usually obtained by decomposing the time series in terms of the Fourier basis of Sine and Cosine functions. It relies on

a strong assumption of stationarity. However, for nonlinear and non-stationary processes this is not the best choice. In the present work we use an alternative decomposition in terms of functions obtained directly from the data, *i.e.*, adaptively. This method called Empirical Mode Decomposition (EMD) does not require any predetermined basis functions [11], it is built on the assumption that any time series data is composed by the superposition of several nonlinear and nonstationary processes that take place in different time scales. EMD can identify the oscillation modes of the data in a characteristic time scale and carry out a decomposition of the data into intrinsic modes of oscillation. As the basis is adaptive, it offers a physically meaningful representation of the underlying processes. The decomposition seeks these modes of oscillation based on the principle of the local time scale separation, *i.e.*, it identifies the time lapse between the successive alternations of local maxima and minima. The oscillating functions in which the time series is decomposed are called Intrinsic Mode Functions (IMFs). An IMF is a function that satisfies that at any point the mean value of the envelope defined by the local maxima and the envelope defined by the local minima is zero, and also it must satisfy that the number of extrema and the number of zero-crossings must either equal or differ at most by one.

Numerically, the EMD is implemented through a sifting process. Suppose $r_{j-1}(n)$ is the remainder of a time series $x(n)$ after $j-1$ IMFs are extracted. Then the procedure for extracting the j -th IMF is as follows:

1. Localize all the local maxima (respective minima) in r_{j-1} and connect it with a cubic spline, this define the upper (respective lower) envelope.
2. Obtain the component h by taking the difference between the data and the local mean of the two envelopes, to extract the local oscillation riding on the local trend. The component h does not contain a single frequency, but its instant frequency can depend on time.
3. Treat h as new data and repeat the previous steps as many times as is required until h satisfies the conditions to be an IMF. The final h is designated as c_j , the j -th IMF.

A complete sifting process stops when the residue, r_k , becomes a monotonic function from which no more IMF can be extracted. For specific details on the algorithm see [11]. After this procedure it is possible to express the original data in terms of the obtained IMFs as

$$x(n) = \sum_{j=1}^k c_j(n) + r_k(n) \quad (4)$$

where $c_j(n)$ is the j -th IMF (*i.e.*, local oscillation), k is the number of IMFs, and r_k is the k -th residue (*i.e.*, local

trend). Given this adaptive decomposition, it has been demonstrated [12] that in the case of self similar systems a power law exists between the energy contained on the IMFs and the mean period of their oscillations. The exponent which characterizes this power law is related to the fractal properties of the system, as has been proved previously for self similar systems such as the fractional gaussian noise [12] and the heart interbeat dynamics [13]. We use this new scaling factor to quantify the fractal property of the fluctuations over all escales for chaotic quantum systems, which is based on the hierarchy of the extracted IMFs. The procedure to define this new scaling exponent is the following. After the EMD, the fluctuations δ_n can be expressed in terms of the obtained IMFs as equation (4). We can define the energy density of the j -th IMF as

$$E_j^\sigma = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [C_j^\sigma(i)]^2, \quad (5)$$

where N is the number of samples and σ indicates the corresponding RMT ensemble.

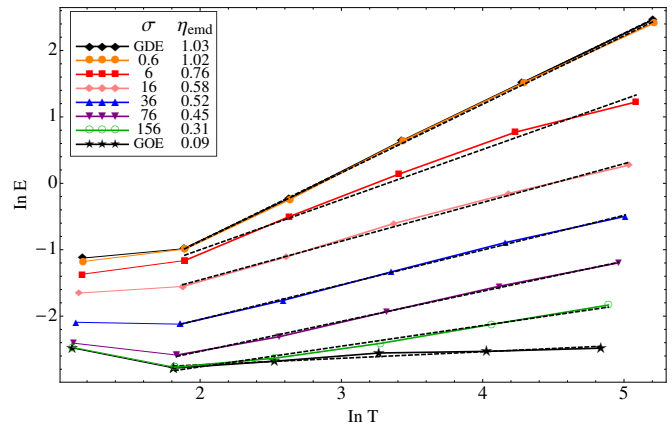


FIG. 2: (Color online) Overall results of energy-time scale plots of the first 6 IMFs in the EMD-based analysis for GOE, GDE, and intermediate cases characterized by different values of σ (see Table. I). Each point corresponds with one IMF on each line. The fitted slopes η_{emd} are shown in the legend.

Similarly, we can determine the mean period, T , of the IMF by dividing the total number of points by the number of peaks (local maxima or minima) on the respective IMF. Studies in literature have proved that EMD acts essentially as a dyadic filter bank. For the indices $j > 1$ corresponding to the IMFs, the Fourier spectral shape for each IMF has been reported that look quite the same, up to some shifts in abscissa and ordinate [12?]. As for the latter, the self-similarity of the spectral shapes lead to the scale relation in the $\ln E$ and $\ln T$ representation [12, 13]. The first IMF is not taken

into account in the scale relation because has a different shape in the spectra due the corresponding probability distribution is essentially a bimodal distribution of the positive maxima and negative minima, since by construction the first IMF is a high-pass filtered version of the input signal. The plot of energy densities against their corresponding mean periods reflects the power-law correlation between energy and time scale [13]. This is displayed for six different values of σ (for GOE and GDE) in Fig. 2 in log-log scale. Each line corresponds with a set of matrices with the same value of sigma and each dot corresponds with an IMF in its decomposition. On each case the dashed line shows a linear fit for the relation between the energy and mean period of the IMFs. The hierarchy of the IMFs increases from left to right, *i.e.*, the leftmost dots corresponds with the high frequency oscillation IMFs. After we have applied the EMD to the fluctuations and despite the fact that the difference of the IMFs obtained in each case for our ensembles is at most one, none of the realizations generated less than 6 modes. Therefore, $j = 6$ has been taken in this study as the common number of modes for all realizations.

In Fig. 2, the GOE and GDE are represented by the black lines in the lower and higher cases, respectively. The slope η_{emd} , obtained with the linear fit (in all the cases, the error of the linear regression is about 10%) serves as a scaling factor. It exhibits the existence of a scaling law that points to nontrivial correlations between IMFs. The relation between $\ln E$ and $\ln T$ (see Fig. 2), obtained with the ensemble results for the fluctuations δ_n , assigns statistical significance of the information content for the IMFs for each case treated. The major difference in the distribution of the intrinsic time scales of the IMFs is reflected between GOE and GDE fluctuations. A subtle result is clearly appreciated for GOE, the energy density is distributed equally for different periods, typically of the $1/f$ phenomena. The EMD method thus demonstrates its potential as a data-adaptive method of separating the different scales in our time series reflecting the characteristic of self-similarity by straight lines of logarithmic energy-time scale. This power law can be related with the one obtained through DFA using the relation $\alpha_{\text{dfa}} = 1 + \eta_{\text{emd}}/2$ [13] (see values for η_{emd} in Fig. 2.). Table I shows a comparison between α_{dfa} and α_{emd} (obtained with the former relation) for the analyzed previously time series, averaged over the ensemble on each case, is remarkable that the exponents are similar. Finally, it is also possible to relate the η_{emd} exponent with the power law exponent obtained from a spectral analysis using the power spectrum obtained through the Fourier transform. Such a relation is given by the expression $\beta_{\text{ps}} = \eta_{\text{emd}} + 1$. A comparison between the β_{ps} and the analogous exponent computed from this relation is shown in Table II, where is also evident that the results of both technics are very close. Even though the results ob-

tained with the EMD, the DFA and the power spectrum are comparable, it is important to notice that in a way the EMD technique is less restrictive in the sense that it is designed to analyze non-linear and non-stationary time series without any assumptions that constrain the physical meaning of the results. The power-law correlation between energy and time scale implies a scale invariance in all the cases treated, maximal long-range correlation for GOE, while the long-term correlations are lost for the cases which the σ parameter is decreasing until the scale invariance is trivial for GDE. By studying the relation between the energy and the time scales through the EMD it is possible to extract the fractal properties of the time series obtained with random matrix models that may describe a wide range of physical systems.

In conclusion, an EMD-based analysis was used to estimate the fractal properties of quantum spectra. We used the hierarchy of the extracted mode functions for obtaining the fractal property of time series, in order to quantify the long-term fractal property through the exponent η_{emd} that reflects the functional mechanism of autocorrelation in systems that undergo a transition from regular to chaotic motion. This new approach has the advantage that it is not limited as in the traditional approaches of time series analysis, this new scaling exponent quantifies the long-term fractal property of the quantum fluctuations.

We are grateful to Rafael Molina for his many suggestions. This work was supported in part by grants from Conacyt-Mexico, the Czech Science Foundation (202/09/0084) and the Czech Ministry of Education (MSM 0021620859).

-
- [1] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **59** 4 (1984).
 - [2] A. Relaño, J.M.G. Gómez, R.A. Molina, J. Retamosa, and E. Faleiro, Phys. Rev. Lett. **89**, 244102 (2002).
 - [3] E. Milotti, e-print physics/0204033 (2002).
 - [4] Y.-Ch. Zhang, J. Phys. I **1** (Paris), 971 (1991).
 - [5] O. Bohigas, M.-J. Giannoni, and C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **52** 1 (1984).
 - [6] M.V. Berry and M. Tabor, Proc. R. Soc. London A **356**, 375 (1977).
 - [7] T.H. Seligman, J.J.M. Verbaarschot, and M.R. Zirnbauer, Phys. Rev. Lett. **53** 3 (1984).
 - [8] T. Guhr, A. Muller-Groeling, and H.A. Weidenmuller, Phys. Rep. **299**, 189 (1998).
 - [9] T.A. Brody, J. Flores, J.B. French, P.A. Mello, A. Pandey and S.S.M. Wong, Rev. Mod. Phys. **53**, 385, (1981).
 - [10] M. C. Gutzwiller, Jour. Math. Phys. **12**, 343 (1971); M.C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer, New York, 1990).
 - [11] Zhaohua Wu and Norden E. Huang, Proc. R. Soc. Lond. A **460**, 1597, (2004).
 - [12] P. Flandrin, G. Rilling, and P. Goncalves, IEEE Signal Process Lett, **11**:1124, (2004).

- [13] J-R. Yeh, W-Z. Sun, J-S. Shieh, and N.E. Huang, *Medical Engineering and Physics*, **32** 490 (2010).
- [14] I.O. Morales, E. Landa, P. Stránský, and A. Frank, *Phys. Rev. E*. **84**, 016203, (2011).
- [15] C-K Peng, S. Havlin, H.E. Stanley, and A.L. Goldberger, *Chaos* **5**, 82 (1995).
- [16] F.J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 140 (1962).

Bibliografía

- [1] F. Haake, Quantum Signatures of Chaos, 2nd Edition Springer, 2004.
- [2] M. L. Mehta, Random Matrices, Academic Press, London, 1991.
- [3] O. Bohigas, M.-J. Giannoni, and C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **52** 1, 1984.
- [4] A. Relaño, J.M.G. Gómez, R. A. Molina, J. Retamosa, and E. Faleiro, Phys. Rev. Lett **89**, 244102, 2002; E. Faleiro, J. M. G. Gómez, R.A. Molina, L. Muñoz, A. Relaño, and J. Retamosa, Phys. Rev. Lett **93**, 244101, 2004.
- [5] R. Fossion, **E. Landa**, P. Stránský, V. Velázquez, J.C. López Vieyra et al., AIP Conf. Proc. **1323**, 74, 2010.
- [6] **E. Landa**, Irving O. Morales, R. Fossion , P. Stránský, V. Velázquez, J.C. López Vieyra, and A. Frank, Phys. Rev. E. **84**, 016224, 2011.
- [7] **E. Landa**, R. Fossion, Irving O. Morales, V. Velázquez, J.C. López Vieyra, and A. Frank, Rev. Mex. Fís., S-55(2) 50-59, 2009.
- [8] **E. Landa**, I. Morales, C. Hernández, J.C. Lopez Vieyra and A. Frank, Revista Mexicana de Física, S **54** (3) 48-55, 2008.
- [9] P. Stránský, M. Macek, P. Cejnar, A. Frank, R. Fossion, and **E. Landa**, Journal of Physics: Conference Series **239**, 012002, 2010.
- [10] Irving O. Morales, **E. Landa**, P. Stránský, and A. Frank, Phys. Rev. E. **84**, 016203, 2011.
- [11] **E. Landa**, Irving O. Morales, P. Stránský, and A. Frank, Phys. Rev. E., en refereo EP10782, 2012.
- [12] K. G. Wilson, Rev. Mod. Phys. **47**, 4, 773, 1975.
- [13] C.-K. Peng, J. Mietus, J. M. Hausdorff, S. Halvin, H. E. Stanley, A. L. Goldberger, Phys. Rev. Lett. **70**, 1343, 1993.
- [14] B. B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman, 1983.

- [15] B. B. Mandelbrot, *Fractals: Form, Chance and Dimensions*, W. H. Freeman 1977.
- [16] E. Milotti, e-print physics/0204033, 2002.
- [17] W. Li, A bibliography on $1/f$ Noise, <http://www.nsljgenetic.org/wli/1fnoise//1999.html>.
- [18] J. Beran, *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman & Hall, New York, 1994.
- [19] M. B. Priestley, *Spectral analysis and time series*, Academic, 1981.
- [20] C.-K. Peng, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H. E. Stanley, and A. L. Goldberger, *Phys. Rev. E* **49**, 1685-1689, 1994.
- [21] M.S. Taqqu, V. Teverovsky, and W. Willinger, *Fractals* 3, 785, 1995.
- [22] C. Heneghan, and G. McDarby, *Phys. Rev. E* **62**, 6103, 2000.
- [23] R. F. Voss, *Phys. D* **38**, 362, 1989.
- [24] J. M. Halley and P. Inchausti, *Fluct. Noise Lett.* 4, R1 2004.
- [25] M. S. Keshner, *Proc. IEEE* **70**, 212, 1982.
- [26] K. G. Wilson, Problemas físicos con muchas escalas de longitud, *Revista Investigación y Ciencia*, 1979.
- [27] H. J. Maris, and L. P. Kadanoff, *American Journal of Physics* 46, 652-657, 1978.
- [28] M. Hénon, and C. Heiles, The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments., *Astron. J.* 69, 73-79, 1964.
- [29] E. N. Lorenz, *Journal of the Atmospheric Sciences* 20, 130, 1963.
- [30] M. Gutzwiller, *Chaos in classical and quantum mechanics*, Springer Verlag, Heidelberg, 1990.
- [31] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics, Volume 1*, Oxford Third edition, 1980.
- [32] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2Ed Springer, 1978.
- [33] H. N. Núñez-Yépez et al., *Phys. Lett. A* **145** 101, 1990.
- [34] R. Carretero-González, H. N. Núñez-Yépez, and A. L. Salas-Brito, *Eur. J. Phys.* 15, 139-148, 1994.
- [35] M. J. Feigenbaum, *Journal of Statistical Physics* 19, 25-52, (1978). M. J. Feigenbaum, *Journal of Statistical Physics* 21, 669-706, 1979.

- [36] O. E. Rössler, *Synergetics: A Workshop*, edited by H. Haken, Springer, Berlin, p. 174, 1977.
- [37] R. S. Shaw, *The Dripping Faucet as a Model Chaotic System*, Aerial, Santa Cruz, 1984.
- [38] E. Bonabeau, G. Theraulaz, J.-L. Deneubourg, A. Lioni, F. Libert, C. Sauwens, and L. Passera, *Phys. Rev. E* **57** 5904, 1998 .
- [39] T.P.J. Penna, P.M.C. De Oliveira, J.C. Sartorelli, W.M. Goncalves, and R.D. Pinto, *Phys. Rev. E* **52** R2168, 1995 .
- [40] R. M. May, *Nature* **261**, 459-467, 1976.
- [41] I. Procaccia and H. Schuster, *Phys. Rev. A* **28** 1210, 1983.
- [42] E. Milotti, e-print physics/0204033, 2002.
- [43] P. Manneville, *J. Physique*. **41**, 1980.
- [44] A. Ben-Mizrachi, I. Procaccia, N. Rosenberg, A. Schmidt and H.G. Schuster, *Phys. Rev. A* **31**, 1830, 1985.
- [45] A. Peres, *Quantum Theory; Concepts and Methods*, Kluwer, Dordechdt, 1995.
- [46] T. Prozen, *Phys. Rev. E*, **65**, 036208, 2002.
- [47] M. V. Berry and M. Tabor, *Proc. R. Soc. London A*. 356-375, 1977.
- [48] M. V. Berry, *Proc. R. Soc. Lond. A* 413, 183, 1987.
- [49] A. Einstein, *Verh. Dtsch. Phys. Ges.* 19, 82, 1917.
- [50] Tesis de Armando Relaño, Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear, Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Complutense de Madrid, 2004.
- [51] M. J. Giannoni, A. Voros, J. Zinn-Justin, Editors, *Chaos and Quantum Physics*, Les Houches Session LII North-Holland, 1989.
- [52] M. V. Berry, *Proc. R.Soc. Lond. A*, **413**, 183, 1987.
- [53] I. C. Percival, *J. Phys. B* 6, L229-232, 1973.
- [54] F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 140, 1963. F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 157, 1963. F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 166, 1963. F. J. Dyson, M. L. Mehta, *J. Math. Phys.* **4**, 701, 1963. M. L. Mehta, F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **4**, 713, 1963.
- [55] C. E. Porter, *Statistical theories of spectra*, Academic Press, New York, 1965.

- [56] D. Thomas, and G. Garret, arXiv:0905.1040v1, 2009.
- [57] V.V. Flambaum, A. A. Gribakina, G. F. Gribakin, M. G. Kozlov, Phys. Rev. A50, 267, 1994.
- [58] T. A. Brody, Lett. Nuovo Cimento 7, 482, 1973.
- [59] T. A. Brody, J. Flores, J. B. French, P. A. Mello, A. Pandey, S. S. M. Wong, Rev. Mod. Phys. 53, 385, 1981.
- [60] F. M. Izrailev, Phys. Lett. A 134, 13, 1988.
- [61] P. Chau Huu-Tai, N. A. Smirnova, and P. Van Isacker, arXiv:nlin/0203035v1, 2002.
- [62] P. Stránský, P. Hruška, and P. Cejnar, Phys. Rev. E **79**, 046202, 2009.
- [63] P. Stránský, P. Hruška, and P. Cejnar, Phys. Rev. E **79**, 066201, 2009.
- [64] N. Bohr, Nature, **137**, 344, 1936.
- [65] J. H. Hannay, and A. M. Ozorio De Almeida, J. Phys. A., **17**, 3429, 1984.
- [66] K.F. Ratcliff, Phys. Rev. C **3**, 1, 117, 1971.
- [67] J. Flores, M. Horoi, M. Müller and T. H. Seligman, Phys. Rev. E **63**, 026204, 2001.
- [68] J.B. French and S.S.M. Wong, Phys. Lett. **35B**, 5, 1971.
- [69] H. Bruus and J.-C. Anglès d'Auriac, Phys. Rev. B **55**, 14, 1997.
- [70] J. M. G. Gómez, R.A. Molina, A. Relaño and J. Retamosa, Phys. Rev. E **66**, 036209, 2002.
- [71] T.T.S. Kuo, and G.E. Brown, Nucl. Phys. A **114**, 241, 1968.
- [72] Caurier E., computer code ANTOINE, CRN, Strasbourg, 2000; Caurier E., Zuker A.P., and Poves A.: in Nuclear Structure of Light Nuclei far from Stability. Experiment and Theory, Proceedings of the Workshop, Obrnai, Ed. G. Klotz, CRN, Strasbourg, 1989.
- [73] P. Cejnar, J. Jolie, and R.F. Casten, Rev. Mod. Phys. **82**, 2155, 2010.
- [74] E. Caurier, G. Martínez-Pinedo, F. Nowacki, A. Poves, and A.P. Zuker, Rev. Mod. Phys. **77**, 427, 2005.
- [75] E. C. Titchmarsh, 1950: Introduction to the Theory of Fourier Integral. Oxford University Press, 394 pp.
- [76] P. J. Brockwell, and R.A. Davis, Time series: theory and methods. New York: Springer, 1991.

- [77] N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M. C. Wu, E. H. Shih, Q. Zheng, N.-C. Yen, C. C. Tung, and H. H. Liu, Proc. R. Soc. Lond. A **454**, 903, 1998.
- [78] J-R. Yeh, W-Z. Sun, J-S. Shieh, and N.E. Huang, Medical Engineering and Physics, **32** 490, 2010.
- [79] P. Flandrin, G. Rilling, and P. Goncalves, IEEE Signal Process Letters **11**, 112, 2004.
- [80] H.J. Stöckmann, Quantum Chaos, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1999.
- [81] Z. Wu, N. E. Huang, S. R. Long, and C.-K. Peng, PNAS, vol. 104, no. 38, 14889, 2007.
- [82] E. Faleiro, J.M.G. Gómez, R.A. Molina, L. Muñoz, A. Relaño and J. Retamosa, Phys. Rev. Lett. **93**, 244101, 2004.
- [83] J. M. G. Gómez, A. Relaño, J. Retamosa, E. Faleiro, L. Salasnich, M. Vraničar and M. Robnik, Phys. Rev. Lett. **94**, 084101, 2005.
- [84] M. S. Santhanam, Jayendra N. Bandyopadhyay and Dilip Angom, Phys. Rev. E **73**, 015201(R), 2006.
- [85] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **59** 381, 1987.
- [86] Y.-Ch. Zhang, J. Phys. I **1**, Paris, 971, 1991.
- [87] M.V. Berry, and M. Tabor, Proc. R. Soc. London A. 356, 375-394 (1977)
- [88] T. H. Seligman, J.J.M. Verbaarschot, and M.R. Zirnbauer, Phys. Rev. Lett. **53** 3, 1984.
- [89] R. Loudon, The Quantum Theory of Light, 2nd Ed. Clarendon, Oxford, 1983.
- [90] M. Scheffer, and S.R. Carpenter, Trends in Ecology and Evolution, 18: 648-656, 2003.
- [91] M. Scheffer et al., nature Vol 461, 3 September 2009.
- [92] Netlogo, <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/>.
- [93] M. C. Teich and B. E. A. Saleh, Photon Bunching and Antibunching, E. Wolf, Progress in optics XXVI, Elsevier, 1988.
- [94] R. J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529, 1963; R. J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766, 1963.
- [95] U. Fano, Phys. Rev. **72**, 26, 1947.
- [96] M. C. Teich and B. E. A. Saleh, Photon Bunching and Antibunching, E. Wolf, Progress in optics XXVI, Elsevier, 1988.

- [97] M. C. Teich and B. E. A. Saleh, Squeezed and antibunched light, *Physics Today*, June 1990.
- [98] S. J. Lade, and T. Gross, *PLoS Comput Biol* 8(2):e1002360, 2012.
- [99] M. Scheffer et al., *nature* Vol 461, 3 September 2009.
- [100] M. B. Priestley, *Spectral analysis and time series*, Academic 1981.
- [101] P. J. Brussaard, P. W. M. Glaudemans, *Shell Model Applications in Nuclear Spectroscopy*, North Holland, Amsterdam, 1997.
- [102] K. L. G. Heyde, *The Nuclear Shell Model*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [103] M. I. Kolobov, *Reviews of Modern Physics* Vol. 71, No. 5 October, 1999.
- [104] W. Wasilewski, A. L. Lvovsky, K. Banaszeck, and C. Radzewicz, *Phys. Rev. E A* **73**, 063819, 2006.
- [105] C.J. McKinstrie, Unitary and singular value decompositions of parametric processes in fibers, Notes, proporcionadas por Alfred U'Ren investigador del Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM.