



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**CLASIFICACIÓN DE 2-VARIEDADES COMPACTAS  
Y CERRADAS: UNA DEMOSTRACIÓN COMPLETA**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**M A T E M Á T I C O**

**P R E S E N T A:**

**RICARDO MANSILLA SÁNCHEZ**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. CARLOS PRIETO DE CASTRO  
2012**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Mansilla

Sánchez

Ricardo

55287067

Universidad Nacional Autónoma de

México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

408490070

2. Datos del tutor

Dr.

Carlos

Prieto

De Castro

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Antonio

Lascurain

Orive

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Guillermo

Sienra

Loera

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Raul Américo

Pérez

Martínez

6. Datos del sinodal 4

M. en C.

Ana Irene del Refugio

Ramírez

Galaraza

7. Datos del trabajo escrito.

Clasificación de 2-variedades compactas y cerradas: una demostración completa.

Un enfoque geométrico/combinatorio

60 p

2012

# ÍNDICE GENERAL

<b>Introducción</b> . . . . .	<b>2</b>
<b>1. Resultados teóricos preliminares.</b>	<b>3</b>
1.1. Variedades. . . . .	3
1.2. Homotopía y grupo fundamental. . . . .	9
1.2.1. Grupo fundamental del círculo. . . . .	16
1.3. Gráficas . . . . .	20
1.3.1. Teorema de Jordan-Schönflies . . . . .	22
<b>2. Teorema de Clasificación de Superficies</b>	<b>30</b>
2.1. Superficies $S_g$ y $N_g$ . . . . .	30
2.2. Teorema de triangulación de superficies. . . . .	36
2.3. La característica de Euler de una superficie. . . . .	46
2.4. Grupo fundamental de las superficies. . . . .	47
2.4.1. Clasificación de Superficies. . . . .	57
<b>Conclusiones</b> . . . . .	<b>57</b>
<b>Referencias</b> . . . . .	<b>59</b>

## Introducción.

En este trabajo trataremos una demostración completa del Teorema de Clasificación de Superficies Cerradas. La historia del teorema probablemente empieza con los trabajos publicados por Riemann a mediados del siglo XIX. Fue con él que apareció el primer intento de estudiar las superficies desde un enfoque “no local”. Luego de que sus trabajos fueran ampliamente aceptados e influyeran enormemente a muchos de sus contemporáneos, algunos como Listing, Moebius y Jordan, fueron precursores de la noción de encontrar invariantes topológicos en las superficies con el objetivo de clasificarlas. Fue de hecho el mismo Moebius (contrario a lo que se cree), quien en 1863 que enunció la primera versión del Teorema de Clasificación en un trabajo que publicó para la Academia de Ciencias francesa. En 1866 Jordan publica por su cuenta (al parecer ignorante del trabajo de Moebius) una versión del teorema. En este trabajo Jordan establece por primera vez la idea de homeomorfismos entre superficies. Finalmente a principios del siglo XX, otros matemáticos como von Dyck, Alexander y Brauer formalizaron y generalizaron las pruebas de sus predecesores. Es debido a Brauer que aparece por primera vez una versión completa del teorema (como lo conocemos hoy) impresa.

La demostración del Teorema está compuesta de dos partes fundamentales. Al intentar clasificar siempre es necesaria una herramienta que permita comparar o diferenciar entre dos objetos de el conjunto a clasificar. El teorema de triangulación de superficies cumple en este caso tal función. Nos permite asociar a cada superficie un polígono específico que puede ser modificado a conveniencia hasta obtener una forma canónica que permita decidir cual es la clasificación de la superficie en cuestión. Vale la pena notar que los fundamentos teóricos que sustentan este resultado son exhibidos en este trabajo usando un enfoque mas moderno de teoría de gráficas, basados en el texto de Thomassen [1].

La segunda parte de la demostración contiene los argumentos necesarios para justificar la diferenciación de dos formas canónicas “distintas” (no homeomorfas) y es lo que le da sentido a la clasificación. Así, si el polígono asociado a una superficie es diferente a otro entonces las superficies deben de ser distintas. Para esto, usamos herramientas de topología algebraica.

## CAPÍTULO

# 1

# RESULTADOS TEÓRICOS PRELIMINARES.

## 1.1. Variedades.

**Definición 1.1.1.** Sean  $X$  e  $Y$ , espacios topológicos,  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua y biyectiva, donde su inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  también es continua, entonces decimos que  $f$  es un **homeomorfismo** entre los espacios topológicos  $X$  e  $Y$ , los cuales a su vez se llaman **homeomorfos**.

En general para decir que dos espacios  $X$  e  $Y$  cualesquiera son homeomorfos, se usará la notación  $X \approx Y$ . Merece la pena notar el hecho de que bajo la aplicación de homeomorfismos, los conjuntos abiertos (resp. cerrados), tienen como imagen conjuntos abiertos (resp. cerrados). Esto es un hecho sumamente importante, ya que permite la conservación de determinadas propiedades topológicas entre espacios homeomorfos.

**Ejemplo 1.1.1.** La función  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$  es continua y biyectiva, y es fácil ver que su inversa también lo es. Es por tanto un homeomorfismo entre el intervalo abierto  $(-1, 1)$  y  $\mathbb{R}$ .

Una base para una topología  $\mathcal{T}$  en un espacio topológico  $X$ , es una familia  $\mathcal{B}$  de conjuntos abiertos en dicha topología, de forma que  $\forall A \in \mathcal{T}$ , éste se puede expresar como unión de elementos de  $\mathcal{B}$ . Si en particular, es posible tomar la familia  $\mathcal{B}$  numerable, entonces se dice que  $X$  es *2-numerable*, o lo que es lo mismo, que satisface el segundo axioma de numerabilidad.

**Ejemplo 1.1.2.** En el caso de  $\mathbb{R}$ , si tomamos  $B_r(q)$ ,  $\forall q, r \in \mathbb{Q}$ , con  $r > 0$ , vemos que estos conjuntos forman una colección de abiertos, numerable, que además es base para la topología usual de  $\mathbb{R}$ .

Otra propiedad importante de algunos espacios topológicos es su separabilidad, la siguiente definición enuncia lo que se conoce como el segundo axioma de separación.

**Definición 1.1.2. (Axioma de separación de Hausdorff)** Se dice que un espacio topológico  $X$  es  $T_2$ , o Hausdorff, si  $\forall x \neq y$  en  $X$ , existen  $U \ni x$  y  $V \ni y$ , abiertos, de manera que  $U \cap V = \emptyset$ .

**Ejemplo 1.1.3.** El plano complejo  $\mathbb{C}$  con la topología usual, es de Hausdorff. Es fácil ver que si seleccionamos dos complejos  $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C}$ , los conjuntos abiertos  $U_1 = B_\epsilon(z_1)$ ,  $U_2 = B_\epsilon(z_2)$  con  $0 < \epsilon < \frac{\|z_2 - z_1\|}{2}$ , cumplen con lo requerido.

**Ejemplo 1.1.4.** El ejemplo anterior sugiere que un espacio métrico es de Hausdorff, ya que para la demostración solamente se usa el hecho de que hay una distancia definida en  $\mathbb{C}$ , es decir  $d(z_1, z_2) = \|z_2 - z_1\|$ . Esta sugerencia es correcta en general: todo espacio métrico, es de Hausdorff.

Una vez repasados los requisitos inevitables, definamos una variedad de la siguiente manera.

**Definición 1.1.3. (Variedad)** Una variedad  $M$  de dimensión  $n$ , es un espacio topológico de Hausdorff, 2-numerable, tal que  $\forall x \in M$ ,  $\exists V \subset M$  vecindad de  $x$ , de forma que  $V \approx U$ , donde  $U \subset \overline{B}^n$  abierto y  $\overline{B}^n \in \mathbb{R}^n$  es la  $n$ -bola (cerrada).

Al par, formado por el homeomorfismo:

$$\varphi : V \longrightarrow U$$

y el conjunto  $V$ , se le llama carta. A la colección de las  $(V_i, \varphi_i)$ , donde  $V_i$  es una cubierta de  $M$ , se le denomina atlas. Se dice que el punto  $x \in M$ , es un **punto interior** (resp. **punto frontera**), si para algún homeomorfismo  $\varphi : V \longrightarrow U$ ,  $\varphi(x) \in B^n = \text{int}(\overline{B}^n)$ , (resp.  $\varphi(x) \in \mathbb{S}^{n-1} = \partial(\overline{B}^n)$ ).

El *interior* de la variedad es el conjunto de todos sus puntos interiores, y la *frontera* el de todos sus puntos frontera.

En algunos textos se puede encontrar la definición anterior de forma un tanto distinta. Algunos autores prefieren pedir solamente que el conjunto  $U$  sea un abierto en  $\mathbb{R}^n$ , pero esta definición posee la desventaja de ser turbia a la hora de establecer los conceptos de frontera e interior de una variedad. Sin embargo, la definición exhibida aquí permite hacer uso del siguiente teorema para evitar que estos dos conceptos se entiendan de manera equivocada.

**Teorema 1.1.1. (Invarianzia del dominio.)** Sean  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  dos espacios tales que  $X \approx Y$ ; si  $X$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $Y$  también lo es.

**Demostración:** La prueba del teorema solo requiere de la existencia del homeomorfismo  $\varphi : X \rightarrow Y$  ya que se cumple que  $\varphi^{-1}$  es continua por tanto si  $X$  es abierto  $(\varphi^{-1})^{-1}(X) = Y$  también lo es. Y si  $Y$  es abierto por ser  $\varphi$  continua,  $\varphi^{-1}(Y) = X$  también lo es.  $\square$

Una consecuencia importante del teorema es la siguiente.

**Teorema 1.1.2.** (*Invarianza de la frontera*) Sea  $\varphi : \overline{B}^n \rightarrow \overline{B}^n$  un homeomorfismo. Entonces  $\varphi(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{S}^{n-1}$ .

**Demostración:** Supongamos que tomamos un punto  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  de manera que  $\varphi(x) = y \in B^n = \text{int}(\overline{B}^n)$ . Es claro que podemos tomar un abierto  $U$ , de manera que  $y \in U \subset B^n$ . La imagen inversa de este abierto  $\varphi(U)^{-1}$  intersecta a  $\mathbb{S}^{n-1} = \partial(\overline{B}^n)$  (al menos en  $x$ ). Es decir cumple que  $\varphi(U)^{-1} \cap \mathbb{S}^{n-1} \neq \emptyset$ , por tanto no puede ser abierta en  $B^n$  ya que contiene puntos frontera (en particular  $\varphi(U)^{-1}$  no es igual a su interior). Pero esto contradice lo expuesto en el teorema anterior.  $\square$

Queda bien establecido de esta forma lo que es la frontera y el interior de una variedad. De manera intuitiva, si  $M$  es una  $n$ -variedad y  $x \in M$ ,  $x$  es un punto interior si es posible encontrar un abierto  $x \in U \subset M$ , y un homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow V$ , con  $V \subset B^n$  de manera que  $\varphi(x)$  esté en  $B^n$ , si en caso contrario  $\varphi(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$  para cualesquiera  $U$  y  $\varphi$  que seleccionemos, entonces  $x$  es un punto frontera.

Para ilustrar todo lo enunciado anteriormente, examinaremos algunos ejemplos de variedades.

**Ejemplo 1.1.5.** *Tomemos dos copias de la recta real e identifiquemos los números negativos bajo una relación de equivalencia como sigue:*

$$X = \mathbb{R}_1 \sqcup \mathbb{R}_2 / \sim$$

donde:  $\mathbb{R}_1 \xrightarrow{\phi_1} \mathbb{R} \xleftarrow{\phi_2} \mathbb{R}_2$ , con  $\phi_1, \phi_2$  homeomorfismos, y la relación:  $x_1 \sim x_2 \iff \phi_1(x_1) = x = \phi_2(x_2)$  y  $x < 0$ .

No es difícil de ver que todo punto en este espacio tiene una vecindad homeomorfa a  $\mathbb{R}$ . Sin embargo, es bastante claro el hecho de que cualesquiera dos intervalos abiertos alrededor de los puntos  $0_1, 0_2$  van a contener números negativos de ambas copias de la recta real, que a la hora de "pegar" (i.e. al aplicar la identificación) van a coincidir. Hemos mostrado así, dos puntos que no son "separables" según el axioma T2 en este espacio, así que éste no es un espacio de Hausdorff y por lo tanto tampoco es una variedad.

**Ejemplo 1.1.6.** *El cilindro "finito":*

$$C = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\} \in \mathbb{R}^3$$

es una 2-variedad con frontera. Todos los puntos de la forma  $(x, y, 1) \in C$  forman parte de la misma. Este cilindro es una representación en  $\mathbb{R}^3$  de lo que se conoce como la banda trivial  $B$ , espacio que se obtiene del producto cartesiano  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$ , o de manera alternativa; como el espacio que resulta de identificar en  $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ , a los puntos de la forma  $(0, t)$  con el punto  $(1, t)$ .



**Ejemplo 1.1.7.** Si en el ejemplo anterior, identificamos los puntos de la forma  $(0, t)$  con el punto  $(1, 1 - t)$  obtenemos lo que se conoce como la banda Moebius, que usualmente se denota por  $\mathbb{M}$ . No es difícil ver que esta también es una variedad con frontera, pues la frontera consiste precisamente en los puntos de la forma  $(s, 0), (1 - s, 1) \forall s \in \mathbb{I}$  (Figura 1.1).

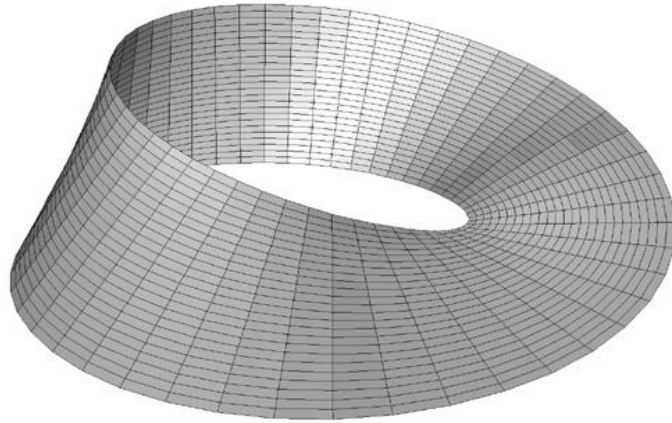


Figura 1.1: Banda de Moebius.

**Ejemplo 1.1.8.** Todas las esferas de dimensión mayor que 1,  $\mathbb{S}^n, \forall n \geq 1$ , son ejemplos de variedades sin frontera.

Un caso importante y fundamental para nuestros objetivos en este trabajo es el de las 2-variedades compactas y sin fronteras, donde con compactas nos referimos a la noción usual de compacidad de espacios topológicos.

**Definición 1.1.4.** Una 2-variedad se llama **superficie**. Si además es un espacio topológico compacto y carece de frontera, entonces se le llama **superficie cerrada**.

**Ejemplo 1.1.9.** El espacio topológico definido por  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{I} \times \mathbb{I} / \sim$ , donde  $\sim$  no es otra cosa que:

$$(x, 0) \sim (x, 1), (0, y) \sim (1, y)$$

es conocido como "toro", y es una superficie cerrada (Figura 1.2).

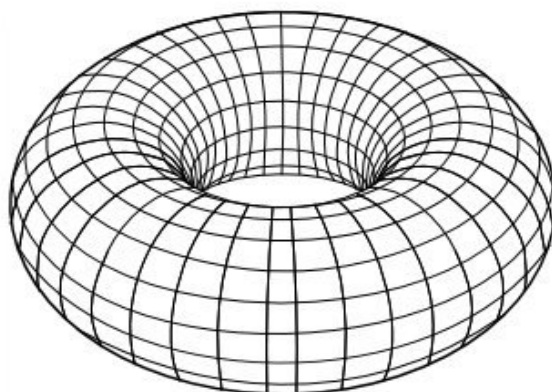
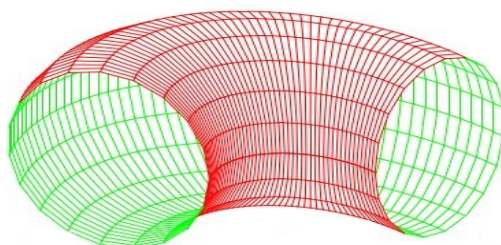


Figura 1.2: Representación tridimensional del toro.

No es difícil ver que esta variedad es homeomorfa a la que se obtiene al hacer el producto cartesiano entre dos copias de  $\mathbb{S}^1$ , es decir  $\mathbb{T}^2 \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Intuitivamente podríamos decir que por cada punto  $x \in \mathbb{S}^1$ , tenemos una copia de  $\mathbb{S}^1$ . Más aún, si tomamos un intervalo cerrado  $K \subset \mathbb{S}^1$ , vemos que al hacer  $K \times \mathbb{S}^1$ , obtendremos una sección del toro que se asemejaría a un pedazo de tubería, deformada de manera tal que su eje central fuera un arco de círculo (básicamente el intervalo  $K$ ).

Figura 1.3: Sección del toro definida por el intervalo  $K$ .

Si en vez de esto tomamos  $K$  como todo  $\mathbb{S}^1$ , tendremos el toro completo. El toro es uno de los ejemplos más usados en la topología, y que como se verá posteriormente es de gran importancia para la clasificación de variedades.

Hay una característica muy importante que clasifica en dos grupos a las superficies, es conocida como orientabilidad. El hecho de que una 2-variedad sea orientable o no, se puede ilustrar y definir de varias maneras. Por cuestiones de brevedad y formalismo, nos limitaremos a enunciar de la manera más concisa y sobria posible esta característica de las superficies.

**Definición 1.1.5.** Si  $X, Y$  son espacios topológicos, y  $e : X \rightarrow Y$  una aplicación continua. Entonces decimos que  $e$  es un **encaje de espacios topológicos**, o simplemente un **encaje** si  $e : X \rightarrow e(X)$  es un homeomorfismo.

En el caso de las variedades, si  $e$  cumple con lo anterior entonces se dice que es un *encaje de variedades*.

**Definición 1.1.6.** Se dice que  $V$  es una superficie no orientable si existe  $e : \mathbb{M} \rightarrow V$ , encaje, donde  $\mathbb{M}$  es la banda de Moebius.

Veamos un par de ejemplos de superficies no orientables y la relación que hay entre ellas.

**Ejemplo 1.1.10.** Claramente  $\mathbb{M}$  es no orientable, pues claramente:

$$id_{\mathbb{M}} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$$

es un encaje.

**Ejemplo 1.1.11.** La **botella de Klein** es una superficie no orientable que se obtiene de manera similar al toro, solo que se “invierte” la orientación al identificar uno de los lados, es decir, en  $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$  los puntos de la forma  $(0, t)$  se identifican con el correspondiente  $(1, t)$ , y los de la forma  $(s, 0)$  con los correspondientes  $(1 - s, 1)$ , en un dibujo.

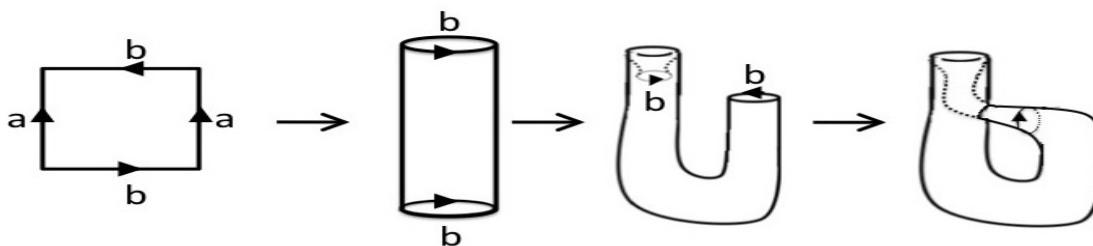


Figura 1.4: La botella de Klein obtenida después “pegar” adecuadamente los lados del cuadrado.

Si fijamos el origen de coordenadas de un plano en el centro de este cuadrado, veremos que la superficie que se obtiene bajo la identificación en el subconjunto:  $\{(x, y) \mid -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\}$ , es homeomorfa a una banda de Moebius (Figura 1.5)

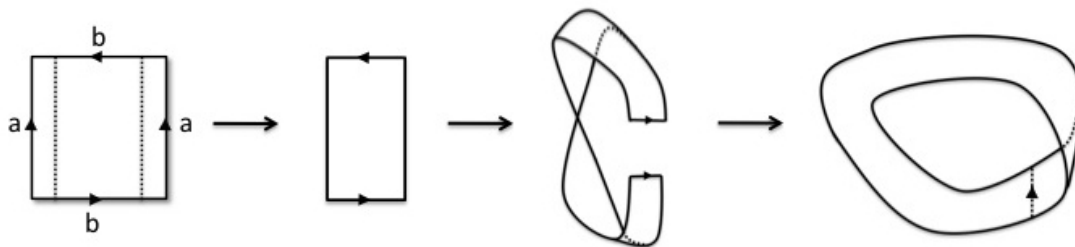


Figura 1.5: La banda de Moebius esta encajada en la botella de Klein.

Es decir, la botella de Klein tiene una banda de Moebius encajada, así que es una superficie no orientable.

**Ejemplo 1.1.12.** Otro ejemplo bastante popular e importante es el plano proyectivo de dimensión 2 o  $\mathbb{RP}^2$ , que resulta al identificar en  $\mathbb{S}^2$  a cada punto con su antípoda, o lo que es lo mismo:  $x_1 \sim x_2 \iff x = y \text{ ó } x = -y$ , por tanto  $\mathbb{RP}^2 \approx \mathbb{S}^2 / \sim$ .

Como estamos identificando puntos antípodos en  $\mathbb{S}^2$  podemos ver que si  $x \in \mathbb{S}^2, x \notin \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^2$ , entonces  $x$  debe estar en uno de los hemisferios de  $\mathbb{S}^2$ , pero entonces  $-x$  está en el otro hemisferio, y bajo la identificación son el mismo punto, por tanto para comprender qué pasa en  $\mathbb{RP}^2$  basta con entender que sucede en uno de los hemisferios y en  $\mathbb{S}^1$ .

Ahora, cada una de las cerraduras de estos hemisferios (es decir el hemisferio con  $\mathbb{S}^1$  incluido) es homeomorfo a  $\mathbb{D}^2$ , la bola cerrada de 2 dimensiones (el disco), por tanto:  $\mathbb{RP}^2 \approx \mathbb{D}^2 / \sim_o$ , y  $\sim_o$  es la parte de la identificación original que actúa en la frontera de  $\mathbb{D}^2$ , o de manera más concreta, identifica puntos antípodos sólo en  $\mathbb{S}^1$ .

Entonces, si tomamos en cuenta que  $\mathbb{D}^2 \approx \mathbb{I} \times \mathbb{I}$ , podemos construir  $\mathbb{RP}^2$  de la forma indicada en la figura 1.6. Y usando un método similar al usado en la figura 1.5, concluimos que también hay una banda de Moebius encajada en el plano proyectivo.

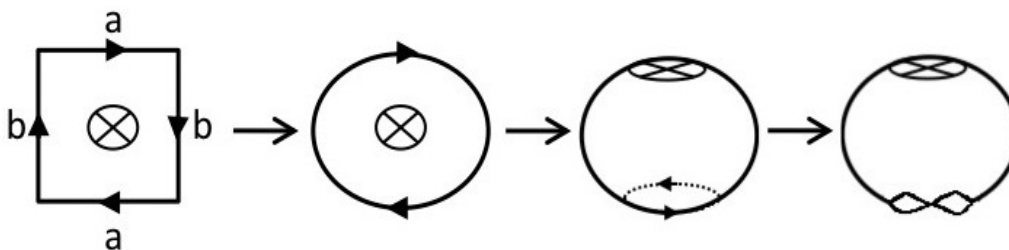


Figura 1.6: El plano proyectivo.

Vale la pena notar que el último dibujo de la serie representada en la Figura 1.6, pretende ser una representación intuitiva del plano proyectivo en  $\mathbb{R}^3$ , después de pegar como indican las flechas. Pero sólo es eso, un mero intento representación, pues el plano proyectivo no se puede encajar en  $\mathbb{R}^3$  y por tanto tampoco se puede representar gráficamente en este espacio.

Para seguir adelante con el estudio de las superficies y sus propiedades, necesitamos herramientas más elaboradas y generales. Ya que nuestro objetivo es clasificar, haremos uso de una de las herramientas más importantes de la topología algebraica, básica para la clasificación de espacios topológicos, el grupo fundamental.

## 1.2. Homotopía y grupo fundamental.

Para abordar el tema de grupo fundamental es necesario introducir varios conceptos

previos. El grupo fundamental es un funtor<sup>1</sup>, por lo tanto es necesario primero crear “estructura” en los espacios topológicos, antes de poder hacer álgebra sobre ellos. Esto lo haremos a través del concepto de homotopía.

**Definición 1.2.1.** Sean  $X, Y$  espacios topológicos, una **homotopía** de  $X$  a  $Y$ , es una aplicación

$$H : X \times I \longrightarrow Y$$

continua, donde  $I = [0, 1]$ .

Si  $f, g : X \longrightarrow Y$  son aplicaciones continuas, entonces diremos que son homotópicas si existe una homotopía  $H$  de  $X$  en  $Y$ , tal que:

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) \\ H(x, 1) &= g(x) \end{aligned}$$

entonces se dice que la homotopía empieza en  $f$  y termina en  $g$ . En general usaremos la notación  $H : f \simeq g$ .

Es importante notar que la aplicación  $H$  es una función que cumple que  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $H(\cdot, t) = H_t : X \longrightarrow Y$  es una aplicación continua. Así que de manera intuitiva podríamos decir que a la homotopía  $H$  esta asociada con el conjunto  $\{H_t\}_{t \in \mathbb{I}}$  de funciones continuas de  $X$  en  $Y$ .

**Ejemplo 1.2.1.** Dos funciones  $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$  siempre son homotópicas, pues la función

$$H : X \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n; H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$$

es una homotopía de  $f$  a  $g$ . De hecho está determinada por los segmentos que unen  $f(x)$  y  $g(x)$ ,  $\forall x \in X$ .

Un resultado muy útil y fácil de probar es el hecho de que la relación  $f \sim g \iff f \simeq g$ , es de equivalencia. Esto nos permitirá hacer cocientes (identificar cosas) sobre este conjunto de aplicaciones.

**Proposición 1.2.1.** La relación  $\simeq$  es de equivalencia.

**Demostración:** La simetría de la relación es trivial:

Si  $f : X \longrightarrow Y$  continua, entonces es fácil ver que  $H : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ , donde  $H(x, t) = f(x)$ ,  $\forall t \in \mathbb{I}$  es una homotopía  $f \simeq f$ .

La simetría se obtiene de una simple construcción, pues si  $H : f \simeq g$ , entonces definiendo  $\bar{H}$  de manera que  $\bar{H}(x, t) = H(x, 1 - t)$ , comprobamos que esta nueva aplicación es tal que:

$$\begin{aligned} \bar{H}(x, 0) &= g(x), \\ \bar{H}(x, 1) &= f(x) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>:Un funtor es una aplicación entre dos categorías, con determinadas propiedades. En el caso del grupo fundamental, constituye un funtor entre los espacios topológicos y los grupos algebraicos. Digamos que a cada espacio topológico le asigna un grupo, este es el llamado grupo fundamental.

y además es continua pues  $H$  lo es y  $\overline{H} = H \circ (id_X \times \overline{s})$ , donde  $\overline{s}(t) = 1 - t$ . Así que  $\overline{H}$  es continua, y por tanto homotopía.

Para verificar la transitividad de la relación, tomemos dos homotopías  $H : f \simeq g, K : g \simeq h$  y notemos que al "ensamblarlas" de manera adecuada:

$$H * K(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

tenemos una aplicación que "comienza" en  $f$ , "pasa" por  $g$  justo cuando  $t = \frac{1}{2}$  y "termina" en  $h$ . No es difícil ver que esta es una homotopía de  $f$  en  $h$ .

Como la relación es de equivalencia, existen entonces existen clases de equivalencia entre las aplicaciones continuas de  $X$  en  $Y$ , que por definición, forman una partición de este conjunto. Es decir, dada una aplicación continua de  $X$  a  $Y$ , ésta pertenece a sólo una clase de equivalencia en el conjunto total de clases.  $\square$

Ahora, si tomamos un  $y_0 \in Y$  y nos fijamos en la aplicación  $c_{y_0}(x) = y_0, \forall x \in X$ , surgen las siguientes preguntas: ¿Como son las aplicaciones  $f$ , que son homotópicas a  $c_{y_0}$ ? ¿Existirán espacios  $X$  e  $Y$  de manera que  $\forall f : X \rightarrow Y, f \simeq c_{y_0}$ ?

Esto nos lleva a las siguientes definiciones.

**Definición 1.2.2.** Se dice que  $f : X \rightarrow Y$  es **nulhomotópica** si  $f \simeq c_{y_0}$ , donde  $c_{y_0}$  es la aplicación constante igual a  $y_0$ . A la homotopía  $H$  se le llama **nulhomotopía**. Un espacio  $X$  es **contraíble** si la aplicación  $id_X : X \rightarrow X$  es nulhomotópica.

Vale la pena notar que si  $X$  es contraíble, existe  $H : id_X \simeq c_{x_0}$ . Entonces la composición  $K(x, t) = f \circ H$  es una homotopía de  $f$  a la aplicación  $c_{f(x_0)}(x) = f(x_0), \forall x \in X$ . Esto para una  $f$  arbitraria, es decir, si  $X$  es contraíble entonces toda función  $f : X \rightarrow Y$ , es nulhomotópica.

**Ejemplo 1.2.2.**  $\mathbb{R}^n$  es contraíble  $\forall n$ , y si tomamos la homotopía  $H(x, t) = (1 - t)x$  vemos que esta es una contracción de  $\mathbb{R}^n$  en el punto  $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ , es decir  $H : id_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{0}$ . Y así para cualquier función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow X$  la homotopía  $K(x, t) = f \circ H; K(x, t) = f((1 - t)x)$  es de hecho una nulhomotopía.

**Definición 1.2.3.** Dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$  serán **homotópicamente equivalentes**, o del mismo **tipo de homotopía** si existen dos aplicaciones  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$  tales que  $g \circ f \simeq id_X$  y  $f \circ g \simeq id_Y$ .

**Ejemplo 1.2.3.** Es claro que si un espacio es contraíble, entonces es del mismo tipo de homotopía que un punto. Es decir, si  $X$  es contraíble entonces tenemos  $id_X : X \rightarrow X$  y  $c_{x_0} : X \rightarrow x_0$  y se cumple

$$id_X \circ c_{x_0} \simeq id_X \simeq c_{x_0} \circ id_X$$

**Definición 1.2.4.** Supongamos ahora que  $X \subset Y$  y que existe una aplicación  $r : Y \rightarrow X$  tal que  $r|_X = id_X$ . Entonces a  $r$  se le llama **retracción**.

**Ejemplo 1.2.4.** A modo de ejemplo tomemos  $\mathbb{C} - \{0\}$  y la retracción

$$r(z) = \frac{z}{|z|}, r : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1$$

y que es obviamente una función continua en  $\mathbb{C} - \{0\}$ . Entonces ya que  $r|_{\mathbb{S}^1} = id_{\mathbb{S}^1}$ ,  $r$  es una retracción y ambos espacios son del mismo tipo de homotopía.

El tipo de homotopía es un invariante topológico<sup>II</sup>. De hecho es una propiedad que nos dice exactamente que forma tiene el grupo fundamental del espacio.

Demos un par de conceptos más y ya podremos comenzar a hacer álgebra.

**Definición 1.2.5.** Sea  $X$  un espacio topológico, una **trayectoria** en  $X$  es una aplicación  $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$  continua. Si los extremos de  $\sigma$  coinciden, es decir  $\sigma(0) = \sigma(1)$  entonces se dice que es un **lazo**.

El concepto de homotopía se traduce a este caso de manera natural para cualquier par de trayectorias en general. Pero aquí nos concentraremos en las trayectorias que comparten su origen y final. De manera mas formal.

**Definición 1.2.6.** Dos trayectorias  $\sigma_1, \sigma_2$ , que cumplen que  $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = p_0$  y  $\sigma_1(1) = \sigma_2(1) = p_1$  son **homotópicas** si  $\exists H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  continua, de manera que:

$$\begin{aligned} H|_{0 \times [0,1]} &= p_0, & H|_{1 \times [0,1]} &= p_1 \\ H|_{[0,1] \times 0} &= \sigma_1, & H|_{[0,1] \times 1} &= \sigma_2. \end{aligned}$$

O lo que es lo mismo, la homotopía debe mantener los extremos fijos. Al igual que en el caso de las funciones escribimos  $\sigma_1 \simeq \sigma_2$ .

Supongamos que tenemos un espacio topológico  $X$  y en este espacio tomaremos un punto  $x_0$  cualquiera. A este punto  $x_0$  le llamaremos por el momento punto básico, fijémosnos en el conjunto:

$$P_1 = \{\sigma : [0, 1] \rightarrow X | \sigma(0) = x_0\}$$

donde  $\sigma$  es una trayectoria. Es claro que el extremo final de todas estas trayectorias debe estar en la componente conexa por trayectorias de  $x_0$ . pasará si tomamos  $P_2$  como:

$$P_2 = \{\sigma : [0, 1] \rightarrow X | \sigma(0) = x_0 = \sigma(1)\}.$$

Esta construcción nos sugiere la posibilidad de establecer de manera formal relaciones entre todos los lazos que están “basados” en  $x_0$ . Establezcamos lo anterior de manera formal.

**Definición 1.2.7.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $x_0 \in X$ . A la pareja  $(X, x_0)$  se le llama **espacio punteado** y a  $x_0$  **punto básico del espacio punteado**. Si  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  es una aplicación entre espacios punteados de manera que  $f(x_0) = y_0$ , entonces se dice que  $f$  es una **aplicación punteada**.

De manera similar, si una homotopía  $H : (X, x_0) \times I \rightarrow (Y, y_0)$ , es de forma tal que

$$H(x_0, t) = y_0, \forall t \in I$$

entonces se dice que  $H$  es una **homotopía punteada**.

<sup>II</sup>.Se les llama invariantes topológicos a aquellas propiedades que se conservan bajo homeomorfismos. Es decir, si  $X$  es contraíble cualquier espacio topológico homeomorfo a él, también lo es.

**Ejemplo 1.2.5.** Supongamos que tenemos  $f : ([0, r], 0) \rightarrow (\mathbb{S}^1, 1)$ ;  $f(t) = e^{2\pi it}$ , con  $r < 1$ . Entonces la homotopía  $H(t, s) = f(t(1 - s))$  es una homotopía punteada.

**Definición 1.2.8.** Sea  $(X, x_0)$  un espacio topológico punteado. La **clase de homotopía** de un lazo  $\sigma$  basado en  $x_0$ , se define como la clase de equivalencia que consiste en todos los lazos  $\mu$  basados en  $x_0$ , tales que  $\mu \simeq \sigma$ .

**Ejemplo 1.2.6.** No es difícil ver de manera intuitiva que  $\mathbb{S}^1$  no es contraíble. Trayectorias que den al menos una vuelta a  $\mathbb{S}^1$  no son homotópicas a las que no dan ninguna vuelta. Es decir, el lazo trivial  $c_1(t) = 1, \forall t \in I$  no es homotópico a el lazo  $\sigma_1(t) = e^{2\pi it}, t \in [0, 1]$ , que da una vuelta completa en sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj o sentido levógiro), ni al lazo  $\sigma_{-1}(t) = e^{-2\pi it}, t \in [0, 1]$ , que da la vuelta completa pero en sentido negativo (a favor de las manecillas del reloj o en sentido dextrógiro). Por tanto estos tres lazos se encuentran en distintas clases de homotopía.

**Definición 1.2.9.** Sean  $\mu_1, \mu_2 : [0, 1] \rightarrow X$ , trayectorias de manera que  $\mu_1(1) = \mu_2(0)$ , se define el producto de  $\mu_1\mu_2 = \mu$  como:

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_1(2t) & \text{para } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \mu_2(2t - 1) & \text{para } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Observación: No es difícil ver que si  $H_1 : \mu_1 \simeq \mu'_1, H_2 : \mu_2 \simeq \mu'_2$ , entonces  $\mu_2\mu_1 \simeq \mu'_2\mu'_1$ . Todo queda claro al construir la homotopía.

$$H(t, s) = \begin{cases} H_1(2t, s) & \text{para } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_2(2t - 1, s) & \text{para } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Claramente esta comienza (cuando  $s = 0$ ) en  $\mu_2\mu_1$  y termina (cuando  $s = 1$ ) en  $\mu'_2\mu'_1$ .

El hecho de que el producto así definido sea compatible con la propiedad de homotopía, permite que el producto entre clases de homotopías esté bien definido. En otras palabras tenemos la siguiente definición.

**Definición 1.2.10.** Sea  $X$  un espacio topológico punteado y  $x_0$  el punto básico. Definimos  $\Omega$  como el **espacio de lazos** de  $X$  basados en  $x_0$ .

Llamaremos entonces  $\Omega/\sim$  al conjunto de las clases de homotopía del espacio de lazos  $X$  basado en  $x_0$ . Denotaremos por  $[\lambda]$  a la clase de homotopía de un  $\lambda \in \Omega$ .

Vale la pena notar que por la observación de la **Definición 1.2.9** se cumple que

$$\lambda_1 \simeq \mu_1, \lambda_2 \simeq \mu_2 \implies \lambda_1\lambda_2 \simeq \mu_1\mu_2$$

o lo que es lo mismo, si  $\lambda_1, \lambda_2 \in [\lambda]$  y  $\mu_1, \mu_2 \in [\mu]$ , entonces

$$[\lambda][\mu] = [\lambda\mu].$$

Ya estamos en condiciones de demostrar el teorema mas importante de esta sección.



**Teorema 1.2.1.** *El conjunto  $\Omega/\sim$  con el producto de lazos y la asignación de inversos ya definidos anteriormente, y el lazo constante  $c_{x_0}(t) = x_0$  como elemento neutro, forman un grupo algebraico.*

**Demstración:** Como todos los lazos comienzan y terminan en el punto básico  $x_0$  entonces el producto es cerrado, y por la observación de la **Definición 1.2.7** podemos asegurar que está bien definido.

Ahora si  $\lambda, \omega, \theta \in \Omega$ , la homotopía

$$H(s, t) = \begin{cases} \lambda\left(\frac{4s}{2-t}\right) & \text{para } 0 \leq s \leq \frac{2-t}{4} \\ \omega(4s + t - 2) & \text{para } \frac{2-t}{4} \leq s \leq \frac{3-t}{4} \\ \theta\left(\frac{4s+t-3}{t+1}\right) & \text{para } \frac{3-t}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

es tal que  $H : \lambda(\omega\phi) \simeq (\lambda\omega)\phi$ .

Veamos que el lazo constante  $c_{x_0}$  es neutro, el producto de este lazo por cualquier otro lazo  $\mu$  sería:

$$\mu c_{x_0} = \begin{cases} c_{x_0}(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \mu(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

y por el otro lado:

$$c_{x_0}\mu = \begin{cases} \mu(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ c_{x_0}(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Lo que implica que multiplicar por el lazo neutro es equivalente a hacer una repametrización del lazo original. Y bajo las homotopías

$$H(s, t) = \begin{cases} x_0 & \text{para } 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \\ \lambda\left(\frac{2s+t-1}{t+1}\right) & \text{para } \frac{1-t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$K(s, t) = \begin{cases} \lambda\left(\frac{2s}{t+1}\right) & \text{para } 0 \leq s \leq \frac{1+t}{2} \\ x_0 & \text{para } \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

tenemos  $H : c_{x_0}\lambda \simeq \lambda$  y  $K : \lambda c_{x_0} \simeq \lambda$ . Por tanto ambos productos son homotópicos a  $\mu$ , es decir:

$$[\mu c_{x_0}] = [c_{x_0}\mu] = [\mu] \in \Omega/\sim$$

lo que demuestra que  $c_{x_0}$  es neutro derecho e izquierdo en  $\Omega$ , y  $[c_{x_0}]$  lo es en  $\Omega/\sim$ .

Además cada lazo  $\mu \in \Omega$  tiene un lazo que funciona como inverso para el producto en el espacio de lazos  $\mu^{-1}(t) = \mu(1-t)$ , es decir el mismo lazo, recorrido al revés. En efecto, el producto de estos dos lazos es:

$$\mu^{-1}\mu = \begin{cases} \mu(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \mu^{-1}(2t - 1) = \mu(2 - (2t)) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Es decir el producto de estos lazos es equivalente a un lazo que recorre  $\mu$  en la primera mitad del tiempo, y en la segunda mitad lo recorre de regreso. Y no es difícil notar que la homotopía:

$$H(s, t) = \begin{cases} \mu(2st) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \mu^{-1}(1 + 2s(t - 1) = \mu(2s(t - 1))) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

es en efecto  $H : c_{x_0} \simeq \mu^{-1}\mu$ , lo que demuestra que  $\mu^{-1}$  es inverso de  $\mu$  para el producto en  $\Omega$ . Notemos además, que como la relación  $\simeq$  es de equivalencia, y el producto de lazos es compatible con la relación, se cumple que para cualquier  $\sigma \simeq \mu^{-1}$ ,  $\sigma\mu \simeq c_{x_0}$ . Lo que significa que  $[\mu^{-1}] = [\mu]^{-1}$ .  $\square$

Todo el razonamiento anterior también es válido para el producto  $\mu\mu^{-1}$ , solo hay que cambiar el orden cuando definamos el producto, por tanto  $\mu^{-1}$ , es inverso derecho e izquierdo en  $\Omega$ , y  $[\mu^{-1}]$  lo es en  $\Omega/\sim$ .  $\square$  El último teorema de la sección anterior nos permite definir formalmente el grupo fundamental de un espacio topológico.

**Definición 1.2.11.** Sea  $(X, x_0)$  un espacio topológico punteado, definimos el grupo fundamental de  $X$  basado en  $x_0$ , como el grupo algebraico

$$\pi_1(X, x_0) = \Omega/\sim$$

donde  $\Omega$  es el espacio de lazos basados en  $x_0$  y  $\sim$  es la relación de homotopía entre los elementos de  $\Omega$ . En general omitiremos el punto básico en la notación anterior (escribiremos  $\pi_1(X)$ ).

**Ejemplo 1.2.7.** Tomemos  $(\mathbb{R}^2, \bar{0})$  como nuestro espacio, ya vimos en el **Ejemplo 1.2.2** que  $\mathbb{R}^n$  es contraíble, así que cualquier lazo  $\sigma(t) \in \mathbb{R}^2$  va a ser contraíble en este espacio también bajo una homotopía similar a la usada en dicho ejemplo, digamos:

$$H(s, t) = (1 - t)\sigma(s)$$

y esto contrae a  $\sigma$  al lazo  $c_{\bar{0}}$ . Esto es posible hacerlo para todo lazo  $\sigma$ , es decir cualquier lazo está en la clase de homotopía del lazo constante igual al punto básico, o lo que es lo mismo, el grupo fundamental consiste en una sola clase de homotopía, la clase del elemento trivial. Entonces  $\pi_1(\mathbb{R}^2) = \{1\}$ ,  $\forall n$ . Una demostración similar permite observar que  $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 1$  también.

En el Ejemplo 1.2.4 vimos que a  $\mathbb{C}$  que es un espacio contraíble (pues  $\mathbb{R}^2$  lo es y ellos dos son básicamente el mismo espacio) le quitamos un punto y se convirtió en un espacio del mismo tipo de homotopía que  $\mathbb{S}^1$  que no lo es. Lo que sucedió básicamente fue que al quitarle un punto a  $\mathbb{C}$  le abrimos un “hueco” y su estructura homotópica cambió. Ahora, es claro que si tenemos un lazo  $\mathcal{C}$  que rodee al 0, éste no podrá ser contraíble, por tanto el grupo fundamental de un espacio como  $\mathbb{C} - 0$  debe ser distinto al trivial (que es por el ejemplo anterior, el mismo que el de  $\mathbb{C}$ ). Esto se cumple de una forma un tanto distinta en otros espacios, pero es básicamente el mismo principio. Calcular el grupo fundamental de un espacio es saber cuantas copias de  $\mathbb{S}^1$  (o lazos) en distintas clases de equivalencia homotópica posee. Esto dice que el grupo fundamental de los espacios a los cuales se les pueden hacer “huecos planos”<sup>III</sup> quitándoles un punto, deben de estar de alguna forma relacionados con el grupo fundamental de  $\mathbb{S}^1$ . Es evidente que necesitamos saber en qué consiste este grupo.

<sup>III</sup>: Decimos huecos planos porque hay espacios a los cuales no les afecta la pérdida de un punto en el hecho de que los lazos puedan ser contraídos o no en él. Pensemos en una esfera sólida, podemos quitar el punto que sea, cualquier lazo en ella seguirá siendo contraíble y homotópico a cualquier otro. Afortunadamente las superficies son el tipo de espacios que si resultan afectados, por lo que el cálculo de  $\pi_1(\mathbb{S}^1)$  es necesario :]

Así que por su importancia y por el hecho de que vamos a necesitar herramientas topológicas un poco más elaboradas, nos tomaremos algo más que un ejemplo para hablar de él.

### 1.2.1. Grupo fundamental del círculo.

Antes de entrar en lo que nos concierne, vamos a necesitar un par de definiciones y algunos resultados.

En todo lo que sigue, consideraremos a  $\mathbb{S}^1$  como subconjunto de  $\mathbb{C}$ .

**Definición 1.2.12.** Sea  $p : E \rightarrow B$  una aplicación continua y sobreyectiva. Se dice que  $p$  **cubre parejamente** a  $B$ , si para todo punto  $x \in B$ , existe un abierto  $U_x \subset B$ , que cumple que  $p^{-1}(U_x)$  es una unión disjunta de abiertos  $V_i$  en  $E$ , con  $i \in I$  un subconjunto de índices no vacío, y además se cumple que

$$p|_{V_i} : V_i \approx U_x, \forall i$$

donde  $p|_{V_i}$  es la restricción de  $p$  a  $V_i$ .

A  $p$  se le llama **aplicación cubriente**, y a  $E$  **espacio cubriente** de  $B$ .

Veamos un ejemplo de aplicación cubriente que inicia el camino hacia el cálculo del grupo fundamental del círculo.

**Ejemplo 1.2.8.** La aplicación  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1; p(t) = e^{2\pi it}$ , es una aplicación cubriente. Notemos primero que  $n \in \mathbb{Z}$  si y solo si  $p(n) = 1$ . Es decir,  $p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ .

Ahora, si tomamos un abierto  $U = \{e^{2\pi it} | t \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$ , vemos que  $p^{-1}(U)$  es una colección de abiertos  $\{V_i\} \subset \mathbb{R}, i \in \mathbb{I}$ . Cada uno de ellos centrado en un entero, ya que  $1 \in U$ . Es decir, el conjunto de índices  $I$  tiene tantos elementos como el conjunto de los números enteros, de hecho los  $V_i$  tienen la forma  $V_i = (n - \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3}), n \in \mathbb{Z}$ . Por otro lado, es bastante evidente el hecho de que  $p|_{V_i} : V_i \approx U, \forall i \in \mathbb{I}$ . Más aún, si tomamos cualquier otro abierto  $U \subset \mathbb{S}^1$  distinto de  $\mathbb{S}^1$ , entonces  $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ , donde los  $V_n$  son ajenos y  $p|_{V_n} : V_n \approx U$ .

**Definición 1.2.13.** Sea  $p : E \rightarrow B$  una aplicación cubriente. Si  $f$  es una aplicación continua de cualquier espacio  $X$  en  $B$ , se dice que  $\hat{f} : X \rightarrow E$  es un **levantamiento** de  $f$  si se cumple que  $p \circ \hat{f} = f$ . O lo que es lo mismo, si el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Vale la pena llamar la atención sobre el hecho de que la existencia de una aplicación cubriente, no asegura la existencia de un levantamiento. Se sale de contexto responder a la pregunta de cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que esto ocurra, así que pasaremos a examinar un par de resultados importantes sobre los levantamientos.

Los siguientes lemas cuya demostración es bastante sencilla y se puede consultar en [1], son necesarios para la demostración de la unicidad de los levantamientos de trayectorias.

**Lema 1.2.1.** Sea  $p : E \rightarrow B$  una aplicación cubriente. Si  $X$  es un espacio conexo y  $\hat{f}, \hat{g} : X \rightarrow E$  aplicaciones continuas tales que,  $p \circ \hat{f} = p \circ \hat{g}$ , entonces  $\hat{f} = \hat{g}$  si y solo si existe un punto  $x \in X$ , tal que  $\hat{f}(x) = \hat{g}(x)$ .

**Lema 1.2.2.** Sea  $p : E \rightarrow B$  una aplicación cubriente, entonces para cada aplicación  $H : \mathbb{I}^2 \rightarrow B$  continua y para cada punto  $e_0 \in p^{-1}(H(0,0))$ , existe una aplicación  $\hat{H} : \mathbb{I}^2 \rightarrow E$  de manera que  $p \circ \hat{H} = H$  y  $\hat{H}(0,0) = e_0$

**Teorema 1.2.2.** Consideremos una aplicación  $p$  como en el **Lema 1.2.2**. Para cada  $\mu : \mathbb{I} \rightarrow B$  y para cada  $e \in E$  tal que  $p(e) = \mu(0)$ , existe un único levantamiento  $\hat{\mu} : \mathbb{I} \rightarrow E$  de  $\mu$ , que cumple que  $\hat{\mu}(0) = e$ . Si llamamos a éste levantamiento  $L(\mu, e)$ , tenemos que en caso de que  $\mu_0$  y  $\mu_1$  sean trayectorias en  $B$  tales que  $\mu_0 \simeq \mu_1$  rel  $\partial\mathbb{I}$  y  $e$  un punto que cumple  $p(e) = \mu_0(0) = \mu_1(0)$ , entonces podemos afirmar que  $L(\mu_0, e) \simeq L(\mu_1, e)$  rel  $\partial\mathbb{I}$  (en particular coinciden los destinos de ambos levantamientos). Es decir si

$$\mu_0 \simeq \mu_1, \mu_0(0) = \mu_1(0) \text{ y } \mu_0(1) = \mu_1(1)$$

entonces

$$L(\mu_0, e) \simeq L(\mu_1, e), L(\mu_0, e)(0) = L(\mu_1, e)(0) \text{ y } L(\mu_0, e)(1) = L(\mu_1, e)(1).$$

**Demostración:** Dada una trayectoria  $\mu : \mathbb{I} \rightarrow B$ , tomemos la homotopía  $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow B$  de manera que  $H(s,0) = \mu(s)$ , podemos ver que  $H(0,0) = \mu(0)$  y si  $p(e) = \mu(0)$ , por el lema anterior  $\exists \hat{H} : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow B$ , tal que  $\hat{H}(0,0) = e$  y  $p \circ \hat{H} = H$ . Entonces se puede ver que la trayectoria  $\hat{\mu} : \mathbb{I} \rightarrow E$ , tal que  $\hat{\mu}(s) = \hat{H}(s,0)$ , cumple que  $\hat{\mu}(0) = e$  y  $p \circ \hat{\mu} = \mu$ . Y éste es un levantamiento de  $\mu$  que comienza en  $e$ , que por argumentos de unicidad sabemos que es único.

Por otro lado, si  $\mu_0, \mu_1 : \mathbb{I} \rightarrow B$  son trayectorias tales que  $\mu_0 \simeq \mu_1$  rel  $\partial\mathbb{I}$ , y  $H$  una homotopía entre ellas, entonces por el lema sabemos que existe una aplicación  $\hat{H}$ , tal que  $p \circ \hat{H} = H$  y  $\hat{H}(0,0) = e$ . Pero la trayectoria  $t \rightarrow \hat{H}(0,t)$  tiene valores en la fibra del punto  $\mu_0(0) = \mu_1(0)$ , y como esta fibra es discreta y la trayectoria es continua y su dominio es conexo, entonces su imagen es conexa. Es decir, la trayectoria debe ser constante en la fibra. De igual manera, la trayectoria  $t \rightarrow \hat{H}(1,t)$  debe ser constante. Así que  $\hat{H}(0,t) = e, \forall t \in \mathbb{I}$ , y  $\hat{H}(1,t) = e'$ , donde  $e'$  debe ser algún punto fijo en la fibra de  $\mu_0(1) = \mu_1(1)$ , para todo  $t \in \mathbb{I}$ . Finalmente la trayectoria  $s \rightarrow \hat{H}(s,0)$  es un levantamiento de  $\mu_0$  con origen en  $e$ , así que por la unicidad que se sigue del **Lema 1.2.1**:  $\hat{H}(s,0) = \hat{\mu}_0(s)$  y análogamente  $\hat{H}(s,1) = \hat{\mu}_1(s)$ , es decir,  $\hat{H}$  que es levantamiento de  $H$ , es en efecto una homotopía  $\hat{\mu}_0 \simeq \hat{\mu}_1$  rel  $\partial\mathbb{I}$ , que es justo lo que queríamos probar.  $\square$

El teorema anterior nos permite definir, para cada trayectoria  $\mu : \mathbb{I} \rightarrow X$  y para cada punto  $e \in p^{-1}(\mu(0))$  un levantamiento  $L(\mu, e)$ , es decir, una función:

$$L : B^{\mathbb{I}} \times_B E \rightarrow E^{\mathbb{I}}, \text{ donde } B^{\mathbb{I}} \times_B E = \{(\mu, e) \in B^{\mathbb{I}} \times E \mid \mu(0) = p(e)\}$$

y el conjunto  $B^{\mathbb{I}}$  denota todas las trayectorias posibles en  $B$ .

**Corolario 1.2.1.** Sea  $p : E \rightarrow B$  una aplicación cubriente y

$$L : B^{\mathbb{I}} \times_B E \rightarrow E^{\mathbb{I}}$$

su función de levantamiento de trayectorias:

- i) la trayectoria  $L(\mu, e)$  esta determinada en forma única por las condiciones  $p \circ L(\mu, e) = \mu$  y  $L(\mu, e)(0) = e$ ,
- ii) para un lazo nulhomotópico  $\sigma$ ,  $L(\sigma, e)$  es un lazo nulhomotópico,
- iii) el conjunto  $\{L(\mu, e) | e \in p^{-1}(\mu(0))\}$ , tiene la misma cardinalidad que la fibra  $p^{-1}(\mu(0))$ ,
- iv) para trayectorias enchufables  $\mu_1, \mu_2$  en  $B$ ,

$$L(\mu_1\mu_2, e) = L(\mu_1, e)L(\mu_2, e_1),$$

donde  $e_1$  es el punto en  $E$  donde termina  $L(\mu_1, e)$  y está en la fibra  $p^{-1}(\mu_1(1)) = p^{-1}(\mu_2(0))$ , por tanto hay un único levantamiento  $L(\mu_2, e')$ ,  $e' \in p^{-1}(\mu_2(0))$  de manera que  $e' = e_1$  (que es justamente  $L(\mu_2, e_1)$ ), y hace que  $L(\mu_1, e)$  y  $L(\mu_2, e_1)$  sean enchufables en  $E$ .

Todo lo visto anteriormente, puede ser aplicado a lazos, pues estos son casos particulares de trayectorias. Podemos asegurar que al tomar las clases  $[\sigma] \in \pi_1(B, b_0)$  se cumpla lo siguiente:

**Definición 1.2.14.** Sea  $p : E \rightarrow B$  cubriente, y  $b_0 \in B$  punto básico. Si  $e_0 \in p^{-1}(b_0) \subset E$ , entonces dado un elemento  $[\sigma] \in \pi_1(B, b_0)$ , y  $\hat{\sigma}_{e_0}$  un levantamiento de  $\sigma$  tal que  $\hat{\sigma}_{e_0}(0) = e_0$ , definimos la aplicación

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0); \quad \phi([\sigma]) = \hat{\sigma}_{e_0}(1),$$

la cual como consecuencia, del **Lema 1.2.2** y el **Teorema 1.2.2**, está bien definida.

**Teorema 1.2.3.** Establecido todo como en la definición anterior. Si  $E$  es conectable por trayectorias entonces  $\phi$  es sobreyectiva. Si  $E$  es simplemente conexo, entonces es biyectiva.

**Demostración:** Si  $E$  es conectable por trayectorias, entonces tomando un elemento  $e_1 \in p^{-1}(b_0)$ , existe una trayectoria  $\hat{\sigma}$  en  $E$ , tal que  $\hat{\sigma}(0) = e_0$  y  $\hat{\sigma}(1) = e_1$ , y tendremos que  $\sigma = p \circ \hat{\sigma}$  es un lazo en  $B$  basado en  $b_0$  y  $\phi([\sigma]) = e_1$ , por la definición de  $\phi$ .

Ahora, si  $E$  es simplemente conexo, entonces tomemos dos elementos  $[\sigma_1], [\sigma_2]$  en  $\pi_1(B, b_0)$ , de manera que  $\phi([\sigma_1]) = \phi([\sigma_2])$ , y  $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$  los levantamientos respectivos basados en  $e_0$ . Así, por la definición de  $\phi$ ,  $\hat{\sigma}_1(1) = \hat{\sigma}_2(1)$  y como  $E$  es simplemente conexo, existe una homotopía entre  $\hat{\sigma}_1$  y  $\hat{\sigma}_2$ , digamos  $\hat{H}$ . Por tanto  $p \circ \hat{H}$  es una homotopía  $\sigma_1 \simeq \sigma_2$  en  $B$  y por tanto  $[\sigma_1] = [\sigma_2]$ . Es decir, la aplicación  $\phi$  sería en tal caso inyectiva.  $\square$  Utilizaremos entonces la función  $\phi$  para calcular el grupo fundamental de  $\mathbb{S}^1$ .

**Teorema 1.2.4.** El grupo fundamental de  $\mathbb{S}^1$  es isomorfo al grupo aditivo de los enteros,  $\mathbb{Z}$ .

**Demostración:** Sea  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  la aplicación cubriente definida como  $p(t) = e^{2\pi it}$ , tomemos  $e_0 = 0$  y  $b_0 = p(e_0) = 1$ . Entonces como ya vimos,  $p^{-1}(b_0) = p^{-1}(1)$  es el conjunto  $\mathbb{Z}$  de los números enteros. Como  $\mathbb{R}$  es simplemente conexo, entonces

$$\phi : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$$

es biyectiva. Veamos entonces que  $\phi$  es un homomorfismo de grupos.

Es bastante claro que  $\phi([c_1]) = 0$ . Ahora, si tomamos  $[\sigma_1], [\sigma_2] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ ,  $\hat{\sigma}_1$  y  $\hat{\sigma}_2$  los respectivos levantamientos a  $\mathbb{R}$  comenzando en 0, nos fijamos en los enteros:

$$n = \hat{\sigma}_1(1) = \phi([\sigma_1]), m = \hat{\sigma}_2(1) = \phi([\sigma_2])$$

y construimos el lazo  $\check{\sigma}(t) = n + \hat{\sigma}_2(t)$  en  $\mathbb{R}$ . Si notamos entonces que  $p(n+x) = p(x), \forall x \in \mathbb{R}$ , se deduce que  $\check{\sigma}$  es un levantamiento de  $\sigma_2$  que comienza en  $n$ . Por tanto podemos hacer  $\check{\sigma} \circ \hat{\sigma}_1$ , que está bien definido y es de hecho (usando el **Corolario 1.2.1**) el levantamiento de  $\sigma_2 \circ \sigma_1$ , donde  $\circ$  es la composición de trayectorias en  $\mathbb{S}^1$ . Como el punto final de  $\sigma_2$  era  $m$ , entonces el de  $\check{\sigma}$  va a ser  $n + m$ , y así tendremos que:

$$\phi([\sigma_2] * [\sigma_1]) = n + m = \phi([\sigma_1]) + \phi([\sigma_2]).$$

De lo anterior se verifica la compatibilidad de los inversos y por tanto  $\phi$  es un homomorfismo biyectivo, entre los grupos  $(\pi_1(\mathbb{S}^1, 1), \circ)$  y  $(\mathbb{Z}, +)$ , así que son grupos isomorfos.  $\square$

**Ejemplo 1.2.9.** Tomemos  $\mathbb{R}^2 - B_\epsilon(0)$ , es decir al plano real, le quitaremos una bola abierta con centro en 0 y de radio  $\epsilon > 0$ . No es difícil verificar que cualquier lazo que tomemos y que contenga en su interior a  $B_\epsilon(0)$ , no es contraíble (pues para que un lazo sea nulhomotópico, no puede tener huecos en su interior). Y mas aún, si nos fijamos en todos los lazos que contienen al abierto y son recorridos en sentido dextrógiro, son homotópicos al lazo que recorre el círculo unitario de esta manera. De igual forma todos los que contienen al abierto y recorren a este en sentido levógiro, son homotópicos al lazo que recorre el círculo unitario de esta forma. Por ejemplo, tomemos un lazo  $\lambda(t) = (x(t), y(t))$ , supongamos que este recorre al abierto en sentido contrario al reloj y fijémonos en la homotopía:

$$H(t, s) = (\cos(t)s + (1-s)x(t), \sin(t)s + (1-s)y(t))$$

esta es una homotopía (es homotopía pues la región entre los dos lazos es simplemente conexa por hipótesis) del lazo  $\lambda$  a un lazo que recorre a  $\mathbb{S}^1$  en sentido contrario al reloj.

De manera bastante bastante obvia se comprueba que si dos lazos le dan  $n$  y  $m$  vueltas al abierto centrado en el origen, con  $n \neq m$  entonces estos no son homotópicos entre sí. Y por lo anterior si un lazo da  $n$  vueltas en un sentido determinado alrededor de el abierto este va a ser homotópico a el lazo que recorre  $n$  veces  $\mathbb{S}^1$  en el mismo sentido. Podemos notar entonces (todo visto de manera muy intuitiva), que tenemos exactamente una clase de homotopía por cada lazo alrededor de  $\mathbb{S}^1$ , por tanto el grupo fundamental de esta variedad  $\mathbb{R}^2 - B_\epsilon(0)$ , es homeomorfo al de  $\mathbb{S}^1$ .

El ejemplo anterior nos sugiere que si podemos encajar una copia de  $\mathbb{S}^1$  dentro de una 2-variedad  $V$ , entonces se podría cumplir de alguna forma  $\pi_1(\mathbb{S}^1) \subset \pi_1(V)$ . Veamos otro ejemplo.

**Ejemplo 1.2.10.** Tomemos  $\mathbb{M}$ , la banda de Moebius e intentemos ver que pasa con su grupo fundamental. Habíamos visto que podíamos definir:

$$\mathbb{M} = \mathbb{I} \times \mathbb{I} / \sim; (x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \iff x_0 = \{0, 1\} \text{ y } x_1 = 1 - x_0, y_0 = 1 - y_1$$

o en otras palabras,  $\mathbb{M}$  era lo que resultaba de identificar en  $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ , los puntos de la forma  $(0, y)$  con los de la forma  $(1, 1 - y)$ .

Ahora si nos fijamos en la trayectoria  $\sigma_0(t) = (t, \frac{1}{2})$ , vemos que bajo la identificación ésta se convierte en un lazo. Por otro lado, cualquier otro lazo  $\lambda(t)$  basado en  $x_0 = (0, \frac{1}{2})$  es nulhomotópico en  $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$  si no intersecta al conjunto  $\partial\mathbb{I} \times \mathbb{I}$  en ninguna  $t \in (0, 1)$ . Y aquel que intersecte este conjunto en  $(1, \frac{1}{2})$ , será homotópico al segmento  $\sigma_0$ . Finalmente a cada lazo  $\lambda(t)$  en  $\mathbb{I} \times \mathbb{I} / \sim$  basado en  $x_0$  le podemos asignar un número  $k_1$  y otro  $k_2$  de manera que  $k_1$  diga la cantidad de veces que el lazo cruzó de izquierda a derecha por el segmento que corresponde a la imagen de  $x = \frac{1}{2}$  en  $\mathbb{M}$ , y que  $k_2$  diga la cantidad de veces que lo cruzó de derecha a izquierda. El número  $k = k_1 - k_2$ , el cual es un entero resulta ser entonces la cantidad de “vueltas” que da  $\lambda$  en  $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{M}$  hacia un lado (si  $k > 0$ ) o hacia el otro (si  $k < 0$ ). Cada uno de estos lazos va a ser homotópico a  $(\sigma_0)^{|k|}$ , o a  $(-\sigma_0)^{|k|}$ , dependiendo del signo de  $k$ . De una manera igualmente intuitiva al ejemplo anterior, podemos notar que el grupo fundamental de  $\mathbb{M}$  es isomorfo al de  $\mathbb{S}^1$ .

Más adelante se enunciará el teorema de Seifert y Van Kampen, el cual nos permitirá calcular los grupos fundamentales de estos y otros espacios de manera mas formal.

### 1.3. Gráficas

**Definición 1.3.1.** Una gráfica  $G$  es un par ordenado  $G = (V, A)$ , donde  $V, A$  son conjuntos.  $V$ , va a ser  $V = \{v_i \mid i \in I\}$ , donde  $I$  es un conjunto de índices (que en este texto, siempre será finito). A los  $v_i$  los llamaremos **vértices** de la gráfica. El conjunto  $A$  entonces, es tal que  $\forall l \in A, l = (v_i, v_j)$ . Los elementos  $l$  se llaman **aristas** de  $G$  y los vértices  $v_i, v_j$ , los extremos de  $l$ . Las aristas en ocasiones se suelen denotar como  $l = v_i v_j$ .

Cuando hablemos de “trayectoria  $G$ ” o “ciclo  $G$ ” nos referiremos a gráficas, no aplicaciones  $\alpha(t), t \in I$ .

**Ejemplo 1.3.1.** Pensemos en un subespacio convexo  $X \in \mathbb{R}^n$ , de manera que exista una trayectoria digamos  $\lambda(t)$ , tal que  $\lambda(0) = x_0, \lambda(1) = x_1$ . Si tomamos una colección de puntos distintos dos a dos, en el intervalo unitario  $P = \{v_j\}, v_0 = 0 < v_1 < \dots < v_k = 1$  y calculamos el correspondiente conjunto inducido por la trayectoria  $\lambda, P_\lambda = \{\lambda(v_0) = x_0, \lambda(v_1), \dots, \lambda(v_k) = x_1\}$ . Entonces el conjunto  $T = (P_\lambda, A)$ , donde  $A = \{l_j\}$  y cada  $l_j = (\lambda(v_j), \lambda(v_{j+1}))$  representa el segmento de línea recta  $\overline{\lambda(v_j)\lambda(v_{j+1})}$  que une  $\lambda(v_j)$  con  $\lambda(v_{j+1})$  (y que existe en  $X$  por la convexidad de este), es una gráfica. De hecho es una gráfica que consiste en una trayectoria formada por líneas rectas en  $X$ , que une  $x_0$  con  $x_1$ .

**Ejemplo 1.3.2.** Supongamos ahora, que tenemos una gráfica  $C = (V, A)$ . Entonces, si  $\forall v_i \in V$ , éste está representado exactamente dos veces en  $A$ , como extremo de algunas dos  $e_{1,i}, e_{2,i}$ , se dice que  $C$  es un ciclo. Además, se cumple que ordenando los elementos de  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ , esto nos induce una ordenación  $A = \{e_0, e_1, \dots, e_k\}$ , donde cada uno de estos es  $e_j = (v_j, v_{j+1}) \bmod k+1$  (es decir  $v_{k+1} = v_0$ ). Por otro lado, si a la gráfica anterior le quitamos un elemento cualquiera  $e_j \in A$ , la gráfica que resulta  $T = (V, A - \{e_j\})$  se le llama trayectoria.

Ahora, si  $X$  es un espacio topológico y es posible encontrar una aplicación inyectiva  $f : V \rightarrow X$ , de manera que se induzca una función

$$f_l : A \rightarrow X^s; f_l(e) = \overline{f(v_1)f(v_2)}$$

donde  $e = v_1v_2$ ,  $\overline{f(v_1)f(v_2)}$  es una trayectoria que une los puntos  $f(v_1), f(v_2) \in X$  y  $X^s$  el conjunto de todos los segmentos de recta en  $X$ . Entonces como la inyectividad de  $f$ , asegura la de  $f_l$  y el conjunto  $\{f(v_i)\}$  es discreto en  $X$ , se dice que la función

$$\hat{f} = (f, f_l) : C \rightarrow (f(V), f_l(A)) = \hat{G}$$

es un encaje poligonal de la gráfica  $G$  en el espacio topológico  $X$ , si  $\forall e_i, e_j \in A$ , distintos, se cumple que  $f_l(e_i) \cap f_l(e_j)$  como subconjuntos de  $X$ , es vacío.

Los ejemplos anteriores nos proporcionan la siguiente definición.

**Definición 1.3.2.** Sea  $\hat{G} = (V, A)$  una gráfica que consiste en una trayectoria  $G$  encajada en un espacio topológico  $X$ . Se dice entonces que  $\hat{G}$  es una trayectoria poligonal o curva poligonal simple en  $X$ . Si  $\hat{G}$  es un ciclo  $G$  encajado en  $X$ , se dice que es un ciclo poligonal o curva poligonal simple cerrada en  $X$ .

La definición anterior se puede simplificar de manera intuitiva: Una trayectoria poligonal, es una trayectoria formada por segmentos de recta. Y una curva poligonal simple cerrada, es una trayectoria poligonal en la cual coinciden sus extremos.

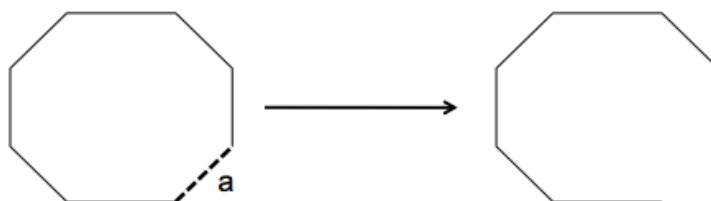


Figura 1.7: La figura es una curva poligonal simple cerrada. Al quitar el segmento “a” (el lado punteado), obtenemos una trayectoria poligonal.

Veamos algunos resultados que serán de gran utilidad mas adelante.

**Lema 1.3.1.** Si  $A$  es un conjunto abierto en el plano ( $\mathbb{R}^2$ ), entonces cualesquiera dos puntos en  $A$  pueden ser unidos por una curva poligonal simple en  $\mathbb{R}^2$ .

**Demostración:** Es bastante claro que  $\mathbb{R}^2$  es conectable por trayectorias, pues en particular es convexo. Usando el método del **Ejemplo 1.3.1**, podemos construir la curva poligonal simple deseada.  $\square$

**Definición 1.3.3.** Se dice que  $G$  que es **planar** si puede ser encajada como  $\hat{G} \subset \mathbb{R}^2$ .



**Definición 1.3.4.** Una gráfica  $\hat{G} \subset \mathbb{R}^2$  se llama **plana**.

Una subdivisión de una gráfica  $G$ , es la gráfica que se obtiene de insertar vértices en las aristas de  $G$ , es decir; si  $G = (V, A)$  y  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , entonces al tomar una arista  $a_i = v_i v_{i+1}$  y convertirla en las dos aristas  $b_1 = v_i w, b_2 = w v_{i+1}$  al introducir el vértice  $w$ , la gráfica  $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{A})$  donde  $\hat{V} = V \cup \{w\}$  y  $\hat{A} = (A - a_i) \cup \{b_1, b_2\}$ .

**Teorema 1.3.1.** (Kuratowski) Una gráfica no es planar si y solamente si contiene como subgráfica una subdivisión de alguna de las gráficas de Kuratowski,  $K_{3,3}$  o  $K_5$ .  $K_5$  es la gráfica con 5 vértices donde todos los vértices están conectados (completa), y  $K_{3,3}$  es la gráfica con 6 vértices  $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$  donde cada  $u_i$  está conectado con cada uno de los  $v_j$ .

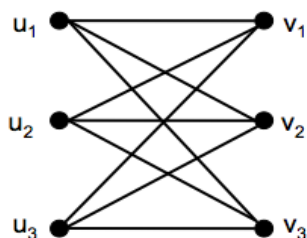


Figura 1.8: Gráfica de Kuratowski.

Una demostración del teorema anterior puede ser encontrada en [5].

### 1.3.1. Teorema de Jordan-Schönflies

Para finalizar este capítulo examinaremos el teorema que da título a esta sección. Pero antes enunciaremos un par de teoremas necesarios para llegar hasta él.

**Lema 1.3.2.** Si  $C$  es una curva poligonal simple en el plano ( $\mathbb{R}^2$ ), entonces  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  tiene exactamente dos regiones disjuntas, cada una de las cuales tiene a  $C$  como frontera.

**Demostración:** Supongamos primero que existen puntos  $p_1, p_2, p_3$  en regiones disjuntas de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ , podemos tomar entonces un disco cerrado  $D$  en  $\mathbb{R}^2$  que intersecte a  $C$  en una arista, es decir  $s = D \cap C$  consista en un segmento de recta. Entonces es claro que podemos tomar puntos  $r_1, r_2, r_3$  en  $D - s$  de manera que existan curvas poligonales simples que unan cada  $p_i$  con  $r_i$  y que no intersecten  $s$ , es claro entonces que debe existir un segmento que una algún  $r_j$  con  $r_k$ , por tanto existe una curva poligonal simple que une a los  $p_j, p_k$  correspondientes y esto es una contradicción con el hecho de que estos dos puntos yacían en distintas regiones.

Veamos ahora que  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  es desconexo, para esto tomemos un punto  $p$  arbitrario en dicho conjunto y consideremos una semirrecta infinita  $L$  que comience en él. Dicha semirrecta corta a la curva  $C$  en un número finito de puntos que forman intervalos contiguos. Si le damos una orientación a la curva  $C$  y nos fijamos en los extremos de cada uno

de estos intervalos, podemos decir que; si en los extremos del intervalo  $I_k$  la curva corta las dos veces por el mismo lado a la semirrecta  $L$ , entonces esta “toca” a la curva en el intervalo  $I_k$ ; si por el contrario, la curva cruza la semirrecta  $L$  en los extremos de  $I_k$  por lados distintos entonces la curva “cruza”  $L$  en el intervalo. No es difícil ver que como  $C$  es una curva poligonal simple (no tiene bucles), entonces cada intervalo de toque, contiene al menos dos intervalos de cruce. El número de intervalos de cruce módulo 2 no depende de la dirección de la semirrecta  $L$ , solo del punto  $p$  (pues la curva  $C$  se supone ya dada). El número  $L_p$  de cruces de la semirrecta  $L$  que parte de  $p$ , se llama la paridad de el punto  $p$  con respecto a la curva  $C$ . Es claro que todos los puntos de una curva poligonal simple en  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  deben tener la misma paridad, por lo tanto todos los que se encuentren en la misma región de este conjunto también la deben tener. Considerando ahora un disco  $D$  como el usado anteriormente, podemos encontrar un punto  $p$  tal que sea posible trazar una semirrecta  $L$  que intersecte  $C$  en un solo punto. Por tanto en  $L$  podemos encontrar puntos de paridad distinta, que por los argumentos de conexidad ya mencionados deben estar en distintas regiones de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ .  $\square$

Una definición alternativa del interior de una curva poligonal simple se puede dar en términos de la paridad. Podemos decir que los puntos de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  con paridad 1, forman el interior de  $C$  y los de paridad 0 el exterior. Como la paridad de los puntos cambian al cambiar de “lado” con respecto a la curva  $C$ , y ya que los puntos en ella tienen paridad indefinida podemos decir que  $C$  es la frontera de ambas regiones.

**Lema 1.3.3.** *Sea  $C$  una curva poligonal cerrada y  $P$  un arco poligonal en  $\text{int}(C)$  que une a los puntos  $p, q$  los cuales están en  $C$ , y no tiene mas puntos en común con esta. Si  $C_1$  y  $C_2$  son los dos arcos contenidos en  $C$  que unen  $p$  y  $q$ , entonces  $\mathbb{R}^2 \setminus (P \cup C)$  tiene precisamente tres regiones, las cuales tienen por frontera  $C, C_1 \cup P, C_2 \cup P$ .*

**Demostración:** Ya hemos visto que  $\text{ext}(C)$  e  $\text{int}(C)$  son dos regiones distintas, por tanto solo queda demostrar que el arco poligonal  $P$  divide  $\text{int}(C)$  en dos regiones. Para esto tomemos dos puntos  $p_1, p_2 \in \text{int}(C)$  de manera que puedan ser unidos por un arco poligonal  $P'$  que cumpla que  $P' \cap P$  consista en un solo punto. Entonces por el lema anterior,  $p_1$  y  $p_2$  deben estar en dos regiones distintas de  $\mathbb{R}^2 \setminus (C_1 \cup P)$  por lo tanto, también en dos regiones distintas de  $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup P)$ .  $\square$

El lema anterior nos permite asegurar que no hay manera de seleccionar dos puntos en  $\text{int}(C) \setminus P$  y unirlos por una “línea” poligonal sin intersectar  $P$ . De igual manera un arco poligonal que esté en  $\text{ext}(C)$  y una dos puntos de  $C$  divide  $\text{ext}(C)$  en dos regiones. Todo esto ofrece como consecuencia el siguiente resultado.

**Lema 1.3.4.**  *$K_{3,3}$  no es una gráfica plana.*

**Demostración:**  $K_{3,3}$  puede ser pensada como un ciclo con 6 vértices, es decir, como la curva poligonal  $v_1v_2v_3v_4v_5v_6$ , más tres cuerdas  $v_1v_4, v_2v_5, v_3v_6$ . Ahora usando el lema anterior, podemos ver que si  $K_{3,3}$  fuera plana, como el ciclo es una curva poligonal simple y cerrada, al agregarle dos arcos poligonales (dos de las tres cuerdas) uno tendría que estar en  $\text{int}(C)$  y el otro en  $\text{ext}(C)$ . Y ya que el arco que está en  $\text{int}(C)$  divide este en dos regiones, sería imposible que la tercera cuerda estuviera en  $\text{int}(C)$  y no intersectará la primera. De igual forma la cuerda que está en  $\text{ext}(C)$  divide este en dos regiones, y como

cada arco de  $C$  que une los extremos de cada una de las cuerdas  $v_j v_{j+3}$  contiene exactamente un vértice de las otras dos, entonces si la tercera cuerda yaciera en  $ext(C)$  por el mismo argumento, debería intersectar a la segunda. No hay configuración posible que no contradiga la condición de planalidad, así que podemos afirmar que es imposible hacer un encaje exitoso de  $K_{3,3}$  en  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

**Definición 1.3.5.** *Se dice que una gráfica es conexa si existe un camino (arco poligonal contenido en la gráfica) entre dos cualesquiera de sus vértices. Se dice que es 2-conexa si al quitarle un vértice cualquiera y todas las aristas que lo contienen, esta sigue siendo conexa.*

**Lema 1.3.5.** *Si  $F$  es una gráfica 2-conexa y  $G$  una subgráfica de esta 2-conexa también, entonces  $F$  puede ser obtenida, añadiendo caminos (de longitud  $l \geq 1$ ) a la gráfica  $G$ , de manera que los extremos de cada uno de estos caminos, sean vértices en  $G$ , y que el resto sean elementos de  $V(F) \setminus V(G)$ .*

**Demostración:** Si  $F = G$  entonces el resultado es trivial. Supongamos por tanto que  $A(F) \setminus A(G) \neq \emptyset$ . Si este conjunto contiene un solo elemento entonces tal arista sería el arco poligonal a adicionar para obtener la gráfica completa. Ahora tomemos esta como nuestra hipótesis inductiva y apliquemos inducción sobre el número de elementos en  $A(F) \setminus A(G)$ .

Por nuestra hipótesis, podemos suponer que se cumple para cualquier gráfica 2-conexa contenida en  $G$ . Más aún, si tomamos  $G'$  como la gráfica 2-conexa propia maximal de  $F$  (es decir, la gráfica 2-conexa mas grande contenida en  $F$  y distinta de esta), entonces por nuestra hipótesis de inducción podemos asegurar que la propiedad se cumple en el caso  $G'$  y  $G$ , o en el caso  $F$  y  $G'$ , ya que los números  $|A(F) \setminus A(G')|$  y  $|A(G') \setminus A(G)|$  son mayores que  $|A(F) \setminus A(G)|$ , por tanto es fácil ver que se cumple para  $F, G$ . Ahora, si  $G$  es la gráfica 2-conexa maximal propia de  $F$ , debemos examinar el caso con mas detalle. Veamos que como  $F$  es conexa, entonces debe haber alguna arista, digamos  $v_1 v_2$  en  $A(F) \setminus A(G)$  con alguno de sus extremos (por ejemplo  $v_1$ , lo que implica que  $v_2$  no está en  $G$ ) en  $V(G)$  (de hecho debe ser más de uno pues  $F$  también es 2-conexa).

Como  $F - \{v_1\}$  es conexa podemos tomar cualquier elemento  $v_n$  en  $V(G)$  y un camino  $L = v_2 v_3 \dots v_n$ , donde los  $v_j, 3 \leq j < n$  no estén en  $G$ . Este camino debe existir ya que  $v_2 \in V(F) \setminus V(G)$ , y por tanto en el por de los casos consistirá en una sola arista. De esta forma el camino  $L \cup \{v_1 v_2\}$  contiene sus extremos en  $G$  y todos los demás vértices en  $V(F) \setminus V(G)$ , por tanto como  $G$  era la subgráfica 2-conexa maximal de  $F$ , entonces  $F = G \cup L \cup \{v_1 v_2\}$ , lo que demuestra el lema.  $\square$

El siguiente lema es consecuencia del teorema de Euler sobre poliedros, en el cual se establece que la suma del número de caras y de vértices de un poliedro cualquiera es igual al número de aristas más 2. Es decir:

$$C + V = A + 2,$$

o lo que es lo mismo:

$$C = A - V + 2.$$

El lema puede verse geoméricamente asumiendo el exterior de una gráfica finita como una única cara.

**Lema 1.3.6.** *Si  $G$  es una gráfica plana 2-conexa con tres o más vértices, entonces  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  tiene  $|A(G)| - |V(G)| + 2$  regiones, cada una de las cuales tiene un ciclo de  $G$  como frontera.*

**Demostración:** Supongamos que tomamos un ciclo cualquiera  $C$  en  $G$ . Si  $G = C$ , entonces por el **Lema 1.3.2**, vemos que  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  tiene dos regiones, por tanto se cumple. En caso contrario, la gráfica  $G$  puede ser obtenida desde la gráfica  $C$  agregándole caminos a los vértices de esta.

Agregar un camino es similar a agregar una arista solamente, pues la diferencia entre aristas y vértices de un camino siempre es 1 da igual cual sea su longitud. Por tanto usando el **Lema 1.3.3**, vemos que cada camino que agreguemos divide en dos una región en  $\mathbb{R}^2 \setminus G$ , así que adiciona una al total de regiones. Y ya que agregar un camino es como agregar una arista, entonces habrán tantas regiones adicionales como aristas adicione-mos (una por cada camino), por tanto si el ciclo  $C$  tenía “ $i$ ” aristas e “ $i$ ” vértices, (pues un ciclo tiene la misma cantidad de vértices que de aristas) la formula era (siendo  $R$  el número de regiones):

$$R = |A(G)| - |V(G)| + 2 \Rightarrow 2 = i - i + 2$$

y si adicionamos “ $k$ ” caminos (una arista por cada uno de ellos), se convierte en:

$$R + k = |A(G)| + k + |V(G)| + 2$$

es decir, se sigue manteniendo la igualdad. De todo esto podemos asegurar que el número de regiones en  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  es el deseado.  $\square$

El **Lema 1.3.2** y el **Lema 1.3.3** se pueden generalizar al caso en el cual la curva poligonal simple  $C$ , es una curva simple cerrada, es decir; una trayectoria donde su inicio y su final coinciden. Solo hay que tener en cuenta que en el **Lema 1.3.2**, la intersección del disco  $D$  y la curva  $C$  no tiene que ser una línea recta para que se cumpla el hecho de que el disco es dividido en 2 regiones distintas por dicha línea. Por tanto el resultado se extiende fácilmente.

Para generalizar el **Lema 1.3.3** se usa el resultado esbozado en el párrafo anterior. La única parte no trivial es la de demostrar que  $\text{int}(C)$  es dividido en dos regiones distintas por el arco poligonal  $P$ . En la prueba del **Lema 1.3.3** el arco poligonal  $P'$  interseca al  $P$  en un único punto, por tanto usando la extensión del **Lema 1.3.2** ya mencionada, entonces  $P'$  contiene sus extremos (los puntos  $p_1$  y  $p_2$ ) en dos regiones distintas de  $\mathbb{R}^2 \setminus C_1 \cup P$ , y por lo tanto en dos distintas de  $\mathbb{R}^2 \setminus P \cup C$ .

Recapitulando un poco todo lo mencionado en esta sección, podemos hacer notar que aunque las aristas de una gráfica en general se piensen como líneas rectas entre los vértices de esta, las aristas del encaje de una gráfica  $\hat{G}$  (encajada en  $\mathbb{R}^2$  en nuestro caso) no tienen porque ser líneas rectas. Estas podrían ser perfectamente curvas simples (o trayectorias no rectas). Una vez dicho esto, el **Lema 1.3.6** puede ser reformulado de la siguiente forma.

**Lema 1.3.7.** *Si  $\hat{G}$  es un encaje en  $\mathbb{R}^2$  de una gráfica 2-conexa que contiene un ciclo  $C$ , el cual es una curva simple cerrada, de manera que todas las demás aristas de  $\hat{G} \setminus C$  son curvas simples en  $\text{int}(C)$ , entonces  $\mathbb{R}^2 \setminus \hat{G}$  tiene  $|A(\hat{G})| - |V(\hat{G})| + 2$  regiones, cada una de*

las cuales tiene un ciclo de  $\hat{G}$  como frontera.

**Demostración:** La demostración es idéntica a la del **Lema 1.3.6**, pero se utiliza la generalización del **Lema 1.3.3** en vez del lema en sí.  $\square$

Por último, pasemos a enunciar y demostrar el principal teorema de esta sección. En el teorema hablaremos de la accesibilidad de un punto.

**Definición 1.3.6.** Se dice que un punto  $p$  de un conjunto cerrado  $C \subset \mathbb{R}^2$  es **accesible** desde un punto  $q$  en la región  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$  (y por tanto accesible desde cualquiera en dicha región) si existe un arco poligonal simple que los una y que intersecte al conjunto  $C$  solamente en  $p$ .

Si  $C$  es una curva simple cerrada, entonces pueden existir puntos en ella que no sean accesibles desde  $\mathcal{R}$ .

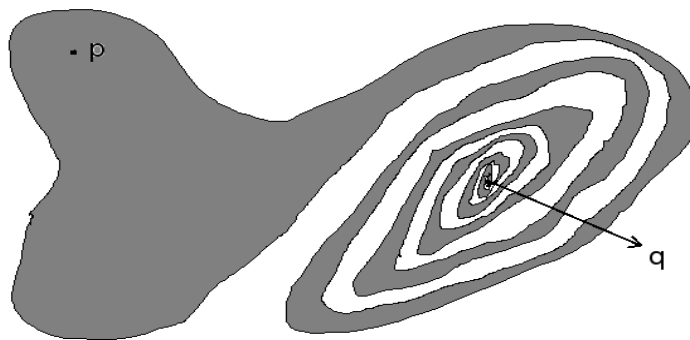


Figura 1.9: Ejemplo de la afirmación anterior.

Sin embargo si  $L$  es un arco de  $C$  que contiene al punto  $p$ , entonces como  $\mathbb{R}^2 \setminus (C \setminus L)$  es un conjunto conexo, existe un arco poligonal simple  $L'$  que conecta  $q \in \mathcal{R}$  con cualquier otro punto  $q'$  que se encuentre en una región distinta de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  y por tanto  $L' \cap C \neq \emptyset$ . Lo que implica que  $L'$  intersecta a  $L$ .

Ahora, el arco  $L \subset C$  puede ser tan chico como se desee, es decir para todo punto  $p \in C$  podemos tomar una vecindad tan pequeña como queramos de este en  $C$  que sea intersectada por el arco poligonal  $L'$  en la construcción anterior. En otras palabras; para todo  $p \in C$  el arco  $L$  puede ser tomado como una vecindad arbitrariamente pequeña de este en la curva  $C$ , que sin importar cuan chico sea siempre posee al menos un punto accesible desde cualquier región  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$ . De lo cual se puede concluir que el conjunto de puntos accesibles en  $C$  desde una región  $\mathcal{R}$  como la descrita es denso.

El siguiente teorema, que da título a esta sección, es uno de los teoremas mas famosos e importantes de la topología. Ha demostrado ser además de gran utilidad y fortaleza para la elaboración de varias ramas de las matemáticas avanzadas. La versión del teorema y la demostración que presentamos aquí, están tomadas de manera casi literal de [1]. La

demostración es larga e intrincada en su método constructivo, por eso no se hace intento alguno de esclarecerla.

**Teorema 1.3.2.** (*Jordan-Schönflies*) *Si  $f$  es un homeomorfismo de una curva poligonal simple cerrada  $C$  en otra curva poligonal simple cerrada  $C'$ , entonces  $f$  puede ser extendido a un homeomorfismo  $\hat{f}$  de todo el plano  $(\mathbb{R}^2)$ .*

**Demostración:** Sin pérdida de generalidad asumamos que  $C'$  es un polígono convexo y extendamos en primer lugar el homeomorfismo  $f$  a un homeomorfismo  $f' : \overline{\text{int}}(C) \rightarrow \overline{\text{int}}(C')$ . Tomemos  $B$  como un conjunto numerable en  $\text{int}(C)$  y  $A$  como un subconjunto numerable de los puntos en  $C$  accesibles desde  $\text{int}(C)$  (sabemos que estos puntos son densos en  $C$ ). Sea  $p_1, p_2, p_3, \dots$  una colección de puntos en  $A \cup B$ ,  $L_0$  cualquier gráfica 2-conexa que consista en  $C$  y arcos poligonales en  $\overline{\text{int}}(C)$  y  $L'_0$  definida similarmente pero con relación a  $C'$ . Pidamos además que  $L_0$  y  $L'_0$  sean isomorfas con isomorfismo  $g_0$ , de manera que  $g_0$  y  $f$  coincidan en  $V(L_0)$ . Ahora, lo que intentaremos hacer es extender  $f$  a  $C \cup V(L_0)$  de manera que  $g_0$  y  $f$  coincidan en  $V(L_0)$ . Para esto definimos sucesiones de gráficas 2-conexas  $L_0, L_1, L_2, \dots$  y  $L'_0, L'_1, L'_2, \dots$  de manera que para cada  $k \geq 1$ ;  $L_k, L'_k$  son extensiones de subdivisiones de las gráficas  $L_{k-1}, L'_{k-1}$  respectivamente, con  $L_k \approx L'_k$  mediante un homeomorfismo  $g_k$  que coincide con  $g_{k-1}$  en  $V(L_{k-1})$  y que las gráficas  $L_k, L'_k$  consistan en  $C$  y  $C'$ , y arcos poligonales simples en  $\overline{\text{int}}(C)$  e  $\overline{\text{int}}(C')$  respectivamente. Por último asumamos además que  $L'_k \setminus C'$  es conexa para cada  $k$ . Con todo esto podemos proceder a extender  $f$  a  $C \cup V(L_k)$  tal que  $f$  y  $g_n$  coincidan en  $V(L_n)$ . Supongamos que ya tenemos definida nuestras sucesiones y homeomorfismos correspondientes hasta el término  $n - 1$ , definamos entonces  $L_n, L'_n$  y  $g_n$  de la siguiente forma; tomemos el punto  $p_n \in A \cup B$  en la sucesión anterior, si  $p_n \in A \subset C$  entonces tomamos  $P$  como una curva poligonal simple que une a  $p_n$  y a  $q_n \in L'_{n-1} \setminus C$  de manera que  $L_{n-1} \cap P = \{p_n, q_n\}$ . Es decir  $L_n = L_{n-1} \cup P$ , donde  $P$  básicamente yace en el interior de una “cara” de  $L_{n-1}$  (que posee por frontera un ciclo digamos  $S$ ). Debemos adicionar también a  $L'_{n-1}$  un arco poligonal  $P'$  de manera que esté en la cara que posee por frontera a  $g_{n-1}(S)$ , y que una a los puntos  $f(p_n)$  y  $g_{n-1}(q_n)$  en caso de que  $q_n$  sea un vértice, o una a  $f(p_n)$  con un punto cualquiera en el conjunto imagen de  $g_{n-1}(a)$ , siendo  $a$  la arista que contiene a  $q_n$ . Haciendo entonces  $L'_n = L'_{n-1} \cup P'$ , definimos el isomorfismo  $g_n$  de la manera sugerida por la construcción; es decir usando  $f$  en  $C$ , el isomorfismo  $g_{n-1}$  en  $L_{n-1}$  y haciendo la correspondencia obvia entre  $P$  y  $P'$  (las gráficas continúan siendo isomorfas justo por el hecho de que los ciclos que son fronteras de las caras que contienen a  $P$  y a  $P'$  son imagen uno del otro bajo  $g_{n-1}$ ). Entonces basta extender  $f$  de manera que satisfaga  $f(q_n) = g_n(q_n)$ .

Si  $p_n$  está en  $B$ , entonces consideramos el mayor cuadrado de lados verticales y horizontales, que tenga como punto medio  $p_n$  y que esté en  $\overline{\text{int}}(C)$ . Dentro de este cuadrado tomaremos uno nuevo, con lados paralelos al primero y de manera que los lados de este disten del otro  $< \frac{1}{n}$ . Dentro del nuevo cuadrado dibujamos líneas paralelas a los lados que cumplan que dos de ellas (una horizontal y una vertical) contengan a  $p_n$  y que las regiones entre estas y el cuadrado de adentro tengan un diámetro  $< \frac{1}{n}$  (hay que tener en cuenta que el diámetro de un conjunto es la distancia máxima entre todos los elementos de este). Hagamos entonces que  $H_n$  sea la unión de  $L_{n-1}$  y las dos líneas rectas que intersectan  $p_n$ , mas un arco poligonal en  $\text{int}(C)$  necesario para hacer que  $H_n$  sea 2-conexa

y  $H_n \setminus C$  conexa. Ahora, por el **Lema 1.3.5**,  $H_n$  puede ser obtenida de  $L_{n-1}$  agregando arcos poligonales en las caras de esta; añadimos entonces los caminos correspondientes a  $L'_{n-1}$  (bajo la aplicación  $g_{n-1}$ ) y así obtenemos una gráfica  $H'_n$  que es isomorfa a  $H_n$ . Ahora agregamos líneas verticales y horizontales en  $\overline{int}(C')$  a  $H'_n$  de forma que la gráfica resultante no tenga regiones acotadas de diámetro  $\geq \frac{1}{2n}$ . Si fuera necesario podríamos modificar un poco la gráfica para que las líneas que agregamos intersecten a  $C'$  solo en  $f(A)$ , tal que todas las regiones acotadas tengan diámetro  $\leq \frac{1}{n}$  y tal que cada una de estas nuevas líneas tenga solo un número finito de intersecciones con  $H'_n$ . Y esto extiende  $H'_n$  en una gráfica que denotaremos por  $L'_n$ . De nuevo podemos agregar arcos poligonales a  $H_n$  tal que obtengamos una gráfica plana  $L_n$  isomorfa a  $L'_n$ . Entonces extendemos el homeomorfismo  $f$  tal que esté definido en  $C \cup V(L_n)$  y coincida con el isomorfismo  $g_n$  en  $V(L_n)$ . Cuando extendemos  $H'_n$  a  $L'_n$  y  $H_n$  a  $L_n$  estamos agregando demasiadas aristas y es difícil saber que está pasando. En cualquier caso el **Lema 1.3.5** nos dice que podemos visualizar una extensión de  $H'_n$  en  $L'_n$  como el resultado de agregar arcos poligonales (que en este caso es una línea recta en una cara). Después solo realizamos sucesivamente las adiciones en  $H_n$  (cosa que podemos hacer ya que la aplicación  $f$  actual está definida solamente en los vértices). En este sentido podemos extender  $f$  a una aplicación 1-1 definida en  $F = C \cup V(L_0) \cup V(L_1) \cup \dots$ , y con imagen  $C' \cup V(L'_0) \cup V(L'_1) \cup \dots$ . Estos conjuntos son densos en  $\overline{int}(C')$  y  $\overline{int}(C)$  respectivamente. Si  $p$  es un punto en  $int(C)$  en el cual  $f$  todavía no está definida, entonces consideramos la sucesión  $q_1, q_2, q_3, \dots$  que converge a  $p$  y consiste en puntos de  $V(L_0) \cup V(L_1) \cup \dots$ . Debemos demostrar entonces que  $f(q_1), f(q_2), \dots$  converge y que su límite no es otro que  $f(p)$ . Para esto tomemos  $d$  como la distancia de  $p$  a  $C$  y  $p_n$  un punto de  $B$  a distancia  $< \frac{d}{3}$  de  $p$ . Entonces  $p$  está dentro del cuadrado más grande en  $\overline{int}(C)$  que tiene a  $p_n$  como punto medio (también dentro del cuadrado de adentro si  $n$  es suficientemente grande). Por la construcción de  $L_n$  y  $L'_n$  se sigue que  $L_n$  tiene un ciclo  $S$  tal que  $p \in int(S)$  y tal que ambos,  $S$  y  $g_n(S)$  están en discos de radio  $< \frac{1}{n}$ . Como la aplicación  $f$  va del conjunto  $F \cap int(S)$  en  $int(g_n(S))$  y  $F \cap ext(S)$  en  $ext(g_n(S))$ , se cumple en particular que, que la sucesión  $f(q_m), f(q_{m+1}), \dots$  está en  $int(g_n(S))$  para alguna  $m$ . Como  $k$  puede ser elegido arbitrariamente grande,  $f(q_1), f(q_2), \dots$  es una sucesión de Cauchy, y por tanto es convergente. Se sigue por tanto que  $f$  está bien definida. Más aún, usando la notación anterior,  $f$  mapea  $int(S)$  en  $int(g_n(S))$ , por tanto es continua en  $int(C)$ . Además como  $V(L'_0) \cup V(L'_1)$  es denso en  $\overline{int}(C')$  el mismo argumento muestra que  $f$  mapea  $int(C)$  en  $int(C')$ , que  $f$  es una aplicación 1-1 y que  $f^{-1}$  es continua en  $int(C')$ . Por tanto solo queda demostrar que  $f$  es continua en  $C$  (pues como  $\overline{int}(C)$  es compacto y  $f$  sea continua entonces  $f(\overline{int}(C)) = \overline{int}(C)$  también lo será). Para probar esto basta con considerar una sucesión  $q_1, q_2, \dots$  de puntos en  $int(C)$  que converjan a  $q$  en  $C$  y demostrar que  $f(q_1), f(q_2), \dots$  converge a  $f(q)$ . Supongamos entonces que esto no sucede; como  $\overline{int}(C')$  es compacto podemos asumir que existe una subsucesión (que pensaremos como la sucesión misma) en la cual  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n) = q' \neq f(q)$ , y ya que  $f^{-1}$  es continua en  $int(C')$ , entonces  $q'$  debe estar en  $C'$ . Además,  $A$  es denso en  $C$ , por tanto  $f(A)$  es denso en  $C'$  y cada uno de los dos arcos en  $C'$  de  $q'$  a  $f(q)$  contienen un punto  $f(q_1)$  o  $f(q_2)$  respectivamente en  $f(A)$ . Para cada  $n$ ,  $L_n$  tiene un camino  $P$  de  $q_1$  hasta  $q_2$  teniendo solamente a estos dos puntos en común con  $C$ . Por la extensión ya mencionada del **Lema 1.3.3**,  $P$  separa  $int(C)$  en dos regiones, una de las cuales contiene

casi todos los elementos de la sucesión  $\{f(q)_n\}$  mientras la otra tiene a  $f(q)$  en su frontera, pero no la frontera que es común a las dos regiones, por tanto es imposible que se cumpla  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n) = q'$ . La contradicción anterior asegura que  $f$  tiene una extensión apropiada a  $\text{int}(C)$ .

Por argumentos similares,  $f$  puede ser extendida a  $\text{ext}(C)$ . Consideramos un sistema coordinado en el plano; sin perder generalidad podemos suponer que  $\text{int}(C)$  contiene el origen y que  $C$  y  $C'$  están en el interior del cuadrángulo  $T$ , con esquinas  $(\pm 1, \pm 1)$ . Sean  $L_1, L_2, L_3$  los segmentos de recta que pasan por el origen y por los puntos  $(1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$  respectivamente. Sean  $p_i$  el punto donde el segmento  $L_i$  intersecta a  $C$  para  $i = 1, 2, 3$ . Sean  $L'_1, L'_2$  arcos poligonales desde  $f(p_1)$  a  $(1, 1)$  y desde  $f(p_2)$  a  $(-1, -1)$  respectivamente, de manera que  $L'_1 \cap L'_2 = \emptyset$  y  $L'_i$  tiene solo sus extremos en común con  $C'$  y  $T$ . Después de una reflexión de  $C'$  en la línea entre  $(1, 1)$  y  $(-1, -1)$ , si es necesario, podemos asumir que  $L'_3$  termina en  $(1, -1)$ . Ahora, podemos usar el método de la primera parte de la prueba para extender  $f$  a un homeomorfismo de  $\overline{\text{int}(T)}$  de manera que  $f$  sea la identidad en  $T$ . Entonces  $f$  se extiende a un homeomorfismo de todo el plano tal que  $f$  es la identidad en  $\text{ext}(T)$ .  $\square$

**Lema 1.3.8.** *Si  $L$  y  $L'$  son gráficas planas 2-conexas y  $g$  un homeomorfismo plano e isomorfismo entre ellas. Entonces  $g$  se puede extender a un homeomorfismo en todo el plano.*

**Demostración:** La demostración se hace por inducción sobre el número de ciclos en  $L$ . Si  $L$  es un ciclo entonces el lema se reduce al teorema anterior. En otro caso, sabemos que  $L$  consiste en un ciclo con arcos poligonales en su interior. Más aún,  $L$  se puede obtener a partir de un ciclo, adicionando a este arcos poligonales en sus caras (con cada adición dividiremos una cara en dos). Entonces si suponemos que  $L_1$  es una subgráfica que contiene al ciclo exterior de  $L$ , y tal que  $L$  puede ser obtenida adicionándole arcos poligonales  $P$  a  $L_1$  en el interior de algunas caras  $\overline{\text{int}(C)}$  contenidas en determinados ciclos  $C \in L_1$ . Ahora aplicando la hipótesis de inducción sobre  $L_1$  y sobre ambos ciclos formados en  $C \cup P$  para cada ciclo  $C$  de los anteriores, queda demostrado el lema.  $\square$



## CAPÍTULO

# 2

# TEOREMA DE CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES

Como su título lo indica en este capítulo enunciaremos y probaremos el teorema de clasificación de superficies. Después de la breve introducción que hemos hecho sobre algunas herramientas matemáticas importantes, podemos hacer uso de estas para simplificar el camino que hemos de recorrer.

Cuando se habló del grupo fundamental, se llamó la atención sobre un resultado importante que implicaba el hecho de que dos espacios topológicos “distintos” (no homeomorfos), tenían grupos fundamentales distintos (no isomorfos). Hubo una clara insinuación además de que este hecho podía ser usado para decidir cuando dos superficies compactas eran “la misma” (homeomorfas) y cuando no. Sin embargo es extremadamente difícil calcular el grupo fundamental de una superficie en general, y normalmente solo se conoce el grupo asociado a algunas de ellas. Así que la solución clásica al problema consiste en demostrar primero que todas las superficies compactas son homeomorfas a determinadas superficies más específicas.

Hablemos un poco de estas superficies específicas.

### 2.1. Superficies $S_g$ y $N_g$

**Definición 2.1.1.** Sean  $X$  e  $Y$  dos  $n$ -variedades conexas. Si extraemos dos discos de dimensión  $n$  encajados en ellas digamos  $B_X$  y  $B_Y$  respectivamente, y nos fijamos en los espacios  $\hat{X} = X - \mathring{B}_X$  e  $\hat{Y} = Y - \mathring{B}_Y$ , entonces tendremos dos variedades cuyas fronteras son  $\partial X \sqcup \partial \mathring{B}_X$ ,  $\partial Y \sqcup \partial \mathring{B}_Y$ . Ahora, es bastante claro que  $\partial \mathring{B}_X \approx \partial \mathring{B}_Y$ , así que tomando un ho-

meomorfismo  $\psi : \partial\mathring{B}_X \rightarrow \partial\mathring{B}_Y$  definimos

$$X \# Y = X \cup_{\psi} Y.$$

como la **suma conexa** de  $X$  e  $Y$ , que es también una variedad de dimensión  $n$ .

Es bastante claro que la suma conexa es una operación invariante (con respecto a la relación de homeomorfismo) en su orden de ejecución. Es decir, se cumple

$$X \# (Y \# Z) \approx (X \# Y) \# Z \approx X \# Y \# Z.$$

**Teorema 2.1.1.** Si  $X, Y, Z$  son superficies, tal que se cumple  $Y \approx Z$ , entonces  $X \# Y \approx X \# Z$ .

**Demostración:** Sean  $D_1$  el encaje de un disco en  $Y$  respectivamente. Sea además  $\psi$  el homeomorfismo  $Y \approx Z$  y  $\psi(D_1)$  la imagen de este. Entonces es bastante claro que  $Y - \mathring{D}_1 \approx Z - \psi(\mathring{D}_1)$  y que si  $D_2$  es un disco encajado en  $X$ , ya que existe un homeomorfismo  $\phi : D_1 \rightarrow D_2$  entonces  $X \cup_{\psi} Y \approx X \cup_{(\psi|_{D_1} \circ \phi)} Z$ , donde  $\psi|_{D_1}$  es la restricción de  $\psi$  a  $D_1$ .  $\square$

Podemos hacer notar también que la superficie  $X \# Y$  es (o podría ser si así se deseara) exactamente la misma superficie que  $Y \# X$ . Y ya que  $D^2 \approx \mathbb{S}^2 - \mathring{B}^2$ , si  $S$  es una superficie cualquiera, se cumple que  $S \# \mathbb{S}^2 \approx S$ . Por tanto, la esfera (la clase de equivalencia formada por las superficies homeomorfas a ella, es decir su clase de homeomorfismo) actúa como elemento neutro con respecto a la operación  $\#$  y a las clases de homeomorfismo de las demás superficies. El conjunto de estas clases, forma entonces un monoide abeliano con respecto a la operación de suma conexa.

**Definición 2.1.2.** Tomemos una superficie  $S$  y extraigamos dos agujeros ajenos de ella, es decir teniendo dos encajes  $e_0, e_1 : \mathbb{B}^2 \rightarrow S$  pedimos que  $e_0(\mathbb{B}^2) \cap e_1(\mathbb{B}^2) = \emptyset$  y hacemos  $\hat{S} = S - e_1(int(\mathbb{B}^2)) - e_2(int(\mathbb{B}^2))$ . Ahora, con los homeomorfismos  $\psi_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}_0^1, \psi_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}_1^1$ , donde  $\mathbb{S}_0^1$  y  $\mathbb{S}_1^1$  son las fronteras de los dos agujeros respectivamente, podemos pegar el cilindro  $\mathbb{S}^1 \times I$  a  $\hat{S}$ . La superficie obtenida es una similar a las de la figura.

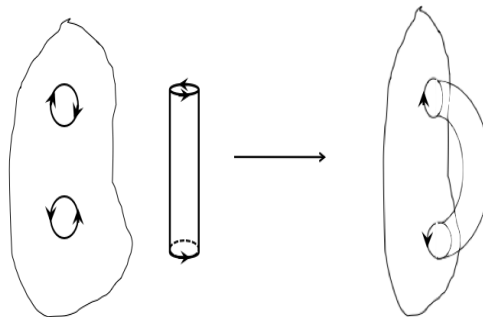


Figura 2.1: Pegar un asa a una superficie.

La superficie que resulta con este procedimiento se dice que se obtiene al “pegarle un asa” a  $S$ . Por supuesto, dependiendo de los homeomorfismos  $\psi_i$  será la superficie que obtengamos. Por ejemplo, modificando uno de los homeomorfismos podemos pegar el asa de manera no orientable.

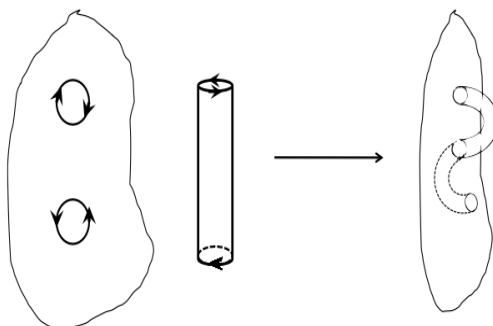


Figura 2.2: El asa pegada de manera no orientable.

**Ejemplo 2.1.1.** Si en la definición anterior tomamos  $S = \mathbb{S}^2$ , la superficie que resulta de pegar el asa en ambos extremos de esta con la misma orientación, es un toro. Si pegamos con orientaciones contrarias en cada agujero obtenemos una botella de Klein.

Es importante observar que el cambio de orientación a la hora de pegar el asa determina la orientación de la superficie. Como ya sabíamos la botella de Klein es una superficie no orientable (tiene una banda de Moebius encajada), mientras el toro si lo es.

**Definición 2.1.3.** Para  $g \geq 1$  sea  $E_{4g}$  el polígono regular inscrito en  $\mathbb{S}^1$  de  $4g$  lados y vértices  $p_n = e^{2\pi in/4g}$ , con  $n = 1, 2, \dots, 4g$ . Esta es una superficie con frontera, la cual consiste en los lados del polígono. Ahora si definimos la siguiente relación en la frontera

$$(1 - t)p_{4i-3} + tp_{4i-2} \sim (1 - t)p_{4i} + tp_{4i-1}$$

$$(1 - t)p_{4i-2} + tp_{4i-1} \sim (1 - t)p_{4i+1} + tp_{4i}$$

de forma que los lados del polígono se identifiquen como en la figura entonces tenemos una superficie  $S_g$ . Es decir una superficie cerrada orientable de género  $g$ . Haciendo

$$\vec{a}_i = \overrightarrow{p_{4i-3}p_{4i-2}} = \overrightarrow{p_{4i}p_{4i-1}}$$

y

$$\vec{b}_i = \overrightarrow{p_{4i-2}p_{4i-1}} = \overrightarrow{p_{4i+1}p_{4i}}$$

la identificación de los lados del  $4g$ -gono se puede escribir como

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

una expresión que nos va a ser de gran utilidad después.

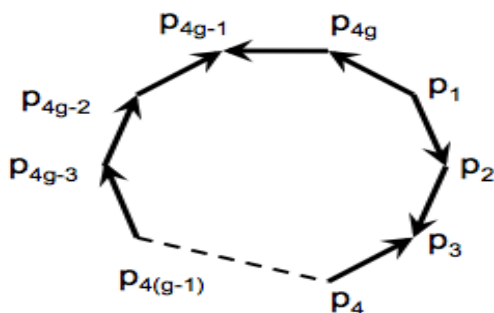


Figura 2.3: La identificación indicada arriba sobre los lados de un  $4g$ -gono.

El **Ejemplo 2.1.1** y la **Definición 2.1.3** están estrechamente relacionados pues la superficie que se obtiene al pegar  $g$  asas de manera que el resultado sea una superficie orientable, es equivalente a tomar un  $4g$ -gono e identificarlo de la manera sugerida anteriormente. Ambas superficies resultan ser superficies cerradas orientables de género  $g$ , las cuales son además homeomorfas a la suma conexa de  $g$  toros. Esto por supuesto merece un teorema.

**Teorema 2.1.2.** *La superficie cerrada orientable de género  $g$  es la suma conexa de  $g$  toros.*

**Demostración:** En el caso  $g = 1$  el resultado es conocido pues resulta ser la construcción que dimos para el toro en el **Ejemplo 1.1.9**. Ahora si tomamos el  $4g$ -gono con su identificación correspondiente para lograr  $S_g$ , y lo dividimos por el segmento que une  $p_1$  con  $p_5$  (llamémosle  $a$ ), obtendremos dos figuras que poseen relaciones definidas en cada una de ellas (en particular  $p_1 \sim p_5$ )

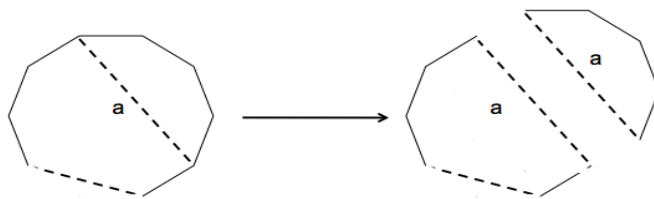


Figura 2.4: Suma conexa de un toro con un  $4(g - 1)$ -gono.

Vemos entonces que una de las figuras es un  $4(g - 1)$ -gono y la otra un 4-gono con determinadas relaciones en sus fronteras y par de agujeros perforados en cada una de ellas (de manera similar al procedimiento de suma conexa). O lo que es lo mismo; tenemos dos superficies  $S_{g-1} - \mathring{B}^2$  y  $\mathbb{T}^2 - \mathring{B}^2$ , que en particular deben ser identificadas en  $\partial \mathring{B}^2$ . Por tanto, el  $4g$ -gono original es lo que resulta de pegar ambos polígonos por el segmento  $a$ , o lo que es equivalente:  $S_g \approx S_{g-1} \# \mathbb{T}^2$ .

Si aplicamos inducción sobre  $g$  y suponemos que el teorema se cumple para  $S_{g-1}$ , entonces el teorema queda demostrado para todo  $g$ .  $\square$

El resultado anterior nos dice que la colección de superficies

$$\underbrace{\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2}_{g\text{-veces}}$$

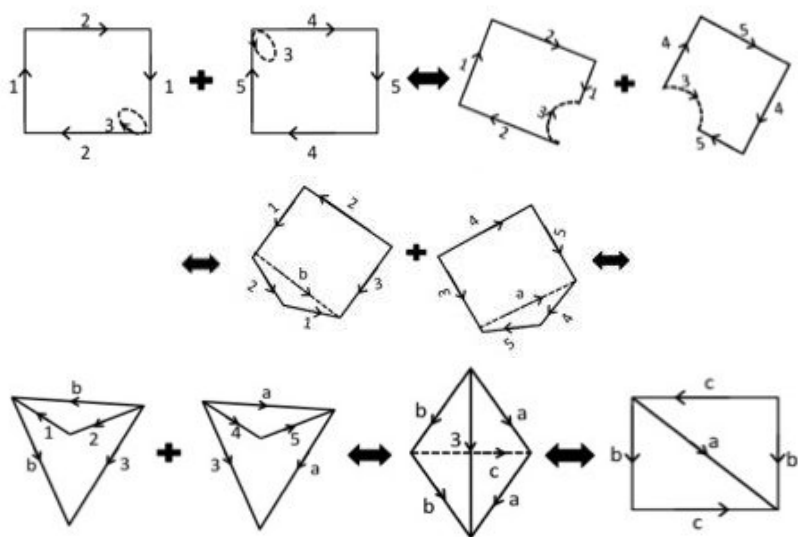
son en efecto todas las superficies cerradas orientables de género  $g$ . Las cuales en efecto son orientables por la pura construcción (ya sea usando los  $4g$ -gonos o el método de pegar asas a la esfera de manera orientable).

Sin embargo, no hemos estudiado que sucede cuando pegamos asas de manera no orientable a  $\mathbb{S}^2$ . Es claro que esta es una forma de construir superficies no orientables, pero no sabemos exactamente que resultará de dicho proceso. Para tener una idea mas clara examinemos el siguiente teorema cuya demostración esta dada en la figura, por el método de “cut and paste”.

**Teorema 2.1.3.** *La suma conexas de dos copias del plano proyectivo es homeomorfa a la botella de Klein. Es decir, se cumple la siguiente expresión.*

$$\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \approx \mathbb{K}$$

**Demostración:**



□

Así que en principio podemos decir que “pegar un asa” de manera no orientable a la esfera conduce a  $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ . Ahora la pregunta es: ¿Que pasa si hacemos?

$$\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$$

Esta es una superficie claramente no orientable, pues cualquiera de las copias de  $\mathbb{RP}^2$  tiene encajada una banda de Moebius. Pero no es claro como puede estar relacionado esto con el proceso de pegar asas.

La respuesta está en los siguientes lemas.

**Lema 2.1.1.** *Al pegar dos asas de manera no orientable a una esfera obtenemos la suma conexas de dos botellas de Klein.*

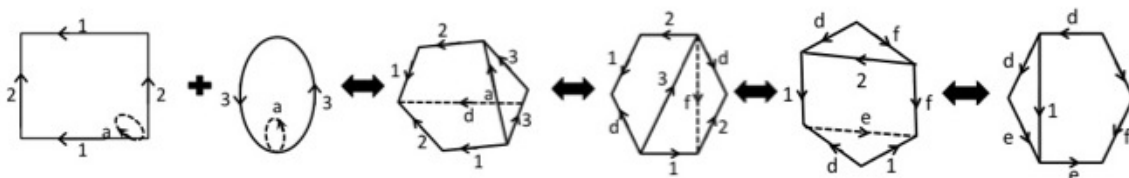
**Demostración:** La demostración es bastante intuitiva. Si tomamos dos copias de una esfera y de cada una extraemos discos abiertos tan grandes como una semiesfera, entonces tendremos dos semiesferas cerradas. A cada una de ellas le podemos agregar asas de manera no orientable, así obtendremos dos superficies isomorfas entre si e isomorfas también a una botella de Klein con una perforación igual a la del método enunciado para efectuar la suma conexas.

Si estas dos superficies las identificamos por las fronteras de las semiesferas, obtendremos una esfera con dos asas pegadas de manera no orientable. Pero a su vez, por la observación del párrafo anterior, la superficie será isomorfa a la suma conexas de dos botellas de Klein. □

**Lema 2.1.2.** *La suma conexas de un toro y un plano proyectivo es homeomorfa a la suma de tres planos proyectivos; esto es:*

$$T \# \mathbb{R}P^2 \approx \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$$

**Demostración:** Usando “cut and paste” una vez más



□.

Los resultados son sumamente sugerentes; si tenemos sumas conexas de botellas Klein y toros, por cada botella de Klein tenemos dos planos proyectivos y por cada suma de un plano proyectivo y un toro tendremos tres planos proyectivos.

Es perturbador a su vez el siguiente resultado, que es consecuencia directa de los lemas.

**Corolario 2.1.1.** *Las siguientes superficies son homeomorfas*

$$\mathbb{R}P^2 \# T \approx \mathbb{R}P^2 \# K.$$

Hay una forma algo distinta de construir las superficies que resultan de  $\underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2}_{g\text{-veces}}$ .

**Definición 2.1.4.** Para  $g \geq 1$  sea  $E_{2g} \in \mathbb{R}^2$  el polígono regular inscrito en  $\mathbb{S}^1$  con  $2g$  lados y vértices en los puntos  $p_n = e^{2\pi i n/2g}$ , con  $n = 1, 2, \dots, 2g$ . Por argumentos similares a los usados en el  $4g$ -gono, esta es una superficie con frontera.

Podemos definir entonces una relación sobre la frontera

$$(1-t)p_{2i-1} + tp_{2i} \sim (1-t)p_{2i} + tp_{2i+1}$$

lo que indica que los lados del polígono se identifican como se muestra en la figura

Hagamos entonces

$$\vec{a}_i = \overrightarrow{p_{2i-1}p_{2i}} = \overrightarrow{p_{2i}p_{2i+1}}$$

la identificación definida arriba se puede escribir entonces como

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$$

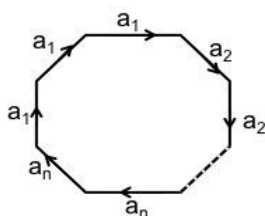


Figura 2.5: Identificación sobre los lados de un  $2g$ -gono.

El espacio que resulta de identificar los lados de un  $2g$ -gono  $E_{2g}$  como en la definición anterior, es una superficie cerrada no orientable de género  $g$ , o  $N_g$ . Que es además la suma conexa de  $g$  planos proyectivos.

Hemos visto que podemos construir una gran variedad de superficies, pero hasta el momento no queda muy claro como todas estas construcciones podrían ayudar a clasificar cualquier superficie compacta (que eventualmente podría ser un objeto tridimensional cerrado y compacto cualquiera).

Probaremos primero la parte mas complicada del teorema; demostraremos que cualquier superficie es homeomorfa a una superficie triangulada, o lo que es lo mismo, que cualquier superficie admite una triangulación. Una vez hecho esto exhibiremos un método para modificar de manera homeomorfa dicha triangulación y convertirla en la triangulación de una esfera, una superficie  $S_g$  o una  $N_g$ ; en otras palabras, demostraremos que la triangulación de cualquier superficie es homeomorfa a la de una de las superficies que hemos visto en esta sección. Esto obviamente equivale a decir que cualquier superficie cerrada es isomorfa a una de estas.

El teorema que usaremos para fundamentar todo esto le da título a la siguiente sección.

## 2.2. Teorema de triangulación de superficies.

**Definición 2.2.1.** Se dice que un encaje  $e : G \hookrightarrow S$  de una gráfica  $G$  en una superficie  $S$  es un encaje 2-celular si cada una de las caras de  $e(G)$  es homeomorfa al disco abierto.

**Definición 2.2.2.** Una triangulación de una superficie compacta  $S$ , consiste en una familia finita  $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$  de conjuntos cerrados  $T_i \subset S$  que cubren  $S$  y una familia de homeomorfismos  $\psi_i : T'_i \rightarrow T_i, i = 1, 2, \dots, n$ , donde cada  $T'_i$  es un triángulo en  $\mathbb{R}^2$ . Las imágenes bajo los  $\psi_i$  de los vértices y las aristas de cada  $T'_i$  son llamados vértices y aristas de la triangulación  $\mathcal{T}$ . Es necesario además que para todo par de triángulos  $T_i, T_j \in \mathcal{T}, i \neq j$  se cumpla que el conjunto  $T_i \cap T_j$  sea vacío, o consista en un solo punto (que debe ser un vértice de  $\mathcal{T}$ ), o en un arco simple (una arista de  $\mathcal{T}$ ). En otras palabras, dos triángulos distintos de  $\mathcal{T}$  pueden compartir a lo más una arista o un vértice en común, pero nunca algún punto interior.

Nótese que la definición de triangulación de una superficie asegura que si la superficie es cerrada, entonces una arista pertenece exactamente a dos triángulos.

El teorema de triangulación de superficies y su respectiva demostración están desarrollados en [1] de manera bastante práctica, es por eso que aquí, una vez más, seguiremos la demostración exhibida allí.

**Teorema 2.2.1.** (de Triangulación de Superficies) Toda superficie  $S$  es homeomorfa a una superficie triangulada, o lo que es lo mismo;  $S$  es triangulable.

**Demostración:** Ya que un polígono convexo siempre puede ser triangulado basta entonces demostrar que  $S$  admite un encaje 2-celular. Tomemos entonces para cada punto  $p \in S$  un disco abierto  $D(p)$  en el plano ( $\mathbb{R}^2$ ) que sea homeomorfo a una vecindad  $V(p)$  de  $p$  en  $S$ , mediante un homeomorfismo  $\psi_p : D(p) \rightarrow V(p)$ . En  $D(p)$  tomamos dos cuadriláteros  $Q_1(p), Q_2(p)$  tales que

$$p \in \psi_p(\overset{\circ}{Q}_1(p)) \subseteq \psi_p(\overset{\circ}{Q}_2(p))$$

Como estamos asumiendo que  $S$  es compacta, hay un número finito de puntos,  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , tales que  $S \subseteq \bigcup_{i=1}^n \psi_{p_i}(\overset{\circ}{Q}_1(p_i))$ . Podemos suponer además que los conjuntos  $D(p_1), D(p_2), \dots, D(p_n)$  son disjuntos dos a dos. Para lograr lo que nos proponemos debemos mostrar que es posible modificar los homeomorfismos  $\psi_i$  y sus correspondientes conjuntos  $Q_1(p_i)$  de manera que estos formen un encaje 2-celular en  $S$ .

Haciendo inducción sobre  $k$ , supongamos que  $Q_1(p_1), Q_1(p_2), \dots, Q_1(p_{k-1})$  han sido elegidos de manera que los conjuntos  $\psi_{p_1}(Q_1(p_1)), \psi_{p_2}(Q_1(p_2)), \dots, \psi_{p_{k-1}}(Q_1(p_{k-1}))$  tienen solamente un número finito de puntos en común en  $S$ . Entonces nos fijamos en  $Q_2(p_k)$ , la clave del asunto es la definición del concepto de **segmento malo**: Decimos que un segmento  $P$  de algún  $Q_1(p_j), (1 \leq j \leq k-1)$  es un **segmento malo** si  $\psi_{p_j}(P)$  une dos puntos de  $\psi_{p_k}(Q_2(p_k))$  y todos sus demás puntos están en  $\psi_{p_k}(\overset{\circ}{Q}_2(p_k))$ .

Ahora, tomando  $Q_3(p_k)$  un rectángulo entre  $Q_1(p_k)$  y  $Q_2(p_k)$ , decimos que un segmento en  $Q_2(p_k)$  es **muy malo** si  $\psi_{p_k}(P)$  intersecta  $\psi_{p_k}(Q_3(p_k))$ . Pueden existir una cantidad infinita de segmentos malos pero no de segmentos muy malos; pues como tenemos un número finito de rectángulos  $Q_2$ , tenemos un número finito de conjuntos  $\psi_{p_i}(Q_2(p_i))$ , pero ninguno de estos conjuntos no puede “enredarse” de manera infinita en el rectángulo  $Q_3(p_k)$  (pues entonces  $\psi_{p_k}$  dejaría de ser una homeomorfismo) y esta última condición es obviamente necesaria para que exista un número infinito de segmentos muy malos. Los



segmentos muy malos, junto con  $Q_2(p_k)$  forman una gráfica 2-conexa, digamos  $G$ . Usando el **Lema 1.3.5**, podemos reacomodar  $G$  en  $Q_2(p_k)$  tal que obtengamos una gráfica  $G'$  que sea isomorfa a  $G$  y tal que todas las aristas de  $G'$  sean arcos poligonales simples (un arco poligonal formado por arcos simples) en  $S$ . Ahora usando el **Teorema 1.3.8** podemos extender el isomorfismo entre  $G$  y  $G'$  a un homeomorfismo de  $\text{int}(Q_2(p_k))$  que mantenga fijo a  $Q_2(p_k)$ . Esto transforma a  $Q_1(p_k)$  y  $Q_3(p_k)$  en curvas cerradas simples  $Q'_1, Q'_3$  tal que  $p_k \in \text{int}(\psi_{p_k}(Q'_1)) \subseteq \text{int}(\psi_{p_k}(Q'_3))$ . Podemos asegurar que hay entonces, una curva simple cerrada  $Q''_3 \subset \text{int}(Q_2(p_k))$  tal que  $Q'_1 \subseteq \overset{\circ}{Q}''_3$  y tal que  $Q''_3$  no interseca a ningún segmento malo, excepto a los muy malos (los cuales son ahora arcos poligonales).

De hecho esto se cumple; por cada punto  $q \in Q'_3$ , sea  $R(q)$  un rectángulo con  $q$  como punto medio tal que  $R(q)$  no interseca ni a  $Q'_1$  ni a ningún segmento malo que no sea muy malo. Consideramos entonces una cubierta finita de  $Q'_3$  por tales rectángulos (que sea mínima, es decir que no contenga elementos innecesarios), la unión de estos rectángulos es una gráfica plana y 2-conexa tal que su ciclo exterior puede cumplir el mismo propósito que  $Q''_3$ .

Reacomodando de nuevo  $G' \cup Q''_3$  (la cual es una gráfica 2-conexa) y usando el **Teorema 1.3.8** una vez más podemos asumir que  $Q''_3$  es un cuadrilátero que tiene a  $Q'_1$  en su interior. Haciendo  $Q''_3$  se la nueva elección de  $Q_1(p_k)$ , entonces cualesquiera dos  $Q_1(p_1), Q_1(p_2), \dots, Q_1(p_K)$  se intersecan solo un número finito de veces, y el paso inductivo queda así demostrado.

Por tanto, podemos asumir que hay solo un número finito de segmentos muy malos dentro de cada  $Q_2(p_k)$  y que estos segmentos son arcos poligonales simples que forman junto con  $Q_2(p_k)$  una gráfica plana 2-conexa. Entonces la unión  $\bigcup_{i=1}^n \psi(Q_1(p_i))$  puede ser pensada como una gráfica  $G$  dibujada en  $S$ . Cada región en  $S - G$  posee un ciclo  $C$  de  $G$  como frontera ( $C$  debe ser una curva poligonal simple dentro de algún  $Q_2(p_i)$ ). Dibujemos ahora un polígono convexo  $C'$  tal que sus esquinas coincidan con los vértices de  $C$ . La unión de estos polígonos (por sus aristas correspondientes) forma una superficie  $S'$  con un encaje 2-celular  $G'$  que es isomorfo a  $G$ . Un isomorfismo de  $G'$  a  $G$  puede ser extendido a un homeomorfismo  $f$  del conjunto de puntos de  $G$  en  $S$  al conjunto de puntos de  $G'$  en  $S'$  (puntos que forman sus aristas incluidos). En particular la restricción al ciclo  $C$  es un homeomorfismo de  $C$  en  $C'$ . Por el **Teorema 1.3.2**  $f$  puede ser extendido a un homeomorfismo de  $\text{int}(C)$  en  $\text{int}(C')$ . Esto define un homeomorfismo de  $S$  en  $S'$  y prueba el teorema.  $\square$

En [3] se puede encontrar un resultado más general; los autores prueban que una superficie puede ser triangulada si es 2-numerable. El resultado que presentamos en el teorema anterior se aplica solamente para superficies compactas.

Lo que procede entonces es demostrar que cualquier triangulación se convierte en la triangulación de una superficie  $S_g, N_g$  o de una esfera. Para esto vamos a proceder de la misma forma que se exhibe en [2], dado que es un método bastante intuitivo, que hace extenso uso de la técnica de “cut and paste”.

Hacemos notar primero dos cosas:

(i) Si la superficie no tiene frontera (cerrada), cada arista de una triangulación pertenece exactamente a dos triángulos de esta.

(ii) Si  $v$  es un vértice de la triangulación, entonces  $v$  está en un número finito de triángulos (y en un número finito de aristas). Estos triángulos pueden ser ordenados de manera que si  $T_1, T_2, \dots, T_k$  es una ordenación de ellos, entonces se cumple que  $\forall i = 1, \dots, k, T_i$  y  $T_{i+1}$  comparten una arista en común (que incide en  $v$ ), tomando obviamente  $T_{k+1} = T_0$ . La veracidad de este hecho se puede mostrar de manera constructiva utilizando (i). Supongamos que  $I_v = e_0, e_1, \dots, e_m$  es el conjunto de aristas que inciden en  $v$ . Tomamos un elemento  $e_l \in I_v$  y nos fijamos en uno de los triángulos que la contengan. Cualquiera de estos triángulos (por (i) podemos asegurar que solo pueden ser dos) posee otra arista que debe estar en el conjunto  $I_v$  (digamos  $e_{l'}$ ), así que hacemos el triángulo seleccionado  $T_0$  y nos fijamos en el otro triángulo que contiene a  $e_{l'}$ . Este va a ser el triángulo  $T_1$ , y etc. Si al terminar el procedimiento (en un número finito de pasos debe terminar) no tenemos todos los triángulos que contienen a las aristas en  $I_v$ , significa que el conjunto  $T_{v1}, T_{v2}, \dots, T_{vk}$  de triángulos que contienen a algún elemento de  $I_v$  es tal que se puede separar en dos  $T_{v1}, T_{v2}, \dots, T_{vj}, T_{vj+1}, T_{vj+2}, \dots, T_{vk}$  de manera que ningún triángulo del primer conjunto tenga aristas en común con alguno del segundo conjunto. Esto implicaría que  $S$  no es una 2-variedad cerrada.

**Teorema 2.2.2.** *Cualquier superficie cerrada  $S$ , triangulable, es homeomorfa a  $\mathbb{S}^2$ , a una superficie  $S_g$ , o a una superficie  $N_g$ .*

### Demostración:

#### Primer paso:

Supongamos que tenemos una triangulación de  $S$ . Por las observaciones anteriores podemos hacer una ordenación de los triángulos  $T_1, T_2, \dots, T_n$  que contienen a las aristas  $e_1, e_2, \dots, e_k$  que forman la triangulación, de manera que cada uno de los triángulos comparta una arista con el siguiente en la ordenación. Podemos construir una copia en  $\mathbb{R}^2$  de  $S$ . Recordemos que para cada  $T_i \subset S$ , podemos tomar homeomorfismos  $\phi_i : T'_i \rightarrow T_i$  con  $T'_i \subset \mathbb{R}^2$ , de manera que  $T'_1, T'_2, \dots, T'_n$  sean disjuntos dos a dos. Es claro por tanto que el conjunto

$$T' = \bigcup_{i=1}^n T'_i$$

es compacto y cerrado.

Ahora definimos una aplicación  $\phi : T' \rightarrow S$  que cumpla  $\phi|_{T'_i} = \phi_i$ . Una aplicación que cumpla esto es evidentemente continua en  $\phi^{-1}(S)$  y además sobreyectiva. Por otro lado, como  $T'$  es compacto y  $S$  es Hausdorff entonces  $\phi$  es un mapeo cerrado<sup>1</sup>, por tanto  $S$  tiene sentido definir la topología cociente inducida por  $\phi$ . Este es un argumento matemático sólido para fundamentar que el polígono que resulta bajo al identificar los triángulos de  $T'$  de la manera apropiada, es homeomorfo a  $S$ . Es decir si consideramos  $e_i$ , una de las aristas de la triangulación de  $S$ , entonces  $e_i$  debe estar exactamente en dos triángulos, digamos  $T_j, T_k$ . Lo cual significa que  $\phi^{-1}(e_i)$  consiste en dos aristas, una del triángulo  $T'_j$  y otra del  $T'_k$ . Identificamos estos dos triángulos por la relación; si

<sup>1</sup>:**Teorema VI.1.33**, página 148 de [0]. Un cerrado contenido en un compacto es compacto. Imagen de un compacto bajo una aplicación continua es compacto. Un compacto contenido en un Hausdorff es cerrado.

$x \in \phi^{-1}(e_i) \cap T'_j$  e  $y \in \phi^{-1}(e_i) \cap T'_k$ , entonces

$$x \sim y \iff \phi(x) = \phi(y),$$

y esto obviamente para cada arista de la triangulación de  $S$ .

Si denotamos por  $D$  el espacio que resulta de  $T'/\sim$ , donde  $\sim$  es la relación de arriba. Es claro que podemos hacer

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{\phi} & S \\ \Pi_{\sim} \downarrow & \nearrow \psi & \\ D & & \end{array}$$

Es decir,  $\Pi_{\sim}$  es la proyección sobre la relación  $\sim$  y  $\psi$  es la aplicación inducida por esta (la que hace conmutar el diagrama). Así que  $D$  tiene la topología cociente inducida por  $\Pi_{\sim}$ , pero como  $D$  es compacto y  $S$  de Hausdorff, una vez más podemos asegurar que  $\psi$  es cerrada e induce una topología en  $S$ .

Ahora intentaremos probar que topológicamente  $D$  es un disco cerrado (con alguna identificación en su frontera). Para esto tengamos en cuenta los siguientes puntos.

**(i)** Sean  $E_1$  y  $E_2$  dos espacios homeomorfos a discos cerrados y disjuntos entre ellos. Sean  $A_1, A_2$  subconjuntos de  $\partial E_1$  y  $\partial E_2$  respectivamente, los cuales son a su vez homeomorfos al intervalo  $[0, 1]$  y  $h : A_1 \rightarrow A_2$  un homeomorfismo entre ellos. Entonces el espacio  $E_1 \cup_h E_2$  es homeomorfo a un disco cerrado. **(ii)** A la hora de construir el espacio  $D$  a partir de  $T'$  podemos hacer las identificaciones sobre las dos aristas que forman el conjunto  $\phi^{-1}(e_i)$  de manera que  $e_i$  sea una arista arbitraria de la triangulación de  $S$ . En otras palabras, debido al carácter conmutativo (topológicamente hablando) de los cocientes, da igual en que orden hacemos las identificaciones sobre las aristas  $e_i$ .

Supongamos entonces que los triángulos  $T'_l$  y  $T'_m$  comparten una arista en  $S$ , definimos

$$T'_l \cup_{\phi_{lm}} T'_m = T'_l \sqcup T'_m / \sim_{lm}$$

Donde si  $x_1 \in T'_l$  y  $x_2 \in T'_m$ , entonces  $x_1 \sim_{lm} x_2 \iff \phi_l(x_1) = \phi_m(x_2)$ . Ahora, construimos el espacio  $D$  de la siguiente forma:  $T'_1$  y  $T'_2$  son homeomorfos a discos, entonces el espacio  $D_{12} = T'_1 \cup_{\phi_{12}} T'_2$  es homeomorfo a un disco por la observación **(i)**.

Entonces hacemos  $D_{123} = D_{12} \cup_{\phi_{j3}} T'_3$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , que de nuevo va a ser homeomorfo a un disco. La observación **(ii)** asegura que  $D_{123\dots p} \approx D_{\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(p)}$ , donde  $p \in \{1, 2, \dots, n\}$  y  $\sigma : \{1, 2, \dots, p\} \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$  es una permutación.

Debemos hacer notar que en el procedimiento anterior, cuando adicionamos un triángulo a la superficie que vamos construyendo, no pegamos ambas aristas de este; es decir, cuando adicionamos  $T'_k$  a  $D_{12\dots(k-1)}$  solo pegamos por una arista de  $T'_k$ . Esto asegura que  $D_{12\dots k}$  siga siendo una superficie plana (encajable en  $\mathbb{R}^2$ ). No como sucedería en caso de que al adicionar  $T'_k$ , lo pegáramos a  $D_{12\dots(k-1)}$  por cada arista  $e'_{k_i}$  de  $T'_k$ . Eventualmente obtendríamos algo que no podríamos “aplanar”. De hecho cuando  $p = n - 1$ ,  $\partial D_{12\dots(n-1)} = \partial T'_n$ , pues si pegamos el triángulo  $T'_n$  entonces  $D_{12\dots n} = D \approx S$ . Por tanto, es claro que  $D_{123\dots n}$  construida como indicamos es una superficie con frontera, que consiste en aristas que no fueron pegadas a sus equivalentes.

**Segundo paso:** Eliminar aristas adyacentes de primer tipo.

Hemos obtenido un polígono  $D$  que posee como frontera un arco poligonal simple formado por imágenes inversas de algunas aristas de la triangulación original de  $S$ . Algunas de estas aristas son en realidad “la misma” bajo determinadas identificaciones como la  $\sim_{tm}$ . Estas identificaciones, se pueden expresar como una secuencia de símbolos. Por ejemplo, la identificación sobre la frontera de la **Figura 2.4** se puede escribir como

$$aa^{-1}fbb^{-1}f^{-1}e^{-1}gcc^{-1}g^{-1}dd^{-1}e.$$

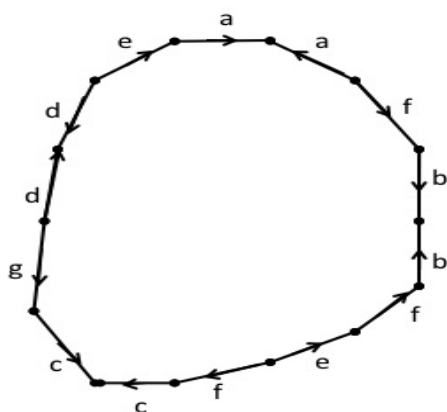


Figura 2.6: Ejemplo de identificación sobre la frontera de un polígono.

Ahora, si en la secuencia tenemos una letra con ambos exponentes  $(1, -1)$  (como sucede con  $a$  y con  $f$  por ejemplo), a este conjunto de aristas le llamaremos un par de **primer tipo**. En caso, de que en la representación simbólica ambas letras que representen una arista posean en mismo exponente, el par será de segundo tipo. En la figura anterior por ejemplo, todos son pares de primer tipo.

Si además resulta que tenemos un par de primer tipo adyacente, esto significa que se da una situación que podemos eliminar de la forma indicada en la **Figura 2.5**.

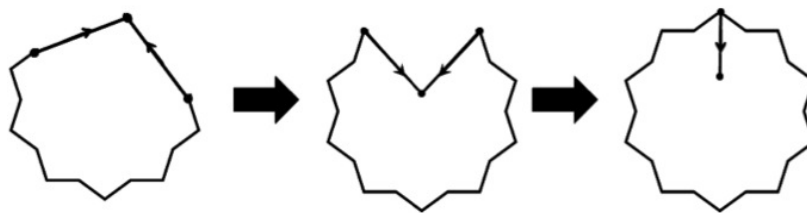


Figura 2.7: Eliminación de un par de primer tipo adyacente.

Entonces dado un polígono cualquiera este proceso de eliminación puede hacerse hasta que no queden pares de primer tipo. Si resulta que al eliminar todos estos pares llegamos a un polígono de dos lados de la forma  $aa^{-1}$  (es decir nos queda un último par de primer tipo adyacente), entonces tenemos claramente una superficie homeomorfa a

un plano proyectivo. Si al final nos queda solamente un par de la forma  $aa$  (de segundo tipo adyacente), entonces la superficie es homeomorfa a una esfera.

Obviamente los casos anteriores son muy especiales, en general eliminaremos todos los pares de primer tipo adyacentes y aún tendremos un montón de pares de segundo tipo. En tal caso proseguimos con lo siguiente.

**Tercer paso:** Convertir el polígono en otro tal que todas sus aristas se identifiquen en un único vértice.

Sea  $P$  el polígono que obtenemos después de eliminar todos los pares de primer tipo adyacentes. Las aristas de  $P$  se identifican en pares, es decir, mas de dos aristas no pueden estar identificadas (pues dejaría de ser variedad), y todas las aristas deben estar identificadas con alguna otra (pues la superficie no tiene frontera). Sin embargo, puede que mas de un vértices se identifiquen en uno mismo. De hecho, dos vértices del polígono serán **vértices equivalentes** si tras todas las respectivas identificaciones, ellos terminan siendo uno mismo. Por ejemplo en la **Figura 2.4** se puede ver que hay ocho clases de equivalencia en el conjunto de vértices. Algunas clases de equivalencia contienen solo un vértice (como el vértice final de las aristas  $b$ , él es una única clase), otras contienen dos (los vértices iniciales de los segmentos  $b$  forman una clase), mientras que otras contienen tres (como los vértices iniciales de los segmentos  $d$  y el inicial de  $g$  y  $e$  que se oponen en la figura).

Supongamos entonces que hemos procedido con el **Segundo paso** tanto como es posible, es decir, no quedan pares de aristas de primer tipo. Entonces probemos que es posible convertir el polígono  $P$  en uno en el cual todos los vértices están en una sola clase de equivalencia.

Supongamos también que tenemos al menos dos clases distintas, entonces deben existir dos vértices que no son equivalentes. Sean estos vértices  $P$  y  $Q$ , entonces procedemos como en la figura. Como ya realizamos el paso dos todo lo que era posible entonces podemos suponer que la arista  $a$  y  $b$  no son un par de primer tipo, es decir no pueden ser eliminadas. Ahora, uniendo los dos vértices de  $a$  y  $b$ , que no son el común, mediante un segmento dirigido  $c$  (como en la **Figura 2.6**). Nombrando  $P$  al vértice en común y  $Q$  al otro extremo de  $b$ , podemos usar "cut and paste" para modificar el polígono cortando el triángulo  $abc$  y pegando por  $a$  para tener otra figura que posee un vértice menos de la clase del vértice  $P$ , y uno más de la clase de  $Q$ . Ya que como se puede observar, los vértices  $P$  y  $P'$  que eran distintos se hicieron el mismo y apareció el vértice  $Q'$ , hasta entonces inexistente. Ahora repetimos el **Segundo paso** y continuamos el mismo procedimiento seguido hasta el momento.

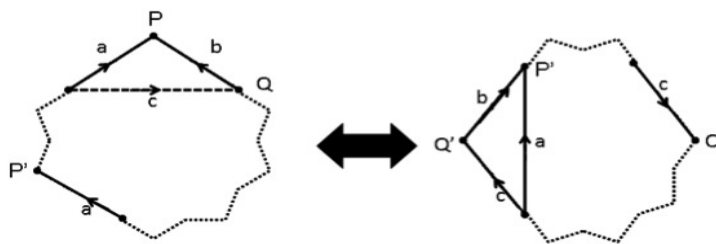


Figura 2.8: Reduciendo el número de clases de los vértices.

Si continuamos de esta forma, eliminando vértices de la clase de  $P$ , adicionándolos a la clase de  $Q$  y repitiendo el **Segundo paso** en cada una de estas eliminaciones, llegaremos eventualmente a un polígono en el cual los vértices que pertenecían a la clase de equivalencia de  $P$  han desaparecido por completo. Si el polígono original tuviera mas de dos clases entonces seleccionamos una de las clases restantes y aplicamos el mismo proceso que usamos con la clase de  $P$ . En caso de que el número de clases sea mayor que dos debe ser finito, así que eventualmente podremos reducir su número a uno.

**Cuarto paso:** Hacer que todos los pares de segundo tipo sean adyacentes.

Para lograr esto, supongamos primero que tenemos un par de aristas de segundo tipo que no son adyacentes. Podemos hacer un procedimiento como el indicado en la **Figura 2.7** para obtener un “reemplazo” de las aristas  $a$  por las aristas  $b$  que son adyacentes y de segundo tipo.

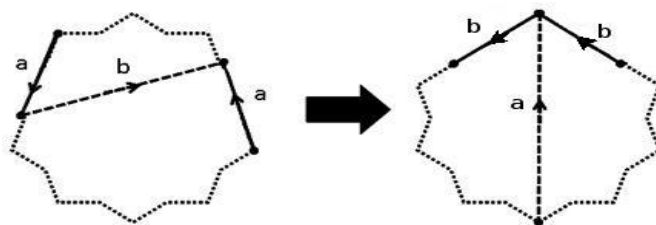


Figura 2.9: Juntando aristas de segundo tipo.

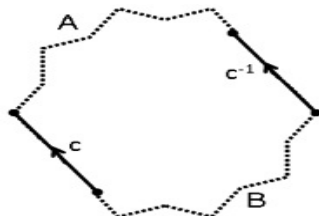
Continuamos este proceso hasta que todos los pares de ejes de segundo tipo sean adyacentes. Si no aparecen pares de segundo tipo significa que la representación simbólica final de las identificaciones sobre las aristas del polígono debe ser de la forma  $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$ , y por tanto  $S$  es la suma de  $n$  planos proyectivos (pues es un  $2g$ -gono con la identificación necesaria para que lo sea).

Supongamos por el contrario, que hay al menos un par de primer tipo; podemos asegurar entonces que hay por lo menos otro par de primer tipo. Más aún, podemos asegurar que los dos pares están “entrelazados”. Es decir si el primer par esta etiquetado con la letra  $c$  y el segundo con la letra  $d$ , entonces la representación del polígono será de la forma

$$\dots c \dots d \dots c^{-1} \dots d^{-1} \dots$$

donde los puntos pueden ser letras correspondientes a otras aristas.

La afirmación anterior se puede demostrar de la forma que sigue. Asumamos que el par de primer tipo etiquetado con la letra  $c$  no contiene ningún otra arista correspondiente a algún par de primer tipo. Es decir que en la figura



donde  $A$  y  $B$  representan los arcos de aristas que unen al par  $c$ , ninguna arista en el arco  $A$  se identifica con alguna del arco  $B$ . Pero esto entre otras cosas implicaría, que ya que todas las aristas del arco  $A$  deben ser identificadas con alguna del mismo arco  $A$ , y de manera similar con el arco  $B$ , entonces los vértices finales e iniciales de las aristas  $c$  corresponden a clases distintas. Y esto contradice el proceso efectuado en el **Tercer paso**, el cual asumimos habíamos terminado antes de empezar con el **Cuarto paso**.

**Quinto paso:** Reagrupando los pares de primer tipo.

Supongamos que tenemos entonces dos pares de primer tipo separados de la forma indicada en el **Cuarto paso**. Mostraremos un proceso para poder reagrupar las cuatro aristas de manera que sean consecutivas en el perímetro del polígono. Examinemos la **Figura 2.9**.

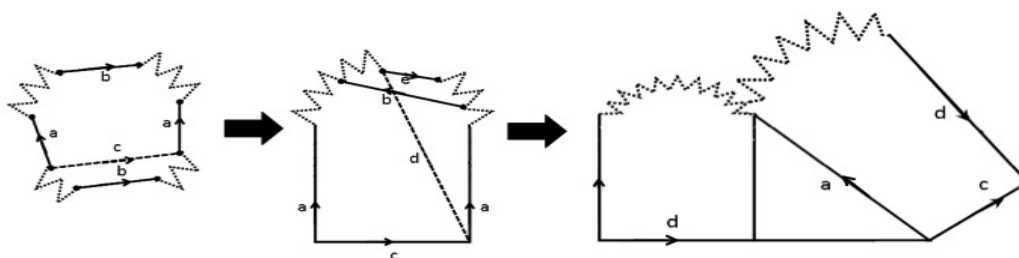


Figura 2.10: Juntando dos pares de aristas de primer tipo.

Notemos que tenemos cuatro aristas (dos pares de primer tipo) separadas por arcos de aristas. Primero cortamos por el segmento  $c$  (el cual une los finales de  $a$ ), para obtener dos polígonos. Luego pegaremos estos dos polígonos por  $b$ , de forma que ahora tendremos dos pares de primer tipo ( $a$  y  $c$ ) intercalados nuevamente, con la única diferencia de que tres de las cuatro aristas ahora son consecutivas. Por último cortamos por un segmento  $d$  que una los finales de  $c$ , obteniendo nuevamente dos polígonos que pegaremos ahora por  $a$ .

Podemos continuar este proceso hasta que todos los pares de primer tipo estén en grupos adyacentes intercalados y de dos en dos de la forma obtenida en la figura:  $cdc^{-1}d^{-1}$ .

Si no hay pares de primer tipo entonces el polígono final tiene la forma

$$c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} c_2 d_2 c_2^{-1} d_2^{-1} \dots c_n d_n c_n^{-1} d_n^{-1}$$

y en tal caso la superficie es la suma conexa de  $n$  toros.

Finalmente queda el caso en que después de agrupar los pares de primer tipo, la superficie tiene pares de segundo tipo. Pero esto no debería ser un problema a estas alturas, pues después de la serie de manipulaciones que hemos hecho al polígono es claro que si tenemos dos pares de primer tipo con la forma  $aba^{-1}b^{-1}$ , entonces al cortar por el segmento que une el inicio de la primera arista  $a$  y el inicio de la segunda arista  $b$  obtendremos dos polígonos; sobre las aristas de uno de ellos se exhibe una identificación que hace que resulte en un toro agujereado. De igual forma, si tenemos un par de segundo tipo con la forma  $aa$ , entonces al cortar por el segmento que une el inicio de la primera  $a$  y el fin de la segunda, tendremos dos polígonos, uno de los cuales representa un plano proyectivo con un agujero.

Dicho lo anterior, debería ser fácil ver que la superficie que resulta de identificar las aristas de nuestro polígono final, es: o una esfera, o la suma conexa de toros, o la suma conexa de planos proyectivos, o en un último caso la suma conexa de toros y planos proyectivos. Pero el último caso ya está esclarecido, ya que si usamos el **Lema 2.1.2** podemos deducir que la suma conexa de  $k$  toros con  $l$  planos proyectivos, es homeomorfa a la suma conexa de  $2k + l$  planos proyectivos.  $\square$



### 2.3. La característica de Euler de una superficie.

Hemos mencionado ya el teorema de Euler para poliedros, del cual proviene la siguiente igualdad

$$C = A - V + 2$$

donde  $C, A$  y  $V$ , son las caras, las aristas y los vértices respectivamente. Sin embargo esta fórmula se cumple si y solamente si el poliedro es homeomorfo a una esfera. Si igualamos todo a 2

$$2 = C - A + V$$

entonces entre otras cosas, la igualdad (el teorema en realidad) nos dice lo siguiente: Cualquier poliedro, homeomorfo a una esfera cumple que la suma del número de caras más el número de vértices, menos el número de aristas, es siempre igual a dos.

Vimos también en la sección sobre gráficas del Capítulo 1, que en una gráfica finita y 2-conexa se cumple una igualdad similar. La cual de hecho, era equivalente a esta si tomábamos el exterior del ciclo exterior (valga la redundancia) como una cara. Es decir, si tenemos una superficie cerrada  $S$ , una gráfica  $G$  y un encaje  $e : G \hookrightarrow S$ , entonces es claro que si  $C$  es el ciclo exterior de  $G$  entonces  $e(\text{ext}(C))$  va a ser una cara en  $S$  que de hecho tendrá a  $e(C)$  como frontera. La ecuación que se cumplía en el caso de las gráficas era

$$R = |e(A(G))| - |e(V(G))| + 2$$

donde  $||$  era el operador cardinalidad,  $e$  un encaje  $e : G \hookrightarrow \mathbb{R}^2$  y  $R$  el número de regiones disjuntas de  $\mathbb{R}^2 \setminus G$ . Sin embargo no llamamos la atención sobre el hecho de que este encaje era "casi" una triangulación de  $\mathbb{R}^2$ . El hecho de que  $G$  se pueda obtener de agregar arcos poligonales a  $\text{int}(C)$  donde  $C$  es el ciclo exterior, debería ser argumento suficiente para ver que podemos triangular sin dificultad a partir de  $e(G)$ . No obstante, esto no es lo que nos concierne. Si no el hecho de que en caso de tener una triangulación de una esfera, es decir; un encaje  $e : G \hookrightarrow \mathbb{S}^2$ , donde  $G$  es una gráfica que representa dicha triangulación y que cumple:

(i) Que no hay un ciclo de longitud mayor que tres que no contenga cuerdas (aristas en su interior).

(ii) Que no hayan ciclos de longitud dos.

(iii) Que si hacemos para cada ciclo tres  $C_i, T_i = \overline{\text{int}(C_i)}$ , entonces el conjunto de los  $T_i$  sean una triangulación de  $\mathbb{S}^2$ .

entonces al construir  $P = \bigcup_{i=1}^n \phi^{-1}(T_i) / \sim$ , como en se hizo en el **Primer paso del Teorema 2.2.2**, entonces  $P$  es un poliedro.

Con todo esto queremos decir que hay compatibilidad entre lo que demostramos aquí para las gráficas y el teorema de Euler. Y que además si  $S$  es una superficie homeomorfa a  $\mathbb{S}^2$  entonces una triangulación de  $S$ , es en definitiva, homeomorfa a un poliedro

de caras triangulares, y por tanto se cumple la relación

$$2 = C - A + V.$$

Al número 2 se le llama la característica de Euler de la esfera.

**Definición 2.3.1.** Sea  $S$  una superficie compacta y cerrada con triangulación  $\mathcal{T} = T_1, T_2, \dots, T_n$ . Sean además:

- $v$ : el número de vértices de  $S$ .

- $a$ : el número de aristas de  $S$ .

- $c$ : el número de triángulos (caras) de  $S$ . Entonces el número  $\chi(S) = v - a + c$  se le llama la característica de Euler de  $S$ .

La característica de Euler, de una superficie no depende de la triangulación que se le asigne. Este es un resultado que nos podría servir para demostrar la última parte de nuestro teorema de clasificación. Ya que si la característica de Euler no depende de la triangulación, entonces debe depender de la estructura de la superficie.

Sin embargo el camino en esta dirección es bastante incómodo. Así que usaremos los argumentos de topología algebraica que desarrollamos para demostrar este resultado último.

## 2.4. Grupo fundamental de las superficies.

Ya que la 2-esfera  $\mathbb{S}^2$  es simplemente conexa, su grupo fundamental es el grupo trivial. Los casos del toro y del plano proyectivo son un poco más complicados. Comencemos con el primero.

**Teorema 2.4.1.** Una aplicación punteada  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  induce un homomorfismo de grupos

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

que cumple  $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$ .

**Demostración:** Notemos primero que si  $\alpha : \mathbb{I} \rightarrow X$  es un lazo basado en  $x_0$ , entonces  $f(\alpha)$  es un lazo basado en  $y_0$ . En caso de que  $\alpha = c_{x_0}$  entonces  $f(c_{x_0}) = c_{y_0}$ , y si se tienen lazos  $\alpha, \beta$  en  $X$  entonces se cumple  $f(\alpha\beta) = f(\alpha)f(\beta)$ .

Entonces si tenemos una homotopía  $H : \alpha_0 \simeq \alpha_1 \text{ rel } \partial\mathbb{I}$ , donde  $\alpha_0, \alpha_1$  son lazos en  $X$  basados en  $x_0$ , se cumple que  $f \circ H : f \circ \alpha_0 \simeq f \circ \alpha_1 \text{ rel } \partial\mathbb{I}$ , así que la función  $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$  está bien definida. Y por lo dicho en el párrafo anterior y por la estructura algebraica del grupo fundamental se cumple que

$$f_*([\alpha\beta]) = [f \circ (\alpha\beta)] = [(f \circ \alpha)(f \circ \beta)] = [f \circ \alpha][f \circ \beta] = f_*([\alpha])f_*([\beta])$$

y  $f_*$  es entonces un homomorfismo de grupos.  $\square$

De hecho, como ya se dijo la acción de tomar el grupo fundamental es un funtor. Esto significa que es una correspondencia entre la categoría de los espacios topológicos punteados y la de los grupos algebraicos. Un funtor debe comportarse bien con respecto a

las aplicaciones dentro de la categoría. En este caso, si  $(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0)$  son espacios topológicos punteados y  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0), g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$  aplicaciones punteadas entre ellos, el funtor  $*$  cumple

- (i)  $(id_{(X, x_0)})_* = 1_{\pi_1(X, x_0)} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$
- (ii)  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Z, z_0)$

es decir, envía la aplicación trivial de la categoría de los espacios topológicos a la aplicación trivial de la categoría de grupos, y respeta las composiciones.

**Teorema 2.4.2.** Sean  $(X, x_0)$  y  $(Y, y_0)$  espacios punteados. La aplicación

$$\phi = (proy_{X_*}, proy_{Y_*}) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

donde

$$proy_{X_*} : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$proy_{Y_*} : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

son las proyecciones canónicas, es un isomorfismo de grupos.

**Demostración:** Al ser producto de homomorfismos la aplicación es un homomorfismo.

Ahora si tenemos un lazo  $\alpha : \mathbb{I} \rightarrow X \times Y$  tal que  $\phi([\alpha]) = (1, 1)$  entonces significa que  $\alpha_1 = proy_X \circ \alpha : \mathbb{I} \rightarrow X$  y  $\alpha_2 = proy_Y \circ \alpha : \mathbb{I} \rightarrow Y$  deben ser nulhomotópicos a través de homotopías  $H_1$  y  $H_2$ . Por lo tanto

$$H = (H_1, H_2) : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow X \times Y$$

es  $H : (\alpha_1, \alpha_2) \simeq (1, 1)$ , así que  $[\alpha] = 1$  y  $\phi$  es un monomorfismo.

Además, si  $([\alpha_1], [\alpha_2]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$  entonces el lazo

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : \mathbb{I} \rightarrow X \times Y$$

cumple que  $\phi([\alpha]) = ([\alpha_1], [\alpha_2])$ , así que  $\phi$  es un epimorfismo.  $\square$

**Teorema 2.4.3.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es una equivalencia homotópica, entonces el homomorfismo inducido  $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$  es un isomorfismo para cualquier punto  $x_0 \in X$ .

**Demostración:** Si tomamos un inverso homotópico de  $f, g : Y \rightarrow X$ , entonces  $g \circ f \simeq id_X$  y  $f \circ g \simeq id_Y$ . Así que se cumple

$$(g \circ f)_* = \phi_\alpha : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, gf(x_0))$$

$$(f \circ g)_* = \phi_\beta : \pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, fgf(x_0))$$

para alguna trayectoria  $\alpha$  en  $X$  y  $\beta$  en  $Y$ , ya que al cumplirse  $g \circ f \simeq id_X$  implica que para cada  $[l] \in \pi_1(X, x_0)$ ,  $gf([l]) = [gf(l)] = [l]$  puesto que  $gf(l) \simeq l$ , por ser inversos homotópicos. Así que básicamente  $\phi_\alpha$  simplemente traslada (y tal vez deforma un poco) a cada elemento  $[l]$  mediante la trayectoria  $\alpha$ , dejando invariante su clase de homotopía. En otras palabras  $\phi_\alpha(l) = [\alpha^{-1}][l][\alpha]$  es un isomorfismo de grupos.

Entonces se cumple que  $g_* \circ f_*$  y  $f_* \circ g_*$  son isomorfismos de grupos. Digamos que  $\alpha$  es la trayectoria inversa del primero de ellos, entonces

$$(g_* \circ f_*) \circ \alpha^{-1} = g_* \circ (f_* \circ \alpha^{-1}) = 1,$$

y también

$$((f_* \circ \alpha^{-1}) \circ g_*) \circ f_* = f_*$$

pero además  $f_*$  es un epimorfismo (ya que  $f$  es una equivalencia homotópica), por tanto se cumple que  $(f_* \circ g_*) \circ g_* = 1$ , es decir,  $g_*$  es un isomorfismo. Por lo tanto dado que  $(\alpha \circ g_*) \circ f_* = 1$  y  $\alpha \circ g_*$  es un isomorfismo,  $f_*$  también lo es.  $\square$

El teorema anterior implica entre otras cosas que el grupo fundamental es un invariante homotópico, es decir que no cambia entre grupos con el mismo tipo de homotopía. Y el **Teorema 2.4.2** nos dice que el grupo fundamental de el producto directo de dos espacios topológicos es el producto directo de los grupos fundamentales. Si tenemos en cuenta que  $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$  entonces una consecuencia directa es el siguiente corolario.

**Corolario 2.4.1.** *El grupo fundamental del toro está dado por:*

$$\pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

.  $\square$

Como queremos calcular el grupo fundamental de  $\mathbb{RP}^2$ , vamos a necesitar una construcción alternativa de este, a través de pegar una 2-célula a un círculo. Veremos que usando esta construcción podemos caracterizar a casi todas las superficies y que al obtener el grupo fundamental del toro de esta manera es compatible con el cálculo hecho anteriormente.

Sin embargo antes de esto, hablaremos un poco de como se generan los grupos fundamentales. Cada uno de estos grupos esta caracterizado por elementos (clases de homotopía de lazos) que son distintos entre ellos y que sus potencias y composiciones también crean elementos distintos. Es decir, si tenemos dos elementos  $[l_1], [l_2] \in \pi_1(X, x_0)$  distintos, los elementos

$$[l_1^r], [l_2^s], [l_1^{-r}], [l_2^{-s}], [l_1^r l_2^s], [l_2^s l_1^r], [l_1^{-r} l_2^{-s}], [l_1^{-r} l_2^s], [l_1^s l_2^{-r}]$$

son todos distintos. Es por eso que es clave encontrar en casos como este cual es el conjunto mínimo de lazos  $\{l_1, l_2, \dots, l_k\}$  tal que cualquier otro lazo  $l \in \pi_1(X, x_0)$  se puede obtener como una combinación

$$l_1^{s_1} l_2^{s_2} \dots l_k^{s_k}.$$

Para nuestra construcción van a ser importantes además dos otros conceptos de estructuras; una topológica, la de los espacios cuña; y otra algebraica, la de el producto libre de grupos.

**Definición 2.4.1.** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos, se define la **cuña** de ellos dos como el espacio

$$X \vee Y = X \cup_p Y$$

donde  $p$  esta definida para un solo punto  $x_0$  y es  $p(x_0) = y_0$ . En otras palabras, el espacio cuña es pegar dos espacios por un único punto.

Exhibamos un ejemplo que será de gran importancia después.

**Ejemplo 2.4.1.** Denominemos al espacio  $S^k_{\vee}$ , como  $S^k_{\vee} = \underbrace{\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1}_{k\text{-veces}}$  donde  $\vee$  en este caso es tomar la cuña en  $e^{2\pi i 0} = 1$ , es decir  $\vee := \cup_p$ , con  $p(1) = 1$ .

Por ejemplo, en caso de que  $k = 2$  tenemos

$$S^2_{\vee} = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1 \cup_p \mathbb{S}^1,$$

con definida solo para el 1 y  $p(1) = 1$ .

Los siguientes resultados nos ayudarán en el cálculo de los grupos fundamentales de los espacios cuña.

**Definición 2.4.2.** Sea  $G$  un grupo algebraico y  $A \subset G$  un subconjunto arbitrario. Los subgrupos

$$G_A = \bigcap \{H \subset G \mid H \text{ es un subgrupo tal que } A \subset H\}$$

$$N_A = \bigcap \{H \subset G \mid H \text{ es un subgrupo normal tal que } A \subset H\}$$

se llaman el subgrupo **generado** por  $A$  y el subgrupo **normal generado** por  $A$  respectivamente.

El subgrupo  $G_A$  contiene al 1 y a elementos de la forma

$$g = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k},$$

donde  $a_i \in A$  y  $n_i \in \mathbb{Z}, \forall \mathbb{Z}$  (esto es en caso de notación multiplicativa, que es la que usaremos).  $N_A$  esta compuesto por productos de los conjugados de los elementos de  $G_A$ . Por ejemplo, elementos de la forma

$$a_1 g_1 a_1^{-1} \dots a_j g_j a_j^{-1}$$

donde  $g_s \in G_A$  y  $a_r \in G$ .

Si  $G = G_A$  se dice que  $A$  **genera** a  $A$ . Si  $G = N_A$  se dice que lo **genera normalmente**.

**Definición 2.4.3.** (Producto libre.)

Sean  $G_j, (j = 1, 2)$  dos grupos algebraicos y sea  $F$  es conjunto de sucesiones finitas  $(x_1, \dots, x_n), n \geq 0$  que satisfacen

(i)  $x_i \in G_1 \cup G_2, i = 1, \dots, n$

(ii)  $x_i \neq 1, i = 1, \dots, n$

(iii)  $x_i \in G_j \Rightarrow x_{i+1} \notin G_j$ . En otras palabras, dos elementos consecutivos de la sucesión

están en conjuntos distintos.

Si  $n = 0$  escribimos  $()$ , la sucesión vacía.

En este conjunto definamos la aplicación  $\hat{g} : F \rightarrow F$ , con  $g \in G_j$ , por

$$\hat{g}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} (x_1, \dots, x_n) & \text{si } g = 1 \\ (g, x_1, \dots, x_n) & \text{si } g \neq 1 \text{ y } x_1 \notin G_j \\ (gx_1, \dots, x_n) & \text{si } g \neq 1, x_1 \in G_j \text{ y } gx_1 \neq 1 \\ (x_2, \dots, x_n) & \text{si } g \neq 1, x_1 \in G_j \text{ y } gx_1 = 1 \end{cases}$$

Es decir, multiplicamos por el primer elemento de la sucesión si  $g$  y  $x_1$  están en el mismo grupo; mantendremos este producto como el primer elemento si es distinto de 1 y si no lo es lo desechamos. En caso de que  $g$  y  $x_1$  estén en grupos distintos, entonces adicionamos  $g$  al primer lugar de la nueva sucesión que ahora tendrá longitud  $n + 1$ . Vale aclarar que  $\hat{g}() = (g)$ .

Notemos lo siguiente; si  $\hat{g} = \hat{h} \implies g = h$ , ya que  $(g) = \hat{g}() = \hat{h} = (h)$ ; si tomamos  $1 \in G_j$  entonces  $\hat{1}(s) = s, \forall s \in F$  entonces  $\hat{1}$  es la identidad; si  $g, h \in G_j$ , entonces  $\hat{g}h = \hat{gh}$ . Por tanto la correspondencia  $g \rightarrow \hat{g}$  induce una aplicación  $i : G_j \hookrightarrow \mathcal{P}(F)$  (que es de hecho una inclusión), donde  $\mathcal{P}(F) = \{p : F \rightarrow F \mid p \text{ es biyectiva}\}$ , es decir el grupo de permutaciones de  $F$ .

Entonces, definimos el producto libre  $G_1 * G_2$ , como el subgrupo de  $\mathcal{P}$  generado por  $G_1$  y  $G_2$ . Y como ya dijimos, tenemos inclusiones canónicas

$$i_1 : G_1 \rightarrow G_1 * G_2 \longleftarrow G_2 : i_2.$$

Es importante destacar un par de detalles. El producto libre puede ser definido sobre varios grupos, no solo dos como en este caso, la construcción es análoga. La representación (o usualmente llamada también palabra) de cualquier elemento  $g \in G_1 * G_2$  es única siempre que esta esté en  $F$  (es decir siempre que cumpla con las condiciones (i)-(iii)). Además, dados dos elementos  $g, h \in G_1 * G_2$  con representación única  $g = x_1 \dots x_k, h = y_1 \dots y_l$ , se cumple que  $g^{-1} = x_k^{-1} \dots x_1^{-1}$  es su representación única. Y la representación de un producto  $gh = x_1 \dots x_k y_1 \dots y_l$  puede reducirse según la regla (iii), es decir; dos elementos consecutivos se multiplican si están en el mismo grupo, y si el producto es 1 se elimina de la sucesión. En [1] (X.3.8-9 pág.398), se puede encontrar una prueba rigurosa de todos estos hechos.

Es bastante claro que el grupo que resulta de hacer el producto libre no es abeliano. Y que existe un epimorfismo natural

$$\varphi : G_1 * G_2 \rightarrow G_1 \times G_2,$$

tal que  $\varphi(g) = (x_1 x_3 \dots, x_2 x_4 \dots)$  si  $x_1 \in G_1$  y  $\varphi(g) = (x_2 x_4 \dots, x_1 x_3 \dots)$  en caso contrario. Ahora, si  $g$  es un **conmutador**,  $g = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}$  es claro que  $\varphi(g) = (1, 1)$ , por tanto  $\ker(\varphi)$  contiene a los conmutadores.

**Teorema 2.4.4.** Sean  $f_1 : G_1 \rightarrow H$  y  $f_2 : G_2 \rightarrow H$  homomorfismos arbitrarios, entonces existe un único homomorfismo  $f : G_1 * G_2 \rightarrow H$ , tal que  $f \circ i_1 = f_1$  y  $f \circ i_2 = f_2$ , es decir

que haga el siguiente diagrama conmutar

$$\begin{array}{ccccc}
 G & \xrightarrow{i_1} & G_1 * G_2 & \xleftarrow{i_2} & G_2 \\
 & \searrow f_1 & \downarrow f & \swarrow f_2 & \\
 & & H & & 
 \end{array}$$

Además, si  $g = x_1 x_2 \dots x_n$  es la palabra que representa  $g$ , entonces  $f$  es tal que

$$f(g) = f_{j_1}(x_1) f_{j_2}(x_2) \dots f_{j_n}(x_n),$$

donde  $f_{j_k} = f_j$  si  $x_k \in G_j, j = 1, 2$  e  $i = 1, \dots, n$ .

**Demostración:** Haciendo para  $g = 1, f(g) = 1$  esta bastante claro que tomando  $f$  como esta definida arriba,  $g_1 \in G_1$  y  $g_2 \in G_2$ , se cumple

$$f_1(i_1(g_1)) = f_1(g_1) = f(g_1)$$

$$f_2(i_2(g_2)) = f_2(g_2) = f(g_2)$$

así que  $f$  esta bien definida y hace el diagrama conmutar.  $\square$

Después de preparar toda el álgebra que necesitamos comencemos con la parte topológica.

Supóngase que se tiene un espacios topológico  $X = X_1 \cup X_2$ , tal que  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$  y sea  $x_0 \in X_1 \cap X_2$ . Por la funtorialidad del grupo fundamental tenemos

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 \cap X_2 & \xrightarrow{i_1} & X_1 \\
 \downarrow i_2 & & \downarrow j_1 \\
 X_2 & \xrightarrow{j_2} & X \\
 \downarrow * & & \\
 \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) & \xrightarrow{i_{1*}} & \pi_1(X_1, x_0) \\
 \downarrow i_{2*} & & \downarrow j_{1*} \\
 \pi_1(X_2, x_0) & \xrightarrow{j_{2*}} & \pi_1(X, x_0)
 \end{array}$$

y se cumple el siguiente resultado.

**Lema 2.4.1.** Si  $X_1, X_2$  son abiertos en  $X$  y  $0$  - conexos, y además  $X_1 \cap X_2$  también es  $0$  - conexo entonces  $\pi_1(X, x_0)$  esta generado por  $j_{1*}(\pi_1(X_1, x_0))$  y  $j_{2*}(\pi_1(X_2, x_0))$ , así que el homomorfismo

$$\varphi : \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

inducido por el teorema anterior es un epimorfismo.

**Demostración:** Recordemos que en un espacio métrico, toda cubierta por abiertos  $\{Q_k\}$  de un compacto tiene un número de Lebesgue.

Es decir un número  $\delta > 0$  tal que si  $x \in \bigcup_{k=0}^n Q_k$  entonces existe un  $l \in 1, \dots, k$  tal que  $B_\delta(x_0) \subset Q_l$ . Es decir, un número lo suficientemente pequeño para poder asegurar que al tomar una bola con centro en un punto del compacto y radio el número indicado esta esté completamente contenida en alguno de los abiertos de la cubierta.

Entonces, si tomamos un elemento  $[l] \in \pi_1(X, x_0)$ , vemos que el sistema  $\{l^{-1}(X_1), l^{-1}(X_2)\}$  es una cubierta del intervalo  $[0, 1]$  y existe un número de Lebesgue  $\delta > 0$  tal que si  $0 < t - s < \delta$ , entonces  $[s, t] \in X_1$  o  $[s, t] \in X_2$ . Así que es posible dar una partición del intervalo tal que  $l([t_0, t_1]) \subset X_1, l([t_1, t_2]) \subset X_2 \subset l([t_{k-1}, t_k]) \subset X_2$ . Así que  $l(t_i) \in X_1 \cap X_2, i = 0, \dots, k$  y por tanto es posible tomar las trayectorias

$$l_i(t) = l((1-t)t_{i-1} + tt_i), i = 0, \dots, k$$

y para cada  $j = 1, \dots, k-1$ , trayectorias  $w_j : \mathbb{I} \rightarrow X$  que unan  $x_0$  con  $l(t_i)$  en  $X_1 \cap X_2$ , de manera que haciendo  $w_0 = c_{x_0} = w_k$  los lazos

$$\mu_i(t) = \begin{cases} w_{i-1}(3t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ l_i(3t) & \text{si } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ w_i(3-3t) & \text{si } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

los cuales yacen en  $X_1$  o en  $X_2$  (por como seleccionamos la partición). Por lo tanto representan elementos de  $\pi_1(X, x_0)$  ya sea en la imagen de  $\pi_1(X_1, x_0)$  o en la de  $\pi_1(X_2, x_0)$ . Y usando el hecho de que

$$[\mu_1][\mu_2] \dots [\mu_{k-1}][\mu_k] = [l_1][l_2] \dots [l_{k-1}][l_k] = [l],$$

podemos asegurar que  $[l]$  yace en el grupo generado por las imágenes  $j_{1*}$  y  $j_{2*}$ .  $\square$

Si llamamos  $j_{1*} \cdot j_{2*}$  al epimorfismo  $\varphi$ , entonces del lema podemos concluir que

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) / \ker(j_{1*} \cdot j_{2*})$$

así que solo bastaría encontrar quien es el conjunto  $\ker(j_{1*} \cdot j_{2*})$  para tener una expresión bastante útil sobre el grupo fundamental de un espacio.

La respuesta está en el siguiente teorema.

**Teorema 2.4.5.** (Seifert - van Kampen) Sea  $X = X_1 \cup X_2$ , con  $X_1, X_2$  abiertos. Si  $X_1, X_2$  y  $X_1 \cap X_2$  son no vacíos y  $0$  - conexos entonces

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) / N_{\{i_{1*}(\alpha)i_{2*}(\alpha)^{-1} | \alpha \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)\}},$$

para  $x_0 \in X_1 \cap X_2$ . Donde  $N_{\{i_{1*}(\alpha)i_{2*}(\alpha)^{-1} | \alpha \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)\}}$ , es el subgrupo normal generado por elementos de la forma  $i_{1*}(\alpha)i_{2*}(\alpha)^{-1}$  para  $\alpha \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)$

La demostración la podemos encontrar en [1], X.3.20.

Lo interesante del teorema son las implicaciones de este.



**Corolario 2.4.2.** *Con las mismas hipótesis del teorema podemos asegurar que se cumple:*

(i) *Si  $X_2$  es simplemente conexo, entonces*

$$j_{1*} : \pi_1(X_1, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

*es un epimorfismo y  $\ker(j_{1*})$  es el normalizador del subgrupo*

$$i_{1*}(\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)).$$

(ii) *Si  $X_1 \cap X_2$  es simplemente conexo, entonces*

$$j_{1*} \cdot j_{2*} : \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

*es un isomorfismo.*

(iii) *Si tanto  $X_2$  como  $X_1 \cap X_2$  son simplemente conexos, entonces*

$$j_{1*} : \pi_1(X_1, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

*es un isomorfismo.*

Veamos algunas aplicaciones del teorema.

**Proposición 2.4.1.** *El grupo fundamental de  $S^k_{\vee} = \underbrace{\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1}_{k\text{-veces}}$  es libre y generado por*

*$k$  elementos distintos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \pi_1(\mathbb{S}^1_{\vee} \vee \mathbb{S}^1_{\vee} \vee \dots \vee \mathbb{S}^1_{\vee}, x_0)$  donde  $x_0$  es el punto básico de la cuña proveniente de  $1 \in \mathbb{S}^1_i$  y la clase  $\alpha_i = \lambda_i$  es  $\lambda_i : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{S}^1_1 \hookrightarrow \mathbb{S}^1_1 \vee \mathbb{S}^1_2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1_k, \lambda_i(e^{2\pi it})\mathbb{S}^1_i$ . Así que,*

$$\pi_1(\underbrace{\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1}_{k\text{-veces}}) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{k\text{-veces}}.$$

**Demostración:** Supongamos que tenemos  $\mathbb{S}^1_1 \vee \mathbb{S}^1_2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1_k$ . Entonces comencemos por declarar dos abiertos  $A_1 = \mathbb{S}^1_1 - \{-1\} \vee \mathbb{S}^1_2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1_k$  y  $A_2 = \mathbb{S}^1_1 \vee \mathbb{S}^1_2 - \{-1\} \vee \dots \vee \mathbb{S}^1_k - \{-1\}$ . Es decir, el primer abierto consiste en quitarle un punto (el  $-1$  en este caso) a la primera copia de  $\mathbb{S}^1$  y el segundo, es quitarle el punto a todas las copias menos la primera. Estos son dos abiertos en  $S^k_{\vee}$  tal que  $A_1$  es del mismo tipo de homotopía que  $\mathbb{S}^1$ ,  $A_2$  del mismo tipo de homotopía que  $S^k_{\vee}$  y tal que  $A_1 \cap A_2$  es contraíble, por tanto todos los lazos en el son homotópicos al trivial. Es decir

$$\pi_1(S^k_{\vee}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) * \pi_1(S^{k-1}_{\vee}, x_0)/1$$

por tanto solo debemos conocer  $\pi_1(S^{k-1}_{\vee})$ . Pero si usamos el mismo método este grupo es

$$\pi_1(S^{k-1}_{\vee}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) * \pi_1(S^{k-2}_{\vee}, x_0)/1.$$

Repetiendo el método varias veces llegamos al resultado deseado.  $\square$

**Proposición 2.4.2.** *Sea  $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow Y$  continua y  $e^2$  una 2-célula (un disco). Si  $\lambda_f : \mathbb{I} \longrightarrow Y$  es el lazo tal que  $\lambda_f(t) = f(e^{2\pi it})$  y  $\omega : y_0 \simeq f(1)$  es una trayectoria en  $Y$ , entonces la inclusión  $i : Y \hookrightarrow Y \cup_f e^2$  induce un epimorfismo  $i_* : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(Y \cup_f e^2, y_0)$  y el núcleo es el subgrupo normal generado por el elemento  $\alpha_f = [\omega \lambda_f \omega^{-1}] \in \pi_1(Y)$ . Por lo tanto*

$$\pi_1(Y \cup_f e^2, y_0) \cong \pi_1(Y, y_0) / N_{\alpha_f}.$$

**Demostración:** Notemos primero que el lazo  $[\omega\lambda_f\omega^{-1}]$  rodea la célula justo por su base y por tanto es contraíble sobre esta como en la figura.

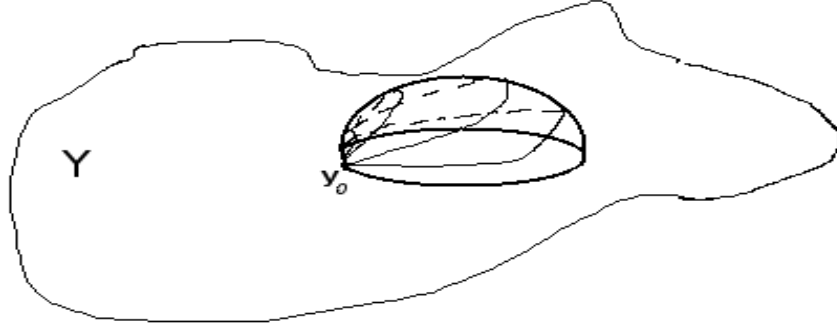


Figura 2.11: Contrayendo el lazo sobre la célula.

Por tanto,  $i_*(\alpha_f) = [\mu_f] = 1$  después de hacer la adjunción, pues para que el lazo sea contraíble debe ser homotópico a  $f(e^{2\pi it})$ . Se dice que la célula mata al lazo  $\alpha_f$ .

Ahora bien, demostremos primero que  $i_*$  es un epimorfismo. Para esto solo necesitamos notar que al quitar un punto de una 2-célula el conjunto que resulta se puede retraer a  $\mathbb{S}^1$ . Así que si quitamos un punto de la 2-célula en  $Y \cup_f e^2$ , es decir si hacemos  $Y \cup_f (e^2 - p)$  con  $p \in \mathring{D}$ , este conjunto es del mismo tipo de homotopía que  $Y$ . Esto significa que si usamos el **Corolario 2.4.2** la inclusión  $i : Y \rightarrow Y \cup_f e^2$  induce un epimorfismo  $i_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(Y \cup_f e^2, y_0)$ .

Para demostrar la segunda parte construiremos de nuevo dos abiertos en busca de poder usar el teorema de S-vK.

Tomemos primero  $A_1 = \text{int}(e^2)$ , lo que hace que este conjunto sea homeomorfo a un disco abierto, el cual es simplemente conexo. Luego hagamos  $A_2 = Y \cup_j e^2 - p$ , donde  $p \in A_1$ . Así que, usando el teorema de S-vK tenemos

$$\pi_1(Y \cup_f e^2, y_0) \cong \pi_1(A_1) * \pi_1(A_2) / \pi_1(A_1 \cap A_2, y_0)$$

pero  $A_1$  es simplemente conexo,  $A_2 \simeq Y$  y  $A_1 \cap A_2 \simeq \mathbb{S}^1$ , entonces tenemos

$$\pi_1(Y \cup_f e^2, y_0) \cong 1 * \pi_1(Y, y_0) / \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \pi_1(Y, y_0) / \mathbb{Z}$$

y lo que tenemos en el cociente es justo  $\mathbb{Z}$ , que es el subgrupo de  $\pi_1(Y, y_0)$  generado por  $[\lambda_f]$ , la trayectoria que “matamos” al adjuntar  $e^2$ .  $\square$

**Corolario 2.4.3.** Si se le adjuntan a  $Y$  2-células  $e_1^2, e_2^2, \dots, e_k^2$  a través de aplicaciones  $f_1, f_2, \dots, f_k : \mathbb{S}^1 \rightarrow Y$ , entonces

$$\pi_1(Y) \cup_{f_1} e_1^2 \cup_{f_2} e_2^2 \cup_{f_3} \dots \cup_{f_k} e_k^2, y_0 \cong \pi_1(Y, y_0) / N_{\{\alpha_{f_1}, \alpha_{f_2}, \dots, \alpha_{f_k}\}}$$

La demostración es idéntica al paso anterior, solo se repite el proceso las veces que sean necesarias.  $\square$

Sea  $X_2 = \mathbb{S}^1 \cup e^2$ , donde la célula se adjunta mediante la aplicación  $g_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $g_2(t) = e^{4\pi it}$ , la cual tiene grado 2. Si  $[\alpha] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$  es el generador canónico entonces

$$\pi_1(X_2, 1) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)/N_{\{\alpha_2\}}$$

donde  $\alpha_2 = [\lambda_{g_2}] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ . En este caso  $\lambda_{g_2}$  debe tener grado 2, así que  $\alpha_2^k$  siempre tiene grado par (de hecho las de grado impar no son nulhomotópicas). De manera similar al **Coloraio 2.4.2** tenemos

$$\pi_1(X_2, 1) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)/G_{\{\alpha_2\}}$$

es decir, solo tenemos dos clases, los lazos de grado par y los de grado impar, por tanto este grupo es homeomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ .

El conjunto  $X_2$  de arriba es de hecho  $\mathbb{R}P^2$ , pues al pegar a través de  $g_2(t)$  en realidad identificamos la frontera de la 2-célula en sus puntos antípodas. De hecho si consideramos las superficies  $S_g$  y  $N_g$ ,  $p : E_{4g} \rightarrow S_g$  y  $q : E_{2g} \rightarrow N_g$  las identificaciones sobre las fronteras de los polígonos  $E_{4g}$  y  $E_{2g}$ , entonces las fronteras de estos van a dar bajo  $p$  y  $q$  a cuñas de círculos. Es decir cada pareja de aristas que se identifican del polígono van a dar a una copia distinta de  $\mathbb{S}^1$ . De manera mas formal, tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 2.4.3.** *Las superficies  $S_g$  se obtienen de adjuntar una 2-célula a  $p(\partial E_{4g})$  a través de la aplicación  $p : \mathbb{S}^1 \approx \partial E_{4g} \rightarrow p(\partial E_{4g})$ , o sea*

$$S_g \approx \underbrace{\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1}_{2g} \cup_{\varphi_g} e^2$$

donde  $\varphi_g$  es tal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\varphi_g} & \mathbb{S}^1 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1 \\ \approx \downarrow & & \downarrow \approx \\ \partial E_{4g} & \xrightarrow{p} & p(\partial E_{4g}). \end{array}$$

Y de manera similar las superficies  $N_g$  se obtienen de adjuntar una 2-célula a  $q(\partial E_{2g})$  a través de la aplicación  $q : \mathbb{S}^1 \approx \partial E_{2g} \rightarrow q(\partial E_{2g})$ , es decir

$$N_g \approx \underbrace{\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1}_g \cup_{\psi_g} e^2$$

donde  $\psi_g$  es tal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\psi_g} & \mathbb{S}^1 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1 \\ \approx \downarrow & & \downarrow \approx \\ \partial E_{2g} & \xrightarrow{q} & q(\partial E_{2g}). \end{array}$$

□

Las superficies  $S_g$  se pueden construir entonces adicionando una 2-célula (el 4g-gono) de determinada forma a cuñas de  $2g$  círculos, digamos que las aristas del 4g-gono son  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$  entonces en el espacio

$$\mathbb{S}_{a_1}^1 \vee \mathbb{S}_{b_1}^1 \vee \mathbb{S}_{a_2}^1 \vee \mathbb{S}_{b_2}^1 \vee \dots \vee \mathbb{S}_{a_g}^1 \mathbb{S}_{b_g}^1$$

la manera en que iremos pegando en el primer par de círculos  $\mathbb{S}_{a_1}^1 \mathbb{S}_{b_1}^1$  es: primero en sentido levógiro en  $\mathbb{S}_{a_1}^1$  luego también en sentido levógiro en  $\mathbb{S}_{b_1}^1$ ; para luego rodear el primer círculo en sentido dextrógiro y luego el segundo en sentido dextrógiro también. Una vez terminado, pasamos al segundo par de círculos  $\mathbb{S}_{a_2}^1 \mathbb{S}_{b_2}^1$ , etc.

### 2.4.1. Clasificación de Superficies.

Por la **Proposición 2.4.1**,  $\pi_1(S_g^2)$  es libre generado por las clases  $\alpha_i = [\lambda_{a_i}]$  y  $\beta_i = [\lambda_{b_i}]$ , donde  $\lambda_{a_i}$  y  $\lambda_{b_i}$  son los lazos canónicos en  $\mathbb{S}_{a_i}^1$  y  $\mathbb{S}_{b_i}^1$ . Y por la **Proposición 2.4.2** tenemos

$$\pi_1(S_g) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{2g} / N_{\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1}},$$

con  $\alpha_i$  el generador de la  $(2i - 1)$ -ésima  $\mathbb{Z}$  y  $\beta_i$  el de la  $2i$ -ésima  $\mathbb{Z}$ . La expresión de arriba se suele escribir en términos de generadores y relación como

$$\pi_1(S_g) = \langle \alpha_1 \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1} \rangle$$

es decir, este grupo tiene como generadores a los elementos  $\alpha_1, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g$  con una única relación

$$\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1} = 1$$

De manera similar, para las superficies  $N_g$  tenemos que  $S_g^g$  es libre generado por las clases  $\alpha_i = [\lambda_{a_i}]$ , donde  $\lambda_{a_i}$  es el lazo canónico en  $\mathbb{S}_{a_i}^1$ . Al usar la **Proposición 2.4.2** resulta

$$\pi_1(N_g) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_g / N_{\alpha_1^2 \dots \alpha_g^2},$$

con  $\alpha_i$  el generador de la  $i$ -ésima  $\mathbb{Z}$ . La expresión de arriba la podemos escribir en términos de generadores y relaciones como

$$\pi_1(N_g) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g \mid \alpha_1^2 \dots \alpha_g^2 \rangle$$

El corolario final, que enuncia lo que queríamos es el siguiente

**Corolario 2.4.4.** *Cada superficie  $S_0, S_1, S_2, \dots, N_1, N_2, \dots$  son de distinto tipo de homotopía y por tanto, no son en particular homeomorfas (ya que homeomorfismo implica mismo tipo de homotopía).*

**Demostración:** Si abelianizamos los grupos fundamentales de estas superficies

$$\begin{aligned} \pi_1(S_g)^{ab} &= \mathbb{Z}^{2g} \\ \pi_1(N_g)^{ab} &= \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

como todos estos grupos son distintos para valores diferentes de  $g$ , entonces los grupos fundamentales también lo son. Por tanto ninguno de estos espacios pueden ser homeomorfos. ||q.e.d||

# CONCLUSIONES

En este trabajo se exhibe una demostración completa de los fundamentos teóricos que permiten establecer un procedimiento para clasificar superficies cerradas, y a la vez se muestra un camino mas sofisticado que el tradicional, para la prueba del Teorema de Triangulación de Superficies.

El teorema de clasificación está atribuida a Brahana por su trabajo en [7] (a pesar de que en cierta bibliografía se atribuye a Dehn y Heegard debido a sus resultados en [8]), ya que casi todas las demostraciones usan una variación de su prueba. Este puede ser extendido a casos mas complejos. Existe una versión referida a superficies no compactas de la cual puede encontrarse una demostración completa en [10]. Por otro lado, en caso de que sean superficies con frontera las consideradas, el teorema que se cumple es similar, sin embargo los “huecos” deben ser contados de distinta forma sobre las variedades que forman la suma conexas. Los detalles de esta versión pueden ser encontrados en [9].

Vale la pena notar las demostraciones presentadas en [11] y en [12]; la primera presenta un método muy intuitivo, que explica mediante excelentes dibujos, para mostrar los intrincados detalles de la sección geométrica de la prueba; la segunda muestra una extensión del procedimiento de reducción de una superficie triangulada a superficies compactas con frontera.

Diseñar un sistema similar al utilizado aquí para triangular las superficies cerradas y compactas, pero extendido a 2-variedades con frontera o incluso no compactas, podría ser un buen camino a seguir en busca de generalizar el contenido de estas páginas.

# REFERENCIAS

- [0] Carlos Prieto. *Topología Básica*. México : Fondo de Cultura Económica, primera edición, 2003.
- [1] Carsten Thomassen. *The Jordan-Schönflies Theorem and the classification of surfaces*. American Mathematical Monthly, 99(2):116–131, 1992.
- [2] William S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*. GTM No. 127. Springer Verlag, first edition, 1991.
- [3] Lars V. Ahlfors and Leo Sario. *Riemann Surfaces*. Princeton Math. Series, No. 2. Princeton University Press, 1960.
- [4] Glen E Bredon. *Topology and Geometry*. GTM No. 139. Springer Verlag, first edition, 1993.
- [5] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory*. GTM No. 244. Springer Verlag, 2008.
- [6] Carsten Thomassen and Bojan Mohar. *Graphs on Surfaces*. The Johns Hopkins University Press, first edition, 2001.
- [7] H. R. Brahana. *Systems of circuits on two-dimensional manifolds*. Ann. Math. 23 (1922), 144-168.
- [8] M. Dehn and P. Heegard. *Analysis situ*. Enz. Math. Wiss. III A B 3, Leipzig (1907).
- [9] William S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction*. GTM No. 56. Springer Verlag,

second edition, 1987.

[10] Bela M. Keréjártó. *Vorlesungen über Topologie, I*. Julius Springer, first edition, 1923.

[11] George K. Francis and Jeffrey R. Weeks. *Conway's ZIP proof*. *American Mathematical Monthly*, 106(5):393–399, 1999.

[12] H. Seifert and W. Threlfall. *A Textbook of Topology*. Academic Press, first edition, 1980.