



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

FASE GEOMÉTRICA DE UNA  
PARTÍCULA CON ESPÍN  $1/2$  EN UN  
“CAMPO MAGNÉTICO CUÁNTICO”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
FÍSICO

PRESENTA:  
EDGAR GUZMÁN GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. CHRYSOMALIS CHRYSOMALAKOS



2012



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Hoja de datos del jurado

## 1. Datos del alumno

Guzmán  
González  
Edgar  
56 61 57 12  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
303698010

## 2. Datos del tutor

Dr.  
Chryssomalis  
Chryssomalakos

## 3. Datos del sinodal 1

Dr.  
Manuel  
Torres  
Labansat

## 4. Datos del sinodal 2

Dr.  
Jerónimo Alonso  
Cortez  
Quezada

## 5. Datos del sinodal 3

Dr.  
Eduardo  
Nahmad  
Achar

## 6. Datos del sinodal 4

Dr.  
Saúl Noé  
Ramos  
Sánchez

## 7. Datos del trabajo escrito

Fase geométrica de una partícula con espín  $1/2$  en un “campo magnético cuántico”  
49 p  
2012

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>1. Fases geométricas</b>	<b>1</b>
1.1. El teorema adiabático . . . . .	1
1.2. Fases geométricas y haces fibrados . . . . .	4
1.3. Una partícula con espín 1/2 en un campo magnético . . . . .	5
1.4. Fase de Aharonov-Anandan . . . . .	10
1.5. Una partícula con espín 1/2 en un campo magnético estocástico . . . . .	12
<b>2. Fase geométrica de una partícula con espín 1/2 en un “campo magnético cuántico”</b>	<b>17</b>
2.1. Definición de “campo magnético cuántico” . . . . .	17
2.2. Estados coherentes de un oscilador armónico . . . . .	19
2.3. Primer modelo de un “campo magnético cuántico” . . . . .	20
2.4. Segundo modelo de un “campo magnético cuántico” . . . . .	27
2.5. Tercer modelo de un “campo magnético cuántico” . . . . .	32
<b>3. Discusión de los resultados obtenidos</b>	<b>39</b>
<b>A. Código en Mathematica</b>	<b>43</b>
A.1. Cálculos de la sección 1.5 . . . . .	43
A.2. Cálculos de la sección 2.3 . . . . .	45
A.3. Cálculos de la sección 2.4 . . . . .	46
A.4. Cálculos de la sección 2.5 . . . . .	47

# Introducción

Las fases geométricas o fases de Berry son muy importantes debido a las diversas aplicaciones que tienen en varias ramas de la física. En general, para poder calcular las fases de Berry, es necesario calcular la integral de una cierta forma diferencial en un espacio conocido como espacio de los parámetros. Estos parámetros son parámetros clásicos, como por ejemplo, la dirección y magnitud de un campo magnético. Con ánimos de generalizar lo anterior, nos preguntamos que pasaría si el espacio de los parámetros no fuera clásico, sino que fuera cuántico. Este espacio sería un ejemplo de los espacios denominados como espacios no conmutativos o espacios sin puntos, lo que hace que definir conceptos como “integral a lo largo de una trayectoria” sea difícil. Por lo anterior, en el presente trabajo sólo se calculará la fase geométrica en un caso particular en que los parámetros son cuánticos, aunque no se escribirá este resultado en términos de alguna integral en el espacio de los parámetros. Intentar realizar esto se hará en algún trabajo posterior.

El caso particular en el que se calculará la fase geométrica cuando los parámetros son cuánticos será el caso análogo al ejemplo más sencillo de fases de Berry, un espín  $1/2$  acoplado con un campo magnético que varía lentamente en el tiempo. En este caso, lo que se hará será acoplar a un espín  $1/2$  con un “campo magnético cuántico” y se calculará la fase geométrica del sistema. Para realizar esto, el trabajo se dividió en 3 capítulos.

En el primer capítulo se realizará un estudio sobre fases geométricas y sus diversas generalizaciones, lo cual nos dará herramientas necesarias que se utilizarán en el segundo capítulo. También se acoplará al espín  $1/2$  con un campo magnético estocástico, resultado que después se comparará con el resultado cuando el campo magnético es “cuántico” .

En el segundo capítulo se definirá “campo magnético cuántico” y se escribirá el Hamiltoniano para un campo magnético cuántico acoplado con un espín  $1/2$ . Después, se resolverá la ecuación de Schrödinger de manera perturbativa para dicho Hamiltoniano, y se obtendrá la fase geométrica. Este cálculo se repetirá con diferentes “campos magnéticos cuánticos”.

Finalmente, en el tercer capítulo se interpretarán los resultados obtenidos en el segundo capítulo, y se escribirá un poco sobre cálculos que se realizarán en el futuro cercano para seguir estudiando este tema.

# Capítulo 1

## Fases geométricas

### 1.1. El teorema adiabático

Supongamos que tenemos un Hamiltoniano  $H$  independiente del tiempo y un sistema que se encuentra inicialmente en un estado  $|\psi_0\rangle = \sum_n C_n |n\rangle$ , donde los estados  $|n\rangle$  forman un conjunto completo de eigenvectores de  $H$  con eigenenergías  $E_n$ . La evolución de  $|\psi_0\rangle$  según  $H$  estará dada simplemente por  $|\psi(t)\rangle = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} C_n |n\rangle$ . En particular, si el sistema inicialmente se encuentra en un eigenestado de  $H$ , el sistema se mantendrá en este estado inicial salvo por una fase  $-\frac{i}{\hbar} E_n t$ . A esta fase se le llama fase dinámica o fase energética.

Ahora supongamos que  $H$  sí depende del tiempo, que es no degenerado para cualquier tiempo y que su dependencia temporal es lenta, es decir, que la frecuencia característica (multiplicada por  $\hbar$ ) de la evolución de  $H$  es mucho menor que la diferencia entre cualesquiera dos eigenenergías distintas. En este caso, decimos que la evolución de  $H$  es adiabática. Físicamente lo anterior quiere decir que  $H$  depende de un conjunto de parámetros externos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ , y un agente externo está modificando estos parámetros lentamente, es decir, está siguiendo una curva en el espacio formado por los parámetros  $\lambda$ . Según el teorema adiabático, bajo estas condiciones, si inicialmente el sistema está en un eigenestado del Hamiltoniano, éste se mantendrá en un eigenestado del Hamiltoniano para cualquier tiempo posterior. A continuación daremos una demostración del teorema adiabático bajo estas hipótesis.

Supongamos que tenemos un sistema inicialmente en el estado  $|\psi_0\rangle$  y estamos interesados en su evolución temporal  $|\psi(t)\rangle$  según un Hamiltoniano  $H(t)$  que varía adiabáticamente en el tiempo, siguiendo una curva  $\xi$  en el espacio de los parámetros. Para cualquier punto  $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_s(t))$  en el espacio de los parámetros, el Hamiltoniano  $H(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$  tiene un conjunto completo de eigenvectores con sus respectivos eigenvalores. Así, para cualquier tiempo  $t$ , podemos elegir un conjunto ortonormal de eigenvectores  $|n(t)\rangle$  con eigenvalores  $E_n(t)$  de manera continua y diferenciable. La elección se hizo de esta manera debido a que, como la evolución del Hamiltoniano es adiabática, esperamos que esta evolución temporal no excite al sistema lo suficiente para que se den transiciones de fase. Como el conjunto de eigenvectores es completo, para cualquier tiempo  $t$ ,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t) e^{i\alpha_n(t)} |n(t)\rangle, \quad (1.1)$$

donde

$$\alpha_n(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(u) du. \quad (1.2)$$

Claramente la fase  $\alpha_n$  es análoga a la fase dinámica en el caso en el que  $H$  no depende del tiempo, por lo que  $\alpha_n$  también se conoce como fase dinámica. Si sustituimos la expresión anterior en la ecuación de Schrödinger para  $|\psi(t)\rangle$  y hacemos un poco de álgebra llegamos a la siguiente ecuación:

$$i\hbar \sum_n e^{i\alpha_n} \left( \dot{C}_n |n\rangle + C_n \frac{d}{dt} |n\rangle - \frac{i}{\hbar} E_n C_n |n\rangle \right) = \sum_n e^{i\alpha_n} C_n E_n |n\rangle, \quad (1.3)$$

donde la dependencia respecto a  $t$  se dejó de escribir explícitamente. Haciendo el producto interno con algún estado  $\langle m|$ , y simplificando obtenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{C}_m &= - \sum_n e^{i(\alpha_n - \alpha_m)} C_n \langle m | \frac{d}{dt} |n\rangle \\ &= -C_m \langle m | \frac{d}{dt} |m\rangle - \sum_{n \neq m} e^{i(\alpha_n - \alpha_m)} C_n \langle m | \frac{d}{dt} |n\rangle. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Como  $|n\rangle$  es un eigenestado de  $H$ ,

$$H|n\rangle = E_n |n\rangle.$$

Derivando respecto al tiempo, y tomando producto interno con algún estado  $\langle m|$  diferente a  $\langle n|$  obtenemos:

$$\langle m | \frac{d}{dt} |n\rangle = \frac{\langle m | \frac{dH}{dt} |n\rangle}{E_n - E_m}. \quad (1.5)$$

Como la evolución de  $H$  es adiabática, el término de la derecha de la ecuación anterior es despreciable, por lo que lo podemos ignorar de (1.4). Al hacer esto obtenemos:

$$\dot{C}_m \approx -C_m \langle m | \frac{d}{dt} |m\rangle. \quad (1.6)$$

Notemos que las ecuaciones anteriores están desacopladas para estados con diferentes índices. Lo anterior implica que si el sistema inicialmente se encuentra en el estado  $|\psi_0\rangle = |m(0)\rangle$ , el sistema no hará una transición a algún estado  $|n\rangle$  con  $n$  distinto a  $m$ . En este caso, usando la ecuación anterior, es inmediato que la solución es:

$$\begin{aligned} C_n(t) &= 0 \quad \text{si } n \neq m, \\ C_m(t) &= e^{-\int_0^t \langle m | \frac{d}{dt} |m\rangle du}. \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación anterior y (1.1), obtenemos la expresión:

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\alpha_n(t)} e^{-\int_0^t \langle m | \frac{d}{dt} |m\rangle du} |m\rangle. \quad (1.7)$$

Como  $|m\rangle$  siempre está normalizado,  $-\int_0^t \langle m | \frac{d}{dt} |m\rangle du$  es un término puramente imaginario. Por lo anterior, lo podemos escribir como  $i\gamma$ , donde  $\gamma$  es un número

real y corresponde a una fase que ha adquirido el sistema respecto a  $|m(t)\rangle$  diferente a la fase dinámica. Esta fase  $\gamma$  escrita explícitamente es:

$$\gamma(t) = i \int_0^t \langle m | \frac{d}{dt} | m \rangle du. \quad (1.8)$$

Un caso de especial interés es el caso en el que la curva  $\xi$  en el espacio de los parámetros es una curva cerrada, es decir, el Hamiltoniano  $H$  evoluciona de manera cíclica en un tiempo  $T$ . Si inicialmente el sistema se encuentra en el estado  $|\psi_0\rangle = |m(0)\rangle$  después de un ciclo, el sistema deberá regresar al estado  $|m(0)\rangle$  salvo por una fase. Usando (1.7) obtenemos:

$$|\psi(T)\rangle = e^{i\alpha_n(T)} e^{i\gamma(T)} |m(T)\rangle, \quad (1.9)$$

por lo que la fase que adquiere el sistema es:

$$e^{i\alpha_n(T)} e^{i\gamma(T)} \langle m(0) | m(T) \rangle.$$

La fase anterior tiene 2 partes. La fase  $\alpha_n(T)$  es la fase dinámica y a la fase debida al término  $e^{i\gamma(T)} \langle m(0) | m(T) \rangle$  se le conoce como fase geométrica o fase de Berry[3]. En el caso en el que la elección de los vectores  $|m\rangle$  no presente holonomía, es decir,  $|m(T)\rangle = |m(0)\rangle$ , la expresión para la fase geométrica se reduce simplemente a  $\gamma(T)$ . La fase  $\gamma(T)$  se puede interpretar en términos geométricos. Recordemos que  $H$  está cambiando en el tiempo debido a que una serie de parámetros externos  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  están variando a lo largo de una curva  $\xi$  en el espacio de los parámetros. En cada punto de la curva  $\xi$  tomamos un conjunto completo de eigenvectores a los que llamamos  $|n\rangle$ . Lo anterior significa que aunque  $|n\rangle$  depende del tiempo,  $|n\rangle$  en el fondo sólo depende del punto en el espacio de los parámetros, el cual, a su vez, depende del tiempo. Digamos que escribimos los puntos de la curva  $\xi$  como  $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_s(t))$ . Calculando  $\frac{d}{dt} |m\rangle$  en términos de los parámetros externos, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} |m\rangle = \sum_{i=1}^s \frac{d\lambda_i}{dt} \frac{d}{d\lambda_i} |m\rangle,$$

por lo que, usando (1.8):

$$\begin{aligned} \gamma(T) &= i \int_0^T \langle m | \frac{d}{dt} | m \rangle dt = i \int_0^T \sum_{j=1}^s \frac{d\lambda_j}{dt} \langle m | \frac{d}{d\lambda_j} | m \rangle dt \\ &= i \int_{\xi} \sum_{j=1}^s \langle m | \frac{d}{d\lambda_j} | m \rangle d\lambda_j. \end{aligned} \quad (1.10)$$

En el desarrollo anterior se supuso que la elección de los vectores  $|n\rangle$  se hizo no sólo en la curva  $\xi$ , sino en un abierto que la contenga (para poder calcular las derivadas respecto a  $\lambda_i$ ). El desarrollo anterior quiere decir que la fase  $\gamma$  es integrar una 1-forma a lo largo de la curva  $\xi$ . Esto en particular quiere decir que la fase geométrica sólo depende de la curva  $\xi$  en el espacio de los parámetros y no de la forma en la que  $\xi$  es recorrida. Como esta fase geométrica es una

propiedad física del sistema no puede depender de la elección de los vectores  $|n\rangle$ , ni de la forma de dar coordenadas al espacio de los parámetros, (aunque en la expresión de la 1-forma en (1.10) parezca que sí) por lo que la fase geométrica en verdad sólo depende de la curva  $\xi$  en el espacio de los parámetros. Aunque en este desarrollo se supuso que el espectro de  $H$  era no degenerado, la idea anterior se puede generalizar a Hamiltonianos que si presentan degeneración[9].

## 1.2. Fases geométricas y haces fibrados

Al igual que en la sección anterior, consideremos un Hamiltoniano  $H$  no degenerado que depende de un conjunto de parámetros  $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$  y supongamos que se está cambiando el valor de estos siguiendo una curva  $\xi$  en el espacio de los parámetros. Llamemos  $\xi_a$  y  $\xi_b$  a los extremos inicial y final de  $\xi$ . En cada punto de algún abierto que contenga a la curva  $\xi$  tomemos un conjunto ortonormal de eigenvectores  $|m\rangle$  con eigenvalores  $E_m$ , de tal forma que estos varíen de manera continua. Si algún sistema inicialmente se encuentra en el estado  $|m\rangle_{\xi_a}$  y la curva  $\xi$  se recorre de manera adiabática, al terminar de recorrer la curva  $\xi$  el sistema estará, en virtud de (1.9), en el estado  $e^{-i\alpha_m(t)} e^{i\gamma_\xi} |m\rangle_{\xi_b}$ , donde  $\gamma_\xi$  cumple que (derivando (1.8)):

$$\dot{\gamma}_\xi = i \langle m | \frac{d}{dt} | m \rangle.$$

Así, ignorando la fase dinámica, la evolución adiabática la podemos pensar como una función que al vector  $|m\rangle_{\xi_a}$  le asocia el vector  $e^{i\gamma_\xi} |m\rangle_{\xi_b}$ . Si tomamos una curva  $\xi' \neq \xi$  con los mismos puntos extremos, la asociación anterior no tiene por qué ser la misma, por lo que la asociación depende de la curva  $\xi$  y no solo de los puntos extremos. Lo anterior sugiere que esta asociación se puede escribir en términos de algún haz fibrado con alguna conexión[8]. El desarrollo de la presente sección está basado principalmente en [5, Sección 2.2.4] y [8].

Dado un punto  $\lambda$  en el espacio de los parámetros, llamemos  $F_\lambda$  al conjunto de todos los eigenvectores unitarios de  $H(\lambda)$  con eigenvalor  $E_m$ . Como  $H(\lambda)$  no tiene degeneración, dos vectores en  $F_\lambda$  sólo difieren por una fase, por lo que los diferentes  $F_\lambda$  son homeomorfos entre sí, y son homeomorfos a  $U(1)$ , el círculo de radio 1 en el plano complejo. Consideremos al haz fibrado  $E$  que tiene como espacio base al espacio de los parámetros, como fibra a  $U(1)$  y sus puntos se pueden escribir como  $(\lambda, |n\rangle)$  con  $|n\rangle$  en  $F_\lambda$  y  $\lambda$  en el espacio de los parámetros. En este contexto, tomarnos una elección de vectores  $|m\rangle$  en un abierto es tomarnos una sección de  $E$ .

Definamos ahora una conexión en este haz. Para definir una conexión, básicamente lo que hay que hacer es definir un conjunto de vectores horizontales en cada punto de  $E$ . Dada una curva  $\tilde{\xi}$  en  $E$ , esta induce naturalmente una curva tanto en el espacio de los estados  $|n\rangle$  como en el espacio de los parámetros. Si la curva es  $\tilde{\xi}(t) = (\lambda(t), |n(t)\rangle)$ , la curva inducida en el espacio de los estados es  $|n(t)\rangle$ . Si la curva inicia en  $\tilde{\xi}(0)$  con vector tangente  $h_0$ , decimos que  $h_0$  es horizontal si y solo si  $|\dot{n}(0)\rangle$  es ortogonal a  $|n(0)\rangle$ , es decir,

$$\langle n(0) | \dot{n}(0) \rangle = 0. \quad (1.11)$$

La conexión dada por los vectores horizontales definidos por (1.11) es conocida como conexión de Berry.

Veamos como son los levantamientos horizontales de la conexión de Berry. Tomemos una curva  $\xi$  en el espacio de los parámetros, un vector  $|m\rangle$  en  $F_\lambda$  en cada punto de algún abierto que incluya a  $\xi$  (es decir, una sección) y el levantamiento horizontal de  $\xi$ , al que llamaremos  $\tilde{\xi}$ . Escribamos a  $\tilde{\xi}$  de la siguiente forma,  $\tilde{\xi}(t) = (\lambda(t), |n'(t)\rangle)$ . Como dos vectores en  $F_{\lambda(t)}$  sólo difieren por una fase, podemos escribir  $|m'(t)\rangle = e^{i\gamma(t)}|m(t)\rangle$ . Como el levantamiento  $\tilde{\xi}$  es horizontal,  $|m'(t)\rangle$  tiene que ser horizontal, por lo que usando (1.11), la ecuación diferencial que tiene que cumplir  $\gamma(t)$  es:

$$\dot{\gamma} = i\langle n | \frac{d}{dt} | n \rangle,$$

que es igual a la ecuación (1.2) que cumple  $\gamma_\xi$ . Así, si un Hamiltoniano no degenerado evoluciona adiabáticamente según una curva  $\xi$  en el espacio de los parámetros, y si el sistema está inicialmente en un eigenestado  $|m\rangle$ , al terminar de recorrer la curva  $\xi$  el estado en el que estará el sistema será (salvo una fase dinámica) el mismo que se obtiene al transportar paralelamente al estado  $|m\rangle$  a lo largo de  $\xi$  con la conexión de Berry.

### 1.3. Una partícula con espín 1/2 en un campo magnético

El Hamiltoniano correspondiente a una partícula con espín 1/2 en un campo magnético  $\mathbf{B}$  es:

$$H(t) = \frac{\lambda\hbar}{2}\mathbf{B}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

donde  $\lambda$  es una constante con las unidades correctas para que se pueda dar la igualdad, y  $\boldsymbol{\sigma}$  es el operador vectorial cuyas componentes son las matrices de Pauli,  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ . Usando la notación estándar, denotaremos como  $|+\rangle$  y  $|-\rangle$  a los eigenvectores de  $\sigma_z$  con eigenvalores 1 y  $-1$  respectivamente. Estos eigenvectores son base del espacio de Hilbert del espín. El único parámetro externo en este problema es el campo magnético  $\mathbf{B}$ , es decir, en el fondo  $H$  depende de  $\mathbf{B}$ , lo que hace que el espacio de parámetros sea  $\mathbb{R}^3$ .

A cualquier estado  $|\psi\rangle$  en el espacio de Hilbert del espín, le podemos asociar un vector en  $\mathbb{R}^3$  de la siguiente forma,  $|\psi\rangle \rightarrow \langle\psi|\boldsymbol{\sigma}|\psi\rangle$ . Dado un vector  $\mathbf{A}$  de  $\mathbb{R}^3$ , el estado  $|\psi\rangle$  es un eigenestado con eigenvalor positivo de  $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  si y solo si  $\langle\psi|\boldsymbol{\sigma}|\psi\rangle = \alpha\mathbf{A}$  con  $\alpha > 0$ . En este caso diremos que  $|\psi\rangle$  está alineado con  $\mathbf{A}$ . De la misma manera, si  $|\psi\rangle$  es un eigenestado de  $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  con eigenvalor negativo, diremos que  $\mathbf{A}$  y  $|\psi\rangle$  están anti-alineados. Dado un vector  $\mathbf{A} = A(\cos(\phi)\sin(\theta), \sin(\phi)\sin(\theta), \cos(\theta))$ , los estados alineados con  $\mathbf{A}$  son (salvo por una fase)<sup>1</sup>:

$$|\hat{n}_+\rangle = \cos(\theta/2)|+\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|-\rangle, \quad (1.12)$$

con eigenvalor (del operador  $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ ):

$$E_+ = A, \quad (1.13)$$

mientras que los estados anti-alineados con  $\mathbf{A}$  son (salvo por una fase):

$$|\hat{n}_-\rangle = \sin(\theta/2)|+\rangle - e^{i\phi}\cos(\theta/2)|-\rangle, \quad (1.14)$$

<sup>1</sup>Véase [7, Capítulo 1, problema 9]

con eigenvalor:

$$E_- = -A. \quad (1.15)$$

Al espacio de los parámetros, que es  $\mathbb{R}^3$ , le podemos dar coordenadas esféricas  $r = B$ ,  $\theta$  y  $\phi$ . Para cualquier punto  $\mathbf{B}$  en el espacio de los parámetros con coordenadas esféricas  $(B, \theta, \phi)$ , elegimos al estado alineado con  $\mathbf{B}$  dado por (1.12), el cual es un eigenestado de  $H(\mathbf{B})$  con eigenenergía (usando (1.13)):

$$E_{\mathbf{B}+} = \frac{\lambda B \hbar}{2}. \quad (1.16)$$

Notemos que sólo  $\theta$  y  $\phi$  son de relevancia para la elección de los estados  $|\hat{n}+\rangle$ , por lo que el espacio de parámetros efectivo es una esfera, aun en el caso en que la magnitud  $B$  no es constante.

Supongamos que la evolución de  $H(t)$  es adiabática, que el campo magnético sigue una curva cerrada  $\xi$  en la esfera en un tiempo  $T$  y que el estado inicial del espín  $|\psi_0\rangle$  está alineado con  $\mathbf{B}(0)$ . Con estas hipótesis, en virtud del teorema adiabático, el espín se mantendrá alineado con  $\mathbf{B}(t)$  para cualquier tiempo  $t$  posterior. Esto lo podemos ver de manera intuitiva de la siguiente forma. Primero escribimos al vector  $\mathbf{B}$  como  $\mathbf{B} = B\hat{n}$  con  $\hat{n}$  un vector unitario. Ahora, calculemos la derivada temporal del valor esperado del operador  $\sigma_i$ :

$$\frac{d}{dt}\langle\sigma_i\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[H, \sigma_i]\rangle = \sum_{j,k} \lambda B \hat{n}_j \langle\sigma_k\rangle \epsilon_{ijk}.$$

La igualdad anterior implica que:

$$\frac{d}{dt}\langle\sigma\rangle = \lambda B \hat{n} \times \langle\sigma\rangle. \quad (1.17)$$

En palabras, la igualdad anterior dice que instantáneamente lo que hace el vector  $\langle\sigma\rangle$  es rotar alrededor del vector  $\hat{n}$  con frecuencia angular  $\lambda B$ , mientras que el vector  $\hat{n}$  también está cambiando. Como en el tiempo  $t = 0$  el vector  $\hat{n}$  y el espín están alineados, para que el espín se pueda mantener alineado con  $\hat{n}$ , geoméricamente es claro que la frecuencia con la que va cambiando  $\hat{n}$  debe ser mucho menor que la frecuencia con la que gira  $\langle\sigma\rangle$  alrededor de  $\hat{n}$ , es decir, se debe dar la siguiente desigualdad:

$$\omega_0 \ll \lambda B, \quad (1.18)$$

donde  $\omega_0$  es una frecuencia característica con la que va cambiando  $\hat{n}$ . La ecuación anterior se conoce como condición de adiabaticidad<sup>2</sup>.

Calculemos ahora la fase geométrica  $\gamma$ . La elección (1.12) de los estados  $|\hat{n}+\rangle$  es continua en toda la esfera salvo en los polos norte y sur. Como teníamos que elegir estos vectores en toda la curva  $\xi$ , supondremos que la curva  $\xi$  no pasa por ningún polo. Claramente, lo anterior es posible eligiendo el eje  $\hat{z}$  adecuadamente. Como la curva  $\xi$  no pasa por los polos, la elección de los estados  $|\hat{n}+\rangle$  regresará sin holonomía, por lo que usando (1.10) obtenemos:

$$\gamma = - \int_{\xi} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\phi = \frac{1}{2} \int_{\xi} (\cos(\theta) - 1) d\phi. \quad (1.19)$$

<sup>2</sup>Otra manera de obtener esta desigualdad es aplicar directamente las condición de adiabaticidad estudiada en la sección1, que la frecuencia característica (multiplicada por  $\hbar$ ) con la que varia  $\hat{n}$ ,  $\hbar\omega_0$ , sea mucho menor que la diferencia entre las dos eigenenergías distintas,  $\hbar\lambda B$  (por las ecuaciones (1.13) y (1.15)).

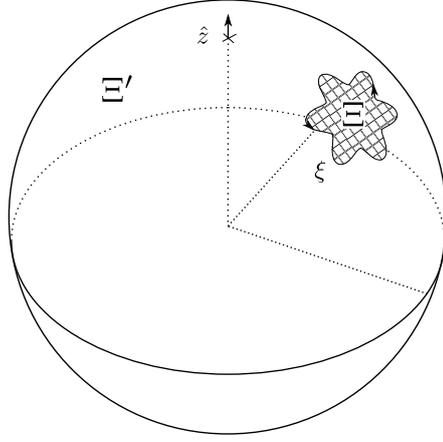


Figura 1.1: La fase geométrica cuando el campo magnético  $B$  sigue la curva  $\xi$  es  $-1/2$  del área de la región  $\Xi$

Si calculamos la derivada exterior de la 1-forma  $(\cos(\theta) - 1)d\phi$ , y aplicamos el teorema de Stokes obtenemos que:

$$\gamma = -\frac{1}{2} \int_{\Xi} \sin(\theta) d\theta \wedge d\phi, \quad (1.20)$$

donde  $\Xi$  es una de las 2 superficies en la esfera que tiene como frontera a la curva  $\xi$ . Como la 2-forma  $\sin(\theta)d\theta \wedge d\phi$  es la forma de área de la esfera, la fase geométrica sólo depende del área encerrada por la curva  $\xi$  y vale menos la mitad de esta área. Esta situación se ilustra en la figura 1.1.

Dada una curva  $\xi$  en la esfera, existen dos superficies distintas que tienen como frontera a la curva  $\xi$ . Aunque en general, dichas superficies tienen diferente área, para calcular la fase geométrica nos podemos tomar a cualquiera de las dos superficies. Para ver que esto en efecto ocurre, volvamos a la figura 1.1. Si llamamos  $A$  al área de la región  $\Xi$ , el área de la otra superficie con frontera  $\xi$ ,  $\Xi'$ , será  $4\pi - A$ . Notemos que debido a la orientación de la curva  $\xi$ , la orientación de  $\Xi$  será positiva, mientras que la orientación de  $\Xi'$  será negativa. Así, al integrar la 2-forma de (1.20) en la superficie  $\Xi$ , el resultado será  $-A/2$ , mientras que en la superficie  $\Xi'$  será  $-A/2 + 2\pi$ . Ambos resultados difieren sólo por  $2\pi$ , lo cual en términos de fases es irrelevante. Por lo tanto, la fase geométrica será simplemente  $-A/2$ , donde  $A$  es el área de cualquier superficie que tiene como frontera a  $\xi$  (tomando en cuenta orientación).

La fase dinámica es (usando (1.2) y (1.16)):

$$\alpha_+ = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T E_{\mathbf{B}+} dt = -\frac{\lambda}{2} \int_0^T B dt. \quad (1.21)$$

Notemos que la fase geométrica no depende de  $B$ , mientras que la fase dinámica sólo depende de  $B$ .

En lo que resta de la sección, aplicaremos los resultados obtenidos para el caso en el que el campo magnético rota lentamente alrededor del eje  $\hat{z}$  con

velocidad angular constante  $\omega$  y magnitud constante  $B = B_0$ . Si llamamos  $\theta$  al ángulo que forma el campo magnético con el eje  $\hat{z}$ , y suponemos que inicialmente el campo magnético se encuentra en el plano  $XZ$ , la ecuación que cumple  $B(t)$  es:

$$\mathbf{B}(t) = B_0 \hat{n}(t) = B_0 (\cos(\omega t) \sin(\theta), \sin(\omega t) \sin(\theta), \cos(\theta)),$$

por lo que el Hamiltoniano  $H$  es:

$$H = \frac{\lambda \hbar}{2} B_0 (\cos(\omega t) \sin(\theta), \sin(\omega t) \sin(\theta), \cos(\theta)) \cdot \sigma. \quad (1.22)$$

En este caso, la trayectoria que sigue el vector  $\hat{n}(t)$  tiene periodo  $T = 2\pi/\omega$ . Evidentemente, la frecuencia característica con la que varía  $\hat{n}$  es  $\omega$ , así que la condición de adiabaticidad (1.18) se reduce a:

$$\omega \ll \lambda B_0. \quad (1.23)$$

La ecuación de Schrödinger con el Hamiltoniano (1.22) se puede resolver de manera analítica definiendo la transformación:

$$\begin{aligned} R(t) &= e^{-i\omega t \frac{\sigma_z}{2}}, \\ |\psi(t)\rangle &= R(t)|\phi(t)\rangle. \end{aligned} \quad (1.24)$$

La transformación  $R(t)$  corresponde a una rotación en el espacio del espín<sup>3</sup>, lo que corresponde físicamente a poner el sistema de referencia en el “sistema de referencia que rota con el campo magnético”. Usando la ecuación de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle$$

y (1.24), obtenemos que el Hamiltoniano  $H'$  que dicta la evolución de  $|\phi(t)\rangle$  es:

$$H' = R^{-1} H R - i\hbar R^{-1} \frac{dR}{dt}, \quad (1.25)$$

el cual, desarrollando un poco de álgebra, se reduce a:

$$H' = \frac{\lambda \hbar}{2} B_0 \left( \sin(\theta), 0, \cos(\theta) - \frac{\omega}{\lambda B_0} \right) \cdot \sigma = \frac{\lambda \hbar}{2} M \hat{m} \cdot \sigma, \quad (1.26)$$

donde

$$M = B_0 \sqrt{1 - 2 \cos(\theta) \left( \frac{\omega}{\lambda B_0} \right) + \left( \frac{\omega}{\lambda B_0} \right)^2} \quad \text{y} \quad \hat{m} = \frac{B_0}{M} \left( \sin(\theta), 0, \cos(\theta) - \frac{\omega}{\lambda B_0} \right).$$

Notemos que  $H'$  es independiente del tiempo y es el Hamiltoniano de una partícula con espín 1/2 en un campo magnético efectivo  $M\hat{m}$ . La solución es:

$$|\phi(t)\rangle = e^{-i\lambda M t \frac{\hat{m} \cdot \sigma}{2}} |\phi(0)\rangle,$$

es decir, la evolución del estado  $|\phi(0)\rangle$  es rotar alrededor del eje  $\hat{m}$  con velocidad angular  $\lambda M$ . Para que la evolución de  $|\phi(0)\rangle$  sea de periodo  $T$ , es necesario que

<sup>3</sup>Para una discusión sobre los operadores de rotación en el espacio del espín, véase [7, Sección 3.1].

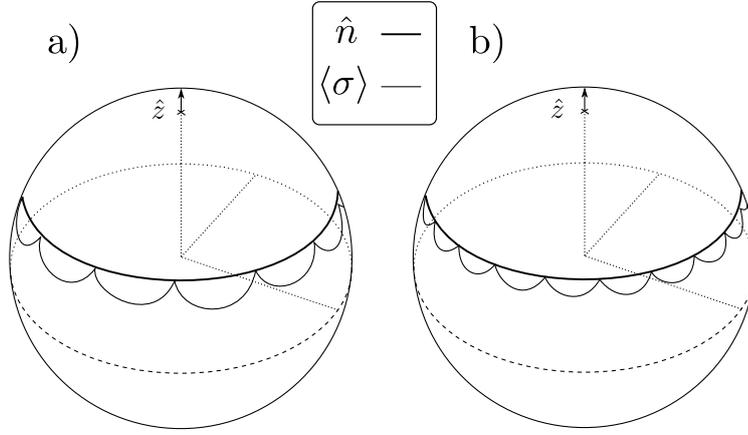


Figura 1.2: Comparación de las trayectorias de  $\langle \sigma \rangle$  y  $\hat{n}$  para diferentes valores de  $\omega/(\lambda B_0)$ . a)  $\theta = \pi/3, \omega/(\lambda B_0) \approx 0.074$ ; b)  $\theta = \pi/3, \omega/(\lambda B_0) \approx 0.048$ .

el número de vueltas alrededor del eje  $\hat{m}$  en este tiempo sea un número entero. Por lo tanto, se necesita que:

$$(\lambda M)(T) = 2\pi k,$$

donde  $k$  es un número entero. Sustituyendo la igualdad  $T = 2\pi/\omega$  y la expresión para  $M$  obtenemos que la condición para que  $|\phi(t)\rangle$  (y por lo tanto la de  $|\psi(t)\rangle$ ), pues por (1.24),  $R(T) = -I$  sea cíclica es:

$$\frac{\sqrt{1 - 2 \cos(\theta) \left(\frac{\omega}{\lambda B_0}\right) + \left(\frac{\omega}{\lambda B_0}\right)^2}}{\frac{\omega}{\lambda B_0}} = k. \quad (1.27)$$

En la figura 1.2 se graficaron dos trayectorias cíclicas de  $\langle \sigma \rangle$  para diferentes valores de  $\omega/(\lambda B_0)$ . Claramente, podemos observar que mientras más chico sea este cociente, más cercana es la trayectoria de  $\langle \sigma \rangle$  a la de  $\hat{n}(t)$ .

Como ya se discutió, la fase geométrica después de que el campo magnético de una vuelta será, en este caso, menos la mitad del ángulo sólido encerrado por la curva que sigue el campo magnético. Así, usando (1.19) llegamos a que la fase geométrica después de una vuelta es:

$$\gamma = -2\pi \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pi(\cos(\theta) - 1). \quad (1.28)$$

El resultado anterior es independiente de  $\omega$ , ya que  $\omega$  sólo tiene información de como recorrió  $\hat{n}$  la curva cerrada, y no de la curva en sí. Usando (1.21), la fase dinámica es :

$$\gamma_{din} = -\frac{1}{\hbar} \int_0^{2\pi} E_{\mathbf{B}^+} dt = -\lambda B_0 \left(\frac{\pi}{\omega}\right).$$

La expresión anterior tiene un polo cuando  $\omega \rightarrow 0$ . Esto no es un caso particular de este problema, ya que en general la fase dinámica va como energía por tiempo,

y en el caso adiabático,  $T \rightarrow \infty$ . Esta propiedad distingue a las fases dinámicas de las geométricas en el límite adiabático. En general, la fase geométrica son los términos que no dependen de  $\omega$ , y la fase dinámica tiene polos en  $\omega$ .

## 1.4. Fase de Aharonov-Anandan

Para definir la fase geométrica, necesitábamos un Hamiltoniano que evolucionara adiabáticamente, y un sistema que inicialmente estuviera en un eigenestado de dicho Hamiltoniano. La fase Aharonov-Anandan es una generalización de la fase geométrica en el sentido en que no pediremos que el Hamiltoniano  $H$  evolucione adiabáticamente, su evolución puede ser cualquiera, y el estado inicial no tiene que ser eigenestado del Hamiltoniano [2]. El desarrollo de la presente sección está basado principalmente en [2], [5, Sección 5.2.1] y [5, Sección 5.2.3].

Consideremos un Hamiltoniano  $H$  y un estado inicial  $|\psi_0\rangle$  tales que la evolución temporal de  $|\psi_0\rangle$  según  $H_A$  es cíclica, es decir,

$$|\psi(T)\rangle = e^{i\gamma_T} |\psi_0\rangle. \quad (1.29)$$

La curva dada por los estados  $|\psi(t)\rangle$  en el espacio de Hilbert de los estados no es cerrada, ya que no regresa al estado inicial. Para obtener una curva cerrada, podemos considerar al espacio de los operadores de proyección unidimensionales  $\mathcal{P}$ , es decir,  $\mathcal{P}$  es el conjunto de todos los operadores  $|\phi\rangle\langle\phi|$  con  $|\phi\rangle$  un estado normalizado. Dado un estado normalizado  $|\phi\rangle$ , le podemos asociar el operador de proyección  $|\phi\rangle\langle\phi|$ . Claramente dos estados difieren por una fase si y solo si el operador de proyección asociado a ambos es el mismo. Por lo anterior, la curva dada por los operadores  $|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$  es una curva cerrada en  $\mathcal{P}$ . Lo que haremos a continuación será separar a la fase  $\gamma_T$  en 2 partes, una que sea análoga a la fase dinámica y otra que sólo dependa de esta curva cerrada en  $\mathcal{P}$ .

La evolución del estado  $|\psi_0\rangle$  está dada por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar|\dot{\psi}(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle.$$

Consideremos ahora un Hamiltoniano  $H'$  dado por la expresión  $H' = H + a(t)$  donde  $a(t)$  es solamente un número real que depende del tiempo. Es claro que la solución  $|\psi'(t)\rangle$  para la ecuación de Schrödinger con  $H'$  será:

$$|\psi'(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t a(u) du} |\psi(t)\rangle. \quad (1.30)$$

Como  $|\psi(t)\rangle$  y  $|\psi'(t)\rangle$  sólo difieren por una fase, la curva definida por los estados  $|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$  será igual a la curva dada por  $|\psi'(t)\rangle\langle\psi'(t)|$ . Si elegimos a la función  $a(t)$  de manera correcta, podemos hacer que la curva parametrizada como  $|\psi'(t)\rangle$  en el espacio de Hilbert de los estados sí sea una curva cerrada. Más en específico, lo que tiene que cumplir  $a(t)$  es (usando (1.29) y (1.30)):

$$\frac{1}{\hbar} \int_0^T a(t) dt = \gamma_T.$$

Como  $|\psi'(t)\rangle$  es solución a la ecuación de Schrödinger con el Hamiltoniano  $H'$ , tenemos que:

$$i\hbar|\dot{\psi}'(t)\rangle = (H + a(t))|\psi'(t)\rangle.$$

Haciendo el producto interno con el estado  $\langle\psi'(t)|$ , reordenando e integrando de 0 a  $T$  obtenemos que:

$$\gamma_T = \frac{1}{\hbar} \int_0^T a(t) dt = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T \langle\psi'(t)|H|\psi'(t)\rangle dt + i \int_0^T \langle\psi'(t)|\dot{\psi}'(t)\rangle dt. \quad (1.31)$$

Como los estados  $|\psi(t)\rangle$  y  $|\psi'(t)\rangle$  sólo difieren por una fase por construcción, se cumple la igualdad  $\langle\psi'(t)|H|\psi'(t)\rangle = \langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle$ . Al término

$$\alpha = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T \langle\psi'(t)|H|\psi'(t)\rangle dt = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T \langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle dt, \quad (1.32)$$

se le conoce como fase dinámica, por ser análoga a la fase dinámica definida anteriormente en (1.2), y al término

$$\gamma = i \int_0^T \langle\psi'(t)|\dot{\psi}'(t)\rangle dt, \quad (1.33)$$

se le conoce como fase de Aharonov-Anandan. Usando (1.31), obtenemos:

$$\gamma = \gamma_T - \alpha, \quad (1.34)$$

por lo que la fase de Aharonov-Anandan es la fase total  $\gamma_T$  entre el estado inicial y el final menos la fase dinámica. Ahora veremos que la fase de Aharonov-Anandan sólo depende de la curva dada por los estados  $|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$  en  $\mathcal{P}$ . Para ver esto, tomemos una curva cerrada parametrizada como  $|\phi(t)\rangle$  en el espacio de estados físicos tal que se de la igualdad  $|\psi'(t)\rangle\langle\psi'(t)| = |\phi(t)\rangle\langle\phi(t)|$ , es decir, ambas curvas inducen la misma curva en  $\mathcal{P}$ . Lo anterior implica la igualdad  $|\phi(t)\rangle = e^{i\beta(t)}|\psi'(t)\rangle$  para alguna fase  $\beta(t)$ . Como ambas curvas regresan al estado inicial después del tiempo  $T$ , se tiene la igualdad  $\beta(0) = \beta(T)$ . En la figura 1.3 se ilustra esquemáticamente la relación entre las curvas dadas por los estados  $|\psi(t)\rangle$ ,  $|\psi'(t)\rangle$  y  $|\phi(t)\rangle$ . Calculemos ahora la siguiente integral:

$$\begin{aligned} i \int_0^T \langle\phi(t)|\dot{\phi}(t)\rangle dt &= i \int_0^T \langle\psi'(t)|\dot{\psi}'(t)\rangle dt - \int_0^T \beta'(t) dt \\ &= i \int_0^T \langle\psi'(t)|\dot{\psi}'(t)\rangle dt - \beta(t) \Big|_0^T = i \int_0^T \langle\psi'(t)|\dot{\psi}'(t)\rangle dt = \gamma, \end{aligned}$$

por lo que la fase de Aharonov-Anandan se puede calcular como

$$\gamma = i \int_0^T \langle\phi(t)|\dot{\phi}(t)\rangle dt,$$

donde los estados  $|\phi(t)\rangle$  son tales que los operadores  $|\phi(t)\rangle\langle\phi(t)|$  y  $|\psi'(t)\rangle\langle\psi'(t)|$  son iguales, y los estados  $|\phi(t)\rangle$  no tiene por qué tener información alguna sobre el Hamiltoniano  $H$ .

Para escribir lo anterior en términos de haces fibrados, la elección natural para el espacio base es  $\mathcal{P}$  y como fibra todos los estados que tienen asociados

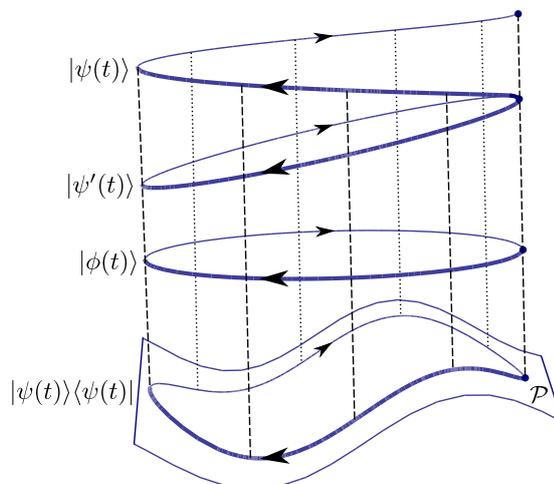


Figura 1.3: Relación entre las curvas dadas por  $|\psi(t)\rangle$ ,  $|\psi'(t)\rangle$  y  $|\phi(t)\rangle$ . Las tres curvas inducen la misma curva en el espacio  $\mathcal{P}$ .

al mismo operador de proyección en  $\mathcal{P}$ . El haz fibrado anterior tiene como fibra a  $U(1)$ , y sus puntos se pueden escribir como  $(P, |\psi\rangle)$  donde  $P = |\psi\rangle\langle\psi|$ . La conexión que le damos a este haz es análoga a la que se dio en el caso de fase de Berry. Decimos que el vector  $h = (\dot{P}, |\dot{\psi}\rangle)$  es horizontal si y solo  $\langle\psi|\dot{\psi}\rangle = 0$ . Usando la conexión anterior se puede demostrar que la fase Aharonov-Anandan se puede calcular haciendo un transporte paralelo a lo largo de una curva<sup>4</sup> en  $\mathcal{P}$ .

## 1.5. Una partícula con espín 1/2 en un campo magnético estocástico

Consideremos el Hamiltoniano  $H$  (1.22), es decir, el Hamiltoniano de un campo magnético con magnitud constante  $B_0$ , que forma un ángulo  $\theta_0$  con el eje  $\hat{z}$  y rota alrededor de éste con frecuencia angular  $\omega$  acoplado con un espín. El Hamiltoniano es:

$$H = \frac{\lambda\hbar}{2} \mathbf{B}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{\lambda\hbar}{2} B_0 (\cos(\omega t) \sin(\theta_0), \sin(\omega t) \sin(\theta_0), \cos(\theta_0)) \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

En este caso, si la evolución es adiabática, la fase geométrica no es más que menos la mitad del ángulo sólido que encierra el campo magnético al dar una vuelta en un tiempo  $T = 2\pi/\omega$ . Lo anterior experimentalmente es imposible de realizar, ya que el campo magnético siempre se verá afectado por algún ruido externo. Llamemos  $\epsilon\mathbf{K}(t)$  al campo magnético debido a este ruido. Supongamos que este ruido es pequeño en comparación de  $\mathbf{B}_0$ , es decir,  $\epsilon K(t) \ll B_0$  (con  $K(t)$  la magnitud del vector  $\mathbf{K}(t)$ ). También supongamos  $\mathbf{K}(t)$  tiene como valor promedio en el tiempo  $T$  el vector cero, y que las diferentes componentes de  $\mathbf{K}$  son independientes entre sí. Geométricamente es claro que el área que encierra

<sup>4</sup>Véase [5, Sección 5.2.3]

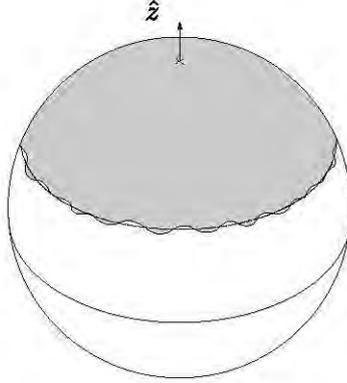


Figura 1.4: La línea punteada es la trayectoria que sigue la dirección del campo magnético sin ruido, y la línea continua la que sigue la dirección del campo magnético estocástico. Las áreas que encierran ambas son muy parecidas.

el campo magnético total  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \epsilon \mathbf{K}$  es muy similar a la que encierra  $\mathbf{B}_0$  (figura 1.4).

Calculemos la fase geométrica en el caso en el que está presente este ruido externo. El Hamiltoniano  $H$  es:

$$H(t) = \frac{\lambda \hbar}{2} (\mathbf{B}_0(t) + \epsilon \mathbf{K}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Supongamos que aunque hay ruido, el Hamiltoniano sí regresa al estado original después de el tiempo  $T$ . Usando (1.19),

$$\gamma = \frac{1}{2} \int_{\xi} (\cos(\theta) - 1) d\phi = \frac{1}{2} \int_0^T (\cos(\theta) - 1) \dot{\phi} dt, \quad (1.35)$$

donde  $\xi$  es la curva determinada por la dirección del campo magnético total  $\mathbf{B}$ ,  $\theta$  y  $\phi$  son las coordenadas esféricas de  $\mathbf{B}$ . Es importante recordar que para calcular la fase geométrica en este problema en particular, la magnitud de  $\mathbf{B}$  es irrelevante. En el caso en que no hubiera ruido,  $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ , por lo que en un tiempo arbitrario  $t$ , el campo magnético total tendría coordenadas esféricas ( $\theta_0 \equiv \text{cte}$ ,  $\phi_0(t) = \omega t$ ). Como  $\epsilon \mathbf{K}$  es pequeño en comparación de  $\mathbf{B}_0$ , obtendremos que en un tiempo  $t$  el campo magnético tendrá coordenadas esféricas ( $\theta = \theta_0 + \delta\theta$ ,  $\phi = \phi_0 + \delta\phi$ ), con  $\delta\phi$  y  $\delta\theta$  mucho menores que  $\phi_0$  y  $\theta_0$  respectivamente.

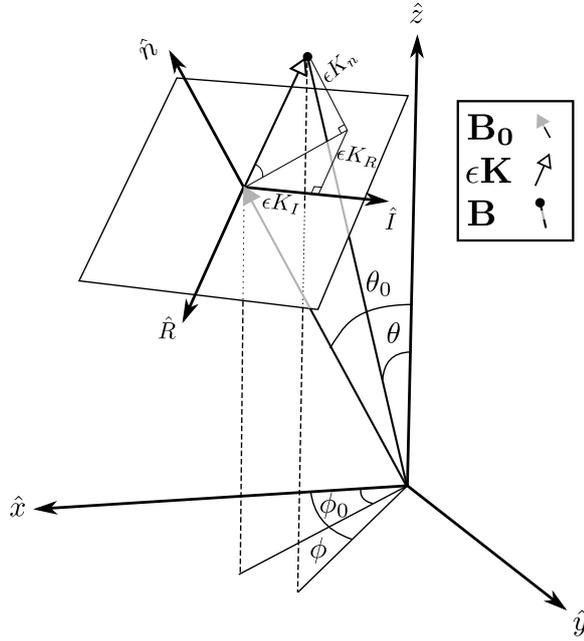
Calculemos  $\gamma$  de (1.35) hasta orden  $O(\epsilon^2)$ . Para esto, definimos los siguientes vectores:

$$\hat{R}(t) = (\cos(\phi_0(t)) \cos(\theta_0), \sin(\phi_0(t)) \cos(\theta_0), -\sin(\theta_0)), \quad (1.36)$$

$$\hat{I}(t) = (-\sin(\phi_0(t)), \cos(\phi_0(t)), 0), \quad (1.37)$$

$$\hat{n}(t) = (\cos(\phi_0(t)) \sin(\theta_0), \sin(\phi_0(t)) \sin(\theta_0), \cos(\theta_0)). \quad (1.38)$$

Los vectores  $\hat{R}(t)$ ,  $\hat{I}(t)$  y  $\hat{n}(t)$  forman una base ortogonal derecha, y son simplemente el resultado de rotar la base  $\hat{R}(0)$ ,  $\hat{I}(0)$ ,  $\hat{n}(0)$  alrededor del eje  $\hat{z}$  un

Figura 1.5: Representación de los vectores  $\hat{R}, \hat{I}, \hat{n}$ 

ángulo  $\omega t$ . En la figura 1.5 se muestran estos vectores para un cierto tiempo  $t$ . Si escribimos a los vectores  $\mathbf{B}_0$  y  $\mathbf{K}$  en términos de esta base, obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_0 &= B_0 \hat{n}, \\ \epsilon \mathbf{K} &= \epsilon (K_R \hat{R} + K_I \hat{I} + K_n \hat{n}).\end{aligned}$$

En términos de esta base, si calculamos  $\cos(\theta)$  obtenemos: (calculando  $\mathbf{B} \cdot \hat{z}$  y despejando  $\cos(\theta)$ <sup>5</sup>),

$$\cos(\theta) = \cos(\theta_0) - \epsilon \left( \frac{K_R \sin(\theta_0)}{B_0} \right) + \epsilon^2 \left( \frac{2K_R K_n \sin(\theta_0) - \cos(\theta_0)(K_R^2 + K_I^2)}{2B_0^2} \right) + O(\epsilon^3). \quad (1.39)$$

Si proyectamos al vector  $\mathbf{B}$  en el plano  $XY$ , podemos calcular el ángulo  $\phi$ . En este caso, obtenemos que el ángulo es :

$$\phi = \phi_0 + \epsilon \left( \frac{K_I}{B_0 \sin(\theta_0)} \right) - \epsilon^2 \left( \frac{K_R K_I \cos(\theta_0) + K_I K_n \sin(\theta_0)}{\sin^2(\theta_0) B_0^2} \right) + O(\epsilon^3). \quad (1.40)$$

De la expresión anterior, es inmediato calcular  $\dot{\phi}$ .

Si sustituimos las expresiones anteriores de  $\cos(\theta)$  y  $\dot{\phi}$  en (1.35), y hacemos manipulaciones algebraicas obtenemos la siguiente expresión :

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{2} \int_0^T (\cos(\theta_0) - 1) \omega dt + \epsilon \int_0^T (L_R K_R + L_I \dot{K}_I) dt + \frac{\epsilon^2 \omega \sin(\theta_0)}{2B_0^2} \int_0^T K_n K_R dt \\ &\quad - \frac{\epsilon^2 \omega \cos(\theta_0)}{4B_0^2} \int_0^T (K_R^2 + K_I^2) dt + \epsilon^2 \sum_{i \neq j} \int_0^T T_{i,j} K_i \dot{K}_j dt + O(\epsilon^3),\end{aligned} \quad (1.41)$$

<sup>5</sup>Véase el Apéndice A.1, para el desarrollo algebraico de las siguientes ecuaciones.

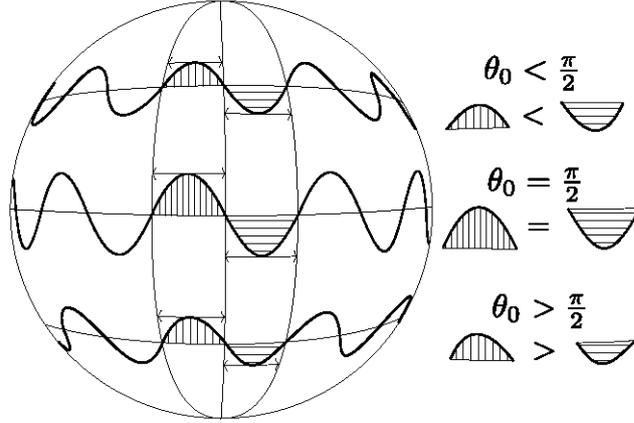


Figura 1.6: Comparación entre los aumentos y disminución de áreas para diferentes valores de  $\theta_0$ .

donde  $L_i$  y  $T_{i,j}$  están definidos por las siguientes expresiones :

$$\begin{aligned} L_R &= -\frac{\omega \sin(\theta_0)}{2B_0}, & L_I &= -\frac{\tan(\frac{\theta_0}{2})}{B_0^2}, & T_{I,n} &= T_{n,I} = \frac{\tan(\frac{\theta_0}{2})}{B_0^2} \\ T_{R,I} &= -\frac{\sec^2(\frac{\theta_0}{2})}{4B_0^2}, & T_{I,R} &= \frac{\cot(\theta_0) \tan(\frac{\theta_0}{2})}{2B_0^2}, & T_{n,R} &= T_{R,n} = 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Como podemos notar, las cantidades  $L_i$  y  $T_{i,j}$  no dependen de  $t$ , por lo que pueden salir de sus respectivas integrales en (1.41).

Claramente, la primera integral de (1.41) es la fase geométrica estándar del sistema si no hubiera ruido externo. Como  $\mathbf{K}$  es aleatorio, el valor promedio de sus componentes (y de sus derivadas) son cero, lo que garantiza que la segunda integral es cero. Debido a la independencia entre las componentes de  $\mathbf{K}$ , el valor promedio del producto de 2 componentes distintas es 0, por lo que la tercera y la última integral también son cero. Así, las únicas integrales no nulas son la primera y la cuarta, por lo que obtenemos el siguiente resultado:

$$\gamma = \frac{1}{2} \int_0^T (\cos(\theta_0) - 1) \omega dt - \frac{\epsilon^2 \cos(\theta_0)}{4B_0^2} \int_0^T (K_R^2 + K_I^2) \omega dt + O(\epsilon^3). \quad (1.43)$$

En la expresión anterior, no hay correcciones<sup>6</sup> de orden  $O(\epsilon)$ . Esto implica que la variación de la fase geométrica, si hay ruido externo, es poca para ruidos externos pequeños comparados con el campo  $\mathbf{B}_0$ . También podemos notar que el término de orden  $O(\epsilon^2)$  va multiplicado por un factor de  $-\cos(\theta_0)$ . Geométricamente, es claro que este factor debería aparecer. Como la fase geométrica es proporcional al área encerrada por la curva en la esfera que sigue  $\mathbf{B}(t)$ , si  $\theta_0 = \pi/2$  la reducción en el área cuando  $\theta < \theta_0$  exactamente compensará el aumento de área cuando  $\theta > \theta_0$ , por lo que no habrá corrección a la fase geométrica. De manera análoga,

<sup>6</sup>La idea general de la presente sección se basó en [6], aunque los cálculos correspondientes se realizaron de manera distinta. En [6] el cálculo se realizó hasta orden  $O(\epsilon^1)$ , mientras que aquí se hizo hasta orden  $O(\epsilon^2)$ .

si  $\theta_0 < \pi/2$ , la disminución del área cuando  $\theta < \theta_0$  será menor que el aumento de área si  $\theta > \theta_0$ , lo que hará que haya un aumento en el área encerrada. Por lo anterior, la fase geométrica disminuye (pues es proporcional a menos el área). Análogamente, si  $\theta_0 > \pi/2$ , la fase geométrica aumenta. El comportamiento anterior es obtenido en la expresión (1.43) gracias al factor de  $-\cos(\theta_0)$ , el cual es negativo si  $\theta_0 < \pi/2$ , es cero si  $\theta_0 = \pi/2$  y es positivo si  $\theta_0 > \pi/2$ . Este razonamiento se ilustra en la figura 1.6.

## Capítulo 2

# Fase geométrica de una partícula con espín 1/2 en un “campo magnético cuántico”

### 2.1. Definición de “campo magnético cuántico”

En el capítulo anterior, se vio como se comportaba la fase geométrica de una partícula con espín 1/2 en un campo magnético clásico y en un campo magnético clásico estocástico. Lo que se hará a continuación será definir lo que es un “campo magnético cuántico” y se estudiará el comportamiento de la fase geométrica en este caso.

Ya discutimos que cuando un campo magnético interactúa con un espín, el Hamiltoniano de la interacción está dado por:

$$H = \frac{\lambda\hbar}{2} B \cdot \sigma, \quad (2.1)$$

donde  $B$  es un vector en  $\mathbb{R}^3$ , por lo que tiene una dirección bien definida, aún en el caso en el que el campo sea estocástico. Para modelar un “campo magnético cuántico” que no tenga una dirección bien definida, sino que tenga una incertidumbre cuántica, se sustituirá al campo magnético  $B$  de (2.1) por un operador vectorial  $A$  cuyas componentes no necesariamente conmuten entre sí. Para tener cierta independencia entre el campo magnético y el espín, se trabajará en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_T$  que sea el producto tensorial de dos espacios de Hilbert ortogonales entre sí  $\mathcal{H}_p$  y  $\mathcal{H}_s$ , de forma que se de la igualdad  $\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_s$ . Al espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_s$  lo llamaremos espacio del espín y es el espacio de Hilbert del espín que queremos que interactúe con el “campo magnético cuántico” y a  $\mathcal{H}_p$  lo llamaremos espacio de la partícula, que puede ser el espacio de Hilbert de una partícula en  $\mathbb{R}^3$  o incluso el espacio de Hilbert de otro espín.

Genéricamente, los estados de  $\mathcal{H}_T$  se pueden escribir como una combinación lineal de estados  $|\psi\rangle \otimes |\psi_s\rangle$ , donde  $|\psi\rangle$  es un estado en el espacio de la partícula, y  $|\psi_s\rangle$  es un estado en el espacio del espín. De manera análoga, los operadores

se pueden escribir como combinación lineal de operadores  $A \otimes B$ . En el caso de que un operador se pueda escribir como  $A \otimes I$  o  $I \otimes B$  (con  $I$  la identidad) escribiremos al operador simplemente como  $A$  o como  $B$  respectivamente. Con esta notación, el operador  $\sum_i A_i \otimes \sigma_i$  se puede escribir de manera compacta como  $A \cdot \sigma$ .

Así, para estudiar la fase geométrica debida a la interacción de un “campo magnético cuántico” con una partícula con espín  $1/2$ , analizaremos la ecuación de Schrödinger con el siguiente Hamiltoniano  $H$  que actúa sobre los estados del espacio  $\mathcal{H}_T$ :

$$\left. \begin{array}{l} H = H_A + \frac{\lambda \hbar}{2} A \cdot \sigma, \\ \text{con estado inicial} \\ |\Psi_0\rangle = |\psi_0\rangle \otimes |\hat{n}_0^+\rangle, \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

donde  $H_A$  es un Hamiltoniano que actúa solamente en el espacio de la partícula  $\mathcal{H}_p$ ,  $|\psi_0\rangle$  es un estado tal que su evolución temporal según  $H_A$ ,  $|\psi_t\rangle$ , es cíclica con periodo  $T$  salvo por una fase  $\gamma_A$  y  $|\hat{n}_0^+\rangle$  es un estado en el espacio del espín alineado con  $\mathcal{A}_0$ , donde

$$\mathcal{A}_t = \langle \psi_t | A | \psi_t \rangle. \quad (2.3)$$

Si llamamos  $|\Psi_t\rangle$  a la solución de la ecuación de Schrödinger basada en (2.2), se tiene que (en analogía con (1.17)):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \sigma_i \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle [H, \sigma_i] \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H_A + \frac{\lambda \hbar}{2} \mathbf{A} \cdot \sigma, \sigma_i] \rangle = \frac{i\lambda}{2} \langle [\mathbf{A} \cdot \sigma, \sigma_i] \rangle \\ &= \sum_{j,k} \langle A_j \rangle \langle \sigma_i \rangle \epsilon_{ijk}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

En la ecuación anterior, los valores esperados son tomados respecto al estado  $|\Psi_t\rangle$ . Esta ecuación implica que:

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma \rangle = \lambda \langle A \rangle \times \langle \sigma \rangle. \quad (2.5)$$

Al igual que en el caso clásico, lo que hace el valor esperado del espín instantáneamente es rotar alrededor del vector  $\langle A \rangle$ , lo que sugiere que de alguna manera el valor esperado del espín “verá” un campo magnético  $\langle A \rangle$ .

Finalmente, supongamos que el valor esperado del término  $(\lambda \hbar / 2) A \cdot \sigma$  es despreciable en comparación del de  $H_A$ . En este caso, la interacción espín-campo magnético casi no afecta a la partícula, por lo que la evolución en el espacio de Hilbert de la partícula será cercana a  $|\psi_t\rangle$ . A la condición anterior la llamaremos condición de indiferencia, es decir, a la partícula casi no le afecta la presencia del espín. También supongamos que la evolución de  $\mathcal{A}_t$  es adiabática, de tal forma que el espín se mantenga alineado con  $\mathcal{A}_t$ . A esta condición le llamamos condición de adiabaticidad. Así, después de el tiempo  $T$ , el sistema total (salvo pequeñas correcciones) volverá al estado inicial salvo una fase. Esta fase tendrá dos partes. Una parte será una fase dinámica, y la otra será una fase geométrica. Ésta a su vez tendrá tres partes. Una es la fase geométrica que adquiriría el sistema si el campo magnético fuera clásico, otra es la fase geométrica de  $\gamma_A$  (según Aharonov-Anandan (1.34)) y la última parte será lo

que denominaremos corrección cuántica, la cual es debida a que  $A$  no es un vector simplemente, sino que es un operador.

Las propiedades y definiciones descritas en esta sección sobre  $A$ ,  $H_A$ ,  $|\psi_t\rangle$ ,  $\gamma_A$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $T$ ,  $|\hat{n}_0\rangle$  y  $|\Psi_t\rangle$  se utilizarán en las siguientes secciones sin repetirlos.

En las siguientes secciones calcularemos esta corrección cuántica para diferentes Hamiltonianos  $H_A$  y estados  $|\psi_0\rangle$ . Como primer caso obtendremos esta corrección si  $H_A$  es el Hamiltoniano de un oscilador armónico tridimensional, y  $|\psi_0\rangle$  es un estado coherente del oscilador, por lo que primero estudiaremos las propiedades del oscilador armónico y de los estados coherentes.

## 2.2. Estados coherentes de un oscilador armónico

El Hamiltoniano de un oscilador armónico 1-dimensional se puede escribir como:

$$H = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right),$$

donde  $a$  y  $a^\dagger$  son los operadores de escalera de los eigenestados del Hamiltoniano del oscilador. Decimos que un estado es un estado coherente del oscilador si es eigenvector del operador  $a$ . El espectro de  $a$  es no degenerado, y es todo  $\mathbb{C}^1$ . Si denotamos como  $|\alpha\rangle$  a algún eigenestado de  $a$  con eigenvalor  $\alpha$ , resolviendo la ecuación de eigenvalores directamente llegamos a que  $|\alpha\rangle$  se puede escribir como<sup>2</sup>:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle,$$

donde  $|0\rangle$  es el estado base del oscilador. Si inicialmente el sistema se encuentra en el estado  $|\psi_0\rangle = |\alpha\rangle$  con  $\alpha$  en  $\mathbb{C}$ , resolviendo la ecuación de Schrödinger directamente, obtenemos que la solución es<sup>3</sup>:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\omega}{2}t} |e^{-i\omega t}\alpha\rangle.$$

La solución anterior es difícil de interpretar físicamente, por lo que conviene reescribir  $|\alpha\rangle$  de otra manera. Si aprovechamos que  $e^{-\alpha^* a} |0\rangle = |0\rangle$ , y usamos que  $e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$  (fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff<sup>4</sup>), llegamos a:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} |0\rangle = e^{\text{Re}(\alpha)(a^\dagger - a) + i\text{Im}(\alpha)(a^\dagger + a)} |0\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}(\sqrt{2}\text{Re}(\alpha)r_0)P + \frac{i}{\hbar}(\sqrt{2}\text{Im}(\alpha)p_0)X} |0\rangle, \end{aligned}$$

donde  $X$  es el operador de posición,  $P$  es el operador de momento,  $r_0$  es el ancho del estado base en el espacio de las posiciones,  $r_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$  y  $p_0$  es el ancho del estado base en el espacio de los momentos,  $p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}$ . Así, está claro que el estado  $|\alpha\rangle$  se obtiene al aplicarle una traslación al estado base de  $\sqrt{2}\text{Re}(\alpha)r_0$  en el espacio de las posiciones, y de  $\sqrt{2}\text{Im}(\alpha)p_0$  en el espacio de los momentos.

<sup>1</sup>Para consultar las propiedades aquí utilizadas sobre estados coherentes, véase [4, Complemento G<sub>V</sub>].

<sup>2</sup>Véase [4, Complemento G<sub>V</sub>, ecuación 41].

<sup>3</sup>Véase [4, Complemento G<sub>V</sub>, ecuación 92].

<sup>4</sup>Véase [4, Complemento B<sub>II</sub>, ecuación 63].

Si inicialmente el sistema está en el estado  $|\psi_0\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\rho P}|0\rangle$ , (es decir, está en el estado base desplazado una distancia  $\rho$ ), por la fórmula anterior,

$$|\psi_0\rangle = \left| \frac{\rho}{\sqrt{2r_0}} \right\rangle,$$

por lo que

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i\omega}{2}t} \left| e^{-i\omega t} \frac{\rho}{\sqrt{2r_0}} \right\rangle \\ &= e^{-\frac{i\omega}{2}t} e^{-\frac{i}{\hbar}(\cos(\omega t)\rho)P + \frac{i}{\hbar}(-\sin(\omega t)\rho m\omega)X} |0\rangle. \end{aligned}$$

La expresión anterior quiere decir que la evolución de  $|\psi_0\rangle$  es básicamente una traslación del estado base de  $\rho \cos(\omega t)$  en el espacio de las posiciones y de  $-m\omega\rho \sin(\omega t)$  en el espacio de los momentos. En particular, lo anterior significa que el estado no cambiará su forma en ninguno de estos dos espacios. Esta evolución es análoga a la de un oscilador armónico clásico, en el sentido que la magnitud de la traslación en ambos espacios que se le aplica al estado base coincide con la posición y momento de la partícula si el oscilador fuera clásico. En la figura 2.1 se muestra gráficamente esta evolución.

Si al estado base le aplicamos una traslación de  $\rho$  en el espacio de las posiciones y de  $q$  en el espacio de los momentos, la evolución del oscilador armónico será básicamente aplicarle traslaciones al estado base para que su evolución sea análoga al del oscilador armónico clásico con condiciones iniciales  $X(0) = \rho$ ,  $P(0) = q$ . Por esta razón se dice que la evolución de los estados coherentes es muy parecida a la de un estado clásico.

Si consideramos ahora un oscilador armónico tridimensional, como los espacios de  $X, Y, Z$  son ortogonales entre sí, no habrá interferencia entre ellos, por lo que lo anterior seguirá siendo válido. Es decir, si al estado base tridimensional le aplicamos una traslación de  $\vec{\rho}$  en el espacio de las posiciones junto a una traslación de  $\vec{q}$  en el espacio de los momentos, el sistema evolucionará como si el oscilador fuera clásico con condiciones iniciales  $\vec{x}(0) = \vec{\rho}$ ,  $\vec{p}(0) = \vec{q}$ .

### 2.3. Primer modelo de un “campo magnético cuántico”

Tomemos como  $H_A$  al Hamiltoniano de un oscilador armónico isotrópico tridimensional (al espacio físico le damos coordenadas cartesianas  $X, Y, Z$ ) con posición de equilibrio en  $(0, 0, h)$ , donde  $h$  es un escalar constante, es decir,

$$H_A = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}X^2 + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}Y^2 + \frac{P_z^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(Z - h)^2. \quad (2.6)$$

Como estado  $|\psi_0\rangle$  tomemos al estado coherente que se obtiene al desplazar al estado base del oscilador tridimensional (si la posición de equilibrio de éste estuviera en el origen) una distancia  $r$  en el espacio de las posiciones en  $X$ , un momento  $m\omega r$  en el espacio de los momentos en  $P_Y$  y una distancia  $h$  en  $Z$ . Por lo discutido en la sección anterior,  $|\psi_t\rangle$  básicamente se obtendrá al trasladar el centro de la Gaussiana del estado base a lo largo de una trayectoria circular de radio  $r$  y velocidad angular  $\omega$  en el plano  $XY$ , mientras que el centro

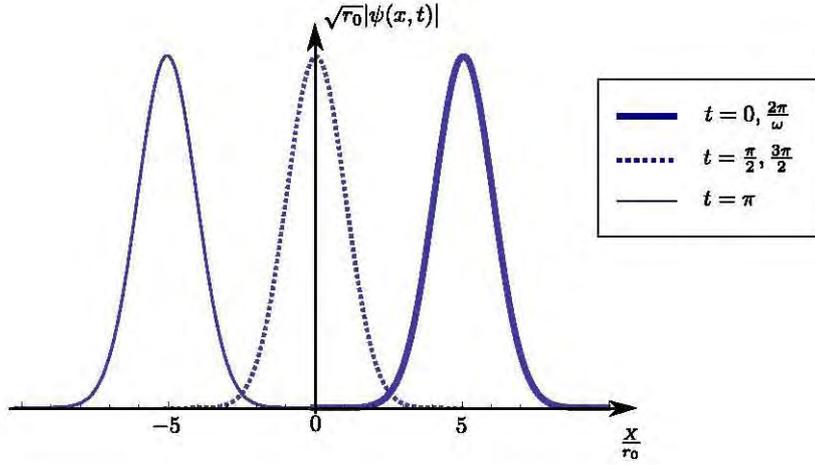


Figura 2.1: Evolución del estado coherente que se obtiene al trasladar el estado base una distancia  $\rho = 5r_0$ .

de la Gaussiana en  $Z$  no se moverá debido a que se encuentra en la posición de equilibrio del oscilador. De esta manera, si tomamos como operador  $A$  al operador  $A = (X, Y, Z)$ , es inmediato que la trayectoria de  $\mathcal{A}_t$  es la de un círculo de radio  $r$  en el plano  $Z = h$ , la cual es análoga a la trayectoria descrita por el campo magnético clásico de la sección 1.3, es decir:

$$\mathcal{A}_t = (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t), h). \quad (2.7)$$

Así, el estado inicial en  $\mathcal{H}_p$ ,  $|\psi_0\rangle$ , es explícitamente:

$$|\psi_0\rangle = \tau|0\rangle, \quad (2.8)$$

donde

$$\tau = e^{-\frac{i}{\hbar}rP_x} e^{\frac{i}{\hbar}m\omega rY} e^{-\frac{i}{\hbar}hP_z}, \quad (2.9)$$

y  $|0\rangle$  es el estado base del oscilador armónico tridimensional con posición de equilibrio en el origen.

Si calculamos  $|\psi_t\rangle$  analíticamente, obtenemos que tiene periodo  $T = 2\pi/\omega$ , y que  $\gamma_A$  es  $\pi$ . En el espacio del espín,  $\mathcal{H}_s$ , tomamos como estado inicial al siguiente estado alineado con  $\mathcal{A}_0$ ,

$$|\hat{n}_0+\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle. \quad (2.10)$$

En la figura 2.2 se ilustra el estado inicial  $|\Psi_0\rangle$ , junto con las definiciones de  $\theta$  y  $\rho$ . Así, queremos resolver la ecuación de Schrödinger basada en (2.2) con  $H_A$ ,  $|\psi_0\rangle$  y  $|\hat{n}_0+\rangle$  definidos como en (2.6), (2.8) y (2.10).

En este problema hay varios parámetros que podemos modificar,  $\theta$  y  $\rho$  en el estado inicial  $|\Psi_0\rangle$  y  $m, \omega$  y  $\lambda$  en el Hamiltoniano  $H_A$ . Para poder calcular la corrección a la fase geométrica, es necesario escribir explícitamente las condiciones que tienen que cumplir estos parámetros para que se cumplan las condiciones de adiabaticidad e indiferencia descritas en la sección 2.1. Lo primero que supondremos, es que  $\theta$  es genérico, en otras palabras, que  $\rho, h$  y  $r$  son todos del mismo

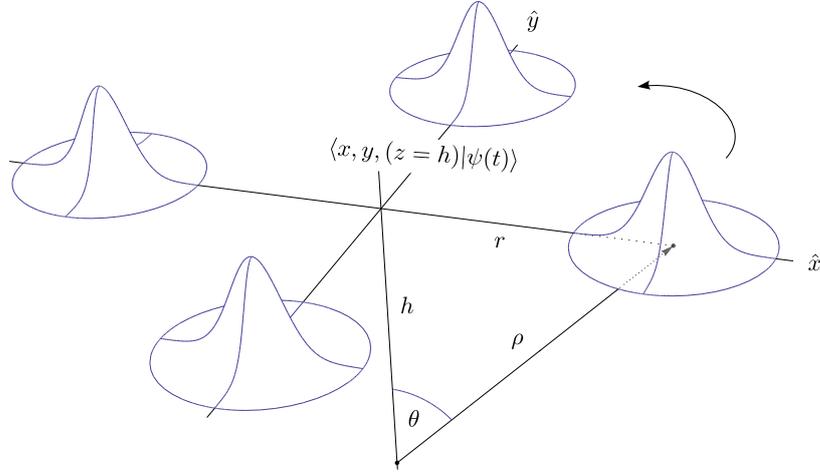


Figura 2.2: Estado inicial  $|\Psi_0\rangle$ . En la figura también se muestra la evolución de  $|\psi_0\rangle$  según  $H_A$ .

orden de magnitud. Si pensamos en términos clásicos, la partícula está sujeta a dos fuerzas, una de ellas es debida al “resorte” del oscilador, y la otra es debida a la interacción de la partícula con el espín. Clásicamente, para obtener la fuerza de un Hamiltoniano, hay que calcular las derivadas parciales respecto a  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ . Calculando dichas derivadas del Hamiltoniano  $H_A$  obtenemos que la fuerza debida al “resorte” es:

$$m\omega^2(X, Y, Z - h) = k(X, Y, Z - h), \quad (2.11)$$

donde  $k$  es la constante del “resorte” del oscilador. Para que haya indiferencia, es necesario que  $|\Psi_t\rangle$  en el espacio de la partícula sea cercano a  $|\psi_t\rangle$ , por lo que el valor esperado de la magnitud de la fuerza debida al “resorte”,  $F_{\text{resorte}}$ , será cercano a:

$$F_{\text{resorte}} \approx k |\langle \psi_t | (X, Y, Z - h) | \psi_t \rangle| = kr |(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)| = kr \approx k\rho.$$

Análogamente, podemos notar que la magnitud de la fuerza debida a la interacción del espín con la partícula,  $F_{\text{s-p}}$ , será del siguiente orden:

$$F_{\text{s-p}} \approx \frac{\lambda\hbar}{2},$$

cantidad que no depende de  $\rho$ . Para que se dé la condición de indiferencia, necesitamos que  $F_{\text{s-p}} \ll F_{\text{resorte}}$ . Así la condición de indiferencia es:

$$\lambda\hbar \ll k\rho. \quad (2.12)$$

Si definimos

$$\epsilon^2 = \frac{\lambda\hbar}{k\rho} \quad (2.13)$$

es claro que tomar  $\epsilon \ll 1$  garantiza que se cumple la condición de indiferencia.

Si se cumple la condición de indiferencia (2.12), como  $\mathcal{A}_t$  describe una trayectoria circular, esperamos que las condiciones para que el espín pueda seguir a este

“campo magnético” coincidan con las de un sistema con un campo magnético clásico rotando alrededor del eje  $\hat{z}$  como lo hace  $\mathcal{A}_t$ . Usando (1.23), la condición de adiabaticidad es (notando que en este caso el “campo magnético” tiene magnitud  $\lambda\rho$ ):

$$\omega \ll \lambda\rho. \quad (2.14)$$

Si definimos

$$\xi^2 = \frac{\omega}{\lambda\rho}, \quad (2.15)$$

la condición de adiabaticidad se cumple al pedir que  $\xi \ll 1$ . De la expresión anterior podemos notar que el término  $\lambda\rho$  tiene unidades de frecuencia. Si llamamos  $\Omega = \lambda\rho$ , de (1.17), es claro que  $\Omega$  es la frecuencia con la que giraría el espín alrededor de un campo magnético si el campo magnético fuera el vector  $\mathcal{A}_t$ .

Llamemos  $r_0$  al ancho en el espacio de las posiciones del estado base (que es el mismo que el ancho de cualquier estado coherente). Notemos que (usando (2.13) y (2.15)):

$$\epsilon\xi = \sqrt{\frac{\omega}{\Omega}} \sqrt{\frac{\lambda\hbar}{k\rho}} = \sqrt{\frac{\omega}{\lambda\rho} \frac{\lambda\hbar}{m\omega^2\rho}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega} \frac{1}{\rho}} = \frac{r_0}{\rho},$$

La expresión anterior implica que  $r_0/\rho \ll 1$ . Si el espín está interactuando con este “campo magnético cuántico”, como la posición de la partícula no está bien definida sino que tiene una incertidumbre (sigue una distribución Gaussiana tridimensional centrada en  $\mathcal{A}_t$ ), intuitivamente es como si el espín estuviera interactuando con una infinidad de campos magnéticos clásicos, los cuales apuntarán principalmente a los puntos ubicados dentro del ancho de la Gaussiana  $r_0$ , por lo que el cociente  $r_0/\rho$  es la incertidumbre angular de la dirección del campo magnético vista desde el espín, la cual será pequeña según la ecuación anterior.

A continuación, resolveremos la ecuación de Schrödinger de manera perturbativa, y obtendremos la fase total que adquiere el sistema después de un ciclo. Como ya se discutió en la sección 1.3, la fase geométrica estará formada por los términos de la fase total que no dependen de  $\omega$ , mientras que la fase dinámica estará dada por los polos en  $\omega$ . Por lo tanto, para poder distinguir a la fase geométrica, es necesario establecer las relaciones que tienen los parámetros  $m$ ,  $\lambda$ , y  $\rho$  con  $\omega$  de tal manera que se cumplan las condiciones de indiferencia (2.12) y de adiabaticidad (2.14). Las relaciones que utilizaremos son:

$$\begin{aligned} m\omega^2 &= k = \text{cte}, \\ \frac{\lambda\hbar}{k} &\ll \rho \text{ indiferencia}, \\ \frac{\omega}{\lambda} &\ll \rho \text{ adiabaticidad}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$\rho$  y  $\lambda$  son independientes de  $\omega$ .

Como el Hamiltoniano  $H$  no tiene información sobre  $\rho$  (ésta se encuentra contenida en el estado inicial del sistema  $|\Psi_0\rangle$ ) lo que se hará será aplicar una transformación  $R(t)$  para que en el nuevo Hamiltoniano transformado  $H'$  sí aparezca  $\rho$  explícitamente. La transformación  $R(t)$  está dada por la igualdad:

$$R(t) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}H_A t} \tau \otimes e^{\frac{i\omega \cos(\theta)t}{2}} e^{-\frac{i\omega t}{2}\sigma_z}, \quad (2.17)$$

donde la traslación  $\tau$  está definida por la ecuación (2.9). Como se cumple la condición de indiferencia, la evolución del sistema,  $|\Psi_t\rangle$ , en el espacio de la partícula será cercana a  $e^{-\frac{i}{\hbar}H_A t}|\psi_0\rangle$  que se puede reescribir como  $e^{-\frac{i}{\hbar}H_A t}\tau|0\rangle$  usando (2.8). Como se cumple la condición de adiabaticidad, el espín, salvo pequeñas correcciones, se mantendrá alineado con el vector  $\mathcal{A}_t$ . Definimos

$$|\hat{n}_t+\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}\sigma_z}|\hat{n}_0+\rangle, \quad (2.18)$$

el cual es un estado alineado con  $\mathcal{A}_t$  (pues  $\mathcal{A}_0$  y  $|\hat{n}_0+\rangle$  están rotando de la misma manera). Así en el espacio del espín,  $|\Psi_t\rangle$  será (salvo una fase dinámica) cercano a  $e^{i\gamma_s}e^{-\frac{i\omega t}{2}\sigma_z}|\hat{n}_0+\rangle$ , donde (usando (1.8))

$$\gamma_s(t) = i \int_0^t \langle \hat{n}_u+ | \frac{d}{dt} | \hat{n}_u+ \rangle du = \omega \cos(\theta)t/2. \quad (2.19)$$

Tomando en cuenta lo anterior, si definimos a  $|\Phi_t\rangle$  según la siguiente ecuación:

$$|\Psi_t\rangle = R(t)|\Phi_t\rangle. \quad (2.20)$$

tendremos que  $|\Phi_t\rangle$  será cercano al estado  $|\Phi_0\rangle = |0\rangle \otimes |\hat{n}_0+\rangle$ . La evolución de  $|\Phi_t\rangle$  estará dada por un Hamiltoniano transformado  $H'$  el cual cumple la ecuación (1.25). Calculemos  $H'$ . Usando (2.17) llegamos a que:

$$-i\hbar R^{-1} \frac{dR}{dt} = -R^{-1}H_A R - \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\omega}{2}\cos(\theta),$$

por lo que el término  $R^{-1}H_A R$  de (1.25) se elimina y llegamos a que:

$$H' = \frac{\lambda\hbar}{2}R(X, Y, Z) \cdot \sigma R^{-1} - \frac{\hbar\omega}{2}(\sigma_z - \cos(\theta)). \quad (2.21)$$

Definimos  $X(t) \equiv e^{\frac{i}{\hbar}H_A t} X e^{-\frac{i}{\hbar}H_A t} = X \cos(\omega t) + \frac{P_x}{m\omega} \sin(\omega t)$  (la evolución del operador  $X$  según  $H_A$  en la imagen de Heisenberg)<sup>5</sup>. Análogamente definimos los operadores  $Y(t)$  y  $Z(t)$ . Calculando  $H'$  explícitamente, y escribiéndolo matricialmente:

$$H' = \frac{\lambda\hbar}{2} \begin{pmatrix} Z(t) & (X(t) - iY(t))e^{i\omega t} \\ (X(t) + iY(t))e^{-i\omega t} & -Z(t) \end{pmatrix} + \frac{\lambda\hbar\rho}{2}\hat{n}_0 \cdot \sigma - \frac{\hbar\omega}{2}(\sigma_z - \cos(\theta)),$$

Notemos que el término  $\frac{\lambda\hbar\rho}{2}\hat{n}_0 \cdot \sigma$  corresponde al Hamiltoniano de un campo magnético constante de magnitud  $\lambda\hbar\rho/2$  acoplado con el espín. Como  $|\Psi_t\rangle$  es cercano al estado base, los valores esperados de los operadores  $X(t)$ ,  $Y(t)$  y  $Z(t)$  son del orden de  $r_0$ , el ancho de la Gaussiana del estado coherente. Para que sea más sencillo hacer teoría de perturbaciones, es conveniente trabajar con operadores que tengan valor esperado de orden de uno, por lo que definimos:  $x(t) = \frac{1}{r_0}X(t)$  ( $y(t)$  y  $z(t)$  son definidos de manera análoga). Escribiendo  $H'$  en términos de  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$  llegamos a:

$$H' = \frac{\lambda\hbar r_0}{2} \begin{pmatrix} z(t) & (x(t) - iy(t))e^{i\omega t} \\ (x(t) + iy(t))e^{-i\omega t} & -z(t) \end{pmatrix} + \frac{\lambda\hbar\rho}{2}\hat{n}_0 \cdot \sigma - \frac{\hbar\omega}{2}(\sigma_z - \cos(\theta)).$$

<sup>5</sup>De la misma manera,  $P_x(t) = P \cos(\omega t) - m\omega \sin(\omega t)$ . Véase [7, Ecuaciones 2.3.45a y 2.3.45b].

Finalmente, escribiendo todo en términos de  $\epsilon$  (2.13) y  $\xi$  (2.15) obtenemos:

$$H' = \hbar \left( \underbrace{\frac{\Omega}{2}(\hat{n}_0) \cdot \sigma}_{\equiv H_0} + \xi \underbrace{\frac{\epsilon\Omega}{2} \begin{pmatrix} z(t) & (x(t) - iy(t))e^{i\omega t} \\ (x(t) + iy(t))e^{-i\omega t} & -z(t) \end{pmatrix}}_{\equiv V(t)} + \xi^2 \underbrace{\left( -\frac{\Omega}{2}(\sigma_z - \cos(\theta)) \right)}_{\equiv Q} \right). \quad (2.22)$$

Como  $|\Phi_0\rangle = |0\rangle \otimes |\hat{n}_+\rangle$ , se tiene que:

$$H_0|\Phi_0\rangle = \frac{\Omega}{2}|\Phi_0\rangle, \quad (2.23)$$

por lo que  $|\Phi_0\rangle$  es eigenvector de  $H_0$  con eigenvalor  $\frac{\Omega}{2}$ . Ahora procedemos a hacer teoría de perturbaciones dependiente del tiempo respecto a  $\xi$ . Como  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ ,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  tienen valor esperado de orden 1,  $\xi V(t)$  y  $\xi^2 Q$  en verdad tendrán valor esperado de orden  $\xi$  y  $\xi^2$  respectivamente.

El siguiente procedimiento para extraer la fase geométrica, está basado en [1]. Si escribimos a la solución  $|\Phi_t\rangle$  como:

$$|\Phi_t\rangle = e^{-iH_0 t} U(t) |\Phi_0\rangle, \quad (2.24)$$

y usamos la ecuación de Schrödinger con el Hamiltoniano  $H'$ , obtenemos que  $U$  cumple la ecuación:

$$\dot{U}(t) = -i(\xi \tilde{V}(t) + \xi^2 \tilde{Q}(t)) U(t), \quad (2.25)$$

donde  $\tilde{V}(t) = e^{iH_0 t} V(t) e^{-iH_0 t}$ , y  $\tilde{Q}(t) = e^{iH_0 t} Q e^{-iH_0 t}$ .

Integrando la ecuación anterior de 0 a  $t$ , con la condición inicial  $U(0) = 1$ , e iterando el resultado obtenemos:

$$U(t) = 1 - i\xi \int_0^t dt_1 \tilde{V}(t_1) - \xi^2 \left( \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \tilde{V}(t_1) \tilde{V}(t_2) + i \int_0^t dt_1 \tilde{Q}(t_1) \right) + O(\xi^3), \quad (2.26)$$

Para calcular la fase entre el estado inicial y el estado final, tenemos que calcular el producto interno  $\langle \Phi_0 | \Phi_T \rangle$ . Desarrollando este producto ,

$$\langle \Phi_0 | \Phi_T \rangle = \langle \Phi_0 | e^{-iH_0 T} U(T) | \Phi_0 \rangle = e^{-\frac{i\Omega}{2} T} \langle \Phi_0 | U(T) | \Phi_0 \rangle. \quad (2.27)$$

Claramente el término  $e^{-\frac{i\Omega}{2} T}$  corresponde a una fase dinámica, que no contribuye a la fase geométrica.

Por linealidad del producto interior, y usando que  $T = 2\pi/\omega$  llegamos a que:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0 | U(T) | \Phi_0 \rangle = & 1 - i\xi \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt_1 \langle \Phi_0 | \tilde{V}(t_1) | \Phi_0 \rangle \\ & - \xi^2 \left( \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle \Phi_0 | \tilde{V}(t_1) \tilde{V}(t_2) | \Phi_0 \rangle + i \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt_1 \langle \Phi_0 | \tilde{Q}(t_1) | \Phi_0 \rangle \right), \end{aligned} \quad (2.28)$$

despreciando términos de orden  $O(\xi^3)$ .

Como  $|\Phi_0\rangle$  es eigenvector de  $H_0$  por (2.23), usando la definición de  $\tilde{V}(t)$ , obtenemos la expresión  $\langle \Phi_0 | \tilde{V}(t_1) | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | V(t_1) | \Phi_0 \rangle$ . Como el valor esperado de los operadores  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$  respecto a  $|0\rangle$ , el estado base del oscilador, es cero, es inmediato que se da la igualdad  $\langle \Phi_0 | V(t_1) | \Phi_0 \rangle = 0$ , por lo que la primera integral de (2.28) es cero. De la misma manera,  $\langle \Phi_0 | \tilde{Q}(t_1) | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | Q | \Phi_0 \rangle$ . Nuevamente, es inmediato que se cumple la igualdad  $\langle \Phi_0 | Q | \Phi_0 \rangle = 0$ , por lo que la última integral también es cero. Finalmente, hay que calcular la segunda integral y recolectar los términos que no dependen de  $\omega$ , lo que corresponderá a la fase geométrica. Haciendo todo el desarrollo algebraico <sup>6</sup> obtenemos que el resultado es:

$$\langle \Phi_0 | U(T) | \Phi_0 \rangle = 1 - \frac{1}{2} i\pi\epsilon^2 + (\text{términos dependientes de } \omega). \quad (2.29)$$

En la expresión anterior, los términos dependientes de  $\omega$  incluyen a los polos en  $\omega$ , los cuales constituirán una fase dinámica. Llamemos  $\alpha$  a esta fase dinámica.

Tomando el logaritmo natural de la expresión (2.29), dividiendo entre  $i$  e ignorando los términos dependientes de  $\omega$  para calcular la fase geométrica,  $\gamma_{\text{geo}}$ , obtenemos que ésta es (hasta orden  $O(\epsilon^2)$ ):

$$\gamma_{\text{geo}} = -\frac{1}{2} \pi \epsilon^2. \quad (2.30)$$

Notemos que  $\gamma_{\text{geo}}$  es una fase puramente real por lo que la evolución de  $|\Phi(t)\rangle$  será cíclica. Así,

$$|\Phi_T\rangle = e^{-iH_0(T)} U(T) |\Phi_0\rangle = e^{-\frac{i\Omega}{2}T} e^{i\alpha} e^{-\frac{1}{2}i\pi\epsilon^2} |\Phi_0\rangle. \quad (2.31)$$

Como ya se mencionó, los términos  $\alpha$  y  $-\frac{\Omega}{2}T$  son fases dinámicas, mientras que el término  $-\frac{1}{2}\pi\epsilon^2$  es una fase geométrica.

Para calcular la fase geométrica que adquiere el estado  $|\Psi_T\rangle = R(T)|\Phi_T\rangle$ , tenemos que calcular el producto interno  $\langle \Psi_0 | \Psi_T \rangle$ . Primero notemos que (usando (2.17)):

$$\begin{aligned} R(0) &= \tau \otimes I, \\ R(T) &= (e^{i\pi(\cos(\theta)-1)}) e^{-\frac{i}{\hbar} H_A T} \tau \otimes I. \end{aligned} \quad (2.32)$$

El producto  $\langle \Psi_0 | \Psi_T \rangle$  es, usando (2.20):

$$\langle \Psi_0 | \Psi_T \rangle = \langle \Phi_0 | R^\dagger(0) R(T) | \Phi_T \rangle.$$

<sup>6</sup>Las operaciones se realizaron usando el programa Mathematica. Véase el Apéndice A.2.

Usando (2.32) obtenemos:

$$= e^{i\pi(\cos(\theta)-1)} \langle \Phi_0 | \tau^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar} H_A T} \tau | \Phi_T \rangle.$$

Sustituyendo (2.31) llegamos a:

$$= e^{i\pi(\cos(\theta)-1) - \frac{1}{2}i\pi\epsilon^2} e^{i\alpha} \langle \Phi_0 | \tau^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar} H_A T} \tau | \Phi_0 \rangle. \quad (2.33)$$

Consideremos al término  $\langle \Phi_0 | \tau^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar} H_A T} \tau | \Phi_0 \rangle$  de la expresión anterior. El operador del centro sólo afecta al espacio de la partícula, pero en este espacio  $|\Phi_0\rangle$  es el estado base, por lo que el producto interno anterior es  $\langle 0 | \tau^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar} H_A T} \tau | 0 \rangle$ . Por definición,  $\tau|0\rangle$  es el estado coherente inicial, por lo que  $e^{-\frac{i}{\hbar} H_A T} \tau|0\rangle = e^{i\gamma_A} \tau|0\rangle$  de donde se sigue que

$$\langle \Phi_0 | \tau^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar} H_A T} \tau | \Phi_0 \rangle = e^{i\gamma_A}. \quad (2.34)$$

Juntando las igualdades (2.33) y (2.34), obtenemos el producto deseado;

$$\langle \Psi_0 | \Psi_T \rangle = e^{i\alpha} e^{i\gamma_A} e^{i\pi(\cos(\theta)-1)} e^{-\frac{1}{2}i\pi\epsilon^2}. \quad (2.35)$$

De la expresión de arriba, podemos reconocer varias fases.  $\alpha$  es una fase dinámica, por lo que no contribuye a la fase geométrica. Está la fase  $\gamma_A$  y la fase  $\pi(\cos(\theta) - 1)$ , que es la fase geométrica de un espín acoplado con un campo magnético  $\mathcal{A}_t$ . El término que resta es lo que denominamos como la corrección cuántica, que es:

$$\text{Corrección Cuántica} = -\frac{1}{2}\pi\epsilon^2. \quad (2.36)$$

## 2.4. Segundo modelo de un “campo magnético cuántico”

Llamemos  $U_A$  al operador de evolución temporal asociado a  $H_A$  y  $A_t$  a la evolución temporal del operador  $A$  en la imagen de Heisenberg. Supongamos que  $A_t$  se obtiene al aplicarle una rotación al operador  $A$ , es decir,

$$A_t = U_A^\dagger A U_A = R_p^\dagger A R_p, \quad (2.37)$$

donde  $R_p$  es una rotación dependiente del tiempo en el espacio de la partícula. En virtud de (2.37), se da la igualdad:

$$\mathcal{A}_t = \langle \psi_0 | R_p^\dagger A R_p | \psi_0 \rangle = \rho \hat{n}_t,$$

donde  $\rho$  es una magnitud constante, y  $\hat{n}_t$  es un vector unitario.

Así queremos resolver la ecuación de Schrödinger basada en (2.2) donde  $H_A$  y  $A$  cumplen las propiedades descritas anteriormente. Supongamos que se cumplen las condiciones de indiferencia y de adiabaticidad.

Llamemos  $R_s$  a la rotación correspondiente a  $R_p$  en el espacio del espín y  $R$  a la rotación correspondiente en  $\mathbb{R}^3$ . Definimos al estado  $|\hat{n}_{t+}\rangle$  con la siguiente igualdad,

$$|\hat{n}_{t+}\rangle = R_s(t) |\hat{n}_{0+}\rangle. \quad (2.38)$$

Claramente, como  $\mathcal{A}$  y  $|\hat{n}_{0+}\rangle$  son rotados de manera idéntica, el estado  $|\hat{n}_{t+}\rangle$  está alineado con  $\mathcal{A}_t$ . Como  $|\psi_t\rangle$  es cíclico,  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_T$ , pero  $|\hat{n}_{T+}\rangle$  y  $|\hat{n}_{0+}\rangle$  pueden diferir por una fase. Llamemos  $\gamma_1$  a esta fase, es decir,

$$e^{i\gamma_1} = \langle \hat{n}_{0+} | \hat{n}_{T+} \rangle. \quad (2.39)$$

Como se cumplen las condiciones de adiabaticidad e indiferencia, esperamos que  $|\Psi_t\rangle$  sea cercano a  $|\psi_t\rangle \otimes e^{i\gamma_s} |\hat{n}_+\rangle = (U_A \otimes e^{i\gamma_s} R_s) (|\psi_{p0}\rangle \otimes |\hat{n}_{0+}\rangle)$  donde (usando (1.8))

$$\gamma_s(t) = i \int_0^t \langle \hat{n}_{u+} | \frac{d}{dt} | \hat{n}_{u+} \rangle du.$$

Definimos la transformación

$$\mathcal{R}(t) = U_A(t) \otimes e^{i\gamma_s} R_s(t), \quad (2.40)$$

y al estado  $|\Phi_t\rangle$  como

$$|\Psi_t\rangle = \mathcal{R}(t) |\Phi_t\rangle. \quad (2.41)$$

Por construcción de  $\mathcal{R}$ , esperamos que  $|\Phi_t\rangle$  sea cercano a  $|\Phi_0\rangle$ . El Hamiltoniano  $H'$  que determina la evolución de  $|\Phi_t\rangle$  es:

$$H' = \mathcal{R}^{-1} H \mathcal{R} - i\hbar \mathcal{R}^{-1} \dot{\mathcal{R}}. \quad (2.42)$$

Calculando  $H'$  obtenemos:

$$H' = \frac{\lambda\hbar}{2} (A_t \cdot \sigma_t) - i\hbar R_s^{-1} \dot{R}_s + \hbar \langle \hat{n}_{t+} | \frac{d}{dt} | \hat{n}_{t+} \rangle, \quad (2.43)$$

donde  $\sigma_t = R_s^{-1} \sigma R_s$ . Analicemos el término  $R_s^{-1} \dot{R}_s$  de la expresión anterior. Para cualquier tiempo  $t$ , aplicar la rotación  $R_s(t + dt)$  es lo mismo que aplicar primero la rotación  $R_s(t)$  y luego una rotación infinitesimal (en la figura 2.3 se ilustra esta situación para rotaciones en  $\mathbb{R}^3$ ). Lo anterior quiere decir que:

$$R_s(t + dt) = e^{-i\frac{\omega_t dt}{2} \hat{\mu} \cdot \sigma} R_s(t),$$

donde  $\hat{\mu}$  es un eje de rotación instantáneo, y  $\omega_t$  es una velocidad angular instantánea. La igualdad anterior implica que:

$$\dot{R}_s = -i\frac{\omega}{2} (\mu \cdot \sigma) R_s, \quad (2.44)$$

donde  $\omega$  es un valor promedio de  $\omega_t$ ,  $\omega = 2\pi/T$ , y  $\mu$  es un vector paralelo a  $\hat{\mu}$  con magnitud de orden uno.

Aplicando  $R_s^{-1}$  en ambos lados de (2.44), obtenemos que:

$$R_s^{-1} \dot{R}_s = -i\frac{\omega}{2} \chi \cdot \sigma, \quad (2.45)$$

donde  $R_s^{-1} (\mu \cdot \sigma) R_s = \chi \cdot \sigma$ , por lo que se da la igualdad  $R(\chi) = \mu$ . Así  $\chi$  tiene magnitud de orden uno.

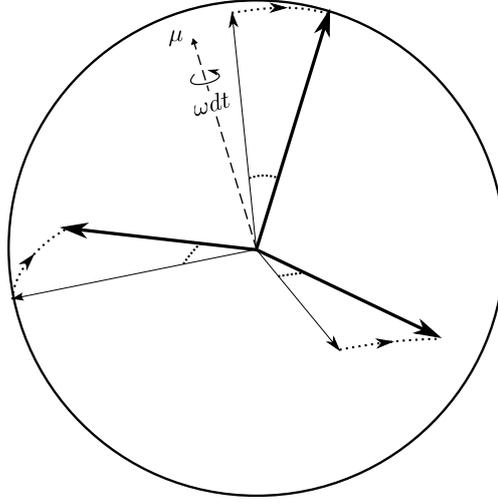


Figura 2.3: En la figura se muestra la aplicación de  $R(t)$  a una cierta base (línea delgada) y de  $R(t + dt)$  a la misma base (línea gruesa). Ambas rotaciones solo difieren por una rotación pequeña alrededor del eje  $\mu$ .

Usando (2.38) y (2.45) obtenemos (pues como  $R_s$  es una rotación, se tiene que  $R_s^{-1} = R_s^\dagger$ ):

$$\begin{aligned}
 i\langle \hat{n}(t) | \frac{d}{dt} | \hat{n}(t) \rangle &= i\langle \hat{n}_0 | R_s^\dagger \frac{d}{dt} R_s | \hat{n}_0 \rangle \\
 &= i\langle \hat{n}_0 | R_s^\dagger \dot{R}_s | \hat{n}_0 \rangle = \frac{\omega}{2} \langle \hat{n}_0 | \chi \cdot \sigma | \hat{n}_0 \rangle \\
 &= \frac{\omega}{2} \chi \cdot \hat{n}_0.
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Sustituyendo (2.46) y (2.45) en (2.43) obtenemos:

$$H' = \frac{\lambda \hbar}{2} (A_t \cdot \sigma_t) - \frac{\hbar \omega}{2} \chi \cdot \sigma + \frac{\hbar \omega}{2} \chi \cdot \hat{n}_0,$$

Como  $A_t$  se obtiene al aplicarle una rotación al operador  $A$ , y  $\sigma_t$  se obtiene al aplicar exactamente la misma rotación al operador  $\sigma$ , el operador  $A_t \cdot \sigma_t$  es independiente del tiempo y es  $A \cdot \sigma$ . Así,  $H'$  es simplemente:

$$H' = \frac{\lambda \hbar}{2} (A \cdot \sigma) - \frac{\hbar \omega}{2} \chi \cdot \sigma + \frac{\hbar \omega}{2} \chi \cdot \hat{n}_0. \tag{2.47}$$

Como esperamos que  $|\Phi_t\rangle$  sea cercano a  $|\Phi_0\rangle$ , esperamos que  $\langle \Phi_t | A | \Phi_t \rangle$  sea cercano a  $\langle \Phi_0 | A | \Phi_0 \rangle$  que es  $\rho \hat{n}_0$ . Así es conveniente escribir al operador  $A$  como:

$$A = \rho \hat{n}_0 + r_0 b. \tag{2.48}$$

donde  $r_0$  es un ancho promedio de las componentes de  $A$  respecto a  $|\Phi_0\rangle$ , por lo que  $b$  tendrá un valor esperado respecto a  $|\Phi_t\rangle$  de orden uno. Claramente, por (2.48), el valor esperado de  $b$  respecto a  $|\Phi_0\rangle$  es cero por construcción. En la figura 2.4 se muestra una representación de los operadores  $r_0 b \cdot \sigma$ ,  $A \cdot \sigma$  y  $\rho \hat{n}_0 \cdot \sigma$ . Sustituyendo (2.48) en  $A \cdot \sigma$  obtenemos:

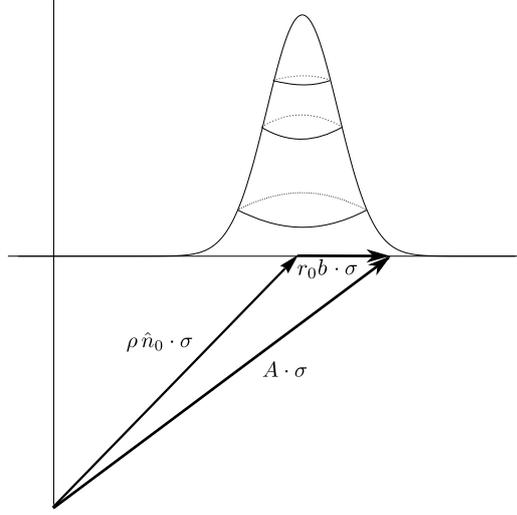


Figura 2.4: Relación entre los operadores  $r_0 \cdot \sigma$ ,  $A \cdot \sigma$  y  $\rho \hat{n}_0 \cdot \sigma$ .

$$A \cdot \sigma = \rho \hat{n}_0 \cdot \sigma + r_0 b \cdot \sigma. \quad (2.49)$$

Reescribiendo (2.47) utilizando (2.49) obtenemos:

$$H' = \frac{\lambda \hbar \rho}{2} \hat{n}_0 \cdot \sigma + \frac{\lambda \hbar r_0}{2} b \cdot \sigma - \frac{\hbar \omega}{2} \chi \cdot \sigma + \frac{\hbar \omega}{2} \chi \cdot \hat{n}_0. \quad (2.50)$$

Definimos ahora las siguientes frecuencias,  $\Omega = \lambda \rho$  y  $\eta = \lambda r_0$ . Análogamente al caso de la sección anterior,  $\Omega$  es la frecuencia con la que giraría el espín si el campo magnético coincidiera con  $\mathcal{A}_t$ , y  $\eta$  es una frecuencia de giro que tendría el espín si éste estuviera acoplado con un campo magnético de magnitud  $r_0$ . Hacemos las siguientes definiciones:

$$\xi^2 = \frac{\omega}{\Omega}, \quad (2.51)$$

$$\epsilon^2 = \frac{\eta^2}{\Omega \omega}. \quad (2.52)$$

Por indiferencia y adiabaticidad, supondremos como en la sección anterior que:

$$\xi \ll 1,$$

$$\epsilon \ll 1,$$

y que  $\epsilon$  no depende de  $\omega$ . Escribiendo  $H'$  en términos de  $\epsilon$  y  $\xi$  obtenemos:

$$H' = \hbar \left( \underbrace{\frac{\Omega}{2} \hat{n}_0 \cdot \sigma}_{\equiv H_0} + \xi \underbrace{\frac{\Omega \epsilon}{2} b \cdot \sigma}_{\equiv V} + \xi^2 \Omega \underbrace{\left( -\frac{1}{2} \chi \cdot \sigma + \frac{1}{2} \chi \cdot \hat{n}_0 \right)}_{\equiv Q(t)} \right).$$

Como sabemos que  $\xi$  tiene que ser pequeño, y tanto  $b$  como  $\chi$  tienen valor esperado respecto a la solución de orden uno, podemos hacer teoría de perturbaciones con respecto a  $\xi$ . Análogamente a como se hizo en el caso de la sección

anterior, la solución está dada por (2.24), y estamos interesados en calcular el producto interno  $\langle \Phi_0 | U(T) | \Phi_0 \rangle$ , con  $U$  dado por (2.26). El producto interno anterior es:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0 | U(T) | \Phi_0 \rangle = & 1 - i\xi \int_0^T dt_1 \langle \Phi_0 | \tilde{V}(t_1) | \Phi_0 \rangle \\ & - \xi^2 \left( \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle \Phi_0 | \tilde{V}(t_1) \tilde{V}(t_2) | \Phi_0 \rangle + i \int_0^T dt_1 \langle \Phi_0 | \tilde{Q}(t_1) | \Phi_0 \rangle \right). \end{aligned} \quad (2.53)$$

La expresión anterior es correcta hasta orden  $O(\xi^3)$ . Analicemos cada integral por separado. Como  $|\Phi_0\rangle$  es un eigenestado de  $H_0$  con eigenvalor  $\Omega/2$  (ecuación (2.23)),

$$\langle \Phi_0 | \tilde{V}(t) | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | e^{iH_0 t} V(t) e^{-iH_0 t} | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | V | \Phi_0 \rangle = 0. \quad (2.54)$$

Recordemos que por construcción, se tiene la expresión  $\langle \Phi_0 | b | \Phi_0 \rangle = 0$ , lo que implica la última igualdad. Por lo tanto, la primera integral es cero.

Análogamente, en la tercera integral,  $\langle \Phi_0 | \tilde{Q}(t) | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | Q(t) | \Phi_0 \rangle$ . Desarrollando  $\langle \Phi_0 | Q(t) | \Phi_0 \rangle$  obtenemos:

$$\langle \Phi_0 | Q(t) | \Phi_0 \rangle = \frac{\Omega}{2} (-\langle \Phi_0 | \chi \cdot \sigma | \Phi_0 \rangle + \langle \Phi_0 | \chi \cdot \hat{n}_0 | \Phi_0 \rangle) = \frac{\Omega}{2} (-\chi \cdot \hat{n}_0 + \chi \cdot \hat{n}_0) = 0, \quad (2.55)$$

por lo que la tercera integral también es cero.

Ahora calcularemos la segunda integral. Supongamos que  $\hat{n}_0$  es el vector unitario con coordenadas esféricas  $\theta$  y  $\phi$  y que  $|\hat{n}_0^+\rangle$  es el siguiente estado alineado con  $\hat{n}_0$ ,  $|\hat{n}_0^+\rangle = e^{-i\phi \frac{\sigma_x}{2}} e^{-i\theta \frac{\sigma_y}{2}} |+\rangle$ . Ahora, hacemos las siguientes definiciones:

$$\hat{R} = (\cos(\phi) \cos(\theta), \sin(\phi) \cos(\theta), -\sin(\theta)), \quad (2.56)$$

$$\hat{I} = (-\sin(\phi), \cos(\phi), 0), \quad (2.57)$$

$$\hat{n}_0 = (\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta)). \quad (2.58)$$

Estas definiciones son análogas a las definiciones (1.36), (1.37) y (1.38) del capítulo anterior. Los vectores  $\hat{R}$ ,  $\hat{I}$  y  $\hat{n}_0$  forman una base ortogonal derecha. En términos de esta base (en analogía con lo que ocurre en la base  $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ ),

$$b \cdot \sigma = b_R \sigma_R + b_I \sigma_I + b_n \sigma_n, \quad (2.59)$$

$$e^{iH_0 t} \sigma_R e^{-iH_0 t} = \cos(\Omega t) \sigma_R - \sin(\Omega t) \sigma_I, \quad (2.60)$$

$$e^{iH_0 t} \sigma_I e^{-iH_0 t} = \sin(\Omega t) \sigma_R + \cos(\Omega t) \sigma_I, \quad (2.61)$$

$$e^{iH_0 t} \sigma_n e^{-iH_0 t} = \sigma_n, \quad (2.62)$$

por lo que,

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t) = & \frac{\Omega \epsilon}{2} ((b_R)(\cos(\Omega t) \sigma_R - \sin(\Omega t) \sigma_I) \\ & + (b_I)(\sin(\Omega t) \sigma_R + \cos(\Omega t) \sigma_I) + b_n \sigma_n). \end{aligned} \quad (2.63)$$

En la expresión anterior toda la dependencia temporal de  $\tilde{V}(t)$  está escrita explícitamente, por lo que la segunda integral de (2.53) se pueden realizar.

Sustituyendo  $T = 2\pi/\omega$  y (2.63) en la integral en cuestión, y separando los términos que no dependen de  $\omega$  (para obtener la fase geométrica) obtenemos<sup>7</sup>:

$$-\xi^2 \left( \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle \Phi_0 | \tilde{V}(t_1) \tilde{V}(t_2) | \Phi_0 \rangle \right) = \frac{-i\pi\epsilon^2}{2} \langle \psi_0 | (b_R^2 + b_I^2 + i[b_R, b_I]) | \psi_0 \rangle + (\text{términos dependientes de } \omega). \quad (2.64)$$

De la expresión (2.48), usando la ortogonalidad entre  $\hat{R}$ ,  $\hat{I}$  y  $\hat{n}_0$  obtenemos que:

$$\begin{aligned} r_0 b_R &= A_R, \\ r_0 b_I &= A_I. \end{aligned}$$

Sustituyendo los resultados anteriores en (2.53) obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0 | U(T) | \Phi_0 \rangle &= -i \frac{\pi\epsilon^2}{2r_0^2} \langle \psi_0 | (A_R^2 + A_I^2) | \psi_0 \rangle + \frac{\pi\epsilon^2}{2r_0^2} \langle \psi_0 | [A_R, A_I] | \psi_0 \rangle \\ &+ (\text{términos dependientes de } \omega). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Notemos que como  $A_R$  y  $A_I$  son operadores autoadjuntos,  $\langle \psi_0 | A_R^2 | \psi_0 \rangle$  y el término análogo en  $\hat{I}$  son reales mientras que  $\langle \psi_0 | [A_R, A_I] | \psi_0 \rangle$  es puramente imaginario, lo que garantiza que los términos independientes de  $\omega$  en (2.65) son imaginarios. También es importante notar que ambos términos independientes de  $\omega$  son invariantes bajo rotaciones alrededor del eje  $\hat{n}_0$ , lo que básicamente nos dice que el resultado no depende de la elección específica que se hizo de los vectores  $\hat{R}$  y  $\hat{I}$ .

Procediendo de manera análoga a lo que se hizo en la sección anterior para obtener (2.35) desde (2.29) obtenemos:

$$\langle \Psi_0 | \Psi_T \rangle = e^{i\alpha} e^{i\gamma_A} e^{i(\gamma_1 + \gamma_s(T))} e^{i \left( -\frac{\pi\epsilon^2}{2r_0^2} \langle \psi_0 | (A_R^2 + A_I^2) | \psi_0 \rangle - \frac{i\pi\epsilon^2}{2r_0^2} \langle \psi_0 | [A_R, A_I] | \psi_0 \rangle \right)}, \quad (2.66)$$

donde  $\alpha$  es una fase dinámica y  $\gamma_1 + \gamma_s(T)$  es la fase geométrica del sistema si el campo magnético coincidiera con  $\mathcal{A}_t$ . Por lo tanto, la corrección cuántica a la fase geométrica es:

$$\text{Corrección Cuántica} = -\frac{\pi\epsilon^2}{2r_0^2} \langle \psi_0 | (A_R^2 + A_I^2) | \psi_0 \rangle - \frac{i\pi\epsilon^2}{2r_0^2} \langle \psi_0 | [A_R, A_I] | \psi_0 \rangle. \quad (2.67)$$

## 2.5. Tercer modelo de un “campo magnético cuántico”

Supongamos que el Hamiltoniano  $H_A$  es independiente del tiempo, y que depende de un parámetro  $\omega$  de tal forma que la velocidad con la que evoluciona

<sup>7</sup>Véase el Apéndice A.3.

cualquier estado inicial depende linealmente de  $\omega$ . Lo anterior se puede garantizar si suponemos que el espectro de  $H_A$  es un conjunto de eigenvectores  $|k\rangle$  que no dependen de  $\omega$  con eigenenergías que dependen linealmente de  $\omega$ , es decir,

$$H_A|k\rangle = \hbar\omega\epsilon_k|k\rangle, \quad (2.68)$$

donde  $\epsilon_k$  no depende de  $\omega$ . Si se resuelve la ecuación de Schrödinger en la base de eigenvectores, es claro que esta condición sobre las energías garantiza que cambiar  $\omega$  cambiará linealmente la velocidad con la que evoluciona cualquier sistema. Por lo anterior, el tiempo  $T$  y  $\omega$  son inversamente proporcionales, por lo que podemos suponer (haciendo cambios de escala si es necesario) que  $T = 2\pi/\omega$ .

Supongamos que  $A_t = \rho\hat{n}_t$  con  $\rho$  constante, y  $\hat{n}_t$  un vector unitario. Como  $\omega$  es el parámetro que dicta qué tan rápido gira el “campo magnético cuántico”  $A$ , la condición de adiabaticidad (2.15) es nuevamente  $\xi^2 = \omega/\Omega \ll 1$ , con  $\Omega = \lambda\rho$ .

Consideremos  $R_t$  una rotación en  $\mathbb{R}^3$  dependiente del tiempo que cumpla las siguientes propiedades:

- $R_0 = R_T = I$ .
- $R_t\hat{n}_0 = \hat{n}_t$ .

Como  $R_0 = R_{2\pi/\omega}$ , podemos desarrollar a esta rotación como una serie de Fourier discreta. Así, tenemos que:

$$R_t = \sum_r D_r(\omega)e^{ir\omega t}, \quad (2.69)$$

donde los operadores  $D_r$  en principio pueden depender de  $\omega$ . Por las condiciones que se impusieron sobre  $H_A$ , al aumentar  $\omega$ ,  $R_t$  hará exactamente lo mismo, sólo que de manera más rápida, aumentando esta velocidad en la misma proporción en la que aumentó  $\omega$ . Lo anterior quiere decir que en el fondo,  $R_t$  depende del producto  $\omega t$  solamente, y no de  $\omega$  y de  $t$  por separado. Pero la dependencia de  $R_t$  respecto a  $t$  está toda en las exponenciales, por lo que la de  $\omega$  también. Por lo anterior, los coeficientes de  $D_r$  no dependen de  $\omega$ . Llamemos  $R_s$  a la rotación análoga a  $R_t$  pero en el espacio del espín. Definimos  $\sigma_t = R_s^{-1}\sigma R_s$ .

Llamemos  $|\hat{n}_0+\rangle$  a algún estado del espín alineado con  $\hat{n}_0$  y  $|\hat{n}_0-\rangle$  a un estado anti-alineado con  $\hat{n}_0$ . Definimos  $|\hat{n}_t+\rangle = R_s(t)|\hat{n}_0+\rangle$  y al estado  $|\hat{n}_t-\rangle$  de manera análoga.

Del mismo modo que se hizo en la sección anterior, en las ecuaciones (2.40) y (2.41), definimos a la transformación  $\mathcal{R}(t)$  y al estado  $|\Phi_t\rangle$ . El Hamiltoniano  $H'$  que determina la evolución de  $|\Phi_t\rangle$  está dado por (2.42). De manera análoga que en (2.48), definimos al operador  $b_t$  con la siguiente ecuación:

$$A_t = \rho\hat{n}_t + r_0b_t. \quad (2.70)$$

En la igualdad anterior estamos escribiendo a  $A_t$  como su valor esperado (respecto a  $|\psi(t)\rangle$ ) más un operador  $b_t$ . Como  $r_0$  es un promedio del ancho de  $A_t$ , el valor esperado de  $b_t$  será de orden uno respecto a la solución  $|Psi_t\rangle$ . Claramente, de (2.70):

$$A_t \cdot \sigma_t = \rho\hat{n}_t \cdot \sigma_t + r_0b_t \cdot \sigma_t. \quad (2.71)$$

Calculemos  $\langle \Phi_0 | A_t \cdot \sigma_t | \Phi_0 \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0 | A_t \cdot \sigma_t | \Phi_0 \rangle &= \langle \psi_0 | \otimes \langle \hat{n}_0^+ | A_t \cdot \sigma_t | \psi_0 \rangle \otimes | \hat{n}_0^+ \rangle \\ &= \langle \psi_0 | A_t | \psi_0 \rangle \cdot \langle \hat{n}_0^+ | \sigma_t | \hat{n}_0^+ \rangle \\ &= \langle \psi_t | A | \psi_t \rangle \cdot \langle \hat{n}_t^+ | \sigma | \hat{n}_t^+ \rangle \\ &= \rho \hat{n}_t \cdot \hat{n}_t \\ &= \rho. \end{aligned}$$

La igualdad anterior junto con (2.71) implica que

$$\langle \Phi_0 | b_t \cdot \sigma_t | \Phi_0 \rangle = 0. \quad (2.72)$$

Procediendo de manera análoga a como se hizo en la sección anterior para calcular  $H'$ , definiendo a  $\xi$  y  $\epsilon$  como en (2.51) y (2.52), llegamos a la expresión:

$$H' = \hbar \left( \underbrace{\frac{\Omega}{2} \hat{n}_0 \cdot \sigma}_{\equiv H_0} + \xi \underbrace{\frac{\Omega \epsilon}{2} b_t \cdot \sigma_t}_{\equiv V(t)} + \xi^2 \underbrace{\Omega \left( -\frac{1}{2} \chi \cdot \sigma + \frac{1}{2} \chi \cdot \hat{n}_0 \right)}_{\equiv Q(t)} \right). \quad (2.73)$$

La única diferencia entre esta expresión y (2.47), es que en ésta el operador  $A_t \cdot \sigma_t$  sí depende del tiempo. Usando teoría de perturbaciones respecto a  $\xi$ ,  $U$  está dado por (2.26), e igual que en la sección anterior estamos interesados en calcular el producto  $\langle \Phi_0 | U_T | \Phi(0) \rangle$ , el cual es, recordando (2.53):

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0 | U(T) | \Phi_0 \rangle &= 1 - i\xi \int_0^T dt_1 \langle \Phi_0 | \tilde{V}(t_1) | \Phi_0 \rangle \\ &\quad - \xi^2 \left( \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle \Phi_0 | \tilde{V}(t_1) \tilde{V}(t_2) | \Phi_0 \rangle + i \int_0^T dt_1 \langle \Phi_0 | \tilde{Q}(t_1) | \Phi_0 \rangle \right). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Usando (2.72) y los mismos argumentos que en (2.54), la primera integral es cero. Usando (2.55) la tercera integral también es cero, por lo que sólo hay que considerar la segunda integral. Antes de calcularla, es conveniente realizar algunos cálculos preliminares.

Primeramente, consideremos a los vectores  $\langle \hat{n}_0^+ | \sigma | \hat{n}_0^- \rangle$  y  $\langle \hat{n}_0^- | \sigma | \hat{n}_0^+ \rangle$ . Haciendo el álgebra necesaria, obtenemos que:

$$\hat{m}_0 = \langle \hat{n}_0^+ | \sigma | \hat{n}_0^- \rangle = \hat{R}_0 - i\hat{I}_0, \quad (2.75)$$

$$\hat{m}_0^* = \langle \hat{n}_0^- | \sigma | \hat{n}_0^+ \rangle = \hat{R}_0 + i\hat{I}_0, \quad (2.76)$$

donde  $\hat{R}_0$  e  $\hat{I}_0$  son vectores unitarios tales que la terna  $\{\hat{R}_0, \hat{I}_0, \hat{n}_0\}$  forma una base ortonormal derecha. De las igualdades anteriores es inmediato que:

$$\langle \hat{n}_0^+ | \sigma_t | \hat{n}_0^- \rangle = \langle \hat{n}_0^+ | R_s^{-1} \sigma R_s | \hat{n}_0^- \rangle = R_t \hat{m}_0, \quad (2.77)$$

$$\langle \hat{n}_0^- | \sigma_t | \hat{n}_0^+ \rangle = (\langle \hat{n}_0^+ | \sigma_t | \hat{n}_0^- \rangle)^* = (R_t \hat{m}_0)^*. \quad (2.78)$$

Finalmente, despejando  $b_t \cdot \sigma_t$  de (2.71) y haciendo producto con  $\langle k | \otimes \langle \hat{n}_0^+ |$  por la izquierda y con  $|m\rangle \otimes |\hat{n}_0^+\rangle$  por la derecha obtenemos  $|k\rangle$  y  $|m\rangle$  son

eigenestados de  $H_A$  con energías dadas por (2.68)):

$$\begin{aligned} \langle k | \otimes \langle \hat{n}_0+ | b_t \cdot \sigma_t | m \rangle \otimes | \hat{n}_0+ \rangle &= \frac{1}{r_0} \langle k | \otimes \langle \hat{n}_0+ | A_t \cdot \sigma_t | m \rangle \otimes | \hat{n}_0+ \rangle - \frac{1}{r_0} \rho \langle k | m \rangle \\ &= \frac{1}{r_0} e^{-i(\epsilon_m - \epsilon_k)\omega t} (\langle k | A | m \rangle \cdot \hat{n}_t - \rho \delta_{k,m}) \\ &= \frac{1}{r_0} e^{-i(\epsilon_m - \epsilon_k)\omega t} (A_{km} \cdot R_t \hat{n}_0 - \rho \delta_{k,m}), \end{aligned} \quad (2.79)$$

con  $\delta_{k,m}$  la delta de Kronecker. De la misma manera,

$$\langle k | \otimes \langle \hat{n}_0+ | b_t \cdot \sigma_t | m \rangle \otimes | \hat{n}_0- \rangle = \frac{1}{r_0} e^{-i(\epsilon_m - \epsilon_k)\omega t} A_{km} \cdot R_t \hat{m}_0, \quad (2.80)$$

$$\langle k | \otimes \langle \hat{n}_0- | b_t \cdot \sigma_t | m \rangle \otimes | \hat{n}_0+ \rangle = \frac{1}{r_0} e^{-i(\epsilon_m - \epsilon_k)\omega t} A_{km} \cdot (R_t \hat{m}_0)^*. \quad (2.81)$$

Ahora, procedemos a calcular la segunda integral de (2.74). El término a integrar es  $\langle \Phi_0 | \tilde{V}_{t_1} \tilde{V}_{t_2} | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | \tilde{V}(t_1) \tilde{V}(t_2) | \Phi_0 \rangle$ . Si escribimos al operador identidad como  $I = \sum_k |k\rangle \langle k| \otimes | \hat{n}_0+ \rangle \langle k| \otimes | \hat{n}_0+ \rangle + |k\rangle \langle k| \otimes | \hat{n}_0- \rangle \langle k| \otimes | \hat{n}_0- \rangle$ , lo ponemos entre  $\tilde{V}_{t_1}$  y  $\tilde{V}_{t_2}$ , y sustituimos tanto al estado  $|\Phi_0\rangle$  como al operador  $V_t$  por su definición, obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0 | \tilde{V}_{t_1} \tilde{V}_{t_2} | \Phi_0 \rangle &= \frac{\epsilon^2 \Omega^2}{4} \left( \sum_k \langle \psi_0 | \langle \hat{n}_0+ | b_{t_1} \cdot \sigma_{t_1} | k \rangle | \hat{n}_0+ \rangle \langle k | \langle \hat{n}_0+ | b_{t_2} \cdot \sigma_{t_2} | \psi_0 \rangle | \hat{n}_0+ \rangle \right. \\ &\quad \left. + e^{i\Omega(t_1 - t_2)} \langle \psi_0 | \langle \hat{n}_0+ | b_{t_1} \cdot \sigma_{t_1} | k \rangle | \hat{n}_0- \rangle \langle k | \langle \hat{n}_0- | b_{t_2} \cdot \sigma_{t_2} | \psi_0 \rangle | \hat{n}_0+ \rangle \right). \end{aligned}$$

En la expresión anterior, el símbolo de producto tensorial entre dos espacios,  $\otimes$ , fue omitido por cuestión de espacio. Usando que los estados  $|m\rangle$  son base del espacio de la partícula, podemos escribir a  $|\psi_0\rangle$  como  $|\psi_0\rangle = \sum_m C_m |m\rangle$ . Sustituyendo esta expresión en la anterior, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon^2 \Omega^2}{4} \left( \sum_{k,m,n} C_m^* C_n \langle m | \langle \hat{n}_0+ | b_{t_1} \cdot \sigma_{t_1} | k \rangle | \hat{n}_0+ \rangle \langle k | \langle \hat{n}_0+ | b_{t_2} \cdot \sigma_{t_2} | n \rangle | \hat{n}_0+ \rangle \right. \\ \left. + C_m^* C_n e^{i\Omega(t_1 - t_2)} \langle m | \langle \hat{n}_0+ | b_{t_1} \cdot \sigma_{t_1} | k \rangle | \hat{n}_0- \rangle \langle k | \langle \hat{n}_0- | b_{t_2} \cdot \sigma_{t_2} | n \rangle | \hat{n}_0+ \rangle \right). \end{aligned}$$

Todos los operadores que aparecen en el resultado anterior fueron calculados en las igualdades (2.77) a (2.81). Haciendo las sustituciones y escribiendo la rotación en términos de su serie de Fourier (ecuación (2.69)) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon^2 \Omega^2}{4r_0^2} \left( \sum_{k,m,n,r,s} C_m^* C_n e^{-i(\epsilon_k - \epsilon_m)\omega t_1} e^{-i(\epsilon_n - \epsilon_k)\omega t_2} \left\{ \right. \right. \\ \left. \left( e^{i\omega s t_1} A_{mk} \cdot D_s(\hat{n}_0) - \rho \delta_{m,k} \right) \left( e^{i\omega r t_2} A_{kn} \cdot D_r(\hat{n}_0) - \rho \delta_{k,n} \right) \right. \\ \left. \left. + e^{i\Omega(t_1 - t_2)} e^{i\omega s t_1} e^{-i\omega r t_2} (A_{mk} \cdot D_s(\hat{m}_0)) (A_{kn} \cdot D_r^*(\hat{m}_0)) \right\} \right). \end{aligned} \quad (2.82)$$

La ventaja de la expresión anterior es que toda la dependencia en  $t$  y  $\omega$  está escrita de manera explícita, por lo que es posible calcular la integral, y extraer

de ahí los términos que no dependen de  $\omega$ . Como  $\omega$  sólo cambia la velocidad con la que evoluciona el sistema,  $r_0$  y  $A_{mk}$  no dependen de  $\omega$ . Haciendo todo el desarrollo algebraico de la integral doble, se obtiene que los términos que no dependen de  $\omega$  son<sup>8</sup>:

$$\frac{\epsilon^2}{4r_0^2} \sum_{k,m,n,r,s} C_m^* C_n (A_{mk} \cdot D_s(\hat{m}_0)) (A_{kn} \cdot D_r^*(\hat{m}_0)) \left( \frac{e^{-2i\pi(\epsilon_n - \epsilon_m)} - 1}{r - s + \epsilon_n - \epsilon_m} \right) \quad (2.83)$$

El último término entre paréntesis puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$\frac{e^{-2i\pi(\epsilon_n - \epsilon_m)} - 1}{r - s + \epsilon_n - \epsilon_m} = \frac{e^{-i\omega t(\epsilon_n - \epsilon_m + r - s)} \Big|_{t=0}^{\frac{2\pi}{\omega}}}{r - s + \epsilon_n - \epsilon_m} = -i\omega \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{-i\omega t(\epsilon_n - \epsilon_m + r - s)} dt.$$

Sustituyendo este resultado en el anterior, obtenemos:

$$-i\omega \frac{\epsilon^2}{4r_0^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sum_{k,m,n,r,s} C_m^* C_n (A_{mk} \cdot D_s(\hat{m}_0)) (A_{kn} \cdot D_r^*(\hat{m}_0)) e^{-i\omega t(\epsilon_n - \epsilon_m + r - s)} dt.$$

Agrupando los términos de manera adecuada, las sumas anteriores se pueden realizar, lo que nos da como resultado:

$$-i\omega \frac{\epsilon^2}{4r_0^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \langle \psi_t | (A \cdot \hat{m}_t) (A \cdot \hat{m}_t^*) | \psi_t \rangle dt, \quad (2.84)$$

donde  $R_t \hat{m}_0 = \hat{m}_t$ . Si definimos a  $R_t$  y a  $I_t$  de manera análoga a como se hizo en (2.75), obtenemos:

$$\hat{m}_t = \hat{R}_t - \hat{I}_t.$$

Sustituyendo la expresión anterior en (2.84), obtenemos que los términos que no dependen de  $\omega$  de la segunda integral de (2.74) son:

$$-i\omega \frac{\epsilon^2}{4r_0^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \langle \psi_t | (A_{R_t}^2 + A_{I_t}^2 + i[A_{R_t}, A_{I_t}]) | \psi_t \rangle dt. \quad (2.85)$$

Procediendo como en las secciones anteriores, la corrección cuántica es:

$$\text{Corrección Cuántica} = -\omega \frac{\epsilon^2}{4r_0^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \langle \psi_t | (A_{R_t}^2 + A_{I_t}^2 + i[A_{R_t}, A_{I_t}]) | \psi_t \rangle dt. \quad (2.86)$$

Aunque esta fórmula se obtuvo bajo hipótesis diferentes a las que se usaron en la sección anterior, notamos que este resultado es igual al resultado (2.67), para el caso en el que el integrando no depende del tiempo.

La fórmula anterior también es válida para el caso estudiado en la sección 2.3, a pesar de que el ancho del estado coherente,  $r_0$ , depende de  $\omega$ . Sin embargo, como el número  $\langle A_{R_t}^2 \rangle$  también depende del ancho del estado base, la

<sup>8</sup>Véase el Apéndice A.4.

dependencia en  $\omega$  se elimina al tomar el cociente entre  $\langle A_{R_t}^2 \rangle$  y  $r_0^2$ , lo que hace que el término anterior no dependa de  $\omega$  y la corrección dada por (2.86) coincida con el resultado (2.36), como veremos a continuación.

Si tomamos como  $|\hat{n}_{0+}\rangle = \cos(\theta/2)|+\rangle + \sin(\theta/2)|-\rangle$ ,  $|\hat{n}_{0-}\rangle = \sin(\theta/2)|+\rangle - \cos(\theta/2)|-\rangle$  y como  $R_t$  una rotación alrededor de eje  $\hat{z}$  por un ángulo  $\omega t$  y hacemos las cuentas explícitamente, obtenemos:

$$\begin{aligned}\hat{R}_t &= (\cos \theta \cos \omega t, \cos \theta \sin \omega t, -\sin \theta), \\ \hat{I}_t &= (-\sin \omega t, \cos \omega t, 0), \\ \hat{n}_t &= (\sin \theta \cos \omega t, \sin \theta \sin \omega t, \cos \theta),\end{aligned}$$

por lo que (recordando que en este caso,  $A = (X, Y, Z)$ ):

$$\begin{aligned}A_{R_t} &= X \cos \theta \cos \omega t + Y \cos \theta \sin \omega t - Z \sin \theta, \\ A_{I_t} &= -X \sin \omega t + Y \cos \omega t.\end{aligned}$$

Claramente  $A_{R_t}$  y  $A_{I_t}$  conmutan entre sí, por lo que el término  $[A_{R_t}, A_{I_t}]$  de la fórmula (2.86) es cero. Usando propiedades de estados coherentes, obtenemos que:

$$\langle \psi_t | A_{R_t}^2 | \psi_t \rangle = \langle \psi_t | A_{I_t}^2 | \psi_t \rangle = \frac{r_0^2}{2}.$$

Finalmente, sustituyendo estos resultados en la fórmula (2.86) obtenemos:

$$-\omega \frac{\epsilon^2}{4r_0^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \langle \psi_t | (A_{R_t}^2 + A_{I_t}^2 + i[A_{R_t}, A_{I_t}]) | \psi_t \rangle dt = -\frac{1}{2} \pi \epsilon^2,$$

el cual es idéntico a (2.36).



## Capítulo 3

# Discusión de los resultados obtenidos

La fórmula más general obtenida para la corrección a la fase geométrica debida a un “campo magnético cuántico” es (2.86):

$$-\omega \frac{\epsilon^2}{4r_0^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \langle \psi_t | (A_{R_t}^2 + A_{I_t}^2 + i[A_{R_t}, A_{I_t}]) | \psi_t \rangle dt.$$

En la fórmula anterior podemos reconocer 2 términos distintos, el término proporcional a  $(\langle A_{R_t}^2 \rangle + \langle A_{I_t}^2 \rangle)$  y el término proporcional a  $\langle [A_{R_t}, A_{I_t}] \rangle$ . El término proporcional a  $\langle [A_{R_t}, A_{I_t}] \rangle$  es un efecto puramente cuántico, el cual involucra la no conmutatividad de las diferentes componentes del operador  $A$ . Este es un efecto que no tiene análogo clásico, por lo que no tenemos una situación clásica con la cual comparar este resultado.

Como  $\langle \psi_t | A | \psi_t \rangle = \rho \hat{n}_t$ , es inmediato que se cumple la igualdad  $\langle A_{R_t} \rangle = \langle A_{I_t} \rangle = 0$ , por lo que los términos  $\langle A_{R_t}^2 \rangle$  y  $\langle A_{I_t}^2 \rangle$  en verdad son el ancho (elevado al cuadrado) de los estados  $|\psi_t\rangle$  respecto a  $A_{R_t}$  y  $A_{I_t}$  respectivamente. Este término se debe a que el “campo magnético” no tiene una dirección bien definida, sino que tiene una incertidumbre angular.

Como ya se mencionó en el capítulo anterior, los términos  $(\langle A_{R_t}^2 \rangle + \langle A_{I_t}^2 \rangle)$  y  $[A_{R_t}, A_{I_t}]$  son invariantes bajo rotaciones alrededor del eje  $\hat{n}$ , lo que nos indica que la corrección a la fase geométrica es debida solamente al comportamiento del operador vectorial  $A$  en el espacio normal al vector  $\hat{n}$ . Esto corresponde con lo que ocurría en el caso del campo magnético clásico, en el cual la fase geométrica no dependía de la magnitud del campo magnético.

La corrección que se obtuvo en el caso en el que el campo magnético es estocástico es, usando (1.43):

$$-\omega \frac{\epsilon^2 \cos(\theta)}{4B_0^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (K_R^2 + K_I^2) dt.$$

La corrección cuántica a la fase geométrica para un estado coherente del

oscilador armónico como “campo magnético cuántico” es:

$$-\omega \frac{\epsilon^2}{4r_0^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \langle \psi_t | (A_{R_t}^2 + A_{I_t}^2) | \psi_t \rangle dt.$$

En ambos casos, el campo magnético (estocástico o cuántico) seguía a la misma trayectoria “en promedio”. Comparando ambas expresiones, es claro que ambos resultados son cualitativamente iguales, salvo que en el caso del campo estocástico aparece un factor de  $\cos(\theta)$ , y en el caso del “campo magnético cuántico” este factor no aparece. Como ya se discutió en la sección 1.5 del campo magnético estocástico, el factor  $\cos(\theta)$  permite obtener el resultado cualitativo esperado, por lo que hay una discrepancia en el resultado obtenido para el caso cuántico.

Lo anterior se puede explicar notando que en el caso clásico, el único sistema cuántico es el espín, por lo que la corrección a la fase geométrica obtenida es únicamente en el espacio del espín. Sin embargo, en el caso del “campo magnético cuántico”, el sistema tiene una parte en el espacio del espín y tiene otra parte en el espacio de la partícula, el cual también es cuántico. Como en el espacio de la partícula el sistema sigue una trayectoria cíclica, éste tendrá su propia fase geométrica. En los cálculos que se hicieron en el capítulo anterior, nunca se distinguió si la fase acumulada era del espín o de la partícula, por lo que la corrección obtenida es la corrección total del sistema, la cual incluye tanto las contribuciones de la partícula como las del espín.

El hecho de que el sistema tenga una fase geométrica no sólo por el espacio del espín, sino también por el espacio de la partícula, justifica que el resultado no se pueda comparar directamente con el resultado para el campo magnético estocástico. Sin embargo, para obtener la parte de la fase total que no es atribuible ni al espacio de la partícula ni al espacio del espín por separado, sino al sistema formado por los dos, es necesario restar de la fase total obtenida la parte que corresponde únicamente al espacio de la partícula. A continuación se hará un bosquejo de como se podría realizar esta cuenta para el caso estudiado en la sección 2.3, en que  $H_A$  es el Hamiltoniano de un oscilador armónico.

En primera aproximación, la fase geométrica en el espacio de la partícula se obtiene al resolver la ecuación de Schrödinger con el siguiente Hamiltoniano  $H_p$ :

$$H_p = H_A + \frac{\lambda \hbar}{2} (X, Y, Z) \cdot (\cos \omega t \sin \theta, \sin \omega t \sin \theta, \cos \theta),$$

donde  $H_A$  es el Hamiltoniano dado por (2.6). El Hamiltoniano  $H_p$  es un Hamiltoniano que sólo actúa en el espacio de la partícula, y se obtiene de sustituir al operador  $\sigma$  por su valor esperado en la trayectoria esperada en el espacio del espín para la solución. Así como al sustituir al operador  $(X, Y, Z)$  por su valor esperado en el Hamiltoniano y encontrar la fase geométrica obtenemos la fase geométrica estándar,  $\pi(\cos \theta - 1)$ , la cual es propia del espacio del espín, es natural suponer que al hacer lo mismo en el espacio de la partícula obtengamos una fase geométrica propia del espacio de la partícula.

Como el Hamiltoniano  $H_A$  es el Hamiltoniano del oscilador armónico tridimensional con la posición de equilibrio desplazada, al sumarle términos que dependen linealmente de  $X$ ,  $Y$  o  $Z$ , obtenemos el Hamiltoniano de un oscilador armónico tridimensional con la posición de equilibrio desplazada de manera distinta. Así, el Hamiltoniano  $H_p$  físicamente corresponde a un oscilador armónico

tridimensional al cual se le va cambiando la posición de equilibrio en el tiempo. Este cambio está caracterizado por  $\omega$ , el cual también es la frecuencia del oscilador. Por lo anterior, la evolución no puede ser adiabática. Sin embargo, como esta perturbación al Hamiltoniano  $H_A$  tiene frecuencia  $\omega$ , es de esperarse que en cierto límite, el sistema sea cíclico. Así, para calcular la fase geométrica es necesario utilizar el formalismo de Aharonov-Anandan en lugar del formalismo de Berry.

Como los parámetros del problema  $\lambda$ ,  $\hbar$  y  $\rho$  cumplen la condición de indiferencia (2.12),  $H_A$  es el término principal del Hamiltoniano  $H_p$ , y el resto es una pequeña perturbación, por lo que nuevamente podemos utilizar teoría de perturbaciones dependiente del tiempo. Para poder ver esto de manera más formal, podemos comparar los valores esperados. En un estado coherente, el valor esperado de la energía es del orden de  $k\rho^2$ , mientras que el valor esperado del operador  $(X, Y, Z)$  tiene magnitud del orden de  $\rho$ , por lo que necesitamos es que:

$$k\rho^2 \gg \lambda\hbar\rho \iff 1 \gg \frac{\lambda\hbar}{k\rho} \iff 1 \gg \epsilon,$$

lo cual es justamente la condición de indiferencia (2.12). Así, podemos escribir al Hamiltoniano como:

$$H_p = H_A + \epsilon \underbrace{\frac{k\hbar}{2} \left( \frac{X}{\rho}, \frac{Y}{\rho}, \frac{Z}{\rho} \right) \cdot (\cos\omega t \sin\theta, \sin\omega t \sin\theta, \cos\theta)}_{\equiv \hbar V}.$$

De esta forma, los operadores  $X/\rho$ ,  $Y/\rho$  y  $Z/\rho$  tendrán valor esperado del orden de uno, por lo que el valor esperado de  $\hbar\epsilon V$  será pequeño en comparación del de  $H_A$ . Usando la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo, el operador de evolución temporal  $U$  para  $H_p$  es:

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_A t} U_\epsilon(t).$$

donde

$$U_\epsilon(t) = 1 - i\epsilon \int_0^t dt_1 \tilde{V}(t_1) - \epsilon^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \tilde{V}(t_1) \tilde{V}(t_2),$$

fórmula que es correcta hasta orden  $O(\epsilon^2)$ .

La fase del sistema  $\gamma$  después de un ciclo es:

$$\gamma = \langle \psi_0 | U \left( \frac{2\pi}{\omega} \right) | \psi_0 \rangle$$

La fase dinámica  $\gamma_{din}$  es, usando el formalismo de Aharonov-Anandan, por (1.32):

$$\gamma_{din} = -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt \langle \psi_0 | U^\dagger(t) H_p U(t) | \psi_0 \rangle.$$

Finalmente, la fase geométrica según Aharonov-Anandan es (1.34):

$$\gamma_{geo} = \gamma - \gamma_{din}.$$

La fase anterior es una fase geométrica propia del espacio de la partícula, mientras que la fase  $\pi(\cos(\theta) - 1)$  es una fase geométrica propia del espacio del espín. Si a la fase geométrica total obtenida le restamos esta fase  $\gamma_{geo}$ , obtendremos una fase que no necesariamente se le podrá atribuir al espacio de la partícula o al espacio del espín, sino al sistema completo. Aunque el cálculo anterior fue sólo un bosquejo, en un futuro se planea realizar este cálculo con más detalle, y realizarlo también para operadores  $A$  más generales.

# Apéndice A

## Código en Mathematica

### A.1. Cálculos de la sección 1.5

El campo magnético total, es por definición  $B = B_0 + \epsilon K = (\epsilon K_R) \hat{R} + (\epsilon K_I) \hat{I} + (\epsilon K_n + B_0 \hat{n})$ . Como los vectores  $\hat{R}, \hat{I}$  y  $\hat{n}$  (ecuaciones (1.36)-(1.38)) son ortogonales, es claro que la magnitud de  $B$  es:

$$|B| = \sqrt{(\epsilon K_R)^2 + (\epsilon K_I)^2 + (B_0 + \epsilon K_n)^2} \quad (1.39)$$

De las ecuaciones (1.36)-(1.38), y de la expresión para  $B$ , podemos calcular  $B \cdot \hat{z}$ , el cual es:

$$B \cdot \hat{z} = (-\epsilon \sin[\theta_0] K_R + 0 K_I + \cos[\theta_0] (B_0 + \epsilon K_n)) \quad (1.40)$$

Como  $\cos(\theta) = \frac{B \cdot \hat{z}}{|B|} = B \cdot \hat{z} / (|B|)$ , podemos calcularlo explícitamente. Haciendo un desarrollo en  $\epsilon$  hasta orden 2:

$$\cos \theta = \text{Normal}[\text{Series}[B \cdot \hat{z} / (|B|), \{\epsilon, 0, 2\}] // \text{Simplify}[\#, \text{Assumptions} \rightarrow B_0 > 0] \&]$$

$$\cos[\theta_0] - \frac{K_R \epsilon \sin[\theta_0]}{B_0} - \frac{\epsilon^2 \left( (K_I^2 + K_R^2) \cos[\theta_0] - 2 K_n K_R \sin[\theta_0] \right)}{2 B_0^2}$$

Claramente, la expresión anterior coincide con la ecuación (1.39). Ahora, calculemos el ángulo  $\phi$ . Proyectando en el plano xy,

$$\begin{aligned} B_y &= \epsilon \sin[\phi_0] \cos[\theta_0] K_R + \epsilon \cos[\phi_0] K_I + \epsilon \sin[\phi_0] \sin[\theta_0] K_n + B_0 \sin[\phi_0] \sin[\theta_0]; \\ B_x &= \epsilon \cos[\phi_0] \cos[\theta_0] K_R - \epsilon \sin[\phi_0] K_I + \epsilon \cos[\phi_0] \sin[\theta_0] K_n + B_0 \cos[\phi_0] \sin[\theta_0]; \end{aligned}$$

Así, el ángulo  $\phi$  lo podemos calcular como  $\phi = \text{Arctan}\left(\frac{B_y}{B_x}\right)$ . Desarrollando en  $\epsilon$  hasta orden 2:

$$\phi = (\text{Series}[\text{ArcTan}[B_y / B_x], \{\epsilon, 0, 2\}] // \text{Simplify}) /. \{\text{ArcTan}[\text{Tan}[\phi_0]] \rightarrow \phi_0\} // \text{Normal}$$

$$\phi_0 + \frac{K_I \epsilon \csc[\theta_0]}{B_0} - \frac{K_I \epsilon^2 (K_n + K_R \cot[\theta_0]) \csc[\theta_0]}{B_0^2}$$

Con un poco de desarrollo algebraico, la ecuación anterior coincide con (1.40). Si derivamos (2), obtenemos  $\dot{\phi} \equiv \dot{\phi}$ . Recordando que  $\dot{\phi}_0 = \omega$ , obtenemos:

$$\dot{\phi} = \omega + \epsilon K_I' / (B_0 \sin[\theta_0]) - \frac{\epsilon^2}{B_0^2} \left( (K_R' K_I + K_R K_I') \cos[\theta_0] + (K_I K_n' + K_I' K_n) \sin[\theta_0] \right);$$

En la expresión anterior, ' representa una derivada temporal. Así, el resultado de  $1/2 (\cos(\theta)-1) \dot{\phi}$  es:

2 | *apendiceA.1.nb*

```
pi = (Series[1/2 (COSθ - 1) φd, {ε, 0, 2}]) // Normal // Expand;
pf = Coefficient[pi, ε, 0] + ε Coefficient[pi, ε, 1] + ε^2 Coefficient[pi, ε, 2]
```

$$-\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2} \omega \cos[\theta_0] + \epsilon \left( -\frac{KR \omega \sin[\theta_0]}{2 Bo} + \frac{\cot[\theta_0] KI'}{2 Bo} - \frac{\csc[\theta_0] KI'}{2 Bo} \right) +$$

$$\epsilon^2 \left( -\frac{KI^2 \omega \cos[\theta_0]}{4 Bo^2} - \frac{KR^2 \omega \cos[\theta_0]}{4 Bo^2} + \frac{Kn KR \omega \sin[\theta_0]}{2 Bo^2} - \frac{KR KI'}{2 Bo^2} - \right.$$

$$\frac{Kn \cot[\theta_0] KI'}{2 Bo^2} - \frac{KR \cot[\theta_0]^2 KI'}{2 Bo^2} + \frac{Kn \csc[\theta_0] KI'}{2 Bo^2} + \frac{KR \cot[\theta_0] \csc[\theta_0] KI'}{2 Bo^2} -$$

$$\left. \frac{KI \cot[\theta_0] Kn'}{2 Bo^2} + \frac{KI \csc[\theta_0] Kn'}{2 Bo^2} - \frac{KI \cot[\theta_0]^2 KR'}{2 Bo^2} + \frac{KI \cot[\theta_0] \csc[\theta_0] KR'}{2 Bo^2} \right)$$

La expresión anterior coincide con el integrando de (1.41). Ahora, calculemos los coeficientes  $L_R$ ,  $L_I$  y  $T_{i,j}$  de (1.41):

```
LR = (1/ε) Coefficient[pf, KR, 1] /. {Kn → 0, KI' → 0};
LI = (1/ε) Coefficient[pf, KI', 1] /. {KR → 0, Kn → 0} // Simplify;
TIn = (1/ε^2) Coefficient[pf, KI Kn', 1] // Simplify;
TnI = (1/ε^2) Coefficient[pf, Kn KI', 1] // Simplify;
TRI = (1/ε^2) Coefficient[pf, KR KI', 1] // Simplify;
TIR = (1/ε^2) Coefficient[pf, KI KR', 1] // Simplify;
TnR = (1/ε^2) Coefficient[pf, Kn KR', 1] // Simplify;
TRn = (1/ε^2) Coefficient[pf, KR Kn', 1] // Simplify;
```

```
{LR, LI, TIn, TnI, TRI, TIR, TnR, TRn}
```

$$\left\{ -\frac{\omega \sin[\theta_0]}{2 Bo}, -\frac{\tan\left[\frac{\theta_0}{2}\right]}{2 Bo}, \frac{\tan\left[\frac{\theta_0}{2}\right]}{2 Bo^2}, \frac{\tan\left[\frac{\theta_0}{2}\right]}{2 Bo^2}, -\frac{\sec\left[\frac{\theta_0}{2}\right]^2}{4 Bo^2}, \frac{\cot[\theta_0] \tan\left[\frac{\theta_0}{2}\right]}{2 Bo^2}, 0, 0 \right\}$$

que son las expresiones de la ecuación (1.42).

## A.2. Cálculos de la sección 2.3

Por la ecuación (2.22):

$$\mathbf{H}_0 = \Omega / 2 \{ \{ \cos[\theta], \sin[\theta] \}, \{ \sin[\theta], -\cos[\theta] \} \};$$

Definimos  $\mathbf{kno} \equiv |n_0\rangle$ , el cual es, por (2.10):

$$\mathbf{kno} = \{ \cos[\theta / 2], \sin[\theta / 2] \};$$

Definimos al siguiente operador:  $\text{expMiHo}[t] \equiv e^{-iH_0 t}$ .

$$\text{expMiHo}[t\_ ] := \text{MatrixExp}[-i \mathbf{H}_0 t] // \text{Simplify};$$

Definimos  $\mathbf{Vt1} \equiv V(t_1)$ . De manera análoga, definimos a  $\mathbf{xt1}$ ,  $\mathbf{yt1}$ ,  $\mathbf{zt1}$ ,  $\mathbf{Vt2}$ ,  $\mathbf{xt2}$ ,  $\mathbf{yt2}$  y  $\mathbf{zt2}$ . Así, por (2.22):

$$\begin{aligned} \mathbf{Vt1} &= \epsilon \Omega / 2 \{ \{ \mathbf{zt1}, (\mathbf{xt1} - i \mathbf{yt1}) \text{Exp}[i \omega \mathbf{t1}] \}, \{ (\mathbf{xt1} + i \mathbf{yt1}) \text{Exp}[-i \omega \mathbf{t1}], -\mathbf{zt1} \} \}; \\ \mathbf{Vt2} &= \epsilon \Omega / 2 \{ \{ \mathbf{zt2}, (\mathbf{xt2} - i \mathbf{yt2}) \text{Exp}[i \omega \mathbf{t2}] \}, \{ (\mathbf{xt2} + i \mathbf{yt2}) \text{Exp}[-i \omega \mathbf{t2}], -\mathbf{zt2} \} \}; \end{aligned}$$

El producto  $\langle \Phi_0 | \tilde{V}(t_1) \tilde{V}(t_2) | \Phi_0 \rangle$  de (2.28) se puede reescribir como  $e^{\frac{i}{2}(t_1-t_2)\Omega} \langle \Phi_0 | (V(t_1) e^{-iH_0 t_1} e^{iH_0 t_2} V(t_2)) | \Phi_0 \rangle$ , usando (2.25) y que  $|\Phi_0\rangle$  es eigenvector de  $e^{-iH_0 t}$  (pues es eigenvector de  $H_0$ , por (2.21)).

Definimos  $\mathbf{M1} \equiv e^{\frac{i}{2}(t_1-t_2)\Omega} V(t_1) e^{-iH_0 t_1} e^{iH_0 t_2} V(t_2)$ ,

$$\mathbf{M1} = \text{Exp}[i (t1 - t2) \Omega / 2] \mathbf{Vt1} . \text{expMiHo}[t1 - t2] . \mathbf{Vt2};$$

Como  $|\Phi_0\rangle$  en la parte del espacio de la partícula es el estado base del oscilador,  $|0\rangle$ , los términos análogos a  $\langle 0 | x(t_1) y(t_2) | 0 \rangle$  en el producto  $\langle \Phi_0 | \mathbf{M1} | \Phi_0 \rangle$  son cero, por lo que basta con considerar sólo a los términos  $x(t_1)x(t_2)$ ,  $y(t_1)y(t_2)$  y  $z(t_1)z(t_2)$ . Llamemos a estos términos  $\mathbf{M2}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{M2} &= \text{Coefficient}[\mathbf{M1}, \mathbf{xt1} \mathbf{xt2}, 1] \mathbf{xt1} \mathbf{xt2} + \\ &\quad \text{Coefficient}[\mathbf{M1}, \mathbf{yt1} \mathbf{yt2}, 1] \mathbf{yt1} \mathbf{yt2} + \text{Coefficient}[\mathbf{M1}, \mathbf{zt1} \mathbf{zt2}, 1] \mathbf{zt1} \mathbf{zt2}; \end{aligned}$$

Usando propiedades del estado base,  $\langle 0 | x(t_1) x(t_2) | 0 \rangle = \langle 0 | y(t_1) y(t_2) | 0 \rangle = \langle 0 | z(t_1) z(t_2) | 0 \rangle = \frac{1}{2} e^{i\omega(t_2-t_1)}$ . Así, haciendo las sustituciones anteriores, y tomando el producto en la parte del espín, a  $\langle \Phi_0 | \mathbf{M1} | \Phi_0 \rangle$  lo podemos calcular como:

$$\text{expr1} = (\mathbf{kno} . \mathbf{M2} . \mathbf{kno} / . \{ \mathbf{xt1} \mathbf{xt2} \rightarrow 1 / 2 \text{Exp}[i \omega (t2 - t1)], \\ \mathbf{yt1} \mathbf{yt2} \rightarrow 1 / 2 \text{Exp}[i \omega (t2 - t1)], \mathbf{zt1} \mathbf{zt2} \rightarrow 1 / 2 \text{Exp}[i \omega (t2 - t1)] \}) // \text{Simplify};$$

Así, la integral  $-\xi^2 \int_0^{2\pi/\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle \Phi_0 | \mathbf{M1} | \Phi_0 \rangle$  de (2.28) es, usando (2.15):

$$\text{expr2} = -(\omega / \Omega) \text{Integrate}[\text{Integrate}[\text{expr1}, \{t2, 0, t1\}], \{t1, 0, 2 \text{Pi} / \omega\}];$$

De la expresión anterior, estamos interesados en los términos que no dependen de  $\omega$ , los cuales son:

$$\text{cfgeo} = \text{Coefficient}[\text{Normal}[\text{Series}[\text{expr2}, \{\omega, 0, 2\}], \omega, 0] // \text{Simplify}$$

$$-\frac{1}{2} i \pi \epsilon^2$$

Que es el resultado de la ecuación (2.35).

### A.3. Cálculos de la sección 2.4

En la base formada por los vectores  $\hat{R}, \hat{I}$  y  $\hat{n}_0$ , los operadores  $\sigma_R, \sigma_I, \sigma_n$  (ecuación (2.59)) se pueden escribir como (en analogía con  $\sigma_x, \sigma_y$ , y  $\sigma_z$  pues la base  $\{\hat{R}, \hat{I}, \hat{n}_0\}$  también es derecha por las ecuaciones (2.55)-(2.57)):

$$\begin{aligned}\sigma_R &= \{\{0, 1\}, \{1, 0\}\}; \\ \sigma_I &= \{\{0, -1\}, \{1, 0\}\}; \\ \sigma_n &= \{\{1, 0\}, \{0, -1\}\};\end{aligned}$$

Definimos  $kno \equiv |\hat{n}_0\rangle$ , el cual, en la base de  $\{\hat{R}, \hat{I}, \hat{n}_0\}$  se puede escribir como (pues es eigenvector de  $\sigma_n$  con eigenvalor 1 por construcción):

$$kno = \{1, 0\};$$

Definimos  $Vt1 \equiv \tilde{V}(t_1)$ . Los operadores  $b1R$  y  $b2R$  corresponden al operador  $b_R$ , pero le ponemos el 1 y 2 para que *Mathematica* no los commute de manera inadecuada. Así, por (2.62):

$$\begin{aligned}Vt1 &= \epsilon \Omega/2 ((b1R) (\text{Cos}[\Omega t1] \sigma_R - \text{Sin}[\Omega t1] \sigma_I) + (b1I) (\text{Sin}[\Omega t1] \sigma_R + \text{Cos}[\Omega t1] \sigma_I) + b1n \sigma_n); \\ Vt2 &= \epsilon \Omega/2 ((b2R) (\text{Cos}[\Omega t2] \sigma_R - \text{Sin}[\Omega t2] \sigma_I) + (b2I) (\text{Sin}[\Omega t2] \sigma_R + \text{Cos}[\Omega t2] \sigma_I) + b2n \sigma_n);\end{aligned}$$

Definimos al operador  $M1$  como  $M1 \equiv \tilde{V}(t_1) \tilde{V}(t_2)$ . Así, queremos calcular el producto  $\langle \Phi_0 | M1 | \Phi_0 \rangle$

$$M1 = Vt1.Vt2;$$

Como  $|\Phi_0\rangle = |\phi_0\rangle \otimes |\hat{n}_0\rangle$ , podemos hacer primero el producto sólo en el espacio del espín, y luego hacer el producto en el espacio de la partícula. Hagamos el producto en el espacio del espín:

$$\text{expr1} = (kno.M1.kno) // \text{Simplify};$$

Así, la integral  $-\xi^2 \int_0^{2\pi/\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle \Phi_0 | \tilde{V}(t_1) \tilde{V}(t_2) | \Phi_0 \rangle$  de (2.52) es (usando (2.15)):

$$\text{expr2} = -(\omega/\Omega) \text{Integrate}[\text{Integrate}[\text{expr1}, \{t2, 0, t1\}], \{t1, 0, 2 \text{Pi}/\omega\}];$$

De la expresión anterior, estamos interesados en los terminos que no dependen de  $\omega$ , los cuales son:

$$\text{cfgeo} = \text{Coefficient}[\text{Normal}[\text{Series}[\text{expr2}, \{\omega, 0, 2\}], \omega, 0] // \text{Simplify} // \text{Expand}$$

$$-\frac{1}{2} i b1I b2I \pi \epsilon^2 + \frac{1}{2} b1R b2I \pi \epsilon^2 - \frac{1}{2} b1I b2R \pi \epsilon^2 - \frac{1}{2} i b1R b2R \pi \epsilon^2$$

Tomando valor esperado respecto a  $|\phi_0\rangle$ , y reordenando, es claro que la expresión anterior es igual a la de la ecuación (2.64)

## A.4. Cálculos de la sección 2.5

Para calcular la integral  $-\xi^2 \int_0^{2\pi/\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle \Phi_0 | \tilde{V}(t_1) \tilde{V}(t_2) | \Phi_0 \rangle$  de (2.73), nos basaremos en la expresión para

$\langle \Phi_0 | \tilde{V}(t_1) \tilde{V}(t_2) | \Phi_0 \rangle$  obtenida en la ecuación (2.81). Para escribir todo de manera más compacta, hacemos las siguientes definiciones:

$$C_{ms} = C_m^*, \quad \epsilon_{km} = \epsilon_{km} = \epsilon_k - \epsilon_m,$$

$$\text{opPart1} = A_{mk} \cdot D_s(\hat{n}_0), \quad \text{opPart12} = A_{kn} \cdot D_r(\hat{n}_0),$$

$$\text{opPart2} = (A_{mk} \cdot D_s(\hat{m}_0))(A_{kn} \cdot D_r(\hat{n}_0))$$

Es importante notar que los operadores opPart no dependen del tiempo. Usando las igualdades anteriores, definimos:

$$\begin{aligned} \text{factorComun} &= e^{\lambda^2 \Omega^2 / (4 r \omega^2)} C_{ms} C_n \text{Exp}[-i \epsilon_{km} \omega t_1] \text{Exp}[-i \epsilon_{nk} \omega t_2]; \\ \text{parte1} &= (\text{opPart11} \text{Exp}[i \omega s t_1] - \rho \delta_{mk}) (\text{opPart12} \text{Exp}[i \omega r t_2] - \rho \delta_{kn}); \\ \text{parte2} &= \text{opPart2} \text{Exp}[i \omega (s t_1 - r t_2)] \text{Exp}[i \Omega (t_1 - t_2)]; \end{aligned}$$

Con las expresiones anteriores, es claro que los sumandos a integrar de (2.73), se pueden escribir como: factorComun (parte1 + parte2).

$$\text{expr1} = \text{factorComun} (\text{parte1} + \text{parte2});$$

Así, la integral de cada sumando es (usando (2.15)):

$$t\text{Integral} = -(\omega / \Omega) \text{Integrate}[\text{Integrate}[\text{expr1}, \{t_2, 0, t_1\}], \{t_1, 0, 2\pi / \omega\}];$$

Los términos que no dependen de  $\omega$  son:

$$\text{cfgeo} = \text{Coefficient}[\text{Normal}[\text{Series}[t\text{Integral}, \{\omega, 0, 2\}]], \omega, 0] // \text{Simplify}$$

$$-\frac{C_{ms} C_n e^{-2i\pi(r-s+\epsilon_{km}+\epsilon_{nk})} (-1 + e^{2i\pi(r-s+\epsilon_{km}+\epsilon_{nk})}) \text{opPart2} \epsilon^2}{4 r \omega^2 (r - s + \epsilon_{km} + \epsilon_{nk})}$$

Como  $r$  y  $s$  son enteros,  $e^{2i\pi(r-s)} = 1$ . Por la definición de  $\epsilon_{kn}$ , es claro que  $\epsilon_{nk} + \epsilon_{km} = \epsilon_{nm}$ . Usando lo anterior, y reordenando un poco cfgeo, es claro que el resultado coincide con el de la ecuación (2.83).



# Bibliografía

- [1] Aguilar, P., Chryssomalakos, C., Hernandez, H., y Okon, E. *Constrained Quantum Particles and Berry's Phase in Noninertial Frames*, sin publicar, 2010.
- [2] Aharonov, Y., y Anandan, J. *Phase Change during a Cyclic Quantum Evolution*, Physical Review Letters **58**, 1593, 1987.
- [3] Berry, M. V., *Quantum Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes* Proceedings of the Royal Society of London A **392**, 45, 1984.
- [4] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., y Laloë, F. *Quantum Mechanics*, New York: Wiley, 1977.
- [5] Dariusz, C., y Andrzej, J., *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*, Boston: Birkhäuser, 2004.
- [6] De Chiara, G., y Massimo, G. *Berry Phase for a Spin 1/2 Particle in a Classical Fluctuating Field*, Physical Review Letters **91**, 090404, 2003.
- [7] Sakurai, J.J., *Modern Quantum Mechanics*, Massachusetts: Addison-Wesley, 1994.
- [8] Simon, B., *Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and Berry's phase*, Physical Review Letters **51**, 2167, 1983
- [9] Wilczek, F., y Zee, A. *Appearance of gauge structure in simple dynamical systems* Physical Review Letters **52**, 2111, 1984.