



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN MODELO VARIACIONAL DE UNA
PELÍCULA DELGADA CON MEMORIA DE
FORMA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
M A T E M Á T I C A
P R E S E N T A:
A N G É L I C A R E S É N D I Z M O R A

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Antonio Capella Kort



2012



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1.Datos del alumno	1.Datos del alumno
Apellido Paterno	Reséndiz
Apellido Materno	Mora
Nombre(s)	Angélica
Teléfono	57115275
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de Cuenta	407007284
2.Datos del tutor	2.Datos del tutor
Grado	Dr.
Nombre(s)	Antonio
Apellido Paterno	Capella
Apellido Materno	Kort
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado	Dr.
Nombre(s)	Nils
Apellido Paterno	Ackermann
Apellido Materno	
4. Datos del sinodal 2	4. Datos del sinodal 2
Grado	Dra.
Nombre(s)	Magali Louise Marie
Apellido Paterno	Folch
Apellido Materno	Gabayet
5. Datos del sinodal 3	5. Datos del sinodal 3
Grado	Dra.
Nombre(s)	Clara
Apellido Paterno	Garza
Apellido Materno	Hume
6. Datos del sinodal 4	6. Datos del sinodal 4
Grado	Dr.
Nombre(s)	Jorge Gilberto
Apellido Paterno	Flores
Apellido Materno	Gallegos
7. Datos del trabajo escrito	7. Datos del trabajo escrito
Título	Un modelo variacional de una película delgada con memoria de forma
Número de páginas	108
Año	2012

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Materiales con memoria de forma	1
1.2. Modelo	2
1.3. Estructura de la tesis y resumen de resultados	5
2. Espacios de Sobolev	9
2.1. Espacios de Sobolev	9
2.2. Aproximación	12
2.3. Extensiones	18
2.4. Traza	20
2.5. Desigualdades de Sobolev	22
2.6. Compacidad	23
2.7. Estimaciones	27
3. Técnicas variacionales	31
3.1. Método directo del cálculo de variaciones	31
3.1.1. Coercividad	32
3.1.2. Semicontinuidad inferior débil	32
3.1.3. El método directo	33
3.2. Γ – convergencia	33
3.2.1. Ejemplos	34
3.2.2. Convergencia de mínimos	39
4. Medidas de Young	43
4.1. Preliminares	43
4.2. Teorema Fundamental de las medidas de Young	45
4.3. Ejemplos	49

5. Modelo para una película delgada	55
5.1. El modelo en tres dimensiones	55
5.2. El límite para una película delgada	56
6. Microestructuras en películas delgadas	67
6.1. Estados de energía nula	68
6.2. Sucesiones minimizantes	74
A. Apéndice	85
A.1. Regularización	85
A.2. Compacidad	85
A.3. Banach-Alaoglu	86
A.4. Dunford-Pettis	86
Bibliografía	87

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1. Materiales con memoria de forma

Ciertos materiales presentan un fenómeno interesante, pues después de ser deformados pueden “recordar” su forma original si son llevados a cierta temperatura. Por ejemplo, si tomamos un trozo de alambre hecho de una aleación de níquel y titanio, lo deformamos cuantas veces queramos y después los calentamos con agua hirviendo, éste retomará su forma original. Este fenómeno es llamado efecto de memoria de forma.

El efecto de memoria de forma, de acuerdo a Bhattacharya [Bha02], es una manifestación de la *transformación martensítica*. Ésta es una transformación de sólido a sólido donde la estructura molecular cambia abruptamente a cierta temperatura, la cual es llamada temperatura crítica. Por ejemplo, como se muestra

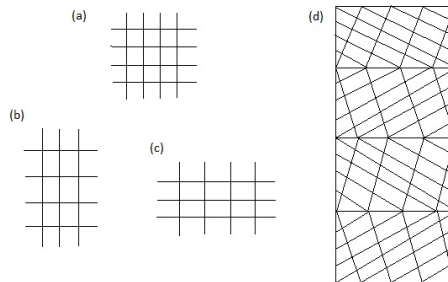


Figura 1.1: Ilustración del cambio de fase martensítico

en la Figura 1.1. Si el arreglo de las moléculas del sólido a una temperatura alta (fase austenita) es como el que se muestra en la Figura 1.1(a), al enfriarlo (fase martensita) y llegar a una temperatura crítica éste cambia a una configuración rectangular como la de la Figura 1.1(b) o la de la Figura 1.1(c). Además, este proceso es reversible.

Típicamente las configuraciones estables que aparecen por debajo de la temperatura crítica tienen menor simetría que las configuraciones a alta temperatura. En este caso la fase cuadrangular tiene mayor simetría que la rectangular.

Una característica de la transformación martensítica es la presencia de microestructuras. Es decir, el sólido con configuración molecular como la de la Figura 1.1(a), puede cambiar a la configuración de la Figura 1.1(b) o la de la Figura 1.1(c) indistintamente. Sin embargo, no solamente puede presentarse una sola configuración si no una combinación de ambas. Al hacer esta combinación de configuraciones, el sólido no debe romperse por lo que la combinación debe ser coherente como se muestra en la Figura 1.1(d).

Retomemos el ejemplo del trozo de alambre de níquel y titanio desde el punto de vista de las microestructuras. A temperatura ambiente el alambre se encuentra en su fase martensítica por lo que puede presentar distintas microestructuras, de manera que al ser deformado las moléculas se reacomodan de tal forma que su estructura molecular sólo cambia de una microestructura a otra, digamos de Figura 1.1(b) a Figura 1.1(c). Por lo que al calentarlo hasta su temperatura crítica, éste regresa a su estructura de la fase austenita, digamos Figura 1.1(a), por lo que retoma su forma original.

El objetivo de esta tesis es estudiar las microestructuras que aparecen en una película delgada de un material martensítico. Tomando como punto de partida un modelo variacional en tres dimensiones para una material cuya geometría está dada por un dominio cilíndrico de altura h y base $S \subset \mathbb{R}^2$, el modelo para la película delgada se deriva como un límite asintótico cuando $h \rightarrow 0$. Más precisamente se considera el Γ -límite de la energía cuando $h \rightarrow 0$. Este tipo de convergencia resulta adecuado para nuestros propósitos, ya que en el límite preserva la estructura variacional de los funcionales de energía. Bajo ciertas hipótesis, el modelo para la película delgada resulta en un funcional de energía no convexo, el cual no necesariamente tiene mínimos únicos. En este modelo, las microestructuras se estudian como las sucesiones minimizantes de la energía, y las medidas de Young asociadas a éstas.

Esta tesis se basa en el artículo de Bhattacharya y James [Bha99] en el cual se analizó el modelo de película delgada para el caso de elasticidad no lineal e incluye los resultados que aquí se presentan.

1.2. Modelo

La película delgada de grosor h y perfil $S \subset \mathbb{R}^3$ ocupa una región

$$\Omega_h = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } (x_1, x_2) \in S, \frac{-h}{2} < x_3 < \frac{h}{2} \right\}.$$

Una deformación de la película delgada es una función

$$\bar{\mathbf{u}} : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ con } \bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3).$$

Es decir, a cada punto

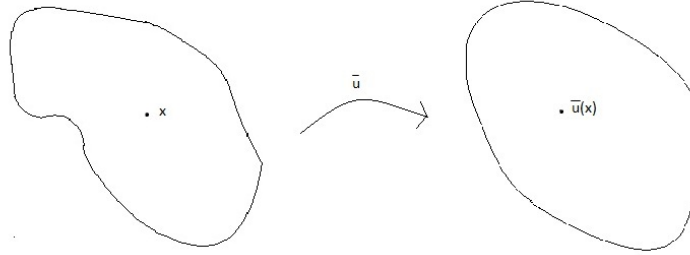


Figura 1.2: $\bar{\mathbf{u}} : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_h$$

le asociamos el punto

$$\bar{\mathbf{u}}(x) = (\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x), \bar{u}_3(x)).$$

La energía elástica debe ser invariante bajo translaciones rígidas, para ello definimos el desplazamiento de una partícula $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_h$ como

$$\mathbf{u}(x) = \bar{\mathbf{u}}(x) - x.$$

En la teoría geométrica lineal de la elasticidad las deformaciones se miden en términos del gradiente simétrico del desplazamiento \mathbf{u} , es decir, de

$$\nabla_s \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}).$$

donde $\nabla^T \mathbf{u}$ es la transpuesta de la matriz $\nabla \mathbf{u}$. La energía se mide en términos de las deformaciones, entonces estaremos interesados en funcionales de energía de la forma

$$E[\mathbf{u}] = \int_{\Omega_h} \varphi(\nabla_s \mathbf{u}) dx,$$

donde

$$\varphi : \mathbb{M}_{3 \times 3} \rightarrow (0, \infty),$$

es una función que depende del material.

En los materiales con memoria de forma, el funcional de energía se anula (o tiene sus mínimos locales) en las configuraciones estables de menor simetría (o de baja temperatura).

Bajo las hipótesis de la elasticidad geométrica lineal, los mínimos de la energía se modelan como matrices simétricas. En esta tesis se supondrá que el material tiene una transición de fase cúbico a tetragonal, es decir, si definimos

$$U_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

a las tres deformaciones que corresponden a las tres fases (tetragonales) que no “cuestan” energía, entonces

$$\varphi(U_1) = \varphi(U_2) = \varphi(U_3) = 0.$$

Supondremos además que el funcional de energía es coercivo, es decir, si una sucesión $\{\mathbf{u}_k\}$ es no acotada entonces $E[\mathbf{u}_k] \rightarrow \infty$. Para esto supondremos las siguientes condiciones de crecimiento para la función φ ,

$$c_1(|U|^2 - 1) \geq \varphi(U) \geq c_2(|U|^q - 1) \text{ con } 2 < q < 6.$$

Sin embargo el funcional es no convexo, pues tiene más de un mínimo, por lo que no es posible garantizar la unicidad (o existencia) del mínimo.

Al nivel del modelo, la hipótesis de que bajo las deformaciones el material no se rompe, implica que \mathbf{u} tiene que ser continua. Para satisfacer la continuidad, y para la formación de microestructuras, las matrices U_1 , U_2 y U_3 deben satisfacer relaciones de compatibilidad para mantener la coherencia entre las distintas fases. Esto es, sean Ω_h^+ , $\Omega_h^- \subset \Omega_h$ tales que $\nabla \mathbf{u} = U_1 \in \Omega_h^+$ y $\nabla \mathbf{u} = U_2 \in \Omega_h^-$, entonces al integrar obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= U_1 z + c^+ \text{ en } \Omega_h^+, \\ \mathbf{u} &= U_2 z + c^- \in \Omega_h^- \end{aligned}$$

donde c^+ y c^- son constantes. En la frontera entre Ω_h^+ y Ω_h^- , se debe de cumplir

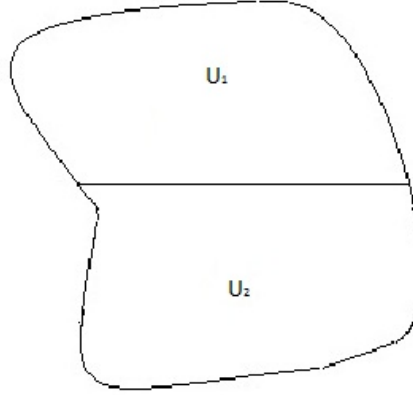


Figura 1.3: Ω_h

que

$$(U_1 - U_2)z + c^+ - c^- = 0. \quad (1.1)$$

Si $U_1 - U_2 \neq 0$, entonces (1.1) define un hiperplano afín, por lo que

$$\text{rango}(U_1 - U_2) = 1,$$

y entonces existen a y $n \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$U_1 - U_2 = an^T = a \otimes n.$$

Como además U_1 y U_2 son simétricas, tenemos que

$$a \otimes n = (a \otimes n)^T = n \otimes a$$

y por lo tanto

$$U_1 - U_2 = \frac{1}{2} (a \otimes n + n \otimes a).$$

Esta última igualdad se conoce como la condición de salto de Hadamard, y establece la coherencia entre las distintas fases, o equivalentemente la continuidad en la deformación \mathbf{u} .

Obsérvese que las matrices U_1 , U_2 y U_3 satisfacen las relaciones de compatibilidad dos a dos. Es decir, para todo $i, j = 1, 2, 3$ con $i < j$,

$$U_i - U_j = \frac{1}{2} (a_{i,j} \otimes n_{i,j} + n_{i,j} \otimes a_{i,j}),$$

donde los vectores $n_{i,j}$ apuntan en la dirección perpendicular a la transición entre U_i y U_j . En este caso se tiene que

$$\begin{aligned} n_{1,2} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), & a_{1,2} &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \\ n_{1,3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), & a_{1,3} &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \\ n_{2,3} &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), & a_{2,3} &= \frac{3}{2} \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Intercambiando los roles de $n_{i,j}$ y $a_{i,j}$ en cada caso, es claro que existen dos tipos de interfaces planas entre las distintas variantes.

1.3. Estructura de la tesis y resumen de resultados

Desde el punto de vista matemático, vamos a estudiar problemas variacionales vectoriales (en \mathbb{R}^3) no convexos. La determinación del modelo para una película delgada se hará por medio del concepto de Γ -convergencia (que se introducirá en el capítulo 3). Para utilizar este método es necesario regularizar el funcional de energía por medio de un término de orden superior. Este término puede interpretarse como una energía de superficie que penaliza las transiciones entre los mínimos de energía y tiene la forma

$$\int_{\Omega_h} \kappa |\nabla^2 \mathbf{u}|^2 dx.$$

El funcional de energía resultante es convexo y tiene la forma,

$$\epsilon^h(\mathbf{u}) = \int_{\Omega_h} \left\{ \kappa |\nabla^2 \mathbf{u}|^2 + \varphi(\nabla_s \mathbf{u}) \right\} dx,$$

donde

$$\Omega_h = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } (x_1, x_2) \in S, \frac{-h}{2} < x_3 < \frac{h}{2} \right\}.$$

Nótese que, si en el funcional de energía ϵ^h tomamos el límite $h \rightarrow 0$, el dominio Ω_h se colapsa y la integral en ϵ^h sería idénticamente cero. Para obtener un resultado no trivial en el límite $h \rightarrow 0$, deberemos estudiar el funcional re-escalado ϵ^h/h , re-escalar el dominio Ω_h , para trabajar en un dominio fijo, de la siguiente forma,

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = \frac{1}{h}x_3, \quad \text{para todo } x \in \Omega_h. \quad (1.2)$$

El primer resultado de esta tesis (capítulo 4) establece la energía reescalada $\frac{\epsilon^h}{h}$ tiene como Γ – límite al funcional

$$E^0[\mathbf{u}, \mathbf{b}] = \int_S \left\{ \kappa \left[|\nabla_p^2 \mathbf{u}|^2 + |\nabla_p \mathbf{b}|^2 \right] + \varphi((\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b})) \right\} dz_1 dz_2,$$

cuando $h \rightarrow 0$, y donde

$$(\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}) & e_{12}(\mathbf{u}) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial z_1} + b_1 \right) \\ e_{21}(\mathbf{u}) & e_{22}(\mathbf{u}) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial z_2} + b_2 \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial z_1} + b_1 \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial z_2} + b_2 \right) & b_3 \end{pmatrix}.$$

donde

$$e_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

para $i, j \in 1, 2$, $b_1, b_2, b_3 \in L^2(S)$, y tanto los e_{ij} como b_1, b_2, b_3 dependen únicamente de z_1 y z_2 .

El modelo resultante para la película delgada es convexo y por lo tanto no puede modelar microestructuras. Para recuperar la no convexidad (y las microestructuras), supondremos ahora que $\kappa = 0$, y estudiaremos las sucesiones minimizantes del nuevo problema no convexo,

$$\int_S \varphi((\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b})) dz_1 dz_2.$$

Estas sucesiones minimizantes las estudiaremos usando el concepto de medidas de Young que se introduce en el capítulo 3. En esta dirección, el principal resultado de esta tesis establece que dadas condiciones de frontera del tipo

$$F_\lambda = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3$$

existe una sucesión minimizante $\{(\nabla_s \mathbf{u}_k, \mathbf{b}_k)\}$ tal que $(\nabla_s \mathbf{u}_k, \mathbf{b}_k) = F_\lambda$ en la frontera de Ω , es decir, se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega \varphi(\nabla_s \mathbf{u}_k, \mathbf{b}_k) dz_1 dz_2 = 0,$$

donde además, los elementos de la sucesión tienen una geometría que esencialmente se ve como la Figura 1.4. La geometría de estas sucesiones es una de las principales predicciones del modelo. Este resultado implica que las microestructuras observables en estos materiales deberán ser parecidas a esta imagen.

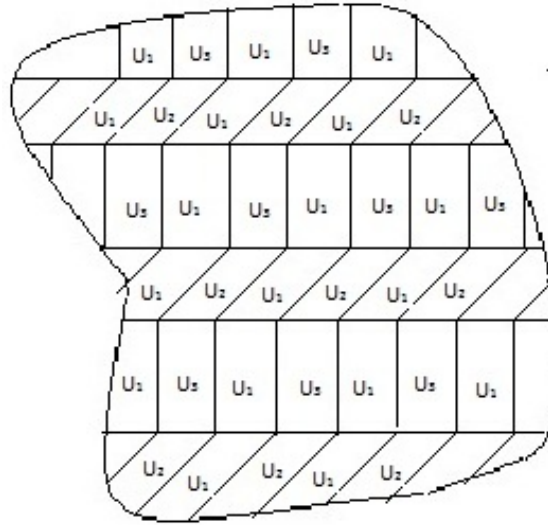


Figura 1.4: Microestructuras

Aún más, las fracciones volumétricas de las distintas fases $\{U_1, U_2, U_3\}$ están determinadas de manera única por las condiciones de frontera F_λ (es decir, por $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$) y la medida de Young μ asociada a $\{(\nabla_s \mathbf{u}_k, \mathbf{b}_k)\}$ viene dada por

$$\mu = \lambda_1 \delta_{U_1} + \lambda_2 \delta_{U_2} + \lambda_3 \delta_{U_3}.$$

La tesis se completa con un capítulo de introducción a espacios de Sobolev y un apéndice, donde por comodidad se introducen dos resultados necesarios que no se demuestran por estar más allá del alcance de esta tesis.

CAPÍTULO 2

Espacios de Sobolev

En este capítulo introduciremos la notación, las definiciones y los resultados sobre espacios de Sobolev que serán relevantes en esta tesis. Se incluirán las demostraciones de algunos de los resultados o se hará referencia a los textos clásicos donde se encuentran. La mayor parte del material de este capítulo fue tomado de [Eva98] y [Cla09].

2.1. Espacios de Sobolev

Notación. Denotamos por $C_c^\infty(\Omega)$ al espacio de funciones infinitamente diferenciables $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con soporte compacto en Ω . A estas funciones les llamamos funciones prueba.

Sea k un entero positivo, sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un multiíndice de orden $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ y supongamos que u es una función en $C^k(\Omega)$. Si tomamos una función $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ por la fórmula de integración por partes, tenemos

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u \varphi dx,$$

donde

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \varphi.$$

Notemos que el lado izquierdo de la primera igualdad tiene sentido si u es localmente integrable, entonces podemos definir lo siguiente.

Definición 2.1.1. Sean $u, v \in L_{loc}^1(\Omega)$, y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un multiíndice tal que $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Decimos que v es la α -ésima derivada débil de u , denotada

por

$$D^\alpha u = v$$

si cumple lo siguiente:

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx$$

para toda φ en $C_c^\infty(\Omega)$.

Observación. Si la α -ésima derivada débil de u existe, entonces es única salvo por conjuntos de medida cero.

Definición 2.1.2. Sea $1 \leq p \leq \infty$ y $k \geq 0$. Definimos el **espacio de Sobolev** $W^{k,p}(\Omega)$ como el conjunto de funciones $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que para todo multiíndice α con $|\alpha| \leq k$ la derivada débil $D^\alpha u$ existe y está en $L^p(\Omega)$, es decir,

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^1_{loc}(\Omega) \text{ tal que } D^\alpha u \text{ existe y } D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}.$$

Además si $u \in W^{k,p}(\Omega)$ definimos la siguiente norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \sup \text{ess}_{\Omega} |D^\alpha u|, & p = \infty. \end{cases}$$

Observación. La norma $\|u\|_{W^{k,2}(\Omega)}$ está inducida por el producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{W^{k,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u \cdot D^\alpha v dx. \quad (2.1)$$

Definición 2.1.3. Denotamos por

$$W_0^{k,p}(\Omega)$$

a la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ en L^1_{loc} con respecto a la norma $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$

Teorema 2.1.1. Para toda $k = 1, 2, \dots$ y $1 \leq p \leq \infty$, el espacio $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

Demostración.

Primero veamos que $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ es una norma. Claramente

$$\|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = |\lambda| \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

y

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0 \text{ si y sólo si } u = 0 \text{ casi donde sea.}$$

Verifiquemos la desigualdad del triángulo. Sean $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$. Si $1 \leq p < \infty$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \left(\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde primero usamos la desigualdad del triángulo para la norma en L^p y después la desigualdad del triángulo en \mathbb{R}^n . Podemos aplicar un proceso análogo para $p = \infty$

Ahora veamos que $W^{k,p}(\Omega)$ es completo. Sea $\{u_m\} \subset W^{k,p}(\Omega)$ una sucesión de Cauchy, es decir, para toda $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$\|u_n - u_m\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \epsilon \quad \text{si } n, m > N.$$

Entonces

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u_n - D^\alpha u_m|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon \quad \text{si } n, m > N.$$

Por lo tanto, para cada $|\alpha| \leq k$

$$\left(\int_{\Omega} |D^\alpha u_n - D^\alpha u_m|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon \quad \text{si } n, m > N.$$

De manera que, para cada $|\alpha| \leq k$, $\{D^\alpha u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega)$ es completo, existen funciones $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ tales que

$$D^\alpha u_m \rightarrow u_\alpha \text{ en } L^p$$

para cada $|\alpha| \leq k$.

Denotemos $u = u_{(0,\dots,0)}$. Veamos que

$$u \in W^{k,p}(\Omega) \text{ y } D^\alpha u = u_\alpha. \quad (2.2)$$

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces por la desigualdad de Hölder

$$\left| \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx - \int_{\Omega} u_m D^\alpha \varphi dx \right| \leq \|u - u_m\|_{L^p(\Omega)} \|D^\alpha \varphi\|_{L^q(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ cuando } m \rightarrow \infty.$$

para p y q tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_m D^{\alpha} \varphi dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^{\alpha} u_m \varphi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_{\alpha} \varphi dx. \end{aligned}$$

Por unicidad de la derivada débil, (2.2) es cierta, es decir $D^{\alpha} u_m \rightarrow D^{\alpha} u$ en $L^p(\Omega)$. Entonces $u_m \rightarrow u$ en $W^{k,p}(\Omega)$. Por lo tanto $W^{k,p}(\Omega)$ es completo. \square

Observación. En particular para $p = 2$, $W^{k,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert y se denota por $H^k(\Omega)$.

2.2. Aproximación

Definición 2.2.1. Sea $\eta \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$

donde c es tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$. Para toda $\epsilon > 0$, definimos

$$\eta_{\epsilon}(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Definición 2.2.2. Sea $1 \leq p < \infty$, definimos la **regularización** de $u \in W^{k,p}(\Omega)$ como

$$u^{\epsilon} = \eta_{\epsilon} * u,$$

es decir,

$$u^{\epsilon}(x) = \int_{\Omega} \eta_{\epsilon}(x-y) u(y) dy \quad \text{para toda } x \in \Omega_{\epsilon},$$

donde $\Omega_{\epsilon} = \{x \in \Omega \text{ tal que } \text{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$.

Notación. Sean $\Omega' \subset \Omega$ abierto, escribimos que

$$\Omega' \subset\subset \Omega$$

si $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ y $\overline{\Omega'}$ es compacto, donde $\overline{\Omega'}$ es la cerradura de Ω' .

Teorema 2.2.1. Sean $u \in W^{k,p}(\Omega)$ y $1 \leq p \leq \infty$, entonces existen funciones u^{ϵ} tales que

- i) $u^{\epsilon} \in C^{\infty}(\Omega_{\epsilon})$ para toda $\epsilon > 0$
- ii) Sea $\Omega' \subset\subset \Omega$, entonces $\|u^{\epsilon}\|_{L^p(\Omega')} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}$,
- iii) $u^{\epsilon} \rightarrow u$ en $W_{loc}^{k,p}(\Omega)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Demostración.

1. Veamos que *i*) es cierto. Sea $x \in \Omega_\epsilon$ fijo, $i \in 1, \dots, n$. Tomemos $|h| \leq \epsilon$ tal que $x + he_i \in \Omega_\epsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_i}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [u^\epsilon(x + he_i) - u^\epsilon(x)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^n} \int_\Omega \frac{1}{h} \left[\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\epsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right) \right] u(y) dy \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^n} \int_{\Omega'} \frac{1}{h} \left[\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\epsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right) \right] u(y) dy \end{aligned}$$

Para algún $\Omega' \subset \Omega$ compacto, además como $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\epsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right) \right] \rightarrow \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right)$$

uniformemente en Ω' , por lo tanto,

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^n} \int_\Omega \frac{1}{h} \left[\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\epsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right) \right] u(y) dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_\Omega \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\epsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right) \right] u(y) dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_\Omega \left[\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left(\frac{x - y}{\epsilon} \right) \right] u(y) dy \\ &= \int_\Omega \left[\frac{\partial \eta_\epsilon}{\partial x_i}(x - y) \right] u(y) dy. \end{aligned}$$

Argumentando análogamente para las derivadas de orden superior concluimos que

$$u^\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon) \text{ para toda } \epsilon > 0.$$

2. A continuación probemos *ii*). Sea $u \in W^{k,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ y denotemos $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. Tomemos un conjunto abierto $\Omega' \subset \subset \Omega$. Veamos que

$$\|u^\epsilon\|_{L^p(\Omega')} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} |u^\epsilon(x)| &= \left| \int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y) u(y) dy \right| \\ &\leq \int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)^{\frac{1}{q}} \eta_\epsilon(x-y)^{\frac{1}{p}} |u(y)| dy \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned} |u^\epsilon(x)| &\leq \left(\int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)^{\left(\frac{1}{q}\right)q} dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)^{\left(\frac{1}{p}\right)p} |u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y) |u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Elevando a la p , e integrando de ambos lados con respecto a la variable x sobre Ω' , tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |u^\epsilon(x)|^p dx &\leq \int_{\Omega'} \left(\int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y) |u(y)|^p dy \right) dx \\ &\leq \int_{\Omega} |u(y)|^p \left(\int_{B(y,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y) dx \right) dy \\ &= \int_{\Omega} |u(y)|^p dy. \end{aligned} \quad (2.3)$$

3. Ahora, veamos que

$$u^\epsilon \rightarrow u \text{ en } L^p_{loc}(\Omega) \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

Como las funciones continuas son densas en L^p , sean $w \in C(\Omega')$ y $\delta > 0$ tal que

$$\|u - w\|_{L^p(\Omega')} < \delta.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|u^\epsilon - u\|_{L^p(\Omega')} &\leq \|u^\epsilon - w^\epsilon\|_{L^p(\Omega')} + \|w^\epsilon - w\|_{L^p(\Omega')} + \|w - u\|_{L^p(\Omega')} \\ &\leq 2\|u - w\|_{L^p(\Omega')} + \|w^\epsilon - w\|_{L^p(\Omega')} \\ &\leq 2\delta + \|w^\epsilon - w\|_{L^p(\Omega')} \end{aligned}$$

Como $w^\epsilon \rightarrow w$ uniformemente en $L^p(\Omega')$ ¹ tenemos que

$$\|u^\epsilon - u\|_{L^p(\Omega')} \leq 3\delta.$$

Como δ es arbitraria, tenemos (2.4).

4. Notemos que si $|\alpha| \leq k$ entonces

$$D^\alpha u^\epsilon = \eta_\epsilon * D^\alpha u, \text{ para toda } u \in W^{k,p}(\Omega). \quad (2.5)$$

En efecto, sea $x \in \Omega_\epsilon$

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\epsilon(x) &= D_x^\alpha \left(\int_{\Omega} \eta_\epsilon(x-y) u(y) dy \right) \\ &= \int_{\Omega} D_x^\alpha \eta_\epsilon(x-y) u(y) dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D_y^\alpha \eta_\epsilon(x-y) u(y) dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|} \left(\int_{\Omega} \eta_\epsilon(x-y) D_y^\alpha u(y) dy \right) \\ &= \eta_\epsilon * D^\alpha u(x). \end{aligned}$$

¹Véase Apéndice

5. De (2.4) y (2.5) deducimos que

$$D^\alpha u^\epsilon \rightarrow D^\alpha u \text{ en } L^p_{loc}(\Omega) \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Tomamos $\Omega' \subset\subset \Omega$, entonces

$$\|u^\epsilon - u\|_{W^{k,p}(\Omega')} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u^\epsilon - D^\alpha u\|_{L^p_{loc}(\Omega')} \rightarrow 0$$

cuando $\epsilon \rightarrow 0$, por lo tanto *iii*) \square

En el siguiente resultado demostraremos que las funciones en el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ pueden aproximarse, en el interior de Ω por funciones suaves.

Teorema 2.2.2. *Supongamos que Ω es acotado. Sea $u \in W^{k,p}(\Omega)$ para algún $1 \leq p \leq \infty$. Entonces existen funciones $u_m \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ tales que*

$$u_m \rightarrow u \text{ en } W^{k,p}(\Omega).$$

Demostración. Definimos $\Omega'_i = \Omega_{i+3} - \overline{\Omega}_{i+1}$ donde

$$\Omega_i = \left\{ x \in \Omega \text{ tal que } \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i} \right\} \quad i = 1, 2, \dots$$

Observemos que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$.

Tomemos un conjunto $\Omega'_0 \subset\subset \Omega$ tal que $\Omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Omega'_i$. Sea $\{\zeta_i\}_{i=0}^{\infty}$ una partición de la unidad subordinada a los conjuntos abiertos $\{\Omega'_i\}_{i=0}^{\infty}$. Es decir,

$$\begin{cases} \zeta_i \in C_c^\infty(\Omega'_i), & 0 \leq \zeta_i \leq 1 & \text{y} \\ \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i = 1 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Sea $u \in W^{k,p}(\Omega)$, entonces $\zeta_i u \in W^{k,p}(\Omega)$ y $\text{sop}(\zeta_i u) \subset \Omega'_i$.

Fijemos $\delta > 0$ y tomemos $\epsilon_i > 0$ suficientemente pequeño tal que $u_i = \eta_{\epsilon_i} * (\zeta_i u)$ satisfaga que

$$\begin{cases} \|u_i - \zeta_i u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \frac{\delta}{2^{i+1}} & (i = 0, 1, \dots) \\ \text{sop } u_i \subset \Omega''_i & (i = 1, \dots), \end{cases}$$

donde $\Omega''_i = \Omega_{i+4} - \overline{\Omega}_i \supset \Omega'_i$ ($i = 1, \dots$).

Sea $v = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$. Esta función está en $C^\infty(\Omega)$, ya que para cada $\Omega' \subset\subset \Omega$ la suma tiene sólo un número finito de términos. Como $u = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i u$, tenemos que para cada $\Omega' \subset\subset \Omega$

$$\begin{aligned} \|v - u\|_{W^{k,p}(\Omega')} &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \|u_i - \zeta_i u\|_{W^{k,p}(\Omega')} \\ &\leq \delta \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \\ &= \delta. \end{aligned}$$

Tomando el supremo de los conjuntos $\Omega' \subset\subset \Omega$ obtenemos que $\|v - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \delta$. Dado que δ es arbitrario el resultado se sigue. \square

Corolario 2.2.3. Sean Ω conexo y $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$ tal que

$$Du = 0 \quad \text{casi para todo } x \in \Omega.$$

Entonces u es constante casi para toda $x \in \Omega$

Demostración. Sea $D^\alpha u^\epsilon = \eta_\epsilon * u$, entonces

$$\begin{aligned} D_\alpha u^\epsilon &= \eta_\epsilon * D_\alpha u \\ &= \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y) D_\alpha u(y) dy \\ &= \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y) 0 dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $u^\epsilon = cte$ pues Ω es conexo. Además sabemos que existe una subsección $\{u^{\epsilon_i}\}$ de $\{u^\epsilon\}$ tal que

$$u^{\epsilon_i}(x) \rightarrow u(x) \quad \text{casi para todo } x \in \Omega',$$

donde $\Omega' \subset\subset \Omega$. Entonces,

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= |u(x) - u^{\epsilon_i}(x) + u^{\epsilon_i}(y) - u(y)| \\ &\leq |u(x) - u^{\epsilon_i}(y)| + |u^{\epsilon_i}(y) - u(y)| \\ &\leq 2\epsilon \end{aligned}$$

Como la desigualdad es cierta para toda $\epsilon > 0$, concluimos que

$$|u(x) - u(y)| = 0,$$

y por lo tanto

$$u = cte.$$

□

Ahora extenderemos el resultado anterior, aproximando las funciones en $W^{k,p}(\Omega)$ hasta la frontera de Ω , cuando $\partial\Omega$ es regular.

Teorema 2.2.4. Supongamos que Ω es acotado y $\partial\Omega$ es C^1 . Sea $u \in W^{k,p}(\Omega)$ para algún $1 \leq p \leq \infty$. Entonces existen funciones $u_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que

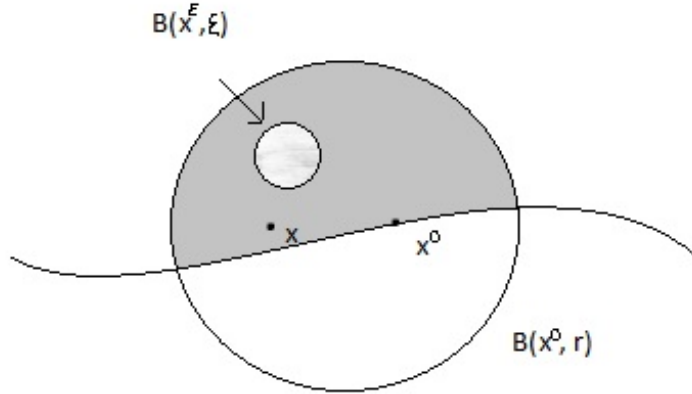
$$u_m \rightarrow u \text{ en } W^{k,p}(\Omega).$$

Demostración. Sea $x_0 \in \partial\Omega$. Como $\partial\Omega$ es C^1 , existe una constante $r > 0$ y $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^1 tal que, cambiando el sistema de coordenadas si es necesario, satisface

$$\Omega \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) \text{ tal que } x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Sea $\Theta = \Omega \cap B(x^0, \frac{r}{2})$. Para $x \in \Theta$ y $\epsilon > 0$ definimos el punto

$$x^\epsilon = x + \lambda\epsilon e_n.$$



Entonces, para $\lambda > 0$ suficientemente grande tenemos que la bola $B(x^\epsilon, \epsilon) \subset \Omega \cap B(x^0, r)$ para toda $x \in \Theta$ y $\epsilon > 0$ pequeña. Ahora, trasladamos la función u una distancia $\lambda\epsilon$ en la dirección e_n , es decir, para $x \in \Theta$, definimos la función

$$u_\epsilon(x) = u(x^\epsilon) = u(x + \lambda\epsilon e_n).$$

Sea $v^\epsilon = \eta_\epsilon * u_\epsilon$, claramente $v^\epsilon \in C^\infty(\bar{\Omega})$, veamos ahora que

$$v^\epsilon \rightarrow u \text{ en } W^{k,p}(\Theta).$$

En efecto, tomemos un multiíndice α tal que $|\alpha| \leq k$, entonces

$$\|D^\alpha v^\epsilon - D^\alpha u\|_{L^p(\Theta)} \leq \|D^\alpha v^\epsilon - D^\alpha u_\epsilon\|_{L^p(\Theta)} + \|D^\alpha u_\epsilon - D^\alpha u\|_{L^p(\Theta)}.$$

Por el Teorema 2.2.2, el primer término de la derecha tiende a cero; y como la traslación es continua en la norma L^p , el segundo término es igual a cero en el límite.

Sea $\delta > 0$. Como $\partial\Omega$ es compacto, existe un número finito de puntos x_i^0 , constantes $r_i > 0$, conjuntos $\Theta_i = \Omega \cap B(x_i^0, \frac{r_i}{2})$ y funciones $v_i \in C^\infty(\bar{\Theta}_i)$ tales que

$$\partial\Omega \subset \bigcap_{i=1}^N B(x_i^0, \frac{r_i}{2}), \text{ y } \|v_i - u\|_{W^{k,p}(\Theta_i)} \leq \delta. \quad (2.6)$$

Tomemos un conjunto $\Theta_0 \subset\subset \Omega$ tal que $\Omega = \bigcap_{i=0}^N \Theta_i$, entonces por el Teorema 2.2.2 existe una función $v_0 \in C^\infty(\bar{\Theta}_0)$ tal que

$$\|v_0 - u\|_{W^{k,p}(\Theta_0)} \leq \delta. \quad (2.7)$$

Por último, sea $\{\zeta_i\}_{i=0}^N$ una partición de la unidad subordinada a los conjuntos abiertos $\{\Theta_i\}_{i=0}^N$ en Ω . Sea $v = \sum_{i=0}^N \zeta_i v_i$, claramente $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Además, como

$u = \sum_{i=0}^N \zeta_i u$ tenemos que para cada $|\alpha| \leq k$

$$\begin{aligned} \|D^\alpha v - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} &\leq \sum_{i=0}^N \|D^\alpha \zeta v_i - D^\alpha \zeta u\|_{L^p(\Theta_i)} \\ C &\leq \sum_{i=0}^N \|v_i - u\|_{W^{k,p}(\Theta_i)} \\ &\leq CN\delta \end{aligned}$$

por (2.6) y (2.7). □

Corolario 2.2.5. *Para cada $u_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ del Teorema 2.2.4 se tiene que,*

$$\|u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demostración. Sean u_m y Θ_i como en el Teorema 2.2.3, entonces que para cada $|\alpha| \leq k$

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u_m\|_{L^p(\Omega)} &\leq \sum_{i=0}^N \|D^\alpha \zeta u_\epsilon^i\|_{L^p(\Theta_i)} \\ &\leq \sum_{i=0}^N \|D^\alpha \zeta u\|_{L^p(\Theta_i)} \\ &= \|D^\alpha \zeta u\|_{L^p(\Theta)}. \end{aligned}$$

La segunda desigualdad es consecuencia del inciso *ii)* del Teorema 2.2.1 □

2.3. Extensiones

Ahora veamos que si la frontera de Ω es regular, siempre podemos extender una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.3.1. *Sean Ω acotado y $\partial\Omega \in C^1$. Tomemos un conjunto abierto y acotado Θ tal que $\Omega \subset\subset \Theta$. Entonces existe un operador lineal acotado*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$

i) $Eu = u$ casi para todo punto en Ω

ii) Eu tiene soporte en Θ

iii) $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$
donde la constante C sólo depende de Ω , p y Θ .

Demostración. Primero veamos que para $x^0 \in \partial\Omega$, podemos identificar a una vecindad V de x^0 con un subconjunto del plano $\{x_n = 0\}$. Sea $x^0 \in \partial\Omega$, como $\partial\Omega$ es C^1 , existe una constante $r > 0$ y un difeomorfismo

$$\mathcal{D} : V \rightarrow B = B(y^0, r)$$

tal que

$$\mathcal{D}(x^0) = y^0 \text{ y } \mathcal{D}(\partial\Omega \cap V) \subset \{y_n = 0\}.$$

Definimos

$$\begin{cases} B^+ &= B \cap \{y_n \geq 0\} \\ B^- &= B \cap \{y_n \leq 0\} \end{cases} \quad (2.8)$$

entonces $\mathcal{D}(V \cap \Omega) = B^+$.

Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y consideramos la función

$$u'(y) = u(\mathcal{D}^{-1}(y))$$

para toda $y \in B^+$.

Por el momento supongamos que $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Entonces definimos

$$\bar{u}'(y) = \begin{cases} u'(y) & \text{si } y \in B^+ \\ -3u'(y_1, \dots, y_{n-1}, -y_n) + 4u'(y_1, \dots, y_{n-1}, \frac{-y_n}{2}) & \text{si } y \in B^- \end{cases} \quad (2.9)$$

Comprobemos que

$$\bar{u}' \in C^1(B).$$

Para esto, denotemos $u'^+ = \bar{u}'|_{B^+}$ y $u'^- = \bar{u}'|_{B^-}$. Veamos primero que

$$u'_{y_n}{}^+ = u'_{y_n}{}^- \text{ en } \{y_n = 0\}.$$

En efecto, de (2.9) tenemos

$$\frac{\partial u'^-}{\partial y_n}(y) = 3 \frac{\partial u'}{\partial y_n}(y_1, \dots, y_{n-1}, -y_n) - 2 \frac{\partial u'}{\partial y_n}(y_1, \dots, y_{n-1}, \frac{-y_n}{2}) \quad (2.10)$$

y por lo tanto

$$u'_{y_n}{}^+|_{\{y_n=0\}} = u'_{y_n}{}^-|_{\{y_n=0\}}.$$

Ahora, como $u'^+ = u'^-$ en $\{y_n = 0\}$, también se cumple que

$$u'_{y_i}{}^+ = u'_{y_i}{}^- \text{ en } \{y_n = 0\}$$

para $i = 1, \dots, n-1$. Entonces, para cada $|\alpha| \leq 1$

$$D^\alpha u'^+|_{\{y_n=0\}} = D^\alpha u'^-|_{\{y_n=0\}},$$

y por lo tanto

$$\bar{u}' \in C^1(B).$$

Además, usando (2.10) podemos verificar que para una constante C , que no depende de \bar{u}' ,

$$\|\bar{u}'\|_{W^{1,p}(B)} \leq C \|\bar{u}'\|_{W^{1,p}(B^+)}. \quad (2.11)$$

Como $\partial\Omega$ es compacto, existen un número finito de puntos x_i^0 y y_i^0 , conjuntos abiertos V_i , bolas B_i y extensiones \bar{u}'_i de u' en V_i , como arriba, tales que $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N V_i$. Tomemos $V_0 \subset\subset \Omega$ de manera que $\Omega \subset \bigcup_{i=0}^N V_i$, y sea $\{\eta_i\}_{i=0}^\infty$ una partición de la unidad subordinada a las bolas B_i para $i = 0, 1, \dots, N$. Escribimos $\bar{u}' = \sum_{i=0}^\infty \eta_i \bar{u}'_i$, donde $\bar{u}'_0 = u$.

De (2.11) tenemos que

$$\begin{aligned} \|\bar{u}'\|_{W^{1,p}(\bigcup B_i)} &\leq \sum_{i=0}^N \|\eta_i \bar{u}'_i\|_{W^{1,p}(B_i)} \leq \sum_{i=0}^N c_i \|\eta_i \bar{u}'_i\|_{W^{1,p}(B_i^+)} \\ &\leq c \sum_{i=0}^N \|\eta_i \bar{u}'_i\|_{W^{1,p}(B_i^+)} \end{aligned}$$

donde $c = \max_{i=0, \dots, N} c_i$. Ahora, como

$$\|\eta_i \bar{u}'_i\|_{W^{1,p}(B_i^+)} \leq c' \|\bar{u}'\|_{W^{1,p}(B_i^+)} \leq c' \|\bar{u}'\|_{W^{1,p}(\bigcup B_i^+)}. \quad (2.12)$$

Por lo tanto

$$\|\bar{u}'\|_{W^{1,p}(\bigcup B_i)} \leq C \|\bar{u}'\|_{W^{1,p}(\bigcup B_i^+)}$$

Pasando a la variable x , obtenemos la desigualdad

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathcal{D}(\bigcup B_i))} \leq C \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Denotemos $\Theta = \mathcal{D}(\bigcup B_i)$ y observemos que u tiene soporte compacto en Θ por lo tanto podemos extender u como 0 en \mathbb{R}^n , entonces

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Denotemos $Eu = \bar{u}$ y observemos que la función $u \rightarrow Eu$ es lineal.

Por último, supongamos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y sea $u_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que $u_m \rightarrow u$ en $W^{1,p}(\Omega)$, entonces

$$\|Eu_m - Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u_m - u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Por lo tanto, $\{Eu_m\}$ es una sucesión de Cauchy y converge a $\bar{u} = Eu$. □

2.4. Traza

En esta sección introduciremos el concepto de traza, el cual da sentido a los valores en la frontera de una función en $W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 2.4.1. *Sea Ω acotado con $\partial\Omega \in C^1$. Entonces existe un operador lineal*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$$

tal que

$$i) \quad Tu = u|_{\partial\Omega} \text{ si } u \in W^{1,p} \cap C(\bar{\Omega})$$

$$ii) \quad \|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Demostración. Sean $x^0 \in \partial\Omega$ fijo y V una vecindad alrededor de x^0 , como $\partial\Omega \in C^1$ al igual que en la sección anterior existe un difeomorfismo

$$\mathcal{D} : V \rightarrow B(0, r) \subset \mathbb{R}^n$$

donde $\mathcal{D}(x^0) = 0$. Entonces, sea $B = B(0, r) \subset \mathbb{R}^n$, definimos

$$\begin{cases} B^+ &= B \cap \{x_n \geq 0\} \\ B^- &= B \cap \{x_n \leq 0\}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Por lo tanto, podemos identificar a $\partial\Omega$ cerca de x^0 con $\{x_n = 0\}$ y suponer que

$$\begin{cases} B^+ &\subset \Omega \\ B^- &\subset \mathbb{R}^n - \Omega. \end{cases} \quad (2.13)$$

Primero supongamos que $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Sea $\zeta \in C_c^\infty(B)$ tal que $\zeta \geq 0$ en B y $\zeta = 1$ en $B(0, \frac{r}{2})$. Denotemos $\Gamma = \partial\Omega \cap B(0, \frac{r}{2})$. Sea $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} = \{x_n = 0\}$.

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |u|^p dx' &\leq \int_{\{x_n=0\}} \zeta |u|^p dx' \\ &= - \int_{B^+} (\zeta |u|^p)_{x_n} dx \\ &= - \int_{B^+} |u|^p \zeta_{x_n} + p |u|^{p-1} \text{sign}(u) u_{x_n} \zeta dx. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Young al segundo sumando tenemos

$$\int_{\Gamma} |u|^p dx' \leq C \int_{B^+} |u|^p + |u_{x_n}|^p dx.$$

Por lo tanto

$$\int_{\Gamma} |u|^p dx' \leq C \int_{B^+} |u|^p + |Du|^p dx \leq C \int_{\Omega} |u|^p + |Du|^p dx.$$

Como Ω es acotado $\partial\Omega$ es compacto, existe un número finito de bolas B_i y conjuntos Γ_i , $i = 1, \dots, N$, tal que $\partial\Omega = \bigcup \Gamma_i$. Entonces, por la desigualdad anterior

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Por lo tanto, si escribimos

$$Tu = u|_{\partial\Omega}$$

tenemos que

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

donde C no depende de u . Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces, por el Teorema 2.2.3, existen funciones $u_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que $u_m \rightarrow u$ en $W^{1,p}$. Entonces

$$\|Tu_m - Tu_l\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)};$$

por lo tanto $\{Tu_m\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\partial\Omega)$. Podemos definir

$$Tu = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m.$$

Si $u \in W^{1,p} \cap C(\bar{\Omega})$ las funciones $u_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ convergen uniformemente a u en $\bar{\Omega}$. Por lo tanto

$$Tu = u|_{\partial\Omega}.$$

□

Definición 2.4.1. A Tu le llamamos la traza de u en $\partial\Omega$.

Teorema 2.4.2. *Supongamos que Ω es acotado y que $\partial\Omega$ es C^1 . Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ si y sólo si } Tu = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Demostración. Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, por definición existen funciones $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ tales que

$$u_m \rightarrow u \text{ en } W^{1,p}(\Omega).$$

Como $Tu_m = 0$ para toda m , y ya que

$$T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$$

es un operador lineal continuo, tenemos que

$$Tu = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

La demostración de recíproco se puede consultar en [Eva98] págs 259-260. □

2.5. Desigualdades de Sobolev

En esta sección enunciaremos algunas desigualdades que serán útiles para la siguiente sección. Por economía de espacio no se darán las demostraciones, las cuales pueden ser consultadas en [Eva98].

Definición 2.5.1. Si $1 \leq p < n$, el conjugado de Sobolev de p es

$$p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Teorema 2.5.1. Sean $1 \leq p < n$ y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces existe una constante C que sólo depende de n y p tal que,

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Teorema 2.5.2. Sea $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y acotado de frontera suave. Supongamos que $1 \leq p < n$ y que $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces $u \in L^{p^*}(\Omega)$, con la estimación

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

donde C depende de solamente de p , n y Ω .

2.6. Compacidad

En esta sección definimos la noción de convergencia débil y algunos resultados de compacidad que serán importantes para los resultados de esta tesis.

Definición 2.6.1. Una sucesión $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset H^k(\Omega)$ **converge débilmente** a u en H^k

$$u_m \rightharpoonup u$$

si, para cada $w \in H^k$, se cumple que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle u_m, w \rangle_{H^k(\Omega)} = \langle u, w \rangle_{H^k(\Omega)},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^k(\Omega)}$ es el producto interior definido en (2.1).

Para espacios de Hilbert de dimensión infinita las sucesiones acotadas no necesariamente tienen subsucesiones convergentes, sin embargo, como veremos en el siguiente resultado, sí tienen subsucesiones que convergen débilmente.

Teorema 2.6.1. Toda sucesión acotada en $H^k(\Omega)$ contiene una subsucesión débilmente convergente en $H^k(\Omega)$.

Demostración. Sea $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ una sucesión acotada en $H^k(\Omega)$, y sea $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|u_m\| \leq c \text{ para toda } m \in \mathbb{N},$$

de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$|\langle u_m, u_1 \rangle| \leq \|u_m\| \|u_1\| \leq 2c. \quad (2.14)$$

Por lo tanto, existe una subsucesión $\{u_{m_1}\} \subset \{u_m\}$ tal que, la sucesión de números reales $\{\langle u_{m_1}, u_1 \rangle\}$ es convergente.

Análogo a (2.14) se sigue que $\{\langle u_{m_1}, u_2 \rangle\}$ está acotada en $H^k(\Omega)$ y, por lo tanto, existe una subsucesión $\{u_{m_2}\} \subset \{u_{m_1}\}$ tal que, $\{\langle u_{m_2}, u_2 \rangle\}$ es convergente. De manera inductiva obtenemos para toda $j \in \mathbb{N}$ una subsucesión $\{u_{m_j}\} \subset \{u_{m_{j-1}}\}$ tal que, $\{\langle u_{m_j}, u_j \rangle\}$ es convergente.

Tomemos la sucesión diagonal $\{u_{m_m}\} \subset \{u_m\}$ y notemos que para $j \leq m$ la sucesión $\{u_{m_m}\} \subset \{u_{m_j}\}$, por lo tanto,

$$\{\langle u_{m_m}, u_j \rangle\} \text{ converge en } \mathbb{R} \text{ cuando } m \rightarrow \infty \text{ para toda } j \in \mathbb{N}.$$

Sea $V = \text{lin}(\{u_j\}_{j=1}^{\infty})$ el espacio generado por $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$. Como el producto escalar es bilineal, tenemos que $\{\langle u_{m_m}, v \rangle\}$ converge para cada $v \in V$. Ahora tomemos $z \in \bar{V}$. Para cada $\epsilon \geq 0$ existe $v \in V$ tal que

$$\|z - v\|_{H^k(\Omega)} \leq \frac{\epsilon}{4c}$$

y $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\langle u_{m_m} - u_{l_l}, v \rangle| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{si } m, l \geq m_0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |\langle u_{m_m} - u_{l_l}, z \rangle| &\leq |\langle u_{m_m} - u_{l_l}, z - v \rangle| + |\langle u_{m_m} - u_{l_l}, v \rangle| \\ &\leq \|u_{m_m} - u_{l_l}\|_{H^k(\Omega)} \|z - v\|_{H^k(\Omega)} + |\langle u_{m_m} - u_{l_l}, v \rangle| \\ &\leq 2c \frac{\epsilon}{4c} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{si } m, l \geq m_0. \end{aligned}$$

De manera que para cada $z \in \bar{V}$, $\{\langle u_{m_m} - u_{l_l}, z \rangle\}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} y por lo tanto, es convergente.

Por último, debido a que \bar{V} es cerrado, todo $w \in H^k(\Omega)$ se puede escribir como $w = z + y$ con $z \in \bar{V}$ y $y \in V^{\perp}$. En consecuencia,

$$\langle u_{m_m}, w \rangle = \langle u_{m_m}, z \rangle + \langle u_{m_m}, y \rangle = \langle u_{m_m}, z \rangle$$

por lo tanto, $\{\langle u_{m_m}, w \rangle\}$ converge para toda $w \in H^k(\Omega)$.

Sea $F : H^k(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$F[w] = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle u_{m_m}, w \rangle,$$

esta función claramente es lineal, y continua pues

$$\langle u_{m_m}, w \rangle \leq \|u_{m_m}\|_{H^k(\Omega)} \|w\|_{H^k(\Omega)} \leq c \|w\|_{H^k(\Omega)} \quad \text{para toda } w \in H^k(\Omega)$$

de manera que

$$|F[w]| \leq c \|w\|_{H^k(\Omega)} \quad \text{para toda } w \in H^k(\Omega).$$

Por el Teorema de representacion de Fréchet-Riesz ², existe $u \in H^k(\Omega)$ tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle u_{m_m}, w \rangle = F[w] = \langle u, w \rangle \quad \text{para toda } w \in H^k(\Omega).$$

Por lo tanto $u_{m_m} \rightharpoonup u$ en $H^k(\Omega)$, y el Teorema está demostrado. \square

Definición 2.6.2. Sean X y Y espacios de Banach. Decimos que X está compactamente contenido en Y , denotado por

$$X \subset\subset Y,$$

²Véase [Cla09] págs 290-291

si

i) $\|x\|_Y \leq C \|x\|_X$ con $x \in X$ para alguna constante C

ii) Toda sucesión acotada en X tiene una subsucesión convergente en Y .

Teorema 2.6.2. *Supongamos que Ω es un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^n , y que $\partial\Omega$ es C^1 . Sea $1 \leq p < \infty$, entonces*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$$

para cada $1 \leq q < p^*$.

Demostración.

1. Como Ω es acotado, el Teorema 2.5.2 implica que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

donde C sólo depende de p y n . Además, para $1 \leq q < p^*$ fijo

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \quad (2.15)$$

Por lo que tenemos

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega).$$

Sólo basta demostrar que si $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ es una sucesión acotada en $W^{1,p}(\Omega)$, entonces tiene una subsucesión $\{u_{m_j}\}_{m=1}^\infty$ que es de Cauchy en $L^q(\Omega)$.

Por el Teorema de Extensión, podemos suponer que $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y que las sucesiones $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ tienen soporte compacto en $\Theta \supset \Omega$, además por hipótesis

$$\sup_m \|u_m\|_{W^{1,p}(\Theta)} < \infty. \quad (2.16)$$

2. Primero estudiemos la regularización de u_m ,

$$u_m^\epsilon = \eta_\epsilon * u_m \quad \text{con } \epsilon > 0.$$

Podemos suponer que el soporte de las funciones u_m^ϵ también está contenido en Θ .

Notemos que

$$u_m^\epsilon \rightarrow u_m \text{ en } L^q(\Theta) \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0, \text{ uniformemente en } m.$$

En efecto, supongamos que u_m es suave, entonces

$$\begin{aligned} u_m^\epsilon(x) - u_m(x) &= \int_{B(0,1)} \eta_\epsilon(y) (u_m(x - \epsilon y) - u_m(x)) dy \\ &= \int_{B(0,1)} \eta_\epsilon(y) \int_0^1 \frac{d}{dt} (u_m(x - \epsilon ty)) dt dy \\ &= -\epsilon \int_{B(0,1)} \eta_\epsilon(y) \int_0^1 Du_m(x - \epsilon ty) \cdot y dt dy \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_\Theta |u_m^\epsilon(x) - u_m(x)| dz &\leq \epsilon \int_{B(0,1)} \eta_\epsilon(y) \int_0^1 \int_\Theta |Du_m(x - \epsilon ty) \cdot y| dz dt dy \\ &\leq \epsilon \int_\Theta |Du_m(z)| dz. \end{aligned}$$

Por aproximación en $W^{1,p}$, esto es cierto para $u_m \in W^{1,p}(\Theta)$. De manera que

$$\begin{aligned} \|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^1(\Theta)} &\leq \epsilon \|Du_m\|_{L^1(\Theta)} \\ &\leq \epsilon C \|Du_m\|_{L^p(\Theta)}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

la última desigualdad ya que Θ es acotado.

Sea $\frac{1}{q} = \theta + \frac{(1-\theta)}{p^*}$, $0 < \theta < 1$. Como $1 \leq q < p^*$, por la desigualdad de interpolación de espacios L^p

$$\|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^q(\Theta)} \leq \|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^1(\Theta)}^\theta \|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^{p^*}(\Theta)}^{1-\theta},$$

entonces de (2.15) y (2.16)

$$\begin{aligned} \|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^q(\Theta)} &\leq \|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^1(\Theta)}^\theta \|u_m^\epsilon - u_m\|_{W^{1,p}(\Theta)}^{1-\theta} \\ &\leq C \|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^1(\Theta)}^\theta; \end{aligned}$$

Por lo tanto, con (2.17) deducimos que

$$u_m^\epsilon \rightarrow u_m \text{ en } L^q(\Theta) \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0, \text{ uniformemente en } m.$$

3. Ahora veamos que para cada $\epsilon > 0$, la sucesión $\{u_m^\epsilon\}_{m=1}^\infty$ es uniformemente acotada y equicontinua.

En efecto, sea $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned} |u_m^\epsilon(x)| &\leq \int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y) |u_m(y)| dy \\ &\leq \|\eta_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_m\|_{L^1(\Theta)} \leq \frac{C}{\epsilon^n} \leq \infty \end{aligned}$$

para toda m , por lo tanto $\{u_m^\epsilon\}_{m=1}^\infty$ es uniformemente acotada.

De igual manera, para toda m ,

$$\begin{aligned} |Du_m^\epsilon(x)| &\leq \int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y) |u_m(y)| dy \\ &\leq \|\eta_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_m\|_{L^1(\Theta)} \leq \frac{C}{\epsilon^{n+1}} \leq \infty, \end{aligned}$$

por lo tanto $\{u_m^\epsilon\}_{m=1}^\infty$ es equicontinua.

4. Como las funciones de $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ tienen soporte compacto en Θ , entonces las funciones de $\{u_m^\epsilon\}_{m=1}^\infty$ también tienen soporte compacto en Θ . Utilizando el criterio de compacidad de Arzela-Ascoli ³, tenemos que existe una subsucesión $\{u_{m_j}^\epsilon\}_{m=1}^\infty$ de $\{u_m^\epsilon\}_{m=1}^\infty$ tal que converge uniformemente en Θ , en particular,

$$\limsup_{j,k \rightarrow \infty} \|u_{m_j}^\epsilon - u_{m_k}^\epsilon\|_{L^q(\Theta)} = 0.$$

³Véase Apéndice sección A.1

Por lo tanto, para toda $\delta > 0$ existen J, K tales que

$$\begin{aligned}
& \limsup_{j,k \rightarrow \infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(\Theta)} \\
&= \limsup_{j,k \rightarrow \infty} \|u_{m_j} - u_{m_k} + u_{m_j}^\epsilon - u_{m_k}^\epsilon - u_{m_j}^\epsilon + u_{m_k}^\epsilon\|_{L^q(\Theta)} \\
&\leq \limsup_{j,k \rightarrow \infty} \|u_{m_j} - u_{m_j}^\epsilon\|_{L^q(\Theta)} + \limsup_{j,k \rightarrow \infty} \|u_{m_k}^\epsilon - u_{m_k}\|_{L^q(\Theta)} \\
&+ \limsup_{j,k \rightarrow \infty} \|u_{m_j}^\epsilon - u_{m_k}^\epsilon\|_{L^q(\Theta)} \\
&\leq \delta.
\end{aligned}$$

siempre que $j \geq J$ y $k \geq K$. 5. De la afirmación anterior tomamos $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, y usamos un argumento estándar de diagonalización para obtener una subsucesión $\{u_{m_l}\}$ de $\{u_m\}$ tal que

$$\limsup_{l,k \rightarrow \infty} \|u_{m_l} - u_{m_k}\|_{L^q(\Theta)} = 0.$$

Por lo que $\{u_{m_l}\}$ es de Cauchy en $L^q(\Omega)$. □

2.7. Estimaciones

En esta sección demostraremos algunas desigualdades que serán necesarias. Una versión de la desigualdad de Poincaré para funciones en $W^{1,2}(\Omega)$. Además una desigualdad de interpolación para funciones en $W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$.

Teorema 2.7.1. *Sea $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Supongamos que Ω es acotado y convexo, entonces*

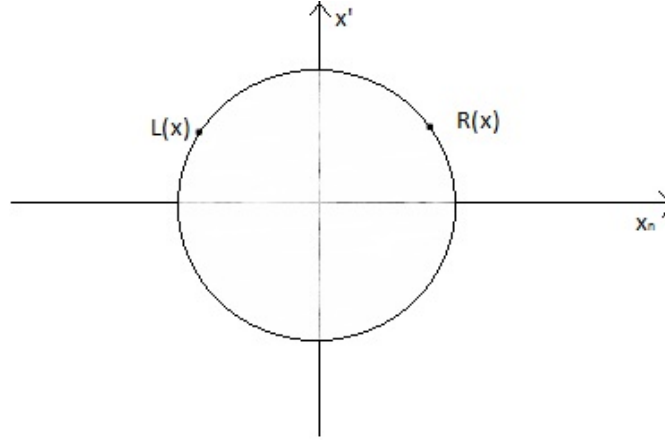
$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq 2 \text{diam}(\Omega)^2 \int_{\Omega} |D_{x_n} u(x)|^2 dx + 2 \text{diam}(\Omega) \int_{\partial\Omega} |u(x)|^2 dx$$

Demostración. Definamos $L(x')$ y $R(x')$ tales que para todo $(x', x_n) \in \Omega$ con x' fijo, $L(x') \leq x_n \leq R(x')$. Como Ω es convexo, $L(x')$ y $R(x')$ están bien definidos y son únicos.

Sea $u \in C^\infty(\Omega)$, por el Teorema fundamental de cálculo tenemos que

$$u(x', x_n) - u(x', L(x')) = \int_{L(x')}^{x_n} D_y u(x', y) dy.$$

De la desigualdad del triángulo para número reales y por la desigualdad de Hölder



obtenemos,

$$\begin{aligned}
 |u(x', x_n)| &\leq \int_{L(x')}^{x_n} |D_y u(x', y)| dy + |u(x', L(x'))| \\
 |u(x', x_n)| &\leq \left(\int_{L(x')}^{R(x')} 1 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{L(x')}^{R(x')} |D_y u(x', y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} + |u(x', L(x'))| \\
 &= |R(x') - L(x')|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{L(x')}^{R(x')} |D_y u(x', y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} + |u(x', L(x'))|.
 \end{aligned}$$

Usando que para cada x' , $|R(x') - L(x')| \leq \text{diam}(\Omega)$ y elevando al cuadrado obtenemos

$$|u(x', x_n)|^2 \leq 2 \text{diam}(\Omega) \int_{L(x')}^{R(x')} |D_y u(x', y)|^2 dy + 2 |u(x', L(x'))|^2.$$

Integrando con respecto a la variable x_n

$$\begin{aligned} \int_{L(x')}^{R(x')} |u(x', x_n)|^2 dx_n &\leq 2\text{diam}(\Omega) \int_{L(x')}^{R(x')} \int_{L(x')}^{R(x')} |D_y u(x', y)|^2 dy dx_n \\ &\quad + 2 \int_{L(x')}^{R(x')} |u(x', L(x'))|^2 dx_n \\ \int_{L(x')}^{R(x')} |u(x', x_n)|^2 dx_n &\leq 2\text{diam}(\Omega)^2 \int_{L(x')}^{R(x')} |D_y u(x', y)|^2 dy \\ &\quad + 2\text{diam}(\Omega) |u(x', L(x'))|^2. \end{aligned}$$

Integrando con respecto a x' , se obtiene

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq 2\text{diam}(\Omega)^2 \int_{\Omega} |D_y u(x)|^2 dx + 2\text{diam}(\Omega) \int_{\Omega_L} |u(x', L(x'))|^2 dx'.$$

La última integral del lado derecho de la desigualdad puede acotarse con $\int_{\partial\Omega} |u(x)|^2 dS$, por lo tanto

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq 2\text{diam}(\Omega)^2 \int_{\Omega} |D_y u(x)|^2 dx + 2\text{diam}(\Omega) \int_{\partial\Omega} |u(x)|^2 dS.$$

Por aproximación, se tiene el resultado para toda $u \in W^{1,2}(\Omega)$. □

Teorema 2.7.2. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$, con $\partial\Omega \in C^1$. Entonces

$$\|D_i u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \|D_i^2 u\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)}, \quad i = 1, 2, 3$$

Demostración. Sea $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que u_m converge a u en $W_0^{1,2}(\Omega)$, entonces

$$\int_{\Omega} |D_i u_m|^2 dx = \int_{\Omega} D_i u_m D_i u_m dx.$$

Integrando por partes, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D_i u_m|^2 dx &= - \int_{\Omega} D_i^2 u_m u_m dx + \int_{\partial\Omega} D_i u_m u_m \nu_i dx \\ &= - \int_{\Omega} D_i^2 u_m u_m dx \\ &\leq \int_{\Omega} |D_i^2 u_m u_m| dx. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\int_{\Omega} |D_i u_m|^2 dx \leq \left(\int_{\Omega} |D_i^2 u_m|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u_m|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Del Teorema 2.2.1 inciso *ii*) tenemos que

$$\int_{\Omega} |D_i u_m|^2 dx \leq \left(\int_{\Omega} |D_i^2 u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Como u_m converge a $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, concluimos que

$$\|D_i u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \|D_i^2 u\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)}, \quad \text{para toda } i.$$

□

CAPÍTULO 3

Técnicas variacionales

En este capítulo se presentan algunas definiciones y resultados del cálculo de variaciones. En particular el método directo y la noción de Γ -convergencia. Los resultados de esta sección fueron tomados de [Eva98] y [JLJ98].

3.1. Método directo del cálculo de variaciones

Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y acotado con frontera suave, es decir, $\partial\Omega \in C^\infty$. Sea

$$L : \mathbb{M}^{n \times n} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

A la función L le llamamos Lagrangiano y usaremos la siguiente notación.

$$L = L(P, z) = L(p_1^1, p_2^1, \dots, p_n^1, z^1, \dots, z^n)$$

para $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $z \in \mathbb{R}^n$, donde

$$P = \begin{pmatrix} p_1^1 & \dots & p_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1^n & \dots & p_n^n \end{pmatrix}.$$

Ahora, consideramos el funcional

$$E[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} L(\nabla \mathbf{u}(x), \mathbf{u}(x)) dx$$

definido para funciones

$$\mathbf{u} \in \mathcal{A} = \{\mathbf{u} \in H^1 \text{ tal que } T\mathbf{u} = g\}$$

donde $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada, y

$$\nabla \mathbf{u}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}(x) \\ & \ddots & \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

es la matriz de derivadas parciales de \mathbf{u} en x .

3.1.1. Coercividad

Definición 3.1.1. Decimos que el funcional E es **coercivo** si existen constantes $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ tales que

$$E[\mathbf{u}] \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx - \beta |\Omega|,$$

de manera tal que $E[\mathbf{u}] \rightarrow \infty$ cuando $|\nabla \mathbf{u}| \rightarrow \infty$

Observación. Notemos que para que E sea coercivo basta pedir que

$$L(\nabla \mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \alpha |\nabla \mathbf{u}|^2 - \beta \quad (3.1)$$

para $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ constantes.

3.1.2. Semicontinuidad inferior débil

Sea

$$m = \inf_{\mathbf{u} \in A} E[\mathbf{u}_k] \quad (3.2)$$

y tomemos una sucesión $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$E[\mathbf{u}_k] \rightarrow m,$$

a la cual le llamamos **sucesión minimizante**. La coercividad nos garantiza que la sucesión $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ está acotada en H^1 y por lo tanto debido al Teorema 3.6.1 existe una subsucesión $\{\mathbf{u}_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ débilmente convergente a \mathbf{u} en H^1 .

Sin embargo, no podemos garantizar que $E[\mathbf{u}_{k_j}] \rightarrow E[\mathbf{u}]$ pues en la mayoría de los casos el funcional E no es débilmente continuo. Para demostrar la existencia de un mínimo es suficiente pedir, la condición más débil

$$E[\mathbf{u}] \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} E[\mathbf{u}_{k_j}].$$

En este caso, usando (3.2), tenemos que

$$E[\mathbf{u}] \leq m,$$

lo que nos garantiza que \mathbf{u} es un mínimo.

Definición 3.1.2. Decimos que E es **débilmente semicontinuo inferior** en H^1 , si

$$E[\mathbf{u}] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} E[\mathbf{u}_k]$$

cuando

$$\mathbf{u}_k \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ débilmente en } H^1(\Omega).$$

3.1.3. El método directo

Teorema 3.1.1. *Supongamos que L satisface la condición de coercividad (3.1) y que E es débilmente semicontinuo inferiormente. Entonces existe al menos una función $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$ que satisface*

$$E[\mathbf{u}] = \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{A}} E[\mathbf{w}].$$

Demostración. Sea $m = \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}} E(\mathbf{u}_k)$. Si $m = \infty$ no hay nada que demostrar, entonces supongamos que m es finito. Tomemos una sucesión minimizante $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$, de manera que

$$E[\mathbf{u}_k] \rightarrow m. \quad (3.3)$$

Podemos suponer que $\beta = 0$ en la condición (3.1) de otra forma podemos considerar $\tilde{L} = L + \beta$. Entonces $L \geq \alpha|P|^2$, y

$$E[\mathbf{w}] \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}|^2 dx. \quad (3.4)$$

Como m es finito de (3.3) y (3.4) tenemos que

$$\sup_k \|\nabla \mathbf{u}_k\|_{L^2(\Omega)} < \infty. \quad (3.5)$$

Ahora, por la desigualdad de Poincaré, del Teorema 3.7.1, tenemos que

$$\|\mathbf{u}_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla \mathbf{u}_k\|_{L^2(\Omega)} + C \leq C$$

Por lo tanto, $\sup_k \|\mathbf{u}_k\|_{L^2(\Omega)} < \infty$. De esta desigualdad y de (3.5) concluimos que la sucesión $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ es acotada en H^1 .

En consecuencia, debido al Teorema 3.6.1, existe una subsucesión $\{\mathbf{u}_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ y una función $\mathbf{u} \in H^1$ tal que

$$\mathbf{u}_{k_j} \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ débilmente en } H^1(\Omega).$$

Como E es débilmente semicontinuo inferiormente entonces, $E[\mathbf{u}] \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} E[\mathbf{u}_{k_j}] = m$. Además $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$, por lo tanto

$$E[\mathbf{u}] = m = \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{A}} E[\mathbf{w}].$$

□

3.2. Γ – convergencia

Ahora definiremos la noción de Γ – convergencia, la cual hace rigurosa la idea de que una familia de funcionales semi continuos inferiormente deberán converger en algún sentido, y que sus mínimos deberán estar relacionados.

Definición 3.2.1. Sea X un espacio métrico y $E_h : X \rightarrow \mathbb{R}$ funciones con $h \in \mathbb{N}$. Decimos que E_h Γ -converge a E ,

$$E = \Gamma \lim_{h \rightarrow \infty} E_h$$

siempre que:

i) para toda sucesión $\{x_h\}_{h \in \mathbb{Z}}$ que converge a algún $x \in X$,

$$E[x] \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} E_h[x_h]$$

ii) para toda $x \in X$, existe una sucesión $\{x_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ que converge a x y además

$$E[x] = \lim_{h \rightarrow \infty} E_h[x_h].$$

3.2.1. Ejemplos

Para establecer algunas propiedades de la Γ -convergencia estudiaremos algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo 3.2.1. Sea $h \in \mathbb{N}$. $E_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$E_h[x] = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{h} \\ hx & \text{si } -\frac{1}{h} \leq x \leq \frac{1}{h} \\ -1 & \text{si } x \leq -\frac{1}{h}. \end{cases}$$

Entonces

$$(\Gamma \lim_{h \rightarrow \infty} E_h)[x] = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Nótese que el límite puntual cuando $x = 0$ es 0, y cuando $x > 0 (< 0)$ es 1(-1), y por lo tanto es distinto al Γ -límite.

Demostración.

Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\{x_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a x . Primero supongamos que $x > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$x > \frac{1}{k}.$$

Podemos tomar h suficientemente grande tal que

$$x_h > \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad h > k$$

de manera que $x_h > \frac{1}{h}$ para toda $h > k$. Por lo tanto

$$E_h[x_h] = 1,$$

de donde concluimos que

$$\liminf_{h \rightarrow \infty} E_h[x_h] = 1.$$

Análogamente para $x < 0$ y $\{x_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a x , concluimos que

$$\liminf_{h \rightarrow \infty} E_h[x_h] = -1.$$

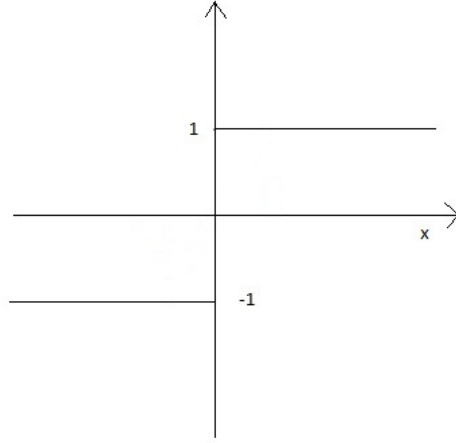


Figura 3.1: Ejemplo 1

Supongamos que $x = 0$ y sea $\{x_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a x , por definición para toda h , $-1 < E_h < 1$. En particular si tomamos la sucesión $\{-\frac{1}{h}\}_{h \in \mathbb{N}}$ obtenemos que

$$E_h\left(-\frac{1}{h}\right) = -1.$$

Por lo que podemos asegurar que

$$\liminf_{h \rightarrow \infty} E_h[x_h] \geq -1.$$

Por lo tanto (3.6) cumple la definición de Γ - límite .

□

Ejemplo 3.2.2. Sea $h \in \mathbb{N}$. $E_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$E_h[x] = \sin(hx).$$

Entonces

$$(\Gamma \lim_{h \rightarrow \infty} E_h)[x] = -1.$$

Nótese que la sucesión no tiene límite puntual.

Demostración.

Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\{x_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a x . Tenemos que para toda $h \in \mathbb{N}$

$$-1 < E_h[x_h] < 1,$$

por lo que

$$\liminf_{h \rightarrow \infty} E_h[x_h] \geq -1.$$

Veamos que existe una sucesión $\{x_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} E_h[x_h] = -1.$$

Sabemos que el periodo de $\sin(hx)$ es de $\frac{2\pi}{h}$, por lo tanto existe un $x_h \in X$ tal que $\sin(hx_h) = -1$ y

$$|x - x_h| < \frac{2\pi}{h}.$$

Por lo tanto, $x_h \rightarrow x$ cuando $h \rightarrow \infty$.

□

Ejemplo 3.2.3. Sea $h \in \mathbb{N}$. $E_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$E_h[x] = \begin{cases} hx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{h} \\ 2 - hx & \text{si } \frac{1}{h} \leq x \leq \frac{2}{h} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

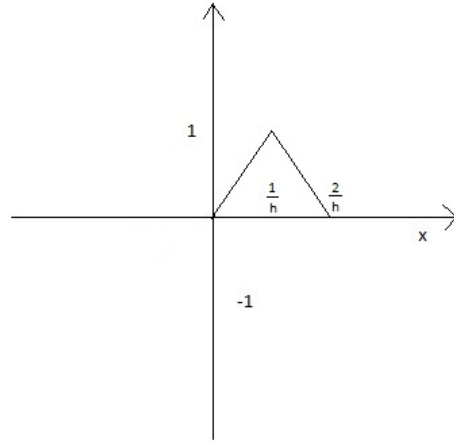


Figura 3.2: Ejemplo 3.2.3

Entonces

$$(\Gamma \lim_{h \rightarrow \infty} E_h)[x] = 0$$

Demostración.

Sea $x \in \mathbb{R}$ y una sucesión $\{x_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ tal que $x_h \rightarrow x$. Como para toda $h \in \mathbb{N}$, $0 \leq E_h(x)$ para toda x , tenemos que

$$0 \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} E_h[x_h].$$

Ahora, supongamos que $x < 0$ y tomemos la sucesión constante $\{x_h\}_{h \in \mathbb{N}}$, $x_h = x$. Entonces

$$E[x] = \lim_{n \rightarrow \infty} E(x_n).$$

Supongamos que $x = 0$, la sucesión $\{\frac{1}{n^2}\}_{n \in \mathbb{N}}$ cumple

$$E[x] = \lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Por último, supongamos que $x > 0$ y sea $\{x_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $x_h \rightarrow x$. Existe $k \in \mathbb{N}$

$$x > \frac{2}{k}.$$

Tomemos $h \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$x_h > \frac{2}{k} \quad \text{y} \quad h > k$$

de manera que $x_h > \frac{2}{h}$ para toda $h > k$. Por lo tanto

$$\lim_{h \rightarrow \infty} E_h[x_h] = 0.$$

□

Ejemplo 3.2.4. Sea $h \in \mathbb{N}$. $E_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$E_h[x] = \begin{cases} -hx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{h} \\ hx - 2 & \text{si } \frac{1}{h} \leq x \leq \frac{2}{h} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces

$$(\Gamma \lim_{h \rightarrow \infty} E_h)[x] = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que las funciones E_h de este ejemplo son las negativas de las funciones

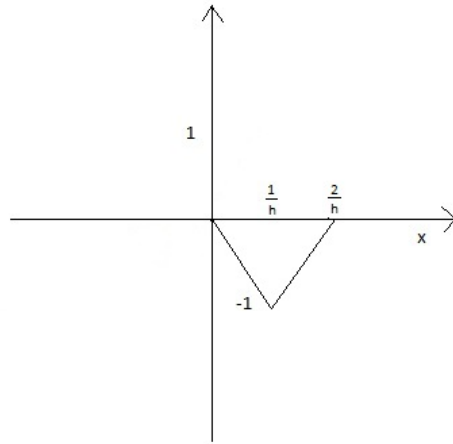


Figura 3.3: Ejemplo 3.2.4

E_h del Ejemplo 3.2.3. Por lo tanto, en general

$$\Gamma \lim_{h \rightarrow \infty} -E_h \neq -\Gamma \lim_{h \rightarrow \infty} E_h.$$

La Γ - convergencia está diseñada para detectar mínimos, no máximos.

Demostración.

Sea $x \in \mathbb{R}$ y una sucesión $\{x_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ tal que $x_h \rightarrow x$. Si $x \neq 0$, como en el Ejemplo 3

$$\Gamma \lim_{h \rightarrow \infty} E_h[x] = 0.$$

Si $x = 0$, tomemos la sucesión $\{\frac{1}{h}\}_{h \in \mathbb{N}}$, entonces

$$\Gamma \lim_{h \rightarrow \infty} E_h[x] = -1.$$

□

Ejemplo 3.2.5. Supongamos que X es un espacio métrico y que $h \in \mathbb{N}$. Si

$$(\Gamma \lim_{h \rightarrow \infty} E_h)[x] = E$$

y F continua en X , entonces

$$(\Gamma \lim_{h \rightarrow \infty} (E_h + F))[x] = E + F.$$

Ejemplo 3.2.6. Sea $h \in \mathbb{N}$. $E_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$E_h[x] = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

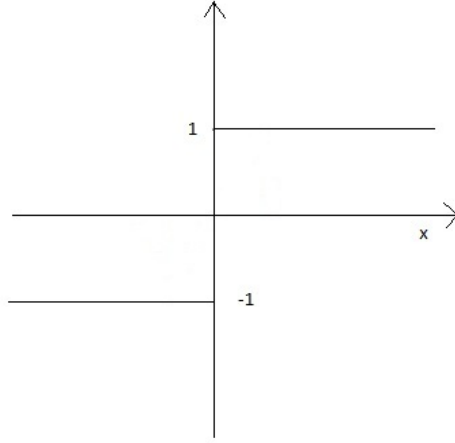


Figura 3.4: Ejemplo 2.2.6

Entonces

$$(\Gamma \lim_{h \rightarrow \infty} E_h)[x] = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Es decir,

$$(\Gamma \lim_{h \rightarrow \infty} E_h)[x] = sc^- E$$

donde

$$sc^- E = \sup \{ \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ semicontinua inferiormente con } \phi < E \}.$$

Demostración.

Supongamos que $x \neq 0$ y sea $\{x_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a x . Sabemos que para toda h , E_h es continua en $x \neq 0$. Por lo tanto (3.7) es el Γ -límite de E_h para $x \neq 0$.

Supongamos que $x = 0$, para toda $\{x_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ tal que $x_h \rightarrow 0$ tenemos que

$$-1 \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} E_h[x].$$

Ahora, tomemos la sucesión $\{-\frac{1}{h}\}_{h \in \mathbb{N}}$, entonces

$$-1 = \lim_{h \rightarrow \infty} E_h[x].$$

□

3.2.2. Convergencia de mínimos

Sea $E : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface la siguiente condición

$$\inf_{y \in X} E[y] > -\infty$$

Dada $\epsilon > 0$, decimos que $x \in X$ es un ϵ - mínimo de X si

$$E[x] < \inf_{y \in X} E[y] + \epsilon.$$

Observación. Notemos que x es un mínimo de E si es un ϵ - mínimo de E para toda $\epsilon > 0$.

Teorema 3.2.1. *Supongamos que X es un espacio métrico. Sea $E_h : X \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones y $E : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\Gamma - \lim_{h \rightarrow \infty} E_h = E$$

Supongamos que $\inf_{y \in X} E[y] > -\infty$ para toda $h \in \mathbb{Z}$ y que x_h es un ϵ_h -mínimo de E_h . Por último, supongamos que $\epsilon_h \rightarrow 0$ y que existe $x \in X$ tal que $x_h \rightarrow x$. Entonces x es un mínimo de E , y

$$E[x] = \lim_{h \rightarrow \infty} E_h[x_h]. \quad (3.8)$$

Demostración. 1. Supongamos que x no es un mínimo de E , entonces existe un $x' \in X$ tal que

$$E[x'] < E[x]. \quad (3.9)$$

Como E_h Γ - converge a E , existe una sucesión $\{x'_h\}_{h=1}^{\infty} \subset X$ tal que

$$x' = \lim_{h \rightarrow \infty} x'_h \quad y$$

$$E[x'] = \lim_{h \rightarrow \infty} E_h[x'_h]$$

Fijemos $\delta = \frac{1}{4}[E[x] - E[x']]$. Tomemos h suficientemente grande tal que

$$\epsilon_h < \delta \quad y$$

$$E_h[x'_h] < E[x'] + \delta \quad (3.10)$$

Del inciso *i*) de la definición de Γ – convergencia tenemos que

$$E_h[x_h] > E[x] - \delta \quad (3.11)$$

Como x_h es un ϵ_h – mínimo de E_h tenemos que,

$$\begin{aligned} E_h[x'_h] &> E_h[x_h] - \epsilon_h \\ &> E_h[x_h] - \delta \\ &> E[x] - 2\delta \quad \text{de (3.11)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

De (3.10) y (3.12), obtenemos que

$$E[x] < E[x'] + 3\delta$$

pero debido a la definición de δ tenemos que

$$\begin{aligned} E[x] &< E[x'] + \frac{3}{4} [E[x] - E[x']] \\ &< E_h[x'] \end{aligned}$$

lo cual contradice (3.9). Por lo tanto x es un mínimo de E .

2. Ahora, supongamos que (3.8) no es cierto, como en el paso 1 demostramos que $E[x] \leq E[x']$ para toda $x \in X$, entonces tomando una subsucesión si es necesario, tenemos

$$E[x] < \lim_{h \rightarrow \infty} E_h[x_h]$$

pero, por el inciso *ii*) de la definición de Γ – convergencia sabemos que existe una sucesión $\{x'_h\}_{h=1}^{\infty}$ que converge a x y que

$$E[x] = \lim_{h \rightarrow \infty} E_h[x'_h],$$

lo cual contradice que x_h es un ϵ_h – mínimo, pues

$$\begin{aligned} E_h[x_h] &< \inf_{y \in X} E_h[y] + \epsilon_h \\ &< E_h[x'_h] + \epsilon_h \end{aligned}$$

tomando el límite tenemos

$$\lim_{h \rightarrow \infty} E_h[x_h] < E[x],$$

y el resultado se sigue. \square

Corolario 3.2.2. *Supongamos que X es un espacio métrico. Sea $E_h : X \rightarrow R$ una sucesión de funciones que Γ – convergen a $E : X \rightarrow R$. Supongamos que x_h es un mínimo de E_h . Si $x_h \rightarrow x$, entonces x es un mínimo de E , y*

$$E[x] = \lim_{h \rightarrow \infty} E_h[x_h]. \quad (3.13)$$

Teorema 3.2.3. *Sea X un espacio métrico. Supongamos que E_h Γ –converge a E . Entonces E es semicontinuo inferiormente.*

Demostración. Supongamos que la conclusión no es cierta, entonces existe $x \in X$ y una sucesión $\{x_k\}_{h=1}^{\infty}$ tal que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k &= x \quad \text{y} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} E[x_k] &< E[x]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Debido a la Γ – convergencia, para toda k existe una sucesión $\{x_{k,h}\}_{h=1}^{\infty} \subset X$ tal que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \infty} x_{k,h} &= x_k \quad \text{y} \\ \lim_{h \rightarrow \infty} E_h[x_{k,h}] &= E[x_k]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Supongamos que $-\infty < \lim_{k \rightarrow \infty} E[x_k]$ y que $E[x] < \infty$. Sea

$$\delta = \frac{1}{4} \left[E[x] - \lim_{k \rightarrow \infty} E[x_k] \right] > 0 \text{ por (3.14)}$$

Para toda k , podemos encontrar $h_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$E_{h_k}[x_{k,h_k}] - E[x_k] < \delta, \quad (3.16)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,h_k} = x \text{ y } \lim_{k \rightarrow \infty} h_k = \infty$$

Entonces, por la Γ – convergencia

$$E[x] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} E_{h_k}[x_{k,h_k}].$$

Tomemos k suficientemente grande tal que

$$E[x_k] \stackrel{(3.14)}{<} E[x] - 3\delta \quad \text{y} \quad (3.17)$$

$$E_{h_k}[x_{k,h_k}] > E[x] - \delta. \quad (3.18)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} E_{h_k}[x_{k,h_k}] &< E[x_k] + \delta \quad (\text{de (3.16)}) \\ &< E[x] - 2\delta \quad (\text{de (3.17)}) \\ E[x] - \delta &< E[x] - 2\delta \quad (\text{de (3.18)}) \\ -\delta &< -2\delta. \end{aligned}$$

de esta contradicción concluimos que E es semicontinuo inferiormente. \square

CAPÍTULO 4

Medidas de Young

En este capítulo se introducen las nociones de teoría de la medida que necesitamos en el estudio de las sucesiones minimizantes para problemas variacionales no convexos.

El objetivo de este capítulo es definir a las medidas de Young y demostrar el Teorema fundamental de medidas de Young.

4.1. Preliminares

En esta sección introducimos las medidas de Radon y mencionamos algunas de sus propiedades sin demostración, para esto ver [Fol99].

Definición 4.1.1. Tomemos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sea μ una medida de Borel en Ω y sea E un subconjunto de Borel de Ω . Se dice que la medida μ es **regular exterior** en E si

$$\mu(E) = \inf \{ \mu(U) \text{ tal que } U \text{ es abierto y } E \subset U \}$$

y que es **regular interior** en Ω si

$$\mu(E) = \sup \{ \mu(K) \text{ tal que } K \text{ es compacto y } E \supset K \}.$$

Definición 4.1.2. Una **medida de Radon** en Ω es una medida de Borel tal que es finita en conjuntos compactos, es regular exterior en los conjuntos de Borel y es regular interior en conjuntos abiertos.

Al espacio de medidas de Radon con **signo** en Ω , es decir el conjunto de medidas de Borel

$$\mu = \mu^+ - \mu^-,$$

tales que μ^+ y μ^- son de Radon, lo denotamos por $\mathcal{M}(\Omega)$.

Proposición 4.1.1. *El espacio de medidas de Radon con signo $\mathcal{M}(\Omega)$ es un espacio métrico con la norma*

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = \int_{\Omega} d|\mu|,$$

donde $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$.

Notación. Denotamos por $C_0(\Omega)$ a la cerradura de las funciones continuas en Ω con soporte compacto.

Definición 4.1.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Para $f \in C_0(\Omega)$ y $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ definimos

$$\langle \mu, f \rangle = \int_{\Omega} f d\mu.$$

Teorema 4.1.2. *Para $f \in C_0(\Omega)$ y $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ la función dada por*

$$f \rightarrow \langle \mu, f \rangle$$

es un funcional lineal.

Además podemos identificar al dual de $C_0(\Omega)$ con $\mathcal{M}(\Omega)$.

Definición 4.1.4. Una función $\mu : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(\Omega)$ es **débil*medible** si las funciones

$$x \mapsto \langle \mu(x), f \rangle$$

son medibles para toda función $f \in C_0(\Omega)$.

Notación. Denotamos por $L^1(\Omega; C_0(\Omega))$ al espacio de funciones

$$F : \Omega \rightarrow C_0(\Omega)$$

que son integrables y por $L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\Omega))$ al espacio de funciones

$$\mu : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(\Omega)$$

débil* medibles que están esencialmente acotadas.

Proposición 4.1.3. *Podemos identificar al dual de $L^1(\Omega; C_0(\Omega))$ con $L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\Omega))$, donde*

$$\langle \mu, F \rangle_{L^1(\Omega; C_0(\Omega))} = \int_{\Omega} \langle \mu(x), F(x) \rangle dx.$$

Definición 4.1.5. *i) Sea $\{\mathbf{u}_k\}$ una sucesión de funciones $\mathbf{u}_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ medibles y sea \mathbf{u} una función $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ medible. Decimos que*

$$\mathbf{u}_k \xrightarrow{*} \mathbf{u} \text{ en } L^\infty(\Omega)$$

si y sólo si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathbf{u}_k \varphi dx = \int_{\Omega} \mathbf{u} \varphi dx$$

para toda $\varphi \in L^1(\Omega)$.

ii) Sea $\{\mu_k\}$ una sucesión de funciones $\mu_k : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(\Omega)$ débil* medibles y sea $\mu : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(\Omega)$ débil* medible. Decimos que

$$\mu_k \xrightarrow{*} \mu \text{ en } L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\Omega))$$

si y sólo si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mu_k, F \rangle_{L^1(\Omega; C_0(\Omega))} = \langle \mu, F \rangle_{L^1(\Omega; C_0(\Omega))}$$

para toda $F \in L^1(\Omega; C_0(\Omega))$.

4.2. Teorema Fundamental de las medidas de Young

Para la demostración de este teorema son necesarios los teoremas de Banach-Alaoglu y Dunford-Pettis, a los cuales incluiremos en el apéndice sin demostración. Los resultados de esta sección fueron tomados de [Bal88], [Chi00] y [Mül98].

Teorema 4.2.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible de medida finita, y sea $\{\mathbf{u}_k\}$ con $\mathbf{u}_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ una sucesión de funciones medibles. Entonces, existe una sub-sucesión $\{\mathbf{u}_{k_j}\}$ y una función $\mu : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ débil* medible tal que*

i) Para toda $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$

$$f(\mathbf{u}_{k_j}) \xrightarrow{*} \bar{f} \text{ en } L^\infty(\Omega),$$

donde

$$\bar{f}(x) = \langle \mu(x), f \rangle.$$

Si además

$$\|\mathbf{u}_{k_j}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C,$$

entonces,

ii) Para casi toda $x \in \Omega$

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mu(x) = 1.$$

iii) Si A es un subconjunto medible de Ω

$$f(\mathbf{u}_{k_j}) \rightarrow \langle \mu(x), f \rangle \text{ en } L^1(A),$$

para toda función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continua y positiva (y no de soporte compacto), tal que $\{f(\mathbf{u}_{k_j})\}$ es débilmente compacto en $L^1(A)$.

Demostración. 1. Sea x fijo, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$\mu_x^k(E) = \delta_{\mathbf{u}_k(x)}(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{u}_k(x) \in E \\ 0 & \text{si } \mathbf{u}_k(x) \notin E \end{cases}.$$

A continuación demostraremos que μ_x^k es de Radon. Primero, sea una sucesión $\{E_m\}$ de conjuntos de Borel disjuntos, entonces $\mu_x^k(\bigcup_m E_m) = \sum_m \mu_x^k(E_m)$ por lo

que μ_x^k es una medida de Borel.

Ahora, sea E un conjunto de Borel, y sea U_m una sucesión de conjuntos abiertos tales que $U_m \supset E$, $U_{m+1} \supset U_m$ para toda m y además,

$$\mu_x^k(E) \geq \mu_x^k(U_m) - \frac{1}{m} \text{ para cada } m,$$

tomando el límite cuando m tiende a infinito y por la continuidad inferior de la medida μ_x^k , tenemos que

$$\begin{aligned} \mu_x^k(E) &\geq \mu_x^k\left(\bigcup_m U_m\right) \\ &\geq \inf \{ \mu(U) \text{ tal que } U \text{ es abierto y } E \subset U \}, \end{aligned}$$

y la última desigualdad es cierta ya que $\bigcup_m U_m$ es abierto. Por otro lado,

$$\mu_x^k(E) \leq \inf \{ \mu_x^k(U) \text{ tal que } U \text{ es abierto y } E \subset U \},$$

pues $\mu_x^k(E) \leq \mu_x^k(U)$ para todo U tal que $E \subset U$.

Por lo tanto,

$$\mu_x^k(E) = \inf \{ \mu_x^k(U) \text{ tal que } U \text{ es abierto y } E \subset U \}, \quad (4.1)$$

es decir, es regular exterior en borelianos.

Por último, sea U abierto. Si $\mathbf{u}_k(x) \in U$ entonces $\mu_x^k(U) = 1$, y además el conjunto $\{\mathbf{u}_k(x)\} \subset U$ es compacto, por lo que

$$1 = \mu_x^k(U) = \sup \{ \mu_x^k(K) \text{ tal que } K \text{ es compacto y } U \supset K \} \geq 1.$$

Si $\mathbf{u}_k(x) \notin U$ entonces $\mu_x^k(U) = 0$, por la monotonía de la medida para todo $K \subset U$, $\mu_x^k(K) = 0$, por lo que

$$0 = \mu_x^k(U) = \sup \{ \mu_x^k(K) \text{ tal que } K \text{ es compacto y } U \supset K \} = 0, \quad (4.2)$$

es decir, es regular interior en abiertos.

De (4.1) y (4.2) concluimos que μ_x^k es una medida de Radon para cada k y x .

2. Sea $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, la función dada por

$$x \rightarrow \langle \mu_x^k, f \rangle,$$

es débil* medible, ya que, por definición

$$\langle \mu_x^k, f \rangle = f(\mathbf{u}_k(x)).$$

Además, de la definición de μ_x^k tenemos que

$$\|\mu_x^k\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = 1. \quad (4.3)$$

Por lo tanto la función $\mu^k : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ dada por

$$x \rightarrow \mu_x^k$$

está en el espacio $L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$.

3. Debido al Teorema de Banach-Alaoglu, tenemos que existe una subsucesión $\{\mu^{k_j}\}$ de $\{\mu^k\}$ tal que

$$\mu^{k_j} = \delta_{\mathbf{u}_{k_j}(x)} \xrightarrow{*} \mu \text{ en } L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)). \quad (4.4)$$

Sea $\varphi \in L^1(\Omega)$ y $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ denotamos por $\varphi \otimes f$ a la función en $L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}^d))$ dada por

$$x \rightarrow \varphi(x)f,$$

entonces, por (4.4)

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \langle \mu^{k_j}, \varphi \otimes f \rangle_{L^1(\Omega; C_0(\Omega))} &= \langle \mu, \varphi \otimes f \rangle_{L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}^d))} \\ &= \int_{\Omega} \langle \mu(x), \varphi(x)f \rangle dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi(x) \langle \mu(x), f \rangle dx. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \langle \mu^{k_j}, \varphi \otimes f \rangle_{L^1(\Omega; C_0(\Omega))} &= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)f d\mu_x^{k_j} dx, \\ &= \int_{\Omega} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_x^{k_j} dx, \\ &= \int_{\Omega} \varphi(x)f(\mathbf{u}_{k_j}(x)) dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda $\varphi \in L^1(\Omega)$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi(x)f(\mathbf{u}_{k_j}(x)) dx = \int_{\Omega} \varphi(x) \langle \mu(x), f \rangle dx.$$

Entonces *i*) es cierto.

4. Sea C tal que

$$\|\mathbf{u}_{k_j}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C,$$

tomemos la función $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ dada por

$$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |y| \leq C \\ 1 + C - |y| & \text{si } C \leq |y| \leq C + 1 \\ 0 & \text{si } |y| > C + 1 \end{cases}$$

Entonces, tomando $\varphi = 1$, de *i*) tenemos

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(\mathbf{u}_{k_j}(x)) dx \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_x^{k_j} dx \\ &= \int_{\Omega} \langle \mu(x), f \rangle dx \\ &\leq \int_{\Omega} \langle \mu(x), 1 \rangle dx = \int_{\Omega} \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} dx \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} \geq 1,$$

además, de la semicontinuidad inferior de la norma y de (4.3) tenemos que $\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \leq 1$. En consecuencia

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} = 1.$$

5. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y positiva, tal que $\{f(u_{k_j})\}$ es débilmente compacto en $L^1(A)$. Entonces existe una subsucesión de $\{f(u_{k_j})\}$, que igualmente denotaremos por $\{f(u_{k_j})\}$ y una función $\chi \in L^1(A)$ tales que

$$f(u_{k_j}) \rightharpoonup \chi \text{ en } L^1(A). \quad (4.5)$$

Sea $\vartheta^m \in C_0(\mathbb{R}^n)$ y $m \in \mathbb{R}$

$$\vartheta^m = \begin{cases} 1 & \text{si } |y| \leq m \\ 1 + m - |y| & \text{si } m \leq |y| \leq m + 1 \\ 0 & \text{si } |y| > m + 1 \end{cases}$$

Definimos

$$f^m \in C_0(\mathbb{R}^n) \text{ como } f^m = f\vartheta^m.$$

Sea $\varphi \in L^\infty(A)$, entonces para M una constante

$$\begin{aligned} \left| \int_A \varphi (f^m(u_{k_j}) - f(u_{k_j})) dx \right| &\leq M \int_{\{x \in A : |u_{k_j}(x)| \geq m\}} f^m(u_{k_j}) dx \\ &\leq M \left(\int_{\{x \in A : |f(u_{k_j}(x))| \geq K\}} f^m(u_{k_j}) dx \right. \\ &\quad \left. + K \{x \in A : |u_{k_j}(x)| \geq m\} \right). \end{aligned}$$

Por el Teorema de Dunford Pettis ¹ y como $\|\mathbf{u}_{k_j}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$, tenemos que

$$\left| \int_A \varphi (f^m(u_{k_j}) - f(u_{k_j})) dx \right| \leq M2\epsilon.$$

¹Apéndice A.3

para toda k_j si m es suficientemente grande. Por lo tanto, para toda $\varphi \in L^\infty(A)$

$$\int_A \varphi f^m(u_{k_j}) dx \rightarrow \int_A \varphi f(u_{k_j}) dx \quad (4.6)$$

uniformemente para toda j cuando $m \rightarrow \infty$

Por otro lado, como $f^m \in C_0(\mathbb{R}^n)$, del inciso *i*) tenemos que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_A \varphi f^m(u_{k_j}) dx = \int_A \varphi \langle \mu(x), f^m \rangle dx.$$

Tomando el límite cuando $m \rightarrow \infty$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_A \varphi f^m(u_{k_j}) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_A \varphi \langle \mu(x), f^m \rangle dx,$$

como la convergencia en (4.2) es uniforme en j obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_A \varphi f(u_{k_j}) dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_A \varphi \langle \mu(x), f^m \rangle dx \\ &= \int_A \varphi \chi dx, \end{aligned}$$

la última igualdad debido a (4.5). Tomemos $\varphi \geq 0$, como la sucesión $\{f^m\}$ es creciente, entonces por el Teorema de la convergencia monótona tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_A \varphi \langle \mu(x), f^m \rangle dx = \int_A \varphi \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \mu(x), f^m \rangle dx = \int_A \varphi \langle \mu(x), f \rangle dx.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_A \varphi f(u_{k_j}) dx = \int_A \varphi \langle \mu(x), f \rangle dx,$$

que es lo que afirmábamos. \square

Definición 4.2.1. A la función

$$\mu : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$$

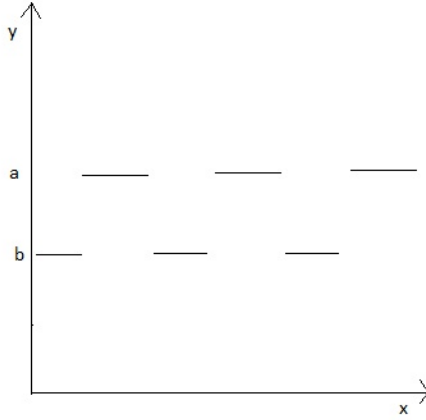
del Teorema anterior le llamamos **medida de Young** generada por la sucesión $\{u_k\}$.

4.3. Ejemplos

A continuación daremos algunos ejemplos elementales de sucesiones y medidas de Young generadas por éstas.

Ejemplo 4.3.1. Sea $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una extensión periódica de la función dada por

$$v(x) = \begin{cases} a & \text{si } 0 \leq x < \lambda \\ b & \text{si } \lambda \leq x < 1, \end{cases}$$

Figura 4.1: Gráfica de v

definimos $u_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$u_k(x) = v(kx).$$

El siguiente resultado se tomó de [Chi09]. Sea $\varphi \in L^1([0, 1])$, entonces

$$\int_0^1 u_k(x) \varphi(x) dx = \sum_{m=1}^k \int_{\frac{m-1}{k}}^{\frac{m}{k}} u_k(x) \varphi(x) dx.$$

Haciendo el cambio de variable $y = kx - (m-1)$ obtenemos de la periodicidad de v ,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^k \int_{\frac{m-1}{k}}^{\frac{m}{k}} u_k(x) \varphi(x) dx &= \sum_{m=1}^k \int_0^1 \frac{1}{k} u_k \left(\frac{y}{k} + \frac{m-1}{k} \right) \varphi \left(\frac{y}{k} + \frac{m-1}{k} \right) dy \\ &= \sum_{m=1}^k \int_0^1 \frac{1}{k} v(y) \varphi \left(\frac{y}{k} + \frac{m-1}{k} \right) dy \\ &= \int_0^1 v(y) \sum_{m=1}^k \frac{1}{k} \varphi \left(\frac{y}{k} + \frac{m-1}{k} \right) dy. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Notemos que $\sum_{m=1}^k \frac{1}{k} \varphi \left(\frac{y}{k} + \frac{m-1}{k} \right)$ es una suma de Riemman, de manera que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^k \frac{1}{k} \varphi \left(\frac{y}{k} + \frac{m-1}{k} \right) = \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 u_k(x) \varphi(x) dx &= \int_0^1 v(y) dy \int_0^1 \varphi(x) dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 v(y) dy \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

para toda φ en $L^1([0, 1])$.

Es decir,

$$u_k \xrightarrow{*} \int_0^1 v(y) dy = \lambda a + (1 - \lambda)b = \int_0^1 z d\mu_x(z),$$

donde

$$\mu_x = \lambda\delta_a + (1 - \lambda)\delta_b.$$

De manera que u_k genera la medida de Young μ_x .

Ejemplo 4.3.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto acotado. Consideremos el siguiente problema

$$T(u) = \inf_{u \in W_0^{1,\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} f(\nabla u) dx, \quad (4.8)$$

donde $f(z) = z_1^2 + (z_2^2 - 1)^2$.

Entonces $\{\nabla u_k\}$ una sucesión minimizante de $\int_{\Omega} f(\nabla u) dx$ genera a la medida de Young dada por,

$$\mu_x = \frac{1}{2}\delta_{(0,1)} + \frac{1}{2}\delta_{(0,-1)}.$$

1. Veamos que

$$\inf_{u \in W_0^{1,\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} f(\nabla u) dx = 0.$$

En efecto, sea

$$\bar{u}_k(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2 & (0, \frac{1}{k}) \\ 2\frac{1}{k} - x_2 & (\frac{1}{k}, 2\frac{1}{k}) \end{cases}, \quad (4.9)$$

extendemos a \bar{u} periódicamente en la dirección x_2 . Esta función se describe en la Figura 6.4.

Notemos que

$$0 \leq \bar{u}_k(x_1, x_2) \leq \frac{1}{k}, \quad \nabla \bar{u}_k(x_1, x_2) = \{(0, 1), (0, -1)\} \text{ casi donde sea en } \Omega.$$

Sea

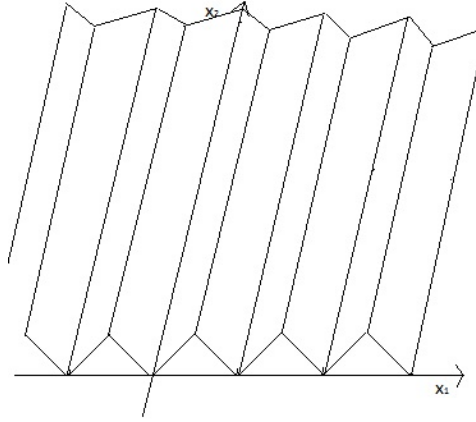
$$d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega),$$

definimos

$$u_k(x) = \text{mín}(\bar{u}(x), d(x)) \text{ para toda } x \in \Omega.$$

Debido a que

$$u_k(x) = \bar{u}(x) \text{ para toda } x \text{ tal que } d(x) > \frac{1}{k},$$

Figura 4.2: $\bar{u}_k(x_1, x_2)$

se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\nabla u_k) dx &= \int_{\{x \in \Omega: d(x) \leq \frac{1}{k}\}} f(\nabla u_k) dx \\ &\leq \sup_x |\nabla u_k| \int_{\{x \in \Omega: d(x) \leq \frac{1}{k}\}} dx \\ &\leq 3 \int_{\{x \in \Omega: d(x) \leq \frac{1}{k}\}} dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_k) dx = 0. \quad (4.10)$$

2. Sea $\{\nabla u_k\}$ una sucesión minimizante del problema (4.8), y sea $\varphi = 1$, por el Teorema 4.2.1 existe una medida μ_x tal que

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} 1 f(\nabla u_k) dx = \int_{\Omega} 1 \int_{\mathbb{R}^2} f(z_1, z_2) d\mu_x(z) dx,$$

la primera igualdad debido a (4.10). Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(z_1, z_2) d\mu_x(z) dx = \int_{\mathbb{R}^2} z_1^2 + (z_2 - 1)^2 d\mu_x(z) dx = 0$$

para casi toda $x \in \Omega$. Por lo que el soporte de μ_x está contenido en el conjunto de ceros de f , es decir, el conjunto $\{(0, 1), (0, -1)\}$. Además como μ_x es una medida de probabilidad, μ_x es de la forma

$$\alpha(x)\delta_{(0,1)} + (1 - \alpha(x))\delta_{(0,-1)}, \text{ casi para toda } x \in \Omega,$$

donde α es medible y $\alpha \in [0, 1]$.

Ahora, tomando la sucesión minimizante (4.12) tenemos que

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & (0, \frac{1}{k}) \\ -1 & (\frac{1}{k}, 2\frac{1}{k}) \end{cases},$$

argumentando análogamente al Ejemplo 4.3.1 anterior $\frac{\partial u_k}{\partial x_2}$ tiende a su promedio en $L^\infty(\Omega)$, es decir,

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_2} \xrightarrow{*} 0 \text{ en } L^\infty(\Omega).$$

Entonces, por el Teorema 4.2.1, para $\varphi = 1$ y $f = z_2$.

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} 1 \frac{\partial u}{\partial x_z} dx = \int_{\Omega} 1 \int_{\mathbb{R}^2} z_2 d\mu_x(z) dx \text{ para casi toda } x \in \Omega.$$

Por lo tanto,

$$\alpha(x) - 1 + \alpha(x) = 0, \text{ es decir, } \alpha(x) = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 4.3.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto acotado. Consideremos el siguiente problema

$$T(u) = \inf_{u \in W_0^{1,\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} f(\nabla u) dx, \quad (4.11)$$

donde $f(z) = z_1^2 + [(z_2 - 2)(z_2 + 1)]^2$.

Entonces $\{\nabla u_k\}$ una sucesión minimizante de $\int_{\Omega} f(\nabla u) dx$ genera la medida de Young dada por,

$$\mu_x = \frac{1}{3}\delta_{(0,2)} + \frac{2}{3}\delta_{(0,-1)}.$$

Veamos que

$$\inf_{u \in W_0^{1,\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} f(\nabla u) dx = 0.$$

En efecto, sea

$$\bar{u}_k(x_1, x_2) = \begin{cases} 2x_2 & (0, \frac{1}{k}) \\ \frac{3}{k} - x_2 & (\frac{1}{k}, 3\frac{1}{k}) \end{cases}, \quad (4.12)$$

extendemos a \bar{u} periódicamente en la dirección x_2 .

Notemos que

$$0 \leq \bar{u}_k \leq \frac{1}{k}, \quad \nabla \bar{u}_k = \{(0, -1), (0, 2)\} \text{ casi donde sea en } \Omega.$$

Sea

$$d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega),$$

definimos

$$u_k(x) = \min(\bar{u}(x), d(x)) \text{ para toda } x \in \Omega.$$

Debido a que

$$u_k(x) = \bar{u}(x) \text{ para toda } x \text{ tal que } d(x) > \frac{1}{k},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\nabla u_k) dx &= \int_{\{x \in \Omega: d(x) \leq \frac{1}{k}\}} f(\nabla u_k) dx \\ &\leq \sup_x |\nabla u_k| \int_{\{x \in \Omega: d(x) \leq \frac{1}{k}\}} dx \\ &\leq 2 \int_{\{x \in \Omega: d(x) \leq \frac{1}{k}\}} dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_k) dx = 0. \quad (4.13)$$

Sea $\varphi = 1$, por el Teorema 4.2.1 existe una medida μ_x tal que

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} 1 f(\nabla u_k) dx = \int_{\Omega} 1 \int_{\mathbb{R}^2} f(z_1, z_2) d\mu_x(z) dx,$$

la primera igualdad debido a (4.13). Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(z_1, z_2) d\mu_x(z) dx = \int_{\mathbb{R}^2} z_1^2 + [(z_2 - 2)(z_2 + 1)]^2 d\mu_x(z) dx = 0$$

para casi toda $x \in \Omega$. Por lo que el soporte de μ_x está contenido en el conjunto de ceros de f , es decir, el conjunto $\{(0, 2), (0, -1)\}$. Además como μ_x es una medida de probabilidad, μ_x es de la forma

$$\alpha(x)\delta_{(0,2)} + (1 - \alpha(x))\delta_{(0,-1)}, \text{ casi para toda } x \in \Omega,$$

donde α es medible y $\alpha \in [0, 1]$.

Ahora, como

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_2} \xrightarrow{*} 0 \text{ en } L^\infty(\Omega),$$

y por el Teorema 4.2.1, para $\varphi = 1$ y $f = z_2$.

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} 1 \frac{\partial u}{\partial x_z} dx = \int_{\Omega} 1 \int_{\mathbb{R}^2} z_2 d\mu_x(z) dx \text{ para casi toda } x \in \Omega,$$

Por lo tanto,

$$2\alpha(x) - 1 + \alpha(x) = 0, \text{ es decir, } \alpha(x) = \frac{1}{3}.$$

CAPÍTULO 5

Modelo para una película delgada

El objetivo de este capítulo consiste en derivar un modelo para una película delgada a partir del modelo tridimensional. Esta derivación se basa usando la noción de Γ – convergencia.

5.1. El modelo en tres dimensiones

La película delgada ocupa el dominio

$$\Omega_h = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } (x_1, x_2) \in S, \frac{-h}{2} < x_3 < \frac{h}{2} \right\},$$

donde $S \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto acotado con frontera Lipschitz. Como se vió en la Introducción, la deformación de la película delgada está dada por

$$\bar{\mathbf{u}} : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ con } \bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3),$$

donde

$$e_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Para la demás notación, veáse la Introducción sección 1.2.

Sea $\varphi : \mathbb{M}_{3 \times 3} \rightarrow (0, \infty)$. Supongamos que existen dos constantes positivas c_1, c_2 tales que para toda $U \in \mathbb{M}_{3 \times 3}$

$$c_1(|U|^2 - 1) \geq \varphi(U) \geq c_2(|U|^q - 1) \text{ con } 2 < q < 6, \quad (5.1)$$

donde $|U|$ denota la norma de Frobenius $|U| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^3 |u_{ij}|^2}$.

En este caso la energía total de la película delgada de grosor finito h tiene la forma

$$\epsilon^h(\mathbf{u}) = \int_{\Omega_h} \left\{ \kappa |\nabla^2 \mathbf{u}|^2 + \varphi(\nabla_s \mathbf{u}) \right\} dx.$$

Queremos estudiar los mínimos de este funcional sobre el espacio

$$\mathcal{A} = \left\{ \mathbf{u} \in H^2(\Omega_h) \text{ tales que } T\mathbf{u} = \mathbf{A}z \text{ en } \partial\Omega_h \right\}, \quad (5.2)$$

donde

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

cuando el grosor h tiende a cero.

5.2. El límite para una película delgada

Debido a que si tomamos el límite cuando $h \rightarrow 0$ del funcional de energía ϵ^h , el dominio Ω_h se colapsa y la integral en ϵ^h es idénticamente cero para estudiar el límite de película delgada del funcional ϵ^h debemos estudiar el comportamiento del funcional reescalado,

$$\frac{1}{h} \epsilon^h \quad \text{cuando} \quad h \rightarrow 0.$$

En este caso es conveniente trabajar en un dominio fijo, para lo que haremos el siguiente cambio de variables

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = \frac{1}{h} x_3, \quad \text{para todo } x \in \Omega_h. \quad (5.3)$$

De esta forma para cada $x \in \Omega_h$, tenemos que

$$z \in \Omega_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in S, \frac{-1}{2} < x_3 < \frac{1}{2} \right\}$$

A cada deformación $\tilde{\mathbf{u}} : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3$ le asociamos una deformación $\mathbf{u} : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mediante

$$\mathbf{u}(z(x)) = \tilde{\mathbf{u}}(x) \quad x \in \Omega_h$$

Así, en términos de la variable z ,

$$\begin{aligned} e_{13}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial u_1}{\partial z_3} + \frac{\partial u_3}{\partial z_1} \right), \\ e_{23}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial u_2}{\partial z_3} + \frac{\partial u_3}{\partial z_2} \right), \\ e_{33}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{h} \frac{\partial u_3}{\partial z_3}. \end{aligned}$$

En términos de la variable z la condición de frontera resulta

$$T\mathbf{u} = \mathbf{A}^h z, \quad z \in \partial\Omega_1 \text{ con } \mathbf{A}^h = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, h\mathbf{a}_3).$$

Notación. Usaremos la notación

$$\nabla_p \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z_1} \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z_2} \otimes \mathbf{e}_2$$

para designar al gradiente sobre el plano donde yace S.

Haciendo el cambio de variable dado por (5.3) en $\frac{1}{h}\epsilon^h[\tilde{\mathbf{u}}]$, obtenemos

$$\begin{aligned} E^h[\mathbf{u}] &= \frac{1}{h}\epsilon^h[\tilde{\mathbf{u}}] \\ &= \int_{\Omega_1} \left\{ \kappa \left[|\nabla_p^2 \mathbf{u}|^2 + \frac{1}{h^2} \left| \nabla_p \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z_3} \right|^2 + \frac{1}{h^4} \left| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z_3^2} \right|^2 \right] + \varphi(\nabla_s \mathbf{u}) \right\} dz. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Existencia de mínimos para h finito.

Veamos que para cada $h > 0$ el funcional de energía (5.4) alcanza su mínimo en $H^2(\Omega_1)$, para ello usaremos el método directo descrito en el Capítulo 3.

Proposición 5.2.1. *Para cada $h > 0$ el funcional dado por (5.4) alcanza su mínimo $\tilde{\mathbf{u}}$ en el espacio*

$$\mathcal{A} = \left\{ \mathbf{u} \in H^2(\Omega_1) \text{ tales que } T\mathbf{u} = \mathbf{A}^h z \text{ en } \partial\Omega_1 \right\}. \quad (5.5)$$

Demostración. Primero notemos que (5.4) es coercivo, es decir,

$$E[\mathbf{u}] \rightarrow \infty \text{ cuando } \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_1)} \rightarrow \infty.$$

En particular demostraremos que toda sucesión minimizante de (5.4) está acotada en $H^2(\Omega_1)$. Sea $\{\mathbf{u}^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ una sucesión minimizante. Por (5.1) y ya que $\kappa \geq 0$ tenemos que

$$c_h \geq E^h[\mathbf{u}^k] \geq \int_{\Omega_1} \varphi(\nabla_s \mathbf{u}^k) dz \geq c \left(\int_{\Omega_1} |\nabla_s \mathbf{u}^k|^2 - 1 \right) \quad (5.6)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_1^k}{\partial z_1} \right\|_{L^2(\Omega_1)} &\leq c'_h, \\ \left\| \frac{\partial u_2^k}{\partial z_2} \right\|_{L^2(\Omega_1)} &\leq c'_h, \\ \frac{1}{h^2} \left\| \frac{\partial u_3^k}{\partial z_3} \right\|_{L^2(\Omega_1)} &\leq c'_h. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Del Teorema 2.6.1 obtenemos

$$\begin{aligned}
\|u_1^k\|_{L^2(\Omega_1)} &\leq C \left\| \frac{\partial u_1^k}{\partial z_1} \right\|_{L^2(\Omega_1)} + C \int_{\partial\Omega} |u_1^k(z)|^2 dz, \\
\|u_2^k\|_{L^2(\Omega_1)} &\leq C \left\| \frac{\partial u_2^k}{\partial z_2} \right\|_{L^2(\Omega_1)} + C \int_{\partial\Omega} |u_2^k(z)|^2 dz, \\
\|u_3^k\|_{L^2(\Omega_1)} &\leq C \frac{1}{h^2} \left\| \frac{\partial u_3^k}{\partial z_3} \right\|_{L^2(\Omega_1)} + C \int_{\partial\Omega} |u_3^k(z)|^2 dz,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

y como $u^k|_{\partial\Omega} = Az$ tenemos que $\|\mathbf{u}^k\|_{L^2(\Omega_1)} \leq K$.

Con este resultado y por el Teorema 2.7.2 aplicado a cada derivada parcial de $u^k - \mathbf{A}^h z$ obtenemos que

$$\|\nabla \mathbf{u}^k\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C_h. \tag{5.9}$$

En consecuencia, por (5.6) y (5.8), la sucesión $\{\mathbf{u}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ está acotada en $H^2(\Omega_1)$, y en particular el funcional es coercivo.

Ahora veamos que (5.4) es débilmente semicontinuo inferiormente. Sea $\{\mathbf{u}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión débilmente convergente en $H^2(\Omega_1)$, es decir, existe $\bar{\mathbf{u}}$ tal que $\mathbf{u}^k \rightharpoonup \bar{\mathbf{u}}$ en $H^2(\Omega_1)$.

Para el primer término de (5.4), tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} |\nabla_p^2 \mathbf{u}^k|^2 dz &\geq \int_{\Omega_1} |\nabla_p^2 \mathbf{u}|^2 dz \\
&\quad + \int_{\Omega_1} 2\nabla_p^2 \mathbf{u} \cdot (\nabla_p^2 \mathbf{u}^k - \nabla_p^2 \mathbf{u}) dz.
\end{aligned}$$

Tomando el límite inferior en ambos lados de la desigualdad

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_1} |\nabla_p^2 \mathbf{u}^k|^2 dz \geq \int_{\Omega_1} |\nabla_p^2 \mathbf{u}|^2 dz.$$

Aplicamos un proceso análogo al segundo y tercer término de (5.4). Por el Teorema de Rellich (Teorema 2.6.2)

$$\mathbf{u}^k \rightarrow \bar{\mathbf{u}} \text{ en } H^1(\Omega_1),$$

y dado que φ es continua obtenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_1} \varphi(\nabla_s \mathbf{u}^k) dz = \int_{\Omega_1} \varphi(\nabla_s \mathbf{u}) dz.$$

En consecuencia (5.4) es débilmente semicontinuo inferiormente en $H^2(\Omega_1)$.

Por lo tanto del Teorema 3.1.1 implica que existe al menos una función $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{A}$ que minimiza (5.4). □

Compacidad para sucesiones de energía acotada.

Lema 5.2.2. *Sea $\mathbf{u}^h \subset H^2(\Omega_1)$ una sucesión con energía acotada, es decir, para toda h*

$$E^h[\mathbf{u}^h] \leq C,$$

para alguna constante $C \geq 0$. Entonces existen funciones $\mathbf{u} \in H^2(S \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ y $\mathbf{b} \in H^1(S \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ que sólo dependen de las variables z_1 y z_2 tales que

$$\begin{cases} \mathbf{u}^h \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ débilmente en } H^2(\Omega_1) \\ \frac{1}{h} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_3} \right) \rightarrow \mathbf{b} \text{ débilmente en } H^1(\Omega_1) \end{cases} \quad (5.10)$$

Observación. Debido al Teorema de Rellich (Teorema 2.6.2), para toda sucesión \mathbf{u}^h que converja a (\mathbf{u}, \mathbf{b}) como en (5.10) se tiene que

$$\begin{cases} \mathbf{u}^h \rightarrow \mathbf{u} \text{ en } H^1(\Omega_1) \\ \frac{1}{h} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_3} \right) \rightarrow \mathbf{b} \text{ en } L^2(\Omega_1). \end{cases}$$

Demostración (Lema 4.2.2). Como $E^h[\mathbf{u}^h] \leq C$ podemos ver que

$$\|\nabla_p^2 \mathbf{u}^h\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C, \quad \left\| \frac{1}{h} \nabla_p \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_3} \right\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C, \quad \left\| \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z_3^2} \right\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C. \quad (5.11)$$

Análogamente a (5.8) para \mathbf{u}^h , obtenemos

$$\|\mathbf{u}^h\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C. \quad (5.12)$$

Ahora para toda $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_i} \right\|_{L^2(\Omega_1)} &= \left\| \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\mathbf{u}^h - \mathbf{A}^h z + \mathbf{A}^h z \right) \right\|_{L^2(\Omega_1)} \\ &\leq \left\| \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\mathbf{u}^h - \mathbf{A}^h z \right) \right\|_{L^2(\Omega_1)} + \left\| \frac{\partial \mathbf{A}^h z}{\partial z_i} \right\|_{L^2(\Omega_1)}. \end{aligned}$$

Aplicamos el Teorema 2.7.2

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\mathbf{u}^h - \mathbf{A}^h z \right) \right\|_{L^2(\Omega_1)} &\leq \left\| \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \left(\mathbf{u}^h - \mathbf{A}^h z \right) \right\|_{L^2(\Omega_1)}^{\frac{1}{2}} \left\| \mathbf{u}^h - \mathbf{A}^h z \right\|_{L^2(\Omega_1)}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C, \end{aligned}$$

entonces para toda $i = 1, 2, 3$

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_i} \right\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C.$$

Por lo tanto,

$$\|\nabla \mathbf{u}^h\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C. \quad (5.13)$$

De (5.11), (5.12), (5.13) obtenemos que

$$\|\mathbf{u}^h\|_{H^2(\Omega_1)} \leq C,$$

por el Teorema 2.6.1 existe una subsucesión de \mathbf{u}^h , que denotaremos igualmente \mathbf{u}^h y una función $\mathbf{u} \in H^2(\Omega_1)$ tal que

$$\mathbf{u}^h \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ en } H^2(\Omega_1)$$

Además,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_1^h}{\partial z_3} \right\|_{L^2(\Omega_1)} &= \left\| \frac{\partial}{\partial z_3} (u_1^h - ha_{13}z_3 + ha_{13}z_3) \right\|_{L^2(\Omega_1)} \\ &\leq \left\| \frac{\partial}{\partial z_3} (u_1^h - ha_{13}z_3) \right\|_{L^2(\Omega_1)} + \left\| \frac{\partial (ha_{13}z_3)}{\partial z_3} \right\|_{L^2(\Omega_1)}. \end{aligned}$$

Del Teorema 2.7.2 obtenemos

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\partial}{\partial z_3} (u_1^h - ha_{13}z_3) \right\|_{L^2(\Omega_1)} \\ &\leq \left\| \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} (u_1^h - ha_{13}z_3) \right\|_{L^2(\Omega_1)}^{\frac{1}{2}} \|u_1^h - ha_{13}z_3\|_{L^2(\Omega_1)}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\| \frac{\partial^2 u_1^h}{\partial z_3^2} \right\|_{L^2(\Omega_1)}^{\frac{1}{2}} \|u_1^h - ha_{13}z_3\|_{L^2(\Omega_1)}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (Ch)C. \end{aligned}$$

Por lo que,

$$\left\| \frac{\partial u_1^h}{\partial z_3} \right\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C^2h + Ch.$$

Análogamente para $\frac{\partial u_2^h}{\partial z_3}$ y $\frac{\partial u_3^h}{\partial z_3}$. En consecuencia,

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_3} \right\|_{L^2(\Omega_1)} \leq Ch. \quad (5.14)$$

De (5.14) y ya que $\mathbf{u}^h \rightarrow \mathbf{u}$ en $H^1(\Omega_1)$, obtenemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_3} \right\|_{L^2(\Omega_1)} = 0.$$

Por lo que \mathbf{u} no depende de la variable z_3 .

Ahora,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \left(\frac{\partial u_1^h}{\partial z_3} \right) \right\|_{L^2(\Omega_1)} &= \left\| \frac{1}{h} \left(\frac{\partial}{\partial z_3} (u_1^h - ha_{13}z_3 + ha_{13}z_3) \right) \right\|_{L^2(\Omega_1)} \\ &\leq \left\| \frac{1}{h} \left(\frac{\partial}{\partial z_3} (u_1^h - ha_{13}z_3) \right) \right\|_{L^2(\Omega_1)} + \left\| \frac{\partial (a_{13}z_3)}{\partial z_3} \right\|_{L^2(\Omega_1)}. \end{aligned}$$

Del Teorema 2.7.2 obtenemos

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{h} \left(\frac{\partial}{\partial z_3} (u_1^h - ha_{13}z_3) \right) \right\|_{L^2(\Omega_1)} \\
& \leq \left\| \frac{1}{h} \left(\frac{\partial^2}{\partial z_3^2} (u_1^h - ha_{13}z_3) \right) \right\|_{L^2(\Omega_1)}^{\frac{1}{2}} \|u_1^h - ha_{13}z_3\|_{L^2(\Omega_1)}^{\frac{1}{2}} \\
& = \left\| \frac{1}{h} \left(\frac{\partial^2 u_1^h}{\partial z_3^2} \right) \right\|_{L^2(\Omega_1)}^{\frac{1}{2}} \|u_1^h - ha_{13}z_3\|_{L^2(\Omega_1)}^{\frac{1}{2}} \\
& \leq Ch^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\left\| \frac{1}{h} \left(\frac{\partial u_1^h}{\partial z_3} \right) \right\|_{L^2(\Omega_1)} \leq Ch^{\frac{1}{2}} + C.$$

Análogamente para $\frac{1}{h} \left(\frac{\partial u_2^h}{\partial z_3} \right)$ y $\frac{1}{h} \left(\frac{\partial u_3^h}{\partial z_3} \right)$. En consecuencia,

$$\left\| \frac{1}{h} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_3} \right) \right\|_{L^2(\Omega_1)} \leq Ch^{\frac{1}{2}} + C. \quad (5.15)$$

De la tercera desigualdad de (5.11) y de (5.15) obtenemos que

$$\left\| \frac{1}{h} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_3} \right) \right\|_{H^1(\Omega_1)} \leq C,$$

por el Teorema 2.6.1 existe una subsucesión de $\frac{1}{h} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_3} \right)$, que denotaremos igualmente $\frac{1}{h} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_3} \right)$ y una función $\mathbf{b} \in H^1(\Omega_1)$ tal que

$$\frac{1}{h} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_3} \right) \rightharpoonup \mathbf{b} \text{ en } H^1(\Omega_1).$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial}{\partial z_3} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_3} \right) = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}^h}{\partial z_3^2} \right),$$

y usando de la tercera desigualdad de (5.11) tenemos que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial z_3} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_3} \right) \right\|_{L^2(\Omega_1)} \leq Ch,$$

de manera que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial}{\partial z_3} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_3} \right) \right\|_{L^2(\Omega_1)} = 0.$$

Por lo tanto, \mathbf{b} no depende de la variable z_3 . □

Observación. Como $\mathbf{u} \in H^2(S \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ y $\mathbf{b} \in H^1(S \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ no dependen de la variable z_3 , escribiremos indistintamente que $\mathbf{u} \in H^2(S)$ y que $\mathbf{b} \in H^1(S)$.

Cálculo del Γ -límite para la película delgada.

Teorema 5.2.3. *Sea $E^h : H^2(\Omega_1) \rightarrow \mathbb{R}$ como en (5.4) entonces*

$$\Gamma - \lim_{h \rightarrow 0} E^h[\mathbf{u}] = E^0[\mathbf{u}, \mathbf{b}]$$

con respecto a la convergencia dada por

$$\begin{cases} \mathbf{u}^h \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ débilmente en } H^2(\Omega_1) \\ \frac{1}{h} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_3} \right) \rightharpoonup \mathbf{b} \text{ débilmente en } H^1(\Omega_1) \end{cases} \quad (5.16)$$

con $\mathbf{u} = \mathbf{u}(z_1, z_2)$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(z_1, z_2)$ y donde

$$E^0[\mathbf{u}, \mathbf{b}] : H^2(S) \times H^1(S) \rightarrow \mathbb{R},$$

está dada por

$$E^0[\mathbf{u}, \mathbf{b}] = \int_S \left\{ \kappa \left[|\nabla_p^2 \mathbf{u}|^2 + |\nabla_p \mathbf{b}|^2 \right] + \varphi((\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b})) \right\} dz_1 dz_2 \quad (5.17)$$

con

$$(\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}) & e_{12}(\mathbf{u}) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial z_1} + b_1 \right) \\ e_{21}(\mathbf{u}) & e_{22}(\mathbf{u}) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial z_2} + b_2 \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial z_1} + b_1 \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial z_2} + b_2 \right) & b_3 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Por el lema 5.2.2 basta con estudiar sucesiones \mathbf{u}^h que convergen como en (5.10) a algún (\mathbf{u}, \mathbf{b}) en $H^2(S) \times H^1(S)$. Primero veamos que en este caso,

$$E^0[\mathbf{u}, \mathbf{b}] \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} E^h[\mathbf{u}^h].$$

En efecto, sean \mathbf{E}_p^h y $\mathbf{E}_{z_3}^h$ tal que

$$\begin{cases} \nabla_p^2 \mathbf{u}^h = \nabla_p^2 \mathbf{u} + \mathbf{E}_p^h, & \mathbf{E}_p^h \rightharpoonup 0 \text{ en } L^2(\Omega_1) \\ \frac{1}{h} \nabla_p \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_3} = \nabla_p \mathbf{b} + \mathbf{E}_{z_3}^h, & \mathbf{E}_{z_3}^h \rightharpoonup 0 \text{ en } L^2(\Omega_1) \end{cases}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
E^h[\mathbf{u}^h] &= \int_{\Omega_1} \left\{ \kappa \left[\left| \nabla_p^2 \mathbf{u} + \mathbf{E}_p^h \right|^2 + \left| \nabla_p \mathbf{b} + \mathbf{E}_{z_3}^h \right|^2 + \frac{1}{h^4} \left| \frac{\partial^2 \mathbf{u}^h}{z_3} \right|^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \varphi(\nabla_s \mathbf{u}^h) \right\} dz \\
&= \int_{\Omega_1} \left\{ \kappa \left[\left| \nabla_p^2 \mathbf{u} \right|^2 + 2 \nabla_p \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}_p^h + \left| \mathbf{E}_p^h \right|^2 + \left| \nabla_p^2 \mathbf{b} \right|^2 + \left| \mathbf{E}_{z_3}^h \right|^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \nabla_p \mathbf{b} \cdot \mathbf{E}_{z_3}^h + \frac{1}{h^4} \left| \frac{\partial^2 \mathbf{u}^h}{z_3} \right|^2 \right] + \varphi(\nabla_s \mathbf{u}^h) \right\} dz \\
&\geq \int_{\Omega_1} \left\{ \kappa \left[\left| \nabla_p^2 \mathbf{u} \right|^2 + 2 \nabla_p \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}_p^h + \left| \nabla_p^2 \mathbf{b} \right|^2 + 2 \nabla_p \mathbf{b} \cdot \mathbf{E}_{z_3}^h \right] \right. \\
&\quad \left. + \varphi(\nabla_s \mathbf{u}^h) \right\} dz.
\end{aligned}$$

Tomamos el límite inferior de ambos lados y obtenemos

$$\begin{aligned}
\liminf_{h \rightarrow 0} E^h[\mathbf{u}^h] &\geq E^0[\mathbf{u}, \mathbf{b}] + \liminf_{h \rightarrow 0} \left(2 \nabla_p \mathbf{b} \cdot \mathbf{E}_{z_3}^h \right) \\
&\quad + \liminf_{h \rightarrow 0} \left(2 \nabla_p \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}_p^h \right).
\end{aligned}$$

Por definición $\mathbf{E}_{z_3}^h$ y \mathbf{E}_p^h convergen débilmente a cero en $L^2(\Omega_1)$, entonces

$$\liminf_{h \rightarrow 0} E^h[\mathbf{u}^h] \geq E^0[\mathbf{u}, \mathbf{b}].$$

Ahora veamos que para toda $(\mathbf{u}, \mathbf{b}) \in H^2(S) \times H^1(S)$, existe una sucesión $\mathbf{u}^h \in H^2(\Omega_1)$ tal que \mathbf{u}^h converge como en (5.10) y

$$E^0[\mathbf{u}, \mathbf{b}] = \lim_{h \rightarrow 0} E^h[\mathbf{u}^h].$$

Sea $\mathbf{b}_h \in C_c^\infty(\Omega_1)$ una regularización de \mathbf{b} , es decir, $\mathbf{b}_h \rightarrow \mathbf{b}$ en $H^1(\Omega_1)$. Tomemos la sucesión $\mathbf{u}^h(z) = \mathbf{u}(z) + h \mathbf{b}_h z_3$, entonces

$$\begin{aligned}
&\| \mathbf{u}^h - \mathbf{u} \|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_i} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z_i} \right\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \sum_{i,j=1}^3 \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{u}^h}{\partial z_i \partial z_j} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z_i \partial z_j} \right\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \\
&= h^2 \left\| \mathbf{b}^h z_3 \right\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + h^2 \sum_{i=1}^2 \left\| z_3 \frac{\partial \mathbf{b}^h}{\partial z_i} \right\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + h^2 \left\| \mathbf{b}^h \right\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \\
&\quad + h^2 \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \mathbf{b}^h}{\partial z_i} \right\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + h^2 \left\| \frac{\partial^2 z_3 \mathbf{b}^h}{\partial z_i \partial z_j} \right\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + h^2 \left\| \frac{\partial z_3 \mathbf{b}^h}{\partial z_i} \right\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \\
&\leq Ch^2.
\end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $h \rightarrow 0$ concluimos que

$$\mathbf{u}^h \rightarrow \mathbf{u} \text{ en } H^2(\Omega_1). \quad (5.18)$$

Además,

$$\left\| \frac{1}{h} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_3} \right) - \mathbf{b} \right\|_{H^1(\Omega_1)}^2 = \|\mathbf{b}_h - \mathbf{b}\|_{H^1(\Omega_1)}.$$

Tomando el límite cuando $h \rightarrow 0$ concluimos que

$$\frac{1}{h} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_3} \right) \rightarrow \mathbf{b} \text{ en } H^1(\Omega_1). \quad (5.19)$$

Ahora, comparemos $E^h[\mathbf{u}^h]$ y $E^0[\mathbf{u}, \mathbf{b}]$.

$$\begin{aligned} |E^h[\mathbf{u}^h] - E^0[\mathbf{u}, \mathbf{b}]| &= \left| \int_{\Omega_1} \kappa \left[|\nabla_p^2 \mathbf{u} + h \nabla_p^2 \mathbf{b}_h z_3|^2 - |\nabla_p^2 \mathbf{u}|^2 \right] dz \right. \\ &+ \int_{\Omega_1} \kappa \left[|\nabla_p \mathbf{b}_h|^2 - |\nabla_p \mathbf{b}|^2 \right] dz + \int_{\Omega_1} \left\{ \varphi(\nabla_s \mathbf{u}^h) - \varphi((\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b})) \right\} dz \left. \right| \\ &\leq h \int_{\Omega_1} \kappa \left[2 |\nabla_p^2 \mathbf{b}_h z_3 \cdot \nabla_p^2 \mathbf{u}| + h |\nabla_p^2 \mathbf{b}_h z_3|^2 \right] dz \\ &+ \int_{\Omega_1} \kappa \left| |\nabla_p \mathbf{b}_h|^2 - |\nabla_p \mathbf{b}|^2 \right| dz + \int_{\Omega_1} |\varphi(\nabla_s \mathbf{u}^h) - \varphi((\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b}))| dz. \end{aligned}$$

Aplicamos la desigualdad de Hölder al primer término de la primera integral del lado derecho y desarrollamos la resta de cuadrados de la tercera integral, para obtener

$$\begin{aligned} |E^h[\mathbf{u}^h] - E^0[\mathbf{u}, \mathbf{b}]| &\leq 2h\kappa \|\nabla_p^2 \mathbf{b}_h z_3\|_{L^2(\Omega_1)} \|\nabla_p^2 \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_1)} \\ &+ h^2 \kappa \int_{\Omega_1} |\nabla_p \mathbf{b}_h z_3|^2 dz + \int_{\Omega_1} \kappa |(\nabla_p \mathbf{b}_h - \nabla_p \mathbf{b}) \cdot (\nabla_p \mathbf{b}_h + \nabla_p \mathbf{b})| dz \\ &+ \int_{\Omega_1} |\varphi(\nabla_s \mathbf{u}^h) - \varphi((\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b}))| dz \\ &\leq 2h\kappa \|\nabla_p^2 \mathbf{b}_h z_3\|_{L^2(\Omega_1)} \|\nabla_p^2 \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_1)} \\ &+ h^2 \kappa \|\nabla_p \mathbf{b}_h z_3\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \kappa \|\nabla_p \mathbf{b}_h - \nabla_p \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla_p \mathbf{b}_h + \nabla_p \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega_1)} \\ &+ \int_{\Omega_1} |\varphi(\nabla_s \mathbf{u}^h) - \varphi((\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b}))| dz. \end{aligned}$$

La última desigualdad la obtuvimos al aplicar la desigualdad de Hölder al tercer sumando del lado derecho.

Ahora, del Teorema 2.2.1 del Capítulo 2

$$\|\nabla_p \mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \|\nabla_p \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega_1)},$$

en consecuencia

$$\|\nabla_p \mathbf{b}_h + \nabla_p \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \|\nabla_p \mathbf{b}_h\|_{L^2(\Omega_1)} + \|\nabla_p \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega_1)} \leq 2 \|\nabla_p \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega_1)},$$

por lo que obtenemos

$$\begin{aligned} |E^h[\mathbf{u}^h] - E^0[\mathbf{u}, \mathbf{b}]| &\leq 4h\kappa \|\nabla_p^2 \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_1)} \|\nabla_p^2 \mathbf{b} z_3\|_{L^2(\Omega_1)} \\ &+ h^2 \kappa \|\nabla_p \mathbf{b} z_3\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \kappa \|\nabla_p \mathbf{b}_h - \nabla_p \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)} \left(2 \|\nabla_p \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega_1)}\right) \\ &+ \int_{\Omega_1} |\varphi(\nabla_s \mathbf{u}^h) - \varphi((\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b}))| dz. \end{aligned}$$

Por (5.18) y (5.19) tenemos que

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_i} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z_i} & \text{en } L^2(\Omega_1) \text{ para toda } i, \\ \frac{1}{h} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_3} \right) \rightarrow \mathbf{b} & \text{en } H^1(\Omega_1). \end{cases}$$

Entonces, debido a que φ es continua y como $\mathbf{b}_h \rightarrow \mathbf{b}$ en $H^2(\Omega_1)$ concluimos que

$$|E^h[\mathbf{u}^h] - E^0[\mathbf{u}, \mathbf{b}]| \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0,$$

que es lo que se quería demostrar. \square

Por el Lema 5.2.2, tenemos el siguiente corolario como consecuencia del teorema anterior, debido al Corolario 3.2.2.

Corolario 5.2.4. *Sea $\{\mathbf{u}^h\} \subset H^2(\Omega_1)$ una sucesión tal que para cada h , $\mathbf{u}^h \in \mathcal{A}$ minimiza a $E^h[\mathbf{u}^h]$. Entonces, existe*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{b}) \in H^2(S) \times H^1(S)$$

que cumple las condiciones de frontera

$$\begin{cases} \mathbf{u}(z_1, z_2) = \mathbf{a}_1 z_1 + \mathbf{a}_2 z_2 \\ \mathbf{b}(z_1, z_2) = \mathbf{a}_3 \end{cases} \quad (z_1, z_2) \in \partial S$$

y que minimiza a $E^0[\mathbf{u}, \mathbf{b}]$ dado por (5.17).

Demostración. Como $\mathbf{u}^h \in \mathcal{A}$ minimiza a (5.4) para cada h , entonces

$$E^h[\mathbf{u}^h] \leq E^h[\mathbf{A}^h z] = |\Omega_1| C.$$

Por lo tanto, usando el Lema 5.2.2 tenemos que existen funciones $\mathbf{u} \in H^2(\Omega_1)$ y $\mathbf{b} \in H^1(\Omega_1)$ que satisfacen (5.10)

Por otro lado, las condiciones de frontera que satisface \mathbf{u}^h están dadas por

$$T\mathbf{u}^h = \mathbf{A}^h z = \mathbf{a}_1 z_1 + \mathbf{a}_2 z_2 + h \mathbf{a}_3 z_3 = \begin{pmatrix} a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + h a_{13} z_3 \\ a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + h a_{23} z_3 \\ a_{31} z_1 + a_{32} z_2 + h a_{33} z_3 \end{pmatrix}.$$

Como la traza T es continua, entonces

$$T\mathbf{u} = T(\lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{u}^h) = \lim_{h \rightarrow 0} T\mathbf{u}^h = \begin{pmatrix} a_{11} z_1 + a_{12} z_2 \\ a_{21} z_1 + a_{22} z_2 \\ a_{31} z_1 + a_{32} z_2 \end{pmatrix}.$$

De igual manera para \mathbf{b} ,

$$T \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_3} \right) = \mathbf{a}_3,$$

y como la traza T es continua, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} T \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial z_3} \right) = \mathbf{a}_3 = T \mathbf{b}.$$

□

CAPÍTULO 6

Microestructuras en películas delgadas

En este capítulo estudiaremos las sucesiones minimizantes asociadas al modelo de película delgada derivado en el capítulo anterior. En nuestro análisis asumiremos que la energía de superficie es despreciable.

Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto acotado con frontera Lipschitz y $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(S)$. Consideremos el funcional de energía introducido en el capítulo anterior,

$$E^0[\mathbf{u}, \mathbf{b}] = \int_S \left\{ \kappa \left[|\nabla_p^2 \mathbf{u}|^2 + |\nabla_p \mathbf{b}|^2 \right] + \varphi((\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b})) \right\} dz_1 dz_2.$$

Este funcional es convexo debido a los términos de orden superior que componen la energía de superficie. Para recuperar la no convexidad y las microestructuras eliminamos la parte de energía superficial de $E^0[\mathbf{u}, \mathbf{b}]$. En términos de los parámetros esto equivale a asumir que

$$\kappa = 0,$$

entonces, el funcional de energía que nos queda es

$$\int_S \varphi((\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b})) dz_1 dz_2. \quad (6.1)$$

Al eliminar la energía superficial, el problema se hace no convexo y por lo tanto no necesariamente se alcanza el mínimo.

A continuación, para fijar ideas, trataremos la forma más simple de energía cuadrática con tres pozos,

$$U_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

es decir, cuando

$$\varphi((\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b})) = \min \left\{ |(\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b}) - U_1|^2, |(\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b}) - U_2|^2, |(\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b}) - U_3|^2 \right\}.$$

Sin embargo, cabe mencionar que los resultados serán válidos para cualquier φ que se anule en $\{U_1, U_2, U_3\}$.

Recordemos que

$$(\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}) & e_{12}(\mathbf{u}) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial z_1} + b_1 \right) \\ e_{21}(\mathbf{u}) & e_{22}(\mathbf{u}) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial z_2} + b_2 \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial z_1} + b_1 \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial z_2} + b_2 \right) & b_3 \end{pmatrix}.$$

En este capítulo, abusando de la notación, usaremos el símbolo $\nabla_s \mathbf{u}$ para denotar la matriz de 2×2 ,

$$\nabla_s \mathbf{u} = \begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}) & e_{12}(\mathbf{u}) \\ e_{21}(\mathbf{u}) & e_{22}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

y

$$U'_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad U'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El estudio de los mínimos del funcional de energía lo dividiremos en dos pasos: Primero, identificaremos los estados donde se anula la energía para condiciones de frontera libres, es decir, para las funciones $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(S)$ tales que

$$\int_S \varphi((\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b})) dz_1 dz_2 = 0.$$

Segundo, encontraremos sucesiones minimizantes de

$$\int_S \varphi((\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b})) dz_1 dz_2,$$

en $W^{1,\infty}(S)$ que cumplan ciertas condiciones de frontera, y las medidas de Young que generan las sucesiones minimizantes.

6.1. Estados de energía nula

Lema 6.1.1. *Sea $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(S)$, entonces $\nabla_s \mathbf{u}$ satisface que*

$$\frac{\partial^2 e_{11}(\mathbf{u})}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}(\mathbf{u})}{\partial z_1^2} - 2 \frac{\partial^2 e_{12}(\mathbf{u})}{\partial z_1 \partial z_2} = 0$$

en el sentido de las distribuciones, es decir,

$$\int_S \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_2^2} e_{11}(\mathbf{u}) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} e_{22}(\mathbf{u}) - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1 \partial z_2} e_{12}(\mathbf{u}) \right\} dz_1 dz_2 = 0,$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(S)$.

Demostración. 1. Supongamos que $\nabla_s \mathbf{u}$ es suave, entonces como

$$e_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right),$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 e_{11}(\mathbf{u})}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}(\mathbf{u})}{\partial z_1^2} - 2 \frac{\partial^2 e_{12}(\mathbf{u})}{\partial z_1 \partial z_2} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z_2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z_1} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_2} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Supongamos que $\nabla_s \mathbf{u} \in L^2(S)$ y que η_ϵ es un regularizador estándar. Tomemos $e_{ij}^\epsilon(\mathbf{u}) = \eta_\epsilon * e_{ij}(\mathbf{u}) \in C^\infty(S)$ la regularización de $e_{ij}(\mathbf{u})$ en $L_{loc}^2(S)$, entonces, para toda $\varphi \in C_c^\infty(S)$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S \varphi \left(\frac{\partial^2 e_{11}^\epsilon(\mathbf{u})}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}^\epsilon(\mathbf{u})}{\partial z_1^2} - 2 \frac{\partial^2 e_{12}^\epsilon(\mathbf{u})}{\partial z_1 \partial z_2} \right) dz_1 dz_2 \\ &= \int_S \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_2^2} e_{11}^\epsilon(\mathbf{u}) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} e_{22}^\epsilon(\mathbf{u}) - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1 \partial z_2} e_{12}^\epsilon(\mathbf{u}) \right\} dz_1 dz_2 \\ &= \int_S \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_2^2} \eta_\epsilon * e_{11}(\mathbf{u}) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} \eta_\epsilon * e_{22}(\mathbf{u}) - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1 \partial z_2} \eta_\epsilon * e_{12}(\mathbf{u}) \right\} dz_1 dz_2 \\ &= \int_S \left\{ \eta_\epsilon * \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_2^2} e_{11}(\mathbf{u}) + \eta_\epsilon * \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} e_{22}(\mathbf{u}) - 2 \eta_\epsilon * \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1 \partial z_2} e_{12}(\mathbf{u}) \right\} dz_1 dz_2 \\ &= \int_S \left\{ \frac{\partial^2 \eta_\epsilon * \varphi}{\partial z_2^2} e_{11}(\mathbf{u}) + \frac{\partial^2 \eta_\epsilon * \varphi}{\partial z_1^2} e_{22}(\mathbf{u}) - 2 \frac{\partial^2 \eta_\epsilon * \varphi}{\partial z_1 \partial z_2} e_{12}(\mathbf{u}) \right\} dz_1 dz_2. \end{aligned}$$

Sea $\bar{\varphi} = \eta_\epsilon * \varphi$, entonces

$$\frac{\partial^2 e_{11}(\mathbf{u})}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}(\mathbf{u})}{\partial z_1^2} - 2 \frac{\partial^2 e_{12}(\mathbf{u})}{\partial z_1 \partial z_2} = 0$$

en el sentido de las distribuciones.

3. Como $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(S)$, entonces $\nabla_s \mathbf{u} \in L^\infty(S)$ y ya que S es acotado $\nabla_s \mathbf{u} \in L^2(S)$. Por el punto anterior, se tiene el resultado. \square

Proposición 6.1.2. *Sea $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(S)$ tal que*

$$\int_S \varphi((\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b})) dz_1 dz_2 = 0,$$

y asumamos que $(\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b})$ toma a lo más dos valores del conjunto $\{U_1, U_2, U_3\}$, entonces $(\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b})$ es una función de una variable.

Observación. El caso en que $(\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b})$ puede tomar los tres valores $\{U_1, U_2, U_3\}$ es un problema abierto, y más allá del alcance de esta tesis.

Demostración. Sea $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(S)$ tal que

$$\int_S \varphi((\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b})) dz_1 dz_2 = 0.$$

1. Si $(\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b}) = \text{cte.}$, no hay nada que demostrar.

2. Si $(\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b}) \in \{U_1, U_3\}$, entonces recordando que

$$(\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}) & e_{12}(\mathbf{u}) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial z_1} + b_1 \right) \\ e_{21}(\mathbf{u}) & e_{22}(\mathbf{u}) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial z_2} + b_2 \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial z_1} + b_1 \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial z_2} + b_2 \right) & b_3 \end{pmatrix}.$$

obtenemos

$$\frac{\partial u_3}{\partial z_1} = -b_1, \quad \frac{\partial u_3}{\partial z_2} = -b_2 \quad b_3 \in \{1, -2\};$$

y

$$\begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}) & e_{12}(\mathbf{u}) \\ e_{21}(\mathbf{u}) & e_{22}(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (6.2)$$

Por lo que,

$$e_{22}(\mathbf{u}) = 1 \text{ y } e_{12}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{casi para todo punto,}$$

usando el Lema 6.1.1 tenemos que

$$\frac{\partial^2 e_{11}(\mathbf{u})}{\partial z_2^2} = 0,$$

en el sentido de las distribuciones, es decir,

$$\int_S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_2^2} e_{11}(\mathbf{u}) dz_1 dz_2 = 0$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(S)$. Sea $\varphi = \eta_\epsilon * \chi$, con $\chi \in C_c^\infty(S)$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S \frac{\partial^2 \eta_\epsilon * \chi}{\partial z_2^2} e_{11}(\mathbf{u}) dz_1 dz_2 \\ &= \int_S \eta_\epsilon * \frac{\partial^2 \chi}{\partial z_2^2} e_{11}(\mathbf{u}) dz_1 dz_2 \\ &= \int_S \frac{\partial^2 \chi}{\partial z_2^2} \eta_\epsilon * e_{11}(\mathbf{u}) dz_1 dz_2 \\ &= \int_S \chi \frac{\partial^2 e_{11}^\epsilon(\mathbf{u})}{\partial z_2^2} dz_1 dz_2. \end{aligned}$$

Por lo que,

$$\frac{\partial^2 e_{11}^\epsilon(\mathbf{u})}{\partial z_2^2} = 0,$$

en consecuencia, para toda $\epsilon > 0$

$$e_{11}^\epsilon(\mathbf{u})(z) = h^\epsilon(z_1)z_2 + f^\epsilon(z_1).$$

Como

$$e_{11}^\epsilon(\mathbf{u}) \rightarrow e_{11}(\mathbf{u}) \text{ en } L^2(S),$$

existe una subsucesión de $\{e_{11}^\epsilon(\mathbf{u})\}$, que nombraremos igualmente $\{e_{11}^\epsilon(\mathbf{u})\}$, que converge puntualmente a $e_{11}(\mathbf{u})$. Por lo que

$$e_{11}(\mathbf{u})(z) = h(z_1)z_2 + f(z_1) \text{ casi para todo } z = (z_1, z_2) \in S.$$

Supongamos que $h \neq 0$, y fijemos z_1 tal que $h(z_1) \neq 0$. Sean z_2, z_2' tales que

$$\frac{3}{|h(z_1)|} + z_2' < z_2,$$

entonces,

$$|h(z_1)z_2' + f(z_1) - (h(z_1)z_2 + f(z_1))| = |h(z_1)(z_2 - z_2')| > 3.$$

Lo cual no puede suceder pues $e_{11}(\mathbf{u}) \in \{-2, 1\}$. Por lo tanto,

$$e_{11}(\mathbf{u})(z) = f(z_1) \quad \text{casi para toda } z \in S.$$

En este caso, los mínimos de energía se ven como en la Figura 6.1.

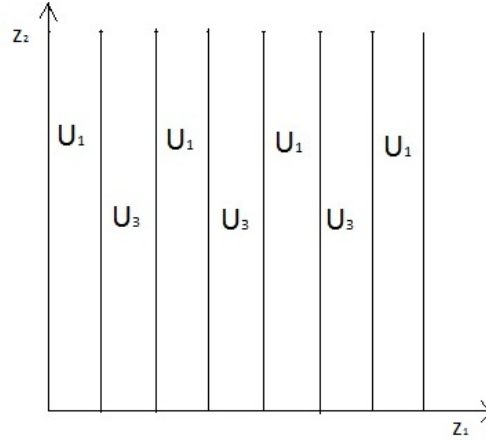


Figura 6.1: Distribución de $(\nabla_s \mathbf{u}, b)$

Observación. Los valores de b_3 quedan determinados por $e_{11}(\mathbf{u})$ de manera única.

3. Si $(\nabla_s \mathbf{u}, b) \in \{U_2, U_3\}$, entonces

$$\frac{\partial u_3}{\partial z_1} = -b_1, \quad \frac{\partial u_3}{\partial z_2} = -b_2 \quad b_3 \in \{1, -2\};$$

y

$$\begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}) & e_{12}(\mathbf{u}) \\ e_{21}(\mathbf{u}) & e_{22}(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (6.3)$$

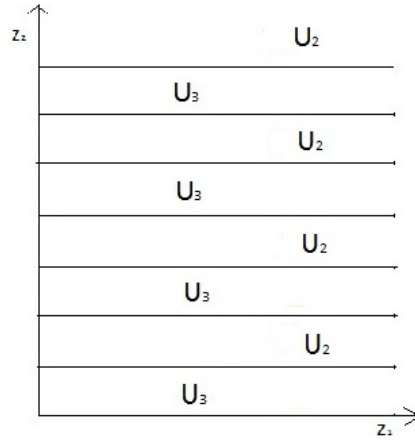
Argumentando análogamente al inciso anterior, obtenemos que

$$e_{11}(\mathbf{u}) = 1, \quad e_{12}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{casi para todo punto}$$

y

$$e_{22}(\mathbf{u})(z) = f(z_2) \quad \text{casi para toda } z \in S.$$

En este caso, los mínimos de energía se ven como en la Figura 6.2.

Figura 6.2: Distribución de $(\nabla_s \mathbf{u}, b)$ 4. Si $(\nabla_s \mathbf{u}, b) \in \{U_1, U_2\}$, entonces

$$\frac{\partial u_3}{\partial z_1} = -b_1, \quad \frac{\partial u_3}{\partial z_2} = -b_2 \quad b_3 = 1;$$

y

$$\begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}) & e_{12}(\mathbf{u}) \\ e_{21}(\mathbf{u}) & e_{22}(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}. \quad (6.4)$$

Por lo que

$$e_{11}(\mathbf{u}) + e_{22}(\mathbf{u}) = -1 \quad \text{casi para todo punto,}$$

es decir,

$$e_{22}(\mathbf{u}) = -1 - e_{11}(\mathbf{u}) \quad \text{casi para todo punto.}$$

Usando el Lema 6.1.1 tenemos que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) e_{11}(\mathbf{u}) = 0$$

en el sentido de las distribuciones, es decir,

$$\int_S e_{11}(\mathbf{u}) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) \varphi \, dz_1 dz_2 = 0$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty$.

Sea $\varphi = \eta_\epsilon * \chi$, con $\chi \in C_c^\infty$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S e_{11}(\mathbf{u}) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) \eta_\epsilon * \chi dz_1 dz_2 \\ &= \int_S e_{11}(\mathbf{u}) \eta_\epsilon * \left(\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) \chi dz_1 dz_2 \\ &= \int_S e_{11}^\epsilon(\mathbf{u}) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) \chi dz_1 dz_2 \\ &= \int_S \chi \left(\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) e_{11}^\epsilon(\mathbf{u}) dz_1 dz_2 \text{ para toda } \chi \in C_c^\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) e_{11}^\epsilon(\mathbf{u}) = 0$$

por lo que

$$e_{11}^\epsilon(\mathbf{u})(z) = f^\epsilon(z_1 + z_2) + g^\epsilon(z_1 - z_2).$$

Ahora, queremos demostrar que existen funciones $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$e_{11}(\mathbf{u}) = f(z_1 + z_2) + g(z_1 - z_2).$$

En efecto, como

$$e_{11}^\epsilon(\mathbf{u}) \rightarrow e_{11}(\mathbf{u}) \text{ en } L^2(S),$$

existe una subsucesión de $\{e_{11}^\epsilon(\mathbf{u})\}$ que igualmente llamaremos $\{e_{11}^\epsilon(\mathbf{u})\}$, tal que

$$e_{11}^\epsilon(\mathbf{u})(z) \rightarrow e_{11}(\mathbf{u})(z) \text{ casi para todo } z \in S.$$

Abusando de la notación, escribimos

$$f^\epsilon(z) = f^\epsilon(z_1 + z_2),$$

y sea f el límite puntual de f^ϵ .

Si tomamos $z = (z_1, z_2)$ y $z' = (z'_1, z'_2) \in S$ tal que $z_1 + z_2 = z'_1 + z'_2$, entonces para toda $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z')| &= |f(z) - f^\epsilon(z) + f^\epsilon(z') - f(z')| \\ &\leq |f(z) - f^\epsilon(z)| + |f^\epsilon(z') - f(z')| \\ &\leq 2\delta \end{aligned}$$

siempre que $|z - z'| < \epsilon$ para ϵ suficientemente pequeño. En consecuencia,

$$f(z) = f(z_1 + z_2) \text{ para casi toda } z = (z_1, z_2) \in S.$$

Argumentando análogamente para $g^\epsilon(z) = g^\epsilon(z_1 - z_2)$ obtenemos que

$$g(z) = g(z_1 - z_2) \text{ para casi toda } z = (z_1, z_2) \in S.$$

Por unicidad del límite puntual, para casi toda $z \in S$

$$e_{11}(\mathbf{u})(z) = f(z_1 + z_2) + g(z_1 - z_2), \quad (6.5)$$

como se había afirmado.

Finalmente, como $e_{11}(\mathbf{u})$ sólo toma dos valores y tiene la forma (6.5), entonces

$$e_{11}(\mathbf{u})(z) = f(z_1 + z_2) \text{ ó } e_{11}(\mathbf{u})(z) = g(z_1 - z_2),$$

$$e_{22}(\mathbf{u})(z) = -1 - f(z_1 + z_2) \text{ ó } e_{22}(\mathbf{u})(z) = -1 - g(z_1 - z_2),$$

para casi toda $z \in S$.

En este caso, los mínimos de energía se ven como en la Figura 6.3.

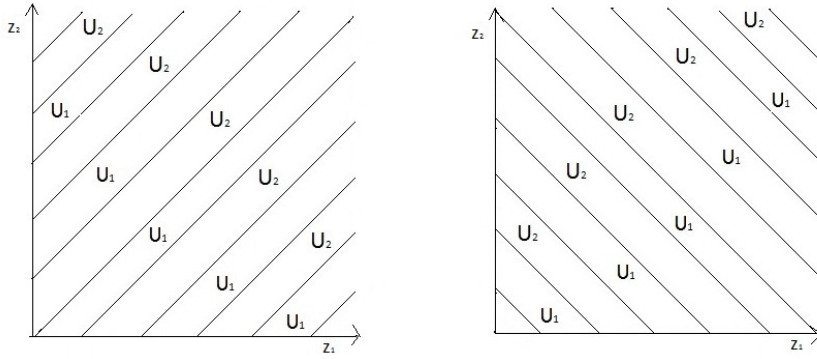


Figura 6.3: Distribución de $(\nabla_s \mathbf{u}, b)$

Esta última dicotomía se deduce trivialmente del siguiente ejemplo: Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por.

$$f(z_1 + z_2) = \begin{cases} -1 & \text{si } z_1 + z_2 < 0 \\ 1 & \text{si } z_1 + z_2 > 0 \end{cases}$$

$$g(z_1 - z_2) = \begin{cases} -1 & \text{si } z_1 - z_2 > 0 \\ 1 & \text{si } z_1 - z_2 < 0 \end{cases}$$

Entonces $f(z_1 + z_2) + g(z_1 - z_2)$ tendría la forma que se presenta en la Figura 6.4. por lo que $f + g$ no puede tomar sólo dos valores. \square

6.2. Sucesiones minimizantes

En esta sección construiremos sucesiones minimizantes de la energía

$$\int_S \varphi((\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b})) dz_1 dz_2,$$

y sus correspondientes medidas de Young. Como veremos, las condiciones de frontera determinarán las proporciones en que aparezcan los distintos estados.

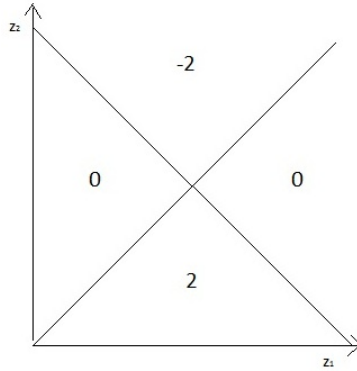


Figura 6.4: Ejemplo

Proposición 6.2.1. Sean $\{\mathbf{u}_k\} \in W^{1,\infty}(S)$ y $\{(\nabla_s \mathbf{u}_k, \mathbf{b}_k)\}$ una sucesión minimizante de

$$\int_S \varphi((\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b})) dz_1 dz_2$$

que satisface la siguiente condición de frontera

$$(\nabla_s \mathbf{u}_k, \mathbf{b}_k) = F_\lambda = \lambda U_i + (1 - \lambda) U_j, \text{ sobre } \partial\Omega.$$

con $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Entonces, la medida de Young generada por $\{\nabla_s \mathbf{u}_k\}$ es

$$\mu(z) = \lambda \delta_{U_i} + (1 - \lambda) \delta_{U_j}$$

donde $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Demostración. 1. Primero veamos que

$$\inf_{\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(S)} \int_S \varphi((\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b})) dz_1 dz_2 = 0.$$

Sea $\{\nabla_s \bar{\mathbf{u}}_k\}$ una sucesión tal que

$$(\nabla_s \bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{b}}_k) \in \{U_i, U_j\} \text{ con } i, j \in \{1, 2, 3\} \text{ fijos,}$$

para toda k .

Sea $a : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ dada por la extensión periódica de

$$a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \lambda) \\ 0 & \text{si } x \in [\lambda, 1) \end{cases}$$

y definimos

$$a_k(x) = a(kx).$$

De acuerdo con la proposición 6.1.2, podemos distinguir cuatro casos de laminados simples que parametrizaremos de la siguiente forma.

$$(\nabla_s \bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{b}}_k) = a_k(z_1) U_1 + (1 - a_k(z_1)) U_3,$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_s \bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{b}}_k) &= a_k(z_2)U_2 + (1 - a_k(z_2))U_3, \\
(\nabla_s \bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{b}}_k) &= a_k(z_1 + z_2)U_1 + (1 - a_k(z_1 + z_2))U_2, \\
(\nabla_s \bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{b}}_k) &= a_k(z_1 - z_2)U_1 + (1 - a_k(z_1 - z_2))U_2.
\end{aligned}$$

De manera que, si recordamos la forma específica de U_1, U_2 y U_3 , $\bar{\mathbf{u}}_k$ es de la forma

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \bar{u}_1^k \\ \bar{u}_2^k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2A_k(z_1) + [z_1 - A_k(z_1)] \\ z_2 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \bar{u}_1^k \\ \bar{u}_2^k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_1 \\ -2A_k(z_2) + [z_2 - A_k(z_2)] \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

donde definimos a $A_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$A_k(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \frac{\lambda}{k}), \\ \frac{\lambda}{k} & \text{si } x \in [\frac{\lambda}{k}, \frac{1}{k}), \\ x + \frac{n\lambda}{k} - \frac{n}{k} & \text{si } x \in [\frac{n}{k}, \frac{n}{k} + \frac{\lambda}{k}) \text{ para toda } n \in \mathbb{N}, \\ \frac{(n+1)\lambda}{k} & \text{si } x \in [\frac{n}{k} + \frac{\lambda}{k}, \frac{n+1}{k}) \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ó

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_1^k \\ \bar{u}_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2A_k(z_1, z_2) + [z_2 - A_k(z_1, z_2)] \\ A_k(z_2, z_1) - 2[z_2 - A_k(z_2, z_1)] \end{pmatrix}$$

donde definimos a $A_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$A_k(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \pm y \in [0, \frac{\lambda}{k}), \\ \frac{\lambda}{k} & \text{si } x \pm y \in [\frac{\lambda}{k}, \frac{1}{k}), \\ x + \frac{n\lambda}{k} - \frac{n}{k} & \text{si } x \pm y \in [\frac{n}{k}, \frac{n}{k} + \frac{\lambda}{k}) \text{ para toda } n \in \mathbb{N}, \\ \frac{(n+1)\lambda}{k} & \text{si } x \pm y \in [\frac{n}{k} + \frac{\lambda}{k}, \frac{n+1}{k}) \text{ para toda } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

El argumento siguiente es el mismo en los cuatro casos. Sean

$$U'_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad U'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

definimos F'_λ como

$$F'_\lambda = \lambda U'_i + (1 - \lambda)U'_j \quad \text{con } i, j \in \{1, 2, 3\}$$

Veamos que

$$\sup |\bar{\mathbf{u}}_k - F'_\lambda z| \leq \frac{c}{k}.$$

Por conveniencia tomemos el caso del laminado U_1, U_3 , para esto sea

$$F'_\lambda = \lambda U'_1 + (1 - \lambda)U'_3,$$

de manera que,

a) sea $z \in [0, \frac{\lambda}{k}) \times \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned}
|\bar{\mathbf{u}}_k - F'_\lambda z| &\leq \sup |u_1^k - F'_\lambda z_1| \\
&\leq \sup |-2z_1 - (-3\lambda + 1)z_1| \\
&= 3 \sup |-z_1 + \lambda z_1| \\
&= 3 |\lambda - 1| \sup |z_1| \leq 3(1 - \lambda) \frac{\lambda}{k}.
\end{aligned}$$

b) sea $z \in \left[\frac{\lambda}{k}, \frac{1}{k}\right) \times \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} |\bar{\mathbf{u}}_k - F'_\lambda z| &\leq \sup \left| \bar{u}_1^k - F'_\lambda z_1 \right| \\ &\leq \sup \left| \frac{-2}{k} + z_1 - \frac{\lambda}{k} - (-3\lambda + 1)z_1 \right| \\ &= 3 \sup \left| \lambda z_1 - \frac{\lambda}{k} \right| \\ &= 3\lambda \sup \left| z_1 - \frac{1}{k} \right| \leq 3(1 - \lambda) \frac{\lambda}{k}. \end{aligned}$$

c) sea $z \in \left[\frac{n}{k}, \frac{n}{k} + \frac{\lambda}{k}\right) \times \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} |\bar{\mathbf{u}}_k - F'_\lambda z| &\leq \sup \left| \bar{u}_1^k - F'_\lambda z_1 \right| \\ &\leq \sup \left| -2\left(z_1 + \frac{n\lambda}{k} - \frac{n}{k}\right) + z_1 - z_1 - \frac{n\lambda}{k} + \frac{n}{k} - (-3\lambda + 1)z_1 \right| \\ &= 3 \sup \left| -z_1 + \lambda z_1 + \frac{n}{k} - \frac{n\lambda}{k} \right| \\ &= 3 \sup \left| z_1(\lambda - 1) + \frac{n}{k}(1 - \lambda) \right| \\ &= 3 \sup \left| (\lambda - 1)\left(z_1 - \frac{n}{k}\right) \right| \\ &= 3(1 - \lambda) \sup \left| z_1 - \frac{n}{k} \right| \leq 3(1 - \lambda) \frac{\lambda}{k}. \end{aligned}$$

d) sea $z \in \left[\frac{n}{k} + \frac{\lambda}{k}, \frac{n+1}{k}\right) \times \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} |\bar{\mathbf{u}}_k - F'_\lambda z| &\leq \sup \left| \bar{u}_1^k - F'_\lambda z_1 \right| \\ &\leq \sup \left| -2\left(\frac{(n+1)\lambda}{k}\right) + z_1 - \frac{(n+1)\lambda}{k} - (-3\lambda + 1)z_1 \right| \\ &= 3 \sup \left| \lambda z_1 - \frac{(n+1)\lambda}{k} \right| \\ &= 3\lambda \sup \left| z_1 - \frac{n+1}{k} \right| \leq 3(1 - \lambda) \frac{\lambda}{k}. \end{aligned}$$

Sea $\beta > 0$, definimos el conjunto

$$S_k = \left\{ z \in S \text{ tales que } \text{dist}(z, \partial S) > \frac{\beta}{k} \right\}.$$

Sea ψ^k , para toda k , dada por,

$$\psi^k(z) = \begin{cases} 1 & \text{en } S_k \\ 0 & \text{fuera de } S \end{cases}$$

y

$$|\nabla \psi^k(z)| \leq \frac{2k}{\beta}.$$

Sea $\{\mathbf{u}_k\}$ una sucesión tal que

$$\mathbf{u}_k = \psi^k(z)(\bar{\mathbf{u}}_k) + (1 - \psi_k(z))F'_\lambda z,$$

entonces

$$\begin{aligned} |(\nabla_s \mathbf{u}_k, \mathbf{b}_k)| &\leq |\nabla \psi_k| |\bar{\mathbf{u}}_k - F'_\lambda z| + |1 - \psi_k| |F'_\lambda| + |\psi_k| |\nabla_s \bar{\mathbf{u}}_k| + |\mathbf{b}_k| \\ &\leq |\nabla \psi_k| |\bar{\mathbf{u}}_k - F'_\lambda z| + C \\ &\leq |\nabla \psi_k| M(\sup |\bar{\mathbf{u}}_k - F'_\lambda z|) + C \\ &\leq |\nabla \psi_k| \frac{c}{k} + C \\ &\leq \frac{2k}{\beta} \frac{c}{k} + C. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Por lo tanto

$$\int_S \varphi((\nabla_s \mathbf{u}^k, \mathbf{b})) dz_1 dz_2 = \int_{S-S_k} \varphi((\nabla_s \mathbf{u}_k, \mathbf{b}_k)) dz_1 dz_2 \leq C |S - S_k|,$$

que tiende a cero cuando k tiende a infinito.

2. Ahora determinemos la medida de Young.

De lo anterior tenemos que

$$\int_S 1 \varphi((\nabla_s \mathbf{u}_k, \mathbf{b}_k)) dz_1 dz_2 \rightarrow 0,$$

y del inciso *iii*) del Teorema 4.2.1 (Teorema Fundamental de las medidas de Young), tenemos que

$$f(\nabla_s \mathbf{u}^k, \mathbf{b}_k) \rightarrow \langle \mu_z, f \rangle \text{ en } L^1(S),$$

para toda f continua y positiva, en particular para φ , por lo tanto

$$\int_S 1 \varphi((\nabla_s \mathbf{u}^k, \mathbf{b}_k)) dz_1 dz_2 \rightarrow \int_S \int_{\mathbb{R}^9} \varphi(y) d\mu_z(y) dz_1 dz_2,$$

entonces, para casi toda $z \in S$

$$\int_{\mathbb{R}^9} \varphi(y) d\mu_z(y) = 0.$$

Por lo que, el soporte de $d\mu_z$ está contenido en el conjunto de ceros de φ , es decir, en

$$\{U_i, U_j\} \text{ con } i, j \in \{1, 2, 3\} \text{ fijos.}$$

Además como μ_z es una medida de probabilidad, es de la forma

$$\mu_z = \lambda(z) \delta_{U_i} + (1 - \lambda(z)) \delta_{U_j} \text{ casi para toda } z \in S,$$

donde λ es medible y $\lambda \in [0, 1]$.

Del inciso *iii*) del Teorema 4.2.1 (Teorema Fundamental de las medidas de Young) tenemos que

$$\int_S 1(\nabla_s \mathbf{u}^k, \mathbf{b}_k) dz_1 dz_2 \rightarrow \int_S \int_{\mathbb{R}^9} y d\mu_z(y) dz_1 dz_2.$$

Sabemos que

$$\int_S \int_{\mathbb{R}^9} y d\mu_z(y) dz_1 dz_2 = \int_S \lambda(z) \delta_{U_i} + (1 - \lambda(z)) \delta_{U_j} dz.$$

Por otro lado, como $(\nabla_s \mathbf{u}^k, \mathbf{b}_k)$ es periódica podemos argumentar análogamente a 4.7 del capítulo. Por lo que, para toda $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^2)$

$$\int_S \varphi(z) (\nabla_s \mathbf{u}^k, \mathbf{b}_k) dz_1 dz_2 \rightarrow \int_S \varphi(z) F_\lambda dz_1 dz_2,$$

entonces con $\varphi = 1$

$$\int_S 1 (\nabla_s \mathbf{u}^k, \mathbf{b}_k) dz_1 dz_2 \rightarrow \int_S 1 F_\lambda dz_1 dz_2.$$

Por lo tanto,

$$\mu_z = \lambda(z) \delta_{U_i} + (1 - \lambda(z)) \delta_{U_j} = \lambda \delta_{U_i} + (1 - \lambda) \delta_{U_j},$$

casi para toda $z \in S$. □

Proposición 6.2.2. *Existen sucesiones $\{\mathbf{u}_k\} \in W^{1,\infty}(S)$ y $\{(\nabla_s \mathbf{u}_k, \mathbf{b}_k)\}$, tales que $\{(\nabla_s \mathbf{u}_k, \mathbf{b}_k)\}$ es una sucesión minimizante de*

$$\int_S \varphi((\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b})) dz_1 dz_2$$

y satisface la siguiente condición de frontera

$$(\nabla_s \mathbf{u}_k, \mathbf{b}_k) = F_\lambda = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3,$$

con $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.

Demostración.

1. Escribamos la condición de frontera F_λ de la siguiente forma

$$F_\lambda = \alpha(\lambda U_1 + (1 - \lambda) U_2) + (1 - \alpha)(\mu U_1 + (1 - \mu) U_3),$$

en este caso

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha\lambda + (1 - \alpha)\mu \\ \lambda_2 &= \alpha(1 - \lambda) \\ \lambda_3 &= (1 - \alpha)(1 - \mu), \end{aligned}$$

y

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \alpha\lambda + (1 - \alpha)\mu + \alpha(1 - \lambda) + (1 - \alpha)(1 - \mu) = 1.$$

Por lo que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ determinan unívocamente a λ y α , y viceversa.

Sean

$$F_a = \lambda U_1 + (1 - \lambda)U_2 = \begin{pmatrix} -3\lambda + 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 + 3\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$F_b = \mu U_1 + (1 - \mu)U_3 = \begin{pmatrix} -3\mu + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3\mu - 2 \end{pmatrix}.$$

Veamos que existen λ y μ tal que F_a y F_b son compatibles, en efecto

$$F_a - F_b = \begin{pmatrix} -3\lambda + 3\mu & 0 & 0 \\ 0 & -3 + 3\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - 3\mu \end{pmatrix},$$

por lo que, para $\lambda = \mu$ ó $\lambda = 1$, $F_a - F_b$ es una matriz de rango uno.

Tomemos $\lambda = \mu$, entonces tenemos que la matriz de 2×2 dada por $F'_a - F'_b$ es de la forma

$$F'_a - F'_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 + 3\lambda \end{pmatrix},$$

por lo que la dirección de compatibilidad es $(0, 1)$.

2. Ahora construyamos una sucesión minimizante $\{\nabla_s \mathbf{u}_k, b_k\}$, sin condiciones de frontera. Es decir,

i) Sea

$$(\nabla_s \bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{b}}_k) = a_k(z_1)U_1 + (1 - a_k(z_1))U_3,$$

entonces, como vimos en la proposición anterior, $\bar{\mathbf{u}}_k$ es de la forma

$$(\bar{\mathbf{u}}_k)_1 = \begin{pmatrix} \bar{u}_1^k \\ \bar{u}_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2A_k(z_1) + [z_1 - A_k(z_1)] \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Sea $\psi_1^k : (0, \frac{\alpha}{k} + \frac{c}{k}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave tal que

$$\psi_1^k(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z_2 \in (0, \frac{\alpha}{k}) \\ 0 & \text{si } z_2 \in (\frac{\alpha}{k} + \frac{c}{2k^2}, \frac{\alpha}{k} + \frac{c}{k^2}) \end{cases}$$

con $c < \alpha$, y

$$|\nabla \psi_1^k(z)| \leq \frac{2k}{\beta}.$$

Construimos la sucesión

$$\psi_1^k(z_2)\bar{\mathbf{u}}_k + (1 - \psi_1^k)F'_b z.$$

ii) Análogamente, sea

$$(\nabla_s \bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{b}}_k) = a_k(z_1 + z_2)U_1 + (1 - a_k(z_1 + z_2))U_2,$$

entonces, como vimos en la proposición anterior, $\bar{\mathbf{u}}_k$ es de la forma

$$(\bar{\mathbf{u}}_k)_2 = \begin{pmatrix} \bar{u}_1^k \\ \bar{u}_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2A_k(z_1, z_2) + [z_2 - A_k(z_1, z_2)] \\ A_k(z_2, z_1) - 2[z_2 - A_k(z_2, z_1)] \end{pmatrix}.$$

Sea $\psi_2^k : (\frac{\alpha}{k} + \frac{3c}{2k^2}, \frac{1}{k} + \frac{2c}{k^2}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave tal que

$$\psi_2^k(z_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } z_2 \in (\frac{\alpha}{k} + \frac{c}{k^2}, \frac{\alpha}{k} + \frac{3c}{2k^2}) \\ 1 & \text{si } z_2 \in (\frac{\alpha}{k} + \frac{2c}{k^2}, \frac{1}{k} + \frac{2c}{k^2}) \end{cases}$$

con $c < \alpha$ y

$$|\nabla \psi_2^k(z)| \leq \frac{2k}{\beta}.$$

Construimos la sucesión

$$\psi_2^k(z_2)\bar{\mathbf{u}}_k + (1 - \psi_2^k)F'_a z.$$

Obsérvese que las funciones $(\bar{\mathbf{u}}_k)_1$ y $(\bar{\mathbf{u}}_k)_2$ representan los laminados simples, que en promedio son compatibles en la dirección $(0, 1)$.

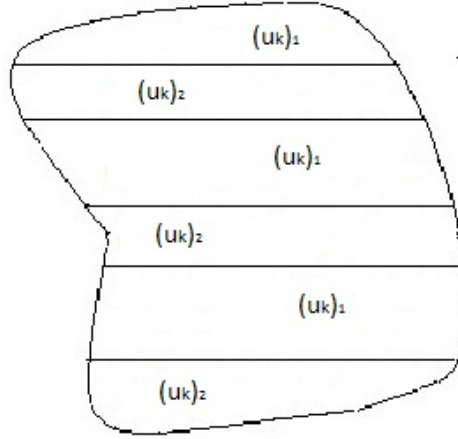


Figura 6.5: Laminado de laminados

iii) Ahora definiremos un laminado de laminados, para esto sea \mathbf{u}_k la extensión periódica de

$$\psi_1^k(z_2)(\bar{\mathbf{u}}_k)_1 + (1 - \psi_1^k)F'_b z + \psi_2^k(z_2)(\bar{\mathbf{u}}_k)_2 + (1 - \psi_2^k)F'_a z,$$

donde

$$(\bar{\mathbf{u}}_k)_1 \text{ y } (\bar{\mathbf{u}}_k)_2$$

son las funciones $\bar{\mathbf{u}}_k$ definidas en los incisos *i*) y *ii*) respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}
|(\nabla_s \mathbf{u}_k, \mathbf{b}_k)| &\leq |\nabla \psi_1^k| |(\bar{\mathbf{u}}_k)_1 - F_b z| + |1 - \psi_1^k| |F_b| + |\psi_1^k| |\nabla_s (\bar{\mathbf{u}}_k)_1| \\
&\quad + |\nabla \psi_2^k| |(\bar{\mathbf{u}}_k)_2 - F_a z| + |1 - \psi_2^k| |F_a| + |\psi_2^k| |\nabla_s (\bar{\mathbf{u}}_k)_2| + |\mathbf{b}_k| \\
&\leq |\nabla \psi_1^k| |(\bar{\mathbf{u}}_k)_1 - F_b z| + C + |\nabla \psi_2^k| |(\bar{\mathbf{u}}_k)_2 F_a z| + C \\
&\leq |\nabla \psi_1^k| M(\sup |(\bar{\mathbf{u}}_k)_1 - F_b z|) + |\nabla \psi_2^k| M(\max |(\bar{\mathbf{u}}_k)_2 - F_a z|) + C \\
&\leq |\nabla \psi_1^k| \frac{c}{k} + |\nabla \psi_2^k| \frac{c}{k} + C \\
&\leq \frac{2k}{\beta} \frac{c}{k} + \frac{2k}{\beta} \frac{c}{k} + C.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_S \varphi((\nabla_s \mathbf{u}^k, \mathbf{b})) dz_1 dz_2 &= c(k) \int_{S_1 \times (\frac{\alpha}{k} + \frac{c}{2k}, \frac{\alpha}{k} + \frac{2c}{k})} \varphi((\nabla_s \mathbf{u}_k, \mathbf{b}_k)) dz_1 dz_2 \\
&\leq C \left(c(k) \left| S_1 \times \left(\frac{\alpha}{k^2} + \frac{c}{2k^2}, \frac{\alpha}{k} + \frac{2c}{k^2} \right) \right| \right),
\end{aligned}$$

donde $c(k)$ representa el número de secciones donde $(\nabla_s \mathbf{u}^k, \mathbf{b}) \neq 0$. Por construcción $|S_1 \times (\frac{\alpha}{k^2} + \frac{c}{2k^2}, \frac{\alpha}{k} + \frac{2c}{k^2})|$ se comporta como $\frac{1}{k^2}$, por lo tanto

$$C \left(c(k) \left| S_1 \times \left(\frac{\alpha}{k^2} + \frac{c}{2k^2}, \frac{\alpha}{k} + \frac{2c}{k^2} \right) \right| \right)$$

tiende a cero cuando k tiende a infinito.

3. Por último, agregamos la condición de frontera

$$(\nabla_s \mathbf{u}_k, \mathbf{b}_k) = F_\lambda = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3,$$

donde

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \alpha \lambda + (1 - \alpha) \lambda = \lambda, \\
\lambda_2 &= \alpha(1 - \lambda) = \alpha(1 - \lambda_1), \\
\lambda_3 &= (1 - \alpha)(1 - \lambda) = (1 - \alpha)(1 - \lambda_1) = 1 - \lambda_1 - \lambda_2.
\end{aligned}$$

Entonces, definimos el conjunto

$$S_k = \left\{ z \in S \text{ tales que } \text{dist}(z, \partial S) > \frac{\alpha}{k} \right\}.$$

Sea ψ^k , para toda k , dada por,

$$\psi^k(z) = \begin{cases} 1 & \text{en } S_k \\ 0 & \text{fuera de } S \end{cases}$$

y

$$|\nabla \psi^k(z)| \leq \frac{2k}{\beta}.$$

Además, sean

$$U'_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad U'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

definimos

$$F'_\lambda = \lambda_1 U'_1 + \lambda_2 U'_2 + \lambda_3 U'_3.$$

Sea $\{\mathbf{u}_k\}$ una sucesión tal que

$$\mathbf{u}_k = \psi^k(z)(\bar{\mathbf{u}}_k) + (1 - \psi_k(z))F'_\lambda z,$$

donde $\bar{\mathbf{u}}_k$ es la sucesión construida en el inciso *iii*) del punto anterior, entonces argumentando como en la Proposición anterior y debido a la parte 2. tenemos que

$$(\nabla_s \mathbf{u}_k, \mathbf{b}_k)$$

es una sucesión minimizante de

$$\int_S \varphi((\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{b})) dz_1 dz_2.$$

3. Ahora determinemos la medida de Young.

De lo anterior tenemos que

$$\int_S 1\varphi((\nabla_s \mathbf{u}_k, \mathbf{b}_k)) dz_1 dz_2 \rightarrow 0,$$

y del Teorema Fundamental de las medidas de Young, tenemos que

$$\int_S 1\varphi((\nabla_s \mathbf{u}^k, \mathbf{b}_k)) dz_1 dz_2 \rightarrow \int_S \int_{\mathbb{R}^9} \varphi(y) d\mu_z(y) dz_1 dz_2,$$

entonces, para casi toda $z \in S$

$$\int_{\mathbb{R}^9} \varphi(y) d\mu_z(y) = 0.$$

Por lo que, el soporte de $d\mu_z$ está contenido en el conjunto de ceros de φ , es decir, en

$$\{U_1, U_2, U_3\}.$$

Además como μ_z es una medida de probabilidad, es de la forma

$$\mu_z = \lambda_1(z)\delta_{U_1} + \lambda_2(z)\delta_{U_2} + \lambda_3(z)\delta_{U_3} \text{ casi para toda } z \in S,$$

donde λ es medible y $\lambda \in [0, 1]$.

Del inciso *iii*) del Teorema 4.2.1 (Teorema Fundamental de las medidas de Young) tenemos que

$$\int_S 1(\nabla_s \mathbf{u}^k, \mathbf{b}_k) dz_1 dz_2 \rightarrow \int_S \int_{\mathbb{R}^9} y d\mu_z(y) dz_1 dz_2.$$

Sabemos que

$$\int_S \int_{\mathbb{R}^9} y d\mu_z(y) dz_1 dz_2 = \int_S (\lambda_1(z)\delta_{U_1} + \lambda_2(z)\delta_{U_2} + \lambda_3(z)\delta_{U_3}) dz.$$

Por otro lado, como se argumentó en el capítulo 4 en 4.7. Para toda $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^2)$

$$\int_S \varphi(z)(\nabla_s \mathbf{u}^k, \mathbf{b}_k) dz_1 dz_2 \rightarrow \int_S \varphi(z) F_\lambda dz_1 dz_2,$$

entonces con $\varphi = 1$

$$\int_S 1(\nabla_s \mathbf{u}^k, \mathbf{b}_k) dz_1 dz_2 \rightarrow \int_S 1 F_\lambda dz_1 dz_2.$$

Por lo tanto,

$$\mu_z = \lambda_1(z)\delta_{U_1} + \lambda_2(z)\delta_{U_2} + \lambda_3(z)\delta_{U_3} = \lambda_1\delta_{U_1} + \lambda_2\delta_{U_2} + \lambda_3\delta_{U_3},$$

casi para toda $z \in S$. □

Como se dijo en la introducción, la implicación de este resultado es que las microestructuras observables en estos materiales deberán ser parecidas a esta imagen.

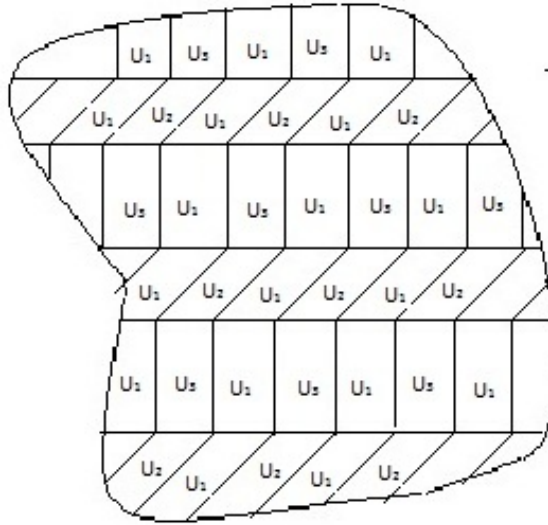


Figura 6.6: Microestructuras

APÉNDICE A

Apéndice

En este apéndice incluiremos algunos resultados que necesitamos pero no incluimos su demostración por estar fuera del alcance de esta tesis.

A.1. Regularización

Teorema A.1.1. *Sean Ω abierto y u una función continua. Entonces para u^ϵ una regularización estándar de u se tiene que*

$$u^\epsilon \rightarrow u$$

uniformemente en subconjuntos compactos de Ω .

Demostración. Véase página 630 de [Eva98]

□

A.2. Compacidad

Definición A.2.1. Decimos que las funciones de $\{u_k\}$ son **uniformemente equicontinuas** si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si

$$|x - y| < \delta$$

entonces

$$|u_k(x) - u_k(y)| < \epsilon$$

para toda $x, y \in \mathbb{R}^n$ y para toda k

Teorema A.2.1. *Sea $\{u_k\}$ una sucesión de funciones escalares definidas en \mathbb{R}^n tal que existe una constante M que satisface que para toda x*

$$|u_k(x)| \leq M$$

para toda $k \in \mathbb{N}$. Además supongamos que las funciones de $\{u_k\}$ son uniformemente equicontinuas. Entonces existe una función u y una subsucesión $\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\}$ tal que

$$u_{k_j} \rightarrow u$$

uniformemente en subconjuntos compactos de \mathbb{R}^n .

Demostración.

Véase página 109 de [Cla09]

□

A.3. Banach-Alaoglu

Teorema A.3.1. *Sea X un espacio métrico arbitrario. Entonces la bola cerrada $\overline{B(0,1)}$ en el dual de X es compacta en la topología débil*.*

Demostración.

Véase página 169 de [Fol99]

□

A.4. Dunford-Pettis

Definición A.4.1. Un conjunto de funciones \mathcal{C} en $L^1(A)$ es **uniformemente integrable** si dado $\epsilon > 0$, existe una constante positiva M tal que

$$\int_{\{x \in A: u(x) \geq M\}} u(x) dx \leq \epsilon,$$

para toda $u \in \mathcal{C}$.

Teorema A.4.1. *Un conjunto de funciones \mathcal{C} en $L^1(A)$ es uniformemente integrable si y sólo si es débilmente compacto.*

Demostración.

Véase página 271 de [Edw65]

□

Bibliografía

- [Bal88] J.M. Ball. A version of the fundamental theorem of young measures. In *Proceedings of an NSF-CNRS Joint Seminar, Nice, France*, pages 207–215. Springer Verlag, enero 18-22, 1988.
- [Bha99] R.D. Bhattacharya, K.; James. A theory of thin films of martensitic materials with applications to microactuators. *Journal of the Mathematics and Physics of Solids*, (47):531–576, 1999.
- [Bha02] K. Bhattacharya. *Microstructure of Martensite, Why it forms and how it gives rise to the shape-memory effect?* Garland Science, 1st edition, 2002.
- [Chi00] Michel Chipot. *Elements of nonlinear analysis*. Birkhäuser Advanced Texts, 2000.
- [Chi09] Michel Chipot. *Elliptic equations: An introductory course*. Birkhäuser Advanced Texts, 2009.
- [Cla09] Mónica Clapp. *Notas del Curso de Análisis I y Análisis II*. 2008-2009. .
- [Edw65] R. E. Edwards. *Functional Analysis: Theory and Applications*. Holt, Rinehart and Winston Inc., 1965.
- [Eva98] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, 2nd edition, 1998.
- [Fol99] Gerald B. Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*. Pure and applied Mathematics. John Wiley and Sons, Inc., 2nd edition, 1999.
- [JLJ98] Jürgen Jost and Xianqing Li-Jost. *Calculus of Variations*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1st edition, 1998.

- [Mü198] Stefan Müller. *Variational models of microstructure and phase transitions*. Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, 1998.