Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

UNA INTRODUCCIÓN A LA HOMOLOGÍA SINGULAR CON EL TEOREMA DE BORSUK-ULAM

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
ALDO IVÁN RAMÍREZ ABARCA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JORGE MARCOS MARTÍNEZ MONTEJANO

2012

1. Datos del alumno:
Ramírez
Abarca
Aldo Iván
56 66 68 39
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
304587078

2. Datos del tutor:
Dr.
Jorge Marcos
Martínez
Montejano

3. Datos del sinodal 1:
Dr.
Carlos
Prieto
de Castro

4. Datos del sinodal 2:
Dr.
Marcelo
Aguilar
González de la Vega

5. Datos del sinodal 3:
M en C
Natalia
Jonard
Pérez

6. Datos del sinodal 4:
Dra.
María Isabel
Puga
Espinosa

7. Datos del trabajo escrito:
Una Introducción a la Homología Singular con el Teorema de Borsuk-Ulam
125 p
2012

A mi familia y mis amigos,
que son dos nombres para decir lo mismo.

Soy fiel partidario de esta parte de los trabajos escritos, y casi todas las personas que serán aquí aludidas saben cómo me gusta aprovechar cualquier ocasión para hacerles saber lo mucho que las quiero y agradecerles el estar de mi lado siempre. Así pues, mientras confío que las dedicatorias más elegantes y satisfactorias que he leído son sencillas, lacónicas y casi poéticas, en este caso no tengo la menor intención de escatimar palabras ni cursilerías. Al menos hay dos razones para esto, y ninguna se refiere a dignificar la tesis o presentarla como un gran regalo de mí para ustedes; más bien tengo la creencia de que una manera de ser justo con sentimientos que ordinariamente sólo se expresan entre copas, embriagado todo el mundo, es escribirlos. No busco dedicar las hojas de adelante, el producto terminado lleno de símbolos y faltas de ortografía. Lo que dedico es de alguna manera las manos que escribieron esas hojas, todo en una entrega que lleva el claro mensaje de que ustedes fueron en gran parte responsables de conducirlas. Cualquier dedicatoria es, pues, un agradecimiento.

A mi papá, porque cuando me echo el mundo a los hombros, es él quien me sostiene a mí. Siempre a mi costado, siempre una mano apoyando mi paso y siempre un dedo apuntando al frente para decirme a dónde mirar, adelante sin temor porque él no dejará de cuidarme la espalda.

A mi mamá, no porque "me dio la vida" sino porque ha dado su vida para mí, porque ella es tan yo y yo soy tan ella que todo lo que hago es suyo por naturaleza.

A Karen, el contrafuerte que apuntala, que pelea mis batallas, que carga mis lastres y no pocas veces carga conmigo. Porque más que crecer junto a mí, mi hermana me obliga a crecer.

A la Güeris, el más grande ejemplo a seguir que tengo, la fuerza y triunfo hechos persona y la seguridad de un abrazo que es calmar cualquier desasosiego.

A Memis, cuya compañía ejemplar endulza todo lo que toca, y quien con una siempre presente fe en mí logra moverme a conservar la mía.

A Edith y Paco, mis segundos padres porque su cariño fiel, su devoción y su compromiso con mi felicidad no pueden más que hacerme sentir su hijo.

A Asdrubal, listo a cada instante para tender la mano cuando tropiezo y para protegerme con la ternura de un corazón gigantesco.

A Daniela y Paquito y Rubén, mis hermanos grandes y el chiquito, formadores de carácter, siempre atentos a que mis decisiones lleguen a buen puerto y hacedores de tanta parte de nuestra historia.

A Gina y Dersu, amores que convirtieron la carrera en un paseo, en una prueba de fuego, en un día de campo, en las "decisiones más difíciles" y, a fin de cuentas, en un gran guiño de la vida como el que guiña después de enseñar una valiosa lección.

A Betan, titánico e incondicional aliado a quien debo mucho más de lo que se dirá en estas líneas. Es en gran parte gracias a él que la tesis existe y, de a ratos salvador, no hay mejor *fixer* para un humor magullado y en apariencia irreparable.

A David, cuya hermandad es molde de todo lo que soy y seré. A Doogie, guardián del buen ánimo y portador perpetuo de la bandera del *I'll be on your side*. A Cacho, cuyo loco corazón no falla en dar voces de aliento en los momentos duros y de celebración en aquéllos buenos. A Edgar, incomparable bastión de contento y con quien las palabras sólo pueden sobrar. A Jony, quien siempre ha establecido la norma de lo que debe ser un amigo.

A Alexis, que con solidaridad de hermano dibuja sonrisas hasta en la caras más "apretadas y tensas". A Tom, cuya sabia calidez es un bálsamo que recuerda a canción de Bob Marley.

A Mariau, quien puede como nadie "alegrar para arreglar".

A Pablo, cuyo temple conoce la manera de hacer llorar de la risa y de hacer reír cuando se llora. A Gabriel, que inspira la ligereza y el juego necesarios para disfrutar de cada momento, por pequeño que sea. A Sandro, que con las palabras y sin ellas inaugura la reflexión divertida y la diversión a secas. A Fern, quien va marcando el paso con máxima fortaleza de espíritu, un *heart of gold* y un inagotable sentido del humor.

A Jorge Marcos, que con sencillez y ánimo inquebrantable supo respaldarme en la caprichosa relación de amoroso odio que llevo con la profesión matemática. A Osvaldo, quien pone en claro que la enseñanza y el aprendizaje se desenvuelven con la mayor soltura si auspiciados por la amistad.

A mis maestros Gerardo Medina y Paco Noreña, quienes, como alguien que juega escondidillas con un bebé, dejaron entrever que bajo la cortina de una clase de química o física hubo siempre una cátedra de humanismo.

De los lados de acá y allá, también quiero agradecer a todas las personas que me regalaron bondades y buenos momentos a lo largo de todo este asunto y cuya influencia significó muchísimo para mí: a Neter, a Pao, a Martha y Jorge, a Anita, a Mary, a Davidben, a la Mamó, a Coco, a Lebb, a Adrián, a Sebas, a Paps, a Sofi, a Salch, a Larry, a Grillo, al Nica, a Jazael, a Irene, a Pauis, a Eri, a Aída, a Sofí(a), a Fer, a Berni, al Chucky, a Ricky, a Renée y Alice y las chocochicas, a Aníbal y Gaby, a José Aníbal y Dani y Carla y Alexis, a July y

Eduardo, a mis abuelos, a Gris, a Pili y Dávide y todos los primazos, a Vero y a Vero, a Juan Pablo, a Sergio, a Andrea, a Dani, al Grillo, a Chunga, a Boyo, a Núria, a Mica y Mariana y los escaladores, a Sayra, a Oli, a Don Nicanor y Don Adolfo, a Manuel Zorilla y Luis y Rafael Rojas Barbachano, a PJ y a cualquier acompañante, mentor, o amigo que un momentáneo desliz de la memoria haya dejado fuera de esta lista.

Gracias especiales a los maestros que aceptaron ser sinodales de tesis: el Dr. Marcelo Aguilar, el Dr. Carlos Prieto, la Dra. Isabel Puga y la Dra. Natalia Jonard, sin cuyas aportaciones el producto terminado nunca habría sido tal.

Goals disrupt the past.
JOHN FRUSCIANTE, "Goals"

Índice general

Prefacio

Mientras estudiaba para un examen de Topología II hace dos años, leyendo [10], me topé con el Teorema de Borsuk-Ulam. Quedé muy extrañado -incluso receloso- ante la idea de que una afirmación tan "topológica" requiriera de sofisticados argumentos algebraicos para probarse, pero eso era lo que Munkres decía en su texto. Cuando le comenté a mi asesor -el gran Jorge Marcos- que me interesaba la idea de trabajar un tema que me obligara a excavar un poco la *Topología Algebraica*, ambos buscamos qué cosas serían buen material para una tesis, y pronto cobró mucha fuerza encontrar algo que ante todo lograra transmitir ese asombro que irremediablemente causa el que se pueda usar la teoría de grupos y anillos para resolver problemas de Topología. Fue así que decidimos construir la Homología Singular con el objetivo expreso de probar el Teorema de Borsuk-Ulam, una de sus clásicas aplicaciones según [6].

Antes de seguir platicando sobre las razones de nuestro enfoque, enunciemos de una vez por todas el Teorema para así irnos familiarizando con él. Si denotamos como S^n a la ***esfera*** n-dimensional, entonces, para cada $\mathbf{x} := (x_1, ..., x_{n+1}) \in S^n$, el punto $-\mathbf{x} = (-x_1, ..., -x_{n+1})$, que también vive en S^n, es conocido como la ***antípoda*** de $\mathbf{x}$, y a ambos se les llama ***puntos antipodales***. Así pues...

Teorema 0.0.1 (Borsuk-Ulam)**.** *Si $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ es continua, entonces existe un par de puntos antipodales $\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{x} \in S^n$ tal que $f(\boldsymbol{x}) = f(-\boldsymbol{x})$.*

A primera vista, y eso fue lo que a mí me pasó, uno esperaría que este sorprendente resultado se pudiera probar con razonamientos solamente "topológicos". Sin embargo, cualquier intento disidente de prueba resultó marcadamente estéril por mi parte, un poco como cuando el narrador en *El Tío Petros y la Conjetura de Goldbach* busca demostrar la conjetura sin saber más que las definiciones de "par" y "non". Hecho a la idea de que iba a tener que aprender las bases de la Homología Singular para saber por qué el Teorema es cierto, una mayor sorpresa estaba a la vuelta de la esquina, pues estudiar el proceso -tanto histórico como mental- bajo el que se desenvolvieron las ideas de la *Topología Algebraica* que aquí recapitulamos no podía venir sin momentos de perplejidad. Por ejemplo, preguntas como *«¿Cómo se les ocurrieron todas estas cosas y a quiénes?», «¿De verdad son necesarias para probar el Teorema?», «¿Va a funcionar, irá a funcionar?»* eran cosa de todos los días en el transcurso del trabajo.

Alguna vez un maestro habló en una conferencia sobre la increíble belleza de reconocer un puente entre ramas distintas de las Matemáticas, y aunque el adjetivo "bello" es discutible por eso de que *en gustos se rompen géneros*, lo que sí puedo decir con toda honestidad, en el caso de todo lo que haremos para mostrar que la pequeña oración en 0.0.1 es verdadera, es que ver que "sí funciona" es deslumbrante.

Resumiendo, hemos elegido una aplicación particular en el Teorema de Borsuk-Ulam para motivar la presentación de la Homología Singular porque, a nuestro parecer, esto resalta tres valores: el de la parte topológica, el de la parte algebraica, y -el mayor de los tres- el de su conjunción cooperativa. El esquema general en los cuatro capítulos está diseñado para lectores que conozcan de antemano algunas cuestiones básicas de Topología (continuidad de funciones, homeomorfismos, axiomas de separación, homotopía, etc.) y de Álgebra (teoría de grupos), pero de ningún modo pretende ser un documento de matemática avanzada, con lo que me refiero a que es tan sólo un intento de propuesta, una invitación a asistir a una mínima rodaja de la *Topología Algebraica* desde una perspectiva en la que depositamos la ilusión de que todo sea tan claro, cómodo y fluido como si hubiera salido de la pluma de Ceferino Piriz.

Capítulo 1

Preliminares Algebraicos

1.1. Algunas Propiedades de Grupos Abelianos

No es necesario recalcar en un proemio a esta sección la importancia que tienen los grupos abelianos en el Álgebra, pues personas más versadas en el tema lo han expresado distinguidamente de mil formas en los textos y libros apropiados. Lo que sí podemos hacer es platicar un poco sobre cómo los usaremos -si bien hasta el capítulo 3- en nuestro trabajo. Buscamos asociar un grupo abeliano a un espacio topológico de tal manera que las bondades que vienen con la conmutatividad transmitan su fuerza sobre los datos del espacio -y la sencillez en el manejo de ellos- que nos puedan conceder.

Así, mientras el punto central en estas primeras páginas se referirá al mecanismo de construcción de un grupo abeliano sobre un conjunto cualquiera, es decir, la situación donde los elementos del conjunto actúan como base del grupo, el hecho de recordar algunas verdades desde el *Álgebra* será más que oportuno para sustentar gran parte de lo que haremos adelante. Salvo cuando lo mencionemos explícitamente, todos los grupos en este primer capítulo se tomarán abelianos, de tal manera que usaremos la notación aditiva casi siempre, según la cual apuntaremos 0 para referirnos al neutro de cualquier grupo abeliano; ahora bien, también se usa denotar como 0 al grupo (abeliano) trivial, único salvo isomorfismos, por lo que el lector tendrá que hacer la distinción apropiada según el contexto en el que se manejen los símbolos.

Como otras "anotaciones notacionales", escribiremos $A \approxeq B$ para significar que A y B son isomorfos, denotaremos $\langle X \rangle$ al subgrupo generado por algún subconjunto X de un grupo dado, y usaremos el símbolo 1_A para representar a la identidad sobre un grupo A.

Definición 1.1.1. *Sea K un conjunto de índices y $\{(A_k, +_k)\}_{k \in K}$ una familia de grupos abelianos. Recordemos que el producto cartesiano $\Pi_{k\in K} A_k$ está definido como el conjunto $\{f : K \to \bigcup_{k\in K} A_k \mid f(k) \in A_k\}$. Llamamos **producto directo** (o suma directa completa o suma directa fuerte) al grupo $(\Pi_{k\in K} A_k, +)$ donde $[f + g](k) := f(k) + g(k)$ para una pareja f, g de funciones en $\Pi_{k\in K} A_k$.*

A su vez, llamaremos ***suma directa (externa)*** *al subgrupo de* $(\Pi_{k\in K} A_k, +)$ *que consiste en los elementos* f *tales que* $f(k) \neq 0$ *tan sólo para una cantidad finita de* k*'s. Este subgrupo se denota como* $\bigoplus_{k\in K} A_k$.[1]

Es claro que si K es finito, entonces $\bigoplus_{k\in K} A_k = \Pi_{k\in K} A_k$.

A menudo es más sencillo trabajar con definiciones que resulten intuitivamente seductoras, por lo que introducimos la siguiente:

Definición 1.1.2. *Sea* $\{A_k\}_{k\in K}$ *una familia de subgrupos de un grupo abeliano* G*. Escribiremos* $G \approxeq \bigoplus_{k\in K} A_k$ *si y sólo si* $G = \langle \cup_{k\in K} A_k\rangle$ *y, para toda* $j \in K$, $A_j \cap \langle \cup_{k\neq j} A_k\rangle = \{0\}$*. Se usa llamarle a este grupo* ***suma directa (interna)****.*

Proposición 1.1.3. *Si* $\{A_k\}_{k\in K}$ *es una familia de subgrupos de un grupo abeliano* G*, entonces las siguientes son equivalentes:*

1. $G \approxeq \bigoplus_{k\in K} A_k$ *(interna).*
2. *Cada* $g \in G$ *tiene una única expresión de la forma...*

$$g = \sum_{k\in K} a_k$$

... donde $a_k \in A_k$*, las* k*'s son distintas, y* $a_k \neq 0$ *tan sólo para una cantidad finita de* k*'s.*

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$ Dado $g \in G$, como $G = \langle \cup_{k\in K} A_k\rangle$ sabemos que $g = a_1 + ... + a_{n_g}$ para algunos $a_j \in \cup_{k\in K} A_k$ $(1 \leq j \leq n_g)$. Ahora bien, como G es abeliano, podemos reacomodar esta expresión y asociarla de tal manera que se transforme en una donde cada sumando viva en un A_k distinto, tal como queremos. Luego, el hecho de que $A_j \cap \langle \cup_{k\neq j} A_k\rangle = \{0\}$ para toda $j \in K$ nos otorga el que sea única.

$(2 \Rightarrow 1)$ Como poseemos una representación de cada $g \in G$ como suma de elementos en los A_k, pasa que $G = \langle \cup_{k\in K} A_k\rangle$. Por otro lado, dado $j \in K$ y $0 \neq a \in A_j$, la *única* representación como suma para a es $a + \sum_{k\neq j} 0$, lo que a todas luces implica que $a \notin \langle \cup_{k\neq j} A_k\rangle$ y por lo tanto que $A_j \cap \langle \cup_{k\neq j} A_k\rangle$ es a lo más -y por eso exactamente- $\{0\}$. □

Anotamos que, como cualquier suma directa (externa) de la forma $\bigoplus_{k\in K} A_k$ es isomorfa a la suma directa (interna) $\bigoplus_{k\in K}(A_k \times \Pi_{j\neq k}\{0\})$, y a su vez cualquier suma directa (interna) nos arroja un isomorfismo entre ella y la suma directa (externa) de sus sumandos, no habrá mayor problema en abandonar los apellidos "externa" e "interna" de ahora en adelante, sólo estableciendo cuándo usemos una acepción particular si de no hacerlo se pierde claridad. Por razones así, es bastante común denotar a los elementos de una suma directa (externa) como *sumas formales* de elementos en los A_k en vez de usar funciones; es decir, representamos a un elemento en $\bigoplus_{k\in K} A_k$ (externa) como $\sum_{i=1}^{n} a_{k_i}$, con $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ y $a_{k_i} \in A_{k_i}$ para todo $1 \leq i \leq n$.

[1] Usaremos $A \oplus B$ para representar el caso particular de la suma directa de dos grupos abelianos. Por otra parte, hay que decir las definiciones también son válidas para grupos no abelianos.

El paralelo que podríamos intuir entre las bases de espacios vectoriales y la unión-de-los-sumandos-en-una-suma-directa se hará más poderoso con los siguientes dos resultados, a los que recurriremos con frecuencia casi desquiciante tanto para corroborar igualdades de homomorfismos y conmutatividad de diagramas como en la definición misma de homomorfismos para los grupos abelianos con los que trabajaremos en el capítulo 3. De hecho, en el futuro nos referiremos a los elementos de la unión-de-los-sumandos-en-una-suma-directa como "los elementos que generan" a la suma directa.

Proposición 1.1.4. *Sea $\{A_k\}_{k\in K}$ una colección de grupos abelianos y $f, h : \bigoplus_{k\in K} A_k \to H$ homomorfismos para algún otro grupo abeliano H. Entonces, si $f|_{A_k} = h|_{A_k}$ para toda $k \in K$, se cumple que $f = h$.*

Demostración. Para $g \in \bigoplus_{k\in K} A_k$, la proposición anterior (1.1.3) nos arroja que existe una expresión única de la forma $g = \sum_{k\in K} a_k$, donde $a_k \in A_k$, las k's son distintas, y $a_k \neq 0$ tan sólo para una cantidad finita de k's. Así pues, $f(g) = \sum_{k\in K} f(a_k) = \sum_{k\in K} h(a_k) = h(g)$, con lo que conseguimos lo deseado. □

Teorema 1.1.5 (Propiedad Universal). *$G \approxeq \bigoplus_{k\in K} A_k$ si y sólo si para todo grupo abeliano H y para cada familia de homomorfismos $\{f_k : A_k \to H\}_{k\in K}$, existe un único homomorfismo $\phi : G \to H$[2] que hace que el siguiente diagrama conmute:*

$$\begin{tikzcd}
A_k \arrow[rr, "i_k"] \arrow[dr, "f_k"] & & G \arrow[dl, "\phi"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

... donde $i_k : A_k \to G$ es la inclusión para toda $k \in K$.

Demostración. Si $G \approxeq \bigoplus_{k\in K} A_k$, entonces la proposición 1.1.3 nos garantiza que cada $g \in G$ tiene una expresión de la forma $\sum_{k\in K} a_k$ tal que $a_k \in A_k$, las k's son distintas, y $a_k \neq 0$ tan sólo para una cantidad finita de k's. Si definimos $\phi : G \to H$ como $\phi(g) = \sum_{k\in K} f_k(a_k)$, entonces el hecho de que la expresión sea única nos garantiza que ϕ está bien definida.

Por lo demás, ϕ cumple ser un homomorfismo (por construcción), claramente hace que el diagrama conmute (también por construcción), y es único porque cualquiera que haga lo mismo coincide con él por la proposición 1.1.4.

Supongamos ahora que G es un grupo que satisface la propiedad requerida; si en el diagrama establecemos a H como $\bigoplus_{k\in K} A_k$ (externa) y tomamos las f_k como j_k -las "inclusiones" sobre la suma-, entonces nuestra hipótesis nos arroja que existe un homomorfismo $\phi : G \to \bigoplus_{k\in K} A_k$ tal que el siguiente diagrama

[2] A menudo denotamos al homomorfismo ϕ como $\bigoplus_{k\in K} f_k$.

conmuta:

$$\begin{tikzcd} A_k \arrow[rr, "i_k"] \arrow[dr, "j_k"'] & & G \arrow[dl, "\phi"] \\ & \bigoplus_{k\in K} A_k & \end{tikzcd}$$

A su vez, el "sólo si" de la afirmación nos garantiza la existencia de $\psi : \bigoplus_{k\in K} A_k \to G$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A_k \arrow[rr, "j_k"] \arrow[dr, "i_k"'] & & \bigoplus_{k\in K} A_k \arrow[dl, "\psi"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Ahora bien, tenemos que 1_G y $\psi\circ\phi$ hacen que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} A_k \arrow[rr, "i_k"] \arrow[dr, "i_k"'] & & G \arrow[dl] \\ & G & \end{tikzcd}$$

... por lo que la condición de unicidad de la hipótesis nos dice que $1_G = \psi\circ\phi$. Un argumento similar nos dice que $1_{\bigoplus_{k\in K} A_k} = \phi\circ\psi$ y por lo tanto que ϕ y ψ son isomorfismos e inversos uno del otro, concluyendo la prueba. $\square$

Ejemplo 1.1.6. *Sean $\{A_k\}_{k\in K}$ y $\{B_k\}_{k\in K}$ colecciones de grupos abelianos tales que $B_k \lhd A_k$ para toda $k\in K$. Entonces -para el cociente de las sumas directas de tales colecciones- se cumple que...*

$$\frac{\bigoplus_{k\in K} A_k}{\bigoplus_{k\in K} B_k} \approx \bigoplus_{k\in K} A_k/B_k.$$

Esto se ve gracias al isomorfismo $\phi : \bigoplus_{k\in K} A_k/B_k \to \frac{\bigoplus_{k\in K} A_k}{\bigoplus_{k\in K} B_k}$ que extiende a la colección de homomorfismos...

$$\left\{ f_k : A_k/B_k \to \frac{\bigoplus_{k\in K} A_k}{\bigoplus_{k\in K} B_k} \;\middle|\; f_k(a+B_k) = a + \bigoplus_{k\in K} B_k \right\}_{k\in K}.$$

Es claro que así definido, ϕ es tal que...

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n}(a_{k_i}+B_{k_i})\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{k_i} + \bigoplus_{k\in K} B_k.$$

Muy relacionado a lo que hemos estado viendo, pasamos a hablar sobre un tipo de grupos abelianos detrás de cuya idea se esconde la estrategia para construir un grupo abeliano que tenga a cualquier conjunto como "base".

Definición 1.1.7. *Decimos que un grupo abeliano F es* ***libre abeliano*** *si y sólo si es una suma directa de grupos cíclicos infinitos, es decir, si existe $X \subseteq F$ tal que todo $x \in X$ es de orden infinito y se cumple que $F = \bigoplus_{x\in X}\langle x\rangle$. Al conjunto X se le conoce como* ***base*** *de F.*[3]

En este caso, la proposición 1.1.4 y el teorema 1.1.5 (Propiedad Universal) tienen una versión válida si sustituimos la colección $\{A_k\}_{k\in K}$ por el conjunto X. Los grupos libres abelianos tienen propiedades especiales que los ubican como materia lucrativa de estudio. Aquí no ahondaremos en ellas, pero algunas se pueden revisar en [13, capítulo 10, sección 2]. En realidad, lo que realmente nos concierne en este punto se expone en el siguiente resultado:

Teorema 1.1.8. *Sea Y cualquier conjunto. Podemos asignarle a Y un grupo libre abeliano que tenga como base a los elementos de Y.*

Demostración. Lo que vamos a hacer es identificar cada elemento de Y con el elemento generador de un $\mathbb{Z}$. Así pues, para cada $y \in Y$, primero definimos $\langle y\rangle := (\{n\cdot y \mid n \in \mathbb{Z}\}, +)$ tal que $n\cdot y + m\cdot y := (n +_{\mathbb{Z}} m)\cdot y$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{Z}$. Con ello, $\langle y\rangle$ es un grupo abeliano cíclico infinito y podemos conjurar al grupo *libre abeliano* $F = \bigoplus_{y\in Y}\langle y\rangle$. Siendo precisos, la *base* de este grupo libre abeliano es el conjunto $\{1\cdot y \mid y \in Y\}$, pero se usa referirse a él como Y. □

El teorema anterior se puede generalizar un tanto y aplicarse con cualquier grupo abeliano $(G, +_G)$ en vez de $\mathbb{Z}$. Es decir, si tomamos $\langle y\rangle := (\{g\cdot y \mid g \in G\}, +)$ tal que $a\cdot y + b\cdot y := (a +_G b)\cdot y$ para cualesquiera $a, b \in G$, entonces nos podemos fijar en la suma directa $\bigoplus_{y\in Y}\langle y\rangle$, la cual no cumple necesariamente ser un grupo *libre abeliano* con todas las de la ley, pero sin duda es un grupo abeliano donde podremos utilizar lo aprendido en las proposiciones 1.1.3 y 1.1.4, así como en el teorema 1.1.5.[4]

En lo que a este trabajo respecta, utilizaremos la maniobra de arriba para construir un grupo abeliano "sobre" el conjunto ciertas funciones continuas que entran sobre espacios topológicos.

1.2. Sucesiones Exactas

Existe una magnífica herramienta para el manejo de grupos y sus homomorfismos que viene de disponerlos como sucesiones de dominios y codominios ligados por los homomorfismos entre ellos. Para nosotros será importantísimo el estudio de estas figuras, pues su aparición y uso generalizado en la Topología Algebraica -y en particular en la homología singular- son responsables de

[3] De la definición nos viene que podemos pensar a F como isomorfo a una suma directa de $\mathbb{Z}$'s. No sobra anotar además que si tomáramos $X = \emptyset$, entonces convenimos que $F = 0$.

[4] En este caso particular, no estamos autorizados por las definiciones a decir que los elementos de Y son *generadores* o *base* para $\bigoplus_{y\in Y}\langle y\rangle$ (véase [13, capítulo 10, sección 2]), pues estas palabras tienen significados específicos al trabajo con grupos libres abelianos. Lo que sí haremos -y como ya hemos dicho- es referirnos a ellos como los "elementos que generan" a $\bigoplus_{y\in Y}\langle y\rangle$.

gran cantidad de resultados, entre los que está el blanco de nuestros disparos: el Teorema de Borsuk-Ulam.

Definición 1.2.1. *Sean A, B, C grupos abelianos*[5] *e $i : A \to B$, $j : B \to C$ homomorfismos. Decimos que la **sucesión**...*

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$$

*... es **exacta** si y sólo si $ker\ j = im\ i$.*

De la misma manera, podemos pensar en sucesiones exactas infinitas tales como...

$$... \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{i_{n+1}} A_n \xrightarrow{i_n} A_{n-1} \longrightarrow ...$$

... donde la condición de *exactitud* se cumpla para cada par de homomorfismos adyacentes.

Sin dar muchas vueltas sobre ello, veamos cómo este esquema de *sucesión exacta* puede englobar bastante información sobre los grupos y homomorfismos que recopile, apoyando así su noción de conveniencia.

Proposición 1.2.2.

1. *$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B$ es exacta si y sólo si $ker\ i = \{0\}$, lo que implica que i es un monomorfismo.*

2. *$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} 0$ es exacta si y sólo si $im\ i = ker\ j = B$, lo que implica que i es un epimorfismo.*

3. *$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si i es un isomorfismo.*

4. *$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si i es monomorfismo y j es epimorfismo, de manera que el hecho de que $im\ i = ker\ j$ nos implica a parte que $C \approxeq B/im\ i$, donde $im\ i \approxeq A$.*

Demostración. Los primeros dos incisos caen por definición. El tercero consiste en juntar la fuerza de los primeros dos, mientras que el cuarto se tiene por *teoremas de isomorfismo.* $\square$

Como un ejemplo del trabajo con sucesiones exactas, apuntaremos un tipo particular de éstas que sin duda es de "alta rentabilidad", aunque nosotros lo usaremos más bien poco.

Definición 1.2.3. *Sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de grupos abelianos. Decimos que la sucesión se **escinde** (**splits** en inglés) si y sólo si existe un endomorfismo $\phi : B \to B$ tal que ϕ es idempotente ($\phi^2 = \phi$) y tal que $ker\ j = im\ i = ker\ \phi$ ó $ker\ j = im\ i = im\ \phi$. En este sentido, a ϕ se le llama -a falta de una traducción apropiada- un **splitting** de la sucesión en cuestión.*

[5] Nuevamente, ésta es una definición que no requiere el hecho de que los grupos sean abelianos.

Notemos que si ϕ es un *splitting* de $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$, entonces $(1_B - \phi)$ también lo es, pues por un lado se tiene que $(1_B - \phi)$ es idempotente en tanto...

$$[1_B - \phi]([1_B - \phi](b)) = [1_B - \phi](1_B(b) - \phi(b)) = [1_B - \phi](1_B(b)) - [1_B - \phi](\phi(b))$$
$$= b - \phi(b) - \phi(b) + \phi^2(b) = b - \phi(b) = [1_B - \phi](b)$$

... para toda $b \in B$.

Por el otro, es cierto que $ker\ (1_B - \phi) = im\ \phi$ y que $ker\ \phi = im\ (1_B - \phi)$; la primera igualdad se obtiene por doble contención en tanto $ker\ (1_B - \phi) = \{b \in B \mid b = \phi(b)\} \subseteq im\ \phi$ nos da una, y $[1_B - \phi](\phi(b')) = \phi(b') - \phi^2(b') = \phi(b') - \phi(b') = 0$ nos da la otra; la segunda igualdad se tiene pues $\phi([1_B - \phi](b)) = \phi(b - \phi(b)) = \phi(b) - \phi^2(b) = 0$ nos muestra la contención derecha mientras que el hecho de que $\phi(b) = 0$ implique que $b = b - \phi(b) = [1_B - \phi](b)$ revela la izquierda.

A continuación, trabajamos un par de proposiciones que nos permiten caracterizar cuándo una sucesión exacta se escinde:

Proposición 1.2.4. *La sucesón exacta de grupos* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$ *se escinde si y sólo si* $B \approxeq A \oplus C$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que ϕ es un *splitting* para la sucesión en cuestión, entonces la nota tras la definición 1.2.3 nos ayudará a probar que $B \approxeq ker\ \phi \oplus im\ \phi$ a continuación:

Como $ker\ \phi = im\ (1_B - \phi)$, el hecho de que para cada $b \in B$, $b = [1_B - \phi](b) + \phi(b)$ nos implica que la unión de $ker\ \phi$ y $im\ \phi$ generan a B; por otro lado, como $im\ \phi = ker\ (1_B - \phi) = \{b \in B \mid b = \phi(b)\}$, entonces $b \in im\ \phi \cap ker\ \phi = ker\ (1_B - \phi) \cap ker\ \phi$ si y sólo si $b = 0$, con lo que, y gracias a la definición 1.1.2, tenemos precisamente que $B \approxeq ker\ \phi \oplus im\ \phi$.

Ahora bien, suponemos que $ker\ \phi = im\ i$ (si no se diera esta igualdad, entonces sustituimos ϕ por $(1_B - \phi)$) y vemos que $\{0\} = im\ \phi \cap ker\ \phi = im\ \phi \cap im\ i = im\ \phi \cap ker\ j$, y por lo tanto que $j : im\ \phi \to C$ es un monomorfismo. Pero inlcuso más, pues si consideramos que $j : B \to C$ es un epimorfismo y que $B \approxeq ker\ \phi \oplus im\ \phi = ker\ j \oplus im\ \phi$, entonces j es de hecho un epimorfismo entre $im\ \phi$ y C. Con estos dos resultados, tenemos que $im\ \phi \overset{j}{\approxeq} C$ y consecuentemente que $B \approxeq ker\ \phi \oplus im\ \phi = im\ i \oplus im\ \phi \approxeq im\ i \oplus C \approxeq A \oplus C$ -donde el último isomorfismo se tiene a cuenta de que i es monomorfismo[6]. □

Proposición 1.2.5. *Si* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta de grupos abelianos, entonces las siguientes son equivalentes:*

1. *Existe un homomorfismo inverso izquierdo* $s : B \to A$ *de* i.

[6]En la cadena de isomorfismos apuntada, estamos usando aparte algo fácil de anticipar, y es el hecho general de que si $A \approxeq C$ y $B \approxeq D$, entonces $A \oplus B \approxeq C \oplus D$ vía el homomorfismo que extiende a los isomorfismos hipóteticos según la Propiedad Universal de las sumas directas (teorema 1.1.5).

2. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$ *se escinde.*

3. *Existe un homomorfismo inverso derecho* $t : C \to B$ *de* j.

Demostración. ($1 \Leftrightarrow 2$) Supongamos que existe $s : B \to A$ tal que $s \circ i = 1_A$. Si definimos $\phi := i \circ s$, entonces tenemos que ϕ es un endomorfismo de B tal que $\phi^2 = (i \circ s) \circ (i \circ s) = (i \circ (s \circ i)) \circ s = (i \circ 1_A) \circ s = i \circ s = \phi$, lo que nos dice que es idempotente. Por otro lado, vemos que como s es inverso izquierdo de i, $im\ s = A$ y por tanto $im\ \phi = im\ (i \circ s) = im\ i|_{im\ s} = im\ i$, de forma que ϕ es un *splitting*.

Inversamente, si suponemos que la sucesión establecida se escinde con un *splitting* ϕ y pensamos, sin pérdida de generalidad, que la igualdad que se cumple es $im\ i = ker\ \phi$ (de no ser así usamos a $(1_B - \phi)$), entonces la prueba de la proposición anterior (1.2.4) nos dice que $B \approxeq im\ i \oplus im\ \phi$. Definimos $s : B \to A$ de la siguiente forma: dada $b \in B$, $s(b) = a$ donde $b = i(a) + \phi(b')$ para algún $b' \in B$. Observamos que s está bien definida pues la representación en sumandos es única (proposición 1.1.3) y se cumple que es el inverso izquierdo de i por construcción.

($3 \Leftrightarrow 2$) Supongamos que existe $t : C \to B$ tal que $j \circ t = 1_C$, entonces $\phi := t \circ j$ es idempotente por un argumento similar al de la prueba de ($1 \Rightarrow 2$). A parte, reconocemos que $ker\ \phi = ker\ j$ según el siguiente razonamiento: es claro que $ker\ j \subseteq ker\ \phi$, y probaremos la otra contención por reducción al absurdo. Supongamos que existe $b \in B$ tal que $\phi(b) = [t \circ j](b) = 0$ y tal que $j(b) \neq 0$; como t es inverso derecho de j, por un lado se tiene que $[j \circ t](j(b)) = j(b) \neq 0$, pero por el otro tenemos que $[j \circ t](j(b)) = j([t \circ j](b)) = j(0) = 0$, con lo que hemos alcanzado una contradicción. Así pues, $ker\ \phi \subseteq ker\ j$ y se cumple la igualdad, de manera que ϕ es un *splitting*.

Para el caso inverso, suponemos sin pérdida de generalidad que ϕ es un *splitting* para la sucesión en cuestión tal que $im\ i = ker\ \phi$ (de no ser así usamos a $(1_B - \phi)$). Es nuevamente la prueba de la proposición 1.2.4 quien nos recuerda que $im\ \phi$ resulta ser isomorfo a C vía precisamente j. En esta línea, definimos $t : C \to im\ \phi \subseteq B$ como $t(c) = j^{-1}(c)$ y se cumple el requerimiento por construcción. ☐

Cabe comentar que a s y t como en la proposición anterior también se les suele llamar *splitting* de la sucesión que se escinde, nombre que queda justificado por la equivalencia probada.

1.3. Acciones de Grupo

En esta sección, los grupos que utilicemos no se tomarán necesariamente abelianos.

Definición 1.3.1. *Sea G un grupo y X un conjunto. Una* ***acción*** *de G sobre X es una función $\phi : G \times X \to X$ tal que...*

- $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$.

- $\phi(1, x) = x$.

*En este sentido, decimos que G actúa sobre X vía ϕ (o simplemente que G actúa sobre X) y que X es un G-**conjunto**. Para algún $g \in G$ y $x \in X$, se usa denotar al elemento $\phi(g, x)$ como gx, de forma que las condiciones anteriores se apuntan de la siguiente forma:*

- $g(hx) = (gh)x$.
- $1x = x$.

Si G actúa sobre X, digamos vía ϕ, entonces para cada $g \in G$, podemos definir una función $f_g : X \to X$ tal que $f_g(x) = gx$. Afirmamos que f_g es una biyección, pues es inyectiva en tanto si $f_g(x) = f_g(y)$ para $x, y \in X$, se tiene entonces que $x = 1x = g^{-1}gx = g^{-1}(gx) = g^{-1}(f_g(x)) = g^{-1}(f_g(y)) = g^{-1}(gy) = gg^{-1}y = 1y = y$; por otro lado, vemos que es suprayectiva al darnos cuenta de que para cada $x \in X$, $f_g(g^{-1}x) = g(g^{-1}x) = gg^{-1}x = 1x = x$. Por motivos así, siempre que nos queramos referir a la *permutación* que algún elemento $g \in G$ defina en un G-conjunto X, la representaremos con el mismo término g, es decir, $g \in G$ induce una biyección $g : X \to X$. De todo esto resulta natural pensar que la "inversa" de g (como función) es la inducida por el elemento g^{-1} y que el elemento 1 induce la biyección identidad.

Una manera alternativa que tenemos para describir las acciones de grupo es mediante homomorfismos de un grupo dado G sobre el grupo de permutaciones (bajo la composición) $\mathcal{S}_X$ de un conjunto X. Es decir, si ϕ es una acción de G sobre X tal como definida arriba, entonces podemos inducir un homomorfismo $\Phi : G \to \mathcal{S}_X$ tal que $\Phi(g) = g$, con g la función inducida por el elemento g a través de la acción ϕ según lo anotado en el párrafo anterior; Φ es ciertamente un homomorfismo a razón de que $\Phi(gh)(x) = gh(x) = g(hx) = g(h(x)) = [g \circ h](x) = [\Phi(g) \circ \Phi(h)](x)$.

Asimismo, si G es un grupo cualquiera y existe un homomorfismo $\Psi : G \to \mathcal{S}_X$, entonces podemos pensar en la acción $\psi : G \times X \to X$ dada por $\psi(g, x) = \Psi(g)(x)$, que cumple ser una acción de G sobre X en virtud de que $\psi(g, \psi(h, x)) = \Psi(g)(\psi(h, x)) = \Psi(g)(\Psi(h)(x)) = [\Psi(g) \circ \Psi(h)](x) = \Psi(gh)(x) = \psi(gh, x)$ y de que $\psi(1, x) = \Psi(1)(x) = 1_X(x) = x$.

Definición 1.3.2. *Si X es un G-conjunto y $x \in X$, entonces el conjunto $\{gx \mid g \in G\}$ se conoce como la **órbita** de x bajo la acción de G y se le denota como Gx.*

Proposición 1.3.3. *El conjunto $\{Gx \mid x \in X\}$ es una partición para X.*

Demostración. Para $x, y \in X$, supongamos que $Gx \cap Gy \neq \emptyset$ y llamemos z a un elemento en $Gx \cap Gy$ -tal que $z = g_1x = g_2y$ para algunos $g_1, g_2 \in G$. Entonces, si $w \in Gx$ con $w = g_0x$ para algún $g_0 \in G$, se tiene que $w = g_0x = g_0(g_1^{-1}g_2y) = (g_0g_1^{-1}g_2)y$, con lo que $w \in Gy$ y $Gx \subseteq Gy$. De manera análoga, podemos comprobar que $Gy \subseteq Gx$ y con ello que $Gx = Gy$.

A su vez, la unión de todas las órbitas es ciertamente X, pues para todo $x \in X$, $1x \in Gx$, en vista de lo cual la proposición es cierta. $\square$

Si bien nos encontramos en un capítulo de “preliminares algebraicos”, hay que discutir -mañosamente- el caso en que los “conjuntos cualesquiera” son espacios topológicos.

Definición 1.3.4. *Sea G un grupo. Diremos que la pareja (G, τ_G) es un **grupo topológico** si y sólo si τ_G es una topología para G que hace continuas a las siguientes funciones:*

- $\cdot : G \times G \to G$ *con* $\cdot(x, y) = xy$,
- ${}^{-1} : G \to G$ *con* ${}^{-1}(x) = x^{-1}$.

Definición 1.3.5. *Sea G un grupo topológico y X un espacio topológico. Una **acción** de G sobre X es una función continua $\phi : G \times X \to X$ tal que...*

- $g(hx) = (gh)x$.
- $1x = x$.

*En este sentido, decimos que G actúa sobre X vía ϕ (o simplemente que G actúa sobre X) y que X es un G**-espacio**.*

Es claro que si X es un G-espacio, entonces las funciones inducidas por los elementos de G, a las que hemos denotado como $g : X \to X$ $(g \in G)$, resultan continuas y por lo tanto homeomorfismos.

Capítulo 2

Preliminares Topológicos

2.1. Conexidad, Convexidad y Compacidad

No es de extrañar que arranquemos hablando sobre estas tres cualidades de los espacios topológicos usuales, estando ellas tan ligadas a la “forma” con que éstos se presentan en nuestra imaginación. Son conceptos relativamente elementales que no abordaremos con la profundidad alcanzable porque significaría desviarnos del propósito de esta tesis. Tras dedicarnos a las definiciones pertinentes, resumiremos los pocos resultados que le den a nuestros trazos posteriores cimiento claro y serio.

Unas notas antes de empezar: si X y Y son homeomorfos, lo denotaremos como $X \approx Y$. A su vez, si X es un espacio métrico, representaremos la bola abierta de radio ϵ alrededor de $x \in X$ como $B_\epsilon(x)$, mientras que usaremos el símbolo 1_X para identificar a la identidad topológica de X en X. Para $A \subseteq X$, el interior de A será marcado $int(A)$, su cerradura $\overline{X}$, y su frontera $Fr(A)$.

Definición 2.1.1. *Un espacio topológico X es* ***disconexo*** *si y sólo si existen dos abiertos $A, B \neq \emptyset$ tales que $A \cap B = \emptyset$ y $X = A \cup B$. Señalamos que a la pareja (A, B) se le dice, consecuentemente,* ***disconexión*** *de X. Por otro lado y sin sorpresas, decimos que X es* ***conexo*** *si y sólo si X no es disconexo. A su vez, un subconjunto $Z \subset X$ se dice conexo si y sólo si es conexo como subespacio de X, es decir, con la topología heredada.*

Ejemplo 2.1.2. *El intervalo cerrado $I = [0, 1]$ es conexo.*

Esto se ve si suponemos que existe una disconexión (A, B) de I tal que (sin pérdida de generalidad) $1 \in B$. Lo último nos implica que el supremo de A $sup(A) \neq 1$, pues B es abierto y 1 tiene un abierto alrededor de él completamente contenido en B. Así pues, $0 < sup(A) < 1$ y cualquier abierto alrededor de $sup(A)$ intersecta tanto a A como a B, de manera que $sup(A)$ no puede vivir ni en el abierto A ni en el abierto B y por lo tanto $A \cup B \neq I$.

Proposición 2.1.3. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X es conexo.*

2. *Los únicos abiertos y cerrados en X son X y $\emptyset$.*

3. *No existe una función continua suprayectiva $f : X \to \{0,1\}$.*

Demostración. Las tres implicaciones serán probadas por contrapositiva:

($1 \Rightarrow 2$) Supongamos que existe un subconjunto no vacío $A \neq X$ abierto y cerrado en X; entonces $(A, X\backslash A)$ es una disconexión de X.

($2 \Rightarrow 3$) Supongamos que existe $f : X \to \{0,1\}$ continua y suprayectiva, entonces $f^{-1}[0] \neq \emptyset$, $f^{-1}[0] \neq X$ y se cumple que $f^{-1}[0]$ es abierto y cerrado en X, pues 0 es abierto y cerrado en $\{0,1\}$ y f es continua.

($3 \Rightarrow 1$) Si existe una disconexión (A, B) de X, entonces definimos $f : X \to \{0,1\}$ como $f(x) = 0$ si $x \in A$ y $f(x) = 1$ si $x \in B$, la cual está bien definida (porque se "pega bien"), es continua (es un caso particular de la extensión de funciones continuas -véase [4, capítulo III, sección 9]-) y suprayectiva. □

Proposición 2.1.4. *Si X es un espacio conexo y $f : X \to Y$ es una función continua, entonces $f[X]$ es conexo en Y.*

Demostración. Supongamos que $f[X]$ no es conexo. Por la proposición anterior (2.1.3), existe una función continua y suprayectiva $g : f[X] \to \{0,1\}$, pero eso implicaría que $g \circ f : X \to \{0,1\}$ fuera continua y suprayectiva, con lo que X no sería conexo a raíz de la misma proposición 2.1.3. □

Definición 2.1.5. *Sea X un espacio topológico. Una colección de abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ se dice* ***cubierta abierta*** *de X si y sólo si para toda $x \in X$, existe $U_{\alpha_x} \in \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ tal que $x \in U_{\alpha_x}$.*

Proposición 2.1.6. *Si X es conexo y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una cubierta abierta de X, entonces cualquier par de puntos $x, w \in X$ se puede conectar por una cadena finita de elementos de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$. Es decir, existe una subcolección finita $\{U_{\alpha_i}\}_{1 \leq i \leq n} \subseteq \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ tal que $x \in U_{\alpha_1}$, $w \in U_{\alpha_n}$ y $U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_{i+1}} \neq \emptyset$ para toda $1 \leq i \leq n-1$.*

Demostración. Sea $x \in X$ y sea Z el conjunto de todos los puntos que se pueden conectar con x por alguna cadena finita de elementos de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$. Entonces Z es la unión de los elementos de todas las cadenas finitas que cumplen que $x \in U_{\alpha_1}$ -que son abiertos- y por lo tanto es un abierto en X.

Ahora bien, si $z \in \overline{Z}$, entonces existe $U_z \in \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ tal que $z \in U_z$ y $U_z \cap Z \neq \emptyset$. Sea $b \in U_z \cap Z$, entonces existe una cadena finita $\{U_{\alpha_i}\}_{1 \leq i \leq n_b} \subseteq \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ tal que $x \in U_{\alpha_1}$ y $b \in U_{\alpha_{n_b}}$; así pues, $U_{\alpha_{n_b}} \cap U_z \neq \emptyset$ y la cadena $\{U_{\alpha_i}\}_{1 \leq i \leq n_b+1}$ tal que $U_{\alpha_{n_b+1}} = U_z$ es finita y conecta a x con z, de manera que $z \in Z$ y Z es cerrado.

Con esto, tenemos que Z es un abierto y cerrado no vacío ($x \in Z$) de un conexo X, lo que implica que $Z = X$ en virtud de la proposición 2.1.3. □

Definición 2.1.7. *Un espacio topológico X es* ***conexo por trayectorias*** *si y sólo si para todo par de puntos $x, z \in X$ existe una función continua $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = z$. A tal función la llamamos* ***trayectoria*** *(de x a z).*

Proposición 2.1.8. *Si X es conexo por trayectorias, entonces X es conexo.*

Demostración. Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que X es conexo por trayectorias y que existe una disconexión (A, B) de X. Si f es la trayectoria de a a b para un par de puntos tales que $a \in A$ y $b \in B$, entonces $(f^{-1}[A], f^{-1}[B])$ sería una disconexión de $[0,1]$, lo que es una contradicción al recordar nuestro ejemplo 2.1.2. □

Es claro, por ejemplo, que si X es conexo por trayectorias y existe $h : X \to Y$ continua y suprayectiva, entonces Y también es conexo por trayectorias, pues para cada $y_1, y_2 \in Y$ (con $x_1, x_2 \in X$ tales que $h(x_1) = y_1$ y $h(x_2) = y_2$), se cumple que la trayectoria de x_1 a x_2 compuesta con h es una trayectoria de y_1 a y_2.

Definición 2.1.9. *Un espacio topológico X se dice* ***localmente conexo (localmente conexo por trayectorias)*** *si y sólo si para cada punto $x \in X$ y U abierto tal que $x \in U$, existe un abierto V conexo (conexo por trayectorias) tal que $x \in V \subseteq U$.*

Definición 2.1.10. *Dado un punto $x \in X$, el subconjunto conexo (conexo por trayectorias) más grande -en el sentido de la contención- de X alrededor de x es llamado* ***componente (componente conexa por trayectorias)*** *de x en X.*

A la luz de la definición anterior, observamos que las componentes (componentes conexas por trayectorias) de un espacio X constituyen una *partición* de X.

Proposición 2.1.11. *Si X es localmente conexo por trayectorias, entonces X es conexo si y sólo si X es conexo por trayectorias.*

Demostración. El regreso está probado con generalidad en la proposición 2.1.8. La ida se da por la proposición 2.1.6 de la siguiente manera: para un par de puntos $x, y \in X$, tomamos la cubierta de X formada por los abiertos localmente conexos por trayectorias alrededor de cada punto en X; luego conectamos a x con y mediante una cadena finita de elementos de la cubierta y reparametrizamos las trayectorias entre x y puntos cuidadosamente escogidos en las intersecciones de los elementos de la cadena hasta obtener una trayectoria de x a y. □

Dejemos un poco de lado la introducción de la *conexidad* para concentrar esfuerzos en apuntalar aquélla alrededor de la *convexidad*.

Definición 2.1.12. *Un subconjunto C de $\mathbb{R}^n$ se dice* ***convexo*** *si y sólo si para cada par de puntos $x, y \in C$, el segmento de recta entre ellos queda completamente contenido en C, es decir, $\{(1-t)x + ty \mid 0 \le t \le 1\} \subseteq C$.*

Corolario 2.1.13. *Todo $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo es conexo por trayectorias.*

Demostración. Dados $x, y \in C$, la función $f[0,1] \to C$ dada por $f(t) = (1-t)x + ty$ es continua y es tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. □

Antes de proseguir, apuntamos que para $p+1$ puntos $v_0, ..., v_p \in \mathbb{R}^n$, se conoce como *combinación convexa* de ellos a cualquier punto de la forma $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i$ tal que $0 \leq \lambda_i \leq 1$ para toda $0 \leq i \leq p$ y $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1$.

Observamos a su vez que si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo, entonces tiene a todas las combinaciones convexas de sus puntos; es decir, para toda $m \in \mathbb{N}$, las combinaciones convexas de $\{c_i\}_{0 \leq i \leq m} \subseteq C$ se quedan en C. Esto se prueba por inducción sobre m de la siguiente forma: el caso $m = 0$ es sencillo de apreciar; luego, si suponemos que sucede para las combinaciones convexas de m puntos, probamos que también ocurre para las de $m+1$ puntos al ver que, si $\lambda_m \neq 1$, entonces...

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i c_i = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i c_i + \lambda_m c_m = (1-\lambda_m) \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{(1-\lambda_m)} c_i + \lambda_m c_m$$

... donde el hecho cierto de que $\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{(1-\lambda_m)} = \frac{1-\lambda_m}{(1-\lambda_m)} = 1$ nos garantiza con la hipótesis de inducción que $\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{(1-\lambda_m)} c_i \in C$ y por lo tanto que el segmento $(1-\lambda_m) \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{(1-\lambda_m)} c_i + \lambda_m c_m$ también. Si por otra parte suponemos que $\lambda_m = 1$, entonces la combinación es solamente c_m, ya tomado en C.

Definición 2.1.14. *Dados $p+1$ puntos $v_0, ..., v_p \in \mathbb{R}^n$, llamamos* ***casco convexo*** *de $\{v_0, ..., v_p\}$ al conjunto de todas las combinaciones convexas de esos puntos. Por ponerlo en símbolos "comprensivos", nos referimos al conjunto...*

$$\mathsf{H}_{\{v_0,...,v_p\}} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i, \; \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1, \; 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}.$$

Para cada $x \in \mathsf{H}_{\{v_0,...,v_p\}}$, llamamos ***coordenadas baricéntricas*** *de x a los coeficientes λ_i en la combinación convexa que determina al punto.*

Proposición 2.1.15. *Para un conjunto de $p+1$ puntos $\{v_0, ..., v_p\} \subset \mathbb{R}^n$, su casco convexo es el subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ más pequeño (en el sentido de la contención) que lo contiene.*

Demostración. Solamente nos falta revisar que $\mathsf{H}_{\{v_0,...,v_p\}}$ es en efecto convexo, pues sabiendo esto, la nota previa a la definición 2.1.14 nos cerciorará de la certeza de la afirmación.

Así pues, dados $x, y \in \mathsf{H}_{\{v_0,...,v_p\}}$ con $x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i$ y $y = \sum_{i=0}^{p} \mu_i v_i$, sabemos que, para toda $0 \leq t \leq 1$...

$$(1-t)x + ty = (1-t)\left(\sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i\right) + t\left(\sum_{i=0}^{p} \mu_i v_i\right) = \sum_{i=0}^{p} ((1-t)\lambda_i + t\mu_i) v_i$$

... donde $\sum_{i=0}^{p}((1-t)\lambda_i+t\mu_i) = (1-t)\left(\sum_{i=0}^{p}\lambda_i\right)+t\left(\sum_{i=0}^{p}\mu_i\right) = (1-t)+t = 1$, lo que significa que $(1-t)x+ty$ es de hecho una combinación convexa de los puntos en $\{v_0, ..., v_p\}$ y por lo tanto vive en $\mathsf{H}_{\{v_0,...,v_p\}}$, asegurándonos el hecho de que éste es convexo. $\square$

Definición 2.1.16. *Decimos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene **forma de estrella** si y sólo si existe un punto $a_0 \in A$, al que llamaremos **centro**, tal que para todo $a \in A$ el segmento $(1-t)a_0 + ta$ $(0 \leq t \leq 1)$ queda completamente contenido en A.*

Es suficientemente claro, entonces, que todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ tiene forma de estrella, pues cualquier punto en él funciona como centro.

A continuación, veremos ciertas nociones relacionadas a la idea de *afinidad* en una acepción que nos convendrá mucho por su relación con la dimensión de los cascos convexos de puntos en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.1.17. *Llamamos a $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un **hiperplano** si y sólo si es traslación de algún subespacio vectorial V de $\mathbb{R}^n$. En este sentido, diremos que la dimensión (lineal) de A es la de V.*

Definición 2.1.18. *Dados $p+1$ puntos $v_0, ..., v_p \in \mathbb{R}^n$, diremos que son **afínmente independientes** si y sólo si el conjunto de vectores $\{v_i - v_0 \mid 1 \leq i \leq p\}$ es linealmente independiente. Cabe mencionar que la definición también es válida si anclamos los vectores en cualquier v_j con $0 \leq j \leq p$.*

Si tomamos $p+1$ puntos $v_0, ..., v_p$ afínmente independientes en $\mathbb{R}^n$, entonces su casco convexo $\mathsf{H}_{\{v_0,...,v_p\}}$ no puede vivir en ningún hiperplano con dimensión lineal menor que p.

Ahora bien, la definición de *casco convexo* (2.1.14) nos arroja que éste sí vive en un hiperplano p-dimensional y que es $v_0 + W$ con $W = \langle\{v_i - v_0 \mid 1 \leq i \leq p\}\rangle$ (generado lineal) ya que, para todo $x \in \mathsf{H}_{\{v_0,...,v_p\}}$ con $x = \sum_{i=0}^{p}\lambda_i v_i$, se cumple que $x = (1 - \sum_{i=1}^{p}\lambda_i)\, v_0 + \sum_{i=1}^{p}\lambda_i v_i = v_0 + \sum_{i=1}^{p}\lambda_i(v_i - v_0)$.

Definición 2.1.19. *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo. $f : C \to \mathbb{R}^n$ se dice **función afín** si y sólo si $f((1-t)x + ty) = (1-t)f(x) + tf(y)$ para todo $x, y \in C$ y $0 \leq t \leq 1$.*[1]

Observemos que toda función afín $f : C \to \mathbb{R}^n$ es tal que si d es una combinación convexa de elementos de C de la forma $\sum_{i=0}^{m_d}\lambda_i c_i$ (con $\lambda_{m_d} \neq 1$ sin pérdida de generalidad), entonces $f(d) = f\left(\sum_{i=0}^{m_d}\lambda_i c_i\right) = \sum_{i=0}^{m_d}\lambda_i f(c_i)$, lo que sucede gracias a que $f\left(\sum_{i=0}^{m_d}\lambda_i c_i\right) = f\left((1-\lambda_{m_d})\sum_{i=0}^{m_d-1}\frac{\lambda_i}{(1-\lambda_{m_d})}c_i + \lambda_{m_d}c_{m_d}\right)$, con lo que la observación se tiene por inducción justo como cuando vimos que en un convexo viven todas las combinaciones convexas de sus puntos.

En este momento, pasaremos a revisar de manera muy somera el concepto primordial de *compacidad*.

Definición 2.1.20. *Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una cubierta abierta de un espacio X. Una cubierta abierta $\{V_\beta\}_{\beta\in K}$ se dice **refinamiento** de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ si y sólo si para todo $\beta \in K$ existe $\alpha \in J$ tal que $V_\beta \subseteq U_\alpha$. En este sentido, también podemos decir que $\{V_\beta\}_{\beta\in K}$ **refina** a $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$.*

[1] Si además f es continua, entonces la llamaremos *aplicación afín*.

Resulta bastante natural convencerse de que para toda cubierta abierta de algún espacio topológico siempre existe una cubierta de básicos que la refina.

Definición 2.1.21. *Si X es un espacio topológico, decimos que X es* ***compacto*** *si y sólo si toda cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de X admite una subcubierta finita. Consecuentemente, decimos que $A \subset X$ es compacto si y sólo si es compacto con la topología heredada como subespacio.*[2]

Proposición 2.1.22. *Si X es compacto y $f : X \to Y$ es continua, entonces $f[X]$ es compacto en Y.*

Demostración. Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una cubierta abierta de $f[X]$. Es fácil ver que $\{f^{-1}[V_\alpha]\}_{\alpha\in J}$ es una cubierta abierta de X que admite una subcubierta finita en vista de que X es compacto. Sea $\{f^{-1}[V_{\alpha_i}]\}_{1\leq i\leq n}$ tal subcubierta. Entonces afirmamos que $\{V_{\alpha_i}\}_{1\leq i\leq n}$ es una subcubierta finita de $f[X]$, pues para toda $y \in f[X]$ con $y = f(x)$ para alguna $x \in X$, existe un $1 \leq j \leq n$ tal que $x \in f^{-1}[V_{\alpha_j}]$, lo que inmediatamente implica que $f(x) = y \in V_{\alpha_j}$. □

Hay un conocido teorema que afirma que un espacio métrico es compacto si y sólo si es *completo* y *totalmente acotado*. Por otro lado, un resultado similar -y muy famoso- nos otorga condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ sea compacto. A continuación, enunciamos dicho resultado, que dejaremos sin probar pero cuya prueba se puede encontrar en cualquier libro de análisis o de cálculo.

Teorema 2.1.23 (Heine-Börel)**.** *$A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.* □

Estudiemos un par de ejemplos que nos servirán más adelante:

Ejemplo 2.1.24. *$\prod_{\beta\in J} X_\beta$ es compacto si y sólo si X_β es compacto para toda $\beta \in J$.*

Más conocida como el Teorema de Tychonoff, esta afirmación se prueba -de ida- usando la continuidad de las proyecciones junto con la proposición 2.1.22, y -de regreso- usando el Lema de la Subbase de Alexander o con propiedades de filtros y ultrafiltros, como se puede ver en [4, capítulo XI].

Ejemplo 2.1.25. *El intervalo $I = [0, 1]$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, lo que se tiene gracias al Teorema de Heine-Börel (teorema 2.1.23).*

2.2. Espacios Cociente y Adjunciones

Para un espacio topológico X, un conjunto Y y una función suprayectiva $g : X \to Y$, existe una astuta manera de darle a Y una topología que haga a g

[2] Existen muchas equivalencias de que un espacio sea compacto, siendo de las más comúnmente mencionadas el hecho de que cualquier familia de cerrados de X con la *propiedad de la intersección finita* tenga intersección distinta del vacío y el que cualquier *red* en X tenga un punto de acumulación en X. Véase [4, capítulo XI].

continua, y toca dedicar un espacio de nuestro trabajo a la presentación de esta topología y algunas de sus propiedades por lo mucho que las emplearemos.

Definición 2.2.1. *Sea X un espacio topológico, Y un conjunto y $g : X \to Y$ una función suprayectiva. Definimos la siguiente topología en Y:*

$$\tau_g := \{V \subseteq Y \mid g^{-1}[V] \text{ es un abierto de } X\},$$

la cual es conocida como la ***topología cociente*** *de Y inducida por g. A su vez, diremos que Y es un* ***espacio cociente*** *de X cuando tenga esta topología y que $g : X \to Y$ (ciertamente continua) es una* ***función cociente*** *o una* ***identificación****.*

Debemos corroborar que la definición anterior tiene sentido, es decir, hay que observar que τ_g es de hecho una topología. Esto es claro porque $g^{-1}[\emptyset] = \emptyset$, $g^{-1}[Y] = X$ y "sacar imagen inversa" se "comporta bien" con las uniones e intersecciones, lo que es otra forma de decir que la imagen inversa de una unión (intersección) es la unión (intersección) de imágenes inversas.

Por otro lado, si F es cerrado en Y con la topología cociente, entonces $g^{-1}[F]$ es cerrado en X gracias a que "sacar imagen inversa" se comporta bien con "sacar complemento".

Asimismo, su definición otorga que τ_g es la topología más grande (en el sentido de la contención) que hace a g continua.

Por motivos de cortesía, advertimos de una vez que usaremos los términos *función cociente* e *identificación* indistintamente.

Proposición 2.2.2. *Para espacios topológicos (X, τ_X) y (Y, τ_Y), si $g : X \to Y$ es continua, abierta (o cerrada) y suprayectiva, entonces g es una identificación. Es decir, $\tau_Y = \tau_g$.*

Demostración. Como g es continua, $\tau_Y \subseteq \tau_g$. Veamos la otra contención: dado $V \in \tau_g$, sabemos que $g^{-1}[V] \in \tau_X$ y que, como g es suprayectiva y abierta, entonces $V = g[g^{-1}[V]] \in \tau_Y$, con lo que hemos terminado.

Si por otra parte suponemos que g es cerrada, la prueba corre similarmente usando complementos de cerrados. □

Proposición 2.2.3. *Si $g : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ es una función continua y suprayectiva, entonces es también una identificación si y sólo si para cada espacio topológico (Z, τ_Z) y cada función $f : (Y, \tau_Y) \to (Z, \tau_Z)$, la continuidad de $f \circ g$ implica aquélla de f.*

Demostración. Para la suficiencia, suponemos que g es una identificación ($\tau_Y = \tau_g$) y que $f \circ g$ es continua; así pues, para un abierto $W \in \tau_Z$, $g^{-1}[f^{-1}[W]] = [f \circ g]^{-1}[W] \in \tau_X$, pero por definición de τ_g, esto significa que $f^{-1}[W] \in \tau_g = \tau_Y$ y que por lo tanto f es continua.

La necesidad nos pide probar que $\tau_g = \tau_Y$, para lo cual veremos que $(Y, \tau_Y) \approx (Y, \tau_g)$ usando nuestra hipótesis. Tomemos pues a (Y, τ_g) como el (Z, τ_Z); entonces, tenemos que $1_Y \circ g : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y) \to (Y, \tau_g)$ es continua y por lo tanto que 1_Y es continua. Ahora bien, $1_Y^{-1} \circ g : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_g) \to (Y, \tau_Y)$ es continua porque coincide con g, por lo que la suficiencia nos dice que 1_Y^{-1} es continua y así que $(Y, \tau_Y) \overset{I_Y}{\approx} (Y, \tau_g)$. $\square$

Lema 2.2.4 (Transgresión)**.** *Sea $g : X \to Y$ una identificación y $h : X \to Z$ una función continua. Si h es constante en las fibras de g, la función $hg^{-1} : Y \to Z$ tal que $hg^{-1}(y)$ es el único punto en $h[g^{-1}[y]]$ está bien definida, es continua y hace que el siguiente diagrama conmute:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[dl, "hg^{-1}"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

Demostración. hg^{-1} está bien definida pues por hipótesis h es constante en las fibras de g y así el conjunto $h[g^{-1}[y]]$ es unitario.

Para ver que hace que el diagrama conmute y que es continua, nos fijamos en que, como x está en $g^{-1}[g(x)]$ para toda $x \in X$, entonces $h(x) = hg^{-1}(g(x)) = [hg^{-1} \circ g](x)$ y así hg^{-1} a todas luces hace que el diagrama conmute y resulta continua por la proposición 2.2.3 ($hg^{-1} \circ g$ es continua). $\square$

Hasta ahora, podría parecer un tanto extraño el apellido *cociente* de la topología que hemos estado estudiando, pero esperamos que esa extrañeza se disipe con lo que diremos en las siguientes proposiciones.

Proposición 2.2.5. *Si R es una relación de equivalencia sobre un espacio (X, τ_X) y construimos una topología $\tau_{X/R}$ sobre el cociente (algebraico) X/R tal que...*

$$\tau_{X/R} = \{U \subseteq X/R \mid \bigcup U \in \tau_X\}$$

... entonces $\tau_{X/R} = \tau_p$, donde τ_p es la topología cociente inducida por la proyección canónica $p : X \to X/R$.

Demostración. Si procedemos intentando probar una doble contención, entonces ambas se cumplen porque dado un subconjunto $O \in \tau_{X/R}$, $p^{-1}[O] = \bigcup O$. $\square$

Ejemplo 2.2.6. *Si R es la relación de equivalencia sobre S^n dada por $x \overset{R}{\sim} z$ si y sólo si $z = x$ ó $z = -x$ (la antípoda), entonces se define el **espacio proyectivo** n-dimensional $\mathbb{R}P^n$ como el cociente S^n/R con la topología cociente inducida por la proyección canónica.*

Ejemplo 2.2.7. *Dado un espacio X y $A \subseteq X$, es muy frecuente pensar en el cociente X/T con T la relación de equivalencia dada por $x \overset{T}{\sim} z$ si y sólo si $z = x$ ó $x, z \in A$, donde lo que se está haciendo es "colapsar" a A a un solo punto. Se usa denotar al espacio cociente que resulta de dotar a X/T con la topología cociente inducida por la proyección canónica como X/A.*

Proposición 2.2.8. *Si $g : X \to Y$ es una identificación y R es la relación de equivalencia dada por $x_1 \overset{R}{\sim} x_2$ si y sólo si $g(x_2) = g(x_1)$, entonces $(X/R, \tau_p) \approx (Y, \tau_g)$ (donde τ_p es la topología cociente inducida por la proyección canónica $p : X \to X/R$).*

Demostración. Como g es una identificación, p es continua y p es constante en las fibras de g (por definición de R), el lema de la Trangresión (lema 2.2.4) nos garantiza la existencia de una función continua pg^{-1} tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[dl, "pg^{-1}"] \\ X/R & \end{tikzcd}$$

Ahora bien, como p es una identificación, g es continua y g es constante en las fibras de p, el lema de la Trangresión (lema 2.2.4) nos garantiza la existencia de una función continua gp^{-1} tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & X/R \arrow[dl, "gp^{-1}"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

A parte, se cumple que $[gp^{-1} \circ pg^{-1}] = 1_Y$ y que $[pg^{-1} \circ gp^{-1}] = 1_{X/R}$, por lo que $(X/R, \tau_p) \approx (Y, \tau_g)$ y hemos terminado. $\square$

Así pues, gracias a la proposición anterior, tenemos que todo *espacio cociente* es homeomorfo a cierto cociente (algebraico) con la *topología cociente* inducida por la proyección canónica, con lo que de alguna manera hemos "justificado" los nombres de lo que hasta ahora hemos visto en esta sección.

Para terminar, cambiemos sólo un poco de rumbo para tratar un ejemplo específico de un espacio cociente que usaremos después.

Definición 2.2.9. *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una colección de espacios topológicos. Definimos su **suma topológica** como la unión $\bigcup_{\alpha \in J} X_\alpha \times \{\alpha\}$ con una topología τ_+ tal que U sea abierto si y sólo si $U \cap X_\alpha \times \{\alpha\}$ es abierto para toda $\alpha \in J$. Denotamos a este espacio como $+_{\alpha \in J} X_\alpha$.*

Directo de esta definición vemos que, en una suma topológica, B será cerrado si y sólo si $B \cap X_\alpha \times \{\alpha\}$ es cerrado para toda $\alpha \in J$. A parte, anotamos que los espacios que forman la suma son abiertos y cerrados en la topología τ_+ al ser disjuntos dos a dos, razón por la que también "conservan" su misma topología al restringir nuestra mirada sobre alguno de ellos.

Ejemplo 2.2.10. *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una colección de espacios topológicos no vacíos y $x_\alpha \in X_\alpha$ para toda $\alpha \in J$. Entonces definimos la **cuña** de ellos como el espacio cociente $+_{\alpha \in J} X_\alpha / +_{\alpha \in J}\, x_\alpha$. Denotamos a este espacio como $\bigvee_{\alpha \in J} X_\alpha$.*

Ejemplo 2.2.11. *Sean X, Y dos espacios topológicos y $X + Y$ su suma topológica. Para $A \subseteq X$ cerrado y $f : A \to Y$ continua, definimos una relación de equivalencia R sobre $X + Y$ tal que para cualesquiera $u, v \in X + Y$, $u \overset{R}{\sim} v$ si y sólo si se cumple una de las siguientes:*

- $u = v$.
- $u \in A$, $v \in Y$ *y* $f(u) = v$.
- $v \in A$, $u \in Y$ *y* $f(v) = u$.
- $u, v \in A$ *y* $f(u) = f(v)$.

Entonces, el espacio cociente $(X + Y)/R$ se denomina ***adjunción*** *de X a Y vía f, y se denota como $X \cup_f Y$. En esta línea, a f la llamamos* ***aplicación de adjunción****.*

Como su nombre lo indica, una *adjunción* de algún espacio a otro se refiere a "pegarlos" juntos a través de un subconjunto cerrado del primero y una función continua al segundo, identificando los puntos del subconjunto cerrado con sus imágenes. Cuando hablemos un poco de los CW-complejos celulares, estas definiciones se alzarán llenas de utilidad.

No está de más hacer referencia a la topología que hemos denotado como τ_+; ella es un caso particular de algo que se conoce como ***topología débil*** para una unión de espacios topológicos, un concepto que nuevamente aparecerá con los CW-complejos celulares.

2.3. Homotopía y Grupo Fundamental

La idea de la homotopía surge, como casi todo en Topología, de la pregunta eterna de cuándo dos espacios se parecen. Con la creciente fuerza que cobraba la palabra *homeomorfismo* a este respecto, y al ver que era relativamente complicado darse cuenta si ciertos espacios eran o no homeomorfos, surgieron a través del tiempo nuevos mecanismos y pericias para pulir las comparaciones. Uno de ellos, efectivísimo, es precisamente la teoría de Homotopía. En esta sección hablaremos sobre ella casi lacónicamente por lo extensa y compleja que se ha vuelto con el pasar de los años. Además, revisaremos los principios de la Topología Algebraica.

Antes de empezar, hay que decir que a lo largo de lo que queda del capítulo, siempre denotaremos al intervalo $[0, 1]$ como I.

Definición 2.3.1. *Sean X, Y dos espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ dos funciones continuas. Decimos que f es* ***homotópica*** *a g, denotado $f \simeq g$, si y sólo si existe una función continua $F : X \times I \to Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$ para toda $x \in X$. A F se le conoce como una* ***homotopía*** *entre f y g.*

Sin detenernos mucho en el asunto, mencionamos que $\simeq$ es una relación de equivalencia sobre $C(X,Y) := \{f : X \to Y \mid f \textit{ es continua}\}$, pues es reflexiva en tanto se puede definir una homotopía como $F(x,t) = f(x)$ para toda $f \in C(X,Y)$, simétrica al utilizar $F'(x,t) := F(x,1-t)$ para dar una homotopía entre g y f a través de la homotopía F entre f y g, y transitiva al poder hacer una reparametrización de dos homotopías sin problema alguno. A las clases de equivalencia asociadas a $\simeq$ las llamamos ***clases de homotopía*** y, dada una función $f \in C(X,Y)$, denotamos a su clase de homotopía como $[f]$.

Proposición 2.3.2. *Sean $f, g : X \to Y$ son funciones continuas homotópicas. Para cualesquiera espacios topológicos W y Z y cada función continua $h : Y \to Z$ y cada función continua $k : W \to X$, se tiene que $h \circ f \simeq h \circ g$ y que $f \circ k \simeq g \circ k$.*

Demostración. Todo es cuestión de componer las funciones involucradas con las homotopías involucradas en el orden correcto para obtener nuevas homotopías entre las composiciones cuya relación de homotopía se quiere probar. □

Definición 2.3.3. *Decimos que un espacio es contraíble si y sólo si 1_X es homotópica a una función constante en X.*

Ejemplo 2.3.4. *Todo $S \subseteq \mathbb{R}^n$ con forma de estrella es contraíble, lo que implica que todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es contraíble.*

Esto se prueba de la siguiente forma: si s_0 es un centro de S, entonces construimos $F : S \times I \to S$ tal que $F(r,t) = (1-t)r + ts_0$, la cual está bien definida por la condición de forma de estrella y es a todas luces continua. A parte, se cumple convenientemente que $F(r,0) = r$ y $F(r,1) = s_0$, lo que nos indica que es una homotopía entre 1_S y la función constante sobre s_0.

Cercano a la idea de contractibilidad, es importante ver cuándo dos espacios se pueden "moldear" ("aplastar", "contraer", "torcer", etc.) continuamente hasta convertirse uno en el otro y viceversa, lo que presentamos a continuación.

Definición 2.3.5. *Decimos que dos espacios topológicos X y Y son **homotópicamente equivalentes** o que tienen el mismo **tipo de homotopía**, denotado como $X \simeq Y$, si y sólo si existen funciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$. Tanto f como g son apodadas **equivalencia homotópica**, y se dice que una es **inversa homotópica** de la otra.*

Nuevamente, apuramos el hecho de que $\simeq$ es una relacional de equivalencia sobre la clase de los espacios topológicos al ser claramente reflexiva y simétrica, mientras que su transitividad viene argumentada por una composición de funciones adecuada y la transitividad de la relación de homotopía.

Proposición 2.3.6. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es contraíble.*

2. *X es homotópicamente equivalente a un punto.*

3. *Para todo espacio topológico* W *y* $f, g : W \to X$ *continuas, se tiene que* $f \simeq g$.

Demostración. ($1 \iff 2$) Para la ida, sea $x_0 \in X$ tal que $1_X \simeq x_0$ (donde por comodidad hemos denotado x_0 a la función constante sobre ese punto), y sea $i : \{x_0\} \to X$ la inclusión. Se tiene que $i \circ x_0 = x_0 \simeq 1_X$ y que $x_0 \circ i = 1_{\{x_0\}}$, por lo que tenemos que $X \simeq \{x_0\}$. Para el regreso, suponemos que $X \simeq P$ (donde P es el espacio de un sólo punto) vía equivalencias homotópicas $h : P \to X$ y $h' : X \to P$. Entonces $1_X \simeq h \circ h' = h[P]$ (donde $h[P]$ denota a la función constante sobre el punto $h[P] \in X$).

($1 \iff 3$) De ida, sea W un espacio topológico, $f, g : W \to X$ funciones continuas, y sea x_0 la función constante homotópica a la identidad en X. Entonces la proposición 2.3.2 nos garantiza que $f = 1_X \circ f \simeq x_0 \circ f = x_0 \circ g \simeq 1_X \circ g = g$. De regreso, convenimos $W = X$ y tomamos la identidad-en-X y cualquier función constante como f y g, respectivamente. □

Corolario 2.3.7. *Todo espacio contraíble* X *es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sean $x, y \in X$. Sabemos de la proposición 2.3.6 que la función constante x es homotópica a la función constante y, digamos vía F. Definimos $f : I \to X$ dada por $f(t) = F(z_0, t)$ para cualquier $z_0 \in X$, de tal forma que por definición es continua y se cumple que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. □

Definición 2.3.8. *Si* $A \subseteq X$ *y* $F : X \times I \to Y$ *es una homotopía, decimos que* F *es* ***relativa*** *a* A*, denotado* rel A*, si y sólo si* $F(a, t)$ *no depende de* t *para toda* $a \in A$.

La definición anterior nos dice que si $f \simeq g \ rel\ A$, entonces f y g coinciden sobre A. A su vez, tal como mencionamos después de la definición 2.3.1, y con exactamente los mismos argumentos, hay que percatarnos de que $\simeq_{rel\ A}$ es una relación de equivalencia sobre $C(X, Y)$ ($A \subseteq X$), en la que seguiremos denotando como $[f]$ a las clases de homotopía relativa a A.

Como se puede ver, la idea detrás de la relación de homotopía es una de "contorsionismo", y a menudo es conveniente revisar los casos en los que un espacio se puede deformar sobre uno de sus subconjuntos, gracias a lo cual vienen las siguientes definiciones.

Definición 2.3.9. *Decimos que* $A \subseteq X$ *es un* ***retracto*** *de* X *si y sólo si existe una función continua* $r : X \to A$ *tal que* $r|_A = 1_A$*. A la función* r *se le llama* ***retracción****.*

Definición 2.3.10. *Decimos que* $A \subseteq X$ *es un* ***retracto por deformación*** *de* X *si y sólo si* A *es un retracto de* X *vía* r *y se cumple que* $r \simeq 1_X$*. Si además la homotopía es* rel A*, entonces* A *se conoce como* ***retracto fuerte por deformación*** *de* X*.*

Proposición 2.3.11. *Si* $A \subseteq X$ *es un retracto por deformación de* X*, entonces* $X \simeq A$.

Demostración. Sea r la retracción pertinente sobre A e $i : A \to X$ la inclusión. Entonces $r \circ i = 1_A$, mientras que $i \circ r = r \simeq 1_X$, gracias a lo que tenemos lo que queríamos probar. $\square$

Pausemos nuestro paso sobre estos asuntos y mudemos un poco de perspectiva. Con lo que sigue, estableceremos el primer contacto con la *Topología Algebraica* al platicar acerca del tan conocido *grupo fundamental* de un espacio topológico. Para que su motivación venga sin trabas, escribiremos antes algunas definiciones y resultados más bien técnicos, donde las pruebas estarán resumidas para no perder tiempo y espacio pero cuyo desglose puede encontrarse en [10, capítulo 9]. A partir de ahora, trabajaremos con *trayectorias*.

Definición 2.3.12. *Si $f, g : I \to Y$ son* trayectorias *tales que $f(1) = g(0)$, entonces definimos la **concatenación** de f y g como la función...*

$$(f * g)(s) := \begin{cases} f(2s) & \text{si } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ g(2s-1) & \text{si } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Como f y g coinciden sobre la intersección de sus dominios, son continuas y el dominio de h es la unión de (dos) cerrados, entonces tenemos que f y g están "bien pegadas" y que $f * g$ está bien definida y es continua[3]. Con la concatenación, podemos inducir una operación en cierto subconjunto de clases de homotopía dada por $[f][g] = [f * g]$. Para ver que esta operación está bien definida, consideremos $f \overset{F}{\simeq} f'$ y $g \overset{G}{\simeq} g'$ tales que $f' * g'$ está bien definida (o sea que $f'(1) = g'(0)$), entonces...

$$H(s,t) := \begin{cases} F(2s,t) & \text{si } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ G(2s-1,t) & \text{si } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

... es una homotopía entre $f * g$ y $f' * g'$. Nuestra operación sólo tiene sentido para trayectorias que se pueden "concatenar", así que será importante introducir un nuevo tipo de trayectorias de manera que nos sea posible construir un adecuado *grupo* con esta operación.

Definición 2.3.13. *Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Decimos que una trayectoria $h : I \to X$ es un **lazo** basado en x_0 si y sólo si $h(0) = h(1) = x_0$. Denotemos como $\mathcal{L}_{x_0}(I, X)$ al conjunto de todos los lazos basados en x_0. Sea...*

$$\Pi_1(X, x_0) := (\mathcal{L}_{x_0}(I, X)/ \simeq_{rel\ Fr(I)}, \cdot)$$

... tal que $[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta]$ (a esta operación también la llamamos concatenación*). Entonces $\Pi_1(X, x_0)$ es conocido como el **grupo fundamental** de X con base en x_0, y se refiere al conjunto de las clases de homotopía (relativa a $Fr(I)$) de los lazos basados en x_0 con la operación inducida en este cociente por la* concatenación*.*

[3] Es un caso particular de la extensión de funciones continuas. Se puede ver en [4, capítulo III, sección 9].

Precisamos la revisión de que $\Pi_1(X, x_0)$ es de hecho un grupo, lo que describiremos brevemente ahora:

Proposición 2.3.14. $\Pi_1(X, x_0)$ *es un grupo con la concatenación.*

Demostración. La definición de la concatenación nos dice que $\Pi_1(X, x_0)$ es cerrado bajo su operación, pues para cualquier par de lazos basados en x_0 a quienes llamemos α_1 y α_2, su concatenación está justificada y se tiene que $\alpha_1 * \alpha_2$ vuelve a ser un lazo basado en x_0.

Ahora bien, la identidad en $\Pi_1(X, x_0)$ será la clase del lazo constante x_0, pues para cualquier lazo α basado en x_0, la función...

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(s\left(\frac{2}{2-t}\right)\right) & \text{para } 0 \leq s \leq \frac{2-t}{2}, \\ x_0 & \text{para } \frac{2-t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

... es una homotopía *rel* $Fr(I)$ entre α y $\alpha * x_0$. Muy similarmente, podemos construir una homotopía *rel* $Fr(I)$ entre α y $x_0 * \alpha$, implicando así lo que queríamos.

La verificación de la asociatividad se hace con argumento parecido, al ver que...

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(s\left(\frac{4}{2-t}\right)\right) & \text{para } 0 \leq s \leq \frac{2-t}{4}, \\ \beta\left(4\left(s - \frac{2-t}{4}\right)\right) & \text{para } \frac{2-t}{4} \leq s \leq \frac{3-t}{4}, \\ \gamma\left(\frac{4}{1+t}\left(s - \frac{3-t}{4}\right)\right) & \text{para } \frac{3-t}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

... es de hecho una homotopía *rel* $Fr(I)$ entre $\alpha * (\beta * \gamma)$ y $(\alpha * \beta) * \gamma$ para cualesquiera α, β, γ lazos basados en x_0.

Para el inverso, dado α un lazo basado en x_0, definimos α^{-1} como $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1-s)$[4]. En este caso, la función...

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{para } 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2}, \\ \alpha^{-1}(2t + 2s - 1) & \text{para } \frac{1-t}{2} \leq s \leq 1 - t, \\ x_0 & \text{para } 1 - t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

... es una homtopía *rel* $Fr(I)$ entre $\alpha * \alpha^{-1}$ y el lazo constante x_0. Como aparte se cumple que $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$, tenemos también que $\alpha^{-1} * \alpha \simeq x_0$. Así pues, para $[\alpha] \in \Pi_1(X, x_0)$, definimos $[\alpha]^{-1}$ como $[\alpha^{-1}]$ y obtenemos los inversos[5]. $\square$

[4]Este mecanismo de definición se puede aplicar a cualquier trayectoria. Es decir, dada $h : I \to X$ una trayectoria, digamos de x_0 a x_1, podemos pensar sin complicaciones en la trayectoria $h^{-1}(s) = h(1-s)$ que va de x_1 a x_0.

[5]La definición de los inversos es independiente del representante de la clase de homotopía *rel* $Fr(I)$ elegido, pues para α un lazo basado en x_0 se cumple que si $\alpha \overset{F}{\simeq} \beta$ *rel* $Fr(I)$, entonces $F' : I \times I \to X$ tal que $F'(s,t) = F(1-s,t)$ es una homotopía *rel* $Fr(I)$ entre α^{-1} y β^{-1}.

El grupo fundamental con base en un punto dado de un espacio topológico es una maravilla a la que podemos sacarle mucho jugo. En primer lugar, al ser un invariante topológico -lo que veremos un poco más adelante-, nos permitirá decidir cuándo dos espacios no son homeomorfos, siendo éste uno de sus principales propósitos cuando lo concibió el genio Poincaré. Es consabido que funciona excelentemente para detectar cierto tipo de "agujeros", tales como el de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ o el de S^1. A discusiones amigables sobre esto y otras propiedades dedicaremos la parte final de la sección presente, que comienza aquí.

Proposición 2.3.15. *Si X es conexo por trayectorias y $x_0, x_1 \in X$, entonces $\Pi_1(X, x_0) \approxeq \Pi_1(X, x_1)$.*

Demostración. Sea h la trayectoria que va de x_0 a x_1. Entonces $h^* : \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(X, x_1)$ dado por $h^*([\alpha]) = [h^{-1} * (\alpha * h)]$ (donde h^{-1} tiene sentido por lo dicho en la nota al pie 4) es un isomorfismo. □

Gracias a esta proposición, podemos referirnos a los grupos fundamentales de espacios conexos por trayectorias sin hacer alusión a algún punto-base, con lo que notaciones como $\Pi_1(X)$ cobran sentido. Un caso particularmente importante de esta situación se da cuando el grupo fundamental de un espacio conexo por trayectorias es trivial, en vista de lo cual ponemos en la mesa a los espacios *simplemente conexos.*

Definición 2.3.16. *Si X es un espacio conexo por trayectorias, decimos que X es **simplemente conexo** si y sólo si $\Pi_1(X) \approxeq 1$[6].*

Por poner un ejemplo, el espacio P de un sólo punto es simplemente conexo con todas las de la ley; con miras a proveernos de otros ejemplos de espacios simplemente conexos, veamos la estrategia para inducir homomorfismos entre grupos fundamentales, asociados a funciones continuas.

Proposición 2.3.17. *Si $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$[7] es una función continua, entonces definimos $f_+ : \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(Y, y_0)$ tal que $f_+([\alpha]) = [f \circ \alpha]$. Afirmamos que f_+ es un homomorfismo y que si $f \backsimeq g$, entonces $f_+ = g_+$. Más aun, se cumple que $1_+ = 1\_$ y que $(f \circ g)_+ = f_+ \circ g_+$.*

Demostración. Antes que nada, f_+ está bien definido porque si $\alpha \backsimeq \alpha'$, entonces $f \circ \alpha \backsimeq f \circ \alpha'$ a raíz de la proposición 2.3.2. Luego, como es claro que $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$ para cualesquiera dos lazos basados en x_0 que representemos con α y β, tenemos que...

$$f_+([\alpha][\beta]) = f_+([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] = [(f \circ \alpha)][(f \circ \beta)] = f_+([\alpha])f_+([\beta]).$$

Para ver que dos funciones homotópicas inducen el mismo homomorfismo, basta usar una vez más la proposición 2.3.2.

---

[6] Como no estamos lidiando con grupos exclusivamente abelianos, "volvemos" a una notación multiplicativa, según la cual denotamos al grupo trivial como 1.

[7] Ésta es una función continua entre *pares topológicos*, donde se cumple por definición que $f(x_0) = y_0$. Veáse la definición 2.3.22.

Por otro lado, el "más aun" es igual de fácil de revisar y transmite el *carácter funtorial* de "sacar grupo fundamental", algo que se verá con mayor precisión en el capítulo 3 y con respecto a la *homología singular.* □

Proposición 2.3.18. *El grupo fundamental es un invariante homotópico. Es decir, si* $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$*, entonces* $\Pi_1(X, x_0) \approxeq \Pi_1(Y, y_0)$.

Demostración. Sean $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ y $g : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ las equivalencias homotópicas pertinentes. La proposición anterior (2.3.17) nos garantiza que $g_+ \circ f_+ = (g \circ f)_+ = (1_{(X,x_0)})_+ = 1_{\Pi_1(X,x_0)}$ y que $f_+ \circ g_+ = (f \circ g)_+ = (1_{(Y,y_0)})_+ = 1_{\Pi_1(Y,y_0)}$, con lo que nos damos cuenta de que f_+ y g_+ son isomorfismos e inversos uno del otro. □

Corolario 2.3.19. *Si* $(X, x_0) \approx (Y, y_0)$*, entonces* $\Pi_1(X, x_0) \approxeq \Pi_1(Y, y_0)$. □

Así pues, el grupo fundamental es un invariante topológico.

Corolario 2.3.20. *Si* X *es contraíble, entonces* $\Pi_1(X) \approxeq 1$ *y por lo tanto* X *es simplemente conexo.*

Demostración. Se da al sumar el corolario 2.3.7, la proposición 2.3.6 y el hecho de que un punto es simplemente conexo. □

Ejemplo 2.3.21. *Gracias al corolario anterior y al ejemplo 2.3.4, vemos que cualquier subconjunto convexo no vacío de* $\mathbb{R}^n$ *es simplemente conexo.*

No todo espacio simplemente conexo es contraíble. Un ejemplo de esto lo establece S^n ($n \geq 2$). El hecho de que S^n es simplemente conexo para toda $n \geq 2$ se puede revisar en [2, capítulo III, sección 2]; a su vez, justo al final de la sección 6 de nuestro propio capítulo 3 argumentamos por qué S^n es no contraíble para toda $n \in \mathbb{N}$. De hecho, uno de los primeros problemas que se trabaja al estudiar el *grupo fundamental* es el cálculo de $\Pi_1(S^1)$, lo cual se hace con un sólido manejo de la noción de *espacio cubriente* -que veremos en la siguiente sección. Si bien no será tan de nuestra incumbencia, mencionamos que $\Pi_1(S^1) \approxeq \mathbb{Z}$, lo que muestra que en efecto existe un "hoyo" en este espacio, es decir, que no todo lazo en él se puede "contraer" a un punto.

Como se ha visto, la elección de un punto-base no es muy importante para espacios conexos por trayectorias. Sin embargo, si los espacios no cumplen esta condición, tal elección influye directamente en la naturaleza del grupo fundamental. Es gracias a consideraciones como ésta y a notaciones como las de la proposición 2.3.17 que presentamos de manera más rigurosa un tema que será central en el capítulo de homología singular, y que se refiere a los *pares topológicos.*

Definición 2.3.22. *Si* X *es un espacio topológico y* $A \subseteq X$*, llamamos* ***par topológico*** *a la pareja* (X, A).

En principio, esta definición no aporta nada interesante, pero si consideramos otro par -digamos (Y, B)-, entonces diremos que $f : X \to Y$ es una función entre los pares correspondientes, denotada $f : (X, A) \to (Y, B)$, si y sólo si $f[A] \subseteq B$, lo que ya le pone un poco de color al asunto. Para el caso en que A consista de un sólo punto, digamos $x_0 \in X$, el par $(X, \{x_0\})$ se escribirá (X, x_0) y también se conocerá como ***espacio basado*** (en x_0).

Aunque podría no ser tan aparente, maniobrar con *pares* en vez de con *espacios* surge impulsado de una búsqueda de sencillez y mayor generalidad en cuanto al comportamiento de las funciones continuas y el instrumento que ellas nos suponen para conocer la morfología de los objetos de estudio. En particular, todo *espacio* y *función continua entre espacios* se pueden generalizar, respectivamente, a *pares* y *funciones continuas entre pares* de la siguiente manera: si $f : X \to Y$ es una función continua entre espacios topológicos, entonces $f(X, \emptyset) \to (Y; \emptyset)$ se comporta del mismo modo que f.[8]

La siguiente definición hace explícita la extensión de algunas de las convenciones ya vistas en este capítulo para *espacios* a la clase de los *pares* topológicos. Podemos extender todo lo que sabemos puntualizando las distinciones apropiadas; por ejemplo, hay que mantener presente que si dos espacios son homeomorfos, entonces no necesariamente son homeomorfos-como-pares al tomarles un subespacio.

Definición 2.3.23.

- *(Homotopía) Sean $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ continuas. Decimos que $f \simeq g$ si y sólo si existe una función continua $F : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$.*
- *(Equivalencia homotópica) Decimos que $(X, A) \simeq (Y, B)$ (homotópicamente equivalentes) si y sólo si existen funciones entre pares $f : (X, A) \to (Y, B)$ y $g : (Y, B) \to (X, A)$ tales que $g \circ f \simeq 1_{(X,A)}$ y $f \circ g \simeq 1_{(Y,B)}$.*

2.4. Espacios Cubrientes

En esta sección trataremos el concepto de *espacio cubriente* de un espacio topológico. Las observaciones aquí desenvueltas no sólo serán trascendentales para la prueba del Teorema de Borsuk-Ulam sino que establecen un mecanismo para obtener diversos datos sobre el grupo fundamental de un espacio, nuevamente manifestando la sorprendente fuerza de los puentes entre el Álgebra y la Topología. De hecho, uno de los principales resultados que estudiaremos nos brinda una correspondencia entre ciertos espacios cubrientes para un espacio Y y ciertos subgrupos de $\Pi_1(Y)$.

Definición 2.4.1. *Para Y un espacio topológico, la pareja $(X, \pi : X \to Y)$ es llamada* ***espacio cubriente*** *de Y si y sólo si π es continua y cada punto $y \in Y$ tiene un abierto U_y alrededor de tal manera que $\pi^{-1}[U_y] = \bigcup_{\beta \in J} V_\beta$ es una unión (no vacía) disjunta y $\pi|_{V_\beta} : V_\beta \to U_y$ es un homeomorfismo para toda*

[8] Aquí repta una vez más el concepto de *funtor* que revisaremos en el capítulo 3. No entremos en muchos detalles, pero lo que queremos implicar es que las verdades que conocemos para espacios topológicos tienen cabida cierta en el mundo de los pares. A su vez, emplear pares se prueba utilísimo por arrojar novedades, simplificaciones y nuevas concepciones en las teorías donde se hace.

$\beta \in J$. En este sentido, decimos que π es una ***aplicación cubriente*** *y que U_y está* ***parejamente cubierto*** *por π.*

En la definición anterior, π es un *homeomorfismo local*[9].

Si $\pi : X \to Y$ es una aplicación cubriente, la cardinalidad de la fibra de un punto dado $y \in Y$ es llamada el número de *hojas* de π. Por definición de espacio cubriente, no es difícil ver que tal cardinalidad es localmente constante sobre Y y por lo tanto constante al ser Y conexo y al recordar la proposición 2.1.6. A su vez, dado $y \in Y$, su fibra $\pi^{-1}[y]$ tiene la topología discreta, pues si U_y es el abierto alrededor de y parejamente cubierto por π (con $\pi^{-1}[U_y] = \bigcup_{\beta \in J} V_\beta$), entonces afirmamos que para todo $x \in \pi^{-1}[y]$ y V_{β_x} en la preimagen de U_y tal que $x \in V_{\beta_x}$, se tiene que $V_{\beta_x} \cap \pi^{-1}[y] = \{x\}$. Para revisarlo, supongamos que existe $x_* \in V_{\beta_x} \cap \pi^{-1}[y]$ con $x_* \neq x$, entonces $\pi|_{V_{\beta_x}}(x_*) = \pi|_{V_{\beta_x}}(x) = y$, entrando en contradicción con el hecho de que $\pi|_{V_{\beta_x}}$ es un homeomorfismo sobre U_y.

Veamos, pues, algunos ejemplos:

Ejemplo 2.4.2. *$\pi : \mathbb{R} \to S^1$ tal que $\pi(t) = (cos\ 2\pi t, sen\ 2\pi t)$ es una aplicación cubriente famosa a la que normalmente se refiere como de "hélice". Su uso radica en el cálculo del grupo fundamental de S^1. Es una aplicación cubriente de tantas* hojas *como enteros.*

Ejemplo 2.4.3. *Si vemos a S^1 como subconjunto de $\mathbb{C}$, entonces $\pi : S^1 \to S^1$ tal que $\pi(z) = z^n$ para algún n entero positivo fijo es una aplicación cubriente de n hojas.*

Ejemplo 2.4.4. *La proyección canónica $\pi : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ es una aplicación cubriente de dos hojas. Es pertinente señalar que este ejemplo se generaliza a toda dimensión y que lo usaremos sobremanera en el capítulo relativo al Teorema de Borsuk-Ulam.*

Viene a continuación el vital concepto de *levantamiento* de una función que entra en un espacio "cubierto" Y:

Definición 2.4.5. *Sea $\pi : X \to Y$ una aplicación cubriente y $f : Z \to Y$ una función continua. Una función continua $g : Z \to X$ es llamada* ***levantamiento*** *de f si y sólo si $f = \pi \circ g$, es decir, si hace que el siguiente diagrama conmute:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi"] \\ Z \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

[9]Si X, Y son espacios topológicos, decimos que $f : X \to Y$ es un *homeomorfismo local* si y sólo si para cada $x \in X$, existe un abierto U alrededor de x tal que $f[U]$ es abierto en Y y $f|_U$ es un homeomorfismo. No todo homeomorfismo local, sin embargo, es una *aplicación cubriente*, como $p : \mathbb{R}^+ \to S^1$ tal que $p(x) = (cos\ 2\pi x, sen\ 2\pi x)$ nos muestra.

Dos funciones distintas no pueden tener el mismo levantamiento en tanto si $f : Z \to Y$ es diferente de $f' : Z \to Y$, entonces hay un punto $z \in Z$ tal que $f(z) \neq f'(z)$. Por otro lado, si g fuera un levantamiento de ambas funciones, entonces se cumpliría contradictoriamente que $f(z) = [\pi \circ g](z) = f'(z)$.

Nuestro objetivo a partir de aquí puede bien resumirse en que buscaremos relacionar estos llamados levantamientos con las trayectorias, lazos y homotopías en un espacio cubierto Y. Empezaremos esta tarea con la llamada *Propiedad de Levantamiento de Trayectorias*. Sin embargo, para probar su veracidad necesitamos previamente un par de lemas técnicos:

Lema 2.4.6 (Número de Lebesgue)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una cubierta abierta de X. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que si* $\mathrm{diam}(A) < \delta$ *para algún $A \subseteq X$, entonces existe $\alpha_0 \in J$ tal que $A \subseteq U_{\alpha_0}$. A tal δ le llamamos **Número de Lebesgue** de la cubierta en cuestión.*

Demostración. Dada $x \in X$ y $\alpha_x \in J$ tal que $x \in U_{\alpha_x}$, existe un $\epsilon_x > 0$ tal que $B_{2\epsilon_x}(x) \subseteq U_{\alpha_x}$. Ahora bien, $\{B_{\epsilon_x}(x)\}_{x \in X}$ es a todas luces una cubierta abierta de X, quien al ser compacto admite una subcubierta finita de la forma $\{B_{\epsilon_{x_i}}(x_i)\}_{1 \leq i \leq n}$. Tomemos $\delta = \text{mín}\{\epsilon_{x_i} \mid 1 \leq i \leq n\}$ y veamos que cumple la condición requerida. Supongamos que $A \subseteq X$ es tal que $diam(A) < \delta$. Para $a_0 \in A$ fijo, como $\{B_{\epsilon_{x_i}}(x_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ es cubierta de X, existe $k \in \{1, ..., n\}$ tal que $d(a_0, x_k) < \epsilon_{x_k}$. A parte, para todo $a \in A$ se cumple que $d(a, a_0) < \delta \leq \epsilon_{x_k}$, lo que por la desigualdad del triángulo implica que $d(a, x_k) \leq d(a, a_0) + d(a_0, x_k) < 2\epsilon_{x_k}$. Así pues, $A \subseteq B_{2\epsilon_{x_k}}(x_k) \subseteq U_{\alpha_{x_k}}$ y se tiene la afirmación. □

Lema 2.4.7. *Sea W un espacio topológico Hausdorff y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una cubierta abierta de $W \times I$. Entonces para cada $w \in W$ existe una vecindad N de w y un entero positivo n tal que $N \times [i/n, (i+1)/n] \subset U_{\alpha_i}$ para algún $\alpha_i \in J$, para cada entero $0 \leq i < n$.*

Demostración. $\{w\} \times I$ es compacto en $W \times I$ al ser producto de compactos (recordemos el ejemplo 2.1.24). Sea $\{N_i \times V_i\}_{1 \leq i \leq m}$ una subcubierta finita de $\{w\} \times I$ hecha de básicos del producto y que refina a aquella subcubierta finita de $\{w\} \times I$ contenida en $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ (sabemos que existe al recordar la nota tras las definiciones de *cubierta* y *refinamiento*); notamos que $\{V_i\}_{1 \leq i \leq m}$ es una cubierta abierta finita de I. El lema 2.4.6 (Número de Lebesgue) y la propiedad arquimediana garantizan la existencia de un entero $n > 0$ tal que $[i/n, (i+1)/n]$ se queda contenido en alguno de los V_i, pues $diam([i/n, (i+1)/n]) = 1/n$ y siempre podemos encontrar un entero $n > 0$ tal que $1/n$ sea menor que el número de Lebesgue de la cubierta $\{V_i\}_{1 \leq i \leq m}$. Es tal n la que buscamos, junto con $N = \bigcap_{i=1}^{m} N_i$. Notemos convenientemente que $\{i/n\}_{0 \leq i \leq n}$ es una partición finita de I. □

Lema 2.4.8 (Propiedad de Levantamiento de Trayectorias)**.** *Si $\pi : X \to Y$ es aplicación cubriente y $f : I \to Y$ es una trayectoria tal que $\pi(x_0) = f(0)$, entonces existe un único levantamiento de f, a saber, $g : I \to X$ tal que $g(0) = x_0$.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una cubierta abierta de Y tal que U_α está parejamente cubierto por π para todo $\alpha \in J$. $\{f^{-1}[U_\alpha]\}_{\alpha\in J}$ es claramente una cubierta abierta de I. Usando el lema 2.4.6 (Número de Lebesgue), podemos encontrar una partición $\{p_1, ..., p_n\}$ de I tal que $f[[p_i, p_{i+1}]]$ se queda contenido en algún U_{α_i} para todo $1 \leq i \leq n$ (prácticamente como lo hicimos en el lema 2.4.7).

Ahora pasamos a definir g (lo haremos a tramos y recursivamente sobre los índices de la partición): sea $g(0) = x_0$. Suponemos, luego, que g está definida para $0 \leq s \leq p_i$ y la definimos en $[p_i, p_{i+1}]$ como sigue: en tanto $f[[p_i, p_{i+1}]] \subseteq U_{\alpha_i}$ con U_{α_i} parejamente cubierto por π, sabemos que $\pi^{-1}[U_{\alpha_i}] = \bigcup_{\beta\in J} V_\beta$ y por tanto que $g(p_i) \in V_{\beta_0}$ para algún $\beta_0 \in J$. Tomemos $g(s) = \pi|_{V_{\beta_0}}^{-1}(f(s))$ para todo $s \in [p_i, p_{i+1}]$. Notemos que está bien definida a cuenta de que $\pi|_{V_{\beta_0}}$ es un homeomorfismo sobre U_{α_i} y por lo tanto tiene un inverso. A su vez, tal g es continua sobre $[p_i, p_{i+1}]$ por ser la composición de dos funciones continuas -el inverso del homeomorfismo y la trayectoria f.

Una vez que definimos g en todo I, la continuidad de la g se sigue de la continuidad de $g|_{[p_i,p_{i+1}]}$ para toda $1 \leq i \leq n$ y del hecho de que $I = \bigcup_{1\leq i\leq n}[p_i, p_{i+1}]$ es tratado como una unión finita de cerrados (veáse nota al pie 3).

De la definición de g queda claro que $\pi \circ g = f$, pero falta que probemos su unicidad. Supongamos que existe otro levantamiento g' de f que inicia en x_0. Probaremos que de hecho $g = g'$ de manera inductiva. Tenemos que $g(0) = g'(0)$. Si se cumple que $g(s) = g'(s)$ para todo $0 \leq s \leq p_i$, veamos que la igualdad también se cumple en $[0, p_{i+1}]$. Por hipótesis $g(p_i) = g'(p_i)$. Ahora bien, esto quiere decir que g' manda a p_i al mismo V_β que g, denotémoslo nuevamente V_{β_0}. Como g' es continua y $[p_i, p_{i+1}]$ es conexo, tenemos que $g'[[p_i, p_{i+1}]]$ es conexo y por tanto debe quedarse contenido completamente en uno sólo de los V_β (son abiertos ajenos). Por lo de arriba, éste resulta ser V_{β_0}. Si sucediera que $g(s) \neq g'(s)$ para algún $s \in (p_i, p_{i+1}]$, entonces la igualdad $\pi|_{V_{\beta_0}}(g(s)) = f(s) = \pi|_{V_{\beta_0}}(g'(s))$ (g y g' son levantamientos de f) entra en contradicción con el hecho de que $\pi|_{V_{\beta_0}}$ es un homeomorfismo y por lo tanto inyectivo. Por lo tanto g coincide con g' en $[p_i, p_{i+1}]$, así en $[0, p_{i+1}]$ y, como resultado de la inducción, en I. □

Sin más, veamos qué sucede con las homotopías:

Proposición 2.4.9 (Propiedad de Levantamiento de Homotopías)**.** *Sea $\pi : X \to Y$ aplicación cubriente, W un espacio topológico y sea $F : W \times I \to Y$ una homotopía tal que $g : W \times \{0\} \to X$ es un levantamiento de $F|_{W\times\{0\}}$. Entonces existe un único levantamiento de F, a saber, $G : W \times I \to X$ tal que $G|_{W\times\{0\}} = g$ y el siguiente diagrama conmuta*[10]*:*

[10] Hay ciertas sutilezas en la notación del diagrama con respecto del enunciado del lema, pero se debe entender que g es una función con dominio W ó su homeomorfo $W \times \{0\}$.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d] & X \arrow[d, "\pi"] \\ W \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, "G"] & Y. \end{tikzcd}$$

Más aun, si F es una homotopía rel *A para algún $A \subseteq W$, entonces G también lo es.*

Demostración. Construiremos a G utilizando el lema 2.4.8. Para cada $w \in W$, podemos levantar la trayectoria $F|_{\{w\}\times I}$ a una g_w tal que $g_w(0) = g(w, 0)$. Definimos a G como la unión de tales g_w (donde $G(w, s) = g_w(s)$ está bien definida a cuenta de que los dominios no se intersectan). Por construcción G es única y cumple que $G|_{W\times\{0\}}(w, 0) = g_w(0) = g(w, 0)$. Además, tenemos que $[\pi \circ G](w, s) = \pi(g_w(s)) = F(w, s)$, haciendo que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi"] \\ W \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, "G"] & Y \end{tikzcd}$$

Falta ver, ahora, que G es continua: recordemos de los lemas 2.4.7 y 2.4.8 que para cada $w \in W$, podemos encontrar un abierto N alrededor de w y un entero positivo n tales que $F[N \times [i/n, (i + 1)/n]]$ se queda contenido en algún abierto U_{α_i} de Y parejamente cubierto por π, esto para cada entero $0 \leq i < n$. Usemos otra vez un argumento inductivo -como en la prueba anterior:

Para i fijo, supongamos que G es continua en $N \times \{i/n\}$. $G(w, i/n)$ vive en uno solo de los V_β que forman al correspondiente $\pi^{-1}[U_{\alpha_i}]$, llamémoslo V_{β_0}. Podemos encontrar un abierto $N' \subseteq N$ alrededor de w tal que $G[N' \times \{i/n\}] \subseteq V_{\beta_0}$[11]. Ahora bien, para cada $w' \in N'$, $G[\{w'\} \times [i/n, (i+1)/n]] = g_{w'}[[i/n, (i+1)/n]]$, que es conexo por ser la imagen continua de un conexo. De esta forma, para cada $w' \in N'$, $G[\{w'\} \times [i/n, (i+1)/n]]$ puede yacer en a lo más uno de los V_β, y como se cumple que $G(w', i/n) \in V_{\beta_0}$, entonces ese "uno" es precisamente V_{β_0}. Así pues, $G[N' \times [i/n, (i + 1)/n]]$ queda completamente contenido en V_{β_0}; pero la construcción de G nos dice entonces que G coincide con $\pi|^{-1}_{V_{\beta_0}} \circ F$ sobre $N' \times [i/n, (i+1)/n]$ y que por tanto es continua en $N' \times [i/n, (i+1)/n]$. Con esto hemos probado el paso inductivo. Considerando el hecho de que $G|_{N\times\{0\}} = g$ y por tanto es continua, tenemos la base de la inducción y en consecuencia que G es continua en $N' \times I$ para cada $(w, s) \in W \times I$. Por lo tanto, G es continua en el total (en $W \times I$).

[11] Por hipótesis de inducción, $G|_{N\times\{i/n\}}$ es continua, entonces $G|^{-1}_{N\times\{i/n\}}[V_{\beta_0}]$ es un abierto en $N \times \{i/n\}$ tal que $(w, i/n)$ vive en él y tal que existe un básico del producto de la forma $A \times \{i/n\}$ con $(w, i/n) \in A \times \{i/n\} \subseteq G|^{-1}_{N\times\{i/n\}}[V_{\beta_0}]$. Tomemos la intersección $(N \times \{i/n\}) \cap (A \times \{i/n\}) = (N \cap A) \times \{i/n\}$. Sea $N' = N \cap A$, entonces se cumple que $G[N' \times \{i/n\}] \subset G[A \times \{i/n\}] \subseteq V_{\beta_0}$.

Por otro lado, es otra vez la construcción de G la que garantiza el hecho de que si F es una homotopía *rel* A para algún $A \subseteq W$, entonces G también lo es, pues las g_w quedan como constantes para cada $w \in A$ y G resulta relativa a A al estar definida como la unión de las g_w. $\square$

Corolario 2.4.10. *Si $\pi : X \to Y$ es aplicación cubriente con $y_0 = \pi(x_0)$, entonces para cada función continua $F : I \times I \to Y$ tal que $F(0,0) = y_0$, existe un único levantamiento G de F tal que $G(0,0) = x_0$.*

Demostración. Levantamos $F|_{I\times\{0\}}$ con el lema 2.4.8 a una trayectoria g que inicie en x_0. Luego aplicamos la proposición 2.4.9 y se cumple lo que pedimos. $\square$

Corolario 2.4.11. *Sea $\pi : X \to Y$ aplicación cubriente. Si f y g son trayectorias en Y con $f \backsimeq g$ rel $Fr(I)$ y $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ son sus respectivos levantamientos donde $\widetilde{f}(0) = \widetilde{g}(0)$, entonces $\widetilde{f} \backsimeq \widetilde{g}$ rel $Fr(I)$ y por lo tanto $\widetilde{f}(1) = \widetilde{g}(1)$.* $\square$

Corolario 2.4.12. *Si $\pi : X \to Y$ es aplicación cubriente con $y_0 = \pi(x_0)$, entonces se cumplen...*

1. *El homomorfismo inducido $\pi_+ : \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(Y, y_0)$ es un monomorfismo.*

2. *Si f es un lazo de Y basado en y_0, entonces $[f] \in \pi_+[\Pi_1(X, x_0)]$ si y sólo si f se levanta a un lazo de X basado en x_0.*

Demostración. 1) Sea $[g] \in ker\ \pi_+$. Entonces $[\pi \circ g] = 1$ y $\pi \circ g$ es homotópica al lazo constante basado en y_0. Sea F *rel* $Fr(I)$ la homotopía (entre y_0 y $\pi \circ g$) que lo atestigua y G su levantamiento tal que $G(0,0) = x_0$ según el corolario 2.4.10. Entonces G es una homotopía *rel* $Fr(I)$ entre el lazo constante basado en x_0 y g.

2) Para la ida, supongamos que $[f] \in \pi_+[\Pi_1(X, x_0)]$, entonces $f \backsimeq (\pi \circ h)$ *rel* $Fr(I)$ para algún h lazo de X basado en x_0. Por el corolario 2.4.11 tenemos que si g es el levantamiento de f que inicia en x_0, entonces $g \backsimeq h$ *rel* $Fr(I)$ (h es levantamiento de $\pi \circ h$ que inicia en x_0) y por lo tanto g es un lazo de X basado en x_0.

Para el regreso, supongamos que $f = \pi \circ g$ con g un lazo de X basado en x_0. Entonces $[f] = [\pi \circ g] = \pi_+([g])$ y se tiene lo que queremos. $\square$

Habremos de decidir cuándo podemos levantar cualquier función continua f que entre en un espacio Y. Veremos qué restricciones requiere para esto el espacio dominio y así encontraremos una relación especial con los grupos fundamentales de los tres espacios que aparecen en el siguiente diagrama, el cual representa la situación un tanto más general que nos ocupa ahora:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi"] \\ W \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

En principio, no existen muchas restricciones para X, Y y π, pero en lo sucesivo concentraremos nuestra atención casi siempre en espacios cubrientes (X) *conexos* y *localmente conexos por trayectorias* (por lo tanto *conexos por trayectorias* según la proposición 2.1.11), condiciones que al sumar con que π es continua, claramente suprayectiva y abierta[12], nos arrojan que los espacios cubiertos (Y) que estaremos tratando serán a su vez *conexos por trayectorias* y *localmente conexos por trayectorias*[13].

Teorema 2.4.13 (Levantamiento General)**.** *Sean X, Y espacios conexos por trayectorias y localmente conexos por trayectorias, y sea $\pi : X \to Y$ una aplicación cubriente con $y_0 = \pi(x_0)$. Si W es un espacio conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias y $f : W \to Y$ es una función continua tal que $f(w_0) = y_0$, entonces existe una función continua $g : (W, w_0) \to (X, x_0)$ tal que $f = \pi \circ g$ si y sólo si...*

$$f_+[\Pi_1(W, w_0)] \subseteq \pi_+[\Pi_1(X, x_0)].$$

Más aun, si existe, entonces g es única.

Demostración. Si el levantamiento g existe, entonces es claro que $f_+[\Pi_1(W, w_0)] = \pi_+[g_+[\Pi_1(W, w_0)]] \subseteq \pi_+[\Pi_1(X, x_0)]$. Probemos la condición de unicidad. Supongamos que g existe y también que hay otro levantamiento h de f tal que $h \neq g$; tomemos un punto $w \in W$. Sea α una trayectoria de w_0 a w, entonces $g \circ \alpha$ es claramente un levantamiento de $f \circ \alpha$ que empieza en x_0, pero también lo es $h \circ \alpha$, lo que entra en contradicción con la unicidad de los levantamientos de trayectorias según el lema 2.4.8. Con esto tenemos la suficiencia del teorema.

La necesidad, por otro lado, nos exige la construcción de dicha g. Nuevamente tomemos un punto $w \in W$ y sea α la trayectoria de w_0 a w. Tenemos que $f \circ \alpha$ es una trayectoria en Y que empieza en y_0. Con el lema 2.4.8 levantemos esta trayectoria a una trayectoria μ en X que empiece en x_0 y definamos $g(w) = \mu(1)$. Observamos, pues, que $[\pi \circ g](w) = \pi(\mu(1)) = f(\alpha(1)) = f(w)$. Pasemos a corroborar ahora que g está bien definida: supongamos que α' es otra trayectoria

[12]Si O es abierto en X, entonces para cada punto $y \in \pi[O]$, sabemos que existe U_y abierto en Y tal que $y \in U_y$ y $\pi^{-1}[U_y]$ es una unión disjunta de abiertos homeomorfos a U_y bajo las restricciones correspondientes de π. Como $y \in \pi[O] \cap U_y$, existe $x \in \pi^{-1}[\pi[O] \cap U_y]$ tal que $\pi(x) = y$ y $x \in V_x$ para algún miembro de la unión disjunta que constituye la preimagen de U_y. Ahora bien, $\pi[O] \cap U_y$ es un abierto en $\pi[O]$, por lo que $\pi^{-1}[\pi[O] \cap U_y]$ es un abierto en O y por lo tanto en X. Así pues, $\pi^{-1}[\pi[O] \cap U_y] \cap V_x$ es un abierto en X con x viviendo en él. De esta forma, existe A abierto en X tal que $x \in A \subseteq \pi^{-1}[\pi[O] \cap U_y] \cap V_x$. Como π restringida a V_x es un homeomorfismo sobre U_y, se cumple que $\pi[A]$ es un abierto en Y tal que $y \in \pi[A] \subseteq \pi[O]$.

[13]Probemos esta afirmación como ejemplo del peso de las aplicaciones cubrientes y de la forma en que trabajamos con ellas. Como π es continua y sobre, es fácil ver que Y como imagen bajo π de X conexo por trayectorias también es conexo por trayectorias. Ahora bien, dado $y \in Y$ y W abierto en Y tal que $y \in W$, existe $x \in \pi^{-1}[W]$ tal que $\pi(x) = y$, Como $\pi^{-1}[W]$ es abierto en X, podemos dar un abierto conexo por trayectorias entre x y $\pi^{-1}[W]$, llamémoslo C_x. Entonces $\pi(C_x)$ es un abierto conexo por trayectorias que tiene a y y está contenido en W, otorgando que Y es localmente conexo por trayectorias. Más aun, un argumento similar nos dice que para cada $y \in Y$ podemos encontrar una vecindad U_y conexa por trayectorias y parejamente cubierta por π.

de w_0 a w y sea $\eta = (\alpha'^{-1})$, entonces $\alpha * \eta$ es un lazo basado en w_0 de W de tal manera que $(f\circ\alpha)*(f\circ\eta)$ es un lazo de Y basado en y_0. Como $[(f\circ\alpha)*(f\circ\eta)] = f_+([\alpha*\eta]) \in im(f_+) \subseteq im(\pi_+)$ (hipótesis), $(f\circ\alpha)*(f\circ\eta)$ se levanta a un lazo de X basado en x_0 según el corolario 2.4.12 inciso 2. Como los levantamientos de trayectorias son únicos, entonces este último levantamiento que mencionamos es de hecho igual a la concatenación del levantamiento μ de la trayectoria $f\circ\alpha$ con aquel levantamiento de $f\circ\eta$ que inicia en el punto final de μ, llamémoslo γ. Se tiene, pues, que γ^{-1} es el levantamiento de $f\circ\alpha'$ que inicia en x_0, y termina exactamente en el mismo punto que μ, es decir $\mu(1) = \gamma^{-1}(1)$. Con esto, g está bien definida, pues es independiente de qué trayectoria entre w y w_0 elegimos para definirla.

Veamos ahora que g es continua. Lo haremos punto por punto. Sea $w \in W$ y sea un abierto O alrededor de $g(w)$. Consideremos un abierto $U_{f(w)}$ alrededor de $f(w)$ que sea parejamente cubierto por π de tal manera que $\pi^{-1}[U_{f(w)}] = \bigcup_{\beta\in J} V_\beta$ y de tal manera que V_{β_0} con $g(w) \in V_{\beta_0}$ se quede contenido en O[14]. Como f es continua en w y W es localmente conexo por trayectorias, podemos encontrar un abierto conexo por trayectorias A alrededor de w tal que $f[A] \subseteq U_{f(w)}$. Con miras a probar que $g[A] \subseteq O$, tomamos un punto $a \in A$ y llamamos β a la trayectoria contenida en A que inicia en w y termina en a. Si α es la trayectoria de w_0 a w, entonces $g(a)$ está definido como el punto final de aquella trayectoria que levanta a $f\circ(\alpha*\beta)$ (levantamiento que inicia en y_0 y termina en $f(a)$, claramente). Ahora bien, como la trayectoria $f\circ\beta$ se queda en $U_{f(w)}$, su levantamiento que inicia en $g(w)$ no es más que $\pi|_{V_{\beta_0}}^{-1} \circ (f\circ\beta)$ como vimos en el lema 2.4.8. Si μ es la trayectoria que levanta a $f\circ\alpha$ e inicia en x_0, entonces tenemos que $\mu*(\pi|_{V_{\beta_0}}^{-1}\circ(f\circ\beta))$ es el levantamiento de $f\circ(\alpha*\beta)$ que inicia en x_0, y su punto final (que sabemos es $g(a)$) coincide con $\pi|_{V_{\beta_0}}^{-1}(f(\beta(1)))$, claramente miembro de $V_{\beta_0} \subseteq O$. Así pues, $g(a)$ se queda en O para toda $a \in A$ y tenemos que g es continua en w y por lo tanto en W.[15] $\square$

El siguiente corolario será importante para la prueba del Teorema de Borsuk-Ulam:

Corolario 2.4.14. *Sea W un espacio localmente conexo por trayectorias y simplemente conexo, y sea $\pi : X \to Y$ una aplicación cubriente. Entonces para cada $f(W, w_0) \to (Y, y_0)$ existe un levantamiento g de f tal que $g(w_0) \in \pi^{-1}[y_0]$. Si a parte especificamos a $g(w_0)$, entonces tal levantamiento g es único.* $\square$

Es claro que estos resultados nos permiten revisar de formas algebraicas la existencia de funciones continuas que conmuten entre espacios topológicos, lo

[14]Podemos hacer esto de la siguiente forma: si en un principio el llamado V_{β_0} no se queda contenido en O, tomamos a $\pi[V_{\beta_0} \cap O]$ como abierto alrededor de $f(w)$, el cual resulta parejamente cubierto a su vez a cuenta de que está contenido en nuestro $U_{f(w)}$ inicial. Posteriormente, nos fijamos en la preimagen bajo π de $\pi[V_{\beta_0} \cap O]$ y nombramos V'_{β_0} al abierto en ella que se queda con $g(w)$ y que es precisamente $V_{\beta_0} \cap O$. Así pues, hemos encontrado un abierto alrededor de $f(w)$ que cumple lo que pedimos.

[15]La condición de que W sea localmente conexo por trayectorias no se puede omitir, como el ejemplo en [2, pág. 144] deja claro.

cual se suma a la intención de esta tesis de presentar algunos alcances de la tan súmamente útil y elegante liga entre el Álgebra y la Topología. Revisemos qué otras cosas similarmente sorprendentes nos permite obtener nuestro discurso hasta aquí.

Definición 2.4.15. *Sean $\pi : X \to Y$ y $\pi' : X' \to Y$ aplicaciones cubrientes. Decimos que son* ***equivalentes*** *si existe un homeomorfismo $h : X \to X'$ tal que $\pi = \pi' \circ h$. Tal homeomorfismo h es llamado* ***equivalencia entre aplicaciones cubrientes*** *o* ***equivalencia entre espacios cubrientes****.*[16]

Con esta definición y nuestro teorema 2.4.13 podemos asomarnos a la siguiente proposición:

Proposición 2.4.16. *Sean X, X' espacios conexos y localmente conexos por trayectorias, y sean $\pi : X \to Y$ y $\pi' : X' \to Y$ aplicaciones cubrientes tales que $\pi(x_0) = \pi'(x_0') = y_0$. Entonces existe una equivalencia $h : X \to X'$ tal que $h(x_0) = x_0'$ si y sólo si los grupos $\pi_+[\Pi_1(X, x_0)]$ y $\pi'_+[\Pi_1(X', x_0')]$ son iguales. A parte, si h existe, es única.*

Demostración. Probemos la suficiencia de la afirmación. Supongamos que existe h como requerida. Sabemos que es un levantamiento de π tal que $h(x_0) = x_0'$, con lo que es única según el teorema 2.4.13. A su vez, como h es un homeomorfismo, se cumple que $h_+[\Pi_1(X, x_0)] = \Pi_1(X', x_0')$. Ahora bien, por la otra condición para las *equivalencias entre aplicaciones cubrientes* -y por la forma en que se inducen los homomorfismos-, tenemos que $\pi_+[\Pi_1(X, x_0)] = \pi'_+[h_+[\Pi_1(X, x_0)]] = \pi'_+[\Pi_1(X', x_0')]$ y con ello el resultado.

Veamos la necesidad. Por el teorema 2.4.13, existe un levantamiento h de π que entra en X' con $h(x_0) = x_0'$ (es decir, tal que el siguiente diagrama conmuta):

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[d, "\pi'"] \\ X \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "\pi"] & Y \end{tikzcd}$$

Invirtiendo los lugares de X y X' en el diagrama anterior, podemos de igual forma obtener un levantamiento k de π' tal que $k(x_0') = x_0$. Si luego consideramos que $k \circ h$ es un levantamiento de π tal que $[k \circ h](x_0) = x_0$ a cuenta de que $\pi \circ (k \circ h) = (\pi \circ k) \circ h = \pi' \circ h = \pi$ (como se muestra en el diagrama de abajo), entonces tenemos que $k \circ h$ es en realidad 1_X, pues éste es el único levantamiento de π tal que $1_X(x_0) = x_0$[17].

[16] Como es de esperar, la relación -implícita en esta definición- sobre los espacios cubrientes de un espacio dado es una de equivalencia.

[17] De hecho, un poco más adelante probaremos un hecho sobre los homeomorfismos de un espacio cubriente sobre sí mismo que "levantan" a π (y a los cuáles llamamos *transformaciones cubrientes*), y es que la identidad es el único de éstos que tiene puntos fijos.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[ur, "k \circ h"] \arrow[r, "\pi"] & Y \end{tikzcd}$$

De manera exactamente igual, podemos probar que $h \circ k = 1_{X'}$ y conseguir lo que queríamos, es decir, que h es una equivalencia donde $k = h^{-1}$. □

Generalizaremos un tanto la proposición anterior, para facilitarnos lo cual necesitamos antes un lema.

Lema 2.4.17. *Si $\pi : X \to Y$ es una aplicación cubriente con $x_0, x_1 \in \pi^{-1}[y_0]$, entonces...*

1. *Si γ es una trayectoria en X de x_0 a x_1 y α es el lazo de Y basado en y_0 dado por $\pi \circ \gamma$, entonces se tiene que $[\alpha]\ \pi_+[\Pi_1(X, x_1)]\ [\alpha]^{-1} = \pi_+[\Pi_1(X, x_0)]$ (esto es, $\pi_+[\Pi_1(X, x_0)]$ y $\pi_+[\Pi_1(X, x_1)]$ son conjugados).*

2. *Cualquier subgrupo H de $\Pi_1(X, x_0)$ conjugado de $\pi_+[\Pi_1(X, x_0)]$ es de hecho $\pi_+[\Pi_1(X, x_*)]$ para algún $x_* \in \pi^{-1}[y_0]$.*

Demostración. 1) Probemos que $[\alpha]\ \pi_+[\Pi_1(X, x_1)]\ [\alpha]^{-1} \subseteq \pi_+[\Pi_1(X, x_0)]$. Sea $[h] \in \pi_+[\Pi_1(X, x_1)]$, entonces $[h] = [\pi \circ \eta]$ para algún $\eta \in \Pi_1(X, x_1)$. Sea $k = (\gamma * \eta) * \gamma^{-1}$, entonces $k \in \Pi_1(X, x_0)$. Como γ^{-1} es trayectoria de x_1 a x_0, se cumple que el lazo α^{-1} es igual a $(\pi \circ \gamma^{-1})$. En consecuencia, tenemos que $\pi_+([k]) = [(\pi \circ \gamma) * (\pi \circ \eta) * (\pi \circ \gamma^{-1})] = [\pi \circ \gamma][\pi \circ \eta][\pi \circ \gamma^{-1}] = [\alpha][h][\alpha^{-1}] = [\alpha][h][\alpha]^{-1}$. Por lo tanto, $[\alpha][h][\alpha]^{-1} \in \pi_+[\Pi_1(X, x_0)]$ para toda $[h] \in \pi_+[\Pi_1(X, x_1)]$.

La otra contención se observa utilizando un argumento análogo al de arriba, según el cual $[\alpha^{-1}]\ \pi_+[\Pi_1(X, x_0)]\ [\alpha^{-1}]^{-1} \subseteq \pi_+[\Pi_1(X, x_1)]$.

2) Sea H conjugado de $\pi_+[\Pi_1(X, x_0)]$. Entonces $\pi_+[\Pi_1(X, x_0)] = [\alpha]\ H\ [\alpha]^{-1}$ para algún lazo α de Y basado en y_0. Si tomamos $x_* := \gamma(1)$, donde γ es el levantamiento de α que inicia en x_0, entonces el inciso anterior nos implica que $\pi_+[\Pi_1(X, x_0)] = [\alpha]\ \pi_+[\Pi_1(X, x_*)]\ [\alpha]^{-1}$, con lo que $H = \pi_+[\Pi_1(X, x_*)]$. □

Proposición 2.4.18. *Sean X, X' conexos y localmente conexos por trayectorias, y sean $\pi : X \to Y$ y $\pi' : X' \to Y$ aplicaciones cubrientes tales que $\pi(x_0) = \pi'(x'_0) = y_0$. Entonces las aplicaciones cubrientes π y π' son equivalentes si y sólo si los grupos $\pi_+[\Pi_1(X, x_0)]$ y $\pi'_+[\Pi_1(X', x'_0)]$ son conjugados.*

Demostración. Supongamos que existe $h : X \to X'$ equivalencia y definamos $x'_* := h(x_0)$. La proposición 2.4.16 nos garantiza que $\pi_+[\Pi_1(X, x_0)]$ y $\pi'_+[\Pi_1(X', x'_*)]$ son iguales y el lema 2.4.17 (inciso 1) afirma que $\pi'_+[\Pi_1(X', x'_*)]$ y $\pi'_+[\Pi_1(X', x'_0)]$ son conjugados, con lo cual tenemos la ida.

Para el regreso, si $\pi_+[\Pi_1(X, x_0)]$ y $\pi'_+[\Pi_1(X', x'_0)]$ son conjugados, entonces el lema 2.4.17 (inciso 2) nos arroja que existe un punto $x_* \in X$ tal que $\pi'_+[\Pi_1(X', x'_0)] = \pi_+[\Pi_1(X, x_*)]$. A su vez, el regreso del teorema 2.4.16 nos otorga la existencia de una equivalencia h entre X y X' tal que $h(x_*) = x'_0$.

□

Con este resultado, hemos encontrado una correspondencia entre las clases de conjugación de ciertos subrupos de $\Pi_1(Y, y_0)$ y las clases de equivalencia cubriente entre los espacios cubrientes de Y.

Definición 2.4.19. *Sea $\pi : X \to Y$ una aplicación cubriente. Un homeomorfismo $D : X \to X$ es llamado **transformación cubriente** si y sólo se cumple que $\pi \circ D = \pi$.*

Es claro que si D es una transformación cubriente, entonces D^{-1} también lo es. Por otro lado, la composición de dos transformaciones cubrientes resulta ser una de ellas y así tenemos que es posible formar un grupo bajo la composición con las transformaciones cubrientes de un espacio cubriente dado. Si $\pi : X \to Y$ es una aplicación cubriente, entonces denotamos $G(X)$ al grupo de transformaciones cubrientes de X. A partir de aquí veremos qué propiedades útiles podemos deducir de este grupo, pero antes, habremos de mencionar un resultado que nos permite distinguir entre levantamientos.

Lema 2.4.20. *Sea $\pi : X \to Y$ una aplicación cubriente, W un espacio conexo y $f : W \to Y$ una función continua. Si g_1 y g_2 son levantamientos de f y son tales que coinciden en un punto $w \in W$, entonces $g_1 = g_2$.*

Demostración. Nos fijaremos en el conjunto $E = \{w \in W | g_1(w) = g_2(w)\}$.

Sea $w \in W$ tal que $g_1(w) = g_2(w) = x$, y sea $U_{f(w)}$ un abierto parejamente cubierto por π alrededor de $f(w)$. Si V_{β_0} es el abierto en la preimagen de $U_{f(w)}$ que tiene a x (como hemos hecho ya tantas veces) entonces es claro que $A := g_1^{-1}[V_{\beta_0}] \cap g_2^{-1}[V_{\beta_0}]$ es un abierto en W. A parte, para cada $a \in A$ se cumple que $g_1(a), g_2(a) \in \pi^{-1}[f(a)] \cap V_{\beta_0}$ y por lo tanto que $g_1(a) = g_2(a)$ (recordemos que cada V_β intersecta a las fibras en sólo un punto). Así pues, hemos encontrado un abierto A que contiene a w y que se queda completamente contenido en E, con lo que tenemos que E es abierto.

Por otra parte, si $z \in X \backslash E$, se cumple entonces que $g_1(z) \neq g_2(z)$. Sea $U_{f(z)}$ como arriba y V_{β_1}, V_{β_2} los abiertos disjuntos en la preimagen de $U_{f(z)}$ que tienen a $g_1(z)$ y $g_2(z)$, respectivamente. Como g_1 y g_2 son continuas, existe un abierto V alrededor de z tal que $g_1[V] \subseteq V_{\beta_1}$ y $g_2[V] \subseteq V_{\beta_2}$, lo que implica que $V \subseteq X \backslash E$ y por lo tanto que $X \backslash E$ es abierto. Como W es conexo, entonces el abierto y cerrado $E \subseteq W$ sólo puede ser el vacío o el total. El vacío no es en tanto $w \in F$, de modo que $E = W$. □

Corolario 2.4.21. *Si $\pi : X \to Y$ es una aplicación cubriente con X conexo, entonces la única transformación cubriente que tiene puntos fijos es la identidad.*

Demostración. Supongamos que existe $D \in G(X)$ tal que para algún $x \in X$ se cumple que $D(x) = x$. Sabemos que D es en particular un levantamiento de π en tanto se da que $\pi \circ D = \pi$. A su vez, D coincide con el otro levantamiento de π, a saber 1_X, en el punto x, por lo que el lema 2.4.20 nos dice que $D = 1_X$. □

Con lo siguiente, relacionaremos el grupo de transformaciones cubrientes de un espacio cubriente X con el grupo fundamental del espacio "cubierto" Y.

Definición 2.4.22. *Si $\pi : X \to Y$ es una aplicación cubriente, entonces X es llamado* ***espacio cubriente normal***[18] *si y sólo si para cada $y \in Y$ y $x_0, x_1 \in \pi^{-1}[y]$ existe una transformación cubriente D tal que $D(x_0) = x_1$. Congruentemente, a π la llamamos* ***aplicación cubriente normal****.*

Lema 2.4.23. *Sea $\pi : X \to Y$ una aplicación cubriente con X conexo, α un lazo de Y basado en y_0 y γ_x el levantamiento de α que inicia en x para cada $x \in \pi^{-1}[y_0]$. Entonces si D es una transformación cubriente, se cumple que $D(\gamma_x(1)) = \gamma_{D(x)}(1)$.*

Demostración. Dada $x \in \pi^{-1}[y_0]$, fijémonos en la trayectoria $D \circ \gamma_x$. Es claramente un levantamiento de α en tanto $\pi \circ (D \circ \gamma_x) = (\pi \circ D) \circ \gamma_x = \pi \circ \gamma_x = \alpha$, pero la diferencia es que empieza en $D(x)$. Así pues, la proposición 2.4.20 nos garantiza que $D \circ \gamma_x$ es igual con $\gamma_{D(x)}$ y por lo tanto que terminan en los mismos puntos. □

Proposición 2.4.24. *Sea X conexo y localmente conexo por trayectorias y $\pi : X \to Y$ una aplicación cubriente con $y_0 = \pi(x_0)$. Sea $H = \pi_+[\Pi_1(X, x_0)]$ y sea $N(H)$ el normalizador de H. Entonces se cumple que...*

1. *X es un espacio cubriente normal si y sólo si H es un subgrupo normal de $\Pi_1(Y, y_0)$.*

2. *$G(X)$ es isomorfo a $N(H)/H$.*

En particular, $G(X)$ es isomorfo a $\Pi_1(Y, y_0)/H$ si X es un espacio cubriente normal.

Demostración. 1) ($\Rightarrow$) Tomemos a $x_0 \in \pi^{-1}[y_0]$ y supongamos que para cada $x_* \in \pi^{-1}[y_0]$, existe una transformación cubriente $D : X \to X$ tal que $D(x_0) = x_*$. Si tomamos un lazo α de Y basado en y_0, entonces por el lema 2.4.8 podemos levantar tal α a una trayectoria γ que inicia en x_0 y que termina en alguno de los puntos $x_* \in \pi^{-1}[y_0]$ al ser levantamiento. De esta forma, el lema 2.4.17 nos garantiza que para toda $\alpha \in \Pi_1(Y, y_0)$, se cumple que hay $x_* \in \pi^{-1}[y_0]$ tal que $[\alpha^{-1}]\ \pi_+[\Pi_1(X, x_0)]\ [\alpha^{-1}]^{-1} = \pi_+[\Pi_1(X, x_*)]$. Por otra parte, la proposición 2.4.16 aunada al hecho de que D es en particular una equivalencia de espacios cubrientes para cada $x_* \in \pi^{-1}[y_0]$, arroja que $\pi_+[\Pi_1(X, x_0)] = \pi_+[\Pi_1(X, x_*)]$ para toda $x_* \in \pi^{-1}[y_0]$. Juntando las dos igualdades tenemos que $\pi_+[\Pi_1(X, x_0)] = [\alpha^{-1}]\ \pi_+[\Pi_1(X, x_0)]\ [\alpha^{-1}]^{-1}$ para todo $[\alpha] \in \Pi_1(Y, y_0)$. Por lo tanto, $H = \pi_+[\Pi_1(X, x_0)]$ es un subgrupo normal de $\Pi_1(Y, y_0)$.

($\Leftarrow$) Supongamos que H es un subgrupo normal de $\Pi_1(Y, y_0)$ y sean $x_0, x_1 \in \pi^{-1}[y_0]$ con γ la trayectoria de x_0 a x_1 y $\alpha = \pi \circ \gamma$. Desde el lema 2.4.17 nos viene que $[\alpha]\ \pi_+[\Pi_1(X, x_1)]\ [\alpha]^{-1} = \pi_+[\Pi_1(X, x_0)]$, pero como $N(H) = \Pi_1(Y, y_0)$, esto nos implica que $\pi_+[\Pi_1(X, x_1)] = [\alpha]\ \pi_+[\Pi_1(X, x_1)]\ [\alpha]^{-1} = \pi_+[\Pi_1(X, x_0)]$ y por

[18] Algunos autores llaman a los espacios cubrientes que cumplen esta propiedad “espacios cubrientes regulares”. Nosotros optamos por seguir a [6] en tanto el nombre se relaciona muy cómodamente con lo establecido en la proposición 2.4.24.

la proposición 2.4.16 que existe una equivalencia $h : X \to X$ tal que $h(x_0) = x_1$. Tal h es por definición una transformación cubriente y con eso tenemos que X es un espacio cubriente normal.

2) Definimos $\Phi : N(H) \to G(X)$ como sigue: dada $[\alpha] \in N(H)$ y γ el levantamiento de α que inicia en x_0, tomamos $\Phi([\alpha]) = D_\alpha$, donde D_α es la única transformación cubriente tal que $D_\alpha(x_0) = \gamma(1)$[19]. La función está bien definida (no depende del representante) en tanto si $\beta \simeq \alpha \ rel \ Fr(I)$, entonces sus levantamientos que inician en x_0, llamémoslos γ' y γ respectivamente, son homotópicos y terminan en el mismo punto por el corolario 2.4.11, y así D_α coincide con D_β en x_0 ($D_\alpha(x_0) = \gamma(1) = \gamma'(1) = D_\beta(x_0)$) y por lo tanto son iguales según el lema 2.4.20.

Veamos luego que Φ es un homomorfismo:

Sean $\alpha, \beta \in N(H)$ y γ, γ' sus respectivos levantamientos que inician en x_0. Hemos definido a D_α y D_β como las únicas transformaciones cubrientes que mandan x_0 a $\gamma(1)$ y $\gamma'(1)$ respectivamente. Por un lado, el lema 2.4.22 nos dice que...

$$[\Phi([\alpha]) \circ \Phi([\beta])](x_0) = [D_\alpha \circ D_\beta](x_0) = D_\alpha(D_\beta(x_0)) = D_\alpha(\gamma'(1)) = \gamma'_{D_\alpha(x_0)}(1)$$

... donde $\gamma'_{D_\alpha(x_0)}$ es el levantamiento de β que inicia en $D_\alpha(x_0)$. De esta forma, $D_\alpha \circ D_\beta$ es una transformación cubriente que manda x_0 a $\gamma'_{D_\alpha(x_0)}(1)$.

Por el otro, $\Phi([\alpha][\beta]) = \Phi([\alpha * \beta]) = D_{\alpha*\beta}$. Si η es un levantamiento de β que inicia en $\gamma(1)$, entonces es claro que $\gamma * \eta$ es el levantamiento de $\alpha * \beta$ que inicia en x_0. $D_{\alpha*\beta}(x_0) = (\gamma * \eta)(1)$ por definición, pero se cumple a su vez que $(\gamma * \eta)(1) = \eta(1) = \gamma'_{D_\alpha(x_0)}(1)$, pues η coincide con $\gamma'_{D_\alpha(x_0)}$ por construcción y por el lema 2.4.8. Así, ...

$$[\Phi([\alpha][\beta])](x_0) = D_{\alpha*\beta}(x_0) = \gamma'_{D_\alpha(x_0)}(1)$$

... con lo que $\Phi([\alpha]) \circ \Phi([\beta])$ coincide con $\Phi([\alpha][\beta])$ en x_0, por lo que el lema 2.4.20 nos garantiza que son iguales y consecuentemente que Φ es un homomorfismo.

Veamos que Φ es de hecho un epimorfismo. Dada $D \in G(X)$ y γ la trayectoria de x_0 a $D(x_0)$, $\pi \circ \gamma$ es un lazo de Y basado en y_0 tal que $\Phi([\pi \circ \gamma]) = D_{\pi\circ\gamma}$, la transformación cubriente que manda x_0 a $\gamma(1) = D(x_0)$. Así pues, D coincide con $D_{\pi\circ\gamma}$ en x_0 y el lema 2.4.20 nos hace ver que son iguales y por lo tanto que Φ es un epimorfismo.

En virtud de que $D_\alpha = 1_X$ si y sólo si $D_\alpha(x_0) = x_0$ (corolario 2.4.21), y de que $D_\alpha(x_0) = x_0$ si y sólo si $\gamma(1) = x_0$ (donde como siempre γ es el levantamiento de α que inicia en x_0) si y sólo si γ es un lazo de X basado en x_0 si y sólo si $[\alpha] = \pi_+([\gamma])$, tenemos que $ker\ \Phi = H$ y por lo tanto que $N(H)/H \overset{\Phi}{\cong} G(X)$ (*teoremas de isomorfismo*). □

[19] D_α como pedida existe gracias a que si $[\alpha] \in N(H)$, entonces $\pi_+[\Pi_1(X, x_0)] = \pi_+[\Pi_1(X, \gamma(1))]$ (como en la prueba del inciso 1 (regreso)) y así existe una equivalencia entre X y X que hace la gracia en sintonía con la proposición 2.4.16; es única por el lema 2.4.20.

Corolario 2.4.25. *Para $\pi : X \to Y$ una aplicación cubriente con X simplemente conexo*[20]*, se cumple que $G(X) \approxeq \Pi_1(Y, y_0)$.* □

Los siguientes resultados y definiciones nos darán maquinaria para ver cuando un espacio es cubriente normal en función de una acción del grupo de transformaciones cubrientes sobre él.

Proposición 2.4.26. *Si $\pi : X \to Y$ es una aplicación cubriente, entonces X es un $G(X)$-espacio.*

Demostración. Ésta es una prueba que podrá parecer un tanto redundante, pero nos servirá precisamente en tanto veremos a $G(X)$ como un grupo que actúa sobre X y posteriormente encontraremos información acerca de la relación entre esta acción y la *naturaleza* del espacio cubriente, por así decirlo. Definimos $\phi : G(X) \times X \to X$ tal que $\phi(g, x) = g(x)$. Tal ϕ es continua y cumple las hipótesis de ser una acción de grupo. Por tanto, tenemos que X es un $G(X)$-espacio. □

Definición 2.4.27. *Si G es un grupo y X es un G-espacio topológico, entonces la acción de G sobre X se dice* ***propiamente discontinua*** *si y sólo si para cada $x \in X$, existe una vecindad (o abierto) U_x de x tal que para cada $g_1, g_2 \in G$, $g_1[U_x] \cap g_2[U_x] \neq \emptyset$ implica que $g_1 = g_2$.*

Notemos que en la definición anterior, la propiedad es equivalente a pedir que para cada $x \in X$ exista una vecindad U_x de x tal que $U_x \cap g[U_x] \neq \emptyset$ implique que $g = 1_X$. Esto se debe a que $g_1[U_x] \cap g_2[U_x] \neq \emptyset$ es equivalente a decir que $U_x \cap g_1^{-1}[g_2[U_x]] \neq \emptyset$.

Proposición 2.4.28. *Si X es conexo y $\pi : X \to Y$ es una aplicación cubriente, entonces la acción de $G(X)$ sobre X es propiamente discontinua.*

Demostración. Sea $x \in X$ y $U_{\pi(x)}$ un abierto parejamente cubierto por π alrededor de $\pi(x)$. Tomemos -como es costumbre- a V_{β_0} como el abierto en la preimagen de $U_{\pi(x)}$ que tiene a x. Afirmamos que tal V_{β_0} es el abierto que buscamos, pues si suponemos que $g_1[V_{\beta_0}] \cap g_2[V_{\beta_0}] \neq \emptyset$ para algunos $g_1, g_2 \in G(X)$, entonces existe $z \in X$ tal que $g_1(x_1) = z = g_2(x_2)$ con $x_1, x_2 \in V_{\beta_0}$. Como g_1 y g_2 son transformaciones cubrientes, entonces se tiene que $\pi(x_1) = [\pi \circ g_1](x_1) = [\pi \circ g_2](x_2) = \pi(x_2)$ y por lo tanto que $x_1 = x_2$ (pues $\pi|_{V_{\beta_0}}$ es un homeomorfismo). Entonces g_1 y g_2 coinciden en $x_1 = x_2$, por lo que al ser levantamientos son iguales en congruencia con la proposición 2.4.20. □

Definición 2.4.29. *Sea G un grupo y X un G-espacio topológico. Si R es la relación de equivalencia tal que dada $x \in X$, $x \overset{R}{\sim} z$ si y sólo si $z = g(x)$ para*

[20]Si Y un espacio topológico, a los espacios cubrientes simplemente conexos se les llama *espacio cubriente universal* de Y. Mientras la proposición 2.4.16 nos afirma que cualesquiera dos *espacios cubrientes universales* son equivalentes y por lo tanto siempre nos referimos en singular a este espacio particular, tal particularidad consiste en que dicho espacio "cubre" a cualquier otro espacio cubriente de Y, como se puede apreciar en [10, capítulo 13, sección 80].

*algún $g \in G$[21], entonces denotamos al espacio cociente X/R como X/G y lo llamamos **espacio de órbitas** de la acción del grupo G sobre X.*

No es poco prudente llamar a X/G *espacio de órbitas*, pues recordemos que la *órbita* de un punto $x \in X$, donde X es un G-espacio, sería el conjunto $Gx = \{g(x) \mid g \in G\}$, que claramente coincide con la clase de x bajo la relación de equivalencia R de la definición anterior (véase definición 1.3.5).

Proposición 2.4.30. *Sea $\pi : X \to Y$ una aplicación cubriente normal, y sea $p : X \to X/G(X)$ la proyección canónica (que es función cociente). Se cumple entonces que $X/G(X) \approx Y$.*

Demostración. $\pi : X \to Y$ es constante en las fibras bajo p de puntos en $X/G(X)$, pues si $x, x_* \in p^{-1}[G(X)x']$ para algún $G(X)x' \in X/G(X)$, entonces $x \overset{R}{\sim} x_*$ y por tanto existe $g \in G(X)$ tal que $x_* = g(x)$. Ahora bien, como g es transformación cubriente, tenemos que $\pi(x) = \pi(g(x)) = \pi(x_*)$.

Así pues, el lema de la Trangresión (lema 2.2.4) otorga la existencia de $h : X/G(X) \to Y$ continua y tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ X/G(X) \arrow[ur, "h"] & \end{tikzcd}$$

Por otro lado, notemos que como $\pi : X \to Y$ es abierta, continua y suprayectiva, entonces es de hecho una función cociente (véase proposición 2.2.2). Observamos que p es constante en las fibras de π: dados $x, x_* \in \pi^{-1}[y]$ para algún $y \in Y$, como π es cubriente normal, sabemos que existe $g \in G(X)$ tal que $g(x) = x_*$. Luego $x \overset{R}{\sim} x_*$ y por lo tanto p manda a x y x_* al mismo punto. Usamos de nuevo el lema de la Transgresión y obtenemos una $h^* : Y \to X/G(X)$ continua y tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[dl, "h^*"] \\ X/G(X) & \end{tikzcd}$$

En virtud de la forma en que el lema de la Trangresión nos arroja tanto a h como a h^*, no es difícil ver que se tiene que de hecho son inversos según el siguiente argumento: dada $G(X)x \in X/G(X)$, $[h^* \circ h](G(X)x) = h^*(y)$ donde y es el único elemento en $\pi[p^{-1}[G(X)x]]$; incidentalmente, esto último significa que

[21] R es una relación de equivalencia por ser reflexiva en tanto $1 \in G$, transitiva porque la "composición" de dos elementos del grupo G queda también en el grupo, y simétrica por la existencia de inversos. Recordamos que el conjunto de las órbitas bajo una acción dada constituyen una partición del espacio (visto como conjunto).

$p^{-1}[G(X)x] \subseteq \pi^{-1}[y]$ y por lo tanto que las imágenes bajo p de estos conjuntos tienen el mismo único elemento, el cual forzosamente debe ser $G(X)x$. Ahora bien, $h^*(y)$ está definido precisamente como el único elemento en $p[\pi^{-1}[y]]$, o sea $G(X)x$, gracias a lo cual $h^* \circ h = 1_{X/G}$. Un razonamiento francamente igual muestra que $h \circ h^* = 1_Y$ y, en consecuencia, que Y y $X/G(X)$ son homeomorfos vía h, terminando la prueba de la proposición. $\square$

Proposición 2.4.31. *Sea G un grupo y X un G-espacio topológico conexo. Si la acción de G sobre X es propiamente discontinua, entonces...*

1. *La función cociente $p : X \to X/G$ tal que $p(x) = Gx$ (es decir, la proyección canónica) es una aplicación cubriente normal.*

2. *G resulta ser el grupo de transformaciones cubrientes del espacio X.*

Demostración. 1) Sea $Gx \in X/G$. Como la acción es propiamente discontinua, existe un abierto $U_x \subset X$ alrededor de x conexo por trayectorias y tal que para cada $g_1, g_2 \in G$, si la intersección $g_1[U_x] \cap g_2[U_x]$ es no vacía, entonces $g_1 = g_2$. Notemos, primero que nada, que $p : X \to X/G$ es abierta pues, para todo U abierto en X, $p^{-1}[p[U]] = \bigcup\{g[U] \mid g \in G\}$ y ésta es una unión de abiertos a cuenta de los g son homeomorfismos. Así pues, $p[U_x]$ es un abierto conexo por trayectorias (ya que p es continua) alrededor de $p(x) = Gx$, cuya preimagen, hemos visto, es una unión de la forma $\bigcup\{g[U_x] \mid g \in G\}$. Por haber tomado a U_x tal que sus imágenes bajo distintas g no se intersectan, tal unión es de hecho una unión disjunta donde a parte afirmamos que $p|_{g[U_x]}$ es un homeomorfismo sobre $p[U_x]$ para toda $g \in G$:

En efecto, si $g \in G$, $p|_{g[U_x]}$ es claramente continua y abierta, con lo que ver que es biyectiva prueba nuestra afirmación. Para la suprayectividad, vemos que dado $Gy \in p[U_x]$, existe $y' \in U_x$ tal que $p(y') = Gy$ y $g(y') \in g[U_x]$. Se tiene, pues, que $y \overset{R}{\sim} y' \overset{R}{\sim} g(y')$ y por tanto que $p(g(y')) = p(y') = Gy$. Para la inyectividad, supongamos que $p(g(x_1)) = p(g(x_2))$ con $x_1, x_2 \in U_x$, entonces $x_1 \overset{R}{\sim} g(x_1) \overset{R}{\sim} g(x_2)$. Por tal motivo podemos establecer, sin pérdida de generalidad, que $g(x_2) = g'(x_1)$ para alguna $g' \in G$, pero esto quiere decir que $g[U_x] \cap g'[U_x] \neq \emptyset$, por lo tanto que $g = g'$ y luego que $g(x_2) = g(x_1)$.

Recapitulando, existe un abierto $p[U_x]$ alrededor de Gx parejamente cubierto por p, arrojando el hecho de que p es una aplicación cubriente. Veamos que es cubriente normal. Los elementos de G son en realidad transformaciones cubrientes en tanto $p \circ g = p$ para toda $g \in G$. Con esto en mente, si tomamos x_0 y x_1 en $p^{-1}[Gx]$ para algún $Gx \in X/G$, sabemos que $x_0 \overset{R}{\sim} x \overset{R}{\sim} x_1$ y por tanto que existe $g \in G$ tal que $x_1 = g(x_0)$, con lo cual se cumple que p es una aplicación cubriente normal.

2) Hemos visto al final de la prueba del inciso 1 que G es de hecho un subgrupo de $G(X)$ (el grupo de transformaciones cubrientes de X como espacio cubriente de X/G). Ahora bien, si tomamos $D \in G(X)$, entonces la igualdad $p(D(x)) = p(x)$ nos dice que $x \overset{R}{\sim} D(x)$ y por tanto que existe $g \in G$ tal que $D(x) = g(x)$. Como D y g son transformaciones cubrientes y por lo tanto son

levantamientos de p, tenemos que su coincidencia en tal punto x dicta, con el lema 2.4.20, que $D = g$. Así pues, $G(X)$ es a su vez subgrupo de G y se cumple que $G = G(X)$. $\square$

Capítulo 3

Homología Singular

3.1. Introducción

Como se insinúa desde el prefacio, el capítulo que nos ocupa ahora será el plato principal de la tesis. Aquí construiremos la *homología singular* y derivaremos algunas verdades sobre ella que la ubican como un método increíblemente potente para el estudio de los espacios topológicos. El protocolo de presentación fue cuidadosamente elegido para hacer de ella algo didáctico y accesible a cualquier persona que se tope con los conceptos por primera vez -como yo antes de empezar la tesis-, y es un tanto distinto al de los libros en la bibliografía. A veces es difícil decidir qué posición tomar para que algún mensaje llegue correctamente a su destinatario, y en este caso eso se traduce en decidir el orden y la profundidad con que se aborden las ideas ya tan bien escritas en otra parte por especialistas del tema. La palabra *introducción* adquiere aquí y en el propio título de la tesis un peso que pedimos -apologéticamente- se tome en cuenta, pues lo que buscamos no es ni "el máximo detalle posible" ni "la más extensiva compilación de resultados"; es un camino que intuimos amable y suficiente para principiantes.

Habiendo dicho esto, entramos en materia.

Cuando hablamos de Topología, hablamos de la *forma* de los objetos matemáticos, y se requirió el monstruoso ingenio y la monstruosa inteligencia de Poincaré para perseguir la sospecha de que operar los puntos -o algunas otras "cosas"- de un espacio topológico sería provechosísimo para conocer aspectos de su *forma*. Así, Poincaré conjuró por un lado el *grupo fundamental*, donde se operan lazos, y por el otro lo que más adelante se convertiría en la *homología singular*. Su intención era ligar espacios topológicos a ciertos grupos de tal suerte que la *operación* -una idea que no se tenía desde la Topología- y todas las maquinaciones algebraicas que se desprenden de ella aportaran respuestas y nuevos descubrimientos; nada más certero.

Para el caso de la *homología singular*, Poincaré se basó en su conocimiento sobre triangulaciones de variedades familiares y comenzó a darle contenido a una teoría que operaría las "celdas" de las triangulaciones de manera favorable. Más adelante, sus ideas pilares fueron depuradas por Brouwer (inintencionalmente), por los topólogos de Princeton y por el titán Eilenberg, quien definió la homología singular con amplia generalidad. Se gestó una herramienta que superaba muchos de los problemas que aparecían al usar grupos fundamentales, como lo son el manejo de puntos-base y la no-conmutatividad.

La idea de la homología tiene mucho que ver, en principio, con la estructura en "celdas" de un espacio topológico y con la intención de computar con mayor facilidad grupos que hablaran sobre cosas parecidas a lo que el grupo fundamental estudia. De esta noción de "celda" nacieron las ideas de ***simplejo*** y ***complejo celular*** que permitieron la concepción de grupos abelianos (con los que obviamente es más sencillo trabajar) para cada espacio topológico. En pocas palabras, un *simplejo* es la generalización multidimensional de un triángulo, mientras que un *complejo celular* es un espacio obtenido pegando muchos triángulos o simplejos (o algo homeomorfo a ellos). Así pues, si de alguna manera se encontraban operaciones y funciones sobre estos simplejos que revelaran datos paralelos a los que patrocinaban los "lazos" en el grupo fundamental, entonces se obtendría una teoría útil y práctica, que fue justamente lo que pasó.

Por otra parte, sabemos que hay espacios que no se pueden triangular o de los que aún no se conocen triangulaciones, por lo que, para definirles una homología, fue necesario adquirir un mayor grado de abstracción en los conceptos, lo que desafortunadamente implicaba perder algo de intuición geométrica.[1]

En su maravilloso libro [6], Allen Hatcher menciona que existen dos principales formas para introducir la homología de un espacio: una es atacarla primero por el lado axiomático-algebraico y después por el topológico-geométrico, y la otra es motivar geométricamente las nociones básicas dejando para luego la formalización algebraica. En este trabajo hemos optado por el primer camino, y si bien es anti-cronológico al progreso histórico, las razones para hacerlo se irán dando sobre la marcha.

A continuación, resumimos brevemente lo que se hará a lo largo de las siguientes secciones:

- Diremos qué son los *complejos de cadenas* y su *homología* (en términos puramente algebraicos). Luego deduciremos algunas propiedades sobre las *sucesiones exactas* entre estos objetos.
- Formalizaremos la noción de "puente" entre áreas distintas de las Matemáticas al definir qué es un *funtor*, apuntando hacia encontrar uno de estos puentes (o funtores) entre la Topología y el Álgebra.
- Mencionaremos -bajo los preceptos de Eilenberg, Steenrod y Milnor- qué es una *Teoría de Homología* en tanto asociación de un espacio topológico con una sucesión de grupos abelianos que satisface 5 axiomas particulares.
- Nos valdremos de las nomenclaturas de la segunda sección para definirle formalmente a un espacio topológico su *Homología Singular*. Aquí se

[1]Por esto es que se apellida *singular* la teoría, por las singularidades.

establecerá con rigor qué es un simplejo.

- Usando artilugios algebraicos de la segunda sección y otras reflexiones, probaremos que la *Homología Singular* es una Teoría de Homología.

- Mencionaremos algunos resultados y aplicaciones del inciso anterior encaminados a la prueba del Teorema de Borsuk-Ulam, labor dentro de la cual se definirá qué es un *complejo celular* y se retomará una discusión de sabor más geométrico en cuanto al nacimiento de la teoría.

3.2. Un Poco de Álgebra

Nos vamos a aproximar a los conceptos algebraicos que utilizaremos en todo el capítulo y que funcionan como el artefacto principal para examinar los grupos de homología de un espacio topológico. Nuestro enfoque persigue el objetivo de hacer lo más sencilla posible la presentación que hacemos de la homología singular y por lo tanto dicta que caminemos despacio, aspirando a que el punto de unión con la Topología resulte un paso sin mucha noción de arbitrariedad. Iremos adentrándonos en materia poco a poco y buscando, más que "dilapidar" teoremas y afirmaciones, pararnos bien en cada concepto que introduzcamos. En senderos así, apostaremos por un nivel de generalidad que ayude a la limpieza textual; lo que nos ocupa es un esfuerzo *nominal* en todo el sentido de la palabra: demos a nuestros utensilios sus nombres correctos para que posteriormente no tengamos problema en identificarlos.

Definición 3.2.1. *Llamamos* ***grupo graduado (abeliano)*** *a una colección de grupos abelianos indexada por los enteros de la forma $C_* := \{C_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Análogamente, dados dos grupos graduados C_* y D_*, llamamos* ***homomorfismo graduado*** *(de grado q) entre ellos a una colección de homomorfismos $h_* := \{h_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ tal que $h_i : C_i \to D_{i+q}$; en este sentido, escribimos $h_* : C_* \to D_*$.*

Definición 3.2.2. *Sea $C_* = \{C_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ un grupo graduado y $\partial := \{\partial_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ un homomorfismo graduado (de grado -1). Llamamos* ***complejo de cadenas*** *a la pareja (C_*, ∂) si y sólo si $\partial_i \circ \partial_{i+1} : C_{i+1} \to C_{i-1}$ es trivial para todo $i \in \mathbb{Z}$. A los homomorfismos ∂_i se les conoce como* ***operadores frontera*** *y, dado $i \in \mathbb{Z}$, los elementos de C_i reciben el nombre de i-**cadenas**.*

La representación usual de un *complejo de cadenas* (C_*, ∂) es...

$$\longrightarrow C_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} C_{i-2} \longrightarrow$$

... donde $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ para toda $i \in \mathbb{Z}$. Es claro que esta condición de que la composición de cada par de homomorfismos en un *complejo de cadenas* se anule implica que $im\ \partial_{i+1}$ es un subgrupo de $ker\ \partial_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Ahora bien, como los grupos C_i son abelianos, entonces de hecho ese subgrupo es normal y nuestra siguiente definición tiene sentido:

Definición 3.2.3. *Sea (C_*, ∂) un complejo de cadenas e $i \in \mathbb{Z}$ fijo. Definimos el i-ésimo* ***grupo de homología*** *de (C_*, ∂) como el grupo abeliano $H_i(C_*) := \frac{ker\ \partial_i}{im\ \partial_{i+1}}$. El grupo graduado...*

$$H_*(C_*) := \{H_i(C_*)\}_{i \in \mathbb{Z}}$$

... se conoce como la ***homología*** *del complejo de cadenas en cuestión. A los elementos en $ker\ \partial_i$ se les llama i-**ciclos**, mientras que los que viven en $im\ \partial_{i+1}$ reciben el nombre de i-**fronteras**.*

Muy relacionado a la definición anterior, puntualizamos con detalle los términos que utilizamos para referirnos a ciclos en las mismas clases laterales con la siguiente.

Definición 3.2.4. *Sea (C_*, ∂) un complejo de cadenas e $i \in \mathbb{Z}$. A los elementos de $H_i(C_*)$ se les llama genéricamente* ***clases de homología*** *de tal manera que, dado c un i-ciclo, su clase de homología se denota como $[\![c]\!]$. En la misma línea, dos i-ciclos c_1 y c_2 se dicen* ***homólogos*** *(denotado $c_1 \sim c_2$) si y sólo si están en la misma clase de homología, es decir, si existe una $(i+1)$-cadena d tal que $c_1 - c_2 = \partial_{i+1}(d)$ (su diferencia es una i-frontera).*

Dado un complejo de cadenas (C_*, ∂), es usual denotar a $ker\ \partial_i$ como $Z_i(C_*)$, mientras que $im\ \partial_{i+1}$ se suele anotar $B_i(C_*)$.

Definición 3.2.5. *Sean (A_*, ∂_{A_*}) y (B_*, ∂_{B_*}) complejos de cadenas. Un homomorfismo graduado $f : A_* \to B_*$ de grado 0 se denomina* ***aplicación de cadenas*** *si y sólo si las f_i conmutan con los operadores frontera, es decir, si son tales que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{i+1} \arrow[r, "\partial_{A_* i+1}"] \arrow[d, "f_{i+1}"] & A_i \arrow[r, "\partial_{A_* i}"] \arrow[d, "f_i"] & A_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{i+1} \arrow[r, "\partial_{B_* i+1}"] & B_i \arrow[r, "\partial_{B_* i}"] & B_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

En la medida en que trabajaremos mucho con diagramas de este estilo y resulta pesado el recargo notacional, por comodidad y sencillez advertiremos unas cuantas convenciones. Siempre que tratemos con *homomorfismos graduados*, *aplicaciones de cadenas* y *operadores frontera*, denotaremos a todos los miembros de la colección con un solo símbolo que casi siempre será el nombre que le demos a la familia (por ejemplo ∂ en vez de ∂_i). Por tanto, quedará en nuestra responsabilidad decir flagrantemente cuándo nos estemos refiriendo a una homomorfismo particular. Por otro lado, no haremos distinción entre los homomorfismos frontera para complejos de cadenas diferentes si no lo amerita la ocasión, de forma que de ahora en adelante nos referiremos a los complejos de cadena solamente por sus grupos graduados correspondientes y quedarán implícitos los operadores frontera. Siguiendo estas disposiciones, el anterior diagrama queda mucho más "limpio":

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{i+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f"] & A_i \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f"] & A_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{i+1} \arrow[r, "\partial"] & B_i \arrow[r, "\partial"] & B_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Proposición 3.2.6. *Si A_* y B_* son complejos de cadenas, entonces una aplicación de cadenas $f : A_* \to B_*$ induce, para toda $i \in \mathbb{Z}$, homomorfismos $f_* : H_i(A_*) \to H_i(B_*)$ definidos como $f_*([\![a]\!]) = [\![f(a)]\!]$. Más aun, se tiene que $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ y que $1_* = 1_{\_}$.*

Demostración. Notemos primero que f_* está bien definido para toda $i \in \mathbb{Z}$ según el razonamiento siguiente: si $[\![c_1]\!] = [\![c_2]\!]$ para dos i-ciclos c_1 y c_2, entonces existe una $(i+1)$-cadena d tal que $c_1 - c_2 = \partial(d)$. Como f es aplicación de cadenas, se cumple que $f(c_1) - f(c_2) = f(c_1 - c_2) = f(\partial(d)) = \partial(f(d))$ y por lo tanto que $[\![f(c_1)]\!] = [\![f(c_2)]\!]$, con lo que tenemos que $f_*([\![c_1]\!]) = f_*([\![c_2]\!])$.

Ahora veamos que los f_* son homomorfismos para toda $i \in \mathbb{Z}$: para c_1 y c_2 dos i-ciclos, $f_*([\![c_1]\!] + [\![c_2]\!]) = f_*([\![c_1 + c_2]\!]) = [\![f(c_1 + c_2)]\!] = [\![f(c_1) + f(c_2)]\!] = [\![f(c_1)]\!] + [\![f(c_2)]\!] = f_*([\![c_1]\!]) + f_*([\![c_2]\!])$. El "más aun" se cumple utilizando un procedimiento similar y fijándonos en la definición de los f_*. □

Recordamos de la definición 1.2.1 que una sucesión de grupos abelianos de la forma...

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$$

... se dice *exacta* si y sólo si $im\ i = ker\ j$. Como dijimos antes, las sucesiones exactas son armas técnicas poderosísimas, y el siguiente teorema se levantará medular para nuestros propósitos en la prueba del Teorema de Borsuk-Ulam -y en general en bastantes aplicaciones de la homología singular.

Antes, debemos decir que las sucesiones exactas que hemos visto hasta ahora han sido definidas para grupos, pero podemos dar un salto y pensarlas para complejos de cadenas (o grupos graduados) con aplicaciones de cadenas (u homomorfismos graduados) entre ellos. Es decir, una sucesión de la forma...

$$A_* \xrightarrow{i} B_* \xrightarrow{j} C_*$$

... será exacta si y sólo si $im\ i_p = ker\ j_p$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. Con este tipo de sucesiones es que trabajamos en el próximo teorema -que ya hemos encomiado lo suficiente.

Teorema 3.2.7. *Sea $0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{i} B_* \xrightarrow{j} C_* \longrightarrow 0$ una sucesión exacta **corta** de complejos de cadenas y aplicaciones de cadenas. Entonces se puede inducir una sucesión exacta **larga** en la homología de dichos complejos con la forma...*

$$... \xrightarrow{\partial_*} H_p(A_*) \xrightarrow{i_*} H_p(B_*) \xrightarrow{j_*} H_p(C_*) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A_*) \xrightarrow{j_*} ... \tag{3.1}$$

*... donde a ∂_* se le llamará **homomorfismo conector**.*

Demostración. Para facilitarnos el proceder de la prueba, presentamos un diagrama un tanto más fiel de la sucesión exacta corta de complejos de cadenas que aquél que aparece en el enunciado del teorema. Consideremos, entonces, la siguiente figura:

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_{p+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_{p+1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_p \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_p \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_p \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{p-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & B_{p-1} \arrow[r, "j"] \arrow[d] & C_{p-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

Notamos antes que nada que el hecho de que tal sucesión sea exacta nos implica que las i son monomorfismos y que las j son epimorfismos.

Ahora bien, debemos definir a $\partial_* : H_p(C_*) \to H_{p-1}(A_*)$ para que se comporte como deseado. Dada $c \in C_p$ tal que $\partial(c) = 0$ (un p-ciclo), sabemos que, en tanto j es sobre, existe $b \in B_p$ tal que $j(b) = c$. Además, $j(\partial(b)) = \partial(j(b)) = \partial(c) = 0$, lo que nos dice que $\partial(b) \in ker\ j = im\ i$ y por lo tanto que existe $a \in A_{p-1}$ tal que $i(a) = \partial(b)$. Más aun, como i es un monomorfismo, dicha a es única y es tal que $\partial(a) = 0$, pues la igualdad $i(\partial(a)) = \partial(i(a)) = \partial(\partial(b)) = 0$ implica que $\partial(a) \in ker\ i$ con i monomorfismo, por lo que en efecto $\partial(a) = 0$. Esto último garantiza que $[\![a]\!] \in H_{p-1}(A_*)$ y consecuentemente que podemos definir a ∂_* tal que, dada nuestra c inicial, $\partial_*([\![c]\!]) = [\![a]\!]$.

Veamos que ∂_* está bien definida: en primer lugar, dada $c \in C_p$ como arriba, si en vez de b tomamos a $b' \neq b$ tal que $j(b') = c$, entonces $b - b' \in ker\ j = im\ i$ claramente. Así pues, existe $a'' \in A_p$ tal que $i(a'') = b - b'$, lo que a su vez quiere decir que $\partial(b) - \partial(b') = \partial(i(a'')) = i(\partial(a''))$. Por otro lado, sabemos que existen ciclos $a, a' \in A_{p-1}$ tales que $\partial(b) - \partial(b') = i(a) - i(a') = i(a - a')$, lo que con lo anterior arroja que $i(a - a') = i(\partial(a''))$. Sumando esto último al hecho de que i es un monomorfismo, entonces tenemos que $a - a' = \partial(a'')$ y por lo tanto que $a \sim a'$ y que $[\![a]\!] = [\![a']\!]$. Con esto hemos visto que la elección de $\partial_*([\![c]\!])$ no depende de la preimagen bajo j de dicha c. Falta ahora ver que la función no depende del representante de la clase de homología en $H_p(C_*)$: tomemos c' un p-ciclo con $c' \sim c$, entonces sabemos que existe $c'' \in C_{p+1}$ tal que $c' = c + \partial(c'')$. Sea $b \in B_p$ y $b'' \in B_{p+1}$ tales que $j(b) = c$ y $j(b'') = c''$, afirmamos que $b' := b + \partial(b'')$ cumple que $j(b') = c'$, pues $j(b') = j(b) + j(\partial(b'')) = j(b) + \partial(j(b'')) = c + \partial(c'') = c'$.

En virtud de que $\partial(b') = \partial(b) + \partial(\partial(b'')) = \partial(b)$, tenemos que si a, a' son los ciclos en A_{p-1} tales que $i(a) = \partial(b) = \partial(b') = i(a')$, el hecho de que i es un monomorfismo nos dice esta vez que $a = a'$ y por lo tanto que $\partial_*([\![c]\!]) = \partial_*([\![c']\!])$, asegurando que la función no depende del representante de la clase de homología de c.

Procedemos a probar que ∂_* es un homomorfismo. Sean c_1, c_2 dos p-ciclos en C_p y sean $\partial_*([\![c_1]\!]) = [\![a_1]\!]$ y $\partial_*([\![c_2]\!]) = [\![a_2]\!]$ vía b_1 y b_2, respectivamente (como hemos hecho en todo el discurso anterior). Entonces, como $j(b_1 + b_2) = j(b_1) + j(b_2) = c_1 + c_2$ y $i(a_1 + a_2) = i(a_1) + i(a_2) = \partial(b_1) + \partial(b_2) = \partial(b_1 + b_2)$, tenemos que $\partial_*([\![c_1]\!] + [\![c_2]\!]) = \partial_*([\![c_1 + c_2]\!]) = [\![a_1 + a_2]\!] = [\![a_1]\!] + [\![a_2]\!] = \partial_*([\![c_1]\!]) + \partial_*([\![c_2]\!])$.

Nos queda probar que la sucesión *larga* en (3.1) es exacta. Para hacerlo, debemos mostrar la veracidad de seis contenciones:

($im\ i_* \subseteq ker\ j_*$) Como $im\ i = ker\ j$, tenemos que $j \circ i$ es trivial, por lo tanto que $(j \circ i)_*$ es trivial y, en sincronía con la proposición 3.2.6, que $j_* \circ i_*$ también lo es, probando esta contención.

($im\ j_* \subseteq ker\ \partial_*$) Sea $b \in B_p$ un p-ciclo. Nos fijamos en que $\partial_*(j_*([\![b]\!])) = \partial_*([\![j(b)]\!])$ y en el hecho de que $\partial(b) = 0$. Ahora bien, la definición de ∂_* nos pide mandar $[\![j(b)]\!]$ a la clase de aquel ciclo a en A_{p-1} tal que $i(a) = \partial(b) = 0$. Como i es un monomorfismo, a a no le queda más que ser igual a 0, con lo que vemos que $\partial_* \circ j_*$ es trivial y por lo tanto que se tiene la contención deseada.

($im\ \partial_* \subseteq ker\ i_*$) Sea $c \in C_p$ un p-ciclo. $i_*(\partial_*([\![c]\!])) = i_*([\![a]\!])$, donde $i(a) = \partial(b)$ para algún $b \in B_p$ tal que $j(b) = c$. Así pues, tenemos que $i_*([\![a]\!]) = [\![i(a)]\!] = [\![\partial(b)]\!]$, que es el neutro en $H_{p-1}(B_*)$. Por lo tanto, $i_* \circ \partial_*$ es trivial y hemos probado la contención.

($im\ i_* \supseteq ker\ j_*$) Supongamos que $[\![b]\!] \in ker\ j_*$. Esto nos implica que $j(b)$ es una p-frontera y consecuentemente que existe $c \in C_{p+1}$ tal que $j(b) = \partial(c)$. Por otro lado, como j es epimorfismo, sabemos que existe $b' \in B_{p+1}$ tal que $j(b') = c$. Luego observamos que $j(b - \partial(b')) = j(b) - j(\partial(b')) = \partial(c) - \partial(j(b')) = \partial(c) - \partial(c) = 0$ y por tanto que $b - \partial(b') \in ker\ j = im\ i$. A raíz de esto tenemos que existe $a \in A_p$ tal que $i(a) = b - \partial(b')$. Dicha a cumple que $\partial(a) = 0$ en tanto $i(\partial(a)) = \partial(i(a)) = \partial(b) - \partial(\partial(b')) = \partial(b) = 0$ e i es un monomorfismo. Como por este motivo pensar en $[\![a]\!]$ efectivamente tiene sentido, vemos que $i_*([\![a]\!]) = [\![i(a)]\!] = [\![b - \partial(b')]\!] = [\![b]\!]$. Así pues, tenemos que $[\![b]\!] \in im\ i_*$

($im\ j_* \supseteq ker\ \partial_*$) Sea $[\![c]\!] \in ker\ \partial_*$. Entonces $[\![a]\!] = \partial_*([\![c]\!]) = [\![0]\!]$, con a ciclo en A_{p-1} tal que $i(a) = \partial(b)$ para algún $b \in B_p$ tal que $j(b) = c$. Esto implica que $a = \partial(a')$ para algún $a' \in A_p$. Observamos que, gracias a que $j \circ i$ es trivial, se cumple que $j(b - i(a')) = j(b) - j(i(a')) = j(b) = c$. Pero $b - i(a')$ es de hecho un p-ciclo de B_p en tanto $\partial(b - i(a')) = \partial(b) - \partial(i(a')) = \partial(b) - i(\partial(a')) = \partial(b) - i(a) = \partial(b) - \partial(b) = 0$, por lo cual queda bien fundamentado el hecho de que $j_*([\![b - i(a')]\!]) = [\![j(b - i(a'))]\!] = [\![c]\!]$ y la contención requerida se muestra cierta.

($im\ \partial_* \supseteq ker\ i_*$) Sea $[\![a]\!] \in ker\ i_*$. Entonces $i_*([\![a]\!]) = [\![0]\!]$ y por tanto $i(a) = \partial(b)$ para algún $b \in B_{p+1}$. Ahora bien, $j(b)$ vive en C_{p+1} y es tal que $\partial(j(b)) = j(\partial(b)) = j(i(a)) = 0$ (lo que significa que es un $(p+1)$-ciclo). Por lo tanto, podemos aplicarle ∂_* a $[\![j(b)]\!]$ y, por construcción del homomorfismo conector, obtener $[\![a]\!]$ para nuestra conveniencia.

Debido a todas estas contenciones, finalmente apreciamos que la sucesión en (3.1) es una *sucesión exacta larga* y hemos concluido la prueba del teorema.[2] □

Existe un concepto importante asociado a la inducción de sucesiones exactas largas en la homología de complejos de cadenas a partir de aquéllas cortas al que nos referimos como *naturalidad*. Más adelante lo trataremos en su interpretación dentro del Álgebra Homológica, pero aquí nos limitamos a presentarlo como el nombre que damos al hecho que establece la siguiente proposición.

Proposición 3.2.8 (Naturalidad)**.** *Dadas dos sucesiones exactas cortas de complejos de cadenas (y aplicaciones de cadenas)...*

$$0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{i} B_* \xrightarrow{j} C_* \longrightarrow 0$$

$$y$$

$$0 \longrightarrow A'_* \xrightarrow{i'} B'_* \xrightarrow{j'} C'_* \longrightarrow 0$$

... con aplicaciones de cadena $\alpha : A_* \to A'_*$, $\beta : B_* \to B'_*$ y $\gamma : C_* \to C'_*$ entre ellas, entonces la conmutatividad del diagrama (3.2) *implica la de* (3.3) *en las siguientes representaciones:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_* \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & B_* \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"] & C_* \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_* \arrow[r, "i'"] & B'_* \arrow[r, "j'"] & C'_* \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \quad (3.2)$$

$$\begin{tikzcd}
H_p(A_*) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & H_p(B_*) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\beta_*"] & H_p(C_*) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\gamma_*"] & H_{p-1}(A_*) \arrow[d, "\alpha_*"] \\
H_p(A'_*) \arrow[r, "i'_*"] & H_p(B'_*) \arrow[r, "j'_*"] & H_p(C'_*) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{p-1}(A'_*).
\end{tikzcd} \quad (3.3)$$

Demostración. Procederemos "cuadro por cuadro". Así, nos fijamos primero en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
H_p(A_*) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & H_p(B_*) \arrow[d, "\beta_*"] \\
H_p(A'_*) \arrow[r, "i'_*"] & H_p(B'_*).
\end{tikzcd}$$

[2]Al procedimiento que utilizamos en la prueba usualmente se le llama *persecución de diagrama* y representa una de las primeras instancias de lo que se conoce como *Álgebra Homológica*.

Sea $\llbracket a \rrbracket \in H_p(A'_*)$. $[\beta_* \circ i_*](\llbracket a \rrbracket) = \beta_*(\llbracket i(a) \rrbracket) = \llbracket\ [\beta \circ i](a)\ \rrbracket = \llbracket\ [i' \circ \alpha](a)\ \rrbracket = i'_*(\llbracket \alpha(a) \rrbracket) = [i'_* \circ \alpha_*](\llbracket a \rrbracket)$, donde la tercera igualdad se cumple por la conmutatividad correspondiente en (3.2), con lo que mostramos aquélla del primer cuadro.

Para el segundo, la prueba es muy similar, y vemos que en...

$$\begin{tikzcd} H_p(B_*) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\beta_*"] & H_p(C_*) \arrow[d, "\gamma_*"] \\ H_p(B'_*) \arrow[r, "j'_*"] & H_p(C'_*) \end{tikzcd}$$

... se cumple que $[\gamma_* \circ j_*](\llbracket b \rrbracket) = \gamma_*(\llbracket j(b) \rrbracket) = \llbracket\ [\gamma \circ j](b)\ \rrbracket = \llbracket\ [j' \circ \beta](b)\ \rrbracket = j'_*(\llbracket \beta(b) \rrbracket) = [j'_* \circ \beta_*](\llbracket b \rrbracket)$ para todo $\llbracket b \rrbracket \in H_p(B'_*)$, con lo que hemos avanzado en nuestra prueba y tan sólo nos queda verificar el tercer cuadro, a saber...

$$\begin{tikzcd} H_p(C_*) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\gamma_*"] & H_{p-1}(A_*) \arrow[d, "\alpha_*"] \\ H_p(C'_*) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{p-1}(A'_*). \end{tikzcd}$$

Para probar la conmutatividad de éste, recordamos que nuestra definición de $\partial_* : H_p(C_*) \to H_{p-1}(A_*)$ (y análogamente de $\partial_* : H_p(C'_*) \to H_{p-1}(A'_*)$) es tal que, dada $\llbracket c \rrbracket \in H_p(C_*)$, $\partial_*(\llbracket c \rrbracket) = \llbracket a \rrbracket$, donde $c = j(b)$ y $i(a) = \partial(b)$. Ahora bien, observamos que la conmutatividad del tercer cuadro en (3.2) nos otorga que $\gamma(c) = \gamma(j(b)) = j'(\beta(b))$, mientras que la del segundo cuadro en (3.2), aunada al hecho de que β es una aplicación de cadena, dicta que $i'(\alpha(a)) = \beta(i(a)) = \beta(\partial(b)) = \partial\ (\beta(b))$. Con estos dos preliminares y nuestra definición de ∂_*, vemos que $\partial_*(\llbracket \gamma(c) \rrbracket)$ coincide exactamente con $\llbracket \alpha(a) \rrbracket$. Por este motivo, tenemos que $[\alpha_* \circ \partial_*](\llbracket c \rrbracket) = \alpha_*(\llbracket a \rrbracket) = \llbracket \alpha(a) \rrbracket = \partial_*(\llbracket \gamma(c) \rrbracket) = [\partial_* \circ \gamma_*](\llbracket c \rrbracket)$ y hemos terminado nuestra tarea. $\square$

Para finalizar, definimos la suma directa de grupos graduados y complejos de cadenas para luego revisar una propiedad de ella relacionada con la homología, lo que será de utilidad en algunos resultados a venir.

Definición 3.2.9. *Sea $\{A_{*,\alpha}\}_{\alpha \in J}$ una familia de grupos graduados. La suma directa $\bigoplus_{\alpha \in J} A_{*,\alpha}$ se refiere a la colección $\{\bigoplus_{\alpha \in J} A_{i,\alpha}\}_{i \in \mathbb{Z}}$, donde $A_{i,\alpha}$ es el i-ésimo miembro del grupo graduado $A_{*,\alpha}$.*

Proposición 3.2.10. *Sea $\{(A_{*,\alpha}, \partial_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ una familia de complejos de cadenas. Si consideramos los homomorfismos $\bigoplus_{\alpha \in J} \partial_\alpha : \bigoplus_{\alpha \in J} A_{i,\alpha} \to \bigoplus_{\alpha \in J} A_{(i-1),\alpha}$, entonces la pareja $(\bigoplus_{\alpha \in J} A_{*,\alpha}, \bigoplus_{\alpha \in J} \partial_\alpha)$ a su vez resulta ser un complejo de cadenas.*

Demostración. Esto es fácil de comprobar, pues se cumple que $(\bigoplus_{\alpha \in J} \partial_\alpha)^2 = \bigoplus_{\alpha \in J} \partial_\alpha^2 = 0$. $\square$

Proposición 3.2.11. *Sea* $\{(A_{*,\alpha}, \partial_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ *una familia de complejos de cadenas. Para todo* $i \in \mathbb{Z}$ *se cumple que...*

$$H_i\left(\bigoplus_{\alpha\in J} A_{*,\alpha}\right) \approxeq \bigoplus_{\alpha\in J} H_i(A_{*,\alpha}).$$

Demostración. Sea $i \in \mathbb{Z}$, $m_d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ y $\sum_{j=1}^{m_d} d_j \in \bigoplus_{\alpha\in J} A_{(i+1),\alpha}$ una $(i+1)$-cadena. Entonces $\bigoplus_{\alpha\in J} \partial_\alpha(\sum_{j=1}^{m_d} d_j) \in B_i(\bigoplus_{\alpha\in J} A_{*,\alpha})$, pero $\bigoplus_{\alpha\in J} \partial_\alpha(\sum_{j=1}^{m_d} d_j) = \sum_{j=1}^{m_d} \partial_j(d_j)$, la cual es una suma formal donde cada sumando vive en $B_i(A_{*,j})$. Por lo tanto, la suma formal vive en $\bigoplus_{\alpha\in J} B_i(A_{*,\alpha})$ y tenemos que $B_i(\bigoplus_{\alpha\in J} A_{*,\alpha}) \subseteq \bigoplus_{\alpha\in J} B_i(A_{*,\alpha})$.

Por otro lado, para cualquier colección finita de $(i+1)$-cadenas $\{d_j \in A_{(i+1),j}\}_{1\le j\le n}$, se cumple que $\sum_{j=1}^{n} \partial_j(d_j) = \bigoplus_{\alpha\in J} \partial_\alpha(\sum_{j=1}^{n} d_j)$ y por lo tanto que vive en $B_i(\bigoplus_{\alpha\in J} A_{*,\alpha})$. Luego entonces $B_i(\bigoplus_{\alpha\in J} A_{*,\alpha}) \supseteq \bigoplus_{\alpha\in J} B_i(A_{*,\alpha})$ y tenemos que...

$$B_i\left(\bigoplus_{\alpha\in J} A_{*,\alpha}\right) = \bigoplus_{\alpha\in J} B_i(A_{*,\alpha}).$$

Ahora bien, para todo i-ciclo $\sum_{j=1}^{m_e} e_j \in Z_i(\bigoplus_{\alpha\in J} A_{*,\alpha})$, tenemos que $0 = \bigoplus_{\alpha\in J} \partial_\alpha(\sum_{j=1}^{m_e} e_j) = \sum_{j=1}^{m_e} \partial_j(e_j)$, lo que implica que $\partial_j(e_j) = 0$ para toda $1 \le j \le m_e$, de forma que $e_j \in Z_i(A_{*,j})$ para toda $1 \le j \le m_e$ y así $Z_i(\bigoplus_{\alpha\in J} A_{*,\alpha}) \subseteq \bigoplus_{\alpha\in J} Z_i(A_{*,\alpha})$.

De manera análoga, dado $\sum_{j=1}^{m_e} e_j \in \bigoplus_{\alpha\in J} Z_i(A_{*,\alpha})$, tenemos que $0 = \sum_{j=1}^{m_e} \partial_j(e_j) = \bigoplus_{\alpha\in J} \partial_\alpha(\sum_{j=1}^{m_e} e_j)$, lo que implica que $\sum_{j=1}^{m_e} e_j \in Z_i(\bigoplus_{\alpha\in J} A_{*,\alpha})$, con lo que $Z_i(\bigoplus_{\alpha\in J} A_{*,\alpha}) \supseteq \bigoplus_{\alpha\in J} Z_i(A_{*,\alpha})$ y...

$$Z_i\left(\bigoplus_{\alpha\in J} A_{*,\alpha}\right) = \bigoplus_{\alpha\in J} Z_i(A_{*,\alpha}).$$

Finalmente, y gracias al ejemplo 1.1.6, alcanzamos...

$$\begin{aligned} H_i\left(\bigoplus_{\alpha\in J} A_{*,\alpha}\right) &= \frac{Z_i\left(\bigoplus_{\alpha\in J} A_{*,\alpha}\right)}{B_i\left(\bigoplus_{\alpha\in J} A_{*,\alpha}\right)} = \frac{\bigoplus_{\alpha\in J} Z_i(A_{*,\alpha})}{\bigoplus_{\alpha\in J} B_i(A_{*,\alpha})} \\ &\approxeq \bigoplus_{\alpha\in J} \frac{Z_i(A_{*,\alpha})}{B_i(A_{*,\alpha})} = \bigoplus_{\alpha\in J} H_i(A_{*,\alpha}). \end{aligned}$$

□

Como fue mencionado en la introducción de este capítulo, la meta máxima es *asociar* grupos abelianos a un espacio topológico, donde nada mal caería que dichos grupos asociados fueran fáciles de manejar y que cumplieran requisitos relacionados con la naturaleza topológica de los problemas a resolver.

Sucederá, pues, que para un espacio topológico X encontraremos un complejo de cadenas astutamente definido que se conoce con el nombre de *complejo de* *cadenas singulares* y al que denotaremos $\Delta_*(X)$. Con las definiciones que hasta ahora hemos dado, esto nos permite ya de entrada remitirnos a la homología del complejo, la cual resultará ser la llamada *homología singular* de X, nada casualmente. Ahora bien, la definición de tal complejo de cadenas persigue, como decíamos, intereses muy particulares, y a los requisitos que exigen de nuestra teoría esos intereses se refiere la próxima sección.

3.3. Axiomas de Homología

En su libro [3], Jean Dieudonné menciona que la maquinaria de construcción de las *teorías de homología* en Topología es complicada y apaentemente tan arbitraria que a uno podría parecerle casi extraordinario el hecho de que funcionen. Tales nociones de la Topología Algebraica sorprenden a un estudiante cuando las lee en los libros de texto, motivándolo a pensar que sus inventores (o descubridores) debieron ser casi profetas, anomalías intelectuales poseedoras de un sentido inigualable de intuición y creatividad. Mientras esto se prueba cierto en muchos de los casos, la realidad también apunta que lo que ha llegado hasta nosotros es un producto cuidadosamente depurado. Esto no sólo por afanes estéticos, sino por necesidad, pragmatismo, y también por la conciencia de que, en cantidad de ocasiones suficiente como para justificar su utilidad, echarse unos cuantos pasos atrás abre la oportunidad de obtener un mejor panorama de lo que está en nuestra mesa de trabajo.

En la sección anterior nombramos algunos de los objetos matemáticos que se usan en la teoría de homología singular, haciendo el mejor esfuerzo por reconocerlos como lo que *son*, y que no es otra cosa que lo que se ha descubierto (o inventado) que pueden *ser*, todo después de un proceso histórico lleno de "pasos hacia atrás" y "pasos hacia adelante". Con la misma ilusión con que nos movimos en dicha sección -y que, repetimos, es raíz de una presentación temática casi en contraflujo del orden cronólogico en el desarrollo conceptual- nos damos a la tarea de traer al frente la axiomatización de las teorías de homología que hicieron Eilenberg y Steenrod. Ellos, dice Dieudonné, se centraron desde el principio en las *propiedades* interesantes que ofrecían tales teorías en vez de en los métodos que se usaron para llegar a ellas. Hacerlo a esta altura, a riesgo de ser prematuros, tiene dos propósitos claros: primero, no perder generalidad; y segundo, reconocer la existencia de un escenario mayor donde la homología singular es sólo un exponente teórico con ventajas y limitaciones respecto de otras teorías.

Para todo esto, habremos de definir los conceptos de *categoría* y *funtor* -pilares en la Teoría de Categorías- de suerte que remontemos el amplio caudal de ideas con un lenguaje adecuado, entregados a dar su justo nombre a las entidades con las que nos vayamos topando.

Definición 3.3.1. *$\mathcal{C}$ se dice una **categoría** si y sólo si consiste en...*

1. *Una clase $ob(\mathcal{C})$, a cuyos elementos llamamos **objetos** de $\mathcal{C}$.*

2. *Una funcional que a cada par de objetos X y Y de $\mathcal{C}$ asigna un conjunto denotado $MOR(X,Y)$, cuyos elementos se llamarán* ***morfismos*** *o* ***flechas*** *(en $\mathcal{C}$) de X en Y. Escribiremos $f : X \to Y$ para significar que $f \in MOR(X,Y)$.*

3. *Una funcional que a cada par de morfismos $f \in MOR(X,Y)$, $g \in MOR(Y,Z)$ asigna un morfismo denotado $f \circ g$ tal que $f \circ g \in MOR(X,Z)$ y se cumplen las siguientes propiedades:*

    a) Asociatividad: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ para cualesquiera morfismos f, g y h tales que la anterior expresión tenga sentido.

    b) Para cada objeto X, existe un morfismo denotado $\mathbb{1}_X$ en $MOR(X,X)$ tal que, para cada $Y \in ob(\mathcal{C})$, $\mathbb{1}_X \circ f = f$ para todo $f \in MOR(X,Y)$ y $g \circ \mathbb{1}_X = g$ para todo $g \in MOR(Y,X)$.

Como nota, llamaremos *categorías* ***pequeñas*** a aquéllas donde la clase $ob(\mathcal{C})$ es un *conjunto*, mientras que las que no cumplen esto se llamarán ***grandes***.

Como observación, decimos que si X es objeto de una categoría $\mathcal{C}$, $\mathbb{1}_X$ como en la definición resulta ser único, pues cualquier otro $\mathbb{1}'_X$ que satisfaga la propiedad requerida también satisface que $\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_X \circ \mathbb{1}'_X = \mathbb{1}'_X$.

Ejemplo 3.3.2. *La clase de los grupos como clase de objetos, junto con los homomorfismos de grupos como morfismos, con la composición de homomorfismos habitual (y la identidad), definen una categoría grande.*

Ejemplo 3.3.3. *La clase de los grupos graduados como clase de objetos, junto con los homomorfismos graduados entre grupos graduados como morfismos, con la composición de homomorfismos graduados natural (y la identidad), definen una categoría grande.*

Ejemplo 3.3.4. *La clase de los espacios topológicos como clase de objetos, junto con las funciones continuas como morfismos, con la composición habitual (y la identidad), definen una categoría grande. También así lo hacen los pares topológicos y las funciones continuas entre ellos.*

A continuación, introducimos lo que es un *funtor* entre categorías:

Definición 3.3.5. *Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, una aplicación $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ tal que a cada objeto X de $\mathcal{C}$ le asigna un objeto $F(X)$ de $\mathcal{C}'$ y a cada morfismo $f : X \to Y$ (con $X, Y \in ob(\mathcal{C})$) le asigna un morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$ se llama* ***funtor covariante*** *si y sólo si se cumplen...*

1. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

2. $F(\mathbb{1}_X) = \mathbb{1}_{F(X)}$.

Para que el adjetivo *covariante* no se antoje gratuito, añadimos que diremos que un funtor es ***contravariante*** si en la definición anterior la imagen de un morfismo invierte imágenes de "dominios", es decir, si dado un morfismo f :

$X \to Y$, entonces $F(f) : F(Y) \to F(X)$. De esta manera, la propiedad 1 se vuelve $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

Los *funtores* nos permiten encontrar paralelismos entre distintas áreas de las Matemáticas.

Definición 3.3.6. *Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, y dados $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ dos funtores covariantes, entonces una* ***transformación natural de funtores*** *(para F y G) es una aplicación Φ que a cada objeto X de $\mathcal{C}$ le asigna un morfismo en $\mathcal{C}'$ $\Phi(X) : F(X) \to G(X)$ tal que, para cada morfismo $f : X \to Y$, el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\Phi(X)"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\Phi(Y)"] & G(Y). \end{tikzcd}$$

Ejemplo 3.3.7. *Como ejemplos de funtores covariantes tenemos los siguientes:*

- *La asignación de su grupo fundamental a un espacio basado (X, x_0). Sea* $\mathrm{Top}_{\mathcal{B}}$ *la categoría de los espacios basados con sus funciones continuas (basadas) y $\mathcal{G}$ aquélla de los grupos con sus homomorfismos. Entonces* $\Pi_1 : \mathrm{Top}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{G}$ *tal que* $\Pi_1((X, x_0)) := \Pi_1(X, x_0)$ *y* $\Pi_1(f) = f_+$ *es un funtor covariante.*

- *Sea* Top *la categoría de los espacios topológicos con sus funciones continuas y $\mathcal{T}$ la categoría de los pares topológicos con las funciones continuas (entre pares).* $\mathrm{Pa} : \mathrm{Top} \to \mathcal{T}$ *tal que, para cada objeto X,* $\mathrm{Pa}(X) = (X, \emptyset)$ *y para cada función continua $f : X \to Y$,* $\mathrm{Pa}(f) = f : (X, \emptyset) \to (Y, \emptyset)$*, es un funtor covariante.*

- *Sean* Top *y $\mathcal{T}$ como en el ejemplo anterior.* $\mathrm{Sub} : \mathcal{T} \to \mathrm{Top}$ *tal que, para cada par $(X, A) \in \mathcal{T}$,* $\mathrm{Sub}((X, A)) = A$ *y para cada función continua $f : (X, A) \to (Y, B)$,* $\mathrm{Sub}(f) = f|_A : A \to B$*, es un funtor covariante.*

Usaremos estas definiciones para esteblecer parámetros sobre la relación especial entre espacio topológico y su homología singular.

Así pues, comencemos con este tema, donde es importante que se mantengan en mente los conceptos algebraicos desarrollados en la sección previa, pues la terminología resulta esclarecedora. Como trabajaremos con *pares*, recordemos además que cualquier espacio topológico X está representado en la categoría de los pares por $(X, \emptyset)$ de acuerdo con el funtor covariante $Pa : Top \to \mathcal{T}$ del ejemplo anterior.

Definición 3.3.8. *Sea $\mathcal{T}$ la categoría de los pares topológicos con sus funciones continuas y $\mathcal{G}_{\mathcal{AB}}$ aquélla de los grupos abelianos con sus homomorfismos. Una* ***Teoría de Homología*** *consiste de una familia de funtores covariantes $\{\mathcal{H}_p : \mathcal{T} \to \mathcal{G}_{\mathcal{AB}}\}_{p \in \mathbb{Z}}$ y una familia de morfismos $\{\partial_* : \mathcal{H}_p((X, A)) \to \mathcal{H}_{p-1}(A)\}_{p \in \mathbb{Z}}$ tales que...*

1. *$\mathcal{H}_p : \mathcal{T} \to \mathcal{G}_{\mathcal{AB}}$ asigna a cada par topológico $(X, A) \in \mathcal{T}$ un grupo $\mathcal{H}_p((X, A))$ y a cada función continua $f : (X, A) \to (Y, B)$ asigna un homomorfismo $f_* : \mathcal{H}_p((X, A)) \to \mathcal{H}_p((Y, B))$.*

2. *Para cada par (X, A) se cumple que $\partial_* : \mathcal{H}_p((X, A)) \to \mathcal{H}_{p-1}(A)$ es un homomorfismo y, si consideramos el funtor covariante* Sub : $\mathcal{T} \to$ Top *como en el ejemplo 3.3.7, entonces ∂_* como tansformación que, para un $p \in \mathbb{Z}$ dado, asigna el homomorfismo ∂_* a cada par (X, A), resulta una* transformación natural de funtores *entre $\mathcal{H}_p$ y $\mathcal{H}_{p-1} \circ \mathrm{Sub}$*[3]*. Es decir, para toda función continua $f : (X, A) \to (Y, B)$ y $p \in \mathbb{Z}$, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_p((X,A)) \arrow[r, "\partial_*((X,A))"] \arrow[d, "f_*"] & \mathcal{H}_{p-1}(A) \arrow[d, "f_*"] \\ \mathcal{H}_p((Y,B)) \arrow[r, "\partial_*((Y,B))"] & \mathcal{H}_{p-1}(B). \end{tikzcd}$$

3. *Se cumplen los siguientes los siguientes tres axiomas:*

   a) (Axioma de Homotopía) Para todo $p \in \mathbb{Z}$,

   $$f \simeq g : (X, A) \to (Y, B) \Rightarrow f_* = g_* : \mathcal{H}_p((X, A)) \to \mathcal{H}_p((Y, B)).$$

   b) (Axioma de Exactitud) Para las inclusiones $i : A \hookrightarrow X$ y $j : X \hookrightarrow (X, A)$, la siguiente sucesión es exacta:

   $$\ldots \xrightarrow{\partial_*} \mathcal{H}_p(A) \xrightarrow{i_*} \mathcal{H}_p(X) \xrightarrow{j_*} \mathcal{H}_p((X, A)) \xrightarrow{\partial_*} \mathcal{H}_{p-1}(A) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

   c) (Axioma de Escisión) Dado el par (X, A) y $U \subset X$ tal que $\overline{U} \subseteq int(A)$, entonces la inclusión $k : (X \backslash U, A \backslash U) \hookrightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo...

   $$k_* : \mathcal{H}_p((X \backslash U, A \backslash U)) \xrightarrow{\approxeq} \mathcal{H}_p((X, A))$$

   ... para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Definición 3.3.9.

- *Una teoría de homología que satisfaga el siguiente axioma se dirá **ordinaria***

  (Axioma de Dimensión) Para el espacio $P = \{*\}$ de un solo punto, se tiene que $\mathcal{H}_p(P) \approxeq 0$ para toda $p \neq 0$.

- *Una teoría de homología que satisfaga el siguiente axioma se dirá **aditiva**:*

  (Axioma de Aditividad) Para la suma topológica $X := +_\alpha X_\alpha$ y las inclusiones $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow X$, el homomorfismo...

  $$\bigoplus_\alpha (i_\alpha)_* : \bigoplus_\alpha \mathcal{H}_p(X_\alpha) \longrightarrow \mathcal{H}_p(X)$$

  ... es un isomorfismo para todo $p \in \mathbb{Z}$.

[3]En realidad, la transformación natural es entre los funtores $\mathcal{H}_p$ y $\mathcal{H}_{p-1} \circ Pa \circ Sub$, pero eso queda implícito gracias a la última anotación antes de esta definición.

Es conveniente mencionar que, en una teoría de homología, la colección $\{\mathcal{H}_p((X,A))\}_{p\in\mathbb{Z}}$ constituye un grupo graduado, mientras que $\{\partial_* : \mathcal{H}_p((X,A)) \to \mathcal{H}_{p-1}(A)\}_{p\in\mathbb{Z}}$ resulta ser un homomorfismo graduado (de grado -1).

Definición 3.3.10. *Sea $P = \{*\}$ el espacio de un solo punto. Para una teoría de homología dada, al grupo $\mathcal{H}_0(P)$ se le llama* ***grupo de coeficientes*** *de la teoría en cuestión.*

Discutamos otra vez la presentación de estos axiomas. A primera vista, podría parecer muy veleidoso pedir que una teoría de homología satisfaga tantas demandas, y entonces habríamos fracasado en nuestro intento de reducir al máximo la impresión de capricho. Sin embargo, lo hemos hecho para *reconocer* la dirección que llevamos y -por qué no decirlo- sacarnos la espina de una vez por todas y llamar a las cualidades correctamente. Puede funcionar como otra disculpa la explicación de que hemos elegido el menor de dos males; un poco de arbitrariedad ahora para atenuarla cuando definamos la *homología singular*. Enunciando las obligaciones útiles de ella, tenemos ya una especie de destino intermedio, un encauzamiento, y podemos caminar un tanto más tranquilos. Por otro lado, por fin hemos comenzado a hablar de espacios topológicos, lo que no puede dejar de ser bueno.

Los axiomas son cuidadosas abstracciones de situaciones que los eruditos fueron encontrando en la Topología Algebraica, y el esfuerzo de *fundamentación* fue monumental para una organización metódica de pensamientos que de otro modo se hubieran mantenido mucho tiempo desperdigados y sin noción de generalidad.

Es lógico pensar que el viejo conocido *homomorfismo de conexión*, que definimos en la sección previa, nos capacitará para definir al ∂_* que pide la *teoría*, para lo cual habremos de recordar su *naturalidad*. Pero no perdamos más tiempo en adelantos y justificaciones, definamos formalmente la homología singular y veamos que es una *Teoría de Homología Ordinaria y Aditiva*.

3.4. Homología Singular

Definición 3.4.1. *Sea $\{e_0, e_1, ...\}$ la base habitual de $\mathbb{R}^\infty$. Llamamos p-**simplejo estándar** o **canónico** al conjunto $\Delta_p := \{x \in \mathbb{R}^{p+1} \mid x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i,\ \sum_{i=o}^{p} \lambda_i = 1,\ 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$.*

Recordamos de la definición 2.1.14 que las λ_i de arriba se llaman *coordenadas baricéntricas* de x y que Δ_p resulta ser el *casco convexo* de los $p+1$ puntos (afínmente independientes) $\{e_0, ..., e_p\}$. Bajo estas nociones, tenemos que...

- $\Delta_0 = \{1\}$ (un solo punto).
- $\Delta_1 \approx [0,1]$ (una trayectoria).
- $\Delta_2 \approx$ un triángulo.

- $\Delta_3 \approx$ un tetraedro.

  ...

Proposición 3.4.2. *El p-simplejo estándar Δ_p es un subconjunto conexo, compacto y contraíble (por lo tanto simplemente conexo) de $\mathbb{R}^{p+1}$.*

Demostración. Las cualidades que el enunciado pide revisar son sumamente utilizadas en nuestro estudio, y por eso las probamos. Como Δ_p es convexo, es conexo por trayectorias y por lo tanto conexo. También por ser convexo y distinto del vacío observamos que tiene forma de estrella y por lo tanto que es contraíble -y simplemente conexo- (recordar los ejemplos 2.3.4 y 2.3.21).

Ahora bien, veamos que Δ_p es cerrado. Si tomamos un sucesión convergente de puntos en Δ_p, dada (en coordenadas baricéntricas) por $\{(\lambda_{0_n}, ..., \lambda_{p_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$, tenemos que el límite $(\lambda_0, ..., \lambda_p)$ (en coordenadas "naturales") también resulta viviendo en Δ_p, pues como la convergencia es coordenada a coordenada, se cumple que $0 \leq \lambda_i \leq 1$ para toda $0 \leq i \leq p$, mientras que como la suma de los límites λ_i es el límite de las sumas de los λ_{i_n}, tenemos también que $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1$. Por lo tanto, el límite está también en Δ_p y las que antes llamamos sus coordenadas "naturales" son también baricéntricas.

Veamos que Δ_p es acotado. Es claro que la bola abierta $(p+1)$-dimensional de radio 2 engloba completamente a Δ_p, por lo cual éste es acotado. Así pues, Δ_p es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^{p+1}$, que por el teorema de Heine-Börel nos implica que es compacto.[4]

□

Definición 3.4.3. *Dados $p+1$ puntos v_0, ..., $v_p \in \mathbb{R}^{p+1}$, entonces la función continua $[v_0, ..., v_p] : \Delta_p \to \mathbb{R}^{p+1}$ tal que $[v_0, ..., v_p](\sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i) = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i$ se dice p-**simplejo singular afín**.*

Notemos que la imagen de $[v_0, ..., v_p]$ es el *casco convexo* de los puntos v_i, los cuales no se han asumido afínmente independientes, haciendo válidos los casos degenerados como por ejemplo aquél que surge de pensar a la imagen de $[e_0, e_1, e_2, e_2]$ como un triángulo, no un tetraedro.[5]

Observamos, a su vez, que un p-simplejo singular afín es una *aplicación afín* que queda determinada por los puntos v_i. Así pues, dado uno como $[v_0, ..., v_p]$, siempre podemos pensar en los $(p-n)$-simplejos singulares afines que resultan de quitar n puntos del conjunto $\{v_1, ..., v_p\}$ y considerar las aplicaciones afines correspondientes entre Δ_{p-n} y los conjuntos $\{v_1, ..., v_p\} \backslash \{v_{i_1}, ..., v_{i_n}\}$, a las que denotaremos $[v_0, ..., \hat{v_{i_1}}, ..., \hat{v_{i_n}}, ..., v_p]$ (ponerle el sombrero al punto indica que lo estamos descartando). Relacionado a esto, es claro que la imagen de $[v_0, ..., \hat{v_{i_j}}, ..., v_p]$ es un subconjunto del casco convexo de $\{v_1, ..., v_p\}$. Ahora bien, gracias a esta terminología, procedemos con otra definición.

[4] De hecho, el casco convexo de un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$ siempre es compacto, lo cual se prueba con el teorema de Carathéodory.

[5] Algunos autores (véase [7]) llaman *p-simplejos afines* a los cascos convexos de $p+1$ puntos. La palabra clave en nuestra definición viene siendo, pues, *singular*, ya que nos refiere no al conjunto sino a la función lineal (y por lo tanto continua) entre el *p-simplejo estándar* y ciertos puntos v_i en el espacio $\mathbb{R}^{p+1}$.

Definición 3.4.4. *El* $(p-1)$*-simplejo singular afín* $[e_0, ..., \hat{e_i}, ..., e_p] : \Delta_{p-1} \to \Delta_p$ *se llama la i-ésima* ***aplicación de cara*** *y se denota* F_i^p *(*$p > 0$*).*

Observamos que, a la luz de lo anterior, $F_i^p(e_k) = e_k$ si $k < i$ y $F_i^p(e_k) = e_{k+1}$ si $i \leq k$.

La siguientes definiciones son primordiales, y empezarán a hacer realmente familiar la ya descrita intención de asociar a los espacios topológicos un complejo de cadenas:

Definición 3.4.5. *Sea* X *un espacio topológico. Una función continua* $\sigma : \Delta_p \to X$ *se conoce como* p***-simplejo singular*** *del espacio* X*.*

Definición 3.4.6. *Si tomamos el grupo libre abeliano basado en los* p*-simplejos singulares de un espacio topológico* X*, a los elementos* c *de tal grupo se les llama* p***-cadenas singulares*** *y corresponden a sumas formales finitas de la forma* $c = \sum_{i=1}^{m_c} n_i\sigma_i$*, donde* $m_c \in \mathbb{Z}^+$*,* $\sigma_i \in C(\Delta_p, X)$ *y* $n_i \in \mathbb{Z}$ *para toda* $1 \leq i \leq m_c$[6]*. Al mencionado grupo se le denota* $\Delta_p(X)$ *y, como es de esperar, se le llama* ***grupo de*** p***-cadenas singulares***.[7]

Como recordatorio técnico, denotamos 0 al neutro de $\Delta_p(X)$. La terminología de "suma" funge un doble papel que por ningún motivo debemos confundir: los elementos de un grupo de cadenas se denotan $\sum_{i=1}^{m_c} n_i\sigma_i$, y la operación definida entre ellos *también* se apunta como una suma. Por poner un ejemplo ilustrativo de esta situación, si operamos las cadenas $3\sigma_1$ y $5\sigma_2$ dentro de algún $\Delta_p(X)$, la cadena resultante $3\sigma_1 + 5\sigma_2$ tiene una *representación* formal en $\sum_{i=1}^{2} n_i\sigma_i$ con $n_1 = 3$, $n_2 = 5$. Así pues, cuando nos enfrentemos a una expresión como $\sum_{i=1}^{l} c_i$ para $c_i \in \Delta_p(X)$, debemos recordar que, a pesar de que sí nos habla de un elemento de $\Delta_p(X)$, este elemento no está escrito como suma formal.[8]

Definición 3.4.7. *Dado un entero* $p > 0$*,* σ *un* p*-simplejo singular y un entero* $0 \leq i \leq p$*, entonces definimos la i-ésima* ***cara*** *de* σ*, denotada* $\sigma^{(i)}$*, como el* $(p-1)$*-simplejo singular dado por* $\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_i^p$*.*

Definición 3.4.8. *Dado un entero* $p > 0$ *y* σ *un* p*-simplejo singular, entonces definimos* $\partial_p(\sigma) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sigma^{(i)}$ *y lo extendemos (usando la Propiedad Universal de las sumas directas en el teorema 1.1.5) para tener un homomorfismo* $\partial_p : \Delta_p(X) \to \Delta_{p-1}(X)$*.*

Si definimos $\Delta_p(X) = 0$ para todo entero $p < 0$ y $\partial_p = 0$ para todo entero $p \leq 0$, entonces podemos pensar en el grupo graduado $\Delta_*(X) := \{\Delta_p(X)\}_{p\in\mathbb{Z}}$. A su

[6] Esta notación de *sumas formales* se elige en armonía con la proposición 1.1.3 y la nota que le sigue.

[7] En este punto, también es pertinente apuntar que por conveniencia definiremos $\Delta_p(\emptyset) = 0$ para toda $p \in \mathbb{Z}$.

[8] Habrá que tener mucho cuidado con esta sutileza, sobre todo cuando descompongamos a los grupos de cadenas singulares en sumas directas de otros grupos. No obstante, hay que decir que hacer una distinción terminológica nada más ensuciaría las pruebas y de hecho dificultaría la claridad de las presentaciones usuales de la homología singular.

vez, si denotamos $\partial := \{\partial_p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ de modo que $\partial : \Delta_*(X) \to \Delta_*(X)$, entonces ∂ es un homomorfismo graduado (de grado -1). Para dejar de anticipar situaciones, que ya lo hemos hecho bastante, enunciemos de una vez la proposición a la que nos conduce todo esto.

Proposición 3.4.9. $(\Delta_*(X), \partial)$ *es un complejo de cadenas, al que de ahora en adelante nos referiremos como* ***complejo de cadenas singulares****.*

Demostración. Antes que nada, debemos probar la siguiente afirmación: *"dado $p \in \mathbb{Z}^+$ fijo y $0 \leq j \leq i \leq p$, entonces $F_j^{p+1} \circ F_i^p = F_{i+1}^{p+1} \circ F_j^p$ "*. Para hacerlo, tomemos $0 \leq k \leq p$ y veamos tres casos: $(0 \leq k < j \leq i \leq p)$ donde se da $[F_j^{p+1} \circ F_i^p](e_k) = e_k = [F_{i+1}^{p+1} \circ F_j^p](e_k)$; $(0 \leq j \leq k < i \leq p)$ donde se da $[F_j^{p+1} \circ F_i^p](e_k) = e_{k+1} = [F_{i+1}^{p+1} \circ F_j^p](e_k)$; y $(0 \leq j \leq i \leq k \leq p)$, para el cual $[F_j^{p+1} \circ F_i^p](e_k) = e_{k+2} = [F_{i+1}^{p+1} \circ F_j^p](e_k)$. Por lo tanto, hemos mostrado que la afirmación es cierta.

Ahora recibe turno probar que ∂^2 es trivial, es decir, que para toda $p \in \mathbb{Z}$ y toda $(p+1)$-cadena singular c, se tiene que $[\partial_p \circ \partial_{p+1}](c) = 0$. Este resultado es claro para toda $p \leq 0$ por la nota que precede al enunciado de esta proposición. Así pues, sea $p \in \mathbb{Z}^+$ y sea $\sigma \in C(\Delta_{p+1}, X)$ (un $(p+1)$-simplejo singular). Entonces...

$$
\begin{aligned}
[\partial_p \circ \partial_{p+1}](\sigma) &= \partial_p \left(\sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \sigma^{(j)} \right) = \partial_p \left(\sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j (\sigma \circ F_j^{p+1}) \right) \\
&= \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \partial_p (\sigma \circ F_j^{p+1}) = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (\sigma \circ F_j^{p+1})^{(i)} \\
&= \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (\sigma \circ F_j^{p+1}) \circ F_i^p = \sum_{j=0}^{p+1} \sum_{i=0}^{p} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_j^{p+1} \circ F_i^p \\
&= \sum_{0 \leq i < j \leq p+1}^{p} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_j^{p+1} \circ F_i^p + \sum_{0 \leq j \leq i \leq p}^{p} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_j^{p+1} \circ F_i^p \\
&= \sum_{0 \leq i < j \leq p+1}^{p} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_j^{p+1} \circ F_i^p + \sum_{0 \leq j \leq i \leq p}^{p} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_{i+1}^{p+1} \circ F_j^p \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

... donde $0 \leq j < i+1 \leq p+1$ en el segundo sumando. Con esta anotación, alcanzamos la igualdad...

$$
\begin{aligned}
\sum_{0 \leq j \leq i \leq p}^{p} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_{i+1}^{p+1} \circ F_j^p &= \sum_{0 \leq j < i+1 \leq p+1}^{p} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_{i+1}^{p+1} \circ F_j^p \\
&= - \sum_{0 \leq i < j \leq p+1}^{p} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_j^{p+1} \circ F_i^p
\end{aligned}
$$

... y por lo tanto la suma de sumas en (3.4) se anula y se tiene que $[\partial_p \circ \partial_{p+1}](\sigma) = 0$. Como esto se cumple para todo $(p+1)$-simplejo singular y así para la base del grupo de $(p+1)$-cadenas singulares, entonces obtenemos el resultado que queríamos probar, es decir, que el homomorfismo graduado ∂ es tal que ∂^2 es trivial, haciendo claro que $(\Delta_*(X), \partial)$ es en efecto un complejo de cadenas. $\square$

Ahora sí, con lo visto sobre complejos de cadenas en la sección 3.2 podemos referirnos a la homología de $(\Delta_*(X), \partial)$, de forma que la siguiente definición resulta casi redundante "bajo la lente" de todo lo que sabemos.

Definición 3.4.10. *De acuerdo a lo establecido en la sección 3.2, las aplicaciones ∂_p ganan el nombre de **operadores fontera** dentro del complejo de cadenas singulares. El p-ésimo grupo de homología del complejo de cadenas $(\Delta_*(X), \partial)$, es decir $H_p(\Delta_*(X)) = ker\ \partial_p / im\ \partial_{p+1}$, es llamado p-ésimo **grupo de homología singular** con coeficientes en $\mathbb{Z}$ del espacio X y se denota $H_p(X)$. Como es de esperar, a los elementos de $ker\ \partial_p$ se les dice p-**ciclos**, mientras que aquéllos en $im\ \partial_{p+1}$ reciben el nombre de p-**fronteras**. La clase lateral (módulo $im\ \partial_{p+1}$) de un p-ciclo c se conoce como **clase de homología singular** de c y se denota $[\![c]\!]$, donde cualquier $c' \in [\![c]\!]$ se dice **homólogo** a c. De la misma manera que habíamos visto, c' será homólogo a c ($c \sim c'$) si y sólo si $c - c' = \partial(d)$ para alguna $(p+1)$-cadena d.*

Definición 3.4.11. *Sea X un espacio topológico. Si $H_p(X)$ está finitamente generado, entonces su rango se conoce como el p-ésimo **número de Betti** de X.*

Comúnmente se llama *dimensión* al subíndice de un grupo de cadenas singulares o de homología singular, ya que coincide con la dimensión lineal de los simplejos canónicos correspondientes. Por otro lado, dado un espacio topológico X y su complejo de cadenas singulares $\Delta_*(X)$, se usa denotar a $ker\ \partial_p$ como $Z_p(X)$ y a $im\ \partial_{p+1}$ como $B_p(X)$. En este sentido, $H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X)$.

Como puede verse, la imagen de una *cara* de algún simplejo estándar o afín es un simplejo de menor dimensión que es pieza del original. Así, para un 2-simplejo estándar (un triángulo), una cara tiene imagen en una de las aristas, mientras que para un 3-simplejo estándar (un tetraedro) una cara tiene imagen en uno de los triángulos que comúnmente llamamos "caras". En un primer momento, la homología de los espacios se pensó para aquéllos que se pudieran obtener pegando simplejos estándar a través de sus caras, es decir, identificando sus subsimplejos adecuadamente en lo que se conoce como ***complejos simpliciales***. En este caso, no se hablaba de un simplejo como una función a un espacio sino precisamente como la imagen afín de uno estándar. ¿Qué significan los signos y los coeficientes en un escenario así? ¿O qué significa que el *operador frontera* se anule cada dos pasos? En primer lugar, el orden de los vértices establece una orientación para cada simplejo, algo que debía tomarse en cuenta para que cuando se edificara un *complejo simplicial* como dijimos, las caras identificadas tuvieran una orientación coherente. En este sentido, los signos y los coeficientes se referían a con qué orientación y cuántas veces se recorría una cara particular, respectivamente; distintas combinaciones de recorridos y orientaciones dieron pie a la idea de una *cadena* y al *grupo* de todas ellas. A su vez, el que el *operador frontera* se anulara cada dos pasos garantizaba que las fronteras de los simplejos -o cadenas- describían lazos multidimensionales -o ciclos- homotópicamente equivalentes (no se ha tomado ningún punto-base). Así pues, la homología *simplicial* se concibió como el cociente algebraico anotado, pero para los *complejos simpliciales*, de suerte que los ciclos que fueran fronteras serían iguales. Posteriormente, al intentar llevar todo esto a espacios que no se pudieran obtener como complejos simpliciales, los grandes se dieron cuenta de que bastaba con tomar las funciones continuas entre los simplejos y el espacio objeto.

Sin más, abrámonos camino sobre algunos atributos de los grupos de homología singular.

Proposición 3.4.12. *Para un espacio topológico X, se cumple que $H_p(X) \approxeq 0$ para todo entero $p < 0$.*

Demostración. De la definición de los p-complejos de cadenas singulares y operadores frontera para enteros $p \leq 0$, se tiene que $H_p(X) = ker\ \partial_p / im\ \partial_{p+1} \approxeq 0/0 \approxeq 0$ para todo entero $p < 0$. □

Proposición 3.4.13. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. Para cualquier p-simplejo singular de X a quien llamemos σ, la composición $f \circ \sigma : \Delta_p \to Y$ es a todas luces un p-simplejo singular de Y. Si para cada entero $p \geq 0$ definimos $f_{\Delta_p}(\sigma) = f \circ \sigma$ y lo extendemos a su homomorfismo correspondiente $f_{\Delta_p} : \Delta_p(X) \to \Delta_p(Y)$, y definimos $f_{\Delta_p} = 0$ para todo entero $p < 0$, entonces el homomorfismo graduado $f_\Delta := \{f_{\Delta_p}\}_{p\in\mathbb{Z}}$ tal que $f_\Delta : \Delta_*(X) \to \Delta_*(Y)$ es una aplicación de cadenas (el siguiente diagrama representa la situación).*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \Delta_{p+1}(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_\Delta"] & \Delta_p(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_\Delta"] & \Delta_{p-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_\Delta"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \Delta_{p+1}(Y) \arrow[r, "\partial"] & \Delta_p(Y) \arrow[r, "\partial"] & \Delta_{p-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Demostración. Para $p \leq 0$, es muy fácil visualizar que $\partial_p \circ f_{\Delta_p} = 0 = f_{\Delta_p} \circ \partial_p$. Para $p > 0$, válgamonos de la cómoda convención de representar a los homomorfismos particulares con un solo símbolo y veamos que dado un p-simplejo singular σ, se tiene que...

$$\begin{aligned} f_\Delta(\partial(\sigma)) &= f_\Delta\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sigma^{(i)}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i f\circ\sigma^{(i)} \\ &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i f\circ\sigma\circ F_i^p \\ &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i (f\circ\sigma)^{(i)} \\ &= \partial(f\circ\sigma) = \partial(f_\Delta(\sigma)) \end{aligned}$$

... con lo que tenemos la conmutatividad en los generadores, de modo que gracias a la proposición 1.1.4 también se da para todo el grupo $\Delta_p(X)$ y hemos acabado. □

Corolario 3.4.14. *Sean X, Y espacios topológicos. Una función continua $f : X \to Y$ induce homomorfismos $f_* : H_p(X) \to H_p(Y)$ para toda $p \in \mathbb{Z}$, definidos como $f_*([\![c]\!]) = [\![f_\Delta(c)]\!]$. Más aun, se tiene que $(f\circ g)_* = f_*\circ g_*$ y que $1_* = 1\_$.*

Demostración. Considerando para el "más aun" que $(f\circ g)_\Delta = f_\Delta \circ g_\Delta$ y que 1_Δ es la identidad entre complejos de cadenas singulares (ambas cosas muy sencillas de verificar), el resultado se sigue en su totalidad de la proposición 3.4.13 y la proposición 3.2.6. □

Corolario 3.4.15. *Sean X, Y espacios topológicos. Un homeomorfismo $f : X \to Y$ induce isomorfismos $f_* : H_p(X) \to H_p(Y)$ para toda $p \in \mathbb{Z}$.* □

A través del último corolario vemos que los grupos de homología singular son invariantes topológicos. Por su parte, las definiciones 3.4.10 y el corolario 3.4.14 nos insinúan el carácter funtorial de "sacar grupo de homología singular".

Proposición 3.4.16. *Sea X un espacio topológico y $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ el conjunto de las componentes conexas por trayectorias de X. Entonces $\Delta_p(X) \approxeq \bigoplus_{\alpha\in J}\Delta_p(X_\alpha)$ y $H_p(X) \approxeq \bigoplus_{\alpha\in J} H_p(X_\alpha)$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. El resultado no tiene mucho sentido para enteros $p < 0$, pues se cumple por concepto de trivialidad de los grupos. Así pues, dado un entero $p \geq 0$, apreciamos que, como Δ_p es un conjunto conexo por trayectorias (es convexo), entonces para un p-simplejo singular σ, $im\ \sigma = \sigma[\Delta_p] \subseteq X_\alpha$ para alguna $\alpha \in J$ (σ es continua). Por este motivo tenemos que si $\alpha \neq \beta$, entonces $\Delta_p(X_\alpha)\cap\Delta_p(X_\beta) = \{0\}$ solamente, ya que ningún simplejo puede tener imagen en dos componentes conexas por trayectorias distintas. Sea $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow X$ la inclusión, probaremos que el siguiente es un isomorfismo:

$$\bigoplus_{\alpha\in J}(i_\alpha)_\Delta : \bigoplus_{\alpha\in J}\Delta_p(X_\alpha) \to \Delta_p(X).$$

Dada una p-cadena $c \in \Delta_p(X)$ tal que $c = \sum_{j=1}^{m_c} n_j\sigma_j$, se tiene que cada sumando vive en un $\Delta_p(X_{\alpha_j})$ particular. Así pues,

$$c = \sum_{j=1}^{m_c} n_j\sigma_j = \bigoplus_{\alpha\in J}(i_\alpha)_\Delta\left(\sum_{j=1}^{m_c} n_j\sigma_j\right),$$

donde el último argumento está visto como suma formal en la suma directa $\bigoplus_{\alpha\in J}\Delta_p(X_\alpha)$. De esta forma, $\bigoplus_{\alpha\in J}(i_\alpha)_\Delta$ es un epimorfismo.

Para ver que es monomorfismo, tomamos una suma formal en $\bigoplus_{\alpha\in J}\Delta_p(X_\alpha)$ de la forma $\sum_{j=1}^{l} e_j$ [9] y tal que $\bigoplus_{\alpha\in J}(i_\alpha)_\Delta(\sum_{j=1}^{l} e_j) = 0$. Esto último significa que $\sum_{j=1}^{l}(i_{\alpha_j})_\Delta(e_j) = \sum_{j=1}^{l} e_j = 0$ en $\Delta_p(X)$. Sabemos de antes que para todas $1 \leq k, j \leq l$, $j \neq k$ implica que $\Delta_p(X_{\alpha_j}) \cap \Delta_p(X_{\alpha_k})$ es a lo más la cadena 0. Por otro lado, la cadena inversa de cada $e_j \neq 0$ también vive en $\Delta_p(X_{\alpha_j})$ y nada más. Debido a estas dos circunstancias, se tiene que para todas $1 \leq k, j \leq l$, si $j \neq k$ y $e_j \neq 0$, entonces $e_k \neq -e_j$ [10] y por lo tanto la única manera que se puede tener $\sum_{j=1}^{l} e_j = 0$ es si $e_j = 0$ para toda $1 \leq j \leq l$, con lo que la suma formal $\sum_{j=1}^{l} e_j$ es en realidad el neutro de $\bigoplus_{\alpha\in J}\Delta_p(X_\alpha)$. Queda, pues, certificado que $\bigoplus_{\alpha\in J}(i_\alpha)_\Delta$ es un monomorfismo y así un isomorfismo.

Por otra parte, la definición 3.2.10 y el isomorfismo anterior otorgan un isomorfismo graduado (de grado 0) tal que...

$$\Delta_*(X) \approxeq \bigoplus_{\alpha\in J}\Delta_*(X_\alpha).$$

Entonces, en virtud de la proposición 3.2.11, tenemos que para toda $p \in \mathbb{Z}$,

$$H_p(X) = H_p(\Delta_*(X)) \approxeq H_p\left(\bigoplus_{\alpha\in J}\Delta_*(X_\alpha)\right) \approxeq \bigoplus_{\alpha\in J} H_p(\Delta_*(X_\alpha)) = \bigoplus_{\alpha\in J} H_p(X_\alpha).$$

□

Al fin hemos conseguido asociarle a un espacio topológico los grupos abelianos que resulta de la homología del complejo de cadenas singulares. Nuestro siguiente objetivo es relacionar todo este bagaje con los pares topológicos, apuntando a corroborar que las definiciones en realidad crean una *teoría de homología* bajo los parámetros de la sección 3.3, los de Eilenberg, Steenrod y Milnor. Estamos aún un tanto lejos de precisar dicho “apego a las leyes” (lo haremos en la siguiente sección), pero poco a poco irá cobrando tanto forma como sentido la manera de hacerlo; cada paso que vayamos dando, cada resultado que vayamos obteniendo, será bajo el prospecto de cohesionarlo a una teoría apropiada.

[9] Esta suma formal es tal que $e_j \in \Delta_p(X_{\alpha_j})$ para cada $1 \leq j \leq l$ y las j's son distintas.

[10] Existe en esta expresión un pequeño abuso de notación, y es que hasta ahora no tenemos permiso para denotar la “multiplicación por un coeficiente” de una cadena, a saber $(-1)e_j$. Sin embargo, sólo lo hacemos para representar que estamos sumando la cadena inversa de e_j. En general, si consideramos que todo grupo abeliano es un $\mathbb{Z}$-módulo, esta expresión está justificada en el grupo abeliano $\Delta_p(X_{\alpha_j})$.

3.4.1. Homología Singular con Coeficientes

Dedicamos un espacio a un tema que resulta por demás interesante y útil, cuya formulación formal se puede revisar en [2, capítulo V, sección 6], pero al cual nos aproximamos desde ahora porque aportará un nuevo aspecto -y por lo tanto una nueva "arma en nuestro arsenal"- de los conceptos desplegados en las secciones anteriores. Cuando se introdujeron los *grupos de cadenas singulares*, la estrategia fue formar un grupo libre abeliano sobre la base de los p-simplejos singulares de un espacio topológico. Como adelantamos después de probar el teorema 1.2.2, podríamos hacer una generalización de esta técnica y, dado un grupo abeliano G, fijarnos en el grupo abeliano constituido por sumas formales finitas de p-simplejos singulares con coeficientes en G. Es decir, erigir un grupo abeliano de elementos c tales que $c = \sum_{i=1}^{m_c} g_i\sigma_i$, donde $m_c \in \mathbb{Z}^+$, $\sigma_i \in C(\Delta_p, X)$ y $g_i \in G$ para toda $1 \leq i \leq m_c$. No es muy descabellado pensar luego en el complejo de cadenas singulares que resulta de dejar correr los índices p sobre los enteros y de definir operadores frontera que de alguna forma correspondan a los de la definición 3.4.8 (y la nota que le sigue). Este complejo tiene una homología, y con miras a desenvolvernos en este ambiente es que adelantamos lo siguiente.[11]

Definición 3.4.17. *Sea X un espacio topológico, G un grupo abeliano y un entero $p \geq 0$. Denotamos $\Delta_p(X; G)$ al grupo abeliano de las sumas formales finitas $c = \sum_{i=1}^{m_c} g_i\sigma_i$, con $m_c \in \mathbb{Z}^+$, $\sigma_i \in C(\Delta_p, X)$ y $g_i \in G$ para toda $1 \leq i \leq m_c$. Tal grupo es llamado grupo de p-cadenas singulares* ***con coeficientes en*** *G.*

Definición 3.4.18. *Dado un entero $p > 0$, definimos...*

$$\partial_p : \Delta_p(X; G) \to \Delta_{p-1}(X; G)$$

... tal que, si σ es un p-simplejo singular y $g \in G$, $\partial_p(g\sigma) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i g\sigma^{(i)}$; luego lo extendemos para hacerlo un homomorfismo (usando otra vez la Propiedad Universal de las sumas directas en el teroema 1.1.5).[12]

[11] Es prudente mencionar que casi siempre se trabaja con *anillos conmutativos con uno* como grupos de coeficientes.

[12] Hay que avanzar con mucha cautela. Es relativamente fácil trabajar con coeficientes en $\mathbb{Z}$, pues éste es un grupo cíclico generado por el 1 y tiene estructura de anillo con uno. Las pruebas llevadas a cabo antes de esta subsección a menudo se valieron de algunos de estos benignos atributos de los enteros pero que perdemos al pasar a grupos abelianos arbitrarios. Sin embargo, no hay tanto problema en afinar los procedimientos de tales resultados y así darnos cuenta de que los grupos de homología con coeficientes cumplen *todo* lo desarrollado previamente. En esta línea, para realizar un trabajo coherente, deberemos observar cuáles son los momentos donde existan diferencias entre los procedimientos desarrollados para $\mathbb{Z}$ y los que involucran a otros grupos abelianos. En la definición que precede a esta nota, recordemos que si G es un grupo abeliano, entonces G es un $\mathbb{Z}$-módulo, por lo que multiplicar por 1 ó -1 a los coeficientes está bien definido. Asimismo, en el caso de coeficientes en $\mathbb{Z}$, tenemos que los generadores del grupo de cadenas singulares son los p-simplejos σ, y un análisis a profundidad nos hace ver que quienes generan a los grupos de cadenas singulares *con coeficientes* son elementos de la forma $g\sigma$, con $g \in G$ y $\sigma \in C(\Delta_p, X)$. Por lo tanto, definir aplicaciones de cadenas y homomorfismos -o probar una propiedad de ellos- se reduce a trabajar sobre esta "base".

Un cálculo prácticamente igual al hecho para los grupos de cadenas singulares con coeficientes en $\mathbb{Z}$ nos arroja que, para todo entero $p > 0$, $\partial_{p+1} \circ \partial_p$ es trivial para los grupos con coeficientes en un grupo G dado, con lo que apreciamos que, si tomamos $\Delta_p(X; G) = 0$ para todo entero $p < 0$ y $\partial_p = 0$ para todo entero $p \leq 0$, entonces $\Delta_*(X; G) := \{\Delta_p(X; G)\}_{p\in\mathbb{Z}}$ y $\partial = \{\partial_p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ forman un complejo de cadenas singulares. Gracias a este apunte, se vale pensar en la siguiente definición:

Definición 3.4.19. *El complejo de cadenas $(\Delta_*(X; G), \partial)$ posee una homología a la que llamamos homología singular* ***con coeficientes en*** *G del espacio X, donde el p-ésimo grupo en ella se denota $H_p(X; G)$.*

No es difícil comprobar que *todo* lo que hemos dicho para los grupos de homología singular con coeficientes en $\mathbb{Z}$ también se cumple para aquéllos con coeficientes en un grupo abeliano arbitrario, ya que los *operadores frontera* definidos en 3.4.18 se comportan igual que los que teníamos establecidos anteriormente. De hecho, no es más que una generalización que bien podría haber sido marcada desde el principio. Relacionado a esto, hay que mantener presentes las equivalencias $\Delta_p(X) = \Delta_p(X; \mathbb{Z})$ y $H_p(X) = H_p(X; \mathbb{Z})$.

La proposición 3.4.13 y el corolario 3.4.14 (que se refieren a la inducción de aplicaciones de cadenas y homomorfismos graduados a partir de funciones continuas) tienen paralelos claros en el caso con coeficientes, de cuya validez debemos convencernos firmemente. Para esto, el argumento de "ajuste de las pruebas" según la generalización de los operadores frontera vuelve a darnos suficiente herramienta.

Resulta lógico de la definición 3.4.17 que $\Delta_p(X; G) \approxeq \sum_{\sigma\in C(\Delta_p, X)} \langle\sigma\rangle$, donde $\langle\sigma\rangle = \{g\sigma \mid g \in G\} \approxeq G$[13]. Bajo tales parámetros, nuestro grupo de cadenas singulares resulta isomorfo a una suma directa de G's. Si bien no lo abordaremos aquí, se usa ver a $\Delta_p(X; G)$ como otro objeto para poder relacionarlo exitosamente con $\Delta_p(X)$, es decir, expresarlo en ciertos términos que nos dejen analizarlo en función del que tiene sus coeficientes en $\mathbb{Z}$. Así, uno se refiere a $\Delta_p(X; G)$ como el *producto tensorial* $\Delta_p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G$ con el operador frontera $\partial_p = \partial_p \otimes_{\mathbb{Z}} 1_G$. El concepto de *producto tensorial* se pueden revisar en [2, capítulo V, sección 6]. Sin embargo, no hay problema en tratar a tal grupo sólo por las características inherentes a la definición establecida, y de hecho lo hacemos para ejemplificar algo que en [6] sólo se menciona, y es que las construcciones básicas para $\mathbb{Z}$ como grupo de coeficientes son prácticamente iguales que si se toma cualquier otro grupo abeliano.

De ahora en adelante haremos explícito el grupo de coeficientes que estemos utilizando. En general, es muy cómodo pensar en $\mathbb{Z}$ como la elección predilecta, pero para no entrar en aprietos en otros andares de la exposición, siempre haremos mención de cuándo lo estemos utilizando y cuándo no.

[13] Al estar trabajando con coeficientes en un grupo abeliano arbitrario, no es del todo válido pensar que $\sigma \in \langle\sigma\rangle$, como sí se puede aceptar en el caso de $\mathbb{Z}$, pues éste tiene uno (véase nota al pie 12).

3.4.2. Homología Reducida

Hatcher apunta en [6] que es conveniente poseer una versión "ligeramente modificada" de la homología singular en la que un punto tiene grupos de homología triviales en todas las dimensiones. La definición que hemos presentado hasta ahora no cumple esta condición en la dimensión cero, aunque sí lo hace para el resto de ellas, como se verá gracias a la siguiente proposición.

Proposición 3.4.20. *Sea $P = \{*\}$ el espacio de un solo punto y G el grupo abeliano de coeficientes para los grupos de cadenas singulares asociados a P. Entonces $H_0(P; G) \approxeq G$ y $H_p(P; G)$ es trivial para todo entero $p \neq 0$.*

Demostración. Para $p \in \mathbb{Z}^+$, $C(\Delta_p, P)$ consiste en un solo elemento, a saber, el p-simplejo singular constante σ_*^p que manda todos los elementos de Δ_p a $*$. De aquí vemos que, por ejemplo, las 1-cadenas singulares son de la forma $g\sigma_*^1$ -$g \in G$- y nada más. Por otra parte, dada una 1-cadena como ellas, a saber $g_c\sigma_*^1$, $\partial_1 : \Delta_1(P; G) \to \Delta_0(P; G)$ es tal que $\partial_1(g_c\sigma_*^1) = \sum_{i=0}^{1}(-1)^i g_c(\sigma_*^1 \circ F_i^1)$, pero como las caras no pueden ser más que σ_*^0, entonces tenemos que $\partial_1(g_c\sigma_*^1)$ se anula (sumamos la misma cadena con signos distintos) y por lo tanto que $\partial_1 : \Delta_1(P; G) \to \Delta_0(P; G)$ es trivial. Como consecuencia, $im\ \partial_1 = \{0\}$. Ahora bien, sabemos de nuestras definiciones que ∂_0 también es trivial, con lo que $ker\ \partial_0 = \Delta_0(P; G) \approxeq G$. Con estos resultados, vemos que $H_0(P; G) = ker\ \partial_0 / im\ \partial_1 \approxeq \Delta_0(P; G) \approxeq G$.

Dada $p \neq 0$, el resultado pedido se cumple por concepto de trivialidad de los grupos de cadenas singulares para $p < 0$. Para el caso $p > 0$, por otra parte, hemos de darnos cuenta de que...

$$\partial_p = \begin{cases} \text{isomorfismo} & \text{si } p \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } p \text{ es impar.} \end{cases}$$

Para convencernos, observamos que si p es par y $g \in G$, entonces $\partial_p(g\sigma_*^p)$ es una suma de caras iguales con el mismo coeficiente, donde hay un número impar $(p+1)$ de sumandos y donde los signos correspondientes van alternando entre 1 y -1. Así pues, todos se cancelan excepto uno según el mismo argumento que dimos para ver que ∂_1 se anula. El sumando que no se cancela corresponde al único $(p-1)$-simplejo singular constante a quien hemos denotado σ_*^{p-1}, con coeficiente g. De esta forma, ∂_p es un epimorfismo; también es monomorfismo porque el único elemento que va dar a 0 es la cadena 0, con lo que se tiene la primera afirmación.

Para p impar, el número de sumandos en $\partial_p(g\sigma_*^p)$ es par, por lo que todos se cancelan y obtenemos la segunda afirmación.

Con ellas, vemos que si p es par, entonces $H_p(P) = ker\ \partial_p / im\ \partial_{p+1} = \{0\}/\{0\} \approxeq 0$. Por otro lado, si p es impar, entonces $H_p(P) = ker\ \partial_p / im\ \partial_{p+1} = \Delta_1(P; G)/\Delta_1(P; G) \approxeq 0$. □

Vamos a definir, pues, un complejo de cadenas singulares un poco diferente del que ya estudiamos para resolver el caso en la dimensión 0.

Definición 3.4.21. *Dado un espacio topológico X y un grupo abeliano G...*

- *Definimos $C_i(X;G) := \Delta_i(X;G)$ para todo entero $i \geq 0$, $C_{-1}(X;G) = G$ y $C_i(X;G) := 0$ para todo entero $i < -1$.*

- *Sea $\epsilon : \Delta_0(X;G) \to G$ tal que para una 0-cadena $c = \sum_{i=1}^{m_c} g_i\sigma_i$, $\epsilon(c) = \sum_{i=1}^{m_c} g_i$. De hecho ϵ, claramente un homomorfismo, es conocido como **homomorfismo de aumento**. Definimos $\rho_0 : C_0(X;G) \to C_{-1}(X;G)$ como $\rho_0 = \epsilon$; $\rho_i : C_i(X;G) \to C_{i-1}(X;G)$ como $\rho_i = \partial_i$ si $i > 0$ y como $\rho_i = 0$ si $i < 0$.*

Proposición 3.4.22. *Sea $C_*(X;G) := \{C_i(X;G)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ y $\rho := \{\rho_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de la definición 3.4.21. Entonces se cumple que $(C_*(X;G), \rho)$ es un complejo de cadenas.*

Demostración. El único caso que nos ocupa se refiere a probar que $\rho_0 \circ \rho_1$ es trivial, pues los demás quedan claros por remitirse al complejo de cadenas singulares tradicional. Ahora bien, de nuestra definición tenemos que, para un 1-simplejo singular σ y $g \in G$, $[\rho_0 \circ \rho_1](g\sigma) = [\epsilon \circ \partial_1](g\sigma) = \epsilon(g\sigma^{(0)} - g\sigma^{(1)}) = g - g = 0$ por lo que $\rho_0 \circ \rho_1$ se anula en los elementos que generan a $\Delta_1(X;G)$ y así en el grupo total. $\square$

Definición 3.4.23. *Dado un espacio topológico X y un grupo abeliano G, la homología del complejo de cadenas $(C_*(X;G), \rho)$ como en la proposición 3.4.22 recibe el nombre de homología (singular) **reducida** del espacio X. El p-ésimo grupo en ella se denota $\widetilde{H}_p(X;G)$.*[14]

Recordemos un momento la proposición 3.4.13 y el corolario 3.4.14; para que tengan vigencia en el caso de la homología reducida, debemos hacer una pequeña modificación en la definición del homomorfismo que induce una función continua en nuestros complejos de cadenas. Siguiendo la terminología que hemos manejado, dada una función continua $f : X \to Y$ y $(C_*(X;G), \rho)$, $(C_*(Y;G), \rho)$ las homologías reducidas (con el mismo grupo de coeficientes G) de X y Y respectivamente, entonces definimos $f_{C_i} : C_i(X;G) \to C_i(Y;G)$ como f_{Δ_i} para $i \neq -1$ y $f_{C_{-1}}$ como 1_G. Así, $f_C = \{f_{C_i}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ cumplirá ser una aplicación de cadenas según la prueba de la proposición 3.4.13 y el hecho de que f_{C_0} respeta los coeficientes en las cadenas, por lo que el corolario 3.4.14 vuelve a aplicar de lo lindo.

Proposición 3.4.24. *Sea X un espacio topológico no vacío y G un grupo abeliano. Entonces...*

1. *$\widetilde{H}_p(X;G) = H_p(X;G)$ para todo entero $p \neq 0$.*[15]

[14] Es congruente pensar que, si los coeficientes usados están en $\mathbb{Z}$, entonces el p-ésimo grupo de homología reducida se denote $\widetilde{H}_p(X)$.

[15] Importante pedir la condición de que $X \neq \emptyset$, pues de lo contrario la homología reducida difiere de la "completa" también en la dimensión -1, ya que $\widetilde{H}_{-1}(\emptyset;G) \approxeq G$.

2. *Si* ϵ *es el homomorfismo de aumento y* $\epsilon_* : H_0(X;G) \to G$ *está dada por* $\epsilon_*(\llbracket c \rrbracket) = \epsilon(c)$*, entonces* $\widetilde{H}_0(X;G) \approxeq ker\ \epsilon_*$*. En consecuencia se tiene que* $H_0(X,G) \approxeq \widetilde{H}_0(X;G) \oplus G$*.*

3. $\widetilde{H}_p(P;G) \approxeq 0$ *para toda* $p \in \mathbb{Z}$*.*

Demostración. 1) Gracias a las definiciones de los operadores frontera para el complejo de cadenas de la homología reducida, es fácil notar este punto. El caso $p = -1$ es un tanto especial, pues en él los p-grupos de cadenas singulares no coinciden en el complejo "normal" y el "reducido". Sin embargo, se cumple que $\widetilde{H}_{-1}(X;G) = ker\ \rho_{-1}/im\ \epsilon = G/G \approxeq 0 \approxeq H_{-1}(X;G)$, todo gracias a que ρ_{-1} está definido como trivial y el homomorfismo de aumento ϵ es a todas luces suprayectivo (siempre podemos construir la 0-cadena singular $g\sigma$ para un elemento g dado en G).

2) Primero hay que revisar que ϵ_* está bien definida, para lo cual tomamos c', c dos 0-ciclos tales que $c' \sim c$ -lo que significa que existe una 1-cadena d tal que $\partial_1(d) = c - c'$. Así pues, $\epsilon_*(\llbracket c \rrbracket) - \epsilon_*(\llbracket c' \rrbracket) = \epsilon(c) - \epsilon(c') = \epsilon(c - c') = \epsilon(\partial_1(d)) = 0$, donde la última igualdad se da por la prueba de la proposición 3.4.22. Por lo tanto, hemos mostrado que $\epsilon_*(\llbracket c \rrbracket) = \epsilon_*(\llbracket c' \rrbracket)$ y con ello que ϵ_* está bien definida.[16]

Veamos ahora el isomorfismo, donde por cuestiones prácticas denotaremos $c + im\ \partial_1$ a la clase de homología en $\widetilde{H}_0(X;G)$ para un 0-cadena de nombre c tal que $\epsilon(c) = 0$. Recordemos, también, que $\widetilde{H}_0(X;G) = ker\ \epsilon/im\ \partial_1$.

Si definimos $\Phi : ker\ \epsilon_* \to \widetilde{H}_0(X;G)$ dada por $\Phi(\llbracket d \rrbracket) = d + im\ \partial_1$, entonces afirmamos que Φ está bien definida y es un isomorfismo. Percatémonos primero de que está bien definida: para toda $\llbracket d \rrbracket \in ker\ \epsilon_*$, $\epsilon(d) = \epsilon_*(d) = 0$, por lo que $d \in ker\ \epsilon$ y en consecuencia no es irresponsable pensar en $d + im\ \partial_1$; luego, si $d' \sim d$, entonces $d' \in d + im\ \partial_1$ y por lo tanto $\Phi(\llbracket d \rrbracket) = \Phi(\llbracket d' \rrbracket)$.

Ahora probemos que es un isomorfismo: dada $e + im\ \partial_1 \in \widetilde{H}_0(X;G)$, por definición $\partial_0(e) = 0$ y por lo tanto $\llbracket e \rrbracket$ tiene sentido, pero no sólo eso, pues también se da que $\epsilon_*(\llbracket e \rrbracket) = \epsilon(e) = 0$ a raíz de que $e \in ker\ \epsilon$. Así pues, vemos que $\llbracket e \rrbracket \in ker\ \epsilon_*$, con lo cual $\Phi(\llbracket e \rrbracket)$ es válido e igual a $e + im\ \partial_1$ (Φ es epimorfismo); por otra parte, si $\Phi(\llbracket d \rrbracket) = 0 + im\ \partial_1$, eso quiere decir que $d \in im\ \partial_1$ y por lo tanto que $\llbracket d \rrbracket = \llbracket 0 \rrbracket$ (Φ es monomorfismo).

Por otro lado, como siempre podemos dar un homomorfismo $t : G \to H_0(X;G)$ tal que $\epsilon_* \circ t = 1_G$, a saber $t(g) = g\sigma$ para algún 0-simplejo singular σ, tenemos que la siguiente sucesión (donde i es la inclusión) se *escinde* con *splitting* t:

$$0 \longrightarrow ker\ \epsilon_* \xrightarrow{i} H_0(X;G) \xrightarrow{\epsilon_*} G \longrightarrow 0.$$

De esta manera, la proposición 1.2.4 nos garantiza que $H_0(X,G) \approxeq \widetilde{H}_0(X;G) \oplus G$.

3) Es claro del inciso 1 y de la proposición 3.4.20 que $\widetilde{H}_p(P;G) \approxeq 0$ para toda $p \neq 0$. Para el caso $p = 0$, recordemos que los elementos en $\Delta_0(P;G)$ son de la forma $g\sigma_*^0$ ($g \in G$) y nada más. Usando este hecho, vemos que $\epsilon_* : H_0(P;G) \to G$

[16] Es común que a ϵ_* también se le conozca como *homomorfismo de aumento*.

es un monomorfismo, pues el que $\epsilon_*([\![g\sigma_*^0]\!]) = 0$ para algún elemento $[\![g\sigma_*^0]\!] \in H_0(P;G)$ implica que $g = \epsilon(g\sigma_*^0) = 0$ y por lo tanto que $[\![g\sigma_*^0]\!] = [\![0]\!]$. Así pues, nos valemos del inciso 2 y obtenemos que $\widetilde{H}_0(X;G) \approxeq ker\ \epsilon_* = \{[\![0]\!]\} \approxeq 0$, con lo cual hemos logrado nuestro cometido. □

3.4.3. Homología Relativa

Ha llegado el momento de trabajar con pares topológicos. En la sección de los axiomas de homología se mencionó que una *teoría de homología* consistía, entre otras cosas, en una familia de funtores que asignaban a cada *par* topológico un grupo abeliano. Hasta el momento, los grupos de homología singular que hemos visto se refieren más bien a espacios totales y no realmente a pares. Sin embargo, en esta subsección aprovecharemos todo lo que sabemos para dotar a un par, por ejemplo (X, A), de un complejo de cadenas y por lo tanto de una homología. La razón de trasfondo para usar pares no es que los axiomas así lo digan y ya; como hemos dicho muchas veces antes, los axiomas vinieron hasta después, y queremos establecer que el hecho de que trabajemos con estos pares encuentra motivo verdadero en un esfuerzo de simplificación. Es decir, los complejos de cadenas asociados a pares nos permitirán hacer más sencillo el cálculo y manejo de los grupos de homología de los espacios generales, como se verá desde su definición.

En este tema trabajaremos al principio utilizando coeficientes en $\mathbb{Z}$, solamente siendo hasta después que anotemos cómo se verá la cosa para coeficientes en cualquier grupo abeliano.

Definición 3.4.25. *Dado un espacio topológico X, $A \subseteq X$ y un entero $p \geq 0$, definimos el grupo de p-cadenas singulares de (X, A) como $\Delta_p(X, A) := \Delta_p(X)/\Delta_p(A)$. Los elementos de este grupo*[17] *serán llamados p-cadenas singulares **relativas** y se denotarán $c + \Delta_p(A)$ para alguna $c \in \Delta_p(X)$.*

Definición 3.4.26. *Dado un entero $p > 0$, definimos...*

$$\partial_p : \Delta_p(X, A) \to \Delta_{p-1}(X, A)$$

... como $\partial_p(c + \Delta_p(A)) = \partial_p(c) + \Delta_{p-1}(A)$.

Observemos que los ∂_p anteriores están bien definidos, para lo cual es necesario saber que $\partial_p(c) \in \Delta_{p-1}(A)$ para toda $c \in \Delta_p(A)$. Esto se tiene porque, si un p-simplejo singular σ vive en $\Delta_p(A)$, entonces $\partial_p(\sigma)$ vive en $\Delta_{p-1}(A)$ al ser una suma formal de caras de σ, cada una de las cuales se queda en $\Delta_{p-1}(A)$ por definición de *cara*. Ahora bien, si $c \in \Delta_p(A)$ es tal que $c = \sum_{i=1}^{m_c} n_i\sigma_i$, entonces $\partial_p(c) = \partial_p(\sum_{i=1}^{m_c} n_i\sigma_i) = \sum_{i=1}^{m_c} n_i\partial_p(\sigma_i)$ donde $\sigma_i \in \Delta_p(A)$ y $\partial_p(\sigma_i) \in \Delta_{p-1}(A)$ para toda $1 \leq i \leq m_c$, con lo que tenemos que $\partial_p(c)$ es un elemento de $\Delta_{p-1}(A)$. Manteniendo esto en mente, es fácil ver que las ∂_p están bien definidas, pues si tomamos una cadena $d \in \Delta_p(X)$ tal que $d \in c + \Delta_p(A)$, entonces

[17] Es claro que este grupo es abeliano. De hecho, es *libre abeliano* porque se puede ver como isomorfo al subgrupo de $\Delta_p(X)$ generado por los p-simplejos cuya imagen no se queda completamente contenida en A.

$d = c + g$ para alguna cadena $g \in \Delta_p(A)$ y $\partial_p(d + \Delta_p(A)) = \partial_p(d) + \Delta_{p-1}(A) = \partial_p(c) + \partial_p(g) + \Delta_{p-1}(A)$, pero como $\partial_p(g) \in \Delta_{p-1}(A)$, el último término de la igualdad anterior se convierte en $\partial_p(c) + \Delta_{p-1}(A) = \partial_p(c + \Delta_p(A))$.

Corolario 3.4.27. *Si tomamos $\Delta_p(X, A) = 0$ para todo entero $p < 0$ y $\partial_p = 0$ para todo entero $p \leq 0$, y luego nos fijamos en $\Delta_*(X, A) := \{\Delta_p(X, A)\}_{p \in \mathbb{Z}}$ y en $\partial = \{\partial_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$ el homomorfismo graduado (de grado -1), entonces $(\Delta_*(X, A), \partial)$ es un complejo de cadenas.*

Demostración. Se sigue completamente de las definiciones y lo probado para los grupos de cadenas singulares asociados a espacios (no pares). En realidad, lo único que hay que ver es que $\partial_p \circ \partial_{p+1} : \Delta_{p+1}(X, A) \to \Delta_{p-1}(X, A)$ es trivial para toda $p \in \mathbb{Z}$, lo cual es muy sencillo al considerar la definición de los operadores frontera "relativos" y recordar la proposición 3.4.9. □

Definición 3.4.28. *La homología del complejo de cadenas $(\Delta_*(X, A), \partial)$ recibe el nombre de homología singular **relativa** sobre el par (X, A), donde el p-ésimo grupo en ella se denota $H_p(X, A)$. Concordantemente, los elementos en $\ker \partial_p$ se llaman p-ciclos **relativos** y corresponden a cadenas $c \in \Delta_p(X)$ tales que $\partial(c) \in \Delta_{p-1}(A)$. Por su parte, las fronteras **relativas** quedan determinadas por elementos de la forma $\partial(d) + l$, donde $d \in \Delta_{p+1}(X)$ y $l \in \Delta_p(A)$ (es decir, un elemento $[\![e + \Delta_p(A)]\!] \in H_p(X, A)$ es trivial si y sólo si $e = \partial(d) + l$, donde $d \in \Delta_{p+1}(X)$ y $l \in \Delta_p(A)$).*

En este nuevo contexto, la proposición 3.4.13 y el corolario 3.4.14, se transforman en...

Proposición 3.4.29. *Sean $(X, A), (Y, B)$ pares topológicos y $f : (X, A) \to (Y, B)$ una función continua. Para cualquier p-simplejo singular de X a quien llamemos σ, la composición $f \circ \sigma : \Delta_p \to Y$ es un p-simplejo singular de Y. Para cada entero $p \geq 0$, definimos $f_{\Delta_p}(\sigma) = f \circ \sigma$ y lo extendemos a su homomorfismo correspondiente $f_{\Delta_p} : \Delta_p(X) \to \Delta_p(Y)$; luego, sea $f^\sharp_{\Delta_p} : \Delta_p(X, A) \to \Delta_p(Y, B)$ dado por $f^\sharp_{\Delta_p}(c + \Delta_p(A)) = f_{\Delta_p}(c) + \Delta_p(B)$, y sea $f^\sharp_{\Delta_p} = 0$ para los enteros $p < 0$. Entonces el homomorfismo graduado $f^\sharp_\Delta : \Delta_*(X, A) \to \Delta_*(Y, B)$ tal que $f^\sharp_\Delta := \{f^\sharp_{\Delta_p}\}_{p \in \mathbb{Z}}$ es una aplicación de cadenas.*

Demostración. Primero hay que corroborar que, dado un entero $p \geq 0$, $f^\sharp_{\Delta_p}$ está bien definida. Parecido a lo que hicimos para probar que nuestros operadores frontera estaban bien definidos, primero es necesario saber que $f_{\Delta_p}(l) \in \Delta_p(B)$ para toda $l \in \Delta_p(A)$. Así pues, sea $l \in \Delta_p(A)$ tal que $l = \sum_{i=1}^{m_l} n_i \sigma_i$ con $\sigma_i \in C(\Delta_p, A)$ para toda $1 \leq i \leq m_l$. Tenemos que $f_{\Delta_p}(l) = f_{\Delta_p}(\sum_{i=1}^{m_l} n_i \sigma_i) = \sum_{i=1}^{m_l} n_i (f \circ \sigma_i)$, donde es claro que $f \circ \sigma_i : \Delta_p \to B$ y por lo tanto que $f_{\Delta_p}(l)$ es una suma formal de p-simplejos de B, otorgándonos lo que queríamos. Ahora bien, dadas dos p-cadenas singulares $c, d \in \Delta_p(X)$ que vivan en la misma clase lateral (módulo $\Delta_p(A)$) en $\Delta_p(X, A)$, esto nos significa, sin pérdida de generalidad, que $d = c + l$ para alguna $l \in \Delta_p(A)$. Por ello, $f^\sharp_{\Delta_p}(d + \Delta_p(A)) = f_{\Delta_p}(d) +$

$\Delta_p(B) = f_{\Delta_p}(c+l) + \Delta_p(B) = f_{\Delta_p}(c) + f_{\Delta_p}(l) + \Delta_p(B) = f_{\Delta_p}(c) + \Delta_p(B)$, con lo que vemos que $f^\sharp_{\Delta_p}$ está bien definida.

Toca turno a probar que $f^\sharp_\Delta$ es una aplicación de cadenas. Representando a todos los operadores frontera y homomorfismos particulares con un solo símbolo, y en virtud a la proposición 3.4.13, observamos que...

$$\begin{aligned}
&[f^\sharp_\Delta \circ \partial](c + \Delta_p(A)) = f^\sharp_\Delta(\partial(c + \Delta_p(A))) = f^\sharp_\Delta(\partial(c) + \Delta_{p-1}(A)) \\
&= f_\Delta(\partial(c)) + \Delta_{p-1}(B) = \partial(f_\Delta(c)) + \Delta_{p-1}(B) = \partial(f_\Delta(c) + \Delta_p(B)) \\
&= \partial(f^\sharp_\Delta(c + \Delta_p(A))) = [\partial \circ f^\sharp_\Delta](c + \Delta_p(A))
\end{aligned}$$

... para toda p-cadena singular $c \in \Delta_p(X)$ y p un entero mayor que 0, gracias a lo cual hemos cumplido nuestra intención (si antes también revisamos que la relación es cierta para enteros $p < 0$, pero esto, como casi siempre, es fácil de comprobar). $\square$

Corolario 3.4.30. *Sean $(X, A), (Y, B)$ pares topológicos. Una función continua $f : (X, A) \to (Y, B)$ induce homomorfismos $f_* : H_p(X, A) \to H_p(Y, B)$ para toda $p \in \mathbb{Z}$, definidos como $f_*([\![c + \Delta_p(A)]\!]) = [\![f^\sharp_\Delta(c + \Delta_p(A))]\!]$. Más aun, se tiene que $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ y que $1_* = 1_\_$.*

Demostración. Usando la proposición 3.2.6 garantizamos la veracidad de la primera parte de este corolario. Para el "más aun", a parte hay que considerar el hecho cierto de que $(f \circ g)^\sharp_\Delta = f^\sharp_\Delta \circ g^\sharp_\Delta$ y de que $1^\sharp_\Delta$ es la identidad en los complejos "relativos", por lo que la proposición 3.2.6 nuevamente facilita la afirmación. $\square$

En esta misma línea de pensamiento, nos conviene puntualizar que, dados (X, A) y (Y, B) pares topológicos, no todo homomorfismo $k : \Delta_p(X) \to \Delta_p(Y)$ se puede generalizar a uno entre $\Delta_p(X, A)$ y $\Delta_p(Y, B)$, pues tal cosa es posible si y sólo si $k[\Delta_p(A)] \subseteq \Delta_p(B)$, por lo que siempre hay que verificar en qué casos es aplicable la definición. Cuando valga, es lógico pensar que el homomorfismo inducido estará definido como $k^\sharp(c + \Delta_p(A)) = k(c) + \Delta_p(B)$ para una p-cadena singular c. Con esta estrategia -y estableciendo homomorfismos triviales entre los grupos de p-cadenas singulares relativas para $p < 0$-, podemos inducir homomorfismos graduados y aplicaciones de cadenas entre complejos "relativos" de cadenas singulares. Observamos a esta altura que las aplicaciones de cadenas entre los complejos "normales" inducen aplicaciones de cadenas al pasar al cociente con los complejos "relativos", de lo cual podemos cerciorarnos completamente con el procedimiento seguido en la prueba de la proposición 3.4.29.

Para todo espacio topológico X y $p \in \mathbb{Z}$, $\Delta_p(X, \emptyset) = \Delta_p(X)/\Delta_p(\emptyset) \approxeq \Delta_p(X)/0 \approxeq \Delta_p(X)$, gracias a lo cual tenemos que $H_p(X) \approxeq H_p(X, \emptyset)$ para toda $p \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, expresiones como $H_p(X) \xrightarrow{j_*} H_p(X, A)$ tienen sentido. Asimismo, las funciones entre espacios $f : X \to Y$ pueden ser vistas como funciones entre los pares $(X, \emptyset)$ y $(Y, \emptyset)$, con lo que las aplicaciones de cadenas f_Δ "coinciden" con las definidas como $f^\sharp_\Delta$ y así los homomorfismos inducidos en la homología se comportan igual si se ven como entre homologías de espacios o entre homologías de pares. Con esto queremos insinuar que todo nuestro conocimiento sobre espacios queda sumergido correctamente en la teoría *extendida* a pares.[18]

Ahora bien, para un grupo abeliano G, pensemos en los grupos $\Delta_p(X, A; G) = \Delta_p(X; G)/\Delta_p(A; G)$. No es complicado darse cuenta de que podemos utilizar la definición 3.4.18 para afinar los operadores frontera de aquélla en 3.4.27 y bajo tales circunstancias obtener un complejo de cadenas con una homología, en la cual denotaremos al p-ésimo grupo como $H_p(X, A; G)$. Gracias a la anotación de alguna forma paralela que hicimos en la subsección de Homología Singular con Coeficientes, la proposición 3.4.29 y el corolario 3.4.30 tienen cabida cierta en esta generalización.

De intentar construir una homología relativa asociada a las homologías reducidas de un espacio topológico, obtendríamos que coincide con la "completa". Es decir, si definimos el grupo graduado $C_*(X, A; G) := \{C_i(X; G)/C_i(A; G)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ y convenimos en un homomorfismo graduado (de grado -1) ρ construido a partir de los inducidos en el cociente por las ρ_i definidas en 3.4.21, podemos pensar en el complejo de cadenas $(C_*(X, A; G), \rho)$ y en su homología. En ella, se cumple que $C_{-1}(X, A; G) = C_{-1}(X; G)/C_{-1}(A; G) = G/G \approxeq 0$ y por lo tanto los complejos $(C_*(X, A; G), \rho)$ y $(\Delta_*(X, A; G), \partial)$ coinciden.[19]

Después de estas "notas no tan al margen", finalmente estamos en óptimas condiciones para comenzar la tarea de probar que la homología singular es una *teoría* de homología según los estándares que apilamos en la sección 3.3.

3.5. Una Teoría Formal...

Es suficiente introducción a esta sección todo lo que hemos mencionado sobre nuestras intenciones pedagógicas de seguir un enfoque axiomático. No obstante, conviene recalcar que la satisfacción de los axiomas de Eilenberg, Steenrod y Milnor es en realidad un compendio de teoremas sobre la homología singular, cuidadosamente escogido por estos titanes de la fundamentación matemática para cincelarlos como condiciones que otras teorías necesitarían para funcionar "decentemente" -las comillas vienen del hecho cierto de que, con todo, otras teorías que no cumplen todos los axiomas se han alzado fructíferas en el quehacer matemático.

La táctica será definir la *teoría de homología singular* con el lenguaje de categorías y luego revisar la veracidad de los axiomas, uno a uno. Sería descortés no mencionar desde el principio que, en el caso de los axiomas de *homotopía* y *escisión*, las pruebas ameritan algo de labor técnica que en un primer momento podría parecer como una desviación del camino de la intuición pero que en realidad no lo es, pues es sólo la expresión analítica -eso sí, algo engorrosa- de

[18] De cierta manera, lo que estamos diciendo es que nuestra definición de homología singular "respeta" el funtor Pa del ejemplo 3.3.7.

[19] La condición $X, A \neq \emptyset$ que impusimos es necesaria para la coincidencia de los complejos y las homologías, pues de trabajar con el vacío volveríamos al caso de espacios (no pares), donde las homologías y complejos no son iguales.

ella.

Para cada axioma, antes de efectuar las pruebas se anotará un recordatorio de su versión con la terminología general de la sección 3.3, esto con el objetivo de tener en mente lo que habremos de comprobar. Adelante, pues.

La siguiente definición debe resultar bastante natural.

Definición 3.5.1. *Sea $\mathcal{T}$ la categoría de los pares topológicos con sus funciones continuas, $\mathcal{G}_{\mathcal{AB}}$ aquélla de los grupos abelianos con sus homomorfismos, y sea G un grupo abeliano. Definimos $H_p : \mathcal{T} \to \mathcal{G}_{\mathcal{AB}}$ tal que, para cada par $(X, A) \in ob(\mathcal{T})$, $H_p((X, A)) = H_p(X, A; G)$ (el p-ésimo grupo de homología singular del complejo $\Delta_*(X, A; G)$) y, para cada función continua $f : (X, A) \to (Y, B)$, $H_p(f) = f_* : H_p(X, A; G) \to H_p(Y, B; G)$ (homomorfismo inducido según el corolario 3.4.30).*

Corolario 3.5.2. *Las aplicaciones $H_p : \mathcal{T} \to \mathcal{G}_{\mathcal{AB}}$ de la definición anterior son funtores covariantes a los que de ahora en adelante llamaremos* ***funtores de homología singular****.*

Demostración. Inmediato del corolario 3.4.30. □

Proposición 3.5.3. *Sea (X, A) un par topológico y G un grupo abeliano, y sean $i_\delta : \Delta_p(A; G) \to \Delta_p(X; G)$ las inclusiones y $j_\delta : \Delta_p(X; G) \to \Delta_p(X, A; G)$ las proyecciones canónicas. Entonces se tiene la siguiente sucesión exacta corta (de complejos de cadenas y aplicaciones de cadenas):*

$$0 \longrightarrow \Delta_*(A; G) \xrightarrow{i_\delta} \Delta_*(X; G) \xrightarrow{j_\delta} \Delta_*(X, A; G) \longrightarrow 0.$$

Demostración. En primer lugar, debemos mostrar que es cierto que i_δ y j_δ son aplicaciones de cadenas.

En el caso de i_δ, es francamente claro que $\partial \circ i_\delta = i_\delta \circ \partial$.

Para j_δ, miramos que, dado un entero $p > 0$ y una p-cadena $c \in \Delta_p(X; G)$, $[j_\delta \circ \partial](c) = j_\delta(\partial(c)) = \partial(c) + \Delta_{p-1}(A) = \partial(c + \Delta_p(A)) = \partial(j_\delta(c)) = [\partial \circ j_\delta](c)$. Como este resultado es fácil de visualizar para enteros $p \leq 0$, tenemos que j_δ también es una aplicación de cadenas.

Ahora bien, pasemos a confirmar la exactitud de la sucesión. La inclusión i_δ es un monomorfismo casi por definición, así que se cumple que $ker\ i_\delta = im\ 0$. A su vez, para todo $p \in \mathbb{Z}$, $c \in im\ i_\delta = \Delta_p(A)$ si y sólo si $j_\delta(c) = 0 + \Delta_p(A)$, por lo que $im\ i_\delta = ker\ j_\delta$. Finalmente, sabemos que j_δ es un epimorfismo porque es la proyección canónica, gracias a lo cual nos damos cuenta que la sucesión es exacta. □

Como observación, si recordamos el procedimiento utilizado para inducir una aplicación de cadenas a partir de una función continua como en la proposición 3.4.13, vemos que la aplicación de cadenas i_δ es de hecho la inducida por la inclusión $i : A \hookrightarrow X$ (es decir, $i_\delta = i_\Delta$), mientras que la proposición 3.4.29 deja cierto que j_δ es aquélla inducida por la inclusión $j : (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ (es decir, $j_\delta = j^\sharp_\Delta$). Conviene mucho tener esto presente, porque con los siguientes resultados “mataremos dos pájaros de un tiro”: por una parte, encontraremos una transformación D con sus operadores ∂_* tal como se pide para la *teoría*; por la otra, habremos de probar que la homología singular satisface el axioma de exactitud.

Axioma de Exactitud

"... Para las inclusiones $i : A \hookrightarrow X$ y $j : X \hookrightarrow (X, A)$, la siguiente sucesión es exacta:

$$... \xrightarrow{\partial_*} \mathcal{H}_p(A) \xrightarrow{i_*} \mathcal{H}_p(X) \xrightarrow{j_*} \mathcal{H}_p(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \mathcal{H}_{p-1}(A) \xrightarrow{i_*} ..."$$

Gracias a la teoría puramente algebraica desarrollada en la sección 3.2, esta propiedad no nos implicará mucho esfuerzo en el caso de la homología singular:

Corolario 3.5.4. *Para las inclusiones $i : A \hookrightarrow X$ y $j : X \hookrightarrow (X, A)$, existe una sucesión exacta de la siguiente forma:*

$$... \xrightarrow{\partial_*} H_p(A; G) \xrightarrow{i_*} H_p(X; G) \xrightarrow{j_*} H_p(X, A; G) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A; G) \xrightarrow{i_*} ... \quad (3.5)$$

Demostración. Como $0 \longrightarrow \Delta_*(A; G) \xrightarrow{i_\Delta} \Delta_*(X; G) \xrightarrow{j^\sharp_\Delta} \Delta_*(X, A; G) \longrightarrow 0$ es exacta según la proposición anterior (3.5.3), el teorema de inducción de sucesiones exactas largas en la homología de los complejos (teorema 3.2.7) nos otorga una sucesión como la deseada. □

Lo único que falta para probar que la homología singular (con coeficientes arbitrarios) en realidad satisface el axioma de exactitud es ver que los homomorfismos conectores de la sucesión (3.5) cumplen la condición *2* de la definición que dimos para una *teoría de homología* (definición 3.3.8), lo cual pasa gracias a la *naturalidad* (proposición 3.2.8) en virtud de los siguientes razonamientos...

Proposición 3.5.5. *Si ∂_* es el homomorfismo conector de la sucesión en* (3.5) *y G es un grupo abeliano, entonces para toda función continua $f : (X, A) \to (Y, B)$ y para todo $p \in \mathbb{Z}$, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
H_p(X, A; G) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_{p-1}(A; G) \arrow[d, "f_*"] \\
H_p(Y, B; G) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{p-1}(B; G).
\end{tikzcd}$$

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Delta_*(A; G) \arrow[r, "i_\Delta"] \arrow[d, "f_\Delta"] & \Delta_*(X; G) \arrow[r, "j^\sharp_\Delta"] \arrow[d, "f_\Delta"] & \Delta_*(X, A; G) \arrow[r] \arrow[d, "f^\sharp_\Delta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Delta_*(B; G) \arrow[r, "i'_\Delta"] & \Delta_*(Y; G) \arrow[r, "j'^\sharp_\Delta"] & \Delta_*(Y, B; G) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

... y probemos su conmutatividad:

(Primer cuadro) Dado un entero $p \geq 0$, σ un p-simplejo singular de $A \subseteq X$ y $g \in G$, $[f_\Delta \circ i_\Delta](g\sigma) = g(f \circ \sigma) = [i'_\Delta \circ f_\Delta](g\sigma)$, lo que garantiza la conmutatividad en los elementos que generan y por lo tanto en los grupos totales;

(Segundo cuadro) Dado un entero $p \geq 0$, σ un p-simplejo singular de X y $g \in G$, $[f^\sharp_\Delta \circ j^\sharp_\Delta](g\sigma + 0) = f^\sharp_\Delta(g\sigma + \Delta_p(A)) = f_\Delta(g\sigma) + \Delta_p(B) = j'^\sharp_\Delta(f_\Delta(g\sigma) + 0) = [j'^\sharp_\Delta \circ f_\Delta](g\sigma + 0)$, que de igual forma que para el "primer cuadro" otorga la conmutatividad del segundo.

Los casos para enteros $p < 0$ son fáciles de ver.

Ahora sí, usamos la proposición de *naturalidad* (3.2.8) y tenemos que el siguiente diagrama conmuta...

$$\begin{tikzcd}
H_p(A;G) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_p(X;G) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_p(X,A;G) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_{p-1}(A;G) \arrow[d, "f_*"] \\
H_p(B;G) \arrow[r, "i'_*"] & H_p(Y;G) \arrow[r, "j'_*"] & H_p(Y,B;G) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{p-1}(B;G)
\end{tikzcd}$$

... donde el "tercer cuadro" es justo aquél del que queríamos exhibir la conmutatividad. $\square$

Corolario 3.5.6. *Dado un grupo abeliano G, $\partial_* : H_*(X,A;G) \to H_*(A;G)$ induce una transformación natural de funtores (entre H_p y $H_{p-1} \circ Sub$) que a cada par (X,A) asigna el homomorfismo $\partial_* : H_p(X,A;G) \to H_{p-1}(A;G)$ de la proposición anterior. Así pues, si denotamos $H^{\mathcal{SIN}}$ a las familias $\{H_p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ y $\{\partial_* : H_p(X,A;G) \to H_{p-1}(A;G)\}_{p\in\mathbb{Z}}$, tenemos que $H^{\mathcal{SIN}}$ satisface el axioma de exactitud.* $\square$

Antes de avanzar, mencionamos un par de cosas.

Es natural pensar en la sucesión exacta inducida en la homología de una *tríada* (X,A,B) tal que $B \subseteq A \subseteq X$, a saber...

$$\xrightarrow{\partial_*} H_p(A,B;G) \xrightarrow{i_*} H_p(X,B;G) \xrightarrow{j_*} H_p(X,A;G) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A,B;G) \xrightarrow{i_*}$$

... la cual surge de aplicar el teorema 3.2.7 a la siguiente sucesión exacta corta de complejos "relativos" de cadenas singulares:

$$0 \longrightarrow \Delta_*(A,B;G) \xrightarrow{i^\sharp_\Delta} \Delta_*(X,B;G) \xrightarrow{j^\sharp_\Delta} \Delta_*(X,A;G) \longrightarrow 0.$$

Tomemos en cuenta la homología singular reducida. Cuando consideramos que $0 \to G \to G \to 0 \to 0$ es exacta y por lo tanto que la exactitud se sostiene en la dimensión -1 de la sucesión de complejos que generan la homología reducida, usamos el teorema 3.2.7 (de inducción de sucesiones exactas largas en la homología de un complejo) y así, recordando la coincidencia de la versión reducida con la "completa" en el caso de pares, probamos que existe una sucesión exacta de la siguiente forma:

$$... \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_p(A;G) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_p(X;G) \xrightarrow{j_*} H_p(X,A;G) \xrightarrow{\partial_*} \widetilde{H}_{p-1}(A;G) \xrightarrow{i_*} ... \quad (3.6)$$

Axioma de Dimensión

"... Para el espacio $P = \{*\}$ de un solo punto, se tiene que $\mathcal{H}_p(P) = 0$ para toda $p \neq 0$."

La proposición 3.4.20 certifica firmemente que $H^{\mathcal{SIN}}$ satisface el axioma de dimensión.

Axioma de Aditividad

"...Para la suma topológica $X := +_\alpha X_\alpha$ y las inclusiones $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow X$, el homomorfismo...

$$\bigoplus_\alpha (i_\alpha)_* : \bigoplus_\alpha \mathcal{H}_p(X_\alpha) \longrightarrow \mathcal{H}_p(X)$$

... es un isomorfismo para todo $p \in \mathbb{Z}$. "

Con un enunciado redundante, la siguiente proposición es la que hará todo el trabajo:

Proposición 3.5.7. *Dado un grupo abeliano G, para la suma topológica $X := +_\alpha X_\alpha$ y las inclusiones $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow X$, el homomorfismo...*

$$\bigoplus_\alpha (i_\alpha)_* : \bigoplus_\alpha H_p(X_\alpha;G) \longrightarrow H_p(X;G)$$

... es de hecho un isomorfismo para toda $p \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Primero que nada, hay que decir que, como los simplejos singulares tienen imagen conexa, entonces un proceder similar al que llevamos en la proposición 3.4.16 nos hace ver que, para todo $p \in \mathbb{Z}$, $\bigoplus_\alpha \Delta_p(X_\alpha;G) \approxeq \Delta_p(X;G)$ y que $\bigoplus_\alpha H_p(X_\alpha;G) \approxeq H_p(X;G)$. Ahora bien, veamos que $\bigoplus_\alpha (i_\alpha)_*$ es testigo de dicho isomorfismo. Para ello, clarifiquemos el hecho de que $\bigoplus_\alpha (i_\alpha)_*$ toma elementos formales $\sum_{i=1}^{l} [\![c_{\alpha_i}]\!] \in \bigoplus_\alpha H_p(X_\alpha;G)$[20] y los manda a $\sum_{i=1}^{l} [\![c_{\alpha_i}]\!]$[21] $= [\![c_{\alpha_1}]\!] + ... + [\![c_{\alpha_l}]\!]$.

Esforcémonos por mostrar que es monomorfismo: sea $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ y $\sum_{i=1}^{m} [\![c_{\alpha_i}]\!] \in \bigoplus_\alpha H_p(X_\alpha;G)$ -para un entero $p \geq 0$- tal que $\bigoplus_\alpha (i_\alpha)_*(\sum_{i=1}^{m} [\![c_{\alpha_i}]\!]) = [\![0]\!]$. Esto quiere decir que $\sum_{i=1}^{m} (i_{\alpha_i})_*([\![c_{\alpha_i}]\!]) = \sum_{i=1}^{m} [\![i_{\alpha_i}(c_{\alpha_i})]\!] = \sum_{i=1}^{m} [\![c_{\alpha_i}]\!] = [\![c_{\alpha_1}]\!] + ... + [\![c_{\alpha_m}]\!] = [\![0]\!]$, pero como sabemos que $\bigoplus_\alpha H_p(X_\alpha;G) \approxeq H_p(X;G)$,

[20] Es decir, estamos en presencia de una *suma formal*.

[21] Esta suma, a pesar de escribirse igual que la de la nota anterior, debe verse como un elemento de $H_p(X;G)$, es decir, no es una *suma formal*. De nuevo, estamos frente a una sutileza técnica que distingue entre representaciones iguales, tal y como anotamos cuando definimos el complejo de cadenas singulares.

la proposición 1.1.3 nos dice que $[\![c_{\alpha_i}]\!] = [\![0]\!]$ para toda $1 \leq i \leq m$ y por lo tanto que en $ker\ \bigoplus_\alpha (i_\alpha)_*$ sólo vive el neutro de $\bigoplus_\alpha H_p(X_\alpha)$, con lo que se aprecia que $\bigoplus_\alpha (i_\alpha)_*$ es un monomorfismo. Para los enteros $p < 0$, el resultado es fácil de comprobar.

Ahora mostremos que es un epimorfismo: dado $p \geq 0$ y $[\![c]\!] \in H_p(X; G)$ para algún p-ciclo $c \in \Delta_p(X; G)$, entonces, como $\bigoplus_\alpha H_p(X_\alpha; G) \approxeq H_p(X; G)$, sabemos del teorema 1.1.3 que $[\![c]\!] = [\![c_{\alpha_1}]\!] + ... + [\![c_{\alpha_n}]\!]$ (expresión única) con $[\![c_{\alpha_i}]\!] \in H_p(X_{\alpha_i}; G)$ para $1 \leq i \leq n$. $\sum_{i=1}^n [\![c_{\alpha_i}]\!]$ como elemento formal de $\bigoplus_\alpha H_p(X_\alpha; G)$ es tal que $\bigoplus_\alpha (i_\alpha)_* (\sum_{i=1}^n [\![c_{\alpha_i}]\!]) = \sum_{i=1}^n [\![i_{\alpha_i}(c_{\alpha_i})]\!] = \sum_{i=1}^n [\![c_{\alpha_i}]\!] = [\![c_{\alpha_1}]\!] + ... + [\![c_{\alpha_n}]\!] = [\![c]\!]$. En los casos $p < 0$, tal verificación es inmediata, gracias a lo cual vemos que $\bigoplus_\alpha (i_\alpha)_*$ es epimorfismo y por tanto un isomorfismo para toda $p \in \mathbb{Z}$. $\square$

Así pues, hemos verificado que $H^{\mathcal{SIN}}$ satisface el axioma de aditividad[22].

Axioma de Homotopía

"*Para todo $p \in \mathbb{Z}$,*

$$f \simeq g : (X, A) \to (Y, B) \Rightarrow f_* = g_* : \mathcal{H}_p((X, A)) \to \mathcal{H}_p((Y, B)).''$$

Antes de y para comprobar que $H^{\mathcal{SIN}}$ cumple el axioma de homotopía, debemos introducir nuevos conceptos de álgebra homológica.

Definición 3.5.8. *Dados A_* y B_* complejos de cadenas y $\phi, \psi : A_* \to B_*$ dos aplicaciones de cadenas, decimos que ϕ y ψ son **homotópicas de cadenas** si y sólo si existe un homomorfismo graduado (de grado 1) $F : A_* \to B_*$ tal que $\partial \circ F + F \circ \partial = \phi - \psi$. Denotamos esta relación como $\phi \simeq \psi$.*

Proposición 3.5.9. *La relación de **homotopía de cadenas** es una relación de equivalencia.*

Demostración. La reflexividad y la simetría son fáciles de verificar gracias al homomorfismo trivial y al "negativo" de un homomorfismo ($-F$ para algún homomorfismo F). Para la transitividad, vemos que si $\phi \simeq \psi$ y $\psi \simeq \eta$, entonces existen F y G como pedidos tales que $\phi - \psi = \partial \circ F + F \circ \partial$ y $\psi - \eta = \partial \circ G + G \circ \partial$. Entonces tenemos que $\psi - \eta = \partial \circ (F + G) + (F + G) \circ \partial$. $\square$

Proposición 3.5.10. *Sean A_* y B_* complejos de cadenas y $\phi, \psi : A_* \to B_*$ dos aplicaciones de cadenas tales que $\phi \simeq \psi$ vía F. Entonces $\phi_* = \psi_* : H_*(A_*) \to H_*(B_*)$.*

Demostración. Sea $i \in \mathbb{Z}$ y $a \in A_i$ un i-ciclo. Tenemos que $\phi_*([\![a]\!]) - \psi_*([\![a]\!]) = [\![\phi(a) - \psi(a)]\!] = [\![[\phi - \psi](a)]\!] = [\![[\partial \circ F + F \circ \partial](a)]\!] = [\![[\partial \circ F](a)]\!] + [\![[F \circ \partial](a)]\!] = [\![\partial(F(a))]\!] + [\![F(0)]\!] = [\![0]\!] + [\![0]\!] = [\![0]\!]$, gracias a lo cual $\phi_*([\![a]\!]) = \psi_*([\![a]\!])$. $\square$

[22] Es común pensar en una versión de este axioma pero para un par (topológico) de sumas topológicas que tengan sentido, donde los grupos de homología de tal par se descompondrán en sumas directas de grupos de homología de pares.

Relacionado a esto, de una vez introducimos un concepto clave:

Definición 3.5.11. *Dados A_* y B_* complejos de cadenas, una aplicación de cadenas $\chi : A_* \to B_*$ se dice* ***equivalencia homotópica de cadenas*** *si existe otra aplicación de cadenas $\varphi : B_* \to A_*$ tal que $\chi \circ \varphi \simeq 1_{B_*}$ y $\varphi \circ \chi \simeq 1_{A_*}$.*

Notamos pertinentemente dos cosas: primero, que la relación establecida por una *equivalencia homotópica de cadenas* es una de equivalencia; y segundo, que si tenemos una *equivalencia homotópica de cadenas* $\chi : A_* \to B_*$ -y su correspondiente φ-, entonces la proposición 3.5.10 nos indica que $\chi_* \circ \varphi_*$ es la identidad sobre $H_*(B_*)$, mientras que $\varphi_* \circ \chi_*$ es aquélla sobre $H_*(A_*)$, lo cual inmediatamente entrega el hecho de que χ_* y φ_* son isomorfismos e inversos uno del otro.

Volviendo a nuestro discurso original, el plan que usaremos para ver que $H^{\mathcal{SIN}}$ satisface el axioma de homotopía será, dadas dos funciones homotópicas f y g, construir un homomorfismo graduado (de grado 1) que certifique el hecho de que f_Δ y g_Δ son homotópicas de cadenas, de modo que la proposición 3.5.10 nos entregue justo lo que deseamos. Para esto, nos valdremos de una bella construcción:

Definición 3.5.12. *Llamamos* ***p-prisma canónico*** *a la $(p+1)$-cadena singular (con coeficientes en $\mathbb{Z}$) del espacio $\Delta_p \times I$ dada por...*

$$P_p := \sum_{i=0}^{p} (-1)^i [(e_0, 0), ..., (e_i, 0), (e_i, 1), ..., (e_p, 1)].$$

En este sentido, y por conveniencia notacional, escribiremos gP_p para referirnos a la cadena $\sum_{i=0}^{p} (-1)^i g[(e_0, 0), ..., (e_i, 0), (e_i, 1), ..., (e_p, 1)]$, la cual es una $(p+1)$-cadena singular que vive en $\Delta_{p+1}(\Delta_p \times I; G)$.

Definición 3.5.13. *Dado un espacio topológico X, un grupo abeliano G y un entero $p \geq 0$, definimos el* ***operador prisma*** *$\mathcal{P} : \Delta_p(X; G) \to \Delta_{p+1}(X \times I; G)$ tal que, para un p-simplejo singular $\sigma \in \Delta_p(X)$ y $g \in G$...*

$$\mathcal{P}(g\sigma) = \sigma'_\Delta(gP_p)$$

... donde $\sigma' : \Delta_p \times I \to X \times I$ es una función continua que manda (s, t) en $(\sigma(s), t)$ y $\sigma'_\Delta : \Delta_{p+1}(\Delta_p \times I; G) \to \Delta_{p+1}(X \times I; G)$ es su homomorfismo inducido en los complejos de cadenas singulares correspondientes.[23]

En este punto nos conviene mencionar que definiremos, como es usual, $\mathcal{P} : \Delta_p(X; G) \to \Delta_{p+1}(X \times I; G)$ como 0 para todo entero $p < 0$ para obtener un homomorfismo graduado (de grado 1) $\mathcal{P} : \Delta_*(X; G). \to \Delta_*(X \times I; G)$.

[23]La definición se ha hecho para los elementos que generan. Recordemos que debemos extenderla linealmente para tener un homomorfismo.

Lema 3.5.14. *Sea $\{v_0, ..., v_p\} \subset \mathbb{R}^n$ y $[v_0, ..., v_p]$ un p-simplejo singular afín; sea G un grupo abeliano y $g \in G$. Entonces se cumple que...*

$$\mathcal{P}(g[v_0, ..., v_p]) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i g[(v_0, 0), ..., (v_i, 0), (v_i, 1), ..., (v_p, 1)].$$

En particular, si $F_j^p = [e_0, ..., \hat{e_j}, ..., e_p]$ es la j-ésima aplicación de cara, entonces...

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(gF_j^p) = &\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i g[(e_0, 0), ..., (e_i, 0), (e_i, 1), ..., \widehat{(e_j, 1)}, ..., (e_p, 1)] \\ &+ \sum_{i=j}^{p-1} (-1)^i g[(e_0, 0), ..., \widehat{(e_j, 0)}, ..., (e_{i+1}, 0), (e_{i+1}, 1), ..., (e_p, 1)].\end{aligned}$$

Demostración. Comencemos con un pequeño resultado preliminar. Sabemos de 3.5.13 que $[v_0, ..., v_p]' : \Delta_p \times I \to \mathbb{R}^n \times I$ está definido como $[v_0, ..., v_p]'(s, t) = ([v_0, ..., v_p](s), t)$. Dado un entero $0 \leq i \leq p$ fijo, si recordamos la definición de p-simplejo singular afín (definición 3.4.3), tenemos que la función...

$$[v_0, ..., v_p]' \circ [(e_0, 0), ..., (e_i, 0), (e_i, 1), ..., (e_p, 1)] : \Delta_{p+1} \to \mathbb{R}^n \times I$$

... es tal que, para una colección de coeficientes $\{\lambda_k \mid 0 \leq \lambda_k \leq 1,\ 0 \leq k \leq p+1,\ \sum_{i=0}^{p+1} \lambda_k = 1\}$ y $\sum_{k=0}^{p+1} \lambda_k e_k \in \Delta_{p+1}$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}&[[v_0, ..., v_p]' \circ [(e_0, 0), ..., (e_i, 0), (e_i, 1), ..., (e_p, 1)]] \left(\sum_{k=0}^{p+1} \lambda_k e_k \right) \\ &= [v_0, ..., v_p]' \left(\sum_{k=0}^{i} \lambda_k (e_k, 0) + \sum_{k=i+1}^{p+1} \lambda_k (e_{k-1}, 1) \right) \\ &= [v_0, ..., v_p]' \left(\sum_{k=0}^{i} (\lambda_k e_k, 0) + \sum_{k=i+1}^{p+1} (\lambda_k e_{k-1}, \lambda_k) \right) \\ &= [v_0, ..., v_p]' \left(\sum_{k=0}^{i} \lambda_k e_k + \sum_{k=i+1}^{p+1} \lambda_k e_{k-1}, \sum_{k=i+1}^{p+1} \lambda_k \right) \\ &= \left([v_0, ..., v_p] \left(\sum_{k=0}^{i} \lambda_k e_k + \sum_{k=i+1}^{p+1} \lambda_k e_{k-1} \right), \sum_{k=i+1}^{p+1} \lambda_k \right) \\ &= \left([v_0, ..., v_p] \left(\sum_{k=0}^{i} \lambda_k e_k \right) + [v_0, ..., v_p] \left(\sum_{k=i+1}^{p+1} \lambda_k e_{k-1} \right), \sum_{k=i+1}^{p+1} \lambda_k \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{i} \lambda_k v_k + \sum_{k=i+1}^{p+1} \lambda_k v_{k-1}, \sum_{k=i+1}^{p+1} \lambda_k \right) =\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{i} \lambda_k(v_k, 0) + \sum_{k=i+1}^{p+1} \lambda_k(v_{k-1}, 1)$$
$$= [(v_0, 0), ..., (v_i, 0), (v_i, 1), ..., (v_p, 1)] \left(\sum_{k=0}^{p+1} \lambda_k e_k \right).$$

Gracias a esto, hemos mostrado que...

$$[v_0, ..., v_p]' \circ [(e_0, 0), ..., (e_i, 0), (e_i, 1), ...,(e_p, 1)]$$
$$= [(v_0, 0), ..., (v_i, 0), (v_i, 1), ..., (v_p, 1)].$$

Ahora bien, bajo la definición 3.5.3, $\mathcal{P}(g[v_0, ..., v_p]) = [v_0, ..., v_p]'_\Delta(gP_p)$, lo que significa que...

$$[v_0, ..., v_p]'_\Delta(gP_p) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i g[v_0, ..., v_p]' \circ [(e_0, 0), ..., (e_i, 0), (e_i, 1), ..., (e_p, 1)]$$
$$= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i g[(v_0, 0), ..., (v_i, 0), (v_i, 1), ..., (v_p, 1)]$$

... otorgándonos lo que queríamos.

La afirmación particular del lema -que de hecho es la que vamos a necesitar posteriormente- se tiene en virtud de que nuestro pequeño resultado preliminar nos arroja, para $i \geq j$ con j fijo, la igualdad...

$$F_j^{p\prime} \circ [(e_0, 0), ...,(e_i, 0), (e_i, 1), ..., (e_{p-1}, 1)]$$
$$= [(e_0, 0), ..., (\hat{e_j}, 0), ..., (e_{i+1}, 0), (e_{i+1}, 1), ..., (e_p, 1)]$$

... y, para $i < j$, la igualdad...

$$F_j^{p\prime} \circ [(e_0, 0), ..., (e_i, 0), (e_i, 1), ...,(e_{p-1}, 1)]$$
$$= [(e_0, 0), ..., (e_i, 0), (e_i, 1), ..., (\hat{e_j}, 1), ..., (e_p, 1)].$$

□

Lema 3.5.15. *Para un entero $p \geq 0$, un entero $0 \leq j \leq p$, σ un p-simplejo singular y g en un grupo abeliano G, se tiene que $\mathcal{P}(g\sigma^{(j)}) = [\sigma'_\Delta \circ \mathcal{P}](gF_j^p)$.*

Demostración. Notamos en primer lugar que ${\sigma^{(j)}}' = (\sigma \circ F_j^p)' = \sigma' \circ F_j^{p\prime}$, de lo que es fácil darse cuenta porque $F_j^{p\prime}$ deja intacta la segunda coordenada de los puntos en $\Delta_p \times I$. Luego, de la afirmación particular del lema 3.5.14 se cumple lo siguiente...

$$\mathcal{P}(g\sigma^{(j)})$$
$$= \mathcal{P}(g(\sigma \circ F_j^p))$$
$$= (\sigma' \circ F_j^{p\prime})_\Delta(gP_p)$$
$$= \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i g((\sigma' \circ F_j^{p\prime}) \circ [(e_0, 0), ..., (e_i, 0), (e_i, 1), ..., (e_{p-1}, 1)]) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i g(\sigma' \circ (F_j^{p\prime} \circ [(e_0,0),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(e_{p-1},1)])) \\
&= \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i g(\sigma' \circ [(e_0,0),...,(\hat{e_j,}0),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(e_p,1)]) \\
&\quad + \sum_{i=j}^{p-1} (-1)^i g(\sigma' \circ [(e_0,0),...,(\hat{e_j,}0),...,(e_{i+1},0),(e_{i+1},1),...,(e_p,1)]) \\
&= \sigma'_\Delta \left(\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i g[(e_0,0),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(\hat{e_j,}1),...,(e_p,1)] \right) \\
&\quad + \sigma'_\Delta \left(\sum_{i=j}^{p-1} (-1)^i g[(e_0,0),...,(\hat{e_j,}0),...,(e_{i+1},0),(e_{i+1},1),...,(e_p,1)] \right) \\
&= [\sigma'_\Delta \circ P](gF_j^p).
\end{aligned}
$$

□

Lema 3.5.16.

$$
\begin{aligned}
&[(e_0,0),...,(e_{i-1},0),(e_{i-1},1),...,(e_p,1)] \circ F_j^{p+1} = \\
&\qquad\qquad [(e_0,0),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(e_p,1)] \circ F_j^{p+1}
\end{aligned}
$$

... para toda $i = j$, $1 \leq i \leq p$.

Demostración. Es una cuestión de cautela darse cuenta de la veracidad de este lema, pues lo único que hay que hacer es revisar el comportamiento de las aplicaciones de cara, las cuáles, hay que recordar, son en este caso p-simplejos que mandan Δ_p en Δ_{p+1} afínmente, de manera que, para un $(p+1)$-simplejo singular afín $[v_0,...,v_{p+1}]$, se cumple...

$$
[v_0,...,v_{p+1}] \circ F_j^{p+1} = [v_0,...,\hat{v}_j,...v_{p+1}].^{24} \tag{3.7}
$$

Por tal motivo, hemos de ver que, para toda $i = j$, $1 \leq i \leq p$...

$$
\begin{aligned}
&[(e_0,0),...,(e_{i-1},0),(e_{i-1},1),...,(e_p,1)] \circ F_j^{p+1} \\
&= [(e_0,0),...,(e_{i-1},0),(\hat{e_{i-1}},1),...,(e_p,1)] \\
&= [(e_0,0),...,(e_{i-1},0),(e_i,1),...,(e_p,1)] \\
&= [(e_0,0),...,(e_{i-1},0),(\hat{e_i,}0),(e_i,1),...,(e_p,1)] \\
&= [(e_0,0),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(e_p,1)] \circ F_j^{p+1}.
\end{aligned}
$$

□

[24] Notemos que, a diferencia de lo que hicimos en la afirmación particular del lema 3.5.14, hemos "quitado" exactamente el j-ésimo término del simplejo singular afín.

Teorema 3.5.17. *Dado G un grupo abeliano y dos funciones $f \simeq g : X \to Y$ con E la homotopía entre ellas (de f a g), si definimos el homomorfismo graduado (de grado 1) $E_{\mathcal{P}} : \Delta_*(X;G) \to \Delta_*(Y;G)$ como $E_{\mathcal{P}} = E_\Delta \circ \mathcal{P}$ (donde E_Δ es el homomorfismo inducido que va de $\Delta_*(X \times I;G)$ a $\Delta_*(Y;G)$), entonces $\partial \circ E_{\mathcal{P}} + E_{\mathcal{P}} \circ \partial = g_\Delta - f_\Delta$.*

Demostración. Primero verifiquemos la definición que establece el enunciado del teorema. Hemos convenido que el *operador prisma* $\mathcal{P}$ es un homomorfismo graduado (de grado 1) entre $\Delta_*(X;G)$ y $\Delta_*(X \times I;G)$, mientras que $E_\Delta : \Delta_*(X \times I;G) \to \Delta_*(Y;G)$ es el homomorfismo graduado (de grado 0) inducido por la homotopía según la proposición 3.4.13, de acuerdo a lo cual $E_{\mathcal{P}}$ resulta en efecto un homomorfismo graduado (de grado 1) entre $\Delta_*(X;G)$ y $\Delta_*(Y;G)$.

Ahora bien, procederemos por partes: para un entero $p > 0$ y $h\sigma \in \Delta_p(X;G)$ con σ un p-simplejo singular, los lemas 3.5.14 y 3.5.15 nos ayudarán a visualizar que...

$$
\begin{aligned}
&[E_{\mathcal{P}} \circ \partial](h\sigma) = [E_\Delta \circ \mathcal{P}]\left(\sum_{j=0}^{p} (-1)^j h\sigma^{(j)}\right)\\
&= E_\Delta\left(\sum_{j=0}^{p} (-1)^j \mathcal{P}(h\sigma^{(j)})\right)\\
&= E_\Delta\left(\sum_{j=0}^{p} (-1)^j [\sigma'_\Delta \circ \mathcal{P}](hF_j^p)\right)\\
&= E_\Delta\left(\sum_{i<j} (-1)^j(-1)^i h(\sigma' \circ [(e_0,0),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(\hat{e_j},1),...,(e_p,1)])\right)\\
&\quad + E_\Delta\left(\sum_{i>j} (-1)^j(-1)^{i-1} h(\sigma' \circ [(e_0,0),...,(\hat{e_j},0),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(e_p,1)])\right).
\end{aligned}
$$

Expliquemos un poco esta igualdad. En realidad, es el último paso el que requiere de un poco de aclaración, pues quizá parezca arbitrario conjurar tal división de sumandos, sobre todo cuando aún no existe un motivo explícito para hacerlo. Bien, pues para convencernos de su certeza, debemos observar del lema 3.5.14 cómo trabaja el *operador prisma* sobre las aplicaciones de cara, concentrando nuestra atención en los índices que se estén manejando. Así pues, sabemos que para una j-ésima aplicación de cara fija, los sumandos para $i < j$ que aparecen en la cadena que resulta de aplicar el operador prisma son exactamente los que se apuntan, sin mayor problema. Ahora bien, los sumandos con $i \geq j$ han adquirido una nueva forma, en la que nuestra *representación* deja implícito el caso $i = j$ (se ha sustituído por su equivalente según lo dicho para $i \geq j$ en la afirmación particular del lema 3.5.14); luego, hemos de visualizar claramente el hecho de que, en esta situación, el coeficiente $(-1)^i$ multiplica a los sumandos donde el "cambio" entre coordenada 0 y coordenada 1 se hace a la altura de $(e_{i+1},0),(e_{i+1},1)$, de lo que hemos apuntado $(-1)^{i-1}$ multiplicando a los sumandos donde tal "cambio" está escrito a nivel $(e_i,0),(e_i,1)$.

Por otro lado...

$$
\begin{aligned}
&[\partial\circ E_{\mathcal{P}}](h\sigma)=[\partial\circ(E_\Delta\circ\sigma'_\Delta)](hP_p)\\
&=[E_\Delta\circ\sigma'_\Delta]\left(\partial\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i h[(e_0,0),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(e_p,1)]\right)\right)\\
&=[E_\Delta\circ\sigma'_\Delta]\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\partial\left(h[(e_0,0),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(e_p,1)]\right)\right)\\
&=[E_\Delta\circ\sigma'_\Delta]\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j h([(e_0,0),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(e_p,1)]\circ F_j^{p+1})\right)\\
&=\sum_{j\le i}(-1)^i(-1)^j h(E\circ\sigma'\circ[(e_0,0),...,(\hat{e_j,0}),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(e_p,1)])\\
&\qquad+\sum_{j\ge i}(-1)^i(-1)^{j+1}h(E\circ\sigma'\circ[(e_0,0),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(\hat{e_j,1}),...,(e_p,1)])\\
&=\star.
\end{aligned}
$$

Antes de proseguir debemos notar el siguiente hecho: salvo por $h(E\circ\sigma'\circ[(\hat{e_0,0}),(e_0,1),...,(e_p,1)])$ y $-h(E\circ\sigma'\circ[(e_0,0),(e_1,1),...,(e_p,0),(\hat{e_p,1})])$, los términos con $i=j$ de la primer suma se cancelan con los términos $i=j$ de la segunda en virtud del lema 3.5.16 (en la segunda, $(e_j,0)$ es realmente el $(j+1)$-ésimo término del simplejo singular afín $[(e_0,0),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(e_j,1),...,(e_p,1)]$). Por lo tanto -y es ahora que se hace conveniente haber partido nuestras sumas en las dos presentaciones- tenemos...

$$
\begin{aligned}
&\star\\
&=h(E\circ\sigma'\circ[(\hat{e_0,0}),(e_0,1),...,(e_p,1)])-h(E\circ\sigma'\circ[(e_0,0),(e_1,1),...,(e_p,0),(\hat{e_p,1})])\\
&\qquad+\sum_{j<i}(-1)^i(-1)^j h(E\circ\sigma'\circ[(e_0,0),...,(\hat{e_j,0}),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(e_p,1)])\\
&\qquad+\sum_{j>i}(-1)^i(-1)^{j+1}h(E\circ\sigma'\circ[(e_0,0),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(\hat{e_j,1}),...,(e_p,1)])\\
&=h(E\circ\sigma'\circ[(\hat{e_0,0}),(e_0,1),...,(e_p,1)])-h(E\circ\sigma'\circ[(e_0,0),(e_1,1),...,(e_p,0),(\hat{e_p,1})])\\
&\qquad+E_\Delta\left(\sum_{j<i}(-1)^j(-1)^i h(\sigma'\circ[(e_0,0),...,(\hat{e_j,0}),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(e_p,1)])\right)\\
&\qquad+E_\Delta\left(\sum_{j>i}(-1)^j(-1)^{i-1}h(\sigma'\circ[(e_0,0),...,(e_i,0),(e_i,1),...,(\hat{e_j,1}),...,(e_p,1)])\right)\\
&=\star\star.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, los últimos dos sumandos coinciden a todas luces con $-[E_{\mathcal{P}} \circ \partial](h\sigma)$ gracias a nuestra primera igualdad en la prueba.

Por otra parte, para una colección de coeficientes $\{\lambda_k \mid 0 \leq \lambda_k \leq 1,\ 0 \leq k \leq p+1,\ \sum_{i=0}^{p+1} \lambda_k = 1\}$, se tiene...

$$\begin{aligned}
[E \circ \sigma' \circ [(\hat{e_0, 0}), (e_0,1), ..., (e_p, 1)]] \left(\sum_{k=0}^{p} \lambda_k e_k\right) &= [E \circ \sigma'] \left(\sum_{k=0}^{p} \lambda_k (e_k, 1)\right) \\
&= [E \circ \sigma'] \left(\sum_{k=0}^{p} \lambda_k e_k, 1\right) \\
&= E \left(\sigma \left(\sum_{k=0}^{p} \lambda_k e_k\right), 1\right) \\
&= g \left(\sigma \left(\sum_{k=0}^{p} \lambda_k e_k\right)\right) \\
&= [g \circ \sigma] \left(\sum_{k=0}^{p} \lambda_k e_k\right) \\
&= g_\Delta(\sigma) \left(\sum_{k=0}^{p} \lambda_k e_k\right)
\end{aligned}$$

... mientras que, similarmente, se cumple...

$$E \circ \sigma' \circ [(e_0, 0), (e_1,1), ..., (e_p, 0), (\hat{e_p, 1})] = f_\Delta(\sigma)$$

... gracias a lo cual, si juntamos todas nuestras ecuaciones, alcanzamos...

$$[\partial \circ E_{\mathcal{P}}](h\sigma) = \star = \star\star = g_\Delta(h\sigma) - f_\Delta(h\sigma) - [E_{\mathcal{P}} \circ \partial](h\sigma).$$

Por lo tanto, $\partial \circ E_{\mathcal{P}} + E_{\mathcal{P}} \circ \partial = g_\Delta - f_\Delta$ en los elementos que generan a $\Delta_p(X; G)$ y consecuentemente en el grupo total. Las sutilezas del caso $p = 0$ se resumen diciendo que el sumando $[E_{\mathcal{P}} \circ \partial](h\sigma)$ se anula y que $[\partial \circ E_{\mathcal{P}}](h\sigma)$ coincide exactamente con $g_\Delta(h\sigma) - f_\Delta(h\sigma)$ debido a que los únicos elementos que quedan en la descomposición en sumandos de $[\partial \circ E_{\mathcal{P}}](h\sigma)$ son $h(E \circ \sigma' \circ [(\hat{e_0, 0}), (e_0,1)])$ y $-h(E \circ \sigma' \circ [(e_0, 0), (\hat{e_0, 1})])$. En cuanto a los enteros $p < 0$, el teorema es fácil de corroborar. $\square$

Corolario 3.5.18. *Dado G un grupo abeliano de coeficientes para la homología singular de los espacios X y Y, y dadas dos funciones $f \simeq g : X \to Y$ con E la homotopía entre ellas (de f a g), entonces $f_\Delta \simeq g_\Delta$ y por lo tanto $f_* = g_* : H_*(X; G) \to H_*(Y; G)$.*

Demostración. Todo consiste en juntar la fuerza del teorema 3.5.17 y la proposición 3.5.10. $\square$

Aún queda por ver que esta propiedad se puede extender a la homología relativa y así ser formales sobre el hecho de que $H^{\mathcal{SIN}}$ cumple el axioma. Ahora bien, para hacerlo, debemos recordar nuestra definición de homotopía en el caso de pares topológicos (definición 2.3.23) y utilizar el teorema 3.5.17 pertinentemente.

Lema 3.5.19. *Sean (X, A) un par topológico y G un grupo abeliano, entonces el operador prisma $\mathcal{P} : \Delta_*(X; G) \to \Delta_*(X \times I; G)$ se puede extender a un homomorfismo graduado (de grado 1) $\mathcal{P}^\sharp : \Delta_*(X, A; G) \to \Delta_*(X \times I, A \times I; G)$.*

Demostración. Para un entero $p \geq 0$ y $g\sigma \in \Delta_p(A; G)$ (con σ un p-simplejo singular), $\mathcal{P}(g\sigma) = \sigma_\Delta(gP_p)$ donde $\sigma_\Delta(gP_p)$ es ciertamente una cadena en $\Delta_{p+1}(A \times I; G)$. Por esta razón, vemos que $\mathcal{P}[\Delta_p(A; G)] \subseteq \Delta_{p+1}(A \times I; G)$, de forma que podemos definir $\mathcal{P}^\sharp : \Delta_p(X, A; G) \to \Delta_{p+1}(X \times I, A \times I; G)$ como $\mathcal{P}^\sharp(c + \Delta_p(A; G)) = \mathcal{P}(c) + \Delta_{p+1}(A \times I; G)$. Si establecemos la convención familiar de que $\mathcal{P}^\sharp = 0$ para todo entero $p < 0$, entonces hemos alcanzado nuestro cometido. $\square$

Corolario 3.5.20. *Dado G un grupo abeliano y dos funciones $f \backsimeq g : (X, A) \to (Y, B)$ con E la homotopía entre ellas (de f a g), si definimos el homomorfismo graduado (de grado 1) $E_{\mathcal{P}^\sharp} : \Delta_*(X; G) \to \Delta_*(Y; G)$ como $E_{\mathcal{P}^\sharp} = E^\sharp_\Delta \circ \mathcal{P}^\sharp$ (donde $E^\sharp_\Delta$ es el homomorfismo inducido que va de $\Delta_*(X \times I, A; G)$ a $\Delta_*(Y, B; G)$) entonces $\partial \circ E_{\mathcal{P}^\sharp} + E_{\mathcal{P}^\sharp} \circ \partial = g^\sharp_\Delta - f^\sharp_\Delta$.*

Demostración. Prácticamente lo único que estamos haciendo es pasar al cociente nuestras relaciones, por lo que un cuidadoso seguimiento de la prueba del teorema 3.5.17, aunado a la herramienta proporcionada por el lema anterior, nos hará convencernos de la certeza de este corolario. $\square$

Corolario 3.5.21. *Dado G un grupo abeliano de coeficientes para la homología singular de los pares (X, A) y (Y, B), y dadas dos funciones $f \backsimeq g : (X, A) \to (Y, B)$ con E la homotopía entre ellas (de f a g), entonces $f^\sharp_\Delta \simeq g^\sharp_\Delta$ y por lo tanto $f_* = g_* : H_*(X, A; G) \to H_*(Y, B; G)$, con lo que $H^{\mathcal{SIN}}$ satisface el axioma de homotopía.* $\square$

Axioma de Escisión

"... Dado el par (X, A) y $U \subset X$ tal que $\overline{U} \subseteq int(A)$, entonces la inclusión $k : (X \backslash U, A \backslash U) \hookrightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo...

$$k_* : \mathcal{H}_p((X \backslash U, A \backslash U)) \xrightarrow{\approxeq} \mathcal{H}_p((X, A))$$

... para todo $p \in \mathbb{Z}$."

Cuando Poincaré impulsó la creación de los grupos de homología a través de triangulaciones, probó que la homología respecto de una triangulación particular era la misma que la de una subdivisión de la triangulación. Bajo un impulso parecido, podemos intuir (al vislumbrar en nuestra mente a los elementos de un grupo de homología dado como simplejos singulares afines en triángulos, tetraedros, etc.) que los grupos no tendrían por qué alterarse si "triangulamos" a los constituyentes cuantas veces queramos hasta alcanzar un esquema que de alguna manera nos acomode más; por ejemplo, para simplificar un cálculo. Es así como presentamos que la homología singular se atiene al axioma de escisión, según el cual podemos extirpar de un espacio un subconjunto de características particulares sin cambiar por ello su homología. Aunque es relativamente sencillo comprender su enunciado, el proceder para probarla es algo enredado. Sin embargo, puede ser una buena manera de sobrellevar tanta abstracción el darnos cuenta de que la idea general consiste en dividir y dividir nuestras cadenas singulares hasta que nos quedemos con representantes de clases de homología suficientemente pequeños -y en consecuencia circunscritos a subconjuntos "convenientes".

Definición 3.5.22. *Sea G un grupo abeliano de coeficientes para la homología singular de $\mathbb{R}^n$ y $p \geq 0$ un entero. Denotaremos $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n; G)$ al subconjunto de $\Delta_p(\mathbb{R}^n; G)$ que consiste de las p-cadenas singulares formadas exclusivamente por p-simplejos singulares afines, a las cuales llamaremos concordantemente p-cadenas singulares afines.*

Claramente $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n; G)$ es un subgrupo de $\Delta_p(\mathbb{R}^n; G)$ para todo entero $p \geq 0$. No es de extrañar, a la luz de la definición anterior, que el conjunto de p-simplejos singulares afines, "multiplicados" por los coeficientes del grupo abeliano elegido G, funciona como "base" de $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n; G)$ para todo entero $p \geq 0$.

Definición 3.5.23. *Sea G un grupo abeliano de coeficientes para la homología singular de $\mathbb{R}^n$, $\{v_0, ..., v_p\} \subset \mathbb{R}^n$ con $[v_0, ..., v_p]$ un p-simplejo singular afín y $z \in \mathbb{R}^n$. Denotaremos $z\sigma$ al $(p+1)$-simplejo singular afín $[z, v_0, ..., v_p]$. Así pues, dada $c = \sum_{i=1}^{m_c} g_i\sigma_i$ ($g_i \in G$) una p-cadena singular afín, denotaremos zc a $\sum_{i=1}^{m_c} g_i(z\sigma_i)$.*[25]

Proposición 3.5.24. *Sea $z \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n; G)$ una cadena singular afín. Se cumple entonces que $\partial(zc) = c - z\partial(c)$.*[26]

Demostración. Probaremos la propiedad para un p-simplejo singular afín $g\sigma \in \Delta_p(\mathbb{R}^n; G)$, por lo que el resultado se obtendrá por linealidad. Dado $\{v_0, ..., v_p\} \subset \mathbb{R}^n$ y $\sigma = [v_0, ..., v_p]$, entonces -valiéndonos del razonamiento detrás de la ecuación en (3.7)- obtenemos...

$$\partial(z(g\sigma)) = \partial(g(z\sigma)) = \partial(g[z, v_0, ..., v_p])$$
$$= g[\hat{z}, v_0, ..., v_p] - \sum_{i=o}^{p}(-1)^i g[z, v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_p] =$$

[25]Es decir, "aumentar por z" se comporta como un homomorfismo de $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n; G)$ en $\mathcal{A}_{p+1}(\mathbb{R}^n; G)$.

[26]Una interpretación geométrica de este resultado se refiere a decir que la frontera del simplejo afín "aumentado" consiste en el simplejo original y los "aumentos" correspondientes de la frontera de tal simplejo original. Una visualización sencilla de esta relación consiste en "aumentar" un triángulo a un tetraedro y sacar frontera.

$$= g\sigma - z\sum_{i=o}^{p}(-1)^i g[v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_p] = g\sigma - z\partial(g\sigma).$$

□

Definición 3.5.25. *Sea $[v_0, ..., v_p]$ un p-simplejo singular afín de $\mathbb{R}^n$. Llamamos* ***baricentro*** *de $[v_0, ..., v_p]$ al punto...*

$$b = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{p+1} v_i$$ [27]

Definición 3.5.26. *Para enteros $p \geq 0$ y un grupo abeliano G, definimos el* ***operador subdivisión (afín)*** *$S_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n; G) \to \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n; G)$ de la manera siguiente (por recursión):*

- *Para $p = 0$ y $c \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n; G)$ una p-cadena singular afín, $S_{\mathcal{A}}(c) = c$.*
- *Para $p > 0$ y $g\sigma \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n; G)$ (con σ un p-simplejo singular afín), definimos $S_{\mathcal{A}}(g\sigma) = bS_{\mathcal{A}}(\partial(g\sigma))$ (donde b es el baricentro de σ) y lo extendemos a un homomorfismo sobre $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n; G)$.*

Observamos que $S_{\mathcal{A}}$ está bien definido en el sentido de que, debido al razonamiento detrás de la ecuación en (3.7) -y que ya hemos mencionado-, se tiene que la frontera de un simplejo singular afín es a su vez un simplejo singular afín.

Lema 3.5.27. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación afín, $c \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n; G)$ (para algún entero $p \geq 0$) tal que $c = \sum_{i=1}^{m_c} g_i\sigma_i$ ($g_i \in G$), y sea también $z \in \mathbb{R}^n$. Entonces $f_\Delta(zc) = f(z)f_\Delta(c)$.*

Demostración.

$$f_\Delta(zc) = f_\Delta\left(\sum_{i=1}^{m_c} g_i(z\sigma_i)\right) = \sum_{i=1}^{m_c} g_i(f \circ z\sigma_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{m_c} g_i(f(z)f \circ \sigma_i) = f(z)\sum_{i=1}^{m_c} g_i(f \circ \sigma_i) = f(z)f_\Delta(c).$$

□

Lema 3.5.28. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación afín, entonces $f_\Delta \circ S_{\mathcal{A}} = S_{\mathcal{A}} \circ f_\Delta$.*

Demostración. Procederemos por inducción: para $p = 0$ y $g\sigma \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n; G)$ (con σ un p-simplejo singular afín), la afirmación es fácil de visualizar. Ahora bien, si suponemos que la igualdad se cumple para todo $g\sigma \in \mathcal{A}_{p-1}(\mathbb{R}^n; G)$

[27] Por ejemplo, el baricentro de un segmento es su punto medio y el baricentro de un triángulo es -sin sorpresa- el punto donde se cortan sus medianas.

y en consecuencia en todo el subgrupo, entonces se tiene lo siguiente, para $g\sigma \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n; G)$:

$$\begin{aligned}&[S_{\mathcal{A}} \circ f_\Delta](g\sigma) = f(b)S_{\mathcal{A}}(\partial(f_\Delta(g\sigma))) = f(b)f_\Delta(S_{\mathcal{A}}(\partial(g\sigma)))\\ &= f_\Delta(bS_{\mathcal{A}}(\partial(g\sigma))) = [f_\Delta \circ S_{\mathcal{A}}](g\sigma)\end{aligned}$$

... donde la primera igualdad se da por el lema 3.5.27, la segunda por hipótesis de inducción y porque f_Δ es una aplicación de cadenas, y la tercera nuevamente por el lema 3.5.27. Con esto hemos probado la conmutatividad en los elementos que generan a $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n; G)$ y por lo tanto en todo el subgrupo. $\square$

A continuación, ampliamos nuestra definición a cadenas singulares arbitrarias.

Definición 3.5.29. *Dado X un espacio topológico y un grupo abeliano G, para enteros $p \geq 0$ definimos el* ***operador subdivisión*** *$S : \Delta_p(X; G) \to \Delta_p(X; G)$ como...*

$$S(g\sigma) = [\sigma_\Delta \circ S_{\mathcal{A}}](g[e_0, ..., e_p])$$

... para $\sigma \in C(\Delta_p, X)$ y $g \in G$. Naturalmente, lo extendemos a su homomorfismo correspondiente para tener la definición completa.

Corolario 3.5.30. *S coincide con $S_{\mathcal{A}}$ sobre $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n; G)$.*

Demostración. Sea $g\sigma \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n; G)$ con σ un p-simplejo singular afín. Entonces...

$$S(g\sigma) = [\sigma_\Delta \circ S_{\mathcal{A}}](g[e_0, ..., e_p]) = [S_{\mathcal{A}} \circ \sigma_\Delta](g[e_0, ..., e_p]) = S_{\mathcal{A}}(g\sigma)$$

... gracias a lo cual los operadores coinciden sobre los elementos que generan a $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n; G)$ y por lo tanto en todo el subgrupo. $\square$

Lema 3.5.31. *Si $f : X \to Y$ es una función continua, entonces $f_\Delta \circ S = S \circ f_\Delta$ en los grupos de p-cadenas singulares con coeficientes en un grupo abeliano G ($p \geq 0$).*

Demostración. Para $g\sigma \in \Delta_p(X; G)$ con σ un p-simplejo singular, se tiene...

$$\begin{aligned}&[f_\Delta \circ S](g\sigma) = f_\Delta(\sigma_\Delta(S(g[e_0, ..., e_p]))) = (f \circ \sigma)_\Delta(S(g[e_0, ..., e_p]))\\ &= S(g(f \circ \sigma)) = S(f_\Delta(g\sigma)) = [S \circ f_\Delta](g\sigma)\end{aligned}$$

... lo que prueba la conmutatividad en los elementos que generan a $\Delta_p(X; G)$ y por tanto en el grupo total. $\square$

Proposición 3.5.32. *Si definimos $S : \Delta_p(X; G) \to \Delta_p(X; G)$ como $S = 0$ para toda $p < 0$, entonces S como homomorfismo graduado (de grado 0) que va de $\Delta_*(X; G)$ a él mismo es una aplicación de cadenas.*

Demostración. Es relativamente muy sencillo apreciar que S conmuta con los operadores frontera para $p \leq 0$, así que probaremos por inducción sobre p que $S : \Delta_p(X;G) \to \Delta_p(X;G)$ también lo hace para todo entero $p > 0$:

Supongamos que $S \circ \partial_{p-1} = \partial_{p-1} \circ S$[28] y sea $g\sigma \in \Delta_p(X;G)$ (con σ un p-simplejo singular). Se cumple que...

$$\begin{aligned}
&[\partial_p \circ S](g\sigma)\\
&= \partial_p(\sigma_\Delta(S(g[e_0, ..., e_p])))\\
&= \sigma_\Delta(\partial_p(S(g[e_0, ..., e_p])))\\
&= \sigma_\Delta(\partial_p(bS(\partial_p(g[e_0, ..., e_p]))))\\
&= \sigma_\Delta(S(\partial_p(g[e_0, ..., e_p])) - b\partial_{p-1}(S(\partial_p(g[e_0, ..., e_p]))))\\
&= S(\partial_p(\sigma_\Delta(g[e_0, ..., e_p]))) - \sigma_\Delta(b\partial_{p-1}(S(\partial_p(g[e_0, ..., e_p]))))\\
&= S(\partial_p(\sigma_\Delta(g[e_0, ..., e_p]))) - \sigma_\Delta(bS(\partial_{p-1}(\partial_p(g[e_0, ..., e_p]))))\\
&= S(\partial_p(g\sigma))\\
&= [S \circ \partial](g\sigma)
\end{aligned}$$

... donde la primera igualdad se da por definición y por el corolario 3.5.30, la segunda porque σ_Δ es aplicación de cadenas, la tercera por definición de $S_{\mathcal{A}} = S$, la cuarta por la proposición 3.5.24, la quinta porque σ_Δ es homomorfismo, aplicación de cadenas y a parte conmuta con S por el lema 3.5.31, la sexta porque S es aplicación de cadenas, y la séptima porque el segundo sumando se cancela por contener una composición de operadores frontera. De esta forma, hemos probado la conmutatividad en los elementos que generan a $\Delta_p(X;G)$ y así en el grupo total. □

Teorema 3.5.33. *El operador subdivisión es homotópico de cadenas a la identidad (es decir, $S \simeq 1_{\Delta_*(X;G)}$).*

Demostración. Definiremos un homomorfismo graduado (de grado 1)...

$$F : \Delta_*(X;G) \to \Delta_*(X;G)$$

... tal que $S(c) - c = [\partial \circ F](c) + [F \circ \partial](c)$ para toda $c \in \Delta_p(X;G)$ y $p \in \mathbb{Z}$. A parte, F deberá cumplir que $f_\Delta \circ F = F \circ f_\Delta$ para toda función continua $f : X \to Y$. Haremos esta tarea por recursión:

Sea $F_p = 0$ para toda $p \leq 0$. Es claro que las dos cualidades que pedimos arriba se satisfacen para las p-cadenas singulares. Luego, suponemos que tenemos definido F_{p-1} tal que se cumplen ambas igualdades y procedemos a construir F_p:

Como Δ_p es contraíble (proposición 3.4.2), sus grupos de homología coinciden con los de un punto (corolario 3.6.2), de modo que $H_p(\Delta_p;G) \approxeq 0$ para toda $p > 0$, lo que nos dice que -para toda $p > 0$- los p-ciclos son a su vez p-fronteras.

[28] En realidad, nos estamos refiriendo a lo que podríamos denotar $S_{p-2} \circ \partial_{p-1} = \partial_{p-1} \circ S_{p-1}$.

Ahora bien, para un $g \in G$ y $p > 0$, se cumple que...

$$\begin{aligned}
&\partial(S(g[e_0, ..., e_p]) - g[e_0, ..., e_p] - F_{p-1}(\partial(g[e_0, ..., e_p])))\\
&= \partial(S(g[e_0, ..., e_p])) - \partial(g[e_0, ..., e_p]) - \partial(F_{p-1}(\partial(g[e_0, ..., e_p])))\\
&= \partial(S(g[e_0, ..., e_p])) - \partial(g[e_0, ..., e_p])\\
&\qquad - (S(\partial(g[e_0, ..., e_p])) - \partial(g[e_0, ..., e_p]) - F_{p-2}(\partial(\partial(g[e_0, ..., e_p]))))\\
&= 0
\end{aligned}$$

... donde la segunda igualdad se da por hipótesis recursiva (aplicada al tercer sumando) y la última porque S es una aplicación de cadenas, gracias a lo cual conmuta con ∂ haciendo que el primer término de la suma se cancele (las otras cancelaciones son fáciles de apreciar).

Con todo, aún no hemos mencionado por qué es importante esta igualdad, y lo que sucede es que gracias a ella vemos que $S(g[e_0, ..., e_p]) - g[e_0, ..., e_p] - F_{p-1}(\partial(g[e_0, ..., e_p]))$ es un p-ciclo en $\Delta_p(\Delta_p; G)$, y en consecuencia una p-frontera. Así pues, existe una $(p+1)$-cadena singular c tal que $\partial(c) = S(g[e_0, ..., e_p]) - g[e_0, ..., e_p] - F_{p-1}(\partial(g[e_0, ..., e_p]))$, de modo que definimos $F_p(g[e_0, ..., e_p]) = c$ y, para σ un p-simplejo singular y $g \in G$, definimos...

$$F_p(g\sigma) = \sigma_\Delta(F_p(g[e_0, ..., e_p]))$$

... y lo extendemos al homomorfismo correspondiente F_p entre $\Delta_p(X; G)$ y $\Delta_{p+1}(X; G)$. Ahora pasemos a comprobar que tal homomorfismo cumple las dos cualidades pedidas.

"La primera": sea $g\sigma \in \Delta_p(X; G)$ (con σ un p-simplejo singular), entonces...

$$\begin{aligned}
&\partial(F_p(g\sigma))\\
&= \partial(\sigma_\Delta(F_p(g[e_0, ..., e_p])))\\
&= \sigma_\Delta(\partial(F_p(g[e_0, ..., e_p])))\\
&= \sigma_\Delta(S(g[e_0, ..., e_p]) - g[e_0, ..., e_p] - F_{p-1}(\partial(g[e_0, ..., e_p])))\\
&= S(g\sigma) - g\sigma - F_{p-1}(\partial(g\sigma))
\end{aligned}$$

... donde la tercera igualdad se da por cómo escogimos $F_p(g[e_0, ..., e_p])$, y la cuarta gracias a la hipótesis recursiva (que se refiere a que F_{p-1} conmuta con las aplicaciones de cadena inducidas por funciones continuas -en este caso σ).

"La segunda": sea $f : X \to Y$ una función continua y $g\sigma \in \Delta_p(X; G)$ (con σ un p-simplejo singular), entonces...

$$\begin{aligned}
&[f_\Delta \circ F_p](g\sigma) = f_\Delta(\sigma_\Delta(F_p(g[e_0, ..., e_p])))\\
&= (f \circ \sigma)_\Delta(F_p(g[e_0, ..., e_p])) = F_p(g(f \circ \sigma)) = F_p(f_\Delta(g\sigma)) = [F_p \circ f_\Delta](g\sigma).
\end{aligned}$$

De esta manera, las igualdades se cumplen sobre los elementos que generan a $\Delta_p(X; G)$ y por lo tanto en el grupo total. Gracias a todo esto, tenemos definido correctamente a F_p y podemos pensar en el homomorfismo graduado F que extiende a los F_p según el teorema 1.1.5 (Propiedad Universal), el cual será testigo de la *homotopía de cadenas* entre S y la identidad a raíz de nuestra "la primera" igualdad. □

La interpretación geométrica de este teorema podría resumirse diciendo que si subdividimos una cadena, entonces obtenemos la misma cadena, pero "construida" con piezas más pequeñas.

De una vez veamos qué sucede cuando nos movemos al uso de pares topológicos, pues recordemos que el enunciado del axioma de escisión cae en terminología de *pares*. Es suficientemente claro que, si $A \subset X$, entonces $S[\Delta_p(A;G)] \subseteq \Delta_p(A;G)$ para todo entero $p \geq 0$ (por definición de S), por lo cual podemos inducir un homomorfismo graduado (de grado 0) para el complejo de cadenas del par (X, A), a saber $S^\sharp : \Delta_*(X, A; G) \to \Delta_*(X, A; G)$. Esto se hace según lo anotado justo después del corolario 3.4.30 y tomando $S^\sharp = 0$ para todo $p < 0$. Tal homomorfismo presenta las mismas propiedades que S, pues sólo estamos pasando al cociente. Similarmente, el homomorfismo graduado (de grado 1) F, que construimos en el teorema anterior, mediante el cual garantizamos la homotopía de cadenas entre S y la identidad, también se comporta bien con respecto a subgrupos (es decir, $F[\Delta_p(A;G)] \subseteq \Delta_{p+1}(A;G)$), con lo que podemos inducir un homomorfismo graduado (de grado 1) $F^\sharp : \Delta_*(X, A; G) \to \Delta_*(X, A; G)$ de modo análogo a lo que mencionamos arriba. A su vez, y como se mantienen las relaciones establecidas en el teorema anterior al pasar al cociente, dicho homomorfismo graduado será testigo de una homotopía de cadenas entre $S^\sharp$ y $1_{\Delta_*(X,A;G)}$.

Por esta nota, obviamente apuntalada por el tan mencionado teorema anterior, y utilizando la proposición 3.5.10, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.5.34. *Si (X, A) es un par topológico y G es un grupo abeliano, entonces $S^\sharp_* = 1_* : H_*(X, A; G) \to H_*(X, A; G)$.* □

En lo sucesivo, veremos cómo podemos subdividir una cadena hasta que sus simplejos constituyentes sean arbitrariamente pequeños.

Lema 3.5.35. *Si $\sigma = [v_0, ..., v_p]$ es un p-simplejo singular afín de $\mathbb{R}^n$ con b_σ su baricentro, entonces...*

$$\|u - b_\sigma\| \leq \frac{p}{p+1} diam(im\ \sigma)$$

... para toda $u \in im\ \sigma$.

Demostración. Sean $u, w \in im\ \sigma$. Sabemos que $u = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i$ y $w = \sum_{j=0}^{p} \mu_j v_j$ para colecciones de coeficientes $\{\lambda_i \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1,\ 0 \leq i \leq p,\ \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1\}$ y $\{\mu_j \mid 0 \leq \mu_j \leq 1,\ 0 \leq j \leq p,\ \sum_{j=0}^{p} \mu_j = 1\}$. Para estos puntos, vemos que...

$$\|u - w\| = \left\|\sum_{i=0}^{p} \lambda_i (v_i - w)\right\| \leq \sum_{i=0}^{p} \lambda_i \|v_i - w\| \leq \text{máx}\{\|v_i - w\|\}_{0 \leq i \leq p}$$

... pero también se cumple que, para cada entero $0 \leq i \leq p$ fijo, ...

$$\|v_i - w\| = \left\|\sum_{j=0}^{p} \mu_j (v_i - v_j)\right\| \leq \sum_{j=0}^{p} \mu_j \|v_i - v_j\| \leq \text{máx}\{\|v_i - v_j\|\}_{0 \leq j \leq p}$$

... por lo que tenemos que, para dos puntos cualesquiera $u, w \in im\ \sigma$, ...

$$\|u - w\| \leq \text{máx}\{\|v_i - w\|\}_{0\leq i\leq p} \leq \text{máx}\{\|v_i - v_j\|\}_{0\leq i,j\leq p}$$

... y en consecuencia que...

$$diam(im\ \sigma) = \text{máx}\{\|v_i - v_j\|\}_{0\leq i,j\leq p}. \tag{3.8}$$

Por otro lado, para cada entero $0 \leq i \leq p$ fijo, también podemos establecer...

$$\|v_i - w\| = \left\|\sum_{j=0}^{p} \mu_j(v_i - v_j)\right\| \leq \sum_{j\neq i} \mu_j\|v_i - v_j\| \leq (1 - \mu_i)\,\text{máx}\{\|v_i - v_j\|\}_{0\leq i,j\leq p}$$
$$= (1 - \mu_i) diam(im\ \sigma).$$

En particular, si tomamos $w = b_\sigma = \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{p+1} v_j$, entonces tendremos que...

$$\|v_i - b_\sigma\| \leq \left(1 - \frac{1}{p+1}\right) diam(im\ \sigma) = \frac{p}{p+1} diam(im\ \sigma)$$

... para todo $0 \leq i \leq p$. Finalmente -al sumar todas nuestras desigualdades-, obtenemos...

$$\|u - b_\sigma\| \leq \text{máx}\{\|v_i - b_\sigma\|\}_{0\leq i\leq p} \leq \frac{p}{p+1} diam(im\ \sigma).$$

□

Lema 3.5.36. *Sea $\sigma \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n) := \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z})$ un p-simplejo singular afín (para un entero $p \geq 0$). Para cada p-simplejo singular afín τ que aparece en la cadena $S(\sigma)$, se cumple que...*

$$diam(im\ \tau) \leq \frac{p}{p+1} diam(im\ \sigma).$$

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre p. Para $p = 0$, se tiene que los diámetros de las imágenes de los p-simplejos singulares afines σ y τ son nulos (las imágenes son puntos) y por lo tanto la condición se cumple sin mayor problema. Supongamos que también se cumple para $p - 1$; para ver que se satisface para p, nos ocupa estudiar cuidadosamente el comportamiento del operador subdivisión y de la operación "aumentar por un punto". Así pues, sabremos que...

$$S(\sigma) = b_\sigma S(\partial(\sigma)) = b_\sigma S\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sigma^{(i)}\right)$$
$$= b_\sigma \sum_{i=0}^{p}(-1)^i S(\sigma^{(i)}) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i b_\sigma S(\sigma^{(i)})$$

... por lo que podemos apreciar que, si τ aparece en la cadena $S(\sigma)$, entonces τ es de la forma $b_\sigma \tau'$ ó $-b_\sigma \tau'$ para algún $(p-1)$-simplejo singular afín τ' que aparece en $S(\sigma^{(i_{\tau'})})$ para algún $0 \leq i_{\tau'} \leq p$.

Por otro lado, como $im\ \sigma^{(i)} \subset im\ \sigma$ para todo $0 \leq i \leq p$, se tiene que $diam(im\ \sigma^{(i)}) \leq diam(im\ \sigma)$ para todo $0 \leq i \leq p$. Así, por hipótesis de inducción, observamos que...

$$diam(im\ \tau') \leq \frac{p-1}{p} diam(im\ \sigma^{(i_{\tau'})}) \leq \frac{p-1}{p} diam(im\ \sigma) \leq \frac{p}{p+1} diam(im\ \sigma). \tag{3.9}$$

Ahora bien, sean $v_0, ..., v_p$ los puntos que determinan al p-simplejo singular afín τ, es decir, los "vértices" de la imagen de τ ($\tau = [v_0, ..., v_p]$). Para cualesquiera dos "vértices" v_i y v_j con $0 \leq i, j \leq p$, es cierto que, si v_i y v_j son a su vez "vértices" de la imagen de τ', entonces, gracias a lo establecido en (3.9), ...

$$\|v_i - v_j\| \leq diam(im\ \tau') \leq \frac{p}{p+1} diam(im\ \sigma).$$

Si suponemos, por otra parte, que $v_i = b_\sigma$ (sin pérdida de generalidad), entonces el lema 3.5.35 nos garantiza la veracidad de la mismita expresión de arriba. Con esto, usamos un análogo de la ecuación en (3.8) y obtenemos que...

$$diam(im\ \tau) = \max\{\|v_i - v_j\|\}_{0 \leq i,j \leq p} \leq \frac{p}{p+1} diam(im\ \sigma).$$

$\square$

La siguiente proposición es precisamente la que buscábamos cuando dijimos que estudiaríamos la manera de subdividir -y volver a subdividir- un simplejo *arbitrario* hasta que las cadenas de sus subdivisiones estén hechas de simplejos con un "tamaño" que nos convenga.

Proposición 3.5.37. *Sea σ un p-simplejo singular del espacio X ($p \geq 0$) y sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una cubierta abierta de X. Entonces existe un entero positivo n tal que la imagen de cada simplejo de los que conforman la cadena $S^n(\sigma)$ está contenido en algún elemento de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$.*

Demostración. Todo consiste en fijarnos en el lema del Número de Lebesgue (lema 2.4.6) y en el lema anterior. Como sabemos, $\{\sigma^{-1}[U_\alpha]\}_{\alpha \in J}$ es una cubierta abierta de Δ_p, que es compacto (proposición 3.4.2). Así pues, por el lema del Número de Lebesgue la cubierta en cuestión admite un $\delta > 0$ tal que si $diam(A) < \delta$ para un $A \subseteq \Delta_p$, entonces A queda completamente contenido en algún elemento de $\{\sigma^{-1}[U_\alpha]\}_{\alpha \in J}$. Ahora bien, en virtud del lema 3.5.36, sabemos que si subdividimos un p-simplejo singular afín y luego subdividimos la subdivisión y así sucesivamente, nos vamos quedando con p-cadenas singulares afines formadas por simplejos singulares afines cuyas imágenes tienen diámetros cada vez menores. En particular, esto nos dice que existe un entero positivo n tal que los diámetros de las imágenes de los simplejos constituyentes de $S^n([e_0, ..., e_p])$ son menores que δ y por lo tanto éstas quedan contenidas en algún elemento de $\{\sigma^{-1}[U_\alpha]\}_{\alpha\in J}$. Luego, como $S^n(\sigma) = \sigma_\Delta(S^n([e_0, ..., e_p]))$, vemos que los simplejos constituyentes de $S^n(\sigma)$ son de la forma $\sigma \circ \kappa$ con κ apareciendo en la cadena $S^n([e_0, ..., e_p])$. De esta forma, $im\ (\sigma \circ \kappa)$ se queda contenida en algún elemento de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ para todo κ p-simplejo singular que aparece en la cadena $S^n([e_0, ..., e_p])$. □

Ahora sí, después de todo este discurso, estamos listos para probar que nuestra conocida $H^{\mathcal{SIN}}$ en efecto satisface el axioma de escisión.

Teorema 3.5.38. *Dado un grupo abeliano G, el par (X, A) y $U \subset X$ tal que $\overline{U} \subset int(A)$, entonces la inclusión $k : (X\backslash U, A\backslash U) \hookrightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo graduado (de grado 0)...*

$$k_*^\sharp : H_*(X\backslash U, A\backslash U; G) \xrightarrow{\approx} H_*(X, A; G).$$

Es decir, $H^{\mathcal{SIN}}$ satisface el axioma de escisión.

Demostración. El resultado es sencillo de observar entre $H_p(X\backslash U, A\backslash U; G)$ y $H_p(X, A; G)$ para enteros $p < 0$ porque estamos en presencia de grupos triviales y de una definición de homomorfismos inducidos que los hace triviales.

Entonces, para enteros $p \geq 0$, veamos que el homomorfismo $k_*^\sharp$ inducido por la función continua k en la homología relativa es un isomorfismo:

(*Epimorfismo*) Sea $[\![c + \Delta_p(A; G)]\!] \in H_p(X, A; G)$. Consideremos la cubierta abierta de X formada por $X\backslash\overline{U}$ y $int(A)$. Por la proposición 3.5.37, existe un entero positivo n tal que las imágenes de los p-simplejos singulares τ -con $g_\tau\tau$ apareciendo en la p-cadena singular $S^n(c)$- quedan contenidas en alguno de los dos abiertos de la cubierta considerada. Esto significa que cuando descomponemos a $S^n(c) + \Delta_p(A; G)$ en p-simplejos singulares relativos (con coeficientes en G), aquéllos cuya imagen queda contenida en $int(A)$ "desaparecen" de la expresión en la medida que son "absorbidos" por la clase neutral en $\Delta_p(X, A; G)$, es decir, por $\Delta_p(A; G)$. Con esto en mente, recordamos a su vez del corolario 3.5.34 que $[\![S^n(c) + \Delta_p(A; G)]\!] = S_*^\sharp([\![c + \Delta_p(A; G)]\!]) = [\![c + \Delta_p(A; G)]\!]$, lo que en esta luz nos implica que para nuestra clase elegida $[\![c + \Delta_p(A; G)]\!]$, siempre podemos encontrar un representante de ella en la que sólo aparecen p-simplejos singulares (relativos) de $X\backslash\overline{U}$, a saber la clase $[\![S^n(c) + \Delta_p(A; G)]\!]$. Luego, $k_*^\sharp([\![S^n(c) + \Delta_p(A\backslash U; G)]\!]) = [\![S^n(c) + \Delta_p(A; G)]\!] = [\![c + \Delta_p(A; G)]\!]$ y se cumple que $k_*^\sharp$ es epimorfismo.

(*Monomorfismo*) Supongamos que $k_*^\sharp([\![c + \Delta_p(A\backslash U; G)]\!]) = 0$. Esto significa que $[\![c + \Delta_p(A; G)]\!]$ es trivial en $H_p(X, A; G)$, por lo que tomando en cuenta lo dicho en la definición 3.4.28, sabemos que...

$$c = \partial(d) + e \tag{3.10}$$

... donde $d \in \Delta_{p+1}(X; G)$ y $e \in \Delta_p(A; G)$. Por el mismo argumento de arriba -en el que usamos el corolario 3.5.34- podemos aplicar el operador subdivisión tantas veces como queramos a la ecuación en (3.10) sin que cambie la clase (de homología) para $[\![c + \Delta_p(A; G)]\!]$, de forma que obtengamos un representante de esta clase, al que llamaremos $c' + \Delta_p(A;G)$, donde $c' = \partial(b_1) + \partial(b_2) + e'$ con $b_1 \in \Delta_{p+1}(X\backslash\overline{U};G), b_2 \in \Delta_{p+1}(int(A);G)$ y $e' \in \Delta_p(A;G)$[29]. Más aun, se cumple entonces que...

$$c' - \partial(b_1) = \partial(b_2) + e'$$

... donde el miembro izquierdo claramente vive en $\Delta_p(X\backslash U;G)$ y el derecho vive en $\Delta_p(A;G)$, lo que quiere decir que ambos viven en $\Delta_p(A\backslash U;G)$, haciendo así que c' viva en $\Delta_p(A\backslash U;G)$ y por lo tanto que $[\![c + \Delta_p(A\backslash U;G)]\!] = [\![c' + \Delta_p(A\backslash U;G)]\!] = [\![\Delta_p(A\backslash U;G)]\!] = 0$. Así, se cumple que $ker\ k_*^\sharp = \{0\}$ y que $k_*^\sharp$ es un monomorfismo. □

Finalmente, hemos conseguido probar que, dado un grupo abeliano G, $H^{\mathcal{SIN}}$ es en efecto una *teoría de homología ordinaria y aditiva*, a la que de ahora en adelante llamaremos con lujo de propiedad ***Teoría de Homología Singular*** *(con coeficientes en G)*.

Como un par de observaciones, decimos que ahora queda duramente instaurado que bajo la definición 3.3.10 y la proposición 3.4.20, G en efecto resulta ser el *grupo de coeficientes* axiomático para la teoría en cuestión. De hecho, la teoría de homología singular depende del grupo abeliano elegido como grupo de coeficientes.

3.6. Algunos Cálculos y la Homología de las Esferas

Una vez patentado el que la homología singular satisface las condiciones impuestas por los axiomas, tenemos suficientes herramientas para hacer cálculos explícitos de los grupos de homología singular de ciertos espacios. Para ello, derivaremos algunas características que se desprenden de lo ya trabajado y atacaremos el problema de encontrar los grupos de homología de las esferas, lo cuál no sólo es esencial para completar la prueba del Teorema de Borsuk-Ulam, sino que también constituye signo de que las esferas son topológicamente diferentes, ya que veremos que sus homologías no coinciden para dimensiones distintas.

Proposición 3.6.1. *Dado G un grupo abeliano, si $(X,A) \backsimeq (Y,B)$ (son homotópicamente equivalentes), entonces $H_*(X,A;G) \approxeq H_*(Y,B;G)$.*

Demostración. Sean $f : (X,A) \to (Y,B)$ y $h : (Y,B) \to (X,A)$ las funciones continuas que atestiguan la equivalencia homotópica entre los pares. Entonces $h \circ f \backsimeq 1_{(X,A)}$ y $f \circ h \backsimeq 1_{(Y,B)}$. En virtud del corolario 3.4.30 y del axioma de homotopía (corolario 3.5.21), tenemos que $h_* \circ f_* = 1_* : H_p(X,A;G) \to H_p(X,A;G)$ y que $f_* \circ h_* = 1_* : H_p(Y,B;G) \to H_p(Y,B;G)$ para toda $p \in \mathbb{Z}$.

[29]Se procede sin pérdida de generalidad, pues aplicando el operador subdivisión suficientes veces obtenemos una descomposición en cadenas formadas por simplejos que cumplen la afirmación que precede a esta nota al pie según la proposición 3.5.37 y el hecho de que la subdivisión S es una aplicación de cadenas (lo cual se usa para darnos cuenta de que $\partial(b_1)$ y $\partial(b_2)$ están justificados en la igualdad) y también que respeta subgrupos (lo cual se usa para justificar la condición sobre e').

Por lo tanto, $f_* : H_p(X, A; G) \to H_p(Y, B; G)$ es un isomorfismo con inverso h_* para toda $p \in \mathbb{Z}$. □

Corolario 3.6.2. *Sea G un grupo abeliano, si X es contraíble, entonces...*

$$\widetilde{H}_*(X; G) \approxeq 0.$$

□

En el corolario anterior optamos por usar la terminología de homología reducida (que como argumentamos cumple el axioma de homotopía) para que el espacio de un sólo punto mantenga una homología trivial en todas las dimensiones.

Por ejemplo, una aplicación nada inútil de este resultado -y usando la exactitud para la homología singular reducida- es que, para todo espacio topológico no vacío X, grupo abeliano G y un punto $x_0 \in X$, $H_*(X, x_0; G) \approxeq \widetilde{H}_*(X; G)$. Esto se ve por la sucesión exacta larga en la homología reducida para el par (X, x_0):

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} \overset{0}{\widetilde{H}_p(x_0; G)} \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_p(X; G) \overset{\approxeq}{\xrightarrow{j_*}} H_p(X, x_0; G) \xrightarrow{\partial_*} \overset{0}{\widetilde{H}_{p-1}(x_0; G)} \xrightarrow{i_*} \ldots$$

Asimismo, una vez que se sabe esto, la sucesión en (3.6) se puede obtener como corolario de la sucesión exacta larga para la tríada $\{x_0\} \subseteq A \subseteq X$.

Proposición 3.6.3. *Si G es un grupo abeliano y $X \neq \emptyset$ es conexo por trayectorias, entonces $H_0(X; G) \approxeq G$.*

Demostración. A lo largo de la prueba de esta proposición, denotaremos a los 0-simplejos singulares como puntos en X. Es decir, llamaremos x al 0-simplejo singular $\sigma_x : \Delta_0 \to X$ tal que $\sigma_x(1) = x$ (donde 1 es el único punto en $\Delta_0 \subset \mathbb{R}$). Veremos que el homomorfismo de aumento $e_* : H_0(X; G) \to G$ que definimos en la proposición 3.4.24 es de hecho un isomorfismo.

Es un epimorfismo claramente, pues para todo $g \in G$, $\epsilon_*([\![gx]\!]) = \epsilon(gx) = g$ para algún 0-simplejo singular x.

Para ver que es un monomorfismo, escogemos primero un punto $x_0 \in X$. Luego, para cualquier $x \in X$, denotamos h_x a la trayectoria que va de x_0 a x. Tal trayectoria es a todas luces un 1-simplejo singular donde se cumple que $\partial(gh_x) = gx - gx_0$ para algún $g \in G$.

Ahora bien, si tomamos a $[\![c]\!] \in H_0(X; G)$ tal que $\epsilon_*([\![c]\!]) = 0$ (con $c = \sum_{i=1}^{m_c} g_i x_i$ una 0-cadena singular), entonces $\sum_{i=1}^{m_c} g_i = \epsilon_*([\![c]\!]) = 0$. Con esto, vemos que $c - \partial(\sum_{i=1}^{m_c} g_i h_{x_i}) = c - \sum_{i=1}^{m_c} \partial(g_i h_{x_i}) = \sum_{i=1}^{m_c} g_i x_i - \sum_{i=1}^{m_c}(g_i x_i - g_i x_0) = \sum_{i=1}^{m_c} g_i x_0 = (\sum_{i=1}^{m_c} g_i) x_0 = 0$. Así pues, $c = \partial(\sum_{i=1}^{m_c} g_i h_{x_i})$ y por lo tanto c es una 0-frontera y $[\![c]\!] = 0$, gracias a lo cual tenemos que ϵ_* es monomorfismo. □

Corolario 3.6.4. *Sea G un grupo abeliano y X un espacio topológico. Entonces $H_0(X; G)$ es isomorfo a una suma directa de grupos isomorfos a G, uno por cada componente conexa por trayectorias de X.*

Demostración. Se da por la proposición anterior y la proposición 3.4.16. □

Corolario 3.6.5. *Si G es un grupo abeliano y X es conexo por trayectorias, entonces $\widetilde{H}_0(X;G) \approxeq 0$.*

Demostración. La proposición 3.4.24 inciso 2 nos muestra que $\widetilde{H}_0(X;G) \approxeq$ *ker* ϵ_*, pero en este caso el núcleo es trivial porque ϵ_* es un isomorfismo. □

A continuación, nos damos a la tarea de calcular los grupos de homología singular (con coeficientes en un grupo abeliano dado) para las esferas, tema en el que seguramente se podrá notar la conveniencia capital de haber enumerado y probado nuestros axiomas de teoría.

Teorema 3.6.6. *Sea G un grupo abeliano. Si denotamos como D^n a la bola cerrada n-dimensional centrada en el origen, como D^n_+ al hemisferio superior cerrado de S^n y como D^n_- al hemisferio inferior cerrado de S^n, entonces para $n \geq 0$ e $i \in \mathbb{Z}$ se cumplen...*

- (S_n)
$$\widetilde{H}_i(S^n;G) \approxeq \begin{cases} G & si\ i = n, \\ 0 & si\ i \neq n. \end{cases}$$
- (D_n)
$$H_i(D^n_-, S^{n-1};G)^{30} \approxeq \begin{cases} G & si\ i = n, \\ 0 & si\ i \neq n. \end{cases}$$
- (R_n)
$$H_i(S^n, D^n_+;G) \approxeq \begin{cases} G & si\ i = n, \\ 0 & si\ i \neq n. \end{cases}$$

Demostración. Antes de comenzar la prueba en sí, adelantamos un resultado que será de importancia en ella, y que se refiere a afirmar que tanto D^n_+ como D^n_- son homotópicamente equivalentes a D^n y por lo tanto contraíbles. Esto se tiene al observar que la proyección sobre el hiperplano ecuatorial nos otorga un homeomorfismo entre D^n_+ y D^n, mientras que si proyectamos desde el polo norte, obtenemos un homeomorfismo entre D^n_- y D^n. Ahora bien, como D^n es un subconjunto convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$, éste es contraíble según el ejemplo 2.3.4 y con ello se sostiene nuestra afirmación inicial.

Probaremos ahora que los enunciados $(S_n), (D_n)$ y (R_n) son válidos, y lo haremos por inducción sobre n.

Comencemos con (R_0): como $S^0 = \{-1, 1\}$ y $D^0_+ = \{1\}$ (abierto y cerrado), tenemos que el axioma de escisión nos permite "extirpar" a D^0_+ y en consecuencia (al considerar además la proposición 3.4.20) alcanzar la igualdad...

$$H_i(S^0, D^0_+;G) \approxeq H_i(S^0 \backslash D^0_+, \emptyset;G) \approxeq H_i(P;G) \approxeq \begin{cases} G & \text{si } i = 0, \\ 0. & \text{si } i \neq 0 \end{cases}$$

[30]Hemos cometido un ligero abuso de notación, pues hemos marcado a S^{n-1} como subconjunto de D^n_- cuando en realidad nos estamos refiriendo al ecuador de la esfera, pero como éste es ciertamente homeomorfo a S^{n-1}, no hay mayor problema en hacerlo.

Ahora pasamos a comprobar que $(R_n) \iff (S_n)$: gracias al corolario 3.6.2 y al hecho cierto de que D^n_+ es contraíble, tenemos que $\widetilde{H}_i(D^n_+;G) \approxeq 0$ para toda $i \in \mathbb{Z}$. Por otro lado, la exactitud para la homología singular reducida nos arroja la siguiente sucesión exacta (larga):

$$... \longrightarrow \overset{0}{\widetilde{H}_i(D^n_+;G)} \longrightarrow \widetilde{H}_i(S^n;G) \longrightarrow H_i(S^n,D^n_+;G) \longrightarrow \overset{0}{\widetilde{H}_{i-1}(D^n_+;G)} \longrightarrow ...$$

... lo que con toda seguridad significa que $\widetilde{H}_i(S^n;G) \approxeq H_i(S^n,D^n_+;G)$ para toda $i \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto que $(R_n) \iff (S_n)$.

Veamos ahora que $(D_n) \iff (R_n)$: es suficientemente sencillo intuir que si U es un abierto básico suficientemente pequeño de S^n contenido en D^n_+ alrededor del polo norte, entonces D^n_- es un retracto (fuerte) por deformación de $S^n \backslash U$ (podemos deformar continuamente a la esfera-sin-el-pequeño-casquete-polar-norte hasta obtener el hemisferio cerrado inferior[31]). Por otro lado, si nos

[31]El caso $n = 2$ es ilustrativo para darnos cuenta de la certeza de esta deformación: la retracción en coordenadas cilíndricas es $\mathcal{R} : S^2 \backslash U \to D^2_-$ tal que...

$$\mathcal{R}(r,\theta,z) = \begin{cases} (1,\theta,0) & \text{si } (r,\theta,z) \in D^2_+ \backslash U, \\ (r,\theta,z) & \text{si } (r,\theta,z) \in D^2_- \end{cases}$$

... la cual está bien definida porque coincide en la intersección de ambos dominios, que es el ecuador, y por lo tanto está "bien pegada", y es continua porque es continua sobre los (dos) cerrados $D^2_+ \backslash U$ y D^2_-. Ahora bien, la homotopía entre $\mathcal{R}$ y $1_{S^2 \backslash U}$ está dada por $F : S^2 \backslash U \times I \to S^2 \backslash U$ tal que...

$$F(r,\theta,z,t) = \begin{cases} \left((\frac{t}{r})r, \theta, (1-t)z \right) & \text{si } (r,\theta,z) \in D^2_+ \backslash U, \\ (r,\theta,z) & \text{si } (r,\theta,z) \in D^2_- \end{cases}$$

... la cual está bien definida porque coincide en la intersección de ambos dominios, que es *ecuador* $\times I$, y es continua porque es continua sobre los (dos) cerrados $D^2_+ \backslash U \times I$ y $D^2_- \times I$ (cuya unión es ciertamente $S^2 \backslash U \times I$). Es una homotopía entre $\mathcal{R}$ y $1_{S^2 \backslash U}$ al cumplirse...

$$F(r,\theta,z,0) = 1_{S^2 \backslash U}(r,\theta,z)$$

... y...

$$F(r,\theta,z,1) = \begin{cases} (1,\theta,0) & \text{si } (r,\theta,z) \in D^2_+ \backslash U, \\ (r,\theta,z) & \text{si } (r,\theta,z) \in D^2_-. \end{cases}$$

Como a parte se cumple que $F(r,\theta,z,t) = (r,\theta,z)$ para todo $t \in I$ y $(r,\theta,z) \in D^2_-$, entonces tenemos a su vez que la deformación es fuerte.

En el caso general, el procedimiento intuitivo geométrico que usamos es el mismo. Hacemos una retracción $\mathcal{R}$ de $S^n \backslash U$ sobre D^n_- de la siguiente forma: para puntos $\mathbf{x} = (x_0,...,x_{n+1})$ en $D^n_+ \backslash U$, nos fijamos en el hiperplano n-dimensional que resulta de mantener constante la coordenada x_{n+1} y dejar las otras correr; luego, proyectamos radial y continuamente a $\mathbf{x}$ desde el punto $(0,0...,0,x_{n+1})$ hasta la "copia" de S^{n-1} que "rodea" a tal $(0,0...,0,x_{n+1})$ (y que no es más que el conjunto $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_1^2 + ... + y_n^2 = 1, y_{n+1} = x_{n+1}\}$), para obtener un $\mathbf{x}'$ que vive a todas luces en el hipercilindro de radio 1; después, "aplastamos" a $\mathbf{x}'$ cambiando su coordenada $n+1$ (que es x_{n+1}) por 0 y a tal punto lo establecemos como $\mathcal{R}(\mathbf{x})$; en el caso de los puntos en D^n_-, a ellos los dejamos igual (la identidad).

Posteriormente, construimos una homotopía F entre R y $1_{S^n \backslash U}$ tal como arriba: aplicamos las sutiles modificaciones (continuas) coordenada a coordenada para que $F|_{S^n \backslash U \times \{0\}}$ coincida con $1_{S^n \backslash U}$ y $F|_{S^n \backslash U \times \{1\}}$ coincida con $\mathcal{R}$. En efecto, lo que estamos haciendo en este paso es "matar dos deformaciones de un tiro": la que manda el hemisferio-superior-cerrado-sin-el-pequeño-casquete-polar-norte a la "parte de arriba" de un hipercilindro, y la que "aplasta" continuamente la "parte de arriba" del hipercilindro sobre el ecuador de la esfera.

fijamos en la restricción sobre $D^n_+\backslash U$ de esta deformación (fuerte), veremos que es una deformación (también fuerte) de D^n_+ sobre el ecuador, homeomorfo a S^{n-1} (véase nota al pie 31). Incidentalmente, esto último nos significa que los pares $(S^n\backslash U, D^n_+\backslash U)$ y (D^n_-, S^{n-1}) son homotópicamente equivalentes (como pares) gracias a la proposición 2.3.11. Como paso final, utilizamos el axioma de escisión (que nos permite "extirpar" a U de S^n y de D^n_+ sin afectar su homología relativa) y la proposición 3.6.1 para alcanzar la cadena de isomorfismos...

$$H_i(S^n, D^n_+; G) \approxeq H_i(S^n\backslash U, D^n_+\backslash U; G) \approxeq H_i(D^n_-, S^{n-1}; G)$$

... con la cual apreciamos que $(D_n) \iff (R_n)$.

Para terminar, convenzámonos de que $(D_n) \iff (S_{n-1})$. El hecho de que D^n_- es contraíble y el axioma de exactitud nos proveen de la siguiente sucesión exacta (larga) en la homología reducida para el par (D^n_-, S^{n-1}):

$$\longrightarrow \overset{0}{\widetilde{H}_i(D^n_-; G)} \longrightarrow H_i(D^n_-, S^{n-1}; G) \longrightarrow \widetilde{H}_{i-1}(S^{n-1}; G) \longrightarrow \overset{0}{\widetilde{H}_{i-1}(D^n_-; G)} \longrightarrow$$

... lo que por exactitud implica que $H_i(D^n_-, S^{n-1}; G) \approxeq \widetilde{H}_{i-1}(S^{n-1}; G)$ y por lo tanto que $(D_n) \iff (S_{n-1})$. Así pues, las relaciones que hemos establecido entre nuestros tres enunciados y la validez ya mostrada de (R_0) nos arrojan...

$$(D_0) \Longrightarrow (R_0) \Longrightarrow (S_0) \Longrightarrow (D_1) \Longrightarrow (R_1) \Longrightarrow (S_1) \Longrightarrow ...$$

... y por tanto que el teorema se cumple. □

Corolario 3.6.7. *Si G un grupo abeliano, entonces $H_0(S^0; G) \approxeq G \oplus G$ y, para $i \in \mathbb{Z}$ y $n > 0$...*

$$H_i(S^n; G) \approxeq \begin{cases} G & si\ i = n\ \acute{o}\ i = 0, \\ 0 & si\ i \neq n,\ i \neq 0. \end{cases}$$

Demostración. La primera afirmación se da porque $S^0 = \{-1, 1\}$ y su 0-ésimo grupo de homología singular es la suma directa de los 0-ésimos grupos de homología singular para sus componentes conexas por trayectorias (dos puntos).

La segunda se tiene al considerar el teorema anterior (3.6.6) y el que los grupos de homología singular reducida y "completa" coinciden en toda dimensión distinta de cero (proposición 3.4.24 inciso 1). El caso para la dimensión 0 se tiene al considerar que S^n es conexo por trayectorias para $n > 0$ y usar lo que sabemos de la proposición 3.6.3. □

Con estos últimos dos resultados, podemos ver que S^n no es homotópicamente equivalente a S^m para $n \neq m$. A su vez, nos damos cuenta de que S^n no es contraíble para ninguna $n \in \mathbb{N}$, un hecho que no es tan sencillo de probar de otra forma -sin implicar que ésta sí lo fue.

3.7. Complejos Celulares

En el capítulo 0 de [6], Hatcher introduce de forma elegante y bella el concepto de *complejo celular*, alrededor del cual se edificó todo lo que hemos visto hasta aquí y se desarrollaron mecanismos excelentes para calcular los grupos de homología de espacios particulares. Nosotros apenas rascaremos la superficie de la *homología celular*, pero es importante que digamos que se trata de un trazado fino de ideas con base geométrica que revoluciona la visión y construcción de espacios conocidos -y a conocer- mediante identificaciones y cocientes topológicos. La primera impresión de las definiciones es dura de digerir, pero funciona intentar en todo momento traer lo que se está expresando con generalidad a los casos donde la imaginación de figuras geométricas permita cierta compenetración. Precisamente una preferencia por la naturalidad de las definiciones vía ejemplos concretos salta a la vista en el texto de Hatcher, de manera que abogamos, incitamos y -más que eso, celebramos- su tratamiento del tema.

Antes de empezar, convenimos como al final de la sección anterior que D^n denotará a la bola cerrada n-dimensional centrada en el origen, mientras que utilizaremos el símbolo S^{n-1} para denotar tanto a la esfera $(n-1)$-dimensional como a su homeomorfo $Fr(D^n)$ (de aquí en adelante esta notación será recurrente).

Definición 3.7.1. *Definimos un* ***CW-complejo celular*** *recursivamente:*

- *Sea X^0 (el 0-**esqueleto**) un conjunto discreto de puntos a los que llamaremos las 0-**celdas** (o **células**) de X.*

- *Supongamos que X^{n-1} está definido. Sea $\{\phi_{\partial\alpha} : S^{n-1} \to X^{n-1}\}_{\alpha\in J}$ una colección de funciones continuas. Consideremos las sumas topológicas $+_{\alpha\in J}S^{n-1}_\alpha$ y $+_{\alpha\in J}D^n_\alpha$ (donde la primera es un subconjunto cerrado de la segunda) y la función $\phi : +_{\alpha\in J}S^{n-1}_\alpha \to X^{n-1}$ que extiende a la colección $\{\phi_{\partial\alpha}\}_{\alpha\in J}$[32]; entonces definimos...*

  $$X^n = +_{\alpha\in J}D^n_\alpha \cup_\phi X^{n-1}$$

  *... y lo llamamos n-**esqueleto**. A los interiores de D^n_α se les conoce como las n-**celdas**.*

- *Definimos entonces $X := \cup_n X^n$ con la topología débil (donde U es abierto (o cerrado) en X si y sólo si $U \cap X^n$ es abierto (o cerrado) para cada n), y llamamos a X un* ***CW-complejo celular****.*

Apuntemos un par de cosas; las funciones $\phi_{\partial\alpha}$ reciben también el nombre de *aplicaciones de adjunción* para cada $\alpha \in J$. Por otro lado, si el proceso recursivo en la definición anterior es finito decimos que el *CW-complejo celular* tiene dimensión finita e igual al natural n donde se detuvo la recursión.

[32] Sabemos que ϕ existe en tanto S^{n-1}_α es abierto en $+_{\alpha\in J}S^{n-1}_\alpha$ para toda $\alpha \in J$, por definición de suma topológica (definición 2.2.9). Es un caso particular de la extensión de funciones continuas que se puede ver en [4, capítulo III, sección 9].

Las letras CW se refieren a las voces *closure finite* y *weak topology*. Intuitivamente, un CW-complejo celular es un objeto creado pegando por sus "fronteras" bloques más pequeños, y la idea de verlos como en los ejercicios escolares de recortar triángulos para erigir un tetraedro a partir de ellos -embarrando con pegamento las esquinas- es mucho más ilustrativa de lo que uno podría esperar para estos niveles tan abstractos, complicados de imaginar.

Ejemplo 3.7.2. *Es conocido que $D^n/S^{n-1} \approx S^n$ (véase* [2, capítulo I, sección 13] *). Gracias a ello, podemos ver que la esfera S^n tiene una estructura de CW-complejo celular con sólo dos celdas, es decir, el 0-esqueleto X^0 siendo un solo punto P y el n-esqueleto X^n -que será S^n pegando D^n a P vía $\phi : S^{n-1} \to P$ constante.*

Otra forma -que describe mucho mejor el proceso constructivo de la recursión- consiste en edificar a S^n de la siguiente forma: empecemos con dos 0-celdas de tal forma que $X^0 \approx S^0$; luego, adjuntemos dos 1-celdas vía dos homeomorfismos $\phi_{\partial 1}, \phi_{\partial 2} : S^0 \to X^0$ de tal forma que $X^1 \approx S^1$; ahora, adjuntemos dos 2-celdas (que serán los hemisferios norte y sur respectivamente) vía los dos homeomorfismos "correspondientes" entre S^1 y X^1 de tal forma que $X^2 \approx S^2$, etc. Así pues, vamos levantando nuestra n-esfera con exactamente dos i-celdas para cada $0 \leq i \leq n$.

Como puede verse, un complejo CW-celular es una generalización cuidadosa de la noción de *triangulación* de un espacio. La justificación real de las definiciones dadas para los simplejos singulares, los grupos de cadenas, los operadores frontera, etc. vistas en la sección 3.4 es precisamente el intento de mantener una estructura *celular* geométrica para cualquier espacio. Instamos en este momento al lector a revisar en [6, capítulo 2] la motivación que usa Hatcher para presentar la homología singular, una motivación hermosamente geométrica y que tiene mucho que ver con llevar a tierra los conceptos descritos en esta sección. Es con estas ideas de base estrictamente geométrica que se fue depurando la teoría y sus definiciones hasta llegar a todo lo que hemos estudiado en este ya tan desgastado capítulo; los topólogos algebraicos fueron ganándole terreno a las *singularidades* rodeándolas mediante definiciones cada vez menos intuitivas pero cuyo móvil principal siempre fue obrar con un grupo abeliano de cosas parecidas a los "lazos" multidimensionales, o "celdas", o "células".

Por otro lado, la llamada *homología celular* consiste en una teoría de homología que sirve para computar los grupos de homología de espacios con estructura CW-celular a través de algo que se conoce como ***grado*** de ciertas funciones que se desprenden de las aplicaciones de adjunción $\phi_{\partial\alpha}$.

El ***grado*** de una función continua $f : S^n \to S^n$ no es más que aquel entero $deg(f)$ tal que $f_*(\llbracket a \rrbracket) = deg(f)\llbracket a \rrbracket$ para $\llbracket a \rrbracket \in \widetilde{H}(S^n; \mathbb{Z}) \approxeq \mathbb{Z}$.

Nosotros no ahondaremos en estas cavilaciones, Lo que sí haremos es revisar someramente un par de resultados sobre los que de alguna forma se basa el inicio de esos métodos mencionados antes.

Lema 3.7.3. *Sea G un grupo abeliano y (X, A) un par topológico donde A*

es cerrado y es un retracto fuerte *por deformación de algún abierto en* X[33]*. La proyección canónica* $q : (X, A) \to (X/A, A/A)$ *induce un isomorfismo* $q_* : H_*(X, A; G) \to H_*(X/A, A/A; G) \approx \widetilde{H}_*(X/A)$[34]*.*

Demostración. Sea V el abierto en X que se retrae-fuertemente-por-deformación sobre A, sean $i^1_*, i^2_* i^3_*, i^4_*$ homomorfismos inducidos por las inclusiones y q^b_*, q^c_* homomorfismos inducidos por las proyecciones canónicas sobre A, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H_p(X, A; G) \arrow[r, "i^1_*"] \arrow[d, "q_*"] & H_p(X, V; G) \arrow[d, "q^b_*"] & H_p(X\backslash A, V\backslash A; G) \arrow[l, "i^2_*"'] \arrow[d, "q^c_*"] \\
H_p(X/A, A/A; G) \arrow[r, "i^3_*"] & H_p(X/A, V/A; G) & H_p((X/A)\backslash(A/A), (V/A)\backslash(A/A); G). \arrow[l, "i^4_*"']
\end{tikzcd} \tag{3.11}$$

Ahora bien, como la deformación (fuerte) de V sobre A es a su vez una deformación (fuerte) de (V, A) sobre (A, A), tenemos por el axioma de homotopía y la proposición 2.3.11 que $H_*(V, A; G) \approx H_*(A, A; G) \approx 0$. Incidentalmente, esto significa que la sucesión exacta larga en la homología de la tríada (X, V, A) certifica que i^1_* es un isomorfismo.

Del mismo modo, se tiene que como la deformación (fuerte) de (V, A) sobre (A, A) induce una deformación (fuerte) de V/A sobre A/A[35], un razonamiento igual que el de arriba nos garantiza que i^3_* es un isomorfismo.

Por otro lado, el axioma de escisión nos viene a otorgar que i^2_* y i^4_* son isomorfismos. Además, el homomorfismo q^c_* es un isomorfismo al tomar en cuenta que q^c es un homeomorfismo. Luego, como q^b_* completa un cuadrado conmutativo con tres isomorfismos, éste es un isomorfismo también. Finalmente, el mismo argumento nos sirve para afirmar que $q_* : H_p(X, A; G) \to H_p(X/A, A/A; G)$ es un isomorfismo, concluyendo la prueba. □

Corolario 3.7.4. *Para la* cuña $\bigvee_{\alpha \in J} X_\alpha$*, se cumple...*

$$\bigoplus_{\alpha \in J} \widetilde{H}_*(X_\alpha; G) \approx \widetilde{H}_* \left(\bigvee_{\alpha \in J} X_\alpha; G \right)$$

[33] Suele llamarse a este tipo de pares ***buen par***.

[34] El isomorfismo entre $H_*(X/A, A/A; G)$ y $\widetilde{H}_*(X/A; G)$ se tiene gracias a lo dicho como ejemplo después del corolario 3.6.2, donde igualamos la homología relativa "completa" del par de un espacio y un punto en él con la reducida del mismo espacio ($H_*(X, x_0; G) \approx \widetilde{H}_*(X; G)$).

[35] Sea $r : V \to A$ la retracción homotópica (*rel* A) a la identidad de V -digamos vía F-, entonces el Lema de la Transgresión (lema 2.2.4) nos arroja la existencia de una retracción $r' : V/A \to A/A$; luego, si denotamos a los elementos de X/A como $\overline{x}$ para algún $x \in X$ y marcamos $H : V/A \times I \to V/A$ como $H(\overline{x}, t) = \overline{F(x, t)}$, tenemos que H es una homotopía (*rel* A/A) entre r' y $1_{V/A}$. Es justo para la existencia de esta homotopía que juegan parte importante las suposiciones de que A sea cerrado y que sea un retracto *fuerte* por deformación de V.

... cuando los puntos-base $x_\alpha \in X_\alpha$ *de la* cuña *se toman tal que* (X_α, x_α) *es un* buen par *para toda* $\alpha \in J$.

Demostración. Tomando en cuenta que $\bigvee_{\alpha\in J} X_\alpha = +_{\alpha\in J} X_\alpha / +_{\alpha\in J}\, x_\alpha$ (por definición), aplicamos la proposición anterior (3.7.3), el axioma de aditividad (versión pares) y la equivalencia entre la homología reducida de un espacio y la relativa del par del espacio con un punto-base ($H_*(X, x_0; G) \approxeq \widetilde{H}_*(X; G)$) para obtener que...

$$\widetilde{H}_*\left(\bigvee_{\alpha\in J} X_\alpha; G\right) = \widetilde{H}_*\left(+_{\alpha\in J} X_\alpha / +_{\alpha\in J}\, x_\alpha; G\right) \approxeq H_*(+_{\alpha\in J} X_\alpha, +_{\alpha\in J} x_\alpha; G)$$
$$\approxeq \bigoplus_{\alpha\in J} H_*(X_\alpha, x_\alpha; G) \approxeq \bigoplus_{\alpha\in J} \widetilde{H}_*(X_\alpha; G).$$

□

Teorema 3.7.5. *Si* G *es un grupo abeliano y* X *es un CW-complejo celular, entonces se cumplen...*

1. $H_k(X^n, X^{n-1}; G) \approxeq 0$ *para toda* $k \neq n$.
2. $H_k(X^n; G) \approxeq 0$ *para toda* $k > n$. *En particular, si* X *tiene dimensión finita, entonces* $H_k(X; G) \approxeq 0$ *para* k *mayor que la dimensión de* X.

Demostración. 1) Se puede probar que (X^n, X^{n-1}) es un *buen par*. Luego, percatándonos de que X^n/X^{n-1} es una *cuña* de n-esferas[36], una por cada n-celda de X, usamos el lema 3.7.3, el corolario 3.7.4 y la fórmula de homología para las n-esferas[37] en el teorema 3.6.6 para obtener que...

$$H_k(X^n, X^{n-1}; G) \approxeq \widetilde{H}_k(X^n/X^{n-1}; G) \approxeq \widetilde{H}_k\left(\bigvee_{\alpha\in J} S^n_\alpha; G\right) \approxeq \bigoplus_{\alpha\in J} \widetilde{H}_k(S^n_\alpha; G)$$

... es una suma de 0's si $k \neq n$.

2) La sucesión exacta larga para la homología del par (X^n, X^{n-1}) se ve así:

$$...H_{k+1}(X^n, X^{n-1}; G) \longrightarrow H_k(X^{n-1}; G) \longrightarrow H_k(X^n; G) \longrightarrow H_k(X^n, X^{n-1}; G)...$$

... por lo que si $k \neq n, n-1$, tenemos que los grupos en los extremos son triviales y por lo tanto que $H_k(X^{n-1}; G) \approxeq H_k(X^n; G)$ si $k \neq n, n-1$. De esta manera, si $k > n$, se cumple que $H_k(X^n; G) \approxeq H_k(X^{n-1}; G) \approxeq H_k(X^{n-2}; G) \approxeq ... \approxeq H_k(X^0; G) \approxeq 0$. □

[36]El cociente anotado X^n/X^{n-1} se refiere tanto a la suma topológica de n-bolas cerradas con sus fronteras identificadas al mismo punto como a la suma topológica de n-esferas con puntos-base identificados, que es precisamente su *cuña*, todo al recordar que $D^n/S^{n-1} \approx S^n$.

[37]Nótese que oportunamente estamos dejando fuera el caso $n = 0$.

Capítulo 4

El Teorema de Borsuk-Ulam

En un café de la ciudad de Lwów, Polonia, Stanislaw Ulam conjeturó frente a Karol Borsuk lo que este último luego probaría con rigor en el *Teorema de Borsuk-Ulam.*

Stan Ulam era uno de los matemáticos del *Kawiarnia Szkocka* (*"Café Escocés"*), un grupo invencible de amigos que se alejaba de las aulas y los pizarrones de la Universidad de Lwów para hacer matemáticas escribiendo con lápiz sobre las mesas y entre tragos de brandy y café. Stefan Banach y Stanislaw Mazur congregaban reuniones diarias en dicha cafetería que sin duda podrían describirse como "fiestas matemáticas"; acostumbraban premiar las soluciones a conjeturas gestadas en el seno del grupo con -por ejemplo- botellas de licor, lechones u otras recompensas que hicieran del quehacer algo delectable en todo el sentido de la palabra. De hecho, sólo hasta que la esposa de Banach insistió fue que coleccionaron gran parte de sus propuestas en lo que más tarde se conocería como el *Libro Escocés.* Élite de indisciplinados rebeldes rayando casi en lo *beatnik*, impulsaban una creatividad ruidosa y juguetona con música y alcohol más como acicates que como distracciones y que se asentaría como extraordinariamente fecunda para el pensamiento matemático; muchas conjeturas de Ulam se han probado ciertas, mientras que la productividad de Banach es indiscutible.

Del otro lado, Karol Borsuk era uno de los llamados "topólogos de Varsovia", escuela un tanto más conservadora y de alguna forma rival a la de Lwów pero cuyos intereses se motivaban mutuamente. Por razones así, Borsuk -quien de hecho fue maestro de nuestro viejo conocido Eilenberg- frecuentaba el *Café Escocés* para ver qué tenían que decir sus compatriotas atípicos sobre el tema que a él le interesaba, la Topología Algebraica. En lo que la leyenda recoge como una conversación casual pero reveladora, Ulam le dijo a Borsuk alguna versión de lo que hoy conocemos como el *Teorema de Borsuk-Ulam*, y el joven Borsuk -cautivado- se valió de toda la técnica que poseía para probarlo. En este capítulo final, nosotros haremos lo mismo.

El enunciado del Teorema fue escrito desde el prefacio, y no dice otra cosa más que toda función continua entre la n-esfera y el plano n-dimensional manda al menos un par de puntos antipodales a la misma imagen. En dimensión cero, es muy fácil apreciar que esto es cierto. Los casos para las dimensiones 1 y 2 sólo requieren saber algo de homotopía y se pueden consultar en [10, capítulo 9, sección 57]. Sin embargo, para el caso general se requiere de todo el despliegue de los capítulos pasados, y aunque Borsuk probó (en 1933) un resultado un tanto distinto del que se presenta aquí, más o menos conlleva las mismas ideas básicas y construcciones.

4.1. Nociones Convenientes

Antes de comenzar la prueba del Teorema de Borsuk-Ulam en su versión general, nos será muy útil compilar algunas cosas a lo largo de esta pequeña sección, de tal manera que la justificación de cada paso sea clara y amigable. Así pues, estas "nociones convenientes" lo serán sólo en la medida de que logren exponer los "artefactos" que vamos a utilizar de antemano, tal vez buscando que no nos ensuciemos mucho las manos sobre la marcha de la prueba y que las verificaciones se vuelvan más cómodas.

Vamos por partes. En primer lugar, debemos tener en mente que si R es la relación de equivalencia sobre S^n que identifica puntos antipodales, entonces se definió el espacio proyectivo real n-dimensional $\mathbb{R}P^n$ como S^n/R con la topología cociente (véase ejemplo 2.2.6). La siguiente proposición ubica a S^n como espacio cubriente de $\mathbb{R}P^n$ bajo la proyección canónica (función cociente) $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ tal que $\pi(x) = \pi(-x)$ y como tal, adquirirán relevancia los teoremas relativos a espacios cubrientes, levantamientos y al grupo de transformaciones cubrientes que estudiamos en el capítulo 2, sección 2.4.

Proposición 4.1.1. *La proyección canónica $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ es una aplicación cubriente de dos hojas (es decir, S^n es una cubierta doble de $\mathbb{R}P^n$).*

Demostración. π cumple el ser continua y suprayectiva al ser una identificación o función cociente. Para $y \in \mathbb{R}P^n$, hay dos casos:

- Supongamos que el punto $x \in S^n$ tal que $\pi(x) = y = \pi(-x)$ no está en el ecuador de S^n y supongamos sin pérdida de generalidad que x está en el hemisferio superior abierto de S^n, al cual denotamos V_+ (V_- denotará al hemisferio inferior abierto). Sea $U_y = \pi[V_+]$. Afirmamos que U_y es el abierto alrededor de y deseado. Es un conjunto claramente conexo y abierto, por lo que veamos ahora que se cumplen... 1) $\pi^{-1}[U_y] = V_+ \cup V_-$ (la cual es una unión disjunta) y... 2) $\pi|_{V_+}$ y $\pi|_{V_-}$ son homeomorfismos sobre U_y:

  1) si tomamos $z \in V_-$, es claro que $-z \in V_+$ y por lo tanto se cumple que $\pi(z) = \pi(-z) \in U_y$ y así que $z \in \pi^{-1}[U_y]$. Como a parte es muy cierto que $V_+ \subset \pi^{-1}[\pi[V_+]]$, tenemos la contención derecha. Al revés, si suponemos que $\pi^{-1}[U_y] \subsetneq V_+ \cup V_-$, entonces existiría z en el ecuador de S^n tal que $\pi(z) \in U_y = \pi[V_+]$, pero eso significaría que $z \overset{R}{\sim} x$ para alguna $x \in V_+$, lo que es una contradicción a cuenta de que z sólo se relaciona con él mismo y con su antípoda, y ambos están en el ecuador.

2) $\pi|_{V_+}$ y $\pi|_{V_-}$ son suprayectivas por construcción y son inyectivas en la medida en que dos puntos en el mismo hemisferio abierto nunca están relacionados. El hecho de que π sea una identificación (y por tanto abierta) otorga que son homeomorfismos.

- Si $x \in S^n$ tal que $\pi(x) = y = \pi(-x)$ está en el ecuador de S^n, la vecindad que proponemos de manera análoga es la imagen directa bajo la proyección del hemisferio izquierdo o derecho abiertos.

  Por otro lado, y para terminar, π es de dos hojas ya que las fibras de cada punto en $\mathbb{R}P^n$ consisten en puntos antipodales.

$\square$

La proposición 4.1.1 se puede deducir similarmente del hecho de que la función antipodal $g : S^n \to S^n$ y la identidad 1_{S^n} generan una acción de $\mathbb{Z}_2$ sobre S^n con *espacio de órbitas* $\mathbb{R}P^n$ de tal manera que la proposición 2.4.31 garantiza el hecho de que la proyección canónica es una *aplicación cubriente normal* si probamos que dicha acción es *propiamente discontinua*, lo cual sucede precisamente porque los hemisferios abiertos no intersectan a sus imágenes bajo g. Sin embargo, el alcance de la proposicíon 2.4.31 trae una consecuencia, casi a pedir de boca, que más nos vale llevar adelante y es que el grupo de transformaciones cubrientes para $(S^n, \pi : S^n \to \mathbb{R}P^n)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. Esto último sucede siempre que tenemos una aplicación cubriente de dos hojas, por lo que habremos de presentar la afirmación formalmente y con mayor generalidad en el siguiente resultado:

Proposición 4.1.2. *Sea $\pi : X \to Y$ una aplicación cubriente de dos hojas. El grupo de transformaciones cubrientes de X, al cual hemos denotado $G(X)$, es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $\pi^{-1}[\pi(x)] = \{x, x_*\}$. Definimos $g : X \to X$ como $g(x) = x_*$[1]. Hay que probar que g es una transformación cubriente. En primer lugar, es claro que $\pi(g(z)) = \pi(z_*) = \pi(z)$ para todo $z \in X$. Luego, al ser π una aplicación cubriente, tenemos que para cada $x \in X$, existe un abierto $U_{\pi(x)}$ alrededor de $\pi(x)$ parejamente cubierto por π. Así pues, $\pi^{-1}[U_{\pi(x)}] = V \cup V_*$ (dos en la unión debido a que π es de dos hojas). Sin pérdida de generalidad supongamos que $x \in V$ y $x_* \in V_*$; es fácil ver de su definición que g coincide con $\pi|_{V_*}^{-1} \circ \pi$ en V. Así pues, cada $x \in X$ tiene un abierto alrededor V donde g es continua, con lo que g es continua en todo X. Por otro lado, $g^2 = 1_X$ debido a que para todo $x \in X$, $\pi(g^2(x)) = [\pi \circ g](g(x)) = [\pi \circ g](x_*) = \pi(x_*) = \pi(x)$ implica que $g^2(x) = g(x_*) \in \{x, x_*\}$, y como g (que hemos visto es un levantamiento de π pues es continua y hace que el "diagrama" conmute) no tiene puntos fijos a cuenta de que no es la identidad (corolario 2.4.21), se tiene que $g^2(x) = g(x_*) = x$. En tanto g es biyectiva y se tiene la anterior igualdad, tenemos que g es su propia inversa, de tal forma que el hecho de que g es continua implica la continuidad

[1]Es más que prudente señalar que en el caso particular de S^n como cubierta doble de $\mathbb{R}P^n$, g resulta ser la función antipodal.

de su "inversa" y así tenemos que es un homeomorfismo de X y por lo tanto una transformación cubriente.[2]

Ahora bien, si $h \in G(X)$, h es en particular un levantamiento de π. Veamos que de hecho, $h = g$ ó $h = 1_X$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $h \neq 1_X$. Entonces existe $x \in X$ tal que $h(x) \neq x$, pero como $\pi \circ h = \pi$ debido a que h es una transformación cubriente, a $h(x)$ no le queda más que ser igual a x_*, de tal manera que h coincide con g en x, por lo que el lema 2.4.20 arroja $h = g$. Así pues, $G(X) = (\{g, 1_X\}, \circ)$. Notemos luego que $\Phi : \mathbb{Z}_2 \to G(X)$ tal que $\Phi(0) = 1_X$ y $\Phi(1) = g$ es un isomorfismo. □

Corolario 4.1.3. *Para S^n espacio cubriente de $\mathbb{R}P^n$, se tiene que $G(S^n) \approxeq \mathbb{Z}_2$.* □

Muy relacionado a lo anterior, la siguiente proposición relaciona a los p-simplejos singulares de la doble cubierta X de un espacio Y con aquéllos de Y.

Proposición 4.1.4. *Sea $\pi : X \to Y$ una aplicación cubriente de dos hojas y $g \in G(X) \approxeq \mathbb{Z}_2$ tal que $g \neq 1_X$ como en la prueba de la proposición 4.1.2. Entonces cualquier p-simplejo singular $\tau : \Delta_p \to Y$ tiene exactamente dos levantamientos de la forma σ_τ y $g \circ \sigma_\tau$.*

Demostración. Probemos primero que existen. Como Δ_p es un subconjunto convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$, es contraíble y por lo tanto simplemente conexo, de tal forma que $\Pi_1(\Delta_p) \approxeq 1$ y el teorema del Levantamiento General (teorema 2.4.13) nos arroja que existe un levantamiento para cada función continua que vaya de Δ_p a Y. Ahora bien, sea $\tau : \Delta_p \to Y$ un p-simplejo singular de Y y σ_τ el levantamiento que sabemos existe por el argumento anterior. Veamos que $g \circ \sigma_\tau$ es a su vez un levantamiento de τ diferente de σ_τ. $[\pi \circ [g \circ \sigma_\tau]](s) = [\pi \circ g](\sigma_\tau(s)) = \pi(\sigma_\tau(s)) = \tau(s)$, donde la segunda igualdad se da porque g es una transformación cubriente de X y la última a cuenta de que σ_τ es levantamiento de τ. A parte, $g \circ \sigma_\tau \neq \sigma_\tau$ pues g no tiene puntos fijos (no es la identidad).

Pasemos a revisar la unicidad de estos dos levantamientos de τ y para hacerlo, supongamos que existe un tercero, llamémoslo h. Supongamos también, sin pérdida de generalidad, que $h(s) \neq \sigma_\tau(s)$. Como h es levantamiento de τ, $[\pi \circ h](s) = \tau(s)$, y esto significa que $h(s) \in \pi^{-1}[\tau(s)]$, pero $\pi^{-1}[\tau(s)] = \{\sigma_\tau(s), [g \circ \sigma_\tau](s)\}$ (π es de dos hojas) y como $h(s) \neq \sigma_\tau(s)$, entonces a $h(s)$ no le queda más que ser igual a $[g \circ \sigma_\tau](s)$. De esta forma, h coincide con $g \circ \sigma_\tau$ en s y el usado lema 2.4.20 nos dice que $h = g \circ \sigma_\tau$. □

Estos últimos resultados permitirán la derivación de una sucesión exacta corta que utilizaremos para inducir una larga en los grupos de homología respectivos a S^n y $\mathbb{R}P^n$, usando el importantísimo teorema de inducción de sucesiones largas en la homología de complejos de cadenas (teorema 3.2.7).

[2]El teorema del Levantamiento General (teorema 2.4.13) garantiza que existe un levantamiento de $\pi : X \to Y$ que manda x_0 a x_{0*}. Tal levantamiento resulta ser precisamente la transformación cubriente g, pues para todo punto $x \in X$, tenemos que, como g no es la identidad, $g(x) \neq x$ pero $g(x) \in \pi^{-1}[\pi(x)]$ y por lo tanto $g(x) = x_*$.

Ya en esta línea, advertimos que usaremos homología singular con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$. Recordemos, pues, que el grupo de cadenas singulares en este caso -$\Delta_p(X;\mathbb{Z}_2)$ para el espacio X- corresponde tan sólo a las sumas formales finitas de *distintos* p-simplejos sobre X (cada uno con coeficiente 1) ya que cada simplejo es su propio inverso y podemos descartar los términos "multiplicados" por 0. Otra forma de decirlo es que nuestra visualización de $\Delta_p(X;\mathbb{Z}_2)$ es isomorfa al grupo abeliano $\sum_{\sigma\in C(\Delta_p,X)}\langle\sigma\rangle$ donde $\langle\sigma\rangle=\{0,1\cdot\sigma\}$.

Ahora bien, también será necesario tener en mente el cálculo directo de los grupos de homología singular para las esferas (que hicimos en el capítulo 3, sección 3.6), a saber:

$$H_i(S^n;G)^3 \approxeq \begin{cases} G & \text{si } i\neq 0 \ \&\ n=i,\\ 0 & \text{si } i\neq 0 \ \&\ n\neq i,\\ G\oplus G & \text{si } i=0 \ \&\ n=i,\\ G & \text{si } i=0 \ \&\ n\neq i.\end{cases} \tag{4.1}$$

Pero no sólo esto, pues también traeremos a colación la introducción a los *CW-complejos celulares* para el cálculo de cierto grupo de homología singular de $\mathbb{R}P^n$, lo que hacemos en los siguiente lemas y su corolario:

Lema 4.1.5. *Sea Z un espacio topológico Hausdorff, $Y\subseteq Z$ cerrado y $f:(D^n,S^{n-1})\to(Z,Y)$ una función continua tal que $f|_{D^n\setminus S^{n-1}}$ es un homeomorfismo sobre $Z\setminus Y$. Entonces $D^n\cup_{f|_{S^{n-1}}}Y\approx Z$.*

Demostración. Definiremos una función continua con inversa continua entre $D^n\cup_{f|_{S^{n-1}}}Y$ y Z. Sea $p:D^n+Y\to D^n\cup_{f|_{S^{n-1}}}Y$ la proyección canónica y $h:D^n+Y\to Z$ dada por...

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in D^n,\\ x & \text{si } x\in Y.\end{cases}$$

Entonces h es continua porque es continua sobre dominios abiertos que no se intersectan y es constante en las fibras de p según el siguiente razonamiento: para todo par de puntos $w\neq v$ en una clase no trivial $\overline{x}\in D^n\cup_{f|_{S^{n-1}}}Y$, si $w,v\in S^{n-1}$, entonces $h(w)=f(w)=f(v)=h(v)$; si $w\in S^{n-1}$ y $v\in Y$, entonces $h(w)=f(w)=v=h(v)$; si $v\in S^{n-1}$ y $w\in Y$, entonces $h(v)=f(v)=w=h(w)$. Por lo tanto, el lema de la Trangresión (lema 2.2.4) nos arroja la existencia de una función continua $hp^{-1}:D^n\cup_{f|_{S^{n-1}}}Y\to Z$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} D^n+Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & Z \\ D^n\cup_{f|_{S^{n-1}}}Y \arrow[ur, "hp^{-1}"] & \end{tikzcd}$$

[3] En los primeros dos casos, el grupo coincide con $\widetilde{H}_i(S^n;G)$

Por otra parte, sabemos que f es una función cerrada, ya que sale de un compacto y entra en un espacio de Hausdorff (véase [4, capítulo XI, sección 2]). Para cualquier cerrado $C \subseteq D^n + Y$, $h[C] = h[(C \cap D^n) \cup (C \cap Y)] = h[C \cap D^n] \cup h[C \cap Y] = f[C \cap D^n] \cup (C \cap Y)$, el cual es un cerrado en Z, ya que $f[C \cap D^n]$ es cerrado en Z por f ser cerrada y $C \cap Y$ es cerrado en Z al ser subconjunto cerrado de un cerrado. De esta manera h es cerrada, condición que al sumar con que es continua y claramente suprayectiva otorga que es de hecho una identificación (proposición 2.2.2). Como se cumple que p es constante en las fibras de h, usamos nuevamente el lema de la Trangresión para obtener una función continua $ph^{-1} : Z \to D^n \cup_{f|_{S^{n-1}}} Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
D^n + Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"] & Z \arrow[dl, "ph^{-1}"] \\
D^n \cup_{f|_{S^{n-1}}} Y &
\end{tikzcd}$$

Se cumple que hp^{-1} y ph^{-1} son inversos uno del otro, por lo que tenemos que $Z \approx D^n \cup_{f|_{S^{n-1}}} Y$. $\square$

Lema 4.1.6. *$\mathbb{R}P^n$ es un CW-complejo celular de dimensión n.*

Demostración. Nos convendrá trabajar a los puntos de $\mathbb{R}P^n$ como clases de equivalencia $\overline{x}$ de puntos x en S^n bajo la relación que identifica puntos antipodales. Sea $f : (D^n, S^{n-1}) \to (\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1})$[4] dada por...

$$f(x_1, ..., x_n) = \overline{\left(x_1, ..., x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)}.$$

Entonces f es una función continua tal que $h : \mathbb{R}P^n \backslash \mathbb{R}P^{n-1} \to D^n \backslash S^{n-1}$ dada por...

$$h(\overline{(x_1, ..., x_{n+1})}) = \left(\frac{x_1 x_{n+1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (x_i x_{n+1})^2}}, ..., \frac{x_n x_{n+1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (x_i x_{n+1})^2}}\right)$$

...es una función inversa continua de $f|_{D^n \backslash S^{n-1}}$. Por lo tanto, f satisface las hipótesis del lema anterior y obtenemos que...

$$\mathbb{R}P^n \approx D^n \cup_{f|_{S^{n-1}}} \mathbb{R}P^{n-1}.$$

En consecuencia, $\mathbb{R}P^n$ se puede obtener de $\mathbb{R}P^{n-1}$ *adjuntando* una n-celda con la función $f|_{S^{n-1}}$ como aplicación de adjunción. Así pues, encontramos por

[4] Si R es la relación de equivalencia que identifica puntos antipodales, nos referimos a la pareja $(S^n/R, ecuador/R)$.

inducción sobre n que $\mathbb{R}P^n$ tiene una estructura de CW-complejo celular con una i-celda por cada dimensión $0 \leq i \leq n$, de forma que $\mathbb{R}P^n$ es un es un CW-complejo celular de dimensión n. $\square$

Corolario 4.1.7. *$H_i(\mathbb{R}P^n; G) \approxeq 0$ para toda $i > n$.*

Demostración. Se sigue del teorema 3.7.5 inciso 2 y del lema anterior. $\square$

4.2. La Prueba del Teorema de Borsuk-Ulam

Antes de proseguir, mencionamos que la prueba se hace siguiendo a [2, capítulo IV, sección 20]. Comencemos con -y otra vez- unos lemas más bien técnicos:

Lema 4.2.1. *Si X, Y son espacios conexos por trayectorias y $f : X \to Y$ es una función continua, entonces $G \approxeq H_0(X; G) \overset{f_*}{\approxeq} H_0(Y; G)$. Esto es, f_* es testigo del isomorfismo entre $H_0(X; G)$ y $H_0(Y; G)$.*

Demostración. En la proposición 3.6.3 probamos que $H_0(X; G)$ es isomorfo a G para todo espacio conexo por trayectorias X vía el homomorfismo de aumento $\epsilon_* : H_0(X; G) \to G$ tal que $\epsilon_*([\![\sum_{i=0}^{m_c} g_i x_i]\!]) = \epsilon(\sum_{i=0}^{m_c} g_i x_i) = \sum_{i=0}^{m_c} g_i \in G$.

Por otra parte, si denotamos e'_* al homomorfismo de aumento correspondiente a la homología del espacio Y, se cumple que para toda cadena $c = \sum_{i=0}^{m_c} g_i x_i \in \Delta_0(X; G)$...

$$[\epsilon'_* \circ f_*]([\![c]\!]) = [\epsilon'_* \circ f_*]\left(\left[\!\!\left[\sum_{i=0}^{m_c} g_i x_i\right]\!\!\right]\right)$$
$$= \epsilon'_*\left(\left[\!\!\left[f_\Delta\left(\sum_{i=0}^{m_c} g_i x_i\right)\right]\!\!\right]\right) = \epsilon'\left(\sum_{i=0}^{m_c} g_i f \circ x_i\right) = \sum_{i=0}^{m_c} g_i = \epsilon(c) = \epsilon_*([\![c]\!]).$$

Gracias a lo anterior, tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} H_0(X;G) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "\epsilon_*"'] & H_0(Y;G) \arrow[d, "\epsilon'_*"] \\ & G. \end{tikzcd}$$

Y como aquí ϵ_* y ϵ'_* son isomorfismos, se cumple que f_* también lo es ($f_* = \epsilon'^{-1}_* \circ \epsilon_*$). $\square$

Lema 4.2.2. *Sean $\pi : X \to Y$ una aplicación cubriente de dos hojas y $g \in G(X) \approxeq \mathbb{Z}_2$ como en la proposición 4.1.4. Si definimos $t : \Delta_*(Y; \mathbb{Z}_2) \to \Delta_*(X; \mathbb{Z}_2)$ tal que, dado un entero $p \geq 0$ y $\tau \in C(\Delta_p, Y)$, $t(\tau) = \sigma_\tau + g \circ \sigma_\tau$ y la extendemos para hacerla homomorfismo, entonces t es una **aplicación de cadenas** (con $t = 0$ para todo entero $p < 0$).*

Demostración. Para enteros $p < 0$ la corroboración pertinente es muy sencilla. Para enteros $p \geq 0$, t está bien definida según la prueba de la proposición 4.1.4. Ahora bien, debemos probar que $t \circ \partial = \partial \circ t$. Notemos que para cada $\tau \in C(\Delta_p, Y)$, existen exactamente dos levantamientos σ_τ y $g \circ \sigma_\tau$, los cuales son p-simplejos singulares de X. Ahora bien, las caras $\tau^{(i)}$ de τ son a su vez $(p-1)$-simplejos singulares de Y y como tal, cada una tiene dos levantamientos también. $\tau^{(i)} = \tau \circ F_i^p$, por lo que $\sigma_\tau \circ F_i^p$ y $(g \circ \sigma_\tau) \circ F_i^p$ son levantamientos de $\tau^{(i)}$ en tanto $\pi \circ (\sigma_\tau \circ F_i^p) = (\pi \circ \sigma_\tau) \circ F_i^p = \tau \circ F_i^p = \tau^{(i)}$ y sucede lo mismo para $g \circ \sigma_\tau$. Ambos casos, sustituyendo $g \circ \sigma_\tau$ por σ_τ, se pueden apreciar en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "\pi"] \\
\Delta_p \arrow[ur, "g \circ \sigma_\tau"] \arrow[r, "\tau"] & Y \arrow[d, "1_Y"] \\
\Delta_{p-1} \arrow[u, "F_i^p"] \arrow[r, "\tau^{(i)}"] & Y.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, podemos decir que los levantamientos de $\tau^{(i)}$ son exactamente $\sigma_\tau \circ F_i^p$ y $(g \circ \sigma_\tau) \circ F_i^p$, y la redundancia vale en la medida de que conocemos que son precisamente las i-ésimas caras de σ_τ y $g \circ \sigma_\tau$, respectivamente. En vista de esto, se cumple la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
t(\partial\tau) &= t\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i \tau^{(i)}\right) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i t(\tau^{(i)}) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i[\sigma_\tau \circ F_i^p + (g \circ \sigma_\tau) \circ F_i^p] \\
&= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i[\sigma_\tau^{(i)} + (g \circ \sigma_\tau)^{(i)}] = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \sigma_\tau^{(i)} + \sum_{i=0}^{p}(-1)^i (g \circ \sigma_\tau)^{(i)} \\
&= \partial\sigma_\tau + \partial(g \circ \sigma_\tau) = \partial(t(\tau)).
\end{aligned}$$

Entonces, como t conmuta con el operador frontera en los elementos que generan a los grupos de cadenas singulares, tenemos que conmuta en los grupos totales y así que t es una *aplicación de cadenas.* ☐

Lema 4.2.3. *Para las hipótesis del lema 4.2.2 y la t definida ahí, se tiene la siguiente sucesión exacta corta (de complejos de cadenas y aplicaciones de cadenas):*

$$0 \longrightarrow \Delta_*(Y;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{t} \Delta_*(X;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi_\Delta} \Delta_*(Y;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0$$

Demostración. No es complicado ver que t es un monomorfismo, pues si c es una cadena en $\Delta_p(Y;\mathbb{Z}_2)$ diferente de 0, entonces c es una suma formal finita de p-simplejos singulares de Y distintos (recordemos que los coeficientes están en $\mathbb{Z}_2$) donde cada uno tiene dos levantamientos por la proposición 4.1.4 y, debido a que dos simplejos distintos nunca tienen el mismo levantamiento (veáse el comentario tras la definición 2.4.5), tenemos que $t(c)$ es distinto de 0. Así, t es un monomorfismo. Ahora bien, π_Δ es suprayectiva a cuenta de que existe un levantamiento para cualquier p-simplejo singular de Y (para todo $\tau \in C(\Delta_p, Y), \pi_\Delta(\sigma_\tau) = \pi \circ \sigma_\tau = \tau$).

Queda por demostrar el paso intermedio, es decir, que $ker\ \pi_\Delta = im\ t$, lo que haremos por doble contención:

Si $c \in ker\ \pi_\Delta$, entonces $\pi_\Delta(c) = 0$. De no ser igual a 0, c tendría forma $\sum_{i=0}^{n} \sigma_i$, donde $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, σ_i es p-simplejo singular de Y para toda $0 \leq i \leq n$ y $\sigma_i \neq \sigma_j$ para toda $1 \leq i, j \leq n$. Entonces, $\pi_\Delta(c) = 0$ significa que $\sum_{i=0}^{n} \pi \circ \sigma_i = 0$. Como los coeficientes están en $\mathbb{Z}_2$, la última igualdad nos implica que para todo σ_i que aparece en c, también debe aparecer en c un σ_j tal que $\pi \circ \sigma_i = \pi \circ \sigma_j$ (de modo que se cancelen al hacer la suma). Incidentalmente, esto quiere decir que tal σ_j es un levantamiento de $\pi \circ \sigma_i$, pero sabemos que los únicos levantamientos de $\pi \circ \sigma_i$ son σ_i y $g \circ \sigma_i$, por lo que al tener $\sigma_i \neq \sigma_j$, se cumple entonces que $\sigma_j = g \circ \sigma_i$. Así pues, cada vez que σ aparece en c, $g \circ \sigma$ también aparece en c. Como esto sucede para toda $0 \neq c \in ker\ \pi_\Delta$, podemos pensar que $ker\ \pi_\Delta$ está generado por $\{\sigma + g \circ \sigma\}_{\sigma \in C(\Delta_p, X)}$. Pero para todo $\sigma \in C(\Delta_p, X)$, $t(\pi \circ \sigma) = \sigma + g \circ \sigma$ con $\pi \circ \sigma \in \Delta_p(Y; \mathbb{Z}_2)$, por lo que $ker\ \pi_\Delta \subseteq im\ t$.

Por otra parte, $\pi_\Delta \circ t = 0$ en los "elementos que generan" debido a que, para τ un p-simplejo singular de Y (con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$), vemos que $\pi_\Delta(t(\tau)) = \pi_\Delta(\sigma_\tau + g \circ \sigma_\tau) = \pi \circ \sigma_\tau + \pi \circ (g \circ \sigma_\tau) = \pi \circ \sigma_\tau + (\pi \circ g) \circ \sigma_\tau = \pi \circ \sigma_\tau + \pi \circ \sigma_\tau = 0$ (la cuarta igualdad se da porque g es una transformación cubriente). Por lo tanto, $\pi_\Delta \circ t$ se anula en todo el grupo y obtenemos que $ker\ \pi_\Delta \supseteq im\ t$. $\square$

Notemos que con el lema anterior y el teorema 3.2.7 podemos inducir la siguiente sucesión exacta larga:

$$\longrightarrow H_p(Y; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{t_*} H_p(X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi_*} H_p(Y; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(Y; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \qquad (4.2)$$

La aplicación de cadenas t y su correspondiente t_* en la homología son llamadas *homomorfismos de transferencia*[5], y una sucesión exacta larga como la anterior se conoce como *sucesión de transferencia*.

Corolario 4.2.4. *Para los espacios S^n y $\mathbb{R}P^n$, tenemos la siguiente sucesión exacta larga:*

$$\longrightarrow H_p(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{t_*} H_p(S^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi_*} H_p(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow$$

Demostración. Recordando que S^n es doble cubierta de $\mathbb{R}P^n$ por la proposición 4.1.1, los lemas anteriores arrojan el resultado. $\square$

[5]Los *homomorfismos de transferencia* son construcciones muy útiles para obtener información sobre la homología y cohomología de espacios cubrientes con un número finito de hojas. La generalización se da de la siguiente manera: si $\pi : X \to Y$ es una aplicación cubriente con n hojas, entonces $t : \Delta_*(Y; G) \to \Delta_*(X; G)$ tal que $t(\tau)$ es la suma de los n distintos levantamientos de τ es una aplicación de cadenas (la prueba es una generalización natural del lema 4.2.2) y por lo tanto induce un homomorfismo t_* en la homología.

Ahora bien, el siguiente lema (que utiliza nociones puntualizadas arriba) nos proporcionará una particularidad del caso que nos ocupa más adelante.

Lema 4.2.5. *Si $H_p(X;\mathbb{Z}_2) \approxeq \mathbb{Z}_2$ en la sucesión* (4.2)*, se tiene que $t_* \circ \pi_* = 0$.*

Demostración. Para $\sigma \in C(\Delta_p, X)$, $[t \circ \pi_\Delta](\sigma) = t(\pi \circ \sigma) = \sigma + g \circ \sigma = [1_{\Delta_p(X;\mathbb{Z}_2)} + g_\Delta](\sigma)$. Así, $t \circ \pi_\Delta = (1_{\Delta_p(X;\mathbb{Z}_2)} + g_\Delta) : \Delta_p(X;\mathbb{Z}_2) \to \Delta_p(X;\mathbb{Z}_2)$, pues al coincidir en los elementos que generan a los grupos de cadenas singulares, se extienden al mismo homomorfismo y en consecuencia son iguales. A raíz de lo anterior y de las propiedades de inducción de homomorfismos en los grupos de homología a partir de aplicaciones de cadena, observamos que $t_* \circ \pi_* = (t \circ \pi_\Delta)_* = (1_{\Delta_p(X;\mathbb{Z}_2)} + g_\Delta)_* = 1_* + g_* = 1_{H_p(X;\mathbb{Z}_2)} + g_*$.

Si a parte tenemos que $H_p(X;\mathbb{Z}_2) \approxeq \mathbb{Z}_2$, entonces g_* es un automorfismo de $\mathbb{Z}_2$ (g es un homeomorfismo de X en sí mismo al ser transformación cubriente, por lo que el corolario 3.4.15 afirma lo anterior), pero entonces g_* no es otro que la identidad a cuenta de que éste es el único automorfismo de $\mathbb{Z}_2$. Por lo tanto, para todo $[\![c]\!] \in H_p(X;\mathbb{Z}_2)$...

$$\begin{aligned}
&[t_* \circ \pi_*]([\![c]\!]) = [1_{H_p(X;\mathbb{Z}_2)} + g_*]([\![c]\!]) = [1_{H_p(X;\mathbb{Z}_2)} + 1_{H_p(X;\mathbb{Z}_2)}]([\![c]\!]) \\
&= [\![c]\!] + [\![c]\!] = [\![c + c]\!] = [\![0]\!] = 0
\end{aligned}$$

... y se tiene lo deseado. □

Finalmente, antes de atacar el teorema principal de esta sección, requerimos la definición de una estirpe especial de funciones que relacionan los espacios cubrientes con su grupo de transformaciones cubrientes, lo mismo que de un lema que nos remite al caso de S^n y $\mathbb{R}P^n$.

Definición 4.2.6. *Sea G un grupo y X_1 y X_2 dos G-espacios. Una función continua $\phi : X_1 \to X_2$ es una **aplicación equivariante** si y sólo si ϕ "conmuta" con la acción del grupo G sobre X_1 y X_2, es decir, si $\phi(gx) = g\phi(x)$ para toda $x \in X_1$.*[6]

Nos interesarán las *aplicaciones equivariantes* respecto de la acción del grupo de transformaciones cubrientes $G := G(X_1) \approxeq G(X_2)$ sobre espacios cubrientes $(X_1, \pi_1 : X_1 \to Y_1)$ y $(X_2, \pi_2 : X_2 \to Y_2)$ (recordemos que un espacio cubriente X es siempre un $G(X)$-espacio).

En el caso de S^n y $\mathbb{R}P^n$, la acción de $\mathbb{Z}_2$ sobre S^n es tal que los elementos de $\mathbb{Z}_2$ inducen, como hemos visto antes, los homeomorfismos (transformaciones cubrientes) de la identidad y la función antipodal, a la que hemos denotado anteriormente como g. De las proposiciones 4.1.1 y 4.1.2 sabemos que $S^n/\mathbb{Z}_2 \approx$

[6] Recordemos que cada elemento $g \in G$ induce un homeomorfismo de X en él mismo al que denotamos $g : X \to X$ -más por sencillez ilustrativa que por comodidad (véase comentario tras la definición 1.3.1). Si tomamos esto en cuenta, la terminología para esta definición pide que $\phi \circ g{=}g \circ \phi$ para toda $g \in G$. Relacionado a esto, sería un tanto impertinente no apuntar una sutileza en el enunciado de esta definición, y es que g no necesariamente representa al mismo homeomorfismo particular para X_1 y X_2 (son espacios en principio diferentes), pero lo que sí podemos afirmar es que g como homeomorfismo de X_1 es aquél que se comporta exactamente igual, respecto del grupo de transformaciones cubrientes, que g como homeomorfismo de X_2.

$\mathbb{R}P^n$ y que $S^m/\mathbb{Z}_2 \approx \mathbb{R}P^m$. El hecho de que ϕ sea equivariante se traduce en decir que $\phi(-x) = -\phi(x)$ para toda $x \in S^n$.

Lema 4.2.7. *Sea $\phi : S^n \to S^m$ una aplicación equivariante. Entonces existe una función continua $\psi : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^m$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_1"] & S^m \arrow[d, "\pi_2"] \\ \mathbb{R}P^n \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{R}P^m. \end{tikzcd}$$

Demostración. La función ϕ induce una función continua $\psi : S^n/\mathbb{Z}_2 \to S^m/\mathbb{Z}_2$ dada por $\psi(\overline{x}) = \overline{\phi(x)}$. Ésta está bien definida (no depende del representante) en vista de que si $\overline{x} = \overline{y}$, entonces $y = x$ ó $y = -x$. No hay por qué verificar el caso $y = x$. Para el otro, se tiene la igualdad...

$$\psi(\overline{y}) = \psi(\overline{-x}) = \overline{\phi(-x)} = \overline{-\phi(x)} = \overline{\phi(x)} = \psi(\overline{x}).$$

De su definición, es claro que ψ hace conmutar al diagrama.[7] □

Estamos listos para probar el teorema que arrojará como evento particular el famoso Teorema de Borsuk-Ulam. La prueba emplea casi todo lo que hemos agrupado a lo largo de la sección actual y la previa, por lo que será ventajoso remitir cada paso a su respectiva justificación.

Teorema 4.2.8. *Sea $g : S^n \to S^n$ la función antipodal. Si existe una aplicación equivariante $\phi : S^n \to S^m$, entonces $n \leq m$.*

Demostración. Supongamos que $n > m$. Tal como en la prueba del lema 4.2.7, denotaremos g' a la función antipodal en S^m.

Aunque tal vez no sea clara la razón en este momento, nos convendrá separar el caso particular $n = 1$ (y por consiguiente $m = 0$) y quitarlo del camino de una vez para evitar perdernos en sutilezas más adelante. Sea $\phi : S^1 \to S^0$ continua, como S^1 es conexo, $\phi[S^1] \subset \{-1, 1\}$ es conexo y entonces se tiene que $\phi[S^1] = -1$ ó $\phi[S^1] = 1$ (ϕ es constante). Supongamos, sin pérdida de

[7] En general, si X, Y son G-espacios y $\phi : X \to Y$ es una aplicación equivariante, entonces ϕ induce una función continua $\psi : X/G \to Y/G$ dada por $\psi(Gx) = G\phi(x)$, la cual está bien definida al revisar que para todo $g \in G$, $\psi(Ggx) = G\phi(gx) = Gg\phi(x) = G\phi(x) = \psi(Gx)$. Aparte, es claro que si $p_1 : X \to X/G$, $p_2 : Y \to Y/G$ son las proyecciones canónicas, entonces el siguiente diagrama conmuta (véase definición 2.4.29):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p_1"] & Y \arrow[d, "p_2"] \\ X/G \arrow[r, "\psi"] & Y/G. \end{tikzcd}$$

generalidad, que $\phi(x) = 1$ para todo $x \in S^1$. Entonces $\phi(-x) = 1$ para toda $x \in S^1$. Sin embargo $-\phi(x) = -1$ para toda $x \in S^1$. De esta forma, ϕ no es equivariante y tenemos el resultado deseado por contrapositiva.

Veamos ahora el caso $n > m \geq 1$. Procederemos por reducción al absurdo, por lo que suponemos además que existe $\phi : S^n \to S^m$ equivariante. Como venimos señalando desde hace mucho, nos fijaremos en los grupos de homología singular con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ para la esfera y el espacio proyectivo. En este sentido, para S^m se tiene la siguiente *sucesión de transferencia*, donde recordamos que t_* es el homomorfismo inducido por la aplicación de cadenas t que manda los simplejos singulares de $\mathbb{R}P^m$ a la suma de sus levantamientos (véase lema 4.2.3 y corolario 4.2.4):

$$\begin{gathered}\longrightarrow H_{m+1}(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_*} H_m(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{t_*} H_m(S^m;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi_*} \\ \xrightarrow{\pi_*} H_m(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{m-1}(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{t_*} H_{m-1}(S^m;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi_*} \dots \\ \dots \xrightarrow{\pi_*} H_1(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_*} H_0(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{t_*} H_0(S^m;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi_*} \\ \xrightarrow{\pi_*} H_0(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_*} 0. \end{gathered} \tag{4.3}$$

A continuación, trabajaremos con esta sucesión buscando puntualizar al máximo los detalles e intentando mantener toda la precisión y formalidad posibles al referirnos a los homomorfismos particulares, ya que nuestro objetivo es hacer explícito quién es quién en ella y las consecuencias necesarias para la prueba que se desatarán de lograrlo.

Gracias al lema 4.1.6 y a la fórmula de los grupos de homología para las esferas en (4.1), tenemos que $H_{m+1}(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \approxeq H_{m+1}(S^m;\mathbb{Z}_2) \approxeq 0$ y de hecho se cumple que $H_k(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \approxeq H_k(S^m;\mathbb{Z}_2) \approxeq 0$ para toda $k > m$. Ahora bien, la fórmula en (4.1) a su vez arroja el hecho importante de que $H_m(S^m;\mathbb{Z}_2) \approxeq \mathbb{Z}_2$ y de que $H_i(S^m;\mathbb{Z}_2) \approxeq 0$ para toda $0 < i < m$ de tal forma que (4.3) se puede ver como:

$$\begin{gathered} 0 \xrightarrow{\partial_*} H_m(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{t_*} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\pi_*} H_m(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{m-1}(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{t_*} \\ \xrightarrow{t_*} 0 \xrightarrow{\pi_*} H_{m-1}(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{m-2}(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{t_*} 0 \xrightarrow{\pi_*} \dots \\ \dots \xrightarrow{\pi_*} H_1(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_*} H_0(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{t_*} H_0(S^m;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi_*} \\ \xrightarrow{\pi_*} H_0(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_*} 0. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Como (4.4) es exacta, el *primer* homomorfismo marcado t_* es monomorfismo. Afirmamos que de hecho es un isomorfismo y para revisarlo, debemos recordar del lema 4.2.5 que el hecho de que $H_m(S^m;\mathbb{Z}_2) \approxeq \mathbb{Z}_2$ implica que $t_* \circ \pi_* : H_m(S^m;\mathbb{Z}_2) \to H_m(S^m;\mathbb{Z}_2)$ es trivial. Como además t_* es monomorfismo, lo anterior evidencía que $\pi_* : H_m(S^m;\mathbb{Z}_2) \to H_m(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2)$ debe ser trivial, ya que de lo contrario habría $[\![c]\!] \in H_m(S^m;\mathbb{Z}_2)$ tal que $\pi_*([\![c]\!]) \neq 0 \Rightarrow t_*(\pi_*([\![c]\!])) \neq$

0. De esta forma, el *primer* homomorfismo marcado π_* en (4.4) es trivial y, por exactitud nuevamente, tenemos que $t_* : H_m(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \to H_m(S^m; \mathbb{Z}_2)$ es un isomorfismo y por lo tanto que $H_m(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \approxeq \mathbb{Z}_2$.

Pasemos ahora a probar una afirmación importante: *"Para toda $1 \leq i \leq m$, $\partial_* : H_i(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \to H_{i-1}(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$ es un isomorfismo"*. Lo haremos en tres partes y la exactitud de la sucesión será un argumento muy frecuente en todas (a riesgo de redundancia, apuntaremos su uso cada vez):

($i = m$) El que $\pi_* : H_m(S^m; \mathbb{Z}_2) \to H_m(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$ es trivial nos dice que $\partial_* : H_m(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \to H_{m-1}(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$ es un monomorfismo por exactitud. Sumando esto a que $H_{m-1}(S^m; \mathbb{Z}_2) \approxeq 0$ (ya marcado en (4.4)), una vez más por exactitud concluimos que es también un isomorfismo.

($1 < i < m$) Si seguimos avanzando sobre (4.4), vemos que como $H_i(S^m; \mathbb{Z}_2)$ es 0 para toda $1 < i < m$, se da la situación...

$$\longrightarrow 0 \xrightarrow{\pi_*} H_i(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{i-1}(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{t_*} 0 \longrightarrow$$

... por lo que la exactitud sostiene la implicación.

($i = 1$) Para el último caso (que incluye a los 0-ésimos grupos de homología singular), el análisis se hará "en reversa". Sabemos que $H_0(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \approxeq \mathbb{Z}_2 \approxeq H_0(S^m; \mathbb{Z}_2)$[8], pues S^m y $\mathbb{R}P^m$ son conexos por trayectorias y la proposición 3.6.3 nos lo dice. Ahora bien, $\pi_* : H_0(S^m; \mathbb{Z}_2) \to H_0(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$ es un testigo de ese isomorfismo, lo cual se puede ver tanto por el lema 4.2.1 como por la exactitud de la sucesión, ya que $\pi_* : H_0(S^m; \mathbb{Z}_2) \to H_0(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$ resulta un endomorfismo suprayectivo de $\mathbb{Z}_2$ y por lo tanto no puede ser más que la identidad. Con este resultado (y por exactitud) también obtenemos que $t_* : H_0(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \to H_0(S^m; \mathbb{Z}_2)$ es trivial y por consiguiente el siguiente escenario para $\partial_* : H_1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \to H_0(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$:

$$\longrightarrow 0 \xrightarrow{\pi_*} H_1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_*} H_0(\overset{\mathbb{Z}_2}{\mathbb{R}P^m}; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{0} H_0(\overset{\mathbb{Z}_2}{S^m}; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow$$

De esta manera, $\partial_* : H_1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \to H_0(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$ resulta a su vez un isomorfismo y se cumple la afirmación general.

Con ella y el hecho derivado anteriormente de que $H_m(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \approxeq \mathbb{Z}_2$, tenemos que $H_i(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \overset{\partial_*}{\approxeq} \mathbb{Z}_2$ para toda $1 \leq i \leq m$. Bajo esta noción, nuestra visualización de (4.4) ha adquirido un nuevo formato[9]:

$$\begin{gathered} 0 \xrightarrow{\partial_*} H_m(\overset{\mathbb{Z}_2}{\mathbb{R}P^m}; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\approxeq} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} H_m(\overset{\mathbb{Z}_2}{\mathbb{R}P^m}; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\approxeq} H_{m-1}(\overset{\mathbb{Z}_2}{\mathbb{R}P^m}; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{t_*} \\ \xrightarrow{t_*} 0 \xrightarrow{\pi_*} \dots \quad \dots \xrightarrow{t_*} 0 \xrightarrow{\pi_*} H_1(\overset{\mathbb{Z}_2}{\mathbb{R}P^m}; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\approxeq} H_0(\overset{\mathbb{Z}_2}{\mathbb{R}P^m}; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\approxeq} \\ \xrightarrow{\approxeq} H_0(\overset{\mathbb{Z}_2}{\mathbb{R}P^m}; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_*} 0. \end{gathered} \tag{4.5}$$

[8]Este isomorfismo no se da para $m = 0$, pues $H_0(S^0; \mathbb{Z}_2) \approxeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ según la fórmula en (4.1). Queda entonces justificada la separación de tal caso al inicio de la prueba.

[9]La *sucesión de transferencia* que hemos analizado es de hecho un camino para calcular los grupos de homología singular del espacio proyectivo.

Por sencillez hemos sustituido $H_i(S^m;\mathbb{Z}_2)$ por sus correspondientes grupos isomorfos ($\mathbb{Z}_2$ para $i \in \{1, m\}$ y 0 en el resto), mientras que el primer 0 se refiere, como habíamos ratificado arriba, a $H_{m+1}(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2)$.

Por otro lado, sea $\psi : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^m$ la función continua inducida por ϕ según el lema 4.2.7, entonces el hecho de que ψ_Δ es una aplicación de cadenas y la *naturalidad* de ∂_* hacen que el siguiente diagrama conmute para toda $i \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd}
H_i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\psi_*"] & H_{i-1}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[d, "\psi_*"] \\
H_i(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{i-1}(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2).
\end{tikzcd}$$

Más aun, a la luz de los resultados plasmados en (4.5) y gracias al lema 4.2.1, tenemos que el diagrama anterior se ve así para el caso $i = 1$:

$$\begin{tikzcd}
H_1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\overset{\partial_*}{\approx}"] \arrow[d, "\psi_*"] & H_0(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[d, "\overset{\psi_*}{\approx}"] \\
H_1(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\overset{\partial_*}{\approx}"] & H_0(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2).
\end{tikzcd}$$

Como es conmutativo, el homomorfismo de la izquierda $\psi_* : H_1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \to H_1(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2)$ es a su vez un isomorfismo. Si nos fijamos luego en el diagrama para $i = 2$, tendremos la misma situación y habremos probado que $\psi_* : H_2(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \to H_2(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2)$ es un isomorfismo por ser el cuarto homomorfismo en un cuadrado conmutativo con tres isomorfismos. De manera similar, continuar este proceso inductivo nos arroja con toda claridad que $\psi_* : H_i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \to H_i(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2)$ será un isomorfismo en tanto ambos ∂_* lo sean. Como el inferior $(\partial_* : H_i(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \to H_{i-1}(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2))$ es isomorfismo mientras $1 \leq i \leq m < n$, entonces ψ_* es testigo del isomorfismo entre $H_i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$ y $H_i(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2)$ si $1 \leq i \leq m$.

Ahora bien, para tal ψ_* inducida, probemos que también se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H_m(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "t_*"] \arrow[d, "\psi_*"] & H_m(S^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[d, "\phi_*"] \\
H_m(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "t_*"] & H_m(S^m;\mathbb{Z}_2).
\end{tikzcd} \tag{4.6}$$

Para hacerlo, probemos la conmutatividad de...

$$\begin{tikzcd}
\Delta_m(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\psi_\Delta"] & \Delta_m(S^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[d, "\phi_\Delta"] \\
\Delta_m(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "t"] & \Delta_m(S^m;\mathbb{Z}_2).
\end{tikzcd}$$

Sea τ un m-simplejo singular de $\mathbb{R}P^n$. Tenemos que...

$$\begin{aligned}
&[\phi_\Delta \circ t](\tau) = \phi_\Delta(\sigma_\tau + g\circ\sigma_\tau) = \phi\circ\sigma_\tau + \phi\circ(g\circ\sigma_\tau) = \phi\circ\sigma_\tau + (\phi\circ g)\circ\sigma_\tau \\
&= \phi\circ\sigma_\tau + (g'\circ\phi)\circ\sigma_\tau = \phi\circ\sigma_\tau + g'\circ(\phi\circ\sigma_\tau).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Notemos que gracias al lema 4.2.7, $\phi\circ\sigma_\tau$ y $g'\circ(\phi\circ\sigma_\tau)$ son dos (y por tanto los únicos) levantamientos del m-simplejo de $\mathbb{R}P^m$ $\psi\circ\tau$, pues se da que $\psi\circ\tau = \psi\circ(\pi_1\circ\sigma_\tau) = (\psi\circ\pi_1)\circ\sigma_\tau = (\pi_2\circ\phi)\circ\sigma_\tau = \pi_2\circ(\phi\circ\sigma_\tau)$ y lo mismo si sustituimos σ_τ por $g\circ\sigma_\tau$. Esta situación que se puede ilustrar a través de la siguiente figura, donde se usa $g\circ\sigma_\tau$ pero sale igual si se toma σ_τ :

$$\begin{tikzcd}
 & S^n \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_1"] & S^m \arrow[d, "\pi_2"] \\
\Delta_m \arrow[ur, "g\circ\sigma_\tau"] \arrow[r, "\tau"] & \mathbb{R}P^n \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{R}P^m.
\end{tikzcd}$$

De esta forma, tenemos que $\phi\circ\sigma_\tau + g'\circ(\phi\circ\sigma_\tau) = t(\psi\circ\tau) = [t\circ\psi_\Delta](\tau)$, que al conectar con (4.7) prueba la conmutatividad del diagrama con complejos de cadenas singulares en los elementos que lo generan, por tanto en los grupos totales y finalmente aquélla del diagrama en (4.6).

En resumen, hemos obtenido que $\psi_* : H_i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \to H_i(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2)$ es un isomorfismo para toda $1 \le i \le m$, que $t_* : H_m(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \to H_m(S^m;\mathbb{Z}_2)$ es un isomorfismo y que $H_m(S^n;\mathbb{Z}_2) \approxeq 0$ a cuenta de que $n > m$. Gracias a todo esto -y para finalizar-, observamos que el diagrama conmutativo en (4.6) se vuelve una contradicción, ya que se ve así:

$$\begin{tikzcd}
H_m(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "t_*"] \arrow[d, "\substack{\psi_* \\ \approxeq}"] & H_m(S^n;\mathbb{Z}_2) \approxeq 0 \arrow[d, "\phi_*"] \\
H_m(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\substack{t_* \\ \approxeq}"] & H_m(S^m;\mathbb{Z}_2)
\end{tikzcd} \tag{4.8}$$

... de modo que se tendría $\mathbb{Z}_2 \approxeq im\ (t_*\circ\psi_*) = im\ (\phi_*\circ t_*) = 0$, lo cual es imposible. Con tal contradicción hemos confirmado que no puede ocurrir la disposición $n > m \ge 1$ (el segundo caso de nuestra suposición inicial) y por lo tanto hemos probado el teorema. $\square$

Una vez hecho esto, dediquémonos a nuestro objetivo -en muchos sentidos- inicial:

Teorema 4.2.9 (Borsuk-Ulam)**.** *Para toda función continua* $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ *existe* $x \in S^n$ *tal que* $f(x) = f(-x)$.

Demostración. Una vez más lo hacemos por reducción al absurdo. Suponemos que hay $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) \neq f(-x)$ para toda $x \in S^n$. Sea $\phi : S^n \to S^{n-1}$ dada por...

$$\phi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}.$$

Tenemos que...

$$\phi(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{\|f(-x) - f(x)\|} = -\left(\frac{f(x) - f(-x)}{\|f(-x) - f(x)\|}\right) = -\phi(x).$$

Con la anterior igualdad hemos mostrado que $\phi : S^n \to S^{n-1}$ es equivariante, en total contradicción con el teorema 4.2.8. □

Como dijimos al principio del capítulo, el señor Borsuk probó un resultado diferente al teorema 4.2.8, pero que también implica el Teorema de Borsuk-Ulam. Para rendirle su justo tributo, anotémoslo:

Teorema 4.2.10. *Toda función continua equivariante* $f : S^n \to S^n$ *tiene* grado *impar.* □

La manera en que el teorema de Borsuk-Ulam se desenreda de esta afirmación se resume en decir que de existir una f y una ϕ como definidas en el teorema 4.2.9, entonces ϕ resulta impar pero de grado 0. Para conocer los pormenores de esta prueba, se necesita complementar lo que se ha dicho sobre el *grado* de una función continua de la n-esfera en ella misma (véase [6, capítulo 2, sección 2.B]).

4.3. Dos Consecuencias Interesantes

Existe una bellísima aplicación al mundo físico que revela la naturaleza estéticamente simétrica -y asombrosa- de nuestro Teorema.

Corolario 4.3.1. *En todo momento existe en la superficie terrestre un punto a la misma temperatura y presión barométrica que su antípoda geográfica.*[10] □

Menos obvia, la siguiente:

Teorema 4.3.2 (Lusternik-Schnirelmann)**.** *Si cubrimos a* S^n *con* $n+1$ *cerrados* $A_1, ..., A_{n+1}$*, entonces al menos uno de los* A_i *tiene un par de puntos antipodales.*

[10] Este enunciado se refiere al caso $n = 2$ del Teorema, pero si lo pensamos para $n = 1$, podremos convencernos de que siempre existen dos puntos antipodales en el ecuador terrestre a la misma temperatura exacta.

Demostración. Supongamos que A_i es disjunto de $-A_i := \{-x \in S^n \mid x \in A_i\}$ para toda $1 \leq i \leq n$, entonces por el lema de Urysohn (véase [4, capítulo VII, sección 4]) existen funciones continuas $f_i : S^n \to I$ tales que $f_i[A_i] = 0$ y $f_i[-A_i] = 1$. Si definimos $f = (f_1, ..., f_n) : S^n \to \mathbb{R}^n$, el Teorema de Borsuk-Ulam nos garantiza que debe existir x_0 en S^n tal que $f(x_0) = f(-x_0)$, pero eso significa que $x_0 \notin A_i$ para toda $1 \leq i \leq n$, y lo mismito para $-x_0$. Entonces, como $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n+1}$ cubre a S^n, forzosamente debe darse que $x_0, -x_0 \in A_{n+1}$. $\square$

Bibliografía

[1] Betancourt De la Parra, Alejandro, *Uniformización de Superficies de Riemann Compactas*, Tesis, facultad de Ciencias, UNAM, 2011.

[2] Bredon, Glen E., *Topology and Geometry*, Springer, 2010.

[3] Dieudonné, Jean, *A History of Algebraic and Differential Topology, 1900-1960*, Birkhäuser Boston, 2009.

[4] Dugundji, James, *Topology*, 2a ed., Allyn and Bacon, 1966.

[5] Engelking, Richard *General Topology*, Taylor and Francis, 1977.

[6] Hatcher, Allen, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[7] Ivorra Castillo, Carlos, *Topología Algebraica, con Aplicaciones a la Geometría Diferencial*, www.uv.es/ivorra/Libros/Topalg.pdf.

[8] Massey, William S., *Algebraic Topology, An Introduction*, Springer, 1967.

[9] Matoušek, Jiří, *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Springer, 2003.

[10] Munkres, James R., *Topology*, 2a ed., Prentice Hall, 2000.

[11] Prieto de Castro, Carlos, *Topología Básica*, Fondo de Cultura Económica, 2003.

[12] Rota, Gian-Carlo, *Indiscrete Thoughts*, Birkhäuser Boston, 1996.

[13] Rotman, Joseph J., *An Introduction to the Theory of Groups*, 4a ed., Springer, 1995.

[14] Willard, Stephen, *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.